
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده مهندسی عمران

تحلیل ماتریسی سازه ها

Matrix Structural Analysis

کریم عابدی

فصل سوم:

روش سختی در تحلیل ماتریسی سازه ها

فصل سوم– روش سختی در تحلیل ماتریسی سازه ها

۱– مقدمه:

-گفتیم که اگر هدف اصلی تحلیل سازه، تعیین تغییر مکان های دو انتهای عنصر یا به عبارت دیگر مشخص کردن تغییر مکان های مربوط به گره های سازه باشد، در این صورت تحلیل سازه به روش تغییر مکان ها (Displacement Method) یا روش سختی (Stiffness Method) انجام می گیرد.

– در روش سختی مجهولات شامل تغییر مکان های گره ها است و تعداد معادلات حاصل برابر درجه آزادی کل گره های سازه می باشد.

– بنابراین در روش سختی ابتدا تغییر مکان های نقاط مشخص به طور اخص در گره های سازه تعیین می شود و سپس نیروهای داخلی محاسبه می شوند.

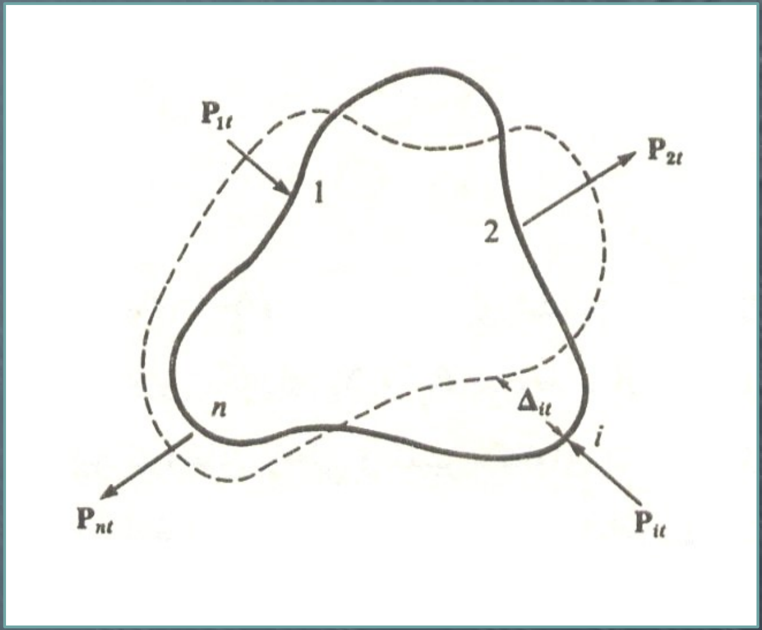
– در روش سختی معادلاتی بین نیروها و تغییر مکان های سازه در دو سطح عنصر و کل سازه ایجاد می‌شوند.

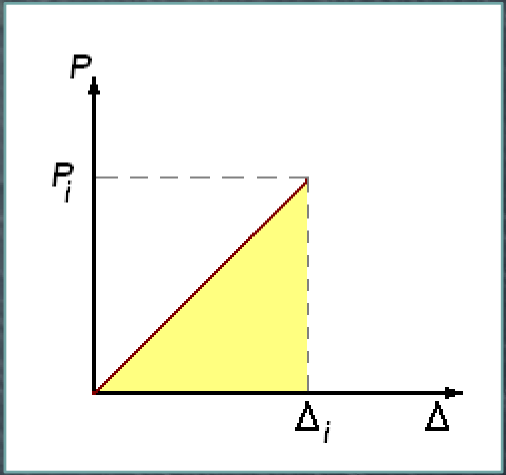
- **پس در یک جمع بندی روش سختی شامل مراحل عمومی زیر است:**
  - تعیین یک مجموعه از تغییر مکان های سیستم سازه ای
  - نوشتن روابط نیرو- تغییر مکان
  - ارضای شرط تعادل
  - ارضای شرط سازگاری
  - یافتن معادلات سازگاری
  - حل معادلات و به دست آوردن تغییر مکان های سیستم سازه ای
  - به دست آوردن نیروهای اعضاء و واکنش های تکیه گاهی

در تحلیل ماتریسی سازه ها به روش سختی در واقع معادلات مذکور در فرم ماتریسی استخراج می شوند و مبانی جبر ماتریسی به کار گرفته می شوند. این معادلات ماتریسی شامل بردار نیرو و بردار تغییر مکان و در ضمن ماتریس دیگری خواهد بود که به ماتریس سختی معروف است و بستگی به هندسه سازه، خواص هندسی و خواص مصالح اعضاء، نوع اتصالات موجود در سازه، تکیه گاه ها، نحوه اتصال اعضا و ... دارد.

۲- تعیین معادله روش سختی:

- جسم تغییر شکل پذیری (Deformable body) را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروهای P_i قرار دارد (بارگذاری از صفر شروع شده و به طور خطی به مقدار نهایی خود P_i رسیده است) (i نقاطی از سازه می باشند که نیروهای P_i بر آن نقاط وارد می شوند).
- در اثر بارگذاری مذکور سازه تغییر مکان های Δ_i را متحمل می شود (Δ_i در راستای اعمال نیروهای P_i می باشند).
- با توجه به فرض رفتار خطی سازه، کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر سازه (P_i) ناشی از تغییر مکان های سازه (Δ_i) به صورت زیر خواهد بود (کار انجام یافته مذکور معادل انرژی تغییر شکل جسم است):





$$U = \frac{1}{2} P_i \Delta_i$$

$$U = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \dots + P_n\Delta_n)$$

$$U = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \ldots + P_n\Delta_n)$$

– فرض کنید که در یکی از تغییرمکان ها (مثلاً Δ_1) تغییر کوچکی داده می شود، در این صورت تغییرات انرژی تغییر شکل جسم نسبت به تغییرات در Δ_1 به صورت زیر درمی آید (لازم به ذکر است که سایر تغییر مکان ها ثابت نگه داشته می شوند):

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{1}{2}\left[P_1 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1}\Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1}\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1}\Delta_n\right)\right]$$

– اما با توجه به قضیه اول کاستیلیانو داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = P_1 \quad \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1}\Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1}\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1}\Delta_n$$

– حال اگر عمل فوق را برای تمامی تغییرمکان‌ها (Δ_i) انجام دهیم به طور کلی به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$P_i = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_i}\Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_i}\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_i}\Delta_n$$

– اگر مجموعه معادلات مذکور را به فرم ماتریسی بیان کنیم خواهیم داشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}}_{\text{نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم (به انضمام عکس العمل ها)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مربعی}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}}_{\text{شامل تغییر مکان های نقاط گرهی (به انضمام تغییر مکان های تکیه گاه ها)}}$$

– پس کل مسأله به تعیین ماتریس مربعی مذکور– یا تعیین اعضای $\dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j}$ از ماتریس مربعی– و سپس حل این معادلات ماتریسی برمی گردد.

– می توان تقارن ماتریس مذکور را نشان داد (با استفاده از قضیه اول کاستیلیانو):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \dfrac{\partial\left(\partial U / \partial \Delta_i\right)}{\partial \Delta_j} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i} \\[2ex] \dfrac{\partial P_j}{\partial \Delta_i} = \dfrac{\partial\left(\partial U / \partial \Delta_j\right)}{\partial \Delta_i} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial \Delta_i}}$$

– بنابراین با توجه به تقارن ماتریسی مربعی می توان نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix}}_{} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}}_{}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

– اکنون ببینیم مفهوم اعضای ماتریس مربعی چیست؟

اگر در نقطه ۱، تغییر مکان کوچک Δ_1 وارد شود و از تغییر مکان تمام نقاط دیگر جلوگیری به عمل آید، نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان کوچک Δ_1 در نقطه ۱ معادل $P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} \Delta_1$ و نیروی لازم برای جلوگیری از تغییر مکان نقاط دیگر به ترتیب عبارت خواهد بود: $P_n = \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \Delta_1 \;\; \dots, P_2 = \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} \Delta_1$

و اگر در نقطه i، تغییر مکان کوچک Δ_i وارد شود و از تغییر مکان تمام نقاط دیگر جلوگیری به عمل آید، نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان کوچک Δ_i در نقطه i معادل $P_i = \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i} \Delta_i$ و نیروی لازم برای جلوگیری از تغییر مکان نقاط دیگر به ترتیب عبارت خواهد بود: $P_n = \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_i} \Delta_i \;\; \dots, P_i = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_i} \Delta_i$

اگر تغییر مکان Δ_i برابر واحد باشد، در این صورت $K_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i}$ نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد در نقطه i خواهد بود و نیروی مورد نیاز برای جلوگیری از تغییر مکان نقطه ۱، $\dots, K_{1i} = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_i}$ و نیروی مورد نیاز برای جلوگیری از تغییر مکان نقطه n، $K_{ni} = \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_i}$ خواهد بود.

– پس با نمایش $K_{ij}=\dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j}$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

$\dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_i} = K_{ii} =$ نیروی تعمیم یافته مورد نیاز برای ایجاد تغییر مکان تعمیم یافته واحد در گره i، وقتی که سایر گره ها ثابت نگه داشته شوند.

– $K_{ij}=K_{ji}=\dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j}=\dfrac{\partial P_j}{\partial \Delta_i}$ نیروی تعمیم یافته مورد نیاز برای جلوگیری از تغییر مکان تعمیم یافته گره j، وقتی که تغییر مکان واحد به گره i اعمال می شود = نیروی تعمیم یافته مورد نیاز برای جلوگیری از تغییر مکان تعمیم یافته گره i، وقتی که تغییر مکان واحد به گره j اعمال می شود.

P= بردار نیروی تعمیم یافته (Generalized force Vector)

K= ماتریس سختی سازه (Stiffness matrix)

Δ= بردار تغییر مکان تعمیم یافته (Generalized Displacement Vector)

– **بنابراین یک روش برای تعیین ماتریس سختی سازه بدین صورت است که در هر دفعه تغییر مکان واحد برای گره ها** (برحسب نوع سازه، مثلاً برای خرپای مسطح تغییر مکان واحد در جهت xها و تغییر مکان واحد در جهت yها– برای خرپای فضایی، تغییر مکان واحد در جهت xها و تغییر مکان واحد در جهت yها و تغییر مکان واحد در جهت zها– برای قاب مسطح تغییر مکان واحد در جهت xها و yها و دوران واحد در جهت zها و برای قاب فضایی تغییر مکان های واحد در جهت x, y, z و دوران های واحد در جهت x, y, z) **در نظر گرفته شده و نیروی مورد نیاز برای ایجاد آن تغییر مکان و نیروهای نگه دارنده گره های دیگر در مقابل تغییر مکان مذکور محاسبه می شوند.**

برای قاب مسطح

$$\overbrace{P_i = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix}, \Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix}}$$

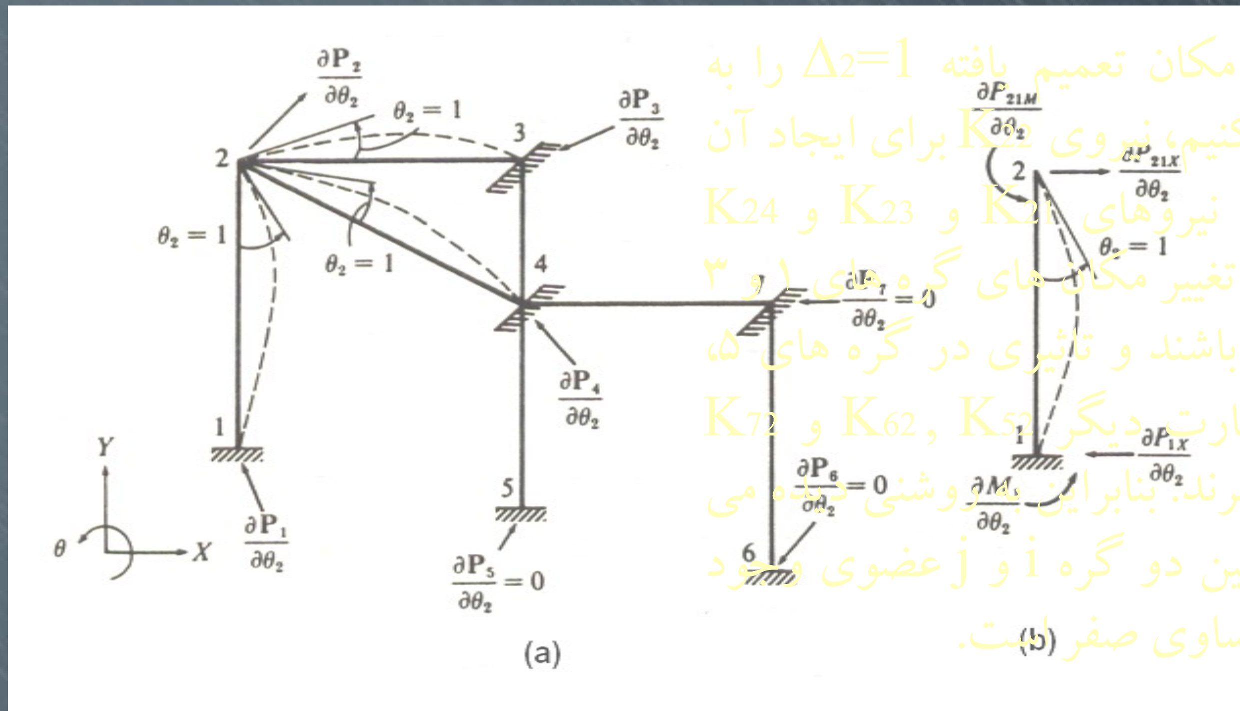
برای خرپای فضائی

$$\overbrace{P_i = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{bmatrix}, \Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{yi} \\ \Delta_{zi} \end{bmatrix}}$$

