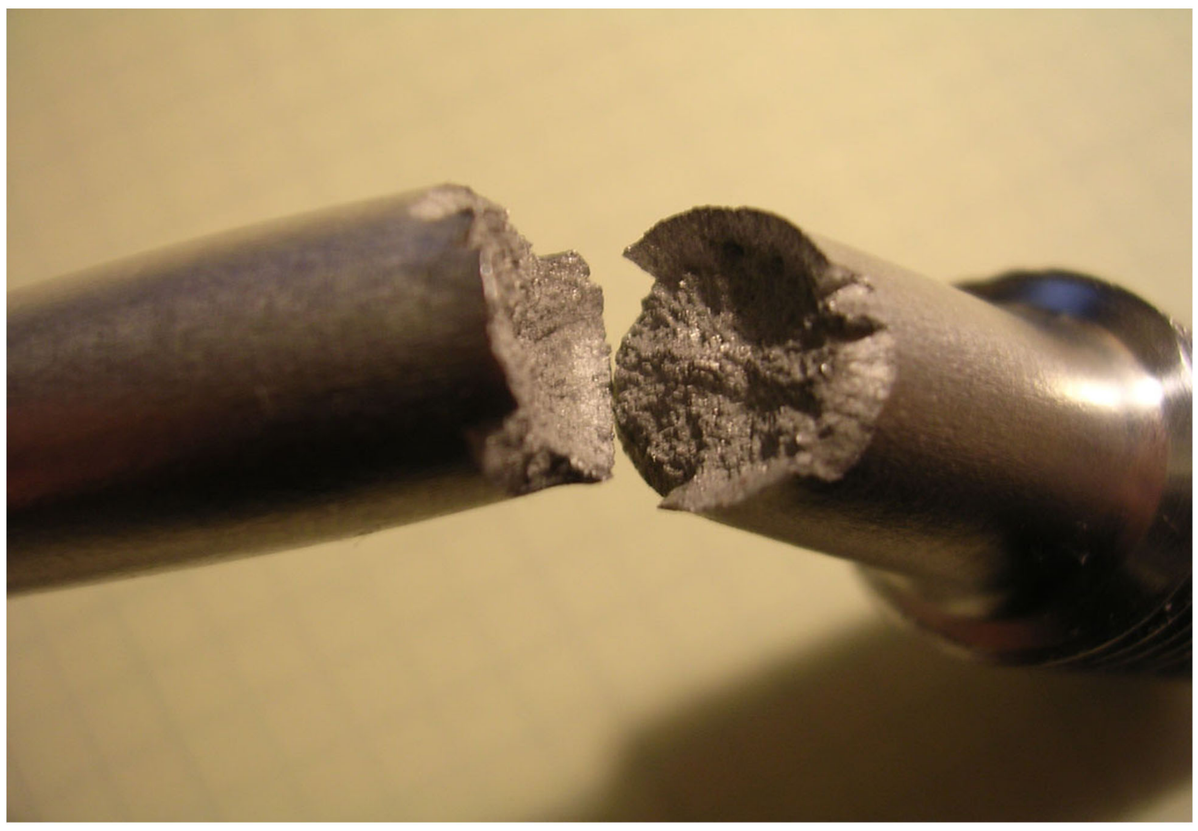
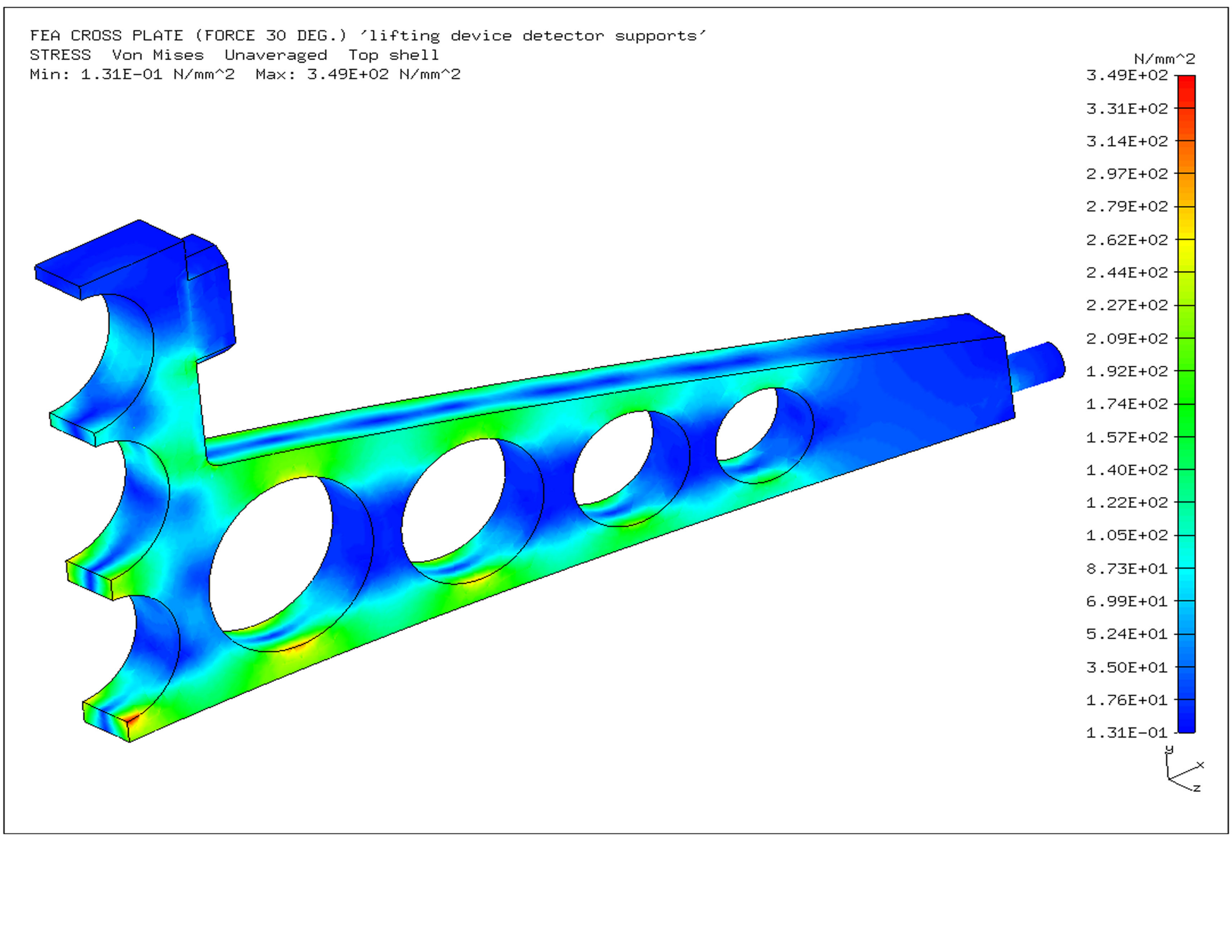
Chapter 1

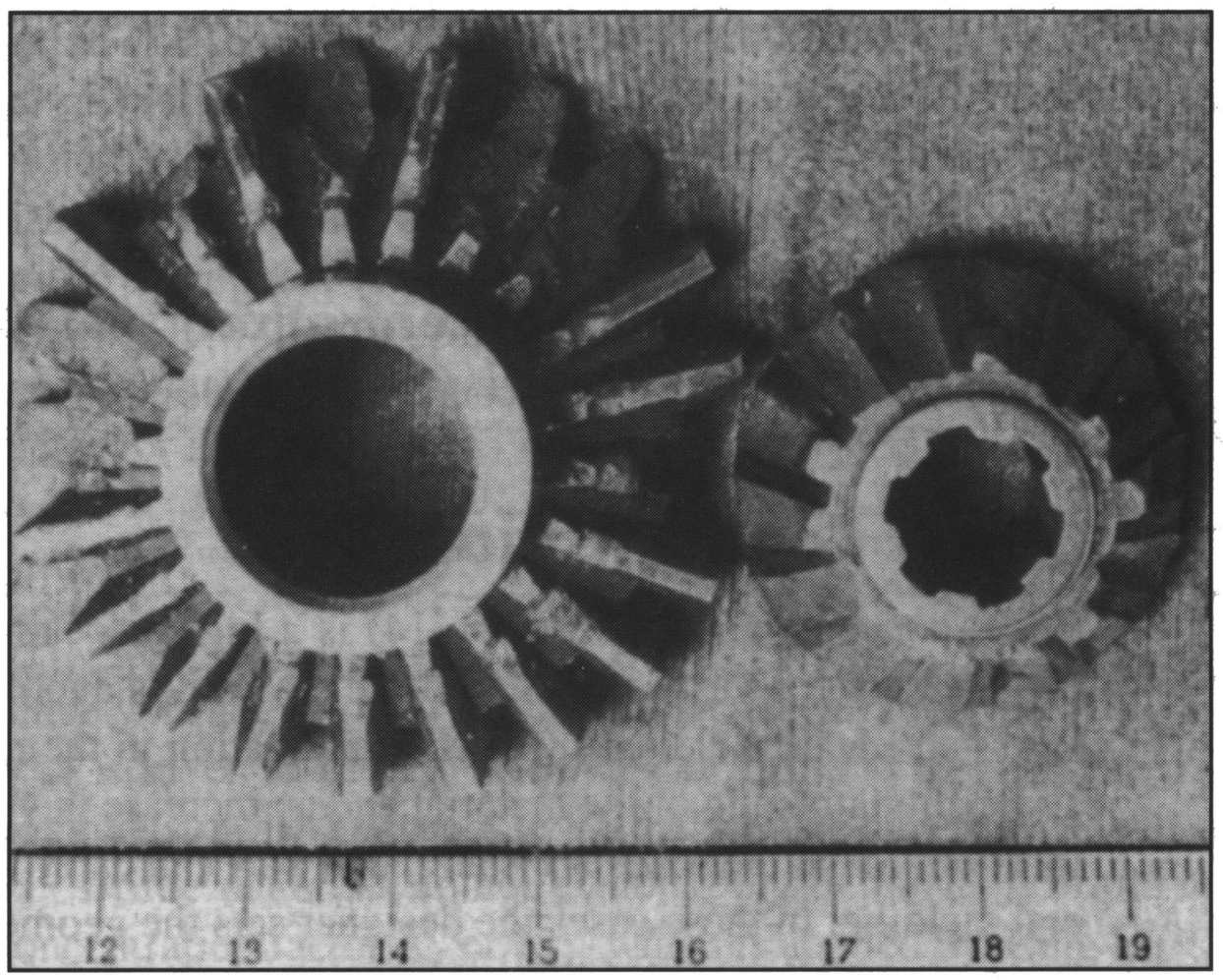
Failures Resulting from Static Loading





شکل ۶-۱۲

شکست خستگی نشیمن ضربه‌گیر در، ریختگی فشاری، این ضربه‌گیر روی لولای در و برای پیش‌گیری برخورد ضامن در، با دیوار است.



شکل ۶-۱۳

شکست چرخدندهٔ موتور بیرون قایق موتوری ساخت آمریکا با توان 5.6 kW. قطر سر بزرگ چرخدنده بزرگ 47.6 mm با 21 دنده که شش دنده‌اش شکسته و چرخدندهٔ کوچک 14 دنده که همه شکسته است. برخورد پروانه موتور با مته زمینی که به‌عنوان لنگر درکف دریاچه به‌کار رفته بود سبب شکست شد. صاحب قایق، پین برشی را با پین دیگری عوض کرده بود.

۶-۱ مقاومت ایستا (Static Strength)

در طراحی هر قطعه ماشین، باید طراح نتایج آزمایش‌های فراوان مقاومت جنس برگزیده را داشته باشد. این کار باید روی نمونه‌هایی با همان گرماکاری، پرداخت سطح و اندازهٔ قطعه مورد طراحی و با بارگذاری عملی آن انجام شود. پس اگر قطعه زیر بار خمشی خواهد بود، نمونه آزمون هم‌چنین، و اگر ترکیبی از خمش و پیچش را باید قطعه تحمل کند، نمونه هم باید. اگر قطعه از فولاد AISI1040 با گرماکاری و در دمای 500°C نوردشده و سنگ‌زده باشد، نمونه‌ها هم همین‌جور. داده‌های این آزمایش‌ها بسیار مفید و دقیق است. آن‌گاه که طراح این داده‌ها را دارد، مناسب‌ترین کار مهندسی برایش ممکن می‌شود.

اگر خرابی یا شکست قطعه، خطر جانی داشته باشد، یا تولید آن زیاد باشد، هزینه رسیدن به این داده‌های گران پیش از طراحی توجیه می‌گردد. یخچال‌ها و مانند آن، به‌سبب فراوانی تولید، اعتمادپذیری

زیاد دارند و بهتر که در جریان ساخت، به‌طور کامل آزمون شوند. هزینه انجام این آزمون‌ها آنگاه که به تعداد فرآورده‌ها سرشکن شود بسیار کم خواهد بود.

اکنون می‌توانی چهار دسته‌بندی طراحی را بپذیری:

۱ شکست قطعه، زندگی انسان را به‌خطر می‌اندازد، یا تعداد تولید آن بسیار زیاد است، پس، برنامه گسترده آزمون در جریان طراحی توجیه‌پذیر است.
۲ قطعه آن‌قدر زیاد ساخته می‌شود که یک رشته آزمون‌هایی مقبول است.
۳ قطعه طراحی و ساخته‌شده و مناسب نبوده است. با تحلیل مشکل و یافتن علت، باید چارهٔ کار روشن شود.
۴ قطعه، پیش از این طراحی، ساخته و آزمون شده و دریافته‌اند که رضایت‌بخش نیست. برای درک چرایی نارضایت‌بخشی قطعه، نیاز به وارسی، چاره‌جویی و بهبود قطعه است.

ضرورت به‌کارگیری مقادیر مقاومت تسلیم، مقاومت نهایی، درصد کاهش سطح، و درصد افزایش طول از روی انتشارات معتبر، در طراحی اغلب بیش از به‌کار نبردن آنهاست. نمونه‌های آنها در ضمیمه الف آمده است. چگونه می‌توان این داده‌های ناچیز را برای طراحی دربرابر بارهای ایستا و پویا، دومحوری و سه‌محوری، دماهای زیاد یا کم و برای قطعات بسیار بزرگ یا کوچک به‌کار گرفت؟ در این فصل و فصل‌های بعدی به چنین پرسش‌هایی پاسخ خواهیم داد، ولی فکر کنید چقدر بهتر است اگر داده‌های ما از شرایط واقعی طرح باشد.

۲-۶ تمرکز تنش (Stress Concentration)

تمرکز تنش (نگ. بخش ۴-۱۴) یک اثر بسیار موضعی است. گاهی ناشی از یک خراش سطحی است. اگر ماده، شکل‌پذیر و بار ایستا باشد، بار طرح در موضع بحرانی چاک، می‌تواند سبب تسلیم شود. به‌همراه این تسلیم می‌تواند تقویت کرنشی ماده هم رخ دهد و بر مقاومت تسلیم در موضع بحرانی چاک بی‌افزاید. چون بار ایستاست، قطعه می‌تواند به‌راحتی بدون تسلیم کلی بپذیرد. در این موارد، طراح ضریب تمرکز تنش هندسی (نظری) K_t را واحد می‌گیرد.

علت عقلی آن را می‌شود چنین گفت: بدترین نمایشنامه (scenario)، پنداشتن یک مادهٔ آرمانی بدون تقویت کرنش مانند شکل ۶-۱۴ است. مکان هندسی تنش-کرنش تا مقاومت تسلیم S_Y به‌طور خطی بالا می‌آید، سپس با تنش ثابت برابر S_y پی‌می‌گیرد. یک میله مستطیل پله‌دار مانند شکل الف-۱۵-۵ را به‌انگار که سطح مقطع تنه کوچک آن $100\ \text{mm}^2$ باشد. اگر ماده شکل‌پذیر با نقطه تسلیم 250 MPa و ضریب تمرکز تنش نظری (SCF)، $K_t = 2$ باشد،

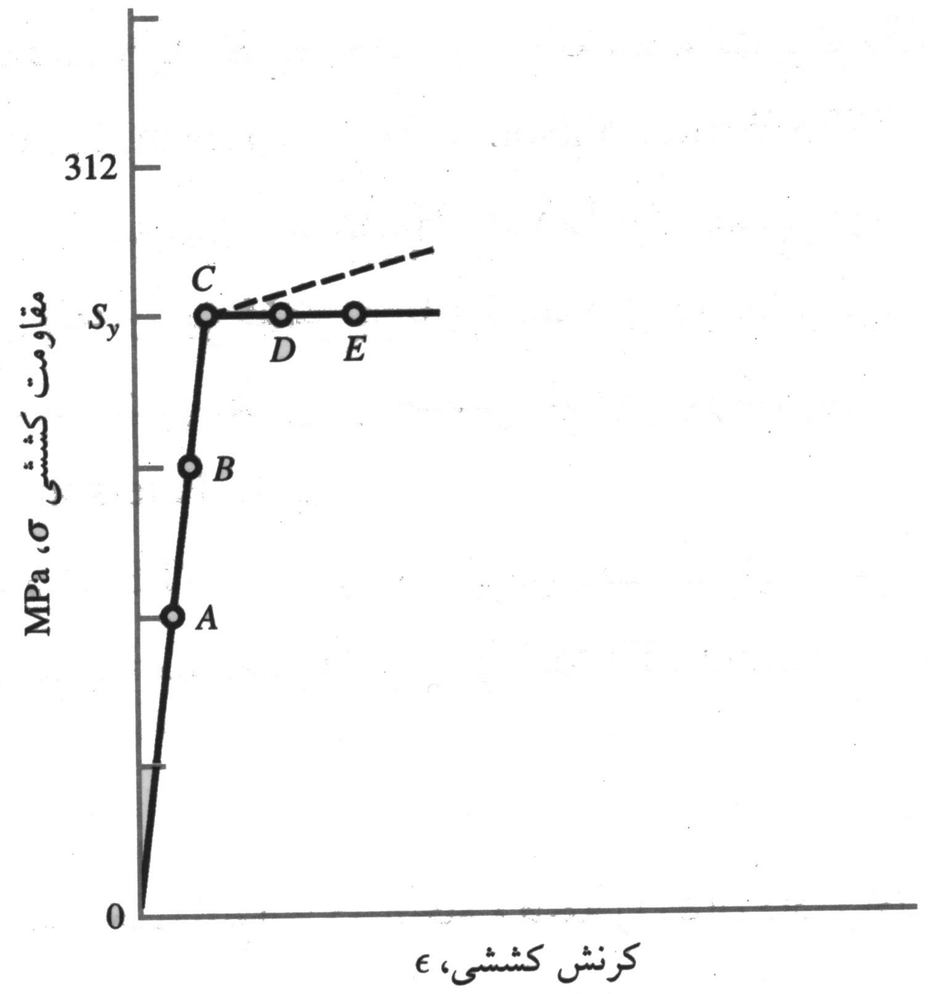
- بار 12500 N تنش کششی 125 MPa را در تنه، نقطه A در شکل ۶-۱۴، پدید می‌آورد. در موضع بحرانی، تنش در گوشه پله 250 MPa و SCF برابر $K = \sigma_{\max}/\sigma_{\text{nom}} = 250/125 = 2$ است.
- بار 18750 N، تنش کششی 187.5 MPa در تنه، نقطه B در شکل، پدید می‌آورد. در گوشه موضع بحرانی، تنش هنوز 250 MPa است (نقطه D) و SCF،

$$K = \sigma_{\max}/\sigma_{\text{nom}} = S_y/\sigma = 250/187.5 = 1.33$$

- با بار 25000 N، تنش کششی (نقطه C) در تنه 250 MPa است. در موضع بحرانی درون گوشه، تنش 250 MPa (در نقطه E) است. SCF هم $K = \sigma_{\max}/\sigma_{\text{nom}} = S_y/\sigma = 250/250 = 1$.

شکل ۶-۱۴

یک منحنی آرمانی برای تنش-کرنش. خط‌چین به ماده‌ای که با کرنش تقویت شده اشاره دارد.



برای موادی که با کرنش تقویت می‌شوند، مقاومت تسلیم در موضع بحرانی چاک بیش از S_y است. سطح تنه با تنشی اندکی کمتر از 250 MPa، درحال تحمل بار است و بسیار نزدیک شکست با شرایط عمومی تسلیم است. به‌همین سبب طراحان، K_t را در بارگذاری ایستا روی مواد شکل‌پذیر و در میدان کشسان به‌کار نمی‌برند، بلکه $K_t = 1$.

هنگام به‌کار بردن این دستور برای مواد شکل‌پذیر و بار ایستا، باید قطعه در محیط کارش بی‌هیچ شکی شکست ترد نداشته باشد، (نگ. ۶-۱۳). نقش معمول ضریب تمرکز تنش هندسی (نظری) در تنش عمودی K_t یا تنش‌برشی K_{ts} برابر با

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}} \qquad \text{(الف)}$$

$$\tau_{\max} = K_{ts} \tau_{\text{nom}} \qquad \text{(ب)}$$

چون به ضریب تمرکز تنش توجه داری و تعریف σ_{nom} یا τ_{nom} در نمودار یا برنامهٔ کامپیوتری می‌آید، باید از مقدار تنش نامی در مقطع زیر بار مطمئن باشی و به آنچه سازندهٔ نمودار برای نمایش، مناسب دیده دلخوش نباشی.

مواد ترد میدان مومسانی نشان نمی‌دهند. مادهٔ ترد، ضریب تمرکز تنش K_t یا K_{ts} را "حس" می‌کند. که با مع. (الف) یا (ب) وارد می‌شود.

یک استثنا بر این دستور، مادهٔ تردی با تمرکز تنش ناشی از ناپیوستگی ریز (microdiscontinuity) است که بدتر از ناپیوستگی بزرگی که طراح در ذهن دارد است. در قالبگیری ماسه‌ای، ذرات ماسه، حباب‌های هوا و بخار آب در قطعه پدید می‌آید. ساختار دانه‌ای چدن، پولک‌های گرافیت (با مقاومت کم) دارد، که در جریان فرایند انجماد، ذره به ذره ترک پدید می‌آورد. آنگاه که آزمون کشش روی چدن انجام می‌شود، مقاومتی که در متون می‌آید **شامل** این تمرکز تنش می‌شود. در چنین حالاتی نیازی به افزودن K_t یا K_{ts} نیست.

یک منبع مهم ضرایب تمرکز تنش از R. E. Peterson است که از کارهای خود و دیگران گردآوری کرده است.[1] در شیوهٔ Peterson، ضریب تمرکز تنش K_t در تنش نامی σ_{nom} ضرب می‌شود تا مقدار

---

1. R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration," *Machine Design*, vol. 23, no. 2. February 1951; no. 3, March 1951; no. 5, May 1951; no. 6, June 1951; no. 7, July 1951.

بیشترین تنش در موضع به‌دست آید. تقریب‌های او بر پایه مطالعات پرتو نگاری کشسان (photoelastic) تسمه‌های دوبعدی (Levan, Hartman در 1951 و White, Wilson 1973) با برخی داده‌های محدود از آزمون‌های پرتونگاری کشسان سه‌بعدی Levan, Hartman بود. تصویر دوره‌نگاری از هر مورد نیز ضمیمه داده‌ها است. میلمحورهای پله‌دار زیر کشش بر پایه تسمه‌های دو بعدی بود. جدول الف- ۱۵ نمودارهای فراوانی برای ضرایب تمرکز تنش نظری از چندین شرایط بارگذاری اساسی و هندسه قطعه است. نمودارهای دیگری نیز از Peterson داریم.[۲]

وارسی اجزای محدود (FEA) را هم می‌توان برای یافتن ضرایب تمرکز تنش به‌کار برد. بهبودهایی درباره K_t و K_{ts} برای گوشهٔ پلهٔ میلمحورها از سوی Tipton، Sorem، و Rolovic گزارش شده است.[۳]

۶-۳ نظریه‌های شکست یا خرابی (Failure Theories)

بخش ۶-۱ برخی داده‌های شناخت ناتوانی در انجام وظیفه را نشان داد. رخدادهایی، چون واپیچش، تغییر دائمی یا گسیختگی، از جلوه‌های خرابی یک قطعه ماشین است. ماشین‌های آزمون در سال‌های 1700 رخ نمودند و نمونه‌ها را با کشش، خمش و پیچش در فرایندهای بارگذاری ساده آزمودند. تجربه گردآوری این داده‌ها در شکل‌گیری بستر کرنش یاریگر شد. Cauchy تنش، کرنش و ثابت‌های کشسان را چنان به‌هم پیوست که امروز آن را نظریه کشسانی (theory of elasticity) گویند. بشر همواره در پی یافتن راه ساده‌ای برای شناخت "مکانیزم" شکست بوده است. بسان همه‌چیز، اصل گرفتن آن به پیش‌بینی‌هایی انجامید و این پیش‌بینی‌ها با به‌کارگیری داده‌های تازه سنجیده شد. ایده‌ها بهبود یافت و فرایند آن بسان اندیشیدن همواره پی دارد.

اگر مکانیزم شکست ساده است، پس آزمون‌های ساده می‌تواند سرنخ‌هایی به‌دست دهد. راستی، ساده چیست؟ آزمون کشش، تک‌محوری است (یعنی ساده) و افزایش طول‌ها در راستای محور از همه بزرگ‌تر است، پس می‌توان کرنش‌ها را اندازه گرفت و تنش‌ها را تا "شکست" پی‌برد. چی مهم است: تنش بحرانی، کرنش بحرانی، انرژی بحرانی؟ آیا رشد دایره‌های Mohr، که در شکل ۴-۱۴ آمد، تا جایی که "به چیزی بخورند" ادامه دارد؟ اگر شد، چی؟ اگرنه، مهم چیست؟ در چندین بخش بعد، نظریه‌های شکست را که به پاسخ برخی از این پرسش‌ها یاری رسانده نشان می‌دهیم.

بدبختانه، هیچ نظریهٔ عمومی شکست برای همه مواد با خواص گوناگون و حالت‌های تنش نداریم. درعوض، طی سالیان دراز، فرضیه‌هایی چند به فرمول درآمده و آزمون شده‌اند تا آنکه امروز به کاربری رسیده‌اند. با پذیرش آنها، این "کارآمدی"ها را به‌شکل **نظریه‌ها** می‌گیریم، چنانکه بیشتر طراحان چنین می‌کنند.

رفتار فلز از نظر ساختمان به‌طور مرسوم به دوگونه شکل‌پذیر و ترد است، هرچند که در شرایط ویژه، یک ماده که به‌طور معمول شکل‌پذیر خوانده می‌شود می‌تواند در حالت ترد بشکند (نگ. بخش ۶-۱۳). موادی که $\varepsilon_f \geq 0.05$ باشد را شکل‌پذیر می‌دانند و مقاومت تسلیم کششی و فشاری آنها قابل شناسایی و اغلب یکسان است ($S_{yt} = S_{yc} = S_y$). مواد ترد، با $\varepsilon_f < 0.05$، مقاومت تسلیم قابل شناسایی ندارند و به‌طور مرسوم با مقاومت‌های نهایی کششی S_{ut} و فشاری S_{uc}شان شناخته می‌شوند (که S_{uc} را هم با

---

2. R. E. Peterson, *Stress Concentraion Factors*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

3. S. M. Tipton, J. R. Sorem Jr., and R. D. Rolovic, "Updated Stress-Concentration Factors for Filleted Shafts in Bending and Tension," *Trans. ASME., Journal of Mechanical Design*, vol. 118, September 1996, pp. 321–327.

کمیت مثبت می‌دهند). نظریه‌هایی که به‌طور معمول پذیرفته شده‌اند چنین‌اند:

مواد شکل‌پذیر (با معیار تسلیم)

- بیشترین تنش برشی (MSS)، بخش ۶-۴
- انرژی واپیچش (DE)، بخش ۶-۵
- Coulomb-Mohr شکل‌پذیر (DCM) بخش ۶-۶

مواد ترد (معیار شکست یا پارگی)

- بیشترین تنش عمودی (MNS)، بخش ۶-۸
- Coulomb-Mohr ترد (BCM) و بهبودها، بخش ۶-۹

خواهان یک نظریه پذیرفته شده همه‌جانبه برای هر نوع ماده‌ایم، ولی به این یا آن دلیل، همه آنها به‌کار می‌رود. در آینده، نکات لازم برای گزینش یک نظریه بخصوص را می‌آوریم. نخست مبانی این نظریه‌ها را می‌آوریم و در چند نمونه به‌کار می‌بریم.

۶-۴ نظریه بیشترین تنش برشی برای مواد شکل‌پذیر (Maximum-Shear-Stress Theory for Materials)

نظریه بیشترین تنش برشی پیش‌بینی می‌کند که **تسلیم آنگاه آغاز می‌شود که بیشترین تنش برشی در هر جزء برابر یا بیش از بیشترین تنش برشی در نمونه آزمون کشش از همان جنس در آغاز تسلیم باشد.** نظریه MSS را نظریه ***Tresca*** یا ***Guest*** هم می‌گویند.

