

www.20file.org

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين

جزوه

تحلیل تیر

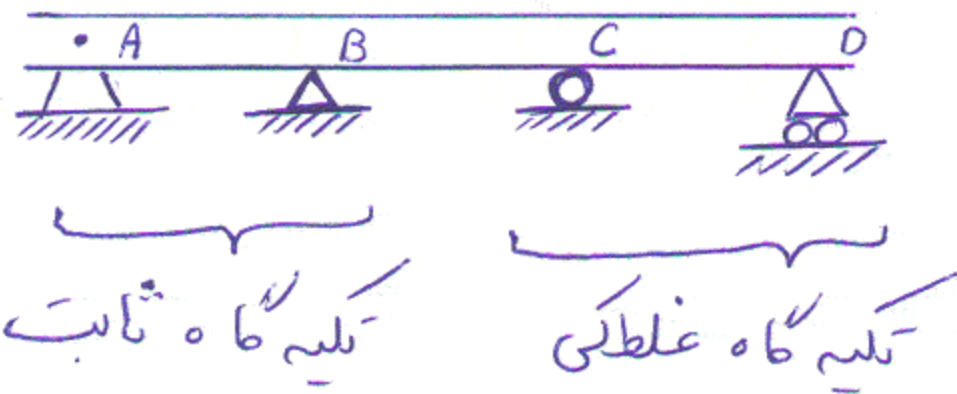
استاتیکی

نویسنده

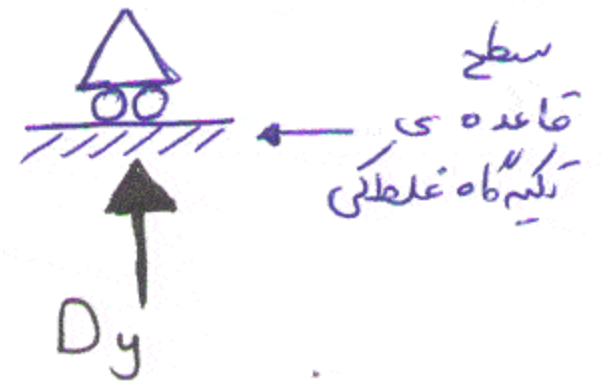
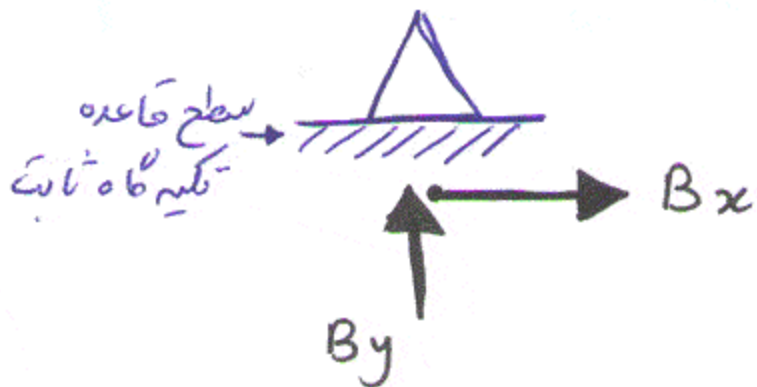
روح الله افشارپور

WWW.AFSHARPOUR.IR

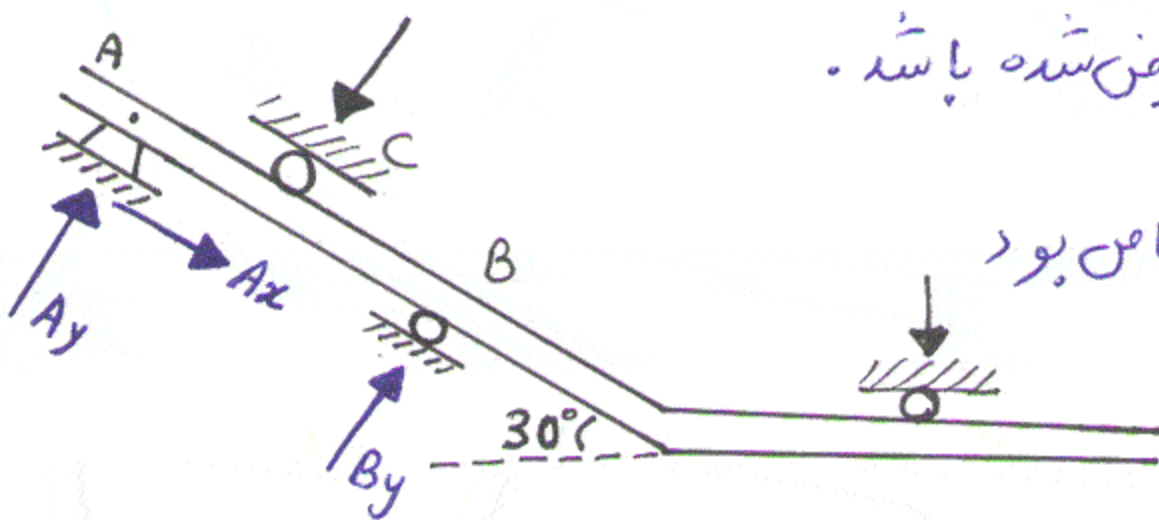
انواع تکیه گاه ها :



تکیه گاه های غلطکی یک نیروی مجهول دارند که عمود بر سطح قاعده تکیه گاه است
و تکیه گاه های ثابت دو نیروی مجهول دارند که عمود در امتداد سطح قاعده آنهاست



* نکته: جهت نیروهای مجهول به شرایط مسئله بستگی دارد و ما می توانیم به هر جهتی آن را لحاظ کنیم ولی بعد از درست آوردن مقدار مجهول اگر مقدار منفی شد جهت را برعکس می کنیم و اگر مثبت درست آمد یعنی جهت فرض شده در ابتدا درست بوده حتی اگر به سمت چپ یا پایین فرض شده باشد.



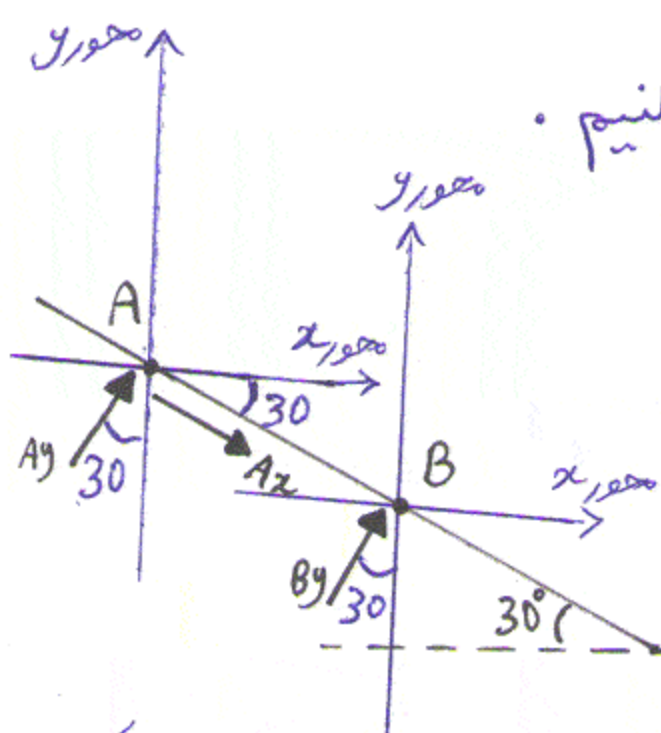
* نکته: اگر تکیه گاه در مکانی با زاویه خاص بود

می بایست عکس العمل ها را بررسی

محورهای x و y تجزیه کنیم تا بتوانیم در مجموع نیروهای عمودی $\sum F_y$ و

مجموع نیروهای افقی $\sum F_x$ به کار ببریم، و در مجموعه گشتاور $\sum M$ حول

یک نقطه‌ی خاص دیگر از زاویه $(\sin \alpha)$ استفاده کنیم.

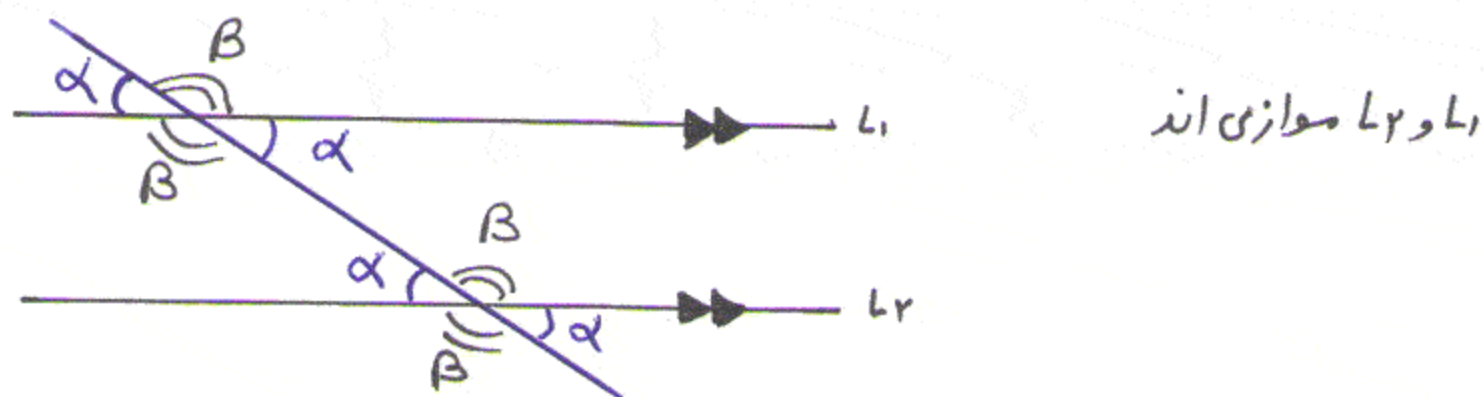


در این مثال می‌بایست عکس‌العمل‌ها را

به روی محورهای افقی و عمودی

بیاوریم، به همین دلیل با استفاده از قوانین زیر زوایا را مشخص می‌دهیم و تیریه می‌کنیم:

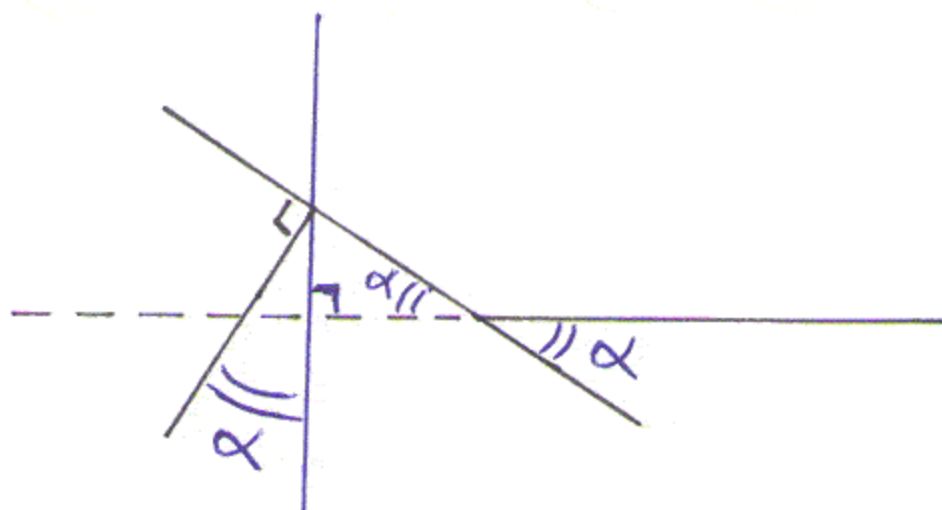
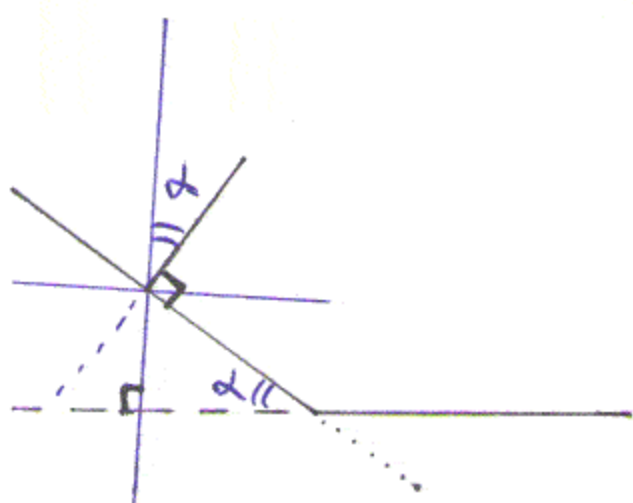
قانون اول: خط مورب گذرنده از خطوط موازی، زاویه‌های مساوی ایجاد می‌کند؛

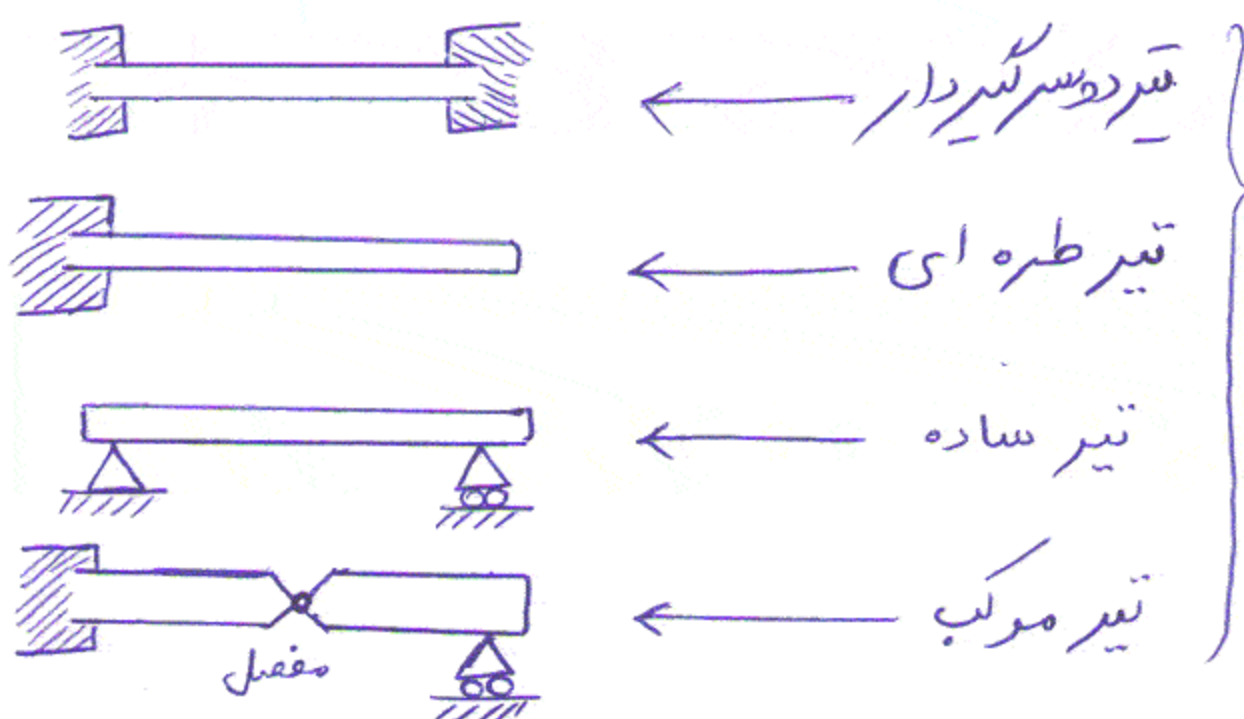


همچنین زاویه‌ی متقابل به رأس نیز همیشه با هم برابرند مثل β و α .

قانون دوم: اگر دو خط عمود بر هم با دو خط عمود بر هم دیگر همچون شکل زیر به هم

برسند زاویه‌ی مساوی می‌سازند؛





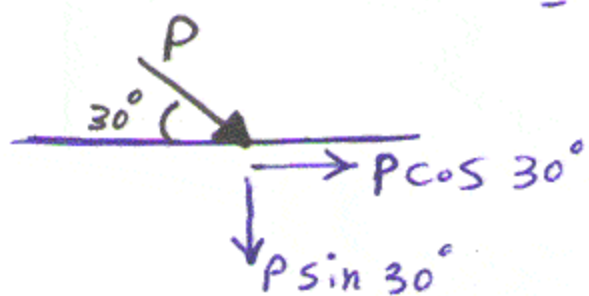
انواع تیرها:

چند نمونه از تیرهای

مختلف:

* انواع بارگذاری:

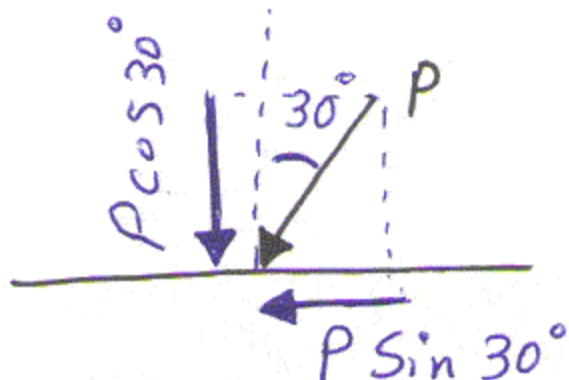
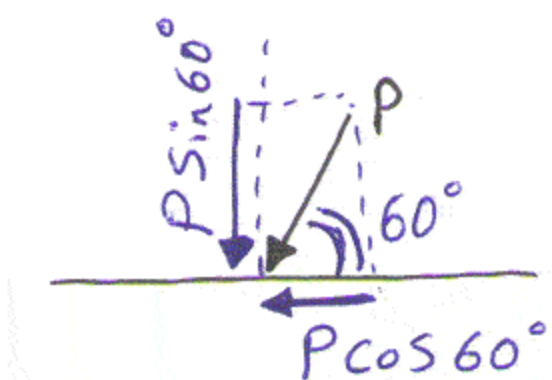
در تیرهای مختلف بارها یا بصورت متمرکز داده می شوند یا گسترده. تنها نکته در بارهای این است که اگر یک بار متمرکز بصورت مورب بر تیر وارد شد می بایست آنرا بر روی



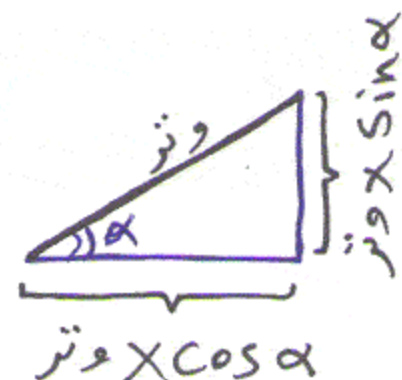
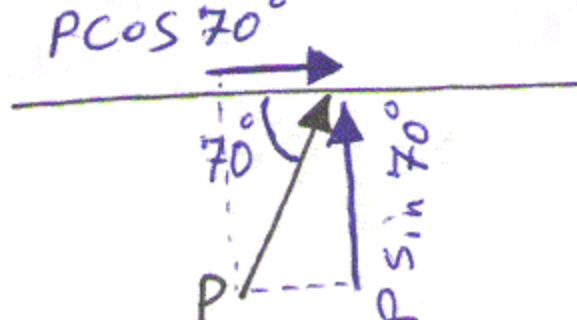
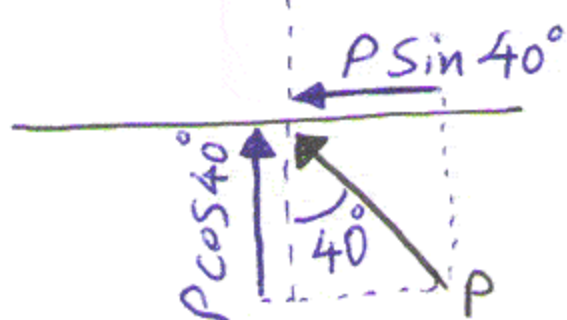
تیر تجزیه کرد. به طور مثال نیروی مورب رو برو به سادگی در جهت افق و عمود تجزیه می شود

* نکته در تجزیه *

همیشه در یک مثلث ضلع مجاور به زاویه $\cos(\alpha)$ دارد و ضلع مقابل (غیر مجاور) همیشه



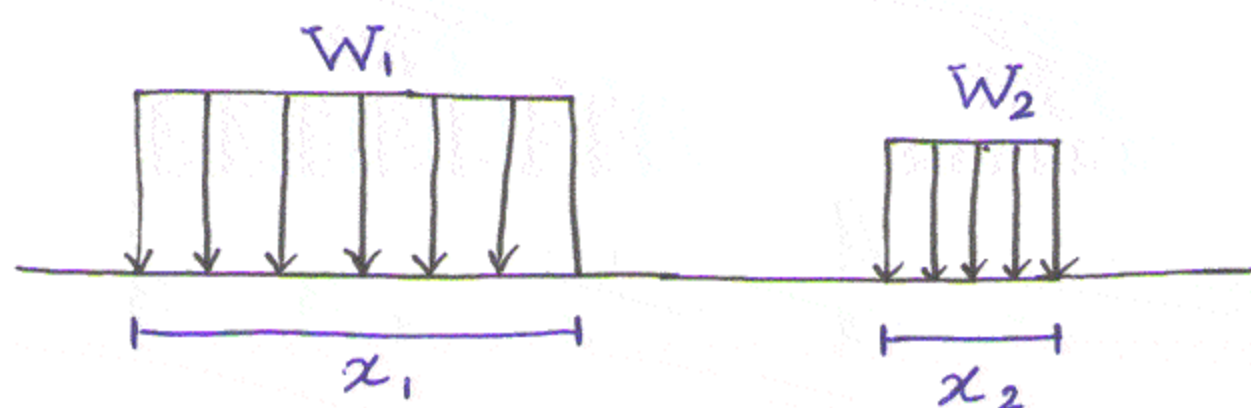
$\sin(\alpha)$ دارد. مثال:



بارهای گسترده: بیشترین شکل های به چشم خورده در بارهای گسترده شکل مربع - مستطیل - مثلث - مثلث ترکیبی - ذوزنقه - منحنی - منحنی ترکیبی بوده است، لذا به توضیح این گونه بارها اکتفا می کنیم؛

۱- بار گسترده مربع یا مستطیل:

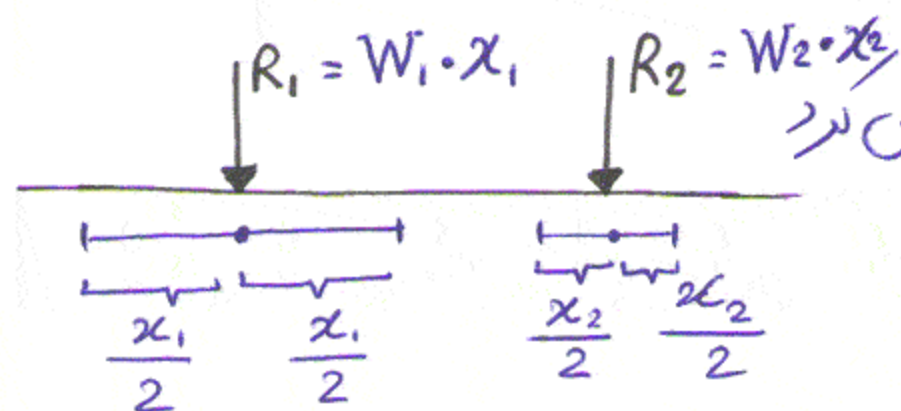
نکته: در هر شکلی که بار گسترده وجود داشته باشد، مساحت بار گسترده برابر با بار معادل



است.

بارهای گسترده دارای دو مؤلفه هستند، یکی فاصله یا همان طول تیر تحت تاثیر بار گسترده و دیگری شدت بار گسترده است (که بصورت ظاهری برابر ارتفاع شکل است) (W) .

در بار گسترده مستطیل یا مربعی بار معادل (R) از مساحت شکل $(W \cdot x)$ بدست

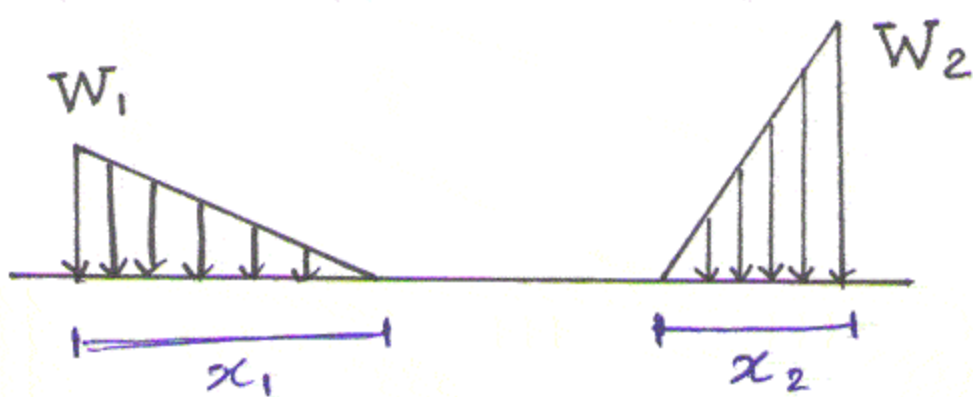


می آید. پس تیر را به شکل مقابل می توان فرض کرد

محل اثر بار متمرکز معادل دقیقاً وسط باره خط

طول تاثیر (x) است.

