به نام خـــدا

دینامیک

مجموعهٔ مهندسی مکانیک

دکتر رضا تیموری

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

ویرایش چهارم: بهار ۸۶ | تیراژ: ۲۵۰۰ نسخه |
شابک: ۲ ـ ۱۵ ـ ۸۷۱۹ ـ ۹۶۴ | ISBN:964-8719-15-2
نشانی: بالاتر از میدان ولی‌عصر | کوچه دانش‌کیان | ساختمان پارسه | تلفن: ۸۸۸۴۹۲۱۱

مقدمه

درس دینامیک از جمله درس‌های مهم در کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک می باشد. همان‌طور که می‌دانیم برای این درس کتاب‌های مرجع متعددی در دانشگاه‌های ایران مورد استفاده قرار می‌گیرند که به دلیل حجم بالای آن‌ها مطالعه همه آن‌ها به‌طور کامل دشوار می‌نماید، بنابر این لزوم تهیه یک جزوه فشرده و در عین حال جامع احساس می‌شد. در این جزوه ضمن ارایه موضوعات مهم درسی و دسته‌بندی آن‌ها بر مبنای سوالات کنکور کارشناسی ارشد، تست‌های نمونه مربوط به هر بخش درس از میان سوالات کنکور کارشناسی ارشد استخراج شده و حل شده‌اند. در پایان هر بخش جمع‌بندی مطالب که عموماً در قالب جداول تهیه شده‌اند، برای مراجعه سریع و آسان به چکیده مطالب ارایه شده است که مطالعه مجدد آن‌ها چند روز قبل از کنکور توصیه می‌گردد.

دکتر رضا تیموری
بهار ۱۳۸۶

فصل اول دینامیک ذرات

فصل دوم کار و انرژی

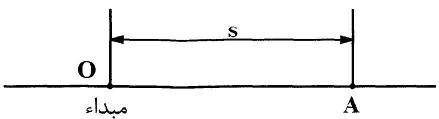
فصل سوم برخورد ذرات

فصل چهارم دینامیک اجسام صلب

فصل اول

دینامیک ذرات

حرکت مستقیم‌الخط (Rectlinear Motion) : حرکتی که در آن ذره بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و موقعیت‌اش نسبت به یک نقطه به‌نام مبدأ (نقطه O) مشخص می‌شود.



متغیر s مکان ذره در زمان t می‌باشد.

اگر مکان ذره در زمان t_1 ، s_1 و در زمان t_2 ، s_2 باشد سرعت متوسط و لحظه‌ای ذره به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$v_{av}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \quad \text{(سرعت متوسط)}$$

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\dot{s} \quad \text{(سرعت لحظه‌ای)}$$

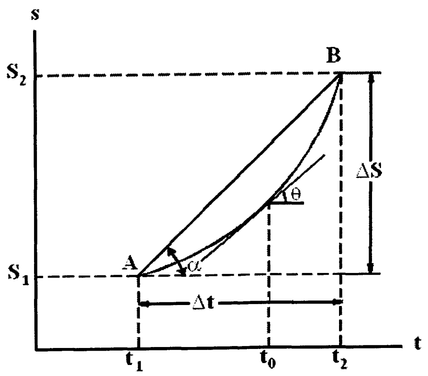
به‌طور مشابه شتاب متوسط و لحظه‌ای نیز تعریف می‌شوند.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \quad \text{(شتاب متوسط)}$$

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\ddot{s} \quad \text{(شتاب لحظه‌ای)}$$

که در آن v_1 سرعت ذره در زمان t_1 و v_2 ذره در زمان t_2 می‌باشد.

تعابیر هندسی سرعت و شتاب:

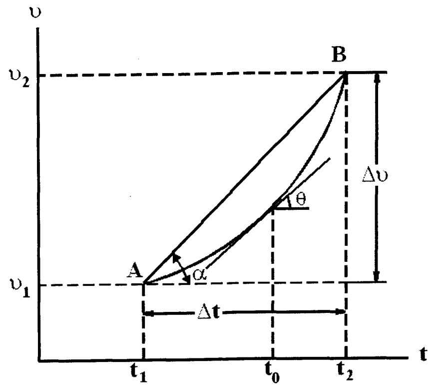


$$\tan\alpha=\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_{av}$$

$$\tan\theta=\dot{s}(t_0)=v(t_0)$$

سرعت متوسط بین زمان‌های t_1 و t_2، شیب خط قاطع بر منحنی مکان ـ زمان بین آن دو لحظه می‌باشد. $\tan\alpha=v_{av}$

سرعت لحظه‌ای در زمان t_0، شیب خط مماس بر منحنی مکان ـ زمان در زمان t_0 می‌باشد. $\tan\theta=v(t_0)$



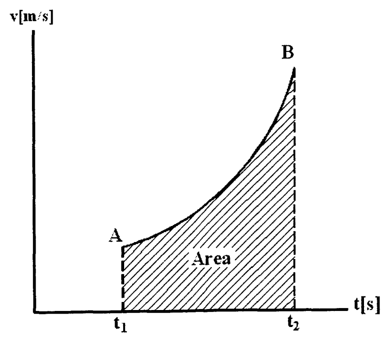
$$\tan\alpha=\frac{\Delta v}{\Delta t}=a_{av}$$

$$\tan\theta=\dot{v}(t_0)=a(t_0)$$

شتاب متوسط بین زمان‌های t_1 و t_2، شیب خط قاطع بر منحنی سرعت ـ زمان بین آن دو لحظه زمان می‌باشد. $\tan\alpha=a_{av}$

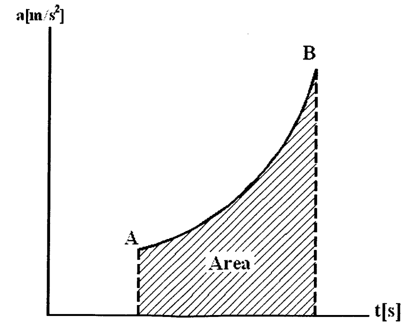
شتاب لحظه‌ای در زمان t_0، شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان در زمان t_0 می‌باشد. $\tan\theta=a(t_0)$

$$v=\frac{ds}{dt}\;\Rightarrow\; ds=v\,dt\;\Rightarrow\;\int_{s_1}^{s_2}ds=\int_{t_1}^{t_2}v\,dt\;\Rightarrow\;\Delta s=s_2-s_1=\int_{t_1}^{t_2}v\,dt=\text{Area}$$



سطح زیر منحنی سرعت ـ زمان بین زمان‌های t_1 و t_2 مسافت طی شده بین این دو لحظه زمان می‌باشد. واحد این سطح $\frac{m}{s}\times s=m$ خواهد بود که با Δs هم واحد می‌باشد.

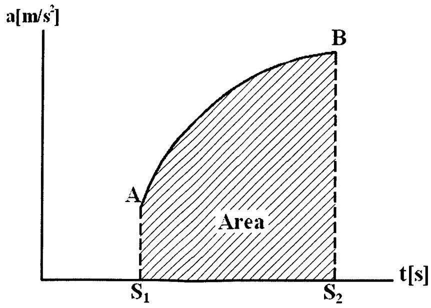
$$a=\frac{dv}{dt}\;\Rightarrow\; dv=a\,dt\;\Rightarrow\;\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t_1}^{t_2}a\,dt\;\Rightarrow\;\Delta v_1=v_2-v_1=\int_{t_1}^{t_2}a\,dt=\text{Area}$$



سطح زیر منحنی شتاب ـ زمان بین زمان‌های t_1 و t_2، تغییرات سرعت بین این دو لحظه زمان می‌باشد. واحد این سطح $\frac{m}{s^2}\times s=\frac{m}{s}$ خواهد بود که با Δv هم واحد می‌باشد.

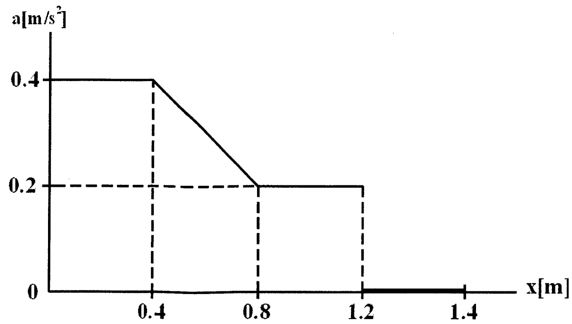
$$v=\frac{ds}{dt}\ ,\ a=\frac{dv}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{v}{a}=\frac{ds}{dv}\ \Rightarrow\ vdv=ads$$

$$\Rightarrow\ \int_{v_1}^{v_2} vdv=\int_{s_1}^{s_2} ads\ \Rightarrow\ \frac{v_2^2-v_1^2}{2}=\int_{s_1}^{s_2} ads$$



سطح زیر منحنی شتاب ـ مکان بین مکان‌های s_1 و s_2، برابر است با: نصف تفاضل مجذور سرعت‌های ذره در این دو مکان.

تست سال (۷۷ ـ ۷۶)



$v_0=0.1$, Area (سطح منحنی شتاب ـ مکان)

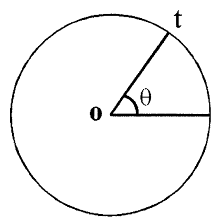
$$=0.4\times0.4+\left(\frac{0.4+0.2}{2}\right)\times0.4+0.2\times0.4$$

$$=0.36=\frac{1}{2}\left(v^2-(0.1)^2\right)$$

$$\Rightarrow\ v(x=1.4)=0.85\left[\frac{m}{s}\right]$$

حرکت ذره در مسیر دایروی:

سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.



سرعت زاویه‌ای متوسط $\omega_{av}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}$

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای $\omega=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\theta}{dt}=\dot{\theta}$

شتاب زاویه‌ای متوسط $\alpha_{av}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}$

شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای $\alpha=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}=\ddot{\theta}$

تست سال (۷۰ ـ ۶۹)

عبارت سرعت زاویه‌ای در حرکتی به‌صورت $\omega=\sqrt{\frac{2g}{a}(1-\cos\theta)}$ می‌باشد. شتاب زاویه‌ای برابر است با:

۱) $\frac{g\sin\theta}{a}$ ۲) $\frac{\frac{g\sin\theta}{a}}{\sqrt{\frac{2g}{a}(1-\cos\theta)}}$ ۳) $\frac{g}{a}(1-\sin\theta)$ ۴) هیچ‌کدام

$$\alpha=\dot{\omega}=\frac{\frac{2g}{a}\dot{\theta}\sin\theta}{2\sqrt{\frac{2g}{a}(1-\cos\theta)}}=\frac{\frac{g}{a}\omega\sin\theta}{\dot{\theta}=\omega}=\frac{g}{a}\sin\alpha$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

در مسایل مختلف می‌تواند شتاب تابعی از زمان، مکان، سرعت و یا ثابت باشد و این تابعیت معلوم باشد. در این‌صورت می‌توان روابط سرعت و مکان را به‌دست آورد. نحوه محاسبه روابط مذکور به‌صورت زیر می‌باشد.

الف) اگر شتاب مقدار ثابت باشد:

$$a=\frac{dv}{dt} \Rightarrow dv=adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv=\int_0^t adt=a\int_0^t dt=at \Rightarrow \boxed{v=v_0+at}$$

$$v=\frac{ds}{dt}=f(t) \Rightarrow ds=vdt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds=\int_0^t vdt=\int_0^t (at+v_0)\,dt=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \boxed{s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0}$$

ب) اگر شتاب، تابعی از زمان باشد $a=f(t)$:

$$a=\frac{dv}{dt}=f(t) \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv=\int_0^t f(t)dt=g(t) \Rightarrow \boxed{v=v_0+g(t)}$$

$$v=\frac{ds}{dt}=v_0+g(t) \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds=\int_0^t (v_0+g(t))dt \Rightarrow s=s_0+v_0t+\int_0^t g(t)dt \xRightarrow{p(t)=\int_0^t g(t)dt}$$

$$\boxed{s=s_0+v_0t+p(t)}$$

ج) اگر شتاب، تابعی از مکان باشد $a=f(s)$:

$$vdv=ads=f(s)ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv=\int_{s_0}^{s} f(s)\,ds=g(s)$$

$$\Rightarrow \frac{v^2-v_0^2}{2}=g(s) \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{v_0^2+2g(s)}}$$

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{v_0^2+2g(s)} \Rightarrow \int_0^t dt=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{v_0^2+2g(s)}}=p(s) \Rightarrow t=p(s) \Rightarrow$$

$\boxed{s=p^{-1}(t)}$ (معکوس تابع $p(t)$)

د) اگر شتاب، تابعی از سرعت باشد $a=f(v)$:

روش اول:

$$a=\frac{dv}{dt}=f(v) \rightarrow \frac{dv}{f(v)}=dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}=g(v)=\int_{t_0}^{t} dt=t \Rightarrow v=g^{-1}(t) \quad (\text{معکوس تابع } g(t))$$

$$v=\frac{ds}{dt}=g^{-1}(t) \Rightarrow ds=g^{-1}(t)dt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds=\int_0^t g^{-1}(t)dt=p(t) \Rightarrow \boxed{s=s_0+p(t)}$$

روش دوم:

$$vdv=ads=f(v)ds \Rightarrow \frac{vdv}{f(v)}=ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)}=g(v)=\int_{s_0}^{s} ds=s-s_0 \Rightarrow \boxed{s=s_0+g(v)}$$

$$\Rightarrow v=g^{-1}(s-s_0)=\frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt=\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{g^{-1}(s-s_0)}=p(s) \Rightarrow t=p(s) \Rightarrow \boxed{s=p^{-1}(t)}$$

مثال برای حالت (ج)

اگر $a=-k^2 s$ باشد (در سیستم جرم و فنر، شتاب جرم a بر حسب جابه‌جایی جرم از رابطهٔ مذکور تبعیت می‌کند).

روش اول:

$$vdv=ads=-k^2 sds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv=-k^2\int_0^s sds \Rightarrow \frac{v^2-v_0^2}{\cancel{2}}=-\frac{k^2s^2}{\cancel{2}} \Rightarrow v=\sqrt{v_0^2-k^2s^2}$$

$$\frac{ds}{dt}=v=\sqrt{v_0^2-k^2s^2} \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{v_0^2-k^2s^2}}=dt \Rightarrow \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2-k^2s^2}}=\int_0^t dt=t$$

از تغییر متغیر $\sin\alpha=\frac{ks}{v_0}$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos\alpha d\alpha=\frac{k}{v_0}ds \Rightarrow ds=\frac{v_0\cos\alpha d\alpha}{k}, \quad \alpha=\sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right)$$

$$t=\int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right)} \frac{\frac{v_0}{k}\cos\alpha d\alpha}{v_0\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{k}\sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right) \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right)=kt \Rightarrow \boxed{s=\frac{v_0}{k}\sin kt}$$

$$\Rightarrow \boxed{v=\frac{ds}{dt}=v_0\cos kt}$$

روش دوم:

$$a=\ddot{s}=-k^2s \Rightarrow \ddot{s}+k^2s=0 \Rightarrow r^2+k^2=0 \Rightarrow r=\pm ik \quad \text{ریشه‌های معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow s=A\cos kt+B\sin kt \Rightarrow s(0)=0=A, \quad \dot{s}(t)=k(-A\sin kt+B\cos kt)$$

$$\Rightarrow v(0)=v_0=\dot{s}(0)=Bk \Rightarrow B=\frac{v_0}{k} \Rightarrow \boxed{s=\frac{v_0}{k}\sin kt}$$

مثال برای حالت (د)

اگر $a=-k^2 v$ باشد (در سیستم جرم متصل به دمپر، شتاب جرم a بر حسب سرعت جرم v از رابطه ذکر شده تبعیت می‌کند).

روش اول:

$$vdv=ads=-k^2 vds \;\rightarrow\; \int_{v_0}^{v} dv=-k^2\int_{s_0}^{s} ds \;\rightarrow\; v-v_0=-k^2(s-s_0) \;\Rightarrow\; v=\left(v_0+k^2 s_0\right)-k^2 s$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}=-k^2\left(s-\frac{k^2 s_0+v_0}{k^2}\right) \;\Rightarrow\; \frac{ds}{s-\frac{k^2 s_0+v_0}{k^2}}=-k^2 dt \;\Rightarrow\; \int_{s_0}^{s}\frac{ds}{s-\frac{k^2 s_0+v_0}{k^2}}=-k^2\int_0^t dt=-k^2 t$$

$$\Rightarrow Ln\left|\frac{s-\frac{k^2 s_0+v_0}{k^2}}{\frac{-v_0}{k^2}}\right|=-k^2 t \;\Rightarrow\; s=\frac{k^2 s_0+v_0}{k^2}-\frac{v_0}{k^2}e^{-k^2 t} \;\Rightarrow\; \boxed{s=s_0+\frac{v_0}{k^2}\left(1-e^{-k^2 t}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v=v_0 e^{-k^2 t}}$$

روش دوم:

$$a=-k^2 v=\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; -k^2 dt=\frac{dv}{v} \;\Rightarrow\; -k^2\int_0^t dt=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} \;\Rightarrow\; -k^2 t=Ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v=v_0 e^{-k^2 t}} \;\Rightarrow\; \frac{ds}{dt}=v_0 e^{-k^2 t} \;\Rightarrow\; \int_{s_0}^{s} ds=v_0\int_{t_0}^{t} e^{-k^2 t}dt \;\Rightarrow\; \boxed{s=s_0+\frac{v_0}{k^2}\left(1-e^{-k^2 t}\right)}$$

حرکت منحنی‌الخط در صفحه (*Plane curvilinear motion*):

در این بخش حرکت ذره در یک صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد و مولفه‌های سرعت و شتاب در دستگاه‌های مختصات زیر ارایه می‌شوند.

الف ـ دستگاه مختصات دکارتی

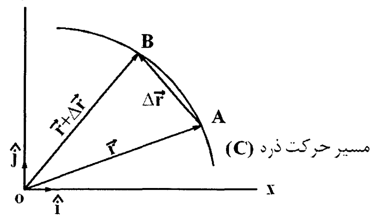
ب ـ دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت خاص قطبی

ج ـ دستگاه مختصات قائم و مماسی

د ـ دستگاه مختصات کروی

الف ـ دستگاه مختصات دکارتی:

ذره‌ای روی مسیر منحنی (c) حرکت می‌کند و در زمان t در نقطه A قرار دارد و در زمان $t+\Delta t$ به نقطه B حرکت می‌کند سرعت و شتاب ذره به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.



$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j} \quad , \quad \vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ (سرعت متوسط)}$$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{i}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j} \text{ (سرعت لحظه‌ای)}$$

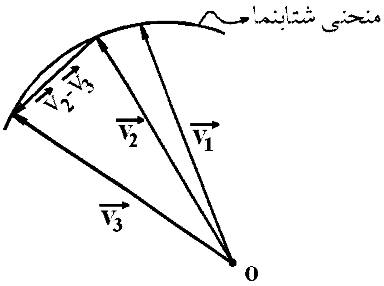
لذا سرعت دو مولفه افقی و عمودی $v_x=\dot{x}$ و $v_y=\dot{y}$ را دارد. از آنجاییکه $\frac{1}{\Delta t}$ یک عدد می‌باشد، لـذا بـردار $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ بـرداری اسـت در راستای بردار $\Delta\vec{r}$ (خط قاطع بر نقاط A و B) در حالت حدی که $\Delta t \to 0$ نقطه B به A منطبق می‌شود و خط قاطع بر نقـاط A و B به خط مماس بر نقطه A تبدیل می‌شود. بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ مماس بر مسیر خواهد بود.

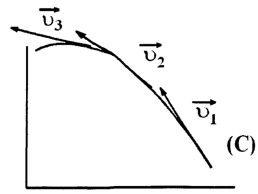
$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{(شتاب متوسط)}$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{v}_x\hat{i}+\dot{v}_y\hat{j}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$$

بنابراین بردار شتاب لحظه‌ای دارای دو مولفه افقی و عمودی $a_x=\ddot{x}$, $a_y=\ddot{y}$ می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً دیدیم بردار سرعت لحظه‌ای همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد. بردار شتاب لحظه‌ای هم همواره ممـاس بـر یک منحنی به‌نام منحنی شتاب‌نما (Hodograph) می‌باشد. برای ترسیم این منحنی در ابتدا از یک نقطه ثابـت O بردارهـای هـم‌سـنگ سرعت نقاط مختلف مسیر حرکت ذره بر روی مسیر (c) را رسم می‌کنیم و سـپس انتهاهـای بردارهـای ترسـیم شـده را بـه هـم وصـل می‌کنیم بدین‌ترتیب یک منحنی به‌دست می‌آید که منحنی شتاب‌نما نامیده می‌شود. چرا که خط قاطع بر ایـن منحنـی بـردار تفاضـل سرعت‌های لحظه‌ای دو موقعیت ذره را نشان می‌دهد که در حالت حدی به خط مماس که راستای شتاب لحظه‌ای را مشخص مـی‌کنـد تبدیل می‌شود.



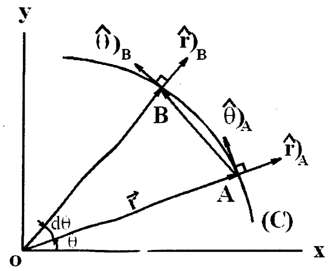


ب ـ دستگاه مختصات استوانه‌ای:

نخست به بررسی حالت خاص این دستگاه یعنی دستگاه مختصات قطبی می‌پردازیم.

دستگاه مختصات قطبی:

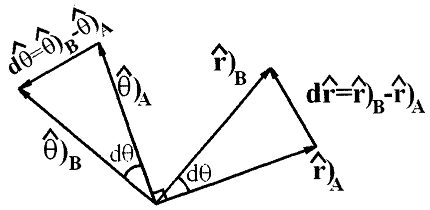
در این دستگاه بردار موقعیت از رابطه مقابل به‌دست می‌آید $\vec{r}=r\hat{r}$. بردارهای‌یکه این دستگاه $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ هستند که با تغییـر موقعیـت ذره این بردارهای‌یکه نیز تغییر می‌کنند، لذا نسبت به زمان مشتق دارند.



$$|d\vec{r}|=1\times d\theta \Rightarrow \frac{d\hat{r}}{d\tau}=\left|\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right|\hat{\theta}=\frac{d\theta}{d\tau}\hat{\theta}=\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$|d\hat{\theta}|=1\times d\theta \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{d\tau}=\left|\frac{d\hat{\theta}}{d\tau}\right|(-\hat{r})=\frac{d\theta}{d\tau}\hat{r}=-\dot{\theta}\hat{r}$$

در روابط بالا $\frac{d}{d\tau}$ در مفهوم مشتق نسبت به زمان می‌باشد، بنابراین مشتق بردارهای یکه نسبت به زمان از روابط زیر محاسبه می‌شوند.



$\boxed{\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\hat{\theta}}$ $\boxed{\dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\hat{r}}$

روابط فوق برای محاسبهٔ مولفه‌های سرعت و شتاب ذره به کار خواهند رفت.

روش کلی‌تری برای محاسبه مشتقات برادریکه نسبت به زمان در هر دستگاه مختصات دلخواه وجود دارد. اگر $\hat{\lambda}$ بردار یکه دستگاه مختصات دلخواه باشد مشتق بردار یکه نسبت به زمان، $\dot{\hat{\lambda}}$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$\boxed{\dot{\hat{\lambda}}=\vec{\omega}\times\hat{\lambda}}$

که در آن $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

مثلاً در دستگاه مختصات قطبی $\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}$ و بنابراین داریم:

$$\dot{\hat{r}}=\vec{\omega}\times\hat{r}=\dot{\theta}\hat{k}\times\hat{r}=\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}}=\vec{\omega}\times\hat{\theta}=\dot{\theta}\hat{k}\times\hat{\theta}=\dot{\theta}(-\hat{r})$$

که همان جواب قبلی به‌دست آمدند. حال مولفه‌های سرعت و شتاب را محاسبه می‌نماییم.

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}(r\hat{r})=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\hat{r}}=\dot{r}\hat{r}+r(\dot{\theta}\hat{\theta})=\dot{r}\hat{r}+(r\dot{\theta})\hat{\theta}=v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta}$$

مولفه‌های سرعت در دستگاه مختصات قطبی $\boxed{v_r=\dot{r}}$ و $\boxed{v_\theta=r\dot{\theta}}$ می‌باشند.

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{v}_r\hat{r}+v_r\dot{\hat{r}}+\dot{v}_\theta\hat{\theta}+v_\theta\dot{\hat{\theta}}=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta})+(\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}+r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}$$

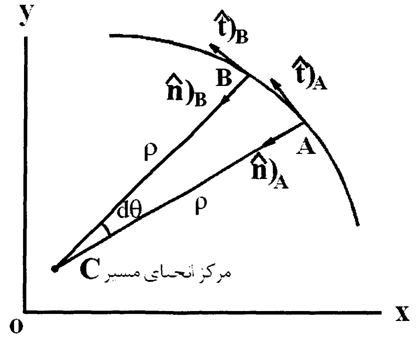
مولفه‌های شتاب در دستگاه مختصات قطبی $\boxed{a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}$ و $\boxed{a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}}$ خواهند بود.

برای دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای سرعت و شتاب عبارتند از :

$$\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+(r\dot{\theta})\hat{\theta}+\dot{z}\hat{k} \quad\Rightarrow\quad v_r=\dot{r} \quad , \quad v_\theta=r\dot{\theta} \ , \ v_z=\dot{z}$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k} \quad\Rightarrow\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \ , \ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \ , \ a_z=\ddot{z}$$

ج) دستگاه مختصات قائم و مماسی (Normal and tangentical coordinates) :



AB طول کمان $=ds=\rho d\theta$

شعاع انحنای مسیر :ρ

$v_t=\dot{s}=\frac{ds}{d\tau}=\rho\frac{d\theta}{d\tau}=\rho\dot{\theta}$

بردار سرعت مماسی $\vec{v}_t=v_t\hat{t}=\rho\dot{\theta}\hat{t}$

در این دستگاه بردارهای یکه عمود بر مسیر، $\hat n$ و مماس بر مسیر $\hat t$ با حرکت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند لذا نسبت به زمان مشتق دارند که از رابطه $\dot{\hat\lambda}=\vec\omega\times\hat\lambda$ این مشتقات محاسبه خواهند شد. در این دستگاه $\vec\omega=\dot\theta\hat k$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$\dot{\hat n}=\vec\omega\times\hat n=\dot\theta\hat k\times\hat n=\dot\theta\hat t \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\hat n}=-\dot\theta\hat t}$$

$$\dot{\hat t}=\vec\omega\times\hat t=\dot\theta\hat k\times\hat t=\dot\theta\hat n \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\hat t}=\dot\theta\hat n}$$

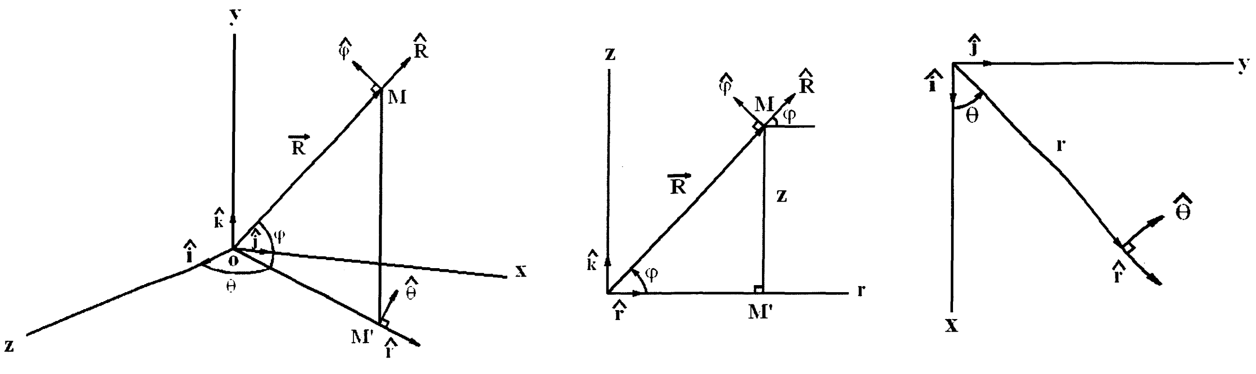
$$\vec a=\dot{\vec v}_t=\dot v_t\hat t+v_t\dot{\hat t}=\dot v_t\hat t+v_t\left(\dot\theta\hat n\right)=\dot v_t\hat t+v_t\left(\frac{v_t}{\rho}\right)\hat n=\dot v_t\hat t+\frac{v_t^2}{\rho}\hat n=a_t\hat t+a_n\hat n$$

بنابراین در دستگاه مختصات قائم و مماسی مولفه‌های نرمال و مماسی شتاب به ترتیب: $\boxed{a_n=\frac{V_t^2}{\rho}}$, $\boxed{a_t=\dot v_t}$ می‌باشند.

نکته ۱: مولفه‌های مماسی شتاب a_t، نرخ زمانی تغییر اندازه سرعت ذره را نشان می‌دهد و اگر اندازهٔ سرعت ثابت باشد این مولفه صفر خواهند بود.

نکته ۲: مولفه نرمال شتاب، a_n ناشی از تغییرات جهت سرعت می‌باشد و اندازه آن از رابطه $a_n=\frac{v_t^2}{\rho}$ محاسبه می‌شود بدیهی است که اگر مسیر حرکت یک خط راست باشد، شعاع انحنای مسیر بی‌نهایت خواهد بود و لذا شتاب نرمال صفر خواهد بود.