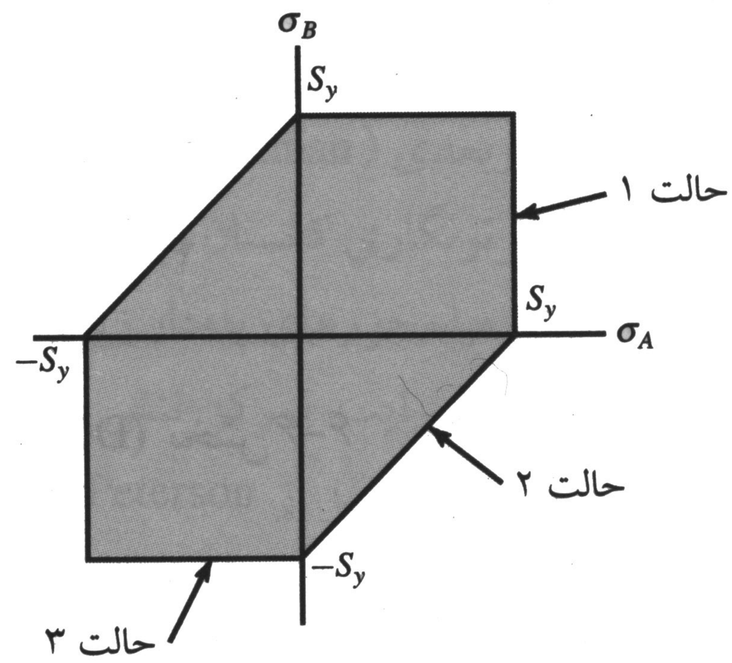
بسیاری از نظریه‌ها براساس نتیجه‌گیری از آزمون کشش پایه‌گذاری می‌شوند. آنگاه که یک تسمه از ماده شکل‌پذیر زیر کشش باشد، خطوط لغزش (آنها را **خطوط *Lüder*** گویند) با زاویه به‌تقریب $45°$ نسبت به محور تسمه شکل می‌گیرند. این خطوط لغزش در آغاز تسلیم پدید می‌آیند و با ادامه بار تا پارگی، خطوط پارگی هم تحت همین زاویه به‌تقریب $45°$ نسبت به محور کشش دیده می‌شوند. چون تنش برشی در زاویه $45°$ نسبت به محور کشش به بیشترین مقدار می‌رسد، تصور ما از اینکه مکانیزم شکست همین است منطقی می‌نماید. در بخش بعد نشان می‌دهیم که اندکی بیش از این پیش می‌رود. به‌هرحال، چنین برمی‌آید که نظریه MSS مقبول اما در پیش‌بینی شکست محتاط است و چون مهندسان خوی محتاط دارند، اغلب آن را به‌کار می‌برند.

برگردیم به تنش کششی ساده که $\sigma = P/A$ است و بیشترین تنش برشی در سطح $45°$ نسبت به سطح کشش رخ می‌دهد و مقدارش $\tau_{\max} = \sigma/2$ پس بیشترین تنش برشی در تسلیم برابر $\tau_{\max} = S_y/2$ است. برای حالت عمومی تنش، سه تنش اصلی با ترتیب $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ را تعیین می‌کنیم. پس بیشترین تنش برشی $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ است (شکل ۴-۱۴ را ببین)، و برای حالت عمومی تنش، نظریه بیشترین تنش برشی، تسلیم را چنین پیش‌بینی می‌کند

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \qquad \text{یا} \qquad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y \tag{۱-۶}$$

بدان که این معادله می‌گوید که مقاومت تسلیم برشی برابر با

$$S_{sy} = 0.5 S_y \tag{۲-۶}$$



شکل ۶-۱۵

نظریه بیشترین تنش برشی (MSS) برای تنش دوبعدی (صفحه‌ای) که σ_A و σ_B دو تنش اصلی غیرصفر هستند.

است که چنانکه خواهیم دید حدود 15 درصد کم است (محتاط).

برای کار طراحی، مع. (۶-۱) را با ضریب ایمنی n همراه می‌کنیم، یعنی

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n} \tag{۳-۶}$$

مسایل تنش دوبعدی که در آن یکی از تنش‌های اصلی صفر باشد بسیار رایج است و دو تنش دیگر σ_A و σ_B از مع. (۴-۱۳) به‌دست می‌آید. اگر $\sigma_A \geq \sigma_B$ بگیریم، برای کاربرد مع. (۶-۱) در تنش دوبعدی سه حالت پیش می‌آید.

حالت ۱: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ پس $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = 0$ است. مع. (۶-۱) در حالت تسلیم مختصرتر می‌شود

$$\sigma_A \geq S_y \tag{۴-۶}$$

حالت ۲: $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ که $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = \sigma_B$، و مع. (۶-۱) در این‌جا چنین است

$$\sigma_A - \sigma_B \geq S_y \tag{۵-۶}$$

حالت ۳: $\sigma_B \geq \sigma_A \geq 0$. در این حالت $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_3 = \sigma_B$، و مع. (۶-۱) چنین می‌شود

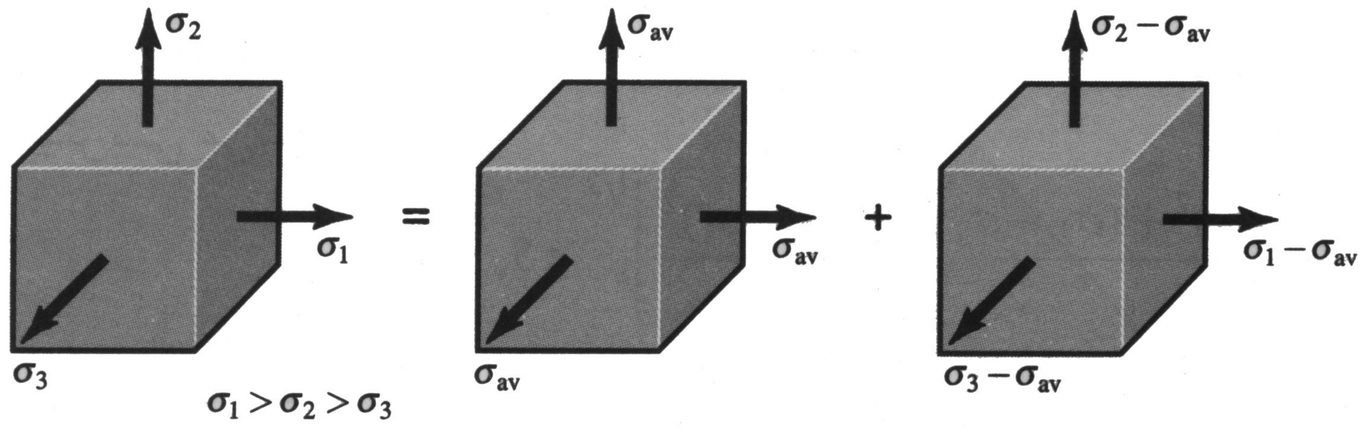
$$\sigma_B \geq -S_y \tag{۶-۶}$$

مع. (۶-۴) تا (۶-۶) را در شکل ۶-۱۵ با سه خط در صفحه σ_A و σ_B نشان داده‌ایم. خطوط بی‌نشان دیگر برای حالت $\sigma_B \geq \sigma_A$ هستند که به‌کار نمی‌آیند. مع. (۶-۴) تا (۶-۶) را می‌شود با دخالت ضریب ایمنی n به معادله‌های طراحی بدل کرد.

۶-۵ نظریه انرژی واپیچش برای مواد شکل‌پذیر (Distortion-Energy Theory for Ductile Materials)

نظریه انرژی واپیچش، پیش‌بینی می‌کند که **تسلیم هنگامی رخ می‌دهد که انرژی کرنش واپیچش در یک حجم واحد ماده، به انرژی کرنش واپیچش حجم واحد در تسلیم کشش یا فشار ساده همان ماده برسد یا بیش از آن شود.**

نظریه انرژی واپیچش (DE) از رفتار مواد شکل‌پذیر با تنش هیدرواستاتیک سرچشمه می‌گیرد که در آن مقاومت‌های تسلیم خیلی بیش از داده‌های آزمون ساده را از خود نشان می‌دهند. پس یقین داریم که تسلیم یک پدیدهٔ کشش یا فشار ساده نیست بلکه به‌گونه‌ای به واپیچش زاویه‌ای جزء زیر تنش بستگی



(الف) تنش‌های سه‌محوری **(ب)** جزء هیدرواستاتیک **(ج)** جزء واپیچشی

شکل ۶-۱۶

(الف) یک جزء با تنش‌های سه‌محوری، که در آن تغییر حجم، و واپیچش زاویه‌ای هر دو رخ می‌دهد؛ (ب) جزیی که زیر کشش هیدوراستاتیک است فقط تغییر حجم می‌دهد؛ (ج) جزء بدون تغییر حجم، واپیچش زاویه‌ای دارد.

دارد. برای رسیدن به این نظریه، شکل ۶-۱۶الف را ببین که یک حجم واحد زیر حالت تنش سه‌محوری σ_1، σ_2، و σ_3 است. حالت تنش در شکل ۶-۱۶ب حالت کشش اما با تنش‌های σ_{av} است و با همان راستاهای اصلی شکل ۶-۱۶الف فرمول ساده σ_{av} چنین است

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad \text{(الف)}$$

پس این جزء در شکل ۶-۱۶ب، تغییر حجم خالص می‌دهد یعنی واپیچش زاویه‌ای ندارد. اگر σ_{av} را مؤلفه‌ای از σ_1، σ_2، و σ_3 بدانیم. می‌توان این مؤلفه را از آنها کم کرد تا حالت تنش شکل ۶-۱۶ج به‌دست آید. این جزء زیر واپیچش زاویه‌ای خالص و بی‌تغییر حجم است.

به‌یاری جدول ۴-۲، انرژی کرنش حجم واحد زیر سه تنش اصلی را می‌یابیم

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_1\sigma_1 + \epsilon_2\sigma_2 + \epsilon_3\sigma_3) = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \qquad \text{(ب)}$$

u_v از مع. (ب) به‌دست می‌آید. چنین،

$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E}(1-2\nu) \qquad \text{(ج)}$$

اکنون اگر مجذور مع. (الف) را در مع. (ج) بگذاریم و ساده کنیم چنین می‌شود

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1) \qquad (۶-۷)$$

پس، برای انرژی واپیچش باید مع. (۶-۷) از مع. (ب) کم شود. این‌جور،

$$u_d = u - u_v = \frac{1+\nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right] \qquad (۶-۸)$$

ببین! اگر $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ باشد، انرژی واپیچش صفر می‌شود. برای آزمایش کشش ساده در تسلیم $\sigma_1 = S_y$ و $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ و از مع. (۶-۸) انرژی واپیچش چنین است

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E}S_y^2 \qquad (۶-۹)$$

پس در حالت عمومی تنش که مع. (۶-۸) باشد، اگر مع. (۶-۸) برابر یا بیش از مع. (۶-۹) شود، تسلیم پیش‌بینی می‌شود. این‌جور

$$\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \geq S_y \qquad (۶-۱۰)$$

اگر حالت تنش، کشش ساده σ بود، تسلیم هنگامی رخ می‌داد که $\sigma \geq S_y$. پس سمت چپ مع. (۶-۱۰) را می‌توان یک **تنش منفرد، معادل**، یا **مؤثر** برای حالت کلی تنش σ_1، σ_2، و σ_3 پنداشت. این تنش مؤثر را **تنش *Von Mises***، σ' گویند که به‌نام دکتر R. von Mises که در پدید آمدن این نظریه شرکت داشته است. پس می‌توان مع. (۶-۱۰) را برای تسلیم چنین نوشت

$$\sigma' \geq S_y \qquad (۶-۱۱)$$

که تنش Von Mises برابر است با

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \qquad (۶-۱۲)$$

برای تنش دوبعدی (صفحه)، اگر σ_A و σ_B را دو تنش غیرصفر بگیریم. از مع. (۶-۱۲) چنین داریم

$$\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2} \qquad (۶-۱۳)$$

مع. (۶-۱۳) مقطع یک بیضی دوران یافته در صفحه σ_A و σ_B است که در شکل ۶-۱۷ با $\sigma' = S_y$ می‌بینی. خط‌چین‌ها نمایش نظریه MSS است که محدودتر از نظریه انرژی واپیچش دیده می‌شوند، پس محتاط‌تر است.[۴]

اگر مؤلفه‌های xyz تنش سه‌بعدی را به‌کار بریم، تنش von Mises چنین می‌شود

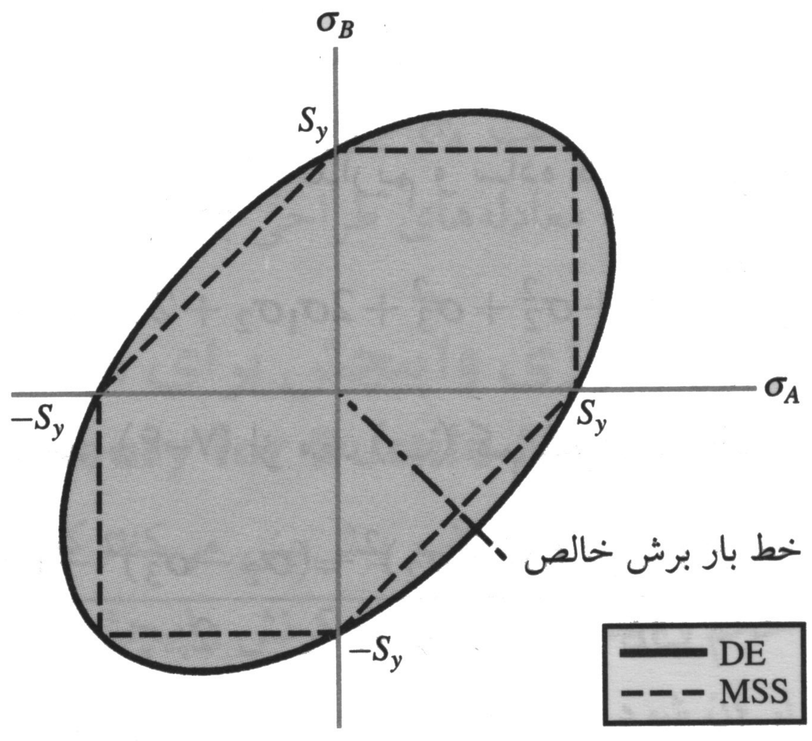
$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]^{1/2} \qquad (۶-۱۴)$$

و برای تنش صفحه‌ای

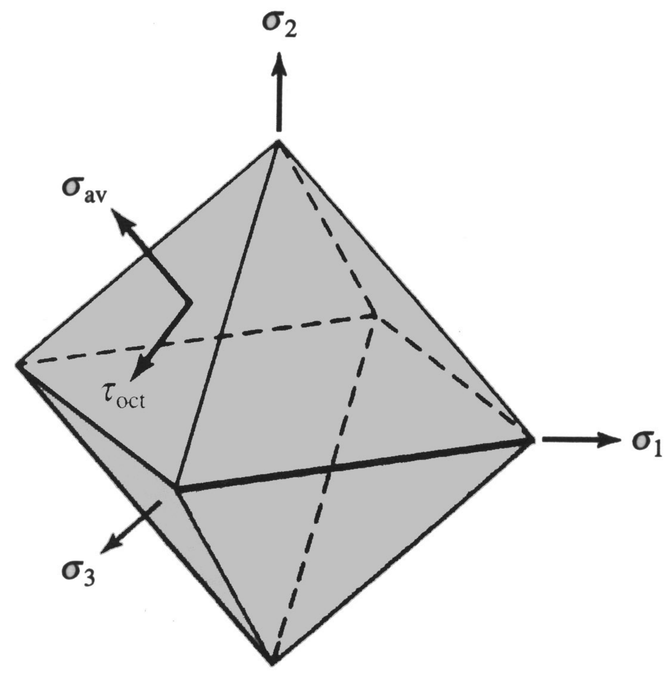
$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \qquad (۶-۱۵)$$

شکل ۶-۱۷

نظریه انرژی واپیچش (DE) برای حالت‌های تنش صفحه‌ای، این شکل نمایش نقاط به‌دست آمده از مع. (۶-۱۳) با $\sigma' = S_y$ است.



۴. می‌توان معادله‌های سه‌بعدی برای DE و MSS نسبت به محورهای مختصات سه‌بعدی σ_1، σ_2، و σ_3 کشید. سطح شکست برای DE یک استوانه گرد است که محورش نسبت به هریک از محورهای تنش اصلی زاویه 45° [!. م.] می‌سازد، حال آن‌که سطح MSS یک منشور شش‌وجهی محاطی درون استوانه است.



شکل ۶-۱۸

سطوح هشت‌وجهی.

نظریه انرژی واپیچش نام‌های دیگری هم دارد:

- نظریه von Mises یا von Mises–Hencky
- نظریه انرژی برشی
- نظریه تنش برشی هشت وجهی

با درک تنش برشی هشت‌وجهی، نوری بر چرایی محتاطانه بودن نظریه MSS می‌افشاند. یک جزء مستقل را در نظر بگیر که در آن تنش‌های عمودی وارد بر هرسطح برابر تنش هیدرواستاتیک σ_{av} باشد. هشت سطح متقارن نسبت به راستاهای اصلی شامل این تنش است. این سطوح یک هشت وجهی همچون شکل ۶-۱۸ پدید می‌آورد. تنش‌های برشی روی این سطوح برابرند و آنها را **تنش‌های برشی هشت‌وجهی** گویند (در شکل ۶-۱۸ تنها یکی از سطوح هشت‌وجهی نشان خورده). ضمن تبدیل‌های مختصات، تنش برشی هشت‌وجهی چنین می‌شود[۵]

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2} \qquad (۱۶-۶)$$

بنا به نظریه تنش‌برشی هشت‌وجهی، **پیدایش شکست را هنگامی می‌دانیم که تنش برشی هشت‌وجهی، در هر حالت تنش با تنش برشی هشت‌وجهی در نمونه آزمایش کشش ساده در لحظه شکست، برابر یا بیش از آن شود.**

همچون گذشته، بنا به نتایج آزمون کشش، هنگامی تسلیم رخ می‌دهد که $\sigma_1 = S_y$ و $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ باشد. از مع. (۶-۱۶)، تنش برشی هشت‌وجهی در این وضع

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} S_y \qquad (۱۷-۶)$$

در حالت تنش عمومی، اگر مع. (۶-۱۶) برابر یا بزرگ‌تر از مع. (۶-۱۷) شود، انتظار شکست داریم. مختصر اینکه:

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \geq S_y \qquad (۱۸-۶)$$

---

5. For a derivation, see A. Higdon, E. H. Olsen, W. B. Stiles , J. A. Weese, and W. F. Riley, Mechanics of Materials, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 1985, pp. 493–495.

که همان مع. (۶-۱۰) است و گواه یکسان بودن نظریه بیشترین تنش برشی هشت‌وجهی با نظریه انرژی واپیچش است.

الگوی نظریه MSS، مشارکت تنش‌های عمودی روی سطوح °45 نمونه کشش را نادیده می‌گیرد. حال آنکه این تنش‌ها $P/2A$، و تنش‌های هیدرواستاتیک $P/3A$ است. این‌جاست که فرق بین دو نظریه آشکار می‌شود، MSS و DE.

عملیات ریاضی که صرف تشریح نظریه DE شده شاید مانع شناخت ارزش و خوبی دست‌آورد آن شود. معادله‌هایی که دادیم، ارائه پیچیده‌ترین حالت تنش را تنها با یک کمیت، تنش von Mises، ممکن ساخته که سپس آن را به‌یاری مع. (۶-۱۱) با مقاومت تسلیم ماده می‌سنجیم. این معادله را به‌شکل معادله طراحی بیان می‌کنیم

$$\sigma' = \frac{S_y}{n} \tag{۶-۱۹}$$

نظریه انرژی واپیچش برای تنش هیدرواستاتیک هیچ خرابی پیش‌بینی نمی‌کند و با همهٔ داده‌های رفتار شکل‌پذیر همخوان است. پس نظریه‌ای است با گسترده‌ترین کاربرد برای مواد شکل‌پذیر و برای مسایل طراحی پیشنهاد می‌شود، مگر قرار بر نظریه دیگری باشد.

آخرین یادآوری به مقاومت تسلیم برشی مربوط است. اگر حالت تنش، برش خالص τ_{xy} و در تنش صفحه $\sigma_x = \sigma_y = 0$ باشد، برای تسلیم، مع. (۶-۱۵) با (۶-۱۱) چنین می‌شود

$$\sqrt{3\tau_{xy}^2} = S_y \qquad \text{یا} \qquad \tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577\,S_y \tag{۶-۲۰}$$

پس، پیش‌بینی نظریه انرژی واپیچش برای مقاومت تسلیم برشی چنین است

$$S_{sy} = 0.577 S_y \tag{۶-۲۱}$$

که چنانکه پیش‌ترها گفتیم، حدود 15 درصد بزرگ‌تر از پیش‌بینی نظریه MSS (به خط بار برش خالص در شکل ۶-۱۷ نگاه کن) است.

نمونه ۶-۱ یک فولاد گرم‌نوردشده با $S_{yt} = S_{yc} = 700$ MPa و کرنش حقیقی در گسیختگی $\varepsilon_f = 0.55$ است. برای حالات تنش اصلی زیر، ضریب اطمینان را برآورد کن.

(الف) 490, 490, 0 MPa

(ب) 210, 490, 0 MPa

(ج) 0, 490, −210 MPa

(د) 0, −210, −490 MPa

(ه) 210, 210, 210 MPa

راه حل چون $\varepsilon_f > 0.05$ و S_{yt} و S_{yc} باهم برابرند، ماده شکل‌پذیر است و نظریه انرژی واپیچش (DE) به‌کار می‌رود. نظریه بیشترین تنش برشی (MSS) را با نتایج DE هم خواهیم سنجید. بدان که حالات a تا d حالات تنش صفحه‌ای هستند.

(الف) ترتیب تنش‌های اصلی $\sigma_1 = 490$ MPa، $\sigma_2 = 490$ MPa، و $\sigma_3 = 0$ است.

DE، از مع. (۶-۱۳)،

$$\sigma' = \left[490^2 - 490(490) + 490^2\right]^{1/2} = 490 \text{ MPa}$$

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{490} = 1.43$$

MSS، حالت ۱، به‌یاری مع. (۶-۴)،

$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{700}{490} = 1.43$$

(ب) تنش‌های اصلی به‌ترتیب $\sigma_1 = 490$ MPa، $\sigma_2 = 210$ MPa، و $\sigma_3 = 0$ است.

DE
$$\sigma' = \left[490^2 - 490(210) + (210)^2\right]^{1/2} = 425.8 \text{ MPa}$$

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{425.8} = 1.64$$

MSS، حالت ۱، به‌یاری مع. (۶-۴)،

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{700}{490} = 1.43$$

(ج) تنش‌های اصلی به‌ترتیب $\sigma_1 = 490$ MPa، $\sigma_2 = 0$، و $\sigma_3 = -210$ MPa است.

DE
$$\sigma' = \left[490^2 - 490(-210) + (-210)^2\right]^{1/2} = 622.2 \text{ MPa}$$

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{622.2} = 1.13$$

MSS، حالت ۲، به‌یاری مع. (۶-۵)،

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma_A - \sigma_B} = \frac{700}{490 - (-210)} = 1.00$$

(د) تنش‌های اصلی به‌ترتیب $\sigma_1 = 0$، $\sigma_2 = -210$ MPa، و $\sigma_3 = -490$ MPa است.

DE
$$\sigma' = \left[(-490)^2 - (-490)(-210) + (-210)^2\right]^{1/2} = 425.8 \text{ MPa}$$

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{425.8} = 1.64$$

MSS، حالت ۳، به‌یاری مع. (۶-۶)،

پاسخ
$$n = -\frac{S_y}{\sigma_B} = -\frac{700}{-490} = 1.43$$

(ه) تنش‌های اصلی به‌ترتیب $\sigma_1 = 210$ MPa، $\sigma_2 = 210$ MPa، و $\sigma_3 = 210$ MPa است.

MSS، از مع. (۶-۱۲)،

$$\sigma' = \left[\frac{(210-210)^2 + (210-210)^2 + (210-210)^2}{2}\right] = 0 \text{ MPa}$$

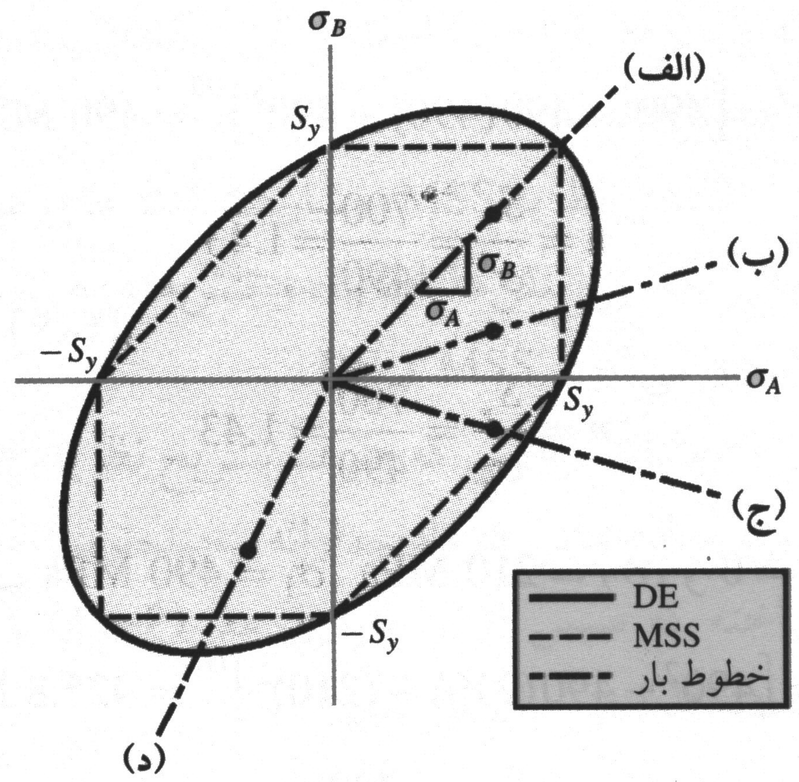
پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{0} \rightarrow \infty$$

MSS، از مع. (۶-۳)،

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{700}{210 - 210} \rightarrow \infty$$

شکل ۶-۱۹

خطوط بار برای نمونه ۶-۱.



(د)

جدول جمع‌بندی ضرایب ایمنی برای سنجش در زیر آمده است:

	(الف)	(ب)	(ج)	(د)	(ه)
DE	1.43	1.64	1.13	1.64	∞
MSS	1.43	1.43	1.00	1.43	∞

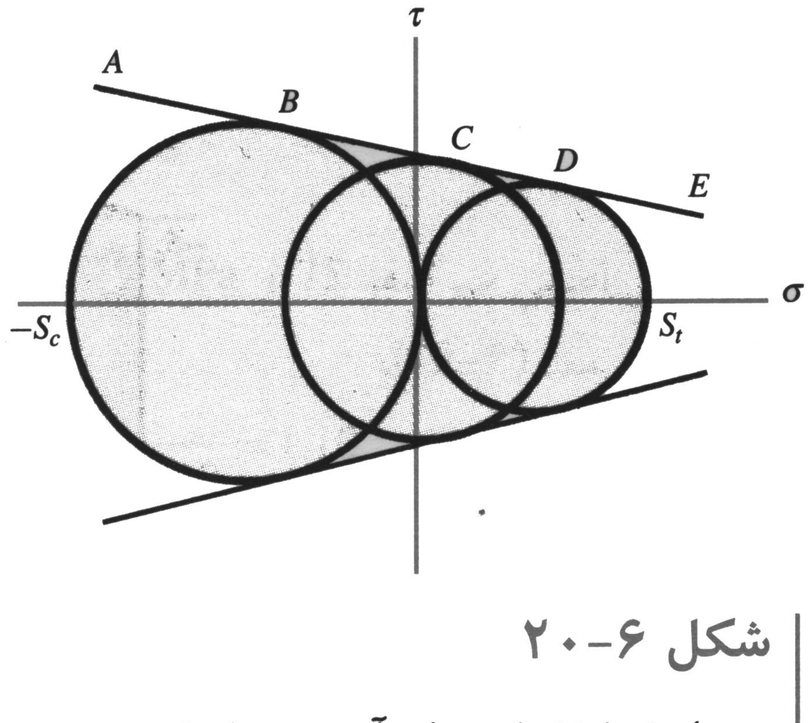
چون نظریه MSS روی یا درون مرز نظریه DE است، همیشه ضریب ایمنی را برابر یا کمتر از نظریه DE پیش‌بینی می‌کند که در جدول هم می‌بینیم. برای هر حالت بجز حالت (ه)، مختصات و خطوط بار در صفحه σ_A و σ_B در شکل ۶-۱۹ دیده می‌شود. حالت (ه) تنش صفحه نیست. ببین که خط بار برای حالت (الف) تنها تنش صفحه‌ای ماست که باهم توافق دارند، پس ضریب ایمنی یکسان دارند.

۶-۶ نظریه Coulomb-Mohr برای مواد شکل‌پذیر

مقاومت‌های فشاری همه‌مواد بامقاومت‌های کششی متناظرشان یکسان نیست. برای نمونه، مقاومت تسلیم فشاری آلیاژهای منیزیم شاید تا 50 درصد مقاومت تسلیم کششی آنها باشد. مقاومت نهایی چدن‌های خاکستری در فشار، بین ۳ تا ۴ برابر مقاومت کششی نهایی آنهاست. پس در این بخش به آن نظریه‌ها که بتوان برای پیش‌بینی شکست موادی که مقاومت‌های کششی آنها با مقاومت فشاری‌شان برابر نیست می‌پردازیم.

