

**PART**

**2**

**Failure Prevention**

پیشگیری خرابی ( شکست )

# 5

## Failures Resulting from Static Loading

شکست های ناشی از بار گذاری ایستا

## Failure Theories

## نظریه های شکست یا خرابی

رفتار فلز از نظر ساختمانی به طور مرسوم به دو گونه شکل پذیر و ترد است:

۱. مواد شکل پذیر (Ductile materials)

$$\varepsilon_f \geq 0.05$$

$$(S_{yt} = S_{yc} = S_y)$$

۲. مواد ترد (Brittle materials)

$$\varepsilon_f < 0.05$$

مقاومت تسلیم قابل شتاسایی ندارند.

با مقاومت های نهایی کششی  $S_{ut}$  و فشاری  $S_{uc}$  شناخته می شوند.

نظریه هایی که به طور معمول پذیرفته شده اند:

• مواد شکل پذیر (معیار تسلیم) : **Ductile materials** (yield criteria)

– بیشترین تنش برشی: **Maximum shear stress (MSS)**

– انرژی واپیچشی : **Distortion energy (DE)**

– **Coulomb-Mohr** شکل پذیر: **Ductile Coulomb-Mohr (DCM)**

• مواد ترد (معیار شکست یا پارگی) : **Brittle materials** (fracture criteria)

– بیشترین تنش عمودی : **Maximum normal stress (MNS)**

– **Coulomb-Mohr** ترد : **Brittle Coulomb-Mohr (BCM)**

## Maximum-Shear-Stress Theory for Ductile Materials

## نظریه بیشترین تنش برشی برای مواد شکل پذیر

تسلیم زمانی آغاز می شود که بیشترین تنش برشی در هر جزء برابر یا بیشتر از بیشترین تنش برشی در نمونه آزمون کشش از همان جنس در آغاز تسلیم باشد.

$$\sigma = P/A$$

در نمونه تحت آزمون کشش

– تنش کشش ساده

– بیشترین تنش برشی در سطح 45 درجه نسبت به سطح کشش رخ می دهد

$$\tau_{\max} = \sigma/2$$

– بیشترین تنش برشی در هنگام تسلیم در نمونه تحت آزمون کشش

$$\tau_{\max} = S_y/2$$

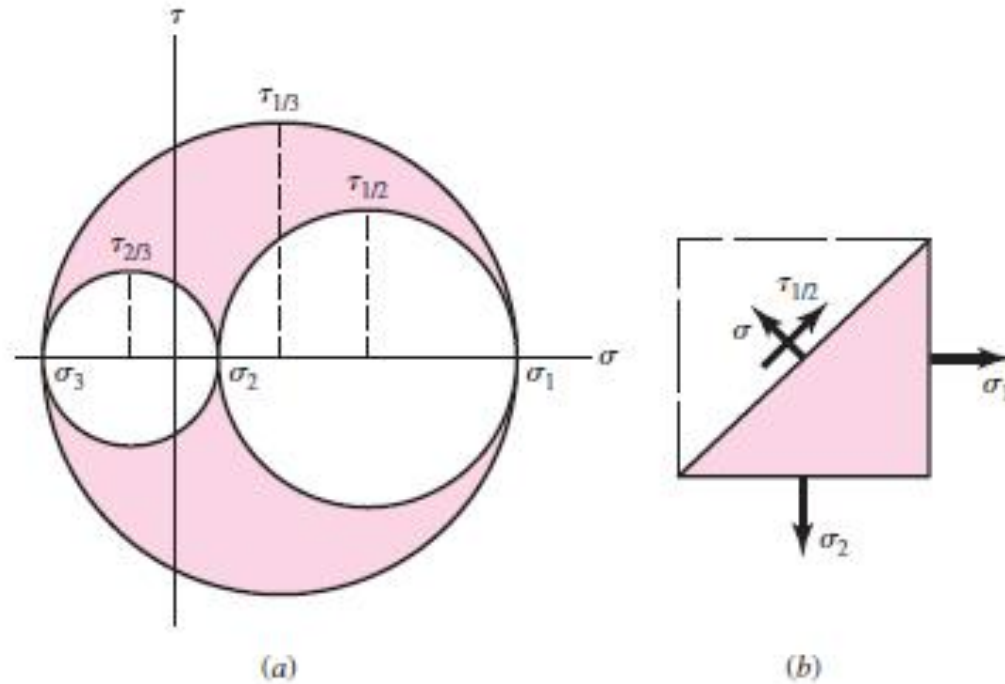
• برای حالت عمومی تنش

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

– سه تنش اصلی

– بیشترین تنش برشی

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$$



- نظریه بیشترین تنش برشی تسلیم را چنین پیش بینی می کند:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y$$

- این معادله می گوید که بیشترین مقاومت تسلیم برشی (the yield strength in shear) برابر است با

$$S_{sy} = 0.5S_y$$

- که چنانچه خواهیم دید حدود 15 درصد کم است (محافظ conservative)

- برای کار طراحی ضریب ایمنی برابر با

$$\tau_{\max} = \frac{S_y}{2n} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n}$$

- مسائل تنش دو بعدی (صفحه ای) بسیار رایج است که در آن یکی از مؤلفه های تنش صفر است و دو مؤلفه دیگر را  $\sigma_A$  و  $\sigma_B$  در نظر می گیریم با فرض اینکه  $\sigma_A \geq \sigma_B$

- حالت 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$

$$\sigma_1 = \sigma_A \quad \sigma_3 = 0 \quad \sigma_A \geq S_y$$

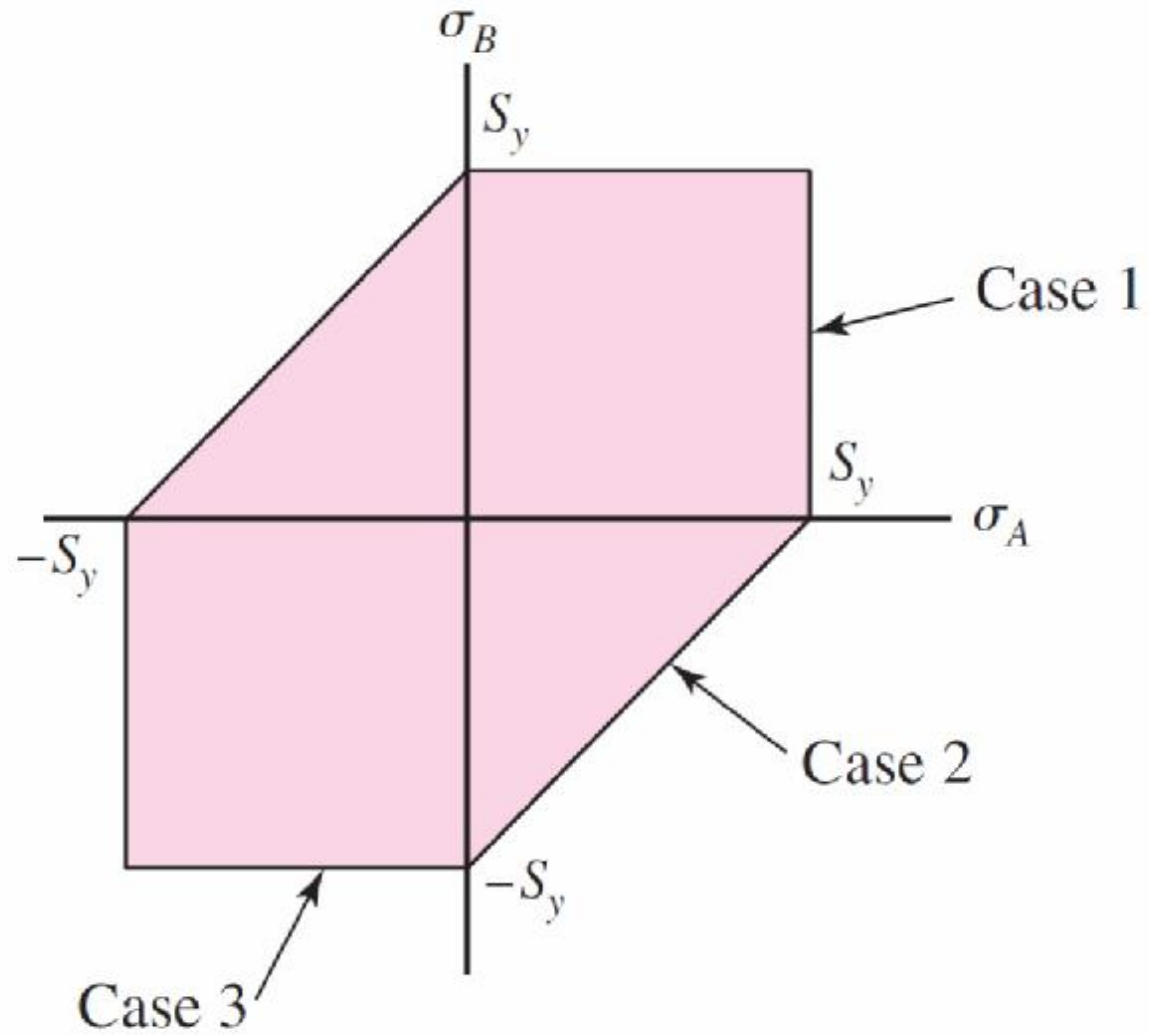
- حالت 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$

$$\sigma_1 = \sigma_A \quad \sigma_3 = \sigma_B \quad \sigma_A - \sigma_B \geq S_y$$

- حالت 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_3 = \sigma_B \quad \sigma_B \leq -S_y$$



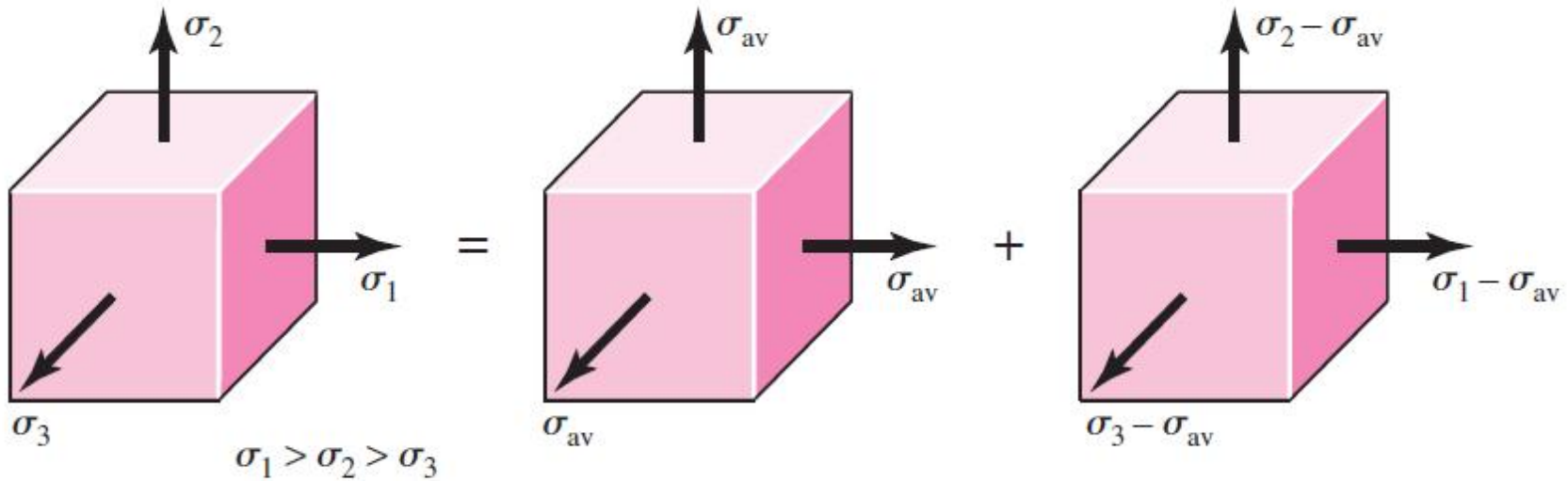


## نظریه انرژی واپیچشی برای مواد شکل پذیر

### Distortion-Energy Theory for Ductile Materials

تسلیم زمانی رخ می دهد که انرژی کرنش واپیچش در یک حجم واحد ماده، به انرژی کرنش واپیچش حجم واحد ماده در تسلیم کشش یا فشار ساده، همان ماده برسد یا بیش از شود.

تسلیم یک پدیده کشش یا فشار ساده نیست بلکه به گونه ای به واپیچش زاویه ای جزء زیر تنش بستگی دارد.



(a) Triaxial stresses

(b) Hydrostatic component

(c) Distortional component

(a) یک حجم واحد زیر حالت عمومی تنش سه محوری

(b) حالت کشش اما با تنش های هیدرواستاتیک

- این جزء تغییر حجم خالص می دهد

(c) این جزء بدون تغییر حجم تنها واپیچشی زاویه ای دارد

• برای حالت عمومی تنش

- انرژی کرنش در حجم واحد برای کشش ساده

$$u = \frac{1}{2} \epsilon \sigma$$

- انرژی کرنش حجم واحد تحت سه تنش اصلی

$$u = \frac{1}{2} [\epsilon_1 \sigma_1 + \epsilon_2 \sigma_2 + \epsilon_3 \sigma_3]$$



$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

– انرژی کرنش حجم واحد تحت تنش های هیدرواستاتیک

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$



$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E} (1 - 2\nu)$$



$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1)$$

– انرژی واپیچش

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$

• اگر  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  باشد، انرژی واپیچش صفر است.

- در نمونه تحت آزمون کشش ساده  
- انرژی واپیچش حجم واحد در تسلیم

$$\sigma_1 = S_y \text{ and } \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \longrightarrow u_d = \frac{1 + \nu}{3E} S_y^2$$

- پس در حالت عمومی تنش نظریه انرژی واپیچش پیش بینی می کند:

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$

- اگر حالت تنش کشش ساده بود تسلیم زمانی رخ می داد که  
 $\sigma \geq S_y$

- پس سمت چپ معادله را می توان یک تنش منفرد، معادل یا مؤثر برای حالت کلی تنش دانست که این تنش مؤثر را تنش مؤثر را تنش *Von Mises* گویند.

$$\sigma' = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$$

- برای حالت تنش دوبعدی (صفحه ای) اگر  $\sigma_A$  و  $\sigma_B$  دو تنش غیر صفر بدانیم

$$\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2}$$

- اگر مؤلفه های XYZ تنش را به کار ببریم، برای حالت دو بعدی و سه بعدی خواهیم داشت:

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2}$$

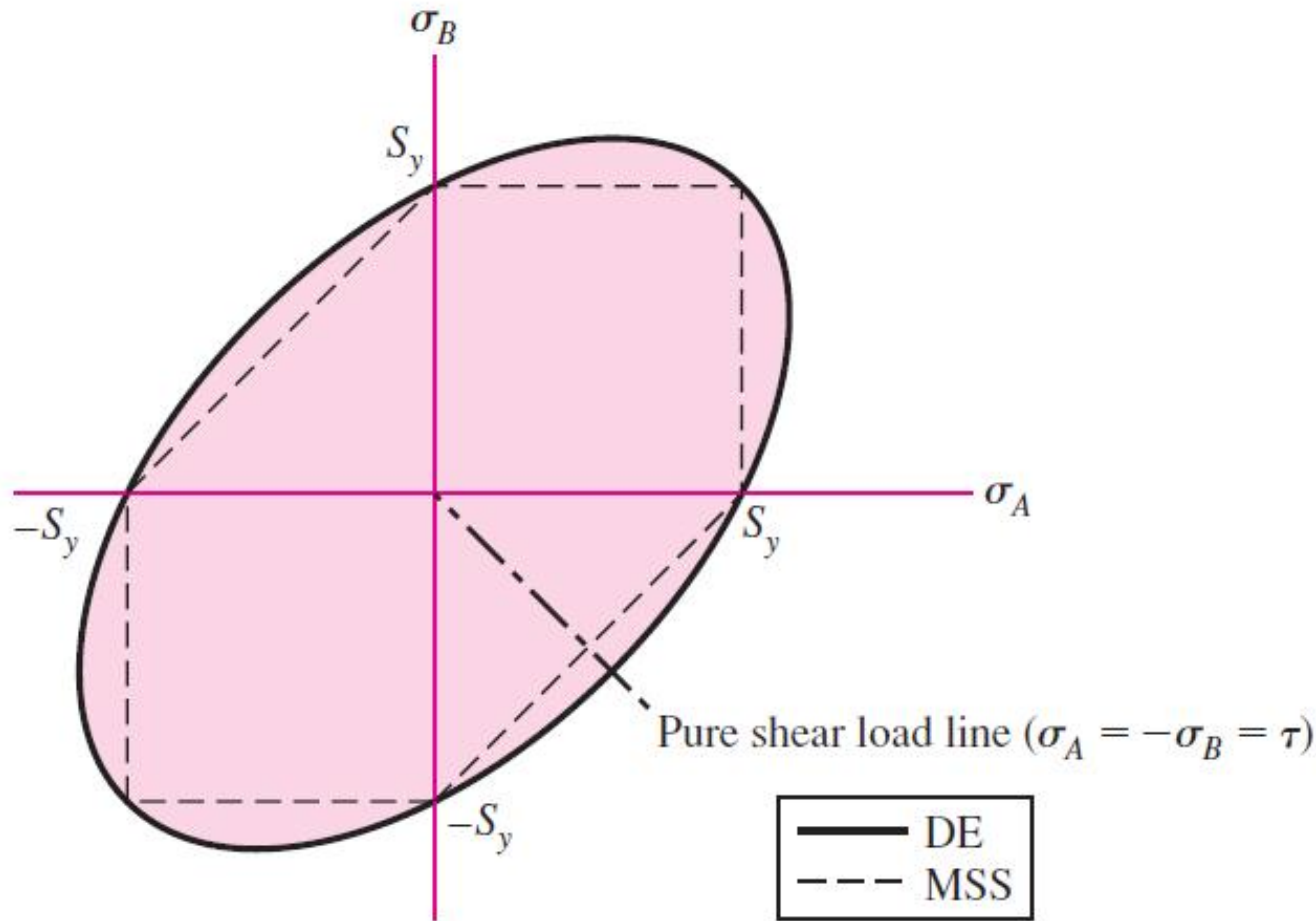
$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

- نام های دیگر نظریه انرژی واپیچش

– نظریه The von Mises or von Mises- Hencky

– نظریه انرژی برشی

– نظریه تنش برشی هشت وجهی octahedral



$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

• به خط بار برش خالص دقت کنید:

pure shear  $\tau_{xy} \rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 0$

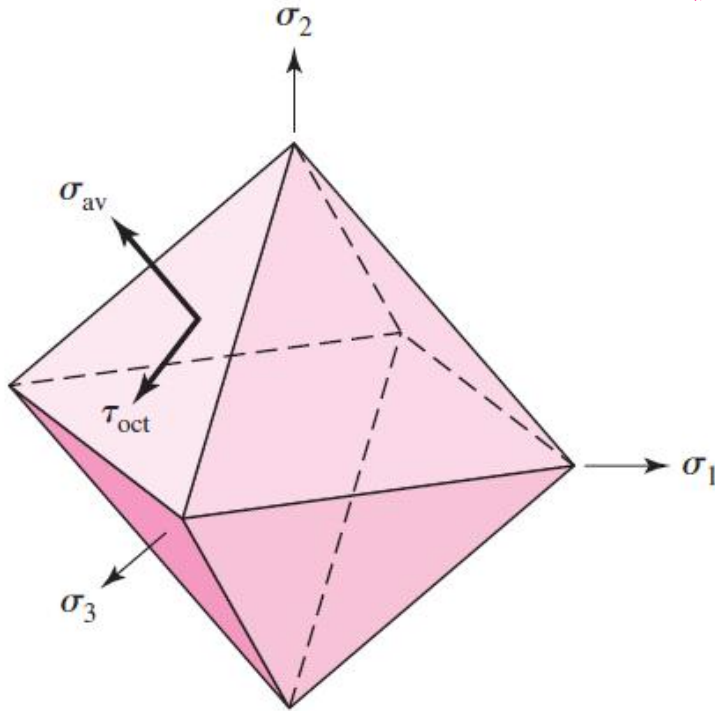
- حدود 15 درصد بزرگتر از M.S.S

$$(3\tau_{xy}^2)^{1/2} = S_y \quad \text{or} \quad \tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577S_y$$



## • تنش برشی هشت وجهی

- هشت سطح متقارن نسبت به راستاهای اصلی یک جزء مستقل را تشکیل می دهند که در آن تنش عمودی وارد بر هر سطح برابر تنش هیدرواستاتیک است



- تنش های برشی روی این سطوح با هم برابرند و آنها را تنش های برشی هشت وجهی می نامند

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$

- پیدایش شکست را زمانی می دانیم که تنش برشی هشت وجهی، در هر حالت با تنش برشی هشت وجهی در نمونه تحت آزمایش کشش ساده در لحظه تسلیم، برابر یا بیشتر از آن شود.

– بنا به نتایج آزمون کشش هنگامی تسلیم رخ می دهد که :

$$\sigma_1 = S_y \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} S_y$$

– بنابراین بنا به نظریه تنش برشی هشت وجهی داریم:

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$

$$\sigma' = \frac{S_y}{n}$$

– معادله طراحی

**EXAMPLE 5-1**

A hot-rolled steel has a yield strength of  $S_{yt} = S_{yc} = 100$  kpsi and a true strain at fracture of  $\epsilon_f = 0.55$ . Estimate the factor of safety for the following principal stress states:

- (a) 70, 70, 0 kpsi.
- (b) 30, 70, 0 kpsi.
- (c) 0, 70, -30 kpsi.
- (d) 0, -30, -70 kpsi.
- (e) 30, 30, 30 kpsi.

**Solution**

Since  $\epsilon_f > 0.05$  and  $S_{yc}$  and  $S_{yt}$  are equal, the material is ductile and the distortion-energy (DE) theory applies. The maximum-shear-stress (MSS) theory will also be applied and compared to the DE results. Note that cases *a* to *d* are plane stress states.

(a) The ordered principal stresses are  $\sigma_A = \sigma_1 = 70$ ,  $\sigma_B = \sigma_2 = 70$ ,  $\sigma_3 = 0$  kpsi.

DE From Eq. (5-13),

$$\sigma' = [70^2 - 70(70) + 70^2]^{1/2} = 70 \text{ kpsi}$$

**Answer**

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{70} = 1.43$$

MSS Case 1, using Eq. (5-4) with a factor of safety,

**Answer**

$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{100}{70} = 1.43$$

(b) The ordered principal stresses are  $\sigma_A = \sigma_1 = 70$ ,  $\sigma_B = \sigma_2 = 30$ ,  $\sigma_3 = 0$  kpsi.

DE 
$$\sigma' = [70^2 - 70(30) + 30^2]^{1/2} = 60.8 \text{ kpsi}$$

**Answer**

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{60.8} = 1.64$$

MSS Case 1, using Eq. (5-4),

**Answer**

$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{100}{70} = 1.43$$

(c) The ordered principal stresses are  $\sigma_A = \sigma_1 = 70$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_B = \sigma_3 = -30$  kpsi.

DE 
$$\sigma' = [70^2 - 70(-30) + (-30)^2]^{1/2} = 88.9 \text{ kpsi}$$

Answer 
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{88.9} = 1.13$$

MSS Case 2, using Eq. (5-5),

Answer 
$$n = \frac{S_y}{\sigma_A - \sigma_B} = \frac{100}{70 - (-30)} = 1.00$$

(d) The ordered principal stresses are  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_A = \sigma_2 = -30$ ,  $\sigma_B = \sigma_3 = -70$  kpsi.

DE 
$$\sigma' = [(-70)^2 - (-70)(-30) + (-30)^2]^{1/2} = 60.8 \text{ kpsi}$$

Answer 
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{60.8} = 1.64$$

MSS Case 3, using Eq. (5-6),

Answer 
$$n = -\frac{S_y}{\sigma_B} = -\frac{100}{-70} = 1.43$$

(e) The ordered principal stresses are  $\sigma_1 = 30$ ,  $\sigma_2 = 30$ ,  $\sigma_3 = 30$  kpsi

DE From Eq. (5-12),

$$\sigma' = \left[ \frac{(30 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + (30 - 30)^2}{2} \right]^{1/2} = 0 \text{ kpsi}$$

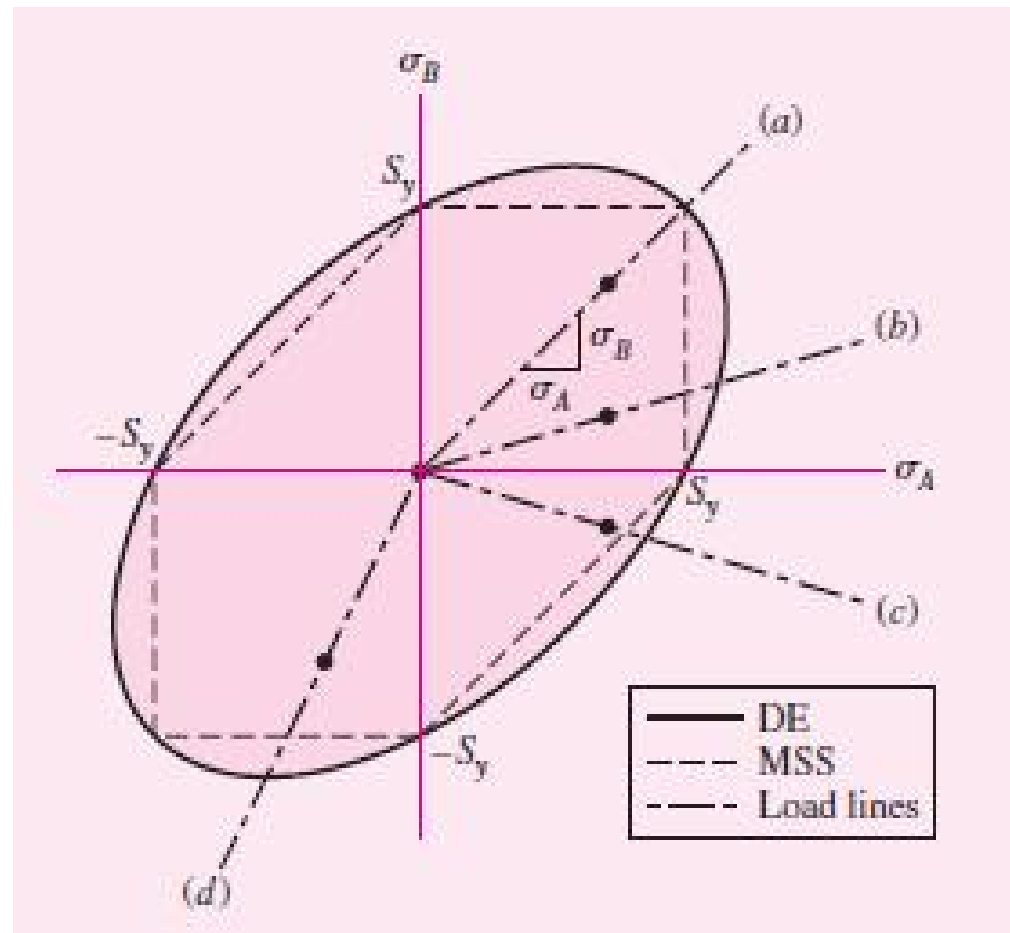
Answer 
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{0} \rightarrow \infty$$

MSS From Eq. (5-3),

Answer 
$$n = \frac{S_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{100}{30 - 30} \rightarrow \infty$$

A tabular summary of the factors of safety is included for comparisons.