د ـ دستگاه مختصات کروی (Spherical Coordinates):



در این دستگاه مختصات مختصه‌ها (R,θ,φ) هستند. بردارهای یکه این دستگاه $\hat R$, $\hat\theta$, $\hat\varphi$ هستند که با حرکت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند، لذا نسبت به زمان مشتق دارند و این مشتقات از رابطه $\dot{\hat\lambda}=\vec\omega\times\hat\lambda$ محاسبه می‌شوند. در این دستگاه $\vec\omega=\dot\theta\hat k-\dot\varphi\hat\theta$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\dot{\hat R}=\vec\omega\times\hat R=\left(\dot\theta\hat k-\dot\varphi\hat\theta\right)\times\hat R=\dot\theta\left(\hat k\times\hat R\right)-\dot\varphi\left(\hat\theta\times\hat R\right)$$

از طرفی داریم:

$$\hat k\times\hat R=|\hat k||\hat R|\sin\left(\widehat{\hat k,\hat R}\right)\hat\theta=1\times1\sin(90-\varphi)\hat\theta=(\cos\varphi)\hat\theta$$

$$\hat\theta\times\hat R=-\hat\varphi$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$\boxed{\dot{\hat R}=\left(\dot\theta\cos\varphi\right)\hat\theta+\dot\varphi\hat\varphi}$$

$$\dot{\hat\theta}=\vec\omega\times\hat\theta=\left(\dot\theta\hat k-\dot\varphi\hat\theta\right)\times\hat\theta=\dot\theta\hat k\times\hat\theta=-\dot\theta\hat r$$

ما معمولاً مشتقات بردارهای یکه در یک دستگاه را بر حسب بردارهای یکه در آن دستگاه بیان می‌کنیم بنابراین می‌بایستی $\hat{r}$ را نیز بر حسب بردارهای یکه دستگاه مختصات کروی بیان کنیم. مطابق شکل بالا زاویه بردار یکه $\hat{r}$ با بردارهای یکه $\hat{R}$ ، $\hat{\varphi}$ به ترتیب $-\varphi$ و $-(\frac{\pi}{2}+\varphi)$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$\hat{r}=\cos(-\varphi)\hat{R}+\hat{\varphi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=(\cos\varphi)\hat{R}-(\sin\varphi)\hat{\varphi} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\hat{\theta}}=-(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{R}+(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\varphi}}$$

$$\dot{\hat{\varphi}}=\vec{\omega}\times\hat{\varphi}=\left(\dot{\theta}\hat{k}-\dot{\varphi}\hat{\theta}\right)\times\hat{\varphi}=\dot{\theta}\hat{k}\times\hat{\varphi}-\dot{\varphi}\hat{\theta}\times\hat{\varphi}$$

از طرفی داریم:

$$\hat{k}\times\hat{\varphi}=|\hat{k}||\hat{\varphi}|\sin\left(\widehat{\hat{k},\hat{\varphi}}\right)\left(-\hat{\theta}\right)=1\times1\times\sin\varphi\left(-\hat{\theta}\right)=-(\sin\varphi)\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta}\times\hat{\varphi}=\hat{R}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\dot{\hat{\varphi}}=-(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\theta}-\dot{\varphi}\hat{R}}$$

بردار موقعیت در این دستگاه عبارت است از:

$$\vec{R}=R\hat{R}$$

$$\vec{v}=\dot{\vec{R}}=\dot{R}\hat{R}+R\dot{\hat{R}}=\dot{R}\hat{R}+R\left[(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\theta}+\dot{\varphi}\hat{\varphi}\right]$$

بردار سرعت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow \quad \vec{v}=\dot{R}\hat{R}+(R\cos\varphi)\dot{\theta}\hat{\theta}+R\dot{\varphi}\hat{\varphi}=v_R\hat{R}+v_\theta\hat{\theta}+v_\varphi\hat{\varphi}$$

بنابراین مولفه‌های سرعت در این دستگاه $\boxed{v_R=\dot{R}}$ و $\boxed{v_\theta=(R\cos\varphi)\dot{\theta}=r\dot{\theta}}$ و $\boxed{v_\varphi=R\dot{\varphi}}$ می‌باشند. به دلیل طولانی بودن روابط مربوط به مولفه‌های شتاب از ارایه آن‌ها خودداری می‌شود.

جمع‌بندی:

	دستگاه مختصات دکارتی	دستگاه مختصات قائم و مماسی	دستگاه مختصات استوانه‌ای (در حالت خاص قطبی)	دستگاه مختصات کروی
بردارهای یکه و مختصات	$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ x, y, z	$\hat{n},\hat{t}$ ρ,θ	$\hat{r},\hat{\theta},\hat{k}$ r,θ,z	$\hat{R},\hat{\theta},\hat{\varphi}$ R,θ,φ
مشتقات بردارهای یکه	$\dot{\hat{i}}=\vec{0}$ $\dot{\hat{j}}=\vec{0}$ $\dot{\hat{k}}=\vec{0}$	$\dot{\hat{n}}=-\dot{\theta}\hat{t}$ $\dot{\hat{t}}=\dot{\theta}\hat{n}$	$\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\hat{\theta}$ $\dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\hat{r}$ $\dot{\hat{k}}=\vec{0}$	$\dot{\hat{R}}=(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\theta}+\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ $\dot{\hat{\theta}}=-(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{R}+(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\varphi}$ $\dot{\hat{\varphi}}=-\dot{\varphi}\hat{R}-(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\theta}$
مولفه‌های سرعت	$v_x=\dot{x}$ $v_y=\dot{y}$ $v_z=\dot{z}$	$v_t=\rho\dot{\theta}$	$v_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ $v_\theta=r\dot{\theta}$ $v_z=\dot{z}$	$v_R=\dot{R}$ $v_\theta=(R\cos\varphi)\dot{\theta}=r\dot{\theta}$ $v_\varphi=R\dot{\varphi}$
مولفه‌های شتاب	$a_x=\ddot{x}$ $a_y=\ddot{y}$ $a_z=\ddot{z}$	$a_n=\frac{v_t^2}{\rho}$ $a_t=\dot{v}_t$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ $a_z=\ddot{z}$	$a_R=\cdots$ $a_\theta=\cdots$ $a_\varphi=\cdots$
بردارهای سرعت زاویه‌ای	-	$\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}$	$\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}$	$\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}-\dot{\varphi}\hat{\theta}$

تست سال (۷۰ ـ ۶۹)

در مسیر دایره‌ای شکل حرکت یک هواپیما هنگام مانور در نقطه A شتاب کل هواپیما برابر $20\left[\frac{m}{s^2}\right]$ است. اگر سرعت هواپیما $720\left[\frac{km}{h}\right]$ باشد و با نرخ 36 کیلومتر در ساعت افزایش یابد، شعاع مسیر در نقطه A برابر است با:

۱) 4200 m ۲) 2310 m ۳) 5300 m ۴) هیچ‌کدام

$$v_t=720\left[\frac{km}{h}\right]=\frac{720}{3.6}\left[\frac{m}{s}\right]=200\left[\frac{m}{s}\right]$$

از آنجایی‌که نرخ تغییر اندازه سرعت 36 کیلومتر در ساعت می‌باشد با ثابت فرض کردن این نرخ نسبت به زمان می‌توان گفت که سرعت با نرخ $10=\frac{36}{3.6}$ متر در ثانیه افزایش می‌یابد و یا داریم: $a_t=\dot{v}_t=10\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$$a\ (\text{شتاب کل})=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=20 \Rightarrow \left(\frac{v_t^2}{\rho}\right)^2+10^2=20^2 \Rightarrow \left(\frac{(200)^2}{\rho}\right)^2=300 \Rightarrow \rho^2=\frac{200^4}{300}$$

$$\Rightarrow \rho=\frac{(200)^2}{10\sqrt{3}}\simeq 2310m$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۵ ـ ۷۳)

متحرکی با سرعت اولیه صفر در مسیر دایروی به شعاع R شروع به حرکت می‌کند، اگر شتاب مماسی a_t متحرک a_0 فرض شود، مقدار شتاب کل متحرک پس از طی یک دور کامل مسیر چقدر می‌باشد؟

۱) O ۲) $a_0\sqrt{1+4\pi^2}$ ۳) $4\pi a$ ۴) $a_0\sqrt{1+16\pi^2}$

$$\text{شتاب کل}\ a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+a_0^2}$$

سرعت پس از یک دور کامل مسیر $v=\sqrt{4\pi Ra_0} \Rightarrow v^2=4\pi Ra_0 \Rightarrow v^2-0^2=2a_0(2\pi R) \Rightarrow v^2-v_0^2=2a_ts$

$$z=\sqrt{\left(\frac{4\pi Ra_0}{R}\right)^2+a_0^2}=a_0\sqrt{1+16\pi^2}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۸ ـ ۷۷)

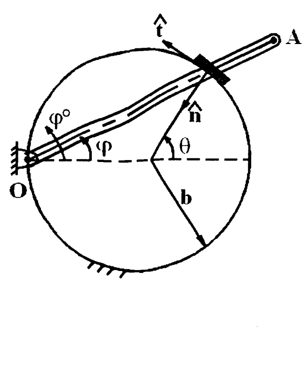
مهره کوچک P بر روی مسیر دایره‌ای شکل ثابت به شعاع b حرکت می‌کند. میله OA از مهرهٔ P عبور کرده و حول نقطهٔ ثابت o بر روی حلقه با سرعت زاویه‌ای $\dot{\varphi}$ دوران می‌کند. اگر $\dot{\varphi}$ ثابت باشد سرعت و شتاب P را به‌دست آورید.

۱) $\vec{v}_P=b\dot{\varphi}\hat{t}$ و $\vec{a}_P=2b\dot{\varphi}^2\hat{n}$

۲) $\vec{v}_P=2b\dot{\varphi}\hat{t}$ و $\vec{a}_P=4b\dot{\varphi}^2\hat{n}$

۳) $\vec{v}_P=b\dot{\varphi}\hat{t}$ و $\vec{a}_P=b\dot{\varphi}^2\hat{n}$

۴) $\vec{v}_P=b\dot{\varphi}\hat{t}$ و $\vec{a}_P=\frac{b\dot{\varphi}}{2}\hat{n}$



$$v_t=\rho\dot{\theta} \;\Rightarrow\; v_t\big)_P=b\dot{\theta} \xrightarrow{\theta=2\varphi} v_t\big)_P=2b\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \vec{v}_P=2b\dot{\varphi}\hat{t}$$

چون $\dot{\varphi}$ ثابت است $\Leftarrow$ $\ddot{\theta}=2\ddot{\varphi}=0$

$$a_n\big)_P=\frac{v_t^2}{\rho}=\frac{(2b\dot{\varphi})^2}{b}=4b\dot{\varphi}^2 \;\Rightarrow\; \vec{a}_P=4b\dot{\varphi}^2\hat{n} \;\Rightarrow$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۳ ـ ۷۲)

نقطه مادی با سرعت ثابت V در امتداد منحنی فضایی $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ و $z=\theta$ حرکت می‌کند. مقدار شتاب نقطه مادی برابر است با:

۱) $\frac{V^2}{2}$ ۲) V^2 ۳) صفر ۴) $V^2\cos\theta$

از آنجایی‌که $x^2+y^2=1$ می‌باشد لذا مسیر حرکت نقطه مادی یک منحنی مارپیچ بر روی سطح استوانه‌ای به شعاع واحد می‌باشد.

$$\begin{cases} v_x=\dot{x}=-\dot{\theta}\sin\theta \\ v_y=\dot{y}=\dot{\theta}\cos\theta \;\Rightarrow\; V=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{2}\,\dot{\theta}=\text{constant} \;\Rightarrow\; \dot{\theta}=\text{constant} \;\Rightarrow\; \ddot{\theta}=0 \\ v_z=\dot{z}=\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x=\ddot{x}=-\dot{\theta}^2\cos\theta \\ a_y=\ddot{y}=-\dot{\theta}^2\sin\theta \;\Rightarrow\; a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\dot{\theta}^2=\left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{V^2}{2} \\ a_z=\ddot{z}=\ddot{\theta}=0 \end{cases}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۷ ـ ۷۶)

مشتق زمانی بردار یکه (واحد) $\dot{\hat{R}}=\frac{d\hat{R}}{dt}$ در مختصات کروی (R,θ,φ) مساوی است با:

۱) $(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\theta}+\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ ۲) $(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\varphi}-(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{R}$

۳) $-(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\varphi}-(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{R}$ ۴) $(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\theta}-(\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\varphi}$

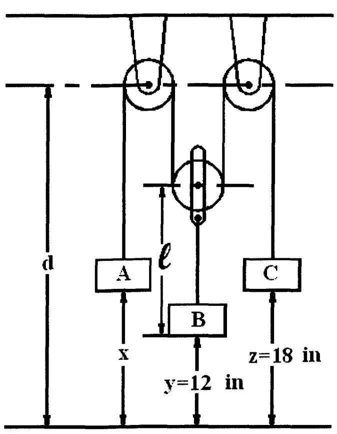
با توجه به جدول ارایه شده در بخش قبل جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۲ ـ ۷۱)

با دانستن این‌که بلوک‌های C , B یک ثانیه بعد از حرکت از حالت سکون پشت سرهم به زمین می‌خورند، شتاب A را به‌دست آورید.

۱) $7\frac{ft}{s^2}$ ۲) $3.5\frac{ft}{s^2}$

۳) $10.5\frac{ft}{s^2}$ ۴) $13.5\frac{ft}{s^2}$



$$y=\frac{1}{2}a_B t^2 \Rightarrow 12=\frac{1}{2}a_B(1)^2 \Rightarrow a_B=24\left[\frac{in}{s^2}\right]=\ddot{y}$$

$$z=\frac{1}{2}a_C t^2 \Rightarrow 18=\frac{1}{2}a_C(1)^2 \Rightarrow a_C=36\left[\frac{in}{s^2}\right]=\ddot{z}$$

طول ریسمان $=(d-x)+2(d-y-\ell)+(d-z)+\text{constant}$

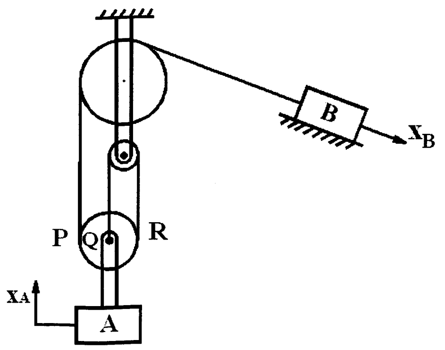
با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}+2\dot{y}+\dot{z}=0 \Rightarrow v_A+2v_B+v_C=0\\ \ddot{x}+2\ddot{y}+\ddot{z}=0 \Rightarrow a_A+2a_B+a_C=0 \Rightarrow a_A=-2\times24-36=-84\left[\frac{in}{s^2}\right]=-7\left[\frac{ft}{s^2}\right]\end{cases}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۶۸ـ۶۷)

در سیستم داده شده در شکل مقابل رابطه سرعت وزنه A (v_A به‌طرف بالا) و وزنه B (v_B به‌طرف پایین) عبارت است از:



۱) $v_B=2v_A$
۲) $v_B=3v_A$
۳) $v_B=2v_A$
۴) $v_B=\frac{4}{3}v_A$

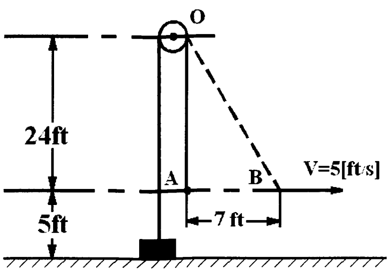
هنگامی که وزنه A به اندازه x_A بالا می‌رود نقاط R , Q , P به اندازه x_A بالا می‌روند و به نقاط R′ , Q′ , P′ تبدیل می‌شوند، به طوری که $PP'=QQ'=RR'=x_A$ در اثر این عمل به اندازه $3x_A$ از طول ریسمان آزاد می‌شود و لذا وزنه B به اندازه $x_B=3x_A$ پایین می‌آید بنابراین داریم:

$$x_B=3x_A \Rightarrow \dot{x}_B=3\dot{x}_A \Rightarrow v_B=3v_A$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۰ـ۶۹)

وزنه‌ای به انتهای طنابی به طول [ft] 53 متصل شده و انتهای دیگر آن به وسیله شخصی در ارتفاع [ft] 5 از سطح زمین نگه‌داری شده است. اگر شخص با سرعت ثابت $5\left[\frac{ft}{s}\right]$ شروع به حرکت کند، هنگامی‌که او به اندازه [ft] 7 مستقیما از زیر قرقره دور شده است. سرعت بالا رفتن وزنه تقریباً برابر است با:



۱) $1\left[\frac{ft}{s}\right]$
۲) $1.4\left[\frac{ft}{s}\right]$
۳) $2.5\left[\frac{ft}{s}\right]$
۴) $3.6\left[\frac{ft}{s}\right]$

اگر فرض کنیم شخص مسافت x را طی کرده باشد داریم: $AB=x \quad , \quad OB=s$

$$OB^2=OA^2+AB^2 \Rightarrow s^2=24^2+x^2 \Rightarrow 2\dot{s}s \Rightarrow =2\dot{x}x \Rightarrow \overset{*}{v}s=vx=5x \Rightarrow \overset{*}{v}=\frac{5x}{s}=\frac{5x}{\sqrt{24^2+x^2}}$$

که در آن $\overset{*}{v}$ سرعت افزایش طول OB (s) و یا سرعت بالا رفتن وزنه می‌باشد، لذا داریم:

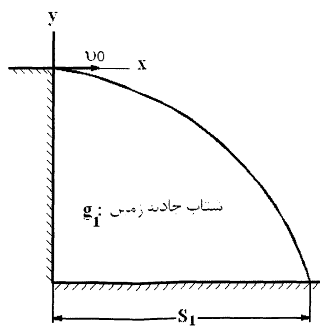
$$\overset{*}{v}\Big|_{x=7}=\frac{5\times7}{\sqrt{24^2+7^2}}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}\left[\frac{ft}{s}\right]=1.4\left[\frac{ft}{s}\right]$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۶۸ ـ ۷۶)

ذره‌ای مادی به جرم m از نقطه‌ای مرتفع نسبت به سطح زمین پرتاب می‌شود (به‌طور افقی) فاصله افقی طی شده توسط این ذره s_1 اندازه‌گیری می‌شود. اگر شتاب ثقل کره ماه $\frac{1}{6}$ شتاب ثقل کره زمین فرض شود و این ذره از نقطه‌ای مشابه در سطح ماه به‌طور افقی با سرعت برابر پرتاب شود فاصله افقی s_2 طی شده با s_1 چه رابطه‌ای دارد؟

۱) $s_2=6s_1$ ۲) $s_2=\sqrt{6}\,s_1$ ۳) $s_2=\frac{s_1}{6}$ ۴) هیچ‌کدام



مدت زمان لازم برای رسیدن به سطح زمین:

$$y=\frac{1}{2}g_1t^2 \Rightarrow -h=\frac{-1}{2}g_1t^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g_1}}$$

$$s_1=v_0t=v_0\sqrt{\frac{2h}{g_1}}$$

به‌طور مشابه داریم:

$$s_2=v_0\sqrt{\frac{2h}{g_2}}$$

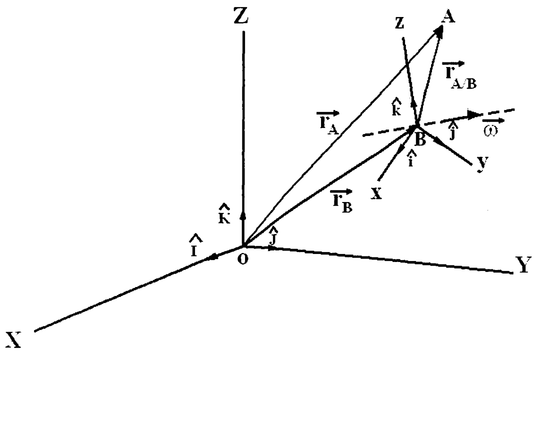
که در آن g_2 شتاب جاذبه در کره ماه می‌باشد و $g_2=\frac{g_1}{6}$

$$\frac{s_2}{s_1}=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}=\sqrt{6} \Rightarrow s_2=\sqrt{6}\,s_1$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

رابطه سرعت‌ها و شتاب‌های نسبی و دستگاه‌های چرخان:

دستگاه مختصات ثابت OXYZ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید دستگاه مختصات Bxyz به یک جسم صلب متصل شده و حول محور خط‌چین نشان با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ دوران می‌کند. موقعیت ذره A نسبت به دستگاه مختصات چرخان Bxyz با بردار $\vec{r}_{A/B}$ مشخص می‌شود و نیز موقعیت‌اش نسبت به دستگاه مختصات ثابت OXYZ با بردار $\vec{r}_A$ تعیین می‌شود. مطابق شکل داریم:



$$\vec{r}_A=\vec{r}_B+\vec{r}_{A/B} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_A=\dot{\vec{r}}_B+\dot{\vec{r}}_{A/B}$$

از طرفی داریم $\vec{v}_A=\dot{\vec{r}}_A$ و $\vec{v}_B=\dot{\vec{r}}_B$ که $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ به ترتیب سرعت‌های مطلق نقاط A و B نسبت به دستگاه ثابت OXYZ هستند. بردار $\dot{\vec{r}}_{A/B}$ را با نماد $\vec{v}_{A/B}$ نشان می‌دهند و سرعت نسبی نقطه A نسبت به B می‌نامند.بنابراین نتیجه می‌شود:

رابطه سرعت‌های مطلق و نسبی $\boxed{\vec{v}_A=\vec{v}_B+\vec{v}_{A/B}}$

فرض کنید که مختصات نقطه A در دستگاه مختصات چرخان (x , y , z) و بردارهای یکه این دستگاه $\hat{i}\,,\hat{j}\,,\hat{k}$ باشند، در این‌صورت داریم:

$$\vec{r}_{A/B}=x\hat{i}+y\hat{i}+z\hat{k} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}}_{A/B}=v_{A/B}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}+x\dot{\hat{i}}+y\dot{\hat{j}}+z\dot{\hat{k}}$$

نکته‌ای که باید بدان توجه داشت این است که چون دستگاه مختصات Bxyz دوران می‌کند لذا بردارهای یکه‌اش با گذشت زمان تغییر جهت می‌دهند و بنابراین نسبت به زمان مشتق دارند که این مشتقات عبارتند از:

$$\dot{\hat{i}}=\vec{\omega}\times\hat{i}$$
$$\dot{\hat{j}}=\vec{\omega}\times\hat{j}$$
$$\dot{\hat{k}}=\vec{\omega}\times\hat{k}$$

با جای‌گذاری روابط بالا در رابطه قبلی داریم:

$$\vec{v}_{A/B}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}+x\left(\vec{\omega}\times\hat{i}\right)+y\left(\vec{\omega}\times\hat{j}\right)+z\left(\vec{\omega}\times\hat{k}\right)=\vec{v}_{Rel}+\vec{\omega}\times\left(x\hat{i}+y\hat{i}+z\hat{k}\right)=\vec{v}_{Rel}+\vec{\omega}\times\vec{v}_{A/B}$$

که در آن $\vec{V}_{Rel}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$ می‌باشد و در مفهوم بردار سرعتی است که با ثابت فرض کردن دستگاه چرخان و تصور حرکت ذره‌ی A نسبت به B به‌دست می‌آید. بنابراین سرعت نسبی ذرهٔ A نسبت به دستگاه چرخان دارای دو ترم است. یک ترم $\left(\vec{v}_{Rel}\right)$ ناشی از حرکت ذرهٔ A نسبت به دستگاه چرخان ثابت فرض شده می‌باشد و ترم دیگر آن $\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)$ ناشی از دوران دستگاه چرخان نسبت به دستگاه ثابت می‌باشد. با مشتق‌گیری از رابطه سرعت‌های نسبی داریم:

$$\dot{\vec{v}}_A=\dot{\vec{v}}_B+\dot{\vec{v}}_{A/B} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{A/B}}$$ رابطه شتاب‌های نسبی

که در رابطه بالا $\vec{a}_{A/B}=\dot{\vec{v}}_{A/B}$ شتاب نسبی نقطه A نسبت به B نامیده می‌شود.

$$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_{Rel}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_{A/B}=\dot{\vec{v}}_{A/B}=\dot{\vec{v}}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{A/B}$$
$$=\dot{\vec{v}}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}+\vec{\omega}\times\left(\vec{v}_{Rel}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)$$

از طرفی با توجه به تعریف $\vec{v}_{Rel}$ و مشتقات بردارهای یکه دستگاه چرخان نتیجه می‌شود.

$$\vec{v}_{Rel}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{v}}_{Rel}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}+\dot{x}\dot{\hat{i}}+\dot{y}\dot{\hat{j}}+\dot{z}\dot{\hat{k}}$$
$$=\vec{a}_{Rel}+\dot{x}\left(\vec{\omega}\times\hat{i}\right)+\dot{y}\left(\vec{\omega}\times\hat{j}\right)+\dot{z}\left(\vec{\omega}\times\hat{k}\right)=\vec{a}_{Rel}+\vec{\omega}\times\left(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}\right)=\vec{a}_{Rel}+\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}$$

که در آن $\vec{a}_{Rel}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}$ می‌باشد و در مفهوم بردار شتابی است که با ثابت فرض کردن دستگاه چرخان و تصور حرکت ذره A نسبت به B به‌دست می‌آید. با جای‌گذاری رابطه بالا در رابطه مربوط به $\vec{a}_{A/B}$ نتیجه می‌شود.

$$\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}\times r_{A/B}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}$$

که در رابطه بالا ترم شتاب $\vec{a}_C=2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}$ شتاب کریولیس (Coriolis) نامیده می‌شود و راجع به مفهوم آن در قسمت‌های بعدی درس توضیح داده خواهد شد.

جمع‌بندی:

$$\boxed{\vec{v}_A=\vec{v}_B+\vec{v}_{A/B}} \quad , \quad \boxed{\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_{Rel}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}}$$

$$\boxed{\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{A/B}} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}}$$

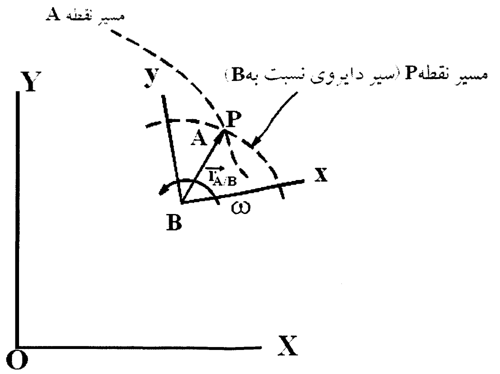
$$\vec{r}_{A/B}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\vec{v}_{Rel}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{Rel}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}$$

مفهوم شتاب کریولیس:

برای نشان دادن مفهوم مولفه شتاب کریولیس حرکت دوبعدی (صفحه‌ای) در دستگاه مختصات ثابت OXY و چرخان Bxy نسبت به یکدیگر را در نظر می‌گیریم. دو نقطه منطبق بر هم P و A را در لحظهٔ نشان داده شده در نظر می‌گیریم که مسیر نقطه P نسبت به B یک مسیر دایروی به شعاع $r_{A/B}$ بوده و مسیر نقطه A یک مسیر دلخواه می‌باشد. در دستگاه قائم مماسی نقطه P نسبت به B دارای دو مولفه شتاب نرمال و مماس می‌باشد که عبارتند از: $\vec{a}^{\,n}_{P/B}$ و $\vec{a}^{\,t}_{P/B}$



$$\left|\vec{a}^{\,n}_{P/B}\right|=\frac{\left(r_{A/B}\,\omega\right)^2}{r_{A/B}}=r_{A/B}\,\omega^2=\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)\right| \quad \text{و} \quad \omega=\omega\hat{k}\ ,\ \dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\hat{k}$$

$$\left|\vec{a}^{\,t}_{P/B}\right|=\frac{d}{dt}\left(r_{A/B}\,\omega\right)=r_{A/B}\,\dot{\omega}=\left|\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}\right|$$

جهت بردار $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}$ عمود بر AB و در جهت ω و هم جهت $\vec{a}^{\,t}_{A/B}$ می‌باشد. جهت بردار $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)$ از نقطه A به سمت B و یا در جهت $\vec{a}^{\,n}_{P/B}$ می‌باشد. بنابراین اندازه‌ها و جهت بردار $\vec{a}^{\,n}_{P/B}$ و $\vec{a}^{\,t}_{P/B}$ به ترتیب با اندازه‌ها و جهت بردارهای $\omega\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)$ و $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}$ یکسان می‌باشند.

و لذا نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}^{\,n}_{P/B}=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)$$

$$\vec{a}^{\,t}_{P/B}=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}$$

با توجه به رابطه شتاب‌های نسبی داریم:

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{A/B}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}\right)+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}$$

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{Rel}+\vec{a}^{\,t}_{P/B}+\vec{a}^{\,n}_{P/B}+2\omega\times\vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{Rel}+\vec{a}_{P/B}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A=\vec{a}_P+\vec{a}_{Rel}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_{A/P}=\vec{a}_A-\vec{a}_P=\vec{a}_{Rel}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}$$

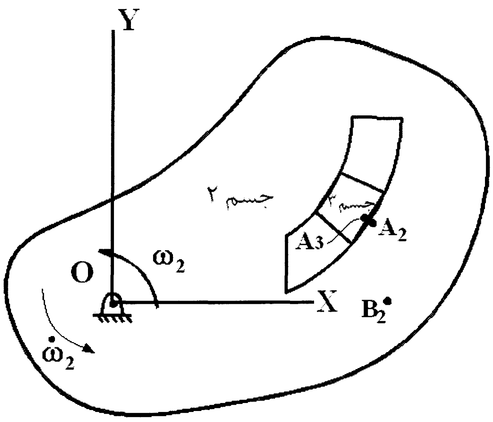
$$\left.\vec{a}_{A/P}\right)_{\text{دستگاه چرخان}}-\left.\vec{a}_{A/P}\right)_{\text{دستگاه غیر چرخان}}=\left(\vec{a}_{Rel}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}\right)-\vec{a}_{Rel}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_{Rel}=\vec{a}_C$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\vec{a}_{A/P}\right)_{\text{دستگاه چرخان}}=\left.\vec{a}_{A/P}\right)_{\text{دستگاه چرخان}}+\vec{a}_C}$$

در حقیقت شتاب کریولیس اختلاف شتاب نسبی دو نقطه A , P نسبت به یکدیگر است (که نقطه P در فاصله ثابت نسبت به مبدا مختصات چرخان می‌باشد ولی نقطه A فاصله‌اش نسبت به مبدا مختصات چرخان متغیر می‌باشد) هنگامی‌که این شتاب نسبی از دستگاه چرخان و غیرچرخان اندازه‌گیری می‌شود.

