# *Chapter 2*

# Fatigue Failure Resulting from Variable Loading

## ۷-۳ روش‌های خستگی ـ عمر (Fatigue-Life Methods)

سه روش مهم عمر خستگی که در طراحی و تحلیل به‌کار می‌رود، **روش تنش-عمر**، **روش کرنش-عمر**، و **روش مکانیک شکست کشسان خطی** است. این سه روش، برای پیش‌بینی عمر قطعه برحسب شمار $N$ نوسان بار معین تا شکست تلاش دارند. عمر بین $1 \leq N \leq 10^3$ نوسان بار را در کلاس **خستگی کم‌نوسان** (***low-cycle fatigue***) می‌گذارند حال آنکه **خستگی پرنوسان** (***high-cycle fatigue***) را برای $N > 10^3$ به‌کار می‌برند. روش تنش-عمر که تنها بر پایه سطوح تنش است، شیوه‌ای با کمترین دقت بخصوص برای عمر کم‌نوسان است. نگذریم که با سابقه‌ترین روش است زیرا برای گسترهٔ وسیعی از طرح‌ها آسان‌ترین است، داده‌های فراوان دارد و برای عمر پرنوسان بس است.

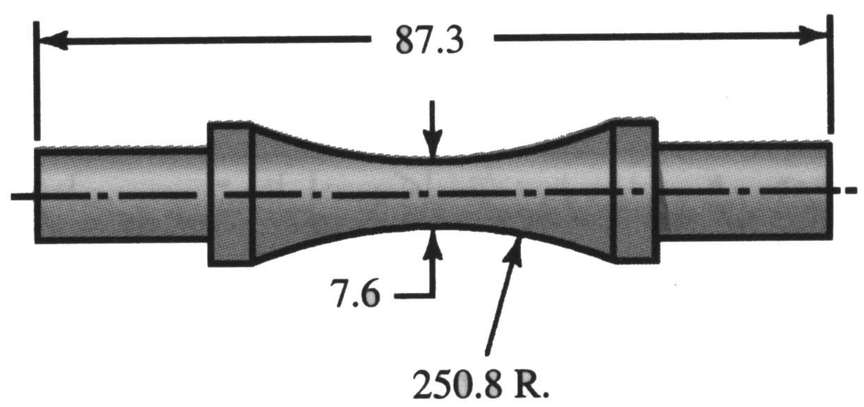
روش کرنش-عمر به تحلیلی با جزئیات بیشتر دربارهٔ تغییر شکل مومسان در نواحی موضعی می‌پردازد جوری که تنش‌ها و کرنش‌ها برای برآورد عمر ارزیابی می‌شوند. این روش به‌ویژه برای عمرهای خستگی کم‌نوسان خوب است. در کاربرد این روش چند حالت ایده‌ال را باید باهم ترکیب کرد که خودبخود نگران‌کننده است. به‌همین خاطر، طرح این روش تنها برای افزودن به فهم طبیعت خستگی ارزش دارد.

در روش مکانیک شکست، می‌گیریم که ترک وجود دارد و شناخته شده است. پس، روش را برای پیش‌بینی رشد ترک بر اثر میزان شدت تنش به‌کار می‌بریم. این روش برای سازه‌های بزرگ به‌یاری دستورهای رایانه‌ای و برنامه متناوب باز بین کاربری بیشتری دارد.

## ۷-۴ روش تنش-عمر (The Stress-Life Method)

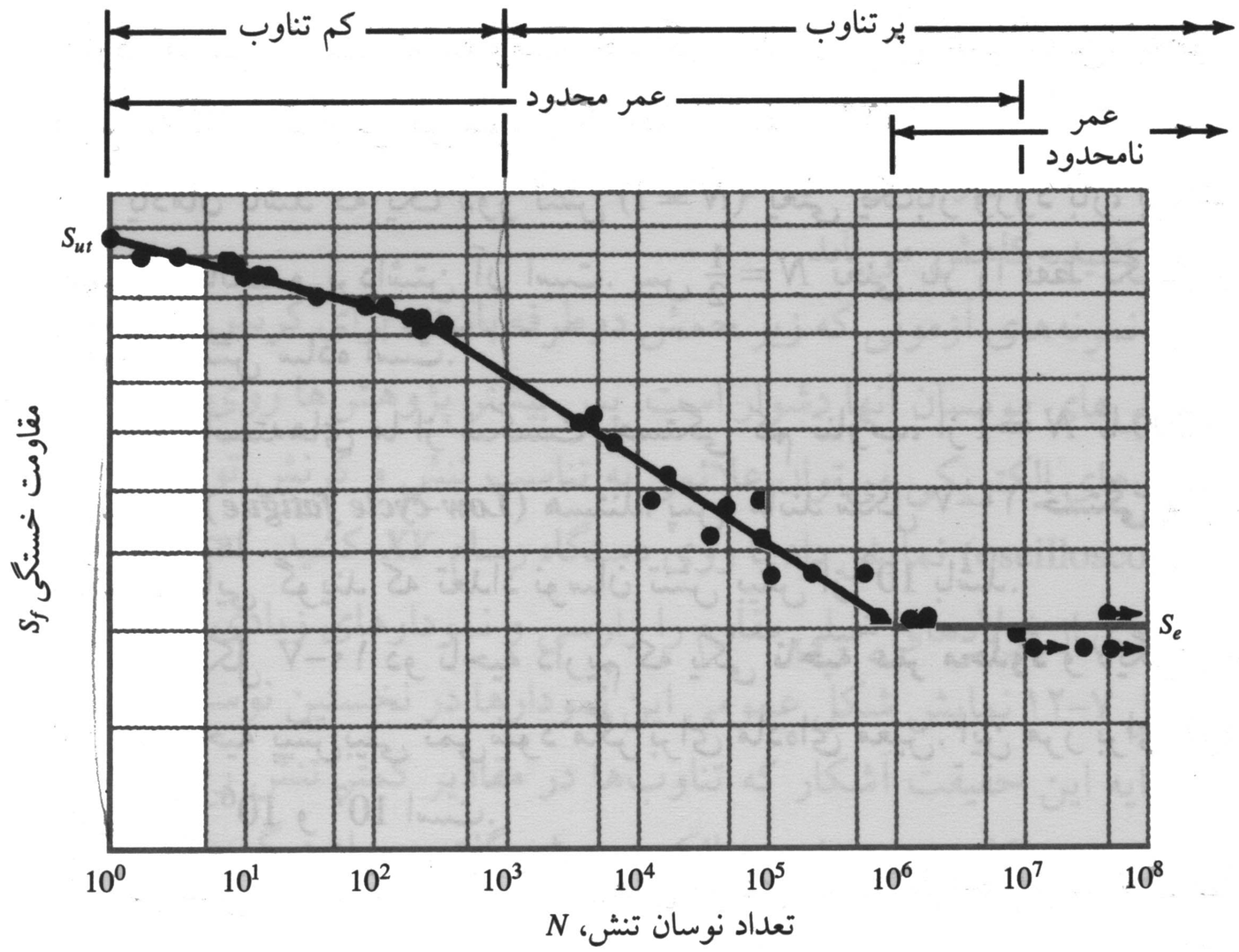
تعیین مقاومت مواد در بارهای خستگی با بارگذاری نوسانی یا متغیر با مقدار معین و شمارش نوسان‌ها یا تنش‌های رفت و برگشتی تا خردشدن نمونه انجام می‌شود. دستگاه آزمون تیرگردان (Moore) با سرعت زیاد از پرکاربرترین نوع آزمون خستگی است. این ماشین نمونه را با وزنه‌هایی زیرخمش خالص (بدون برش عرضی) می‌گذارد. نمونه آزمون مانند شکل ۷-۹ است که با دقت بسیار ماشین‌کاری و پرداخت شده و پرداخت در راستای محوری است تا بدون خراش محیطی باشد. برای آزمایش خستگی، ماشین‌های دیگری هم داریم که تنش‌های محوری نوسانی یا رفت برگشتی، تنش‌های پیچشی یا تنش‌های مرکب را می‌آزماید.

با طبیعت آماری خستگی، تعیین مقاومت خستگی هر ماده، نیازمند آزمون‌های فراوان است. در آزمون تیرگردان، بار خمشی ثابتی به آن وارد می‌شود. شمار گردش (نوسان دو طرفه تنش) تا شکست تیر را می‌شمارند. نخستین آزمایش با تنشی کمی پایین‌تر از تنش نهایی نمونه انجام می‌شود و در آزمون بعد اندکی کمتر از تنش آزمون نخست، بدین شیوه ادامه دارد در پایان همهٔ آزمون‌ها، نمودار نتایج را در مختصات $S$-$N$، مانند شکل ۷-۱۰ می‌کشند، می‌توان نمودار را روی کاغذ نیمه لگاریتمی و یا log-log کشید. برای فلزات آهنی و آلیاژهای آن، نمودار از مقدار معینی تنش و شمار تکرار آن به بعد، افقی می‌شود. با رسم نمودار روی کاغذ لگاریتمی، جای خم منحنی، به‌درستی روشن می‌شود، که ممکن است در مختصات دکارتی به‌روشنی دیده نشود.




**شکل ۷-۹**

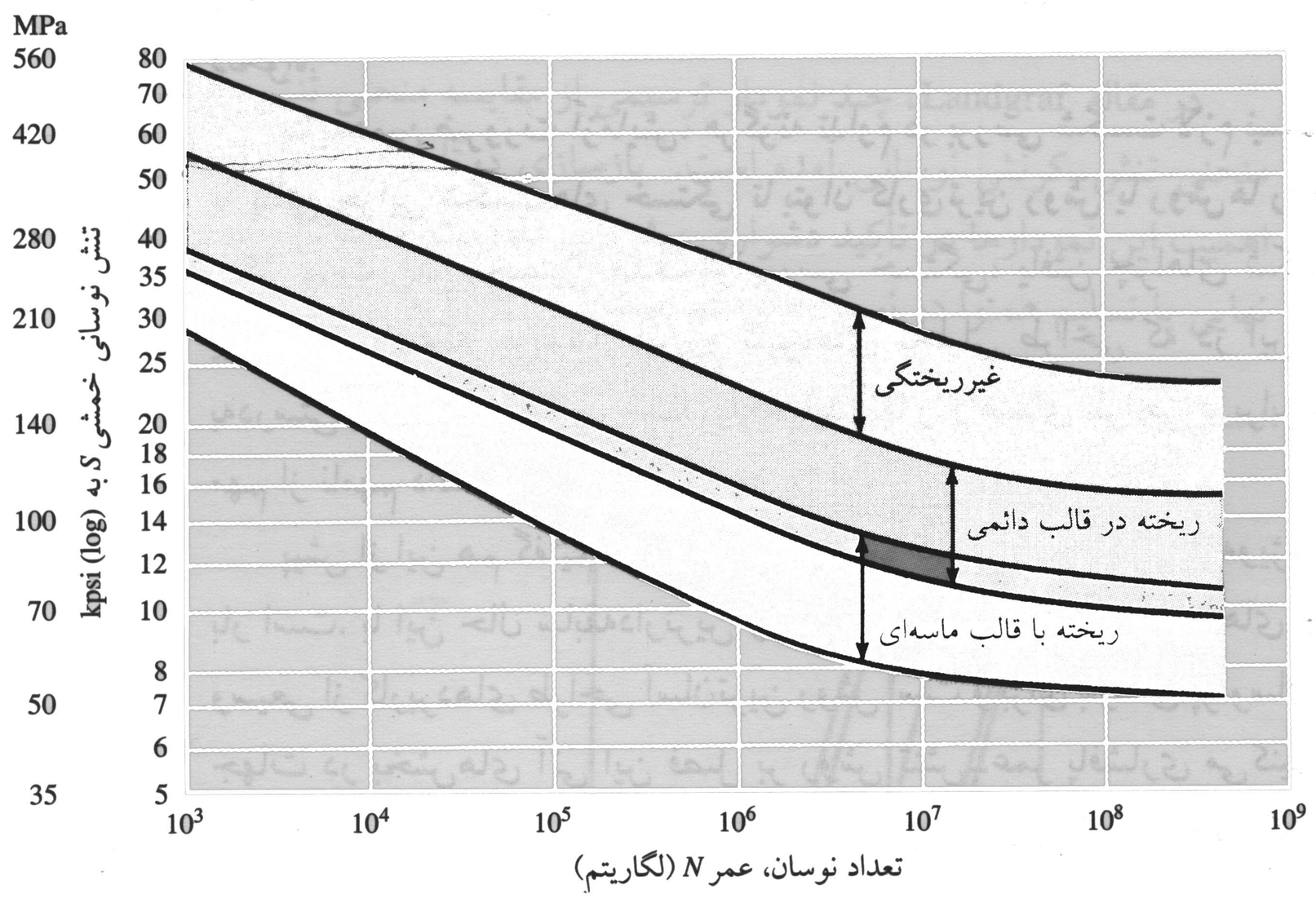
هندسهٔ نمونه آزمون در ماشین آزمون تیرگردان (Moore)، اعتبار آزمون زمانی است که روی قسمت منحنی، جایی که بیشترین تنش را داریم، گشتاور خمشی یکنواخت باشد، پس اگر شکست در جای دیگر (به‌جز در جایی با بالاترین سطح تنش) رخ دهد، زمینه شک وجود درز یا ترک در ماده است.




**شکل ۷-۱۰**

نمودار ترسیمی $S$-$N$ از نتایج آزمون‌های خستگی محوری دوطرفه کامل. جنس نمونه: فولاد UNS G41300 تنش زدوده با مقاومت نهایی $S_{ut} = 800$ MPa و بیشترین آن $S_{ut} = 860$ MPa.

(داده‌ها از یادداشت‌های فنی NACA شماره 3866.)




**شکل ۷-۱۱**

پهنه‌های $S$-$N$ برای سه دسته آلیاژهای آلومینیم بجز آلیاژهای غیرریختگی با $S_{ut} < 262$ MPa

(From R. C. Juvinall, *Engineering Considerations of Stress*, Strain and Strength. Copyright © 1967 by The McGraw-Hill Companies, Inc. Reprinted by permission.)

عرض نمودار $S$-$N$ را **مقاومت خستگی** $S_f$ گویند؛ هرجا سخن از این مقاومت آمد باید همیشه با ذکر شمار تکرار $N$ تنش همراه باشد. به‌زودی می‌بینیم که نمودارهای $S$-$N$ را می‌توان هم برای نمونه آزمون و یا برای هر قطعه واقعی مکانیکی به‌دست آورد. حتی آنگاه که جنس نمونه آزمون و قطعهٔ مکانیکی یکی باشند هم فرق چشمگیری بین نمودارهای این‌دو هست.

برای فولادها، این نمودار، زانو یا خم دارد که بیش از این شمار تناوب، دیگر هیچگاه شکستی رخ نمی‌دهد. مقاومت متناظر با این زانو را **حد دوام** (***endurance limit***) $S_e$ یا "حد خستگی" گویند. نمودار ترسیمی شکل ۷-۱۰ برای آلیاژهای غیرآهنی هرگز افقی نمی‌شود، پس حد دوام ندارند. شکل ۷-۱۱ پهنهٔ پراکندگی منحنی‌های $S$-$N$ را برای بیشتر آلیاژهای آلومینیوم رایج بجز آلیاژهای غیرریختگی (wrought) که مقاومت کششی کمتر از 260 MPa (38 kpsi) دارند نشان می‌دهد. چون آلومینیوم حد دوام

ندارد، مرسوم است که مقاومت خستگی $S_f$ آن برای عمر معین، به‌طور معمول $N=5(10^8)$ نوسان دوسویه تنش گزارش می‌شود (نگ. جدول الف-۲۴).

یادمان باشد که یک دور تنش $(N=1)$ یعنی یک‌بار ورود بار، برداشتن آن و سپس ورود بار در جهت مخالف و برداشتن آن است. پس $N=\frac{1}{2}$ یعنی بار را فقط یک‌بار وارد و بر می‌داریم که همان آزمون کشش ساده است.

تنه دانسته‌های ما از شکست خستگی کم تناوب، از $N=1$ تا $N=1000$ در کل، گروه **خستگی کم‌نوسان** (***Low-cycle fatigue***) هستند. پس، مانند شکل ۷-۱۰ **خستگی پرنوسان** (***high-cycle fatigue***) به شکست‌هایی گویند که تعداد نوسان تنش بیش از $10^3$ باشد.

در شکل ۷-۱۰ دو ناحیه داریم که یکی **ناحیه عمر محدود** و دیگری **عمر نامحدود** است. مرز بین این دو ناحیه پیش‌بینی نمی‌شود مگر برای ماده‌ای معین. این مرز برای فولادها، مانند شکل ۷-۱۰، در جایی بین $10^6$ و $10^7$ است.

در پیش گفتیم که انجام آزمون‌های موادی که در طراحی و ساخت قطعات به‌کار می‌روند، همیشه یک کار خوب مهندسی است. درحقیقت برای پیشگیری شکست خستگی، این یک نیاز است نه کار دلخواه.

**بنا به‌همین ضرورت آزمایش، هرگونه تداوم در بررسی شکست لازم نیست، مگر به یک دلیل مهم: میل به یافتن چرایی شکست‌های خستگی تا بتوان کاری‌ترین روش یا روش‌ها را در افزایش مقاومت خستگی به‌کار بست.** پس نخستین هدف از بررسی خستگی، یافتن چراهای شکست است تا بهترین روش پیشگیری را به‌کار بریم. از این‌رو شیوه‌های تحلیلی طراحی که در این کتاب یا جای دیگر آمده، به‌درستی به نتایج قطعی نمی‌رسند، بلکه باید آنها را راهنمای طراحی دربرابر شکست خستگی و جدایش مهم از نامهم دانست.

پیش از این هم گفتیم که روش تنش-عمر کم دقت‌ترین روش به‌ویژه برای عمرهای کوتاه نوسان بار است. با این حال سابقه‌دارترین روش و با بیشترین متون و داده‌های چاپ شده است. در گسترهٔ وسیعی از کاربردهای طراحی آسان‌ترین روش است و برای بارهای پرنوسان کفایت نیاز می‌کند. به‌همین جهات در بخش‌های آتی این فصل بر روش تنش-عمر پافشاری می‌کنیم. با این‌حال آن‌جا که برای کارهای کم عمر به‌کار می‌بریم باید مراقب بود، زیرا این روش در جایی که تسلیم موضعی رخ می‌دهد، رفتار تنش-کرنش حقیقی را به حساب نمی‌آورد.

## ۷-۵ روش کرنش-عمر (The Strain-Life Method)

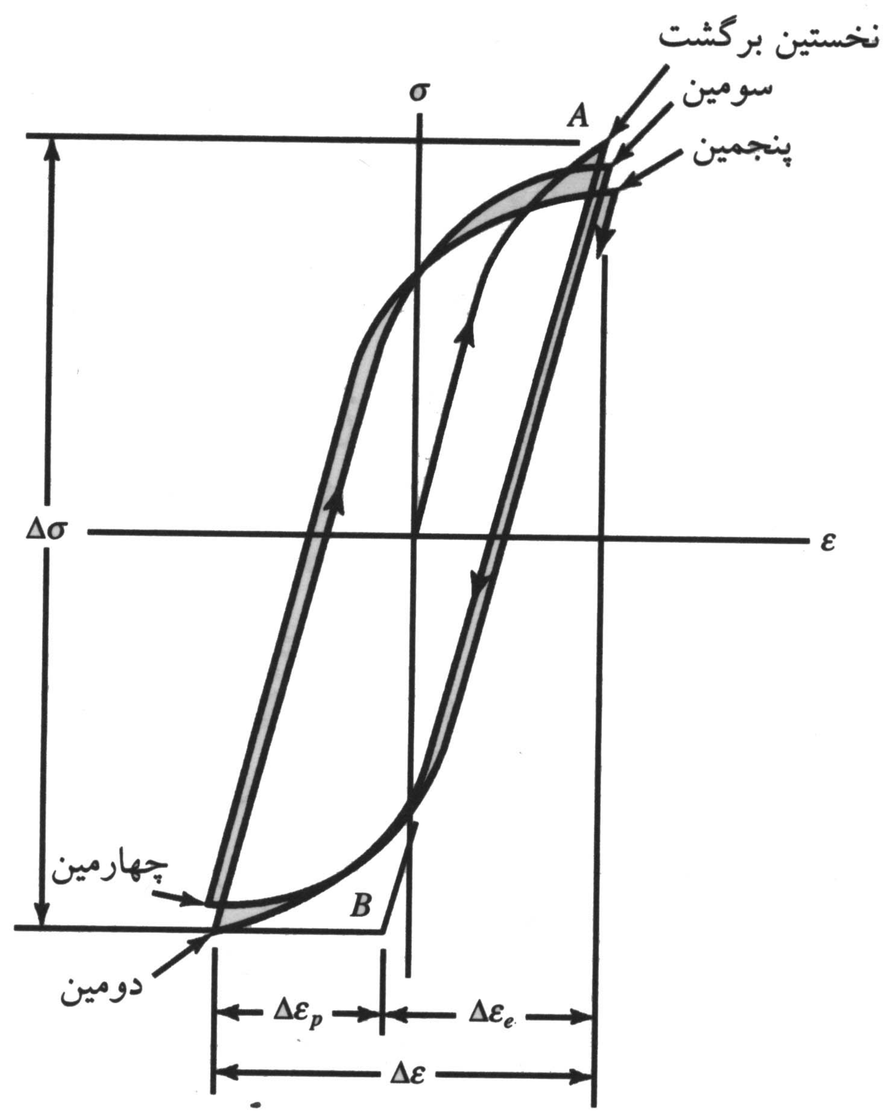
بهترین روش توجیه طبیعت خستگی شکست که تاکنون گفته‌اند، روش کرنش-عمر است. برای به‌کار بردن این روش در مقاومت‌های خستگی، باید چند حالت ایده‌آل خیالی فرض کرد، که تا حدی از اطمینان نتایج می‌کاهد. پس این روش را فقط به خاطر ارزش آن در توضیح طبیعت خستگی می‌آوریم.

شکست خستگی شاید همیشه از ناپیوستگی‌های موضعی همچون چاک، ترک، یا دیگر نواحی تمرکز تنش آغاز می‌شود. اگر در محل ناپیوستگی، تنش از مرز کشسان بگذرد، کرنش مومسان رخ می‌دهد. شکست خستگی ناشی از کرنش مومسان تکراری یا نوسانی است. پس رفتار ماده در تغییر شکل دوره‌ای یا متناوب را پی می‌گیریم.

در ۱۹۱۰، Bairstow با تجاربی بر پایه نظریه Bauschinger، نشان داد که حد کشسان آهن و فولاد می‌تواند با تغییرات نوسانی تنش، کم یا زیاد شود.[۲] به‌طور کلی حدود کشسان فولادهای تابانیده (annealed) زیر تنش‌های نوسانی دوطرفه، میل به افزایش دارد، حال آنکه حد کشسان فولادهای سردکشیده کاهش می‌یابد.

نمونه‌های آزمونی که زیر خمش دوطرفه باشند، برای کرنش متناوب مناسب نیستند، زیرا اندازه‌گیری کرنش‌های مومسان آنها دشوار است. پس بیشتر پژوهش‌ها روی نمونه‌های محوری بوده است. به‌کمک مبدل‌های الکتریکی می‌توان علائمی به تناسب تنش و کرنش تولید کرد. سپس علائم را روی نوسان‌نما (oscilloscope) نمایش داد یا روی دستگاه رسام $XY$ کشید. R.W. Landgraf رفتار خستگی کم تناوب بسیاری از فولادهای خیلی مقاوم را وارسی و نمودارهای زیادی از تنش-کرنش نوسانی آنها رسم کرد.[۳] شکل ۷-۱۲ نمایش شکل عمومی این نمودارها در نخستین نوسان‌های کرنش متناوب کنترل شده است. بر پایه این حقیقت آشکار که تناوب‌ها در مقادیر کمتر تنش رخ می‌دهد، در این مورد، تکرار تنش از مقاومت می‌کاهد. درعوض چنانکه در پیش گفتیم، مواد دیگر ممکن است با تنش‌های نوسانی دوطرفه تقویت شوند. اگر نخستین رفت و برگشت تنش در ناحیه فشار باشد شاید اندکی نتایج عوض شود. این شاید از اثر تقویت کننده خستگی ناشی از فشار است.

در مقاله Landgraf، چند نمودار ترسیمی از مقایسه منحنی تنش-کرنش کشش یا فشار همنوا، با منحنی تنش-کرنش نوسانی آمده است.[۴] بازسازی دوتا از این نمودارها را در شکل ۷-۱۳ می‌بینی. اهمیت این نمودارها در تأکید دشواری پیش‌بینی مقاومت خستگی ماده از روی مقادیر معلوم مقاومت نهایی یا تسلیم همنوا در نوسان‌های کم است.



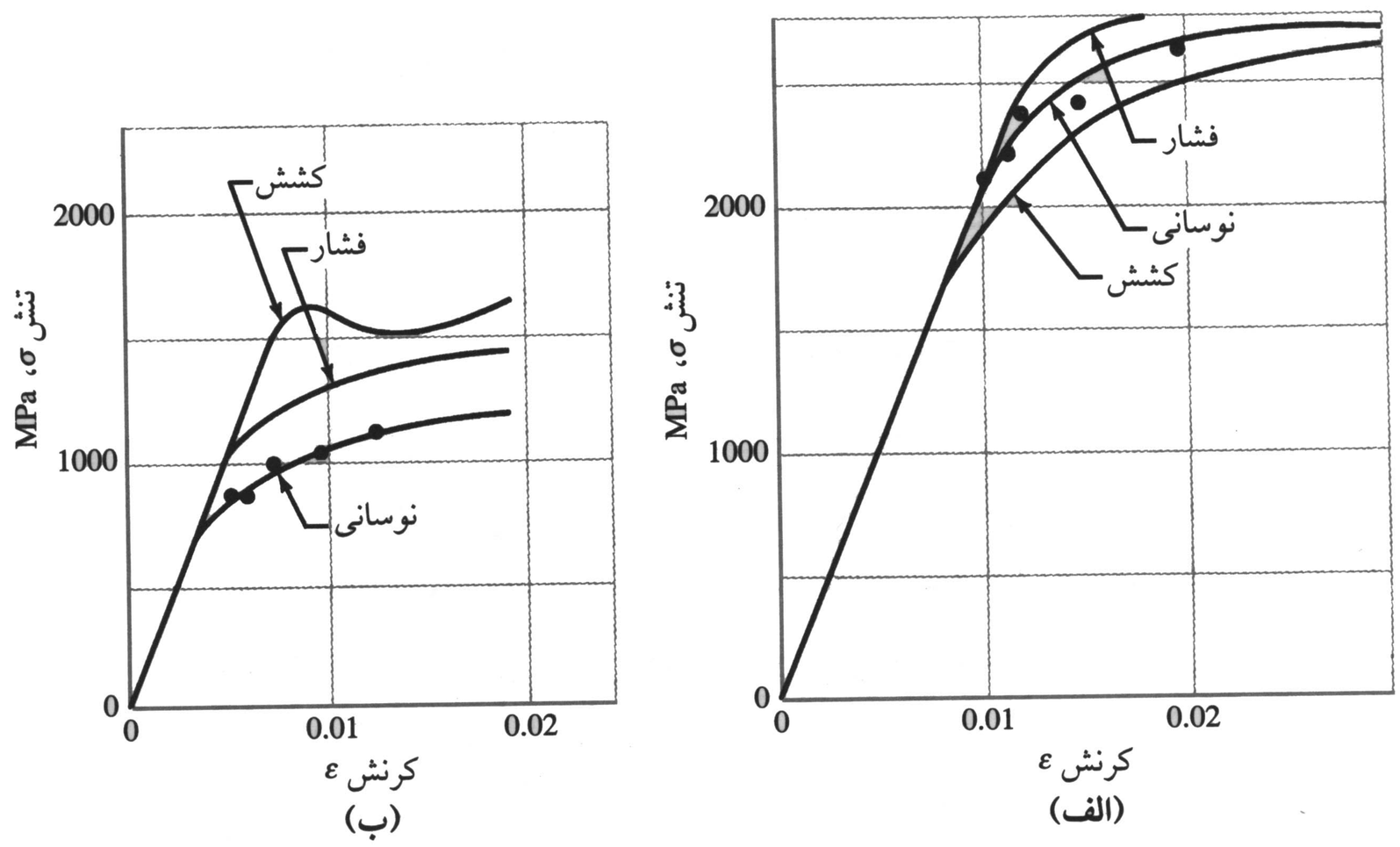

**شکل ۷-۱۲**

**حلقه‌های پسماند تنش حقیقی-کرنش حقیقی که نخستین پنج نوبت تنش دوطرفه، تکرار نرم شدن ماده را نشان می‌دهد. برای روشن‌تر شدن نمودار در ترسیم آن کمی لاف زده‌ایم. می‌بینی که شیب خط $AB$ ضریب کشسانی $E$ است. $\Delta\sigma$ حدود تنش، $\Delta\varepsilon_p$ حدود کرنش مومسان و $\Delta\varepsilon_e$ حدود کرنش کشسان است. کل حدود کرنش $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_e$ است.**

2. L. Bairstow. "The Elastic Limits of Iron and Steel under Cyclic Variations of Stress," *Philosophical Transactions*, Series A, vol. 210, Royal Society of London, 1910, pp. 35–55.

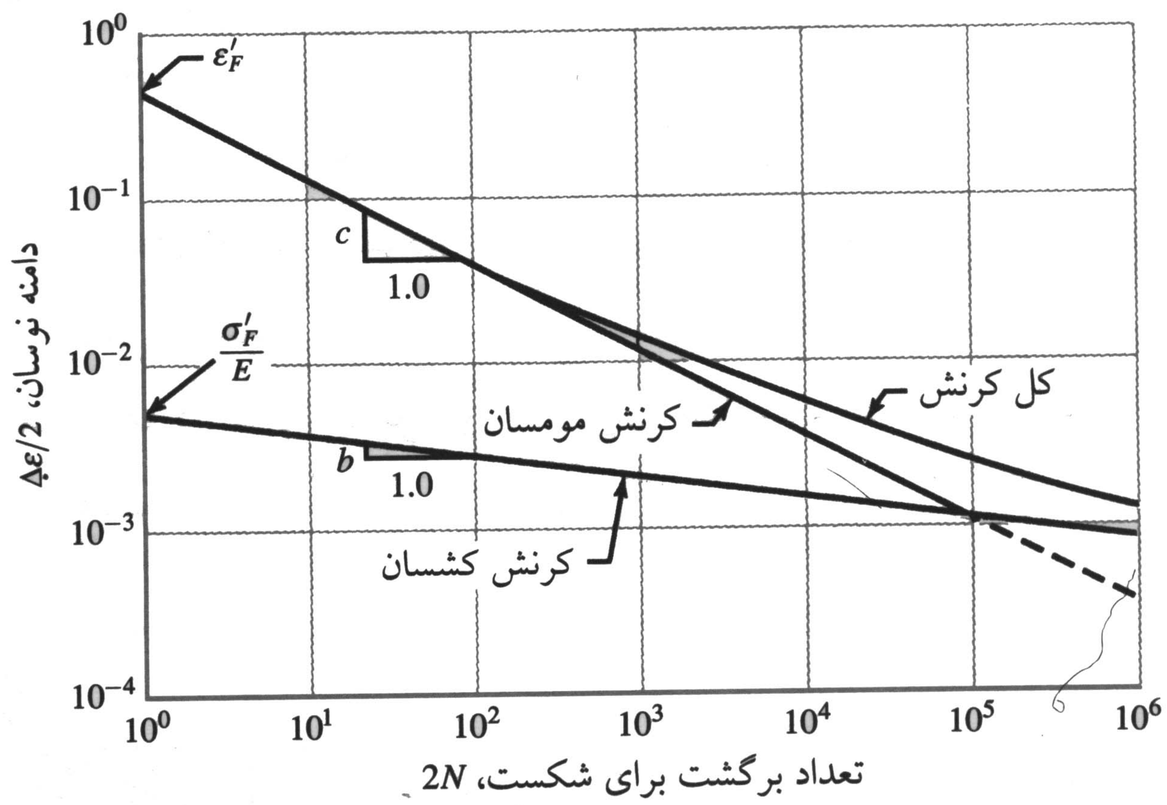
3. R.W. Landgraf, *Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Hardened Steels*, Report no. 320, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1968, pp. 84–90.

