****

**آزمایشگاه ارتعاشات و دینامیک**

آزمایش شماره 1:

سیستم چرخدنده ی ساده

**هدف**

هدف از انجام این آزمایش مطالعه ی سلسله چرخ دنده های ساده (Gear-Train) و اندازه گیری ممان اینرسی و راندمان چرخ دنده ها می باشد.

**شرح دستگاه**

دستگاه آزمایش متشکل از چهار محور 4،3،2،1 می باشد که بر روی هر محور یک دیسک و یک چرخ دنده قرار دارد. زیر هر یک از محور ها سنسوری تعبیه شده است که امکان اندازه گیری شتاب زاویه ای محور را می دهد. دور محور 1 طبلکی به قطر 30 سانتی متر قرار دارد که وزنه ها از طریق طنابی به دور آن طبلک پیچیده می شود سیستم را به حرکت در می آورد. هر چرخ دنده ی بزرگ با تعداد 80 دندانه با چرخ دندک با تعداد 20 دندانه در گیر می شود.

**مشخصه های دستگاه**

1- ممان اینرسی محور بدون چرخ دنده ی بزرگ $0.038\*10^{-3} kgm^{2}$

2- ممان اینرسی محور با چرخ دنده ی بزرگ $8\*10^{-3} kgm^{2}$

3- ممان اینرسی دیسک $8\*10^{-3} kgm^{2}$

4- وزنه ی محرک $50 kg$

5- قطر پولی بارگذاری $30 mm$

6- سرعت کاغذ تغذیه $2 {mm}/{s}$

**تئوری آزمایش**

یکی از اهداف این آزمایش محاسبه ی ممان اینرسی دیسک ها می باشد. به این منظور دیسکی را در نظر بگیرید که دارای ممان اینرسی Iو جرم M باشد، اگر سیستمی مطابق شکل زیر ایجاد نموده و معادله ی حرکت وزنه را بنویسیم خواهیم داشت:

$$mg-2T=ma$$

از طرفی اگر شتاب زاویه ای دیسک α باشد و معادله ی حرکت دورانی دیسک نوشته شود خواهیم داشت:

$rα=2a$ , $Tr=Iα$

با جایگذاری این 2 معادله در معادله ی حرکت وزنه رابطه ی زیر برای α بدست می آید که با داشتن r شعاع طبلک و m جرم وزنهمی توان Iممان اینرسی را محاسبه کرد؛ زیرا α شتاب زاویه ای حرکت محور توسط سیستم ثبات قابل اندازه گیری است.

$$α=\frac{mgr}{2\left(I+\frac{mr^{2}}{4}\right)}$$

**آزمایش اول**

هر چهار محور دستگاه درگیر می شود.وزنه ی 50 کیلو گرمی به دسگاه متصل می شود و به کمک اهرم وزنه به بالاترین حد ممکن برده می شود. سیستم از حال سکون رها شده و بلافاصله دستگاه ثبات که شتاب زاویه ای محور 4 را اندازه گیری می کند روشن می شود. تغییرات سرعت زاویه ای بر حسب زمان روی کاغذ ثبات درج می شود. به این ترتیب می توان شتاب زاویه ای محور 4 را از رابطه ی $α=\frac{∆ω}{∆t}$ اندازه گیری نمود. به کمک فرمول بدست آمده برای شتاب زاویه ای مقدار ممان اینرسی قابل محاسبه است. سپس با توجه به اطلاعات داده شده مربوط به ممان اینرسی دیسک ها و محور ها، ممان اینرسی موثر حول محور 4 طبق رابطه ای که در قسمت بعد اثبات می شود محاسبه شده و نتایج بدست آمده باهم مقایسه می شوند.

**ممان اینرسی معادل حول محور اول**

با در نظر گرفتن سیستم چرخ دنده های مورد آزمایش، انرژی کل سیستم را می توان بصورت زیر نوشت:

$$T=\frac{1}{2}I\_{1}ω\_{1}^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}ω\_{2}^{2}+\frac{1}{2}I\_{3}ω\_{3}^{2}+\frac{1}{2}I\_{4}ω\_{4}^{2}$$

که در آن $I\_{1},I\_{2},I\_{3},I\_{4}$ ممان اینرسی چرخ دنده ها و دیسک ها و سایر متعلقات هر یک از محور های 4،3،2،1 و $ω\_{1},ω\_{2},ω\_{3},ω\_{4}$ به ترتیب سرعت های زاویه ای آن ها می باشند. می توان این سرعت های زاویه ای را با استفاده از نسبت تعداد دندانه های چرخ دنده(N) وتعداد دندانه های چرخ دندک(n) هر دو محور درگیر بر حسب $ω\_{1}$ نوشت:

$$\frac{N}{n}=\frac{R}{r} \rightarrow c=\frac{R}{r}=\frac{80}{20}=4$$

$$rω\_{2}=Rω\_{1} \rightarrow ω\_{2}=cω\_{1}$$

$$rω\_{3}=Rω\_{2} \rightarrow ω\_{3}=cω\_{2}=c\left(cω\_{1}\right)=c^{2}ω\_{1}$$

$$rω\_{4}=Rω\_{3} \rightarrow ω\_{4}=cω\_{3}=c\left(c^{2}ω\_{1}\right)=c^{3}ω\_{1}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{1}ω\_{1}^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}ω\_{2}^{2}+\frac{1}{2}I\_{3}ω\_{3}^{2}+\frac{1}{2}I\_{4}ω\_{4}^{2}=\frac{1}{2}I\_{1}\left(ω\_{1}\right)^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}\left(cω\_{1}\right)^{2}+\frac{1}{2}I\_{3}\left(c^{2}ω\_{1}\right)^{2}+\frac{1}{2}I\_{4}\left(c^{3}ω\_{1}\right)^{2}$$

$$T=\frac{1}{2}\left[c^{6}I\_{4}+c^{4}I\_{3}+c^{2}I\_{2}+I\_{1}\right]ω\_{1}^{2}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{efc}ω\_{1}^{2}=\frac{1}{2}\left[c^{6}I\_{4}+c^{4}I\_{3}+c^{2}I\_{2}+I\_{1}\right]ω\_{1}^{2} \rightarrow I\_{efc}= c^{6}I\_{4}+c^{4}I\_{3}+c^{2}I\_{2}+I\_{1}$$

**محاسبات مربوط به آزمایش اول**

$$m=50 kg , g=9.81 {m}/{s^{2}} , r=0.015 m$$

با توجه به داده های بدست آمده از دستگاه ثبات داریم:

$$α\_{4}=\frac{∆ω}{∆t}=\frac{146.6}{27.5}=5.33 {rad}/{s^{2}}$$

از روابط مربوط به نقاط تماس محور های 1 و 2 داریم:

$$V\_{1}=a\_{1}+V\_{0\_{1}}=a\_{1}=\left(rα\right)\_{1}∙t , V\_{2}=a\_{2}+V\_{0\_{2}}=a\_{2}=\left(rα\right)\_{2}∙t$$

$$V\_{1}=V\_{2} \rightarrow \left(rα\right)\_{1}∙t=\left(rα\right)\_{2}∙t \rightarrow α\_{1}=\frac{r\_{2}}{r\_{1}}α\_{2}=\frac{r}{R}α\_{2}$$

به طور مشابه برای محور های 2و 3 و همچنین محور های 3 و 4 بدست می آید:

$$V\_{2}=V\_{3} \rightarrow \left(rα\right)\_{2}∙t=\left(rα\right)\_{3}∙t \rightarrow α\_{2}=\frac{r\_{3}}{r\_{2}}α\_{3}=\frac{r}{R}α\_{3}$$

$$V\_{3}=V\_{4} \rightarrow \left(rα\right)\_{3}∙t=\left(rα\right)\_{4}∙t \rightarrow α\_{3}=\frac{r\_{4}}{r\_{3}}α\_{4}=\frac{r}{R}α\_{4}$$

با توجه به روابط بدست آمده نتیجه می شود که :

$$α\_{1}=\left(\frac{r}{R}\right)^{3}α\_{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\*5.33=0.083 {rad}/{s^{2}}$$

$$I=\frac{mgr}{2α}-\frac{mr^{2}}{4}=\frac{50\*9.81\*0.015}{2\*0.083}-\frac{50\*0.015^{2}}{4}=44.86 kgm^{2}$$

$I\_{efc}= c^{6}I\_{4}+c^{4}I\_{3}+c^{2}I\_{2}+I\_{1}$ , c=4

$$I\_{1}=16\*10^{-3} , I\_{2}=16\*10^{-3} , I\_{3}=16\*10^{-3} , I\_{4}=8.038\*10^{-3}$$

$$I\_{efc}=16\*10^{-3}\*\left(1+16+256\right)+8.038\*10^{-3}\*4096=37.29kgm^{2}$$

**آزمایش دوم**

همین آزمایش را برای حالتی که فقط محور های 1 و2 در گیر هستند انجام دهید.