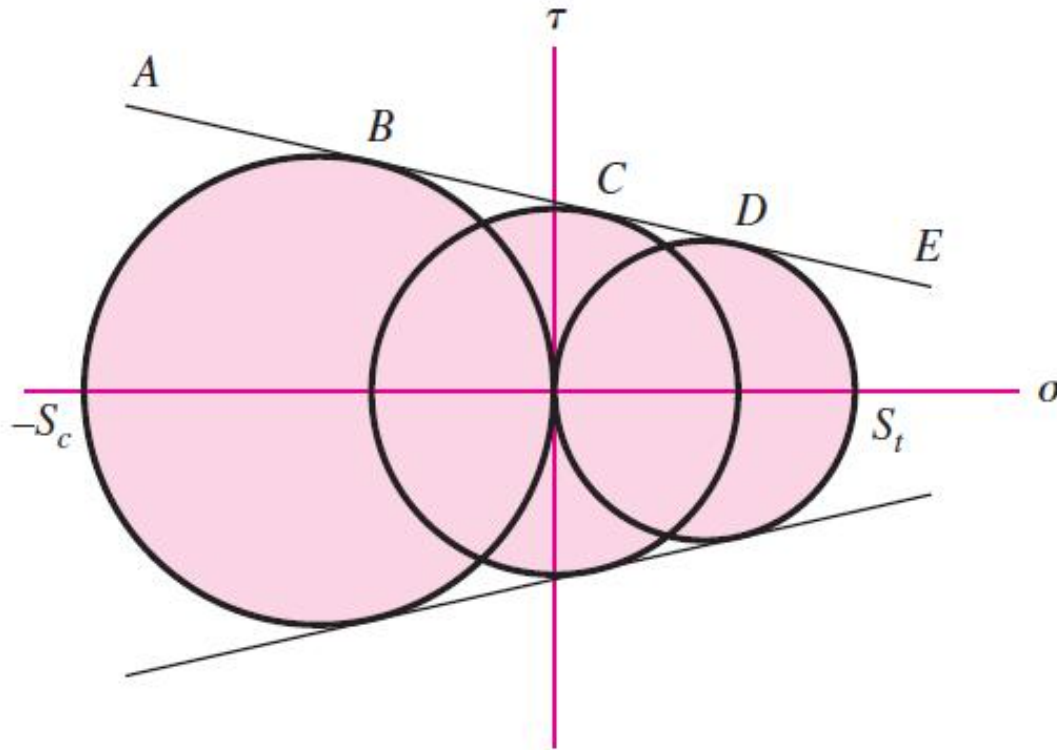
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
DE	1.43	1.64	1.13	1.64	$\infty$
MSS	1.43	1.43	1.00	1.43	$\infty$



## نظریه کولمب-موهر برای مواد شکل پذیر

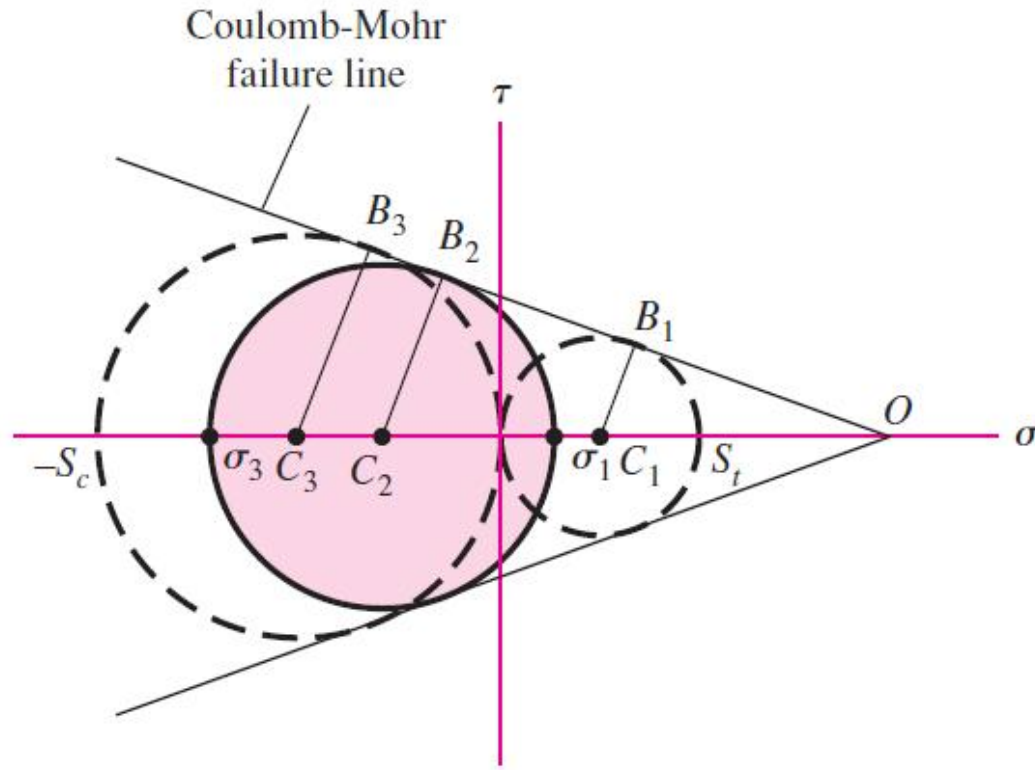
### Coulomb-Mohr Theory for Ductile Materials

- مقاومت های فشاری همه مواد با مقاومت های کششی متناظرشان یکسان نیست.
  - مقاومت تسلیم فشاری آلیاژ منیزیم شاید تا 50 درصد مقاومت تسلیم کششی آن باشد.
  - مقاومت نهایی چدن خاکستری در فشار، بین 3-4 برابر مقاومت کششی نهایی آن است.
- نظریه موهر بر پایه سه آزمون ساده کشش، فشار و برش تا تسلیم برای مواد شکل پذیر یا شکستن برای مواد ترد است.



- دشواری عملی فرضیه موهر به کارگیری نتایج آزمون های کشش، فشار و برش برای ساختن سه دایره است تا مرزهای شکست به صورت خط  $ABCDE$  مشخص شوند.
- تغییر در نظریه Mohr را نظریه Coulumb- Mohr یا نظریه مالش درونی می نامند که در این نظریه تنها به مقاومت های کششی و فشاری نیاز است.

- تنش های اصلی را برای حالت عمومی تنش همانند گذشته به این صورت فرض می کنیم



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\frac{B_2C_2 - B_1C_1}{OC_2 - OC_1} = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{OC_3 - OC_1}$$

$$\frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{S_t}{2}}{\frac{S_t}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{\frac{S_c}{2} - \frac{S_t}{2}}{\frac{S_c}{2} + \frac{S_t}{2}}$$



• با ساده سازی خواهیم داشت: 
$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = 1$$

• برای تنش دو بعدی (صفحه ای) که دو تنش اصلی غیر صفر  $\sigma_A \geq \sigma_B$  است

• همانند نظریه MSS برای سه حالت داریم:

- حالت 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$

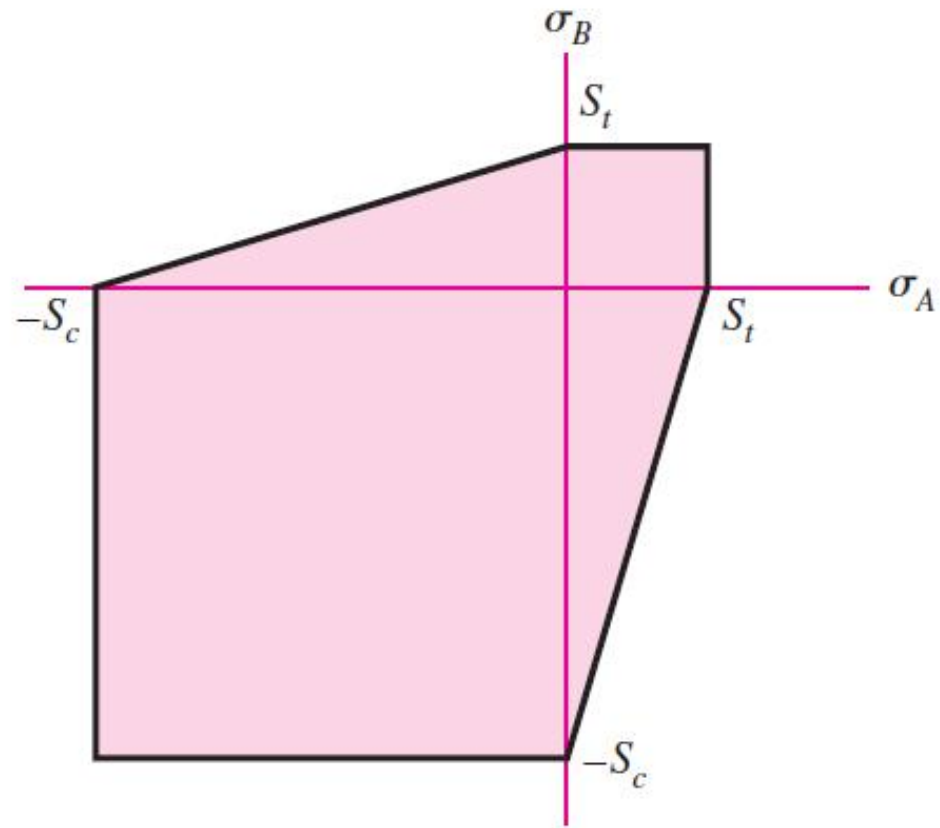
$$\sigma_1 = \sigma_A \quad \sigma_3 = 0 \quad \sigma_A \geq S_t$$

- حالت 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$

$$\sigma_1 = \sigma_A \quad \sigma_3 = \sigma_B \quad \frac{\sigma_A}{S_t} - \frac{\sigma_B}{S_c} \geq 1$$

- حالت 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_3 = \sigma_B \quad \sigma_B \leq -S_c$$



– معادله طراحی

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = \frac{1}{n}$$

– برای نظریه Coulomb- Mohr به دایره مقاومت برشی نیاز نیست.

– برای برش خالص داریم

pure shear  $\tau$                        $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$

$\tau_{\max} = S_{sy}$                        $\sigma_1 = -\sigma_3 = S_{sy}$

$$S_{sy} = \frac{S_{yt} S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}}$$

**EXAMPLE 5-2**

A 25-mm-diameter shaft is statically torqued to 230 N · m. It is made of cast 195-T6 aluminum, with a yield strength in tension of 160 MPa and a yield strength in compression of 170 MPa. It is machined to final diameter. Estimate the factor of safety of the shaft.

**Solution** The maximum shear stress is given by

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(230)}{\pi [25 (10^{-3})]^3} = 75 (10^6) \text{ N/m}^2 = 75 \text{ MPa}$$

The two nonzero principal stresses are 75 and  $-75$  MPa, making the ordered principal stresses  $\sigma_1 = 75$ ,  $\sigma_2 = 0$ , and  $\sigma_3 = -75$  MPa. From Eq. (5-26), for yield,

**Answer** 
$$n = \frac{1}{\sigma_1/S_{yt} - \sigma_3/S_{yc}} = \frac{1}{75/160 - (-75)/170} = 1.10$$

Alternatively, from Eq. (5-27),

$$S_{sy} = \frac{S_{yt}S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}} = \frac{160(170)}{160 + 170} = 82.4 \text{ MPa}$$

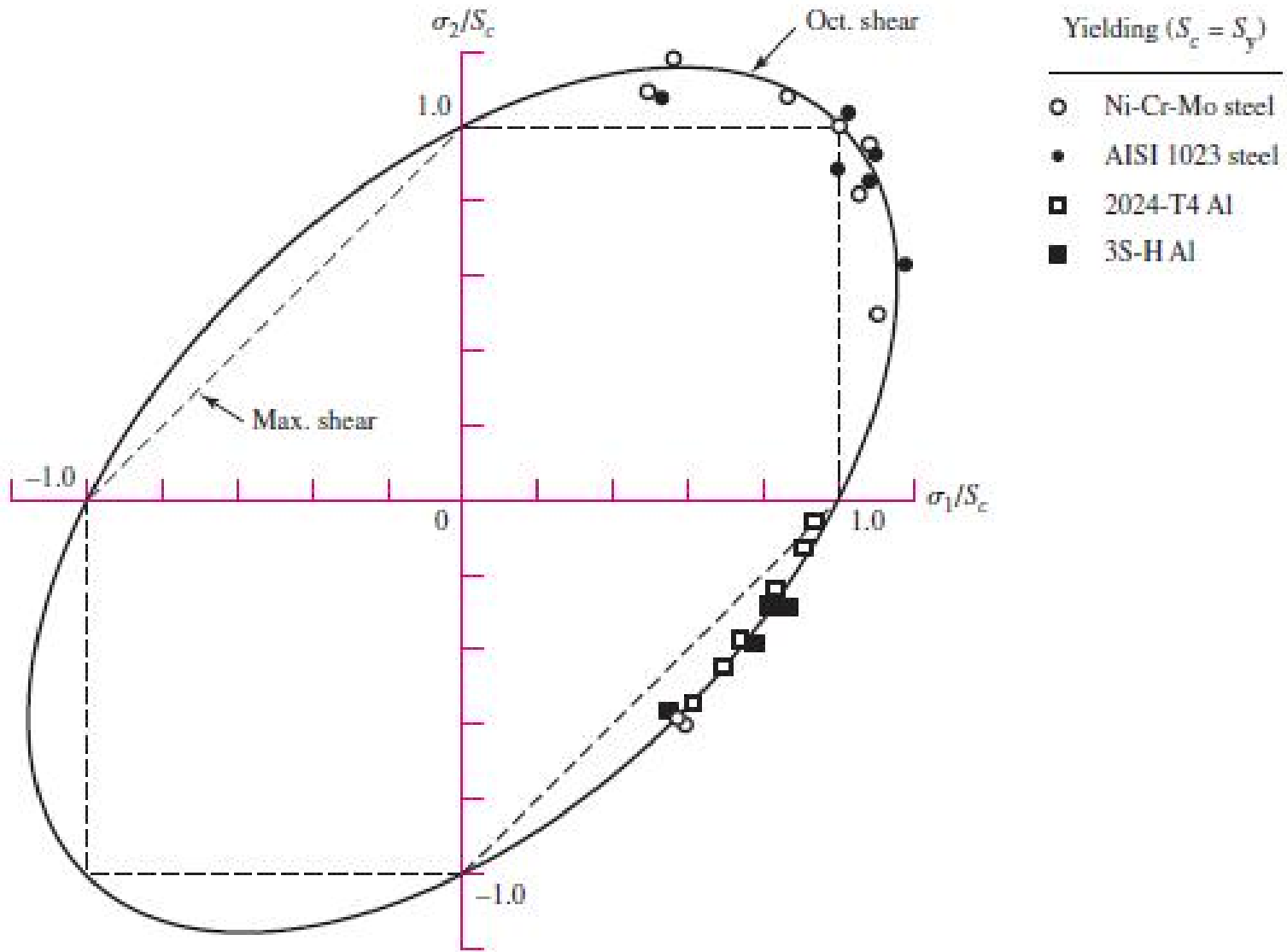
and  $\tau_{\max} = 75$  MPa. Thus,

**Answer** 
$$n = \frac{S_{sy}}{\tau_{\max}} = \frac{82.4}{75} = 1.10$$

# جمع بندی شکست مواد شکل پذیر

## Failure of Ductile Materials Summary

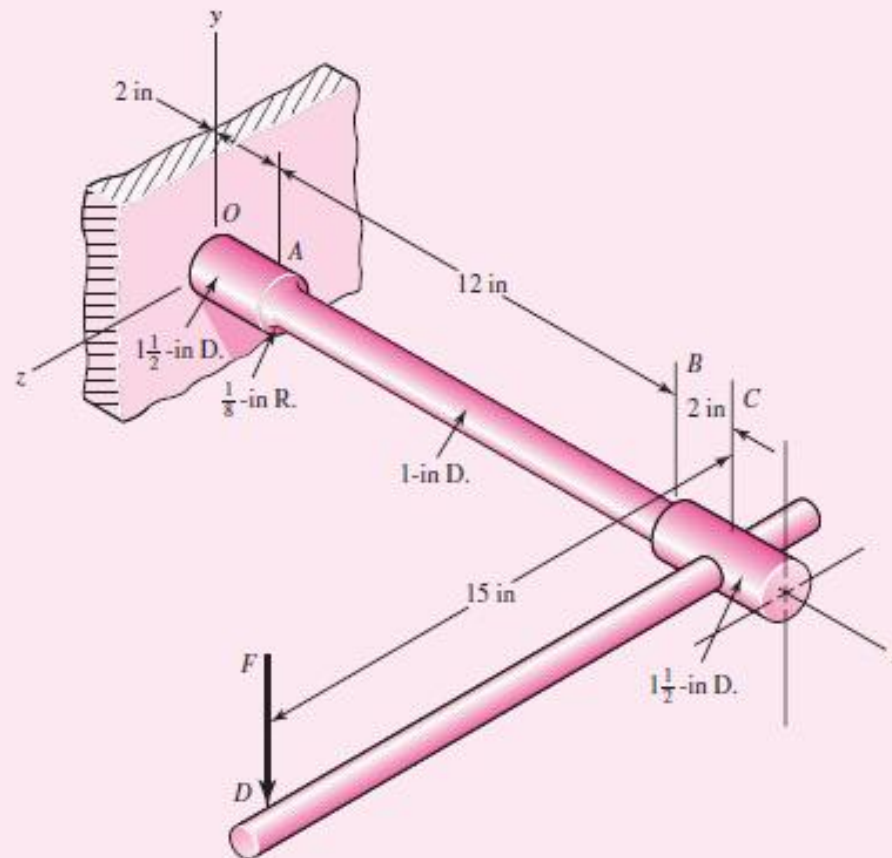
- نظریه بیشترین تنش برشی آسان، سریع و محتاطانه است.
- اگر مسأله یافتن چرایی شکست یک قطعه باشد، نظریه انرژی واپیچش از همه بهتر است.
- داده های تجربی مارتین نشان می دهد که مکان هندسی نظریه انرژی واپیچش نزدیک تر به نقاط مرکزی داده ها است.
- برای مواد شکل پذیر با مقاومت تسلیم های  $S_{yt}$  کششی و  $S_{yc}$  فشاری نا برابر نظریه Mohr بهترین نظریه است که البته کار با نظریه Coulumb-Mohr در شکل معادله آسان تر است.



**EXAMPLE 5-3**

This example illustrates the use of a failure theory to determine the strength of a mechanical element or component. The example may also clear up any confusion existing between the phrases *strength of a machine part*, *strength of a material*, and *strength of a part at a point*.

A certain force  $F$  applied at  $D$  near the end of the 15-in lever shown in Fig. 5-16, which is quite similar to a socket wrench, results in certain stresses in the cantilevered bar  $OABC$ . This bar ( $OABC$ ) is of AISI 1035 steel, forged and heat-treated so that it has a minimum (ASTM) yield strength of 81 kpsi. We presume that this component would be of no value after yielding. Thus the force  $F$  required to initiate yielding can be regarded as the strength of the component part. Find this force.

| **Figure 5-16**

**Solution** We will assume that lever  $DC$  is strong enough and hence not a part of the problem. A 1035 steel, heat-treated, will have a reduction in area of 50 percent or more and hence is a ductile material at normal temperatures. This also means that stress concentration at shoulder  $A$  need not be considered. A stress element at  $A$  on the top surface will be subjected to a tensile bending stress and a torsional stress. This point, on the 1-in-diameter section, is the weakest section, and governs the strength of the assembly. The two stresses are

$$\sigma_x = \frac{M}{I/c} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(14F)}{\pi(1^3)} = 142.6F$$

$$\tau_{zx} = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(15F)}{\pi(1^3)} = 76.4F$$

Employing the distortion-energy theory, we find, from Eq. (5-15), that

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2)^{1/2} = [(142.6F)^2 + 3(76.4F)^2]^{1/2} = 194.5F$$

Equating the von Mises stress to  $S_y$ , we solve for  $F$  and get

$$F = \frac{S_y}{194.5} = \frac{81\,000}{194.5} = 416 \text{ lbf}$$

**Answer**

In this example the strength of the material at point  $A$  is  $S_y = 81$  kpsi. The strength of the assembly or component is  $F = 416$  lbf.

Let us see how to apply the MSS theory. For a point undergoing plane stress with only one non-zero normal stress and one shear stress, the two nonzero principal stresses  $\sigma_A$  and  $\sigma_B$  will have opposite signs and hence fit case 2 for the MSS theory. From Eq. (3-13),

$$\sigma_A - \sigma_B = 2 \left[ \left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{zx}^2 \right]^{1/2} = (\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2)^{1/2}$$

For case 2 of the MSS theory, Eq. (5-5) applies and hence

$$(\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2)^{1/2} = S_y$$

$$[(142.6F)^2 + 4(76.4F)^2]^{1/2} = 209.0F = 81\,000$$

$$F = 388 \text{ lbf}$$

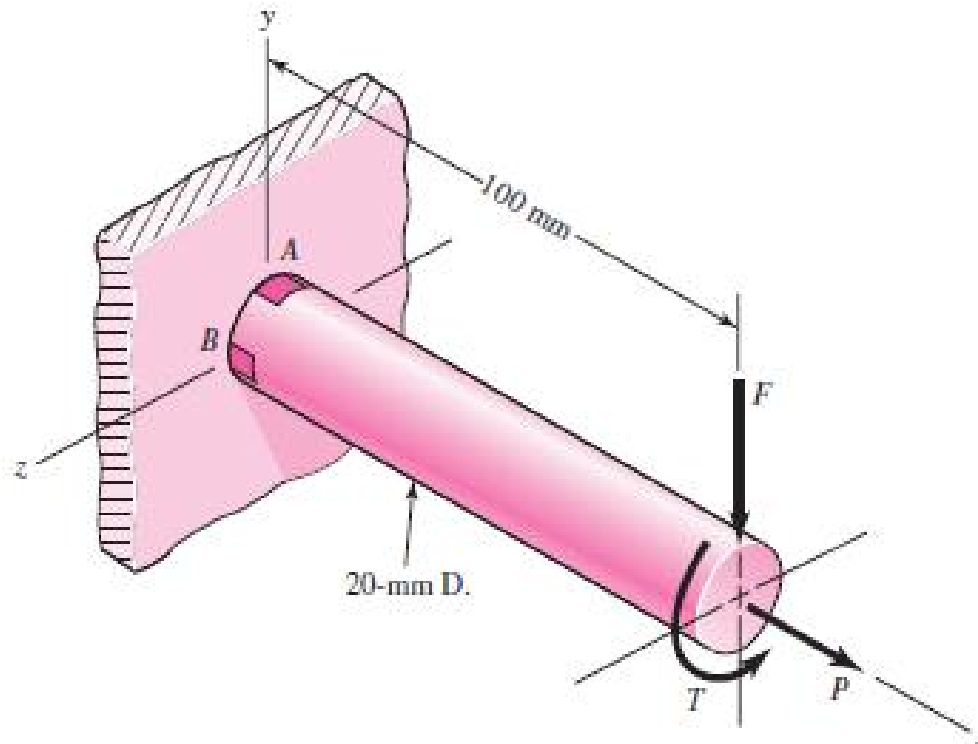
which is about 7 percent less than found for the DE theory. As stated earlier, the MSS theory is more conservative than the DE theory.



**5-14**

This problem illustrates that the factor of safety for a machine element depends on the particular point selected for analysis. Here you are to compute factors of safety, based upon the distortion-energy theory, for stress elements at *A* and *B* of the member shown in the figure. This bar is made of AISI 1006 cold-drawn steel and is loaded by the forces  $F = 0.55 \text{ kN}$ ,  $P = 8.0 \text{ kN}$ , and  $T = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Problem 5-14



5-14 Given: AISI 1006 CD steel,  $F = 0.55$  N,  $P = 8.0$  kN, and  $T = 30$  N · m, applying the DE theory to stress elements A and B with  $S_y = 280$  MPa

$$\begin{aligned} \text{A:} \quad \sigma_x &= \frac{32Fl}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{32(0.55)(10^3)(0.1)}{\pi(0.020^3)} + \frac{4(8)(10^3)}{\pi(0.020^2)} \\ &= 95.49(10^6) \text{ Pa} = 95.49 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(30)}{\pi(0.020^3)} = 19.10(10^6) \text{ Pa} = 19.10 \text{ MPa}$$

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} = [95.49^2 + 3(19.1)^2]^{1/2} = 101.1 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{280}{101.1} = 2.77 \quad \text{Ans.}$$

$$\text{B:} \quad \sigma_x = \frac{4P}{\pi d^3} = \frac{4(8)(10^3)}{\pi(0.020^2)} = 25.47(10^6) \text{ Pa} = 25.47 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{16T}{\pi d^3} + \frac{4V}{3A} = \frac{16(30)}{\pi(0.020^3)} + \frac{4}{3} \left[ \frac{0.55(10^3)}{(\pi/4)(0.020^2)} \right] \\ &= 21.43(10^6) \text{ Pa} = 21.43 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma' = [25.47^2 + 3(21.43^2)]^{1/2} = 45.02 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{280}{45.02} = 6.22 \quad \text{Ans.}$$

نظریه بیشترین تنش عمودی برای مواد ترد

## Maximum-Normal-Stress Theory for Brittle Materials

- شکست هنگامی رخ می دهد که یکی از سه تنش اصلی با مقاومت نهایی برابر یا بیشتر از آن شود.

– مقاومت نهایی کششی  $S_{ut}$

– مقاومت نهایی فشاری  $S_{uc}$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

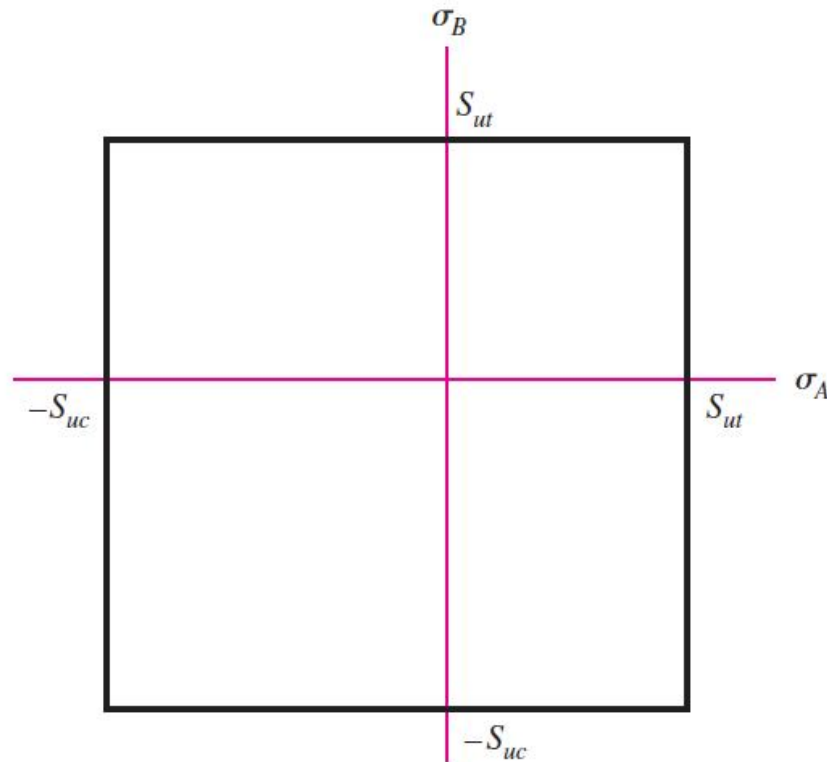
- برای حالت عمومی تنش

$$\sigma_1 \geq S_{ut} \quad \text{or} \quad \sigma_3 \leq -S_{uc}$$

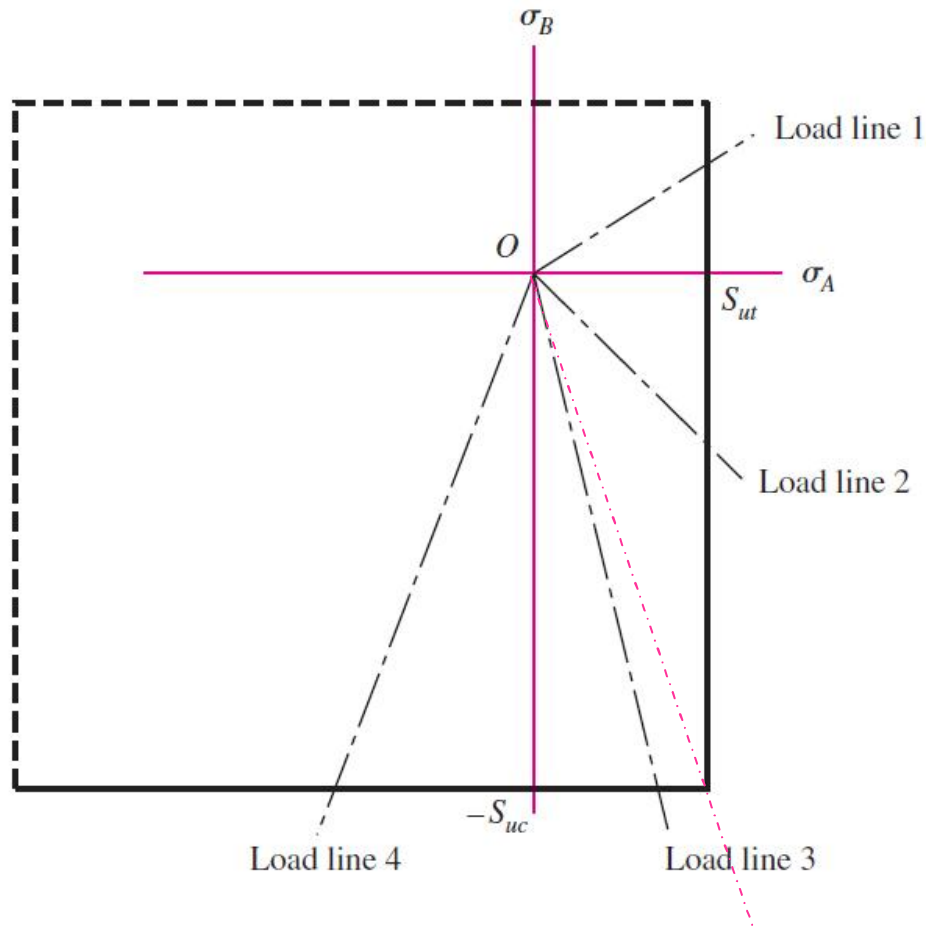
• تنش صفحه ای (دو بعدی)

$$\sigma_A \geq \sigma_B$$

$$\sigma_A \geq S_{ut} \quad \text{or} \quad \sigma_B \leq -S_{uc}$$



– همانند گذشته می توان معادله های معیار شکست را به معادله های طراحی بدل کرد.