4. Ibid., pp.58–62.




**شکل ۷-۱۳**

**نتایج تنش-کرنش هم‌نوا و نوسانی، (الف) فولاد H-11 گرمکاری شده آستنیت با سختی $660H_B$. (ب) فولاد SAE 4142 با سختی $400H_B$.**




**شکل ۷-۱۴**

**نمودار log-log، رابطه عمر خستگی با دامنه کرنش حقیقی برای فولاد SAE 1020 گرم‌نورد (بازسازی مجاز از گزارش فنی SAE J1099).**

هیأت رهبری ارزیابی و طراحی خستگی SAE در 1975 گزارشی دربارهٔ عمر خستگی برحسب تعداد نوسان بار به دامنه کرنش $\Delta\varepsilon/2$ را منتشر کرد.[5] در این گزارش نمودار ترسیمی این رابطه برای فولاد SAE 1020 آمده است. و بازسازی آن را در شکل ۷-۱۴ می‌بینی. برای توضیح نمودار، نخست به معرفی واژه‌های زیر می‌پردازیم:

- **ضریب شکل‌پذیری خستگی** $\varepsilon'_F$: کرنش حقیقی شکست در یک نوبت برگشت بار (نقطه $A$ در شکل ۷-۱۲) است. آغاز خط کرنش مومسان در شکل ۷-۱۴ از این نقطه است.
- **ضریب مقاومت خستگی** $\sigma'_F$: تنش حقیقی شکست در یک نوبت برگشت بار (نقطه $A$ در شکل ۷-۱۲). در شکل ۷-۱۴ می‌بینی که خط کرنش کشسان از $\sigma'_F/E$ آغاز می‌شود.
- **نمای شکل‌پذیری خستگی** $c$: شیب خط کرنش مومسان در شکل ۷-۱۴ و توان عمر $2N$ برای متناسب شدن با دامنه کرنش مومسان است. شمار نوسان‌ها $N$ است.
- **نمای مقاومت خستگی** $b$: شیب خط کرنش کشسان است. عمر $2N$ باید به توان $b$ برسد تا متناسب با دامنه تنش حقیقی شود.

5. *Technical Report on Fatigue Properties*, SAE J1099, 1975.

اکنون در شکل ۷-۱۲ می‌بینیم که کل کرنش، برابر مجموع مؤلفه‌های کرنش مومسان و کشسان است. پس دامنه کل کرنش برابر با

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2}=\frac{\Delta\varepsilon_e}{2}+\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \qquad \text{(الف)}$$

از شکل ۷-۱۴، معادله خط کرنش مومسان چنین است

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2}=\varepsilon'_F\,(2N)^c \qquad (۷-۱)$$

معادله خط کرنش کشسان چنین است

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2}=\frac{\sigma'_F}{E}(2N)^b \qquad (۷-۲)$$

پس از مع. (الف) برای دامنه کل کرنش، داریم

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2}=\frac{\sigma'_F}{E}\,(2N)^b+\varepsilon'_F\,(2N)^c \qquad (۷-۳)$$

که رابطه Manson-Coffin بین عمر خستگی و کل کرنش است.[6] فهرست برخی ضرایب و نماها در جدول ۷-۱ آمده است. در گزارش SAE J1099، تعداد بیشتری آمده است.

## جدول ۷-۱

**خواص تناوبی (دوره‌ای) برخی از فولادهای پرمقاومت** Cyclic Properties

منبع: Data from R. W. Landgraf, Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Hardened Steels, Report no. 320, Department of Theoretical and Appled Mechanics, University of illinois, Urbana, 1968.

| شماره AISI | فرآیند | سختی Brinell $H_B$ | مقاومت تسلیم نوسانی MPa، $S'_y$ | ضریب مقاومت خستگی MPa، $\sigma'_F$ | ضریب شکل‌پذیری خستگی $\varepsilon'_F$ | نمای مقاومت خستگی $b$ | نمای شکل‌پذیری خستگی $c$ | نمای سختکاری کرنش خستگی $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1045 | Q & T28°C | 705 | ... | 2140 | ... | −0.065 | −1.0 | 0.10 |
| 1045 | Q & T180°C | 595 | 1720 | 2120 | 0.07 | −0.055 | −0.60 | 0.13 |
| 1045 | Q & T260°C | 500 | 1280 | 2300 | 0.25 | −0.08 | −0.68 | 0.12 |
| 1045 | Q & T320°C | 450 | 965 | 1800 | 0.35 | −0.07 | −0.69 | 0.12 |
| 1045 | Q & T380°C | 390 | 760 | 1590 | 0.45 | −0.074 | −0.68 | 0.14 |
| 4142 | Q & T28°C | 670 | 2010 | 2580 | ... | 0.075 | −1.0 | 0.05 |
| 4142 | Q & T205°C | 560 | 1720 | 2650 | 0.07 | −0.076 | −0.76 | 0.11 |
| 4142 | Q & T320°C | 475 | 1340 | 2170 | 0.09 | −0.081 | −0.66 | 0.14 |
| 4142 | Q & T370°C | 450 | 1070 | 2000 | 0.40 | 0.080 | −0.73 | 0.12 |
| 4142 | Q & T450°C | 380 | 830 | 1830 | 0.45 | −0.080 | −0.75 | 0.14 |
| *4142 | Q & D290°C | 475 | 1100 | 2070 | 0.20 | −0.082 | −0.77 | 0.12 |
| 4142 | Q & D340°C | 450 | 1070 | 2100 | 0.60 | −0.090 | −0.76 | 0.13 |
| 4142 | Q & D430°C | 400 | 900 | 1900 | 0.50 | 0.090 | −0.75 | 0.14 |

*۱۴ درصد تغییر شکل.

6. J. F. Tavernelli and L. F. Coffin, Jr., "Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue," and S. S. Manson, discussion, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Vol. 84, no. 4, pp. 533–537.

اگرچه مع. (۷-۳) برای تعیین عمر خستگی قطعه‌ای با کرنش و دیگر مشخصه‌های نوسان معلوم، عاقلانه می‌نماید ولی برای طراح کاربرد اندکی دارد. زیرا روشن نیست چگونه کل کرنش در بیخ شکاف یا ناپیوستگی به‌دست می‌آید. هیچ جدول یا نموداری برای ضرایب تمرکز کرنش چاپ نشده است. شاید به‌زودی ضرایب تمرکز کرنش را در آثار پژوهشی در دسترس ببینیم، زیرا کاربرد روش اجزای محدود بیشتر راه‌گشاست. تازه، روش وارسی اجزای محدود، به‌خودی‌خود، توانایی تقریب زدن کرنش‌ها را در تمام نقاط تازه دارد.[7]

## ۷-۶ روش مکانیک شکست کشسان ـ خطی
## (The Linear-Elastic Fracture Mechanics Method)

نخستین مرحله از تَرَک خستگی را مرحله I خستگی (stage I fatigue) گویند. سُریدن بلورها که بین چندین دانه هم مرز رخ می‌دهد، ناخالصی‌ها و ناهمواری سطح، می‌توانند موثر باشند. چون بیشتر این جریان به چشم نمی‌آید، تنها می‌گوییم چندین دانه درگیر مرحله I هستند. مرحله دوم که تداوم ترک باشد را مرحله II خستگی گویند. پیشروی ترک (بروز سطح جدید ترک) را می‌شود با میکروسکوپ الکترونی، روی ریز تصویرها گواهی داد. رشد ترک منظم و بسامان است. شکست پایانی در مرحله III خستگی رخ می‌دهد، هرچند که دیگر خستگی دخالت ندارد. آنگاه که ترک به اندازهٔ کافی دراز شد که برای دامنه تنش، $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}c}$ گردید، $K_{\mathrm{I}c}$ شدت بحرانی تنش برای فلز آسیب ندیده است، به ناگاه خرابی ویرانگر باقی مقطع، زیر فرا بار کششی رخ می‌دهد (بخش ۶-۱۳). خستگی مرحله III ناشی از شتاب سریع شده ترک و سپس شکست است.

### رشد ترک

ترک‌های خستگی با تغییر تنش‌ها و با حضور مقداری کشش در هر دورهٔ تنش زاده شده و رشد می‌کنند. تنشی را در نظر بگیر که بین $\sigma_{\min}$ و $\sigma_{\max}$ نوسان دارد و حدود تنش را $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ تعریف کنیم. از مع. (۶-۵۱) شدت تنش $K_{\mathrm{I}} = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$ می‌شود. پس برای $\Delta\sigma$، حدود شدت تنش در هر دورهٔ آن

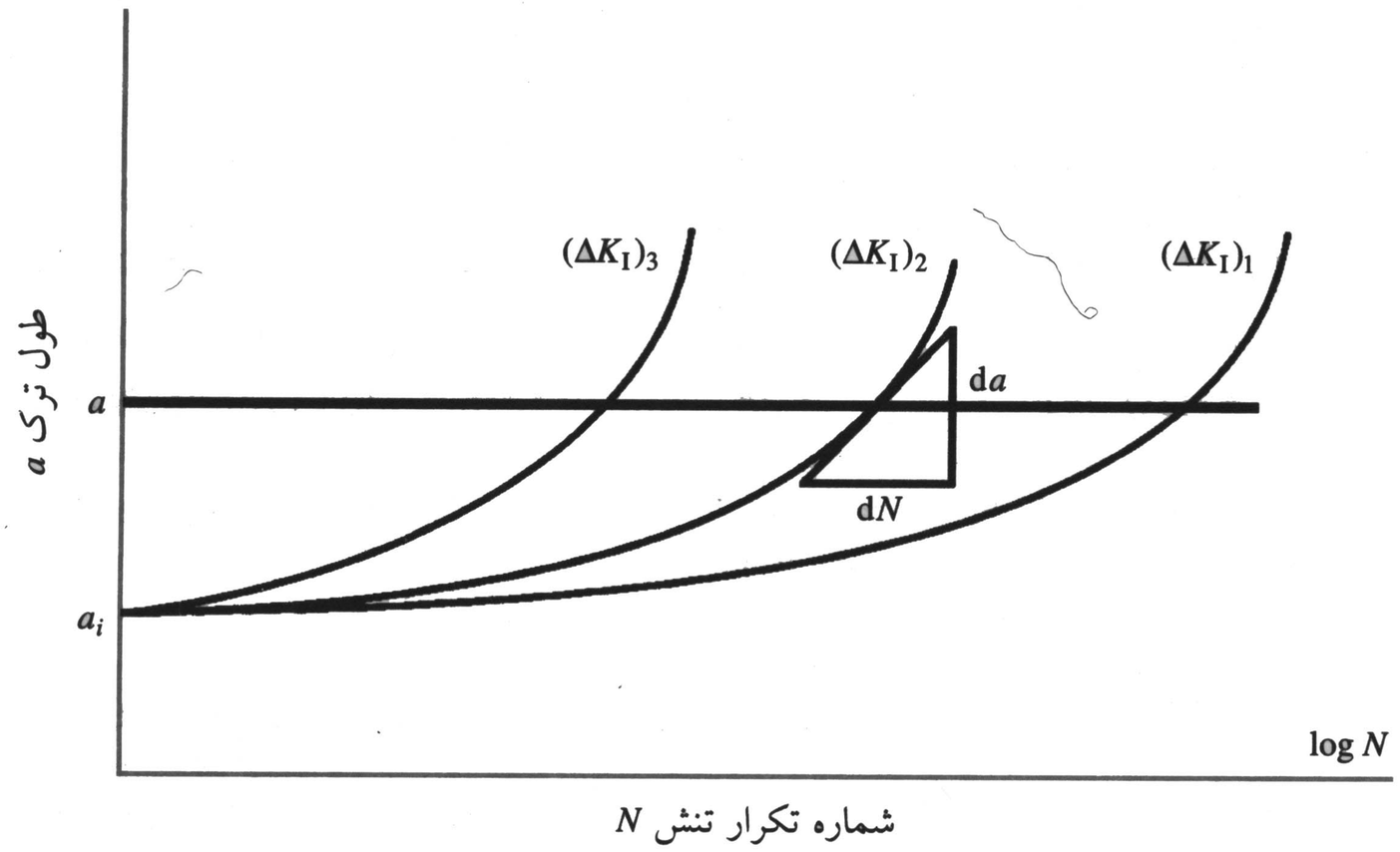
$$\Delta K_{\mathrm{I}} = \beta(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})\sqrt{\pi a} = \beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \qquad (۷-۴)$$

می‌شود. برای فراهم کردن داده‌های مقاومت خستگی، تعدادی نمونه آزمایش از یک جنس در سطوح گوناگون $\Delta\sigma$ آزمون می‌شود. اگر طول هر ترک را در آغاز $a_i$ بگیریم، رشد ترک به‌شکل تابعی از شمار نوسان تنش $N$ به $\Delta\sigma$ یعنی $\Delta K_{\mathrm{I}}$ بسته است. اگر $\Delta K_{\mathrm{I}}$ در زیر آستانهٔ معین $(\Delta K_{\mathrm{I}})_{\mathrm{th}}$ باشد، ترک رشد نمی‌کند. شکل ۷-۱۵ طول ترک $a$ را به‌شکل تابعی از $N$ برای سه سطح تنش $(\Delta\sigma)_3 > (\Delta\sigma)_2 > (\Delta\sigma)_1$ نشان می‌دهد، جوری که $(\Delta K_{\mathrm{I}})_3 > (\Delta K_{\mathrm{I}})_2 > (\Delta K_{\mathrm{I}})_1$ است. ببین که اثر حدود تنش بیشتر در شکل ۷-۱۵، تولید ترک‌های دراز در هر شمار نوسان بار معین است.

اگر نرخ رشد ترک در هر دور تنش $da/dN$ در شکل ۷-۱۵ را همچون شکل ۷-۱۶ بکشیم، داده‌های هر سه سطح حدود تنش درهم می‌آمیزند تا یک مکان هندسی سیگمائی بدهند. هر سه مرحله

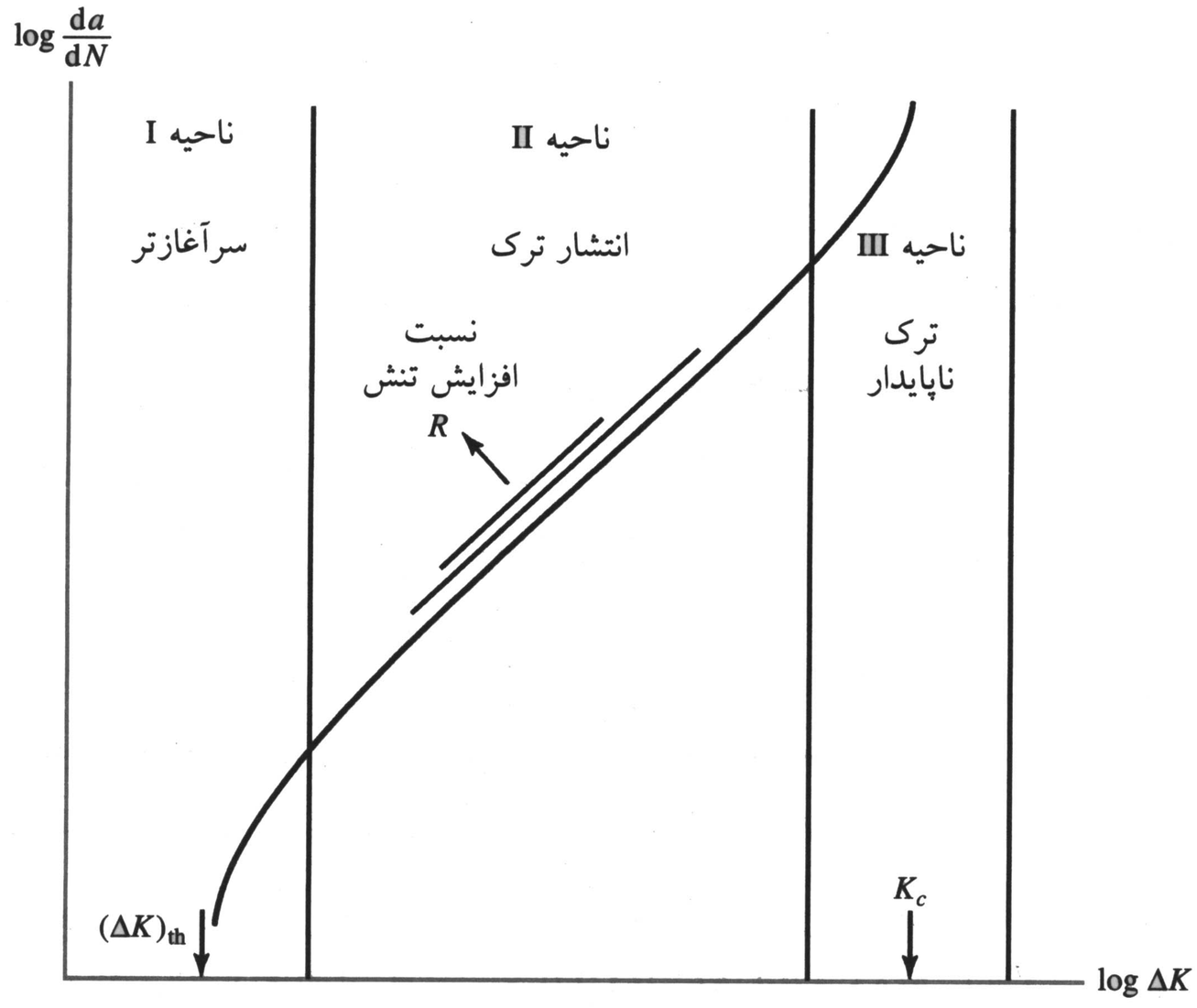
---

7. For further discussion of the strain-life method see N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1999, Chap. 14.




**شکل ۷-۱۵**

افزایش طول ترک $a$ از طول آغازین $a_i$، به‌شکل تابعی از شمار تکرار بار برای سه بازه تنش، $(\Delta\sigma)_3 > (\Delta\sigma)_2 > (\Delta\sigma)_1$.




**شکل ۷-۱۶**

اگر $da/dN$ را از شکل ۷-۱۵ اندازه بگیریم و در مختصات log-log بکشیم، داده‌های بازه‌های گوناگون به جلوه‌ای به‌سان شکل درمی‌آیند. $(\Delta K_I)_{th}$ مقدار آستانه $\Delta K_I$ است که زیر آن، ترک رشد نمی‌کند. از آستانه تا گسیختگی یک آلیاژ آلومینیم، ۸۵ تا ۹۰ درصد عمر در ناحیه I، ۵ تا ۸ درصد در ناحیه II، و ۱ تا ۲ درصد در ناحیه III است.

گسترش ترک را می‌توان دید و داده‌های حالت دوم در مختصات log-log خطی هستند، و این در گسترهٔ مکانیک شکست کشسان خطی برقرار است. گروهی از منحنی‌های مشابه را می‌شود با تغییر نسبت تنش $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ در آزمایش پدید آورد.

در این‌جا برای برآورد عمر باقیمانده قطعه زیر تنش نوسانی و پس از کشف ترک، یک شیوهٔ ساده شده می‌آوریم. برای این‌کار باید شرایط کرنش را ساده بگیریم.[۸] با فرض کشف یک ترک در مرحله دوم، رشد ترک در ناحیه II شکل ۷-۱۶ را می‌توان به‌تقریب با **معادله *Paris*** به‌شکل زیر نوشت

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \qquad (۷-۵)$$

۸. مراجع پیشنهادی:

Dowling, op. cit.; J. A. Collins, *Failure of Materials in Mechanical Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981; H. O. Fuchs and R. I. Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1980; and Harold S. Reemsnyder, "Constant Amplitude Fatigue Life Assessment Models," *SAE Trans. 820688*, vol. 91, Nov. 1983.

**جدول ۷-۲**

**مقادیر محتاطانهٔ ضریب C و نمای m در مع. (۷-۵) برای شکل‌های گوناگون فولاد ($R \doteq 0$)**

| جنس | $m$ | $C, \frac{m/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$ | $C, \frac{in/cycle}{(kpsi\sqrt{in})^m}$ |
|---|---|---|---|
| فولادهای فریت-پرلیتی | 3.00 | $6.89(10^{-12})$ | $3.60(10^{-10})$ |
| فولادهای مارتنزیتی | 2.25 | $1.36(10^{-10})$ | $6.60(10^{-9})$ |
| فولادهای ضدزنگ آستنتیتی | 3.25 | $5.61(10^{-12})$ | $3.00(10^{-10})$ |

From J.M. Barson and S.T. Rolfe, *Fatigue and Fracture Control in Structures*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987, pp. 288–291, Copyright ASTM International. Reprinted with permission.

که $C$ و $m$ ثابت‌های تجربی است و $\Delta K_I$ همان مع. (۷-۴) است. مقادیر $C$ و $m$ برای گروه‌های گوناگون فولاد که در جدول ۷-۲ آمده، هرچند دستچین شده اما محتاطانه است. با جاگذاری $\Delta K_I$ از مع. (۷-۴) و انتگرال‌گیری، چنین می‌شود

$$\int_0^{N_f} dN = N_f = \frac{1}{C}\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(\beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} \qquad (۷-۶)$$

در این‌جا $a_i$ طول ترک در آغاز، $a_f$ طول پایانی ترک به‌هنگام شکست و $N_f$ شمار نوسان تنش برآورد شده برای شکست پس از ترک آغازین است. بدان که $\beta$ شاید در متغیر انتگرال‌گیری تغییر کند (برای نمونه، شکل‌های ۶-۳۵ تا ۶-۴۰ را ببین). اگر چنین باید بشود Reemsnyder[9] کاربرد انتگرال عددی به‌روش زیر را پیشنهاد می‌کند

$$\delta a_j = C(\Delta K_I)_j^m (\delta N)_j \qquad a_{j+1} = a_j + \delta a_j$$
$$N_{j+1} = N_j + \delta N_j \qquad N_f = \sum \delta N_j \qquad (۷-۷)$$

که $\delta a_j$ و $\delta N_j$ مراحل رشد طول ترک و تعداد نوسان است. روش کار، گزینش $\delta N_j$، تعیین $\beta$ و محاسبه $\Delta K_1$ به‌یاری $a_i$ و بعد یافتن مقدار بعدی $a$ است که باید تا $a = a_f$ تکرار شود.

نمونه زیر با شکل بسیار ساده شدهٔ ثابت $\beta$ عرضه می‌شود تا به درک رسش کار یاری کند. رایج است که از برنامه رایانه‌ای همچون NASA/FLAGRO 2.0 با الگوهای نظری گسترده برای حل چنین مسایل رشد ترک خستگی یاری بگیرند.

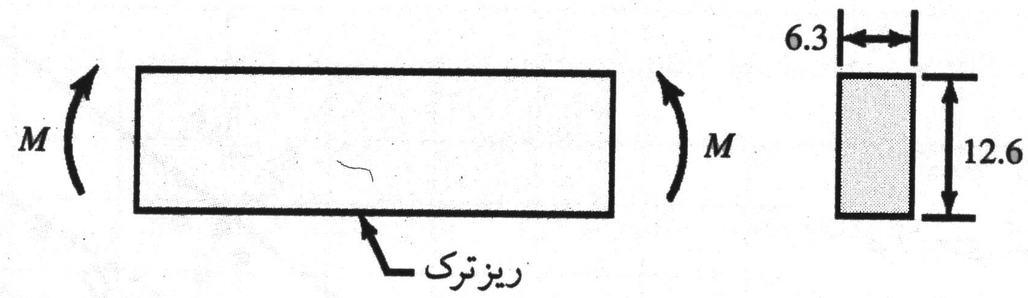
9. Op. cit.

**نمونه ۷-۱** میله‌ای که در شکل ۷-۱۷ می‌بینی زیر گشتاور تکراری $0 \le M \le 135\ \text{N}\cdot\text{m}$ است که $S_{ut} = 1275\ \text{MPa}$، $S_y = 1170\ \text{MPa}$ و $K_{Ic} = 80.2\ \text{MPa}\cdot\sqrt{m}$ است. آزمون جنس روی نمونه‌های این ماده با گرماکاری یکسان، ثابت‌ها را برای بدترین حالت $C = 0.729\ (10^{-12})\ (\text{m/نوسان})/(\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}})^m$ و $m = 3$ می‌دهد. یک ترک ریز به اندازه 0.1 mm همچون شکل در زیر میله پیدا شده. شمار نوسان برای عمر باقیمانده را به‌دست آور.

راه حل حدود تنش $\Delta\sigma$ همیشه با سطح مقطع نامی (بی‌ترک) حساب می‌شود. پس،

$$\frac{I}{c} = \frac{bh^2}{6} = \frac{6.3(12.6)^2}{6} = 166.7\ \text{mm}^3$$

شکل ۷-۱۷




پس، پیش از بروز ترک، حدود تنش چنین است

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta M}{I/c} = \frac{135(10^3)}{166.7} = 810\ \text{MPa}$$

که کمتر از مقاومت تسلیم است. با رشد ترک، زمان درازی می‌خواهد تا میله به تسلیم کامل و یا شکست ترد برسد. با نسبت $S_y/S_{ut}$ که داریم، بسیار بعید است که میله به تسلیم کامل برسد. برای شکست ترد، طول ترک را $a_f$ می‌گیریم. اگر $\beta = 1$، پس با $K_I = K_{Ic}$، مقدار تقریبی $a_f$، برابر با

$$a_f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{Ic}}{\beta\sigma_{max}}\right)^2 \doteq \frac{1}{\pi}\left(\frac{80.2}{810}\right)^2 = 3.12(10^{-3})\ \text{m} = 3.12\ \text{mm}$$

از شکل ۶-۳۷، نسبت $a_f/h$ راحساب می‌کنیم

$$\frac{a_f}{h} = \frac{3.12}{12.6} = 0.2476$$

پس $a_f/h$ از نزدیک صفر تا 0.248 تغییر می‌کند. از شکل ۶-۳۷ برای این حدود $\beta$ به‌تقریب حدود 1.07 ثابت است و ما هم چنین می‌گیریم

$$a_f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{80.2}{1.07(810)}\right)^2 = 2.726\ \text{mm}$$

پس با $a_f$ جدید از مع. (۷-۶) عمر باقیمانده به‌دست می‌آید

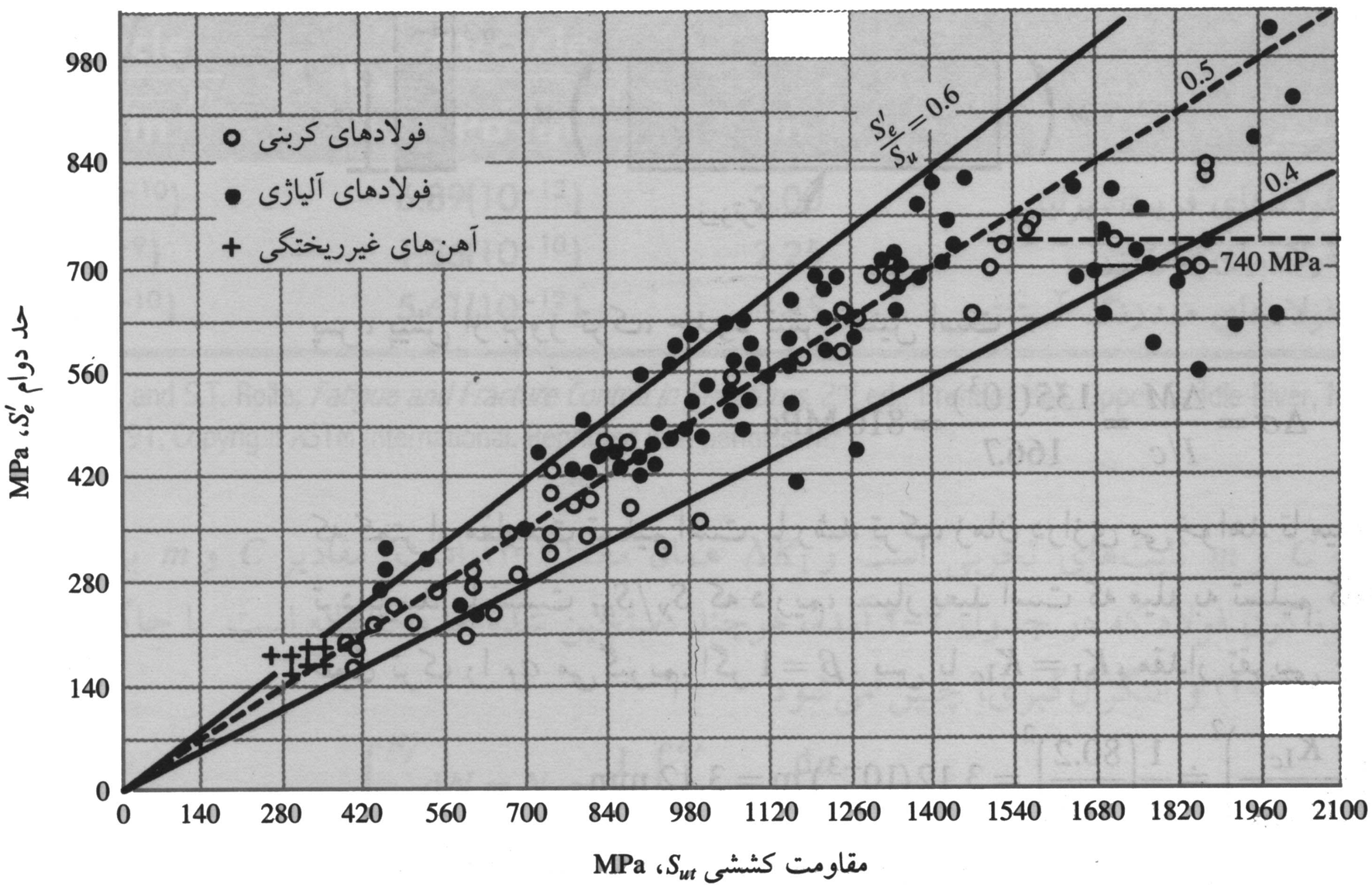
$$N_f = \frac{1}{C}\int_{a_i}^{a_f}\frac{da}{(\beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} = \frac{1}{0.729(10^{-12})}\int_{0.1(10^{-3})}^{2.726(10^{-3})}\frac{da}{[1.07(810)\sqrt{\pi a}]^3}$$

$$= -\frac{756.78}{\sqrt{a}}\Bigg|_{0.1(10^{-3})}^{2.726(10^{-3})} = 61.18(10^3)\ \text{دور نوسان}$$

## ۷-۷ حد دوام (The Endurance Limit)

آزمون خستگی برای تعیین حدود دوام هرچند زمانگیر اما جا افتاده است. برای این کار آزمون تنش بر آزمون کرنش برتری دارد.