برای خرپای مسطح

$$\overbrace{P_i = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{bmatrix}, \Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{yi} \end{bmatrix}}$$

مثال ۱) مطلوب است تعیین ماتریس سختی سازه شکل زیر:



هنگامی که تغییر مکان تعمیم یافته $\Delta_2=1$ را به گره ۲ اعمال می کنیم، نیروی K_{22} برای ایجاد آن مورد نیاز است و نیروهای K_{21} و K_{23} و K_{24} برای جلوگیری از تغییر مکان های گره های ۱ و ۳ و ۴ مورد نیاز می باشند و تاثیری در گره های ۵، ۶ و ۷ ندارند؛ بعبارت دیگر K_{52} , K_{62} و K_{72} همگی مساوی صفرند. بنابراین به روشنی دیده می شود هنگامی که بین دو گره i و j عضوی وجود نداشته باشد K_{ij} مساوی صفر است.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_3}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \Delta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial \Delta_4} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial P_7}{\partial \Delta_4} & 0 & \frac{\partial P_7}{\partial \Delta_6} & \frac{\partial P_7}{\partial \Delta_7} \end{bmatrix} =$$

ماتریس نواری قطری

- **به نظر می رسد که تشکیل ماتریس سختی به این طریق دارای نکات ضعف عمده‌ای می‌باشد:**
الف) نیاز به محاسبات زیاد و وقت گیر (خصوصاً برای سازه هایی با درجات آزادی بالا)،
ب) پیاده سازی آن در یک برنامه کامپیوتری بسیار دشوار (یا حتی غیر ممکن) است.

- **بنابراین باید به دنبال روش‌هایی برای تشکیل ماتریس سختی سازه بود که:**
الف) نیاز به محاسبات زیاد و وقت گیر نداشته باشد،
ب) قابل پیاده سازی در یک برنامه کامپیوتری باشد،
پ) به صورت ساده تر و مؤثرتر ماتریس سختی سازه را تشکیل نماید.

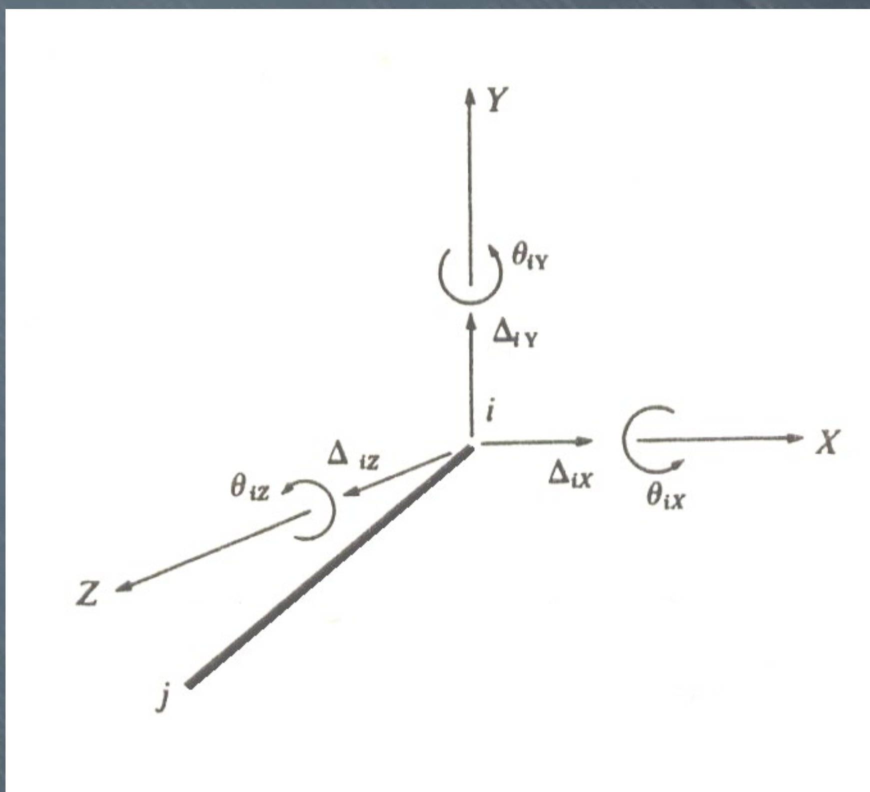
- باتوجه به اینکه ماتریس سختی سازه (K) از ترکیب معقول و متناسب ماتریس های سختی هرکدام از اعضای سازه (k) تشکیل شده است، به نظر می رسد که بتوان به صورت ساده تر و مؤثرتر با استفاده از ماتریس های سختی هرکدام از اعضاء و انجام عملیات ماتریسی، ماتریس سختی سازه را تشکیل داد.

۳- تعیین ماتریس سختی عضو سازه (Member):

- یک عضو با دو گره (Node) مشخص می شود:

- در حالت کلی (در فضای سه بعدی) هر گره عضو دارای شش درجه آزادی است. به عبارت دیگر در فضای سه بعدی فیزیکی، بردار مشخص تغییر مکان ها در یک گره دارای شش مؤلفه مستقل است، سه مؤلفه خطی و سه مؤلفه دورانی.

- دستگاه مختصات کلی زیر را در نظر می گیریم:
(Global Coordinate System)



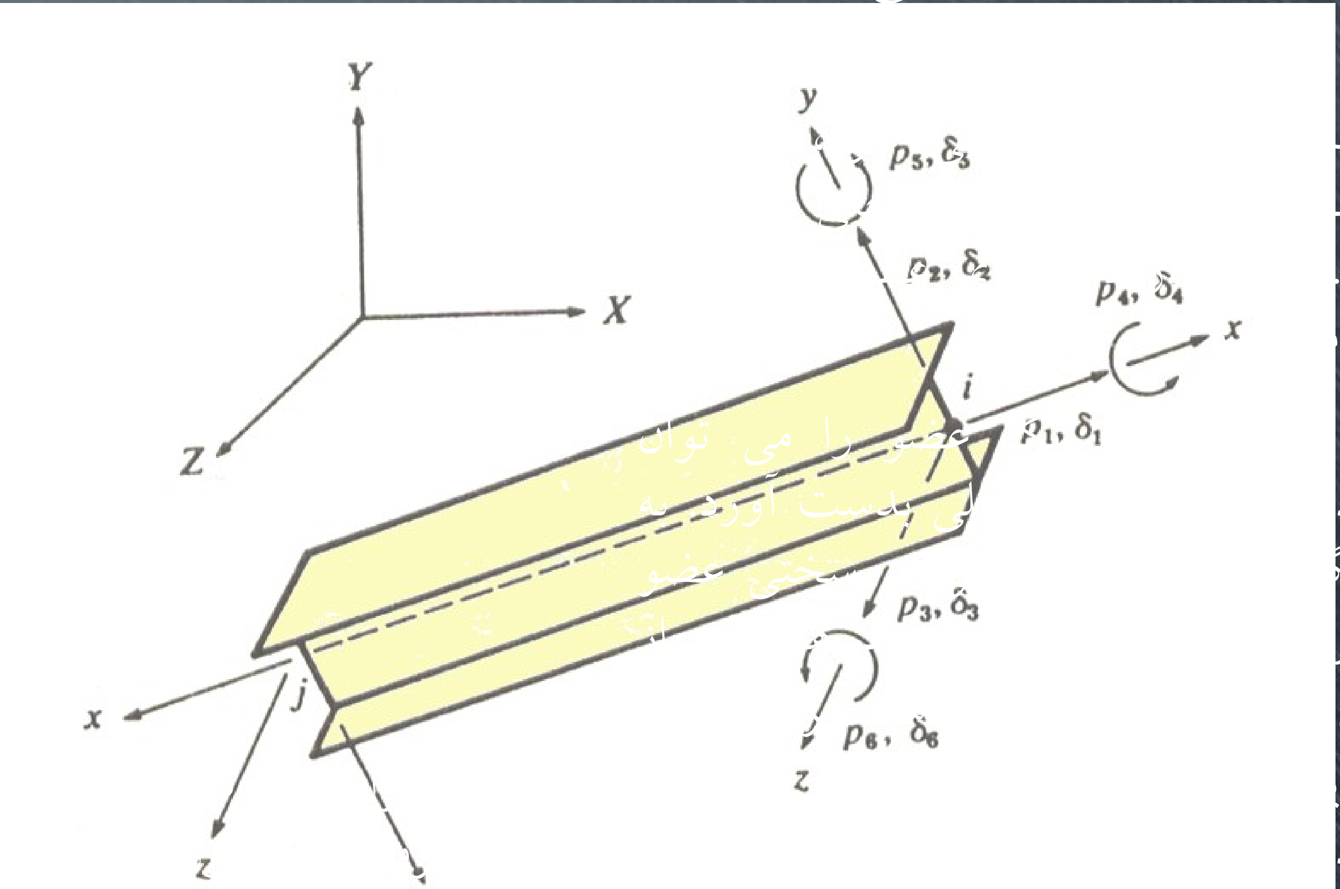
– بنابراین در مجموع یک عضو در فضا دارای ۱۲ درجه آزادی است. بنابراین ماتریس سختی یک عضو، ماتریسی ۱۲×۱۲ است. می توان ماتریس سختی یک عضو را به طور مستقیم در دستگاه مختصات کلی محاسبه نمود. طبیعی است که در این صورت ماتریس سختی عضو را با وارد کردن تغییر مکان ها (یک به یک) در امتداد هر یک از محورهای مختصات کلی سیستم و محاسبه نیروی مورد نیاز برای ایجاد آن تغییر مکان در امتداد آن محور خاص و نیروهای مورد نیاز برای جلوگیری از تغییر مکان در سایر امتدادها (در دو انتهای عضو) ایجاد می گردد.

– به نظر می رسد که اولاً محاسبه ماتریس سختی عضو به طور مستقیم در دستگاه مختصات کلی سیستم هم طولانی و هم وقت گیر خواهد بود.

– همچنین در این حالت نیروهای داخلی حاصل در انتهای اعضاء که در پایان محاسبات بدست می آیند در دستگاه مختصات کلی بیان شده و الزاماً نشانگر نیروی محوری، برشی و یا لنگر خمشی عضو نخواهد بود. بنابراین در انتهای عملیات برای یافتن این مولفه ها که در عمل بیشتر مورد لزوم هستند تبدیل مختصات ضروری خواهد بود.

– بنابراین برای سادگی و نیز طولانی و وقت گیر نبودن محاسبات بهتر است که ماتریس سختی عضو در یک دستگاه مختصات مخصوصی که دستگاه مختصات محلی نامیده می شود، محاسبه شود و سپس تبدیل مختصات روی آن انجام گیرد.

– بر این اساس دستگاه مختصات محلی عضو (Local Coordinate System) تعریف می شود. در این دستگاه محلی محور X منطبق بر محور طولی عضو ij (Longitudinal Axis) می باشد و دو محور دیگر منطبق بر محورهای اصلی مقطع عضو می باشند.



– با توجه
انتهای عض
مشکل مرب
فشاری و .
آید از بین

– حال ما
نسبت به د
عبارت دیگ
با وارد کر
محورهای
نیاز برای ا ... مکان در سایر
امتدادها (د ... روش استفاده
می شود: (۱) استفاده از قضایای انرژی؛ (۲) استفاده از روش شیب– افت

“ با توجه به سهل و جامع بودن روش شیب– افت، در استخراج ماتریس سختی عضو در مختصات محلی از این روش بهره گرفته شده است.”

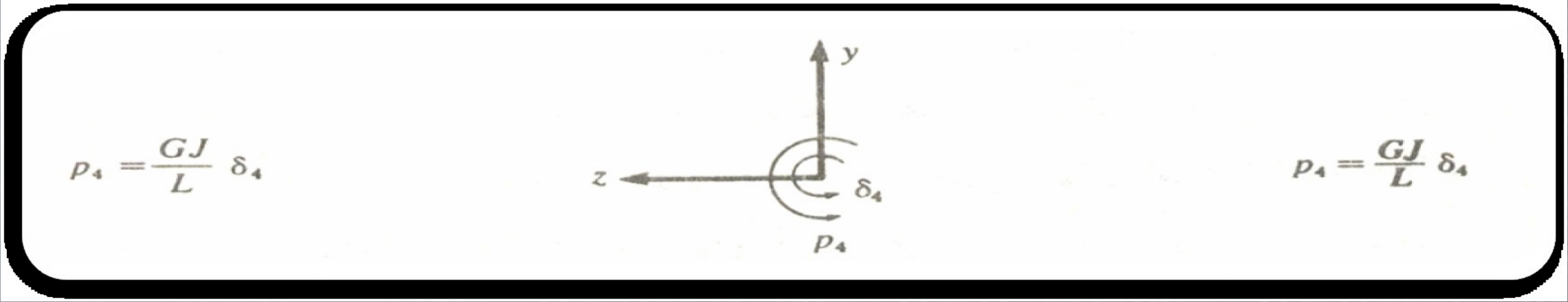
– فرض کنید $p_1, p_2, \ldots, p_6$ و $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ نیروها و تغییر مکان های حاصل در دو انتهای یک عضو در دستگاه مختصات محلی باشند. زمانی که جهت این مؤلفه ها با جهت محورهای مختصات یکی باشند، مقدار مثبت داشته در غیر این صورت منفی خواهند بود.