$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0 \quad \text{Load line 1}$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| \leq \frac{S_{uc}}{S_{ut}} \quad \text{Load line 2}$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| > \frac{S_{uc}}{S_{ut}} \quad \text{Load line 3}$$

$$0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B \quad \text{Load line 4}$$

بهبود های نظریه Mohr برای مواد ترد

## Modifications of the Mohr Theory for Brittle Materials

- نظریه Coulomb-Mohr ترد (BCM)

- دو نظریه بهبود یافته Mohr

- نظریه بهبود یافته Mohr-I (M1M)

- نظریه بهبود یافته Mohr-II (M2M)

(معادله های این نظریه ها محدود به تنش های صفحه ای است که با ضریب ایمنی به صورت معادله طراحی داده شده است)

## Brittle-Coulomb-Mohr (BCM) Coulomb-Mohr ترد

- طبق معادله های نظریه Coulomb-Mohr داده شده در بخش پیش معادله های طراحی آن برای مواد ترد چنین است:

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = \frac{1}{n}$$

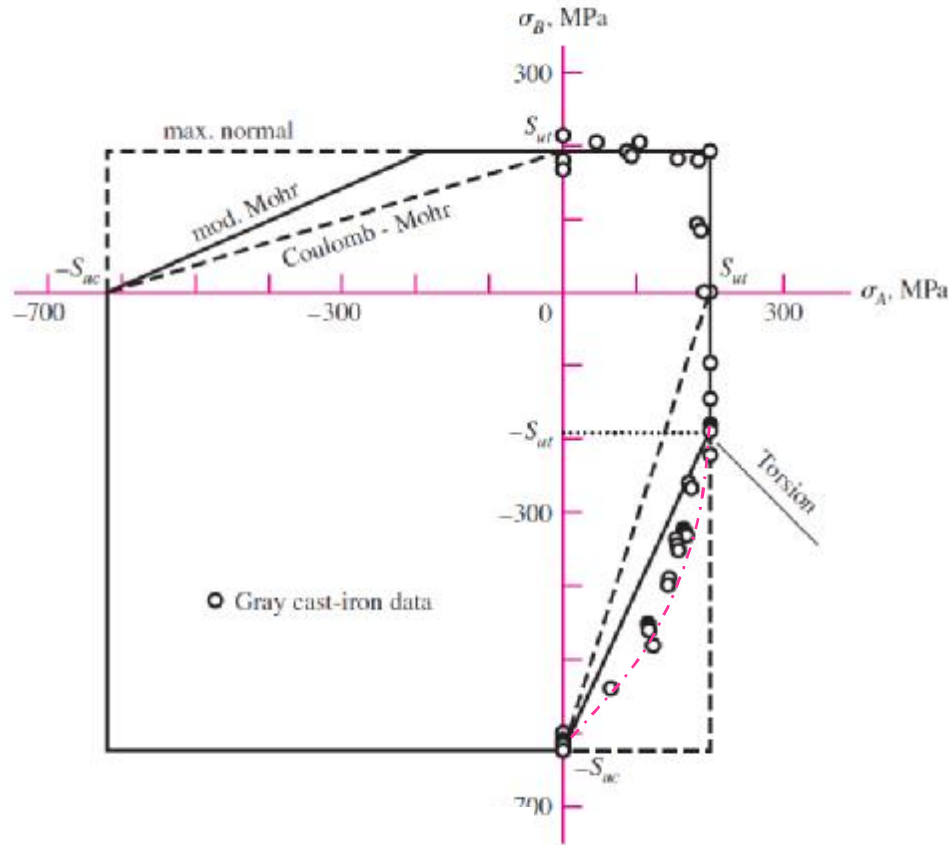
$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \quad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$$

# Modified Mohr

# نظریه بهبود یافته Mohr (MM)



$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| \leq 1$$

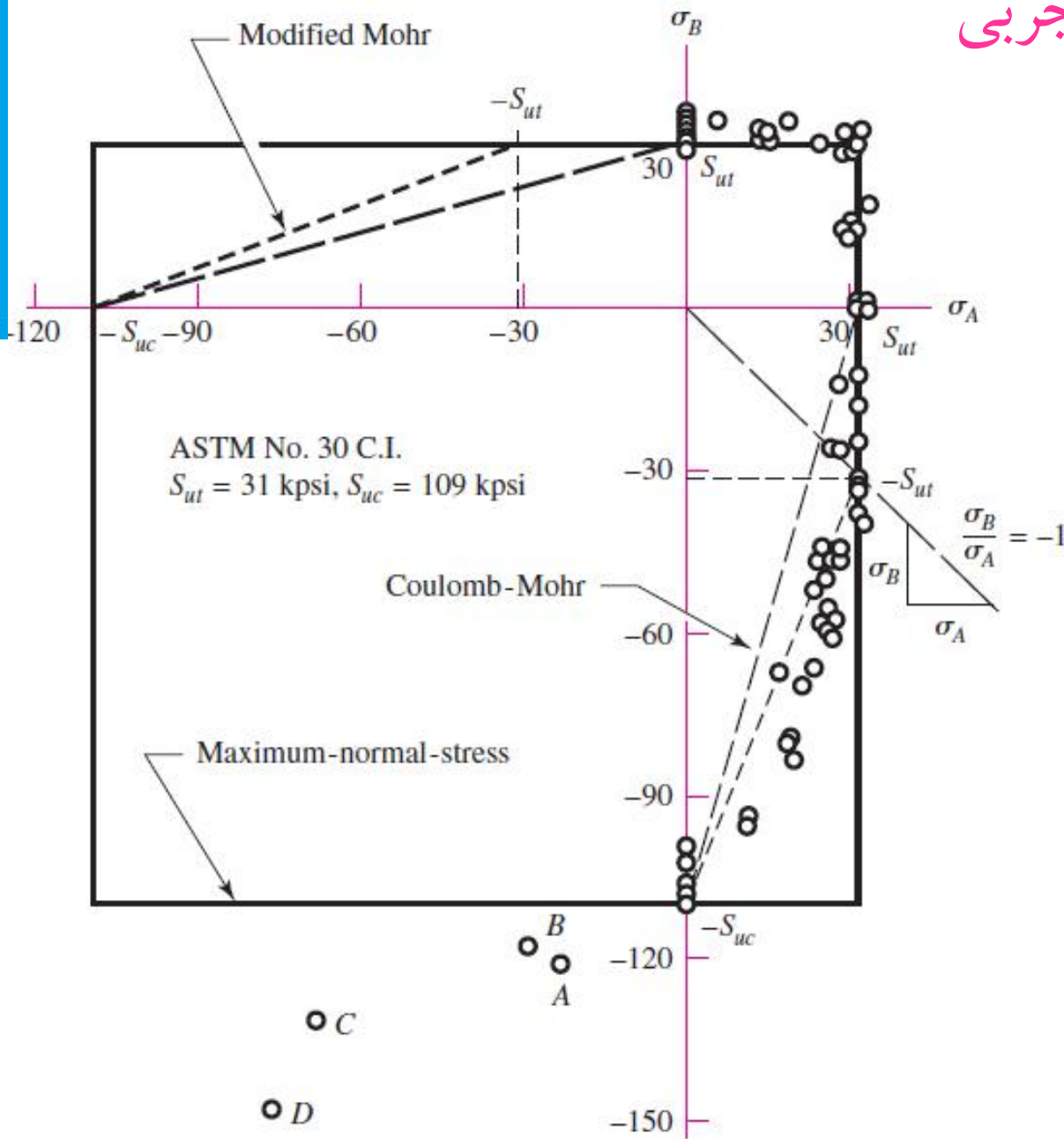
$$\frac{(S_{uc} - S_{ut}) \sigma_A}{S_{uc} S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \quad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| > 1$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$$

$$\frac{nS_A}{S_{ut}} + \left( \frac{nS_B + S_{ut}}{S_{ut} - S_{uc}} \right)^2 = 1$$



# نمودار نقاط داده های تجربی

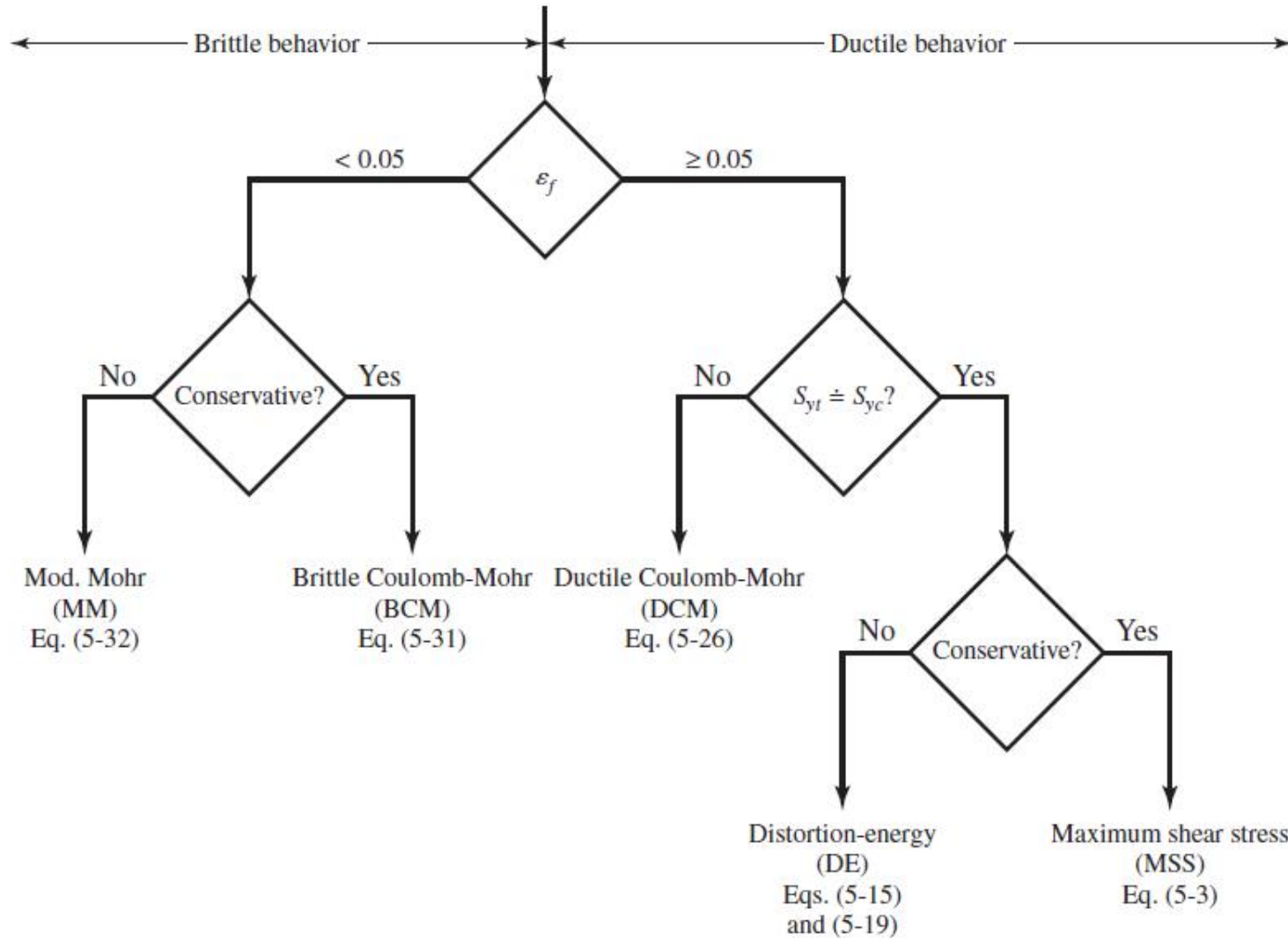


## Failure of Brittle Materials Summary

- مواد ترد به موادی می گویند که کرنش حقیقی شکست آنها کمتر از 0,05 باشد.
- باید آگاه باشیم که مواد معمولی شکل پذیر اگر در دمای کم بکار روند ممکن است شکست ترد داشته باشند.
- طبق داده های تجربی در ربع اول همه مکان هندسی های شکست یکسان بوده و با داده ها به خوبی همخوانی دارد.
- در ربع چهارم تنها فرضیه نوع Mohr-II است که در میان داده ها می افتد.

# Selection of Failure Criteria

# انتخاب معیار شکست



**EXAMPLE 5-5**

Consider the wrench in Ex. 5-3, Fig. 5-16, as made of cast iron, machined to dimension. The force  $F$  required to fracture this part can be regarded as the strength of the component part. If the material is ASTM grade 30 cast iron, find the force  $F$  with

- Coulomb-Mohr failure model.
- Modified Mohr failure model.

**Solution**

We assume that the lever  $DC$  is strong enough, and not part of the problem. Since grade 30 cast iron is a brittle material *and* cast iron, the stress-concentration factors  $K_t$  and  $K_{ts}$  are set to unity. From Table A-24, the tensile ultimate strength is 31 kpsi and the compressive ultimate strength is 109 kpsi. The stress element at  $A$  on the top surface will be subjected to a tensile bending stress and a torsional stress. This location, on the 1-in-diameter section fillet, is the weakest location, and it governs the strength of the assembly. The normal stress  $\sigma_x$  and the shear stress at  $A$  are given by

$$\sigma_x = K_t \frac{M}{I/c} = K_t \frac{32M}{\pi d^3} = (1) \frac{32(14F)}{\pi(1)^3} = 142.6F$$

$$\tau_{xy} = K_{ts} \frac{Tr}{J} = K_{ts} \frac{16T}{\pi d^3} = (1) \frac{16(15F)}{\pi(1)^3} = 76.4F$$

From Eq. (3-13) the nonzero principal stresses  $\sigma_A$  and  $\sigma_B$  are

$$\sigma_A, \sigma_B = \frac{142.6F + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{142.6F - 0}{2}\right)^2 + (76.4F)^2} = 175.8F, -33.2F$$

This puts us in the fourth-quadrant of the  $\sigma_A, \sigma_B$  plane.

(a) For BCM, Eq. (5-31b) applies with  $n = 1$  for failure.

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{175.8F}{31(10^3)} - \frac{(-33.2F)}{109(10^3)} = 1$$

Solving for  $F$  yields

Answer

$$F = 167 \text{ lbf}$$

(b) For MM, the slope of the load line is  $|\sigma_B/\sigma_A| = 33.2/175.8 = 0.189 < 1$ . Obviously, Eq. (5-32a) applies.

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} = \frac{175.8F}{31(10^3)} = 1$$

Answer

$$F = 176 \text{ lbf}$$

As one would expect from inspection of Fig. 5-19, Coulomb-Mohr is more conservative.

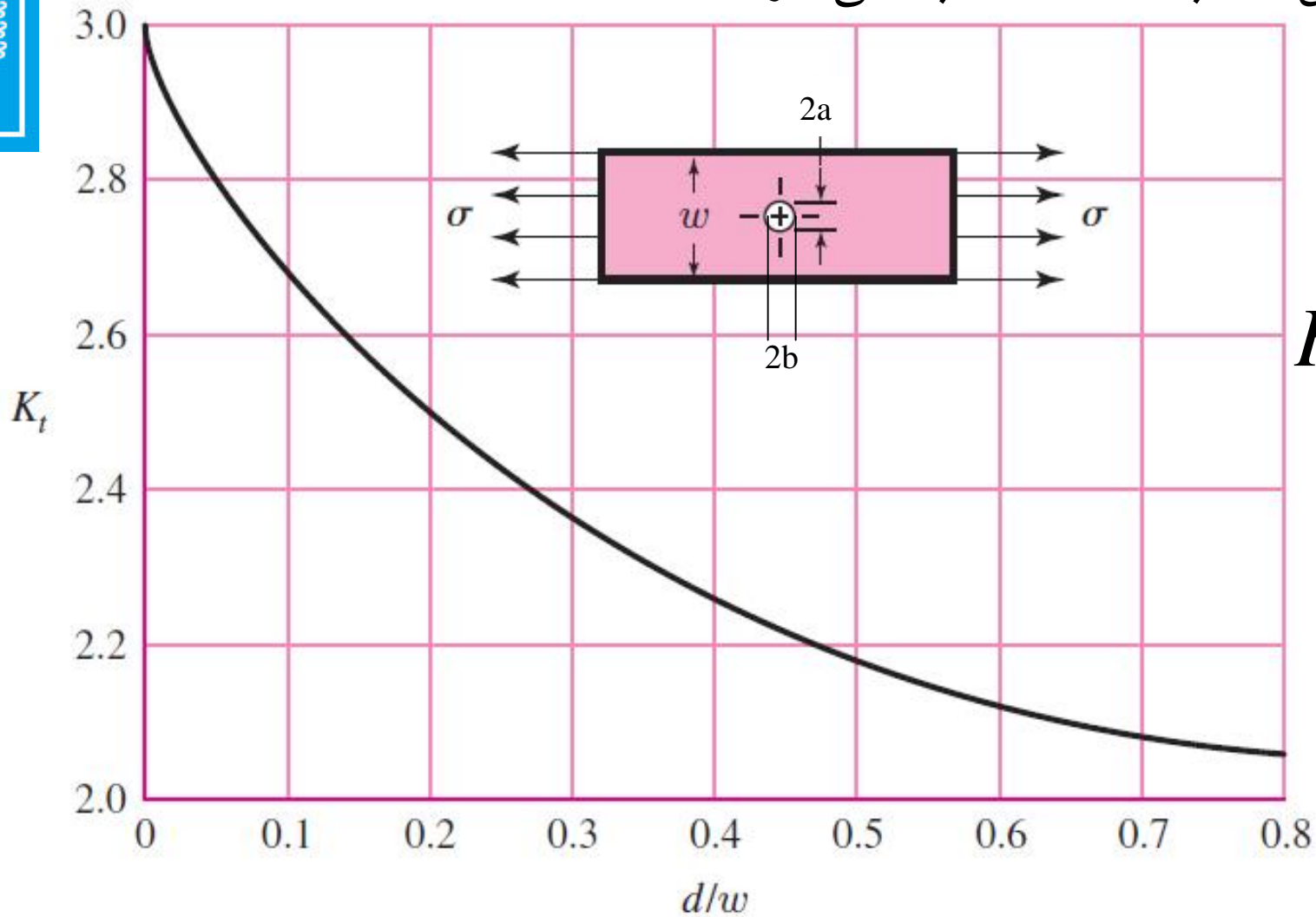
## Stress Concentration

## تمرکز تنش

- هر ناپیوستگی یا ناهمواری در قطعه ماشین، توزیع تنش را در مجاورت ناپیوستگی تغییر می دهد، طوری که معادلات پیشین تنش دیگر گویای حالت واقعی تنش نیست.
- چنین ناپیوستگی را **افزاینده تنش**، و نواحی ناپیوستگی را نواحی **تمرکز تنش** گویند.
- در سر یک پیچ، کله و در طرف دیگر رزوه دار است که هر دو حاکی از تغییر ناگهانی سطح است.
- قطعاتی که به سوراخ یا شیارهای روغن رسانی نیاز دارند.
- تمرکز تنش از یک بی نظمی غیر ذاتی مانند
  - خراش ابزار، سوراخ، چاک، شیار یا دنده ناشی می شود

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \quad K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}$$

ضریب تمرکز تنش فقط به هندسه قطعه بستگی دارد



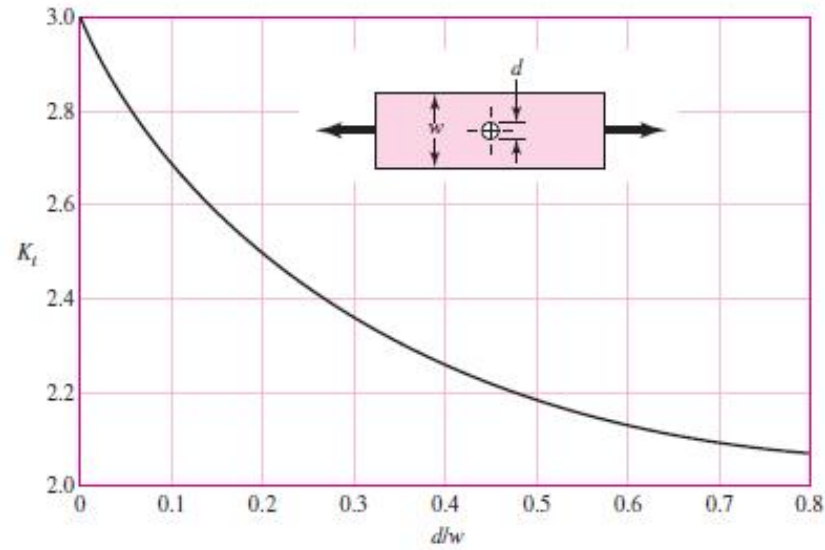
$$K_t = 1 + \frac{2b}{a}$$

**Table A-15**

Charts of Theoretical Stress-Concentration Factors  $K_t^*$

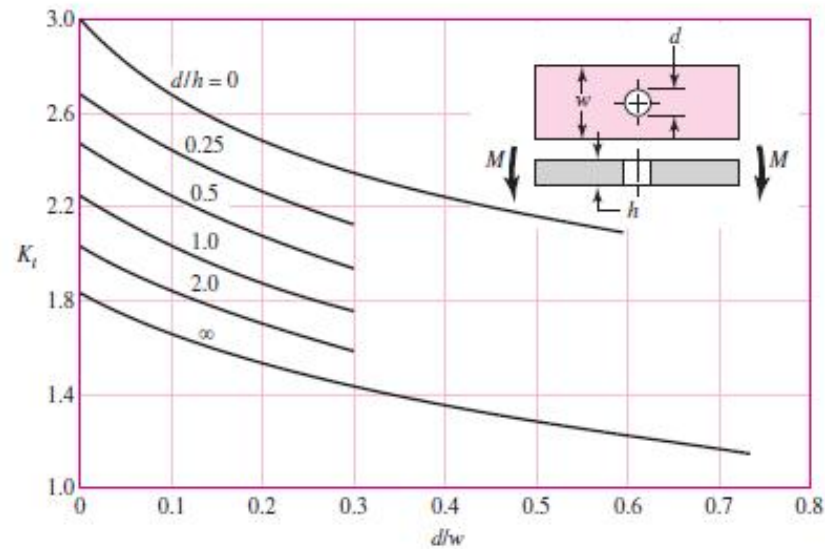
**Figure A-15-1**

Bar in tension or simple compression with a transverse hole.  $\sigma_0 = F/A$ , where  $A = (w - d)t$  and  $t$  is the thickness.



**Figure A-15-2**

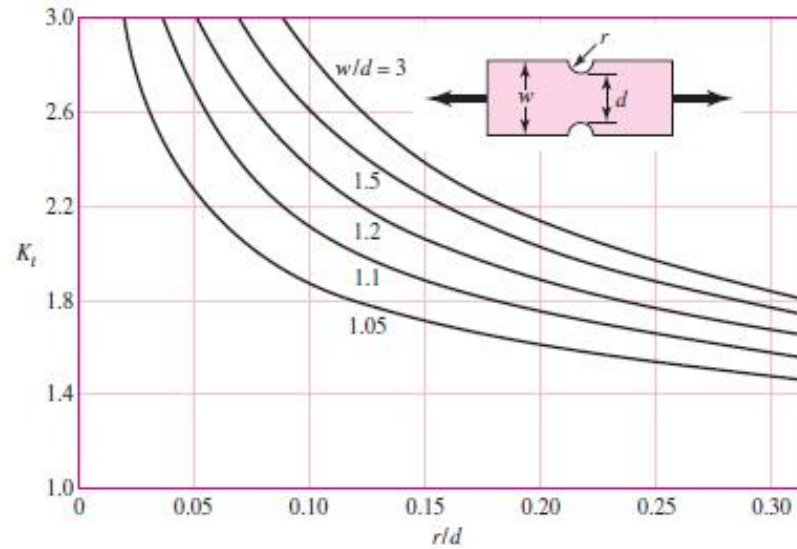
Rectangular bar with a transverse hole in bending.  $\sigma_0 = Mc/I$ , where  $I = (w - d)h^3/12$ .





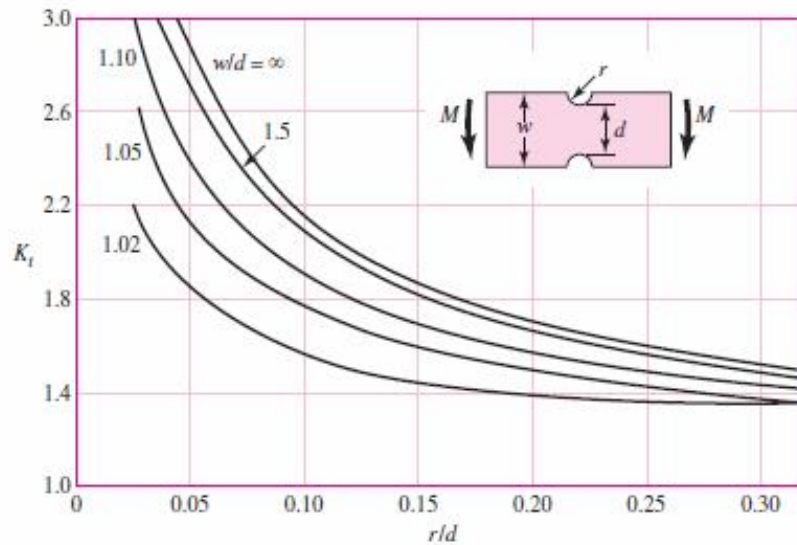
**Figure A-15-3**

Notched rectangular bar in tension or simple compression.  $\sigma_0 = F/A$ , where  $A = dt$  and  $t$  is the thickness.



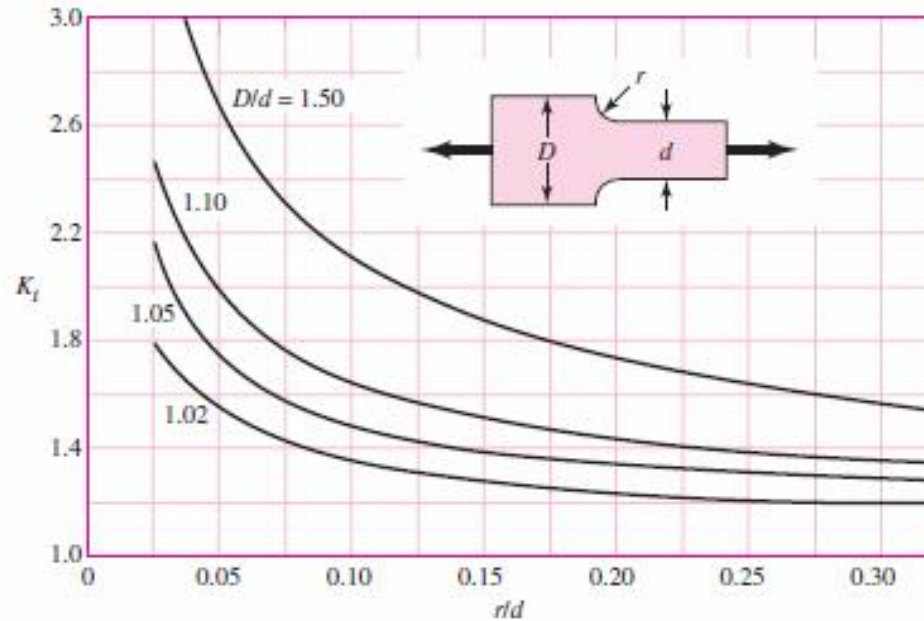
**Figure A-15-4**

Notched rectangular bar in bending.  $\sigma_0 = Mc/I$ , where  $c = d/2$ ,  $I = td^3/12$ , and  $t$  is the thickness.