برای طراحی مقدماتی و نمونهٔ اولیه (prototype) و نیز برخی تحلیل‌های شکست، به‌روش سریع برآورد حد دوام نیاز است. داده‌های فراوانی از نتایج آزمون‌های تیرگردان و آزمون‌های کشش ساده از میله یا شمش یکسان منتشر شده است. اگر این داده‌ها را در نموداری همچون شکل ۷-۱۸ بکشیم، رابطهٔ بین این دو مجموعه به‌دست می‌آید. این نمودار می‌گوید که برای فولادهایی با مقاومت کششی کمتر از 1400 MPa، حد دوام بین 40 تا 60 درصد مقاومت آنها است. از حدود $S_{ut} = 1400$ MPa به بعد، این پراکندگی زیادتر می‌شود و بنا به خط‌چین پیشنهادی، در $S'_e = 740$ MPa به حالت افقی درمی‌آید.




## شکل ۷-۱۸

نمودار ترسیمی حد دوام نسبت به مقاومت کششی، از نتایج واقعی آزمون نمونه‌های فراوان آهن غیرریختگی و فولاد. نسبت‌های $S'_e/S_{ut} = 0.60, 0.50, 0.40$ را هم با خطوط پر و خط‌چین نشان داده‌ایم. همچنین خط‌چین واقعی برای حد دوام $S'_e = 740$ MPa، برای نقاطی است که مقاومت کششی بیش از 1400 MPa دارند و میانگین حد دوام‌شان $S'_e = 740$ MPa، با انحراف میانگین 93 MPa است.

## جدول ۷-۳

نسبت حد دوام $S'_e/S_{ut}$ برای فولادهای با ساختار میکروسکپی گوناگون

| | فریت | | پرلیت | | مارتنزیت | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | حدود | متوسط | حدود | متوسط | حدود | متوسط |
| فولاد کربنی | 0.57–0.63 | 0.60 | 0.38–0.41 | 0.40 | ... | 0.25 |
| فولاد آلیاژی | ... | ... | ... | ... | 0.23–0.47 | 0.35 |

جمع دیگری از آزمون‌ها، این بار با ساختار میکروسکوپی گوناگون به نتایج جدول ۷-۳ رسیده است. در این جدول حد دوام‌ها بین 23 تا 63 درصد مقاومت کششی است.[۱۰]

جای هشدار است که می‌بینیم پراکندگی حد دوام‌ها به‌علت پراکندگی مقاومت‌های کششی نمونه‌ها نیست، بلکه حتی آنگاه که مقاومت کششی نمونه‌های زیادی یکسان است، بازهم پراکندگی هست. این نکته را هنگام انتخاب ضریب اطمینان به‌یاد داشته باش.

حال در پی عرضه روشی برای برآورد حد دوام‌ها هستیم. بدان که برآوردهای ما از مقادیر داده‌های منابع بسیار گوناگون به‌دست آمده است، پس انتظار پراکندگی‌شان زیاد است و شاید با نتایج آزمایشگاهی آزمون‌های خواص مکانیکی نمونه‌های واقعی مواد تولیدی با مشخصات معین فرق‌شان چشمگیر باشد.

---

۱۰. اما اگر مرجع زیر را ببینی، برای فولادهایی که $S_{ut} < 1400$ است حدود تغییر بین ۳۵ تا ۶۰ درصد و برای فولادهای پرمقاومت تا ۲۰ درصد هم می‌رسد.

H. O. Fuchs and R. I. Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, Wiley, New York, 1980, pp. 69–71.

چون گسترهٔ دودلی بزرگتر است، برای جبرانش باید ضرایب طراحی بزرگتر از ضرایب طراحی با بار ایستا به‌کار برد.

Mischke[11] اطلاعات آزمون‌های عملی فراوانی از چندین منبع را تحلیل و نتیجه‌گیری کرده که می‌توان حد دوام و مقاومت کششی را به‌هم ربط داد. رابطه‌اش برای فولادها برابر

$$S'_e = \begin{cases} 0.504\,S_{ut} \text{ kpsi or MPa} & S_{ut} \le 212 \text{ kpsi } (1460 \text{ MPa}) \\ 107 \text{ kpsi} & S_{ut} > 212 \text{ kpsi} \\ 740 \text{ MPa} & S_{ut} > 1460 \text{ MPa} \end{cases} \qquad (۸-۷)$$

است که $S_{ut}$ **کمترین** مقاومت کششی است و نشان پریم $S'_e$ برای خود **نمونه تیر گردان** است. نشان بی پریم $S_e$ برای حد دوام هر قطعه خاص در دستگاه که زیر هر نوع بارگذاری باشد، به‌کار خواهد رفت. به‌زودی یاد می‌گیری که این دو حد دوام شاید به‌کل باهم فرق کنند.

داده‌های جدول ۷-۳ بر دشواری تلاش برای رسیدن به دستور یافتن حد دوام به‌یاری مقاومت کششی تأکید دارد. این جدول بخشی از علت این دشواری را هم نشان می‌دهد. فولادهایی با ریزساختار گوناگون، نسبت‌های $S'_e/S_{ut}$ گوناگون دارند. چنین می‌نماید که ریزساختارهای شکل‌پذیرتر نسبت بزرگ‌تری دارند. طبیعت مارتنزیت بسیار ترد و بسیار متمایل به بروز ترک‌های خستگی است، پس نسبت آن کم است. اگر طرح‌ها شامل مشخصه‌های گرماکاری برای رسیدن به ریزساختار معینی هستند، امکان دارد برآوردی از حد دوام بر پایه داده‌های آزمون برای ریزساختار بخصوصی به‌کار بریم؛ چنین برآوردهایی، بسیار اعتمادپذیرترند و البته باید به‌کار روند.

حد دوام‌های چدن‌های گوناگون با پرداخت یا ماشین شده در جدول الف-۲۴ آمده است. آلیاژهای آلومینیوم، حد دوام ندارند. مقاومت‌های خستگی برخی آلیاژهای آلومینیوم برای عمر تنش $5(10^8)$ نوسان در جدول الف-۲۴ آمده است.

## ۸-۷ مقاومت خستگی (Fatigue Strength)

در شکل ۷-۱۰ ناحیه کم نوسان را می‌بینیم که از $N=1$ تا $10^3$ نوسان است. در این ناحیه، مقاومت خستگی $S_f$ تنها اندکی کوچکتر از مقاومت کششی $S_{ut}$ است. یک روش تحلیلی را Mischke[12] برای هردو ناحیه کم‌نوسان و پرنوسان داده است که پارامترهای معادله Manson-Coffin و نمای تقویتی کرنش $m$ را می‌خواهد. مهندسین اغلب مجبورند با اطلاعات کمی کار کنند.

شکل ۷-۱۰ می‌گوید که ناحیه پرنوسان برای فولادها از $10^3$ نوسان تا عمر حد دوام $N_e$ که حدود $10^6$ تا $10^7$ نوسان است ادامه دارد. قصد این بخش بیان روش‌های تقریب‌زنی نمودار $S$-$N$ در ناحیه پرنوسان برای زمانی است که اطلاعات موجود تنها به نتایج آزمون کشش ساده محدود شود. تجربه نشان می‌دهد که داده‌های خستگی پرنوسان با تبدیل لگاریتمی تنش و عمر، خط راست می‌شوند. طراحان می‌توانند با مع. (۷-۲) چنین رفتار کنند

$$(S_f)_{10^3 \text{ نوسان}} = \sigma'_F\,(2.10^3)^b = f\,S_{ut}$$

---

11. Charles R. Mischke. "Prediction of Stochastic Endurance Strength," *Trans. of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 109, no. 1, January 1987, pp. 113–122.

12. J. E. Shigley and C. R. Mischke, Standard Handbook of Machine Design, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996, pp. 13.34–13.37.

که $f$ کسری از $S_{ut}$ است که با $10^3$ نوسان ($S_f$) نشان می‌دهیم. $f$ را به‌دست می‌آوریم

$$f=\frac{\sigma'_F}{S_{ut}}(2\cdot 10^3)^b \qquad (۹-۷)$$

حال از مع. (۳-۱۱)، $\sigma'_F=\sigma_0\varepsilon^m$ با $\varepsilon=\varepsilon'_F$. اگر این معادله تنش حقیقی-کرنش حقیقی را ندانیم، تقریب SAE[۱۳] برای فولادهای $H_B\le 500$ چنین است

$$\sigma'_F=S_{ut}+50\text{ kpsi} \quad \text{یا} \quad \sigma'_F=S_{ut}+345\text{ MPa} \qquad (۱۰-۷)$$

نمای $b$ از $\sigma_a=S_e=\sigma'_F(2N_e)^b$ پیدا می‌شود

$$b=-\frac{\log(\sigma'_F/S_e)}{\log(2N_e)} \qquad (۱۱-۷)$$

پس معادلهٔ $S_f=\sigma'_F(2N)^b$ معلوم است. برای نمونه، اگر $S_{ut}=724\text{ MPa}$ و $S_e=362\text{ MPa}$ برای شکست در دور $10^6$ باشد،

$$\sigma'_F=724+345=1069\text{ MPa}$$

$$b=-\frac{\log(1069/362)}{\log[2(10^6)]}=-0.0746$$

$$f=\frac{1069}{724}[2(10^3)]^{-0.0746}=0.8375$$

و

$$S_f=1069(2N)^{-0.0746} \qquad \text{(الف)}$$

به‌طور تجربی، منحنی عادی خورند آن چنین است

$$S_f=aN^b \qquad (۱۲-۷)$$

که $N$ عمر شکست و ثابت‌های $a$ و $b$ با نقاط $S_f$ برای $10^3$، و $S_e$ برای $10^6$ و با $(S_f)_{10^3}=fS_{ut}$ تعیین می‌شوند. این دو نقطه را در مع. (۷-۱۲) می‌گذاریم،

$$a=\frac{(fS_{ut})^2}{S_e} \qquad (۱۳-۷)$$

$$b=-\frac{1}{3}\log\left(\frac{fS_{ut}}{S_e}\right) \qquad (۱۴-۷)$$

در ادامه نمونه جاری

$$a=\frac{0.8375^2(724)^2}{362}=1015.6\text{ MPa}$$

$$b=-\frac{1}{3}\log\frac{0.8375(724)}{362}=-0.0747$$

و معادله حاصل چنین است

$$S_f=1015.6N^{-0.0747} \qquad \text{(ب)}$$

---

13. *Fatigue Design Handbook*, vol. 4, Society of Automotive Engineers, New York, 1958, p. 27.

بدان‌که $2^{-0.0746}(1069) = 1015.13$ پس دو مع. (الف) و (ب) به‌درستی یکسانند. انطباق منحنی‌هایی با $f$ ثابت رایج است ولی $f$ با $S_{ut}$ تغییر می‌کند. جدول زیر نمونه‌ای از چنین تقریب‌زنی است:

| $S_{ut}$, MPa | 415 | 620 | 830 | 1380 |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0.93 | 0.86 | 0.82 | 0.77 |

اگر تنش به درستی دو طرفه $\sigma_a$ را بدهند، عمر شکست چنین بیان می‌شود.

$$N = \left(\frac{\sigma_a}{\alpha}\right)^{1/b} \qquad (۱۵-۷)$$

خستگی کم‌نوسان برای آنگاه است که $1 \le N \le 10^3$ باشد (شکل ۷-۱۰). در چنین نمودار loglog، مکان هندسی شکست در تناوب کمتر از $10^3$ نزدیک به خط راست است و اگر در فاصلهٔ $10^3$، $fS_{ut}$ و 1، $S_{ut}$ خط راست بگیریم، محافظه‌کاری است و رابطه چنین است

$$S_f \ge S_{ut} N^{(\log f)/3} \qquad 1 \le N \le 10^3 \qquad (۱۶-۷)$$

**نمونه ۷-۲** میانگین مقاومت کششی نهایی فولاد 1050 HR، $S_{ut} = 724\,\text{MPa}$ با مقاومت تسلیم 415 MPa است.

(الف) حد دوام تیرگردان را برآورد کن. عمر $10^6$ دور.

(ب) مقاومت خستگی برای نمونه براق شده تیرگردان با عمر شکست $10^4$ نوسان را برآورد کن.

(ج) عمر قابل انتظار برای تنش دوطرفه کامل 380 MPa را برآورد کن.

راه حل (الف) از مع. (۷-۸)،

پاسخ

$$S'_e = 0.504(724) = 365\ \text{MPa}$$

(ب) از مع. (۷-۱۰)،

$$\sigma'_F = 724 + 345 = 1069\ \text{MPa}$$

از مع. (۷-۱۱) و با $S_e = S'_e$،

$$b = -\frac{\log(1069/365)}{\log\left[2(10^6)\right]} = -0.0741$$

از مع. (۷-۹)،

$$f = \left(\frac{1069}{724}\right)\left[2(10^3)\right]^{-0.0741} = 0.841$$

از مع. (۷-۱۳)،

$$a = \frac{0.841^2(724)^2}{365} = 1015.5\ \text{MPa}$$

از مع. (۷-۱۴)،

$$b = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{0.842(724)}{366}\right] = -0.0739$$

$$S_f = 1015.5N^{-0.0741}$$

پاسخ

$$(S_f)_{10^4} = 1015$$

(ج) از مع. (۷-۱۵)،

پاسخ

$$N = \left(\frac{380}{1015.5}\right)^{1/-0.0741} = 581(10)^3 \text{ نوسان بار}$$

## ۷-۹ ضرایب تصحیح حد دوام (Endurance Limit Modifying Factors)

دیدیم که نمونهٔ آزمون تیرگردان که برای تعیین حدود دوام به‌کار رفت با دقت فراوان تهیه و در شرایط تحت کنترل کامل در آزمایشگاه به‌کار رفت. پنداشت یکسان بودن هر عضو مکانیکی یا سازه با چنین نمونه‌ای به‌راستی دور از حقیقت است. برخی از تفاوت‌های چنین‌اند:

- **جنس:** ترکیب شیمیایی، مبانی شکست، تغییرپذیری
- **ساخت:** روش، گرماکاری، خوردگی مالشی، پرداخت سطح، تمرکز تنش
- **محیط:** خوردگی، دما، حالت تنش، زمان‌های بی‌باری
- **طرح:** اندازه، شکل، عمر، حالت تنش، تمرکز تنش، سرعت، مالش، خراش یا کندگی

Marin[14] ضرایبی برای کمیت‌دهی اثرات پرداخت سطح، اندازه، بارگذاری، دما و موارد دیگر مشخص کرد. این پرسش که برای تصحیح حد دوام باید ضرایب را در آن ضرب یا بر آن تقسیم کرد، با تحلیل آماری فراوان روی فولاد 4340 (کورهٔ الکتریکی، کیفیت صنایع هواپیمایی) روشن شد، که در آن ضریب همبستگی در فرم مضربی 0.85 و در فرم افزایشی 0.40 به‌دست آمد. پس معادله Marin چنین است

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \qquad (۱۷-۷)$$

که $k_a$ = ضریب تصحیح پرداخت سطح

$k_b$ = ضریب تصحیح اندازه

$k_c$ = ضریب تصحیح بار

$k_d$ = ضریب تصحیح دما

$k_e$ = ضریب اعتمادپذیری[15]

$k_f$ = ضریب تصحیح اثرات دیگر

$S'_e$ = حد دوام تیرگردان

$S_e$ = حد دوام در موضع بحرانی قطعه ماشین در شکل، اندازه و شرایط کاربرد

هرگاه آزمون‌های حد دوام قطعات را ندانیم، با کمک ضرایب Marin آن را برآورد می‌کنیم.

### ضریب پرداخت سطح $k_a$

سطح نمونه تیرگردان بسیار براق با برق‌اندازی نهایی در راستای محوری است تا هرگونه خراش محیطی از بین برود. ضریب تصحیح پرداخت به کیفیت پرداخت نهایی و مقاومت کششی قطعه بستگی دارد. برای یافتن کمیتی برای پرداخت‌های عادی قطعات ماشین (سنگ، ماشینکاری یا سردکاری، نورد گرم و آهنگری) مختصات نقاط داده‌ها از نمودار حد دوام نسبت به مقاومت کششی نهایی که از داده‌های

---

14. Joseph Marin, *Mechanical Behavior of Engineering Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962, p. 224.

۱۵. بررسی کامل آماری در بخش ۷-۱۷ آمده است. پیش از آن، آنچه می‌آید با طبیعت قطعی است. هرچند که باید مراقب پراکندگی آشکار در داده‌های خستگی بود. پس در اینجا از وارسی اعتمادپذیری حقیقی سخن نمی‌گوییم، بلکه تلاش در پاسخگویی به این پرسش داریم: گیریم که تنش را بدانیم، احتمال این‌که تنش از مقاومت قطعه‌ای که شانسی برگزیده‌ایم و از این جمعیت ماده ساخته شده افزون شود چقدر است؟

**جدول ۷-۴**

**پارامترهای رابطهٔ ضریب تصحیح پرداخت سطح Marin، مع. (۷-۱۸)**

| پرداخت سطح | ضریب $a$ $S_{ut}$, kpsi | ضریب $a$ $S_{ut}$, MPa | نما $b$ |
|---|---|---|---|
| سنگ‌زده | 1.34 | 1.58 | −0.085 |
| ماشینکاری یا نورد سرد | 2.70 | 4.51 | −0.265 |
| نورد گرم | 14.4 | 57.7 | −0.718 |
| آهنگری | 39.9 | 272. | −0.995 |

From C.J. Noll and C. Lipson, "Allowable Working Stresses," *Society for Experimental Stress Analysis*, vol. 3, no. 2, 1946 p. 29. Reproduced by O.J. Horger (eds.) *Metals Engineering Design ASME Handbook*, McGraw-Hill, New York. Copyright © 1953 by The McGraw-Hill Companies, Inc. Reprinted by permission.

Lipson و Noll توسط Horger[16] بازسازی شده بود دوباره گردآوری شد. نتیجه تحلیل برگشت از سوی Mischke به‌فرم زیر است

$$k_a = aS_{ut}^b \tag{۷-۱۸}$$

که $S_{ut}$ کمترین مقاومت کششی و جدول ۷-۴ مقادیر $a$ و $b$ را داده است.

**نمونه ۷-۳** فولادی با میانگین مقاومت نهایی 520 MPa و پرداخت ماشینکاری است. $k_a$ چقدر است؟

راه حل از جدول ۷-۴، $a = 4.51$ و $b = -0.265$. پس بنا به مع. (۷-۱۸)،

$$k_a = 4.51(520)^{-0.265} = 0.860$$

### ضریب اندازه $k_b$

ضریب اندازه با ارزیابی 133 مجموعه نقاط داده، به‌دست آمد.[17] نتایج برای خمش و پیچش چنین شد

$$k_b = \begin{cases} (d/0.3)^{-0.107} = 0.879d^{-0.107} & 0.11 \le d \le 2 \text{ in} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \le 10 \text{ in} \\ (d/7.62)^{-0.107} = 1.24d^{-0.107} & 2.79 \le d \le 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \le 254 \text{ mm} \end{cases} \tag{۷-۱۹}$$

برای بارگذاری محوری، اثر اندازه نداریم، پس

$$k_b = 1 \tag{۷-۲۰}$$

$k_c$ را هم ببین.

برای میله‌های گرد ولی غیرگردان و یا مقاطع غیرگرد کاربرد مع. (۷-۱۹) فرق می‌کند. برای نمونه، اگر مقطع میله مستطیل به کلفتی 6 mm و عرض 40 mm باشد، ضریب اندازه چند است؟ در این‌جا

16. C. J. Noll and C. Lipson, "Allowable Working Stresses," *Society for Experimental Stress Analysis*, vol. 3. no. 2, 1946, p. 29. Reproduced by O. J. Horger (ed.), *Metals Engineering Design ASME Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1953, p. 102.

17. Mischke, op.cit., Table 3.

یک **اندازه مؤثر** $d_e$ به‌کار می‌رود که از معادل گرفتن حجم ماده‌ای که بیش از 95% بیشترین تنش را دارد با همان حجم در تیرگردان نمونه[18] به‌دست می‌آید. چنین می‌نماید که با برابر گرفتن این دو حجم، طول‌ها حذف می‌شود و فقط برابری مقاطع را می‌خواهیم. در میله گرد گردان، مقطع با بیش از 95% بیشترین تنش، حلقه‌ای است به‌قطر درونی $0.95d$ و قطر بیرونی $d$. پس، این سطح را با $A_{0.95\sigma}$ نشان می‌دهیم و

$$A_{0.95\sigma} = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (0.95d)^2\right] = 0.0766d^2 \qquad (۲۱-۷)$$

این معادله برای میله‌گرد توخالی گردان هم معتبر است. برای میله‌گرد توپر یا خالی غیرگردان سطح تنش 95 درصدی برابر مساحت دو سطحی است که پشت دو وتر موازی به‌فاصله $0.95d$ قرار دارد. با محاسبه دقیق این سطح چنین می‌شود

$$A_{0.95\sigma} = 0.01046d^2 \qquad (۲۲-۷)$$

با برابر گرفتن دو مع. (۷-۲۱) و (۷-۲۲)، قطر مؤثر چنین می‌شود که $d_e$ در مع. (۷-۱۹) است.

$$d_e = 0.370d \qquad (۲۳-۷)$$

که قطر معادل برای میله‌گرد توپر یا توخالی غیرگردان است. برای مقطع مستطیل به‌اندازهٔ $h \times b$، $A_{0.95\sigma} = 0.05hb$ است. با روش پیش، قطر معادل چنین است

$$d_e = 0.808(hb)^{1/2} \qquad (۲۴-۷)$$

در جدول ۷-۵ سطح $A_{0.95\sigma}$ و اندازهٔ مؤثر $d_e$ برای مقاطع سازه‌ای رایج زیر خمش بی‌گردش آمده است.

---

18. See R. Kuguel, "A Relation between Theoretical Stress Concentration Factor and Fatigue Notch Factor Deduced from the Concept of Highly Stressed Volume," *Proc. ASTM*, vol. 61, 1961, pp. 732–748.

**نمونه ۷-۴** قطر میلمحوری زیر بار خمشی 32 mm با شانه‌ای به‌قطر 38 mm است. میانگین مقاومت کششی نهایی آن 690 MPa، ضریب اندازه $k_b$ آن را به‌دست آور، اگر

(الف) حالت گردان باشد.

(ب) حالت غیرگردان باشد.

**راه حل** (الف) از مع. (۷-۱۹)،

**پاسخ**

$$k_b = \left(\frac{d}{7.62}\right)^{-0.107} = \left(\frac{32}{7.62}\right)^{-0.107} = 0.858$$

(ب) از جدول ۷-۵،

$$d_e = 0.37d = 0.37(32) = 11.84 \text{ mm}$$

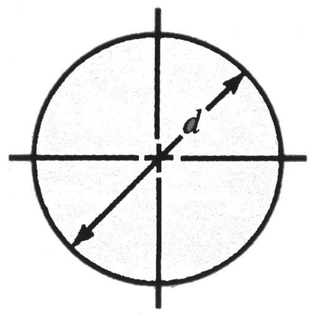
از مع. (۷-۱۹)،

**پاسخ**

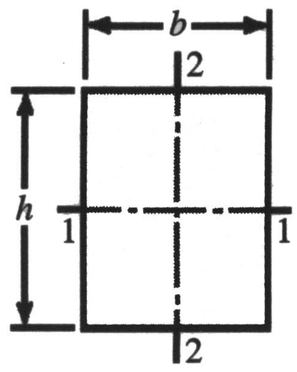
$$k_b = \left(\frac{11.84}{7.62}\right)^{-0.107} = 0.954$$

**جدول ۷-۵**

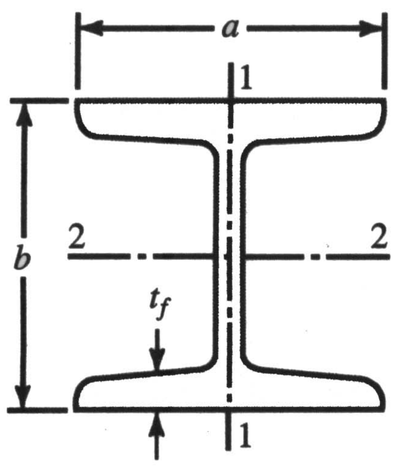
**قطر معادل و سطح $A_{0.95\sigma}$ برای مقاطع رایج سازه‌ای بی‌گردش**



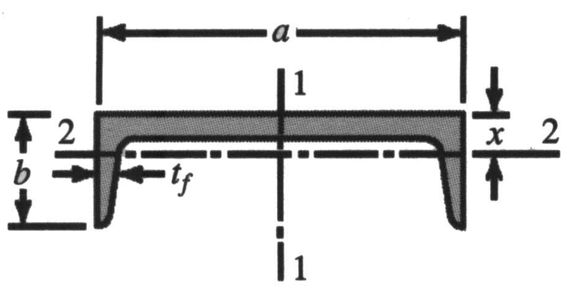

$$A_{0.95\sigma} = 0.01046d^2$$
$$d_e = 0.370d$$




$$A_{0.95\sigma} = 0.05hb$$
$$d_e = 0.808\sqrt{hb}$$




$$A_{0.95\sigma} = \begin{cases} 0.10at_f & \text{محور ۱-۱} \\ 0.05ba \quad t_f > 0.025a & \text{محور ۲-۲} \end{cases}$$




$$A_{0.95\sigma} = \begin{cases} 0.05ab & \text{محور ۱-۱} \\ 0.052xa + 0.1t_f(b-x) & \text{محور ۲-۲} \end{cases}$$

## ضریب بارگذاری $k_c$ [۱۹]

اگر آزمون‌های خستگی با بار خمشی گردان، محوری (کشش ـ فشار)، و یا پیچشی باشد، حدود دوام با $S_{ut}$ فرق می‌کند. این مطلب در بخش ۷-۱۷ بحث می‌شود. در این‌جا مقادیر متوسط ضریب بار می‌آید

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{خمش} \\ 0.85 & \text{محوری} \\ 0.59 & \text{پیچش}^{19} \end{cases} \qquad (۲۵-۷)$$

## ضریب دما $k_d$

اگر درجه کار کمتر از دمای اطاق باشد، احتمال شکست ترد زیاد است و باید در آغاز کاوش شود. هرگاه دمای کار بیش از دمای اطاق باشد، نخست باید تسلیم بررسی شود؛ زیرا مقاومت تسلیم با گرما به شدت کم می‌شود (شکل ۳-۸). با زیاد شدن گرما، تنش سبب خزش می‌شود، پس باید بررسی شود. سرانجام، شاید درست باشد که بگوییم موادی که در گرمای زیاد کار می‌کنند حد خستگی ندارند. با کاهش مقاومت خستگی، شکست بگونه‌ای به زمان بستگی دارد.

---

۱۹. این را تنها برای بارگذاری خستگی پیچشی خالص به‌کار ببر. اگر پیچش با تنش‌های دیگری همچون خمش همراه بود، $k_c = 1$ بگیر و بار ترکیبی را با تنش مؤثر von Mises همچون بخش ۶-۵ اداره کن. بدان: پیش‌بینی نظریه انرژی واپیچش برای پیچش خالص $(k_c)_{\text{پیچش}} = 0.577$ است.

**جدول ۷-۶**

**اثر دمای کارکرد بر مقاومت کششی فولاد***
($S_T$ = مقاومت کششی در دمای کارکرد، $S_{RT}$ = مقاومت کششی در دمای اطاق، $0.099 \le \hat{\sigma} \le 0.11$).

| دما، °C | $S_T/S_{RT}$ | دما، °F | $S_T/S_{RT}$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 1.000 | 70 | 1.000 |
| 50 | 1.010 | 100 | 1.008 |
| 100 | 1.020 | 200 | 1.020 |
| 150 | 1.025 | 300 | 1.024 |
| 200 | 1.020 | 400 | 1.018 |
| 250 | 1.000 | 500 | 0.995 |
| 300 | 0.975 | 600 | 0.963 |
| 350 | 0.943 | 700 | 0.927 |
| 400 | 0.900 | 800 | 0.872 |
| 450 | 0.843 | 900 | 0.797 |
| 500 | 0.768 | 1000 | 0.698 |
| 550 | 0.672 | 1100 | 0.567 |
| 600 | 0.549 | | |

*منبع داده‌ها: شکل ۳-۸.

داده‌های محدودی که داریم حاکی از اندکی افزایش حد دوام در آغاز افزایش دما است و سپس درحدود 200 تا 370 رو به کاهش می‌گذارد که بی‌شباهت به رفتار مقاومت کششی، نیست (شکل ۳-۸). پس شاید درست باشد که با افزایش گرما، رابطه حد دوام با مقاومت کششی نسبت به شرایط دمای اطاق باشد.[۲۰] پس منطقی می‌آید که دست‌کم تا وقتی داده‌های بیشتر نداریم، برای پیش‌بینی حد دوام در دماهای بیشتر، همان روابط را که نسبت به دمای اطاق به‌کار می‌رود به‌کار بریم. خانه آخر آنکه این کار استاندارد سودمندی برای سنجش رفتار مواد گوناگون خواهد بود.

جدول ۷-۶ به‌یاری شکل ۳-۸ و داده‌های مقاومت کششی درست شده است. بدان که این جدول حاصل داده‌های 145 آزمون از 21 گونه فولادهای کربنی و آلیاژی است و بیشترین انحراف 0.11 بوده است. یک منحنی چندجمله‌ای درجه چهار به شکل ۳-۸ بر مکان هندسی داده‌ها منطبق می‌شود.

$$k_d = 0.975 + 0.432(10^{-3})T_F - 0.115(10^{-5})T_F^2 + 0.104(10^{-8})T_F^3 - 0.595(10^{-12})T_F^4$$

$$k_d = 0.9877 + 6.51(10^{-4})T_C - 3.414(10^{-6})T_C^2 + 5.621(10^{-9})T_C^3 - 6.246(10^{-12})T_C^4$$

(۷-۲۶)

که $70 \le T_F \le 1000°F$ یا $20 \le T_C \le 540°C$. [مع. (۷-۲۶) برحسب $T_F$ و رابطهٔ دوم برای $T_C$ است. م.]