$$m=50 kg , g=9.81 {m}/{s^{2}} , r=0.015 m$$

$$α\_{2}=\frac{∆ω}{∆t}=\frac{62.83}{0.75}=83.77 {rad}/{s^{2}}$$

$$V\_{1}=V\_{2} \rightarrow \left(rα\right)\_{1}∙t=\left(rα\right)\_{2}∙t \rightarrow α\_{1}=\frac{r\_{2}}{r\_{1}}α\_{2}=\frac{r}{R}α\_{2}=\frac{1}{4}\*83.77=20.94$$

$$I=\frac{mgr}{2α}-\frac{mr^{2}}{4}=\frac{50\*9.81\*0.015}{2\*20.94}-\frac{50\*0.015^{2}}{4}=0.172 kgm^{2}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{1}ω\_{1}^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}ω\_{2}^{2}$$

$$rω\_{2}=Rω\_{1} , c=\frac{R}{r}=\frac{80}{20}=4 \rightarrow ω\_{2}=cω\_{1}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{1}\left(ω\_{1}\right)^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}\left(cω\_{1}\right)^{2}=\frac{1}{2}\left[c^{2}I\_{2}+I\_{1}\right]ω\_{1}^{2}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{efc}ω\_{1}^{2}=\frac{1}{2}\left[c^{2}I\_{2}+I\_{1}\right]ω\_{1}^{2} \rightarrow I\_{efc}= c^{2}I\_{2}+I\_{1}$$

$$I\_{1}=16\*10^{-3} , I\_{2}=8.038\*10^{-3} \rightarrow I\_{efc}= 0.145 kgm^{2}$$

**خواسته های آزمایش**

1- رابطه ی مربوط به ممان اینرسی موثر گیربکس حول محور شماره ی 2 را بدست آورید.

$$T=\frac{1}{2}I\_{1}ω\_{1}^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}ω\_{2}^{2}+\frac{1}{2}I\_{3}ω\_{3}^{2}+\frac{1}{2}I\_{4}ω\_{4}^{2}$$

$$\frac{N}{n}=\frac{R}{r} \rightarrow c=\frac{R}{r}=\frac{80}{20}=4$$

$$rω\_{2}=Rω\_{1} \rightarrow ω\_{1}=\frac{1}{c}ω\_{2}$$

$$rω\_{3}=Rω\_{2} \rightarrow ω\_{3}=cω\_{2}$$

$$rω\_{4}=Rω\_{3} \rightarrow ω\_{4}=cω\_{3}=c\left(cω\_{2}\right)=c^{2}ω\_{2}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{1}\left(\frac{1}{c}ω\_{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}I\_{2}ω\_{2}^{2}+\frac{1}{2}I\_{3}\left(cω\_{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}I\_{4}\left(c^{2}ω\_{2}\right)^{2}$$

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^{2}}I\_{1}+I\_{2}+c^{2}I\_{3}+c^{4}I\_{4}\right]ω\_{2}^{2}$$

$$T=\frac{1}{2}I\_{efc}ω\_{2}^{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^{2}}I\_{1}+I\_{2}+c^{2}I\_{3}+c^{4}I\_{4}\right]ω\_{2}^{2} \rightarrow I\_{efc}= \frac{1}{c^{2}}I\_{1}+I\_{2}+c^{2}I\_{3}+c^{4}I\_{4}$$

2- با جایگذاری مقادیر ممان اینرسی اجزای گیربکس در رابطه ای که بدست آورده اید، ممان اینرسی موثر گیربکس را حول محور 2 محاسبه کنید.

$$I\_{1}=16\*10^{-3} , I\_{2}=16\*10^{-3} , I\_{3}=16\*10^{-3} , I\_{4}=8.038\*10^{-3}$$

$$I\_{efc}= \frac{1}{16}\*16\*10^{-3}+16\*10^{-3}+16\*16\*10^{-3}+64\*8.038\*10^{-3}=0.787kgm^{2}$$

۳- راندمان گیربکس را محاسبه کنید.

برای آزمایش اول:

$$η=\frac{E\_{kin}}{E\_{pot}}=\frac{\frac{1}{2}I\_{efc}ω\_{1}^{2}}{mgh}$$

$$ω\_{max}\_{1}=2.94 {rad}/{s} , α\_{1}=0.083 {rad}/{s^{2}}\rightarrow t=\frac{ω}{α}=\frac{2.94}{0.083}=35.42 s$$

این مقدار از روی کاغذ ثبات نیز قابل دسترسی بود.

$$h=\frac{1}{2}a\_{1}t^{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{rα}{2}\right)\_{1}t^{2}=\frac{1}{4}\left(0.015\*0.083\right)\*35.42^{2}=0.39m$$

$$η=\frac{\frac{1}{2}\*37.29\*2.94^{2}}{50\*9.81\*0.39}=0.84$$

برای آزمایش دوم:

$$η=\frac{E\_{kin}}{E\_{pot}}=\frac{\frac{1}{2}I\_{efc}ω\_{1}^{2}}{mgh}$$

$$ω\_{max}\_{1}=34.56 {rad}/{s} , α\_{1}=20.94 {rad}/{s^{2}}\rightarrow t=\frac{ω}{α}=\frac{34.56}{20.94}=1.65 s$$

$$h=\frac{1}{2}a\_{1}t^{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{rα}{2}\right)\_{1}t^{2}=\frac{1}{4}\left(0.015\*20.94\right)\*1.65^{2}=0.215 m$$

$$η=\frac{\frac{1}{2}\*0.145\*34.56^{2}}{50\*9.81\*0.215}=0.82$$