مقدمه

در مقایسه با سایر رشته ها، در رشته مهندسی مکانیک تعداد دروسی که در کنکور کارشناسی ارشد از آنها سئوالات تستی مطرح می شود زیاد است و ماهیت دروس نیز به نحوی می باشد که روابط ریاضی و تجربی فراوانی در آن بکار می روند. همین ویژگی سبب می شود که با مرور زمان این روابط به سادگی فراموش گردند. هدف از ارائه این چکیده آن است که در زمان نزدیک به کنکور کارشناسی ارشد که امکان دوره کامل دروس و روابط آنها وهمچنین امکان مطالعه کتاب و جزوات کامل در بازه زمانی کم باقیمانده وجود ندارد با مرور این چکیده، روابط فراموش شده به سرعت در ذهن تداعی گردد. برای کمک به این مهم، تعدادی تست نیز گنجانده شده که پس از یادآوری نکات و روابط این دروس آمادگی و سرعت عمل مورد نیاز برای شرکت در کنکور کارشناسی ارشد فراهم آید.

با آرزوی موفقیت

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته مکانیک	درس: ارتعاشات							
ردیف	سر فصل	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع در ۵ سال	نسبت از کل
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
1	مفاهیم اولیه ارتعاشات	0	0	1	0	1	2	7%
2	ارتعاشات آزاد سیستم های یک درجه آزادی بدون میرایی	1	1	0	1	0	3	10%
3	معادلات دیفرانسیل حرکت و فرکانس طبیعی بدون میرایی: ۱ روش نیوتن ۲ روش انرژی ۳روش رایلی ۴ روش سیستم‌های معادل	4	2	2	2	2	12	41%
4	ارتعاشات آزاد سیستم های یک درجه آزادی با میرایی	1	1	0	0	0	2	7%
5	مشخصه های مهم حرکت (فرکانس طبیعی میرایی، کاهش لگاریتمی، انرژی تلف شده و ...)	0	0	0	0	0	0	0%
6	ارتعاشات آزاد با میرایی کولمب	0	1	1	0	0	2	7%
7	استخراج و حل معادلات حرکت با میرایی	0	0	0	0	0	0	0%
8	تحریک سیستم های یک درجه آزادی	0	2	1	0	1	4	14%
9	ارتعاشات آزادسیستم های دو درجه آزادی	1	0	0	2	1	4	14%
10	ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم های چند درجه آزادی	0	0	0	0	0	0	0%
11	ارتعاشات سیستم های پیوسته	0	0	0	0	0	0	0%
جمع		7	7	5	5	5	29	100%

سیستم‌های ارتعاشی به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند

الف) سیستم‌های گسسته (Discrete systems) یا سیستم‌های با پارامترهای گسسته(Lumped- parameters systsms):
این سیستم‌ها که سیستم‌های با درجه آزادی محدود نیز نامیده می‌شوند دارای درجه آزادی معین و محدود بوده و رفتارشان به وسیله معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شوند. (مانند سیستم جرم و فنر).

ب) سیستم‌های پیوسته (Continuous systems) یا سیستم‌ها با پارامترهای توزیعی (Distributed parameters systems) : این سیستم‌ها که سیستم‌های با بی‌نهایت درجه آزادی نیز نامیده می‌شوند به‌گونه‌ای هستند که یک تابع وجود دارد که جابه‌جایی در هر نقطه سیستم فیزیکی یا جابه‌جایی در بی‌نهایت نقطه را مشخص می‌کند. رفتار این سیستم‌ها با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یا با مشتقات جزئی بیان می‌گردد. (مانند تیر)

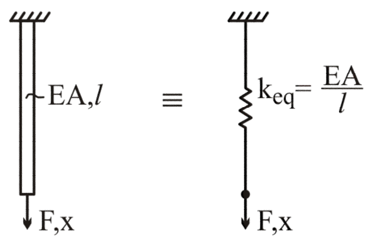
سیستم‌های ارتعاشی را می‌توان برحسب رفتارشان نیز طبقه‌بندی نمود. این سیستم‌های به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند.

الف) سیستم‌های خطی (Linear): سیستم‌هایی که معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آن‌ها خطی است.

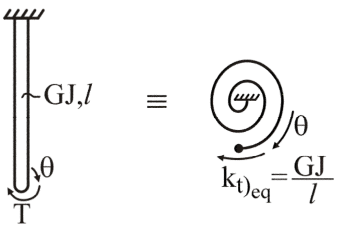
ب) سیستم‌های غیر خطی (Non linear) : سیستم‌هایی که معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آن‌ها غیرخطی است.

ارتعاشات به دو نوع عمومی ارتعاشات مستقیم‌الخط (rectilinear) و ارتعاشات پیچشی (torsional) تقسیم می‌گردد.
ارتعاشات مستقیم‌الخط خود نیز به دو دسته ارتعاشات طولی (longitudinal) و عرضی (transverse) تقسیم می‌گردد.
فنرها به دو دسته تقسیم می‌شوند.
الف ـ فنر انتقالی: فنری است که نیرو وارد بر فنر در راستای محور فنر بوده و تغییر طول فنر در همین راستا می‌باشد و برای نوع خطی آن رابطه نیروی فنر با تغییر طول آن به صورت $F = kx$ می‌باشد.
ب ـ فنر پیچشی: فنری است که گشتاور اعمالی به آن سبب پیچش یا تغییر زاویه فنر می‌گردد و برای نوع خطی آن رابطه گشتاور اعمالی با تغییر زاویه یا پیچش فنر به صورت $T = k_t\theta$ می‌باشد که در آن k_t ثابت پیچشی فنر نامیده می‌شود.
المان‌های الاستیک نظیر میله‌ها و تیرها را می‌توان با فنرهای انتقالی یا پیچشی معادل‌سازی نمود.

الف) میله یکنواخت با سطح مقطع A و طول ℓ که به صورت محوری بارگذاری شده است. (E مدول الاستیسته تیر است) EA را صلابت کششی (tensional rigidity) می‌نامند.



۲) میله دایروی به طول ℓ که ممان قطبی سطح مقطع آن J می‌باشد و تحت پیچش است. (G مدول پیچشی میله است) GJ را صلابت پیچشی (torsional rigidity) سطح مقطع می‌نامند.



یادداشت:

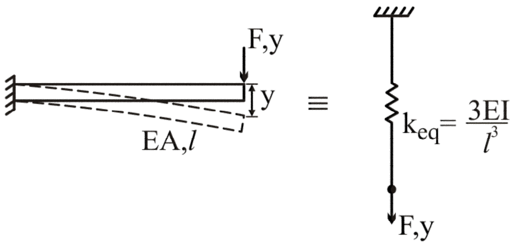
....

....

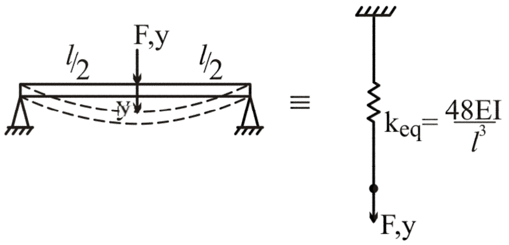
....

....

۳) تیریک سرگیردار به طول ℓ و گشتاور دوم سطح مقطع I که تحت نیروی عرضی در یک انتها است.



۴) تیر دو سر مفصل به طول ℓ و گشتاور دوم سطح مقطع I که تحت نیروی عرضی در وسطش می‌باشد.



۵) تیر دو سرگیردار به طول ℓ و گشتاور دوم سطح مقطع I که تحت نیروی عرضی در وسطش باشد: در این صورت $k_{eq}=\frac{192EI}{\ell^3}$ خواهد بود.

فنرهای معادل

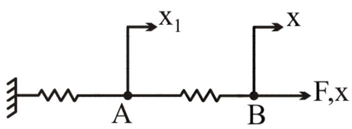
الف) فنرهای موازی

فنرهای انتقالی موازی فنرهایی هستند که تغییر طول‌شان یکسان است و ثابت فنر معادل عبارت است از $k_{eq}=k_1+k_2$ فنرهای پیچشی موازی فنرهایی هستند که زوایای پیچش یکسان دارند و ثابت فنر معادل عبارت است از $k_t)_{eq}=k_t)_1+k_t)_2$

ب) فنرهای سری

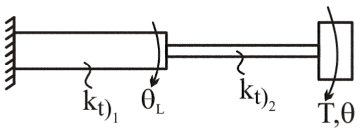
فنرهای انتقالی سری: در این فنرها تغییر طول فنر معادل برابر است با مجموع تغییر طول‌های دو فنر سری و ثابت فنر معادل از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$



$\boxed{x_2=x-x_1}$ (تغییر طول فنر دوم)

«فنرهای انتقالی سری»



«فنرهای پیچشی سری»

$\boxed{\theta_1+\theta_2=\theta}$

یادداشت:

....

....

....

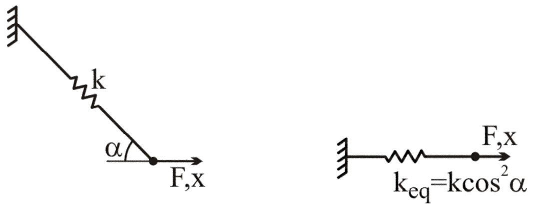
....

فنرهای پیچشی سری: در این فنرها زاویه پیچش فنر معادل برابر است با مجموع زوایای پیچش دو فنری سری و ثابت فنر پیچشی معادل از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{1}{k_t)_{eq}}=\frac{1}{k_t)_1}+\frac{1}{k_t)_2}$$

ج) فنر مایل

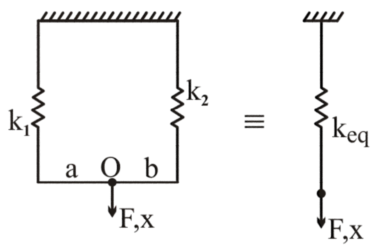
فنر مایل فنری است که جابه‌جایی سرفنر در راستای محور فنر نمی‌باشد.



