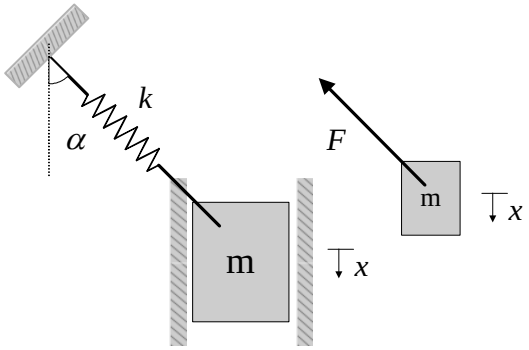
فرکانس طبیعی

۱- فرکانس طبیعی را برای ارتعاشات کوچک سیستم‌های زیر از **روش نیوتنی** به‌دست آورید.

(الف)

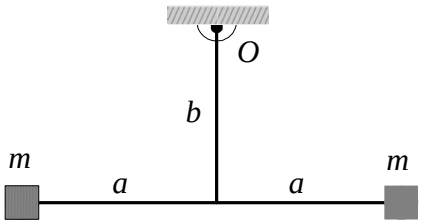


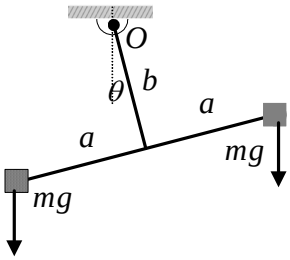
$$m\ddot{x} = -F\cos\alpha = (-kx\cos\alpha)\cos\alpha$$

$$m\ddot{x} + kx\cos^2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k\cos^2\alpha}{m}} = \cos\alpha\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(ب)

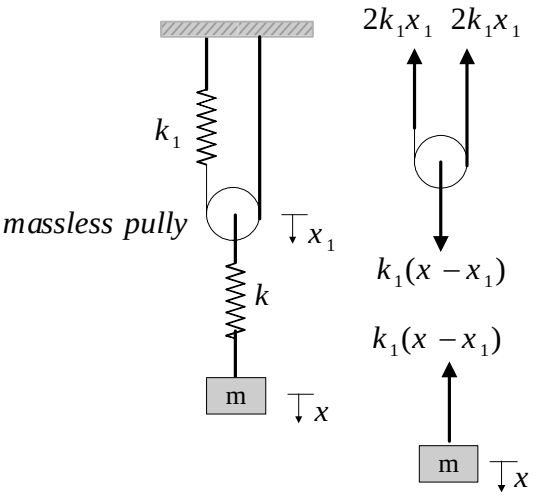




$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow mg(a - b\sin - mg(a + b\sin\theta) = 2m(a^2 + b^2)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow 2m(a^2 + b^2)\ddot{\theta} + 2gb\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{gb}{a^2 + b^2}}$$

(ج)



$$\text{sup. } x > x_1 : m\ddot{x} = -k(x - x_1)$$

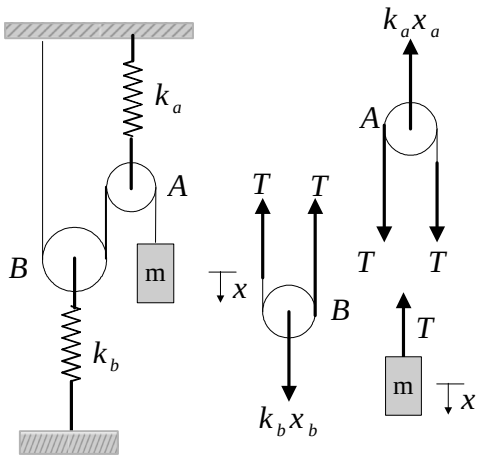
$$m\ddot{x} + k(x - x_1) = 0$$

$$4k_1x_1 = k(x - x_1) \Rightarrow x_1 = \frac{k}{k + 4k_1}x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + k\left(x - \frac{k}{k + 4k_1}x\right) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \frac{4kk_1}{k + 4k_1}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{4kk_1}{m(k + 4k_1)}}$$

(د)



massless and frictionless pullies

$$FBD\ of\ m: m\ddot{x} = -T$$

$$FBD\ of\ pully\ A\ \&\ B: 2T = k_a x_a\ \&\ 2T = k_b x_b$$

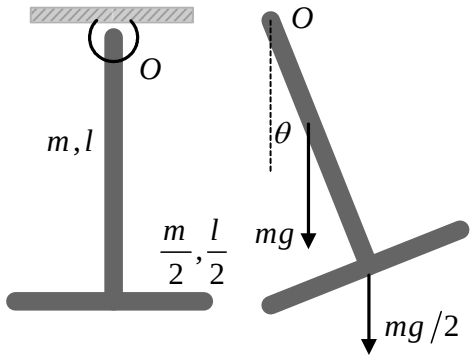
$$\Rightarrow k_a x_a = k_b x_b \Rightarrow x_b = \frac{k_a}{k_b} x_a$$

$$x = 2x_a + 2x_b = 2x_a + 2\frac{k_a}{k_b} x_a = 2(\frac{k_a + k_b}{k_b}) x_a$$

$$\Rightarrow x_a = \frac{k_b}{2(k_a + k_b)} x \Rightarrow T = \frac{k_a k_b}{4(k_a + k_b)} x \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = -\frac{k_a k_b}{4(k_a + k_b)} x \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_a k_b}{4m(k_a + k_b)}}$$

(ه)

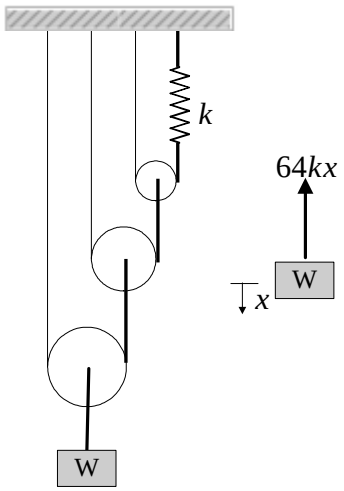


$$\Sigma M_O = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow -mg\frac{l}{2}\sin\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta = I_O\ddot{\theta}$$

$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{2}(\frac{l}{2})^2 + \frac{m}{2}l^2 = \frac{27}{32}ml^2 \Rightarrow$$

$$\frac{27}{32}ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{32g}{27l}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{32g}{27l}}$$

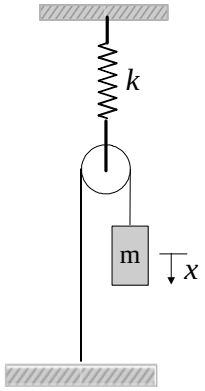
(و) هر سه قرقره بدون جرم و اصطکاک فرض می‌شوند.



$$\frac{W}{g}\ddot{x} + 64kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{64kg}{W}x = 0 \Rightarrow \omega_n = 8\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

۲- فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم‌های زیر را از **روش انرژی** به‌دست آورید.