۲- بارگسترده مثلث :



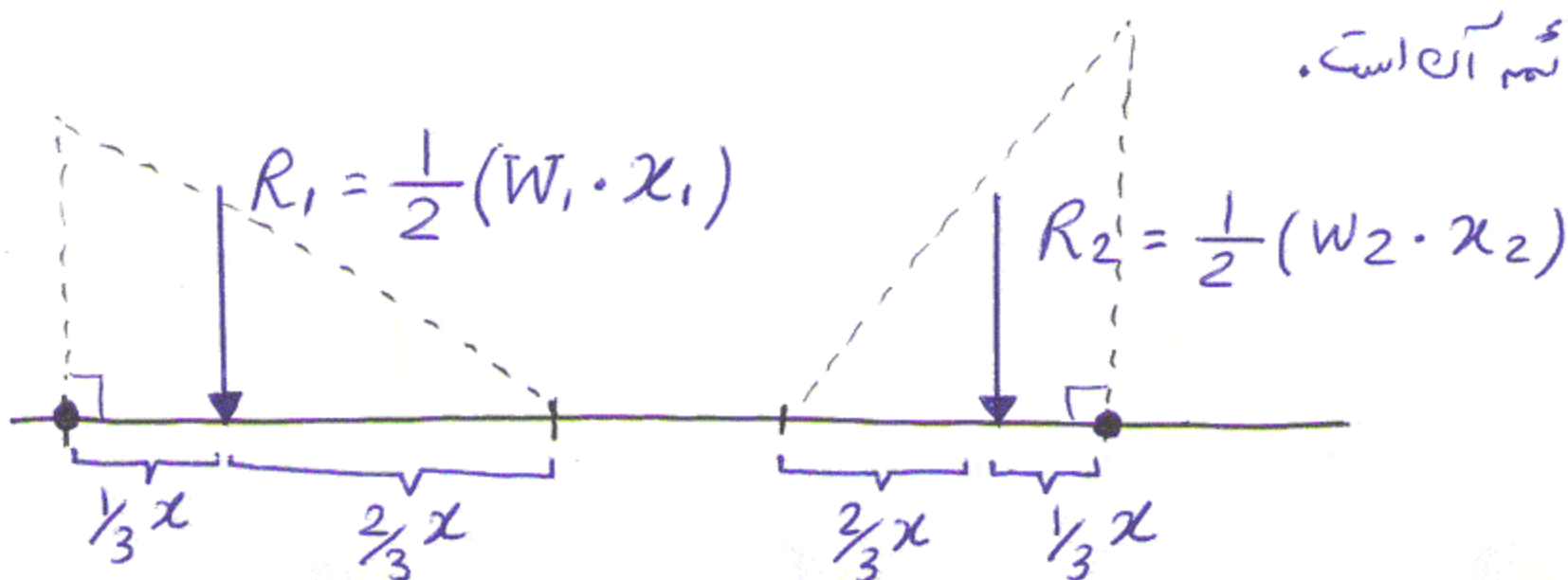
بار متمرکز معادل نصف حاصل ضرب شدت بار (W) در طول محل تأثیر (x)

$$R = \frac{1}{2} (W \cdot x)$$

بار معادل

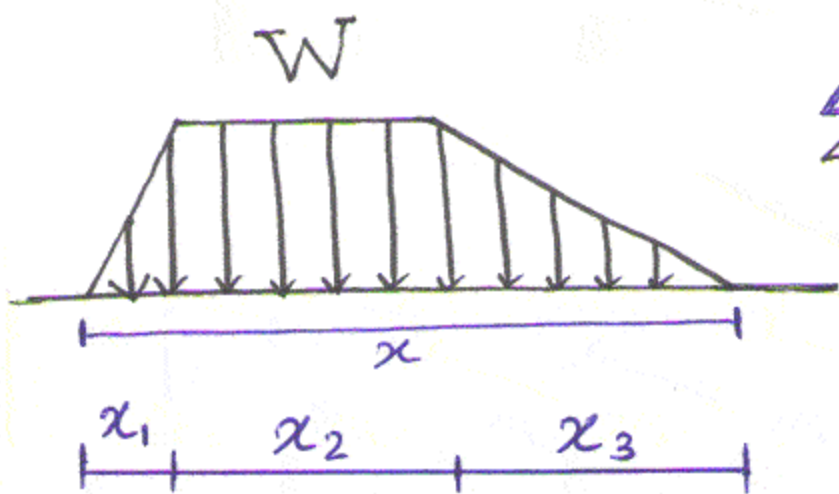
بر بست می آید و محل اثر آن پفاصله

($\frac{1}{3}$) از زاویه قائمه آن است.



* نکته : دقت کنید که (W) ارتفاع مثلث و (x) قاعده‌ی مثلث است.

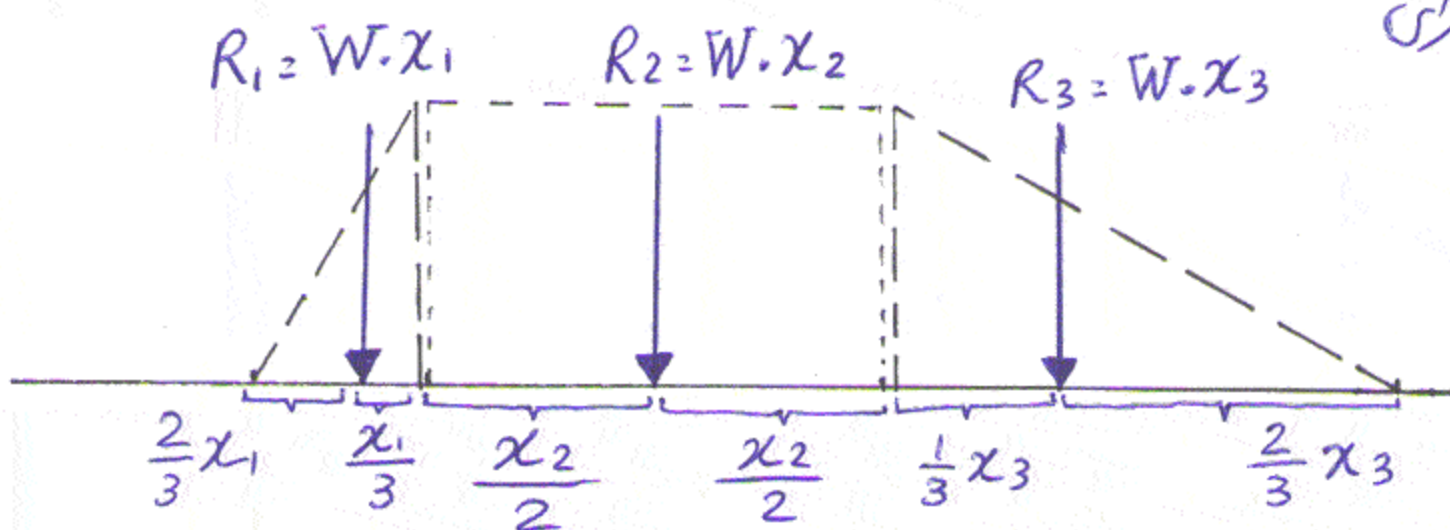
۳- بارگسترده ذوزنقه :



تنها نکته در شکل ذوزنقه این است که می‌باید آن را به شکل‌های مستطیل و مثلث تقسیم کنیم و برای

شکل یک بار و یک

محل تأثیر می‌نویسیم.



۳- بارگسترده منحنی: به زبان ساده باز هم بار معادل از یک بارگسترده منحنی

شکل مساحت زیر منحنی است به این گونه که محور x ها همان تیر و محور y ها

(W) یا شدت بار است.

نکته: مساحت زیر نمودار منحنی = انتگرال تابع آن منحنی نسبت به x و این

مساحت به ما مقدار بار متمرکز یا همان R را می دهد پس:

$$R = \int W dx$$

حدود انتگرال گیری از نقطه شروع منحنی تا پایان آنست

* نکته: انتگرال گیری از تابع چند جمله ای از فرمول زیر محاسبه می شود:

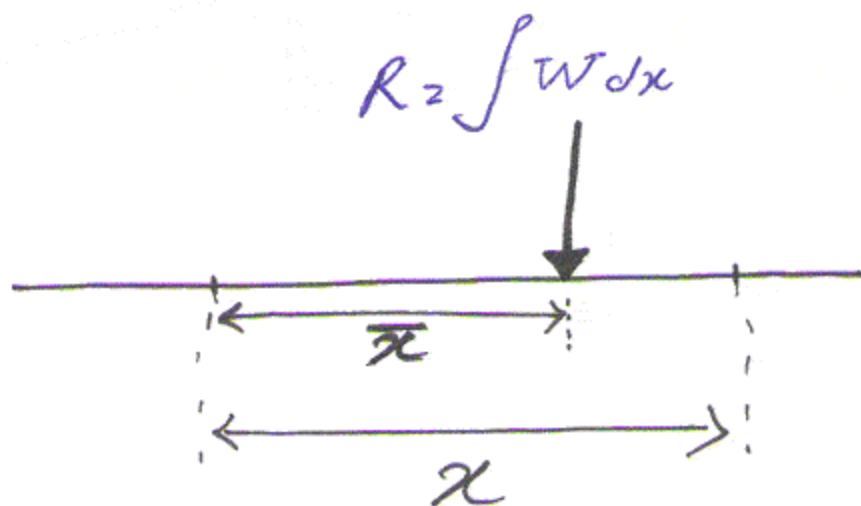
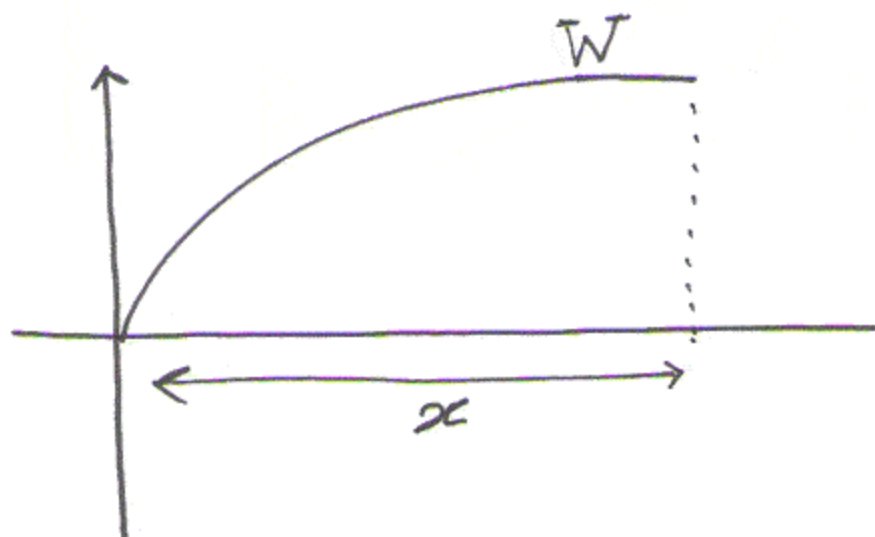
$$\int a x^n = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{مثال: } \int 3x^4 + \frac{x^2}{3} + 7 = \frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{9} + 7x$$

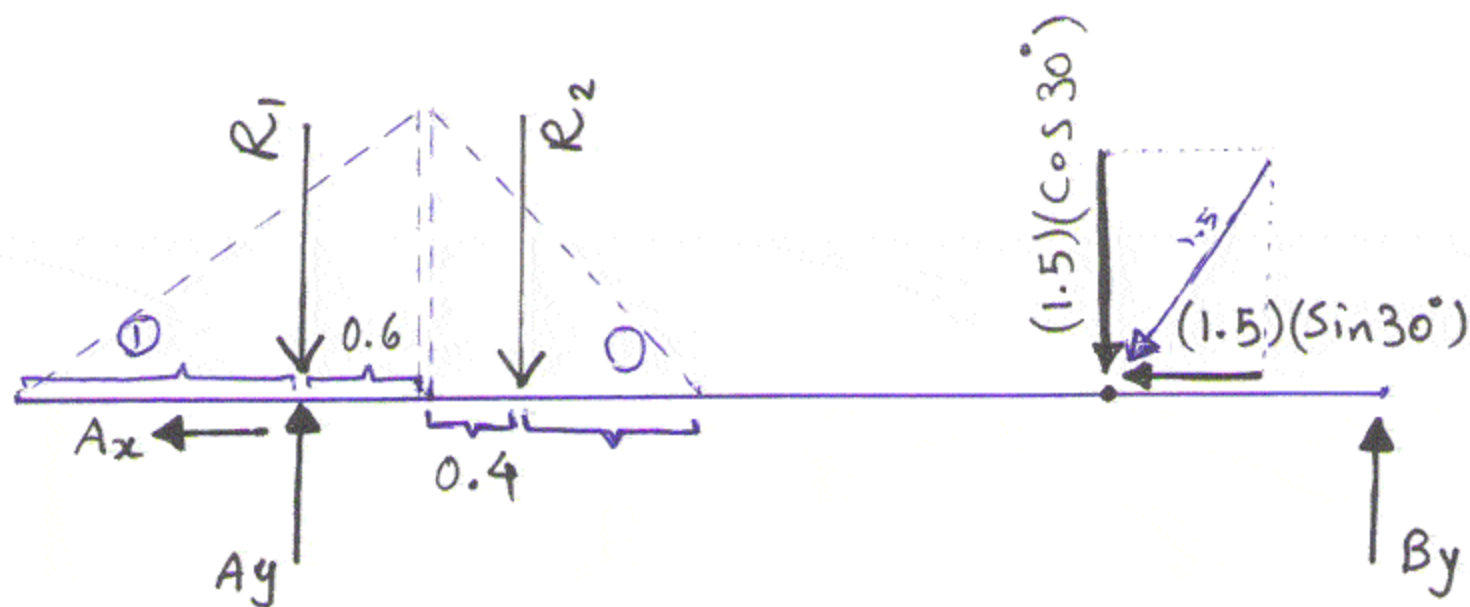
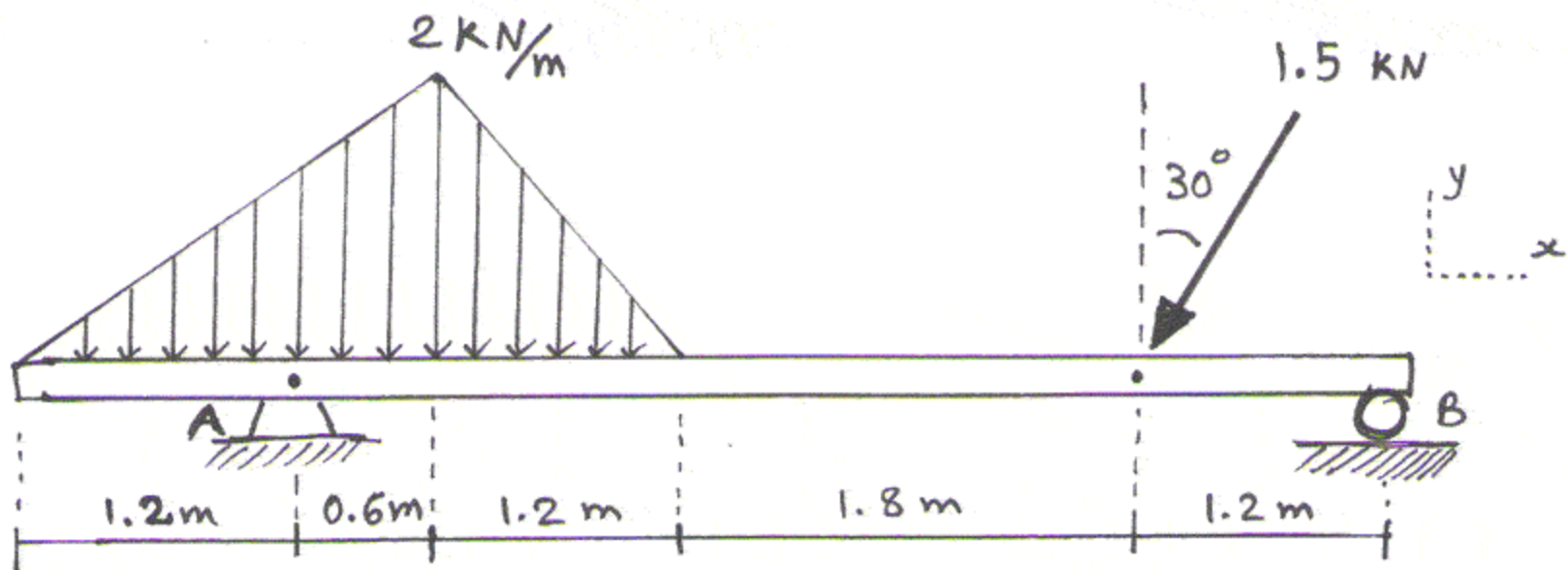
$$\bar{x} = \frac{\int x W dx}{R}$$

همچنین محل اثر بار معادل از رابطه ی دیروبرو

بدست می آید



مثال تیر شکل زیر در معرض مجموعه‌ای از بارهای گسترده و متمرکز قرار دارد، عکس العمل‌های تکیه‌گاهی A و B را به دست آورید: (تمرین ۵-۹۸ مریام)



چون تکیه‌گاه B غلطی است، یک عکس العمل تکیه‌گاهی عمود بر قاعده‌ی آن داریم، بصورت فرضی این نیروی مجهول را رو به بالا فرض کردیم و آن B_y ما است. به دلیل این که تکیه‌گاه A ثابت است، دو عکس العمل تکیه‌گاهی داریم، A_y با جهت فرضی رو به بالا و A_x با جهت فرضی رو به چپ که فرض‌ها کاملاً اختیاری هستند.

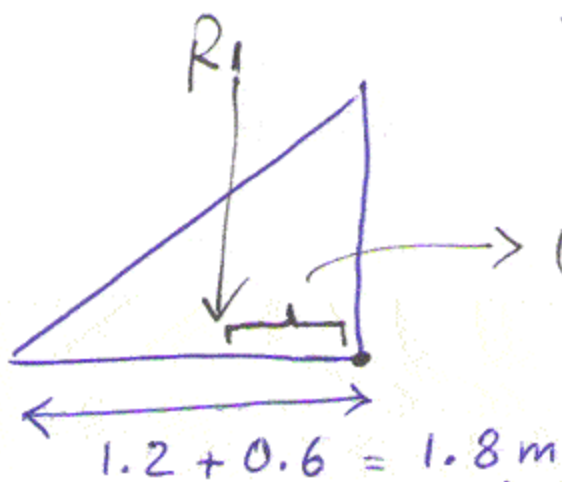
نیروی (بار متمرکز) مورب ۱.۵ کیلو نیوتونی را بر روی محورهای x و y تجزیه کردیم و آن‌ها را جایگزین نیروی مورب نمودیم. پس یک نیروی افقی در راستای چپ محور x ها $(1.5)(\sin 30^\circ)$ داریم و یک نیروی عمودی در جهت محور y ها و رو به پایین $(1.5)(\cos 30^\circ)$ داریم.

بار گسترده‌ی موجود را به دو بار مثلث قائم الزاویه شکل تقسیم کردیم $\triangle 12$ که مقدار هر یک برابر است با نصف حاصل ضرب شدت بار $(W = \text{ارتفاع مثلث})$ در قاعده

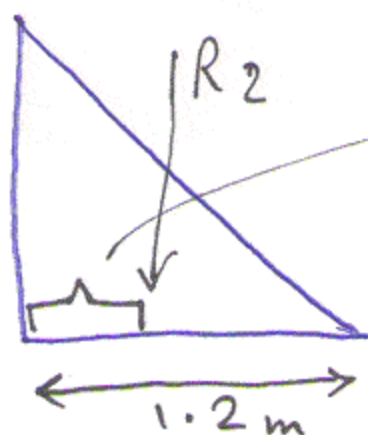
$$R_1 = \frac{(2 \text{ kN/m})(1.2 + 0.6)\text{m}}{2} = 1.8 \text{ kN} = 1800 \text{ N} \quad (\text{طول تحت تأثیر} = x)$$

$$R_2 = \frac{(2 \text{ kN/m})(1.2)\text{m}}{2} = 1.2 \text{ kN} = 1200 \text{ N}$$

عمل اثر بارها نیز در فاصله $(\frac{1}{3})$ از رأس قائمه بدست می‌آید.



$$\text{فاصله از رأس قائم} = \left(\frac{1}{3}\right)(1.8) = 0.6 \text{ m}$$



$$\text{فاصله از رأس قائم} = \left(\frac{1}{3}\right)(1.2) = 0.4 \text{ m}$$

هم اکنون می توانیم معادلات سه گانه تعادل را برای تیر بنویسیم

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \rightarrow \\ \sum F_y = 0 \rightarrow \\ \sum m = 0 \rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{یعنی مجموع نیروهای افقی در تیر صفر است} \\ \text{یعنی مجموع نیروهای عمودی در تیر صفر است} \\ \text{یعنی مجموع گشتاورها (شرف) نسبت به فلان نقطه} \\ \text{مورد نظر ما صفر است} \end{array}$$

* نکته * در هنگام نوشتن معادلات سه گانه باید قراردادی را اعلام کنیم و بگوییم ما در این معادله نیروهای در جهت راست را مثبت می گیریم و اگر عکس العمل تکیه گاهی ما مقدارش مثبت بدست آمد یعنی فرض ما درست است و اگر مقدار آن منفی شد یعنی فرض اولیه ما در انتخاب جهت عکس العمل تکیه گاهی غلط بوده و خلاف آن درست است، بطور مثال اگر فرض اولیه Ax ما به سمت راست باشد و مقدار ما مثبت شد یعنی جهت انتخابی ما درست است ولی اگر منفی شد یعنی جهت انتخابی غلط است و بالعکس اگر جهت فرض شده ما به سمت چپ بود (Ax) و مقدار آن مثبت بدست آمد یعنی فرض درست بوده و جهت Ax به سمت چپ است، ولی اگر مقدار منفی شد یعنی جهت را غلط فرض کردیم و می بایست آن را به سمت راست بگیریم. و حکم بعد از داشتن فرض غلط باید جهت صحیح را برای معادلات آینده بکار ببریم. این موضوع در بقیه جاها یکسره است

ما فرض می‌کنیم بعنوان قرارداد نیروهای در جهت راست مثبت و در جهت چپ منفی اند.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x - (1.5)(\sin 30^\circ) = 0$$

$$\rightarrow A_x = -0.75 \text{ kN} = -750 \text{ N}$$

در اینجا مقدار عکس العمل تکیه‌گاه‌ها منفی شده پس متوجه می‌شویم A_x به سمت راست است و باید در شکل تصحیح کنیم.

$$\rightarrow A_x = 750 \text{ N} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow +A_y - R_1 - R_2 - (1.5)(\cos 30^\circ) + B_y = 0$$

$$\rightarrow A_y - 1.8 - 1.2 - 1.3 + B_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y + B_y = 4.3 \text{ kN}}$$

چون دو مجهول داریم باید یکی از طریق گنرگیری (لستاور) بدست آوریم و در معادله

بالا قرار دهیم.

$$M = F \cdot d \cdot \sin(\alpha)$$

مفهوم گنرگیری (لنر)

گنرگیری نیرو حول یک نقطه دلخواه از فرمول بالا

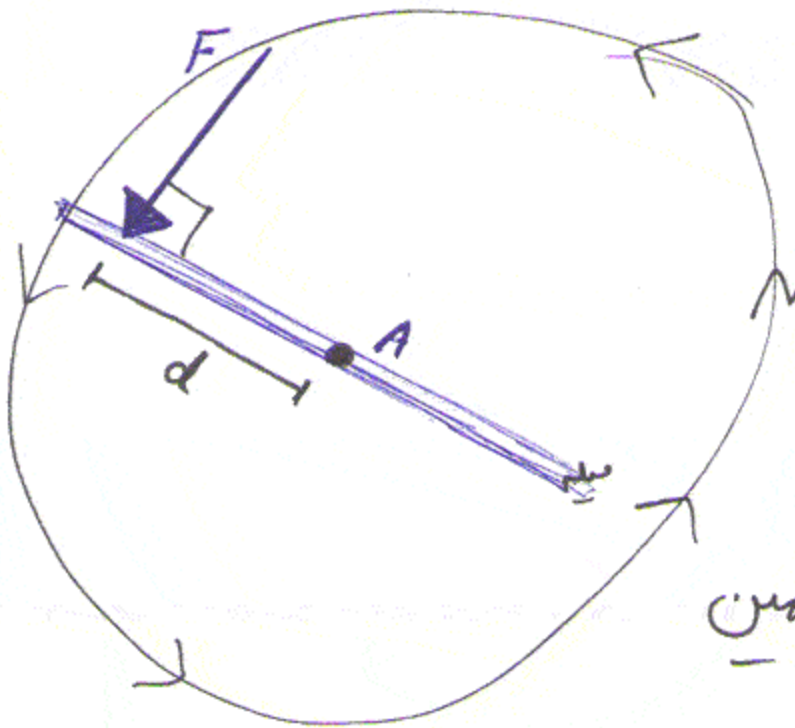
بدست می‌آید. اما چون ما هم می‌خواهیم زاویه‌ای ما (F به d)

$$M = F \cdot d \cdot \sin(90^\circ) = F \cdot d$$

که برابر است با نیرو در فاصله و علامت آن به شرح صفحه بعد مشخص می‌شود

اگر گشتاور بصورت ساعتگرد بچرخد \downarrow منفی می شود و اگر پادساعتگرد بچرخد \uparrow

مقدار آن مثبت می شود \downarrow

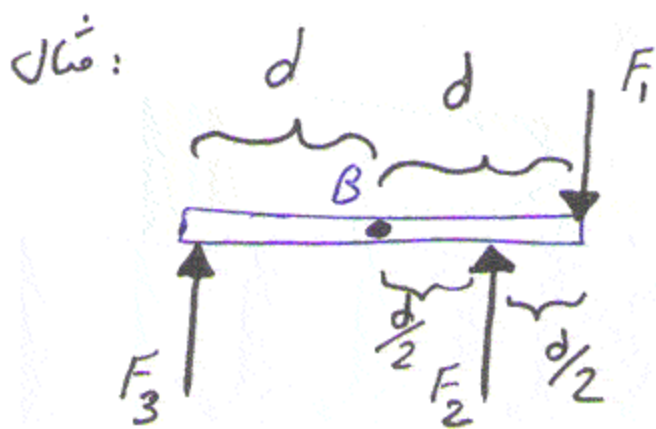


$$M_A = +F \cdot d$$

اگر نقطه ی A را ثابت فرض کنیم، نیروی F باعث می شود که میله در جهت پادساعتگرد بچرخد به همین

دلیل مقدار M_A (گشتاور A) مثبت است.

