

ارتعاشات تحت تحریک هارمونیک

۱- نسبت دامنه ماکزیمم به دامنه رزونانس برای ارتعاش حالت پایدار یک سیستم میرای ویسکوز تحت تأثیر نیروی هارمونیک چیست؟

حل:

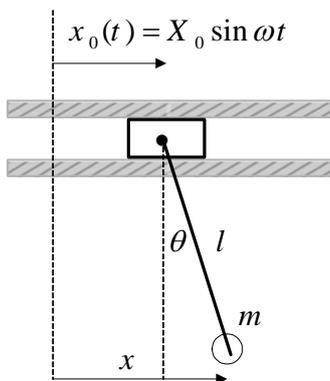
$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad X_0 = \delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

$$\text{Resonance : } r = 1 \Rightarrow \frac{X_{res}}{X_0} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\text{Maximum amplitude : } \frac{d}{dr} \left( \frac{X}{X_0} \right) = 0 \Rightarrow 2(-2r)(1-r^2) + 2(2\xi)(2\xi r) = 0 \Rightarrow$$

$$r = 0, \quad r = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \frac{X_{max}}{X_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \frac{X_{max}}{X_{res}} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

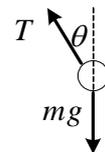
۲- جرم  $m$  توسط یک میله بدون جرم به لغزنده‌ای متصل شده که در یک شیپار افقی حرکت نوسانی با معادله  $x_0 = X_0 \sin \omega t$  انجام می‌دهد. محل تشکیل گره در میله و فرکانسی را که در آن اولین گره به وجود می‌آید، تعیین کنید.



حل:

با توجه به دیاگرام آزاد جرم  $m$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= l \sin \theta \\ \begin{cases} m\ddot{x} = -T \sin \theta \\ mg = T \cos \theta \end{cases} &\Rightarrow \ddot{x} = -g \tan \theta \end{aligned}$$



$$\text{for small oscillations : } \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x - x_0}{l}$$

بنابراین:

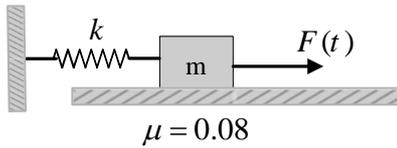
$$\ddot{x} = -g \left( \frac{x - x_0}{l} \right) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l} x = \frac{g}{l} X_0 \sin \omega t$$

$$x = X \sin \omega t \Rightarrow -X \omega^2 \sin \omega t + \frac{g}{l} X \sin \omega t = \frac{g}{l} X_0 \sin \omega t \Rightarrow X = \frac{(g/l) X_0}{(g/l) - \omega^2}$$

$$\text{On the node : } X = -X_0 \Rightarrow -X_0 = \frac{(g/l) X_0}{(g/l) - \omega^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

$$\text{Node location : } \frac{|X_0|}{h} = \frac{|X|}{l-h} \Rightarrow h = \frac{l}{2}$$

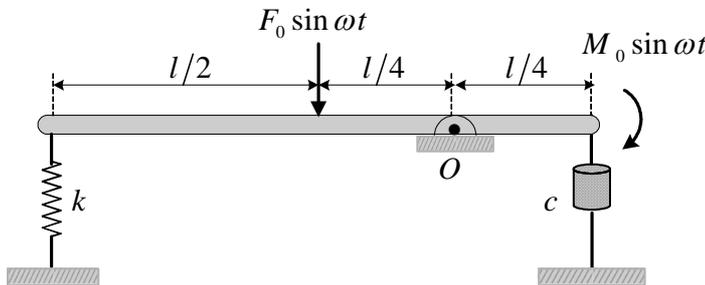
۳- جرم  $m = 100\text{Kg}$  که به فنر  $k = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$  متصل شده، روی سطحی با ضریب اصطکاک  $\mu = 0.08$  با اعمال نیروی هارمونیک  $F(t) = 300 \sin(40t)$  حرکت نوسانی انجام می‌دهد. دامنه پایدار را با در نظر گرفتن اصطکاک خشک به دست آورید.



حل:

$$X = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4\mu mg}{\pi F_0}\right)}{(1 - r^2)^2}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}} = 1.27 \quad F_0 = 300\text{N} \Rightarrow X = 0.00461\text{m} = 4.61\text{mm}$$

۴- میله‌ای به جرم  $m$  و طول  $l$  در نقطه  $O$  لولا شده و روی فنر  $k$  و میراکننده  $c$  قرار گرفته است. این میله توسط یک نیرو و گشتاور هارمونیک مطابق شکل تحریک می‌شود. معادله دیفرانسیل حرکت و نسبت میرایی را به دست آورید.

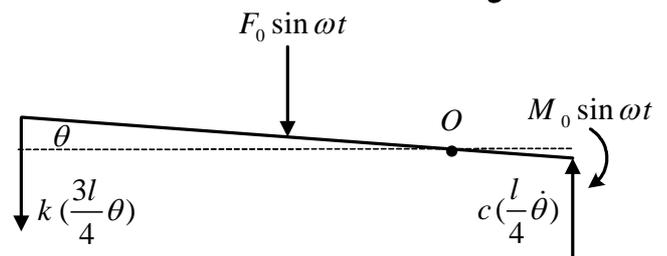


حل:

$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{3}{4}kl\theta\right)\left(\frac{3l}{4}\right) - (F_0 \sin \omega t) \frac{l}{4}$$

$$-c\left(\frac{l}{4}\dot{\theta}\right)\left(\frac{l}{4}\right) + M_0 \sin \omega t = \left(\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right)\ddot{\theta}$$

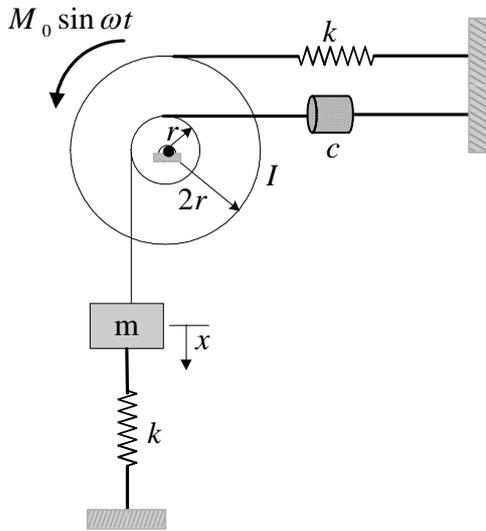


$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -\left(\frac{3}{4}kl\theta\right)\left(\frac{3l}{4}\right) - (F_0 \sin \omega t) \frac{l}{4} - c\left(\frac{l}{4}\dot{\theta}\right)\left(\frac{l}{4}\right) + M_0 \sin \omega t = \left(\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{7}{48}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{9}{16}kl^2\theta = \left(M_0 - \frac{F_0 l}{4}\right)\sin \omega t \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3c}{7m}\dot{\theta} + \frac{27k}{7m}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{27k}{7m}} \quad , \quad 2\xi\omega_n = \frac{3c}{7m} \Rightarrow \xi = \frac{3c}{2\sqrt{189km}}$$

۵- قرقره ای با شعاع کوچک  $r$  و شعاع بزرگ  $2r$  در مرکز لولا و به فنر و میراکننده مطابق شکل متصل شده است. این قرقره در اثر اعمال گشتاور متناوب  $M(t) = M_0 \sin \omega t$  حرکت نوسانی انجام می‌دهد. با توجه به مقادیر داده شده دامنه پایدار حرکت وزنه  $m$  را به دست آورید.



$$m = 10 \text{ Kg} \quad I = 0.1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad r = 10 \text{ cm}$$

$$k = 1.6 \times 10^5 \text{ N/m} \quad c = 640 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$M_0 = 100 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \omega = 180 \text{ rad/sec}$$

حل:

$$\Sigma M_o = I \ddot{\theta}$$

$$M_0 \sin \omega t + (-2kr\theta)(2r) + (-c r \dot{\theta})r - Tr = I \ddot{\theta}$$