(الف)

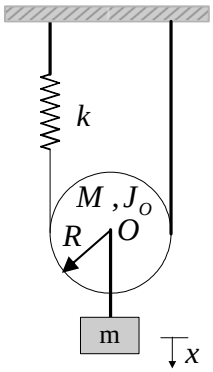


massless pully

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\ ,\ U=\frac{1}{2}k(\frac{x}{2})^2=\frac{1}{2}k(\frac{x^2}{4})\quad \frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow$$

$$m\dot{x}\ddot{x}+\frac{k}{4}x\dot{x}=0\Rightarrow m\ddot{x}+\frac{k}{4}x=0\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{k}{4m}}$$

(ب)



$$T=T_M+T_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_O\dot{x}^2$$

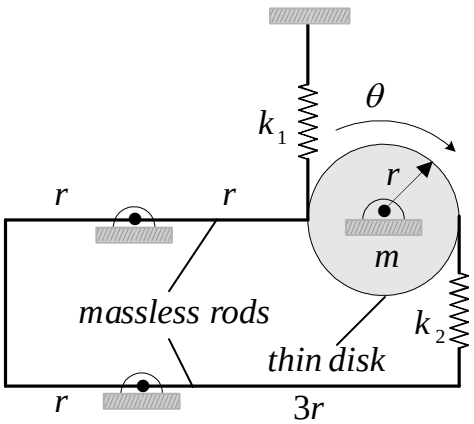
$$x=R\theta\Rightarrow T=\frac{1}{2}(m+M+\frac{J_O}{R^2})\dot{x}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k(2x)^2=\frac{1}{2}k(4x^2)$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow(m+M+\frac{J_O}{R^2})\dot{x}\ddot{x}+4kx\dot{x}=0$$

$$\Rightarrow\ddot{x}+\frac{4k}{m+M+\frac{J_O}{R^2}}x=0\Rightarrow\omega_n=\sqrt{\frac{4kR^2}{m+M+J_O}}$$

(ج)



$$T=\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\dot{\theta}^2$$

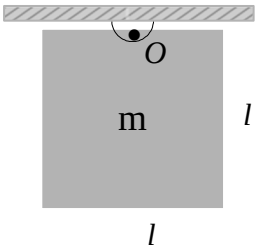
$$U=\frac{1}{2}k_1(r\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(r\theta+3r\theta)^2$$

$$=\frac{1}{2}(k_1+16k_2)r^2\theta^2\quad \frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+(k_1+16k_2)r^2\theta\dot{\theta}=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{2k_1+32k_2}{m}\theta=0\Rightarrow\omega_n=\sqrt{\frac{2k_1+32k_2}{m}}$$

(د)

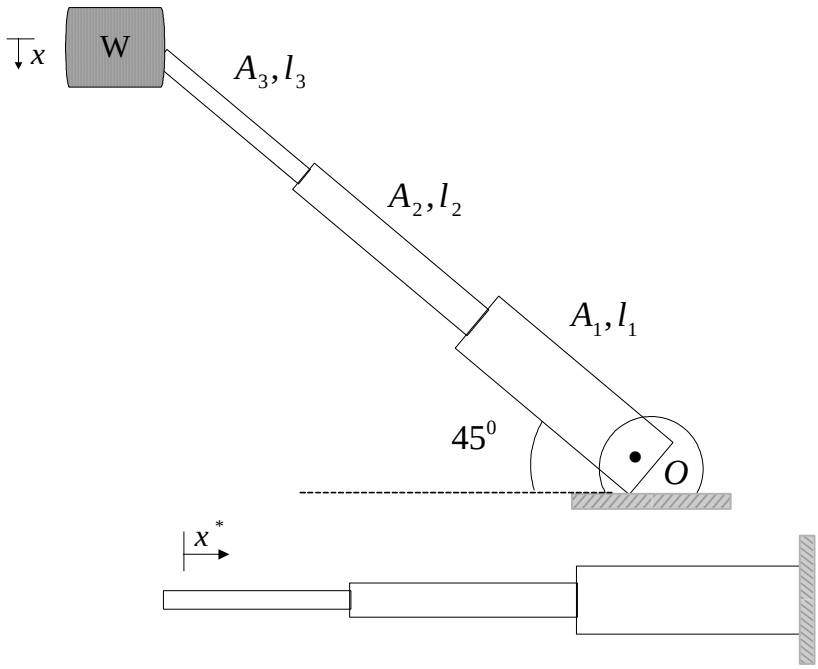


$$T=\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}m(l^2+l^2)+m(\frac{l}{2})^2\right]\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(\frac{5}{12}ml^2)\dot{\theta}^2$$

$$U = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \qquad \frac{d}{dt}(T+U)=0 \Rightarrow \frac{5}{12}ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{mgl}{2}\dot{\theta}\sin\theta=0$$

$$for\ small\ oscillations: \ddot{\theta}+\frac{6g}{5l}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{6g}{5l}}$$

