مقدمه

این مجموعه شامل خلاصه‌ای از سیلابس‌های مصوب وزارت علوم برای امتحان کنکور ارشد می‌باشد. مهمترین مسائل مربوط به این درس و همچنین نمونه‌هایی از مسائل کنکور کارشناسی ارشد سال‌های گذشته در این مجموعه آورده شده است که انشاءا... مورد استفاده تمام دانشجویان قرار گیرد.

این مجموعه شامل فصل‌های زیر می‌باشد:

۱ـ اصل کار مجازی (انرژی) و حل مسائل به روش‌های مختلف انرژی

۲- حل مسائل تعادل استاتیکی و مقایسه آن با روش انرژی

۳ـ حل مسائل دو نیرویی و سه نیرویی

۴ـ حل خرپاها و قاب‌ها

۵ـ مسائل اصطکاک لغزشی و غلتشی و کاربری آن در ماشین‌ها مانند گوه‌ها ـ طناب و قرقره‌ها ـ چرخ‌ها و . . . .

شایان ذکر است که برخلاف مراجع کنونی اصل کار مجازی در قسمت اول در فصل اول آورده شده است زیرا دانشجویان محترم می‌توانند با استفاده از این روش بسیاری از مسائل فصل‌های بعدی را به کمک این روش حل نمایند و حتی در برخی از موارد این روش انرژی یک روش حل سریع برای مسائل فصل بعدی محسوب می‌گردد.

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

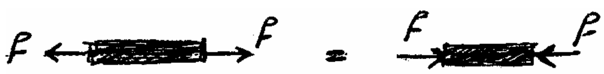
رشته: مکانیک　　　درس: استاتیک

ردیف	سر فصل	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع	نسبت از
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	۵ سال	کل
1	اعضای دو نیرویی و سه نیرویی	1	0	0	2	0	3	7%
2	جبربرداری	0	1	0	0	0	1	2%
3	معادلات تعادل	5	3	2	3	1	14	34%
4	خرپاها	0	1	2	0	1	4	10%
5	قاب‌ها	0	0	1	0	2	3	7%
6	گشتاور خمشی و نیرو ی برشی تیرهای تخت	1	0	0	1	1	3	7%
7	تعاریف اصطکاک وضریب آن	0	2	0	1	0	3%	7%
8	مسائل اصطکاک تسمه‌ای	0	0	1	0	0	1	2%
9	ممان دوم سطوح	1	0	0	0	0	1	2%
10	تعیین مرکز جرم و سطح و خط	1	0	1	0	0	2	5%
11	روش انرژی (اصل کار مجازی)	0	2	0	0	1	3	7%
12	کابل	1	1	0	0	1	3	7%
جمع		**10**	**10**	**7**	**7**	**7**	**41**	**100%**

فصل اول

انرژی (کار مجازی)

در استاتیک اجسام صلب محسوب می‌شوند یعنی :



یعنی در استاتیک در اجسام صلب deformation با تغییر شکل وجود ندارد ولی اجسام صلب جابجا می‌شوند. در مسائل مقاومت مصالح برای حل مسائل دو سری معادلات نیاز است که این معادلات به طور کاملاً مستقل نوشته می‌شوند:

۱ـ معادلات تعادل (رابطه‌ی نیروهای خارجی)

۲ـ معادلات سازگاری (معادلات بین نیروی خارجی با جابجایی ماده است).

برای حل مسایل استاتیکی معین تنها روابط تعادل کافی است، اما برای حل مسایل استاتیکی نامعین علاوه بر معادلات تعادل از معادلات سازگاری نیز استفاده می‌کنیم. متأسفانه در استاتیک چون جسم صلب است و نمی‌توان معادله‌ی سازگاری را به صورت مستقل به صورت بالا نوشت لذا به جای آن از معادلات انرژی (اصل مینیمم انرژی) که در واقع ترکیبی از معادلات تعادل و معادلات سازگاری (رابطه‌ی نیروی خارجی و جابجایی جسم صلب است) است استفاده می‌شود.

تذکر: معادلات انرژی قادر است در استاتیک هم مسایل معین و هم مسایل نامعین را حل کند. حتی بسیاری از مسائل تعادل استاتیکی را می‌توان سریع‌تر به کمک انرژی یا اصل کار مجازی حل نمود.

یادداشت:

....

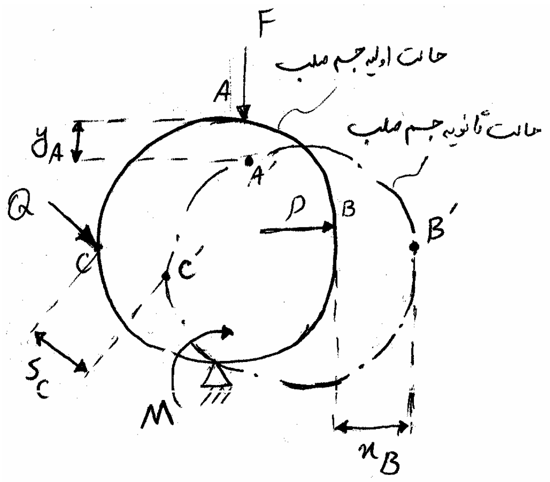
....

....

....

رابطه انرژی

$$F.dy_A + P\,dx_B + Q\,dS_c + M\,d\theta = 0$$



y_A + یعنی جابجایی نقطه اثر نیروی F در راستای خودش و به همین ترتیب بقیه نقاط مانند B و C در راستای نیروی P و Q دارای جابجایی x_B و S_C می‌باشند.

سه نوع مسأله وجود دارد

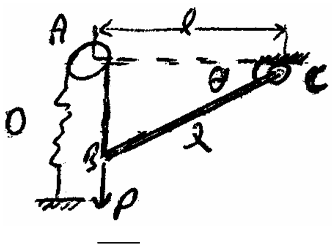
نوع اول : حالت اولیه و ثانویه جسم صلب در صورت مسأله در دسترس است.

نوع دوم: حالت ثانویه در صورت مسأله در دسترس نیست. در این مواقع به سیستم یک جابجایی کوچک به سیستم وارد می‌کنیم و مانند نوع اول مسأله را حل می‌کنیم.

نوع سوم : به هر دلیلی که حل مسائل نوع دوم پیچیده شود مانند تعداد بالای درجات آزادی پین‌ها، نیروهای پیچیده و غیره، از روش برداری یا شبه برداری استفاده شود.

مسائل نوع اول

مثال: در شکل زیر θ تعادل کدام است؟ مشروط بر این که در $\theta=0$ فنر آزاد است؟ K سختی فنر است.



حل: مسئله نوع اول است زیرا حالت اولیه و ثانویه در دسترس است.

P باعث افزایش θ است و f کاهش $\quad P.dy_B - f\,dy_B = 0 \;\Rightarrow$

پس علائم یکی مثبت و دیگری منفی است.

$$y_B = \overline{AB} = \ell\sin\theta \;\Rightarrow\; dy_B = +\ell\cos\theta\,d\theta$$

$$y_D = \overline{AB} = \ell\sin\theta \;\Rightarrow\; dy_D = \ell\cos\theta\,d\theta$$

یادداشت:

....

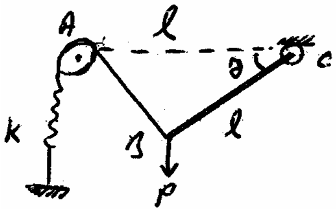
....

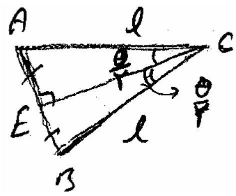
....

....

$$P\,\ell\cos\theta\, d\theta - K\ell^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{P}{K\ell}$$

مثال: تعادل کدام است؟ در $\theta = 0$ فنر آزاد است. سختی فنر K فرض شود.





$$P\,dy_B - Ky_D dy_D = 0$$

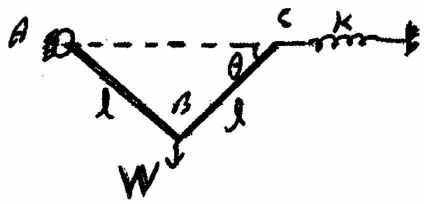
$$y_B = \ell\sin\theta$$

$$dy_B = \ell\cos\theta\, d\theta$$

$$y_D = \overline{AB} = 2AE = 2\ell\sin\frac{\theta}{2} \;\Rightarrow\; dy_D = \ell\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{P}{K\ell}$$

مثال: θ تعادل کدام است مشروط بر این که اگر AB و BC افقی باشند فنر آزاد است.



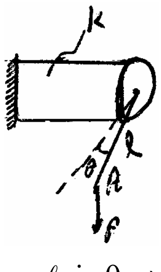
$$w\,dy_B - Kx_c dx_c = 0$$

$$y_B = \ell\sin\theta \;\Rightarrow\; dy_B = \ell\cos\theta\, d\theta$$

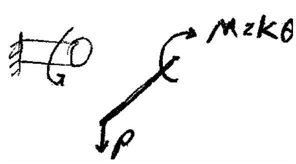
$$x_c = 2\ell - 2\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; dx_c = 2\ell\sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow\; (1-\cos\theta)\tan\theta = \frac{w}{4K\ell}$$

مثال: θ تعادل کدام است؟ K سختی پیچشی میله است.



$$\rho\, dy_A - M d\theta = 0$$



$$y_A = \ell\sin\theta \Rightarrow dy_A = \ell\cos\theta d\theta \Rightarrow P\ell\cos\theta d\theta - K\theta d\theta = 0 \Rightarrow P\ell\cos\theta = K\theta \;\Rightarrow$$

یادداشت:

....

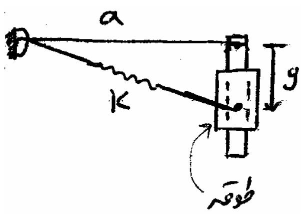
....

....

....

$$\cos\theta = \frac{K}{P\ell}\theta$$

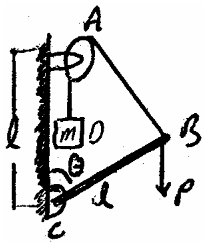
مثال: Y **تعادل کدام است؟ در** $y=0$ **فنر آزاد است و وزن طوقه** w **است.**



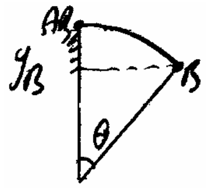
$$w\,dy - KS\,dS = 0\ ,\ S = \sqrt{a^2+y^2} - a \Rightarrow dS = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}dy$$

$$y\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]^{-1} = \frac{w}{K}$$

مثال: **طول میله‌ی BC برابر** ℓ **است و جرم گلوله‌ی فلزی** m **است. از وزن** BC **صرف نظر شود.** θ **تعادل را محاسبه کنید.**

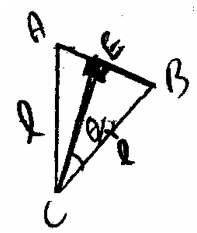


$$P\,dy_B - mg\,dy_D = 0$$



$$y_B = \ell - \ell\cos\theta \Rightarrow dy_B = +\ell\sin\theta d\theta$$

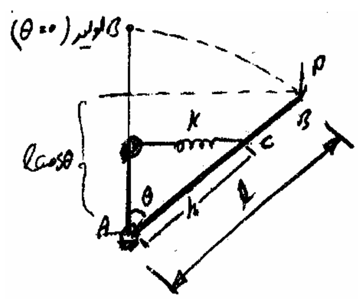
اگر نیروی P افقی اعمال می‌شد می‌بایستی $x_B = \ell\cos\theta$ را می‌نوشتیم و از آن دیفرانسیل می‌گرفتیم.



$$y_D = \overline{AB} = 2AE = 2\ell\sin\frac{\theta}{2}\ \Rightarrow\ dy_D = +\ell\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{mg}{2P}$$

مثال: θ **تعادل کدام است؟ در** $\theta=0$ **فنر آزاد است. سختی فنر K است.**



$$P\,dy_B - \overset{Kx_c}{F}\,dx_c = 0$$

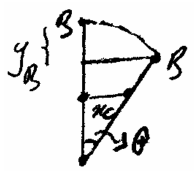
یادداشت:

....

....

....

....



$$y_B = \ell - \ell\cos\theta \;\Rightarrow\; dy_B = \ell\sin\theta\, d\theta$$

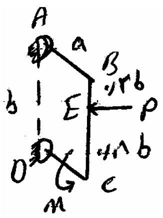
$$x_c = h\sin\theta \;\Rightarrow\; dx_c = h\cos\theta\, d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{P\ell}{Kh^2}$$

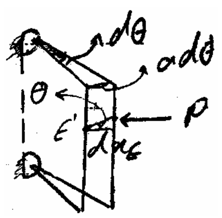
مسایل ثانویه (نوع دوم)

دراین گونه مسایل حالت ثانویه در دسترس نمی‌باشد لذا خود ما یک جابجایی کوچک به کل سیستم می‌دهیم و مانند نوع اول حل می‌کنیم. این نوع مسایل اگر از لحاظ تعداد درجات آزادی مفاصل و یا هندسه و بارگذاری پیچیده باشد از روش سوم حل می‌کنیم. مثال‌های زیر از نوع دوم می‌باشد.

مثال: θ تعادل کدام است؟



ابتدا از روش دوم این مثال را حل می‌کنیم. در فصل بعدی با استفاده از روش سوم مسأله راچک می‌کنیم:

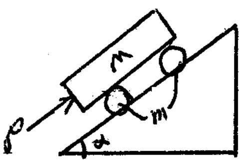


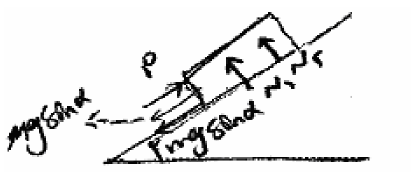
$$P\,dx_E - Md\theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{d\,x_E}{a\,d\theta} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{M}{Pa}$$

مثال: تعیین کنید نیروی تعادل P برای بالا بردن ارابه مشروط بر این که مسافتی که چرخ‌ها طی می‌کند نصف مسافتی است که ارابه طی می‌کند.

فرض می‌کنیم ارابه به اندازه‌ی dx جابجا شده است طبق صورت سئوال چرخ‌ها $\frac{dx}{2}$ حرکت می‌کند.





یادداشت:

....

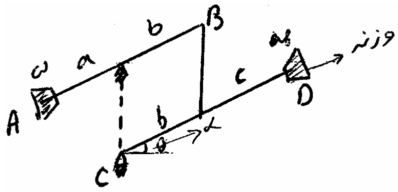
....

....

....

$$mg\sin\alpha\, dx + (2mg\sin\alpha)\frac{dx}{2} - Pdx = 0 \Rightarrow \quad P = (m+M)g\sin\alpha$$

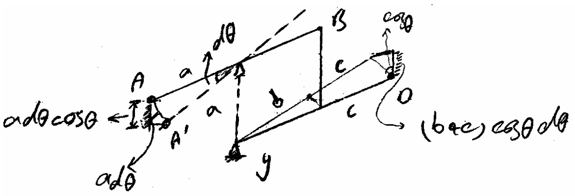
مثال: برای تعادل مقدار $\frac{w}{w_0}$ چقدر است؟



$$\frac{w}{w_0} = \frac{b+c}{a}$$

$$w\, dy_A - w_0\, dy_D = 0$$

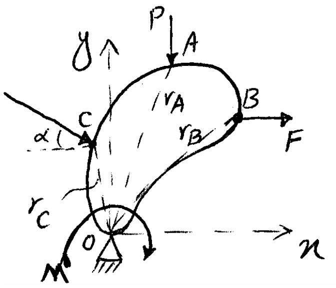
چون حالت ثانویه در دسترس نیست یک جابجایی کوچک $d\theta$ به کل سیستم وارد می‌کنیم.



$$w\, a\, \cancel{\cos\theta}\, \cancel{d\theta} = w_0\, b\, \cancel{\cos\theta}\, \cancel{d\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{w}{w_0} = \frac{b+c}{a}$$

روش سوم : روش برداری



در این نوع مسائل برای حل مراحل زیر به ترتیب دنبال گردد.

۱)انتخاب محور xy در نقطه‌ی ساکن ($(u_x = 0 \quad , \quad u_y = 0)$

مانند نقطه O

۲) نیروها را به صورت ماتریس‌های ردیفی می‌نویسیم. برای مثال:

$$[P] = \left[P_x P_y\right] = [0, -P]$$

علامت P منفی است چون مخالف جهت $+y$ است.

$$[F] = \left[F_x, F_y\right] = [F, 0] \quad و \quad [Q] = [Qx, Qy] = [+Q\cos\alpha \;\; , -Q\sin\theta]$$

یادداشت:

....

....

....

....

۳) مختصات نقطه اثر نیروها را با r_C, r_B, r_A نشان می‌دهیم که این مقادیر را با ماتریس ستونی نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$\{r_A\}=\begin{Bmatrix}x_A\\y_A\end{Bmatrix}$$

$$\{r_B\}=\begin{Bmatrix}x_B\\y_B\end{Bmatrix}\ ,\ \{r_C\}=\begin{Bmatrix}x_C\\y_C\end{Bmatrix}$$

دقت شود که در بالا طبق قراردادهای مرسوم، علائم رعایت گردد.

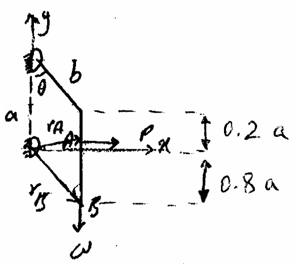
$$\{dr_A\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial x_A}{\partial\theta}\\[2mm]\dfrac{\partial y_A}{\partial\theta}\end{Bmatrix}d\theta\ ,\ \{dr_B\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial x_B}{\partial\theta}\\[2mm]\dfrac{\partial y_B}{\partial\theta}\end{Bmatrix}d\theta\ ,\ \{dr_C\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial x_C}{\partial\theta}\\[2mm]\dfrac{\partial y_C}{\partial\theta}\end{Bmatrix}d\theta$$

حال رابطه انرژی عبارت است از:

$$[P]\{dr_A\}+[F]\{dr_B\}+[Q]\{dr_C\}+Md\theta=0$$

در رابطه‌ی انرژی بالا، $M\,d\theta$ به صورت برداری نباید نوشته شود، هم چنین علامت $Md\theta$ را در آخر تعیین می‌کنیم (با مقایسه با دیگر عبارات قبل از آن که بعداًبه آن بیشتر اشاره خواهد شد.)

مثال: θ **تعادل کدام است؟ (از روش شبه بردار حل شود)**



$$+[P]\{dr_A\}+[w]\{dr_B\}=0$$

$$[P]=\left[P_x, P_y\right]=[+P,0]$$

$$[w]=\left[w_x, w_y\right]=[0,-w]$$

$$\{r_A\}=\{x_A, y_A\}=\begin{Bmatrix}b\sin\theta\\0.8a-b\cos\theta\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ \{dr_A\}=\begin{Bmatrix}b\cos\theta\\b\sin\theta\end{Bmatrix}$$

$$\{r_B\}=\begin{Bmatrix}x_B\\y_B\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b\sin\theta\\-b\cos\theta\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ \{dr_B\}=\begin{Bmatrix}b\cos\theta\\b\sin\theta\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ [P,0]\begin{Bmatrix}b\cos\theta\\b\sin\theta\end{Bmatrix}+[0,-w]\begin{Bmatrix}b\cos\theta\\b\sin\theta\end{Bmatrix}=0\ \Rightarrow\ P\,b\cos\theta-w\,b\sin\theta=0\ \Rightarrow\ \tan\theta=\frac{P}{w}$$

روش شبه برداری : ابتدا محور xy را در نقطه‌ی ساکن انتخاب می‌کنیم:

این روش مانند روش برداری است ولی با نوشتن کار مؤلفه‌های افقی و عمودی برای یک بار زاویه دار به طور جداگانه و مستقل علائم ماتریس‌ها از بین می‌رود.

یادداشت:

....

....

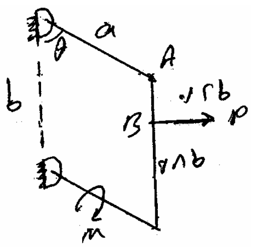
....

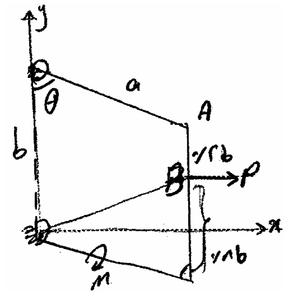
....

$$+(P)(dx_A)+(-w)(-dy_A)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_A = b\sin\theta \ \Rightarrow\ dx_A = b\cos\theta\, d\theta \\ y_B = +b\cos\theta \ \Rightarrow\ dy_A = -b\sin\theta\, d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow\ Pb\cos\theta\, d\theta - b\sin\theta\, d\theta = 0 \ \Rightarrow\ \tan\theta = \frac{P}{w}$$

مثال: θ تعادل کدام است؟





انتخاب محور xy در نقطه ساکن

$+(+P)(dx_B)+Md\theta=0$ (چون x_B مثبت است لذا $d\,x_B$ مثبت قرار می‌دهیم)

دقت شود که M در آخر تعیین علامت می‌شود.

$$x_B = a\sin\theta \ \Rightarrow\ d\,x_B = a\cos\theta\, d\theta$$

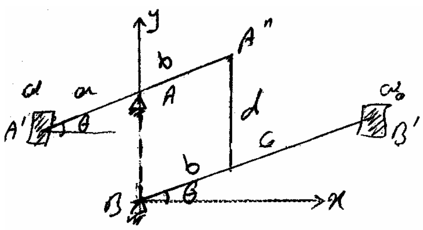
$$\Rightarrow\ \underbrace{P}_{\theta\ \text{را افزایش}} a\cos\theta\, d\theta - \underbrace{M}_{\theta\ \text{را کاهش}} d\theta = 0$$

$M\,d\theta$ منفی است زیرا کاری که $Md\theta$ انجام می‌دهد مخالف کار نیروی $P\,a\cos\theta\, d\theta$ است. پس:

$$\cos\theta = \frac{M}{Pa}$$

مثال: برای تعادل $\frac{w}{w_0}$ کدام است؟

ابتدا محور xy را در نقطه‌ی ساکن انتخاب می‌کنیم.



$$+(-w)(dy_{A'})+(-w_0)(+dy_{B'})=0 \ \Rightarrow$$

$$w\,dy_{A'} + w_0\,dy_{B'} = 0$$

$$y_{A'} = d\cos\theta \ \Rightarrow\ dy_{A'} = -a\cos\theta\, d\theta$$

$$y_{B'} = (bac)\cos\theta \ \Rightarrow\ dy_{B'} = (b+c)\cos\theta\, d\theta$$

یادداشت:

....

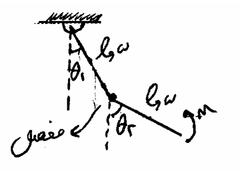
....

....

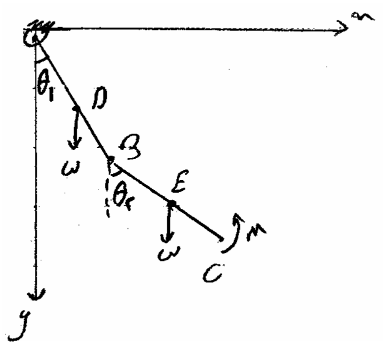
....

$$\Rightarrow \; w(-a\cos\theta)d\theta + w_0(b+c)\cos\theta\, d\theta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{w}{w_0} = \frac{b+c}{a}$$

مثال: θ_1 و θ_2 **تعادل کدام است؟**



از روش اول استفاده نشود یعنی از مسایل نوع دوم استفاده شود.



$$+(+w)(+dy_D)+(+w)(+dy_E)+M\underbrace{d\theta_2}_{\text{در آخر تعیین علامت می‌شود}}=0$$

$$y_D = \frac{\ell}{2}\cos\theta_1 \;\Rightarrow\; dy_D = -\frac{1}{2}\sin\theta_1\, d\theta_1$$

$$y_E = \ell\cos\theta_1 + \frac{\ell}{2}\cos\theta_2 \;\Rightarrow\; dy_E = -\left(\ell\sin\theta_1 d\theta_1 + \frac{\ell}{2}\sin\theta_2 d\theta_2\right)$$

$$\Rightarrow -w\frac{\ell}{2}\sin\theta_1 d\theta_1 - w\ell\sin\theta_1 d\theta_1 - w\frac{\ell}{2}\sin\theta_2 d\theta_2 + Md\theta_2 = 0$$

زیرا روی عضو BC نیروی w باعث کاهش θ_2 می‌شود و M باعث افزایش θ_2 می‌شود پس $M\,d\theta_2$ مثبت است.

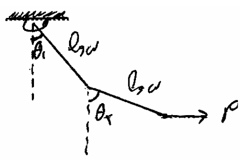
در معادله‌ی بالا سیستم باز است یعنی بین $d\theta_1, d\theta_2$ رابطه‌ی هندسی حاکم نیست (برخلاف چند مسأله‌ی بعدی) لذا برای محاسبه دو مجهول θ_1, θ_2 از یک معادله خواهیم داشت:

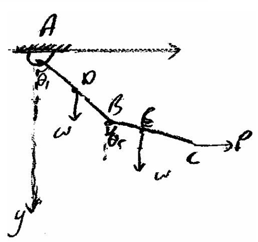
$$\left(-\omega\frac{\ell}{2}\cos\theta_1 - \omega\ell\sin\theta_1\right)d\theta_1 + \left(-\omega\frac{\ell}{2}\cos\theta_2 + M\right)d\theta_2 = 0$$

$$d\theta_1 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Cos}\,\theta_2 = \frac{2M}{\omega\ell}$$

$$d\theta_2 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Sin}\theta_1 = 0$$

مثال: θ **تعادل کدام است؟**





$$+(+w)(dy_B)+(+w)(+dy_E)+(+P)(dx_C)=0$$

$$wdy_D + wdy_E + Pdx_C = 0$$

یادداشت:

....

....

....

....

همانند مثال قبل dy_D و dy_E محاسبه می‌شوند.

$$y_D = \frac{\ell}{2}\cos\theta_1 \;\Rightarrow\; dy_D = -\frac{\ell}{2}\sin\theta_1\, d\theta_1$$

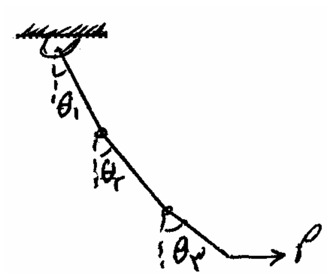
$$y_E = \ell\cos\theta_1 + \frac{\ell}{2}\cos\theta_2 \;\Rightarrow\; dy_E = \ell\sin\theta_1\, d\theta_1 - \frac{\ell}{2}\sin\theta_2\, d\theta_2$$

$$x_C = \ell\sin\theta_1 + \ell\sin\theta_2 \;\Rightarrow\; dx_C = \ell\cos\theta_1\, d\theta_1 + d\cos\theta_2\, d\theta_2$$

$$\Rightarrow\; w\left(-\frac{\ell}{2}\sin\theta_1\, d\theta_1\right) + w\left(-\ell\cos\theta_1\, d\theta_1 - \frac{\ell}{2}\sin\theta_3\, d\theta_2\right) + P\left(\ell\cos\theta_1\, d\theta_1 + \ell\cos\theta_2 d\theta_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d\theta_1 = 0 \\ d\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{2P}{3w} \\ \tan\theta_2 = \dfrac{2P}{w} \end{cases}$$

مسأله : θهای تعادل کدام است؟ طول و جرم میله‌ها یکسان است.



جواب:

$$\tan\theta_1 = \frac{3}{\partial}\tan\theta_2 = \frac{1}{\partial}\tan\theta_3 = \frac{2P}{\partial\omega}$$

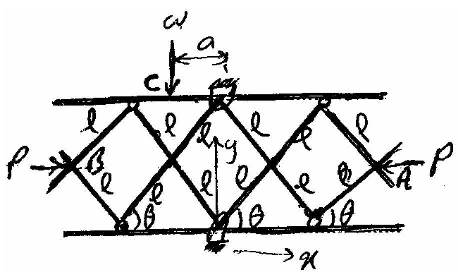
حال مانند مثال‌های قبل است لطفاً دانشجویان محترم آن را حل نمایند.

مثال: در سازه‌ی آکار روانی زیر مقدار θ تعادل کدام است؟

ابتدا محور xy را در نقطه‌ای ساکن 0 انتخاب می‌کنیم.

$$+(-P)(+dx_A) + (+P)(-dx_B) + (-w)(dy_C) = 0$$

$$\Rightarrow\; Pdx_A + Pdx_B + w\, dy_C = 0$$



$$\left.\begin{array}{l} x_A = x_B = 3\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; dx_A = dx_B = -3\ell\cos\theta\, d\theta \\ y_D = 2\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; dy_D = 2\ell\cos\theta\, d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow\; \tan\theta = \frac{w}{3P}$$

یادداشت:

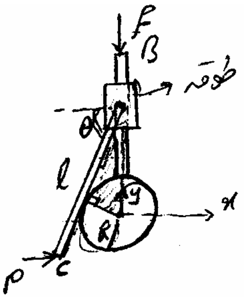
....

....

....

....

مثال: در شکل زیر اصطکاک صفر است و میله نازک و بدون وزن است. θ کدام است؟



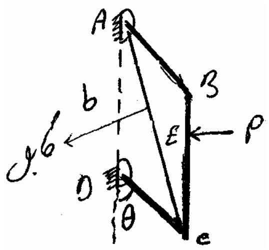
هر جا که اصطکاک صفر است در جهت افق عکس‌العمل نداریم. محور xy را در نقطه‌ای ساکن انتخاب می‌شود.

$$+(-f)(dy_B)+(+P)(-dx_C)=0 \;\Rightarrow\; Fdy_B+Pdx_C=0$$

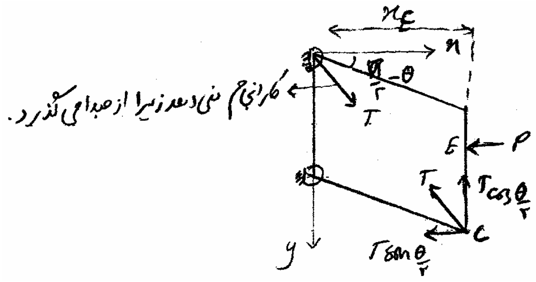
$$\cos\theta=\frac{R}{y_B} \;\Rightarrow\; y_B=\frac{R}{\cos\theta} \;\Rightarrow\; dy_B=\frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$x_C=\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; dx_C=-\ell\sin\theta\, d\theta \;\Rightarrow\; \cos^2\theta=\frac{FR}{P\ell}$$

مثال: مطلوب است نیروی کشش T طناب که سیستم را در حال تعادل نگه داشته است.