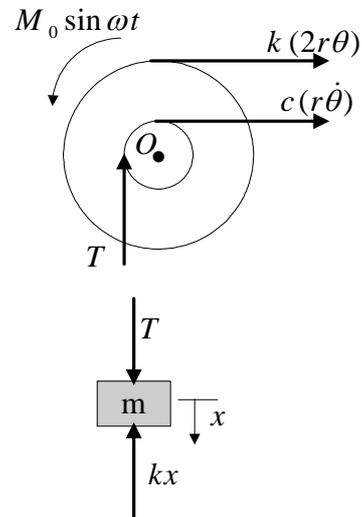
$$m \ddot{x} = T - kx \Rightarrow T = mr \ddot{\theta} + kr\theta$$

$$I \ddot{\theta} = M_0 \sin \omega t - 4kr^2 \theta - cr^2 \dot{\theta} - (mr \ddot{\theta} + kr\theta)r \Rightarrow$$

$$(I + mr^2) \frac{\ddot{x}}{r} + cr^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right) + 5kr^2 \left(\frac{x}{r}\right) = M_0 \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\left(\frac{I}{r^2} + m\right) \ddot{x} + c \dot{x} + 5kx = \frac{M_0}{r} \sin \omega t \Rightarrow$$

$$X = \frac{F_0}{k_{eff}} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

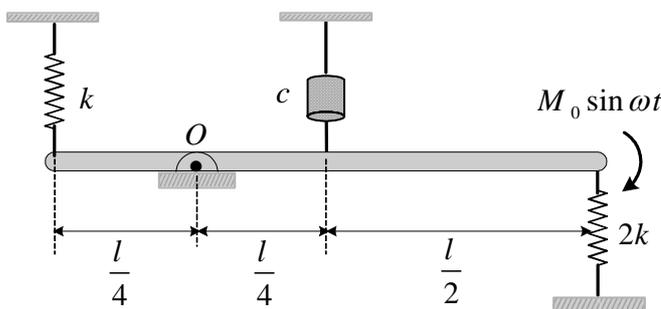


$$F_0 = \frac{M_0}{r} = 1000 \text{ N} \quad , \quad k_{eff} = 5k = 8 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{5k}{m + I/r^2}} = 200 \text{ rad/sec} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.9 \quad , \quad \xi = \frac{c}{2(m + I/r^2)\omega_n} = 0.08 \Rightarrow$$

$$X = 0.00524 \text{ m} = 5.24 \text{ mm}$$

۶- میله‌ای به جرم  $m$  و طول  $l$  مطابق شکل در نقطه  $O$  لولا شده و در نقاطی به فنر و میراکننده متصل گردیده است. این مجموعه در اثر اعمال گشتاور هارمونیک  $M(t) = M_0 \sin \omega t$  حرکت ارتعاشی انجام می‌دهد. با توجه به مقادیر داده شده، حداکثر مقدار  $M_0$  را طوری تعیین کنید که دامنه پایدار نوسان بیش از  $10^0$  نباشد.



$$\omega = 500 \text{ rev/min}$$

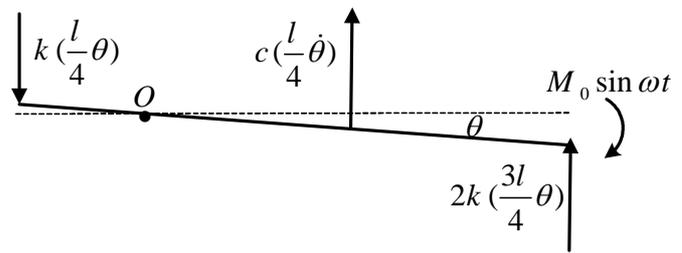
$$m = 15 \text{ Kg}$$

$$l = 1.2 \text{ m}$$

$$k = 7 \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$c = 650 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

حل:



$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right)\ddot{\theta} = M_0 \sin \omega t - c\left(\frac{l}{4}\dot{\theta}\right)\frac{l}{4} - k\left(\frac{l}{4}\theta\right)\frac{l}{4} - 2k\left(\frac{3l}{4}\theta\right)\frac{3l}{4}$$

$$\frac{7}{48}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{19}{16}kl^2\theta = M_0 \sin \omega t \quad I_{eff} = \frac{7}{48}ml^2 = 3.15Kg.m^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3c}{7m}\dot{\theta} + \frac{57k}{7m}\theta = \frac{M_0}{I_{eff}}\sin \omega t \quad \theta(t) = A \sin \omega t, \quad A = \frac{F_0}{k_{eff}} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{F_0}{k_{eff}} = \frac{M_0}{I_{eff}\omega_n^2} = \frac{M_0}{11970} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{500 \times \frac{2\pi}{60}}{\sqrt{\frac{57}{7} \times \frac{7000}{15}}} = 0.8494, \quad \xi = \frac{3c}{2\omega_n} = \frac{7m}{2\omega_n} = 0.15 \Rightarrow$$

$$10\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{M_0}{11970} \frac{1}{\sqrt{(1-0.8494^2)^2 + (2 \times 0.15 \times 0.8494)^2}} \Rightarrow M_0 = 788N.m$$

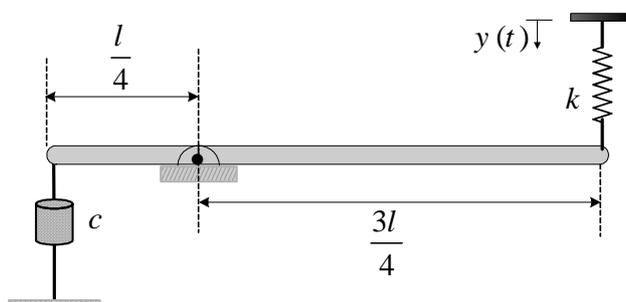
۷- ماشینی به جرم  $110Kg$  بر روی بستر کشسانی با سختی معادل  $2 \times 10^6 N/m$  قرار گرفته است. وقتی ماشین با سرعت  $\omega = 150 rad/sec$  کار می‌کند، نیروی  $1500N$  بر آن وارد شده و دامنه حالت پایدار آن  $1.9mm$  است. نسبت میرایی را به دست آورید.

حل:

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{150}{\sqrt{(2 \times 10^6/110)}} = 1.113 \Rightarrow$$

$$1.9 \times 10^{-3} = \frac{1500}{2 \times 10^6} \times \frac{1}{\sqrt{(1-1.113^2)^2 + (2\xi \times 1.113)^2}} \Rightarrow \xi = 0.142$$

۸- میله‌ای به جرم  $m = 10Kg$  و طول  $l = 1.2m$  در نقطه  $O$  لولا شده و در دو انتهای آن فنر و میرا کننده قرار گرفته است. صفحه بدون جرمی که به انتهای دیگر فنر متصل است به صورت متناوب  $y(t) = Y \sin \omega t$  حرکت کرده و باعث نوسان میله حول نقطه  $O$  می‌گردد. دامنه حالت پایدار ارتعاشات میله را به دست آورید.