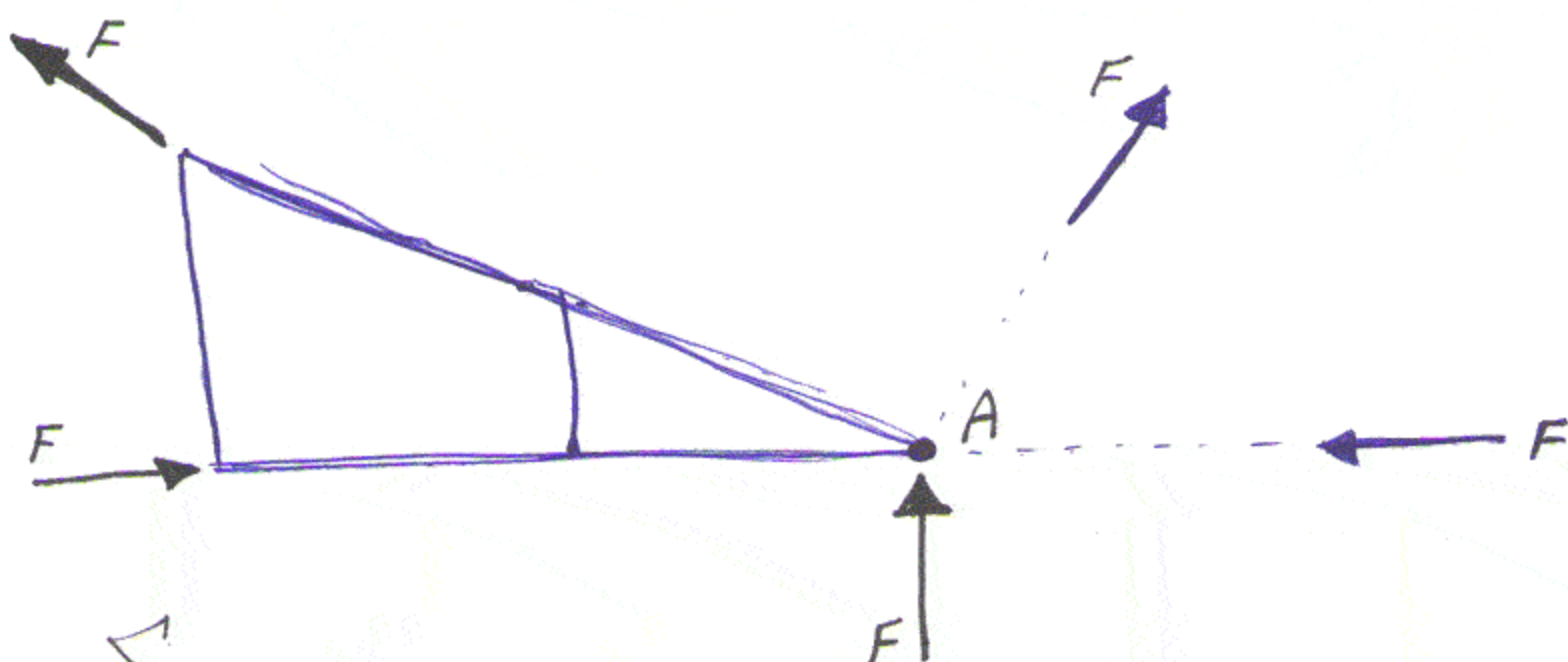
مثال:



$$M_B = -F_1 \cdot d + F_2 \cdot \frac{d}{2} - F_3 \cdot d$$

د فاصله = همیشه فاصله نیرو تا نقطه گشتاور

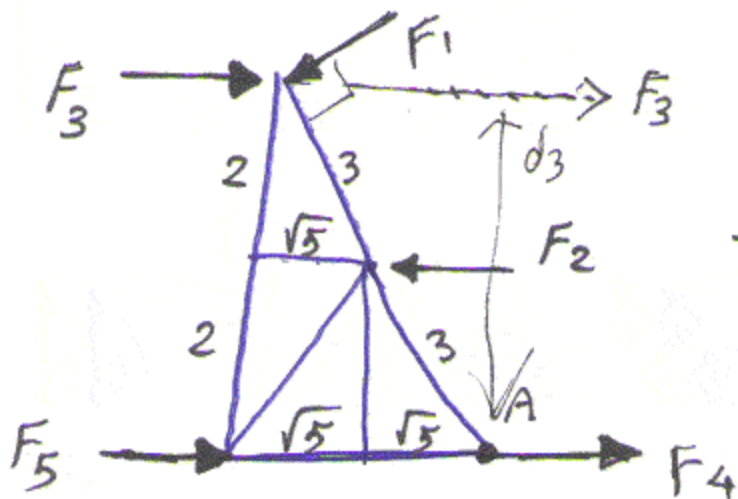
نکته بسیار مهم: گشتاور نیرویی که در راستای نقطه ی گشتاور باشد صفر است.



$$\sum M_A = 0$$

گشتاور تمام نیروهای فوق حول A صفر است. چون همگی در راستای A هستند

در واقع دلیل صفر شدن گشتاور این نیروها آن است که اگر بردار نیرو را در همان راستا و اندازه و جهت ادامه دهیم به فاصله‌ی صفر از نقطه گزینش می‌رسیم



مثال:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = +F_1(9) - F_3(4) + F_2(2) + F_4(0) + F_5(0)$$

که نیازی به نوشتن گزینش‌های

در راستای نقطه گزینش نیست.

و اما ادامه مسئله: برای بدست آوردن یکی از عکس‌العمل‌های پایه‌ها (\$A_y\$) یا (\$B_y\$) باید حول یکی از نقاط (\$A\$) یا (\$B\$) گزینش کنیم؛ همچنین این‌ها نیز قراردادی را در نظر می‌گیریم که گزینش‌های پادساعتگرد مثبت هستند.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -R_2(1) - (1.5)(\cos 30^\circ)(3.6) + (B_y)(4.8) = 0$$

$$\rightarrow B_y = \frac{1.2 + 1.3(3.6)}{4.8} = \frac{5.88}{4.8} = \boxed{1.225 \text{ kN}}$$

گزینش‌های \$A_x\$ و \$A_y\$ و \$(1.5)(\sin 30^\circ)\$ و \$R_1\$ در نقطه‌ی \$A\$ صفر می‌شوند.

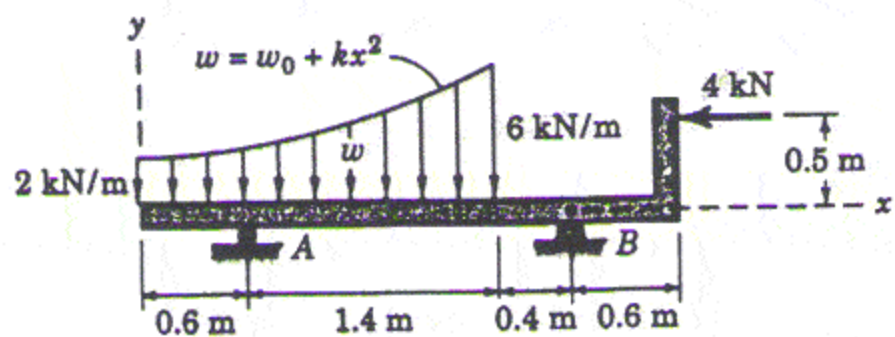


$$A_y + 1.225 = 4.3 \text{ kN} \rightarrow \boxed{A_y = 3.075 \text{ kN}}$$

و چون مقادیر مثبت بدست آمد به این نتیجه رسیدیم که جهت‌های فرض شده

برای \$A_y\$ و \$B_y\$ درست بوده‌اند.

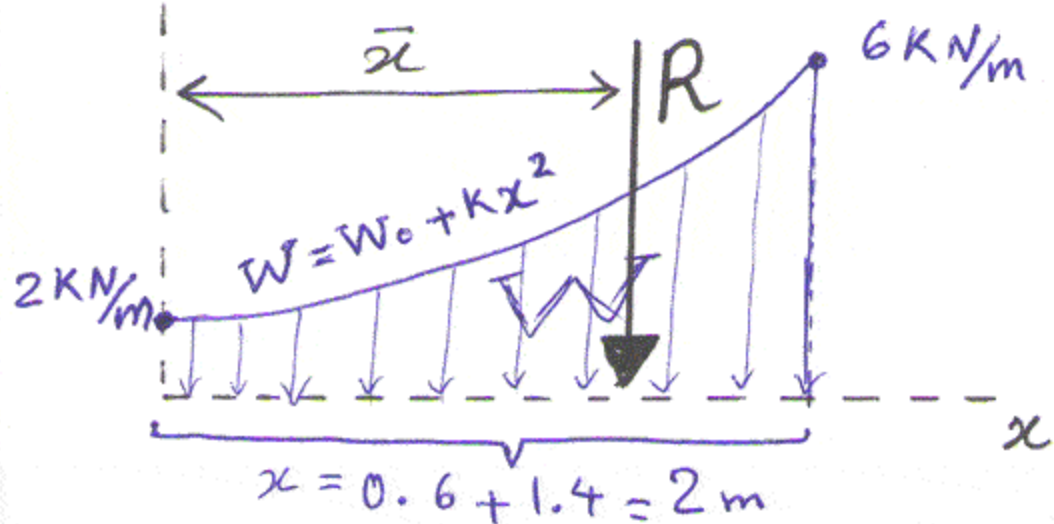
مثال برای تیر شکل مقابل، عکس العمل



در A و B را به دست آورید.

(تقریب ۵ - ۱۰۸ مریام)

پاسخ: ابتدا بار گسترده منحنی شکل را با بار متمرکز معادل تعویض می کنیم.



بار معادل (R) که برابر مساحت زیر نمودار منحنی است از طریق اشتغال تیر

محاسبه می شود.

$$W = W_0 + kx^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(مقدار تابع در نقطه x) = (مقدار اولیه تابع) + (ضریب x^2) + (فاصله از مبدأ x^2)$$

$$\xrightarrow{x=2 \text{ m}} \quad 6 = 2 + k(2)^2 \rightarrow 4 = k(4) \rightarrow \boxed{k = 1 \text{ kN/m}^3}$$

پس فرمول تابع به شکل مقابل در می آید: $W = 2 + (1)x^2 = 2 + x^2$

$$\text{بار معادل } R = \int W dx = \int_0^2 (2 + x^2) dx = \left(2x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$= \left(2(2) + \frac{(2)^3}{3} \right) - \left(2(0) + \frac{(0)^3}{3} \right) = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\rightarrow R = \frac{20}{3} \text{ kN} \approx \boxed{6.67 \text{ kN}}$$

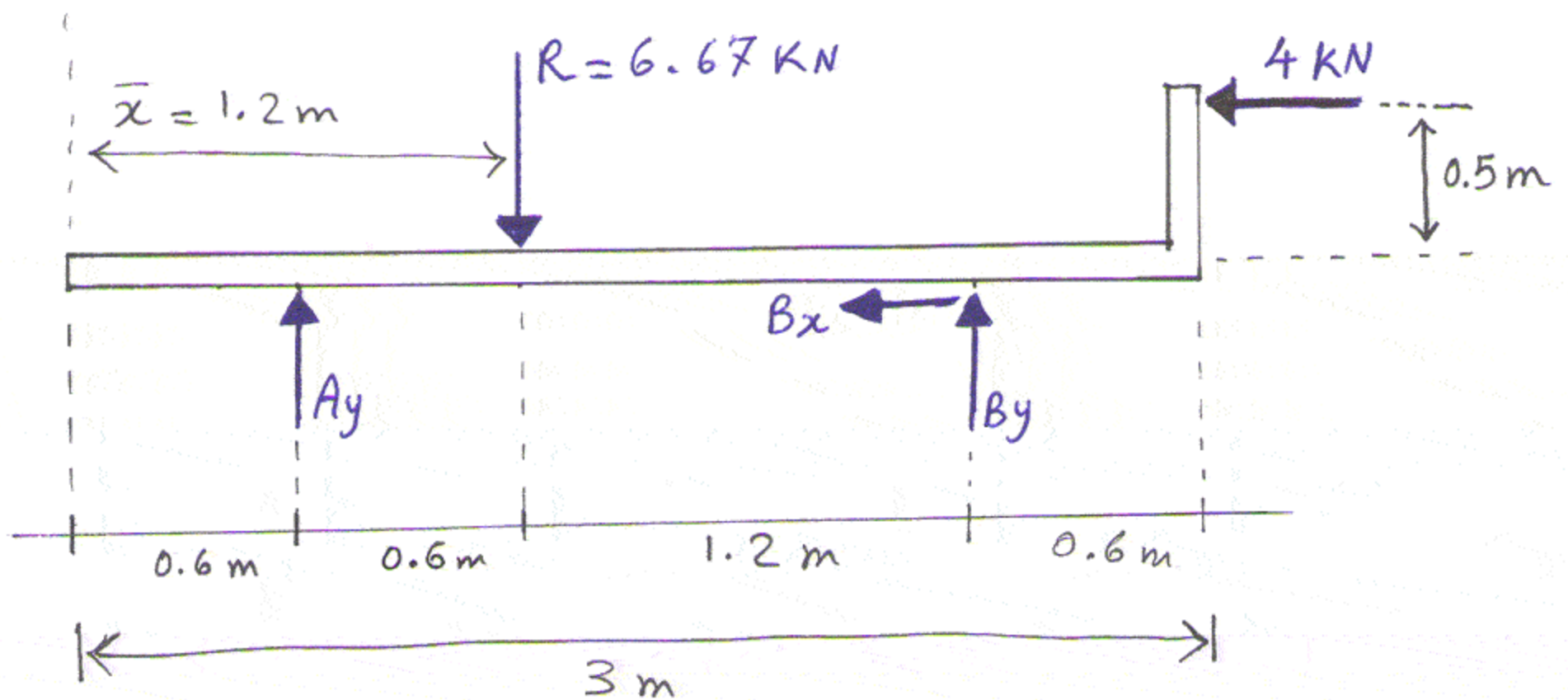
و هم اکنون می‌بایست محل اثر بار معادل را بیابیم (\bar{x}) که از فرمول زیر محاسب می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot W dx}{R} = \frac{\int_0^2 x(2+x^2) dx}{R}$$

$$= \frac{\int_0^2 2x + x^3 dx}{R} = \frac{\left(\frac{2x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2}{R}$$

$$= \frac{\left((2)^2 + \frac{(2)^4}{4} \right) - \left((0)^2 + \frac{(0)^4}{4} \right)}{6.67} = \frac{4 + \frac{16}{4}}{6.67} = \frac{4+4}{6.67} = 1.2 \text{ m}$$

یعنی بار معادل $[R = 6.67 \text{ KN}]$ در فاصله $[\bar{x} = 1.2 \text{ m}]$ اثر می‌کند.



برای بدست آوردن عکس العمل‌ها در A و B معادلات سه گانه تعادلی را می‌نویسیم؟

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \rightarrow -B_x - 4 = 0 \rightarrow B_x = -4 \text{ kN}$$

چون مقدار منفی شده متوجه می شویم جهت فرض شده برای B_x اشتباه بوده است.

پس $\rightarrow B_x = 4 \text{ kN} \rightarrow B_x$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R + B_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y + B_y = R = 6.67 \text{ kN}}$$

برای بدست آوردن یکی از مجهولات (B_y) یا (A_y) باید حول یکی از آن نقاط (B یا A)

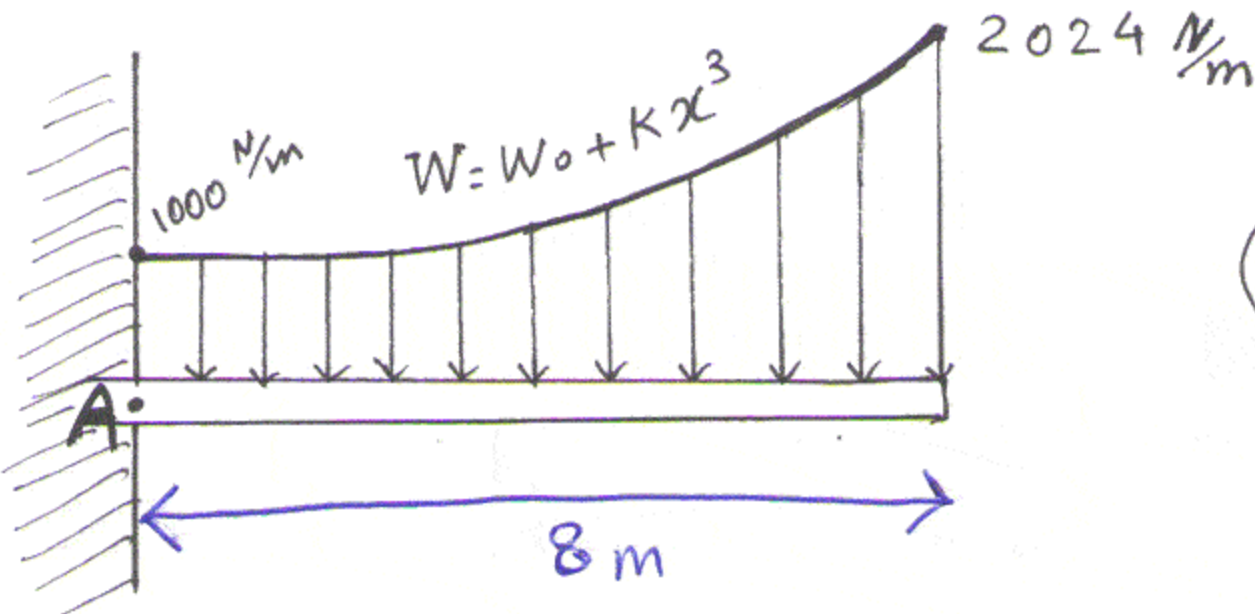
تغیر بگیریم $\rightarrow \sum M_A = 0 \rightarrow -R(0.6) + B_y(1.8) + 4(5) = 0$

$$\rightarrow B_y = \frac{(6.67)(0.6) - 4(5)}{1.8} = \frac{2}{1.8} = 1.11 \text{ kN}$$

مقدار بدست آمده را در معادله (*) قرار می دهیم تا دیگر مجهول ما بدست آید:

$$\star A_y + B_y = 6.67 \rightarrow A_y + 1.11 = 6.67 \rightarrow A_y = 5.56 \text{ kN}$$

مثال در تیر کنسولی یا طره ای شکل مقابل، بار گسترده ای وارد شده است، عکس العمل \checkmark

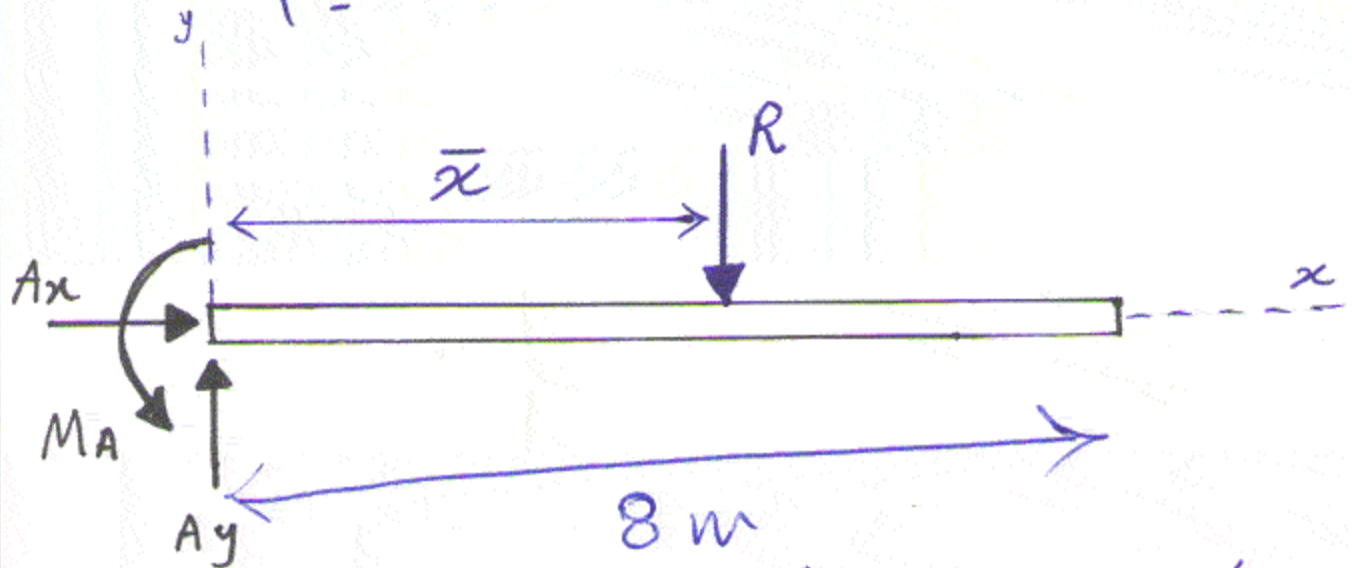


تکلیف ماهی را محاسبه کنید:

(مثال ۵-۱۰ مریام و تهرن جزوه)

نکته: تکیه گاه تیر طره ای دارای سه عکس العمل می باشد. یکی در جهت افقی (Ax) و یکی در جهت عمودی (Ay) و دیگری شش حول آن تکیه گاه است.

همچنین می بایست بار گسترده را با بار متمرکز در محل اثر مجهول جای کنیم:



ابتدا مقدار ثابت معادله توزیع بار گسترده را بدست می آوریم،

$$W = W_0 + Kx^3$$

در نقطه $(x = 8m)$ مقدار $(W = 2024)$ است

و مقدار اولیه تابع $(W_0 = 1000)$ می باشد:

$$2024 = 1000 + K(8)^3 \rightarrow K = \frac{2024 - 1000}{8^3} = \frac{1024}{512} = 2 \frac{N}{m^4}$$

پس شکل کلی تابع
$$\underline{W = 1000 + 2x^3}$$

برای بدست آوردن بار معادل (R) و محل اثر آن (\bar{x}) از فرمول های انتگرال گیری استفاده می کنیم:

$$R = \int W dx = \int_0^8 (1000 + 2x^3) dx$$

$$= \left(1000x + \frac{2x^4}{4} \right) \Big|_0^8 = \left(1000(8) + \frac{2(8)^4}{4} \right) - \left(1000(0) + \frac{2(0)^4}{4} \right)$$

$$= 8000 + 2048 = \underline{10048 N} \quad \text{مقدار بار معادل:}$$

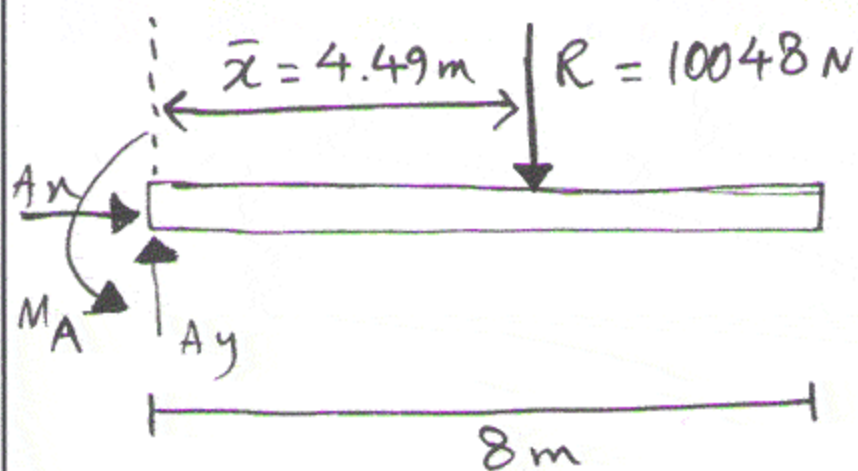
$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot W dx}{R} = \frac{\int_0^8 x(1000 + 2x^3) dx}{R}$$

$$= \frac{\int_0^8 (1000x + 2x^4) dx}{R} = \frac{\left(\frac{1000x^2}{2} + \frac{2x^5}{5}\right) \Big|_0^8}{R}$$

$$= \frac{\left(\frac{1000(8)^2}{2} + \frac{2(8)^5}{5}\right) - \left(\frac{1000(0)^2}{2} + \frac{2(0)^5}{5}\right)}{10048} = \frac{32000 + 13107.2}{10048}$$

$$= \frac{45107.2}{10048} \approx 4.49 \text{ m} \rightarrow \boxed{\bar{x} = 4.49 \text{ m}}$$

عمل شده با معادل (R)



با توجه به دیگرام آزاد تیر معادلات

تعادل را می نویسیم:

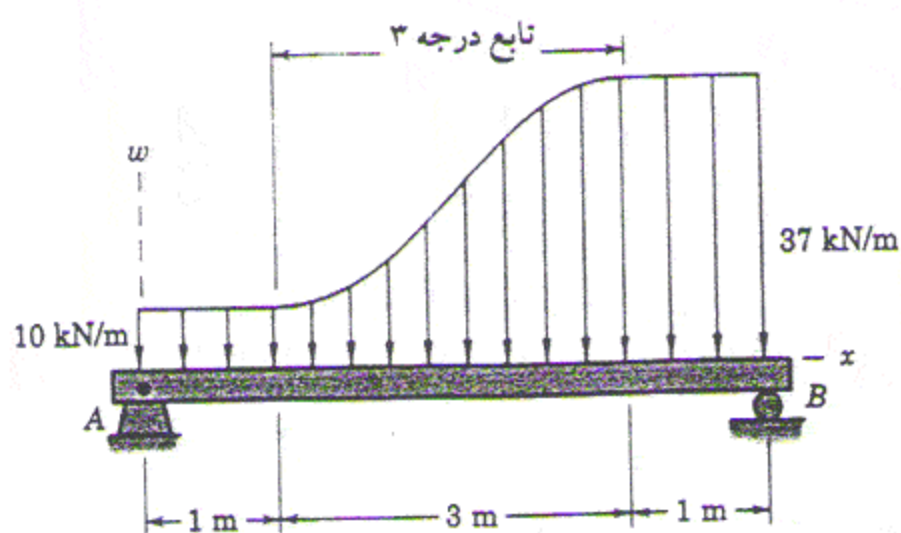
$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - R = 0 \rightarrow Ay = R \rightarrow \boxed{Ay = 10048 \text{ N}}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A - R(\bar{x}) = 0 \rightarrow M_A = (10048)(4.49) =$$

* لنتر حاصل از نیروی بار معادل به فاصله \bar{x} (که ساعتگرد \ominus می خوانند)

$$\rightarrow \boxed{M_A = 45100 \text{ (N.m)}}$$



مثال دو سر تیر شکل مقابل در معرض بارهای

گسترده یکنواخت قرار دارد. توزیع بار در ناحیه میانی را می توان بصورت تابع درجه سه

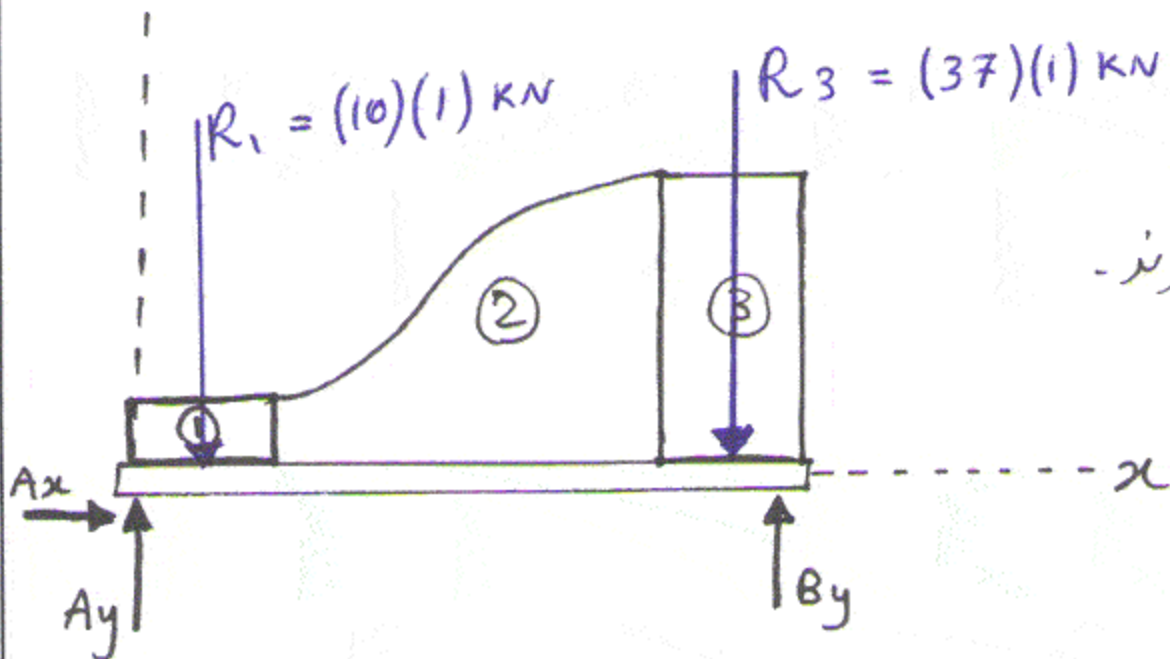
$$W = W_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3$$

نشان داد.

