فصل اول :

اختلاف درجه حرارتی معادل $85^\circ c$ به لایه‌ای از شیشه به ضخامت $130mm$ اعمال می‌شود. قابلیت هدایتی حرارتی شیشه $0.035 \frac{W}{m \cdot K}$ است. مقدار انتقال حرارت را بر واحد سطح پیدا کنید.

چون K جسم داده شده است بنابراین از قانون فوریه استفاده می‌کنیم :

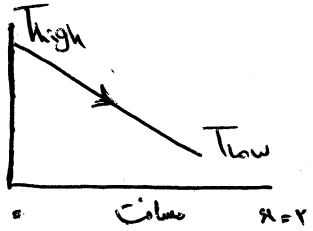
$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$: قانون فوریه برای هدایت

$$q = kA \frac{T_{high} - T_{low}}{L}$$ قانون اصلاح شده فوریه

$$q/A = k \frac{T_{high} - T_{low}}{L} = 0.035 \times \frac{85}{130 \times 10^{-3}} = 22.88 \frac{W}{m^2}$$

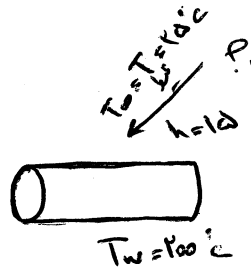
نکته : K می‌تواند دارای واحد $\frac{W}{m \cdot K}$ یا $\frac{W}{m \cdot {}^\circ C}$ باشد

چون $\frac{\partial T}{\partial x}$ ثابت است بنابراین به قانون اصلاح شده فوریه می‌رسیم.



$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{ثابت}$$

مثال: لوله‌ای حاوی بخار در اختیار داریم که در آن هوا و محیط اطراف دارای دمای $25^\circ c$ هستند. قطر خارجی لوله $70mm$ و دمای سطح آن $200^\circ c$ و ضریب انتشار 0.8 می‌باشد. اگر ضریب انتقال حرارت جابجایی از سطح به هوا برابر با $15 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ باشد اتلاف گرما از سطح لوله به ازای واحد طول آن $(\frac{q}{L})$ چقدر است؟



$T_\infty = 25^\circ c$ دمای سیال

$T_w = 200^\circ c$

$\varepsilon = 0.8$

$h = 15 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

$T_s = 25^\circ c$ دمای محیط

$T_{محیط} = T_{سیال} = 25^\circ c$

$$q_{total} = q_{\text{هدایت}} + q_{\text{جابجایی}} + q_{\text{تشعشع}}$$

چون K هوا بسیار کم است بنابراین از انتقال حرارت از طریق هدایت به هوا صرفنظر می‌شود.

$$q_{total} = q_{convection} + q_{radiation}$$

قانون سرمایش نیوتن — قانون استفان-بولتزمن

$$q_{total} = hA(T_w - T_\infty) + \varepsilon \sigma A (T_w^4 - T_s^4)$$

نکته: T_∞ در جابجایی اهمیت دارد، در حالی که T_s (دمای محیط) در تشعشع اهمیت دارد.

بجای A مقدار πDL را قرار می‌دهیم:

$$q_t = h(\pi DL)(T_w - T_\infty) + \varepsilon\sigma(\pi DL)(T_w^4 - T_s^4)$$

$$\frac{q_t}{L} = h\pi D(T_w - T_\infty) + \varepsilon\sigma(\pi D)(T_w^4 - T_s^4) = ۵۵۷ + ۴۲۱ = ۹۷۸ \ \frac{W}{m}$$

مثال) یک وسیله کسروی فضایی به قطر $0.5\,m$ حامل وسایل الکتریکی است که $150\,W$ گرما تولید می‌کند. اگر ضریب صدور سطح 0.8 باشد و این وسیله از منابع دیگر مانند خورشید تابش دریافت نکند دمای سطح آن چقدر است؟

برای کره: $A = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi D^2$

$$q_{radiation} = \varepsilon\sigma A T^4$$ قانون استفان-بولتزمن

$$150 = 0.8 \times 5.67\times10^{-8} \times \pi(0.5)^2 \times T_s^4 \Rightarrow T_s = 254.73\ K$$

مثال) محفظه یک فریزر در زمانی که به کار می‌کند بالایی از برنگ به ضخامت $2\,mm$ پوشیده شده است. انتقال گرما بین برنگ و محیط در شرایط $T_\infty = 20^\circ C$ ، $h = 2\ \frac{W}{m^2.K}$ با جابجایی آزاد می‌باشد. زمان لازم برای آب شدن تمام برنگ را تخمین بزنید. چگالی برنگ $\rho_\infty\ \frac{kg}{m^3}$ و گرمای نهان ذوب آن (گرمای گداخت) را برابر $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$ ۳۳۴ در نظر بگیرید.

حل) از تشعشع صرف‌نظر کنید. چون h و T_∞ را داریم بنابراین جابجایی اهمیت دارد.

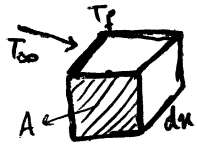
نکته: در صورتی که تغییر فاز صورت گیرد از دو رابطهٔ زیر می‌توان استفاده کرد:

برای مایع به بخار (جوشش Boiling):

$$q_{Boiling} = m_{evp} \times h_{fg}$$

برای تبدیل جامد به مایع از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$q_{Fusion} = m\, h_{fg}$$
گداخت — گرمای گداخت



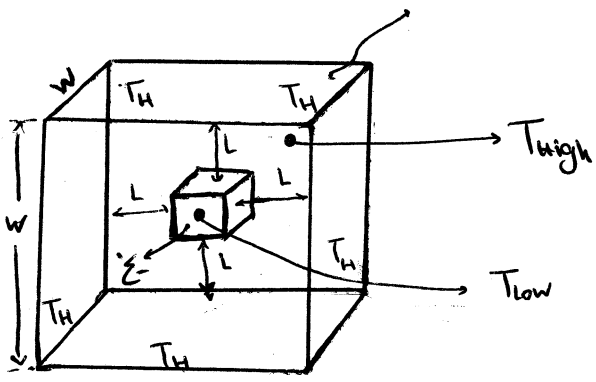
انتقال حرارت از طریق جابجایی = مقدار گرمای لازم برای تبدیل یخ (برنگ) به آب

$$hA(T_\infty - T_f) = \frac{\rho A\,dx}{t} h_{sf} \Rightarrow t = \frac{\rho h_{sf}\,dx}{h(T_\infty - T_f)} = \frac{\rho_\infty\left(\frac{kg}{m^3}\right)\times 334\times10^3\left(\frac{J}{kg}\right)\times 0.002\ m}{2\left(\frac{W}{m^2.^\circ C}\right)(20-0)^\circ C}$$

یخ

$$t = 11290\,(s) = 3.2\ hr$$

مثال) یک قطعه به جرم m در دمای ذوب $0^\circ c$ در یک حفرهٔ مکعبی از جنس آهن به طول ضلع W قرار دارد. فاصلهٔ حبارهٔ حفره تا L و ضریب رسانایی گرمایی آن K می‌باشد. اگر دمای سطح بیرونی (T_{high}) حباره بیشتر از دمای ذوب باشد عبارتی برای زمان مورد نیاز برای ذوب کامل یخ به دست آورید.



حل:

چون K فلز را داریم بنابراین از طریق هدایت انتقال حرارت به یخ صورت می‌گیرد

$$q_{\text{هدایت در آهن}} = KA\frac{T_{high}-T_{low}}{L}$$

دمای یخ

$$A = 6W^2$$

چون ۶ تا سطح است و همه سطح با یکدیگر برابر هستند.

مقدار گرمای هدایتی باید با گرمای لازم برای تبدیل از حالت جامد به مایع برابر باشد:

برای جامد از m استفاده می‌کنیم

$$q = m\, h_{sf}$$

$$t = \frac{m\, h_{sf} \cdot L}{6W^2 K(T_{high}-T_{low})}$$

مثال) یک گرمکن برقی به شکل استوانه‌ای به طول 200mm و قطر خارجی D = 20mm ساخته شده است. این گرمکن در شرایط کارکرد عادی مقدار 2KW گرما تولید می‌کند. این در حالی است که گرمکن در جریان آب با دمای $20^\circ c$ و ضریب جابجایی $h = 5000\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ است. با صرف‌نظر از انتقال حرارت از دو انتهای گرمکن دمای سطح آن را محاسبه کنید. اگر هنگام کار جریان آب ناگهان قطع شود و جریان هوا با دمای $20^\circ c$ و ضریب جابجایی $50\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ برقرار است. دمای سطح گرمکن چقدر خواهد بود؟

حل) انتظار داریم که با تغییر سیال آب به جای هوا دمای سطح افزایش یابد بنابراین در حالت اول در زمانی که آب به عنوان یک سیال استفاده می‌شود داریم:

$$q = hA(T_w - T_\infty) \Rightarrow q = h\pi DL(T_w - T_\infty) \Rightarrow T_w = T_\infty + \frac{q}{h\pi DL}$$

$$T_s = 20 + \frac{2000}{5000 \times \pi \times 0.02 \times 0.2} = 51.8^\circ c$$ آب به عنوان سیال

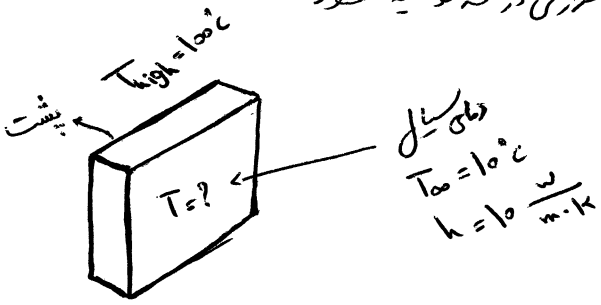
اگر از هوا بخواهیم استفاده کنیم:

$$T_s = 20 + \frac{2000}{50 \times \pi \times 0.02 \times 0.2} = 3203^\circ c$$

مثال) با استفاده از معادلهٔ بقای حرارت، شار حرارتی را برای حالت زیر به دست آورید:

دمای یک طرف دیوار تخت $100^\circ c$ می‌باشد و طرف دیگر آن در محیطی جابجایی با $T_\infty = 10^\circ c$ و $h = 10\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ قرار دارد. دیوار مذکور دارای $k = 1.6\ \frac{W}{m \cdot K}$

ضخامت ۴۰cm می‌باشد. فرض کنید که هیچ حرارتی جذب صفحه نشده و هیچ حرارتی در صفحه تولید نشود.



حل)

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} + \dot{E}_{out}$$

هیچ حرارتی تولید و ذخیره نمی‌شود:

$$\Rightarrow q_{in} + q_g = q_{st} + q_{out}$$

$$\Rightarrow q_{in} = q_{out} \Rightarrow q_{\text{هدایت}} = q_{\text{جابجایی}}$$

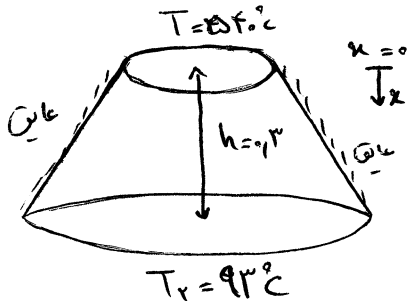
$$k\cancel{A}\frac{T_{high} - T}{L} = h\cancel{A}(T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow 1{,}6 \times \frac{100 - T}{0{,}4} = 10(T - 10) \Rightarrow T = 35°C$$

برای به دست آوردن شار حرارتی از قانون فوریه استفاده می‌شود:

$$q = kA\frac{T_{high} - T}{L} \Rightarrow \frac{q}{A} = k\frac{T_{High} - T}{L} \Rightarrow 1{,}6 \times \frac{100 - 35}{0{,}4} \Rightarrow \frac{q}{A} = 257 \frac{W}{m^2}$$

تمرین: مخروط ناقص به ارتفاع ۰٫۳m از آلومینیوم ساخته شده است. قطر آن در بالا ۷۵ cm و در کف ۱۲٫۵ cm می‌باشد. دمای سطح زیرین ۹۳°c و دمای سطح فوقانی ۵۴۰°c است. سطح جانبی عایق شده است. با فرض اینکه جریان یک بعدی و در جهت x انجام می‌شود مقدار انتقال گرما را به دست آورید؟



$$k_{\text{آلومینیوم}} = 231{,}3 \frac{kW}{m \cdot K}$$

روش‌های به دست آوردن مقدار انتقال حرارت:

(۱) از قانون فوریه، سرمایش نیوتن و استفان-بولتزمن استفاده می‌کنیم تا مقدار انتقال حرارت را به دست آوریم:

$$q = kA\frac{T_{High} - T_{low}}{L}$$ قانون فوریه فقط برای هدایت

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$ قانون سرمایش نیوتن فقط برای جابجایی

$$q = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{\text{محیط}}^4)$$ قانون استفان-بولتزمن برای تشعشع

از سه قانون فوق q را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{q}{L} = q'$$ انتقال حرارت بر واحد طول

$$\frac{q}{A} = q''$$ انتقال حرارت برای واحد سطح (شار حرارتی)

(۲) درصورت تغییر فاز (phase change) مثلاً از مایع به گاز Boiling یا جوشش و از جامد به مایع که به گرمای گداخت (Fusion) معروف است:

$q_{Boiling} = \dot{m}_{evp}\, h_{fg}$ مایع به گاز واحد: $\frac{kg}{s} \times \frac{J}{kg} = \frac{J}{s} = W$

$q_{Fusion} = \dot{m}\, h_{sf}$ جامد به مایع (h_{sf} آنتالپی گداخت) واحد: $\frac{kg}{s} \times \frac{J}{s} = \frac{J}{s} = W$

(۳) با داشتن تغییر دما و ظرفیت گرمایی c می‌توان مقدار q را حساب کرد:

$c = c_v = c_p$ برای جامدات

$q_h = \dot{m} c \Delta T$ $\left(\frac{kg}{s} \times \frac{J}{kg\,^\circ C} \times \frac{^\circ C}{1}\right) = \frac{J}{s} = W$

$\dot{m} = \dot{M} = \frac{m}{t} = \frac{M}{t}$

(۴) درصورتی که مقاومت الکتریکی Re را داشته باشیم و شدت جریان I باشد: $q = I^2 Re$ $(Amp)^2 \cdot \Omega = W$

(۵) درصورتی که انرژی داخلی را داشته باشیم:

$E = \Delta U$

$E = m h_{sf}$ $\dot{E} = q = \frac{E}{t}$ (J/s)

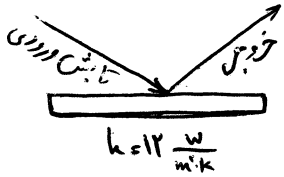
تمرین ۵۵) سقف یک ماشین ۸۰۰ $\frac{W}{m^2}$ تابش خورشیدی را جذب می‌کند. درحالی که سطح زیر آن عایق بندی فرض شود و ضریب جابجایی بین سقف و هوای محیط ۱۲ $\frac{W}{m^2 \cdot K}$ یا ۱۲ $\frac{W}{m \cdot ^\circ C}$ باشد دمای سطح سقف را درحالیکه شرایط پایدار یا دائم یا پایا باشد بدست آورید. اگر دمای هوای بیرون ۲۰°c باشد.

حل)

نکته: واحد K می‌تواند $\frac{W}{m \cdot K}$ یا $\frac{W}{m \cdot ^\circ C}$ باشد. همچنین واحد h می‌تواند $\frac{W}{m^2 \cdot K}$ یا $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ باشد

نکته: شرایط دائم یا پایدار است اگر $\frac{\partial T}{\partial t}$ برابر با صفر است یعنی تغییرات دما نسبت به زمان صفر باشد

$\frac{dT}{dt}$ یک بعدی	$\frac{\partial T}{\partial t}$ چند بعدی



$G = 800\ \frac{W}{m^2}$ تابش خورشیدی جذب شده

معادله بقای انرژی را می‌نویسیم: $q_{in} + q_g = q_{st} + q_{out} \Rightarrow q_{in} = q_{out}$

q_g: هیچ جریان الکتریسیته عبور نمی‌کند که بخواهد انرژی تولید کند.

q_{st}: چون پایدار است.

$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow \frac{q}{A} = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 800 = 12(T_s - (273 + 20)) \Rightarrow T_s = 359\ K = 86.6\ ^\circ C$

مثال) گرمای هدر رفته از دیواری گچی با ضریب رسانایی حرارتی ۰/۷۵ $\frac{W}{m \cdot K}$ (چون کم است عایق است) برابر ۸۰٪ نرخ انتقال حرارت از یک دیوار

با ضریب رسانایی حرارتی $0.25 \frac{W}{m \cdot K}$ و ضخامت $100\ mm$ است. اگر اختلاف دمای سطح درونی و بیرونی در دو دیوار یکسان باشد ($\Delta T_1 = \Delta T_2$) ضخامت دیواره گچی چقدر است؟ فرض شود که مساحت هر دو سطح یکی باشد. ($A_1 = A_2$)

حل)

$$\left.\begin{aligned} q_{h_1} &= K_1 A \frac{\Delta T_1}{L_1} \\ q_{h_2} &= K_2 A \frac{\Delta T_2}{L_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{K_1}{K_2} \times \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{K_1}{K_2} \cdot L_2$$

$$q_1 = 0.8\, q_2 \longrightarrow L_1 = \frac{q_2}{0.8 q_2} \times \frac{0.75}{0.25} \times 100 \times 10^{-3} \longrightarrow L_1 = 375 \times 10^{-3}\ m = 375\ mm$$

تمرین ۵۲) شانه یا کارتن مقوایی تخم مرغ پس از شکل گیری در خلاء بمدت ۱۸ s روی تسمه نقاله ای حرکت کرده و آنگاه وارد یک کوره گاز سوزی می شود تا رطوبت آن به مدت مطلوب کاهش یابد. برای افزایش ظرفیت خط تولید پیشنهاد شده که تعدادی گرمکن تابشی مادون قرمز بالای تسمه نقاله نصب شود که شار گرمایی $500 \frac{W}{m^2}$ را تأمین کند. سطح کارتن $0.0625\ m^2$ و جرم آن قبل از ورود به تسمه نقاله $0.221\ kg$ است که 0.75 آن را بعد از فرآیند شکل دادن آب تشکیل می دهد. پیشنهاد خرید گرمکن ها در صورتی به تأیید مدیر فنی خواهد رسید که درصد رطوبت کارتن در حین عبور از تسمه نقاله از 75% به 65% برسد. آیا این پیشنهاد را تأیید می کنید؟ گرمای نهان تبخیر آب $2400 \frac{kJ}{kg}$

حل)

$$h_{fg} = 2400 = 2400 \times 10^3 \frac{J}{kg}$$

شرایط خلاء فرض می شود زیرا می خواهیم انتقال حرارت از طریق جابجایی نداشته باشیم همچنین ضریب انتشار یا ضریب صدور یا ε نداشته است بنابراین از تشعشع صرفنظر می کنیم. چون زمان انتقال حرارت معلوم می باشد بنابراین معادله بقای انرژی بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} q_{in} + q_g = q_{st} + q_{out} \\ \dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} + \dot{E}_{out} \end{cases}$$

اگر زمان انتقال حرارت معلوم باشد معادله بقای انرژی بصورت زیر نوشته می شود:

$$E_{in} + E_g = E_{st} + E_{out}$$

راه حل اول: اول گرمای داده شده را بدست می آوریم:

$$q_{in} = q'' A \times \text{زمان}$$

گرمای داده شده به شانه تخم مرغ:

$$E_{in} = q_{in} = 500 \times 0.0625 \times 18 = 562.5$$

اگر گرمای مورد نیاز را حساب می کنیم که باید برحسب ژول باشد:

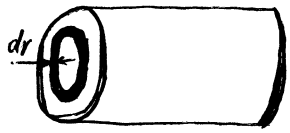
گرمای مورد نیاز: $q_{evp} = 0.22 \times 2400 \times 10^3 (0.75 - 0.65) = 52800\ (J)$ وقتی تغییر فاز داریم $\Leftarrow$ $q_{evp} = M h_{fg}$

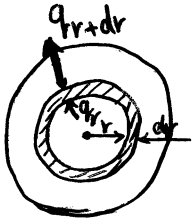
چون گرمکن گرمای $\dot{q}$ ۵۶۲۵ به ما تحویل می‌دهد بنابراین دستگاه مورد نظر می‌تواند گرمای مورد نیاز را تأمین کند و نمی‌تواند خریداری شود.

گرمای مورد نیاز: $q_{in} > q$ گرمای داشته

تمرینات فصل ۲

تمرین ۱) اگر یک جزء از لوله‌ای به ضخامت dr در فاصله‌ی r از مرکز داشته باشیم معادله‌ی انرژی (حرارت) برای المان انتخاب شده را به دست آورید. فرض کنید که استوانه توپری باشد. بنابراین:





حل) $A = 2\pi r L = \pi D L$

q_r حرارت ورودی به المان

q_{r+dr} حرارت خروجی از المان

نکته: برای یک دیواره با منبع حرارتی ثابت کردیم که:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c}$$

اکنون می‌خواهیم برای یک استوانه معادله هدایت را پیدا کنیم:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{out} + \dot{E}_{st}$$

$$q_{in} + q_g = q_{out} + q_{st} \quad \text{(I)}$$

$$q_{in} = q_r = -kA\frac{\partial T}{\partial r} = -k(2\pi r L)\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\dot{q}_g = \dot{q}V \left(\dot{q} = \frac{W}{m^3} = \frac{\text{حرارت تولید شده}}{\text{حجم}}\right) = \dot{q}A\,dr = \dot{q}\,2\pi r L\,dr$$

چون تغییرات در جهت شعاع است

$$q_{out} = q_{r+dr} = -k\,2\pi\frac{r}{3}L\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{\frac{r}{1}+\frac{dr}{3}}$$

بسط تیلور: $= \underbrace{-k\,2\pi r L\frac{\partial T}{\partial r}}_{1} \underbrace{- k\,2\pi r L\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}dr}_{2} \underbrace{- k\,2\pi L\frac{\partial T}{\partial r}dr}_{3}$

$$q_{st} = \rho V c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \rho A\,dr\,c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \rho\,2\pi r L\,dr\,c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر مقادیر فوق را در معادله‌ی بقاء حرارت (I) (انرژی) قرار دهیم:

اکنون طرفین را بر $2k\pi r L\,dr$ (ضرایب $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$) تقسیم می‌کنیم و به جای $\frac{k}{\rho c_p}$ مقدار α را قرار دهیم:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}} \longrightarrow$$

معادله‌ی کلی هدایت برای یک استوانه با منبع حرارتی ناپایدار

تمرین ۲) توزیع دمای دائم در یک دیواره‌ی یک بعدی با ضریب رسانایی گرمایی k و ضخامت L به صورت زیر می‌باشد.

$T(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بیان شده است، که در آن x فاصله از لبه می‌باشد. فرمولی یا عبارتی برای نرخ تولید گرما بر واحد حجم ($\dot{q}$)

برای این دیواره در $x=0$ روی سطح و $x=L$ در انتهای سطح بدست آورید.