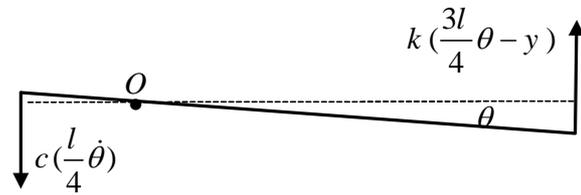
$$k = 2 \times 10^5 N/m$$

$$c = 400 N.s/m$$

$$Y = 1cm$$

$$\omega = 350 rad/sec$$

حل: با توجه به دیاگرام آزاد:



$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -k \left( \frac{3l}{4} \theta - y \right) \left( \frac{3l}{4} \right) - c \left( \frac{l}{4} \dot{\theta} \right) \left( \frac{l}{4} \right) = \left( \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{4} \right)^2 \right) \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{7}{48} ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta} + \frac{9}{16} kl^2 \theta = \frac{3}{4} kYl \sin \omega t \quad \theta(t) = A \sin \omega t$$

$$A = \frac{M_0}{k_{eff}} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad M_0 = \frac{3}{4} kYl = 1800 N \cdot m, \quad I_{eff} = \frac{7}{48} ml^2 = 2.1 Kg \cdot m^2$$

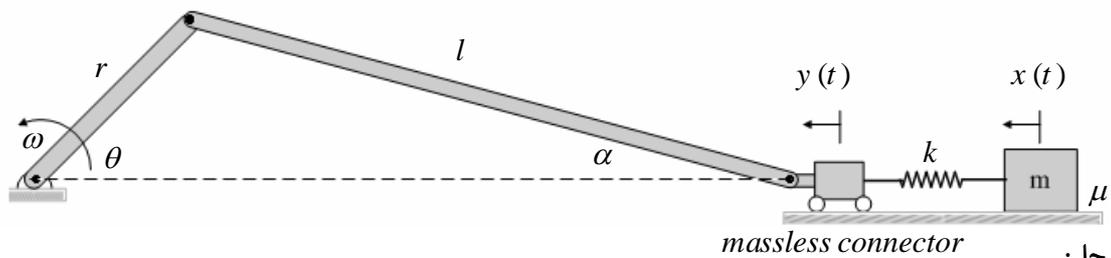
$$\omega_n = \sqrt{\frac{(9/16)kl^2}{(7/48)ml^2}} = \sqrt{\frac{27k}{7m}} = 277.8 \text{ rad/sec} \quad k_{eff} = I_{eff} \omega_n^2 = 162063 N/m \Rightarrow$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1.26, \quad 2\xi\omega_n = \frac{(1/16)cl^2}{(7/48)ml^2} \Rightarrow \xi = 0.0309 \Rightarrow A = 0.0188 \text{ rad} = 1.08 \text{ deg}$$

۹- در مکانیزم لنگ و لغزنده نشان داده شده در اثر حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  از طریق یک لغزنده با جرم ناچیز، جرم  $m$  روی سطحی با ضریب اصطکاک  $\mu$  حرکت رفت و برگشتی انجام می‌دهد. با فرض  $r \ll l$

(الف) معادله حرکت جرم  $m$  را به دست آورید.

(ب) اگر سرعت اولیه جرم  $\dot{x}_0 > 0$  باشد، رابطه‌ای برای  $x(t)$  به دست آورید.



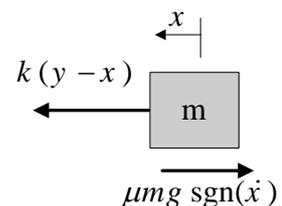
حل:  
(الف)

$$m\ddot{x} = k(y - x) - \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) \Rightarrow m\ddot{x} + kx = ky - \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

$$y(t) = r \cos \theta + l \cos \alpha \quad \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \theta$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left( \frac{r}{l} \sin \theta \right)^2}$$

$$\frac{r}{l} \ll 1 \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 \Rightarrow y(t) = l + r \cos \omega t \Rightarrow m\ddot{x} + kx = kl - \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kr \cos \omega t$$



(ب)

$$m\ddot{x} + kx = F_1(t) + F_2(t) \quad F_1(t) = kl - \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad , \quad F_2(t) = kr \cos \omega t \Rightarrow$$

$$x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \dot{x}_0 > 0 \Rightarrow x_1(t) = l - \frac{\mu mg}{k}$$

$$x_2(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t - mA \omega^2 \sin \omega t - mB \omega^2 \cos \omega t + kA \sin \omega t + kB \cos \omega t = kr \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{kr}{k - m\omega^2} \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = \frac{kr}{k - m\omega^2} \cos \omega t \Rightarrow x_p(t) = l - \frac{\mu mg}{k} + \frac{kr}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

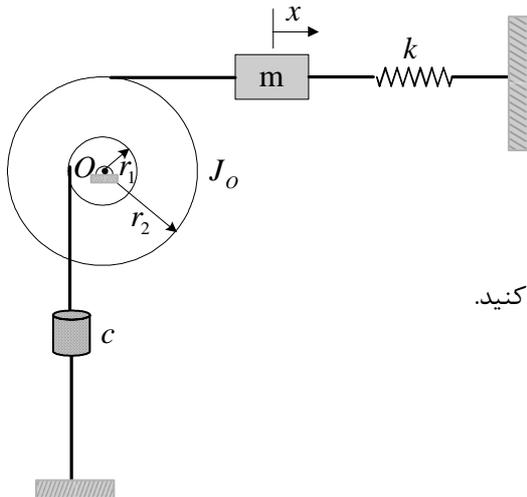
$$x(t) = A^* \sin \omega_n t + B^* \cos \omega_n t + l - \frac{\mu mg}{k} + \frac{kr}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow B^* + l - \frac{\mu mg}{k} + \frac{kr}{k - m\omega^2} = 0 \Rightarrow B^* = -l + \frac{\mu mg}{k} - \frac{kr}{k - m\omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = A^* \omega_n^2 \Rightarrow A^* = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(-l + \frac{\mu mg}{k} - \frac{kr}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + l - \frac{\mu mg}{k} + \frac{kr}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

۱۰- یک قرقره بدون اصطکاک با ممان اینرسی  $J_o = 5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$  و شعاع‌های  $r_1 = 10 \text{ cm}$  و  $r_2 = 25 \text{ cm}$  در مرکز لولا و از طرفین به یک میراکننده ویسکوز با ضریب میرایی  $c$ ، جرم  $m = 10 \text{ Kg}$  و فنری با سختی  $k$  متصل شده است. فرکانس طبیعی غیرمیرای این مجموعه نوسانی برابر  $5 \text{ Hz}$  بوده و دامنه نوسانات آزاد در طول ۱۰ سیکل به اندازه ۸۰ درصد کاهش می‌یابد.



(الف) ضرایب سختی و میرایی را تعیین کنید.

(ب) اگر جرم  $m$  با نیروی افقی

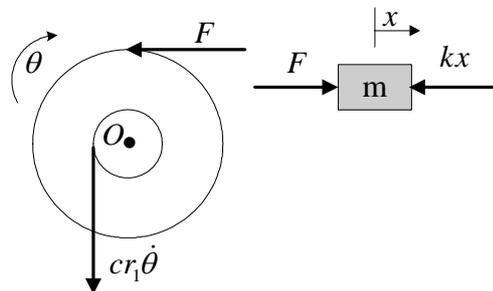
$$F(t) = F_0 \sin \omega t = 100 \sin(50t) \text{ [N]}$$

تحریک شود، پاسخ حالت پایدار آن را به دست آورید.

(ج) با توجه به قسمت (ب)، دامنه نوسان حالت پایدار قرقره را تعیین کنید.

حل:

(الف)



$$m\ddot{x} = -kx + F$$

$$\Sigma M_o = J_o \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$-F \cdot r_2 - (cr_1 \dot{\theta}) r_1 = J_o \ddot{\theta} \Rightarrow F = -\frac{J_o}{r_2} - \frac{cr_1^2}{r_2} \theta$$

$$x = r_2 \theta \Rightarrow F = -\frac{J_0}{r_2^2} \ddot{x} - c \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \dot{x} \Rightarrow \left(m + \frac{J_0}{r_2^2}\right) \ddot{x} + c \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow 90 \ddot{x} + 0.16c \dot{x} + kx = 0$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) \Rightarrow \frac{1}{10} \ln\left(\frac{1}{0.2}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = 0.0256 \quad \omega_n^2 = (2\pi \times 5)^2 = \frac{k}{90} \Rightarrow$$

$$k = 88826.4 \text{ N/m} \quad 2\xi\omega_n = \frac{0.16c}{90} \Rightarrow c = 28424.5 \text{ N.s/m}$$

(ب) در این حالت با توجه به قسمت (الف) معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$90 \ddot{x} + 4547.9 \dot{x} + 88826.4 x = 100 \sin(50t) \quad x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad , \quad \frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