– اکنون با استفاده از روابط **شیب–افت** رابطه بین این دو مجموعه از مقادیر را به دست می آوریم.

(ابتدا تغییر مکان های $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ را به گره i اعمال می کنیم)

تغییر مکان محوری (δ_1) در جهت محور x

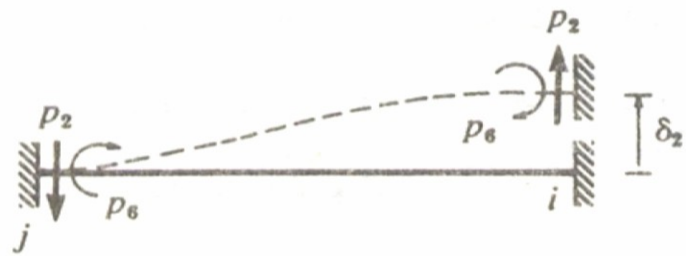
دوران محوری- پیچش (δ_4) حول محور x



تغییر مکان (δ_2) در جهت محور y ، در صفحه x-y

$$p_2 = \frac{12EI_z}{L^3}\,\delta_2$$

$$p_6 = -\frac{6EI_z}{L^2}\,\delta_2$$



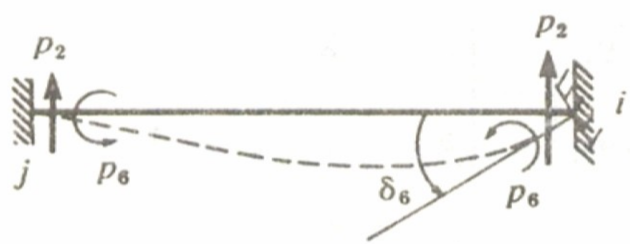
$$p_2 = \frac{12EI_z}{L^3}\,\delta_2$$

$$p_6 = -\frac{6EI_z}{L^2}\,\delta_2$$

دوران (δ_6) حول محور z، در صفحه x-y

$$p_2 = -\frac{6EI_z}{L^2}\,\delta_6$$

$$p_6 = \frac{2EI_z}{L}\,\delta_6$$



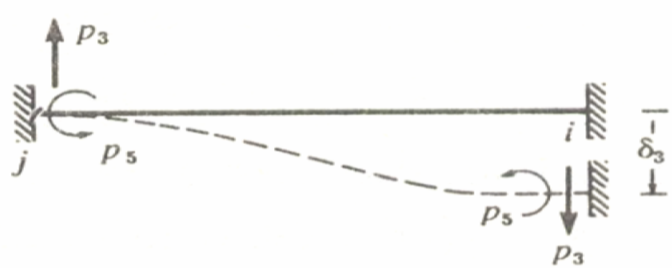
$$p_2 = -\frac{6EI_z}{L^2}\,\delta_6$$

$$p_6 = \frac{4EI_z}{L}\,\delta_6$$

تغییر مکان (δ_3) در جهت محور z، در صفحه x-z

$$p_3 = -\frac{12EI_y}{L^3}\,\delta_3$$

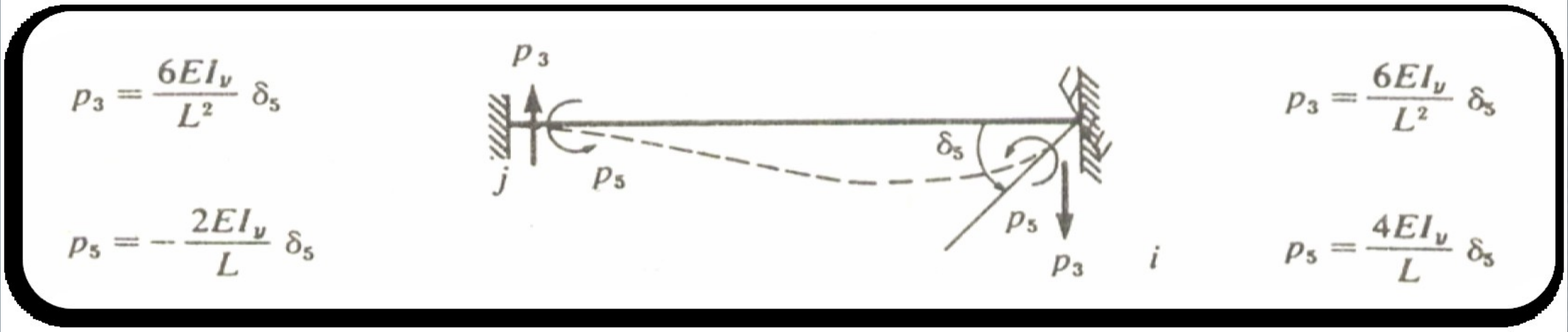
$$p_5 = -\frac{6EI_y}{L^2}\,\delta_3$$



$$p_3 = \frac{12EI_y}{L^3}\,\delta_3$$

$$p_5 = \frac{6EI_y}{L^2}\,\delta_3$$

دوران (δ_5) حول محور y، در صفحه x-z



(اکنون تغییر مکان های $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ را به گره j اعمال می کنیم)

– براساس قضیه متقابل ماکسول، نیروهای حاصل در انتهای i از عضو ij تحت اثر یک تغییر مکان در گره j برابر نیروهای حاصل در j تحت اثر همان مقدار تغییر مکان در گره i است. به عبارت دیگراز نظر عددی: $k_{ji} = k_{ij}$

– با توجه به نوع قراردادی که برای محورهای مختصات محلی در نظر گرفتیم، برمبنای آن تعریف بین دو انتهای عضو فرقی گذارده نمی شود به عبارت دیگر داریم: $k_{ii}^{j} = k_{jj}^{i}$ (از نظر عددی)

$$\begin{bmatrix} p_{ij} \\ \cdots \\ p_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{j} & \vdots & k_{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{ji} & \vdots & k_{jj}^{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ij} \\ \cdots \\ \delta_{ji} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{c} ij \\ \\ \\ \\ \\ \\ ji \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ \hline p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{-2EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
\multicolumn{6}{c|}{\text{Same}} & \multicolumn{6}{c}{\text{Same}} \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{array}\right]
\begin{array}{c} ij \\ \\ \\ \\ \\ \\ ji \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

– بنابراین داریم:

نیروهای ناشی از تغییر مکان گره j **نیروهای ناشی از تغییر مکان گره i**

نیروهای گره i

$$p_{ij} = k_{ii}^{j}\delta_{ij} + k_{ij}\delta_{ji}$$

نیروهای ناشی از تغییر مکان گره j **نیروهای ناشی از تغییر مکان گره i**

نیروهای گره j

$$p_{ji} = k_{ji}\delta_{ij} + k_{jj}^{i}\delta_{ji}$$

– معادله $\begin{bmatrix} p_{ij} \\ p_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{j} & k_{ij} \\ k_{ij} & k_{jj}^{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ij} \\ \delta_{ji} \end{bmatrix}$ ، معادله ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات محلی نامیده می‌شود.

– برای یک عنصر در قاب صلب فضایی ماتریس سختی عضو ۱۲×۱۲ خواهد بود.

– زمانی که عضوی از سازه دارای شش درجه ازادی نباشد، بعضی از سطرها و ستون های ماتریس حذف خواهد شد. به عنوان مثال اعضای قاب های صلب مستوی فقط دارای سه درجه آزادی هستند، بنابراین سطرها و ستون های مربوط به $\delta_5, \delta_4, \delta_3$ برای این سازه لازم نخواهد بود.

– برای اعضای شبکه ها که دارای سه درجه‌آزادی هستند، فقط سطرو ستون‌های مربوط به $\delta_5, \delta_4, \delta_3$ برای این سازه لازم خواهد بود.

– برای خرپاها فقط سطر و ستون مربوط به δ_1 مورد نیاز خواهند بود.

۴- تشکیل ماتریس سختی یک سازه: (Assembly of the Structural Stiffness Matrix)

- ماتریس سختی سازه در دستگاه مختصات کلی تشکیل می گردد: (۱- متعامد (XYZ)، ۲- راستگرد، ۳- ثابت و ٤- اختیاری)

- در تشکیل ماتریس سازه از دو اصل مهم استفاده می شود:
  الف) اصل سازگاری تغییر مکان ها در گره های سازه،
  ب) تعادل در گره های سازه.

- اصل سازگاری تغییر مکان ها در گره های سازه ایجاب می کند که: $\Delta_i = \Delta_{ij} = \Delta_{im} = \cdots = \Delta_{in}$
به‌عبارت دیگر تغییرمکان‌های انتهای اعضای متصل به یک گره خاص برابر تغییرمکان آن گره می‌باشد.

- اصل تعادل نیروها در گره های سازه ایجاب می کند که: $P_i = P_{ij} + P_{im} + \cdots + P_{in}$
به عبارت دیگر بر اساس این اصل، نیروهای انتهایی اعضای متصل به یک گره خاص باید برابر نیروی خارجی موثر در آن گره باشند.

- در دستگاه مختصات محلی داریم: $p_{ij} = k_{ii}^{j}\delta_{ij} + k_{ij}\delta_{ji}$
- اگر دستگاه مختصات محلی را به عنوان دستگاه جدید و دستگاه مختصات کلی را به عنوان دستگاه مختصات قدیمی در نظر بگیریم خواهیم داشت: $p_{ij} = R_{ij}P_{ij} \quad , \delta_{ij} = R_{ij}\Delta_{ij} \quad , \delta_{ji} = R_{ji}\Delta_{ji}$
ماتریس دوران R_{ij} ماتریسی است که یک بردار را از دستگاه مختصات کلی (XYZ) به دستگاه مختصات محلی(*xyz*) (در گره i) تبدیل می کند. ماتریس دوران R_{ji} ماتریسی است که یک بردار را از دستگاه مختصات کلی (XYZ) به دستگاه مختصات محلی(*xyz*) (در گره j) تبدیل می کند.

– از جایگذاری در معادله مورد نظر داریم:

$$R_{ij}P_{ij} = k_{ii}^{j} R_{ij}\Delta_{ij} + k_{ij}R_{ji}\Delta_{ji} \Rightarrow$$

$$P_{ij} = (R_{ij}^{T} k_{ii}^{j} R_{ij})\Delta_{ij} + (R_{ij}^{T} k_{ij} R_{ji})\Delta_{ji}$$

$$K_{ii}^{j} = R_{ij}^{T} k_{ii}^{j} R_{ij} \quad , \quad K_{ij} = R_{ij}^{T} k_{ij} R_{ji}$$

$$\boxed{P_{ij} = K_{ii}^{j}\Delta_{ij} + K_{ij}\Delta_{ji}}$$

– فرم دقیق ماتریس R_{ij} برای انواع مختلف سازه ها بعداً ارائه خواهد شد.

– از جایگذاری روابط مذکور در معادله حاصل از اصل تعادل در گره i و نیز با ملاحظه اصل سازگاری تغییر مکان ها داریم:

$$P_{i} = (K_{ii}^{j}\Delta_{i} + K_{ij}\Delta_{j}) + (K_{ii}^{m}\Delta_{i} + K_{im}\Delta_{m}) + \cdots + (K_{ii}^{n}\Delta_{i} + K_{in}\Delta_{n})$$

$$P_{i} = (K_{ii}^{j} + K_{ii}^{m} + \cdots + K_{ii}^{n})\Delta_{i} + K_{ij}\Delta_{j} + K_{im}\Delta_{m} + \cdots + K_{in}\Delta_{n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{i} = K_{ii}\Delta_{i} + K_{ij}\Delta_{j} + K_{im}\Delta_{m} + \cdots + K_{in}\Delta_{n}}$$

– با نوشتن معادله مذکور برای تمام گره ها و ترتیب مناسب آنها رابطه ماتریسی زیر به دست می آید.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_m \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} & \cdots & K_{in} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} & \cdots & K_{jn} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} & \cdots & K_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{ni} & K_{nj} & K_{nm} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}}_{} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}}_{}$$

بردار نیروهای معلوم وارد بر گره های آزاد و نیروهای مجهول در تکیه گاه ها

ماتریس سختی سازه در دستگاه مختصات کلی

بردار تغییرمکان های مجهول گره های آزاد و تغییرمکان های معلوم در تکیه گاه ها

اکنون کاملاً روشن می شود که چگونه می توان ماتریس سختی سازه را تشکیل داد

(در یک برنامه کامپیوتری تحلیل ماتریسی سازه ها).