نکته : دو فنر نشان داده در شکل به یک میله صلب با وزن ناچیز متصل هستند.

فنر معادل آن‌ها در نقطه O عبارت است از:

$$\frac{(a+b)^2}{k_{eq}}=\frac{b^2}{k_1}+\frac{q^2}{k_2}$$



د) فنر غیرخطی

اگر رابطه نیروی فنر $F(x)$ برحسب جابه‌جایی یا تغییر طول آن x یک رابطه غیرخطی باشد فنر خطی معادل آن در نقطه تعادل x_ℓ عبارت است از: $k_{eq}=F'(x_\ell)$

عموماً x_ℓ همان تغییر طول استاتیکی فنر δ_{st} می‌باشد که از رابطه $mg=F(\delta_{st})$ محاسبه می‌گردد.

المان‌های استهلاکی

این المان‌ها به چهار دسته زیر تقسیم می‌شود.

الف) میراکننده لزجی (میرائی سیال کند): نیروی میرائی در این نوع میراکننده عبارت است از $F_d=cv$ که در آن c ضریب میرائی نامیده می‌شود. اتلاف انرژی در یک سیکل برای ارتعاشات هارمونیک $x=X\sin\omega t$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E_d=\int F_d d_x=\int c\dot{x}dx=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c(\dot{x})\ (\dot{x}dt)=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\dot{x}^2dt=\pi c\omega X^2$$

یادداشت:

....

....

....

....

ب) میراکننده خشک: این نوع میرائی ناشی از حرکت یک جسم جامد بر روی یک سطح خشک با ضریب اصطکاک μ می‌باشد و نیروی میرائی عبارت است از:

$$F_d = \mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = \mu N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad \text{for} \quad \dot{x} \neq 0$$

اتلاف انرژی در یک سیکل برای ارتعاشات‌های هارمونیک $x = X \sin \omega t$ عبارت است از:

$$E_d = \int F_d d_x = \mu mg \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \dot{x} dt = 4\mu mgX$$

که در آن $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ تابع علامت می‌باشد.

ج) میراکننده سازه‌ای: این نوع میرائی اتلاف انرژی در مواد را به خاطر اصطکاک داخلی تشریح می‌کند. وقتی مواد به طور دوره‌ای تحت تنش قرار می‌گیرند انرژی در داخل ماده بطور داخلی تلف می‌شود. نیروی میرائی عبارت است از:

$$F = k\pi \frac{h}{2} \operatorname{sgn}(\dot{x}) |x|$$

اتلاف انرژی در یک سیکل برای ارتعاشات هارمونیک عبارت است از:

$$E_d = \int F_d d_x = \frac{k\pi h}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{sgn}(\dot{x}) |x| \dot{x} dt = k\pi h X^2$$

در روابط بالا h ضریب میرائی سازه‌ای می‌باشد.

د) میرائی سیال یا میرائی مربع سرعت (میرائی سیال تند): این نوع میرائی همراه سیستمی که در آن جرمی در یک محیط سیال نوسان می‌کند می‌باشد. نیروی میرائی برابر است با

$$F_d = c_d \dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x}) = c_d |\dot{x}| \dot{x}$$

که در آن c_d ضریب میرائی است.

سیستم‌های ارتعاشی یک درجه آزادی

اگر تعادل یک سیستم ارتعاشی به طور ناگهانی دستخوش تغییر گردد سیستم در این صورت به طور آزاد با فرکانس طبیعی (natural frequency) خود نوسان خواهد نمود. اگر به غیر از تحریک ابتدایی، تحریک بیشتری صورت نگیرد ارتعاش را ارتعاش آزاد می‌نامند و جسم با دامنه نوسان رو به نقصان یا کاهنده آنقدر نوسان خواهد نمود تا به حالت سکون درآید. این ارتعاش، ارتعاش گذرا (transient) نامیده می‌شود و کاهش دامنه نوسان به دلیل تبدیل تدریجی انرژی ارتعاشی به حرارت و صورت می‌باشد.

اگر یک نیرو یا حرکت تحریک تکرار شونده (متناوب) سبب ارتعاش یک سیستم گردد. ارتعاش را ارتعاش اجباری می‌نامند.

پریود نوسان $\tau[\sec]$: مدت زمان انجام یک نوسان را می‌نامند.

فرکانس خطی $f = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\sec}\right)$: تعداد نوسانات در واحد زمان می‌باشد.

فرکانس دایروی یا زاویه‌ای $\omega_n = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f \left[\frac{rad}{\sec}\right]$: زاویه طی شده در واحد زمان

یادداشت:

....

....

....

....

معادله حاکم بر ارتعاش سیستم جرم و فنر و پاسخ آن :

$$m\ddot{x}+kx=0 \quad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

$$x=X\sin(\omega_n+\varphi) \quad , \quad x=x_0\cos\omega_n t+\frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n \quad , \quad X=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n}{v_0}\right)$$

معادله حاکم بر پاندول ریسمانی:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$

برای نوسانات کوچک $\sin\theta\approx\theta$ و لذا

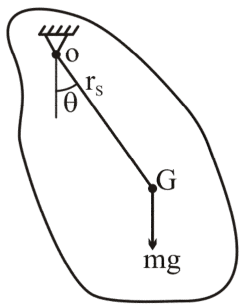
$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0 \quad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

نکته : ترکیب دو حرکت هارمونیک با دامنه‌های متفاوت و فرکانس و فاز یکسان یک حرکت هارمونیک با همان فرکانس و فاز متفاوت می‌باشد.

نکته : ترکیب دو حرکت هارمونیک با دامنه‌های برابر و فرکانس و فاز متفاوت یک حرکت هارمونیک با دامنه متغیر با زمان می‌باشد.

معادله حاکم بر نوسان پاندول مرکب یا فیزیکی

هر جسم صلب که در یک نقطه لولا باشد یک پاندول مرکب یا فیزیکی را بوجود می‌آورد.



$$J_0\ddot{\theta}+mgr_s\sin\theta=0 \xrightarrow{\sin\theta\approx\theta} \ddot{\theta}+\frac{mgr_s}{J_0}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{mgr_s}{J_0}}$$

که در آن J_0 ممان اینرسی جرمی پاندول حول نقطه O می‌باشد و r_s فاصله مرکز جرم تا تکیه‌گاه O است.

در حالت خاص که یک میله یکنواخت به طول ℓ و جرم m در یک انتها لولا شده است را درنظر بگیرید. در اینصورت $J_0=\frac{1}{3}m\ell^2$ و $r_s=\frac{\ell}{2}$ و لذا:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{mg\frac{\ell}{2}}{m\frac{\ell^2}{3}}}=\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

يادداشت:

....

....

....

....

نکته : شرط پایداری در سیستم‌های ارتعاشی مانند پاندول وارونه از مثبت فرض کردن عبارت زیر رادیکال که برای فرکانس طبیعی بدست آمده حاصل می‌شود.

روش انرژی برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت

در این روش از رابطه زیر در صورت صفر بودن کار نیروهای ناپایستار استفاده می‌شود.

$$\frac{d}{dt}(T+V)=0$$

که در آن T و V به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم هستند. در صورت وجود میرائی در سیستم بهتر است از معادله لاگرانژ استفاده نمود.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial V}{\partial q}+\frac{\partial D.E.}{\partial \dot{q}}=0$$

که در آن $D.E.=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$ تابع اتلافی و q مختصه عمومی به‌کار رفته می‌باشد.

نکته : در استفاده از روش نیوتن اگر نیروی وزن در فنر جابه‌جایی استاتیکی ایجاد نماید از آن صرفنظر می‌شود در عوض جابه‌جایی استاتیکی نیز منظور نمی‌گردد.

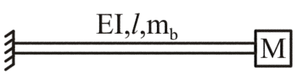
نکته : در استفاده از روش انرژی اگر نیروی وزن در فنر جابه‌جایی استاتیکی ایجاد نماید از انرژی پتانسیل ثقلی صرفنظر می‌شود و جابه‌جایی استاتیکی نیز در نظر گرفته نمی‌شود.

تأثیر جرم فنر روی فرکانس طبیعی سیستم

اگر بخواهیم اثر جرم فنر را روی فرکانس طبیعی سیستم در نظر بگیریم می‌بایستی $\frac{1}{3}$ جرم فنر را به جرم اصلی اضافه نمائیم.

تأثیر جرم تیر روی فرکانس طبیعی

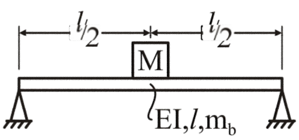
الف) تیر یکسوگیردار



$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{M+0.2357\,m_b}}=\sqrt{\frac{3EI/\ell^3}{M+0.2357\,m_b}}$$

که در آن m_b جرم تیر می‌باشد.

ب) تیر دو سر مفصل



$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{M+0.4857\,m_b}}=\sqrt{\frac{48EI/\ell^3}{M+0.4857\,m_b}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

نکته : اگر دو سیستم ارتعاشی معادل باشند انرژی جنبشی، پتانسیل و تابع اتلافی برای هر دو سیستم یکسان خواهد بود.

معادله حاکم بر حرکت سیستم جرم و فنر و میراکننده لزجی:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

روش رایلی برای محاسبه فرکانس طبیعی سیستم

در این روش با فرض ارتعاش هارمونیک و استفاده از رابطه $T_{max} = V_{max}$ فرکانس طبیعی سیستم به دست می‌آید. مثلاً برای سیستم جرم و فنر فرض می‌شود $x = X\sin\omega_n t$ و ماکزیمم انرژی جنبشی و پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\omega_n^2 X^2 \cos^2 nt \quad \rightarrow \quad T_{max} = \frac{m\omega_n^2 X^2}{2}$$

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{k}{2}X^2 \sin^2 \omega_n t \quad \Rightarrow \quad V_e)_{max} = \frac{kx^2}{2}$$

بنابراین

$$T_{max} = V_e)_{max} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ارتعاشات آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی با میراکننده

معادله حاکم بر حرکت $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ و معادله مشخصه عبارت است از $ms^2 + cs + k = 0$ مقداری از ضریب میرائی c که عبارت زیر رادیکال ریشه‌های معادله یعنی $s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$ را صفر می‌کند میرائی بحرانی نامیده می‌شود لذا

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$$

نکته : روش مناسب برای یافتن میرائی بحرانی مساوی صفر قرار دادن Δ معادله مشخصه می‌باشد.