حل)

نکته: فرمول هدایت کلی برای دیواره بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot q}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$ (یک بعدی)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot q}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$ سه بعدی

از معادله داده شده مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=3ax^2+2bx+c$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=6ax+2b \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot q}{k}=0 \quad (\mathrm{II})$$ چون جریان دائم است

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \Rightarrow 6ax+2b+\frac{\dot q}{k}=0 \longrightarrow \dot q=-k(6ax+2b)$$

$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow \dot q=-k(2b) \\ x=L \Rightarrow \dot q=-k(6aL+2b) \end{cases}$$

تمرین ۲) در یک لحظه توزیع دمای یک جسم همگن و بینهایت بزرگ بصورت تابع زیر داده شده است:

$$T(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2-xy+2yz$$

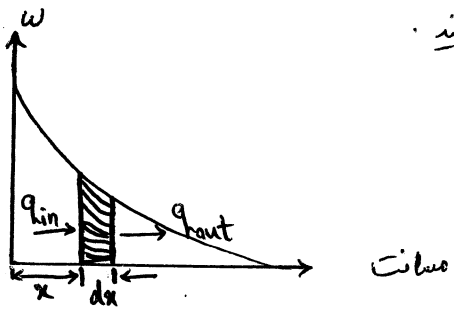
با فرض خواص ثابت و بدون تولید حرارت داخلی نشان دهید که جریان پایدار است.

حل:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+\frac{\partial}{\partial y}(-4y-x+2z)+\frac{\partial}{\partial z}(2z+2y)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

مشتق دوم: $2-4+2=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}=0$ بنابراین پایدار است.

تمرین ۴) توزیع دما در یک دیوار که در آن تولید حرارت صورت نمی گیرد در یک فرآیند گذرا با معادله زیر داده شده است. آیا دیواره در حال سرد شدن است یا گرم شدن؟ با استفاده از قانون بقای حرارت این مسئله را ثابت کنید.



حل) برای حل این مسئله یک المان به ضخامت dx انتخاب می کنیم. بنابراین از معادله حرارت استفاده کرده و ثابت می کنیم که دیواره در حال سرد شدن است.

تولید حرارت نداریم

$$\dot E_{in}+\dot E_g=\dot E_{st}+\dot E_{out} \Rightarrow \dot q_{in}+\cancel{\dot q_g}=\dot q_{st}+\dot q_{out} \Rightarrow \dot q_{in}=\dot q_{st}+\dot q_{out} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -KA\frac{\partial T}{\partial x}=-KA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+dx}+\rho V c\frac{\partial T}{\partial t}$$

طرفین را بر $\rho V c$ تقسیم می کنیم تا $\frac{\partial T}{\partial t}$ را حساب کنیم:

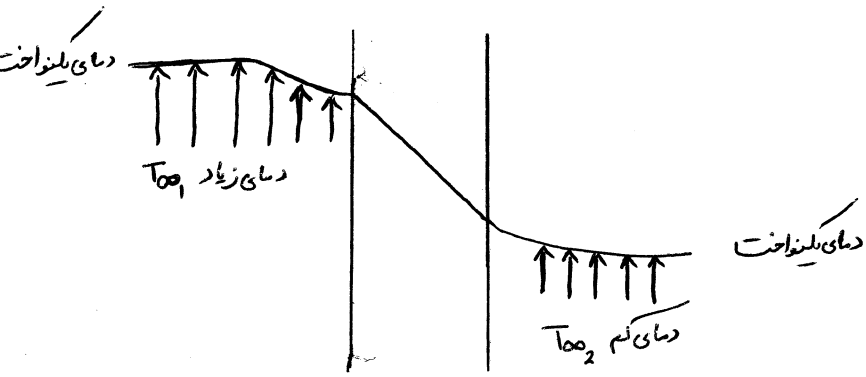
$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{KA}{\rho V c}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+dx}-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x}\right]$$

اگر ثابت کنیم که $\frac{\partial T}{\partial t}$ منفی باشد بنابراین دیواره در حال سرد شدن است بنابراین:

چون $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x} > \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+dx}$ می‌باشد. در نتیجه مشخص است که $\frac{\partial T}{\partial t}$ منفی خواهد بود.

برای دیواره: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} \rightarrow 0$ حالت پایدار

در حالت یک بعدی: $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \rightarrow k\frac{d^2T}{dx^2} + \cancel{\dot{q}} = 0$ منبع حرارتی نداریم $\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0}$



هدایت
$$\begin{cases} q = kA\frac{\Delta T}{L} \\ q = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}} = \frac{\Delta T}{R} \end{cases}$$
مقاومت هدایتی

جابجایی
$$\begin{cases} q = hA\Delta T \\ q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R} \end{cases}$$
مقاومت جابجایی

$q_x = \frac{\text{دمای ثانویه} - \text{دمای اولیه}}{\text{مقاومت کلی}}$ ، فرمول (11-3)

معادله کلی هدایت برای استوانه با منبع حرارتی و ناپایدار: $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}$ پایدار $\rightarrow k\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \cancel{\dot{q}} = 0$ منبع حرارتی نداریم

برای یک بعدی: $\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[kr\frac{dT}{dr}\right] = 0}$

مقاومت هدایتی برای استوانه $= \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$

کره
$$\begin{cases} R_{\text{هدایت}} = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi k} \\ R_{\text{جابجایی}} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{h(4\pi r^2)} \end{cases}$$

اگر h زیاد باشد R جابجایی قابل صرف‌نظر است چون جوشش در داخل کره انجام می‌شود

معادله کلی هدایت برای کره: $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^n}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

برای دیواره $x = 0$ $n = 0$

برای استوانه $q = 2$ $n = 1$

برای کره $q = 2$ $n = 2$

مثال) توزیع درجه حرارت در یک دیوار تخت از رابطه زیر محاسبه می‌شود: $T(x) = a + b\sinh x + c^{dx^2}$

با فرض اینکه $b = -5\ \frac{K}{m}$ باشد، مقدار انتقال حرارت را برای دیواره‌هایی با مساحت $10m^2$ در نبود ورود به دیواره $x = 0$ پیدا کنید. ضریب

هدایتی دیواره را $40\ \frac{W}{m.K}$ فرض کنید.

حل)

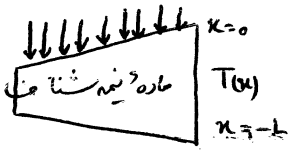
چون K دیواره را داریم پس از فوریه استفاده می‌کنیم: $q = -KA\frac{dT}{dx}$ $\qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

چون گفته در بدو حرکت $x=0$

$$\frac{dT}{dx} = 0 + b\,\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + 10\cos x \Rightarrow \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = b\times\frac{1+1}{2} + 0 = b$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -5\ \frac{K}{m} \qquad q_{in} = -KA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = (-40)\times 10\times(-5) = 2000\,W = 2\,KW$$

مثال) توزیع دمای دائم پایدار در یک ماده‌ی نیمه شفاف که حرارت را از خود عبور می‌دهد و ضریب رسانایی آن K و ضخامت L مطابق شکل زیر در معرض شار تشعشعی قرار گرفته و بصورت زیر می‌باشد: $T(x) = -\frac{A}{Ka^{2}}e^{-ax} + Bx + C$ که در آن A و a و b و c ثابتهای معلوم می‌باشند. در این وضعیت جذب تابش در ماده باعث تولید گرمای داخلی متغیر $\dot{q}(x)$ می‌شود



الف) عبارت کلی (فرمول کلی) برای شار حرارتی در سطح بالا و پائین (q'') بدست آورید.

ب) عبارت (فرمولی) برای $\dot{q}_x$ پیدا کنید.

حل)

$$q'' = \frac{q}{A} = -K\frac{dT}{dx}$$

$$T(x) = -\frac{A}{Ka^{2}}e^{-ax} + Bx + C \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{A}{Ka^{2}}\left(-ae^{-ax}\right) + B$$

$$q''_{x=0} = -K\left[\frac{Aa}{Ka^{2}} + B\right] = -\left[\frac{A}{a} + KB\right]$$ شار حرارتی برای ورود به سطح

$$q''_{x=L} = -K\left[\frac{A}{Ka}e^{aL} + B\right] = -\left[\frac{A}{a}e^{aL} + KB\right]$$ شار حرارتی در $x=-L$

چون انتقال حرارت یک بعدی (در جهت x) می‌باشد بنابراین برای دیواره با منبع حرارتی:

$$\frac{d^{2}T}{dx^{2}} + \frac{\dot{q}}{K} = \frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{dT}{dt}}^{\,0} \quad \text{پایدار} \qquad \Rightarrow \frac{d^{2}T}{dx^{2}} = \frac{Aa}{Ka^{2}}(-a)e^{-ax} = \frac{-A}{K}e^{-ax}$$

$$\Rightarrow \frac{d^{2}T}{dx^{2}} + \frac{\dot{q}(x)}{K} = 0 \quad \text{دیوار با منبع حرارتی و پایدار} \qquad \Rightarrow \dot{q}(x) = K\left(\frac{A}{K}e^{-ax}\right) = Ae^{-ax}$$

فصل سوم: پره ها

یکی از روش هایی که در صنعت استفاده می شود تا ضریب انتقال حرارت افزایش یابد استفاده از پره می باشد. پره ها معمولاً به شکل مستطیلی، پرهٔ سوزنی (Pin)، پره شعاعی و پرهٔ مثلثی می باشد. معمولاً بهترین پره زمانی می باشد که با استفاده از فرمول کارایی پره $\varepsilon_{fin} = \left(\frac{kP}{hA_c}\right)^{\frac{1}{2}}$ بهترین و بیشترین کارایی را داشته باشد.

(۱) بنابراین با افزایش k، کارایی پره افزایش می یابد. بعضاً مثال در صنعت از آلومینیوم و مس یا آهن استفاده می کنند مانند سیلندر ماشین یا کندانسور پشت یخچال.

(۲) کارایی پره ها با افزایش نسبت $\frac{P}{A_c} = \frac{\text{محیط}}{\text{سطح مقطع}}$ افزایش می یابد. بهمین علت از پره های نازک با فاصلهٔ کم استفاده می شود

(۳) بر طبق فرمول کارایی پره، استفاده از پره هنگامی که ضریب جابجایی h کوچک می باشد بیشتر قابل توجیه است. بنابراین هنگامی که یک سیال گازی باشد به ویژه زمانی که انتقال حرارت از طریق جابجایی آزاد صورت گیرد نیاز بیشتری به پره می باشد. بعضاً مثال در رادیاتور ماشین پره ها همیشه در خارج رادیاتور نصب می شوند چون در داخل h آب زیاد می باشد و نیازی به پره نیست.

(۴) بطور کلی زمانی از پره استفاده می شود که ε_f یعنی کارایی پره بزرگتر یا مساوی ۲ باشد: $\boxed{\varepsilon_f \geq 2}$

بطور کلی در صنعت از پره های شعاعی استفاده می شود و علت آن این است که این پره ها دارای بازده بیشتری نسبت به پرهٔ مستطیلی، پرهٔ مثلثی و پره سهمی (نوک تیز) می باشند ◁ نوک تیزی (نوک تیز) بعد از آن پره های مثلثی نسبت به پره های مستطیلی بدلیل نیاز کمتر به ماده بهتر می باشد. پره های سهمی بدلیل هزینه زیاد در هنگام ساخت آنها بندرت بکار می روند. برای بدست آوردن بازده پره تقسیم بندی زیر را انجام می دهیم

۱- پره طویل باشد. ۲- پره متوسط باشد و اتلاف حرارت از نوک پره بسیار کم باشد. ۳- پره کوتاه باشد.

مطابق جدول زیر

اندازه پره	انتقال حرارت از پره	بازده
پرهٔ طویل $L > 10mt$	$q_f = \sqrt{hPKA_c}\,(T_s - T_\infty)$	$\eta = \frac{1}{mL}$
پرهٔ متوسط $20mt < L < 100mt$	$q_f = \sqrt{hPKA_c}\,(T_s - T_\infty)\tanh mL$	$\eta = \frac{\tanh mL}{mL}$
پره کوتاه $L < 20mt$	$q_f = \sqrt{hPKA_c}\,(T_s - T_\infty)\,*$	$\eta = \frac{*}{mL}$

$$* = \frac{\sinh mL + \frac{h}{mL}\cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{mL}\sinh mL}$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \sqrt{hPKA_c} \\ \theta_b = T_s - T_\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

نتیجه:

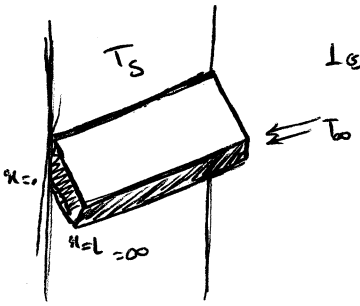
پره طویل: $q_f = M\theta_b$

پره متوسط: $q_f = M\theta_b \tanh mL$

پره کوتاه: $q_f = M\theta_b *$

پره طویل:

اگر طول پره بسیار زیاد باشد و یا بعبارتی: $L \gg 100t$ نرخ انتقال گرما یا نرخ انتقال حرارت از پره q_f به روش زیر محاسبه می‌شود:



پره مستطیلی تخت

شرط مرزی ۱ B.C.1 $\quad x=0 \Rightarrow T=T_s \quad \theta_b=\theta_0=T_s-T_\infty$ (base)

چون جواب عمومی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید: $\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$

چون $x=0$ می‌باشد بنابراین جواب عمومی بشکل زیر تبدیل می‌شود: $\theta_0 = c_1 + c_2 \quad (I)$

شرط مرزی دوم B.C.2 $\quad x=\infty \Rightarrow T=T_\infty \Rightarrow \theta = T_\infty - T_\infty = 0$

در جواب عمومی جایگزین می‌کنیم: $0 = c_1 e^{m\times\infty} + \cancel{c_2 e^{-m\times\infty}}^{\,0} \quad (II)$

با حل ۲ معادله I و II مقادیر c_1 و c_2 را پیدا می‌کنیم: از معادله I $\Rightarrow c_2=\theta_0$ $\quad$ از معادله II $\Rightarrow c_1=0$

اکنون مقادیر c_1 و c_2 را جایگزین می‌کنیم: (در جواب عمومی) $T-T_\infty=(T_s-T_\infty)e^{-mx} \quad \theta=\theta_0 e^{-mx}$

برای محاسبه انتقال حرارت جابجایی از پره از قانون سرمایش نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$dq_f = h\underbrace{p\,dx}_{A}(T-T_\infty) \xrightarrow{T-T_\infty \text{ جایگزین بجای}} dq_f=\int_0^\infty hp(T_s-T_\infty)e^{-mx}\,dx$$

$$=q_f = hp(T_s-T_\infty)\times\frac{-1}{m}e^{-mx}\Big|_0^\infty = \frac{-hp}{m}(T_s-T_\infty)\cancel{e^{-m\times\infty}}^{\,0} + \frac{hp}{m}(T_s-T_\infty)e^{-m\times 0}$$

$$q_f=\frac{hp}{m}(T_s-T_\infty)$$

بجای m مقدار قرار می‌دهیم:

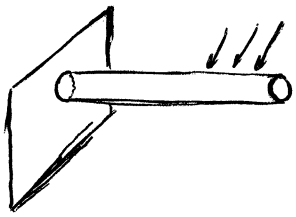
$$q=\frac{hp}{\sqrt{\frac{hp}{kA_c}}}(T_s-T_\infty) \Rightarrow \boxed{q_f=\sqrt{hpkA_c}\,(T_s-T_\infty)}$$

$$\eta=\frac{q_{\text{حقیقی}}}{q_{\text{ایده‌آل}}}=\frac{q_f}{q_{max}}=\frac{\sqrt{hpkA_c}\,(T_s-T_\infty)}{hpL\,(T_s-T_\infty)} \Rightarrow \eta=\frac{\sqrt{kA_c}}{\sqrt{hp}}\times\frac{1}{L} \Rightarrow \boxed{\eta=\frac{1}{mL}}$$

چون ماکزیمم است.

نکته: هرچه طول پره زیادتر باشد بازده کمتر می‌شود

مثال در مورد پره‌ی طویل: انتهای یک پره‌ی سوزنی مطابق شکل زیر (pin Fin) با سطح مقطع دایره‌ای در دمای $100^\circ c$ قرار دارد. طول پره طویل است. اگر قطر پره $5mm$ و سطح میله در هوای محیط $25^\circ c$ و ضریب جابجایی $100\ \frac{W}{m^2\cdot k}$ مرکز گرفته باشد. و جنس میله از مس با $k=398\ \frac{W}{m\cdot k}$ باشد، مقدار گرمای هدر رفته از پره سوزنی را حساب کنید.



$T_\infty = 25^\circ C$

$h = 100 \ \frac{W}{m^2 \cdot K}$

حل)

چون پره طویل است:

$$q_f = \sqrt{hpkA_c}\,(T_s - T_\infty)$$

سطح مقطع $A_c = \frac{\pi d^2}{4}$

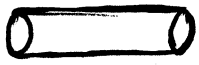
محیط $P = \pi D$

$$\Rightarrow q_f = \sqrt{100(\pi \times 0{,}005) \times 398 \times (\frac{\pi}{4} \times 0{,}005^2)}\ (100 - 25) = 8{,}3 \ W$$

مثال) یک میله گرد بسیار بلند (طویل) آلومینیومی از یک سر به یک دیوار گرم متصل است و در اثر جابجایی به سیال سرد محیط گرما منتقل می‌شود.

الف) اگر قطر میله 3 برابر شود نرخ انتقال حرارت (q_f) چه تغییری خواهد کرد؟ (ب) اگر بجای آلومینیوم از مس استفاده شود نرخ انتقال گرما چه تغییری خواهد نمود؟

حل)



$$q_f = \sqrt{hpkA_c}\,(T_s - T_\infty) \rightarrow \begin{cases} A_c = \frac{\pi D^2}{4} \\ P = \pi D \end{cases} \rightarrow q_f = \left(h\pi D k \frac{\pi D^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_b$$

$$q_f = \frac{\pi}{2}(hk)^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}} \theta_b$$

اگر قطر میله ۳ برابر شود: $\frac{q_f(3D)}{q_f(D)} = \frac{\frac{\pi}{2}(hk)^{\frac{1}{2}}(3D)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{2}(hk)^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{3}{2}} = 5{,}2$

(ب) اگر بجای آلومینیوم از مس استفاده کنیم:

$K_{\text{آلومینیوم}} = 240 \ \frac{W}{m \cdot K}$

$K_{\text{مس}} = 400 \ \frac{W}{m \cdot K}$

می‌دانیم که: $q_f \propto K^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{q_f(Cu)}{q_f(AL)} = \left(\frac{K_{Cu}}{K_{AL}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{400}{240}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}29$$

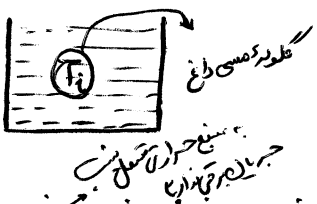
فصل پنجم : رسانش گذرا (غیر پایدار)

بسیاری از مسائل انتقال حرارت به زمان بستگی دارد که این نوع انتقال حرارت، انتقال حرارت گذرا، غیر دائم یا ناپایدار (unsteady state) گفته می‌شود. انتقال حرارت گذرا به دو روش بررسی می‌شود:

۱) روش فشرده ۲) روش غیر فشرده

۱) روش فشرده:

هنگامی که گرادیان دما در داخل جسم کوچک باشد می‌توان از این روش استفاده کرد. بنابراین دما در یک زمان مشخص در تمام نقاط جسم یکسان است. بعنوان مثال اگر یک گلوله داغ از جنس فلز که بسیار کوچک است در دمای یکنواخت T_i قرار دارد (initial (اولیه)) و در مایعی با دمای سرد T_∞ قرار می‌گیرد می‌خواهیم زمان سرد شدن این گلوله را پیدا کنیم:



T_i = دمای اولیه گلوله داغ $\qquad$ T_∞ = دمای سرد سیال

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} + \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{E}_{st} = -\dot{E}_{out}$$

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = \left[-h A_s (\overset{\text{دمای نهایی}}{T} - T_\infty)\right]$$

نکته: برای جامدات: $c = c_p = c_v$ چون تغییرات حجم و فشار نداریم.

$$\rho V c \frac{d\theta}{dt} = -h A_s \theta \Rightarrow \int_0^t dt = -\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{\theta} \Leftarrow \left.\begin{array}{l}\theta = T - T_\infty \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}\end{array}\right\} \text{فرض}$$

$$\boxed{t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta}} \quad (I)$$

$$\boxed{t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}} \quad (II)$$

$\frac{\rho V c}{h A_s}$ را ثابت زمانی می‌نامیم و با τ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم معادله (II) را ساده‌تر کنیم. بنابراین L_c که طول مشخصه می‌باشد بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

برای دیواره تخت: $L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{L^3}{L^2} = L \Rightarrow t = \frac{\rho L_c}{h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$

برای استوانه: $L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi r^2 L}{2\pi r L} = \frac{r}{2} \Rightarrow t = \frac{\rho r c}{2h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$

برای کره: $L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} \Rightarrow t = \frac{\rho r_c}{3h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$

نمودارهای جریان گذرا:

می‌خواهیم نموداری برحسب $\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}$ و زمان رسم کنیم. برای اینکار از معادله (I) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-\frac{t}{\rho V c / hA_s}} \qquad (III)$$

الف) اگر زمان صفر باشد:

$$t=0 \longrightarrow e^0 = 1 \Rightarrow \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = 1 \longrightarrow \boxed{T_i = T_\infty}$$

ب) اگر زمان بی‌نهایت باشد:

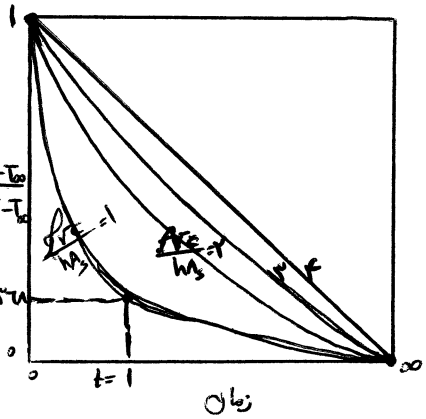
$$t=\infty \longrightarrow e^\infty = 0 \Rightarrow \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = 0 \longrightarrow \boxed{T = T_\infty}$$

ج) اگر زمان τ_t باشد ثابت زمانی نیز گفته می‌شود:

$$t = 1 \longrightarrow \frac{\rho V c}{hA_s} = 1 \Rightarrow e^{-1} = 0{,}368 \Rightarrow \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = 0{,}368$$

نکته: ثابت زمانی τ_t برابر $\frac{\rho V c}{hA_s}$ می‌باشد:

$$\tau_t = \frac{1}{hA_s} \times \rho V c = R_{conv} \cdot C_t$$



مثال) ساچمه‌های فولادی به قطر ۱۲mm ابتدا تا دمای ۱۱۵۰K حرارت داده می‌شوند و سپس در هوا با دمای $T_\infty = 325K$ و $h = 20 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ بطور آهسته تا ۴۰۰K خنک شده تا آتش زدایی شده و شکلدهی آنها کامل شود. با فرض براینکه ضریب هدایتی ساچمه‌های فولادی برابر با $40 \frac{W}{m \cdot K}$ و دانسیته آنها $7800 \frac{kg}{m^3}$ و همچنین ظرفیت گرمایی (c) $600 \frac{J}{kg \cdot K}$ باشد زمان لازم جهت سرد شدن ساچمه‌ها را بدست آورید.