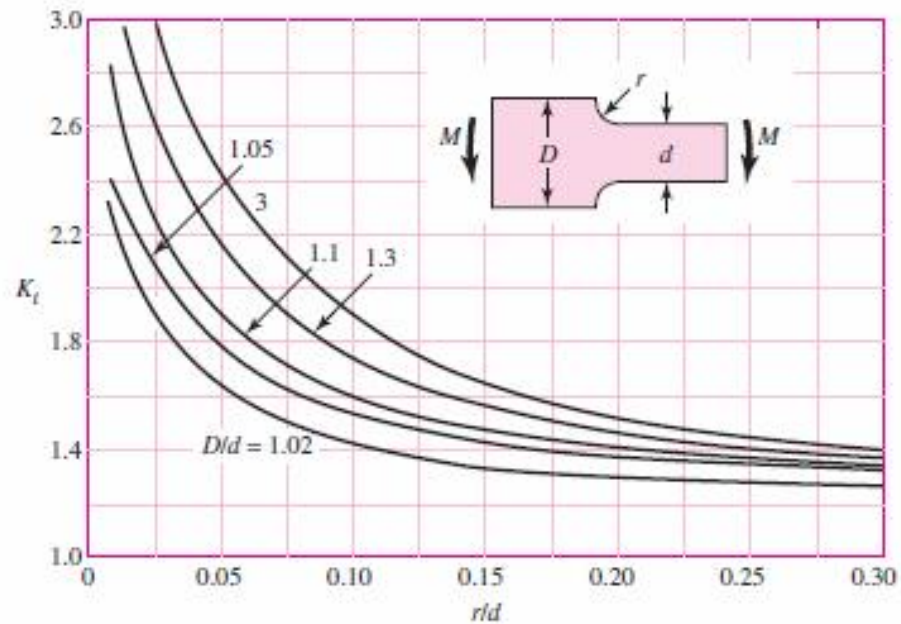
**Figure A-15-5**

Rectangular filleted bar in tension or simple compression.  $\sigma_0 = F/A$ , where  $A = dt$  and  $t$  is the thickness.



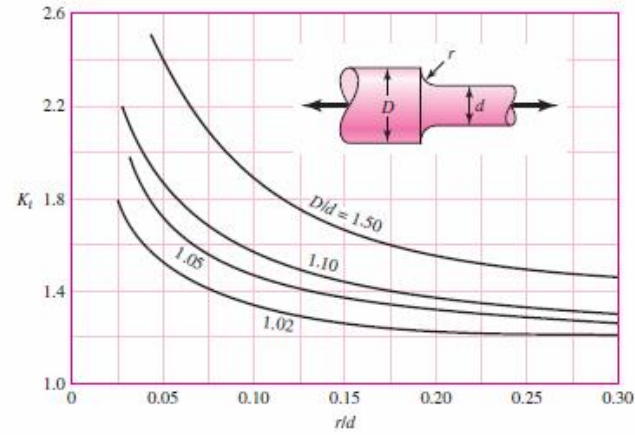
**Figure A-15-6**

Rectangular filleted bar in bending.  $\sigma_0 = Mc/I$ , where  $c = d/2$ ,  $I = td^3/12$ ,  $t$  is the thickness.



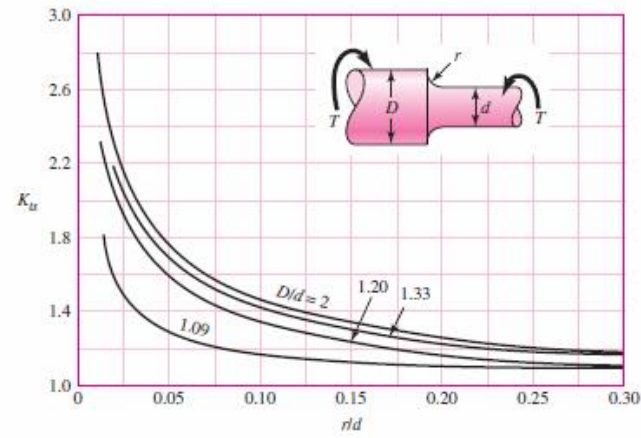
**Figure A-15-7**

Round shaft with shoulder fillet in tension.  $\sigma_0 = F/A$ , where  $A = \pi d^2/4$ .



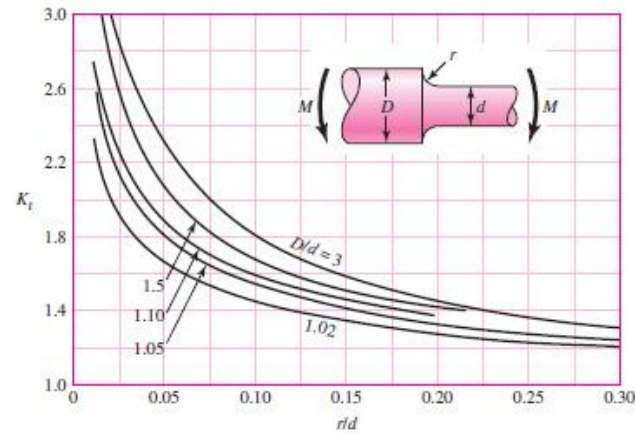
**Figure A-15-8**

Round shaft with shoulder fillet in torsion.  $\tau_0 = Tc/J$ , where  $c = d/2$  and  $J = \pi d^4/32$ .



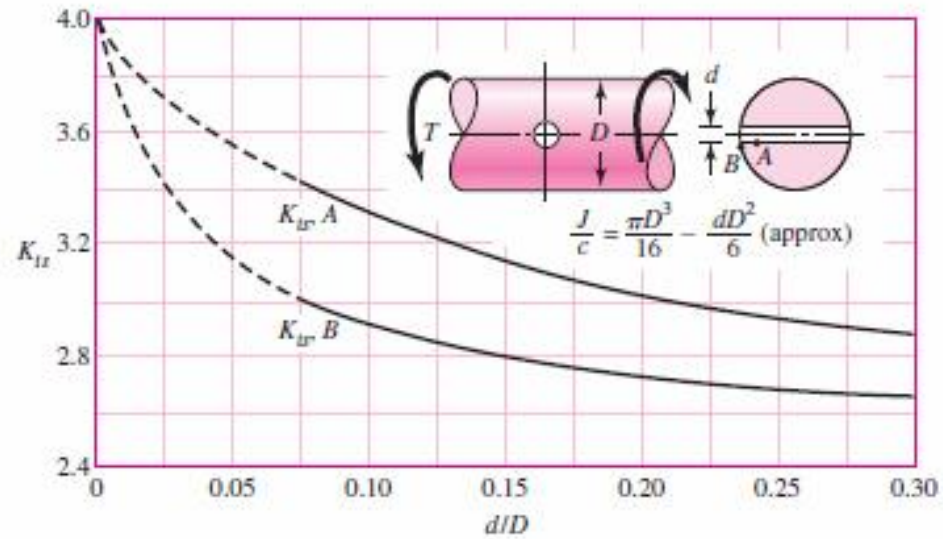
**Figure A-15-9**

Round shaft with shoulder fillet in bending.  $\sigma_0 = Mc/I$ , where  $c = d/2$  and  $I = \pi d^4/64$ .



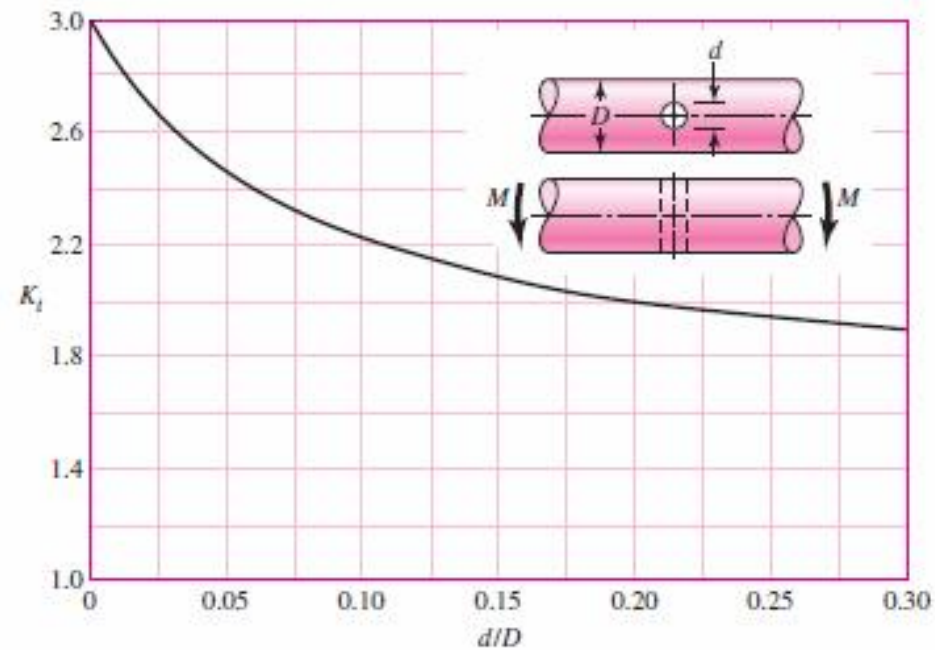
**Figure A-15-10**

Round shaft in torsion with transverse hole.



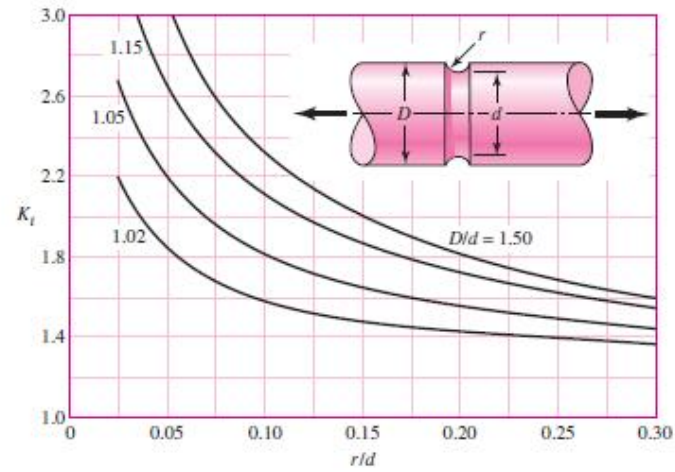
**Figure A-15-11**

Round shaft in bending with a transverse hole.  $\sigma_0 = M/[(\pi D^3/32) - (dD^2/6)]$ , approximately.



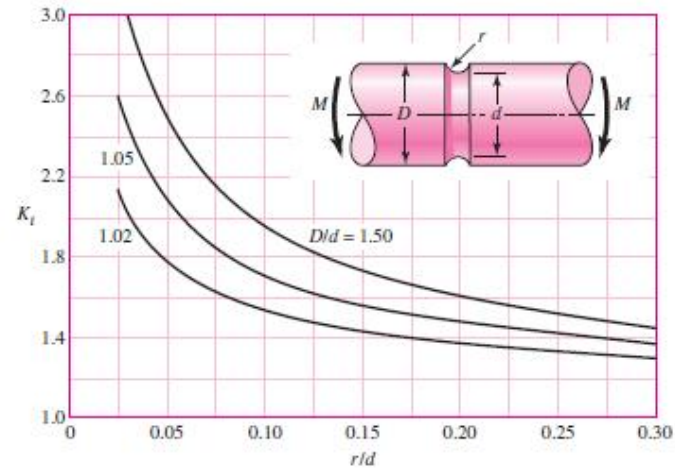
**Figure A-15-13**

Grooved round bar in tension.  
 $\sigma_0 = F/A$ , where  
 $A = \pi d^2/4$ .



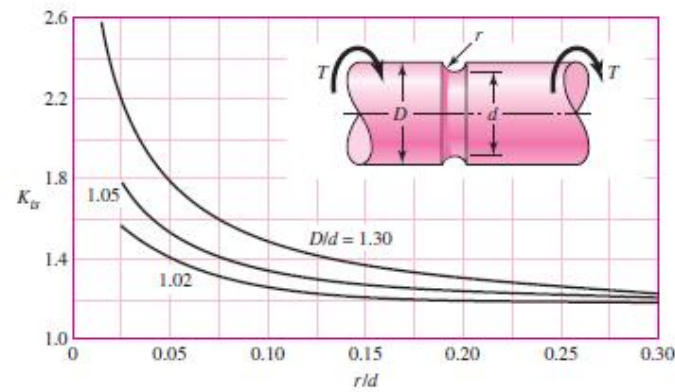
**Figure A-15-14**

Grooved round bar in bending.  
 $\sigma_0 = Mc/I$ , where  
 $c = d/2$  and  $I = \pi d^4/64$ .



**Figure A-15-15**

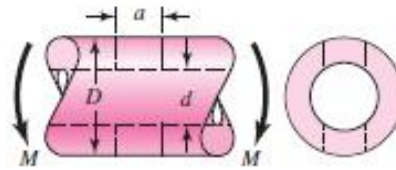
Grooved round bar in torsion.  
 $\tau_0 = Tc/J$ , where  $c = d/2$   
and  $J = \pi d^4/32$ .



**Table A-16**

Approximate Stress-Concentration Factor  $K_t$  for Bending of a Round Bar or Tube with a Transverse Round Hole

Source: R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, pp. 146, 235.

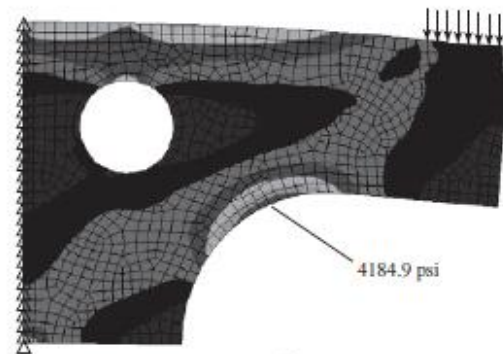
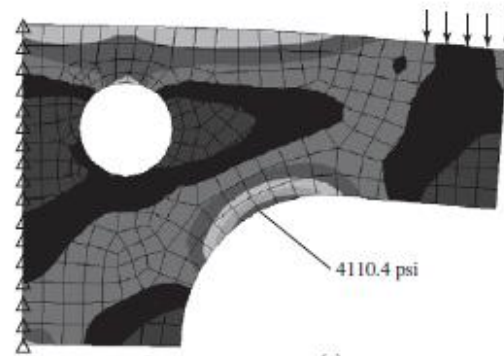
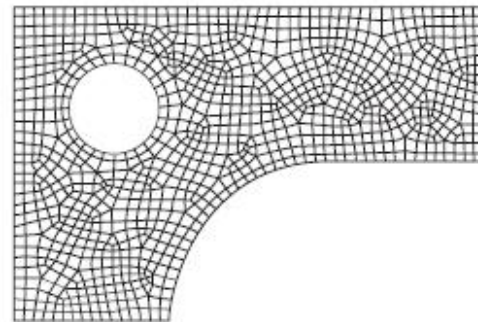
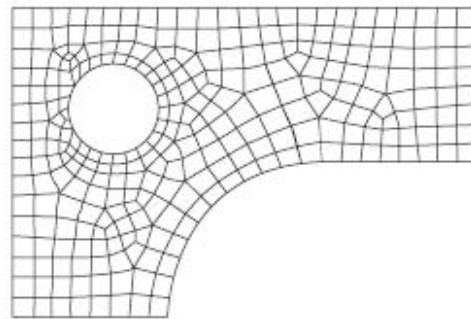
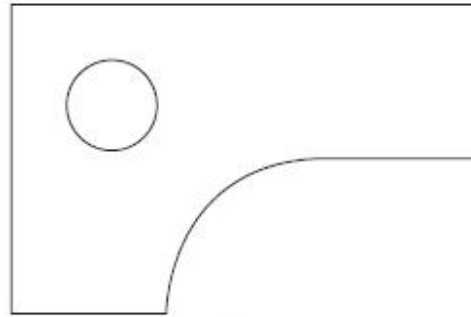


The nominal bending stress is  $\sigma_0 = M/Z_{net}$  where  $Z_{net}$  is a reduced value of the section modulus and is defined by

$$Z_{net} = \frac{\pi A}{32D} (D^4 - d^4)$$

Values of  $A$  are listed in the table. Use  $d = 0$  for a solid bar

$a/D$	$d/D$					
	0.9		0.6		0	
	$A$	$K_t$	$A$	$K_t$	$A$	$K_t$
0.050	0.92	2.63	0.91	2.55	0.88	2.42
0.075	0.89	2.55	0.88	2.43	0.86	2.35
0.10	0.86	2.49	0.85	2.36	0.83	2.27
0.125	0.82	2.41	0.82	2.32	0.80	2.20
0.15	0.79	2.39	0.79	2.29	0.76	2.15
0.175	0.76	2.38	0.75	2.26	0.72	2.10
0.20	0.73	2.39	0.72	2.23	0.68	2.07
0.225	0.69	2.40	0.68	2.21	0.65	2.04
0.25	0.67	2.42	0.64	2.18	0.61	2.00
0.275	0.66	2.48	0.61	2.16	0.58	1.97
0.30	0.64	2.52	0.58	2.14	0.54	1.94





## Fatigue Failure Resulting from Variable Loading

- شکست خستگی ناشی از بار گذاری متغیر



## مقدمه ای بر خستگی فلزات

### Introduction to Fatigue in Metals

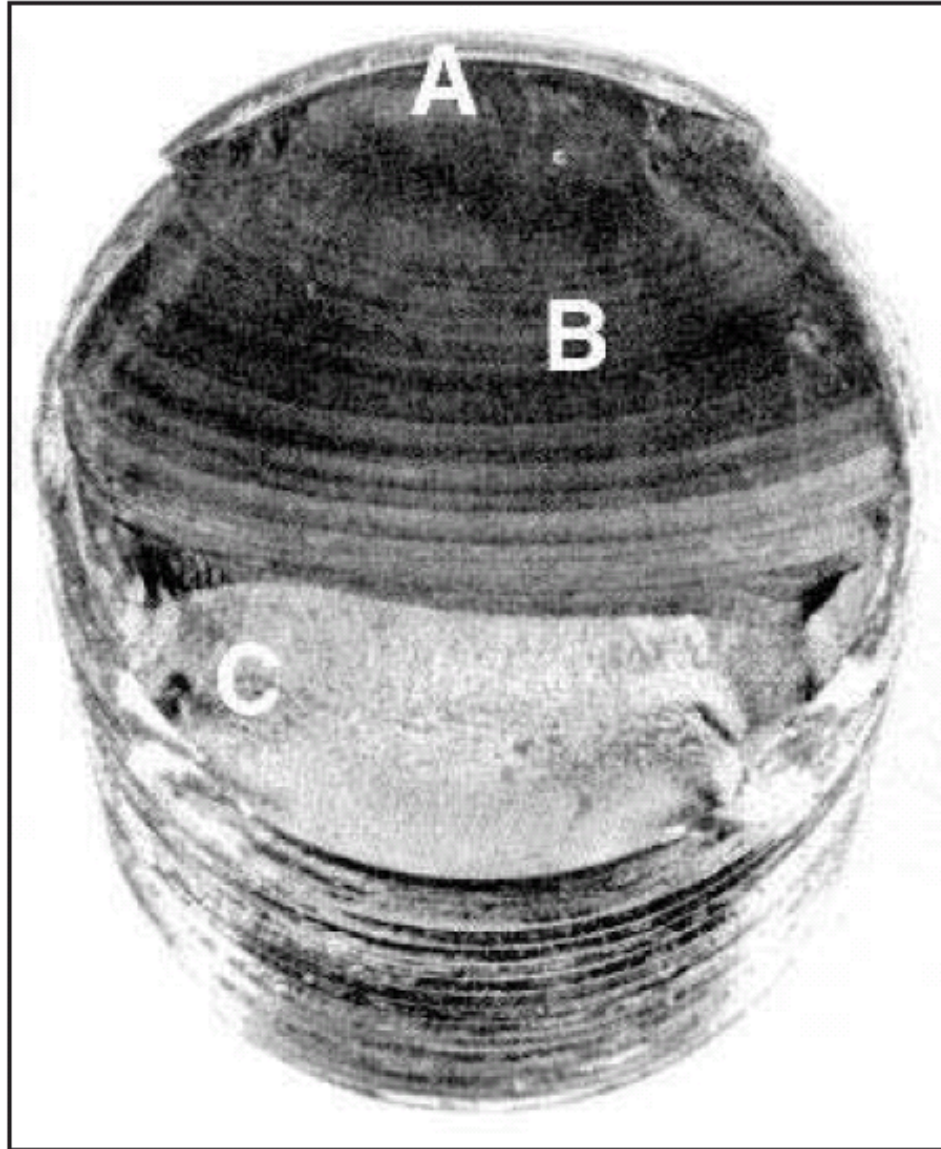
- قطعات ماشین به فراوانی در اثر تنش های نوسانی یا مکرر می شکنند در حالی که :
  - بیشترین مقادیر تنش عملی کمتر از مقاومت نهایی ماده و حتی در بسیار موارد کمتر از مقاومت تسلیم ماده است.
  - ویژگی این شکست ها تکرار تنش به دفعات بسیار زیاد است.
  - از این رو این شکست را شکست خستگی (Fatigue failure) می نامند.
  - شکست خستگی خبر نمی کند و ناگهانی است به همین دلیل خطرناک و غیر قابل پیش بینی است.
  - روشهای تحلیل شکست خستگی ، ترکیبی از مهندسی و علم است.

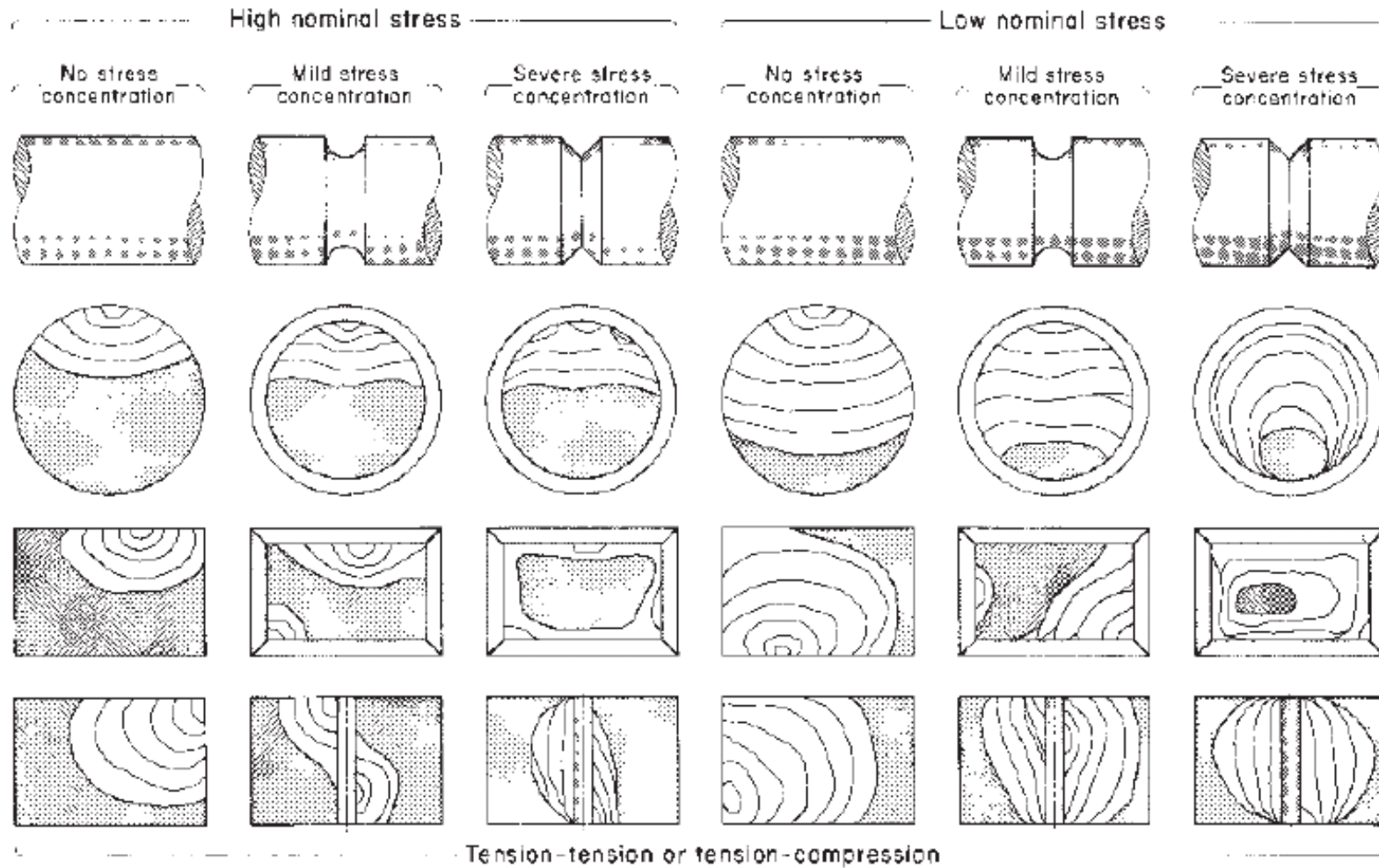
• در بارگذاری ایستا قطعه به علت فزونی تنش از مقاومت تسلیم ماده و تغییر شکل زیاد خراب می شود ولی می توان قطعه را قبل از بروز گسیختگی عوض کرد، اما شکست خستگی خبر نمی دهد!

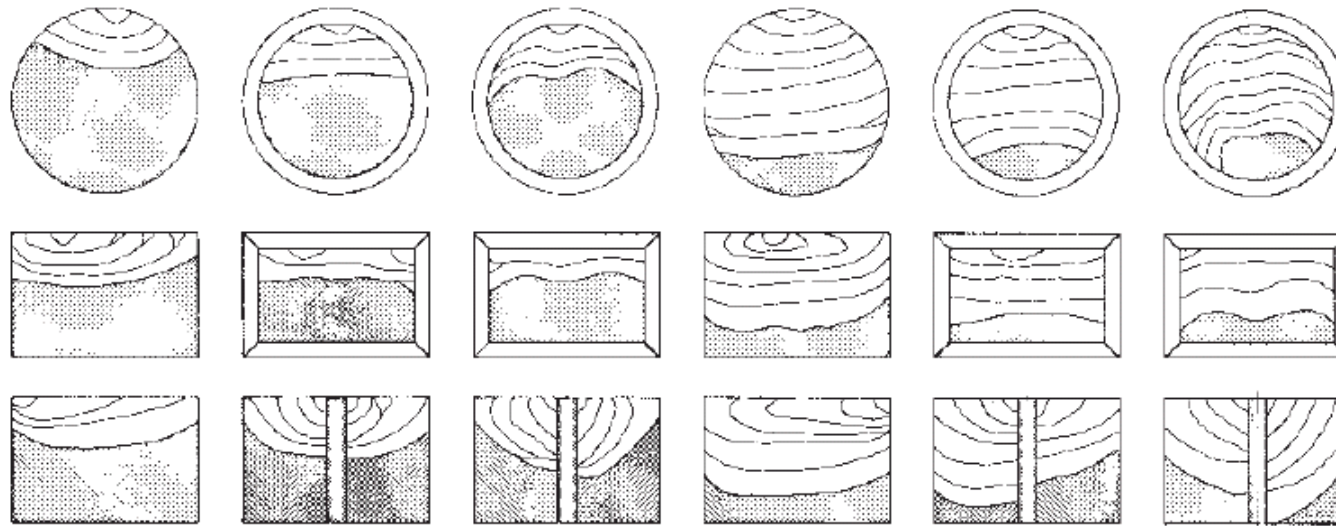
• یک شکست خستگی ضاهری همچون شکست ترد دارد و سطح گسیخته تخت، و عمود بر محور تنش و بدون لاغر شدن است.