در دمای چشمگیر مسأله به دوگونه است. اگر حد دوام تیرگردان در دمای اطاق را بدانیم، پس

$$k_d = \frac{S_T}{S_{RT}} \qquad (۷-۲۷)$$

را از جدول ۷-۶ یا مع. (۷-۲۶) به‌کار ببر و ادامه بده. اگر حد دوام تیرگردان را نداریم، آن را با ضریب تصحیح مقاومت برای دما از جدول ۷-۶ و به‌کمک مع. (۷-۸) به‌دست آور و $k_d = 1$ بگیر.

۲۰. برای داده‌های بیشتر: Table 2 of ANSI/ASME B106. 1M-1985 shaft standard, and E. A. Brandes (ed.), *Smithell's Metals Reference Book*, 6th ed., Butterworth, London, 1983, pp. 22–134 to 22–136 که جدول حدّ دوام‌ها در دمای 100 تا 650°C آمده است.

**نمونه ۷-۵** قطعه‌ای از فولاد 1035 با مقاومت کششی نهایی 490 MPa در دمای 450°F کار می‌کند. ضریب تصحیح دمای Marin، $(S'_e)_{450°}$ را برآورد کن اگر

(الف) حد دوام در دمای اطاق $(S'_e)_{70°} = 273$ MPa باشد.

(ب) تنها میانگین مقاومت کششی نهایی را در دمای اطاق داریم.

راه حل (الف) نخست از مع. (۷-۲۶)،

$$k_d = 0.975 + 0.432(10^{-3})(450) - 0.115(10^{-5})(450^2)$$
$$+ 0.104(10^{-8})(450^3) - 0.595(10^{-12})(450^4) = 1.007$$

پس،

پاسخ
$$(S_e)_{450°} = k_d(S'_e)_{70°} = 1.007(273) = 274.91 \text{ MPa}$$

(ب) از جدول ۷-۶ هم با میان‌یابی چنین داریم

$$(S_T/S_{RT})_{450°} = 1.018 + (0.995 - 1.018)\frac{450-400}{500-400} = 1.007$$

پس مقاومت کششی در دمای 450°F چنین برآورد می‌شود

$$(S_{ut})_{450°} = (S_T/S_{RT})_{450°}(S_{ut})_{70°} = 1.007(490) = 493.43 \text{ MPa}$$

از مع. (۷-۸)، پس

پاسخ
$$(S'_e)_{450°} = 0.504(S_{ut})_{450°} = 0.504(493.43) = 248.69 \text{ MPa}$$

بند الف به‌خاطر داشتن آزمون جنس فولاد، برآورد بهتری دارد.

## ضریب اعتمادپذیری $k_e$

سخن ما در این‌جا، پرداختن به پراکندگی داده‌ها همچون شکل ۷-۱۸ است که حد دوام میانگین آن را $S'_e/S_{ut} \doteq 0.5$ می‌بینیم و یا در مع. (۷-۸). بیشتر داده‌های مقاومت دوام با مقادیر میانگین‌شان گزارش می‌شوند. داده‌هایی که Haugen و Wirching [21] داده‌اند، انحراف معیار مقاومت دوام‌هایشان کمتر از ۸ درصد است. پس ضریب اعتمادپذیری آنها را می‌شود چنین پیدا کرد.

$$k_e \doteq 1 - 0.08z_a \qquad (۷-۲۸)$$

که $z_a$ از مع. (۲-۱۶) به‌دست می‌آید و مقادیر آن برای هر اعتمادپذیری که بخواهیم از جدول الف-۱۰ به‌دست می‌آید. جدول ۷-۷ ضرایب برخی اعتمادپذیری‌های مشخص استاندارد را دارد.

رسش کامل‌تر اعتمادپذیری را در بخش ۷-۱۷ بخوان.

21. E. B. Haugen and P. H. Wirsching, "Probabilistic Design," *Machine Design*, vol. 47, no. 12, 1975, pp. 10–14.

**جدول ۷-۷**

ضرایب اعتمادپذیری $k_e$ مربوط به انحراف معیار ۸ درصد حددوام

| اعتمادپذیری % | تغییر تبدیل، $z_a$ | ضریب اعتمادپذیری، $k_e$ |
|---|---|---|
| 50 | 0 | 1.000 |
| 90 | 1.288 | 0.897 |
| 95 | 1.645 | 0.868 |
| 99 | 2.326 | 0.814 |
| 99.9 | 3.091 | 0.753 |
| 99.99 | 3.719 | 0.702 |
| 99.999 | 4.265 | 0.659 |
| 99.9999 | 4.753 | 0.620 |

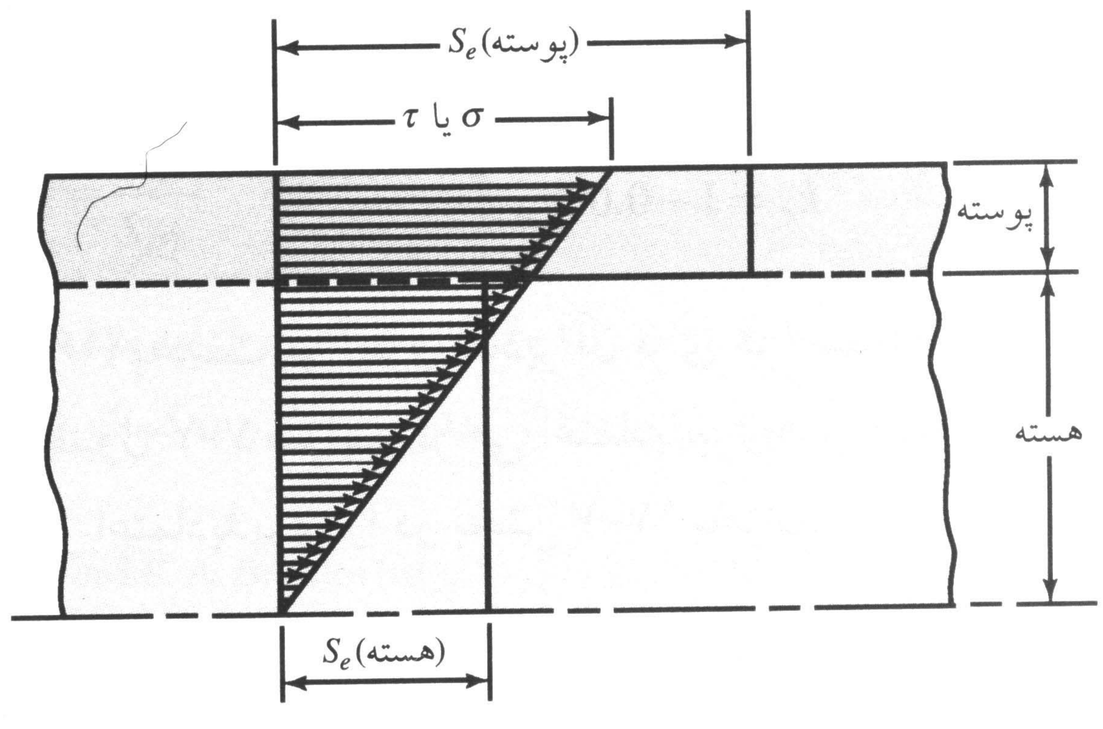
## ضریب اثرات گوناگون $k_f$

اگرچه ضریب $k_f$ برای همه اثرات دیگر در تصحیح حد دوام است، ولی درواقع یادآوری احتساب آنهاست زیرا مقادیر واقعی $k_f$ را همیشه نداریم.

**تنش‌های پسماند** شاید حد دوام را افزایش و یا برعکس کاهش دهد. اگر تنش پسماند در سطح قطعه، فشاری باشد، حد دوام بیشتر می‌شود. شکست‌های خستگی بیشتر کششی هستند و یا دست‌کم ناشی از کشش است. پس هر عاملی که تنش کششی را کم کند، احتمال شکست خستگی را هم کم می‌کند. کارهایی همچون ساچمه‌زنی، چکش‌کاری و نورد سرد، در سطح قطعه تنش پسماند فشاری پدید می‌آورند و حد دوام را می‌افزایند. هرچند که نباید ماده را فرسود.

حد دوام قطعاتی از ورق یا میله گرم‌نوردشده یا کشیده و یا آهنگری شده، **ویژگی‌های جهت‌دار** (***directional characteristics***) ناشی از فرایند ساخت می‌یابند. برای نمونه حد دوام محصول نورد یا کشیدن، در جهت عرضی شاید 10 تا 20 درصد کمتر از حد دوام طولی آن است.

با سخت‌کاری پوسته‌ای ممکن است شکست از سطح خارجی یا از بیشترین شعاع مغز قطعه، آغاز شود که به شیب تنش بستگی دارد. شکل ۷-۱۹ توزیع تنش مثلثی در میله‌ای زیر خمش یا پیچش را نشان می‌دهد. حد دوام‌های $S_e$ برای پوسته و هسته با خط پُر رسم شده. در این نمونه، حد دوام هسته حاکم بر طرح است، زیرا چنانکه می‌بینی، چه $\sigma$ یا $\tau$ وارد گردد، مقدارش در شعاع بیرونی هسته بیش از حد دوام هسته است. البته در صورت وجود تمرکز تنش، شیب تنش خیلی تندتر و احتمال شکست در هسته بعید است.




شکست قطعهٔ سخت‌کاری پوسته‌ای شده، زیر بار خمشی یا پیچشی. در این نمونه شکست در هسته آغاز می‌شود.

### خوردگی (Corrosion)

انتظار می‌رود که قطعات در محیط خورنده، مقاومت خستگی کمتری داشته باشند. البته، چنین است، زیرا مواد خورنده، سطح قطعه را خشن می‌کنند. اما فرد نمی‌تواند به این سادگی حد دوام قطعهٔ تحت خوردگی را پیدا کند، زیرا تنش با خوردگی همزمان است. درحقیقت، قطعه زیرتنش نوسانی در محیط خورنده می‌شکند، پس حد خستگی ندارد. از این‌رو وظیفه طراح به کمترین رساندن عوامل کاهندهٔ عمر خستگی است که اینها هستند:

- تنش میانگین یا ایستا
- تنش نوسانی
- غلظت الکترولیت
- اکسیژن محلول در الکترولیت
- خواص و ترکیب ماده
- درجه گرما
- فراوانی نوسان بار
- نرخ جریان سیال پیرامون نمونه آزمون
- درز یا ترک‌های موضعی

### روکش‌کاری الکترولیتی (Electrolytic Plating)

روکش‌های از کُرم، نیکل، یا کادمیم، حد دوام را تا 50 درصد کم می‌کند. گاهی این کاهش چنان است که باید از روکش‌کاری چشم پوشید. روکش فلز روی ($Zn$) بر مقاومت خستگی بی‌اثر است. اکسیده کردن آندیک (Anodic oxidation) آلیاژهای سبک حد دوام خمشی را تا 39 درصد کم می‌کند ولی بر حد دوام پیچشی بی‌اثر است.

### پاشش فلز (Metal Spraying)

پاشش فلز، سطح فلز را ناهموار و بروز ترک را ممکن می‌سازد. در آزمون‌ها تا 14 درصد کاهش مقاومت خستگی را دیده‌اند.

### بسامد نوسان (Cyclic Frequency)

اگر بستگی فرایند خستگی به‌زمان باشد، به بسامد آن نیز هست. در شرایط عادی، شکست به بسامد بار وابسته نیست، اما شدت خوردگی یا گرما یا هردو، نرخ تکرار بار را مهم می‌کند. با بسامد کمتر و گرمای بیشتر، با تنش معین، گسترش ترک و کوتاهی عمر شدیدتر می‌شود.

### خوردگی فشاری و انطباقی و مالشی (Frettage Corrosion)

این پدیدهٔ خوردگی، ناشی از جابه‌جایی میکروسکپی در قطعات یا سازه‌هایی با انطباق محکم است. اتصال‌های پیچ و مهره، حلقهٔ یاتاقان غلتشی، توپی چرخ و یا هر انطباق محکم بین دو قطعه، از این گونه‌اند. این فرایند با تغییر رنگ، خراش و شکست ناگهانی همراه است. ضریب این خوردگی‌ها $k_f$ به جنس دو قطعه فشاری بستگی دارد و بین 0.24 تا 0.90 تغییر می‌کند.

## ۷-۱۰ تمرکز تنش و حساسیت چاک
## (Stress Concentration and Notch Sensitivity)

در بخش ۴-۱۴ اشاره شد که هر ناپیکنواختی یا ناپیوستگی همچون سوراخ، شیار و چاک در قطعه، تنش‌های هندسی را در کنار این ناپیوستگی‌ها افزایش چشمگیر می‌دهد. مع. (۴-۴۸)، ضریب تمرکز تنش $K_t$ (یا $K_{ts}$) را برای یافتن برایند بیشترین تنش عمودی ناشی از ناپیکنواختی یا عیب قطعه می‌دهد. دریافته‌اند که برخی مواد خیلی به چاک حساس نیستند. پس برای آنها می‌توان $K_t$ را کمتر گرفت. بیشترین تنش برای این مواد چنین است

$$\sigma_{\max} = K_f \sigma_0 \qquad \text{یا} \qquad \tau_{\max} = K_{fs} \tau_0 \tag{۷-۲۹}$$

که $K_f$ کاهش یافتهٔ $K_t$ و $\sigma_0$ تنش عمودی است. معمول است که $K_f$ را **ضریب تمرکز تنش خستگی** (***fatigue stress-concentration factor***) گویند و اندیس $f$ به‌همین نشانه است. پس به‌جاست که $K_f$ را ضریب تمرکز تنش $K_t$ با کاهش ناشی از حساسیت کمتر به چاک بدانیم. ضریب حاصل با معادله زیر بیان می‌شود

$$K_f = \frac{\text{بیشترین تنش در نمونهٔ چاکدار}}{\text{تنش در نمونهٔ بی‌چاک}} \tag{الف}$$

**حساسیت چاک** $q$ با معادله زیر بیان می‌شود

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \qquad \text{یا} \qquad q_{\text{برشی}} = \frac{K_{fs} - 1}{K_{ts} - 1} \tag{۷-۳۰}$$

که $q$ طبق معمول بین صفر و واحد است. بنا به مع. (۷-۳۰) اگر $q = 0$ باشد، $K_f = 1$ می‌شود و چنین ماده‌ای هیچ حساسیتی به چاک ندارد. از سویی اگر $q = 1$ باشد، $K_f = K_t$ می‌شود یعنی این جنس به چاک حساسیت کامل دارد. برای تحلیل یا طراحی، نخست $K_t$ از هندسه قطعه به‌دست می‌آید. سپس بنا به جنس قطعه، $q$ را بیاب و $K_f$ را از معادله زیر به‌دست آور

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \qquad \text{یا} \qquad K_{fs} = 1 + q_{\text{برشی}}(K_{ts} - 1) \tag{۷-۳۱}$$

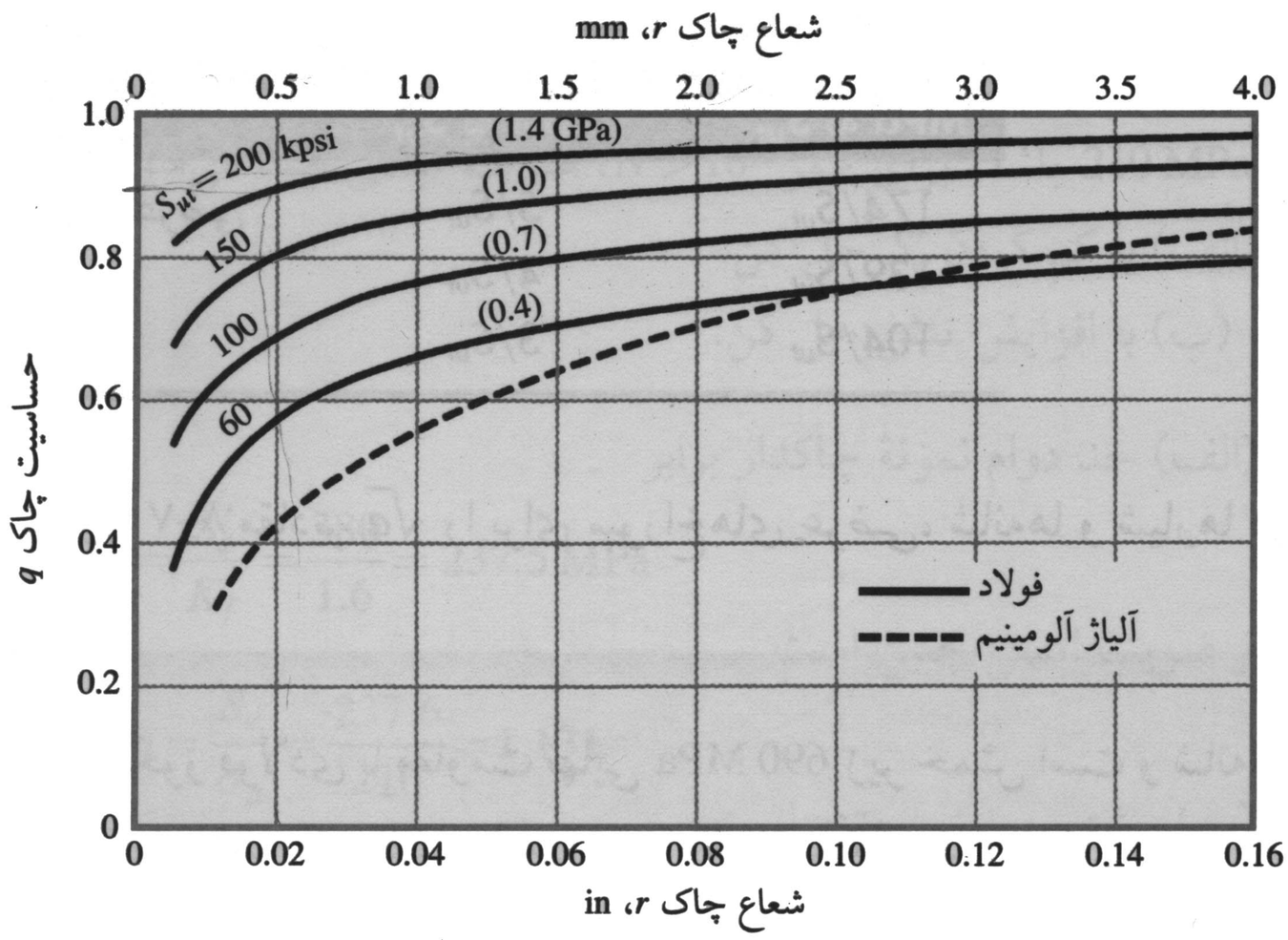
برای فولادها و آلیاژهای آلومینیم 2024، با بار خمشی یا محوری، از شکل ۷-۲۰، $q$ به‌دست می‌آید. برای بار برشی شکل ۷-۲۱ را به‌کار ببر. خوب است بدانی که این منحنی‌ها حاصل نتایج واقعی آزمایش‌هایی با پراکندگی زیاد است. پس هرگاه دربارهٔ مقادیر آنها دودلی داری، همیشه $K_f = K_t$ بگیر. برای چاک با شعاع بزرگ هم $q$ از واحد دور نیست.

حساسیت چاک چدن‌ها خیلی کم و بسته به مقاومت کششی آنها بین 0 تا 0.2 است. محض احتیاط، برای همه چدن‌ها $q = 0.2$ بگیر. شکل ۷-۲۰ بر پایه **معادله *Neuber*** و چنین است

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} \tag{۷-۳۲}$$

که $\sqrt{a}$ را **ثابت *Neuber*** گویند و یک ثابت جنس است. اگر دو مع (۷-۳۰) و (۷-۳۲) را یکسان بگیریم به معادله حساسیت چاک می‌رسیم.

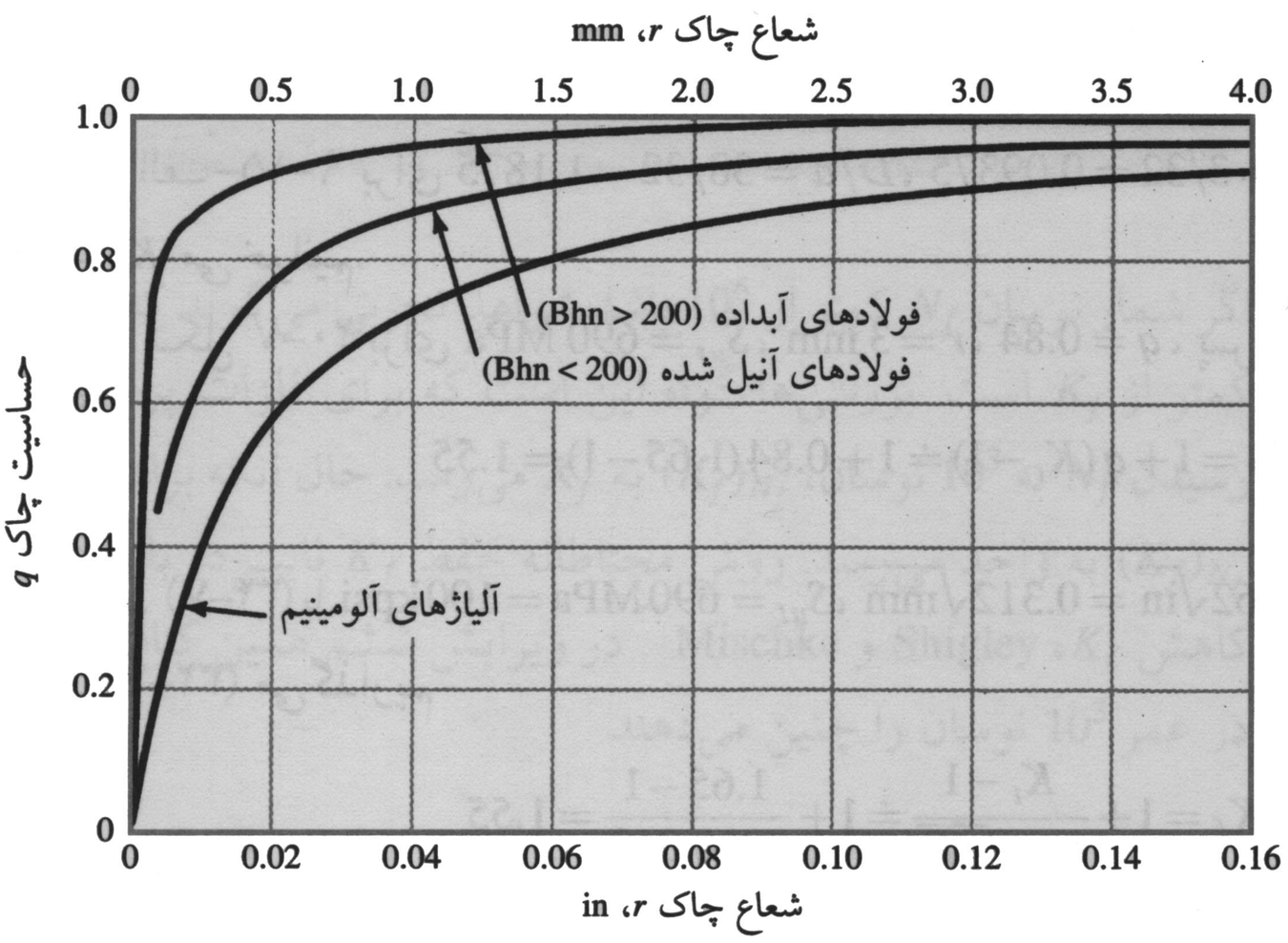
$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{۷-۳۳}$$




**شکل ۷-۲۰**

**نمودارهای حساسیت چاک q، فولادها و آلیاژهای آلومینیم UNS A92024-T غیر ریختگی، با بار دوطرفه خمشی یا کششی، برای چاک‌های با شعاع بزرگ‌تر، $r = 4$ mm بگیر.**

منبع:
George Sines and J. L. Waisman (eds.), *Metal Fatigue*, McGraw-Hill, New York. Copyright © 1969 by The McGraw-Hill Companies, Inc. Reprinted by permission.




**شکل ۷-۲۱**

**منحنی‌های حساسیت چاک $q_{\text{برش}}$، زیر بار پیچش دوطرفه، برای چاک‌های با شعاع $r > 4$، همان $r = 4$ را به‌کار ببر.**

اگر برای فولاد $S_{ut}$ را به MPa بگیریم، ثابت Neuber را می‌شود با معادله درجه سه که خورند داده‌ها باشد چنین تقریب زد

$$\sqrt{a} = 0.238\,788 - 0.224\,816(10^{-2})S_{ut} + 0.159\,710(10^{-5})S_{ut}^2 - 0.409\,586(10^{-9})S_{ut}^3 \qquad (۳۴-۷)$$

در کاربرد مع. (۷-۳۲) یا (۷-۳۳) برای پیچش فولادهای کم‌آلیاژ، در مع. (۷-۳۴) به مقدار 137.8 MPa به مقاومت نهایی اضافه و آنگاه $\sqrt{a}$ را حساب کن.

بنا به شکل چاک معادله Neuber بهبود می‌یابد (پس از Heywood) که ضریب تمرکز تنش خستگی $K_f$ چنین می‌شود

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2(K_t - 1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \qquad (۳۵-۷)$$

**جدول ۷-۸**

پارامتر، Heywood $\sqrt{a}$ برای فولادها

| ویژگی | $\sqrt{a}\,(\sqrt{\text{in}})$, $S_{ut}$ به kpsi | $\sqrt{a}\,(\sqrt{\text{mm}})$, $S_{ut}$ به MPa |
|---|---|---|
| سوراخ عرضی | $5/S_{ut}$ | $174/S_{ut}$ |
| شانه | $4/S_{ut}$ | $139/S_{ut}$ |
| شیار | $3/S_{ut}$ | $104/S_{ut}$ |

و جدول ۷-۸ مقادیر $\sqrt{a}$ را برای سوراخ‌های عرضی، شانه‌ها و شیارها در فولادها می‌دهد.

**نمونه ۷-۶** یک میلمحور فولادی با مقاومت نهایی 690 MPa زیر خمش است و شانه‌ای با شعاع گوشه 3 mm قطر 32 mm را به‌قطر 38 mm ربط می‌دهد. $K_f$ را برآورد کن، به‌یاری:

(الف) شکل ۷-۲۰.

(ب) مع. (۷-۳۲) و (۷-۳۴).

(ج) مع. (۷-۳۵).

راه حل از شکل الف-۱۵-۹ برای $D/d = 38/32 = 1.1875$، $r/d = 3/32 = 0.09375$، نمودار را می‌بینیم و $K_t \doteq 1.65$ می‌خوانیم.

(الف) از شکل ۷-۲۰ برای $S_{ut} = 690\ \text{MPa}$، $r = 3\ \text{mm}$، $q \doteq 0.84$، پس از مع. (۷-۳۱)،

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \doteq 1 + 0.84(1.65 - 1) = 1.55$$

(ب) از مع. (۷-۳۴) با $S_{ut} = 690\,\text{MPa} = 100\,\text{kpsi}$، $\sqrt{a} = 0.062\sqrt{\text{in}} = 0.312\sqrt{\text{mm}}$ آن را با $r = 3\,\text{mm}$ در مع. (۷-۳۲) می‌گذاریم

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} \doteq 1 + \frac{1.65 - 1}{1 + \dfrac{0.312}{\sqrt{3}}} = 1.55$$

(ج) از جدول ۷-۸،

$$\sqrt{a} = \frac{139}{S_{ut}} = \frac{139}{690} = 0.2015\sqrt{\text{mm}}$$

از مع. (۷-۳۵)،

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2(K_t - 1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1.65}{1 + \dfrac{2(1.65 - 1)}{1.65}\dfrac{0.2015}{\sqrt{3}}} = 1.51$$

که 2.5 درصد کمتر از پاسخ بندهای الف و ب است.

برای بارگذاری ساده، می‌پذیریم که یا با تقسیم حد دوام نمونهٔ بی‌چاک بر $K_f$ و یا با ضرب تنش نوسانی در $K_f$ حد دوام را کاهش دهیم. البته درحالت تنش‌های مرکب که شاید بیش از یک مقدار ضریب تمرکز-خستگی داریم، تنش‌ها در $K_f$ خود ضرب می‌شوند.

**نمونه ۷-۷** نمونه‌ای بی‌چاک با حد دوام 380 MPa را چنان چاک زده‌ایم که $K_f = 1.6$ است. اگر تنش نوسانی 210 MPa باشد، برای عمر $N > 10^6$، ضریب ایمنی چند می‌شود؟

(الف) با کم کردن $S'_e$ حل کن.

(ب) با افزایش تنش حل کن.

راه حل (الف) حد دوام نمونهٔ چاکدار برابر

$$S_e = \frac{S'_e}{K_f} = \frac{380}{1.6} = 237.5 \text{ MPa}$$

و ضریب ایمنی چنین است

$$n = \frac{S_e}{\sigma_a} = \frac{237.6}{210} = 1.131$$

(ب) بیشترین تنش چنین است

$$(\sigma_a)_{\max} = K_f \sigma_a = 1.6(210) = 336.0 \text{ MPa}$$

و ضریب ایمنی هم

$$n = \frac{S'_e}{K_f \sigma_a} = \frac{380}{336} = 1.131$$

اگر شمار نوسان $N_f$ کمتر از $10^6$ باشد شواهد تجربی می‌گوید که ضریب تمرکز تنش خستگی $(K_f)_{N_f}$ کمتر از $K_f$ است. بررسی‌ها گواه این است که برای فلزات پرمقاومت (اغلب با شکل‌پذیری کم) با رسیدن $N_f$ به $10^3$ نوسان، $(K_f)_{N_f}$ به $K_f$ می‌رسد. حال آنکه برای فلزات کم‌مقاومت (اغلب شکل‌پذیر) $(K_f)_{N_f}$ به واحد می‌رسد. روش محتاطانه حفظ $K_f$ ثابت در بازهٔ $10^3 \le N < 10^6$ است. برای رعایت کاهش $K_f$، Shigley و Mischke [۲۲] در ویرایش ششم همین کتاب پیشنهاد تعیین حساسیت چاک $q_{10^3}$ در عمر $10^3$ نوسان را چنین می‌دهند

$$q_{10^3} = \frac{(K_f)_{10^3} - 1}{K_f - 1} = -0.18 + 0.624(10^{-3})S_{ut} - 0.9479(10^{-7})S_{ut}^2 \qquad (۳۶-۷)$$

[معادله به واحد متری درآمده است. م.]