۳- اتاقک یک کامیون آتش‌نشانی در انتهای یک تیر تلسکوپی مطابق شکل قرار گرفته است. این تیر از جنس فولاد با $E=200GPa$ و از سه قسمت با طول و سطح مقطع داده شده تشکیل شده است. اگر وزن فرد ایستاده در اتاقک به‌همراه اتاقک برابر $W=2000N$ باشد، با فرض یک درجه آزادی بودن سیستم، فرکانس طبیعی ارتعاشات عمودی اتاقک را تخمین بزنید.



$$l_1=l_2=l_3=3m$$
$$A_1=20cm^2$$
$$A_2=10cm^2$$
$$A_3=5cm^2$$

حل:

$$k_i=\frac{A_iE_i}{l_i}\ ,\ \frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$$

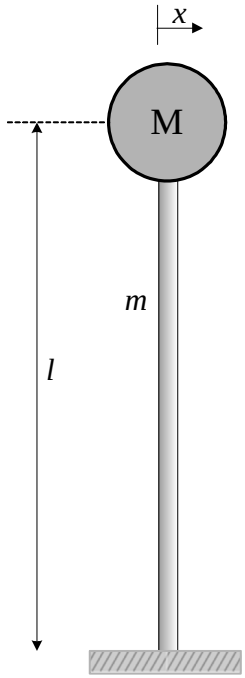
$$k_1=\frac{20\times10^{-4}\times2.1\times10^{11}}{3}=14\times10^7\ N/m\ ,\ k_2=7\times10^7\ N/m\ ,\ 3.5\times10^7\ N/m$$

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{14\times10^7}+\frac{1}{7\times10^7}+\frac{1}{3.5\times10^7}\Rightarrow k=2\times10^7\ N/m$$

$$U=\frac{1}{2}kx^{*2}=\frac{1}{2}k_{eff}x^2 \quad , \quad x^*=x\cos45^0$$

$$U=\frac{1}{2}k(x\cos45^0)\Rightarrow k_{eff}=k\cos^2 45^0=1\times10^7\ N/m$$

$$\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{1\times10^7}{2000/9.81}}=221.5\ rad/\sec$$

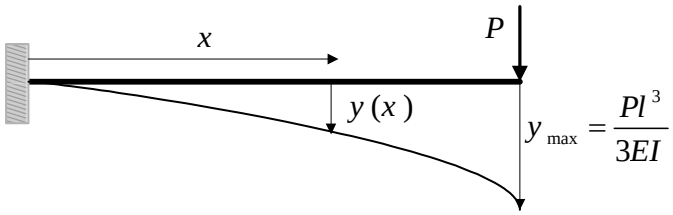


۴- ستون یک تانکر آب مطابق شکل دارای ارتفاع $90m$ و از جنس بتن با مقطع دایروی با قطر داخلی $2.4m$ و قطر خارجی $3m$ می‌باشد. جرم تانکر $3\times10^5 Kg$، چگالی بتن $2300 Kg/m^3$ و مدول الاستیسیته آن $30GPa$ است. با فرض یک درجه آزادی بودن مجموعه، فرکانس طبیعی نوسانات آن را محاسبه نمایید.

حل:

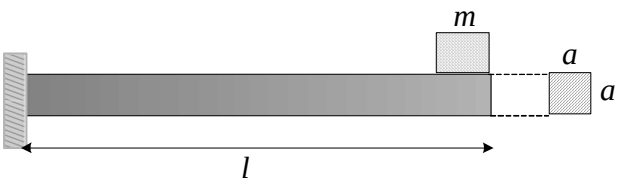
$$k=\frac{3EI}{l^3}\ ,\ I=\frac{\pi}{64}(3^4-2.4^4)=2.3475m^4\Rightarrow$$
$$k=289812\,N/m$$
$$m=\rho V=2300\times\frac{\pi}{4}(3^2-2.4^2)\times90=5.27\times10^5 Kg$$

برای محاسبه فرکانس طبیعی، جرم مؤثر تیر باید تعیین گردد:



$$y(x)=\frac{Px^2}{6EI}(3l-x)=\frac{y_{\max}}{2l^3}(3lx^2-x^3)\quad,\quad T_{\max}=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{m}{l}(\dot{y}(x))^2dx$$
$$\dot{y}(x)=\frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3}(3lx^2-x^3)\Rightarrow T_{\max}=\frac{m}{2l}(\frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3})^2\int_0^l(3lx^2-x^3)^2dx$$
$$=\frac{m}{2l}\frac{\dot{y}_{\max}}{4l^6}(\frac{33}{35}l^7)\Rightarrow T_{\max}=\frac{1}{2}(\frac{33}{140}m)\dot{y}^2_{\max}=\frac{1}{2}m_{eff}\dot{y}^2_{\max}\Rightarrow m_{eff}=\frac{33}{140}m$$
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{M+m_{eff}}}=\sqrt{\frac{289812}{3\times10^5+5.27\times10^5}}=0.827\ rad/\sec$$

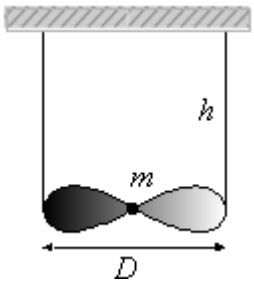
۵- یک کمپرسور به جرم $m=250Kg$ انتهای یک تیر یک سرگیردار به طول $l=1m$ و از جنس فولاد با $E=200GPa$ قرار گرفته است. با فرض ارتعاشات یک درجه آزادی، ابعاد مقطع مربعی تیر را طوری به‌دست آورید که فرکانس طبیعی سیستم خارج از محدوده $100Hz$ تا $130Hz$ باشد.