که سبب آن در نقاط $x=1m$ و $x=4m$ برابر صفر است، عکس العمل ها در A و B را بیابید؟

(تمرین برای متزل جزوه و تمرین ۵ - ۱۱۲ مریام)

پاسخ: بارهای گسترده تیر بالا را می توان به سه شکل مجزا تقسیم نمود:



که شکل ① و ③ مستطیل هستند و $R_3 = (37)(1) kN$ به راحتی با بار متمرکز معادل تعویض می شوند.

اما شکل دوم که نمودار یک تابع درجه ۳ است را می بایست از طریق اشکال گیری

به مقدار بار معادل R و فاصله محل اثر (\bar{x}) بدست آوریم. که برای این کار به معادله تابع

نیاز داریم و می بایست مقادیر ثابت W_0 و K_1 و K_2 و K_3 را پیدا کنیم.

* نکته * در نقطه ای که شیب منحنی صفر باشد مقدار مشتق نیز صفر است.

هم چنین می توان مقادیر $x=1$ و $x=4$ را در تابع درجه ۳ قرار داد.

$$x = 1m \rightarrow 10 = W_0 + K_1(1) + K_2(1)^2 + K_3(1)^3 \Rightarrow W_0 + K_1 + K_2 + K_3 = 10$$

① معادله اول \uparrow

$$x = 4m \rightarrow 37 = W_0 + K_1(4) + K_2(4)^2 + K_3(4)^3$$

$$\rightarrow \boxed{W_0 + 4K_1 + 16K_2 + 64K_3 = 37} \quad \leftarrow \text{معادله دوم} \quad (2)$$

چون سبب منحنی در $x=1m$ و $x=4m$ صفر است مستقیماً تابع نیز در این نقاط صفر است

$$\frac{dw}{dx} = W' = K_1 + 2K_2x + 3K_3x^2 \quad \leftarrow \text{مستوی تابع}$$

$$x = 1m \rightarrow 0 = K_1 + 2K_2(1) + 3K_3(1)^2 \rightarrow \boxed{K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 0} \quad \leftarrow \text{معادله سوم} \quad (3)$$

$$x = 4m \rightarrow 0 = K_1 + 2K_2(4) + 3K_3(4)^2 \rightarrow \boxed{K_1 + 8K_2 + 48K_3 = 0} \quad \leftarrow \text{معادله چهارم} \quad (4)$$

با توجه به معادلات بدست آمده چهار مجهول K_1 و K_2 و K_3 و W_0 را بدست می آوریم.

$$(3) \text{ و } (4) \rightarrow \begin{cases} K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 0 \\ K_1 + 8K_2 + 48K_3 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{از هم کم می کنیم}$$

$$\cancel{K_1} + \underline{2K_2} + \underline{3K_3} - \cancel{K_1} - \underline{8K_2} - \underline{48K_3} = 0 - 0 = 0$$

$$\rightarrow -6K_2 - 45K_3 = 0 \rightarrow -6K_2 = 45K_3 \rightarrow K_2 = -\frac{45}{6}K_3$$

$$\rightarrow \boxed{K_2 = -7.5K_3} \quad \leftarrow \text{در معادله (3) می گذاریم}$$

$$\rightarrow K_1 - 15K_3 + 3K_3 = 0 \rightarrow \boxed{K_1 = 12K_3}$$

حال مقادیر K_1 و K_2 بدست آمده را (بر حسب K_3) در معادله (1) می گذاریم و همین کار را

برای معادله (2) انجام می دهیم تا دو معادله با دو مجهول (K_3 و W_0) داشته باشیم.

① معادله : $W_0 + K_1 + K_2 + K_3 = 10$ $\xrightarrow{K_1 = 12K_3 \text{ و } K_2 = -7.5K_3}$

$\rightarrow W_0 + 12K_3 - 7.5K_3 + K_3 = 10 \rightarrow \boxed{W_0 + 5.5K_3 = 10}$
 5 معادله الف

② معادله : $W_0 + 4K_1 + 16K_2 + 64K_3 = 37$ $\xrightarrow{K_1 = 12K_3 \text{ و } K_2 = -7.5K_3}$

$\rightarrow W_0 + 4(12K_3) + 16(-7.5K_3) + 64K_3 = 37$

$\rightarrow W_0 + 48K_3 - 120K_3 + 64K_3 = 37 \rightarrow \boxed{W_0 - 8K_3 = 37}$
 5 معادله ب

معادلات (الف و ب) : $\begin{cases} W_0 + 5.5K_3 = 10 \\ W_0 - 8K_3 = 37 \end{cases}$ از هم کم کنیم

$\cancel{W_0} - \cancel{W_0} + 5.5K_3 - (-8K_3) = 10 - 37 \rightarrow 13.5K_3 = -27$

$\rightarrow K_3 = \frac{-27}{13.5} = -2 \rightarrow \boxed{K_3 = -2}$

$W_0 + 5.5(-2) = 10 \rightarrow \boxed{W_0 = 21}$

$K_1 = 12K_3 \rightarrow K_1 = 12(-2) = -24 \rightarrow \boxed{K_1 = -24}$

$K_2 = -7.5(K_3) = -7.5(-2) = 15 \rightarrow \boxed{K_2 = 15}$

فرمول تابع W : $W = W_0 + K_1x + K_2x^2 + K_3x^3$

$\rightarrow \boxed{W = 21 - 24x + 15x^2 - 2x^3}$

هم اکنون می توانیم با انتگرال گیری از این تابع مساحتش (R) یا همان بار معادل را بیابیم؟

بار معادل بارلستره (منحنی) شکل ۲ از طریق فرمول انتگرال گیری بدست می آید:

$$R_2 = \int W dx = \int_1^4 (21 - 24x + 15x^2 - 2x^3) dx$$

$$\rightarrow R_2 = \left(21x - \frac{24x^2}{2} + \frac{15x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} \right) \Big|_1^4$$

$$= \left(21x - 12x^2 + 5x^3 - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_1^4 = \left(21(4) - 12(4)^2 + 5(4)^3 - \frac{(4)^4}{2} \right)$$

$$- \left(21(1) - 12(1)^2 + 5(1)^3 - \frac{(1)^4}{2} \right) = (84 - 192 + 320 - 128)$$

$$- \left(21 - 12 + 5 - \frac{1}{2} \right) = 84 - 13.5 = 70.5 \text{ KN}$$

$$\rightarrow \boxed{R = 70.5 \text{ KN}}$$

وسیس محل اثر بار معادل شکل رسم می کنی

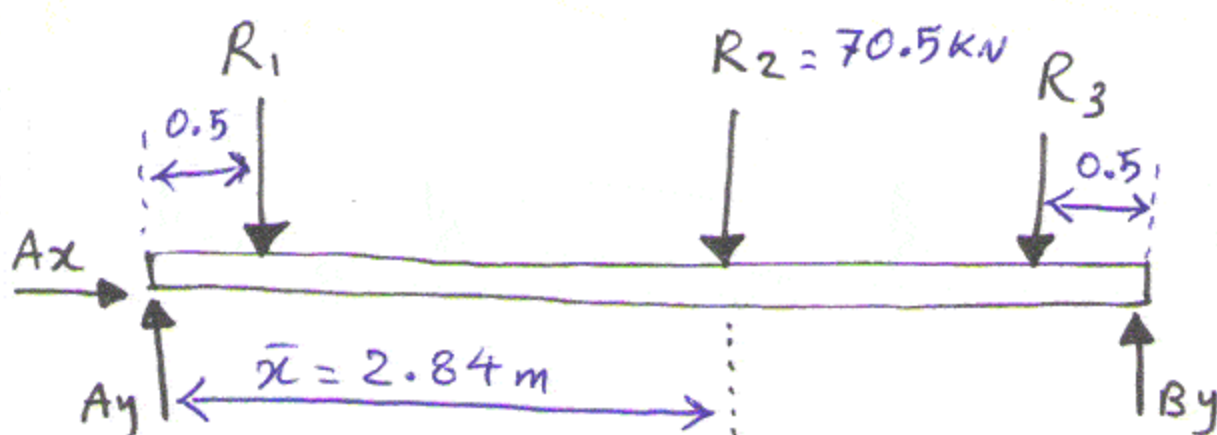
$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot W dx}{R} = \frac{\int_1^4 x (21 - 24x + 15x^2 - 2x^3) dx}{R}$$

$$= \left(\frac{1}{R} \right) \left(\int_1^4 21x - 24x^2 + 15x^3 - 2x^4 dx \right)$$

$$= \left(\frac{1}{70.5} \right) \left(\frac{21x^2}{2} - \frac{24x^3}{3} + \frac{15x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_1^4 = \frac{206.4 - 5.85}{70.5}$$

$$= \frac{200.55}{70.5} = 2.84 \text{ m}$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{x} = 2.84 \text{ m}}$$
 از مبدأ تیر



دیالگرام آزاد تیر به شکل

مقابل تبدیل می شود؟

حال با استفاده از معادلات تعادل عکس العمل ها را بدست می آوریم :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - R_1 - R_2 - R_3 + By = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -R_1(0.5) - R_2(2.84) - R_3(5 - 0.5) + By(5) = 0$$

$$\rightarrow -10(0.5) - 70.5(2.84) - 37(4.5) + By(5) = 0$$

$$\rightarrow By = \frac{5 + 200.22 + 166.5}{5} = \frac{371.72}{5} = 74.344 \text{ KN}$$

$$\rightarrow \boxed{By = 74.344 \text{ KN}} \uparrow$$

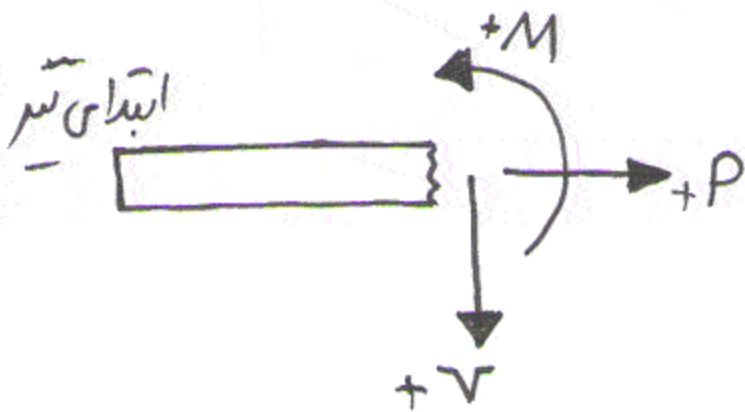
$$Ay - 10 - 70.5 - 37 + 74.344 = 0$$

حال مقدار B_y را در معادله $\sum F_y = 0$ قرار می دهیم :

$$\rightarrow \boxed{Ay = 43.15 \text{ KN}} \uparrow$$

رسم دیاگرام های نیروهای محوری (P) و نیروهای برشی (V) و لنگر خمشی (M) برای رسم دیاگرام های فوق می باشد در برخی نقاط برش زد و در آن نقطه M و در آن نقطه برش خورده F_x و F_y را نوشت و برابر صفر قرار داد. تا معادله ی

P و V و M بدست آیند. ماهیچون



روش معمول تیرها را از چپ به راست برش

می زنیم و در برش مان نیروها را به شکل او برر

مثبت خواهیم داشت :

«محل برش زدن» برش را بین دو تغییر غیر پیوسته ی نیرو می زنیم.

مثلا قبل و بعد از تکیه گاه - قبل و بعد از بار متمرکز - قبل و بعد از یک لنگر مجزا

و در میان یک بار گسترده. و بعد از برش زدن هر قطعه ی ایجاد شده را یک به یک با

معادلات تعادل پوشش می دهیم.

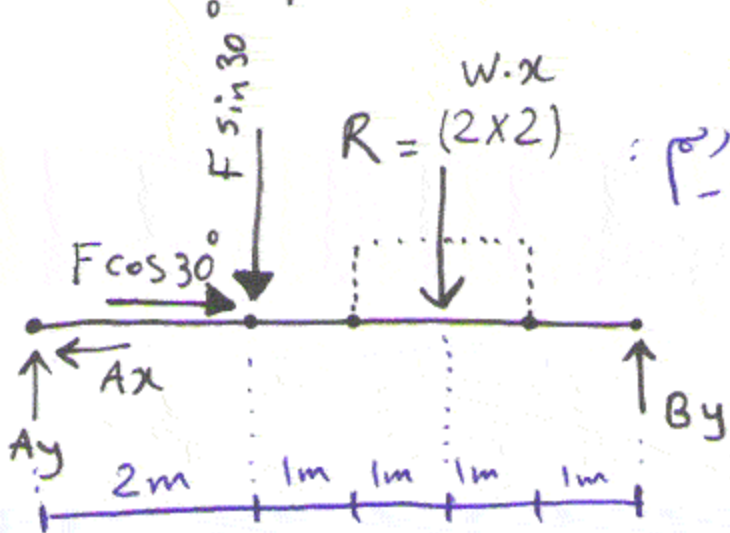
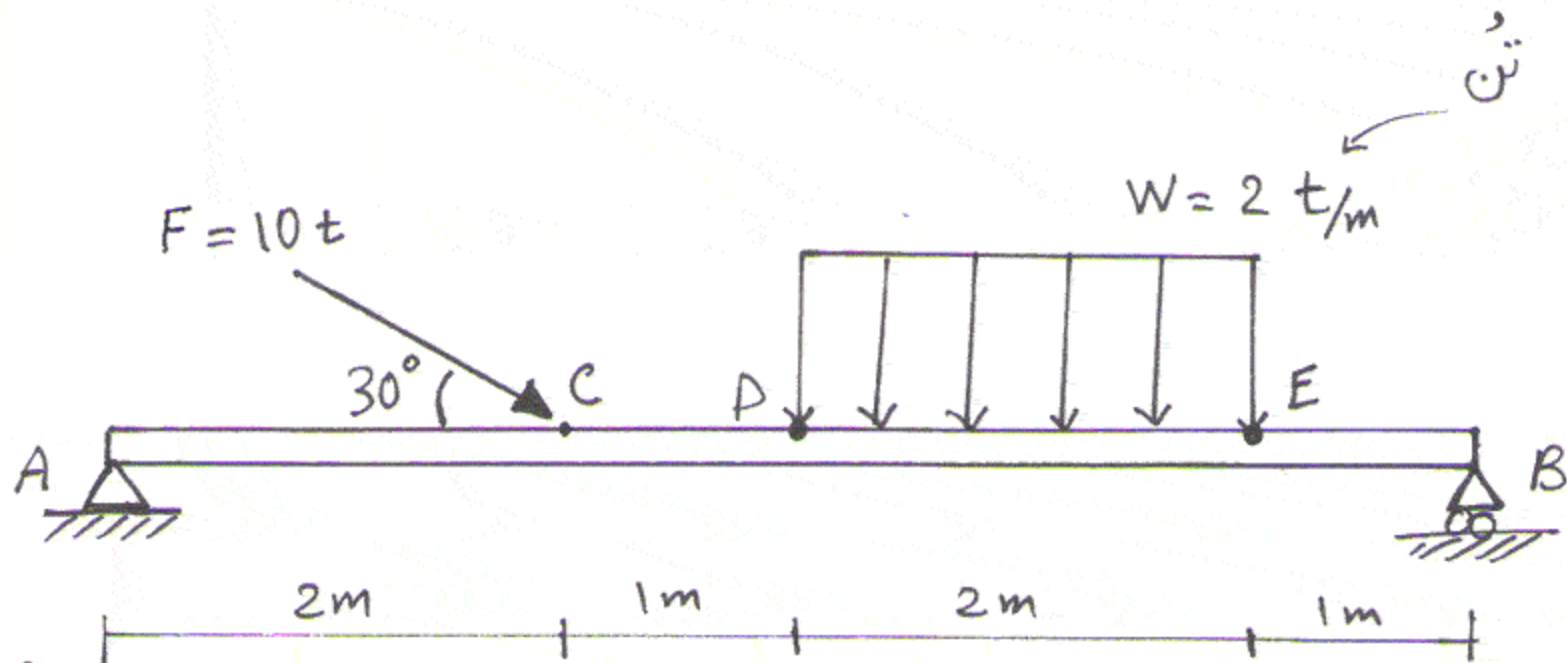
نکته: لنگر را حول نقطه برش خورده می گیریم.

نکته: لنگر را حول نقطه برش خورده را x می گیریم و بقیه فواصل

در آن تکیه ی تیر را بر اساس آن x می نویسیم.

بقیه نکات با حل مثال ها توضیح داده خواهند شد.

مثال: دیاگرام نیروهای محوری، برشی و لنگر خمشی را بدست آورید: (سوال مهم جزوه)



پاسخ: ابتدا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم:

بارکنده مستطیلی را به بار متمرکز (R) تبدیل می‌کنیم
و نیروی (F) نه باری متمرکز و محور است را تجزیه می‌کنیم

معادلات تعادل را برای کل تیر می‌نویسیم و عکس العمل‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + F \cos 30^\circ = 0 \rightarrow A_x = (10t)(\cos 30^\circ) = 8.66 \text{ ton}$$

$$\rightarrow \boxed{A_x = 8.66 \text{ ton}}$$

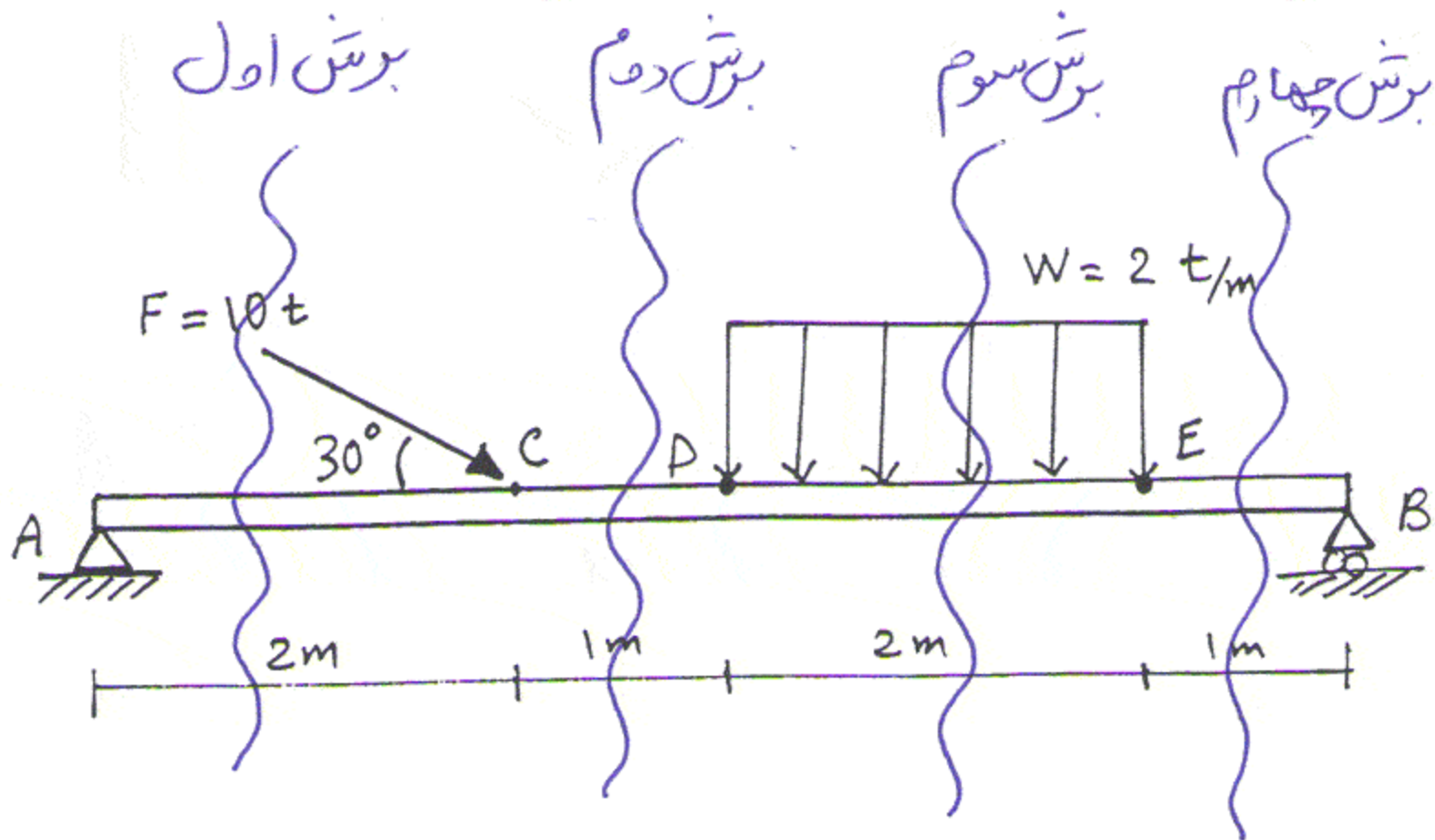
$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - F(\sin 30^\circ) - R + B_y = 0$$

$$\rightarrow A_y - (10)\left(\frac{1}{2}\right) - (2 \times 2) + B_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y + B_y = 9} \star$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F(\sin 30^\circ)(2) - R(4) + B_y(6) = 0$$

$$\rightarrow -10 - 16 + B_y(6) = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 4.33 \text{ ton}} \star \rightarrow A_y = 9 - 4.33 = 4.67 \text{ ton}$$

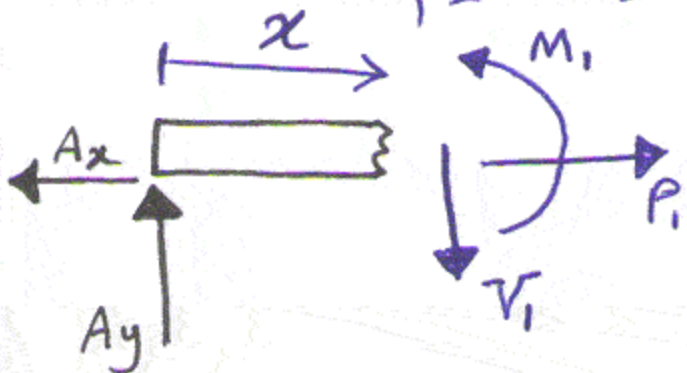
تیر داده شده را در فواصل مناسب برش می زنیم:



بازه ی برش اول

$0 < x < 2$

برش اول که بین نقاط (A و C) قرار دارد را مورد بررسی قرار می دهیم:



قطعه ی برش زده می تواند به اندازه ای اثرش بزرگتر از صفر تا اندازه ای که کمتر از 2 باشد:

$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + P_1 = 0$

برای این قطعه معادلات تعادل را می نویسیم:

$P_1 = A_x \Rightarrow P_1 = 8.66 \text{ ton}$

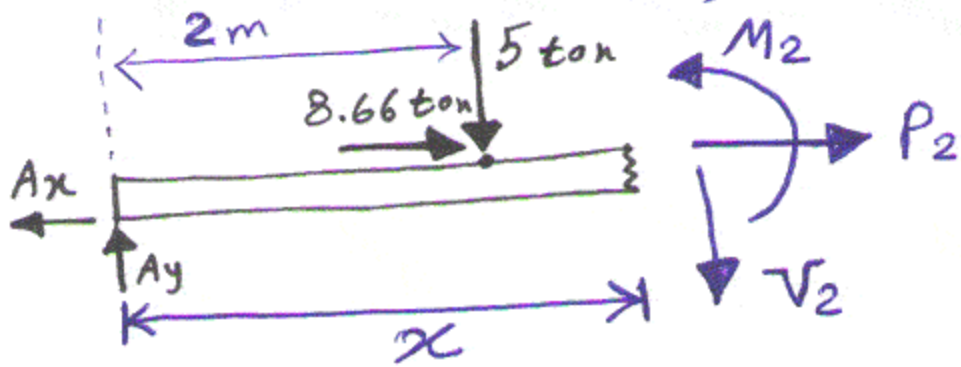
$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - V_1 = 0 \rightarrow V_1 = A_y \rightarrow V_1 = 4.67 \text{ ton}$

$\sum M = 0 \rightarrow M_1 - A_y(x) = 0 \rightarrow M_1 = 4.67(x) \rightarrow M_1 = 4.67x$

نکته: لنگر را حول نقطه ی برش خورده می گیریم.

نکته: اگر از معادله ی M مستقیماً بگیریم معادله V و اگر از انتگرال بگیریم معادله M بدست می آید.

برش دوم در بازه $2 < x < 3$ قرار می‌گیرد و قطعی زیر را می‌سازد



برای این مقطع نیز معادلات تعادل را می‌نویسیم.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -Ax + 8.66 + P_2 = 0 \rightarrow -8.66 + 8.66 + P_2 = 0 \rightarrow \boxed{P_2 = 0}$$

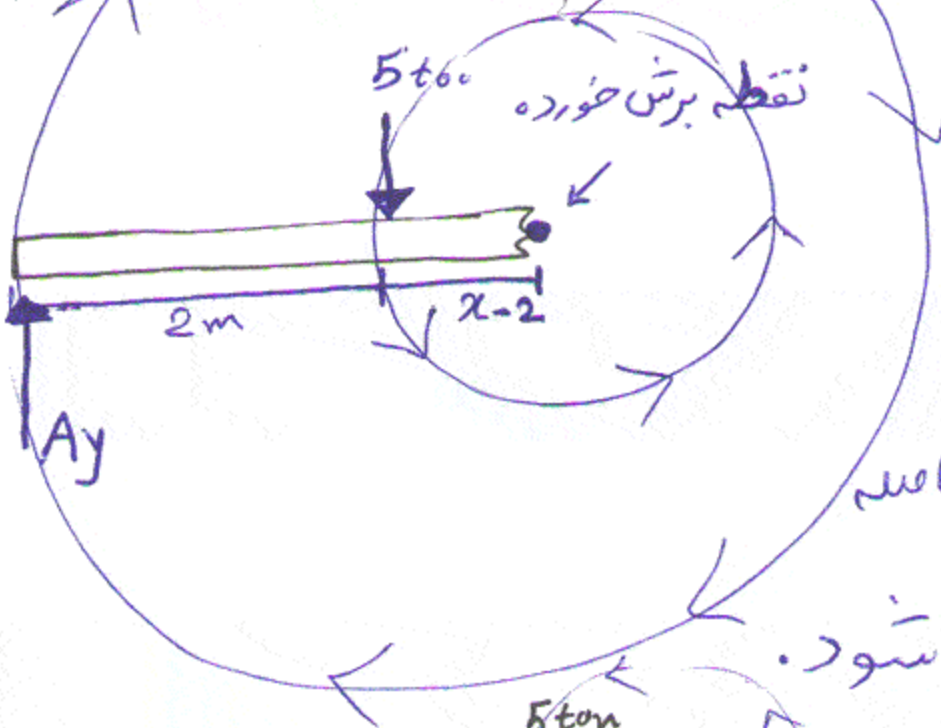
$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - 5 - V_2 = 0 \rightarrow 4.67 - 5 = V_2 \rightarrow \boxed{V_2 = -0.33}$$

(F sin 30° = نیروی عمودی بخش شده)

$$\sum M = 0 \rightarrow -Ay(x) + 5(x-2) + M_2 = 0$$

$$\rightarrow -4.67(x) + 5x - (5)(2) + M_2 = 0 \rightarrow \boxed{M_2 = -0.33x + 10}$$

توضیح گنگرگیری: گنگرما در نقطه‌ی برش خورده از دو نیروی (Ay و F sin 30° = 5 ton)

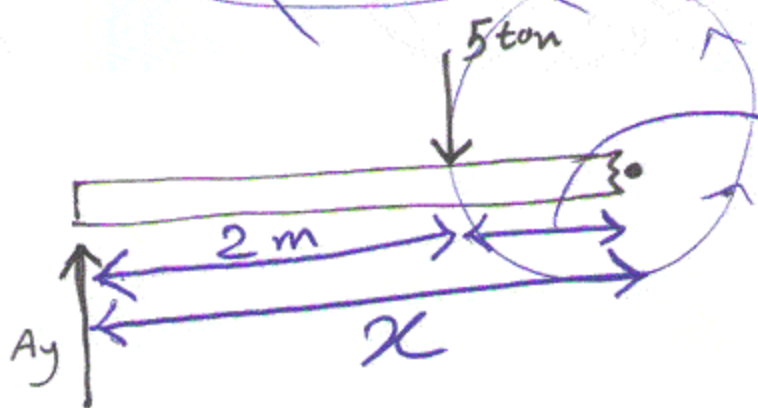


فاصله هایشان ایجاد می‌شود:

در شکل مقابل گنگر حاصل از Ay چون

ساعتگرد است منفی می‌شود و گنگر 5 در فاصله

(x-2) چون یاد ساعتگرد است مثبت می‌شود.