که $S_{ut}$ به $S_{ut} < 2280$ MPa، و $K_f$ ضریب تمرکز تنش خستگی با عمر $10^6$ نوسان است. $(K_f)_{10^3}$ را از آن به‌دست می‌آوریم

$$(K_f)_{10^3} = 1 - (K_f - 1)\left[0.18 - 0.624(10^{-3})S_{ut} + 0.9479(10^{-7})S_{ut}^2\right] \qquad (۳۷-۷)$$

اگر برای نمونهٔ چاکدار از $fS_{ut}/(K_f)_{10^3}$ در $10^3$ تا $S'_e/K_f$ در $10^6$ نوسان، نمودار loglog $S$-$N$ را خط راست بگیریم، برای هر $S_f/(K_f)_N$ با $N$، داریم

$$(K_f)_N = \frac{(K_f)_{10^3}^2}{K_f} N^{(1/3)\log\left[K_f/(K_f)_{10^3}\right]} \qquad (۳۸-۷)$$

22. J. E. Shigley and C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 2001, p. 386–387.

**نمونه ۷-۸** نتایج نمونه ۷-۶ را برای یافتن $(K_f)_{10^5}$ به‌کار ببر.

راه حل از نمونه ۷-۶، $K_f = 1.51$ (بند ج) $S_{ut} = 690\ \text{MPa}$ و از مع. (۷-۳۷)،

$$\begin{aligned}(K_f)_{10^3} &= 1-(K_f-1)\left[0.18-0.624(10^{-3})\,S_{ut}+0.9479(10^{-7})\,S_{ut}^2\right]\\ &= 1-(1.51-1)\left[0.18-0.624(10^{-3})\,690+0.9479(10^{-7})\,690^2\right]\\ &= 1.105\end{aligned}$$

از مع. (۷-۳۸)،

پاسخ
$$(K_f)_{10^3} = \frac{1.105^2}{1.51}10^{5(1/3)\log(1.51/1.105)} = 1.36$$

تا به این‌جا هر نمونه یکی از ضرایب معادله Marin و ضرایب تمرکز تنش را به‌تنهایی نشان داد. بیایید شماری از ضرایب را باهم بررسی کنیم.

**نمونه ۷-۹** یک میله از فولاد 1015 گرم‌نوردشده تا قطر 25 mm ماشین شده و باید زیر بار محوری دوسویه پس از 70 000 نوسان بار در دمای 288°C بشکند. کمترین خواص ASTM را با اعتمادپذیری 99 درصد به‌کار ببر و حد دوام و مقاومت خستگی را برای این عمر پیدا کن.

راه حل از جدول الف-۲۰ ، در دمای 21°C، $S_{ut} = 345\ \text{MPa}$. چون حد دوام نمونه تیرگردان را در دمای اطاق نداریم، نخست مقاومت نهایی را در دمای 288°C (550°F) از جدول ۷-۶ می‌یابیم

$$\left(\frac{S_T}{S_{RT}}\right)_{288^\circ} = \frac{0.995+0.963}{2} = 0.979$$

پس مقاومت نهایی در دمای 288°C برابر

$$(S_{ut})_{288^\circ} = (S_T/S_{RT})_{288^\circ}(S_{ut})_{21^\circ} = 0.979(345) \doteq 338\ \text{MPa}$$

پس حد دوام تیرگردان در دمای 288°C از مع. (۷-۸) چنین می‌شود

$$S'_e = 0.504(338) \doteq 170\ \text{MPa}$$

سپس ضرایب Marin را می‌یابیم. برای پرداخت ماشینکاری، مع. (۷-۱۸) با جدول ۷-۴ چنین می‌دهد

$$K_a = aS_{ut}^b = 4.51(338)^{-0.265} = 0.964$$

برای بار محوری، از مع. (۷-۲۰)، ضریب اندازه $k_b = 1$ و ضریب بارگذاری $k_c = 0.85$، از مع. (۷-۲۵) است. ضریب دما $k_d = 1$ زیرا اثر آن را در مقاومت نهایی و پس از آن در حد دوام وارد کردیم. برای اعتمادپذیری 99 درصد، از جدول ۷-۷، $k_e = 0.814$، در آخر چون شرایط دیگری نداریم، ضریب اثرات دیگر $k_f = 1$ می‌گیریم. با مع. (۷-۱۷) حد دوام قطعه برآورد می‌شود

$$\begin{aligned}S_e &= k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e\\ &= 0.964(1)0.85(1)(0.814)(1)170 = 113.4\ \text{MPa}\end{aligned}$$

برای مقاومت خستگی با عمر 70 000 دور باید معادله $S$-$N$ را بسازیم. از بخش ۷-۸، مع. (۷-۱۰)،

$$\sigma'_F = 338 + 345 = 683 \text{ MPa}$$

از مع. (۷-۱۱)،

$$b = -\frac{\log(\sigma'_F/S_e)}{\log(2N_e)} = -\frac{\log(683/113.4)}{\log(2.10^6)} = -0.1237$$

پس مع. (۷-۹) چنین می‌دهد

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}}(2\times10^3)^b = \frac{683}{338}\left[2\cdot(10)^3\right]^{-0.1237} = 0.79$$

از مع. (۷-۱۳)

$$a = \frac{(fS_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0.79(338)]^2}{113.4} = 629 \text{ MPa}$$

و از مع. (۷-۱۲) هم،

پاسخ

$$S_f = aN^b = 629(70\,000)^{-0.1237} = 158 \text{ MPa}$$

**نمونه ۷-۱۰** شکل ۷-۲۲الف، میلمحور گردانی را روی دو یاتاقان ساچمه‌ای (ball bearing) در $A$ و $D$ و بار غیر دورانی $F = 6.8$ kN نشان می‌دهد. کمترین مقاومت ASTM را به‌کار ببر و عمر قطعه را برآورد کن.

راه حل از شکل ۷-۲۲ب، چنین برمی‌آید که احتمال رخداد شکست در $B$ بیش از $C$ یا در نقطهٔ بیشترین گشتاور است. مقطع میلمحور در $B$ کوچک‌تر، گشتاور خمشی آن بیشتر و ضریب تمرکز تنش هم بیشتر از نقطه $C$ است و در جای بیشترین گشتاور خمشی، قطرش بزرگ‌تر و بدون تمرکز تنش است.

پس با محاسبه مقاومت در مقطع $B$ آغاز می‌کنیم زیرا مقاومت در جاهای دیگر فرق دارد و این مقاومت را با تنش در همان نقطه می‌سنجیم.

از جدول الف-۲۰، $S_{ut} = 690$ MPa و $S_y = 580$ MPa حد دوام $S'_e$ را به‌دست می‌آوریم.

$$S'_e = 0.504(690) = 347.8 \text{ MPa}$$

از جدول ۷-۴ و مع. (۷-۱۸)،

$$k_a = 4.51(690)^{-0.265} = 0.798$$

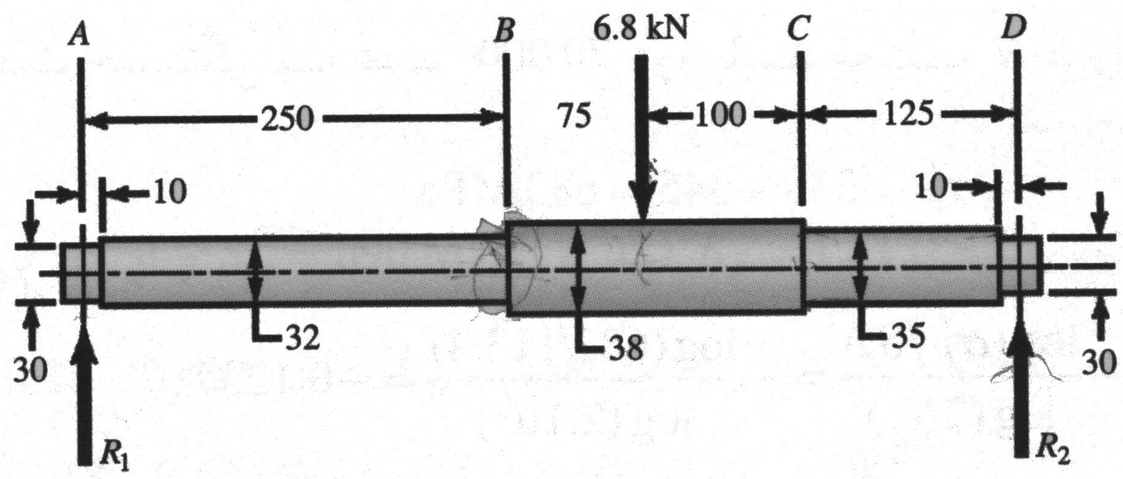
از مع. (۷-۱۹)،

$$k_b = (32/7.62)^{-0.107} = 0.858$$

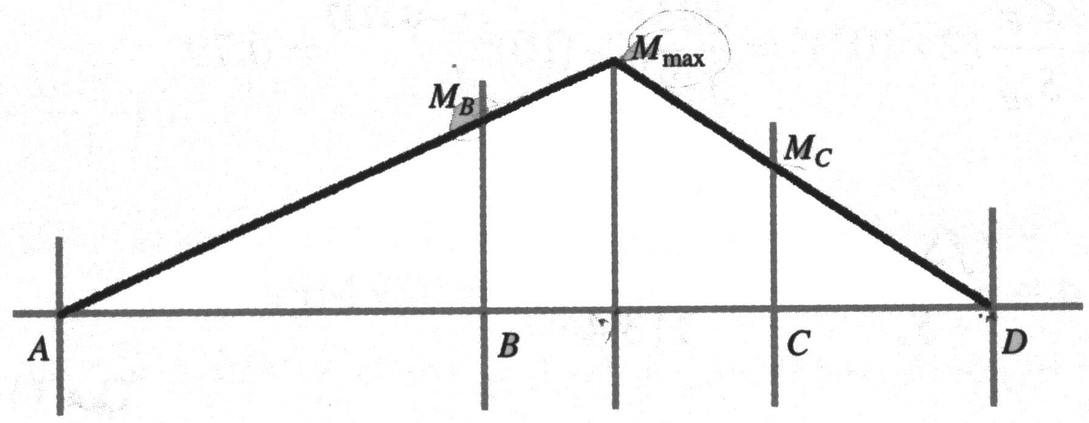
چون $k_c = k_d = k_e = k_f = 1$، پس

$$S_e = 0.798(0.858)347.8 = 238 \text{ MPa}$$

برای یافتن ضریب تمرکز تنش هندسی $K_t$ به جدول الف-۱۵-۹ مراجعه می‌کنیم که با $D/d = 38/32 = 1.1875$ و $r/d = 3/32 = 0.09375$ پس $K_t \doteq 1.65$. از جدول ۷-۸،




(الف)




(ب)

**شکل ۷-۲۲**

(الف) نقشه میلمحور با همه اندازه‌ها به میلی‌متر، شعاع همه گوشه‌ها 3 mm است، میلمحور می‌گردد و بار ساکن است. قطعه از فولاد سردکشیده AISI 1060، ماشین‌کاری شده، (ب) نمودار گشتاور خمشی.

$\sqrt{a} = 139/690 = 0.201\sqrt{\text{mm}}$. از مع. (۷-۳۵)،

$$K_f = \frac{K_t}{1+\dfrac{2(K_t-1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \doteq \frac{1.65}{1+\dfrac{2(1.65-1)}{1.65}\dfrac{0.201}{\sqrt{3}}} = 1.51$$

شعاع گوشه

این ضریب تمرکز تنش برای عمر $10^6$ نوسان یا بیشتر به‌کار می‌رود.

گام بعدی، برآورد تنش خمشی در نقطه $B$ است. گشتاور خمشی برابر،

$$M_B = R_1 x = \frac{225F}{550}250 = \frac{225(6.8)}{550}250 = 695\ \text{N}\cdot\text{m}$$

درست در چپ $B$ مدول مقطع $I/c = \pi d^3/32 = \pi 3.2^3/32 = 3.22\ \text{cm}^3$. برای عمر نامحدود، تنش خمشی برابر

$$\sigma = K_f\frac{M_B}{I/c} = 1.51\frac{695}{3.22} = 325.9\ \text{MPa}$$

این تنش بیش از $S_e$ و کمتر از $S_y$ است. یعنی عمر محدود ولی بدون تسلیم در نوسان نخست است در این‌جا می‌توانیم دو روش برگزینیم. در نخستین روش که محتاطانه است، $K_f$ را بی‌توجه به $N$ ثابت می‌گیریم. در روش دوم مع. (۷-۳۸) به‌کار می‌رود. خواهیم دید که برای این مسأله، روش 1 بسیار آسان‌تر است.

**روش ۱.** از مع. (۷-۱۰)،

$$\sigma'_F = S_{ut} + 345 = 690 + 345 = 1035\ \text{MPa}$$

از مع. (۷-۱۱)،

$$b = -\frac{\log(\sigma'_F/S_e)}{\log(2N_e)} = -\frac{\log(1035/238)}{\log(2.10^6)} = -0.1013$$

از مع. (۷-۹)،

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}}(2\cdot 10^3)^b = \frac{1035}{690}(2\cdot 10^3)^{-0.1013} = 0.695$$

از مع. (۷-۱۳)،

$$a=\frac{(fS_{ut})^2}{S_e}=\frac{[0.695(690)]^2}{238}=966.3\ \text{MPa}$$

پاسخ (روش ۱)

از مع. (۷-۱۵)،

$$N=\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^{1/b}=\left(\frac{325.9}{966.3}\right)^{-1/0.1013}=45.7(10^3)\ \text{دور}$$

**روش ۲.** برای مع. (۷-۳۸)، نیاز به مقدار $N$ داریم که نمی‌دانیم. چون $K_N$ را نمی‌دانیم، به‌جای به‌کارگیری ضریب تمرکز تنش خستگی در تنش $\sigma$، مقاومت‌های نمودار $S$-$N$ را با آن ضریب، کاهش می‌دهیم. بدان که این روش برای مسایل تنش مرکب توصیه نمی‌شود. تنش نامی چنین است

$$\sigma_{\text{nom}}=\frac{M_B}{I/c}=\frac{695}{3.22}=215.8\ \text{MPa}$$

از مع. (۷-۳۷)، با $S_{ut}=690\,\text{MPa}$،

$$\begin{aligned}(K_f)_{10^3}&=1-(K_f-1)\left[0.18-0.624(10^{-3})S_{ut}+0.9479(10^{-7})S_{ut}^2\right]\\&=1-(1.51-1)\left[0.18-0.624(10^{-3})690+0.9479(10^{-7})690^2\right]\\&=1.105\end{aligned}$$

معادله $S$-$N$ با اثر ضریب تمرکز تنش خستگی را می‌توان $N=(\sigma_a/a')^{1/b'}$ نوشت، که پارامترهای آن همچون مع. (۷-۱۳) و (۷-۱۴) است

$$a'=\frac{\left[fS_{ut}/(K_f)_{10^3}\right]^2}{S_e/K_f}=a\frac{K_f}{(K_f)_{10^3}^2}=966.3\frac{1.51}{1.105^2}=1195\ \text{MPa}$$

$$b'=-\frac{1}{3}\log\left[\frac{fS_{ut}/(K_f)_{10^3}}{S_e/K_f}\right]=b-\frac{1}{3}\log\frac{K_f}{(K_f)_{10^3}}=-0.1013-\frac{1}{3}\log\frac{1.51}{1.105}=-0.147$$

کاربرد $a$ و $b$ را از روش ۱ به‌کار بردیم. حال می‌توان شمار دور را از مع. (۷-۱۵) تعیین کرد.

$$N=\left(\frac{\sigma_a}{a'}\right)^{1/b'}=\left(\frac{215.8}{1195}\right)^{-1/0.147}=113.9(10^3)$$

پاسخ (روش ۲)

می‌بینی که روش ۱ با ضریب 2.5 به‌جد محتاطانه‌تر از روش ۲ است. این از اثر مقیاس لگاریتمی است. روش ۲ ضریب تمرکز خستگی را بنا به مع. (۷-۳۸) پیش‌بینی می‌کند

$$\begin{aligned}(K_f)_{113.9(10^3)}&=\frac{(K_f)_{10^3}^2}{K_f}N^{(1.3)\log\left[K_f/(K_f)_{10^3}\right]}\\&=\frac{1.105^2}{1.51}\left[113.9(10^3)\right]^{(1/3)\log(1.51/1.105)}=1.37\end{aligned}$$

بی‌آنکه از رفتار ماده به‌کار رفته چیز بیشتری بدانیم، فرد شاید راه حل روش ۱ را برگزیند. با این‌حال اگر بدانیم که برای این ماده با عمر $10^3$ دور، $K_f$ به واحد می‌رسد، روش ۲ مناسب شود.

## ۷-۱۱ وصف ویژگی‌های تنش‌های نوسانی
## (Characterizing Fluctuating Stresses)

تنش‌های نوسانی در ماشین‌ها اغلب به‌سبب طبیعت دورانی کارشان، الگوی سینوسی دارند. هرچند که الگوهای دیگر حتی ناموزون هم پیش می‌آید. دریافته‌اند که در الگوهای دامنه‌دار نیرو که فقط یک بیشترین و یک کمترین مقدار دارند، شکل موج مهم نیست ولی همان بیشترین و کمترین (اوج و پایین‌ترین) مهم است. پس در هر دورهٔ نیرو، می‌توان الگوی نیرو را با $F_{max}$ و $F_{min}$ مشخص کرد. اینکه نیرو نسبت به یک خط مبنا، بالا و پایین رود به‌همان‌سان در مشخص کردن الگوی نیرو مؤثر است. اگر بیشترین نیرو $F_{max}$ و کمترین آن $F_{min}$ باشد، مؤلفهٔ یکنواخت و مؤلفهٔ نوسانی آن چنین است

$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} \qquad F_a = \left|\frac{F_{max} - F_{min}}{2}\right|$$

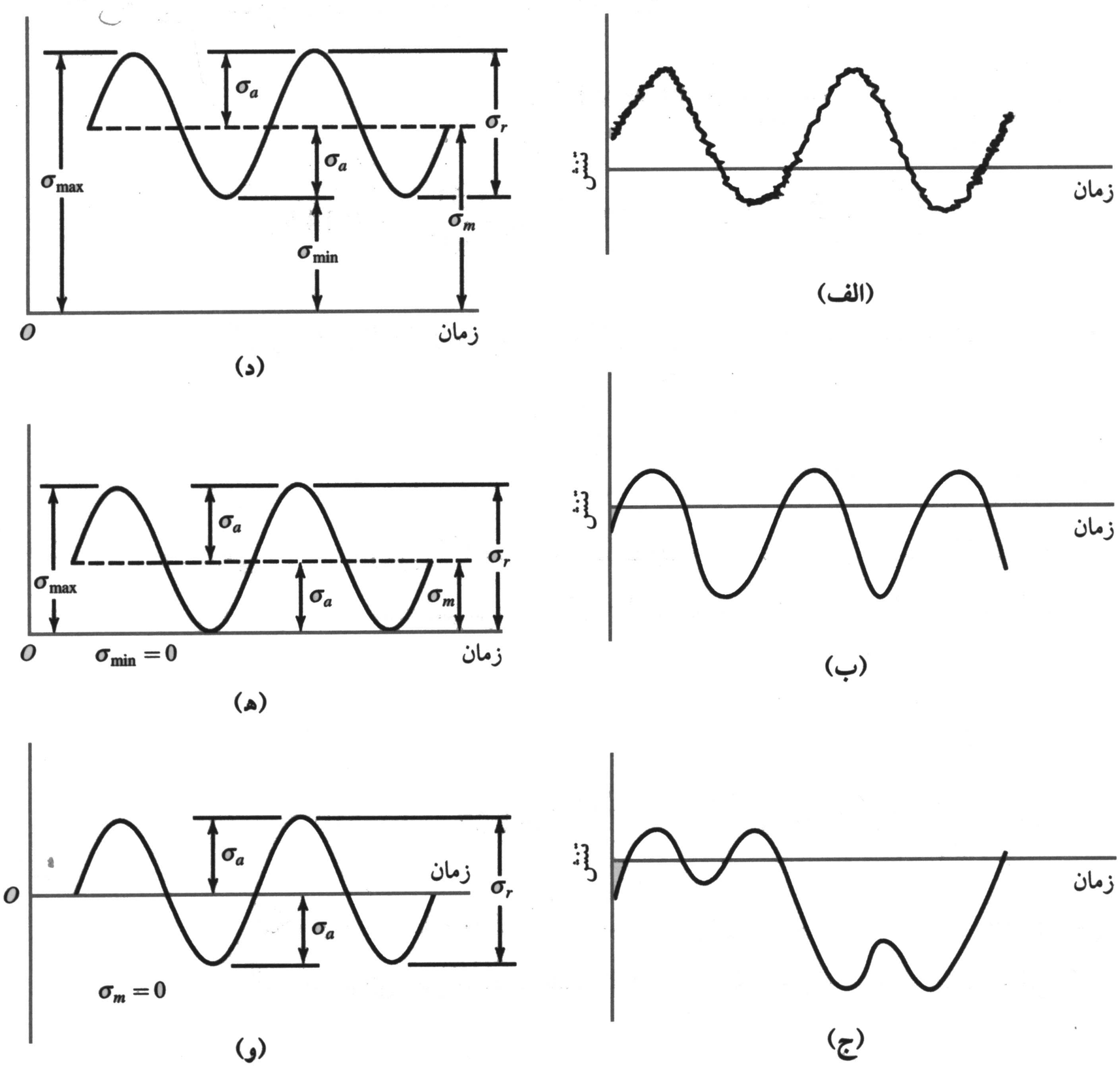
که $F_m$ مؤلفه نیروی میانه و $F_a$ مؤلفهٔ دامنهٔ نیرو است.

شکل ۷-۲۳ گونه‌هایی از تغییرات تنش نسبت به زمان را نشان می‌دهد. مؤلفه‌های تنش که برخی را در شکل ۷-۲۳د می‌بینیم چنین‌اند،

$\sigma_{min}$ = کمترین تنش　　$\sigma_m$ = مؤلفه میانه

$\sigma_{max}$ = بیشترین تنش　　$\sigma_r$ = حدود تغییر تنش

$\sigma_a$ = مؤلفهٔ دامنه تنش　　$\sigma_s$ = تنش آرام یا ایستا




**شکل ۷-۲۳**

برخی روابط تنش ـ زمان: (الف) تنش نوسانی با لرزش‌های فراوان؛ (ب و ج) تنش‌های نوسانی غیرسینوسی؛ (د) تنش نوسانی سینوسی؛ (ه) تنش تکراری یا یکطرفه؛ (و) تنش سینوسی دوطرفه کامل.

تنش یکنواخت یا ایستا، تنش میانه نیست، درحقیقت می‌تواند هر مقدار بین $\sigma_{min}$ و $\sigma_{max}$ باشد، تنش یکنواخت به‌سبب یک بار ثابت یا پیش‌بار در قطعه پدید می‌آید و اغلب جدا از بار نوسانی است. یک فنر مارپیچ فشاری، همیشه در جایی کوتاه‌تر از طول آزادش سوار می‌شود که همواره زیر فشار است. تنش ناشی از این فشار اولیه را مؤلفه یکنواخت یا ایستای تنش گویند که با تنش میانه فرق دارد.

گاهی اندیس‌های دیگری بسته به برشی یا عمودی بودن تنش به این مؤلفه می‌افزاییم. از شکل ۷-۲۳ روابط زیر آشکار است.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \qquad (۳۹-۷)$$

در مع. (۷-۳۹)، **نسبت تنش**

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad (۴۰-۷)$$

و نسبت تنش دیگر

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \qquad (۴۱-۷)$$

هم تعریف شده و درباره تنش‌های نوسان‌دار به‌کار می‌روند.

مع. (۷-۳۹)، نشانه‌های $\sigma_a$ و $\sigma_m$ را به‌عنوان مؤلفه‌های تنش در موضع مطمئن آن به‌کار می‌برد. یعنی، در نبود چاک، $\sigma_a$ و $\sigma_m$ برابر تنش‌های نامی $\sigma_{ao}$ و $\sigma_{mo}$ ناشی از بارهای $F_a$ و $F_m$ است و با داشتن چاک، تا زمانی که ماده بدون کرنش مومسان باشد، $K_f\sigma_{ao}$ و $K_f\sigma_{mo}$ است. به‌زبان دیگر، ضریب تمرکز تنش خستگی $K_f$ به **هردو** مؤلفه وارد می‌شود.

اگر تنش یکنواخت چنان زیاد باشد که در چاک تسلیم موضعی رخ دهد، مهندس مشکل دارد. با تسلیم در نخستین نوسان بار، کرنش مومسان و تقویت کرنش رخ می‌دهد. این رویداد در موضع زمانی است که نطفه ترک خستگی شکل‌می‌گیرد و رشد ممکن می‌گردد. خواص ماده $(S_{ut}, S_y)$ عوض شده و تعیین مقدار آن دشوار است. مهندس هشیار، طرح، جنس و شرایط کار را درمی‌یابد و چنان می‌کند که کرنش مومسان رخ ندهد. بحث‌هایی دربارهٔ راه‌های تعیین مقدار آنچه در تسلیم عمومی و موضعی با حضور چاک شده است که آن را روش **تنش میانگین نامی**، روش **تنش پسماند** و از این دست گویند.[۲۳] روش تنش میانگین نامی ( $\sigma_a = K_f\sigma_{ao}$ و $\sigma_m = \sigma_{mo}$ می‌گیرد) نتایج کم‌دقت‌تر از روش تنش پسماند می‌دهد، که هردو **تقریبی** هستند.

برای مواد شکل‌پذیر روش Dowling[۲۴] که برای مواد با نقطه تسلیم مشهود که با یک مدل با رفتار کشسانی ـ مومسان کامل تقریب زده‌اند، مقادیر مؤلفهٔ تنش یکنواخت و ضریب تمرکز تنش $K_{fm}$ چنین بیان می‌شود.

---

23. R. C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, McGraw-Hill, New York, 1967, articles 14.9–14.12; R. C. Juvinall and K. M. Marshek, *Fundamentals of Machine Component Design*, Wiley, New York, 1991, Sec. 8.11: M. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1999, Secs. 10.3–10.5.

24. Dowling, op. cit., p. 437–438.

$$K_{fm} = K_f \qquad K_f\left|\sigma_{\max,o}\right| < S_y$$

$$K_{fm} = \frac{S_y - K_f\,\sigma_{ao}}{\left|\sigma_{mo}\right|} \qquad K_f\left|\sigma_{\max,o}\right| > S_y \qquad (۴۲-۷)$$

$$K_{fm} = 0 \qquad K_f\left|\sigma_{\max,o} - \sigma_{\min,o}\right| > 2S_y$$

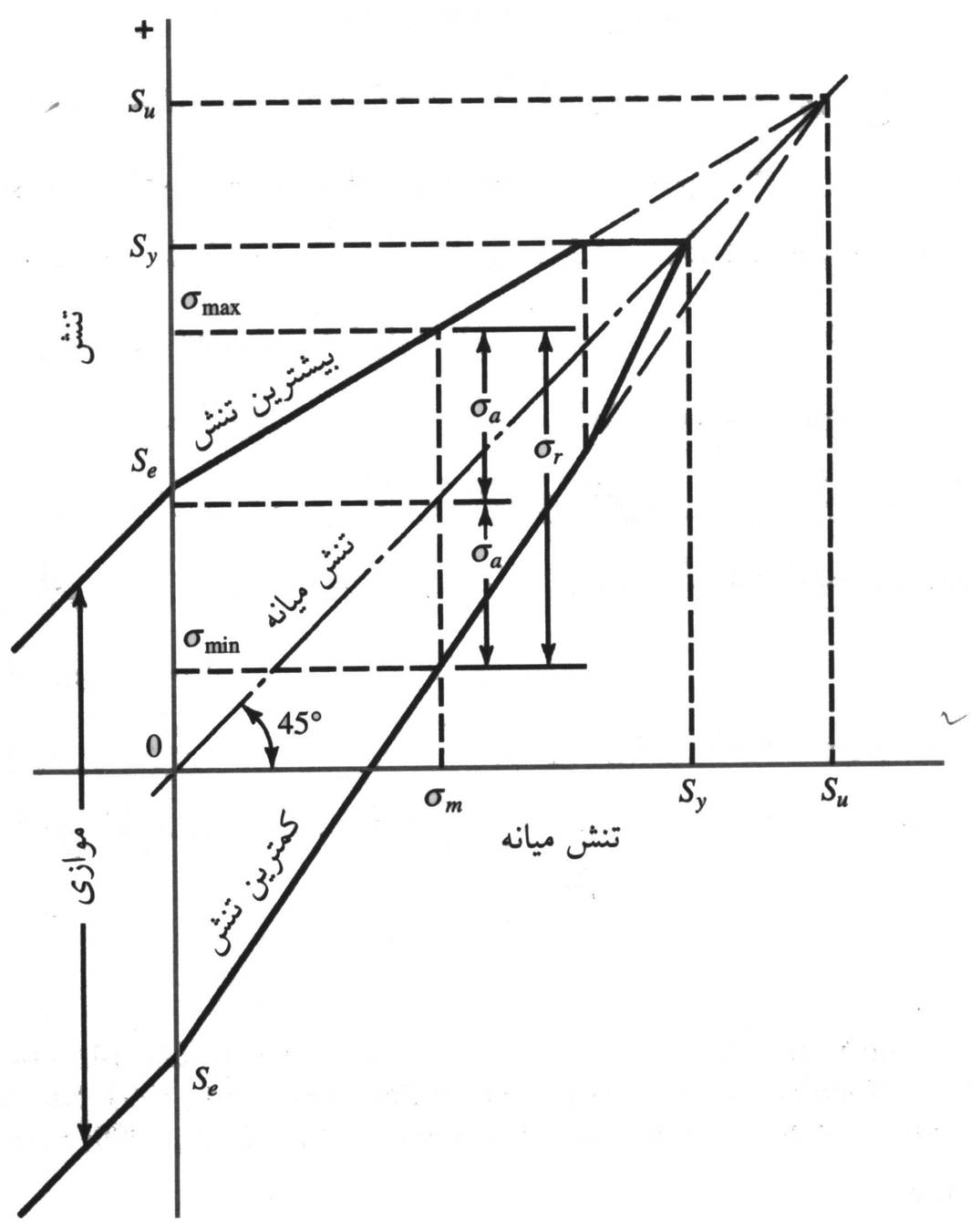
در این کتاب، برای خستگی در مواد شکل‌پذیر نکات زیر را دریابید.

- دوری از کرنش مومسان موضعی در چاک، $\sigma_a = K_f\sigma_{ao}$ و $\sigma_m = K_f\sigma_{mo}$ بگیر.
- اگر کرنش مومسان در چاک ناگزیر است، مع. (۷-۴۲) را به‌کار ببر یا به‌طور محتاطانه، $\sigma_a = K_f\sigma_{ao}$ و $K_{mf} = 1$ بگیر، یعنی $\sigma_m = \sigma_{mo}$ بگیر.