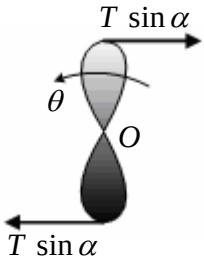
حل:

$$k = m\omega_n^2 \quad k = \frac{3EI}{l^3} \Rightarrow I = \frac{kl^3}{3E} = \frac{1}{12}a^4$$
$$\omega_n = 2\pi f \Rightarrow \frac{1}{12}a^4 = \frac{4\pi^2 f^2 m l^3}{3E} \Rightarrow a^4 = \frac{16\pi^2 f^2 l^3 m}{E}$$
$$f < 100Hz \Rightarrow a < 0.21m = 21cm$$
$$f > 130Hz \Rightarrow a > 0.24m = 24cm$$

۶- برای محاسبه ممان اینرسی جرمی یک پروانه به قطر D و جرم m حول مرکز (I_O)، از دو انتها توسط دو ریسمان به طول h آویزان شده است. این مجموعه با یک تحریک اولیه شروع به نوسانات کوچک حول نقطه O نموده و فرکانس طبیعی آن (ω_n) قابل اندازه‌گیری است. رابطه‌ای برای ممان اینرسی برحسب پارامترهای معلوم به‌دست آورید.

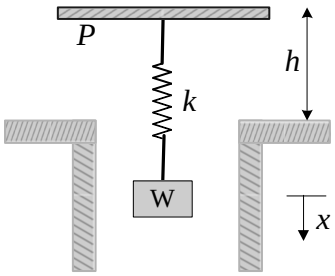


حل:



$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow -(T\sin\alpha)D = I_O\ddot{\theta}$$
$$2T\cos\alpha = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{2\cos\alpha} \ , \ h\alpha = \frac{D}{2}\theta \Rightarrow$$
$$-\frac{mg}{2\cos\alpha}D\sin\alpha = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow I_O\ddot{\theta} + \frac{mgD}{2}\tan\alpha = 0$$
$$for\ small\ oscillations: I_O\ddot{\theta} + \frac{mgD^2}{4h}\theta = 0 \Rightarrow$$
$$\omega_n^2 = \frac{mgD^2}{4hI_O} \Rightarrow I_O = \frac{mgD^2}{4h\omega_n^2}$$

۷- مطابق شکل وزنه $W = 60\,lbf$ توسط فنری با سختی $k = 150\,lbf/ft$ به صفحه بدون جرم P متصل است. وزنه از حالت سکون و ارتفاع $h = 1ft$ رها شده و پس از اصابت با تکیه گاه، صفحه P ساکن می‌شود. معادله حرکت ارتعاشی وزنه را به‌دست آورید.



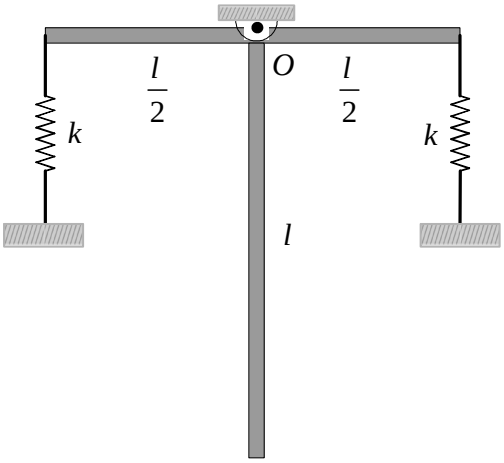
حل:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = X\sin\omega_n t$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8.97\,rad/\sec$$

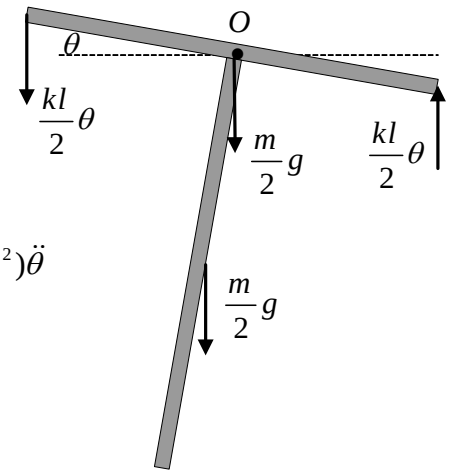
$$Initial\ conditions: \begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=\sqrt{2gh} \end{cases} \quad , \quad \dot{x}(t)=X\,\omega_n \cos\omega_n t \Rightarrow$$

$$\sqrt{2gh}=X\,\omega_n \Rightarrow X=\frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n}=0.894\,ft \Rightarrow x(t)=0.894\sin(8.97t) \quad [ft]$$

۸- دو میله یکنواخت و یکسان عمود بر یکدیگر جوش داده شده و مطابق شکل به نقطه O لولا شده‌اند. جرم کل مجموعه برابر m است. معادله حرکت را برای نوسانات صفحه‌ای کوچک حول نقطه O به‌دست آورده و فرکانس طبیعی را تعیین نمایید.



حل:

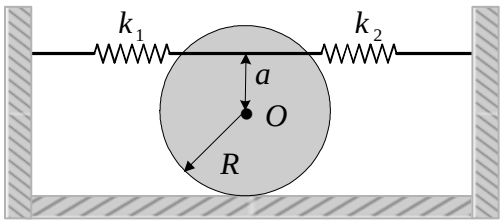


$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow$$

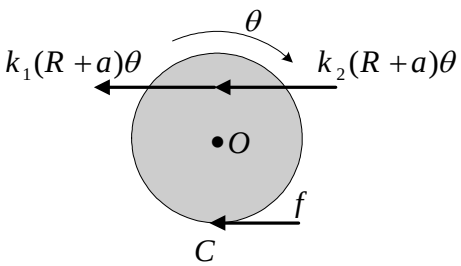
$$(-k\,\frac{l}{2}\theta)\frac{l}{2}-(k\,\frac{l}{2}\theta)\frac{l}{2}-\frac{mg}{2}\frac{l}{2}\sin\theta=(\frac{1}{12}(\frac{m}{2})l^2+\frac{1}{3}(\frac{m}{2})l^2)\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{12kl+6mg}{5ml}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{12kl+6mg}{5ml}}$$

۹- استوانه‌ای به جرم m، شعاع R و ممان اینرسی J_O حول مرکز، بدون لغزش روی یک سطح صاف می‌غلتد. نقطه‌ای به فاصله a از مرکز دیسک از طرفین به دو فنر متصل شده است. فرکانس طبیعی را برای نوسانات کوچک به‌دست آورید.