در یکی از تکیه گاه‌ها محور xy را انتخاب می‌کنیم.



$$+(-P)(dx_E)+\left(-T\cos\frac{\theta}{2}\right)(+dy_C)+\left(-T\sin\frac{\theta}{2}\right)(dx_C)=$$

$$\Rightarrow Pdx_E+T\cos\frac{\theta}{2}dy_C+T\sin\frac{\theta}{2}dx_C=0$$

$$x_E=b\cos\theta \Rightarrow dx_E=b\cos\theta\, d\theta$$

$$x_C=b\sin\theta \Rightarrow dx_C=b\cos\theta\, d\theta$$

$$y_C=b+b\underbrace{\cos\theta}_{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \;\Rightarrow\; dy_C=-b\sin\theta\, d\theta$$

یادداشت:

....

....

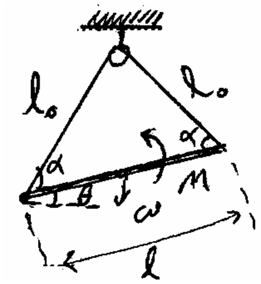
....

....

در محاسبه x_E و x_C و y_C باید دقت شود در اینجا تنها اندازه‌ها را می‌نویسیم و ازعلامت x و y صرف نظر می‌کنیم. زیرا قبلاً در رابطه‌ی انرژی وارد شده‌اند.

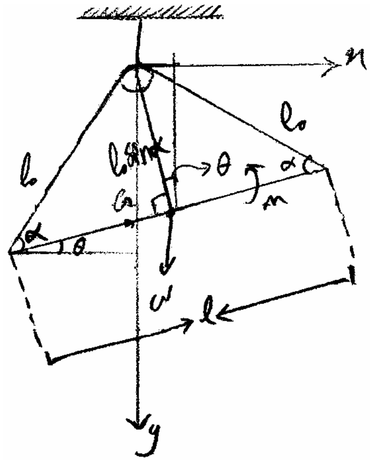
$$\Rightarrow \quad T = \frac{P\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

مسأله: میله‌ی AB به طول ℓ و وزن ω از دو کابل AC و BC با طول یکسان آویزان است. M متعادل کدام است؟



$$M = \frac{1}{2} w\,\ell \tan\alpha\cos\theta$$

محور xy بر تکیه گاه انتخاب شود و $+w\,dy_G + Md\theta = 0$



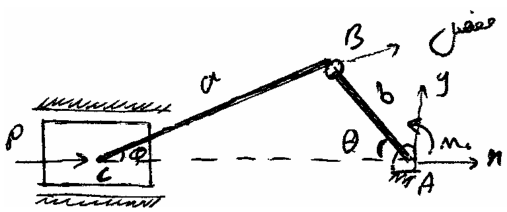
$$y_G = \ell_0 \sin\alpha\cos\theta \Rightarrow dy_G = -\ell_0 \sin\alpha\cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow w\left(-\ell_0 \sin\alpha\sin\theta\right)d\theta + \underbrace{M}_{\text{زیرا در جهت افزایش } \theta \text{ است}} d\theta = 0$$

$$M = W\ell_0 \sin\alpha\sin\theta \quad \Rightarrow$$

$$M = \frac{1}{2} w \left(\underbrace{2\ell_0 \sin\alpha}_{M=\frac{1}{2} w\,\ell \tan\alpha\sin\theta} \quad \sin\theta \Rightarrow \right)$$

مثال: کوپل M_0 برای تعادل کدام است؟



$$+(+P)(-dx_C) + \overbrace{M_0 d\theta}^{\text{بعداً تعیین علامت می‌شود.}} = 0 \Rightarrow -Pdx_C + Md\theta = 0$$

$$x_C = a\cos\varphi + b\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$dx_C = -a\sin\varphi d\varphi - b\sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad Pb\sin\theta\, d\theta + Pa\sin\varphi\, d\varphi - \underbrace{M_0}_{\text{زیرا باعث کاهش } \theta \text{ می‌شود و P باعث افزایش } \theta,\varphi \text{ می‌شود}} d\theta = 0 \qquad (۱)$$

چون $d\theta$ و $d\varphi$ سیستم بسته است پس رابطه‌ی آن‌ها به صورت زیر است:

یادداشت:

....

....

....

....

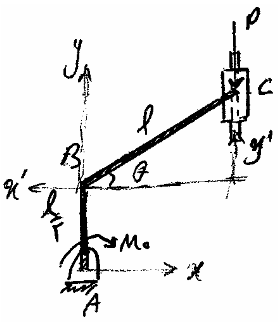
$$\frac{\sin\varphi}{b}=\frac{\sin\theta}{a} \;\Rightarrow\; \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{b}=\frac{\cos\theta\, d\theta}{a} \;\Rightarrow\; \cos\varphi\, d\varphi=\frac{b}{a}\text{cod}\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow\; d\varphi=\frac{b}{a}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}d\theta$$ (۲)

$$(1),(2) \;\Rightarrow\; Pb\underbrace{\sin(\theta+\varphi)}_{\cos\varphi}d\theta-M_0 d\theta=0 \;\Rightarrow\; M_0=Pb\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\cos\varphi}$$

مثال: در شکل زیر طوقه‌ی C در امتداد میله‌ی عمودی حرکت می‌کند. M تعادل کدام است وزن میله و اعضا صرف نظر شود.

حل : ابتدا محور xy را در نقطه‌ای ساکن انتخاب می‌کنیم.



$$(-P)(+dy_C)+M_0 d\varphi=0$$

φ در نقطه A است. زیرا ممان حول نقطه‌ی A کار انجام می‌دهد.

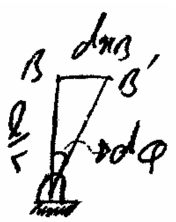
$$y_C=\frac{\ell}{2}+\ell\sin\theta \;\Rightarrow\; dy_C=\ell\cos\theta\, d\theta$$

$$-P\ell\cos\theta\, d\theta+M_0 d\varphi=0 \;\Rightarrow$$

رابطه‌ی بین $d\theta, d\varphi$ چیست؟

$$-P\ell\cos\theta\, d\theta+M_0 d\varphi=0 \;\Rightarrow$$

حرکت B روی میله‌ی AB :
حرکت B روی میله‌ی AC :
همزمان رخ می‌دهد.



$$dx_B=\frac{\ell}{2}d\varphi$$ (۱)

$$x'_B=\ell\cos\theta \;\Rightarrow\; dx'_B=-\ell\sin\theta\, d\theta$$

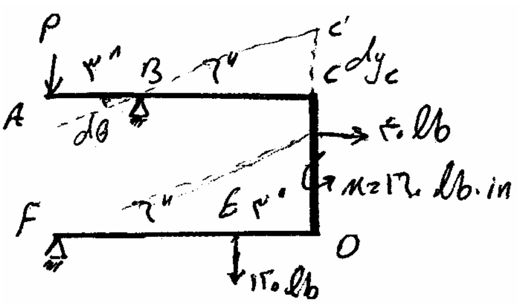
$$(1),(2): \frac{\ell}{2}d\varphi=-\ell\sin\theta\, d\theta \;\Rightarrow\; d\varphi=2\sin\theta\, d\theta$$

یادداشت:

....
....
....
....

$$\Rightarrow\ P\ell\cos\theta\,d\theta - 2M_0\sin\theta\,d\theta\ \Rightarrow\ M_0\frac{P\ell}{2}\cot\theta$$

مثال: **P تعادل کدام است؟**



یک تلنگر به سیستم وارد می‌کنیم زیرا نمی‌توان از انرژی به روش برداری حل کرد :

$P\,dy_A - 120\,dy_E = 0$

$dy_A = 3d\theta$

$dy_C = dy_D$ صلب وار جابجا شده

$\frac{dy_E}{dy_\theta} = \frac{6}{9}$ قضیه‌ی تالس ۱

$dy_E = \frac{2}{3}\times 6d\theta = 4\,d\theta\ \Rightarrow\ P = 160$ پاوند

تیرها

تذکر مهم : در مقاومت مصالح معمولاً در تیرها مفصل نمی‌بینیم و جابجایی تیر همواره در یک تغییر مکان جزئی غیر خطی می‌باشد. در استاتیک تیرها دارای مفاصل واقعی یا مجازی می‌باشند که معمولاً جابجایی تیر خطی است و از اصل مینیمم انرژی به راحتی عکس‌العمل و دیگر مجهولات به دست می‌آید.

مفاصل واقعی یعنی آن را به طور مستقیم مشاهده می‌کنیم. اما مفاصل مجازی را به طور مستقیم در تیر نمی‌بینیم.

مفاصل واقعی: به دو روش قابل حل است:

۱ـ روش تعادل

۲ـ روش انرژی

روش انرژی اولاً : برای مسایل نامعین قابل استفاده است.

ثانیاً : این روش برخی از مسایل تعادل را سریعتر حل می‌کند.

یادداشت:

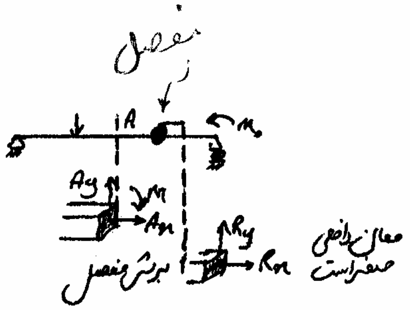
....

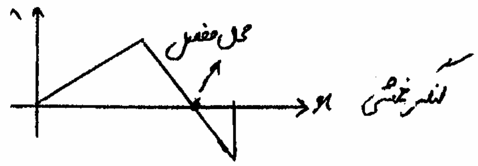
....

....

....

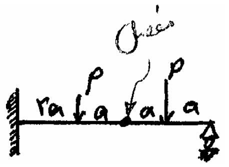
***راهنمایی:** همیشه در محل مفاصل فقط دو نیروی داخلی R_x و R_y وجود داشته و ممان داخلی در محل مفصل صفر است. (در مقاومت مصالح در روی دیاگرام آزاد لنگر خمشی در محل مفصل ممان داخلی صفر است).





تذکر مهم: هر مفصل نماینده‌ی یک معادله کمکی است.

مثال: **عکس‌العمل‌ها چقدر است؟**

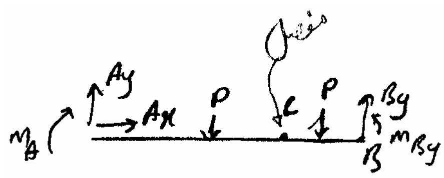


حل این مسأله از تعادل :

۱) دیاگرام آزاد کل و نوشتن سه رابطه تعادل

۲) دیاگرام آزاد جزء (از محل مفصل تیر قطع شود) و نوشتن سه رابطه‌ی تعادل

۳) محاسبه‌ی عکس‌العمل‌ها

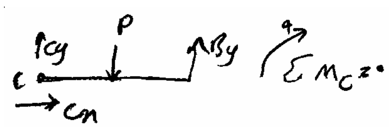


$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; Ax = 0 \qquad (۱)$$

$$+\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; +M_A + P(2a) + P(4a) - B_y(5a) = 0 \;\Rightarrow\; M_A - 5a\,B_y = -4aP \qquad (۲)$$

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y - P - P + A_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y + A_y = 2P \qquad (۳)$$

حال دیاگرام آزاد جزء را از مفصل می‌بریم:



$$+\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; -B_y(2a) + Pa = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \frac{1}{2}P$$

جهت انتخابی B_y صحیح است چون مثبت شده است.

پس : $A_y = \frac{3}{2}P \;,\; M_A = -\frac{7}{2}Pa$

یادداشت:

....

....

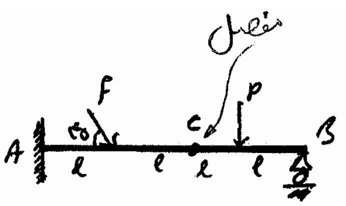
....

....

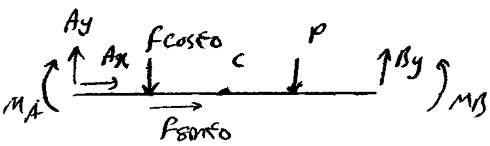
تذکر مهم: چون حل تیرهای مفصل دار از روش تعادل وقت گیر است معمولاً تیرهایی که یک مفصل دارد از تعادل حل می‌کنیم و تیرهایی که بیش از یک مفصل دارد از انرژی.

اگر عکس العمل‌ها در محل C مجهول بود می‌بایستی در دیاگرام آزاد جزء علاوه $\sum M_C$ از دو معادله‌ی تعادل دیگر یعنی از $\sum f_x = 0$ و $\sum f_y = 0$ استفاده کرد.

مثال: عکس العمل‌های B, A چقدر است؟



ابتدا دیاگرام آزاد کل :

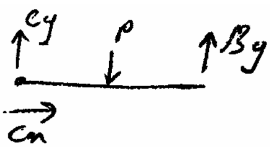


$$\sum f_x = 0 \Rightarrow A_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \Rightarrow$$ (۱) جهت A_x باید عوض شود چون منفی شده.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - F\cos 45 - P + B_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P + \frac{\sqrt{2}}{2}F \qquad (۲)$$

$$+\uparrow \sum M_A = 0 \Rightarrow -B_y(4\ell) + P(3\ell) + M_A + F\ell\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow -M_A + 4\ell B_y = 3P\ell + \frac{\sqrt{2}}{2}F\ell \qquad (۳)$$

حال دیاگرام آزاد جزء در محل مفصل را می‌نویسیم.



$$+\uparrow \sum M_C = 0 \Rightarrow +P\ell - B_y(2\ell) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{1}{2}P$$

$$\Rightarrow (2): A_y = \frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad , \quad (3): M_A = \left(P + \frac{\sqrt{2}}{2}F\right)\ell$$

این حل با استفاده از روش تعادل بوده حال از روش انرژی مسأله را حل می‌کنیم.

چند نکته مهم:

۱)برای محاسبه‌ی عکس‌العمل‌ها به روی انرژی در تیرها به شرح زیر عمل می‌کنیم:

یادداشت:

....

....

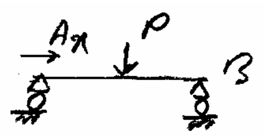
....

....

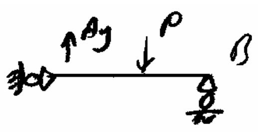
الف) در جهتی که عکس العمل در آن راستا مجهول است قید را آزاد کرده و به جای آن عکس‌العمل مربوطه را قرار می‌دهیم.

مثلاً در شکل مقابل B_y چقدر است؟

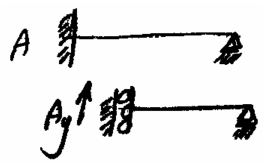
اما اگر A_x مجهول باشد، قید را در جهت x آزاد می‌کنیم مانند شکل مقابل.



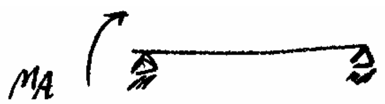
اگر A_y مجهول باشد:قید را در A در جهت y آزاد می‌کنیم.



به عنوان مثال دیگر می‌خواهیم قید را در جهت y باز کنیم و A_yرا محاسبه کنیم:

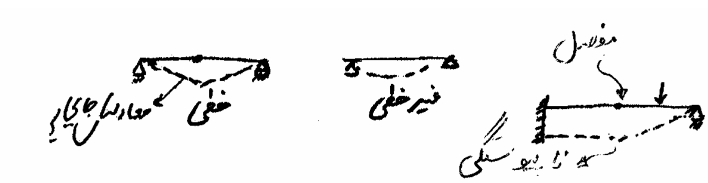


یا مثلاً بخواهیم M_A محاسبه شود باید قید چرخشی θ در A باز شود و به جای آن M_A را قرار دهیم.



ب) حال به کل سیستم یک جابجایی کوچک می‌دهیم و از نوع دوم رابطه‌ی انرژی را می‌نویسیم.

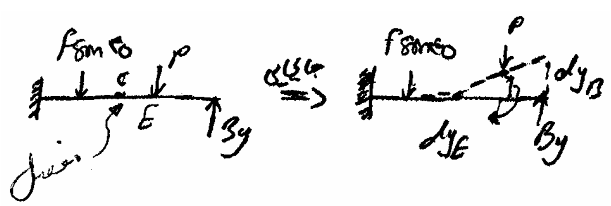
۲) در جابجایی تیر: a) جابجایی‌ها با بودن مفصل به صورت خطی می‌باشد.



b) در تابع جابجایی تنها در محل مفصل ناپیوستگی وجود دارد مانند شکل بالا.

حال مثال قبل را ا انرژی استفاده می‌کنیم:

الف)محاسبه‌ی B_y: $F\cos 45$ کار انجام نمی‌دهد.



یادداشت:

....

....

....

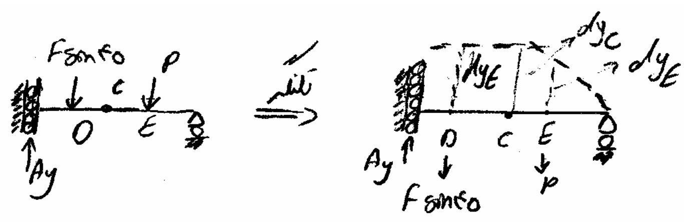
....

۴

$$B_y\, dy_B - P\, dy_E = 0$$

$$\frac{dy_E}{dy_B} = \frac{\ell}{2\ell} \Rightarrow dy_B = 2dy_E \Rightarrow B_y = \frac{1}{2}P$$

ب) محاسبه‌ی A_y :

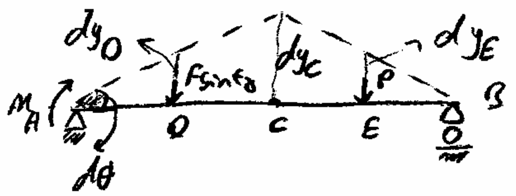


$$A_y dy_A - f\sin 45\, dy_D - P dy_E = 0 \quad (1)$$

$$dy_A = dy_D = dy_C$$

$$\frac{dy_E}{dy_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow dy_C = 2dy_E \overset{(1)}{\Rightarrow} A_y = \frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

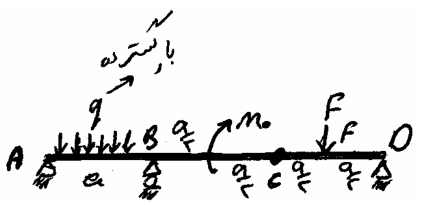
پ) محاسبه‌ی M_A:



$$F\sin 34\, dy_D + P dy_E + M_A d\theta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} dy_D = \ell\, d\theta \\ dy_C = 2\ell d\theta \\ \dfrac{dy_E}{dy_C} = \dfrac{\ell}{2\ell} \Rightarrow dy_E = \ell d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow M_A = \left(P + \frac{\sqrt{2}}{2}F\right)\ell$$

مثال: **عکس‌العمل تکیه گاه B کدام است؟**



یادداشت:

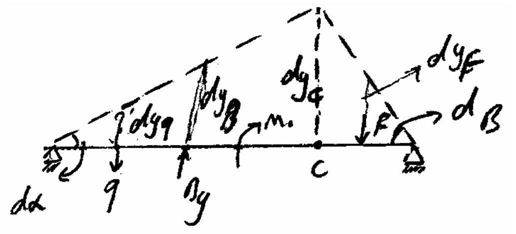
....

....

....

....

قید B را در جهت y آزاد کرده و B_y را اضافه می‌کنیم:



$$-aq\,dy_A - M_0 d\alpha - Fdg_F + B_y dy_B = 0 \quad (۱)$$

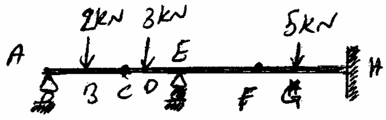
$$\begin{cases} dy_q = \frac{1}{2} a\,d\alpha \\ dy_B = ad\alpha \\ dg_F = \frac{1}{2} ad\beta \end{cases}$$

از طرفی رابطه $d\alpha$ و $d\beta$ به صورت زیر است:

$$\left. \begin{aligned} dy_C &= 2a\,d\alpha \\ dy_C &= ad\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\beta = 2d\alpha$$

$$(۱) \quad B_y = F + \frac{1}{2} aq + \frac{1}{a} M_0$$

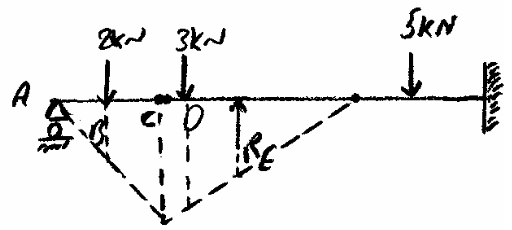
مثال: عکس‌العمل‌های E و H محاسبه کنید.



AB:0.5 m , BC: 0.4m , CD: 0.6m , DE: 0.9 m

EF=1.2m , FG: 0.6m , GH: 1.2m

محاسبه‌ی R_E:

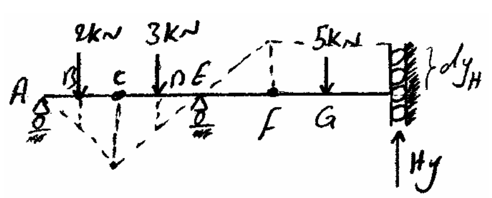


$$2dy_B + 3dy_D - R_E dy_E = 0$$

$$\begin{cases} dy_B = \frac{0.5}{0.9} dy_C \\ d_C = \frac{2.7}{1.2} dy_E = 2.25\,dy_E \\ dy_B = \frac{0.5}{0.9}\left(2.25\,dy_E\right) = 1.23 dy_E \\ dy_D = 1.73\,dy_E \end{cases}$$

$$R_E = 7.35\,KN$$

محاسبه‌ی H_y :



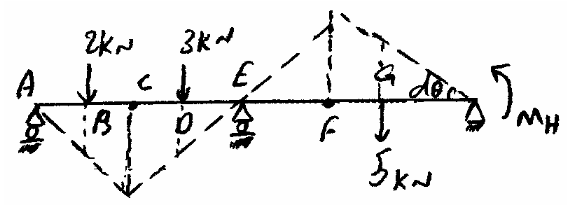
$$2dy_B + 3dy_D - 5dy_G + H_y dy_H = 0$$

$$\begin{cases} dy_F = dy_G = dy_H \\ dy_D = \frac{0.9}{1.2} dy_F = 0.75 dy_H \\ dy_B = 0.69\,dy_H \end{cases}$$

$$H_y = 1.36\,KN$$

یادداشت:

محاسبه‌ی M_H :

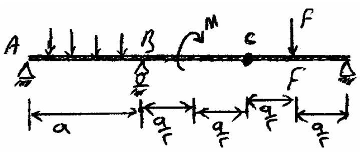


$$2dy_B + 3dy_D + 5dy_G - M_H d\theta = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} dy_G = 1.2d\theta \;,\; d_C = 2.25\,d\theta \\ dy_F = 1.8\,d\theta \;,\; dy_B = 1.25d\theta \\ dy_D = \dfrac{0.9}{1.2}d_F = \dfrac{0.9}{1.2}(1.8\,d\theta) = 1.35d\theta \end{cases}$$

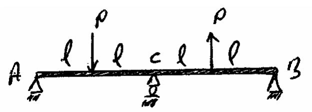
$$M_H = 0.55\,KN.m$$

مثال: عکس العمل B چقدر است؟

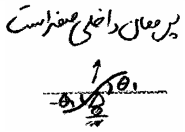


قبلاً حل شده است. لطفاً دانشجویان محترم جهت یاد آوری مطالب خود مجدداً آن را در این قسمت حل نمایند.

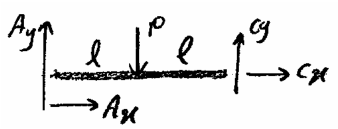
مثال: عکس العمل عمودی A چقدر است؟



تکیه گاه C مفصل مجازی است، زیرا جمع جبری شیب‌ها در آن محل صفر است.

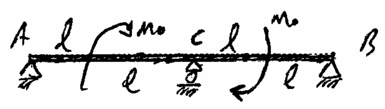


لذا تیر را از تکیه گاه C جدا می‌کنیم.



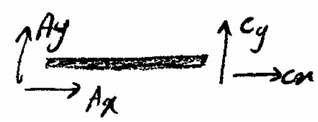
$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; A_y(2\ell) - P\ell = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{1}{3}P$$

مثال: عکس‌العمل عمودی A چقدر است؟



همانند مثال قبلی C مفصل است.

جهت A_y باید عوض شود.



$$+\uparrow \sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; M_0 + A_y(2\ell) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = -\frac{M_0}{2\ell}$$

$$A_y = \frac{M}{2\ell}$$

یادداشت:

....

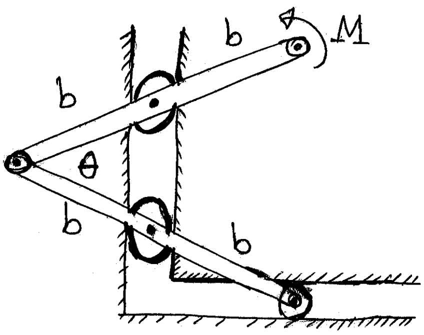
....

....

....

تست‌های فصل اول

۱ـ در اهرم‌بندی شکل زیر دو میله هریک به جرم m و طول 2 b در راهروهایی مقید شده‌اند، گشتاور M بر انتهای میله‌ی بالایی وارد می‌گردد، درحال تعادل زاویه‌ی θ برابر است با:



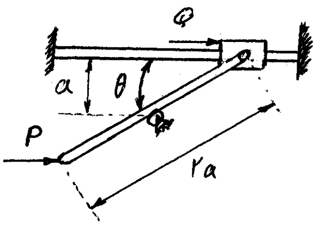
۱) $\theta = 2\text{Cos}^{-1}\left(\dfrac{M}{4mgb}\right)$

۲) $\theta = 2\text{Sin}^{-1}\left(\dfrac{M}{2mgb}\right)$

۳) $\theta = 2\text{Cos}^{-1}\left(\dfrac{M}{2mgb}\right)$

۴) $\theta = 2\text{Sin}^{-1}\left(\dfrac{M}{4mgb}\right)$

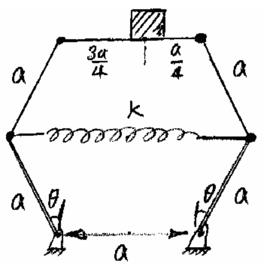
۲ـ مقدار Q لازم برای برقراری تعادل برابر است با:



۱) $p\left(\text{Sin}^3\theta - 2\right)$ ۲) $P\left(\text{Cos}^3\theta - 1\right)$

۳) $2p\left(\text{Sin}^3\theta - 1\right)$ ۴) $P\left(2\text{Sin}^3\theta - 1\right)$

۳ـ طول آزاد فنر برابر a می‌باشد. زاویه θ برای تعادل برای حالتی که وزنه Wدر موقعیت نشان داده شده قرار گیرد کدام است؟ (از وزن میله‌ها صرف‌نظر کنید.)



۱) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{W}{Ka}\right)$ ۲) $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{W}{Ka}\right)$

۳) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{W}{2Ka}\right)$ ۴) $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{W}{2Ka}\right)$

یادداشت:

....

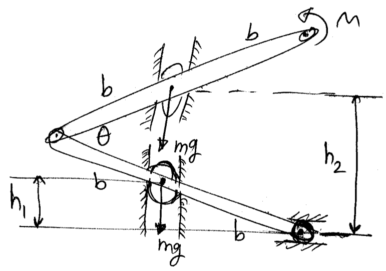
....

....

....

پاسخ‌ها

۱ ـ گزینه ۱ درست است.



$$h_1 = b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$h_2 = 3b\ \mathrm{Sin}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

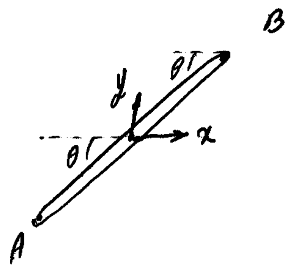
$$\delta U = 0 \quad \rightarrow \quad M\delta\left(\frac{\theta}{2}\right) - mg\,\delta h_1 - mg\delta h_2 = 0$$

$$M\delta\left(\frac{\theta}{2}\right) - mg\,\delta\left(b\,\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2} + 3b\,\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$M\delta\left(\frac{\theta}{2}\right) = mg\left(4\ b\,\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$M = 4mgb\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = 2\,\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{M}{4mgb}\right)$$

۲ ـ گزینه ۴ درست است.



$$\begin{cases} x_A = -\left(2a\cos\theta - a\cot\theta\right) \\ x_B = a\cot\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta x_A = \left(\dfrac{-a}{\sin^2\theta} + 2a\sin\theta\right)\delta\theta \\ \delta x_B = \dfrac{-a}{\sin^2\theta}\delta\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow P\delta x_A + Q\delta x_B = 0$$

$$p\left(\frac{-a}{\sin^2\theta} + 2a\sin\theta\right) + Q\left(\frac{-a}{\sin^2\theta}\right)\delta\theta = 0$$

$$p\left(-a + 2a\sin^3\theta\right) + Q\left(-a\right) = 0$$

$$Q = p\left(2\sin^3\theta - 1\right)$$

۳ ـ گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} y_1 = 2a\cos\theta \\ x_2 = a + 2a\sin\theta \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

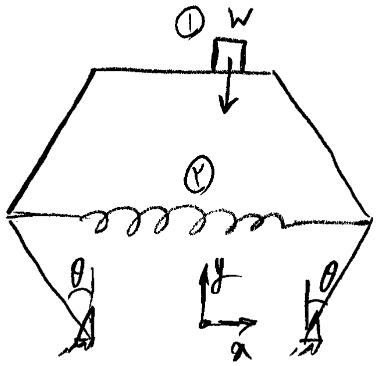
....

....

با استفاده از روش انرژی داریم:

$$V=\frac{1}{2}K\left(2a\sin\theta\right)^2+W\left(2a\cos\theta\right)=2Ka^2\sin^2\theta+2Wa\cos\theta$$

$$\rightarrow\quad \frac{dV}{d\theta}=4Ka^2\sin\theta\cos\theta-2Wa\sin\theta=0\quad\rightarrow\quad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{W}{2Ka}\right)$$



یادداشت:

....