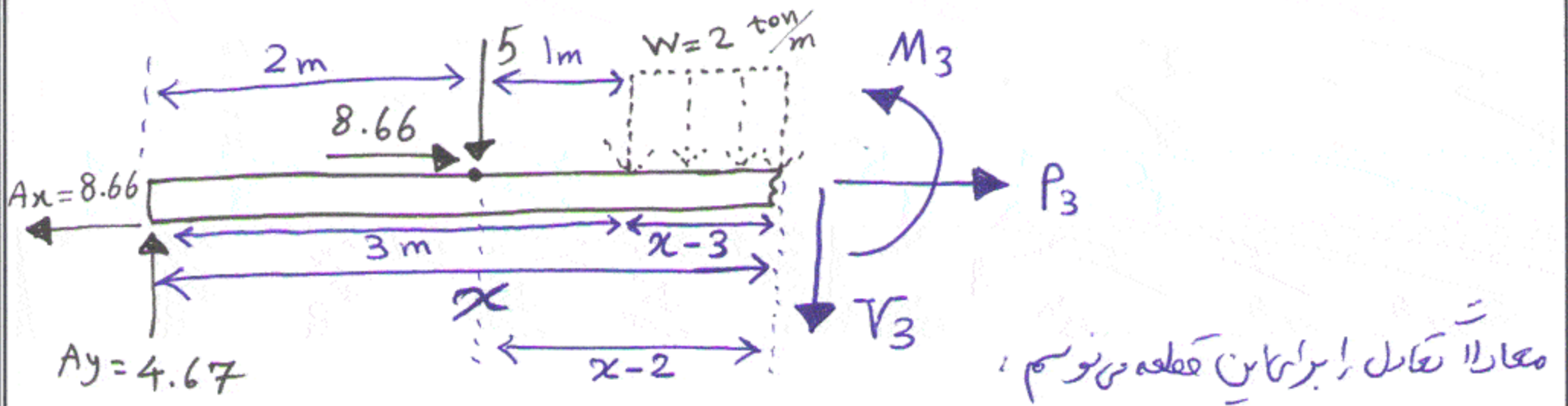
فاصله نیز به شکل رو برد

بدست می‌آید.

$$\frac{dM}{dx} = V$$

نکته: اگر از M2 مستقیماً بگیریم V بدست می‌آید:

برش سوم در بازه $3 < x < 5$ در دل بار گسترده زده می شود:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow -8.66 + 8.66 + P_3 = 0 \rightarrow \boxed{P_3 = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow \underbrace{4.67}_{A_y} - \underbrace{5}_{F_{sin}} - \underbrace{(2(x-3))}_{\text{بار معادل بار گسترده}} - \underbrace{V_3}_{\text{نیروی برش}} = 0$$

$$\rightarrow 4.67 - 5 - 2x + 6 = V_3 \rightarrow \boxed{V_3 = -2x + 5.67}$$

$$+\curvearrowright \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + \underbrace{5(x-2)}_{\text{فاصله از نقطه برش}} + \underbrace{(2(x-3))\left(\frac{x-3}{2}\right)}_{\substack{\text{نیروی معادل بار گسترده} \\ \text{از نقطه می برش}}} + M_3 = 0$$

$$\rightarrow -4.67(x) + \frac{5x-10}{1} + \frac{x^2+9-6x}{(x-3) \cdot (x-3)} + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 4.67x - 5x + 10 - x^2 - 9 + 6x \rightarrow \boxed{M_3 = -x^2 + 5.67x + 1}$$

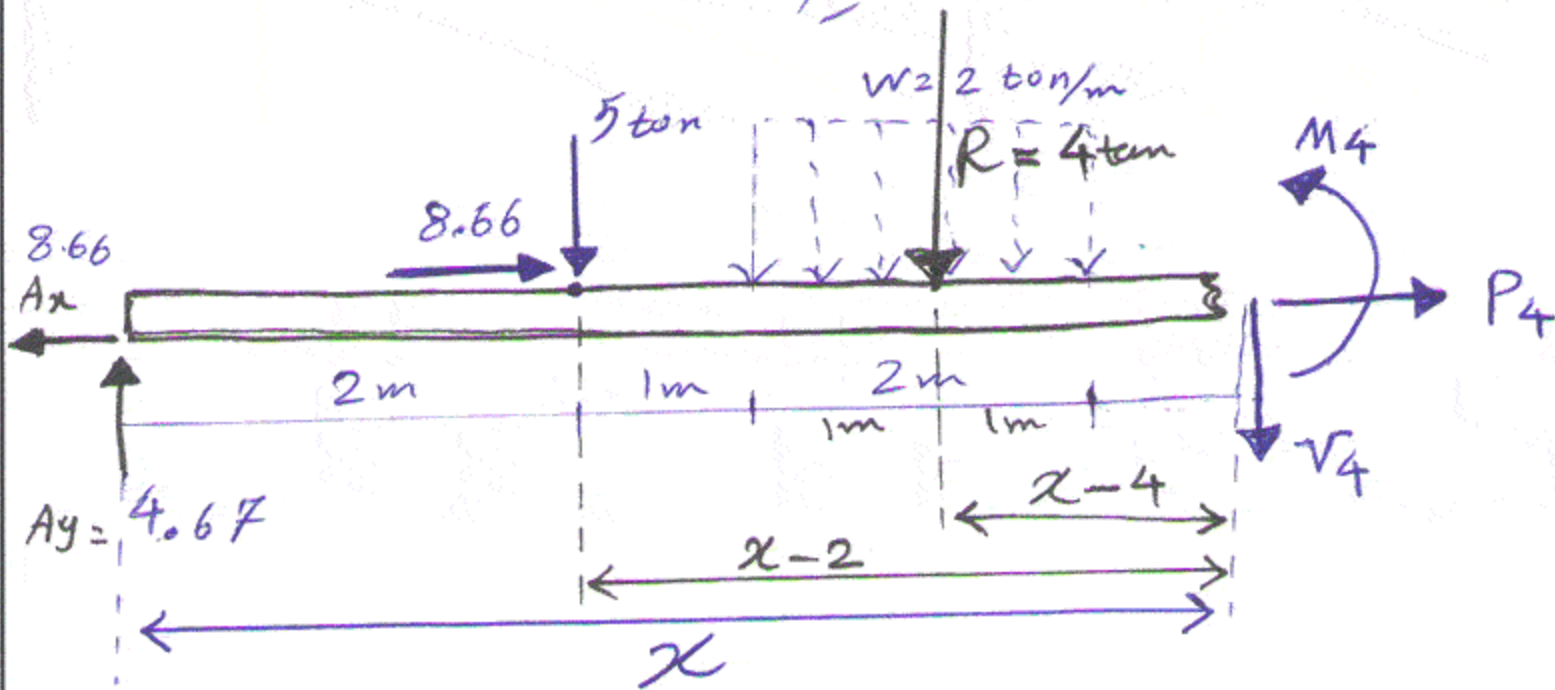
* در این قطعه نیز فاصله نیروی 5 تن از محل برش $(x-2)$ است و بار متمرکز معادل گسترده

برای آن با $(W \cdot x) = (2 \text{ ton}) \cdot (x-3)$ و طول آن نسبت زیر بار گسترده $(x-3)$

است که محل اثر بار معادل آن نصف آن است یعنی $\left(\frac{x-3}{2}\right)$ و مستقیماً M_3 نسبت به x

معادله V_3 را به ما می دهد که سرعت کار ما را نشان می دهد.

برش چهارم نیز در بازه $5 < x < 6$ قرار می‌گیرد:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow -8.66 + 8.66 + P_4 = 0 \rightarrow P_4 = 0$$

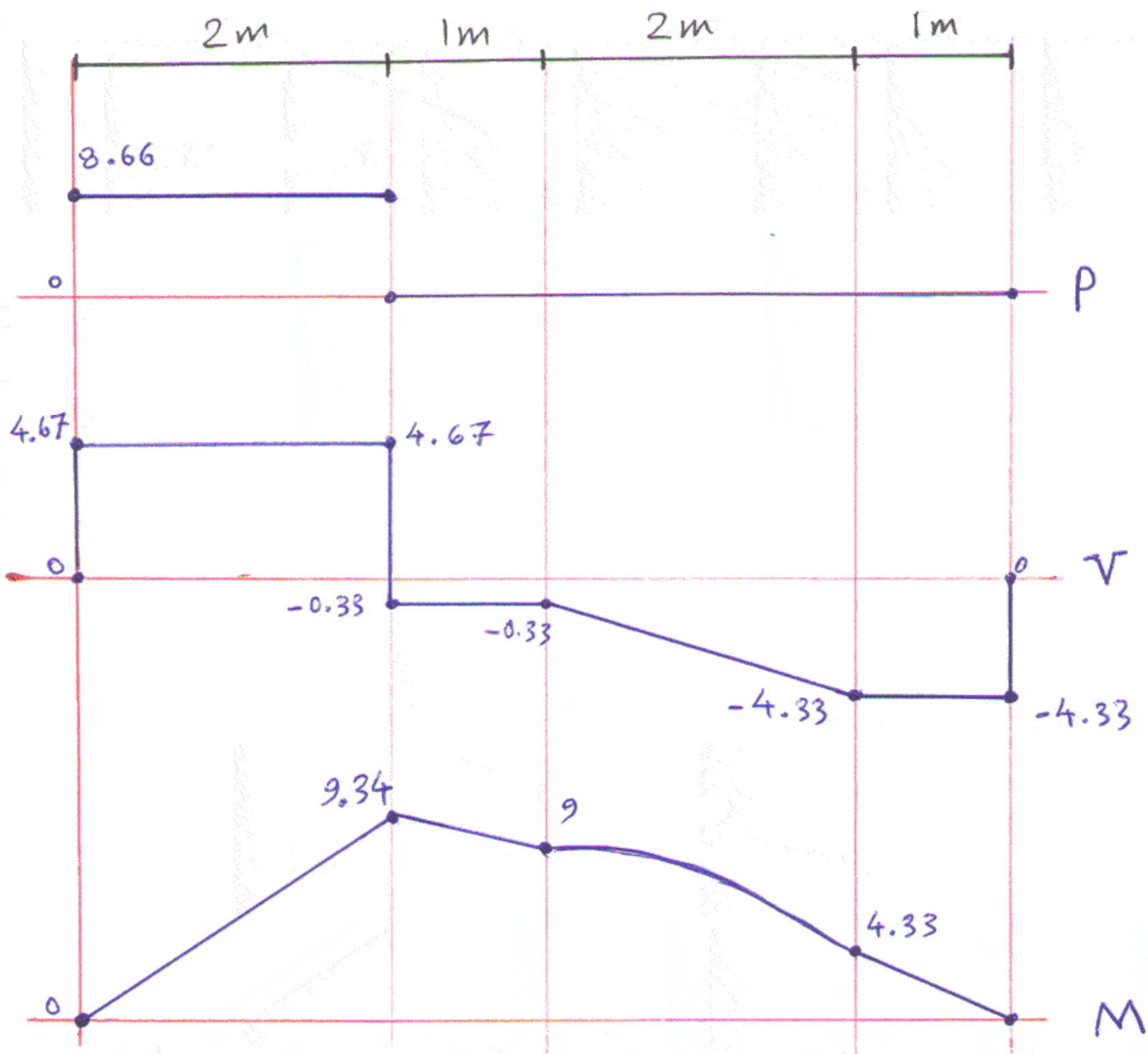
$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - 5 - R - V_4 = 0 \rightarrow V_4 = 4.67 - 5 - 4 \rightarrow V_4 = -4.33$$

$$\sum M = 0 \rightarrow -Ay(x) + 5(x-2) + R(x-4) + M_4 = 0$$

$$\rightarrow M_4 = 4.67x - 5x + 10 - 4x + 16 \rightarrow M_4 = -4.33x + 26$$

می‌توانیم اطلاعات بدست آمده برای هر چهار بازه را در جدول زیر بنویسیم:

$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < 6$
$P_1 = 8.66 \text{ t}$	$P_2 = 0$	$P_3 = 0$	$P_4 = 0$
$V_1 = 4.67$	$V_2 = -0.33$	$V_3 = -2x + 5.67$	$V_4 = -4.33$
$M_1 = 4.67x$	$M_2 = -0.33x + 10$	$M_3 = -x^2 + 5.67x + 1$	$M_4 = -4.33x + 26$



* برای V_3 که معادله‌ی یک خط است از روش نقطه دهی خط را رسم می‌کنیم:

$$V_3 = -2x + 5.67$$

x	3	5
V_3	-0.33	-4.33

* برای رسم منحنی درجه درازا باید جهت تغییر را بدانیم جهت تغییر با علامت مقدار مشتق دوم تابع

برابر است. اگر مثبت بود به این شکل \uparrow و اگر منفی بود \downarrow یعنی نقطه‌ی Max

داریم. ما کذیم لنگر خمشی در فاصله‌ای اتفاق می‌افتد که منوط به نیروی برشی معکوس را

قطع کند. مثلاً در همین مثال نمودار نیروی برش در نقطه $x=2m$ محور افقی را

قطع کرده و در واقع مقدار V را صفر نموده است.

که در همان نقطه تغییر خشی ماکزیمم می‌شود

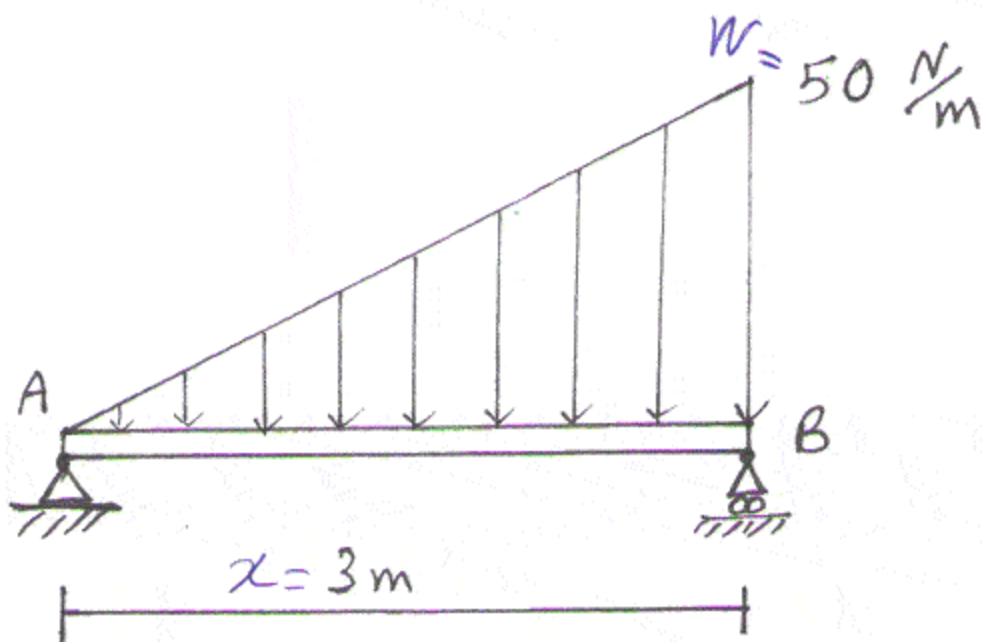
ماکزیمم تغییر خشی $\rightarrow V=0$

و مقدارش برابر است با $M_1 = 4.67(2) = 9.34 \text{ (ton.m)}$

پس این تیر باید برای ماکزیمم تغییر خشی 9.34 تن متر ساخته شود.

همچنین مساحت زیر نمودار V با ماکزیمم تغییر خشی را می‌دهد در آن بازه.

مثال دیاگرام نیروهای برشی و تغییر خشی را برای تیر زیر رسم کنید:



دیاگرام نیروها را بران تیر زیر رسم

می‌کنیم تا عکس العمل‌های تیر را

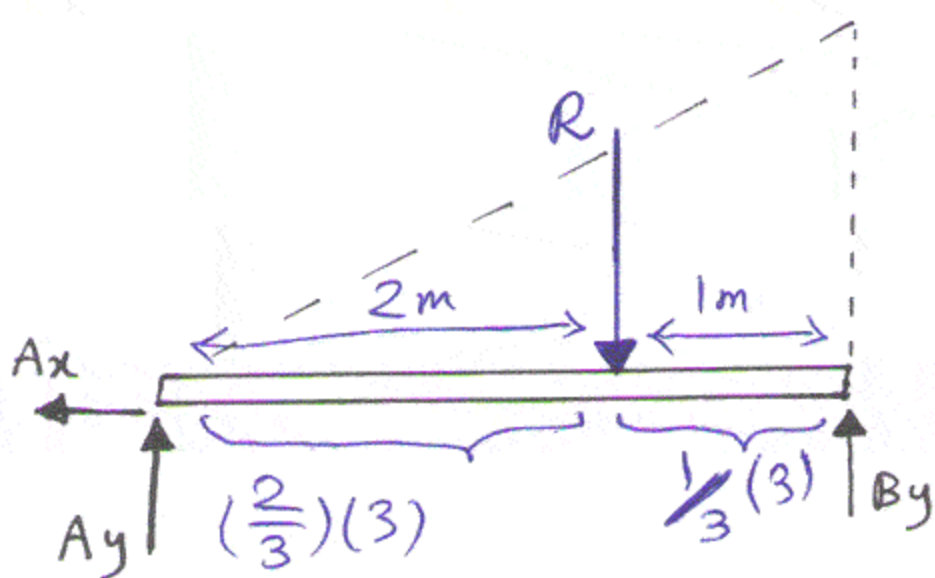
را بدست آوریم:

بار معادل بار کسره مثلثی رو ببرو برابر است با

نیف حاصله شدت بار (w) در قاعده (x)

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)(50)(3) = 75 \text{ N}$$

و محل اثر آن فاصله $\frac{1}{3}$ از رأس و این فاصله این



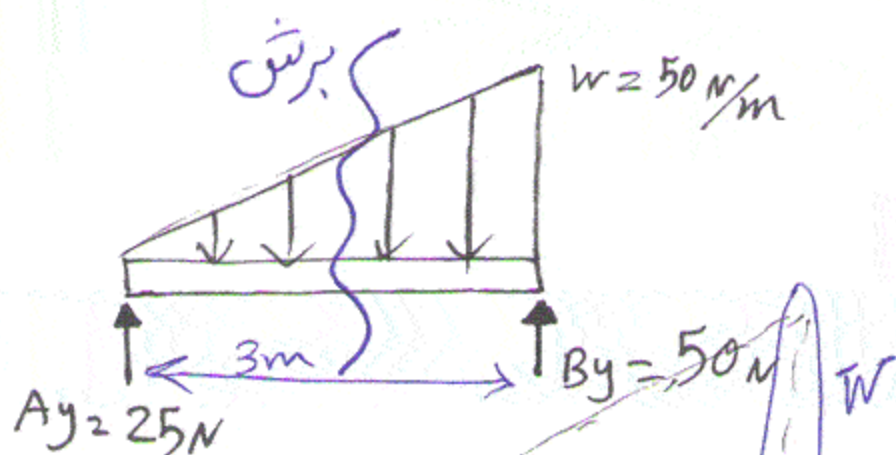
$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

معادلات تعادل را برای تیر می نویسیم :

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -R(2) + By(3) = 0 \rightarrow By = \frac{(2)(75)}{3} = 50N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - R + By = 0 \rightarrow Ay - 75 + 50 = 0 \rightarrow Ay = 25N$$

با توجه به این شدت بار یکینواخت است یک برش میان دو تکیه گاه کفایت می کند.



شدت بار برای این بارگسترده ارتفاع مثلث است و اگر برش ایجاد کنیم در قطعی

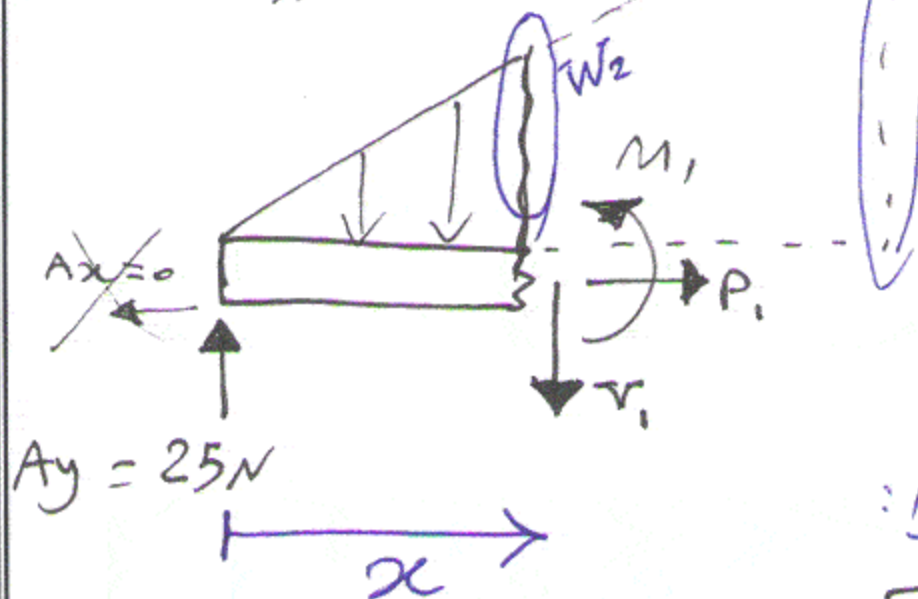
کوچکتر شده (مثلث مشابه کوچکتر) می باشد

ارتفاع را بدست آوریم -

ارتفاع را بدست آوریم -

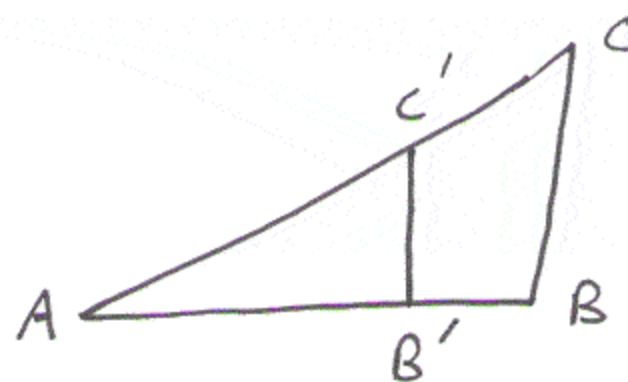
w_2 یا ارتفاع مثلث حاصل شده در قطعی

برش خورده از طریق مثلث های مشابه بدست می آید:



$$\frac{x}{w_2} = \frac{3}{50} \rightarrow w_2 = \frac{50x}{3}$$

نکته: مثلث های مشابه:



$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

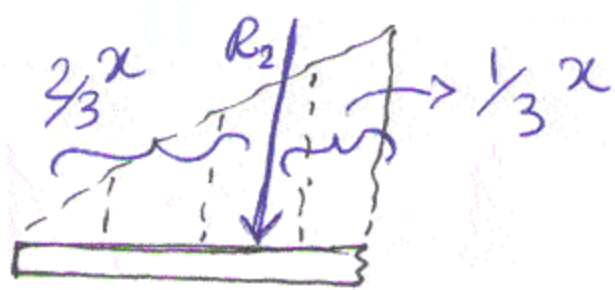
$$\frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} \quad \text{یا} \quad \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$

پس شدت بار در نقطه ی برش خورده

برای بارگسترده مثلثی که با ارتفاع آن

$$\frac{50x}{3}$$

برابریت می شود



معادلات تعادل برای این مقطع در بازه طی $0 < x < 3$:

$$R_2 = \frac{W_2 \cdot x}{2} = \left(\frac{50x}{2 \times 3} \right) (x) = \frac{50x^2}{6}$$