حل)

$D = 12mm$

$T_i = 1150K$

$h = 20 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

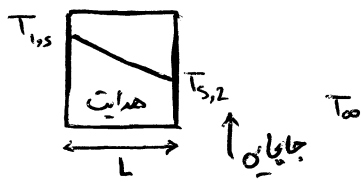
$T_{نهایی} = T = 400K$

$K = 40$

$\rho = 7800$

$C = 600$

برای محاسبه زمان باید مطمئن شویم که می‌توان از ظرفیت فشرده استفاده کرد. برای اینکار اول باید عدد بیوت بعد بیو را حساب کنیم. اگر عدد بیوت بعد بیو کمتر از ۰٫۱ باشد روش ظرفیت فشرده قابل استفاده خواهد بود. عدد بیو به روش زیر به دست می‌آید:



$$K\cancel{A}\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{L} = h\cancel{A}(T_{s,2}-T_\infty) \Rightarrow \frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{T_{s,2}-T_\infty} = \frac{\frac{L}{KA}}{\frac{1}{hA}} = \frac{\text{مقاومت هدایتی}}{\text{مقاومت جابجایی}} = Bi$$

فرمول ساده‌تر بیو بشکل زیر است:

$$\boxed{Bi = \frac{hL_c}{K}} \qquad \boxed{Bi < 0{,}1 \Rightarrow \text{روش ظرفیت فشرده}}$$

عدد بیو که بدون بعد می باشد همیشه باید کمتر از ۰٫۱ باشد تا بتوان از روش ظرفیت متمرکز استفاده کرد یعنی مقاومت در برابر هدایت خیلی کمتر از مقاومت در برابر جابجایی می باشد. نکته بعدی اینکه برای حل این مسئله چون ضریب انتشار یا ضریب صدور ε داده نشده است بنابراین از تشعشع به محیط صرفنظر می شود:

اگر تشعشع داشته باشیم:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} + \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{E}_{st} = -\dot{E}_{out}$$

$$q_{st} = -(q_{convection} + q_{radiation})$$

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -\left[hA(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma A (T^4 - T_{محیط}^4)\right]$$

بعد از ساده کردن به معادلهٔ زیر خواهیم رسید:

$$t = \frac{\rho V c}{h A_s}\left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3}\right)$$

دمای نهایی — دمای اولیه

حل مثال) اول عدد بیو را حساب می کنیم که باید کمتر از ۰٫۱ باشد. هرچه عدد بیو کمتر از ۰٫۱ باشد جواب بدست آمده دقیقتر است:

$$Bi = \frac{h L_c}{k} \qquad L_c = \text{شعاع کره - ضخامت دیوار تخت}$$

$$Bi_{کره} = \frac{hr}{3k} = \frac{20 \times \frac{12\times10^{-3}}{2}}{3\times40} = 0.001$$

$$t_{کره\ (\text{معادله عمومی})} = \frac{\rho r c}{3h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{7800 \times 12\times10^{-3} \times 600}{6\times20} \ln \frac{1150-325}{400-325} = 1122\,(s) = 19\,min$$

روش ظرفیت غیرمتمرکز:

حالت هایی اتفاق می افتد که نمی توان از روش متمرکز استفاده کرد، چون گرادیان دما در جسم ناچیز نمی باشد. در این حالت عدد بیو مساوی یا بزرگتر از ۰٫۱ می باشد ($Bi \geq 0.1$). بنابراین از روش ظرفیت غیرمتمرکز استفاده می کنیم.

$$T = T(\vec{r}, t, T_i, T_\infty, L, \alpha, h)$$

زمان — مکان

روش غیرمتمرکز: ۱) حل دقیق ۲) حل تقریبی

اگر بخواهیم از حل تقریبی استفاده کنیم باید یک عدد بدون بعد یعنی عدد فوریه را حساب کنیم. اگر عدد فوریه بزرگتر از ۰٫۲ باشد از روش تقریبی (استفاده کرد) می توان

عدد فوریه: اگر عدد Bi را حساب کنیم و مساوی و یا بزرگتر از ۰٫۱ بدست آمد نشان دهنده این است که دما در داخل جسم با توجه به زمان تغییر می کند

اول باید عدد فوریه را بدست آورد. برای اینکار از معادلهٔ (III) استفاده می کنیم. معادله (III)

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\left(\frac{ht}{\frac{\rho V c}{A_s}}\right)}$$

$$\frac{ht}{\frac{\rho V c}{A_s}} = \frac{ht}{\rho L_c c}$$

مثال در مورد حل تقریبی) سطح یک دیوارهٔ مسطح که در محیط جابجایی قرار گرفته است را در نظر بگیرید. دمای θ^* را برای $Bi=10$ و $Fo=0.1$ پیدا کنید.

حل) با داشتن عدد (Bi) مقادیر ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 و ξ_4 را از پیوست ب-۳ می‌خوانیم:

$\xi_1 = 1.4289$

$\xi_2 = 4.3078$

$\xi_3 = 7.2281$

$\xi_4 = 10.2003$

از رابطهٔ: $c_n = \dfrac{4\sin\xi_n}{2\xi_n+\sin(2\xi_n)}$ مقادیر c_1, c_2, c_3, c_4 را حساب می‌کنیم:

$$c_1 = \frac{4\sin(1.4289)}{2(1.4289)+\sin(2\times1.4289)} = 1.2620$$

$c_2 = -0.393$ $\quad c_3 = 0.2104$ $\quad c_4 = -0.1309$

$$\theta^* = c_1 e^{-Fo\xi_1^2}\cos(\xi_1 \cancel{x^*}) + c_2 e^{-Fo\xi_2^2}\cos(\xi_2 \cancel{x^*}) + c_3 e^{-Fo\xi_3^2}\cos(\xi_3 \cancel{x^*}) + c_4 e^{-Fo\xi_4^2}\cos(\xi_4 \cancel{x^*}) \qquad x^*=1$$

نکته: چون روی سطح هستیم بنابراین $x^*=1$ $\quad \theta^* = \dots$

حل تقریبی برای دیواره: این روش، روش ساده‌تری نسبت به حل دقیق می‌باشد. اگر عدد فوریه را $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$ حساب کردیم و بزرگتر از ۰٫۲ بود فقط جمله اول در سری در نظر گرفته می‌شود به همین علت حل تقریبی نامیده می‌شود.

$$\boxed{\theta^* = c_1 e^{(-\xi_1^2 Fo)}\cos(\xi_1 x^*)}$$

مقادیر c_1 و ξ_1 از جدول ۵-۱ کتاب خوانده می‌شود.

الف) برای مرکز دیواره: $x^*=0$ $\quad T_i =$ (دمای مرکز اولیه) $\quad T_0 = t$ دمای مرکز بعد از زمان

$$\theta_0^* = c_1 e^{(-\xi_1^2 Fo)} \qquad \theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

θ_0^* خط عبدا

ب) برای یک نقطه اختیاری $x^* = \frac{x}{L}$

$$\theta^* = c_1 e^{(-\xi_1^2 Fo)}\cos\left(\xi_1 \frac{x}{L}\right)$$

بنابراین دمای اختیاری T بعد از زمان t به دست می‌آید.

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

انرژی منتقل شده: همیشه با داشتن دمای مرکز دیواره (T_0) بعد از زمان t می‌توان مقدار انرژی که به دیوار منتقل شده است را به دست آورد.

$$Q = \int_0^t q_h\,dt$$

این انرژی برحسب ژول می‌باشد و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin\xi_1}{\xi_1}\theta_0^*$$

Q = مقدار انرژی خارج شده از یک نقطه مشخص که مجهول می‌باشد.

Q_0 = مقدار انرژی ماکسیمم یا ایده‌آل

$$Q_0 = \rho V_{max}\, c\,(T_i - T_\infty)$$

مقدار ξ_1 از جدول ۵-۱ خوانده می‌شود.

حل تقریبی برای استوانه: برای نشان دادن مکان از $r^* = \frac{r}{r_0}$ استفاده می‌کنیم که r_0 شعاع خارجی می‌باشد و برای زمان از عدد فوریه استفاده می‌کنیم. برای استوانه و همچنین کره مقادیر c_1 و ξ_1 را از جدول ۵-۱ کتاب با توجه به عدد $Bi = \frac{hr_0}{k}$ می‌خوانیم.

برای استوانه از فرمول روبرو استفاده می‌کنیم:

$$\theta^* = c_1 e^{(-\xi_1^2 F_0)} J_0(\xi_1 r^*)$$

J_0 کمیت تابع بسل می‌باشد و از جدول ب - ۴ با توجه به فاصله از مرکز به دست می‌آید.

حل تقریبی برای کره:

$$\theta^* = c_1 e^{(-\xi_1^2 F_0)} \frac{1}{\xi_1 r^*} \sin(\xi_1 r^*)$$

مثال برای حل تقریبی دیواره) فولاد بطور متوالی گرم و سرد می‌شود تا شکنندگی آن کاهش یابد. به این فرآیند تابکاری گفته می‌شود. ورق (تمرین ۵-۴۰) فولاد با $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ ، $c = 500 \frac{J}{kg \cdot K}$ ، $K = 45 \frac{W}{m \cdot K}$ را بفضا است 100mm در نظر بگیرید. ابتدا ورق در دمای یکنواخت $T_i = 300°C$ است و دمای محیط در داخل کوره گازی $T_\infty = 700°C$ و ضریب جابجایی $h = 500 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ در دو طرف دیوار برقرار است.

ورق تا چه مدت باید در کوره بماند تا دمای مرکز ورق به $550°C$ برسد؟

نکته: $2L = 100\,mm$

نکته دیواره: $\begin{cases} T_0 = 550°C \\ x^* = 0 \end{cases}$

$t = ?$

حل)

ظرفیت غیر فشرده $\Rightarrow$

$$Bi = \frac{hL}{K} = \frac{500 \times 50 \times 10^{-3}}{45} = 0.556$$

از جدول ۱-d با میانی یابی $\begin{cases} \xi_1 = 0.682 \\ C_1 = 1.076 \end{cases}$

$$\theta^* = c_1 e^{(-\xi_1^2 F_0)} \cos(\xi_1 x^*)$$

برای مرکز $x^* = 0$ است. بنابراین:

$$\theta_0^* = c_1 e^{(\xi_1^2 F_0)}$$

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = c_1 e^{(-\xi_1^2 F_0)} \Rightarrow \frac{550 - 700}{300 - 700} = 1.076 e^{(-0.682^2 \times F_0)} \Rightarrow F_0 = 2.27 > 0.2$$

بنابراین فرض تقریبی بودن درست است.

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2} \Rightarrow 2.27 = \frac{1.154 \times 10^{-5} t}{(50 \times 10^{-3})^2} \Rightarrow \boxed{t = 492\ (s)}$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} = \frac{45}{7800 \times 500} = 1.15 \times 10^{-5} \left(\frac{m^2}{s}\right)$$

مثال برای حل تقریبی (استوانه): در قسمتی از فرآیند عملیات حرارتی میله‌های استوانه‌ای فولادی ضدزنگ 304 با قطر (100(mm و دمای اولیه $500°C$ در حمام روغن $30°C$ معلق و سرد می‌شوند. اگر با گردش روغن ضریب جابجایی $500 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ حاصل شود چه مدت طول می‌کشد تا دمای سطح میله ($r^* = 1$) به $50°C$ برسد. در این لحظه میله‌ها از محیط خارج برده می‌شوند.

$D = 100\,mm$

$T_i = 500°C$

$T_\infty = 30°C$

$h = 500 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

$\begin{cases} T_s = 50°C \\ r^* = 1 \end{cases}$ روی سطح

$t = ?$

حل)

چون خواص را نداریم باید خواص را در دمای میانگین به دست آوریم:

$$\bar{T} = \frac{500 + 30}{2} = 265 + 273 = 540\,K \simeq 600\,K$$

جدول الف-۱ $\Rightarrow \begin{cases} K = 19.8 \\ c = 557 \\ \rho = 7900 \end{cases}$

اول عدد بیو را حساب می‌کنیم:

$$Bi = \frac{hr_0}{2k} = \frac{hD}{4k} = \frac{500 \times 100 \times 10^{-3}}{4 \times 19.8} = 0.63 > 0.1 \Rightarrow$$ ظرفیت غیرمنتشره

نکته: برای خواندن c_1 و ξ_1 باید عدد بیو را از فرمول $Bi = \frac{hr_0}{k}$ حساب شود:

$$Bi = \frac{hr_0}{k} = 1.26 \Rightarrow$$ از جدول ۱-۵ $\begin{cases} c_1 = 1.241 \\ \xi_1 = 1.345 \end{cases}$

$$\theta^* = c_1 e^{-\xi_1^2 F_0} J_0(\xi_1 r^*)$$

J_0 کمیت تابع بسل نامیده می‌شود و با توجه به r^* خوانده می‌شود (چون $r^*=1$)

$$\theta^* = \frac{T_s - T_\infty}{T_i - T_\infty} = c_1 e^{-\xi_1^2 F_0} J_0(\xi_1 \cancelto{1}{r^*}) \Rightarrow$$

در نتیجه $J_0 = 0.7652$

$$\Rightarrow \frac{80-30}{500-30} = 1.241\, e^{-1.345^2 F_0} \times 0.7652 \,(1.345) \Rightarrow F_0 = 1.8806 > 0.2 \Rightarrow$$ فرض تئوری بودن درست است

$$\Rightarrow F_0 = \frac{\alpha t}{r_0^2} \Rightarrow t = 1047\ s \Rightarrow 17.45\ min$$

مثال برای حل تئوری (کره): کره‌ای به قطر ۸۰mm با مشخصات $k = 50 \frac{W}{m \cdot K}$، $\alpha = 1.5 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ در یک محیط که سیال آن روغن می‌باشد تنظیم می‌شود. دمای روغن $T_\infty = 50°C$ است و ضریب جابجایی این محیط سرمایشی $h = 1000 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ می‌باشد. در یک لحظه معین دمای سطح کره $150°C$ می‌باشد. اگر دمای اولیه کره $200°C$ باشد زمان این سرمایش را بدست آورید.

$D = 80mm$

$k = 50 \frac{W}{m \cdot K}$

$\alpha = 1.5 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$T_\infty = 50°C$

$h = 1000 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

$\begin{cases} T_s = 150 \\ r^* = 1 \end{cases}$

$T_i = 200°C$

$t = ?$

نکته: $Bi = \frac{hr_0}{k} \xrightarrow{\text{از جدول}} \xi_1, c_1$

$$Bi = \frac{hr_0}{3k} = \frac{hD}{6k} = \frac{1000 \times 80 \times 10^{-3}}{6 \times 50} = 0.27 > 0.1$$ ظرفیت غیرمنتشره

$$Bi = \frac{hr_0}{k} = 0.8 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1.2236 \\ \xi_1 = 1.432 \end{cases}$$ ⇐ جدول ۱-۵

$$\theta^* = c_1 e^{-\xi_1^2 F_0} \frac{1}{\xi_1 r^*} \sin(\xi_1 r^*)$$

برای روی سطح کره $r^* = 1$ پس:

$$\theta^* = c_1 e^{-\xi_1^2 F_0} \frac{1}{\xi_1} \sin(\xi_1)$$

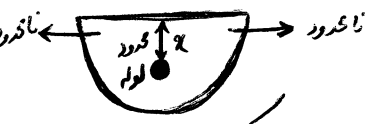
$$\theta^* = \frac{T_s - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{150-50}{200-50} = 1.223\, e^{(-1.432^2 F_0)} \frac{1}{1.432} \sin(1.432)$$

$$\Rightarrow F_0 = 0.1163 < 0.2$$ فرض تئوری بودن اشتباه است

$$F_0 = \frac{\alpha t}{r_0^2} \Rightarrow t = \dots$$

جسم نیمه بی‌نهایت: چنین جسمی از همه جهات به غیر از یک جهت تا بی‌نهایت گسترش یافته است. جسم نیمه بی‌نهایت تقریب مناسبی برای اغلب مسائل می‌باشد، مانند زمین که زمین جسم نیمه بی‌نهایت در جهت افقی فرض می‌شود. مطابق شکل زیر:

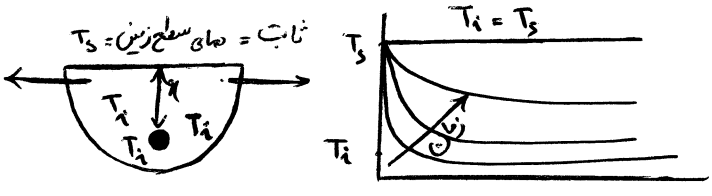


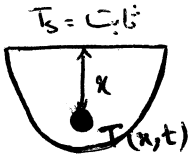
دفن یک لوله در زمین

جسم نیمه بینهایت را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: دمای سطح ثابت باشد (مانند قطب شمال و جنوب)

مطابق شکل زیر بعد از گذشت زمان بینهایت، دمای سطح زمین با دمای تمام نقاط انتخاب شده در داخل زمین یکی خواهد شد.





$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf} w$$

erf w تابع خطای گوس نامیده می‌شود که جواب یک انتگرال بوده و از پیوست (ب-۲) کتاب بدست می‌آید.

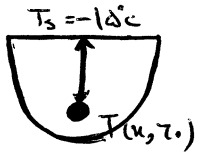
با داشتن erf w از جدول مقدار w را می‌خوانیم که مقدار w برابر است با:

$$w = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

فاصله از سطح زمین

مثال) هنگام لوله‌کشی خط لوله آب در زیر زمین باید به امکان یخ زدن آن در هوای سرد توجه کرد. اگرچه مسئله تعیین دمای خاک برحسب زمان با تغییر شرایط سطح پیچیده است ولی با فرض بر اینکه دمای سطح زمین در یک مدت طولانی ثابت باقی بماند می‌توان نتایج تقریبی معقولی بدست آورد. اگر دمای اولیه خاک $20^\circ C$ باشد و دمای سطح آن بمدت ۶۰ روز در مقدار ثابت $-15^\circ C$ قرار گیرد حداقل عمق (x) که آب درون لوله یخ نزند چقدر باید باشد؟

حل) برای حل این مسئله عمق x که آب درون لوله یخ می‌زند را بدست می‌آوریم و لوله را در فاصله بیشتری از عمق بدست آمده دفن می‌کنیم تا آب یخ نزند. مطابق شکل زیر:



خواص خاک در دمای ۳۰۰K

$$\begin{cases} \rho = 2050 \ \frac{kg}{m^3} \\ k = 0.52 \ \frac{W}{m \cdot K} \\ c = 1840 \ \frac{J}{kg \cdot K} \\ \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = 0.138 \times 10^{-6} \ \frac{m^2}{s} \end{cases}$$

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf} w \Rightarrow \frac{0 - (-15)}{20 - (-15)} = \operatorname{erf} w$$

$$\frac{15}{35} = \operatorname{erf} w \Rightarrow \operatorname{erf} w = 0.429 \xrightarrow{\text{از جدول}} w = 0.4$$

$$w = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \Rightarrow 0.4 = \frac{x}{2\sqrt{0.138 \times 10^{-6} \times 60 \times 24 \times 60 \times 60}} \Rightarrow$$

$$x = 0.676 \ m$$

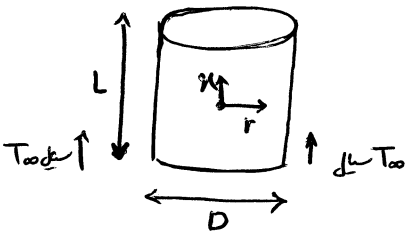
بنابراین لوله باید مثلاً در عمق ۰/۷m دفن شود تا آب یخ نزند.

حالت دوم: شار حرارتی ثابت باشد:

در این حالت $\frac{Q}{A}$ ثابت می‌باشد، مانند قرار دادن یک اتوی داغ بروی سطح

حالت سوم: جابجایی با هدایت برابر باشد با شرط براینکه $T_\infty > T_s$ یعنی سیال گرم باشد.

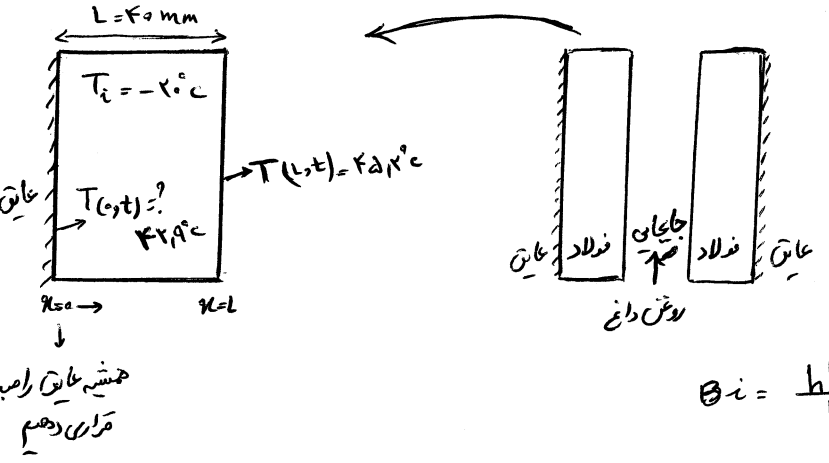
تأثیرهای چند بعدی: تاکنون انتقال حرارت را یک بعدی مورد بررسی قرار دادیم ولی در حالت هایی که انتقال حرارت دو بعدی می‌باشد بعنوان مثال استوانه کوچکی که طول آن نسبت به قطرش بسیار بزرگ نباشد انتقال حرارت هم در جهت x و هم در جهت r تغییر خواهد کرد. بنابراین دما در داخل استوانه به r و x و t بستگی دارد.



$$\frac{T(x,r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \left.\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\text{جهت توزیع دما در جهت } x} \times \left.\frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\text{جهت توزیع دما در جهت } r}$$

$$\frac{T(x,r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_{\text{دیواره}} \times \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_{\text{استوانه}}$$

مثال) یک لوله‌ی فولادی به قطر $1\,m$ و ضخامت $40\,mm$ را در نظر بگیرید. سطح بیرونی لوله کاملاً عایق شده است. لوله قبل از شروع جریان سیال در داخل آن دارای دمای $-20^\circ C$ است. سپس روغن با دمای $60^\circ C$ در لوله جریان می‌یابد. ضریب جابجایی داخلی $h = 500\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ است. چون ضخامت لوله خیلی کمتر از قطر آن است دیواره را مانند یک دیواره تخت در نظر بگیرید و مقادیر زیر را حساب کنید: (۱) عدد بیو و فوریه پس از ۸ دقیقه از شروع جریان سیال. (۲) دمای سطح درونی لوله که عایق شده است، بعد از ۸ دقیقه $T(0,t)=?$ (۳) شار گرمایی از روغن به لوله بعد از $8\,min$ (۴) در مدت $8\,min$ چه مقدار انرژی از روغن به هر متر از لوله منتقل می‌شود؟



حل)

$$\bar{T} = \frac{-20+60}{2} = 20^\circ C \quad \begin{cases} \rho = 7832 \\ c = 434 \\ k = 63.9 \\ \alpha = 18.8\times10^{-6} \end{cases}$$

۱) ظرفیت غیر محدود $\Rightarrow$ $Bi = \frac{hL}{k} = \frac{500\times0.04}{63.9} = 0.313 > 0.1$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{18.8\times10^{-6}\times8\times60}{0.04^2} = 5.64 > 0.2 \Rightarrow \text{حل تقریبی}$$

۲) برای زمانی که $x^*=0$ می‌باشد یعنی پشت عایق:

$$\theta^* = c_1 e^{-\zeta_1^2 Fo}\cos(\zeta_1 x^*) \xrightarrow{x^*=0} \theta_0^* = c_1 e^{-\zeta_1^2 Fo}$$

مقادیر C_1 و ξ_1 را می‌خوانیم:

$$C_1 = 1.047 \quad , \quad \xi_1 = 0.531$$

$$\theta_0^* = 1.047\, e^{-(0.531)^2 \times 5.64} = 0.214$$

دمای سطح درونی لوله (ضلع) بعد از ۸ دقیقه $\Rightarrow$

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \Rightarrow 0.214 = \frac{T(0, 8min) - 60}{-20 - 60} \Rightarrow T(0, 8min) = 42.9^\circ C$$

۳) انتقال گرما به سطح درونی لوله در $x=L$ توسط جابجایی صورت می‌گیرد. بنابراین از قانون سرمایش نیوتن استفاده می‌کنیم که در این حالت $t=480s$ می‌باشد و $L=40mm$ است.

$$q''(L,t) = h\left[T(L,t) - T_\infty\right]$$

در معادلهٔ روبرو که دمای دیگر نقاط دیواره را می‌دهد داریم:

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\xi_1 x^*)$$

می‌خواهیم دمای $T(L,t)$ را پیدا کنیم. برای زمانی که $x=L$ باشد:

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\xi_1 x/L) = \theta_0^* \cos(\xi_1)$$

به جای θ^* مقدار قرار می‌دهیم:

$$\frac{T(L,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0^* \cos(\xi_1)$$

$$\Rightarrow \frac{T(L,t) - 60}{-20 - 60} = 0.214 \cos(0.531) \Rightarrow T(L,t) = 45.2^\circ C$$

$$q''(L,t) = h\left(T(L,t) - T_\infty\right] = 500\left[45.2 - 60\right] = -7400 \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

نکته: علامت منفی نشان دهندهٔ این است که انتقال حرارت از طرف روغن به لوله می‌باشد و در جهت خلاف x صورت گرفته است.