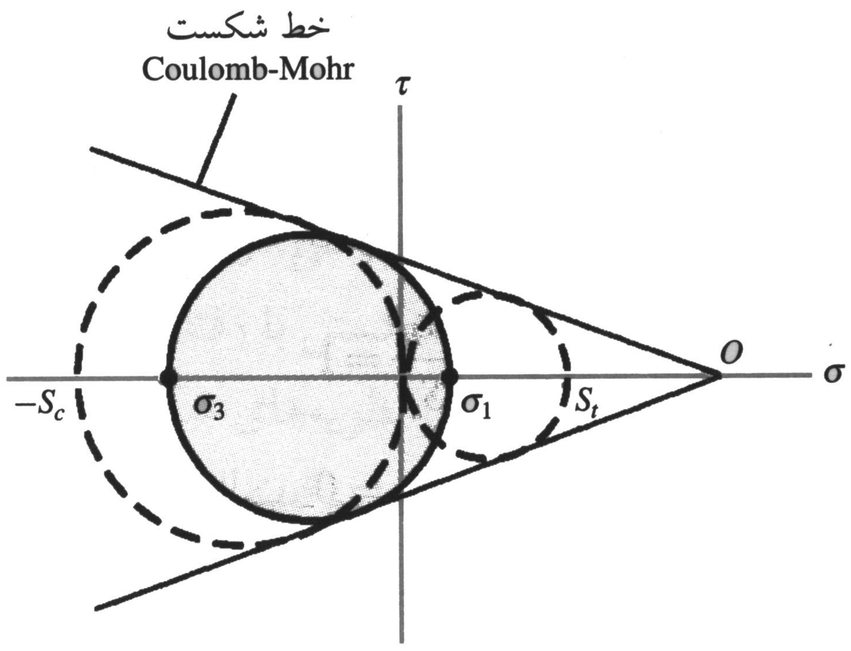
نظریه Mohr برمی‌گردد به سال 1900. زمانی که آن را مطرح کرد، کامپیوتری نبود، تنها خط‌کش محاسبه، پرگار و الگوی منحنی [نقشه کش‌ها در ایران آن را پیستوله نامند. م.] بود. روش‌های ترسیمی گذشته هنوز هم مفیدند. نظر Mohr بر پایه سه آزمون "ساده" کشش، فشار، و برش تا تسلیم، برای مواد شکل‌پذیر، یا شکستن بود. تعریف مقاومت تسلیم برشی با S_{sy} آسان‌تر از آزمون آن است.

دشواری‌های عملی به‌کنار، فرضیه Mohr به‌کارگیری نتایج آزمون‌های کشش، فشار و برش برای ساختن سه دایره همچون شکل ۶-۲۰ بود، تا مرزهای شکست به‌صورت خط *ABCDE*، در شکل، در بالای محور σ مشخص شود. لزومی ندارد که مرز شکست خط راست باشد. بحث سه دایره Mohr به



شکل ۶-۲۰

سه دایرهٔ Mohr، یکی برای آزمون فشار تک محوری، یکی برای آزمون برش خالص و یکی هم برای آزمون کشش تک محوری، برای تعریف شکست با فرضیه Mohr به‌کار می‌رود. S_t و S_c به‌ترتیب مقاومت‌های کششی و فشاری هستند که می‌توانند مقاومت تسلیم یا نهایی باشند.



شکل ۶-۲۱

منبع:
(From Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

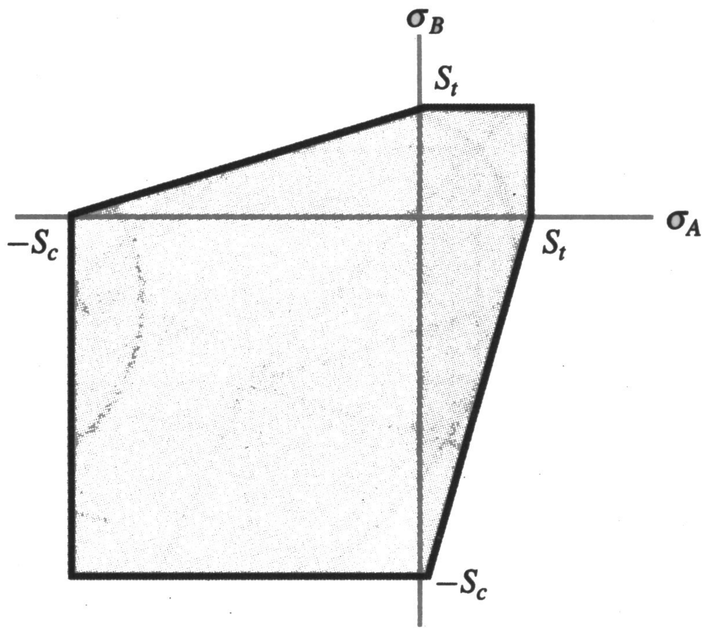
آن‌جا کشید که این سه دایره گویای حالت تنش در یک پیکره است (نگ. شکل ۴-۱۴) که ضمن بارگذاری رشد می‌کنند تا یکی از آنها به مرز شکست برسد و شکست مشخص شود. آیا شکل مرز شکست، خط راست یا دایره یا تابع درجه دوم بود؟ یک پرگار یا خم‌نگار، مرز میدان ایمن از شکست را تعیین می‌کرد.

تغییری در نظریه Mohr را **نظریه *Culomb-Mohr*** یا **نظریه مالش درونی** گویند که مرز ***BCD*** در شکل ۶-۲۰ را خط راست می‌گیرد. با این پندار، به مقاومت‌های کششی و فشاری نیاز است. ترتیب تنش‌های اصلی را همچون پیش $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ می‌گیریم. بزرگ‌ترین دایره، σ_1 و σ_3 را به‌هم وصل می‌کند، شکل ۶-۲۱. با میان‌یابی شعاع دایرهٔ خط پر با شعاع‌های دوایر خط‌چین با توجه به فواصل مرکزها، تا نقطه O، چنین داریم

$$\frac{\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}-\dfrac{S_t}{2}}{\dfrac{S_c}{2}-\dfrac{S_t}{2}}=\frac{\dfrac{S_t}{2}-\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}}{\dfrac{S_c}{2}+\dfrac{S_t}{2}}$$

و با ساده‌سازی، به‌شکل زیر می‌شود

$$\frac{\sigma_1}{S_t}-\frac{\sigma_3}{S_c}=1 \qquad (۶-۲۲)$$



شکل ۶-۲۲

نمودار نظریه Coulomb-Mohr، شکست برای حالت‌های تنش صفحه‌ای.

که چه مقاومت تسلیم یا مقاومت نهایی را می‌شود به‌کار برد.

برای تنش دوبعدی، آنگاه که دوتنش اصلی غیرصفر $\sigma_A \geq \sigma_B$ است، وضعی همچون سه حالت نظریه MSS، مع. (۶-۴) تا (۶-۶)، داریم:

حالت ۱: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$. در این حالت $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = 0$ است. مع. (۶-۱) با شرایط زیر به تسلیم می‌رسد.

$$\sigma_A \geq S_t \tag{۶-۲۳}$$

حالت ۲: $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$، این‌جا $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = \sigma_B$ است و مع. (۶-۲۲) چنین می‌شود

$$\frac{\sigma_A}{S_t} - \frac{\sigma_B}{S_c} = 1 \tag{۶-۲۴}$$

حالت ۳: $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ در این حالت، $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_3 = \sigma_B$ و مع. (۶-۲۲) چنین می‌دهد

$$\sigma_B \geq -S_c \tag{۶-۲۵}$$

نمودار این سه حالت به‌همراه قرار پیشین $\sigma_A \geq \sigma_B$ را در شکل ۶-۲۲ می‌بینی.

برای معادله‌های طراحی، به‌همراه ضریب ایمنی n، همه مقاومت‌ها را به n بخش کن. برای نمونه مع. (۶-۲۲) در شکل معادله طراحی چنین نوشته می‌شود

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = \frac{1}{n} \tag{۶-۲۶}$$

چون برای نظریه Coulomb-Mohr به دایرهٔ مقاومت برشی نیاز نیست می‌شود آن را از مع. (۶-۲۲) برگرفت. برای برش خالص τ، $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$، مقاومت تسلیم برشی در $\tau_{\max} = S_{sy}$ رخ می‌دهد و مع. (۶-۲۲) برای تسلیم، $S_{sy}/S_{yt} - (-S_{sy})/S_{yc} = 1$ است یا

$$S_{sy} = \frac{S_{yt} S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}} \tag{۶-۲۷}$$

نمونه ۶-۲ میلمحوری به‌قطر 25 mm زیر گشتاور پیچشی ایستای $230\ \text{N}\cdot\text{m}$ است. جنس آن از آلومینیم ریختگی 195-T6 با مقاومت تسلیم کششی 160 MPa و مقاومت تسلیم فشاری 170 MPa است که با ماشینکاری به‌قطر نهایی رسیده است. ضریب اطمینان میلمحور را برآورد کن.

راه حل چون N·m، cm، و MPa، اندازه‌های هماهنگی می‌سازند، قطر را به cm بیان می‌کنیم

$$\tau = \frac{16T}{\pi 2.5^3} = \frac{16(230)}{\pi 2.5^3} = 75 \text{ MPa}$$

دو تنش اصلی غیرصفر 75 و 75– MPa هستند که ترتیب آنها $\sigma_1 = 75$، $\sigma_2 = 0$، و $\sigma_3 = -75$ MPa است. از مع. (۶-۲۶)،

پاسخ

$$n = \frac{1}{\sigma_1/S_{yt} - \sigma_3/S_{yc}} = \frac{1}{75/160 - (-75)/170} = 1.10$$

یا به‌گونه‌ای دیگر از مع. (۶-۲۷)،

$$S_{sy} = \frac{S_{yt}S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}} = \frac{160(170)}{160+170} = 82.4 \text{ MPa}$$

و $\tau_{\max} = 75$ MPa. پس،

پاسخ

$$n = \frac{S_{sy}}{\tau_{\max}} = \frac{82.4}{75} = 1.10$$

۶-۷ جمع‌بندی شکست مواد شکل‌پذیر (Failure Ductile Materials Summary)

پس از مطالعه برخی از نظریه‌های گوناگون شکست، حال آنها را ارزیابی کرده و چگونگی کاربردشان در طراحی و تحلیل (وارسی) را نشان می‌دهیم. در این بخش، مطالعه‌مان را به مواد و قطعاتی محدود می‌کنیم که می‌دانیم شکستی با رفتار شکل‌پذیر دارند. موادی که شکست با رفتار ترد دارند را جداگانه بررسی می‌کنیم چون نظریه‌های شکست جداگانه می‌خواهند.

برای کمک به تصمیم‌گیری روی فرضیه مناسب و عملی برای شکست مواد شکل‌پذیر، Marin[۶] داده‌هایی از منابع فراوان گردآورد. نقاط برخی از این داده‌ها را برای مواد شکل‌پذیر در شکل ۶-۲۳ می‌بینیم.[۷] Marin برای آلیاژهای مس و نیکل هم داده‌های فراوانی گردآورده که به‌علت تراکم نقاط در شکل نیامده است. شکل ۶-۲۳ نشان می‌دهد که چه نظریه پیشترین تنش برشی یا نظریه انرژی واپیچش برای طراحی و وارسی موادی که با رفتار شکل‌پذیر می‌شکنند مقبول است. اگر خواستی، نظریه‌های دیگر را با قلم قرمز یا آبی روی شکل ۶-۲۳ بکش تا نارسایی یا ناکارآمدی‌شان را نشان دهی.

گزینش هریک از این دو نظریه به تصمیم طراح بسته است. برای طراحی، نظریه بیشترین تنش برشی آسان، سریع و محتاطانه است. اگر مسأله، یافتن چرایی شکست یک قطعه باشد، نظریه انرژی واپیچش از همه بهتر به‌کار می‌آید؛ شکل ۶-۲۳ نشان می‌دهد که مکان هندسی نظریه انرژی واپیچش نزدیک‌تر به ناحیه مرکزی نقاط داده‌ها می‌گذرد، پس به‌طور عام، پیش‌گوی بهتری برای شکست است.

برای مواد شکل‌پذیر با مقاومت تسلیم‌های S_{yt} کششی و S_{yc} فشاری نابرابر، نظریه Mohr بهترین نظریه‌ای است که داریم، با این‌حال، این نظریه نیازمند نتایج سه حالت جداگانه آزمون‌ها، ساخت نمایش

---

۶. Joseph Marin یکی از پیشگامان، گردآوری، بررسی و انتشار مطلب دربارهٔ شکست اجزای مکانیکی بود و کتاب‌ها و مقاله‌های بسیار در این‌باره نوشت و این‌هم مرجعی که اینجا به‌کار برده‌ایم.

Joseph Marin, *Engineering Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1952. (See pp. 156 and 157 for some data points used here.)

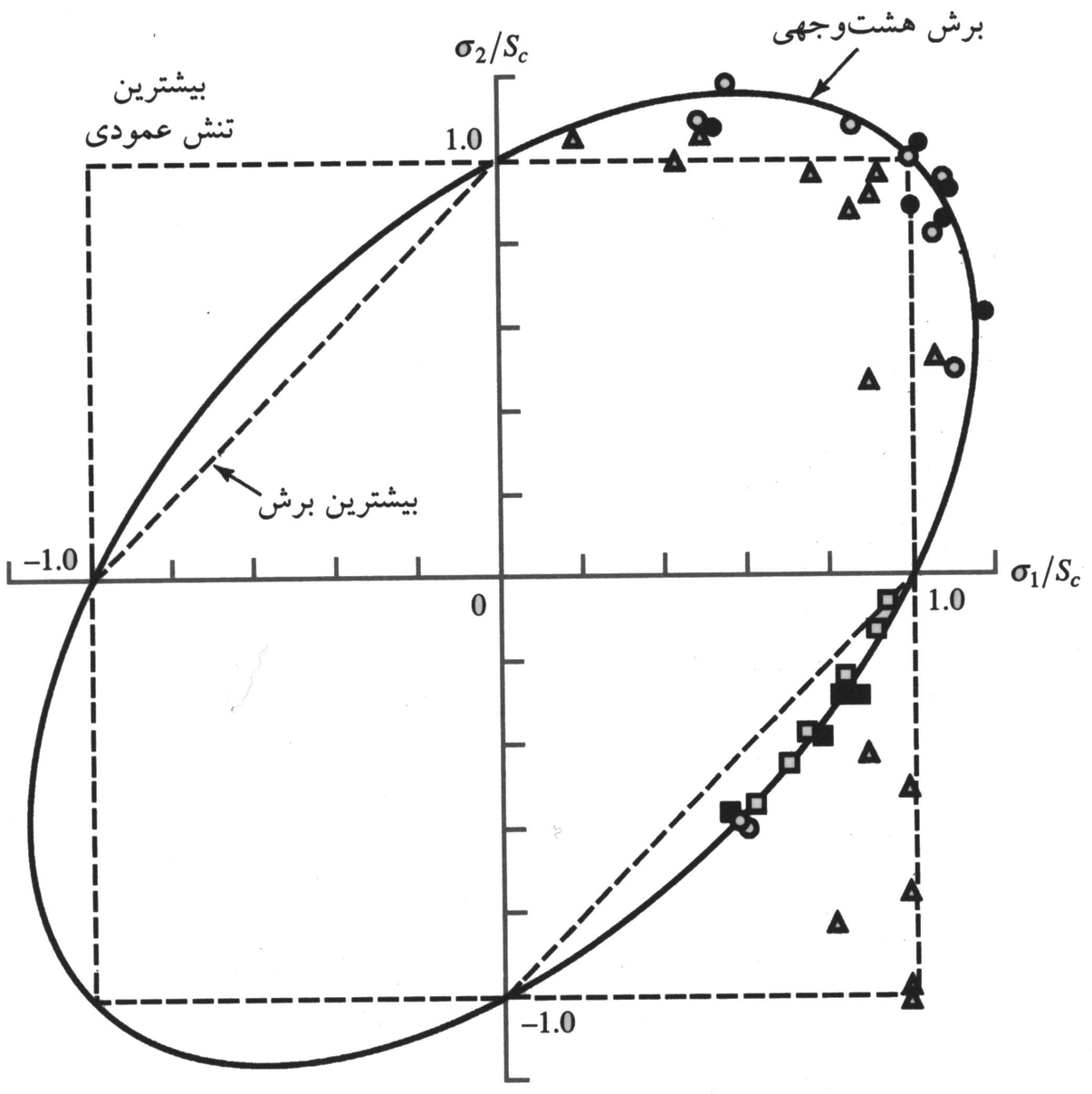
۷. بدان که برخی از داده‌هایی که در شکل ۶-۲۳ می‌بینی در اطراف مرز افقی بالا، جایی که $\sigma_B \geq \sigma_A$ است. این‌کار اغلب بدان خاطر با داده‌های شکست می‌شود تا از تراکم نقاط داده‌ها با قرنیه‌سازی نسبت به خط، $\sigma_B = \sigma_A$ بگریزیم.

شکل ۶-۲۳

مجموعه‌ای از داده‌های تجربی به‌همراه نظریه‌های شکست.

منبع:

Reproduced from fig. 7.11, p. 257, *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., N. E. Dowling, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1999.



تسلیم $(S_c = S_y)$

- فولاد Ni-Cr-Mo
- فولاد AISI 1023
- آلومینیم 2024-T4
- آلومینیم 3S-H

شکست $(S_c = S_{ut})$

- چدن خاکستری

ترسیمی مکان هندسی شکست، و خوراندن بزرگ‌ترین دایره **Mohr** به مکان هندسی شکست‌ها است. راه دیگر، به‌کارگیری نظریه **Coulomb-Mohr** است که تنها به مقاومت‌های تسلیم کششی و فشار نیاز دارد و کار با آن در شکل معادله آسان است.

نمونه ۶-۳ این نمونه، کاربرد یک نظریه شکست را برای تعیین مقاومت یک قطعه یا جزء مکانیکی نمایش می‌دهد، شاید هر ابهام میان عبارات **مقاومت یک قطعه ماشین**، **مقاومت مواد**، و **مقاومت یک نقطه از قطعه** را هم از میان ببرد.

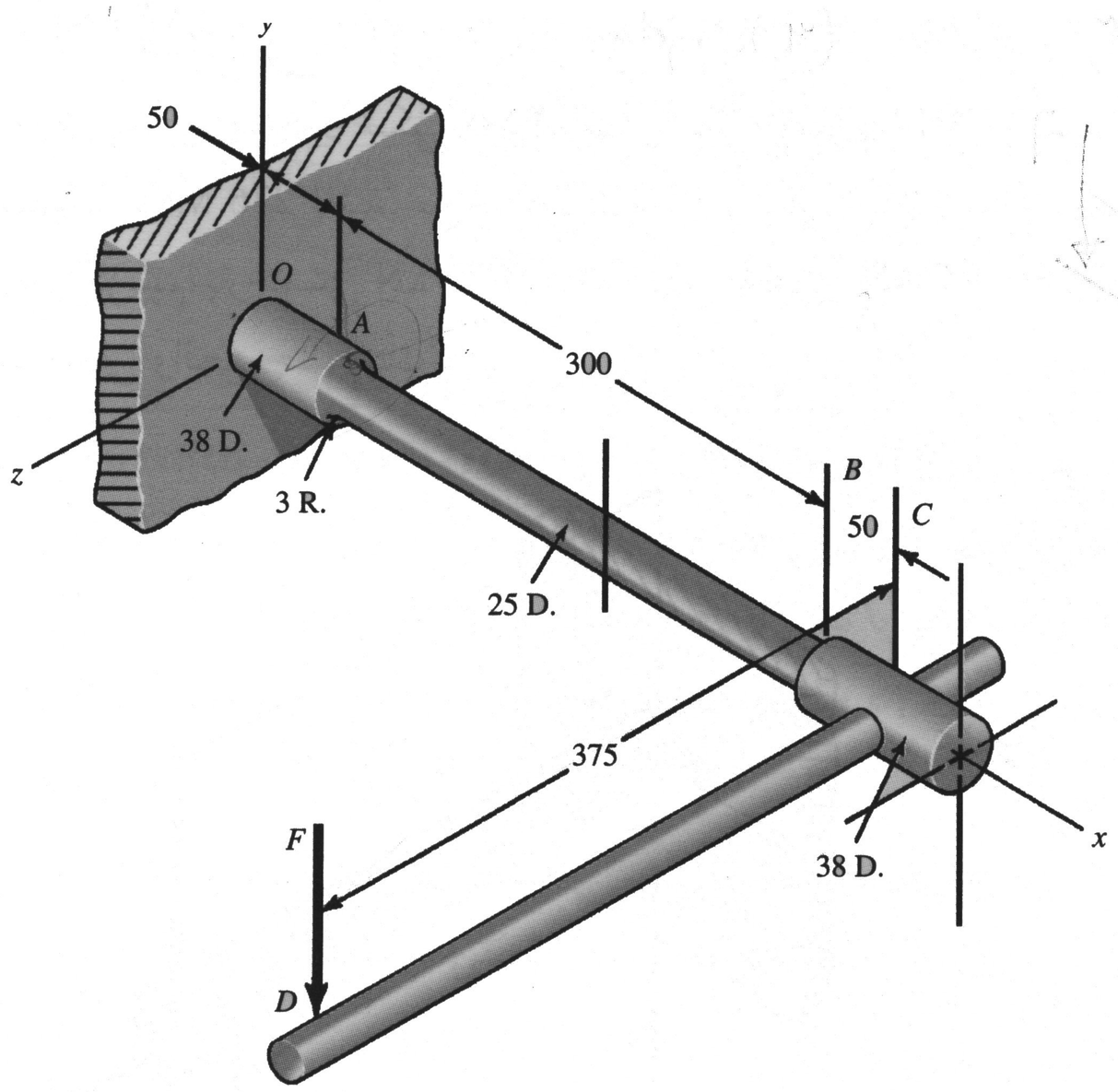
نیروی معین F در D نزدیک سر اهرمی به‌طول 375 mm همچون شکل ۶-۲۴ که به‌راستی شبیه آچار چرخ است وارد می‌شود و تنش‌های معینی در میله یک‌سر درگیر $OABC$ پدید می‌آورد. میله $OABC$ از فولاد AISI 1035 آهنگری و گرماکاری شده، جوری که مقاومت تسلیم (ASTM) آن دست‌کم 560 MPa است. گیریم که این قطعه پس از تسلیم بی‌ارزش شود. پس اگر نیروی F قطعه را به تسلیم رساند، مقاومت آن محسوب می‌شود. این نیرو را پیدا کن.

راه حل گیریم که اهرم DC به‌قدر کافی قوی است، پس اثری در مسأله ندارد. چون فولاد 1035 گرماکاری شده چیزی بیش از 50 درصد کاهش مقطع خواهد داشت، پس در دمای عادی شکل‌پذیر است. همچنین بدین معنی است که نیازی به بررسی تمرکز تنش نیست. جزء تنشی در سطح بالای مقطع A زیر تنش خمشی کششی، و پیچشی است. این نقطه روی مقطع قطر 25 mm ضعیف‌ترین مقطع و حاکم بر مقاومت کل مجموعه است. دو مؤلفه تنش چنین است

$$\sigma_x = \frac{M}{I/C} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(350F)}{\pi(25^3)} = 0.2282F \text{ MPa}$$

$$\tau_{zx} = \frac{T_r}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(375F)}{\pi(25^3)} = 0.1222F \text{ MPa}$$

| شکل ۶-۲۴



نظریه انرژی واپیچش را به‌کار می‌بریم، از مع. (۶-۱۵) چنین می‌یابیم

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2\right)^{1/2} = \left[(0.2282F)^2 + 3(0.1222F)^2\right]^{1/2} = 0.3112F \text{ MPa}$$

اگر تنش von Mises را برابر S_y بگیریم، F را به‌دست می‌آوریم

$$F = \frac{S_y}{0.3112} = \frac{560}{0.3112} = 1800 \text{ N}$$

پاسخ

در این نمونه، مقاومت ماده در نقطه A برابر 560 MPa است. قطعه می‌تواند تا $F = 1800$ N نیرو تحمل کند.

ببینیم چگونه نظریه MSS را به‌کار بریم. در نقطه‌ای که زیر تنش صفحه‌ای با تنها یک تنش عمودی غیرصفر و یک تنش برشی است، دو تنش اصلی غیرصفر σ_A و σ_B با علامت‌های مخالف هم دارد. پس حالت ۲ نظریه MSS به آن می‌خورد. از مع. (۴-۱۳)،

$$\sigma_A - \sigma_B = 2\left[\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2\right]^{1/2} = \left(\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2\right)^{1/2}$$

برای حالت ۲ نظریهٔ MSS، مع. (۶-۵) به‌کار می‌رود

$$\left(\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2\right)^{1/2} = S_y$$

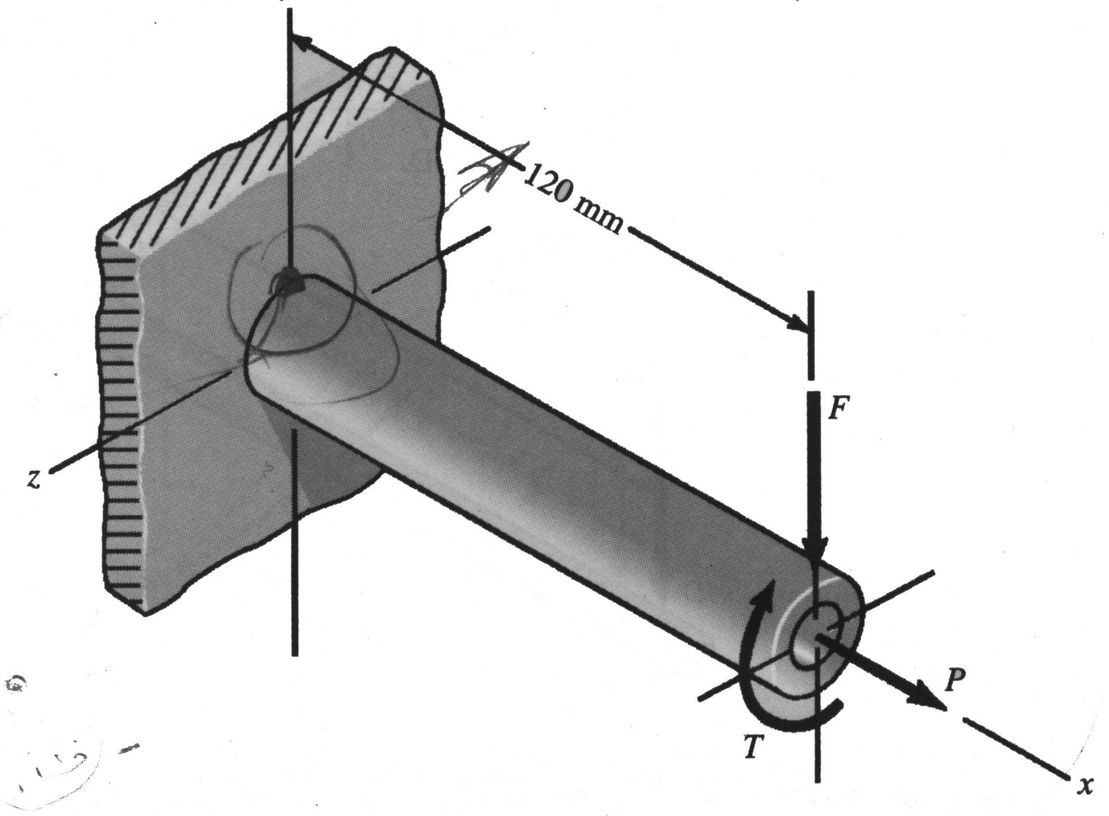
$$\left[(0.2282F)^2 + 4(0.1222F)^2\right]^{1/2} = 0.3344F = 560$$

$$F = 1675 \text{ N}$$

که حدود 7 درصد کمتر از آنچه از نظریه DE به‌دست آمده است. چنانکه پیش‌تر گفتیم، نظریه MSS محتاطانه‌تر از نظریه DE است.

نمونه ۶-۴ لوله یک‌سر درگیر همچون شکل ۶-۲۵ باید از آلیاژ الومینیم 2014 چنان ساخته شود که مقاومت تسلیم آن دست‌کم 276 MPa باشد. می‌خواهیم لوله را از یکی از اندازه‌های جدول الف-۸ با ضریب ایمنی $n_d = 4$ برگزینیم، بارخمشی $F = 1.75$ kN، کشش محوری $P = 9.0$ kN، و پیچش $T = 72$ N·m است. ضریب ایمنی واقعی چند است؟

شکل ۶-۲۵



راه حل چون بیشترین گشتاور خمشی $M = 120F$ است، تنش عمودی یک جزء در سطح بالای لوله در مبدأ مختصات برابر

$$\sigma_x = \frac{+P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{9}{A} + \frac{120(1.75)(d_o/2)}{I} = \frac{9}{A} + \frac{105\,d_o}{I} \qquad (۱)$$

که اگر سطح مقطع را به میلی‌متر بگیریم، تنش به GPa می‌شود.

تنش پیچشی در همان نقطه برابر

$$\tau_{zx} = \frac{Tr}{J} = \frac{72\,(d_o/2)}{J} = \frac{36\,d_o}{J} \qquad (۲)$$

برای دقت بیشتر، طراحی را بر پایه نظریه انرژی واپیچش پیش می‌بریم. همچون نمونهٔ پیش، تنش von Mises برابر با

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2\right)^{1/2} \qquad (۳)$$

بر پایه ضریب طراحی داده شده، σ' باید چنین باشد

$$\sigma' \le \frac{S_y}{n_d} = \frac{0.276}{4} = 0.0690 \text{ GPa} \qquad (۴)$$

که برای همخوانی با روابط (۱) و (۲)، همان واحد GPa را به‌کار بردیم.