نسبت میرائی (damping ratio) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

و بنابراین ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $s_{1,2} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$ به دست می‌آیند. بسته به مقدار ξ ریشه‌های معادله مشخصه دو عدد حقیقی منفی، مضاعف و یا موهومی خواهند بود.

الف) سیستم تحت میرا (Underdamped system)$(0 < \xi < 1)$ **:** در این صورت ریشه‌های معادله مشخصه دو عدد موهومی به صورت $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$ که در آن ω_n فرکانس طبیعی نامیرا و $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ فرکانس طبیعی میرا می‌باشد و پاسخ به صورت $x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t + Be^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t$ می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

ب) سیستم به طور بحرانی میرا شده $(\text{Critically damped system})(\xi=1)$ **:** در این صورت $s_1=s_2=-\omega_n$ و پاسخ به صورت $x(t)=(A+Bt)e^{-\omega_n t}$ می‌باشد.

ج) سیستم فوق میرا $(1<\xi)$ **:** در این صورت ریشه‌های معادله مشخصه دو عدد منفی به صورت $s_{1,2}=\omega_n\left(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}\right)$ است و پاسخ به صورت $x(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$ خواهد بود.

با اعمال شرایط اولیه $x(0)=x_0$ و $\dot{x}(0)=v_0$ به پاسخ‌های ارائه شده، برای مقادیر مختلف ξ نتیجه می‌شود.

الف) $(0<\xi<1)$

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left[x_0\cos\omega_d t+\left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right]=Xe^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi_d)$$

$$x=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}\quad,\quad \varphi_d=\tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_d}{v_0+\xi\omega_n}\right)$$

ب) $(\xi=1)$

$$x(t)=e^{-\omega_n t}\left[x_0+(v_0+x_0\omega_n t)\right]$$

ج) $(\xi>1)$

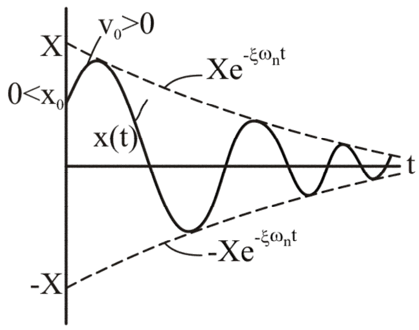
$$x(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$$

که A و B از حل دو معادله زیر به دست می‌آیند.

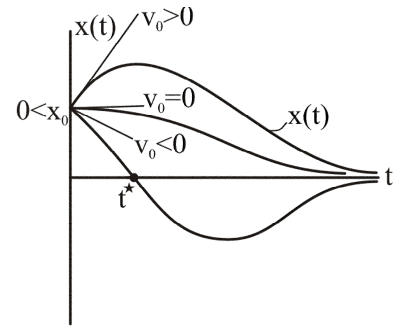
$$A+B=x_0$$

$$As_1+Bs_2=v_0$$

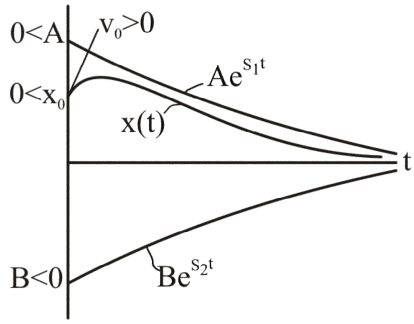
در ترسیم نمودار پاسخ برای مقادیر مختلف ξ می‌بایستی به این نکته توجه نمود که در نقطه شروع نمودار شیب منحنی پاسخ $\dot{x}(0)=v_0$ بوده و لذا اگر $v_0>0$ منحنی با شیب مثبت و اگر $v_0=0$ منحنی با شیب صفر یا افقی و اگر $v_0<0$ منحنی با شیب منفی شروع می‌شود.



$(0<\xi<1)$



$(\xi=1),\ t^*=\dfrac{-x_0}{v_0+x_0\omega_n},\ |v_0|<|x_0\omega_n|$



$(\xi>1)\ \text{for}\ A>0\ ,\ B<0\ ,\ |A|>|B|$

در حالت $0<\xi<1$ کاهش لگاریتمی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta=\text{Ln}\left(\frac{x(t)}{x(t+\tau_d)}\right)=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\text{Ln}\frac{x_1}{x_2}$$

که در آن $\tau_d=\dfrac{2\pi}{\omega_d}$ می‌باشد. در واقع کاهش لگاریتمی نسبت لگاریتم دو دامنه متوالی یا دو نقطه متناظر در دو سیکل متوالی است.

یادداشت:

....

....

....

....

کاهش لگاریتمی را می‌توان از نسبت دامنه‌ها در سیکل‌های غیرمتوالی نیز محاسبه نمود.

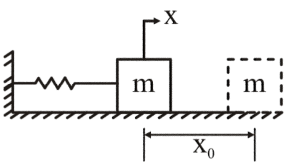
$$\delta=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\left(\frac{x(t)}{x(t+n\tau_d)}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

نسبت میرائی ξ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\xi=\frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$$

برای مقادیر $\xi<0.3$ نمودار δ برحسب ξ به صورت خطی $(\delta=2\pi\xi)$ و برای مقادیر $\xi>0.3$ نمودار به صورت منحنی $\left(\delta=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ که در $\xi=1$ دارای مجانب قائم است.

میرائی خشک



معادله حاکم بر ارتعاش به صورت $m\ddot{x}+kx+\mu mg\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}}=0$ می‌باشد. شرایط اولیه $x(0)=x_0$ و $\dot{x}(0)=0$ در نظر گرفته می‌شود.

در نیم پریود اول جرم به سمت چپ و در نیم پریود دوم به سمت راست حرکت می‌کند لذا معادلات حاکم بر حرکت عبارتند از:

$$m\ddot{x}+kx-\mu mg=0 \quad , \quad 0\le t\le\frac{\tau_n}{2}\le\frac{\pi}{\omega_n}$$

$$m\ddot{x}+kx+\mu mg=0 \quad , \quad \frac{\tau_n}{2}\le t\le\tau_n=\frac{2\pi}{\omega_n}$$

و پاسخ برای هر نیم پریود عبارت است از:

$$x(t)=A_1\cos\omega_n t+B_1\sin\omega_n t+x_f \quad 0\le t\le\frac{\pi}{\omega_n}$$

$$x(t)=A_2\cos\omega_n t+B_2\sin\omega_n t-x_f \quad \frac{\pi}{\omega_n}\le t\le\frac{2\pi}{\omega_n}$$

که در آن $x_f=\frac{\mu mg}{k}$ جابه‌جایی استاتیکی فنر نامیده می‌شود. با اعمال شرایط اولیه برای هر نیم پریود نتیجه می‌شود.

$$x(t)=(x_0+x_f)\cos\omega_n t+x_f \quad 0\le t\le\frac{\pi}{\omega_n}$$

$$x(t)=(x_0-3x_f)\cos\omega_n t-x_f \quad \frac{\pi}{\omega_n}\le t\le\frac{2\pi}{\omega_n}$$

توجه دارید که شرایط انتهایی نیم پریود اول در حکم شرایط ابتدایی نیم پریود دوم است. نمودار $x(t)$ به صورت زیر است.

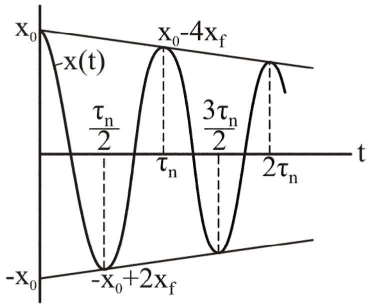
یادداشت:

....

....

....

....



نکته : ۱ـ فرکانس طبیعی یک سیستم نامیرا با افزوده شدن میرائی خشک تغییر نمی‌کند ولی با افزوده شدن میرائی لزجی کاهش می‌یابد. $(\omega_d < \omega_n)$

۲ـ در حضور میرائی خشک دامنه خطی کاهش می‌یابد و در هر نیم سیکل $2x_f$ کاهش می‌یابد ولی در حضور میرائی لزجی کاهش دامنه نمائی است.

۳ـ میرائی خشک منجر به توقف حرکت با جابه‌جایی دائمی از نقطه تعادل می‌گردد. دامنه زمانی که در داخل باند $-x_f \le x \le x_f$ قرار می‌گیرد جرم متوقف می‌شود. چرا که $|x| < |x_f| \Leftarrow k|x| < kx_f = \mu N$ یعنی نیروی فنر قادر به غلبه بر نیروی اصطکاک نمی‌باشد. درحالی‌که حرکت سیستم با میرایی لزجی با دامنه کاهنده تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد.

۴ـ در حضور میرائی خشک حرکت در سیکل n ام جایی که nکوچکترین عدد صحیحی است که شرط $n > \frac{1}{4}\left(\frac{x_0}{x_f} - 1\right)$ را ارضا می‌نماید متوقف می‌شود.

۵ـ در ارتعاش سیستم جرم و فنر در حضور میرائی خشک تحت تأثیر نیروی هارمونیک در حالت تشدید دامنه برخلاف میرائی لزجی بی‌نهایت می‌شود. در حضور میرائی لزجی دامنه در حول و حوش رزنانس افزایش می‌یابد ولی بی‌نهایت نمی‌شود.

