
بسم الله الرحمن الرحيم

# تحلیل ماتریسی سازه ها

# Matrix Structural Analysis

کریم عابدی

دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده مهندسی عمران

# فصل دوم: تبدیلات دورانی مختصات

# فصل اول– تبدیلات دورانی مختصات

(Rotational Transformation of Coordinates)

– می دانیم که که یک بردار و یا یک ماتریس نسبت به دستگاه مختصات خاصی تعریفی می شود و اگر آن دستگاه مختصات تغییر نماید، مؤلفه های آن بردار و آن ماتریس نیز تغییر خواهد نمود.

– از طرفی جمع دو بردار $(c_i=a_i+b_i,\ C=A+B)$ و جمع دو ماتریس $(c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ C=A+B)$ هنگامی صادق و درست خواهد بود که بردارهای A و B یا ماتریس های A و B در یک دستگاه مختصات بیان شده باشند.

– تبدیلات مختصات دو کاربرد اساسی در تحلیل ماتریسی سازه ها دارند:

الف) معادلات تعادل و سازگاری تغییر مکان ها فقط هنگامی ایجاد می شوند که بردارهای نیروها و تغییر مکان های انتهای اعضای متصل به گره مخصوصی در یک دستگاه محورهای مختصات نوشته شود.

ب) تبدیل مختصات در تحلیل ماتریسی سازه ها ممکن است باعث ساده شدن مقادیر مربوط به یک معادله گردد.

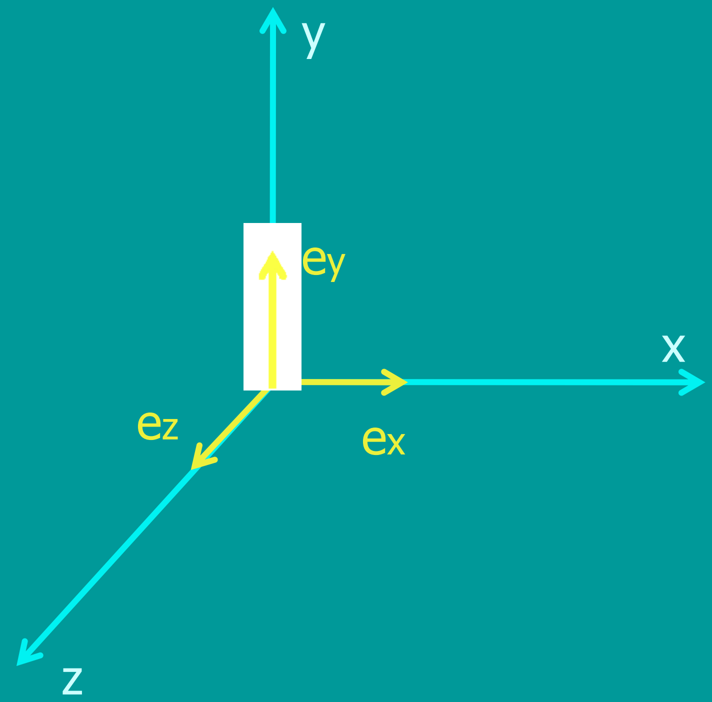
❖ دستگاه **محورهای مختصات** (Coordinate axes system)

– <u>انواع دستگاه های مختصات</u>:
- دستگاه مختصات دکارتی،
- دستگاه مختصات استوانه ای،
- دستگاه مختصات کروی.

– این که چه دستگاه مختصاتی را در رابطه با حل مسأله خود باید انتخاب بکنیم؟ به طور قطع جواب ساده ای برای این سؤال وجود ندارد. این انتخاب بستگی به سه پارامتر دارد:
- نوع مسأله،
- آشنایی شخص با دستگاه های مختلف مختصات،
- سلیقه شخصی.

در درس تحلیل ماتریسی سازه ها چون با سازه های قابی و خرپایی سروکار داریم، لذا عموماً از دستگاه مختصات متعامد (مستقیم) سه بعدی (یا دو بعدی) راستگرد استفاده خواهیم نمود.

