معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

مشتق نسبی یا جزئی یا پاره ای:

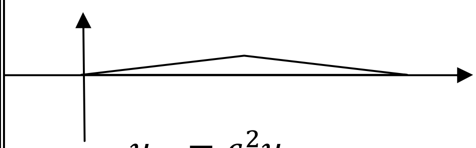
فرض کنید $u(x, y, z)$ یک تابع از متغیرهای مستقل x و y و z باشد. در این صورت مشتق نسبی یا جزئی یا پاره ای u نسبت به x در نقطه (x, y, z) برابر است با:

$$D_x u = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y, z) - u(x, y, z)}{h}$$

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل جزیی

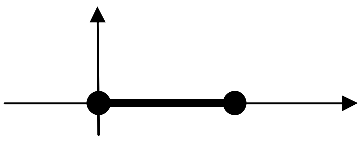
$$F\left(\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\text{متغیرهای مستقل}}, \underbrace{u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{متغیر وابسته} \equiv \text{مجهول}}, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots\right) = 0$$

مثال: معادله یک بُعدی ارتعاش یک سیم، c ثابت است:



$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad , \qquad u = u(t, x) \qquad t \geq 0$$

مثال: معادله یک بُعدی گرما یا انتقال حرارت، k ثابت است:



$$u_t = k u_{xx}$$

که در آن $u = u(t, x)$ حرارت نقطه x در لحظه t>0 می باشد.

مثال: معادله لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

مثال: معادله دو بُعدی گرما یا انتقال حرارت (ورقه فلزی) ، k ثابت است:

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$$

مثال: حرارت جسم سه بُعدی

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

مثال: معادله پواسن:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

مثال: معادله تلگراف:

$$u_{xx} = u_{yy} + \alpha u_t + \beta u$$

معمولاً متغیر t در معادلات دیفرانسیل جزئی نشاندهنده زمان بوده و غیر منفی می باشد.

تعریف : جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی تابعی است که خود و مشتقات نسبی آن در معادله صدق کند .

جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی عبارت است از جوابی که شامل توابع دلخواه به تعداد مرتبه معادله باشد .

یک جواب خصوصی معادله عبارت است از جوابی که با انتخاب تابع خاصی از توابع دلخواه بدست آید .

مثال:

$$\boldsymbol{u_{xy} = 0}$$

$$u_{xy} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int (u_x)_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_x = f_1(x)$$

$$\Longrightarrow \quad u = \int f_1(x)\,dx + h(y) \quad \Longrightarrow \quad u = f(x) + h(y)$$

که در آن f(x) و h(y) توابعی دلخواه و یک متغیره می باشند.

مثال:

$$\begin{cases} u_{xx} = 1 \\ u = u(x,y) \end{cases}$$

$$u_{xx} = 1 \quad \Longrightarrow \quad u_x = x + h(y) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{x^2}{2} + xh(y) + g(y)$$

- بالاترین مشتق جزیی موجود در معادله را مرتبه معادله می‌نامیم
- درجواب عمومی هر معادله مشتق جزیی مرتبه n، n تابع دلخواه(نامشخص) موجود است.

مثال:

$$\begin{cases} u_{xx} = 1 \\ u = u(x,y,z) \end{cases}$$

$$u_{xx} = 1 \implies u_x = x + h(y,z) \implies u = \frac{x^2}{2} + xh(y,z) + g(y,z)$$

مثال: مطلوب است حل معادله $u_{xy} + u_x = e^x \sin y$

حل: قرار دهید: $u_x = v$ در این صورت داریم:

$$v_y + v = e^x \sin y$$

که یک معادله دیفرانسیل با تابع مجهول v و متغیر مستقل y می باشد. در اینجا x یک ثابت در نظر بگیرید. لذا جواب بصورت زیر می باشد:

$$v = c_1(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y$$

که در اینجا c(x) ثابت انتگرال به x وابسته می باشد. پس داریم:

$$u_x = v = c_1(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y$$

$$\implies \quad u(x,y) = c(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y + c_2(y)$$

نکته: یک معادله را خطی گوئیم اگر نسبت به مجهول خطی باشد(فقط جمع و مضرب داشته باشد). به عبارتی دیگر نسبت به هر یک از متغیرهای u و u_x و u_y و ... خطی باشد.