برای این‌که چرخش دستگاه معنا داشته باشد دستگاه Bxy به یک جسم صلب متصل می‌شود و چون نقطه P در فاصله ثابت نسبت به B قرار دارد، گویی این نقطه نیز بر جسم صلب مذکورواقع بوده و با دستگاه دوران می‌کند. حال اگر نقطه دیگری مانند A که بر این جسم صلب واقع نیست، در نظر گرفته شود بین شتاب نسبی این نقطه نسبت به نقطه P برای حالتی که جسم صلب موردنظر چرخان یا غیر چرخان باشد، تفاوت وجود دارد که این اختلاف در مفهوم مولفه شتاب کریولیس می‌باشد. برای روشن شدن موضوع یک مثال مربوط به یک مکانیزم صفحه‌ای را مطرح می‌کنیم.

نخست دو نقطه A_2 و B_2 را واقع بر جسم 2 در نظر می‌گیریم و دستگاه مختصات A_2xy را بر آن متصل می‌کنیم. این دستگاه با سرعت زاویه‌ای ω_2 حول محور Z خواهد چرخید.



$$\vec{a}_{B_2}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}+\vec{\omega}_2\times\left(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}\right)+2\,\vec{\omega}_2\times\vec{v}_{Rel}$$

چون دو نقطه A_2 و B_2 روی یک جسم صلب قرار دارند سرعت و شتاب نقطه B_2 نسبت به A_2 وقتی دستگاه A_2xy ثابت فرض شود صفر خواهد بود و لذا داریم $\vec{a}_{Rel}=\vec{v}_{Rel}=\vec{0}$ و لذا رابطهٔ بالا به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$\vec{a}_{B_2}=\vec{a}_{A_2}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}+\vec{\omega}_2\times\left(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}\right)\ \Rightarrow\ \boxed{\vec{a}_{B_2}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}^{\,t}_{B_2/A_2}+\vec{a}^{\,n}_{B_2/A_2}}$$

رابطه فوق رابطه آشنایی است که در درس دینامیک ماشین نیز مکرراً به کار می‌رود. همان‌طور که مشاهده کردیم دو نقطه A_2 و B_2 که روی یک جسم صلب قرار داشتند به هم دور و نزدیک نمی‌شوند لذا در راستای خط واصل بین این دو نقطه سرعت نسبی ندارد و بنابراین شتاب کریولیس صفر می‌باشد (شتاب کریولیس از دوران سرعت نسبی این دو نقطه در راستای خط واصل بین این دو نقطه به‌دست می‌آید).

حال دو نقطهٔ A_3 و A_2 را در نظر می‌گیریم که نقطه A_3 بر جسم صلب 3 که یک لغزنده در داخل شیار جسم 2 می‌باشد و داریم:

$$r_{A_3/A_2}=0$$

$$\vec{a}_{A_3}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{r}_{A_3/A_2}+\vec{\omega}_2\times\left(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{A_3/A_2}\right)+2\vec{\omega}_2\times\vec{v}_{Rel}\ \Rightarrow\ \vec{a}_{A_3}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{Rel}+2\vec{\omega}_2\times\vec{v}_{Rel}$$

اگر دستگاه A_2xy را ثابت فرض کنیم و سرعت و شتاب نقطه A_3 را نسبت به این دستگاه بسنجیم $\vec{v}_{Rel}$ و $\vec{a}_{Rel}$ به‌دست می‌آیند که $\vec{v}_{rel}=\vec{v}_{A_3/A_2}$ بردار سرعتی است که مماس بر مسیر شیار منحنی شکل می‌باشد و $\vec{a}_{Rel}=\vec{a}_{A_3/A_2}$ بردار شتابی است که

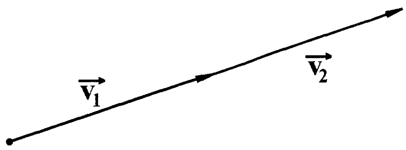
دارای دو مولفه مماس و نرمال $\bar{a}^{n}_{A_3/A_2}$ و $\bar{a}^{t}_{A_3/A_2}$ می‌باشد از آنجایی‌که مسیر حرکت نقطه A_3 از شکل شیار منحنی شکل تبعیت می‌کند لذا $\bar{a}^{t}_{A_3/A_2}$ مماس بر شیار و $\bar{a}^{n}_{A_3/A_2}$ هم عمود بر شیار خواهد بود.

ترم $2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{Rel}$ را نیز با $\bar{a}^{c}_{A_3/A_2}$ نمایش می‌دهیم و بدین‌ترتیب رابطه آشنایی که در درس دینامیک ماشین همواره به‌کار می‌رود نتیجه می‌شود.

$$\boxed{\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}^{n}_{A_3/A_2} + \bar{a}^{t}_{A_3/A_2} + \bar{a}^{c}_{A_3/A_2}}$$

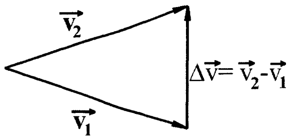
دو نقطه A_3 و A_2 در راستای شیار دارای سرعت نسبی $\bar{v}_{A_3/A_2}$ هستند چرا که این دو نقطه نسبت به هم دور و نزدیک می‌شوند. از دوران این بردار سرعت نسبی ترم شتابی به‌دست می‌آید، که شتاب کریولیس نامیده می‌شود. سوالی که این‌جا مطرح است این است که چگونه دوران سرعت نسبی ایجاد شتاب می‌نماید. برای بررسی این موضوع روش‌های به‌دست آمدن شتاب را بررسی می‌کنیم.

الف) شتاب در اثر تغییر اندازه سرعت (ولی راستای سرعت ثابت می‌ماند):



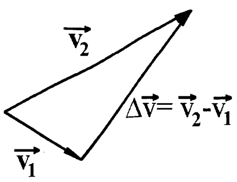
$\bar{a}_{av} = \dfrac{\Delta\bar{v} = v_2 - v_1}{\Delta t}$ و (شتاب لحظه‌ای) $\bar{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$

ب) شتاب در اثر تغییر راستای سرعت (ولی اندازه سرعت ثابت می‌ماند):



$\bar{a}_{av} = \dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ و (شتاب لحظه‌ای) $\bar{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$

ج) شتاب در اثر تغییر اندازه و راستای سرعت:

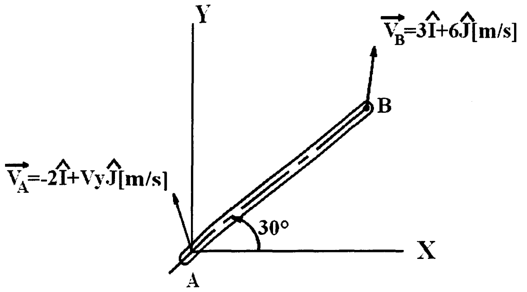


$\bar{a}_{av} = \dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ و (شتاب لحظه‌ای) $\bar{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$

بنابراین با توجه به موارد ذکر شده در می‌یابیم که در اثر تغییر اندازه $\bar{v}_{A_3/A_2}$ و دوران $\bar{v}_{A_3/A_2}$ بردار $\Delta\bar{v}_{A_3/A_2}$ به‌وجود می‌آید، که ترم شتابی به نام شتاب کریولیس به‌وجود می‌آورد.

تست سال (۷۸ ـ ۷۷)

میلهٔ AB روی سطحی افقی در حال حرکت است. سرعت نقاط A و B در لحظه t نشان داده شده است. مولفه سرعت v_y برای نقطه A چند $\left[\dfrac{m}{s}\right]$ است؟



۱) -12.6
۲) 6.6
۳) 12.6
۴) 14.7

روش اول: با فرض $AB=\ell$ داریم:

$$\vec{r}_{B/A}=(\ell\cos 30)\hat{I}+(\ell\sin 30)\hat{J}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\hat{I}+\frac{\ell}{2}\hat{J}\ \ ,\ \ \vec{\theta}=\omega\hat{K}$$

چون فاصله نقاط A و B ثابت است، داریم: $\vec{v}_{Rel}=\vec{0}$ و در نتیجه:

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{Rel}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$$

$$3\hat{I}+6\hat{J}=-2\hat{I}+v_y\hat{J}+\omega\hat{K}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\hat{I}+\frac{\ell}{2}\hat{J})=-2\hat{I}+v_y\hat{J}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\omega\hat{J}-\frac{\ell}{2}\omega\hat{I}$$

$$=(-2-\frac{\ell}{2}\omega)\hat{I}+(v_y+\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\omega)\hat{J}\ \Rightarrow\ \begin{cases}3=-2-\frac{\ell}{2}\omega\ \Rightarrow\ \ell\omega=-10\\ v_y+\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\omega=6\ \Rightarrow\ v_y=6+10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6+5\sqrt{3}\simeq 14.7\left[\frac{m}{s}\right]\end{cases}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

روش دوم:

$$\text{اندازه مولفه سرعت } \vec{v}_A \text{ در راستای } AB = v_A)_{AB}=\vec{v}_A.\hat{\lambda}_{AB}=\left(-2\hat{I}+v_y\hat{J}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{I}+\frac{1}{2}\hat{J}\right)=-\sqrt{3}+\frac{v_y}{2}$$

$$\text{اندازه مولفه سرعت } \vec{v}_B \text{ در راستای } AB = v_B)_{AB}=\vec{v}_B.\hat{\lambda}_{AB}=\left(3\hat{I}+6\hat{J}\right).\left(\frac{3}{2}\hat{I}+\frac{1}{2}\hat{J}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+3$$

که روابط بالا $\hat{\lambda}_{AB}=\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$ همان برداریکه در راستای AB می‌باشد. دو مولفه $v_A)_{AB}$ و $v_B)_{AB}$ می‌بایستی با هم برابر باشند، چرا که در غیر این‌صورت میله AB کشش خواهد آمد و یا فشرده خواهد شد که این فرض خلاف صلب بودن میله AB است پس داریم:

$$v_A)_{AB}=v_B)_{AB}\ \Rightarrow\ -\sqrt{3}+\frac{v_y}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\ \Rightarrow\ v_y=6+5\sqrt{3}\simeq 14.7\left[\frac{m}{s}\right]$$

اگر مولفه‌های سرعت $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ را در راستای عمود بر AB به ترتیب $v_A\overset{\perp}{)}_{AB}$ و $v_B\overset{\perp}{)}_{AB}$ بنامیم داریم:

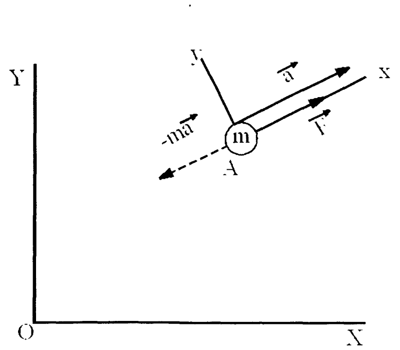
$$\omega_{AB}=\frac{\left|v_B\overset{\perp}{)}_{AB}-v_A\overset{\perp}{)}_{AB}\right|}{\ell}\ \ (\text{سرعت زاویه‌ای میله } AB)$$

اگر مولفه‌های شتاب $\vec{a}_A$ و $\vec{a}_B$ در راستای عمود بر AB نیز به ترتیب $a_A\overset{\perp}{)}_{AB}$ و $a_B\overset{\perp}{)}_{AB}$ باشند، داریم:

$$\alpha_{AB}=\frac{\left|a_B\overset{\perp}{)}_{AB}-a_A\overset{\perp}{)}_{AB}\right|}{\ell}\ \ (\text{شتاب زاویه‌ای میله } AB)$$

قانون دوم نیوتن و اصل دالامبر:

مطابق قانون دوم نیوتن داریم: $\vec{F}=m\,\vec{a}$



به عبارت دیگر اگر نیروی $\vec{F}$ به ذره‌ای به جرم m وارد شود، ذره در جهت نیرو شتابی می‌گیرید که برابر است با $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$.

حال اگر در دستگاه مختصات Axy متصل به ذره قرار بگیریم از دید ناظر واقع در این دستگاه ذره ساکن می‌باشد، لذا می‌بایستی جمع نیروهای وارده بر این ذره صفر شود دالامبر برای توجیه این تعادل نیروها، نیروی اینرسی $m\vec{a}$ را در جهت عکس $\vec{F}$ به ذره وارد نمود (در شکل با خطچین نشان داده شده است). چون ذره در حال تعادل است جمع نیروها در جهت محور x صفر است. بنابراین داریم:

$$\vec{F}-m\vec{a}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}=m\vec{a}$$

که رابطهٔ فوق با قانون دوم نیوتن سازگار است:

بنابراین مطابق اصل دالامبر اگر نیروی اینرسی $m\vec{a}$ را در جهت عکس به یک ذرهٔ در حال حرکت اعمال نماییم مساله دینامیک به یک مساله استاتیکی تبدیل شده و جمع نیروها وارد بر ذره صفر خواهد بود. این تعادل ساختگی را تعادل شبه استاتیکی می‌نامند.

قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات دکارتی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases}\sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = m a_y \\ \sum F_z = m a_z\end{cases}$$

قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\begin{cases}\sum F_r = m a_r = m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right) \\ \sum F_\theta = m a_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right) \\ \sum F_z = m a_z = m\ddot{z}\end{cases}$$

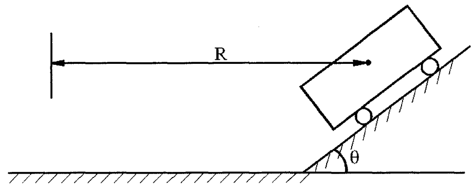
قانون دوم نیوتن در دستگاه قائم و مماسی عبارت است از:

$$\begin{cases}\sum F_n = m a_n = m\dfrac{v_t^2}{\rho} \\ \sum F_t = m a_t = m\dot{v}_t\end{cases}$$

مثال‌هایی از قانون دوم نیوتن و اصل دالامبر و قانون بقای انرژی:

تست سال (۷۶ – ۷۵)

یک اتومبیل وارد پیچی با شعاع R می‌شود، جاده دارای شیب θ می‌باشد. (مطابق شکل) ضریب اصطکاک بین چرخ‌ها و جاده μ است. مینیمم سرعت اتومبیل برای این‌که به طور جانبی به پایین سرنخورد چقدر است؟



۱) $\left[\dfrac{gR(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{\sin\theta+\mu\cos\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$　۲) $\left[\dfrac{gR(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$　۳) $\left[\dfrac{gR(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$　۴) $\left[\dfrac{gR(\cos\theta-\mu\sin\theta)}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$

مساله را به دو حالت زیر تعمیم می‌دهیم:

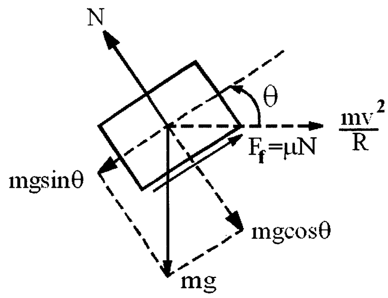
الف) مینیمم سرعت اتومبیل برای این‌که به‌طور جانبی به پایین سرنخورد چقدر است؟

ب) ماکزیمم سرعت اتومبیل برای این‌که به‌طور جانبی به بالا سرنخورد چقدر است؟

حل مساله: الف) در این حالت جسم تمایل به پایین رفتن دارد. لذا جهت نیروی اصطکاک F_f به سمت بالا می‌باشد.

دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر جرم m به‌صورت زیر می‌باشد.

طبق اصل دالامبر نیروی $\frac{mv^2}{R}$ در جهت عکس به جرم وارد شده و تعادل شبه استاتیکی ایجاد شده است.



$$\text{جمع نیروها در راستای موازی سطح شیب‌دار} = 0 \Rightarrow \mu N - mg\sin\theta + \frac{mv^2}{R}\cos\theta = 0$$

$$\text{جمع نیروها در راستای عمود بر سطح شیب‌دار} = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}\sin\theta = 0 \Rightarrow N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \mu m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta\right) - mg\sin\theta + \frac{mv^2}{R}\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R}(\mu\sin\theta + \cos\theta) = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v = \boxed{v_{min} = \sqrt{\frac{gR(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\mu\sin\theta + \cos\theta}}}$$

لذا جواب گزینهٔ (۳) می‌باشد.

حل مساله: ب) در این حالت چون جسم تمایل به بالا رفتن دارد جهت نیروی اصطکاک F_f به سمت پایین می‌باشد.

$$\text{جمع نیروها در راستای موازی سطح شیب‌دار} = 0 \Rightarrow -\mu N - mg\sin\theta + m\frac{v^2}{R}\cos\theta = 0$$

$$\text{جمع نیروها در راستای عمود بر سطح شیب‌دار} = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}\sin\theta = 0 \Rightarrow N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow -\mu m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta\right) - mg\sin\theta + m\frac{v^2}{R}\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R}(\cos\theta - \mu\sin\theta) = g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

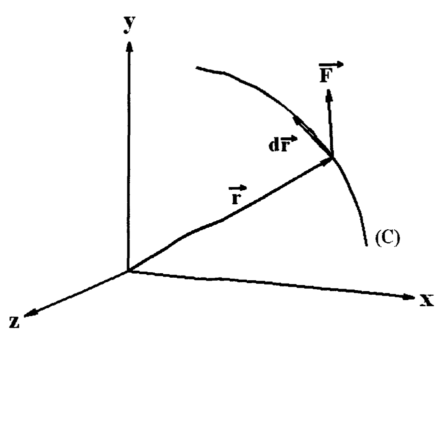
$$\Rightarrow v = \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{gR(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}}$$

مقایسهٔ رابطهٔ v_{max} با v_{min} نشان می‌دهد که در رابطهٔ v_{max} مخرج کسر کوچک‌تر و صورت کسر بزرگ‌تر از v_{min} می‌باشد، لذا $v_{max} > v_{min}$ یعنی نام‌گذاری v_{max} و v_{min} مناسب صورت گرفته است. اگر سرعت اتومبیل $v_{min} \le v \le v_{max}$ اتومبیل در پیچ از جاده خارج نمی‌شود.

فصل دوم

کار و انرژی

فرض کنیم ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی $\vec{F}$ روی منحنی (c) حرکت می‌کند



$d W=\vec{F}.d\vec{r}$ (کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی ناچیز $d\vec{r}$)

$W=\int_1^2 dW=\int_1^2 \vec{F}.d\vec{r}$ (کل کار)

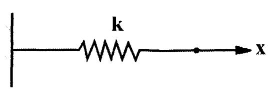
$$\vec{F}=F_x\,\hat{i}+F_y\,\hat{j}+F_z\,\hat{k}$$

$$\vec{r}=x\,\hat{i}+y\,\hat{i}+z\,\hat{k} \quad\Rightarrow\quad d\vec{r}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow\quad W=\int_1^2 \left(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\right)$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx+\int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy+\int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

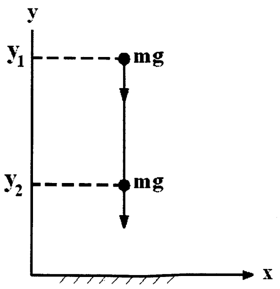
محاسبه کار نیروی فنر:



$$F_x=-kx$$

$W_s=\int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx=\left[-\frac{kx^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=\boxed{-\left(\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}\right)}$ (کار نیروی فنر)

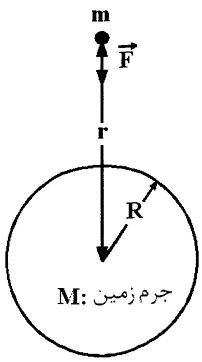
محاسبه کار نیروی وزن:



$$F_y = -mg$$

(کار نیروی وزن) $W_g = \int_{y_1}^{y_2} F_y\, dy = \int_{y_1}^{y_2} (-mg)dy = \boxed{-mg(y_2 - y_1)}$

محاسبه کار نیروی گرانش:



(نیروی گرانش برای جسم در فاصله r از مرکز زمین) $F = mg_r = \dfrac{kmM}{r^2}$

(نیروی گرانش برای جسم در نزدیکی سطح زمین) $F = mg_o = \dfrac{kmM}{R^2} \Rightarrow kM = R^2 g_o$

در روابط بالا g_r ، g_o به ترتیب شتاب جاذبه در نزدیکی سطح زمین و در فاصله r از مرکز زمین می‌باشد.

$$\Rightarrow g_r = \frac{kM}{r^2} = \frac{R^2 g_o}{r^2} = \boxed{g_o\left(\frac{R}{r}\right)^2} \Rightarrow \vec{F} = mg_r \hat{r} = mg_o\left(\frac{R}{r}\right)^2 \hat{r}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{mg_o R^2}{r^2} dr = -mg_o R^2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \boxed{-\left[\left(\frac{-mg_o R^2}{r_2}\right) - \left(\frac{mg_o R^2}{r_1}\right)\right]}$$

اگر کار نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی ناچیز $dW = \vec{F}.d\vec{r}$ به‌صورت منفی دیفرانسیل کامل یک تابع اسکالر V باشد در این‌صورت کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ به مسیر حرکت ذره‌ای که تحت تاثیر نیروی $\vec{F}$ می‌باشد بستگی ندارد و فقط به مقدار تابع V در نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. تابع V را تابع پتانسیل می‌نامند.

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = -dV \Rightarrow W = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} = -\int_1^2 dV = -(V_2 - V_1)$$

با مقایسه رابطه بالا با کار نیروهای فنر، وزن و گرانش توابع پتانسیل زیر تعریف می‌شوند.

(تابع پتانسیل فنر) $\boxed{V_e = \frac{1}{2}kx^2} \Rightarrow W_s = -\left((V_e)_2 - (V_e)_1\right)$

(تابع پتانسیل ثقلی) $\boxed{V_g = mg\,y} \Rightarrow W_g = -\left((V_g)_2 - (V_g)_1\right)$

(تابع پتانسیل گرانشی) $\boxed{V = \frac{mg_o R^2}{r}} \Rightarrow W = -(V_2 - V_1)$

انواع نیروها:

الف ـ نیروهای ابقایی یا پایستار (Conservative): نیروهایی هستند که کار آن‌ها به مسیر حرکت بستگی ندارد. مانند نیروی وزن، نیروی فنر، نیروی گرانشی

ب ـ نیروهای غیرابقایی یا ناپایستار (Non conservative): نیروهایی هستند که کار آن‌ها به مسیر حرکت بستگی دارد، مانند: نیروی اصطکاک

شرط پایستار بودن نیروها:

$$F=F_x\,\hat{i}+F_y\,\hat{j}+F_z\,\hat{k}$$

$$\vec{r}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}\quad\Rightarrow\quad d\vec{r}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k}\quad\Rightarrow$$

$$dW=\vec{F}.d\vec{r}=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=-dV=-\frac{\partial V}{\partial x}dx-\frac{\partial V}{\partial y}dy-\frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_x=-\dfrac{\partial V}{\partial x}\\ F_y=-\dfrac{\partial V}{\partial y}\\ F_z=-\dfrac{\partial V}{\partial z}\end{cases}\Rightarrow\quad \vec{F}=F_x\,\hat{i}+F_y\,\hat{j}+F_z\,\hat{k}=-\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}=\boxed{-\vec{\nabla}V}$$ (گرایان V)

$$\text{curl}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\,V=-\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{0}$$

شرط لازم و کافی برای آن‌که یک نیرو پایستار باشد آن است که کرل آن نیرو صفر باشد.

نکته: نیروها با مولفه‌های ثابت پایستار هستند.

مثال: نیروی $\vec{F}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}[N]$ به ذره‌ای وارد شده و ذره از موقعیت (1) به مختصات (1 , 1 , 1) به موقعیت (2) به مختصات (2 , 2 , 2)حرکت می‌کند کار نیروی $\vec{F}$ و تابع پتانسیل مربوط به این نیرو را بیابید.

$$\begin{cases}F_x=-\dfrac{\partial V}{\partial x}=2\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial V}{\partial x}=-2\ \Rightarrow\ V=-2x+f(y,z)\\ F_y=\dfrac{-\partial V}{\partial y}=2\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=-2=\dfrac{\partial f}{\partial y}\\ F_z=-\dfrac{\partial V}{\partial z}=1\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial V}{\partial z}=-1=\dfrac{\partial f}{\partial z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2\ \Rightarrow\ f=-2y+h(x)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=-1=\dfrac{\partial h}{\partial z}\ \Rightarrow\ h=-z+c\end{cases}\Rightarrow\ f=-2y-z+c\ \Rightarrow\ V=-2x-2y-z+c$$

$$w=-\left(v_2-v_1\right)=-\left[(-2\times2-2\times2-1+c)-(-2\times1-2\times1-1+c)\right]=5[N.m]=5[J]$$

(کار نیروی غیر پایستار) $+W_{n.c.}$ (کار نیروهای پایستار) $W=W_c$ کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

قضیه کار و انرژی:

$$w=\int_1^2 \vec{F}.d\vec{r}=\int_1^2 m\vec{a}.d\vec{r}$$

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \Rightarrow d\vec{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}$$

$$\vec{v}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k} \Rightarrow \vec{a}.d\vec{r}=\ddot{x}dx+\ddot{y}dy+\ddot{z}dz \Rightarrow w=\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx+\int_{y_1}^{y_2} m\ddot{y}dy+\int_{z_1}^{z_2} m\ddot{z}dz$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\ddot{x}dx=\dot{x}d\dot{x}\\ \ddot{y}dy=\dot{y}d\dot{y}\\ \ddot{z}dz=\dot{z}d\dot{z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow W=\int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} m\dot{x}d\dot{x}+\int_{\dot{y}_1}^{\dot{y}_2} m\dot{y}d\dot{y}+\int_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2} m\dot{z}d\dot{z}=m\left[\frac{\dot{x}^2}{2}\right]_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2}+m\left[\frac{\dot{y}^2}{2}\right]_{\dot{y}_1}^{\dot{y}_2}+m\left[\frac{\dot{z}^2}{2}\right]_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2}$$

$$=\frac{m\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2\right)^2-m\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2\right)}{2}=\frac{mv_2^2-mv_1^2}{2}=\Delta T \Rightarrow \boxed{W=\Delta T} \text{ و } T=\frac{1}{2}mv^2$$

قضیهٔ کار و انرژی بیان می‌کند که کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر است با تغییرات انرژی جنبشی.

$$\Rightarrow W=\Delta T=W_c+W_{n.c.}=-\Delta V+w_{n.c.} \Rightarrow W_{n.c.}=\Delta T+\Delta V=\Delta\left(T+V\right)=\Delta E$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{n.c.}\ (\text{کار نیروهای غیر پایستار})=\Delta E}$$

مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل را انرژی مکانیکی (E) می‌نامند.

قانون بقای انرژی:

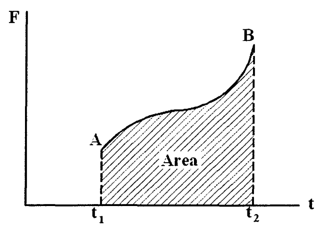
اگر کار نیروهای غیر پایستار صفر باشد، تغییرات انرژی مکانیکی صفر باشد و انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند و به عبارت دیگر انرژی مکانیکی بقا خواهد داشت.

اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای:

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d\vec{G}}{dt}=\dot{\vec{G}}$$

اندازه حرکت خطی (Linear momentum) = $\boxed{\vec{G}=m\vec{v}}$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{G}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt=d\vec{G} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=$$ ضربه خطی (Linear Impulse) $$=\int_1^2 d\vec{G}=\vec{G}_2-\vec{G}_1=\Delta\vec{G}$$



$$\text{Linear Impulse}=\text{Area}=\Delta G$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی: اگر جمع نیروهای خارجی در یک راستا صفر باشد بقای اندازه حرکت خطی در آن راستا برقرار است و یا مقدار اندازه حرکت خطی در آن راستا ثابت می‌ماند.

$\vec{F}=\dot{\vec{G}}=\vec{0} \Rightarrow \vec{G}=\text{constant}$

$\vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times m\vec{a}=m\left(\vec{r}\times\dot{\vec{v}}\right)$

$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=\dot{\vec{r}}\times\vec{v}+\vec{r}\times\dot{\vec{v}}=\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\dot{\vec{v}}\rightarrow\vec{M}_o=m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})$

$=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{G}\right)=\frac{d\vec{H}_o}{dt}=\dot{\vec{H}}_o \Rightarrow \boxed{\vec{M}_o=\dot{\vec{H}}_o}$

o اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه (Angular momentum) $=\vec{H}_o=\vec{r}\times\vec{G}$

$\vec{M}_o=\frac{d\vec{H}_o}{dt}\Rightarrow\vec{M}_o\,dt=d\vec{H}_o\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_o\,dt=\int_1^2 d\vec{H}_o=\left.\vec{H}_o\right)_2-\left.\vec{H}_o\right)_1=\Delta\vec{H}_o$ (ضربه زاویه‌ای) (Angnlar Impulse)

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای: اگر جمع گشتاورهای نیروهای خارجی وارد به یک ذره حول یک نقطه ثابت صفر باشد تغییرات اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه صفر بوده و یا اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه بقا خواهد داشت.