با برنامه‌ریزی مع. (۱) تا (۳) روی یک برگه و وارد کردن اندازه‌های متری از جدول الف-۸، لولهٔ 42-×5- mm مقبول می‌نماید. برای این اندازه، تنش von Mises، $\sigma' = 0.06043$ GPa به‌دست می‌آید. پس ضریب ایمنی حقیقی چنین است

پاسخ
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{0.276}{0.06043} = 4.57$$

برای یک اندازه کوچک‌تر، 4- mm ×42-، $\sigma' = 0.07105$ GPa، و ضریب ایمنی آن

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{0.276}{0.07105} = 3.88$$

۶-۸ نظریه بیشترین تنش عمودی برای مواد ترد (Maximum-Normal-Stress Theory for Brittle Materials)

نظریه بیشترین تنش عمودی (MNS) می‌گوید که **شکست هنگامی رخ می‌دهد که یکی از سه تنش با مقاومت برابر یا بیش از آن شود.** بار دیگر تنش‌های اصلی را برای یک حالت تنش عمومی با ترتیب $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ می‌گیریم، پس این نظریه چنین پیش‌بینی می‌کند

$$\sigma_1 \geq S_{ut} \quad \text{یا} \quad \sigma_3 \leq -S_{uc} \tag{۶-۲۸}$$

که S_{ut} و S_{uc}، مقاومت‌های نهایی کششی و فشاری هردو با کمیت مثبت هستند.

برای تنش صفحه‌ای با تنش‌های اصلی که در مع. (۴-۱۳) دادیم، با $\sigma_A \geq \sigma_B$ مع. (۶-۲۸) چنین می‌شود

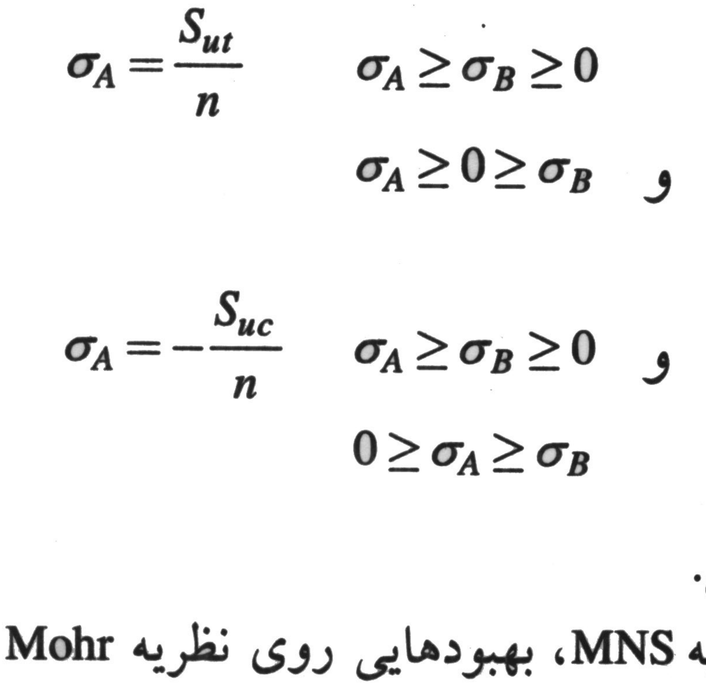
$$\sigma_A \geq S_{ut} \quad \text{یا} \quad \sigma_B \leq -S_{uc} \tag{۶-۲۹}$$

که در شکل ۶-۲۶ الف رسم شده است. همچون پیش، معادله‌های معیار شکست را می‌شود به معادله‌های طراحی بدل کرد. برای خطوط بار با $\sigma_A \geq \sigma_B$ دو مجموعه معادله می‌شود چنین نوشت

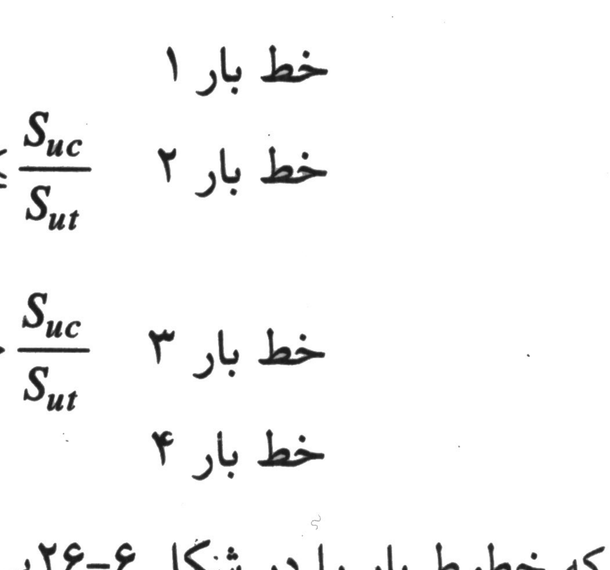
خط بار ۱	$\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$		$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n}$
خط بار ۲	$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$	و $\left\lvert\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right\rvert \leq \frac{S_{uc}}{S_{ut}}$	(۶-۳۰ الف)
خط بار ۳	$\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$	و $\left\lvert\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right\rvert > \frac{S_{uc}}{S_{ut}}$	$\sigma_A = -\frac{S_{uc}}{n}$
خط بار ۴	$0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$		(۶-۳۰ ب)

که خطوط بار را در شکل ۶-۲۶ب می‌بینی.

پیش از هر پیشنهاد دیگر دربارهٔ نظریه MNS، بهبودهایی روی نظریه Mohr برای مواد ترد را روشن می‌کنیم.



(ب)



(الف)

شکل ۶-۲۶

(الف) نمودار نظریه بیشترین تنش عمودی (MNS)، شکست برای حالت‌های تنش صفحه‌ای، هر حالت تنشی که درون مکان‌هندسی مرز شکست باشد ایمن است.
(ب) نمودار خط بار.

۹-۶ بهبودهای نظریه Mohr برای مواد ترد
(Modifications of the Mohr Theory for Brittle Materials)

سه بهبود در نظریه Mohr را برای مواد ترد می‌آوریم: نظریه Coulomb-Mohr ترد (BCM) و دو نظریه بهبودیافته Mohr که آنها را نظریه‌های بهبودیافته I-Mohr و II-Mohr گویند، نشانه آنها M1M و M2M است. معادله‌های این نظریه‌ها، محدود به تنش صفحه‌ای است که با همراهی ضریب ایمنی به‌شکل معادله‌های طراحی داده می‌شوند.

پیش از این در بخش ۶-۶، نظریه Coulomb-Mohr با مع. (۶-۲۳) تا (۶-۲۵) داده شد. معادله‌های طراحی آن برای مواد ترد چنین می‌شود

Coulomb-Mohr ترد

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0 \tag{۶-۳۱ الف}$$

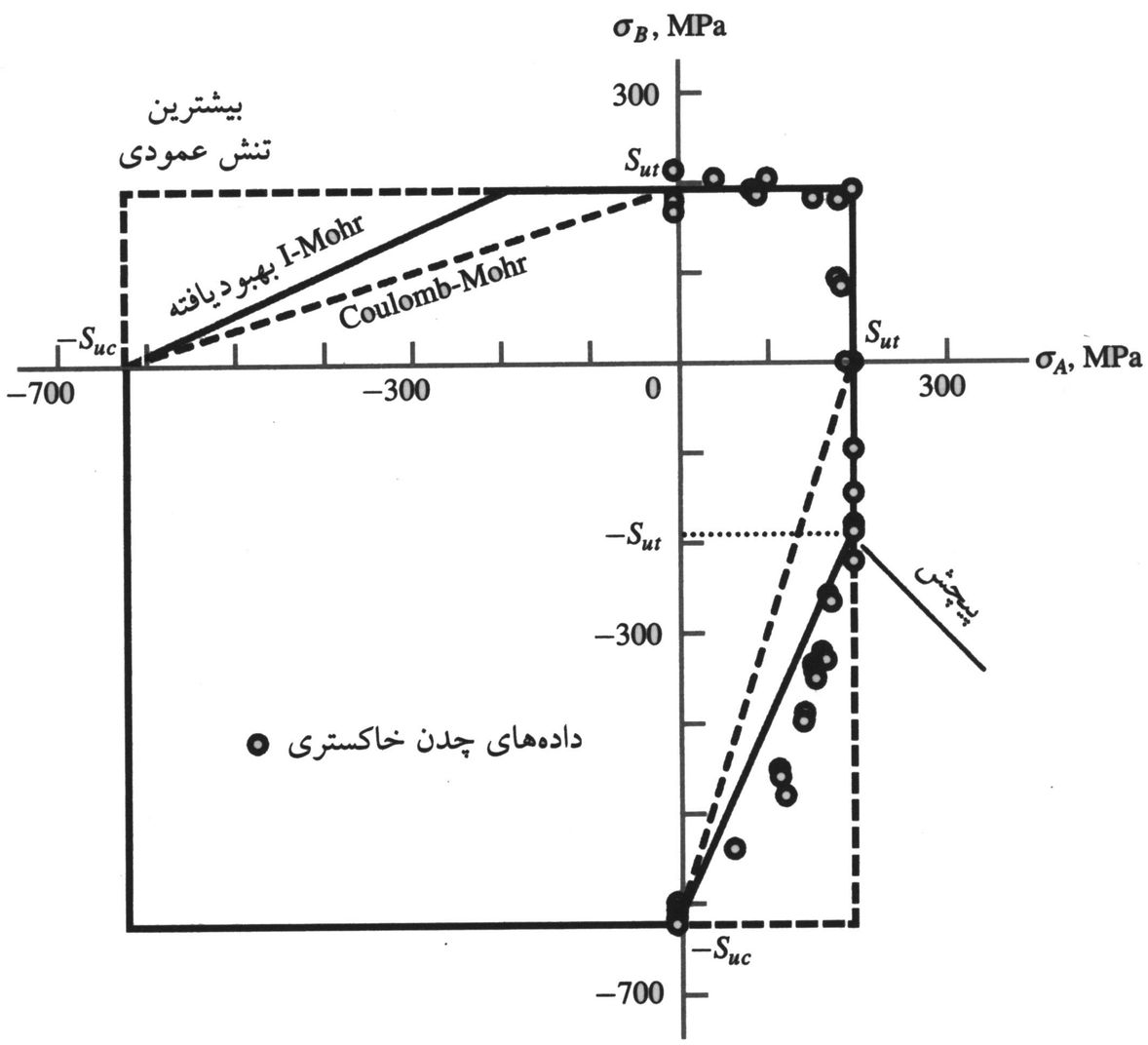
$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \qquad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \tag{۶-۳۱ ب}$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \qquad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B \tag{۶-۳۱ ج}$$

بر پایه داده‌هایی که در ربع چهارم شکل ۶-۲۷ می‌بینیم، نظریه بهبودیافته I-Mohr ربع چهارم را گسترده می‌کند.

I-Mohr بهبودیافته

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$
$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{و} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| \leq 1 \tag{۶-۳۲ الف}$$



شکل ۶-۲۷

داده‌های شکست تنش دو محوری چدن خاکستری دربرابرمعیارهای گوناگون شکست.

منبع:
Dowling, N. E., *Mechanical Behavior of Materials*, 2/e, 1999, p. 261. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersy.

$$\frac{(S_{uc}-S_{ut})\sigma_A}{S_{uc}S_{ut}}-\frac{\sigma_B}{S_{uc}}=\frac{1}{n}\qquad \sigma_A\geq 0\geq\sigma_B \quad \text{و} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right|>1 \tag{۶-۳۲ ب}$$

$$\sigma_B=-\frac{S_{uc}}{n}\qquad 0\geq\sigma_A\geq\sigma_B \tag{۶-۳۲ ج}$$

داده‌ها هنوز تا بیرون این ناحیه کش آمده‌اند. نظریه بهبودیافته **II-Mohr** شکل ناحیه ربع چهارم را در جایی که $|\sigma_A/\sigma_B|<1$ است به‌یاری رابطه پاره سهمی، بازتر می‌کند. این سهمی به‌شکل $a\sigma_B^2+b\sigma_B+c\sigma_A=1$ و جوری است که به راستای عمودی در نقطه $\sigma_A=-\sigma_B=S_{ut}$ مماس باشد.

II-Mohr بهبودیافته

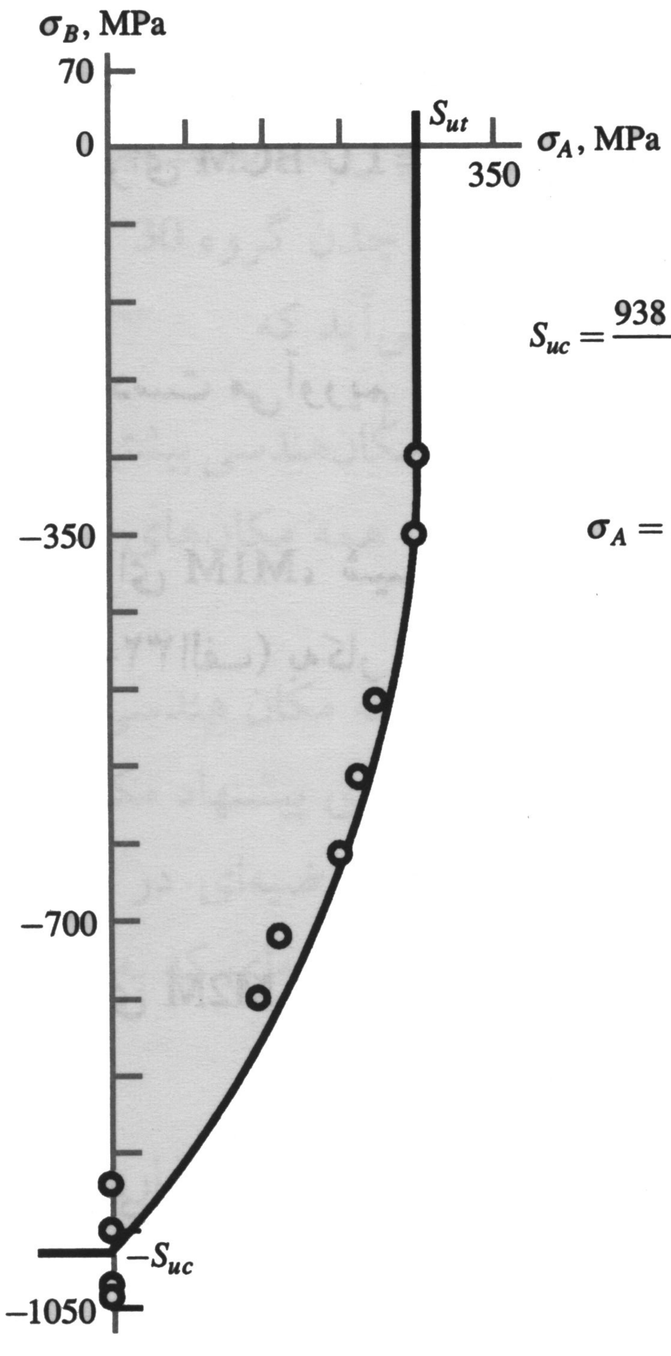
$$\sigma_A=\frac{S_{ut}}{n}\qquad \sigma_A\geq\sigma_B\geq 0$$
$$\sigma_A\geq 0\geq\sigma_B \quad \text{و} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right|\leq 1 \tag{۶-۳۳ الف}$$

$$\frac{n\sigma_A}{S_{ut}}+\left(\frac{n\sigma_B+S_{ut}}{S_{ut}-S_{uc}}\right)^2=1\qquad \sigma_A\geq 0\geq\sigma_B \quad \text{و} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right|>1 \tag{۶-۳۳ ب}$$

$$\sigma_B=-\frac{S_{uc}}{n}\qquad 0\geq\sigma_A\geq\sigma_B \tag{۶-۳۳ ج}$$

شکل ۶-۲۸ چگونگی همخوانی نظریه M2M را با برخی داده‌ها در ربع چهارم نشان می‌دهد.

σ_A, MPa	0	0	0	0	126	147	210	224	238	273	280
σ_B, MPa	−938	−980	−1036	−1043	−770	−714	−637	−581	−504	−350	−280



$$S_{uc}=\frac{938+980+1036+1043}{4}=999.6 \text{ MPa}$$

مع. (۶-۳۳ ب)

$$\sigma_A=280\left[1-\left(\frac{\sigma_B+280}{-719.6}\right)^2\right] \text{ MPa}$$

[مقادیر متری به تقریب است. م.]

شکل ۶-۲۸

داده‌های σ_A و σ_B در ربع چهارم برای چدن گروه 40 در سنجش با مکان هندسی شکست II-Mohr بهبودیافته. منبع داده‌ها:

منبع:

Charles F. Walton (ed.), *Iron Casting Handbook*, Iron Founders' Society, 1971, p. 215, Cleveland, Ohio.

نمونه ۶-۵ آچار شکل ۶-۲۴ در نمونهٔ ۶-۳ را می‌گیریم که از چدن و ماشین‌کاری شده است. مقاومت قطعه را متناسب با نیروی لازم برای شکست قطعه می‌گیریم. اگر جنس آن چدن ASTM گروه 30 باشد، بر پایه فرضیه زیر نیروی F را پیدا کن.

(الف) شکست بر پایه Coulomb-Mohr.

(ب) شکست بر پایه بهبود I-Mohr.

(ج) شکست بر پایه بهبود II-Mohr.

راه حل قطعه DC را به‌قدر کافی قوی می‌گیریم و مشکلی با آن نداریم. چون چدن گروه 30 ترد و ریختگی است، ضرایب تمرکز تنش K_t و K_{ts} را واحد می‌گیریم. [چنانکه پیش‌تر آمد در مقاومت آن منظور شده است. م.] از جدول الف-۲۴ مقاومت نهایی کششی 214 MPa و فشاری 750 MPa است. جزء تنش در A در سطح بالایی زیر تنش خمشی کششی و تنش پیچشی است. این وضعیت در قطر 25 mm ضعیف‌ترین موضع و حاکم بر مقاومت قطعه است. تنش عمودی σ_x و تنش برشی در A چنین‌اند

$$\sigma_x = K_t \frac{M}{I/c} = K_t \frac{32M}{\pi d^3} = (1)\frac{32(350F)}{\pi(25)^3} = 0.228F$$

$$\tau_{xy} = K_{ts} \frac{T_r}{J} = K_{ts} \frac{16T}{\pi d^3} = (1)\frac{16(375F)}{\pi(25)^3} = 0.122F$$

از مع. (۴-۱۳) تنش‌های اصلی غیرصفر σ_A و σ_B برابر است با

$$\sigma_A, \sigma_B = \frac{0.228F + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.228F - 0}{2}\right)^2 + (0.122F)^2} = 0.2813F, -0.053F$$

این مقادیر ما را به ربع چهارم صفحه σ_A و σ_B می‌برد

(الف) برای BCM با $n = 1$ برای شکست، مع. (۶-۳۱ب) به‌کار می‌رود.

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{0.2813F}{214} - \frac{(-0.053F)}{750} = 1$$

F را به‌دست می‌آوریم

پاسخ $$F = 722 \text{ N}$$

(ب) برای M1M، شیب خط بار $|\sigma_B/\sigma_A| = 0.053/0.2813 = 0.188 < 1$ است. روشن است که مع. (۶-۳۲الف) به‌کار می‌رود

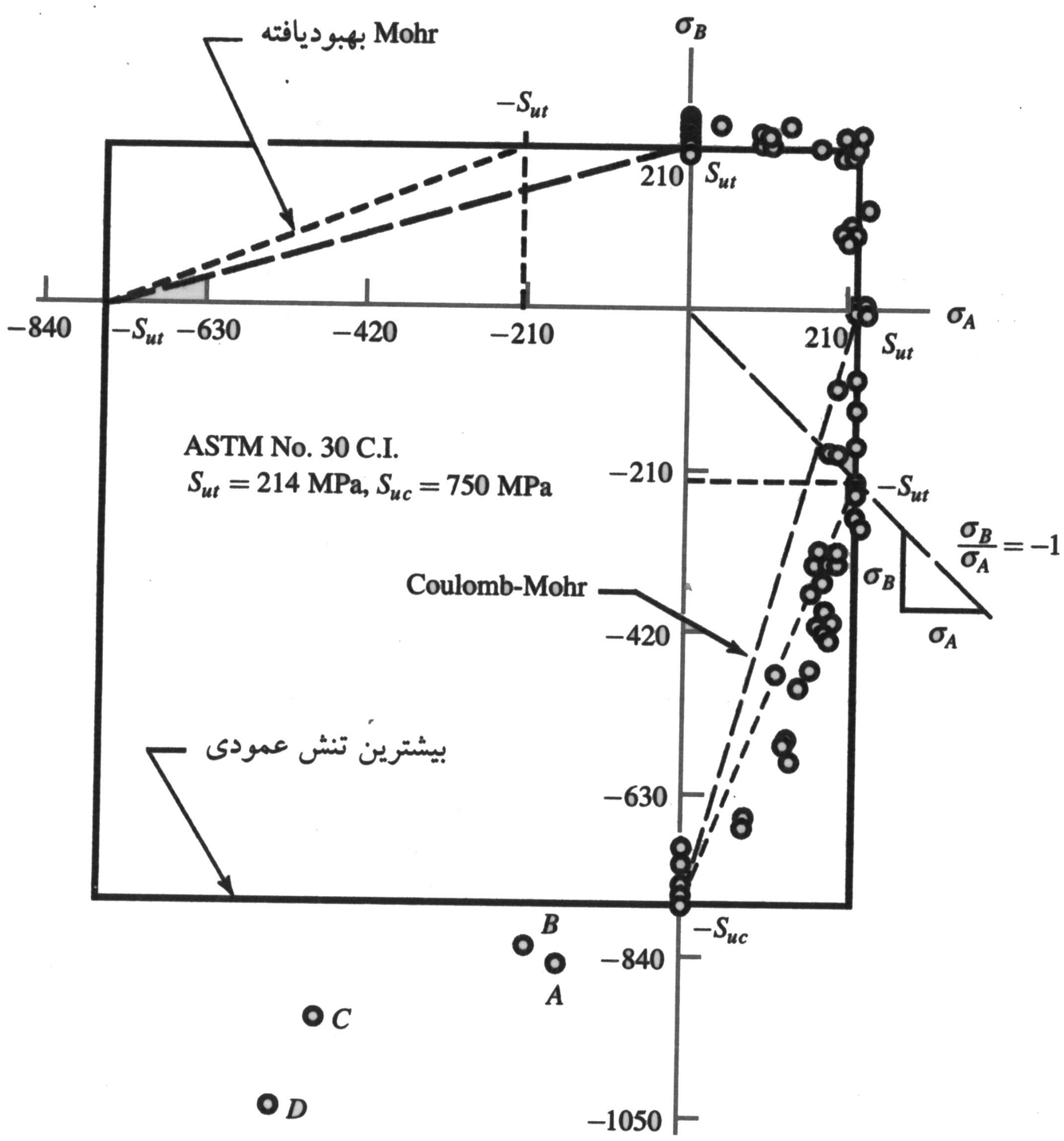
$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} = \frac{0.2813}{214} = 1$$

پاسخ $$F = 761 \text{ N}$$

(ج) برای M2M بازهم $|\sigma_B/\sigma_A| = 0.188 < 1$ و مع. (۶-۳۳الف) هم همان پاسخ M1M را می‌دهد

پاسخ $$F = 761 \text{ N}$$

چنانکه در شکل ۶-۲۷ می‌بینیم، Coulomb-Mohr محتاطانه‌تر است.



شکل ۶-۲۹

نمودار نقاط داده‌های تجربی از آزمون روی چدن، نمودارهای سه نظریه شکست را با خوبی هایشان برای مواد ترد نیز می‌بینیم. نقاط A، B، C، و D را هم ببین، برای کاهش انباشتگی نقاط برخی را برای $\sigma_A > \sigma_B$ و برخی را برعکس آورده‌ایم.

منبع:
Charles F. Walton (ed.), *Iron Castings Handbook*, Iron Founders' Society, 1971, pp. 215, 216, Cleveland, Ohio.)

۶-۱۰ نقد فرضیه‌های شکست مواد ترد (Failure of Brittle Materials Summary)

گرفتیم که شکست یا مقاومت مواد تردی که از معنی معمول کلمه **ترد** پیروی می‌کنند، به موادی می‌گویند که کرنش حقیقی شکست آنها 0.05 یا کمتر است. باید آگاه هم باشیم که مواد معمولی شکل‌پذیر اگر در دمای کمتر از دمای تحول به‌کار روند، به‌علت‌هایی ممکن است شکست ترد داشته باشند یا ترک بردارند. شکل ۶-۲۹ داده‌های یک چدن گروه 30 را زیر تنش‌های دومحوری به‌همراه چند فرضیه شکست ترد نشان می‌دهد. چنین برمی‌آید که

- در ربع نخست داده‌ها در دوطرف و در راستای مکان‌هندسی بیشترین تنش عمودی، Coulomb-Mohr، نوع I-Mohr، و نوع II-Mohr دیده می‌شوند. همه مکان‌های هندسی شکست یکسان و با داده‌ها به‌خوبی همخوانی دارند.
- در ربع چهارم تنها فرضیه نوع II-Mohr است که مکان هندسی شکست آن در میان داده‌ها می‌افتد.
- در ربع سوم نقاط A، B، C، و D تعدادشان برای پیشنهاد مکان هندسی شکست بسیار کم است.
- روشن است که طراح باید از به‌کارگیری هر فرضیه‌ای در ربع دوم و سوم دوری جوید مگر داده‌های آزمون کافی داشته باشد. تغییر طرح به‌گونه‌ای که به ربع نخست یا چهارم برویم راه کم هزینه‌تری است.

فشار برای به سرانجام رساندن کارها، طراحان را به‌کاربرد بارگذاری‌های شناخته می‌کشاند. در هر لحظه و هر جا، کاری را که می‌توان و یا نمی‌توان کرد بشناس و به آن عمل کن.

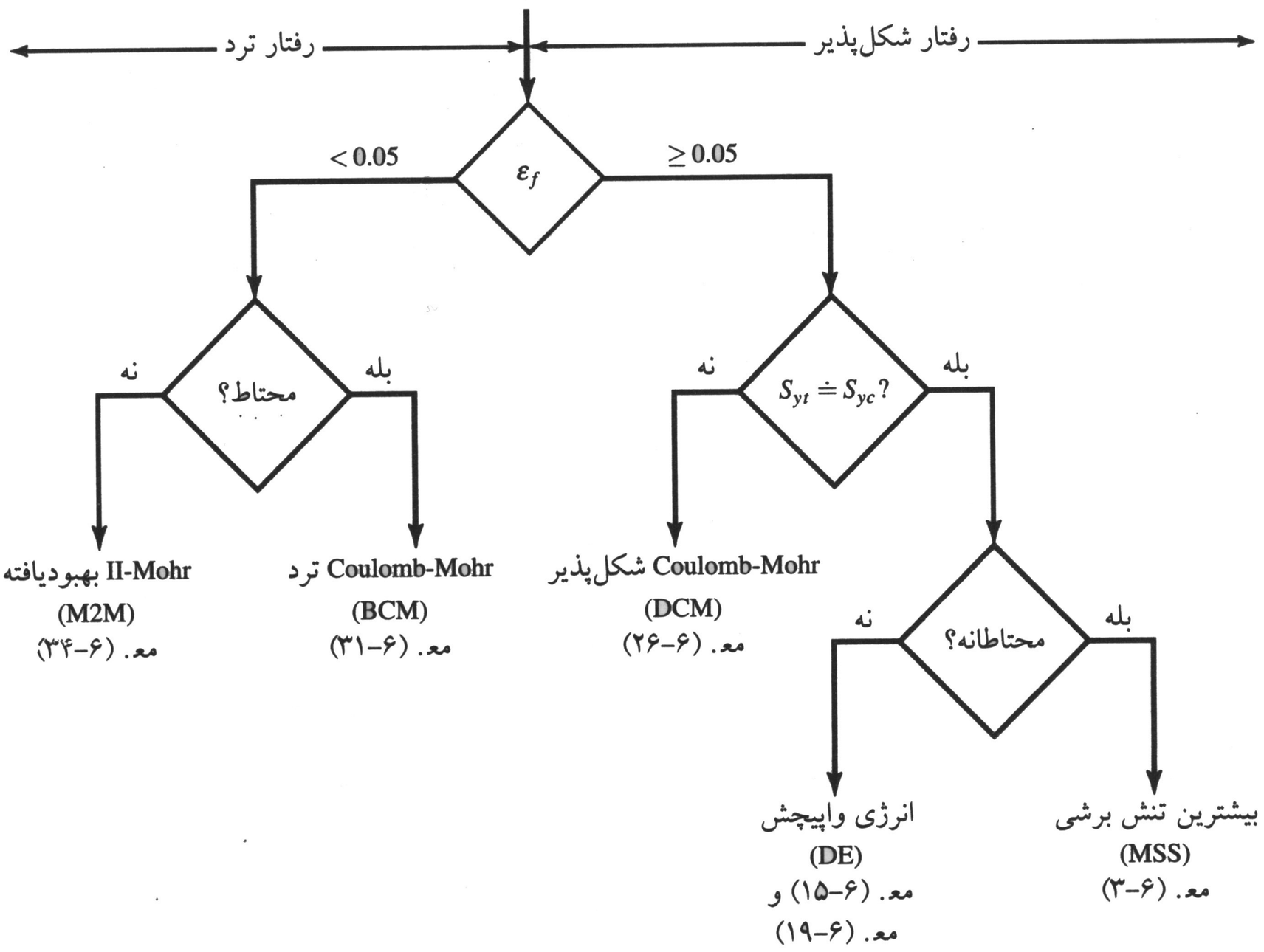
۶-۱۱ گزینش معیار شکست (Selection of Failure Criteria)

برای مواد با رفتار شکل‌پذیر معیار برتر نظریه انرژی واپیچش است، هرچند که برخی طراحان، نظریه بیشترین تنش برشی را هم به‌خاطر سادگی و محتاطانه بودنش به‌کار می‌برند.