مثال:

$u_{tt}=c^2u_{xx}$ خطی می باشد

$u_xu_y= u_{xy}$ غیرخطی می باشد

$xu_x=u_{xy}$ خطی می باشد.

معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه اول خطی

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه اول بصورت زیر می باشد:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \qquad (1)$$

که درآن z متغیر وابسته و x و y متغیرهای مستقل می باشند. برای حل معادله فوق می توان یکبار تغییرات z را فقط در جهت x ها در نظر گرفت. به عبارتی دیگر میزان تغییرات در جهت y ها را صفر در نظر گرفت ($\frac{\partial z}{\partial y}=0$). و بار دیگر تغییرات z را فقط در جهت y ها در نظر گرفت و میزان تغییرات در جهت x ها را صفر در نظر گرفت ($\frac{\partial z}{\partial x}=0$). خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \xrightarrow{(1)} \quad P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=R(x,y,z) \implies \frac{dz}{R(x,y,z)}=\frac{dx}{P(x,y,z)}\\
&\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \xrightarrow{(1)} \quad Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \implies \frac{dz}{R(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}
\end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies \quad \frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (2)$$

حال اگر $u_1(x,y,z)=c_1$ و $u_2(x,y,z)=c_2$ دو جواب مستقل و عمومی دستگاه (2) باشند، آنگاه تقاطع آنها حل z را بدست می دهد. برای بدست آوردن این تقاطع باید رابطه $c_1=f(c_2)$ را تشکیل داد.

مثال: معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=x$$

$$(2) \quad \implies \quad \frac{dx}{1}=\frac{dy}{2}=\frac{du}{x} \quad \implies \quad \begin{cases} dy=2dx \implies y=2x+c_1 \implies c_1=y-2x \\ du=x\,dx \implies u=\dfrac{x^2}{2}+c_2 \implies c_2=u-\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$$

حال با تشکیل رابطه $c_2=f(c_1)$ داریم:

$$c_2=f(c_1) \implies u-\frac{x^2}{2}=f(y-2x) \implies u=f(y-2x)+\frac{x^2}{2}$$

تمرین: معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید:

معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم خطی

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G$$

که در آن $A_{ji}=A_{ij}$ و B_i ها و F و G توابعی برحسب x_1 ، ... ، x_n می باشند.

اگر در معادله فوق $G=0$ باشد معادله را همگن (متجانس) در غیر این صورت ناهمگن (نامتجانس) گوئیم.

معادله جزیی مرتبه دوم دو متغیره:

$$\begin{cases} Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

که در آنها A , B , C , D , E , F توابعی بر حسب X , Y می باشند.

نکته: همیشه فرض میکنیم u_x و u_y توابعی پیوسته‌اند

نام گذاری

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)\,C(x,y)$$

- اگر $\Delta(x,y) > 0$ باشد معادله (۱) را در نقطه *(x,y)* هذلولی می‌نامیم.
- اگر $\Delta(x,y) = 0$ باشد معادله (۱) را در نقطه *(x,y)* سهموی می‌نامیم.
- اگر $\Delta(x,y) < 0$ باشد معادله (۱) را در نقطه *(x,y)* بیضوی می‌نامیم.

مثال: درمعادله ارتعاش داریم

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Longrightarrow \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta(t,x) = 0 - 4.1.(-c^2) = 4c^2 > 0$$

لذا تابع ارتعاش $u(t,x)$ در تمام نقاط هذلولی می‌باشد.

مثال:

$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$$

$$\Delta(x,y) = 0 - 4y^2(-x^2) = 4x^2y^2$$

لذا تابع $u(t,x)$ در تمام نقاط بجز نقاط روی محورهای مختصات هذلولی می باشد و در روی محورهای مختصات سهموی می باشد.

مثال:

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$$

$$\Delta(x,y) = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

لذا تابع $u(x,y)$ درتمام نقاط سهموی است

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

در این بخش به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می پردازیم: برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی باید بسته به نوع تکنیک های متفاوتی را بکار گرفت. در این بخش سه تکنیک جواب عمومی مسئله، حل مسائل کلاسیک بوسیله سری فوریه، و تکنیک جداسازی می پردازیم.