حل:

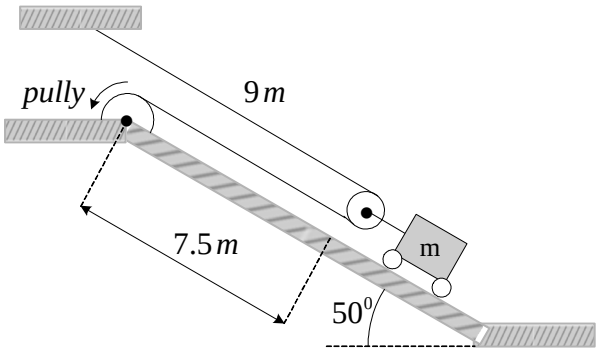


$$\Sigma M_C = I_C\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$-k_1(R+a)\theta(R+a)-k_2(R+a)\theta(R+a)=(mR^2+J_O)\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{(k_1+k_2)(R+a)^2}{mR^2+J_O}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{(k_1+k_2)(R+a)^2}{mR^2+J_O}}$$

۱۰- باری به وزن $20KN$ توسط یک قرقره بدون اصطکاک و یک کابل فولادی با مدول الاستیسیته $200GPa$ و قطر $1mm$ مطابق شکل روی یک سطح شیب دار بالا کشیده می‌شود. فرکانس طبیعی را برای ارتعاشات بار در راستای حرکت به‌دست آورید.

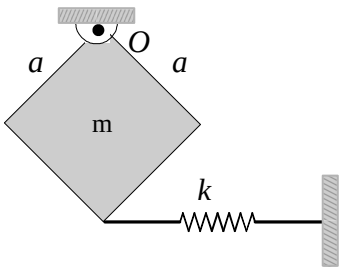


حل:

$$\begin{cases} k_1 = (\frac{AE}{l})_1 = \dfrac{\frac{\pi}{4}\times 0.001^2 \times 200\times 10^9}{9} = 17453.3\,N/m \\ k_2 = (\frac{AE}{l})_2 = \dfrac{\frac{\pi}{4}\times 0.001^2 \times 200\times 10^9}{7.5} = 20943.95\,N/m \end{cases} \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2 = 38397.25\,N/m$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = 4.3398\,rad/\sec$$

۱۱- یک صفحه نازک مربع شکل به جرم m و طول ضلع a مطابق شکل در گوشه O لولا شده و در گوشه مقابل آن نیز به فنری با سختی k متصل شده است. فرکانس طبیعی را برای نوسانات کوچک به‌دست آورید.



حل:

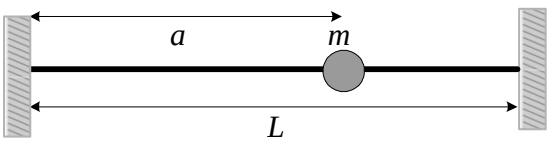
$$T = \frac{1}{2}m(\frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\frac{a^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$U = mg\frac{a\sqrt{2}}{2}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k(a\sqrt{2}\theta)^2$$

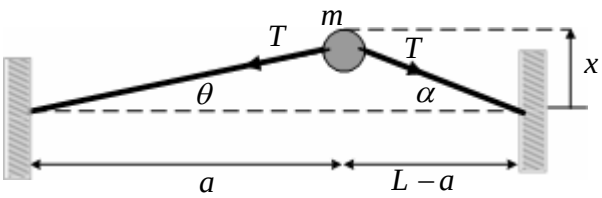
$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \frac{ma^2}{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\frac{a\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\sin\theta + 2ka^2\dot{\theta}\theta = 0 \Rightarrow \frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} + (\frac{mga}{\sqrt{2}} + 2ka^2)\theta = 0$$

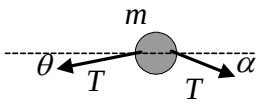
$$\omega_n = \sqrt{\frac{\sqrt{2}mga + 4ka^2}{ma^2}}$$

۱۲- کشش کابل نشان داده شده در شکل ثابت و برابر T بوده و جرم m در محل نشان داده شده به کابل متصل شده است. فرکانس طبیعی را برای نوسانات عمودی این جرم تعیین کنید.



حل:



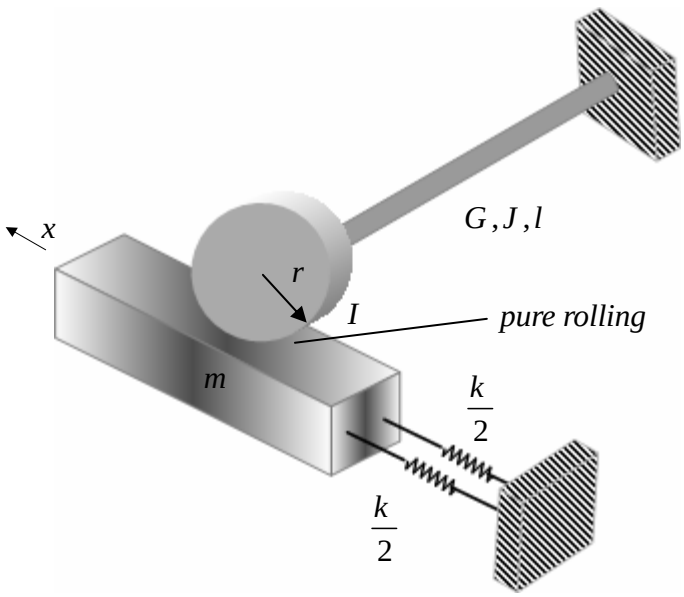


$$m\ddot{x} = -T\sin\theta - T\sin\alpha$$

$$small\ \ oscillations: \begin{cases} \sin\theta \approx \tan\theta = \dfrac{x}{L-a} \\ \sin\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{x}{a} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} = -T\left[\frac{x}{L-a} + \frac{x}{a}\right] \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + \frac{TL}{ma(L-a)}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{TL}{ma(L-a)}}$$

۱۳- شکل زیر تیغه فرزی را با ممان اینرسی I نشان می‌دهد که روی قطعه‌ای به جرم m عملیات ماشینکاری انجام می‌دهد. سختی معادل پایه نگهدارنده قطعه k است. محور تیغه دارای مدول برشی G ، ممان اینرسی قطبی J و طول l است. با توجه به‌وجود غلتش خالص بین تیغه فرز و قطعه، فرکانس طبیعی ارتعاشات مجموعه را به‌دست آورید.