$\vec{M}_o=\vec{o}\Rightarrow\dot{\vec{H}}_o\Rightarrow\vec{H}_o=\text{constant}$

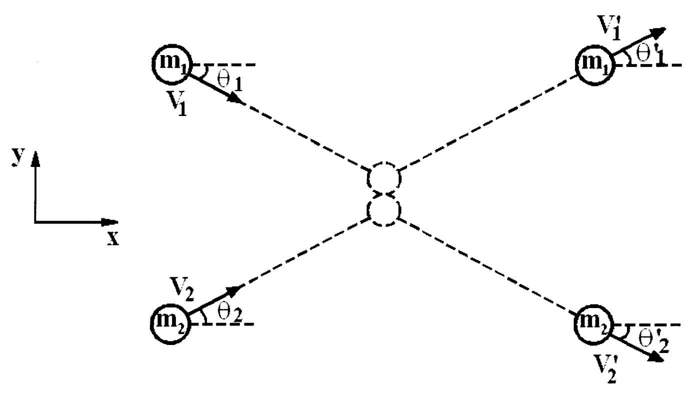
جمع بندی:

$\vec{G}=m\vec{v}$ Linear momenmtum	$\vec{H}_o=\vec{r}\times\vec{G}$ Angular momentum
$\vec{F}=\dot{\vec{G}}$	$\vec{M}_o=\dot{\vec{H}}_o$
$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\Delta\vec{G}$ Linear Impulse	$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_o\,dt=\Delta\vec{H}_o$ Angular Impulse

فصل سوم

برخورد ذرات

دو جرم m_1 و m_2 با سرعت‌های v_1 و v_2 مطابق شکل حرکت می‌کند و با یکدیگر برخورد می‌کند و پس از برخورد با سرعت‌های v'_1 و v'_2 که با محور xها زوایای θ'_1 و θ'_2 می‌سازند از هم دور می‌شوند محور y نشان دهنده راستای برخورد و محور x نشان دهنده راستای عمود بر برخورد می‌باشد. در حالت کلی در برخورد اجرام سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 و زوایای آن‌ها با محور xها θ_1 و θ_2 معلوم هستند و هدف یافتن بردارهای سرعت‌های بعد از برخورد می‌باشد. لذا مجهولات مساله v'_1 و v'_2 و θ'_1 و θ'_2 هستند.



برای به‌دست آوردن این مجهولات مجموعاً چهار معادله تشکیل می‌دهیم که دو معادله از این معادلات در راستای عمود بر ضربه و دو معادلهٔ دیگر در راستای ضربه نوشته می‌شود.

معادلات در راستای عمود بر ضربه:

چون در راستای عمود بر ضربه از نیروی اصطکاک صرف‌نظر می‌شود نیروی در راستای عمود بر ضربه $F_x = 0$ می‌باشد و لذا ضربه خطی در راستای عمود بر ضربه صفر است و بنابراین داریم:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt = G_x)_2 - G_x)_1$$

که در آن $G_x)_1$ و $G_x)_2$ به ترتیب اندازه حرکت خطی در راستای محور xها قبل و بعد از برخورد هستند. رابطهٔ بالا بـرای تـک تـک اجرام به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

برای جرم اول: $m_1 v'_1 \cos\theta'_1 - m_1 v_1 \cos\theta_1 = 0$

برای جرم دوم: $m_2 v'_2 \cos\theta'_2 - m_2 v_2 \cos\theta_2 = 0$

و یا داریم:

$$\boxed{v'_x)_1 = v_x)_1} \quad (1)$$
$$\boxed{v'_x)_2 = v_x)_2} \quad (2)$$

که در آن $v_x)_1 = v_1 \cos\theta_1$ و $v_x)_2 = v_2 \cos\theta_2$ به ترتیب مولفه‌های سرعت اولین و دومین جرم در راستای عمود بر ضربه قبـل از برخورد و $v'_x)_1 = v'_1 \cos\theta'_1$ و $v'_x)_2 = v'_2 \cos\theta'_2$ به ترتیب مولفه‌های سرعت اولین و دومین جرم در راستای عمود بر ضـربه بعـد از برخورد می‌باشد. به عبارت دیگر در برخورد اجرام مولفه سرعت اجرام در راستای عمود بر ضربه برای تک تک اجرام تغییـر نمـی‌کنـد و قبل و بعد از برخورد ثابت می‌باشد.

معادلات در راستای ضربه:

در راستای ضربه (محور y) دو جرم نیروی F_y را به یکدیگر وارد می‌کنند که طبق قانون عمل و عکس‌العمل نیرویـی کـه جـرم دوم بـه اول واردمی‌کند با نیروی که جرم اول به دوم وارد می‌کند برابر و درخلاف جهت می‌باشد.

ضربه در راستای محور y برای جرم اول: $\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = G_y)_2 - G_y)_1 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 - (-m_1 v_1 \sin\theta_1)$

ضربه در راستای محور y بری جرم دوم: $\int_{t_1}^{t_2} -F_y\,dt = G_y)_2 - G_y)_1 = -m_2 v'_2 \sin\theta'_2 - m_2 v_2 \sin\theta_2$

چون مقدار F_y مجهول است می‌بایستی با جمع دو معادلهٔ بالا آن را حذف کنیم، بنابراین داریم:

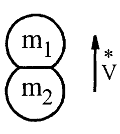
$$m_1 v'_1 \sin\theta'_1 + m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v'_2 \sin\theta'_2 - m_2 v_2 \sin\theta_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه (3) $\boxed{-m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = -m_2 v'_2 \sin\theta'_2 + m_1 v'_1 \sin\theta'_1}$

در عبارت بالا سمت چپ عبارت مجموع اندازه حرکت‌های خطی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد و عبارت سمت راست مجموع اندازه حرکت‌های خطی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد می‌باشد.

حال می‌بایستی آخرین معادله که در راستای ضربه نوشته می‌شود را تشکیل می‌دهیم تا تمامی مجهولات مساله به‌دست آیند.

فرض کنیم دو جرم m_1 و m_2 هنگامی که در راستای ضربه به ترتیب با سرعت‌های $v_1 \sin\theta_1$ و $v_2 \sin\theta_2$ به هم نزدیک شدند به هم مماس می‌شوند و سپس برای مدت زمان کوتاهی دو جرم دچار تغییر شکل شـده و دو جرم آن‌قدر به هم نزدیک می‌شوند تا به ماکزیمم تغییر شکل برسند.



اگر سرعت مجموعه در این وضعیت $\overset{*}{v}$ (که آنرا سرعت درحین تغییر شکل می‌نامیم) باشد دو جرم پس از ایـن وضـعیت دوبـاره از هـم کم‌کم دور می‌شوند و نهایتاً از هم جدا می‌شوند و با سرعت‌های $v'_1 \sin\theta'_1$ و $-v'_2 \sin\theta'_2$ از هم دور مـی‌شـوند. مرحلـه آغـاز تمـاس دو جرم تا ماکزیمم تغییر شکل اجرام را « مرحله تغییر شکل » و مرحله ماکزیمم تغییر شکل اجرام تا آغـاز جـدایش دو جـرم را « مرحلـهٔ بازگشت » می‌نامیم. ضریب بازگشت برای دو جرم برخورد کننده که به جنس اجرام برخورد کننده بسـتگی دارد و بـه کمـک آزمـایش تعیین می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\text{تغییرات اندازه حرکت خطی در راستای ضربه در مرحلهٔ بازگشت}}{\text{تغییرات اندازه حرکت خطی در راستای ضربه در حین تغییر شکل}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F_r\,dt}{\int_{t_0}^{t_1} F_d\,dt} = \frac{\text{ضربه در مرحله بازگشت}}{\text{ضربه در مرحله تغییرشکل}} = e \quad \text{(ضریب بازگشت)}$$

r:restitution (بازگشت)

d:deformation (تغییر شکل)

ضریب بازگشت برای جرم اول:
$$e=\frac{m_1v_1'\sin\theta_1'-m_1v^*}{m_1v^*-(-m_1v_1\sin\theta_1)}=\frac{v_1'\sin\theta_1'-v^*}{v^*+v_1\sin\theta_1}$$

ضریب بازگشت برای جرم دوم:
$$e=\frac{-m_2v_2'\sin\theta_2'-m_2v^*}{m_2v^*-m_2v_2\sin\theta_2}=\frac{v_2'\sin\theta_2'+v^*}{-v^*+v_2\sin\theta_2}$$

$$e=\frac{v_1'\sin\theta_1'-v^*}{v^*+v_1\sin\theta_1}=\frac{v_2'\sin\theta_2'+v^*}{-v^*+v_2\sin\theta_2}\Rightarrow e=\frac{\left(v_1'\sin\theta_1'-v^*\right)+\left(v_2'\sin\theta_2'+v^*\right)}{\left(v^*+v_1\sin\theta_1\right)+\left(-v^*+v_2\sin\theta_2\right)}=\frac{v_1'\sin\theta_1'+v_2'\sin\theta_2'}{v_1\sin\theta_1+v_2\sin\theta_2}\Rightarrow$$

$$\boxed{e=\frac{v_1'\sin\theta_1'+v_2'\sin\theta_2'}{v_1\sin\theta_1+v_2\sin\theta_2}=\frac{\text{سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد}}{\text{سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد}}} \quad (4)$$

به خاطر داشته باشید که اگر دو جرم به هم نزدیک یا دور شوند سرعت‌های نسبی آن‌ها مجموع اندازهٔ سرعت‌هایشان و اگر هم جهت با هم حرکت کنند سرعت نسبی آن‌ها تفاضل اندازهٔ سرعت بزرگ‌تر منهای اندازهٔ سرعت کوچک‌تر خواهد بود.

اگر یکی از اجرام برخورد کننده مثلاً جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، داریم:

$$\begin{cases} v_2=v_2'=0 \\ m_2\to\infty \end{cases}$$

در این‌صورت تنها مجهولات مساله v_1' و θ_1' خواهد بود. در این‌صورت معادلهٔ (2) حتماً ارضا می‌شود و معادلهٔ (3) بی‌معنی خواهد بود، در این‌صورت تنها دو معادله زیر را داریم:

$$v_x')_1=v_x)_1$$

$$e=\frac{v_1'\sin\theta_1'}{v_1\sin\theta_1}$$

جمع‌بندی:

در مسایل برخورد ذرات در حالت کلی چهار معادله نوشته می‌شود. دو معادله در راستای عمود بر ضربه که این معادله عبارتند از:

۱) مؤلفهٔ سرعت جرم اول در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

۲) مؤلفهٔ سرعت جرم دوم در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

و دو معادلهٔ دیگر که در راستای ضربه نوشته می‌شوند عبارتند از:

۳) قانون بقای اندازه حرکت مجموعهٔ دو جرم برخورد کننده در راستای ضربه (مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعهٔ دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد با مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعهٔ دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد برابر است).

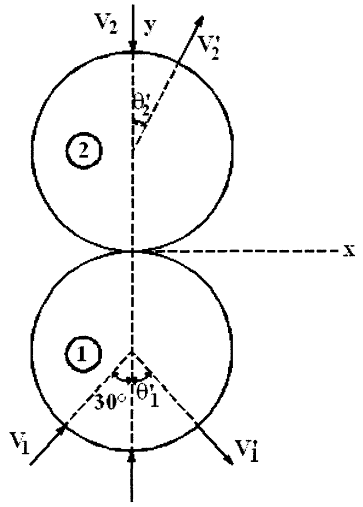
۴) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد به سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد.

در حالت خاص اگر جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، این چهار معادله به دو معادله زیر کاهش می‌یابد.

۱) مولفه سرعت جرم متحرک در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

۲) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت جرم متحرک در راستای ضربه بعد از برخورد به سرعت جرم متحرک در راستای ضربه قبل از برخورد.

تست سال (۶۸ ـ ۶۷)



دو گلوله آهنی به جرم مساوی و با سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 طوری برخورد می‌کنند که جهت سرعت v_2 روی خطی که مرکز دو گلوله را به هم وصل می‌کند می‌باشد. اگر برخورد کاملاً پلاستیک نباشد، جهت گلوله 2 بعد از برخورد.

۱) در جهت محور y می‌باشد.

۲) درجهت محور x می‌باشد.

۳) در جهت زاویه 30 درجه با محور y می‌باشد.

۴) مشخص نیست.

- برخورد الاستیک کامل برخوردی است که در آن ضریب بازگشت e = 1 می‌باشد.
- برخورد پلاستیک کامل برخوردی است که در آن ضریب بازگشت e = 0 می‌باشد (زمانی‌که سرعت اجرام برخورد کننده بعد از برخورد در جهت برخورد یکسان می‌شود مطرح می‌باشد).
- ضریب بازگشت همواره عددی است بین صفر و یک

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم ② در راستای عمود بر ضربه عبارت است از: $m_2 v'_2 \sin\theta'_2 = m_2 \times 0 = 0$

$\Rightarrow$
- $v'_2 = 0 \quad \Rightarrow$ با توجه به این‌که برخورد پلاستیک کامل نمی‌باشد لذا می‌توان حدوداً برداشت کرد که این حالت امکان ندارد.
- یا
- $\sin\theta'_2 = 0 \quad \Rightarrow$ جهت گلوله ② بعد از برخورد در راستای محور y می‌باشد.

به نظر می‌رسد که جواب گزینه (۱) باشد ولی مساله نیاز به بحث بیشتری دارد. لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $v'_2 = 0$

$$e=\frac{v'_1\cos\theta'_1 + v'_2\cos\theta'_2}{v_1\cos 30 + v_2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e=\frac{v'_1\cos\theta'_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + v_2} \neq 0} \ (\mathrm{I})$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم ① در راستای عمود بر ضربه $m_1 v_1 \sin 30 = m_1 v_1 \sin\theta'_1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v'_1 \sin\theta'_1 = 0.5\, v_1} \ (\mathrm{II})$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه $m_1 v_1 \cos 30 - m_2 v_2 = -m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2$

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - v_2 = -v'_1\cos\theta'_1 + v'_2\cos\theta'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - v_2 = -v'_1\cos\theta'_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v'_1\cos\theta'_1 = v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_1} \ (\mathrm{III})$$

از حل معادلات (II) و (III) داریم:

$$\theta'_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v_1}{2v_2 - \sqrt{3}\,v_1}\right), \quad v'_1 = \sqrt{(0.5\,v_1)^2 + \left(v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_1\right)^2}$$

ولی از معادلات حاکم به هیچ وجه نمی‌توان θ_2' را مشخص نمود چون θ_2' حذف شده است. لذا به نظر می‌رسد جواب گزینهٔ (۴) باشد در ضمن با مقایسهٔ معادلات (III) و (I) در می‌یابیم که ضریب بازگشت می‌بایستی بر حسب سرعت‌های v_1 و v_2 بیان شود که لزوماً این مقدار نمی‌باشد.

ب) $\theta_2'=0$

به لحاظ فیزیکی به نظر می‌رسد که وقوع حالت (ب) نسبت به (الف) منطقی‌تر است. چرا که جواب‌ها برحسب ضریب بازگشت خواهد بود.

$$e=\frac{v_1'\cos\theta_1'+v_2'}{v_1\cos 30+v_2} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_1'\cos\theta_1'+v_2' =e\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1+v_2\right)} \ (1)$$

$$\boxed{-v_1'\cos\theta_1' +v_2' =\frac{\sqrt{3}}{2}v_1-v_2} \ (2)$$

از حل هم‌زمان معادلات (1) و (2) و (II) داریم:

$$2v_2' =(e+1)\frac{\sqrt{3}}{2}v_1+(e-1)\ v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2'=\frac{\sqrt{3}}{4}(e+1)v_1+\left(\frac{e-1}{2}\right)v_2$$

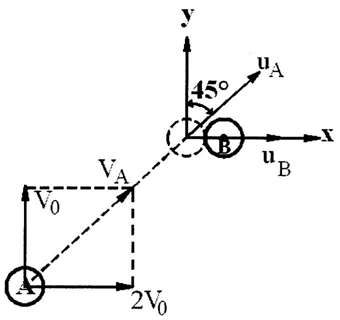
$$\Rightarrow \quad v_1'\cos\theta_1'=e\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1+v_2\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}(e+1)v_1-\left(\frac{e-1}{2}\right)v_2=\sqrt{3}\ \frac{(e-1)}{4}v_1 +\frac{(e+1)}{2}v_2$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1' =\tan^{-1}\left(\frac{2v_1}{\sqrt{3}(e-1)v_1+2(e+1)v_2}\right)\ ,\ v_1' =\sqrt{(0.5v_1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}(e-1)}{4}v_1+\left(\frac{e+1}{2}\right)v_2\right)^2}$$

بنابراین جواب گزینهٔ (۱) می‌باشد. جواب‌های به‌دست آمده برای حالت (ب) به ازای یک مقدار خاص e به جواب‌های حالت (الف) تبدیل می‌شوند.

تست سال (۷۳ ـ ۷۲)

ذرهٔ B ساکن و ذرهٔ A با سرعت v_A با مولفه‌های داده شده در شکل به آن نزدیک می‌شود. بعد از برخورد سرعت ذرهٔ B برابر با $u_B=v_0$ در امتداد محور x و زاویه بردار سرعت ذره A با محور x برابر $45°$ است. در این برخورد ضریب بازگشت (coefficient of restitution) برابر است با:



۱) صفر　　۲) یک

۳) 0.75　　۴) 0.5

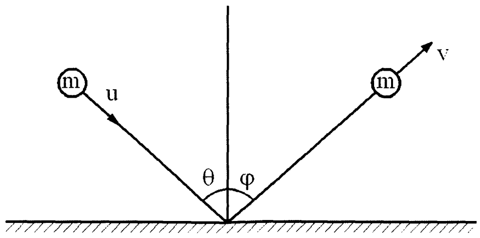
قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم A در راستای عمود بر ضربه: $\frac{\sqrt{2}}{2}u_A=v_0 \quad \Leftarrow \quad u_A\cos 45°-v_0=0$

$$e=\frac{u_B-u_A\cos 45}{2v_0+0}=\frac{v_0-\frac{\sqrt{2}}{2}u_A}{2v_0}=0$$

جواب گزینهٔ (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۵ ـ ۷۴)

گلوله‌ای مطابق شکل با سرعت u به سطح افقی مسطح و بدون اصطکاکی برخورد می‌کند. اگر زاویه برخورد آن نسبت به عمود بر سطح θ باشد، زاویه انعکاس گلوله یعنی φ بر حسب θ و ضریب بازگشت ε چگونه است؟



۱) $2\theta=\varphi$
۲) $\tan\varphi=2\varepsilon\tan\theta$
۳) $\tan\theta=\varepsilon\tan\varphi$
۴) $\tan\varphi=\varepsilon\tan\theta$

جرم m با سرعت $u\cos\theta$ به سطح نزدیک می‌شود لذا سرعت نسبی در امتداد ضربه قبل از برخورد $u\cos\theta$ می‌باشد.
جرم m با سرعت $v\cos\varphi$ از سطح دور می‌شود لذا سرعت نسبی در امتداد ضربه بعد از برخورد $v\cos\varphi$ می‌باشد.

$$\varepsilon=\frac{v\cos\varphi}{u\cos\theta}$$ (ضریب بازگشت)

قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای عمود بر ضربه برای جرم m: $mu\sin\theta=mv\sin\varphi$

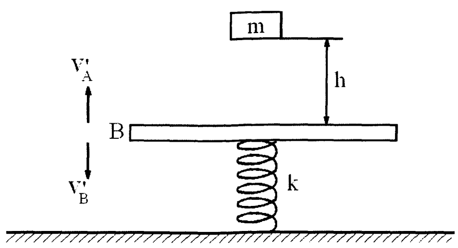
$$\Rightarrow\quad \frac{u}{v}=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\left(\frac{v}{u}\right)\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)=\frac{\tan\theta}{\tan\varphi}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\tan\theta=\varepsilon\tan\varphi}$$

لذا جواب گزینهٔ (۳) می‌باشد.

اگر برخورد الاستیک کامل باشد $\varepsilon=1$ می‌باشد که در این حالت $\theta=\varphi$ می‌باشد (در این حالت مسیر حرکت جرم همانند مسیر حرکت نور است که به آینه برخورد می‌کند و زاویهٔ تابش با بازتابش برابر می‌باشد.).

تست سال (۷۵ ـ ۷۴)

در شکل زیر وزنه A بر جرم m از ارتفاع h بر روی صفحه‌ای به جرم 2m سقوط می‌کند. ثابت فنر برابر k است. اگر ضریب برخورد e باشد، سرعت صفحه بلافاصله پس از برخورد کدام است؟



۱) $\sqrt{2gk}$
۲) $\sqrt{2gh}\,ek$
۳) $\frac{1}{3}\sqrt{2gh}\,(1+e)$
۴) $\sqrt{2gh}\,(1+e)k$

هنگامی که جرم m ارتفاع h را با سقوط آزاد طی می‌کند سرعتش قبل از برخورد به $\sqrt{2gh}$ می‌رسد. فرض کنید که جرم m پس از برخورد به سمت بالا و صفحهٔ B به سمت پایین حرکت می‌کند (می‌توان فرض نمود که هم جهت هم، حرکت می‌کنند) دراین صورت، قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای برخورد برای جرم m و صفحهٔ B عبارت است از:

$$-m\sqrt{2gh}+2m\times0=mv'_A-2mv'_B\quad\Rightarrow\quad v'_A-2v'_B=-\sqrt{2gh}$$

$$e=\frac{v'_A+v'_B}{\sqrt{2gh}+0}\quad\Rightarrow\quad v'_A+v'_B=e\sqrt{2gh}$$ (ضریب برخورد یا بازگشت)

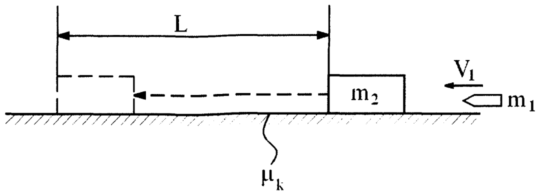
از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

$$\boxed{v'_B=\frac{(e+1)}{3}\sqrt{2gh}}\ ,\ \boxed{v'_A=\frac{(2e-1)}{3}\sqrt{2gh}}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۵ ـ ۷۴)

گلوله‌ای با جرم m_1 پس از برخورد به جعبه‌ای با جرم m_2 داخل آن فرو رفته و نسبت به آن ساکن می‌شود. جعبه در اثر برخورد گلوله به حرکت درآمده و بر روی سطح زبر با ضریب اصطکاک μ_k، L متر به جلو حرکت می‌نماید. سرعت گلوله پیش از برخورد کدام است؟



۱) $\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{gL\mu_k}$
۲) $\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gL\mu_k}$
۳) $\frac{m_1+m_2}{m_1}\mu_k\sqrt{gL}$
۴) $\frac{m_2}{m_1}\sqrt{gL\mu_k}$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم عبارت است از:

$$m_1v_1+m_2\times0=(m_1+m_2)v_0 \quad\Rightarrow\quad v_1=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)v_0$$

مجموعه دو جرم m_1+m_2 با سرعت اولیهٔ v_0 شروع به حرکت کرده و تحت تاثیر نیروی اصطکاک $F_f=-\mu_k(m_1+m_2)g$ مسافت L را طی می‌کنند و نهایتاً متوقف می‌شوند.

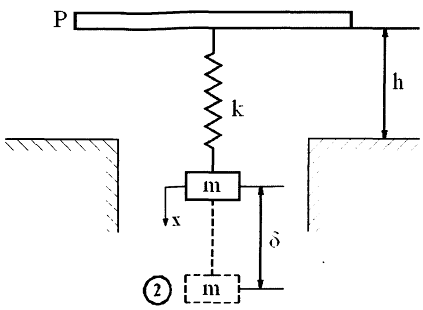
$$F_f=(m_1+m_2)a \quad\Rightarrow\quad a=-\mu_k g$$

$$\Rightarrow\quad 0^2-v_0^2=2aL=2(-\mu_k g)L \quad\Rightarrow\quad v_0=\sqrt{2gL\mu_k} \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_1=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gL\mu_k}}$$

جواب گزینهٔ (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۵ ـ ۷۴)

مطابق شکل وزنه‌ای به وزن $60\,lb$ که توسط فنری با ضریب سختی $k=150\ {}^{lb}\!/_{ft}$ به صفحهٔ P متصل است، از حالت سکون و از ارتفاع $h=1[ft]$ رها شده و پس از اصابت به تکیه‌گاه، صفحه P روی تکیه‌گاه ساکن می‌شود. مقدار ماکزیمم تغییر طول فنر کدام است؟



۱) $0.81\,ft$
۲) $1.52\,ft$
۳) $2.24\,ft$
۴) $1.38\,ft$

روش اول: فرض می‌کنیم که با افزودن جرم m فنر دچار تغییر مکان استاتیکی δ_{st} می‌شود، بنابراین داریم: $mg=k\delta_{st}$ قانون بقای انرژی مکانیکی را بین دو موقعیت ① و ② می‌نویسیم. در موقعیت ① فرض می‌شود که فنر به اندازه δ_{st} کشیده شود و مجموعهٔ جرم m و صفحه P و فنر مسافت h را طی نموده و به سرعت $\sqrt{2gh}$ رسیده‌اند، بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \left.v_g\right)_1=0 \\ T_1=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2gh}\right)^2=mgh \\ \left.v_e\right)_1=\frac{1}{2}k(\delta_{st})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.v_g\right)_2=-mg\delta \\ T_2=0 \quad\Leftarrow\quad \text{در حالتی که فنر ماکزیمم کشیدگی را دارد سرعت جرم m صفر خواهد بود} \\ \left.v_e\right)_2=\frac{1}{2}k(\delta+\delta_{st})^2=\frac{1}{2}k\delta^2+k\delta_{st}\delta+\frac{1}{2}k\delta_{st}^2=\frac{1}{2}k\delta^2+mg\delta+\frac{1}{2}k\delta_{st}^2 \end{cases}$$

$$E_1 = T_1 + v_g)_1 + v_e)_1 = mgh + \frac{1}{2}k(\delta_{st})^2 = E_2 = T_2 + v_g)_2 + v_e)_2 = 0 + (-mg\delta) + \frac{1}{2}k\delta^2 + mg\delta + \frac{1}{2}k(\delta_{st})^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\delta^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}} = \sqrt{\frac{2\times60\times1}{150}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0.89 \simeq 0.81\ \text{ft}$$

جواب گزینهٔ (۱) می‌باشد.

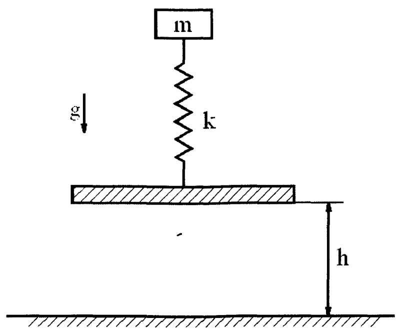
روش دوم: همانطور که در روش اول مشاهده شد عملاً ترم‌های مربوط به جابه‌جایی استاتیکی حذف شد. چرا که جابه‌جایی استاتیکی در اثر نیروی وزن ایجاد می‌شود و اگر ما انرژی پتانسیل ثقلی که ناشی از نیروی وزن است و جابه‌جایی استاتیکی را در نظر بگیریم این دو اثر همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین هر زمان جابه‌جایی استاتیکی فنر تنها در اثر نیروی وزن باشد می‌توانیم انرژی پتانسیل ثقلی را در نظر نگیریم بنابراین داریم:

$$\begin{cases} T_1 = mgh \\ v_e)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = mgh$$

$$\begin{cases} T_2 = 0 \\ v_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \end{cases} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}k\delta^2$$

بقای انرژی $\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}k\delta^2 \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$

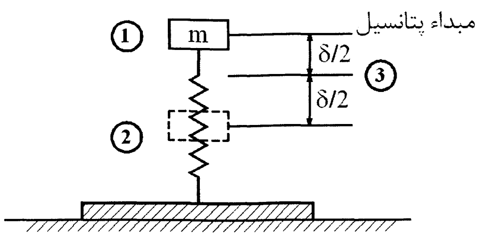
تست سال (۷۹ – ۷۸)



سیستم جرم و فنر نشان داده شده از ارتفاع h رها می‌شود و پس از برخورد، پایه به زمین می‌چسبد و حرکت جرم m باعث فشردن فنر می‌شود. سرعت جرم m در موقعیتی که فنر به اندازهٔ نصف فشردگی ماکزیمم فشرده شده است با فرض $k = \frac{4mg}{h}$ عبارت است از:

۱) $\sqrt{gh}$ ۲) $\sqrt{2gh}$

۳) $\sqrt{3gh}$ ۴) $2\sqrt{gh}$



اگر حداکثر فشردگی فنر δ فرض شود مطابق مثال قبل از جابه‌جایی استاتیکی δ_{st} صرف‌نظر می‌کنیم و در عوض انرژی پتانسیل ثقلی را هم در نظر نمی‌گیریم.