– در حالت دستگاه مختصات متعامد سه بعدی دکارتی با سه بردار پایه $e_x$ , $e_y$ , $e_z$ داریم:




$$e_x . e_y = e_y . e_z = e_x . e_z = 0$$

$$e_x \times e_y = e_z$$

$$e_y \times e_z = e_x$$

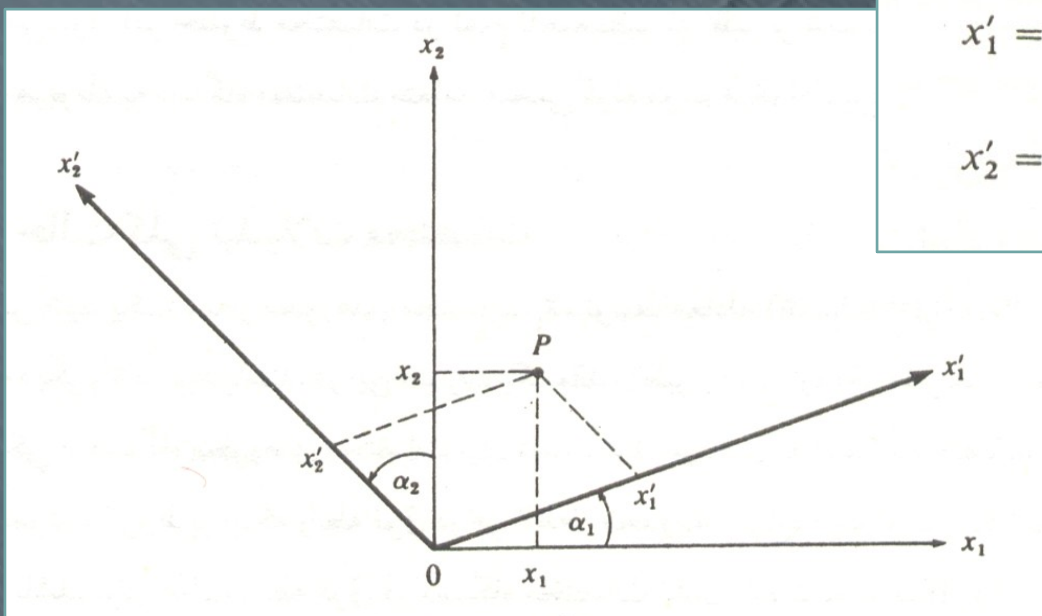
$$e_z \times e_x = e_y$$

## ❖ دوران محورهای مختصات در فضای دو بعدی

فرض کنید که یک دسته از محورهای مختصات $x_i$ توسط رابطه تبدیل $x_i' = \phi x_i$ به دسته دیگر $x_i'$ مربوط باشند. در این صورت یک مقدار نظیر یک بردار، یک ماتریس و غیره را که در یکی از دستگاه مختصات بیان شده باشد می توان به دستگاه مختصات دیگری تبدیل نموده، مشروط بر این که رابطه فوق در هر نقطه از محدوده تبدیل دارای مقدار منحصر به فرد (Unique) و پیوسته (Continuous) باشد. برای دو دستگاه مختصات نشان داده شده داریم:

$$x_1' = (x_1 \cos \alpha_2 + x_2 \sin \alpha_2) \frac{1}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$x_2' = (-x_1 \sin \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_1) \frac{1}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$




$$x_i' = \mathbf{A}_{ij} x_j$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \frac{1}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

– اعضای ماتریس دوران را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \qquad i, j = 1, 2$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \partial x'_1/\partial x_1 & \partial x'_1/\partial x_2 \\ \partial x'_2/\partial x_1 & \partial x'_2/\partial x_2 \end{bmatrix}$$

– که معمولاً در ریاضیات به ژاکوبین معروف است که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\mathbf{J}\,\frac{x'_i}{x_j} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{J}\left|\frac{x_i}{x_j}\right|$$

– شرط وجود رابطه تبدیل $x' = \phi(x)$ (به ازای هر $x_1, x_2$، یک $x'_1, x'_2$ وجود داشته باشد)

۱–دارای مقداری منحصر به فرد باشد (متناظر یک به یک)

یعنی دترمینان ماتریس دوران یا دترمینان ژاکوبی (یا همان ژاکوبی) مخالف صفر باشد.

$$|A_{ij}| = J\left|x'_i/x_j\right| \neq 0$$

(Jacobian Determinant=Jacobian)

۲– پیوسته باشد، یعنی $a_{ij} = \partial x'_i/\partial x_j \;, i, j = 1, 2$ موجود باشد.