الف) ابتدا تمام گره ها به ترتیب و با شروع از ۱ و اضافه نمودن عدد ۱ برای هر شماره و به طور پیوسته شماره گذاری می شوند (N گره). در این صورت هر عضو به طور منحصر به فرد توسط دو شماره در ابتدا و انتهای خود مشخص می گردد. بهتر است که تفاوت بین دو شماره مربوط به یک عضو حتی المقدور مینیمم مقدار ممکن را داشته باشد. توجه به شماره گذاری گره‌ها باعث کاهش عرض نوار ماتریس K و در نتیجه باعث صرفه جویی در انبار کردن اطلاعات در پردازشگر می گردد.

ب) دستگاه مختصات کلی را برای سازه تعیین می کنیم.

پ) مختصات گره ها در دستگاه مختصات کلی را به عنوان ورودی وارد می دهیم.

ت) ابتدا (i) و انتهای (j) هر عضو را به عنوان ورودی وارد می کنیم.

ث) مشخصات هندسی و مکانیکی اعضا را به عنوان ورودی وارد می کنیم(A, E, J, G, I_Y, I_Z).

ج) بارهای وارد بر گره ها را در دستگاه مختصات کلی به عنوان ورودی وارد می کنیم.

چ) شرایط تکیه گاهی را در دستگاه مختصات کلی به عنوان ورودی وارد می کنیم.

ح) برای عضو **i-j** ماتریس های k_{ii}^{j} و k_{ij} را تشکیل می دهیم (توجه شود که $k_{jj}^{i} = k_{ii}^{j}$, $k_{ij} = k_{ji}^{T}$).
(ماتریس های سختی اعضا در دستگاه مختصات محلی)

خ) برای هر انتهای عضو **ij**، ماتریس های R_{ij} و R_{ji} را تشکیل می دهیم.

د) برای هر عضو **i-j** ماتریس های $K_{ii}^{j}, K_{ij}, K_{ji}, K_{jj}^{i}$ را تشکیل می دهیم(توجه شود که : $K_{jj}^{i} = R_{ji}^{T} k_{jj}^{i} R_{ji}$ $K_{ji} = R_{ji}^{T} k_{ji} R_{ij}$ (ماتریس های سختی اعضا در دستگاه مختصات کلی)).

ذ) یک ماتریس (a*N × a*N) صفر با کلیه درایه های صفر تعریف می کنیم (با N × N بلوک ماتریسی صفر به ابعاد a × a).   (a = تعداد درجات آزادی در هر گره)

ر) K_{ii}^{j} را در محل سطر بلوکی i ام و ستون بلوکی i ام قرار می دهیم،

K_{jj}^{i} را در محل سطر بلوکی j ام و ستون بلوکی j ام قرار می دهیم،

K_{ij} در محل سطر بلوکی i ام و ستون بلوکی j ام قرار می دهیم،

K_{ji} در محل سطر بلوکی j ام و ستون بلوکی i ام قرار می دهیم.

د) مراحل (ح) تا (ر) را برای تمامی اعضاء تکرار می کنیم. بدیهی است هنگامی که بین دو گره i , j عضوی وجود نداشته باشد، در این صورت عملا صفر منظور می شود.

رسم فلوچارت برنامه

۵- اعمال شرایط مرزی: (Imposition of Boundary Conditions)

- ماتریس سختی کل سازه K قبل از اعمال شرایط مرزی یک ماتریس ویژه است (دترمینان آن برابر صفر است) و نشانگر این واقعیت می باشد که سازه بدون تکیه گاه ناپایدار است.

- معادله ماتریسی $P = K\Delta$ یک دستگاه معادلات مختلط می‌باشد که در هر دو طرف آن مقادیر معلوم و مجهول وجود دارند.

- بردار نیروی تعمیم یافته P در طرف چپ این معادله شامل نیروهای خارجی معلوم موثر بر گره های آزاد سازه و نیز حاوی عکس العمل های مجهول نیز می باشد.

- بردار تغییرمکان‌های تعمیم یافته Δ درسمت راست این معادله شامل تغییرمکان‌های مجهول گره‌های آزاد سازه و نیز حاوی تغییرمکان‌های معلوم تکیه‌گاهی (برابر صفر برای تکیه گاه‌های بدون نشست، برابر مقدار مشخص برای حالت نشست تکیه‌گاهی، به صورت تابعی برای تکیه گاه‌های ارتجاعی) می باشد.

- فرض کنید که ماتریس سختی سازه به گونه‌ای تنظیم شده است که گره های ۱ تا m مشخص کننده گره های تکیه گاهی (تغییر مکان‌های معلوم تعمیم یافته (برابر صفر)) باشند و گره های m+1 تا n نیز بیانگر گره‌های آزاد سازه باشند(Δ_{m+1} تا Δ_n مجهول). بنابراین نیروهای تعمیم یافته P_1 تا P_m بیانگر عکس العمل های مجهول سازه و P_{m+1} تا P_n بیانگر نیروهای تعمیم یافته وارد بر گره های آزاد سازه می باشند.

$$
\left[\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_m \\ \hline P_{m+1} \\ \vdots \\ P_n \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
K_{11} & \cdots & K_{1m} & K_{1,m+1} & \cdots & K_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\
K_{m1} & \cdots & K_{mm} & K_{m,m+1} & \cdots & K_{mn} \\
\hline
 & & & K_{m+1,m+1} & \cdots & K_{m+1,n} \\
 & Sym & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & K_{nn}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} \Delta_1 = 0 \\ \vdots \\ \Delta_m = 0 \\ \hline \Delta_{m+1} \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array}\right]
\Rightarrow
$$

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{c} P_I \\ \hline P_{II} \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c} K_{I,I} & K_{I,II} \\ \hline K_{II,I} & K_{II,II} \end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \Delta_{II} \end{array}\right] \\
\Downarrow \\
P_{II} = K_{II,II} \,.\Delta_{II} \\
P_I = K_{I,II} \,.\Delta_{II}
\end{cases}
$$

– رابطه $P_{II} = K_{II,II}\ \Delta_{II}$ ، رابطه ماتریسی نهایی سازه است؛ زیرا مجهولات تغییر مکانی گره ها را به نیروهای خارجی معلوم موثر در این گره ها مرتبط می سازد.

– بنابراین معادله نهایی ماتریسی سازه در حقیقت از حذف سطرها و ستون های مربوط به تغییر مکان های معلوم صفر سازه در تکیه گاه ها به دست می آید.

– به‌عبارت دیگر به‌این طریق شرایط مرزی نیز ارضاء می‌شوند (Satisfying the Boundary Condition) یا به سخن دیگر شرایط مرزی اعمال می گردند (Imposition of Boundary Conditions). بنابراین به طور خلاصه وقتی شرایط مرزی برحسب تغییر مکان‌ها در امتداد محورهای مختصات کلی برابر صفر باشند، معرفی آنها در معادلات ماتریس سختی با حذف سطرها و ستون های مربوطه انجام می گیرد.

– روش دیگری نیز برای اعمال شرایط مرزی وجود دارد. در این روش اعضای قطری ماتریس سختی K که مربوط به تغییر مکان‌های ثابت معلوم تکیه گاهی‌می باشند ، را در یک عدد بزرگ مانند 10^{20} ضرب می کنیم. برای مثال در درجه آزادی i که Δ_i برابر صفر است داریم:

$$P_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \cdots + K_{ii}\Delta_i + \cdots + K_{in}\Delta_n$$

عضو K_{ii} را در عدد 10^{20}ضرب می کنیم.

$$P_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \cdots + (10^{20})K_{ii}\Delta_i + \cdots + K_{in}\Delta_n$$

$$\Rightarrow \Delta_i = \frac{P_i - (K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \cdots + K_{in}\Delta_n)}{10^{20}K_{ii}} \approx 0$$

در این روش به هنگام حل معادلات در برنامه کامپیوتری P_i را نیز مساوی صفر قرار می دهیم.

۶- تحلیل خرپاها (Analysis of Trusses)

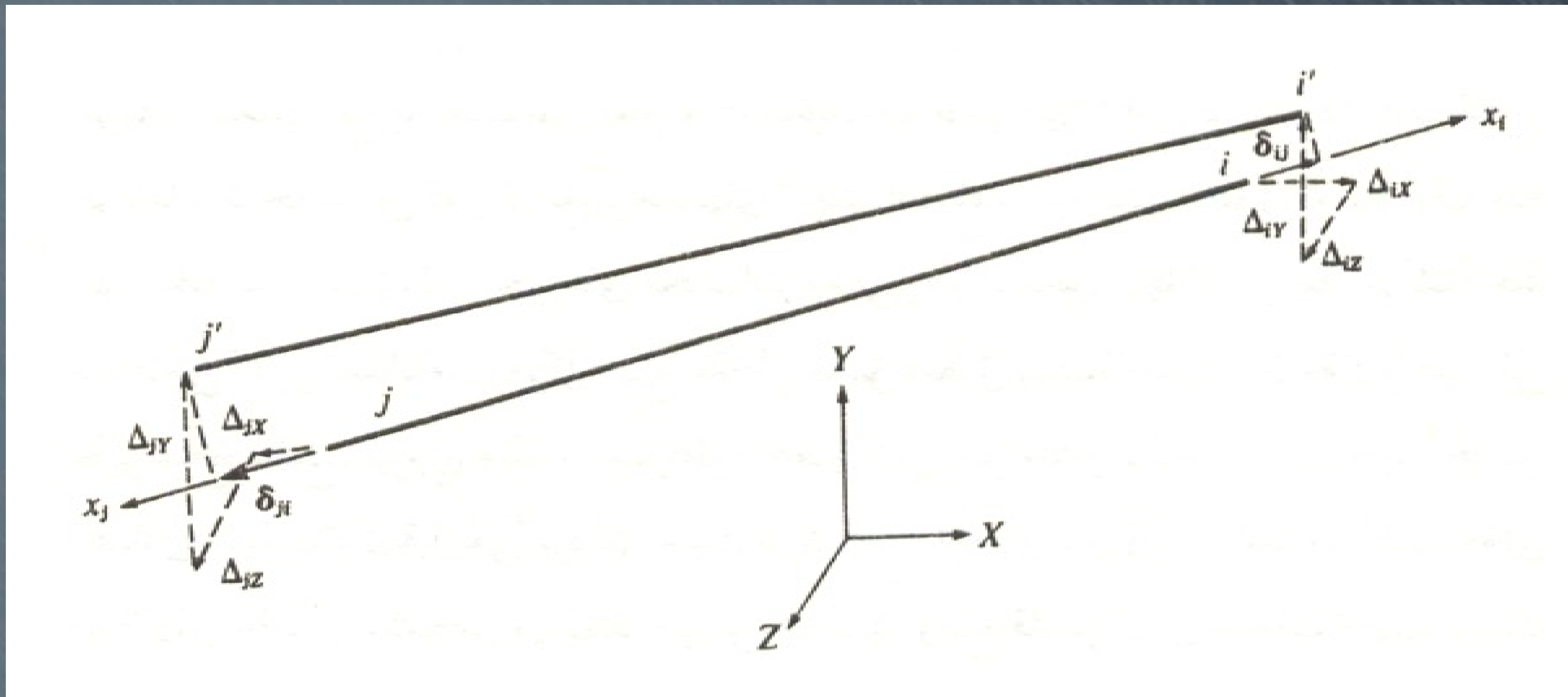
- خرپاها سازه‌های متشکل از اعضاء مستقیم نسبتاً لاغر هستند که توسط گره‌های مفصلی بدون اصطکاک به‌همدیگر متصل شده و فقط در گره‌ها تحت اثر بارهای خارجی قرار می‌گیرند (خرپای ایده‌ال).

- در عمل ایجاد گره های مفصلی بدون اصطکاک کار دشوار و یا غیر ممکن است. تفاوت بین یک خرپای ایده ال و یک خرپای حقیقی در این است که اعضای خرپای حقیقی علاوه بر نیروهای محوری، تحت اثر نیروی برشی و لنگر خمشی نیز قرار می گیرند. هرچه لاغری اعضای خرپا بیشتر می شود، این تفاوت کمتر می‌شود.

-می‌توان خرپاها را با فرض گره‌های صلب نیز تحلیل کرد. این‌چنین تحلیلی با درنظر گرفتن سختی‌های خمشی اعضاء، نیروهای ثانویه (برش و لنگر) و همچنین نیروهای اولیه (نیروهای محوری) را نتیجه می دهد.

- تحلیل تنش های ثانویه در دو مورد پیشنهاد می گردد:
  - سختی خمشی عضوها زیاد باشد،
  - نتایج با دقت بیشتری خواسته شده باشد.

- در اینجا صرفاً به تحلیل خرپاهای ایده ال خواهیم پرداخت.