....

....

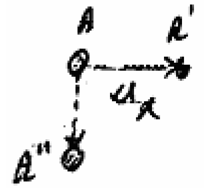
....

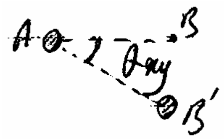
فصل دوم

مقدمه‌ای بر روابط تعادل استاتیکی

درجه آزادی، تغییر مکان یک نقطه را در حالت مختلف گویند.

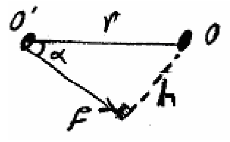
ممان : در یک نقطه از فضای دو بعدی اصولاً سه درجه‌ی آزادی u_x , u_y , θ_{xy} وجود دارد.



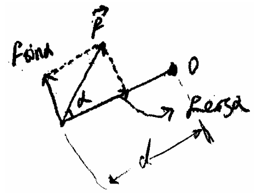


تعریف ممان: حاصلضرب نیرو در فاصله‌ی آن از نقطه‌ی o را ممان M_o گوییم.

×ممان نیروی f نسبت به o $\quad F.h = M_{F/O} = M_O$



$$m_o = f.h = f.r\sin\alpha \;\Rightarrow\; m_o = f.r.\sin\alpha$$



$$\Rightarrow\; m_o = f.\sin\alpha d$$

یادداشت:

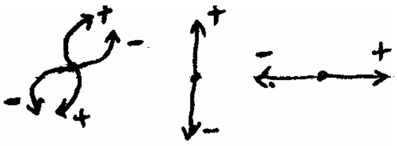
....

....

....

....

جهت نیروها در استاتیک : طبق قرارداد داریم:



معادلات تعادل استاتیکی: روابط تعادل استاتیکی عبارتند از:

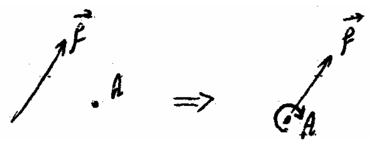
که در آن o نقطه‌ی دلخواه است:

$$\sum f_x = 0 \quad , \quad \sum f_y = 0 \quad , \quad \sum M_o = 0$$

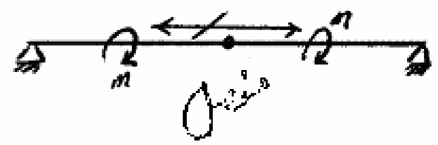
تذکر : در استاتیک با فرض صلب بودن اجسام تغییر شکل در اجسام یا سازه‌ها بی‌معنی است و جسم و یا سازه تنها جابجا می‌شود. در استاتیک یک نیرو را می‌توان در امتداد خود جابجا کنیم.

سئوال : آیا می‌توانیم f را به نقطه‌ی A منتقل کنیم؟

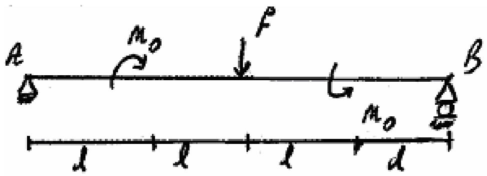
بلی ـ مشروط بر این که ممان مربوط به آن را نیز با آن منتقل کنیم.



تذکر: در اجسام صلب می‌توان ممان را به هر نقطه‌ی دلخواه روی جسم یا سازه منتقل کرد. دقت شود که ممان را از روی مفاصل نمی‌توان عبور داد.

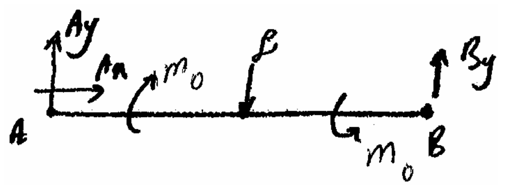


مثال: عکس‌العمل A و B کدام است؟



$$\left| \begin{array}{l} F = 10\,KN \\ M_o = 1000\,Nmm \end{array} \right.$$

سه مجهول A_x , A_y , B_y وجود دارد و سه معادله‌ی تعادل لذا با رسم دیاگرام آزاد کل قابل حل است.



$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; +A_x = 0 \;\Rightarrow\; Ax = 0 \qquad (1)$$

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; +A_y + B_y - F = 0 \;\Rightarrow\; F = A_y + B_y \qquad (2)$$

$$\sum m_A = 0 \;\Rightarrow\; \cancel{+m_o} + f(2\ell) - \cancel{m_o} - B_y(4\ell) = 0$$

$$\Rightarrow\; B_y = \frac{1}{2} f \qquad (3)$$

$$(2),(3) \;\Rightarrow\; A_y = \frac{1}{2} f$$

یادداشت:

....

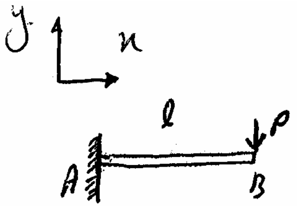
....

....

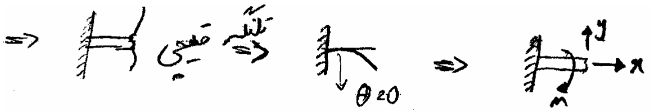
....

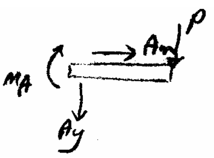
رسم دیاگرام آزاد جزء و کل

مثال: عکس‌العمل A چقدر است؟



تکیه گاه گیردار یعنی در محل A یا جوش است یا پیچ. به عبارت دیگر در محل A زاویه یا شیب وجود ندارد. و همچنین حرکت در جهت x و y وجود ندارد. پس در A به ترتیب ممان عکس‌العمل M_A و عکس‌العمل A_x و A_y وجود دارد. زیرا حرکت آن‌ها در این جهات مقید شده‌اند.





اگر پس از انجام محاسبات هر کدام از عکس‌العمل‌ها منفی شد جهت را عوض کنید.

حال روابط تعادل بر روی دیاگرام آزاد کل تیر نوشته می‌شود.

$$\sum f_x = 0 \quad , \quad \sum f_y = 0 \quad , \quad \sum M = 0$$

$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; +A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0$$

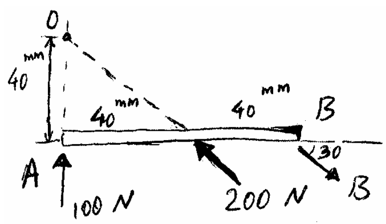
چون A_y منفی شد پس جهت انتخابی غلط است و باید عوض شود:

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; -A_y - P = 0 \;\Rightarrow\; A_y = -P \;\Rightarrow$$

$$+\uparrow \sum m_A = 0 \;\Rightarrow\; +P.\ell + m_A = 0 \;\Rightarrow\; m_A = -p.\ell$$

منفی یعنی جهت انتخابی m_A اشتباه است.

تذکر: رابطه تعادل $\sum M_O = 0$ را می‌توان نسبت به هر نقطه دلخواه حتی اگر نقطه O مانند شکل زیر خارج از تیر واقع شود نوشت.



$$\sum m_o = 0 \;\Rightarrow\; 0 + 0 + B\sin 30 \times (80) - B\cos 30 \times (40) = 0 \;\Rightarrow\; B = ?$$

یادداشت:

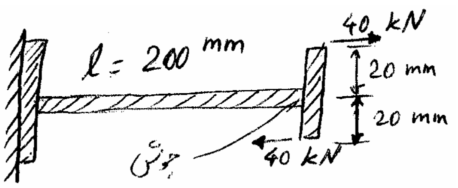
....

....

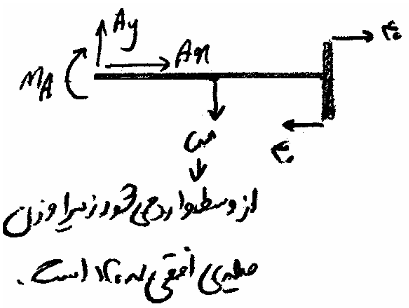
....

....

مثال: عکس العمل A را محاسبه کنید (وزن تیر 120N است).



دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم.



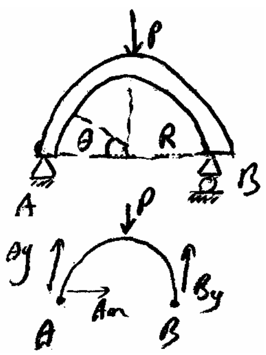
$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; +40-40+A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0$$

$$\sum f_y = 0$$

$$\sum m_A = 0 \;\Rightarrow\; +m_A + 40(20) + 40(20) + w \times 100 \times 10^{-3}$$

منفی شد پس جهت باید عوض شود $\Leftarrow$ $m_A = -178\,\mathrm{Nm}$

مثال: عکس العمل A و نیروی داخلی در $\theta = 20$ چقدر است؟



چون گیردار نیست پس ممان نداریم:

$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0 \qquad (1)$$

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; +A_y + B_y = P \qquad (2)$$

حال نسبت به A ممان می‌گیریم:

$$\sum m_A = 0 \;\Rightarrow\; -B_y(2R) + \rho(R) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \frac{1}{2}\rho \qquad (3)$$

$$(2),(3) \;\Rightarrow\; A_y = \frac{1}{2}P$$

یادداشت:

....

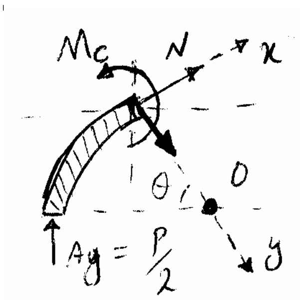
....

....

....

تذکر مهم: بدون حل از ابتدا می‌توانستیم بگوییم که چون جسم نسبت به محور y در حالت تقارن هندسی و نیرویی است لذا در روابط (۲) مقدار A_y با B_y برابر است . یعنی:

$$(۲)\quad A_y + B_y = P \;\Rightarrow\; A_y = B_y = \frac{1}{2}P$$



$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; N + A_y \cos 30 = 0 \;\Rightarrow\; N = -\frac{P}{2}\cos\theta$$

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; V + \left(-A_y\right)\left(\sin\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; V = \frac{P}{2}\sin\theta$$

$$\sum m_c = 0 \;\Rightarrow\; -m_c + \left(\frac{P}{2}\right)\left(R - R\cos\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; m_c = \frac{1}{2}PR\left(1-\cos\theta\right)$$

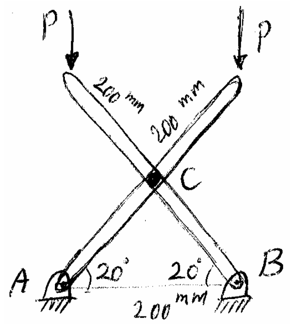
×نتیجه : (۱) در تیرهای مسطح و یا خمیده سه نیروی داخلی M , N , V در هر سطح وجود دارد.

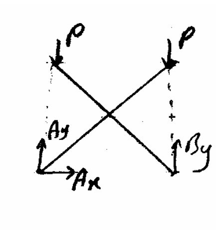
(۲) در تیرهای خمیده تحت بار متمرکز نیروی داخلی نرمال از نوع $\cos$ و برش (V) از نوع $\sin$ می‌باشد.

(۳) در تیرهای خمیده تحت بار متمرکز هنگام نوشتن روابط تعادل بهتر است محور x و y در راستای N و V قرار بگیرد.

مثال: عکس‌العمل‌ها درمحل پین c چقدر است؟

ابتدا دیاگرام آزاد کل را رسم می‌کنیم :





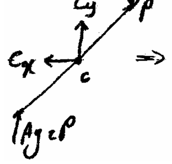
$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; +A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0 \qquad (۱)$$

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; +A_y + B_y + \left(-P\right) - P = 0 \;\Rightarrow$$

$$A_y + B_y = 2P \qquad (۲)$$

$$\sum m_A = 0 \;\Rightarrow\; -B_y\left(200\right) + P\left(200\right) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = P \;\overset{(2)}{\Rightarrow}\; A_y = P$$

حال نیروها را در c محاسبه می‌کنیم، دیاگرام آزاد جزء در c رسم می‌کنیم.



چون پین است ممان نداریم.

در دیاگرام آزاد جزء روابط تعادل را می‌نویسیم:

یادداشت:

....

....

....

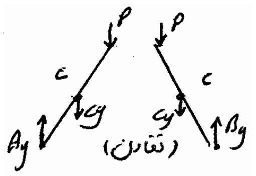
....

$$\sum f_x = 0 \quad , \quad \sum f_y = 0$$

$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; -c_x = 0 \;\Rightarrow\; c_x = 0$$

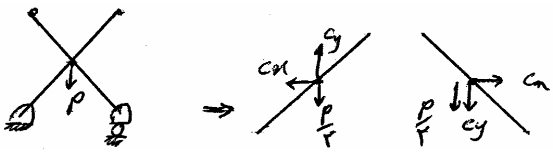
$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; c_y + A_y - P = 0 \;\Rightarrow\; c_y + P - P = 0 \;\Rightarrow\; c_y = 0$$

تذکر: در این مثال از همان ابتدا می‌توان حدس زد که در محل پین $c_y = 0$ است، زیرا:



باید هر دو c_y به علت تقارن نسبت به y همواره هم جهت باشند. از طرفی طبق نیروی کنش و واکنش در پین c و یا طبق اصل سوم نیوتن دو نیروی c_y باید مساوی و مختلف الجهت باشد. لذا نتیجه می‌گیریم حتماً بایستی $c_y = 0$ باشد.

تذکر : اگر در گره‌ی c نیروی خارجی P وجود داشت تذکر قبل مطرح نیست و اعتبار ندارد.



یادداشت:

....

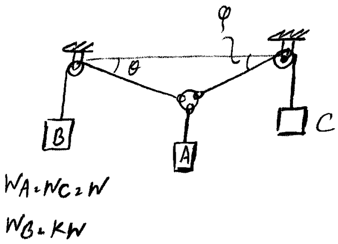
....

....

....

تست‌های فصل دوم

۱ ـ سه بلوک نشان داده شده در شکل در تعادل می‌باشند. زاویه θ برای تعادل کدام است؟ $(w_A = w_C = w\ ,\ w_B = kw)$



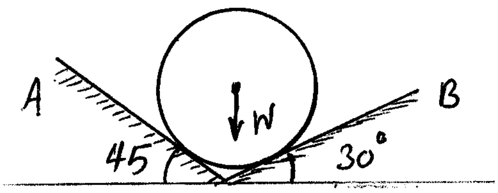
۱) $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{k^2}{3}\right)$

۲) $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$

۳) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{k}{3}\right)$

۴) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k}{3}\right)$

۲ ـ نیروی وارد شده توسط تکیه‌گاه B به استوانه فوق به وزن W چه مقدار می‌باشد؟



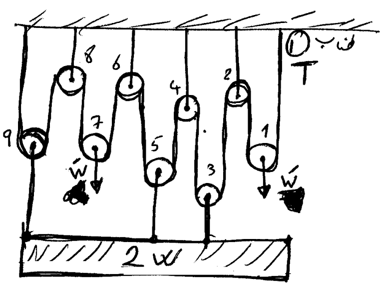
۱) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)W$

۲) $\left(\sqrt{3}-1\right)W$

۳) $\left(\sqrt{2}-1\right)W$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}W$

۳ ـ در سیم 9 قرقره‌ای شکل زیر از اصطکاک طناب با قرقره‌ها صرف‌نظر شده است نیروی کششی T مربوط به طناب است. بـه انتهـای قرقره 1 و قرقره 7 وزنه W' آویزان است، برای تعادل کدام رابطه صحیح است؟



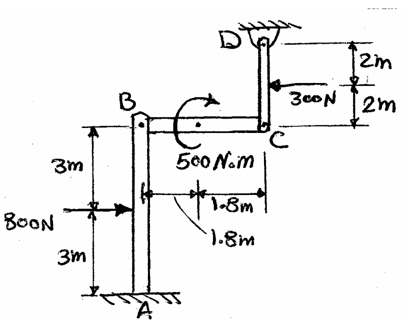
۱) $W = 2W'$

۲) $W = \frac{4}{3}W'$

۳) $W = 1.5W'$

۴) $W = W'$

۴ ـ تیر یکسر گیردار AB در B به تیره BC مفصل شده و CD هم به BC مفصل شده است و مجموعه تحت تاثیر نیروی 800 N و ممان 500 Nm و نیروی 300 N قرارد دارد. گشتاور عکس العمل تکیه گاه در A کدام است؟



۱) 0.5 kNm

۲) 1 kNm

۳) 1.5 kNm

۴) 0

یادداشت:

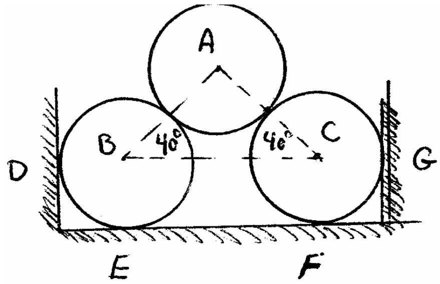
....

....

....

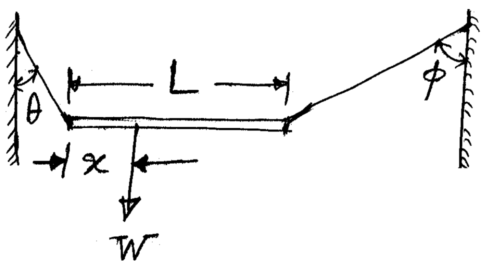
....

۵ـ سه استوانه همگن C,B,A مطابق شکل در درون جعبه ای قرار داده شده اند. هر سیلندر به جرم 200 kg و قطر 250 mm است. نیروی اعمال شده از صفحه افقی به سیلندر B کدام است؟ $(g \simeq 10\ m/s^2)$



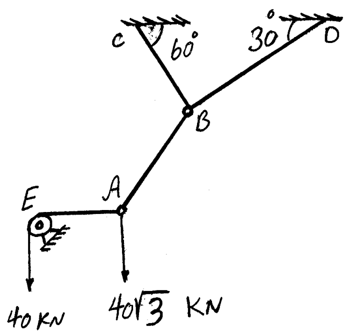
۱) 2400 N
۲) 4800 N
۳) 3000 N
۴) 1200 N

۶ـ میله‌ی غیریکنواختی به وزن w توسط دو نخ بی‌وزن آویخته شده است. میله در حالت افقی و در حال سکون است. طول میله برابر با L می‌باشد، فاصله‌ی گرانیگاه میله از انتهای سمت چپ برابر است با:



۱) $\frac{\sin\phi \sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}L$
۲) $\frac{\sin\theta \cos\phi}{\sin(\theta+\phi)}L$
۳) $\frac{\cos\theta \sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}L$
۴) $\frac{\cos\phi \cos\phi}{\sin(\theta+\phi)}L$

۷ـ کشش نخ در عضو BD چه‌مقدار می‌باشد؟



۱) $20\sqrt{3}$ KN
۲) 40 KN
۳) $40\sqrt{3}$ KN
۴) 20 KN

یادداشت:

....

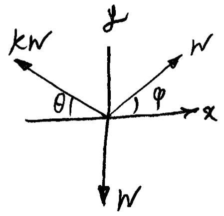
....

....

....

پاسخ‌ها

۱ ـ گزینه ۲ درست است.



$$\sum F_x = 0 \quad \to \quad w\cos\phi - kw\cos\theta = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \to \quad w\sin\phi + kw\sin\theta - w = 0$$

$$\to \quad \begin{cases} \cos\phi = k\cos\theta \\ \sin\phi = 1 - k\sin\theta \end{cases}$$

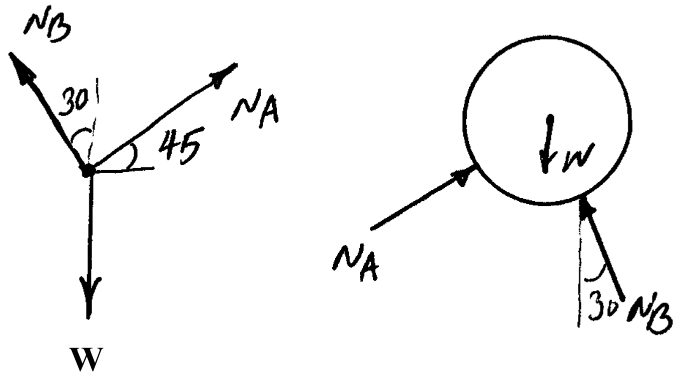
$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \quad \to \quad k^2(\cos\theta)^2 + (1 - k\sin\theta)^2 = 1$$

$$k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta + 1 - 2k\sin\theta = 1 \quad \to \quad k^2 + 1 - 2k\sin\theta = 1$$

$$\to \quad \sin\theta = \frac{k^2}{2k} \quad \to \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$$

۲ ـ گزینه ۲ درست است.

دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم:



$$N_B = \frac{\sin 45}{\sin(30+45)} W = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 30\cos 45 + \sin 45\cos 30} W = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} W = \frac{2}{\sqrt{3}+1} W = (\sqrt{3}-1) W$$

یادداشت:

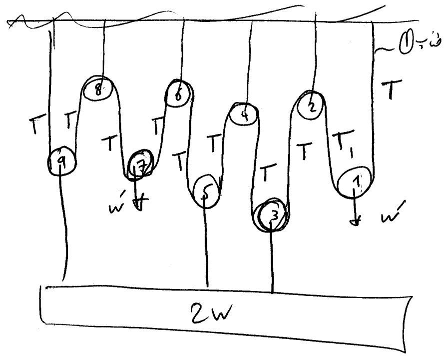
....

....

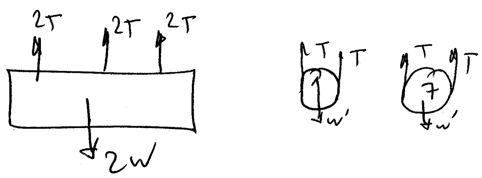
....

....

۳ـ گزینه ۳ درست است.

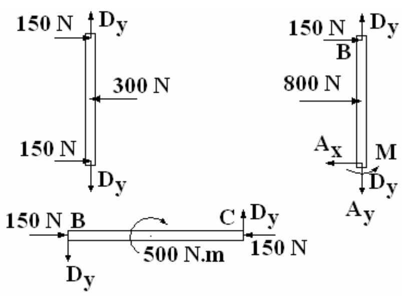


ابتدا در تمام طناب‌ها نیروی کششی T را در شکل رسم می‌کنیم و سپس رابطه تعادل نوشته می‌شود. رابطه تعادل هم برای وزنه 2W و هم برای قرقره 1 و 7 نوشته شود یعنی:



$$\begin{cases} 6T = 2W \quad \Rightarrow \quad W = 3T \\ 2T = W' \quad \Rightarrow \quad W' = 2T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W = 3\left(\frac{W'}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad W = 1.5\,W'$$

۴ـ گزینه ۳ درست است.



بررسی عضو CD و روابط تعادل مقادیر نیروی اعمال شده به آن مطابق شکل خواهد بود.

همچنین با بررسی عضو BC عکس العمل ها بدست می آیند که با استفاده از رابطه گشتاور حول یک انتهای عضو خواهیم داشت

$$D_y \times 3.6 = 500 \rightarrow D_y = \frac{5000}{36} = \frac{1250}{9}\ \text{N}$$

و در نهایت برای عضو AB خواهیم داشت

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M = 800 \times 3 - 150 \times 6 = 1500\ \text{Nm}$$

یادداشت:

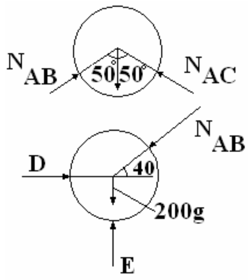
....

....

....

....

۵ـ گزینه ۳ درست است.



با استفاده از تعادل سیلندرها می توان نیروی وارد به آن ها را بدست آورد.

$$2N_{AB}\cos 50=200g \Rightarrow N_{AB}=N_{AC}=\frac{1000}{\cos 50}\ \text{N}$$

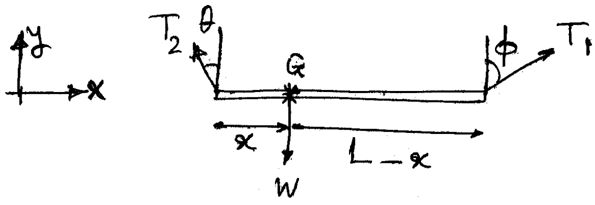
در نتیجه با بررسی سیلندر B نیرو در E محاسبه می شود.

$$E=200g+N_{AB}\sin 40=2000+\frac{1000}{\cos 50}\sin 40=3000\ \text{N}$$

راه دوم: کل مجموعه سیلندرها را با هم در نظر می گیریم که به علت تقارن نیروی E و F برابر است. پس برای مجموعه سه سیلندر می توان نوشت

$$E+F=2E=3\times 200\times 10 \ \Rightarrow\ E=3000\ \text{N}$$

۶ـ گزینه ۲ درست است.



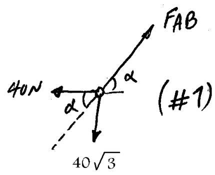
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 \sin\phi = T_2 \sin\theta$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow T_1 \cos\phi(L-x) = T_2 \cos\theta\,(x)$$

$$\Rightarrow \left(T_2 \frac{\sin\theta}{\sin\phi}\right)\cos\phi(L-x) = T_2\cos\theta(x)$$

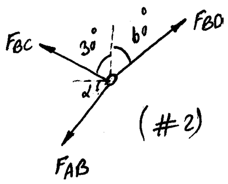
$$\Rightarrow \frac{(L-x)\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{x\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow x = \frac{\sin\theta\cos\phi}{\sin(\theta+\phi)}L$$

۷ـ گزینه ۳ درست است.



$$\left.\begin{matrix} F_{AB}\cos\alpha=40 \\ F_{AB}\sin\alpha=40\sqrt{3}\end{matrix}\right\} \rightarrow \tan\alpha=\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{BD}\operatorname{Cos}60 + F_{BC}\operatorname{Cos}30 = F_{AB}\operatorname{Sin}\alpha \\ F_{BD}\operatorname{Sin}60^\circ = F_{BC}\operatorname{Sin}30^\circ + F_{AB}\operatorname{Cos}\alpha \end{cases}$$



پس از حل معادلات:

$$F_{BD}=(\sin\alpha\cos 60+\cos\alpha\sin 60)F_{AB}=\sin(60+60)(80)=40\sqrt{3}\,\text{KN}$$

یادداشت:

....

....

....

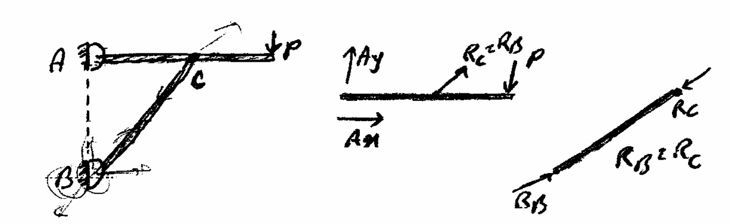
....

فصل سوم

اعضای دو نیرویی و سه نیرویی

در اعضای دو نیرویی که در دو نقطه به آن نیرو وارد می‌شود (به جز ممان) عکس‌العمل‌ها بر روی عضو در امتداد خطی است که دو نقطه را به هم وصل می‌ککند.

عضو BC دو نیرویی است.

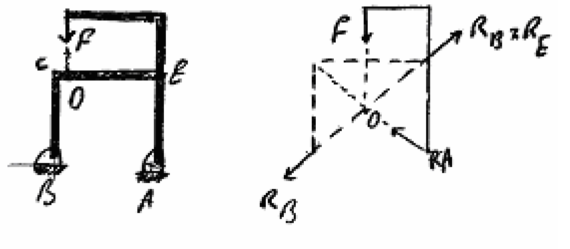


تذکر : در یک صفحه سه نیرو زمانی در حال تعادل است اگر هر سه نیرو از یک نقطه بگذرد.

مثال: عکس‌العمل A از کدام نقطه می‌گذرد؟

از C عبور می‌کند.

عضو BCE دو نیرویی است و نیز عضو AEG سه نیرویی است که نیروی R_B, F از O می‌گذرد و به اجبار R_A باید از B یا C بگذرد.



یادداشت:

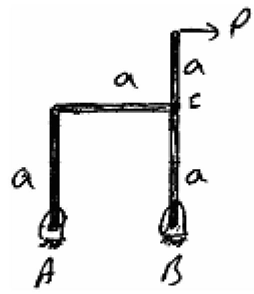
....

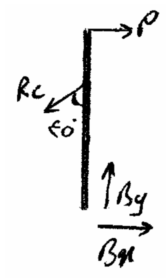
....

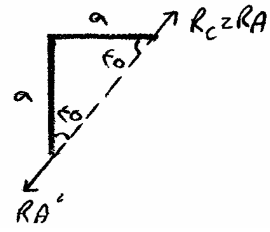
....

....

مثال: عکس‌العمل A چقدر است؟







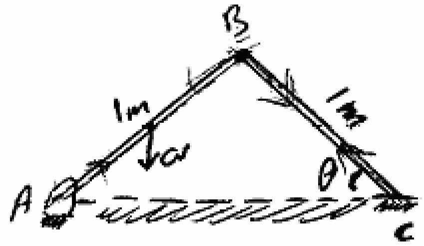
$$+\uparrow\sum M_B=0 \;\Rightarrow\; P(2a)-R_C\cos 45(a)=0 \;\Rightarrow\; R_A=R_C=\frac{4P}{\sqrt{2}}$$

عضو AC دو نیرویی است.

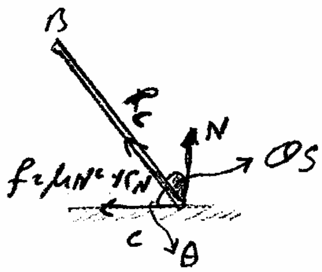
تذکر مهم: گرچه در بخش‌های بعدی ضریب اصطکاک لغزشی و غلتشی به طور کامل بحث خواهد شد ولی در حال حاضر به زاویه‌ی اصطکاک توجه شود. همیشه تانژانت زاویه اصطکاک (زاویه بین عکس‌العمل نرمال N با عکس‌العمل کل سطح (R) را زاویه اصطکاک گویند) برابر است با مقدار ضریب اصطکاک بین جسم و سطح.

مثال: θ تعادل کدام است؟ عضو AB وزن w دارد و عضو BC سبک است.

ضریب اصطکاک میله‌ی BC با زمین μ_s و $\mu_s=0.2$ است.