برای رفتار ترد، فرضیه اصلی Mohr که از آزمون‌های کشش، فشار و پیچش، با مکان هندسی شکست منحنی شکل به‌دست آمده، بهترین فرضیه‌ای است که داریم. با این‌حال دشواری کاربری آن بی‌رایانه، مهندسان را به گزینش بهبودهایی به نام‌های Coulomb-Mohr، I-Mohr بهبودیافته یا II-Mohr بهبودیافته وامی‌دارد. در شکل ۶-۳۰ نمودار جریان جمع‌بندی برای گزینش یک رسش مؤثر برای وارسی یا پیش‌بینی شکست‌ها از بارگذاری ایستا برای رفتار ترد یا شکل‌پذیر فراهم شده است.

شکل ۶-۳۰

نمودار جریان گزینش نظریه شکست (خرابی).



۶-۱۲ بارگذاری ایستا یا شبه‌ایستا روی یک میلمحور (Static or Quasi-Static Loading on a Shaft)

اساس بخش جنبش در جهان مکانیکی ما چرخ و محور است. یک قطعه اصلی از این ارتباط چرخان، میلمحور است. نمونهٔ خوبی از جسم زیر بار ایستا، شبه ایستا و پویا است. به‌هر اندازه که در این فصل از بارگذاری ایستا و شبه‌ایستا سخن می‌گوییم، کاربرد اطلاعات حاصل از این فصل برای میلمحورها سودمند و لازم است.

تنش در یک جزء که روی سطح میلمحور گرد توپری به‌قطر d زیر بارخمشی، بار محوری و پیچش باشد برابر

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \qquad \text{(الف)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} \qquad \text{(ب)}$$

که مؤلفه محوری تنش عمودی σ_x می‌تواند کششی یا فشاری باشد. می‌بینیم که سه‌گونه بارگذاری M، F، و T در یک مقطع شامل جزء سطح ویژه زیر بررسی رخ می‌دهد.

به‌کمک دایره Mohr می‌شود نشان داد که دو تنش اصلی غیرصفر σ_A و σ_B برابر

$$\sigma_A, \sigma_B = \frac{\sigma_x}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \tag{۳۴-۶}$$

با این تنش‌های اصلی می‌توان تنش von Mises، σ' را به‌دست آورد

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2 \right)^{1/2} = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \tag{۳۵-۶}$$

شاید فرضیه بیشترین تنش برشی را بخواهیم

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \tag{۳۶-۶}$$

با گذاردن مع. (الف) و (ب) در مع. (۶-۳۴) و (۶-۳۵)، چنین می‌شود

$$\sigma' = \frac{4}{\pi d^3} \left[(8M + Fd)^2 + 48T^2 \right]^{1/2} \tag{۳۷-۶}$$

برای تنش von Mises، و با به‌کاربردن مع. (۶-۳۶) برای تقریب بیشترین تنش برشی، چنین می‌شود

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi d^3} \left[(8M + Fd)^2 + 64T^2 \right]^{1/2} \tag{۳۸-۶}$$

مع. (۶-۳۷) و (۶-۳۸) امکان برآورد σ' یا $\tau_{\max}$ با داشتن قطر d و یا برآورد d با داشتن مقادیر مجاز σ' یا $\tau_{\max}$ می‌دهد. برای ضریب طراحی n_d، نظریه انرژی واپیچش برای شکست شکل‌پذیر، تنش مجاز را چنین می‌دهد

$$\sigma'_{\text{all}} = \frac{S_y}{n_d} \tag{۳۹-۶}$$

برای هر ضریب طراحی n_d، فرضیه بیشترین تنش برشی برای شکست شکل‌پذیر، تنش برشی مجاز τ_{all} را چنین می‌دهد

$$\tau_{\text{all}} = \frac{S_{sy}}{n_d} = \frac{S_y}{2n_d} \tag{۴۰-۶}$$

میلمحور با بارگذاری ایستا یا شبه ایستا ـ خمش و پیچش

(Static or Quasi-Static Loading of a Shaft—Bending and Torsion)

در بسیاری از شرایط، نیروی محوری F در مع. (۶-۳۷) و (۶-۳۸) صفر و یا چنان کم است که اثرش قابل چشم‌پوشی است. برای $F = 0$، این دو معادله چنین می‌شود

$$\sigma' = \frac{16}{\pi d^3} \left(4M^2 + 3T^2 \right)^{1/2} \tag{۴۱-۶}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \left(M^2 + T^2 \right)^{1/2} \tag{۴۲-۶}$$

اگر تنش‌های مجاز را در مع. (۶-۳۹) و (۶-۴۰) بگذاریم، برای نظریه شکست von Mises، چنین می‌یابیم

$$d=\left[\frac{16n}{\pi S_y}\left(4M^2+3T^2\right)^{1/2}\right]^{1/3} \tag{۴۳-۶}$$

$$\frac{1}{n}=\frac{16}{\pi d^3 S_y}\left(4M^2+3T^2\right)^{1/2} \tag{۴۴-۶}$$

و برای تقریب بیشترین تنش برش

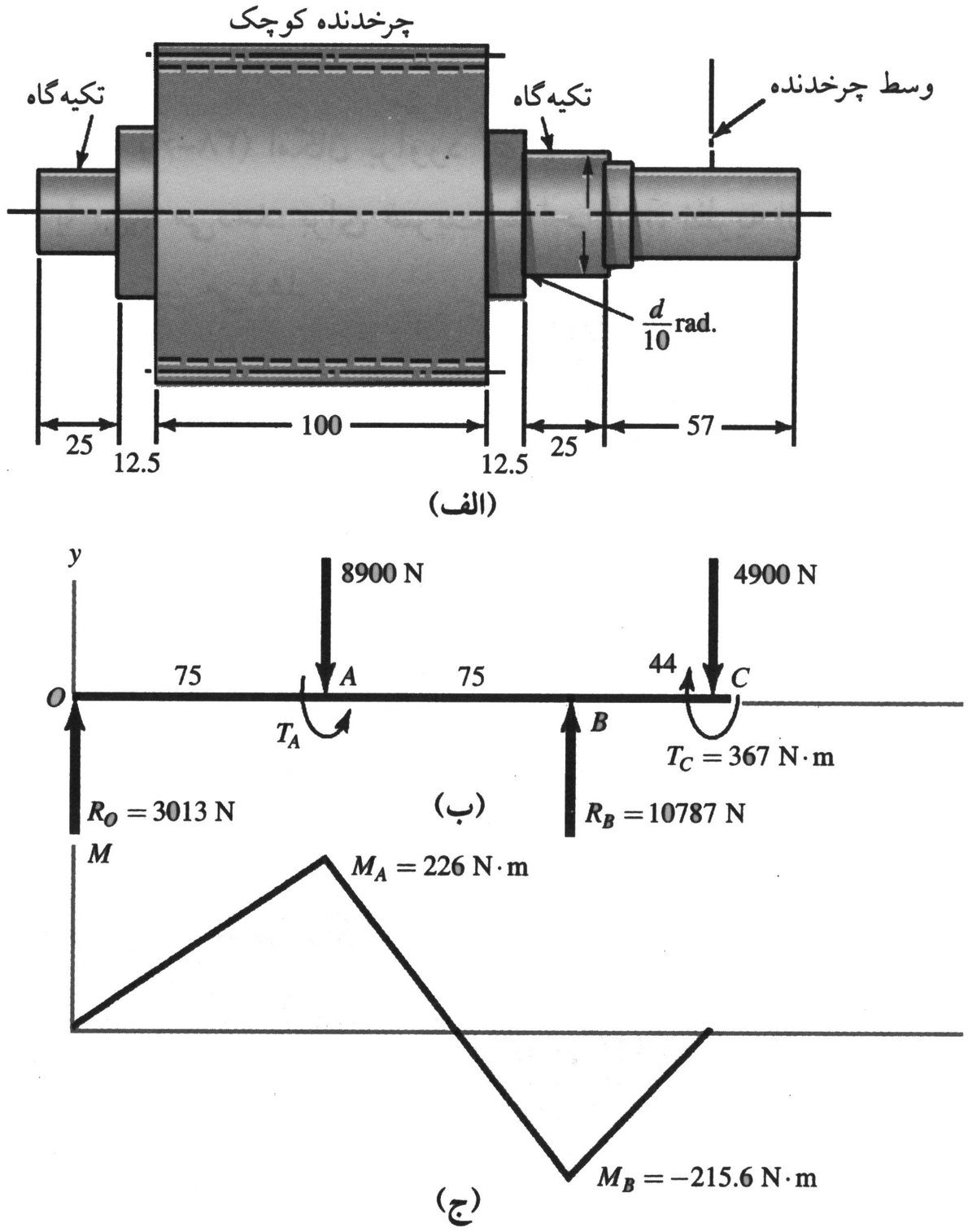
$$d=\left[\frac{32n}{\pi S_y}\left(M^2+T^2\right)^{1/2}\right]^{1/3} \tag{۴۵-۶}$$

$$\frac{1}{n}=\frac{32}{\pi d^3 S_y}\left(M^2+T^2\right)^{1/2} \tag{۴۶-۶}$$

نمونه ۶-۶ میلمحور و چرخدنده کوچک (pinion)، یک تکه، در شکل ۶-۳۱الف، باید روی دو تکیه‌گاه در دو موضعی که می‌بینی سوار شود و یک چرخدنده (نکشیده‌ایم) هم در سر پیش‌آمدگی سمت راست روی آن سوار شود. نمودار بارگذاری (شکل ۶-۳۱ب) نیروی چرخ کوچک در A و نیروی چرخدنده در C هم‌صفحه‌اند. گشتاورهای پیچشی T_A و T_B یکسان و مخالف هم در A و C و همچون نیروها به شکل متمرکزند. نمودار گشتاور خمشی، شکل ۶-۳۱ج بیشترین مقدار را در نقاط A و B نشان می‌دهد. قطر

شکل ۶-۳۱

قطر تکیه‌گاه چپ 25 mm، قطر شانه 50 mm، قطر ریشه (dedendum) چرخدنده 80 mm، قطر شانه تکیه‌گاه دست راست 50 mm و شانه پیش آمدگی 28.5 mm به عرض 6.2 mm، قطر جای چرخدندهٔ رسم نشده، 25 mm است.



کوچک‌تر در B موضع B را، در وسط یاتاقان دست راست، بحرانی می‌کند. چون میلمحور فقط گاهی به ضرورت به‌کار می‌رود، تعداد گردش آن با بار کامل بیش از 1000 دور نیست. پس می‌شود مسأله را شبه ایستا گرفت جنس آن فولاد کربنی گرماکاری‌شده با میانگین مقاومت تسلیم 460 MPa است. در این وضع، مهندس پروژه ضریب طراحی را 1.8 گرفته است. بنابر نظریه انرژی واپیچش و بار دیگر تقریب بیشترین تنش برشی، کمترین قطر یاتاقان لغزشی دست راست چه باشد؟

راه حل برای DE از مع. (۶-۴۳)،

$$d=\left\{\frac{16(1.8)}{\pi 460}\left[4(-215.6)^2+3(367)^2\right]^{1/2}10^3\right\}^{1/3}=24.83\ \text{mm}$$

برای MSS از مع. (۶-۴۵)،

$$d=\left\{\frac{32(1.8)}{\pi 460}\left[(-215.6)^2+367^2\right]^{1/2}10^3\right\}^{1/3}=25.7\ \text{mm}$$

۶-۱۳ فرازی از مکانیک شکست (Introduction to Fracture Mechanics)

ایده وجود ترک‌ها در قطعات حتی پیش از به‌کار گرفتن‌شان، و امکان گسترش آن ترک‌ها به‌هنگام کار، به عبارتِ توجیه کننده "طرح با پذیرش آسیب" ختم شد. تمرکز این فلسفه روی رشد ترک است تا جایی که بحرانی باشد و قطعه از کار خارج شود. ابزار تحلیل، **مکانیک شکست کشسان خطی** ***linear elastic fracture mechanics*** (LEFM) است. بازبینی و مراقبت برای پیشگیری و بازنشسته‌کردن قطعات پیش از رسیدن ترک به مرحله ویرانگری، اساس کار است. هرجا جان انسان در میان باشد، باز بینی‌های منظم برای یافتن ترک بنا به دستورات استاندارد و قوانین دولتی حاکم است.

در این‌جا به بررسی برخی از ایده‌ها و واژگان اساسی لازم برای اهمیت روشی که باید پذیرفت می‌پردازیم. خواسته ما در این‌جا آگاه‌سازی خواننده از خطرهای مربوط به شکست تُرد و ناگهانی موادی است که آنها را شکل‌پذیر پنداشته باشیم. موضوع گسترده‌تر از آن است که بشود در این مختصر به جزئیات آن پرداخت، پس به خواننده سفارش می‌کنیم که دربارهٔ این موضوع بغرنج بیشتر مطالعه کند.[۸]

کاربرد ضرایب تمرکز تنش کشسان، نمودی از بار متوسط لازم برای آغاز تغییر شکل پلاستیک یا تسلیم است. این ضرایب در تحلیل بارهای آغازگر شکست خستگی قطعه نیز سودمند است. البته، ضرایب تمرکز تنش به سازه‌هایی محدود می‌شود که همه ابعاد، به‌ویژه شعاع انحنای نقاطی که تمرکز تنش زیاد دارند را به‌درستی بدانیم. آنگاه که ترک، درز، ناخالصی یا عیبی در قطعه با شعاع انحنای کوچک، نامعلوم باشد، با به صفر نزدیک شدن شعاع ریشهٔ ناپیوستگی ضریب تمرکز تنش کشسان به بی‌نهایت میل می‌کند. پس پیگیری ضریب تمرکز تنش سودی ندارد. تازه، حتی با دانستن شعاع انحنای چاک یا ترک، تنش‌های بزرگ موضعی سبب تغییر شکل مومسان در جایی می‌شود که گرداگرد آن را

---

۸. مراجعی دربارهٔ شکست ترد، شامل:

- H. Tada and P.C. Paris, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., Paris Productions. St. Louis, 1985.
- D. Broek, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 4th ed., Martinus Nijhoff, London, 1985.
- D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwar Academic Pub., London, 1988.
- David K. Felbeck and Anthony G. Atkins, *Strength and Fracture of Engineering Solids*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.
- Kåre Hellan, *Introduction to Fracture Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1984.

تغییر شکل کشسان گرفته است. در چنین وضعی، دیگر ضریب تمرکز تنش کشسان اعتبار ندارد. پس آنگاه که ترک تند و ژرف باشد، تحلیل تنش از دید ضریب تمرکز تنش در طراحی به‌جایی نمی‌رسد.

از بررسی تغییرات شدید کشسان در یک سازه یا قطعه که به‌شکل ترک شکنندهٔ تیزرخ می‌دهد و ترکیب آن با میزان رشد انرژی که صرف بروز سطوح جدید شکست می‌شوند، محاسبه تنش میانگین (اگر ترک نبود) که سبب رشد ترک در قطعه می‌شود ممکن می‌گردد. چنین محاسبه‌ای فقط برای قطعات ترک داری ممکن است که تحلیل کشسان آنها کامل باشد و موادی که ترک آنها به‌طور نسبی ترد است و انرژی شکست آنها را به‌دقت اندازه گرفته‌ایم. واژه **به‌طور نسبی تُرد** که به‌دقت در روش‌های آزمایش تعریف شده است[9]، به معنی، **شکستی است که در مقطع شکسته شده تسلیم رخ نداده باشد.**

پس، شیشه، فولادهای سخت، آلیاژهای قوی آلومینیم و حتی فولاد کم کربن در دمای کمتر از تحول از تُرد به شکل‌پذیر را می‌شود با این روش بررسی کرد. خوشبختانه چنانکه پیش از این دریافتیم، مواد شکل‌پذیر، ترک تیز ندارند و ترک در تنش‌های میانگین تسلیم آنها رخ می‌دهد و طراح این شرایط را پیشگیری می‌کند. پژوهشگران سرگرم، بررسی موادی هستند که خواص‌شان بین "به‌طور نسبی تُرد" و "شکل‌پذیر" است، ولی هنوز معیارهای طراحی قطعی برای آنها نیافته‌آند و مطالب این کتاب هم آنها را دربر نمی‌گیرد.

شکست شبه ایستا *(Quasi-Static Fracture)*

بسیاری از ما تجربه دیدن شکست ترد را داشته‌ایم، یا شکستن نمونه چدنی در آزمون کشش یا شکست پیچشی یک تکه گچ تخته سیاه چنان تند رخ می‌دهد که به‌نظر می‌آید بی‌درنگ مقطع آن دو تکه می‌شود. برخی از ما هم روی یخ حوض در بهار سُرسُربازی کرده‌ایم که کسی نزدیک‌مان نبوده تا با صدای شکستن یخ بایستد و نگاه کند، صدا ناشی از ترک‌خوردن است. ترک چنان آهسته حرکت می‌کند که می‌توان آن را دید. این پدیده ناگهانی نیست، چون گاهی برای گسترش یا انتشار ترک باید انرژی ترک از ناحیه تنش به ترک برسد. کمیت‌دهی این چیزها برای فهم پدیده "در اندازه کوچک" مهم است. در شکل بزرگش، ترکِ ایستا می‌تواند پایدار باشد و گسترش نیابد. باردهی تا مقادیری می‌تواند ترک را ناپایدار کرده و با گسترش آن به شکست انجامد.

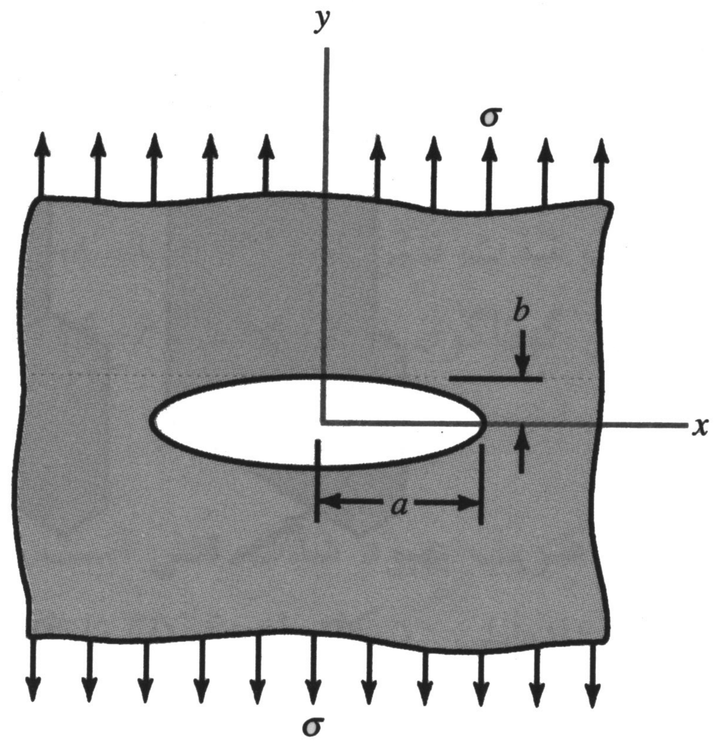
اساس مکانیک شکست نخست توسط Griffith در 1921 پایه‌گذاری شد و آن به‌کارگیری محاسبات میدانی تنش برای یک چاک بیضوی بود که آن را Inglis در 1913 پدید آورده بود. برای ورقی به ابعاد نامحدود که زیر تنش تک محوری σ، شکل ۶-۳۲، باشد، بیشترین تنش که در $(\pm a,0)$ رخ می‌دهد چنین است

$$(\sigma_y)_{\max}=\left(1+2\frac{a}{b}\right)\sigma \qquad (۴۷-۶)$$

بدان که اگر $a=b$ باشد، بیضی به دایره بدل می‌شود و مع. (۶-۴۷) ضریب تمرکز تنش را 3 می‌دهد. این مقدار با نتایج شناخته شده برای ورقی با اندازه‌های نامحدود با یک سوراخ گرد (جدول الف-۱۵-۱) همخوان است. برای یک ترک ظریف، $b/a\to 0$ و مع. (۶-۴۷) پیش‌بینی می‌کند که $(\sigma_y)_{\max}\to\infty$. به‌هرحال در مقیاس میکروسکپی، یک ترک بی‌نهایت تیز فرضی غیرواقعی یعنی به‌طور فیزیکی ناممکن

---

9. BS 5447:1977 and ASTM E399-78.



شکل ۶-۳۲

منبع از:
Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.

است و آن‌گاه که تغییر شکل مومسان رخ دهد، تنش در نوک ترک محدود است.

Griffith نشان داد که ترک هنگامی رشد می‌کند که نرخ انرژی که بار وارده آزاد می‌کند بزرگ‌تر از نرخ انرژی برای رشد ترک باشد. رشد ترک پایدار یا ناپایدار است. رشد ناپایدار ترک آن‌گاه رخ می‌دهد که **نرخ** تغییر آزاد شدن انرژی نسبت به طول ترک برابر یا بیش از **نرخ** تغییر در نرخ رشد ترک از انرژی باشد. کار تجربی Griffith به مواد تردی همچون شیشه محدود بود، که به خوبی فرضیه‌های انرژی سطح او را تأیید می‌کرد. البته برای مواد شکل‌پذیر، انرژی لازم برای انجام کار مومسان در نوک ترک بسیار مؤثرتر از انرژی سطح است.

حالت‌های ترک و ضریب شدت تنش *(Crack Modes and the Stress Intensity Factor)*

سه حالت مشخص گسترش همچون شکل ۶-۳۳ هست. یک میدان تنش کششی به حالت I ترک می‌خورد که **حالت گسترش ترک بازشونده**، همچون شکل ۶-۳۳الف است. در عمل این حالت از همه بیشتر رخ می‌دهد. حالت II **حالت لغزشی** است که ناشی از برش ساده است که در شکل ۶-۳۳ب می‌بینیم. حالت III **حالت جِر دادن یا پاره کردن** است که همچون شکل ۶-۳۳ج حاصل برش خارج از صفحه است و ترکیبِ این حالت‌ها هم‌رخ می‌دهد. چون حالت I ترک از همه بیشتر پیش می‌آید و مهمی است، باقی این بخش به بررسی این حالت خواهد پرداخت.

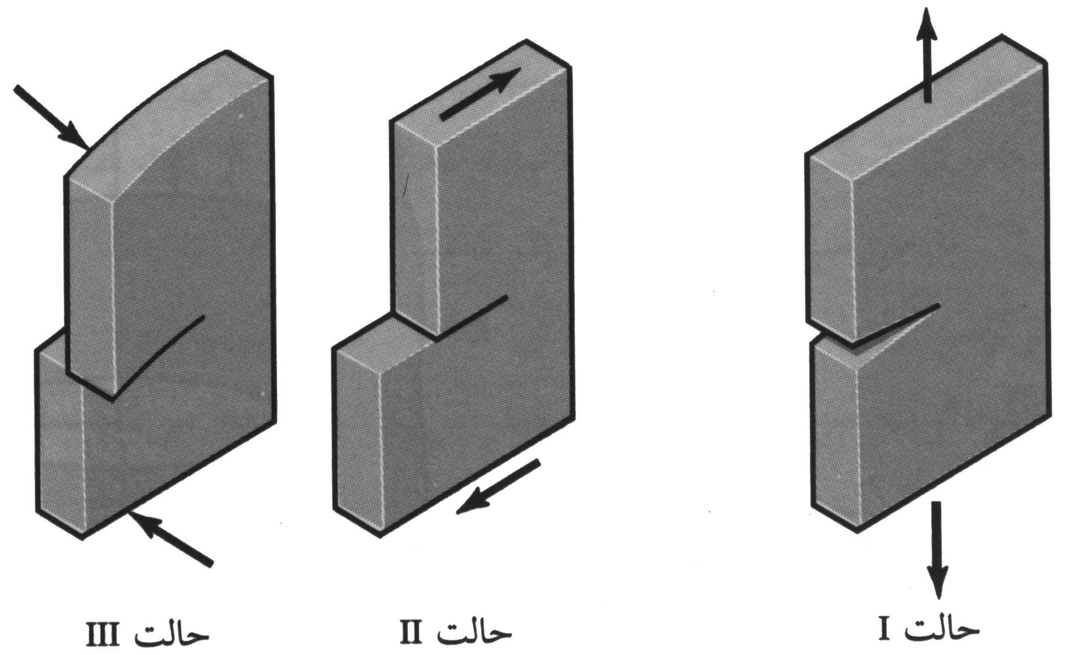
ترک حالت I را به‌طول $2a$ در ورق نامحدودی به‌شکل ۶-۳۴ می‌گیریم. به‌یاری توابع تنش پیچیده نشان داده‌اند که میدان تنش در یک جزء $dx\,dy$ در کنار نوک ترک چنین می‌شود

$$\sigma_x = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (۶-۴۸\text{الف})$$

$$\sigma_y = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (۶-۴۸\text{ب})$$

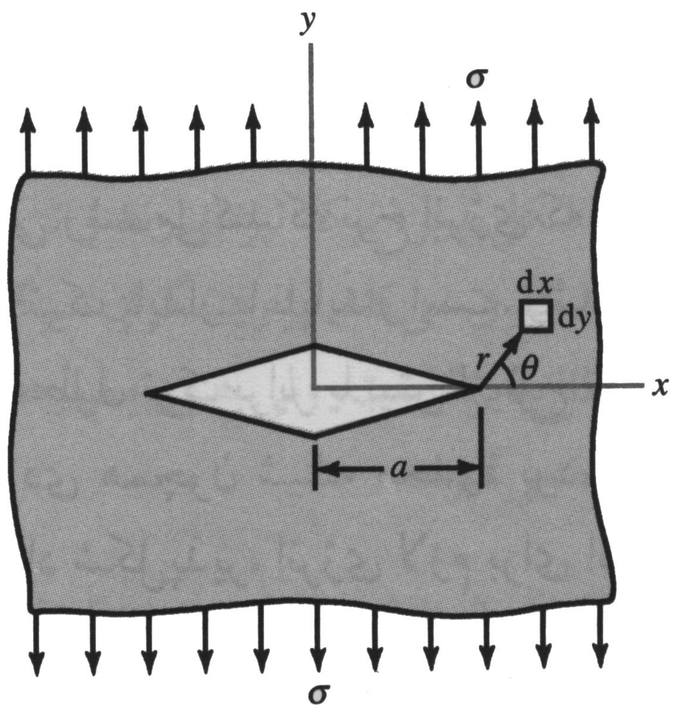
$$\tau_{xy} = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (۶-۴۸\text{ج})$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{(برای تنش صفحه‌ای)} \\ \nu(\sigma_x+\sigma_y) & \text{(برای کرنش صفحه‌ای)} \end{cases} \qquad (۶-۴۸\text{د})$$



شکل ۶-۳۳

حالت‌های گسترش ترک.



شکل ۶-۳۴

الگوی ترک حالت I.

