تحلیل سازه یک

دست نوشته‌ای که در اختیار دارید حاصل یادداشت های من از کلاس تحلیل سازه ی یک دکتر محمدعلی قناد در گروه عمران دانشگاه صنعتی شریف است که فایل تصویری آنها در سایت وزین و بسیار مفید www.maktabkhooneh.org قرار داده شده است. منبع اصلی این درس، کتاب تحلیل سازه Hibbeler (ویرایش هشتم) بوده و اکثر مثال ها نیز از همان کتاب آورده شده اند.

این یادداشت ها در ابتدا جهت استفاده شخصی بود اما در پایان احساس کردم که شاید بتواند برای بقیه ی دانشجویان نیز مفید باشد. به همین دلیل پس از رفع ایرادات املایی، تصمیم گرفتم آن را اسکن نموده و به قالب فایل pdf درآورم.

لازم به ذکر است رشته ی تخصصی نگارنده عمران - عمران نبوده و تنها به دلیل علاقه و بهره وری شخصی به تحلیل سازه یک پرداخته و مطالب متن حاضر را آماده کرده ام. علاوه بر این، از آنجایی که مطالب شفاهی ارائه شده در کلاس دکتر قناد، بدون هیچ گونه ویرایشی یادداشت شده اند، در برخی موارد متن به نوعی به حالت گفتاری و غیر رسمی درآمده است. بنابراین امیدوارم برای اشتباهات احتمالی متن حاضر، گریبان ملامت بر من نکشید.

برای من که آشنایی کم رنگی با درس تحلیل سازه داشته ام، فیلم کلاس های دکتر قناد و دست نوشته ی حاضر بسیار مفید بوده است. امید دارم شما نیز بهترین بهره را از آن ببرید.

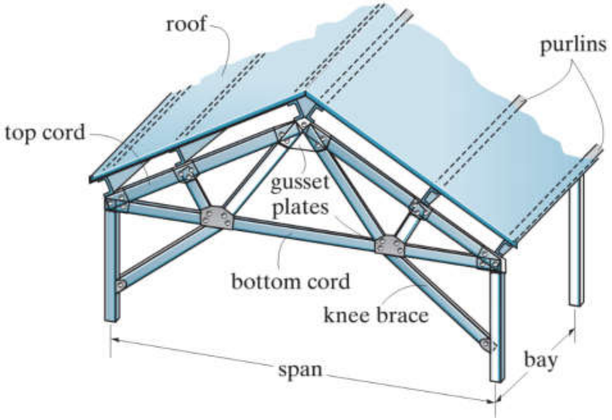
در پایان انتظار دارم اگر مطلب اشتباهی در این متن مشاهده نمودید (که همه ناشی از فهم اشتباه من از موضوع است)، برای من ایمیل کنید تا هیچ دانشجویی نکته ی ناحقی از این رقیمه به خاطر نبرد.

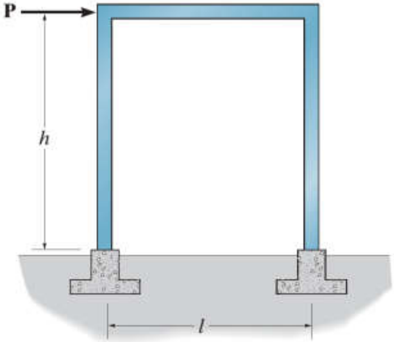
فرزاد یوسف زاده

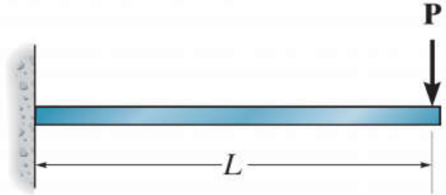
فارغ التحصیل کارشناسی ارشد عمران - نقشه برداری (ژئودزی)

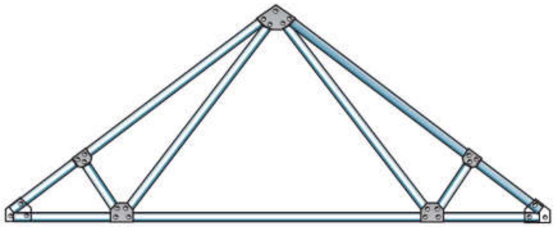
دانشگاه تهران farzad.yousefzadeh@gmail.com

تابستان ۱۳۹۴







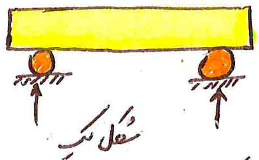


- جلسه اول – مقدمه (در این متن آورده نشده است)
- جلسه دوم - تعریف پایداری و ناپایداری
- جلسه سوم - تعریف پایداری و ناپایداری
- جلسه چهارم - خرپا
- جلسه پنجم - انواع قاب ها
- جلسه ششم - تحلیل سازه های معین
- جلسه هفتم - دیاگرام ممان
- جلسه هشتم - حل تمرین در مورد قاب
- جلسه نهم - مثالی در مورد خرپاها
- جلسه دهم - روش تحلیل خرپاهای پیچیده
- جلسه یازدهم - بارگذاری و تغییر شکل
- جلسه دوازدهم - بارگذاری و تغییر شکل
- جلسه سیزدهم - لنگر سطح
- جلسه چهاردهم - لنگر سطح
- جلسه پانزدهم - ادامه بحث تغییر شکل و بارگذاری
- جلسه شانزدهم - تیر مزدوج
- جلسه هفدهم - تیر مزدوج
- جلسه هجدهم - روش های انرژی
- جلسه نوزدهم - کار مجازی
- جلسه بیستم - تغییر شکل های ناشی از برش
- جلسه بیست و یکم - بحث اجزاء محدود
- جلسه بیست و دوم - قضیه کاستیلیانو
- جلسه بیست و سوم - روش کار کمینه
- جلسه بیست و چهارم - خط تاثیر
- جلسه بیست و پنجم - خط تاثیر
- جلسه بیست و ششم - خط تاثیر
- جلسه بیست و هفتم - تحلیل سازه های نامعین
- جلسه بیست و هشتم - تحلیل سازه های نامعین
- جلسه بیست و نهم - تحلیل سازه های نامعین

دکتر محمد علی قناد دوره کارشناسی و ارشد خود را در دانشگاه صنعتی شریف سپری نموده و سپس مدرک دکترای خود را از دانشگاه ناگویا ژاپن اخذ کرده است. ایشان در حال حاضر با درجه‌ی استاد در دانشگاه صنعتی شریف مشغول تدریس است.

پایداری و ناپایداری (Stability)

فرض کنید جسمی داشته باشیم روی تکیه‌گاه چون تکیه‌گاه‌ها تنها دو عکس‌العمل دارند در راستای قائم. پس (سازه) در راستای افق ناپایدار است. هرچه تکیه‌گاه غلطکی اضافه کنیم باز هم ناپایدار است. ما فرض می‌کنیم که خود جسم صلب است و مشکل داخلی ندارد. اصطلاحاً از نظر خارجی داریم به مسئله نگاه می‌کنیم.

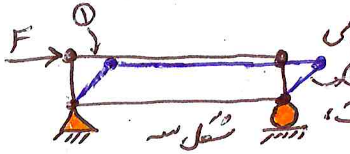


شکل یک

اگر یک تکیه‌گاهی قرار دهیم که حرکت افقی را کنترل کند آنگاه سازه پایدار می‌شود.

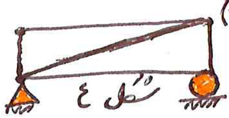
شکل دو

ما تاکنون داخل این جسم را در نظر نگرفته‌ایم. ممکن است یک تیر باشد یا خرپا باشد یا هر چیز دیگری. حال فرض کنید سازه را از نظر داخلی در نظر بگیرید. فرض سازه از چهار عضو تشکیل شود که به هم مفصل شده‌اند



شکل سه

این سازه با وجود داشتن تکیه‌گاه‌های مناسب از نظر داخلی ناپایدار است، چراکه با وارد کردن نیروی F، مبنای آن از هم می‌پاشد و به حالت دوم در می‌آید. اگر یک عضو قطری به سازه اضافه کنیم آنگاه ناپایداری از بین می‌رود.

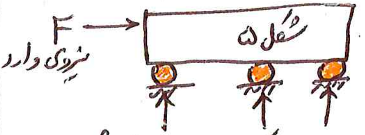


شکل ٤

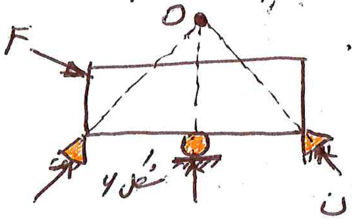
به خاطر داشته باشید تغییر شکل (تغییرات کوچک) در سازه در اینجا مد نظر است. هر سازه که بارگذاری شود تغییر شکل می‌یابد. منظور ما تغییر شکل‌های خارج از کنترل است.

ما بعداً در قسمت‌های آینده صحبت خواهیم کرد که چگونه باید پایداری یا ناپایداری را تشخیص دهیم. برخی از آنها را باید قسمت به قسمت تحقیق کنیم اما برخی از آنها را نیز مستقیماً می‌توان تشخیص داد. هدف ما از آوردن این مطلب این بود که بگوییم سازه را می‌توانیم از دو بعد داخلی و خارجی مورد بررسی قرار دهیم.

فرض کنید جسمی داریم متشکل از برخی اعضا که در کنار هم قرار گرفته و به خوبی کار می‌کنند. فرض کنید که تمام اعضا صلب اند و هیچ مشکل داخلی نداریم. از دید استاتیکی تکیه‌گاه‌ها باید سه مولفه‌ی تکیه‌گاهی داشته باشیم که نه باید موازی باشند و نه متقارب. اگر کمتر از سه مولفه داشته باشیم یا با هم موازی اند یا متقارب. اگر سه تا هم باشد و موازی باشند آنگاه هر نیروی عمود بر این سه تا به این سازه اعمال شود آنگاه تکیه‌گاه قدرت مقاومت در برابر آن ندارد.



حال فرض کنید سه مولفه داشته باشیم که موازی نباشند ولی متقارب باشند در نقطه‌ی O.



شکل ۶

در صورت بارگذاری اعمال شود به گونه‌ای که امتداد آن از O نگذرد $\sum M_O$ نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین جسم حول این نقطه خواهد چرخید. F در شکل ۶ یک لنگر پادساعتگرد به جسم اعمال می‌کند. به محض اینکه اندکی چرخید ممکن است سازه گیر کند اما همین چرخش کوچک نمایانگر ناپایداری است.

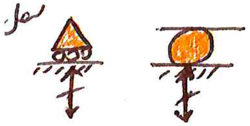
قبل از ادامه‌ی مطلب اندکی راجع به تکیه‌گاه‌ها صحبت کنیم.

انواع تکیه‌گاه

الف) تکیه‌گاه مفصلی (Hinge): شکل ۷

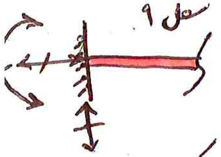
دو مولفه در راستای x و y دارد. این دو عکس‌العمل در شکل به صورت پیکان دو طرفه نشان داده شده چراکه در هر دو جهت تکیه‌گاه قابلیت عکس‌العمل نشان دادن دارد. از این پس عکس‌العمل‌ها را با یک فلش و یک خط بر روی آن فقط به صورت ↑ نشان خواهیم داد تا با دیگر نیروها اشتباه نشود.

ب) تکیه‌گاه غلطکی (Roller):



این تکیه‌گاه به دو صورت روبرو نمایش داده می‌شود که یک عکس‌العمل دارد.

ج) تکیه‌گاه گیردار (Fixed)



شکل ۹

که علاوه بر دو نیروی افقی و عمودی لنگر را هم کنترل می‌کند.

این تکیه‌گاه‌ها نمودی از سازه‌هایی هستند که در عالم واقع وجود دارند. به عبارت دیگر ما در دنیای بیرون ما چیزی نمی‌بینیم که دقیقاً جای آن تکیه‌گاهی مثل △ داشته باشد. البته در واقع مدل‌سازی تکیه‌گاه‌های واقعی هستند. در درس‌هایی چون طراحی سازه‌های فولادی و ... به ما آموزش داده می‌شود که چه نوع از بستن قطعات و پیچ‌ها و بستن‌ها به هم باعث به وجود آمدن تکیه‌گاهی می‌شود که عمل آن شبیه به عمل △ باشد.

صحت

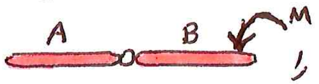
در واقعیت توجه داشته باشید که اکثر چیزهایی که فرض می‌شود آنگونه نیست که کاملاً همان را بگیرد یا اصلاً همان را تحمل نکند. بلکه حالتی بین این دو است. اگر تکیه‌گاه تا حدی که تعریف شده، بتواند لنگر تحمل کند به آن تکیه‌گاه گیردار می‌گویند و اگر از آن حد پایین‌تر باشد آنگاه تکیه‌گاه مفصلی تلقی می‌شود. گاهی لنگر تحمل شده توسط تکیه‌گاه در هیچ کدام از حدود تکیه‌گاه‌های فوق نیست. یا مخصوصاً این گونه طراحی می‌شوند یا ذات تکیه‌گاه همین گونه هست. در این مواقع تکیه‌گاه به صورت زیر نشان داده می‌شود

شکل ۱۰

این تکیه‌گاه همان تکیه‌گاه مفصلی است که تا حدودی هم لنگر را تحمل می‌کند. به همین دلیل یک فنر پیچشی بر روی آن قرار داده‌ایم. برای یک فنر ارتجاعی بین f و جابجایی Δ با رابطه‌ی هوک $f=K\Delta$ داده می‌شود که در آن K ضریب سختی فنر است.

فرض کنید دو عضو با هم مفصل شده باشند

شکل ۱۱

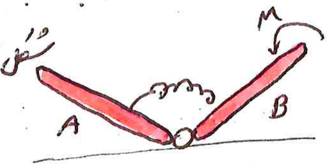


حال اگر به سمت B، لنگر M را وارد کنیم. سمت A، لنگر ایجاد شده را درک نخواهد کرد. اما اگر یک فنر پیچشی به شکل زیر قرار دهیم

شکل ۱۲

لنگر اعمال شده به سمت A انتقال می‌یابد اما به صورت تغییر زاویه.

شکل ۱۳



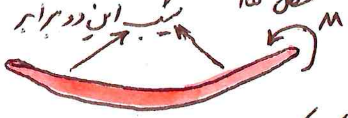
در واقع شکل ۱۳

تیری که بین دو سمت آن مفصل گذاشته نشده است.

شکل ۱۴

در تیر پیوسته می‌توان فرض کرد که اگر لنگر وارد کنیم تمام آن به سمت دیگر انتقال می‌یابد و شیب دو سمت برابر می‌شود

شکل ۱۵



(شکل اغراق شده است)

در واقع می‌توان فرض کرد که K_θ فنر در اینجا بی‌نهایت است. در مورد شکل ۱۱ می‌توان فرض کرد که $K_\theta=0$ است. (θ را به این خاطر گذاشتیم که چرخش را تداعی کند). شکل ۱۲ در واقع حالت بین تیر پیوسته و تیر مفصلی است ($0<K_\theta<\infty$)

← در مورد تیر پیوسته‌ی واقعی البته $K_\theta\to\infty$ وجود ندارد و تنها فرض است که می‌کنیم.

در شکل ۱۰ اگر K_θ به سمت بی‌نهایت میل داده شود در این صورت تکیه‌گاه تبدیل به یک تکیه‌گاه گیرداری می‌شود و اگر $K_\theta\to 0$ آنگاه تکیه‌گاه مفصلی به دست می‌آید.

تکیه‌گاه‌های دیگری نیز وجود دارند که کمتر با آنها سروکار داریم

شکل ۱۶

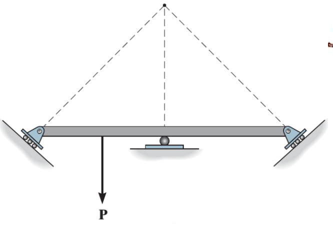
که عکس‌العمل افقی دارد لنگرگیر هم هست اما در راستای عمودی می‌لغزد. بعدها بار دیگر به فنرها باز خواهیم گشت. فعلاً ادامه‌ی مبحث را پی می‌گیریم و در مورد ناپایداری صحبت می‌کنیم. گفتیم نیروهای

سازه تکان خواهد خورد. البته تغییر شکل در سازه وجود دارد مثلاً با بارگذاری روبرو تیر تغییر شکل می‌دهد اما این تغییر شکل برگشت‌پذیر است. ولی در مورد ناپایداری برگشت وجود ندارد.

شکل ۱۷

سازه‌ای مثل شکل روبرو که ناپایدار است اصطلاحاً گفته می‌شود که دارای ناپایداری هندسی خارجی است

(External Geometric Instability)

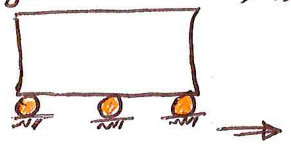


گاهی ممکن است تکیه‌گاه‌های بسیاری داشته باشیم اما طوری که مناسب چیده نشوند آنگاه باز ناپایدار خواهد بود. فرض کنید شکل پایین را داریم.

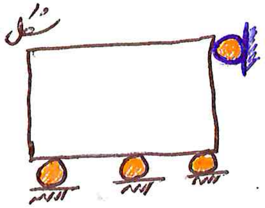
↓

حال اگر تکیه‌گاه روبرو را اضافه کنیم به سمت راست و بالای این سازه آنگاه پایداری به دست خواهد آمد

شکل ۱۹



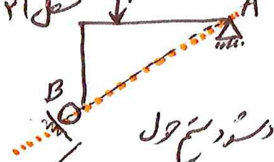
شکل ۲۰



اما حالا سیستم از معین بودن خارج می‌شود چرا که سه معادله‌ی استاتیکی داریم در حالی که چهار مجهول تکیه‌گاهی داریم. هرگاه تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات استاتیکی باشد آنگاه سازه نامعین می‌شود.

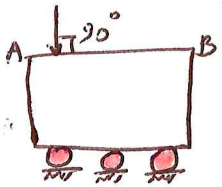
گاهی ممکن است از ظاهر سازه نتوان فهمید که سازه ناپایدار است یا نه مثلاً خط اثر عکس‌العمل سمت چپ درست از تکیه‌گاه سمت راست می‌گذرد. بنابراین اگر F به سازه وارد شود سیستم حول

شکل ۲۱



دیگر خط اثر تکیه‌گاه B از A نمی‌گذرد .

ممکن است سازه‌ای ناپایدار در برابر یک نیرو تکان نخورد اما دلیل نمی‌شود که سازه را پایدار فرض کنیم. مثلاً سازه‌ی زیر تحت اثر نیروی عمود بر AB تکان نمی‌خورد اما سازه ناپایدار است.



شکل ۲۲

حال میخواهیم سازه‌ها را از لحاظ داخلی بررسی کنیم . برای این منظور سازه‌ها را دسته بندی می‌کنیم به صورت زیر

انواع سازه :

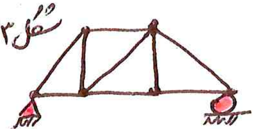
① تیر beam

② خرپا trass

③ قاب — frame

① تیر : اگر یک عضو صاف داشته باشیم تیر می‌گوییم. البته تیر خمیده هم داریم اما معمولاً در کتاب‌ها تیر صاف در نظر گرفته می‌شود . در تیرها بارگذاری معمولاً عمود بر عضو صورت می‌گیرد و معمولاً ثقلی است و عاملی که نقش اصلی را بازی می‌کند عامل لنگر است که ایجاد برش می‌کند و بارگذاری محوری معمولاً وجود ندارد . در تیر بیشتر دنبال خمش و برش هستیم .

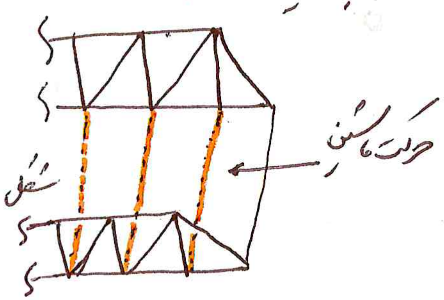
② خرپا : مجموعه‌ای از اعضا که با مفصل به هم وصل شده‌اند یعنی اعضای دو سر مفصل هستند .



شکل ۲۳

حال که درباره‌ی خرپا داخل سازه‌ها صحبت می‌کنیم فرض کنید که تکیه‌گاه‌ها مشکلی ندارند.

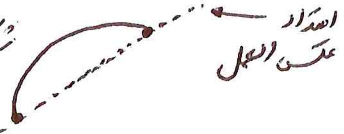
معمولاً خرپاها روی گره‌ها بارگذاری می‌شوند نه روی اعضا. اینکه چگونه طراحی خرپا کنیم تا بارگذاری روی مفصل‌ها بیفتد امری هنر است که طراح باید رعایت کند. مثلاً پل به صورت زیر طراحی می‌شود تا بار ماشین از طریق تیرهای وصل کننده‌ی



شکل ۲۴

دو طرف‌ها روی مفصل‌ها بیفتند .

در خرپاها اعضا به دلیل دو سر مفصل بودن اعضای یک نیرویی هستند که فقط نیروی محوری تحمل می‌کنند . امکان وجود برش یا خمش در داخل آنها نیست . حتی اگر عضوی خمیده به صورت

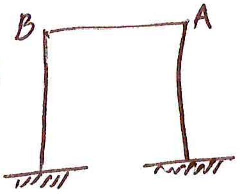


شکل ۲۵

داشته باشیم که دو سر مفصل باشد آنگاه (این عضو از داخل سازه بیرون کشیده شده است) عکس العمل‌ها در راستای خط واصل دو مفصل هستند.

③ قاب : کلی‌ترین حالتی است که داریم. یک سری اعضا به صورت صلب به هم وصل شده‌اند. هدف این است که الزاماً صاف نیستند بلکه با زاویه به هم وصل اند. مثلاً

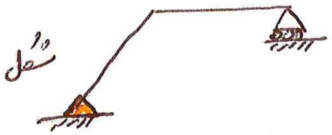
↳ اعضا روی یک خط نیستند .



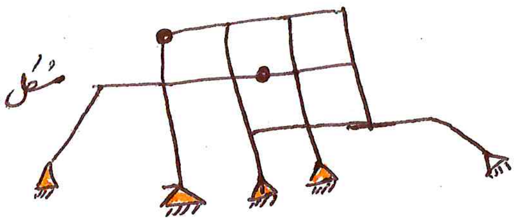
شکل ۲

پیش فرض این است که به صورت صلب به هم وصل اند اما می‌توان مثلاً در گوشه‌ی A یک مفصل هم قرار داد.

مثال‌هایی از قاب :



شکل ۷



شکل ۲۸

حال قرار شد ناپایداری و معین یا نامعین بودن را از لحاظ داخلی بررسی کنیم اول از تیر شروع می‌کنیم و می‌خواهیم یقین کنیم که پایدار است یا ناپایدار معین است یا نامعین . در ابتدا ساده‌ترین حالت‌ها را در نظر می‌گیریم

شکل ۲۶

در این تیر ساده که صلب هم فرض می‌کنیم هیچ مشکل داخلی وجود ندارد و تنها می‌توان از لحاظ خارجی آن را بررسی کرد . خارجی از طریق عکس العمل‌های تکیه‌گاه‌ها هم بررسی می‌شود . اگر عکس العمل کمتر از ۳ باشد تیر ناپایدار است . ما تعداد این عکس العمل‌ها را با R نشان می‌دهیم .

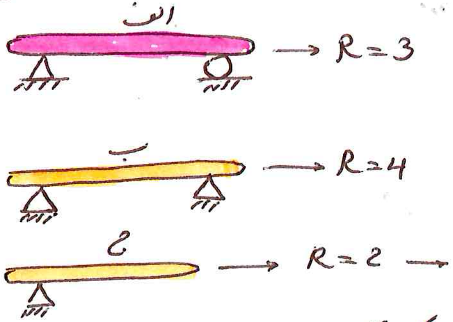
درجات عکس‌العمل تکیه‌گاه R ⟵ تعداد مولفه‌های تکیه‌گاهی

برای غلطکی یک عدد

" مفصلی دو عدد

" گیردار سه عدد

شکل ۳۰



R=2 ⟵ تیر سقوط می‌کند

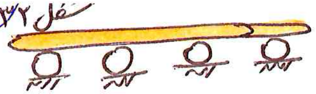
پس رابطه اینگونه است که اگر R<3 سازه (در اینجا تیر) حتماً ناپایدار است. اگر ۳=۳ یا ۳>۳ باشد

به شرط اینکه پایدار باشد. } معین ۳=۳ / نامعین ۳>۳

شکل ۳۱

مثلاً شکل روبرو که ر=۵ است ۳=۵ دو درجه نامعین است یعنی ۳-۳ درجه‌ی نامعینی را به ما می‌دهد. شکل ۳۰-~~الف~~ب یک درجه نامعین است و پایدار است. شکل ۳۰-الف معین است و پایدار.

شکل ۳۲



شکل روبرو ناپایدار است

بنابراین مطلقاً درباره معین یا نامعین بودن صحبتی نمی‌کنیم.

برای تکمیل بحث تیرها فرض کنید تیرها پیوسته نباشد بلکه داخل آن شرایط وجود داشته باشد. مثلاً یک مفصل. پس دو تیر داریم که چون در امتداد هم اند در دسته‌ی تیر قرار دارند اما اگر زاویه پیدا کنند وارد مبحث قاب می‌شوند.

شکل ۳۳

فرض کنید تکیه گیردار با یک مفصل داریم. این سازه مشخصاً ناپایدار است. چون سمت راست مفصل می‌افتد. سازه کلاً باید به گونه‌ای باشد که هر تکه اش را جدا در نظر بگیریم خود به خود پایدار باشد.

در مفصل بین دو قسمت تیر دو نیرو منتقل می‌شود اما در یک تیر پیوسته، سه نیرو (نیروی برشی، نیروی محوری و لنگر).

به محض گذاشتن مفصل انتقال لنگر از بین می‌رود.

پس سمت راست تیر فوق به صورت پایدار به سمت چپ که شکل ۳۳ وصل نیست.

از لحاظ تعداد معادلات و مجهولات، هرگاه که تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد سیستم ناپایدار است مثلاً در شکل ۳۳ تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است یعنی تعداد که

مجهولات بیشتر باشد ناپایداری داریم. در شکل ۳۳ تعداد ۳=۳ است. تعداد معادلات نیز ۴ عدد است. ۳ عدد از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است (معادلات تعادل استاتیکی) با گذاشتن مفصل معادله‌ی M = ۰ نیز وارد می‌شود چون در مفصل M=۰ است. در واقع دو معادله است که همان در سمت راست و چپ صفر است اما این دو به هم وابسته اند و تنها یکی از آنها ارزش دارد.

برای اینکه پایداری داشته باشیم (در شکل ۳۳) نیاز داریم که یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی دیگر داشته باشیم (با چیدمان درست).

شکل ۳۴

اگر تکیه‌گاه را به صورت روبرو قرار دهیم باز دیگر ناپایداری داریم

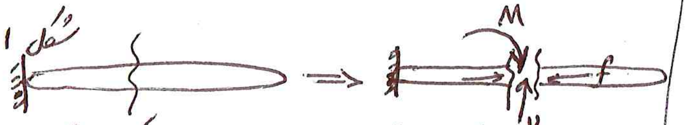
شکل ۳۵

اما اگر به صورت روبرو باشد ⟵ آنگاه پایداری به دست می‌آید.

حلسه‌ی دوم:

اگر تیر پیوسته‌ای را قطع کنیم خواهیم دید که در هر نقطه سه نیروی

شکل ۱



برشی، محوری و لنگر به همدیگر (دو قسمت تیر) وارد می‌کنند. اگر مفصل بگذاریم آنگاه دیگر لنگر وارد نمی‌شود. مثلاً اگر نیرویی به سمت راست وارد شود لنگر به سمت چپ منتقل نمی‌شود.

شکل ۲

حالت

حال اگر به این تیر تکیه‌گاه به صورت زیر اضافه کنیم مشکل برطرف می‌شود

شکل ۳

در اینجا سمت راست تیر دو مولفه از سمت چپ تیر می‌گیرد و یک مولفه از تکیه‌گاه غلطکی و مسئله حل می‌شود.

شکل ۴

تیر AB سه معادله برای تکیه‌گاهش به وجود می‌آورد

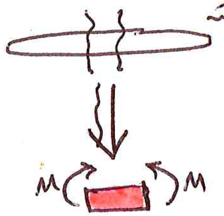
شکل ۵

حال اگر مفصل اضافه کنیم یک معادله به صورت $M_c = 0$ به ما می‌دهد ($M_c = 0$ است نه $\sum M_c = 0$)

پس چهار معادله داریم. با اضافه کردن تکیه‌گاه غلطکی چهار مجهول نیز خواهیم داشت (با چهار معادله)

شکل ۶

* توجه: اگر وسط تیری پیوسته را ببریم در محل برش دو قطعه‌ای



نشان داده شده در روبرو گشتاور به صورت بالا داریم که $\sum M = 0$ است. تنها در حالتی $\sum M \neq 0$ است که در این وسط یک ممان متمرکز هم داشته باشیم که در این صورت یک پرش داریم. اما در حالت مفصل ممان چپ برابر ممان سمت راست و هر دو برابر صفر است. *

پس معیار زیر را داریم:

تعداد مجهولات　تعداد معادلات

اگر > ⟹ مسئله جواب ندارد و ناپایدار است

اگر = معین } به شرط پایداری

اگر < نامعین }

* توجه: مجهولات از گذاشتن قیدها به وجود می‌آیند مثلاً افزودن تکیه‌گاه. معادلات از آزاد شدن قیدها به وجود می‌آیند مثلاً گذاشتن یک مفصل که قید گیر را آزاد می‌کند. *

پس برای تیر تعداد معادلات برابر است با: $3 + C$

$3 \longrightarrow$ معادلات استاتیکی

$C \longrightarrow$ قیود مسئله

$C = 1$ (به ازای هر مفصل داخلی)

تعداد مجهولات تکیه‌گاهی = (عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی) r

$$3 + C \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} r$$

بسته به >، = یا < بودن رابطه‌ی فوق از بحث آمده در انتهای ستون راست همین صفحه استفاده می‌کنیم.

شکل ۷

در شکل:

$$3 + C = 4 > r = 3$$

پس مسئله ناپایدار است.

گرچه این مسئله خیلی آسان است اما در حالت‌های پیچیده شمردن تعداد معادلات و مجهولات بسیار کمک کننده است...

شکل ۸

حال شکل روبرو را در نظر بگیرید در این صورت

$$3 + C = 4 = r = 4$$

اما مسئله ناپایدار است. پس اصلاً معین یا نامعین بودن را بررسی نمی‌کنیم (منظور از عبارت «به شرط پایداری»)

شکل ۹

اما در شکل روبرو مسئله هم پایدار است و هم معین.

شکل ۱۰

در شکلی دیگر به شکل روبرو

$$r = 5 \quad c = 1 \Longrightarrow 3 + C = 4 < r = 5$$

مسئله پایدار است اما نامعین.

شرط داخلی دیگری که می‌تواند در تیر وجود داشته باشد غلطک داخلی است.

شکل ۱۱

این تیر در قسمت غلطک، دو قسمت راست و چپش نه تنها به هم ممان رد و بدل نمی‌کنند بلکه نیروی محوری هم رد نمی‌کنند و فقط برش رد و بدل می‌شود. پس غلطک دو معادله جدید به دست می‌دهد. یعنی به ازای هر غلطک داخلی

$$c = 2$$

مثلاً دو قسمت پل متحرک را به صورت زیر به هم وصل می‌کنند

شکل ۱۲

(درز انقطاع)

حل

در مورد شکل ۱۱

$r = 4$
$c = 2$ $\Rightarrow$ $3+c = 3+2 > r=4$

پس مسأله ناپایدار است. از لحاظ فیزیکی ناپایداری ناشی از آن است که قسمت سمت راست می‌تواند به صورت افقی حرکت کند. اگر مسأله به شکل زیر شود

شکل ۱۳

$3+c = 3+2 \neq r = 5 \Rightarrow$ مسأله پایدار و معین

شکل ۱۴

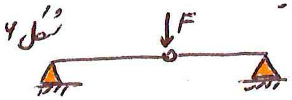
فرض کنید تیر مقابل را داریم این مسأله ناپایدار است چون اگر باری روی مفصل قرار دهیم تیر به حالت روبرو در می‌آید

شکل ۱۵

$3+c=4 > r=3 \Rightarrow$ ناپایدار

با شمردن معادلات و مجهولات متوجه می‌شویم مسأله ناپایدار است. در این مسأله اگر تکیه‌گاه سمت راست مفصلی باشد یعنی

شکل ۱۶



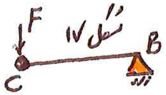
در این صورت $r = 4$ ، $c=1$ بنابراین

$3+c = 4 = r = 4$

بنابراین از معادله نمی‌توان فهمید که سیستم ناپایدار است. در این موارد بایستی آن‌قدر فکر کرد که آیا ناپایداری در داخل سیستم

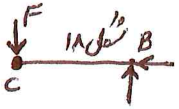
جدا شونده تقسیم می‌کنیم. مثلاً قطعه‌ی سمت چپ تیر گفته شده را در نظر بگیرید

شکل ۱۷



(F نیرویی است که خودمان اعمال کنیم)

شکل ۱۸



دیاگرام آزاد

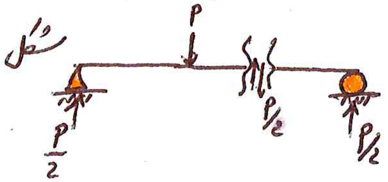
عضو بالایی

$\sum M_B$ چگونه می‌شود؟
عضو دو سر مفصل است و تک نیرویی است که قادر به تولید لنگر حول نقطه‌ی B نمی‌باشد. بنابراین به محض اعمال بار F تیر چرخیده می‌شود چون قدرت تحمل لنگر ندارد. برای درک بهتر فرض کنید تیر پایین با بارگذاری P داده شده باشد (P در وسط تیر است)

شکل ۱۹

در این صورت هر تکیه‌گاه $\frac{P}{2}$ از بار P را تحمل می‌کند. می‌توان این گونه گفت که هر قسمت از تیر را ببریم در داخل آن برشی معادل

شکل ۲۰



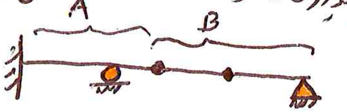
$\frac{P}{2}$ تولید شده است. سمت راست تیر نصف $\frac{P}{2}$ از نیروی اعمال شده را با خود حمل می‌کند تا به تکیه‌گاه برساند و آنرا بر روی تکیه‌گاه قرار دهد. در واقع یک مسیر از وسط تیر تا تکیه‌گاه را طی می‌کند تا $\frac{P}{2}$ را بر روی تکیه‌گاه قرار دهد. اما در تیر شکل ۱۶ این مسیر جهت انتقال وجود ندارد چرا که مفصل در مسیر وجود دارد.
در تیر شکل ۱۶ این مسیر انتقال وجود ندارد چون عضو دو سر مفصل تک نیرویی است که در آن برش ایجاد نمی‌شود و فقط نیروی محوری است و تا زمانی که تیر  صاف بماند همین حالت وجود دارد

یعنی تیر نمی‌تواند برش را انتقال دهد. بنابراین تیر تکان خورده و به حالت زیر در می‌آید

شکل ۲۱

در این صورت دو نیروی محوری داخلی تیر از حالت افقی در آمده و می‌توانند مولفه‌ی قائم داشته باشند که این مولفه می‌تواند همان $\frac{P}{2}$ باشد. البته توجه شود که چون زاویه‌ی θ_2 خیلی کوچک است برای اینکه مولفه‌ی محوری داخل تیر بتواند $\frac{P}{2}$ را تولید کند (در راستای قائم) باید نیروی محوری خیلی بزرگ باشد. به همین دلیل سازه ناپایدار است. چون بزرگ شدن نیروی محوری باعث افزایش طول و یا شکستن تیر می‌شود.
پس هرگاه مسیر انتقال برش مشکل داشته باشد مسأله ناپایدار است. بنابراین مسأله فوق دارای ناپایداری هندسی داخلی است. چون سه مفصل در یک راستا دارد که باعث ناپایداری می‌شود.

شکل ۲۲

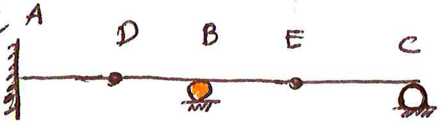


مسأله‌ی مقابل را فرض کنید

قسمت B چون سه مفصل در یک راستا قرار گرفته‌اند مسأله ناپایدار است.

مثال: بررسی سازه زیر

شکل ۳



$r=5$ $c+3 = 5 = r = 5$
$c=2$

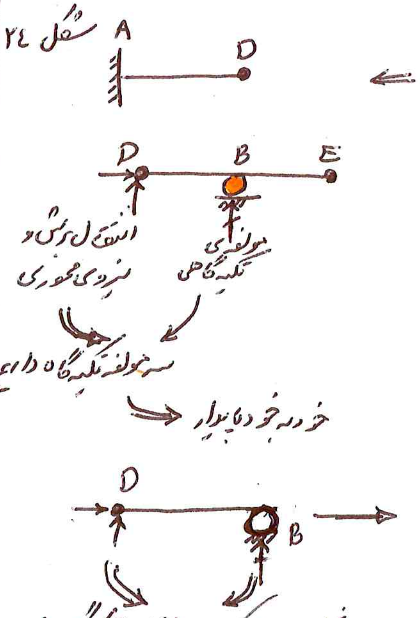
از لحاظ معادلات و مجهولات تعداد برابر است.

این مسأله پایدار و معین است. در اینجا نقطه B مفصل نیست. مفصل جایی است که M لنگر در آن صفر باشد. اما در نقطه‌ی B صفر نیست. پس سه مفصل در یک راستا نداریم. تکه‌ی DBE مانند یک الاکلنگ است که در B لنگر صفر نیست اما $\sum M_B=0$

صت

بررسی قطعه قطعه‌ی تیر

شکل ۲۴



پایدار

پایدار

مثل این است که سه مولفه‌ی تکیه‌گاه دارد

پس تیر پایدار و معین است.

اگر به جای تکیه‌گاه B (غلتکی) تکیه‌گاه مفصلی داشتیم در این صورت مسئله پایدار می‌ماند اما چون 6=۳ می‌شود پس سازه یک درجه نامعین خواهد بود.

اگر به جای تکیه‌گاه گیردار A تکیه‌گاه مفصلی و به جای B هم تکیه‌گاه مفصلی قرار دهیم

شکل ۲۵

الان تعداد معادلات = 5

" مجهولات = 5 ⇐ اما مسئله ناپایدار است

چون اگر بار روی مفصل E قرار دهیم تیر می‌توان بدون آنکه اعضایش تغییر شکل دهند به حالت نقطه‌چین بالا درآید.

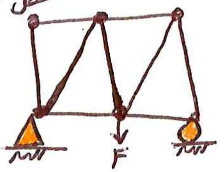
شکل ۲۶

شکل بالا پایدار و معین است.

خرپا: (truss)

خرپا هر شکلی داشته باشد به ازای هر عضوش (member) یک مجهول داریم و به ازای واکنش‌های تکیه‌گاهی هم r.

شکل ۲۷



مجهولات = r+m

در خرپای روبرو فرض بارگذاری F انجام شود. در اینجا m=9 و r=3 است. بنابراین

مجهولات = 3+9 = 12

پس برای حل باید ۱۲ معادله داشته باشیم (البته به شرطی که پایدار باشد).

تعداد معادلات در خرپا: به ازای هر گره دو معادله داریم به صورت $\sum F_x=0$ و $\sum F_y=0$

بنابراین تعداد معادلات دو برابر تعداد گره‌ها است (joint)

در این خرپا j=6 پس معادلات = 2j = 12

پس تعداد معادلات = تعداد مجهولات

در خرپاها:

if $2j > m+r$ ناپایدار

if $2j = m+r$ به شرط پایداری معین

if $2j < m+r$ نامعین

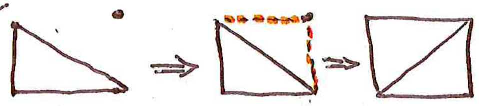
چگونه بفهمیم که پایداری داخلی داریم یا نه؟ ساده‌ترین خرپاها از چسباندن سه عضو به دست می‌آید

شکل ۲۸

این خرپاها پایدارند. چون اگر فرض کنیم اعضای خرپا خیلی صلب اند در مقابل بارگذاری شکلشان از بین نمی‌رود.

مثلث بالا را مثلث پایه در نظر می‌گیریم. اگر یک گره اضافه کنیم و با دو عضو به مثلث پایه وصل کنیم خرپا همچنان پایدار است

شکل ۲۹

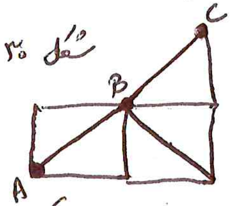


اگر به همین ترتیب یک گره با دو عضو اضافه کنیم و شکل‌های پیچیده به دست آوریم خرپا همچنان پایدار است

خرپاهایی که به این طریق به دست می‌آیند خرپاهای ساده نامیده می‌شوند و همیشه پایدارند. فقط باید حواسمان باشد که دو عضو جدیدی که اضافه می‌کنیم نباید در یک امتداد باشد.

مثلاً شکل زیر سه عضو ABC در یک امتدادند.

شکل ۳۰

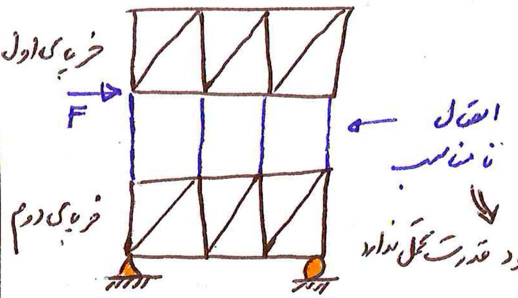


خرپاهای ساده‌ای که روی تکیه‌گاه مناسب قرار می‌گیرند همیشه پایدار و معین اند.

حت

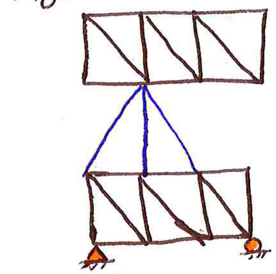
اگر دو خرپای ساده را به شکل ناپایدار وصل کنیم کل مجموعه باز ناپایدار است

شکل ۳۱

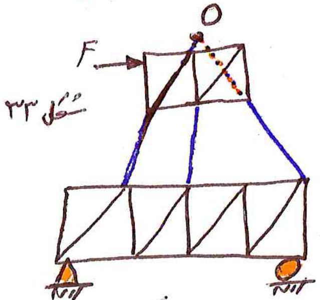


⇓ اگر F وارد شود قدرت تحمل ندارد

شکل ۳۲



اتصال نامناسب
اعضای متقارب
قابل قبول نیست

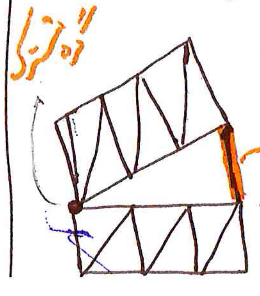


شکل ۳۳

اتصال متقارب
امتداد اعضای اضافه شده
متقارب است.

اگر F وارد شود حول نقطه O لنگر ایجاد می‌کند.

← F ای که از O نگذرد



← یک گره مشترک و یک عضو که از گره مشترک نگذرد ⟸ خرپا پایدار

پس اگر دو خرپای ساده باشند که به یکی از طرق توسط سه مولفه‌ی تکیه‌گاهی قابل اعتماد به هم وصل شوند

⇓

یا از طریق سه عضو تک نیروی غیرموازی غیرمتقارب

⇓

یا از طریق یک گره مشترک و یک عضو ناگذرنده از این گره مشترک

آنگاه می‌گوییم که یک خرپای مرکب داریم. در مورد خرپای مرکب هم داریم

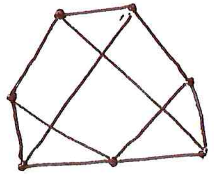
$$2j = m+3$$

پس تعریف خرپای ساده در مورد اینجا هم صادق است (برای تعیین پایداری و معین)

خرپای پیچیده (بغرنج) complex truss

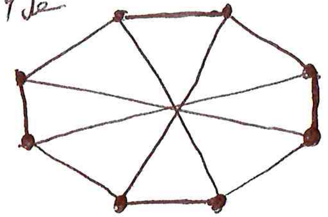
به هر خرپایی که ساده و مرکب نباشد بغرنج است.

شکل ۳۵



مثال خرپای بغرنج ←

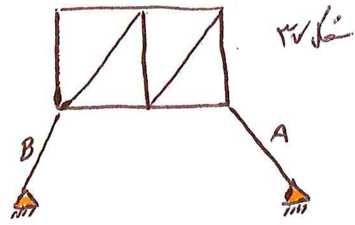
شکل ۳۶



مثال بغرنج ← در وسط وصل نیستند

اگر هشت ضلعی منتظم باشد ناپایدار است

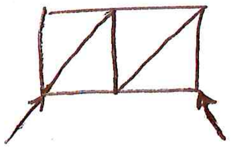
خرپای مقابل را فرض کنید



شکل ۳۷

$j=6$
$m=9$
$r=2$ (در حقیقت A و B را در نظر نگرفتیم تنها اثر آنها را در نظر گرفتیم)

یعنی فرض می‌کنیم سازه به صورت مقابل است



شکل ۳۸

$$\Rightarrow 2j=12 > m+r = 11$$

پس سازه ناپایدار است. چون به جای سه مولفه‌ی تکیه‌گاهی دو مولفه‌ی تکیه‌گاهی دارد پس ناپایدار است.

اگر کل سازه را فرض کنیم خواهیم داشت (بررسی شکل ۳۷ به همان صورتی که است

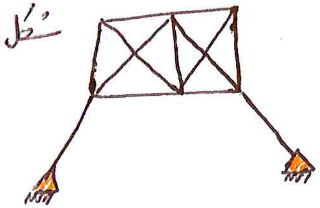
$j=8$
$m=11$
$r=4$

$$2j=16 > m+r=15$$

پس بار دیگر می‌بینیم که ناپایدار است.

مثال دیگر:

شکل ۹



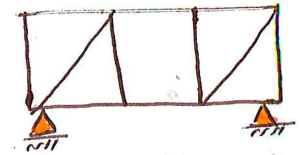
$j=8$
$m=11+2=13$
$r=4$

$$2j=16 < m+r=17$$

بنابراین از قوانین گفته شده می‌توان نتیجه گرفت که یک درجه نامعین است اما ممکن است مسئله ناپایدار باشد. این مسئله همان مسئله قبلی است تنها دو قید می‌بوده به آن اضافه کردیم (دو عضو به خرپا) که هیچ کمکی به پایداری خرپای ما نمی‌کند. پس دو عدد نامعینی را اضافه

مثال:

حل



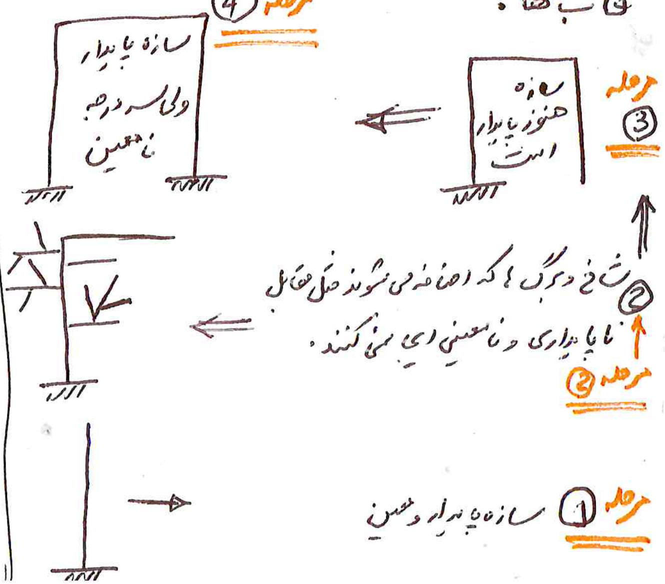
$j = 8$, $r = 4$, $m = 12$

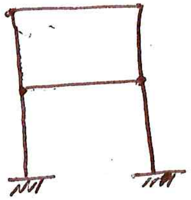
$$2j = 16 = m + r = 16$$

پس می تواند معین باشد به شرط اینکه ناپایداری نداشته باشد. البته این مسئله در مربع وسطی مشکل ناپایداری دارد. چون در مربع وسطی تنها دو عضو افقی تک نیرویی داریم پس انتقال برشی رخ نمی دهد. در اینجا چون یک عکس العمل تکیه گاهی بیشتر داریم به همین دلیل تعداد معادلات و مجهولات مساوی شده اند.

چون یک عکس العمل تکیه گاهی زیاد کرده و با این شرط معادلات و مجهولات در این حالت مساوی شده اند، پس معلوم است که یک قید داخلی کم داریم. بنابراین مسئله ناپایدار است.

قاب ها :





سازه پایدار است

این سازه شش درجه نامعین است

اما چرا؟ به توضیح می پردازیم.

در سازه ی بالا $6 = j$ است. در قاب ها برای هر joint علاوه بر دو معادله ی $\sum f_x = 0$ و $\sum f_y = 0$ یک معادله ی $\sum M = 0$ هم می توان نوشت پس تعداد معادلات $3j$ است.

$$\boxed{\text{تعداد مجهولات}} = \boxed{\text{تعداد عکس العمل های تکیه گاهی}} + \boxed{\text{۳ مجهول}}$$

به ازای هر عضو (برشی، محوری و لنگر)

پس در قاب ها ⟸
$$\begin{cases} \text{معادلات} : & 3j \\ \text{مجهولات} : & r + 3m \end{cases}$$

حال داریم :

$3j$ $r + 3m$

if $>$ → ناپایدار

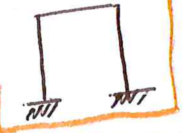
if $=$ → می تواند معین باشد

if $<$ → نامعین

} به شرط پایداری

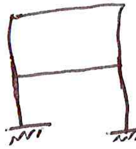
نکته : عموماً در قاب ها پایداری داریم.

در مورد شکل زیر: $r + 3m = 15$ $3j = 12$



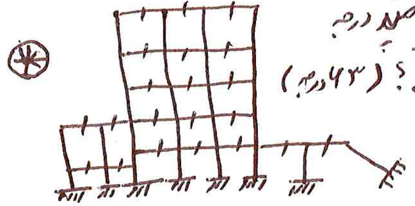
⟸ مسئله ۳ درجه نامعین است

در مورد شکل :

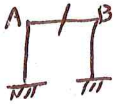


$r = 6$
$m = 6$ ⟹ $3j = 18$
$j = 6$ $3m + r = 24$

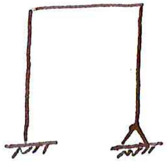
پس مسئله ۶ درجه نامعین است.



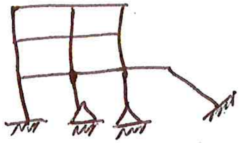
مثال : سازه ی زیر چند درجه نامعین است؟ (۴۳ درجه)

راه حل : در شکل  اگر خط AB را قطع کنیم باید ۳ نیرو رد و بدل کنند. اگر سازه را در آن قسمت قطع کنیم و این سه نیرو را خود قرار دهیم سازه همان سازه قبلی است. اما اگر این کار را نکنیم این سازه نسبت به قبلی ۳ قید کمتر دارد. پس به دو تکه سازه تبدیل شده است که هر دو پایدار و معین اند.

پس اگر ۳ قید از روی  برداریم به دو سازه ی پایدار و معین تبدیل می شود. پس مسئله اصلی ۳ قید تا حل شدن فاصله دارد. مسئله  برای حل شدن نیاز دارد از ۲ جا قطع شود. پس ۶ درجه نامعین است. مثال که در بالا آورده شد باید از ۲۱ جا قطع شود پس ۳ درجه نامعین است.



مثال : اگر گیردار بود تکیه گاه سمت راست ۳ درجه نامعین بود. حال که یک قید کم کرده ایم مسئله کلاً ۲ درجه نامعین است.



مثال : اگر همه گیردار بودند ۲۱ درجه نامعین می شد ولی دو عدد مفصلی داریم پس

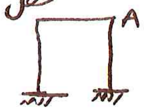
۲۱-۲ = ۱۹ درجه نامعین

نکته: اگر جای یکی از عضوها که غلطکی بود

جلسه پنجم :

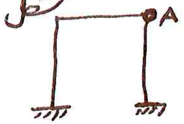
باز از یک مثال شروع می کنیم. هر سازه ی زیر (قاب) ۳ درجه نامعین است

شکل ۱



حال اگر در گوشه ای مفصل قرار دهیم :

شکل ۲



با گذاشتن مفصل قیدی از سازه کم می شود که این همان معادله ی $M_A=0$ است. در اینجا

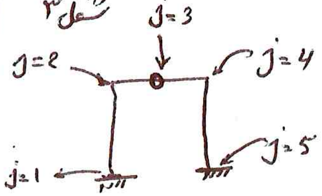
$j=4$
$m=3$
$r=6$
$c=1$

$$\longrightarrow \begin{matrix} 3j+c=13 \\ 3m+r=15 \end{matrix} \Longrightarrow 15-3=2$$ درجه نامعینی

این مسئله نسبت به حالت بدون مفصل یک درجه کمتر نامعین است که این یک درجه از همان $M_A=0$ ناشی می شود.

مثال :

شکل ۳



در اینجا مفصل در وسط عضو است پس به عنوان یک joint حساب می شود و از این رو در تعداد member هم تاثیر دارد

$j=5$
$m=4$
$r=6$
$c=1$

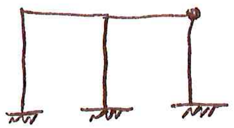
$$\longrightarrow \begin{matrix} 3j+c=16 \\ 3m+r=18 \end{matrix} \longrightarrow$$ 2 درجه نامعین

نیازی به شمردن هم نبود چرا که مسئله ی شکل ۱ در بالا

نامعین است .

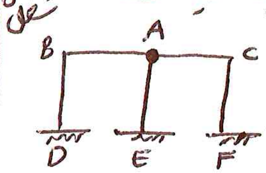
مثال :

شکل ٤



در عدم حضور مفصل ۶ درجه نامعین است با گذاشتن مفصل یکی از قیدها حذف می شود پس مسئله ۵ درجه نامعین است .

شکل ۵



مثال :

این مسئله ٤ درجه نامعین است

در شمردن مسئله داریم :

$j=6$
$m=5$
$r=9$
$C=?$

در اینجا مسئله اصلی تعداد c است . حال از گذاشتن مفصل در A می توان گفت که انتهای EA انتهای CA و انتهای BA در نقطه ی A یک ممان دارند که می دانیم $\sum M_A=0$ است . با گذاشتن مفصل می توان گفت انتهای ستون EA لنگر صفر دارد انتهای تیر CA و انتهای تیر BA دارای لنگر صفر است . پس دو معادله مستقل بدست می دهد. پس فرمول c برابر می شود با :

۱ − تعداد اعضای وصل شده به مفصل

$$\downarrow$$

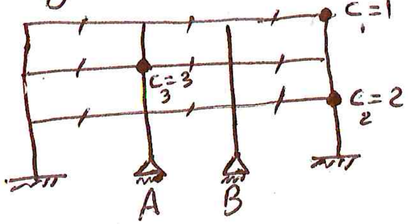
پس در این مثال $3-1=2$

$$\begin{matrix} 3j+c=20 \\ 3m+r=24 \end{matrix} \Longrightarrow$$ 4 درجه نامعین.

مسئله بدون مفصل ۶ درجه نامعین بود با افزودن یک مفصل دو قید آزاد شده $\Longleftarrow$ مسئله جدید (با مفصل) ۶-۲ = ٤ درجه نامعین است .

مثال پیچیده تر :

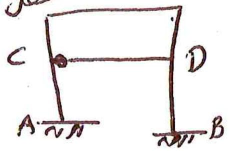
شکل ۶



طبق مثال صفحه ی قبل (اول ستون چپ) از ۹ جا باید بریده شود پس اگر نه مفصل نداشتیم و تکیه گاه ها همه گیردار بودند ۳×۹=۲۷ درجه نامعین بودیم حال $c_1+c_2+c_3=6$ درجه از نامعینی به علت مفصل ها کم می شود و دو عدد قید هم در تکیه گاه های A و B کم می شود. پس در مجموع $27-6-2=19$ درجه نامعین

در بعضی مواقع در جایی مفصل قرار بگیرد که تمام اعضا را شامل نشود. مثلاً

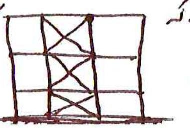
شکل ۷



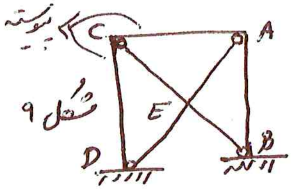
مفصل کمی سمت راست است. یعنی ستون A پیوسته رد شده است (لنگر رد و بدل می کند) اما تیر با مفصل به ستون مذکور وصل شده است . مسئله در عدم حضور مفصل ۶ درجه نامعین بوده است. مفصل هم یک معادله برای ما به وجود می آورد. چون ممان تنها در انتهای تیر CD صفر می شود پس $c=1$.

یکی از کاربردهای این نوع مفصل در بادبندها است (bracing) که با هاشور نشان داده شده است که برای مقاومت در برابر نیروهای

شکل ۸



فرض کنید قاب یک دهنه ی یک طبقه داشته باشیم با دو عضو قطری. یعنی قاب در محل گوشه ها به هم وصل اند. اما ضربدری ها به خودی خود ممان منتقل نمی کند.



شکل ۹

یعنی ستون AB قبلاً به زمین لنگر منتقل می کند اما ضربدری BC به راحتی می چرخد.

روند شمردن را آغاز می کنیم:

j = 4 (در نقطه ی E دو عضو ضربدری از روی هم رد شده اند و وصل نیستند)

m = 5

r = 6

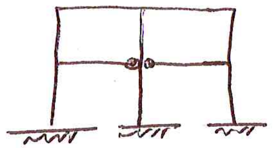
c = 4

c=4 است چون در چهار نقطه ضربدری M=0 داریم

$3j + c = 16$ → 5 درجه نامعین

$3m + r = 21$

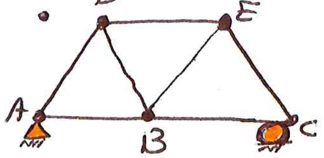
شکل ۱۰



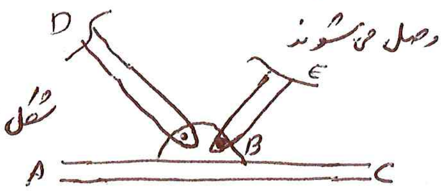
مثال: اگر شکل روبرو باشد c=2 است

(*) توضیح: در مورد شکل ۹ اگر دو عضو CB و AD وجود نداشت مسأله ۳ درجه نامعین بود. با افزودن این دو عضو ضربدری در واقع دو عضو تک نیرویی اضافه کرده ایم. پس دو مجهول بیشتر نسبت به حالت  داریم. بنا براین مسأله  پنج درجه نامعین است. (*)

شکل ۱۱

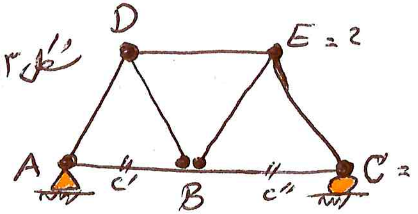


فرض کنید خرپای ساده ی روبرو را داشته باشیم که معین و پایدار است در joint B در واقعیت یک تیر رد می شود و دو عضو خرپا به آن به صورت زیر وصل می شوند



شکل ۱۲

می توان گفت به صورت زیر است



شکل ۱۳

حال دیگر این سازه یک خرپا نیست. چرا که در خرپا اعضا تک نیرویی هستند اما اعضای c' و c'' در اینجا تک نیرویی نیستند بنابراین بایستی از فرمول قاب استفاده کنیم. در اینجا

j = 5

m = 7

r = 3

c = 8

برای شمردن C داریم

$C_E = 2$

$C_C = 1$

$C_D = 2$

$C_A = 1$

$C_B = 2$

که چون در انتهای EB و DB معادله لنگر صفر است

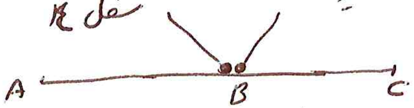
پس

$3j + C = 23$ ⟹ ۱ درجه نامعین

$3m + r = 24$

توجه: AB را دو عضو شمردیم چون B را به عنوان joint در نظر گرفتیم.

راه حل سریع شمردن درجه نامعینی: اگر در نقطه ی B دو مفصل نبودند و فقط یک مفصل بود مسأله تبدیل به خرپا می شد که معین و پایدار بود. در فرآیند تبدیل خرپا به این حالت دو مفصل در B، یک قید آزاد شد. در حالت زیر



شکل ۱۴

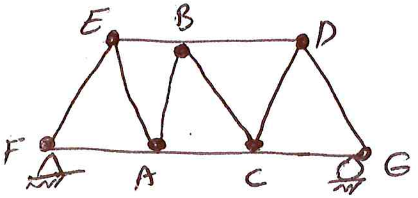
دو قطعه ی AB و BC به هم لنگر وارد می کنند. با تبدیل مسأله به شکل

شکل ۱۵

قید انتقال ممان بین دو عضو AB و BC برداشته می شود و مسأله تبدیل به یک خرپای پایدار و معین می شود. پس اینکه شکل ۱۴ یک درجه نامعین است که با برداشتن یک قید تبدیل به حالت شکل ۱۵ می شود.

مثال:

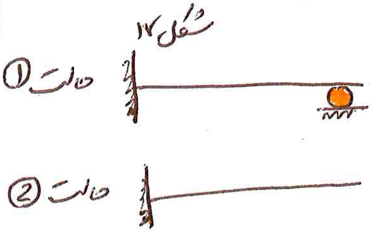
شکل ۱۶



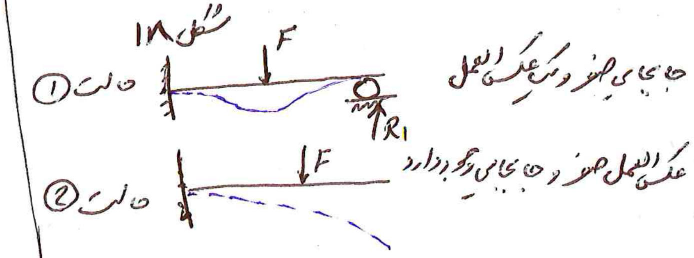
اگر مفصل A را بزرگ کنیم به شکل FG هم بشود یک قید حذف می شود. مفاصل B و C هم به همین ترتیب. پس مسأله ۳ درجه نامعین است. با شمردن هم به همین نتیجه خواهیم رسید.

تکیه‌گاه ارتجاعی :

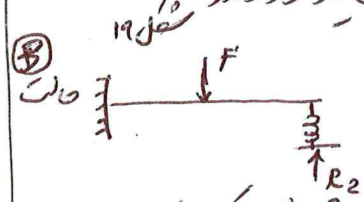
تکیه‌گاه همیشه یا مفصل یا گیردار نیست.



حالت ۲ به دلیل نبود تکیه‌گاه حالت ① یک تغییر شکل خواهد داد.

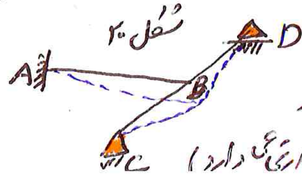


حالتی است که بین این دو قرار دارد



در اینجا ⟸ عکس‌العمل R_2 داریم که صفر نیست اما R_1 هم نیست بلکه مابین این دو است. تغییر شکل هم نه صفر است نه مانند حالت ② بلکه مابین این دو است.

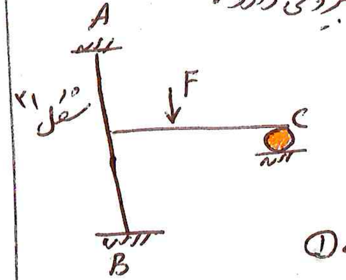
به عنوان مثال اگر زیر تیری به جای تکیه‌گاه غلطکی یک قطعه‌ی لاستیکی قرار دهیم یا اینکه تیر تحت بررسی روی یک تیر دیگر قرار گرفته باشد



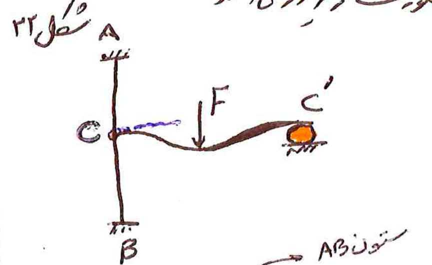
(تیر CD در شکل ۲۰ برای تیر AB در نقطه B نقش تکیه‌گاه ارتجاعی دارد)

محققین سازه برای اینکه سازه شکل ۲۰ را به صورت سه بعدی آنالیز نکنند تیر CD را برداشته و آن‌را با یک فنر جایگزاری می‌کنند. روش محاسبه سختی این فنر بعداً گفته خواهد شد.

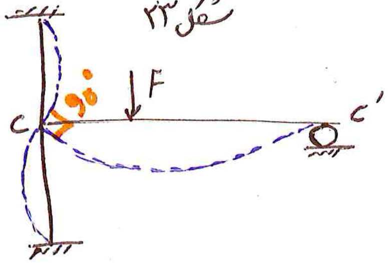
پس تکیه‌گاه ارتجاعی واقعیت بیرونی دارد.



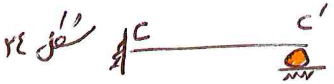
شکل روبرو را فرض کنید اگر ستون AB خیلی صلب باشد این مسئله معادل حالت ① شکل ۱۸ است. چون ستون صلب است اما اگر ستون صلب نباشد (حالت واقعی) به خاطر بار F تحت تأثیر قرار می‌گیرد. اگر ستون صلب می‌بود در اثر بار F، شکل سازه به صورت زیر درمی‌آمد



یعنی شیب تیر افقی در محل اتصال به ستون صفر می‌شد. به محض اینکه ستون یک حالت معمولی داشته باشد (یعنی کاملاً صلب فرض نشود) این شیب صفر نمی‌تواند باشد. پس تغییر شیب می‌دهد و از آنجا که تیر و ستون با زاویه‌ی ۹۰° به هم جوش شده‌اند ستون نیز تغییر شکل می‌دهد تا این زاویه حفظ شود. این حالت در شکل ۲۳ نشان داده شده است

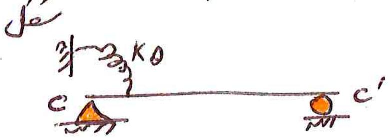


یعنی اگر ستون صلب کامل باشد سازه‌ی بالا معادل سازه‌ی روبرو می‌شود



ولی اگر صلب کامل نباشد بلکه برعکس کاملاً ضعیف باشد آنگاه ←

اما واقعیت چیزی بین این دو است یعنی در موارد واقعی که ستون سختی K_θ دارد آنگاه سازه معادل زیر است



اگر ستون صلب ⟸ $K_\theta \to \infty$

" " خیلی ضعیف ⟸ $K_\theta \to 0$

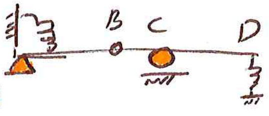
K_θ به خصوصیات ستون بستگی دارد. در واقعیت K_θ عددی بین ۰ و بی‌نهایت است. یک لنگری را تحمل می‌کند اما این لنگر با چرخش هم همراه است.

حال تأثیر این تکیه‌گاه‌های میانه را در پایداری و ناپایداری و معین بودن یا نبودن بررسی خواهیم کرد. تیر روبرو را فرض کنید پایداری و ناپایداری و معین یا نامعین بودن آن را بررسی می‌کنیم

K_θ عددی منطقی است. نه خیلی کم است نه خیلی زیاد.

این مسئله پایدار است ولی نامعین است. چون نیروی داخل فنر یکی از مجهولات است.

شکل ۲۸

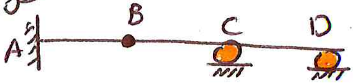


شکل روبرو را فرض کنید

فرض کنید فنر ۲ rigid باشد

در اینجا در A یک لنگر روی فنر وجود دارد و در D یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی وجود دارد ولی مقدارشان وابسته به K_θ است. با این وجود از لحاظ تعداد مجهول همان تعداد مجهولات تکیه‌گاه‌ها را دارند. بنابراین برای حل این مسئله باید فکر کنیم که مسئله شکل ۲۸ درست مثل مسئله پایینی است

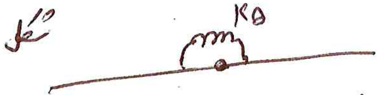
شکل ۲۹



این دو مسئله (شکل ۲۸ و ۲۹) از لحاظ معینی و نامعینی مثل همدیگرند. پس مسئله ۲۸ مانند مسئله ۲۹ دارای یک درجه نامعینی است.

امکان دارد تیری بلند بخواهیم و مجبور باشیم از کنار هم قرار دادن دو تیر دیگر آن را تولید کنیم به صورتی که کاملاً پیوسته باشد. برای این کار جزئیات اجرایی و قوانینی وجود دارد. ولی فرض کنید ما این تیر را به کار ببریم ولی به روند ساخت آن اصلاً دقتی نداریم که آیا تیر کاملاً پیوسته شده است یا نه. در این صورت تیری داریم از دو قطعه که طوری به هم وصل شده‌اند که به هم لنگر منتقل می‌کنند. اما گاهی این لنگر منتقل کردن به خوبی صورت نمی‌گیرد چنان که تغییر زاویه پیدا می‌شود. می‌توانیم این فرض را هم بکنیم که با این که لنگر به خوبی منتقل می‌شود اما به هر حال یک زاویه‌ای پیدا می‌کنند. این را می‌توان با یک فنر پیچشی مدل کرد

شکل ۳۰

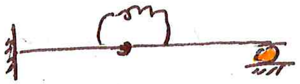


حال اگر این پیوستگی به خوبی اجرا شده باشد K_θ به سمت بی‌نهایت می‌رود. اگر $K_\theta \to \infty$ تیر کاملاً پیوسته است. اگر $K_\theta \to 0$ تیرها به دو قطعه تبدیل می‌شود که به هم مفصل شده‌اند

شکل ۳۱

مثال: معین یا نامعین؟

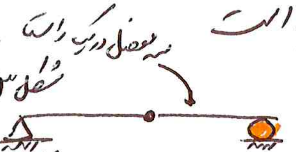
شکل ۳۲



مثل قبل فرض که دو قسمت شکل ۳۲ به هم لنگر وارد می‌کنند. اگر فنر نبود روی مفصل ممان صفر می‌شد. ولی اکنون ممان وجود دارد ولی مقدارش را نمی‌دانیم. تحت این اثر تیر مقداری هم تغییر زاویه می‌دهند. بنابراین از لحاظ مجهول این تیر درست مثل یک تیر پیوسته است پس برای شمردن مجهولات باید فرض کنیم که $K_\theta \to \infty$ می‌رود.

پس تیر فوق یک درجه نامعین است

شکل ۳۳



مثال: تیر روبرو ناپایدار است

شکل ۳۴

اما تیر روبرو پایدار است

در حالت ۳۳ اگر F روی مفصل قرار دهیم

شکل ۳۵

در حالت اول $\sum F_y = 0$ نمی‌شود به همین دلیل تیر تکان خورده و به شکل زیر در می‌آید

شکل ۳۶

(شکل اغراق آمیز)

به محض اینکه تکان خورد حال $\sum F_y = 0$ می‌تواند برقرار باشد. (به دلیل مولفه‌ی ق نیروی محوری داخل تیر)

اما در حالت فنر تیر پایدار می‌شود. چون درست مثل یک تیر پیوسته ا

شکل ۱

در اینجا اعضای AB و BC دیگر اعضای تک نیرویی نیستند که نیاز باشد از تکان بخورند تا $\sum F_y = 0$ شود. چون در انتهای سمت راست AB و انتهای سمت چپ BC لنگر وجود دارد. دیگر عضو تک نیرویی نیست.

جلسه ششم:

به سراغ بحث جدید می‌رویم

تحلیل سازه‌های معین:

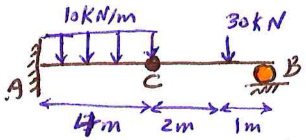
با این مبحث از استاتیک آشنا هستیم. اهداف ما از این قسمت:

الف) مروری بر دانسته‌های قبل از استاتیک

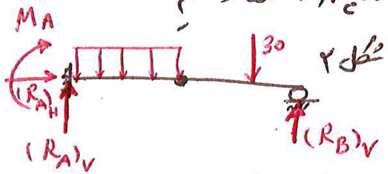
ب) رفع ایرادهای استاتیکی دانشجویان

ج) یکی از بحث‌های اصلی تحلیل سازه‌ها تحلیل‌ها نسبت به تغییر شکل است. پس دا نیروهایی که داخل سازه تولید می‌شوند از اهمیت برخوردار است..
محاسبه‌ی تغییر شکل باید سازه را تحلیل کرد.

اولین سازه‌ای که می‌خواهیم تحلیل کنیم تیر است. فرض کنید تیر مقابل را داریم: شکل ۱



حین عکس‌العمل تکیه‌گاهی داریم که با وجود مفصل جبران می‌شود. باید سازه را در C قطع کرده از معادله‌ی $M_C=0$ استفاده کنیم



شکل ۲

عکس‌العمل‌ها و دیاگرام آزاد ←

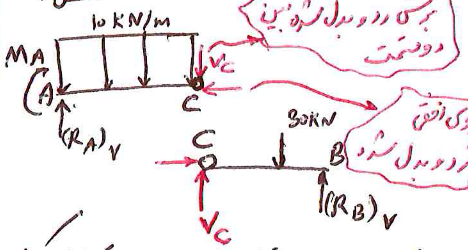
یکی از معادلات $\sum F_x=0$ است که در نتیجه $(R_A)_H=0$.

حتی اگر مفصل هم نمی‌داشتیم با اینکه مسئله نامعین می‌شد اما عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A خود به خود صفر می‌شد پس نامعین بودن به این معنا نیست که واقعاً نمی‌توان تیر را حل کرد. البته از این مزیت در مثال‌ها می‌توان استفاده کرد (بعداً توضیح خواهیم داد)

آنالیز تیر این مثال:

① $\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{(R_A)_H=0}$

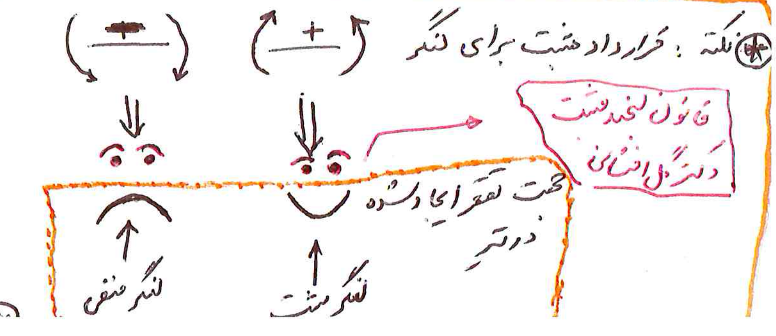
شکل ۳



در تیرها بیشتر تمرکز ما روی برش و علی‌الخصوص لنگر است چراکه تیر سازه‌ای است که بیشتر خمش را تحمل می‌کند.

برای استفاده از معادله لنگر در روی مفصل سازه را به قطعات مجزا تبدیل می‌کنیم.

⊛ نکته: قرارداد مثبت برای لنگر



نیروی افقی رد و بدل شده صفر است.

بین دو قسمت علاوه بر نیروی افقی (در اینجا صفر) نیروی برشی هم رد و بدل می‌شود. قانون برش هم به صورت زیر است

قانون برش

اگر نیروهای برشی عضو را به صورت ساعتگرد بچرخانند مثبت اند و بالعکس.