بعبارتی دیگر حرارت به دیواره منتقل شده است. بنابراین q_{st} منفی می‌باشد.

۴) مقدار انرژی ماکزیمم یا اولیه آن

$$Q_0 = \rho V_{max} c (T_i - T_\infty)$$

$$Q_0' = (7832)\overbrace{(\pi \times 1 \times 0.04)}^{V' = \pi D L \text{ حجم بواحد طول لوله}}(434)(-20-60) = -341713591.65 \ (J)$$

$$\frac{Q'}{Q_0'} = 1 - \frac{\sin \xi_1}{\xi_1}\theta_0^* \Rightarrow \frac{Q'}{-341713591.65} = 1 - \frac{\sin(5.31)}{5.31} \times 0.214 = 2.72 \times 10^7 \ J/m$$

مثال) برای سرمایش و گرمایش در زمانی که عدد بیو کوچکتر از ۰٫۱ باشد می‌توان از ظرفیت متمرکز استفاده کرد. یک کرهٔ مسی به قطر ۱۰ mm داریم که با قرار گرفتن در اجاقی به دمای $75^\circ C$ می‌رسد. این گلولهٔ مسی پس از بیرون آوردن از اجاق در معرض جریان هوا با فشار 1atm و دمای $23^\circ C$ قرار می‌گیرد که سرعت هوا در این شرایط $10 \ m/s$ می‌باشد. چه مدت طول می‌کشد تا کره به دمای $25^\circ C$ برسد؟

حل)

فرضیات زیر را انجام می‌دهیم:

۱) خواص مس را در دمای میانگین حساب می‌کنیم.

۲) دمای کره یکنواخت فرض می‌شود بنابراین می‌توان از ظرفیت فشرده استفاده کرد.

۳) از اثرات تشعشع صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\bar{T} = \frac{۷۵+۳۵}{۲} = ۵۵ + ۲۷۳ = ۳۲۸K \longrightarrow \rho = ۸۹۳۳$$

$$T_\infty = ۲۳ + ۲۷۳ = ۲۹۶ \quad \begin{cases} \mu = ۱۸۱ \times ۱۰^{-۷} \\ \nu = ۱۵ \times ۱۰^{-۶} \\ K = ۰/۰۲ \end{cases}$$

ظرفیت فشرده $t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$ چون T_i صدرت است نیاز به حل نیست.

برای به دست آوردن h باید از عدد ناسلت مربوط به کره استفاده کنیم. برای کره از فرمول ویتاکر می‌توان استفاده کرد و عدد ناسلت را به دست آورد:

$$Nu_x = ۲ + \left[۰/۴ (Re)^{۰/۵} + ۰/۰۶ (Re)^{۲/۳} \right] (Pr)^{۰/۴} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right) = ۴۴/۵$$

μ = لزجت سیال با توجه به دمای میانگین سیال

$$Re = \frac{uD}{\nu} = \frac{۱۰ \times ۰/۰۱}{۱۵ \times ۱۰^{-۶}} = ۶۶۶۶/۷ \qquad Pr = ۰/۷ \qquad \frac{\mu}{\mu_s} = \frac{۱}{۴}$$

μ_s = لزجت سیال نزدیک به سطح با توجه به T_s

$$T_s = ۷۵°c \simeq ۳۵۰K \rightarrow \mu_s = ۲۰۸/۲ \times ۱۰^{-۷}$$

$$Nu_x = \frac{hD}{K} \Rightarrow \cancel{h = ۱۲۲ \frac{W}{m^2 \cdot K}} \Rightarrow t = \frac{۸۹۳۳ \times ۳۸۵ \times ۰/۰۱}{۶ \times ۱۲۲} \ln \frac{۷۵-۲۳}{۳۵-۲۳} \Rightarrow t = ۶۹/۲ \ (s) \simeq 1min$$

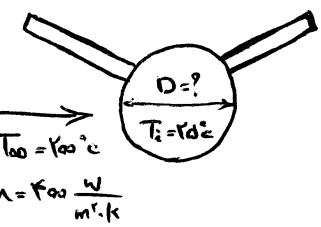
$L_c = \frac{V}{A_s}$ طول اصلاح شده

c_p

مثال) نقطه اتصال یک ترموکوپل که تقریباً کروی شکل است برای اندازه‌گیری دمای یک جریان گاز به کار می‌رود. ضریب جابجایی بین سطح اتصال و گاز برابر با $h = ۴۰۰ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ و خواص ترموفیزیکی ترموکوپل برابر با $K = ۲۰ \frac{W}{m \cdot K}$ و $c = c_p = ۴۰۰ \frac{J}{kg \cdot K}$ و $\rho = ۸۵۰ \frac{kg}{m^3}$ است.

الف) قطر مورد نیاز برای ترموکوپلی که ثابت زمانی آن 1s باشد چقدر است؟

ب) اگر دمای ترموکوپل در آغاز $۲۵°c$ باشد و در معرض جریان گاز به دمای $۲۰۰°c$ قرار گیرد چه مدت طول می‌کشد تا ترموکوپل به دمای $۱۹۹°c$ برسد؟



حل) نکته: چون ضریب انتشار داده نشده است بنابراین از تشعشع (تابش) صرف‌نظر می‌کنیم.

الف) ثابت زمانی $\tau_t = \frac{1}{hA_s} \rho V c = \frac{\rho c}{h} \cdot \frac{V}{A_s}$

$$\frac{V}{A_s} = L_c = \frac{D}{۶} \Rightarrow \tau_t = \frac{\rho c}{h} \frac{D}{۶} \Rightarrow 1 = \frac{۸۵۰ \times ۴۰۰۰}{۴۰۰} \times \frac{D}{۶} \Rightarrow D = ۷/۰۶ \times ۱۰^{-۴} m$$

ب) ظرفیت فشرده

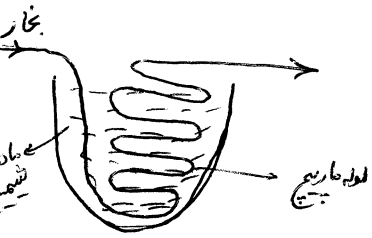
$$Bi = \frac{hL}{K} = \frac{h \frac{V}{A_s}}{K} = \frac{hD}{۶K} = \frac{۴۰۰ \times ۷/۰۶ \times ۱۰^{-۴}}{۶ \times ۲۰} = ۲/۳۵ \times ۱۰^{-۳} m < ۰/۱ \Rightarrow$$

$$t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} \Rightarrow t = \frac{\rho D c}{۶h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$

بینهایت زمان طول می‌کشد تا دما به $200^{\circ}C$ برسد.

$$t = \frac{850 \times 0.06 \times 10^{-4} \times 4000}{6 \times 400} \ln \frac{25-200}{199-200} = 0.2\ s$$

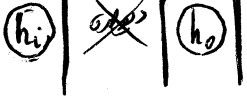
مثال) مسأله ۱۵ : در فرآیند شیمیایی و داروسازی معمولاً از یک سیستم بسته استفاده می‌شود که مواد داخل آن در اثر یک فرآیند گرمایشی گذرا از دمای محیط تا دمای مورد نظر گرم می‌شود. حالتی را در نظر بگیرید که ماده شیمیایی با دانسیته $\rho = 1200\ \frac{kg}{m^3}$ و گرمای ویژه $c = c_p = 2200\ \frac{J}{kg \cdot K}$ مجهز برای با $V = 2.25\ m^3$ را در سیستم اشغال می‌کند. همقطر غایق شده است و دمای ماده شیمیایی باید از دمای محیط $T_{sur} = 300K$ به دمای فرآیند $T = 450K$ برسد. عمل گرمایش با عبور بخار آب اشباع در $T_h = 500K$ در یک لوله مارپیچ جدار نازک بقطر $20mm$ انجام می‌شود. ضریب انتقال حرارت مربوط به میعان بخار در داخل لوله $h_i = 10,000\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ و مربوط به مواد شیمیایی بیرون آن $h_o = 2000\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$ است. اگر زمان مورد نیاز برای گرمایش ماده شیمیایی از $300K$ به $450K$ برابر $60min$ باشد طول مورد نیاز لوله مارپیچ چقدر باید باشد؟



حل)

Data: $\begin{cases} \text{ضریب کلی انتقال حرارت} \quad u = \left[\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}\right]^{-1} \\ q_h = uA_s(T_h - T_{\text{نهایی}}) \end{cases}$

برای حل این مسأله فرض می‌کنیم که اتلاف حرارتی به بیرون نداشته باشیم و همچنین در اثر واکنش شیمیایی تولید و جذب انرژی نداشته باشیم. بنابراین با استفاده از موازنه انرژی حرارت ذخیره شده در سیستم باید برابر با حرارت گرفته شده باشد. ضریب کلی انتقال حرارت u زمانی بکار می‌رود که هم ضریب انتقال حرارت جابجایی داشته باشیم و هم ضریب انتقال حرارت خارجی. در این حالت می‌توان از فرمول $u = \left[\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}\right]^{-1}$ استفاده کرد که از قطعات لوله صرفنظر شده است.



$q = uA\Delta T$

$$\dot{E}_{in} + \cancel{\dot{E}_g} = \dot{E}_{st} + \cancel{\dot{E}_{out}} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{st}$$

$$q_{st} = q_{\text{گرفته شده}} \Rightarrow mc_p dT = uA_s(T_h - T_{\text{نهایی}})$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho V c \frac{dT}{dt} = uA(T_h - T_{\text{نهایی}})}$$

اکنون دماها را در یک طرف و زمان را در طرف دیگر قرار می‌دهیم:

$$\int_{T_i}^{T_{\text{نهایی}}} \frac{dT}{T_h - T} = \frac{uA_s}{\rho V c} \int_0^t dt$$

$$-\ln \frac{T_h - T_{\text{نهایی}}}{T_h - T_i} = \frac{uA_s}{\rho V c} t \Rightarrow A_s = \frac{-\rho V c}{ut} \ln \frac{T_h - T_{\text{نهایی}}}{T_h - T_i} = \frac{-1200 \times 2.25 \times 2200}{\left[\frac{1}{10000} + \frac{1}{2000}\right]^{-1} \times 3600} \ln \frac{500-450}{500-300} = 1.37\ m^2$$

$$L = \frac{A_s}{\pi D} \Rightarrow \boxed{L = 21.8\ m}$$

فصل ششم: مقدمه‌ای بر انتقال حرارت جابجایی

در این فصل فقط در مورد جابجایی بحث خواهد شد. می‌دانیم که ضریب انتقال حرارت از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$q = \bar{h} A (T_s - T_\infty)$$

$\bar{h}$ = ضریب انتقال حرارت متوسط

درحالی که h_x ضریب انتقال حرارت موضعی (محلی) می‌باشد و برای یک نقطه مشخص حساب می‌شود. می‌خواهیم ارتباط بین ضریب انتقال حرارت متوسط و ضریب انتقال حرارت موضعی را پیدا کنیم.

اگر $T_s - T_\infty$ ثابت فرض شود امّا سطح و ضریب انتقال حرارت تغییر کند:

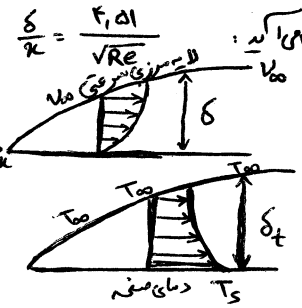
$$q = T_s - T_\infty \int_{A_s} h_x \, dA$$

$$T_s - T_\infty \int_{A_s} h_x \cdot dA = \bar{h} A (T_s - T_\infty) \Rightarrow \bar{h} = \frac{1}{A}\int_{A_s} h_x \cdot dA \Rightarrow \boxed{\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x \, dx}$$

اگر $A = L \times 1$ بنابراین $dA = dx$ درنتیجه: $\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x \, dx$ (x فاصله از لبهٔ صفحه می‌باشد)

مفهوم لایه مرزی: همان طور که می‌دانیم ضخامت لایه مرزی سرعتی را با δ نشان می‌دهیم که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.51}{\sqrt{Re}}$$



پروفیل سرعت: $u(y) = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3$

ضخامت لایه مرزی حرارتی δ_t می‌باشد.

جابجایی $q = \bar{h} A (T_s - T_\infty)$

هدایت (رسانش) $q = -kA \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$

$$\Rightarrow \bar{h} \cancel{A} (T_s - T_\infty) = -k \cancel{A} \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \Rightarrow \bar{h} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

معادله پروفیل دما بشکل زیر است:

$$T(y) = a + by + cy^2 + dy^3$$

$$\bar{h} = \frac{-k\left[b + 2cy + 3dy^2\right]_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \boxed{\frac{-kb}{T_s - T_\infty}}$$

عدد استانتون (stanton): این عدد بی‌بعد برای محاسبهٔ ضریب انتقال حرارت h بکار می‌رود.

$$St = \frac{\text{شار حرارتی جابجایی}}{\text{شار حرارتی هدایتی (ذخیره شده)}} \Rightarrow St = \frac{h \cancel{\Delta T}}{\rho u c_p \cancel{\Delta T}} \Rightarrow \boxed{St = \frac{h}{\rho u c_p}}$$

$q = \dot{m} c_p \Delta T$

$q = \frac{m}{t} c_p \Delta T$

$q = \frac{\rho V}{t} c_p \Delta T$

$q = \frac{\rho A L}{t} c_p \Delta T$

$\frac{q}{A} = \rho \left(\frac{L}{t}\right) \vec{c}_p^{\,u} \Delta T$

عدد پرانتل: این عدد بنام دانشمند آلمانی پرانتل، که مفهوم لایه مرزی را معرفی کرده است نامگذاری شده است

$$Pr = \frac{\text{لزجت سینماتیک}}{\text{ضریب نفوذ حرارتی}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k}$$

δ_t ضخامت لایه مرزی حرارتی و δ ضخامت لایه مرزی سرعتی می باشد.

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^{1/3}}$$

عدد ناسلت: عدد ناسلت یا نوسلت فقط در انتقال حرارت جابجایی استفاده می شود و مانند عدد استانتون برای محاسبه ضریب انتقال حرارت متوسط در جهت x یعنی $\bar{h}_x$ و برای محاسبه ضریب انتقال حرارت موضعی (محلی) در جهت x یعنی h_x بکار می رود.

x: فاصله از لبه صفحه می باشد k: ضریب رسانش (هدایت)

$$\boxed{Nu_x = \frac{h_x x}{k}}$$

$$\overline{Nu}_x = \frac{\bar{h}_x x}{k}$$

در جابجایی اجباری از فرمول مقابل می توان استفاده نمود: $\boxed{\bar{h}_x = 2h_x}$

تفاوت عدد بیو یا عدد ناسلت در این است که عدد بیو در جریان گذرا کاربرد دارد درحالیکه عدد ناسلت فقط در جریان جابجایی

سه حالت زیر را بررسی می کنیم:

۱) اگر هوا یا آب سیال باشد: در این حالت $\boxed{0.6 < Pr < 50}$ $Pr_{\text{هوا}} = 0.7$ و $Pr_{\text{آب}} = 4.2$

فرمول پانکیفام برای جریان آرام و گذرا: $\boxed{Nu_x = 0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}$

اگر جریان درهم (مغشوش) باشد: $\boxed{Nu_x = 0.029\, Re^{0.8}\, Pr^{1/3}}$

۲) برای سیالاتی مانند روغن: در این حالت $\boxed{Pr > 50}$

$$\boxed{Nu_x = \frac{0.338\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.0468}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}}$$

۳) برای فلزات مذاب مانند جیوه، سدیم و پتاسیم:

در این حالت $\boxed{Pr < 0.6}$

$$\boxed{Nu_x = 0.56\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}$$

ضریب کولبرون J_H: برای سیالاتی که عدد پرانتل آنها بین ۰٫۶ تا ۵۰ می باشد می توان رابطه ای بدست آورد که برحسب پرانتل و عدد استانتون باشد. این رابطه فقط برای محدوده ی آرام و گذرا کاربرد دارد و به تشابه اصلاح شده رینولدز معروف است:

$$St_x = \frac{Nu_x}{Re\, Pr} = \frac{0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}{Re\, Pr} \Rightarrow St_x = 0.332\, Re^{-1/2}\, Pr^{-2/3} \Rightarrow \boxed{St_x \cdot Pr^{2/3} = 0.332\, Re^{-1/2}}$$

$$St_x \cdot Pr^{2/3} = \overset{\text{ضریب کولبرون}}{J_H} = \overset{\text{ضریب اصطکاک}}{\frac{C_f}{2}}$$

عدد ناسلت به روش بی بعد سازی: بی بعد سازی روشی است که برای حل مسائل انتقال حرارت بکار می رود. اگر دمای سیال T_∞ و دمای سطح T_s باشد

پارامترهای بدون بعد $y^* = \frac{y}{L}$ و $T^* = \frac{T-T_s}{T_\infty - T_s}$ را تعریف می‌کنیم:

قانون نیوتن: $q = hA(T_\infty - T_s)$ ؛ اگر $T_\infty > T_s$ باشد

$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow h(T_\infty - T_s) = -K \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

چون $T > T_s$ می‌باشد، بنابراین مقدار $T_{high} - T_{low}$ را قرار می‌دهیم و منفی لازم نیست

$$h(T_\infty - T_s) = K \frac{T-T_s}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

طرف سمت راست را بر $\frac{T_\infty - T_s}{L}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$h(T_\infty - T_s) = K \frac{\frac{T_\infty - T_s}{L}}{\frac{T_\infty - T_s}{L}} \cdot \frac{T-T_s}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

معادله برحسب T^* و y^* بصورت زیر بدست می‌آید:

$$h = \frac{K}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\Big|_{y^*=0} \Rightarrow Nu = \frac{hL}{K} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\Big|_{y^*=0}$$

ضریب اصطکاک به روش بی بعد سازی:

$$\tau_s = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

با تعریف $u^* = \frac{u}{u_\infty}$ و $y^* = \frac{y}{L}$ داریم:

سرعت روی لایه مرزی $\rightarrow u_\infty$

$$\tau_s = \mu \left(\frac{u_\infty}{L}\right) \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\Big|_{y^*=0}$$

$u^* = \frac{u}{u_\infty} \Rightarrow u = u^* u_\infty \Rightarrow \partial u = u_\infty \cdot \partial u^*$

$y^* = \frac{y}{L} \Rightarrow y = y^* \cdot L \Rightarrow \partial y = L \cdot \partial y^*$

بنابراین چون می‌دانیم که: $\tau_s = C_f \cdot \frac{\rho u_\infty^2}{2} \Leftarrow$

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = \frac{2\tau_s}{\rho u_\infty^2}$$

$$C_f = \frac{2\mu \frac{u_\infty}{L} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\Big|_{y^*=0}}{\rho u_\infty^2} = \frac{2}{Re} \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\Big|_{y^*=0}$$

مثال) روغن موتور در ۲۰°c از روی صفحه‌ای به طول ۲۰cm و با سرعت ۱٫۲ m/s عبور می‌کند. صفحه تا درجه حرارت یکنواخت ۶۰°c گرم می‌شود. اتلاف حرارتی از صفحه را حساب کنید اگر عرض صفحه 1m فرض شود.

حل) روش زیر یا الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم:

$$\bar{T} = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{20+60}{2} = 40 + 273 = 313\,K \xrightarrow{\text{روغن موتور}} \begin{cases} \rho = 876 \\ \nu = 0.0002 \\ K = 0.144 \\ Pr = 2870 \end{cases}$$

۱- دمای میانگین را محاسبه می‌کنیم.

۲- خواص را از جدول می‌خوانیم.

۳- عدد رینولدز را حساب می‌کنیم.

۴- فرمول صحیح را انتخاب می‌کنیم.

۵- از قانون سرمایش نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{1.2 \times 0.2}{0.0002} = 1200$$ جریان آرام

(x برای صفحه)

چون سیال روغن است $Pr > 50$:

$$Nu_x = \frac{0.338\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.0468}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} = 152.2$$

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{K} \Rightarrow 152.2 = \frac{h_x (0.2)}{0.144} \Rightarrow h_x = 109.6 \ \frac{W}{m^2 K}$$

برای ناحیه آرام: $q_x = h_x A (T_s - T_\infty) = 109.6 (0.2 \times 1)(60-20) = 876.8\ W$

مثال) هوا با دمای $20^\circ C$ روی صفحهٔ تختی بطول $0.3\,m$ جریان دارد. سرعت جریان هوا $30\ \frac{m}{s}$ بوده و صفحه در کل طولش تا دمای $55^\circ C$ گرم می‌شود. اگر لزجت هوا $\mu_{air} = 2\times10^{-5}\ \frac{kg}{m\cdot s}$ فرض شود ضخامت لایه مرزی سرعتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی را پیدا کنید. فشار یک اتمسفر.