• جلوه گسیختگی خستگی با ترد ایستا متفاوت است و شامل سه مرحله می باشد:

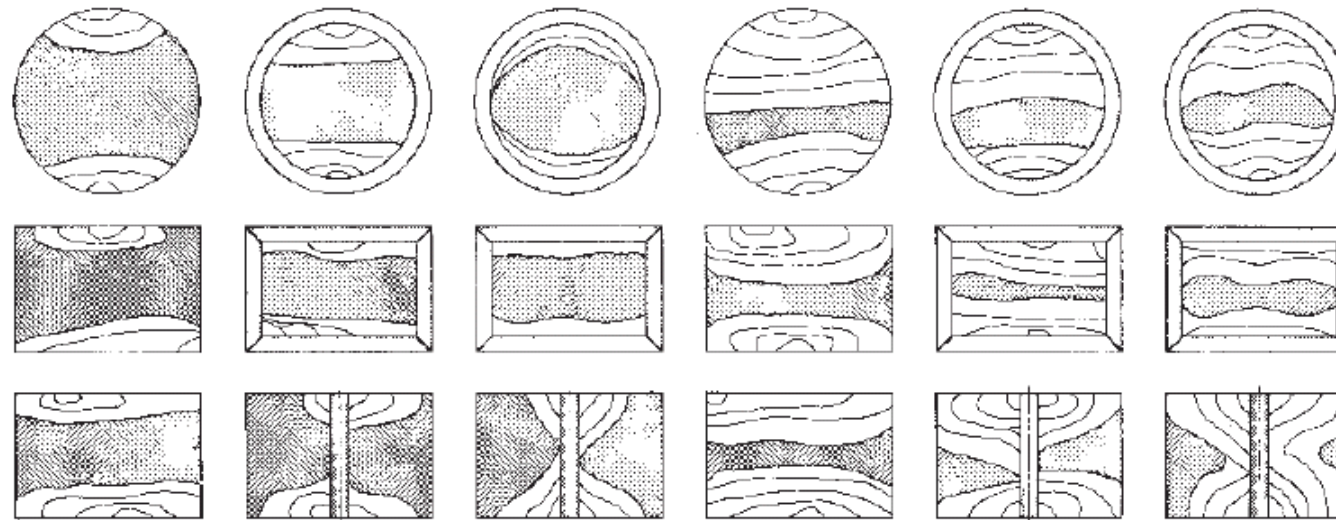
۱. مرحله نخست: یک یا چند ترک ریز که به طور معمول با چشم غیر مسلح دیده نمی شود
۲. مرحله دوم: ترک های ریز رشد کرده سطوح جلگه وار شکست موازی هم پدید می آیند که این خطوط به طور معمول صاف و عمود بر بیشترین تنش کششی است و نوار های سایه روشن به صورت سواحل دریا یا پوسته صدف ایجاد می کند.
- شکل اثر موج ساحلی به تغییرات میزان بارگذاری و یا تعداد آن و نیز طبیعت خورنده محیط بستگی دارد.
۳. مرحله سوم: در آخرین نوسان تنش ماده قادر به تحمل بار نیست و شکست سریع رخ می دهد. شکست مرحله سوم شاید ترد، شکل پذیر و یا ترکیب هر دو باشد.



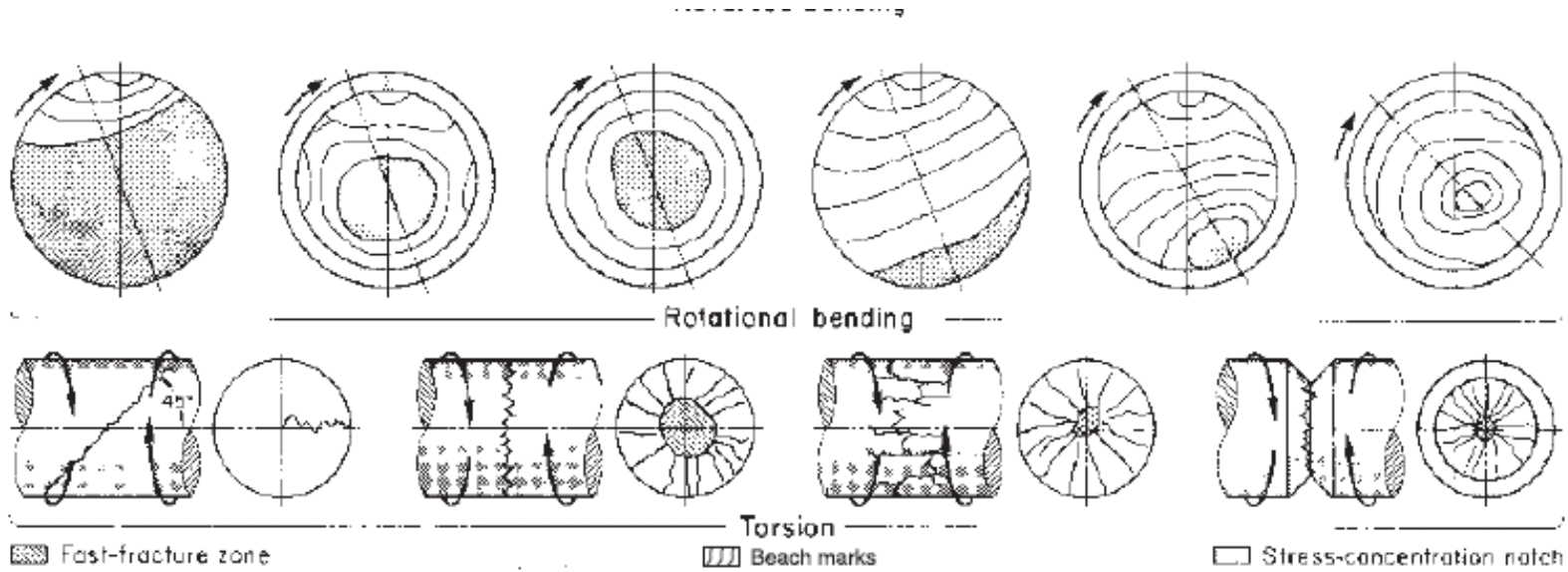




Unidirectional bending

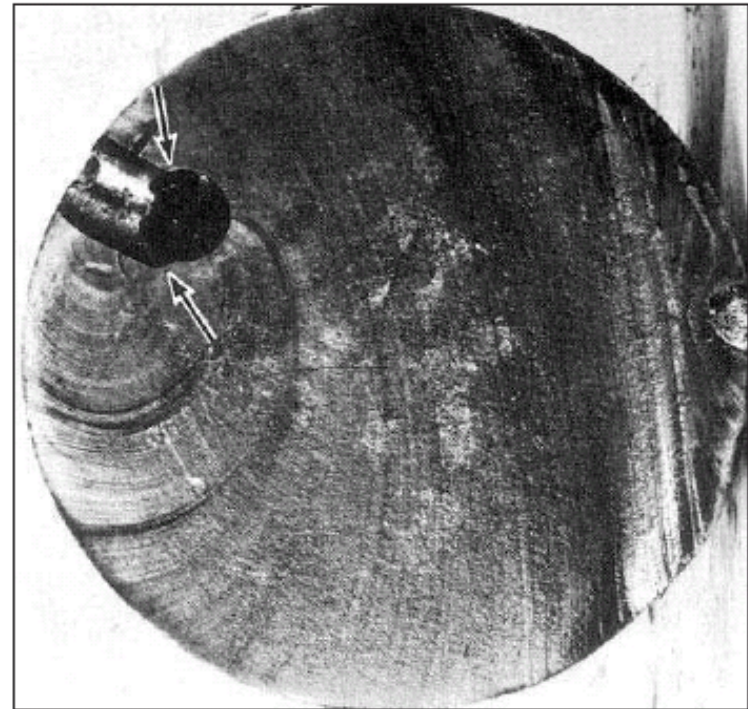


Reversed bending

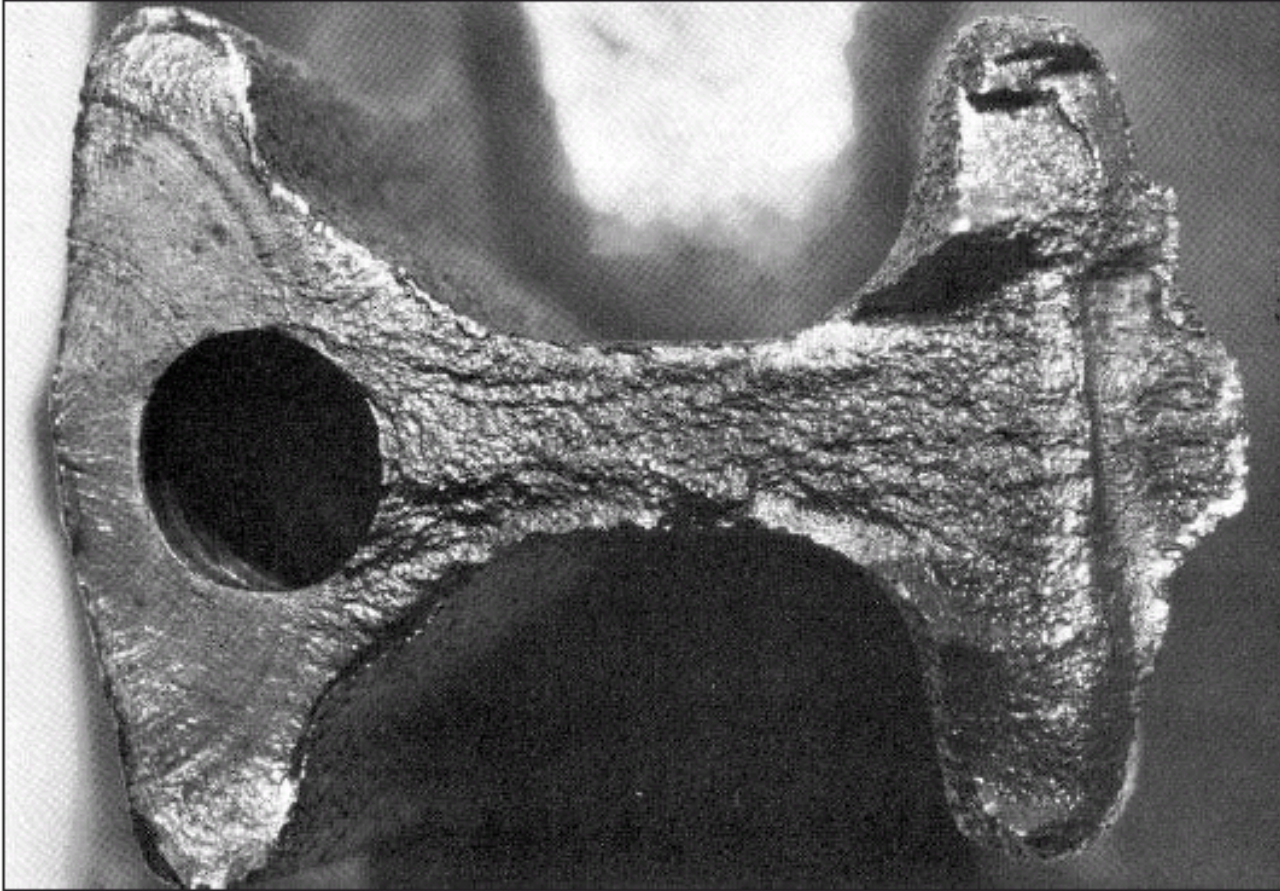


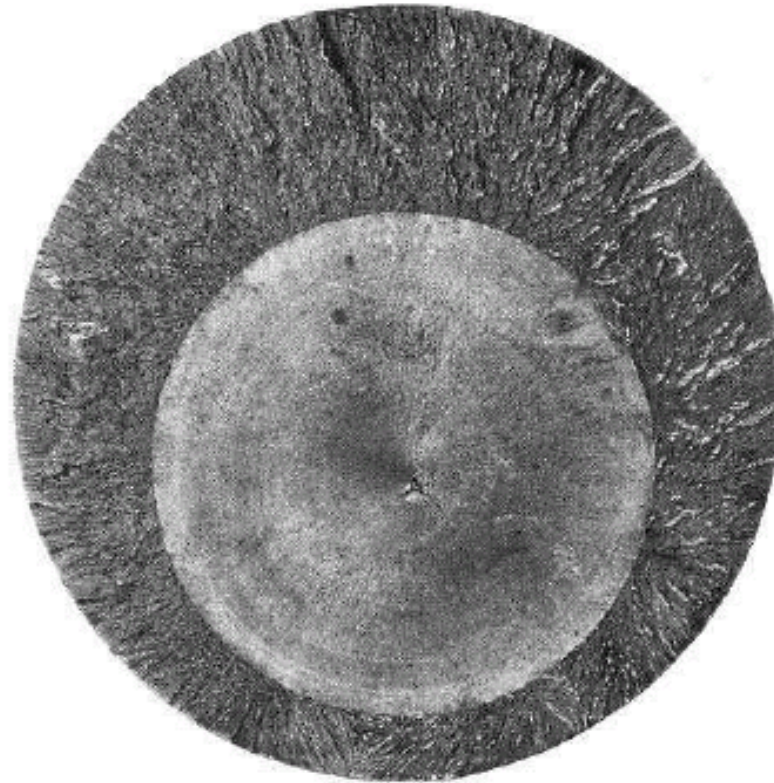
## علل وقوع شکست خستگی

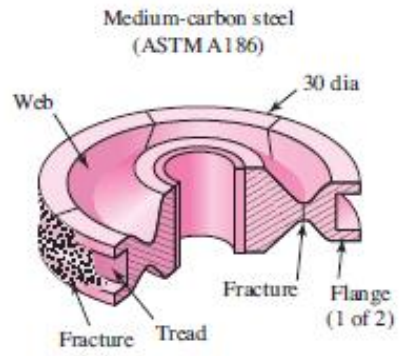
- شکست خستگی ناشی از شکل گیری و انتشار ترک است.
- ترک معمولاً از یک ناپیوستگی در جایی که تنش نوسانی ماده به بیشترین مقدار خود رسیده است آغاز می شود.
- عوامل بانی ناپیوستگی
  - تغییر تند سطح مقطع، جا خار، سوارخ ها و ... که سبب تمرکز تنش می شود.
  - به توجهی در تغییر شکل ضربه ای یا رد پای ابزار، خراش پلیسه، طرح بد اتصال، بد سوار کردن کردن و عیوب ساخت
  - اجزایی که نسبت به هم می لغزند یا می غلتند (یاتاقان، چرخ دنده ها، بادامک ها و ...) با فشار تماسی زیاد تنش های تماسی سطحی بوجود می آورند که ممکن است سبب کندی یا خرد شدن سطح شود.
  - ترکیب خود ماده در فرآیند های نورد، آهنگری، ریخته گری، Drawing، Extrusion ناپیوستگی های سطحی و زیرسطحی بسیار ریز پدید می آورد.
- شرایط گوناگون به ترک سرعت می بخشد: تنش های پسماند، افزایش دما، نوسان دما، محیط خورنده، نوسان یا بسامد زیاد بار







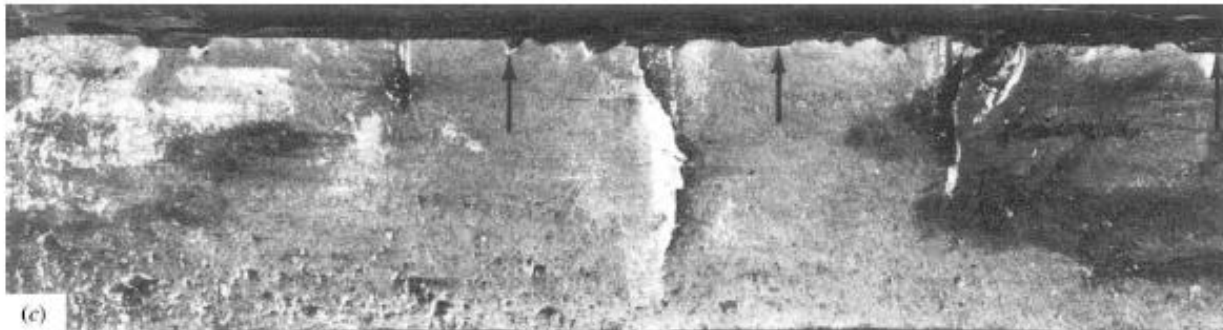




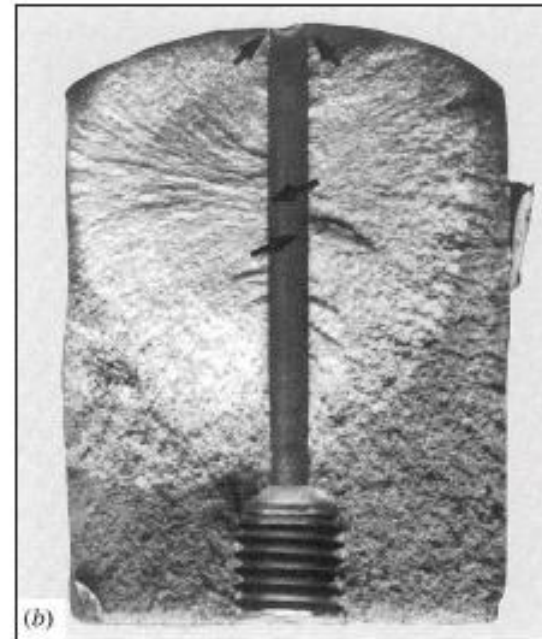
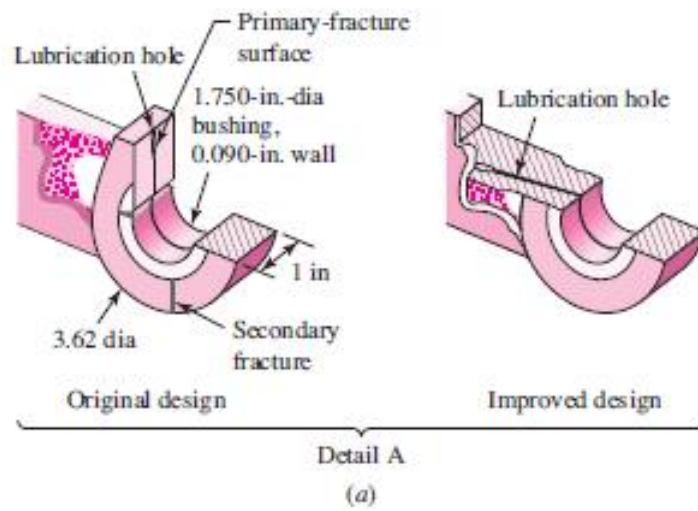
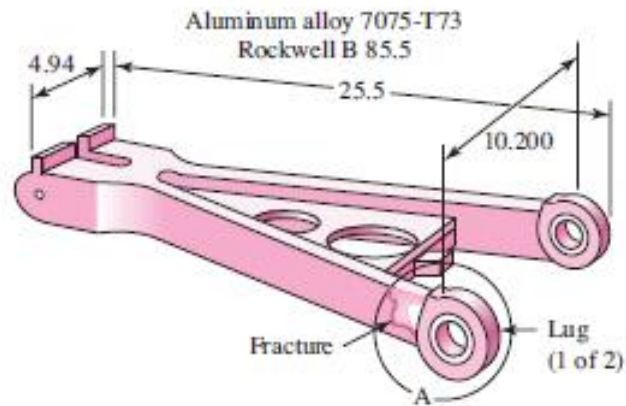
(a) Coke-oven-car wheel



(b)



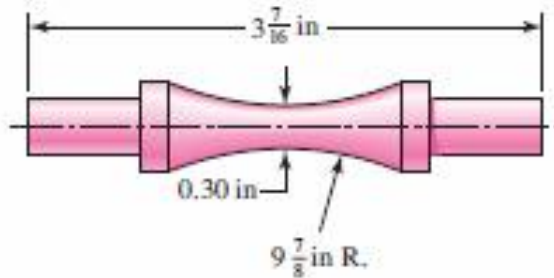
(c)



## The Stress-Life Method

## روش تنش عمر

- تعیین مقاومت مواد در بارهای خستگی با بارگذاری نوسانی یا متغیر با مقدار معین و شمارش نوسان ها یا تنش رفت و برگشتی تا خرد شدن کامل نمونه انجام می شود.
- دستگاه آزمون تیر گردان (*Moore*) با سرعت زیاد و از پر کاربردترین نوع آزمون خستگی است.

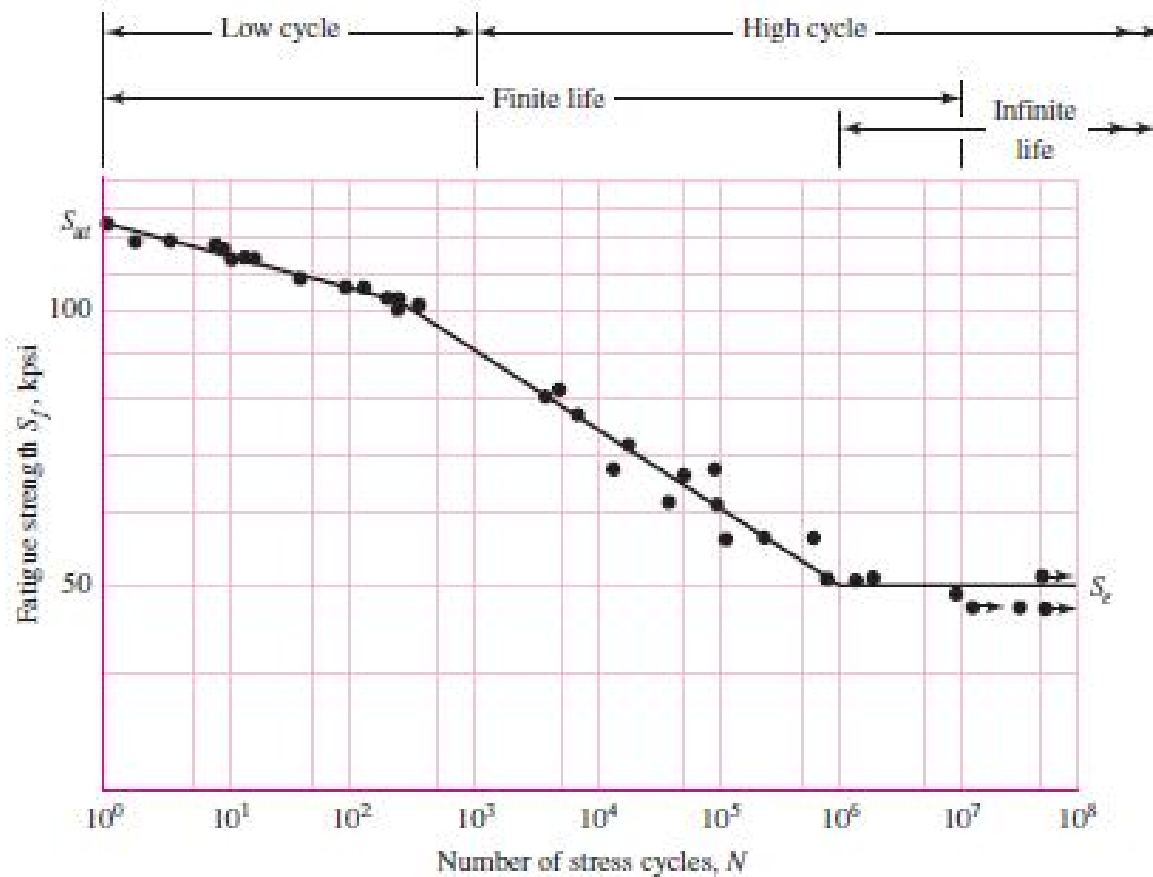


**Figure 6-9**

Test-specimen geometry for the R. R. Moore rotating-beam machine. The bending moment is uniform over the curved at the highest-stressed portion, a valid test of material, whereas a fracture elsewhere (not at the highest-stress level) is grounds for suspicion of material flaw.

## مقاومت خستگی و حد دوام

- نخستین آزمایش با تنش کمی پایین تر از تنش نهایی نمونه انجام می شود و در آزمون بعد اندکی کمتر از تنش آزمون نخست، و این شیوه ادامه دارد و در پایان همه آزمون ها نمودار نتایج را در مختصات S-N رسم می کنند.
- عرض نمودار S-N را **مقاومت خستگی**  $S_f$  (**Fatigue Strength**) می نامند.
- هر جا در مورد این مقاومت صحبت شود باید با ذکر تعداد تکرار تنش  $N$  باشد.
- نمودار S-N را هم برای نمونه آزمون و هم برای هر قطعه مکانیکی می توان به دست آورد و فرق چشمگیری بین نمودار این دو هست.
- برای فولادها این نمودار زانو یا خم دارد که بیش از این شمار تناوب دیگر هیچ گاه شکستی رخ نمی دهد. مقاومت متناظر با این زانو را **حد دوام یا حد خستگی**  $S_e$  (**Endurance Limit**) گویند
- این حالت برای آلیاژهای غیر آهنی هرگز اتفاق نمی افتد، پس آنها حد دوام ندارند.



چند نکته:

۱.  $N=1$  یعنی یکبار ورود بار و برداشتن آن و سپس ورود آن در جهت مخالف و برداشتن آن.
۲.  $N=1/2$  یعنی بار فقط یک بار وارد شده و بر می داریم.
۳. از  $N=1$  تا  $N=1000$  گروه **خستگی کم نوسان (low-cycle fatigue)** است.
۴. به شکست هایی که در تعداد نوسان تنش بیش از 1000 رخ می دهد گروه **خستگی پرنوسان (high-cycle fatigue)** گویند.
۵. مرز بین ناحیه عمر محدود و عمر نامحدود برای فولاد بین  $10^6$  و  $10^7$  است.

- چند توصیه:

– آزمون شکست در طراحی و ساخت قطعات یک نیاز است نه کار دلخواه و همیشه یک کار خوب مهندسی است.

– البته هر گونه تداوم در بررسی شکست لازم نیست مگر بنا به دلایل مهم.

– هدف از بررسی شکست یافتن چراهای شکست است تا بهترین روش پیشگیری را به کار ببندیم.