در نقطهٔ ① داریم

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2gh}\right)^2 = mgh \\ v_e)_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_1 = T_1 + v_e)_1 = mgh$$

به‌طور مشابه در نقطهٔ ② داریم:

$$\begin{cases} T_2 = 0 \\ v_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + v_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta^2$$

درنقطهٔ ③ نیز انرژی مکانیکی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} T_3=\frac{1}{2}m v_3^2 \\ v_e)_3=\frac{1}{2}k\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad E_3=\frac{1}{2}m v_3^2+\frac{1}{8}k\delta^2$$

بقای انرژی مکانیکی $\Rightarrow \quad E_1=E_2=E_3 \quad \Rightarrow \quad mgh=\frac{1}{2}k\delta^2=\frac{1}{2}m v_3^2+\frac{1}{8}k\delta^2 \quad \Rightarrow \quad \delta=\sqrt{\frac{2mgh}{k}}=\sqrt{\frac{2mgh}{\frac{4mg}{h}}}=\sqrt{\frac{h^2}{2}}=\frac{h}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m v_3^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)k\delta^2 \quad \Rightarrow \quad v_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{k\delta^2}{m}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{\frac{4mg}{h}\times\frac{h^2}{2}}{m}}=\sqrt{\frac{3gh}{2}}$$

جواب هیچ کدام از گزینه‌ها نمی‌باشد. اگر فرض کنیم که فنر در موقع رها شدن فشرده نشده باشد، یعنی δ_{st} وجود ندارد و در حالت رها شدن فنر طول آزاد خود را داشته باشد، خواهیم داشت $V_g)_1=0$ ، $V_g)_2=-mg\delta$ ، $V_g)_3=-mg\frac{\delta}{2}$ در این صورت $\delta=h$ ، $v_3=\sqrt{2gh}$ به‌دست می‌آید که در این صورت گزینه (۲) درست می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۷)

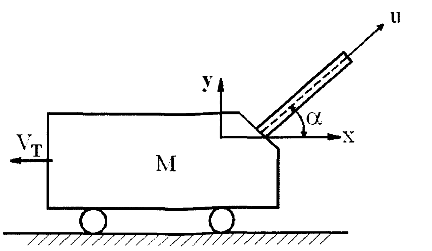
توپی گلوله‌ای را با سرعت u (نسبت به لوله‌اش) که زاویهٔ α با افق دارد شلیک می‌نماید.
توپ ابتدا در حال سکون بوده اما قادر است که به‌وسیله چرخ‌هایش به حرکت درآید. اگر جرم توپ M و جرم گلوله m باشد سرعت حرکت توپ v_T درست هنگامی که گلوله توپ را ترک می‌نماید کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است؟

۱) $v_T=\frac{m}{M+m}u\cos\alpha$

۲) $v_T=\frac{M+m}{m}u\cos\alpha$

۳) $v_T=\frac{M}{M+m}u\sin\alpha$

۴) $v_T=\frac{m}{M+m}u\sin\alpha$



اگر سرعت مطلق گلوله با $\vec{v}_g$ و سرعت مطلق تانک را با $\vec{v}_T$ و سرعت نسبی گلوله نسبت به تانک را با $\vec{v}_{g/T}$ نمایش دهیم داریم:

$\vec{v}_g=\vec{v}_T+\vec{v}_{g/T} \quad \Rightarrow$ مولفه سرعت گلوله د رجهت محور x ها $v_g)_x=u\cos\alpha-V_T$

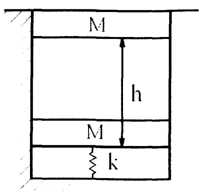
در راستای افق هیچ نیروی خارجی وجود ندارد لذا قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای محور x برقرار است.

$$G_x)_1=G_x)_2 \quad \Rightarrow \quad 0=-Mv_T+m v_g)_x=-Mv_T+m(u\cos\alpha-v_T) \quad \rightarrow \quad v_T=\frac{m}{m+M}u\cos\alpha$$

لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۶ – ۷۵)

جسمی به جرم M طبق شکل از ارتفاع h رها شده و بر روی جسم دیگری به همان جرم می‌افتد. این جسم توسط فنری با ضریب سختی k نگه داشته شده است. اگر برخورد کاملاً پلاستیک فرض شود، مقدار سرعت جسم متصل به فنر بلافاصله پس از برخورد کدام است؟



۱) $\sqrt{\frac{gh}{2}}$
۲) $\sqrt{gh}$
۳) $\frac{\sqrt{gh}}{2}$
۴) $\sqrt{2gh}$

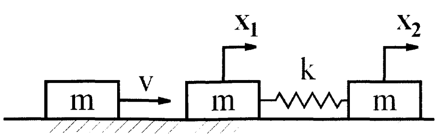
سرعت جسم بالایی پس از طی ارتفاع h، برابر با $\sqrt{2gh}$ خواهد بود.

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعهٔ دو جرم درراستای ضربه: $M\sqrt{2gh}+M\times0=2Mv \Rightarrow v=\frac{\sqrt{2gh}}{2}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$

لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد.

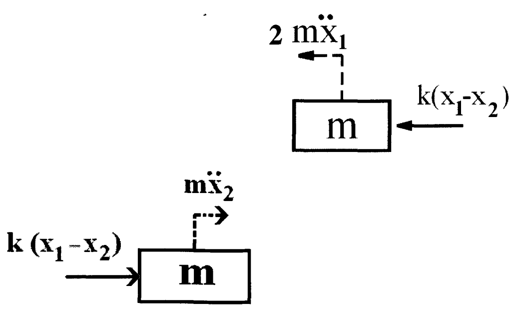
تست سال (۷۷ – ۷۶)

دو جرم مساوی m به وسیله فنری با ضریب k به یکدیگر متصل شده‌اند و روی سطحی افقی و بدون اصطکاک درحالت سکون هستند و فنر آزاد است. جرم مساوی دیگر m با سرعت V با جرم اول برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. سرعت سیستم درهنگام حداکثر فشردگی فنر برابر است با:



۱) صفر
۲) $\frac{V}{3}$
۳) $\frac{V}{2}$
۴) V

راه‌حل صحیح مساله طولانی است. نخست این راه‌حل مطرح می‌گردد و سپس راه‌حلی که درست نبوده ولی کوتاه بوده ارایه می‌گردد. دیاگرام آزاد نیروهای وارد به اجرام متصل به فنر به صورت زیر می‌باشد. $(x_1>x_2)$



$$\begin{cases}2m\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=0\\ m\ddot{x}_2-kx_2+kx_1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow M\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+K\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ (ماتریس جرم) $M=\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$ و (ماتریس سختی) $K=\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}$

$$\det\left(K-\omega^2M\right)=0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix}k-2m\omega^2 & -k\\ -k & k-m\omega^2\end{bmatrix}=0 \Rightarrow 2m^2\omega^4-3km\omega^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\omega_1=0 & \text{مد صلب}\\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{2k}{m}} & \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix}k-m\omega^2 & -k\\ -k & k-m\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2}=\frac{k}{k-m\omega^2}$$

$$\left.\frac{X_1}{X_2}\right|_{\omega=\omega_1}=1 \text{ و } \left.\frac{X_1}{X_2}\right|_{\omega=\omega_2}=\frac{k}{k-2m\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}\right)^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{(ماتریس شکل مد)}\ \Psi=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{K}=\Psi^T K\Psi=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\dfrac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{3k}{2}\\ 0 & \dfrac{3k}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{9k}{4}\end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{M}=\Psi^T M\Psi=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\dfrac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & -m\\ m & m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3m & 0\\ 0 & \dfrac{3m}{2}\end{bmatrix}$$

لذا معادله $M\{\ddot{x}\}+K\{x\}=\{0\}$ به‌صورت $\overset{*}{M}\{\ddot{q}\}+\overset{*}{K}\{q\}=\{0\}$ که در آن $q=\Psi^{-1}\{x\}$ می‌باشد.

لذا داریم:

$$\begin{bmatrix}3m & 0\\ 0 & \dfrac{3m}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{9k}{4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3m\ddot{q}_1=0 \Rightarrow q_1(t)=At+B\\ \dfrac{3}{2}m\ddot{q}_2+\dfrac{9k}{4}q_2=0 \Rightarrow q_2(t)=C\cos\omega_2 t+D\sin\omega_2 t\end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q_1-\dfrac{q_2}{2}\\ q_1+q_2\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1(t)=At+B-(C\cos\omega_2 t+D\sin\omega_2 t)\\ x_2(t)=At+B+(C\cos\omega_2 t+D\sin\omega_2 t)\end{cases}$$

بقای اندازه حرکت خطی برای دو جرم سمت راست

$$mv+m\times 0=2m\dot{x}_1(0) \Rightarrow \dot{x}_1(0)=\frac{v}{2}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$\begin{cases}x_1(0)=0\\ \dot{x}_1(0)=\frac{v}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2(0)=0\\ \dot{x}_2(0)=0\end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases}B-\dfrac{C}{2}=0\\ A-\dfrac{D}{2}\omega_2=\frac{v}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}B+C=0\\ A+D\omega_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=C=0\\ A=\frac{v}{3}\ ,\ D=-\frac{v}{3\omega_2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1(t)=\dfrac{v}{3}t+\dfrac{v}{3\omega_2}\sin\omega_2 t=\dfrac{v}{3}\left(t+\dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)\\ x_2(t)=\dfrac{v}{3}-\dfrac{v}{3\omega_2}\sin\omega_2 t=\dfrac{v}{3}\left(t-\dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)\end{cases} \Rightarrow x_1-x_2=\frac{v}{3}\left(\frac{2\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)=\frac{2v}{3}\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}$$

فاصله دو جرم، $|x_1 - x_2|$ زمانی ماکزیمم است که $t=\frac{\pi}{2\omega_2}$ که در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1\left(\frac{\pi}{2\omega_2}\right)=\frac{v}{3}\left(1+\cos\left(\omega_2\frac{\pi}{2\omega_2}\right)\right)=\frac{v}{3} \\ \dot{x}_2\left(\frac{\pi}{2\omega_2}\right)=\frac{v}{3}\left(1-\cos\left(\omega_2\frac{\pi}{2\omega_2}\right)\right)=\frac{v}{3} \end{cases}$$

که جواب گزینه ۲ می‌باشد.

به نظر می‌رسد که طراحان فرض نموده‌اند که به دلیل نبود اصطکاک جرم سمت راستی بدون هیچ ممانعتی از حرکت می‌تواند حرکت کند و لذا فنر اصلاً فشرده نمی‌شود و مجموعه اجرام متصل به فنر مانند یک جرم 2m عمل می‌کنند، دراین صورت بنابر بقای اندازه حرکت خطی داریم:

$$mv+2m\times0=(m+2m)\overset{*}{v} \Rightarrow \boxed{\overset{*}{v}=\frac{v}{3}}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۹ – ۷۸)

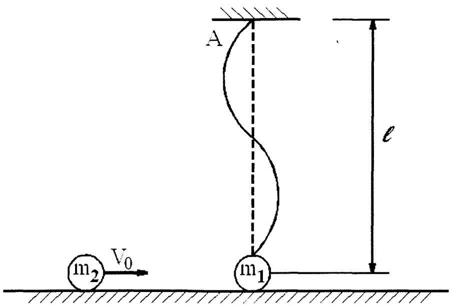
جرم m_1 توسط نخی به طول $\sqrt{2}\,\ell$ به نقطهٔ A متصل شده است و در اثر برخورد پلاستیک گلولهٔ m_2 با سرعت v_0 به آن به حرکت در می‌آید. در صورتی که حرکت کل مجموعه در صفحهٔ افق انجام گیرد. با فرض $m_1=m_2$ سرعت زاویه‌ای نخ در اولین لحظه‌ای که تحت کشش قرار می‌گیرد برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $\frac{v_0}{\ell}$

۲) $\frac{v_0}{\sqrt{2}\,\ell}$

۳) $\frac{v_0}{2\ell}$

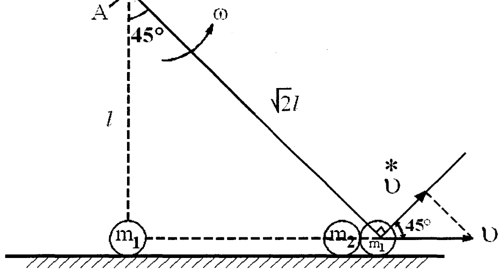
۴) $\frac{v_0}{4\ell}$



قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای برخورد برای مجموعه اجرام $(m_1=m_2=m)$

$$mv_0+m\times0=2mv \Rightarrow v=\frac{v_0}{2}$$

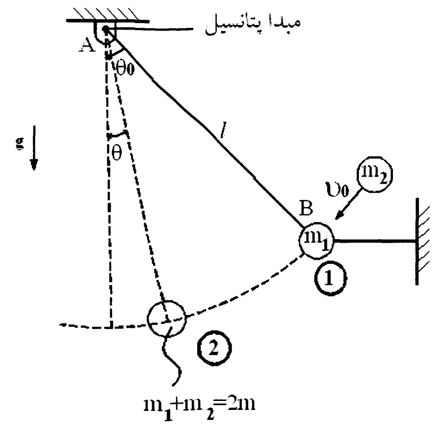
$$\overset{*}{v}=v\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\,v_0}{4}=\sqrt{2}\,\ell\,\omega$$



مولفه در راستای ریسمان سرعت v بعد از این‌که نخ تحت کشش قرار گرفت به‌طور ناگهانی صفر می‌شود.

جواب گزینه (۴) می‌باشد. $\Rightarrow \boxed{\omega=\frac{v_0}{4\ell}}$

تست سال (۷۹ - ۷۸)



نقطهٔ مادی به جرم m_1 در صفحهٔ قائم توسط دو نخ بدون جرم مطابق شکل نگاه داشته شده است. در اثر برخورد پلاستیک گلوله‌ای به جرم m_2 و سرعت v_0 در راستای نشان داده شده نخ افقی پاره شده و سیستم تبدیل به یک آونگ ساده می‌شود حداکثر کشش ایجاد شده در نخ AB با فرض $m_1=m_2=m$ و $v_0=2\sqrt{g\ell}$ و $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ برابر است با:

۱) mg
۲) 3 mg
۳) 4 mg
۴) 6 mg

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه:

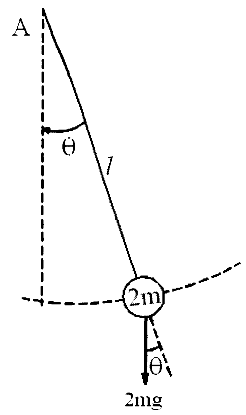
$$mv_0+m\times 0=2m\,v_1 \quad\Rightarrow\quad v_1=\frac{v_0}{2}=\sqrt{g\ell}$$

بقای انرژی بین موقعیت‌های ① و ② (نیروی کشش نخ همواره بر راستای جابه‌جایی اجرام عمود است و لذا کاری انجام نمی‌دهد):

$$\begin{cases} T_1=\frac{1}{2}2m\,v_1^2=m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2=mg\ell \\ \left.v_g\right)_1=-2mg\ell\cos\theta_0=-2mg\ell\cos\frac{\pi}{3}=-mg\ell \end{cases} \Rightarrow\quad E_1=T_1+\left.v_g\right)_1=0$$

$$\begin{cases} T_2=\frac{1}{2}(2m)v_2^2 \\ \left.v_g\right)_2=-2mg\ell\cos\theta \end{cases} \Rightarrow\quad E_2=T_2+\left.v_g\right)_2=m\,v_2^2-2mg\ell\cos\theta$$

$$E_1=E_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{v_2^2}{\ell}=2g\cos\theta$$



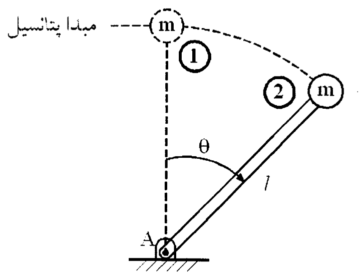
قانون دوم نیوتن در راستای کشش نخ:

$$\sum F_n=2ma_n$$

$$\Rightarrow\quad T-2mg\cos\theta=(2m)\frac{v_2^2}{\ell}=(2m)(2g\cos\theta) \quad\Rightarrow\quad T=6mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow\quad T_{max}=6mg \quad \text{for} \quad \theta=0$$ لذا جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۴)



در شکل زیر جرم m به میله بدون وزنی به طول L متصل است. اگر جرم را از موقعیت $\theta=0$ رها کنیم، در چه زاویه‌ای نیروی فشاری در میله صفر می‌گردد؟

۱) $45°$ ۲) $48.2°$

۳) $56.4°$ ۴) $60°$

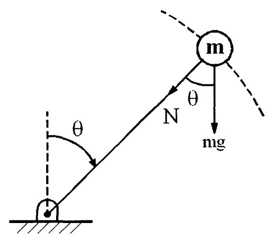
چون نیروی وارده از میله به جرم همواره بر راستای جابه‌جایی جرم عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد و قانون بقای انرژی بین موقعیت‌های ① و ② برقرار است، لذا داریم:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ v_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad E_1 = T_1 + v_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \\ v_g)_2 = -mg(\ell - \ell\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \quad E_2 = T_2 + v_g)_2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell(1-\cos\theta_1) = E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{\ell} = 2g(1-\cos\theta)$$

N: نیروی وارد از جرم به میله در راستای میله

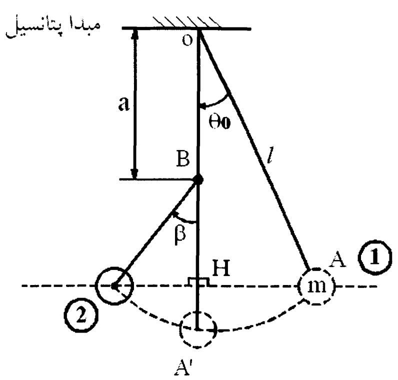


قانون دوم نیوتن در راستای میله: $\Sigma F_n = ma_n \quad \Rightarrow \quad N + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell} = 2mg(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad N = mg(2-3\cos\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta \simeq 48.2°$$

جواب گزینهٔ (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۱ ـ ۷۰)



$OB=a$ و $OA=\ell$

گلوله پاندول ساده با زاویهٔ انحراف θ_0 از سکون رها می‌شود. میخی در نقطه B جلوی حرکت نصف نخ را (مطابق شکل) می‌گیرد. گلوله پاندول حداکثر چه زاویه‌ای را طی خواهد کرد؟

۱) $\beta=\theta_0$ ۲) $\beta > \theta_0$

۳) $\beta < \theta_0$ ۴) بستگی به محل میخ دارد.

چون راستای نیروی کشش نخ در کل مسیر بر راستای جابه‌جایی جرم m عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد و قانون بقای انرژی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ v_g)_1 = -mg\ell\cos\theta_0 \end{cases} \Rightarrow \quad E_1 = T_1 + v_g)_1 = -mg\ell\cos\theta_0$$

$$\begin{cases} T_2 = 0 \quad \text{پاندول حداکثر تا زاویه‌ای حرکت می‌کند که سرعت جرم صفر شود} \\ v_g)_2 = -\left[a + (\ell - a)\cos\beta\right]mg \end{cases} \Rightarrow \quad E_2 = T_2 + v_g)_2 = -mg\left[a + (\ell - a)\cos\beta\right]$$

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \ell\cos\theta_0 = a + (\ell - a)\cos\beta \quad \xrightarrow{\text{if } a = \frac{\ell}{2}} \quad \boxed{\cos\beta = 2\cos\theta_0 - 1}$$

مطابق جدول برای $a = \frac{\ell}{2}$ می‌بایستی $\beta > \theta_0$ باشد. (مطابق شکل داریم π و $\theta_0 \neq 0$)

θ_0	30°	60°	90°
β	42.94°	90°	180°

$$\text{if} \quad \theta_0 = \beta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_0 = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \ell\cos\theta_0 = a + (\ell - a)\cos\beta = \ell\cos\beta \quad \Rightarrow \quad a(1 - \cos\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ \beta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$$\text{if} \quad \frac{\pi}{2} > \theta_0 > \beta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_0 < \cos\beta \quad \text{و} \quad \ell\cos\theta_0 = a + (\ell - a)\cos\beta \quad \Rightarrow \quad a < a\cos\beta \quad \Longrightarrow \quad 1 < \cos\beta$$

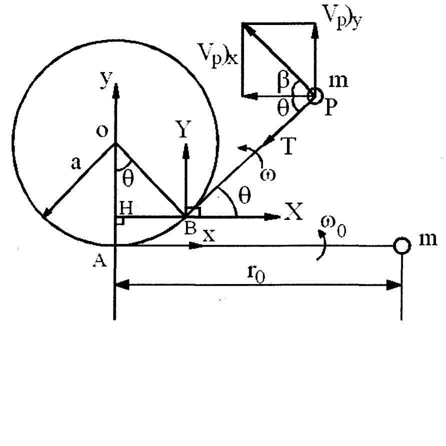
امکان ندارد.

بستگی به محل میخ یعنی فاصلهٔ a یا $\theta_0 = \beta$ و یا $\theta_0 < \beta$ می‌باشد که با توجه به این‌که در صورت مساله $a = \frac{\ell}{2}$ می‌باشد همواره داریم $\theta_0 < \beta$ و لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

قوانین بقا:

در این بخش سه قانون بقای انرژی و بقای اندازه حرکت خطی و بقای اندازه حرکت زاویه‌ای برای مثال‌های مختلفی بررسی می‌شود. بدیهی است که تمامی این قوانین از قانون دوم نیوتن با اعمال فرضیاتی به‌دست آمده و تمامی مسایلی که با این قوانین حل می‌شوند را می‌توان با قانون دوم نیوتن نیز حل نمود. منتها کاربرد این قوانین سبب حل ساده‌تر مسایل می‌گردد. در مثال‌های ذیل مسایلی مطرح می‌باشد که برای آن‌ها یک یا چندین قانون بقا تواماً برقرار می‌باشد. با مقایسه این مثال‌ها می‌توان فهمید که در هر مورد از چه قانون بقایی برای حل مساله می‌توان استفاده نمود.

مثال (۱): جرم m به یک ریسمان متصل شده و ریسمان حول استوانه‌ای به شعاع a می‌پیچد به‌طوری‌که همواره ریسمان تحت کشش بوده و مسیر حرکت جرم در صفحهٔ افق قرار دارد. چه رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای ریسمان برقرار است؟ $BP = r$



هنگامی که ریسمان حول استوانه‌ای می‌پیچد طول ریسمان از r_0 به r تغییر می‌کند و به اندازهٔ طول کمان AB یعنی $a\theta$ از طول ریسمان کاسته می‌شود بنابراین داریم: $r=r_0-a\theta$

نخست سعی می‌کنیم در این مثال مسیر حرکت جرم m را بررسی نماییم.

مختصات نقطهٔ P در دستگاه مختصات BXY عبارت است از ($r\sin\theta$ و $r\cos\theta$) و مختصات نقطهٔ B در دستگاه مختصات Axy، ($BH=a\sin\theta$, $AH=a-a\cos\theta$) می‌باشد. بنابراین مختصات نقطهٔ P در دستگاه مختصات ثابت Axy که مشخص کننده مسیر حرکت نقطهٔ P می‌باشد عبارت است از:

$$\begin{cases} x_P = a\sin\theta + r\cos\theta = a\sin\theta + (r_0 - a\theta)\cos\theta \\ y_P = a(1-\cos\theta) + r\sin\theta = a(1-\cos\theta) + (r_0 - a\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_P)_x = \dot{x}_P = a\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}(r_0 - a\theta)\sin\theta = -\dot{\theta}r\sin\theta \\ v_P)_y = \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}(r_0 - a\theta)\cos\theta = \dot{\theta}r\cos\theta \end{cases}$$

$$v_P = \sqrt{\left[v_P)_x\right]^2 + \left[v_P)_y\right]^2} = r\dot{\theta}$$

$$\tan\beta = \frac{\left|v_P)_y\right|}{\left|v_P)_x\right|} = \left|\frac{r\dot{\theta}\cos\theta}{r\dot{\theta}\sin\theta}\right| = \left|\cot\theta\right| \Rightarrow \beta+\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$ بنابراین بردار سرعت مسیر حرکت جرم به ریسمان عمود است.

و اندازهٔ سرعت جرم m برابر است با فاصلهٔ جرم تا نقطه تماس با استوانه و یا طول ریسمان (r) ضرب در سرعت زاویه‌ای ریسمان بنابراین نقطهٔ تماس در هر لحظه همواره مرکز آنی دوران نقطهٔ P خواهد بود.

مسیر حرکت جرم m که از معادلات پارامتری $(x_P(\theta), y_P(\theta))$ تبعیت می‌کند یک منحنی می‌باشد که منحنی اینولوت نامیده می‌شود.

شعاع انحنای مسیر حرکت جرم m نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''_P x'_P - x''_P y'_P}{\left[(x'_P)^2 + (y'_P)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} x'_P = -(r_0 - a\theta)\sin\theta \\ y'_P = (r_0 - a\theta)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_P = a\sin\theta - (r_0 - a\theta)\cos\theta \\ y''_P = -a\cos\theta - (r_0 - a\theta)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_0 - a\theta} \Rightarrow \rho = r = r_0 - a\theta$$

بنابراین شعاع انحنای مسیر نقطهٔ P برابر است با r. به عبارت دیگر نقطهٔ تماس مرکز انحنای مسیر نیز می‌باشد. بنابراین مثال مذکور حالت جالبی است که در آن $r=\rho$ (شعاع انحنای مسیر با شعاع دوران برابر است) ولی مسیر دایروی نمی‌باشد.

تنها نیروی وارده به جرم نیروی کشش ریسمان و نیروی وزن می‌باشد. در دستگاه قائم و مماسی داریم:

$$\begin{cases} \Sigma F_n = ma_n \Rightarrow T = ma_n = m\frac{v^2}{r} = \frac{m(r\omega)^2}{r} = mr\omega^2 \Rightarrow \boxed{T = mr\omega^2} \\ \Sigma f_t = ma_t \Rightarrow a_t = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = r\omega = \text{constant} \Rightarrow \boxed{r_0\omega_0 = r\omega} \end{cases}$$

در جهت عمود بر ریسمان هیچ نیروی خارجی به جرم وارد نمی‌شود. اگر جرم سوراخی داشت و به جای ریسمان یک میله از داخل آن عبور می‌کرد در این صورت نیروی عکس‌العمل بین میله و جرم به عنوان نیروی عمود بر میله یا ΣF_t وجود داشت.

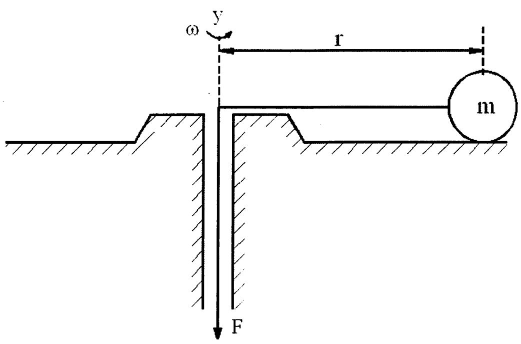
مساله فوق به‌وسیله قانون دوم نیوتن به‌طور کامل تحلیل شد. سئوال این است که چگونه همین مساله را می‌توانستیم به کمک قوانین بقا ساده‌تر حل کنیم. از آنجایی‌که نیروی کشش همواره به مسیر حرکت جرم m عمود است (سرعت همواره مماس بر مسیر است و عمود بر راستای کشش نخ) لذا هیچ کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین کار نیروی کشش، صفر است. از طرفی جرم m در صفحه افقی حرکت می‌کند لذا انرژی پتانسیلی ثقلی آن تغییر نمی‌کند. بنابراین قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است و متعاقب آن انرژی جنبشی نیز بقا خواهد داشت.

$$\Delta E=\Delta T+\Delta v_g=0 \xrightarrow{\Delta v_g=0} \Delta T=0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_0=v \Rightarrow \boxed{r\omega_0=r\omega}$$

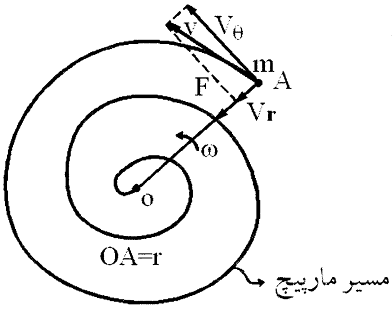
بنابراین در این مساله قانون بقای انرژی نیز نتیجه مشابهی با نتیجه به‌دست آمده از قانون دوم نیوتن ارایه می‌دهد.

چون $v_0=v$ لذا $mv_0=mv$ و یا $G_0=G$، نکته‌ای که باید توجه داشت، آن است که به ظاهر قانون بقای اندازه حرکت خطی نیز برقرار است. ولی این قانون زمانی مطرح می‌باشد که جمع نیروها در یک راستای ثابت، صفر باشد که در این صورت اندازه حرکت خطی در آن راستا بقا خواهد داشت. ولی در این مثال راستای $\overrightarrow{G_0}$ و $\overrightarrow{G}$ تغییر می‌کند و لزوماً نمی‌توان برقراری این قانون را با دلایل فیزیکی توجیه نمود.

مثال (۲): جرم m توسط یک ریسمان که از سوراخ یک صفحه عبور کرده با نیروی F کشیده می‌شود. جرم m حول سوراخ با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند و به سوراخ نیز نزدیک می‌شود لذا جرم مسیر مارپیچی مطابق شکل را طی می‌کند. کار نیروی F را محاسبه کنید.



جرم m علاوه بر چرخش حول محور y به محل سوراخ نیز نزدیک می‌شود لذا دارای دو مولفه سرعت می‌باشد. یکی در راستای عمود بر ریسمان که سبب چرخش جرم حول سوراخ می‌شود $(v_\theta=r\omega)$ و مولفه دیگر سرعت به دلیل نزدیک شدن جرم به محل سوراخ ایجاد می‌شود و در جهت ریسمان می‌باشد. $(v_r=\dot{r})$



راستای نیروی کشش نخ در راستای سرعت دارای مولفه می‌باشد لذا نمی‌توان فرض نمود که جمع نیروها در راستای سرعت صفر است. لذا قانون بقای اندازه حرکت خطی برقرار نیست. از طرفی راستای نیروی F بر راستای سرعت عمود نمی‌باشد. لذا نیرویF کار انجام می‌دهد و قانون بقای انرژی نیز برقرار نیست.

راستای نیروی F همواره از سوراخ می‌گذرد لذا گشتاور نیروی F حول سوراخ یا محور y صفر است. بنابراین قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای برقرار است. $H_y)_1 = H_y)_2$

از طرفی داریم:

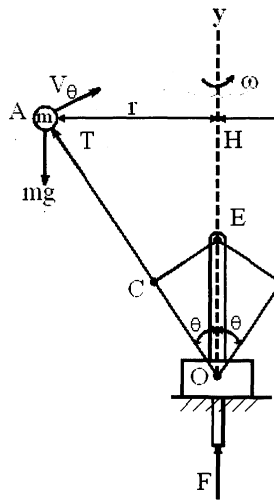
$$\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times(\vec{v}_r+\vec{v}_\theta) = \vec{r}\times\vec{v}_r + \vec{r}\times\vec{v}_\theta \xrightarrow{\vec{r}\parallel\vec{v}_r} = \vec{r}\times\vec{v}_\theta$$

$$\Rightarrow \left|\vec{H}_y\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}_\theta\right| = mrv_\theta = mr(r\omega) = mr^2\omega \Rightarrow \boxed{r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2} \Rightarrow \boxed{r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2}$$

(کار نیروی F) $W_F = \Delta T + \Delta v_g = \Delta T = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left\{\left[v_\theta)_2\right]^2 + \left[v_r)_2\right]^2\right\} - \frac{1}{2}m\left\{\left[v_\theta)_1\right]^2 + \left[v_r)_1\right]^2\right\}$

$$= \frac{1}{2}m\left[(r_2\omega_2)^2 + (\dot{r}_2)^2\right] - \frac{1}{2}m\left[(r_1\omega_1)^2 + (\dot{r}_1)^2\right]$$

مثال (۳): گاورنر وسیله‌ای است که برای کنترل دور به‌کار می‌رود. دو جرم m در نقاط A و B قرار دارند و حول محور y دوران می‌کنند. اجرام به ترتیب بر سر میله‌های OA و OB به طول ثابت ℓ قرار دارند، هنگامی‌که سرعت دوران ω افزایش می‌یابد، نیروهای گریز از مرکز هر جرم، $mr\omega^2$ افزایش یافته و دو جرم از هم دور می‌شوند یعنی میله‌های OA و OB حول O دوران کرده و زاویهٔ θ افزایش می‌یابد. دراثر این عمل نقاط C و D نیز از هم دور شده و میله‌های CE و ED سبب می‌شوند تا نقطهٔ E و میلهٔ گذرنده از این نقطه پایین بیاید و به کمک آن می‌توان ورودی سوخت یا بخار یا هر منبع تغذیه دیگر را کنترل نمود تا از افزایش دور جلوگیری نماید.