(From Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

برای $\theta = 0$، تنش σ_y نزدیک نوک ترک برابر با

$$\sigma_y|_{\theta=0} = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}} \qquad \text{(الف)}$$

همچون ترک بیضوی، می‌بینیم که با $r = 0$، $\sigma_y|_{\theta=0} \to \infty$ و بازهم فکر تمرکز تنش بی‌نهایت در نوک ترک نامناسب است. با این‌حال با $r \to 0$ مقدار $\sigma_y|_{\theta=0}\sqrt{2r} = \sigma\sqrt{a}$ ثابت می‌ماند. معمول است که ضریب K را به‌نام **ضریب شدت تنش** چنین تعریف کنیم

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \qquad \text{(ب)}$$

که واحدش $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ یا $\text{kpsi}\sqrt{\text{in}}$ است. چون با ترک حالت I کارداریم، مع. (ب) چنین می‌شود

$$K_{\text{I}} = \sigma\sqrt{\pi a} \qquad (۶-۴۹)$$

ضریب شدت تنش را **نباید** با ضرایب تمرکز تنش ایستای K_t و K_{ts} که در بخش‌های ۴-۱۴ و ۶-۲ تعریف شدند یکسان پنداشت. پس مع. (۶-۴۸) را می‌شود چنین نوشت

$$\sigma_x = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (۶-۵۰\text{ الف})$$

$$\sigma_y = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (۶-۵۰\text{ ب})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (۶-۵۰\text{ ج})$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{(برای تنش صفحه‌ای)} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{(برای کرنش صفحه‌ای)} \end{cases} \qquad (۶-۵۰د)$$

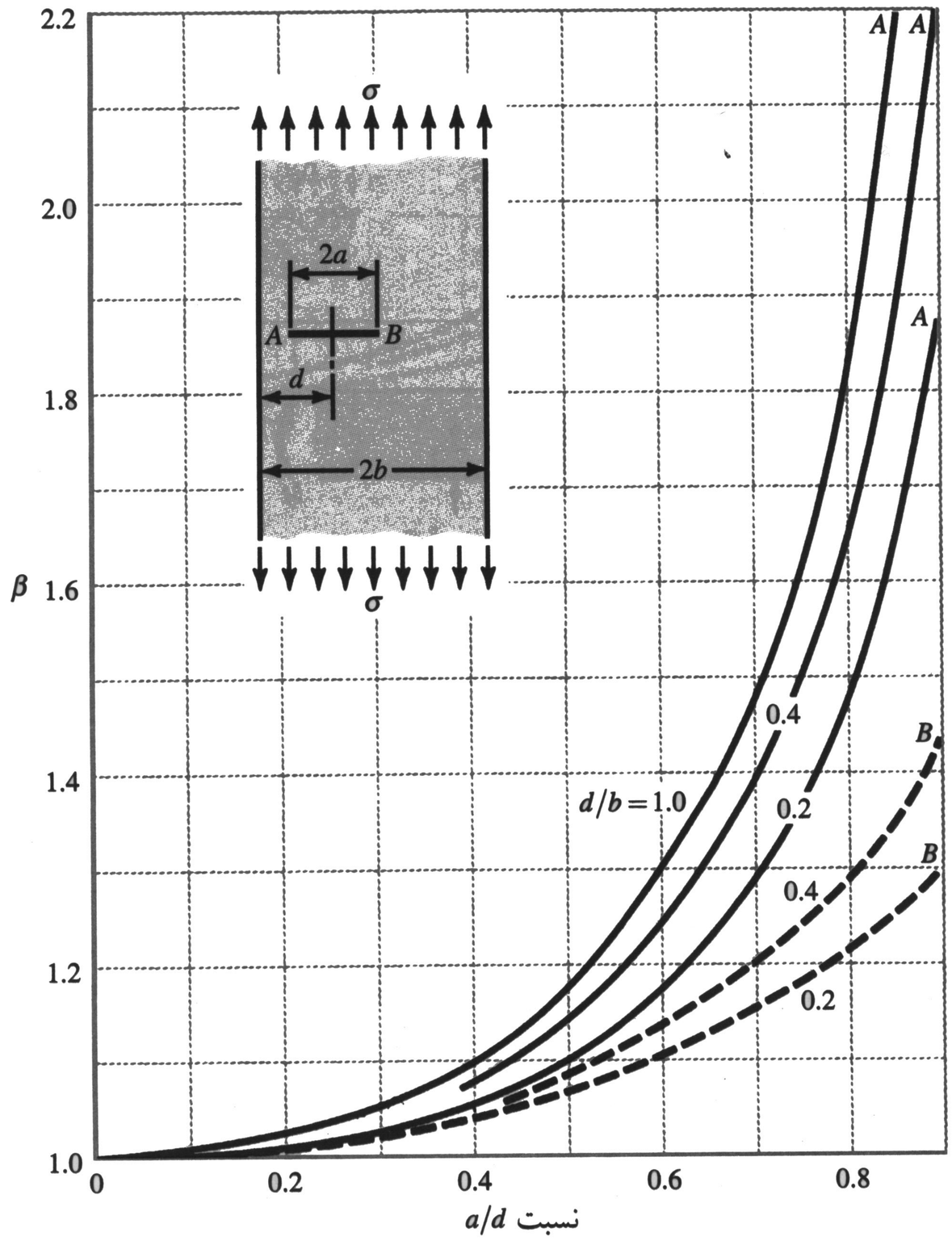
ضریب شدت تنش تابعی از هندسه، اندازه و شکل ترک و نوع بارگذاری است. برای شکل‌هندسی و بارهای گوناگون می‌شود مع. (۶-۴۹) را چنین نوشت

$$K_{\mathrm{I}} = \beta\sigma\sqrt{\pi a} \qquad (۶-۵۱)$$

که β **ضریب بهبود شدت تنش** است. جداولی برای β در نشریات و کتب برای شکل‌های هندسی اصلی داده‌اند.[۱۰] شکل‌های ۶-۳۵ تا ۶-۴۰ چند نمونه از مقدار β برای گسترش ترک حالت I است.

چقرمگی شکست (Fracture Toughness)

هرگاه مقدار ضریب شدت تنش در حالت I به‌مقدار بحرانی K_{Ic} برسد، گسترش ترک آغاز می‌شود. **ضریب شدت تنش بحرانی** K_{Ic} از خواص ماده است که به‌خود ماده، حالت ترک، فرایند ساخت ماده، دما، نرخ بارگذاری، و حالت تنش در جای ترک (همچون تنش صفحه‌ای دربرابر کرنش صفحه‌ای) بسته



شکل ۶-۳۵

ترک غیرمرکزی ورق با کشش طولی، منحنی‌های توپر برای ترک در نوک A و خط‌چین‌ها برای نوک B است.

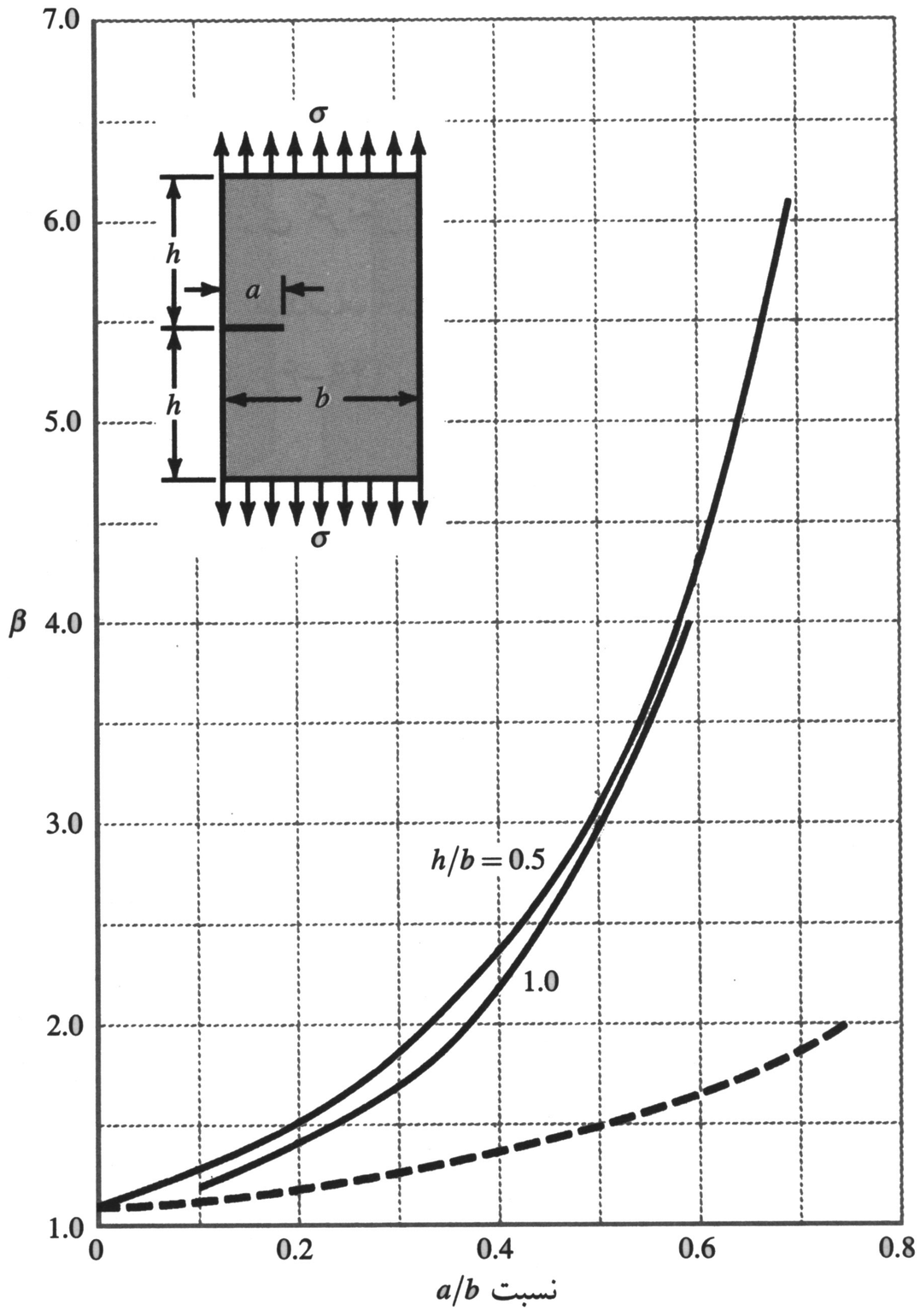
---

۱۰. برای نمونه:

- H. Tada and P.C. Paris. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., Paris Productions, St. Louis, 1985.
- G. C. Sib, *Handbook of Stress Intensity Factors for Researchers and Engineers*, Institure of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1973.
- Y. Murakami, ed., *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford, U.K., 1987.
- W. D. Pilkey, *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

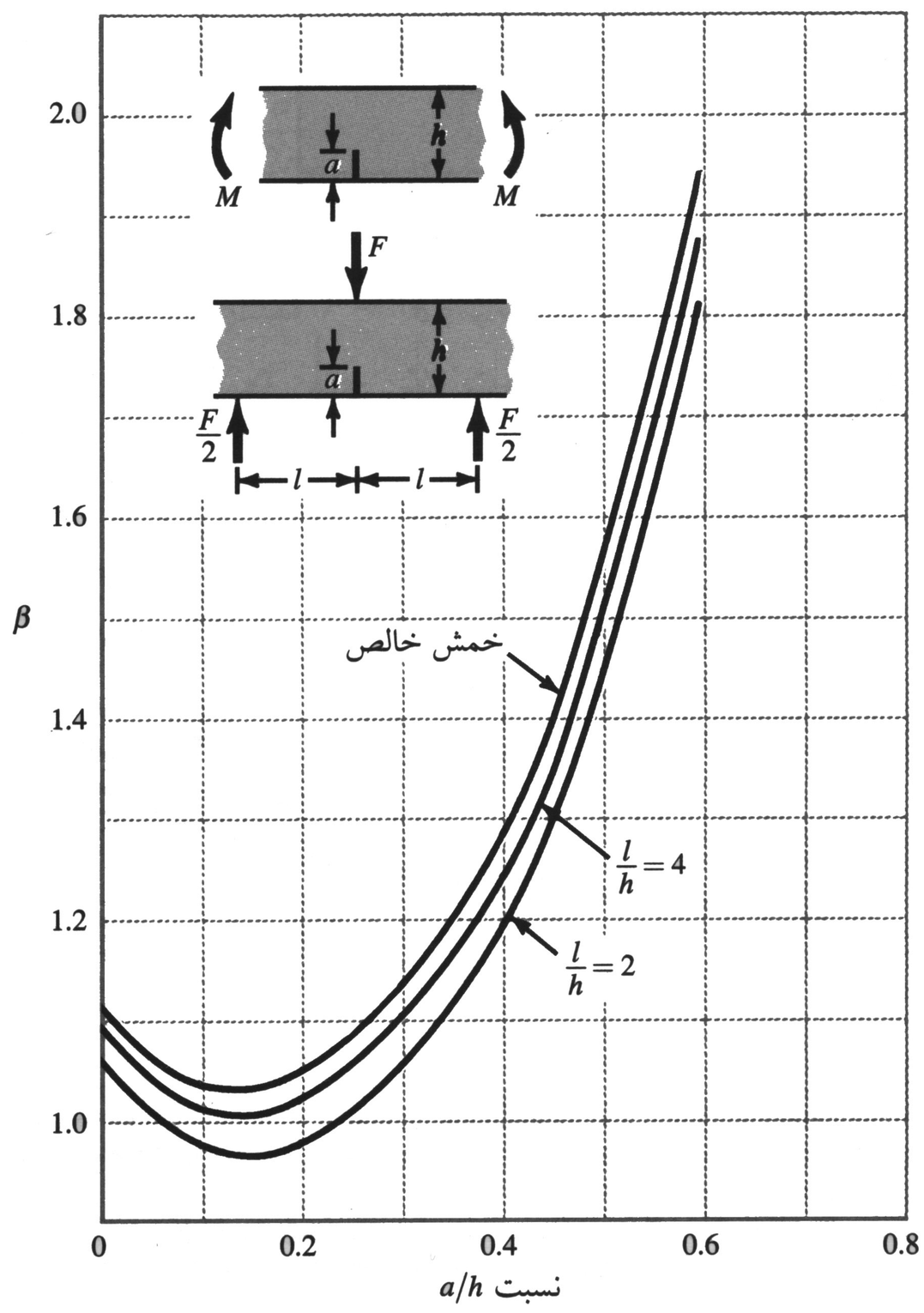
شکل ۶-۳۶

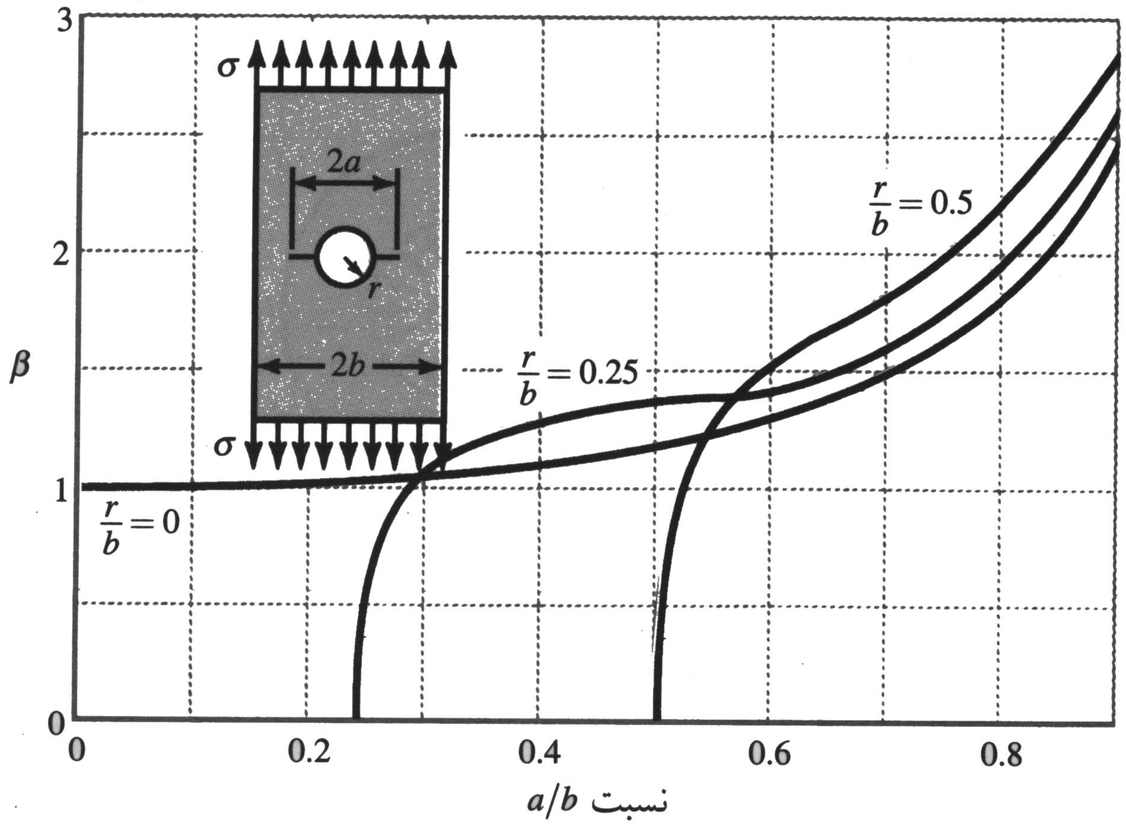
ورق زیر کشش طولی، ترک در لبه، منحنی‌های پیوسته محدودیت خمشی ندارند. در منحنی خط چین محدودیت‌های خمشی را افزوده‌اند.



شکل ۶-۳۷

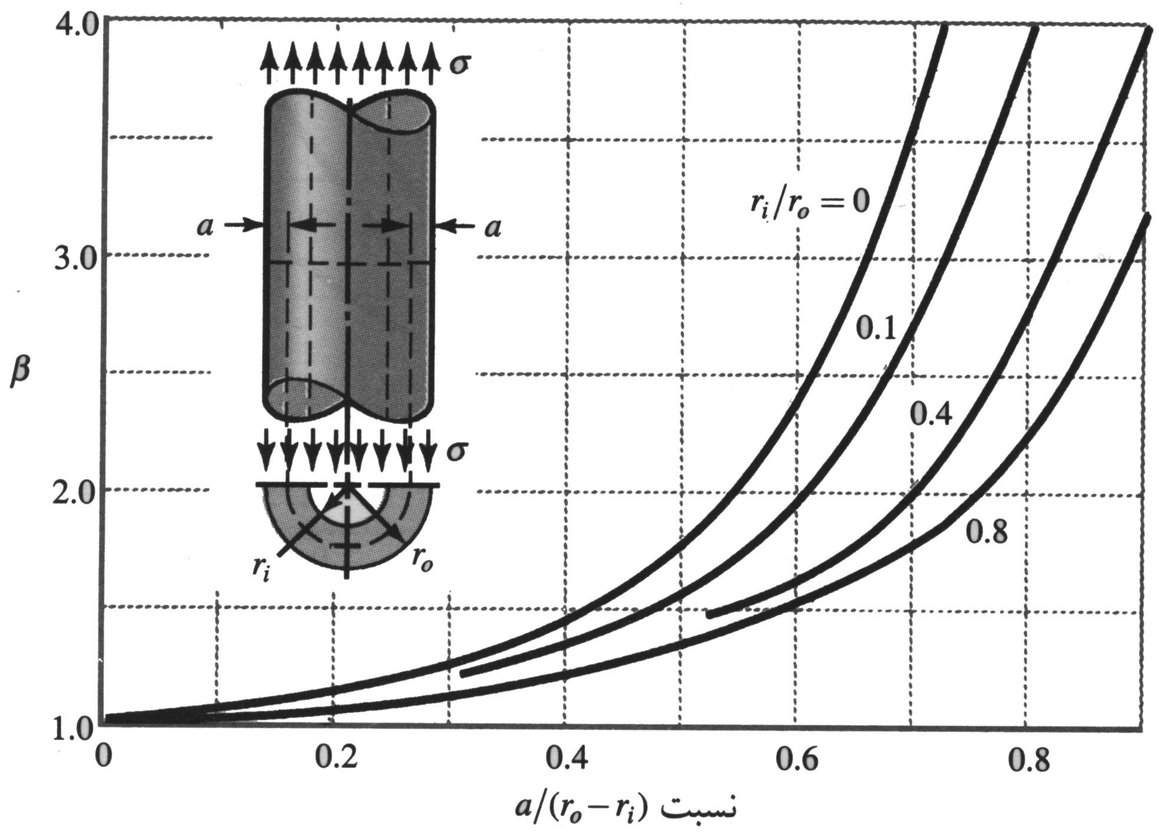
تیر با مقطع مستطیل با ترک در لبه.





شکل ۶-۳۸

ورق زیرکشش با سوراخ گرد و دو ترک.



شکل ۶-۳۹

استوانه توخالی زیر کشش محوری، ترک شعاعی در همه محیط استوانه. [شکل غلط دارد. م.]

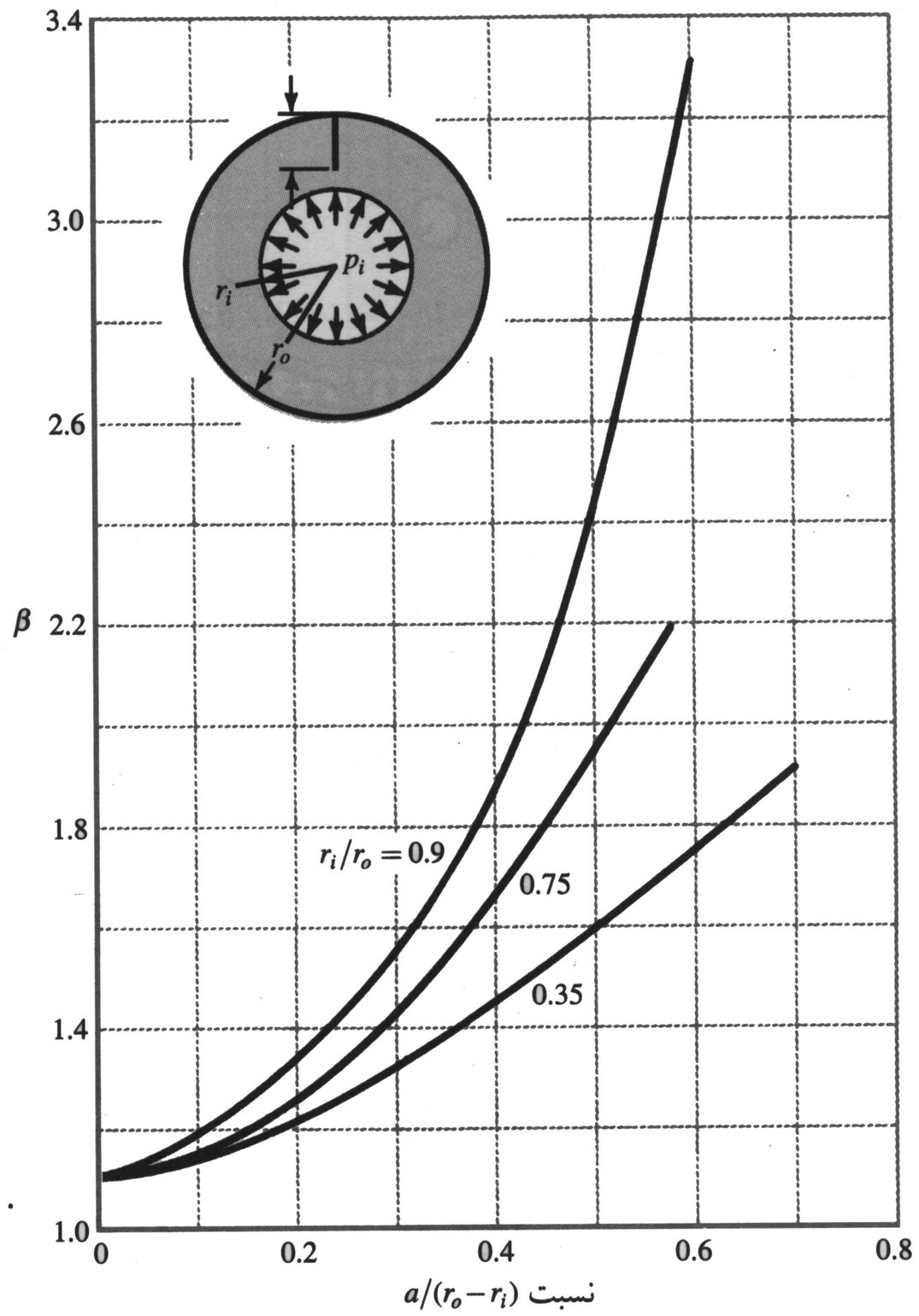
است. ضریب شدت تنش بحرانی K_{Ic} را **چقرمگی شکست** ماده هم می‌گویند. چقرمگی شکست برای کرنش صفحه‌ای به‌طور معمول کمتر از آن برای تنش صفحه‌ای است. به‌همین سبب جمله K_{Ic} به‌طور رایج به‌صورت چقرمگی شکست کرنش صفحه‌ای در حالت I تعریف می‌شود. چقرمگی شکست K_{Ic} برای فلزات صنعتی در گسترهٔ $20 \le K_{Ic} \le 200\ \text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ است. برای پلیمرها و سرامیک‌های صنعتی $1 \le K_{Ic} \le 5\ \text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ است. برای فولاد 4340 که مقاومت تسلیمش با گرما کاری به 800 تا 1600 MPa می‌رسد، K_{Ic} از 190 تا $40\ \text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ کاهش می‌یابد.

جدول ۶-۱ مقادیر تقریبی K_{Ic} رایج برای چند ماده در دمای اطاق است. چنانکه پیش‌تر گفتیم، چقرمگی شکست به عوامل بسیاری بسته است و هدف از این جدول تنها عرضهٔ برخی مقادیر رایج K_{Ic} است. برای درستی کاربرد، درخواست می‌شود که جنس به‌کار رفته را آزمون استاندارد کنید. (نگاه کن به استاندارد ASME-E399).

از نخستین مشکلات پیش روی طراح، گرفتن تصمیم در وجود شرایط شکست ترد است. کار در دمایی زیر دمای اطاق، کلید راهنمای امکان‌تردی شکست است. جدول‌های دمای تحول مواد در دست نیست. شاید گسترهٔ تغییر مقدار برای هرماده مشکل آن باشد. پس در بسیاری موارد، تنها راهنمای تصمیم به شکست ترد، آزمون آزمایشگاهی باشد. کلید راهنمای دیگر، نسبت مقاومت تسلیم به مقاومت

شکل ۶-۴۰

استوانه توخالی زیر فشار درونی p، با ترک طولی به‌عمق a، برای تنش مماسی در $r = r_0$ مع. (۴-۵۱) را به‌کار ببر.



جدول ۶-۱

مقادیر K_{Ic} برای چند مادهٔ مهندسی در دمای اطاق

جنس	K_{Ic}, MPa$\sqrt{m}$	S_y, MPa
آلومینیم		
2024	26	455
7075	24	495
7178	33	490
تیتانیم		
Ti-6AL-4V	115	910
Ti-6AL-4V	55	1035
فولاد		
4340	99	860
4340	60	1515
52100	14	2070

نهایی است. اگر S_y/S_u زیاد باشد، به‌نشان کمی توانایی جذب انرژی در ناحیه مومسان است، پس شکست ترد بیشتر محتمل است.

می‌توان نسبت مقاومت به تنش K_{Ic}/K_I را همچون ضریب ایمنی به‌کار برد، اینجور

$$n = \frac{K_{Ic}}{K_I} \qquad (۵۲-۶)$$

نمونه ۶-۷ یک ورق فولادی کف کشتی به‌کلفتی 30 mm، عرض 12 m زیر باری با تنش کششی تک محوری نامی، 50 MPa است. در دمای زیر تحول شکل‌پذیر به ترد با $K_{Ic} = 28.3\ \text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ کار می‌کند. اگر یک ترک عرضی مرکزی به‌طول 65 mm داشته باشد، تنش کششی که سبب شکست دهشتناک گردد چقدر است. این تنش را با مقاومت تسلیم این فولاد 240 MPa بسنج.

راه حل از شکل ۶-۳۵، $2a = 65\ \text{mm}$، $d = b$، $2b = 12\ \text{m}$، پس $d/b = 1$ و $a/d = 65/12(10^3) = 0.005$، چون a/d بسیار کوچک است، $\beta = 1$ می‌گیریم. پس،

$$K_{\text{I}} = \sigma\sqrt{\pi a} = 50\sqrt{\pi(32.5\times10^{-3})} = 16.0\ \text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$$

از مع. (۶-۵۲)،

$$n = \frac{K_{Ic}}{K_{\text{I}}} = \frac{28.3}{16.0} = 1.77$$

تنشی که سبب شکست ویرانگر می‌شود

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{K_{\text{I}}}\sigma = \frac{28.3}{16.0}(50) = 88.4\ \text{MPa}$$

پاسخ

مقاومت تسلیم 240 MPa است، پس شکست ویرانگر در $88.4/240 = 0.37$ یا در 37 درصد تسلیم، رخ می‌دهد. ضریب اطمینان در این وضع $K_{Ic}/K_{\text{I}} = 28.3/16 = 1.77$ است و $240/50 = 4.8$ نیست.

نمونه ۶-۸ ورقی به پهنای 1.4 m و طول 2.8 m باید نیروی کششی 4.0 MN در راستای طولش تحمل کند. روش بازدید فقط ترک‌های بزرگ‌تر از 2.7 mm در لبه ورق را شناسایی می‌کند. هردو آلیاژ Ti-6AL-4V در جدول ۶-۱ با ضریب اطمینان 1.3 بررسی شوند و سبکی ورق مهم است. کدام آلیاژ باید به‌کار رود؟

راه حل (الف)* نخست کلفتی لازم دربرابر تسلیم را حساب می‌کنیم. چون $\sigma = P/wt$، پس $t = P/w\sigma$. از سویی،

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{S_y}{n} = \frac{910}{1.3} = 700\ \text{MPa}$$

پس

$$t = \frac{P}{w\sigma_{\text{all}}} = \frac{4.0(10)^3}{1.4(700)} = 4.08\ \text{mm} \quad \text{(یا بیشتر)}$$

که $S_y = 910\ \text{MPa}$ از جدول برای آلیاژ ضعیف‌تر است و برای آلیاژ قوی‌تر از جدول ۶-۱،

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{1035}{1.3} = 796\ \text{MPa}$$

پس کلفتی آن چنین است

$$t = \frac{P}{w\sigma_{\text{all}}} = \frac{4.0(10)^3}{1.4(796)} = 3.59\ \text{mm} \quad \text{(یا بیشتر)}$$

پاسخ

---

* صورت مسأله ناقص است. م.