میرائی معادل

میرائی لزجی معادل میرائی خشک

$$E_d = \pi c_{eq} \omega X^2 = 4F_d X = 4\mu mgX \quad \Rightarrow \quad c_{eq} = \frac{4F_d}{\pi\omega X} = \frac{4\mu mg}{\pi\omega X}$$

میرائی لزجی معادل میرائی سازه‌ای

$$E_d = \pi c_{eq} \omega X^2 = \pi hkX^2 \quad \Rightarrow \quad c_{eq} = \frac{kh}{\omega}$$

فنری که دارای میرائی سازه‌ای است می‌توان با سختی مختلط به صورت $k_{eq} = k(1 + ih)$ نمایش داد که در آن h ضریب میرائی سازه‌ای و k ثابت فنر می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

ارتعاشات اجباری تحت تأثیر تحریک هارمونیک

معادله حاکم بر حرکت عبارت است از $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$

پاسخ کلی سیستم شامل حل عمومی $\left(x_h=\bar{X}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_d t+\varphi_d\right)\right.$ که گذرا است و حل خصوصی یا حالت پایدار (steady state) $\left.x_{ss}=X\sin\left(\omega t-\varphi\right)\right)$ که در آن دامنه و فاز عبارتند از

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(l\omega\right)^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

در صورتی که نیروی تحریک به صورت $F(t)=F_0\cos\omega t$ و پاسخ به صورت $x_{ss}=X\cos\left(\omega t-\varphi\right)$ در نظر گرفته شود دامنه و فاز همان روابط بالا خواهند بود بنابراین در حالت کلی برای نیروی تحریک $F(t)=F_0e^{i\omega t}$ پاسخ حالت پایدار به صورت $x_{ss}(t)=Xe^{i(\omega t-\varphi)}$ خواهد بود که دامنه و فاز از روابط بالا به دست می‌آیند. دامنه و فاز در شکل بی‌بعد عبارتند از

$$\frac{X}{X_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}}\qquad \text{(ضریب تقویت)}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right)$$

که در آن $X_0=\frac{F_0}{k}$ (جابه‌جایی استاتیکی) و $\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}$ نسبت فرکانسی می‌باشد.

اگر $\omega\gg\omega_n$ آن‌گاه $mX\omega^2\gg mX\omega_n^2=mX\frac{k}{m}=kX$ یعنی دامنه نیروی اینرسی به طور قابل ملاحظه‌ای از دامنه نیروی فنر بزرگ‌تر خواهد بود نیروهای اعمالی به جرم عبارتند از:

$$\text{نیروی فنر}=kx=kXe^{i(\omega t-\varphi)}$$

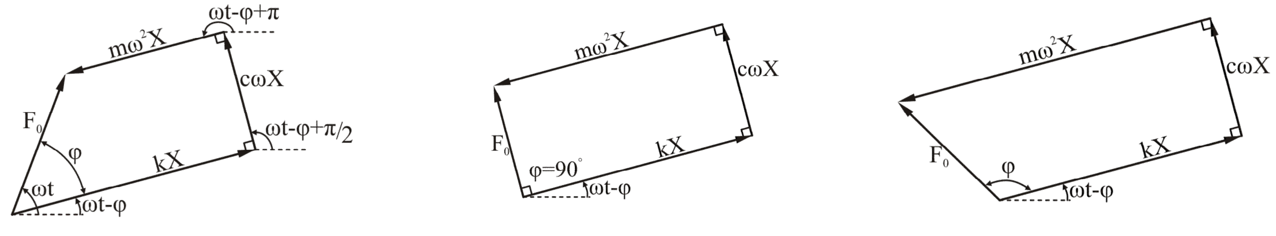
$$\text{نیروی دمپر}=c\dot{x}=ic\omega Xe^{i(\omega t-\varphi)}=c\omega Xe^{i\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\text{نیروی اینرسی}=m\ddot{x}=-m\omega^2Xe^{i(\omega t-\varphi)}=mX\omega^2e^{i(\omega t-\varphi+\pi)}$$

$$\text{نیروی تحریک خارجی}=F_0e^{i\omega t}$$

همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ حالت پایدار و نیروی فنر نسبت به نیروی تحریک خارجی به اندازه φ اختلاف فاز دارند. در ضمن نیروی دمپر نسبت به نیروی فنر 90° اختلاف فاز و نیروی اینرسی نسبت به نیروی فنر 180° اختلاف فاز دارند.

برای فرکانس‌های تحریکی که به طور قابل ملاحظه‌ای از فرکانس طبیعی سیستم بزرگ‌تر هستند $(\omega\gg\omega_n)$ دامنه نیروی دینامیکی اینرسی به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از دامنه نیروی استاتیکی فنر می‌باشد. نمودارهای زیر مقادیر نیروهای اعمالی به جرم و اختلاف فاز آن‌ها را در محدود فرکانسی مختلف به خوبی نشان می‌دهد.



الف) $\varphi<\frac{\pi}{2}\,,\ \omega\ll\omega_n$ ب) $\varphi=\frac{\pi}{2}\,,\ \omega=\omega_n$ ج) $\varphi>\frac{\pi}{2}\,,\ \omega\gg\omega_n$

یادداشت:

....

....

....

....

مطابق شکل (ب) در حالت رزنانس شرایط زیر برقرار است.

$kX = m\omega^2 X$ (دامنه نیروی اینرسی برابر است با دامنه نیروی فنر)

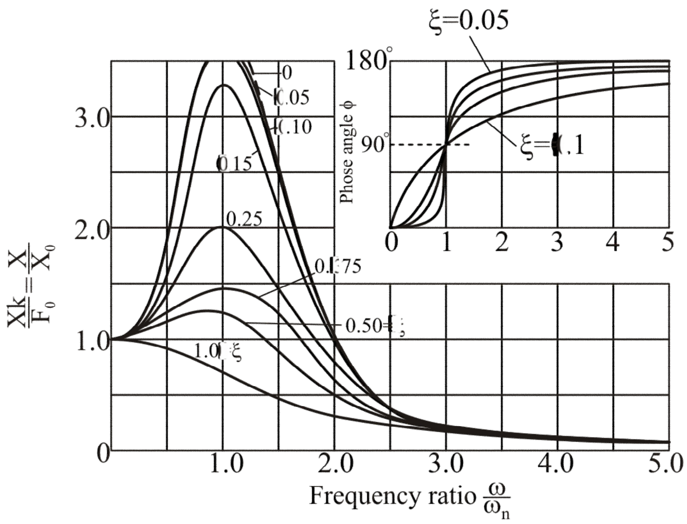
$c\omega X = F_0$ (دامنه نیروی دمپر برابر است با دامنه نیروی خارجی)

$\varphi = 90^\circ$

$\omega = \omega_n$

نمودار تغییرات دامنه بی‌بعد یا ضریب تقویت $\frac{X}{X_0}$ و زاویه فاز φ برحسب نسبت فرکانسی $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$

نمودار تغییرات دامنه بی‌بعد یا ضریب تقویت $\frac{X}{X_0}$ و زاویه فاز φ برحسب نسبت فرکانسی $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ در شکل‌های زیر مشاهده می‌گردد.



نکته: اگر $\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \xi$ آن‌گاه ضریب تقویت همواره کوچک‌تر از یک خواهد بود. $\left(\frac{X}{X_0} \leq 1\right)$

نکته: اگر $\frac{\sqrt{2}}{2} > \xi$ ضریب تقویت برای محدود فرکانس $\Omega > \sqrt{2\left(1-2\xi^2\right)}$ کوچک‌تر از یک خواهد بود.

نکته: اگر $0.5 \leq \xi$ باشد آن‌گاه ضریب تقویت در محدوده فرکانس که شروع آن بعد از رزنانس است کوچک‌تر از یک خواهد بود.

ارتعاش اجباری سیستم‌ها با میرائی خشک تحت تحریک هارمونیک

معادله حاکم عبارت است از

$$m\ddot{x} + kx + \mu mg\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}} = F_0 \sin\omega t$$

برای حل این معادله می‌توان میرائی خشک را با میرائی لزجی با ضریب میرائی معادل $c_{eq} = \frac{4F_d}{\pi\omega X}$ معادل نمود بنابراین معادله حاکم عبارت است از

$$m\dot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

$$x = X\sin\left(\omega t - \varphi\right)$$

یادداشت:

....

....

....

....

که در آن

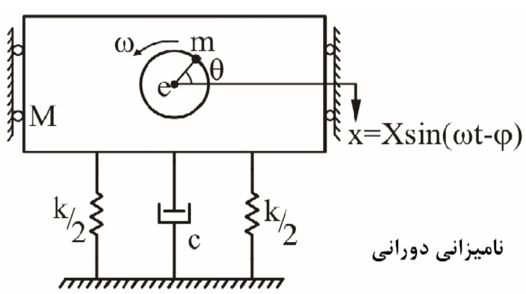
$$X=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(\frac{4F_d}{\pi X}\right)^2}}$$

با حل دامنه X از رابطه بالا نتیجه می‌شود.

$$X=\sqrt{\frac{F_0^2-\left(\frac{4F_d}{\pi}\right)^2}{\left(k-m\omega^2\right)^2}}=\frac{\sqrt{F_0^2-\left(\frac{4F_d}{\pi}\right)^2}}{\left|k-m\omega^2\right|}$$

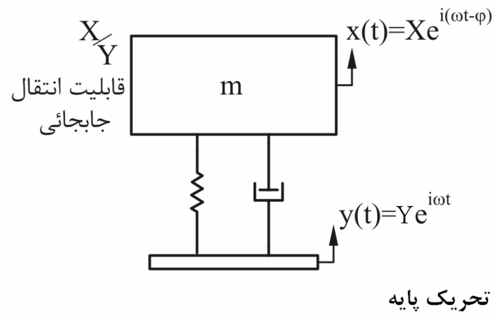
همانطور که مشاهده می‌شود این حل برای $e=\frac{F_d}{F_0}<\frac{\pi}{4}$ صادق است و در حالت رزنانس $\omega=\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ دامنه به بی‌نهایت میل می‌کند. در حالی‌که در حضور میرائی لزجی دامنه در حال رزنانس افزایش می‌یابد ولی بی‌نهایت نمی‌شود.