– برای مختصات نشان داده شده دترمینان ماتریس دوران عبارت است از:

$$\left|A_{ij}\right| = \frac{1}{\cos(\alpha_2-\alpha_1)^2}(\cos\alpha_2.\cos\alpha_1+\sin\alpha_2.\sin\alpha_1) = \frac{1}{\cos(\alpha_2-\alpha_1)}$$

– در حالتی که $\alpha_2=\alpha_1$ باشد، یعنی هر دو دستگاه مختصات متعامد باشند داریم:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \underbrace{\cos\alpha}_{\cos(x_1',x_1)} & \underbrace{\sin\alpha}_{\cos(x_1',x_2)} \\ \underbrace{-\sin\alpha}_{\cos(x_2',x_1)} & \underbrace{\cos\alpha}_{\cos(x_2',x_2)} \end{bmatrix} \quad , \quad \left|A_{ij}\right| = 1$$

– تبدیل دستگاه جدید (پریم دار) به دستگاه قدیم (بدون پریم):

$$\begin{cases} x_1 = \cos x_1' - \sin x_2' \\ x_2 = \sin x_1' + \cos x_2' \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_i\ (i=1,2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{B_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{x_i'\ (i=1,2)}$$

– بنابراین ماتریس دوران یک ماتریس متعامد است و به عبارت دیگر داریم:

$$A_{ij}^{-1} = A_{ij}^{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}.B_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

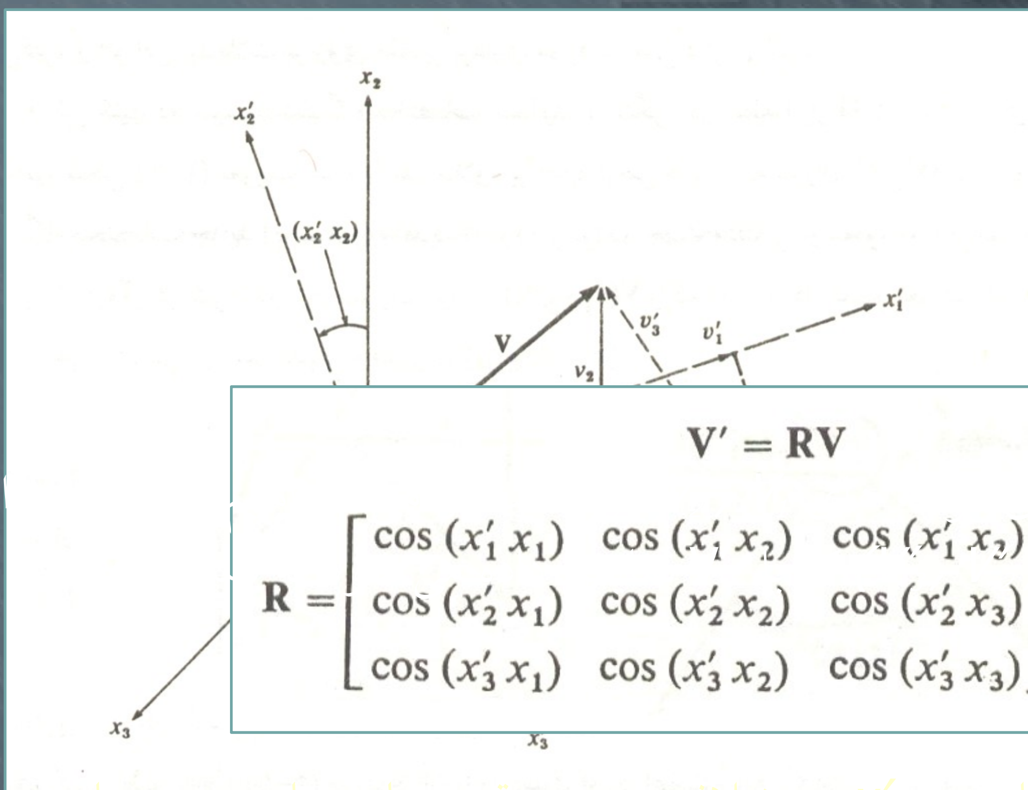
$$A_{ij}.B_{ij} = I \Rightarrow B_{ij} = A_{ij}^{-1} = A_{ij}^{T}$$