حل)

برای حل این مسئله اول باید عدد رینولدز را به دست بیاوریم و برای محاسبهٔ عدد رینولدز دانسیتهٔ هوا را نیاز داریم. بنابراین به روش زیر دانسیته و عدد رینولدز را بدست می‌آوریم و با توجه به اینکه عدد پرانتل هوا $Pr_{air} = 0.7$ می‌باشد. ضخامت لایه مرزی حرارتی محاسبه خواهد شد.

$$\rho = \frac{P}{R_{air}\bar{T}} = \frac{1.0132\times10^{5}\ Pa}{287\,(37.5+273)} = 1.2\ (kg/m^3)$$

$$\bar{T} = \frac{55+20}{2} = 37.5^\circ C + 273 = 310.5\ K \qquad R_{air} = \frac{\text{ثابت جهانی گاز}}{\text{جرم مولکولی هوا}} = \frac{8314}{29} = 287\ \frac{J}{kg\cdot K}$$

$$Re = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} = \frac{1.2\times30\times0.3}{2\times10^{-5}} = 101{,}000 < 500{,}000$$

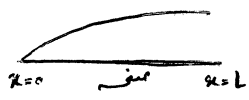
برای جریان آرام:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{0.3} = \frac{4.91}{\sqrt{101000}} \Rightarrow \delta = 4.3\times10^{-3}\ m$$

$$\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^{1/3} \Rightarrow \frac{4.3\times10^{-3}}{\delta_t} = (0.7)^{1/3} \Rightarrow \boxed{\delta_t = 4.8\times10^{-3}}$$

مثال) نتایج آزمایشگاهی که برای ضریب انتقال حرارت موضعی h_x برای جریان روی سطح ناصاف یک صفحهٔ تخت بدست آمده است با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$h_x = a x^{-0.1}$$



که در آن a یک ضریب و x فاصله از لبهٔ صفحه می‌باشد.

الف) فرمولی (عبارتی) برای نسبت ضریب انتقال حرارت متوسط (میانگین) $\bar{h}$ برای صفحه بطول $x=L$ و ضریب انتقال حرارت محلی (موضعی) بدست آورید. $\frac{\bar{h}}{h_x} = ?$ ب) تغییرات h_x و $\bar{h}$ را بعنوان تابعی از x بصورت نمودار پیدا کنید؟

الف) قبلاً ثابت کردیم: $\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx$

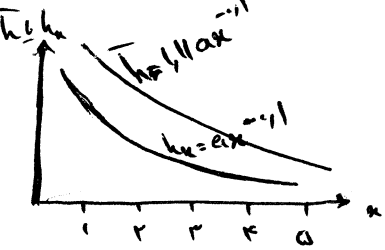
بجای x مقدار قرار می‌دهیم:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L (a x^{-0.1})\,dx = \frac{1}{x}\overbrace{\int_0^x (a x^{-0.1})\,dx}^{\text{بجای L، x گذاریم}}$$

در انتهای صفحه

$$= \frac{a}{x}\int_0^x x^{-0.1}\,dx = \frac{a}{x}\left[\frac{x^{0.9}}{0.9}\right]_0^x = 1.11\,a\,x^{-0.1} = \boxed{1.11\,h_x}$$

ب) می‌خواهیم $\bar{h}$ یعنی ضریب انتقال حرارت متوسط را برحسب h_x یعنی ضریب انتقال محلی (موضعی) پیدا کنیم:



فصل هفتم: جریان خارجی External Flow

در این فصل به مسئله محاسبهٔ نرخ انتقال حرارت برای سطوح مختلف بعنوان مثال یک لوله، کره و یک مجموعهٔ لوله می‌پردازیم. ضریب انتقال حرارت جابجایی را حساب می‌کنیم. حرکت جابجایی در اثر عامل خارجی مانند فن یا پمپ صورت می‌گیرد بهمین علت جریان خارجی نامیده می‌شود. الگوریتم زیر را در همهٔ حالات انجام می‌دهیم:

۱) هندسهٔ جریان را تشخیص می‌دهیم که جریان از روی یک صفحه یا کره و یا استوانه می‌باشد.

۲) دمای میانگین را حساب می‌کنیم.

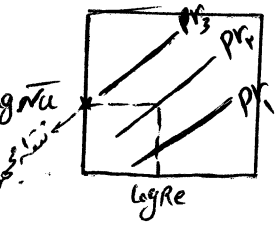
۳) خواص را با دمای میانگین می‌خواهیم (با حدس و خطا)

۴) عدد رینولدز را بدست می‌آوریم که جریان آرام، آرام گذر یا متلاطم خواهد بود.

۵) رابطهٔ مناسبی انتخاب می‌کنیم.

جریان از روی یک صفحه:

الف) روش تجربی (آزمایشگاهی)



ب) روش فرمولی (تئوری)

فرمول باکینهام: $Nu_x^{\text{موضعی}} = 0.332\,Re^{1/2}\,Pr^{1/3}$

$\bar{Nu}_x^{\text{متوسط}} = 0.664\,Re^{1/2}\,Pr^{1/3}$ ⇐ برای سیالات مانند آب و هوا $\begin{cases} 0.6 < Pr < 50 \\ 0.6 < Pr < 50 \end{cases}$

$\bar{Nu}_x = 0.565\,Pe^{1/2}$ → عدد پکله: Pe: Re-Pr ⇐ برای فلزات مذاب ⇐ $Pr \le 0.6$

معادلات لایه مرزی :

الف) معادله پیوستگی (پایستگی)

ب) معادله مومنتوم (اندازه حرکت)

ج) معادله انرژی

معادله پیوستگی : اولین معادله‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد، بدون شک قدیمی‌ترین معادله لایه مرزی خواهد بود. معادله پیوستگی همان معادله بقای جرم است که ماده نه خلق می‌شود و نه از بین می‌رود. جرم مخصوصاً توسط حرکت سیال به حجم کنترل وارد و یا از آن خارج می‌شود. فرضیات زیر را انجام می‌دهیم :

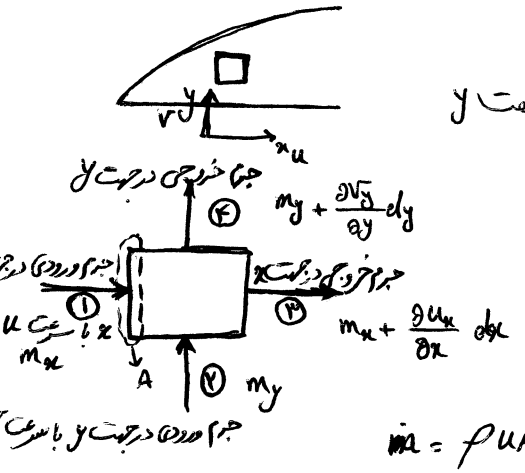
۱- جریان آرام و دو بعدی باشد. ($dx, dy, 1$)

۲- خواص ثابت باشند.

۳- جرم ورودی و خروجی در واحد زمان بررسی شود [$t = 1s$]

۴- در جریان یک بعدی $dx = \partial x$ است. بنابراین تغییرات جرم خروجی $m_x + dm_x$ خواهد بود. براساس بسط تیلور برای جریان دو بعدی جرم خروجی برابر با: $m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx$ خواهد بود چون $dx \neq \partial x$ می‌باشد.

۵- جرم ورودی برابر با جرم خروجی است. ابا شتگی نداریم.



جرم خروجی در جهت y $m_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$

① + ② = ③ + ④

$m_x = \rho u A$

به روش مشابه می‌توان نوشت :

$$\boxed{m_y = \rho v\, dx} \quad (2)$$

جریان ورودی از سمت چپ : $\frac{m}{t} = \rho u (dy \times 1)$

چون $t = 1$ می‌باشد : $\boxed{m_x = \rho u\, dy}$ (1)

بنابراین جرم خروجی از سمت راست را بدست می‌آوریم:

$$m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx$$

$$\rho u\, dy + \frac{\partial(\rho u dy)}{\partial x} dx \Longrightarrow \boxed{\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy} \quad (۳)$$

می‌توان جرم خروجی از بالا را بدست آورد:

$$\boxed{\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dx} \quad (۴)$$

mass ① + mass ② = mass ③ + mass ④

$$\rho u dy + \rho v dx = \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy + \rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dx$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dy + \rho \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0 \Rightarrow \rho\, dx dy \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

معادله فوق معادله پیوستگی نامیده می‌شود و عبارت کلی بقاء جرم است و باید در هر نقطه از لایه مرزی تکامل فوق صدق کند. اگر معادله پیوستگی با توجه به اولین شرط برای جریان آرام مورد بررسی قرار گیرد بنابراین $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ چون فقط در یک جهت حرکت می‌کنیم.

جریان از روی یک استوانه (لوله):

اگر ضریب انتقال حرارت جابجایی متوسط یعنی $\bar{h}$ را داشته باشیم و لوله در معرض یک جریان جابجایی خارجی قرار گیرد از فرمول هیلپرت Hilpert استفاده می‌کنیم

$$\frac{\bar{h} D}{k} = c\,(Re)^n \cdot pr^{1/3}$$

مقادیر c و n از جدول زیر بدست می‌آیند:

Re	c	n
۰٫۴ − ۴	۰٫۹۸	۰٫۳۳
۴ − ۴۰	۰٫۹۱	۰٫۳۸
⋮	⋮	⋮
۴۰۰۰ − ۴۰۱۰۰۰	۰٫۱۹	۰٫۶۱
above ۴۰۰۰۰۰	۰٫۰۲۷	۰٫۸

اگر لوله دوار نباشد از جدول دیگری مقادیر c و n خوانده می‌شوند.

جریان از روی یک کره:

اثرات لایه مرزی روی یک کره، شباهت زیادی به استوانه دارد. روابط بسیار زیادی برای کره پیشنهاد شده است. بهترین رابطه خطای کم توسط ویتاکر Whitaker پیشنهاد شده است:

$$\boxed{\overline{Nu}_D = 2 + \left(0.4\, Re_D^{1/2} + 0.06\, Re_D^{2/3}\right) pr^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{1/4}}$$

μ: لزجت سیال در وسط دیواره با دمای میانگین خوانده می‌شود.

μ_s: لزجت سیال در کناره دیواره با T_s خوانده می‌شود.

مثال) بادسنج سیم داغ (Hot wire) وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سرعت گاز است. یک سیم پلاتینی بقطر ۰٫۰۱۳cm و طول 1cm را در نظر

بگیرید. دمای سطح سیم بوسیله یک مدار کنترل کننده در $500K$ ثابت نگهداشته می‌شود. این وسیله را در جریان هوا با دمای $T_\infty = 300K$ قرار می‌دهیم تا سرعت هوا را بدست آوریم. اگر ضریب الکتریکی پلاتین $17\ \mu\Omega.cm$ باشد، سرعت جریان هوا m/s ۱ بدست می‌آید. شدت جریان لازم که باید از سیم عبور کند را بدست آورید. خواص را در دمای میانگین بدست آورید.

حل)

نکته: چون جریان از روی استوانه است باید از فرمول Hilpert استفاده کنیم.

$$\bar{T} = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{500+300}{2} = 400K \longrightarrow \begin{cases} \rho = 0.883\ kg/m^3 \\ K = 0.0333 \\ C_p = 1014 \\ \alpha = 0.376\times10^{-4} \\ \nu = 25.9\times10^{-6} \\ Pr = 0.689 \end{cases}$$

$$\boxed{q = I^2 R}$$

شدت جریان — مقاومت

$$\boxed{R = \rho \frac{L}{A}}$$

L → طول سیم

A → سطح مقطع سیم

R → مقاومت

ρ → ضریب الکتریکی سیم

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{1\times0.00013}{25.9\times10^{-6}} = 5.019$$

از جدول مقادیر C و n را می‌خوانیم: $C = 0.911$ $\quad n = 0.385$

$$Nu_D = \frac{hD}{K} = 0.911\, Re_D^{0.385}\, Pr^{1/4} \Rightarrow \frac{h\times0.00013}{0.03365}\times0.911\,(5.019)^{0.385}\,0.689^{1/3} \Rightarrow h = 388\ \frac{W}{m^2.K}$$

$$q = hA(T_s - T_\infty) = h\pi DL(T_s - T_\infty) = 0.317\ W \longrightarrow R = 17\times10^{-6}\ \frac{1}{\frac{\pi\times0.013^2}{4}} = 0.128\ \Omega$$

در نتیجه لازم است اینکه جرم ورودی با جرم خروجی برابر باشد و انباشتگی نداشته باشیم این است که: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

بنابراین باید سرعت روی یک خط جریان ثابت باشد تا معادله پیوستگی صدق می‌کند.

معادله مومنتوم:

معادله مومنتوم یا اندازه حرکت، دومین قانون اصلی لایه مرزی می‌باشد و براساس سرعت و دبی جرمی بنا شده است. نیروی جلوبرنده یا نیروی مومنتوم مانند حرکت یک رودخانه حائز اهمیت است بنابراین این نیرو را در جهت x مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\text{نیروی مومنتوم} = \text{جرم} \times \text{شتاب} = \frac{\text{جرم}}{\text{وزن}} \times \text{سرعت}$$

$$\text{نیروی مومنتوم در جهت } x \text{ با سرعت } u = \dot{m}_x \times u = \rho u A \times u = \rho u^2 A$$

$$\text{نیروی مومنتوم در جهت } x \text{ با سرعت } v = \dot{m}_x \times v = \rho u A v$$

با نوشتن مومنتوم‌ها برای حجم کنترل به معادله مومنتوم خواهیم رسید:

مومنتوم در جهت x : $\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

و لزجت سینماتیک می‌باشد و برابر $\frac{\mu}{\rho}$ است.

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

معادله انرژی:

در دو معادله ای که پیشتر به آن اشاره شده یعنی معادله پیوستگی و معادلهٔ مومنتوم در مورد سرعت سیال بحث می‌شد. در نتیجه برای مسائل جابجایی اهمیت دارند. زمانی که هدایت نیز اهمیت دارد از تانک فوریه برای محاسبه انتقال حرارت استفاده می‌شود. بنابراین با مساوی قرار دادن حرارت ورودی از طریق جابجایی و هدایت به حجم کنترل و با فرض برابر بودن حرارت ورودی با حرارت خروجی برابر باشد به معادله انرژی خواهیم رسید.

$$\boxed{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}$$ معادله انرژی

α برابر با ضریب نفوذ حرارتی است که برابر با $\frac{k}{\rho c_p}$ می‌باشد.

حل تشابهی:

معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی معادلات دیفرانسیل غیرخطی نامیده می‌شوند و حل آنها بسیار مشکل است. قبلاً دیدیم که این سه معادله بشکل زیر هستند:

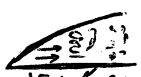
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$ معادله پیوستگی

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ معادله مومنتوم $\nu=\frac{\mu}{\rho}$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$ معادله انرژی $\alpha=\frac{k}{\rho c_p}$

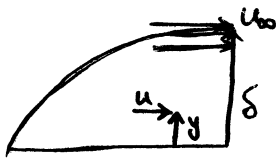
برای جریان آرام $v=0$ خواهد بود. بنابراین معادلهٔ مومنتوم بشکل $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ تبدیل می‌شود. برای جریان آرام $v=0$ خواهد بود بنابراین معادلهٔ انرژی بشکل $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ تبدیل می‌شود.

چون تغییرات دما روی x نداریم، $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ ⇐



حل عددی این معادلات برای جریان گذرا یعنی زمانی که $v\neq 0$ نیست به وسیله دو تن از شاگردان پراتل بنام بلازیوس و پل هاوزن ارائه شد. معادلات دیفرانسیل عادی تبدیل شده و در نتیجه حل آن ها ساده می‌شود. اندیشه اصلی این روش بر اساس این بنا شده است که تغییرات سرعت و دما در تمام نقاط x با یکدیگر مشابه هستند. بهمین علت حل تشابهی نامیده می‌شود. در حل تشابهی معادله مومنتوم بشکل ساده ای تبدیل

می‌شود و با داشتن سرعت u می‌توان سرعت v را برای ناحیهٔ گذرا بدست آورد. پل هاوزر و بلازیوس نشان دادند که $\frac{u}{u_\infty}$ تابعی از $\frac{y}{\delta}$ می‌باشد. برای حل معادلهٔ موضعی به روش زیر عمل می‌کنیم:



برای حل معادلهٔ موضعی متغیر یا پارامتر تشابه η را بشکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \frac{\text{فاصلهٔ انتخابی}}{\text{ضخامت لایهٔ مرزی}} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}}$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\; y}$$

نکته: می‌دانیم که: $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$

برای بدست آوردن $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \qquad (1)$$

اکنون تابع جریان $\psi(x,y)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

برای اینکه معادلهٔ پیوستگی ارضا شود.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad f(x) = \frac{\psi}{u_\infty\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}} \Rightarrow \psi = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\; f(x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\; \frac{df}{d\eta} \qquad (2)$$

می‌خواهیم مقدار u را بدست آوریم که قبلاً داشتیم:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \overset{(1)}{\frac{\partial \psi}{\partial \eta}} \cdot \overset{(2)}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}$$

مقادیر فوق را جایگزین می‌کنیم:

$$u = u_\infty \cancel{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}}\; \frac{df}{d\eta} \cdot \cancel{\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}} \Rightarrow \boxed{u = u_\infty \frac{df}{d\eta}}$$

اگر $f' = \frac{df}{d\eta}$ باشد بنابراین با روش مشابهی می‌توان نوشت:

$$\boxed{v = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\eta f' - f\right]}$$

با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های سرعت می‌توان $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را بدست آورد.

چون:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با جایگزین کردن در معادلهٔ موضعی به نتایج زیر می‌رسیم:

$$2\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \Rightarrow \boxed{2f''' + ff'' = 0}$$

بلازیوس با آزمایشات خود به نتایج زیر رسید:

این آزمایشات در $u_\infty = 8\ \frac{m}{s}$ و x بین $1cm$ تا $17.5cm$ انجام شده است.

$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/u_\infty}}$	f	$f' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{df}{d\eta}$	$f'' = \frac{d^2 f}{d\eta^2}$
۰٫۴	۰٫۰۲۶	۰٫۰۶۶	۰٫۳۳۱
۰٫۸	۰٫۱۰۶	۰٫۲۶	۰٫۳۲
۱٫۶	۰٫۴۲	۰٫۵۱	۰٫۲۹
۳٫۲	۱٫۵۹	۰٫۸۸	۰٫۱۳۹
۵	۳٫۲	۰٫۹۹ → ورود لایهٔ مرزی	۰٫۱۵۹
۵٫۶	۳٫۶	۰٫۹۹۶	۰٫۰۷
۶	۴٫۲	۰٫۹۹۹	۰٫۰۲۴

نتیجه: از حل بلازیوس با حل دقیق به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\, y$$

$$\delta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\, \delta \Rightarrow \delta = \delta \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

حل دقیق با حل بلازیوس:

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{\delta}{\sqrt{Re}}}$$

مثال) جریان پایدار و موازی هوای اتمسفر یک روی یک صفحهٔ تخت مدنظر است. دما و سرعت جریان هوا به ترتیب $25^\circ C$ و $300\,K$ می‌باشد. الف) ضخامت لایهٔ مرزی را در فاصلهٔ $x = 100\,mm$ ، $x = 10\,mm$ و $x = 1\,mm$ از لبهٔ ابتدایی (جلویی) پیدا کنید.

ب) مولفهٔ سرعت در جهت y یعنی V را برای فواصل با y حساب کنید. اگر بدانیم: $\mu_{هوا} = 184.6 \times 10^{-7}$ و $\rho_{هوا} = 1.161\ \frac{kg}{m^3}$ است.

الف)

$$Re = \frac{\rho u x}{\mu} = \frac{1.161 \times 25 \times 100 \times 10^{-3}}{184.6 \times 10^{-7}} = 157231.85$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{100} = \frac{5}{\sqrt{157231.85}} \Rightarrow \delta = 1.26\ mm$$

$$Re = \frac{\rho u x}{\mu} = \frac{1.161 \times 25 \times 10 \times 10^{-3}}{184.6 \times 10^{-7}} = 15723.185$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{10} = \frac{5}{\sqrt{15723.185}} \Rightarrow \delta = 0.399\ mm$$

$$Re = \frac{\rho u x}{\mu} = \frac{1.161 \times 25 \times 1 \times 10^{-3}}{184.6 \times 10^{-7}} = 1572.3185$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{1} = \frac{5}{\sqrt{1572.3185}} \Rightarrow \delta = 0.126\ mm$$

ب)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{184.6 \times 10^{-7}}{1.161} = 1.59 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{1/2}\left[\eta f' - f\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1.59 \times 10^{-5} \times 25}{100 \times 10^{-3}}\right)^{1/2}\left[5 \times 0.99 - 3.2\right] = 0.055\ m/s$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{1/2}\left[\eta f' - f\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1.59 \times 10^{-5} \times 25}{10 \times 10^{-3}}\right)^{1/2}\left[5 \times 0.99 - 3.2\right] = 0.174\ m/s$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{1/2}\left[\eta f' - f\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1.59 \times 10^{-5} \times 25}{1 \times 10^{-3}}\right)^{1/2}\left[5 \times 0.99 - 3.2\right] = 0.551\ m/s$$

فرمول پاکینهام به روش بی بعد سازی:

برای سیالاتی که عدد پرانتل آن‌ها در محدوده‌ی بین ۰٫۶ تا ۵ می‌باشد برای به دست آوردن عدد ناسلت و در نتیجه ضریب انتقال حرارت جابجایی از فرمول پاکینهام استفاده می‌کنیم که در این قسمت به اثبات آن می‌پردازیم

اگر جابجایی با هدایت برابر باشد و یا به عبارتی از تشعشع صرفنظر کنیم:

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

روی سطح

شرط معادل: $T_s > T_\infty$

صورت و مخرج را در منفی ضرب می‌کنیم:

$$h = \frac{k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_\infty - T_s}$$

$$\frac{\partial T}{T_\infty - T_s} \quad \partial T^* \Rightarrow h = k \frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

اکنون می‌خواهیم $\frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0}$ را بدست آوریم، قبلاً در مکانیک سیالات داشتیم که:

$$T^* = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

(y: فاصله انتخابی ، δ_t: ضخامت لایه مرزی حرارتی)

می‌خواهیم $\frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0}$ را حساب کنیم:

$$\frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{1}{\delta_t}$$

اکنون مقدار $\frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0}$ را جایگزین می‌کنیم. قبل از آن بجای δ_t مقدار قرار می‌دهیم.

چون برای گازها:

$$\delta_t = \frac{4.81\, x}{Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{4.81\, x}{Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}}{4.81\, x}$$

نکته: عدد نیوسلت به x بستگی دارد در حالی که pr مستقل از x است.

$$h = k \frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=0} \Rightarrow h = k \times \frac{3}{2} \times \frac{Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}}{4.81\, x}$$

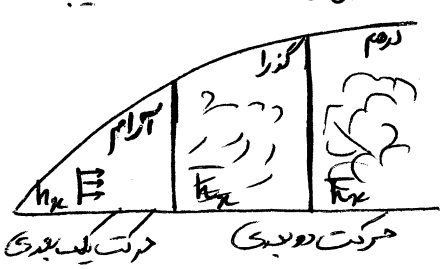
$$\boxed{h = 0.332 \frac{k}{x} \cdot Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}}$$

فرمول بالکیهام

نکته: $h \propto \frac{1}{x}$

ارتباط بین h_x و $\bar{h}_x$:

h_x ضریب انتقال حرارت موضعی یا محلی نامیده می‌شود و برای یک نقطه مشخص بکار می‌رود. در حالی که $\bar{h}_x$ ضریب انتقال حرارت متوسط می‌باشد.