ارتعاش اجباری می‌تواند تحت تأثیر نامیزانی دورانی و تحریک پایه صورت بگیرد. روابط دامنه و فاز برای این تحریک‌ها در جدول زیر آورده شده است.



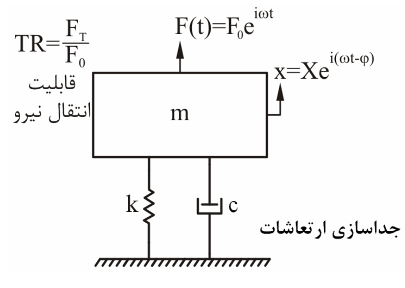
$$\frac{X}{\frac{me}{M}}=\frac{\Omega^2}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right)$$



$$\frac{X}{Y}=\sqrt{\frac{1+\left(2\xi\Omega\right)^2}{\left(1-\Omega^2\right)^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\Omega^3}{1-\Omega^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}\right)$$



$$TR=\frac{F_T}{F_0}=\sqrt{\frac{1+\left(2\xi\Omega\right)^2}{\left(1-\Omega^2\right)^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}}$$

F_T : دامنه نیروی منتقل شده به پایه

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\Omega^3}{1-\Omega^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}\right)$$

φ : اختلاف فاز نیروی منتقل شده به پایه نسبت به نیروی تحریک

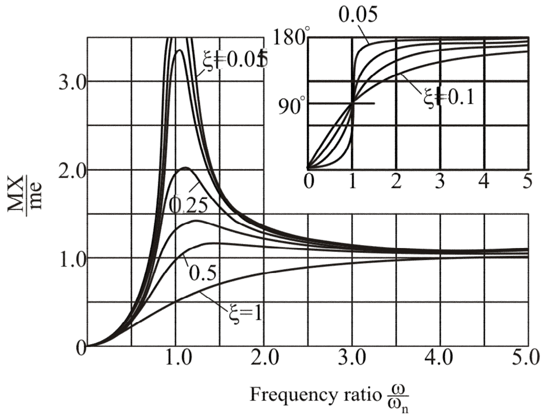
یادداشت:

....

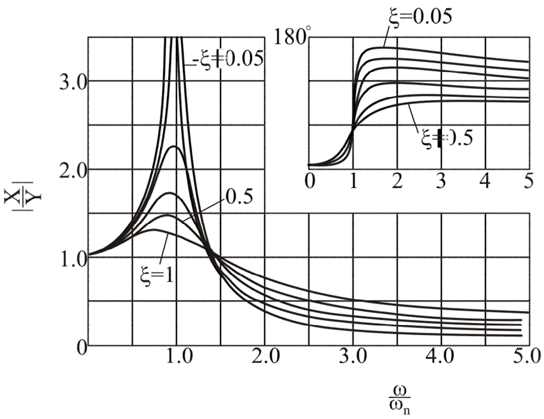
....

....

....



نمودار دامنه و فاز در اثر تحریک نامیرائی دورانی



نمودار دامنه و فاز برای تحریک پایه و جداسازی ارتعاشات

نکته : اگر فرکانس تحریک پایه از $\sqrt{2}$ برابر فرکانس طبیعی سیستم کوچکتر باشد $\left(\omega<\sqrt{2}\omega_n\right)$ از لحاظ تحریک پایه برای سیستم دارای میرائی $\frac{X}{Y}$ کوچک‌تر از سیستم فاقد میرائی است.

نکته : اگر فرکانس تحریک پایه از $\sqrt{2}$ برابر فرکانس طبیعی سیستم بزرگتر باشد $\left(\omega>\sqrt{2}\omega_n\right)$ از لحاظ تحریک پایه برای سیستم فاقد میرائی $\frac{X}{Y}$ کوچکتر از سیستم دارای میرائی است.

نکته : اگر فرکانس نیروی تحریک از $\sqrt{2}$ برابر فرکانس طبیعی سیستم کوچکتر باشد $\left(\omega<\sqrt{2}\omega_n\right)$ از لحاظ قابلیت انتقال نیرو سیستم دارای میرائی TR کمتری نسبت به سیستم فاقد میرائی است.

نکته : اگر فرکانس نیروی تحریک از $\sqrt{2}$ برابر فرکانس طبیعی سیستم بزرگتر باشد $\left(\omega>\sqrt{2}\omega_n\right)$ از لحاظ قابلیت انتقال نیرو سیستم فاقد میرائی TR کمتری نسبت به سیستم دارای میرائی است.

یادداشت:

....

....

....

....

ارتعاشات اجباری سیستم‌های یک درجه آزادی تحت تأثیر تحریک دلخواه

پاسخ سیستم به کمک انتگرال کانولوشن به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x(t)=\int_0^t f(\eta)h(t-\eta)d\eta$$

که در آن $f(t)$ نیروی تحریک دلخواه و $h(t)$ پاسخ سیستم به تحریک ضربه واحد می‌باشد. لازم به ذکر است که به کمک انتگرال کانولوئن تنها می‌توان پاسخ به شرایط اولیه صفر یعنی $x(0)=\dot{x}(0)=0$ را به دست آورد. برای شرایط اولیه اولیه غیرصفر می‌بایستی یک حل عمومی به آن اضافه نمود.

پاسخ به ضربه واحد برای سیستم‌های مختلف به شرح زیر است.

الف ـ سیستم جرم و فنر

$$h(t)=\frac{\sin\omega_n t}{m\omega_n}$$

ب ـ سیستم جرم و فنر و میراکننده لزجی $(0<\xi<1)$

$$h(t)=\frac{e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t}{m\omega_d}$$

ج ـ سیستم جرم و فنر و میراکننده لزجی $(\xi=1)$

$$h(t)=\frac{t}{m}e^{-\omega_n t}$$

دـ سیستم جرم و فنر و میراکننده لزجی $(\xi>1)$

$$h(t)=\frac{e^{-\xi\omega_n t}\sinh\omega'_d t}{m\omega'_d}$$

که در آن $\omega'_d=\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ می‌باشد.

پاسخ سیستم به تحریک پایه دلخواه $y(t)$:

$$x(t)=y(t)-m\int_0^t \ddot{y}(\eta)h(t-\eta)d\eta$$

و یا

$$x(t)=\int_0^t \left(c\dot{y}(\eta)+ky(\eta)\right)h(t-\eta)d\eta$$

ارتعاشات سیستم‌های چند درجه آزادی

تعداد مختصه‌های مستقل مورد نیاز جهت مشخص شدن موقعیت اجزای یک سیستم درجه آزادی آن سیستم نامیده می‌شود. اگر این مختصات برای تحلیل حرکت سیستم به‌کار رود آن‌ها را مختصات عمومی (generalized coordinates) می‌گویند.

تعداد مختصه‌های عمومی یا درجه آزادی سیستم یکتا است ولی خود مختصات عمومی یکتا نیستند.

معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم‌های چند درجه آزادی به شکل ماتریسی نوشته می‌شود.

۱) اگر ماتریس جرم قطری و ماتریس سختی غیرقطری باشد تنها کوپلینگ استاتیکی داریم.

۲) اگر ماتریس جرم غیرقطری و ماتریس سختی قطری باشد تنها کوپلینگ دینامیکی داریم.

یادداشت:

....

....

....

....

۳) اگر ماتریس جرم و سختی هر دو قطری می‌باشند کوپلینگ استاتیکی و دینامیکی نداریم.

۴) اگر ماتریس جرم و سختی هر دو غیر قطری باشند کوپلینگ استاتیکی و دینامیکی داریم.

مد طبیعی نوسان: مد طبیعی را نوسانی تعریف می‌کنیم که در آن تمامی جرم‌ها دارای حرکت هماهنگ با فرکانس و فاز یکسان هستند.

در برخورد با مسائل ارتعاشات سیستم‌های چند درجه آزادی مراحل زیر انجام می‌شود.

۱) نخست به کمک قوانین نیوتن یا اصل دالامبر یا با استفاده از معادلات لاگرانژ معادلات حاکم بر حرکت استخراج و به شکل ماتریس درمی‌آیند.

معادلات لاگرانژ عبارتند از:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i$$

که در آن T و V به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و q_i مختصات عمومی هستند. Q_i نیروهای تعمیم یافته نظیر مختصه q_i می‌باشند (شامل نیروهای خارجی و گشتاورهای خارجی که البته نیروی میراکننده لزجی و گشتاور ناشی از آن نیز با علامت منفی می‌توان جزء آن محسوب نمود).

۲) به کمک رابطه $\det\left([k]-\omega^2[M]\right)=0$ فرکانس‌های طبیعی سیستم محاسبه می‌شود.

۳) به کمک رابطه $\left([k]-\omega^2[M]\right)\{X\}=\{0\}$ نسبت دامنه‌ها را به ازاء فرکانس‌های طبیعی سیستم به دست آورده و بردارهای شکل مد و ماتریس شکل مد را تشکیل می‌دهیم.

۴) به کمک رابطه (تغییر متغیر) $\{q\}=\Psi^{-1}\{x\}$ معادلات دی‌کوپله می‌شوند و معادلات زیر حاصل می‌گردند.

$$\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1=0$$
$$\ddot{q}_2+\omega_2^2 q_2=0$$

.

.

.

که حل آن‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$q_1(t)=A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t$$
$$q_2(t)=A_2\cos t\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t$$

.

.

.

یادداشت:

....