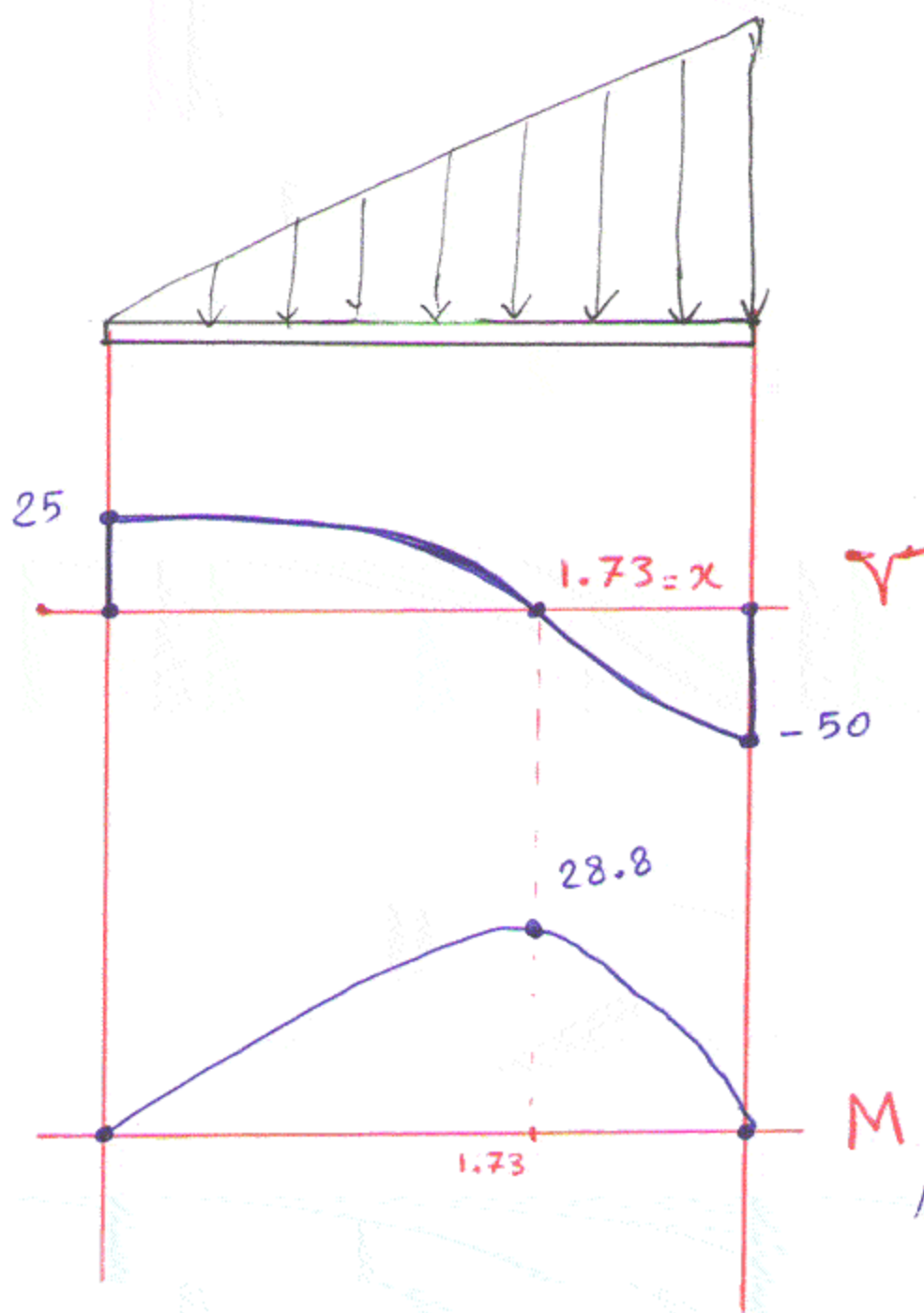
$$\sum F_x = 0 \rightarrow P_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_2 - V_1 = 0 \rightarrow V_1 = 25 - \frac{50x^2}{6}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_2 \left(\frac{1}{3}x \right) + M_1 = 0$$

$$\rightarrow M_1 = +25x - \left(\frac{50x^2}{6} \right) \left(\frac{1}{3}x \right) \Rightarrow$$

$$\rightarrow M_1 = \frac{-50x^3}{18} + 25x$$



برای پیدا کردن محل ماکزیمم لنگر
باید x را بر صفر شدن V پیدا کنیم

تا محل برخورد نمودار منحنی برش با محور x

$$V_1 = 0 \rightarrow x = ?$$

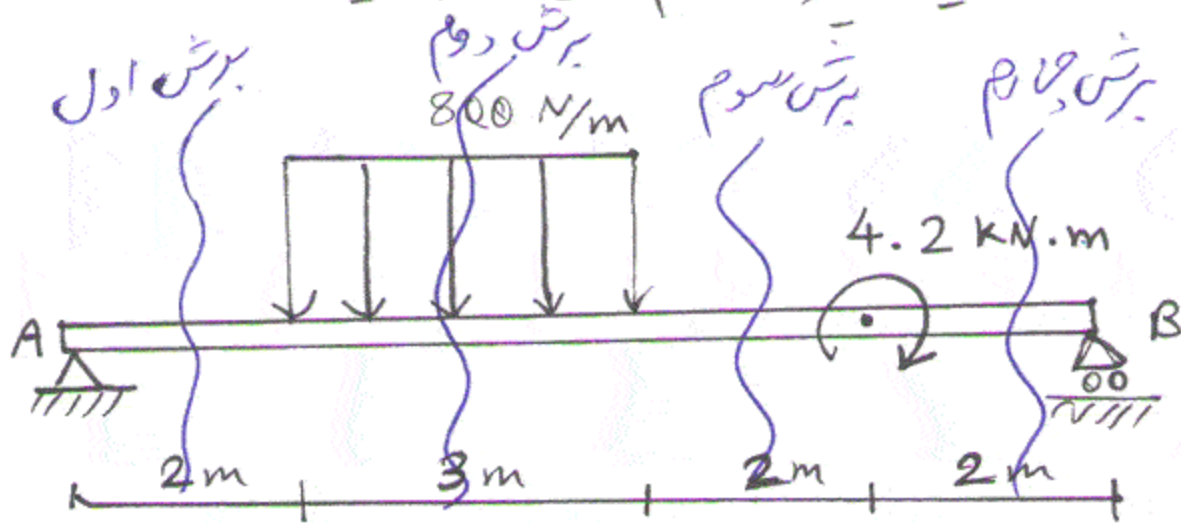
$$25 - \frac{50x^2}{6} = 0 \rightarrow x = 1.73$$

پس در $x = 1.73$ لنگر ماکزیمم

$$M = \frac{-50(1.73)^3}{18} + 25(1.73) = 28.8$$

تیر باید برای این لنگر طراحی شود.

مثال دیاگرام نیروهای برشی و لنگر خمشی تیر زیر را رسم کنید: (تیرن جزوه و ۵ - ۱۴۰۰ ایران)



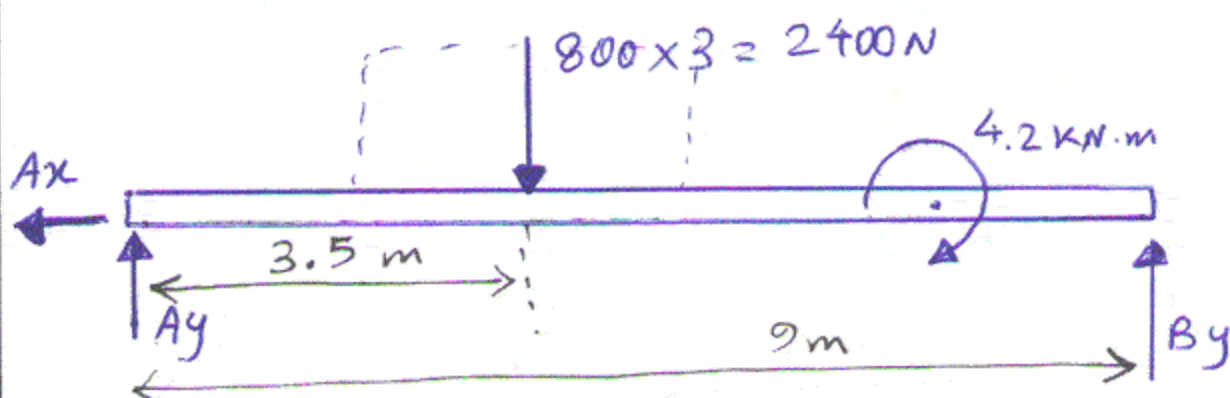
تنها نکته در این مسئله این است

که کوپل 4.2 کیلو نیوتن متری

ما فقط در محاسبات لنگر شرکت

می کند و چون کوپل ما ساعتی است

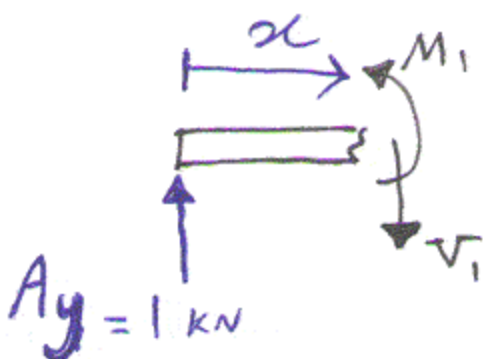
پس در محاسباتش می آید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -\frac{2400}{1000}(3.5) + By(9) - 4.2 = 0 \rightarrow By = 1.4 \text{ kN}$$

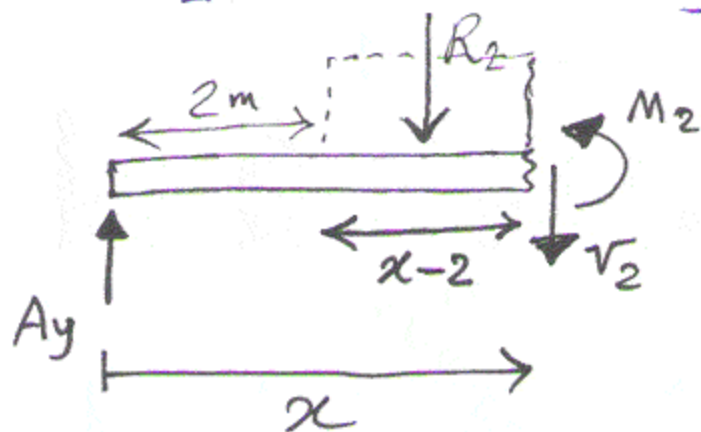
$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - 2.4 + By = 0 \rightarrow Ay = 2.4 - 1.4 = 1 \text{ kN}$$



برش اول: $0 < x < 2$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - V_1 = 0 \rightarrow V_1 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow -Ay(x) + M_1 = 0 \rightarrow M_1 = 1x$$



برش دوم: $2 < x < 5$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - V_2 - R_2 = 0 \rightarrow V_2 = Ay - R_2$$

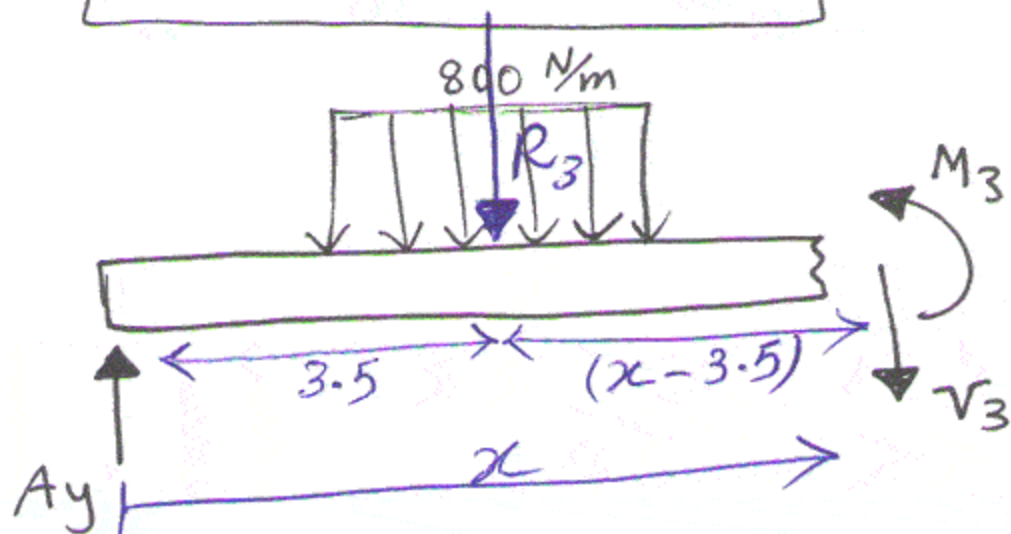
$$\rightarrow V_2 = 1 - (x-2)\left(\frac{800}{1000}\right) = 1 - 0.8x + 1.6$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -A_y(x) + (0.8)(x-2)\left(\frac{x-2}{2}\right) + M_2 = 0$$

$$\rightarrow V_2 = -0.8x + 2.6$$

$$\rightarrow M_2 = -0.4x^2 + 2.6x - 1.6$$

برش سوم $5 < x < 7$

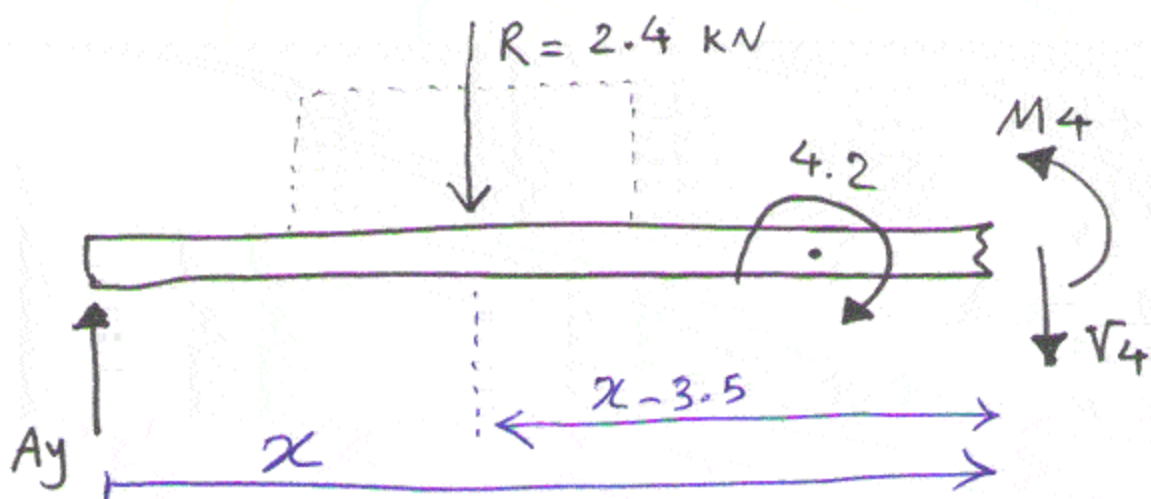


$$\rightarrow V_3 = -1.4$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - \left(\frac{800}{1000}\right)(3) - V_3 = 0 \rightarrow V_3 = +1 = 2.4$$

$$+\curvearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_3(x-3.5) + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 1(x) - ((0.8) \cdot (3))(x-3.5) \rightarrow M_3 = -1.4x + 8.4$$



برش چهارم: $7 < x < 9$

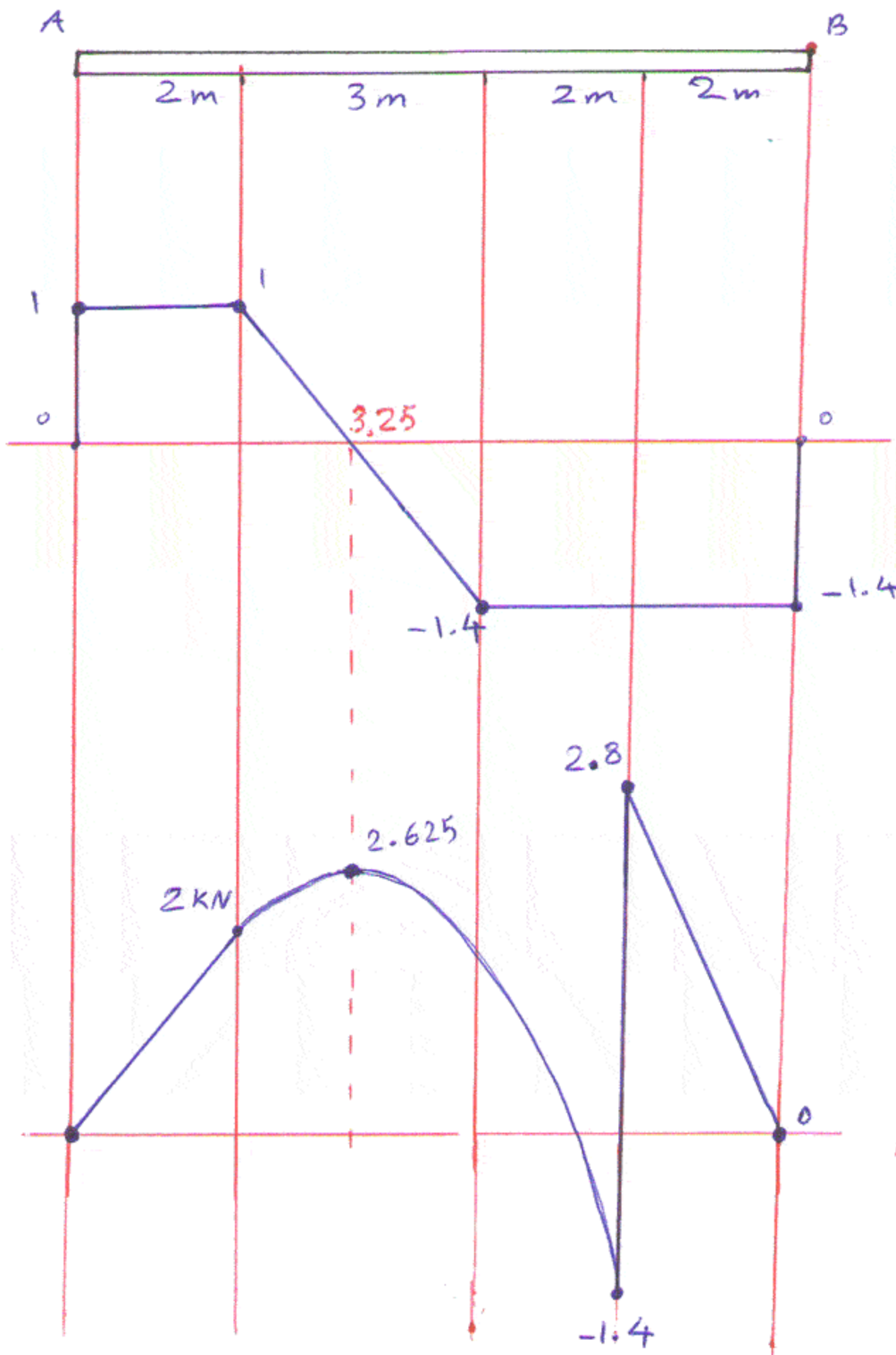
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 - V_4 = 0 \rightarrow V_4 = -1.4$$

$$+\curvearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + (2.4)(x-3.5) + (-4.2) + M_4 = 0$$

$$\rightarrow M_4 = +x - 2.4x + 8.4 + 4.2 \rightarrow M_4 = -1.4x + 12.6$$

نکته: در بارهای گسترده مستطیلی نمودار نیروات خطی و در بارهای گسترده

مثلث نمودار نیروات منحنی در می آید؟



$$\begin{cases} V_1 = 1 \text{ kN} \\ V_2 = -0.8x + 2.6 \\ V_3 = -1.4 \\ V_4 = -1.4 \end{cases}$$

$V_2 = 0 \rightarrow x = 3.25 \text{ m}$
 پیدا کردن محل ماکزیمم گزشتگی در این بازه

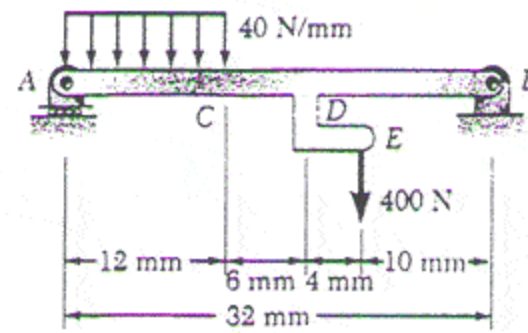
$$\begin{cases} M_1 = x \\ M_2 = -0.4x^2 + 2.6x - 1.6 \\ M_3 = -1.4x + 8.4 \\ M_4 = -1.4x + 12.6 \end{cases}$$

$x = 3.25 \rightarrow M_2 = 2.625$

ماکزیمم گزشتگی در محل تیر 2.8 است و همین تیر باید برای این سطر طراحی شود.

مسئله نمونه ۳.۷

نمودارهای برش و گشتاور خمشی را برای تیر AB رسم کنید. بار گسترده بار ۴۰ N/mm بر ۱۲ mm از تیر، از A تا C و بار ۴۰۰ N به نقطه E وارد می شود.

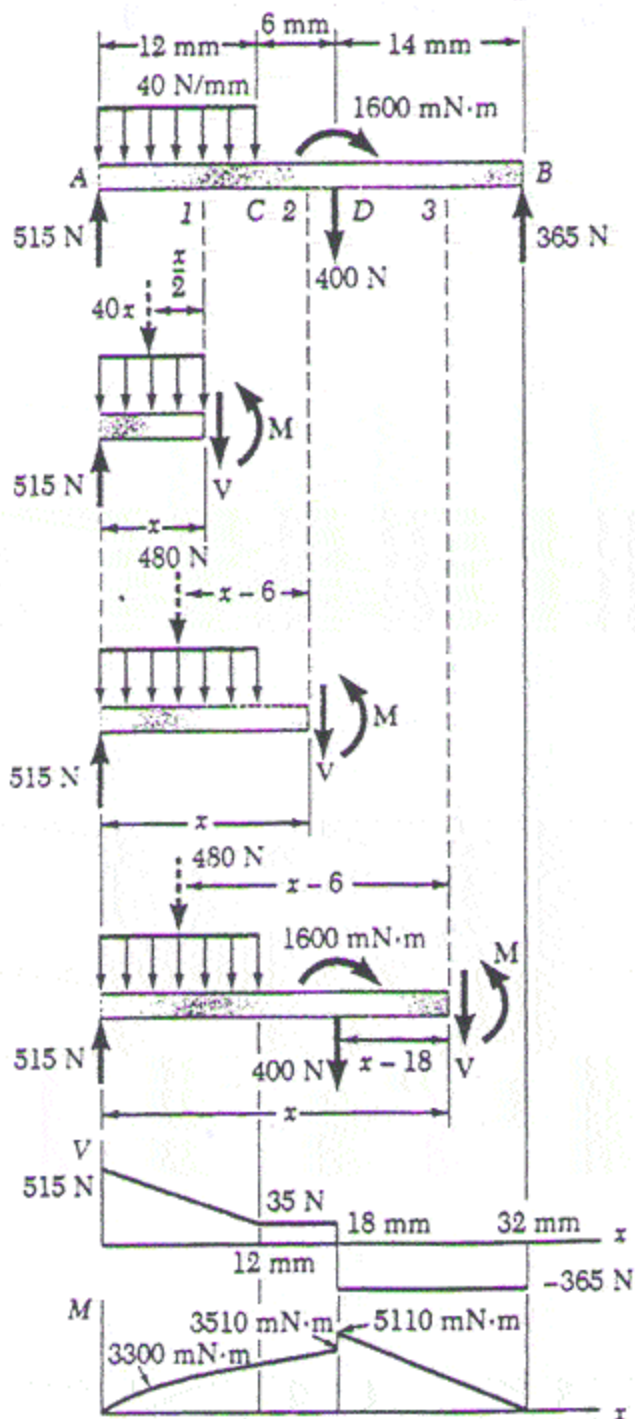


● حل:

جسم آزاد: کل تیر. عکس العملها را با در نظر گرفتن کل تیر به عنوان جسم آزاد تعیین می کنیم:

$$\begin{aligned}
 +) \sum M_A = 0 : & B_y(32 \text{ mm}) - (480 \text{ N})(6 \text{ mm}) - (400 \text{ N})(22 \text{ mm}) = 0 \\
 & B_y = + 365 \text{ N} \quad B_y = 365 \text{ N} \uparrow \\
 +) \sum M_B = 0 : & (480 \text{ N})(26 \text{ mm}) + (400 \text{ N})(10 \text{ mm}) - A(32 \text{ mm}) = 0 \\
 & A = + 515 \text{ N} \quad A = 515 \text{ N} \uparrow \\
 \rightarrow \sum F_x = 0 : & B_x = 0 \quad B_x = 0
 \end{aligned}$$

حالا به جای بار ۴۰۰ نیوتونی سیستم کوپل - نیروی معادل وارد بر تیر در نقطه D را قرار می دهیم.



برش و گشتاور خمشی، از A تا C. نیروهای داخلی در فاصله x از نقطه A را با در نظر گرفتن بخشی از تیر واقع در طرف چپ مقطع ۱ تعیین می کنیم. به جای بخشی از بار گسترده که به این جسم آزاد وارد می شود برابند آن را می گذاریم و می نویسیم

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 : 515 - 40x - V = 0 \quad V = 515 - 40x$$

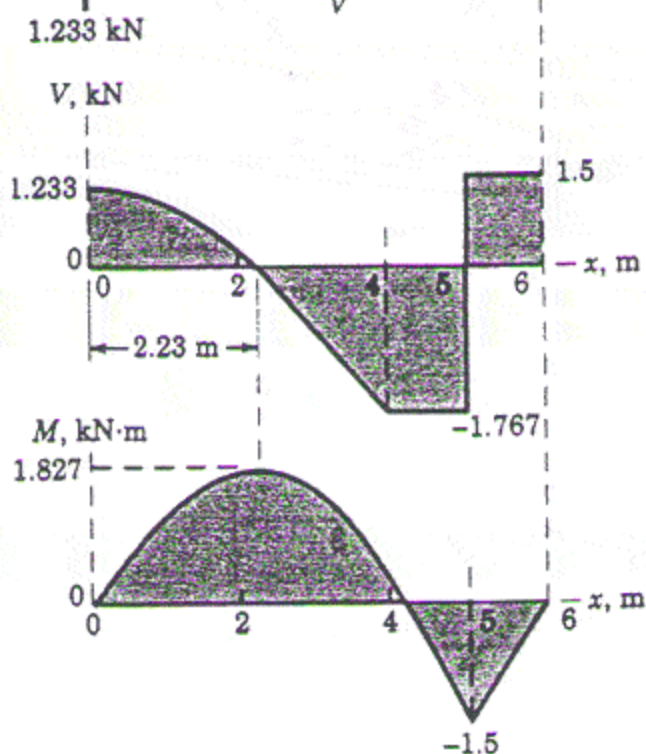
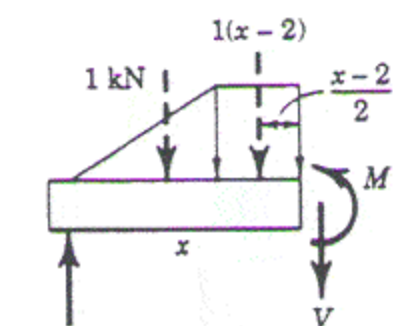
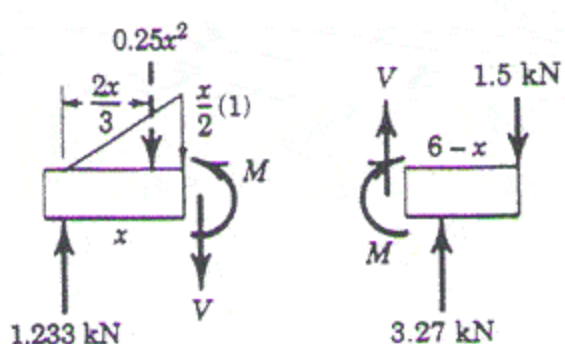
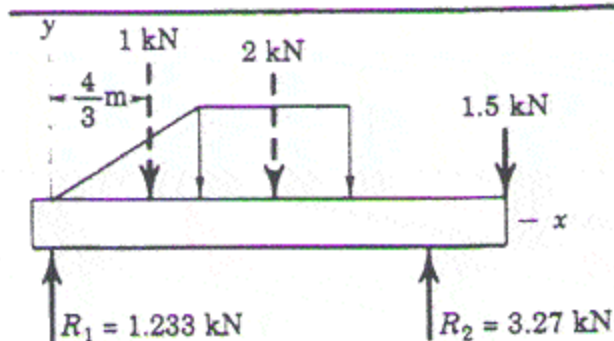
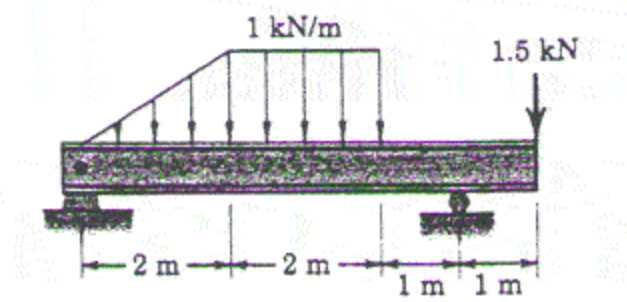
$$+) \sum M_1 = 0 : - 515x - 40x \left(\frac{1}{2} x \right) + M = 0$$

$$M = 515x - 20x^2$$

چون نمودار جسم آزاد نشان داده شده را برای همه مقادیر x کوچکتر از ۱۲ mm می توانیم به کار ببریم، عبارت های به دست آمده برای V و M در ناحیه $0 < x < 12 \text{ mm}$ معتبرند.