روش اول: محاسبه جواب عمومی

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} u_x = u_y \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad \alpha = x + y \quad , \quad \beta = x - y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = u_\alpha + u_\beta \\ u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha - u_\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u_\alpha + u_\beta = u_\alpha - u_\beta \quad \Rightarrow \quad u_\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad u = f(\alpha) = f(x+y)$$

لذا جواب عمومی بصورت $u = f(x+y)$ می باشد.

■

برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه دوم خطی بصورت قضیه زیر عمل می نماییم:

قضیه: در معادله

$$\begin{cases} Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \\ u=u(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

حل دستگاه معادلات به $\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ وابسته می شود که اگر جواب عمومی آنرا را بصورت $\varphi_1(x,y)=c_1$ و $\varphi_2(x,y)=c_2$ بنامیم در این صورت سه حالت پیش می آید:

۱) اگر معادله (۱) هذلولی باشد$(\Delta>0)$ ، آنگاه تغییر متغیر $\begin{cases}\alpha=\varphi_1(x,y)\\ \beta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$ معادله (۱) را به فرم زیر (فرم کانونی) :

$$u_{\alpha\beta}=H_1(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$$

تبدیل می نماید.

۲) اگر معادله سهموی باشد$(\Delta=0)$ ، آنگاه تغییر متغیر $\begin{cases}\alpha=\varphi_1(x,y)\\ \beta=y\end{cases}$ معادله را به فرم زیر (فرم کانونی) :

$$u_{\beta\beta}=H_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$$

تبدیل می نماید.

۳) اگر معادله بیضوی باشد$(\Delta<0)$ ، آنگاه دستگاه کمکی جوابهای مزدوج مختلط دارد. در این صورت تغییر متغیر $\begin{cases}\alpha=\frac{\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)}{2}\\ \beta=\frac{\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y)}{2i}\end{cases}$ معادله را به فرم زیر (فرم کانونی) :

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=H_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$$

تبدیل می نماید.

■

مثال: جواب عمومی معادله زیر را به دست اورید.

$$\overbrace{x}^{A} u_{xx} + \overbrace{2x^2}^{B} u_{xy} = u_x - 1 \qquad (*)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4x^4 - 0 > 0$

لذا معادله در تمام نقاط بجز در محور x=0 (محور y ها) هذلولی است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^4}}{2x} = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad y = c_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = 2x \; \rightarrow \; y = x^2 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = y - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = u_\alpha \times 0 + u_\beta(-2x) \\ u_{xx} = -2u_\beta + 4x^2 \times u_{\beta\beta} \end{cases}$$

$$(u_\beta)_x = (u_\beta)_\alpha \alpha_x + (u_\beta)_\beta \beta_x = -2x u_{\beta\beta}$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = \left((-2x)u_\beta\right)_y = (-2x)\left(u_\beta\right)_y = -2x\left[\left(u_\beta\right)_\alpha \alpha_y + \left(u_\beta\right)_\beta \beta_y\right]$$
$$= -2x\left[u_{\beta\alpha} + u_{\beta\beta}\right]$$

$$(*) \;\Rightarrow\; x(-2u_\beta + 4x^2 u_{\beta\beta}) + 2x^2(-2x)\left[u_{\beta\alpha} + u_{\beta\beta}\right] = -2xu_\beta - 1$$

$$\Rightarrow \quad -2xu_\beta + 4x^3 u_{\beta\beta} - 4x^3 u_{\beta\alpha} - 4x^3 u_{\beta\beta} = -2xu_\beta - 1$$

$$\Rightarrow \quad -4x^3 u_{\beta\alpha} = -1 \;\Rightarrow\; u_{\beta\alpha} = \frac{1}{4x^3} = \frac{1}{4(\alpha-\beta)^{\frac{3}{2}}}$$ **فرم کانونی معادله:**

$$u_{\beta\alpha} = \frac{1}{4x^3} = \frac{1}{4(\alpha-\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xrightarrow{\int du} u_\beta = \frac{1}{4}\int \frac{da}{(a-\beta)^{\frac{3}{2}}} + f_{1(}\beta) = -\frac{2}{4} * \frac{1}{(\alpha-\beta)^{\frac{1}{2}}} + f_{1(}\beta)$$

$$\mathrm{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(a-\beta)^{\frac{1}{2}}} d\beta + \underbrace{\int f_{1(}\beta)\, d\beta}_{f(\beta)} + g(\alpha)$$

$u = (a-\beta)^{\frac{1}{2}} + f(\beta) + g(\alpha)$

$u = |x| + f(y - x^2) + g(y)$ **جواب عمومی معادله:**

■

مثال (معادله ارتعاش) : جواب عمومی معادله را به دست اورید.