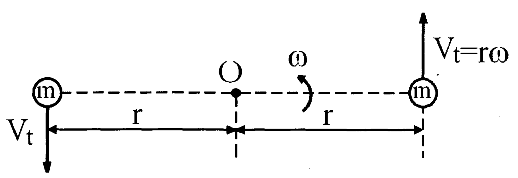
چه رابطه‌ای بین سرعت‌های زاویه‌ای ω در موقعیت‌های مختلف اجرام وجود دارد؟

از آنجایی‌که نقطه O ثابت می‌باشد لذا مکان هندسی نقاط B و A و یا مسیر حرکت اجرام A و B یک مارپیچ در کره‌ای به مرکز O و شعاع ℓ خواهد بود.

تنها نیروهای وارده بر اجرام نیروهای mg و T (نیروی محوری وارده از میله به جرم m) هستند. این نیروها حول محور y گشتاوری ندارند. لذا قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور y برقرار است.

جرم m دارای دو مؤلفهٔ سرعت v_θ و v_t می‌باشد چرا که هم حول O دوران می‌کند و هم حول محور y دوران می‌کند.

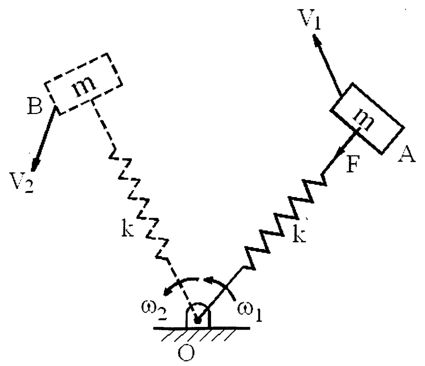
$H_y = \hat{\lambda}.(\vec{r}\times m\vec{v}) = \hat{\lambda}.\left[\vec{r}\times m(\vec{v}_\theta + \vec{v}_t)\right]$



که در آن $\hat{\lambda}$ برداریکه در جهت محور y می‌باشد و بردار $\overrightarrow{HB} = \vec{r}$ می‌باشد. بردار $\vec{r}\times\vec{v}_\theta$ بر بردار $\vec{r}$ عمود است لذا بر $\hat{\lambda}$ نیز عمود است و بنابراین $\hat{\lambda}.(\vec{r}\times\vec{v}_\theta)$ صفر خواهد بود. از طرفی بردار $\vec{v}_t$ بر $\vec{r}$ عمود است و $\vec{r}\times\vec{v}_t$ هم جهت با $\hat{\lambda}$ می‌باشد.

$$H_y = m\hat{\lambda}.(\vec{r}\times\vec{v}_t) = mrv_t = mr(r\omega) = mr^2\omega$$

$$\Rightarrow H_y)_1 = H_y)_2 \Rightarrow r_1^2\omega_2 = r_2^2\omega_2 \xrightarrow{r=\ell\sin\theta} \boxed{\omega_1\sin^2\theta_1 = \omega_2\sin^2\theta_2}$$



مثال (۴): جرم m بر روی یک صفحهٔ افقی بدون اصطکاک قرار دارد و به یک فنر با ثابت k که در نقطهٔ O ثابت می‌باشد متصل گردیده است. جرم با سرعت اولیه v_1 شروع به حرکت می‌کند و به موقعیت دیگر می‌رود که سرعت در این موقعیت v_2 می‌باشد. رابطهٔ بین سرعت‌های v_1 و v_2 را بیابید.

تنها نیروی صفحه‌ای وارده بر جرم m نیروی پایستار فنر می‌باشد که امتداد آن همواره از نقطهٔ O می‌گذرد و لذا گشتاور این نیرو حول O صفر می‌باشد و در نتیجه قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول این نقطه برقرار است. یعنی داریم: $\vec{H}_o)_1=\vec{H}_o)_2$

بردار سرعت $\vec{v}$ جرم m دارای دو مؤلفهٔ سرعت می‌باشد. یک مولفه در راستای فنر v_r (چون فنر می‌تواند کشیده و یا فشرده شود و جرم m به نقطهٔ O دور یا نزدیک خواهد شد) و دیگری در راستای عمود بر فنر v_θ (چون فنر حول نقطهٔ O دوران می‌کند).

$v_r=\dot{r}$ و $v_\theta=r\omega$

$$\vec{H}_o=\vec{r}\times m\vec{v}=m\vec{r}\times(\vec{v}_r+\vec{v}_\theta)=m(\vec{r}\times\vec{v}_r+\vec{r}\times\vec{v}_\theta)\xrightarrow{\vec{r}\times\vec{v}_r=\vec{o}}=m\vec{r}\times\vec{v}_\theta\ \Rightarrow\ H_o=m|\vec{r}\times\vec{v}_\theta|=mrv_\theta$$

$$\Rightarrow\ H_o=mr(r\omega)=mr^2\omega\ \Rightarrow\ H_o)_1=H_o)_2\ \Rightarrow\ \boxed{r_1^2\,\omega_1=r_2^2\,\omega_2}$$

از طرفی نیروی F تنها نیروی صفحه‌ای پایستار است لذا قانون بقای انرژی مکانیکی نیز برقرار است و چون حرکت در صفحهٔ افقی است لذا انرژی پتانسیل ثقلی تغییر نمی‌کند و بنابراین داریم:

$$\Delta T+\Delta V_e=0\ \Rightarrow\ T_1+V_e)_1=T_2+V_e)_2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}k(r_1-\ell)^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}k(r_2-\ell)^2$$

که در آن r_2 و r_1 به ترتیب طول‌های اولیه و ثانویه فنر و ℓ طول آزاد فنر می‌باشد. و داریم:

$$\Rightarrow\ v_1^2=(\dot{r}_1)^2+(r_1\omega_1)^2\quad,\quad v_2^2=(\dot{r}_2)^2+(r_2\omega_2)^2$$

تست سال (۷۸ – ۷۷)

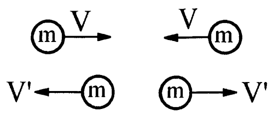
قانون بقای انرژی و قانون بقا منتم خطی دو قانون مستقل هستند. آیا امکان دارد با هم در یک مورد به توافق برسند؟

۱) امکان دارد.

۲) فقط به علت تصادف است که همیشه همدیگر را تایید می‌کنند.

۳) همیشه همدیگر را تایید می‌کنند.

۴) یکی از دیگری قابل به‌دست آوردن است.



امکان دارد در یک مورد هر دو قانون به توافق برسند به عنوان مثال در برخورد الاستیک کامل دو جرم مساوی m قانون بقای اندازه حرکت خطی برای دو جرم در راستای ضربه برقرار است یعنی داریم: $2mv=2mv'$

لذا داریم: $v=v'$، از طرفی داریم:

$$v=v'\ \Rightarrow\ 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right)\ \Rightarrow\ T=T'\ \Rightarrow$$

یعنی قانون بقای انرژی نیز برقرار است.

بنابراین جواب گزینهٔ (۱) می‌باشد.

فصل چهارم

دینامیک اجسام صلب

حرکت صفحه‌ای

هنگامی که صحبت از جسم صلب به میان می‌آید. سه نوع حرکت مطرح می‌باشد.

الف) حرکت انتقالی:

در این حرکت تمامی نقاط جسم صلب دارای سرعت خطی یکسان هستند و بردار سرعت نقاط مختلف جسم هم‌سنگ یکدیگر می‌باشند در این صورت قانون دوم نیوتن به صورت زیر خواهد بود.

$\vec{F}=m\vec{a}_G$

که در آن $\vec{a}_G$ شتاب مرکز ثقل جسم صلب می‌باشد.

ب) حرکت دورانی:

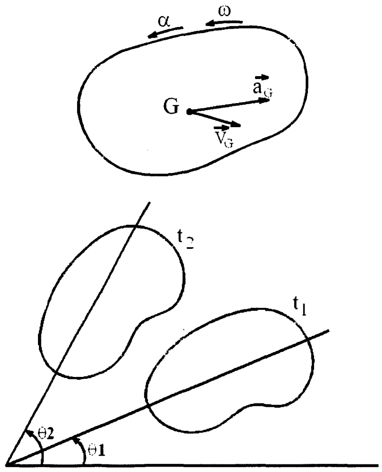
در این حرکت جسم حول یک نقطهٔ ثابت دوران می‌کند و هر نقطهٔ جسم دارای سرعت خطی است که از حاصل ضرب شعاع دوران (فاصله نقطهٔ مورد نظر تا مرکز دایمی دوران) در سرعت زاویه‌ای جسم صلب به‌دست می‌آید. قانون دوم نیوتن برای حرکت صفحه‌ای به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$M_o = I_o\,\alpha$ (جمع گشتاور نیروهای خارجی وارده به جسم صلب حول نقطهٔ o)

که در آن I_o لختی یا ممان اینرسی قطبی جسم حول نقطهٔ o می‌باشد و α شتاب زاویه‌ای جسم صلب می‌باشد.

در مورد این رابطه و مفهوم سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم صلب بعداً توضیح داده می‌شود.

ج) حرکت عمومی:



حرکتی است که جسم هم دارای انتقال و هم دوران می‌باشد. بـه عبـارت دیگـر درحالت کلی هم مرکز جرم جسم، دارای سـرعت و شـتاب خطـی اسـت و هـم جسم دارای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای اسـت. سـرعت و شـتاب زاویـه‌ای جسم بدین صورت تعریف می‌شود که در ابتدا یـک خـط ثابـت بـر روی جسـم صلب در نظر گرفته می‌شود و سپس تغییرات زاویهٔ این خط ثابت نسبت به یک خط مرجع سنجیده می‌شود.

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\theta_2-\theta_1}{\Delta t}=\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$

شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای $\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t}=\dot{\omega}=\ddot{\theta}$

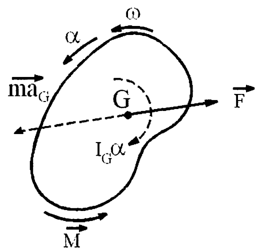
قانون دوم نیوتن در این حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$\vec{F}=m\vec{a}_G$$

$$M_G=I_G\,\alpha$$

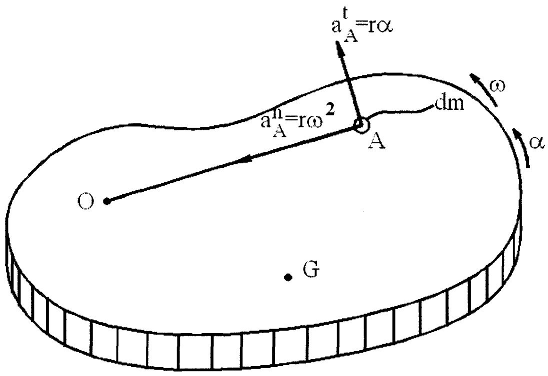
که در آن I_G لختی یا ممان اینرسی قطبی جسم صلب نسبت به مرکز جرم (G) می‌باشد.

اصل دالامبر:



برای جسم صلب جهت ایجاد یک تعادل ساختگی (تعادل شبه استاتیکی) نیروی اینرسی $-\overline{ma_G}$ و گشتاور اینرسی $-I_G\alpha$ را به سیستم اعمال می‌کنیم. در این‌صورت جمع نیروها و گشتاورها وارده به جسم صفر خواهد بود.

قانون‌های بقا ارایه شده برای ذره می‌تواند برای جسم صلب نیز به‌کار رود منتها می‌بایستی روابطی ارایه گردد که بتوان گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای و خطی و انرژی جنبشی را برای جسم صلب به‌دست آورد. این روابط به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.



الف) جسم حول نقطهٔ ثابت O (مرکز دایمی دوران) دوران می‌کند:

یک المان جرم dm روی جسم صلب در نظر می‌گیریم. مولفه‌های شتاب المان a_A^t و a_A^n است.

بنابراین نیروهای وارده به این جسم $dm\,a_A^t$ و $dm\,a_A^n$ می‌باشند. که تنها نیروی $dm\,a_A^t$ حول نقطهٔ O گشتاور دارد.

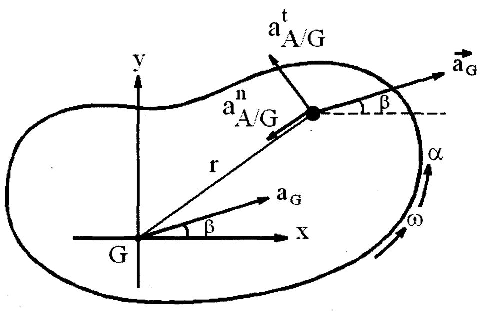
(گشتاور نیروهای وارد بر المان dm حول نقطهٔ O) $dM_o=r\left(dm\,a_A^t\right)=r(dm)r\alpha=\left(r^2\,dm\right)\alpha \;\Rightarrow\; M_o=\alpha\int r^2\,dm=I_o\,\alpha$

که رابطهٔ بالا $I_o=\int r^2dm$ لختی دورانی یا ممان اینرسی قطبی حول نقطهٔ O نامیده می‌شود. بنابراین گشتاور حول نقطهٔ دایمی دوران از رابطهٔ $\boxed{M_o=I_o\,\alpha}$ محاسبه می‌شود. از طرفی می‌دانیم $M_o=\dot{H}_o$ که در آن H_o اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب حول نقطهٔ O می‌باشد.

$$M_o=\dot{H}_o=I_o\alpha=I_o\,\dot{\omega}\quad\Rightarrow\quad\boxed{H_o=I_o\,\omega}$$

ب) جسم دارای حرکت عمومی است:

المان جرم dm را در نظر می‌گیریم مولفه‌های شتاب نقطهٔ A، $a^t_{A/G}=r\alpha$ و $a^n_{A/G}=\frac{v^2_{A/G}}{AG}=r\omega^2$ و $\overrightarrow{a_G}$ خواهند بود چرا که $\overrightarrow{a_A}=\overrightarrow{a_G}+\overrightarrow{a^t_{A/G}}+\overrightarrow{a^n_{A/G}}$ می‌باشد. بنابراین نیروهای وارده به المان dm، $dm\,a_G$ و $r\alpha dm$ و $r\omega^2dm$ می‌باشند. چون راستای نیروی $r\omega^2dm$ از نقطهٔ G می‌گذرد هیچ گشتاوری حول نقطهٔ G ندارد و گشتاور نیروهای $dm\,a_G$ و $r\alpha dm$ حول نقطهٔ G عبارت است از:



AG=r

$$dM_G=r(r\alpha\,dm)-(dm\,a_G\cos\beta)\,y_A+(dm\,a_G\sin\beta)\,x_A$$

نیروی $dm\,a_G$ دارای دو مولفه‌ای در جهت محورهای x و y می‌باشد که عبارتند از $dm\,a_G\cos\beta$ و $dm\,a_G\sin\beta$ می‌باشد و گشتاور این مولفه‌ها مطابق رابطهٔ بالا محاسبه می‌شوند.

$$M_G=\alpha\int r^2\,dm-a_G\cos\beta\int y_A\,dm+a_G\sin\beta\int x_A\,dm$$

مختصات مرکز جرم جسم صلب از روابط زیر به‌دست می‌آیند.

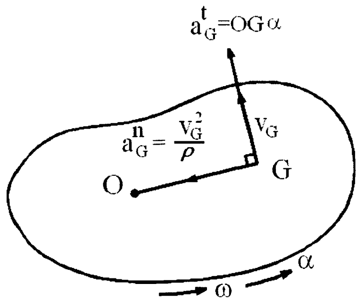
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\int x_A\,dm}{\int dm}=0 \\[2ex] y_G=\dfrac{\int y_A\,dm}{\int dm}=0 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به روابط بالا رابطه M_G به صورت $\boxed{M_G=I_G\,\alpha}$ به‌دست می‌آید.

$$M_G=\dot{H}_G=I_G\,\alpha=I_G\,\dot{\omega}\quad\Rightarrow\quad\boxed{H_G=I_G\,\omega}$$

اگر بخواهیم روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای را حول نقطه‌ای دلخواه (O) بنویسیم روابط اندکی پیچیده‌تر روابط بالا خواهد بود. ترم $m\vec{v}_G$ اندازه حرکت خطی مرکز جرم جسم صلب و ترم $m\vec{a}_G$ نیروی اینرسی مرکز جرم جسم صلب به صورت زیر می‌باشد.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{H}_o&=\vec{H}_G+\overrightarrow{OG}\times(m\vec{v}_G)\\ \vec{M}_o&=\vec{M}_G+\overrightarrow{OG}\times(m\vec{a}_G)\end{aligned}}$$



ج) اگر مرکز آنی دوران جسم مشخص باشد (نقطه O):

در این حالت روابط بالا ساده می‌شوند.

$$\overrightarrow{OG}\times m\vec{a}_G = m\overrightarrow{OG}\times\left(\overrightarrow{a_G^t}+\overrightarrow{a_G^n}\right) = m\left(\overrightarrow{OG}\times\overrightarrow{a_G^t}+\overrightarrow{OG}\times\overrightarrow{a_G^n}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{OG}\parallel\overrightarrow{a_G^n}}$$

$$\overrightarrow{OG}\times m\vec{a}_G = m\overrightarrow{OG}\times\overrightarrow{a_G^t} \Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{OG}\times m\vec{a}_G\right| = mOG\,a_G^t = mOG^2\,\alpha}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG}\times m\vec{a}_G = mOG^2\alpha\hat{k} \Rightarrow \vec{M}_O = M_O\hat{k} = \vec{M}_G + \overrightarrow{OG}\times m\vec{a}_G = M_G\hat{k} + mOG^2\alpha\hat{k} \Rightarrow M_O = I_G\alpha + mOG^2\alpha$$

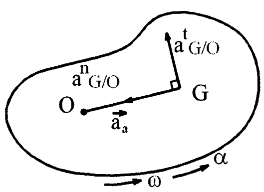
$$\Rightarrow M_O = \left(I_G + mOG^2\right)\alpha = I_O\alpha \Rightarrow \boxed{M_O = I_O\alpha} \Rightarrow M_O = \dot{H}_O = I_O\alpha = I_O\dot{\omega} \Rightarrow \boxed{H_O = I_O\omega}$$

د) اگر روابط گشتاور اندازه حرکت خطی حول نقطه‌ای (O) نوشته شود که امتداد سرعت و شتاب آن نقطه از مرکز جرم بگذرد:

اگر امتداد شتاب نقطهٔ O از مرکز جرم G بگذرد $\overrightarrow{OG}\parallel\vec{a}_O$ خواهد بود در این حالت نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O} = \vec{a}_O + \vec{a}^{\,n}_{G/O} + \vec{a}^{\,t}_{G/O} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\times\vec{a}_G = \overrightarrow{OG}\times\left(\vec{a}_O + \vec{a}^{\,n}_{G/O} + \vec{a}^{\,t}_{G/O}\right) = \overrightarrow{OG}\times\vec{a}_O + \overrightarrow{OG}\times\vec{a}^{\,n}_{G/O} + \overrightarrow{OG}\times\vec{a}^{\,t}_{G/O}$$

$$\xrightarrow[\overrightarrow{OG}\times\vec{a}^{\,n}_{G/O}=\vec{0}]{\overrightarrow{OG}\times\vec{a}_O=\vec{0}} \overrightarrow{OG}\times\vec{a}_G = \overrightarrow{OG}\times\vec{a}^{\,t}_{G/O} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OG}\times\vec{a}_G\right| = \left|\overrightarrow{OG}\times\vec{a}^{\,t}_{G/O}\right| = OG\,a^t_{G/O} = OG(OG\alpha) = OG^2\alpha$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{OG}\times\vec{a}_G = OG^2\alpha\hat{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_G + \overrightarrow{OG}\times(m\vec{a}_G) \Rightarrow M_O\hat{k} = M_G\hat{k} + mOG^2\alpha\hat{k}$$

$$\Rightarrow M_O = M_G + mOG^2\alpha = I_G\alpha + OG^2\alpha = \left(I_G + mOG^2\right)\alpha = I_O\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{M_O = I_O\alpha}$$

به‌طور مشابه اگر امتداد سرعت نقطهٔ O از مرکز جرم G بگذرد، $\overrightarrow{OG}\parallel\vec{v}_O$ خواهد بود و در این حالت داریم:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{V}_{G/O} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\times\vec{V}_G = \overrightarrow{OG}\times\left(\vec{V}_O + \vec{V}_{G/O}\right) = \overrightarrow{OG}\times\vec{V}_O + \overrightarrow{OG}\times\vec{V}_{G/O} \xrightarrow{\overrightarrow{OG}\times\vec{V}_O=0} \overrightarrow{OG}\times\vec{V}_G = \overrightarrow{OG}\times\vec{V}_{G/O}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OG}\times\vec{V}_G\right| = \left|\overrightarrow{OG}\times\vec{V}_{G/O}\right| = OG\,V_{G/O} = OG(OG\omega) = OG^2\omega \Rightarrow \overrightarrow{OG}\times\vec{V}_G = OG^2\omega\hat{k}$$

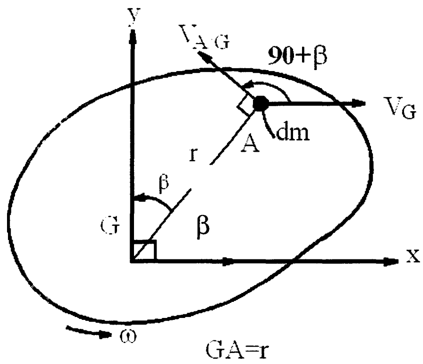
$$\Rightarrow \vec{H}_O = \vec{H}_G + \overrightarrow{OG}\times\left(m\vec{V}_G\right) \Rightarrow H_O\hat{k} = H_G\hat{k} + mOG^2\omega\hat{k} \Rightarrow H_O = H_G + mOG^2\omega = I_G\omega + mOG^2\omega$$

$$\Rightarrow H_O = \left(I_G + mOG^2\right)\omega = I_O\omega \Rightarrow \boxed{H_O = I_O\omega}$$

انرژی جنبشی:

الف) جسم دارای حرکت عمومی است:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$$



المان جرم dm را در نقطهٔ A در نظر می‌گیریم. سرعت نقطهٔ A مجموع دو بردار سرعت $\vec{V}_G$ و $\vec{V}_{A/G}$ که با یکدیگر زاویهٔ $90+\beta$ می‌سازند می‌باشد.

$$V_A^2 = V_G^2 + V_{A/G}^2 + 2V_G V_{A/G}\cos(90+\beta) = V_G^2 + (r\omega)^2 - 2V_G\, r\omega\sin\beta$$

انرژی جنبشی المان عبارت است از:

$$dT = \frac{1}{2}dm\,V_A^2 = \frac{1}{2}dm\left(V_G^2 + r^2\omega^2 - 2V_G\,\omega r\sin\beta\right) \xrightarrow{r\sin\beta = x_A} dT = \frac{1}{2}dm\left(V_G^2 + r^2\omega^2 - 2V_G\,\omega x_A\right)$$

$$\Rightarrow\quad T = \int dT = \frac{1}{2}\int V_G^2\,dm + \frac{\omega^2}{2}\int r^2\,dm - 2V_G\,\omega\int x_A\,dm = \frac{m}{2}V_G^2 + \frac{I_G\,\omega^2}{2} - 2V_G\,\omega\int x_A\,dm$$

از طرفی داریم:

$$x_G = 0 = \frac{\int x_A\,dm}{\int dm} \quad\Rightarrow\quad \int x_A\,dm = 0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\,\omega^2} = \text{انرژی جنبشی انتقالی + انرژی جنبشی دورانی}$$

ب) جسم دارای مرکز دوارنی است:

اگر O مرکز دایمی دوران یا مرکز آنی دوران جسم صلب باشد $V_G = OG\,\omega$ خواهد بود و لذا:

$$T = \frac{1}{2}m(OG\,\omega)^2 + \frac{1}{2}I_G\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m\,OG^2 + I_G\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\,\omega^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{T = \frac{1}{2}I_O\,\omega^2}.$$

جمع‌بندی:

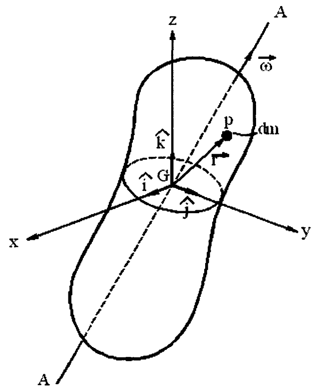
۱) رابطهٔ گشتاور برای یک جسم صلب حول نقطهٔ O که در آن O مرکز دایمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد شتاب آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در شتاب زاویه‌ای جسم صلب $(M_O = I_O\,\alpha)$.

۲) رابطهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای برای یک جسم صلب حول نقطهٔ O که در آن O مرکز دایمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد سرعت آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در سرعت زاویه‌ای جسم صلب $(H_O = I_O\,\omega)$.

۳) انرژی جنبشی در حالت کلی مجموع انرژی جنبشی انتقالی $\left(\frac{1}{2}m V_G^2\right)$ و انرژی جنبشی دورانی $\left(\frac{1}{2}I_G\,\omega^2\right)$ می‌باشد. در حالت خاص می‌تواند به صورت $T=\frac{1}{2}I_O\,\omega^2$ بیان شود که O مرکز دایمی یا آنی دوران می‌باشد.

۴) اگر O یک نقطه دلخواه باشد رابطهٔ گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر می‌باشند.

$\vec{M}_O=\vec{M}_G+\overrightarrow{OG}\times(m\,\vec{a}_G)$
$\vec{H}_O=\vec{H}_G+\overrightarrow{OG}\times(m\,\vec{V}_G)$



تحلیل سه بعدی:

جسم صلب سه بعدی را که حول محور A – A گذرنده از مرکز جرم جسم با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ می‌چرخد در نظر می‌گیریم. بنابراین سرعت مرکز جرم G صفر خواهد بود و سرعت نقطهٔ P که در آن المان جرم dm قرار دارد $\vec{V}_P=\vec{\omega}\times\vec{r}$ خواهد بود.

$dH_G=\vec{r}\times dm\,\vec{V}_P=\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dm$ (اندازه حرکت زاویه‌ای المان حول نقطهٔ G)

که در آن $\vec{\omega}=\omega_x\,\hat{i}+\omega_y\,\hat{j}+\omega_z\,\hat{k}$ و $\vec{r}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}$ می‌باشد.

$$\vec{H}_G=\int\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,dm=?$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ x&y&z\end{vmatrix}=\hat{i}\left(z\omega_y-y\,\omega_z\right)+\left(x\,\omega_z-z\,\omega_x\right)\hat{j}+\left(y\,\omega_x-x\,\omega_y\right)\hat{k}$$

$$\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ x&y&z\\ z\,\omega_y-y\,\omega_z&x\,\omega_z-z\omega_x&y\omega_x-x\omega_y\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[y\left(y\omega_x-x\,\omega_y\right)-z\left(x\omega_z-z\,\omega_x\right)\right]+\hat{j}\left[z\left(z\omega_y-y\omega_z\right)-x\left(y\omega_x-x\,\omega_y\right)\right]+\hat{k}\left[x\left(x\,\omega_z-z\,\omega_x\right)-y\left(z\omega_y-y\omega_z\right)\right]$$

$$=\hat{i}\left[\omega_x\left(y^2+z^2\right)-xy\,\omega_y-x\,z\omega_z\right]+\hat{j}\left[\omega_y\left(z^2+x^2\right)-xy\omega_x-yz\omega_z\right]+\hat{k}\left[\left(x^2+y^2\right)\omega_z-yz\,\omega_y-xz\,\omega_x\right]\quad\Rightarrow$$

$$\vec{H}_G=\hat{i}\left[\omega_x\int\left(y^2+z^2\right)dm-\omega_y\int xy\,dm-\omega_z\int xz\,dm\right]+\hat{j}\left[-\omega_x\int xy\,dm+\omega_y\int\left(x^2+z^2\right)dm-\omega_z\int yz\,dm\right]$$

$$+\hat{k}\left[-\omega_x\int xz\,dm-\omega_y\int yz\,dm+\omega_z\int\left(x^2+y^2\right)dm\right]=H_G)_x\,\hat{i}+H_G)_y\,\hat{j}+H_G)_z\,\hat{k}$$

فواصل نقطهٔ P از محورهای x و y و z به ترتیب: $\sqrt{y^2+z^2}$ و $\sqrt{x^2+z^2}$ و $\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشند. در این صورت لختی دورانی حول محورهای x و y و z به ترتیب به صورت: $I_{xx}=\int\left(y^2+z^2\right)dm$ و $I_{yy}=\int\left(x^2+z^2\right)dm$ و $I_{zz}=\int\left(x^2+y^2\right)dm$ تعریف می‌شوند.