در ناحیه آرام حرکت یک بعدی است بنابراین h_x داریم در حالی که برای ناحیه گذرا و تلاطم به علت حرکت چرخشی باید $\bar{h}_x$ را حساب کنیم.

$$Nu_x = 0.332\, Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}$$

$$\frac{h_x \cdot x}{k} = 0.332\, Re_x^{1/2}\, pr^{1/3} \Rightarrow \boxed{h_x = \frac{k}{x}\, 0.332\, Re_x^{1/2}\, pr^{1/3}}$$

شامل هوا و آب: $0.6 < pr < 50$

برای بدست آوردن $\bar{h}_x$ باید از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{\bar{h}_{c_x} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx}$$

$$\bar{h}_x = \frac{1}{L}\, 0{,}332\, Pr^{1/3}\, k \int_0^L \left(\frac{\rho u x}{\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{L}\, 0{,}332\, Pr^{1/3}\, k \left(\frac{\rho u}{\mu}\right)^{1/2} \int_0^L x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\Rightarrow \bar{h}_x = \frac{1}{L}\, 0{,}332\, Pr^{1/3}\, k \left(\frac{\rho u}{\mu}\right)^{1/2} \left[2x^{1/2}\right]_0^L \Rightarrow \bar{h}_x = 2\left[0{,}332\, \frac{k}{L}\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}\right]$$

چون قبلاً داشتیم:

$$h_x = 0{,}332\, \frac{k}{x}\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3} \qquad \bar{h}_x = 2h_x$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\overline{Nu}_x = 2Nu_x \quad , \quad \overline{Nu}_L = 2Nu_L$$

(برای گذرا و درهم)

عدد ناسلت متوسط: برای ناحیهٔ آرام و گذرا زمانی که عدد پرانتل آنها بین ۰٫۶ تا ۵۰ باشد از فرمول باکینهام و فقط برای ناحیهٔ متلاطم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

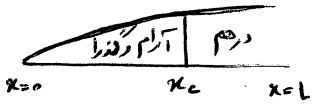
فقط درهم:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0{,}0296\, Re_x^{0.8}\, Pr^{1/3}$$

آرام و گذرا

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0{,}332\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}$$

می‌خواهیم عدد ناسلت را برای کل طول صفحه بدست آوریم:



$$\bar{h}_L = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx \Rightarrow \bar{h}_L = \frac{1}{L}\left[\underbrace{\int_0^{x_c} h_x\, dx}_{\text{آرام و گذرا}} + \underbrace{\int_{x_c}^L h_x L}_{\text{درهم}}\right]$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L}\left[\int_0^{x_c} \frac{k}{x}\, 0{,}332\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}\, dx + \int_{x_c}^L \frac{k}{x}\, 0{,}0296\, Re_x^{\frac{4}{5}=0.8}\, Pr^{1/3}\, dx\right]$$

$$\bar{h}_L = \frac{k}{L}\, Pr^{1/3}\left[\int_0^{x_c} \frac{1}{x} \times 0{,}332\, Re_x^{1/2}\, dx + \int_{x_c}^L 0{,}0296\, \frac{Re_x^{\frac{4}{5}}}{x}\, dx\right]$$

$$\frac{\bar{h}L}{k} = Pr^{1/3}\left[0{,}332\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{1/2} \underbrace{\int_0^{x_c} \frac{dx}{x^{1/2}}}_{\to 2x_c} + 0{,}0296\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{\frac{4}{5}} \underbrace{\int_{x_c}^L \frac{dx}{x^{1/5}}}_{\to 1{,}25x^{\frac{4}{5}}\Big|_{x_c}^{L}}\right]$$

$$\overline{Nu}_L = Pr^{1/3}\left[0{,}332\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{1/2} 2x_c^{1/2} + 0{,}0296\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{\frac{4}{5}} \times 1{,}25x^{\frac{4}{5}}\Big|_{x_c}^{L}\right]$$

$$\overline{Nu}_L = Pr^{1/3}\left[0{,}664\, Re_{x_c}^{1/2} + 0{,}0037\left(Re_L^{0.8} - Re_{x_c}^{0.8}\right)\right]$$

$$\overline{Nu}_L = Pr^{1/3}\left[0{,}664\, Re_{x_c}^{1/2} + 0{,}0037\, Re_L^{0.8} - 0{,}0037\, Re_{x_c}^{0.8}\right]$$

آغاز ناحیهٔ متلاطم زمانی است که عدد رینولدز ۵۰۰٬۰۰۰ باشد:

$$Re_{x_c} = 500{,}000$$

$$\boxed{\overline{Nu}_L = Pr^{1/3}\left[0{,}0037\, Re_L^{0.8} - 871\right]}$$

خلاصهٔ جریان از روی یک صفحه:

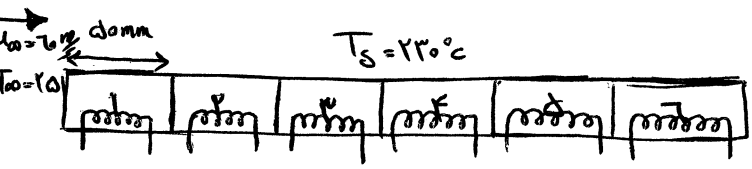
جریان	محدودیت	عدد ناسلت	ضخامت لایه مرزی سرعتی	ضریب اصطکاک	تنش برشی	حرارت
آرام گذرا	هوا و آب $0.6<Pr<50$	آرام: $Nu_x=0.332\,Re_x^{1/2}\,Pr^{1/3}$ گذرا: $\overline{Nu}_x=0.0364\,Re^{4/5}\,Pr^{1/3}$	$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{Re^{1/2}}$	$C_f=0.664\,Re^{-1/2}$	$\tau=\mu\frac{du}{dy}$	$q=-kA\frac{\partial T}{\partial y}$
آرام گذرا	روغن‌ها $Pr>50$	چرچیل و اُزو	"	"	"	"
درهم	$Re\geq 5\times10^5$	فرمول اثبات شده	$\frac{\delta}{x}=\frac{0.37}{Re^{1/5}}$	$C_f=0.0592\,Re^{-1/5}$	$\tau=\mu_{درهم}\frac{\partial u}{\partial y}$	$q_{درهم}=-kA\frac{\partial T}{\partial y}$

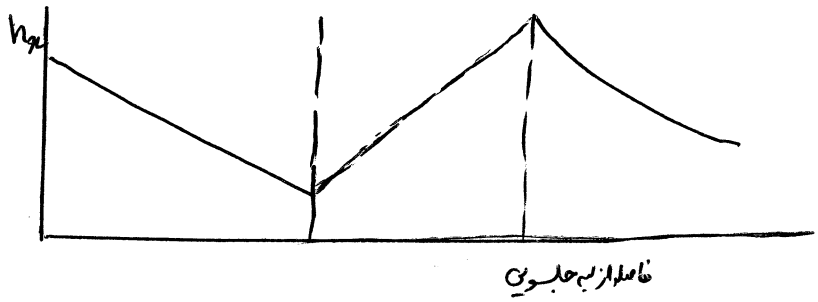
فرمول چرچیل و ازو: $Nu_x=\dfrac{0.332\,Re^{1/2}\,Pr^{1/3}}{\left[1+\left(\frac{0.0468}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}$

فرمول اثبات شده: $\overline{Nu}_L=Pr^{1/3}\left[0.037\,Re_L^{0.8}-871\right]$

مثال ۲-۷ کتاب) نوارهای گرمکن برقی هرکدام بطول 50mm که بطور مستقل قابل کنترل اند. دمای یک صفحه تخت به عرض $W=1m$ را در مقدار یکنواخت $T_s=230°C$ ثابت نگه می‌دارند. اگر هوای اتمسفر با دمای $25°C$ و سرعت $60\,m/s$ روی یک صفحه جریان داشته باشد. کدامیک از گرمکن ها بیشترین توان ورودی الکتریکی را دارند؟

حل)





$h\propto\frac{1}{x}$

پس بیشترین h_x آغاز ناحیه درهم است.

الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم:

* خواص را در دمای میانگین می‌خوانیم.
* عدد رینولدز را پیدا می‌کنیم
* فرمول مناسبی انتخاب می‌کنیم.

* با توجه به ناحیه آرام، گذرا و درهم و با استفاده از رابطه سرمایش نیوتن مقدار انتقال حرارت را بدست می‌آوریم.

مقدار انتقال حرارت را برای اولین گرمکن حساب می‌کنیم:

$$\bar{T}=T_f=\frac{25+230}{2}=127.5+273\simeq 400K$$

film = cd

$\nu=26.4\times10^{-6}$
$k=0.0388$
$Pr=0.69$

$$Re_1 = \frac{u_\infty L_1}{\nu} = \frac{60 \times 0.05}{26.4 \times 10^{-6}} = 1.14 \times 10^5 \qquad 230 < Re_1 < 5 \times 10^5$$

$$\overline{Nu}_L = 2\overline{Nu}_x = 2\left(0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}\right) = 0.664\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3} = 0.664\left(1.14 \times 10^5\right)^{1/2}(0.79)^{1/3} = 198$$

$$\bar{h}_1 = \frac{\overline{Nu}\, k}{L_1} = \frac{198 \times 0.0338}{0.05} = 134 \ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$q_{convection} = 134\,(0.05 \times \overset{\text{عرض}}{1})(230 - 25) = 1370 \ W$$

برای اینکه بفهمیم در چه ناحیه‌ای جریان تلاطم آغاز می‌شود:

$$Re_{x_c} = \frac{u_\infty x_c}{\nu} \Rightarrow 5 \times 10^5 = \frac{60 \times x_c}{26.4 \times 10^{-6}} \Rightarrow x_c = 0.22\ m$$

بنابراین آغاز ناحیه تلاطم روی صفحه پنجم می‌باشد:

برای صفحه پنجم: $\overline{Nu} = Pr^{1/3}\left(0.037\, Re^{0.8} - 871\right)$

$$Re_2 = \frac{u_\infty L_2}{\nu} = \frac{60 \times 0.1}{26.4 \times 10^{-6}} = 2.27 \times 10^5 \qquad \text{ناحیه گذرا}$$

$$\overline{Nu}_L = \left[0.332 \times \left(2.27 \times 10^5\right)^{1/2}(0.79)^{1/3}\right] \times 2 = 279.5$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-2} L_2}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-2} = \frac{279.5 \times 0.0338}{0.1} = 94.47 \ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$q_{conv} = 94.47\,(0.1 \times 1)(230 - 25) = 1936.75\ W \qquad q_{conv,2} = 1936.75 - 1370 = 566.75\ W$$

$$Re_3 = \frac{u_\infty L_3}{\nu} = \frac{60 \times 0.15}{26.4 \times 10^{-6}} = 3.409 \times 10^5 \qquad \text{ناحیه گذرا}$$

$$\overline{Nu}_L = 2\left[0.332 \times \left(3.409 \times 10^5\right)^{1/2}(0.79)^{1/3}\right] = 342.58$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-3} L_3}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-3} = \frac{342.58 \times 0.0338}{0.15} = 77.19 \ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$q_{conv} = 77.19\,(0.15 \times 1)(230 - 25) = 2373.6\ W \qquad q_{conv,3} = 2373.6 - 1936.75 = 436.95\ W$$

$$Re_4 = \frac{u_\infty L_4}{\nu} = \frac{6 \times 0.2}{26.4 \times 10^{-6}} = 4.54 \times 10^5 \qquad \text{ناحیه گذرا}$$

$$\overline{Nu}_L = 2\left[0.332 \times \left(4.54 \times 10^5\right)^{1/2}(0.79)^{1/3}\right] = 395.34$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-4} \times L_4}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-4} = \frac{395.34 \times 0.0338}{0.2} = 66.81 \ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$q_{conv} = 66.81\,(0.2\times1)(230-25) = 2739.21\ W$ $\qquad q_{conv,4} = 2739.21 - 2373.6 = 365.61\ W$

$Re_5 = \frac{u_\infty L_5}{\nu} = \frac{60\times250\times10^{-3}}{26.4\times10^{-6}} = 5.68\times10^5$ ناحیه درهم

$\overline{Nu}_L = Pr^{1/3}(0.037\,Re^{0.8} - 871) = 0.69^{1/3}\left[0.037\,(5.68\times10^5)^{0.8} - 871\right] = 542.42$

$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-5}\times L_5}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-5} = \frac{542.42\times0.0338}{0.250} = 73.335\ \frac{W}{m^2\cdot K}$

$q_{conv} = 73.335\,(0.250\times1)(230-25) = 3758.4\ W$ $\qquad q_{conv,5} = 3758.4 - 2739.21 = 1019.19\ W$

$Re_6 = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{60\times0.3}{26.4\times10^{-6}} = 6.81\times10^5$ ناحیه درهم

$\overline{Nu}_L = Pr^{1/3}(0.037\,Re^{0.8} - 871) = 0.69^{1/3}\left[0.037\,(6.81\times10^5)^{0.8} - 871\right] = 747.39$

$\overline{Nu}_L = 0.0296\,Re_x^{0.8}\,Pr^{1/3} = 0.0296\,(6.81\times10^5)^{0.8}(0.69)^{1/3} = 1213.64$

$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-6}\times L_6}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-6} = \frac{747.39\times0.0338}{0.3} = 84.2\ \frac{W}{m^2\cdot K}$

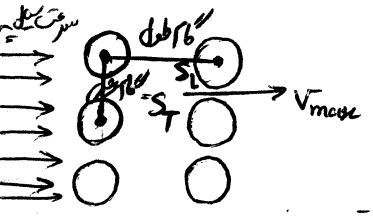
$q_{conv} = 84.2\,(0.3\times1)(230-25) = 5178.3\ W$ $\qquad q_{conv,6} = 5178.3 - 3758.4 = 1419.9\ W$ بیشترین توان را دارد

انتقال حرارت از روی یک دسته (مجموعه) لوله:

از آن جا که آرایش بسیاری از وسایل انتقال حرارت مانند کندانسورها و دیگ‌های بخار از روی یک مجموعه لوله می‌باشد بنابراین انتقال حرارت را برای یک مجموعه لوله مورد بررسی قرار می‌دهیم. معمولاً سیال گرم در داخل لوله‌ها و سیال سرد در بیرون لوله‌ها جاری می‌شود و علت آن این است که در بیرون لوله‌ها جاری می‌شود معمولاً هوا است که حجم بیشتری را نیاز دارد. بعنوان مثال برای گرمایش هوا از این روش استفاده می‌شود. برای انتقال حرارت از روی یک دسته لوله از فرمول گریمسون (Grimson) استفاده می‌کنیم:

$\overline{Nu}_D = C\,Re_{max}^{m}$ $\qquad$ C و m از جدول یا استفاده از عدد رینولدز بدست می‌آیند

$Re_{max} = \frac{\rho V_{max} D}{\mu}$



الف) آرایش مستطیلی:

اندیس L برای ردیف و اندیس T برای ستون بکار رود و قطر لوله‌ها D می‌باشد.

فرمول گریمیسون زمانی بکار می رود که $N_L \geq 10$ باشد.

اگر تعداد لوله ها در یک ردیف کمتر از ۱۰ باشد از فرمول برنشتاین استفاده می کنیم:

$$\overline{Nu}_D = C_2 \, Re_{max}^{m} \, Pr^{0.36} \left[\frac{Pr}{Pr_s}\right]^{1/4}$$

Pr_s ⟸ با دمای T_s خوانده می شود.

Pr ⟸ با دمای میانگین (متوسط) $\frac{T_s+T_o}{2}$ خوانده می شود.

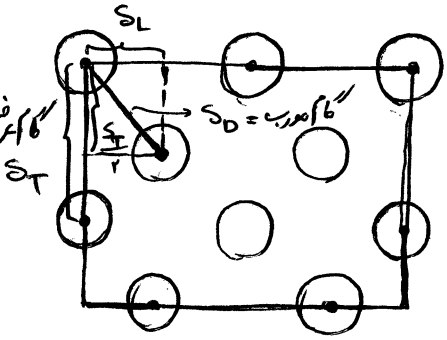
↳ چون به قطر لوله بستگی دارد

اگر لوله ای وجود نداشته باشد سرعت ها یکنواخت هستند:

$$V_{max} = \left(\frac{S_T}{S_T - D}\right) V$$

ب) آرایش مثلثی

معمولاً در صنعت از آرایش مثلثی استفاده می شود. چون (۱) حجم کمتری را احاطه می کند. (۲) ضریب انتقال حرارت بالاتر است.



$$\boxed{S_D = \sqrt{S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2}\right)^2}}$$

* تفاوت در گام طولی است نه گام عرضی

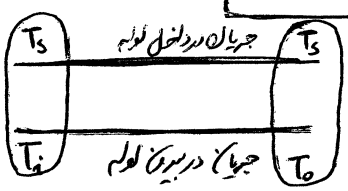
حالت اول: $S_D > \frac{S_T+D}{2}$ در اینصورت $V_{max} = \left(\frac{S_T}{S_T - D}\right) V$

حالت دوم: $S_D < \frac{S_T+D}{2}$ در اینصورت $V_{max} = \frac{S_T}{2(S_T - D)} V$

اگر: $S_D = \frac{S_T+D}{2}$ لوله ها بهم چسبیده اند و باید از فرمول گریمیسون استفاده کنیم.

ΔT_{LMTD}: اختلاف درجه حرارت متوسط لگاریتمی

$$\boxed{q = \bar{h} A \Delta T_{LMTD}}$$ انتقال حرارت برای یک دسته لوله



اگر در داخل لوله جوشش یا میعان صورت بگیرد دما ثابت است.

$$\boxed{\Delta T_{LMTD} = \frac{\overset{\text{چپ}}{(T_s - T_i)} - \overset{\text{راست}}{(T_s - T_o)}}{\ln \frac{T_s - T_i}{T_s - T_o}}}$$

$$\boxed{q = \bar{h} N_{Total} A \Delta T_{LMTD}}$$ تعداد کل لوله ها

$$\boxed{q' = \frac{q}{L}}$$ L → طول لوله

اگر یکی از دماها مجهول باشد از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{T_s - T_o}{T_s - T_i} = e^{\left[\frac{-\pi D N_T \bar{h}}{\rho V N_T C_p}\right]}$$

N_T ↳ تعداد لوله ها در یک ستون

مثال) آرایش مثلثی از مجموعه لوله ها بقطر ۱۶,۴mm و گام طولی و عرضی به ترتیب ۳۴,۳ و ۳۱,۳ میلی متر داریم. ۷ ردیف لوله در جهت جریان هوا وجود دارد و تعداد لوله ها در هر ستون شامل ۸ لوله می باشد. اگر دمای سطح لوله ها ۷۰°C و سرعت هوا در بیرون لوله ۶ $\frac{m}{s}$ و دما در بیرون لوله

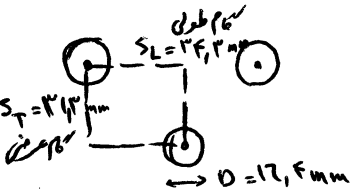
(دمای هوا) $15^\circ C$ باشد و از ضخامت لوله‌ها صرف‌نظر شود (الف) ضریب جابجایی هوا چقدر است؟ ($\bar{h} = ?$)

(ب) نرخ انتقال حرارت بر واحد طول چقدر است؟ ($q' = \frac{q}{L} = ?$)

تعداد لوله‌ها در ردیف — از جدول

$$\Delta P = N_L \times \left[\frac{\rho V_{max}^2}{2}\right] f$$

توضیح: افت فشار برای یک دسته لوله از فرمول زیر بدست می‌آید:



برای هوا: $\bar{T} = T_f = \frac{15+70}{2} = 42.5^\circ C \longrightarrow$

$\nu = 17.4 \times 10^{-6}$

$k = 0.027$

$Pr = 0.705$

$\rho = 1.02$

$C_p = 1007$ — برای آب $= 4200$

$$Re_D = \frac{u_{max} \times D}{\nu} = \frac{12.604 \times 16.4 \times 10^{-3}}{17.4 \times 10^{-6}} = 11879.63$$

$$\frac{S_T}{S_L} = \frac{31.3}{34.3} = 0.91 < 2$$

$$\longrightarrow C = 0.35\left(\frac{S_T}{S_L}\right)^{1/5} = 0.343$$

$$m = 0.6$$

$$T_s = 70 \longrightarrow Pr_s = 0.701$$

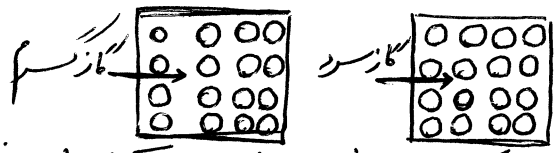
چون تعداد لوله‌ها در ردیف کمتر از ۱۰ می‌باشد بنابراین از فرمول برشتاین استفاده می‌کنیم:

$$\overline{Nu}_D = 87.9 \longrightarrow \overline{Nu}_D = \frac{\bar{h} D}{k} \Rightarrow \bar{h} = 134 \ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$\Delta T_{LMTD} = 49.6^\circ C \longrightarrow \frac{q}{L} = q' = 19.4 \ \frac{W}{m}$$

بستر های آکنده: [Packed Tower = برج‌های پرشده]

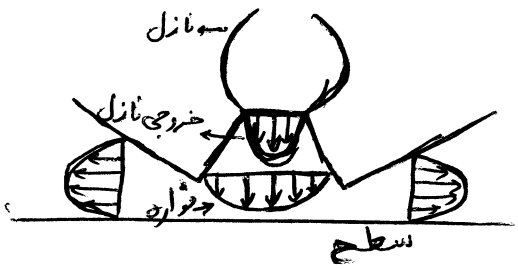
بستر های آکنده وسایل انتقال حرارتی می‌باشند که مطابق شکل زیر از ذرات جامد تشکیل شده و این ذرات جامد می‌توانند ثابت یا متحرک باشند و برای گرمایش یا سرمایش بکار می‌روند



برای افزایش انتقال حرارت معمولاً از برج های پرشده و یا بستر های آکنده استفاده می‌شود. در فرآیندهای صنعتی مانند خشک نمودن جسم همچنین کاربرد دارد.

برخورد فواره‌ها:

فواره گاز معمولاً بطور عمودی به یک سطح برخورد می‌کند و از طریق جابجایی انتقال حرارت را به سطح منتقل می‌کند مطابق شکل زیر:



کاربرد: جلوگیری از یخ زدن قطعات هواپیما در زمستان

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_s - T_e)$$

T_e → دمای فواره

مثال) هوا در یک اتمسفر و ۲۷°c بر روی کره‌ای به قطر ۱۲mm با سرعت جریان آزاد $4\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. یک ترمکوپل کوچک درون کره درجه حرارت سطحی آن را در ۷۷°c نگاه می‌دارد. افت حرارتی کره را محاسبه کنید.