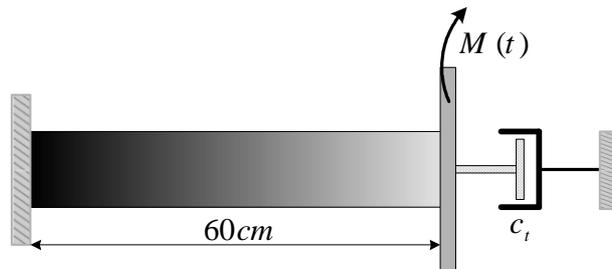
$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{50}{2\pi \times 5} = 1.59 \quad X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{100}{88826.4} = 0.00113 \text{ m} = 1.13 \text{ mm} \Rightarrow X = 0.736 \text{ mm}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) = 177^\circ \Rightarrow x(t) = 0.736 \sin(100t - 177^\circ) \text{ [mm]}$$

(ج)

$$\theta(t) = A \sin(\omega t - \phi) \quad \theta = x/r_2 \Rightarrow A = \frac{X}{r_2} = 0.00294 \text{ rad} = 0.17 \text{ deg}$$

۱۱- یک دیسک با ممان اینرسی  $I = 2.19 \text{ Kg.m}^2$  از یک طرف به یک شفت فولادی با مدول برشی  $G = 80 \text{ GPa}$  و ممان اینرسی سطحی  $J = 1.83 \times 10^{-6} \text{ m}^4$  به طول  $60 \text{ cm}$  و از طرف دیگر به یک میراکننده پیچشی با ضریب  $c_t$  متصل شده و در اثر اعمال گشتاور  $M(t) = 2500 \sin(350t) \text{ [N.m]}$  حرکت نوسانی انجام می دهد. اگر حداکثر دامنه حالت پایدار دیسک برابر  $1.5^\circ$  باشد، حداقل مقدار  $c_t$  چقدر است؟



حل:

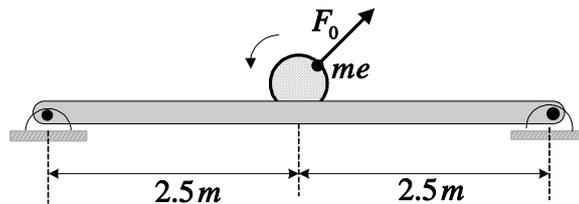
$$I \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = M(t) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{c_t}{I} \dot{\theta} + \frac{k_t}{I} \theta = \frac{1}{I} M(t) \quad \theta(t) = A \sin \omega t$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad k_t = \frac{GJ}{l} = 244000 \text{ N/m} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I}} = 333.79 \Rightarrow$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1.0486 \quad A_0 = \frac{M_0}{k_t} = 0.01025 \text{ rad} \quad A = 1.5^\circ = 0.02618 \text{ rad} \Rightarrow \xi = 0.1867$$

$$2\xi\omega_n = \frac{c_t}{I} \Rightarrow c_t = 272.9 \text{ N.s/m}$$

۱۲- یک تیر فولادی با مدول الاستیسیته  $E = 207\text{GPa}$  و ممان اینرسی مقطع  $I = 1 \times 10^{-4}\text{m}^4$  در دو انتها لولا شده است. موتوری به جرم  $M = 50\text{Kg}$  وسط تیر نصب شده و در اثر چرخش آن با سرعت  $1200\text{ rev/min}$  به علت وجود نامیزانی  $me$ ، نیرویی معادل  $5\text{KN}$  به تیر اعمال می‌گردد. با فرض یک درجه آزادی بودن نوسانات و صرفنظر از جرم تیر، دامنه ارتعاشات حالت پایدار آن را تعیین نمایید.



حل:

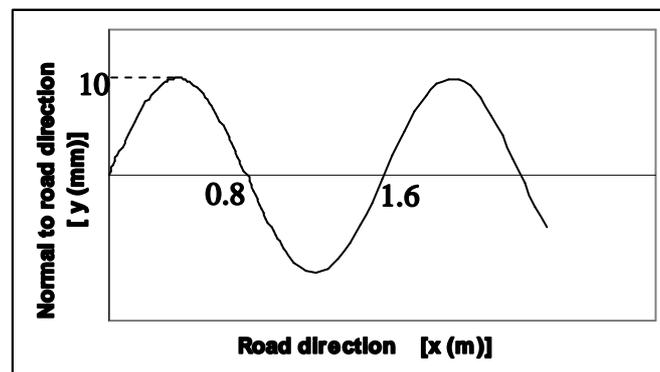
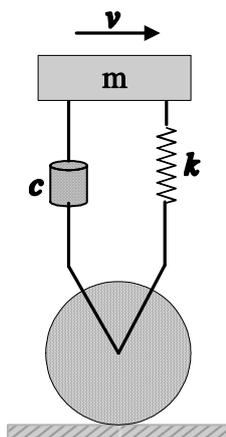
$$X = \frac{me}{M} \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \xi = 0 \Rightarrow X = \frac{me}{M} \frac{r^2}{|1-r^2|} \quad k = \frac{48EI}{l^3} = 7.9488 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = 398.7 \text{ rad/sec} \quad \omega = 1200 \text{ rev/min} = 125.66 \text{ rad/sec}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.315 \quad F_0 = me\omega^2 \Rightarrow me = \frac{5000}{125.66^2} = 0.316 \text{ Kg.m} \Rightarrow X = 0.11 \text{ m} = 11 \text{ cm}$$

۱۳- یک خودرو روی جاده‌ای ناهموار با سرعت ثابت و افقی  $v$  حرکت می‌کند. انحنای جاده توسط یک منحنی سینوسی مطابق شکل تخمین زده می‌شود. جرم خودرو  $900\text{Kg}$ ، سختی سیستم تعلیق  $8 \times 10^4 \text{ N/m}$  و نسبت میرایی برابر  $0.2$  است.

الف) دامنه‌های شتاب و جابجایی را بدون وجود سیستم تعلیق در سرعت  $v = 40 \text{ m/sec}$  محاسبه کنید.  
 ب) دامنه‌های شتاب و جابجایی را با وجود سیستم تعلیق به صورت تابعی از سرعت به دست آورده و آنها را در سرعت  $v = 40 \text{ m/sec}$  با حالت الف) مقایسه کنید.



Road surface

حل:

(الف)

$$y(t) = 0.01 \sin \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad \lambda = 1.6m \Rightarrow y(t) = 0.01 \sin(1.25\pi vt)$$

با فرض عدم وجود سیستم تعلیق، جابجایی خودرو در هر لحظه ( $x(t)$ ) همان  $y(t)$  است:

$$x(t) = X \sin \omega t = y(t) \Rightarrow X = Y = 0.01m \quad \ddot{x} = -0.01(1.25\pi v)^2 \sin(1.25\pi vt)$$

$$A = 0.01(1.25\pi v)^2 \quad v = 40m/sec \Rightarrow A = 246.7m/sec^2$$

(ب)

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 9.43 \text{ rad/sec} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.416v, \xi = 0.2 \Rightarrow$$

$$X = 0.01 \sqrt{\frac{1+0.028v^2}{1-0.145v^2+0.03v^4}} [m] \Rightarrow X(v = 40m/sec) = 2.43 \times 10^{-4}m$$

$$A = X \omega^2 = 5.996m/sec^2$$

ملاحظه می‌شود که سیستم تعلیق تا بیش از ۴۰ برابر دامنه شتاب و جابجایی خودرو را کاهش می‌دهد.

۱۴- یک ماشین به وزن 3000N روی یک فونداسیون الاستیک قرار گرفته است. جابجایی استاتیکی تکیه‌گاه در اثر وزن ماشین برابر با 7.5cm می‌باشد. هنگامی که تکیه‌گاه در معرض نوسان هارمونیک با فرکانس طبیعی غیرمیرا و دامنه 0.25cm قرار می‌گیرد، ماشین با دامنه 1cm ارتعاش می‌کند. مطلوبست:

(الف) ضریب میرایی تکیه‌گاه

(ب) دامنه نیروی دینامیکی روی تکیه‌گاه

(ج) دامنه جابجایی ماشین نسبت به پایه

حل:  $X$  دامنه جابجایی پایه،  $Y$  دامنه ارتعاش جرم و  $Z$  دامنه جابجایی ماشین نسبت به پایه است.