گره i $\xrightarrow{\text{دستگاه مختصات محلی}}$ ۱ درجه آزادی (δ_x)

گره i $\xrightarrow{\text{دستگاه مختصات کلی}}$
- خرپای صفحه‌ای $\rightarrow$ ۲ درجه آزادی (Δ_x , Δ_y)
- خرپای فضائی $\rightarrow$ ۳ درجه آزادی $(\Delta_x , \Delta_y , \Delta_z)$

– برای هر عضو ij خرپا فقط محور محلی x را در نظر می گیریم.
– هر گره صرفاً دارای مؤلفه تغییر مکانی در امتداد محور xها می باشد.

– مراحل تشکیل ماتریس سختی یک سازه خرپایی عبارتند از:

الف) تعیین ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات محلی:

$$k=\begin{bmatrix} k_{ii}^{j} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj}^{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(EA/L\right)_{ij} & \left(EA/L\right)_{ij} \\ \left(EA/L\right)_{ij} & \left(EA/L\right)_{ij} \end{bmatrix}_{i}$$

ب) تعیین ماتریس های دوران R_{ij}, R_{ji} برای هر عضو:

$$\begin{cases} p_{ij}=R_{ij}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_i \\ \delta_{ij}=R_{ij}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{ji}=R_{ji}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_j \\ \delta_{ji}=R_{ji}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix}_j \end{cases}$$

$$R_{ij}=\left[\cos(x,X) \quad \cos(x,Y) \quad \cos(x,Z)\right]$$

$$R_{ij}=\left[\,l \quad m \quad n\,\right],\; l=\frac{X_i-X_j}{L},\; m=\frac{Y_i-Y_j}{L},\; n=\frac{Z_i-Z_j}{L}$$

$$R_{ji}=\left[\cos(180+x,X) \quad \cos(180+x,Y) \quad \cos(180+x,Z)\right]$$

$$R_{ji}=\left[\,-l \quad -m \quad -n\,\right]$$

پ) تعیین $K_{jj}^{i}, K_{ji}, K_{ij}, K_{ii}^{j}$ برای هر عضو (هرکدام ماتریس های ۳×۳ می باشند):

$$K_{ii}^{j} = R_{ij}^{T} k_{ii}^{j} R_{ij} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \left(\frac{EA}{L}\right)_{ij} \begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{L}\right)_{ij} \begin{bmatrix} l^2 & lm & \ln \\ ml & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{L}\right)_{ij} B_{ij}$$

$$K_{jj}^{i} = R_{ji}^{T} k_{jj}^{i} R_{ji} = K_{ii}^{j} = \left(\frac{EA}{L}\right)_{ij} B_{ij}$$

$$K_{ij} = R_{ij}^{T} k_{ij} R_{ji} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \left(\frac{EA}{L}\right)_{ij} \begin{bmatrix} -l & -m & -n \end{bmatrix} = \left(-\frac{EA}{L}\right)_{ij} B_{ij} \qquad , \left(K_{ij} = K_{ji}^{T}\right)$$

- برای حالت خرپای دو بعدی مسطح داریم:

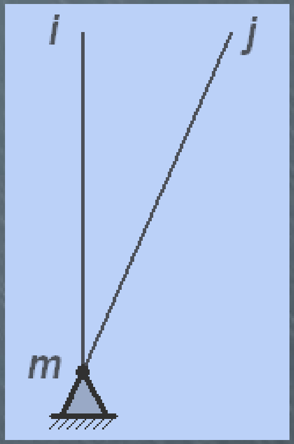
$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}_i , P_i = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}_i \qquad , B_{ij} = \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix}$$

- بعد از تشکیل ماتریس سختی و اعمال شرایط مرزی و حل معادلات می‌توان بردار Δ را که شامل تغییر مکان های گره‌های آزاد سازه است، به دست آورد. بعد از تعیین $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i, ..., \Delta_n$ می توان نیروهای اعضای خرپا را به دست آورد.

$$p_{ij} = k_{ii}^{j} \delta_{ij} + k_{ij} \delta_{ji}$$

$$p_{ij} = \frac{EA}{L}(\delta_{ij} + \delta_{ji}) = \frac{EA}{L}(R_{ij}\Delta_{ij} + R_{ji}\Delta_{ji}) = \frac{EA}{L} R_{ij}(\Delta_i - \Delta_j)$$

- همچنین می توان عکس العمل های تکیه گاهی را با استفاده از نیروهای اعضای خرپا به دست آورد:



$$P_m = P_{mi} + P_{mj} = R_{mi}^T p_{mi} + R_{mj}^T p_{mj}$$

- با استفاده از ماتریس سختی اولیه (بدون اعمال شرایط مرزی) خواهیم داشت:

$$P_m = K_{m1}\Delta_1 + K_{m2}\Delta_2 + \cdots + K_{mm}\Delta_m + \cdots + K_{mn}\Delta_n$$

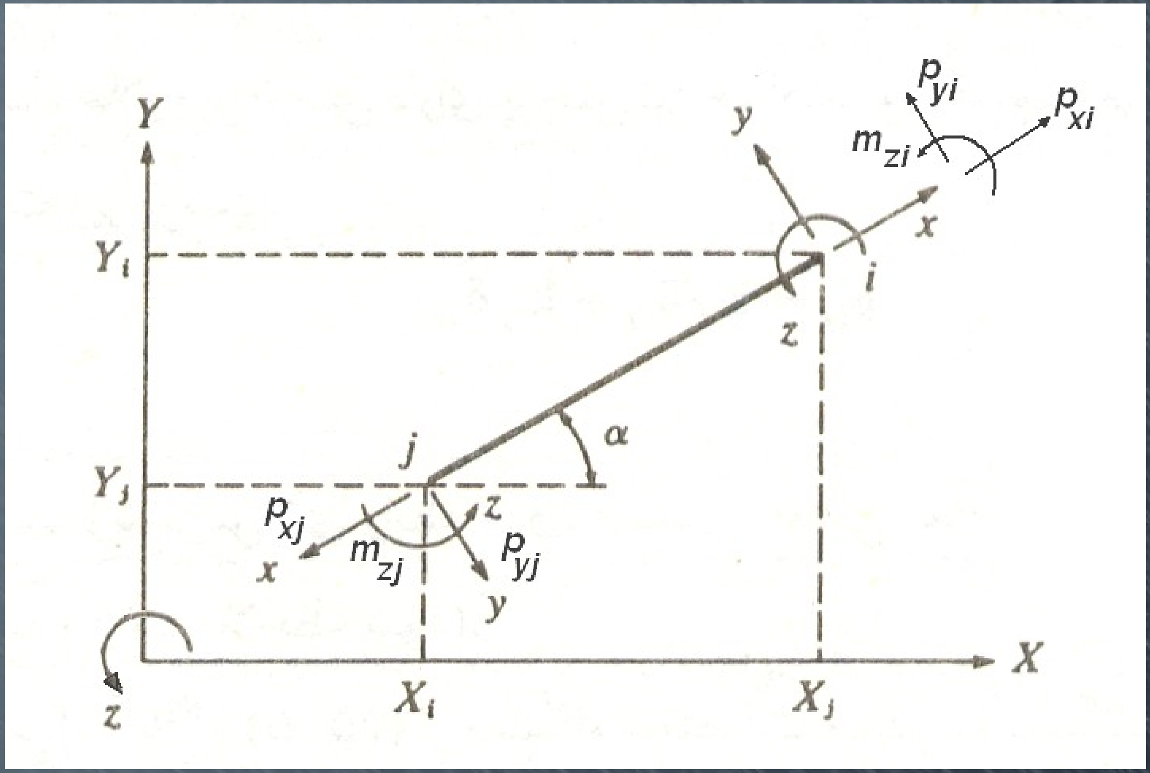
-برای بررسی تعادل گره i نیز از رابطه زیر استفاده می کنیم: $P_i = \sum R_{ij}^T p_{ij}$

- (بررسی چند مثال)

۷- تحلیل قاب های صلب مسطح (Planar Rigid Frames)

- در قاب های صلب اعضاء توسط گره های صلب به هم دیگر اتصال یافته اند، یعنی در یک گره زاویه بین اعضاء پس از تغییر شکل تغییر نمی کند.
- بارها ممکن است نظیر خرپاها در گره ها وارد شوند و یا مستقیماً بر روی اعضاء اثر نمایند (در این جا صرفاً حالتی را در نظر خواهیم گرفت که بارها بر گره ها وارد می شوند).

- وضعیت محورهای مختصات محلی و کلی:



$$\begin{cases} p_{ij} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ m_z \end{bmatrix}_i \\ \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_i \end{cases}$$

– مراحل تشکیل ماتریس سختی یک قاب صلب دوبعدی عبارتند از:

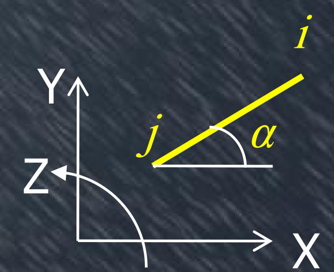
الف) تعیین ماتریس سختی هر عضو در دستگاه مختصات محلی:

$$k=\begin{bmatrix} k_{ii}^{j} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj}^{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 & 0 & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & -6EI_z/L^2 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & \square & \square & & \\ & Sym & & & Sym & \end{bmatrix}$$

ب) تعیین ماتریس های دوران R_{ij}, R_{ji} برای هر عضو:

$$\begin{cases} p_{ij}=R_{ij}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_i \\ \delta_{ij}=R_{ij}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_i=R_{ij}\Delta_i \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{ji}=R_{ji}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_j \\ \delta_{ji}=R_{ji}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_j=R_{ji}\Delta_j \end{cases}$$

$$R_{ij}=\begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$



$$\left.\begin{matrix} \left(l_1=\dfrac{X_i-X_j}{L}=\cos\alpha\right),\left(m_1=\dfrac{Y_i-Y_j}{L}=sin\alpha\right),\left(n_1=0\right) \\ \left(l_2=-\sin\alpha\right),\left(m_2=\cos\alpha\right),\left(n_2=0\right) \\ \left(l_3=0\right),\left(m_3=0\right),\left(n_3=1\right) \end{matrix}\right\} R_{ij}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس از تعیین R_{ji} به راحتی می توان $K_{ii}^{j}, K_{ij}, K_{ji}, K_{jj}^{i}$ هر عضو را با استفاده از روابط زیر که ماتریس های ۳×۳ می باشند:

$$R_{ji} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ii}^{j} = R_{ij}^{T} k_{ii}^{j} R_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos^2\alpha + \frac{12EI}{L^3}\sin^2\alpha & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\cos\alpha.\sin\alpha & \frac{6EI}{L^2}\sin\alpha \\ & \frac{EA}{L}\sin^2\alpha + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\alpha & -\frac{6EI}{L^2}\cos\alpha \\ Sym & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{jj}^{i} = R_{ji}^{T} k_{jj}^{i} R_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos^2\alpha + \frac{12EI}{L^3}\sin^2\alpha & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\cos\alpha.\sin\alpha & -\frac{6EI}{L^2}\sin\alpha \\ & \frac{EA}{L}\sin^2\alpha + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\alpha & \frac{6EI}{L^2}\cos\alpha \\ Sym & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = R_{ij}^{T} k_{ij} R_{ji} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{EA}{L}\cos^2\alpha + \frac{12EI}{L^3}\sin^2\alpha\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\cos\alpha.\sin\alpha & \frac{6EI}{L^2}\sin\alpha \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\cos\alpha.\sin\alpha & -\left(\frac{EA}{L}\sin^2\alpha + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\alpha\right) & -\frac{6EI}{L^2}\cos\alpha \\ -\frac{6EI}{L^2}\sin\alpha & \frac{6EI}{L^2}\cos\alpha & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} , \left(K_{ij} = K_{ji}^{T}\right)$$

ت) به همان روال قبلی ماتریس سختی سازه را تشکیل می دهیم.

– بعد از اعمال شرایط مرزی و حل معادلات می‌توان بردار Δ را که شامل تغییر مکان های تعمیم یافته گره‌های آزاد سازه است، به دست آورد. بعد از تعیین $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i, ..., \Delta_n$ می توان نیروهای انتهای اعضاء را به دست آورد.

$$p_{ij} = k_{ii}^{j} \delta_{ij} + k_{ij} \delta_{ji}$$

$$p_{ij} = k_{ii}^{j} R_{ij} \Delta_{ij} + k_{ij} R_{ji} \Delta_{ji} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ m_z \end{bmatrix}_{ij} \begin{array}{l} \rightarrow \text{نیروی محوری} \\ \rightarrow \text{نیروی برشی} \\ \rightarrow \text{لنگر خمشی} \end{array}$$

– همچنین می توان عکس العملهای تکیه گاهی را با استفاده از تغییرمکان های تعمیم یافته و با استفاده از ماتریس سختی اولیه (بدون اعمال شرایط مرزی) بصورت زیر به دست آورد:

$$P_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \cdots + K_{ii}\Delta_i + \cdots + K_{in}\Delta_n$$

– برای بررسی تعادل گرهها از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$P_i = \sum R_{ij}^{T} p_{ij}$$

(بررسی چند مثال)

۸- تحلیل شبکه ها (Grids)

- در قاب های مسطح بارها در صفحه قاب وارد می شوند. به عبارت دیگر مثلاً اگر قاب مسطح در صفحه XY باشد، در این صورت نیروهای وارد بر آن نیز در صفحه XY و لنگرهای خمشی وارده حول محور Z خواهند بود.