(ب) اکنون کلفتی را برای پیشگیری گسترش ترک می‌یابیم. از شکل ۶-۳۶،

$$\frac{h}{b}=\frac{2.8/2}{1.4}=1 \qquad \frac{a}{b}=\frac{2.7}{1.4(10^3)}=0.00193$$

برای این نسبت، از شکل ۶-۳۶، $\beta \doteq 1.1$ می‌شود و $K_I=1.1\sigma\sqrt{\pi a}$ از جدول ۶-۱، برای آلیاژ ضعیف‌تر $K_{Ic}=115\ \text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ داریم

$$n=\frac{K_{Ic}}{K_I}=\frac{115\sqrt{10^3}}{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}, \qquad \sigma=\frac{K_{Ic}}{n1.1\sqrt{\pi a}} \qquad \text{[!. م.]}$$

اگر $n=1$ باشد، تنش شکست σ را به‌دست می‌آوریم

$$\sigma=\frac{115}{1.1\sqrt{\pi(2.7\times10^{-3})}}=1135\ \text{MPa}$$

که بیش از مقاومت تسلیم 910 MPa است. پس مقاومت تسلیم، پایه تصمیم‌گیری اندازهٔ قطعه است. برای آلیاژ قوی‌تر که $S_y=1035\ \text{MPa}$ است، با $n=1$، تنش شکست چنین است

$$\sigma=\frac{K_{Ic}}{nK_I}=\frac{55}{1(1.1)\sqrt{\pi(2.7\times10^{-3})}}=542.9\ \text{MPa}$$

که کمتر از مقاومت تسلیم است. کلفتی t را می‌یابیم

$$t=\frac{P}{w\sigma_{all}}=\frac{4.0(10^3)}{1.4(542.9/1.3)}=6.84\ \text{mm} \quad \text{(یا بیشتر)}$$

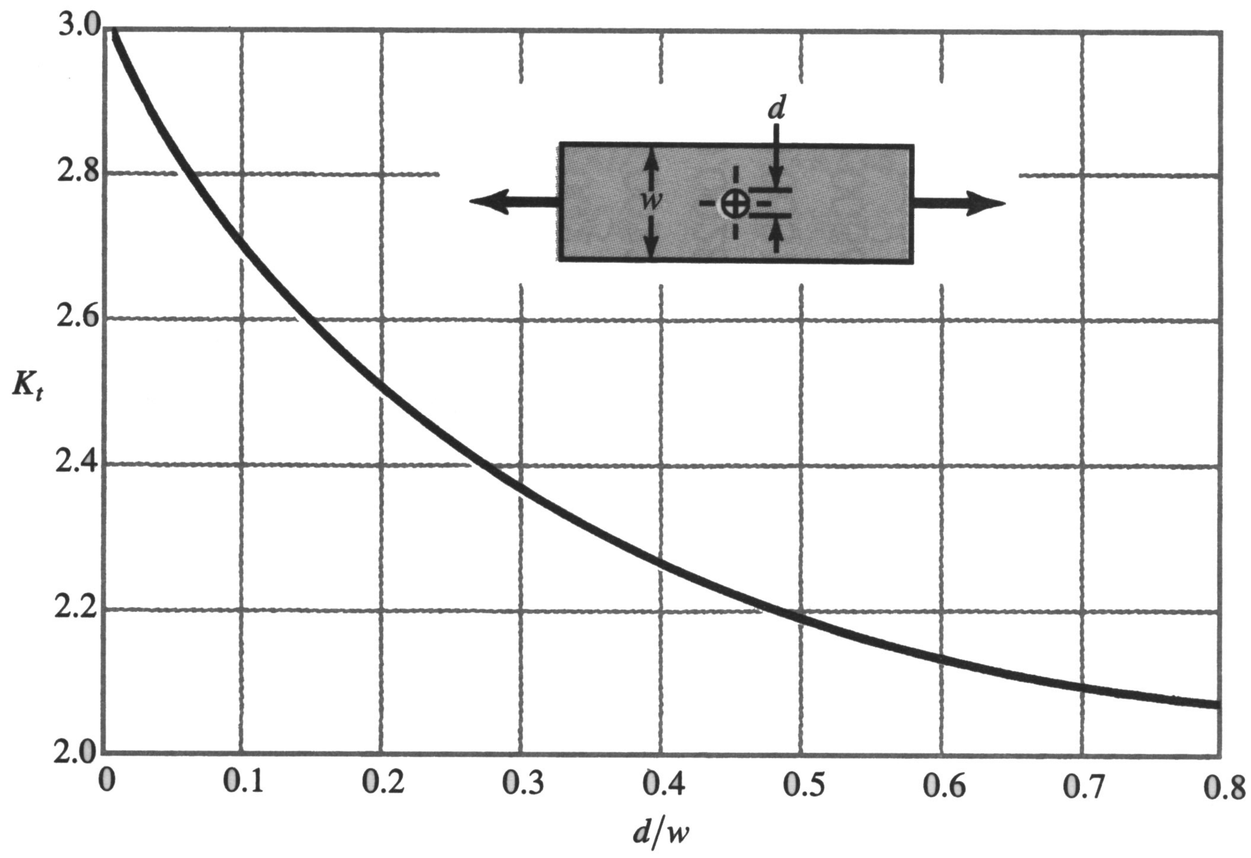
این نمونه نشان داد که آنگاه که آلیاژ قوی‌تر به‌کار می‌رود، چقرمگی شکست K_{Ic} کلفتی قطعه را محدود می‌کند و کمترین کلفتی لازم 6.84 mm است. اگر آلیاژ ضعیف‌تر به‌کار رود، مقاومت تسلیم محدود کننده طرح است و کلفتی 4.08 mm یا بیشتر لازم است. پس آلیاژ ضعیف‌تر به نازک‌تر و سبک‌تر می‌رسد، زیرا حالت شکست این‌دو فرق دارد.

جدول الف-۱۵

نمودارهای ضرایب تمرکز تنش نظری (هندسی) K_t^*

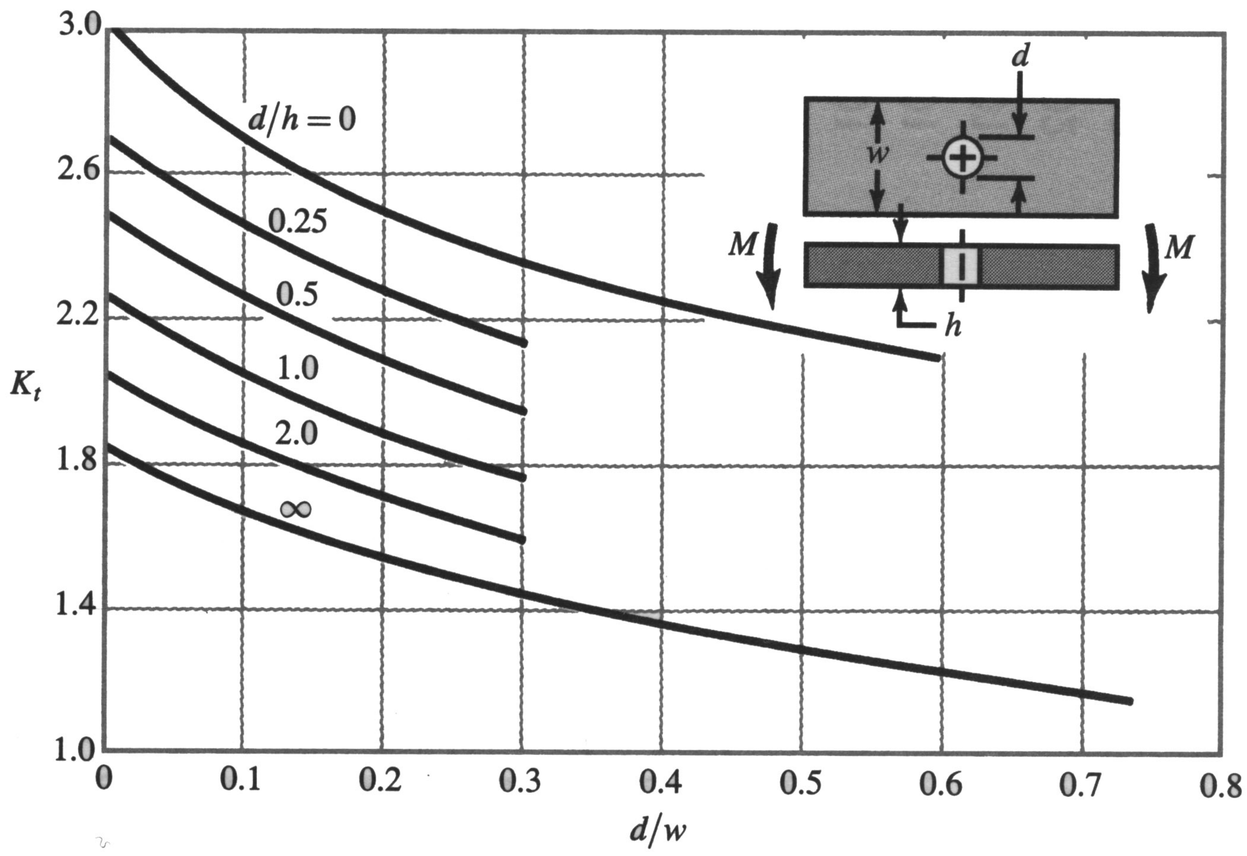
شکل الف-۱۵-۱

میله‌ای با سوراخ عرضی زیر کشش یا فشار ساده، $\sigma_0 = F/A$ که $A = (w-d)t$ و t کلفتی است.



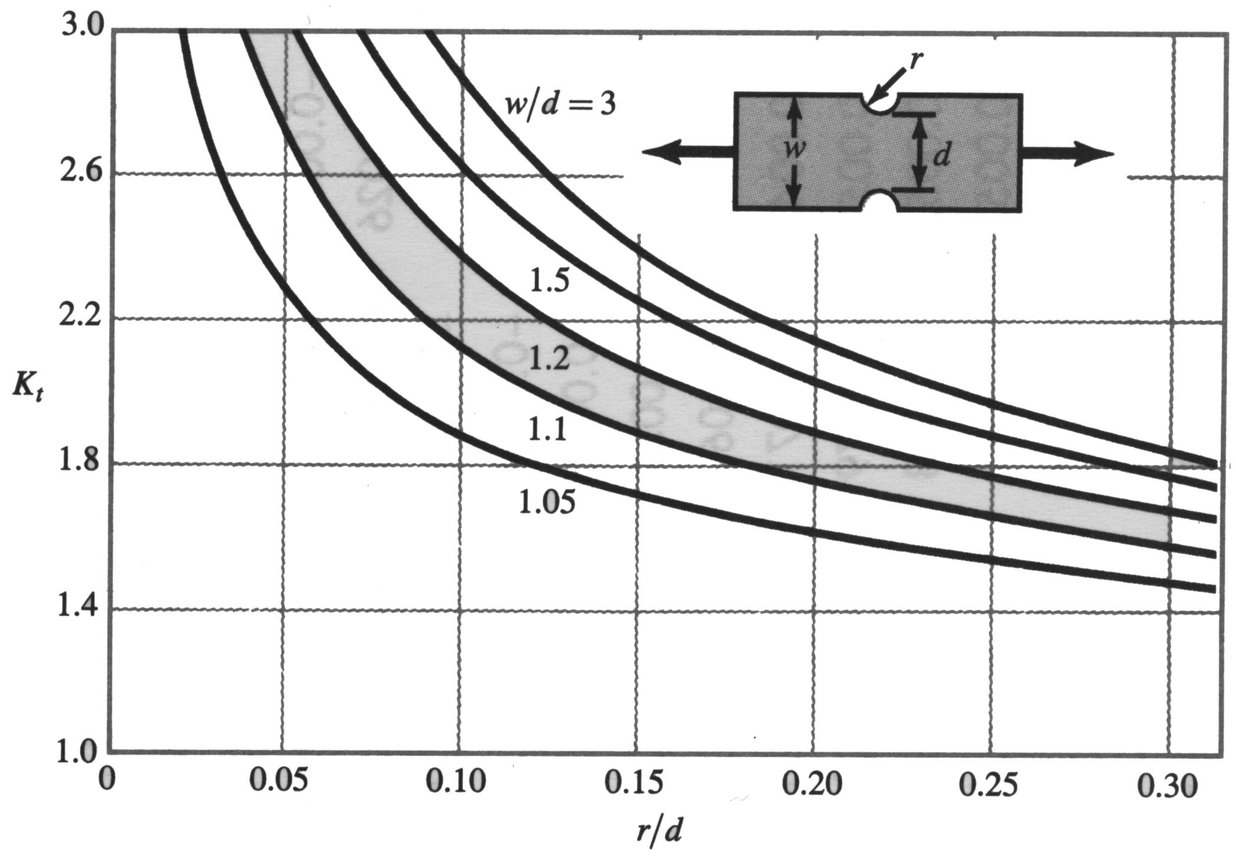
شکل الف-۱۵-۲

میله‌ای با مقطع مستطیل با سوراخ عرضی زیر خمش، $\sigma_0 = Mc/I$ که $I = (w-d)h^3/12$.



شکل الف-۱۵-۳

میله‌ای با مقطع مستطیل چاک‌دار زیر کشش یا فشار ساده، $\sigma_0 = F/A$ که $A = dt$ و t کلفتی است.

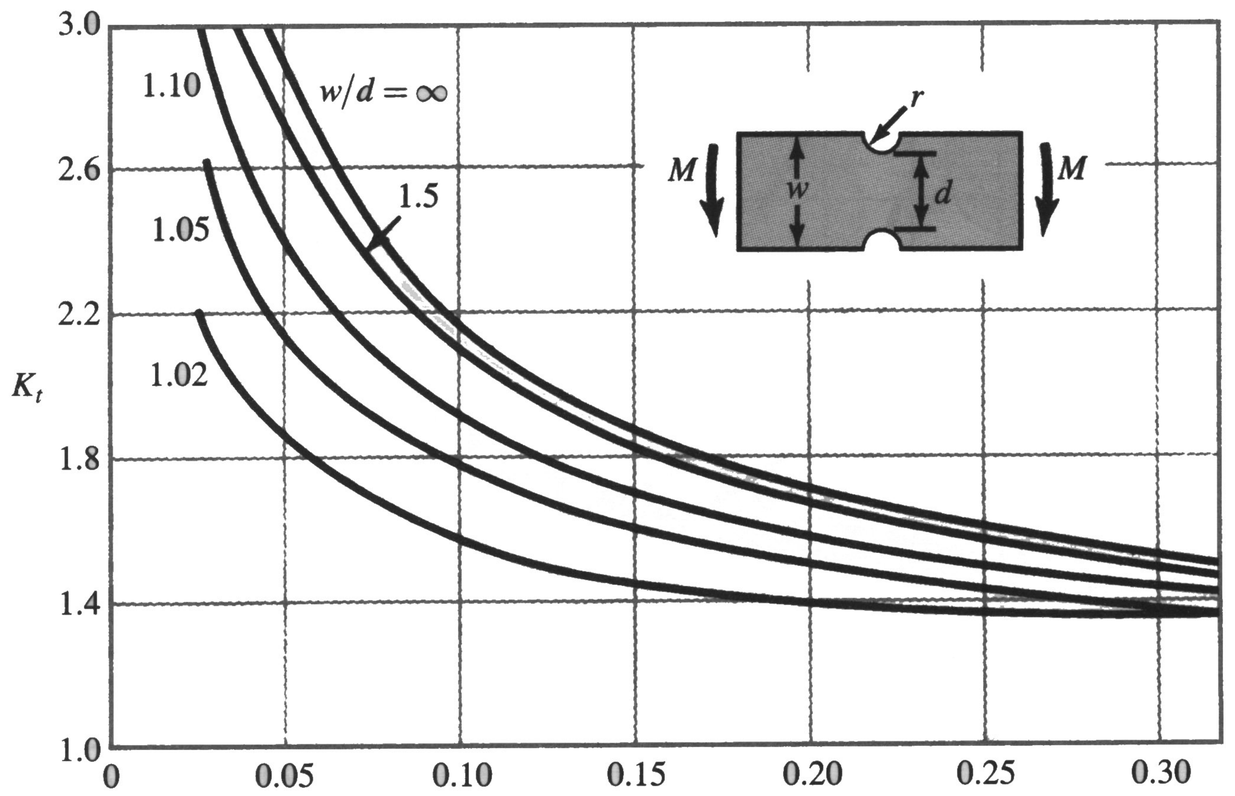


جدول الف-۱۵

نمودارهای ضرایب تمرکز تنش نظری (هندسی) K_t^* (ادامه)

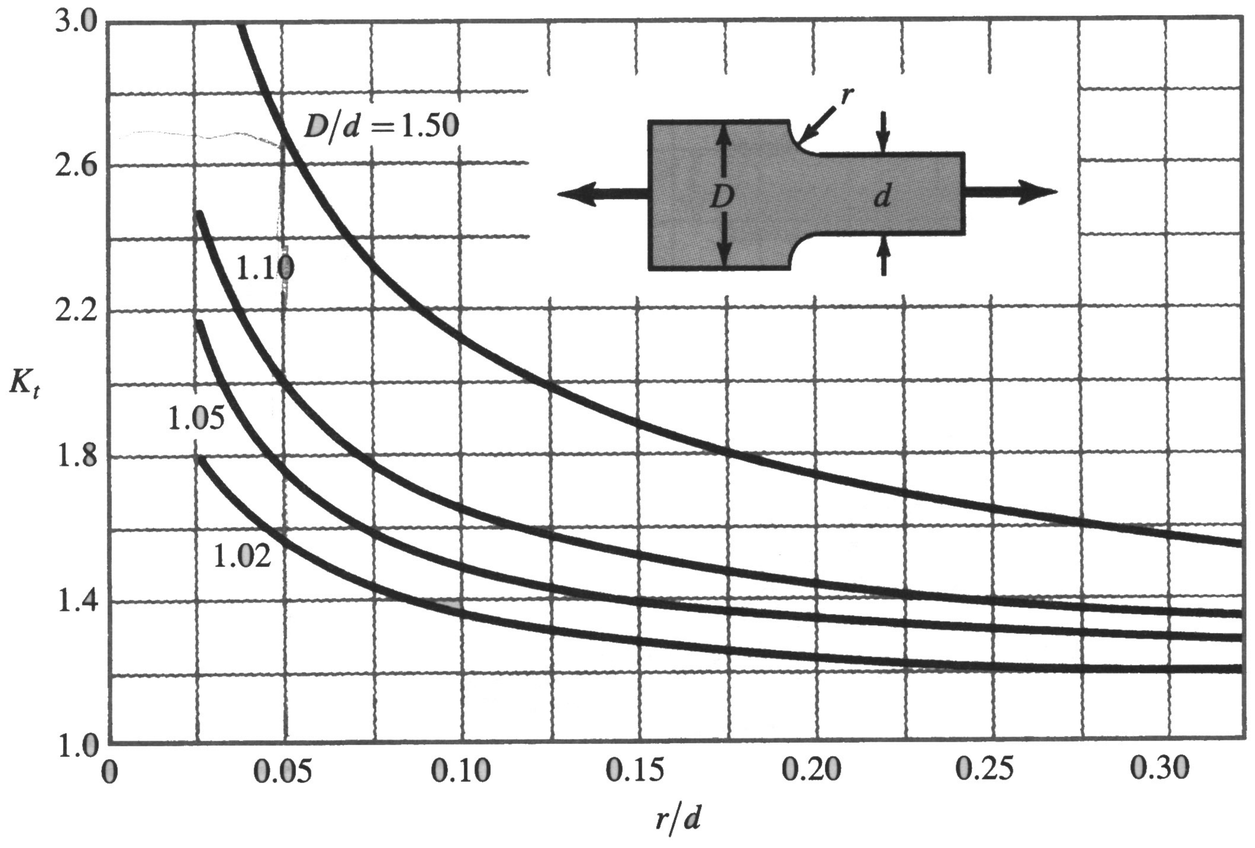
شکل الف-۱۵-۴

میله مستطیل چاک‌دار زیر خمش، $\sigma_0 = Mc/I$ که $c = d/2$ ، $I = td^3/12$ و t کلفتی است.



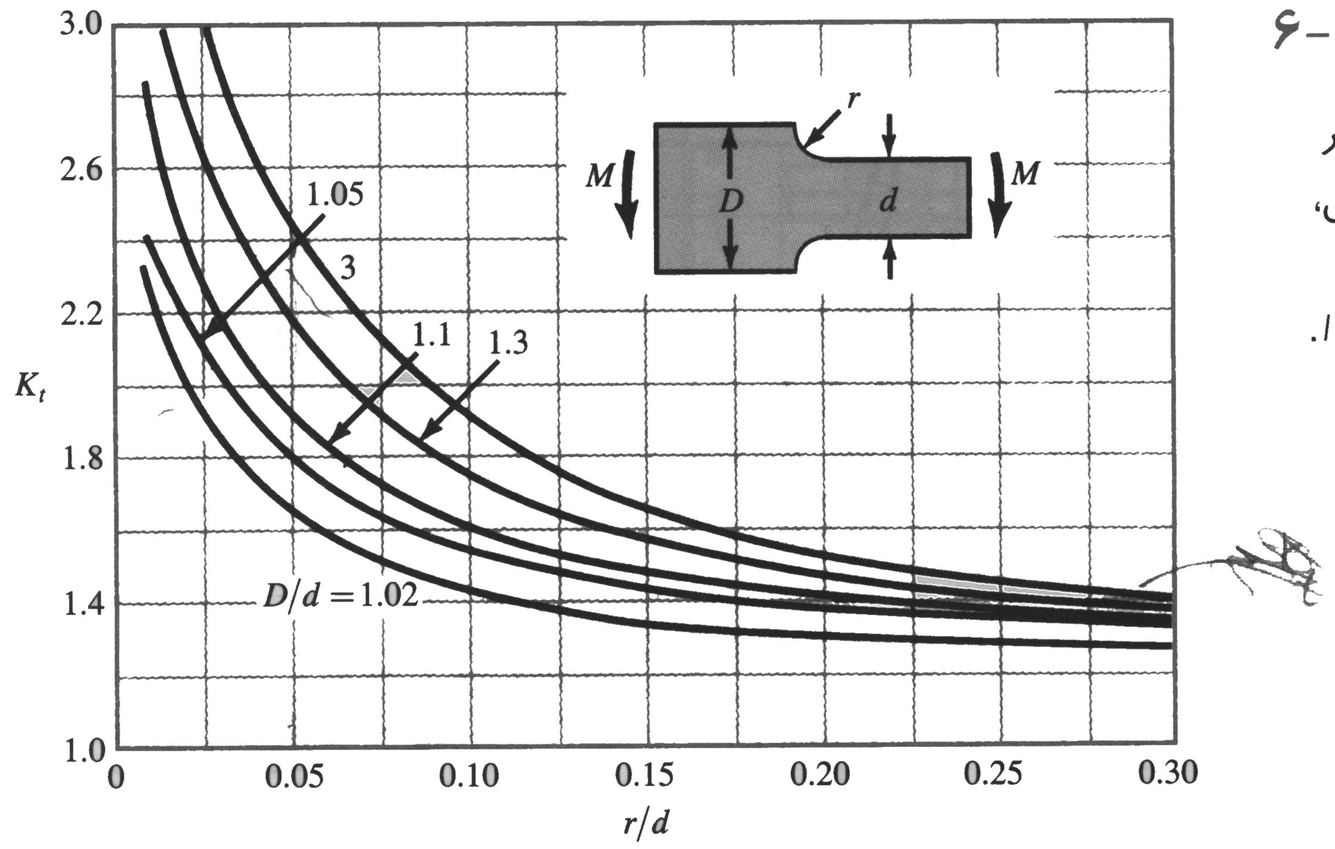
شکل الف-۱۵-۵

میله‌ای مستطیلی پله‌دار به‌کلفتی t زیر کشش یا فشار ساده، $\sigma_0 = F/A$ که $A = dt$ است.



شکل الف-۱۵-۶

میله مستطیلی پله‌دار به‌کلفتی t زیر خمش، که $\sigma_0 = Mc/I$ ، $c = d/2$ ، $I = td^3/12$.



(ادامه)

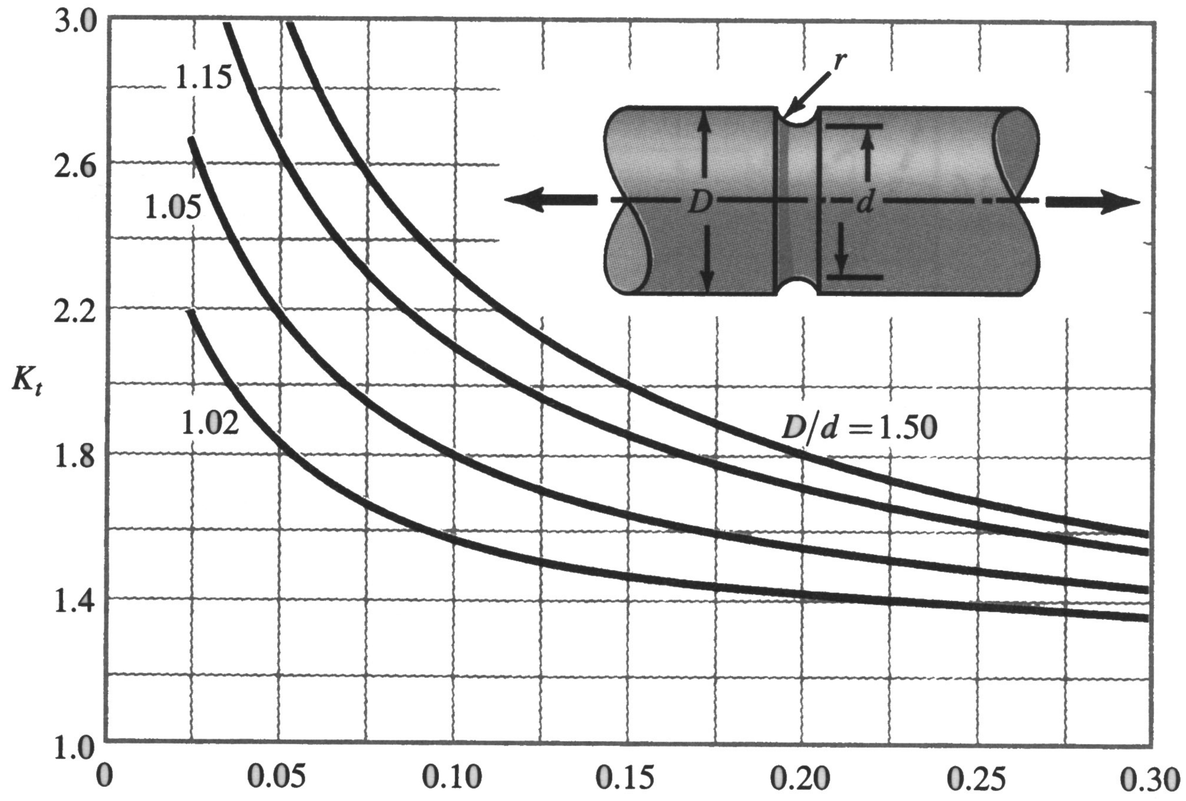
*Factors from R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration," *Machine Design,* vol 23, no. 2, February 1951, p. 169; no. 3, March 1951, p. 161, no. 5, May 1951, p. 159; no. 6, June 1951, p. 173; no. 7, July 1951, p. 155. Reprinted with permission from *Machine Design,* a Penton Media Inc. publication.

جدول الف-۱۵

نمودارهای ضرایب تمرکز تنش نظری (هندسی) K_t^* (ادامه)

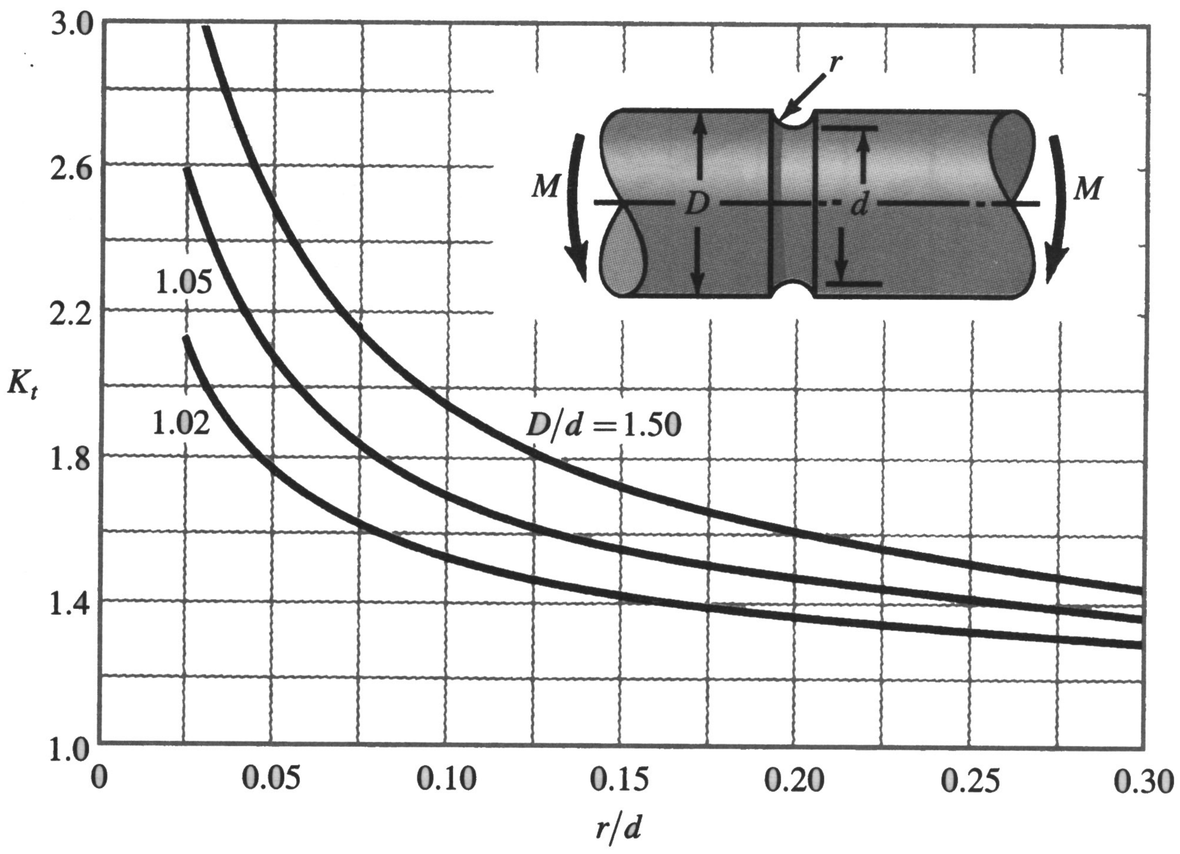
شکل الف-۱۵-۱۳

میله گرد شیاردار زیر کشش، $\sigma_0 = F/A$ که $A = \pi d^2/4$.