(الف)

$$mg = k \delta_{st} \Rightarrow k = \frac{mg}{\delta_{st}} = 40000N/m \quad \frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1+4\xi^2}{4\xi^2}} \Rightarrow \frac{1}{0.25} = \sqrt{\frac{1+4\xi^2}{4\xi^2}} \Rightarrow \xi = 0.1291 \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \Rightarrow c = 903.1N.s/m$$

(ب)

$$\frac{F_T}{kY} = \frac{X}{Y} \Rightarrow F_T = kX = 40000 \times 0.01 = 400N$$

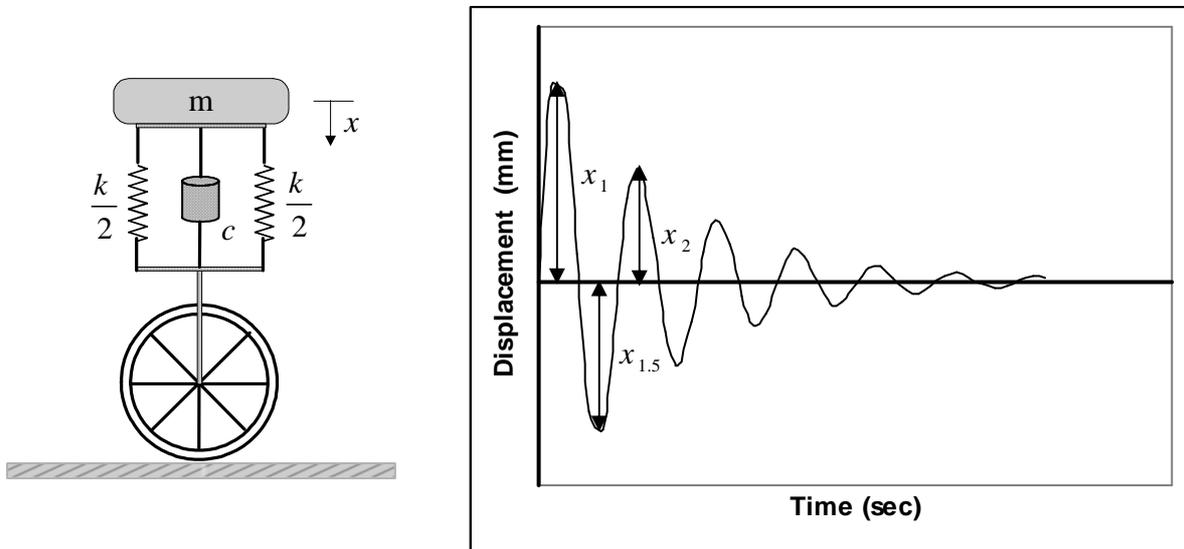
(ج)

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad r=1 \Rightarrow \frac{Z}{Y} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow Z = \frac{0.25}{2 \times 0.1291} = 0.968 \text{ cm}$$

۱۵- سیستم جذب ارتعاشات برای یک موتورسیکلت به جرم  $m = 200 \text{ Kg}$  مطابق شکل زیر است. وقتی این جاذب ارتعاشی تحت یک سرعت اولیه در اثر دست‌انداز جاده قرار می‌گیرد، جابجایی آن بر حسب زمان مطابق نمودار داده شده می‌باشد. اگر زمان تناوب ارتعاشات میرا  $\tau_d = 2 \text{ sec}$  بوده و  $x_1$  در طول نیم سیکل اول به اندازه یک چهارم کاهش یابد، مطلوبست:

(الف) ضرایب سختی و میرایی این جاذب ارتعاشی

(ب) کمترین سرعت اولیه به طوری که جابجایی ماکزیمم  $250 \text{ mm}$  باشد.



حل:

(الف)

$$\frac{x_1}{x_{1.5}} = 4, \quad \frac{x_{1.5}}{x_2} = 4 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 16 \Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 2.7726 \quad 2.7726 = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = 0.4037$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 2 \text{ sec} \Rightarrow \omega_d = \pi \text{ rad/sec} \quad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = 3.4338 \text{ rad/sec} \Rightarrow$$

$$k = m\omega_n^2 = 2358.3 \text{ N/m} \quad , \quad c = 2\xi m\omega_n = 554.5 \text{ N.s/m}$$

(ب)

$$\phi = 0 \Rightarrow x(t) = X e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t$$

فرض کنیم در لحظه  $t = t_1$  دامنه حرکت ماکزیمم شود:

$$\dot{x}(t_1) = 0 \Rightarrow X \left[ -\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t_1} \sin \omega_d t_1 + \omega_d e^{-\xi \omega_n t_1} \cos \omega_d t_1 \right] = 0 \Rightarrow \tan(\omega_d t_1) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Rightarrow$$

$$t_1 = 0.3677 \text{ sec} \quad X = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_d} \Rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t \quad x(t_1) = 250 \text{ mm} \Rightarrow$$

$$0.25 = \frac{\dot{x}(0)}{\pi} \exp(-0.4037 \times 3.4338 \times 0.3677) \sin(\pi \times 0.3677) \Rightarrow \dot{x}(0) = 1.429 \text{ m/sec}$$

۱۶- موتوری به وزن  $2000N$  روی یک تکیه‌گاه الاستیک بدون میرایی در حال کار کردن است. اگر در سرعت  $1800 \text{ rev/min}$  قابلیت انتقال نیرو بین موتور و تکیه‌گاه برابر  $10\%$  درصد باشد، سختی معادل تکیه‌گاه را تعیین کنید.

حل:

$$TR = \frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad \xi = 0 \Rightarrow 0.1 = \frac{1}{|1-r^2|} \Rightarrow r^2 = 11 \Rightarrow$$

$$\frac{(1800 \times \frac{2\pi}{60})^2}{k} = 11 \Rightarrow k = 658541.8 \text{ N/m}$$

$$\frac{2000}{9.81}$$

۱۷- یک ماشین به جرم  $453.4Kg$  روی فنرهایی با انحراف استاتیکی  $0.508cm$  قرار دارد. اگر ماشین دارای نامیزانی دوار  $0.2303Kg.m$  باشد، مطلوبست:

(الف) دامنه ارتعاش ماشین در سرعت  $1200 \text{ rev/min}$

(ب) نیروی منتقل شده به زمین در این سرعت

حل:

(الف)

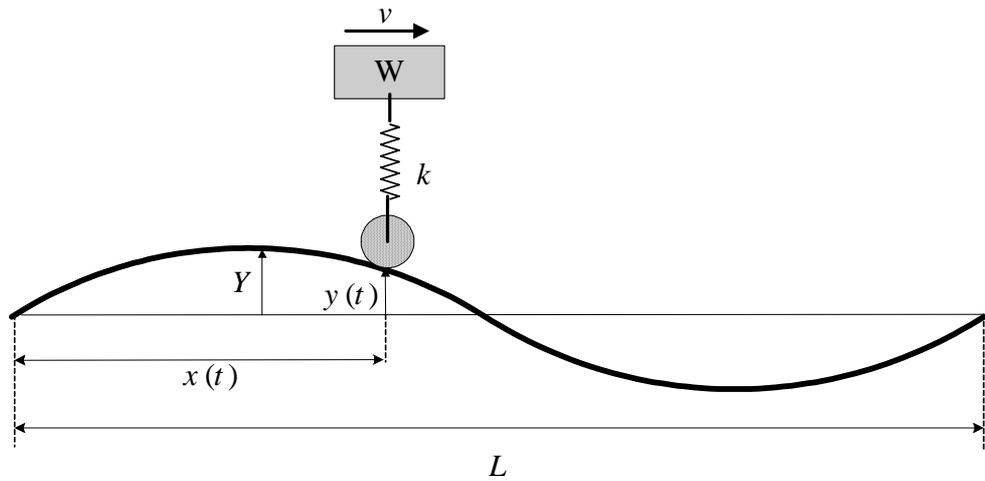
$$X = \frac{me}{M} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad \xi = 0 \Rightarrow X = \frac{r^2}{|1-r^2|} \quad k = \frac{Mg}{\delta_{st}} \Rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.00508}} = 43.94 \text{ rad/sec} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{(1200 \times \frac{2\pi}{60})}{43.94} = 2.8598 \Rightarrow X = 0.58 \text{ mm}$$

(ب)

$$F_T = kX \quad k = \frac{Mg}{\delta_{st}} = 875561.8 \text{ N/m} \Rightarrow F_T = 506.7N$$

۱۸- شکل زیر مدل ساده‌ای از یک خودرو با تکیه‌گاه فنری را نشان می‌دهد که بر روی یک جاده ناهموار با سرعت ثابت در حال حرکت است. دامنه حرکت وزنه  $W$  را به صورت تابعی از سرعت بیابید و بیشترین سرعت نامطلوب را تعیین کنید.