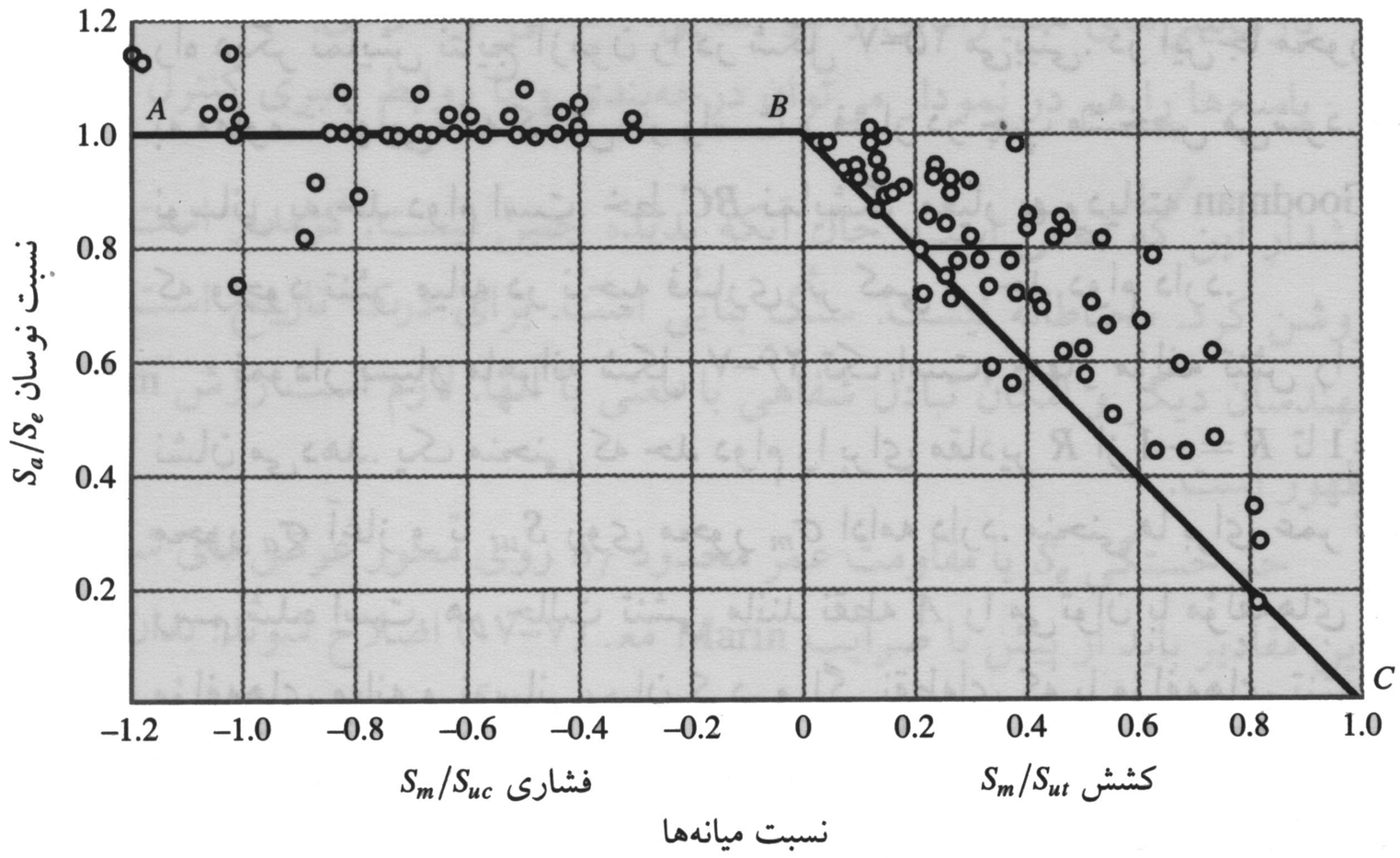
## ۷-۱۲ معیار شکست خستگی در تنش‌های نوسان‌دار
## (Fatigue Failure Criteria for Fluctuating Stress)

حال که مؤلفه‌های تنش در قطعه حاصل از تنش نوسانی را شناختیم، می‌پردازیم به تغییر هردو تنش میانه، و دامنه یا مؤلفهٔ نوسانی تنش، تا چیزی درباره مقاومت خستگی قطعات در این شرایط بیاموزیم. سه روش عمومی نمایش ترسیمی نتایج چنین آزمون‌هایی در شکل‌های ۷-۲۴ و ۷-۲۵ و ۷-۲۶ دیده می‌شود.

در **نمودار بهبودیافته *Goodman***، شکل ۷-۲۴ تنش میانه روی محور طول‌ها و بقیه مؤلفه‌های تنش روی محور عرض‌ها مشخص شده، که کشش درجهت مثبت است. حد دوام، مقاومت خستگی، یا مقاومت با عمر محدود، هرکدام که باشد، روی محور عرض‌ها در بالا یا زیر مبدأ مشخص می‌شود. خط تنش میانه با زاویه 45° از مبدأ تا مقاومت کششی قطعه ادامه دارد. نمودار بهبودیافتهٔ Goodman شامل



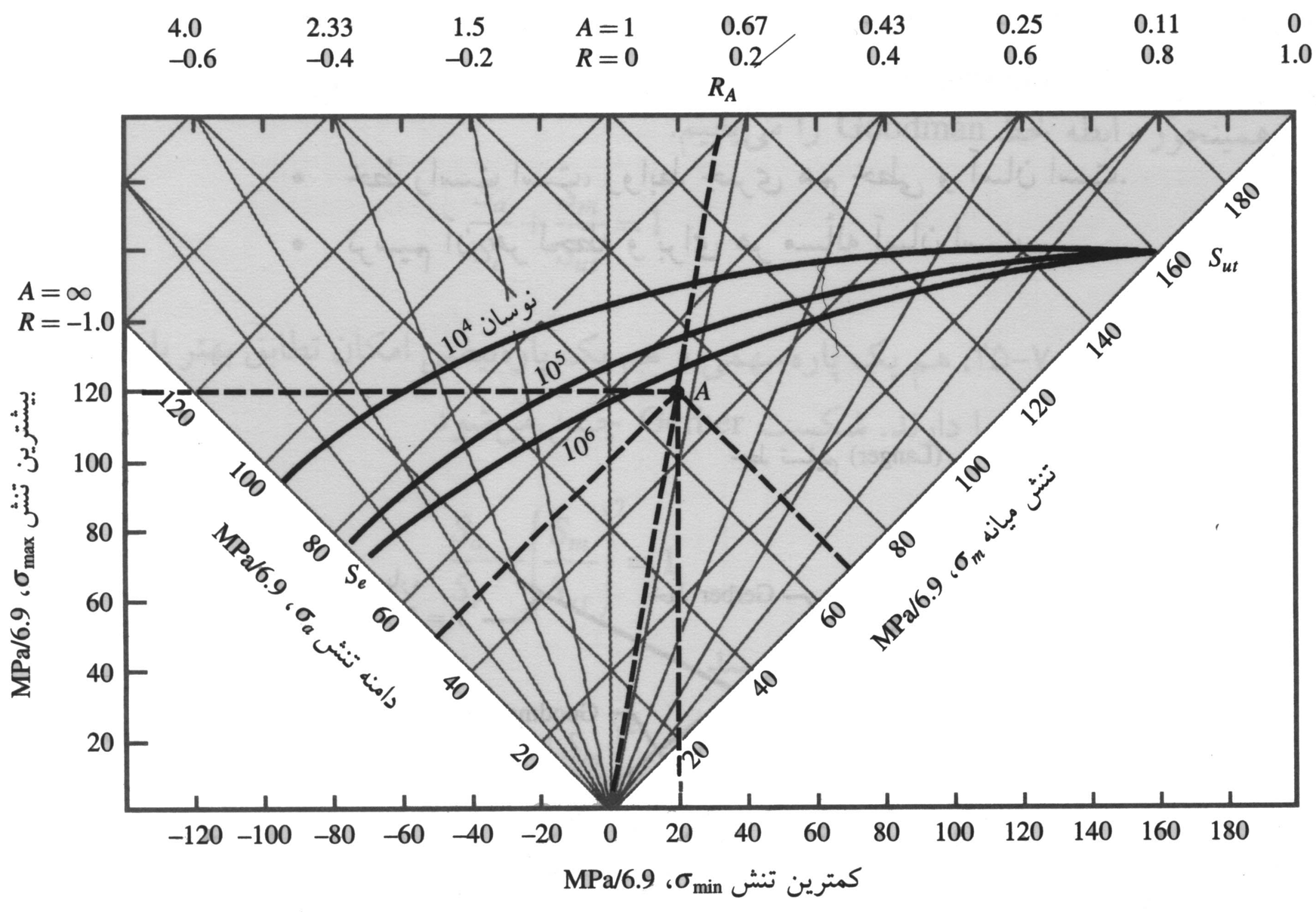

**شکل ۷-۲۴**
نمودار بهبودیافته Goodman که همه مقاومت‌ها و مقادیر محدود کنندهٔ همهٔ مؤلفه‌های تنش برای تنش میانه بخصوصی را نشان می‌دهد.




## شکل ۷-۲۵

نمودار شکست‌های خستگی برای تنش‌های میانه در هر دو ناحیه کشش و فشار، عادی‌سازی داده‌ها به‌کمک نسبت مؤلفهٔ مقاومت یکنواخت به مقاومت کششی $S_m/S_{ut}$، مؤلفه مقاومت یکنواخت به مقاومت فشاری $S_m/S_{uc}$ و مؤلفهٔ دامنه مقاومت به حد دوام $S_a/S'_e$ رسم نموداری از نتایج تجربی برای فولادهای گوناگون را ممکن می‌سازد.

منبع: Thomas J. Dolan, "Stress Range," Sec. 6.2 in O. J. Horger (ed.), *ASME Handbook—Metals Engineering Design*, New York, 1953.




## شکل ۷-۲۶

نمودار استادانه (چند کاره) خستگی برای فولاد AISI 4340 با $S_y = 147$ (1013 MPa)، مولفه‌های تنش در A $\sigma_{min} = 20$ (138 MPa)، $\sigma_{max} = 120$ (828 MPa)، $\sigma_m = 70$ (483 MPa)، $\sigma_a = 50$ (345 MPa) هستند.

منبع: H. J. Grover, *Fatigue of Aircraft Structures*, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1966, pp. 317, 322. See also J. A. Collins, *Failure of Materials in Mechanical Design*, Wiley, New York, 1981, p. 216.)

خطوطی است که از $S_e$ (یا $S_f$) در بالا و زیر مبدأ آغاز می‌شود. ببین که مقاومت تسلیم روی هردو محور مشخص شده. زیرا اگر $\sigma_{max}$ از $S_y$ فراتر رود، تسلیم معیار شکست خواهد بود.

راه دیگر نمایش نتایج آزمون را در شکل ۷-۲۵ می‌بینی. در این‌جا محور طول‌ها، نسبت مقاومت میانه به مقاومت نهایی، که کشش در راست و فشار در چپ مشخص می‌شود. محور طول‌ها، نسبت مقاومت نوسانی به حد دوام است. خط $BC$ نمایشگر معیار بهبودیافته Goodman برای شکست است. می‌بینی که وجود تنش میانه در ناحیه فشاری اثر کمی بر حد دوام دارد.

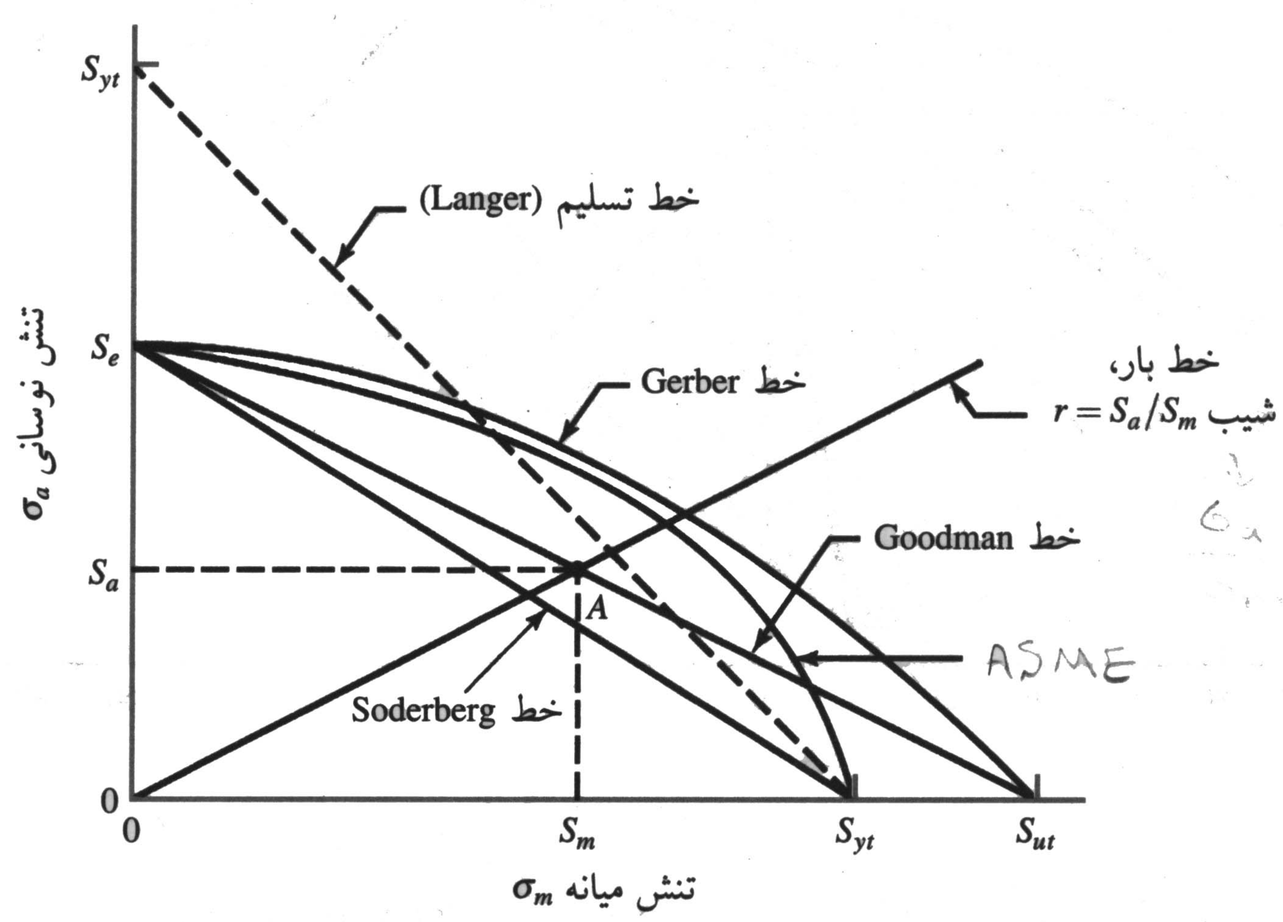
نمودار بسیار ماهرانه شکل ۷-۲۶ تک است، چهار مؤلفه تنش را به‌همراه دو نسبت تنش یکجا نشان می‌دهد. یک منحنی که حد دوام را برای مقادیر $R$ از $R=-1$ تا $R=1$ نشان می‌دهد، از $S_e$ روی محور $\sigma_a$ آغاز و تا $S_{ut}$ روی محور $\sigma_m$ ادامه دارد. منحنی‌ها برای عمر ثابت $N=10^5$ و $N=10^4$ نیز رسم شده است. هر حالت تنشی مانند نقطه $A$ را می‌توان با مؤلفه‌های کمترین و بیشترین تنش، یا با مؤلفه‌های میانه و نوسانی، بیان کرد. و اگر نقطه‌ای که با مؤلفه‌های تنش مشخص شده، زیر خط عمر ثابت باشد، آن حالت تنش ایمن است.

اگر تنش میانه فشاری است، زمانی شکست رخ می‌دهد که $\sigma_a = S_e$ و یا $\sigma_{\max} = S_{yc}$ باشد، که سمت چپ شکل ۷-۲۵ می‌بینی، نه نمودار خستگی و نه هر معیار شکست دیگر، نیازمند گسترش نیست.

در شکل ۷-۲۷، بخش کشش شکل ۷-۲۵ را با جایگزینی مقاومت به‌جای نسبت مقاومت، با همان معیار بهبودیافته Goodman با سه معیار شکست دیگر دوباره کشیده‌ایم. چنین نمودارهایی که اغلب برای تحلیل و طراحی رسم می‌شود، به‌آسانی به‌کار می‌روند و می‌توان نتایج را یکراست اندازه گرفت.

نقطه‌نظر پیشین نمایش ترسیمی $\sigma_a\,\sigma_m$ مشخص کردن مکان هندسی بود که ناحیه ایمن را از ناامن برای ترکیب $\sigma_a, \sigma_m$ جدا کند. پیشنهادها شامل سهمی Gerber (1874)، خط (راست) Goodman (1890)[۲۵] و خط (راست) Soderberg (1930) بود. با افزایش داده‌ها، روشن شد که مکان هندسی خستگی به‌جای آنکه یک "نرده" باشد، شبیه به یک ناحیه یا نوار است که در آن احتمال شکست را می‌شود برآورد کرد. مکان هندسی شکست Goodman را از این‌رو می‌آوریم که:

- خط راست است، روابط جبری هم خطی و آسان است.
- ترسیم آن هر لحظه و برای هر مسأله آسان است.




**شکل ۷-۲۷**

نمودار خستگی با معیارهای گوناگون شکست. برای هر معیار اگر نقاط رو یا "بالای" هریک از خطوط معیار بیفتد، نشان از شکست است. برای نمونه، نقطه $A$ روی خط Goodman مقاومت $S_m$ را محدودکننده $\sigma_m$ مربوط به مقاومت $S_a$ که همراه با $\sigma_m$ محدودکنندهٔ مقدار $\sigma_a$ است.

۲۵. تاریخ کار Goodman به‌درستی روشن نیست زیرا چند بار آن را اصلاح کرد و هرگز منتشر نکرد.

- نازک‌بینی‌های هشیارانه‌ای را در مسایل خستگی آشکار می‌سازد.
- پاسخ‌ها را هم در نمودار می‌توان درجه‌بندی و با روابط جبری کنترل کرد.

هشدار این که قطعی است، حال آنکه پدیده چنین نیست. کژمدار است و مقدار کژی را نمی‌توان روشن کرد. محتاطانه نیست. سنگ بنایی است. برای درک تاریخ است برای خواندن و درک کار مهندسان دیگر و امکان تبادل شفاهی با معنی با آنها. لازم است روش Goodman را دریابی که یک ظهور است.

حد خستگی $S_e$ یا مقاومت عمر محدود $S_f$ روی محور عرض‌های شکل ۷-۲۷ مشخص می‌شود. این مقادیر باید از پیش با ضرایب Marin مع. (۷-۱۷) اصلاح شوند. بدان که مقاومت تسلیم $S_{yt}$ هم روی محور عرض‌ها مشخص می‌شود. این کار یادآور تسلیم در نخستین نوسان بار است که شاید به‌جای خستگی معیار شکست باشد.

روی محور تنش میانه در شکل ۷-۲۷، مقاومت تسلیم $S_{yt}$ و مقاومت کششی $S_{ut}$ مشخص شده است. نمودارهای پنج معیار شکست در شکل ۷-۲۷ آمده است: معیار Soderberg، معیار بهبودیافته Goodman، سهمی Gerber، پاره‌بیضی ASME و تسلیم. این نمودار نشان می‌دهد که تنها معیار Soderberg دربرابر تسلیم مطمئن است، اما کژی دارد.

اگر خط Goodman را معیار بگیریم، نقطه $A$ نشان از یک نقطه محدود کننده با دامنه مقاومت $S_a$ و مقاومت متوسط $S_m$ می‌دهد. شیب خط باری که می‌بینی $r = S_a/S_m$ است.

معادله معیار برای خط Soderberg اینجور می‌شود.

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \qquad (۴۳-۷)$$

همینجور رابطه خط Goodman را می‌یابیم.

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \qquad (۴۴-۷)$$

با بررسی شکل ۷-۲۵، هم یک پاره‌سهمی و هم یک پاره‌بیضی امکان تطابق بهتر با داده‌ها و کمیّت دهی به احتمال شکست را دارند. شکست Gerber چنین می‌شود

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \qquad (۴۵-۷)$$

و پاره‌بیضی ASME را چنین می‌نویسند

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1 \qquad (۴۶-۷)$$

معیار تسلیم نخستین نوسان Langer برای مکان هندسی خستگی به‌کار می‌رود

$$\frac{S_a}{S_{yt}} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \qquad (۴۷-۷)$$

می‌شود تنش‌های $n\sigma_a$ و $n\sigma_m$ را به‌جای $S_a$ و $S_m$ گذاشت، که $n$ ضریب طراحی یا ضریب اطمینان است. پس با مع. (۷-۴۳)، خط Soderbrtg چنین می‌شود

$$\frac{\sigma_a}{S_e}+\frac{\sigma_m}{S_y}=\frac{1}{n} \qquad (۷-۴۸)$$

مع. (۷-۴۴)، خط بهبودیافته Goodman برابر

$$\frac{\sigma_a}{S_e}+\frac{\sigma_m}{S_{ut}}=\frac{1}{n} \qquad (۷-۴۹)$$

مع. (۷-۴۵) و خط Gerber برابر

$$\frac{n\sigma_a}{S_e}+\left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2=1 \qquad (۷-۵۰)$$

و مع. (۷-۴۶) خط پاره‌بیضی ASME هم

$$\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2+\left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2=1 \qquad (۷-۵۱)$$

است. برای معیار شکست خستگی تکیه‌ها روی Gerber و پاره‌بیضی ASME است و خط Langer را برای تسلیم در نخستین دور به‌کار می‌بریم. با این‌حال، طراحان محتاط، بیشتر معیار بهبودیافته Goodman را به‌کار می‌برند. معیارهای شکست در پیوند با خط بار $r=S_a/S_m=\sigma_a/\sigma_m$ به‌کار می‌روند. تلاقی‌های اصلی در جدول‌های ۷-۹ تا ۷-۱۱ آمده‌اند. رابطه‌های تعیین ضریب اطمینان شکست هم در پایین هریک از این سه جدول آمده است.

برای جا افتادن مفاهیم گفته شده، چند نمونه می‌آید.

**جدول ۷-۹**

مختصات دامنه و مؤلفهٔ ثابت مقاومت و نقاط تلاقی در ربع نخست برای معیار های شکست بهبود یافته Goodman و Langer.

| مکان هندسی‌های قطع کننده | مختصات جای تلاقی |
|---|---|
| $\frac{S_a}{S_e}+\frac{S_m}{S_{ut}}=1$ <br> خط بار $r=\frac{S_a}{S_m}$ | $S_a=\frac{r\,S_e S_{ut}}{r\,S_{ut}+S_e}$ <br> $S_m=\frac{S_a}{r}$ |
| $\frac{S_a}{S_y}+\frac{S_m}{S_y}=1$ <br> خط بار $r=\frac{S_a}{S_m}$ | $S_a=\frac{r\,S_y}{1+r}$ <br> $S_m=\frac{S_y}{1+r}$ |
| $\frac{S_a}{S_e}+\frac{S_m}{S_{ut}}=1$ <br> $\frac{S_a}{S_y}+\frac{S_m}{S_y}=1$ | $S_m=\frac{(S_y-S_e)\,S_{ut}}{S_{ut}-S_e}$ <br> $S_a=S_y-S_m,\ r_{crit}=S_a/S_m$ |

ضریب ایمنی خستگی

$$n_f=\frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e}+\frac{\sigma_m}{S_{ut}}}$$

**جدول ۷-۱۰**
مختصات دامنه و یکنواخت مقاومت و تلاقی‌های مهم در ربع نخست برای معیارهای شکست Gerber و Langer.

| مکان هندسی‌های قطع کننده | مختصات جای تلاقی |
|---|---|
| $\frac{S_a}{S_e}+\left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2=1$ <br> خط بار $r=\frac{S_a}{S_m}$ | $S_a=\frac{r^2S_{ut}^2}{2S_e}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{2S_e}{rS_{ut}}\right)^2}\right]$ <br> $S_m=\frac{S_a}{r}$ |
| $\frac{S_a}{S_y}+\frac{S_m}{S_y}=1$ <br> خط بار $r=\frac{S_a}{S_m}$ | $S_a=\frac{rS_y}{1+r}$ <br> $S_m=\frac{S_y}{1+r}$ |
| $\frac{S_a}{S_e}+\left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2=1$ <br> $\frac{S_a}{S_y}+\frac{S_m}{S_y}=1$ | $S_m=\frac{S_{ut}^2}{2S_e}\left[1-\sqrt{1+\left(\frac{2S_e}{S_{ut}}\right)^2\left(1-\frac{S_y}{S_e}\right)}\right]$ <br> $S_a=S_y-S_m,\ r_{crit}=S_a/S_m$ |

ضریب ایمنی خستگی

$$n_f=\frac{1}{2}\left(\frac{S_{ut}}{\sigma_m}\right)^2\frac{\sigma_a}{S_e}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{2\sigma_m S_e}{S_{ut}\sigma_a}\right)^2}\right]\qquad \sigma_m>0$$

**جدول ۷-۱۱**
مختصات دامنه و یکنواخت مقاومت و تلاقی‌های مهم در ربع نخست برای معیارهای شکست پاره‌بیضی ASME و Langer.

| مکان هندسی‌های قطع کننده | مختصات جای تلاقی |
|---|---|
| $\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2+\left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2=1$ <br> خط بار $r=S_a/S_m$ | $S_a=\sqrt{\frac{r^2S_e^2S_y^2}{S_e^2+r^2S_y^2}}$ <br> $S_m=\frac{S_a}{r}$ |
| $\frac{S_a}{S_y}+\frac{S_m}{S_y}=1$ <br> خط بار $r=S_a/S_m$ | $S_a=\frac{rS_y}{1+r}$ <br> $S_m=\frac{S_y}{1+r}$ |
| $\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2+\left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2=1$ <br> $\frac{S_a}{S_y}+\frac{S_m}{S_y}=1$ | $S_a=0,\ \frac{2S_yS_e^2}{S_e^2+S_y^2}$ <br> $S_m=S_y-S_a,\ r_{crit}=S_a/S_m$ |

ضریب ایمنی خستگی

$$n_f=\sqrt{\frac{1}{(\sigma_a/S_e)^2+(\sigma_m/S_y)^2}}$$

**نمونه ۷-۱۱** یک میله به‌قطر 38 mm که از میله سردکشیده AISI 1050 تراشیده‌اند، زیر بار کششی نوسانی بین 0 تا 72 kN باید باشد. به‌سبب دوسر و شعاع گوشه، ضریب تمرکز تنش $K_f$ برای عمر $10^6$ یا بیشتر 1.82 است. $S_a$ و $S_m$ و ضریب اطمینان دربرابر خستگی و تسلیم در نخستین نوسان را برای (الف) خط خستگی Gerber و (ب) خط خستگی پاره‌بیضی ASME پیدا کن.

**راه حل** با چند نکته آغاز می‌کنیم، از جدول الف-۲۰، $S_{ut} = 690$ MPa و $S_y = 580$ MPa ببین که $F_a = F_m = 36$ kN است. ضرایب Marin قطعی چنین هستند:

$k_a = 4.51(690)^{-0.265} = 0.798$ :مع. (۷-۱۸) و جدول ۷-۴

$k_b = 1$ (برای بار محوری $k_c$، را ببین)

$k_c = 0.85$ :(۷-۲۵) .مع

$k_d = k_e = k_f = 1$

$S_e = 0.798(1)0.85(1)(1)(1)0.504(690) = 235.9$ MPa :(۷-۱۷) و (۷-۸) .مع

مؤلفه‌های تنش نامی عمودی $\sigma_{ao}$ و $\sigma_{mo}$

$$\sigma_{ao} = \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4(36)10^3}{\pi 38^2} = 31.74 \text{ MPa} \qquad \sigma_{mo} = \frac{4F_m}{\pi d^2} = \frac{4(36)10^3}{\pi 38^2} = 31.74 \text{ MPa}$$

با به‌کاربردن $K_f$ برای هردو مؤلفه $\sigma_{ao}$ و $\sigma_{mo}$ دیگر تسلیم در چاک نداریم

$$\sigma_a = K_f \sigma_{ao} = 1.85(31.74) = 59.72 \text{ MPa} = \sigma_m$$

شیب خط بار $r = \sigma_a/\sigma_m = 1$

(الف) از نخستین قسمت جدول ۷-۱۰،

$$S_a = \frac{(1)^2 690^2}{2(235.9)}\left\{-1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(235.9)}{1(690)}\right]^2}\right\} = 213.35 \text{ MPa}$$

$$S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{213.35}{1} = 213.35 \text{ MPa}$$

در شکل ۷-۲۸ تلاقی خط بار با خط Gerber نقطه $B$ است. نقطه $A$ روی خط بار، مؤلفه‌های $\sigma_a$ و $\sigma_m$ تنش را نشان می‌دهد. نقطه $C$ تلاقی خط بار و خط تسلیم Langer است. با حل مع. (۷-۴۴) یا از جدول ۷-۱۰، داریم

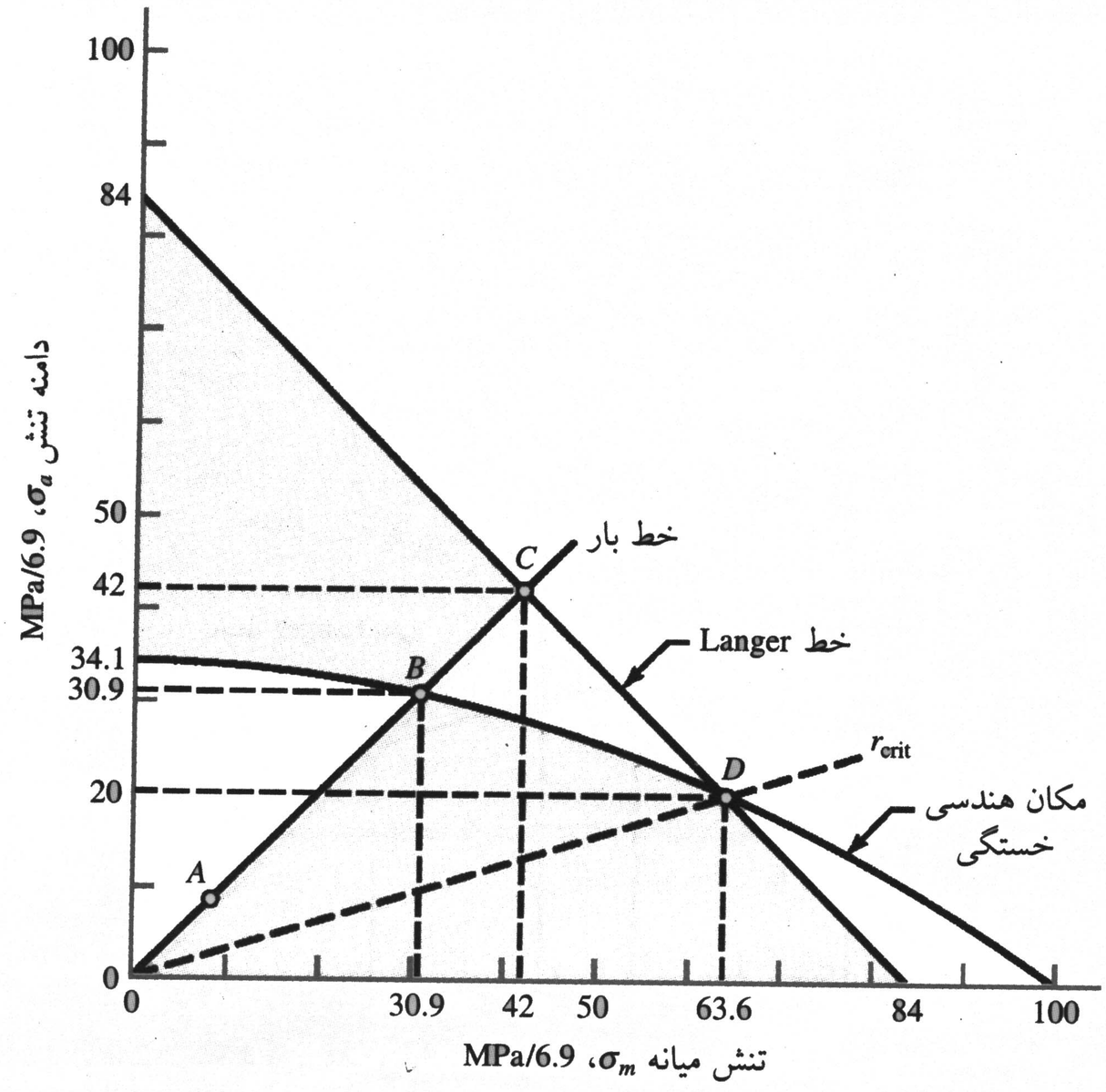
$$S_a = \frac{rS_y}{1+r} = \frac{(1)580}{1+1} = 290 \text{ MPa} \qquad S_m = \frac{S_a}{r} = 290 \text{ MPa}$$

خط بار، مکان هندسی حالات تنش ممکن است. با افزایش بار، نقطه $A$ به‌سوی نقطه $B$ و $C$ می‌رود. نخست با نقطه $B$ روی خط Gerber پس قطعه در خطر خستگی است. ضریب اطمینان در خستگی $n_f$ است.