بدین ترتیب دیاگرام آزاد ما آماده است. چون قطعه‌ی BC لنگری در درونش ندارد پس

قطعه BC: $\sum M_C=0 \Rightarrow 30\times2-(R_B)_V\times3=0$

$\Rightarrow \boxed{(R_B)_V=20kN}$

چون مثبت به دست آوردیم پس جهت فرض شده برای $(R_B)_V$ در دیاگرام آزاد صحیح است.

قطعه BC دوباره: $\sum F_y=0 \Rightarrow V_C+20-30=0 \Rightarrow \boxed{V_C=10\,KN}$

پس قطعه‌ی BC تکلیفش روشن است. حال سراغ قطعه AC می‌رویم:

قطعه AC: $\sum F_y=0 \Rightarrow (R_A)_V-10-10\times4=0$

$\Rightarrow \boxed{(R_A)_V=50KN}$

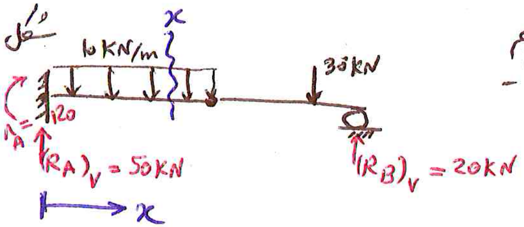
$\sum M_A=0 \Rightarrow M_A+10\times4/2+10\times4=0$

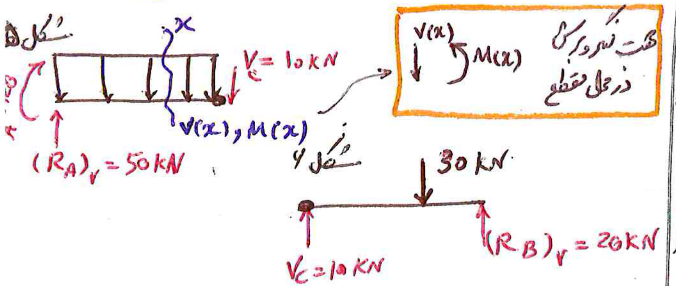
$\Rightarrow \boxed{M_A=-120KN.m}$

حال می‌توانیم منحنی تغییرات برشی و لنگر را رسم کنیم. در این مثال با تفصیل سعی می‌کنم همه حالات را توضیح دهم اما در ادامه‌ی کار با توضیحات کمتر به حل مسئله خواهیم پرداخت.

برای بدست آوردن منحنی تغییرات در راستای تیر متغیر x را در نظر می‌گیریم

شکل





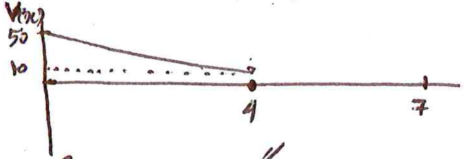
هدف به دست آوردن M(x) است. در حالی به فاصله‌ی x مقطع می‌زنیم و گشتاور را برحسب x به دست می‌آوریم. فرض کنید در شکل ٤ مقطع را از x زده باشیم. این x در بازه‌ی ۰ تا ٤ متغیر است. در این x یک لنگر و یک برش

$0\le x<4$ ← شکل ۵ را فرض کنید

می‌توان نوشت: $\sum F_y=0 \Rightarrow 50-10x-V(x)=0$

شکل ۷

$\Rightarrow V(x)=50-10x$

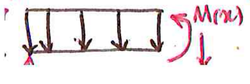


برای همان قطعه‌ی $0\le x<4$ لنگر را هم می‌توان نوشت

$\sum M_x=0 \Rightarrow M(x)+120-50\times x+10x(\frac{x}{2})=0$

$M(x)=-5x^2+50x-120$

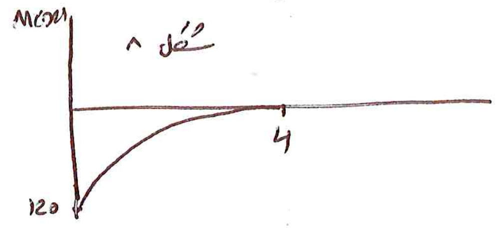
شکل ۷



توجه: در قسمت جدا شده

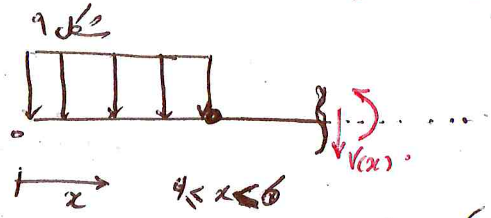
(... فرض شود)

نمودار ممان در فاصله $4\leq x\leq 6$ به صورت زیر در می‌آید

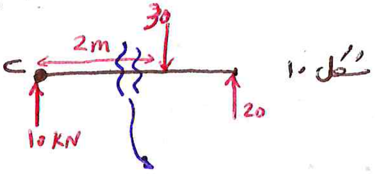


برای به دست آوردن نمودارهای برش و لنگر در قسمت $4\leq x\leq 6$ تیر می‌توان

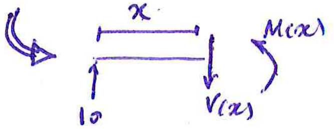
یا x را از ابتدای تیر فرض کرد یعنی



که محاسبات را دشوار می‌کند چرا که تمام بارهای ما قبل از فاصله x را در نظر باید بگیریم. پس می‌توان قسمت اول را کنار گذاشته و به صورت زیر تحلیل کنیم



تیر را از این قسمت می‌بریم



$0\leq x<2$

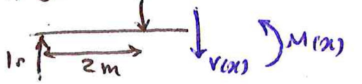
$$\Longrightarrow \sum F_y=0 \longrightarrow 10-V(x)=0 \longrightarrow V(x)=10$$

چون 10

$$\sum M_C=0 \longrightarrow M(x)-V(x)\times x=0 \Longrightarrow M(x)=10x$$

حال تیر را در بازه‌ی ما بعدش یعنی از بار متمرکز ۳۰ به بعد بررسی می‌کنیم. پس در اینجا $2<x\leq 3$ ($2\leq x$ نمی‌گذاریم چون زیر بار متمرکز تعریف برش نامعین است)

شکل ۱۲



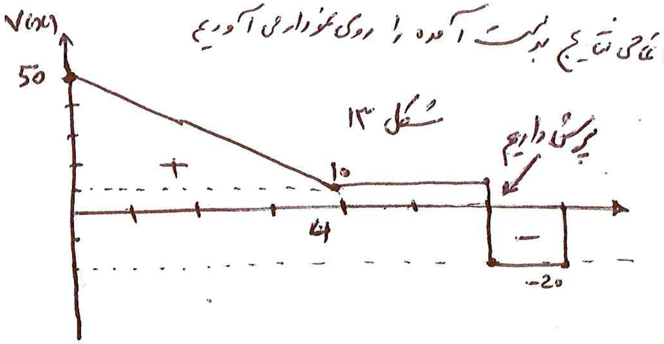
شکل ۱۲

$$\sum F_y=0 \Rightarrow 10-30-V(x)=0 \Rightarrow V(x)=-20$$

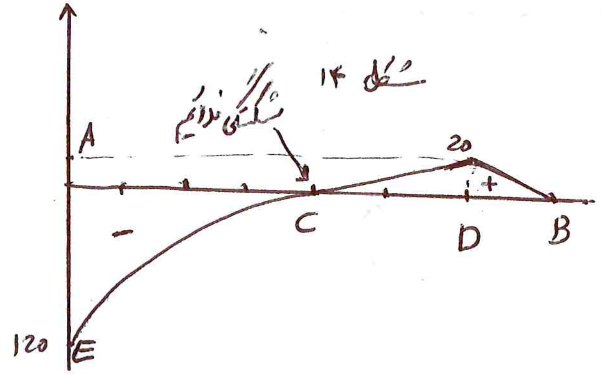
$$\sum M_x=0 \Longrightarrow M(x)+30(x-2)-10x=0$$

$$\Longrightarrow M(x)=-20x+60 \qquad 2<x\leq 3$$

حال تمامی نتایج بدست آمده را روی نمودار می‌آوریم



شکل ۱۳



شکل ۱۴

در منحنی لنگر در نقطه‌ی مفصل، لنگر صفر است. در نقطه‌ی C هیچ پرشی اتفاق نمی‌افتد در نمودار برشی. تنها اتفاق مفصل صفر شدن لنگر است.

پرش در منحنی لنگر زمانی رخ می‌دهد که ممان متمرکز داشته باشیم.

اگر بار متمرکز داشته باشیم در منحنی لنگر شکستگی بوجود می‌آید.

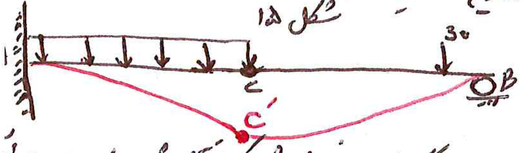
در شکل بالا (شکل ۱٤) می‌بینیم که در نقطه‌ی C هیچ شکستگی در منحنی لنگر نداریم چون در این نقطه فقط مفصل داریم. اما در نقطه‌ی D شکستگی در لنگر داریم چون بار متمرکز داریم.

[illegible] C [illegible] منحنی لنگر مشتق‌گیری [illegible]

دست دهد. (مشتق لنگر برش است). یعنی مماس انتهای راست منحنی EC بایستی بر مماس انتهای سمت چپ منحنی CD منطبق باشد. اگر بار متمرکز داشته باشیم شکستگی بوجود می‌آید چون برش و لنگر مشتق و انتگرال همدیگرند.

اگر منحنی تغییرات لنگر را داشته باشیم و اگر فرض کنیم که تغییر شکل‌های ناشی از خمشی هستند فقط (که در تیرها این فرض را انجام می‌دهیم) در این صورت با نگاه کردن به منحنی تغییرات می‌توانیم تغییر شکل سازه را به صورت کیفی رسم کنیم. مقدار این تغییر شکل باید محاسبه شوند اما این که کجای سازه بالا می‌رود و کجا پایین و یا انحنا چگونه است را می‌توان تا حد زیادی فهمید. به شکل ۱۴ توجه کنید. از A تا C لنگر منفی داریم. یعنی تقعر به سمت پایین است یعنی تیر

شکل ۱۵



روبرو

در A تا C به گونه‌ای خم می‌شود که تقعرش به سمت پایین شرط مرزی در نقطه‌ی A هم می‌گوید که شیب تیر در A باید صفر باشد چون تکیه‌گاه گیردار داریم. پس تیر به شکل نشان داده شده در شکل ۱۵ خم می‌شود. در سمت CB لنگر مثبت است پس تقعر به سمت بالا است بنابراین شکل به صورت نشان داده شده در شکل ۱۵ است. نکته ا

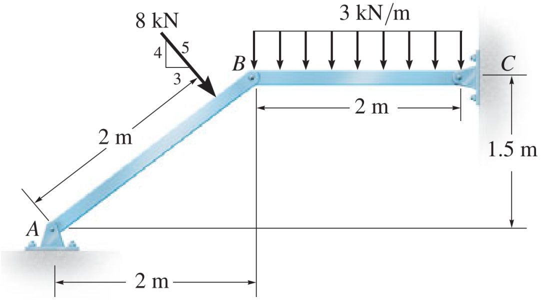
است که در منحنی تغییر شکل زیر مماس بر

منحنی تغییر شکل

نقطه‌ی C از دو سمت A و B یک زاویه‌ی θ وجود دارد که کاملاً صُلبی است. چون مفصل داریم. اگر مفصل نداشتیم شیب چپ و راست در دو سمت باید برابر می‌بود. در صورت وجود مفصل ممکن است که حالتی پیش بیاید که شیب چپ و راست برابر باشند اما در حالت کلی لزومی ندارد که در وجود مفصل شیب چپ و راست برابر باشند.

جلسه هفتم :

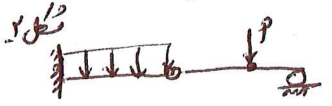
مثال ①:



در ادامه درس تحلیل سازه‌های معین به حل مثال بالا می‌پردازیم و توضیحات جدید را ارائه می‌دهیم. مثال بالا از حالت تیر خارج شده و یک قاب است.

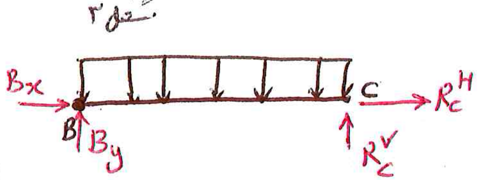
از لحاظ تکیه‌گاهی ⇐ چهار عکس‌العمل تکیه‌گاهی دارد که در عوض با یک مفصل جبران شده است. بنابراین لازم است سازه در نقطه‌ی B قطع شده و از معادله $M_B = 0$ استفاده شود.

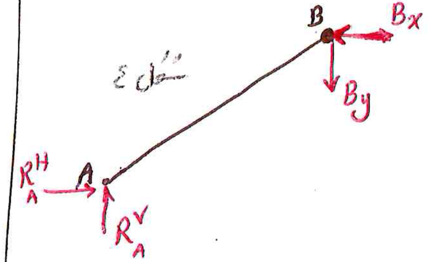
در اینجا برخلاف مثال تیر حل شده در جلسه قبل یعنی شکل ۲



که در آن $\sum F_x = 0$ بود دیگر در اینجا $\sum F_x = 0$ نیست. در آن مثال به دلیل هندسه‌ی افقی و نوع بارگذاری ما تنها یک عکس‌العمل افقی تکیه‌گاهی داشتیم که بلافاصله نتیجه شده که $(R_A)_H = 0$. در اینجا مثال از حالت افقی خارج شده و قاب می‌شود. بنابراین نیروی محوری هر قسمت (مثلاً قسمت AB) بر روی قسمت بعدی (یعنی BC) برش تولید می‌کند. یعنی در $\sum F_x = 0$ این مثال تنها یک $(R_A)_H$ حضور ندارد.

برای حل‌ها سازه را از مفصل B جدا می‌کنیم





قطعه‌ی BC : $\sum M_C = 0 \Longrightarrow 2B_y - 3\times2\times\frac{2}{2} \Longrightarrow \boxed{B_y = 3KN}$

B_y جهت

$\sum F_y = 0 \Longrightarrow R_C^V + 3 - 3\times2 \Rightarrow$

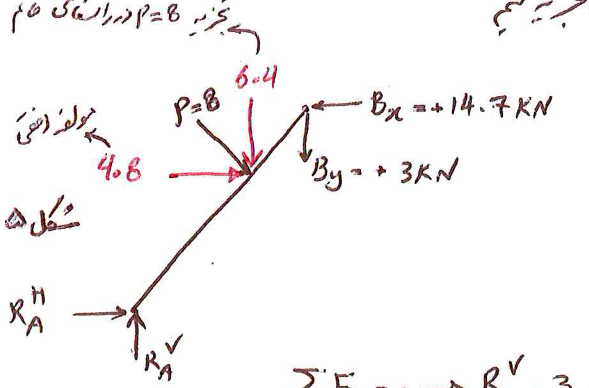
$\boxed{R_C^V = 3KN}$

B_y جهت

قطعه‌ی AB : $\sum M_A = 0 \Longrightarrow 8\times2 + 3\times2 - 1.5B_x = 0$

$\Longrightarrow \boxed{B_x = 14.7KN}$

برای بدست آوردن R_A^V و R_A^H باید نیروی متمرکز 8KN را به مولفه‌های آن تجزیه کنیم



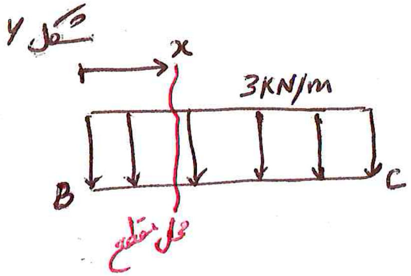
$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^V - 3 - 6.4 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{R_A^V = 9.4 KN}$

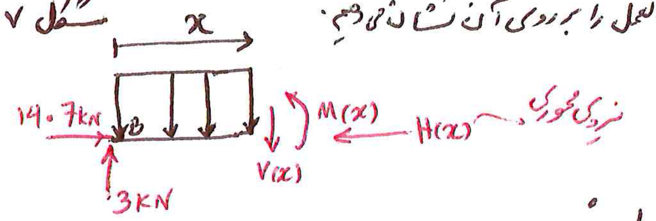
$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A^H - 14.7 + 4.8 = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_A^H = 9.9KN}$

به این ترتیب تمام عکس‌العمل‌ها به دست آمد. حال به محاسبه معادلات و منحنی آنها اقدام می‌کنیم.



سمت قطع زده شده را جدا می‌کنیم و نیروها و عکس‌العمل را بر روی آن نشان می‌دهیم:



خواهیم داشت:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3 - 3x - V(x) = 0$

$\Rightarrow V(x) = 3(1-x)$

$$\sum M_x=0 \Longrightarrow M(x)+3x\frac{x}{2}-3x=0$$

$$\Longrightarrow M(x)=-1.5x^2+3x$$

چون بار گسترده داریم لنگر از درجه ی دو و برش خطی است

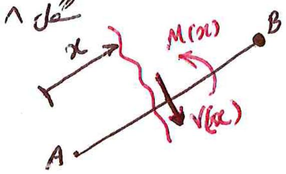
$$\sum F_x=0 \Longrightarrow H(x)-14.7=0$$

$$\Longrightarrow H(x)=14.7\ KN$$

نیروی محوری ثابت است. چون H(x) مثبت است پس عضو BC تماماً در فشار است.

حال به قطعه ی AB می پردازیم

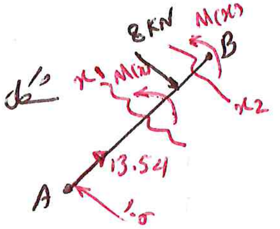
شکل ۸



در اینجا x را در راستای AB فرض می کنیم. بایستی مولفه های نیرو را در راستای تیر و عمود بر آن تجزیه کرد.

تجزیه عکس العمل تکیه گاه A بر روی تیر و عمود بر آن

شکل ۹



x_1 مقطع → $M(x)=1.6x \quad 0\leqslant x\leqslant 2$

x_2 مقطع → $M(x)=1.6x-8(x-2) \quad 2\leqslant x\leqslant 2.5$

$=-6.4x+16$

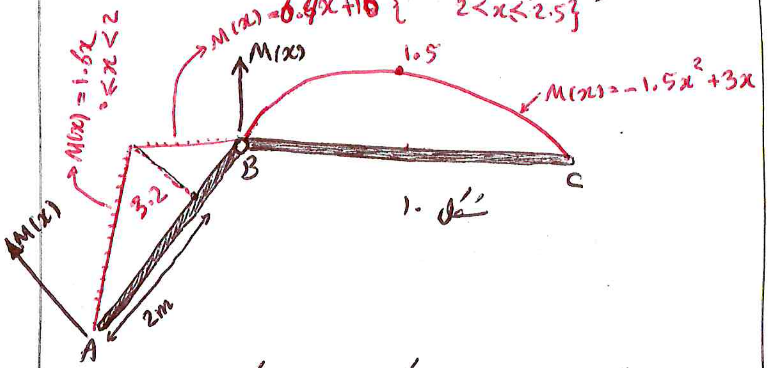
در قسمت AB تا محل اعمال بار متمرکز یعنی $2>x>0$ داریم: $V(x)=1.6$

(*) فرض کردیم دیگر نیازی به نوشتن گام به گام $\sum F_x=0$ و از طریق آن محاسبه V(x) نیست. فرض بر این است که دانشجو قادر به حل مستقیم است (*)

در بازه $2\leqslant x\leqslant 2.5$ در آن صورت بار متمرکز ۸ هم ظاهر می شود

بنابراین: $V(x)=-6.4\ KN/m$

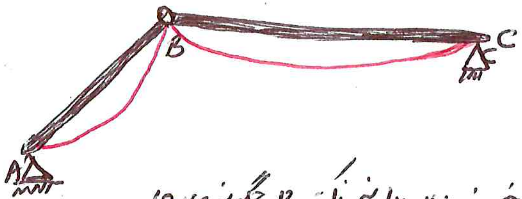
حال در پایان نیازمند هستیم که منحنی های تغییرات لنگر و نیروی برش را رسم کنیم:



شکل ۱۰

با توجه به نمودار لنگر می توان تغییر شکل کیفی تیر را رسم کرد و آن نیز نمود.

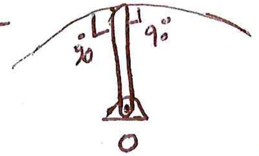
با توجه به شکل ۱۰ می توان گفت که عضو AB انحنای کاسه ای پیدا می کند و تقعرش به سمت شمال غرب است ☺ و عضو BC حالت کاسه ای به تقعر رو به بالا پیدا می کند. نقاط A و C تکیه گاه اند



شکل ۱۱

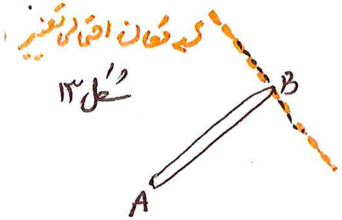
و تکان نمی خورند. باید بدانیم نقطه B چگونه جابجا می شود. معمول است که در موقع بررسی تغییر شکل های ناشی از خمش: از تغییر شکل های محوری صرف نظر می کنیم. چون این تغییر شکل ها نسبت به تغییر شکل ناشی از خمش بسیار کوچک اند. با کنار گذاشتن تغییر شکل ناشی از نیروی محوری، یک عضو پین شده مثل زیر تنها می تواند روی دایره ای به مرکز O می تواند حرکت کند

شکل ۱۲

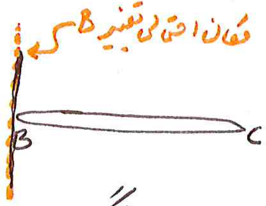


اگر روی مسیر دیگری حرکت کند یعنی تغییر شکل محوری داریم. اگر تغییر شکل نداشته باشیم مسیر حرکت بر خود میله عمود است. بنابراین در شکل ۱۳، عضو AB روی کمانی به مرکز A حرکت می کند. پس B روی خط چین نشان داده شده در روبرو حرکت می کند. تغییر شکل های ما در مقایسه با طول کل سازه بسیار کوچک اند. این تغییر شکل کوچک داشتن فرضی است که در تحلیل سازه ای انجام می دهیم. عضو BC هم باید عمود بر خودش حرکت کند.

شکل ۱۳

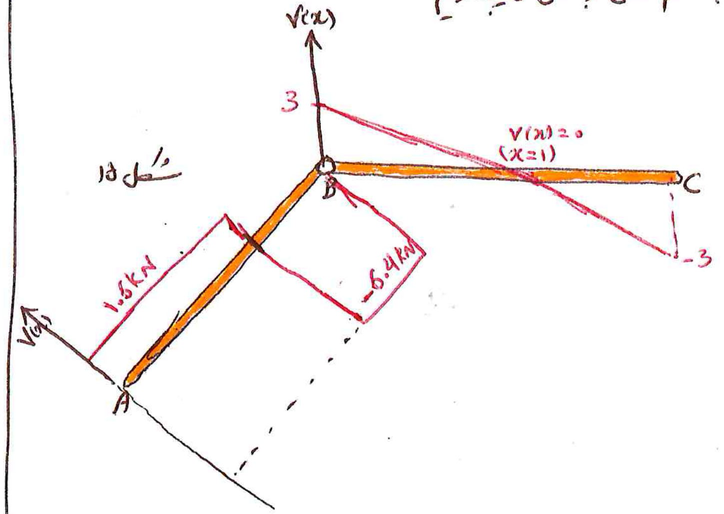


شکل ۱۴



با در نظر گرفتن دو شکل ۱۴ و ۱۳ می توان گفت B باید دو شرط فوق را ارضا کند. بنابراین B مکان اش همان محل B قبل از بارگذاری است یعنی B در این سیستم کلاً نباید جابجا شود (توجه: از تغییرات محوری صرف نظر کرده ایم). پس جابجایی همان خواهد بود که در شکل ۱۱ نشان داده شده. این شکل تغییر شکل های کیفی این سازه را تحت بارگذاری داده شده به ما نشان می دهد

حال به رسم منحنی برش می‌پردازیم

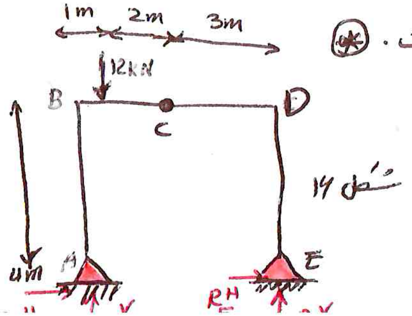


شکل ۱۵

⊛توجه: مفصل این تیر درست مانند یک تکیه‌گاه مفصلی عمل کرد.

چون دو نیرو در آن منتقل می‌شود. نقطه‌ی B تکان نمی‌خورد، مفصل برای قطعه‌ی CB درست مثل یک تکیه‌گاه عمل می‌کند که دو مولفه تکیه‌گاهی هم دارد. پس عضو BC درست مثل یک تیر دو سر مفصل است. یعنی اگر یک تیر دو سر مفصل داشتیم دیاگرام ممان آن درست عین دیاگرام ممان این می‌شد.

از طرف دیگر اگر عضو AB را نگاه کنیم باز همین قضیه برقرار است. با استفاده از این نکات، در مراحل بعدی که اندکی پیشرفت کردیم، برای رسم دیاگرام ممان دیگر راحت خواهیم بود و نیازی به انجام همه محاسبات نخواهیم داشت. ⊛



شکل ۱۶

مثال ② کتاب

جهت عکس‌العمل تکیه‌گاهی دیگر

مفصل برای جبران

بعضی مواقع هندسه سیستم اجازه می‌دهد که بدون بریدن و قطع کردن سازه از محل مفصل، بعضی از مجهولات را به دست آوریم. در اینجا چون ستون‌ها در یک راستا هستند اگر حول A لنگر بگیریم سه عدد از عکس‌العمل‌ها از نقطه‌ی A می‌گذرند بنابراین نیروی R_E^V به راحتی به دست می‌آید. پس با لنگرگیری روی کل سیستم داریم

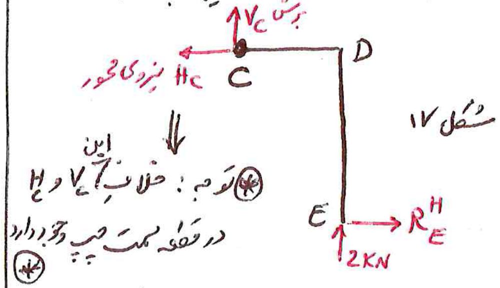
$$\sum M_A=0 \Rightarrow 12\times1 - R_E^V\times6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_E^V = 2\,KN}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow R_A^V + \underset{R_E^V}{2} - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_A^V = 10\,KN}$$

حالا هر معادله‌ی دیگری بنویسیم مجهولی را برای ما حل نمی‌کند چون R_A^H و R_E^H در یک راستا هستند و هرجا لنگر بگیریم چون فاصله‌ی این دو یکسان است مجهولی را نمی‌توانیم محاسبه کنیم. کلید حل مشکل همان صفر بودن ممان در محل مفصل است. پس سازه را از C قطع می‌کنیم. قطعه سمت راست را انتخاب می‌کنیم چون بارگذاری روی آن نیست:



شکل ۱۷

⊛توجه: خلاف این V_C و H_C در قطعه سمت چپ وجود دارد ⊛

اگر $\sum M_C=0$ را بنویسیم مجهولات به دست می‌آید. یک نوع دیگر هم می‌شود این کار را انجام داد. چون قطعه‌ی CDE یک جسم دو نیرویی است که یک سمت اش به تکیه‌گاه وصل است و سمت دیگرش یعنی C به سمت دیگر سازه وصل شده است و هیچ بارگذاری هم روی آن وجود ندارد، بنابراین برآیند دو نیروی V_C و H_C باید از نقطه‌ی E بگذرد چرا که در غیر اینصورت گشتاور

$$\sum M_E \neq 0$$

برابر صفر نخواهد شد. بالعکس برآیند R_E^H و R_E^V هم باید از نقطه‌ی C بگذرد تا $\sum M_C=0$ باشد. پس

$$\sum M_C=0 \Rightarrow R_E^H\times4 + 2\times3 = 0$$

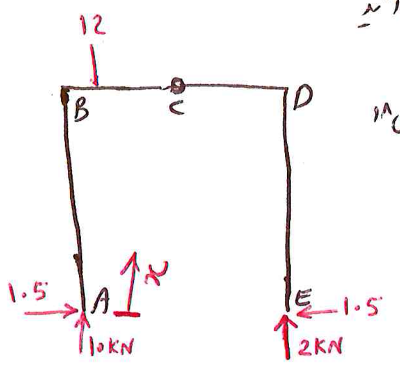
$$\Rightarrow \boxed{R_E^H = -1.5\,KN}$$

حال اگر روی کل سازه $\sum F_x$ بگیریم در آنصورت

$$\boxed{R_A^H = +1.5\,KN}$$

منفی بدست آمد یعنی جهت فرض ما در دیاگرام آزاد درست نبوده و واقعیت خلاف جهت فرض ماست.

بدین ترتیب عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بدست آمدند. دیاگرام آزاد به شکل زیر در می‌آید

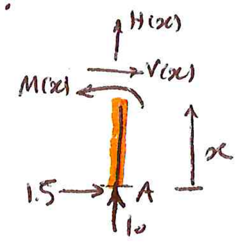


شکل ۱۸

حال می‌خواهیم برای این سازه منحنی تغییرات نیرو رسم کنیم.

برای AB، x را به صورت نشان داده شده در شکل ۱۸ در نظر می‌گیریم:

عضو AB:



شکل ۱۹

$\Rightarrow \boxed{M(x) = -1.5x}$

که برای کل تیر برقرار است.

برای برش داریم

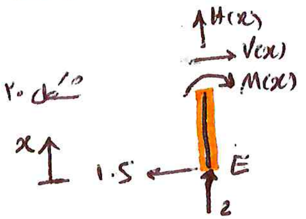
$\boxed{V(x) = -1.5}$

برای نیروی محوری ← $\boxed{H(x) = -10}$

یعنی H(x) به سمت پایین است. پس عضو در فشار است.

دقیقاً همین قضیه را برای عضو DE نیز می‌توان انجام داد.

عضو DE



شکل ۲۰

$\boxed{M(x) = 1.5x}$

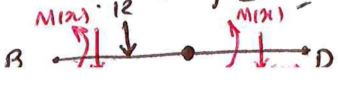
توجه: قرارداد M(x) مثبت را در اینجا خلاف عضو M(x) در نظر گرفته‌ایم

$\boxed{V(x) = 1.5}$

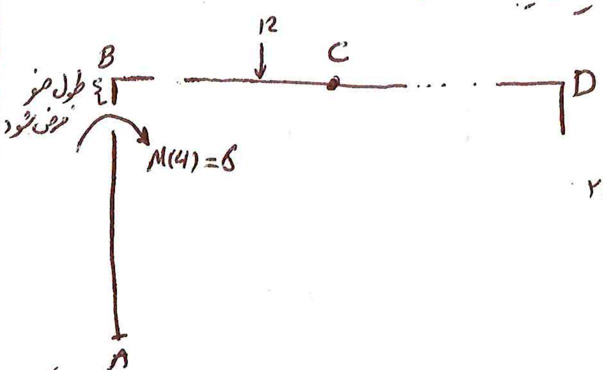
$\boxed{H(x) = -2}$

حال به سراغ قطعه‌ای با سختی زیاد می‌رویم. می‌خواهیم قطعه‌ی BD را یکجا در نظر بگیریم. می‌خواهیم تأکید کنیم که وجود مفصل اتفاق خاصی نیست و مشکلی ایجاد نمی‌کند. در مفصل تنها ممان صفر است. زمان تغییر شکل و بررسی آن مفصل مهم است اما در اینجا خیلی مهم نیست. پس در نظر می‌گیریم

شکل ۲۱



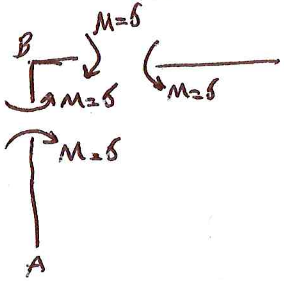
یک قسمت تا قبل از بارمتمرکز ۱۲ مقطع می‌زنیم و یک مقطع بعد از آن. حال شروع به نوشتن معادلات می‌کنیم. یکبار برای بازه‌ی صفر تا یک و یکبار از یک به بعد. قاب را به صورت زیر فرض کنید



شکل ۲۲

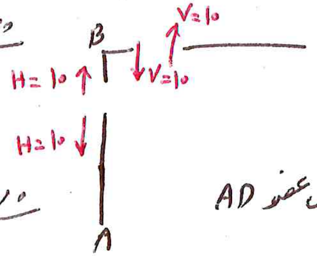
طبق معادله‌ی M(x) = -1.5x در انتهای فوقانی ستون AB که x=4 است لنگر 6- در آن تولید می‌شود. پس در گوشه‌ی B به صورت شکل زیر لنگر تولید می‌شود

شکل ۲۳



از لحاظ برش و نیروی محوری نیز به همین صورت است. نیروی محوری عضو AB یک نیروی محوری 10 به سمت پایین است

شکل ۲٤



شکل ۲٤

⊛ توجه H عضو AB معادل برش عضو AD می‌شود. ⊛

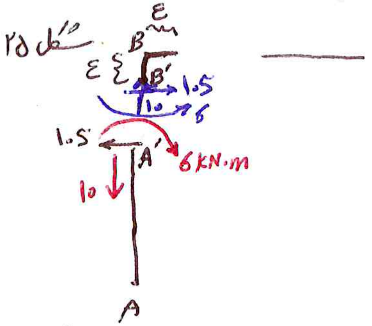
پس اگر بخواهیم معادل را روی BD بنویسیم باید اثر برش، نیروی محوری و لنگرهایی که از قطعه‌ی AB انتقال می‌یابد را باید در نظر بگیریم:

جلسه هشتم:

ادامه مثال جلسه قبل:

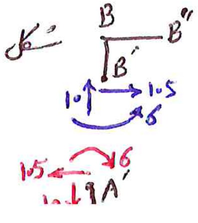
وقتی قطعه‌ی BD را از کل سازه جدا می‌کنیم از جانب B (بسته به اینکه از کدام طرف بخواهیم شروع کنیم) نیروهای داخلی وارد می‌کند. جلسه قبل از B شروع کردیم. بنابراین باید نیروهایی را که عضو BD از عضو AB دریافت می‌کند در نظر بگیریم. node گره B را به اندازه‌ی ε از بالا و پایین جدا می‌کنیم (توجه ε→0)

شکل ۲۵



در نزدیکی نقطه‌ی B یک برش به اندازه‌ی 1.5 از جانب عضو AB وجود دارد (منظور نقطه‌ی A′) است. در همین نقطه یک لنگر نیز وجود دارد. علاوه بر این نیروی محوری 10 کیلونیوتن هم در A′ وجود دارد که ناشی از عکس‌العمل تکیه‌گاه است. پس همین نیروها خلافشان باید در نقطه‌ی B′ هم به وجود آید.

شکل ۲۶

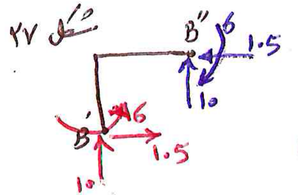


شکل

در قسمت کوچک $B'BB''$ چون هیچ نیرویی وارد نشده است پس باید $\sum M=0$ ، $\sum F_x=0$ و $\sum F_y=0$ باشد.

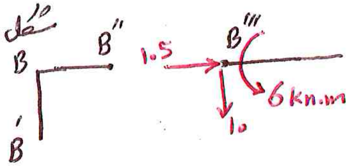
اگر در این گوشه یک نیروی متمرکزی وارد می شد یا لنگر وارد می شد باید مد نظر قرار می گرفت. ولی چنین چیزی در این مسئله وجود ندارد پس خواهیم داشت برای نقطه ی B'' (توجه شود که فاصله ی B تا B'' و B' بسیار کوچک است و در اینجا با اغراق نمایش داده شده است)

شکل ۲۷



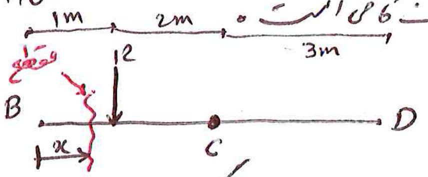
عکس العمل های موجود در B'' عیناً در جهت خلاف به B''' انتقال می یابد

شکل ۲۸



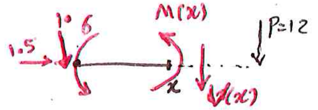
دقیقاً همین نتیجه را می شود با شروع از سمت ED به دست آورد. اما برای نوشتن معادلات منحنی لنگر و برش همان یک طرف کافی است.

شکل ۲۹



معادلات مان را از B تا بار متمرکز می نویسیم. x را هم به فرم بالا فرض می کنیم. پس (شکل ۳۰)

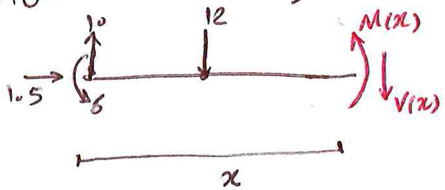
if $0\leq x<1 \Rightarrow$



$$\Longrightarrow V(x)=10 \quad , M(x)=-6+10x$$

حال از نقطه ی $x=1$ عبور می کنیم. دیگر نیازی نیست تا مفصل x ها را جلو ببریم. مادامی که منحنی برش و لنگر می خواهیم رسم کنیم فقط جای x را می شکنیم که بار یا لنگر متمرکزی اعمال شده باشد. وقتی هدف تغییر شکل باشد نباید از مفصل عبور کنیم.

شکل ۳۱



مفصل ممکن است در این فاصله ی x باشد یا نباشد. این قضیه اهمیتی ندارد. پس

$$\sum F_y=0$$

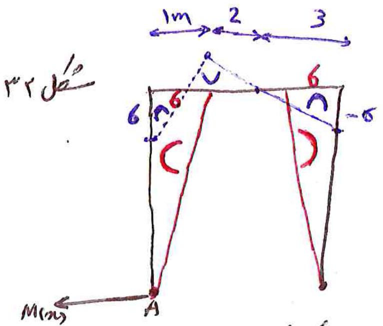
$$1\leq x\leq 6 \Longrightarrow V(x)=-2$$

$$\sum M_x=0 \Longrightarrow M(x)+6-10x+12(x-1)$$

$$\Longrightarrow M(x)=-2x+6$$

حال در جایگاهی هستیم که بتوانیم منحنی تغییرات لنگر و برش را برای این سازه رسم کنیم.

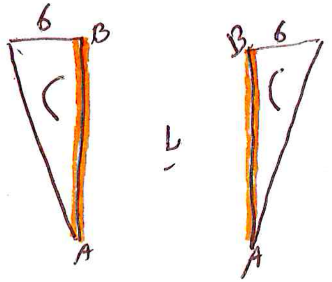
شکل ۳۲



شکل ۳۲

ممان در نقطه ی A صفر است چون تکیه گاه مفصلی است. معادله ی ما نیز همین مطلب را ثابت می کند. برای رسم لنگر مهم نیست که منفی یا مثبت را کدام سمت در نظر می گیرید فقط باید علامت تقعر را هم در روی آن رسم کنید. در مورد ستون AB مثلاً می توان نوشت:

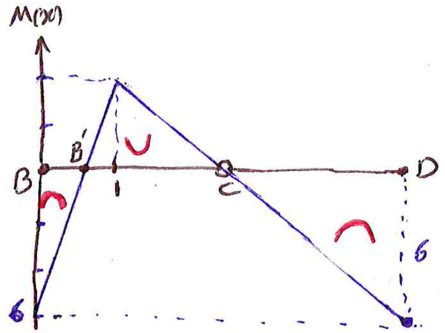
شکل ۳۳



فقط علامت) مهم است که جهت تقعر را نشان می دهد. مقدارش را روی عدد خوانده می شود و جهت از روی تقعر. نمودار در شکل ۳۲ آمده است

در اینجا قسمت تیر BD را بار دیگر رسم می کنیم تا واضح دیده شود

شکل ۳۴



از نظر تقعری در ناحیه ی B تا B' که ممان منفی است پس نحوه ی تغییر به صورت روبرو است:

از B' تا C ممان مثبت و از C تا D ممان منفی است که تغییر شکل کیفی را در بالا با علامت های ⌒ نشان داده ایم. با توجه به این تغییر شکل ها، یک سری نقطه ی عطف خواهیم داشت.

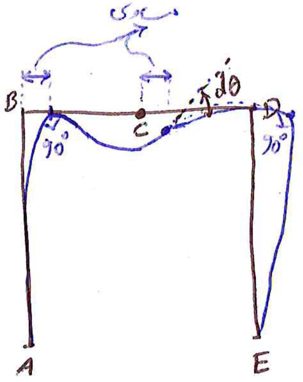
باید در گوشه ها دقت کنیم که تقعرها با هم همخوانی داشته باشند. در کنج باید تقعرها به یک سمت باشد مثل دو گوشه ی شکل ۳۲. فقط در صورتی می

تقعرها به یک سمت نباشند که در کنج یک ممان متمرکز اعمال شود.

منحنی شکل ۳۲

با استفاده از این منحنی لنگر می توان تغییر شکل تقریبی را رسم کرد

شکل ۳۵



اول از هر چیز باید ببینیم گره B به کدام سمت جابجا می شود. به سمت راست یا چپ؟ این مسئله را بعدها شرح خواهیم داد. فعلاً به ادامه مطلب با فرض دانستن موقعیت جدید B می پردازیم. در شکل بالا تغییر شکل تقریبی آورده شده است

(محل عوض شدن جهت ممان)

← در فاصله ی 0.6 از B یک نقطه ی عطف داریم. که از تشابه مثلث ها در شکل ۳۳ قابل محاسبه است.

← در نقطه ی C مماس بر دو طرف مفصل در تغییر شکل یافته لزوماً بر هم منطبق نیستند بلکه یک زاویه dθ وجود دارد

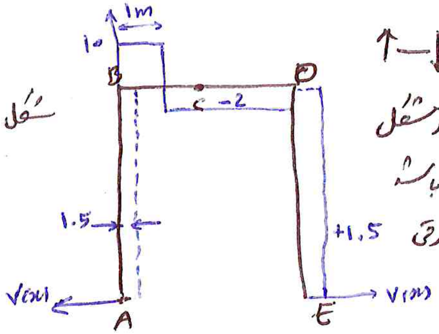
← زاویه ی دو گوشه ی B و D همچنان قائمه می ماند. یعنی زاویه بین مماس بر انتهای فوقانی BA و مماس بر انتهای چپ BD در نقطه ی B نود درجه باقی می ماند.

زاویه ثابت می ماند. تنها در حالت

پیدا می کند

منحنی تغییرات برش و نیروی محوری را نیز می توان رسم کرد

شکل ۳۶

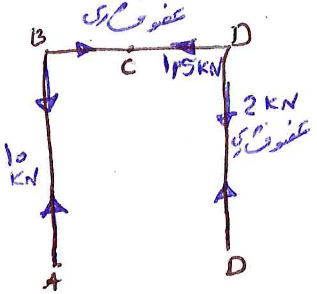


قرارداد برش مثبت ↓ ↑

(در مورد برش مثل لنگر شکل اینکه کدام سمت مثبت باشد یا منفی دیگر مهم نیست. فرقی نمی کند کدام طرف را مثبت بگیریم.

تغییرات نیروی محوری:

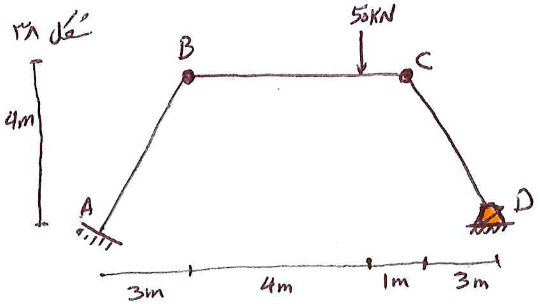
شکل ۳۷



قبل از اینکه سراغ مبحث آخر نیز خرپا برویم، مثالی دیگر از تحلیل قاب می آوریم.

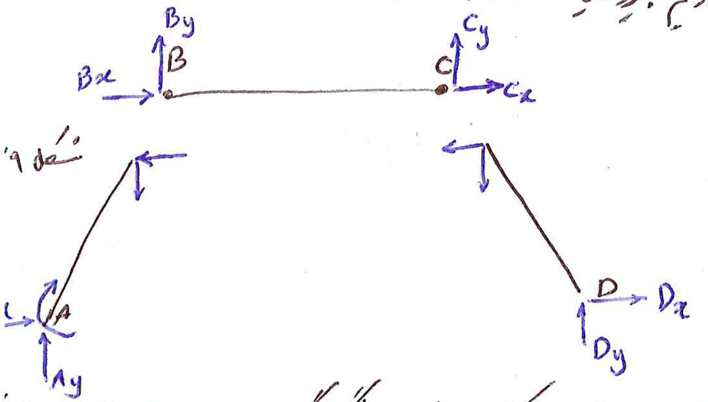
مثال:

شکل ۳۸



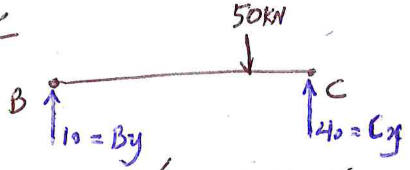
اگر در سازه فوق مفصل ها نبودند سازه دو درجه نامعین بود. با افزودن مفصل ها سازه معین می شود. در این مسئله (برخلاف مسئله قبل) دو مفصل داریم بنابراین دو معادله ی ممان برابر صفر داریم. این

بدین معناست که عضو BC را باید جدا کرده و مورد بررسی قرار دهیم. خوب است توجه کنیم که عضو CD یک عضو تک نیرویی است. پس عضو D نقش یک تکیه گاه غلطکی را برای قطعه ی ABC بازی می کند. حال به حل مسئله می پردازیم. نیروهایی که اعضا با هم رد و بدل می کنند به صورت زیر است



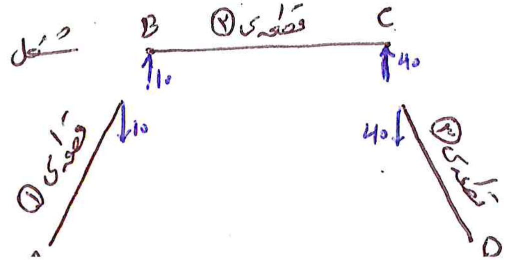
حال قطعه ی BC را جدا می کنیم و حول B لنگرگیری می کنیم و مساوی صفر قرار دهیم آنگاه فقط مولفه ی قائم گره C باقی می ماند و نیروی متمرکز. پس نیروی قائم گره C باید ۴۰ باشد. بنابراین مولفه قائم B باید ۱۰ باشد

شکل ۴۰



در مورد مولفه های افقی از این قطعه نمی توانیم صحبتی بکنیم. به این صورت مولفه ها قائم قطعات CD و AB در محل اتصالشان به BC بدست می آید

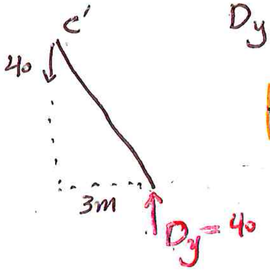
شکل ۱



حال که نیروی 40 را در قطعه‌ی ③ پیدا کردیم از مزیت اینکه عضو③ دو مفصل است و تنها نیروی محوری تحمل می‌کند استفاده می‌کنیم

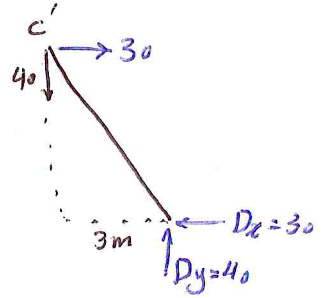
با نوشتن $\sum F_y=0$ برای D_y خواهیم داشت $\boxed{D_y=40}$

شکل ۴۲



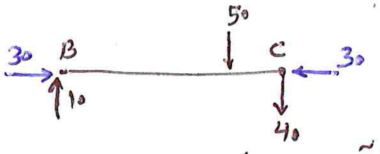
حال در شکل بالا حول C′ لنگر می‌گیریم. D_y با بازوی ۳ متری دارد پس ۱۲۰ لنگر پادساعتگرد تولید می‌کند. پس باید نیروی وجود داشته باشد در D که لنگر ساعتگرد تولید کند و مقدارش ۱۲۰ باشد تا لنگرها خنثی شود پس جهت D_x به سمت چپ و مقدار آن 30 است. حال با یک $\sum F_x=0$ در قطعه‌ی C′D معلوم می‌شود که نیروی افقی در نقطه‌ی C′ به سمت راست و مقدارش 30 است.

شکل ۴۳



به محض معلوم شدن نیروی افقی در C′ بر روی قطعه‌ی BC می‌رویم. باید نیروی افقی در C هم 30 باشد

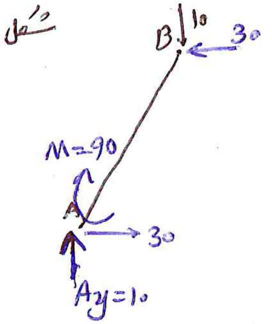
شکل ۴۴



با نوشتن $\sum F_x=0$ در روی قطعه‌ی BC مقدار Bx نیز 30 به

حال با دانستن اینکه نیروی افقی موجود در قطعه‌ی AB در محل B نیز به دست می‌آید برابر با 30

شکل ۴۵



با $\sum F_y=0$ ⇐ $\boxed{A_y=10}$

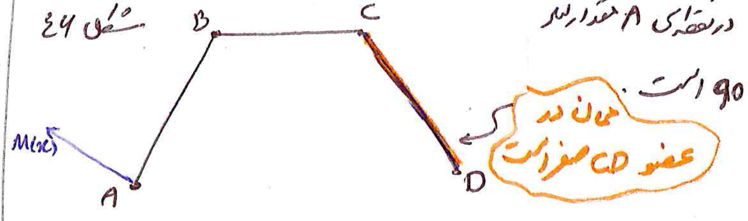
با $\sum F_x=0$ ⇐ $\boxed{A_x=30}$

با $\sum M_A=0$ ⇐ $\boxed{M_A=90}$

حال شروع به رسم منحنی تغییرات لنگر می‌کنیم. لنگر مشخصاً در سه نقطه B، C و D صفر است. چون مفصل اند.

در نقطه‌ی A مقدار لنگر 90 است.

شکل ۴۶



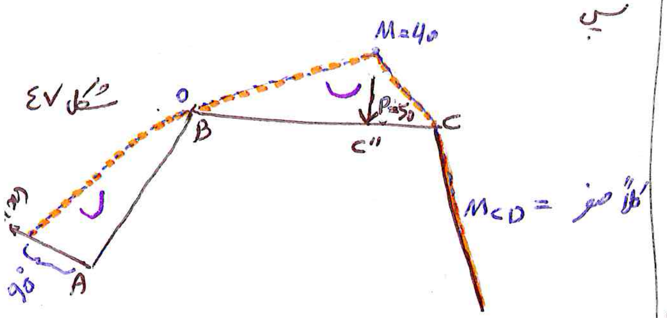
در اینجا دیگر قطع نمی‌زنیم و معادلاتش را یک ضرب می‌نویسیم.

توجه: اگر بار گسترده باشد لنگر از درجه‌ی دو و اگر نباشد تغییرات از درجه‌ی یک است. اگر بار متمرکز در نقطه‌ای داشته باشیم شکستگی در لنگر پیش می‌آید اگر در طول مسیر ممان متمرکز باشد در منحنی لنگر پرش بوجود می‌آید.

عضو CD که یک عضو دو سر مفصل است هیچ بار متمرکزی هم روی آن نیست و فقط نیروی محوری دارد. در D ممان صفر است در C هم ممان صفر است پس در کل عضو ممان صفر است و منحنی ممان در شکل ۴۶ روی خود تیر می‌افتد.

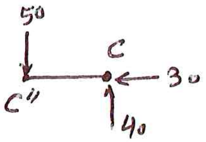
در عضو AB، تغییرات لنگر خطی است که از 90 در A شروع می‌شود و به صفر در مفصل B می‌رسد. چون تغییرات خطی است پس

شکل ۴۷



حال سراغ قطعه‌ی BC می‌رویم. در این قطعه ممان در B و C صفر است و یک شکستگی در زیر بار متمرکز 50 وجود خواهد داشت. فقط کافی است ممان زیر بار را محاسبه کنیم. ممان در این نقطه 40 است چون اگر تا زیر بار مقطع بزنیم و از جانب C لنگر را حول محل اعمال بار متمرکز 50 حساب کنیم

شکل ۴۸



$$\sum M_{C''} = 40\times1 = 40$$

نیروی محوری 30 ممان تولید نمی‌کند. پس در زیر بار متمرکز ممان 40 مثبت داریم. (نمودار در شکل ۴۷)

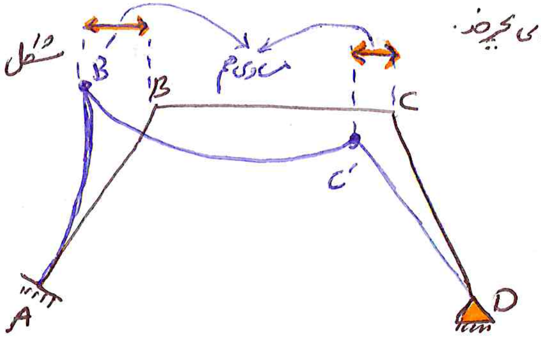
از روی این منحنی می‌توان نمودار تغییر شکل کیفی را هم رسم کرد.

حت

تکیه‌گاه A گیردار ⟸ زاویه‌ی A باید 90° بماند.

نقطه‌ی B بالا می‌رود. چون تقعر عضو AB به صورت ⌣ است پس B باید بالا رود. B تا جایی بالا می‌رود که نقطه‌ی C روی خودش بیافتد تا تغییر طول محوری ندهد. عضو CD دچار خمش نمی‌شود چون M در طول آن صفر است فقط می‌تواند روی دایره‌ای بچرخد.

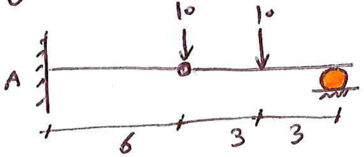
شکل ۴۹



در اینجا توجه کنید زاویه‌ی C' با C و B' با B برابر نیست چون مفصل داریم تغییر زاویه خواهیم داشت.

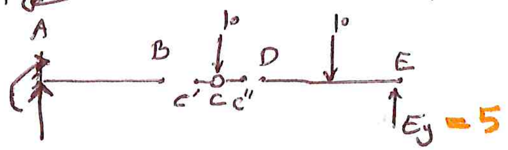
قبل به پایان رساندن این جلسه اندکی راجع به بارگذاری روی مفصل صحبت می‌کنیم.

شکل ۵۰



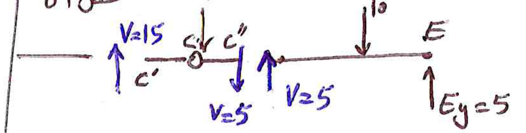
دانشجویان معمولاً اشتباه می‌کنند که نیروی بارگذاری شده روی مفصل چه بخشی از آن به سمت راست می‌رود و چه قسمتی به سمت چپ و از این دست سوالات. بارگذاری روی مفصل هیچ فرقی با بارگذاری متمرکز جاهای دیگر ندارد. اگر در جایی بارگذاری متمرکز باشد تعریف برش در آن نقطه ممکن نیست و فقط برش چپ و راست برای آن تعریف می‌کنیم. وقتی روی مفصل هم بارگذاری شود قضیه همین است. برای فهم بهتر است چپ و راست تیر را اندکی جدا کنیم.

شکل ۵۱



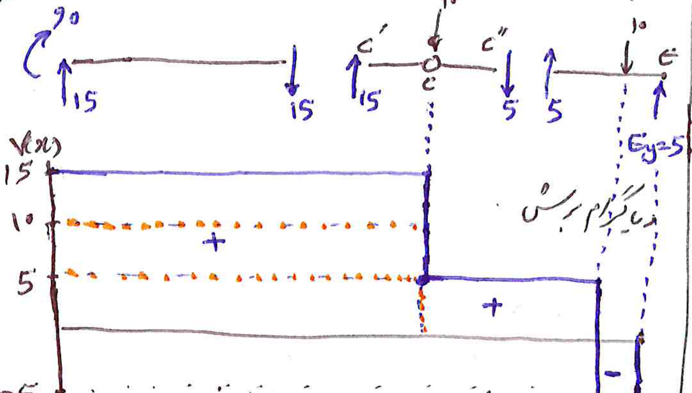
در دیاگرام آزاد بالا نیروی محوری صفر است بنابراین آن را کنار گذاشته‌ایم. توجه کنید طول C'CC'' در واقع صفر است. در عضو DE حول D لنگر می‌گیریم. نیروی E_y برابر با 5 به دست می‌آید. حال باید تعادل روی قسمت DE وجود داشته باشد چون E_y را به دست آوردیم یک برش در D تولید می‌شود که برابر 5 باید باشد تا $\sum F_y=0$ در عضو DE برقرار باشد. پس در کنار سمت راست مفصل هم نیروی 5 به سمت پایین تولید شود.

شکل ۵۲



در قطعه‌ی C'CC'' هم باید تعادل $\sum F_y=0$ برقرار باشد پس باید یک V=15 به سمت بالا در C' تولید شود، به همین ترتیب بقیه سازه به دست می‌آید.

شکل ۵۳



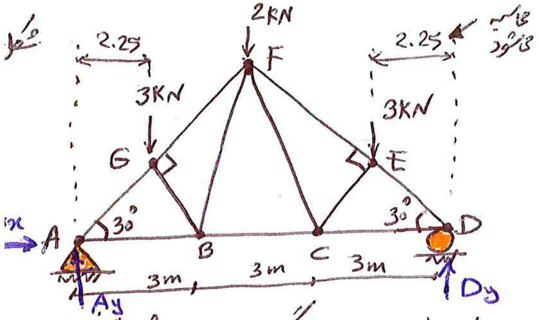
پس مفصل چندان امر پیچیده‌ای نیست.

جلسه [illegible]م :

در ادامه بحث راجع به خرپاها صحبت خواهیم کرد. روش‌های حل گره به گره یا مقطع زدن وجود دارند. خرپاهای مرکب را نمی‌توا به روش گره به گره حل کرد. این موارد را در مثال‌های پایان خواهیم کرد. در خرپاهای بغرنج که گره به گره یا مقطع زدن جواب نمی‌دهد مسائل جدیدی پیش خواهد آمد.

مثال ۱: (Example 3.2 کتاب هیبلر): یک خرپای ساده داریم

شکل



سازه پایدار و معین است با بارگذاری داده شد. می‌خواهیم سا را تحلیل کنیم:

با نوشتن یک معادله کلی روی سازه که در حقیقت لنگر می‌توان عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها را محاسبه کرد. چون سازه معین است. A_x ناگفته پیداست که صفر است.

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{(R_A)_H=0}$$

$$\sum M_A=0 \rightarrow 3\times2.25+3\times6.75-9(R_D)_V+2\times4.5=0 \Rightarrow \boxed{(R_D)_V=4KN}$$

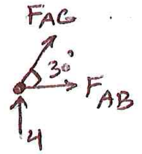
همان $(R_D)_V$

$$\sum F_y=0 \rightarrow (R_A)_V+4-3-3-2=0 \Rightarrow \boxed{(R_A)_V=4}$$

حال بقیه ی کار را می توان با روش گره به گره حل کرد.

گره A:

شکل ۲



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$4 + F_{AG} \sin 30 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{AG} = -8\ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

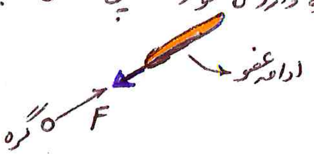
$$F_{AB} + F_{AG} \cos 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{AB} = 6.93\ kN}$$

F_{AG} را ما در شکل ۲ کششی فرض کرده بودیم اما مقدارش منفی بدست آمد. پس F_{AG} فشاری است.

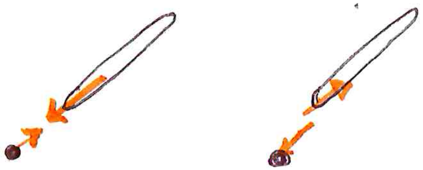
قرارداد: نیروهایی که روی گره قرار می گیرند همان نیروهایی هستند که از طرف عضو به گره وارد می شود. پس دقیقا طبق شکل زیر

شکل ۲



عضو به گره نیروی F وارد می کند، در این صورت گره نیز همان نیرو را در جهت مخالف به عضو وارد می کند.

شکل ۳



الف: عضو کششی
Tension

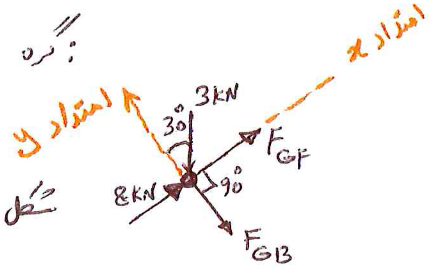
ب: عضو فشاری
compresion

حال سراغ گره بعدی می رویم که دو مجهول بیشتر نداشته باشد.

بنابراین گره G را انتخاب می کنیم

گره G:

شکل ٤



امتداد x و y بالا را صرفا جهت راحتی کار در نظر گرفته ایم

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3\cos 30^\circ + F_{GB} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{GB} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} = -2.6}$$

پس نتیجه می شود که جهت نیروی F_{GF} را اشتباه فرض کرده بودیم. پس عضو فشاری به دست می آید.

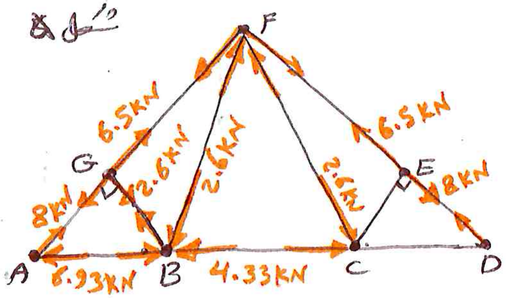
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 8 - 3\sin 30 + F_{GF} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{GF} = -6.5\ KN}$$

بنابراین عضو GF نیز فشاری به دست می آید.

با ادامه ی روش به همین ترتیب برای سایر گره ها نیز مقادیر بدست می آید که در نهایت شکل زیر حاصل می شود:

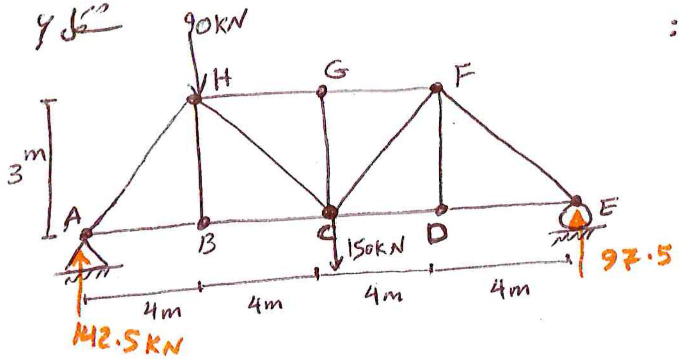
شکل ۵



بدین ترتیب با روش گره به گره نیروها حاصل شد.

مثال ۲:

شکل ۶



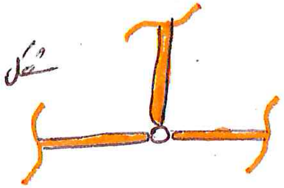
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 90 \times 4 + 150 \times 8 = 16 \times (R_E)_v$$

$$\Rightarrow \boxed{(R_E)_v = 97.5\ K.N}$$

با نوشتن $\sum F_y = 0$ عکس العمل قائم A بدست می آید. مولفه افقی A هم

حال به حل نیروی داخل اعضا می پردازیم. قبل از هر چیز مشخص است که عضو HB یک عضو صفر است. هرگاه گرهی به شکل زیر داشته باشیم

شکل ۷



که دو عضو افقی در راستای هم و یک عضو عمود بر آن دو در محل گره باشد، چون دو عضو افقی قادر به تولید نیروی عمودی نیستند پس نیروی تولید شده در داخل عضو قائم باید صفر باشد. البته به صورت کلی هرگاه دو عضو در راستای هم باشند و یک عضو در راستای دیگری غیر از این دو باشد باید $\sum F_y = 0$ باشد.

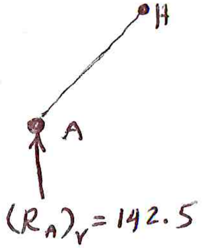
با این تحلیل در خرپای شکل ۶ سه عضو HB، GC و FD عضو صفر هستند.

از طرف دیگر طبق گفته های بالا می توان درک کرد که نیروی عضو DE با نیروی

عضو DC برابر است و نیروهای دو عضو BC و BA نیز با هم برابرند. نیروهای دو عضو GF و GH هم با هم برابرند.

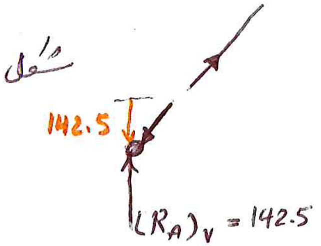
می‌توان فهمید که عضو HA باید در فشار باشد چون تکیه‌گاه A یک عکس‌العمل به جانب بالا دارد

شکل ۸



بنابراین در مفصل A باید یک نیرویی وجود داشته باشد از جانب عضو HA که عکس‌العمل قائمی به سمت پایین داشته باشد برابر با 142.5

شکل ۹



بنابراین خود عضو در فشار قرار می‌گیرد.

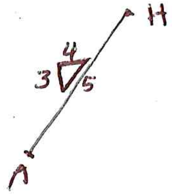
از این پس بر روی خرپا نیروی داخل عضو را نشان نمی‌دهیم بلکه همان نیروی وارده بر مفصل را نشان می‌دهیم. این کار را به این دلیل انجام می‌دهیم که با نمادهای اکثر کتاب‌های موجود در تحلیل سازه هماهنگ باشیم. پس عضو AH به صورت روبرو نمایش می‌دهیم.

شکل ۱۰

پس از این لحظه به بعد شکل ۱۰ نمایانگر این است که عضو AH فشاری است (برخلاف قاعده‌ای که در شکل ۵ نمایش دادیم).

چون عضو AH زاویه‌اش به قرار زیر است یعنی یک مثلث ۳ و ٤ و ۵ است بنابراین

شکل ۱۱



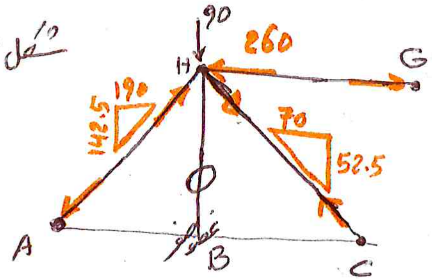
مولفه‌ی افقی AH، $\frac{٤}{۳}$ مولفه‌ی قائم خواهد بود. پس مولفه‌ی قائم AH برابر است با $190 = 142.5 \times \frac{4}{3}$. پس با داشتن هندسه به راحتی قادر به حل مسئله هستیم بدون آنکه معادلات مرسوم $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ و $\sum M = 0$ را روی کاغذ بنویسیم.

پس کل نیروی عضو AH برابر $\sqrt{190^2 + 142.5^2} = 239.5KN$ خواهد بود.

گام بعدی: عضو AH به گره A معادل 190KN و به جانب چپ نیروی افقی وارد می‌کند. بنابراین عضو AB باید گره را به اندازه 190 به سمت راست بکشد. پس نیروی عضو BC هم 190 در می‌آید.

حال سراغ گره H می‌رویم. از لحاظ افقی عضو HC یک مولفه دارد و عضو HG نیز یک مولفه افقی دیگر. پس مولفه‌ی افقی [illegible] قابل محاسبه نیست. بنابراین سراغ مولفه قائم می‌رویم. چرا که عضو HG مولفه‌ی قائم ندارد. عضو HA به اندازه 142.5 به سمت بالا دارد و 90 کیلونیوتن هم نیروی متمرکز P بر روی گره H وارد می‌شود. پس برایند 52.5 به سمت بالاست. بنابراین عضو HC باید گره را به سمت پایین بکشد و مولفه‌ی قائم‌اش به گونه‌ای باشد که 52.5 را خنثی کند

شکل ۲

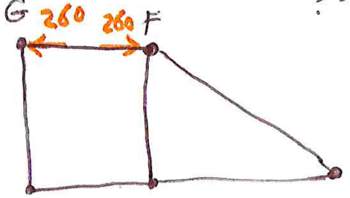


حال با توجه به نسبت 4 به 3 مولفه‌ی افقی باید $\frac{4}{3}$ مولفه قائم یعنی همان 70 باشد. بنابراین کل نیروی عضو HC برابر با

$$\sqrt{70^2 + 52.5^2} = 87.5$$

حال آمادگی داریم که عضو HG را بیابیم. مفصل H را عضو AH به اندازه‌ی 190 به سمت راست می‌کشد و عضو HC هم گره H را اندازه 70 کیلونیوتن به سمت راست کشیده می‌شود. پس گره H مجموعاً به اندازه 260 به سمت راست کشیده می‌شود، پس عضو H باید گره H را به اندازه 260 به سمت چپ بکشد. مقدار عضو F نیز همین مقدار خواهد بود

شکل ۳

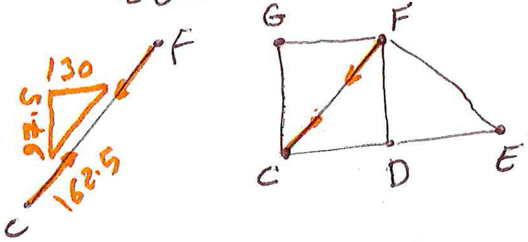


سخت

حال دو گزینه ی گره F و C را داریم چون در هر دو تنها دو مجهول داریم سراغ گره C برویم بهتر است چون حل گره F به حل دو معادله دو مجهول نیاز دارد .

به راحتی با ادامه ی روند شکل می فهمیم که عضو CF به صورت زیر است

شکل ۱٤



به این ترتیب عضو CD نیز قابل حل است

شکل ۱۵

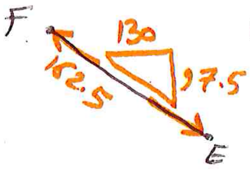
پس عضو DE نیز حل می شود

شکل ۱۶

حال فقط عضو FE باقی می ماند . از گره F می دانیم که مقدار نیروی کشش عضو FE باید برابر با مقدار کشش عضو FC با جهت مخالف باشد

پس

شکل ۱۷

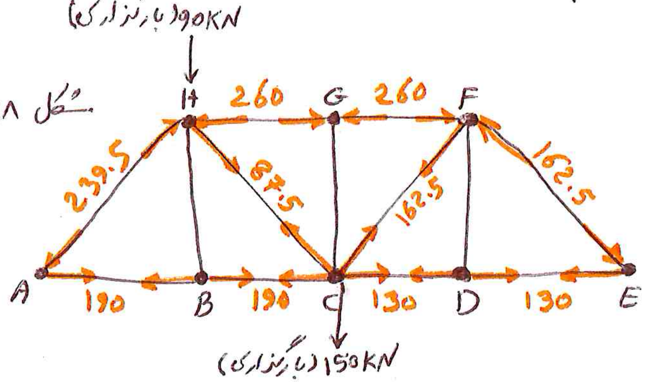


چون زوایای FE و FC برابرند سینوس افقی شان

(130)

پس کلیت خرپا به شکل زیر در می آید

شکل ۱۸



$2j = 16$ مقدار معادلات در مثال بالا :

بنابراین 16 مجهول می توانستیم محاسبه کنیم که 13 عدد مربوط به اعضا است و 3 عدد مربوط به تکیه گاه ها ،

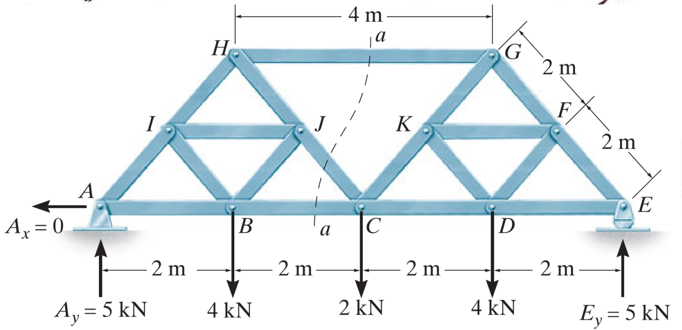
ما از معادلات تعادل استاتیکی $\sum M_A = 0$ برای بدست آوردن واکنش تکیه گاه E استفاده کردیم. $\sum F_y = 0$ نیز برای محاسبه " " A " " . بنابراین معادلات تعادل استاتیکی را استفاده کردیم. پس در آخر کار چند معادله ی اضافی خواهیم داشت تا جواب ها را کنترل کنیم. پس وقتی از معادلات تعادل استاتیکی برای حل واکنش های تکیه گاهی استفاده می کنیم ، و بعد شروع به استفاده از روش گره به گره برای حل نیروها می کنیم در آخر کار معادلات اضافی داریم.

وقتی مثال هندسه ی ساده ای داشته باشد روش توضیح داده شده در مثال ۲ به خوبی کار می کند. در هندسه پیچیده کمی سخت می شود و شاید در برخی گره ها قابل استفاده باشد در گره هایی که این روش قابل اعمال نیست معادلات تعادل را روی کاغذ می آوریم و گام به گام جلو می رویم .

مثال هایی که آورده شده بیشتر خرپاهای ساده بودند که به راحتی حل می شدند اما خرپاهای مرکب را با گره به گره زدن نمی توان حل کرد. بنابراین لازم است مقطع زده و روی بخشی از سازه معادلات تعادل بنویسیم و یک ضرب نیروهای اعضای میانی را حل کنیم بعد امکان دارد قسمت باقی مانده یک خرپای ساده باشد که بتوان آن را به روش گره به گره حل کرد .

مثال: سعی می کنیم این مثال را به صورت کیفی حل کنیم نه به صورت عددی مخصوصاً که حل کامل در مثال 8-3 کتاب هیبلر آورده است .

شکل ۱۹

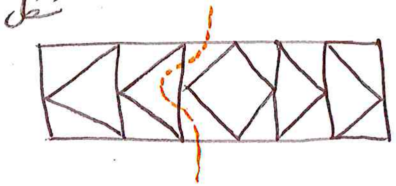


خرپای مرکب است چون AHC یک خرپای ساده است و همچنین CGE یک خرپای ساده است. در یک گره مشترک اند

و با یک عضو HG به هم وصل شده اند که در امتداد عضو دیگری نیست. خرپا پایدار و معین است و سه عکس العمل تکیه گاهی دارد.

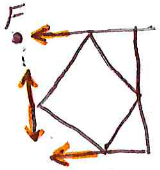
برای حل مسئله باید مقطع بزنیم به نوعی که تعداد اعضای قطع شده و نیروی آنها را بتوان با نوشتن معادل بر روی تک قطعه ی خرپا حل کرد. مثلاً خرپای زیر را فرض کنید.

شکل ۲۰



اگر از محل نمایش داده شد مقطع بزنیم از چپ، نیروی نمایش داده شده ی مجهول در پایین تنها یکی شان از نقطه ی F عبور نمی کند و بقیه همانشان

شکل ۲۱



حول F صفر است.