حل : عضو BC دو نیرویی است.



$$\tan\varphi_s=\mu$$

$$\varphi_s=\arctan\mu$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi_s \;\Rightarrow\; \theta=\frac{\pi}{2}-\arctan(0.2)$$

یادداشت:

....

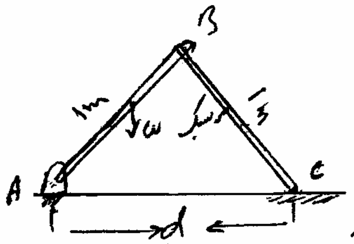
....

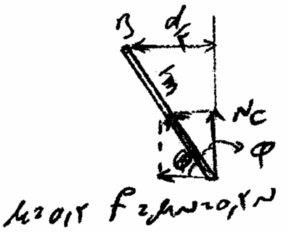
....

....

مثال: حداقل d تعادل کدام است؟

عضو BC دو نیرویی است.





$$\tan\varphi = \mu = 0.2$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \;\Rightarrow\; \cot\theta = \tan\varphi = 0.2$$

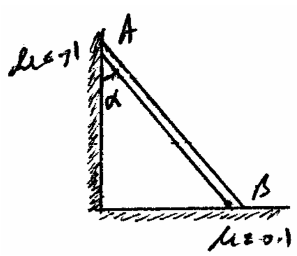
$$\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{d_2}{\sqrt{1-\frac{d^2}{4}}} = 0.2 \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{4-d^2} = 0.4 \Rightarrow$$

$$d^2 = 1.6 - 0.4d^2 \;\Rightarrow$$

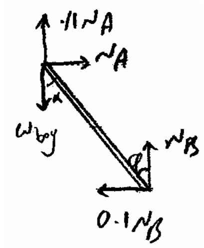
$$1.4d^2 = 1.6 \;\Rightarrow\; d = \sqrt{\frac{1.6}{1.4}}$$

مثال: α چقدر باشد که شخص بتواند خود را به بالاترین نقطه نردبان برساند؟

(وزن شخص $65\,kg$ و نردبان سبک است). ضریب اصطکاک نردبان با زمین و دیوار $\mu_s = 0.1$ فرض شود.



دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم:



$$\alpha = \varphi = \mathrm{arc}\tan 0.1$$

AB عضو دو نیرویی است زیرا یک برآیند برای $0.1N_B\,, N_B$ و نیز یک برآیند برای $0.1N_A\,, N_A\,, W$ داریم که در مجموع دو نیرو می‌شوند.

روش دوم : روش تعادل

$$\begin{cases}\sum F_x = 0\\ \sum F_y = 0\end{cases} \Rightarrow\; N_A\,, N_B \text{ محاسبه}$$

حال نسبت به A یا B ممان می‌گیریم. از معادله‌ی حاکم α استخراج می‌شود.

یادداشت:

....

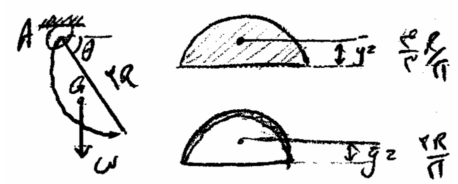
....

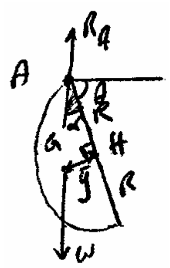
....

....

مثال: θ **تعادل کدام است؟ (وزن** ω **است.)**

جسم دو نیرویی است پس عکس‌العمل A در امتداد خطی است که A و B را به هم وصل می‌کند.



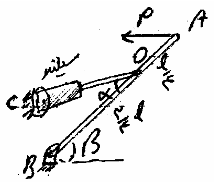


$$\tan\alpha=\frac{\bar{y}}{R}=\frac{4R}{3\pi R}=\frac{4}{3\pi}$$

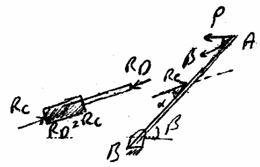
$$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\cot\theta=\tan\alpha=\frac{4}{3\pi}\ \Rightarrow\ \theta=\operatorname{arc}\cot\frac{4}{3\pi}$$

مثال: **عکس العمل سیلند چقدر است؟**



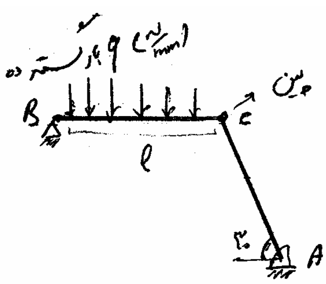
سیلندر CD دو نیرویی است.

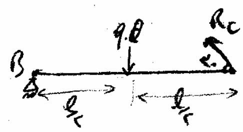


$$+\uparrow\sum M_B=0\ \Rightarrow\ P\ell\sin\beta-R_C\left(\frac{3}{4}\ell\right)\sin\alpha=0\ \Rightarrow\ R_C=\frac{3}{4}P\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

مثال: **عکس العمل A چقدر است؟**

عضو AC دو نیرویی است.





یادداشت:

....

....

....

....

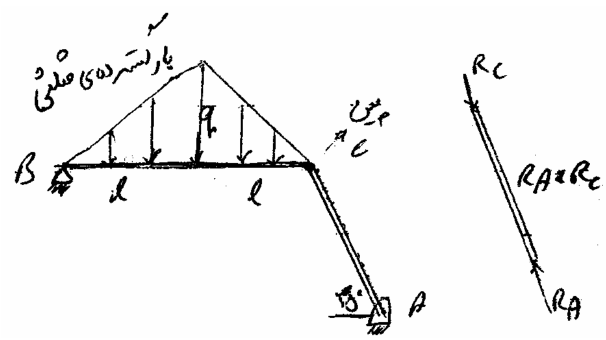
$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow$$

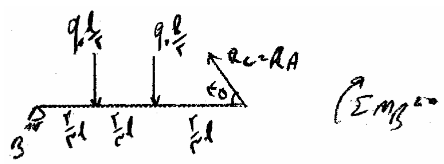
$$\left(q\ell_x \frac{\ell}{2}\right) - \left(R_C \sin 30\right)(\ell) + 0 = 0 \;\Rightarrow$$

$$R_C = q\ell \;\Rightarrow\; R_A = q\ell$$

مثال: عکس العمل A چقدر است؟

عضو AC دو نیرویی است.

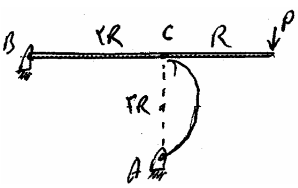


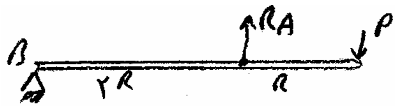


$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; -R_A(2\ell)(\sin 45) + q_0\frac{\ell}{2}\left(\frac{4}{3}\ell\right) + q_0\frac{\ell}{2}\left(\frac{2}{3}\ell\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; R_A = \frac{2}{3\sqrt{2}}q_0\ell \;\Rightarrow\; R_A = \frac{\sqrt{2}}{3}q_0\ell$$

مثال: عکس‌العمل A کدام است؟





$$+\uparrow \sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; 2R.R_A - 3R\,P = 0 \;\Rightarrow$$

$$R_A = \frac{3}{2}P$$

یادداشت:

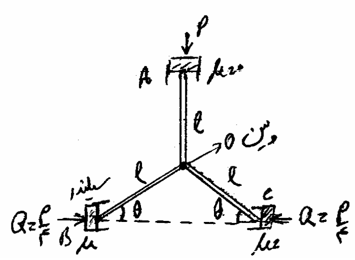
....

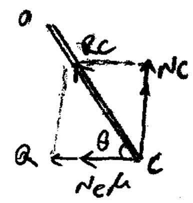
....

....

....

مثال: θ **تعادل کدام است؟**

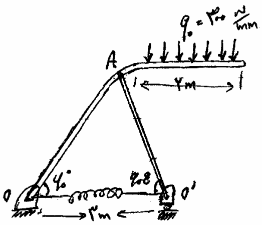


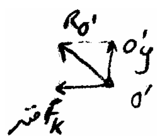


عضو OC (یا OB) دو نیرویی است. چون تقارن وجود دارد پس $N_C = \frac{1}{2}P$ ازآنجایی که OC دو نیرویی است لذا R_C در امتداد عضو OC است پس :

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}P}{\mu\left(\frac{P}{2}\right)+\frac{P}{4}} = \frac{2}{1+2\mu}$$

مثال: **نیروی وارد بر فنر را حساب کنید.**



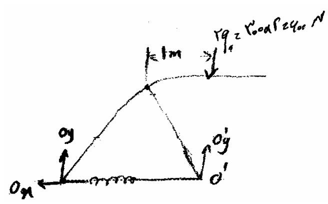


عضو AO' دو نیرویی است.

$$\tan 60 = \frac{O'y}{F_k} \Rightarrow F_k = \frac{O'y}{\tan 60} \qquad (۱)$$

برای محاسبه‌ی $O'y$ از دیاگرام آزاد کل استفاده می‌کنیم:

حال نسبت به O ممان می‌گیریم:



$$\uparrow \sum M_o = 0 \Rightarrow$$

$(600\times 2.5) - O'y = -500 \rightarrow$ جهت $O'y$ باید عوض شود

$$(1) \Rightarrow f_K = \frac{500}{\tan 60} = \frac{500}{\sqrt{3}} \simeq 292.397\,\text{N}$$

یادداشت:

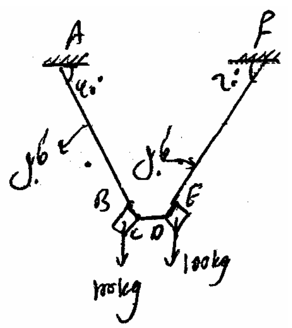
....

....

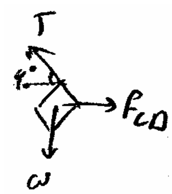
....

....

مثال: نیرویی وارد بر میله‌ی سبک CD کدام است؟



میله‌ی سبک CD دو نیرویی است. همچنین کابل‌ها نیز دو نیرویی هستند.

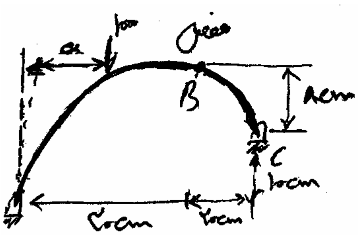


$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; T\cos 60 = F_{CD} \qquad (1)$$

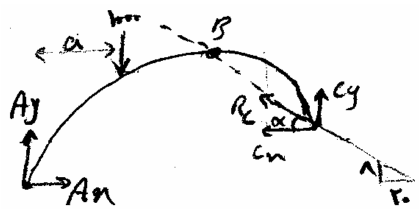
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; T\sin 60 = 100 \;\rightarrow\; T = \frac{100}{\sin 60}$$

$$(1) \;\Rightarrow\; F_{CD} = \frac{100\sqrt{3}}{3}\,\text{N}$$

مثال: عکس العمل تکیه گاه A چقدر است؟ (مولفه‌های عکس العمل‌ها در A چقدر است)



عضو BC دو نیرویی است. یعنی عکس العمل کل تکیه گاه C در امتداد خط CB است. یا به عبارت بهتر C_x و C_y رابطه‌ی زیر برقرار است.



$$\tan\alpha = \frac{C_y}{C_x} = \frac{8}{20} \;\Rightarrow\; C_g = \frac{8}{20}C_x \;\Rightarrow\; C_y = \frac{2}{5}C_x \qquad (1)$$

یادداشت:

....

....

....

....

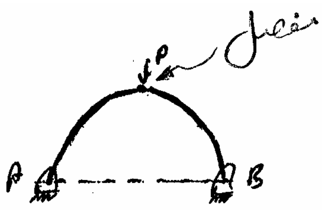
حال در دیاگرام آزاد کل نسبت به A ممان می‌گیریم.

$$1000\,a - 10\,C_x - 50\,C_y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} C_x = \frac{1000\,a}{30} = \frac{100}{3}a$$

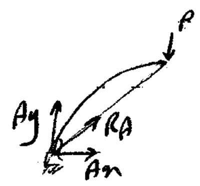
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - C_x = 0 \Rightarrow A_x = C_y \Rightarrow A_x = \frac{100}{3}a$$

$$A_y = (1000)\left(1 - \frac{a}{75}\right) \Rightarrow R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

مثال: عکس العمل A چقدر است؟



عضو AC یا BC دو نیرویی است. زیرا قرینه است.

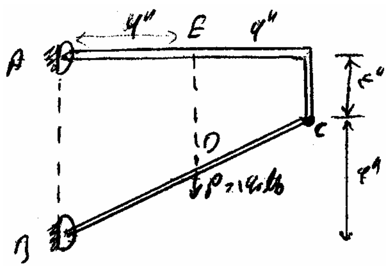


$$A_y = \frac{1}{2}P$$

$$A_x = A_y = \frac{1}{2}P$$

$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$

مسأله: عکس العمل A و B چقدر است؟



راهنمایی: عضو AC دو نیرویی است لذا بین A_x و A_y مانند مثال بالا یک رابطه برقرار است و حل مسأله را آسان می‌سازد.

یادداشت:

....

....

....

....

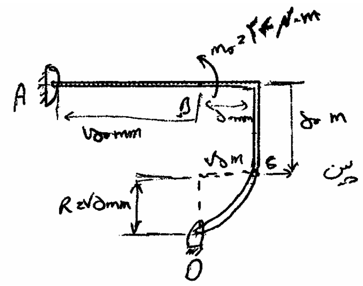
مسأله: اگر در مساله قبل نیروی P به جای D به E اعمال شود آنگاه:

عکس‌العمل A و B چقدر خواهد شد؟

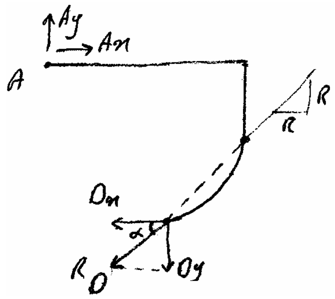
دانشجویان محترم سعی نمایند دو مسأله بالا را حل کنند. برای حل این دو مسأله لطفاً ابتدا به مثال زیر توجه گردد.

مثال: در قاب زیر عکس‌العمل A چقدر است؟

حل : عضو CD یک عضو دو نیرویی است.



$$\tan\alpha = \frac{D_y}{D_x} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow D_y = D_x$$



$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; 24 - 0.125D_x - 0.125D_y = 0 \;\Rightarrow\; D_x = D_y = 96\,\text{N}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x - D_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 96\text{N} \\ \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y - D_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 96\text{N} \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 96\sqrt{2}\text{N}$$

اعضای سه نیرویی

دو نوع مسأله داریم:

۱) سه نیرو متقارب است:

دو معادله تعادل حاکم است.

یادداشت:

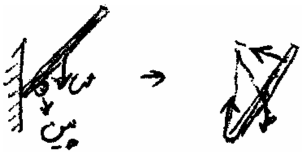
....

....

....

....

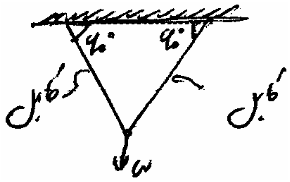
۲) سه نیرو در یک صفحه زمانی در حال تعادل است که امتداد آن‌ها از یک نقطه بگذرد، مانند مثال زیر.

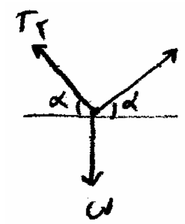


شرایط بالا برای زمانی که دو نیرو موازی باشد صادق نیست.

اگر در یک مسأله‌ی سه نیرویی حداقل دو نیرو کار انجام داد می‌توان به جای تعادل از انرژی مسأله را حل کرد.

مثال: نیروی کششی وارد به کابل چقدر است؟

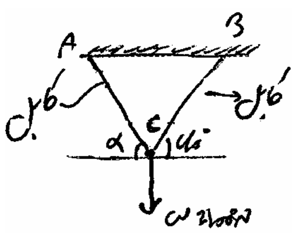




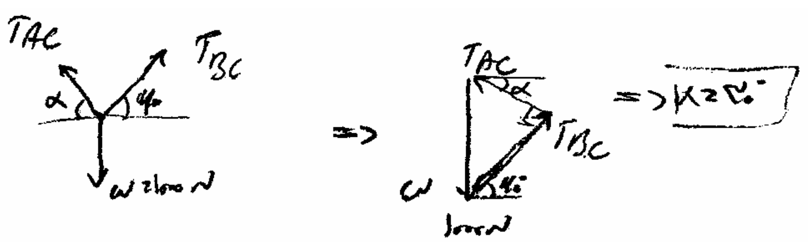
$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; T_1 = T_2 \qquad (۱)$$
$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; T_1 \sin 60 + T_2 \sin 60 = \omega \;\Rightarrow$$
$$(۱) \;\Rightarrow\; T_1 = T_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega$$

مثال: α چقدر باشد که نیروی وارد بر کابل AC مینیمم شود؟

ثانیاً: نیروی وارد بر کابل چقدر است؟ (هر دو کابل را محاسبه کنید.)



حل : مسأله از نوع متقارب است. از تعادل یا مثلث نیرو حل می‌کنیم. یعنی:



T_{AC} مینیمم است اگر $T_{AC} \perp T_{BC}$ باشد.

$$\begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; T_{BC} \,,\, T_{AC} \text{ محاسبه‌ی}$$

یادداشت:

....

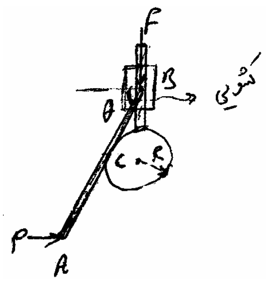
....

....

....

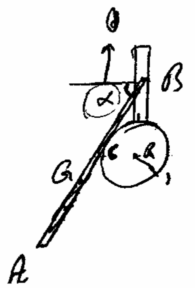
مثال: میله‌ی AB سبک است. θ تعادل کدام است؟

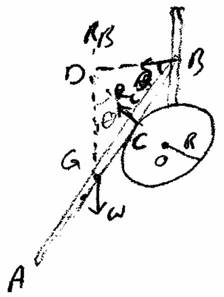
راهنمایی: این مسأله سه نیرویی می‌باشد که چون حداقل دو نیروی F و p در امتداد و خود کار انجام می‌دهند لذا قبلاً در فصل دوم این مسأله از روش انرژی حل شده. در مثال زیر که فقط یک نیرو کار انجام می‌دهد دیگر نمی‌توان از روش انرژی مسأله را حل کرد و از تعادل کلی می‌شود.



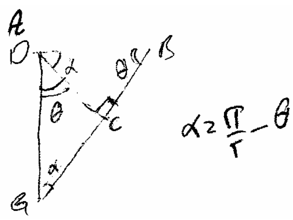
معمولاً در مسائل سه نیروئی از امتداد نیروها استفاده می‌کنیم تا چند مثلث متشابه را پیدا کنیم و سپس با توجه به معلومات داده شده خواسته‌ی مسأله را می‌یابیم. از خود نیروها هیچ استفاده‌ای نمی‌شود، مانند مثال زیر

مثال: θ تعادل کدام است؟ $\left(\overline{AB}=2R\right)$





از انرژی قابل حل نیست. با استفاده از تعادل سه نیرویی حل می‌کنیم:



$$\overline{GB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{R}$$

$$\overline{GB}=R=\overline{BC}+\overline{GC} \qquad (1)$$

$$\Delta BCD \ \rightarrow\ BC=R\tan\theta$$

$$\Delta DGC \ \rightarrow\ CG=DC\tan\theta$$

$$\Delta DCB \ \rightarrow\ DC=BC\tan\theta$$

$$\rightarrow DC=R\tan^2\theta \ ,\ CG=R\tan^3 \Rightarrow R=R\tan^2\theta+R\tan^3\theta \Rightarrow \tan^3\theta+\tan^2\theta-1=0$$

با حل معادله‌ی فوق داریم: $\tan\theta=0.68$

یادداشت:

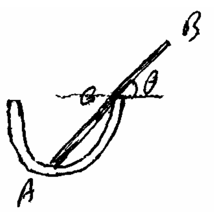
....

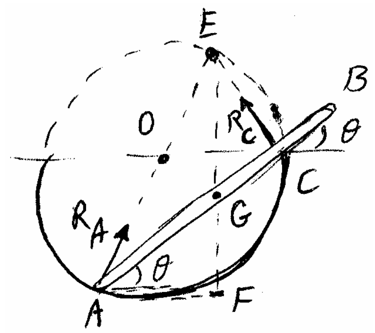
....

....

....

مثال: **شعاع کاسه R است و** $\overline{AB}=3R$ **طول میله‌ی** AB **برابر با** ℓ **و وزن آن w است.** θ **تعادل کدام است؟ (اصطکاک صفر است).**





عضو سه نیرویی است پس:

R_A از مرکز می‌گذرد نقطه‌ی E روی دایره است. چون زاویه‌ی ECA محاطی است پس 90° درجه است.

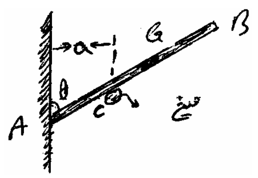
$$\left.\begin{array}{l} \Delta AGF \;\Rightarrow\; \cos\theta=\dfrac{AF}{1.5R} \;\Rightarrow\; AF=1.5R\cos\theta \\ \Delta AEF \;\Rightarrow\; \cos2\theta=\dfrac{AF}{2R} \;\Rightarrow\; AF=2R\cos2\theta \end{array}\right\} \Rightarrow\; 1.5R\cos\theta=2R\cos2\theta$$

حل کنیم جواب به دست می‌آید:

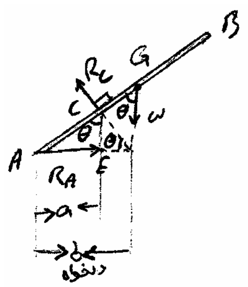
$$\cos^2\theta-3\cos\theta-4=0 \;\Rightarrow\; \cos\theta=0.7$$

مثال: θ **تعادل کدام است؟**

میله‌ی AB نازک و طول آن ℓ است و وزن این میله w است. این میله روی یک میخ قرار دارد. از اصطکاک‌ها صرفنظر شود. عضو AB سه نیرویی است.



حل:



یادداشت:

....

....

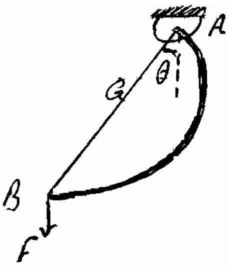
....

....

$$\Delta ACD: \quad AC = b\sin\theta$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta ACE: a = AC\sin\theta \ \Rightarrow\ a = b\sin^2\theta\\ &\Delta AGD: b = AG\sin\theta = \frac{\ell}{2}\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ a = \frac{\ell}{2}\sin^3\theta \ \Rightarrow\ \sin\theta = \sqrt[3]{\frac{2a}{\ell}}$$

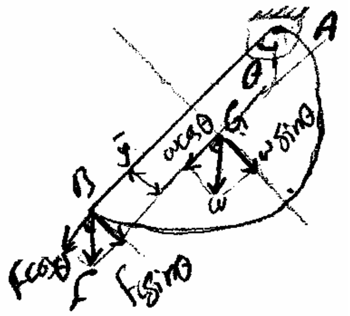
مثال: θ **تعادل کدام است؟ وزن رینگ w است و شعاع** R **است.** $\left(\overline{AB} = 2R\right)$



از قانون سه نیرویی نمی‌توان استفاده کرد زیرا F و W موازی‌اند. جواب از دو روش میسر می‌شود.

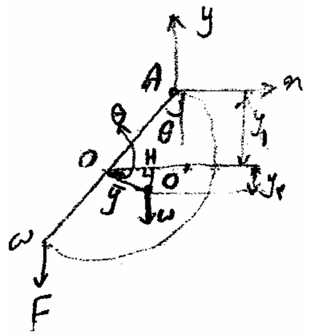
۱) روش تعادل : ممان گیری نسبت به A

۲) روش انرژی



$$\sum M_A = 0 \ \Rightarrow\ -F\sin\theta(2R) - \omega\sin\theta(R) + \omega\cos\theta\left(\frac{2}{\pi}R\right) = 0$$

$$\bar{y} = \frac{2R}{\pi} \ \Rightarrow\ \text{tna}\theta = \frac{2w}{\pi(w+2F)}$$



روش انرژی : $(-F)(-dy_B) + (-w)(-dy_{o'}) = 0$

$$\Rightarrow\ fdy_B + Wdy_{o'} = 0$$

$$\begin{cases} y_B = 2R\sin\theta \ \rightarrow\ dy_B = 2R\cos\theta d\theta \\ y_{o'} = y_1 + y_2 = R\cos\theta + \bar{y}\sin\theta = R\cos\theta + \frac{2}{\pi}R\sin\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow\ dy_{o'} = R\left[-\sin\theta + \frac{2}{21}\cos\theta\right]d\theta$$

یادداشت:

....

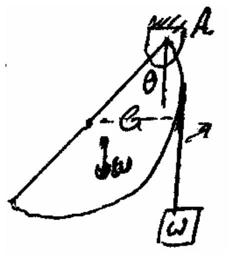
....

....

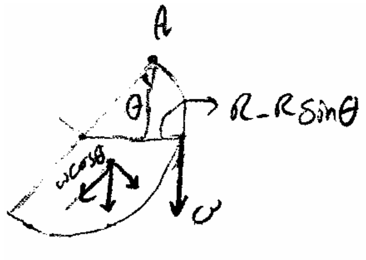
....

$$F\left(2R\cos\theta\right)d\theta+w\left[R\left(-\sin\theta+\frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\right]d\theta=0 \;\Rightarrow\; \tan\theta=\frac{2w}{\pi\left(w+2F\right)}$$

مثال: θ **تعادل کدام است؟ (نقطه‌ی تماس از مرکز می‌گذرد)**



از تعادل استفاده می‌کنیم: نسبت به A ممان می‌گیریم:



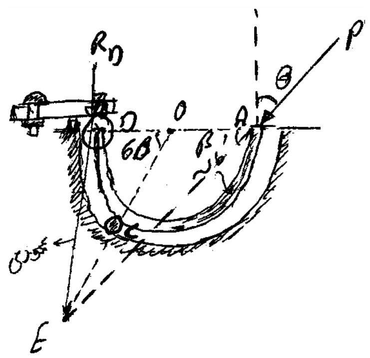
$$\sum M_A=0 \;\Rightarrow$$

$$w\cos\theta\left(\frac{4}{3\pi}R\right)-w\sin\theta R+w\left(R-R\sin\theta\right)=0$$

$$\Rightarrow\; \frac{4}{3\pi}\cos\theta-2\sin\theta+1=0$$

مثال: θ **تعادل کدام است؟ (شعاع کاسه R است).**

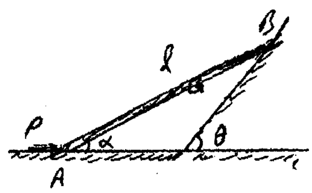
کاسه سه نیرویی است:



$$\begin{cases}\Delta ADE:\tan\beta=\cot\theta=\dfrac{DE}{2R}\\ \Delta ODE:\tan 40=\dfrac{RE}{R} \;\Rightarrow\; DE=R\tan 60\end{cases} \;\Rightarrow\; \cot\theta=\frac{1}{2}\tan 60$$

$$\Rightarrow\; \cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مسأله: میله‌ی متجانس AB به طول ℓ **و وزن** ω **روی یک دیوار مایل زاویه‌دار** θ **و زاویه‌ی** α **قرار دارد و توسط نیروی افقی P نگهداری می‌شود.** α **تعادل کدام است؟**



$$\tan\alpha=\frac{1}{2}\frac{w}{P}=-\cot\theta$$

دانشجویان محترم سعی فرمائید این مسأله سه نیروئی را حل نمائید.

یادداشت:

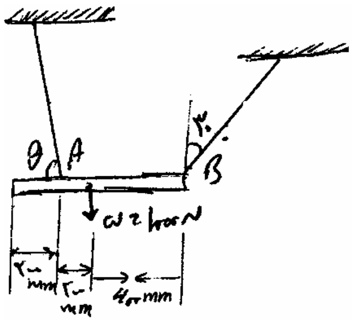
....

....

....

....

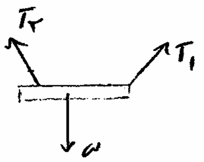
مثال: θ **تعادل کدام است؟ هم چنین نیروی کششی دو کابل را.**

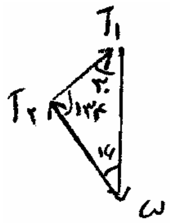


$\tan\theta = 2\sqrt{3}$

$T_1 = 383.2\,\text{N} \quad , \quad T_2 = 695\,\text{N}$

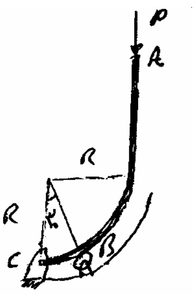
برای محاسبه‌ی T_1 و T_2 :

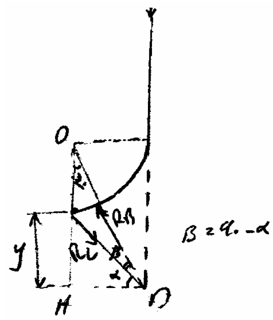




$$\frac{\sin 34}{1000} = \frac{\sin 16}{T_1} = \frac{\sin 30}{T_2}$$

مثال: **عکس العمل B و C کدام است؟**





$\tan\alpha = \dfrac{CH}{R} = \dfrac{y}{R}$

$y = OH - R$

$\Delta OHD: \tan 60 = \dfrac{OH}{R} \;\Rightarrow\; OH = R\tan 60$

$\Rightarrow\; y = R\left(\tan 60 - 1\right) \;\Rightarrow$

$\tan\alpha = \tan 60 - 1 \;\Rightarrow\; \alpha \simeq 36.2$

یادداشت:

....

....

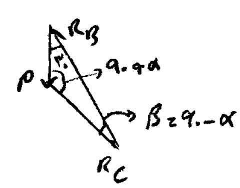
....

....

$$\frac{R_C}{\sin 30}=\frac{R_B}{\sin(90+\alpha)}=\frac{P}{\sin(60-\alpha)}$$

حال عکس‌العمل‌ها از از تعامل $\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\end{cases}$

با توجه به اندازه α می‌توان R_C , R_B است.



یادداشت:

....