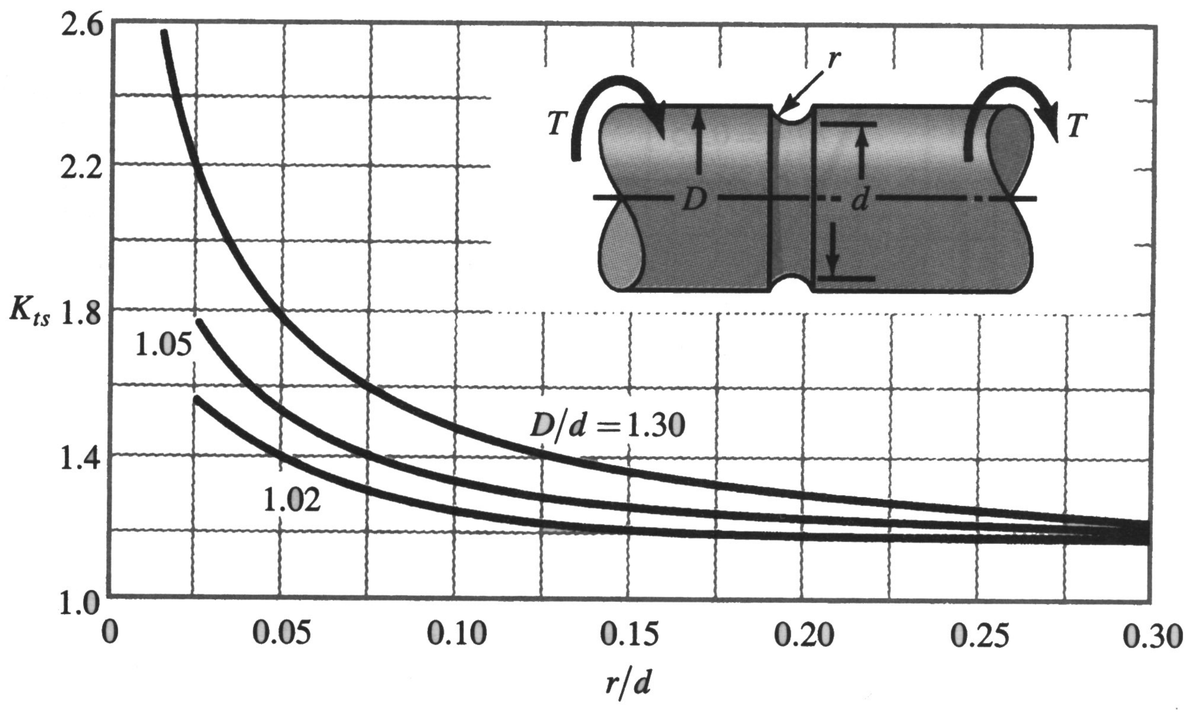
شکل الف-۱۵-۱۴

میله گرد شیاردار زیر خمش، $\sigma_0 = Mc/I$ که $c = d/2$ و $I = \pi d^4/64$.



شکل الف-۱۵-۱۵

میله گرد شیاردار زیر پیچش، $\tau_0 = Tc/J$ که $c = d/2$ و $J = \pi d^4/32$.



*Factors from R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration," *Machine Design,* vol 23, no. 2, February 1951, p. 169; no. 3, March 1951, p. 161, no. 5, May 1951, p. 159; no. 6, June 1951, p. 173; no. 7, July 1951, p. 155. Reprinted with permission from *Machine Design,* a Penton Media Inc. publication.

جدول الف-۲۰

کمترین مقاومت‌های قطعی کشش و تسلیم ASTM برای برخی فولادهای نورد گرم (HR) و سرد کشیده (CD). [فهرست مقاومت‌های زیر، کمترین مقادیر ASTM برآورد شده در بازهٔ اندازه 18 تا 32 mm (1$\frac{1}{4}$ in تا $\frac{3}{4}$) است. این مقاومت‌ها برای کاربرد با داشتن ضریب طراحی در بخش ۱-۱۰ مناسب است. به شرط این‌که مواد با ویژگی‌های A568 یا ASTM A6 بخواند یا در مشخصات خرید، لازم باشد. یادت باشد که دستگاه شماره‌گذاری یک مشخصات نیست. برای فولادهای ASTM معین، جدول ۱-۱ را ببین]

منبع: 1986 SAE Handbook, p. 2.15.

1 شماره UNS	2 شماره SAE و/یا AISI	3 فرآیند ساخت	4 مقاومت کششی، MPa (kpsi)	5 مقاومت تسلیم، MPa (kpsi)	6 افزایش طول در 2 in، %	7 کاهش سطح، %	8 سختی Brinell
G10060	1006	HR	300 (43)	170 (24)	30	55	86
		CD	330 (48)	280 (41)	20	45	95
G10100	1010	HR	320 (47)	180 (26)	28	50	95
		CD	370 (53)	300 (44)	20	40	105
G10150	1015	HR	340 (50)	190 (27.5)	28	50	101
		CD	390 (56)	320 (47)	18	40	111
G10180	1018	HR	400 (58)	220 (32)	25	50	116
		CD	440 (64)	370 (54)	15	40	126
G10200	1020	HR	380 (55)	210 (30)	25	50	111
		CD	470 (68)	390 (57)	15	40	131
G10300	1030	HR	470 (68)	260 (37.5)	20	42	137
		CD	520 (76)	440 (64)	12	35	149
G10350	1035	HR	500 (72)	270 (39.5)	18	40	143
		CD	550 (80)	460 (67)	12	35	163
G10400	1040	HR	520 (76)	290 (42)	18	40	149
		CD	590 (85)	490 (71)	12	35	170
G10450	1045	HR	570 (82)	310 (45)	16	40	163
		CD	630 (91)	530 (77)	12	35	179
G10500	1050	HR	620 (90)	340 (49.5)	15	35	179
		CD	690 (100)	580 (84)	10	30	197
G10600	1060	HR	680 (98)	370 (54)	12	30	201
G10800	1080	HR	770 (112)	420 (61.5)	10	25	229
G10950	1095	HR	830 (120)	460 (66)	10	25	248

جدول الف-۲۱

میانگین خواص مکانیکی برخی فولادهای گرماکاری شده. [این‌جا خواص رایج مواد تابانده و تنش گرفته است. خواص فولادهای آبداده و بازپخت شده (Q&T) از یک‌بار ذوب کوره است. چون متغیرها بسیارند، فهرست زیر، مقادیر میانگین کلی است. همه داده‌ها از آزمون نمونه‌هایی به‌قطر 12.83 mm (0.505 in) به‌دست آمده که از میلگرد به‌قطر 25.4 mm (1 in) تراشیده و طول سنجه 50.8 mm (2 in) بوده است. همه نمونه‌ها در روغن سخت شده‌اند مگر جز این ذکر شود.] منبع: کتاب مرجع فلزات ASM.

1 شماره AISI	2 گرماکاری	3 دما °C (°F)	4 مقاومت کششی، MPa (kpsi)	5 مقاومت تسلیم، MPa (kpsi)	6 افزایش طول، %	7 کاهش سطح، %	8 سختی Brinell
1030	Q&T*	205 (400)	848 (123)	648 (94)	17	47	495
	Q&T*	315 (600)	800 (116)	621 (90)	19	53	401
	Q&T*	425 (800)	731 (106)	579 (84)	23	60	302
	Q&T*	540 (1000)	669 (97)	517 (75)	28	65	255
	Q&T*	650 (1200)	586 (85)	441 (64)	32	70	207
	Normalized	925 (1700)	521 (75)	345 (50)	32	61	149
	Annealed	870 (1600)	430 (62)	317 (46)	35	64	137
1040	Q&T	205 (400)	779 (113)	593 (86)	19	48	262
	Q&T	425 (800)	758 (110)	552 (80)	21	54	241
	Q&T	650 (1200)	634 (92)	434 (63)	29	65	192
	Normalized	900 (1650)	590 (86)	374 (54)	28	55	170
	Annealed	790 (1450)	519 (75)	353 (51)	30	57	149
1050	Q&T*	205 (400)	1120 (163)	807 (117)	9	27	514
	Q&T*	425 (800)	1090 (158)	793 (115)	13	36	444
	Q&T*	650 (1200)	717 (104)	538 (78)	28	65	235
	Normalized	900 (1650)	748 (108)	427 (62)	20	39	217
	Annealed	790 (1450)	636 (92)	365 (53)	24	40	187
1060	Q&T	425 (800)	1080 (156)	765 (111)	14	41	311
	Q&T	540 (1000)	965 (140)	669 (97)	17	45	277
	Q&T	650 (1200)	800 (116)	524 (76)	23	54	229
	Normalized	900 (1650)	776 (112)	421 (61)	18	37	229
	Annealed	790 (1450)	626 (91)	372 (54)	22	38	179
1095	Q&T	315 (600)	1260 (183)	813 (118)	10	30	375
	Q&T	425 (800)	1210 (176)	772 (112)	12	32	363
	Q&T	540 (1000)	1090 (158)	676 (98)	15	37	321
	Q&T	650 (1200)	896 (130)	552 (80)	21	47	269
	Normalized	900 (1650)	1010 (147)	500 (72)	9	13	293
	Annealed	790 (1450)	658 (95)	380 (55)	13	21	192
1141	Q&T	315 (600)	1460 (212)	1280 (186)	9	32	415
	Q&T	540 (1000)	896 (130)	765 (111)	18	57	262

(ادامه)

جدول الف-۲۴

خواص مکانیکی سه جنس رایج (غیرفولاد)

(الف) خواص معمول چدن خاکستری

[بنا به نمره‌گذاری (ASTM) برای چدن، نمره همان کمترین مقاومت کششی به MPa است. پس چدن نمرهٔ ASTM 20، با کمترین مقاومت کششی 20 kpsi (138 Mpa) است. بدان که آنچه در جدول آمده، برای چندین کوره، معمول است.]

شمارهٔ ASTM	مقاومت کششی S_{ut}، MPa	مقاومت فشار S_{uc}، MPa	ضریب برشی گسیختگی S_{su}، MPa	ضریب کشسانی GPa: کشش†	ضریب کشسانی GPa: پیچش	حد دوام* S_e، MPa	سختی Brinell H_B	ضریب تمرکز تنش خستگی K_f
20	152	572	180	66–97	27–39	69	156	1.00
25	180	668	220	79–102	32–41	79	174	1.05
30	214	751	276	90–113	36–45	97	201	1.10
35	252	851	334	100–119	40–48	110	212	1.15
40	293	965	393	110–138	44–54	127	235	1.25
50	362	1130	503	130–157	50–55	148	262	1.35
60	431	1292	610	141–162	54–59	169	302	1.50

*نمونه‌های برّاق یا ماشین‌شده.

†ضریب کشسانی چدن در فشار، با حد بالایی حدود داده شده برای کشش نزدیک است ولی ثابت‌تر از برای آن است.

مسایل

وارسی **۶-۱** میله‌ای فولادی گرم‌نوردشدهٔ شکل‌پذیر با مقاومت کششی و فشاری تسلیم دست‌کم 350 MPa (50 kpsi) است. به‌یاری نظریه‌های انرژی واپیچش و بیشترین تنش برشی، ضرایب ایمنی برای حالت‌های تنش صفحه‌ای زیر به‌دست آورید.

(الف) $\sigma_x = 84\ \text{MPa}$ ، $\sigma_y = 42\ \text{MPa}$

(ب) $\sigma_x = 84\ \text{MPa}$ ، $\tau_{xy} = -56\ \text{MPa}$

(ج) $\sigma_x = -42\ \text{MPa}$ ، $\sigma_y = -70\ \text{MPa}$ ، $\tau_{xy} = -35\ \text{MPa}$

(د) $\sigma_x = 84\ \text{MPa}$ ، $\sigma_y = 28\ \text{MPa}$ ، $\tau_{xy} = 7\ \text{MPa}$

وارسی **۶-۲** مسأله ۶-۱ را تکرار کن، برای:

(الف) $\sigma_A = 84\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = 84\ \text{MPa}$

(ب) $\sigma_A = 84\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = 42\ \text{MPa}$

(ج) $\sigma_A = 84\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = -84\ \text{MPa}$

(د) $\sigma_A = -42\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = -84\ \text{MPa}$

وارسی **۶-۳** مسأله ۶-۱ را برای فولاد سردکشیده AISI 1020 تکرار کن، اگر:

(الف) $\sigma_x = 180\ \text{MPa}$ ، $\sigma_y = 100\ \text{MPa}$

(ب) $\sigma_x = 180\ \text{MPa}$ ، $\tau_{xy} = 100\ \text{MPa}$

(ج) $\sigma_x = -160\ \text{MPa}$ ، $\tau_{xy} = 100\ \text{MPa}$

(د) $\tau_{xy} = 150\ \text{MPa}$

وارسی **۶-۴** مسأله ۶-۱ را برای فولاد گرم‌نوردشده AISI 1018 تکرار کن، اگر:

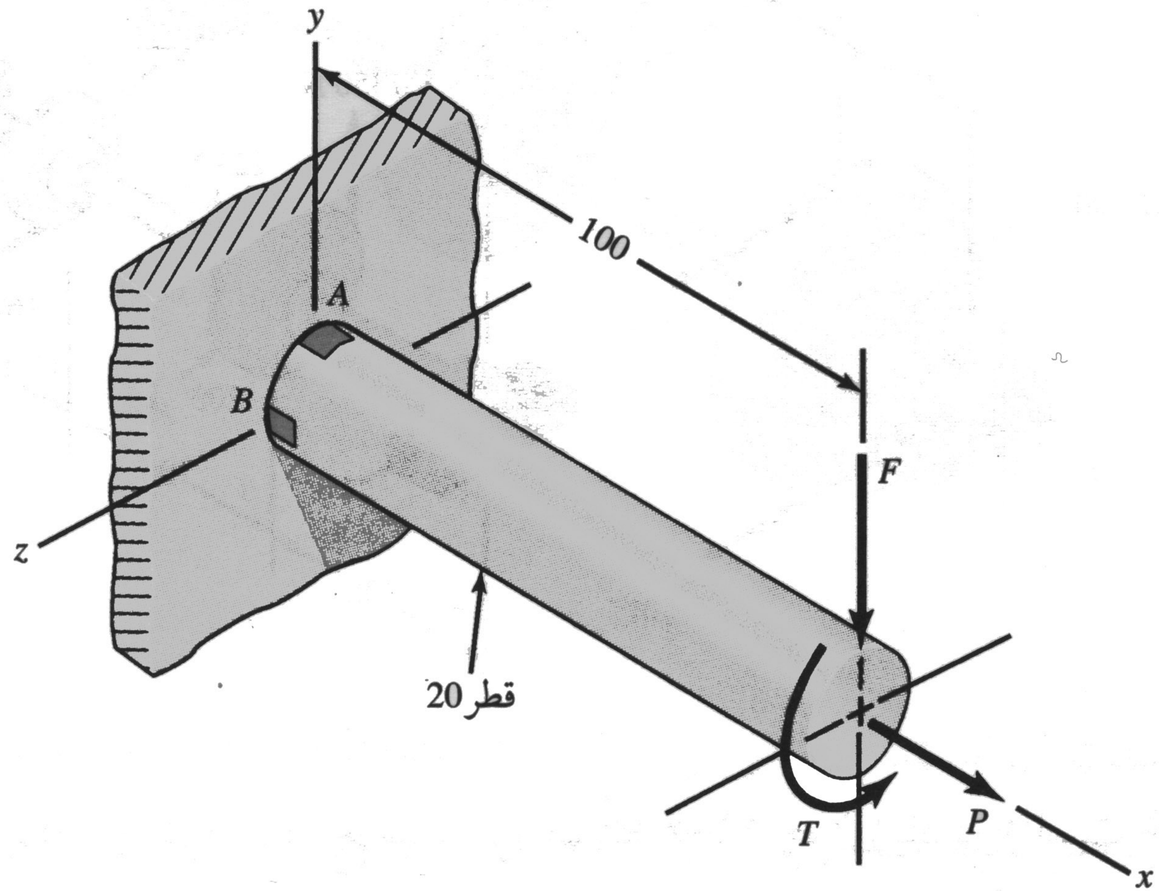
(الف) $\sigma_A = 100\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = 80\ \text{MPa}$

(ب) $\sigma_A = 100\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = 10\ \text{MPa}$

(ج) $\sigma_A = 100\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = -80\ \text{MPa}$

(د) $\sigma_A = -80\ \text{MPa}$ ، $\sigma_B = -100\ \text{MPa}$

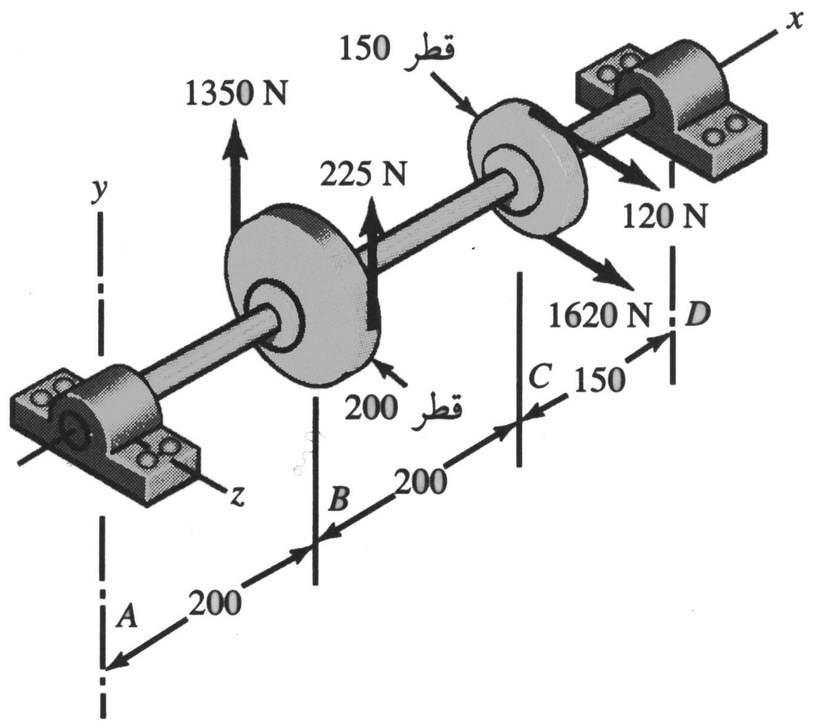
وارسی **۶-۱۴** این مسأله نشان می‌دهد که ضریب اطمینان به نقطه تحت بررسی بستگی دارد. ضرایب اطمینان در نقاط تنش A و B قطعه‌ای مانند شکل را از تئوری انرژی واپیچش به‌دست آور. جنس میله فولاد سردکشیده AISI 1006 و زیر نیروهای $F = 0.55\,\text{kN}$، $P = 8.0\,\text{kN}$، و $T = 30\,\text{N}\cdot\text{m}$ است.



شکل مسأله ۶-۱۴

طراحی

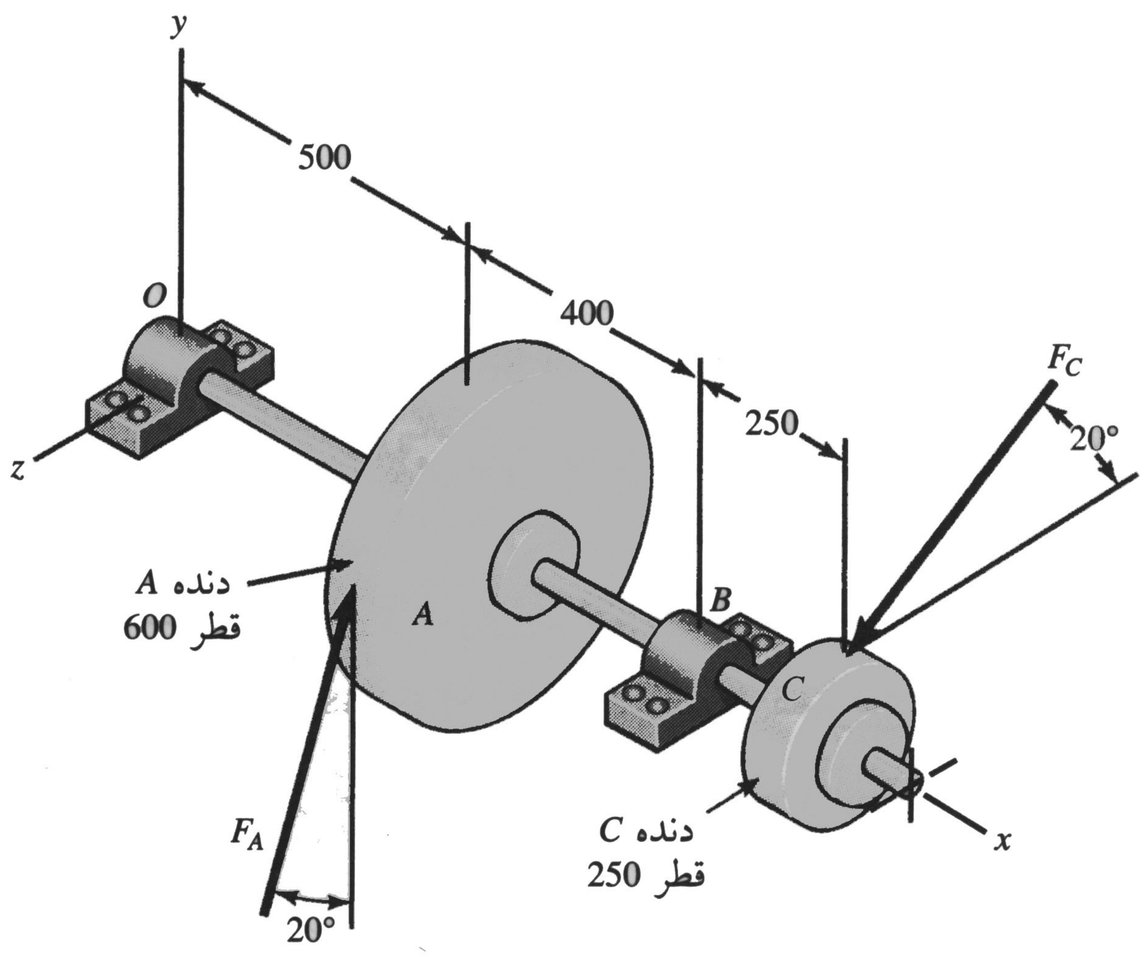
۶-۲۱ در شکل میلمحوری روی دو تکیه‌گاه در A و D و دو قرقره هم در B و C روی آن سوار است. نیروهای کشش تسمه در طرفین هر قرقره وارد می‌شود. میلمحور از چدن ردهٔ 25، ASTM و ضریب طراحی $n_d = 2.8$ است. قطر میلمحور چند است؟



شکل مسأله ۶-۲۱

طراحی

۶-۲۳ نیروهای وارد به چرخدنده‌ها، بنا به‌شکل، در صفحه‌های موازی با yz است. نیروی روی چرخ A، 1340 N و یاتاقان‌ها در O و B را تکیه‌گاه ساده می‌گیریم. با وارسی ایستا و ضریب ایمنی 3.5، به‌یاری انرژی واپیچش، کمترین قطر ایمن میلمحور را پیدا کن. مقاومت تسلیم ماده را 410 MPa (60 kpsi) بگیر.



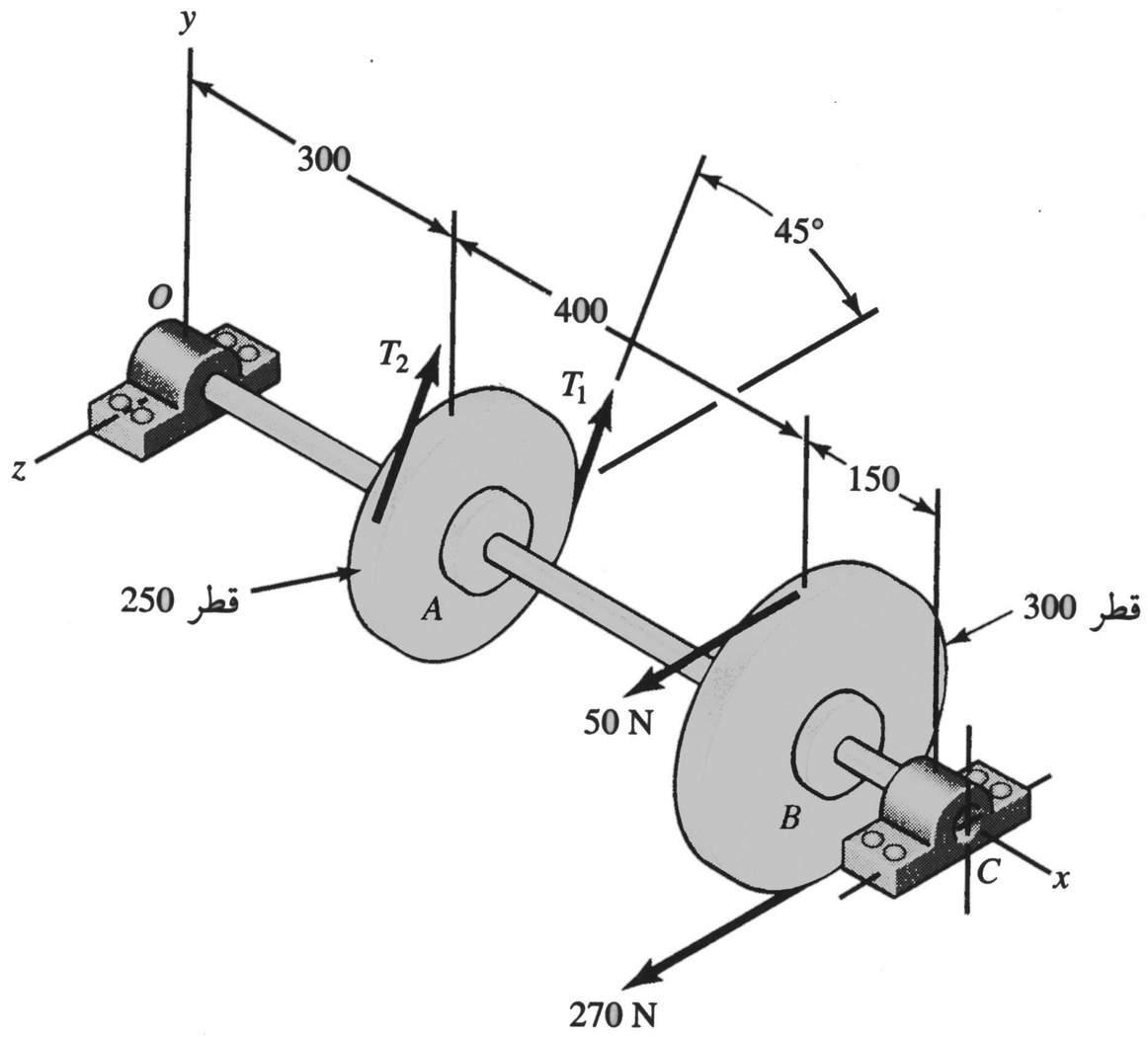
شکل مسأله ۶-۲۳

طراحی

۶-۲۴ مسأله ۶-۲۳ را با نظریه بیشترین تنش برشی تکرار کن.

طراحی

۶-۲۵ در شکل مسأله، طرح دستی یک میلمحور واسطه حامل دو قرقرهٔ تسمهٔ ذوزنقه‌ای (V) می‌بینی. راستای دوسر تسمه هر قرقره موازی‌اند. برای قرقرهٔ A، کشش در سمت شل تسمه 15 درصد کشش در سمت



شکل مسأله ۶-۲۵

سفت آن است. میلمحوری از فولاد UNS G10180 به‌قطر یکنواخت باید بر این کار گزیده شود. برای وارسی ایستا با ضریب ایمنی 3.0، کمترین اندازهٔ برتر قطر را تعیین کن. نظریه انرژی واپیچش را به‌کار ببر.

طراحی

۶-۲۶ مسأله ۶-۲۵ را با نظریه بیشترین تنش برشی تکرار کن.

منابع :

کتاب طراحی اجزای ماشین ویرایش هفتم

ترجمه دکتر شادروان