حل:

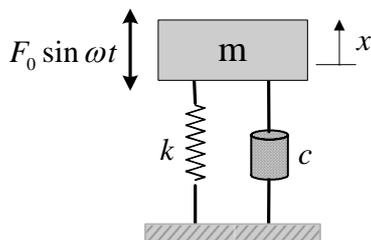
$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \xi = 0 \Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{1}{|1 - r^2|} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad x(t) = vt \Rightarrow L = vT$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{L/v} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{kg}{W}} \Rightarrow r = \frac{2\pi v}{L\sqrt{\frac{kg}{W}}} \Rightarrow X = \frac{Y}{1 - \frac{4\pi^2 W v^2}{L^2 kg}}$$

حالت نامطلوب همان شرایط تشدید ( $r = 1$ ) است:

$$v_{cr} = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

۱۹- در سیستم ساده جرم، فنر و میراکننده شکل زیر، اگر دامنه حرکت جرم  $m$  برابر  $X$  باشد، حداکثر نیروی منتقل شده به تکیه‌گاه در اثر تحریک هارمونیک  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  چیست؟



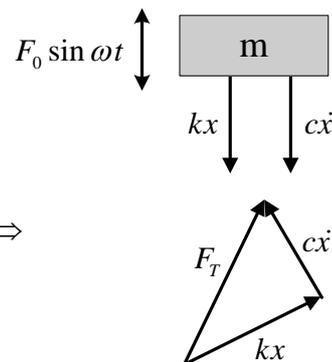
حل:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \Rightarrow \dot{x}(t) = X \omega \cos(\omega t - \phi)$$

$$F_T = kx + c\dot{x} = kX \sin(\omega t - \phi) + cX \omega \cos(\omega t - \phi) \Rightarrow$$

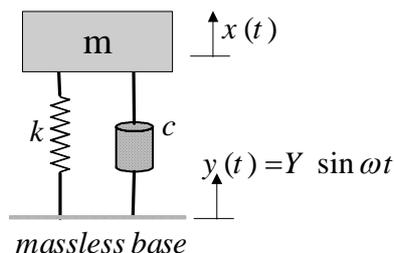
$$F_{T_{max}} = \sqrt{(kX)^2 + (cX \omega)^2}$$

$$F_{T_{max}} = kX \sqrt{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2} \quad \frac{c\omega}{k} = \frac{2\xi m \omega_n \omega}{k} = 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} = 2\xi r \Rightarrow$$



$$F_{T_{\max}} = kX \sqrt{1 + (2\xi r)^2}$$

۲۰- مطابق شکل در اثر حرکت پایه بدون جرم به صورت هارمونیک  $y(t) = Y \sin \omega t$ ، جرم  $m$  با دامنه  $X$  حرکت می‌نماید. حداکثر نیروی منتقل شده به جرم چقدر است؟



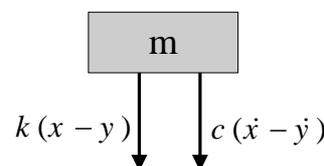
حل:

دامنه حرکت نسبی جرم و پایه  $z(t) = x(t) - y(t)$  است.

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad F_T = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = kz + c\dot{z}$$

$$z(t) = X \sin(\omega t - \phi) - Y \sin \omega t = Z \sin(\omega t - \alpha) \Rightarrow$$

$$F_T = kZ \sin(\omega t - \alpha) + cZ \omega \cos(\omega t - \alpha)$$



$$F_{T_{\max}} = kZ \sqrt{1 + (2\xi r)^2}$$

به طور مشابه با مسئله ۱۹ داریم:

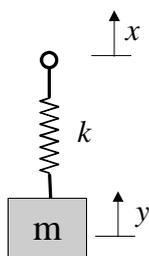
$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

از طرف دیگر:

$$F_{T_{\max}} = kY r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

بنابراین:

۲۱- جرم  $m$  به یک فنر با سختی  $k$  متصل شده و انتهای دیگر فنر با تحریک سینوسی  $x(t) = X \sin \omega t$  حرکت می‌کند. در چه فرکانس تحریکی دامنه حرکت جرم و پایه برابر می‌شود؟



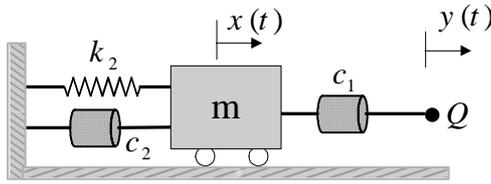
حل:

$$m\ddot{y} = -k(y - x) \Rightarrow m\ddot{y} + ky = kX \sin \omega t$$

$$y(t) = Y \sin \omega t \Rightarrow -mY \omega^2 \sin \omega t + kY \sin \omega t = kX \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{k}{k - m\omega^2} = \frac{1}{1 - r^2} \quad |Y| = |X| \Rightarrow r = \sqrt{2} \Rightarrow \omega = \omega_n \sqrt{2}$$

۲۲- جرم  $m = 2Kg$  مطابق شکل از دو طرف به فنر و میراکننده ویسکوز متصل شده و در اثر جابجایی نقطه Q با معادله حرکت نوسانی انجام می‌دهد. پاسخ حالت پایدار جرم را به دست آورید.



$$k_2 = 250 \text{ N/m} \quad c_1 = c_2 = 10 \text{ N.s/m}$$

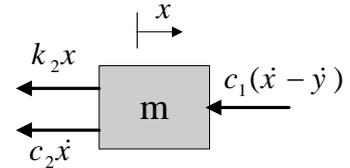
$$Y = 10 \text{ cm} \quad \omega = 25 \text{ rad/sec}$$

حل:

$$m\ddot{x} = -c_2\dot{x} - k_2x - c_1(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + k_2x = c_1\dot{y} = -c_1Y \omega \sin \omega t$$

$$2\ddot{x} + 20\dot{x} + 250x = -25 \sin 25t$$



$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad \frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 11.18 \text{ rad/sec} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 2.236 \quad 2\xi\omega_n = \frac{c_1 + c_2}{m} \Rightarrow \xi = 0.4472$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k_2} = 0.1 \text{ m} \Rightarrow X = 0.447 \text{ m} = 44.7 \text{ cm} \quad \tan \phi = \frac{2\xi r}{1-r^2} \Rightarrow \phi = -26.6^\circ \text{ or } \phi = 153.4^\circ$$

$$x(t) = 0.447 \sin(25t - 153.4^\circ) \quad [m]$$

۲۳- یک دیسک با ممان اینرسی  $I = 10 \text{ Kg.m}^2$  از یک طرف به یک شفت فولادی ( $G = 80 \text{ GPa}$ ) به طول  $1 \text{ m}$  و قطر  $4 \text{ cm}$  و از طرف دیگر به یک میراکننده پیچشی ویسکوز با ضریب میرایی  $c_t = 300 \text{ N.s.m}$  متصل شده است. این دیسک تحت یک گشتاور سینوسی با دامنه  $1000 \text{ N.m}$  قرار گرفته و با دامنه پایدار  $2^\circ$  درجه نوسان پیچشی انجام می‌دهد.