محل تلاقی

$$n_f = \frac{OB}{OA} = \frac{(S_a)_{\text{Gerber}}}{\sigma_a} = \frac{213.35}{59.72} = 3.57$$

بارگذاری




**شکل ۷-۲۸**

نقاط اساسی A، B، C، D روی نمودار راهنمای طراح برای Gerber، Langer، و خط بار رسم شده است.

یا جور دیگر، از قسمت چهارم جدول ۷-۱۰،

$$n_f = \frac{1}{2}\left(\frac{690}{59.72}\right)^2\left(\frac{59.72}{235.9}\right)\left\{-1\sqrt{1+\left[\frac{2(59.72)(235.9)}{690(59.72)}\right]^2}\right\} = 3.57$$

خطاهای گرد کردن ناچیز است. ضریب ایمنی دربرابر تسلیم در دور نخست،

$$n_y = \frac{OC}{OA} = \frac{(S_a)_{\text{Langer}}}{\sigma_a} = \frac{290}{59.72} = 4.86$$

این نکته نشان از نبود تسلیم موضعی در گوشه است. نقطه $D$، دگرگونی از شکست خستگی به تسلیم در دور نخست است. مختصات $D$ را از حل دو مع. (۷-۴۵) و (۷-۴۷) باهم به‌دست می‌آوریم که در تکه سوم جدول ۷-۱۰ می‌بینیم.

$$S_m = \frac{690^2}{2(235.9)}\left[1-\sqrt{1+\left(\frac{2(235.9)}{690}\right)^2\left(1-\frac{580}{235.9}\right)}\right] = 440 \text{ MPa}$$

$$S_a = S_y - S_m = 580 - 440 = 140 \text{ MPa}$$

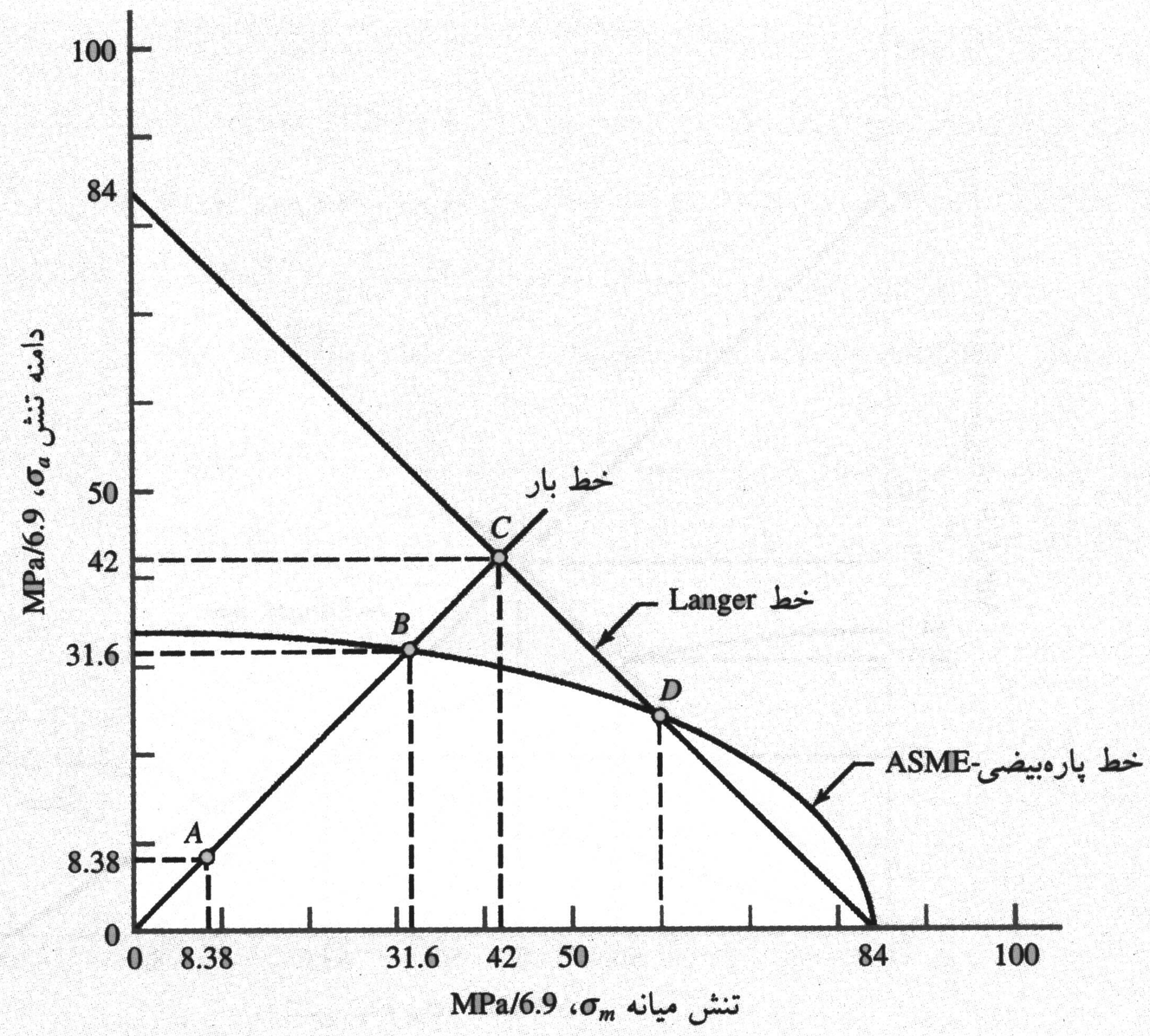
شیب بحرانی خط بار $r_{crit}$،

$$r_{crit} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{140}{440} = 0.318$$

چون شیب خط بار $r = 1$ و $r_{crit} < r$، تهدید اولیه‌ای از خستگی داریم.

(ب) از تکه نخست جدول ۷-۱۱ با $r = 1$، مختصات $S_a$ و $S_m$ در شکل ۷-۲۹ را به‌دست می‌آوریم

$$S_a = \sqrt{\frac{(1)^2 235.9^2 (580)^2}{235.9^2 + (1)^2 580^2}} = 218.52 \text{ MPa} \qquad S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{218.5}{1} = 218.5 \text{ MPa}$$




**شکل ۷-۲۹**

نقاط اساسی A، B، C، D روی نمودار راهنمای طراح برای پاره‌بیضی ASME، Langer، و خط بار رسم شده است.

از تکه سوم جدول ۷-۱۱، مختصات $S_a$ و $S_m$ نقطه $D$ در شکل ۷-۲۹ برابر

$$S_a = \frac{2}{580\left[(235.9)^2 + (1/580)^2\right]} = 164.65\ \text{MPa}$$

$$S_m = S_y - S_a = 580 - 164.65 = 415.35\ \text{MPa}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{164.65}{415.35} = 0.4$$

چون $r > r_{\text{crit}}$ است، تهدیدی از خستگی داریم، ضریب اطمینان خستگی $n_f$ چنین است

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{218.52}{59.72} = 3.66$$

جور دیگر از تکه چهارم جدول ۷-۱۱،

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{(59.72/235.9)^2 + (59.72/580)^2}} = 3.66$$

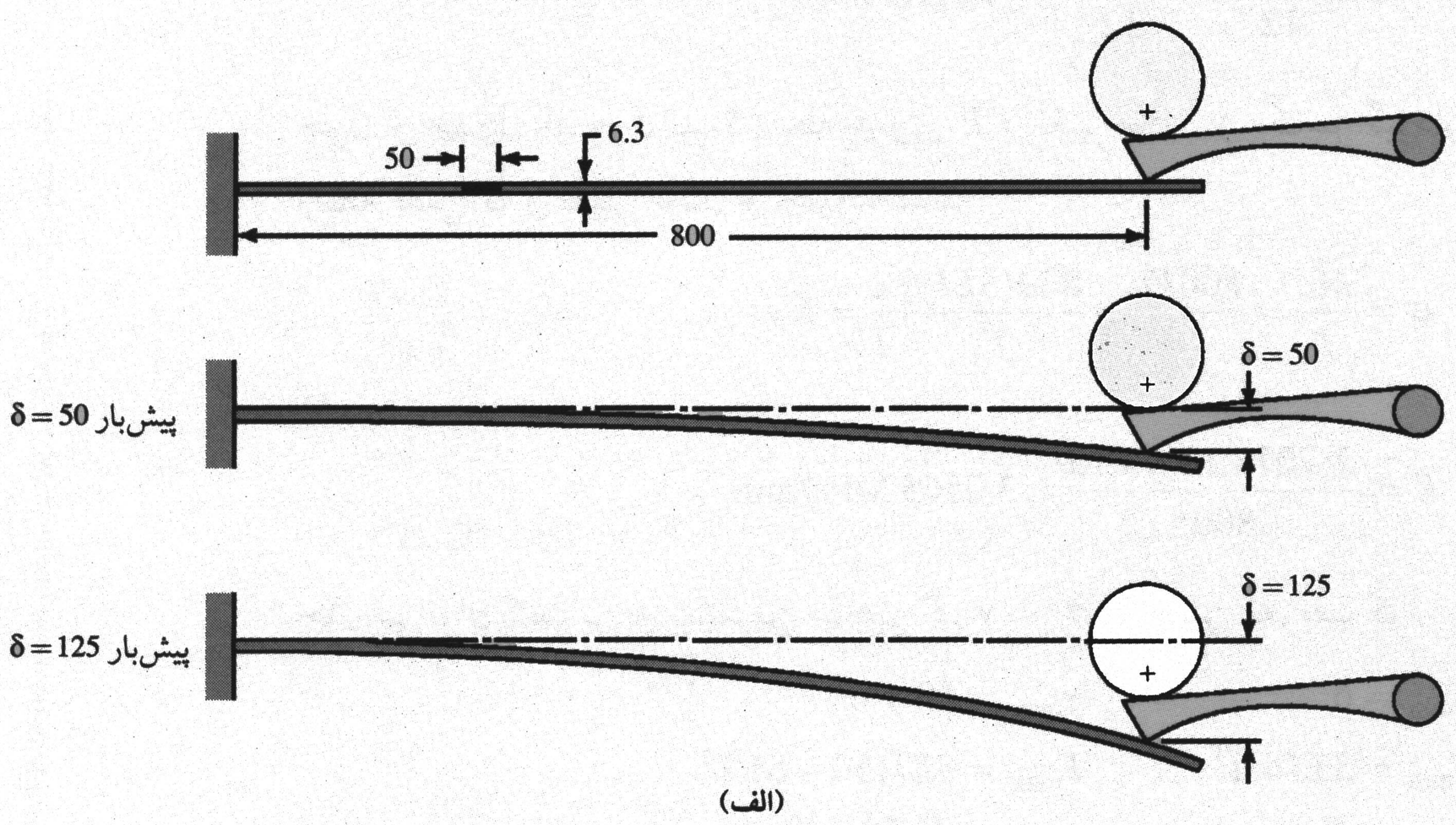
ضریب اطمینان دربرابر تسلیم در دور نخست $n_y$ برابر،

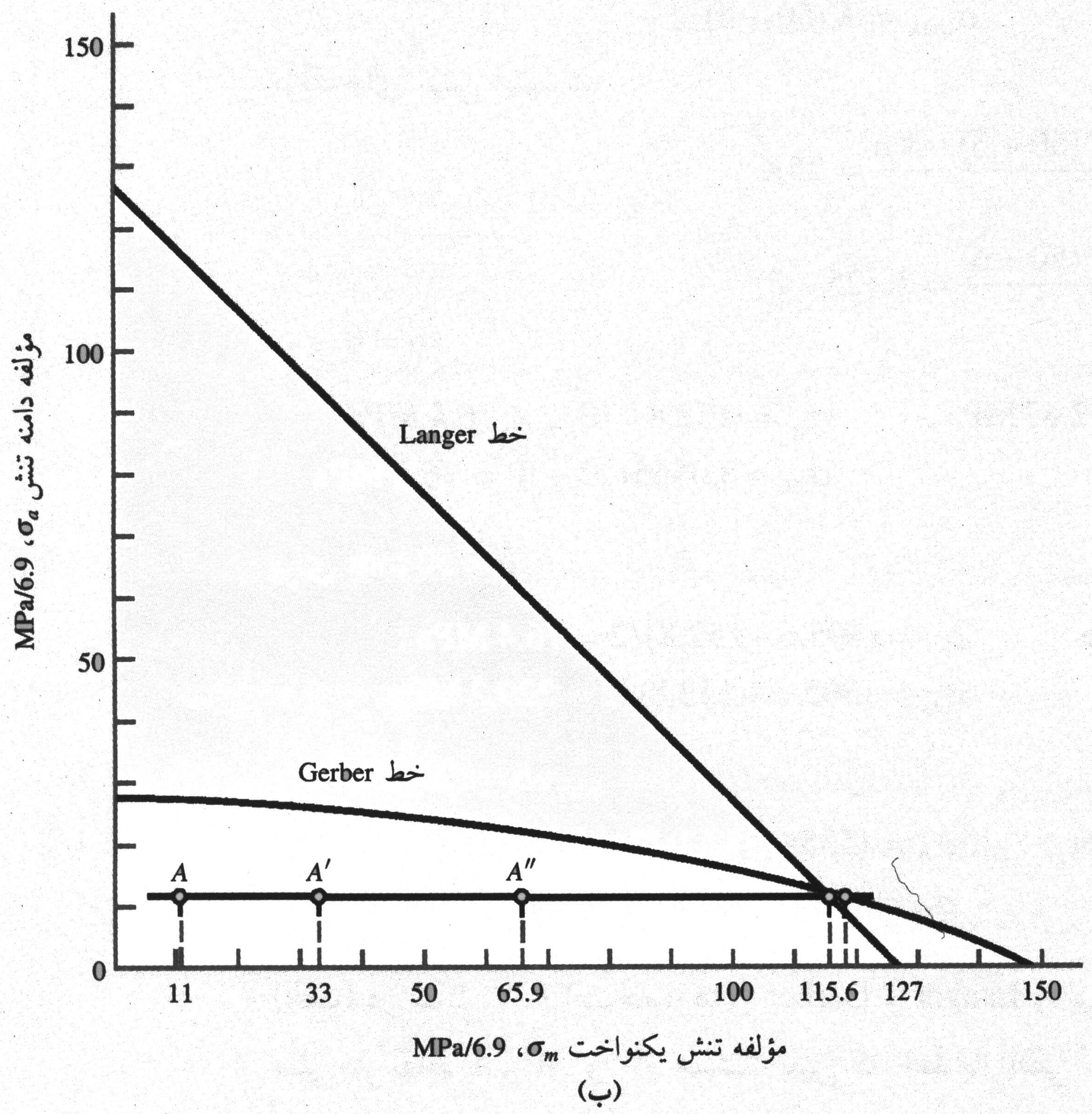
$$n_y = \frac{(S_a)_y}{\sigma_a} = \frac{290}{59.72} = 4.86$$

معیار شکست خستگی پاره‌بیضی ASME و ASME-Gerber بسیار به‌هم نزدیکند و به‌جای هم به‌کار می‌روند. استاندارد B106.1M–1985 از ANSI/ASME پاره‌بیضی ASME را برای میلمحورها به‌کار می‌برد.

**نمونه ۷-۱۲**

یک فنر تسمه‌ای تخت برای نگهداری سطح تخت پیرو یک بادامک صفحه‌ای به‌کار می‌رود. حدود حرکت پیرو 50 mm ثابت است، پس مؤلفهٔ نوسانی نیرو، گشتاور خمشی و تنش هم ثابت است. برای تنظیم سرعت‌های متنوع بادامک پیش‌بار دارد. این پیش‌بار برای پیشگیری از پرش یا آزاد شدن پیرو است. پیش‌بار برای سرعت‌های کم را باید کم کرد تا عمر سطح بادامک و پیرو بیشتر شود. این فنر از فولاد و یک‌سرِ گیردار به‌طول 800 mm عرض 50 mm و کلفتی 6.3 mm است، شکل ۷-۳۰الف. مقاومت‌های فنر $S_{ut} = 1040$ MPa، $S_y = 880$ MPa، و $S_e = 193$ MPa به‌درستی تصحیح شده است. تمام حرکت




**شکل ۷-۳۰**

پیرو بادامک و فنر نگهدارنده. (الف) هندسه؛ (ب) نمودار شکست راهنمای طراح برای نمونه ۷-۱۲.

بادامک 50 mm است. طراح می‌خواهد فنر را برای پیش‌بار در سرعت‌های کم 50 mm و برای سرعت‌های زیاد 125 mm خم کند.

(الف) مکان هندسی شکست Gerber-Langer را بکش.

(ب) ضرایب اطمینان مقاومت برای پیش‌بارهای 50 mm و 125 mm چقدر است؟

(ج) ضرایب اطمینان بر پایهٔ تغییر شکل از پیش‌بار چیست؟

راه حل با چند نکته آغاز می‌کنیم، گشتاور دوم سطح مقطع فنر یک‌سر گیردار،

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{50(6.3)^3}{12}=1041.9\ \text{mm}^4$$

چون از جدول الف-۹، تیر ۱ رابطهٔ نیروی $F$ و تغییر مکان $y$ یک‌سر گیردار $F=3EIy/l^3$ است، پس رابطه تنش $\sigma$ و تغییر مکان $y$ چنین است

$$\sigma=\frac{Mc}{I}=\frac{800Fc}{I}=\frac{800(3EIy)}{l^3}\frac{c}{I}=Ky$$

که

$$K=\frac{3(207\times10^3)3.15}{800^2}\doteq 3.0565\ \text{MPa/mm}$$

حال می‌توان کمترین و بیشترین مقادیر $F$، $y$، و $\sigma$ را چنین تعریف کرد

$$y_{\min}=\delta \qquad y_{\max}=50+\delta$$
$$F_{\min}=3EI\delta/l^3 \qquad F_{\max}=3EI(50+\delta)/l^3$$
$$\sigma_{\min}=K\delta \qquad \sigma_{\max}=K(50+\delta)$$

مؤلفه‌های تنش اینهایند:

$$\sigma_a=\frac{K(50+\delta)-K\delta}{2}=25K$$

$$\sigma_m=\frac{K(50+\delta)}{2}=K(25+\delta)$$

برای $\delta=0$،

$$\sigma_{\max}=K(50+\delta)=3.0565(50)=152.83\,\text{MPa} \qquad \sigma_a=(152.8-0)/2=76.4\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{\min}=K\delta=0\ \text{MPa} \qquad \sigma_m=3.0565(25+0)=76.4\ \text{MPa}$$

برای $\delta=50$ mm،

$$\sigma_{\max}=K(50+50)=305.6\ \text{MPa} \qquad \sigma_a=(305.6-152.8)/2=76.4\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{\min}=K(50)=152.8\ \text{MPa} \qquad \sigma_m=(305.6+152.8)/2=229.2\ \text{MPa}$$

برای $\delta=125$ mm،

$$\sigma_{\max}=K(50+125)\doteq 535\ \text{MPa} \qquad \sigma_a=(535-382.1)/2=76.4\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{\min}=K\delta=125K=382.1 \qquad \sigma_m=(535+382.1)/2=458.5\,\text{MPa}$$

(الف) در شکل ۷-۳۰ب معیارهای Gerber و Langer را می‌بینی. سه تغییر شکل پیش‌بار 0، 50، و 125 میلی‌متر نقاط $A$، $A'$، و $A''$ هستند. ببین که خط بار افقی است و از مبدأ نمی‌گذرد. بدان که چون $\sigma_a$

در 76.4 MPa ثابت است، خط بار افقی است و مبدأ جزو آن نیست و تلاقی مکان هندسی Gerber و خط بار با محاسبه $S_m$ از مع. (۷-۴۵) و با $S_a = 76.4$ به‌دست می‌آید.

$$S_m = S_{ut}\sqrt{1-\frac{S_a}{S_e}} = 1040\sqrt{1-\frac{76.4}{193}} = 808.4\ \text{MPa}$$

تلاقی مکان هندسی Langer و خط بار از مع. (۷-۴۷) برای $S_m$ به‌دست می‌آید که $S_a = 76.4\ \text{MPa}$ می‌گیریم.

$$S_m = S_y - S_a = 880 - 76.4 = 803.6\ \text{MPa}$$

که خطر برای خستگی به‌تقریب برابر تسلیم در نخستین دور است.

(ب) برای $\delta = 50\ \text{mm}$،

$$n_f = \frac{S_m}{\sigma_m} = \frac{808.4}{229.2} = 3.53 \qquad n_y = \frac{803.6}{229.2} = 3.51$$

و برای $\delta = 125\ \text{mm}$،

$$n_f = \frac{808.4}{458.4} = 1.76 \qquad n_y = \frac{803.6}{458.4} = 1.75$$

(ج) ضریب اطمینانی بر پایه تغییر شکل پیش‌بار منجر به یافتن تغییر شکل پیش‌بار ناشی از شکست می‌شود. اگر خستگی را مطرح بدانیم، رابطه Gerber چنین می‌شود

$$\frac{76.4}{193} + \left(\frac{K\delta^*}{1040}\right)^2 = 1$$

که از آن،

$$\delta^* = \frac{1040}{K}\sqrt{1-\frac{76.4}{193}} = 264.5\ \text{mm}$$

برای سرعت کمتر، ضریب اطمینان چنین می‌شود

$$n = \frac{\text{تغییر شکل پیش‌بار بیش از وظیفه}}{\text{تغییر شکل پیش‌بار عملی}} = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{264.5}{50} = 5.3$$

پاسخ

برای سرعت‌های بیشتر همان تغییر مکان به‌کار می‌رود و ضریب اطمینان،

$$n = \frac{264.5}{125} = 2.12$$

پاسخ

**نمونه ۷-۱۳** یک میله فولادی زیر بار نوسان‌دار $\sigma_{max} = 420\ \text{MPa}$ و $\sigma_{min} = -140\ \text{MPa}$ است. مقاومت‌های فولاد $S_{ut} = 560\ \text{MPa}$، $S_y = 450\ \text{MPa}$، و حد دوام به‌راستی اصلاح شده $S_e = 280\ \text{MPa}$ و $f = 0.9$ است. شمار نوسان تا شکست خستگی را برای:

(الف) معیار بهبودیافته Goodman به‌دست آور.

(ب) معیار Gerber را به‌دست آور.

راه حل با تنش‌های داده شده،

$$\sigma_a = \frac{420-(-140)}{2} = 280\ \text{MPa} \qquad \sigma_m = \frac{420+(-140)}{2} = 140\ \text{MPa}$$

از خواص ماده و مع. (۷-۱۳) تا مع. (۷-۱۵)، داریم

$$a = \frac{(fS_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0.9(560)]^2}{280} = 907.2\ \text{MPa}$$

$$b = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{fS_{ut}}{S_e}\right) = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{0.9(560)}{280}\right) = -0.0851$$

$$N = \left(\frac{S_f}{a}\right)^{1/b} = \left(\frac{S_f}{907.2}\right)^{-1/0.851} \qquad (۱)$$

که $S_f$ جای $\sigma_a$ را در مع. (۷-۱۵) می‌گیرد.

(الف) با معیار Goodman و $n=1$، $S_e = S_f$، مع. (۷-۴۹) چنین می‌دهد

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1-\dfrac{\sigma_m}{S_{ut}}} = \frac{280}{1-\dfrac{140}{560}} = 373.3\ \text{MPa}$$

این را در مع. (۱) می‌گذاریم

پاسخ $N = \left(\dfrac{373.3}{907.2}\right)^{-1/0.0851} = 3.40(10^4)$ دور

(ب) همچون بند الف)، از مع. (۷-۵۰)،

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1-\left(\dfrac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2} = \frac{280}{1-\left(\dfrac{140}{560}\right)^2} \doteq 298.7\ \text{MPa}$$

بار دیگر از مع. (۱)،

پاسخ $N = \left(\dfrac{298.7}{907.2}\right)^{-1/b} = 4.68(10^5)$ دور نوسان

پاسخ‌ها را می‌سنجیم، فرق بسیار است. دوباره بگوییم، معیار بهبودیافته Goodman دربرابر Gerber محتاطانه است، زیرا تفاوت آرام در $S_f$ با لگاریتمی شدن رابطه $S$، $N$ بزرگ می‌شود.

---

بسیاری از مواد **ترد**، معیارهای شکست خستگی در ربع نخست از مکان هندسی Smith-Dolan که شکل کاو رو به بالا دارد پیروی می‌کنند، این‌چنین

$$\frac{S_a}{S_e} = \frac{1-S_m/S_{ut}}{1+S_m/S_{ut}} \qquad (۷-۵۲)$$

یا در شکل معادله طراحی

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} = \frac{1-n\sigma_m/S_{ut}}{1+n\sigma_m/S_{ut}} \qquad (۷-۵۳)$$

برای خط بار شعاعی با شیب $r$، در مع. (۷-۵۲)، $S_a/r$ را به‌جای $S_m$ می‌گذاریم و $S_a$ را می‌یابیم

$$S_a = \frac{rS_{ut}+S_e}{2}\left[-1+\sqrt{1+\frac{4rS_{ut}S_e}{(rS_{ut}+S_e)^2}}\right] \qquad (۷-۵۴)$$

نمودار خستگی مواد ترد با نمودار برای مواد شکل‌پذیر به‌روشنی فرق دارد:

- تسلیم نداریم، چرا که چنین ماده‌ای شاید مقاومت تسلیم ندارد
- بی‌تردید، از مشخصات این مواد بیشتر بودن مقاومت نهایی فشاری تا چند برابر مقاومت کششی آنهاست.
- مکان هندسی شکست خستگی یا از بالا گودی (تقعر) دارد، برای نمونه **Smith-Dolan**، یا همچون **Goodman** خط راست است. مواد ترد به تنش میانه بیشتر حساسند که کم باشد. ولی تنش میانه فشاری سودمند است.
- برای دادن یک روش عمومی و روشن روی مواد ترد، کار کافی نشده است. پس در ربع نخست و اندکی هم از ربع دوم باخبریم که همین‌جا هم می‌مانیم.

بیشترین حدود متداول در کار طراح $-S_{ut} \le \sigma_m \le S_{ut}$ است. مکان هندسی در ربع نخست، **Goodman**، **Smith-Dolan** یا چیزی بین این‌دو است. آن تکهٔ کاربردی ربع دوم با خط راستی بین دو نقطه $S_{ut}$، $-S_{ut}$، و $S_e$، $O$ مشخص می‌شود که رابطهٔ آن

$$S_a = S_e + \left(\frac{S_e}{S_{ut}} - 1\right) S_m \qquad -S_{ut} \le S_m \le 0 \text{ (برای چدن)} \qquad (۵۵-۷)$$

در جدول الف-۲۴ خواص چدن خاکستری آمده است. حد دوام آن درواقع $k_a k_b S'_e$ است و فقط به $k_c$، $k_d$، $k_e$ و $k_f$ نیاز دارد. متوسط $k_c$ برای بارگذاری محوری و پیچشی 0.9 است.

**نمونه ۷-۱۴** میله رابط با مقطع $9.5 \times 25$ mm از چدن خاکستری گروه 30 با سوراخی به‌قطر 6.4 mm مانند شکل ۷-۳۱الف زیر بار $F$ است. سطوح ماشینکاری است. بنا به شرایط زیر، ضریب ایمنی دربرابر شکست در جوار سوراخ چقدر است؟

(الف) $F = 4500$ N کششی یکنواخت

(ب) نیروی 4500 N تکراری است

(ج) بار بین $-4500$ N و 1350 N به تکرار است، بی‌اثر ستون مکان هندسی خستگی **Smith-Dolan** را به‌کار ببر.

راه حل آمادگی اولیه، از جدول الف-۲۴، $S_{ut} = 215$ MPa، $S_{uc} = 750$ MPa، $k_a k_b S'_e = 98$ MPa است. چون برای بار محوری $k_c = 0.9$، پس $S_e = (k_a k_b S'_e) k_c = 98(0.9) = 88.2$ MPa. از جدول الف-۱۵-۱، $A = t(w-d) = 9.5(25-6.4) = 176.7$ mm$^2$، $d/w = 6.4/25 = 0.256$، و $K_t = 2.45$.