در شکل حاضر نیز از محل مقطع aa خرپا را مقطع می زنیم که سه عضو HG و HC و BC را قطع می کند

عکس العمل ها با نوشتن معادلات تعادل روی کل خرپا محاسبه می شوند

چون:

$\sum M_A=0 \Rightarrow (R_E)_V$ معلوم

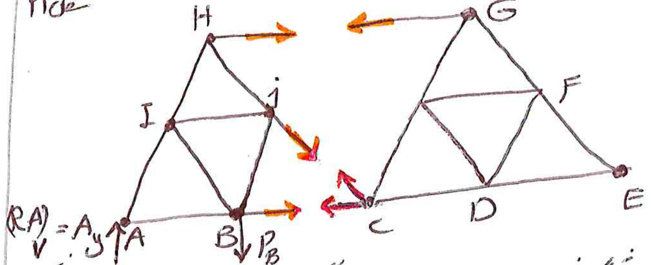
$\sum F_y=0 \Rightarrow (R_A)_V$ معلوم

$\sum F_x=0 \Rightarrow (R_A)_H=0$

پس عکس العمل ها به راحتی محاسبه می شوند.

خرپا را قطع می کنیم و دو طرف سازه را جدا می کنیم. نیروهای داخلی به شکل زیر اند

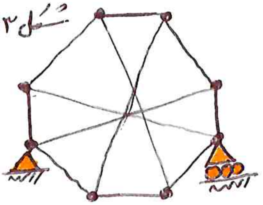
شکل ۲۲



حال مثلاً نیمه سمت چپ را در نظر می گیریم. کافی است حول نقطه ی C گشتاور را محاسبه کنیم. گشتاوری که A_y و P_B تولید می کنند باید با گشتاور نیروی موجود در گره H برابر باشند. بنابراین نیروی HG بدست می آید. با این کار می توانیم خرپای ساده سمت چپ را به روش گره به گره در گره H حل کنیم تا F_{HI} و F_{Hj} را محاسبه کنیم. بعد در گره A و سپس I، بعد گره B تمام نیروها را محاسبه کنیم. به این ترتیب در سمت چپ سپس گره های j و C را محاسبه می کنیم. سپس وارد سمت راست می شویم و همان روش فوق را دنبال می کنیم.

سپس دیدیم که خرپای مرکب به روش گره به گره تنها قابل حل نیست و باید روش مقطع زدن را نیز وارد کنیم. در خرپاهای بغرنج حتی مقطع زدن هم کمکی نمی کند و باید سراغ روش های دیگری برویم. مثلاً خرپای روبرو را در نظر بگیرید. از لحاظ تعداد گره ها و اعضا

شکل ۲۳

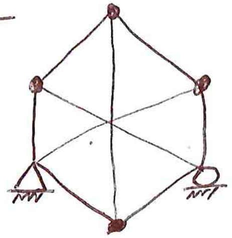


j = 8
r = 3
m = 12

سازه ناپایدار است چون مکانیزم داریم. (مثال نامناسب!)

حال مثال مناسب زیر را در نظر بگیرید

شکل ۲۴



j = 6
r = 3
m = 9

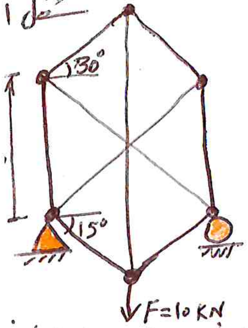
$$2j = m + r \Rightarrow 12 = 12$$

پس معادلات و مجهولات برابرند. پس امکان دارد سازه معین باشد (به شرط پایداری).

این سازه ها یک مثلث پایه هم ندارد. بنابراین ساده نیست. هیچ گرهی نیست که تنها دو عضو را وصل کرده باشد و هر مقطعی که می زنیم عضوهای زیادی قطع می کند. پس ا قطعی جوابگو نیستند بنابراین باید سراغ روش دیگری برویم. جلسه ی بعد راجع به این موضوع بحث خواهیم کرد.

جلسه دهم :

شکل ۱



فرض خرپای بغرنج روبرو را داشته باشیم در این خرپا هیچ مثلث پایه ای وجود ندارد. روش های گره به گره یا مقطع زدن در مورد خرپاهای بغرنج یا پیچیده ناتوان است به همین دلیل سراغ روشی می رویم که مخصوص این نوع خرپاها است. البته این روش

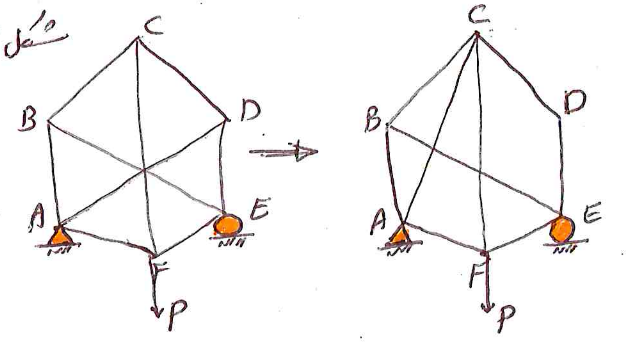
شاید چندان کاربرد عملی نداشته باشد مخصوصاً امروزه که دیگر محاسبات توسط کامپیوتر صورت می‌گیرد. ولی این روش را توضیح می‌دهیم چرا که با طرز تفکر روش نوینی آشنا می‌شویم.

اگر شکل خرپای داده شده منتظم باشد یا زاویه‌ی پایین A (یعنی 15°) با زاویه بالا (یعنی 30°) برابر باشند به دلایلی که خواهیم گفت خرپا جزء خرپاهای ناپایدار خواهد بود. ولی در این مثال چنین شرایطی نداریم و مسئله پایدار است.

راه حل کلی مسئله نوشتن ۱۲ معادله و حل ۱۲ مجهول است. اما برای گریز از حل ۱۲ معادله و ۱۲ مجهول سراغ روش دیگری می‌رویم که روش عضو جایگزین (substitude member) نام دارد.

ایده‌ی روش این است که عضوی را حذف می‌کند و عضوی دیگر جایگزین آن می‌کند تا خرپا به خرپای قابل حل تبدیل شود. سپس از حل خرپای تغییر شکل یافته برای حل خرپای اصلی استفاده می‌کند.

شکل ۲



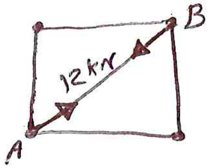
خرپای سمت راست تبدیل به خرپای ساده شده است چرا که مثلث $\hat{ABC}$ پایه است که بقیه‌ی اعضا با قانون یک گره و دو عضو به آن وصل شده‌اند. مثلث $\hat{ACF}$ با همین قانون به $\hat{ABC}$ وصل شده است و به همین ترتیب. تکیه‌گاه‌ها هم که خورگی ندارند پس به راحتی خرپا تحلیل می‌شود. از حل این خرپای جدید، راه حل برای خرپای اولیه به دست می‌آوریم.

خرپای سمت راست دو فرق اساسی با خرپای چپ دارد: A و C در حالت اول هیچ قیدی نداشتند و آزادانه به هم نزدیک می‌شدند یا دور، آن هم بدون هیچ مقاومتی. در حالت دوم این حالت مقید شده است و بنابراین جابه‌جایی A و C به هم مربوط است. فرق دیگر گره‌های A و D است که در حالت اول مقید بودند ولی در حالت دوم آزاد شده‌اند. پس: یک F_{CA} به وجود می‌آید و F_{DA} از بین می‌رود.

در حالت دوم اعضای CD و DE عضو صفر هستند در حالی که در خرپای اولیه چنین چیزی نیست.

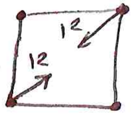
هر سازه‌ای (مخصوصاً خرپا) که داشته باشیم مثلاً خرپای زیر که تحت بارگذاری است و تکیه‌گاه مخصوص خود را دارد. در این صورت

شکل ۳



در عضو AB تحت شرایط بارگذاری یک نیروی وجود دارد. مثلاً 12 کیلونیوتن. اگر این عضو را حذف کنیم و به گره‌ها همچنان نیروی 12 KN اعمال وارد خواهد شد

شکل ٤



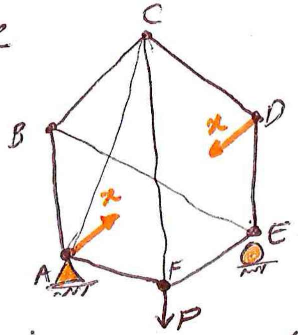
مثل این است که دو نفر از دو سر طنابی همدیگر را بکشند

شکل ۵

اگر طناب را در C ببریم و به جای آن نیروی مناسب قرار دهیم تفاوت حاضر در A و B این قضیه بریده شدن طناب را درک نخواهد کرد.

پس می‌توان مشکل پیش آمده در خرپای جدید را به این گونه برطرف کنیم: در حالت اول عضو AD نیرویی را تحمل می‌کرده است. اگر این نیروی AD را در خرپای جدید قرار دهیم مشکل حل خواهد شد.

شکل ۶



ولی همچنان این سازه از سازه اولیه متفاوت است چون عضو AC در خرپای جدید وجود دارد که در سازه‌ی اول نبوده است.

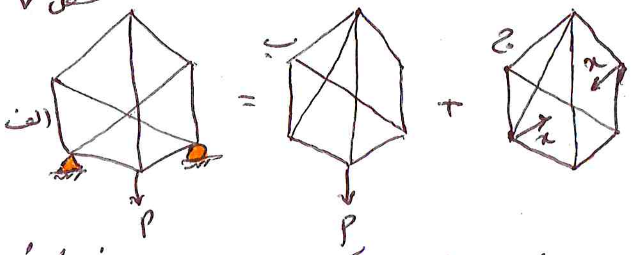
موضوع اصلی این است که نیروی F_{AD} را نمی‌شناسیم بنابراین آن را با x نمایش می‌دهیم. اگر x را می‌دانستیم می‌توانستیم در خرپای اصلی به روش گره به گره مسئله را حل کنیم.

در شکل ۶ فرض کنید که x را روی خرپا قرار ندهیم. اگر بارگذاری P را با

دهیم بر روی عضو CA یک نیرو واقع می شود. یعنی در داخل این عضو نیرو تولید می شود. حال فرض کنید x را بر روی خرپای قرار دهیم اما P وجود نداشته باشد. باز هم در عضو CA نیرو می افتد. چون خود x یک نوع بارگذاری روی خرپا است که به حساب می آید. حال می توانیم x را طوری تنظیم کنیم که در حضور P نیرویی که در داخل عضو CA تولید می شود صفر شود. حال ممکن است x به صورت فشاری وارد شود یا کششی. با صفر شدن نیروی تولید شده در CA، می توان این عضو را حذف کرد. سازه حرکتی نخواهد کرد. دراینصورت دو خرپا به هم تبدیل می شوند. پس کلید مسئله تعیین x به گونه است که نیرو در عضو افزوده شده CA صفر شود.

ایده کلی عضو جایگزین به ترتیب فوق است. سازه را یکبار با بارگذاری P تحلیل می کنیم و یکبار با بارگذاری x و در نهایت از اصل برهم نهی استفاده می کنیم تا حاصل خرپای اولیه شود.

شکل ۷



x همان نیروی واقعی است که در خرپای اصلی تولید خواهد شد. ما x را به گونه ای بدست می آوریم که در روی عضو جابه جا شده CA نیروی تولید شده صفر باشد.

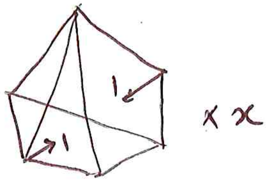
گاهی اوقات ما در سازه سمت راست به جای x عدد ۱ را قرار

↓

شکل ۷-ج

می دهیم و کل این خرپا را در x ضرب می کنیم

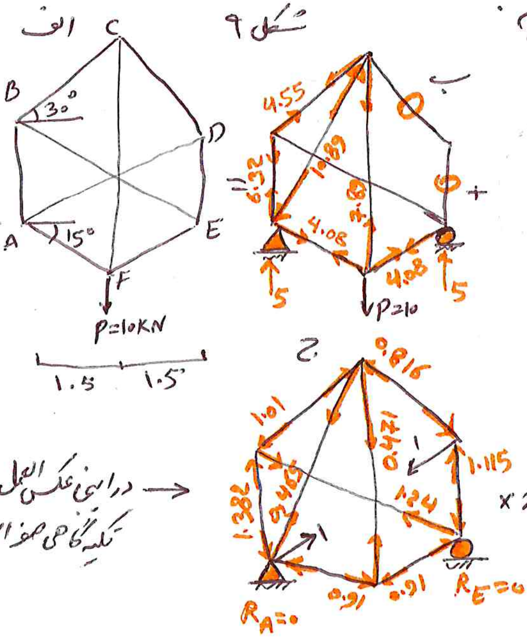
شکل ۸



چون اگر نیرو دو برابر شود همه عکس العمل ها و نیروهای اعضا دو برابر می شوند.

پس کاری که انجام باید دهیم این است که سازه های شکل ۷-ب و ۷-ج را تحلیل کنیم. تحلیل این سازه ها در قبل توضیح داده شده است و کار آسانی است. بنابراین تنها به گذاشتن اندازه های نیروها بسنده می کنیم.

شکل ۹



دراینجا عکس العمل های تکیه گاهی صفر است

حال کلید این است که نیروی عضو CA باید صفر شود پس

شکل ۹-ج + شکل ۹-ب = خرپای شکل ۹-الف : برای CA

$$0 = \underset{\text{فشاری}}{-10.89} + \underset{\text{کششی}}{0.465x}$$

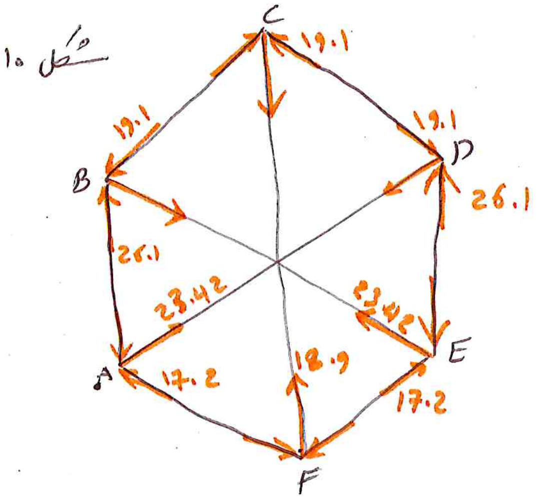
$$\Rightarrow x = 23.42$$

پس F_{AD} در مسئله واقعی که همان x بود بدست آمد که کششی هم هست. پس برای سازه ی اصلی می توان تمام نیروها را با جمع نظیر به نظیر بدست آورد

عضو BC : $4.55 - 1.01 \times 23.42 = -19.1$

بقیه نیروها نیز به همین ترتیب محاسبه می شود. پس سازه و نیروهایش به صورت زیر در می آید:

شکل ۱۰



این جواب مسئله است که طریق عضو جایگزین محاسبه شده است.

(*) توجه: همانطور که دیدیم عضو AC که به صورت اضافی و مجازی برای خرپا فرض در نظر گرفتیم نیروی داخلی اش در مجموع برابر صفر می شد.

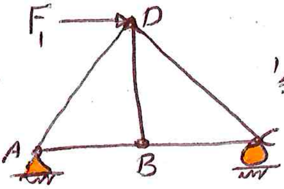
$$-10.89 + 0.465x = 0$$

نیروی داخلی عضو فرضی AC

سوالی ممکن است پیش بیاید به این نحو که آیا می‌توان این عضو صفر را به خرپای اصلی اضافه کرد. در جواب باید گفت که نخیر، چرا که افزودن یک قید حساب می‌شود و مسئله را نامعین می‌کند. ⊛

نکته: گاهی ممکن است تحت شرایط بارگذاری خاصی، نیروی داخلی یک عضو صفر شود. این دلیل نمی‌شود که بتوان آن عضو را حذف کرد. این صفر شدن تنها در این بارگذاری خاص است. با برداشتن این عضو، سازه تحت بارگذاری دیگر ناپایدار خواهد شد. بودن این عضو صفر برای پایدار ماندن خرپا لازم است. فرض کنید خرپای زیر را داریم. تحت بارگذاری خاص F_1 نیروی داخلی عضو DB صفر است.

شکل ۱۱

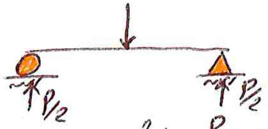


اما نمی‌توان عضو DB را حذف کرد چرا که به محض حذف کردن سه مفصل A، B، C که در یک راستا هستند مسئله را ناپایدار خواهند کرد، چون همیشه نیروی F_1 به این خرپا وارد نمی‌شود. مادامی که خرپا تحت نیروی F_1 باشد حذف کردن DB تغییری در مقدار نیروهای داخلی دیگر عضوها نخواهد داشت. چون مشارکت عضو DB در نیروها صفر است.

در برخی خرپاهای بغرنج چیدمان اعضا به گونه‌ای است که نمی‌توان جوابی برای آنها یافت. برای هر مسئله باید جواب یکه داشته باشیم. اگر مسئله معین باشد **اما** تعداد زیادی جواب برایش یافت شود، سازه اصطلاحاً در دسته‌ی سازه‌های ناپایدار قرار می‌گیرد چرا که جوابی نمی‌توان برای آن یافت. چیدمان به طوری است که در زمان نوشتن معادلات ($2j$ معادله و $2j$ مجهول به صورت ماتریسی که نوشته می‌شود) ماتریس ضرایب به گونه‌ای در می‌آید که جواب برای مسئله یافته نمی‌شود (این موارد برای سازه معین گفته شد چون سازه نامعین بلااستثنا جواب‌های متعدد دارد).

فرض کنید تیر زیر را دارید که P در وسط آن است

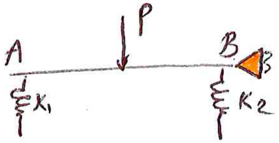
شکل ۱۲



آنگاه عکس‌العمل هر تکیه‌گاه $\frac{P}{2}$ می‌شود.

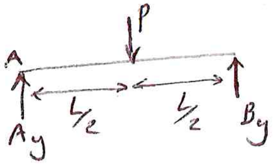
اگر تکیه‌گاه‌ها ارتجاعی باشند. (در مولفه‌ی قائم تکیه‌گاه ارتجاعی شده‌اند)

شکل ۱۳



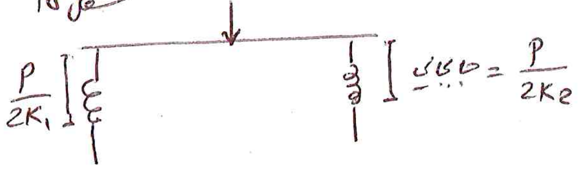
عکس‌العمل دو تکیه‌گاه ارتجاعی باز هم $P/2$ است. در سازه‌های معین عکس‌العمل هیچ ربطی به ضریب سختی K_1 و K_2 ندارد، چون دیاگرام آزاد این تیر به صورت زیر است

شکل ۱۴



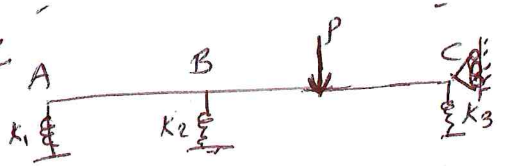
اگر حول A لنگرگیری کنیم و محل P هم در وسط باشد، B_y چاره‌ای ندارد جز اینکه $\frac{P}{2}$ باشد در غیر اینصورت $\sum M_A=0$ برقرار نخواهد شد. بنابراین نیروهایی که در سیستم‌های معین به وجود می‌آید تابع سختی اعضا نیست. یعنی حتی K_1، چند برابر K_2 هم باشد باز مسئله فرقی نمی‌کند همان نیروی $\frac{P}{2}$ روی هر تکیه‌گاه می‌آید. تنها قضیه‌ای که فرق می‌کند این است که فنر با K کوچکتر بیشتر جمع می‌شود تا به حالت تعادل استاتیکی برسد.

شکل ۱۵



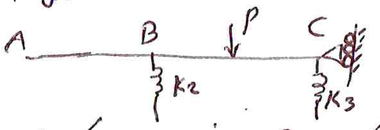
اما اگر نامعین بود سازه‌ی ما، مثلاً سازه‌ی زیر را در نظر بگیرید

شکل ۱۶



حال می‌خواهیم بدانیم نیروهایی که در K_1 و K_2 و K_3 به وجود می‌آید چقدر است. در اینجا چهار مجهول داریم و سه معادله. یکی از معادله‌ها $\sum f_x=0$ است که عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه C برابر صفر می‌شود. سپس دو معادله و سه مجهول باقی می‌ماند که بی‌نهایت جواب دارد. در این حالات (که آخر ترم بحث خواهیم کرد در تحلیل سیستم‌های نامعین) باید معادله‌ای مربوط به سازگاری تغییرشکل‌ها را بیابیم. در این حالت است که K_1 و K_2 و K_3 اهمیت می‌یابند و سختی‌های نسبی‌شان مهم می‌شود. اگر $K_1 \ll K_2$ و K_3 در اینصورت سازه بالا به سازه‌ی روبرو تبدیل (شکل ۱۷) می‌شود یعنی بود و نبود تکیه‌گاه A مهم نیست. چون یک قید زیاد داریم و دو تکیه‌گاه دیگر به هر حال بار را تحمل خواهند کرد (شکل حل جواب توسط سه

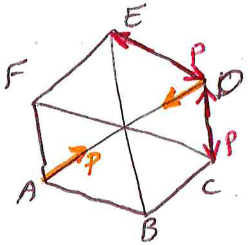
شکل ۱۷



بنابراین این که می‌گوییم جواب باید یکتا باشد تنها مربوط به سازه‌های معین است. در حالت نامعین جنس اعضا و فنرها و ... هم می‌شود اما در سازه‌های معین چنین نیست و بسته به جنس‌های مختلف جواب‌های مختلف به دست نمی‌آید.

به ازای هر جنس یک جواب داریم

حال به سراغ سازه‌ی critical form می‌رویم. اگر بتوانیم نشان دهیم که یک مسأله معین بیش از یک جواب دارد آنگاه آن سازه را در دسته‌ی ناپایدارها می‌گذاریم. فرض کنید یک سازه ۶ ضلعی منتظم داریم. تکیه‌گاه‌ها و بارهای خارجی را از روی آن برمی‌داریم.



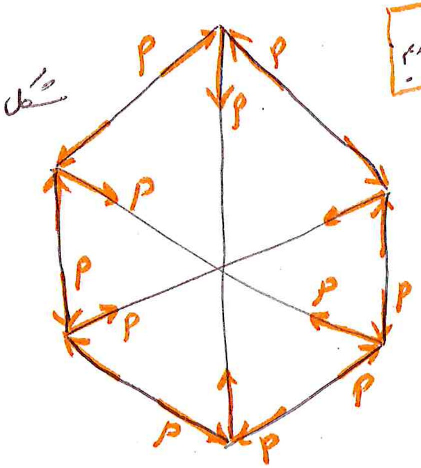
شکل ۱۸

یک راه تست کردن اینکه سازه در دسته‌ی ناپایدارها می‌گنجد یا نه، به عبارت دیگر دارای فرم بحرانی است یا نه، روش zero load test است.

↓

آزمون بار صفر

اگر سازه هیچ نیرویی بر آن وارد نشود باید تمام نیروهای داخلی‌اش صفر باشند. بنابراین سازه را مورد آزمون قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم در عضو AD یک نیروی کششی P داشته باشیم. بعد مسأله را با روش گره به گره حل می‌کنیم. با توجه به هندسه که زوایا 120° است در این صورت دو عضو ED و DC نیز نیروهای داخلی P دارند. با ادامه‌ی کار تمام نیروهای داخلی به صورت آورده شده در شکل مقابل (شکل ۱۹) در می‌آیند. این شکل آرایش و چیدمان اعضا و گره‌ها به گونه‌ای است که اگر نیروی



شکل ۱۹

غیرصفر P به آن وارد شود در آن صورت همچنان تعادل در آن برقرار است. یعنی بدون هیچ‌گونه بار خارجی، با P غیرصفر سازه همچنان متعادل است. این بدین معناست که اگر به ازای یک بار خارجی نیروهای داخلی را محاسبه کنیم، با جمع کردن این نیروها با یک عدد ثابت جواب دیگری به دست می‌آید: پس بی‌نهایت جواب به دست می‌آید. اصطلاحاً می‌گوییم سازه دارای critical form است (شکل بحرانی) و در دسته‌ی سازه‌های ناپایدار قرار داده می‌شود. سازه‌ای است که قابل اعتماد نیست و هیچ‌گاه نمی‌توان گفت چه نیرویی در داخل آن وجود دارد.

اگر در سازه‌ای نیز بحث آزمون بار صفر جواب ندهد یعنی اگر در گرهی (با وارد کردن P و محاسبه‌ی گره به گره سازه) تعادل برقرار نشود نشان می‌دهد که سازه پایدار است و مشکلی ندارد.

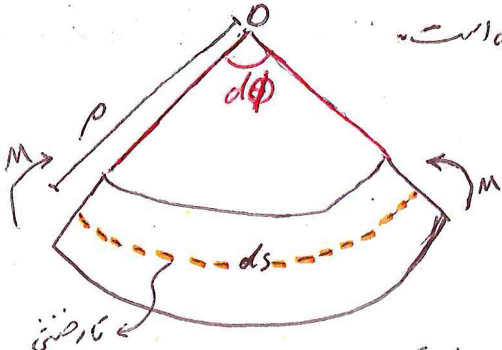
در اینجا مبحث سازه‌های معین به اتمام می‌رسد و از این به بعد راجع به تغییر شکل‌ها صحبت خواهیم کرد که محاسبه‌ی تغییر شکل‌ها از مباحث اصلی درس تئوری سازه‌های یک است. تغییر شکل‌ها را الاستیک فرض می‌کنیم که قانون هوک برایشان صادق است. یعنی سازه پس از برداشته شدن بار به حالت خود باز می‌گردد و اگر بار دو برابر شود تغییر شکل هم دو برابر می‌شود. بنابراین در محدوده‌ی الاستیک، تغییر شکل‌های تیرها، قاب‌ها و خرپاها را به روش‌های مختلف موجود بررسی خواهیم کرد.

تغییر شکل سازه‌ها:

1 **تغییر شکل ارتجاعی تیرها**: اولین بحث را به تیرها اختصاص می‌دهیم که در آن‌ها خمش حاکم است. ما وارد محدوده‌ی غیرارتجاعی نمی‌شویم. البته در تیر تحت بارگذاری، برش هم وجود دارد (اگرچه نیروی محوری چندان رایج نیست). پس تغییر شکل برشی هم خواهیم داشت اما تغییر شکل برشی معمولاً به مراتب کمتر از تغییر شکل خمشی هستند. به همین دلیل جز در موارد خاص تغییر شکل برشی را کنار می‌گذاریم.

تیری داریم تحت بارگذاری خاص ⇐ تغییر شکل خواهیم داشت. ⇐ می‌توان یک جزء دیفرانسیلی از آن را جدا کرده و بررسی کرد. این ع انحنایی خواهد داشت که به بارگذاری ربط خواهد داشت. مخصوصاً در اینجا با لنگر خمشی رابطه خواهد داشت. می‌خواهیم رابطه‌ای لنگر و میزان انحنا را داشته باشیم.

این قطعه از تیر در شکل زیر آمده است. خط چین تار خنثی است و طول عضو ds است.



شکل ۲۰

لنگر این قطعه معادل مقدار لنگر عمیق از تیر است که این قطعه از آن جدا شده است.

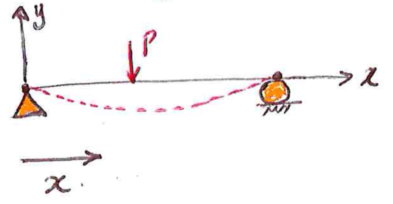
به خاطر خمش، انحنایی پدید آمده است که زاویه‌ی dφ دارد

$$\text{از هندسه} \longrightarrow \text{انحنا} = \frac{d\varphi}{ds} = K = \frac{1}{\underset{\text{شعاع انحنا}}{\rho}}$$

از لحاظ ریاضی هم داریم

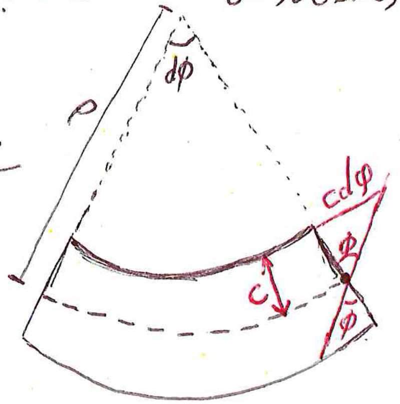
$$\circledast \quad K = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

میخواهیم رابطه بین لنگر M جز دیفرانسیلی فوق و شعاع انحنای آن را پیدا کنیم. چون M در هر نقطه تغییر می‌کند یعنی M تابعی از x است. پس $M = M(x)$ که با طول تغییر می‌شود و متناظر هر M یک انحنا داریم. پس انحنا هم با x تغییر می‌کند. در معادله‌ی K در رابطه‌ی ⊛ y ها همان جابجایی های تیر هستند



اگر بین K و M رابطه‌ای پیدا کنیم می‌توانیم آنرا در رابطه‌ی ⊛ قرار داده و یک معادله‌ی دیفرانسیل برحسب مشتقات y بدست می‌آید که از حل آن y بدست می‌آید. این معادله‌ی دیفرانسیل را نیز به روش های مختلف می‌توان حل کرد که باعث ایجاد روش های مختلف می‌شود.

پس اکنون میخواهیم رابطه‌ی M و K را بیابیم. در شکل زیر از محل تار خنثی در سمت راست قطعه خطی به موازات شعاع انحنای ρ سمت چپ رسم می‌کنیم: اگر فاصله‌ی تار خنثی تا لبه‌ی قطعه، c باشد آنگاه



شکل ۲۱

cdφ برابر تغییر شکل لبه‌ی بالایی نسبت به تار خنثی است. یعنی این cdφ همان میزان تغییر طول تار فوقانی است. پس

$$\overset{\text{کرنش}}{\varepsilon} = \frac{c\,d\varphi}{ds} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{ds} = \text{انحنا} = \frac{\varepsilon}{c}}$$

و از طرف دیگر چون رفتار الاستیک است پس

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc}{EI}} \longleftarrow \text{از مقاومت مصالح فصل خمش}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\phi}{ds} = \frac{M}{EI}} \qquad \text{رابطه‌ی ①}$$

این رابطه انحنا را برحسب M و خصوصیات مصالح و نوع مقطع (از طریق I) بیان می‌کند.

از جمع دو رابطه‌ی ① و ⊛ داریم

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y/dx^2}{\left(1+(dy/dx)^2\right)^{3/2}} \quad ②$$

این رابطه دیفرانسیل بایستی حل شود تا تغییر شکل ها بدست آید.

اگر فرض کنیم تغییر شکل ها بسیار کوچک هستند در آن صورت $\frac{dy}{dx} \to 0$ آنگاه توان دوم $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ بسیار کوچکتر از یک می‌شود پس در نتیجه می‌توان به جای عبارت $1+\left(\cancelto{0}{\frac{dy}{dx}}\right)^2$ مقدار یک را قرار داد.

پس رابطه‌ی ② به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}} \quad ③$$

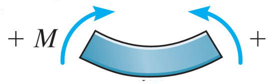
فرض $\frac{dy}{dx} \ll 1$ فرض نامعقولی نیست و در اکثر سازه‌ها تغییر شکل‌ها بسیار کوچک هستند. حال اگر M را به صورت تابعی از x داشته باشیم با دوبار انتگرال‌گیری $\overset{\text{از ③}}{}$ می‌توان تغییر شکل ها را بدست آورد

Double integration method

نکته: ما برای $\frac{d\varphi}{ds}$ از دو نقطه نظر رابطه پیدا کردیم. یکی از دیدگاه وابستگی به ممان در رابطه‌ی ①. یک دیدگاه دیگر در رابطه ⊛ که دیدگاه ریاضی بود. رابطه‌ی ⊛ به داشتن مشتقات ما وابسته است. یعنی مثبت یا منفی بودن ممان به علامت مشتقات وابسته

می‌شود. مثبت بودن یا منفی بودن انحنا هم به علامت ممان وابسته است. اگر ممان مثبت طبق قرارداد زیر داشته باشیم (از دیدگاه رابطه‌ی ①)

شکل ۲۲



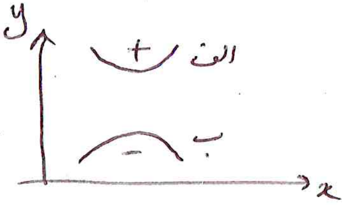
در این صورت انحنای مثبت به صورت  است.

و انحنای منفی به صورت زیر

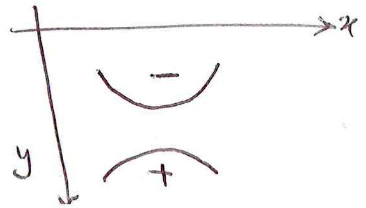
شکل ۲۳

در دیدگاه ریاضی، ممان مثبت وابسته به سیستم مختصات است در سیستم مختصات زیر انحنای الف مثبت در نظر گرفته می‌شود چرا که شیب از سمت چپ به سمت راست در حال افزایش است. حالت ب نیز انحنای منفی است. حال اگر سیستم مختصات به شکل زیر باشد تعریف انحنا فرق می‌کند

شکل ۲۴



شکل ۲۵



پس در حل معادله‌ی دیفرانسیل باید دستگاه مختصات مشخص باشد. اگر سیستم مختصات ما شکل ۲۴ باشد هر ممان مثبت (شکل ۲۲) یک انحنای مثبت هم ایجاد می‌کند. پس معادله‌ای که حل می‌کنیم به شکل زیر است

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad ④$$

اما در دستگاه مختصات شکل ۲۵، ممان مثبت یک انحنای منفی تولید می‌کند پس

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad ⑤$$

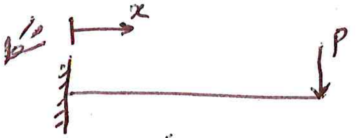
ما در این کلاس از این قرارداد دوم استفاده خواهیم کرد چون عمدتاً تغییرشکل‌های ما به صورت ثقلی و به سمت پایین است با این تعریف تغییرشکل‌های ما مثبت خواهد شد.

جلسه یازدهم:

رابطه‌ی گشتاور با انحنا را بدست آوردیم که به صورت معادله‌ی دیفرانسیل ⑤ در بالا ذکر شد. در بدست آوردن این معادله چند فرض حاکم بود: ① فقط تغییرشکل‌های ناشی از گشتاور را در نظر می‌گیریم یعنی خمش حاکم است، ② تغییرشکل‌ها بسیار کوچک اند پس از توان‌های دوم $(\frac{dy}{dx})^2$ صرف‌نظر کردیم ③ صفحات صفحه باقی می‌مانند و ④ قانون هوک برقرار است یعنی مواد در ناحیه ارتجاعی باقی می‌مانند این فرضیات در تمام شکل‌های ما برقرارند. در مثال‌ها باید $M(x)$ را در طول سازه بدست بیاوریم و پس معادله‌ی ⑤ را با دو بار انتگرال‌گیری حل کنیم. از ساده‌ترین حالت که یک تیر کنسول است شروع می‌کنیم:

مثال ①: تیر با مقطع ثابت و خصوصیات I و E و طول L

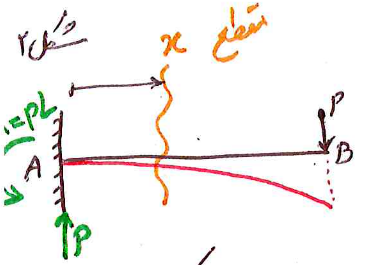
شکل



توجه: E و I می‌تواند تابعی از x باشد اما در اینجا ثابت است.

می‌خواهیم معادله‌ی تغییرشکل تیر و شیب آن را برحسب x پیدا کنیم. به صورت کیفی تغییرشکل به قرار زیر است

شکل ۲



تقعر تیر منفی است و یک شرط مرزی وجود دارد: اینکه شیب در نقطه‌ی A باید صفر باشد. می‌خواهیم در هر نقطه میزان تغییرشکل تیر و شیب آن را بدست آوریم. با همان روش‌هایی که قبلاً ذکر شد می‌توان در فاصله‌ی x نقطه‌ی A یک مقطع زد و حول آن نقطه $\sum M_x=0$ را نوشت به این ترتیب $M(x)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$M(x) = -pL + px$$

در $x = L$ گشتاور برابر صفر می‌شود. این $M(x)$ را در معادله دیفرانسیل جاگذاری می‌کنیم.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{-pL + px}{EI}$$

حال از این معادله انتگرال‌گیری می‌کنیم

به این روش انتگرال‌گیری دوگانه یا مضاعف گفته می‌شود

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = \underset{\text{در هر نقطه از تیر}}{\text{تغییرات شیب}} = \frac{-1}{EI}\int(-pL+px)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left(pLx - p\frac{x^2}{2}\right) + C_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{-p}{2}x^2 + pLx\right) + C_1$$

ضریب ثابت انتگرال‌گیری C_1 را می‌توان از شرایط مرزی محاسبه کرد.

در اینجا دو شرط مرزی داریم:

$$\text{if } x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \,,\; y=0$$

هم شیب در نقطه‌ی A صفر است و هم جابجایی تیر.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{p}{2}(0)^2 + pL(0)\right) + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

پس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{-p}{2}x^2 + pLx\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(pL\frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6}\right) + C_2$$

از شرط مرزی دوم یعنی $(\text{if } x=0 \Rightarrow y=0)$ برای بدست آوردن C_2 استفاده می‌کنیم

$$y|_{x=0} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

پس رابطه‌ی شیب و جابجایی به راحتی محاسبه شد.

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(PLx - \frac{Px^2}{2}\right)$$ (چرخش در جهت ساعتگرد مثبت است)

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{PLx^2}{2} - \frac{Px^3}{6}\right)$$ (جابجایی به سمت پایین مثبت است)

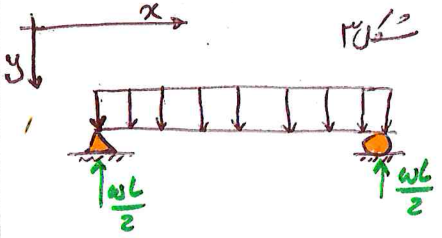
$$= \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$$

حال در هر جایی می‌توان جابجایی را به دست آورد مثلاً در نقطه‌ی L داریم:

$$\boxed{y(L) = \frac{PL^3}{3EI}}$$

$\theta(x)$ زاویه بین حالت اولیه‌ی تیر و مماس بر تیر تغییر شکل یافته است. اگر این زاویه خیلی زیاد باشد سازه نامناسب می‌شود.

مثال ②: تیری دو سر مفصل تحت بار گسترده یکنواخت به طول L و خاصیت مقطعی EI داریم. شکل ۳



عکس العمل‌های تکیه‌گاهی طبیعتاً $\frac{wL}{2}$ خواهند شد. معادله‌ی ممان را اگر بنویسیم خواهیم داشت:

$$M(x) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{EI}\int\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)dx$$

$$= +\frac{1}{EI}\left(\frac{wx^3}{6} - \frac{wLx^2}{4}\right) + C_1$$

در اینجا دو شرط مرزی داریم که به صورت زیر هستند:

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$x=L \Rightarrow y=0$$

چون در شرط مرزی‌ها اطلاعاتی راجع به شیب نداریم پس نمی‌توانیم از معادله‌ی $\theta(x)$، ثابت C_1 را به دست آوریم. پس یک بار دیگر انتگرال می‌گیریم:

$$y(x) = \int \theta(x)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12}\right) +$$

$$C_1 x + C_2$$

حال از شرایط مرزی داریم

$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \boxed{C_2=0}$$

$$x=L \Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{1}{EI}\left(\frac{wL^4}{24} - \frac{wL^4}{12}\right) + C_1L$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{wL^3}{24EI}}$$

پس خواهیم داشت،

$$\theta(x) = \frac{wx^3}{6EI} - \frac{wLx^2}{4EI}$$

$$y(x) = \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wLx^3}{12EI} + \frac{wL^3}{24EI}$$

اگر به دنبال ماکزیمم مقدار جابجایی یا زاویه باشیم می‌توانیم از معادلات مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم: چون $\theta(x)$ مشتق $y(x)$ است می‌توان گفت جابجایی در جایی ماکزیمم

است که شیب صفر باشد. در اینجا θ در $\frac{L}{2}$ صفر است.

چون مسئله متقارن است می‌توان انتظار داشت که ماکزیمم در وسط رخ دهد. هرگاه در مسئله‌ای تقارن داشته باشیم یعنی هم سازه متقارن است هم بارگذاری آنگاه نقطه‌ی روی محور تقارن حتماً شیب اش صفر است (چرا؟ بیاندیشید)

بنابراین در این شکل، ماکزیمم جابجایی در $x = \frac{L}{2}$ رخ می‌دهد

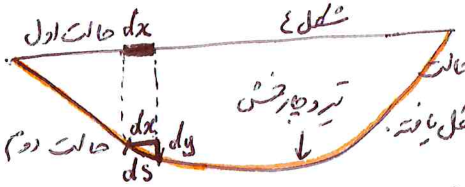
$$\boxed{y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5wL^4}{384EI}}$$

ما هدفمان بدست آوردن جابجایی و مهم‌تر از همه ماکزیمم جابجایی است.

بیشترین تغییر شیب هم در روی تکیه‌گاه‌ها رخ می‌دهد و مقدارش معادل $\frac{wL^3}{24EI}$ است.

$$\boxed{\theta(L) = \frac{wL^3}{24EI}}$$

⊛ نکته: ما در این مسائل فرض می‌کنیم که تیر تحت خمش تغییر طول بسیار بسیار اندکی دارد. شکل زیر را درنظر بگیرید.



قطعه‌ی dx از حالت به قطعه‌ی ds تغییرشکل یافته.

قطعه‌ی تغییرشکل یافته به طول ds را درنظر بگیرید. این ds برابر است با

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\Longrightarrow ds^2 = dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

چون فرض کردیم

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow ds^2 = dx^2 \Longrightarrow \boxed{ds = dx}$$

یعنی فرض می‌کنیم تیر دچار تغییر طول نمی‌شود البته به شرطی که تغییر شکل‌ها بسیار کوچک است.

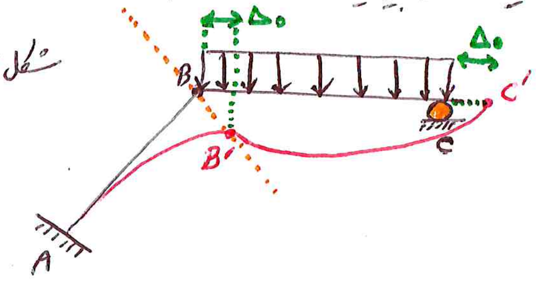
به همین دلیل است که تیرها به شکل زیر درنمی‌آید یعنی فاصله x به صورت gap درنمی‌آید که از روی تکیه‌گاه بیافتد.

شکل ۵

به همین دلیل در سازه‌ی شکل ۱۲ از صفحه‌ی ۱۷ نقطه‌ی B دچار تغییر مکان یا تغییرشکل نمی‌شود.

سازه‌ی زیر را درنظر بگیرید. قطعه‌ی AB باید عمود بر راستای خود

شکل ۶



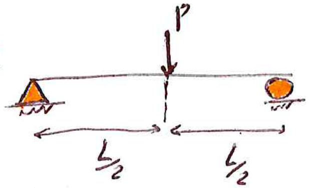
در نقطه‌ی BC جابه‌جا شود یعنی روی خط‌چین نشان داده شده.

تیری که تغییرشکل داده بایستی یک سری شرط‌ها داشته باشد و آن اینکه: اگر تیر تغییرشکل یافته را به صورت عمود بر روی امتداد تیر اصلی تصویر کنیم، باید همان طول اولیه را بدست دهد تا اتفاق شکل ۵ برایش رخ ندهد. در شکل ۵ اگر تیر تغییرشکل یافته بر روی تیر اصلی تصویر شود، طول اش به اندازه‌ی x از تیر اصلی کوتاه‌تر است.

در شکل ۶، نوک تیر AB، یعنی B به اندازه‌ی Δ0 به سمت راست رفته است پس نوک C تیر BC هم باید به همان اندازه به سمت راست برود تا تیر دچار تغییر طول نشود. پس نوک تیر باید به نقطه‌ی C' برود خود تیر B'C' نیز باید به گونه‌ای باشد که تقعراش رو به بالا باشد. این تغییرشکل کیفی تیرهاست ⊛

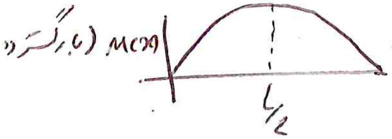
مثال بعدی این است که فقط بارگذاری روی تیر مثال قبل متمرکز باشد یعنی

شکل ۷



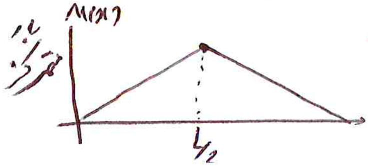
همیشه و در مثال‌های قبل بار گسترده راحت‌تر از حل کردن مسائل با بار متمرکز بوده است. اما در بحث تغییرشکل مسئله متفاوت است. چون دیاگرام ممان بار گسترده یک منحنی درجه دو است که در کل تیر برقرار است یعنی

شکل ۸



اما در بار متمرکز منحنی ممان به صورت دو بخش است

شکل ۹

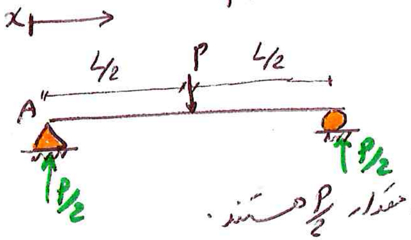


پس برای انتگرال‌گیری باید دو قسمتی عمل کنیم. این مسئله را در جلسه بعد حل خواهیم کرد.

جلسه دوازدهم :

مثال: تیری دو سر مفصل تحت اثر بار متمرکز در وسط تیر با فرض اینکه تیر دارای خاصیت ثابت EI در طول تیر باشد.

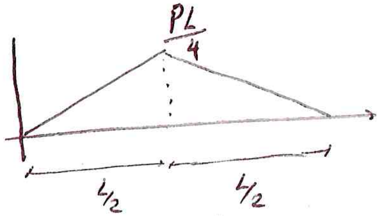
هدف: معادله‌ی تغییر شکل و تغییر شکل ماکزیمم تیر است. از آنجا که تقارن داریم می‌دانیم که در وسط تیر ماکزیمم جابجایی رخ می‌دهد.



شکل ۱

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی مشخصاً مقدار $\frac{P}{2}$ هستند.

حال باید معادله ممان را بدست بیاوریم، می‌دانیم که منحنی لنگر تیر فوق به صورت زیر است



شکل ۲

بنابراین لنگر در این مسئله یک معادله ندارد بلکه از 0 تا $\frac{L}{2}$ و از $\frac{L}{2}$ تا $\frac{L}{4}$ متفاوت است. با فرض x در جهت فرض شده در شکل ۱ می‌توان نوشت:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{P}{2}x & 0 \leqslant x < \frac{L}{2} \\ \frac{P}{2}x - p(x-\frac{1}{2}) = \frac{P}{2}(L-x) & \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

حال باید در دو بازه انتگرال‌گیری کنیم که هر بازه دو ثابت انتگرال‌گیری با خود خواهد داشت. در اینجا چون تقارن داریم مسئله اندکی ساده‌تر می‌شود چرا که می‌دانیم در نقطه‌ی $\frac{L}{2}$ شیب باید صفر باشد. اما اگر بار P در وسط قرار نمی‌داشت دیگر تقارنی در کار نبود.

در مورد این مثال می‌توان از تقارن استفاده کرد

$$0 \leqslant x < \frac{L}{2} \Rightarrow \theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{EI}\int \frac{P}{2}x\,dx$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{-P}{4EI}x^2 + C_1$$

شرایط مرزی مسئله در حالت کلی:

$$x=0 \Longrightarrow y=0$$

$$x=L \Longrightarrow y=0$$

در این مسئله خاص چون تقارن داریم می‌توان گفت

$$\theta(\frac{L}{2}) = 0$$

⊛ اگر مسئله تقارن نداشت (مثلاً P در جای دیگری وارد می‌شود) چگونه باید عمل کنیم؟ شرط مرزی این است: تغییر شکل سمت راست و تغییر شکل سمت چپ باید در نقطه‌ی زیر بار P با هم برابر باشند. پس دو معادله باید جواب‌شان در این نقطه یکسان باشد.

اگر در تیر در دو نقطه بار متمرکز وارد شود در این صورت باید ۶ عدد ثابت انتگرال‌گیری محاسبه کنیم ⊛

شکل ۳

در این مسئله

$$\theta(\frac{L}{2}) = -\frac{P}{4EI}\frac{L^2}{4} + C_1 = 0$$

$$\Longrightarrow C_1 = \frac{PL^2}{16EI}$$

$y(x)$ نیز برابر خواهد بود با

$$y(x) = \int \theta(x)dx = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{PL^2}{16EI}x + C_2$$

استفاده از شرط مرزی

$$y(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$$

پس برای سمت چپ بار P در اینجا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \theta(x) = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{P}{4EI}x^2 \\ y(x) = \frac{-P}{12EI}x^3 + \frac{PL^2}{16EI}x \end{cases} \quad 0 \leqslant x < \frac{L}{2}$$

برای نیمه دوم نیز باید این موارد را تکرار کنیم

$$\frac{L}{2} < x \leqslant L: \quad \theta(x) = \frac{1}{EI}\int \frac{P}{2}(x-L)dx$$

$$= \frac{P}{4EI}x^2 - \frac{PL}{2EI} + C_1$$

شرط مرزی

$$\theta(\frac{L}{2}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{P}{4EI}(\frac{L}{2})^2 - \frac{PL}{2EI}(\frac{L}{2}) + C_1 = 0$$

$$\Longrightarrow C_1 = \frac{3PL^2}{16EI}$$

حال می‌توان $y(x)$ را از رابطه θ محاسبه کرد

ثابت

$$y(x)=\frac{P}{12EI}x^3-\frac{PL}{4EI}x^2+\frac{3PL^2}{16EI}x+C_2$$

شرط مرزی

$$y(L)=0 \Longrightarrow \frac{PL^3}{12EI}-\frac{PL^3}{4EI}+\frac{3PL^3}{16EI}+C_2=0$$

$$\Longrightarrow C_2=-\frac{PL^3}{48EI}$$

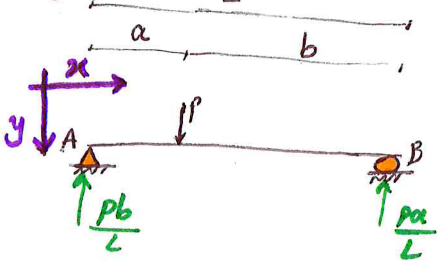
متذکر می‌شویم که $y(x)$ بدست آمده برای این قسمت باید در نقطه‌ی $\frac{L}{2}$ جواب اش همان جواب معادله‌ی اول در این نقطه باشد. یعنی در زیر بار هر دو معادله‌ی سمت راست و چپ باید جواب یکسان بدهند. چون تیر پیوسته است و جواب تیر باید پیوسته باشد.

در این مسئله‌ی خاص می‌دانیم که ماکزیمم جابه‌جایی در نقطه‌ی زیر بار رخ می‌دهد چون P در وسط تیر اعمال می‌شود. اگر بار در نقطه‌ی وسط اعمال شود آنگاه ماکزیمم جابجایی می‌شود:

$$\boxed{y_{max}=\frac{PL^3}{48EI}}$$ = حداکثر تغییر شکل تیری که در وسط اش تحت بار متمرکز P باشد.

<u>مثال</u>: تیری به طول L که در نقطه‌ی a ($a\neq\frac{L}{2}$) بارگذاری شده است.

شکل ۴



با این شرایط، عکس العمل‌ها به صورت نشان داده شده در شکل ٤ در می‌آیند.

حال اگر محور x و y را به صورت نشان داده شده در شکل ٤ بگیریم (مبدأ مختصات بر روی A است)

$$\begin{cases} M(x)=\frac{Pb}{L}x & 0\leqslant x\leqslant a \\ M(x)=\frac{Pb}{L}x-P(x-a) & a\leqslant x\leqslant L \end{cases}$$

برای اینکه بتوانیم این دو معادله را در قالب یک معادله بنویسیم از یک قرارداد استفاده می‌کنیم. این قرارداد، به براکت ماکالی یا Macally مشهور است که توابع تکینگی هم به آن اطلاق می‌شود.

تعریف این قرارداد به صورت زیر است

$$\langle x-a\rangle=\begin{cases}(x-a) & \text{if } x>a \\ 0 & \text{if } x\leqslant a\end{cases}$$

با این تعریف معادله‌ی $M(x)$ در بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$M(x)=\frac{Pb}{L}x-P\langle x-a\rangle$$

انتگرالگیری از براکت ماکالی هم به صورت انتگرال معمولی است. این براکت‌ها کمک می‌کنند تا مقدار ثابت انتگرالگیری را کاهش دهیم.

اگر در مسئله‌ای ممان متمرکز داشته باشیم آنگاه

شکل ۵

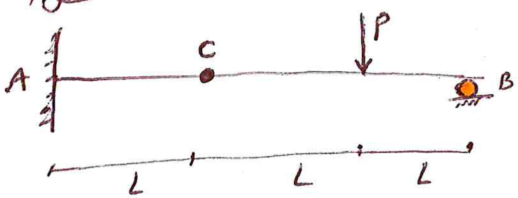
آنگاه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی برابر $\frac{M_0}{L}$ خواهند بود. در این صورت

$$M(x)=-\frac{M_0}{L}x+M_0\langle x-a\rangle^0$$

$\langle x-a\rangle^0$ به ازای $x<a$ صفر است اما اگر $x\geq a$ آنگاه برابر یک می‌شود. ($\langle x-a\rangle^0=1$ if $x\geq a$)

<u>مثال</u>: C مفصل است، EI ثابت

شکل ۶

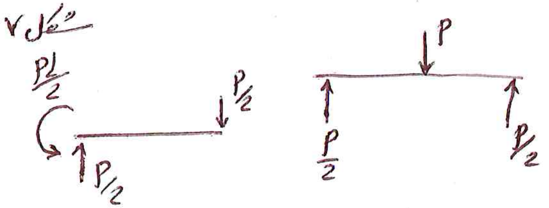


در مفصل در $\theta(x)$ عدم پیوستگی خواهیم داشت. در حالتی برای پرهیز از دوتکه نوشتن معادله‌ی ماکالی استفاده کردیم در این مسئله گرچه ممکن است معادله را یک ضرب بنویسیم اما در مورد نوشتن معادله $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M(x)}{EI}$ باید اندکی بیاندیشیم که در کجا می‌شود از این معادله استفاده کرد. ما دو بار از معادله‌ی فوق انتگرال می‌گیریم. اما اگر ناپیوستگی داشته باشیم دیگر نمی‌توانیم انتگرالگیری کنیم. چون در مفصل فوق تغییر شیب از چپ به راست داریم اندکی باید فکر کنیم.

در گام اول اجازه دهید دیاگرام ممان تیر بالا را رسم کنیم

تحلیل سازه‌ی گفته شده با جداسازی قطعات (طبق آموخته‌های قبلی)

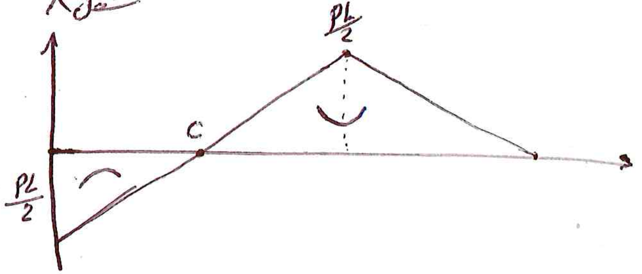
شکل ۷



پس دیاگرام ممان به صورت زیر در می‌آید. ممان در نقاط C و B صفر است و در نقطه‌ی A برابر $-\frac{PL}{2}$. در زیر بار متمرکز P هم مقدار ممان $\frac{PL}{2}$ است.

ممان در نقطه‌ی A از $-\frac{PL}{2}$ شروع می‌شود و در نقطه‌ی C از صفر می‌گذرد. تغییرات ممان نیز خطی است بنابراین

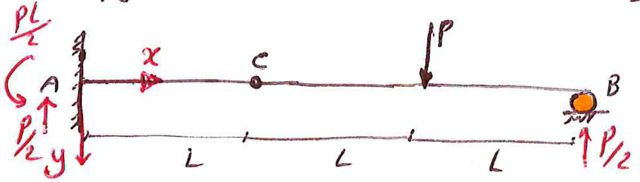
شکل ۸



توجه کنید که لزومی ندارد که معادله‌ی ممان در نقطه‌ی C شکستگی داشته باشد چرا که در مفصل تنها مقدار ممان صفر است. در هر دو طرف مفصل مقدار برش $\frac{P}{2}$ است و چون برش شیب دیاگرام ممان است بنابراین مسلم است که شیب تغییری نمی‌کند و خطی باقی می‌ماند.

حال معادله‌ی این نمودار را نیز نیاز داریم تا از آن انتگرال بگیریم فقط خود منحنی نیست که مدنظر است بلکه باید معادله را نیز بنویسیم

شکل ۹



حال اگر محور x و y را به صورت شکل بالا در نظر بگیریم می‌توان شروع به نوشتن معادله‌ی ممان نمود:

$$⊛\quad M(x) = \underbrace{-\frac{PL}{2} + \frac{P}{2}x}_{\text{از صفر تا } 2L} - P\langle x-2L\rangle$$

که در آن از براکت ماکالی استفاده کرده‌ایم.

حال توجه کنید از دیدگاه معادلات نیازی به ایستادن در نقطه‌ی C نیست اما نکته‌ای که وجود دارد این است: فرض کنید از سمت نقطه‌ی A شروع به دوبار انتگرال‌گیری از معادله‌ی ⊛ $M(x)$ می‌کنیم و دو ثابت انتگرال به دست می‌آوریم، شرط مرزی در نقطه‌ی A به صورت زیر است

$$x=0 \qquad y=0$$
$$x=0 \qquad \theta=0$$

اگر این دو شرط را در معادلات قرار دهیم و ثوابت را بدست بیاوریم معادله‌ی جابجایی و تغییر شیب به دست می‌آید. این معادله تا رسیدن به نقطه‌ی C هیچ مشکلی ندارد اما به محض عبور از نقطه‌ی C یک $\Delta\theta$ وجود دارد که ما آن را در معادله مدنظر قرار نداده‌ایم. چرا که شرط برقراری معادله‌ی $\frac{d^2y}{dx2} = \frac{M}{EI}$ این است که در تیر پیوستگی وجود داشته باشد. بنابراین حواسمان باشد که هیچ وقت از روی مفصل عبور نکنیم و در آن باید شرط مرزی جداگانه داشته باشیم. در مفصل y ها از دو طرف یکسان است اما شیب‌ها الزاماً با هم برابر نیستند. بنابراین مثال حاضر را یک بار باید در بازه‌ی صفر تا L و یکبار در بازه‌ی L تا 3L بنویسیم. پس به این ترتیب به قرار زیر عمل می‌کنیم:

$$0 \leq x < L \quad : \quad M(x) = -\frac{PL}{2} + \frac{P}{2}x$$

حال دوبار انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\theta(x) = \frac{PL}{2EI}x - \frac{P}{4EI}x^2 + C_1 \qquad ①$$

شرط مرزی در $x=0$ باید $\theta=0$ باشد بنابراین

$$\boxed{C_1 = 0}$$

انتگرال‌گیری دوم

$$y(x) = \frac{PL}{4EI}x^2 - \frac{P}{12EI}x^3 + C_2 \qquad ②$$

شرط مرزی در $x=0$ باید $y=0$ باشد بنابراین

$$\boxed{C_2 = 0}$$

پس در بازه‌ی 0 تا L مسئله حل شد. حال در مورد قطعه‌ی B بحث می‌کنیم. اینجا نیز دو شرط مرزی لازم داریم. اولی این است که در نقطه B جابجایی صفر است. شرط دوم جابجایی C است که آن را می‌توان از معادله‌ی بدست آمده برای y در سمت AC استفاده کرد. چون مفصل از هر دو طرف به یک اندازه پایین یا بالا می‌رود. پس

صحت

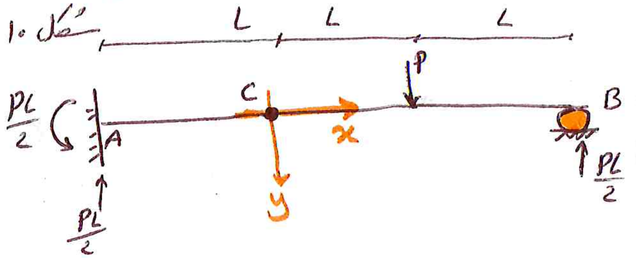
$$y_c = y(x=L) = \frac{PL^3}{6EI} \quad ✱$$

از y سمت چپ مفصل بدست آمد

چون جهت نمودار y را به سمت پایین گرفته بودیم جواب y_c هم مثبت به دست آمده است.

حال محور x و y را از نقطه‌ی C به بعد می‌گیریم

شکل ۱۰



این قضیه عوض کردن سیستم مختصات باعث ساده‌سازی می‌شود.

حال x از 0 تا 2L است.

BC:

$$M(x) = \frac{P}{2}x - P\langle x-L \rangle$$

انتگرال‌گیری

$$③ \quad \theta(x) = \frac{-P}{4EI}x^2 + \frac{P}{2EI}\langle x-L \rangle^2 + C_1$$

$$④ \quad y(x) = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{P}{6EI}\langle x-L \rangle^3 + C_1x + C_2$$

حال شرایط مرزی در BC عبارتند از

if $x = 0 \Longrightarrow y = \frac{PL^3}{6EI}$ (بدست آمده از معادله ✱ در بالای همین ستون)

if $x = 2L \Longrightarrow y = 0$

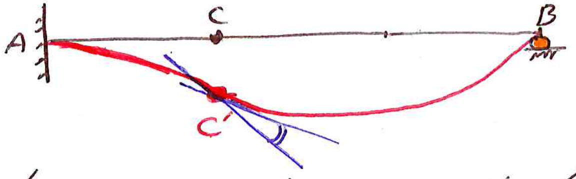
با استفاده از این شرایط مرزی ضرایب ثابت را محاسبه می‌کنیم.

$$C_1 = \frac{PL^2}{6EI} \quad , \quad C_2 = \frac{PL^3}{6EI}$$

$$\Longrightarrow y(x) = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{P}{6EI}\langle x-L \rangle^3 + \frac{PL^2}{6EI}x + \frac{PL^3}{6EI} \quad ⑤$$

تغییر شکل کیفی کل تیر

شکل ۱۱



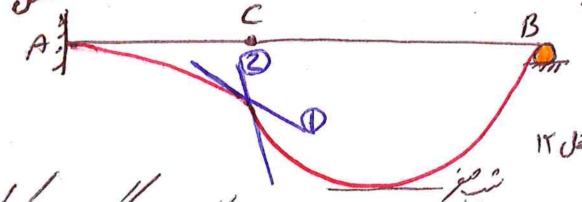
در حالت کلی مماس سمت راست C′ با مماس سمت چپ آن می‌توانند زاویه بسازند اما y هر دو یکی است.

نکات:

ممکن است به پارامترهای مختلفی علاقه‌مند باشیم. مثلاً میزان پایین آمدن مفصل که گفتیم $y_c = PL^3/6EI$ است. یا $d\theta$ در داخل مفصل را بخواهیم. یعنی تغییر شیب بین دو طرف مفصل. برای این کار با استفاده از رابطه‌ی $\theta(x)$ سمت چپ مفصل و رابطه‌ی $\theta(x)$ سمت راست آن، دو مقدار θ بدست می‌آوریم و اختلاف آن دو را محاسبه می‌کنیم. لازم به ذکر است در معادله‌ی سمت چپ یعنی رابطه‌ی ① صفحه‌ی قبل $x_c = L$ است در حالی که در معادله‌ی سمت راست یعنی معادله‌ی ③، $x_c = 0$ است. به علامت θ هم باید توجه کنیم که منفی یا مثبت است.

ممکن است EI دو قسمت تیر فرق کند در این صورت ممکن است تغییرات یک طرف تیر نسبت به طرف دیگر خیلی بیشتر یا خیلی کمتر شود.

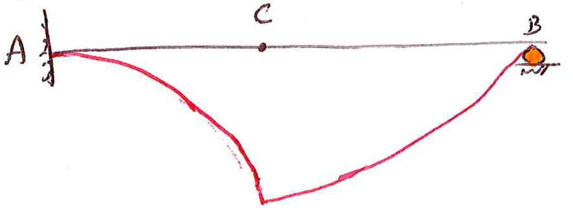
شکل ۱۲



اینکه کدام یک از مماس‌های فوق بالای دیگری قرار گیرد و اینکه کدا شیب بزرگ‌تر از دیگری بشود بسته به وضعیت تیر که ممکن است فرق کند.

اگر سختی قسمت BC خیلی بیشتر از AC باشد، یا سختی AC خیلی کوچک باشد آنگاه

شکل ۱۳



شیب سمت راست منفی ولی شیب سمت چپ می‌شو

بنابراین اگر در معادلات θ منفی شود یعنی اتفاق سمت راست تیر فوق در حال رخ دادن است.

حال فرض کنید دنبال تغییر شکل حداکثر باشیم. ماکزیمم جابجایی ق AC در نقطه‌ی C رخ می‌دهد. در قسمت BC جای ماکزیمم جایی رخ می‌دهد که شیب صفر شود (مثل شکل ۱۲). اما اگر درجا

صه 45

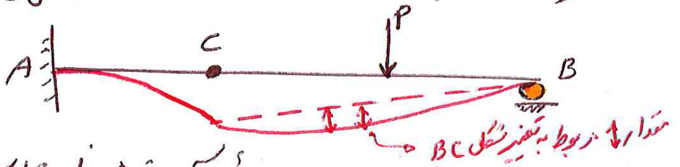
مانند شکل ۱۳ باشیم با اینکه ماکزیمم جابجایی در قطعه‌ی راست (یعنی CB) داریم اما شیب در جای ایجاد نمی‌شود. در این حالت جابجایی ماکزیمم در همان نقطه‌ی C رخ خواهد داد.

نکته دیگر: فرض کنید مثلاً جابجایی زیر بار متمرکز را خواسته باشد. از معادله‌ی y قسمتی که در آن بار متمرکز داریم استفاده می‌کنیم. در شکل قبل بار متمرکز در قسمت BC بود. اگر از معادله‌ی y قسمت BC در نقطه اعمال بار استفاده کنیم خواهیم داشت

$$y = \frac{PL^3}{4EI}$$ ⑥

شکل زیر را فرض کنید:

شکل ۱۴

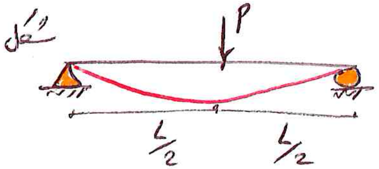


جابجایی نقطه‌ی زیر بار، قسمتی مربوط به پایین آمدن مفصل C است که آنرا با خط چین نمایش داده‌ایم. قسمت دیگر ناشی از تغییر شکل قسمت CB است که با خط پر رسم شده است. اگر قسمت CB صلب بود ($EI \to \infty$) آنگاه تغییر شکل مربوط به BC را نداشتیم و تیر CB در حالت خط چین باقی می‌ماند. طبق معادله‌ای که برای y در قسمت CB بدست آوردیم یعنی معادله‌ی ⑤ صفحه‌ی قبل، EI دو ترم اول از سمت راست معادله یعنی $-\frac{P}{12EI}x^3$ و $\frac{P}{6EI}\langle x-a\rangle^3$ مربوط به قسمت سمت راست یعنی CB است ولی EI دو ترم دیگر یعنی $\frac{PL^2}{6EI}x$ و $\frac{PL^3}{6EI}$ مربوط به ترکیبی از تیر سمت چپ و راست است.

اگر EI سمت BC به بی‌نهایت میل کند، معادله تبدیل به معادله خط چین خواهد شد. از لحاظ فیزیکی هم هرگاه قطعه‌ای از تیر EI بی‌نهایت داشته باشد، بحالت صاف باقی می‌ماند.

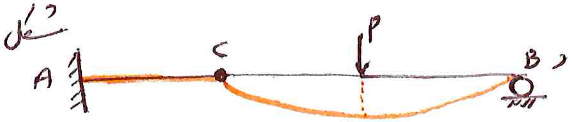
در اوایل این جلسه مقدار جابجایی ماکزیمم را برای تیر زیر بدست آوردیم

شکل ۱۵



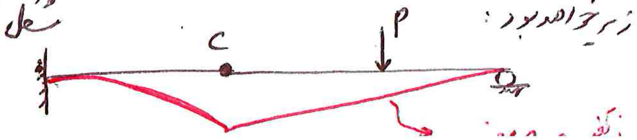
گفتیم که به دلیل تقارن ماکزیمم جابجایی در وسط تیر و زیر بار رخ می‌دهد و مقدار آن معادل $\frac{PL^3}{48EI}$ است. حال اگر در شکل ۱۴، EI سمت AC بی‌نهایت باشد تغییر شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود

شکل ۱۶



یعنی تغییر شکل قطعه‌ی CB در اینجا درست مانند تغییر شکل تیر شکل ۱۵ خواهد شد. توجه کنیم که قطعه‌ی AC هیچ تغییر شکلی نخواهد کرد. حال اگر قسمت CB دارای EI بی‌نهایت باشد آنگاه تغییر به قرار زیر خواهد بود:

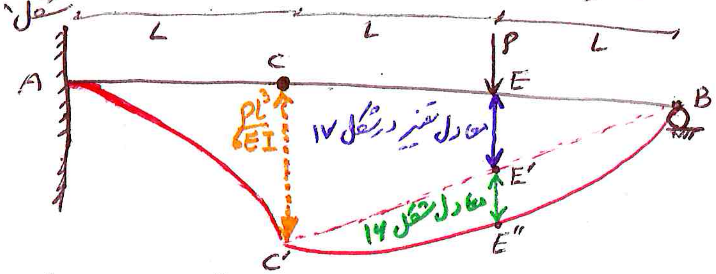
شکل ۱۷



تغییر شکل کلی تیر یعنی همان شکل نشان داده شده در شکل ۱۴ (با خط پر) در واقع برآیند دو شکل ۱۶ و ۱۷ است. تغییر شکل خط چین در شکل ۱۴ همان مقدار تغییر در شکل ۱۷ است و تغییر شکل نشان داده شده با علامت ↕↕ همان تغییر مربوط به شکل ۱۶ است. یعنی تغییر کلی برهم نهی دو تغییر شکل ۱۶ و ۱۷ است.

در شکل زیر به صورت اغراق شده این موضوع نشان داده شده است:

شکل



در شکل بالا جابجایی نقطه‌ی C یعنی CC' همانطور که قبلاً گفته شد برابر $\frac{PL^3}{6EI}$ است. بنابراین طبق تشابه مثلث‌ها جابجایی $EE' = \frac{PL^3}{12EI}$. برای اینکه جابجایی کل EE" را به دست بیاوریم باید E'E" را هم محاسبه کنیم. این مقدار هم همانطور که در سوال قبلی گفته شد برابر با

$$E'E'' = \frac{P(2L)^3}{48EI} = \frac{PL^3}{6EI}$$

است.

⊛ 2L: به این دلیل 2L گذاشتیم که در شکل ۱۵ کل تیر طول اش L بود و جابجایی برابر $\frac{PL}{48EI}$ بود. اما در اینجا طول تیر 2L (همان فاصله‌ی CB) شده است. ⊛

پس جابجایی کل برابر است با

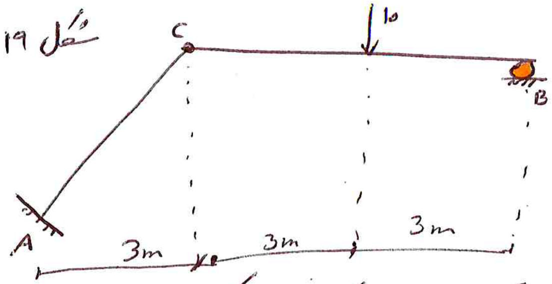
$$EE' = \frac{PL^3}{12EI} + \frac{PL^3}{6EI} = \frac{PL^3}{4EI}$$

این مقدار معادل همانی است که در رابطه‌ی ⑥ در ستون اول صفحه‌ی ۴۰ بدست آوردیم .

هدف از گفتن این نکته این بود که متوجه باشیم تغییر شکل کلی نتیجه سرجمع کلی این تغییرات است .

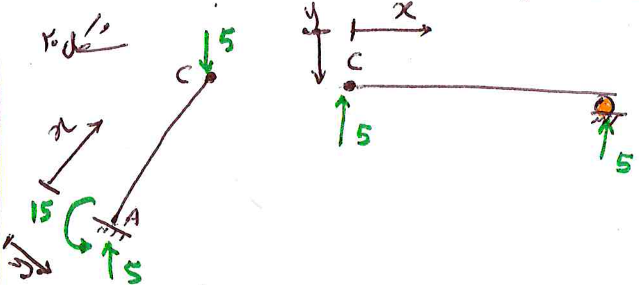
مثال: (EI ثابت) می‌خواهیم جابجایی نقطه‌ی c را بدانیم.

شکل ۱۹



گام اول: تحلیل ← بدست آوردن عکس‌العمل‌ها

شکل ۲۰



معادله ممان: معمولاً x را در امتداد عضو در نظر می‌گیریم. برای قطعه‌ای AC و CB در امتداد خودشان x در نظر می‌گیریم که در شکل ۲۰ نمایش داده شده است .

به مانند مثال :

که قبلاً از این مثال حل کردیم ، قطعه‌ی AC پایدار است که BC روی آن سوار شده. بنابراین قطعه‌ی BC از جابجایی AC تبعیت می‌کند. تغییر EI قطعه‌ی AC روی سرنوشت قطعه‌ی BC تأثیر می‌گذارد، چون BC پایداری‌اش را مدیون AC است. اما تغییر EI در قطعه‌ی BC مطلقاً تأثیری در تغییر شکل AC نمی‌گذارد. چون AC پایدار است و سرنوشت‌اش را خودش معین می‌کند.

نکته این است در تحلیل سازه‌ها و بدست آوردن تغییر شکل‌ها در سازه‌هایی از این دست که یک قطعه مانند AC پایدار است و قطعه‌ی دیگر مانند BC وابسته به آن است ، تحلیل را از قطعه‌ی پایدار شروع می‌کنیم چون تغییر شکل انتهای AC تغییر شکل قسمت BC را تحت تأثیر قرار خواهد داد. (تغییر EI در BC فقط روی تغییر شکل BC اثر می‌گذارد) . اول قسمت AC را حل می‌کند و از آن به عنوان مقدار مرزی قسمت BC استفاده می‌کنیم.

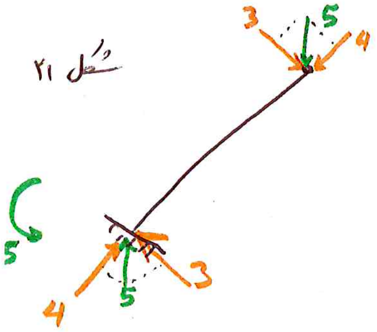
در این مثال جدید (شکل ۱۹) باید از قطعه AC شروع کنیم. تغییر شکل AC سرنوشت c را تعیین می‌کند. اینکه c به کدام سمت حرکت کند خود به خود سرنوشت قطعه‌ی CB را تعیین خواهد کرد .

پس حل مسئله را از A شروع کرده و جابجایی c را با شرط مرزی $y_A=0$ و $x_A=0$ بدست خواهیم آورد. پس به قسمت CB می‌رویم در این قسمت دو شرط مرزی داریم : ① جابجایی قائم نقطه‌ی B صفر است

② جابجایی نقطه‌ی c از طرف AC باید با جابجایی آن از سمت CB یکی باشد .