(الف) فرکانس گشتاور تحریک را به دست آورید.

(ب) حداکثر گشتاور منتقل شده به تکیه‌گاه شفت چقدر است؟

حل:

(الف) برای این سیستم ارتعاشی معادله حرکت به صورت زیر است:

$$I\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta = T_0 \sin \omega t \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{c_t}{I}\dot{\theta} + \frac{k_t}{I}\theta = \frac{T_0}{I} \sin \omega t$$

بنابراین:

$$\theta(t) = A \sin(\omega t - \phi) \quad , \quad A = 2 \text{ deg} = \frac{\pi}{90} \text{ rad} \quad \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi_r)^2}}$$

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{80 \times 10^9 \times (\pi/32) \times 0.04^4}{1} = 20106.2 \text{ N.m} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I}} = 44.84 \text{ rad/sec}$$

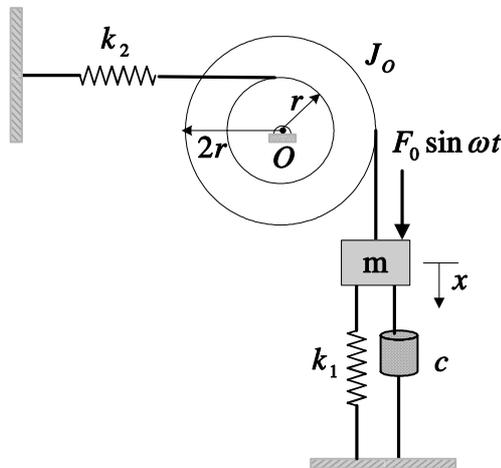
$$A_0 = \frac{T_0}{k_t} = 0.0497 \text{ rad} \quad 2\xi_t \omega_n = \frac{c_t}{I} \Rightarrow \xi_t = 0.3345 \Rightarrow \frac{\pi/90}{0.0497} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \times 0.3345r)^2}}$$

$$r = 1.4327 \Rightarrow \omega = r\omega_n = 64.24 \text{ rad/sec}$$

(ب) حداکثر گشتاور منتقل شده به تکیه‌گاه ( $T_T$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{T_T}{T_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi_t r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi_t r)^2}} \Rightarrow T_T = 973 \text{ N.m}$$

۲۴- قرقره‌ای با ممان اینرسی  $J_O = 1 \text{ Kg.m}^2$  حول مرکز، در نقطه O لولا شده است. این دیسک از یک طرف فنر  $k_2 = 500 \text{ N/m}$  و از طرف دیگر به یک مجموعه جرم و فنر ساده با مشخصات  $m = 10 \text{ Kg}$ ،  $k_1 = 1000 \text{ N/m}$  و  $c = 500 \text{ N.s/m}$  متصل شده است. این سیستم در اثر اعمال بار هارمونیک  $F(t) = F_0 \sin \omega t = 50 \sin(20t) \text{ [N]}$  به جرم  $m$  ارتعاش می‌کند. دامنه نوسان حالت پایدار قرقره را محاسبه کنید. شعاع کوچک قرقره  $r = 5 \text{ cm}$  و شعاع بزرگ آن  $2r = 10 \text{ cm}$  بوده و از اصطکاک آن صرف‌نظر می‌شود.



حل:

$$J_O \ddot{\theta} = -P(2r) - (k_2 r \theta)r$$

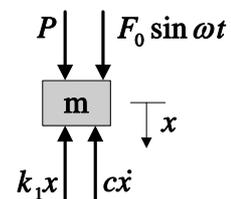
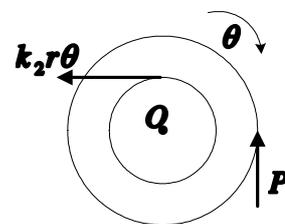
$$m\ddot{x} = P - k_1 x - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t$$

$$x = 2r\theta \Rightarrow P = 2mr\ddot{\theta} + 2cr\dot{\theta} + 2k_1 r\theta - F_0 \sin \omega t$$

$$J_O \ddot{\theta} + 4mr^2 \ddot{\theta} + 4cr^2 \dot{\theta} + 4k_1 r^2 \theta + k_2 r^2 \theta = 2F_0 r \sin \omega t$$

$$1.1\ddot{\theta} + 5\dot{\theta} + 11.25\theta = 5 \sin(20t)$$

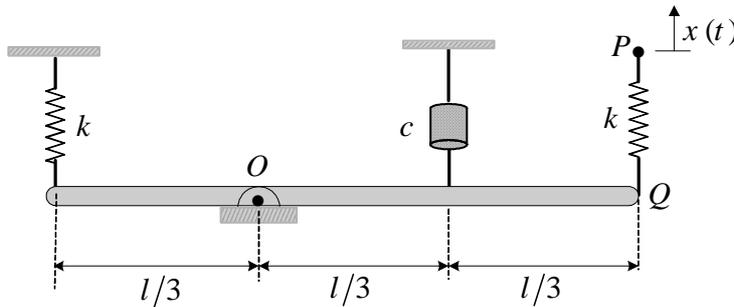
$$\omega_n = \sqrt{\frac{11.25}{1.1}} = 3.198 \text{ rad/sec} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 6.254$$



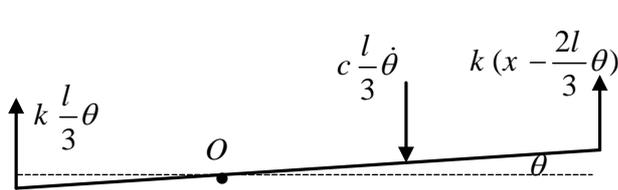
$$2\xi\omega_n = \frac{5}{1.1} \Rightarrow \xi = 0.7107 \quad \theta(t) = A \sin(\omega t - \phi) \quad \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$A_0 = \frac{5}{1.1 \times 3.198^2} = 0.444 \text{ rad} \Rightarrow A = 0.01135 \text{ rad} = 0.65 \text{ deg}$$

۲۵- میله یکنواختی به جرم  $m = 10 \text{ Kg}$  و طول  $l = 1 \text{ m}$  مطابق شکل در نقطه O لولا شده و در نقاط نشان داده شده به فنرهایی با سختی  $k = 1000 \text{ N/m}$  و میراکننده ویسکوز  $c = 50 \text{ N.s/m}$  متصل شده است. انتهای آزاد فنر PQ با جابجایی هارمونیک  $x(t) = x_0 \sin \omega t = \sin(10t) [\text{cm}]$  تحریک می‌شود. پاسخ ارتعاش دورانی حالت پایدار میله را تعیین کنید.



حل:



$$\Sigma M_O = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2\right) \ddot{\theta} =$$

$$k\left(x - \frac{2l}{3}\theta\right)\left(\frac{2l}{3}\right) - k\left(\frac{l}{3}\theta\right)\frac{l}{3} - c\left(\frac{l}{3}\dot{\theta}\right)\frac{l}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{9} ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{9} cl^2 \dot{\theta} + \frac{5}{9} kl^2 \theta = \frac{2}{3} klx_0 \sin \omega t$$

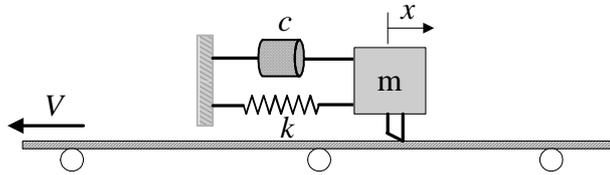
$$\theta(t) = A \sin(\omega t - \phi) \quad A = \frac{M_0/k_{eff}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$M_0 = \frac{2}{3} klx_0 = 6.67 \text{ N.m} \quad k_{eff} = I_O \omega_n^2 = \frac{5klI_O}{m} = \frac{5}{9} kl^2 \quad k_{eff} = 555.52 \text{ N.m}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.4472 \quad 2\xi\omega_n = \frac{(1/9)cl^2}{(1/9)ml^2} \Rightarrow \xi = 0.1118 \Rightarrow A = 0.0149 \text{ rad} = 0.85 \text{ deg}$$