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy \pm \sqrt{\Delta}}{2x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y}{x} \\ \beta = y \end{cases}$$

$$u_x = u_a.\alpha_x + u_\beta.\beta_x = -\frac{y}{x^2}u_a$$

$$u_{xx} = (-\frac{y}{x^2}u_a)_x = \frac{2y}{x^3}u_a - \frac{y}{x^2}(u_a)_x = \frac{2y}{x^3}u_a + \frac{y^2}{x^4}u_{aa}$$

$$(u_a)_x = u_{aa}a_x + u_{a\beta}\beta_x = -\frac{y}{x^2}u_{aa}$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = (-\frac{y}{x^2}u_a)_y = -\frac{1}{x^2}u_a - \frac{y}{x^2}u_{ay}$$

$$(u_\alpha)_y = u_{aa}\alpha_y + u_{ab}\beta_y = \frac{1}{x}u_{aa} + u_{ab}$$

$$u_{xy} = -\frac{1}{x^2}u_a - \frac{y}{x^3}u_{aa} - \frac{y}{x^3}u_{ab}$$

$$u_y = u_\alpha\alpha_y + u_\beta\beta_y = \frac{u_\alpha}{x} + u_\beta$$

$$u_{yy} = (\frac{u_\alpha}{x} + u_\beta)_y = \frac{1}{x}u_{\alpha y} + u_{\beta y}$$

$$u_{\alpha y} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y = \frac{u_{\alpha\alpha}}{x} + u_{\alpha\beta}$$

$$u_{\beta y} = u_{\beta\alpha}\alpha_y + u_{\beta\beta}\beta_y = \frac{u_{\beta\alpha}}{x} + u_{\beta\beta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\alpha\alpha} + 2\frac{u_{\alpha\beta}}{x} + u_{\beta\beta}$$

لذا داریم:

$$\frac{2y}{x}u_\alpha + \frac{y^2}{x^3}u_{\alpha\alpha} - \frac{2y}{x}u_\alpha - \frac{2y}{x^2}u_{\alpha\alpha} - \frac{2y}{x}u_{\alpha\beta} + \frac{y^2}{x^2}u_{\alpha\alpha} + \frac{2y^2}{x}u_{\alpha\beta} + y^2u_{\beta\beta} = 0$$

$u_{\beta\beta} = 0$ فرم کانونی معادله: $\Rightarrow \quad u_\beta = f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u} = \beta\, \mathrm{f}(\alpha) + \mathrm{g}(\alpha)$

$$\mathrm{u} = \beta\, \mathrm{f}(\alpha) + \mathrm{g}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u} = \mathrm{y}\, \mathrm{f}(\tfrac{y}{x}) + g(\tfrac{y}{x})$$

■

مثال (معادله ارتعاش) : جواب عمومی معادله را به دست اورید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(1) * (-c^2) = 4C^2 > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 2c}{2} \begin{cases} +c \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = c \quad \Longrightarrow \quad x - ct = c_1 \\ -c \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = -c \quad \Longrightarrow \quad x - ct = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = x - ct \\ \beta = x + ct \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \quad u_{\alpha\beta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = f(\alpha) + g(\beta) \quad \Longrightarrow \quad u = f(x - ct) + g(x + ct)$$

سری فوریه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی

حل مسایل مقدار مرزی اولیه:

نکته: شرایط مرزی:

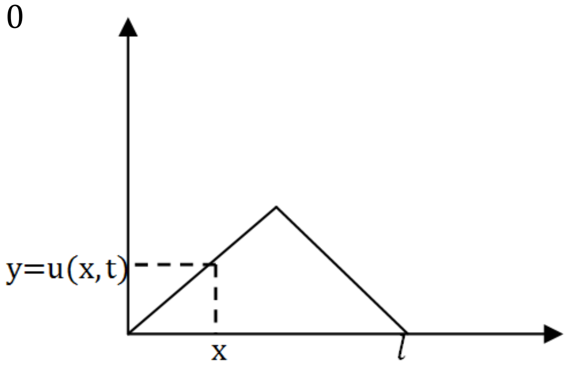
به شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزئی آن را در نقاط مرزی نشان می دهد، شرایط مرزی گفته می شود.

نکته: شرایط اولیه:

به شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزئی آنرا در یک ناحیه داده شده در زمان شروع (t=0)، را نشان دهد شرایط اولیه گفته می شود.

مثال: (موج)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < 2l \;; t > 0 \\ u(0;t) = 0 & t > 0 \\ u(l;t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < l \\ u_t(x,0) = g(x) & \end{cases}$$



نکته: مسئله دقیقاً یک جواب دارد.

روش جداسازی:

نکته:

هر معادله همگن با شرایط مرزی همگن را می توان از طریق جداسازی پارامترها حل نمود.

فرض کنید $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \quad T''(t)X(x) = C^2 X''(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

(λیک عد ثابت حقیقی می باشد.)

$$\Rightarrow \begin{cases} X''^{(x)} - \lambda X(x) = 0 & 0 < x < l \\ T'' - C^2 \lambda T = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(t) = 0 \quad \forall\, t > 0 \quad \text{غ ق ق} \\ \text{يا} \\ X(0) = 0 \end{cases} \\ u(l,t) = 0 = X(l)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(t) = 0 \quad \forall\, t > 0 \quad \text{غ ق ق} \\ \text{يا} \\ X(l) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

معادله مفسر:

$$S^2 - \lambda = 0 \qquad \text{If } \lambda > 0 \quad : \begin{cases} S = \pm\sqrt{\lambda} \qquad X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ X(0) = A + B = 0 \qquad B = -A \\ X(l) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} = 0 \end{cases}$$

$0 = \mathrm{A}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{X(x)} = 0$ **در این حالت تابع ثابت صفر جواب است.**

$$\text{If } \lambda = 0 \Rightarrow X''^{(x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A + BX \\ X(0) = 0 \qquad A = 0 \\ X(l) = 0 \quad Bl = 0 \quad B = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X(x)} = 0$$

$$\text{If } \lambda < 0 \Rightarrow \mathrm{S} = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\, x + B\sin\sqrt{-\lambda}\, x \\ X(0) = 0 \quad ; A = 0 \\ X(l) = 0 = B\sin\sqrt{-\lambda}\, l \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{-\lambda} l = 0 \quad \text{لِ} \end{cases}$$

$\sqrt{-\lambda} l = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = -(\frac{n\pi}{l})^2$ مقادیر ویژه:

$\Rightarrow \quad X_{\mathrm{n}} = \sin\frac{n\pi}{l}x$ توابع ویژه:

$$T''^{(t)} + C^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \mathrm{T(t)} = 0 \quad \Rightarrow T_n(t) = c_n \cos\frac{n\pi c}{l}\,\mathrm{t} + d_n \sin\frac{n\pi c}{l}\,\mathrm{t}$$

لذا کلی ترین جواب مسئله بصورت زیر در می آید:

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

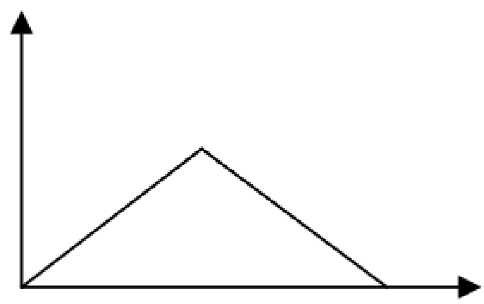
با اعمال شرایط مرزی می توان ضرایب مجهول a_n و b_n را بصورت زیر محاسبه نمود:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x \quad , \quad 0<x<l \quad \Rightarrow \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{n\pi c}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad 0<x<l \;\Rightarrow\; b_n\frac{n\pi c}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l u_t(x,0)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