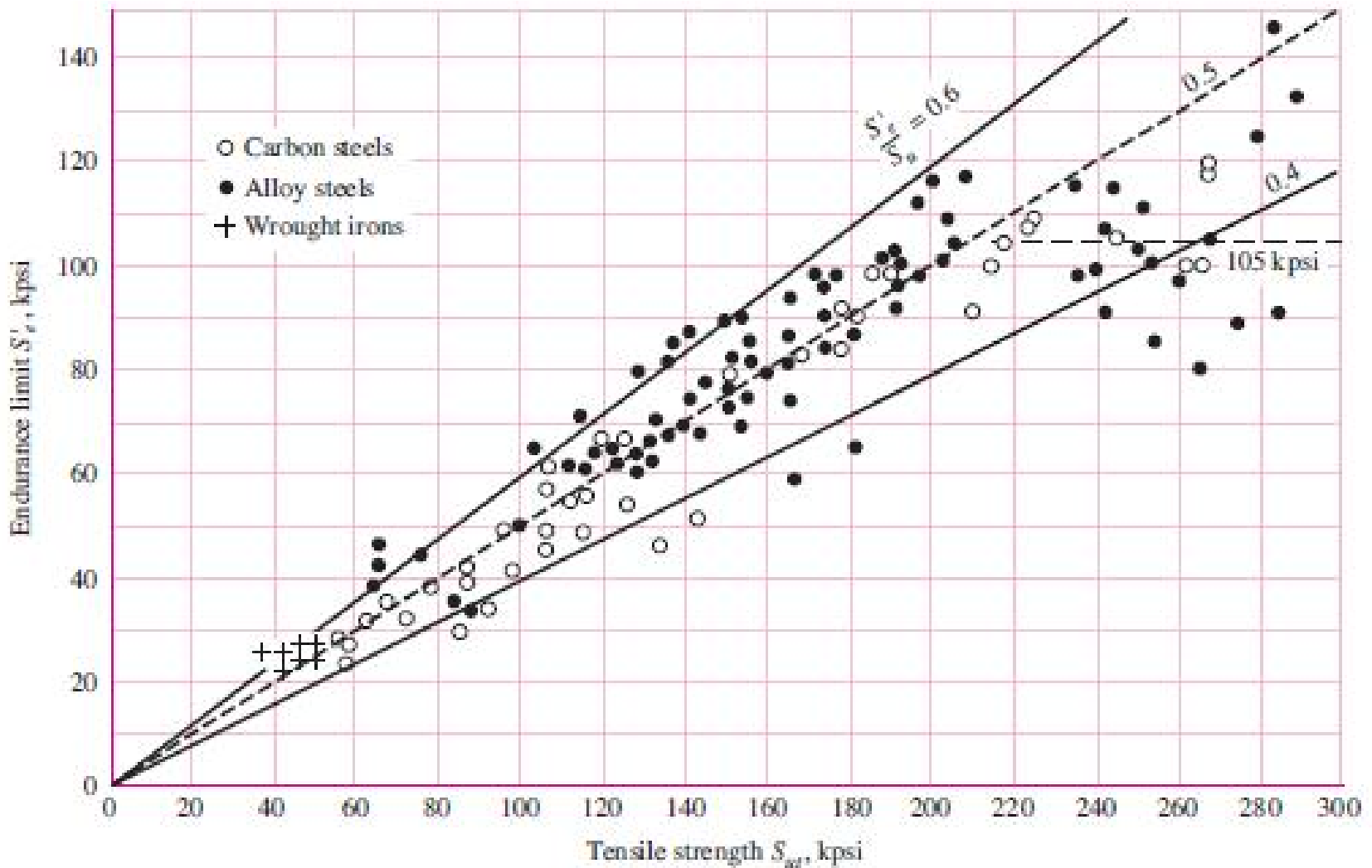
– شاید شیوه های تحلیلی به نتایج قطعی نرسند.



## The Endurance Limit

## حد دوام

- آزمون خستگی برای تعیین حد دوام هر چند زمانگیر اما جا افتاده است.
- داده های فراوانی از نتایج آزمون های تیر گردان و آزمون های کشش ساده منتشر شده است.
- پراکندگی حد دوام به علت پراکندگی مقاومت های کششی نمونه ها نیست.

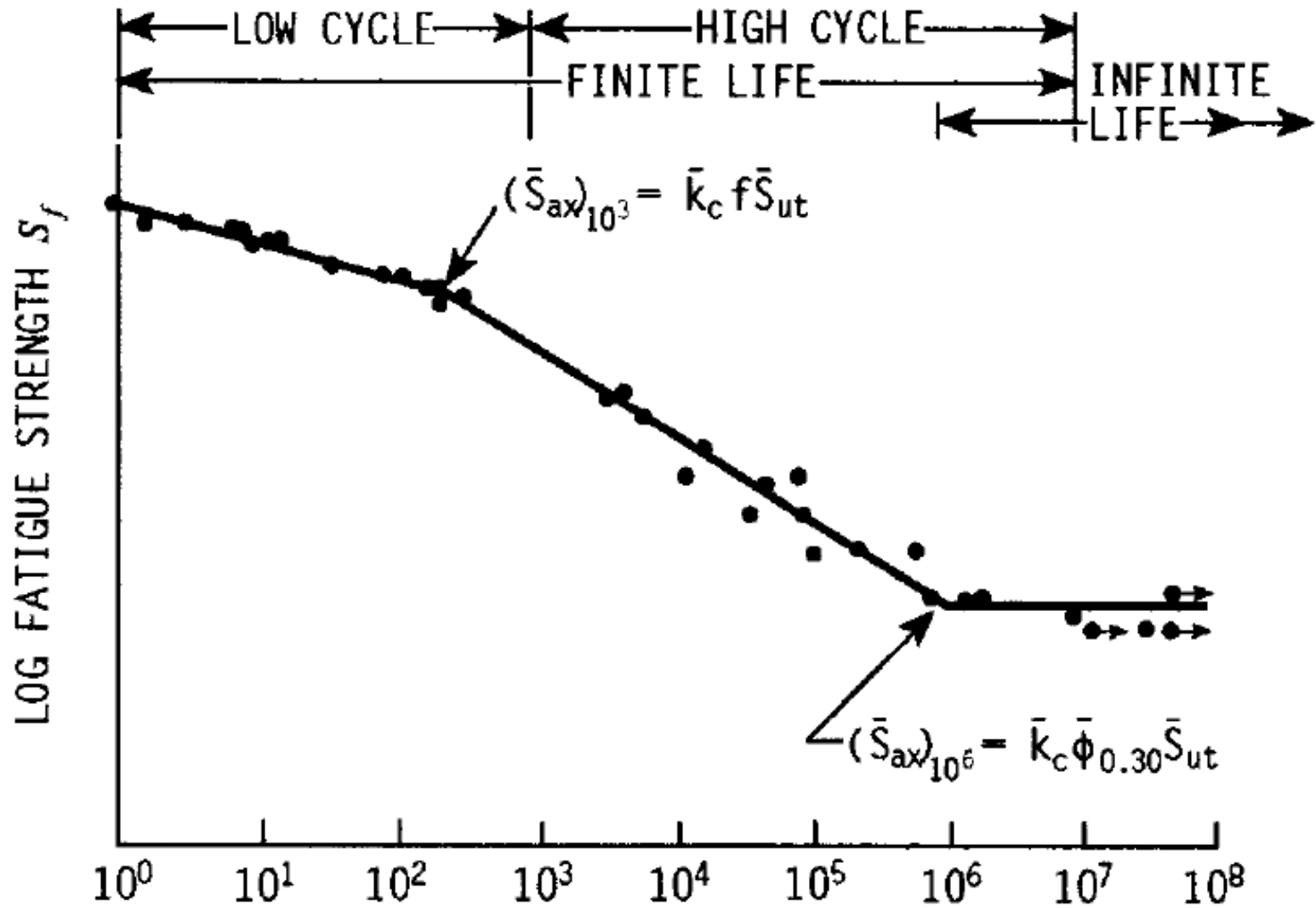


$$S'_e = \begin{cases} 0.5S_{ut} & S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi (1400 MPa)} \\ 100 \text{ kpsi} & S_{ut} > 200 \text{ kpsi} \\ 700 \text{ MPa} & S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

## Fatigue Strength

## مقاومت خستگی

- در ناحیه کم نوسان که  $N=1$  تا  $N=1000$  است، مقاومت خستگی  $S_f$  تنها اندکی کوچکتر از مقاومت کششی  $S_{ut}$  است.
- قصد این بخش تقریب نمودار  $S-N$  در ناحیه پرنوسان است زمانی که تنها اطلاعات موجود نتایج آزمون کشش ساده است.
- برای فولاد ناحیه پرنوسان بین  $N=10^3$  تا حد دوام  $N_e=10^6-10^7$  است.



•  $S, N$  با هم رابطه خطی ندارند بلکه لگاریتم آنها رابطه خطی دارد.

$$10^3 \leq N \leq 10^6$$

$$S_f = a N^b \xrightarrow{a = 10^c} \log S_f = b \cdot \log N + c$$

$$\begin{cases} N = 10^3 \Rightarrow f \cdot S_{ut} \\ N = 10^6 \Rightarrow S'_e \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} \\ b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{f S_{ut}}{S_e} \right) \end{cases}$$

$$1 \leq N \leq 10^3$$

$$\begin{cases} N = 1 \Rightarrow S_{ut} \\ N = 10^3 \Rightarrow f \cdot S_{ut} \end{cases} \longrightarrow S_f = S_{ut} N^{\frac{(\log f)}{3}}$$

برای فولاد  $f \approx 0.8$  است.

## Endurance Limit Modifying Factors

## ضرایب تصحیح حد دوام

- دیدیم که نمونه آزمون تیر گردان برای تعیین حد دوام در شرایط آزمایشگاهی و کاملاً تحت کنترل انجام پذیرفت در حالی که در عمل چنین نمونه ای دور از حقیقت است و عواملی همچون عوامل زیر موثرند:

- جنس
- ساخت
- محیط
- طرح

- پس خواهیم داشت:

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \quad (6-18)$$

- $k_a$  = surface condition modification factor
  - $k_b$  = size modification factor
  - $k_c$  = load modification factor
  - $k_d$  = temperature modification factor
  - $k_e$  = reliability factor<sup>13</sup>
  - $k_f$  = miscellaneous-effects modification factor
  - $S'_e$  = rotary-beam test specimen endurance limit
  - $S_e$  = endurance limit at the critical location of a machine part in the geometry and condition of use
- ضریب تصحیح پرداخت سطح
  - ضریب تصحیح اندازه
  - ضریب تصحیح بار
  - ضریب تصحیح دما
  - ضریب اعتماد پذیری
  - ضریب تصحیح اثرات دیگر
  - حد دوام تیر گردان
  - حد دوام موضع بحرانی قطعه ماشین در شرایط کاربردی

## Surface Factor $k_a$

## ضریب پرداخت سطح $k_a$

- ضریب پرداخت سطح به کیفیت پرداخت نهایی و مقاومت کششی قطعه بستگی دارد.

$$k_a = aS_{ut}^b$$

Surface Finish	Factor $a$		Exponent $b$
	$S_{ut}$ , kpsi	$S_{ut}$ , MPa	
Ground	1.34	1.58	-0.085
Machined or cold-drawn	2.70	4.51	-0.265
Hot-rolled	14.4	57.7	-0.718
As-forged	39.9	272.	-0.995



## Size Factor $k_b$

## ضریب اندازه $k_b$

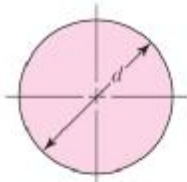
- ضریب اندازه با ارزیابی 133 مجموعه نقاط داده، به دست آمده است:
- نتایج برای **خمش و پیچش**:

$$k_b = \begin{cases} (d/0.3)^{-0.107} = 0.879d^{-0.107} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ in} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \leq 10 \text{ in} \\ (d/7.62)^{-0.107} = 1.24d^{-0.107} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \leq 254 \text{ mm} \end{cases}$$

- برای بارگذاری **محوری** اثر اندازه نداریم؛ پس

$$k_b = 1$$

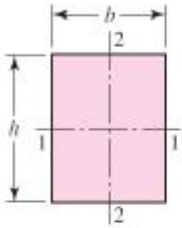
- برای میل گردان گرد ولی غیر گردان و یا مقاطع غیر گرد،  $d$  تفاوت پیدا می کند:



$$A_{0.95\sigma} = 0.01046d^2$$

$$d_e = 0.370d$$

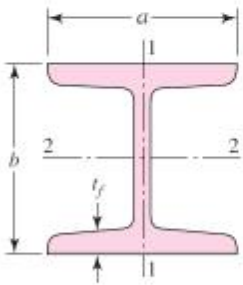
– قطر معادل برای میله گرد توپر و توخالی غیر گردان



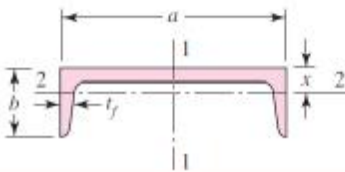
$$A_{0.95\sigma} = 0.05hb$$

$$d_e = 0.808\sqrt{hb}$$

– برای مقطع مستطیلی، غیر گردان



$$A_{0.95\sigma} = \begin{cases} 0.10at_f & \text{axis 1-1} \\ 0.05ba & \text{axis 2-2} \end{cases} \quad t_f > 0.025a$$



$$A_{0.95\sigma} = \begin{cases} 0.05ab & \text{axis 1-1} \\ 0.052xa + 0.1t_f(b-x) & \text{axis 2-2} \end{cases}$$

## Loading Factor $k_c$

## ضریب بار گذاری $k_c$

- اگر آزمون خستگی با بار خمشی، محوری (کششی - فشاری) و یا پیچشی باشد، حدود دوام فرق میکند:

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{bending} \\ 0.85 & \text{axial} \\ 0.59 & \text{torsion}^{17} \end{cases}$$

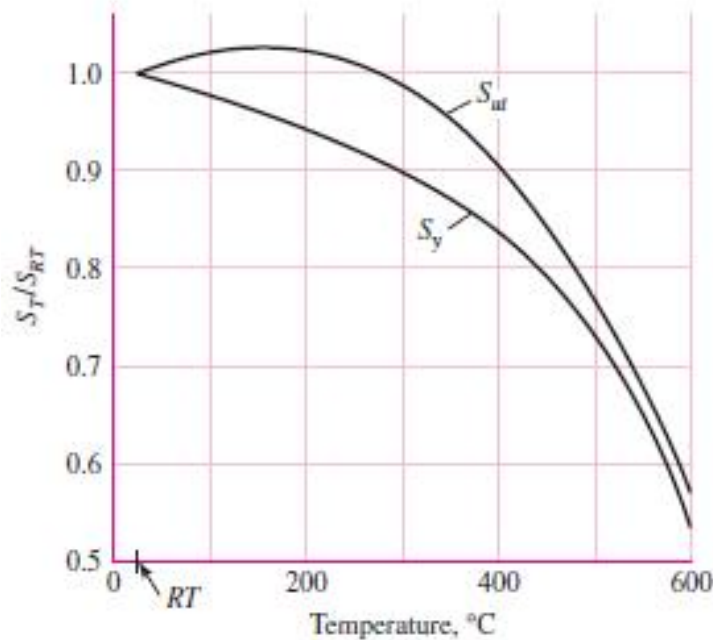
- اگر بار گذاری خستگی پیچش خالص باشد این ضریب کاربرد دارد و اگر با تنش های دیگر همچون خمش همراه باشد  $k_c=1$  است.
- نظریه Von Mises برای پیچش خالص  $k_c=0.577$

## Temperature Factor $k_d$

## ضریب دما $k_d$

- اگر درجه حرارت کمتر از دمای اتاق باشد احتمال شکست ترد زیاد است.
- اگر درجه حرارت بیشتر از دمای اتاق باشد نخست باید تسلیم ماده بررسی شود که با گرما به شدت کاهش می یابد.
- شاید درست باشد بگوییم که در گرمای زیاد مواد حد خستگی ندارند و با کاهش مقاومت خستگی شکست به گونه ای به زمان بستگی دارد.

$$k_d = \frac{S_T}{S_{RT}}$$



Temperature, °C	$S_T/S_{RT}$	Temperature, °F	$S_T/S_{RT}$
20	1.000	70	1.000
50	1.010	100	1.008
100	1.020	200	1.020
150	1.025	300	1.024
200	1.020	400	1.018
250	1.000	500	0.995
300	0.975	600	0.963
350	0.943	700	0.927
400	0.900	800	0.872
450	0.843	900	0.797
500	0.768	1000	0.698
550	0.672	1100	0.567
600	0.549		

# Miscellaneous-Effects Factor $k_f$      ضریب اثرات گوناگون $k_f$

- تنشهای پسماند
  - اگر تنش پس ماند در سطح قطعه فشاری باشد حد دوام ماده افزایش می یابد.
    - ساچمه زنی
    - چکش خواری
    - نورد سرد
- خوردگی
  - انتظار می رود قطعات در محیط خورنده مقاومت خستگی کمتری داشته باشند.
- روکش کاری الکترولیتی
  - روکش های کرم، نیکل، یا کادمیم حد دوام را تا 50 درصد کم می کند
- بسامد نوسانی
  - شدت خوردگی یا گرما یا هر دو نرخ تکرار بار را مهم می کند. بسامد کم و گرمای بیشتر کوتاهی عمر شدید تر.
- خوردگی فشاری و انطباقی و مالشی
  - این فرایند با تغییر رنگف خراش و شکست ناگهانی همراه است و  $k_f$  با توجه به جنس دو قطعه بین 0,24 تا 0,90 تغییر می کند.

## ضریب تمرکز تنش خستگی $K_f$

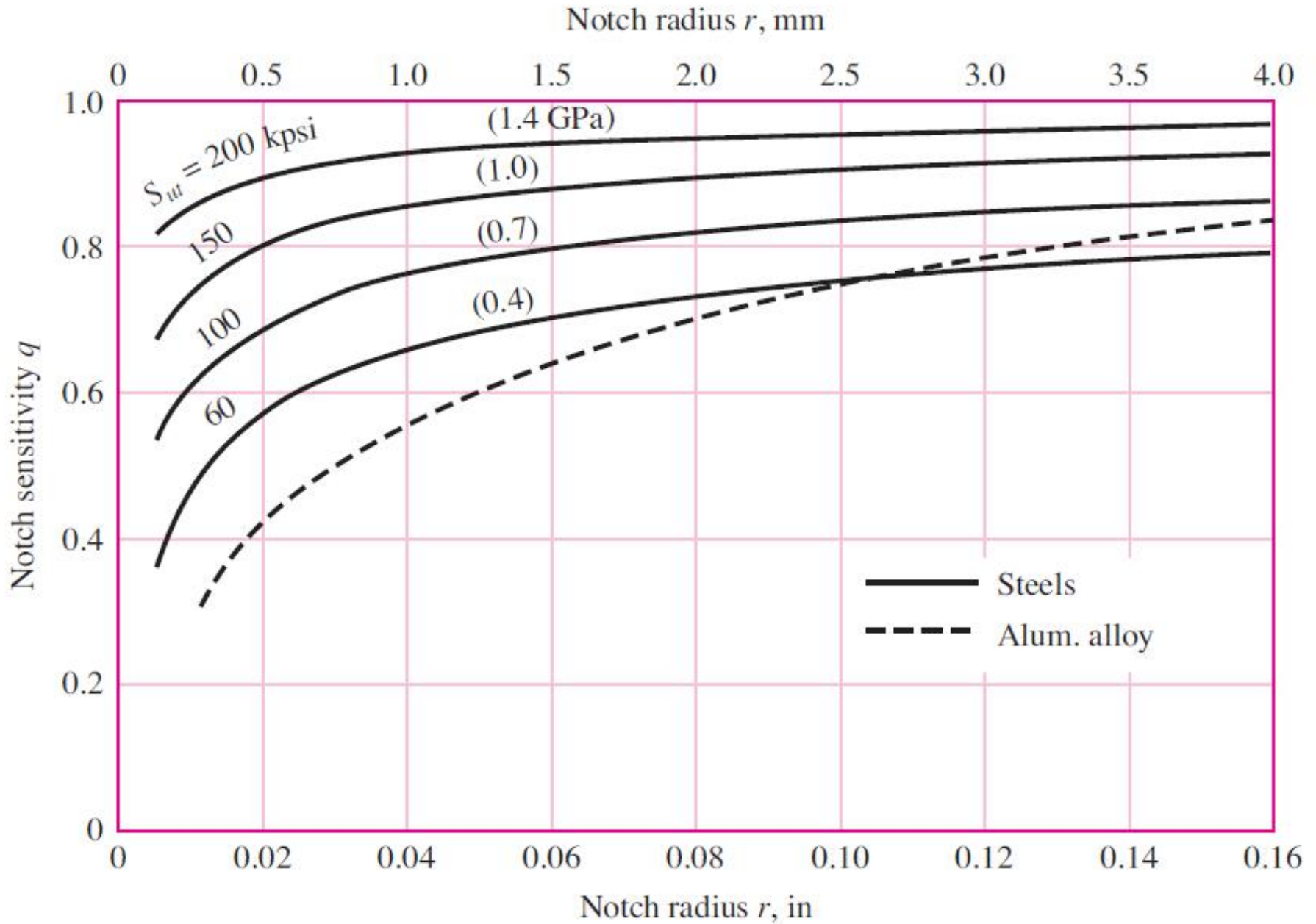
- جنس به طور غیر مستقیم روی طراحی بر اساس تمرکز تنش موثر است که  $K_f$  ضریب تمرکز تنش خستگی (fatigue stress concentration factor) نامیده می شود (کاهش ناشی از حساسیت کمتر به چاک).

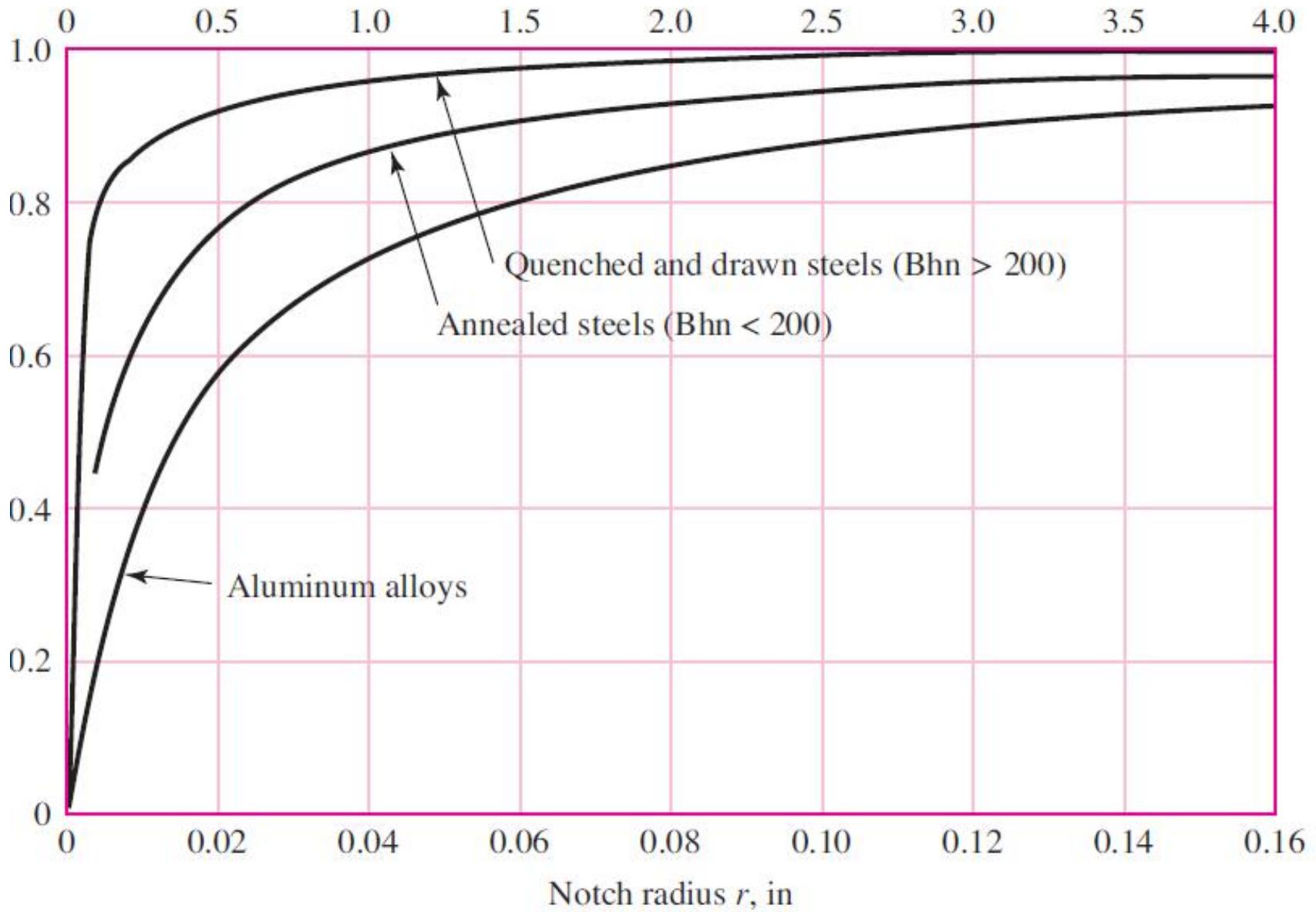
$$\sigma_{\max} = K_f \sigma_0 \quad \text{or} \quad \tau_{\max} = K_{fs} \tau_0$$

$$K_f = \frac{\text{maximum stress in notched specimen}}{\text{stress in notch-free specimen}}$$

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad \text{or} \quad q_{\text{shear}} = \frac{K_{fs} - 1}{K_{ts} - 1}$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad \text{or} \quad K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}}(K_{ts} - 1)$$







**EXAMPLE 6-8**

A 1015 hot-rolled steel bar has been machined to a diameter of 1 in. It is to be placed in reversed axial loading for 70 000 cycles to failure in an operating environment of 550°F. Using ASTM minimum properties, and a reliability of 99 percent, estimate the endurance limit and fatigue strength at 70 000 cycles.

**Solution**

From Table A-20,  $S_{ut} = 50$  kpsi at 70°F. Since the rotating-beam specimen endurance limit is not known at room temperature, we determine the ultimate strength at the elevated temperature first, using Table 6-4. From Table 6-4,

$$\left(\frac{S_T}{S_{RT}}\right)_{550^\circ} = \frac{0.995 + 0.963}{2} = 0.979$$

The ultimate strength at 550°F is then

$$(S_{ut})_{550^\circ} = (S_T/S_{RT})_{550^\circ} (S_{ut})_{70^\circ} = 0.979(50) = 49.0 \text{ kpsi}$$

The rotating-beam specimen endurance limit at 550°F is then estimated from Eq. (6-8) as

$$S'_e = 0.5(49) = 24.5 \text{ kpsi}$$

Next, we determine the Marin factors. For the machined surface, Eq. (6-19) with Table 6-2 gives

$$k_a = aS_{ut}^b = 2.70(49^{-0.265}) = 0.963$$

For axial loading, from Eq. (6-21), the size factor  $k_b = 1$ , and from Eq. (6-26) the loading factor is  $k_c = 0.85$ . The temperature factor  $k_d = 1$ , since we accounted for the temperature in modifying the ultimate strength and consequently the endurance limit. For 99 percent reliability, from Table 6-5,  $k_e = 0.814$ . Finally, since no other conditions were given, the miscellaneous factor is  $k_f = 1$ . The endurance limit for the part is estimated by Eq. (6-18) as

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

Answer

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

$$= 0.963(1)(0.85)(1)(0.814)(1)24.5 = 16.3 \text{ kpsi}$$

For the fatigue strength at 70 000 cycles we need to construct the  $S$ - $N$  equation. From p. 277, since  $S_{ut} = 49 < 70$  kpsi, then  $f = 0.9$ . From Eq. (6-14)

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0.9(49)]^2}{16.3} = 119.3 \text{ kpsi}$$

and Eq. (6-15)

$$b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{f S_{ut}}{S_e} \right) = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.9(49)}{16.3} \right] = -0.1441$$

Finally, for the fatigue strength at 70 000 cycles, Eq. (6-13) gives

Answer

$$S_f = a N^b = 119.3(70\,000)^{-0.1441} = 23.9 \text{ kpsi}$$

**EXAMPLE 6-9**

Figure 6-22a shows a rotating shaft simply supported in ball bearings at  $A$  and  $D$  and loaded by a nonrotating force  $F$  of 6.8 kN. Using ASTM “minimum” strengths, estimate the life of the part.

**Solution**

From Fig. 6-22b we learn that failure will probably occur at  $B$  rather than at  $C$  or at the point of maximum moment. Point  $B$  has a smaller cross section, a higher bending moment, and a higher stress-concentration factor than  $C$ , and the location of maximum moment has a larger size and no stress-concentration factor.

We shall solve the problem by first estimating the strength at point  $B$ , since the strength will be different elsewhere, and comparing this strength with the stress at the same point.