حل:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2,\ \dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}(m + \frac{I}{r^2})\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_t\theta^2$$

$$M_t = k_t\theta\ ,\ \theta = \frac{M_t l}{GJ} = \frac{M_t}{k_t} \Rightarrow$$

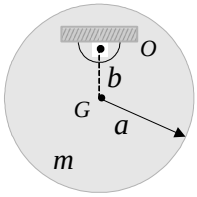
$$k_t = \frac{GJ}{l}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{GJ}{l}(\frac{x}{r})^2 = \frac{1}{2}(k + \frac{GJ}{lr^2})x^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) \Rightarrow (m + \frac{I}{r^2})\dot{x}\ddot{x} + (k + \frac{GJ}{lr^2})x\dot{x} = 0 \qquad \ddot{x} + \left(\frac{k + \frac{GJ}{lr^2}}{m + \frac{I}{r^2}}\right)x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{klr^2 + GJ}{mlr^2 + Il}}$$

۱۴- دیسک نازکی به جرم m و شعاع a در نقطه O به فاصله b از مرکز لولا شده و حول این نقطه حرکت نوسانی انجام می‌دهد. مقدار b را برای بیشترین فرکانس طبیعی تعیین کنید.

حل:

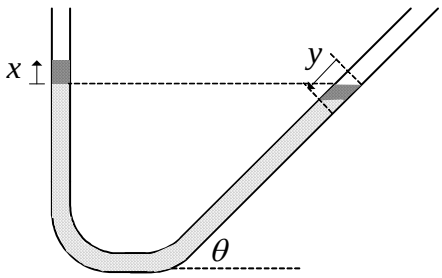


$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} ma^2 + mb^2)\dot{\theta}^2$$
$$U = mgb\,(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2gb}{a^2+2b^2}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2gb}{a^2+2b^2}}$$

$$\frac{d\omega_n}{db} = 0 \Rightarrow b = a/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (\omega_n)_{\max} = \left[\frac{g\sqrt{2}}{2a}\right]^{\frac{1}{2}}$$

۱۵- از یک مانومتر شیب‌دار مطابق شکل برای اندازه‌گیری فشار استفاده می‌شود. اگر طول کل لوله جیوه l باشد، رابطه‌ای برای فرکانس نوسانات کوچک جیوه به‌دست آورید.



حل:

فرض کنیم جیوه در شاخه سمت چپ به اندازه x بالا رود، بنابراین جابجایی آن در امتداد شاخه سمت راست (y) نیز x است. وزن مخصوص جیوه را γ و سطح مقطع لوله را A در نظر می‌گیریم.

$$U = (Ax\gamma)(\frac{x}{2}) + (Ay\gamma)(\frac{y\sin\theta}{2}) \quad x = y \Rightarrow U = \frac{A\gamma x^2}{2}(1+\sin\theta)$$

$$T = \frac{1}{2}(\frac{Al\gamma}{g})\dot{x}^2 \qquad x(t) = X\sin\omega_n t \Rightarrow \dot{x}(t) = X\omega_n\cos\omega_n t$$

$$U_{\max} = \frac{A\gamma X^2}{2}(1+\sin\theta) \quad , \quad T_{\max} = \frac{1}{2}(\frac{Al\gamma}{g})X^2\omega_n^2$$

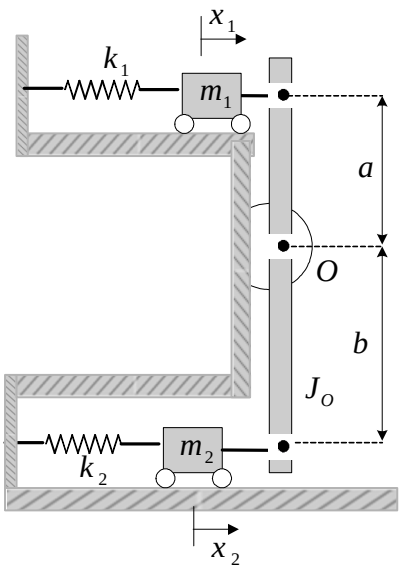
$$T_{\max} = U_{\max} \Rightarrow \frac{A\gamma X^2}{2}(1+\sin\theta) = \frac{1}{2}(\frac{Al\gamma}{g})X^2\omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}(1+\sin\theta)}$$

در حالت خاص $\theta = 90^0$ (مانومتر U شکل):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

۲- جرم و سختی مؤثر

۱- با توجه به مختصه x_2، جرم معادل (مؤثر) سیستم نوسانی زیر را تعیین کنید.



حل:

$$T = T_{eff} = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{x}_2^{\,2}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^{\,2} + \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2$$

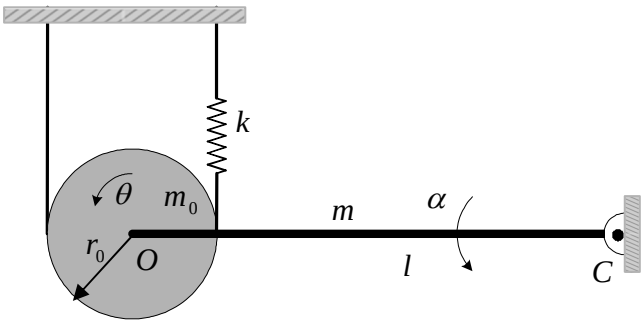
$$\theta = \frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b} \Rightarrow \dot{x}_1 = (\frac{a}{b}) \dot{x}_2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 (\frac{a}{b})^2 + m_2 + \frac{J_O}{b^2} \right] \dot{x}_2^{\,2}$$

$$\Rightarrow m_{eff} = m_1 (\frac{a}{b})^2 + m_2 + \frac{J_O}{b^2}$$

۲- با توجه به مختصه θ یعنی زاویه حرکت دیسک، ممان اینرسی معادل سیستم ارتعاشی زیر را به‌دست آورید.