تمرین: با توجه به جواب بدست آمده در مثال قبلی مسئله مقدار اولیه زیررا حل نمایید:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \\ u(x,0)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases}$$



حل:

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos\frac{n\pi c}{l}t\;+b_n\,sin\frac{n\pi c}{l}t)\;sin\frac{n\pi x}{l} \\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,sin\frac{n\pi x}{l}\,d_x \\ b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\,sin\frac{n\pi x}{l}\,d_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\,sin\,n\pi x\,d_x=0$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,sin\frac{n\pi x}{l}\,d_x \;=2\int_0^{½}x\,sin\,\pi x\,d_x\;+2\int_{½}^{1}(1-x)\,sin\,\pi x\,d_x=\cdots$$

$$\Rightarrow\; u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,cos\,n\pi t\;\,sin\,n\pi x$$

مثال: مسئله مقدار مرزی اولیه حرارت زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} u_t = k\, u_{xx} & 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{حرارت اولیه :} \\ u(0,t) = 0 & \\ u(1,t) = 0 & \end{cases}$$

حل:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \;\Rightarrow\; XT' = kX''T$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda x = 0 & 0 \le x < l \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = sin(\frac{n\pi x}{l}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T' = k\lambda T \;\Rightarrow T' = -k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T(t) \;\Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

لذا تنها جواب مسئله مقدار مرزی اولیه و حرارت بصورت زیر می باشد:

$$\boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} sin(\frac{n\pi x}{l}) \\ u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sin(\frac{n\pi x}{l}) \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\, sin\frac{n\pi x}{l}\, d_x \end{gathered}}$$

■

مثال:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le l \\ u_t\,(x,0) = g(x) & 0 \le x \le l \\ u_x(0,t) = 0 \quad t \ge 0 & \Rightarrow u_x\,(0,t) = X'(0)\,T(t) = 0 \\ u_x\,(l,t) = 0 \quad t \ge 0 & \Rightarrow u_x\,(l,t) = X'(\,l)\,T(t) = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{u(x,t) = X(x)T(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2\,T} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}\,x} + Be^{-\sqrt{\lambda}\,x} \\ X'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}A - B\sqrt{\lambda} \Rightarrow A = B \\ X'(l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}Ae^{\sqrt{\lambda}\,l} - \sqrt{\lambda}Be^{-\sqrt{\lambda}\,l} \Rightarrow A\sqrt{\lambda}\left(e^{\sqrt{\lambda}\,l} - e^{-\sqrt{\lambda}\,l}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \end{cases}$$

لذا در حالت $\lambda > 0$ جواب بدست نمی آید.

$$\lambda = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A + Bx \\ X'(0) = 0 = B \\ X'(l) = 0 = B \end{cases} \Rightarrow X = \text{تابع ثابت}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x \\ X'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ X'(l) = 0 \Rightarrow -A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,l = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,l = 0 \Rightarrow \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad n = 1,2,\dots \\ X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

$\Rightarrow T'' = c^2\lambda T \quad \lambda_0 = 0 \Rightarrow T(t) = C + DT \quad \Rightarrow D = 0$:حذف بی کرانی

$n = 2 \Rightarrow T'' + (\frac{n\pi c}{l})^2 T = 0 \Rightarrow T_n = A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \Rightarrow a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\frac{n\pi c}{l})\cos\frac{n\pi x}{l} \Rightarrow d_x = b_n\frac{n\pi c}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}d_x \quad n = 1,2,\dots$$

$\boldsymbol{\int_0^l g(x)d_x = 0}$ ***:شرط وجود جواب***

تمرین: به روش جدا سازی مسئله زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & ,0 < x < l \quad ,t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & , \quad 0 < x < l \\ u_x(0,t) = 0 & ,t > 0 \\ u_x(l,t) = 0 & ,t > 0 \end{cases}$$

تمرین: : به روش جدا سازی مسئله زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & ,0 < x < l \quad ,t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & ,0 < x < l \\ u_t(x,0) = g(x) & ,0 < x < l \\ u(0,t) = 0 & ,t > 0 \\ u_x(l,t) = 0 & ,t > 0 \end{cases}$$