از C تا D. حالا اگر بخش واقع در طرف چپ مقطع ۲ را در نظر بگیریم و به جای بار گسترده برابندش را قرار بدهیم خواهیم داشت

مثال ۵-۱۳. نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده شکل مقابل رسم کنید. ماکزیمم گشتاور خمشی را به دست آورید و محل آن را نسبت به انتهای چپ تیر تعیین کنید.



حل. دیاگرام آزاد کل تیر را رسم می کنیم و در آن به جای بارهای گسترده، نیروهای متمرکز معادلشان را قرار می دهیم. عکس العمل تکیه گاهها را به دست می آوریم. تیر را در ناحیه $0 < x < 2$ m برش می زنیم. دیاگرام آزاد سمت چپ مقطع برش را رسم می کنیم. معادله تعادل نیروها را در جهت قائم و معادله تعادل گشتاورها را حول مقطع برش می نویسیم، و به دست می آوریم:

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V = 1.233 - 0.25x^2$$

$$[\Sigma M = 0] \quad M + (0.25x^2) \frac{x}{3} - 1.233x = 0 \quad M = 1.233x - 0.0833x^3$$

روابط فوق را برای محدوده $0 < x < 2$ m روی نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی رسم می کنیم.

سپس در فاصله $2 < x < 4$ m تیر را برش می زنیم. دیاگرام آزاد را رسم می کنیم، معادله تعادل نیروها را در جهت قائم و تعادل گشتاورها را حول مقطع برش می نویسیم، و به دست می آوریم:

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V + 1(x - 2) + 1 - 1.233 = 0 \quad V = 2.23 - x$$

$$[\Sigma M = 0] \quad M + 1(x - 2) \frac{x - 2}{2} + 1[x - \frac{2}{3}(2)] - 1.233x = 0$$

$$M = -0.667 + 2.23x - 0.50x^2$$

این نتایج را برای بازه $2 < x < 4$ m روی نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی رسم می کنیم. مقطع برش بعدی در ناحیه $4 < x < 5$ m است. برای تحلیل این مقطع، دیاگرام آزاد قسمت راست تیر را رسم می کنیم. توجه کنید که V و M را در جهات مثبت خود نشان داده ایم. از معادلات تعادل به دست می آوریم:

$$V = -1.767 \text{ kN} \quad \text{و} \quad M = 7.33 - 1.76x$$

این نتایج را برای بازه مورد نظر در نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی رسم می کنیم. قسمت آخر تیر را می توان به طور شهودی تحلیل کرد. در این ناحیه مقدار نیروی برشی ثابت و برابر $+1.5$ kN است، و گشتاور خمشی به طور خطی کاهش می یابد تا در انتهای سمت راست تیر به صفر برسد.

ماکزیمم گشتاور در نقطه $x = 2.23$ m، که نمودار نیروی برشی محور را قطع می کند، ایجاد می شود. این مقدار x را در رابطه M برای ناحیه دوم قرار می دهیم و مقدار گشتاور ماکزیمم را برابر $M = 1.827 \text{ kN.m}$ □

به دست می آوریم.

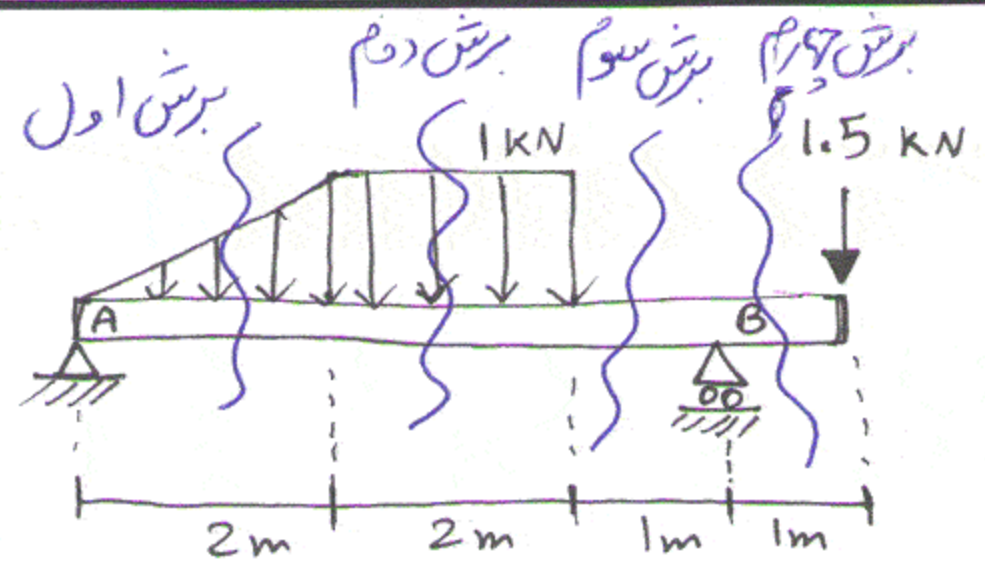
توجه کنید که گشتاور خمشی در هر مقطع برابر است با مساحت زیر نمودار نیروی برشی تا آن مقطع. برای مثال به ازای $x < 2$ m داریم:

$$[\Delta M = \int V dx] \quad M - 0 = \int_0^x (1.233 - 0.25x^2) dx$$

$$M = 1.233x - 0.0833x^3$$

و مانند قبلی

* مواحل برش زنی این مثال در صفحه بعدی توضیح داده می شود.



مثال دیگرام نیروهای برش و منگنه خمشی

تیر مقابل را ترسیم کنید:

بر رسم دیگرام آزاد تیر عکس العمل

تکلیف گاهی را در A و B محاسبه می‌کنیم:

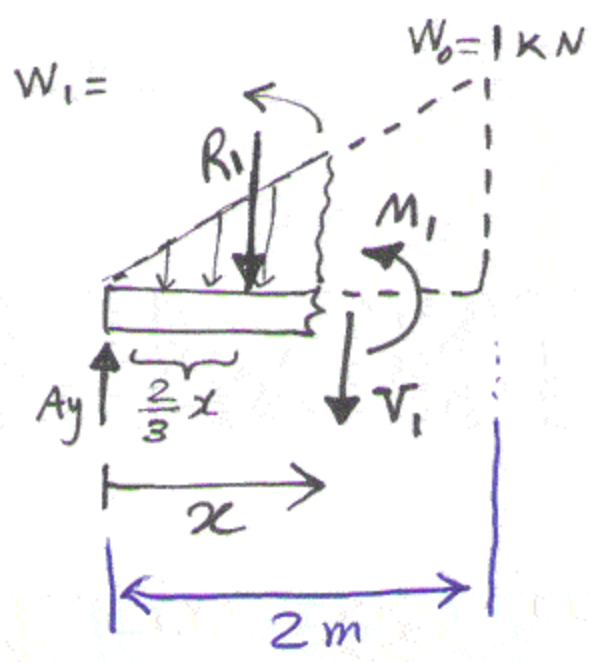
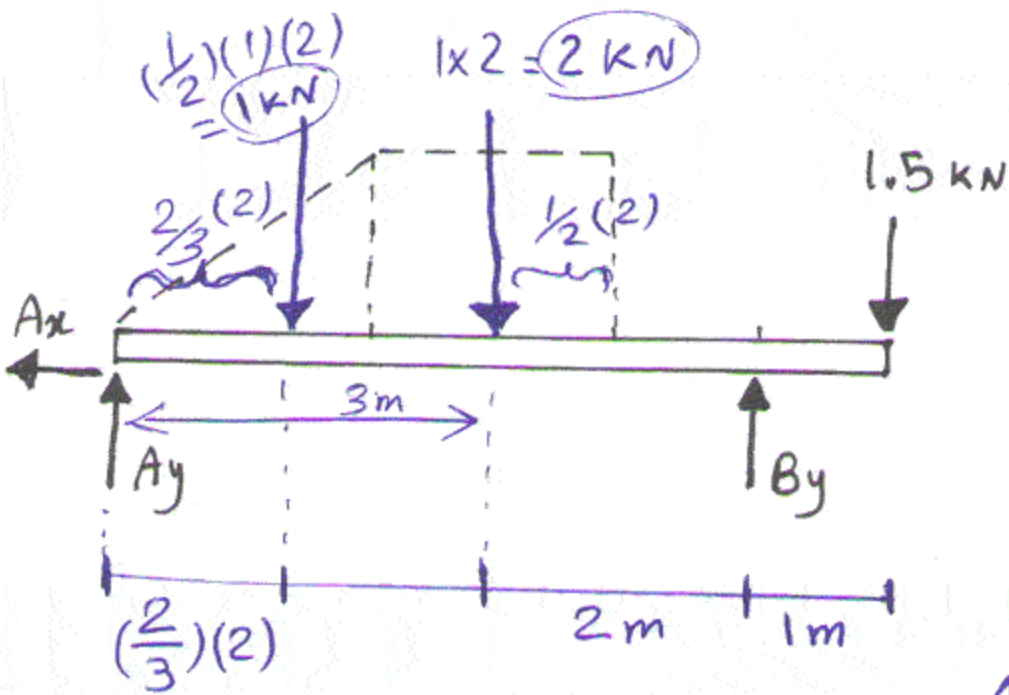
$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow (-1)\left(\frac{4}{3}\right) + (-2)(3) + By(5) - (1.5)(6) = 0$$

$$\rightarrow By = 3.27 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - 1 - 2 + 3.27 - 1.5 = 0$$

$$\rightarrow Ay = 1.23 \text{ kN}$$



برش اول: $0 < x < 2$

از طریق مثلث‌های مشابه

$$\frac{x}{W_1} = \frac{2}{W_0}$$

$$\frac{x}{W_1} = \frac{2}{1} \rightarrow W_1 = \frac{x}{2}$$

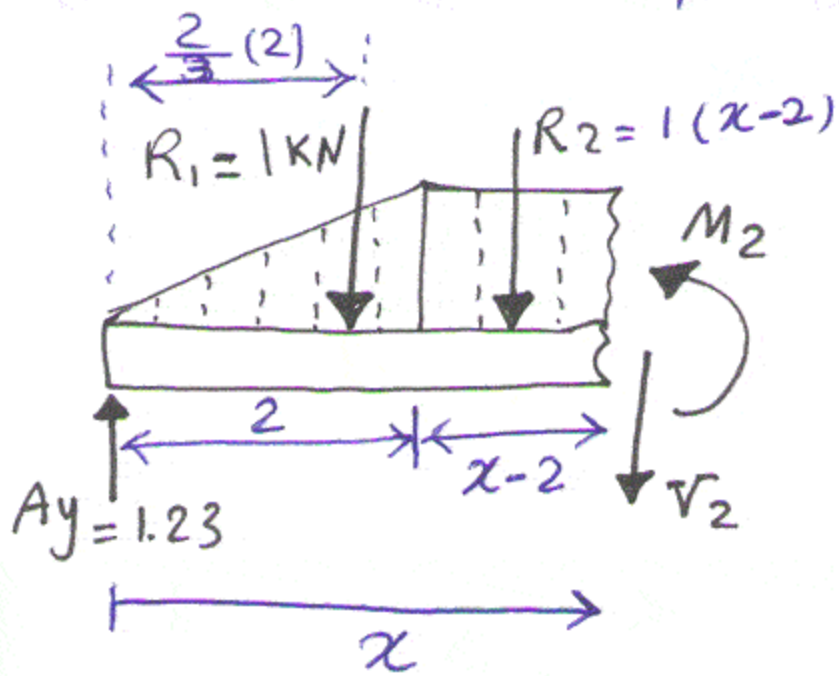
$$R_1 = \frac{W_1 \cdot x}{2} = \frac{\frac{x}{2} \cdot x}{2} = \frac{x^2}{4}$$

مکان قرارگیری بار معادل (R_1) نسبت به ابتدای x ← $\frac{2}{3}x$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - R_1 - V_1 = 0 \rightarrow V_1 = 1.23 - \frac{x^2}{4}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_1\left(\frac{x}{3}\right) + M_1 = 0$$

$$\rightarrow M_1 = 1.23x - \left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow \boxed{M_1 = \frac{-x^3}{12} + 1.23x}$$



برش دوم : $2 < x < 4$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 1 - R_2 - V_2 = 0$$

$$\rightarrow V_2 = 1.23 - 1 - 1(x-2)$$

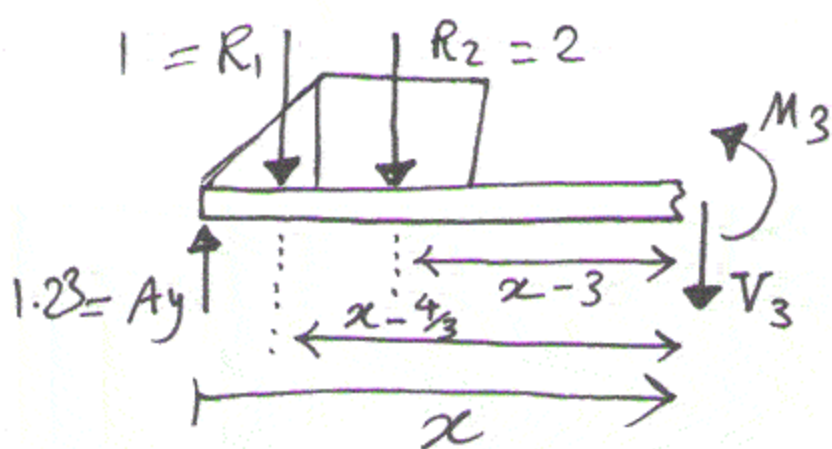
$$\rightarrow \boxed{V_2 = -x + 2.23}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_1\left(\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right) + R_2\left(\frac{x-2}{2}\right) + M_2 = 0$$

$$\rightarrow M_2 = 1.23x - 1\left(\frac{4}{3}\right) - (x-2)\left(\frac{x-2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{M_2 = \frac{-x^2}{2} + 2.23x - \frac{2}{3}}$$

برش سوم : $4 < x < 5$

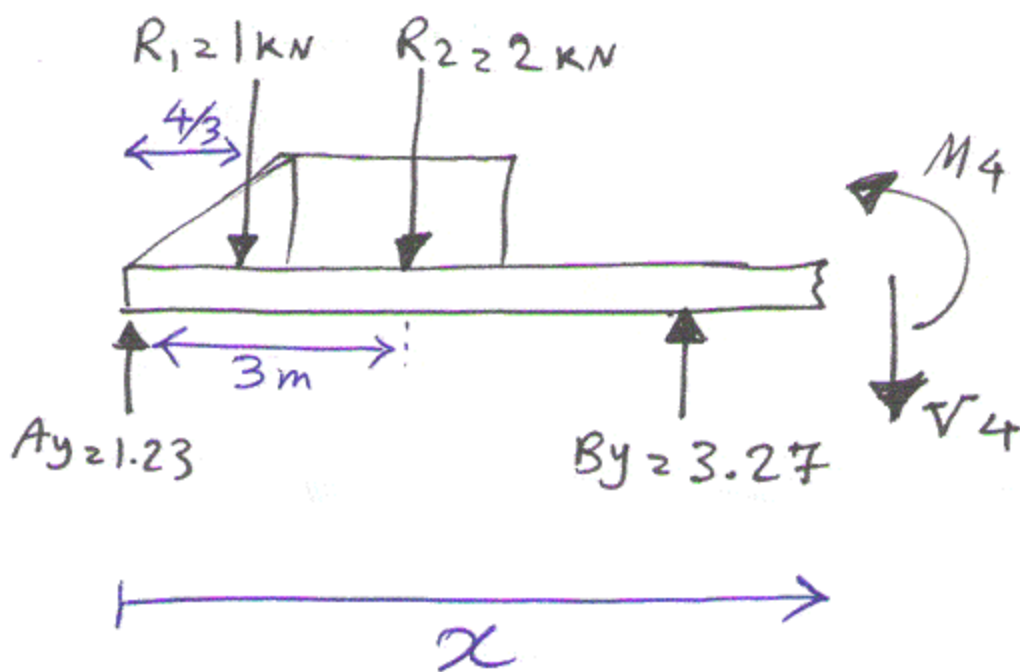


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_1 - R_2 - V_3 = 0$$

$$\rightarrow V_3 = 1.23 - 1 - 2 \rightarrow \boxed{V_3 = -1.77}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + \overset{1}{R_1}\left(x - \frac{4}{3}\right) + \overset{2}{R_2}(x-3) + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 1.23x - x + \frac{4}{3} - 2x + 6 \rightarrow \boxed{M_3 = -1.77x + 7.34}$$



برش چهارم: $5 < x < 6$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_1 - R_2 + B_y - V_4 = 0$$

$$\rightarrow V_4 = 1.23 - 1 - 2 + 3.27 \rightarrow \boxed{V_4 = 1.5}$$

$$+\curvearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_1(x - \frac{4}{3}) + R_2(x - 3) - B_y(x - 5) + M_4 = 0$$

$$= 0 \rightarrow M_4 = 1.23x - x + \frac{4}{3} - 2x + 6 + 3.27x - 5(3.27)$$

$$\rightarrow \boxed{M_4 = 1.5x - 9}$$

محل قطع شدن محور عمود بر محور V :

$$V_2 = -x + 2.23$$

$$V_2 = 0 \rightarrow x = 2.23 \text{ m}$$

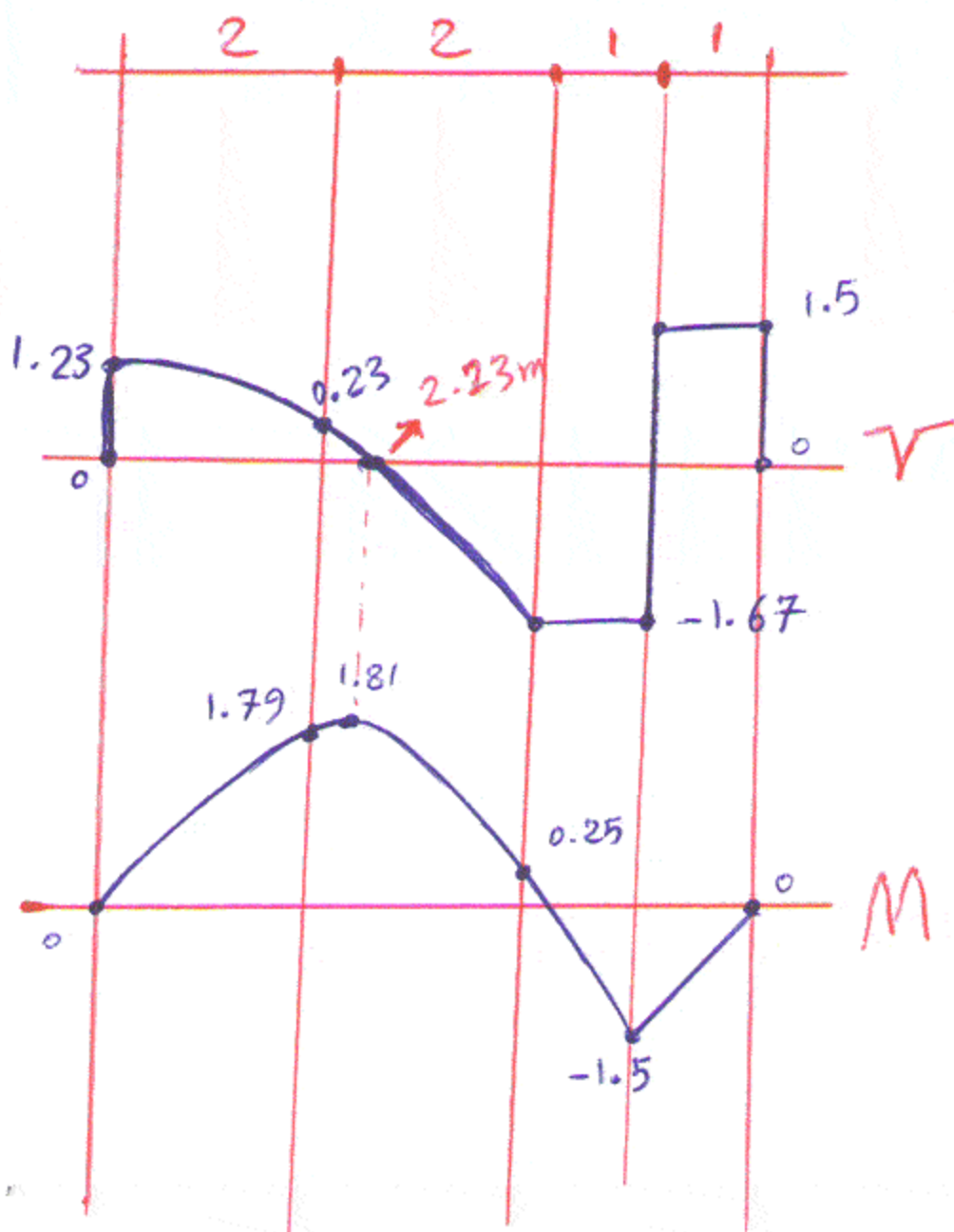
لکه در این نقطه مانند سهم لنگ

خمش داریم

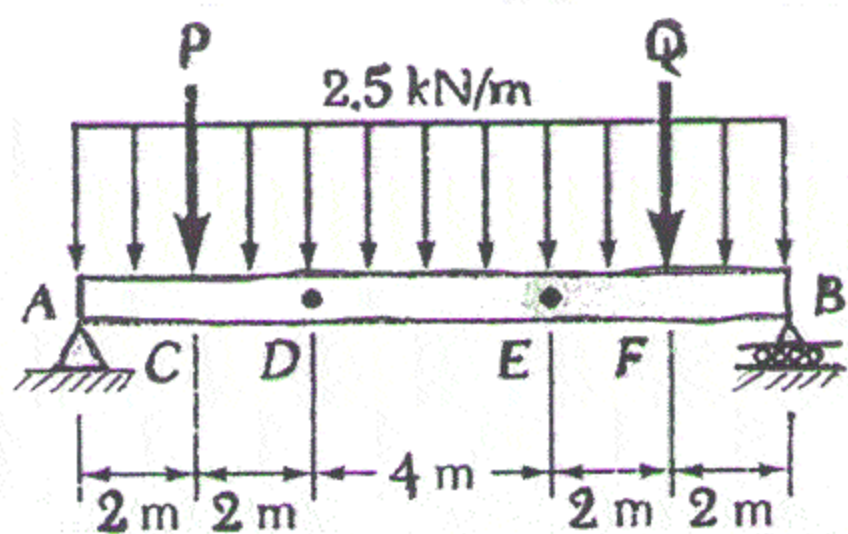
$$M_2 = \dots$$

$$x = 2.3 \rightarrow M_2 = 1.81 \text{ kN.m}$$

سین تیر باید برای این مقدار لنگ طراحی شود

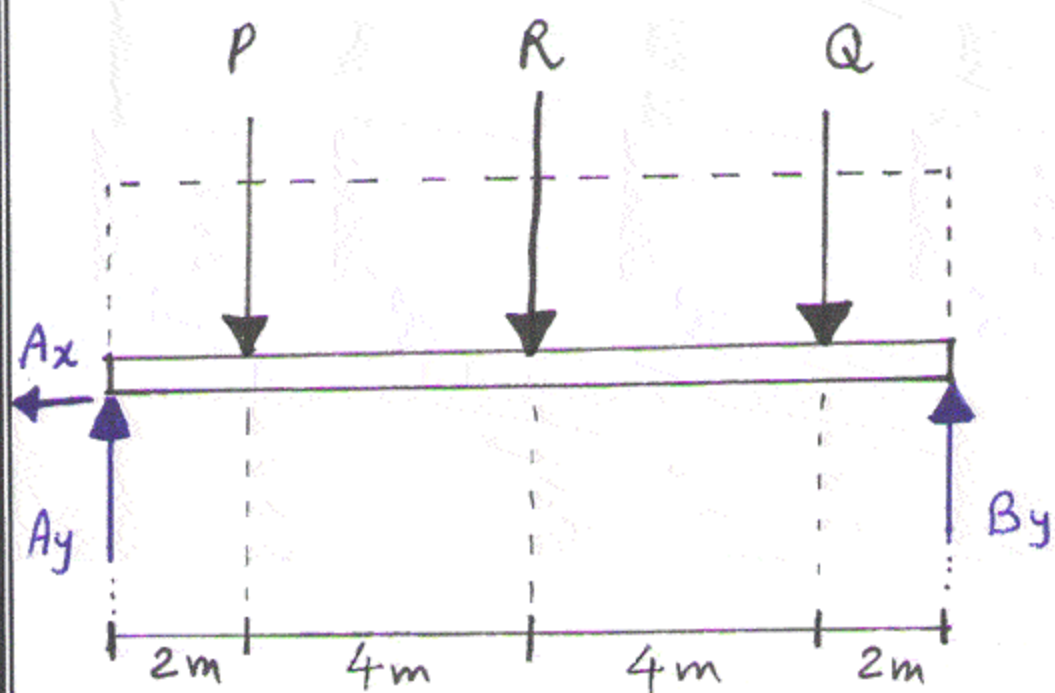


مثال



تیر AB مطابق شکل تحت تأثیر بار گسترده یکنواخت و دو نیروی مجهول P و Q قرار گرفته است. به طور تجربی معلوم شده است که گشتاور خمشی در نقطه D برابر با $+61 \text{ kN.m}$ و در نقطه E برابر با $+55 \text{ kN.m}$ است (الف) P و Q را پیدا کنید. (ب) نمودارهای برش و گشتاور خمشی تیر را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا دیاگرام آزاد تیر را رسم می کنیم، هم چنین می بایست بار گسترده مستطیلی با شدت $W = 2.5 \text{ kN/m}$ را با بار معادل R در محل اثر وسط مستطیل جایگزین کنیم. و با استفاده از معادلات تعادل ($\sum F_x$, $\sum F_y$ و $\sum M$) عکس العمل های (A و B) را به دست آوریم. و سپس در نقاط مورد نظر برش بزنیم؛



$$R = W \cdot x = (2.5)(12) =$$

$$\rightarrow \boxed{R = 30 \text{ kN}}$$

$$\overset{+}{\sum} F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\curvearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -P(2) - R(6) - Q(10) + B_y(12) = 0$$

$$\rightarrow -2P - 30(6) - 10Q + 12B_y = 0 \rightarrow \boxed{B_y = \frac{2P + 10Q + 180}{12}}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P - R - Q + B_y = 0 \rightarrow A_y = P + R + Q - B_y \rightarrow$$

$$\rightarrow Ay = P + 30 + Q - \left(\frac{2P + 10Q + 180}{12} \right) \rightarrow$$