با سیستم مختصات ای انتخاب شده درباره‌ی x در شکل ۲۰ می‌شود نوشت توجه کنیم که برای اینکه از محور x نمایش داده شده استفاده کنیم باید عکس‌العمل قائم نقطه‌ی A را بر دو راستای عمود بر تیر و در راستای تیر تجزیه کنیم

شکل ۲۱



قطعه‌ی AC : $M(x) = -15 + 3x$

جایگذاری در از معادله $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{15}{EI}x - \frac{3}{EI}\frac{x^2}{2} + C_1$$

شرط مرزی $\theta(0)=0$ بنابراین

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$y(x) = \int \theta(x)dx = \frac{15}{2EI}x^2 - \frac{3}{6EI}x^3 + C_2$$

شرط مرزی $y(0)=0$ بنابراین

$$\boxed{C_2 = 0}$$

پس در قطعه‌ی AC :

$$\theta(x) = \frac{15}{EI}x - \frac{3}{2EI}x^2 \quad ⑦$$

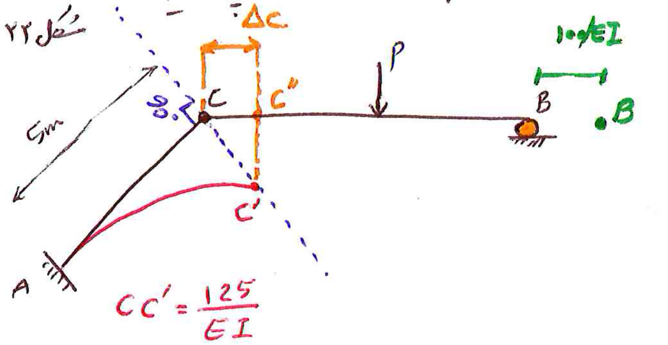
$$y(x) = \frac{15}{2EI}x^2 - \frac{1}{2EI}x^2 \quad ⑧$$

در نقطه‌ی $x=5$ خواهیم داشت

$$y(5) = \frac{125}{EI}$$

که جابجایی نقطه‌ی C است (توجه کنید که محور x را در امتداد خود تیر فرض کرده‌ایم پس $x_c = 5$). پس داریم

شکل ۲۲



حال سراغ قطعه‌ی BC می‌رویم. توجه می‌کنیم که نقطه‌ی C به اندازه‌ی ΔC به سمت راست حرکت کرده است. پس نقطه‌ی B هم به همین اندازه باید به سمت راست حرکت کند. مقدار ΔC را اگر محاسبه کنیم می‌توان بدست آورد (C'' تصویر CC' بر روی امتداد CB است)

$$CC'' = \Delta C = \frac{100}{EI}$$

همین طور $C''C' = \frac{75}{EI}$.

حال توجه می‌کنیم که قطعه‌ی CB همانند قطعه CB در شکل قبلی یعنی تیر

شکل ۲۳

است که قبلاً حل کردیم. فرق شان این است که در شکل قبلی نقطه‌ی C به اندازه $\frac{PL^3}{6EI}$ جابجا شده بود. این بار به اندازه $\frac{75}{EI}$ جابجا شده است. پس ما حالتی شبیه همان شکل را خواهیم داشت (شکل ۲۵ را ببینید)

قطعه‌ی BC: $M(x) = 5x - 10\langle x-3\rangle$

$$\Longrightarrow \theta(x) = -\frac{5}{2EI}x^2 + \frac{5}{EI}\langle x-3\rangle^2 C_1$$

$$\Longrightarrow y(x) = \frac{-5}{6EI}x^3 + \frac{5}{3EI}\langle x-3\rangle^3 + C_1x + C_2$$

شرایط مرزی:

$$x=0 \Longrightarrow y = \frac{75}{EI}$$

$$x=6 \Longrightarrow y = 0$$

با این شرایط مرزی ضرایب بدست می‌آیند

$$\boxed{C_2 = \frac{75}{EI}}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{10}{EI}}$$

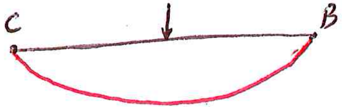
پس معادله‌ی تغییر شکل و تغییر شیب برای قطعه‌ی BC

$$\boxed{y(x) = -\frac{5}{6EI}x^3 + \frac{5}{3EI}\langle x-3\rangle^3 + \frac{10}{EI}x + \frac{75}{EI}} \quad ⑨$$

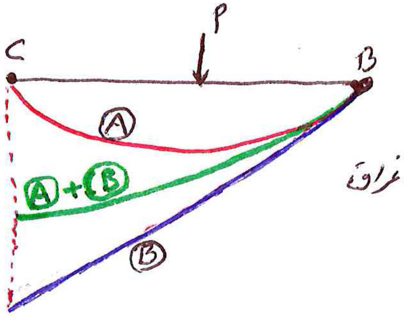
تغییر شکل ماکزیمم BC در جایی رخ می‌دهد که $\theta(x)=0$ است. باید (به دلیل حضور براکت ماکالی) یکبار فرض کنیم $x<3$ تا براکت ماکالی صفر شود. یکبار دیگر باید $x\geq 3$ فرض کنیم تا براکت ماکالی به حالت براکت عادی در آید و سپس مسئله را حل کنیم. فقط توجه می‌کنیم که در حالت اول جواب زمانی قابل قبول است که کوچک‌تر از ۳ باشد و در حالت دوم برعکس.

اگر بتوانیم تشخیص دهیم که ماکزیمم در کجا رخ می‌دهد راحت‌تر می‌توانیم مسئله را حل کنیم. در این مسئله قابل تشخیص است که ماکزیمم جابجایی قطعه‌ی BC قبل از بار متمرکز (یعنی در سمت چپ بار) رخ می‌دهد. چرا؟ در جواب فرض کنید تیری داشته باشیم که در وسط بارگذاری شده باشد

شکل ٢٤



تغییر شکل به حالت شکل ٢٤ در می‌آید. حال فرض کنید که نقطه‌ی C مقداری پایین بیاید (داریم مسئله‌ی خودمان را شبیه‌سازی می‌کنیم) آنگاه



شکل ۲۵: با اغراق

جابجایی کل تیر برآیند دو تغییر فوق (Ⓐ ناشی از بار و Ⓑ ناشی از پایین آمدن نقطه‌ی C) خواهد بود. پس می‌توان گفت که ماکزیمم جابجایی قبل از بار متمرکز رخ می‌دهد.

حال به روش اصلی ادامه بحث می پردازیم. فرض می کنیم ماکزیمم قبل از بار متمرکز اتفاق بیافتد.

if $\theta(x)=0$ و $x<3$

$$\Rightarrow \frac{-5}{2EI}x^2+\frac{10}{EI}=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

چون $x<3$ بدست آمد پس جواب ما صحیح است. با جاگذاری $x=2$ در معادله ی ⑨ خواهیم داشت

$$y(2)=\frac{265}{3EI}$$

علامت مثبت بدست آمد یعنی به سمت پایین آمده است.

جلسه سیزدهم:

در جلسات قبل با استفاده از روش انتگرال گیری دوگانه تغییر شکل های تیر را محاسبه کردیم. دو روش دیگر نیز هستند که از این جلسه شروع به فراگیری خواهیم کرد:

۱- روش لنگر سطح Moment area

۲- روش تیر مزدوج conjugate beam

قبل از رسیدن به بحث محاسبه تغییر شکل ها بر مبنای معادلات انرژی، دو روش گفته شده را توضیح خواهیم داد که مبنای کار آن همان مبنای روش قبل است بدون آنکه به حل ریاضی معادله ی دیفرانسیل بپردازند. درست است که در مثال های ما حل معادله دیفرانسیل ساده بود اما گاهی شرایط سخت تری پیش می آید علاوه بر این روش انتگرال گیری چندان باب میل مهندسین عمران نیست و بیشتر مایل به استفاده از جدول ها و گراف ها هستند. گرچه برخی از دانشجویان روحیه ی ریاضی دوستی خود را حفظ می کنند اما اکثر مهندسین عمران از جداول و گراف ها استفاده می کنند. بر اساس همین طرز تفکر اندکی تغییرات در روش حل داده شده است تا بدون انتگرال گیری مستقیم معادلات حل شود. اولین روش، لنگر سطح است.

روش لنگر سطح (Moment-Area method):

به نظر می آید ایده ی اولیه این روش که روشی تصویری است (هم چون ایده ی دایره موهر) توسط آقای موهر داده شده باشد. ولی بعدها پروفسور گرین در 1873 این روش را فرمول بندی کرده است. در کتاب ها بیشتر با نام آقای گرین این روش شناخته می شود.

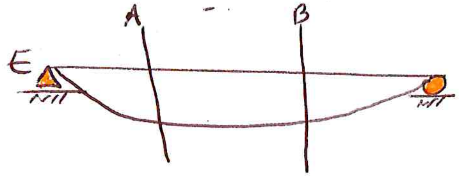
قبلاً گفتیم که

$$\theta=\frac{dy}{dx}=\int -\frac{M}{EI}dx \quad ①$$

به عبارت دیگر می توان گفت که

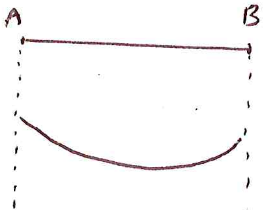
$$\boxed{d\theta=-\frac{M}{EI}dx} \quad ②$$

حال فرض کنید که از رابطه ی ② انتگرال گیری معین کنیم. مثلاً فرض کنید قطعه ی AB از یک تیری را بریده ایم (تیر تحت بار و حالت تغییر شکل



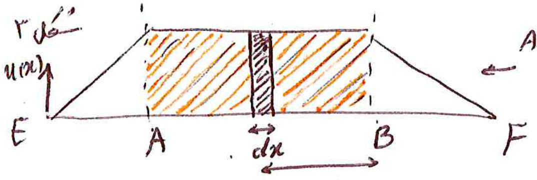
شکل ۱

⇓



AB خود دچار تغییر شکل است

شکل ۲



شکل ۳

منحنی لنگر قطعه ی AB

می توان انتگرال ② را از A تا B گرفت در اینصورت

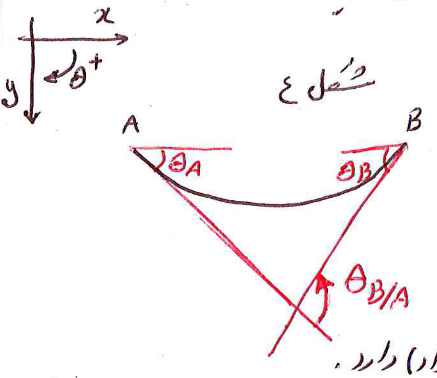
$$\int_A^B d\theta=\int_A^B -\frac{M}{EI}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_B-\theta_A=\int_A^B -\frac{M}{EI}dx} \quad ③$$

منحنی لنگر قطعه ی AB از تیر EF هم به طور فرضی در شکل ۳ داده شده است. $\frac{M(x)}{EI}$ در واقع تقسیم همان شکل ۳ بر EI است. اگر EI ثابت آنگاه $\frac{M}{EI}$ همان شکل کلی لنگر M در شکل ۳ را دارد. اما اگر EI برای قسمت های مختلف فرق کند ممکن است شکل کلی منحنی لنگر مثلاً حالت ذوزنقه ی شکل ۳ خارج شود. حالا فرض کنیم EI ثابت

باشد. انتگرال ③ پس همان سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ خواهد بود (از A تا B). با بدست آوردن سطح زیر این منحنی (در اینجا ذوزنقه‌ای مانند) می‌توان $\theta_B-\theta_A$ را بدست آورد نه θ_A یا θ_B را. ولی به نوعی اینها را محاسبه خواهیم کرد. یعنی این روش اختلاف شیب در دو نقطه را می‌دهد. حال اگر شیب را در نقطه‌ای مثلاً $\theta=0$ داشته باشیم آنگاه هر دو بدست می‌آیند.

قطعه‌ی AB داده شده را فرض کنید



شکل ٤

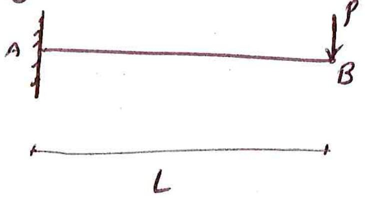
ضمناً در این قطعه مقداری مثبت (طبق قرارداد) دارد.

مماس‌ها را در نقاط A و B رسم کرده‌ایم و زوایای θ_A و θ_B را نشان داده‌ایم. θ_A یک چرخش مثبت است و θ_B چرخش منفی. زاویه بین امتدادهای مماس‌ها $\theta_B-\theta_A$ است که ما آن را با اسم $\theta_{B/A}$ نمایش می‌دهیم. $\theta_{B/A}$ بدین معناست که مماس نقطه‌ی A باید به اندازه $\theta_{B/A}$ و در جهت آن بچرخد تا روی θ_B منطبق شود (یعنی روی مماس نقطه‌ی B). $\theta_{B/A}$ در شکل فوق نشان داده شده است. θ_B منفی است و θ_A مثبت است پس $\theta_B-\theta_A$ از نظر علامت منفی است ولی از لحاظ عددی برابر جمع مقادیر دو θ_A و θ_B است. (اگر $\theta_{B/A}$ منفی باشد یعنی مماس A باید در خلاف عقربه‌های ساعت بچرخد تا روی مماس نقطه‌ی B منطبق شود)

طبق رابطه‌ی ③ می‌توان گفت یک M مثبت تولید یک $\theta_{B/A}$ منفی خواهد کرد. حال اگر در مسئله‌ای یکی از θها معلوم باشد دیگری بدست می‌آید.

مثال: معین کنید θ_B و Δ_B را؟

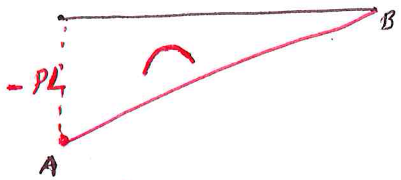
شکل ٥



در روش لنگر سطح (برخلاف روش انتگرالگیری دوگانه) احتیاج به خود معادله‌ی ممان نداریم بلکه شکل ممان برای ما مهم است چون می‌خواهیم مساحت زیر آن را محاسبه کنیم.

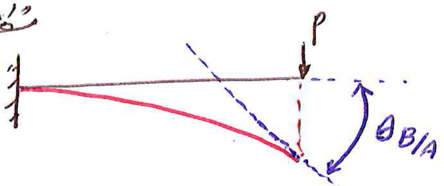
دیاگرام ممان شکل فوق به صورت زیر است

شکل ۶



در اینجا A و B منطبق بر ابتدا و انتهای تیر اند ولی لزوماً همیشه این چنین نیست. تغییر شکل کیفی تیر قابل دسترسی است پس از بدست آوردن منحنی (شکل ۶) لنگر، گام دوم در روش لنگر سطح رسم تغییر شکل کیفی است

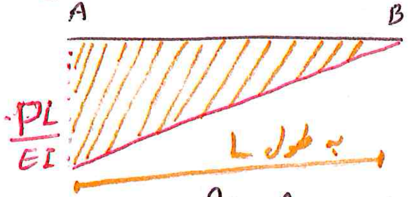
شکل ۷



می‌بینیم که در این مسئله مقدار θ_A صفر است پس $\theta_B-\theta_A$ همان θ_B را بدست خواهد داد. $\theta_{B/A}$ در شکل فوق نمایش داده شده است.

حال از معادله‌ی ③ استفاده می‌کنیم. چون EI ثابت است منحنی $\frac{M}{EI}$ همان شکل ۶ را خواهد داشت فقط تمام Mها بر EI تقسیم می‌شوند:

شکل ۸



بنابراین

$\theta_B-\theta_A=-($ سطح زیر شکل ۸ $)$

سطح زیر شکل ۸ عددی منفی است و بیرون پرانتز بالا هم یک منفی داریم پس

$$\theta_{B/A}=\theta_B-\theta_A=-\left(-\frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}\right)=\frac{PL^2}{2EI}$$

چون عدد بدست آمده مثبت به دست آمد پس $\theta_B-\theta_A=\theta_B$ ساعتگرد است.

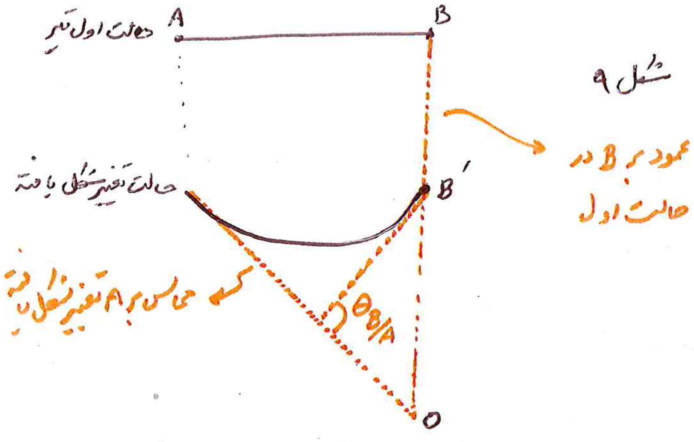
$$\boxed{\theta_B=\frac{PL^2}{2EI}}$$

برای محاسبه‌ی افت از این طریق بایستی از تئوری یا قضیه‌ی

صفت

دوم سطح استفاده کنیم که در مورد جابجایی است.

عمود بر نقطه‌ی B از حالت اول تیر را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. مماس بر نقطه‌ی A تغییر شکل یافته را هم امتداد می‌دهیم تا امتداد عمودی را قطع کند

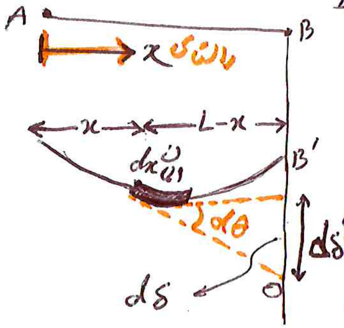


شکل ۹

حال سعی می‌کنیم فاصله‌ی OB' را بدست آوریم و با استفاده از آن میزان افت A و B را محاسبه کنیم.

مبنای کار چیست؟ المان dx را بر روی تیر تغییر شکل یافته در نظر بگیرید. بین دو انتهای این المان مماس‌هایی رسم می‌شود که زاویه‌ی بین این دو مماس dθ است. با انتگرال‌گیری روی کل تیر از این dθ، همان $\theta_{B/A}$ حاصل می‌شود.

شکل ۱۰



اگر دو مماس بر دو انتهای المان dx را رسم کنیم با هم زاویه dθ می‌سازند که امتداد این مماس‌ها راستای عمودی BB' را در نقطه قطع خواهد کرد (طبق شکل ۱۰). مختصه x را از نقطه‌ی A به صورت شکل ۱۰ در نظر بگیرید. طول کل AB را هم L فرض کنید در این صورت فاصله‌ی المان dx تا خط BB' برابر L-x خواهد شد چون dx به اندازه x از A فاصله دارد. پس

$$d\delta = (L-x)d\theta$$

با انتگرال‌گیری از dδ از A تا B فاصله‌ی OB' را به دست می‌دهد.

بنابراین

$$\int_A^B d\delta = \int_A^B (L-x)d\theta$$

$$= \int_A^B (L-x)\left(\frac{-M}{EI}dx\right) = \overline{OB'} \quad ④$$

OB' را از این به بعد با $\delta_{B/A}$ نشان می‌دهیم.

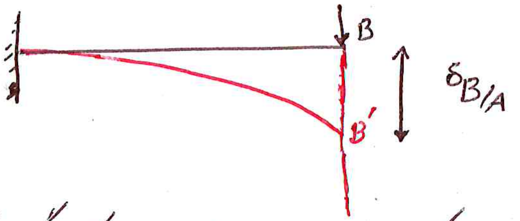
⊛ (این روش می‌توان گفت روشی است که بعد از اتمام این درس کسی با آن سر و کار نخواهد داشت ☺) ⊛

⊛ البته این تاریخ مهندسی ماست که جزئی از تحقیقات آینده شده است ⊛

گزاره‌ی داخل انتگرال ④ یعنی $(L-x)\left(\frac{M}{EI}dx\right)$ را در نظر بگیرید (علامت منفی پشت M را عمداً برداشته‌ایم). حال شکل ۳ از صفحه‌ی 43 را هم نگاه کنید. $\frac{M}{EI}dx$ در این شکل همان ضرب dx در مقدار تابع $\frac{M}{EI}$ است که در شکل ۳ نشان داده شده است. فاصله‌ی dx تا B هم همان L-x است پس وقتی این دو را در هم ضرب می‌کنیم مثل این است که داریم از این سطح $\frac{M}{EI}dx$ گشتاور می‌گیریم (با ضرب در بازوی L-x). این همان وجه نام‌گذاری این روش است. پس حاصل انتگرال ④ = سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ ضرب در فاصله‌ی مرکز سطح از نقطه‌ای که خط قائم را رسم می‌کنیم.

با این دیدگاه سراغ تیر شکل خودمان می‌رویم

شکل ۱



از B عمود رسم می‌کنیم تا BB' و امتدادش به دست آید. اگر از نقطه‌ی A مماس رسم کنیم و ادامه دهیم امتداد BB' را در نقطه‌ی B قطع می‌کند پس تعریف $\delta_{B/A}$ در اینجا همان BB' است.

طبق شکل ۸ سطح زیر منحنی برابر است با $\frac{PL^2}{2EI}$- است پس گشتاورش برابر است با حاصلضرب $\frac{PL^2}{2EI}$- و فاصله‌ی مرکز سطح از نقطه‌ی B (همانجا که می‌خواهیم تغییر شکل حساب کنیم).

$$\delta_{B/A} = \frac{-PL^2}{2EI} \times \frac{2}{3}L \Rightarrow \delta_{B/A} = \frac{PL^3}{3EI}$$

منفی از فرمو

در این مسئله خاص

$$\boxed{y_B = \delta_{B/A} = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow}$$

این مثال حالت ساده‌ای بود، در مسائل پیچیده چگونه باید عمل کر

به راحتی می توان فهمید که در حالت کلی:

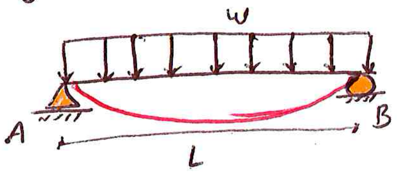
$$\boxed{\theta_{B/A} = -\theta_{A/B}}$$

اما در هر حالت کلی داریم:

$$\boxed{\delta_{B/A} \neq \delta_{A/B}} \longrightarrow$$ یعنی ارتباطی بین این دو نیست

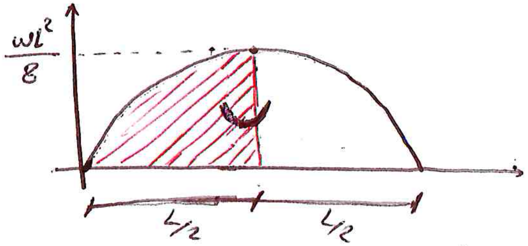
مثال: فرض کنید تیری دو سر مفصلی داریم که تحت بار گسترده یکنواخت است. شیب نقطه A، B، جابجائی حداکثر و جابجایی در وسط تیر چقدر است؟

شکل ۱۲



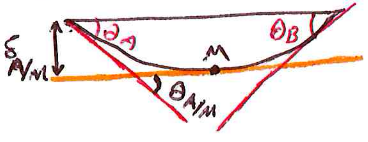
منحنی تغییرات لنگر معادله ای درجه ی دوم است به صورت

شکل ۱۳



منحنی تغییر شکل هم در شکل ۱۲ نمایش داده شده است. مسأله تقارن هم دارد. مقدار ماکزیمم هم در وسط رخ می دهد. حال میخواهیم فرضاً θ_A و θ_B را محاسبه کنیم:

شکل ۱۴



می دانیم $|\theta_A| = |\theta_B|$ و θ_A مثبت است و θ_B منفی. میخواهیم از روش لنگر سطح θ_A و θ_B را محاسبه کنیم.

یک راه این است که بگوییم زاویه ای که بین دو مماس وجود دارد یعنی $|\theta_{B/A}|$، دو برابر $|\theta_A| = |\theta_B|$ است. پس می توان $|\theta_{B/A}|$ را بدست آورده و حاصل را بر دو تقسیم کرد. ولی ما به دنبال یک روش عمومی می رویم:

از مسأله تقارن استفاده می کنیم. جایی را می یابیم که θ صفر باشد. θ در وسط دهنه صفر است. پس نقطه ی وسط را M نام گذاری می کنیم و مماسی بر آن رسم می کنیم (شکل ۱۴).

بنابراین زاویه ی $\theta_{A/M}$ تشکیل می گردد که می دانیم

$$\theta_{A/M} = \theta_A$$

بنابراین به راحتی قابل محاسبه است. برای بدست آوردن $\theta_{A/M}$ کافی است سطح هاشور خورده در شکل ۱۳ را داشته باشیم. این سطوح در مسائل به صورت جداول و گراف هایی ارائه می شود. این محاسبات را بعدها با کامپیوتر انجام دهیم اما باید یک حس کلی از مسأله و اینکه چه اتفاقی در داخل نرم افزار رخ می دهد داشته باشیم.

$$|\theta_{A/M}| = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} \times \left(\frac{wL^2}{8EI}\right) = \frac{wL^3}{24EI}$$

توجه کنید ما قدر مطلق $\theta_{A/M}$ را بدست آوردیم. چون $\theta_M = 0$

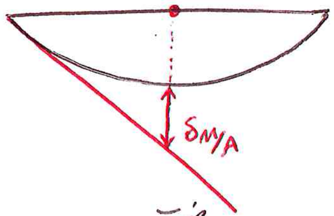
$$\Longrightarrow \theta_A = \frac{wL^3}{24EI}$$ ساعتگرد

تقارن $\Longrightarrow \theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$ پادساعتگرد

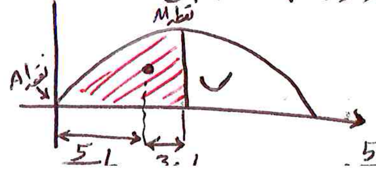
افت حداکثر در وسط یعنی M رخ می دهد. چون M مماس افقی دارد، مقدار افت M را می توان از $\delta_{A/M}$ محاسبه کرد. (شکل ۱۴)

حواسمان باید باشد که $\delta_{M/A}$ برابر فاصله ی زیر است که هیچ ارتباطی با جابجایی واقعی M ندارد.

چه اهمیتی دارد که $\delta_{A/M}$ باشد یا $\delta_{M/A}$؟ اهمیت اش به بازوی



است که در سطح زیر منحنی شکل ۱۳ ضرب می شود. بازو نسبت به خط قائمی حساب می شود که رسم می کنیم. بنابراین $\delta_{A/M}$ برابر است با سطح زیر منحنی هاشور خورده در شکل ۱۳ ضرب در فاصله آن (مرکز سطح) از خط عمود از A. اگر سطح زیر منحنی ۱۳ (هاشور خورده) را در مرکز سطح ضرب کنیم تشکی



که فاصله از کدام خط عمود مدنظر قرار گیرد، فاصله $3L$ باشد یا $5L$

سطح زیر منحنی برابر با $\frac{wL^3}{24EL}$ است آنگاه

$$\delta_{A/M} = \frac{wL^3}{24EL} \times \frac{5L}{16} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

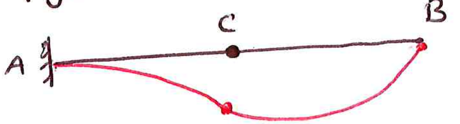
$$\delta_{M/A} = \frac{wL^3}{24EL} \times \frac{3L}{16}$$

بنابراین $|\delta_{A/M}| = |y_M| = \frac{5wL^4}{384EI} \downarrow$

جلسه چهاردهم (اولین جلسه بعد از عید ۹۴)

لازم است دقت کنیم که در بدست آوردن $\theta_{B/A}$ و سپس محاسبه ی θ_B از آن نیاز است که پیوستگی در مسئله باشد. مثال زیر را ببینید

شکل ۱



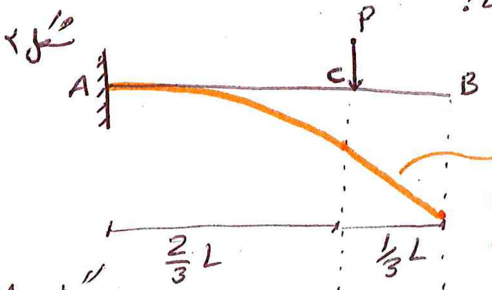
به طور کلی می دانیم $\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A$ اما چون مفصل C در وسط وجود دارد نمی توان گفت

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \theta_B - 0 = \theta_B$$

باید مفصل هم مدنظر قرار گیرد.

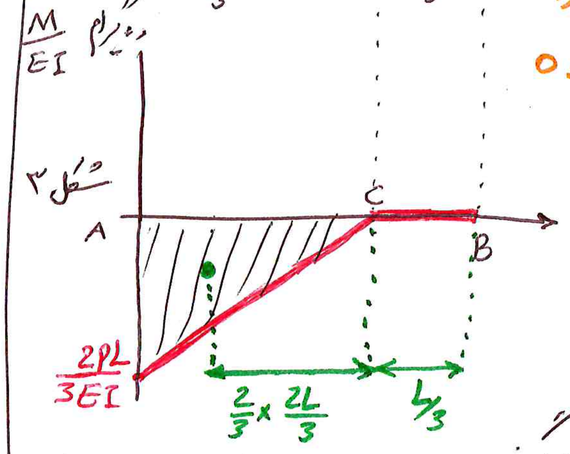
مثال: چرخش و افت B؟

شکل ۲



در این قسمت خط ثابت و صاف می ماند چون در این قسمت ممان صفر است یعنی $0 = \theta_{B/C} = \theta_{C/B}$

شکل ۳



در اینجا می توان گفت

$$|\theta_B| = |\theta_{B/A}| = \frac{1}{2} \times \frac{2PL}{3EI} \times \frac{2}{3}L = \frac{2PL^2}{9EI} \circlearrowright$$

برای افت نقطه ی B خواهیم داشت

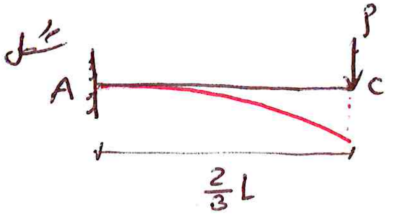
$$|y_B| = |\delta_{B/A}| = \frac{2PL^2}{9EI} \times \left(\frac{L}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2L}{3}\right)$$

= فاصله مرکز سطح هاشور خورده از نقطه ی B × سطح هاشور خورده ی شکل ۳

$$= \frac{14PL^3}{81EI} \downarrow$$

نکته: چون چرخش نقطه ی B برابر نقطه ی C است $\theta_B = \theta_C$ می توانستیم فرض کنیم که تیر به صورت تیر طره‌ای پایینی است:

شکل ۴



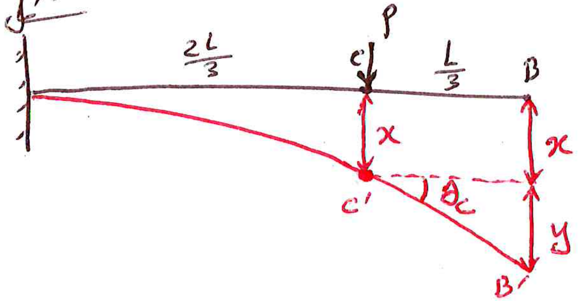
(ادامه ی تیر را بریده ایم)

برای این تیر داریم

$$\theta_C = \frac{P(\frac{2}{3}L)^2}{2EI}$$

این تیر یک نوع نگاه به مسئله است. برای به دست آوردن جابجایی نقطه ی B نیز می توان از شکل زیر استفاده کرد

شکل ۵



در شکل بالا x همان جابجایی نقطه ی C' است نسبت به C یعنی $x = |y_C| = |\delta_{C/A}|$. از طرف دیگر y هم برابر است با $y = \theta_C \times \frac{L}{3}$. بنابراین جابجایی نقطه ی B برابر است با:

$$|y_B| = |\delta_{C/A}| + |\theta_C \times \frac{L}{3}|$$

یعنی جواب y_B را از برهم نهی دو قطعه از تیر محاسبه می کنیم.

$$y_B = \frac{P(\frac{2}{3}L)^3}{3EI} + \frac{2PL^2}{9EI} \times \frac{L}{3}$$

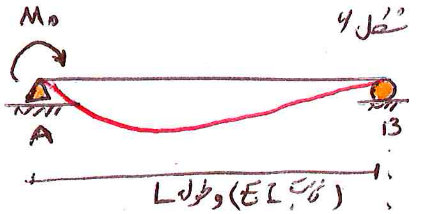
$$\downarrow$$

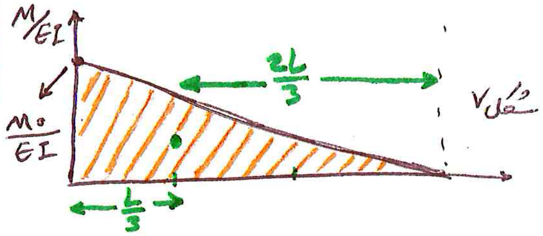
$$\boxed{|y_c| = |\delta_{c/A}|}$$

$$= \frac{14PL^3}{81EI}$$

در مثال و مثال‌های قبلی در بدست آوردن δ_B یا θ_B از δ_A یا θ_A حالت‌هایی پیش آمد که $\delta_{B/A}$ یا $\theta_{B/A}$ صفر می‌شد و به راحتی θ_B و δ_B محاسبه می‌شد. یا در حالاتی به علت تقارن مسأله و بارگذاری، معلوم بود که جابجایی در وسط تیر ماکزیمم و θ آن نقطه صفر می‌شود. حال اگر چنین حالت‌هایی در مسأله نباشد طرز تعیین مجهولات مورد نظر چیست؟ فرض کنید تیری دو سر مفصل داریم که بارگذاری متقارن ندارد بلکه تحت اثر یک ممان متمرکز M_0 است.

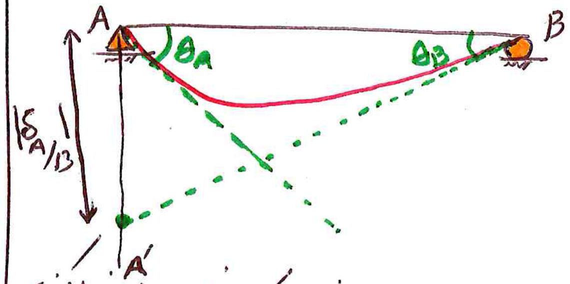
شکل زیر این تیر و این بارگذاری را نشان می‌دهد و دیاگرام ممان آن نیز با تقسیم بر EI ثابت داده شده است





تغییر شکل تیر نیز تقریباً در شکل ۶ داده شده است بسمت A که ممان متمرکز M_0 به آن اعمال شده بیشتر می‌چرخد (می‌توان این قضیه را به صورت شهودی درک کرد)

شکل ۸



توجه کنید در شکل ۸ نمی‌دانیم مماس افقی در کجا رخ می‌دهد یعنی ماکزیمم تغییر شکل در کجا رخ می‌دهد. بر این دلیل از طرز تفکر دیگری استفاده می‌کنیم، مماس نقطه B را امتداد می‌دهیم تا خط عمود AA' را در نقطه‌ای قطع کند و طول $|\delta_{A/B}|$ بدست آید. بنا بر تعریف از تقسیم $|\delta_{A/B}|$ بر L می‌توان θ_B را بدست آورد:

$$|\theta_B| = \frac{|\delta_{A/B}|}{L}$$ (چون زوایا کوچک‌اند $\theta \simeq tg\theta$)

پس کافی است $|\delta_{A/B}|$ را بدست بیاوریم. این مقدار برابر است با

$|\delta_{A/B}| =$ سطح زیر منحنی شکل ۷ × فاصله مرکز سطح از نقطه‌ی A

$$= \left(\frac{1}{2} \times L \times \frac{M_0}{EI}\right) \times \frac{L}{3} = \frac{M_0L^2}{6EI}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{|\theta_B| = \frac{M_0L}{6EI} \circlearrowleft}$$

به همین ترتیب θ_A را هم می‌توان محاسبه کرد. باید مماس از A را ادامه دهیم تا خط عمود از B را قطع کند. پس با محاسبه $\delta_{B/A}$، تقسیم آن بر L، می‌توان θ_A را بدست آورد. پس

$$|\delta_{B/A}| = \left(\frac{1}{2} \times L \times \frac{M_0}{EI}\right) \times \frac{2L}{3} = \frac{M_0L^2}{3EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\theta_A| = \frac{|\delta_{B/A}|}{L} = \frac{M_0L}{3EI} \circlearrowright}$$

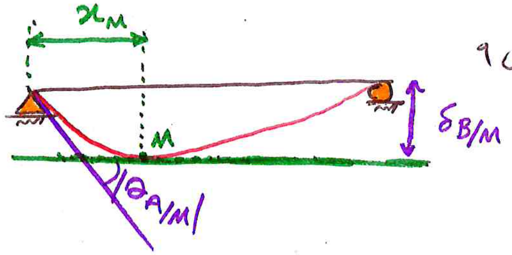
⊛ نکته: فارغ از مقدار M_0، EI و L، مقدار چرخش نقطه‌ی A همیشه دو برابر چرخش نقطه‌ی B خواهد بود. ⊛

فرض کنید در مثال فوق بخواهیم حداکثر تغییر شکل را محاسبه کنیم. از روی شکل می‌توان فهمید که محل بزرگترین تغییر شکل نزدیک به

به نقطه‌ی A است ولی دقیقاً محل آنرا نمی‌دانیم و باید محاسبه کنیم.

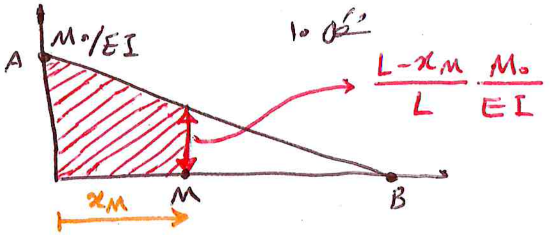
در نقطه‌ای از تیر مماس افقی داریم که آنرا M می‌نامیم.

شکل ۹



میخواهیم x_M را بیابیم. امتداد مماس بر M و امتداد مماس بر A همدیگر را در زاویه‌ای قطع می‌کنند. بار دیگر نمودار $\frac{M}{EI}$ را رسم می‌کنیم

شکل ۱۰



سطح هاشور خورده در شکل ۱۰ برابر است با $|\theta_{A/M}|$. سطح فوق تابعی از x_M است. بنابراین می‌توان x_M را بدست آورد:

$$|\theta_{A/M}| = \text{مساحت ذوزنقه} = \left(\frac{M_0}{EI}+\frac{L-x_M}{L}\frac{M_0}{EI}\right)\times\frac{x_M}{2}$$

معادله‌ای براساس x_M برای $|\theta_{A/M}|$ بدست آوردیم که چون $\theta_M=0$ است می‌توان گفت که $|\theta_A| = |\theta_{A/M}|$

مقدار $|\theta_A|$ نیز در صفحه 48 برابر با $\frac{M_0L}{3EI}$ بدست آمد. بنابراین x_M به صورت زیر در می‌آید:

$$|\theta_{A/M}| = \frac{M_0}{EI}\left(1+\frac{L-x_M}{L}\right)\left(\frac{x_M}{2}\right)$$

$$=\frac{M_0}{EI}\left(\frac{2L-x_M}{L}\right)\left(\frac{x_M}{2}\right)$$

پس:

$$\frac{M_0}{EI}\left(\frac{2L-x_M}{L}\right)\left(\frac{x_M}{2}\right)=\frac{M_0}{3EI}$$

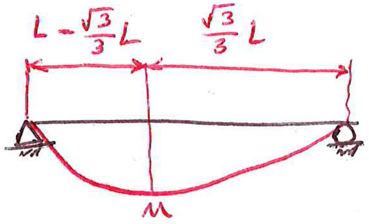
$$\Longrightarrow x_M=\frac{3L\pm\sqrt{9L^2-6L^2}}{3}$$

$$=\left(1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)L$$

جواب $(1+\sqrt{3})L$ چون بزرگتر از L است قابل قبول نیست

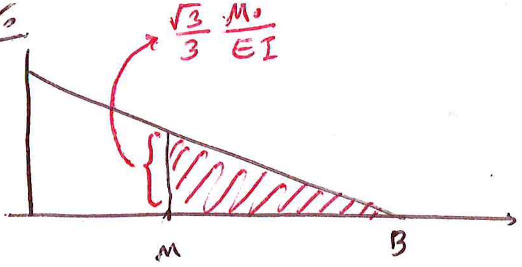
پس

$$x_M=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)L$$



پس محل وقوع تغییر شکل حداکثر حاصل شد. حال باید مقدار افت را در این نقطه محاسبه کنیم. این افت همان $\delta_{B/M}$ در شکل ۹ است.

شکل ۱



برای راحتی شکل ۱۱ را آورده‌ایم پس

$$|\delta_{B/M}| = \text{سطح زیر منحنی شکل ۱۱ در محل هاشور خورده} \times \text{فاصله مرکز سطح هاشور خورده از نقطه } B$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{M_0}{EI}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}L\right]\times\left[\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}L\right]$$

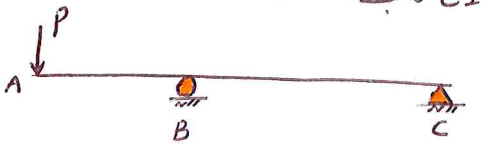
$$=\frac{\sqrt{3}}{27}\frac{M_0L^2}{EI}\downarrow$$

جلسه پانزدهم:

در این جلسه آخرین مباحث را نیز در مورد روش لنگر سطح جمع آ نموده و این مبحث را به پایان خواهیم رساند:

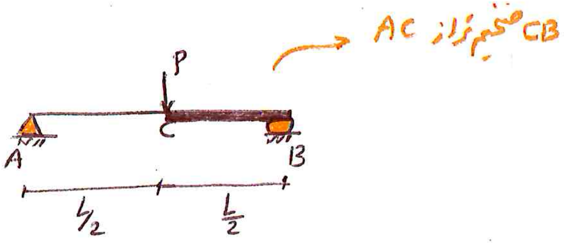
مثال ۱: تیر زیر با EI ثابت.

شکل ۱



قبل از حل مثال ذکر یک نکته لازم است. در همه مثال‌ها فرض می‌کنیم که EI ثابت باشد. حال اگر EI را ثابت نگیریم چه اتفاقی می‌افتد. مثلاً شکل زیر را فرض کنید:

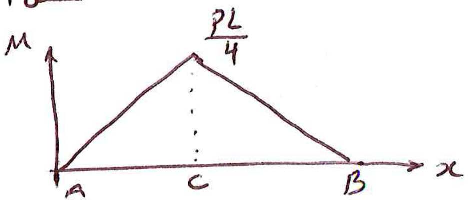
ص ۲۵



اگر EI در دو قسمت AC و CB با هم برابر نباشد آنگاه منحنی M به صورت زیر خواهد بود. مثلاً فرض کنید AC دارای $(EI)_1$ و قسمت CB دارای $(EI)_2$ باشد. در شکل ۱ هم می‌بینید که سطح مقطع قسمت CB بزرگتر از قسمت AC است. یعنی $(EI)_2 > (EI)_1$

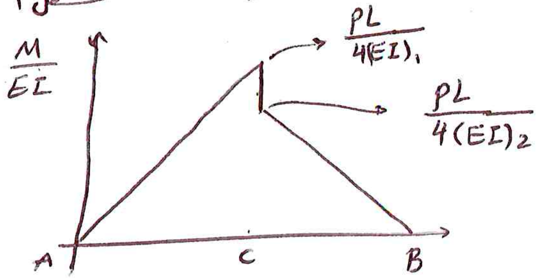
در اینصورت منحنی تغییرات لنگر عبارت است از

شکل ۲



تنها اتفاقی که در این مسأله (ثابت نبودن EI) رخ می‌دهد در منحنی $\frac{M}{EI}$ است که به صورت زیر در می‌آید

شکل ۳

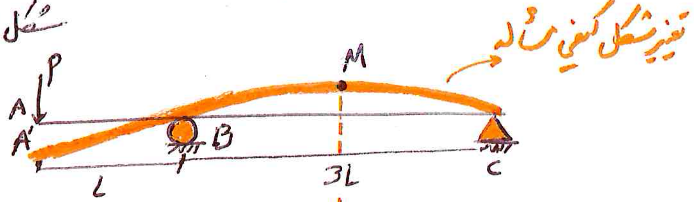


بقیه‌ی روش به همان صورت قبل است.

بنابراین تغییر مقطع داشتن از لحاظ محاسباتی هیچ نکته خاصی ندارد و فقط حجم محاسبات را بالا می‌برد.

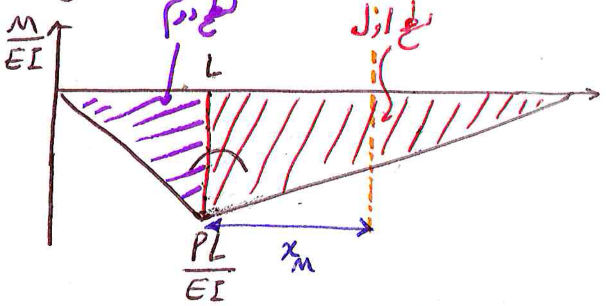
حال فرض کنید شکل ۱ را داریم و می‌خواهیم ماکزیمم تغییر شکل را محاسبه کنیم.

شکل ۴



منحنی تغییرات لنگر تقسیم بر EI

شکل ۵

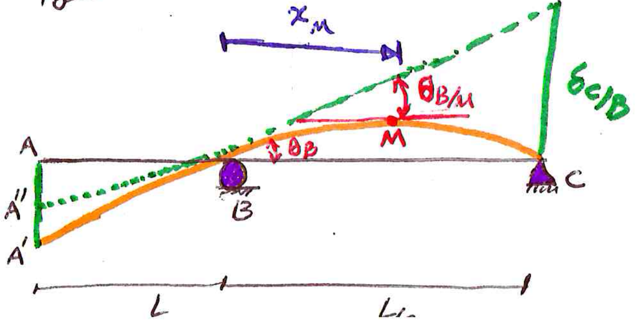


تغییر شکل کیفی تیر در شکل ۴ آورده شده است. در شکل ۴ باید تغییر شکل M و A' را بدست بیاوریم تا تصمیم بگیریم که کدام نقطه ماکزیمم تغییر را دارد. از نقطه‌ی A' شروع به محاسبه می‌کنیم.

نقطه‌ی M

اگر از نقطه‌ی B مماس رسم کنیم، $\delta_{C/B}$ بدست می‌آید:

شکل ۶



ما به دنبال جابجایی AA' هستیم. که شامل AA'' و A''A' است. می‌دانیم که $AA'' = \frac{1}{3}|\delta_{C/B}|$ (تشابه مثلث‌ها). قسمت A'A'' هم همان $\delta_{A/B}$ است. پس بایستی $\delta_{C/B}$ را محاسبه کرده و با $\delta_{A/B}$ جمع کنیم تا پاسخ بدست آید. لذا $\delta_{C/B}$ شروع می‌کنیم. باید "سطح اول" هاشور خورده در شکل ۵ را حساب کرده در فاصله مرکز سطح ضرب کنیم:

$$|\delta_{C/B}| = \left[\frac{1}{2} \times 3L \times \frac{PL}{EI}\right] \times \frac{2}{3} \times 3L$$

$$= \frac{3PL^3}{EI}$$

همچنین

$$|\delta_{A/B}| = \text{مساحت سطح دوم شکل ۵} \times \text{فاصله مرکز سطح}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times L \times \frac{PL}{EI}\right] \times \frac{2}{3}L = \frac{PL^3}{3EI}$$

پس خواهیم داشت

$$y_A = \frac{1}{3}|\delta_{C/B}| + |\delta_{A/B}| = \frac{4PL^3}{3EI} \downarrow$$

حال باید جابجایی ماکزیمم در دهانه‌ی BC را محاسبه کنیم. بدین منظور فرض می‌کنیم در نقطه‌ای مانند M این قطعه تیر مماس افقی دارد. که محل آنرا با x_M نمایش می‌دهیم. زاویه‌ای این

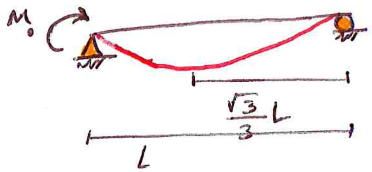
صفر

نقطه را هم با $\theta_{B/M}$ نمایش می‌دهیم که این زاویه با θ_B برابر است چون $\theta_M = 0$. از طرفی

$$|\theta_B| = \frac{|\delta_{C/B}|}{3L} = \frac{PL^2}{EI}$$

در جلسه‌ی قبل مثال زیر را حل کردیم و نتایج زیر را بدست آوردیم

شکل ۷



$$y_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{M_0 L^2}{EI}$$

در مثال این جلسه نیز از B تا C شبیه مثال جلسه قبل است در نقطه‌ی B لنگر PL وجود دارد. می‌توان به صورت زیر جهت AB را با انتقال بار P و لنگر PL به نقطه‌ی B از مسئله حذف کرد:

شکل ۸

بنابراین ماکزیمم تغییرشکل در دهانه‌ی BC برابر خواهد بود با

BC:
$$y_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{(PL)(3L)^2}{EI} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{PL^3}{EI}$$ (البته بالا

محل این y_{max} هم به قرار زیر است:

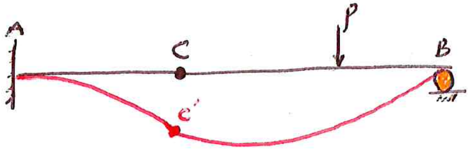
$x = \sqrt{3}L$ from C

سپس y_{max} نقاط A و M بدست آمد. بدیهی است که جابجایی نقطه‌ی A بیشتر است. بنابراین ماکزیمم مقدار تغییرشکل در طول تیر در نقطه A رخ می‌دهد.

جواب نهایی $\boxed{y_{max} = \frac{4PL^3}{3EI}\downarrow \text{ at point } A}$

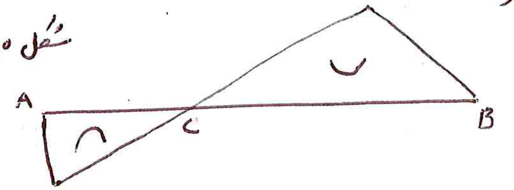
مثال ۲ :

شکل ۹



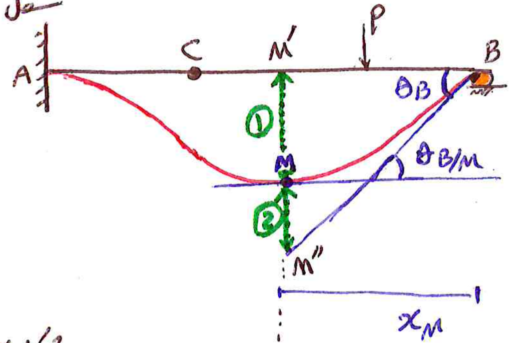
منحنی تغییرات لنگر

شکل ۱۰

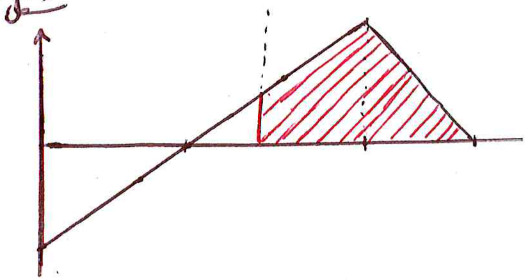


با توجه به منحنی تغییرات لنگر، منحنی تغییرشکل قابل رسم است که در شکل ۹ آورده شده است. فرض کنید بخواهیم تغییرشکل حداکثر را حساب کنیم. بسته به EI تیر در قسمت‌های مختلف، ممکن است در قسمت CB، تغییرشکل یک نقطه‌ی اکسترمم داشته باشد یا نداشته باشد. ما در اینجا فرض کردیم به صورت شکل ۹ باشد. جابجایی نقطه C که رسیده است که برابر $|\delta_{C/A}|$ است. حال باید سراغ قطعه‌ی CB برویم. اگر این نقطه مماس افقی داشته باشد باید بدانیم که در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد و تا نقطه مقدار این جابجایی چقدر است. باز نقطه‌ای را که جابجایی ماکزیمم است M فرض می‌کنیم و یک مماس بر آن رسم می‌کنیم

شکل ۱



شکل ۱۲



$\theta_{B/M}$ برابر است با سطح هاشورخورده فوق که تابعی از x_M است ضرب در فاصله‌ی مرکز سطح. اگر θ_B را داشته باشیم با قرار دادن در معادله‌ی x_M محاسبه می‌شود.

تنها نکته باقی مانده روش محاسبه‌ی θ_B است. θ_B را می‌توان از تقسیم فاصله‌ی $M'M''$ بر $M'B$ بدست آورد. $M'M'' = M'M + MM''$

$$M'M = |\delta_{C/A}| \quad , \quad MM'' = |\delta_{C/B}|$$

سپس کافی است $\delta_{C/B}$ و $\delta_{C/A}$ را محاسبه کرده و از آنجا θ_B را محاسبه می‌کنیم. سپس سطح زیر منحنی شکل ۱۲ را محاسبه می‌کنیم برحسب x_M و با

مساوی هم قرار می‌دهیم و x_M را محاسبه می‌کنیم.

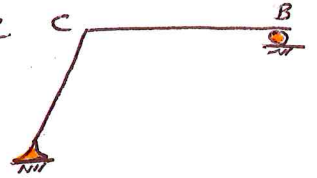
اگر جواب x_M غیر منطقی بدست بیاید یعنی ماکزیمم مسئله در C رخ می‌دهد. اگر جواب x_M منطقی باشد یعنی ماکزیمم مسئله در CB رخ می‌دهد.

حال مثال را اندکی پیچیده‌تر کرده و به شکل قاب درمی‌آوریم.

مثال ۳:

⊛ نکته: در قاب‌ها بایستی θ را در هر قطعه به صورت جدا تعریف کرد.

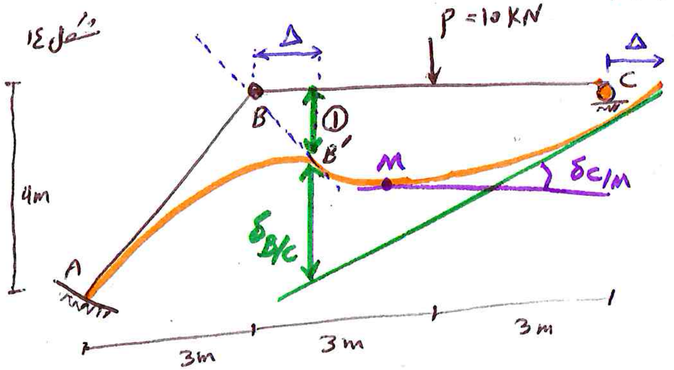
شکل ۱۳



مثلاً محاسبه θ نقطه‌ی A نسبت به B بی‌معنی است ⊛

مثال ۳:

شکل ۱۴

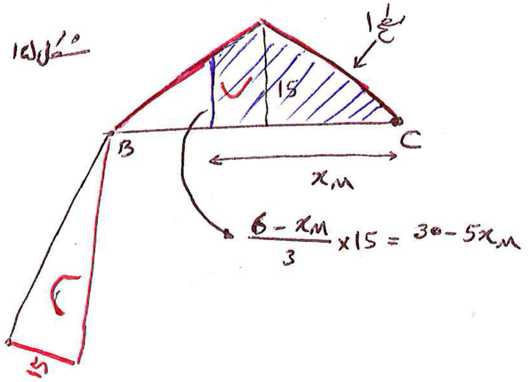


میخواهیم ماکزیمم جابجایی را در دهانه‌ی BC محاسبه کنیم.

Δ_{max} @ BC = ?

تحلیلی است که باید انجام شود. منحنی تغییرات لنگر

شکل ۱۵



تغییرشکل کیفی با استفاده از این لنگر در شکل ۱۴ آورده شده است. قطعه‌ی BC در اینجا همان شبیه مثال ۲ (قطعه‌ی CB) است. همان روش مثال ۲ را باید در اینجا پیاده کنیم. بایستی θ_c را محاسبه کرده و برابر $\theta_{C/M}$ قرار دهیم.

اگر از C مماس رسم کنیم $\delta_{B/C}$ بدست می‌آید که به راحتی قابل محاسبه است اما فاصله‌ی نشان داده شده با ① در شکل ۱۴ به صورت مستقیم قابل محاسبه نیست. تغییرشکل‌های سمت BC تابعی از تغییرشکل‌های سمت AB است.

برای بدست آوردن ① ابتدا فاصله BB′ را محاسبه می‌کنیم. فاصله‌ی BB′ برابر است با

$$BB' = |\delta_{B/A}|$$

و بنابراین فاصله‌ی ① برابر خواهد بود با (طبق هندسه)

$$0.6\times|\delta_{B/A}|$$

بنابراین

$$|\theta_c| = \frac{0.6|\delta_{B/A}| + |\delta_{B/C}|}{6}$$

حال نقطه‌ی M با تغییرشکل ماکزیمم را فرض می‌کنیم و مقدار $\theta_{C/M}$ را از سطح هاشور خورده شکل ۱۵ محاسبه می‌کنیم (با تقسیم بر EI)

$$|\delta_{B/A}| = \left[\frac{15}{EI}\times\frac{1}{2}\times 5\right]\times\frac{2}{3}\times 5 = \frac{125}{EI}$$

$$|\delta_{B/C}| = \left[\frac{15}{EI}\times\frac{1}{2}\times 6\right](3) = \frac{135}{EI}$$

سپس مقدار $|\theta_c|$ از رابطه‌ی بالای این ستون قابل محاسبه می‌شود

$$|\theta_c| = \frac{(0.6\times 125/EI)+(135/EI)}{6} = \frac{35}{EI}\circlearrowleft$$

حال باید سطح ۱ در شکل ۱۵ را محاسبه کنیم

$$|\theta_{C/M}| = \frac{1}{2}\times\frac{15}{EI}\times 6 - \frac{1}{2}(30-5x_M)(6-x_M)$$

$$= \frac{1}{2EI}(-5x_M^2 + 60x_M - 90)$$

با مساوی هم قرار دادن این مقدار بدست آمده با $|\theta_c|$ خواهیم داشت:

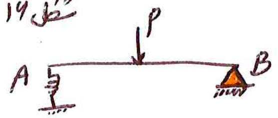
$$\frac{1}{2EI}(-5x_M^2 + 60x_M - 90) = \frac{35}{EI}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_M = 4m}$$

$$\rightarrow y_{max} \text{ @ } BC = |\delta_{C/M}| = \frac{265}{3EI}$$

عملاً بحث مربوط به لنگر سطح را به پایان رسانده‌ایم. تنها بایستی نکاتی را در خصوص تکیه‌گاه ارتجاعی متذکر شویم. اگر تکیه‌گاه ارتجاعی داشته باشیم در محدوده‌ی سازه‌ی معین هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد. فرض کنید تیری داریم به صورت زیر

شکل ۱۶



منحنی تغییرات لنگر با وجود تکیه‌گاه‌های ارتجاعی همان است که تکیه‌گاه غلطکی داشتیم یعنی

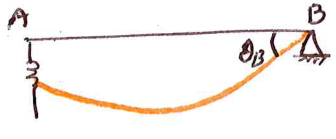
شکل ۱۷

تغییر شکل چگونه است؟ در تغییر شکل تکیه‌گاه B سر جای خود می‌ماند اما در A جابجائی قائم صورت می‌گیرد به اندازه (اگر P در وسط اعمال شود)

$$\Delta y = \frac{P}{2K} \qquad (\text{سختی فنر } K)$$

پس تیر به شکل زیر در می‌آید

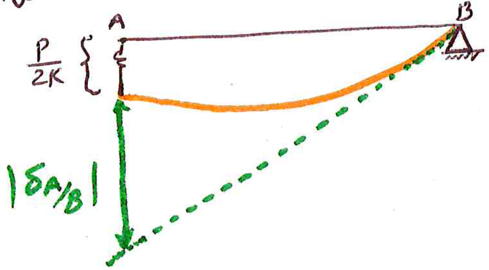
شکل ۱۸



شکل ۱۸ درست به مانند شکل ۱۱ (سمت CB) است. ما به دنبال θ_B هستیم که برابر است با

$$\theta_B = \frac{|\delta_{A/B}| + \frac{P}{2K}}{L}$$

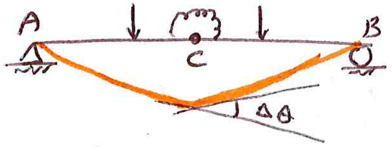
شکل ۱۹



حالا که سازه معین است تکیه‌گاه ارتجاعی دیاگرام ممان را تغییر نمی‌دهد اما تغییر شکل را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

اگر در طول تیر فنر پیچشی داشته باشیم، مثلاً

شکل ۲۰



در اینصورت چون تیر معین است M_c نیز معلوم است. تنها اختلاف این حالت با حالتی که تیر پیوسته بود (به جای فنر پیچشی) در این است که بین AC تغییر شکل یافته و CB تغییر شکل یافته در نقطه‌ی C یک اختلاف زاویه وجود دارد. یعنی مماس بر C از سمت AC و مماس بر C از سمت CB یک زاویه $\Delta\theta$ با هم [illegible] که

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{M_c}{K_\theta}} \qquad (\text{ضریب فنر پیچشی } K_\theta)$$

چون $\Delta\theta$ داریم باز نمی‌توان $\theta_{B/A}$ یا $\theta_{A/B}$ نوشت اما $\theta_{B/c}$ یا $\theta_{A/c}$ می‌توان نوشت.

مبحث جدیدی که وارد آن می‌شویم (سوای از مباحث انرژی)، روش تیر مزدوج است.

روش تیر مزدوج: conjugate Beam Method

معادله‌ی زیر را بدست آوردیم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

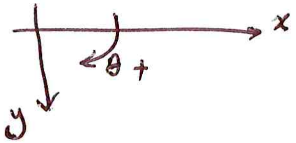
که در آن قراردادهای مثبت به قرار زیر بود

برای لنگر و برش

شکل ۲۱

برای زاویه و جابجایی

شکل



آنگاه داشتیم

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int -\frac{M}{EI}\,dx \quad ⊛$$

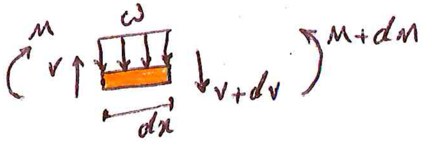
$$y = \int \theta\,dx = \iint -\frac{M}{EI}\,dx \quad ⊛⊛$$

میدانیم اگر تیری تحت بارگذاری باشد آنگاه برش انتگرال بارگذاری است و ممان انتگرال برش. ولی ما معمولاً برش و ممان را از روی انتگرال‌گیری حساب نمی‌کنیم. معمولاً معادله‌ی تعادل نوشته می‌شود و سپس با مقطع زدن و محاسبه ممان و برش روش ادامه می‌یابد. ایده‌ی تیر مزدوج از همین جایگزینی انتگرال‌گیری با مقطع زدن و تعادل

پیدا شده است .

قطعه‌ی تیر زیر را در نظر بگیرید به طول dx با بارگذاری w

شکل ۲۳



اگر $\sum F_y=0$ را بنویسیم به حالت زیر می‌رسیم .

$$w\,dx + dv = 0 \Rightarrow dv = -w\,dx$$

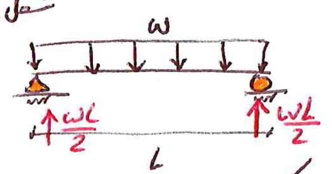
$$\Rightarrow v = \int dv = \int -w\,dx$$

$$\boxed{v = \int -w\,dx} \quad ①$$

از نوشتن لنگر قطعه حول گوشه سمت راست .

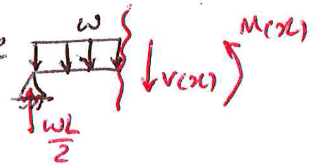
رابطه‌ی دیگر نیز ② $\boxed{M = \int v\,dx}$ است . اما برای بدست آوردن V و M از این روابط استفاده می‌کنیم . تیر زیر را فرض کنید

شکل ۲٤



عکس العمل‌های تکیه‌گاهی معلوم است که $\frac{wL}{2}$ می‌باشند . برای بدست آوردن لنگر و برش یک مقطع می‌زنیم و بعد M و V را محاسبه می‌کنیم

شکل ۲۵



با نوشتن تعادل این قطعه‌ی کوچک

$$V(x) = \frac{wL}{2} - wx$$

$$M(x) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

همانطور که دیدیم ما بدون استفاده از انتگرالگیری V(x) و M(x) را محاسبه کردیم . حالا آیا می‌توان از این ایده برای محاسبه‌ی انتگرال‌های

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int -\frac{M(x)}{EI}\,dx \quad ③$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} = \iint -\frac{M(x)}{EI}\,dx \quad ④$$

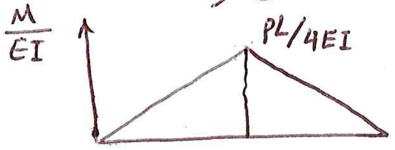
استفاده کرد . اگر بار گسترده W را برابر $\frac{M(x)}{EI}$ در نظر بگیریم آنگاه مسئله به نوعی شبیه مسئله‌ی قبل می‌شود . (انتگرال ① و ② معادل ③ و ④)

اگر تیر زیر را با بارگذاری در وسط آن داشته باشیم مثلاً

شکل ۲۶

می‌دانیم که $\left(\frac{\text{گشتاور}}{EI}\right)$ این مسئله به شکل زیر است

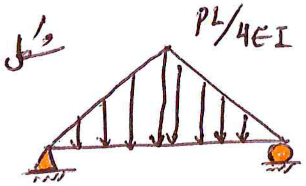
شکل ۲۷



(فرض EI ثابت)

حال می‌توانیم فرض کنیم که تیری داریم با بارگذاری گسترده‌ی زیر

شکل ۲۸



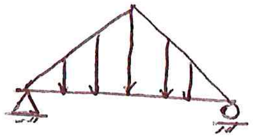
می‌توانیم با نوشتن معادلات تعادل ، معادلات برش و ممان را برای تیر شکل ۲۸ محاسبه کنیم . این برش و ممان برای تیر شکل ۲۶ همان معادلات افت (تغییر شکل) و شیب را به دست می‌دهند . ایده‌ی اساسی تیر مزدوج نیز همین است . تیر شکل ۲۶ تیر اصلی است و تیر شکل ۲۸ هم تیر مزدوج آن است . برای هر تیر واقعی یک تیر مزدوج مجازی می‌سازیم و بارگذاری $\frac{M}{EI}$ را برای تیر مزدوج در نظر می‌گیریم . نکته مهم شرایط مرزی است که باید به طرز مناسبی در نظر بگیریم .

جلسه‌ی نوزدهم :

در جلسه‌ی قبل تیر مزدوج یک تیر با بارگذاری نقطه‌ای را بدست آوردیم .

شکل ۱ تیر اصلی : θ و y

شکل ۲ تیر مزدوج : V و M



میخواهیم جابجایی زیر بار را بدست بیاوریم . برای اینکه درک دقیق از ارتباط بین تیر اصلی و مزدوج داشته باشیم روابط زیر را نگاه کن

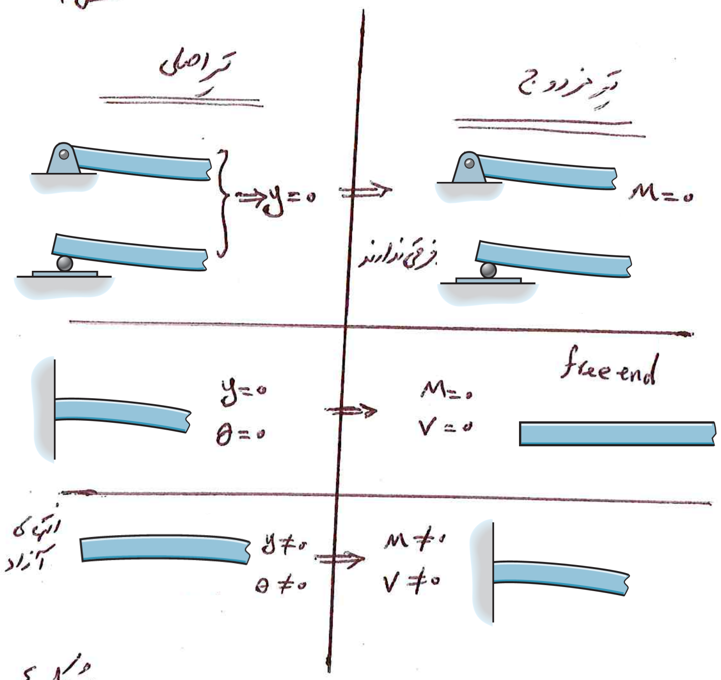
جدول ۱

	تیر اصلی	تیر مزدوج
سطر اول	$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI}$	$\frac{dV}{dx} = -\omega$
سطر دوم	$\frac{dy}{dx} = \theta$	$\frac{dM}{dx} = V$

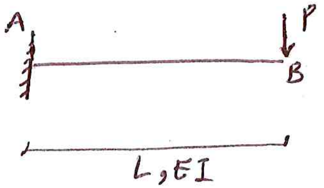
برای بدست آوردن جابجایی زیر بار در تیر اصلی، بایستی ممان را در زیر تیر مزدوج بیابیم. با دقت در سطر دوم جدول فوق می‌توان فهمید که جابجایی تیر اصلی، معادل ممان در تیر مزدوج است.

حال به حل یک سری مثال می‌پردازیم. توجه کنید ما روش انتگرالگیری را با تیر مزدوج جایگزین کردیم. بنابراین در هر دو روش به نوعی یک معادله دیفرانسیل حل می‌شود که با انتگرالگیری انجام می‌شود. در هر بار انتگرالگیری، ثابتی انتگرالگیری تولید می‌شود که با شرایط مرزی به دست می‌آید. بنابراین در رسم تیر مزدوج از تیر اصلی باید شرایط مرزی هم سازگار باشد. در تیر شکل یک میزان y در روی دو تکیه‌گاه صفر است. پس باید در تیر مزدوج با شرایط مرزی در انتهای دو تیر به گونه‌ای باشد که ممان صفر شود. چون که M تیر مزدوج معادل y تیر اصلی و V تیر مزدوج معادل θ تیر اصلی است. به همین دلیل از تکیه‌گاه مفصل استفاده کردیم. چون در داخل این تکیه‌گاه‌ها، ممان صفر است. پس

شکل ۳



شکل ٤



مثال ۱ :

$\theta_B = ? \longleftrightarrow V_{B'}$

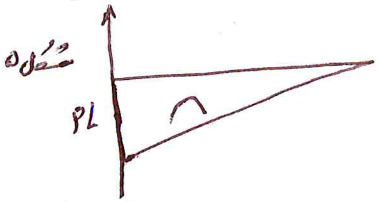
$y_B = ? \longleftrightarrow M_{B'}$

تغییر شکل در نقطه‌ی B (y_B و θ_B) را بدست آورید.

⊛ **گام‌های تیر مزدوج** : ① منحنی تغییرات لنگر ② رسم تیر مزدوج ③ بدست آوردن منحنی تغییرات لنگر تقسیم بر EI ④ محاسبه برش و ممان در تیر مزدوج ⊛

پس اولین گام در حل مثال ۱ بدست آوردن منحنی لنگر است

شکل ۵

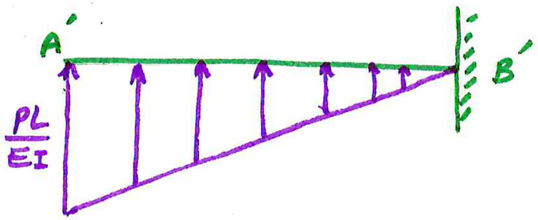


حال تیر مزدوج را رسم می‌کنیم. تکیه‌گاه گیردار تبدیل به انتهای آزاد و انتهای آزاد تبدیل به گیردار می‌شود

شکل ۶

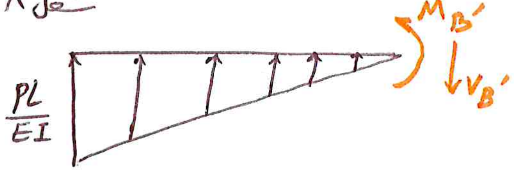
حال باید M را بر EI تقسیم کرده و به عنوان بارگذاری روی تیر مزدوج قرار دهیم. چون M منفی است پس بارگذاری از پایین به بالا می‌شود.

شکل ۷



دیاگرام آزاد تیر

شکل ۸



حال فقط کافی است معادله‌ی تعادل تیر مزدوج را بنویسیم :

تعادل در تیر مزدوج

$\sum F_y = 0$

$$\Rightarrow V_{B'} = \frac{1}{2} \times \frac{PL}{EI} \times L = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI} \circlearrowright \rightarrow \text{چرخش ساعتگرد}$$

چون برش $V_{B'}$ مثبت است، پس θ_B هم چرخش مثبت باید باشد.