حاصل ضرب‌های لختی نیز به صورت: $I_{xy}=\int xy\,dm$ و $I_{xz}=\int xz\,dm$ و $I_{yz}=\int yz\,dm$ تعریف می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}H_G)_x=I_{xx}\,\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\,\omega_z\\ H_G)_y=-I_{xy}\,\omega_x-I_{yy}\,\omega_y-I_{yz}\,\omega_z\\ H_G)_z=-I_{xz}\,\omega_x-I_{yz}\,\omega_y+I_{zz}\,\omega_z\end{cases}\Rightarrow\begin{Bmatrix}H_G)_x\\ H_G)_y\\ H_G)_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\ -I_{xy}&I_{yy}&-I_{yz}\\ -I_{xz}&-I_{yz}&I_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{\{H_G\}=[I_G]\{\omega\}}$$

اگر محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشند حاصل ضرب‌های لَختی صفر خواهند شد دراین صورت داریم:

$$\begin{cases} H_G)_x = I_{xx}\,\omega_x \\ H_G)_y = I_{yy}\,\omega_y \\ H_G)_z = I_{zz}\,\omega_z \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن رابطهٔ گشتاور می‌بایستی از رابطهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به زمان مشتق گرفت. اگر دستگاه مختصات $G\,xyz$ متصل به جسم صلب باشد با جسم صلب دوران خواهد نمود و بردارهای یکه دارای مشتق نسبت به زمان خواهند بود.

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G = \dot{H}_G)_x\,\hat{i} + \dot{H}_G)_y\,\hat{j} + \dot{H}_G)_z\,\hat{k} + H_G)_x\,\dot{\hat{i}} + H_G)\,\dot{\hat{j}} + H_G)_z\,\dot{\hat{k}}$$

$$= \dot{H}_G)_x\,\hat{i} + \dot{H}_G)_y\,\hat{j} + \dot{H}_G)_z\,\hat{k} + H_G)_x\left(\vec{\omega}\times\hat{i}\right) + H_G)_y\left(\vec{\omega}\times\hat{j}\right) + H_G)_z\left(\vec{\omega}\times\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_G = \dot{H}_G)_x\,\hat{i} + \dot{H}_G)_y\,\hat{j} + \dot{H}_G)_z\,\hat{k} + \vec{\omega}\times\left(H_G)_x\,\hat{i} + H_G)_y\,\hat{j} + H_G)_z\,\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_G = \dot{H}_G)_x\,\hat{i} + \dot{H}_G)_y\,\hat{j} + \dot{H}_G)_z\,\hat{k} + \vec{\omega}\times\vec{H}_G = M_G)_x\,\hat{i} + M_G)_y\,\hat{j} + M_G)_z\,\hat{k}$$

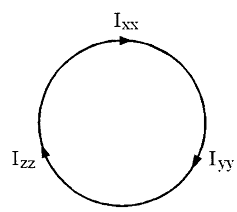
که در آن:

$$\begin{cases} \dot{H}_G)_x = I_{xx}\,\dot{\omega}_x - I_{xy}\,\dot{\omega}_y - I_{xz}\,\dot{\omega}_z \\ \dot{H}_G)_y = -I_{xy}\,\dot{\omega}_x + I_{yy}\,\dot{\omega}_y - I_{yz}\,\dot{\omega}_z \\ \dot{H}_G)_z = -I_{xz}\,\dot{\omega}_x - I_{yz}\,\dot{\omega}_y + I_{zz}\,\dot{\omega}_z \end{cases}$$

با جای‌گذاری روابط مولفه‌ها $\vec{H}_G$ بر حسب مولفه‌های سرعت‌های زاویه‌ای ω_x و ω_y و ω_z در رابطهٔ $\vec{M}_G$ و استفاده از روابط بالا سه مولفه بردار گشتاور حول مرکز جرم G برحسب مولفه‌های سرعت‌های زاویه‌ای ω_x و ω_y و ω_z و مولفه‌های شتاب‌های زاویه‌ای $\dot{\omega}_x$ و $\dot{\omega}_y$ و $\dot{\omega}_z$ به‌دست می‌آیند که این معادلات را معادلات اویلر می‌نامندو با معلوم بودن گشتاور خارجی می‌توان سه معادلهٔ اویلر را حل نمود و ω_x، ω_y، ω_z و $\dot{\omega}_x$، $\dot{\omega}_y$ و $\dot{\omega}_z$ را محاسبه نمود. حل این معادلات در حالت کلی ساده نیست لذا این معادلات برای حالتی که محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشد به‌صورت زیر ساده می‌شود.

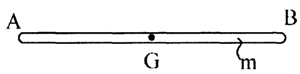
معادلات اویلر در حالت خاص:

$M_G)_x = I_{xx}\,\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z\left(I_{zz} - I_{yy}\right)$
$M_G)_y = I_{yy}\,\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z\left(I_{xx} - I_{zz}\right)$
$M_G)_z = I_{zz}\,\dot{\omega}_z + \omega_y\,\omega_x\left(I_{yy} - I_{xx}\right)$



دایره ترسیم شده جهت حفظ کردن معادلات اویلر در حالت خاص به کار می‌رود.

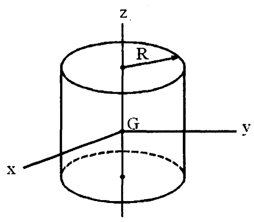
روابط لختی چند جسم صلب:



$AB=\ell$

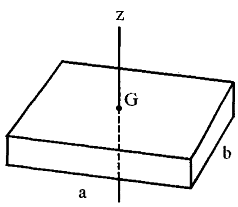
$$I_G=\frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_A=I_B=I_G+mGA^2=\frac{1}{3}m\ell^2$$

میله یکنواخت به طول ℓ و جرم m



$$I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$$
$$I_{yy}=I_{xx}=\frac{I_{zz}}{2}=\frac{mR^2}{4}$$

استوانه به جرم m و شعاع قاعده R



$$I_{zz}=\frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)$$

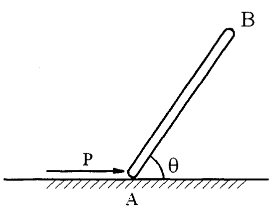
مکعب به طول a و b و جرم m

مثال‌هایی از دینامیک اجسام صلب:

تست سال (۷۶ ـ ۷۵)

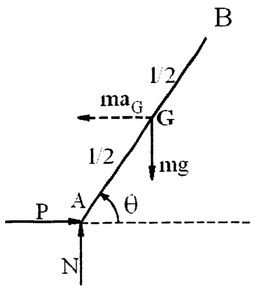
به میله‌ای همگن به جرم $4[kg]$ نیروی افقی $P=60[N]$ وارد می‌شود. اگر این میله فقط دارای حرکت انتقالی باشد. زاویه تمایل θ آن نسبت بـه سـطح افـق چـه مقـدار می‌باشد؟

(سطح افقی را بدون اصطکاک فرض کنید)



AB=500mm

۱) $13.2°$ ۲) $23.2°$ ۳) $33.2°$ ۴) $43.2°$



دیاگرام آزاد

چون میله تنها حرکت افقی دارد لذا طبق اصل دالامبر از مولفه $I_G\,\alpha$ صرف‌نظـر شـده است.

$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; N-mg=0 \;\Rightarrow\; N=mg$$

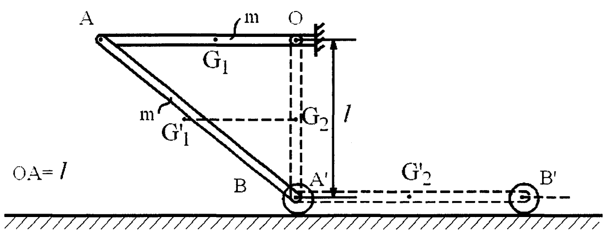
$$\sum M_G=0 \;\Rightarrow\; P\ell/_2\,\sin\theta - N\ell/_2\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow\; \tan\theta=\frac{N}{P}=\frac{mg}{P}=\frac{4\times 9.81}{60} \;\Rightarrow\; \boxed{\theta\simeq 33.2^\circ}$$

جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۸- ۷۷)

سیستم شکل زیر از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌شود، سرعت نقطهٔ B هنگامی‌که میلـهٔ OA بـه صـورت عمـودی درآید کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است؟ جرم هر کدام از میله‌ها برابر m است و حرکت در صفحه قائم رخ می‌دهد.



۱) $v=\sqrt{\frac{24}{13}g\ell}$ ۲) $v=\sqrt{\frac{2g\ell}{3}}$ ۳) $v=\sqrt{\frac{6g\ell}{7}}$ ۴) $v=\sqrt{\frac{3g\ell}{2}}$

قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است. موقعیت اول سیستم با شمارهٔ ① و موقعیت بعدی سیستم با شمارهٔ ② مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} T_1=0 \\ V_g)_1=mg\ell+mg\,\ell/_2=3mg\,\ell/_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_2=\frac{1}{2}I_O\,\omega_{OA'}^2+\frac{1}{2}m\left(V_{G'_2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)(\omega_{OA'})^2+\frac{1}{2}m(V_{B'})^2 \\ V_g)_2=mg\,\ell/_2+0=mg\,\ell/_2 \end{cases}$$

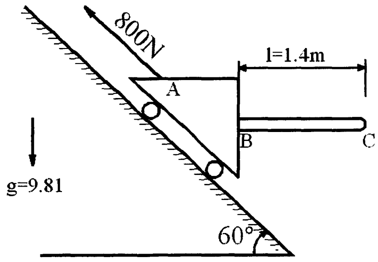
$$V_{A'}=V_{B'}=V_{G'_2}=\ell\omega_{OA'} \;\Rightarrow\; T_2=\frac{1}{6}m\ell^2\left(\frac{V_{B'}}{\ell}\right)^2+\frac{1}{2}m(V'_B)^2=\frac{2m}{3}(V'_B)^2$$

$$\Rightarrow\; E_1=T_1+V_g)_1=3mg\,\ell/_2 \quad,\quad E_2=T_2+V_g)_2=\frac{2m}{3}(V'_B)^2+mg\,\ell/_2$$

$$E_1=E_2 \;\Rightarrow\; 3mg\,\ell/_2=\frac{2m}{3}(V'_B)^2+mg\,\ell/_2 \;\Rightarrow\; mg\ell=\frac{2m}{3}(V'_B)^2 \;\Rightarrow\; \boxed{V'_B=\sqrt{\frac{3}{2}g\ell}}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۹ – ۷۸)



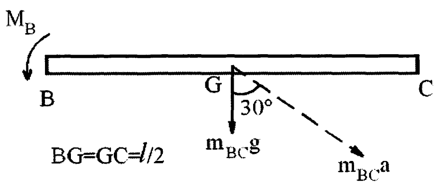
بلوک A و میله متصل به آن مجموعاً دارای جرم 60 kg هستند که در راستای مسیر نشان داده شده با نیروی 800 N کشیده می‌شوند. میله دارای جرم 20 kg است و از نقطه B به بلوک جوش شده است. گشتاور خمشی M در نقطهٔ B (N.m) است؟ (از اثرات اصطکاک صرف‌نظر کنید.)

۱) 137 ۲) 164 ۳) 196 ۴) 254

قانون دوم نیوتن در راستای موازی سطح شیب‌دار:

$$800-\left(m_A+m_{BC}\right)g\sin 60=\left(m_A+m_{BC}\right)a$$

$$800-(20+60)\times 9.81\sin 60=(20+60)a \quad \rightarrow \quad a=1.5\left[\frac{m}{s}\right]$$



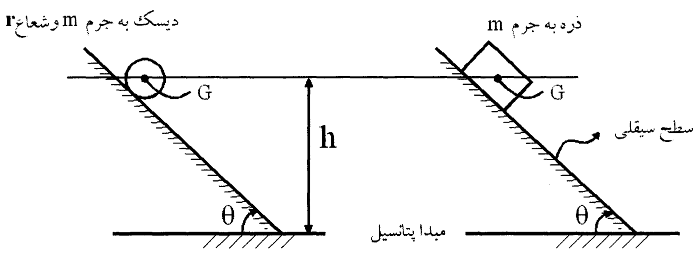
شتاب مجموعهٔ تیروبلوک A، a می‌باشد، لذا شتاب تیر BC نیز a خواهد بود طبق اصل دالامبر نیروی اینرسی $m_{BC}a$ را در جهت عکس به سیستم اعمال می‌کنیم تا تعادل شبه استاتیکی ایجاد می‌شود. در این‌صورت جمع گشتاورهای حول نقطهٔ B صفر خواهد بود.

$$-M_B+\left(m_{BC}\,g+m_{BC}\,a\cos 30\right)\frac{\ell}{2}=0 \quad \rightarrow \quad M_B=(20\times 9.81+60\times 1.5\times \cos 30)\frac{1.4}{2}\simeq 196[\mathrm{N.m}]$$

لذا جواب گزینه (۳) خواهد بود.

تست سال (۷۹ – ۷۸)

اگر یک ذره و یک دیسک همگن هر دو با جرم m از یک ارتفاع یکسان برروی سطح شیب‌دار با شیبی برابر، به‌طور هم‌زمان رها شوند و دیسک در طول مسیر غلتش کامل داشته باشد، کدام‌یک زودتر به پایین سطح شیب‌دار خواهند رسید؟



۱) ذره با جرم m

۲) دیسک با جرم m

۳) هر دو باهم به‌طور هم‌زمان به پایین سطح شیب‌دار می‌رسند.

۴) بستگی به ضریب اصطکاک بین دیسک و سطح شیب‌دار دارد.

الف) بقای انرژی برای ذره به جرم m

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mgh \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = mgh$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mV_G^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = \frac{1}{2}mv_G^2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \boxed{v_G)_{mass} = \sqrt{2gh}}$$

ب) بقای انرژی برای دیسک به جرم m

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mgh \end{cases} \Rightarrow E_1 = mgh$$

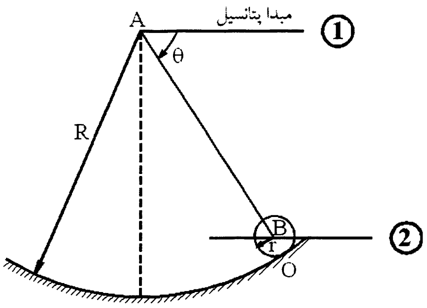
$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 \xrightarrow{v_G = r\omega} \frac{1}{2}I_G\left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{3}{4}mv_G^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{3}{4}mv_G^2 \Rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow \boxed{v_G)_{disk} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

$v_G)_{mass} > v_G)_{disk}$ ذره سریعتر می‌رسد لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۶ ـ ۷۵)

دیسک B به جرم m بر روی سطح دایروی به شعاع R می‌غلتد اگر دیسک از حالت سکون در $\theta = 0$ رها گردد، سرعت زاویه‌ای شعاع AB در $\theta = 90^\circ$ کدام است؟



۱) $\omega = \sqrt{\frac{4g}{2R - r}}$ ۲) $\omega = \sqrt{\frac{4gR}{3r^2}}$

۳) $\omega = \sqrt{\frac{4g}{3(R - r)}}$ ۴) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R - r}}$

قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_0\omega_{disk}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\omega_{disk}^2 \\ V_g)_2 = -mg(R - r)\sin\theta \end{cases} = \frac{3}{4}mr^2\omega_{disk}^2$$

$$\Rightarrow \quad E_2 = T_2 + V_g)_2 = \frac{3}{4} mr^2 \omega_{disk}^2 - mg(R-r)\sin\theta$$

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} mr^2 \omega_{disk}^2 = mg(R-r)\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \omega_{disk} = \sqrt{\frac{4g(R-r)\sin\theta}{3r^2}}$$

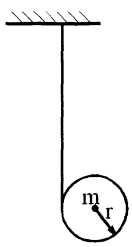
$$v_B = BO\omega_{disk} = r\omega_{disk} = BA\dot{\theta} = (R-r)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{r}{R-r}\omega_{disk} = \sqrt{\frac{4g\sin\theta}{3(R-r)}}$$

$$\dot{\theta}\Big|_{\theta=90^\circ} = \sqrt{\frac{4g}{3(R-r)}}$$

جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۶۹ ـ ۷۰)

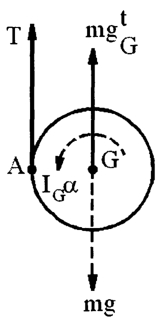
استوانه‌ای به جرم m به شعاع r به‌وسیله طنابی که به دور آن پیچیده شده آویزان شده است. اگر استوانه رها شود، کشش در طناب برابر است با (ممان اینرسی استوانه حول مرکز جرم برابر $\frac{1}{2}mr^2$ است):



۱) $\frac{mg}{3}$ ۲) $\frac{mg}{2}$

۳) $\frac{3mg}{5}$ ۴) صفر

دیسک حول نقطهٔ A دوران می‌کند و نقطهٔ A مرکز آنی دوران است.



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + ma_G - mg = 0$$

$$T + mr\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{mr\alpha}{2} + mr\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2g}{3r}}$$

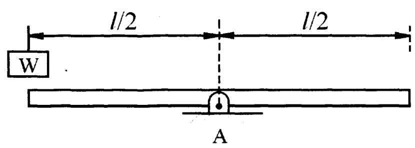
$$\Sigma M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad -Tr + I_G\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad -Tr + \frac{mr^2}{2}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mr\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{mr}{2}\left(\frac{2g}{3r}\right) = \boxed{\frac{mg}{3}}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۷ـ ۷۶)

میله‌ای به وزن W به طول L در حالت تعادل روی تکیه‌گاه A قرار گرفته است. شتاب زاویه‌ای میله در سمت لبه از لحظه‌ای که وزن $\frac{W}{g}$ را به آرامی در انتهای میله قرار می‌دهیم، برابر است با:



۱) $\frac{g}{2L}$ ۲) $\frac{g}{6L}$

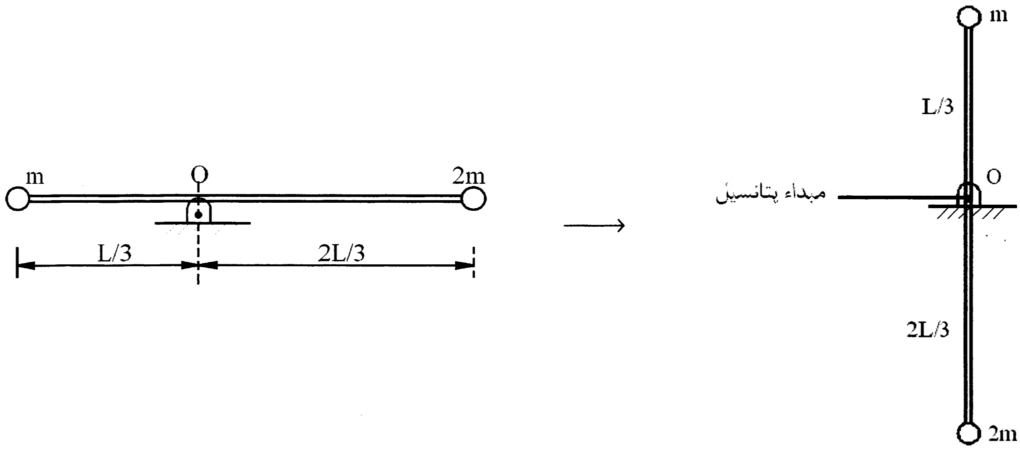
۳) $\frac{2}{3}\frac{g}{L}$ ۴) $\frac{3}{2}\frac{g}{L}$

$$M_A = W\frac{\ell}{2} = I_A\alpha = \left(\frac{1}{12}\frac{W}{g}\ell^2 + \frac{W}{g}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{3g}{2\ell}}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۷ ـ ۷۶)

به دو انتهای یک میله افقی بی‌وزن روی صفحه قائم جرم‌های m و 2m نصب شده است. این میله از حالت سکون افقی رها مـی‌گـردد. وقتی به وضع قائم می‌رسد، کدام‌یک از نتایج زیرین صحیح است؟



۱) سرعت زاویه‌ای میله برابر $\sqrt{\frac{g}{2L}}$ رادیان بر ثانیه است.

۲) سرعت زاویه‌ای میله برابر $\sqrt{\frac{2g}{L}}$ رادیان بر ثانیه است.

۳) شتاب زاویه‌ای برابر $\frac{2g}{L}$ رادیان برمجذور ثانیه است.

۴) شتاب زاویه‌ای برابر $\frac{g}{2L}$ است.

گشتاور نیروی 2 mg حول نقطهٔ o $= 2mg\left(\frac{2L}{3}\right) = 4\frac{mgL}{3} > \frac{mgL}{3}$

گشتاور نیروی mg حول نقطهٔ o $= mg\frac{L}{3}$

لذا جرم 2m پایین می‌آید و جرم m بالا می‌رود. قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است، لذا داریم:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

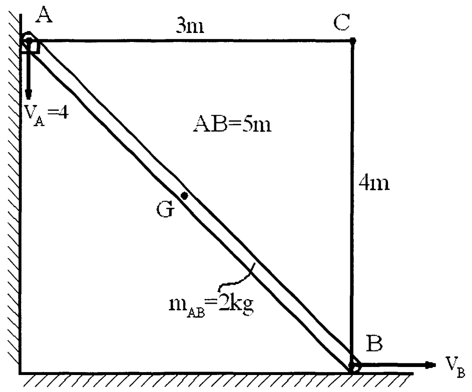
$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{L}{3}\right)^2 + \left(\frac{2L}{3}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{mL^2}{2}\omega^2 \\ V_g)_2 = mg\frac{L}{3} - 2mg\left(\frac{2L}{3}\right) = -\,mgL \end{cases} \Rightarrow \quad E_2 = T_2 + V_g)_2 = m\frac{L^2}{2}\omega^2 - mgL = E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

لذا جواب گزینهٔ (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۵ ـ ۷۴)

در لحظهٔ نشان داده در شکل نقطهٔ A از میله باریک AB ،2 kg دارای سرعت $4\left[\frac{m}{s}\right]$ به سمت پایین می‌باشد.انرژی جنبشی میله کدام است؟



۱) 3.71 N.m

۲) 13.5 N.m

۳) 14.81 N.m

۴) 16.3 N.m

مرکز آنی دوران میله AB نقطهٔ (C) محل تلاقی عمود بر سرعت‌های نقاط A و B می‌باشد.

$$v_A = 4\left[\frac{m}{s}\right] = AC\omega_{AB} = 3\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{4}{3}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$v_B = BC\omega_{AB} = 4\omega_{AB} = 4\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}\left[\frac{m}{s}\right]$$

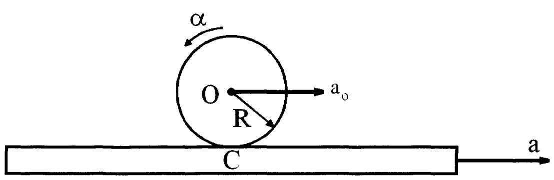
$$v_G = GC\omega_{AB} = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\times 2\times 5^2\right)\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{400}{27} \simeq 14.8[N.m]$$

لذا جواب گزینهٔ (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۸ ـ ۷۷)

تسمه‌ای با سرعت v و شتاب ثابت a به سمت راست حرکت می‌کند. بر روی این تسمه دیسکی نسبت به تسمه به سمت چپ می‌غلتد در حالی‌که شتاب کل مرکز دیسک به سمت راست است. نیروی اصطکاک بین تسمه و دیسک برابر است با: (جرم دیسک برابر m و ضریب اصطکاک بین تسمه و دیسک برابر μو $I_{disk} = \frac{1}{2}mR^2$ است)



۱) μmg

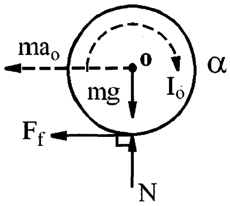
۲) $\frac{1}{3}ma$

۳) $\frac{1}{2}ma$

۴) $\frac{1}{2}\mu mg$

در مورد اصطکاک لغزشی همواره جهت آن، عکس حرکت می‌باشد. اما در اصطکاک غلتشی اگر هیچ گشتاور محرکی روی دیسک غلتان نباشد نیروی اصطکاک غلتشی در جهت عکس حرکت و اگر گشتاور محرکی روی دیسک غلتان باشد نیروی اصطکاک درجهت حرکت و یا در جهتی خواهد بود که با گشتاور محرک مقابله نماید.

$$a_0 = a_c + a_{0/c} = a - R\alpha$$



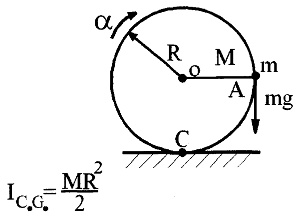
$$\begin{cases} -ma_0 - F_f = 0 \;\Rightarrow\; ma_0 = -F_f = \dfrac{mR\alpha}{2} \\ \;\Rightarrow\; a_0 = a - R\alpha = \dfrac{R\alpha}{2} \;\Rightarrow\; a = \dfrac{3R\alpha}{2} \\ I_0\alpha + F_f R = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{mR^2}{2}\alpha + F_f R = 0 \\ \;\Rightarrow\; F_f = -\dfrac{mR}{2}\alpha = -\dfrac{mR}{2}\left(\dfrac{2a}{3R}\right) = -\dfrac{ma}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ اندازهٔ نیروی $F_f = \dfrac{ma}{3}$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۹ ـ ۷۸)

در پیرامون دیسک یکنواخت به جرم M و شعاع R ذره‌ای با جرم m در وضع نشان داده شده نصب گردیده است. شتاب زاویه‌ای دیسک در لحظهٔ آزادشدن از وضع نشان داده شده برابر است با:



۱) $\dfrac{mg}{(3M+2m)R}$
۲) $\dfrac{2mg}{(M+m)R}$
۳) $\dfrac{2mg}{(3M+4m)R}$
۴) $\dfrac{4mg}{(M+4m)R}$

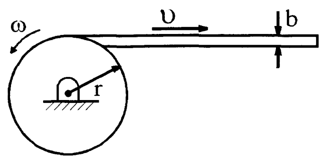
جمع گشتاورها حول نقطهٔ C: $\Sigma M_C = I_c\alpha = mgR = \left(\dfrac{MR^2}{2} + MR^2 + mAC^2\right)\alpha = \left(\dfrac{3MR^2}{2} + m\left(\sqrt{2}R\right)^2\right)\alpha$

$$= \left(\frac{3M+4m}{2}\right)R^2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{2mg}{(3M+4m)R}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۶ ـ ۷۵)

هنگام کار چاپ، کاغذ با سرعت ثابت v زیر دستگاه چاپ کشیده می‌شود هرگاه شعاع کاغذ رول در هر لحظه با r نشان داده شود و ضخامت کاغذ b باشد، شتاب زاویه‌ای رول کاغذ کدام است؟



۱) $\dfrac{1}{2}\dfrac{bv^2}{\pi r^3}$
۲) $\dfrac{2}{3}\dfrac{bv^2}{\pi r^3}$
۳) $\dfrac{3}{2}\dfrac{bv^2}{\pi r^3}$
۴) $2\dfrac{bv^2}{\pi r^3}$

$$v = r\omega = \text{constant} \;\Rightarrow\; \omega = \frac{v}{r} \;\Rightarrow\; \alpha = \dot\omega = \frac{-v\dot r}{r^2}$$

$$\dot r = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} \simeq \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

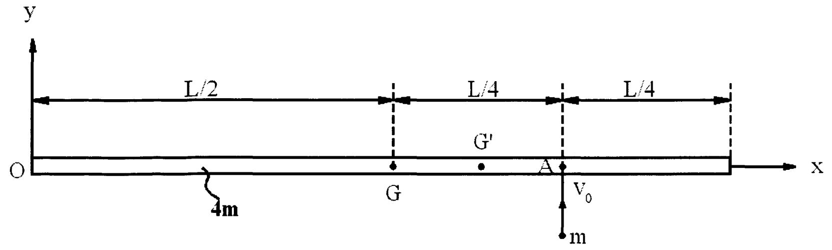
از آنجایی‌که در مدت $\dfrac{2\pi}{\omega}$ رول یک دور می‌چرخد و در اثر این چرخش شعاع رول به اندازهٔ ضخامت کاغذ یعنی b کم می‌شود بنابراین $\Delta r = -b$ و $\Delta t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ خواهد بود و لذا نتیجه می‌شود.

$$\dot r \simeq \frac{-b}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{-b\omega}{2\pi} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{-v}{r^2}\left(\frac{-b\omega}{2\pi}\right) = \frac{bv}{2\pi r^2}\left(\frac{v}{r}\right) = \boxed{\frac{bv^2}{2\pi r^3}}$$

جواب گزینه(۱) می‌باشد.

تست سال (۷۹ ـ ۷۸)

اگر یک ذره به جرم m با میله به جرم 4m در موقعیت $\frac{1}{4}$ برخورد پلاستیک کامل کند، سرعت مرکز جرم میله را درست پس از برخورد پیدا کنید. (برخورد در سطح افق بدون اصطکاک رخ می‌دهد.)



۱) $v_G = 0$

۲) $v_G = \frac{3}{11}v_0$

۳) $v_G = \frac{4}{11}v_0$

۴) $v_G = \frac{4}{23}v_0$

چون برخورد پلاستیک کامل است بنابراین پس از برخورد جرم m به جرم 4 m می‌چسبد و مرکز جرم G به نقطهٔ G' تغییر موقعیت می‌دهد. در دستگاه مختصات 0xy مختصات مرکز جرم G (0 و $\frac{L}{2}$) و مختصات جرم m پس از چسبیدن به میله (0 و $\frac{3L}{4}$) خواهد بود، بنابراین:

$$x_{G'} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4m)\left(\frac{L}{2}\right) + m\left(\frac{3L}{4}\right)}{4m + m} = \frac{\frac{11mL}{4}}{5m} = \frac{11L}{20}$$

$$y_{G'} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} = \frac{4m\times0 + m\times0}{4m + m} = 0$$

بنابراین مرکز جرم جدید یعنی نقطهٔ G' در فاصله $\frac{11L}{20}$ از نقطهٔ O یا $GG' = \frac{L}{20}$ خواهد بود.

قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای ضربه:
$$4m\times0 + mv_0 = (4m + m)v_{G'} \Rightarrow v_{G'} = \frac{v_0}{5}$$

در صورت مساله سرعت v_G خواسته شده است، بنابراین داریم:

$$v_{G'} = v_G + v_{G'/G} \Rightarrow \frac{v_0}{5} = v_G + GG'\omega_{bar} \Rightarrow v_G = \frac{v_0}{5} - \frac{L}{20}\omega_{bar}$$

حال باید سرعت زاویه‌ای میله یعنی ω_{bar} را محاسبه نماییم.