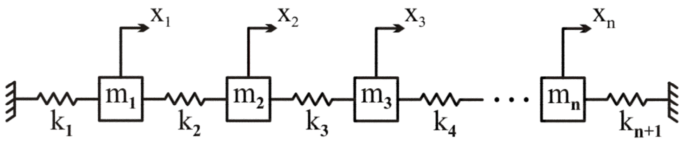
....

....

....

۵) به کمک رابطه $\{x\} = \Psi\{q\}$ بردار $\{x\}$ را یافته و با شرایط اولیه $\begin{cases} x_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \end{cases}$ و $\begin{cases} x_2(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{cases}$ و ... ثابت‌های B_i و A_i محاسبه می‌گردند.

ماتریس جرم و سختی برای سیستم n درجه آزادی شکل مقابل عبارتست از:



$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & m_n \end{bmatrix}$$

یک ماتریس قطری که اعضای قطر اصلی اجرام $m_n, ..., m_1$ هستند.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & 0 & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & \\ & & \dots & \dots & -k_n \\ & 0 & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس سه قطری که المان‌های قطر اصلی به ترتیب $k_n + k_{n+1}, ..., k_2 + k_3$ و اعضای دو قطر موازی قطر اصلی به ترتیب $-k_n, ..., -k_3, -k_2$ می‌باشند.

یادداشت:

....

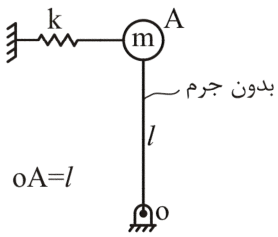
....

....

....

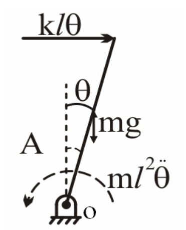
تستهای نمونه

۱ ـ فرکانس طبیعی با افزایش g (شتاب جاذبه) چگونه می‌شود.



۱) افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد
۳) فرق نمی‌کند
۴) بستگی به m و k و ℓ نیز دارد.

حل : گزینه ۲ درست است.



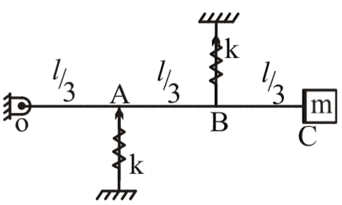
مجموع گشتاورها حول نقطه O صفر است.

$$m\ell^2\ddot{\theta}+(k\ell\theta)\ell-mg\left(\frac{\ell}{2}\underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta}+\frac{k\ell-\frac{mg}{2}}{m\ell}\theta=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k\ell-mg}{2m\ell}}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{g}{2\ell}}$$

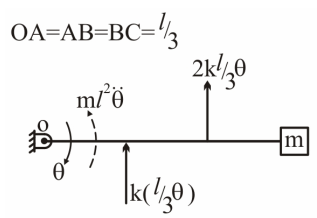
لذا با افزایش g فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

۲ ـ فرکانس طبیعی سیستم شکل مقابل چقدر است؟



۱) $\omega_n=\sqrt{\frac{5k}{m}}$
۲) $\omega_n=\frac{1}{3}\sqrt{5k/m}$
۳) $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{5m}}$
۴) $\omega_n=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{5m}}$

حل : گزینه ۲ درست است



یادداشت:

....
....
....
....

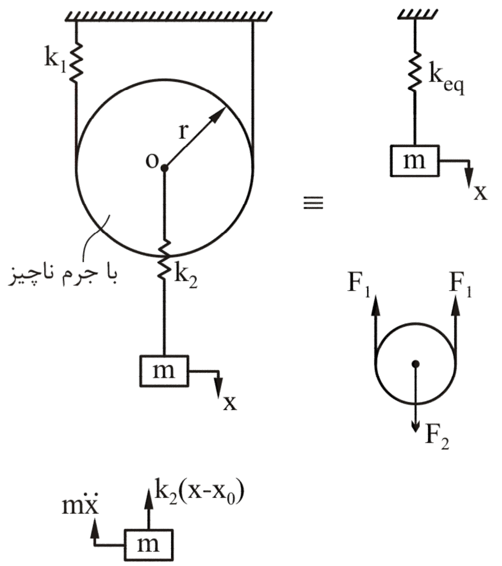
مجموع گشتاورها حول نقطه O صفر است.

$$m\ell^2\ddot{\theta}+\left(\frac{k\ell}{3}\theta\right)\frac{\ell}{3}+\left(\frac{2k\ell}{3}\theta\right)\left(\frac{2\ell}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad m\ell^2\ddot{\theta}+\frac{5k\ell^2}{9}\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}+\frac{5k}{9m}\theta=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{5k}{9m}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5k}{m}}$$

۳ ـ در شکل مقابل k_{eq} برابر است با؟



۱) $k_{eq}=\dfrac{k_1k_2}{4(k_1+k_2)}$

۲) $k_{eq}=\dfrac{4k_1k_2}{k_1+k_2}$

۳) $k_{eq}=\dfrac{4k_1k_2}{4k_1+k_2}$

۴) $k_{eq}=\dfrac{4k_1k_2}{k_1+4k_2}$

حل : گزینه ۳ درست است

تعادل نیروها مطابق شکل ایجاب می‌کند که

$$\begin{cases}2F_1=F_2\\ F_1=k_1(2x_o)\\ F_2=k_2(x-x_o)\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4k_1x_o=k_2(x-x_o) \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4k_1+k_2}{k_2}x_o \quad \Rightarrow \quad x_o=\frac{k_2x}{4k_1+k_2}$$

$$m\ddot{x}+k_2(x-x_o)=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}+k_2\left(x-\frac{k_2x}{4k_1+k_2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}+\frac{4k_1k_2}{4k_1+k_2}x=0 \quad , \quad m\ddot{x}+k_{eq}x=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{eq}=\frac{4k_1k_2}{4k_1+k_2}}$$

یادداشت:

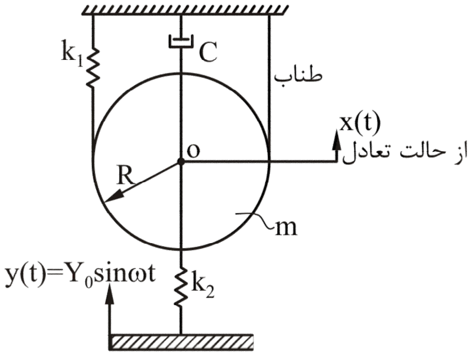
....

....

....

....

۴ ـ با توجه به شکل نشان داده شده استوانه‌ای به جرم m و شعاع R نگهداری شده است. پایه فنر k_2 دارای حرکت هارمونیک $y(t) = Y_0 \sin \omega t$ می‌باشد. معادله حرکت این سیستم کدام است؟ x تغییر مکان مرکز جرم دیسک است؟ (تست کنکور سال ۸۶)



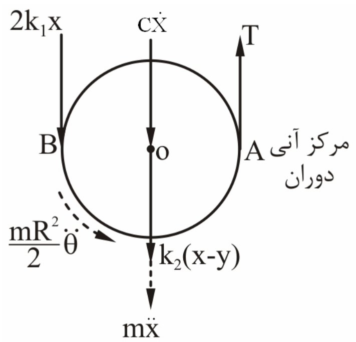
۱) $\frac{3m}{2}\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + k_2)x = k_2 Y_0 \sin \omega t$

۲) $\frac{3m}{2}\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 Y_0 \sin \omega t$

۳) $\frac{1}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + k_2)x = k_2 Y_0 \cos \omega t$

۴) $\frac{3m}{2}\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + 4k_2)x = k_2 Y_0 \cos \omega t$

حل: گزینه ۱ درست است



مجموع گشتاورها حول نقطه A صفر است یعنی

$$\left[m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2(x-y)\right]R + 2R(2k_1x) + \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2(x-y) + 4k_1x + \frac{mR\ddot{\theta}}{2} = 0 \quad \xrightarrow[\ddot{x}=R\ddot{\theta}]{x=R\theta} \quad \frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + k_2)x = k_2 y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{3m}{2}\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + k_2)x = k_2 Y_0 \sin \omega t}$$

اگر $c = y = 0$ و $k_1 = k_2 = k$ آنگاه پاسخ تست کنکور سال ۸۷ به دست می‌آید.

۵ ـ فرکانس ارتعاشات آزاد یک سیستم یک درجه آزادی با استهلاک کم ...

۱) بسته به میزان استهلاک ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از فرکانس طبیعی غیراستهلاکی آن باشد.

۲) بستگی به دامنه ارتعاشات دارد.

۳) همیشه بزرگتر از فرکانس طبیعی غیراستهلاکی است.

۴) هیمشه کوچکتر از فرکانس طبیعی غیراستهلاکی است.

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\underbrace{\omega_d}_{\text{فرکانس طبیعی استهلاکی}} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_d < \underbrace{\omega_n}_{\text{فرکانس طبیعی غیر استهلاکی}} \quad \Rightarrow$$

یادداشت:

....

....

....

....

۶ـ در حالت رزنانس انرژی اتلافی در هر سیکل توسط میرائی لزجی برابر است با

۱) $2\pi kX^2$

۲) $\pi\xi kX^2$

۳) $2\pi\xi X^2$

۴) $\pi\xi X^2$

حل : گزینه ۱ درست است.

انرژی اتلافی در هر سیکل توسط میرائی $= \pi c\omega X^2 \xrightarrow{\omega=\omega_n} \pi c\omega_n X^2 \xrightarrow[\xi=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}]{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}}$

$$= \pi\left(2\xi\sqrt{km}\right)\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X^2 = \boxed{2\pi\xi kX^2}$$

۷ـ با توجه به اضافه نمودن جاذب دینامیکی ارتعاشات به سیستم اصلی، کدام گزینه غلط است؟

۱) جرم اصلی و جرم جاذب، هم فاز حرکت خواهند نمود.

۲) ارتعاشات سیستم اصلی صفر ولی سیستم فرعی ارتعاش می‌کند.