تعادل در تیر مزدوج

$\sum M_{B'} = 0$

$$\Rightarrow M_{B'} = \left[\frac{1}{2} \frac{PL}{EI} \times L\right] \times \overbrace{\frac{2}{3} L}^{\text{بازوی مرکز سطح}}$$

$$= \frac{PL^3}{3EI}$$

یعنی $y_B = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow$ (چون ممان مثبت بود پس جابجایی مثبت است، یعنی جابجایی رو به پایین)

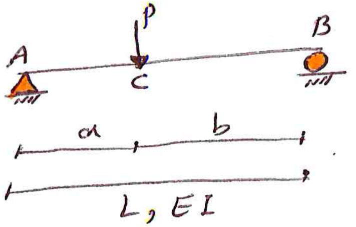
مثال ۲:

تیر دو سر مفصل زیر داده شده است. میخواهیم محاسبه کنیم:

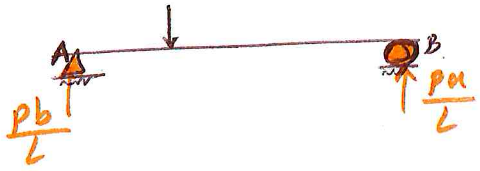
$\theta_A = ?$

$\theta_B = ?$

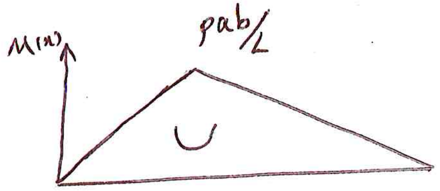
$y_c = ?$



گام اول تحلیل سیستم و رسم دیاگرام ممان است



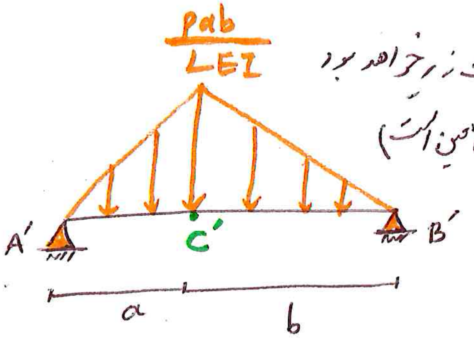
منحنی تغییرات لنگر



حال $\frac{M}{EI}$ را بدست آورده و به عنوان بار بر روی تیر مزدوج قرار می‌دهیم. (توجه: گاهی به دلیل وجود EI، به ترم $\frac{M}{EI}$ بار الاستیک هم می‌گویند)

تیر مزدوج به صورت زیر خواهد بود

(توجه: [illegible] تیر مزدوج [illegible] است)



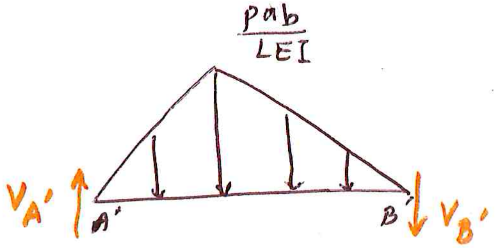
حال باید برش نقاط A' و B' را بدست آوریم. چون

$\theta_A \approx V_{A'}$

$\theta_B \approx V_{B'}$

$y_C \approx M_{C'}$

دیاگرام آزاد



تیر مزدوج: $\sum M_{B'} = 0$

$$\Rightarrow V_{A'} \times L - \frac{pab}{LEI} \times \frac{b}{2} \times \frac{2}{3}b - \frac{pab}{LEI} \times \frac{a}{2} \times \frac{b+a}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{A'} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}}$$

$\sum F_y = 0$

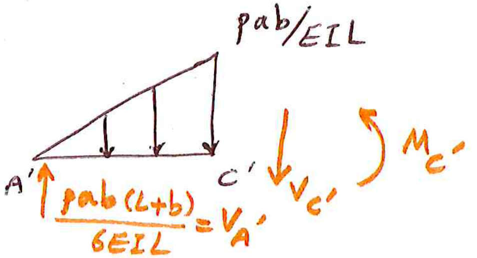
$$\Rightarrow \boxed{V_{B'} = -\frac{Pab(2L-b)}{6EIL}}$$

پس خواهیم داشت:

$$\boxed{\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \circlearrowright \quad \text{ساعتگرد}}$$

$$\boxed{\theta_B = \frac{Pab(2L-b)}{6EIL} \circlearrowleft \quad \text{پادساعتگرد}}$$

حال به جابجایی نقطه c می‌رسیم. پس باید ممان را در نقطه c' به دست آوریم. پس بایستی در نقطه‌ی c' از تیر مزدوج مقطع زده و $M_{c'}$ را محاسبه کنیم.



$$\sum M_{c'} = 0 \Rightarrow$$

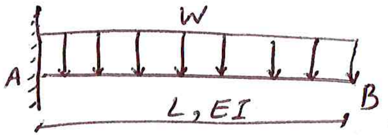
$$\frac{Pab(L+b)}{6EIL} \times a - \frac{1}{2} a \left(\frac{Pab}{EIL}\right) \times \frac{a}{3} - M_{c'} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{c'} = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}}$$

پس $\boxed{y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EIL} \downarrow}$ ⊛⊛

⊛ نکته : برای کنترل جواب ، چون می‌دانیم اگر $a=b$ باشد باید $y_c = \frac{PL^3}{48EI}$ شود (این مسئله را قبلاً حل کرده‌ایم) باید حالت $a=b=\frac{L}{2}$ را در معادله‌ی ⊛⊛ فوق قرار دهیم ⊛

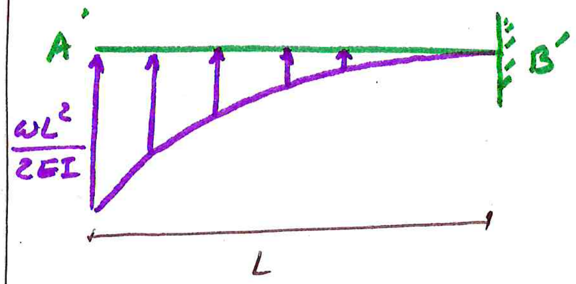
مثال ۳ : تیر طره‌ای



$\theta_B , y_B = ?$

دیاگرام ممان

تیر مزدوج



اگر دیاگرام رسم کنیم

تیر مزدوج: $\sum F_y = 0 \Longrightarrow V_{B'} = \frac{1}{3} \times \frac{wL^2}{2EI} \times L$

$$\Longrightarrow V_{B'} = \frac{wL^3}{6EI}$$

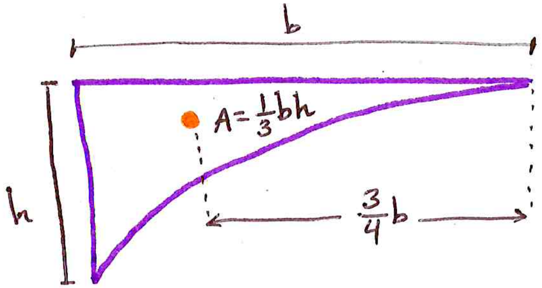
پس $\boxed{\theta_B = \frac{wL^3}{6EI} \circlearrowright \text{ساعتگرد}}$

از طرف دیگر $\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow \frac{wL^3}{6EI} \times \frac{3}{4}L - M_{B'} = 0$

پس $M_{B'} = \frac{wL^4}{8EI}$

بنابراین $\boxed{y_B = \frac{wL^4}{8EI} \downarrow}$

⊛ توجه : در مورد شکل زیر مساحت و مرکز سطح به صورت داده شده است



⊛

فرض کنید در مثال ۲ جابجایی حداکثر را هم به عنوان سوال مطرح می‌کردند؟ جابجایی حداکثر جایی است که مماس افقی داشته باشیم. فاصله‌ی این نقطه از سمت چپ را x_M فرض می‌کنیم. وقتی در x_M شیب صفر باشد یعنی در تیر مزدوج باید برش صفر باشد. در تیر مزدوج رابطه‌ای برحسب x_M برای برش بدست می‌آید که می‌توان آنرا برابر صفر قرار داد. بعد از محاسبه x_M

حدت

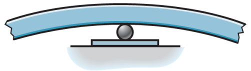
باید ممان را در نقطه x_m (در تیر مزدوج) محاسبه کنیم تا مقدار جابجایی حداکثر را بدست آوریم.

حال به سراغ شرایط مرزی می‌رویم. اگر در داخل تیر اصلی مثلاً مفصل داشته باشیم تیر مزدوج به چه صورت در می‌آید؟ مفصل زیر را فرض کنید

گفتیم در تیر اصلی θ و y برای ما مهم است و در تیر مزدوج به ترتیب V و M. پس این که در تیر اصلی ممان در مفصل صفر است برای ما اهمیتی ندارد. چون در تیر اصلی ما به دنبال θ و y هستیم. صفر بودن ممان در مفصل در دیاگرام ممان خودنمایی خواهد کرد.

در تیر اصلی جابجایی در نقطه‌ی مفصل شرط خاصی دارد یا خیر؟ بله می‌تواند بالا و پایین برود. پس $y \neq 0$ بنابراین در تیر مزدوج باید $M \neq 0$ باشد. θ در نقطه‌ی مفصل هم دارای چپ و راست متفاوت است. بنابراین $0 \neq \theta^L \neq \theta^R$ است. بنابراین در تیر مزدوج $V^L \neq V^R \neq 0$ باید باشد.

اگر غلطک داخلی داشته باشیم این شرایط برقرار می‌شود.



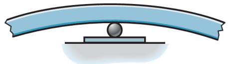
$M \neq 0$

$V^L \neq V^R \neq 0$

در غلطک V^L و V^R به اندازه عکس‌العمل تکیه‌گاه غلطکی با هم تفاوت دارند. نکته‌ی دیگری نیز وجود دارد، اینکه مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه برابر می‌شود با $\theta^R - \theta^L$. چون $V^L = \theta^L$ و $V^R = \theta^R$ و چون V^L و V^R به اندازه R از هم فرق دارند (R عکس‌العمل تکیه‌گاه) بنابراین اختلاف θها برابر R است

تیر اصلی $\Delta\theta \approx R$ تیر مزدوج

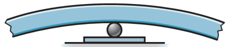
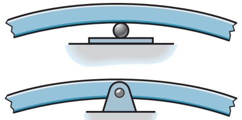
حالت دیگر: ممکن است در تیر اصلی تکیه‌گاه داخلی داشته باشیم



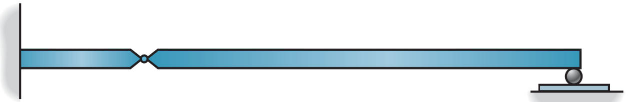
در تکیه‌گاه فوق $y = 0$

$\theta \neq 0$

پس در تیر مزدوج باید $\begin{cases} M = 0 \\ V \neq 0 \end{cases}$ باشد. این حالت با یک مفصل داخلی قابل بدل کردن است

تیر اصلی	تیر مزدوج
$y \neq 0$  $\theta^L \neq \theta^R \neq 0$ مفصل	 $M \neq 0$ $V^L \neq V^R \neq 0$
$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$M = 0$ $V \neq 0$  مفصل

پس تیر اصلی اگر به شکل زیر باشد



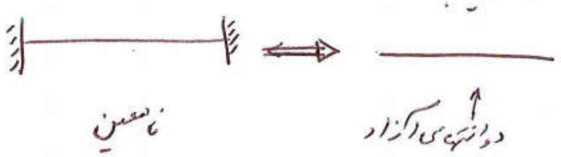
آنگاه تیر مزدوج به شکل زیر در می‌آید:

تیر واقعی زیر هم

به صورت مزدوج زیر است

آیا امکان دارد تیر مزدوجی ناپایدار باشد؟

اگر قرار باشد تیر مزدوج ناپایدار باشد باید سازه‌ی اصلی نامعین باشد



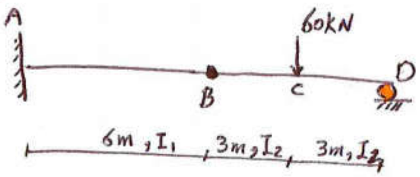
اگر تیر مزدوج نامعین باشد آنگاه سازه اصلی‌مان ناپایدار بوده است.

بنابراین امکان دارد که سازه مزدوج‌مان ناپایدار باشد ولی این موضوع هیچ اهمیتی ندارد چرا که تیر مزدوج در واقعیت وجود خارجی ندارد. از تیر مزدوج می‌توان برای تحلیل سازه‌های نامعین هم استفاده کرد که در آینده این محاسبه را انجام خواهیم داد.

حل هفدهم:

مثال ۱:

شکل ۱



$E = 2\times10^8\ kN/m^2$ نقطه‌ی B: مفصل داخلی است

$I_1 = 60,000\ cm^4$ ممان اینرسی AB برابر I_1 و

$I_2 = 45,000\ cm^4$ ممان اینرسی BD برابر I_2 است.

جابجایی مفصل B و چرخش چپ و راست مفصل را میخواهیم بدست آوریم:

$\Delta_B = ?$ ≈ ممان در تیر مزدوج

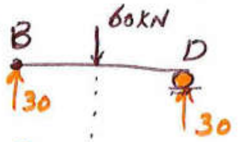
$\theta_B^R = ?$ $\theta_B^L = ?$

≈ ≈

معادل برش چپ و راست در تیر مزدوج

① گام اول تحلیل سازه است:

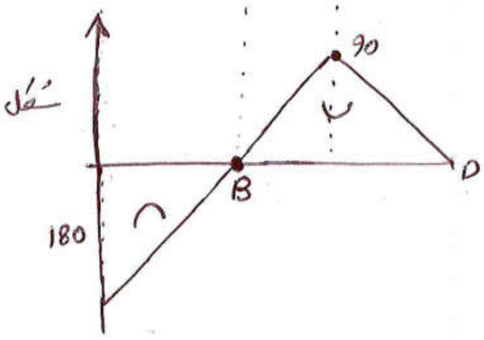
شکل ۲



شکل ۳

② رسم منحنی تغییرات لنگر

شکل ۴



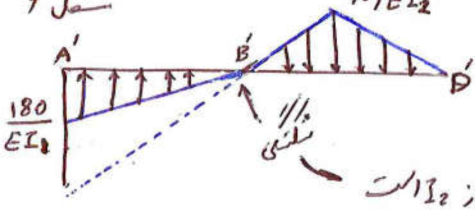
③ رسم تیر مزدوج

شکل ۵

$$\text{بار تیر مزدوج} = \frac{M_{\text{تیر اصلی}}}{EI}$$

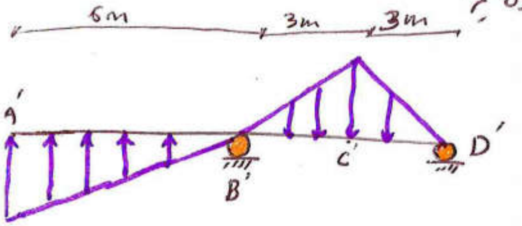
جایی که I کوچکتر است (در اینجا $I_2 < I_1$) $\frac{M}{EI}$ بزرگتر است و بالعکس. داریم (برخلاف دیاگرام لنگر‌ها نمودار $\frac{M}{EI}$ در نقطه‌ی C [illegible]

شکل ۶



چون I_1 بزرگتر از I_2 است

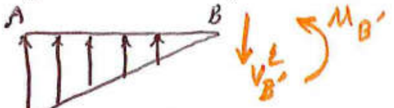
حال باید بارگذاری فوق (در شکل ۶) را به عنوان بارگذاری تیر مزدوج (در شکل ۵) فرض کنیم:



شکل ۷

حال باید ممان را در نقطه‌ی B' بیابیم (به دنبال Δ_B هستیم).

دیاگرام آزاد



شکل ۸

تعادل در تیر مزدوج: $\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{B'}^L = \left(\frac{180}{EI_1}\right)\times\frac{6}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{V_{B'}^L = \frac{540}{EI_1}}$$

$$\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow M_{B'} = \frac{180}{EI_1}\times\frac{6}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times6\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{B'} = \frac{2160}{EI_1}}$$

بدین ترتیب داریم

$$\Delta_B = M_{B'} = \frac{2160}{(2\times10^{8})(60000\times10^{-8})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_B = 0.018\ m = 1.8\ cm}$$

Δ_B جابجایی مثبت بدست می‌آید پس به سمت پایین است .

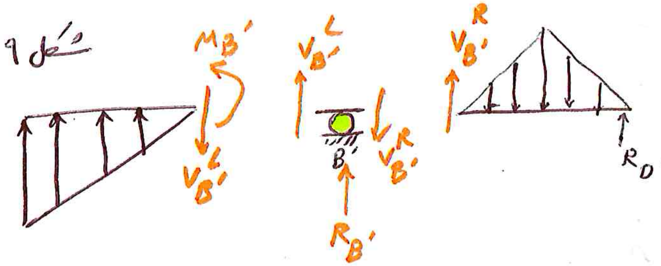
از طرفی

$$\theta_B^L = \frac{540}{(2\times10^{8})(60000\times10^{-8})} = 4.5\times10^{-3}\ Rad \curvearrowright$$

چرخش ساعتگرد است چون برش مثبت برای تیر مزدوج بدست آوردیم .

حال به سراغ سمت راست و θ_B^R می‌رویم . شکل زیر را فرض کنید

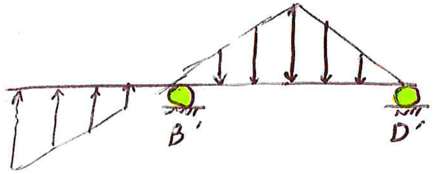
شکل ۹



کافی است $R_{B'}$ (عکس العمل تکیه‌گاه) را بدست بیاوریم و چون $V_{B'}^L$ را داریم می‌توانیم $V_{B'}^R$ را هم محاسبه کنیم .

$R_{B'}$ را با نوشتن تعادل بر روی کل تیر مزدوج می‌توان نوشت

شکل ۱۰



$$\sum M_{D'} = 0 \Rightarrow \frac{180}{EI_1}\times\frac{6}{2}\left[6+\frac{2}{3}\times6\right] + 6R_{B'}$$

$$-\frac{90}{EI_2}\times\frac{6}{2}\left[\frac{6}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow R_{B'} = -\frac{900}{EI_1} + \frac{135}{EI_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{B'} = -6\times10^{-3}}$$

با نوشتن معادله‌ی تعادل در قسمت وسط از شکل ۹ داریم :

$$V_{B'}^L + R_{B'} = V_{B'}^R$$

که متناظر است با

$$\begin{tikzcd} V_{B'}^L \arrow[d, leftrightarrow] & + & R_{B'} \arrow[d, leftrightarrow] & = & V_{B'}^R \arrow[d, leftrightarrow] \\ \theta_B^L & + & \Delta\theta_B & = & \theta_B^R \end{tikzcd}$$

بنابراین :

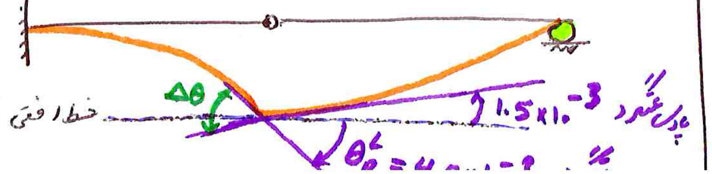
$$\theta_B^R = 4.5\times10^{-3} - 6\times10^{-3}$$

$$= -1.5\times10^{-3}\ Rad$$

$$\rightarrow \boxed{\left|\theta_B^R\right| = 1.5\times10^{-3}\ Rad \circlearrowleft}$$ پادساعتگرد

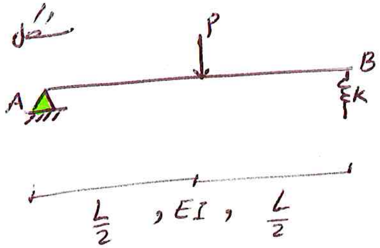
پس تیر به صورت زیر تغییر شکل خواهد داد .

شکل ۱۱



فرض کنید تیری داریم با تکیه‌گاه ارتجاعی به صورت زیر با EI ثابت در طول تیر . جابجایی زیر بار ، θ_A و θ_B را بدست آورید.

شکل ۱۲



$$\left\{\begin{array}{l} y_B \neq 0 \\ \theta_B \neq 0 \end{array}\right. ,\ y_B = \frac{P}{2K}\Big\}$$

← شرایط مرزی در نقطه‌ی B

در روش تیر مزدوج شرط مرزی B چگونه باید باشد ؟ در تیر اصلی جابجایی و چرخش داریم که متناظرش ممان و برش است ، تیر مزدوج . در تکیه‌گاه ارتجاعی B ، $y_B \neq 0$ است و $\theta_B \neq 0$ بنابراین در تیر مزدوج بایستی شرط مرزی‌ای بگذاریم که ممان و برش آن صفر نباشد . این حالت را تکیه‌گاه گیردار تامین می‌کند . برخلاف حالت تکیه‌گاه عادی ، در تکیه‌گاه ارتجاعی B ، علاوه بر اطلاعات $y_B \neq 0$ یک اطلاعات اضافی هم داریم به صورت $y_B = \frac{P}{2K}$. پس باید در تیر مزدوج هم شرط مرزی‌ای بگذاریم که ممان اش ، با $M = \frac{P}{2K}$ شود . اگر تکیه‌گاه کاملاً گیردار بگذاریم لنگر تیر مزدوج با جابجایی تیر اصلی نخواهد شد . یعنی در نقطه‌ی B' تیر مزدوج لنگری تولید می‌شود که برابر جابجایی نقطه B تیر اصلی نیست . پس باید شرط مرزی بگذاریم که در نقطه‌ی B' ممان تولید کند ، آن هم ممانی که ،

ست

$M=\frac{P}{2K}$ برابر است. این مورد را می‌توان با یک ممان متمرکز به تیر مزدوج اعمال کرد. ما اگر تکیه‌گاه ارتجاعی نداشتیم یعنی مثلاً

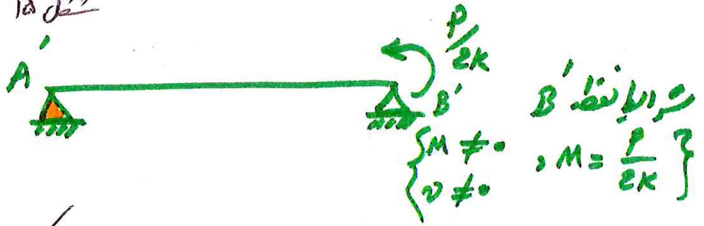
شکل ۱۳

آنگاه تیر مزدوج عبارت بود از.

شکل ۱۴

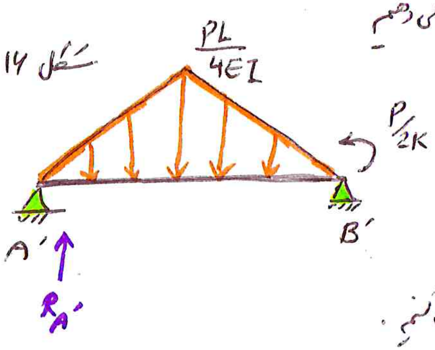
حال که تکیه‌گاه ارتجاعی داریم بایستی در تیر مزدوج در نقطه B' یک ممان متمرکز اعمال کنیم. پس

شکل ۱۵



حال دیاگرام ممان تیر اصلی را حساب کرده و به صورت بار الاستیک روی تیر مزدوج قرار می‌دهیم

شکل ۱۶



و شروع به حل مسئله می‌کنیم.

$$\sum M_{B'}=0 \Rightarrow L\times R_{A'} - \frac{P}{2K} - \left(\frac{PL}{4EI}\right)\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{2}=0$$

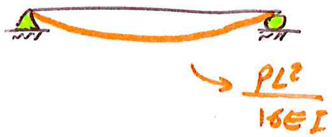
$$\Rightarrow R_{A'}=\frac{P}{2KL}+\frac{PL^2}{16EI}$$

حال θ_A برابر همان برش نقطه‌ی A' یا همان $R_{A'}$ خواهد بود.

$$\Rightarrow \boxed{\theta_A=\frac{P}{2KL}+\frac{PL^2}{16EI} \circlearrowright \text{ساعتگرد}}$$

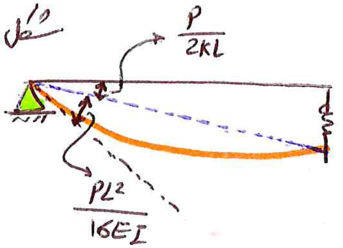
این نتیجه در واقع برهم‌نهی دو تغییر شکل است: یکی ناشی از تیر ① دیگری ناشی از تیر ②

شکل ۱۷



① اگر تکیه‌گاه عادی ⇐

شکل ۱۸



② اگر تکیه‌گاه ارتجاعی

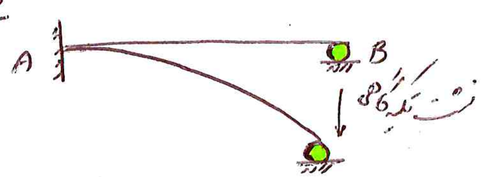
پس تکیه‌گاه ارتجاعی برهم‌نهی فنر و حالت عادی است.

<u>مثال ۲</u>: ممکن است تکیه‌گاه‌ها نشست کنند. مثلاً بین دو تکیه‌گاه اختلاف بیافتد. یا به یک تکیه‌گاه آسیب بخورد و دیگری در سالم باشد. به این نشست تکیه‌گاهی می‌گویند. ما داریم که سیستم ما معین باشد نشست تکیه‌گاهی نیرویی به وجود نمی‌آورد.

شکل ۱۹

اگر تیر نامعین باشد مثل شکل زیر

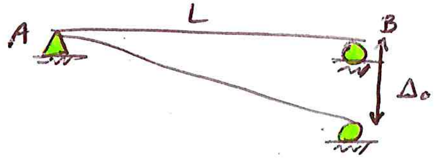
شکل ۲۰



با خم شدن تیر در آن نیرو به وجود آمده است. در شکل ۱۹ به صورت Rigid تکان خوردن تیر را داریم اما در شـ تغییر شکل ناشی از خمش داریم.

در سازه معین اگر به اندازه Δ_0 افت تکیه‌گاه داشته باشیم به راحتی شیب برابر $\frac{\Delta_0}{L}$ بدست می‌آید در نقطه‌ی A

شکل ۲۱



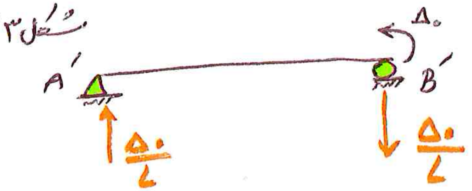
یا در وسط دهانه مشخص است که $\frac{\Delta_0}{2}$ جابجا می‌شود. یا از طریق تیر مزدوج می‌توان مسئله را حل کرد. چون در نقطه‌ی B به اندازه Δ_0 (تیر اصلی) جابجایی داریم در تیر مزدوج باید در نقـ

B' تکیه همان به اندازه‌ی Δ_0 بگذاریم

شکل ۲۲

سپس عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت زیر خواهد بود.

شکل ۲۳

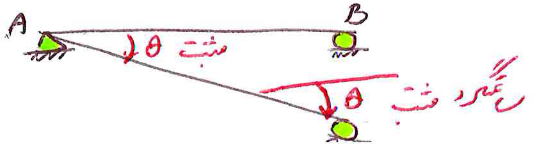


تیر مزدوج بار الاستیکی ندارد چرا که در تیر اصلی هیچ ممانی ندارد بنابراین $\frac{M}{EI}$ صفر بوده است. اما در تیر اصلی Δ_0 به سمت پایین داریم پس در B' یک لنگر مثبت داشتیم.

توجه کنید اینکه تیر مزدوج بار الاستیک ندارد به این معنا نیست که تیر مزدوج تغییر شکل ندارد چون Δ_0 ممان در نقطه‌ی B' داریم.

توجه کنید در تیر مزدوج در هر دو نقطه‌ی A' و B' برش مثبت داریم (طبق قرارداد برش مثبت $\uparrow \overset{V^+}{▬} \downarrow$). بنابراین هم A و هم B در تیر اصلی θ مثبت دارند.

شکل ۲۴



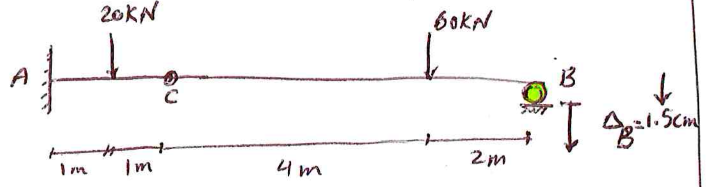
که هردو θ هم مقدارشان $\frac{\Delta_0}{L}$ است. برای بدست آوردن تغییر شکل در وسط دهانه باید در آن نقطه برش زده و مقدار ممان را بدست بیاوریم که برابر می‌شود با:

در تیر مزدوج

$$\frac{\Delta_0}{L} \times \frac{L}{2} = \frac{\Delta_0}{2}$$

مثال ۳:

شکل ۲۵



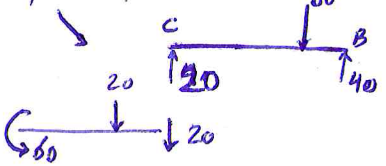
$E = 2\times10^8 \frac{KN}{m^2}$

$I = 10,000\ cm^4$

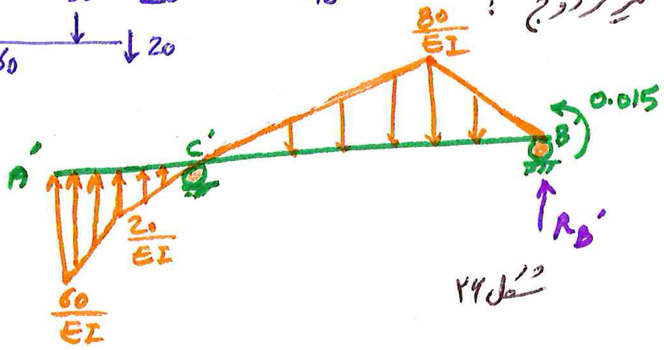
در تیر فوق جابجایی تکیه‌گاه B به سمت پایین داریم به اندازه $\Delta_B = 1.5cm$

تغییر حرکت در تیر را تعیین کنید؟

محاسبه‌ی دیاگرام‌ها



تیر مزدوج:



شکل ۲۶

برای یافتن تغییر شکل ماکزیمم در تیر اصلی باید به دنبال شیب صفر بگردیم.

شیب جابجایی در تیر اصلی صفر است که در تیر مزدوج برش صفر باشد

حول نقطه‌ی C' لنگر می‌گیریم و عکس‌العمل B' را بدست می‌آوریم

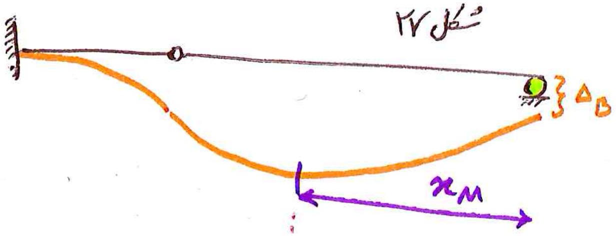
$$R_{B'} = \frac{145}{EI} - \frac{0.015}{6} = 0.00475 \uparrow$$

ناشی از خمش ناشی از افت

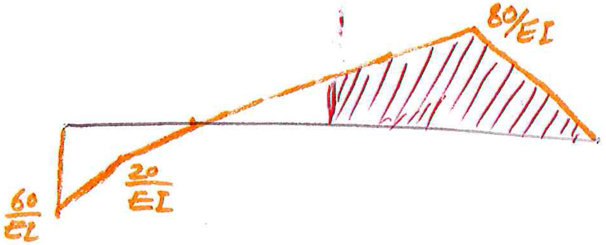
حال باید دنبال جایی باشیم که برش صفر شود.

تغییر شکل کیفی تیر به صورت زیر است که در x_M ماکزیمم رخ می‌دهد

شکل ۲۷



شکل ۲۸



x_M باید بدست بیاید به گونه‌ای که مساحت هاشور خورده فوق برابر $R_{B'}$ شود. با حل این مسأله خواهیم داشت

$V = 0$ @ conjugate beam

$\Rightarrow x_M = 2.19\,m$

مقدار تغییر شکل ماکزیمم برابر ممان است که در نقطه‌ی x_M از ...

این مسئله باید تعادل داشته باشد.

$$\sum M_{B'} = 0$$

$$\frac{xL}{EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{2L}{3}-\frac{PL}{2EI}\times\frac{L}{4}\times\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{L}{2}\right)=0$$

(توجه کنید که تیر مزدوج ناپایدار است اما اهمیتی ندارد چون تیر واقعی ثبت)

$$\Longrightarrow \boxed{x=\frac{5P}{16}}$$

پس مسئله‌ی نامعین حل شد. بقیه حل نیز بسیار ساده خواهد بود.

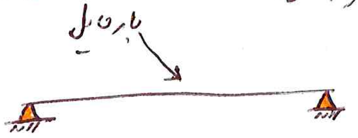
مثال: یک سازه‌ی ۳ درجه نامعین

شکل ۴۰

اگر ممان A و B را داشته باشیم مسئله را می‌توان حل کرد.

شکل زیر را نگاه کنید که به تیر بار مایل وارد شده است

شکل ۴۱

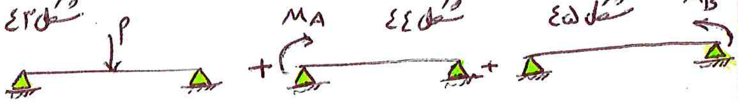


تیر فوق یک درجه نامعین است که نامعینی آن وابسته به نیروی محوری است. اگر باری مایل وارد شود آنگاه هر تکیه‌گاه مقداری از مولفه‌ی افقی این نیروی مایل را تحمل خواهد کرد که از برابر بودن فشردگی سمت راست و کشیدگی سمت چپ تیر بدست خواهند آمد. این مسئله هنوز اهمیت ندارد. بنابراین تیر معادل شکل ۴۱ درصورت اعمال بار قائم قابل حل است.

در تیر شکل ۴۰ اگر ممان نقطه‌ی A و B را داشته باشیم مسئله حل می‌شود. پس معادل‌سازی می‌کنیم به صورت زیر

شکل ۴۲

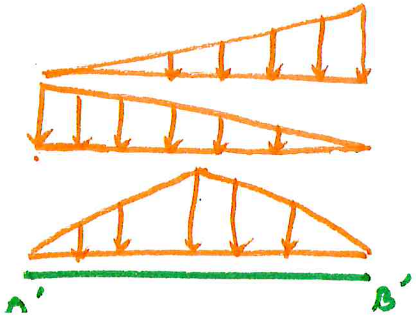
شکل ۴۳ شکل ۴۴ شکل ۴۵



دیاگرام ممان ٤

شکل ۴۶ شکل ۴۷ شکل ۴۸

پس تیر مزدوج داریم به صورت دو سر آزاد با بارگذاری برآیند سه بارگذاری شکل ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ تقسیم بر EI



شکل ۴۹

حال کافی است $\sum M_{A'}=0$ و $\sum M_{B'}=0$ را بنویسیم. دو معادله خواهیم داشت که M_A و M_B را می‌توان از آن محاسبه کرد.

بدین ترتیب مبحث تیر مزدوج به پایان می‌رسد و از جلسه آینده مبحث انرژی را شروع خواهیم کرد.

بیاندیشید: تیر مزدوج تیر زیر را بیابید

جلسه هجدهم:

بحث روش‌های انرژی را برای محاسبه تغییر شکل‌ها از این جلسه آغاز می‌کنیم.

روش‌های انرژی: (Energy Methods)

ما بارگذاری روی عضو قرار می‌دهیم که منجر به جابجایی می‌شود. پس یک کاری انجام می‌شود که ناشی از انرژی است که ما صرف کرده‌ا این کار به صورت انرژی پتانسیل در عضو ذخیره می‌شود. مثلاً قرار دادن بار P روی فنر منجر به تغییر شکل (جابجایی) به اندازه Δ می‌شو که

$$\Delta=\frac{P}{K}$$

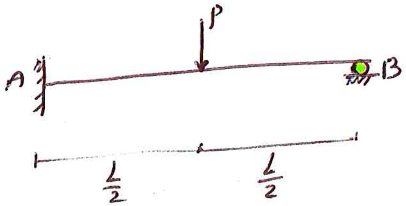
مزدوج تولید می شود. این ممان برابر است با

$R_{B'} \times 2.19$ + مقدار لنگری که مثلث هاشور خورده تولید می کند (شکل ۲۸)

$$\Longrightarrow \Delta_{max} = 0.022\,m = 2.2\,cm \downarrow$$

یکی از کاربردهای تیر مزدوج تحلیل سازه های نامعین است. چگونه؟ فرض کنید سازه زیر را داریم که نامعین است

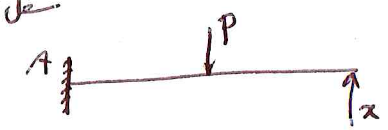
شکل ۲۹



این مبحث آخرین مبحث تحلیل سازه های یک است. ما قصد داریم تنها ایده اصلی را در اینجا توضیح دهیم.

ما اگر عکس العمل تکیه گاه B را داشته باشیم مسئله قابل حل خواهد بود. پس فرض کنیم مقدار عکس العمل B برابر x باشد.

شکل ۳۰

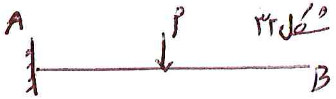


پس تیر فوق معادل تیر روبرو است.

حال توجه کنید که x چه نیروی اعمال شده باشد چه عکس العمل، در لنگر ایجاد شده در نقاط تیر فرقی نمی کند. پس فرض کنیم x یک نیرو است. پس با معادل سازی و برهم نهی داریم

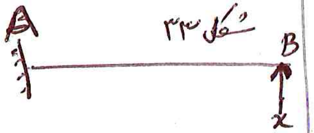
شکل ۳۱

معادل است با ≡



شکل ۳۲

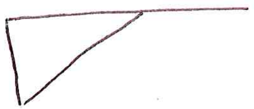
+



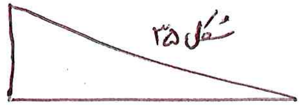
شکل ۳۳

دیاگرام ممان شکل های ۳۲ و ۳۳ به صورت زیر است

شکل ۳٤



+

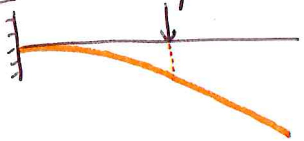


شکل ۳۵

که با هم superpose شده و ممان تیر اصلی را می دهند.

حال اگر x را به ما بدهند، ممان را هم داریم مسئله حل می شود. پس باید دنبال راهی برای یافتن x باشیم. به همین منظور از تغییر شکل ها کمک می گیریم. تغییر شکل سازه ی شکل ۳۲ و ۳۳ به صورت زیر است

شکل ۳۶



+

شکل ۳۷

که در مسئله این است که جابجایی نقطه ی B صفر است. پس x ی

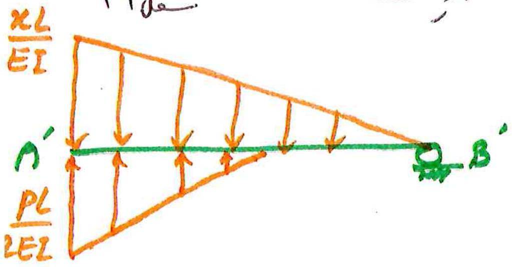
جواب مسئله خواهد بود که جابجایی نقطه ی B را صفر کند. یعنی جابجایی تیر شکل ۳۷ در نقطه ی B ناشی از x باید برابر با جابجایی تیر شکل ۳۶ در نقطه ی B ناشی از P باشد. از این موضوع x بدست می آید. این مفهوم مبنای روش تغییر شکل های سازگار است (consistent deformation). این بحث را در آخر این درس مورد بررسی خواهیم کرد.

حال مسئله فوق را چگونه می توان با تیر مزدوج حل کرد؟ تیر شکل ۱ یک تیر مزدوج دارد به شکل زیر

شکل ۳۸

بار الاستیک این تیر مزدوج همان دیاگرام ممان است. اما چون تیر نامعین است دیاگرام ممان را نمی توان رسم کرد. اما از این ایده استفاده می کنیم که در قسمت قبل توضیح دادیم. (شکل ۳٤ و ۳۵). پس تیر مزدوج به صورت زیر است

شکل ۳۹

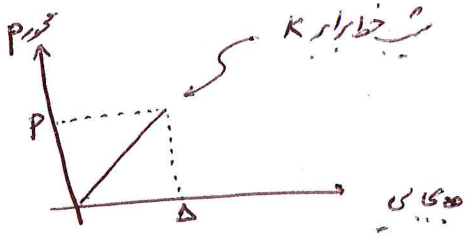


۵۵

پس در اینجا یک کاری انجام می‌دهیم که مقدارش به صورت زیر است

$$W = \frac{1}{2} P.\Delta$$ (نکته‌ی ۱ از ص ۸۰ را بخوانید)

چرا ضریب $\frac{1}{2}$ داریم؟ چون وقتی بارگذاری را به صورت تدریجی به سیستم اعمال می‌کنیم و از صفر به P می‌رسانیم و در این فرآیند جابجایی هم صورت می‌گیرد. نمودار نیرو ـ تغییر مکان به صورت زیر است



کار برابر است با میانگین P×Δ. به عبارتی کار برابر سطح زیر منحنی نیرو و تغییر مکان است. این کار به صورت انرژی پتانسیل در فنر ذخیره شده است و فنر توانایی انجام کار دارد. انرژی ذخیره شده را به صورت زیر نشان می‌دهیم

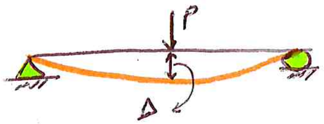
$$W_E = \frac{1}{2} P\Delta = \frac{1}{2}(K\Delta)\Delta = \frac{1}{2}K\Delta^2$$

انرژی ذخیره شده در فنر $= \frac{1}{2}K\Delta^2 = W_I$

W_E کار خارجی است که روی سیستم فنر اعمال می‌شود که جابجایی Δ را به صورت تدریجی ایجاد می‌کند. به همین دلیل آن را با W_E به معنی $W_{External}$ نمایش می‌دهیم. انرژی که در فنر ذخیره شده است را هم با W_I نمایش می‌دهیم.

پس هر چقدر کار انجام دهیم روی سیستم ذخیره می‌شود به شرطی که از اتلاف انرژی صرف‌نظر کرده باشیم و مصالح در محدوده الاستیک باشند.

به صورت معادل می‌توانیم تیر زیر را فرض کنیم. اتفاقی که در مثال

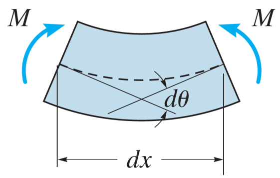


فنر در تیر فوق هم رخ می‌دهد. جابجایی در زیر بار به اندازه Δ حاصل می‌شود. می‌توان گفت تیر هم ماهیت فنری از خود بروز می‌دهد. کاری که به صورت خارجی در مورد تیر انجام می‌دهیم به صورت

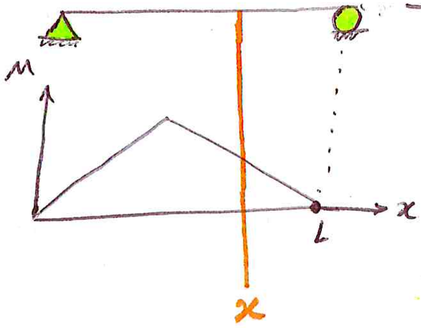
$$W_E = \frac{1}{2} P\Delta$$

است. چون نیروی P را اعمال کرده‌ایم و در یک فرآیند تدریجی جابجایی صورت گرفته است. متناظر W_I فنر در اینجا نیز یک انرژی درون تیر ذخیره می‌شود که به انرژی کرنشی مشهور است. از همین دیدگاه استفاده می‌کنیم:

بار P در داخل تیر تغییر شکل ایجاد کرده است و هر جزء المان کوچکی از تیر در اثر این بار خم شده و یک ممان در داخل آن ایجاد شده است. در هر المان یک لنگر وجود دارد که المان را خم می‌کند. این خم شدن مستلزم انرژی ذخیره شده در داخل آن است. پس کل انرژی کرنشی ذخیره شده در داخل تیر جمع انرژی‌های کوچکی است که در داخل المان‌ها ذخیره شده است. حال در هر المان کوچک چقدر انرژی ذخیره شده است؟ برابر است با لنگر ایجاد شده در داخل المان ضرب در تغییر زاویه تولید شده مانند



ضریب $\frac{1}{2}$. چون M در اثر P به وجود می‌آید. P تدریجی که اضافه می‌شود M نیز تدریجاً اضافه می‌شود تا به حالت نهایی خود برسد که مترادف دیاگرام ممان زیر است



پس به ازای هر المان dx در نقطه‌ی x می‌توان از نمودار فوق M را به دست آورد (از روی نمودار $M(x)$). این ممان عضو کوچک dx را به اندازه‌ای خم می‌کند که زاویه $d\theta$ در آن شکل گیرد. مقدار $d\theta$ را قبلاً داشته‌ایم که به صورت زیر است

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

کاری که در داخل المان ذخیره می شود عبارت است از

$$dW_I = \frac{1}{2}M\,d\theta = \frac{1}{2}M\frac{M}{EI}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{W_I = \int\frac{M^2}{2EI}dx}$$

⊛ نکته ۱: اساس روش های انرژی اصل بقای انرژی است.

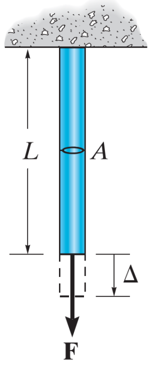
$$U_e = W_i$$

در اینجا کار خارجی و انرژی کرنشی ناشی از یک نیرو و یک ممان را بررسی می کنیم

کار خارجی - نیرو ←

اگر نیروی F باعث جابجایی به اندازه dx در همان جهت اعمال نیرو شود آنگاه:

$$dU_e = F.dx \Rightarrow U_e = \int_0^x F.dx \quad ①$$



حال فرض کنید این نیرو به صورت تدریجی به میله ی روبرو اعمال شود و از صفر به P برسد. کشش آمدگی نهایی میله Δ می شود. اگر ماده رفتار الاستیک داشته باشد آنگاه

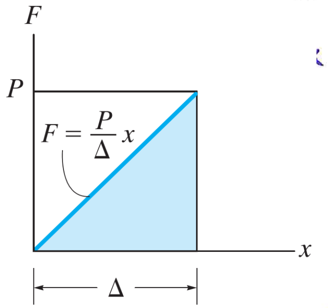
نیروی F برابر است با

$$F = (\frac{P}{\Delta})x \quad ②$$

با جایگذاری رابطه ی فوق در رابطه ی ① خواهیم داشت

$$U_e = \int_0^x(\frac{P}{\Delta})x\,dx = \frac{1}{2}P\Delta$$

که بیانگر مساحت مثلث روبرو است



آنگونه هم می شد نتیجه گرفت که چون F به صورت تدریجی از صفر به P می رسد، کار انجام شده برابر است با متوسط نیرو ($\frac{P}{2}$) ضرب در جابجایی.

کار خارجی - ممان ←

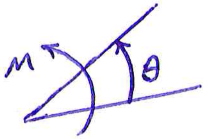
کار انجام شده توسط ممان از طرف M در زاویه چرخش

$$U_e = \int^{\theta} M\,d\theta$$

به دست می آید

درست به مانند نیرو، اگر ممان تدریجی اعمال شود خواهیم داشت

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta$$



⊛

پس به صورت کلی کار خارجی

$$W_E = \frac{1}{2}P\Delta$$

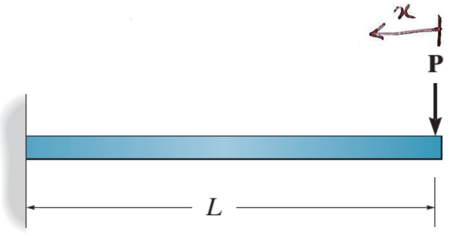
بر روی سازه انجام شده و انرژی

$$W_I = \int\frac{M^2}{2EI}dx$$

در داخل آن ذخیره می شود که انرژی کرنشی نامیده می شود. اگر از اتلاف انرژی صرف نظر کنیم باید $W_E = W_I$ باشد.

M را به صورت تابعی از x داریم پس می توان W_I را محاسبه کرده و از آنجا Δ را محاسبه کنیم.

مثال:



از روش های قبل می دانیم که جابجایی نقطه ی B باید $\frac{PL^3}{3EI}$ باشد. می خواهیم از روش انرژی این کار را انجام دهیم.

اگر x را به صورت نمایش داده شده در شکل فوق بگیریم خواهیم داشت

$$M(x) = -px$$

$$\Rightarrow W_I = \int\frac{(-(px))^2}{2EI}dx = \frac{p^2L^3}{6EI}$$

$$W_E = \frac{1}{2}P\Delta_B \,,\; W_E = W_I \Rightarrow \boxed{\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}}$$

تا در رابطه‌ی $d\theta = \frac{M}{EI} dx$ علامت منفی را حذف کردیم.

چون مفهوم انرژی پیش می‌آید تمام قراردادهای قبلی را حذف می‌کنیم. اگر ممان تولید شده و $d\theta$ ناشی از آن هم جهت باشند کار مثبت انجام می‌شود و اگر خلاف هم باشند کار منفی. اگر یک بار بر روی تیر قرار دهیم جابجایی با آن هم راستاست یعنی کار مثبت است. در داخل هم ممانی ایجاد می‌شود با یک $d\theta$ که چون هم جهت اند کار مثبت است. به همین دلیل هم علامت بودن M و $d\theta$ علامت منفی لازم نبود.

روش‌های انرژی بسیار متنوع هستند. روشی که الان ما در حال بررسی آن هستیم روش «کار خارجی = کار داخلی» است. این روش خیلی محدود است. در این روش باید یک بارگذاری داشته باشیم و محل آن نیز جابجایی را باید در همان راستا از ما بخواهد. در محاسبه‌ی کرنش داخلی و انرژی داخلی مشکلی نداریم. چون حتی اگر سه بارگذاری هم داشته باشیم به راحتی $M(x)$ بدست می‌آید. اگر دو بارگذاری داشته باشیم آنگاه

$$W_E = \frac{1}{2}\Delta_1 P_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 P_2$$

دو مجهول داریم اما یک معادله $W_E = W_I$ داریم پس قابل حل نیست.

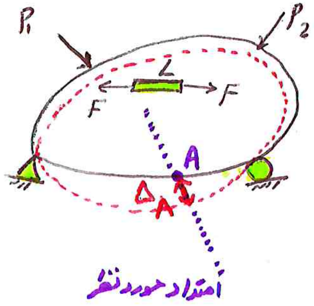
البته در روش گفته شده حتماً نباید یک بار اعمال کنیم. می‌توانیم یک ممان متمرکز به جای P متمرکز اعمال کنیم و چرخش را در آن نقطه محاسبه کنیم (چرخش و نه جابجایی).

پس چگونه می‌توان بر این ضعف غلبه کرد و روش کلی‌تری بدست آورد؟ پاسخ در روش «کار مجازی» نهفته است.

روش کار مجازی (virtual work):

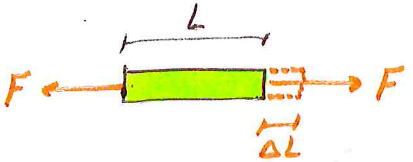
این روش که گاهی به روش بار واحد هم شناخته می‌شود توسط آقای برنولی Bernaulli ابداع شده است (سال ۱۷۱۷).

در این روش فرض می‌کنیم که هر سازه‌ای با هر بارگذاری می‌توانیم داشته باشیم و انرژی‌ها به روش‌های مختلف می‌توانند اعمال شده و در داخل سیستم ذخیره شوند. فرض می‌کنیم جسمی داریم (می‌تواند تیر، خرپا یا قاب باشد) با تعدادی تکیه‌گاه و تعدادی بارگذاری و ما جابجایی را در نقطه‌ی سومی و در امتداد دیگری (امتدادی غیر از امتداد اعمال نیرو) دیگری می‌خواهیم (نقطه‌ی A) که در شکل با Δ_A نمایش داده‌ایم.



تحت اثر بارگذاری‌ها جسم تغییر شکل می‌یابد و به صورت خط چین فوق (قرمز رنگ) در می‌آید.

فرض کنید عضو محوری در داخل جسم قرار گرفته است که تحت اثر نیروی داخلی قرار می‌گیرد. طول این عضو L است که داخل اش نیروی F تولید می‌شود. در اثر این F، تغییر طول ΔL را داریم



کار خارجی برابر است با (برای کل سازه)

$$W_E = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2$$

که به صورت انرژی کرنشی (مانند شکل فوق) در داخل س ذخیره می‌شوند. ΔW_I در جزء نشان داده شده در شکل فوق برابر است با

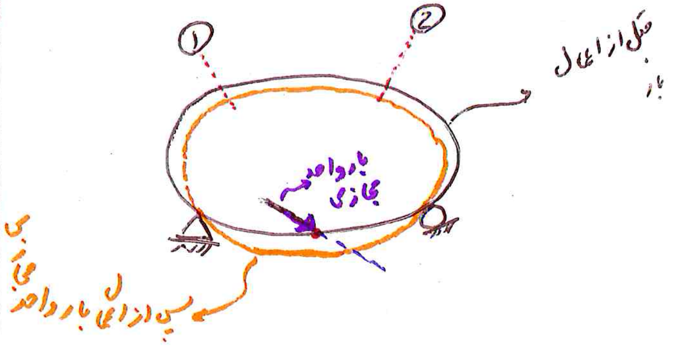
$$\Delta W_I = \frac{1}{2} F \Delta L$$

بنابراین برای کل سازه خواهیم داشت

$$W_I = \sum \frac{1}{2} F \Delta L$$

فعلاً نمی‌توانیم از معادلات فوق و شکل $W_E = W_I$ مجهولات را در بیاوریم. چون مجهول و تعداد معادلات داریم، کاری که می‌کنیم این است. فرض می‌کنیم نیروهای P_1 و P_2 را حذف می‌کنیم و به جای آن یک بار واحد در نقطه‌ی A اعمال می‌کنیم. در اثر این بار واحد که

به صورت مجازی به جسم (در نقطه‌ی A) اعمال شده است کل سازه دچار تغییر شکل می‌شود. این سیستم مجازی در شکل زیر آمده است.



در شکل بالا خط چین‌های بالا، خط راستای نیروهای P_1 و P_2 را نشان داده است. خط چین پایینی راستایی است که قرار است در آن جهت جابجایی را حساب کنیم. بار واحد نیز در این راستا اعمال می‌شود به صورت مجازی.

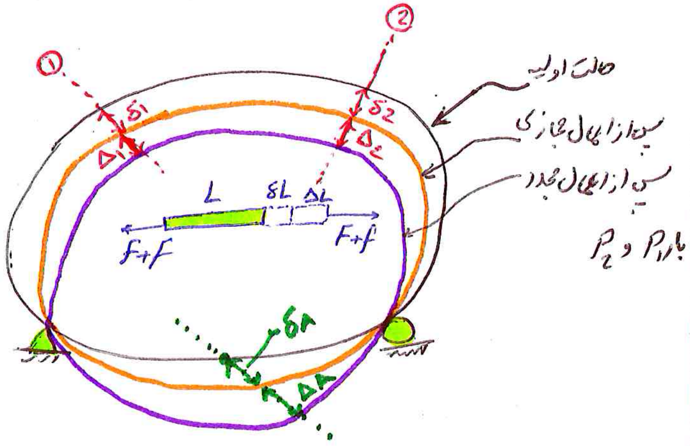
در سیستم مجازی به جای Δ_A از δ_A استفاده می‌کنیم. در نقاط ① و ② که محل نیروهای P_1 و P_2 حالت واقعی هستند نیز δ_1 و δ_2 ایجاد می‌شود. حال به سراغ عنصر داخلی به طول L می‌رویم که تحت این بار مجازی یک نیروی f در داخل آن ایجاد می‌شود و یک δl. در اینجا نیز خواهیم داشت:

$$W_E=(\frac{1}{2})\times 1\times\delta_A$$

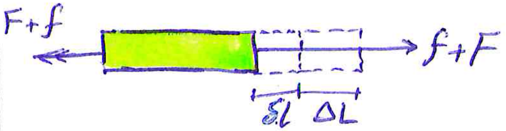
$$W_I=\sum\frac{1}{2}f\,\delta l$$

باز نمی‌توانیم از این معادلات به جواب برسیم. بنابراین سراغ قسمت اصلی مسئله می‌رویم. فرض می‌کنیم که بار واحدی داده‌ایم و یک سیستم تغییر شکل یافته و یک حالت تعادل مجازی بدست آورده‌ایم.

حال به این سیستم مجازی بارهای اصلی را اعمال می‌کنیم. چون از محدوده‌ی خطی خارج نمی‌شویم، تغییر شکل‌های مازاد بعد از اعمال P_1 و P_2 به سیستم مجازی همان تغییر شکل‌های سیستم اصلی است. با اعمال P_1 و P_2 به سیستم مجازی یک تغییر جدید به وجود می‌آید.



حال ببینیم در فرآیند اعمال مجدد P_1 و P_2 چه اتفاقی رخ می‌دهد. قبل از آن تکلیف قطعه‌ی داخلی را روشن می‌کنیم که پس از اعمال مجدد به حالت زیر در می‌آید



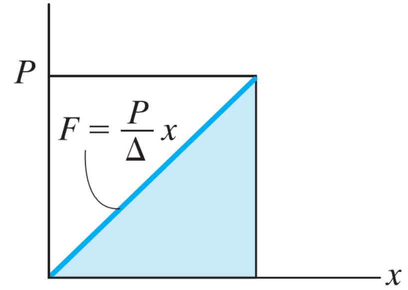
حال فرآیند کار داخلی و خارجی را برای حالت اعمال مجدد P_1 و P_2 می‌نویسیم

$$\frac{1}{2}P_1\Delta_1+\frac{1}{2}P_2\Delta_2+1\times\Delta_A$$

ترم سوم به این دلیل ضریب $\frac{1}{2}$ نمی‌خواهد: چون بار مجازی به صورت تدریجی اعمال نشده است بلکه قبل از اعمال P_1 و P_2 و پس از آن وجود داشته است. به نکته زیر توجه کنید

⊛ نکته ۲:

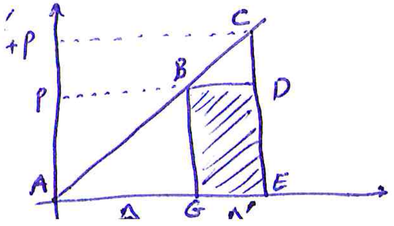
در نکته ۱ گفته شد که کار برابر نمودار زیر منحنی است



حال فرض کنید همچنان که نیروی P روی سیستم وجود دارد و اعمال می‌شود یک نیروی F' اضافی نیز به مجموعه بیافزاییم و در اثر F'، سازه دچار تغییر شکل مجددی به اندازه Δ' می‌شود. کاری که توسط P (و نه F') در اثر جابجایی اضافی Δ' انجام می‌شود برابر است با

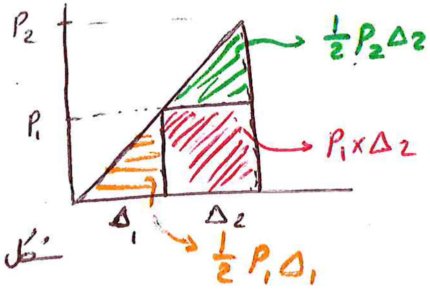
$$U_{e'}=P\Delta'$$

این کار معادل مساحت سطح مستطیل هاشور خورده مقابل است.



پس به صورت کلی، اگر P به سیستم اعمال شود و سپس F به آن وارد گردد، کار کل انجام شده توسط دو نیرو برابر مساحت مثلث ACE است. مثلث ABG کار نیروی P در اثر جابجایی Δ را نشان می‌دهد. مثلث BCD کار نیروی F در اثر جابجایی Δ' است و سطح هاشورخورده‌ی مستطیلی BGDE هم کار نیروی P است زمانی که جابجایی Δ' در اثر F رخ می‌دهد ⊛

در حالت حاضر نیز



شکل.

برای اینکه کل انرژی W_E را بدست بیاوریم داریم

$$W_E = \underbrace{\left[\frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 + (1)\Delta_A\right]}_{\text{برابر}} + \underbrace{\frac{1}{2}(1)\delta_A}_{\text{برابر}}$$

و

$$W_I = \left[\sum \frac{1}{2}F\Delta L + \sum f\Delta L\right] + \sum \frac{1}{2}f\delta L$$

حال اگر این دو را باهم مساوی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\boxed{\underset{\text{مجازی}}{(1)}\ \underset{\text{واقعی}}{\Delta_A} = \sum \underset{\text{مجازی}}{f}\cdot\underset{\text{واقعی}}{\Delta L}}$$

این معادله کلید حل مسئله است.

ΔL: تغییرشکل‌های داخلی ناشی از بارگذاری واقعی

← اگر در سازه تغییرشکل‌های ناشی از خمش را بررسی می‌کنیم f در بالا همان لنگرهای داخلی هستند و ΔL ها همان $d\theta$ های ایجاد شده

← اگر در سازه نیروی محوری و تغییرات ناشی از آن را بررسی می‌کنیم آنگاه f نیروی محوری است و ΔL هم تغییر طول محوری.

تغییرشکل‌های ناشی از خمش ⇒

$$f = \overset{\text{لنگر ناشی از بار مجازی}}{m(x)}$$

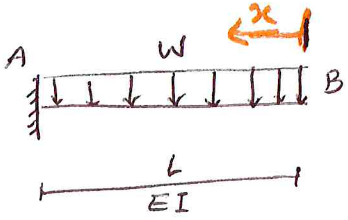
$$\Delta L = d\theta = \frac{\overset{\text{لنگر بار واقعی}}{M}}{EI}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_A = \int \frac{Mm}{EI}dx}$$

M: لنگر ناشی از بار واقعی

m: بار واقعی را حذف کرده و در نقطه‌ی مدنظر برای محاسبه به جای نیروی مجازی یک قرار می‌دهیم. m لنگر این بار مجازی است.

مثال:



$\Delta_B , \theta_B = ?$

گام‌های حل مسئله:

① معادله تغییرات لنگر تحت اثر بارگذاری واقعی

$M(x) = -\frac{wx^2}{2}$ (محور x در شکل نشان داده شده است)

② محاسبه m ناشی از بار واحد مجازی، اول فرض کنید Δ_B را میخواهیم محاسبه کنیم

شکل

$$\Longrightarrow m(x) = -x$$

$$\Longrightarrow \Delta_B = \int_0^L \frac{(-\frac{wx^2}{2})(-x)}{EI}dx = \frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

③ حال می‌خواهیم θ_B را محاسبه کنیم. حال باید بار واحدمان را از جنس چرخش قرار دهیم

شکل

پس m در این حالت برابر است با:

$$\Rightarrow m(x) = 1$$

$$\Rightarrow 1\times\theta_A = \int_0^L \frac{-\frac{wx^2}{2}\times 1}{EI}dx = -\frac{wL^3}{6EI}$$

چون منفی است یعنی جهتش خلاف چرخش ↺1 ای که واحدی است که در نظر گرفتیم. پس

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI} \curvearrowright$$

اگر بخواهیم تحت اثر خمش تغییر شکل های خمشی را بخواهیم بررسی کنیم داریم :

برای تیر
$$1\times \Delta_A = \int \frac{Mm}{EI}\, dx$$

برای قاب
$$1\times \Delta_A = \underbrace{\sum}_{\text{روی تمامی اعضا}} \int \frac{Mm}{EI}\, dx$$

حال فرض کنید بخواهیم تغییر شکل های ناشی از نیروی محوری را بررسی کنیم که عمدتاً روی خرپاها کاربرد دارد (در سازه های دیگر تغییرات محوری نسبتاً کوچک اند). یک بار در اثر بار واقعی سازه را تحلیل می کنیم و یک بار در اثر بار مجازی. فرض کنید N بارگذاری واقعی و n بارگذاری [illegible] باشد (مجازی). در رابطه ی

$$(1)\ \Delta_A = \sum f . \Delta L$$

f همان n می شود و به جای ΔL، $\frac{NL}{EA}$ قرار می گیرد. پس

$$(1)\times \Delta_A = \sum \frac{NnL}{EA}$$

جلسه نوزدهم :

گفتیم اگر خمش را بخواهیم بررسی کنیم مثلاً در تیرها بخواهیم تغییر شکل ناشی از خمش را بررسی کنیم آنگاه در رابطه ی

$$1\times \Delta = \sum f \cdot \Delta L$$

f همان لنگر خواهد بود تحت اثر بار مجازی

$$f \simeq m$$

ΔL نیز تغییر شکل های داخلی ناشی از عملکرد خمشی بار واقعی است. تغییر شکل های ناشی از خمش همان چرخش ها هستند یعنی $d\theta$ های ناشی از بار واقعی. بنابراین

$$\Delta L \simeq \frac{M}{EI}\, dx$$

بنابراین در نتیجه خمش خواهیم داشت :

$$\Delta = \int \frac{Mm}{EI}\, dx$$

اگر تغییر شکل های ناشی از نیروی محوری را بررسی کنیم آنگاه یک نیروی واحد مجازی قرار داده و نیروهای محوری ناشی از آن را در اعضا قرار می دهیم. اگر آن را با n نشان دهیم آنگاه:

$$f \simeq n \quad \text{در نیروی محوری}$$

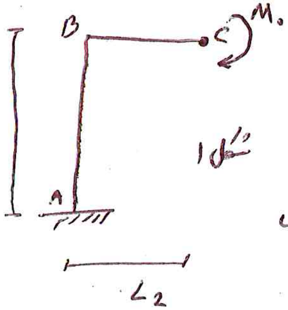
بارگذاری محوری واقعی که در اثر بارگذاری واقعی تولید می شود را با N نشان می دهیم و بارگذاری محوری ایجاد شده ناشی از بارگذاری مجازی را با n نشان می دهیم. در این حالت ΔL برابر است با

$$\Delta L \simeq \frac{NL}{EA}$$

بنابراین اگر نیروی محوری مدنظر باشد آنگاه

$$\Delta = \sum \frac{NnL}{EA}$$

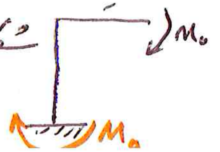
مثال ۱ : قاب زیر را فرض کنید با بارگذاری M_0 روی C. جابجایی عمودی C را بیابید.



شکل ۱

چون هدف بررسی تحت خمش است باید دیاگرام ممان را تحت اثر بارگذاری واقعی بدست بیاوریم (M). سپس یک بار مجازی روی C بگذاریم و m را بدست آوریم و با قرار دادن در انتگرال ها جابجایی C را به دست بیاوریم.

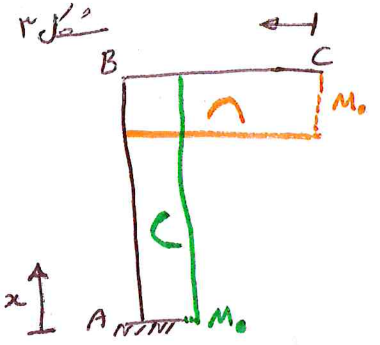
در عضو CB هر جا که مقطع بزنیم ممان منفی M_0 است. عضو AB هم به همین نحو است. عکس العمل های قائم و افقی نقطه A صفر است و فقط یک لنگر M_0 به صورت نمایش داده شده در رو برو در نقطه ی A تولید می شود



شکل ۲

منحنی تغییرات لنگر :

شکل ۳



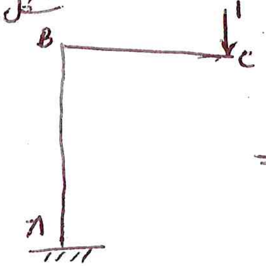
چون انتگرال باید بگیریم معادلات لنگر را با گرفتن جهت های x به صورت شکل بالا می نویسیم

عضو AB : $M(x) = -M_0$

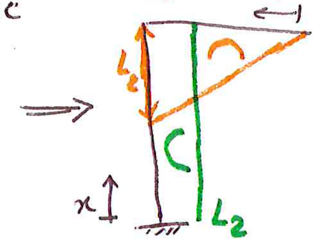
عضو BC : $M(x) = -M_0$

حال باید m را بدست بیاوریم. ممان متمرکز را حذف کرده و بارگذاری واحد مجازی را قرار می دهیم. چون تغییر شکل قائم می خواهیم در نقطه C می بایست یک بار واحد به صورت زیر باید قرار داده شود

شکل ٤



شکل ۵



عضو AB : $m(x) = -L_2$

عضو BC : $m(x) = -x$

فرض می کنیم EI ثابت است

جابجایی عمودی C

$$(\Delta_c)_v = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{L_1}(-M_0)(-L_2)\,dx + \int_0^{L_2}(-M_0)(-x)\,dx\right\}$$

مشارکت عضو AB در جابجایی C

مشارکت عضو BC در جابجایی

$$\Rightarrow (\Delta_c)_v = \frac{1}{EI}\left\{M_0 L_1 L_2 + M_0\frac{L_2^2}{2}\right\}$$

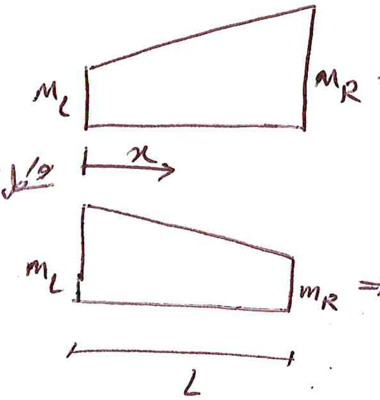
$$\Rightarrow \boxed{(\Delta_c)_v = \frac{M_0 L_2}{EI}\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)\downarrow}$$

چون بارگذاری مجازی ۱ به سمت پایین مثبت درنظر گرفته شده است پس چون $(\Delta_c)_v$ عمودی مثبت است پس به سمت پایین خواهد بود.

در اینجا مشارکت هر دو عضو AB و BC در جابجایی C به صورت مثبت بود. ممکن است در سایر مسائل اعضا اثر هم را خنثی کنند. در اینجا چون خمش AB و BC هر دو در یک جهت بود این موضوع پیش می آید.

نکته: همانطور که دیده می شود در معادله ی $\Delta = \int \frac{Mm}{EI}dx$ در واقع دو لنگر واقعی M و لنگر مجازی m را درهم ضرب می کنیم و انتگرال گیری می کنیم. برای اینکه بتوانیم از انتگرال گیری بپرهیزیم حالت زیر را

در نظر بگیرید که M و m به صورت زیر باشند



$$\Rightarrow M(x) = M_l + \frac{M_R - M_L}{L}x$$

$$\Rightarrow m(x) = m_l + \frac{m_R - m_l}{L}x$$

آنگاه

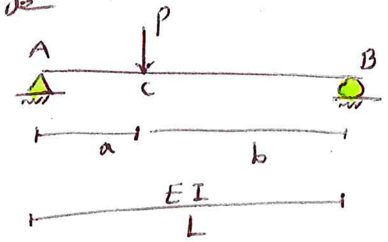
$$\int_0^L Mm\,dx = \frac{L}{6}\left[m_l(2M_l+M_R)+m_R(2M_R+M_l)\right]$$

از این گونه روابط هم می توان استفاده کرد (بدین منظور جدول انتگرال گیری ای وجود دارد

نکته: چون بار مجازی همیشه واحد است لنگرش خطی می شود

مثال:

شکل ۷

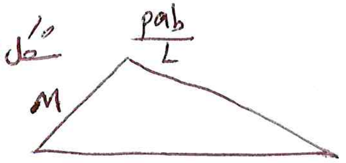


$\theta_A = ?$

$\Delta_C = ?$

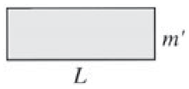
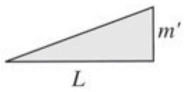
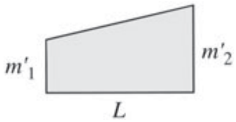
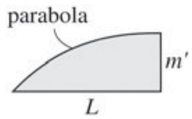
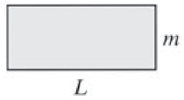
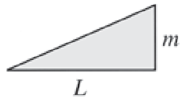
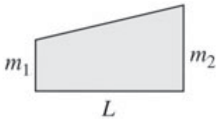
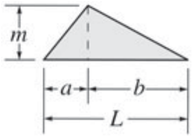
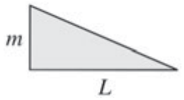
مرحله اول: دیاگرام ممان

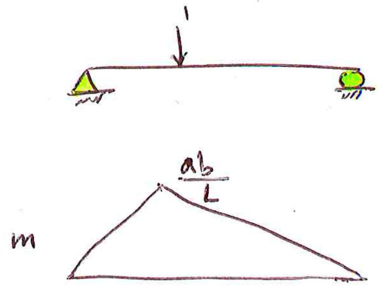
شکل ۸



اگر Δ_C بخواهیم باید یک بار واحد مجازی روی C قرار دهیم یعنی

جدول محاسبه انتگرال $\int_0^l mm'dx$

$\int_0^L m\,m'\,dx$				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m_1' + m_2')L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m_1' + 2m_2')L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1 + m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1 + 2m_2)L$	$\frac{1}{6}[m_1'(2m_1 + m_2)$ $+ m_2'(m_1 + 2m_2)]L$	$\frac{1}{12}[m'(3m_1 + 5m_2)]L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'(L + a)$	$\frac{1}{6}m[m_1'(L + b) +$ $m_2(L + a)]$	$\frac{1}{12}mm'\left(3 + \frac{3a}{L} - \frac{a^2}{L^2}\right)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m_1' + m_2')L$	$\frac{1}{4}mm'L$

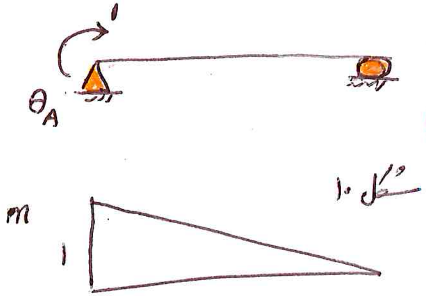


شکل ۹

حال می‌توان انتگرال $\frac{Mm\,dx}{EI}$ را حساب کرد .

$$\Delta_c = \int \frac{Mm}{EI}dx = \frac{1}{3EI}\frac{Pa^2b^2}{L}$$

برای بدست آوردن θ_A باید بارگذاری اصلی را حذف و در نقطه‌ی A یک ممان متمرکز واحد قرار دهیم (چون هدف ما شیب چرخش است بارگذاری واحد ما در اینجا از نوع ممان متمرکز است)

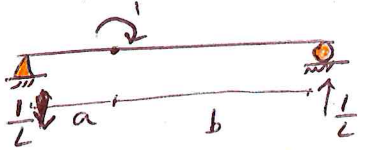


شکل ۱۰

حال می‌توان انتگرال را محاسبه کرد

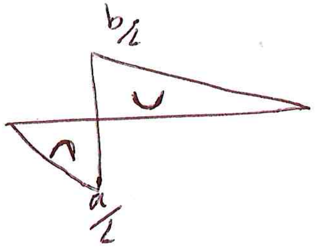
$$\boxed{\theta_A = \frac{Pab}{3LEI}\left(\frac{a}{2}+b\right)\circlearrowright}$$

اگر θ_c را بخواهیم محاسبه کنیم باید در نقطه‌ی c یک ممان متمرکز واحد قرار دهیم آنگاه



شکل ۱۱

آنگاه دیاگرام شکل



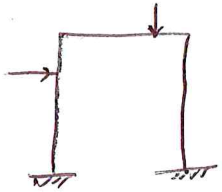
شکل ۱۲

انتگرالگیری بدست خواهد داد

$$\theta_c = \frac{Pab}{EI}[b-a]$$

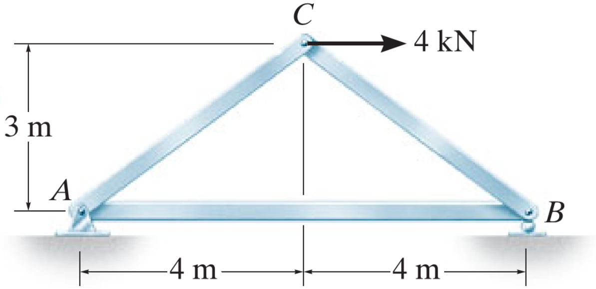
بسته به اینکه a بزرگتر باشد یا b چرخش خلاف ساعت یا ساعتگرد خواهد بود .

حال از خمش به بحث نیروی محوری و تغییر شکل ناشی از آن می‌پردازیم . قاب زیر را فرض کنید در اینجا علاوه بر خمش و برش نیروی محوری هم داریم



پس برای تغییر شکل نهایی باید تغییر شکل هر سه نیرو را جمع کرده و نتیجه نهایی را حاصل کنیم . در تیرها چون نیروی محوری خیلی کوچک است از آنها صرف نظر می‌کنیم اما در مورد خرپاها که نیروی غالب نیروی محوری است ، تغییر شکل‌ها محوری هستند. بنابراین اکثر مثال‌ها در زمینه خرپاست اگر هدف یادگیری تغییر شکل نیروی محوری باشد.

مثال :



شکل ۱۳

میخواهیم جابجایی قائم C را حساب کنیم $(\Delta_c)_v$.

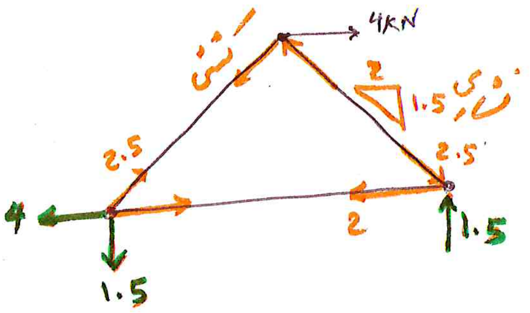
پس یکبار سیستم را تحلیل کرده و نیروهایی که در اعضا بدست می‌آید را N می‌نامیم. یکبار هم بار واحد مجازی به جای بار واقعی می‌گذاریم (چون در c قرار است جابجایی حساب کنیم) و تحلیل سازه کرده و نیروها را محاسبه می‌کنیم و n نام گذاری می‌کنیم بعد در فرمول $\sum \frac{NnL}{EA}$ قرار داده جواب را بدست می‌آوریم

فرض کنید EI همه اعضا یکسان است .