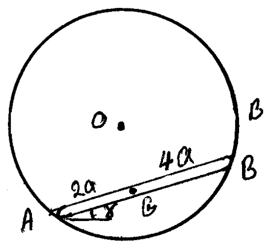
....

....

....

تست‌های فصل سوم

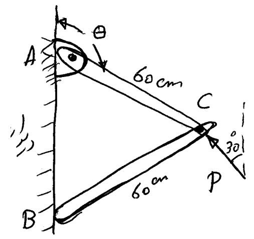
۱ ـ تیر AB که مرکز ثقل آن (نقطه G) تیر را به دو قسمت به طول‌های 4a و 2a تقسیم می‌کند. درون یک کره صیقلی طوری قرار گرفته است که با افق زاویه γ می‌سازد. زاویه γ برای تعادل کدام است؟ (شعاع کره برابر 5a است)



۱) $\tan^{-1}\frac{1}{4}$ ۲) $\tan^{-1}\frac{1}{8}$

۳) $\sin^{-1}\frac{1}{4}$ ۴) $\sin^{-1}\frac{1}{8}$

۲ ـ در سازه شکل زیر وزن میله AC برابر $W = 2\,KN$ و میله BC سبک فرض شده است. این دو میله در مفصل C تحت نیروی $P = 10\,KN$ قرار دارد. میله AC در محل A به دیوار پین شده است و میله BC در محل B به دیوار تماس دارد. ضریب اصطکاک میله BC با دیوار برابر $\mu = 0.56 \cong \frac{\sqrt{3}}{3}$ است. زاویه θ تعادل کدام است؟



۱) $\theta = 120^\circ$

۲) $\theta = 115^\circ$

۳) $\theta = 125^\circ$

۴) $\theta = 135^\circ$

یادداشت:

....

....

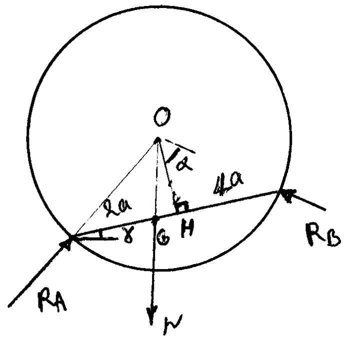
....

....

پاسخ‌ها

۱ ـ گزینه ۱ درست است.

تیرAB یک عضو سه نیرویی می‌باشد.



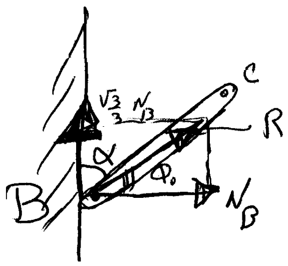
$$\begin{cases} AH = \dfrac{2a+4a}{2} = 3a \\ GH = 3a - 2a = a \end{cases}$$

در مثلث GOH زاویه O برابر γ می‌باشد لذا:

$$\begin{cases} \tan\gamma = \dfrac{a}{OH} \\ OH = a\sqrt{5^2 - 3^2} = 4a \end{cases} \rightarrow \quad \tan\gamma = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{1}{4}$$

۲ ـ گزینه ۱ درست است.

عضو BC یک عضو دو نیرویی است لذا نیروی عکس‌العمل عضو BC در راستای محور میله BC خواهد بود. از طرفی زاویه بین عکس‌العمل R و N_B زاویه اصطکاک φ_0 می‌باشد یعنی:



$$\varphi_0 = \text{Arctan}\,\mu = \text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

$$\alpha = 90 - 30 = 60$$

از طرفی مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین است پس:

$$\theta = 180 - 60 = 120^\circ$$

یادداشت:

....

....

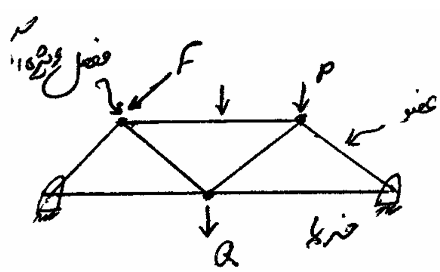
....

....

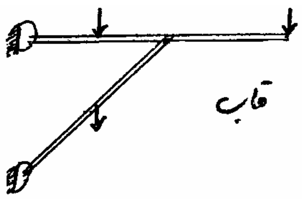
فصل چهارم

خرپاها و قاب‌ها

در فصل قبل مسائل دو نیرویی مطرح شد. تمام خرپاها به عنوان اعضای دو نیرویی محسوب می‌شوند



تعریف قاب‌ها: از چندین عضو تشکیل شده به طوری که این اعضا به یکدیگر پین شده‌اند: (پین ثابت یا پین شکاف دار) و می‌تواند در بدنهٔ خود نیرو قبول کند یعنی این اعضاء می‌تواند هم دو نیرویی باشد و هم چند نیرویی. هنگام رسم دیاگرام آزاد در محل مفاصل ممان داخلی صفر است زیرا پین است.



دیاگرام آزاد جزء

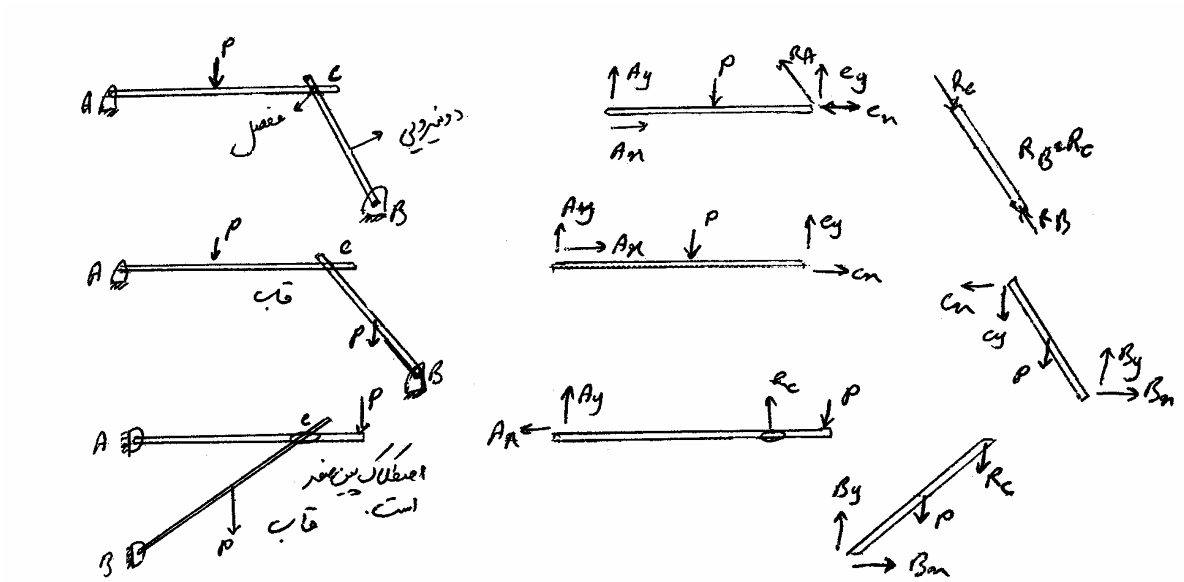
یادداشت:

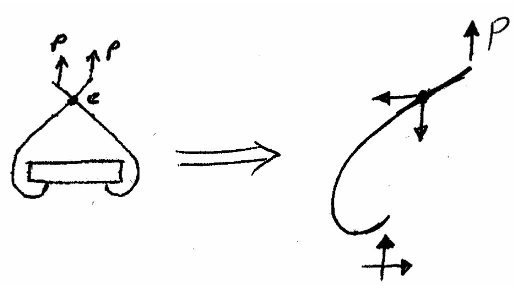
....

....

....

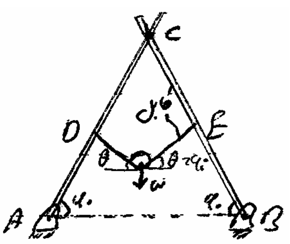
....





تذکر بسیار مهم: در قالب‌هائی که نسبت به محور y تقارن دارد، در محل مفصلی که نیروی خارجی بر روی آن نمی‌باشد همیشه در محل مفصل، نیروی داخلی در جهت y صفر است. به مثال زیر توجه شود.

مثال: نیروی وارد بر مفصل، چقدر است؟ $(w = 600\,N)$



دیاگرام آزاد ADC به صورت زیر است:

الف) به علت وجود تقارن جسم نسبت به محور yها بایستی تمام نیروهای وارد بر دو عضو AC و BC در امتداد y با یکدیگر برابر و هم‌جهت باشند.

یادداشت:

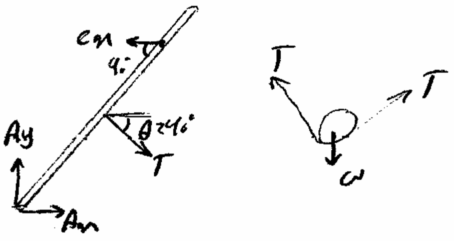
....

....

....

....

ب) طبق قانون سوم نیوتن در مفصل C نیروهای داخلی بایستی در روی دو عضو با یکدیگر برابر و مختلف جهت باشد. چون بین شرایط الف و ب در بالا تضاد ایجاد شده است بایستی به اجبار $C_y = 0$ باشد.



$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; 2T\cos 60 = w = 600$$

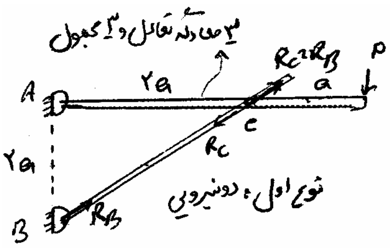
$$\Rightarrow\; T = \frac{300}{\cos 60} \;\Rightarrow\; T = 600\,\text{N}$$

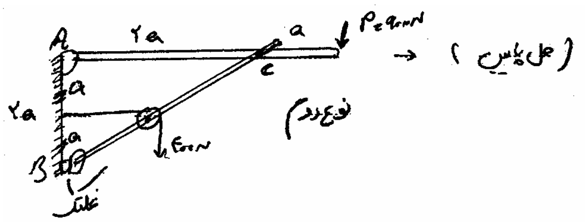
برای محاسبه C_x در روی دیاگرام آزاد جزء مقابل نسبت به دو نقطه A ممان می‌گیریم تا نیروی C_x نیز محاسبه گردد.

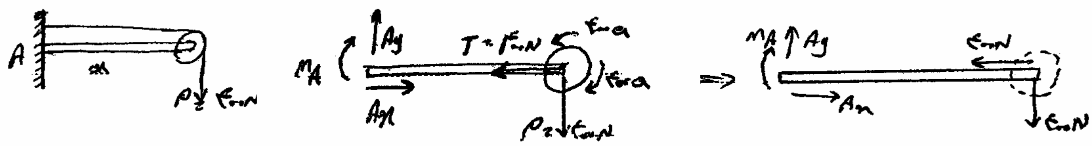
تذکر مهم: کلاً مسایل قاب‌ها به ۴ حالت زیر است که ۳ نوع اول در بخش قبل حل شد.

نوع اول : دو نیرویی

نوع دوم : در یکی از تکیه‌گاه‌ها غلتک داریم.

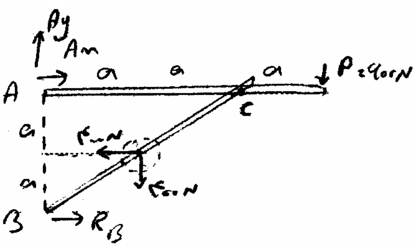






برای حل نوع دوم دیاگرام آزاد به صورت زیر است (چون غلتک داریم نیازی به دیاگرام آزاد جزء نمی‌باشد).

سه معادله با سه مجهول به راحتی قابل حل است.



$$+\!\uparrow \sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; -R_B(2a) + 400(a) + 400(a) + P(3a) = 0$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x - 400 + R_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y - 400 - \rho = 0 \;\Rightarrow\; A_y = P + 400 = 10^3\,\text{N}$$

یادداشت:

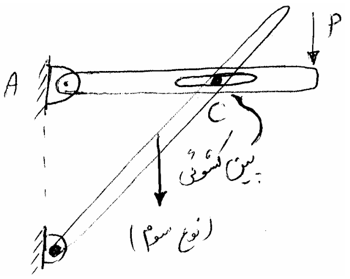
....

....

....

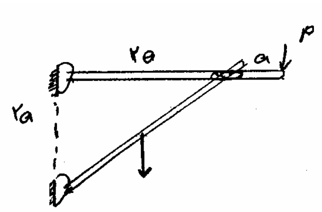
....

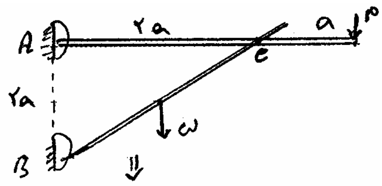
نوع سوم : دارای پین کشویی است. در این حالت عکس‌العمل مفصل C عمود بر شیار است.



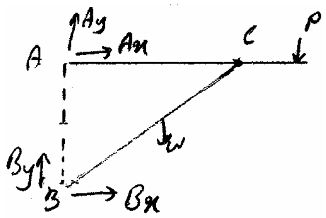
نوع چهارم : شرایط ۱و۲و۳ حاکم نیست.

برای حل این نوع چهارم ۶ معادله و ۶ مجهول استخراج می‌شود.





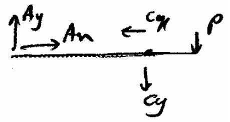
از دیاگرام آزاد کل سه معادله با ۴ مجهول داریم:



$$\begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \\ \sum m = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

حال دیاگرام آزاد جزء را رسم می‌کنیم، که سه معادله با دو مجهول استخراج می‌شود.

(فرقی نمی‌کند کدام جزء)

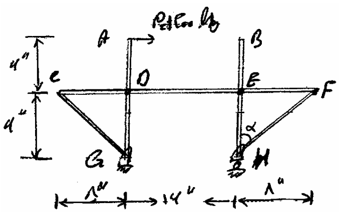


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

سه معادله و ۲ مجهول

$(1),(2) \Rightarrow$ ۶ معادله و ۶ مجهول

مثال: در قاب زیر کلیه‌ی نیروهای وارد بر عضو CDEF را بنویسید.



یادداشت:

....

....

....

....

اعضای CG, FH دو نیرویی است. چون در H غلطک داریم . لذا دیاگرام آزاد کل مفید است و به صورت زیر است:

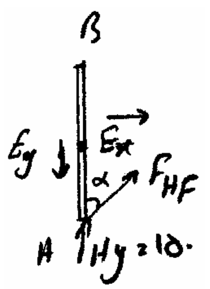
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -G_x + \rho = 0 \;\Rightarrow\; G_x = 1200\,\ell b$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; G_y + H_y = 0 \quad (۱)$$

$$+\uparrow \sum M_H = 0 \;\Rightarrow\; G_y(16) + P(12) = 0$$

$\Rightarrow\; G_y = -150\,\ell b$ جهت باید عوض شود

حال دیاگرام آزاد جزء BEH را رسم می‌کنیم:

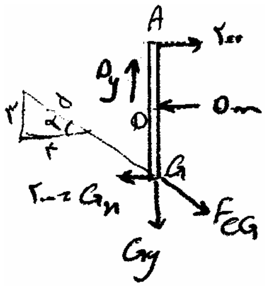


$$\sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; F_{HF}\sin\alpha \times 6 = 0 \;\Rightarrow\; F_{HF} = 0$$

$$\sum M_H = 0 \;\Rightarrow\; E_x \times 6 = 0 \;\Rightarrow\; E_x = 0$$

$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; E_y = 150\,\ell b$$

دیاگرام آزاد جزء AG را رسم می‌کنیم:

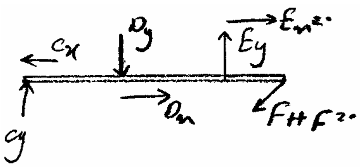


$$\sum M_G = 0 \;\Rightarrow\; (-200)(12) + D_x(16) = 0 \;\Rightarrow\; D_x = 400\ell b$$

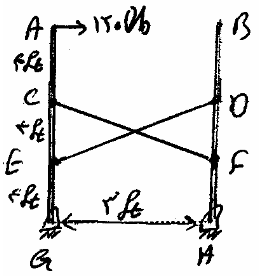
$$\sum f_x = 0 \;\Rightarrow\; -400 + 200 + F_{CG}\cos\alpha - 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4}{5}F_{CG} = 400 \;\Rightarrow\; F_{CG} = 500\,\ell b$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{5}(500) + D_y - 150 = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 450\ell b$$



مثال: کلیه‌ی نیروهای وارد بر BDFH کدام است؟



یادداشت:

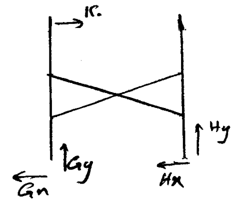
....

....

....

....

دیاگرام آزاد کل را رسم می‌کنیم:



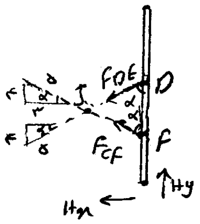
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow$$

$$(-120)(12) + Hy(3) = 0 \Rightarrow$$

$Hy = 480\,\ell b$ جهت صحیح است

جهت باید عوض شود $\sum F_y = 0 \Rightarrow G_y + H_y = 0 \Rightarrow G_y = -480\,\ell b$

حال دیاگرام آزاد جزء را رسم می‌کنیم:



نکته‌ی مهم این است که ED و CF دو نیروییِ‌اند:

$$\sum M_j = 0 \Rightarrow (480\times 1.5) - H_x \times 6 = 0 \Rightarrow H_x = 120\,\ell b$$

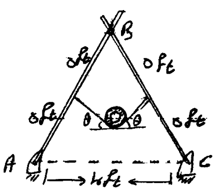
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 480 - \frac{4}{5}(200) - \frac{4}{5}F_{CF} = 0 \Rightarrow F_{CF} = 400\,\ell b$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow -H_x(4) + \left(\frac{3}{5}F_{DE}\right)(4) = 0 \Rightarrow F_{DE} = 200\,\ell b$$

یعنی نیروهای وارد بر عضو خواسته شده محاسبه شد. اگر Gx مدنظر بود در دیاگرام آزاد کل داشتیم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 120 - 120 + G_x = 0 \Rightarrow G_x = 0$$

مثال: طول لوله $30\,ft$ و شدت وزن آن $20\frac{\ell b}{ft}$ است. تعیین کنید: الف) نیروهای عکس العمل تکیه گاه و همچنین نیروهای وارد بر فصل B وقتی $\theta = 30^\circ$ است. ب) اگر عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها فقط قائم باشد θ تعادل کدام است؟



$$w = 2\times 30 = 600\,\ell b$$

$$A_y = C_y = \frac{600}{2} = 300\,\ell b$$

یادداشت:

....

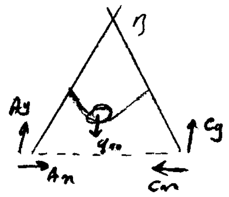
....

....

....

روش اول: چون در جهت y تقارن داریم پس : $A_y = C_y = \frac{600}{2} = 300\,\ell b$

روش دوم :دیاگرام آزاد کل را رسم می‌کنیم:

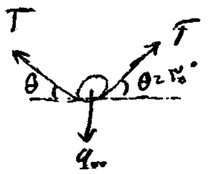


$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; Ay(10) - 600(5) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 300\ell b$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -600 + A_y + C_y = 0 \;\Rightarrow\; C_y = -300\ell b$$

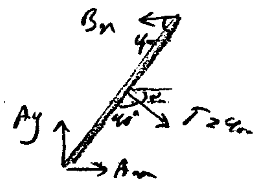
$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = C_x$ فعلاً در دسترس نیست.

حال دیاگرام آزاد جزء روی عضو AB را محاسبه می‌کنیم. قبل از آن از دیاگرام آزاد قرقره مقدار T استخراج می‌شود.



$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -600 + 2T\cos 60 = 0 \;\Rightarrow\; T = 600\,\ell b$$

به علت تضاد تقارن و قانون سوم نیوتن $B_y = 0$ است. (قبلاً به طور جامع بحث شد)



$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; 600(5) - 300(5) + A_x(8066) = 0 \Rightarrow$$

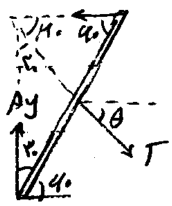
$$A_x = 173.2\,\ell b \;\rightarrow\; C_x = 173.2$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 600\cos 30 + A_x - B_x = 0 \Rightarrow$$

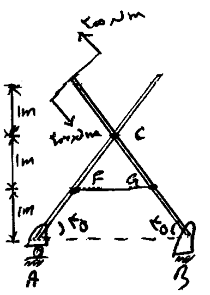
$$B_x = 346.4\ell b$$

$$R_B = \sqrt{\underbrace{\cancel{B_y^2}}_{0} + B_x^2} = B_x \;\Rightarrow\; R_B = 346.4\,\ell b$$

ب) عضو سه نیرویی است پس $\theta = 60$ است.



مثال: نیروی کل مفصل C چقدر است؟ دقت شود که سیستم نسبت به Y در حال تعادل نیست (برخلاف مثال قبل)



یادداشت:

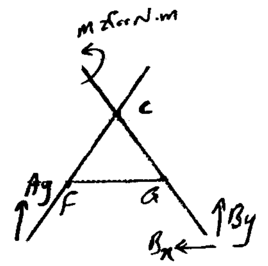
....

....

....

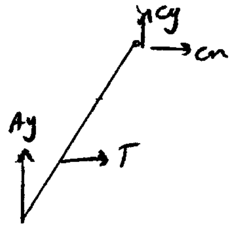
....

لذا C_y وجود دارد. دیاگرام آزاد کل را رسم می‌کنیم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y(4) - 200 = 0 \Rightarrow A_y = 50N$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = -50N$$ جهت نیروی B_y باید عوض شود

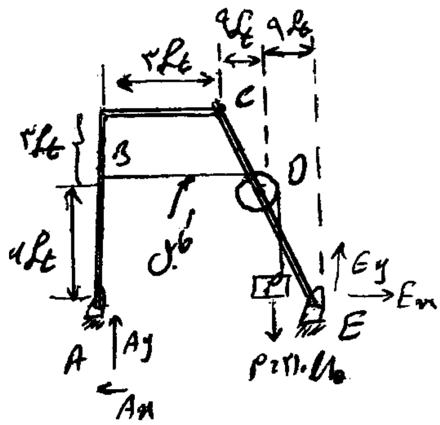
حال دیاگرام آزاد جزء را رسم می‌کنیم:



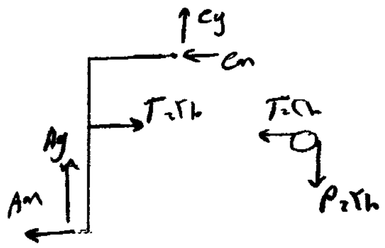
$$\sum M_e = 0 \Rightarrow A_y(2) - T(1) = 0 \Rightarrow T = 100N$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + A_y = 0 \Rightarrow C_y = -50N$$ جهت باید عوض شود
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x + T = 0 \Rightarrow C_x = -100N$$ جهت باید عوض شود

$$R_C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 50\sqrt{5}\ N$$

مثال: **شعاع قرقره** $1.5\,ft$ **است. اصطکاک قرقره صفر است. عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و E کدام است؟** $(P = 210\ell b)$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_y(21) - (210)(13.5) = 0 \Rightarrow E_y = 135\ell b$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 210 + 135 = 0 \Rightarrow$$
$$A_y = 75\,\ell b$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - E_x = 0 \Rightarrow A_x = E_x$$
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -A_x(9) - (75\times 2) + (210\times 3) = 0 \Rightarrow$$
$$A_x = 45\ell b \Rightarrow E_x = 45\,\ell b$$

یادداشت:

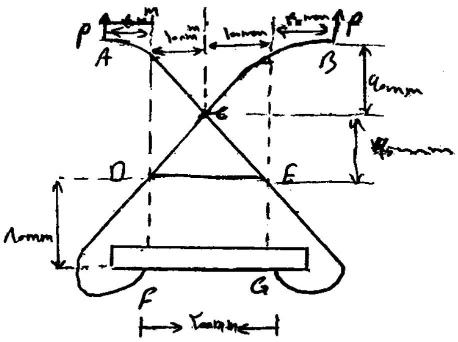
....

....

....

....

مثال: از یک چنگک صنعتی برای بالا بردن یک جسم با نیروی $100\,N$ **استفاده شده است. تعیین کنید نیروی کل وارد بر مفصل C را اگر این نیرو برابر با نیروی وارد بر عضو** DE **باشد.**



$$2P = 100 \ \Rightarrow\ P = 50\,N$$

حال دیاگرام آزاد کل :

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow\ G_x = F_x$$

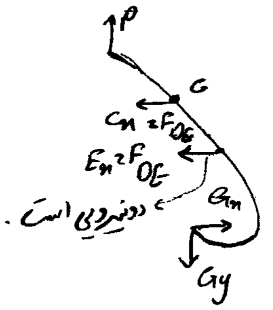
$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow\ F_y + G_y = 2P$$

به علت تقارن یا از روش فعال گیری نسبت به F_3 یا G داریم که:

$$F_y = G_y = P = 50\,N$$

حال دیاگرام آزاد جزء

باید دقت شود که طبق مطالب قبل $C_y = 0$ است.



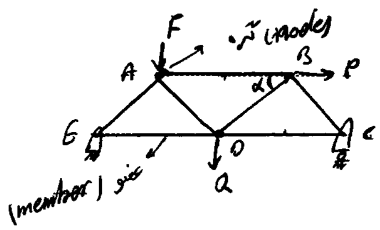
$$\sum M_G = 0 \ \Rightarrow\ P(240) - C_x(140) - F_{DE}(80) = 0$$

$$\Rightarrow\ F_{DE} = 54.4\,N$$

$$C_x = F_{DE} = 54.4\,N \ \Rightarrow\ R_C = \sqrt{0^2 + (54.4)^{2^1}} = 54.4N$$

خرپاها

در خرپاها اعضاء به یکدیگر در محل گره یا مفصل جوش یا پیچ شده‌اند.



یادداشت:

....

....

....

....

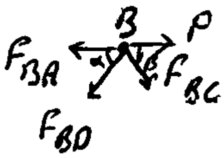
[تعداد عضو : m و تعداد گره :n] $m = 2n - 3$ (برای شرایط پایداری)

مثلاً در شکل بالا داریم: $n = 5 \Rightarrow m = 7$

*خرپاها اعضای باریکی محسوب می‌شود که در بدنه به آن‌ها نیرو وارد نمی‌شود، یا به عبارت بهتر تمام اعضاء، به عنوان اعضای دو نیرویی محسوب می‌شود، به طوری که هنگام رسم دیاگرام آزاد جزء هیچ گونه ممان داخلی در محل گره به آن‌ها اعمال نمی‌شود.

دیاگرام آزاد در محل گره‌ی B به صورت است :

یعنی چون اعضاء دو نیرویی‌اند نیروها در امتداد اعضاست.



حال دو معادله‌ی تعادل را در مفصل B می‌توان نوشت. (رابطه‌ی $\sum M = 0$ همواره برقرار است. زیرا همه‌ی نیروها از B می‌گذرند و این رابطه معادله مفید محسوب نمی‌شود.

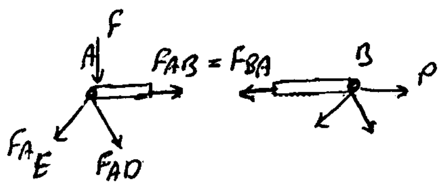
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$P - F_{BA} + F_{BD}\cos\alpha - FB_C\cos\beta = 0$$

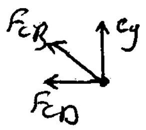
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0 + 0 - F_{BD}\sin\alpha - F_{BC}\sin\beta = 0$$

تذکر: اگر در یک مفصل ماکزیمم دو نیرو مجهول باشد می‌توان آن مجهولات را به دست آورد زیرا فقط در معادله‌ی تعادل در یک مفصل در دسترس است.

اگر نیروی وارد بر اعضا در معادلات بالا منفی محاسبه شد باید جهت عوض شود.



حال در مفصل A دو رابطه‌ی تعادل $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ نوشته می‌شود.



نتیجه‌گیری

اصولاً در خرپاها مجهول مسأله نیروهای داخلی وارد بر اعضای می‌باشد که برای به دست آوردن آن‌ها ابتدا با رسم دیاگرام آزاد نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه را به دست می‌آوریم سپس برای محاسبه نیروهای داخلی دو روش وجود دارد.

۱)روش مفاصل

یادداشت:

....

....

....

....

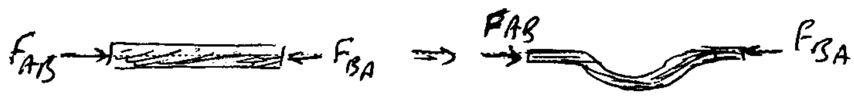
۲) روش مقاطع

در روش مفاصل با نوشتن روابط تعادل در مفصل‌ها مجهول مسأله به دست می‌آید. مانند مثال قبل. اگر در یک مفصل ماکزیمم دو مجهول وجود داشت. روش مفاصل در اولویت است. پس از محاسبه‌ی نیروهای داخلی وارد بر اعضا از مقاومت مصالح تیر تنش‌ها در آن‌ها کنترل می‌شود. به طور یکه مثلاً در مثال قبل وقتی که F_{BA} در عضو AB محاسبه شد تنش به صورت زیر کنترل می‌شود:

S_y مقاومت حد یا مقاومت تسلیم است که به جنس ماده وابسته است.

$$\text{تنش} = \frac{F_B A}{\text{سطح مقطع}} \leq S_y$$

همچنین بایستی سعی شود که اعضاء تحت بار فشاری قرار نگیرند. زیرا امکان ایجاد کمانش در آن‌ها ایجاد می‌شود.

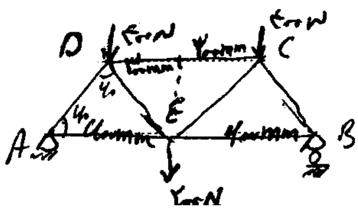


هدف خرپاها: محاسبه‌ی نیروی داخلی در اعضا می‌باشد که برای حل دو روش داریم:

۱)روش مفاصل

۲) روش مقاطع

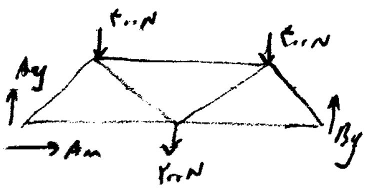
اگر با حل یک مفصل به مجهول مسأله رسیدیم بهتر است از روش مفاصل استفاده کنیم در غیر این صورت از روش مقاطع استفاده می‌کنیم. مثلاً در شکل زیر نیروی وارد بر عضو CD مجهول است.