۳) مقدار نیروی وارده از طرف جاذب برابر نیروی تحریک است.

۴) فرکانس طبیعی سیستم جاذب به طور مجزا برابر فرکانس تحریک است.

حل : گزینه ۱ درست است.

چرا که جرم اصلی و جاذب غیرهم فاز حرکت می‌کنند.

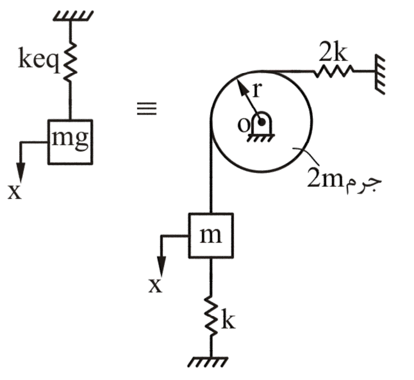
۸ـ در سیستم شکل مقابل ثابت فنر معادل و جرم معادل برابر است با

۱) $\frac{3k}{2}, 2m$

۲) $\frac{k}{2}, 2m$

۳) $3k, m$

۴) $2k, 2m$



حل : گزینه ۳ درست است.

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(2k)x^2 = \frac{3k}{2}x^2 = \frac{1}{2}k_{eq}x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{eq} = 3k}$$

یادداشت:

....

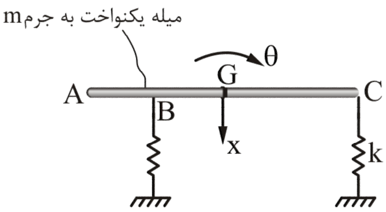
....

....

....

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}I_0\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2mr^2\right)\frac{\dot{x}^2}{r^2}$$
$$=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{m\dot{x}^2}{2}=m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{m_{eq}=2m}$$

۹ ـ یکی از معادلات حاکم بر حرکت سیستم شکل مقابل را بنویسید.



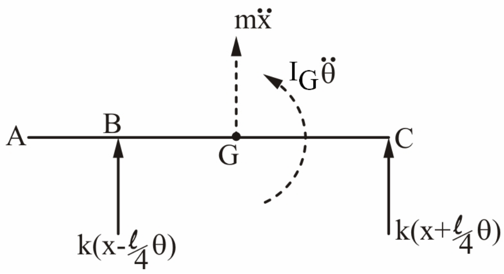
۱) $2m\ddot{x}+2kx+k\ell\theta=0$

۲) $m\ddot{x}+2kx+k\ell\theta=0$

۳) $2m\ddot{x}+2kx+k\frac{\ell}{4}\theta=0$

۴) $m\ddot{x}+2kx+k\frac{\ell}{4}\theta=0$

حل : گزینه ۴ درست است

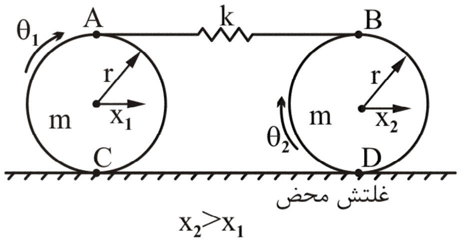


$$AB=\frac{\ell}{4}\ ,\ BC=3\frac{\ell}{4}\ ,\ BG=\frac{\ell}{4}$$

$$m\ddot{x}+k\left(x-\frac{\ell}{4}\theta\right)+k\left(x+\frac{\ell}{2}\theta\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{m\ddot{x}+2kx+k\frac{\ell}{4}\theta=0}$$

$$I_G\ddot{\theta}+k\frac{\ell}{2}\left(x+\frac{\ell}{2}\theta\right)-k\frac{\ell}{4}\left(x-\frac{\ell}{4}\theta\right)-M(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{I_G\ddot{\theta}+k\frac{\ell}{4}x+\frac{5}{16}k\ell^2\theta=M(t)}$$

۱۰ ـ مطلوب است معادلات حاکم بر حرکت سیستم شکل مقابل



۱) $\begin{cases}\frac{3}{2}m\ddot{x}_1+4x_1-4kx_2=0\\ \frac{3}{2}m\ddot{x}_2-4kx_1+4kx_2=0\end{cases}$

۲) $\begin{cases}m\ddot{x}_2+4kx_1-4kx_2=0\\ m\ddot{x}_2-4kx_1+4kx_2=0\end{cases}$

۳) $\begin{cases}m\ddot{x}_1+2kx_1-2kx_2=0\\ m\ddot{x}_2-2kx_1+2kx_2=0\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\frac{3}{2}m\ddot{x}_1+2kx_1-2kx_2=0\\ \frac{3}{2}m\ddot{x}_2-2kx_1+2kx_2=0\end{cases}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل : گزینه ۱ درست است

$$x_1 = r\theta_1, x_2 = r\theta_2 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{r} \quad , \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{x}_2}{r}$$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\theta}_2^2$

$$I_C = I_D = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$$

انرژی پتانسیل $V_e = \frac{1}{2}k\left(2x_2 - 2x_1\right)^2 = 2k\left(x_2 - x_1\right)^2$

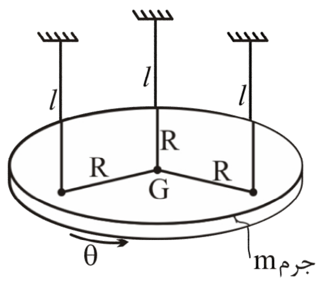
(لاگرانژین) $L = T - V_e = \frac{3}{4}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - 2k\left(x_2 - x_1\right)^2$

معادلات لاگرانژ : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}m\dot{x}_1\right) + 4k(-1)\left(x_2 - x_1\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - 4kx_2 = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}m\dot{x}_2\right) + 4k\left(x_2 - x_1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 - 4kx_1 + 4kx_2 = 0$$

۱۱ ـ چرخ لنگری به جرم m در صفحه افقی از سه سیم به طول ℓ، در دایره‌ای به شعاع R متر به فواصل مساوی آویخته شده است. اگر زمان نوسان حول محور قائم در مرکز چرخ τ_n ثانیه باشد، شعاع ژیراسیون برابر است با:



۱) $K_0 = \frac{\tau_n}{2\pi R}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

۲) $K_0 = \frac{\tau_n R}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

۳) $K_0 = \frac{\tau_n}{2R}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

۴) $K_0 = \tau_n\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

حل : گزینه ۲ درست است.

اگر φ زاویه ریسمان نسبت به محور قائم پس از دوران چرخ لنگر به اندازه θ باشد داریم:

$$\begin{cases} 3T\cos\varphi = mg \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{mg}{3\cos\varphi} \qquad\qquad R\theta = \ell\varphi \\ \left(3T\sin\varphi\right)R + I_G\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad I_G\ddot{\theta} + 3\sin\varphi\left(\dfrac{mg}{3\cos\varphi}\right)R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_G\ddot{\theta} + mgR\tan\varphi = 0 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

اگر φ کوچک باشد $\tan\varphi \simeq \varphi$ لذا داریم

$$I_G\ddot{\theta} + mgR\varphi = 0$$

$$\xrightarrow{\varphi=\frac{R}{\ell}\theta} I_G\ddot{\theta} + mgR\left(\frac{R}{\ell}\theta\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgR^2}{I_G\ell}\theta = 0 \Rightarrow$$

از طرف دیگر شعاع ژیراسیون از رابطه $K_0 = \sqrt{\frac{I_G}{m}}$ محاسبه می‌گردد.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgR^2}{I_G\ell}} = \frac{2\pi}{\tau_n}$$

$$\frac{2\pi}{\tau_n} = \sqrt{\frac{gR^2}{\ell}}\frac{1}{K_0} \Rightarrow \frac{1}{K_0} = \frac{2\pi}{\tau_n R}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow K_0 = \frac{\tau_n R}{2n}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

یادداشت:

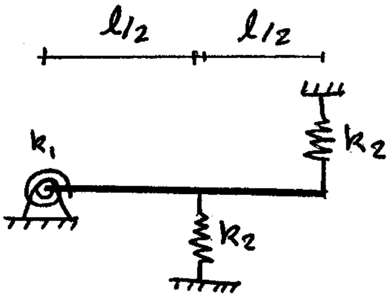
....

....

....

....

۱ ـ فرکانس طبیعی سیستم نشان داده شده کدام است؟ (جرم میله برابر با m است).



۱) $\sqrt{\dfrac{12k_1 + k_2\ell^2}{4m\ell^2}}$

۲) $\sqrt{\dfrac{12k_1 + 15k_2}{4m}}$

۳) $\sqrt{\dfrac{12k_1 + 15k_2\ell^2}{4m\ell^2}}$

۴) $\sqrt{\dfrac{12k_1 + k_2}{4m}}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$K.E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

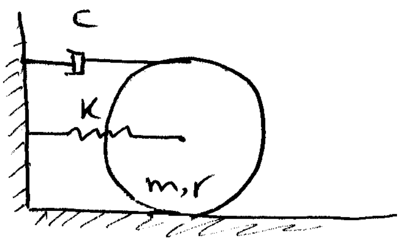
$$P.E = \frac{1}{2}\left[k_1\theta^2 + k_2\left(\frac{\ell}{2}\theta\right)^2 + k_2(\ell\theta)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[k_1 + \frac{k_2\ell^2}{4} + k_2\ell^2\right]\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[K.E + P.E\right] = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + \left[k_1 + \frac{5}{4}k_2\ell^2\right]\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + \frac{5}{4}k_2\ell^2}{J}} = \sqrt{\frac{12k_1 + 15k_2\ell^2}{4m\ell^2}}$$

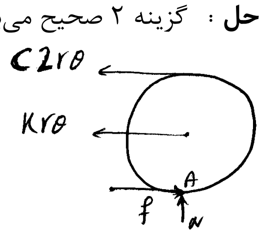
۲ ـ فرکانس میرایی نوسان سیستم روبرو کدام است؟



۱) $\sqrt{\dfrac{k}{2m} - \dfrac{9c^2}{4m^2}}$ ۲) $\sqrt{\dfrac{2k}{3m} - \dfrac{16c^2}{9m^2}}$

۳) $\sqrt{\dfrac{3k}{2m} - \dfrac{9c^2}{4m^2}}$ ۴) $\sqrt{\dfrac{2k}{m} - \dfrac{16c^2}{9m^2}}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.



$$\sum M_A = I_A\alpha$$

یادداشت:

....