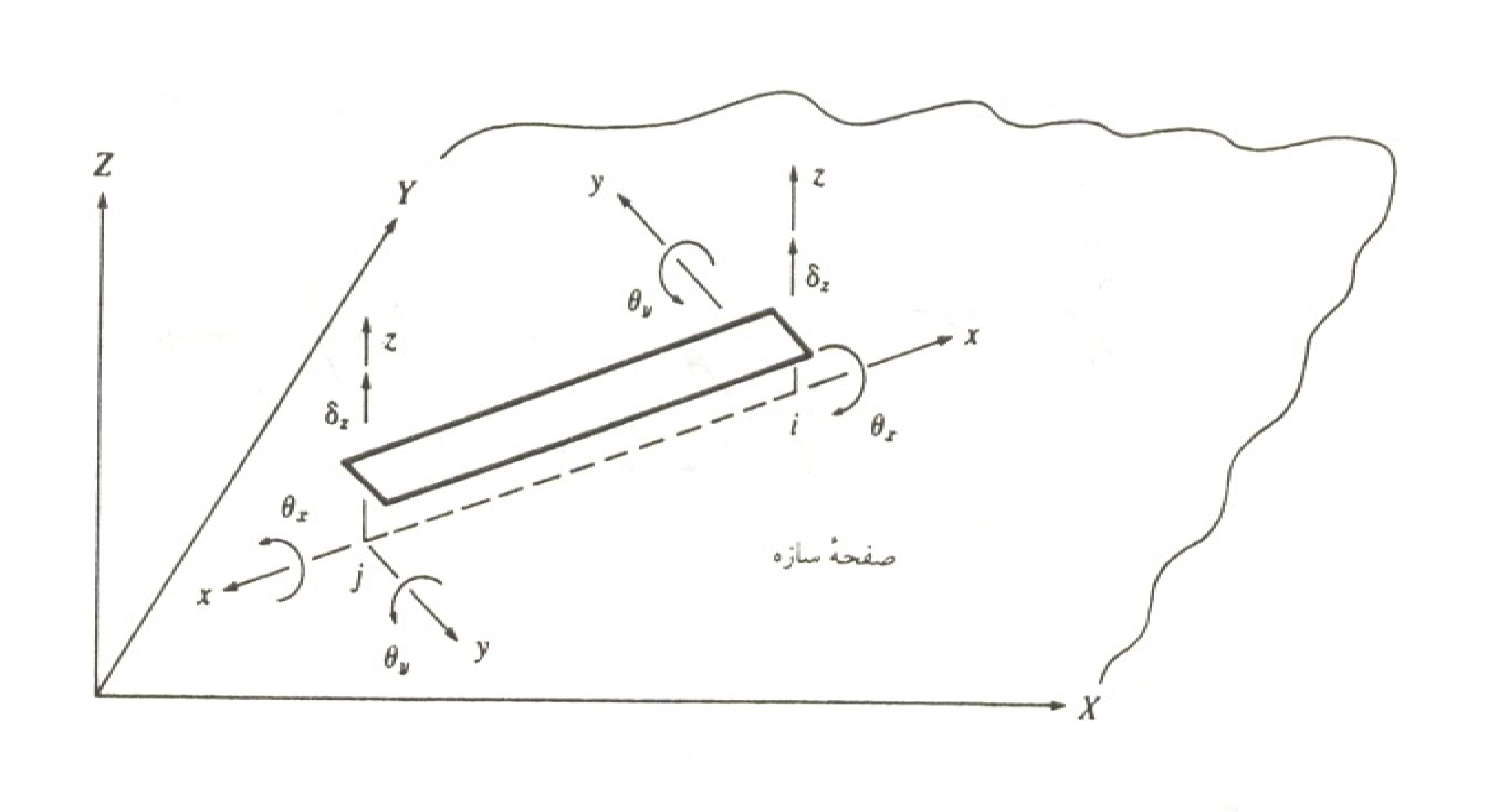
- شبکه ها قاب های مسطحی هستند که در آنها بارها بصورت قائم بر صفحه سازه اثر می کنند (بحثی در مورد مؤلفه های نیرو در قاب های فضایی). به عبارت دیگر مثلاً اگر شبکه در صفحه XY باشد، در این صورت نیروهای وارد بر آن در امتداد محور Zها و لنگرهای وارده حول محورهای X , Y خواهد بود.

- با توجه به این که بارهای خارجی قائم بر صفحه سازه اثر می کنند، لذا تغییر شکل های محوری قابل صرف نظر کردن می باشند.

- یک گره آزاد سازه شبکه ای علاوه بر تغییر مکان های قائم بر صفحه سازه شبکه ای (مثلا در امتداد محور Zها در صورتی که سازه شبکه‌ای در صفحه XY واقع باشد) تحت اثر دورانی در صفحه خود سازه با مولفه‌های θ_x , θ_y قرار می گیرد.

- بنابر این تغییر شکل یک گره به صورت $[\Delta_Z , \theta_X , \theta_Y]$ قابل بیان است، مشروط بر این که صفحه سازه به صورت XY مشخص شده باشد.

- وضعیت محورهای مختصات محلی و کلی:



$$p_{ij} = \begin{bmatrix} p_z \\ m_x \\ m_y \end{bmatrix} \qquad , \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}$$

– مراحل تشکیل ماتریس سختی یک شبکه عبارتند از:

الف) تعیین ماتریس سختی عضو:

$$k=\begin{bmatrix} k_{ii}^{j} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj}^{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 \\ 0 & GJ/L & 0 & 0 & GJ/L & 0 \\ 6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & -6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & Sym & & & Sym & \end{bmatrix}$$

ب) تعیین ماتریس های دوران R_{ij}, R_{ji} :

$$\begin{cases} p_{ij}=R_{ij}\begin{bmatrix} P_Z \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix}_{ij}=R_{ij}P_{ij} \\ \delta_{ij}=R_{ij}\begin{bmatrix} \Delta_Z \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{bmatrix}_{i}=R_{ij}\Delta_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{ji}=R_{ji}\begin{bmatrix} P_Z \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix}_{ji}=R_{ji}P_{ji} \\ \delta_{ji}=R_{ji}\begin{bmatrix} \Delta_Z \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{bmatrix}_{j}=R_{ji}\Delta_j \end{cases}$$

$$R_{ij}=\begin{bmatrix} \cos(z,Z) & \cos(z,X) & \cos(z,Y) \\ \cos(x,Z) & \cos(x,X) & \cos(x,Y) \\ \cos(y,Z) & \cos(y,X) & \cos(y,Y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{ji}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix},\left(\cos\alpha=\frac{X_i-X_j}{L}\right),\left(sin\alpha=\frac{Y_i-Y_j}{L}\right)$$

پ) تعیین $K_{jj}^{i}, K_{ji}, K_{ij}, K_{ii}^{j}$ برای هر عضو (هرکدام ماتریس های ۳×۳ می باشند):

$$\begin{cases} K_{ii}^{j} = R_{ij}^{T} k_{ii}^{j} R_{ij} & , K_{jj}^{i} = R_{ji}^{T} k_{jj}^{i} R_{ji} \\ K_{ij} = R_{ij}^{T} k_{ij} R_{ji} & , K_{ij} = K_{ji}^{T} \end{cases}$$

ت) به همان روال قبلی ماتریس سختی سازه را تشکیل می دهیم.

– بعد از اعمال شرایط مرزی و حل معادلات می‌توان بردار Δ را که شامل تغییر مکان های تعمیم یافته گره‌های آزاد سازه است، به دست آورد. بعد از تعیین $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i, \ldots, \Delta_n$ می توان نیروهای انتهای اعضاء را به دست آورد.

$$p_{ij} = k_{ii}^{j} \delta_{ij} + k_{ij} \delta_{ji}$$

$$p_{ij} = k_{ii}^{j} R_{ij} \Delta_{ij} + k_{ij} R_{ji} \Delta_{ji} = \begin{bmatrix} p_z \\ m_x \\ m_y \end{bmatrix}_{ij} \begin{matrix} \rightarrow \text{برش} \\ \rightarrow \text{لنگر پیچشی} \\ \rightarrow \text{لنگر خمشی} \end{matrix}$$

– همچنین می توان عکس العمل های تکیه گاهی را با استفاده از تغییرمکان های تعمیم یافته و با استفاده از ماتریس سختی اولیه (بدون اعمال شرایط مرزی) بصورت زیر به دست آورد:

$$P_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \cdots + K_{ii}\Delta_i + \cdots + K_{in}\Delta_n$$

– برای بررسی تعادل گره ها از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$P_i = \sum R_{ij}^{T} p_{ij}$$

(بررسی چند مثال)

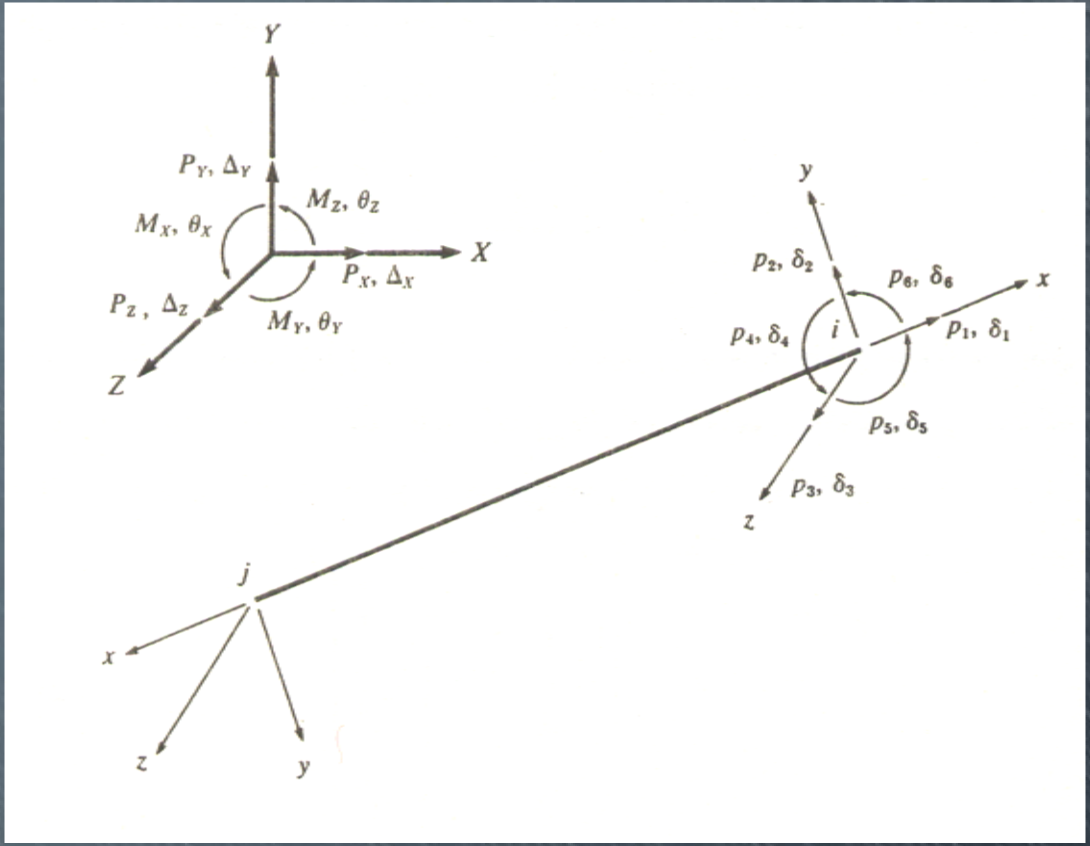
۹- تحلیل قاب های صلب سه بعدی (Three Dimensional Rigid Frames)

- ویژگی های این سازه ها عبارتند از:

❄ سازه و بارهای مؤثر بر آن در فضای فیزیکی سه بعدی قرار دارند.

❄ تمام اعضا (بجز تکیه گاه ها) به صورت صلب به همدیگر مرتبط یافته اند.

- محورهای مختصات محلی و کلی



$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_i , p_{ij} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_i$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \\ \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{bmatrix}_i , P_i = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \\ M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}_i$$

- مراحل تشکیل ماتریس سختی قاب های صلب سه بعدی، در هنگامی که تشکیل ماتریس سختی سازه برای حالت کلی در ابتدای این فصل شرح داده می شد، ارائه گردید. نکته ای که فقط باید تعیین گردد تعیین ماتریس دوران R_{ij}, R_{ji} می باشد.