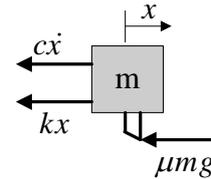
$$\tan \phi = \frac{2\xi r}{1-r^2} \Rightarrow \phi = 0.124 \text{ rad} \Rightarrow \theta(t) = 0.0149 \sin(10t - 0.124) \quad [\text{rad}]$$

۲۶- در شکل زیر جرم  $m$  نشان دهنده ابزار برنده یک ماشین تراش است و روی سطحی که با سرعت  $V$  حرکت می‌کند، عملیات تراشکاری انجام می‌دهد. ارتعاش ابزار با در نظر گرفتن سختی  $k$  و میرایی ویسکوز  $c$  مدل شده است. ضریب اصطکاک بین ابزار و سطح در یک محدوده خاص برابر  $\mu$  می‌باشد که طبق رابطه  $\mu = a - bu$  تغییر می‌کند که در آن  $u$  سرعت نسبی سطح و ابزار است. مقدار بحرانی  $c$  را برای ناپایدار شدن ارتعاشات ابزار به دست آورید.



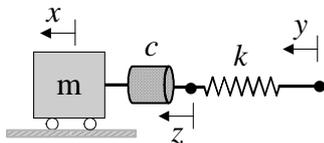
حل:

$$\begin{aligned} \mu &= a - bu = a - b(\dot{x} + V) = a - b\dot{x} - bV \\ m\ddot{x} &= -c\dot{x} - kx - \mu mg \\ m\ddot{x} &= -c\dot{x} - kx - mg(a - b\dot{x} - bV) \Rightarrow \\ m\ddot{x} + (c - mgb)\dot{x} + kx &= -mga + mgbV \end{aligned}$$



(الف) به ازای  $b > 0$  ضریب  $\dot{x}$  یعنی  $c - mgb$  همواره مثبت بوده و ارتعاشات ابزار همیشه پایدار است.  
 (ب) اگر  $b < 0$ ، تنها وقتی که  $c > mgb$  باشد ارتعاشات ابزار پایدار است.

۲۷- در سیستم نوسانی شکل زیر فنر  $k$  و میراکننده  $c$  به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند. انتهای فنر با حرکت  $y(t)$  تحریک می‌شود. اگر معادله دیفرانسیل این مجموعه به فرم  $M\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F}(t)$  باشد، ماتریس‌های  $M$ ،  $C$  و  $K$  و بردار  $\vec{F}(t)$  را تعیین کنید.



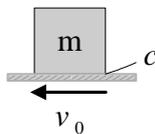
حل:

$$\begin{cases} \text{Spring force : } F_s = k(y - z) = m\ddot{x} \\ \text{Damper force : } F_d = c(z - \dot{x}) = F_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = c(z - \dot{x}) \\ k(y - z) = c(z - \dot{x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} - cz = 0 \\ -c\dot{x} + cz + kz = ky \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ky \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

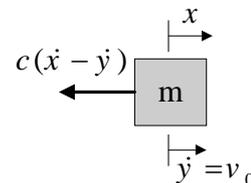
$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ ky \end{Bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}$$

۲۸- در شکل زیر بین جسم و تکیه‌گاه استهلاک ویسکوز با ضریب  $c$  وجود دارد. تکیه‌گاه با سرعت ثابت  $v_0$  شروع به حرکت می‌کند. سرعت جسم در دراز مدت چقدر است؟



حل:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -c(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} = cv_0 \\ x(t) &= x_g(t) + x_p(t) \\ m\ddot{x}_g + c\dot{x}_g &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}_g + cx_g) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$



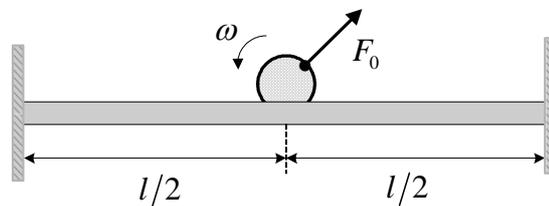
$$m\dot{x}_g + cx_g = cte = A \Rightarrow m \frac{dx_g}{dt} = A - cx_g \Rightarrow -\frac{1}{c} \ln(A - cx_g) = \frac{1}{m}t + B \Rightarrow$$

$$x_g(t) = c_1 + c_2 e^{(-c/m)t}, \quad x_p(t) = v_0 t \Rightarrow x(t) = c_1 + c_2 e^{(-c/m)t} + v_0 t$$

$$\text{Initial conditions: } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow -c_2 \left(\frac{c}{m}\right) + v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{mv_0}{c} \\ c_2 = \frac{mv_0}{c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{c} (e^{(-c/m)t} - 1) + v_0 t \Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 (1 - e^{(-c/m)t}) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = v_0$$

۲۹- در نقطه میانی یک تیر فولادی دو سرگیردار به طول  $l = 5m$ ، عرض  $0.5m$  متر و ضخامت  $0.1$  متر، موتوری به جرم  $75Kg$  نصب شده که با سرعت  $1200 \text{ rpm}$  کار می‌کند. نیروی  $F_0 = 5000N$  در اثر نامیزانی موتور به تیر اعمال می‌گردد. دامنه نوسان حالت پایدار تیر را یک بار بدون در نظر گرفتن جرم تیر و بار دیگر با در نظر گرفتن آن به دست آورید. مدول الاستیسیته فولاد  $E = 207GPa$  و چگالی آن  $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$  است.



حل:

- بدون در نظر گرفتن جرم تیر:

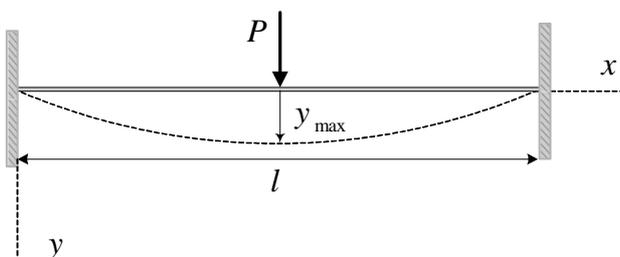
$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \xi = 0 \Rightarrow \frac{MX}{me} = \frac{r^2}{|1-r^2|}$$

$$k = \frac{192EI}{l^3} = \frac{192 \times 207 \times 10^9 \times (0.5 \times 0.1^3 / 12)}{5^3} = 1.3248 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = 420.3 \text{ rad/sec} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1200 \times (2\pi/60)}{420.3} = 0.299$$

$$F_0 = me\omega^2 \Rightarrow me = 0.3166 \text{ Kg.m} \Rightarrow X = 4.144 \times 10^{-4} \text{ m}$$

- با در نظر گرفتن جرم تیر: ابتدا باید جرم مؤثر آن تعیین شود:



$$y(x) = \frac{Px^2}{48EI} (3l - 4x), \quad y_{\max} = \frac{Pl^3}{192EI}$$

$$y(x) = 4y_{\max} \left[ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]; \quad \frac{x}{l} \leq \frac{1}{2}$$

$$dT = 2 \left[ \frac{1}{2} (dm_b) \dot{y}^2 \right] \Rightarrow T = 2 \times 16 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \left( \frac{m_b}{l} \right) \dot{y}_{\max}^2 \left[ 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} (0.3714 m_b) \dot{y}_{\max}^2 \Rightarrow m_{\text{eff}} = M + 0.3714 m_b$$

$$m_b = \rho_b V_b = 7800 \times 0.5 \times 0.1 \times 5 = 1950 \text{ Kg} \Rightarrow m_{\text{eff}} = 799.23 \text{ Kg}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{eff}}}} = 128.75 \text{ rad/sec} \Rightarrow r = 0.976 \Rightarrow X = 0.0848 \text{ m}$$