حساسیت چاک برای چدن 0.2 است (بخش ۷-۱۰ را ببین) پس،

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.20(2.45 - 1) = 1.29$$

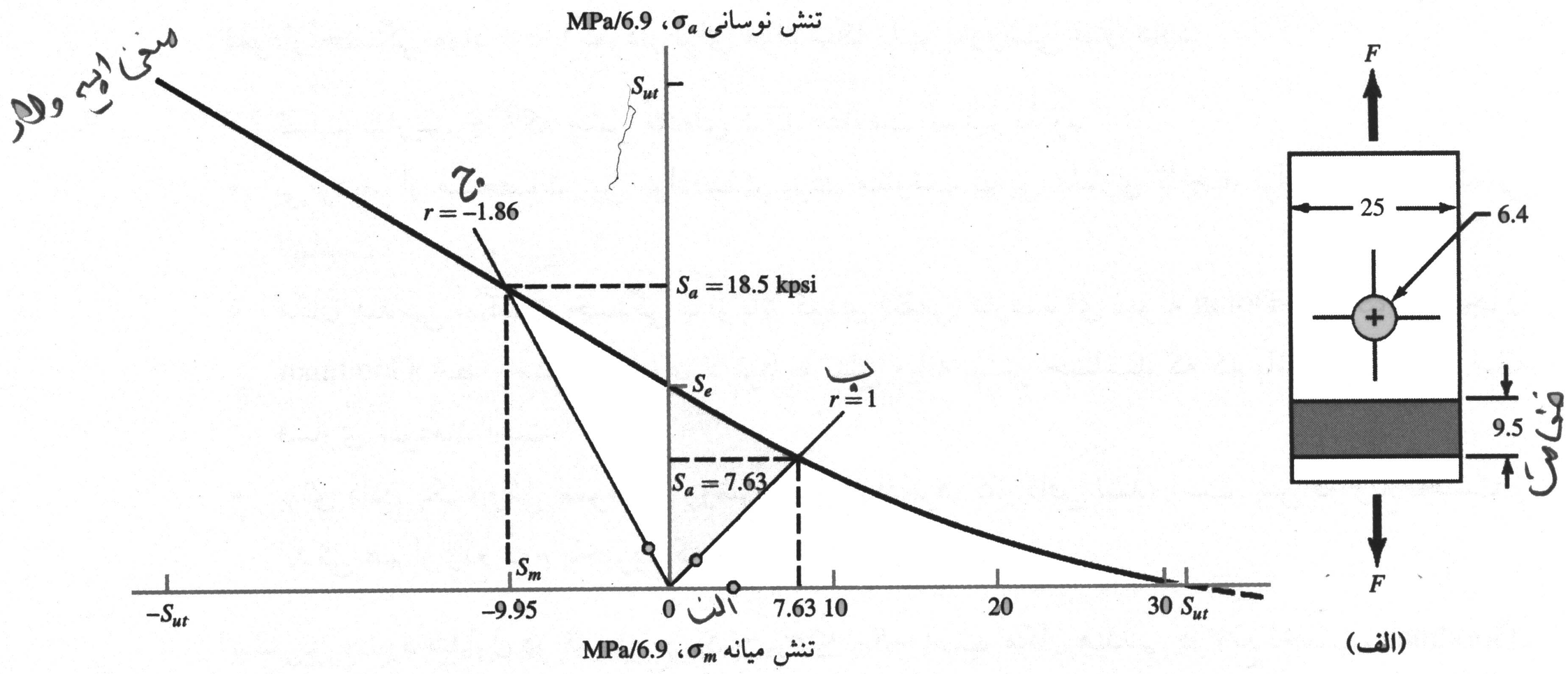
(الف)

$$\sigma_a = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1.29(0)}{176.7} = 0 \qquad \sigma_m = \frac{K_f F_m}{A} = \frac{1.29(4500)}{176.7} = 32.85 \text{ MPa}$$

و

پاسخ

$$n = \frac{S_{ut}}{\sigma_m} = \frac{215}{32.85} = 6.54$$




(الف)

(ب)

**شکل ۷-۳۱**

قطعه‌ای از چدن گروه 30 زیر بار محوری خستگی، (الف) نمایش هندسه آن و (ب) نمودار خستگی راهنمای طرح برای نمونه ۷-۱۴.

(ب)

$$F_a = F_m = \frac{F}{2} = \frac{4500}{2} = 2250 \text{ N}$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1.29(2250)}{176.7} = 16.43 \text{ MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1$$

از مع. (۷-۵۴)،

$$S_a = \frac{(1)215 + 88.2}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4(1)215(88.2)}{[(1)215 + 88.2]^2}}\right] = 53.2 \text{ MPa}$$

پاسخ

$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{53.2}{16.43} = 3.24$$

(ج)

$$F_a = \frac{1}{2}|1350 - (-4500)| = 2925 \text{ N} \qquad \sigma_a = \frac{1.29(2925)}{176.7} = 21.35 \text{ MPa}$$

$$F_m = \frac{1}{2}[1350 + (-4500)] = -1575 \qquad \sigma_m = \frac{1.29(-1575)}{176.7} = -11.5 \text{ MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{21.35}{-11.5} = -1.86$$

چون از مع. (۷-۵۵)، $S_a = S_e + (S_e/S_{ut} - 1)S_m$ و $S_m = S_a/r$ پس،

$$S_a = \frac{S_e}{1 - \frac{1}{r}\left(\frac{S_e}{S_{ut}} - 1\right)} = \frac{88.2}{1 - \frac{1}{-1.86}\left(\frac{88.2}{215} - 1\right)} = 129.2 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{129.2}{21.35} = 6.05$$

در شکل ۷-۳۱ب تکه‌ای از نمودار خستگی راهنمای طراح را می‌بینید.

## ۷-۱۳ مقاومت خستگی پیچشی زیر تنش‌های تپنده (Torsional Fatigue Strength under Fluctuating Stresses)

آزمون‌های فراوان Smith[۲۶] نتایج جالبی از خستگی پیچشی تپشی داده است. نخستین نتیجه Smith از ۷۲ آزمون نشان داد که مؤلفه تنش یکنواخت پیچشی که کمتر از مقاومت تسلیم باشد، اثری روی حد دوام پیچشی ندارد، اگر ماده **شکل‌پذیر**، **براق**، **بدون چاک**، و **استوانه‌ای** باشد.

نتیجهٔ دوم Smith برای موادی با تمرکز تنش، چاک یا با سطوح پرداخت کامل نشده است. وی دریافت که حد خستگی پیچشی با تنش پیچشی یکنواخت، کاهش هم آهنگ دارد. چون سطوح بسیاری از قطعات پرداخت درستی ندارند، پس این نتیجه حاکی از سودمند بودن Gerder پاره‌بیضی ASME و تقریب‌های دیگر است. Joerres[۲۷] از گروه وابسته به Spring-Barnes، با تأیید نتایج Smith، کاربرد رابطه بهبودیافته Goodman را برای پیچش تپشی پیشنهاد می‌کند. برای تشکیل نمودار Goodman رابطهٔ زیر را Joerres به‌کار می‌برد.

$$S_{su} = 0.67 S_{ut} \qquad (۷-۵۶)$$

همچنین از فصل ۶ برای تئوری انرژی واپیچش، $S_{sy} = 0.577 S_{yt}$ بود و میانگین ضریب بار $k_c$ از مع. (۷-۲۵) به‌دست می‌آید یا اگر ثابت باشد 0.577 است. در فصل ۱۰ این نکته باز خواهد شد.

## ۷-۱۴ گونه‌های بارگذاری ترکیبی (Combinations of Loading Modes)

در بخش ۷-۹ آموختیم که ضریب بار $k_c$ برای یافتن حد دوام با توجه به‌گونهٔ بارگذاری محوری، خمشی یا پیچشی به‌کار می‌رود. در این بخش به پرسش، هرگاه بارگذاری آمیزه‌ای از، بگو!، محوری، خمشی و پیچش باشد، چه باید کرد، پاسخ می‌دهیم. افزون بر پیچیدگی بارگذاری و داشتن حد دوام جداگانه برای هریک، ضرایب تمرکز تنش هم برای هرنوع بارگذاری چندگانه‌اند. خوشبختانه، پاسخ به‌سادگی می‌گراید:

۱ برای مقاومت، حد دوام به‌درستی تصحیح شدهٔ خمشی $S_e$ را به‌کار ببر.
۲ برای هر مؤلفهٔ تنش خمشی، پیچشی یا محوری، ضرایب تمرکز تنش خودشان را به‌کار ببر.
۳ هر مؤلفه تنش محوری نوسانی را در ضریب $1/k_{c,\mathrm{ax}}$ ضرب کن.
۴ با وارد کردن برآیند تنش‌ها در تحلیل دایره Mohr، تنش‌های اصلی را پیدا کن.
۵ از نتیجهٔ مرحله ۴، تنش نوسانی von Mises، $\sigma'_a$ را پیدا کن.
۶ برای یافتن ضریب اطمینان، $\sigma'_a$ را با $S_a$ بسنج.

---

26. James O. Smith, "The Effect of Range of Stress on the Fatigue Strength of Metals," *Univ. of Ill. Eng. Exp. Sta, Bull.* 334, 1942.

27. Robert E. Joerres, "Springs." Chap. 24 in Joseph E. Shigley and Charles R. Mischke, *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

اگر مؤلفه‌های تنش ناهمفاز ولی بسامد یکسان داشتند، برای یافتن بیشترین مقدار، هر مؤلفه را به‌کمک زاویه فازش به‌شکل مثلثاتی درمی‌آوریم و سپس جمع می‌کنیم. اگر بسامد دو یا چند مؤلفه تنش متفاوت بودند، مسأله دشوار است، یک راه حل فرض همفاز شدن گاه و بی‌گاه دو یا چند مؤلفه است، پس مقادیرشان جمع می‌شود.

اگر تنش‌های میانه هم داشتیم، مراحل ۴ و ۵ را برایشان تکرار می‌کنیم و از برایند آنها مؤلفهٔ یکنواخت تنش von Mises، $\sigma'_m$ را با $\sigma'_a$ برای تشکیل راه حل Gerber یا پاره‌بیضی ASME به‌کار می‌بریم. هردو مؤلفهٔ یکنواخت و دامنه تنش با ضریب تمرکز تنش $K_f$ یا $K_{fs}$ افزایش می‌یابد.

**نمونه ۷-۱۵** میلمحورگردانی از لوله AISI 1018 4 mm × 42- سرد کشیده با یک سوراخ عرضی به‌قطر 6 mm است. ضریب اطمینان دربرابر شکست‌های خستگی و ایستا را برای شرایط بارگذاری زیر برآورد کن.

(الف) میلمحور زیر گشتاور پیچشی دوطرفه کامل 120 N·m همفاز با گشتاور خمشی دوطرفه کامل 150 N·m است.

(ب) میلمحور زیر گشتاور پیچشی تپنده از 20 تا 160 N·m و گشتاور خمشی یکنواخت 150 N·m است.

**راه حل** با روش برآورد مقاومت‌ها و سپس تنش‌ها آغاز می‌کنیم و آنگاه آن دو را به‌هم ربط می‌دهیم. از جدول الف-۲۰ کمترین مَقاومت‌ها $S_{ut} = 440$ MPa و $S_{yt} = 370$ MPa است. حد دوام نمونه تیرگردان $0.504(440) = 222$ MPa است. ضریب پرداخت سطح از جدول ۷-۴ و مع. (۷-۱۸) به‌دست می‌آید.

$$k_a = 4.51 S_{ut}^{-0.265} = 4.51(440)^{-0.265} = 0.899$$

از مع. (۷-۲۰)، ضریب اندازه،

$$k_b = \left(\frac{d}{7.62}\right)^{-0.107} = \left(\frac{42}{7.62}\right)^{-0.107} = 0.833$$

بقیه ضرایب Marin همه برابر واحد است، پس حد دوام $S_e$،

$$S_e = 0.899(0.833)222 = 166 \text{ MPa}$$

(الف) از جدول الف-۱۶ ضرایب تمرکز هندسی پیدا می‌شود. اگر برای خمش $a/D = 6/42 = 0.143$، $d/D = 34/42 = 0.810$ و با میان‌یابی خطی $K_t = 2.366$، $A = 0.798$ و برای پیچش $K_{ts} = 1.75$، $A = 0.89$ پس برای خمش.

$$Z_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi(0.798)}{32(4.2)}\left[(4.2)^4 - (3.4)^4\right] = 3.31 \text{ cm}^3$$

و برای پیچش

$$J_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi(0.89)}{32}\left[(4.2)^4 - (3.4)^4\right] = 15.5 \text{ cm}^4$$

بعد، از شکل‌های ۵-۲۰ و ۵-۲۱ برای شعاع چاک 3 mm، حساسیت چاک برای خمش 0.78، و برای پیچش 0.96 به‌دست می‌آید. دو ضریب تمرکز تنش خستگی از مع. (۷-۳۱) چنین می‌شوند،

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.78(2.366 - 1) = 2.07$$

$$K_{fs} = 1 + 0.96(1.75 - 1) = 1.72$$

تنش خمشی چنین به‌دست می‌آید

$$\sigma_{xa} = K_f \frac{M}{Z_{\text{net}}} = 2.07 \frac{150}{3.31} = 93.8 \text{ MPa}$$

و تنش پیچشی هم،

$$\tau_{xya} = K_{fs} \frac{TD}{2J_{\text{net}}} = 1.72 \frac{120(4.2)}{2(15.5)} = 28.0 \text{ MPa}$$

مؤلفهٔ یکنواخت تنش von Mises، $\sigma'_m$ صفر است. مؤلفهٔ نوسانی $\sigma'_a$ هم برابر

$$\sigma'_a = (\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2)^{1/2} = \left[93.8^2 + 3(28^2)\right]^{1/2} = 105.6 \text{ MPa}$$

چون $S_e = S_a$، ضریب ایمنی خستگی $n_f$،

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma'_a} = \frac{166}{105.6} = 1.57$$

ضریب ایمنی برای تسلیم در دور نخست،

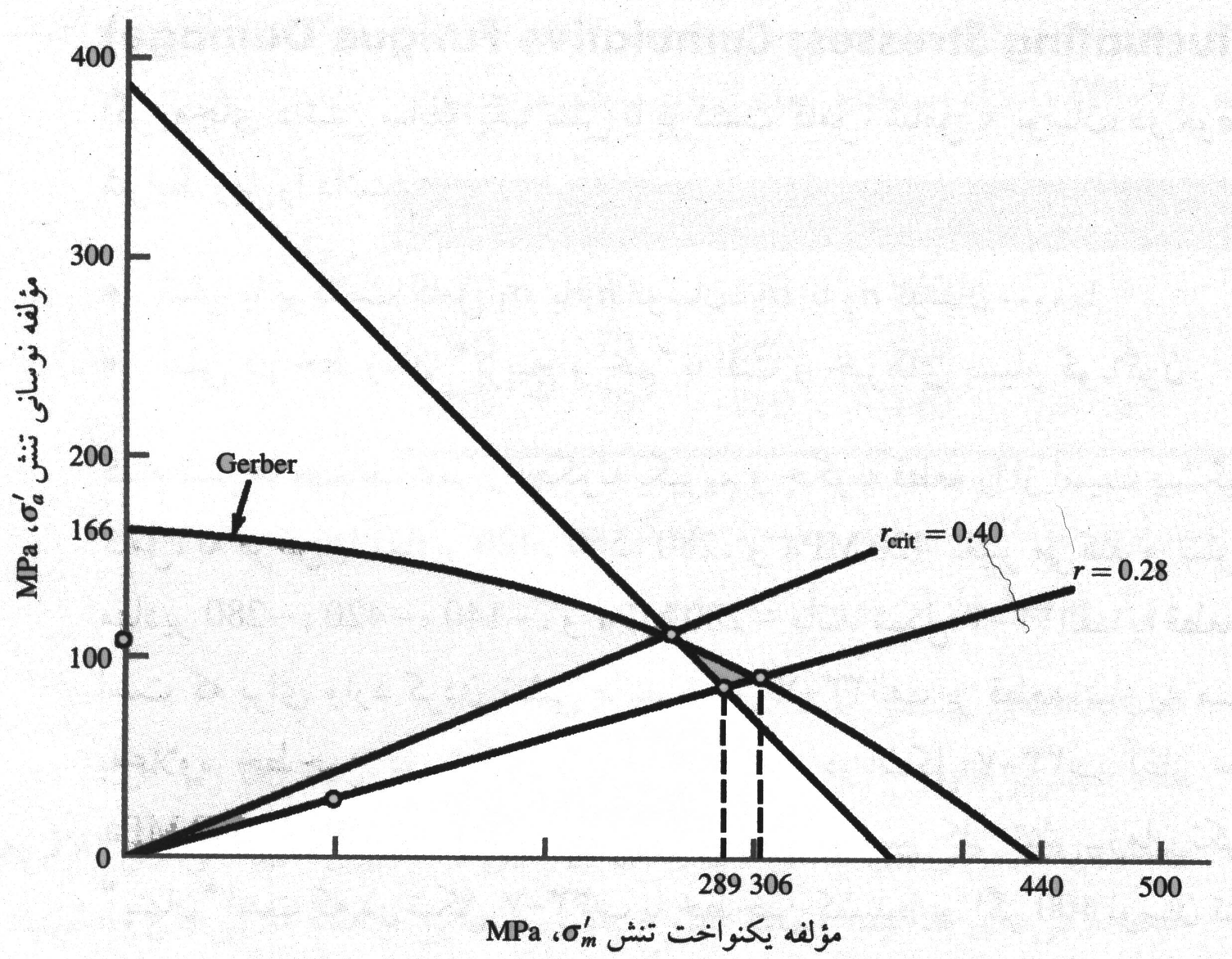
$$n_y = \frac{S_{yt}}{\sigma'_a} = \frac{370}{105.6} = 3.50$$

تسلیم موضعی نداریم، خطر خستگی نزدیک‌تر است، شکل ۷-۳۲ را ببین.

(ب) در این بند ضریب اطمینان را برای مؤلفهٔ نوسانی ناشی از پیچش تپنده و مؤلفهٔ یکنواخت هم در پیچش و هم خمش می‌خواهیم. مؤلفه‌های گشتاور $T_a = (160-20)/2 = 70 \text{ N}\cdot\text{m}$، $T_m = 20 + 70 = 90 \text{ N}\cdot\text{m}$ هستند. پس مؤلفه‌های نوسانی و یکنواخت تنش

$$\tau_{xya} = K_{fs} \frac{T_a D}{2J_{\text{net}}} = 1.72 \frac{70(4.2)}{2(15.5)} = 16.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xym} = K_{fs} \frac{T_m D}{2J_{\text{net}}} = 1.72 \frac{90(4.2)}{2(15.5)} = 21.0 \text{ MPa}$$




**شکل ۷-۳۲**

نمودار خستگی راهنمای طراح برای نمونه ۷-۱۵.

مؤلفه یکنواخت تنش خمشی $\sigma_{xm}$ برابر با

$$\sigma_{xm} = K_f \frac{M_m}{Z_{\text{net}}} = 2.07 \frac{150}{3.31} = 93.8 \text{ MPa}$$

مؤلفه‌های von Mises، $\sigma'_a$ و $\sigma'_m$ هستند.

$$\sigma'_a = \left[3(16.3)^2\right]^{1/2} = 28.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_m = \left[93.8^2 + 3(21)^2\right]^{1/2} = 100.6 \text{ MPa}$$

شیب خط بار $r = \sigma'_a/\sigma'_m = 28.2/100.6 = 0.28$ است. از جدول ۷-۱۰، مؤلفه دامنه مقاومت $S_a$ و مؤلفه یکنواخت مقاومت $S_m$ هستند،

$$S_a = \frac{0.28^2\, 440^2}{2(166)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(166)}{0.28(440)}\right]^2} \right\} = 85.7 \text{ MPa}$$

$$S_m = \frac{85.7}{0.28} = 306.1 \text{ MPa}$$

ضریب ایمنی خستگی $n_f$ برابر با

پاسخ

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma'_a} = \frac{85.7}{28.2} = 3.04$$

ضریب ایمنی تسلیم $n_y$ در نخستین نوسان

پاسخ

$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m} = \frac{370}{28.2 + 100.6} = 2.87$$

تسلیم چاک نداریم، ولی ترس از تسلیم در نخستین نوسان در چاک است. نمودار شکل ۷-۳۲ را ببین.

۱۰ــ ضخامت صفحهٔشکل 2-34 برابر 13 mm است .مقدار بار $P$ از 90,000 N

تا 45,000 N تغییر می‌کند .آزمایش مقادیر $\sigma_{yp} = 290$ MPa; $\sigma_e = 165$ MPa را

برای مادهٔ این صفحه بدست می‌دهد .مقدار ضریب اطمینان براساس تنش

حدسیلان برابر 2 است .مقدار حداکثر عرض مجاز $D$ را حساب کنید .

*Ans.* $D = 94.5$ mm.

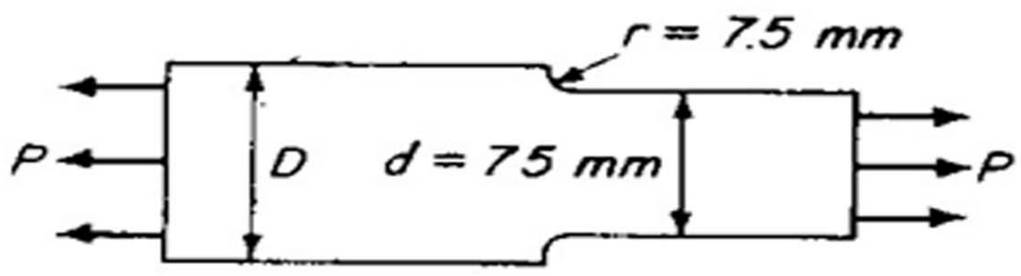



**Figure 2-34** Problem 10.

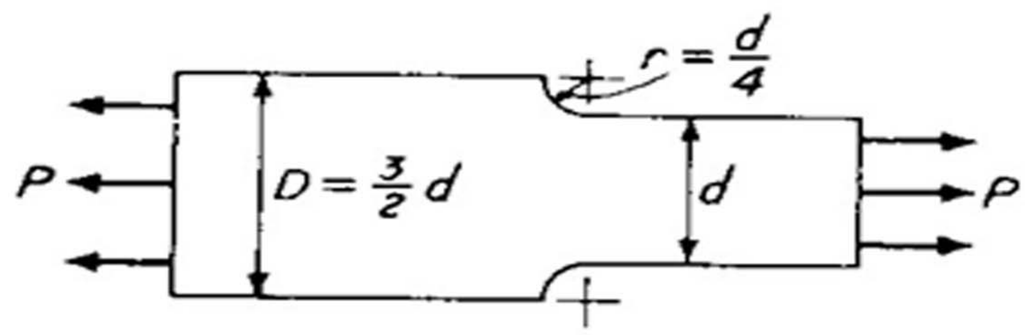



**Figure 2-35** Problem 11.

۱۴ــ شکل 2-38 شفت ثابتی را نشان می‌دهدکه‌تحت بار متغیر $P$ قرار

گرفته‌است .مقدار P از 4,500 N تا 13,500 N تغییر می‌کند .مقادیر

$\sigma_{yp} = 290$ MPa و $\sigma_e = 170$ MPa برای این شفت صادق است .مقدارضریب‌اطمینان

برابر 2 است .درصورتیکه‌شرایط تنش درراکورها موافق کارمداومشفت

باشد ،مقدار مجاز $D$ را حساب کنید .

*Ans.* $D = 120$ mm.

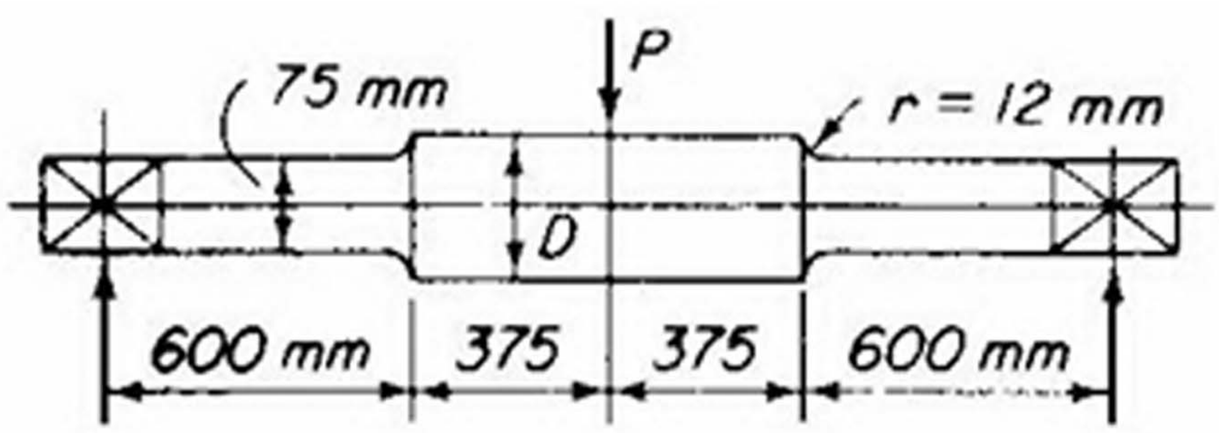



**Figure 2-38** Problem 14.

۵۱ ــ در شکل ۶۱ ــ ۲ موقعیکه موتور میگردد ، کل نوسان تیر بطرف بالا و پائین برابر 0.25 in مشاهده میشود .جنس تیرا زفولادنوردسرد 1035 میباشد ،ولی کیفیت سطح آنرا مثل کیفیت سطوح حاصل ازنوردگرم ،درنظربگیرید.مقدار ضریب اطمینان را درمحلی ازدیوارحساب کنیدکه درآن مقدارضریب تمرکزتنش برابر 1.5 است .

*Ans.* $FS = 4.16.$

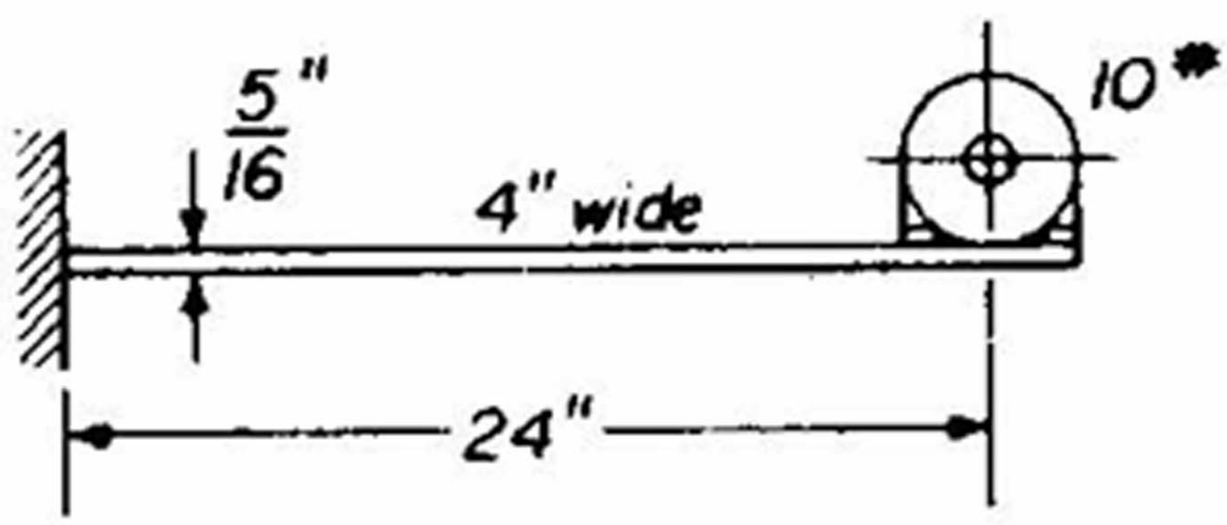



**Figure 2-61** Problem 51

۵۲ـ استوانهٔ توخالی شکل 2-62 از چدنی به مشخصات $\sigma_{ut} = 350$ MPa $\sigma_{uc} = 1{,}100$ MPa ساخته شده است. اگر ضریب تمرکز تنش 1.5 باشد، مقدار ضریب اطمینان را حساب کنید.

*Ans.* $FS = 4.8$.

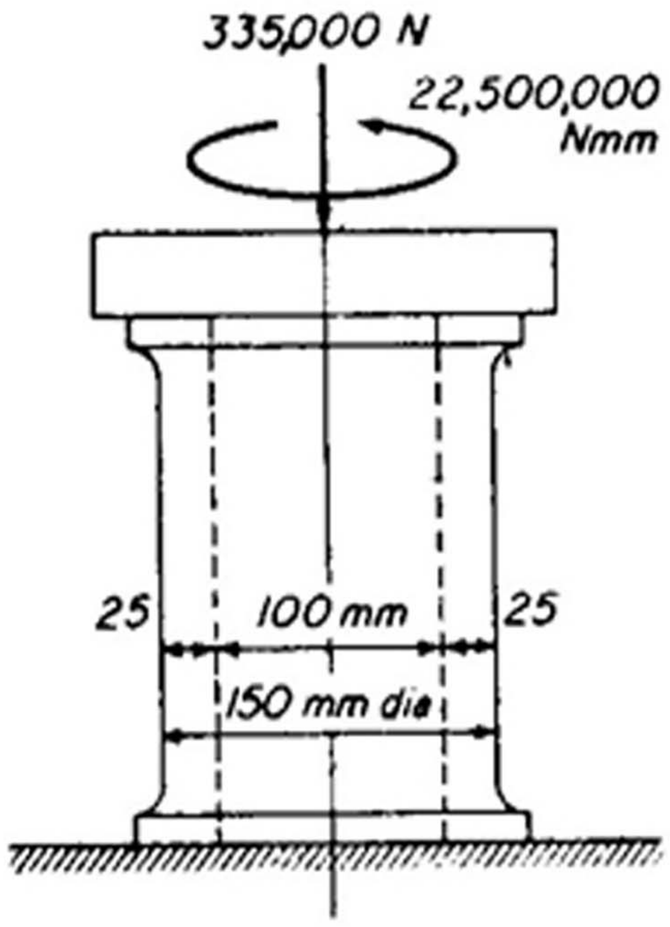
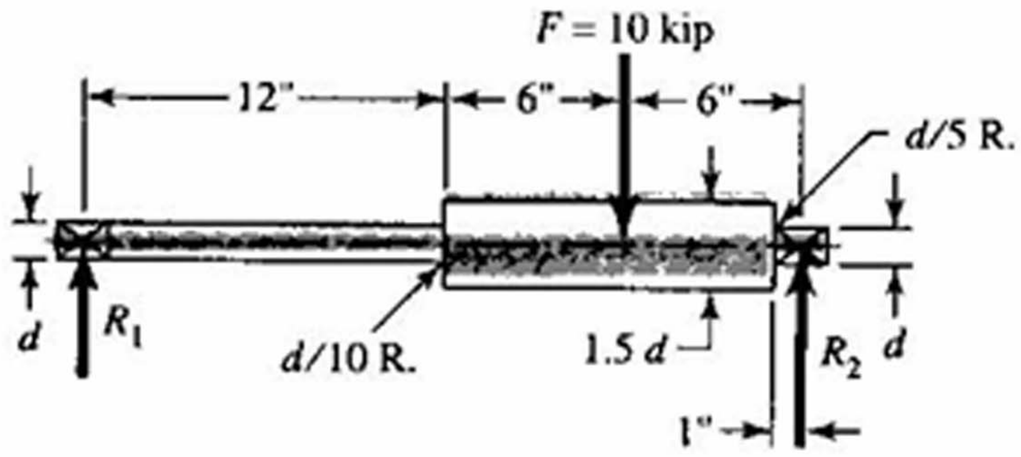



**Figure 2-62** Problem 52.

**۱۱ - ۷** در شکل، شافتی را می‌بینید که نیروی خمشی $F =$ ۱۰ kip به آن وارد می‌شود. شافت با سرعت ۱۱۵۰ rev/min می‌چرخد و نیروهای عکس‌العمل $R_1$ و $R_2$ در یاتاقان‌های آن ایجاد می‌شود. چنانچه ضریب طراحی $n_d =$ ۱٫۶ و جنس شافت از فولاد ۱۰۹۵ باشد، قطر شافت را برای عمر ۳ دقیقه تعیین کنید.



منابع :

کتاب طراحی اجزای ماشین ویرایش هفتم

ترجمه دکتر شادروان