۱) روش مفصل: با حل مفصل D نمی‌توان F_{DC} را به دست آورد زیرا در مفصل D سه مجهول وجود دارد. لذا ابتدا از مفصل A شروع می‌کنیم. برای این کار از دیاگرام آزاد عکس‌العمل است.

می‌آوریم :

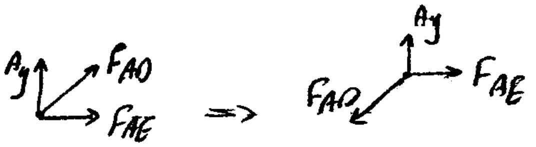
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -400(300) - 200(600) - 400(600) + A_y(1200) = 0 \Rightarrow$$

$$A_y = 500$$

حال مفصل A را به دست می‌آوریم.



یادداشت:

....

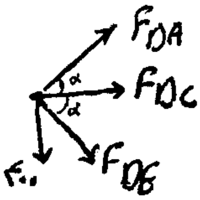
....

....

....

جهت نیروی F_{AD} باید عوض شود زیرا منفی محاسبه شده

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y + F_{AD}\cos 30 = 0 \;\Rightarrow\; F_{AD} = \frac{500}{\cos 30}$$



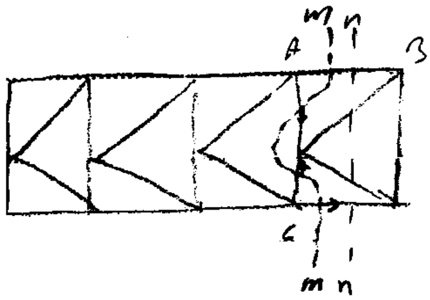
$$\alpha = 60^\circ \quad , \quad F_{DA} = \frac{500}{\cos 30}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{500}{\cos 30}\times\cos 60 + F_{DC} + F_{DE}\cos 60 = 0 \downarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{500}{\cos 30}\times\cos 30 - F_{DE}\cos 30 - 400 = 0 \Rightarrow F_{DE} = 0$$

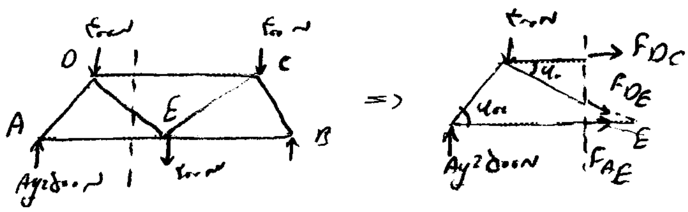
$$\Rightarrow (1) \Rightarrow F_{DC}$$

روش دوم: حل به روش مقاطع: سازه را توسط یک مقطع (مستقیم یا غیرمستقیم) به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و سپس رابطه‌ی تعادل را برای یک قسمت مانده را می‌نویسیم. اگر در محل مقطع تنها سه نیرو باشد این مقطع مناسب است، زیرا با سه معادله سه نیرو قابل محاسبه است.



مقطع n-n مناسب نیست زیر 4 نیروی مجهول در آن وجود دارد. اگر از این 4 نیرو، سه نیرو از یک نقطه عبور می‌کرد به راحتی نیروی عضو AB قابل محاسبه بود.

مقطع m-m بسیار مناسب است زیرا سه نیرو از نقطه C می‌گذرد. با نوشتن $\sum M_C = 0$ بر روی قسمت مانده نیز F_{AB} محاسبه می‌شود.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

حال با نوشتن سه رابطه تعادل بالا می‌توان مجهول را به دست آورد .در اینجا چون F_{DC} مجهول است بهتر است از رابطه‌ی سوم یعنی $\sum M_E = 0$ استفاده می‌شود.

$$\sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; 500(600) - 400(300) + F_{DC}(300\tan 60) \;\Rightarrow\; F_{DC} = \text{محاسبه می‌شود}$$

این روش ساده‌تر از روش مفاصل است.

یادداشت:

....

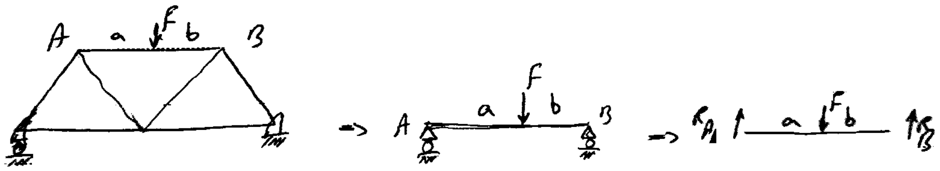
....

....

....

چند نکته‌ی مهم برای حل مسائل

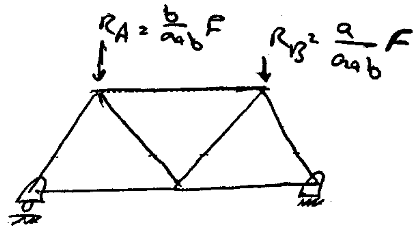
۱)در خرپاها فرض عضو دو نیرویی بایستی رعایت شود یعنی اگر به بدنه اعضا نیرو وارد شود آن را بایستی به مفصل A و B منتقل کرد، مانند زیر:



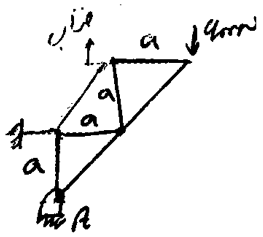
حال با نوشتن روابط تعادل مانند زیر مقادیر R_A و R_B را به دست می‌آوریم، یعنی:

$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_A(a+b) - F(b) = 0 \;\Rightarrow\; R_A = \frac{b}{a+b}F$$

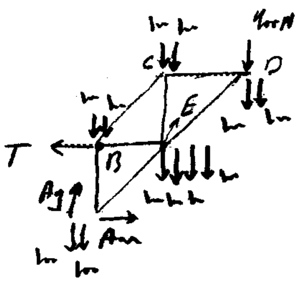
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_B = \frac{a}{a+b}F$$



مثال: عکس‌العمل A کدامست؟ (وزن هر عضو $200\,N$ است) . نیروی وارد بر کابل‌ها را 1 لیتر محاسبه کنید.



ابتدا دیاگرام آزاد کل و انتقال نیروی وزن هر عضو به روی دو مفصل کناری یعنی:



$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 200\,N$$

$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; -A_x(a) + 600a + 8002a = 0 \;\Rightarrow$$

$$A_x = 200\,N$$

محاسبه می‌شود = $R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \;\Rightarrow\; R_A$

نیروی وارد بر کابل اول $\rightarrow$ $\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; T = A_x$

برای محاسبه‌ی نیروهای وارد بر کابل دوم دو روش داریم:

یادداشت:

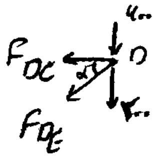
....

....

....

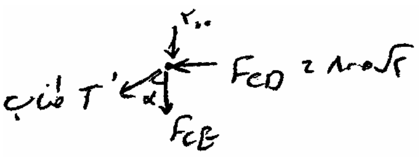
....

۱)روش اول: روش مفصل



$\alpha = 45^\circ$

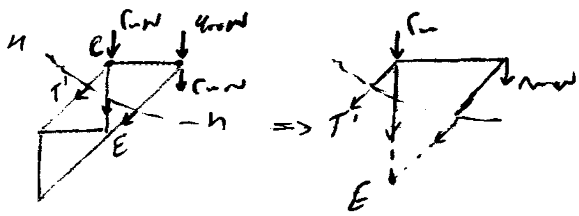
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{DE}\cos 45 - 200 - 600 \Rightarrow F_{DE} = -800\sqrt{2}$ جهت باید عوض شود



$\sum F_x = 0 \Rightarrow -T'\cos 45 + 800\sqrt{2} \Rightarrow T' = 1600\,\text{N}$

روش دوم : روش مقطع

مقطع n-n را مانند شکل روبرو انتخاب می‌کنیم:



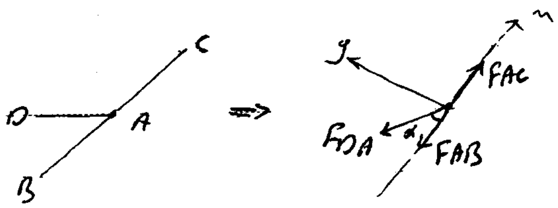
$\sum M_E = 0 \Rightarrow 800(a) - T'\cos 45 \times a = 0 \Rightarrow$

$T' = 1600\,\text{N}$

۲)اعضای صفر نیرویی : اعضای صفر نیرویی را به دو روش می‌توان تشخیص داد.

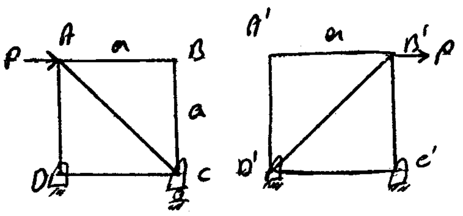
الف) به روش ظاهری به کمک مفصل

مثلاً در شکل زیر F_{AP} چقدر است؟



$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AD}\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_{DA} = 0$

مثال: الف) تغییر مکان A بیشتر است یا B′ . ب) انرژی کدام سیستم بیشتر است؟



(1) (2)

یادداشت:

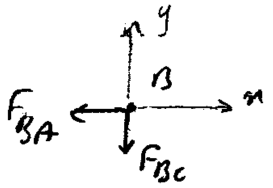
....

....

....

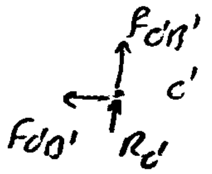
....

در شکل (۱) :



$$\left\{\begin{array}{l}\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; F_{BA} = 0\\ \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_B C = 0\end{array}\right.$$ ← یعنی (۱) سه عنصر فعال است (CD, AD, AC)

در شکل (۲) : $F_{B'D'}, F_{B'A'} = 0$ همچنین $F_{C'D'} = 0$ است زیرا:

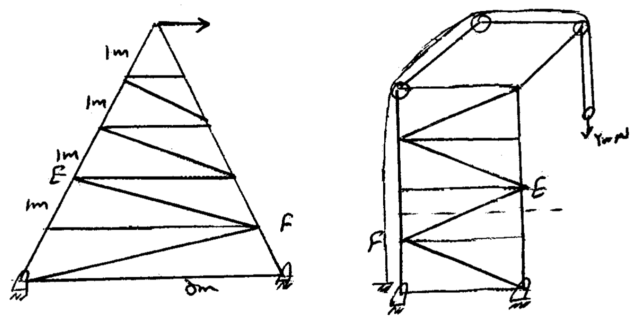


$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 0 + 0 + F_{C'D'} = 0 \;\Rightarrow\; F_{C'D'} = 0$$

یعنی در این شکل دو عضو فعال است.

جابجایی A بیشتر است و نیز انرژی سیستم (۱) به ترتیب از A' و سیستم (۲) .

مثال: نیروی وارد به عضو EF کدام است؟ (با محاسبه‌ی هر شکل جداگانه)



(1) (2)

در ظاهر از روی مفاصل پی به صفر بودن آن نمی‌بریم. لذا مقطع n-n انتخاب شود.

در این مقطع :

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 0 + 0 + F_{EF} = 0 \;\Rightarrow\; F_{EF} = 0$$

یادداشت:

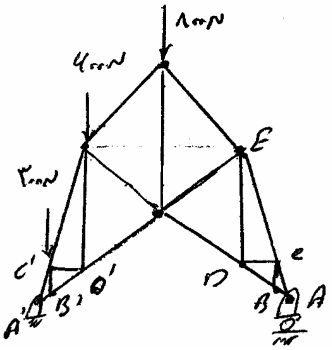
....

....

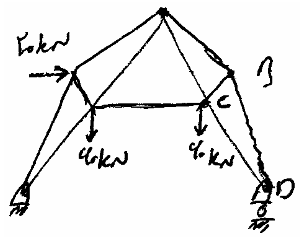
....

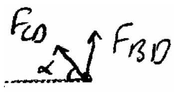
....

مثال: F_{ED} کدام است؟ هم‌چنین نیروهای زیر است؟ BC, CD, ED دقت شود که $B'C'$ صفر است و $B'D'$ صفر نیست.



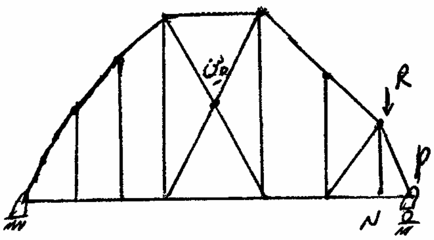
مثال: F_{CD} چقدر است؟





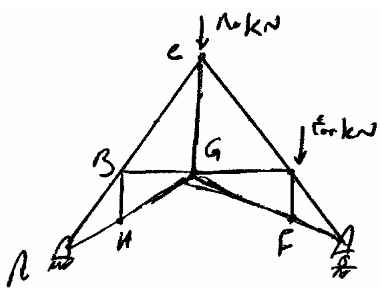
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{OD}\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{CD} = 0$$

مثال: اعضای صفر نیرویی کدام است؟



$F_{BC} = 0$ است. دقت شود که تنها CO صفر نیست. زیرا AC و CE در یک امتداد نیستند: $F_{RN} = 0$

مثال: اعضای صفر نیرویی کدام است؟



BG, BH صفر است. اگر BA و BC در یک امتداد نباشد فقط $BH = 0$ است.

یادداشت:

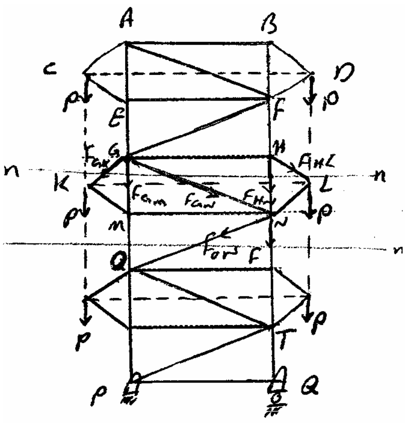
....

....

....

....

مثال: نیروهای PQ, ON, GN چقدر است؟



در مقطع n-n داریم:

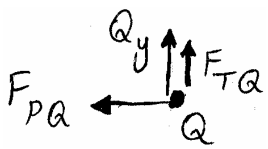
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{ak}\cos\alpha + F_{HL}\cos\alpha + 0 + 0 + F_{GN}\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GN} = 0$$

در مقطع $m-m$ داریم:

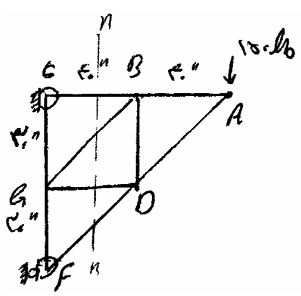
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0+0+0+0+F_{ON}\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{ON} = 0$$

نیروی PQ صفر است زیرا در مفصل یا تکیه گاه Q داریم :



۳)برای محاسبه‌ی داخلی اعضایی که از روش مقاطع استفاده می‌شود، اگر تکیه گاه در دو طرف مقطع قرار گرفت، محاسبه‌ی تکیه گاه الزامی است و اگر در یک طرف قرار گرفت الزامی نیست.

مثال: نیروی وارد بر اعضای BD و DG و GB چقدر است؟



یادداشت:

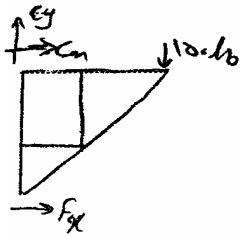
....

....

....

....

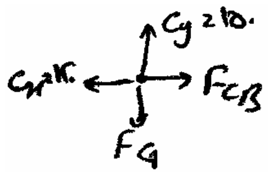
قطع $n-n$ مناسب نیست زیرا 4 مجهول در مقطع ظاهر می‌شود. لذا ابتدا مفصل A و C حل شده و سپس در فصل B دو معادله با دو مجهول ظاهر می‌شود. برای محاسبه‌ی نیروی کار در مفصل C ابتدا از دیاگرام آزاد کل مقادیر C_x و C_y استخراج می‌شود.



$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -150 + C_y = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 150\,\ell b$$

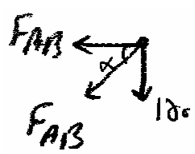
$$\sum M_f = 0 \;\Rightarrow\; 150(80) - C_x(60) = 0 \;\Rightarrow\; C_x = 120\,\ell b$$

حال در مفصل C داریم:



$$\Rightarrow\; F_{CB} = 200\,\ell b \;\Rightarrow\; F_{BC} = 200\,\ell b$$

حال در مفصل A داریم:



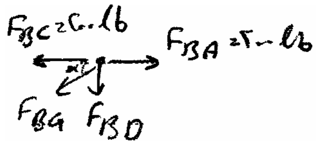
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \;,\; \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -150 - F_{AD}\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; F_{AD} = -250\,\ell b$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -F_{AB} - F_{AD}\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; F_{AB} = -\frac{4}{5}F_{AD}$$

$$\Rightarrow\; F_{AB} = 200\,\ell b$$

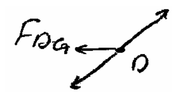
حال مفصل B :



$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -200 + 200 + F_{BG}\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; F_{BG} = 0$$

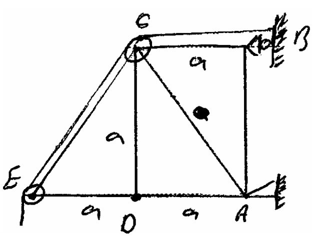
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; 0 + 0 + 0 + F_{BD} = 0 \;\Rightarrow\; F_{BD} = 0$$

حال در مفصل D داریم:



$$F_{DG} = 0$$

مثال: نیروهای وارد بر اعضای CE, CD, AB چقدر است؟ (طناب بدون اصطکاک است)



یادداشت:

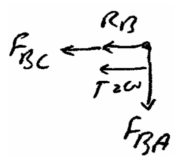
....

....

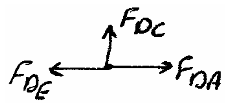
....

....

مفصل B :



$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{BA} = 0$$

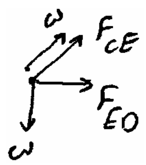


$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{DC} = 0$$

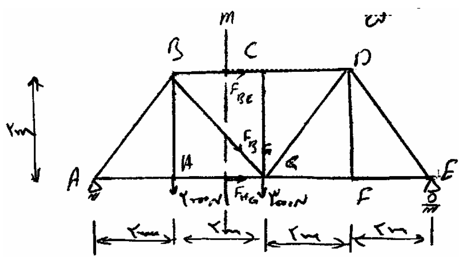
مفصل E :

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -\omega + \omega\cos 45 + F_{EC}\cos 45 = 0$$

$$\Rightarrow\; F_{EC} = \left(\sqrt{2}-1\right)\omega$$



مثال: F_{GH} **کدام است؟**



۱)ابتدا مفصل A که دو مجهول دارد حل شود و با به دست آوردن نیروی A_H مفصل H حل شود.

۲) استفاده از مقطع $m - m$: بنابراین ابتدا از دیاگرام آزاد کل عکس‌العمل تکیه گاه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

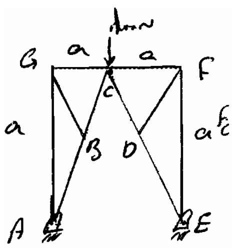
$$\sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; A_y(8) - 2000(6) - 3000(4) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 3000\text{N}$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0$$

حال مقطع m-m را انتخاب کرده و در آن فعال نسبت به B را می‌نویسیم:

$$\sum m_B = 0 \;\Rightarrow\; A_y(2) - F_{QH}(2) = 0 \;\Rightarrow\; F_{GH} = 3000\,\text{N}$$

مثال: نیروی وارد بر اعضای BC و CF را بیابید.



یادداشت:

....

....

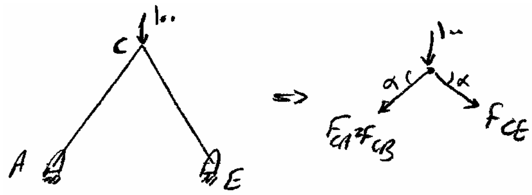
....

....

اعضای زیر صفر نیرویی است و آن‌ها را فعلاً حذف می‌کنیم:

$F_{GA} = F_{GC} = F_{DF} = F_{CF} = F_{FE} = F_{GB} = 0$

بنابراین می‌تون سازه را به شکل زیر در نظر گرفت:



$\alpha = 45^\circ$

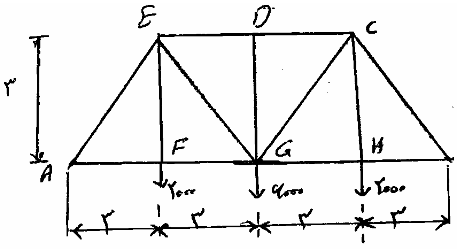
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; F_{CB}\cos 45 = F_{CE}\cos 45 \;\Rightarrow\; F_{CB} = F_{CE}$$

یعنی جهت باید برعکس شود.

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -100 - 2F_{CB}\sin 45 = 0 \;\Rightarrow\; F_{CB} = \frac{-100\sqrt{3}}{2}$$

تذکرمهم: در خرپاهایی که تقارن هندسی و بارگذاری وجود دارد حل مسائل به روش مفصل راحت است.

مثال: F_{EG} **چقدر است؟**



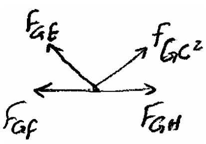
مسأله را می‌توان به دو روش حل کرد:

۱)روش مقطع nm: حل ساده است زیرا در مقطع سر مجهول وجود دارد.

۲) روی مفصل: در اینجا تنها دو مجهول وجود دارد.

زیرا $F_{DG} = 0$ است و $F_{GC} = F_{GF}, F_{GH} = F_{GF}$

برخلاف روش اول در این روش محاسبه‌ی عکس‌العمل‌های تکیه گاه‌ها اجباری نیست.



یادداشت:

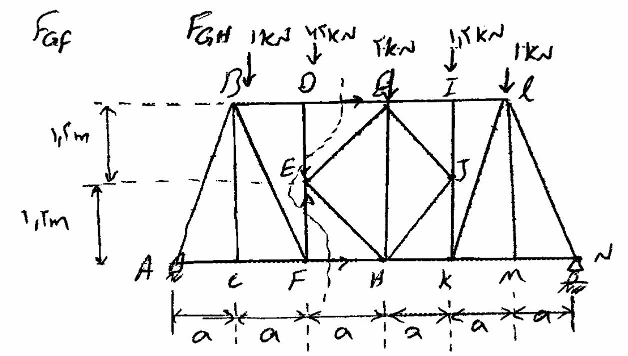
....

....

....

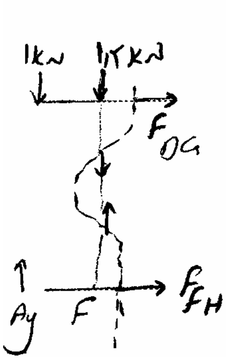
....

مثال: F_{DG} , F_{FH} چقدر است؟ $(a = 1.6m)$



برخلاف مسأله‌ی قبل گرچه تقارن وجود دارد. ولی نمی‌توان مسأله را از H یا G حل کرد زیرا در H سه مجهول وجود دارد و GH صفر نیست. یعنی از تقارن نمی‌توان استفاده کرد. لذا مقطع mm را می‌زنیم. لذا بایستی عکس‌العمل تکیه گاه‌ها محاسبه شود چون در دو طرف مقطع واقع شده است پس امتداد دیاگرام آراء کل را رسم می‌کنیم. چون تقارن داریم:

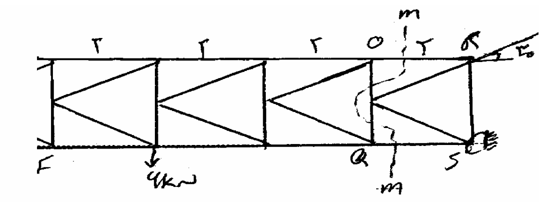
$$A_y = N_y = \frac{6.4}{2} = 3.2 \;\Rightarrow\; A_y = N_y = 3.2\,KN$$



$$\sum M_F = 0 \;\Rightarrow\; F_{DG}(2.4) - 1(1.6) + (3.2) = 0 \;\Rightarrow\; F_{DG} = -3.6\,KN$$

$$\sum M_g = 0 \;\Rightarrow\; -F_{FH}(2.4) - 1(1.6) + (3.2)(3.2) = 0 \;\Rightarrow\; F_{FH} = 3.6\,KN$$

مثال: نیروی عضو OR چقدر است؟



مقطع m مناسب نیست. چون 4 مجهول ایجاد شود.

مقطع mm مناسب است لذا نیازی به محاسبه‌ی عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها نیست چون در یک طرف مقطع واقع است. در مقطع mm، ممان نسبت به Q می‌گیریم:

$$\sum MQ = 0 \;\Rightarrow\; F_{OR}(2) - 10(8) - 6(4) = 0 \;\Rightarrow\; F_{OR} = 52KN$$

یادداشت:

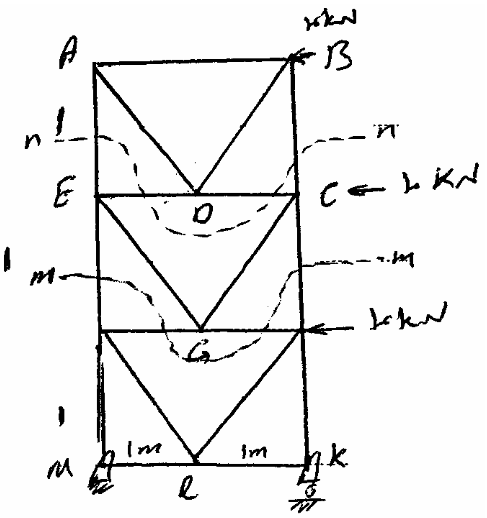
....

....

....

....

مثال: F_{CE} را محاسبه کنید.



مهم) مقطع nn : نسبت به E ممان می‌گیریم:

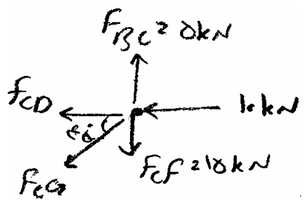
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -10(1) + F_{BC}(2) = 0 \Rightarrow$$

$$F_{BC} = 5\,KN$$

مقطع mm نسبت به H ممان می‌گیریم:

$$-1,(2) - 10(1) + F_{cf}(2) = 0 \;\Rightarrow\; F_{CF} = 15\,KN$$

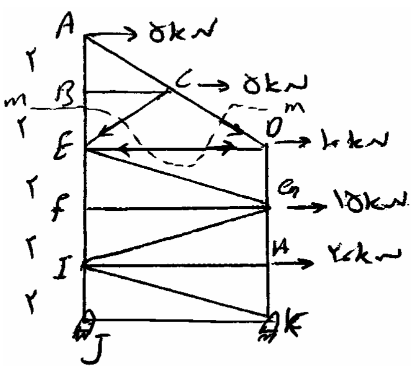
در فصل C داریم:



$$5 - 15 - f_{CG}\cos 45 = 0$$

$\Rightarrow \; F_{CE} = -10\sqrt{2}\,KN$ جهت باید عوض شود

مثال: F_{DE} چقدر است؟



یادداشت:

....

....

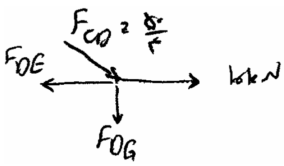
....

....

نیازی به محاسبه‌ی عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها نیست. مقطع mm را انتخاب می‌کنیم.

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 5(4)+(5)(2)+F_{CD}(3)\sin\alpha = 0$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{4}{5} \\ \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow F_{CD} = -\frac{50}{4}$$ جهت باید عوض شود

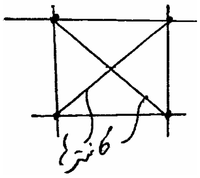


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD}\cos\alpha + 10 F_{DE} = 0 \Rightarrow$$
$$F_{DE} = 17.5\,\text{KN}$$

تذکر: دو پانل همواره می‌توان تقارن هندسی ایجاد کرد.

کانترها

برای تنظیم هندسه در frame با پانل‌های خرپاها معمولاً از دو یا چند سیم یا تسمه که از روی هم عبور می‌کنند استفاده می‌شود ـ مانند شکل روبرو.



در محاسبه‌ی کانترها که معمولاً به روش مقطع است باید به نکات زیر توجه کرد:

۱)کانترها نمی‌تواند تحت فشار باشند.

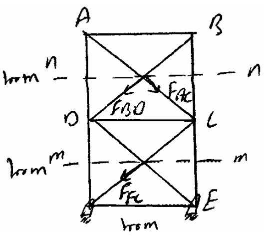
۲)اگر تنها تقارن هندسی در خرپا باشد یکی از کانترها دو کشش و دیگری فاقد نیرو است.

۳) اگر تقارن هندسی در خرپا باشد کانترها نمی‌توانند هر دو در کشش یکسان یا غیر یکسان قرار بگیرند.

۴) اگر تقارن هندسی موجود باشد هر دو کانتر در کشش غیریکسان هستند.

در مکانیک و در استاتیک این نوع‌ها در کل مطرح نیست.

مثال: نیروی وارد بر کانتینرها چقدر است؟



یادداشت:

....

....

....

....

مقطع mm را به صورت مقابل می‌زنیم :

$$F_{DE} = 0 \quad , \quad \sum F_x = 0$$

$$F_{FC} \cos\alpha = 200 \quad \Rightarrow \quad F_{FC} = 280\,KN$$

مقطع nn :

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad F_{AC} = 0$$

$$F_{BD} \cos\alpha - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{BD} = 280\,KN$$

یادداشت:

....

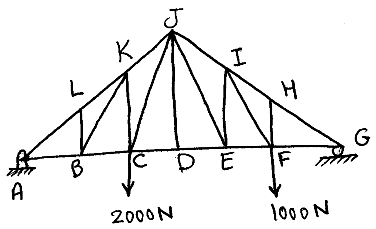
....

....

....