$E = 200\ Gpa$

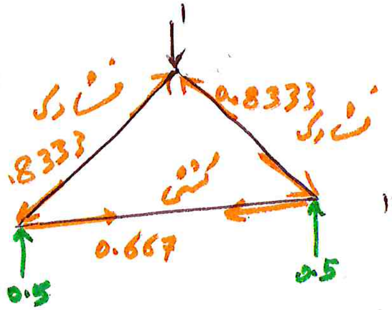
$A = 400\ mm^2$

در فاز اول سیستم را تحلیل نموده عکس‌العمل‌ها و نیروهای داخلی را محاسبه می‌کنیم



شکل ۱۴

تحلیل سازه تحت بار واحد مجازی



شکل ۱۵

چون خرپاها تعداد اعضای زیادی دارند معمولاً محاسبات را در جدول قرار می‌دهند (مثبت: کشش، منفی: فشار)

Member	N	n	L	N.nL
AB	2	0.667	8	10.67
AC	2.5	-0.833	5	-10.41
BC	-2.5	-0.833	3	10.41

$$\Rightarrow \sum NnL = 10.67$$

ما به دنبال $(\Delta C)_v$ هستیم بنابراین

$$\rightarrow (\Delta_c)_v = \frac{10.67}{EA} = 0.000133\,m \downarrow$$ سمت پایین

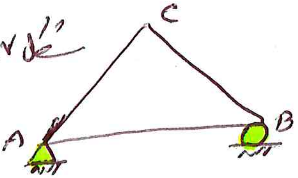
$$= 0.133\,mm$$

برخی از عوامل وجود دارند که بارگذاری به خودی خود حساب نمی‌شوند اما باعث به وجود آمدن بار می‌شوند مانند تغییرات درجه حرارت. اگر سازه معین باشد تغییر شکل ناشی از حرارت در داخل سازه نیرو ایجاد نمی‌کند. چون مثلاً تیر زیر را فرض کنید که گرم کنیم به صورت یکنواخت

شکل ۱۶

تیر تغییر طول می‌دهد. چون B تکیه‌گاه غلتکی است مشکلی پیش نمی‌آید حال اگر B مفصلی باشد آنگاه نمی‌تواند جابجایی افقی دهد بنابراین تحت فشار قرار می‌گیرد و در داخل آن تنش ایجاد می‌شود. فرض کنید سازه‌ی شکل زیر را داریم که عضو AB را تغییر دما می‌دهیم. آیا در داخل سازه نیرو ایجاد می‌شود؟ خیر

شکل ۱۷



چون طول AB زیاد می‌شود و C پایین می‌آید. اتفاق خاصی رخ نمی‌دهد. مثل این است که خرپای جدید با AB بزرگتر داشته باشیم پس تا وقتی معین است سازه‌ی ما نیرو تولید نمی‌شود اما تغییر شکل داریم. حال فرض کنید AB را 30° گرم کنیم

و می‌خواهیم $(\Delta_c)_v = ?$ را محاسبه کنیم.

چون هیچ نیرویی در اثر حرارت در داخل تولید نمی‌شود پ طبق فرمول $\Delta = \sum \frac{NnL}{EA}$ چون که $N=0$ (نیروی داخلی نا از بار خارجی‌ها که در اینجا بار خارجی حرارت است) آ نتیجه خواهد داد $\Delta = 0$. در صورتی که در واقعیت جابجایی وجود دار پس ایراد کار کجاست؟ اگر یادمان باشد در فرمول

$$1 \times \Delta = \sum f \cdot \Delta L$$

ΔL را با $\frac{NL}{EA}$ برابر قرار دادیم (ستون سوم صفحه 70)، اگر تغییر درجه حرارت داشته باشیم $\Delta L = \frac{NL}{EA}$ نیست. بنابراین در حالات تغییر حرارت ΔL برابر است با

$$\Delta L \simeq \alpha L \Delta t$$

پس

$$(\Delta_c)_v = \sum n \cdot \Delta t \cdot \alpha \cdot L$$

در این مسأله‌ی خاص چون Δt را فقط در عضو AB داریم نیا به $\sum$ هم نیست. پس باید n را در داخل عضو AB بدانیم که برابر است با 0.667 پس

ص ۷۴

$$(\Delta_c)_v = \sum n.\Delta t.\alpha.L$$

$$= (0.667)(30)(8)\alpha$$

$(\Delta_c)_v = 1,92\times10^{-3}\ m = 1.92mm \Longleftarrow \alpha = 1.2\times10^{-5}$ فرض

که به سمت پایین هم می باشد.

می بینید که جابجایی در اثر حرارت عدد قابل توجهی می تواند باشد.

* * *

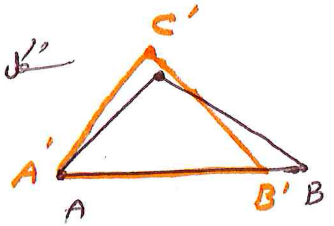
در برخی مواقع بارگذاری ها از نوع دیگری است. مثلاً سازه ای پیچ و مهره ای را وارد محل کرده و سرهم می کنیم. حال فرض کنید یکی از قطعات کوتاه یا بزرگ است. خیلی از مواقع این قطعه را سرد یا گرم می کنند تا جا برود. اگر سازه نامعین باشد این حرکت یک سری تنش در داخل سیستم آنهم قبل از وارد شدن بارگذاری اصلی ایجاد می کند. اگر مقدار زیاد باشد می تواند مشکل ساز باشد. اما اگر سازه معین باشد مشکل پیش نمی آید.

همین مورد خود بارگذاری است که ناشی از عدم دقت در ساخت است. حال فرض کنید در خرپای گفته شده مقداری کوتاه یا بزرگ ساخته شده باشد. جابجایی نقطه ی C را چگونه باید محاسبه کرد. در معادله ی

$$1\times\Delta = \sum f.\Delta L$$

در اینجا f همان n است و ΔL هم همان ΔL ایجاد شده است. اگر ΔL منفی باشد (کوچک شده باشد AB) آنگاه n که مثبت بود در عددی منفی ضرب می شود. پس Δ عددی منفی می شود. یعنی نقطه ی C بالا می رود.

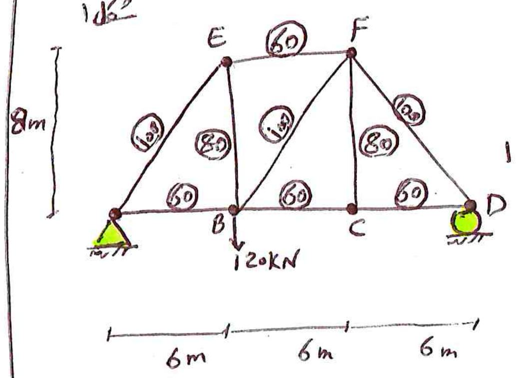
شکل ۱۸



جلسه بیستم :

مثال :

شکل ۱



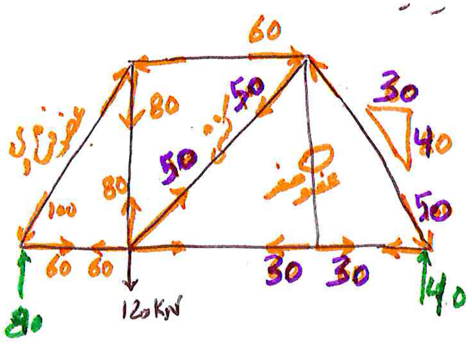
از جلسه پیش درباره ی تغییر شکل های حاصل از نیروی محوری بحث را آغاز کردیم. خرپای فوق داده شده است از جنس فولاد با $E=2\times10^{8}\ \frac{KN}{m^2}$. سطح مقطع اعضا هم در دایره ای روی اعضا داده شده است. مخصوصاً طوری سطح مقطع ها داده شده است که نسبت $\frac{L}{A} = 1000\ \frac{m}{m^2}$ شود تا راحت تر محاسبات را انجام دهیم.

میخواهیم جابجایی قائم نقطه ی B و جابجایی افقی D را محاسبه کنیم.

$$(\Delta_B)_v = ?$$

$$(\Delta_D)_H = ?$$

بایستی N و n را محاسبه کنیم. برای محاسبه N باید سازه را تحت بارهای واقعی تحلیل کنیم.



N در شکل روبرو داده شده است

شکل ۲

حال باید در جایی که قرار است تغییر شکل محاسبه کنیم یک نیروی واحد بگذاریم. چون فقط یک نیروی 120KN داریم و بار دیگری نداریم و میخواهیم جابجایی B را حساب کنیم n باید $\frac{1}{120}N$ باشد.

n ها مربوط به جابجایی B را با n_1 نشان می دهیم. پس

$$n_1 = \frac{1}{120}\times N$$

پس جدول را می توان برای این حالت رسم کرد:

Member	N	n_1	Nn_1	n_2	Nn_2
AB	60	$\frac{1}{2}$	+30	1	60
BC	30	$\frac{1}{4}$	7.5	1	30
CD	30	$\frac{1}{4}$	7.5	1	30
AE	-100	$-\frac{5}{6}$	83.3	0	0
BE	80	$\frac{2}{3}$	53.3	0	0
BF	50	$5/12$	20.83	0	0
FC	0	0	0	0	0
FD	-50	$-5/12$	20.83	0	0
EF	-60	$-\frac{1}{2}$	30	0	0

$$\sum Nn_1 = 253.3$$

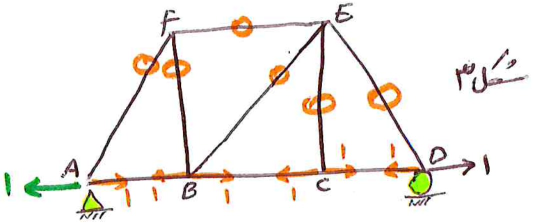
پس

$$(\Delta_B)_v = \sum \frac{Nn_1}{EA}L = \frac{253.3}{E}\frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow (\Delta_B)_v = 1.267\times10^{-3}\,m \Longrightarrow$$

$$\boxed{(\Delta_B)_v = 1.27\,mm \downarrow}$$

حال با گذاشتن بار واحد در نقطه ی D به سراغ محاسبه ی n_2 می رویم. بار واحد هم باید به صورت افقی باشد چون جابجایی افقی را لازم داریم:



شکل ۳

معلوم است که پل ABCD در کشش قرار می گیرد و قسمت بالا هیچ تأثیری در آن‌ها ندارد. با توجه به شکل قبل و جدول

$$\sum Nn_2 = 120$$

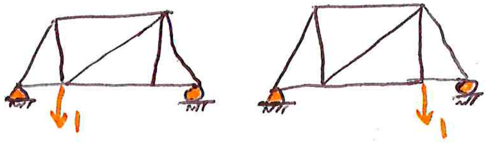
بنابراین

$$(\Delta_D)_H = \frac{120L}{EA} = \frac{120}{2\times10^8}\times\underbrace{1000}_{\frac{L}{A}\ \text{همان}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta_D)_H = 0.6\,mm \ \text{به سمت راست}}$$

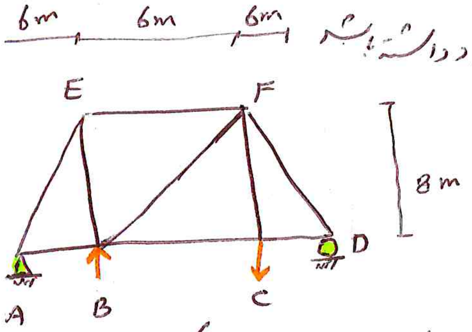
ممکن است بخواهیم بدانیم که در اثر نیروی اعمال شده در شکل قبل، به عنوان نمونه عضو BC چقدر از حالت تراز خارج می شود. باید جابجایی گره‌های B و C را حساب کنیم. پس باید جابجایی C را با قرار دادن یک بار واحد در نقطه ی C حساب کنیم تا n_3 را بدست آوریم و سپس $(\Delta_C)_v$ را بیابیم. آنگاه اختلاف جابجایی گره‌های C و B بدست می آید.

یک راه دیگر هم وجود دارد. ما باید دو شکل زیر را ببینیم



شکل ۴

و عبارت روبرو $\frac{L}{EA}\left[\sum Nn_3 - \sum Nn_1\right]$ را محاسبه کنیم که ما به التفاوت جابجایی ها است. پس می توان به جای $\sum Nn_3 - \sum Nn_1$ از عبارت $\sum N(n_3-n_1)$ استفاده کرد. حال می توانیم مسئله ای کلی تر را حل کنیم (به جای حل دو مسئله) که دو بار را به نوعی در خود داشته باشد

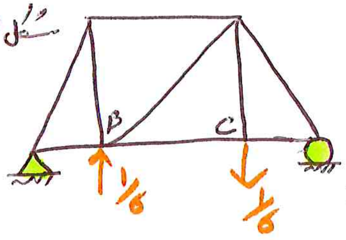


شکل ۵

در شکل بالا عملاً نوعی چرخش به خرپا می دهیم با کوپل 6. برای اینکه زاویه چرخش را بیابیم باید عبارت $\sum N(n_3-n_1)$ را بر عدد ۶ (طول BC) تقسیم کنیم. یعنی

$$\frac{\sum N(n_3-n_1)}{6}$$

پس می توان از همان اول به جای اعمال بار واحد باری را $\frac{1}{6}$ به مسئله اعمال کرد. یعنی داریم یک کوپل واحد به مسئله اعمال می کنیم. ما به دنبال چرخش عضو BC بودیم پس باید یک کوپل واحد به مسئله اعمال کنیم.



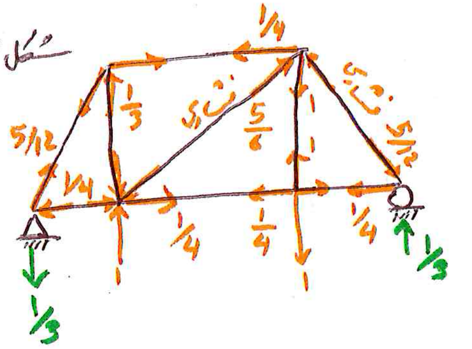
شکل ۶

در تیر اگر میخواستیم چرخش را محاسبه کنیم همان واحد می گذاشتیم ولی د

خرپا همان متمرکز واحد قابل اعمال نیست، پس از یک کوپل واحد استفاده می کنیم. (چرخش خرپا ← اعمال کوپل واحد، چرخش تیر ← اعمال لنگر متمرکز واحد)

ما در اینجا همان دو بار واحد را اعمال کرده و سیستم را تحلیل می کنیم

شکل ۷



عدد $n_1 - n_3$ را هم با n_4 نمایش می دهیم. پس

Member	n_4	Nn_4
AB	$-\frac{1}{4}$	-15
BC	$+\frac{1}{4}$	7.5
CD	$\frac{1}{4}$	7.5
AE	5/12	-41.66
BE	-1/3	-26.66
BF	-5/6	-41.6
Fc	1	0
FD	-5/12	20.83
EF	$\frac{1}{4}$	-15
	جمع	-104.16

پس $$(\Delta_{relative})_{BC} = \sum \frac{Nn_4L}{EA} = -5.21\times10^{-4}\,m$$

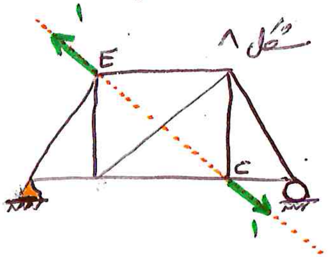
یعنی نقطه‌ی C نسبت به نقطه‌ی B بالا رفته است. برای چرخش خواهیم داشت

$$\theta_B = \frac{5.21\times10^{-4}}{6} = 8.68\times10^{-5}\ Rad \circlearrowleft$$ پادساعتگرد

طول BC

فرض کنید مثلاً بخواهیم محاسبه کنیم که فاصله‌ی دو گره E و C که قبل از بارگذاری ۱۰ متر است پس از بارگذاری چقدر می شود؟ (شکل ۱) با منطق قبلی‌ها در نقطه E یکبار باید بار واحد افقی قرار دهیم و جابجایی افقی را حساب کنیم، بار دیگر باید در E بار واحد قائم قرار دهیم و جابجایی قائم را حساب کنیم تا جایگاه جدید E را بدست آوریم. همین کار را باید برای نقطه‌ی C نیز انجام دهیم. با این ترتیب فاصله‌ی E و C را بدست آوریم.

ولی راه منطقی تری هم وجود دارد. باید بار واحد را به صورت زیر بگذاریم. (N همان قبلی است) ما میخواهیم n را محاسبه کنیم.



بدین منظور بارهای واحد را به صورت روبرو قرار می دهیم:

با این بارهای واحد فرمول

$$\sum \frac{NnL}{EA}$$

تک جواب جابجایی E و C را به دست خواهد داد. اگر جواب مثبت باشد یعنی دو گره از هم دور می شوند. اگر منفی باشد یعنی هم نزدیک می شوند.

سوال (بیاندیشید): فرض کنید بخواهیم میزان جابجایی یک گره را از وسط یک عضو محاسبه کنیم به چه نحو باید عمل کنیم؟

بحث بعدی ما تغییرشکل‌های ناشی از برش است. تاکنون در مورد تغییرشکل‌های ناشی از خمش و نیروی محوری صحبت کردیم.

تغییرشکل‌های ناشی از برش:

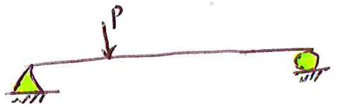
برای برش نیز همان روال قبلی حاکم است

$$1\times\Delta = \sum f\cdot\Delta L$$

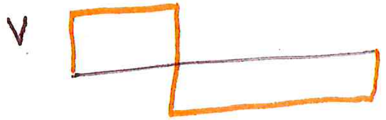
در حالت برش یکبار بارگذاری واقعی را در نظر می گیریم و کرنش برشی ایجاد شده را بدست می آوریم و جای ΔL قرار می دهیم. بار دیگر بار واحد مجازی قرار داده و برش ایجاد شده در مقطع را v می نامیم.

سپس تیر واقعی را فرض می‌کنیم به عنوان مثال

شکل ۹

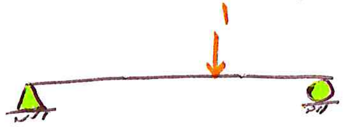


و V را محاسبه می‌کنیم



سپس یک بار واحد مجازی در نقطه‌ی مد نظر (که می‌خواهیم تغییر شکل را محاسبه کنیم) قرار می‌دهیم و v را بدست می‌آوریم:

شکل ۱۰



در رابطه $1\times\Delta = \sum f.\Delta L$ پارامتر f همان v است. چون f عبارت بود از نیروی داخلی متناظر با بارگذاری مجازی.

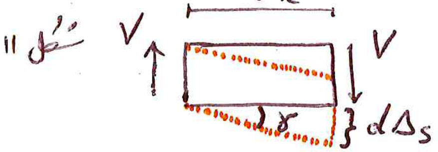
ΔL هم تغییر شکل معادل بارگذاری واقعی است.

به خاطر داریم که در هنگام محاسبه $d\theta$، یک عضو دیفرانسیل را جدا کردیم و بررسی کردیم که اگر تحت M قرار گیرد چه تغییر شکلی در آن ایجاد می‌شود. این تغییر شکل که همان $d\theta$ بود عبارت بود از

$$\frac{M}{EI}dx$$

در اینجا نیز یک جزء دیفرانسیلی فرض کنیم که تحت یک برش خالص V قرار دارد. در این صورت تغییر شکل برشی (خط چین) رخ می‌دهد.

شکل ۱۱



γ کرنش برشی است که به تنش برشی از طریق G ارتباط دارد

$$\tau = G\gamma$$

در اینجا یک $d\Delta_s$ ناشی از برش (shear) ایجاد می‌شود که برابر است با

$$d\Delta_s = \gamma dx$$

که $\gamma = \frac{\tau}{G}$ است.

برخلاف نیروی محوری که فرض می‌شد سطح مقطع تنش یکنواخت دارد در مورد برش بسته به سطح مقطع توزیع تنش متفاوت است.

اگر توزیع تنش یکنواخت در سطح مقطع داشتیم آنگاه اگر مقطع دارای برش V می‌بود تنش برابر می‌شد با $\frac{V}{A}$ و بنابراین

$$\gamma = \frac{V}{GA}$$

ولی میدانیم که تنش یکنواخت نیست. مثلاً در مورد سطح مستطیلی

شکل ۱۲: توز
تنش برشی

اگر توزیع تنش یکنواخت نباشد آنگاه

$$\gamma = \alpha\frac{V}{AG}$$

این α ضریبی است که به shape factor مشهور است اگر شکل طوری باشد که توزیع تنش یکنواخت باشد $\alpha=1$ است. برای مقطع مستطیلی $\alpha=1.2$، مقطع دایره‌ای $=\frac{10}{9}$

بنابراین ΔL در فرمول $1\times\Delta = \sum f.\Delta L$ برابر خواهد بود با:

$$\Delta l = \alpha\frac{V}{AG}dx$$

پس در حالت برش خواهیم داشت:

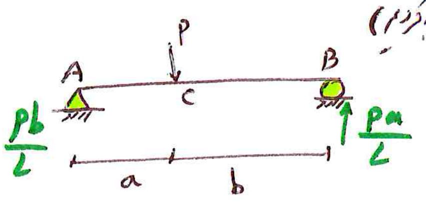
$$\boxed{\Delta_s = \int_0^L \frac{\alpha V v}{AG}dx}$$

تغییر ناشی از خمش را با Δ_m نمایش می‌دهیم و داشتیم

$$\Delta_m = \int\frac{Mm}{EI}dx$$

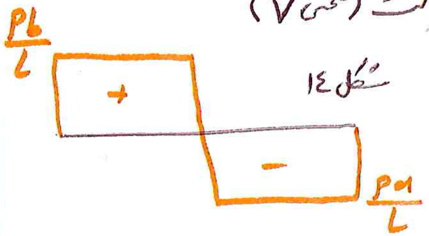
می‌توانید این دو رابطه‌ی فوق را با هم مقایسه کنید. تمامی محاسب در حالت برش شبیه محاسبات تغییر شکل ناشی از خمش است.

مثال: تیری داریم با بار p (که این مسأله را قبلاً حل کردیم و تغییر شکل های ناشی از خمش را محاسبه کردیم)



شکل ۱۳

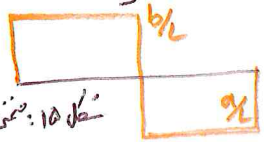
منحنی برش به صورت زیر است (منحنی V)



شکل ۱۴

با بارگذاری مجازی واحد در محل p (فرض کنید میخواهیم تغییر شکل نقطه‌ی زیر بار را محاسبه کنیم) خواهیم داشت

$$v = V \times \frac{1}{P} \Rightarrow$$



شکل ۱۵: منحنی v

اکنون می‌توان تغییر شکل ها را محاسبه کرد (فرض کنید مقطع مستطیل)

$$(\Delta_c)_s = \int \frac{\alpha V v}{AG}dx \rightsquigarrow$$

(استفاده از جدول انتگرال‌گیری و ضرب دو نمودار شکل ۱۴ و ۱۵ در هم دیگر)

$$= \frac{\alpha}{AG}\left[\left(\frac{Pb}{L}\right)\left(\frac{b}{L}\right)(a) + \left(\frac{-Pa}{L}\right)\left(\frac{-a}{L}\right)(b)\right]$$

$$= \frac{\alpha}{AG}\frac{pab}{L^2}(b+a) = \frac{\alpha}{AG}\frac{pab}{L}$$

به خاطر داریم که تغییر شکل خمشی در نقطه‌ی C را قبلاً معادل مقدار $(\Delta_c)_m = \frac{pa^2b^2}{2EIL}$ به دست آورده بودیم. تغییر شکل واقعی نقطه‌ی C برابر است با

$$\Delta_c = (\Delta_c)_m + (\Delta_c)_s$$

تا در روش های تیر مزدوج و انتگرال‌گیری مضاعف عملاً از تغییر شکل های محوری و برشی صرف نظر می‌کردیم. چون عمده‌ی تغییر شکل در تیرها ناشی از خمش است.

در تیرهای کوتاه، برش می‌تواند اهمیت پیدا بکند (چون L در مخرج آمده است L باید در حد a و b باشد). می‌توانیم ضریب زیر را تعریف کنیم

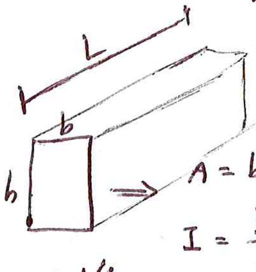
$$\left(a=b=\frac{L}{2} \text{ فرض}\right) \Rightarrow \beta = \frac{(\Delta c)_s}{(\Delta c)_m} = \frac{\left(\frac{\alpha}{AG}\frac{P}{L}\cdot\frac{L^2}{4}\right)}{\frac{P}{3EI}\frac{1}{L}\frac{L^4}{16}}$$

$$\Longrightarrow \beta = \frac{\alpha EI}{AG}\frac{1}{L^2}$$

G و E هم از طریق ضریب پواسون به هم مربوط اند. معمولاً

$$G \cong 0.4E$$

اگر مقطع مستطیلی (طول تیر L)



شکل ۱۶

$$\Rightarrow A = bh$$

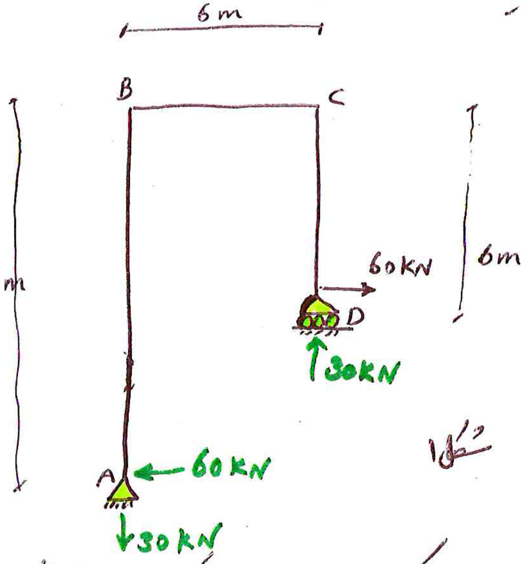
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\Rightarrow \beta = 3\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

با این ضریب می‌توان جایگاه تغییرات برشی را نسبت به خمشی می‌دهد. اگر h و L نزدیک هم باشند تغییرات برشی مهم می‌شوند. ولی معمولاً h از $\frac{1}{10}L$ کوچکتر است. بنابراین صرف نظر کردن از برش چندان تقریبی به بار نمی‌آورد.

جلسه بیست و یکم:

مثال: حل یک قاب که هر سه تغییر شکل خمشی، محوری و برشی در آن ایجاد می‌شود.

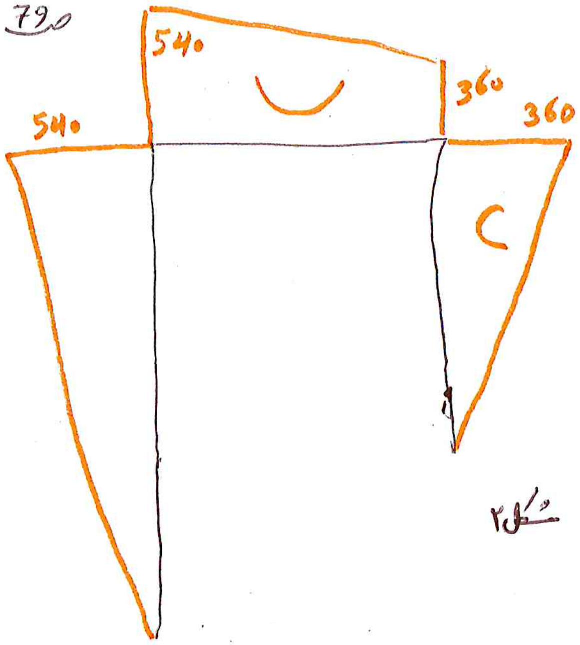


شکل ۱

میخواهیم به روش کار مجازی عمل کنیم. EI ها در سه عضو یکسان و در طول آن ثابت است. پیدا کنید: جابجایی نقطه‌ی D و چرخش نقطه‌ی D

گام اول: تحلیل سیستم است که عکس العمل ها را به دست می‌دهد که در شکل نشان دادیم.

با این عکس العمل ها می‌توان منحنی تغییرات لنگر را رسم کرد.



شکل ۲

پس M را بدست آوردیم. حال باید m_1 را محاسبه کنیم.

اگر بخواهیم $(\Delta_D)_H$ را حساب کنیم با ستی یک بارگذاری واحد افقی روی D بگذاریم. در اینجا پیداست که

$$m_1 = \frac{1}{60} M$$

حال خواهیم داشت

ناشی از خمش

$$\left[(\Delta_D)_H\right]_m = \sum \int \frac{M m_1}{EI} dx$$

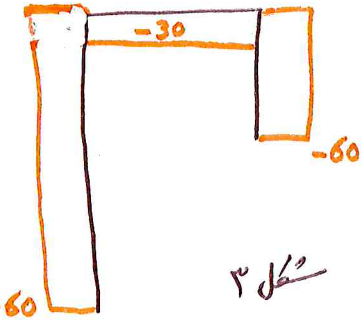
(محاسبه از طریق جدول انتگرال)

$\sum$ روی سه عضو قاب است. EI هم ثابت است. پس

$$\left[(\Delta_D)_H\right]_m = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3}(540)\overset{m_1}{(9)}\overset{\text{طول}}{(9)} + \frac{6}{6}\left[9\times(2\times540+360) + 6\times(2\times360+540) \right] + \frac{1}{3}\, 360\times6\times6 \right\} = \frac{1188}{EI}$$

حال باید دیاگرام برشی را رسم کنیم.

V برابر است با



شکل ۳

از طرف دیگر v_1 متناظر با بارگذاری مجازی واحد برابر است با

$$v_1 = \frac{1}{60} V$$

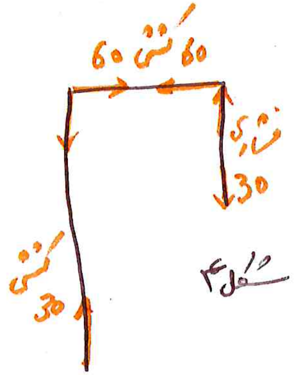
بنابراین (با فرض مقطع مستطیل $\alpha = 1.2$)

$$\left[(\Delta_D)_H\right]_{Shear} = \sum \int \frac{\alpha V v}{AG} dx =$$

$$\frac{1.2}{AG}\left\{ (+60)(1)(9) + (-30)(-\frac{1}{2})(6) + (-60)(-1)(6) \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{(\Delta_D)_H\right\}_S = \frac{71280}{GA}$$

حال سراغ نیروی محوری میرویم.



شکل ۴

پس N بدست آمد. n_1 هم برابر است با

$$n_1 = \frac{1}{60} N$$

پس

$$\left[(\Delta_D)_H\right]_{Axial} = \sum \frac{N n_1}{EA} L =$$

$$\frac{1}{EA}\left\{ (+30)(\frac{1}{2})(9) + (+60)(+1)(6) + (-30)(-\frac{1}{2})(6) \right\} = \frac{585}{EA}$$

$$\Rightarrow \left[(\Delta_D)_H\right]_a = \frac{285}{EA}$$

حاصل جمع تغییر شکل ناشی از خمشی، برشی و نیروی محوری، تغییر شکل کل را بدست می‌دهد. اگر سطح مقطع ها مستطیلی و بتنی، ابعاد 70x70 باشند ($E = 2\times10^7 \frac{KN}{m^2}$). دراینصورت

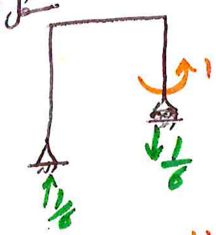
$$\left[(\Delta_D)_H\right]_m = 9.8\ cm$$

$$\left[(\Delta_D)_H\right]_s = 0.3\ mm$$

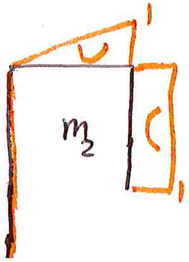
$$\left[(\Delta_D)_H\right]_a = 0.06\ mm$$

حال میخواهیم θ_D را حساب کنیم. بدین منظور باید در نقطه‌ی D یک لنگر واحد قرار دهیم. پس سازه را تحلیل کنیم تا m_2 را محاسبه کنیم

شکل ۱



$\xrightarrow[\text{لنگر}]{\text{دیاگرام}}$



شکل ۵

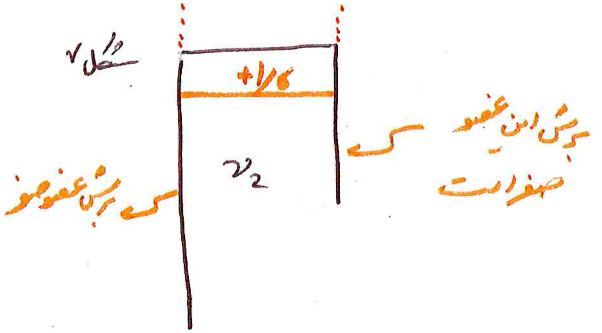
که لنگر در کل عضو ثابت است

$$(\theta_D)_m = \sum \int \frac{Mm_2}{EI}\,dx =$$

$$\frac{1}{EI}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)(1)(360) + \frac{1}{6}\times(1)(6)\left[2\times360+540\right]\right\}$$

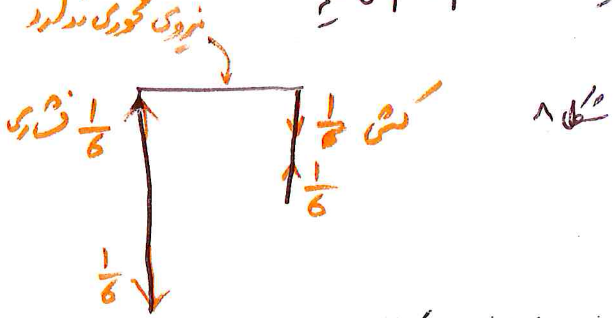
$$= \frac{2340}{EI} = 5.85\times10^{-3}\ \text{Rad} \circlearrowleft$$

حال سراغ برش می‌رویم و منحنی برش را رسم می‌کنیم (v_2)



شکل ۷

نیروی محوری را هم رسم می‌کنیم



شکل ۸

حال داریم ($\alpha = 1.2$):

$$(\theta_D)_s = \sum \int \frac{\alpha V v_2}{AG}\,dx$$

$$\frac{\alpha}{GA}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)(-30)(6)\right\} = \frac{-36}{GA} = -9.18\times10^{-6}\ \text{Rad} \circlearrowright$$

و برای نیروی محوری

$$(\theta_D)_a = \sum \frac{Nn_2}{EA} L =$$

$$\frac{1}{EA}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)(-30)(6) + \left(-\frac{1}{6}\right)(30)(9)\right\}$$

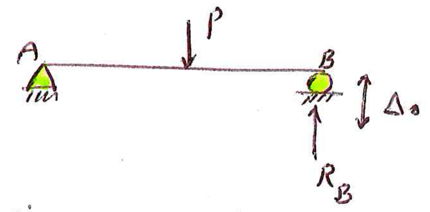
$$\Rightarrow (\theta_D)_a = \frac{-75}{EA} = -7.65\times10^{-6}\ \text{Rad} \circlearrowright$$

اگر در روش کار مجازی تکیه‌گاه ارتجاعی داشته باشیم یا حالت‌های خاص دیگر چگونه باید عمل کرد؟ قبل از اینکه به دیگر راه‌های روش انرژی بپردازیم اندکی راجع به این مسائل بحث می‌کنیم.

در فرمول داشتیم

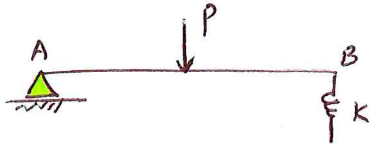
$$1\times\Delta = \sum f\Delta L$$

۱ بار مجازی خارجی، Δ جابجایی واقعی خارجی، f نیروی داخلی مجازی و ΔL تغییر شکل‌های داخلی واقعی است. پس سمت چپ رابطه خارجی و سمت راست داخلی است. حال فرض کنید نشست تکیه‌گاهی داشته باشیم. یعنی تیر زیر علاوه بر بارگذاری که دارد، تکیه‌گاه B آن نیز به اندازه‌ی Δ_0 نشست کند چگونه باید این Δ_0 را وارد مسئله کرد؟ تکیه‌گاه B عکس‌العمل دارد به اسم R_B. وقتی تکیه‌گاه نشست پیدا می‌کند R_B به اندازه‌ی $R_B\cdot\Delta_0$ کار انجام می‌دهد (کار خارجی)



شکل ۹

می‌توان نوع دیگری هم به مسئله نگاه کرد. همیشه می‌توان نشست تکیه‌گاه را به عنوان یک تکیه‌گاه ارتجاعی هم درنظر گرفت. پس بحث تکیه‌گاه ارتجاعی را به عنوان حالت کلی‌تر بررسی می‌کنیم



شکل ۱۰

می‌توانیم بگوییم تکیه‌گاه B در اینجا یک عکس‌العمل R_B دارد که یک نشست به اندازه‌ی $\frac{R_B}{K}$ در درون آن رخ می‌دهد:

می‌توانیم هم اینگونه به مسئله نگاه کنیم که فنر و تیر را یک سازه‌ی پیو درنظر بگیریم که در اینصورت در داخل فنر (به عنوان بخشی از سی یک نیروی محوری تولید می‌شود که باعث فشردگی فنر می‌شود. پس یک انرژی به وجود می‌آید که باید آن را به عنوان جزئی از انرژی مجمو درنظر گرفت. بنابراین سمت راست می‌شود یعنی

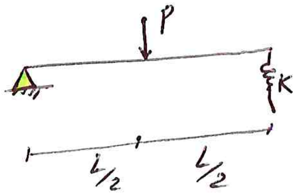
$$1\times\Delta = \underbrace{\sum f\cdot\Delta L}_{\text{سمت راست}}$$

هم تغییر شکل های ناشی از خمش را در نظر می‌گیرد به علاوه یک ترم دیگر که انرژی فنر را در خود شامل می‌شود. پس سمت راست معادله فوق می‌شود (فرض کنید جای فنر یک ستون بگذاریم)

$$\boxed{\int \frac{Mm}{EI}dx + \sum \frac{Nn}{EA}L \qquad \circledast}$$

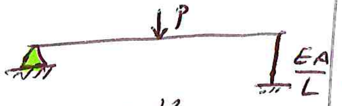
N برای بار واقعی است که در تکیه‌گاه B عکس العمل $\frac{P}{2}$ می‌افتد n هم برای نیروی مجازی باید محاسبه بشود و $\frac{L}{EA}$ برای عضوی است که در جای تکیه‌گاه B نشسته است (به جای فنر ستون گذاشته‌ایم)

پس اگر بخواهیم در مسئله‌ی زیر جابجایی نقطه زیر بار را حساب کنیم

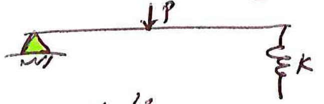


شکل ۱۱

باید از فرمول $\circledast$ فوق استفاده کنیم. در رابطه‌ی $\circledast$ فرض کردیم فنر را با یک ستون جابجا کردیم. جابجایی فنر $\frac{P}{K}$ است و همچنین تغییر ستون $\frac{PL}{EA}$. بنابراین مثل این است که یک بارگذاری داشته باشیم و یک سختی فنر معادل که سختی معادل این فنر هست $K_{eq} = \frac{EA}{L}$. پس اگر فنری داشته باشیم که سختی اش K باشد می‌توان آن را با میله‌ای جایگزین کرد با سختی معادل $\frac{EA}{L}$. پس دو مسئله‌ی زیر معادل هستند به شرطی که K فنر و $\frac{EA}{L}$ میله برابر باشد.



شکل ۱۳



شکل ۱۲

حال فرض کنید نیروی موجود در فنر تحت اثر بارگذاری واقعی را با F_s نشان دهیم و نیروی موجود در فنر تحت اثر بار واحد مجازی را با f_s نمایش دهیم. پس برای فنر رابطه‌ی زیر

$$1\times\Delta = \sum f\cdot\Delta L$$

به قرار زیر می‌شود:

$$\boxed{\int \frac{Mm}{El}dx + \sum f_s\cdot\frac{F_s}{K} \qquad \circledast\circledast}$$

جابجایی ناشی از نیروی واقعی

حال با مقایسه با رابطه‌ی $\circledast$ می‌توان دریافت که f_s همان n است و $\frac{NA}{EL}$ هم همان $\frac{F_s}{K}$ (جابجایی) است.

پس دو مسئله فنر با قرار دادن میله به جای فنر معادل هم هستند مادامی که معادل‌سازی سختی را داشته باشیم.

رابطه‌ای که در حضور فنر از آن استفاده خواهیم کرد همان رابطه‌ی $\circledast\circledast$ است.

فرض کنیم مسئله ما تکیه‌گاه چرخشی داشته باشد (فنر پیچشی): مثلاً

شکل ۱۲

اگر K_θ بی‌نهایت باشد شیب نقطه‌ی A صفر است ولی اگر $K_\theta\neq\infty$ شیب صفر نیست. بنابراین جابجایی B متأثر از K_θ است. این مسئله نیز به حالت زیر درخواهد آمد

$$\int \frac{Mm}{EI}dx + \sum \frac{M_s m_s}{K_\theta}$$

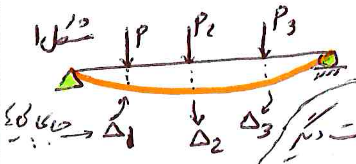
جلسه بیست و دوم :

در این جلسه درباره یکی از روش‌های انرژی به نام قضیه کاستیلیانو بحث خواهیم کرد که توسط این مهندس ایتالیایی در سال ۱۸۷۹ ارائه شده است. مفهوم آن خیلی شبیه روش کار مجازی است اما نوع نگاهش متفاوت است. کاستیلیانو دو قضیه دارد

قضیه‌ی دوم آن جز درس تحلیل سازه یک است و ما این قضیه را در اینجا بررسی خواهیم کرد

هرگاه سازه‌ای تحت یک بارگذاری قرار گیرد یک انرژی داخلی در آن ذخیره می‌شود که معادل همان کار خارجی است. هر باری که به سازه وارد می‌شود یک شراکتی در این انرژی ذخیره شده دارد.

طبق نظر کاستیلیانو، نرخ افزایش انرژی نسبت به هر کدام از بارها یا به عبارتی مشتق انرژی نسبت به هر کدام از بارگذاری‌ها جابجایی را در آن راستا (راستای بار) به دست خواهد داد. بنابراین در تیر زیر تغییر شکل در راستای هر بار برابر است با مشتق انرژی داخلی نسبت به آن بار. به عبارت دیگر خواهیم داشت:



(جابجایی در راستای بار iام) $\Delta_i = \dfrac{\partial W_I}{\partial P_i}$

مثلاً در تغییر شکل‌های ناشی از خمش، انرژی که در داخل سیستم ذخیره می‌شد عبارت بود از

$$W_I = \int \frac{M^2}{2EI}dx$$

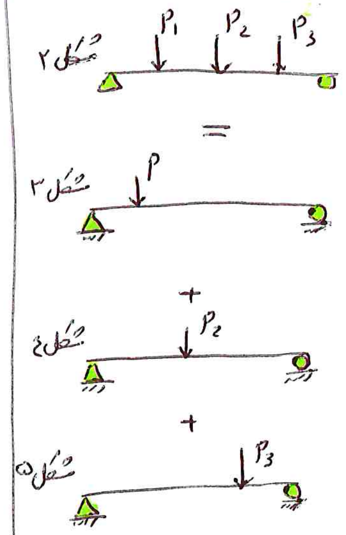
حال باید از این عبارت نسبت به P_i مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial W_I}{\partial P_i} = \int \frac{M(\partial M/\partial P_i)}{EI}dx$$

که طبق قضیه‌ی کاستیلیانو $\frac{\partial W_I}{\partial P_i}$ جابجایی را در راستای P_i به دست خواهد داد.

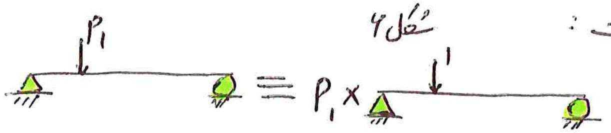
$$① \quad \Delta_i = \frac{\partial W_I}{\partial P_i} = \int \frac{M(\partial M/\partial P_i)}{EI}dx$$

همان شکل ۱ را در نظر بگیرید. در اینجا معادله‌ی ممان برهم‌نهی سه تیر است که بر اولی بار P_1، بر دومی بار P_2 و بر سومی بار P_3 وارد شود. پس خواهیم داشت:



$$M(x) = M_1 + M_2 + M_3$$

حال توجه می‌کنیم که هر کدام از تیرها را می‌توان به صورت تیری با بار واحد ضرب در بارها مدل کرد. یعنی مثلاً شکل ۳ را به صورت زیر نوشت:



به همین ترتیب برای تمام سه تیر فوق می‌توان چنین کاری انجام داد. به همان ترتیب روش کار مجازی، چون بار واحد در تیر شکل ۶ داریم می‌توانیم به جای M_1، ممان آن را با m_1 نمایش دهیم. پس $M_1 = m_1 \times P_1$

به همین ترتیب

$$M_2 = m_2 \times P_2$$

$$M_3 = m_3 \times P_3$$

پس خواهیم داشت:

$$M(x) = P_1 m_1 + P_2 m_2 + P_3 m_3$$

اگر مقدار فوق را در رابطه‌ی ① ستون قبل قرار دهیم خواهیم داشت

همان $\frac{\partial M}{\partial P_1}$

$$\frac{\partial W_I}{\partial P_1} = \underbrace{\int \frac{M m_1}{EI}dx}_{} = \Delta_1$$

از روش کار مجازی می‌دانیم این عبارت همان Δ_1 است.

پس قضیه‌ی کاستیلیانو را اثبات کردیم.

در رابطه‌ی یک ① ستون قبل یک محدودیت بزرگ وجود دارد و آن اینکه فقط جابجایی زیر بار را می‌توانیم حساب کنیم اگر در جایی بار وجود نداشته باشد جابجایی آنجا را نمی‌توانیم حساب کنیم.

در روش «کار داخلی = کار خارجی» باید تنها یک بار می‌داشتیم ولی در اینجا می‌توان چندین بار داشت (بارها می‌توانند گشتاور متمرکز هم باشند)

در مورد تغییر شکل‌های ناشی از نیروی محوری هم می‌توان گفت

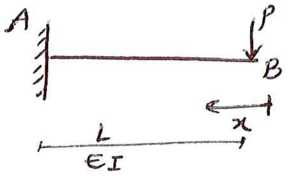
$$W_I = \sum \frac{N \times NL}{EA} = \sum \frac{N^2 L}{EA}$$

$$\Rightarrow \Delta_i = \sum \frac{N(\partial N/\partial P_i)L}{EA}$$

می‌توان نشان داد که $\frac{\partial N}{\partial P_i} = n_i$ و رابطه به همان رابطه‌ی شناخته شده از قبل تبدیل می‌شود.

ما در قالب مثال‌هایی به این تکنیک می‌پردازیم و راه حل‌هایی ارائه خواهیم داد که بتوان جابجایی را در هر نقطه‌ای (نقاطی که بار اعمال نشده است) محاسبه کنیم.

مثال ۱:



در حالت خمش خواهیم داشت

$$\Delta_i = \int \frac{M(\partial M/\partial P_i)}{EI}dx$$

پس کافی است معادله‌ی ممان را بنویسیم. چون روش ما روش انرژی هم است دیگر جهت‌ها هم خیلی مهم نیست. x را به صورت نشان داده شده در شکل بالا در نظر می‌گیریم

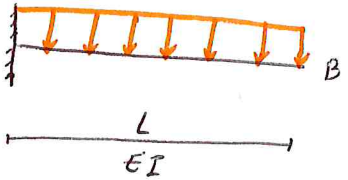
$$M(x) = -px \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial p} = -x$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \int_0^L \frac{(-px)(-x)}{EI}dx = \frac{PL^3}{3EI}$$

چون مثبت بدست آمد یعنی جابجایی در جهت بار P است.

مثال ۲:

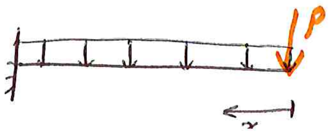
⊛ نکته: در مثال قبل نمی‌توانیم θ_B را بدست بیاوریم چون برای اینکار باید در نقطه‌ی B لنگر متمرکز وجود می‌داشت. برای غلبه بر آن می‌توان یک ممان صفر در آنجا قرار داد. ⊛



در مثال روبرو میخواهیم $\Delta_B = ?$ و $\theta_B = ?$ را محاسبه کنیم.

در اینجا بار متمرکز بر B وجود ندارد پس جابجایی قابل محاسبه نیست. ابتکاری که به خرج می‌دهیم این است که یک P متمرکز در نقطه‌ی B قرار می‌دهیم و مسئله را حل می‌کنیم. در آخر کار هر جا که P ظاهر شد به جای آن صفر قرار می‌دهیم.

فرض کنید بخواهیم Δ_B را محاسبه کنیم آنگاه فرض می‌کنیم تیر به شکل روبرو است



آنگاه

$$M(x) = -px - \frac{\omega x^2}{2}$$

حال چون در مسئله P ظاهر شده است می‌توان نسبت به P مشتق گرفت

$$\frac{\partial M}{\partial p} = -x$$

حال خواهیم داشت

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{(-px - \frac{\omega x^2}{2})(-x)}{EI}dx$$

P را در انتگرال فوق صفر قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow \Delta_B = \int_0^L \frac{\omega x^3}{EI}dx = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

که از آنجا که علامت مثبت است یعنی جابجایی هم جهت بار صفر P است که قرار دادیم. پس جابجایی به سمت پایین است

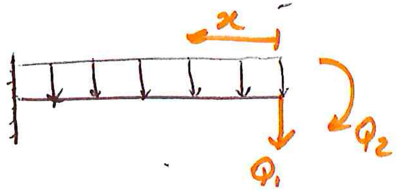
برای بدست آوردن چرخش θ_B باید در نقطه‌ی B یک لنگر مجازی در نقطه‌ی B قرار دهیم

$$\Rightarrow M(x) = -M - \omega\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x)}{\partial M} = -1 \Rightarrow \theta_B = \int_0^L \frac{(-\cancelto{0}{M} - \omega\frac{x^2}{2})(-1)}{EI}dx$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{\omega L^3}{6EI}$$ ⇒ یعنی چرخش هم جهت با M مجازی است

توجه کنید که می‌توانستیم P و M مجازی در نقطه‌ی B را در یک مرحله بر روی سازه قرار دهیم.



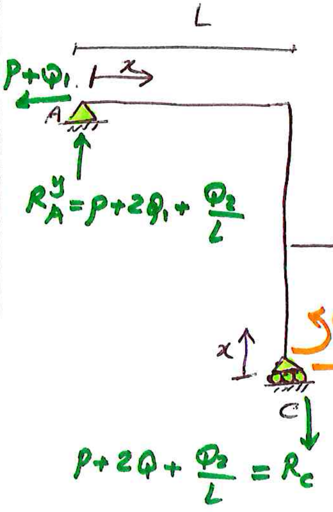
$$M(x) = -Q_1 x - Q_2 - \frac{\omega x^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q_1} = -x$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q_2} = -1$$

$\Longrightarrow$ ادامه روش به همان ترتیب قبل است.

مثال ۳: قاب



Δ_c و θ_c را بدست آورید؟

در C بار متمرکز نداریم پس باید Q_1 و Q_2 را قرار دهیم.

باید عکس‌العمل‌ها را پیدا کنیم

$$\sum M_A = 0 \Longrightarrow -pL + Q_1(2L) - Q_2 - R_c L = 0$$

$$\Longrightarrow R_c = -p - 2Q_1 - \frac{Q_2}{L}$$

حال باید M را در اعضا بنویسیم

عضو AB : $M(x) = (p + 2Q_1 + \frac{Q_2}{L})x$

حال باید مشتقات را محاسبه کرد

$$\frac{\partial M}{\partial Q_1} = 2 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial Q_2} = \frac{x}{L}$$

عضو BC : $M(x) = -Q_2 - Q_1 x - p\langle x-L\rangle$

$$\frac{\partial M}{\partial Q_1} = -x \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial Q_2} = -1$$

بنابراین

$$\Delta_c = \sum \int \frac{M(\partial M/\partial Q_1)}{EI} dx \qquad \boxed{Q_1 = Q_2 = 0}$$

$$= \int_0^L \frac{(px)(2x)}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{P(x-L)x}{EI} dx$$

مربوط به عضو AB

در عضو BC ما از صفر تا L صفر است.

$$= \frac{3PL^3}{2EI} \longrightarrow$$ به سمت راست هم جهت Q_1

برای بدست آوردن چرخش θ_c

$$\theta_c = \sum \int \frac{M(\partial M/\partial Q_2)}{EI} dx$$

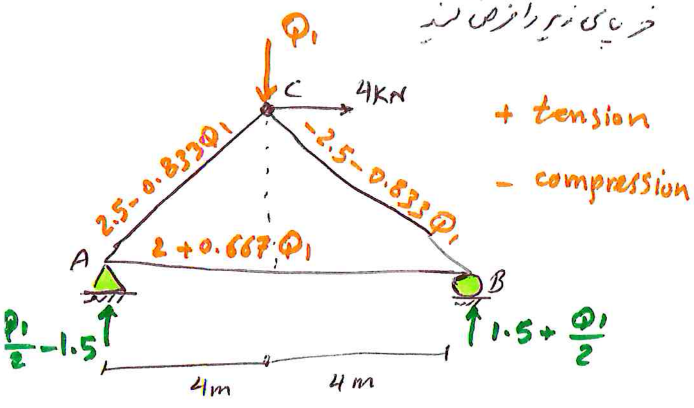
$$= \int_0^L \frac{px \frac{x}{L}}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{P(x-L)(-1)}{EI} dx$$

$$= \frac{5PL^2}{6EI} \Longrightarrow$$ جهت چرخش در جهت Q_2 یکی است.

مثال ۴: خرپا تحت اثر نیروی محوری

رابطه به صورت مقابل : $\Delta_i = \sum \frac{N(\partial N/\partial P_i)}{EA}$

خرپای زیر را فرض کنید



$(\Delta_c)_v$ مجهول است؟

چون در C بارگذاری قائم نداریم یک Q_1 قرار می‌دهیم و شروع به تحلیل می‌کنیم. عکس‌العمل‌ها بدست می‌آیند. مقادیر نیروهای داخلی هم محاسبه و در شکل قرار داده‌ایم. توجه کنید تحت Q_1 هر دو عضو به فشار افتاده‌اند. تحت تأثیر بار 4، عضو AC به کشش می‌افتد و عضو BC به فشار.

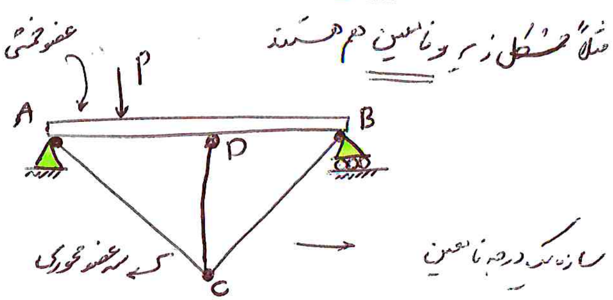
Member	N	$\partial N/\partial Q_1$	L	$N(Q_1=0)\frac{\partial N}{\partial Q_1}L$
AB	$2+.667Q_1$	0.667	8	10.67
AC	$2.5-.833Q_1$	-0.833	5	-10.42
BC	$-2.5-0.833Q_1$	-0.833	5	10.42
				مجموع : 10.67

بنابراین داریم

$$(\Delta_c)_v = \frac{10.67}{EA}$$

سیستم‌هایی که ترکیبی از اعضای محوری و اعضای خمشی است

مثلاً شکل زیر که نامعین هم هستند



سازه‌ی بالا تشکیل شده است از تیر AB که در خمش قرار می‌گیرد و خرپای پایینی دارای نیروی غالب محوری. در این گونه سازه‌ها روش کاستیلیانو خوبی جواب می‌دهد.

W_I سازه‌ی فوق از دو قسمت تشکیل شده است و انرژی ناشی از خمش و انرژی ناشی از نیروی محوری. پس در فرمول انتگرالی قسمت خمشی فرمول زیر را دارد

$$\int \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P_i})}{EI} dx$$

و قسمت محوری رابطه‌ی زیر را

$$\sum \frac{N(\frac{\partial N_i}{\partial P_i})}{EA} L$$

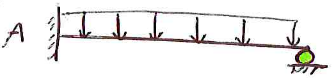
سیستم‌هایی که ترکیبی هستند بهتر است از روش انرژی حل کنیم.

جلسه بیست و سوم

حل سازه‌های نامعین با استفاده از روش کاستیلیانو

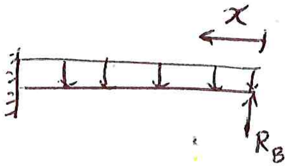
فرض کنید سازه‌ی نامعین زیر را داریم:

شکل ۱



گفتیم می‌توانیم سازه‌ی فوق را با سازه‌ی زیر معادل بدانیم. یعنی تکیه‌گاه B را حذف کرده معادل آن نیروی R_B را در محل قرار دهیم

شکل ۲



باید این R_B را به گونه تنظیم کنیم که جابجایی نقطه‌ی B صفر شود. می‌توانیم جابجایی نقطه‌ی B را برحسب R_B بدست آورده و آن را مساوی صفر قرار دهیم. جابجایی نقطه‌ی B طبق قضیه‌ی کاستیلیانو برابر است با مشتق انرژی نسبت به R_B. معادله‌ی ممان با فرض جهت x مطابق شکل ۲ برابر خواهد بود با

$$M(x) = R_B x - \frac{\omega x^2}{2}$$

پس طبق رابطه‌ی کاستیلیانو

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{1}{EI}\left(R_B x - \frac{\omega x^2}{2}\right)\underbrace{(x)}_{\left(\frac{\partial M}{\partial R_B}\right)} dx$$

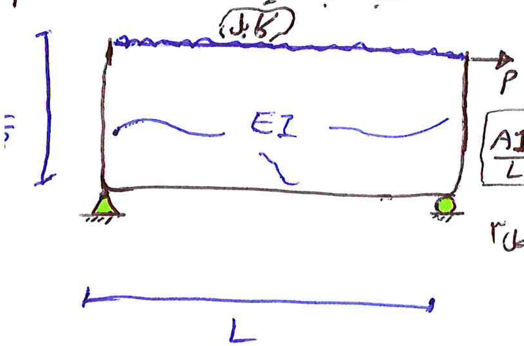
این Δ_B باید صفر باشد چون در واقع جابجایی نقطه‌ی B صفر است. به عبارت دیگر در اینجا داریم انرژی را minimize می‌کنیم. می‌گوییم R_B به دست آمده R_B ای است که مشتق انر نسبت به آن صفر می‌شود. یعنی انرژی به سمت Min می‌رود. به همین دلیل این روش به روش کار کمینه یا Least work می‌گویند.

$$\left[\frac{R_B}{3} L^3 - \frac{\omega L^4}{8}\right] = 0 \Longrightarrow R_B = \frac{3}{8}\omega L$$

پس $R_A = \frac{5}{8}\omega L$ خواهد بود.

یکی از مواردی که استفاده از این روش نسبت به روش‌های دیگر ساده‌تر است زمانی است که سازه‌هایی داریم ترکیبی از تیر و خرپا داریم. تیر به صورت خمشی عمل می‌کند و خرپا به صورت محوری.

مثال ۱: عضو قاب دارای کابل داریم که دو سرش با کابل به هم وصل شده‌اند



فرض: $\frac{AI^2}{L} = 9$

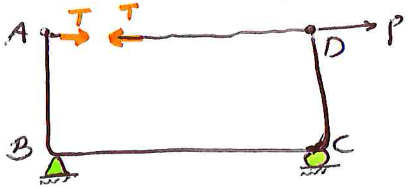
شکل ۳

زمانی که P اعمال می‌کنیم مقداری از آن از طریق خمش به عضو عمودی می‌ند

راست اعمال می‌شود و مقداری از آن به صورت نیروی محوری توسط کابل به جانب دیگر منتقل می‌شود. اگر کابل خیلی شل باشد نیروی محوری منتقل نمی‌شود.

در اینجا نیز سازه نامعین است اما برخلاف مثال تیر (که تکیه‌گاه اضافی داشت) نامعینی در اینجا از نوع داخلی است به دلیل اضافه شدن کابل. ما باید یک قید (کشش کابل در این مسئله) را از روی مسئله برداریم. کشش T کابل بهترین گزینه است.

فرض کنید در نقطه‌ای که نشان داده شده کابل را ببریم. در محل برش کشش T وجود دارد. اگر T درست قرار داده شود یعنی کابل را ببریم و T مناسب قرار دهیم آنگاه سازه بریده شدن



شکل ٤

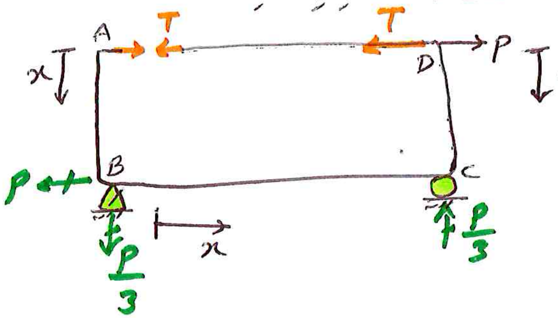
کابل را احساس نخواهد کرد. اگر T بیشتر از مقدار لازم اعمال شود دو طرف کابل overlap می‌شوند. اگر کمتر باشد T دو طرف کابل فاصله می‌گیرند. پس T باید به گونه‌ای باشد که جابجایی صفر شود.

حال انرژی کرنشی ذخیره شده در داخل سازه را نسبت به T می‌نویسیم و مشتق آن نسبت به T را برابر صفر قرار می‌دهیم.

در شکل ستون قبل در قطعه‌ی ناودانی ABCD خمش حاکم است و ما از تغییر شکل‌های محوری و برشی صرف‌نظر می‌کنیم. اما در کابل AD تنها محوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

انرژی محوری AD + انرژی خمشی ABCD = انرژی کل

گام اول تحلیل سازه است که در شکل زیر نیروهای تکیه‌گاه‌ها آمده است.



شکل ۵

حال معادله ممان‌ها را باید بنویسیم. برای قطعه‌ی AB، x به صورت نشان داده شده در شکل فوق است

عضو AB : $M(x)=Tx \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial T}=x$

عضو BC : $M(x)=T\frac{L}{3}-\frac{P}{3}x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial T}=\frac{L}{3}$

عضو CD: $M(x)=(P-T)x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial T}=-x$

حال باید رابطه‌ی زیر را به دست آوریم:

$$\int\frac{M(\partial M/\partial P_i)}{EI}dx+\sum\frac{N(\partial N/\partial P_i)}{EA}L$$

می‌توان قسمت مربوط به خمش را نوشت:

$$\frac{1}{I}\Big\{\underbrace{\int_0^{\frac{L}{3}}(Tx)x\,dx}_{\text{قسمت AB}}+\underbrace{\int_0^{L}\left(\frac{TL}{3}-\frac{P}{3}x\right)\left(\frac{L}{3}\right)dx}_{\text{قسمت BC}}$$

$$+\underbrace{\int_0^{\frac{L}{3}}(P-T)x(-x)\,dx}_{\text{قسمت CD}}=①$$

مشارکت انرژی خمشی

حال سراغ اعضای محوری می‌رویم که همان AD است. N همان T است. پس $\frac{\partial N}{\partial P}=\frac{\partial N}{\partial T}=1$ است. پس

$$\sum\frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial P_i}\right)}{EA}=\frac{1}{EA}\cdot\underbrace{T}_{N}\cdot\underbrace{(1)}_{\frac{\partial N}{\partial T}}\cdot L \quad ②$$

جمع ① و ② باید برابر صفر باشد. اگر این معادله را حل کنیم خواهیم داشت:

$$T=\frac{11}{40}P$$

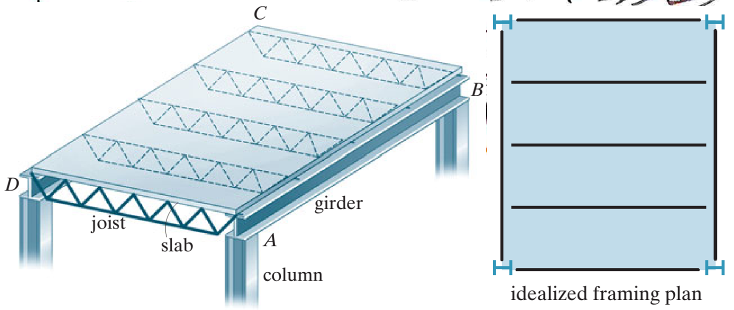
⊛ توجه: اگر کابل خیلی سفت باشد نصف P را منتقل می‌کند یعنی

⊛ $T=\frac{P}{2}$

بدین ترتیب مبحث انرژی به پایان می‌رسد. دو مبحث دیگر داریم که بررسی خواهیم کرد: ۱- خط تأثیر ۲- تحلیل سازه‌های نامعین

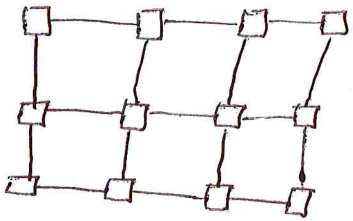
خط تأثیر : (Influence lines)

کاری که تاکنون کرده‌ایم این بود که باری در نقطه‌ای از سازه قرار داده می‌شد که مشخص و معین بود و سپس سازه را با وجود آن بار تحلیل می‌کردیم. عکس‌العمل‌ها را محاسبه می‌کردیم، برش یا ممان را در جاهای مختلف تحت آن بار معین محاسبه می‌کردیم. اما در واقعیت بار یک سازه معین نیست و بارگذاری مدام در یک سازه عوض می‌شود. مثلاً در یک ورزشگاه ممکن است تماشاگران به یک جانب حرکت کنند و تجمع کنند. در اینجا بارگذاری متحرک است. یا در جابجایی از یک پل اتفاقی صورت بگیرد. پس ماهیت بارگذاری قابل پیش‌بینی نیست. مثلاً سقف چهار ستونی زیر را در نظر بگیرید که چهار تیر دارد و بین تیرها، تیرچه بلوک گذاشته شده است. اگر چیزی در وسط قرار دهیم بار چیز روی تیرچه‌ها می‌افتد و این تیرچه بلوک‌ها



بار را به صورت نقطه‌ای بر روی تیرها می‌اندازند و این تیرها آن را بر روی دو ستون منتقل می‌کنند.

حال فرض کنید به صورت زیر یک انبار داشته باشیم. می‌توانیم در داخل

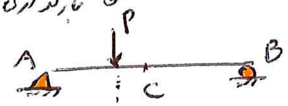


شکل ۲

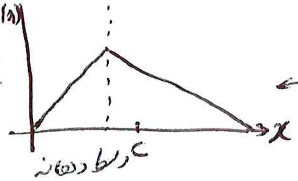
هر کدام از مربع‌های فوق که بین چهار ستون واقع‌اند بارگذاری کنیم. به ازای کدام نوع بارگذاری بدترین حالت برای سازه رخ می‌دهد؟ در کدام قطعه یا قطعات اگر با هم بارگذاری کنیم بدترین حالت رخ می‌دهد. برای کنترل این موارد از خط تأثیر استفاده می‌کنیم.

در حالت عادی تیری داریم مثلاً به صورت زیر که $M(x)$ آن را تعیین می‌کنیم. پس از آن در هر xای قادر به تعیین $M(x)$ هستیم.

همان بارگذاری ثابت



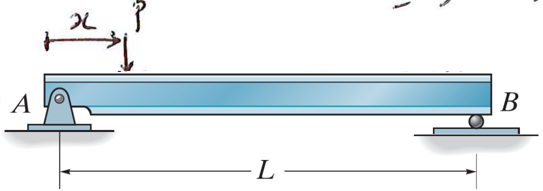
شکل ۳



شکل ۴

منحنی تغییرات گشتاور به ازای مقادیر مختلف x

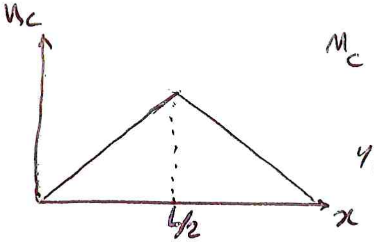
حال فرض می‌کنیم یک بارگذاری متحرک داریم که در فاصله‌ی x از ابتدا تغییر می‌کند ($0 < x \leqslant L$). حال می‌خواهیم بدانیم ممان وسط دهانه چقدر است؟ بدین منظور یک منحنی‌ای رسم می‌کنیم که تغییرات ممان را در وسط دهانه بر اساس باری به دست می‌دهد که بار در نقطه‌ی x قرار دارد. ما می‌خواهیم ممان را در C حساب کنیم و x محل اعمال



شکل ۵

بار متمرکز است. بنابراین می‌توانیم تصمیم که $P(x)$ در چه xای اعمال شود تا بدترین شرایط برای M_c به وجود آید.

فرض کنید چنین شکلی برای M_c پیش می‌آید:

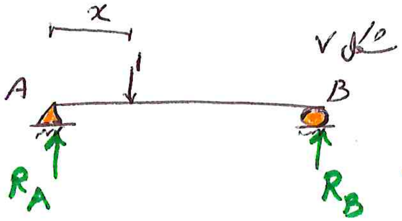


شکل ۶

به نمودار فوق، منحنی خط تأثیر گشتاور در نقطه‌ی C به ازای اعمال بار متمرکز در فاصله‌ی x از سمت چپ می‌گویند.

ممان زمانی در نقطه‌ی C ماکزیمم می‌شود که بار P در نقطه‌ی C اعمال شود. البته این قضیه برای این حالت خاص است.

مثال:



شکل ۷

فرض کنید بار یک باشد خط تأثیر را همیشه برای بار واحد رسم می‌کنند.

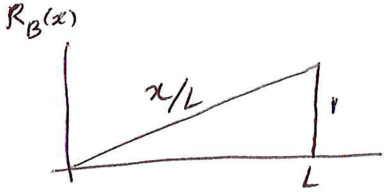
می‌خواهیم خط تأثیر پارامترهای مختلف را رسم کنیم. مثلاً عکس‌العمل

تکیه‌گاهی را می‌خواهیم براساس x رسم کنیم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1\times x - R_B\times L = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{x}{L}$$

پس خط تأثیر R_B

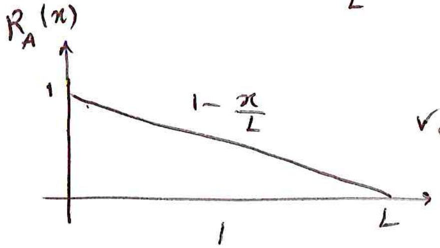


شکل ۶

خط تأثیر R_A هم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 1 = 0$$

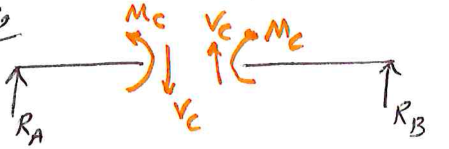
$$\Rightarrow R_A = 1 - \frac{x}{L}$$



شکل ۷

فرض کنید c وسط دهانه باشد. می‌خواهیم خط تأثیر M_c را رسم کنیم. تیر را از نقطه‌ی c قطع می‌کنیم و دیاگرام آزادش را رسم می‌کنیم

شکل ۸



یک بار واحد هم داریم که یا سمت چپ است یا سمت راست بنابراین می‌توان گفت

اگر بار در فاصله‌ی روبرو باشد ← $if \quad 0 \leq x < \frac{L}{2}$

آنگاه با نوشتن تعادل در سمت راست داریم: $V_c = -R_B$ (با استفاده از قطعه راست)

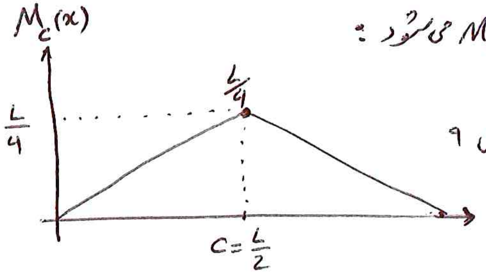
$$M_c = R_B \frac{L}{2}$$

حال اگر بار در نیمه‌ی سمت راست اعمال شود یعنی $if \quad \frac{L}{2} < x \leq L$

آنگاه با نوشتن تعادل در قطعه چپ داریم: $V_c = R_A$ (با استفاده از قطعه چپ)

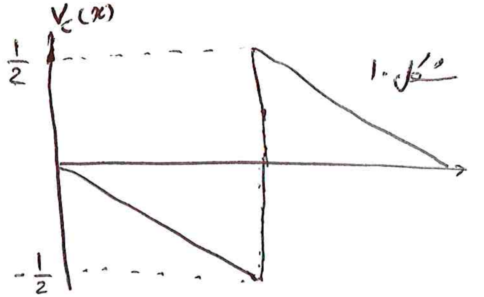
$$M_c = R_A \frac{L}{2}$$

پس خط تأثیر M_c می‌شود:



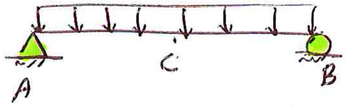
شکل ۹

پس از این شکل‌ها می‌توان تصمیم گرفت که بار را در کجا قرار دهیم که مثلاً R_B ماکزیمم باشد یا M_c ماکزیمم باشد و به همین ترتیب.



شکل ۱۰ خط تأثیر برش

بار گسترده را چگونه می‌توان آنالیز کرد؟ تیر زیر را فرض کنید که بار گسترده دارد. می‌خواهیم بدانیم بدترین شرایط کجا حاصل می‌شود؟ به صورت چه بارگذاری و در چه محلی



شکل ۱۱

فرض کنید بخواهیم R_B را محاسبه کنیم. بار گسترده در واقع عملاً بی‌نهایت بارهای متمرکز است. پس عکس‌العمل R_B سطح زیر منحنی ضرب در w خواهد شد. سطح زیر منحنی در شکل ۶ که برای بار یک بدست آمده برابر است با $\frac{1}{2}(1)L$. پس

$$R_B = \frac{wL}{2}$$

و هر قسمتی از بار متمرکز را حذف کنیم R_B کوچک‌تر می‌شود. پس بدترین شرایط این است که کل دهانه بارگذاری شود.

اما در مورد برش فرق می‌کند. اگر از A تا C بارگذاری شود برش منفی تولید می‌شود و اگر از C تا B بارگذاری شود برش مثبت تولید می‌شود. بنابراین اگر کل دهانه بارگذاری شود برش نقطه‌ی c صفر می‌شود. بنابراین اگر دنبال طراحی برش نقطه‌ی c هستیم بدترین شرایط این است که نصف دهانه بارگذاری شود. یا نصف دهانه‌ی اول یا نصفه‌ی دوم فرقی ندارد.

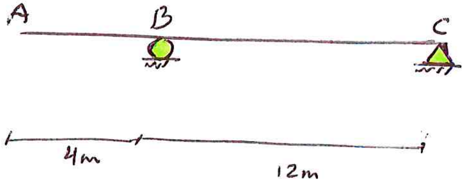
برای ممان بدترین شرایط این است که کل دهانه بارگذاری شود در این صورت

$$M_c = W \cdot \underset{\text{شکل شماره ۹}}{\text{سطح زیر منحنی}} = \omega \times \frac{1}{2}\times\frac{L}{4}\times L = \frac{\omega L^2}{8}$$

جلسه بیست و چهارم :

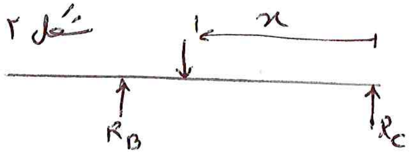
مثال ۱ : رسم خط تأثیر

شکل ۱



فرض می‌کنیم بار واحدی در فاصله x از C در حال اعمال شدن است و $0 \leqslant x \leqslant 16$. حال فرض کنید می‌خواهیم تغییرات عکس‌العمل B را بیابیم.