- تعیین ماتریس دوران R_{ij} :

$$\begin{cases} K_{ii}^{j} = R_{ij}^{T} k_{ii}^{j} R_{ij} \\ K_{jj}^{i} = R_{ji}^{T} k_{jj}^{i} R_{ji} \\ K_{ij} = R_{ij}^{T} k_{ij} R_{ji} \\ K_{ij} = K_{ji}^{T} \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{ij} = R_{ij} P_{ij} \\ \delta_{ij} = R_{ij} \Delta_{i} \\ p_{ji} = R_{ji} P_{ji} \\ \delta_{ji} = R_{ji} \Delta_{j} \end{cases}$$

- مشخص است که ماتریس دوران R_{ij} یک ماتریس ٦×٦ خواهد بود که در حالت کلی صورت زیر را دارد:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}_{i}$$

- $\cos(x,X), \cos(x,Y), \cos(x,Z)$ به ترتیب کوسینوس های هادی محور محلی **x** نسبت به محورهای کلی **Z, Y, X** می باشد.

$$\cos(x,X) = l = \frac{X_i - X_j}{L} \qquad \cos(x,Y) = m = \frac{Y_i - Y_j}{L} \qquad \cos(x,Z) = n = \frac{Z_i - Z_j}{L}$$

-اکنون باید کوسینوس‌های محورهای محلی *y*, *z* را نسبت به محورهای کلی **Z, Y, X** بدست آوریم:

محور *y* عمود بر محور **x** و **Z** انتخاب می‌شود به گونه‌ای که حاصل برداری **Z** با **x**، محور *y* رانتیجه بدهد:

$$y = Z \times x$$

$$Z = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k}$$

($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ بردارهای یکه در امتداد محورهای کلی **Z, Y, X** می باشند)

$$x = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

$$y = l\hat{j} - m\hat{i} \Rightarrow y = \frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}}\hat{i} + \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\hat{j} + 0\hat{k} \quad , \sqrt{l^2+m^2} = D$$

- بنابراین کوسینوس های محور محلی *y* عبارتند از: $0, \frac{l}{D}, \frac{-m}{D}$

-حال می توان کوسینوس های هادی محور z را نیز بدست آورد:

$$z = x \times y$$

$$x = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

$$y = \frac{-m}{D}\hat{i} + \frac{l}{D}\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$z = \frac{l^2}{D}\hat{k} + \frac{m^2}{D}\hat{k} - \frac{mn}{D}\hat{j} - \frac{l\,n}{D}\hat{i} \Rightarrow z = -\frac{l\,n}{D}\hat{i} - \frac{mn}{D}\hat{j} + D\hat{k} \;, z = \hat{z}$$

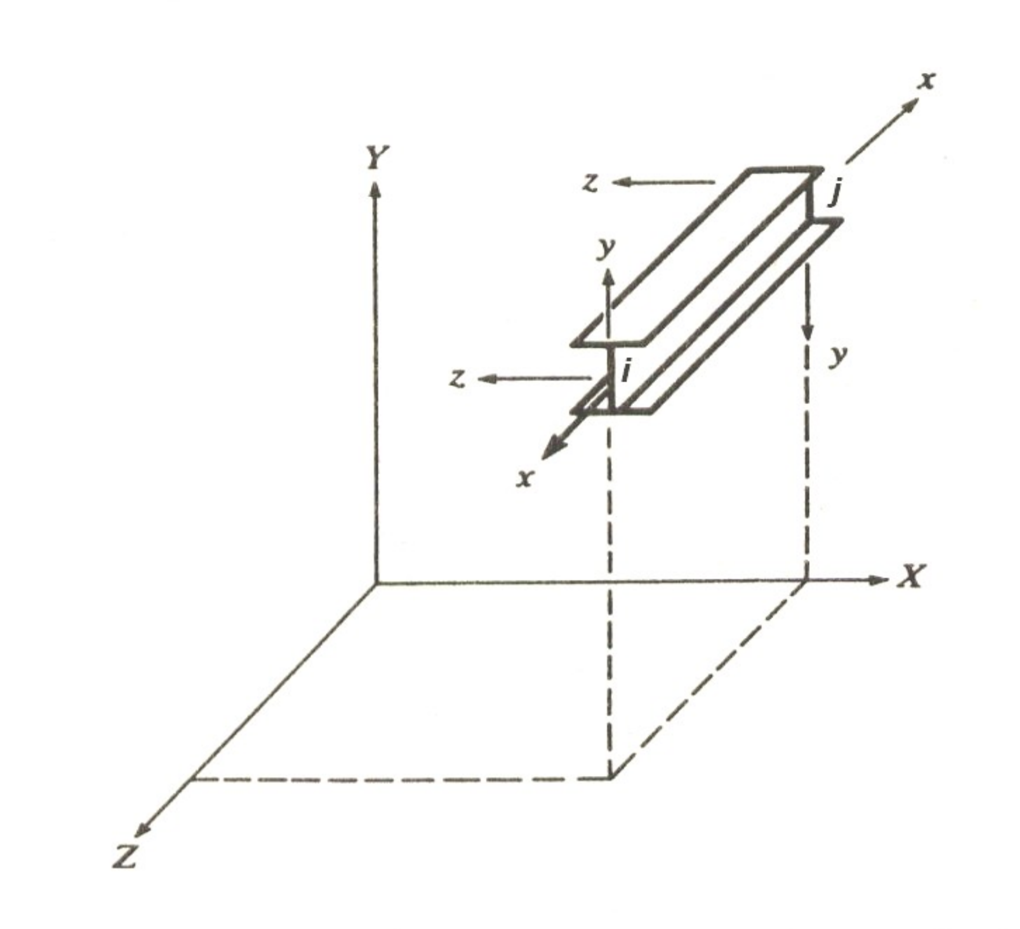
- بنابراین کوسینوس های محور محلی z عبارتند از: $D, \frac{-mn}{D}, \frac{-nl}{D}$

- پس ماتریس دوران به صورت زیر بدست می آید:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} l & m & m \\ -\frac{m}{D} & \frac{l}{D} & 0 \\ -\frac{nl}{D} & -\frac{mn}{D} & D \end{bmatrix}$$

- شرط استفاده از این ماتریس آن است که محورمحلی x منطبق بر محور Z کلی نشود چرا که در این صورت عضو موازی محور Z بوده و D=o خواهد بود و نمی توان y را تعیین نمود.

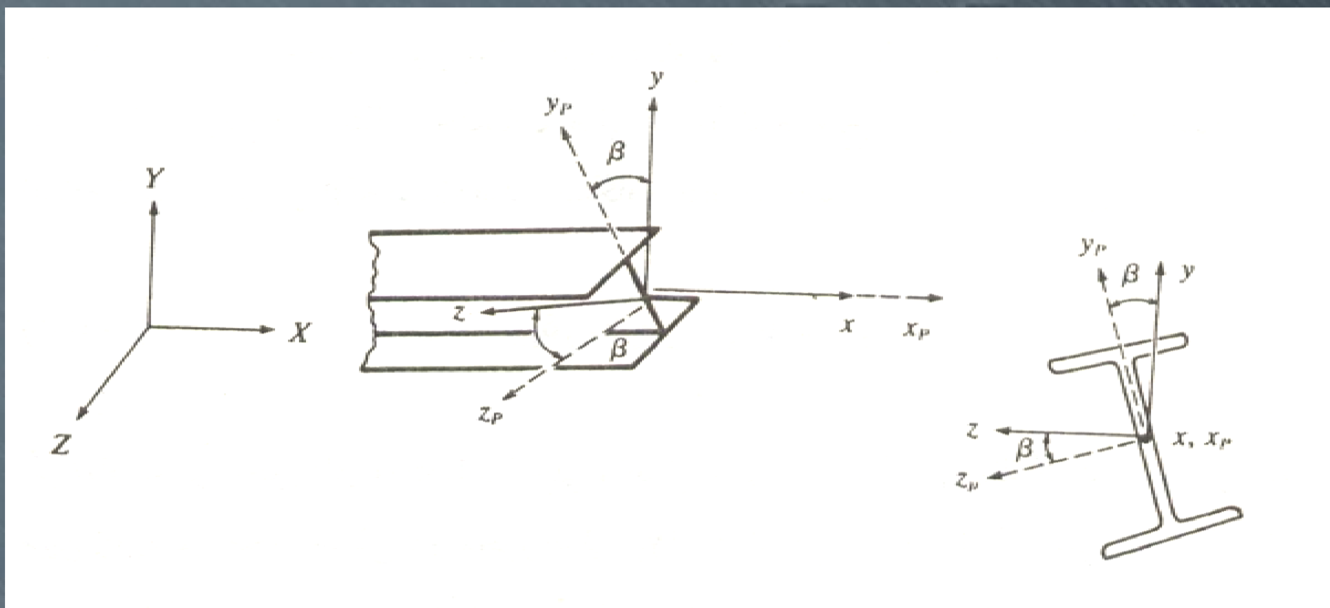
- در حالت خاصی که محور x محلی موازی محور Z در می آید، در این صورت محور y را می توان به عنوان محور Y از دستگاه مختصات کلی انتخاب کرد. در این صورت داریم:



$$R_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & Sym \end{array}\right]$$

$$R_{ji} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & Sym \end{array}\right]$$

- در قاب های سه بعدی مسأله خاصی ایجاد می شود که عبارت است از عدم انطباق محورهای مختصات محلی تعریف شده با R_{ij} های فوق الذکر با محورهای اصلی مقطع عضو. بنابراین در واقع تفاوت بین محورهای مختصات محلی (x, y, z) با محورهای مختصات اصلی (x_p, y_p, z_p) برابر زاویه β می باشد. در این صورت یک تبدیل دورانی دیگری لازم خواهد شد.



$$\begin{cases} p_{ij} = R_{ij} P_{ij} \\ \delta_{ij} = R_{ij} \Delta_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{ijp} = R_{ijp} p_{ij} \\ \delta_{ijp} = R_{ijp} \delta_{ij} \end{cases}$$

P_{ij}	$\rightarrow$	p_{ij}	$\rightarrow$	p_{ijp}
محورهای مختصات کلی (قدیم)		محورهای مختصات محلی (جدید)		محورهای مختصات اصلی

$$R_{ijp} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & \\ \hline & 0 & & Sym \end{array}\right]$$

$$\langle 1\rangle \qquad p_{ijp} = k^{j}_{iip}\delta_{ijp} + k_{ijp}\delta_{jip}$$

$$\langle 2\rangle \qquad \begin{cases} p_{ijp} = k^{j}_{iip}R_{ijp}\delta_{ij} + k_{ijp}R_{jip}\delta_{ji} = k^{j}_{iip}R_{ijp}R_{ij}\Delta_i + k_{ijp}R_{jip}R_{ji}\Delta_j \\ p_{ijp} = R_{ijp}p_{ij} \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle \qquad \begin{cases} p_{ij} = R^{T}_{ijp}k^{j}_{iip}R_{ijp}R_{ij}\Delta_i + R^{T}_{ijp}k_{ijp}R_{jip}R_{ji}\Delta_j \\ p_{ij} = R_{ij}P_{ij} \end{cases}$$

$$\langle 4\rangle \qquad P_{ij} = R^{T}_{ij}R^{T}_{ijp}k^{j}_{iip}R_{ijp}R_{ij}\Delta_i + R^{T}_{ij}R^{T}_{ijp}k_{ijp}R_{jip}R_{ji}\Delta_j$$

$$\begin{cases} K^{j}_{ii} = R^{T}_{ij}(R^{T}_{ijp}k^{j}_{iip}R_{ijp})R_{ij} \\ K_{ij} = R^{T}_{ij}(R^{T}_{ijp}k_{ijp}R_{jip})R_{ji} \end{cases}$$

- نکته قابل توجه آن است که اگر محورهای مختصات اصلی و محلی بر همدیگر منطبق شوند دراین صورت $\beta = 0$ خواهد بود و $R_{ijp} = I$ می‌گردد و لذا زیرنویس ***p*** از معادلات حذف می‌شود.

- پس برای قاب های صلب سه بعدی اطلاعات ورودی برای تعریف هندسه سازه عبارتند از:
  - مختصات گره ها
  - نحوه اتصال اعضا ***(ij)***
  - زاویه $\boldsymbol{\beta}$ برای هر عضو

۱۰- خواص ماتریس های سختی (Properties of the Stiffness Matrices)

الف) در ماتریس سختی زیرماتریس‌های غیرقطری مساوی ترانسپوز همدیگر هستند، یعنی: $K_{ij} = K_{ji}^T$

$$K_{ij} = R_{ij}^T k_{ij} R_{ji} \quad , \quad K_{ji} = R_{ji}^T k_{ji} R_{ij}$$

$$K_{ji}^T = \left(R_{ji}^T k_{ji} R_{ij} \right)^T = R_{ij}^T k_{ji}^T R_{ji}$$

اما با توجه به این قبلاً ثابت کرده ایم که $k_{ij} = k_{ji}^T \quad \Leftarrow \quad K_{ij} = K_{ji}^T$

ب)عناصر ماتریس سختی K مقادیری عددی هستند.