From Table A-20 we find  $S_{ut} = 690$  MPa and  $S_y = 580$  MPa. The endurance limit  $S'_e$  is estimated as

$$S'_e = 0.5(690) = 345 \text{ MPa}$$

From Eq. (6-19) and Table 6-2,

$$k_a = 4.51(690)^{-0.265} = 0.798$$

From Eq. (6-20),

$$k_b = (32/7.62)^{-0.107} = 0.858$$

Since  $k_c = k_d = k_e = k_f = 1$ ,

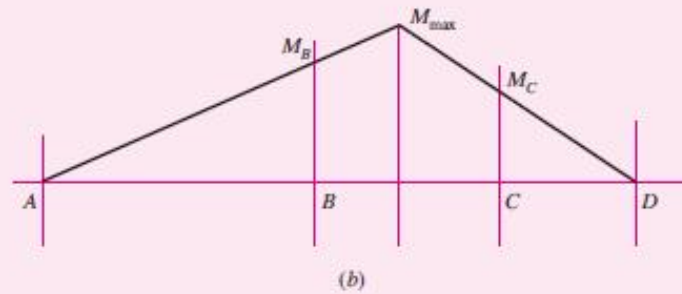
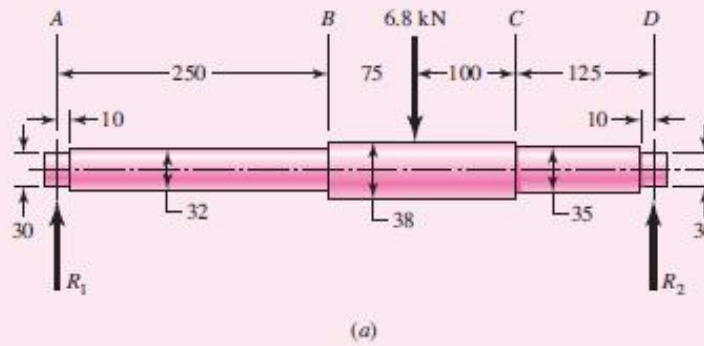
$$S_e = 0.798(0.858)345 = 236 \text{ MPa}$$

To find the geometric stress-concentration factor  $K_t$  we enter Fig. A-15-9 with  $D/d = 38/32 = 1.1875$  and  $r/d = 3/32 = 0.09375$  and read  $K_t \doteq 1.65$ . Substituting  $S_{ut} = 690/6.89 = 100$  kpsi into Eq. (6-35) yields  $\sqrt{a} = 0.0622 \sqrt{\text{in}} = 0.313 \sqrt{\text{mm}}$ . Substituting this into Eq. (6-33) gives

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a}/r} = 1 + \frac{1.65 - 1}{1 + 0.313/\sqrt{3}} = 1.55$$

**Figure 6-22**

(a) Shaft drawing showing all dimensions in millimeters; all fillets 3-mm radius. The shaft rotates and the load is stationary; material is machined from AISI 1050 cold-drawn steel. (b) Bending-moment diagram.



The next step is to estimate the bending stress at point  $B$ . The bending moment is

$$M_B = R_1 x = \frac{225F}{550} 250 = \frac{225(6.8)}{550} 250 = 695.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Just to the left of  $B$  the section modulus is  $I/c = \pi d^3/32 = \pi 32^3/32 = 3.217 (10^3) \text{ mm}^3$ . The reversing bending stress is, assuming infinite life,

$$\sigma = K_f \frac{M_B}{I/c} = 1.55 \frac{695.5}{3.217} (10)^{-6} = 335.1 (10^6) \text{ Pa} = 335.1 \text{ MPa}$$

This stress is greater than  $S_e$  and less than  $S_y$ . This means we have both finite life and no yielding on the first cycle.

For finite life, we will need to use Eq. (6-16). The ultimate strength,  $S_{ut} = 690 \text{ MPa} = 100 \text{ kpsi}$ . From Fig. 6-18,  $f = 0.844$ . From Eq. (6-14)

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0.844(690)]^2}{236} = 1437 \text{ MPa}$$

and from Eq. (6-15)

$$b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{f S_{ut}}{S_e} \right) = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.844(690)}{236} \right] = -0.1308$$

From Eq. (6-16),

**Answer**

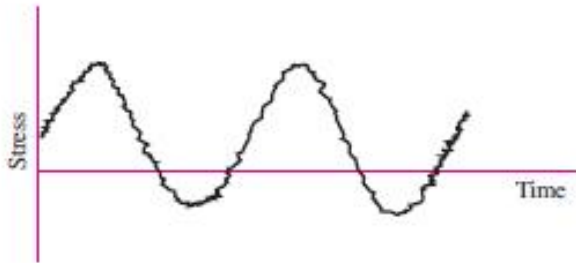
$$N = \left( \frac{\sigma_a}{a} \right)^{1/b} = \left( \frac{335.1}{1437} \right)^{-1/0.1308} = 68(10^3) \text{ cycles}$$

## وصف ویژگی های تنش های نوسانی

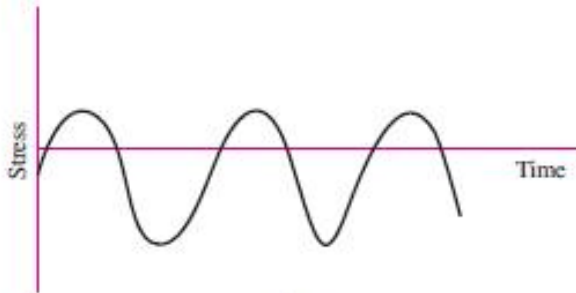
### Characterizing Fluctuating Stresses

- تنش های نوسانی در ماشین ها اغلب به سبب طبیعت دورانی کارشان الگوی سینوسی دارند.
- هر چند که الگوهای دیگر و حتی ناموزون پیش می آید اما دریافته اند که در الگوهای دامنه دار نیرو شکل موج مهم نیست ولی بیشترین و کمترین مقدار مهم است.
- پس در هر دوره نیرو می توان الگوی نیرو را با  $F_{min}$  و  $F_{max}$  مشخص نمود.
- مولفه میانی (نیروی میانی) و مولفه نوسانی (دامنه نیرو) آن چنین است:

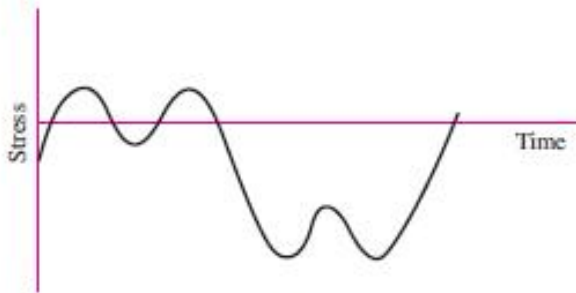
$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} \quad F_a = \left| \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} \right|$$



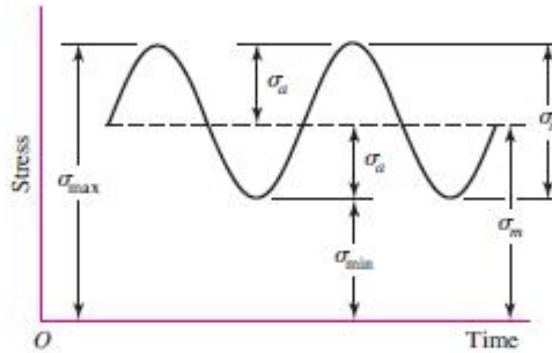
(a)



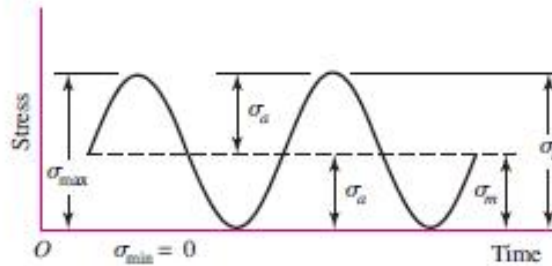
(b)



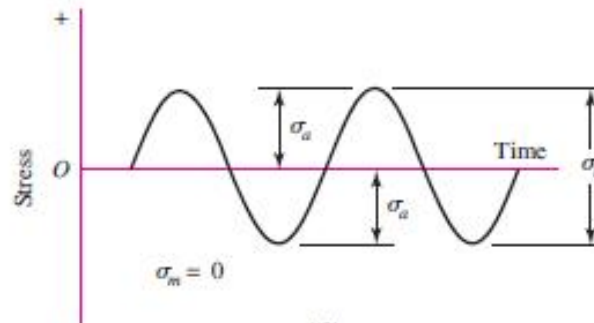
(c)



(d)



(e)



(f)

$\sigma_{min}$  = minimum stress  
 $\sigma_{max}$  = maximum stress  
 $\sigma_a$  = amplitude component  
 $\sigma_m$  = midrange component  
 $\sigma_r$  = range of stress  
 $\sigma_s$  = static or steady stress

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right|$$

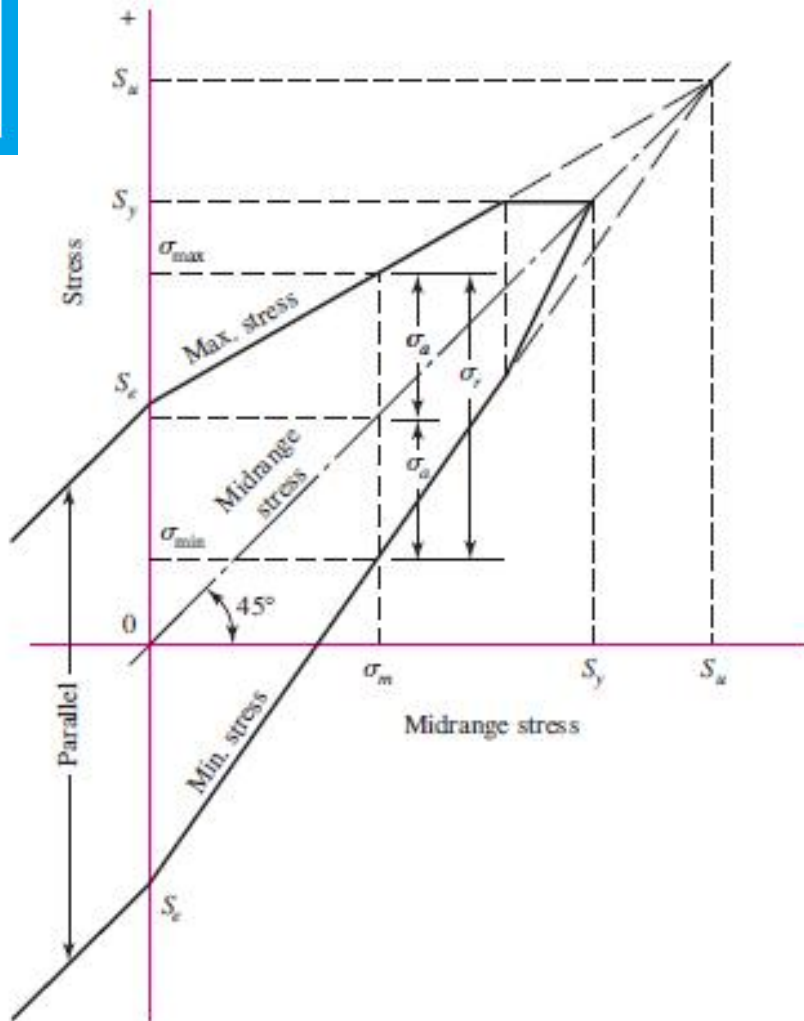
$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$

# معیار شکست خستگی در تنش های نوسان دار

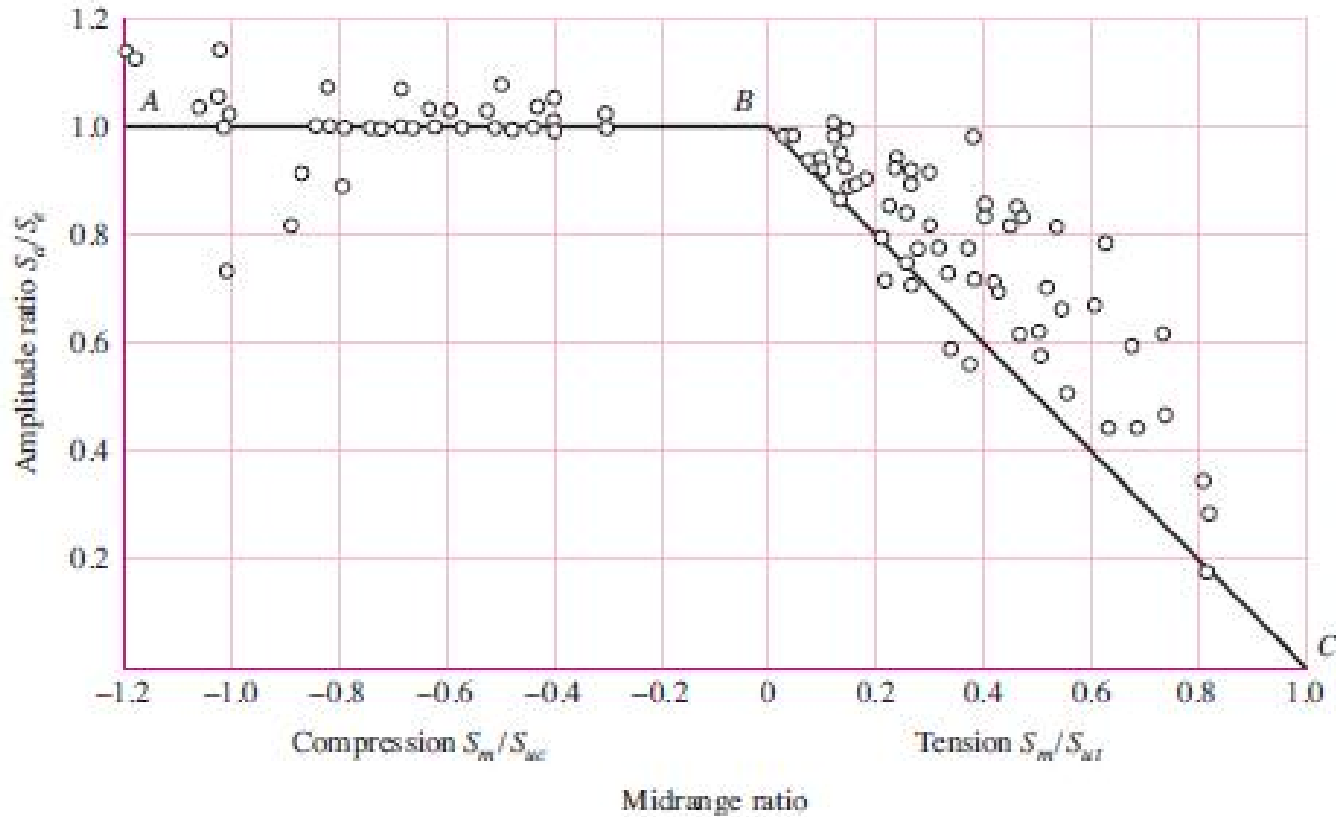
## Fatigue Failure Criteria for Fluctuating Stress

### • نمودار بهبود یافته Goodman



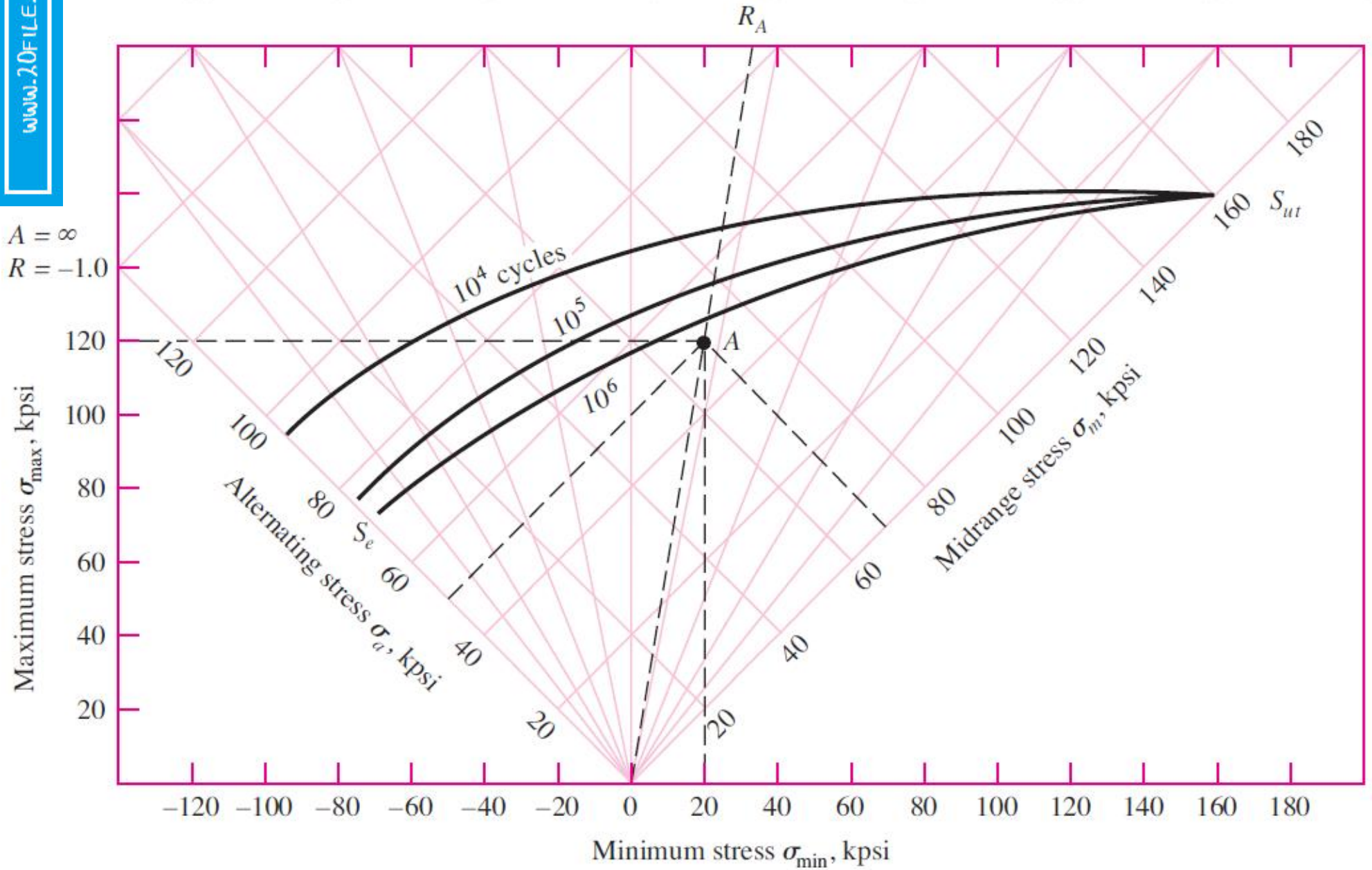
- تنش میانی روی محور طول ها
- بقیه مولفه های تنش روی محور عرض ها
- خط تنش میانی با زاویه 45 درجه از مبدا تا مفاومت کششی
- خطوطی که از  $S_e$  در بالا و زیر مبدأ آغاز می شود.

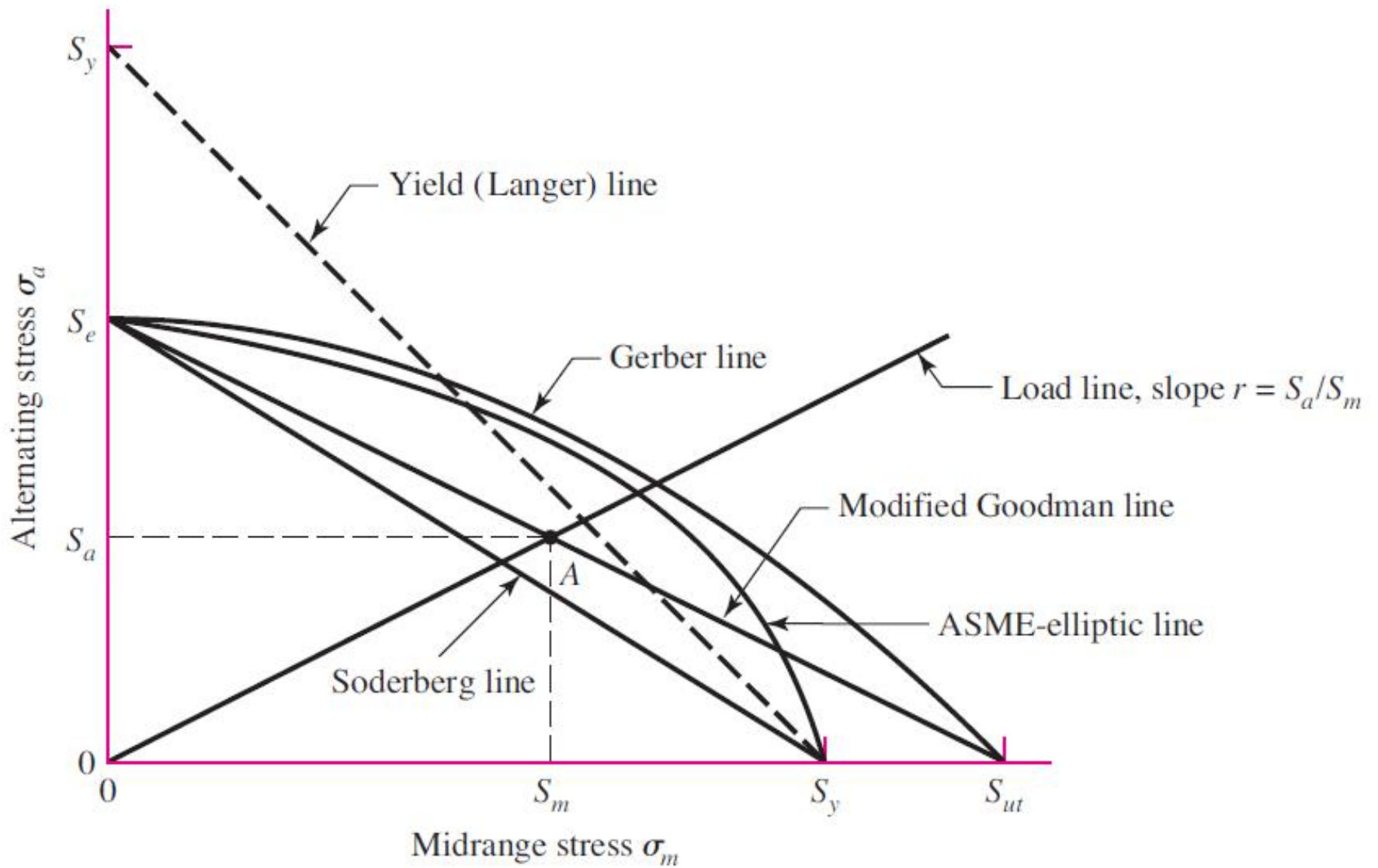




- خط BC نمایشگر معیار بهبود یافته Goodman برای شکست است.
- تنش میانه در ناحیه فشاری اثر کمی بر حد دوام دارد.
- اگر تنش میانی فشاری باشد زمانی شکست رخ می دهد که  $\sigma_a = S_e$  و یا  $\sigma_{max} = S_{yc}$  باشد

4.0	2.33	1.5	$A = 1$	0.67	0.43	0.25	0.11	0
-0.6	-0.4	-0.2	$R = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0





- Soderberg Line

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_y} = 1$$

- Modified Goodman Line

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$$

- Gerber Line

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$$

- ASME elliptic Line

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1$$

- Langer first cycle

$$S_a + S_m = S_y$$

**Soderberg**  $\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n}$

$$S_a = nS_a$$

**mod-Goodman**  $\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n}$

$$S_m = nS_m$$

**Gerber**  $\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$

**ASME-elliptic**  $\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2 = 1$

**Langer static yield**  $\sigma_a + \sigma_m = \frac{S_y}{n}$

## Goodman

- Langer
- Goodman & Langer

Intersecting Equations	Intersection Coordinates
$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$ <p>Load line <math>r = \frac{S_a}{S_m}</math></p>	$S_a = \frac{r S_e S_{ut}}{r S_{ut} + S_e}$ $S_m = \frac{S_a}{r}$
$\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ <p>Load line <math>r = \frac{S_a}{S_m}</math></p>	$S_a = \frac{r S_y}{1 + r}$ $S_m = \frac{S_y}{1 + r}$
$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$ $\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$	$S_m = \frac{(S_y - S_e) S_{ut}}{S_{ut} - S_e}$ $S_a = S_y - S_m, r_{crit} = S_a / S_m$

Fatigue factor of safety

$$n_f = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}}$$

# Gerber

- Langer
- Gerber & Langer

Intersecting Equations	Intersection Coordinates
$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$ <p>Load line <math>r = \frac{S_a}{S_m}</math></p>	$S_a = \frac{r^2 S_{ut}^2}{2 S_e} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_e}{r S_{ut}}\right)^2} \right]$ $S_m = \frac{S_a}{r}$
$\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ <p>Load line <math>r = \frac{S_a}{S_m}</math></p>	$S_a = \frac{r S_y}{1 + r}$ $S_m = \frac{S_y}{1 + r}$
$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$ $\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$	$S_m = \frac{S_{ut}^2}{2 S_e} \left[ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_e}{S_{ut}}\right)^2 \left(1 - \frac{S_y}{S_e}\right)} \right]$ $S_a = S_y - S_m, r_{crit} = S_a/S_m$

Fatigue factor of safety

$$n_f = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{ut}}{\sigma_m}\right)^2 \frac{\sigma_a}{S_e} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\sigma_m S_e}{S_{ut}\sigma_a}\right)^2} \right] \quad \sigma_m > 0$$

## ASME

- Langer

- ASME & Langer

Intersecting Equations	Intersection Coordinates
$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1$ <p>Load line <math>r = S_a/S_m</math></p>	$S_a = \sqrt{\frac{r^2 S_e^2 S_y^2}{S_e^2 + r^2 S_y^2}}$ $S_m = \frac{S_a}{r}$
$\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ <p>Load line <math>r = S_a/S_m</math></p>	$S_a = \frac{r S_y}{1 + r}$ $S_m = \frac{S_y}{1 + r}$
$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1$ $\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$	$S_a = 0, \frac{2 S_y S_e^2}{S_e^2 + S_y^2}$ $S_m = S_y - S_a, r_{\text{crit}} = S_a/S_m$

Fatigue factor of safety

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{(\sigma_a/S_e)^2 + (\sigma_m/S_y)^2}}$$



**EXAMPLE 6-10**

A 1.5-in-diameter bar has been machined from an AISI 1050 cold-drawn bar. This part is to withstand a fluctuating tensile load varying from 0 to 16 kip. Because of the ends, and the fillet radius, a fatigue stress-concentration factor  $K_f$  is 1.85 for  $10^6$  or larger life. Find  $S_a$  and  $S_m$  and the factor of safety guarding against fatigue and first-cycle yielding, using (a) the Gerber fatigue line and (b) the ASME-elliptic fatigue line.

**Solution**

We begin with some preliminaries. From Table A-20,  $S_{ut} = 100$  kpsi and  $S_y = 84$  kpsi. Note that  $F_a = F_m = 8$  kip. The Marin factors are, deterministically,

$$k_a = 2.70(100)^{-0.265} = 0.797: \text{Eq. (6-19), Table 6-2, p. 279}$$

$$k_b = 1 \text{ (axial loading, see } k_c)$$

$$k_c = 0.85: \text{Eq. (6-26), p. 282}$$

$$k_d = k_e = k_f = 1$$

$$S_e = 0.797(1)0.850(1)(1)(1)0.5(100) = 33.9 \text{ kpsi: Eqs. (6-8), (6-18), p. 274, p. 279}$$

The nominal axial stress components  $\sigma_{ao}$  and  $\sigma_{mo}$  are

$$\sigma_{ao} = \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4(8)}{\pi 1.5^2} = 4.53 \text{ kpsi} \quad \sigma_{mo} = \frac{4F_m}{\pi d^2} = \frac{4(8)}{\pi 1.5^2} = 4.53 \text{ kpsi}$$

Applying  $K_f$  to both components  $\sigma_{ao}$  and  $\sigma_{mo}$  constitutes a prescription of no notch yielding:

$$\sigma_a = K_f \sigma_{ao} = 1.85(4.53) = 8.38 \text{ kpsi} = \sigma_m$$

(a) Let us calculate the factors of safety first. From the bottom panel from Table 6–7 the factor of safety for fatigue is

$$\text{Answer} \quad n_f = \frac{1}{2} \left( \frac{100}{8.38} \right)^2 \left( \frac{8.38}{33.9} \right) \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2(8.38)33.9}{100(8.38)} \right]^2} \right\} = 3.66$$

From Eq. (6–49) the factor of safety guarding against first-cycle yield is

$$\text{Answer} \quad n_y = \frac{S_y}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{84}{8.38 + 8.38} = 5.01$$

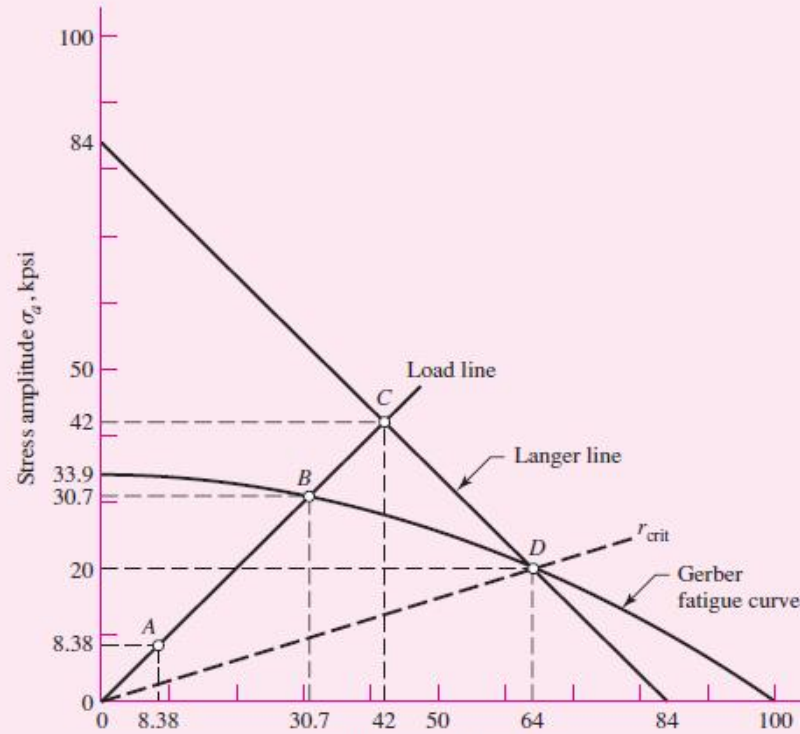
Thus, we see that fatigue will occur first and the factor of safety is 3.68. This can be seen in Fig. 6–28 where the load line intersects the Gerber fatigue curve first at point *B*. If the plots are created to true scale it would be seen that  $n_f = OB/OA$ .