## ❖تبدیلات دورانی دستگاه محورهای مختصات سه بعدی متعامد و اثر این تبدیلات روی مقادیر برداری

• فرض کنید دو دستگاه مختصات متعامد راستگرد داریم:

دستگاه مختصات قدیم (بدون پریم) $x_i \rightarrow$

دستگاه مختصات جدید (با پریم) $x'_i \rightarrow$




– بردار V در دستگا ... این

بردار را در دستگاه م ...

$$\mathbf{V}' = \mathbf{RV}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(x'_1\,x_1) & \cos(x'_1\,x_2) & \cos(x'_1\,x_3) \\ \cos(x'_2\,x_1) & \cos(x'_2\,x_2) & \cos(x'_2\,x_3) \\ \cos(x'_3\,x_1) & \cos(x'_3\,x_2) & \cos(x'_3\,x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

$x'_i\,x_j$ زاویه ای است که محور $x_j$ با محور $x'_i$ در خلاف جهت عقربه های ساعت می سازد.

$\cos(x'_i, x_j)$ نشانگر کسینوس های هادی محورهای مختصات جدید نسبت به سیستم قدیم است.

$n_i$ , $m_i$ , $l_i$ کوسینوس های هادی محورهای مختصات iام از دستگاه مختصات جدید به دستگاه مختصات قدیم است.

می توان ثابت کرد که $R$ یک ماتریس متعامد است، یعنی:

$$V' = RV \quad \Rightarrow \quad V = R^{-1}V'$$

$$(R^{-1} = R^T) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = R^T V'}$$

– برای اثبات $R^{-1} = R^T$ باید ثابت کنیم که $R.R^T = 1$ ، یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ (i, j = 1,2,3) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ❖ اثرتبدیلات دورانی دستگاه محورهای مختصات متعامد روی ماتریس‌ها

-یک ماتریس *3*3* را می توان به صورت *3* بردار سطری یا ستونی در فضای *3* بعدی در نظر گرفت. هر عضو در هرکدام از سطرها یا ستون ها را می توان به صورت مؤلفه ای از بردار سطری یا ستونی مربوط تعبیر نمود. بنابراین یک ماتریس در یک دستگاه مختصات در دستگاه مختصات دیگر، فرم دیگری را خواهد داشت.

– ماتریس $A$ رادر نظر می گیریم که در یک دستگاه مختصاتی تعریف شده و بیان آن در دستگاه مختصات دیگری مورد نظر می باشد ($A'$ ). برای انجام این کار دستگاه معادله ای که در آن ماتریس مورد نظر در یک بردار اختیاری ($V$) ضرب شده و بردار دیگری ($U$) را نتیجه می‌دهد، در نظر می گیریم:

$$\boxed{U = AV}$$

اگر این معادله در دستگاه مختصات قدیم صادق باشد، بایستی در دستگاه مختصات جدید نیز درست باشد:

$$\boxed{U' = A'V'}$$

با توجه به تبدیل دورانی محورهای مختصات بر روی بردارها دایم:

$$U' = RU \quad \rightarrow V' = RV \quad \rightarrow \quad (RU) = A'(RV) \quad \rightarrow$$

$$R(AV) = A'RV \quad \rightarrow \quad (RA - A'R)V = 0 \xrightarrow{(V \neq 0)} RA = A'R$$

$R^{-1}$ پیش ضرب در $: R^{-1}RA = R^{-1}A'R$

$$\boxed{A = R^T A'R}$$

$R^{-1}$ پس ضرب در $: RAR^{-1} = A'RR^{-1}$

$$\boxed{A' = RAR^T}$$