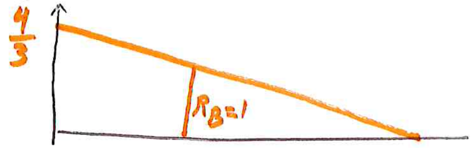
شکل ۲



با نوشتن $\sum M_c = 0$ خواهیم داشت :

$$1 \times x - 12R_B = 0 \Longrightarrow R_B = \frac{x}{12}$$

شکل ۳



خط تأثیر تکیه‌گاه C

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 1 - R_B - R_c = 0$$

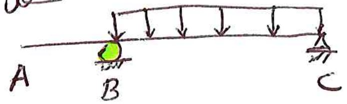
$$\rightarrow R_c = 1 - \frac{x}{12}$$

شکل ۴

اگر بارگذاری بخواهد گسترده باشد باید کل دهنه بارگذاری شود تا بدترین شرایط برای تکیه‌گاه R_B پیش بیاید.

برای تکیه‌گاه R_C اگر بدترین شرایط را بخواهیم باید بارگذاری گسترده از B تا C انجام شود.

شکل ۵



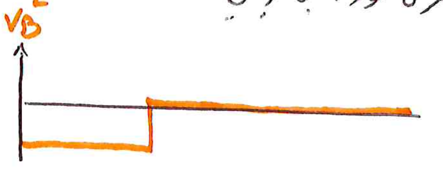
هر باری در قطعه‌ی AB بگذاریم عکس‌العمل را کوچکتر می‌کند. چون R_C در حالت گسترده برابر بود با سطح زیر منحنی شکل ٤ ضرب در W.

حال به سراغ پارامترهای دیگر در شکل ۱ می‌رویم. فرض کنید برش در همان B را می‌خواهیم محاسبه کنیم. به سراغ نقطه‌ی B می‌رویم. برش چپ و راست نقطه‌ی B به اندازه R_B با هم فرق دارند.

شکل ۶

پس برای ترسیم خط تأثیر باید تصمیم بگیریم که آیا V_B^L را می‌خواهیم رسم کنیم یا V_B^R. فرض کنید V_B^L. اگر بار در ناحیه AB حرکت کند مقدار V_B^L برابر خواهد بود با (1-). چون بار تکیه است. اگر بار در BC رخ دهد V_B^L صفر می‌شود. بنابراین

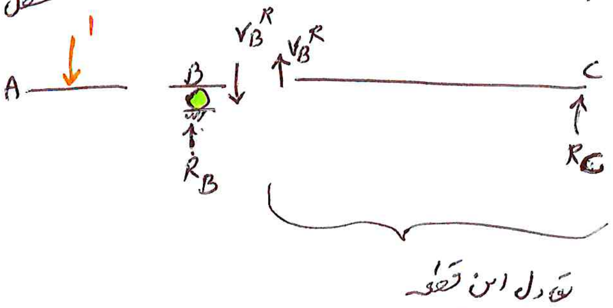
شکل ۷



حال به سراغ V_B^R می‌رویم.

اگر بار در AB باشد برش با نوشتن تعادل در قطعه‌ی BC بدست می‌آید

شکل

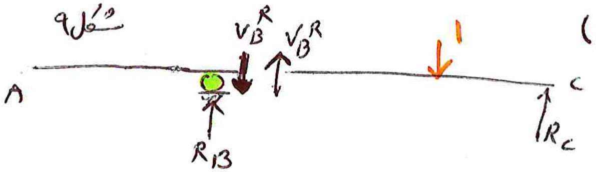


$$R_C + V_B^R = 0 \Longrightarrow V_B^R = -R_C$$

تغییرات R_C را هم داریم.

حال اگر بار در قطعه‌ی BC صورت گیرد آنگاه اتفاقاً قطعه را (می‌بریم)

شکل ۹

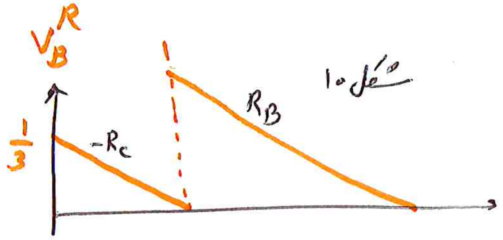


پس در قطعه‌ی سمت چپ می‌توان تعادل نوشت. پس

$$R_B - V_B^R = 0 \Longrightarrow V_B^R = +R_B$$

بنابراین

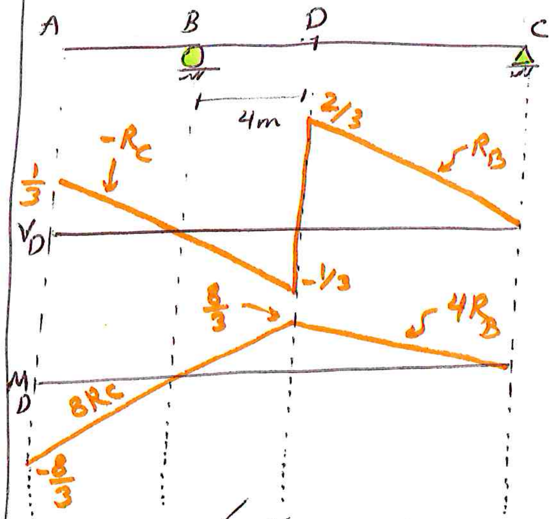
شکل ۱۰



بدترین شرایط این است که تمام دهانه بارگذاری شود که در اینصورت سطح زیر منحنی ماکزیمم است.

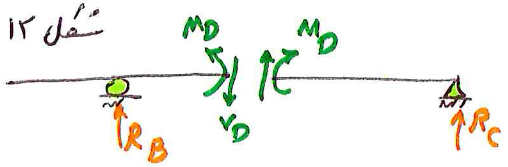
حال سراغ حالت های دیگری می‌رویم. مثلاً راجع به نقطه‌ای که روی تکیه‌گاه نیست مثلاً نقطه‌ی D. می‌خواهیم برش و ممان آن را حساب کنیم.

شکل ۱۱



به این منظور سازه را از نقطه‌ی D قطع می‌کنیم

شکل ۱۲



اگر بار در AD باشد آنگاه تعادل در قطعه‌ی راست

$$V_D = -R_C$$

$$M_D = R_C \times 8 = 8R_C$$

اگر بار در ناحیه‌ی DC باشد تعادل قطعه‌ی چپ را می‌نویسیم

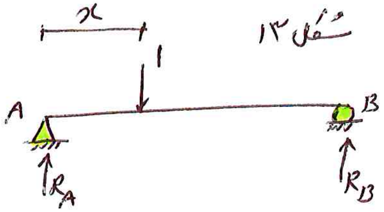
$$V_D = R_B \quad , \quad M_D = 4R_B$$

به این ترتیب جواب حاصل شد. خط تأثیرها که در شکل ۱۱ آورده شده است

استفاده از روش انرژی (اصل کار مجازی) برای رسم خط تأثیر :

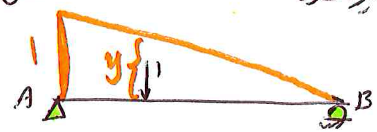
این کار برای اولین بار توسط Muller-Bresslau در سال ۱۸۸۶ صورت گرفت. دیدگاه روی هر سازه‌ای قابل اجرا است اما ما با مثال تیر شروع می‌کنیم.

شکل ۱۳



تیر تحت بار واحد است و خط تأثیر تکیه‌گاه A را می‌خواهیم. این روش می‌گوید قیدی را که می‌خواهید خط تأثیرش را رسم کنید رها کرده و یک جابجایی واحد به آن بدهید به صورت مجازی. اگر این کار را انجام دهیم تیر به حالت زیر در می‌آید. چون سازه صلب است و انرژی در داخل آن ذخیره نشده است کار داخلی و خارجی برآیندشان صفر است.

شکل ۱۴



فرض کنید نقطه‌ی اثر بار واحد که در فاصله‌ی x از A قرار دارد به اندازه‌ی y جابجا شود. حال کار انجام شده را می‌نویسیم و برابر صفر قرار می‌دهیم

$$(R_A)(1) - (1)(y) = 0$$

$$\Longrightarrow R_A = y$$

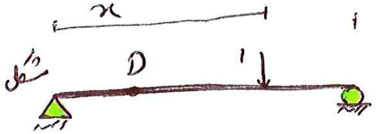
یعنی تغییرات R_A با y یکسان است. (R_A از جنس نیرو و y از جنس جابجایی است ولی تغییراتشان برابر است). y جابجایی نقطه‌ی x است زمانی که به قسمتی که می‌خواهیم خط تأثیرش را رسم کنیم جابجایی واحد اعمال شده باشد.

در شکل ۳ (ص 89) می‌خواستیم عکس‌العمل R_B را حساب کنیم به همین خاطر R_B را به اندازه‌ی یک واحد بالا جابجا کردیم. نقطه‌ی C سرجای خودش باقی می‌ماند و نقطه B به اندازه واحد بالا می‌رود. کل قطعه هم صلب فرض می‌شود. آنگاه می‌توان از روی روابط هندسی عدد $\frac{4}{3}$ را برای جابجایی نقطه‌ی A به دست آورد.

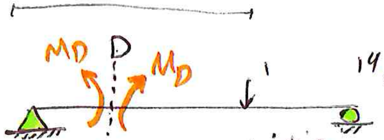
اگر عکس‌العمل C را بخواهیم حساب کنیم نقطه‌ی C را به اندازه واحد بالا می‌بریم (شکل ۴ از ص 89)

حال برای برش یا ممان چگونه باید از این روش استفاده کنیم؟ فرض کنید تیر زیر را داریم با بار واحد در فاصله‌ی x. می‌خواهیم خط تأثیر لنگر آن را رسم کنیم. (در نقطه‌ای چون D) برای این منظور قید ممان را آزاد می‌کنیم. برای آزاد کردن ممان نقطه‌ی D، به شکل زیر توجه کنید

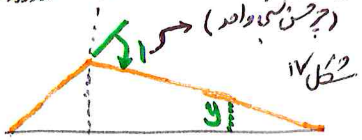
شکل ۱۵



شکل ۱۶



شکل ۱۷



از محل باید ممان‌های M_D سازه را به بالا انتقال دهیم تا دوای

که چرخش نسبی واحد حاصل شود. حال کار و اثر زنی را می‌نویسیم
فرض کنید که جابجایی زیر بار هم y باشد

$$M_D \times (1) - (1) y = 0$$

$$\rightarrow M_D = y$$

این بدین معناست که در زمان رسم خط تأثیر لنگر در هر نقطه باید آن نقطه را مفصل فرض کنیم. بعد مفصل را تا جایی بالا ببریم که زاویه نسبی یک حاصل شود.

در شکل ۱۱ برای ممان نیز چنین توجیهی می‌شود کرد. حواس‌مان باید باشد زمانی که یک قید را رها می‌کنیم بقیه قیدها سر جای خود باید بمانند.

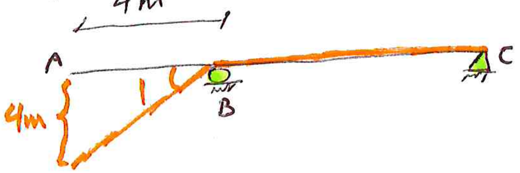
مثال فرض کنید که بخواهیم ممان را در نقطه‌ی B از تیر زیر بیابیم

شکل ۱۸

پس باید در B یک مفصل بگذاریم. مفصل فقط ارتباط چرخشی دو طرف را قطع می‌کند و به دلیل قید، B همچنان بالا و پایین نمی‌تواند برود. حال که نقطه B بالا و پایین نمی‌رود و نقطه‌ی C نیز به همین ترتیب پس تنها راه این است که قطعه‌ی AB به صورت صلب از طرف A افت کند.

قطعه‌ی BC روی خود می‌ماند. قطعه‌ی AB باید پایین بیاید به گونه‌ای که زاویه‌اش یک شود. بنابراین

شکل ۱۹



همان مثال ص 89

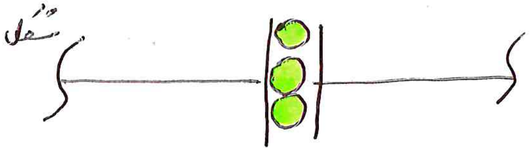
* نکته: در شکل‌هایی که تا کنون بررسی کردیم خط تأثیرها خطی بودند. این قضیه برای سازه‌های معین صادق است. در سازه‌های نامعین خط تأثیر عموماً منحنی است. *

حال سراغ بررسی برش در مثال ۱ ص 89 با این روش می‌رویم. فرض کنید فعلاً تیر زیر را داریم. باید فقط قید برش را برداریم. اما دو طرف همچنان لنگر به هم انتقال خواهند داد. پس باید در نقطه‌ی D یک مفصل برشی قرار دهیم. مفصل برشی به شکل زیر است

شکل ۲۰

← هدف خط تأثیر برش در نقطه‌ی D

شکل ۲۱

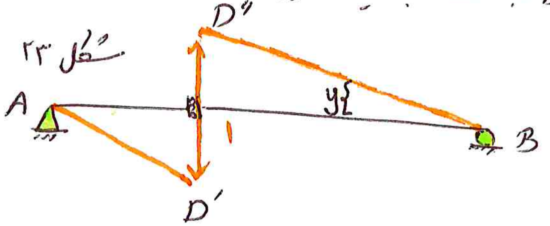


حال یک برش در نقطه D به اسم V_D وجود خواهد داشت

شکل ۲۲

این V_C باید کار مجازی انجام دهد. یعنی باید نظیر V_C یک جابجایی متناظر انجام دهیم. قطعه راست در D باید بالا رود و قطعه چپ در D به سمت پایین. تغییر شکل به صورت زیر در می‌آید

شکل ۲۳



این جابجایی به اندازه‌ای است که فاصله بین سمت راست D، سمت چپ آن واحد شود. این نگه داشتن فاصله‌ی ۱ به روش‌های گوناگونی می‌تواند صورت پذیرد.

معادله کار به صورت زیر می‌شود

①

$$V_C \times 1 - 1 \times y = 0 \Longrightarrow V_C = y$$

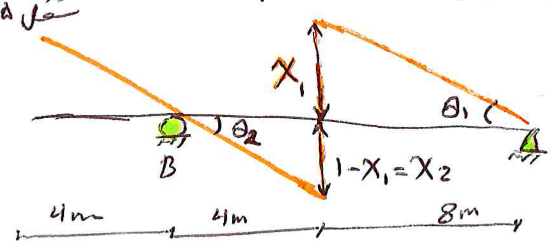
حال ما به انواع روش‌های مختلفی می‌توانیم فاصله‌ی ۱ را حفظ کنیم. مثلاً سمت چپ $\frac{1}{3}$ پایین بیاید و سمت راست $\frac{2}{3}$ بالا برود و [illegible] درست. پس معادله ① جواب unique به نظر می‌رسد نداشته باشد. نکته این است که اگر در جایی سیستم را قطع می‌کنیم (مثلاً D)

هم برش وجود دارد و هم لنگر و هر دو کار انجام می دهند. در نقطه ی D ممان هم هست که باید در نظر بگیریم. پس باید کار ممان را در نظر بگیریم یا به نوعی کار ممان را صفر کنیم. کار ممان زمانی صفر است که دو خط $D''B$ و AD' موازی باشند. در اینصورت $d\theta$ صفر است و کار ممان صفر می شود. (یعنی کار برش صفر است) در شکل ۱۱ ص 90 و نمودار ممان چنین حالتی است. تیر زیر

شکل ۲٤

باید در نقطه ی D مفصل برشی شود آنگاه به صورت زیر تغییر شکل می یابد. ما به دنبال یافتن X_1 هستیم.

شکل ۲۵



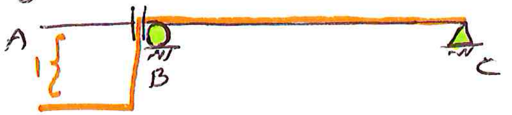
باید زوایای θ_1 و θ_2 برابر باشند. پس

$$\frac{X_1}{8}=\frac{X_2}{4} \quad , \quad X_1+X_2=1$$

با حل دو معادله دو مجهول $X_1=\frac{2}{3}$ و $X_2=\frac{1}{3}$ بدست می آید.

برای بدست آوردن برش راست و چپ در نقطه ی B بایستی تیر سمت چپ و راست B را ببریم (شکل ۲٤) و یک مفصل برشی قرار دهیم. اگر سمت چپ B را برش دهیم سمت راست همچنان روی تکیه گاه C است. پس نقطه ی B از سرجای خود تکان نمی خورد. بنابراین از B تا C سرجای خود خواهد ماند. پس سمت چپ B باید پایین بیاید. نکته کلیدی این است که قطعه ی سمت چپ و راست باید موازی هم باشند. BC افقی است لذا باید AB هم افقی شود به این ترتیب شکل ۲۶ به دست می آید:

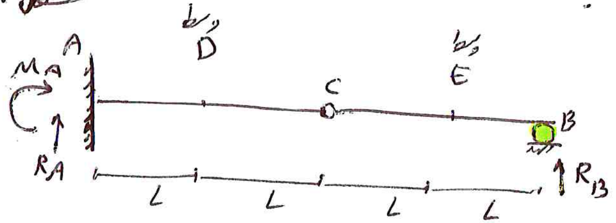
شکل ۲۶



مثال: تکیه گاه گیردار:

اگر در سازه تکیه گاه گیردار داشته باشیم آنگاه برای اینکه تکیه گاه دیگری اضافه کنیم حتماً باید مفصل اضافه کنیم تا مسأله معین بماند.

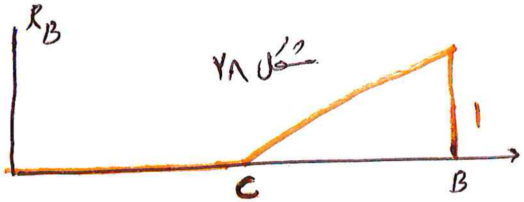
شکل ۲۷



هدف رسم خط تأثیر است.

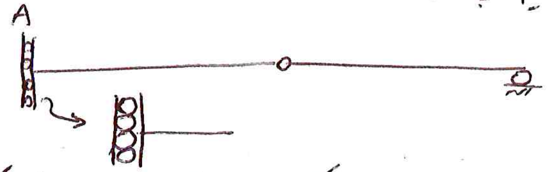
خط تأثیر عکس العمل تکیه گاه B: باید انتهای B را به اندازه ی یک واحد بالا ببریم. قیدهای دیگر: نقطه ی A نمی تواند حرکت کند. از A تا C هم صلب است. پس بدیهی است که شکل ۲۸ حاصل خواهد شد

شکل ۲۸



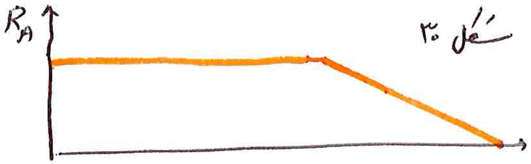
عکس العمل تکیه گاه A (عکس العمل قائم): باید قید عکس العمل قائم را رها کنیم. پس تکیه گاه به حالت غلطکی عمودی تبدیل می شود

شکل ۲۹



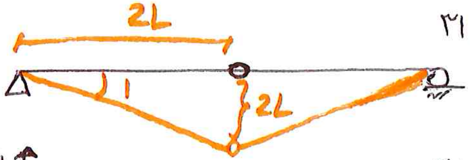
حال A را به اندازه یک واحد بالا ببریم. از A تا C که صلب است و باید افقی هم باقی بماند چون ما قید لنگر را رها نکرده ایم. بنابراین AC به اندازه ی واحد به بالا شیفت پیدا می کند. B هم باید سرجای خود بماند و CB هم صلب است پس خط تأثیر R_A

شکل ۳۰

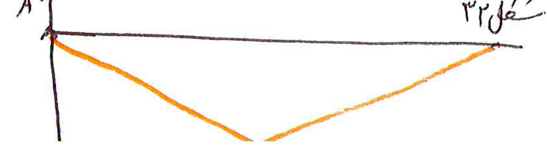


M_A را هم خواهیم رسم کنیم. در نتیجه باید قید لنگر را برداریم. پس

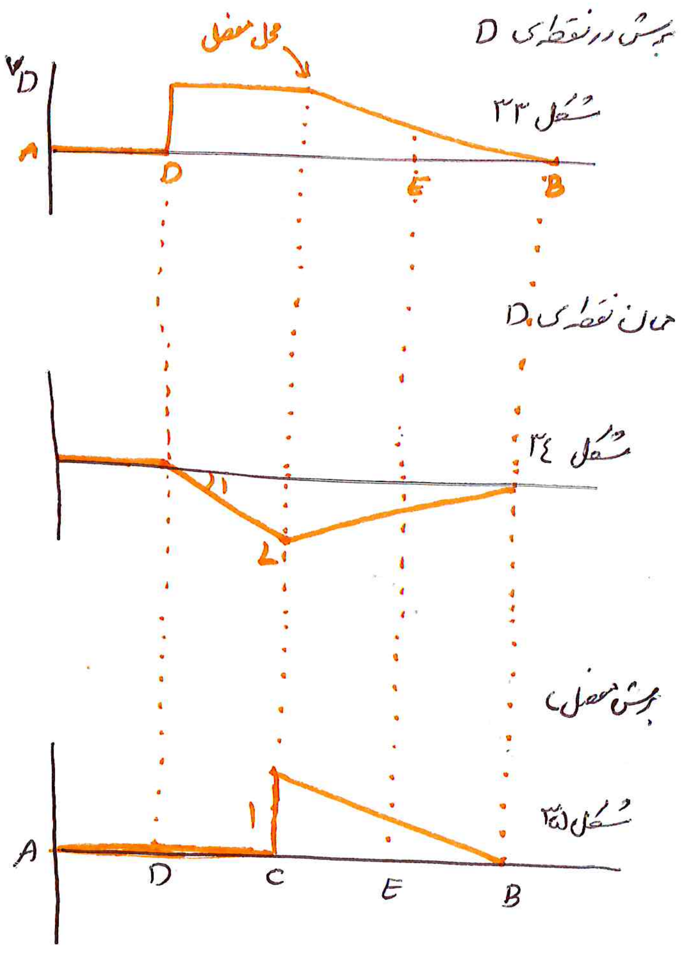
شکل ۳۱



شکل ۳۲



خط تأثیر



در شکل ۳۵ دو تکه AC و CB موازی هم نشده اند اگر بخواهیم CB را افقی کنیم باید B را بالا دهیم که در این صورت قید ثابت ماندن B رعایت نمی شود، پس این دو را نمی توان هم زمان رعایت کرد. پس با این تناقض چگونه رفتار کنیم؟؟

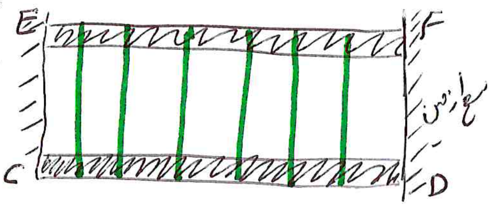
این تناقض عملاً وجود ندارد و نمودار ۳۵ درست است. ما به این دلیل دو قسمت را موازی می کردیم که کار ممان صفر شود اما چون در نقطه ی C . . ممان برابر صفر است پس ما نگران کار ممان نیستیم و نمودار صحیح است.

حل تست پنجم :

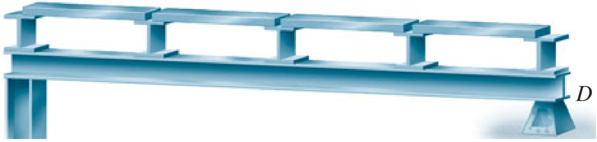
همانطور که در شکل ۱ از صفحه ی 87 نیز توضیح داده شد اکثر المان های اصلی ها بار را به صورت غیر مستقیم درک می کنند، وقتی یک میز در داخل اتاق قرار می دهیم بار میز اول روی تیرچه بلوک ها منتقل می شود پس این تیرچه ها، بار را به روی تیر اصلی می برند. تیرها هم به نوبه ی خود این بار را در قالب عکس العمل تکیه گاهی بر روی ستون منتقل می کنند.

فرض کنید پل زیر را داشته باشیم (پلان پل)

شکل ۱



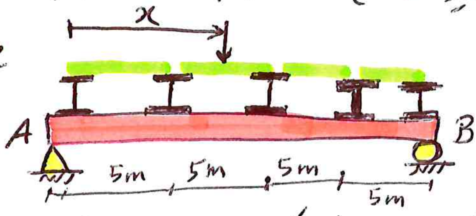
تیرهای اصلی CD و EF توسط تیرچه های عمودی که روی آنها به صورت عمودی قرار داده ایم، بار ماشین ها را درک می کنند. اگر از پهلو به پل نگاه کنیم



در این شکل ۲ نمای جانبی پل را نشان داده ایم و تیرچه های با مقطع I شکل هم روی آنها آورده شده اند. معمولاً بین این تیرچه ها هم صفحاتی می اندازند که بار بین دو تیرچه را به روی آن دو تیرچه انتقال می دهد. بنابراین می بینیم که تیر اصلی CD و EF: بارها را به صورت نقطه ای درک می کنند. این بارها هم دارای محل ثابت هستند که همان موقعیت تیرچه هاست. یعنی بار نمی تو در هر جایی بر تیر اصلی وارد شود بلکه در جاهای ثابت تیرچه ها به تیر اعمال می شود. این نکته باید در رسم خط تاثیرها در نظر گرفته شود.

مثال: روی تیر اصلی مقطع I شکل تیرچه ها و روی تیرچه ها صفحاتی قرار داده شده اند که بارها را منتقل کنند. بار واحدی در نقطه ی x از آن به سازه وارد می شود (بر روی صفحات). می خواهیم خط تاثیر تیر اصلی را رسم کنیم (در AB).

شکل ۲



وقتی بار در فاصله ی بین تیرچه ی اول و دوم از سمت چپ قرار دارد فقط همین دو تیرچه ی اول بار بر روی تیر انتقال می دهند ولی سه تیرچه ی بعدی هیچ باری دریافت نمی کنند. به محض ورود با

از دهنه‌ی اول به دوم ، این اتفاق در بین دو تیرچه‌ی دوم و سوم توزیع می شود و به همین ترتیب .

قبلاً گفتیم که اگر تیر زیر را داشته باشیم با بارگذاری واحد و بخواهیم خط تأثیر برش را حساب کنیم

شکل ٤

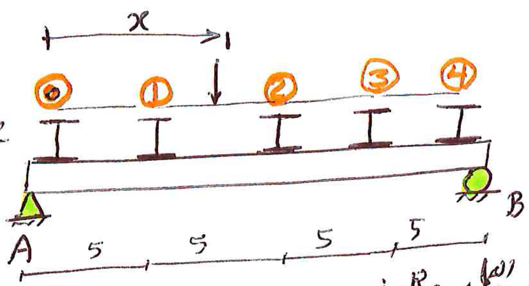
خط تأثیر برش دو نقطه‌ی E و F از هم متفاوت است.

اما در مثال حاضر خط تأثیر مثلاً برش بین دهانه‌ها در تیر اصلی یکسان است. یعنی خط تأثیر برش تمام نقاط روی تیر AB در بین هر دو تیرچه ثابت است. چون برش در بین این دو دهانه ثابت است. چون بین دو بار متمرکز برش ثابت است.

تیر مثال ما هر بارگذاری روی آن صورت بگیرد ما آن را تنها به صورت دو بار متمرکز دریافت می کند. بنابراین ما در این گونه مسائل به جای صحبت از خط تأثیر یک نقطه ، از خط تأثیر برش یک دهانه صحبت می کنیم.

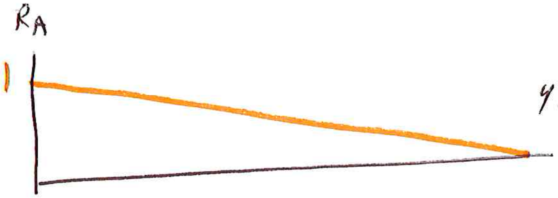
ما تیرچه‌های خود را از صفر تا 4 نامگذاری می کنیم. و از این به بعد در مورد دهانه صفر تا یک ، یک تا دو و ... صحبت می کنیم

شکل ۵

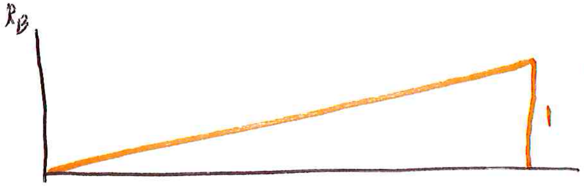


خط تأثیر عکس العمل R_A :

بار چه بر روی تیر اصلی وارد شود چه از طریق این سیستم پل به تیر AB منتقل شود در عکس العمل R_A هیچ تأثیری ندارد. پس خط تأثیر R_A برابر است با :



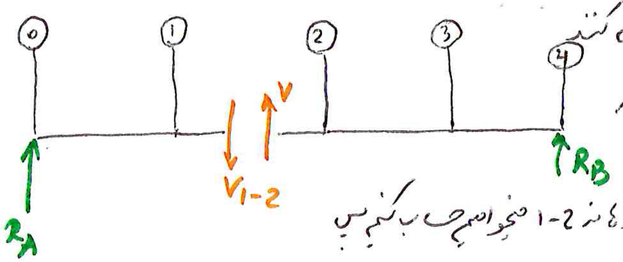
شکل ۶



شکل ۷

خط تأثیر برش دهانه‌ی ① و ② :

اگر بار در دهانه 1-0 اعمال شود آنگاه ② و ③ و ④ چیزی را درک نمی کنند



شکل ۸

برش را در دهانه 2-1 می‌خواهیم حساب کنیم پس در آنجا تیر را قطع داده و بردار برش را رسم می کنیم. پس تعادل را در قطعه‌ی راست می نویسیم

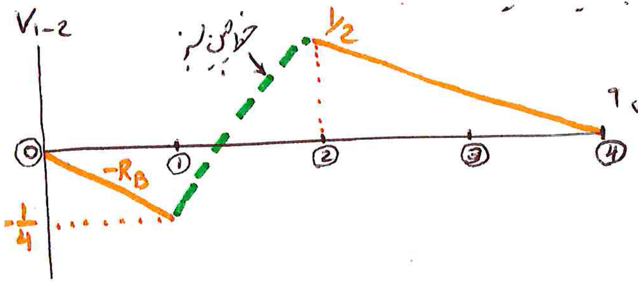
$$\underset{\text{که سمت راست}}{\sum f_y = 0} \Rightarrow \boxed{V_{1-2} = -R_B}$$

(یعنی فعلاً در این بازه بار قرار نمی دهیم)

حال از روی دهانه 2-1 برش انجام می دهیم و بار را روی دهانه‌ی از 2 تا 4 اعمال می کنیم. در این صورت (اعمال بار بین محور 2 تا 4) ، محور 0 تا 1 بار را حس نمی کند، پس تعادل را در قسمت سمت چپ می نویسیم

$$\underset{\text{که سمت چپ}}{\sum F_y = 0} \Rightarrow \boxed{V_{12} = R_A}$$

بنابراین خواهیم داشت :

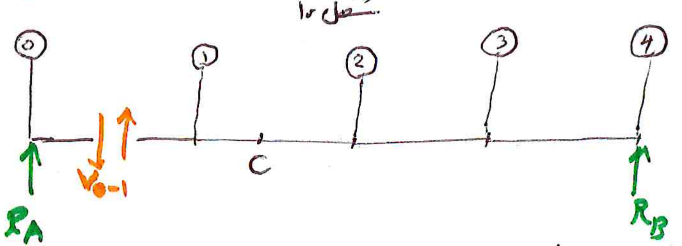


شکل ۹

از دهانه ⓪ تا ① و ② تا ④ مسأله حل شد. در وسط یعنی ① تا ② چگونه باید عمل کنیم؟ اگر بار را در دهانه 2-1 وارد کنیم و فرض کنیم دقیقاً در سمت راست نقطه‌ی ① اعمال کنیم تمام بار بر روی تیرچه ① می افتد و اگر دقیقاً در سمت چپ ② اعمال کنیم تمام بار روی ② می افتد. اگر بین ① و ② محل بار را تغییر دهیم تغییرات به صورت خطی خواهد بود. پس به راحتی می توان با نوشتن تعادل به خط چین سبز رنگ در شکل ۹ رسید.

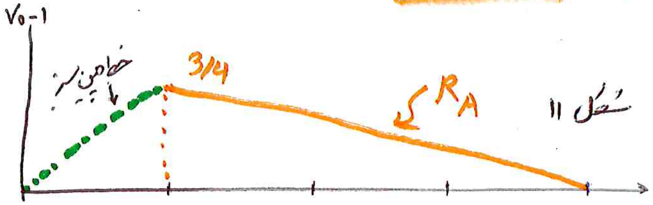
حال برش دهانه‌ی 1-0 را می نویسیم :

شکل ۱۰



اگر بار از نقطه‌ی ① به سمت راست اعمال شود یعنی محور ⓪ چیزی را دریافت نخواهد کرد. وقتی محور ⓪ چیزی را درک نکند

یعنی: $\boxed{V_{0-1} = R_A}$

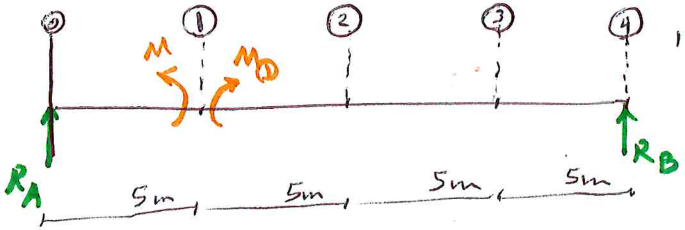


شکل ۱۱

حال برای بدست آوردن نمودار در ① تا ⓪: می‌دانیم تغییرات خطی است. فقط لازم است در نقطه‌ی ⓪ مقدار را بدست بیاوریم. اگر فرض کنیم بار واحد را دقیق روی محور ⓪ اعمال کنیم، کلاً با عکس‌العمل تکیه‌گاه ⓪ (=1) خنثی می‌شود پس برش (با نوشتن تعادل در قطعه‌ی چپ) صفر می‌شود. پس نمودار در ① تا ⓪ به صورت خط‌چین سبز در شکل فوق در می‌آید.

حال فرض کنید خط تأثیر ممان را درست در زیر محور شماره ① بدست بیاوریم ($M_① = ?$). برای رسم خط تأثیر ممان در زیر محور شماره‌ی ①:

شکل ۱۲



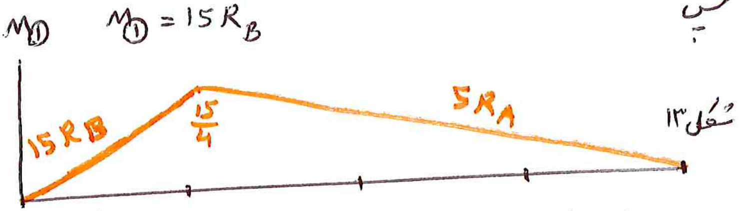
اگر بار از ① تا ④ تغییر کند، در این صورت ممان نقطه‌ی ① برابر خواهد بود با = بازوی نیرو × R_A. پس

$M_① = 5R_A$ (نوشتن تعادل در قطعه‌ی چپ)

حال اگر بار در دهانه‌ی ⓪ تا ① تغییر کند، محور ②، ③ و ④ هیچ باری ندارند

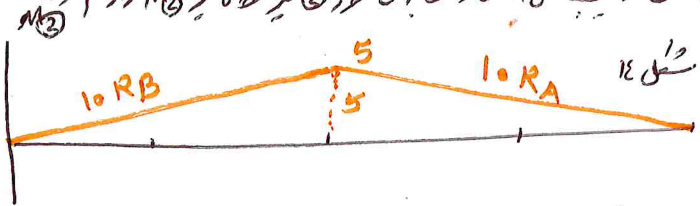
پس

$M_① = 15R_B$



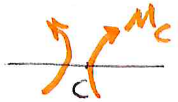
شکل ۱۳

به همان ترتیب شکل ۱۳ می‌توان برای محور ② نیز خط تأثیر $M_②$ را رسم کرد:



شکل ۱۴

حال فرض کنید بخواهیم ممان نقطه‌ی c در شکل ۱۰ را که ۶ متر از سمت چپ فاصله دارد محاسبه کنیم (۱۴ متر هم از سمت راست فاصله دارد)



شکل ۱۵

اگر بار در دهانه ⓪ تا ① باشد قطعاً محورهای ② و ③ و ④ هیچ‌گونه باری دریافت نمی‌کنند، پس

$M_c = 14R_B$ (نوشتن تعادل از نقطه‌ی c تا B)

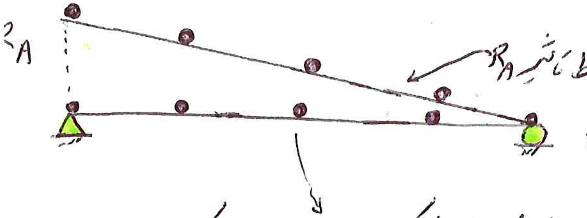
وقتی بار بین ② تا ④ باشد محور ⓪ و ① باری دریافت نمی‌کنند بنابراین

$M_c = 6R_A$

شکل ۱۶

بین دو قطعه یعنی از ① تا ② هم خطی تغییر می‌کند. خط‌چین سبز را رسم می‌کنیم.

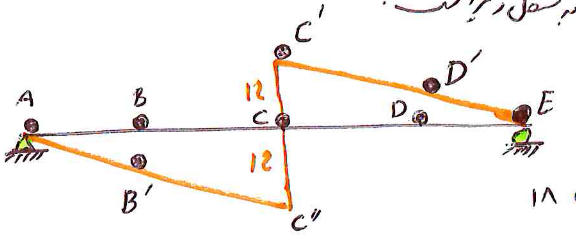
در اینجا هم می‌شود از روش مولر برسلاو استفاده کرد فقط باید حواسمان باشد که بار واحد به خود تیر اعمال نمی‌شود بلکه باید به جفت روی تیرچه‌ها اعمال شود. پس باید ببینیم جابجایی تیرچه‌ها چقدر است. فرض کنید تیرچه‌ها را با نقطه نشان دهیم. در حالت محاسبه‌ی خط تأثیر R_A، تنها کافی است تیر را از تکیه‌گاه برداشته و یک واحد به بالا انتقال دهیم. تیرچه‌ها هم سوار بر روی تیر بالا می‌روند.



شکل ۱۷

حال برای برش: فرض کنید از وسط تیر و اندکی سمت چپ

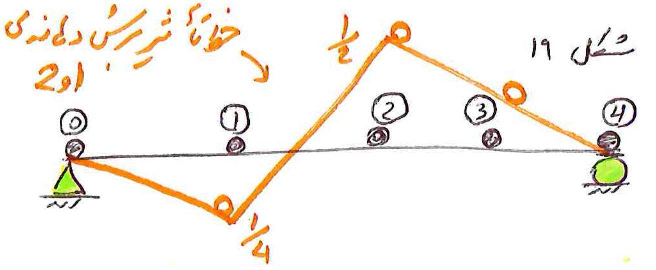
تیرچه وسط، تیر اصلی را برش دهیم. خط تأثیر برش در وسط تیر به شکل زیر است:



شکل ۱۸

تیرچه‌ی نقطه‌ی E و A که سر جای خود می‌ماند. تیرچه‌ی D بالا می‌رود. چون تیر را اندکی از سمت چپ تیرچه‌ی C قطع کرده‌ایم پس تیرچه‌ی C بالا می‌رود (روی قطعه‌ی سمت راست). نقطه‌ی B هم با قطعه‌ی چپ پایین می‌آید. حال توجه کنید خط اولیه که رسم کرده‌ایم یعنی خط شامل A B' C''CC' D' E خط تأثیر برش تیر در حالت عادی است.

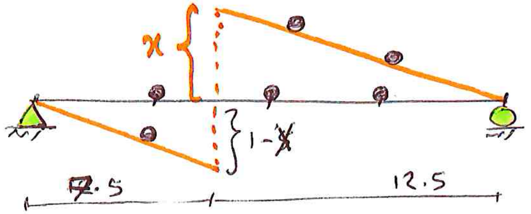
چون تیرچه‌ی B به نقطه‌ی B' رفته و C به روی C' پس خط تأثیر نقاط E' D' C' B' A را به هم وصل خواهد کرد. پس خط تأثیر به شکل زیر در می‌آید:



شکل ۱۹

حال می‌خواهیم خط تأثیر برش را در وسط دهانه‌ی ① و ② بیابیم

خواهیم داشت

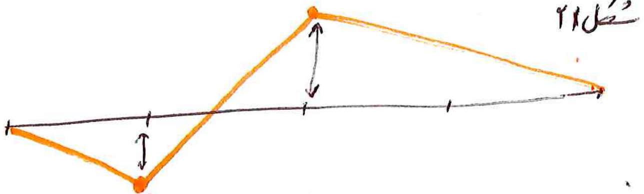


شکل ۲۰

مقدار x را نمی‌دانیم اما می‌دانیم که قطعه‌ی چپ و راست باید با هم موازی باشند. بنابراین

$$\frac{X}{12.5} = \frac{1-X}{7.5} \Longrightarrow X = \frac{5}{8}$$

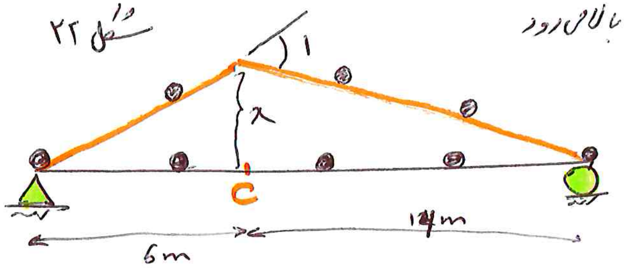
پس خط تأثیر به شکل زیر در می‌آید (تیرچه‌ها را به هم وصل می‌کنیم)



شکل ۲۱

این فواصل را حال می‌توان با نسبت‌های هندسی یافت

حال فرض کنید معادل شکل (۱۴) یعنی ممان در نقطه‌ی C از شکل ۱۰ را بخواهیم به این روش محاسبه کنیم. یعنی نقطه‌ی C از سمت چپ بالا می‌رود

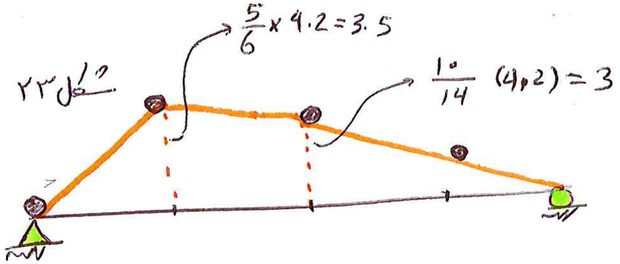


شکل ۲۲

تا میزان زاویه ۱ شود. x را هم نمی‌دانیم.

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{14} = 1 \Longrightarrow \boxed{x = 4.2}$$

کافی است تیرچه‌های جابجا شده را به هم وصل کنیم

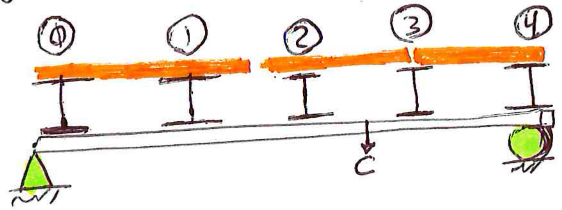


شکل ۲۳

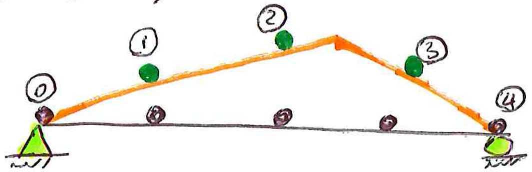
پس روش کلی به این نحو شد که اول خط تأثیر تیر اصلی را می‌کشیم بعد می‌بینیم که تیرچه‌ها به چه نحو با آن جابجا می‌شوند.

فرض کنید شکل زیر را داریم که ورق‌های روی تیرچه‌ها فقط دو تیرچه را پوشش نداده‌اند (بلکه ورق از ⓪ تا نیمه‌ی ① و ② رفته است

شکل ۲٤



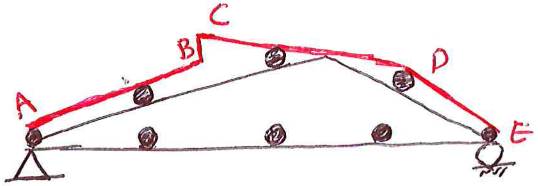
هر صورت نمادین شکل بالا به صورت زیر است. فرض کنید بخواهیم خط تأثیر ممان را در وسط C شکل بالا رسم کنیم. ممان وسط دهنه



شکل ۲۵

در حالت عادی به شکل بالا است. پس تیرچه‌ها را هم روی آن قرار ده

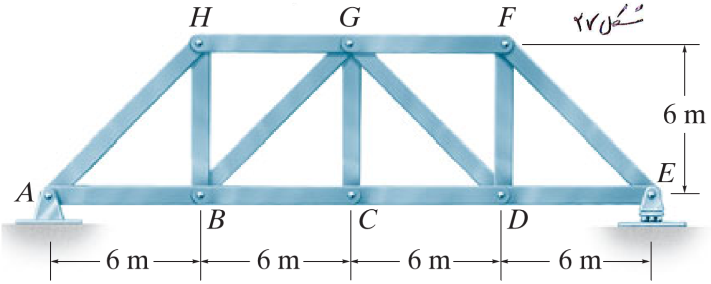
حال ورق‌ها را روی تیرچه‌ها قرار می‌دهیم.



شکل ۲۶

ورق روی ⓪ و ① از روی هر دو گذشته و تا وسط دهانه‌ی ① و ② رسیده است (شکل فوق و قطعه‌ی A تا B).
ورق روی ④ و ③ فقط دهانه ③ تا ④ را پوشش می‌دهد (قطعه‌ی DE). ورق روی ③ تا ②، از روی ③ تا ② عبور کند و تا نصف دهانه‌ی ② تا ① هم پیش می‌رود (قطعه‌ی CD)
حال اگر C و B را به هم وصل کنیم خط تأثیر حالی بدست می‌آید. شکستگی که در C دیده می‌شود به خاطر بلندتر از یک دهانه بودن ورق‌های روی تیرچه‌ها بوده، این شکستگی‌ها را ما معمولاً سعی می‌کنیم از آن احتراز کنیم چون باعث خستگی fatigue می‌شوند (در ورق دوم از سمت چپ).

خرپاها: خرپا بارگذاری‌اش را روی گره‌هایش دریافت می‌کند، فرض کنید خرپای ساده‌ی شکل ۲۷ داده شده است. می‌خواهیم بدانیم خط تأثیر تغییرات نیروی یک عضو خاص را بدست آوریم. در خرپاها



شکل ۲۷

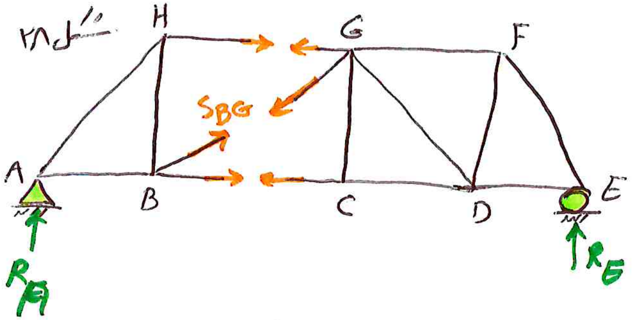
برخلاف تیرها (که دنبال خط تأثیر لنگر یا برش بودیم)، بیشتر به دنبال تغییرات نیروی محوری یک عضو خاص هستیم. مثلاً تغییرات نیروی عضو GB را می‌خواهیم وقتی بار از A تا E جابجا شود. در اینجا نیز مثل حالت قبل وقتی بار بین A و B باشد، نقاط A و B نیرو را دریافت می‌کنند و به همین ترتیب. پس درست مانند مثال شکل ۳ از صفحه‌ی ۹۳ عمل می‌کنیم. چون قانون انتقال نیروی این مثال با شکل ۳ دقیقاً یکسان است پس خط تأثیر عکس‌العمل‌های R_A و R_B در اینجا درست مانند شکل‌های ۶ و ۷ خواهد بود. (البته بقیه موارد متفاوت است چرا که در اینجا اعضای نیروی محوری داریم). در محاسبه خط تأثیر خرپا معمولاً کسی از روش مولر استفاده نمی‌کند.

راه حل استاندارد رسم خط تأثیر خرپا این است که یک بارگذاری انجام دهیم و سپس خرپا را تحلیل کنیم (مثلاً در B قرار دهیم بار را و تحلیل کنیم) تا نیروهای ایجاد شده در محل مورد نظر را بدست آوریم. بعد نیرو را به C انتقال دهیم و اعمال کنیم و به همین ترتیب. رو

روش Muller-Breslau هم قابل اعمال است ولی کسی از این روش برا
خرپاها استفاده نمی‌کند چرا که بسیار پیچیده است و محاسبا
سخت می‌شود. اما می‌توانیم از روش دیگری استفاده کنیم:

فرض کنید بخواهیم در عضو BG خط تأثیر را رسم کنیم. به این منظو
سازه را به صورت زیر برش می‌دهیم و در محل بریده شده نیروهای محو

شکل ۲۸



تولید شده را نمایش می‌دهیم. حال اگر بارگذاری از A تا B انجا
شود قطعه‌ی سمت راست باری دریافت نمی‌کند. پس با نوشت

$$\underset{\text{که قطعه راست}}{\sum F_y = 0}$$

بدین ترتیب

$$R_E - S_{BG}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{BG} = \sqrt{2} R_E} \Longleftarrow$$ بارگذاری در A تا B

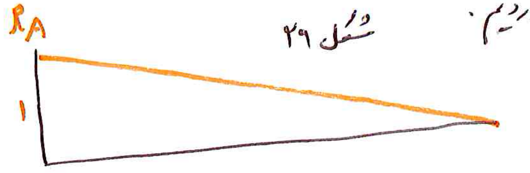
حال اگر بار از C تا E حرکت کند قطعه‌ی چپ باری دریافت

عمل کند. پس با نوشتن تعادل در این قطعه‌ی سمت چپ

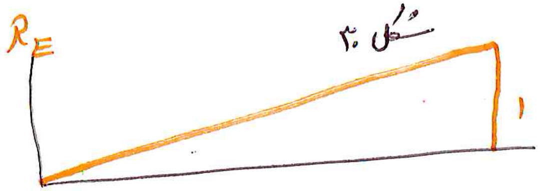
$$R_A + S_{BG}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{BG} = -\sqrt{2}\,R_A} \Leftarrow$$ بارگذاری از B تا C

R_A و R_B را هم که با شبیه سازی با شکل ۳ مثال ص 93 بدست آوردیم.

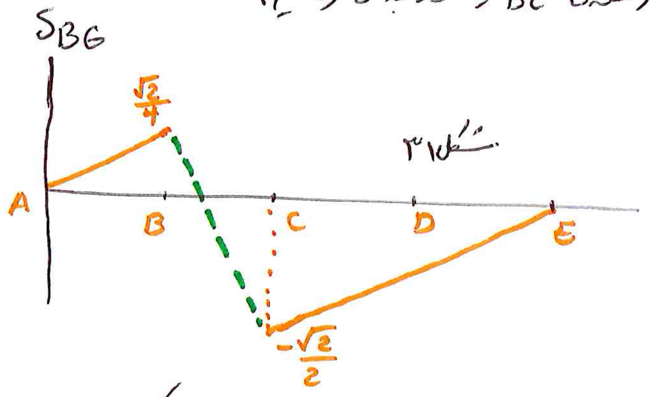


شکل ۲۹



شکل ۳۰

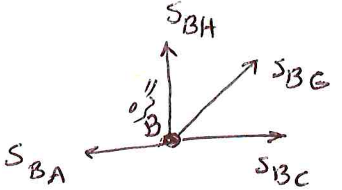
پس S_{BG} در دو بازه‌ی AB و CE قابل رسم است. (قطعه‌ی BC را هنوز بررسی نکرده‌ایم)



شکل ۳۱

حال B تا C را به صورت خطی به هم وصل می‌کنیم تا خط تاثیر کل در عضو BG بدست آید.

برای اینکه خط تاثیر مثلاً عضو BH را بنویسیم دقت می‌کنیم که در گره B نیروهای زیر را داریم



شکل ۳۲

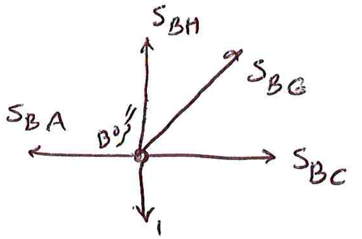
با نوشتن $\sum F_y = 0$ خواهیم داشت:

$$S_{BH} + \frac{\sqrt{2}}{2}S_{BG} = 0 \quad ①$$

$$\Rightarrow S_{BH} = -\frac{\sqrt{2}}{2}S_{BG} \quad ②$$

بنابراین چون S_{BG} را داریم می‌توانیم S_{BH} را بدست آوریم. پس با داشتن یک نیروی محوری می‌توانیم نیروهای دیگر را بدست آوریم.

حال باید توجه کنیم که شکل ۳۲ و معادلات ① و ② بدست آمده دارای یک مشکل است و ایراد دارد. این مشکل این است: معادله‌ی تعادل گره B در شکل ۳۲ زمانی درست است که بار در نقطه‌ی C تا D اعمال شود چون اگر بار در دهانه‌های A تا B و یا B تا C اعمال شود جزئی از بار بر روی گره B می‌افتد. پس باید این را در نوشتن تعادل گره B در نظر گرفت. پس چاره چیست؟ می‌گوییم چون تغییرات خط تاثیر در بازه AB و بازه‌ی BC و دیگر بازه‌ها خطی است می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم. ما خط تاثیر بازه‌ی CE را بدست آوردیم که همان خط تاثیر بدست آمده در رابطه‌ی ① است. حال اگر بار روی A قرار بگیرد نیروی داخل H به مانند تمام نیروهای محوری دیگر صفر است (تکیه‌گاه A تمام بار را تحمل می‌کند) پس جواب حالتی را که بار روی A قرار بگیرد داریم. از C تا E را هم که داریم. حال تنها باید حالتی را در نظر بگیریم که بار روی B بیاید و سپس A تا B را به صورت خطی به هم وصل کنیم. اگر بار روی B باشد آنگاه



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_{BH} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_{BG} = 0$$

$$S_{BH} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_{BG}$$

جلسه بیست و ششم:

تحلیل سازه‌های نامعین به روش تغییر مکان‌های سازگار

در سازه‌های نامعین یک سری مجهولات اضافی داریم که باید معادلات جدیدی برای حل و بدست آوردن آنها پیدا کنیم. به طور کلی روش‌های آنا

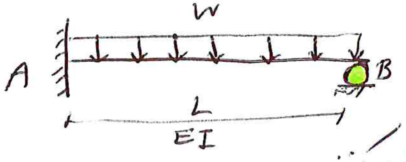
سازه‌های نامعین به دو روش زیر تقسیم می‌شوند:

① روش‌های نیرو ⟵ Force Method

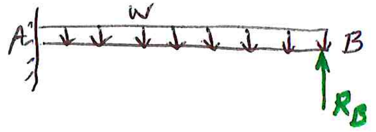
② روش‌های تغییرمکان displacement Method

روش تغییرمکان‌های سازگار جزو روش‌های نیرو است که در تحلیل یک بررسی می‌شود. روش‌های تغییرمکان در تحلیل ۲ بررسی می‌شود که شامل چندین روش‌اند.

در روش نیرو، یکی از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها را که اضافی است و باعث نامعین شدن سازه شده است را حذف کرده و جای آن یک نیروی مجهول می‌گذارند. بعد فرض می‌کنند که این دو سازه از لحاظ نیرویی معادل‌اند. مثلاً تیر زیر نامعین است

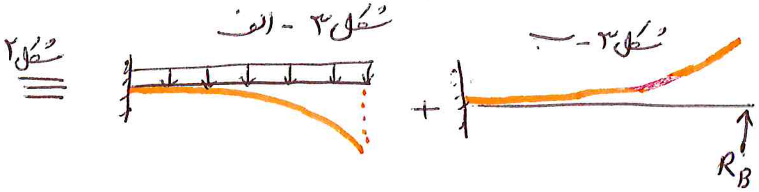


تیر فوق را با تیر زیر معادل می‌کنند



و R_B را به گونه‌ای تعیین می‌کنند که جابجایی B صفر شود. این قضیه کلید حل مسئله است.

شکل ۲ نیز معادل حالت زیر است



تغییرشکل تیرهای فوق به شکل نشان داده شده در بالا خواهد بود. شکل ۳ الف جابجایی‌اش تابعی از w است و شکل ۳-ب جابجایی تابعی از R_B خواهد داشت. بنابراین جابجایی نقطه B که حاصل جمع این دو است باید برابر صفر باشد.

جابجایی B در شکل ۳-الف ⟸ $\frac{wL^4}{8EI}$

« « « ۳-ب ⟸ $\frac{R_BL^3}{3EI}$

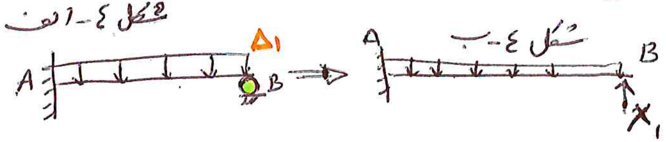
برای صفر شدن

$$\Longrightarrow \frac{R_BL^3}{3EI}=\frac{wL^4}{8EI} \Longrightarrow \boxed{R_B=\frac{3}{8}wL}$$

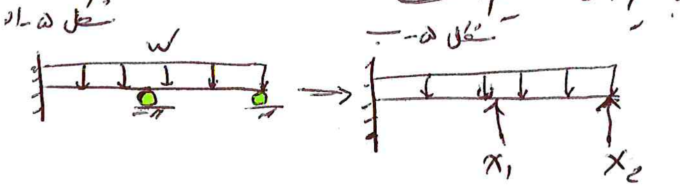
در این دسته از روش‌ها، یکی از نیروهای اضافی را مجهول فرض کرده و از طریق نوشتن سازگاری تغییرمکان‌ها، این نیروی مجهول را محاسبه می‌کنند. به همین دلیل روش تغییرمکان‌های سازگار، یک روش نیرو دسته‌بندی می‌شود.

حال اگر تعداد درجات نامعینی بالاتر رود و یا سازه پیچیده‌تر شود به کار بردن این روش غیرعملی است. بنابراین لازم است تکنیکی قرارداد تعریف کنیم.

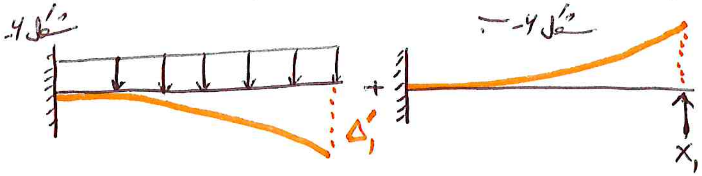
در تیر شکل زیر، عکس‌العمل B را با X_1 نمایش می‌دهیم



حال اگر دو عدد تکیه‌گاه افزون بر نیاز (Redndant force) داشته باشیم آنگاه خواهیم داشت



برای شکل ۴ می‌توان نوشت که شکل ۴-ب معادل زیر است

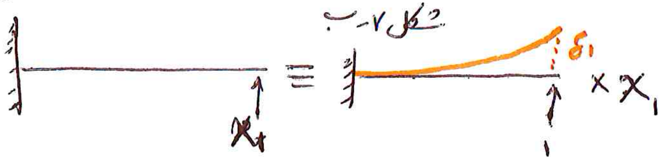


شکل ۴-ب را سازه مبنا (primary structure) می‌نامیم و جابجایی شکل ۴-الف را با Δ_1 نمایش می‌دهیم. جابجایی شکل ۶-الف را با Δ'_1 نمایش می‌دهیم. اگر Δ'_1 در جهت X_1 باشد مثبت فرض می‌شود و در خلاف X_1 باشد منفی می‌شود (یعنی در شکل ۶-الف منفی می‌شود). بنابراین

$$\Delta'_1 = -\frac{wL^4}{8EI}$$

حال به سراغ شکل ۶-ب می‌رویم معمولاً این شکل را به صورت زیر معادل سازی می‌کنیم

شکل ۷ - الف



جابجایی بار واحد را با δ_1 نشان می‌دهیم که برابر است با

$$\delta_1 = \frac{L^3}{3EI}$$

حال یک معادله‌ی حاکم داریم که برابر است با

$$\boxed{\Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_1 X_1} \quad \circledast$$

در این مسئله‌ی خاص $\Delta_1 = 0$ است بنابراین

$$0 = \Delta'_1 + \delta_1 X_1$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} X_1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{X_1 = \frac{3}{8} wL}$$

پس عکس‌العمل مجهول به این صورت حل می‌شود و مسئله از حالت نامعینی در می‌آید.

رابطه‌ی ⊛ برای تمام مسائل نامعین از درجه‌ی یک کار می‌کند

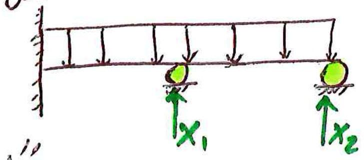
$\Delta_1 =$ جابجایی واقعی در سیستم واقعی در امتداد X_1

$\Delta'_1 =$ (Primory str) جابجایی در سازه‌ی مبنا

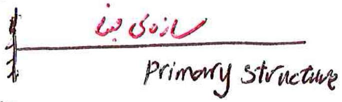
$\delta_1 =$ جابجایی سازه‌ی مبنا با قرار دادن $(X_1 = 1)$

حال به سراغ مسئله‌ی با دو درجه نامعینی می‌رویم. از لحاظ تفکر اختلاف سازه‌ی درجه یک با دو زیاد است. اما زمانی که مسئله‌ی دو درجه نامعین را حل کنیم، حل نامعینی‌های بالاتر هم شبیه همان خواهد بود.

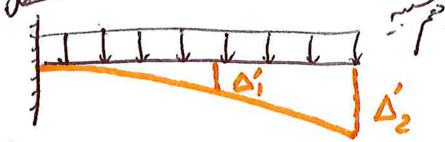
شکل ۸



شکل ۹



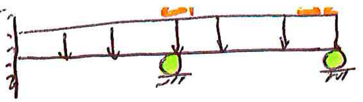
شکل ۱۰



در اینجا گام اول تعیین درجه‌ی نامعینی است. گام دوم انتخاب عکس‌العمل‌های Redandant (افزون بر نیاز). {باید به گونه‌ای حذف گردد که سازه همچنان پایدار باشد} با حذف این عکس‌العمل‌ها سازه‌ی مبنا بدست می‌آید که برای شکل ۸ به صورت شکل ۹ در می‌آید.

حال بارگذاری واقعی را روی سازه‌ی مبنا اعمال می‌کنیم و شکل ۱۰ حاصل می‌شود که در آن سازه‌ی مبنا تغییر شکل داده است. Δ'_1 و Δ'_2 را به صورت نمایش داده شده در شکل فرض می‌کنیم (طبق تعریف قبلی). حال باید معادله‌ی زیر را در نظر بگیریم:

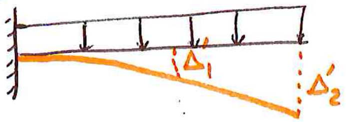
شکل ۱۱



(Δ_1 و Δ_2 جابجایی واقعی)

≡

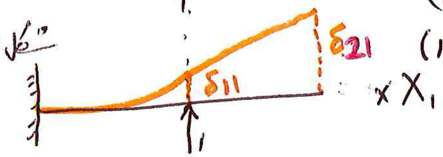
شکل ۱۲



(Δ'_1 و Δ'_2 جابجایی ناشی از W)

+

شکل ۱۳



(اندیس اول: محل محاسبه تغییر شکل)

(اندیس دوم: محل قرار گرفتن بار ۱)

+

شکل ۱۴

$\delta_{11} =$ جابجایی در نقطه‌ی یک به ازای اعمال بار واحد در نقطه‌ی یک

$\delta_{21} =$ 〃 〃 〃 دو 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

حال دو مجهول داریم پس باید دو معادله هم بنویسیم که عبارتند از

$$\text{Ⓐ} \begin{cases} \Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 \\ \Delta_2 = \Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 \end{cases}$$

معادلات بالا یک دستگاه دو معادله - دو مجهول است.

اگر سیستمی N درجه نامعین داشته باشیم خواهیم داشت

$$\text{Ⓑ} \begin{cases} \Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1N} X_N \\ \vdots \end{cases}$$

ما برای بدست آوردن ضرایب دستگاه (A) یعنی برای بدست آوردن دو مجهول $\rightarrow X_1, X_2$ باید مسئله را حل کنیم که حل شکل‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ هستند.

دستگاه معادلات (B) را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت

$$\text{(C)}\quad \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2N} \\ \vdots & & & \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \cdots & \delta_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta'_1 \\ \Delta'_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{bmatrix}$$

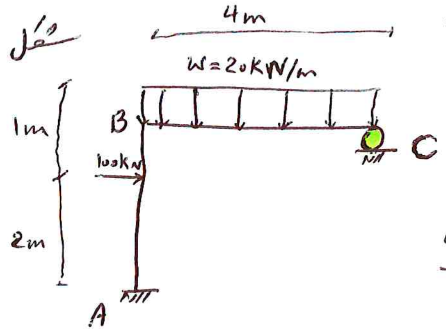
ماتریس ضرایب شامل δها را باید محاسبه کنیم، Δ'ها هم باید محاسبه شوند. Δ_1 تا Δ_Nها معمولاً از صورت مسئله معلوم هستند مثلاً جابجایی نقطه‌ی B در شکل ۱ صفر بود. بنابراین با افزایش مقدار نامعینی مقدار محاسبات سریعاً رشد می‌کنند. به همین دلیل تحلیل یک سیستم نامعین معمولاً با کامپیوتر صورت گیرد.

ماتریس شامل δها را ماتریس نرمی می‌نامند (Flexibility)

جلسه بیست و هفتم:

در جلسات قبل حل مسائل نامعین را آغاز کردیم. در این جلسه یک مثال یک درجه نامعین از نوع قاب، تحلیل سازه‌ی نامعین را ادامه می‌دهیم.

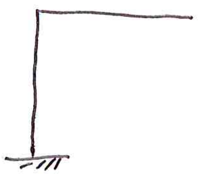
مثال ۱: قاب روبرو یک درجه نامعین است.



شکل ۱

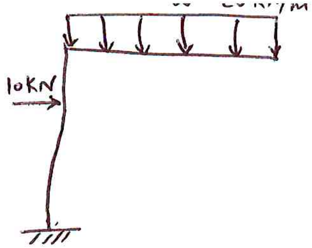
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه: سه عدد در A، یک عدد در C ⟸ یک درجه نامعین

باید یک عکس‌العمل را حذف کنیم به شرط آنکه با حذف این عکس‌العمل سازه ناپایدار نشود. برای حذف این تک عکس‌العمل راه‌های زیادی وجود دارد. مثلاً می‌توان عکس‌العمل C را حذف کرد یا ممان نقطه‌ی A را حذف کرد. یا می‌توان تک عکس‌العمل از A برداشت. یا می‌توان ممان محل اتصال (B) را حذف کرد. اما ساده‌ترین راه حذف عکس‌العمل R_c و جایگزینی آن با x_1 است. در اینصورت سازه‌ی مبنای ما به صورت زیر خواهد بود (که یک سازه معین و پایدار است)



شکل ۲: سازه‌ی مبنا

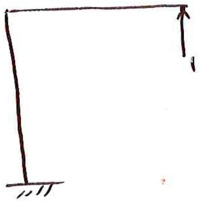
حال یکبار باید بار واقعی را به سازه‌ی مبنای مان اعمال کنیم که شکل ۳ را به دست خواهد داد. در این شکل میخواهیم میزان



شکل ۳

جابجایی قائم نقطه‌ی c را بدست آوریم که همان Δ'_1 را بدست خواهد داد. معلوم است که نقطه‌ی c پایین خواهد آمد. پس مقدار Δ'_1 منفی خواهد بود.

در مرحله‌ی دوم باید سازه‌ی زیر را حل کنیم که بار واحد را به جای عکس‌العمل تکیه‌گاه R_c در نقطه‌ی c قرار می‌دهیم



شکل ۳

معادله‌ی کلی ما عبارت بود از

$$\Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_{11} x_1$$

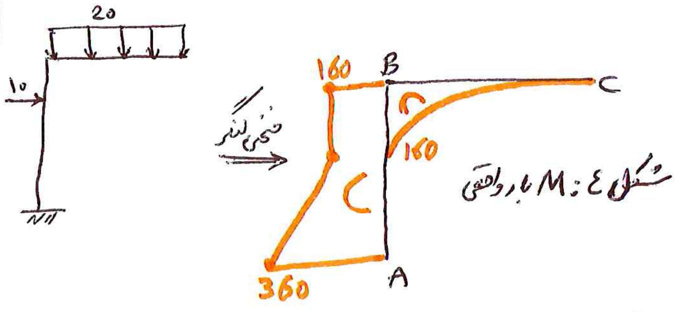
حل شکل ۳ مقدار δ_{11} را بدست خواهد داد که همان جابجایی نقطه‌ی c در اثر بار واحد یک (رو به بالا) است.

دو مقدار Δ'_1 و δ_{11} را بدست آورده و در معادله فوق قرار می‌دهیم. از طرفی می‌دانیم که جابجایی واقعی نقطه‌ی c در مسئله اصلی صفر است

$$\Delta_1=0 \Longrightarrow \Delta'_1+\delta_{11}x=0 \quad \text{Ⓐ}$$

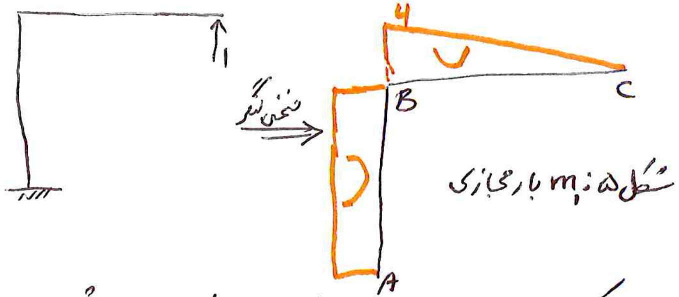
⊛ نکته: اگر تکیه‌گاه C ارتجاعی بوده $\Delta_1 \neq 0$ می‌شد ⊛

حال سراغ حل شکل ۳ می‌رویم و تغییر شکل نقطه‌ی C را محاسبه می‌کنیم. ما از طریق روش کار مجازی این تغییر شکل را محاسبه می‌کنیم پس باید یکبار حالت بار واقعی را حساب کنیم یکبار هم بار واحد قرار دهیم در نقطه‌ای که میخواهیم جابجایی حساب کنیم. سپس با ضرب دو حالت واقعی و مجازی انتگرالگیری را انجام دهیم (مراجعه شود به صفحه‌ی 67) و از طریق روش کار مجازی جابجایی را حساب می‌کنیم.



شکل ۴: M بار واقعی

حال بار یک را قرار می‌دهیم در نقطه‌ی C



شکل ۵: m_1 بار مجازی

حال که M و m_1 را بدست آوردیم خواهیم داشت:

$$\Delta'_1=\sum\int\frac{M m_1}{EI}dx$$

می‌توان از جداول انتگرالگیری استفاده کرد. در قسمت BC یک سهمی در یک مثلث ضرب می‌شود و در قسمت AB یک تکه ضرب مستطیل در مستطیل است و یک قسمت مستطیل در ذوزنقه. یا می‌توان توابع آنها را نوشته و انتگرالگیری کرد (این جدول قبلاً در ص ارائه شده است).

$$\Longrightarrow \Delta'_1=\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)(4)(160)(4)-(4)(160)(1)-\frac{1}{2}(4)(2)(160+360)\right\}\times\frac{1}{EI}$$

$$\Longrightarrow \Delta'_1=-\frac{3360}{EI}$$

پس Δ'_1 منفی به این معنی است که جهت Δ'_1 به سمت پائین است.

حال میخواهیم δ_{11} را بدست بیاوریم. به این منظور باید شکل ۳ را تحلیل کنیم. چون شکل ۳ خود به خود بار واحد دارد پس هم بارگذاری اصلی و هم بارگذاری مجازی اش (در روش کار مجازی) یکسان و شکل هم هستند. پس

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{m_1 m_1}{EI}dx=$$

$$\left[4\times4\times3+\left(\frac{1}{3}\right)\times4\times4\times4\right]\times\frac{1}{EI}=\frac{208}{3EI}$$

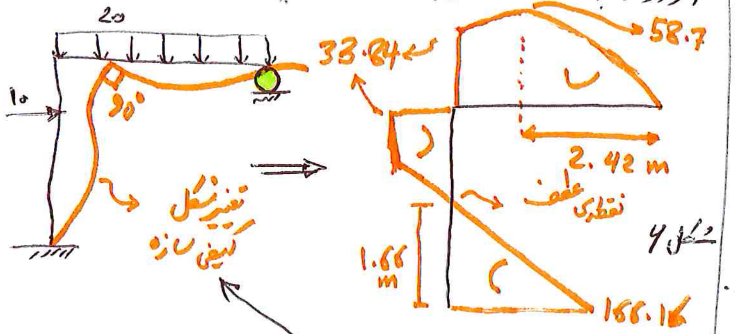
چون مثبت به دست آمد یعنی جابجایی به سمت بالاست.

کافی است Δ'_1 و δ_{11} که بدست آمده را در معادله‌ی Ⓐ در ابتدای ستون سمت راست همین صفحه قرار دهیم پس

$$0=-\frac{3360}{EI}+\frac{208}{3EI}x_1$$

$$\Longrightarrow X_1=48.46\ KN$$

حال که عکس‌العمل مجهول سازه بدست آمد سازه مثل یک سازه‌ی معین قابل تحلیل است. و می‌توان دیاگرام ممان آن را بدست آورد (برای سازه واقعی)



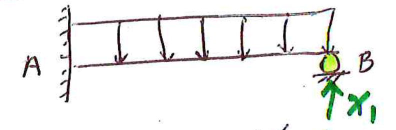
توجه کنید دیاگرام ممان قاب واقعی در واقع برابر است با جمع دیاگرام ممان شکل ۴ و x_1 برابر دیاگرام شکل ۵. بنابراین نیاز به انجام کار و محاسبات پیچیده‌ای نیست. چون ممان واقعی برابر برهم‌نهی دو سازه‌ی نمایش داده شده در شکل‌های ۴ و ۵ است

قبل از اینکه سراغ حل مثال با دو درجه آزادی برویم تا تکیه‌گاه

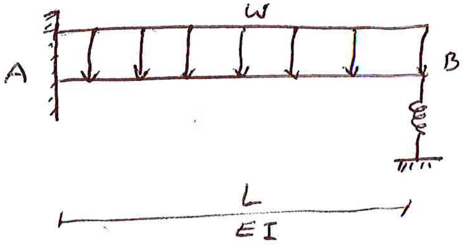
ارتجاعی را در حالت یک بعدی توضیح می‌دهیم.

مثال زیر را در ص 99 حل کردیم:

شکل ۷



حال به جای تکیه‌گاه B یک تکیه‌گاه ارتجاعی قرار می‌دهیم.



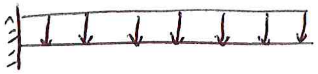
شکل ۸

این مسئله نیز همچنان نامعین است. باید نیروی داخل تکیه‌گاه B را مثل همان حالت قبل برابر X_1 در نظر بگیریم. اما در اینجا دیگر Δ_1 صفر نیست، چون فنر فشرده می‌شود.