....

....

....

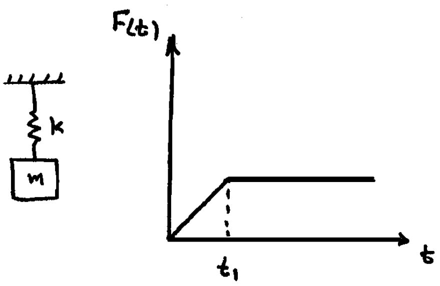
$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}+4cr^2\dot{\theta}+Kr^2\theta=0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}m\ddot{\theta}+4c\dot{\theta}+K\theta=0$$

$$M_{eq}=\frac{3}{2}m \quad , \quad C_{eq}=4c \quad , \quad K_{eq}=k$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}-\left(\frac{C_{eq}}{2M_{eq}}\right)^2}=\sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}m}-\left(\frac{4c}{3m}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2K}{3m}-\frac{16c^2}{9m^2}}$$

۳ـ پاسخ سیستم به ورودی $F(t)$ نشان داده شده کدام است؟ $(t>t_1)$



۱) $\frac{1}{k\omega_n}\left[\sin\omega_n t-\sin\omega_n\left(t-t_1\right)\right]$

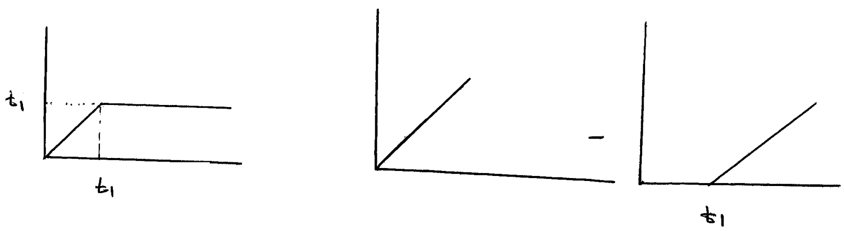
۲) $\frac{1}{k\omega_n}\left[\sin\omega_n t-\sin\omega_n\left(t-t_1\right)-1\right]$

۳) $\frac{1}{k}\left[\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}-\frac{\sin\omega_n\left(t-t_1\right)}{\omega_n}-1\right]$

۴) $\frac{1}{k\omega_n}\sin\omega_n\left(t-t_1\right)$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

حال با استفاده از سوپر پوزیشن:



پاسخ سیستم به شیب واحد:

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)dt=\int_0^t \tau\times\frac{1}{m\omega_n}\sin\left(\omega_n\left(t-\tau\right)\right)d\tau=\frac{1}{k}\left(1-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)$$

پاسخ نهایی سیستم:

$$x(t)=x_1(t)-x_2(t)=\frac{1}{k\omega_n}\left(\sin\omega_n t-\sin\omega_n\left(t-t_1\right)\right)$$

یادداشت:

....

....

....

....

۴ـ اگر نیروی وارد بر یک جرم و فنر ساده به‌صورت $F(t)=200\sin\omega t$ باشد و X نشان‌دهندهٔ حداکثر دامنه نوسان باشد ω را چنان تعیین کنید که همواره $|X|<\frac{1}{2}$ باشد؟ $\left(K=100\frac{N}{m} \quad , \quad m=1kg\right)$

۱) $\omega>20\frac{rad}{s}$ ۲) $\omega>50\frac{rad}{s}$ ۳) $\omega>10\sqrt{5}\,\frac{rad}{s}$ ۴) $\omega>10\sqrt{2}\,\frac{rad}{s}$

حل : گزینه ۳ درست است.

باتوجه به عدم وجود دمپر در سیستم و با حل معادلهٔ $m\ddot{x}+Kx=F_0\sin\omega t$ برای حل پایدار بدست می‌آید:

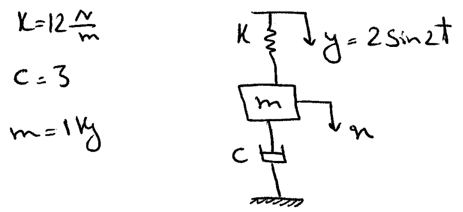
$$x=\frac{F_0}{m\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}\sin\omega t \quad , \quad x=X\sin\omega t$$

$$X=\frac{F_0}{m\left(\omega_n^2-\omega^2\right)} \quad , \quad |x|<\frac{1}{2} \quad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{100}{1}}=10$$

$$|X|=\left|\frac{200}{10^2-\omega^2}\right|<\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}0<\frac{200}{10^2-\omega^2}<\frac{1}{2}\rightarrow\frac{100-\omega^2}{200}>2\rightarrow\omega^2<-300\\-\frac{1}{2}<\frac{200}{10^2-\omega^2}<0\rightarrow\frac{100-\omega^2}{200}<-2\rightarrow\omega^2>500\end{cases}\rightarrow\omega>10\sqrt{5}$$

البته رابطه اول تناقض است.

۵ـ دامنه نوسان سیستم نشان داده شده کدام است؟



۱) 2.4

۲) 2.5

۳) 2.2

۴) 2.25

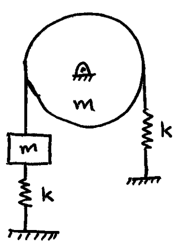
حل : گزینه ۱ درست است.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=Ky=KA\sin\omega t\equiv F_0\sin\omega t$$

معادله فوق شبیه معادله $m\ddot{x}+Kx+c\dot{x}=F_0\sin\omega t$ است که در آن F_0 با KA جایگزین شده است بنابراین

$$|x|=\frac{KA}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}=\frac{12\times2}{\sqrt{8^2+6^2}}=2.4$$

۶ـ فرکانس طبیعی سیستم جرم و فنر و دیسک نشان داده شده کدام است؟



۱) $\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{k}{m}}$

۳) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ۴) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل : گزینه ۲ درست است.

$$k.E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[P.E + k.E.\right] = 0$$

$$\Rightarrow\ m\dot{x}\ddot{x} + \frac{J_0}{r^2}\dot{x}\ddot{x} + 2kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m + \frac{J_0}{r^2}}x = 0$$

$$\Rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{2k}{m + \frac{1}{2}m}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۷ ـ دامنه یک سیستم جرم و فنر و دمپر در ارتعاشات آزاد پس از 10 سیکل نصف می‌شود، در ارتعاش اجباری این سیستم توسط نیروی $F = F_0 \sin\omega_n t$ حاصل تقریبی $\frac{KX}{F_0}$ کدام است؟ $(\ln 2 \simeq 0.7)$

۱) 62 ۲) 31 ۳) 45 ۴) 90

حل : گزینه ۳ درست است.

باتوجه به رابطه کاهش لگاریتمی برای یافتن ξ می‌نویسیم:

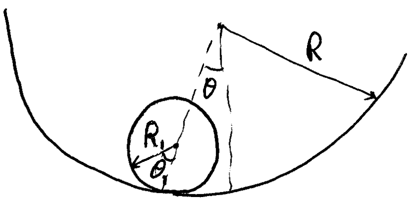
$$\delta = \frac{1}{n}\ell n\frac{X_0}{X_n} = \frac{1}{10}\ell n 2 = 0.07$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow 49\times10^{-4} = \frac{4\pi^2\xi^2}{1-\xi^2} \rightarrow \xi^2 \simeq \frac{49\times10^{-4}}{4\pi^2} \rightarrow \xi = \frac{7\times10^{-2}}{2\pi}$$

در $\omega = \omega_n$ دامنه نوسانات به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{kX}{F_0}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\xi} = \frac{\pi}{7\times10^{-2}} \simeq 45$$

۸ ـ فرکانس طبیعی سیستم ارتعاشی نشان داده شده کدام است؟ (لغزش وجود ندارد.)



۱) $\sqrt{\frac{3g}{2(R-R_1)}}$ ۲) $\sqrt{\frac{4g}{3(R-R_1)}}$

۳) $\sqrt{\frac{2g}{3(R-R_1)}}$ ۴) $\sqrt{\frac{3g}{4(R-R_1)}}$

یادداشت:

....

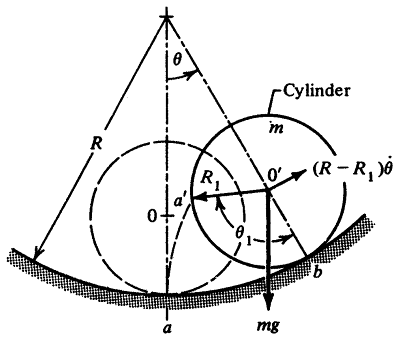
....

....

....

حل : گزینه ۳ درست است.

سرعت مرکز جرم استوانه $(R - R_1)\dot{\theta}$ است و سرعت زاویه مطلق آن $(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta})$ چون استوانه غلطش ناب دارد بنابراین



$$\widehat{ab} = \widehat{a'b} \Rightarrow R\theta = R_1\theta_1$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\left(R - R_1\right)\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}J_0\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)^2 \quad , \quad J_0 = \frac{1}{2}mR_1^2$$

$$u = mg\left(R - R_1\right)\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(T - U\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{2}m\left(R - R_1\right)^2\ddot{\theta} + mg\left(R - R_1\right)\sin\theta\right)\dot{\theta} = 0 \quad , \quad \sin\theta \simeq \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3\left(R - R_1\right)}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3\left(R - R_1\right)}}$$

یادداشت:

....

....

....

....