طبق قضیه کاستیلیانو $\Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \quad , \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i{}^2} = \dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_i}$

$$U = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \cdots + \frac{1}{2} P_i \Delta_i + \cdots + \frac{1}{2} P_n \Delta_n \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_i} \Delta_1 + \cdots + P_i + \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i} \Delta_i + \cdots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_i} \Delta_n \right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i{}^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P_1^2}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_1 + \cdots + \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_i + \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i} + \cdots + \frac{\partial^2 P_n}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_n \right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i{}^2} = \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_1^2}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_1 + \cdots + \frac{\partial^2 P_i}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_i + \cdots + \frac{\partial^2 P_n}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_n \right) = \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_1^2}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_1 + \cdots + \frac{\partial^2 P_i}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_i + \cdots + \frac{\partial^2 P_n}{\partial \Delta_i{}^2} \Delta_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_1^2}{\partial \Delta_i{}^2} = 0 \ , \cdots , \ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \Delta_i{}^2} = 0 \ , \cdots , \ \frac{\partial^2 P_n}{\partial \Delta_i{}^2} = 0$$

پ) ماتریس سختی نهایی سازه (بعد از اعمال شرایط مرزی) یک ماتریس مثبت–معین است (Positive-Definite).

– ابتدا باید تعاریف زیر را بیان کنیم:

۱– ماتریس مثبت– معین: ماتریس مثبت– معین A، ماتریسی است که پیش ضرب و پس ضرب آن با یک بردار دلخواه غیرصفر (B) یک مقدار مثبت می باشد: $B^T AB > 0$. می توان اثبات نمود که دترمینان ماتریس A مثبت است |A|>0 .

۲– ماتریس مثبت– نیمه معین (Positive-Semi Definite): ماتریس مثبت– نیمه معین A، ماتریسی است که پیش ضرب و پس ضرب آن با یک بردار دلخواه غیرصفر (B) مساوی صفر می باشد، می توان اثبات نمودکه دترمینان ماتریس A صفر است |A|=0.

۳– ماتریس نامعین (Indefinite): ماتریس نامعین A ماتریسی است که پیش ضرب و پس ضرب آن با یک بردار دلخواه غیر صفر (B) یک مقدار منفی می باشد. می توان اثبات نمود که دترمینان ماتریس A کوچکتر از صفر است |A|<0.

می‌توان اثبات نمودکه ماتریس سختی نهایی سازه (بعد از اعمال شرایط مرزی) یک ماتریس مثبت–معین است:

$P = K\Delta$ معادله ماتریس سختی نهایی

$U = \frac{1}{2} P^T \Delta$ انرژی تغییر شکل سیستم

$U = \frac{1}{2}\Delta^T K^T \Delta = \frac{1}{2}\Delta^T K \Delta$ (چون K متقارن است)

U بیانگر انرژی تغییر شکل سیستم است که یک مقدار مثبت می باشد و Δ اختیاری است، بنابراین K یک ماتریس مثبت– معین است ، و لذا داریم: |K|>O

– ماتریس سختی سازه (قبل از اعمال شرایط مرزی)، یک ماتریس مثبت – نیمه معین است زیرا داریم:

$$U = \frac{1}{2}\Delta^T K \ \Delta = 0$$

که متناظر با یک مد صلب جسمی (Rigid Body Mode) است که در اثر تغییر مکان کاری در سیستم انجام نمی شود. چرا که سازه می تواند یک حرکت صلب جسمی (Rigid Body Motion) انجام دهد.

یادآوری می شود که برای یک جسم صلب داریم:

" اگر یک سیستم نیرویی بر یک جسم صلب در حال تعادل باشد، در اثر تغییر مکان کوچک (مجازی)، کار خارجی (مجازی) انجام یافته توسط این نیروها برابر صفر خواهد بود."

– بنابراین برای یک ماتریس سختی (قبل از اعمال شرایط مرزی) داریم: $|K|=0$

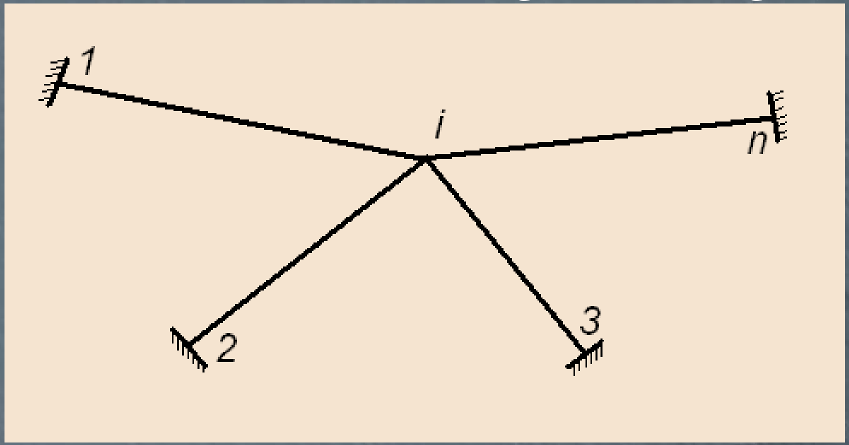
ت) می توان نشان داد که هیچکدام از ماینورهای اصلی ماتریس سختی نهایی K برابر صفر نخواهد بود. اگر ماتریس سختی نهایی K را به صورت زیر افراز کنیم:

$$\begin{bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{I,I} & K_{I,II} \\ K_{II,I} & K_{II,II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_I \\ \Delta_{II} \end{bmatrix}$$

در این صورت $K_{II,II}, K_{I,I}$ مثبت معین می باشند:

$$\left|K_{II,II}\right| > 0 \ , \ \left|K_{I,I}\right| > 0$$

- به همین ترتیب می توان ثابت کرد که K_{ii} نیز یک ماتریس مثبت- معین است.



$$P_i = K_{ii}\Delta_i \quad \Rightarrow \left|K_{ii}\right| > 0$$

- مشخص است که به همین ترتیب می توان
ثابت نمود که: $k_{ii} > 0$

بنابر این تمام درایه های قطری ماتریس سختی نهایی سازه (بعد از اعمال شرایط مرزی) مثبت می باشند.

ث) ماتریس های مثبت- معین، مثبت- نیمه معین و نامعین را به صورت زیر نیز تعریف می کنند:
- ماتریس مثبت- معین، ماتریسی است که ویژه مقادیر (Eigenvalues) آن همگی مثبت می باشند.
- ماتریس مثبت- نیمه معین، ماتریسی است که ویژه مقادیر آن مساوی یا بزرگتر از صفر می باشند.
- ماتریس نامعین ماتریسی است که ویژه مقادیر آن منفی، صفر و مثبت می توانند باشند.
- ویژه مسأله استاندارد برای ماتریس سختی K را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{K\phi = \lambda\phi}$$

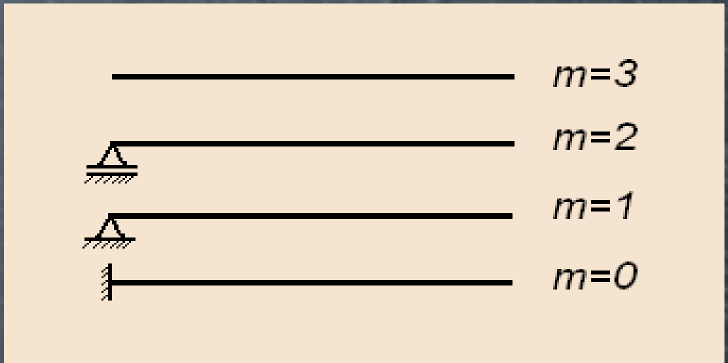
(λ یکی از ویژه مقادیر ماتریس K و ϕ یکی از ویژه بردارهای (Eigenvectors) ماتریس K می باشند) جواب های این مسأله ویژه جفت های (λ_i, ϕ_i) و $i = 1, 2, \ldots, n$ می باشند.

چون اشاره کردیم که ماتریس سختی نهایی یک ماتریس مثبت- معین می باشد، بنابراین تمامی ویژه مقادیر آن مثبت می باشند.

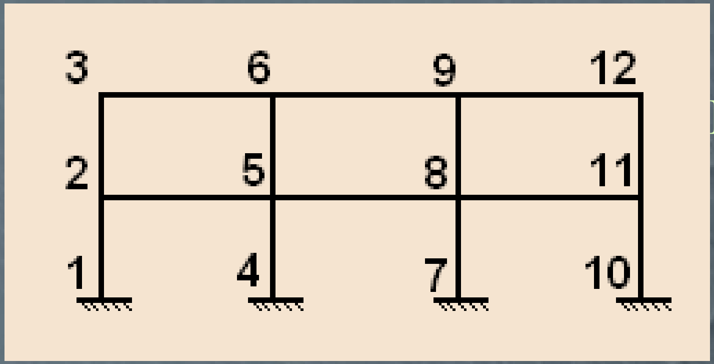
- با توجه به این که برای ماتریس سختی (قبل از اعمال شرایط مرزی) داریم $|K|=0$، بنابراین یکی یا تعدادی از ویژه مقادیر ماتریس سختی صفر است:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

- m مساوی تعداد مدهای صلب جسمی است (Rigid body modes):



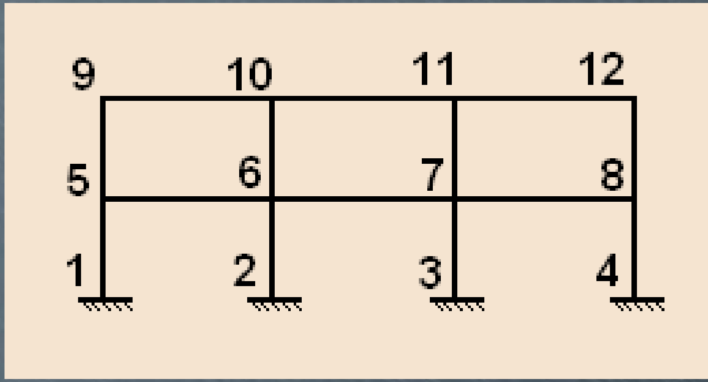
ج) ماتریس سختی بصورت ماتریس نواری است. به عبارت دیگر عناصر غیر صفر در اطراف قطر اصلی هستند، مشروط بر این که تمام گره‌ها به همدیگر متصل نشده باشند. شماره گذاری طوری انجام شود که تفاضل بین دو شماره مشخص یک عضو به حداقل ممکن محدود شده باشد. یعنی تفاوت بین دو شماره مربوط به یک عنصر حتی المقدور مینیمم مقدار ممکن را داشته باشد.



۳= ماکزیمم تفاوت بین شماره دو انتهای اعضا

تعداد درجات آزادی×[۱+(ماکزیمم تفاوت)×۲]= عرض نوار ماتریس K

$$=[(2)(3)+1]3=21$$



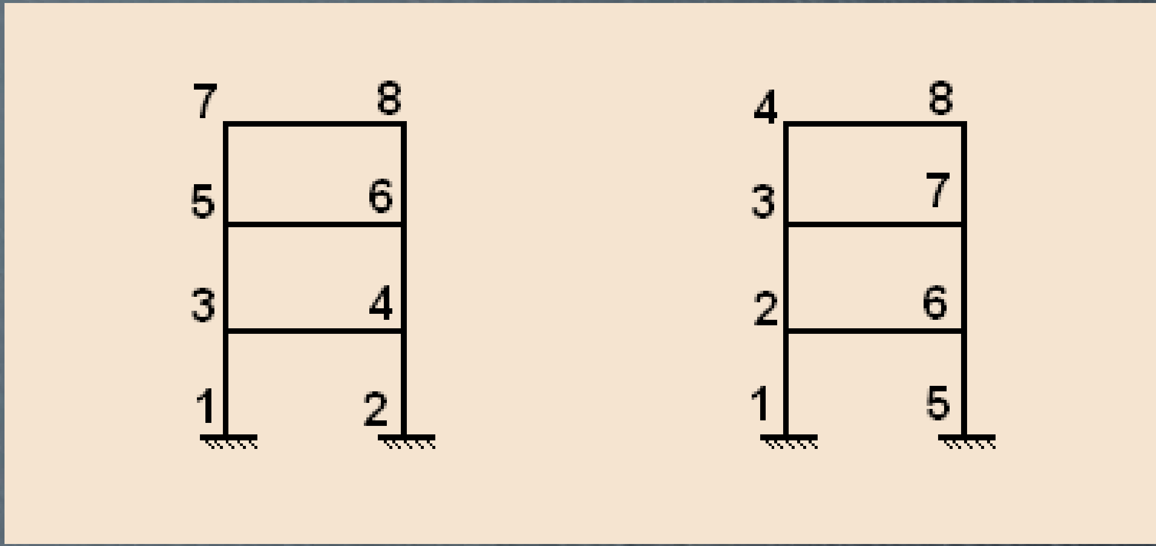
٤= ماکزیمم تفاوت بین شماره دو انتهای اعضا

تعداد درجه آزادی×[۱+(ماکزیمم تفاوت)×۲]= عرض نوار ماتریس K

$$=[(2)(4)+1]3=27$$

بنابراین توجه به شماره گذاری گره ها، باعث کاهش عرض نوار ماتریس K و بالنتیجه صرفه جویی در انبار نمودن اطلاعات در ماشین می گردد.

- مثالی دیگر در مورد تاثیر شماره گذاری در عرض نوار ماتریس سختی سازه:



۲= ماکزیمم تفاوت بین شماره اعضاء

۱۵= عرض نوار ماتریس K

۵= ماکزیمم تفاوت بین شماره اعضاء

۳۳= عرض نوار ماتریس K