تست‌های فصل چهارم

۱ ـ نیروی داخلی دو عضو CJ و EF کدام است؟ (فواصل افقی تیر یکسان است)



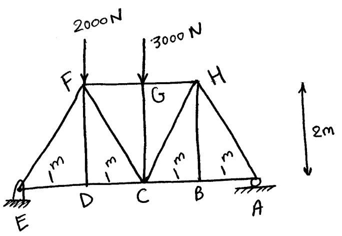
۱) $EF = 1000\,N,\ CJ = 0$

۲) $EF = 1000\,N,\ CJ = 2000\,\frac{\sqrt{10}}{3}$

۳) $EF = 2000\,N,\ CJ = 1000\,\frac{\sqrt{10}}{3}$

۴) $EF = 2000\,N,\ CJ = 2000\,\frac{\sqrt{10}}{3}$

۲ ـ نیروی FG و BC کدامند؟



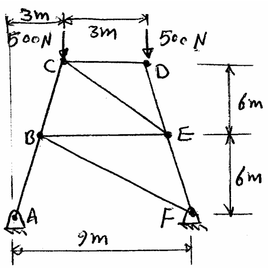
۱) 2000 N , 2000 N

۲) 2000 N, 1000 N

۳) 1000 N , 1000 N

۴) 1000 N , 2000 N

۳ ـ در خرپای نشان داده شده که تحت اثر دو نیروی 500 N در D,C قرار دارد. نیروی عضو BE کدام است؟



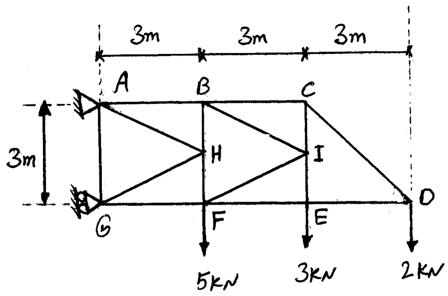
۱) 62.5 N

۲) 125 N

۳) 250 N

۴) 0

۴ ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درمورد خرپای نشان داده شده صحیح نمی‌باشد؟



۱) $F_{ED} = 2\,KN$

۲) $F_{CD} = 2\sqrt{2}\,KN$

۳) $F_{AB} = 5\,KN$

۴) $F_{FG} = 7\,KN$

یادداشت:

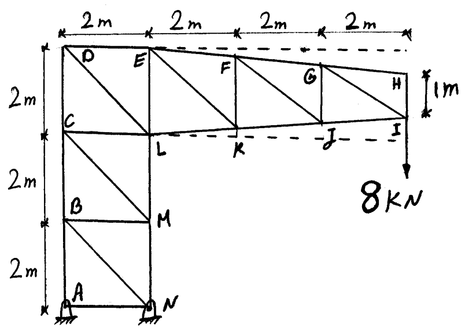
....

....

....

....

۵ ـ نیرو در عضو DL در خرپای زیر کدام است؟



۱) 24KN

۲) $8\sqrt{2}$ KN

۳) 16KN

۴) $24\sqrt{2}$ KN

یادداشت:

....

....

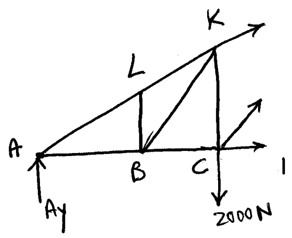
....

....

پاسخ‌ها

۱ ـ گزینه ۲ درست است.

برای یافتن نیروی CJ بازدن مقطع نیز و ممان حول A و توجه به این موضوع که چون ممان حول A می‌گیریم نیازی به نیروی آن نداریم می‌نویسیم:



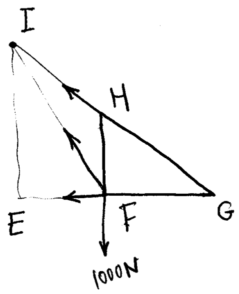
$$\sum M_A = 0$$

$$-2000 \times 2 + \frac{3}{\sqrt{10}} \times 2 \times CJ = 0 \quad \Rightarrow \quad CJ = \frac{2000\sqrt{10}}{3} N$$

برای محاسبهٔ نیروی عضو CF نیاز به نیروی عکس‌العمل G داریم بنابراین:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -2000 \times 2 - 1000 + 6 \times Gy = 0 \quad \Rightarrow \quad Gy = 1500 \ N$$

حال مقطع می‌زنیم:



$$\sum M_I = 0 \quad \Rightarrow \quad -EF \times 2 - 1000 \times 1 + 1500 \times 2 = 0$$

$$EF = 1000 \ N$$

۲ ـ گزینه ۴ درست است.

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -2000 - 6000 + 4A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 2000 \ N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 3000 \ N$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = 0$$

یادداشت:

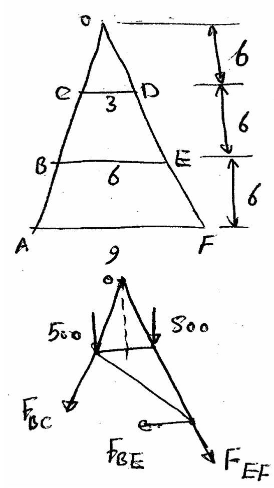
....

....

....

....

۳ـ گزینه ۴ درست است.

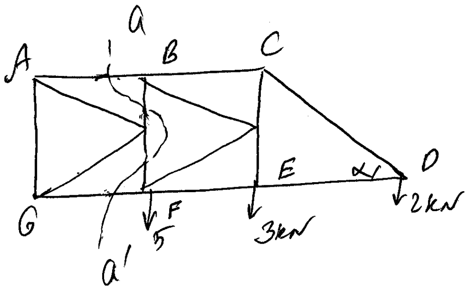


با استفاده از قضیه تالس ابعاد خرپا بدست می آید.

برای بدست آوردن نیروی BE خرپا را مطابق شکل بوسیله بریدن میله های BC و BE و EF برش می زنیم. در نتیجه با توجه به تقارن نیروی خارجی 500 نسبت به نقطه O خواهیم داشت.

$\sum M_O = 0 \Rightarrow F_{BE} = 0$

۴ـ گزینه ۳ درست است.



مقطع 'aa را می‌زنیم و یک بار حول F و یک بار حول B گشتاور می‌گیریم:

$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{FG} \times 3 = 3 \times 3 + 2 \times 6 \Rightarrow F_{FG} = 7KN$

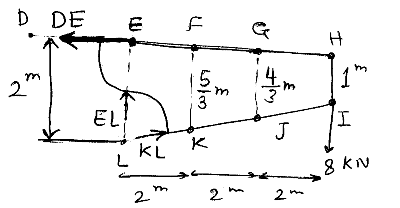
$\sum M_F = 0 \Rightarrow F_{AB} = 7KN$

$F_{DC} \sin\alpha = 2KN \Rightarrow F_{DC} = 2\sqrt{2}KN$

$F_E = F_{DC} \cos\alpha = 2KN$

$F_{AB} \neq 5KN$

۵ـ گزینه ۴ درست است.



$\sum M_L = 0 : DE(2) - 8(6) = 0 \Rightarrow DE = 24\ KN(T)$

یادداشت:

....

....

....

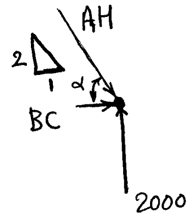
....

مفصل D :

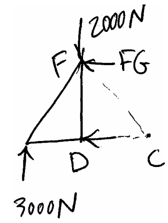
$$\sum F_x = 0 \rightarrow 24 - DL\cos 45^\circ = 0$$

$$DL = 24\sqrt{2}\ KN(C)$$

نیروی عضوهای HB و FD نیز صفر است حال در نقطه A می‌نویسیم:



$$\tan\alpha = \frac{2}{1} = \frac{2000}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC = 1000\ N$$



$$\sum M_c = 0 \quad \Rightarrow \quad FG \times 2 - 3000 \times 2 + 2000 \times 1 = 0$$

$$FG = 2000\ N$$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل پنجم

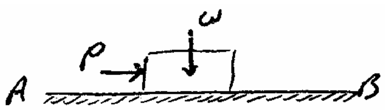
اصطکاک

اصطکاک و کاربری در ماشین‌ها

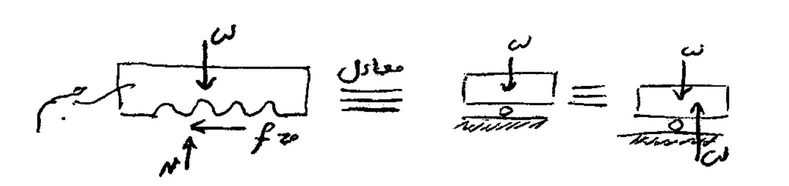
انواع اصطکاک

۱)اصطکاک لغزشی

۲) اصطکاک غلتشی



اگر $P = 0$ باشد سطح زیر نقش یک غلتک رابه اجبار به خاطر تعادل در جهت y، عمل می‌کند.



یادداشت:

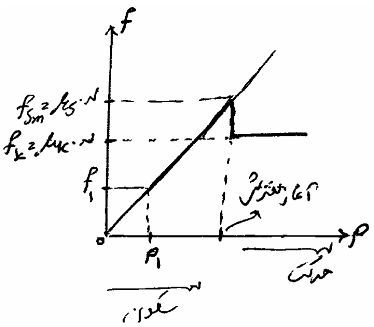
....

....

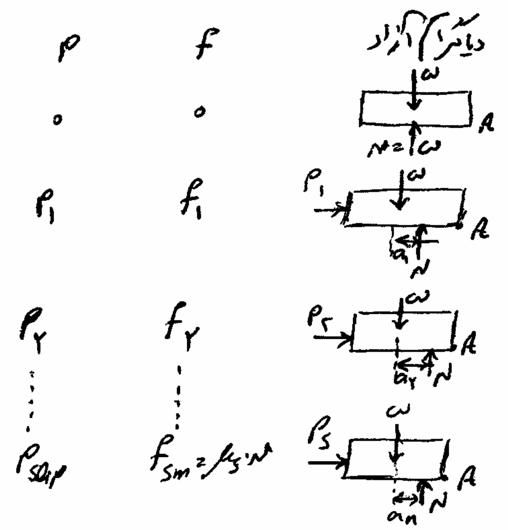
....

....

حال P را افزایش می‌دهیم بر فشار نیروها در محل تماس سطح زیر را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

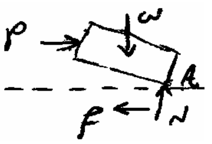


با افزایش P نیروی اصطکاک f افزایش می‌یابد:



و جسم هیچ حرکتی ندارد تا جاییکه P یا F به کی مقدار حد ماکزیمم به نام f_{sm} برسد در این حالت جسم در آستانه لغزش قرار می‌گیرد. پس از $\left[\sum(s)\right]$ لغزش مقدار کاهش ناگهانی به اندازه‌ای f_K دارد و جسم شروع به حرکت می‌کند. که شروع افزایش شتابدار یا غیر شتابدار است. که دیگر روابط تعادل استاتیکی مهمی ندارد.

تذکر مهم اگر قبل از این که N به نقطه‌ی A برسد، مقدار f به f_m برسد در این حالت پدیده افزایش آغاز می‌شود و در صورتی که f به f_m نرسد و N به A برسد پدیده‌ی واژگون شدن اتفاق می‌افتد.



متأسفانه ماهیت f در دسترس نیست. آیا ناشی از زبری سطوح است یا ناشی از ربایش مولکولی ماده. در هر حال مقدار f_m همواره برابر است با $\mu_S.N$ ، $f_K = \mu_K.N$ که μ_S ضریب اصطکاک استاتیکی و μ_K ضریب اصطکاک جنبشی (دینامیکی) می‌نامند. این مقادیر شدیداً به جنس ماده وابسته است و از جداول استاندارد استخراج می‌شود. μ یک پارامتر بدون بُعد است.

یادداشت:

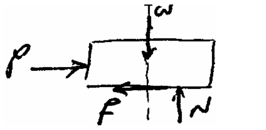
....

....

....

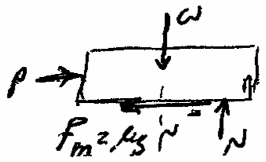
....

سه ناحیه در نمودار اصطکاک



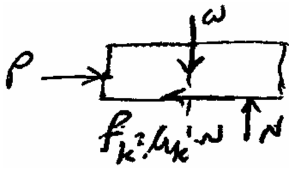
۱)حالت سکون:

$$f < f_m = \mu_S.N \quad , \quad \rho = f \quad , \quad \omega = N$$



۲) شروع لغزش (آستانه‌ی حرکت):

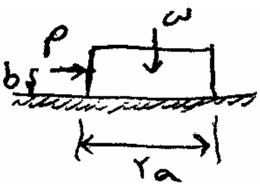
$$P = f \quad , \quad \omega = N \quad , \quad f = f_m = \mu_s.N$$

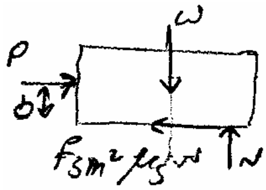


۳) حرکت : روابط تعادل را نمی‌توان نوشت مگر سرعت ثابت باشد:

$$P \neq f_K \quad , \quad f_K = \mu_K.N \quad , \quad P - f_K = m.a$$

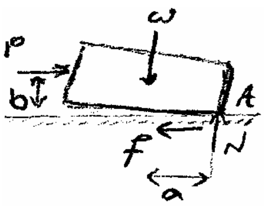
مثال: آیا جسم واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟ (ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s است.)





فرض می‌کنیم می‌لغزد : نیروی لازم جهت لغزش را با P_s نمایش می‌دهیم:

$$P_s = \mu_s.N \quad , \quad N = \omega \quad , \quad P_s = \mu_s.\omega \qquad (۱)$$



فرض می‌کنیم P_R نیروی لازم برای واژگون شدن است:

$$\sum m_A = 0 \;\Rightarrow\; \omega.a = P_R.b \;\Rightarrow\; P_R = \frac{a}{b}\omega \qquad (۲)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

۱) اگر $\mu_s < \frac{a}{b}$ باشد ← لغزش

۲) اگر $\mu_s > \frac{a}{b}$ باشد ← واژگون

۳) اگر $\mu_s = \frac{a}{b}$ باشد ← هر دو

یادداشت:

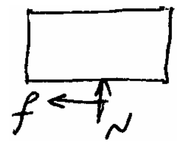
....

....

....

....

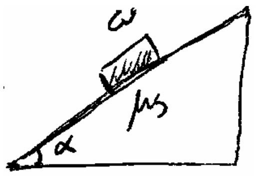
زاویه‌ی اصطکاک



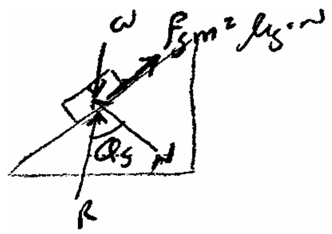
برآیند f و N را با R یعنی واکنش سطح نمایش می‌دهیم. زاویه‌ی بین R و N را با همواره φ نشان می‌دهند. با زاویه‌ی $N, \underset{f_m}{\cancel{f_m}}$ را با φ_s نشان می‌دهند.

تذکر : در برخی از مسایل به جای f و N برآیند R آن‌ها قرار گیرد تا مسأله به یک عضو سه نیرویی تبدیل شود و بتوان از مثلث نیروها استفاده نمود.

مثال: در جسم زیر برای این که جسم خودبخود پایین نیاید (خود قفلی) حد α چقدر باشد؟ (ضریب اصطکاک μ_s است)



شرط اینکه پایین بیاید:

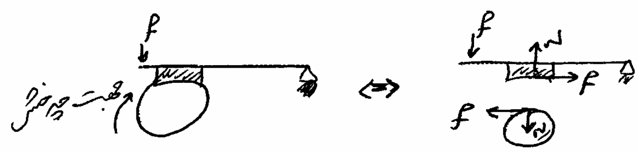


$$\tan\alpha \ge \mu_s \Leftarrow \left[\begin{array}{l} \omega\sin\alpha \ge \mu_s.N \\ N:\omega\cos\alpha \end{array}\right. \quad \Big| \quad \alpha < \varphi_s$$

شرط خوردرویی

$$\alpha \ge \varphi_s$$

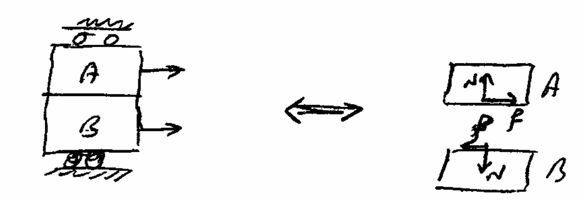
جهت نیروی اصطکاک



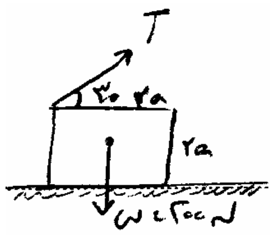
یادداشت:

۳

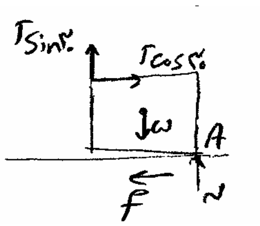
ـ فرق نمی‌کند سرعت کدام بیشتر است. ناظر روی یکی از آن‌ها مانند B می‌ایستد.



مثال: آیا جسم می‌لغزد؟ یا واژگون می‌شد.

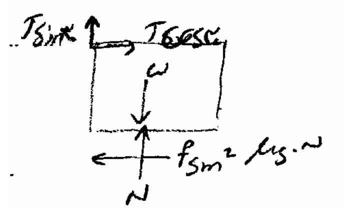


فرض می‌کنیم واژگون می‌شود:



$$\sum M_A = (T\cos 30)(2a) + (T\sin 30)(2a) - 200(a) = 0 \;\Rightarrow\; T = 36.5N$$

فرض می‌کنیم بلغزد:



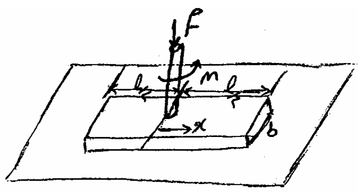
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; T\sin 30 - 200 + N = 0 \;\Rightarrow\; N = 200 - T\sin 30 \quad (۱)$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; T\cos 30 - f_{sm} = 0 \;\Rightarrow\; T\cos 30 = 0.2\,N \quad (۲)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow\; T = 59\,N$

لذا پدیده‌ی واژگون اتفاق می‌افتد زیرا $59 > 36.5$ است و زودتر به 36.5 می‌رسیم.

مثال: عرض شمش (b) در مقابل طول ℓ بسیار ناچیز است. گشتاور لازم برای چرخش شمش را تعیین کنید. فشار بین شمش و سطح $P = Cx$ است.



یادداشت:

....

....

....

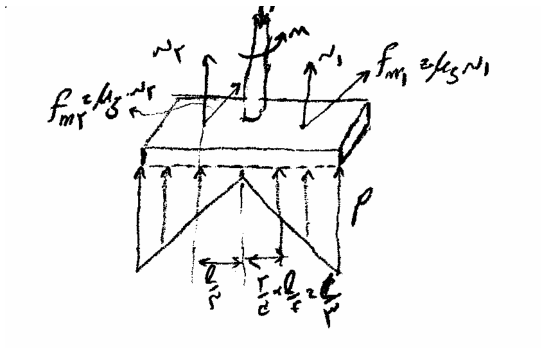
....

$$M=\frac{1}{2}\mu_s F\ell$$

$$N_1=f_{m_2}=\mu_s.\frac{P\ell}{4} \qquad (۱)$$

$$\sum M=0 \;\Rightarrow\; f_m\times\frac{2}{3}\ell-M=0 \;\Rightarrow\; M=\frac{1}{3}\mu_s P\ell^2$$

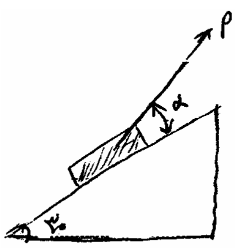
مسأله در اینجا تمام نمی‌شود. باید P بر حسب f نوشته شود:

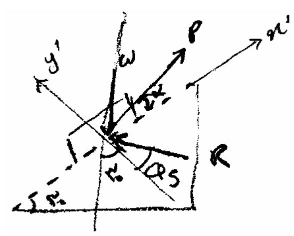


$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; F=2N=\frac{1}{2}P\ell \;\Rightarrow\; P=2\frac{F}{\ell}$$

$$\Rightarrow\; M=\frac{1}{3}\mu_s F.\ell$$

مثال: وزن جسم $60\,\ell b$ است و نیز ضریب اصطکاک $\mu_s=0.25$ است. الف) کمترین مقدار P که باعث شود قطعه در آستانه‌ی لغزش به طرف بالا قرار گیرد. ب) مقدار α متناظر.

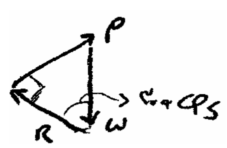




برای این‌که مسأله سه نیرویی شود به جای f و N از R استفاده می‌کنیم.

الف) چون سه نیرویی است داریم:

برای این که P کمترین باشد بایستی P بر R عمود باشد:



$$\sin(30-\varphi_s)=\frac{P}{\omega}$$

$$\varphi_s=\arctan\mu_s=\arctan(0.25)=4.1^\circ$$

$$P=\omega\sin(44.1)=41.7\,\ell b$$

یادداشت:

....

....

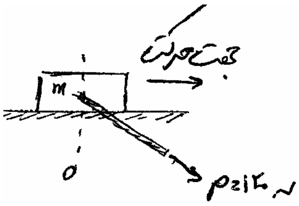
....

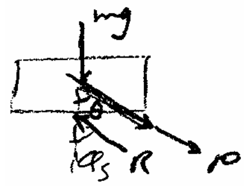
....

ب) x' بر y' عمود است هم چنین P بر R عمود است لذا چون دو ضلع دو زاویه بر یکدیگر عمودند لذا با هم برابرند.

$$P_s = \alpha$$

مثال: تعیین کنید زاویه‌ی θ برای این که جسم به جرم m و $\mu_s = 0.25$ به سمت راست حرکت کند.

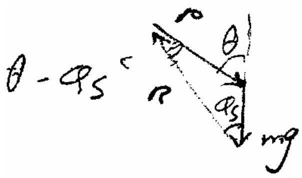




دیاگرام آزاد جسم را در نظر می‌گیریم.

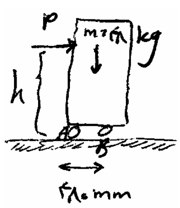
چون سه نیرویی است.

$$\varphi_s = \text{acr}\tan\mu_s = \text{arc}\tan(0.25) = 14.03^\circ$$



$$\frac{\sin\varphi_s}{p} = \frac{\sin(\theta - \varphi_s)}{mg} \Rightarrow \theta = 50.53^\circ$$

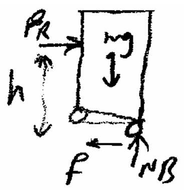
مثال: مقدار P تعادل برای حرکت به سمت راست در دو حالت زیر کدام است؟



الف ـ چرخ B قفل و چرخ A آزاد است. $(h = 640\,\text{mm})$

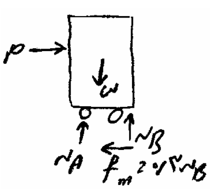
ب ـ چرخ A قفل و چرخ B آزاد است. $(\mu_s = 0.3)(mg = 47.9)$

ابتدا مقل P برای واژگون شدن محاسبه می‌شود.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (mg)(0.24) - (0.64)P_R = 0 \Rightarrow P_R = 0.38\omega$$

نیروی لازم برای واژگون شدن



الف)

$$\sum P_x = 0 \Rightarrow P - \mu_s N_B = 0 \Rightarrow N_B = \frac{1}{0.3}P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (0.64)(P) + (0.24)\omega - (0.48).N_B = 0 \Rightarrow$$

$$P = 0.25\,\omega$$

یادداشت:

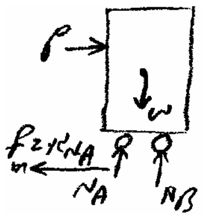
....

....

....

....

یعنی چرخ می‌لغزد (واژگون نمی‌شود)

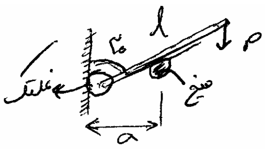


ب) $\sum F_x = 0 \Rightarrow P - 0.3N_A = 0 \Rightarrow N_A = \frac{1}{0.3}P$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow P = 0.11\omega$

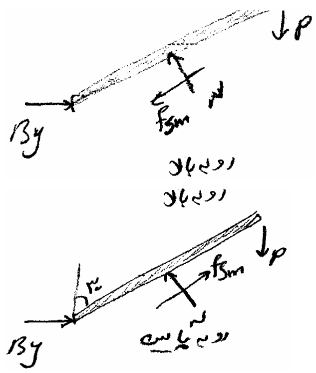
باز هم دراین حالت چرخ می‌لغزد (واژگون نمی‌شود).

مثال: میله سبک است و بین یک میخ جوبی و دیوار قرار دارد. ضریب اصطکاک میخ و میله 0.25 است. محدوده‌ی $\frac{\ell}{a}$ برای تعادل کدام است.



جواب : $5.6 \le \frac{\ell}{a} < 14.1$

فرض می‌کنیم غلتک یک بار بالا و بار دیگر پائین می‌آید:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{a}{\sin 30}N - \ell \sin 30\, P = 0 \Rightarrow N = \frac{\ell P}{4a} \quad (۱)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{sm}\cos 30 + N\sin 30 - P = 0 \;\Rightarrow\; (۲)$$

حال در رابطه بالا $f_{mc} = \pm 0.25\,N$ که (+ برای رو به بالا و − برای رو به پائین است). پس از حل $\frac{\ell}{a}$ محاسبه می‌شود.

یادداشت:

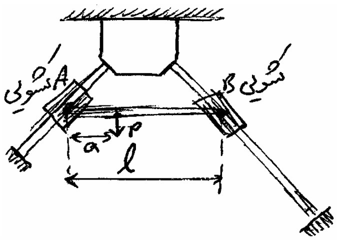
....

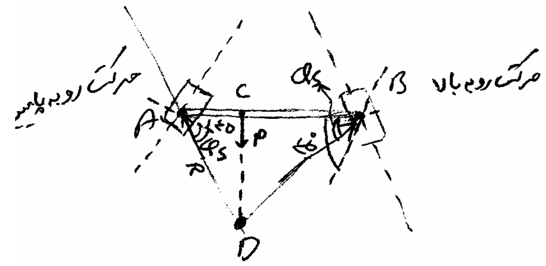
....

....

....

مثال: با صرف نظر کردن از وزن میله‌ی AB و کشویی اگر ضریب اصطکاک کشویی با میله $\mu_s = 0.3$ باشد کمترین یا مقدار $\frac{a}{\ell}$ تعادل کدام است؟ $\left(a < \frac{\ell}{2}\right)$





$$\varphi_s = \arctan(0.3) = 16.7^\circ$$

در مثلث ABD داریم:

$$\sin(45 - \varphi_s) = \frac{AD}{\ell}$$

$$AD = \ell \sin(45 - \varphi_s) \qquad (1)$$

در مثلث ACD داریم:

$$\cos(45 + \varphi_s) = \frac{a}{A_D}$$

$$\Rightarrow A_D = \frac{a}{\cos(45 + \varphi_s)} \qquad (2)$$

کاربری اصطکاک در ماشین آلات

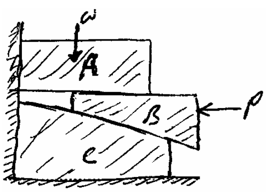
۱)گوه‌ها

۲) چرخ و تسمه‌ها

۳) چرخ وسایل نقلیه‌ها

۴) پیچ انتقال قدرت

گوه‌ها: برای بالا بردن جسم سنگین با نیروی نسبتاً پائین استفاده می‌شود. تحلیل استاتیکی گوه‌ها بسیار ساده و از روابط تعادل استفاده می‌شود. مانند :



یادداشت:

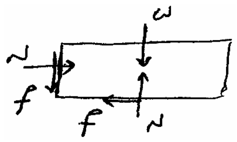
....

....

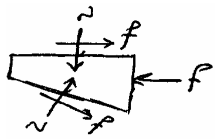
....

....

رسم دیاگرام آزاد A :



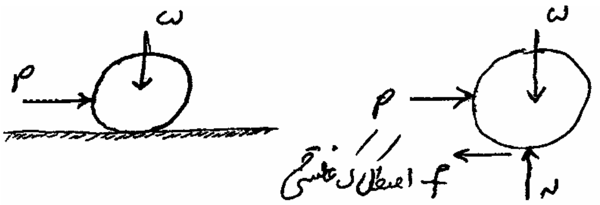
دیاگرام آزاد B :



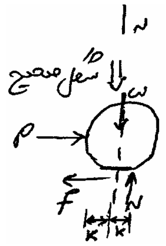
با نوشتن روابط تعادل $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ گوه‌ها تحلیل می‌شوند.

ضریب اصطکاک غلتشی

ایراد دیاگرام آزاد در شکل زیر چیست؟



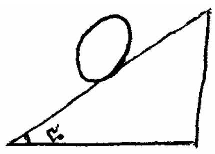
به K ضریب اصطکاک غلتشی می‌گوییم. K بر حسب cmاست و جزو خواص هر ماده است و در جدول استاندارد موجود است.



$$\omega = N$$

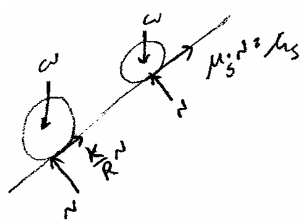
$$\sum M = 0 \Rightarrow NK = fR \Rightarrow f = \frac{K}{R}N$$

مثال: استوانه می‌لغزد یا می‌غلتد؟



$$(R = 40\,mm)$$

$$(K = 0.002\,cm\ ,\ \mu_s = 0.1)$$



۱ـ اگر $\frac{K}{R} < \mu_s$ ابتدا می‌غلتد

۲ـ اگر $\frac{K}{R} > \mu_s$ ابتدا می‌لغزد

۳ـ اگر $\frac{K}{R} = \mu_s$ هم می‌لغزد و هم می‌غلتد.

یادداشت:

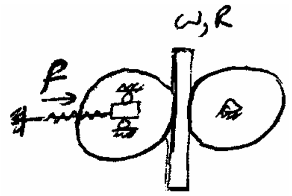
....

....

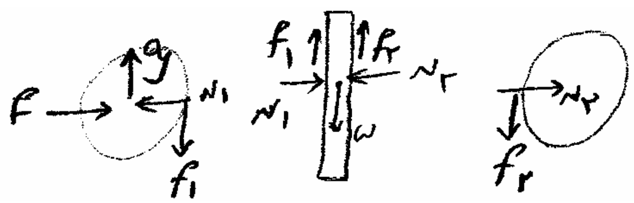
....