نیروی ضربه‌های وارده از جرم m در نقطهٔ A به میله وارد می‌شود لذا گشتاور این نیرو حول نقطهٔ A صفر است. بنابراین قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطهٔ A برقرار است.

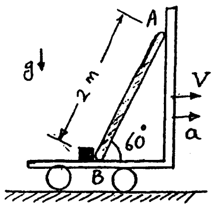
$$H_A)_1 = H_A)_2 \Rightarrow 0 = I_G\omega_{bar} - (4m)v_G\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{1}{12}(4m)L^2\omega_{bar} - mLv_G \Rightarrow \omega_{bar} = \frac{3v_G}{L}$$

$$\Rightarrow v_G = \frac{v_0}{5} - \frac{L}{20}\left(\frac{3v_G}{L}\right) \Rightarrow \frac{23v_G}{20} = \frac{v_0}{5} \Rightarrow \boxed{v_G = \frac{4}{23}v_0} \Rightarrow \omega_{bar} = \frac{3}{L}\left(\frac{4}{23}v_0\right) = \boxed{\frac{12}{23}\frac{v_0}{L}}$$

لذا جواب گزینهٔ (۴) می‌باشد.

تست‌های سال (۸۳ ـ ۸۲)

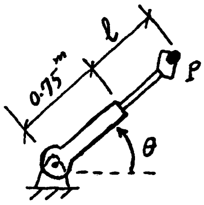
۱ـ میله AB به طول 2 متر بر روی یک چهارچرخه که بر روی سطحی افقی در حرکت است قرار داده شده است. در صورتی که میله با افق زاویه 60 درجه داشته و ضریب اصطکاک سکون در نقطه B برابر با $\mu_s=0.5$ و در نقطه A برابر با $\mu_s=0.0$ باشد، حداکثر شتاب منفی چهارچرخه را برای این‌که میله بر روی چهارچرخه نلغزد تعیین نمایید. (میله AB همگن بوده و مرکز جرم آن در وسط میله قرار دارد.)



۱) $-2g\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ۲) $-1.866g\left[\frac{m}{s^2}\right]$

۳) $-2.5g\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ۴) $-1.577g\left[\frac{m}{s^2}\right]$

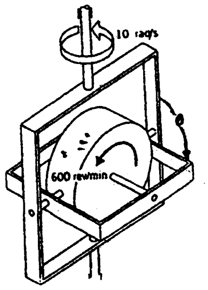
۲ـ در مکانیزم رباتیکی شکل مقابل طول بازوی دوران کننده 0.75 متر است. در موقعیت نشان داده شده چنانچه سرعت دوران بازوی دوار 10 درجه بر ثانیه باشد و بازوی لغزنده در موقعیتی که طول ℓ برابر 0.5 متر باشد، دارای سرعت خطی 0.2 متر بر ثانیه و شتاب خطی 0.3- متر بر مجذور ثانیه باشد اندازه شتاب گیره P کدام گزینه است؟



۱) $0.338\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ۲) $0.345\left[\frac{m}{s^2}\right]$

۳) $0.396\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ۴) $0.405\left[\frac{m}{s^2}\right]$

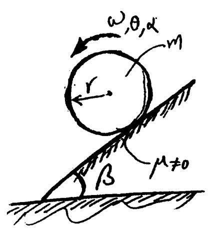
۳ـ دیسک مربوط به ژیرسکوپ نشان داده در شکل در این لحظه دارای سرعت زاویه ثابت $600\left[\frac{rev}{min}\right]$ در جهت نشان داده شده قاب بیرونی دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $10\left[\frac{rad}{sec}\right]$ در جهت نشان داده شده می‌باشد. چنانچه قاب داخلی در این لحظه در موقعیت $\theta=60^\circ$ بوده و با سرعت و شتاب زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}=-5\left[\frac{rad}{sec}\right]$ و $\ddot{\theta}=10\left[\frac{rad}{sec}\right]$ حرکت نماید. اندازه شتاب زاویه‌ای مطلق دیسک چقدر است؟



۱) $289.10\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$ ۲) $433.17\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$

۳) $626.48\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$ ۴) $554.10\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$

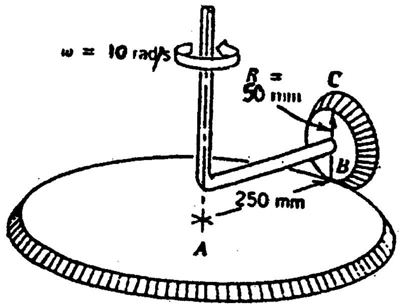
۴ـ استوانه‌ای به جرم m و شعاع r روی یک سطح شیب‌دار با زاویه β نسبت به افق در حال حرکت است. بیابید: ۱ـ تعیین حداقل ضریب اصطکاک μ برای ایجاد حرکت غلتش خالص استوانه و 2ـ در صورتی که نیروی اصطکاک از f_{max} بیشتر باشد، شتاب زاویه‌ای حرکت استوانه چقدر است؟



۱) $\alpha=\frac{2g\mu\cos\beta}{r}\,,\ \mu\ge\frac{tg\beta}{3}$ ۲) $\alpha=\frac{g}{r}\sin\beta\,,\ \mu\ge\frac{1}{3}\cos\beta$

۳) $\alpha=\frac{2g}{r}\sin\beta\,,\ \mu\ge\frac{2}{3}\sin\alpha$ ۴) $\alpha=\frac{2\mu g}{3r}\cos\beta\,,\ \mu\ge\frac{tg\beta}{3}$

۵ـ **چرخ‌دنده B آزادانه به دور محورش با سرعت زاویه‌ای ثابت $10\left[\frac{rad}{s}\right]$ در جهت نشان داده شده در شکل می‌چرخد. چرخ دنده A ثابت است، اندازه سرعت نقطهٔ C چقدر است؟**



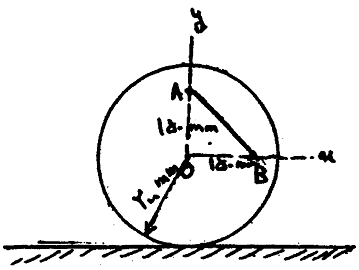
۱) $0.5\left[\frac{m}{s}\right]$

۲) $2.5\left[\frac{m}{s}\right]$

۳) $5.0\left[\frac{m}{s}\right]$

۴) $3.0\left[\frac{m}{s}\right]$

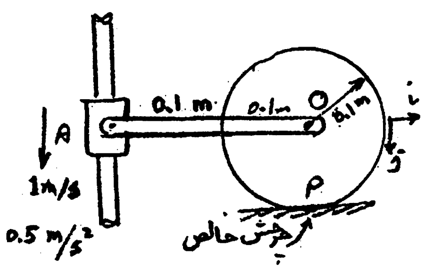
۶ـ **دیسک مدور بدون لغزش به طرف چپ می‌غلتد. اگر $\vec{a}_{A/B}=-2.7\,\vec{j}\left[\frac{m}{s^2}\right]$ باشد شتاب مرکز O دیسک را به‌دست آورید.**



۱) $\vec{a}_o=-1.8\,\hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ۲) $\vec{a}_o=0.824\,\hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$

۳) $\vec{a}_o=1.8\,\hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ۴) $\vec{a}_o=-0.824\,\hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$

۷ـ **برای موقعیت نشان داده شده لغزنده A، سرعتی برابر $1\left[\frac{m}{s}\right]$ هر دو به طرف پایین دارد. شتاب زاویه چرخ را در این لحظه به‌دست آورید.**



۱) $0\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$ ۲) $5\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$

۳) $25\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$ ۴) $50\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$

۸ـ **دیسکی را که دارای سرعت زاویه‌ای ω است بر روی زمین قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک سطح زمین و دیسک μ به اندازه‌ای است که باعث می‌شود دیسک بر روی زمین بغلتد. سرعت زاویه‌ای دیسک با گذشت زمان:**

۱) اصطکاک باعث افزایش آن می‌شود. ۲) تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

۳) به دلیل وجود اصطکاک کاهش می‌یابد. ۴) در مورد تغییرات آن نمی‌توان قضاوت کرد.

پاسخ تشریحی

۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

میله به همراه چهارچرخه با شتاب منفی a حرکت می‌کند و حرکت انتقالی است. حداکثر شتاب زمانی به‌دست می‌آید که میله در آستانه لغزش قرار گیرد.

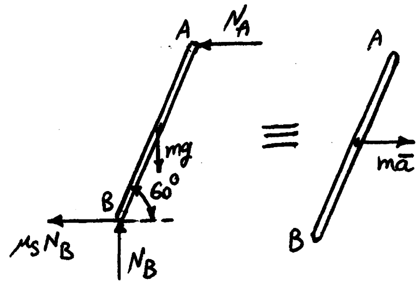
$$\begin{cases} N_B = mg \\ -\left(\mu_S N_B + N_A\right) = ma \end{cases}$$

$$\Sigma M_A = ma\frac{\ell}{2}\sin 60 \quad \rightarrow \quad -\mu_S N_B \ell \sin 60 - N_B \ell \cos 60 + mg\frac{\ell}{2}\cos 60 = ma\frac{\ell}{2}\sin 60$$

$$\Rightarrow \quad -\mu_S mg\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - mg\frac{\ell}{2} + mg\frac{\ell}{2}\times\frac{1}{2} = ma\frac{\ell}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -g\left(\mu_S\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = a\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad a = -g\left(2\mu_S + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= -g\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1.577\,g\left[\frac{m}{s^2}\right]$$



۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

رابطه شتاب در مختصات قبلی عبارت است از:

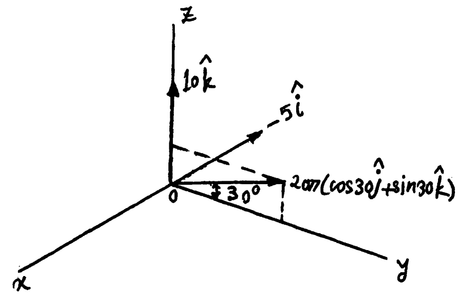
$$\overrightarrow{a_p} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta} = \dfrac{10\times\pi}{180}\dfrac{rad}{s} \\ r = 0.75 + 0.5 = 1.25 \\ \dot{r} = 0.2\left[\dfrac{m}{s}\right] \\ \ddot{r} = -0.3\left[\dfrac{m}{s^2}\right] \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{a_p} = \left(-0.3 - 1.25\times\left(\frac{\pi}{18}\right)^2\right)\hat{e}_r + \left(1.25\times 0 + 2\times 0.2\times\frac{\pi}{18}\right)\hat{e}_\theta = -0.3381\hat{e}_r + 0.0698\hat{e}_\theta$$

با فرض $\ddot{\theta}=0$ (در سوال نیامده است)

$$\left|a_p\right| = 0.3452 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

۳ـ گزینه (۴) صحیح می‌باشد.



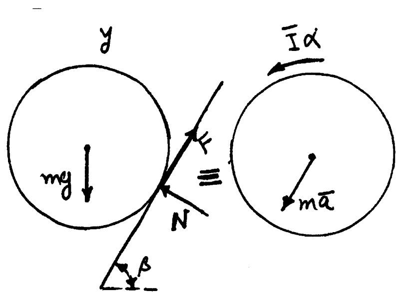
$$600\left[\frac{rev}{min}\right] = \frac{2\pi\times 600}{60} = 20\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\left(-\hat{i}\right) + 10\hat{k}\times\left[\left(-5\hat{i}\right) + 10\pi\left(\sqrt{3}\,\hat{j} + \hat{k}\right)\right]$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = -10\hat{i} - 50\hat{j} + 100\sqrt{3}\,\pi\left(-\hat{i}\right) = -\left(10 + 100\sqrt{3}\,\pi\right)\hat{i} - 50\hat{j}$$

$$\alpha = \sqrt{\left(10 + 100\sqrt{3}\,\pi\right)^2 + (50)^2} \simeq 554.1\left[\frac{rad}{sec^2}\right]$$

۴ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



$$\begin{cases} -F+mg\sin\beta=m\bar{a} \\ N=mg\cos\beta \\ rF=\bar{I}\alpha=\dfrac{mr^2\alpha}{2} \quad \rightarrow \quad F=\dfrac{mr\alpha}{2} \end{cases}$$

با فرض حرکت غلتش خالص داریم: $\bar{a}=r\alpha$

$$-\frac{m\bar{a}}{2}+mg\sin\beta=m\bar{a} \quad \rightarrow \quad \frac{3m\bar{a}}{2}=mg\sin\beta \quad \rightarrow \quad \bar{a}=\frac{2g\sin\beta}{3}$$

$$F=\frac{m\bar{a}}{2}=\frac{mg\sin\beta}{3}\leq\mu_s N=\mu_s mg\cos\beta \quad \rightarrow \quad \mu_s\geq\frac{tg\beta}{3}$$

اگر $F\geq F_{max}$ باشد اصطکاک لغزشی و حرکت لغزش و غلتش هم‌زمان خواهد بود.

$$F=\mu_k mg\cos\beta$$

$$\mu_k mg\cos\beta=\frac{mr\alpha}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{2\mu_k g\cos\beta}{r}$$

۵ ـ گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

$$v=r\omega$$

$$v_B=0.25\times10=2.5\left[\frac{m}{s}\right]$$

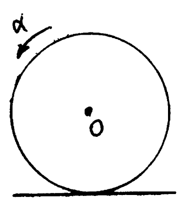
$$v_B=2r\omega=2v_B=5\left[\frac{m}{s}\right]$$

۶ ـ گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

با ترسیم شتاب عمودی و مماسی بین نقاط A و B می‌بینیم که $\left(a_{A/B}\right)_n=r\omega^2$ ، $\left(a_{A\ B}\right)_t=r\alpha$ که $\alpha.\omega$ به ترتیب سرعت و شتاب زاویه‌ای چرخ و $r=0.15\sqrt{2}$ فاصله بین نقاط B و A است که برآیند این دو بردار باید $-2.7\hat{j}$ شود، پس:

$$\begin{cases} r\alpha=r\omega^2 \\ \sqrt{(r\alpha)^2+\left(r\omega^2\right)^2}=2.7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad r\alpha=r\omega^2=\frac{2.7}{\sqrt{2}}$$

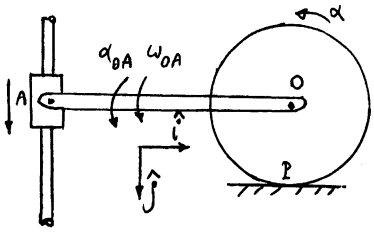
$$\alpha=\frac{2.7}{\sqrt{2}\times0.15\sqrt{2}}=\frac{2.7}{0.3}=9\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$



$$\bar{a}_0=R\alpha\hat{i}=0.2\times9\hat{i}=-1.8\hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

۷ ـ گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

سرعت نقطه O چرخ در جهت $(\hat{i})$ خواهد بود و سرعت نقطه A به سمت پایین در جهت $\hat{j}$ است پس مرکز آنی دوران میله OA نقطـه O خواهد بود و:



$$\omega_{OA}=\frac{1}{0.2}=5\frac{rad}{s} \quad \leftarrow \quad v_A=r_{OA}\,\omega_{OA}$$

$$\vec{a}_{A/O}=0.5\hat{j}$$

$$\vec{a}_{A/O}=0.2\times5^2\,\hat{i}+0.2\alpha_{OA}\,\hat{j}$$

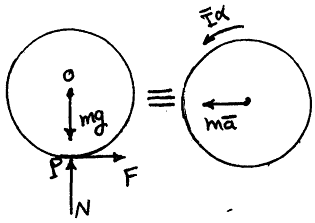
$$\vec{a}_O=-a_O\,\hat{i}=-0.1\alpha\hat{i}$$

$$\vec{a}_A=\vec{a}_O+\vec{a}_{A/O}$$

$$0.5\hat{j}=5\hat{i}+0.2\alpha_{OA}\,\hat{j}-0.1\alpha\hat{i} \quad \rightarrow \quad 5-0.1\alpha=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha=50\left[\frac{rad}{s^2}\right]}$$

۸ ـ گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

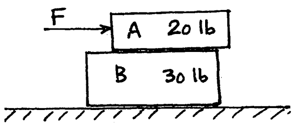
لذا زاویه شتاب زاویه‌ای دیسک صفر است.



$$\Sigma M_P=I_O\,\alpha \quad \rightarrow \quad 0=I_O\,\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=0$$

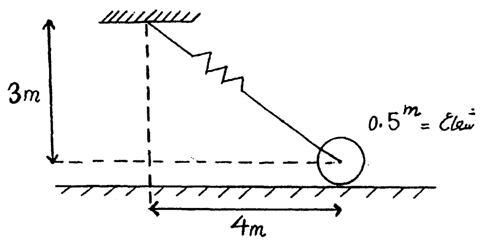
تست‌های سال (۸۴ ـ ۸۳)

۱ـ بلوک B بر روی یک سطح صاف (بدون اصطکاک) قرار دارد. ضریب اصطکاک استاتیکی و دینامیکی بین بلوک A و B برابر با $\mu_s=0.4$ و $\mu_k=0.3$ می‌باشد. چنانچه یک نیروی افقی برابر با F=5016 به بلوک A وارد شود، شتاب بلوک B بر حسب $\frac{ft}{s^2}$ کدام است؟



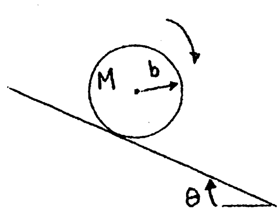
۱) 2.57
۲) 5.48
۳) 6.11
۴) 6.44

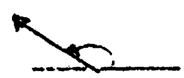
۲ـ یک استوانه صلب همگن از وضعیت نشان داده شده از حال سکون رها می‌شود. جرم استوانه 12 kg می‌باشد. سختی فنـر $2\left[\frac{N}{m}\right]$ لبه و طول آزاد آن [1[m می‌باشد. سرعت زاویه‌ای استوانه بعد از این‌که [1[m جابه‌جا شود چقدر است؟ (بر حسب $\frac{red}{sec}$)

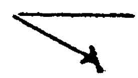


۱) 0.5
۲) 1
۳) 1.5
۴) 2

۳ـ استوانه‌ای به شعاع b و جرم M از سطح شیب‌داری به شیب θ به طرف پایین می‌غلتد. در صورتی که حرکت بدون لغزش و بـه صورت غلتش صرف باشد، درباره نوع نیروی اصطکاک اندازه و جهت آن کدام عبارت صحیح است؟



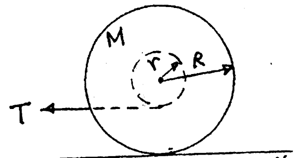
۱) لغزشی  $f=\frac{Mg\sin\theta}{3}$

۲) غلتشی:  $f=\frac{Mg\sin\theta}{3}$

۳) غلتشی:  $f=\mu_r Mg\sin\theta$

۴) لغزشی:  $f=\mu_r Mg\sin\theta$

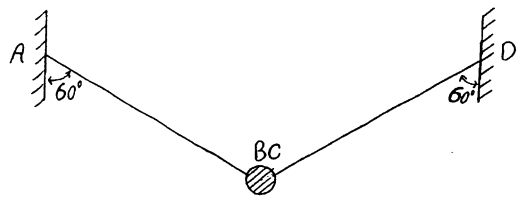
۴ـ قرقره‌ای با شعاع R و جرم M در دست است. ریسمانی که دور قرقره پیچیده شده است مانند شکل از شعاع محور r کشیده مـی‌شـود. برای آن‌که قرقره هیچ‌گاه بر روی زمین نلغزد و فقط غلتش داشته باشد، ماکزیمم شتاب خطی مرکز قرقره چقدر خواهد بود؟



کمه ضریب اصطکاک لغزش استاتیکی = μ_s

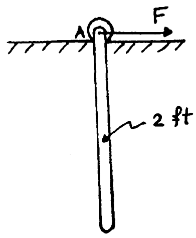
۱) $a_{max}=\frac{R}{R+r}\mu g$
۲) $a_{max}=2\left(\frac{R-r}{2r+R}\right)\mu g$
۳) $a_{max}=2\left(1-\frac{r}{R}\right)\mu g$
۴) $a_{max}=2\left(\frac{2r+R}{R-r}\right)\mu g$

۵ـ **کره کوچکی به جرم m مطابق شکل با دو سیم AB و CD نگه داشته شده است. سیم AB را آن‌گاه می‌بریم کشش در سیم CD و شتاب کره دست بعد از بریده شدن سیم AB به ترتیب از راست به چپ عبارت خواهد بود از:**



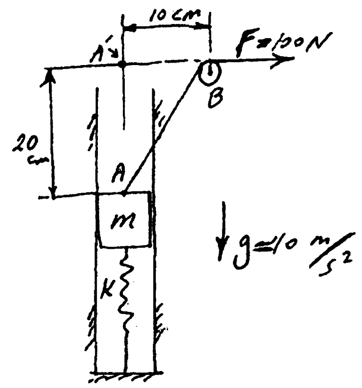
۱) $\frac{W}{3}$ ، $0.5g$
۲) $\frac{W}{2}$ ، $0.5g$
۳) $\frac{W}{3}$ ، $0.866g$
۴) $\frac{W}{2}$ ، $0.866g$

۶ـ **میله‌ای به طول** $2[ft]$ **و وزن** $10[b]$ **در حالت ایست می‌باشد. در این لحظه نیروی افقی** $F=15[\ell b]$ **به نقطه A وارد مـی‌شـود. شتاب نقطه A در همین لحظه بر حسب** $\frac{ft}{s^2}$ **کدام است؟**



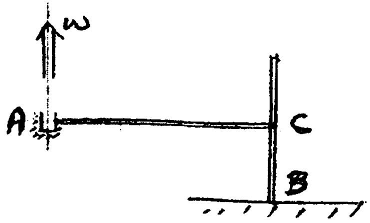
۱) 105
۲) 117
۳) 193
۴) 231

۷ـ **وزنه یک کیلوگرمی بر روی فنر** $K=100\frac{N}{m}$ **در حالت سکون قرار دارد. اگر نیروی ثابت افقـی** $F=100N$ **از طریـق ریسـمان و قرقره B بر وزنه اعمال گردد، سرعت آن در نقطه** A' **کدام است؟**



۱) صفر
۲) $4.10\frac{m}{s}$
۳) $4.55\frac{m}{s}$
۴) نیروی F برای رساندن وزنه به نقطه A' کافی نیست.

۸ـ **چرخ C بدو ن لغزش می‌غلتد در حالی که محور آن مطابق شکل با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. محور دوران چرخ منطبـق بـر .... است.**

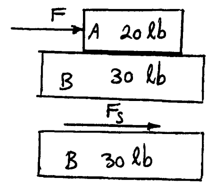


۱) محور ω
۲) خط AB
۳) خط AC
۴) محور دورانی وجود ندارد.

پاسخ تشریحی

۱ـ گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

فرض اول: هر دو بلوک با هم حرکت می‌کنند.



$F=5016\text{lb}$

$$=\frac{F}{m}=\frac{5016}{\frac{50}{32.2}}=3230.304\left[\frac{ft}{s^2}\right]\quad\rightarrow$$

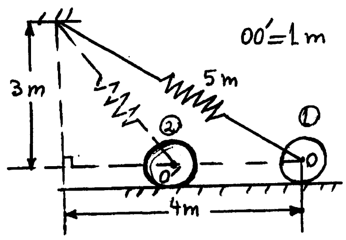
$$F_S=\frac{30}{32.2}a=3009.6\text{lb}\ \leq\mu_S W=0.4\times20=8$$

لذا فرض اول اشتباه است. فرض دوم بلوک A روی بلوک B می‌لغزد و A و B نسبت به هم حرکت نسبی دارند.

$$a_B=\frac{6}{\frac{30}{32.2}}=6.44\left[\frac{ft}{s^2}\right]$$

۲ـ گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

کانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است.

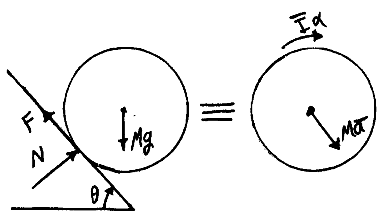


$$\begin{cases}T_1=0\\ V_e)_1=\frac{1}{2}2\times(5-1)^2=16\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_2=\frac{1}{2}I_C\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}+mr^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3mr^2}{2}\right)\omega^2\\ =\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times12(0.5)^2\omega^2=2.25\omega^2\\ V_{e_2}=\frac{1}{2}2\left(3\sqrt{2-1}\right)^2=10.515\end{cases}$$

$$E_1=E_2\quad\rightarrow\quad T_1+V_{e_1}=T_2+V_{e_2}\quad\rightarrow\quad 0+16=2.25\omega^2+10.515\quad\rightarrow\quad\omega^2=2.4379\quad\rightarrow\quad\boxed{\omega=1.5\left[\frac{rad}{s}\right]}$$

۳ـ گزینه (۲) صحیح می‌باشد.



$$N=Mg\cos\theta$$

$$Mg\sin\theta-F=M\bar{a}$$

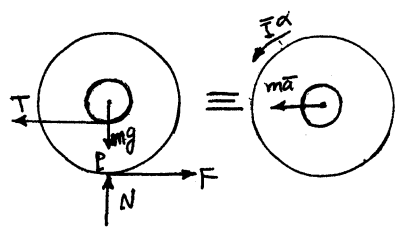
$$rF=\bar{I}\alpha=\frac{Mr^2}{2}\alpha\quad\rightarrow\quad F=\frac{Mr\alpha}{2}$$

با فرض حرکت غلتش بدون لغزش داریم: $\bar{a}=r\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}Mg\sin\theta-F=M\bar{a}\\ F=\frac{M\bar{a}}{2}\end{array}\right\}\quad\rightarrow\quad Mg\sin\theta-F=2F\quad\rightarrow\quad F=\frac{Mg\sin\theta}{3}$$

۴ ـ گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

با فرض غلتش بدون لغزش نتیجه می‌شود: $\bar{a}=R\,\alpha$

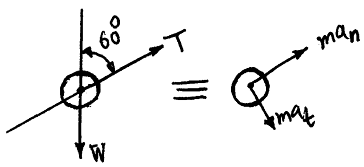


$$\left.\begin{array}{l} T-F=m\bar{a} \\ N=mg \\ \sum M_P=\bar{I}_P\,\alpha \quad \rightarrow \quad T(R-r)=\bar{I}_P\,\alpha \end{array}\right\} \frac{\bar{I}_P}{(R-r)}\frac{\bar{a}}{R}-F=m\bar{a} \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{\bar{I}_P}{(R-r)R}-m\right)\bar{a}=F\le\mu_s\,mg \quad \rightarrow \quad \bar{a}\le\frac{\mu_s\,mg}{\frac{\bar{I}_P}{(R-r)R}-m}$$

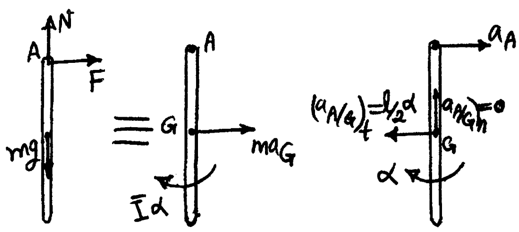
با فرض این‌که $\bar{I}_P=\frac{mR^2}{2}+mR^2$ می‌باشد و اگر از ممان اینرسی طناب حول قرقره صرف‌نظر شود نتیجه می‌شود: $\bar{a}_{max}=\frac{2\mu_s\,g(R-r)}{R+2r}$ بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۵ ـ گزینه (۴) صحیح می‌باشد.



$$\begin{cases} T-W\cos 60=\frac{W}{g}a_n=0 \quad \rightarrow \quad T=\frac{W}{2} \\ W\sin 60=\frac{W}{g}a_t \quad \rightarrow \quad a_t=g\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866g \end{cases}$$

۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$\vec{a}_G=\vec{a}_A+\vec{a}_{G/A}=\vec{a}_A+\left(\vec{a}_{G/A}\right)_n+\left(\vec{a}_{G/A}\right)_t$$

$$a_G=a_A-\frac{\ell}{2}\alpha$$

$$\begin{cases} N=mg \\ F=m\left(a_A-\frac{\ell}{2}\alpha\right) \quad \rightarrow \quad \frac{F}{m}+\frac{\ell}{2}\alpha=a_A \quad \rightarrow \quad a_A=\frac{F}{m}+\frac{3F}{m}=\frac{4F}{m} \\ \sum M_G=\bar{I}\alpha \quad \rightarrow \quad F\frac{\ell}{2}=\frac{m\ell^2}{12}\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{6F}{m\ell} \end{cases}$$

$$a_A=\frac{4\times15}{\frac{10}{32.2}}=193.2\ \left[\frac{ft}{s^2}\right]$$

بنابراین گزینه (۳) جواب صحیح است.

۷ ـ گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

$$\sqrt{20^2+10^2}-10=12.361[cm]$$

مقدار فشردگی اولیه فنر در اثر وزنه یک کیلوگرمی $kx_1 = mg \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1\times10}{100} = 0.1\,m$

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = -mg\times0.2 = -1\times10\times0.2 = -2\,[J] \\ V_e)_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}100\times0.1^2 = 0.5\,[J] \end{cases} \qquad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \\ V_g)_2 = 0 \\ V_e)_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}\times100(0.2-0.1)^2 = 0.5\,[J] \end{cases}$$

$$U = Fd = 100\times0.12361 = 12.361\,[J]$$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad \rightarrow \quad 12.361 = \left(0.5v^2 - 0\right) + (0+2) + (0.5-0.5) \quad \rightarrow \quad 0.5v^2 = 10.361 \quad \rightarrow \quad \boxed{v = 4.552\left[\frac{m}{s}\right]}$$

۸ـ گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

محور دوران منطبق بر خط AB است، چرا که دوران دیسک همانند غلتش محض یک مخروط با محور AC و یال AB روی یک سطح مخروطی با محور عمودی و یال AB است، لذا جواب گزینه ۲ می‌باشد.

یادداشت