حل:



$$T = \frac{1}{2} m_0 v_O^{\,2} + \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\alpha}^2$$

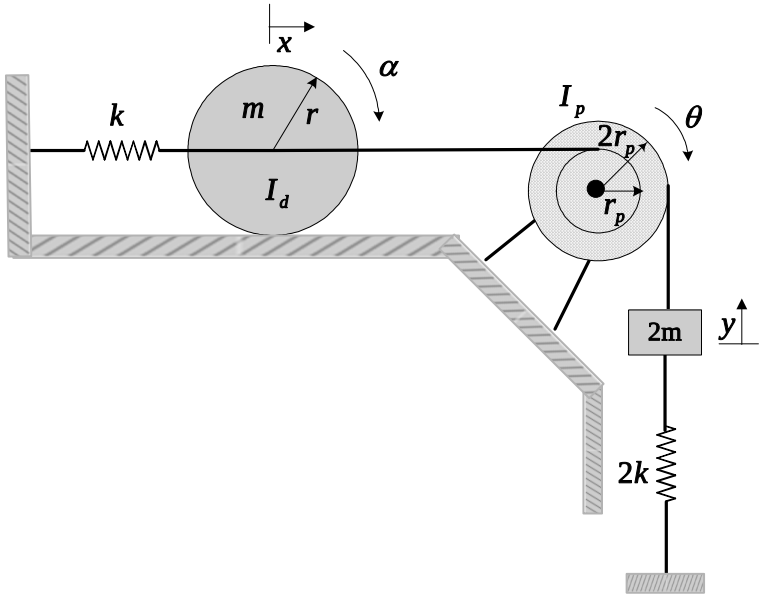
$$r_0 \theta = l \alpha \ , \ v_O = r_0 \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m_0 (r_0 \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_C (\frac{r_0 \dot{\theta}}{l})^2$$

$$T = \frac{1}{2}(m_0 r_0^{\,2} + \frac{1}{2} m_0 r_0^{\,2} + \frac{1}{3} m l^2 \frac{r_0^{\,2}}{l^2}) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} m_0 r_0^{\,2} + \frac{1}{3} m r_0^{\,2}) \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow I_{eff} = (\frac{3}{2} m_0 + \frac{1}{3} m) r_0^{\,2}$$

۳- مقادیر جرم و سختی مؤثر سیستم نوسانی نشان داده شده را با توجه به مختصه x بیابید.



حل:

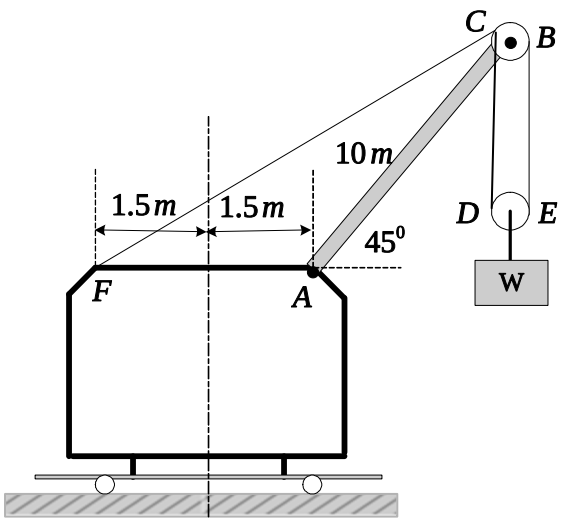
$$T = T_{eff} = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{x}^2 \ , \ U = U_{eff} = \frac{1}{2} k_{eff} x^2 \quad T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_d \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{y}^2$$

$$\dot{x} = r\dot{\alpha} = r_p \dot{\theta} \ , \ \dot{y} = 2r_p \dot{\theta} = 2\dot{x} \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left[m + \frac{I_d}{r^2} + \frac{I_p}{r_p^{\,2}} + 2^2(2m) \right] \dot{x}^2 \Rightarrow$$

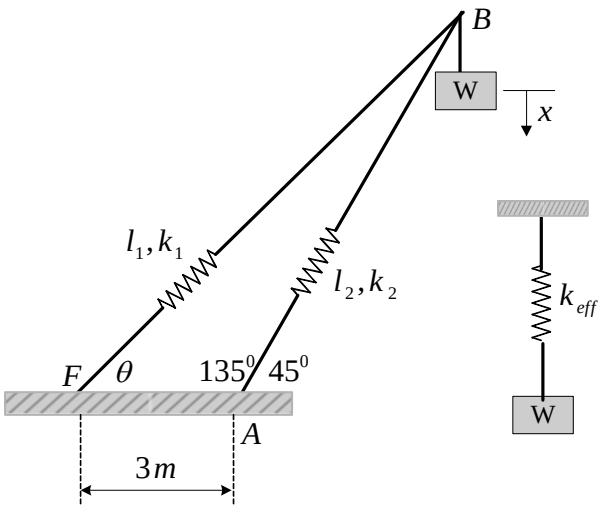
$$m_{eff} = 9m + \frac{I_d}{r^2} + \frac{I_p}{r_p^{\,2}}$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2}(2k)y^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2}(2k)(2x)^2 = \frac{1}{2}(9k)x^2 \Rightarrow k_{eff} = 9k$$

۴- در جرثقیل نشان داده شده میله AB دارای طول $10m$ و سطح مقطع $2500mm^2$ و سطح مقطع کابل CDEBF برابر با $100mm^2$ می‌باشد. وزنه W از جرثقیل آویزان است. مقدار سختی مؤثر سیستم را در راستای عمودی محاسبه کنید.