....

مثال: نیروی فنر را بر حسب R, ω و K به دست آورید. (وزن جسم: ω و ضریب اصطکاک لغزشی: K، شعاع استوانه: R) (طول صفحه : ℓ) .



دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم:



در صفحه : $\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; \omega = f_1 + f_2$

$f_1 = \frac{K}{R} N_1 \;\Rightarrow\; \omega = \frac{K}{R}\left(N_1 + N_2\right)$

درصفحه : $\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = N_2$

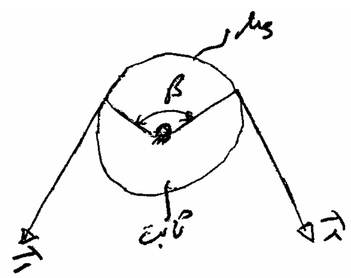
در استوانه : $\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = F$

$\omega = \frac{2K}{K} N_1 = \frac{2K}{R} F \;\Rightarrow\; F = \frac{2R}{K}\omega$

تذکر مهم برای کاربری اصطکاک در ماشین‌ها :

ـ قرقره‌ی دو نیرو سواره

طرف سخت (T_1) از قرقره دور می‌شود. طرف شل (T_2) به قرقره نزدیک می‌شود.



رابطه‌ی اویلر را می‌نویسیم:

طرف سخت $T =$ طرف شل $T . e^{\beta \mu_s}$

$T_1 = T_2 . e^{\beta \mu_s}$ (β بر حسب رادیان است).

یعنی در اینجا :

اگر $\mu_s = 0$ در نتیجه خواهیم داشت : $T_1 = T_2$

یادداشت:

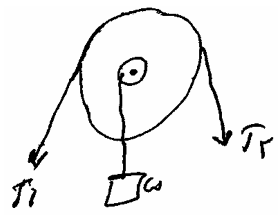
....

....

....

....

قرقره چند نیرو سواره است.



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -T_1R + T_2R - \omega r = 0 \Rightarrow$$
$$T_2R = T_1R + \omega r \Rightarrow T_2 > T_1$$

r : شعاع قرقره کوچکتر

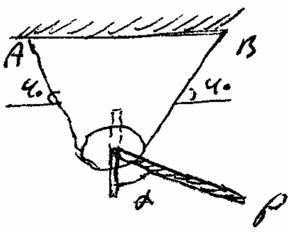
R: شعاع قرقره‌ی بزرگتر

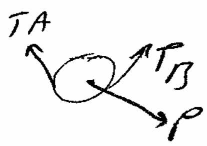
پس رابطه‌ی اویلر در اینجا به صورت روبرو خواهد بود: $T_2 = T_1.e^{\beta\mu s}$

اگر قرقره بچرخد (مثلاً در جهت عقربه‌ی ساعت) یایک ممان متعادل توسط موتور به آن اعمال شود (مثلاً جهت عقربه‌ی ساعت) خوهیم داشت:

$$T_1 = T_2\, e^{\beta\mu s}$$

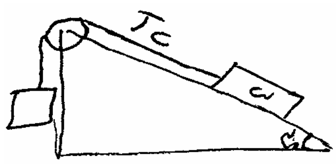
سئوال: رابطه‌ی اویلر را برای شکل‌های روبرو بنویسید.





$$\Rightarrow\ T_A = T_B e^{\beta\mu_s}$$

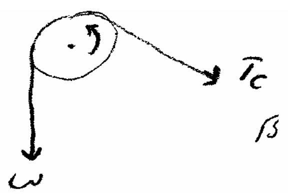
سئوال: رابطه‌ی اویلر در دو حالت زیر که جسم به سمت بالا حرکت می‌کند کدام است؟



الف ـ فلکه در خلاف عقربه‌ی ساعت بچرخد.

ب ـ فلکه یخ بزند.

حالت الف ـ



$$T_C = \omega e^{\beta\mu_s} \qquad (۱)$$

$$\beta = 30 + 90 = 120 \Rightarrow \beta = \frac{28}{3}$$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow T_C = \omega e^{\frac{2\pi}{3}\mu_s}$$

حالت ب ـ

$$\omega = T_C\, e^{\beta\mu_s}$$

یادداشت:

....

....

....

....

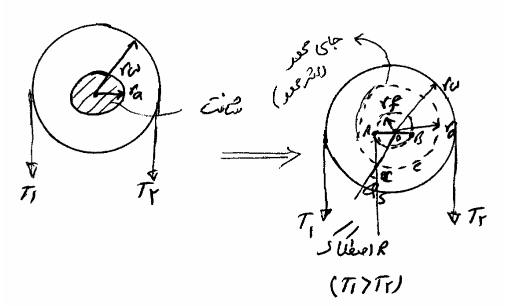
تذکر: در چرخ‌های هرز گرد همواره داریم:

$$T_1 = T_2$$

حالت مهم : قرقره یا چرخ به شعاع r_ω در داخل یک شفت (shaft) یا محوری که در داخل یاتاقان است و شعاع آن r_a است می‌چرخد مشروط بر این که ضریب اصطکاک لغزشی محور باتاقان μ_s است.

دیاگرام آزاد این حالت را رسم می‌کنیم (برای چرخ)

$$r_f = r_a \sin\varphi_s = r_a \sin\left[\arc\tan \mu_s\right]$$



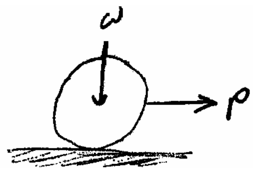
C: محل قطع R اصطکاک با دایره‌ی جای محور. تقاطع R با محور دایره‌ی محور را C می‌نامیم. اگر از C به O وصل کنیم زاویه‌ی φ_s مشاهده می‌شود در مثلث CAO داریم:

$$\sin\varphi_s = \frac{r_f}{r_a} \;\Rightarrow\; r_f = r_a \sin\varphi_s$$

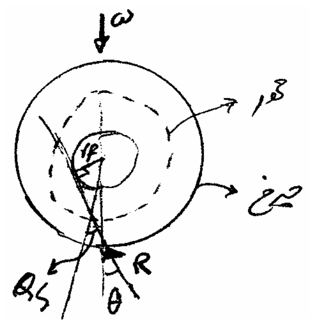
تحلیل چرخ‌ها

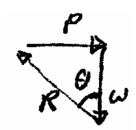
وزن چرخ ω و بار افقی P وارد شده است. اصطکاک چرخ و شافتی که در داخل یاتاقان است μ_s است. شعاع چرخ از محل تماس با زمین

مثال: یک واگن دارای هشت چرخ است. وزن هر چرخ $\frac{38}{8}$ یا $\frac{70000}{8}\,\ell b$ می‌باشد. قطر چرخ $32\,\text{ineh}$ و قطر محور هر چرخ $5\,\text{ineh}$ و ضریب اصطکاک استاتیکی محور با چرخ 0.02 است. مطلوب است نیروی افقی ρ وارد بر هر چرخ.



دیاگرام آزاد چرخ را رسم می‌کنیم.





$$r_f = r_a \sin\varphi_s = 2.5\sin\left[\arc\tan(0.02)\right]$$

$$\Rightarrow r_f = r_\omega \sin\theta \;\Rightarrow\; \theta = \arcsin\left(\frac{r_f}{r_\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = \arcsin\left[\frac{2.5\sin\left(\tan^{-1}(0.02)\right)}{16}\right] = 0.18$$

$$\tan\theta = \tan(0.18) = \frac{p}{\omega} \;\Rightarrow\; p = \omega\tan(0.18) \;\Rightarrow$$

$$P = \frac{70000}{8}\tan(0.18)$$

یادداشت:

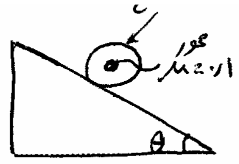
....

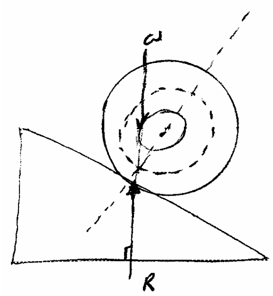
....

....

....

مثال: شیب سطح 2% است. چرخ با شتاب ثابت رو به پائین در حرکت است. قطر محور چرخ $1\,\text{ineh}$ و اصطکاک آن 0.1 است. قطر چرخ چقدر است؟ (از اصطکاک غلتشی چرخ و زمین صرف نظر شود).





R عمود بر افق است چون عضو دو نیرویی است بنابراین $R\,,\omega$ در یک امتداد خواهند بود.

$$r_f = r_a \sin\varphi_s \quad , \quad r_f = r_\omega \sin\theta$$

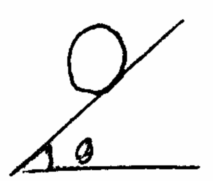
$$\tan\theta = 0.02 \;\Rightarrow\; \theta = \tan^{-1}(0.02)$$

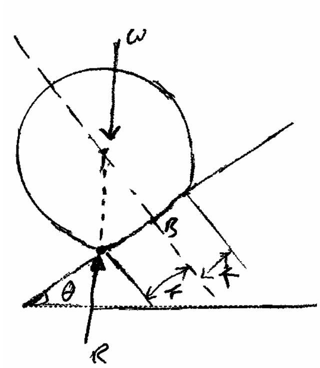
$$r_f = r_\omega \sin\varphi \;\Rightarrow\; \frac{r_f}{r_\omega} = \sin\left[\tan^{-1}(0.02)\right]$$

$$\Rightarrow\; \frac{r_f}{r_\omega} = 0.0199$$

$$r_f = r_a \sin\varphi_s = 1\sin\left[\tan^{-1}(0.1)\right] \;\Rightarrow\; r_f = 0.0995 \;\Rightarrow\; r_\omega = 4.98\,\text{ineh}$$

مثال: دیسکی به قطر $120\,\text{mm}$ از شیب 2 درصد پایین می‌غلتد. ضریب اصطکاک غلتش چقدر است؟





دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم:

عضو و نیرویی است بنابراین R در امتداد ω است.

$$\tan\theta = 0.02$$

$$\sin\theta = \frac{K}{R} = \frac{K}{60}$$

چون θ کوچک است و می‌توان نوشت:

$$\sin\theta = \tan\theta = 0.02 \;\Rightarrow\; K = 1.2\text{mm}$$

یادداشت:

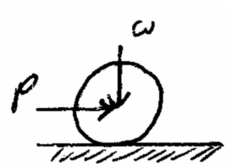
....

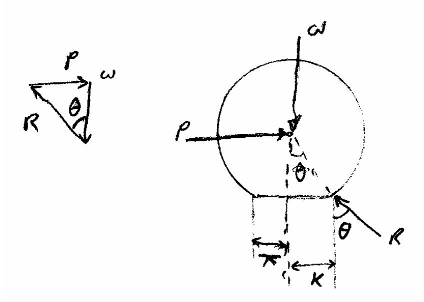
....

....

....

مثال: نیروی افقی P برای حرکت اتومبیلی به جرم $1000\,kg$ چقدر است؟ (قطر تایرها $460\,mm$ و ضریب اصطکاک غلتشی $1\,mm$ است).



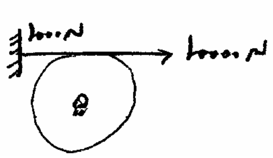


$$\sin\theta = \frac{K}{R} = \frac{1}{230}$$

$$\tan\theta = \frac{P}{\omega} \Rightarrow P = \omega\tan\left[\arcsin\left(\frac{1}{230}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad P = 42.7N$$

مثال: طناب چند دور با نیروی $10.000N$ دور قرقره با اصطکاک 0.2 بچرخد تا عکس‌العمل دیواره $1000\,N$ شود.



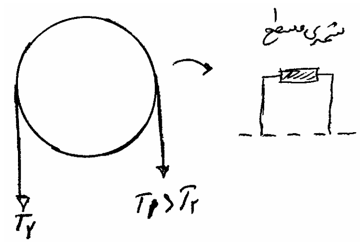
دو نیرو سواره است. بنابراین:

$$T_1 = T_2\, e^{\beta\mu_s}$$

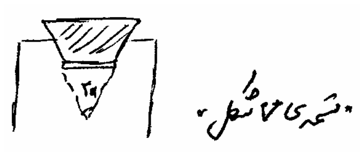
$$1000 = 1000\, e^{0.2\beta} \Rightarrow \beta \text{ محاسبه } \Rightarrow \frac{\beta}{2\pi} = n \rightarrow \text{ تعداد دورها}$$

تذکر مهم :

در تسمه‌ی V شکل داریم:



$$T_1 = T_2\, e^{\frac{\beta\mu_s}{\sin\alpha}}$$



$$T_1 = T_2\, e^{\beta\mu_s}$$

یادداشت:

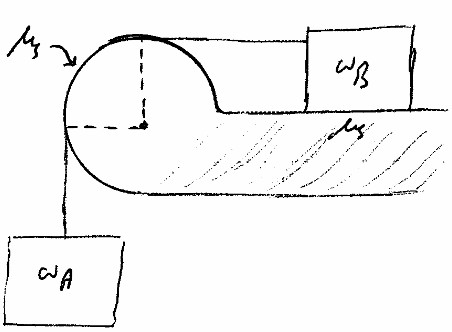
....

....

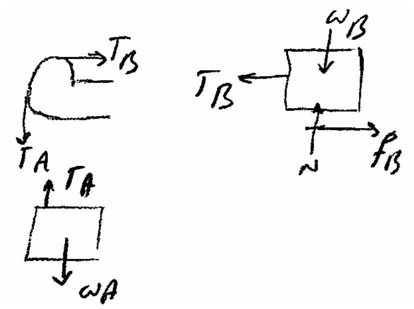
....

....

مثال: ضریب اصطکاک در تمام سطوح μ_sاست. $(\omega_A = \omega_B)$ ضریب اصطکاک حجم با سطح و طناب با سطح یکسان (μ_s) است. μ_s چقدر است؟



داریم:



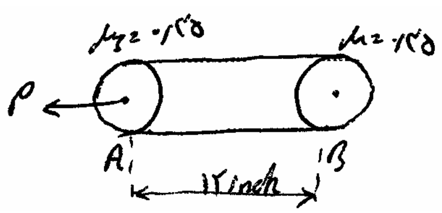
$$\sum F_y 0 \;\Rightarrow\; N_B = \omega_B = \omega_A$$
$$F_B = \mu_S \, \omega_B$$
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; T_B = \mu_S \omega_A$$

حال رابطه‌ی اویلر را می‌نویسیم:

$$T_A = T_B e^{\beta \mu_s} \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$T_A = \omega_A \;\Rightarrow\; \omega_A = \omega_A \mu_s e^{\mu_s . \frac{\pi}{2}} \;\Rightarrow\; e^{\frac{\pi}{2}\mu_s} . \mu_s = 1$$
$$\Rightarrow\; \mu_s = 0.48$$

مثال: قطر چرخ‌ها یکسان و برابر $3\,\text{inch}$ است. ضریب اصطکاک استاتیکی چرخ‌ها و تسمه‌ها $\mu_s = 0.35$ است. تعیین کنید گشتاوری که از چرخ A توسط الکتروموتور به چرخ B منتقل می‌شود. $(P = 225\,\ell b)$



یادداشت:

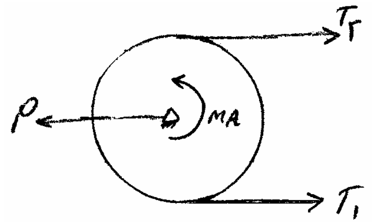
....

....

....

....

چون جهت چرخش مطرح نشده است فرقی نمی‌کند لذا فرض را چرخ A می‌گیریم.



$$\sum M_A = 0 \ \Rightarrow\ T_2(3) - T_1(3) - M_A = 0 \qquad (۱)$$

T_2 , T_1 را محاسبه می‌کنیم.

رابطه‌ی اویلر با توجه به نکات ذکر شده و این که $T_2 > T_1$ است داریم:

$T_2 = T_1 e^{\beta \mu_s}$

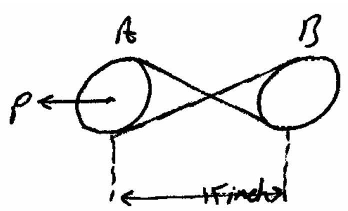
$\beta = \pi$ چون قطرها یکسان است

$$T_2 = 3T_1 \qquad (۲)$$

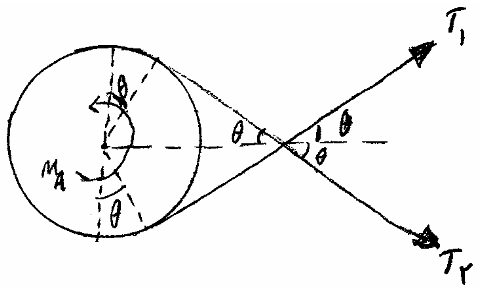
$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow\ T_1 + T_2 = P = 225\ell b \qquad (۳)$$

$$(3) \overset{(2)}{\Rightarrow} T_1 = 56.2\ell b \ ,\ T_2 = 168.8\ell b \overset{(1)}{\Rightarrow} M_A = 338\ell b.in$$

مثال: اگر در مثال قبل تسمه‌ها ضربدری قرار گیرد گشتاور انتقالی چقدر است؟



فرض: چرخ A:



$$\sum M_A = 0 \ \Rightarrow\ (-T_1)(3) + (T_2)(3) - M_A = 0 \qquad (۱)$$

رابطه‌ی اویلر $\Rightarrow T_2 = T_1 e^{\beta \mu_s} \Rightarrow T_2 = 4.33 T_1$ (۲)

یادداشت:

....

....

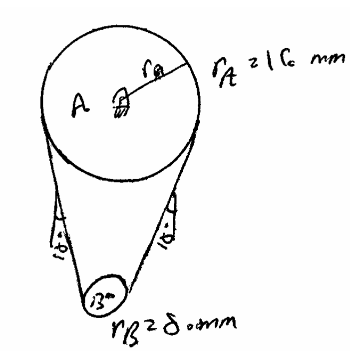
....

....

$$\sum f_x = 0 \Rightarrow -P + T_1 \cos 30 + T_2 \cos 30 = 0 \quad (۳)$$

$$(2),(3) \Rightarrow T_1 = 48.32\,\ell b \ ,\ T_2 = 211.08\,\ell b \overset{(1)}{\Rightarrow} m_A = 497\,\ell b.in$$ یعنی ضربدری قدرت بیشتری دارد.

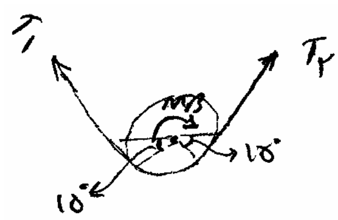
مثال: برای انتقال گشتاور از پولی B به پولی A استفاده شده است. اگر بیشترین نیروی کششی طناب $450\,N$ و ضریب اصطکاک استاتیکی 0.4 باشد تعیین کنید، الف) گشتاور انتقالی از B به A را ب) μ_K.



چون قطرها یکسان نیست لغزشی از چرخی آغاز می‌شود که زاویه‌ی کمتری دارد یعنی:

$$\beta_A = 180 + 2\times 15 = \frac{7\pi}{4} \ ,\ \beta_B = 180 - 30 = \frac{5\pi}{6}$$

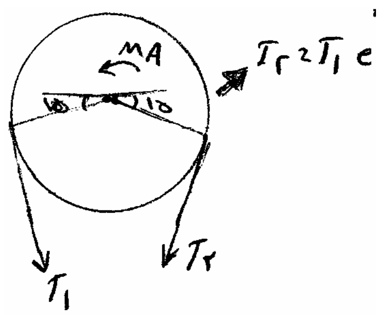
پس لغزشی از B شروع می‌شود.



$$T_2 > T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 e^{\beta_B \mu_s}$$

$$T_2 = T_1 e^{\beta_A \mu_K}$$

چون M_A مجهول است.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -T_1(0.12) + T_2(0.12) - M_A = 0 \quad (۱)$$

در قرقره‌ی B چون لغزشی از آن شروع می‌شود:

$$T_2 = T_1 e^{\beta_B \mu_s} \Rightarrow T_2 = T_1\, e^{\frac{5\pi}{6}\times 0.4}$$

یادداشت:

....

....

....

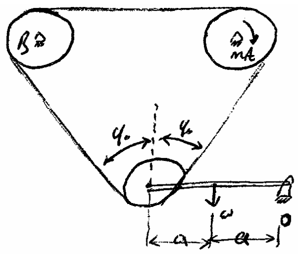
....

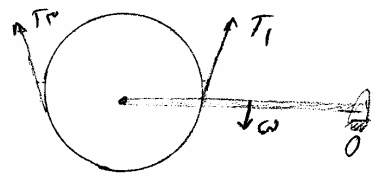
در صورت مسأله $T_{max} = T_2 = 450N$ بنابراین : $T_1 = 157.9$

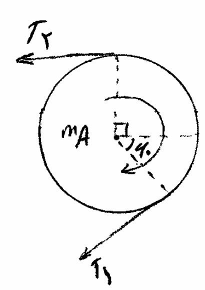
μ_K محاسبه می‌شود $\Rightarrow M_A = 351 N.mm \Rightarrow \beta_B \mu_s = \beta_A \mu_K \Rightarrow$

تذکر مهم: در چرخ‌های هرزگرد همواره $T_1 = T_2$ است. زیرا تسمه و چرخ با هم سرعت نسبی ندارند.

مثال: چرخ A به موتور وصل است و قدرت را به چرخ B منتقل می‌کند. چرخ C یک چرخ هرزگرد است. اگر ضریب اصطکاک تمام نسخه‌ها برابر و معادل $\mu_s = \frac{2}{\pi}$ باشد، M_A چقدر است؟ (شعاع هر سه چرخ 3ineh است.)







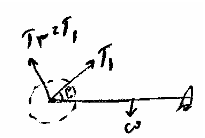
$$\beta_A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -T_2(3) - M_A + T_2(3) = 0 \quad (۱)$$

$$T_2 > T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 e^{\frac{5\pi}{6} \times \frac{2}{\pi}} \Rightarrow T_2 = T_1 e^{\frac{5}{3}} \quad (۲)$$

قرقره‌ی C هرزگرد است. $T_1 = T_3$

نسبت به O ممان می‌گیریم:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 \sin 30(2a) + T_1 \sin 30(2a) - \omega_a = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}\omega$$

T_1 را در (۲) قرار می‌دهیم تا T_2 محاسبه گردد سپس T_1 , T_2 را در (۱) قرار می‌دهیم تا M_A محاسبه گردد.

$$M_A = \frac{3}{20}\omega\left(e^{\frac{5}{3}} - 1\right)$$

یادداشت:

....

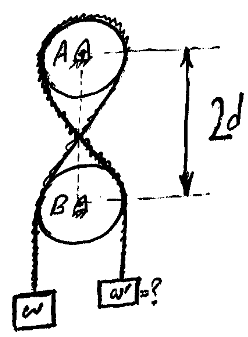
....

....

....

تست‌های فصل پنجم

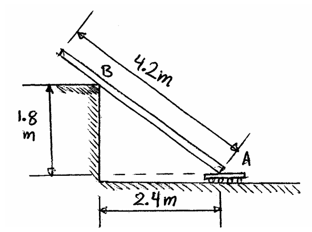
۱ـ طنابی بر روی دو استوانه به قطر d مطابق شکل قرار دارد. ضریب اصطکاک بین هر دو قرقره و طناب برابر μ می‌باشد. ماکزیمم وزنی که توسط وزنه w می‌توان بالا برد کدام است؟ $(w' = ?)$



۱) $w' = w\,e^{-\frac{4}{3}\pi\mu}$ ۲) $w' = w\,e^{-\frac{5}{3}\pi\mu}$

۳) $w = w'\,e^{-\frac{4}{3}\pi\mu}$ ۴) $w = w'\,e^{-\frac{5}{3}\pi\mu}$

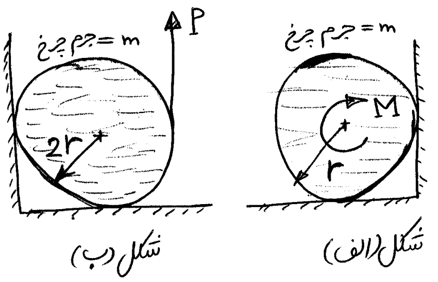
۲ـ انتهای A الوار یکنواخت به جرم 25 kg روی غلتکهایی که آزادانه در امتداد افق حرکت می کنند، قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین الوار و گوشه B برابر 0.8 باشد و الوار در حالت تعادل نشان داده شده قرار داشته باشد، نیروی اصطکاک F_B که در گوشه B به الوار وارد می شود، کدام است؟ $(g \simeq 10\ m/s^2)$



۱) 105 N ۲) 110 N

۳) 96 N ۴) الوار نمی تواند در حالت تعادل قرار داشته باشد.

۳ـ گشتاور چرخاننده‌ی چرخ به جرم m در شکل (الف) برابر Amgr (A ضریب ثابت می‌باشد.) و نیروی P برای چرخاندن چرخ به جرم m در شکل (ب) برابر Bmg (B ضریب ثابت می‌باشد.) اگر ضریب اصطکاک در کلیه‌ی سطوح تماس در اشکال (الف) و (ب) برابر μ باشد، نسبت $\frac{A}{B}$ کدام است؟ (μ ضریب اصطکاک و g شتاب جاذبه می‌باشد.)



۱) $\frac{1+\mu+2\mu^2}{2\left(1+\mu^2\right)}$ ۲) $\frac{1+\mu+2\mu^2}{1+\mu^2}$

۳) $\frac{1+\mu^2}{2\mu\left(1+\mu\right)}$ ۴) $\frac{1+\mu^2}{\mu\left(1+\mu\right)}$

یادداشت:

....

....

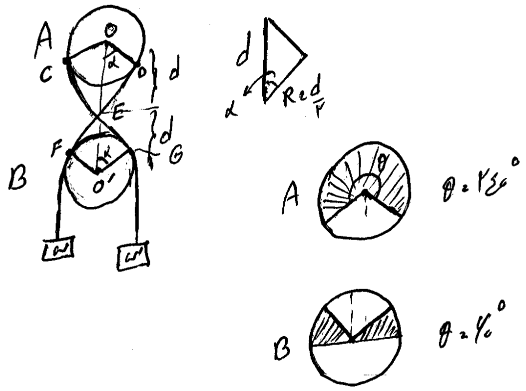
....

....

پاسخ‌ها

۱ ـ گزینه ۲ درست است.

هر دو مثلث در دو قرقرهٔ A و B با یکدیگر مشابه هستند و برابر، پس وتر هر کدام برابر $\frac{d}{2}$ است. $\cos\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{d} = \frac{1}{2} \to \alpha = 60^\circ$

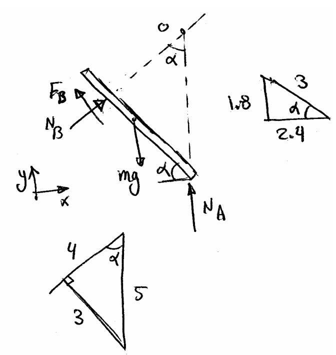


$$\begin{cases} \frac{w}{T_{EF}} = e^{\frac{\pi}{6}\mu} \\ \frac{T_{EF}}{T_{EG}} = e^{\frac{4\pi}{3}\mu} \\ \frac{T_{EG}}{w'} = e^{\frac{\pi}{6}\mu} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{w}{w'} = \frac{w}{T_{EF}} \times \frac{T_{EF}}{T_{EG}} \times \frac{T_{EF}}{w'} = e^{\mu\frac{\pi}{6}} \times e^{\mu\frac{\pi}{6}} \times e^{\frac{4\pi}{3}\pi\mu} = e^{\frac{5}{3}\mu\pi}$$

$$\Rightarrow \quad w' = w\, e^{-\frac{5}{3}\pi\mu}$$

۲ ـ گزینه ۱ درست است.

با رسم دیاگرام آزاد و قوانین تعادل می توان نیرو و اصطکاک را یافت. $AB = 3$



یادداشت:

....

....

....

....

$\cos\alpha=0.8,\ \sin\alpha=0.6$

$\sum M_O=0, \Rightarrow F_B\times4=mg\times2.1\times\cos\alpha \rightarrow F_B=\frac{25\times10\times2.1\times0.8}{4}=105N$

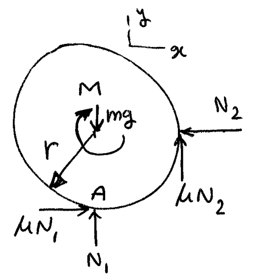
$\sum F_x=0, \rightarrow F_B\cos\alpha=N_B\sin\alpha \rightarrow F_B=N_B\frac{0.6}{0.8}=0.75N_B$

$F_B=\mu_s N_B=0.8N_B$

در نتیجه میله در حالت تعادل قرار دارد و $F_B=105\ N$

۳ ـ گزینه ۲ درست است.

برای شکل (الف):

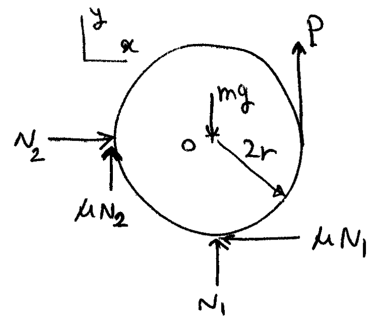


$$\sum M_A=0 \Rightarrow M-\mu N_2 r-\mu N_1 r=0$$

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x=0 &\Rightarrow N_2-\mu N_1=0\\ \sum F_y=0 &\Rightarrow N_1+\mu N_2-mg=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow N_2=\frac{\mu mg}{\left(1+\mu^2\right)}$$

$$\Rightarrow M=\frac{\mu(1+\mu)}{\left(1+\mu^2\right)}mgr$$

برای شکل (ب):



$$\left.\begin{aligned}\sum M_o=0 &\Rightarrow P(2r)=\mu N_1(2r)+\mu N_2(2r)\\ \sum F_x=0 &\Rightarrow N_2-\mu N_1=0\\ \sum F_y=0 &\Rightarrow N_1+\mu N_2+P=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow P=\frac{\mu(1+\mu)}{\left(1+\mu+2\mu^2\right)}mg$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{\mu(1+\mu)}{\left(1+\mu^2\right)}}{\frac{\mu(1+\mu)}{\left(1+\mu+2\mu^2\right)}}=\frac{1+\mu+2\mu^2}{1+\mu^2}$$

یادداشت:

....

....

....

....