شکل ۹

① سازه‌ی مبنا

شکل ۱۰



② اعمال بارگذاری واقعی به سازه مبنا و محاسبه جابجایی انتها که برابر با حل ص 99 است. $\left(\frac{WL^4}{8EI}\right)$

③ اعمال بار ۱ به سازه مبنا

شکل ۱۱

× X_1

این مسئله را هم قبلاً بدست آورده‌ایم.

در حالت قبل شکل ۱۰ را حل کردیم. جواب این مسئله به صورت روبرو درآمد:

$$\Delta'_1 = -\frac{wL^4}{8EI}$$

پس Δ'_1 به سمت پایین است (چون خلاف جهت X_1 بدست آمد)

مسئله‌ی شکل ۱۱ هم برابر $\frac{PL^3}{3EI}$ بود که $P=1$ است پس

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

یعنی δ_{11} به سمت بالاست.

تاکنون مسئله تکیه‌گاه ارتجاعی با مسئله تکیه‌گاه غلطکی در B هیچ تفاوتی نکرده است. تنها تفاوت در مقدار Δ_1 است

در معادله‌ی

$$\Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_{11} X_1$$

Δ_1 در اینجا برابر است با

$$\Delta_1 = -\frac{X_1}{K}$$

منفی است چون فنر جمع می‌شود. (نیرویی که سازه به فنر وارد می‌کند همیشه خلاف جهت X_1 است). پس خواهیم داشت

$$-\frac{X_1}{K} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} X_1$$

$$\Longrightarrow X_1 = \frac{\frac{wL^4}{8EI}}{\frac{1}{K} + \frac{L^3}{3EI}} \quad Ⓑ$$

سختی فنر اگر به سمت بی‌نهایت رود آنگاه

$$X_1 = \frac{3}{8} wL$$

که همان جواب برای حالت تکیه‌گاه غلطکی به جای تکیه‌گاه ارتجاعی است. اگر K به سمت صفر رود آنگاه

$$X_1 = \frac{\frac{wL^4}{8EI}}{\infty} = 0$$

یعنی فنر کمکی در تحمل بار نمی‌کند.

حال EI را فرض کنید (سختی تیر). اگر $EI \to \infty$ آنگاه فنر هیچ کاری انجام نمی‌دهد چون تیر اصلاً پایین نمی‌آید:

در واقعیت فنر کمک خیلی زیادی می‌کند. به همین دلیل کسر Ⓑ در بالای این ستون را به صورت زیر فاکتورگیری می‌کنیم (از $\frac{L^3}{3EI}$ فاکتور می‌گیریم).

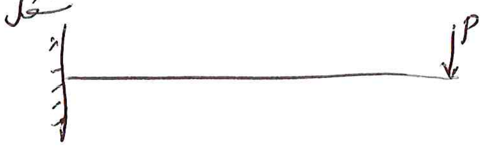
$$X_1 = \frac{\frac{wL^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}\left(\frac{3EI/L^3}{K} + 1\right)} = \frac{3}{8} wL . \left(\frac{1}{1 + \frac{3EI/L^3}{K}}\right)$$

عبارت $\frac{3EI/L^3}{K}$ در عبارت سمت راست تساوی فوق نشان

می‌دهد که مقدار K به خودی خود مهم نیست بلکه مقدار K نسبت به $\frac{3EI}{L^3}$ مهم است. اگر کسر $\frac{3EI/L^3}{K}$ عدد بزرگی باشد آنگاه کسر $\frac{3}{8}wL\left(\frac{1}{1+\frac{3EI/L^3}{K}}\right)$ مخرجش بزرگ شده و کل کسر صفر می‌شود. یعنی اگر K نسبت به $\frac{3EI}{L^3}$ کوچک باشد آنگاه بودن یا نبودن فنر فرقی ندارد و X_1 صفر می‌شود و بالعکس اگر K نسبت به $\frac{3EI}{L^3}$ بالاتر رود آنگاه $\frac{3EI/L^3}{K}$ صفر شده و $X_1 = \frac{3}{8}wL$ می‌شود. بنابراین همیشه X_1 ما بین صفر و $\frac{3}{8}wL$ تغییر می‌کند و غیر از این نمی‌تواند باشد.

یک نکته دیگر: primary structure شکل ۱۹ را در نظر بگیرید و یک بار بر روی انتهای راست آن قرار دهید

شکل ۱۲

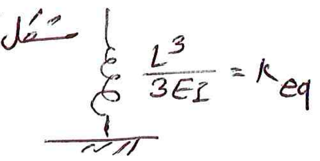


می‌دانیم که جابجایی انتهای راست در اثر این بار برابر است با

$$\frac{PL^3}{3EI}$$

اگر طول L دو برابر شود جابجایی ۸ برابر می‌شود اگر EI دو برابر شود جابجایی نصف می‌شود. پس می‌توان گفت بار واحد $\frac{L^3}{3EI}$ است که جابجایی انتهای تیر را تعیین می‌کند. بنابراین می‌توان کل سازه را با فنری مدل کرد که سختی‌اش $\frac{L^3}{3EI}$ است

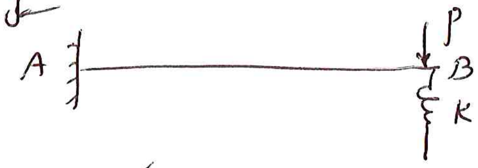
شکل ۱۳



یعنی مهم نیست که P را روی این فنر قرار دهیم یا انتهای تیر شکل ۱۲. اگر دنبال جابجایی هستیم جواب هر دو یکی است.

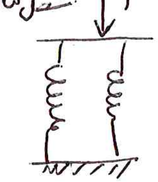
حال فرض کنید در انتهای تیر یک فنر قرار دهیم (تکیه‌گاه ارتجاعی)

شکل ۱۴



مثل این است که کنار فنر اول (معادل تیر) یک فنر موازی دیگر (تکیه‌گاه ارتجاعی) قرار داده‌ایم. پس می‌توان گفت تیر شکل ۱۴ مثل روبه‌رو است. حال اگر سختی یکی از این دو فنر زیاد باشد آن دیگری نیروی کمتری تحمل می‌کند و بالعکس.

شکل ۱۵



اگر چندین تکیه‌گاه ارتجاعی داشته باشیم می‌توانیم از معادلات ماتریسی © صفحه ۱۰۱ استفاده کنیم که در آن باید جایگذاری زیر را انجام دهیم:

$$\Delta_1 = -X_1/K_1$$

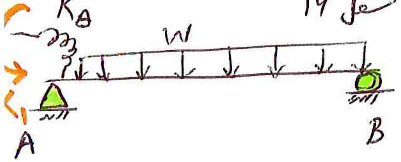
$$\Delta_2 = -X_2/K_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta_N = -X_N/K_N$$

سازه‌ی روبه‌رو را فرض کنید

شکل ۱۶



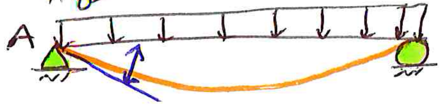
در اینجا راحت‌تر این است که Redundant force را داخل تکیه‌گاه فنر پیچشی K_θ بگیریم. مثلاً به صورت شکل بالا X_1 را فرض کنیم.

شکل ۱۷

سازه‌ی مبنا

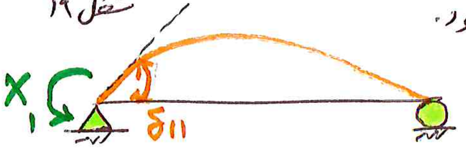
سپس یکبار روی سازه‌ی مبنا بار واقعی را قرار می‌دهیم که باعث یک تغییر شکل خواهد شد

شکل ۱۸



شیب تولید شده در نقطه‌ی A همان Δ'_1 خواهد بود (چون X_1 از جنس لنگر است تغییر شکل متناظر آن همان Δ'_1 خواهد بود).

در مرحله‌ی دوم روی سازه‌ی مبنا $X_1 = 1$ قرار می‌دهیم که در اثر آن δ_{11} ایجاد می‌شود.



شکل ۱۹

حال می‌توان این مقادیر را بدست آورد. با حل سیستم‌های شکل ۱۹ و ۱۸ خواهیم داشت

$$\Delta'_1 = \frac{-\omega L^3}{24EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{L}{3EI}$$

$$\Rightarrow -\frac{X_1}{K_\theta} = \frac{-\omega L^3}{24EI} + \frac{L}{3EI} X_1$$

توجه کنید که $\frac{X_1}{K_\theta}$ از جنس چرخش است. چون X_1 از جنس ممان است و K_θ فنر پیچشی است

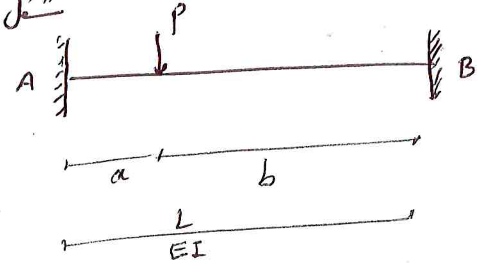
$$\rightarrow X_1 = \frac{\frac{\omega L^3}{24EI}}{\left(\frac{L}{3EI} + \frac{1}{K_\theta}\right)}$$

در اینجا نیز می‌توان بحثی مشابه ستون اول ص ۱۰۴ انجام داد.

جلسه بیست و هشتم:

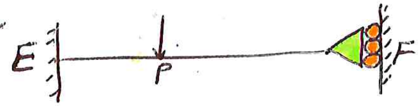
تحلیل سازه‌های نامعین به روش نرمی یا تغییرمکان‌های سازگار را آغاز کردیم و روابط را بدست آوردیم. مسأله یک درجه نامعین و درجات بالاتر را مورد بررسی قرار دادیم. مثالی از حالت یک درجه نامعین هم حل کردیم. در این جلسه سراغ درجات نامعینی بالاتر می‌رویم.

مثال ۱:



شکل ۱

این مسأله سه درجه نامعین است که می‌تواند تکیه‌گاه B در نظر گرفته شود به عنوان نیروهای اضافی. اما در اینجا می‌توان کمتر از سه عدد نیرو Redundant را حذف کرده و مسأله را حل کرد. چرا؟ به تیر زیر توجه کنید



شکل ۲

اگر بخواهیم ممان تیر شکل ۲ را رسم کنیم هیچ مشکلی نداریم علی‌رغم اینکه سازه‌ی ما یک درجه نامعین است. عکس‌العمل تکیه‌گاه F که به صورت افقی است در ممان هیچ تأثیری ندارد و ممان به صورت زیر تغییر خواهد کرد

شکل ۳

اما اگر بار P به صورتی اعمال شود که در تیر مولفه‌ی افقی داشته باشد مثلاً

شکل ۴

در این حالت است که بود و نبود تکیه‌گاه F اهمیت پیدا می‌کند آن هم تنها از دیدگاه نیروی محوری نه برای محاسبه ممان. در شکل ۴ بخشی از مولفه‌ی افقی P را F تحمل می‌کند و بخشی از آن توسط تکیه‌گاه E. بنابراین شکل ۴ یک درجه نامعین است و اگر بخواهیم نیروی محوری را حساب کنیم قادر به این کار نخواهیم بود اما در محاسبه‌ی برش یا ممان مشکلی (از طریق تکیه‌گاه F) ایجاد نخواهد شد.

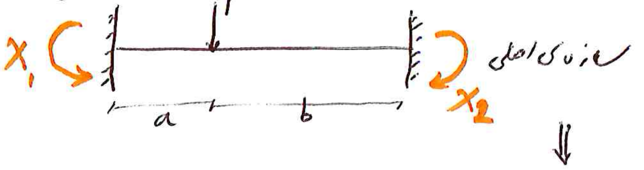
اگر نیروی محوری و تعادل افقی را در شکل ۴ بنویسیم می‌توانیم از این نکته که طول FE تغییر نمی‌کند استفاده کنیم. یعنی مجموع کشش تیر از E تا P باید برابر فشردگی تیر از P تا F باشد. به این ترتیب با روش تغییرمکان‌های سازگار می‌توان مسأله را حل کرد (که تغییرمکان‌ها از نوع محوری است).

حال به سراغ شکل ۱ خودمان برمی‌گردیم. درست است که مسأله‌ی ما سه درجه نامعین است اما ما برای حل این مسأله‌ی تحت خمش تنها نیاز داریم که دو عدد از این عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را برداریم. اگر مسأله تحت نیروی محوری را هم بخواهیم حل کنیم باید یک قید دیگر نیز برداریم.

پس باید دو قید برداریم که این قیدها نمی‌توانند از نوع نیروی محوری باشند. می‌توانیم ممان و برش B را برداریم، ممان و برش A را حذف کنیم و ....

یا در اینجا ممان B و ممان A را برمی‌داریم. این حالت از مسأله راه‌حل دلپذیرتری دارد و علاوه بر آن نکاتی در دل خود دارد.

شکل ۵



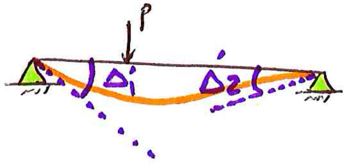
شکل ۶

سازه‌ی مبنا خود یک درجه نامعین است ولی مشکلی در روند ما ایجاد نمی‌کند (چون در راستای محوری است).

حال X_1 و X_2 را روی مسأله قرار می‌دهیم که به مانند X_1 و X_2 نشان داده شده در شکل ۵ هستند.

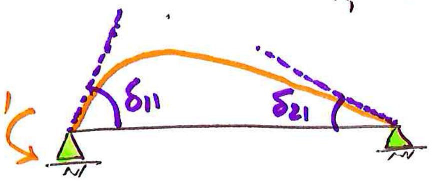
سراغ گام‌های اصلی می‌رویم:

① قرار دادن بار واقعی روی P.S (سازه مبنا) و تغییر شکل‌های متناظر با را بدست آوریم (Δ'_1 , Δ'_2)



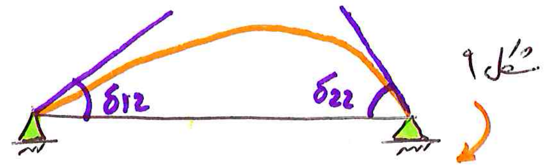
شکل ۷

② قرار دادن بارگذاری $X_1=1$ روی سازه‌ی مبنا



شکل ۸

③ قرار دادن بارگذاری $X_2=1$ روی سازه‌ی مبنا



شکل ۹

پس باید مسائل ①، ② و ③ را حل کرده و دستگاه معادلات

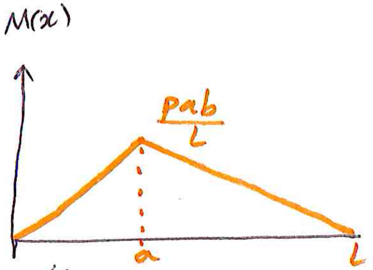
$$\begin{bmatrix} \Delta'_1 \\ \Delta'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad Ⓐ$$

را حل کنیم. در اینجا نیز Δ_1 و Δ_2 صفر هستند چون در تکیه‌گاه گیردار تیر ما چرخش و شیب در آنجا صفر است. پس چرخش متناظر X_1 و X_2 در مسأله واقعی صفر اند.

حال به حل تک تک ① و ② و ③ می‌پردازیم. معمولاً این کار را از طریق روش‌های انرژی انجام دهیم. ما در اینجا از روش تیر مزدوج کار می‌کنیم تا یادآوری هم بشود.

حل ①:

منحنی لنگر شکل ۷ :

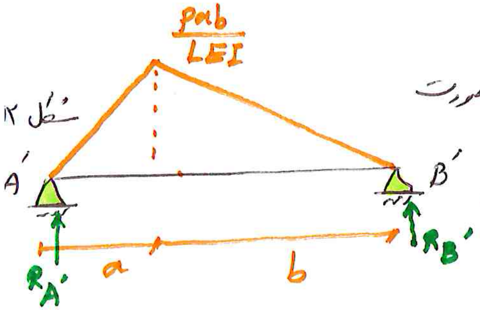


شکل ۱۰

سازه‌ی مزدوج شکل ۷ :

شکل ۱۱

شکل ۱۲



اعمال بار $\frac{M(x)}{EI}$ به صورت بار الاستیک بر تیر مزدوج

محاسبه R_A' و R_B' :

$$\sum M_{A'} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Pab}{LEI}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{Pab}{LEI}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{3}\right) - LR_{B'} = 0$$

ص 107

$$\Rightarrow R_{B'} = \frac{Pab(L+a)}{6EI}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{A'} = \frac{Pab(L+b)}{6EI}$$

از روی $R_{A'}$ و $R_{B'}$ می‌توان Δ_1' و Δ_2' را محاسبه کرد.

$R_{A'}$ مثبت بدست آمده است یعنی برش در تیر مزدوج در نقطه‌ی A' مثبت است. برش مثبت در تیر مزدوج یعنی چرخش مثبت در تیر اصلی (پادساعتگرد). حال چون چرخش در تیر اصلی پادساعتگرد است Δ_1' منفی بدست می‌آید چون X_1 پادساعتگرد است

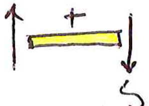
X_1 شکل ۵ تیر اصلی

$$\boxed{\Delta_1' = -\frac{Pab(L+b)}{6EI}}$$

ما مخصوصاً از طریق تیر مزدوج عمل کردیم تا این بحث در مورد علامت مثبت و منفی Δ_1' پیش آید.

$R_{B'}$ مثبت است پس طبق قرارداد برش مثبت یعنی

شکل ۱۳



(چون R_B نقش بردار سمت راست را بازی می‌کند) برش در B' منفی است. برش منفی یعنی چرخش منفی در تیر. چرخش منفی یعنی پادساعتگرد. پادساعتگرد بودن هم خلاف جهت X_2 است پس Δ_2' منفی است

X_2 شکل ۵ تیر اصلی

$$\boxed{\Delta_2' = -\frac{Pab(L+a)}{6EI}}$$

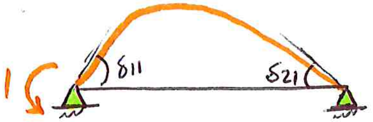
بنابراین به ترتیب Δ_1' و Δ_2' حاصل شد.

حال سراغ حل مسأله ② و ③ می‌رویم. در این مسأله خاص با توجه به شکل‌های ۸ و ۹ می‌فهمیم که δ_{11} با δ_{22} برابر است (تقارن). البته در همه‌ی مسائل δ_{11} با δ_{22} برابر نیست اینجا حالت خاص است. پس فقط δ_{11} را محاسبه می‌کنیم.

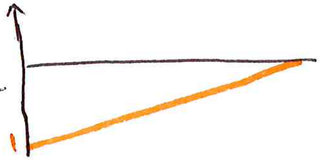
در مورد δ_{12} و δ_{21} باید بگوییم که اینها همیشه با هم برابرند (از روش انرژی این مسأله اثبات می‌شود). پس

$$\begin{cases} \delta_{11} = \delta_{22} & \text{در این مسأله خاص} \\ \delta_{12} = \delta_{21} & \text{همیشه} \end{cases}$$

بنابراین فقط مسأله ② معادل شکل ۷ را حل می‌کنیم.



شکل ۱۴



شکل ۱۵

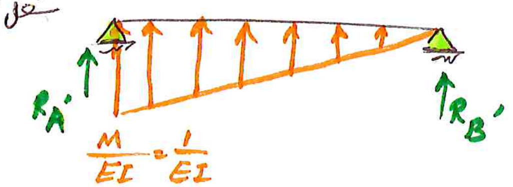
نمودار لنگر این مسأله ←

تیر مزدوج :

شکل ۱۶

بار الاستیک $\frac{M}{EI}$ را روی مسأله اعمال می‌کنیم

شکل ۷



$$\sum M_{A'} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + L \cdot R_{B'} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_{B'} = -\frac{L}{6EI}}$$

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow \boxed{R_{A'} = \frac{-L}{3EI}}$$

$R_{A'}$ منفی یعنی به سمت پایین ← برش منفی ← چرخش منفی ← پادساعتگرد ← هم جهت با X_1 شکل ۵ ← مثبت

$$\Longrightarrow \boxed{\delta_{11} = \frac{L}{3EI}} \xrightarrow[\text{خاص}]{\text{در این مسأله}} \boxed{\delta_{22} = \frac{L}{3EI}}$$

$R_{B'}$ ← منفی یعنی به سمت پایین ← برش مثبت ← چرخش مثبت ← ساعتگرد ← موافق X_2 شکل ۵ ← مثبت

$$\Longrightarrow \boxed{\delta_{21} = \frac{L}{6EI}} \Longrightarrow \boxed{\delta_{12} = \frac{L}{6EI}}$$

بنابراین تمام پارامترهای معادله ماتریسی A (ستون وسط ص 106) محاسبه شدند. سپس به حل این دستگاه معادلات می پردازیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{-pab(\quad b)}{6EI} \\ \frac{-pab(L+a)}{6EI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل این دستگاه دو معادله مجهول نتایج زیر را بدست می دهد:

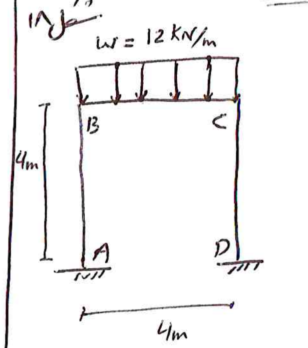
$$X_1 = \frac{Pab^2}{L^2}$$

$$X_2 = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

هر دو X_1 و X_2 مثبت بدست آمده اند یعنی جهات در نظر گرفته شده در شکل ۵ برای X_1 و X_2 درست بوده اند.

توجه: اگر $a=b=\frac{L}{2}$ مسأله کلاً دارای تقارن می شد

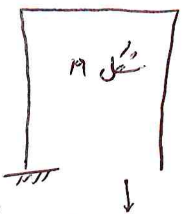
مثال ۲:


شکل ۱۸

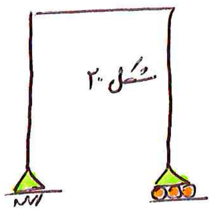
سازه ۳ درجه نامعین است.

پس ۳ نیروی Redundant باید حذف شود. می توانیم انتخاب های مختلفی ارائه دهیم. مثلاً یکی

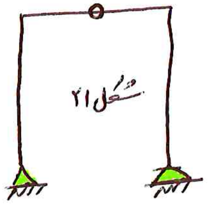
زیر برای b.s (سازه مبنا) بدست می آید


شکل ۱۹

حذف تکیه گاه B و عکس العمل های آن

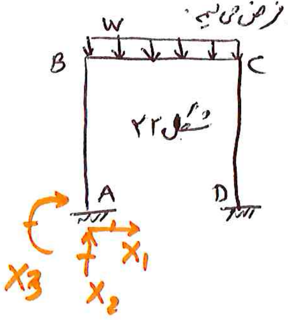

شکل ۲۰

حذف لنگر A و لنگر و عکس العمل افقی تکیه گاه D

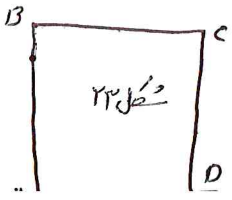

شکل ۲۱

حذف ممان A، ممان D و یک ممان از وسط عضو BC با قرار دادن مفصل

شکل ۲۱ از این بابت زیباتر است که تقارن دارد درست مانند سازه ی اصلی ما در شکل ۱۸. شکل های ۲۰ و ۱۹ تقارن ندارند. با این وجود ما کلاسیک ترین روش را که شکل ۱۹ است پیش می گیریم. سپس، البته در اینجا تکیه گاه A را به عنوان اضافی فرض می کنیم:

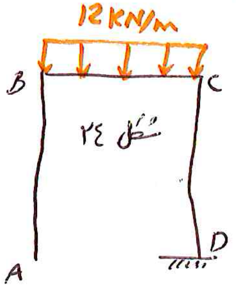

شکل ۲۲

سازه ی اصلی


شکل ۲۳

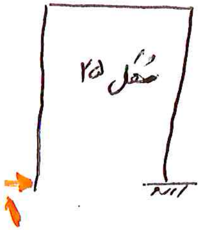
سازه ی مبنا

گام اول: سازه مبنا با بارگذاری واقعی


شکل ۲۴

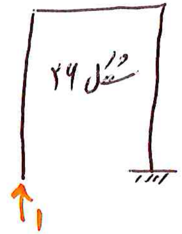
با حل گام اول سه deflection بدست خواهد آمد. حرکت افقی A، حرکت قائم A و چرخش A تحت اثر بار گسترده که آنها را Δ_1'، Δ_2' و Δ_3' خواهیم نامید.

گام دوم


شکل ۲۵

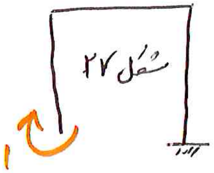
حل مسأله ی روبرو $X_1=1$

گام سوم


شکل ۲۶

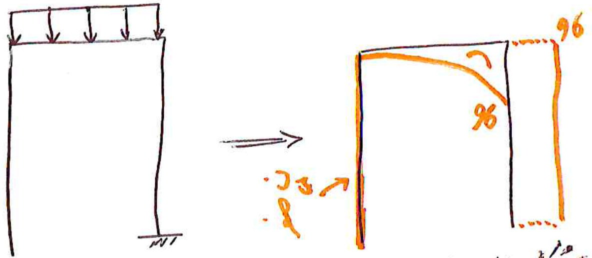
حل مسأله با $X_2=1$

گام چهارم

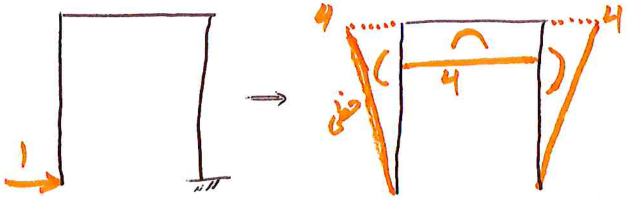

شکل ۲۷

حل مسأله با $X_3=1$

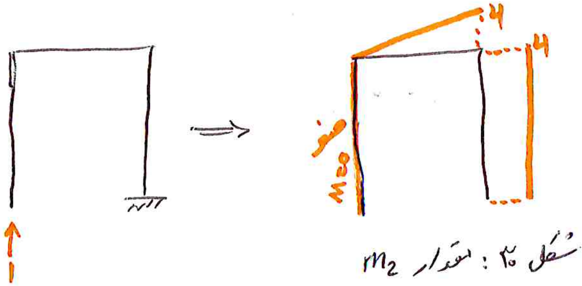
حال به رسم دیاگرام ممان هر یک از گام های بالا می پردازیم که به صورت زیر خواهند بود:



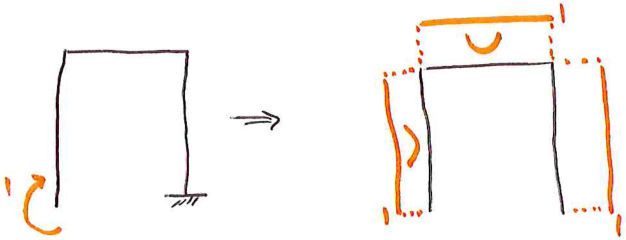
شکل ۲۸: مقدار M



شکل ۲۹: مقدار m_1



شکل ۳۰: مقدار m_2



شکل ۳۱: مقدار m_3

حال باید Δ' ها را محاسبه کنیم از طریق رابطه

$$\Delta'_i = \sum \int \frac{M m_i}{EI} dx \quad ⊛$$

و δ ها از رابطه ی

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{m_i m_j}{EI} dx \quad ⊛⊛$$

از رابطه ی ⊛⊛ می توان نتیجه گرفت که

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{m_i m_j}{EI} dx = \sum \int \frac{m_j m_i}{E\cancel{I}} dx = \delta_{ji}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta_{ij} = \delta_{ji}}$$

ما باید δ ها را (δ های ستون چپ ص 108) را حل کرده و در هر مرحله ۳ جابجایی محاسبه کنیم که کلاً ۱۲ عدد می شود. اما به دلیل تقارن ماتریس از رابطه ی $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ، ۳ عدد از آنها حذف می شود

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$
$$\delta_{13} = \delta_{31}$$
$$\delta_{23} = \delta_{32}$$

ما در اینجا تنها به نوشتن جواب ها بسنده می کنیم

$$\Delta'_1 = \frac{1280}{EI} \quad , \quad \Delta'_2 = \frac{-1920}{EI} \quad , \quad \Delta'_3 = \frac{-512}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{106.67}{EI} , \quad \delta_{21} = \frac{-64}{EI} \quad , \quad \delta_{31} = -\frac{32}{EI}$$

$$\delta_{21} = -\frac{64}{EI} \quad , \quad \delta_{22} = \frac{85.33}{EI} \quad , \quad \delta_{32} = \frac{24}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} \quad , \quad \delta_{23} = \delta_{32} \quad , \quad \delta_{33} = \frac{12}{EI}$$

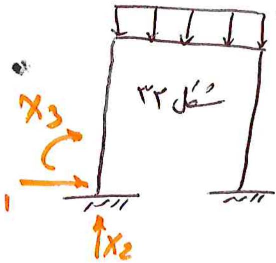
حال باید معادله ی ماتریسی (سه معادله و سه مجهول) را حل کرده و جواب ها را به دست آوریم. با این کار خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 1280 \\ -1920 \\ -512 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 106.67 & -64 & -32 \\ -64 & 85.33 & 24 \\ -32 & 24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} X_1 &= 4KN \\ X_2 &= 24KN \\ X_3 &= 5.3\ KN.m \end{aligned}}$$

نکته: هیچ کدام از نرم افزارهای تجاری برای تحلیل سازه ها از این روش استفاده نمی کنند بلکه با روش هایی کار می کنند که در تحلیل ۲ ارائه می شود.

حال که X_1، X_2 و X_3 بدست آمده اند سازه به حالت معین در می آید. می توان مثلاً منحنی تغییرات لنگر سازه اصلی را رسم کرد. می توان X_1، X_2 و X_3 را در شکل زیر قرار داد و از تعادل استاتیکی به حل معادله پرداخت

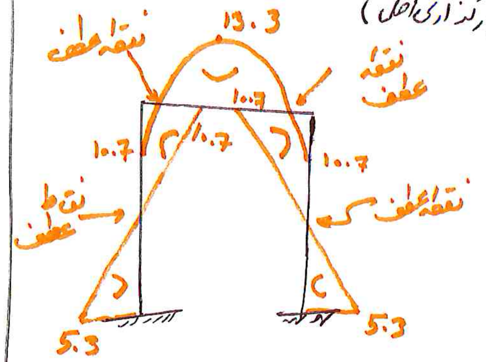


شکل ۳۲

یا از اصل برهم نهی استفاده کنیم. می توانیم بنویسیم منحنی شکل ۳۲ برابر خواهد بود با:

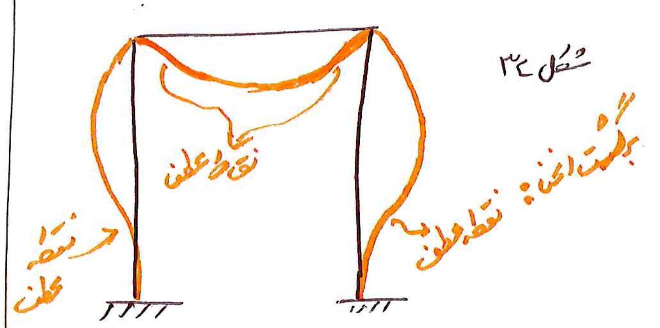
منحنی لنگر شکل = منحنی شکل ۲۸ + X_1 × منحنی شکل ۲۹ + X_2 × منحنی شکل ۳۰ + X_3 × منحنی شکل ۳۱

با این عمل شکل زیر حاصل خواهد شد به عنوان دیاگرام ممان خمشی (سازه اصلی با بارگذاری اصلی)



شکل ۳۳

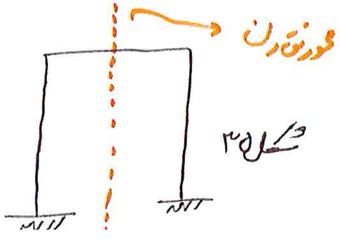
تغییر شکل کیفی :



شکل ۳۴

نکته : در مورد قاب توصیه می‌شود از روش انرژی استفاده شود.

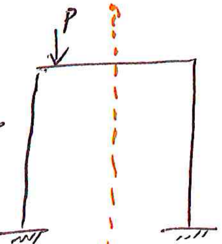
نکته : هم سازه و هم بارگذاری در این مثال متقارن بودند به همین دلیل منحنی تغییرات لنگر M در شکل ۳۳ و هم منحنی تغییر شکل کیفی دارای تقارن بودند.



شکل ۳۵

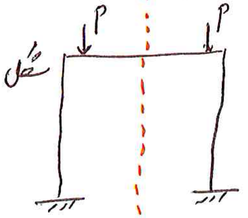
سازه‌ی روبرو متقارن محوری است

ممکن است روی سازه متقارن بارگذاری صورت گیرد که کل مسئله متقارن نباشد یا باشد.



شکل ۳۶

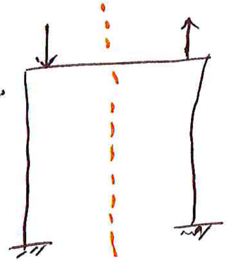
⟹ مسئله نامتقارن، نمودار لنگر و تغییر شکل نامتقارن



شکل ۳۷

⟹ مسئله متقارن، نمودار لنگر و تغییر شکل متقارن

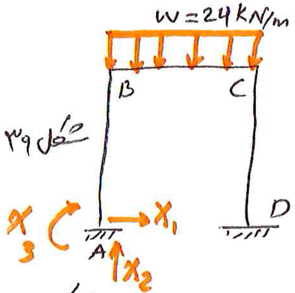
برخی موارد تقارن معکوس داریم. سازه متقارن است اما بارگذاری معکوس است مثلاً



شکل ۳۸

⟹ تقارن معکوس

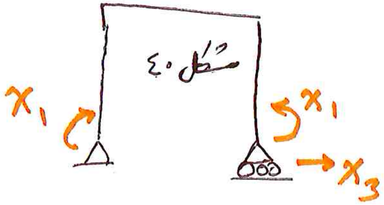
مسئله ما در مثال قاب متقارن بود



شکل ۳۹

اگر به این نکته توجه می‌کردیم حل مسئله راحت‌تر می‌شد. می‌دانیم که به دلیل تقارن عکس العمل A و D در راستای قائم برابر می‌شد پس می‌شود در سازه‌هایی که دو تکیه‌گاه این چنین با عکس العمل برابر دارند این دو را به عنوان نیروی Redundant در نظر گرفت و به جای X_1 و X_2 از یک $X_1=X_2=X$ استفاده کرد. البته توجه کنید در این مسئله‌ی ما نمی‌شد از این قضیه استفاده کرد چون سازه ناپایدار می‌شود.

اما می‌شود دو تا نیروی A و B را حذف کرد (شکل ۲۰ را مجدداً نگاه کنید). در اینجا $X_1=X_2$ پس یکی از مجهولات کم می‌شود.

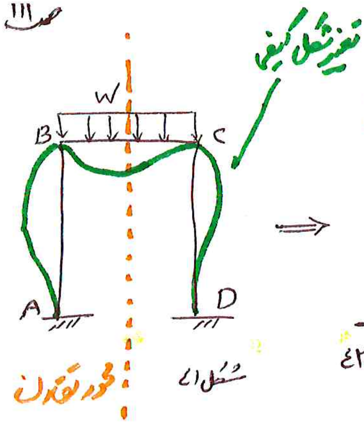


شکل ۴۰

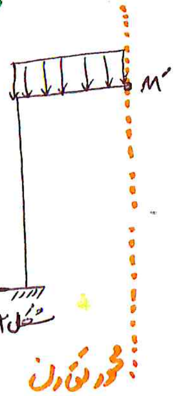
⟹ دو مجهول X_1 و X_3 باید محاسبه شوند

شکل ۳۹ را نگاه کنید. ناگفته پیداست که عکس العمل X_2 برابر ۲٤ خواهد بود $X_2 = 24$ (به دلیل تقارن) پس می‌شود از همان اول این X_2 را از مجهولات حذف کرد. در اینصورت ابعاد ماتریس و حجم عملیات به صورت عمده‌ای کاهش می‌یابد.

به طور کلی در مسائل متقارن می‌شود نصف سازه را حل کرد و این نصف سازه و حل آن برای ما کفایت خواهد کرد. شکل زیر را فرض کنید



شکل ۴۱



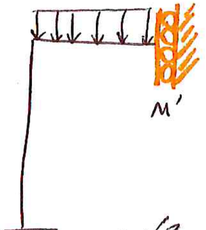
شکل ۴۲

در شکل ۴۲ باید وقتی سازه را از وسط می‌بریم در نقطه‌ی M' یک سری شرایط مرزی بگذاریم که قطع شدن سمت راست سازه تأثیری در جواب نداشته باشد. یعنی سازه شکل ۴۲ معادل شکل ۴۱ شود.

همه چیز باید آینه‌ای باشد یعنی اگر نقطه‌ای در سمت چپ به سمت چپ می‌رود آنگاه نقطه‌ی معادل اش در سمت راست باید به سمت راست برود، و بالعکس. بنابراین نقطه‌ی B نباید از جای خود تکان بخورد. چون به فرض اگر نقطه‌ی B به سمت چپ برود نقطه‌ی معادل آن یعنی A باید به سمت راست برود و بنابراین AB تغییر طول خواهد داد که امکان ندارد چون ما تغییر شکل ناشی از خمش را داریم بررسی می‌کنیم. پس نقطه‌ی M' در وسط عضو BC هم چپ و راست نمی‌شود.

از لحاظ بالا و پایین رفتن، M' می‌تواند بالا و پایین برود چون اگر سمت چپ نقطه‌ی M' بالا برود آنگاه سمت راست M' هم باید بالا برود پس M' می‌تواند بالا و پایین رود. اما اگر سمت راست M' به سمت پادساعتگرد بچرخد، سمت چپ باید ساعتگرد بچرخد و یک زاویه بین دو سمت M' رخ می‌دهد (dθ) که چون عضو BC پیوسته است باید شیب چپ و راستش برابر باشد. لذا امکان ندارد. پس باید در M' شیب همیشه صفر بماند (تنها با این شرط dθ برابر صفر می‌شود).

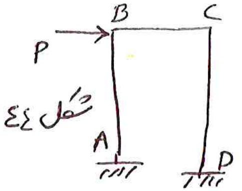
با این تفاسیر شرایط مرزی به شکل زیر خواهد بود که همان نقطه‌ی M' را می‌گیرد (اجازه‌ی تغییر شیب را نمی‌دهد)، اجازه‌ی بالا و پایین شدن می‌دهد اما چپ و راست حرکت نمی‌کند.



شکل ۴۳

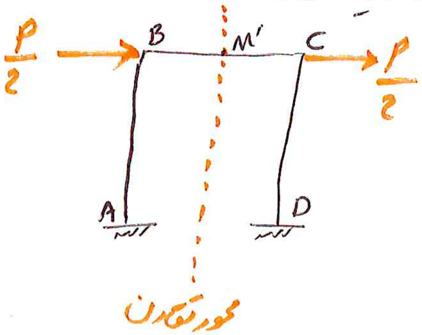
پس مسئله شکل ۴۱ به شکل ۴۳ تبدیل می‌شود که به جای ۳ درجه نامعین بودن ۲ درجه نامعین است.

برای تقارن معکوس هم مسئله به همین صورت است. سازه‌ی زیر را فرض کنید

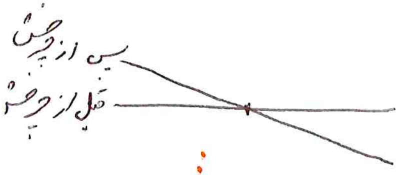


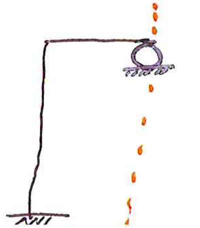
شکل ۴۴

اگر عضو BC کاملاً صلب باشد نصف بار P به سمت دیگر منتقل خواهد شد و سازه زیر حاصل می‌شود



فرقی ندارد که P روی نقطه‌ی B اعمال شود یا C ، تا زمانی که BC از لحاظ محوری صلب فرض شود سازه شکل ۴۴ دارای تقارن معکوس خواهد بود (که در آن خود سازه متقارن است اما بار به صورت پادمتقارن است). پس می‌توان با نصف سازه را مدل کرد و البته شرط مرزی آن را هم در نظر گرفت. شرط مرزی این است که نقطه‌ی M' در اینجا چپ و راست می‌تواند برود اما بالا و پایین اجازه حرکت ندارد (چون سمت چپ بالا برود سمت راست باید پایین بیاید پس ناپیوستگی ایجاد می‌شود). اما اگر قرار بر چرخش M' است، M' می‌تواند بچرخد به صورت زیر





بنابراین سازه به شکل زیر معادل می‌شود که به غیر از نیروی محوری بقیه را کنترل می‌کند.

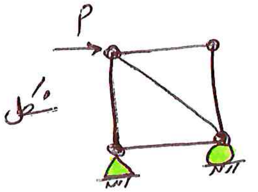
جلسه بیست و نهم

در مورد تحلیل تیرها و قاب‌های نامعین از درجات یک و یک به بالاتر صحبت کردیم و روابط ماتریسی آنها را ارائه دادیم. در این جلسه به سراغ خرپاها می‌رویم. روابط و منطق به روال سابق است فقط در اینجا جنس نیروها و جابجایی‌ها محوری است.

اول مثالی مطرح کرده و به صورت کیفی در مورد آن صحبت می‌کنیم. سپس یک مثال عددی هم ارائه خواهیم داد.

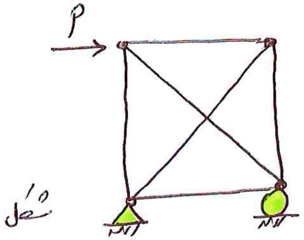
مثال ۱:

خرپای زیر را در نظر بگیرید. این خرپا معین است و سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی دارد. بنابراین آن را می‌توان (بار P) تحلیل کرد و به راحتی جواب را بدست آورد.



شکل ۱

این خرپا را می‌توان از لحاظ داخلی و یا خارجی نامعین کرد. مثلاً می‌توان یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی به آن افزود (خارجی) و یا یک عضو جدید در قطر دیگر سازه فوق قرار داد (نامعینی داخلی).



شکل ۲

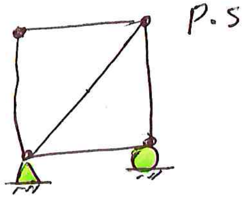
$\Longrightarrow$ نامعین داخلی

$$2j < m+r$$

$$12 < 6+3$$

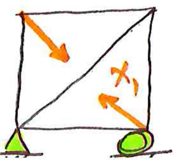
برای حل این سازه باید Redundant force را حذف کرد. چون نامعینی از طریق افزودن عضو به وجود آمده نیروی زائد هم از نوع داخلی است. پس می‌توان یک عضو را حذف کرد. چیزی که باقی می‌ماند همان سازه‌ی مبناست که معین هم هست. این سازه مبنا را یک بار تحت اثر واقعی قرار داده و Δ' ع را محاسبه می‌کنیم، یک بار هم به جای نیروی Redundant یک نیروی واحد مجازی قرار داده و δ_{11} را محاسبه می‌کنیم. یک معادله خواهیم داشت به صورت

$$\Delta_1 = \Delta_1' + \delta_{11} x_1$$



شکل ۳

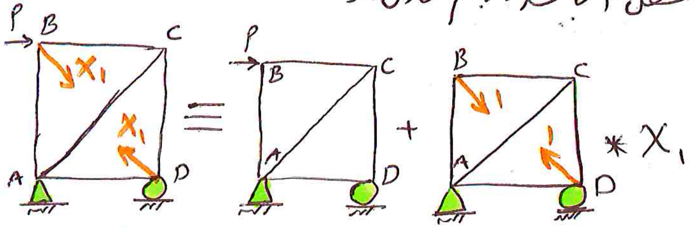
سازه مبنا



شکل ۴

در اینجا x_1 به صورت روبرو است

دو سازه‌ی شکل ۴ و شکل ۲ مادامی که X_1 همان نیروی داخل عضو شکل ۲ باشد، با هم معادل اند.



شکل ۵ شکل ۶ شکل ۷

در شکل ۶ بار P را روی سازه‌ی مبنا قرار می‌دهیم و جابجایی نسبی B نسبت به D را محاسبه می‌کنیم. این محاسبه از طریق روش انرژی انجام می‌شود که از فرمول روبرو بهره می‌برد:

$$\text{جابجایی نسبی } B \text{ و } D = \sum \frac{Nn}{EA} L$$

$$\Longrightarrow \Delta_1' = \sum \frac{Nn}{EA} L$$

N: جواب تحلیل شکل ۶ با بار P

n: جواب تحلیل شکل ۶ با برداشتن بار واقعی و قرار دادن بار مجازی واحد به جای X_1 ع

برای محاسبه δ_{11} باید جابجایی B و D را در شکل ۷ بدست آوریم یعنی زمانی که X_1 برابر واحد است. که می‌شود از طریق کار مجازی

$$\delta_{11} = \sum \frac{n^2 L}{EA}$$

بدست آوریم

پس در فرمول $\Delta_1 = \Delta_1' + \delta_{11} X_1$ تنها Δ_1 باقی می‌ماند. Δ_1 جابجایی نسبی دو گره B و D در سازه‌ی واقعی است. چون عضو BD تحت

بار X_1 در سازه‌ی واقعی است برابر است با

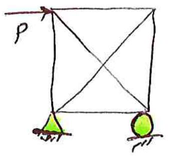
$$\text{تغییر طول} = -\frac{X_1 L}{EA}$$

چون اگر X_1 مثبت باشد عضو BD در کشش می‌افتد، یعنی دو گره B و D از هم دور می‌شوند. پس منفی در مقدار فوق توجیه دارد.

* * *

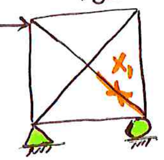
در منابع تحلیل سازه برای حل این مثال یک روش دیگر نیز وجود دارد.

شکل ۸

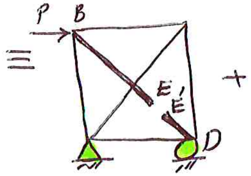


≡

شکل ۹

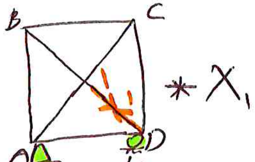


≡



شکل ۱۰

+



$* X_1$

شکل ۱۱

مقایسه این روش با روش قبلی :

وقتی هدف محاسبه‌ی Δ_1' است شکل ۱۰ و شکل ۶ مثل هم می‌باشند. چون در زمان اعمال P چون عضو BD را در شکل ۱۰ قطع کرده‌ایم پس دو سازه‌ی شکل ۱۰ و شکل ۶ مثل هم عمل می‌کنند. اگر در شکل ۶ دولبه‌ی B و D یک سانتی‌متر به هم نزدیک شوند در شکل ۱۰ نیز لبه‌های E و E' یک سانتی‌متر به هم نزدیک خواهند شد (چون BE تغییر طول ندارد) پس Δ_1' در هر دو شکل ۶ و ۱۰ یکسان است.

یعنی در هر دو روش برابر است با

$$\Delta_1' = \sum \frac{NnL}{EA}$$

اما حالا به شکل ۷ نگاه کنید. δ_{11} در این شکل میزان نزدیک شدن دو گره B و D است تحت بارگذاری‌های واحدشان داده شده در همان شکل. ولی در شکل ۱۱، میزان نزدیک شدن دولبه‌ی محل اعمال دو بار واحد نشان داده شده است

چون خود عضو BD هم تغییر شکل می‌دهد.

در شکل ۷ اگر چارچوب ABCD و عضو CA صلب کامل باشند هر مقدار هم X_1 را فشار دهیم دو گره B و D به هم نزدیک نمی‌شوند. اما در شکل ۱۱ اگر چارچوب ABCD و عضو CA صلب کامل باشند، با اعمال بار واحد، چون خود عضو AD صلب نیست و هدف ما میزان نزدیک شدن لبه‌های E و E' به همدیگر است، مقدار جابجایی صفر نخواهد بود (در شکل ۱۱ و کلاً در روش جدیدی که توضیح می‌دهیم هدف به دست آوردن دولبه E و E' است)

پس جابجایی در شکل ۱۱ و جابجایی در شکل ۷ با هم متفاوت اند.

هر دو با رابطه‌ی $$\sum_{i=1}^{Member} \frac{n^2 L}{EA}$$

محاسبه می‌شوند اما تعداد Member شکل ۱۱ برابر ۶ عدد است و مقدار Member شکل ۷ پنج عدد است.

سمت چپ معادله‌ی زیر در روش قبلی

$$\Delta = \Delta_1' + \delta_{11} X_1$$

برابر بود با

$$-\frac{X_1 L}{EA}$$

که معادل نزدیکی BD در سازه‌ی واقعی بود (شکل ۵)

اما در روش جدید $\Delta = 0$ است (چرا؟)

در روش جدید یکی از سری‌های سمت راست یک Member بیشتر دارد. ($\sum_1^6 \frac{n^2 L}{EA}$). همین $\sum_6^6$ اضافی در واقع مقدار زیر است

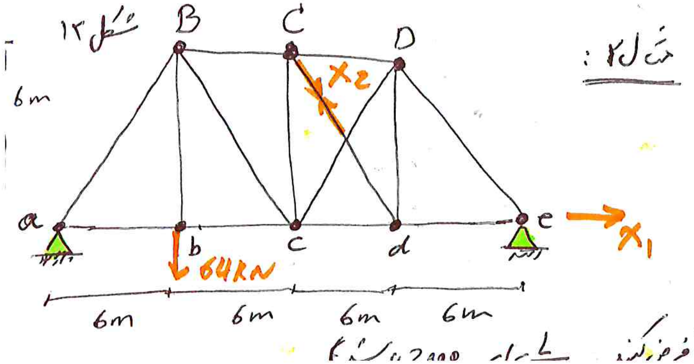
$$\frac{X_1 L}{EA}$$

بنابراین از هر دو روش جواب یکسان بدست خواهیم آورد.

* * *

مثال ۲ :

شکل ۱۲

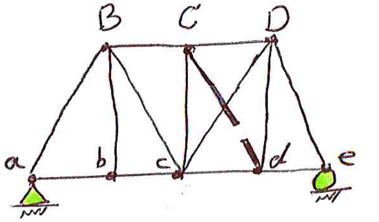


(فرض کنید $\frac{L}{}$ برابر ۲۰۰۰ باشد)

مسئله دو درجه نامعین است. یک درجه داخلی و یک درجه خارجی. پس باید دو عدد نیروی Reedundant حذف کنیم.

بعنوان یک نیروی اضافی قطر Cd را برمی‌داریم (توجه کنید قطر باید به گونه‌ای انتخاب شود که سازه ناپایدار نشود). به عنوان نیروی اضافی دوم، یکی از عکس‌العمل‌های e را آزاد می‌کنیم (مولفه افقی) (برای حل این مسئله از نگرش دوم در مثال ۱ استفاده می‌کنیم).

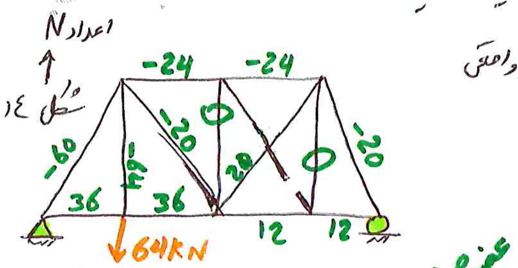
پس سازه مبنای ما به شکل زیر درمی‌آید اگر X_1 و X_2 را به صورت شکل ۱۲ فرض کنیم. سازه‌ی مبنای زیر یک سازه معین و پایدار است.



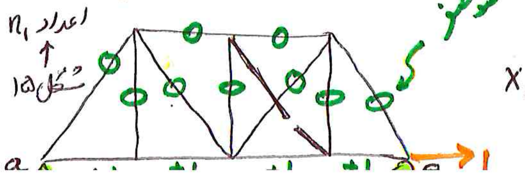
شکل ۱۳

پس باید مدل زیر را حل کنیم

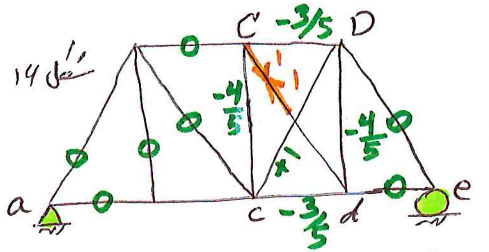
① سازه مبنا با بار واقعی



② قرار دادن $X_1=1$



③ قرار دادن $X_2 = 1$



در حل شکل ۱۶ باید بدانیم که عضو Cd را هم باید در تحلیل قرار دهیم.

جواب_ تحلیل شکل‌های ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ به صورت نشان داده شده است

علامت منفی برای فشار است و علامت مثبت برای کشش

توجه: در شکل ۱۵ عکس‌العمل قائم e صفر است (با لنگرگیری حول a).

توجه: در شکل ۱۶ دو نیروی داخلی واحد در عضو Cd حول نقطه‌ی a لنگر تولید نمی‌کنند (چون نیروی داخلی‌اند). پس عکس‌العمل قائم e مجدداً صفر می‌شود. بنابراین عکس‌العمل قائم a هم صفر خواهد شد.

توجه: در شکل ۱۶ تنها مربع cCDd و عضوهای قطری آن نیرو دارند. طبق اعداد نیروهای نوشته شده، دو عضو قطر به کشش می‌افتند و تمام اعضای مربع دور خود را به فشار می‌اندازند.

حال باید جدول زیر را تشکیل دهیم که شامل موارد زیر است

$N,\ n_1,\ n,\ Nn_1,\ Nn_2,\ n_1n_2\ (n_1)^2\ (n_2)^2$

فرض کردیم که عبارت $\frac{L}{A}$ ثابت 2000 $(\frac{m}{m^2})$ باشد تا بتوانیم از $\frac{L}{EA}$ در رابطه‌ی $\sum \frac{NnL}{EA}$ فاکتور بگیریم.

عضو	N	n_1	n_2	Nn_1	Nn_2	n_1n_2	$(n_1)^2$	$(n_2)^2$
ab	+36	1	0	36	0	0	1	0
bc	+36	1	0	36	0	0	1	0
cd	+12	1	$-\frac{3}{5}$	12	-7.2	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{9}{25}$
de	+12	1	0	12	0	0	1	0
BC	-24	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
مجموع ستون‌ها				+96	27.2	$-\frac{3}{5}$	+4	+4

توجه: عضو Cd فقط در شکل ۱۶ وجود دارد. پس مقدار n_2 این عضو یک است و در بقیه موارد صفر است.

$$\begin{bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta'_1\\ \Delta'_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} \Longrightarrow$$

داریم: $\Delta_1 = 0$ ، $\Delta_2=0$ و

$$\Delta'_1 = \sum \frac{Nn_1L}{EA} = \frac{96L}{EA}$$

$$\Delta'_2 = \sum \frac{Nn_2L}{EA} = \frac{27.2L}{EA}$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{n_1^2L}{EA} = \frac{4L}{EA}$$

$$\delta_{22} = \frac{\sum n_2^2L}{EA} = \frac{4L}{EA}$$

اتفاقی برابر شده‌اند

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{n_1n_2L}{EA} = -\frac{3L}{5EA}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}96\\ 27.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -3/5\\ -3/5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X_1 = -25.6\,KN} \quad \boxed{X_2 = -10.6\,KN}$$

جواب نهایی مسئله که عبارت از جمع نظیر به نظیر عبارت

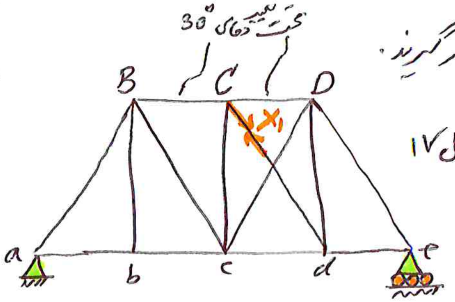
$$\boxed{N + n_1 x_1 + n_2 x_2}$$

در اعضای سازه. مثلاً میخواهیم نیروی داخل عضو cd را محاسبه کنیم در مسئله‌ی واقعی میخواهیم بدانیم چقدر نیرو در عضو cd می‌افتد

$$S_{cd} = \underset{\overset{\uparrow}{N}}{+12} + (\underset{\overset{\uparrow}{n_1}}{1})(\underset{\overset{\uparrow}{x_1}}{-25.6}) + (\underset{\overset{\uparrow}{n_2}}{-\frac{3}{5}})(\underset{\overset{\uparrow}{x_2}}{-10.6}) = -7$$

به همین ترتیب برای همه‌ی اعضا می‌توان نیروی داخلی در مسئله‌ی واقعی را محاسبه کرد.

مثال ۳: حال همان مثال قبلی را با اندکی تغییر میخواهیم با تغییر درجه‌ی حرارت حل کنیم. سازه به صورت زیر است که یک درجه نامعین داخلی است و دو عضو CD و BC تحت تغییر دمای +30 سانتیگراد قرار گیرند.



شکل ۱۷

اگر سازه معین باشد تغییر دمای آن، نیرویی در داخل آن سازه ایجاد نخواهد کرد. اما این سازه نامعین است پس بالقوه می‌تواند در داخل آن نیرو تولید شود. باید بررسی کنیم که آیا این نیرو به وجود می‌آید یا خیر؟ و اگر به وجود می‌آید در کجا به وجود می‌آید:

فقط دو عضو BC و CD دمایشان تغییر می‌کند و هیچ گونه بارگذاری روی مسئله وجود ندارد. چون مسئله نامعین است (یک درجه) باید X_1 را قرار دهیم. عضو Cd را به عنوان redundant force از روی مسئله برمی‌داریم. بنابراین یک سازه معین بدست می‌آید: بارگذاری واقعی در اینجا تغییر درجه‌ی حرارت است. چون یک درجه نامعینی داریم خواهیم داشت

$$\Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_{11} X_1$$

Δ_1 باید صفر باشد که جابجایی نسبی دو سر قطع شده است که تحت هر شرایطی باید صفر باشد.

δ_{11} همان δ_{22} مثال قبل است که بدست آوردیم که برابر بود با

$$\frac{4L}{EA}$$

Δ'_1 میزان جابجایی نسبی دو سر قطع شده تحت اثر بارگذاری واقعی که همان تغییر درجه حرارت است. پس

$$\Delta'_1 = \sum(\alpha \Delta T . L) n_1$$

n_1 هم همان n_2 مثال قبل است. بدین ترتیب Δ'_1 بدست خواهد آمد. چون تنها یک عضو n_1 (n_2 در مثال قبل) غیر صفر بود خواهد داشت

$$\Delta'_1 = \alpha \Delta t (6)(-\frac{3}{5})$$

$$= (1.2\times10^{-5})(30)(6)(-\frac{3}{5})$$

$$\Rightarrow \Delta'_1 = -0.01296$$

پس مسئله حل می‌شود:

$$\Delta_1 = \Delta'_1 + \delta_{11} X_1$$

$$\Rightarrow 0 = -0.01296 + \frac{\overset{L/A}{4\times2000}}{\underset{E}{2\times10^8}} X_1 = 0$$

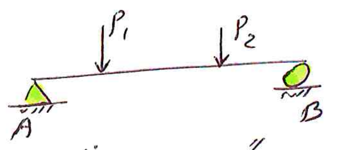
$$\Rightarrow \boxed{X_1 = 32.4 \text{ KN}}$$

برای محاسبه‌ی میزان نیروی ایجاد شده در اثر این تغییر دما، در بقیه‌ی اعضای سازه بایستی n_1 (همان n_2 در مثال قبل) را در $X_1 = 32.4$ ضرب کنیم.

درس تحلیل سازه‌ی یک عملاً در اینجا به پایان می‌رسد. اما مایلیم به ذکر چند نکته بپردازیم که شایسته است در هم اینجا بیان شوند.

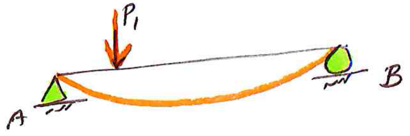
نکته ۱: (مربوط به برابری δ_{12} و δ_{11}) فرض کنید سازه‌ی زیر تحت

دو نیروی P_1 و P_2 باشد و در نهایت یک تغییرشکلی بدست بدهد



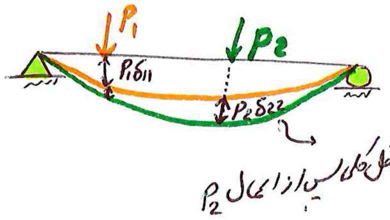
شکل ۱۸

می توانیم فرض کنیم (چون ترتیب بارگذاری به دلیل خطی بودن رفتار سازه مهم نیست) که اول بار P_1 وارد می شود پس بار P_2 اعمال می گردد



شکل ۱۹

بار P_1 که اعمال شد سازه یک تغییرشکلی پیدا می کند.



شکل ۲۰

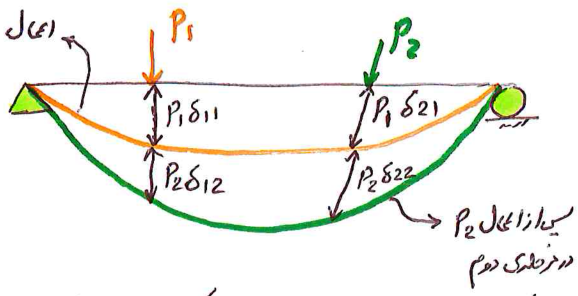
طبق تعریف تغییرشکل اولیه ناشی از P_1 در زیر خودش (قبل از اعمال P_2) عبارت است از

$$P_1\delta_{11}$$

پس از اعمال بار P_2 در نقطه‌ی زیر P_2 و در راستای بار نسبت به حالت اول (که تنها بار P_1 اعمال شده بود) یک تغییر بیشتر موجود می آید که عبارت است

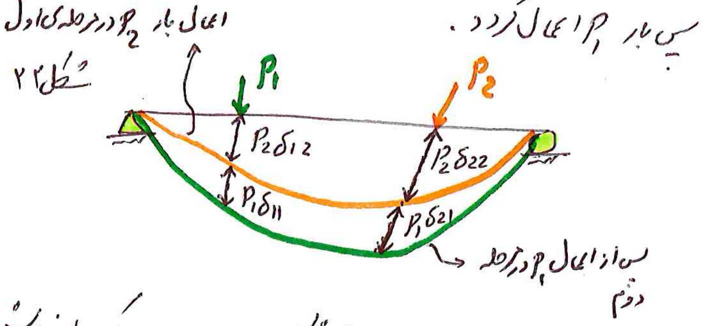
$$P_2\delta_{22}$$

(برای نمایش بهتر شکل زیر مجدداً آورده شده است با اغراق)



شکل ۲۱

حال اگر ترتیب بارگذاری را عوض کنیم اول فرض کنیم P_2 اعمال شود پس بار P_1 اعمال گردد.



شکل ۲۲

حال انرژی‌های ذخیره شده در هر دو شکل ۲۱ و ۲۲ باید یکسان باشد.

در شکل ۲۱ داریم:

$$\text{کار} = \frac{1}{2}P_1^2\delta_{11} + \frac{1}{2}P_2^2\delta_{22} + P_1P_2\delta_{12}$$

حال سراغ شکل ۲۲ می رویم. پس

$$\text{کار}' = \frac{1}{2}P_2^2\delta_{22} + \frac{1}{2}P_1^2\delta_{11} + P_2P_1\delta_{21}$$

با مساوی هم قرار دادن دو کار فوق خواهیم داشت:

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} \longrightarrow \boxed{\text{قانون ماکسول}}$$

حال بحث فوق را می توان عمومیت داد. فرض کنید دو دسته نیرو (به جای دو بار تکی P_1 و P_2) به سازه وارد شود. دسته‌ی نیرو که خود می توانند شامل بار متمرکز، ممان متمرکز و ... باشند.

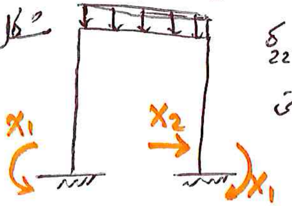
یک قانون کلی وجود دارد به نام قانون Betti بتی که

قانون بتی (Betti's Law):

کارهای انجام شده توسط نیروهای دسته‌ی یک تحت اثر جابجایی‌های رخداده در اثر اعمال دسته‌ی نیروی دوم برابر است با کاری که دسته نیروی دوم تحت اثر جابجایی ناشی از اعمال نیروهای دسته یک انجام می دهد.

پس می توان گفت قانون ماکسول $\delta_{12}=\delta_{21}$ حالت خاص قانون بتی است. در اثر این قوانین ماتریس flexibility همیشه یک ماتریس متقارن است.

نکته ۲: در سازه‌ی روبرو که دو تغییر مکان داریم (به علت تقارن)



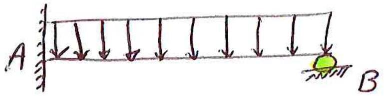
شکل ۲۳

در بدست آوردن δ_{11} و δ_{12} و δ_{21} و δ_{22} باید X_1 و X_2 را واحد قرار دهیم. وقتی X_2 را قرار دهیم مشکلی نیست اما وقتی X_1 را برابر یک قرار می دهیم آنگاه چون دو عدد از X_1ها داریم آنگاه δ_{12} و δ_{21} برابر نخواهند بود. چون قرار است کارهای انجام شده توسط X_2 و X_1 برابر باشند و چون دو عدد X_1 داریم پس جابجایی X_1 نصف X_2 خواهد بود.

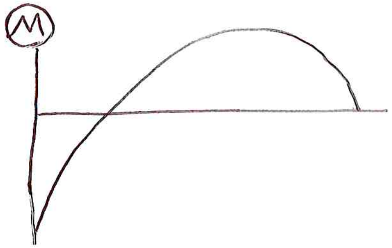
پس کار انجام شده توسط X_1 و X_2 باید برابر باشد نه جابجایی.

نکته ۳ : فرض کنید بخواهیم در مسئله زیر تغییر شکل وسط دهانه را بیابیم.

در روش کار مجازی برای یافتن این جابجایی، یک بار مسئله واقعی را حل می‌کنیم و اسم آن را M قرار می‌دهیم (همان را بدست می‌آوریم و M می‌نامیم)



شکل ۲۴



شکل ۲۵ نمودار لنگر

بار دیگر ما یک بار واحد قرار می‌دهیم در جایی که قصد داریم تغییر شکل را بیابیم و مسئله را حل کرده و اسم جواب را m می‌نامیم.

آنگاه جابجایی Δ در وسط تیر از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$\Delta = \int \frac{Mm}{EI}dx$$

در مرحله‌ی اول

حال اگر بخواهیم مسئله‌ای مانند شکل ۲۴ را حل کنیم (که نامعین است) و در وسط جابجایی را حساب کنیم باید M را داشته باشیم. پس اول باید یک بار این مسئله نامعین را حل کنیم تا M را داشته باشیم.

در مرحله‌ی دوم باید بارگذاری را از مسئله برداریم و یک بار واحد مجازی در محل قرار دهیم که می‌خواهیم تغییر شکل را در آنجا محاسبه کنیم. یعنی

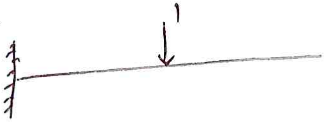
شکل ۲۶

دیاگرام ممان این را m می‌نامیم. و آنگاه در انتگرال

$$\Delta = \int \frac{Mm}{EI}dx$$

قرار داده جواب کل را بدست آوریم.

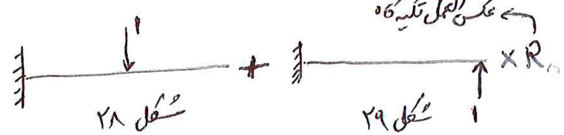
پس برای بدست آوردن نمودار لنگر شکل ۲۴ یعنی M و نمودار لنگر شکل ۲۶ باید دو بار مسئله نامعین حل کنیم. خبر خوش این است که در مورد شکل ۲۶ دیگر لازم نیست مسئله‌ی نامعین حل کنیم. بلکه باید شکل زیر را حل کنیم



شکل ۲۷

چون شکل ۲۶ معادل حالت زیر است

شکل ۲۶ ≡



شکل ۲۸

شکل ۲۹

هدف ما بدست آوردن Mm است که در آن m همان دیاگرام ممان شکل ۲۶ است. این m همان جمع ممان‌های دو سازه‌ی شکل ۲۸ و ۲۹ است. یعنی

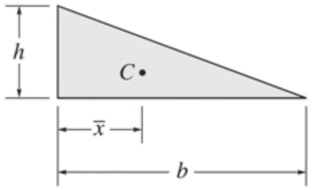
$$M\times m\Big|_{\text{شکل ۲۶}} = M\left(m\Big|_{\text{شکل ۲۸}} + m\Big|_{\text{شکل ۲۹}}\right)$$

$$= M\times m\Big|_{\text{شکل ۲۸}} + M\times m\Big|_{\text{شکل ۲۹}}$$

اما $M\times m\Big|_{\text{شکل ۲۹}}$ صفر است. چرا؟

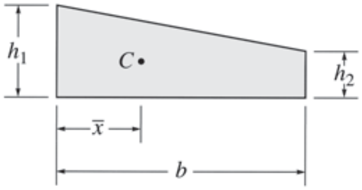
ما برای بدست آوردن جابجایی نقطه‌ی B در شکل ۲۴ چگونه عمل می‌کنیم؟ دیاگرام ممان M واقعی را رسم می‌کنیم. سپس در نقطه‌ی B یک بار واحد قرار می‌دهیم و دیاگرام ممان m آن را هم رسم می‌کنیم. سپس این را در هم ضرب می‌کنیم تا جابجایی B را بدست دهد. اما چون B تکیه‌گاه است جابجایی‌اش نیز صفر است. پس m در اینجا همو است که همان برابر m شکل ۲۹ است. (چون M در همه جا صفر نیست پس باید m کوچک در همه جا صفر باشد).

Geometric Properties of Areas



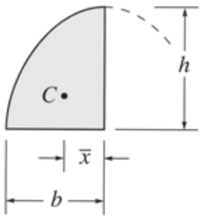
Triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$\bar{x} = \frac{1}{3}b$$



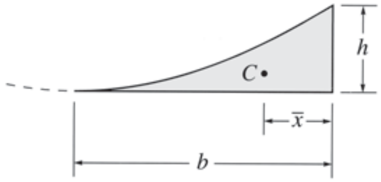
Trapezoid

$$A = \frac{1}{2}b\,(h_1 + h_2)$$
$$\bar{x} = \frac{b\,(2h_2 + h_1)}{3\,(h_1 + h_2)}$$



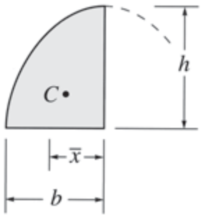
Semi Parabola

$$A = \frac{2}{3}bh$$
$$\bar{x} = \frac{3}{8}b$$



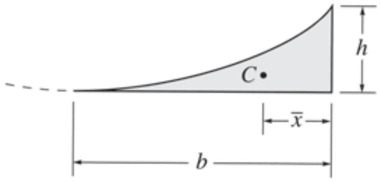
Parabolic spandrel

$$A = \frac{1}{3}bh$$
$$\bar{x} = \frac{1}{4}b$$



Semi-segment of *n*th degree curve

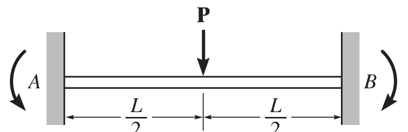
$$A = bh\,(\frac{n}{n + 1})$$
$$\bar{x} = \frac{b\,(n + 1)}{2\,(n + 2)}$$



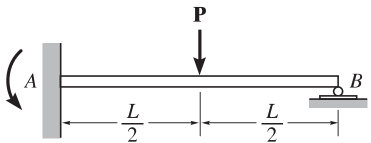
Spandrel of *n*th degree curve

$$A = bh\,(\frac{1}{n + 1})$$
$$\bar{x} = \frac{b}{(n + 2)}$$

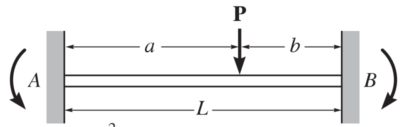
Fixed End Moments



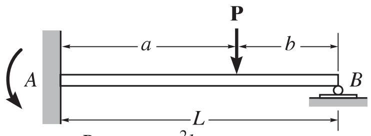
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{PL}{8}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{PL}{8}$



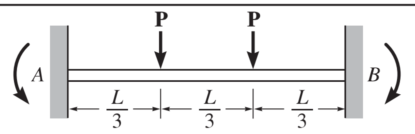
$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{3PL}{16}$



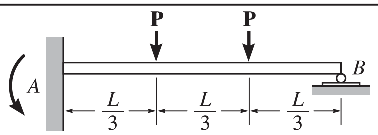
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{Pb^2a}{L^2}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$



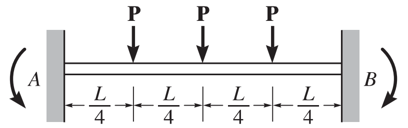
$(\text{FEM})'_{AB} = (\frac{P}{L^2})(b^2a + \frac{a^2b}{2})$



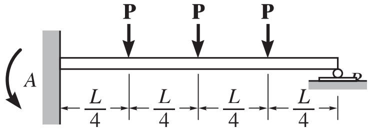
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{2PL}{9}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{2PL}{9}$



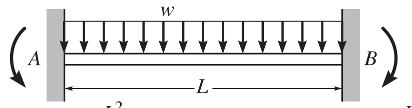
$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{PL}{3}$



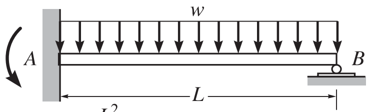
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{5PL}{16}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{5PL}{16}$



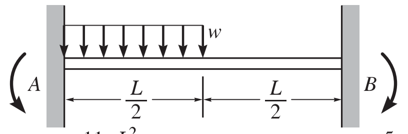
$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{45PL}{96}$



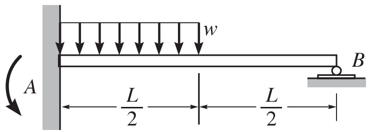
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{wL^2}{12}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{12}$



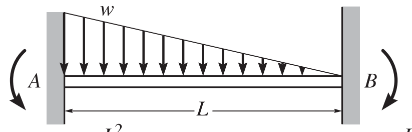
$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{wL^2}{8}$



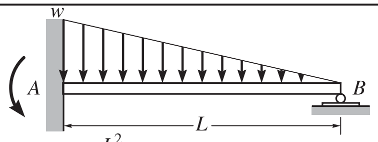
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$



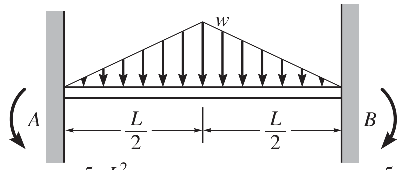
$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$



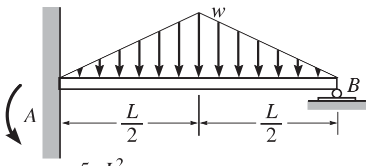
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{wL^2}{20}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{30}$



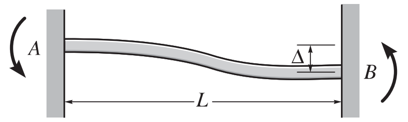
$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{wL^2}{15}$



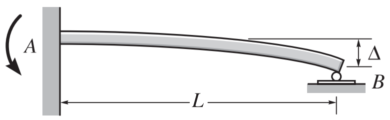
$(\text{FEM})_{AB} = \frac{5wL^2}{96}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$



$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{5wL^2}{64}$



$(\text{FEM})_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$ $\quad (\text{FEM})_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$



$(\text{FEM})'_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$