حل:



$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2\times 3\times 10\cos 135^0 \ , \ l_1 = 12.3055m$$

$$10^2 = l_1^2 + 3^2 - 2\times l_1 \times 3\cos\theta \Rightarrow \theta = 35.1^0$$

$$k_1 = \frac{A_1E_1}{l_1} = \frac{100\times 207\times 10^3}{12.3055\times 10^3} = 1682.2\,N/mm$$

$$k_2 = \frac{A_2E_2}{l_2} = \frac{2500\times 207\times 10^3}{10\times 10^3} = 51750\,N/mm$$

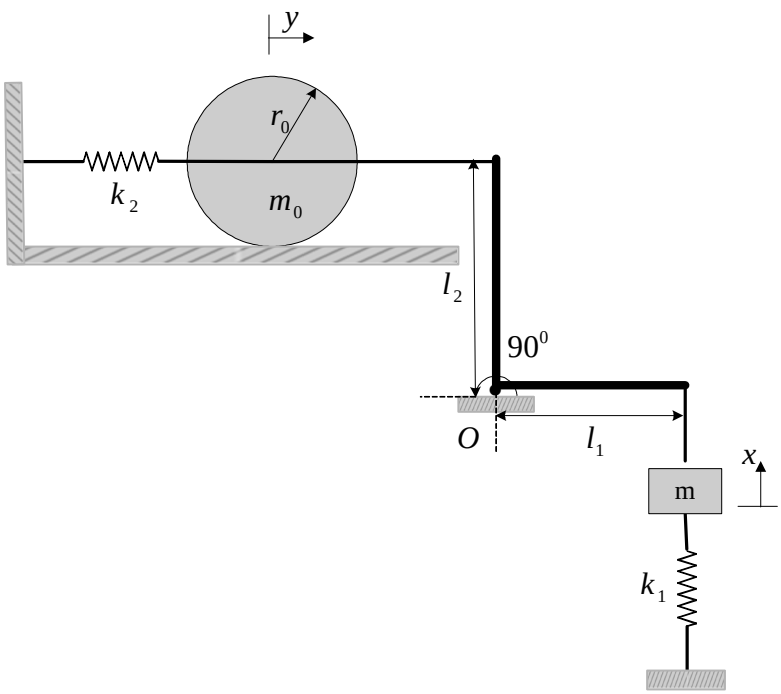
$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \quad , \quad x_1 = x\cos(90-\theta) \quad , \quad x_2 = x\cos 45^0 \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x\cos 54.9^0)^2 + \frac{1}{2}k_2(x\cos 45^0)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[k_1\cos^2 54.9^0 + k_2\cos^2 45^0\right]x^2 \Rightarrow k_{eff} = k_1\cos^2 54.9^0 + k_2\cos^2 45^0$$

$$k_{eff} = 26431.2\,N/mm = 2.64\times 10^7\,N/m$$

۵- میله نشان داده شده با ممان اینرسی J_O حول نقطه نقطه O در این نقطه لولا، در یک انتها به جرم و فنر و در انتهای دیگر به یک دیسک نازک به جرم m_0 و شعاع r_0 و یک فنر متصل شده است. دیسک روی زمین غلتش خالص انجام می‌دهد. جرم مؤثر مجموعه را با توجه به مختصه x به‌دست آورید.

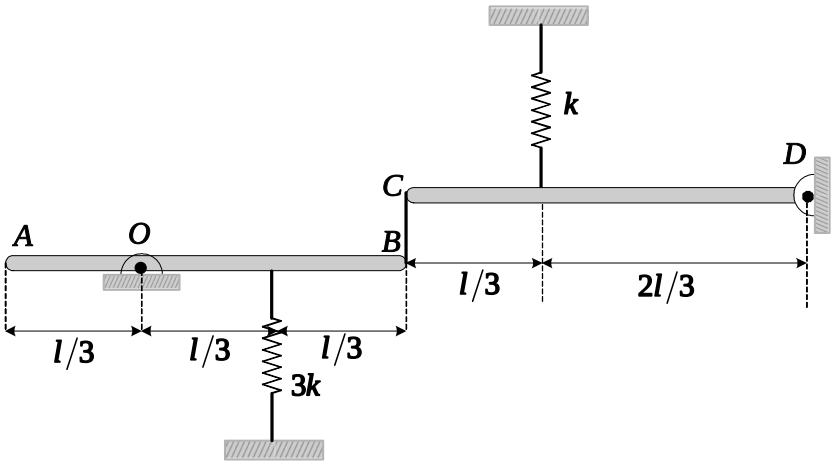


حل:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_0\dot{y}^2+\frac{1}{2}I_0\dot{\alpha}^2 \qquad I_0=\frac{1}{2}m_0r_0^2,\ x=l_1\theta\ ,\ y=l_2\theta=r_0\alpha\Rightarrow$$

$$T=\frac{1}{2}\left[m+\frac{J_O}{l_1^2}+m_0(\frac{l_2}{l_1})^2+\frac{1}{2}m_0r_0^2\times(\frac{l_2}{l_1r_0})^2\right]\dot{x}^2=\frac{1}{2}m_{eff}\dot{x}^2\Rightarrow m_{eff}=m+\frac{J_O}{l_1^2}+\frac{3}{2}m_0(\frac{l_2}{l_1})^2$$

۶- میله‌های AB و CD هر دو به جرم m و طول l به‌ترتیب در نقاط O و D لولا و توسط میله صلب BC در انتها به یکدیگر متصل شده‌اند. فرکانس طبیعی مجموعه و نیز جرم مؤثر را با توجه به زاویه دوران میله CD به‌دست آورید.



حل:

$$T=\frac{1}{2}I_{(CD)_D}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_{(AB)_O}\dot{\alpha}^2 \qquad I_{(CD)_D}=\frac{1}{3}ml^2\ ,\ I_{(AB)_O}=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{6})^2=\frac{1}{9}ml^2$$

$$\frac{2l}{3}\alpha=l\theta \quad\Rightarrow\quad T=\frac{1}{2}(\frac{7}{12}ml^2)\dot{\theta}^2\Rightarrow I_{eff}=\frac{7}{12}ml^2$$

$$U=\frac{1}{2}k(\frac{2l}{3}\theta)^2+\frac{1}{2}(3k)(\frac{l}{3}\alpha)^2=\frac{1}{2}(\frac{43}{36}kl^2)\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{43k}{21m}\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_n=\sqrt{\frac{43k}{21m}}$$