حل)

اولین قدم به دست آوردن خواص با دمای میانگین است.

$$\bar{T} = \frac{T_s+T_\infty}{2} = \frac{27+77}{2} + 273 \simeq 325\ K$$

$$\longrightarrow \nu = 15.69\times10^{-6}\ ,\ Pr = 0.7\ ,\ k = 0.02624\ ,\ \mu_\infty = 1.84\times10^{-5}$$

$$T_s = 77°c \longrightarrow \mu_s = 2.075\times10^{-5}$$

دومین قدم به دست آوردن عدد رینولدز.

$$Re_D = \frac{u_\infty \times D}{\nu} = \frac{4\times0.012}{15.69\times10^{-6}} = 3059$$

ناحیه آرام است و $\bar{h}$ می‌خواهیم.

سومین قدم انتخاب یک فرمول مناسب.

کره را سرد می‌کنیم. (سرمایش)

رابطه ویتاکر برای کره: $\overline{Nu}_D = 2 + (0.4 Re_D^{1/2} + 0.06 Re_D^{2/3}) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{0.14} \rightarrow \overline{Nu}_D = 31.4$

اثر انتقال حرارت از طریق هدایت هوا

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{k} \longrightarrow \bar{h} = 68.77\ \frac{W}{m^2\cdot K} \qquad q = hA(T_s - T_\infty) = 1.553\ W \qquad (A = 4\pi r^2)$$

مثال) تسمه‌ای فولادی با سرعت $20\ \frac{m}{s}$ و دمای 1200 K از یک محیط گرم خارج شده و در محیطی سرد با دمای $T_\infty = 300K$ قرار می‌گیرد. طول و ضخامت تسمه به ترتیب 100m و 0.003m می‌باشد. گرمای ویژه آن $640\ \frac{J}{kg\cdot K}$ و دانسیته آن $7900\ \frac{kg}{m^3}$ می‌باشد. با در نظر گرفتن انتقال حرارت از سطح بالا و پائین صفحه (تسمه) و با صرفنظر از تشعشع و هدایت (رسانش). الف) آهنگ تغییر زمانی اولیه تسمه در فاصله 1m از لبه انتهایی به دست آورید.

(ب) فاصله‌ای از لبه را بیابید که در آنجا آهنگ سرمایش مینیمم می‌باشد.

حل)

$$\bar{T} = \frac{T_s+T_\infty}{2} = \frac{1200+300}{2} = 750K \text{ هوا} \Rightarrow \begin{cases} \nu = 76.37\times10^{-6} \\ k = 54.9\times10^{-3} \\ Pr = 0.7 \end{cases}$$

برای لبه جلویی (آرام): $Nu_x = 0.332\, Re^{1/2} Pr^{1/3}$

برای ناحیه متلاطم در انتهای صفحه: $Nu_x = 0.0296\, Re^{0.8} Pr^{1/3}$

به دست آوردن عدد رینولدز است که با استفاده از آن عدد ناسلت را محاسبه می‌کنیم و با داشتن عدد ناسلت h_x به دست خواهد آمد:

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{20\times1}{76.37\times10^{-6}} = 261\times10^3$$

چون در لبه ابتدایی صفحه قرار داریم از فرمول جریان آرام استفاده می‌کنیم:

$$Nu_x = 0.332\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \Rightarrow Nu_x = 151$$

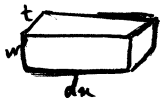
$$Nu_x = \frac{h_x \overset{x=1m}{x}}{k} \Longrightarrow h_x = 8.29\ \frac{W}{m^2\cdot K}$$

$$q_{\text{جابجایی}} = q_{st\ (\text{ذخیره شده})}$$

$$h_x A(T_s - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

مقدار انتقال حرارت جابجایی: $q = h_x A(T_s - T_\infty)$

$$q_{st} = mc\Delta T = \frac{m}{t} c\Delta T = \frac{\rho V}{t} c\Delta T$$



درصورتیکه المانی بطول dx و عرض w و ضخامت t درنظر بگیریم و از تشعشع و هدایت صرفنظر بکنیم بنابراین

$$h_x\,(2\times w\,dx)(T_s-T_\infty)=\rho A\,dx\,c\,\frac{dT}{dt}\quad\Rightarrow\quad h_x(2\cancel{w}\cancel{dx})(T_s-T_\infty)=\rho(\cancel{w}\times t)\cancel{dx}\,c\,\frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dT}{dt}\Big|_{x=1}=\frac{2h_x(T_s-T_\infty)}{\rho c t}=0{,}984\ K/s$$

الف) در لبه انتهایی با توجه به اینکه $L=100\ m$ است عدد رینولدز را حساب کنیم:

$$Re_L=\frac{u_\infty L}{\nu}=\frac{20\times 100}{76{,}37\times 10^{-6}}=261\times 10^{5}$$ جریان درهم

$$Nu_x=0{,}0296\,Re^{0.8}\,pr^{1/3}=22540$$

$$h_L=12{,}4\ \frac{W}{m^2\cdot K}$$ چون در ناحیه درهم هستیم باید $\bar{h}_L$ باشد.

$$dT/dt\Big|_{x=100m}=1{,}47\ K/s$$

ب) بر طبق فرمول برای ناحیه آرام و درهم با افزایش x مقدار h کم می‌شود بنابراین:

$$Re_{x_c}=500{,}000=\frac{u_\infty x_c}{\nu}\ \Rightarrow\ x_c=\frac{500{,}000\times 76{,}37\times 10^{-6}}{20}=1{,}91\ m$$

فصل هشتم : جریان داخلی — Internal Flow

در فصل هفت جریان خارجی مورد بررسی قرار گرفت که معادلاتی برای جریان از روی یک صفحه، جریان از روی یک استوانه و جریان از روی کره بدست آمد. در این فصل جریان داخلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم مانند جریان در داخل لوله‌ها، سیال به وسیله دیوارها احاطه شده است بنابراین لایه مرزی نمی‌تواند آزادانه رشد نماید.

نوع جریان:

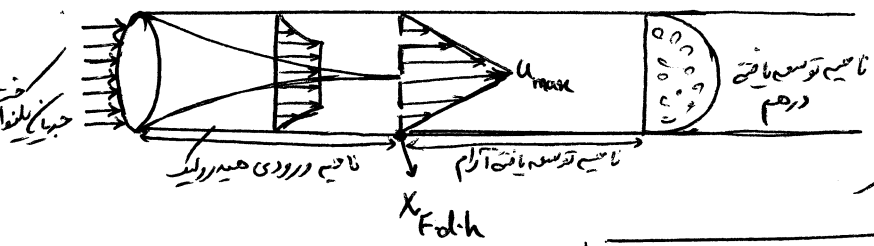
جریان در داخل لوله (جریان داخلی) به سه دسته تقسیم می‌شود:

$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu}$ $\quad u_m =$ سرعت متوسط

۱- جریان ورودی هیدرولیک $\quad Re < 2300$

۲- جریان توسعه یافته آرام $\quad 2300 \le Re < 10000$

۳- جریان توسعه یافته درهم $\quad Re \geq 10000$



$X_{F.d.h}$ = مسافتی که لازم است تا لایه‌های مرزی یکدیگر را قطع کنند و سرعت در مرکز ماکزیمم خواهد بود.

$$\boxed{\text{فرمول لانگهار}: \frac{X_{F.d.h}}{D} = 0.04\,Re}$$

F.d = Fully Developed
h = (هیدرولیکی (سرعتی

$\dot{m} = \rho u_m A_c \longrightarrow$ سطح مقطع لوله $\longrightarrow u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c} = \frac{\dot{m}}{\rho \frac{\pi D^2}{4}} \Rightarrow u_m = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D^2}$: عدد رینولدز

مقدار u_m را در فرمول رینولدز قرار می‌دهیم:

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{\rho \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D^2} D}{\mu} \Rightarrow \boxed{Re = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu}}$$

۱) ناحیه ورودی هیدرولیک:

برای بدست آوردن ناسلت از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$Nu_D = 3.66 + \frac{0.0668 \frac{D}{L} (Re\,Pr)^{Pe}}{1 + 0.04 \left[\frac{D}{L} Re\,Pr\right]^{2/3}}$$

Nu_D: جریان داخلی — Pe: عدد پکله

۲) ناحیه توسعه یافته آرام:

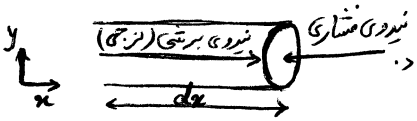
هرگاه یک سیال با سرعت یکنواخت وارد یک لوله بشعاع ثابت r_0 شود لایه مرزی در جهت x شروع به رشد می‌کند و جائیکه لایه‌های مرزی یکدیگر را قطع کنند آغاز ناحیه توسعه یافته آرام خواهد بود. شرایط زیر برقرار است:

$Nu_D = \frac{hD}{k} = 3.66$ اگر درجه حرارت سطح لوله ثابت باشد (جوشش و میعان)

$Nu_D = \frac{hD}{k} = 4.36$ اگر شار حرارتی ثابت باشد (مانند عبور جریان برق)

پروفیل سرعت در ناحیهٔ توسعه یافتهٔ آرام:

پروفیل سرعت در این ناحیه با فرض براینکه خواص ثابت باشند را می‌توان بدست آورد. علت اینکه خواص ثابت است چون جریان آرام می‌باشد. با استفاده از معادله مومنتم و نوشتن موازنهٔ نیروها به تساوی نیروی برشی (لزجی) با نیروی فشاری خواهیم رسید. باید توجه داشت که چون حرکت یک بعدی می‌باشد بنابراین فشار خروجی یعنی $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ برابر با $p+dp$ خواهد بود.



درحالت تعادل:

$$F_{(\text{نیروی برشی})} = F_{(\text{نیروی فشاری})}$$

$$\tau dA = A dp \quad (I)$$

سطح مقطع ثابت $A = \pi r^2$

سطح جانبی متغیر $dA = 2\pi r dx$ ⟶ چون سطح جانبی متغیر است بجای dx قرار می‌دهیم

$$(I) \Rightarrow \tau\, 2\pi r\, dx = \pi r^2 dp \Rightarrow$$

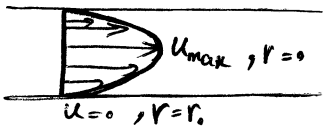
$$\Rightarrow \mu \frac{du}{dy}\, 2\pi r\, dx = \pi r^2 dp \quad (\text{u در جهت x است})$$

$$du = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r \cdot dr \quad *$$

حال نسبت به r انتگرال می‌گیریم: معادله (1)

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{r^2}{2} + c \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r^2 + c}$$

با اعمال شرایط مرزی مقدار c را پیدا می‌کنیم.



شرط مرزی 1 B.C.1: $\Rightarrow r = r_0 \Rightarrow u = 0$

از معادله (1) $\Rightarrow 0 = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_0^2 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} r_0^2$

مقدار c را در معادله (1) قرار می‌دهیم: $u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} r^2 - \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} r_0^2$ معادله (2)

B.C.2 $\Rightarrow r = 0 \quad , u = u_{max}$

از معادله (2): $u_{max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r_0^2$ معادله (3)

$$\frac{\text{معادله (2)}}{\text{معادله (3)}} = \frac{u}{u_{max}} = \frac{\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx}(r^2 - r_0^2)}{-\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_0^2} = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2}$$

$$\boxed{\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$$

با داشتن شعاع r_0 و مسافت انتخابی r می‌توان سرعت را در نقطهٔ انتخابی بدست آورد.

قطر هیدرولیک:

$$D_H = \frac{4 \times (\text{سطح مقطع جریان})}{\text{محیط خیس شده}} \Rightarrow \boxed{D_H = \frac{4A}{P}}$$

۱) برای استوانه توخالی :

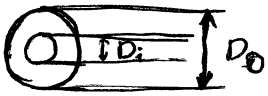
$$D_H = \frac{4\,\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D$$

۲) برای مربع

$$D_H = \frac{4(L\times L)}{4\times L} = L$$

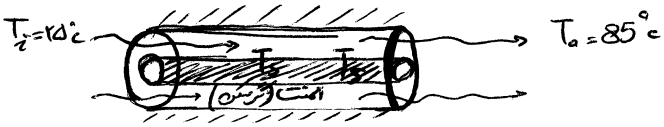
۳) برای بین محبرای دولوله:

$$D_H = \frac{4\left[\frac{\pi}{4}D_o^2 - \frac{\pi}{4}D_i^2\right]}{\pi D_o + \pi D_i} = \frac{(D_o-D_i)(D_o+D_i)}{D_o+D_i} = D_o - D_i$$



مثال) آب در فضای بین دولوله هم محور به قطرهای ۲۵mm و ۵۰mm با دبی $0.04\ \frac{kg}{s}$ و دمای ۲۵°c عبور می‌کند. اگر آب بطور الکتریکی با شدت $4000\ \frac{W}{m}$ گرم شود به دمای ۸۵°c می‌رسد. الف) با توجه به قطر هیدرولیکی عدد رینولدز را حساب کنید. همچنین طول مورد نیاز لوله را پیدا کنید. ب) دمای سطح داخلی لوله T_s چقدر است؟

حل)



$$\bar{T} = \frac{T_o+T_i}{2} = \frac{85+25}{2} = 55°c \Rightarrow c_p = 4179\ \frac{J}{kg\cdot K},\ \rho = 995,\ \mu = 513\times10^{-4}\ \frac{kg}{m\cdot s},\ k = 0.64,\ Pr = 3.1$$

$$Re = \frac{\rho u_m D_H}{\mu} \qquad D_H = D_o - D_i$$

$$Re_{D_H} = \frac{4\dot{m}}{\pi D_H \mu} \Rightarrow Re_{D_H} = 15910 > 10000$$ ناحیه توسعه یافته آرام

فرمول دیتوس و بولستر برای ناحیه توسعه یافته درهم:

$$Nu_D = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{0.4}$$

$$\frac{\bar{h} D_H}{k} = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{0.4} \Rightarrow \bar{h} = 240\ \frac{W}{m^2\cdot K}$$

الف) می‌توان اول طول مورد نیاز برای این گرمایش را بدست آورد:

$$q' \times L = \dot{m} c_p (T_o - T_i)$$

$$4000 \times L = 0.04 \times 4179 (85-25) \Rightarrow L = 2.5\,m$$

ب) با استفاده از فرمول دیتوس و بولستر دیدیم که ضریب انتقال حرارت متوسط $\bar{h}$ برابر با $240\ \frac{W}{m^2\cdot K}$ بدست آمد:

$$\dot{m} c_p (T_o - T_i) = \bar{h}\, \pi D_H L (T_s - \bar{T}) \Rightarrow T_s = 296.4°c$$

ضریب انتقال حرارت: برای دو ناحیه توسعه یافته آرام و توسعه یافته درهم از فرمول های بخصوصی می‌توان استفاده کرد بخصوص فرمول دیتوس و بولستر که برای ناحیه توسعه یافته درهم بکار می‌رود. یعنی جائیکه $Re \geq 10000$

$$Nu_D = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{n}$$

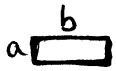
$n = 0.4$ for Heating (گرمایش)

$n = 0.3$ for cooling (سرمایش)

توضیح: در مسئله قبل چون گرمایش داشتیم بنابراین: $Nu_D = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{0.4}$

مثال) هوا با دمای ۲۸۵K و دانسیته $1.16\ \frac{kg}{m^3}$ وارد مجرای مستطیلی بطول ۲m با سطح مقطع $75\times150\ mm^2$ می‌شود. سطح مجرا در دمای ثابت ۴۰۰K قرار دارد و دبی جرمی جریان هوا ۰.۱ است. با شرط براینکه لزجت سینماتیک هوا $15.8\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$ و پرانتل هوا ۰.۷ باشد و همچنین ضریب ظرفیت حرارتی آن $c_p = 1007\ \frac{J}{kg\cdot K}$ باشد دمای خروجی هوا را بدست آورید.

حل)



$$D_H = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{4\times75\times150}{2(75+150)} = 100\ mm = 0.1\ m$$

$$Re = \frac{u_m D_H}{\nu} = \frac{7.9\times0.1}{15.8\times10^{-6}} = 50000 \qquad u_m = \frac{4\dot m}{\rho \pi D_H^2} = \frac{4\times0.1}{1.16\times\pi\times(0.1)^2} = 7.9\ (\tfrac{m}{s})$$

$$Nu_D = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{0.4} = 0.023\,(50000)^{0.8}\,(0.7)^{0.4} = 114.53$$

$$Nu_D = \frac{\bar h D_H}{k} \Rightarrow \bar h = \frac{114.5\times29.445\times10^{-3}}{0.1} = 33.7$$

$$\bar T = \frac{285+400}{2} = 342.5\,K \xrightarrow{\text{جدول}} k = 29.445\times10^{-3}$$

$$q = \bar h A(T_s - \bar T) \Rightarrow q = 33.7\times(75\times150\times10^{-6})(400-342.5) = 21.8\ W$$

$$q = \dot m c_p (T_o - T_i) \Rightarrow 21.8 = 1.16\times1007\,(T_o - 285) \Rightarrow T_o = 285.018\ K$$

دمای متوسط: در جریان داخلی یعنی جریان در داخل لوله‌ها از دمای متوسط استفاده می‌شود زیرا دما در هر نقطه متغیر است. در جریان داخلی صحبت معنی ندارد و بجای آن می‌توان از T_m یعنی دمای متوسط استفاده کرد. بنابراین با شرط براینکه جابجایی داشته باشیم قانون سرمایش نیوتن بشکل زیر تبدیل می‌شود.

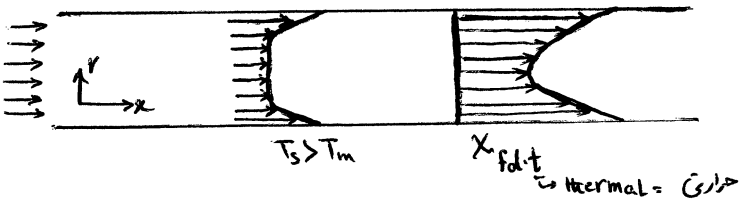
$$\boxed{q = hA(T_s - T_m) \qquad T_s > T_m}$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$\boxed{T_m = \frac{2}{u_m r_o^2}\int_0^{r_o} u T r\, dr}$$

سرعت متوسط — شعاع خارجی

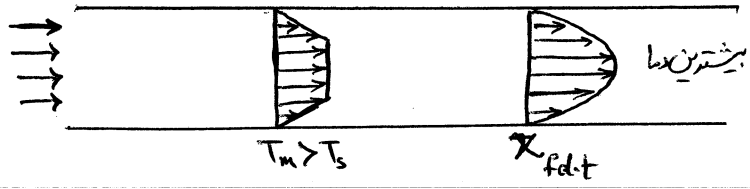
الف) اگر سیال سرد شود:



t = thermal = حرارتی

fd = fully developed

ب) اگر سیال گرم باشد:



از فرمول لانگار می‌توان $x_{fd,t}$ را بدست آورد:

برای گازها $Pr=1$ بنابراین: $X_{fd,h} = X_{fd,t}$

$$\boxed{\frac{X_{fd,t}}{D} = 0.04\, Re\, Pr}$$

سرعت میانگین: برای ناحیه توسعه یافته آرام و درهم باید از سرعت میانگین یا u_m استفاده کنیم. در ناحیه درهم و یا به عبارتی توسعه یافته درهم از حرکت گردابه‌ای نمی‌توان صرفنظر کرد و سرعت به r و x بستگی دارد. اما برای ناحیه آرام و یا به عبارتی توسعه یافته آرام سرعت فقط به r بستگی دارد. برای بدست آوردن سرعت میانگین یا متوسط به روش زیر عمل می‌کنیم:

$\dot m = \rho u_m A_c$

$A_c = Area$ سطح مقطع

اگر سرعت در هر نقطه تغییر کند: $u_m = \dfrac{\int_{A_c} \rho u(r,x)\, dA_c}{\rho A_c}$

$$\xrightarrow[dA_c = 2\pi r dr]{A_c = \pi r_0^2} u_m = \frac{2\pi\rho}{\rho \pi r_0^2}\int_0^{r_0} u(r,x)\, r\, dr \Rightarrow u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} u(r,x)\, r\, dr$$

سرعت متوسط برای ناحیه متلاطم

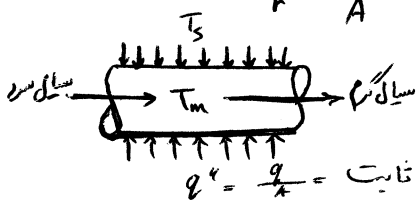
$$u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} u(r)\, r\, dr$$

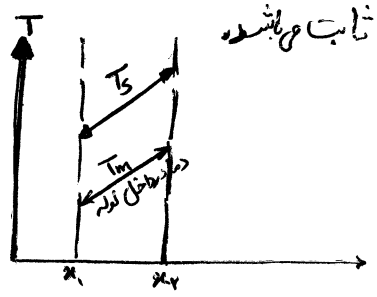
سرعت متوسط برای ناحیه آرام.

شار حرارتی یکنواخت:

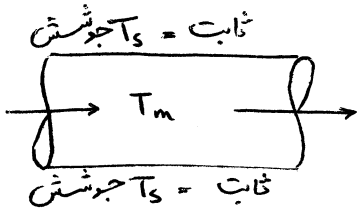
در بسیاری از مسائل مهندسی شار حرارتی یعنی $\frac{q}{A}$ ثابت می‌باشد.

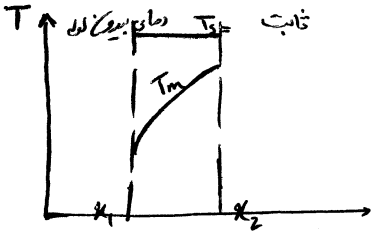
$q'' = \frac{q}{A}$ = ثابت



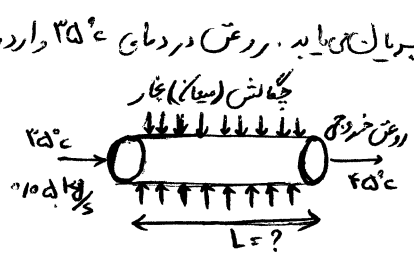


دمای سطح ثابت (مثل جوشش و میعان)





مثال) روغن با نرخ جرمی $0.05\ \frac{kg}{s}$ درون یک لوله مسی بقطر درونی $1cm$ و ضخامت $0.2\ cm$ جریان می‌یابد. روغن در دمای $35°c$ وارد و با بخار آب (میعان) بخار اشباع خروجی $45°c$ گرم می‌شود. طول لوله را بدست بیاورید.