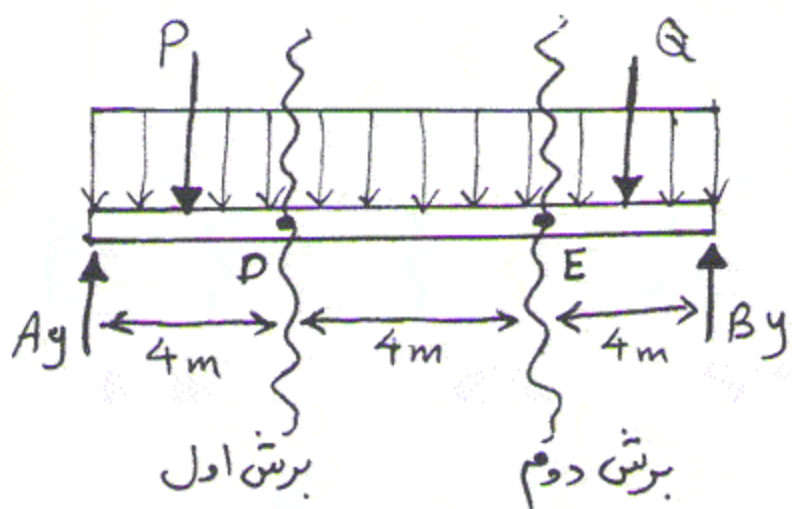
$$\rightarrow Ay = \underline{P + 30 + Q} - \underline{\frac{2P}{12}} - \underline{\frac{10Q}{12}} - \underline{\frac{180}{12}} \Rightarrow \boxed{\frac{5P}{6} + \frac{Q}{6} + 15 = Ay}$$

به این شکل تمامی مجهولات ما بر حسب P و Q خواهند بود. با توجه به این که در

مسئله ذکر شده گشتاور خمشی در نقطه D 61 kN.m ← و نقطه E 155 kN.m ← است

پس تیر را یکبار در نقطه D و یکبار در نقطه E برش می زنیم و معادله تعادل

$\sum M = 0$ در نقطه ی برش زده را می نویسیم تا مجهولات P و Q را بدست آوریم:

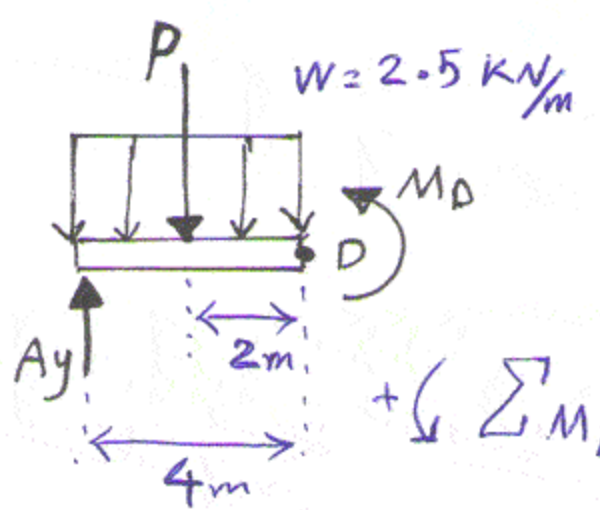


بعد از برش زدن، هر قطعه را بصورت جداگانه

می کشیم و معادله $\sum M$ در نقطه برش خورده را

می نویسیم تا گشتاور خمشی را در آن نقطه محاسبه کنیم.

برش اول را در نقطه D می زنیم:



و گشتاور خمشی M_D را از معادله $\sum M_D = 0$ بدست می آوریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \rightarrow -Ay(4) + P(2) + \underbrace{\underbrace{(2.5)(4)}_{\text{نیرو عمود}}}_{\text{بار گسترده مستطیلی}}(2) + M_D = 0$$

فاصله موثر

$$\rightarrow M_D = 4(Ay) - 2P - 10 \rightarrow M_D = 4\left(\frac{5P}{6} + \frac{Q}{6} + 15\right) - 2P - 20$$

$$\rightarrow M_D = \frac{10P}{3} + \frac{2Q}{3} + 60 - 2P - 20 \Rightarrow \boxed{M_D = \frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} + 40}$$

با توجه به این که در صورت مسئله ذکر شده $M_D = 61 \text{ KN}\cdot\text{m}$ است، پس مقدار M_D

را با رابطه‌ای که بدست آوردیم برابر قرار می‌دهیم تا معادله‌ای درجه اولی بر حسب

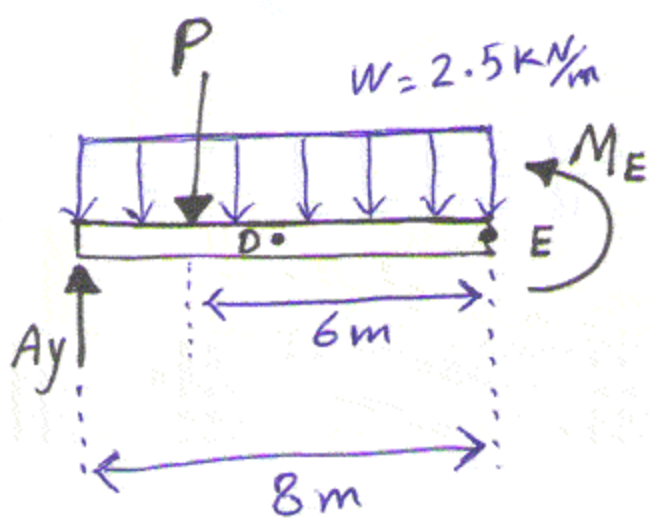
P و Q داشته باشیم.

$$M_D = \frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} + 40 = 61$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} = 21} \quad \text{معادله ①} \quad \checkmark$$

برش دوم را در نقطه‌ی E ایجاد می‌کنیم و روند مثبت

تغییر را برای این برش نیز تکرار می‌کنیم:



$$+\left(\sum M_E = 0 \rightarrow -A_y(8) + P(6) + \underbrace{\left(\frac{w \cdot x}{2}\right)}_{\text{فاصله بار معادل مستطیلی}}(4)\right)$$

$$+ M_E = 0 \rightarrow M_E = 8A_y - 6P - 80 \Rightarrow$$

$$\rightarrow M_E = 8\left(\frac{5P}{6} + \frac{Q}{6} + 15\right) - 6P - 80 \Rightarrow M_E = \frac{40P}{6} + \frac{8Q}{6} + 120$$

$$-6P - 80 \Rightarrow M_E = \frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} + 40 = 55 \quad \leftarrow \text{مقدار لنگر خنثی که صورت مسئله دارد}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} = 15} \quad \text{معادله ②} \quad \checkmark$$

معادله ① و ②، دو معادله و دو مجهول P و Q : ضرب در ② -

$$\begin{cases} \frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} = 21 \\ \frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{8P}{3} - \frac{4Q}{3} = -42 \\ \frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} = +15 \end{cases}$$

جمع می‌کنیم:

$$\sqrt{-\frac{8P}{3} + \frac{2P}{3} = -27}$$

$$\rightarrow \frac{-6P}{3} = -27 \rightarrow 2P = 27 \rightarrow P = \frac{27}{2} = 13.5 \text{ KN}$$

$$\boxed{P = 13.5 \text{ KN}}$$

مقدار $P = 13.5$ را دررسی از معادلات ① یا ② گذاشته و Q را بدست می آوریم:

$$\textcircled{1} \quad P = 13.5 \rightarrow \frac{4(13.5)}{3} + \frac{2Q}{3} = 21 \rightarrow 18 + \frac{2Q}{3} = 21 \rightarrow \frac{2Q}{3} = 3$$

$$\rightarrow Q = \frac{3 \times 3}{2} = 4.5$$

$$\rightarrow \boxed{Q = 4.5 \text{ kN}}$$

مقدار عکس العمل های تکیه A_y و B_y را نیز با گذاشتن مقدار P و Q می یابیم:

$$A_y = \frac{5P}{6} + \frac{Q}{6} + 15 \rightarrow A_y = \frac{5(13.5)}{6} + \frac{4.5}{6} + 15 = 27$$

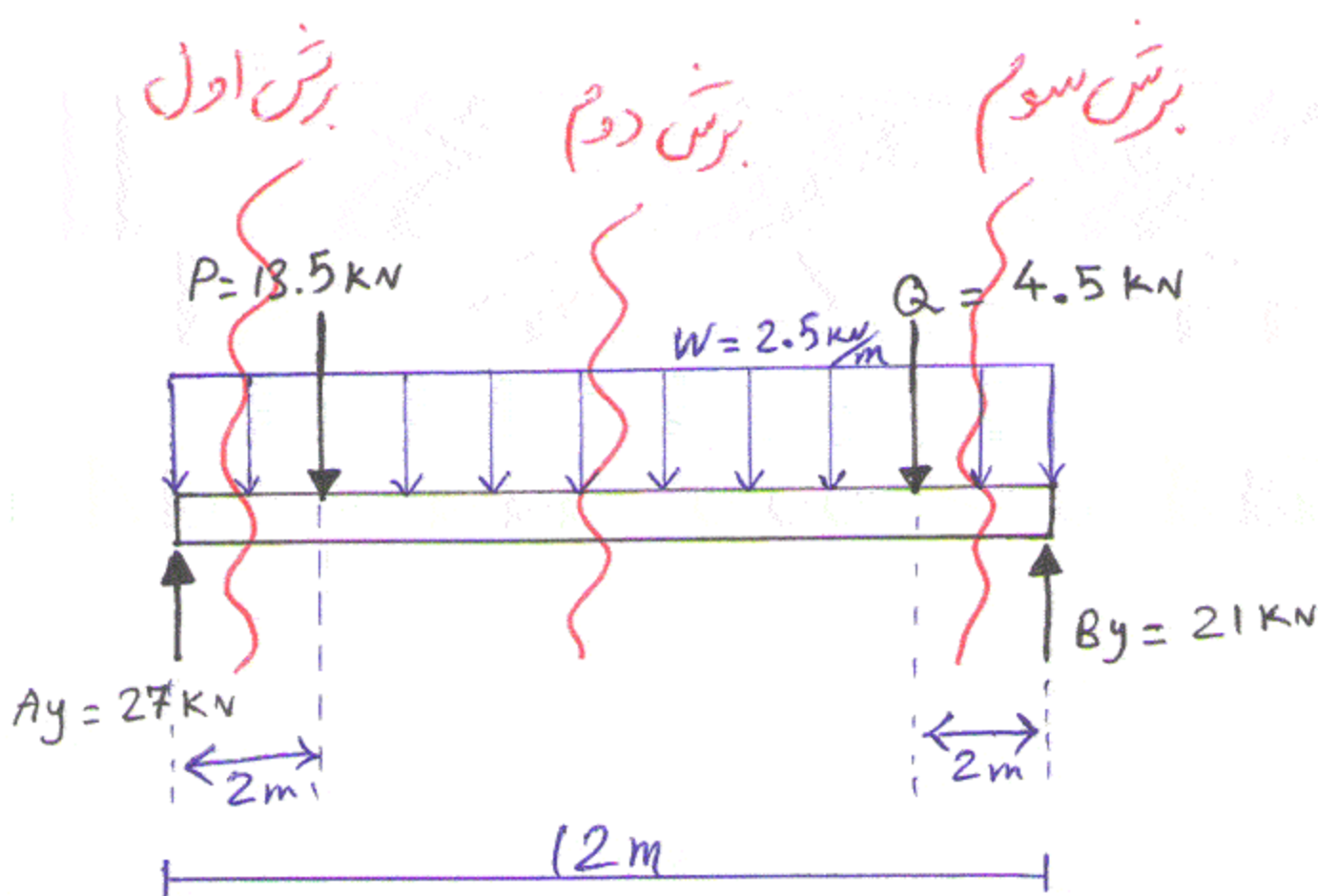
$$\rightarrow \boxed{A_y = 27 \text{ kN}}$$

$$B_y = \frac{2P + 10Q + 180}{12} \rightarrow B_y = \frac{2(13.5) + 10(4.5) + 180}{12} = 21$$

$$\rightarrow \boxed{B_y = 21 \text{ kN}}$$

هم اکنون با رسم دیاگرام آزاد تیر و عمل برش ها

به ترتیب دیاگرام نیروهای برش و گشتاور کشش می پردازیم؟

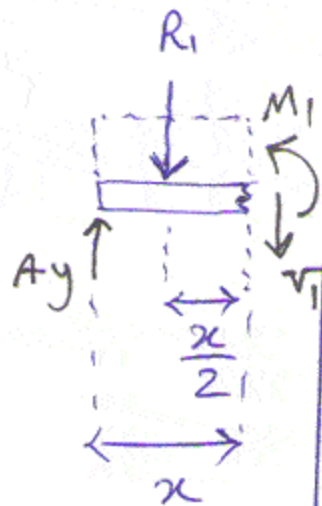
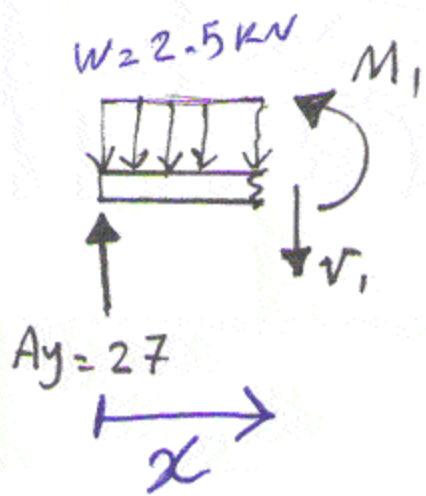


همیشه بین تغییرات نیروها برش
می زنیم. جایی که عکس العمل بوده
و سپس نیرو می زنیم
در واقع میان دو تغییر نیرو و برش
می زنیم.

برش اول: بین دو نیروی عکس‌العین یکدیگر A تا A (نیروی A_y) و نیروی (P) قرار می‌گیرد

پس محل برش بین شروع $(x=0)$ و نیروی $P \leftarrow (x=2)$ است و بازه ما

من شود: $0 < x < 2$



نکته: نیروی معادل بار گسترده مستطیلی را می‌توان بصورت بار معادل متمرکز زیر نوشت:

$$R_1 = W \cdot x = (2.5)(x)$$

و محل اثر آن نصف فاصله یعنی $\frac{x}{2}$ است.

معادلات تعادل را برای این قطعه برش

خورده می‌نویسیم؛ چون از مابین نیروهای محور (P) را نمی‌خواهد پس $\sum F_x$ را نمی‌نویسیم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow Ay - (2.5x) - V_1 = 0 \rightarrow \boxed{V_1 = -2.5x + 27}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -Ay(x) + (2.5x)\left(\frac{x}{2}\right) + M_1 = 0$$

فاصله‌ی بار معادل بار گسترده مستطیلی تا محل برش (نقطه‌ی تکیه‌گیری)

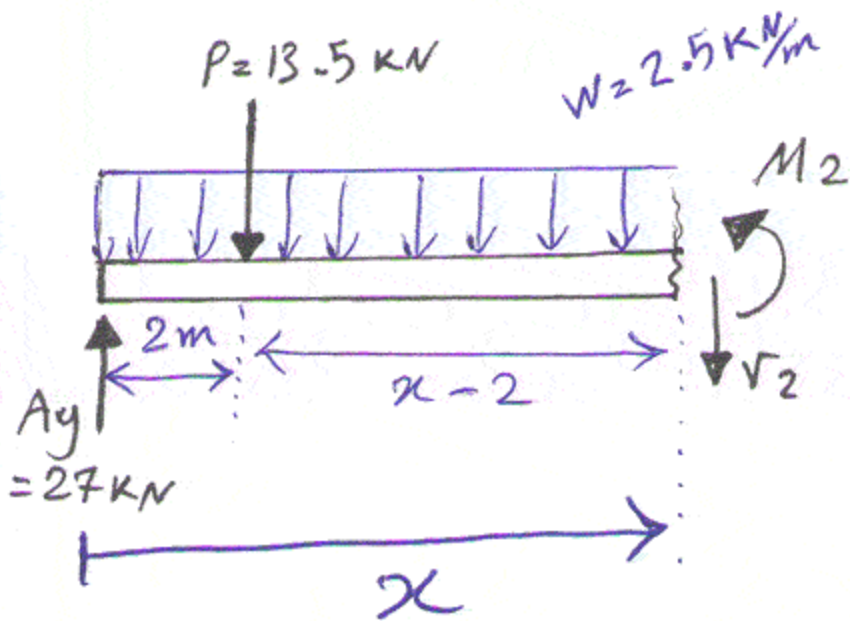
$$\rightarrow \boxed{M_1 = \frac{-2.5x^2}{2} + 27x}$$

همان‌طور که می‌بینید برای تشخیص درستی کار می‌توان از معادله‌ی M_1 نسبت به x

مشتق گرفت و این مشتق با V_1 برابر بود یعنی کارمان درست بوده است.

$$= M'_1 = x \left(\frac{-2.5x'}{2} \right) + 27 = -2.5x + 27 = V_1 \quad \checkmark$$

برش دوم: بین نیروهای P و Q یعنی بین $(x=2m)$ و $(x=10m)$: $2 < x < 10$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P - R_2 - V_2 = 0$$

$$\rightarrow 27 - 13.5 - (2.5x) = V_2$$

$$\rightarrow \boxed{V_2 = -2.5x + 13.5}$$

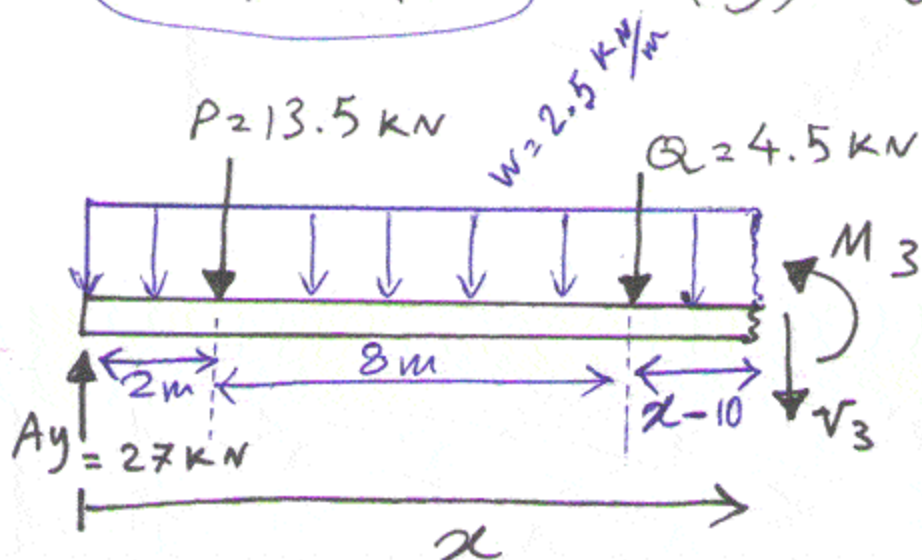
$$+\downarrow \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + P(x-2) + R_2\left(\frac{x}{2}\right) + M_2 = 0$$

$$\rightarrow M_2 = 27x - 13.5(x-2) - (2.5x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\rightarrow M_2 = 27x - 13.5x + 27 - \frac{2.5x^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{M_2 = \frac{-2.5x^2}{2} + 13.5x + 27}$$

برش سوم: در میان نیروی Q و نیروی عکس العمل B (B_y) $10 < x < 12$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P - Q - R_3 - V_3 = 0$$

$$\rightarrow V_3 = 27 - 13.5 - 4.5 - (2.5x)$$

$$\rightarrow \boxed{V_3 = -2.5x + 9}$$

$$+\downarrow \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + 13.5(x-2) + 4.5(x-10) + (2.5x)\left(\frac{x}{2}\right) + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 27x - 13.5x + 27 - 4.5x + 45 - \frac{2.5x^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{M_3 = \frac{-2.5x^2}{2} + 9x + 72}$$

معادلات و بازه‌هایشان را می‌نویسیم و در ابتدا انتهای هر بازه x را به معادلات می‌دهیم تا مقادیر ارتفاع دیوار را که بر حسب V (نیروی برشی) یا بر حسب M (لنگر خمشی) است به دست آید:

بازه اول: $0 < x < 2$

$$V_1 = -2.5x + 27$$

V_1	27 kN	22 kN
x	0 m	2 m

$$M_1 = \frac{-2.5}{2}x^2 + 27x$$

M_1	0 kN.m	49 kN.m
x	0 m	2 m

بازه دوم: $2 < x < 10$

$$V_2 = -2.5x + 13.5$$

V_2	8.5 kN	-11.5 kN
x	2 m	10 m

$$M_2 = \frac{-2.5}{2}x^2 + 13.5x + 27$$

M_2	49 kN.m	37 kN.m
x	2 m	10 m

بازه سوم: $10 < x < 12$

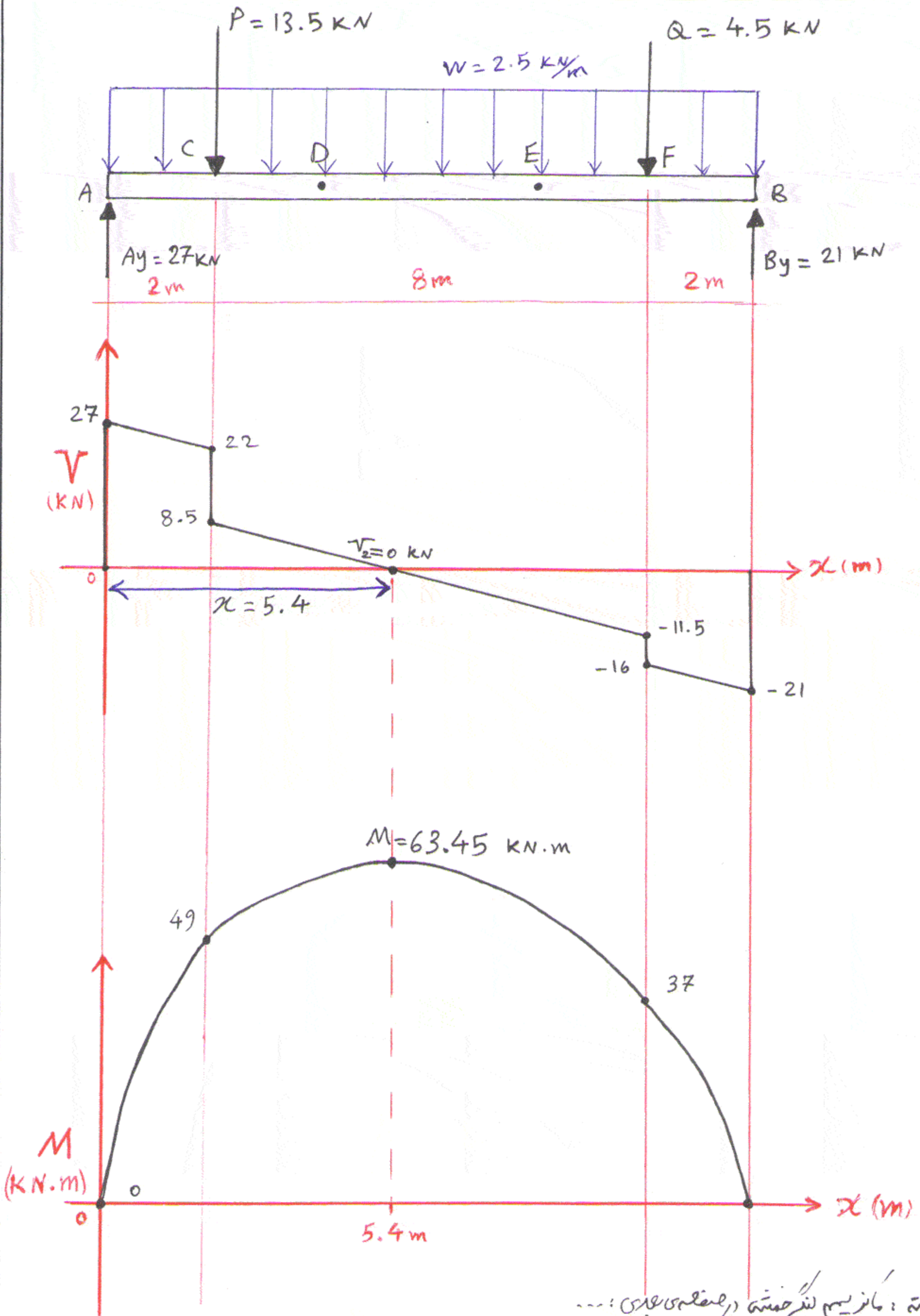
$$V_3 = -2.5x + 9$$

V_3	-16 kN	-21 kN
x	10 m	12 m

$$M_3 = \frac{-2.5}{2}x^2 + 9x + 72$$

M_3	37 kN.m	0 kN.m
x	10 m	12 m

نکته: علامت منفی ضرب x در معادله در هر یک یعنی یک منفی و خط رو به پایین و در x^2 یعنی منفی تقه رو به پایین.



نکته: مانیسم کنتر حسنه (رسمه ای بوی) :

نکته: برای پیدا کردن ماکزیمم لنگر خمشی در یک بازه x نقطه ای نه نمودار برش محور x را قطع کرده رسیدیم. در آن نقطه نیروی برش صفر می شود و لنگر خمشی ماکزیمم می شود و تیر را باید برای تحمل این لنگر خمشی M_{max} طراحی کرد.
در بازه ی دوم:

$$V_2 = -2.5x + 13.5$$

$$V_2 = 0 \rightarrow -2.5x + 13.5 = 0 \rightarrow x = \frac{-13.5}{-2.5} = 5.4 \text{ m}$$

یعنی در فاصله ی $(x = 5.4 \text{ m})$ در تیر لنگر خمشی ماکزیمم می شود ←

$$\xrightarrow{x = 5.4 \text{ m}} M_2 = \frac{-2.5x^2}{2} + 13.5x + 27$$

$$M_2 \stackrel{x=5.4}{=} \frac{-2.5(5.4)^2}{2} + 13.5(5.4) + 27 = 63.45 \text{ KN.m}$$

پس ماکزیمم لنگر خمشی در نمودار لنگر خمشی 63.45 KN.m است.