در جریان داخلی معمولاً عدد رینولدز از دبی محاسبه می‌شود:

$$\bar T = \frac{35+45}{2} = 40 \Rightarrow \begin{cases} c_p = 1964 \\ \rho = 876 \\ k = 0.144 \\ \mu = 0.21 \\ Pr = 2870 \end{cases}$$

$$Re = \frac{4\dot m}{\mu \pi D} = 30 \Rightarrow$$ جریان آرام

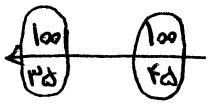
برای جوشش و میعان $Nu = 3.66$: چون دما ثابت می‌باشد

$$Nu = \frac{hD}{k} \Rightarrow 3.66 = \frac{h \times 0.01}{0.144} \Rightarrow h = 527\ \frac{W}{m^2 k}$$

$$q = \dot m c_p (T_{out} - T_{in}) = 0.05 \times 1964 (45-35) = 983\ W$$

$$q = h \overset{\text{سطح جانبی}}{A_i} \Delta T_{LMTD} \qquad A_i = \pi D_i L$$

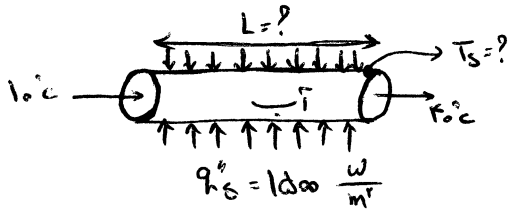
$$\Delta T_{LMTD} = \frac{۵۵-۶۵}{\ln \frac{۵۵}{۶۵}} = ۵۹,۹$$



$$A_i = \pi D_i L \Rightarrow L = ۰,۹۱۱\,m$$

مثال) آب با دبی جرمی $۰,۱\ \frac{kg}{s}$ و دمای $۱۰^\circ c$ به یک لوله با قطر درونی $۰,۰۲m$ وارد و تا $۴۰^\circ c$ گرم می‌شود. سطح بیرونی لوله با یک المان الکتریکی حرارتی پوشیده شده و عایق شده است. این المان الکتریکی که بر روی سطح لوله شار حرارتی ثابت $۱۵۰۰\ \frac{W}{m^2}$ تولید می‌کند تعیین کنید الف) عدد رینولدز و ضریب انتقال حرارت ب) طول مورد نیاز لوله و دمای سطح درونی لوله در مقطع خروجی.

حل)



$$Re = \frac{۴\dot m}{\mu \pi D} = ۶۹۹۰$$

$$Nu = ۳,۶۶ \longrightarrow h = ۱۳۲\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

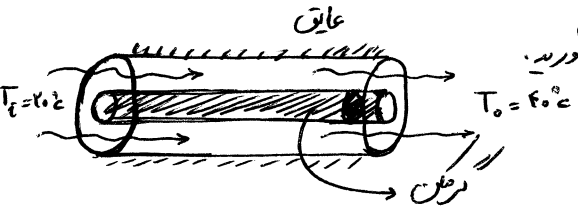
$$q'' \pi D L = \dot m c_p (T_{out} - T_{in}) \Rightarrow L = ۱,۳۳$$

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_s - T_{out}) \Rightarrow ۱۵۰۰ = ۱۳۲(T_s - ۴۰) \Rightarrow T_s = ۱۵۳,۲^\circ c$$

مثال) برای گرمایش آب از دمای $۲۰^\circ c$ به دمای خروجی $۶۰^\circ c$ از لوله‌ای به قطر داخلی $۲۰mm$ و قطر خارجی $۴۰mm$ استفاده می‌شود سطح بیرونی آن کاملاً عایق شده است. با عبور جریان برق (شار حرارتی ثابت) از جداره داخلی گرمایی با شدت $۱۰^۶\ \frac{W}{m^3}$ در آن تولید می‌شود.

الف) اگر دبی آب در لوله $۰,۱\ \frac{kg}{s}$ باشد، چه طولی از لوله لازم است تا دمای مورد نظر خروجی حاصل شود. ب) اگر دمای سطح درونی لوله در مقطع خروجی $T_s = ۷۰^\circ c$ باشد ضریب انتقال حرارت جابجایی متوسط را بدست آورید.

حل)



$$c_{p_{water}} = ۴,۱۷۹\ \frac{kJ}{kg \cdot K}$$

الف) گرمای داده شده را بدست می‌آوریم:

$$q_{\text{گرمای داده شده}} = \dot q V = \dot q A L = \dot q \left(\frac{\pi D_i^2}{۴}\right) L$$

سطح جانبی = حرارت را به محیط می‌دهد.
سطح مقطع = حرارت را تولید می‌کند.

$$q_{\text{گرفته شده}} = \dot m c_p (T_o - T_i)$$

در حالت تعادل، حرارتی که در داخل گرمکن تولید می‌شود با حرارت گرفته شده توسط سیال برابر است چون عایق شده است:

$$\bar h A (T_s - T_{out}) = \dot m c_p (T_o - T_i) \Rightarrow \bar h \pi (D_o - D_i) L (T_s - T_{out}) = \dot m c_p (T_o - T_i)$$

$$\Rightarrow \bar h \pi (۰,۰۴ - ۰,۰۲) \times L (۷۰ - ۴۰) = ۰,۱ \times ۴۱۷۰ (۴۰ - ۲۰)$$

برای بدست آوردن L از فرمول زیر مقدار $\bar h$ را حساب می‌کنیم:

$$q_h = \dot m c_p (T_o - T_i) \Rightarrow q_h = (0{,}1)\ 4179 \times (40-20) = 8358\ W$$

$$q_h = \dot q V = \dot q A L = \dot q \frac{\pi D_i^2}{4} L \Rightarrow 8358 = 10^6 \times \frac{\pi (20\times10^{-3})^2}{4} \times L \Rightarrow L = 26{,}62\ m$$

مقدار L را در رابطه قبلی قرار می‌دهیم:

$$\bar h \pi (D_o - D_i) L (T_s - T_{out}) = \dot m c_p (T_o - T_i) \Rightarrow \bar h = ✓$$

مثال) یک طرح پیشنهادی برای استفاده از انرژی خورشیدی این است که لوله‌ای را در نقطه کانونی یک آینه سهموی (سهمی شکل) قرار داده و سیالی را آن عبور می‌دهیم. اثر کلی این عمل را می‌توان توسط لوله‌ای با q''_s ثابت در سطح بیان کرد. فرض کنید از لوله‌ای به قطر 60mm در یک روز آفتابی با $q''_s = 2000\ \frac{W}{m^2}$ استفاده می‌شود. الف) مطلوبست چنانچه آب با دبی $0{,}01\ \frac{kg}{s}$ و دمای $T_{bi} = 20°C$ وارد لوله شود برای آنکه دمای سیال هنگام خروج برابر با $80°C$ باشد طول مورد نیاز لوله را بدست آورید.

راهنما: معمولاً سطح بیرونی لوله را سیاه انتخاب می‌کنند تا انرژی بیشتری از خورشید دریافت کنند.

حل)

$$\bar T = \frac{20+80}{2} = 50°C \quad \begin{cases} k = 0{,}67 \\ \mu = 3{,}25\times10^{-4} \\ Pr = 2{,}2 \\ c_p = 4181\ \frac{J}{kg\cdot K} \end{cases}$$

موازنه انرژی را انجام می‌دهیم:

$$q''_s \cdot A = \dot m c_p (T_{bo} - T_{bi})$$

$$q''_s \cdot (\pi D L) = \dot m c_p (T_{bo} - T_{bi}) \Rightarrow L = \frac{\dot m c_p (T_{bo} - T_{bi})}{\pi D q''_s} = 76{,}5\ m$$

ب) با فرض براینکه شرایط کاملاً توسعه یافته در خروجی لوله برقرار شده باشد دمای سطح لوله را در خروجی پیدا کنید؟

حل)

اول باید عدد نیوسلت را بدست آوریم و با فرض براینکه جریان توسعه یافته می‌باشد بنابراین $N = 4{,}36$ خواهد بود. با استفاده از Nu، مقدار انتقال حرارت جابجایی را محاسبه می‌کنیم و با موازنه‌ی انرژی دمای سطح لوله را در خروجی پیدا خواهیم نمود.

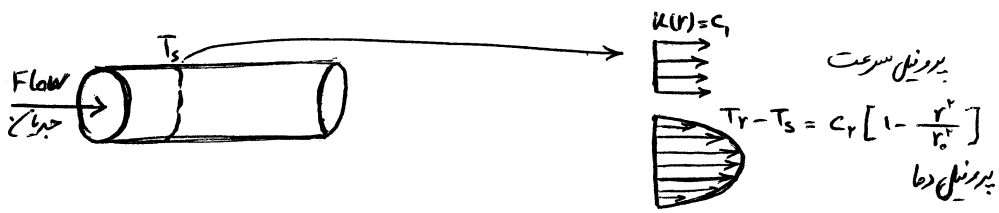
$$Re = \frac{4\dot m}{\mu \pi D} = 603$$

$$Nu = 4{,}36$$

$$Nu = \frac{hD}{k} \Rightarrow h = 47{,}7$$

$$q''_s = h(T_s - T_m) \Rightarrow 2000 = 47{,}7 \left(T_s - \frac{80+20}{2}\right) \Rightarrow T_s = 82°C$$

مثال) برای جریان فلز مذاب در لوله که $T_s < T_m$ سرعت در یک مقطع خاص، یکنواخت و پروفیل دما سهمی می‌باشد یعنی $u(r) = c_1$ و $T(r) - T(s) = c_2\left[1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right]$ است که در آن c_1 و c_2 ثابت و مثبت می‌باشد. الف) T_m را برحسب T_s و c_2 پیدا کنید؟



حل)

$$T_m = \frac{2}{u_m r_o^2} \int_0^{r_o} u(r)\, T\, r\, dr \quad \text{دمای متوسط یا میانگین}$$

$$T_m = \frac{2}{u_m r_o^2} \int_0^{r_o} c_1 \left\{ c_2\left[1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right] + T_s \right\} r\, dr$$

به جای u_m و T_r مقدار قرار می‌دهیم:

$$T_m = \frac{2c_1}{u_m r_0^2}\int_0^{r_0}\left\{T_s + c_2\left[1-\frac{r^2}{r_0^2}\right]\right\} r\,dr$$

اکنون به جای u_m نیز مقدار c_1 را قرار می‌دهیم ولی اول ثابت می‌کنیم که : $c_1 = u_m$

$$u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} u_{(r,x)}\, r\,dr$$

برطبق اطلاعات مسئله سرعت فقط به r بستگی دارد و به x بستگی ندارد و $u(r)=c_1$. بنابراین به جای $u(r)$ مقدار آن یعنی c_1 را قرار می‌دهیم.

$$u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} c_1 r\,dr \Rightarrow u_m = \frac{2}{r_0^2}\left[c_1\frac{r^2}{2}\right]_0^{r_0} \Rightarrow \boxed{u_m = c_1}$$

به جای u_m مقدار c_1 را قرار می‌دهیم :

$$T_m = \frac{2c_1}{c_1 r_0^2}\int_0^{r_0}\left\{T_s + c_2\left[1+\frac{r^2}{r_0^2}\right]\right\} r\,dr$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{2}{r_0^2}\left[T_s\frac{r^2}{2} + c_2\frac{r^2}{2} - \frac{c_2 r^4}{4r_0^2}\right]_0^{r_0} = \frac{2}{r_0^2}\left[T_s\frac{r_0^2}{2} + \frac{c_2}{2}r_0^2 - \frac{c_2}{4}r_0^2\right]$$

$$\boxed{T_m = T_s + \frac{c_2}{2}}$$

چون c_2 مقدار مثبتی می‌باشد بنابراین فرض $T_s < T_m$ درست است.

حل تشابهی

معادلات حاکم یعنی معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی معادلات دیفرانسیل غیر خطی نامیده می‌شوند و حل آنها بسیار مشکل است. بعد از حل معادلات حاکم از حل تشابهی اقدام به بدست آوردن ضخامت لایه مرزی سرعتی δ و ضخامت لایه مرزی حرارتی δ_t خواهیم کرد.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (142\text{-}2)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \upsilon=\frac{\mu}{\rho} \qquad (143\text{-}2)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \alpha=\frac{k}{\rho C_p} \qquad (144\text{-}2)$$

حل عددی این معادلات به وسیله دو تن از شاگردان پرانتل ارائه شد و معادلات غیر خطی به معادلات دیفرانسیل عادی تبدیل شده و در نتیجه حل آنها ساده می‌گردد. بلازیوس و پل هاوزن تغییرات سرعت و دما را در راستای y تعریف کردند. اندیشهٔ اصلی این شیوه براساس این بنا شده است که تغییرات سرعت و دما در تمام نقاط x با یکدیگر مشابه هستند و نام حل تشابهی به همین علت بنا شده است. در حل تشابهی معادلهٔ مومنتوم و معادله انرژی به شکل ساده‌ای تبدیل می‌شود. بلازیوس و پل هاوزن با معادلاتی که قبلاً اثبات شد نشان دادند که $\frac{u}{u_\infty}$ تابعی از $\frac{y}{\delta}$ می‌باشد

وبا استفاده از معادله مومنتوم در معادله (2-10) نشان دادیم که $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$ می‌باشد که υ لزجت سینماتیکی میباشد.

یادآوری

معادلهٔ زیر که قبلا اثبات شده است نشان می‌دهد که همزمان با رشد لایهٔ مرزی با مسافت از لبهٔ ابتدائی، پروفیل سرعت $\frac{u}{u_\infty}$ از نظر هندسی مشابه باقی می ماند.

$$\frac{u}{u_\infty}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad 0<y<\delta$$

شکل تابعی این تشابه به صورت زیر است:

$$\frac{u}{u_\infty}=f\left(\frac{y}{\delta}\right) \xrightarrow{\eta=\frac{y}{\delta}} \frac{u}{u_\infty}=f(\eta)$$

بنابراین پروفیل سرعت فقط به وسیلهٔ پارامتر یا متغیر تشابه η که به x و y بستگی دارد تعیین می‌شود.

برای حل معادلات حاکم متغیر η که به پارامتر تشابهه معروف است به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\eta=\frac{\text{فاصله انتخابي}}{\text{ضخامت لايةمرزي}}=\frac{y}{\delta}=\frac{y}{\sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}}}\Rightarrow \eta=\sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}}\;y \qquad (145\text{-}2)$$

بنابراین برای بدست آوردن $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ داریم :

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}} \qquad (146\text{-}2)$$

اکنون تابع جریان $\Psi(x,y)$ به صورت زیر تعریف میشود.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad , \quad v = \frac{-\partial \Psi}{\partial x} \qquad (147\text{-}2)$$

اگرمقادیر معادله (۲-۱۴۷) را در معادله (۲-۱۴۲) جایگذاری کنیم، مشاهده میکنیم که معادله پیوستگی خود به خود ارضاء میشود. اکنون یک تابع به شکل زیر تعریف میکنیم.

$$f_x = \frac{\Psi}{u_\infty \sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}}} \Rightarrow \Psi = u_\infty \sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}} f_{(x)}$$

بنابراین

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = u_\infty \sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}} \frac{df}{d\eta} \qquad (148\text{-}2)$$

می خواهیم مقدار u را بدست آوریم که قبلاً از معادله پیوستگی تعریف کرده بودیم که

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (149\text{-}2)$$

مقادیر فوق را جایگزین می‌کنیم. برای بدست آوردن u مقدار $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$ را در مقدار $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ ضرب میکنیم.

$$u = u_\infty \sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}} \frac{df}{\partial \eta} \sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}} \qquad (150\text{-}2)$$

بنابراین چون $\sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}} = 1$ در نتیجه داریم:

$$u = u_\infty \frac{df}{d\eta} \qquad (151\text{-}2)$$

اگر $f' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{df}{d\eta}$ باشد بنابراین با روش مشابهه میتوان ثابت کرد که

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon u_\infty}{x}\right)^{1/2}\left[\eta f' - f\right] \qquad (152\text{-}2)$$

با مشتق گیری از مؤلفه‌های سرعت می‌توان $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را بدست آورد و چون معادله مومنتوم برابر است با

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (153\text{-}2)$$

با جایگزین کردن در معادلهٔ مومنتوم به نتایج زیر می‌رسیم.

$$2\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2f''' + ff'' = 0 \qquad (154\text{-}2)$$

جدول ۲-۳ نتیجه آزمایشات بلازیوس

$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}}}$	f	$f' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{df}{d\eta}$	$f'' = \frac{d^2 f}{d\eta^2}$
۰/۴	۰/۰۲۶	۰/۰۶۶	۰/۳۳۱
۰/۸	۰/۱۶	۰/۲۶	۰/۳۲
۱/۶	۰/۴۲	۰/۵۱	۰/۲۹
۳/۲	۱/۵۹	۰/۸۷	۰/۱۳۹
۵	۳/۲	۰/۹۹	۰/۱۵۹
۵/۶	۳/۶	۰/۹۹۶	۰/۰۰۷
۶	۴/۲	۰/۹۹۹	۰/۰۰۲۴

آزمایشات فوق در $u_\infty = ۸\, m/s$ و x بین 1cm تا 17.5cm (Fig 4.19) تغییرات و شرایط مرزی زیر برقرار است.

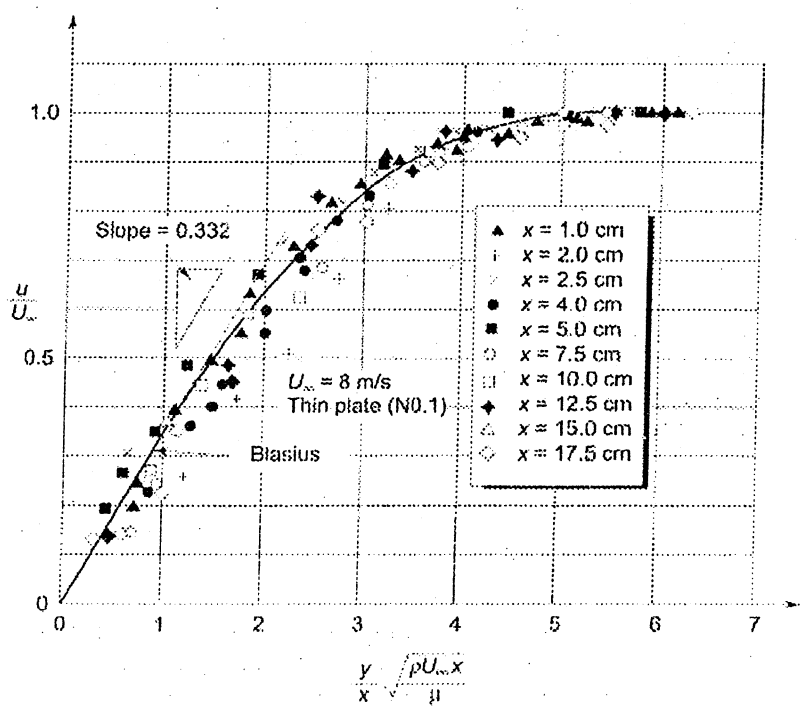


Fig. 4.19 *Velocity profile in a laminar boundary layer according to Blasius, with the experimental data of Human [10]*

$$\eta = \frac{y}{\delta} = 0 \Rightarrow \frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_\infty} = 0 \qquad (155\text{-}2)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} = 5 \Rightarrow \frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_\infty} = 0.99 \approx 1 \qquad (156\text{-}2)$$

نتیجه:

پرانتل با آزمایشات فهمید که در $\eta = 5$ مقدار $\frac{u}{u_\infty} = 0.99 \approx 1$ می‌باشد.بنابراین چون داشتیم که

$$\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}} y \Rightarrow 5 = \sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}} \delta \rightarrow \delta = 5\sqrt{\frac{\upsilon x}{u_\infty}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{(\mathrm{Re})^{\frac{1}{2}}} \qquad (157\text{-}2)$$

با استفاده از معادله فوق میتوان ضخامت لایه مرزی سرعتی یعنی δ را بدست آورد.

حل تشابهی معادله انتقال گرما

با روش مشابه می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل جزئی معادلهٔ انرژی را به معادلهٔ دیفرانسیل عادی تبدیل کرد.

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (158\text{-}2)$$

دمای بی بعد $T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$ که در آن $T_\infty > T > T_s$ می‌باشد تعریف می‌شود.

$$T - T_s = (T_\infty - T_s)T^* \qquad (159\text{-}2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_\infty - T_s)\frac{\partial T^*}{\partial x} \qquad (160\text{-}2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_\infty - T_s)\frac{\partial T^*}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (161\text{-}2)$$

اکنون $\frac{\partial T}{\partial y}$ را بدست میآوریم:

$$T - T_s = (T_\infty - T_s)T^* \qquad (162\text{-}2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_\infty - T_s)\frac{\partial T^*}{\partial y} \qquad (163\text{-}2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_\infty - T_s)\frac{\partial T^*}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (164\text{-}2)$$

قبلاً $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ را بدست آورده بودیم که برابر بود با

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon x}} \qquad (165\text{-}2)$$

با جایگزین کردن و محاسبهٔ $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ و جایگزین کردن در معادلهٔ انرژی داریم:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\mathrm{Pr}}{2}\frac{\partial T^*}{\partial \eta} = 0 \xrightarrow{\theta = f'} \theta'' + \frac{\mathrm{Pr}}{2} f\ \theta' = 0 \qquad (166\text{-}2)$$

بـــــا اســـــتفاده از معادلـــــه فـــــوق میتـــــوان عـــــدد پرانتـــــل و در نتیجـــــه از رابطه $\frac{\delta}{\delta_t}=1.032\Pr^{1/3} \Rightarrow \Delta=\frac{\delta_t}{\delta}=0.976\Pr^{-1/3}$ ضخامت لایه مرزی حرارتی δ_t را بدست آورد.

مثال

جریان پایدار و موازی هوای اتمسفریک روی یک صفحهٔ تخت مدنظر است. دما و سرعت جریان هوا به ترتیب ۳۰۰K و $۲۵\frac{m}{s}$ است.

الف: ضخامت لایهٔ مرزی را در فاصلهٔ x=۱ mm و x=۱۰mm و x=۱۰۰ mm از لبـه ابتـدایی بـا اسـتفاده از فرمـول بلازیوس پیدا کنید.

ب: مؤلفه سرعت در جهت y یعنی v را برای فواصل بالا پیدا کنید.

بـرای حـل ایـن مـسئله بـا مراجعـه بـه جـدول خـواص و یـا از طریـق فرمـول سـاترلند بـه مقـدار $\rho_{هوا}=۱.۱۶\,kg/m^{۳}$, $\mu_{هوا}=۰.۱۹٤\times۱۰^{-٦}\,kg/m.s$ خواهیم رسید.

الف: ضخامت لایهٔ مرزی سرعتی با توجه به فرمول زیر برای فاصله های متفاوت بدست می‌آید.

$$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{(\mathrm{Re})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{\delta}{x}=\frac{5}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{w}}} \Rightarrow$$

$$\delta=\frac{5x}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{\upsilon}}} \Rightarrow \delta=\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{u_\infty}{\upsilon}}}=\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{25}{\frac{0.194\times10^{-6}}{1.116}}}}=3.98\times10^{-3}\sqrt{x}$$

$$x=1\,mm \Rightarrow \quad \delta=1.26\times10^{-4}m$$

$$x=10\,mm \Rightarrow \quad \delta=3.99\times10^{-4}m$$

$$x=100\,mm \Rightarrow \quad \delta=1.233\times10^{-3}m$$

ب:

$$v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\upsilon u_\infty}{x}}(\eta\frac{df}{d\eta}-f)$$

لایه‌مرزي روي $\frac{df}{d\eta}=\frac{u}{u_\infty}=0.99 \Rightarrow \eta=5 \Rightarrow f=3.284$

$$x=1mm \qquad v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\frac{0.194\times10^{-6}\times25}{1.116}}{0.001}} \qquad (5\times0.99-3.284)$$

$$v=0.527\frac{m}{s}$$

با افزایش x مقدار v کمتر می‌شود.