From the first panel of Table 6–7,  $r = \sigma_a/\sigma_m = 1$ ,

$$\text{Answer} \quad S_a = \frac{(1)^2 100^2}{2(33.9)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2(33.9)}{(1)100} \right]^2} \right\} = 30.7 \text{ kpsi}$$

$$\text{Answer} \quad S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{30.7}{1} = 30.7 \text{ kpsi}$$

As a check on the previous result,  $n_f = OB/OA = S_a/\sigma_a = S_m/\sigma_m = 30.7/8.38 = 3.66$  and we see total agreement.



We could have detected that fatigue failure would occur first without drawing Fig. 6–28 by calculating  $r_{crit}$ . From the third row third column panel of Table 6–7, the intersection point between fatigue and first-cycle yield is

$$S_m = \frac{100^2}{2(33.9)} \left[ 1 - \sqrt{1 + \left( \frac{2(33.9)}{100} \right)^2 \left( 1 - \frac{84}{33.9} \right)} \right] = 64.0 \text{ kpsi}$$

$$S_a = S_y - S_m = 84 - 64 = 20 \text{ kpsi}$$

The critical slope is thus

$$r_{crit} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{20}{64} = 0.312$$

which is less than the actual load line of  $r = 1$ . This indicates that fatigue occurs before first-cycle-yield.

(b) Repeating the same procedure for the ASME-elliptic line, for fatigue

Answer

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{(8.38/33.9)^2 + (8.38/84)^2}} = 3.75$$

Again, this is less than  $n_y = 5.01$  and fatigue is predicted to occur first. From the first row second column panel of Table 6–8, with  $r = 1$ , we obtain the coordinates  $S_a$  and  $S_m$  of point  $B$  in Fig. 6–29 as

Answer

$$S_a = \sqrt{\frac{(1)^2 33.9^2 (84)^2}{33.9^2 + (1)^2 84^2}} = 31.4 \text{ kpsi}, \quad S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{31.4}{1} = 31.4 \text{ kpsi}$$

To verify the fatigue factor of safety,  $n_f = S_a/\sigma_a = 31.4/8.38 = 3.75$ .

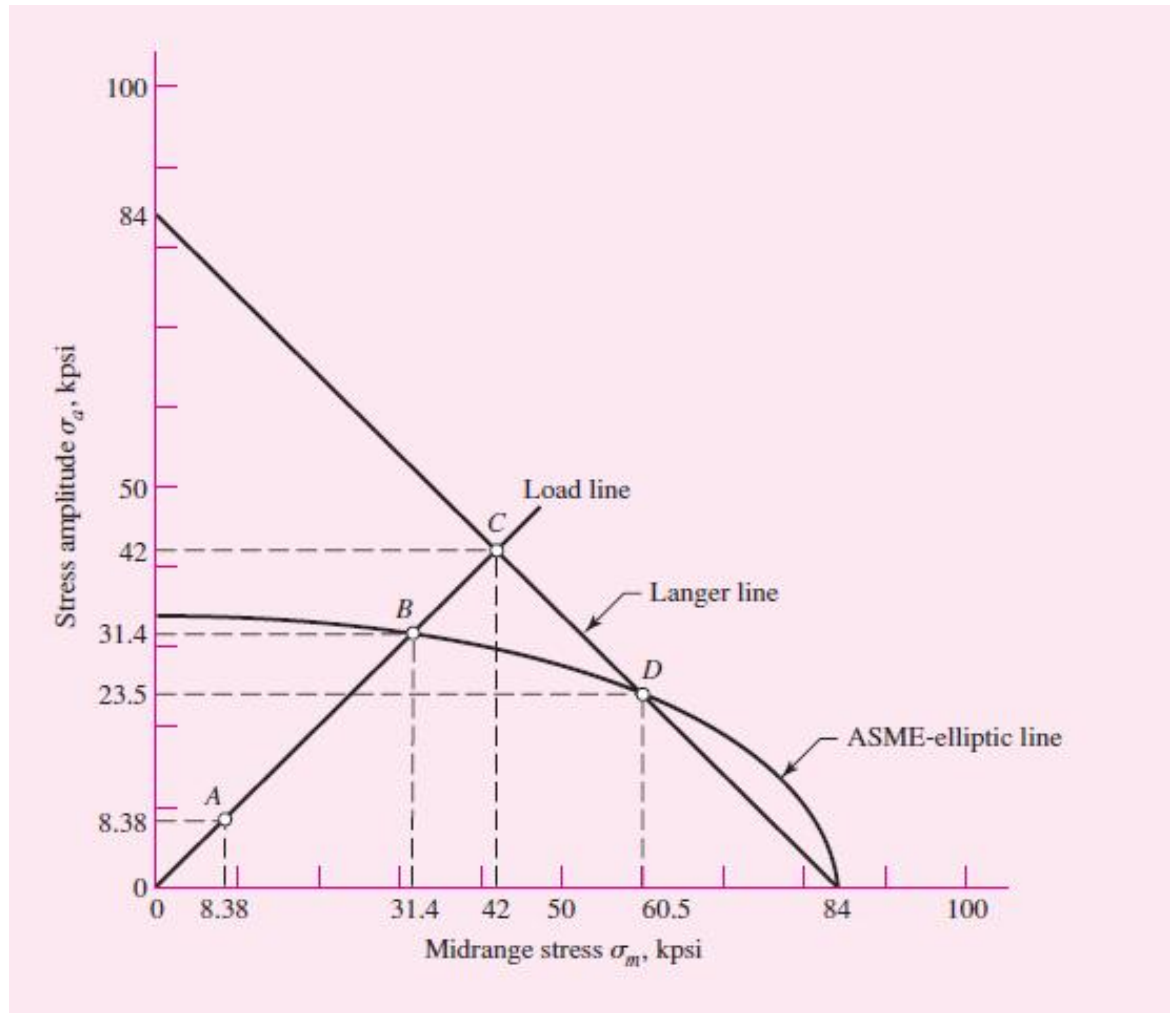
As before, let us calculate  $r_{\text{crit}}$ . From the third row second column panel of Table 6–8,

$$S_a = \frac{2(84)33.9^2}{33.9^2 + 84^2} = 23.5 \text{ kpsi}, \quad S_m = S_y - S_a = 84 - 23.5 = 60.5 \text{ kpsi}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{23.5}{60.5} = 0.388$$

which again is less than  $r = 1$ , verifying that fatigue occurs first with  $n_f = 3.75$ .

The Gerber and the ASME-elliptic fatigue failure criteria are very close to each other and are used interchangeably. The ANSI/ASME Standard B106.1M–1985 uses ASME-elliptic for shafting.



**EXAMPLE 6-11**

A flat-leaf spring is used to retain an oscillating flat-faced follower in contact with a plate cam. The follower range of motion is 2 in and fixed, so the alternating component of force, bending moment, and stress is fixed, too. The spring is preloaded to adjust to various cam speeds. The preload must be increased to prevent follower float or jump. For lower speeds the preload should be decreased to obtain longer life of cam and follower surfaces. The spring is a steel cantilever 32 in long, 2 in wide, and  $\frac{1}{4}$  in thick, as seen in Fig. 6-30a. The spring strengths are  $S_{ut} = 150$  kpsi,  $S_y = 127$  kpsi, and  $S_e = 28$  kpsi fully corrected. The total cam motion is 2 in. The designer wishes to preload the spring by deflecting it 2 in for low speed and 5 in for high speed.

- (a) Plot the Gerber-Langer failure lines with the load line.  
 (b) What are the strength factors of safety corresponding to 2 in and 5 in preload?

**Solution** We begin with preliminaries. The second area moment of the cantilever cross section is

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2(0.25)^3}{12} = 0.00260 \text{ in}^4$$

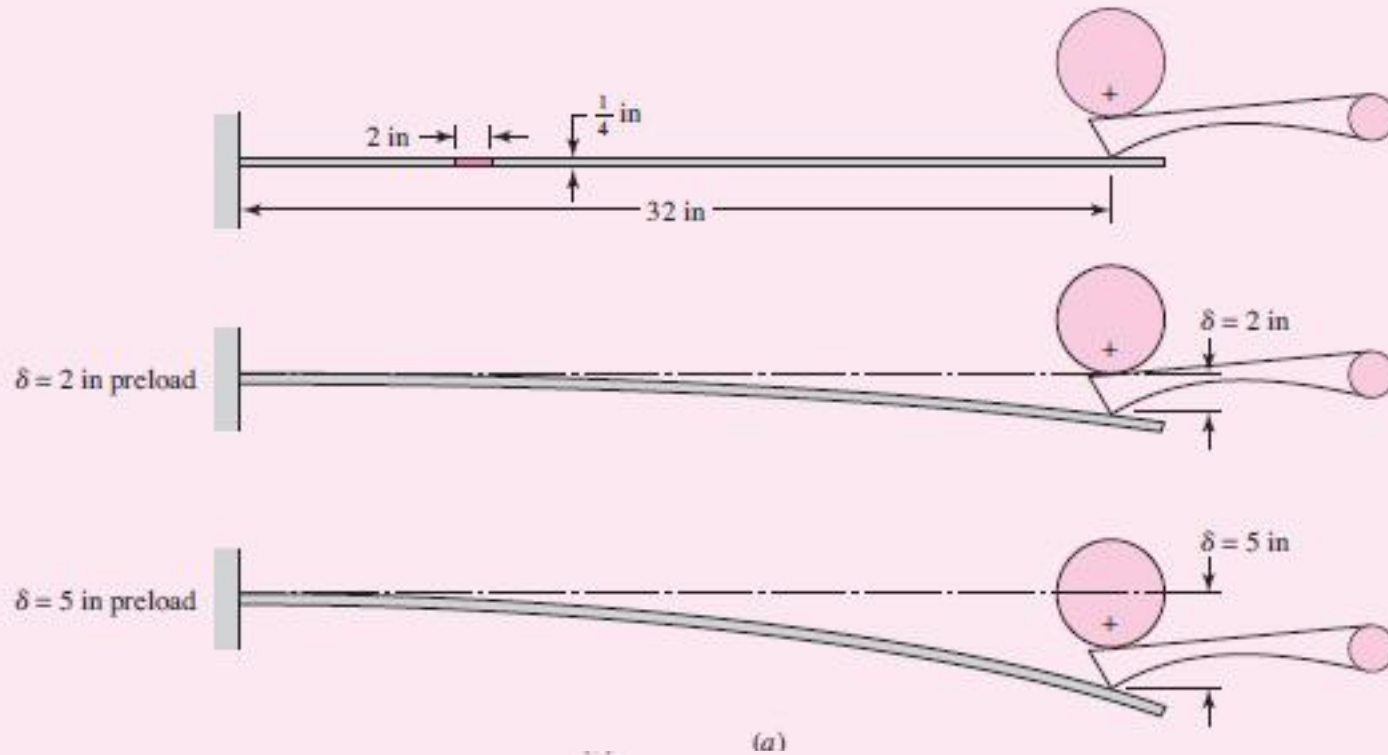
Since, from Table A-9, beam 1, force  $F$  and deflection  $y$  in a cantilever are related by  $F = 3EIy/l^3$ , then stress  $\sigma$  and deflection  $y$  are related by

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32Fc}{I} = \frac{32(3EIy)c}{l^3 I} = \frac{96Ecy}{l^3} = Ky$$

$$\text{where } K = \frac{96Ec}{l^3} = \frac{96(30 \cdot 10^6)(0.125)}{32^3} = 10.99(10^3) \text{ psi/in} = 10.99 \text{ kpsi/in}$$

Now the minimums and maximums of  $y$  and  $\sigma$  can be defined by

$$\begin{aligned} y_{\min} &= \delta & y_{\max} &= 2 + \delta \\ \sigma_{\min} &= K\delta & \sigma_{\max} &= K(2 + \delta) \end{aligned}$$



The stress components are thus

$$\sigma_a = \frac{K(2 + \delta) - K\delta}{2} = K = 10.99 \text{ kpsi}$$

$$\sigma_m = \frac{K(2 + \delta) + K\delta}{2} = K(1 + \delta) = 10.99(1 + \delta)$$

For  $\delta = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_m = 10.99 = 11 \text{ kpsi}$

$$\text{For } \delta = 2 \text{ in,} \quad \sigma_a = 11 \text{ kpsi, } \sigma_m = 10.99(1 + 2) = 33 \text{ kpsi}$$

$$\text{For } \delta = 5 \text{ in,} \quad \sigma_a = 11 \text{ kpsi, } \sigma_m = 10.99(1 + 5) = 65.9 \text{ kpsi}$$

(a) A plot of the Gerber and Langer criteria is shown in Fig. 6-30*b*. The three preload deflections of 0, 2, and 5 in are shown as points A, A', and A''. Note that since  $\sigma_a$  is constant at 11 kpsi, the load line is horizontal and does not contain the origin. The intersection between the Gerber line and the load line is found from solving Eq. (6-42) for  $S_m$  and substituting 11 kpsi for  $S_a$ :

$$S_m = S_{ut} \sqrt{1 - \frac{S_a}{S_e}} = 150 \sqrt{1 - \frac{11}{28}} = 116.9 \text{ kpsi}$$

The intersection of the Langer line and the load line is found from solving Eq. (6-44) for  $S_m$  and substituting 11 kpsi for  $S_a$ :

$$S_m = S_y - S_a = 127 - 11 = 116 \text{ kpsi}$$

The threats from fatigue and first-cycle yielding are approximately equal.

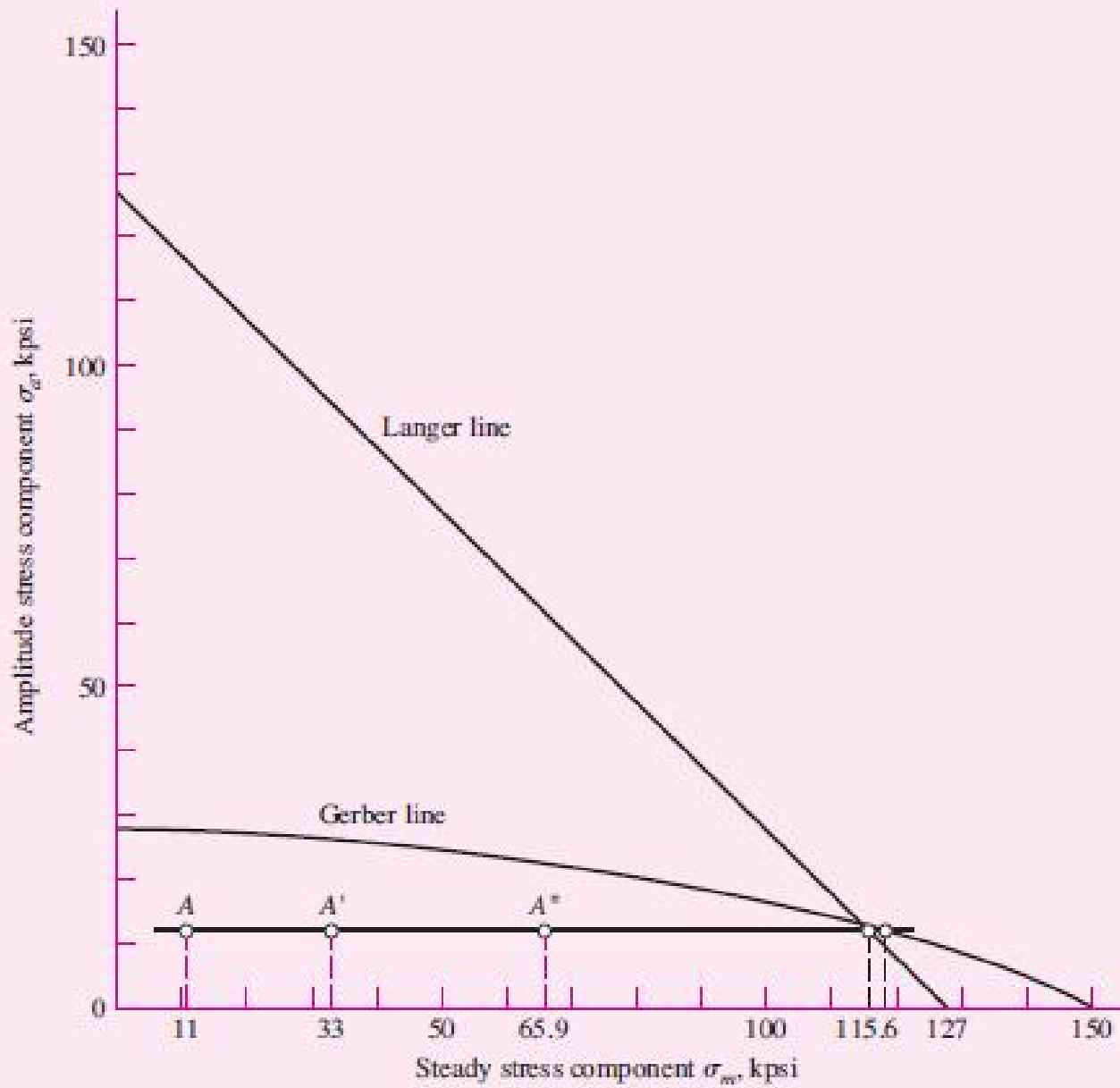
(b) For  $\delta = 2$  in,

$$\text{Answer} \quad n_f = \frac{S_m}{\sigma_m} = \frac{116.9}{33} = 3.54 \quad n_y = \frac{116}{33} = 3.52$$

and for  $\delta = 5$  in,

$$\text{Answer} \quad n_f = \frac{116.9}{65.9} = 1.77 \quad n_y = \frac{116}{65.9} = 1.76$$





(b)

**EXAMPLE 6-12**

A steel bar undergoes cyclic loading such that  $\sigma_{\max} = 60$  kpsi and  $\sigma_{\min} = -20$  kpsi. For the material,  $S_{ut} = 80$  kpsi,  $S_y = 65$  kpsi, a fully corrected endurance limit of  $S_e = 40$  kpsi, and  $f = 0.9$ . Estimate the number of cycles to a fatigue failure using:

- (a) Modified Goodman criterion.  
 (b) Gerber criterion.

**Solution** From the given stresses,

$$\sigma_a = \frac{60 - (-20)}{2} = 40 \text{ kpsi} \quad \sigma_m = \frac{60 + (-20)}{2} = 20 \text{ kpsi}$$

From the material properties, Eqs. (6-14) to (6-16), p. 277, give

$$a = \frac{(fS_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0.9(80)]^2}{40} = 129.6 \text{ kpsi}$$

$$b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{fS_{ut}}{S_e} \right) = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.9(80)}{40} \right] = -0.0851$$

$$N = \left( \frac{S_f}{a} \right)^{1/b} = \left( \frac{S_f}{129.6} \right)^{-1/0.0851} \quad (1)$$

where  $S_f$  replaced  $\sigma_a$  in Eq. (6-16).

(a) The modified Goodman line is given by Eq. (6-46), p. 298, where the endurance limit  $S_e$  is used for infinite life. For finite life at  $S_f > S_e$ , replace  $S_e$  with  $S_f$  in Eq. (6-46) and rearrange giving

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} = \frac{40}{1 - \frac{20}{80}} = 53.3 \text{ kpsi}$$

Substituting this into Eq. (1) yields

Answer 
$$N = \left( \frac{53.3}{129.6} \right)^{-1/0.0851} \doteq 3.4(10^4) \text{ cycles}$$

(b) For Gerber, similar to part (a), from Eq. (6-47),

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \left( \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2} = \frac{40}{1 - \left( \frac{20}{80} \right)^2} = 42.7 \text{ kpsi}$$

Again, from Eq. (1),

Answer 
$$N = \left( \frac{42.7}{129.6} \right)^{-1/0.0851} \doteq 4.6(10^5) \text{ cycles}$$

Comparing the answers, we see a large difference in the results. Again, the modified Goodman criterion is conservative as compared to Gerber for which the moderate difference in  $S_f$  is then magnified by a logarithmic  $S, N$  relationship.

- در بسیاری از مواد **ترد**، معیار خستگی در ربع اول از مکان هندسی Smith-Dolan که شکل تقعر رو به بالا دارد پیروی می کنند.
- برای بارگذاری کششی داریم:

$$\frac{S_a}{S_e} = \frac{1 - S_m/S_{ut}}{1 + S_m/S_{ut}} \quad S_a/r \text{ for } S_m$$

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} = \frac{1 - n\sigma_m/S_{ut}}{1 + n\sigma_m/S_{ut}}$$

$$S_a = \frac{r S_{ut} + S_e}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4r S_{ut} S_e}{(r S_{ut} + S_e)^2}} \right]$$

- بیشترین حدود متداول در کار طراح  $-S_{ut} \leq \sigma_m \leq S_{ut}$  است.
- مکان هندسی در ربع نخست Goodman یا Smith-Dolan یا چیزی بین این دو است.
- در ربع دوم یعنی جائیکه  $-S_{ut} \leq S_m \leq 0$  می باشد رابطه آن به صورت:
- جدول الف-24 خواص چدن خاکستری

$$S_a = S_e + \left( \frac{S_e}{S_{ut}} - 1 \right) S_m$$

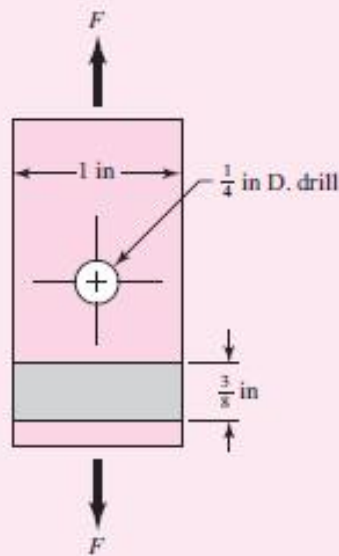
حد دوام  $k_a k_b S'_e$

- $K_c$  برای بارگذاری محوری و پیچشی 0,9

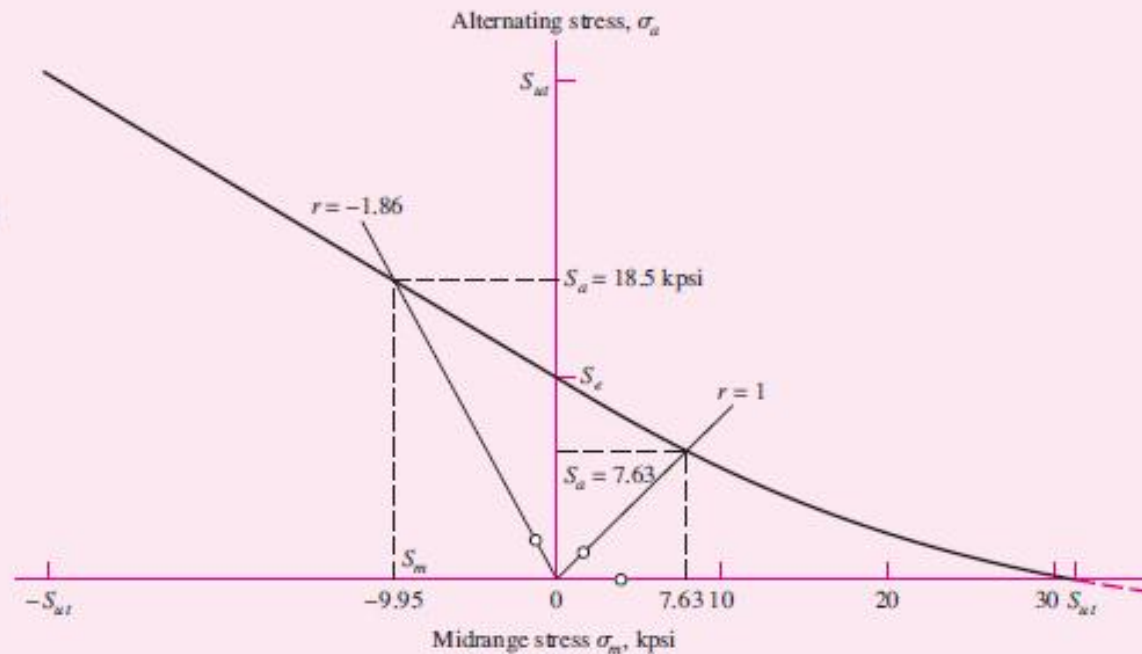
**EXAMPLE 6-13**

A grade 30 gray cast iron is subjected to a load  $F$  applied to a 1 by  $\frac{3}{8}$ -in cross-section link with a  $\frac{1}{4}$ -in-diameter hole drilled in the center as depicted in Fig. 6-31a. The surfaces are machined. In the neighborhood of the hole, what is the factor of safety guarding against failure under the following conditions:

- The load  $F = 1000$  lbf tensile, steady.
  - The load is 1000 lbf repeatedly applied.
  - The load fluctuates between  $-1000$  lbf and 300 lbf without column action.
- Use the Smith-Dolan fatigue locus.



(a)



(b)

**Solution**

Some preparatory work is needed. From Table A-24,  $S_{ut} = 31$  kpsi,  $S_{uc} = 109$  kpsi,  $k_a k_b S'_e = 14$  kpsi. Since  $k_c$  for axial loading is 0.9, then  $S_e = (k_a k_b S'_e) k_c = 14(0.9) = 12.6$  kpsi. From Table A-15-1,  $A = t(w - d) = 0.375(1 - 0.25) = 0.281$  in<sup>2</sup>,  $d/w = 0.25/1 = 0.25$ , and  $K_t = 2.45$ . The notch sensitivity for cast iron is 0.20 (see p. 288), so

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.20(2.45 - 1) = 1.29$$

$$(a) \quad \sigma_a = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1.29(0)}{0.281} = 0 \quad \sigma_m = \frac{K_f F_m}{A} = \frac{1.29(1000)}{0.281} (10^{-3}) = 4.59 \text{ kpsi}$$

and

**Answer**

$$n = \frac{S_{ut}}{\sigma_m} = \frac{31.0}{4.59} = 6.75$$

$$(b) \quad F_a = F_m = \frac{F}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ lbf}$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1.29(500)}{0.281} (10^{-3}) = 2.30 \text{ kpsi}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1$$

From Eq. (6-52),

$$S_a = \frac{(1)31 + 12.6}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4(1)31(12.6)}{[(1)31 + 12.6]^2}} \right] = 7.63 \text{ kpsi}$$

**Answer**

$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{7.63}{2.30} = 3.32$$

$$(c) \quad F_a = \frac{1}{2}[300 - (-1000)] = 650 \text{ lbf} \quad \sigma_a = \frac{1.29(650)}{0.281}(10^{-3}) = 2.98 \text{ kpsi}$$

$$F_m = \frac{1}{2}[300 + (-1000)] = -350 \text{ lbf} \quad \sigma_m = \frac{1.29(-350)}{0.281}(10^{-3}) = -1.61 \text{ kpsi}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{3.0}{-1.61} = -1.86$$

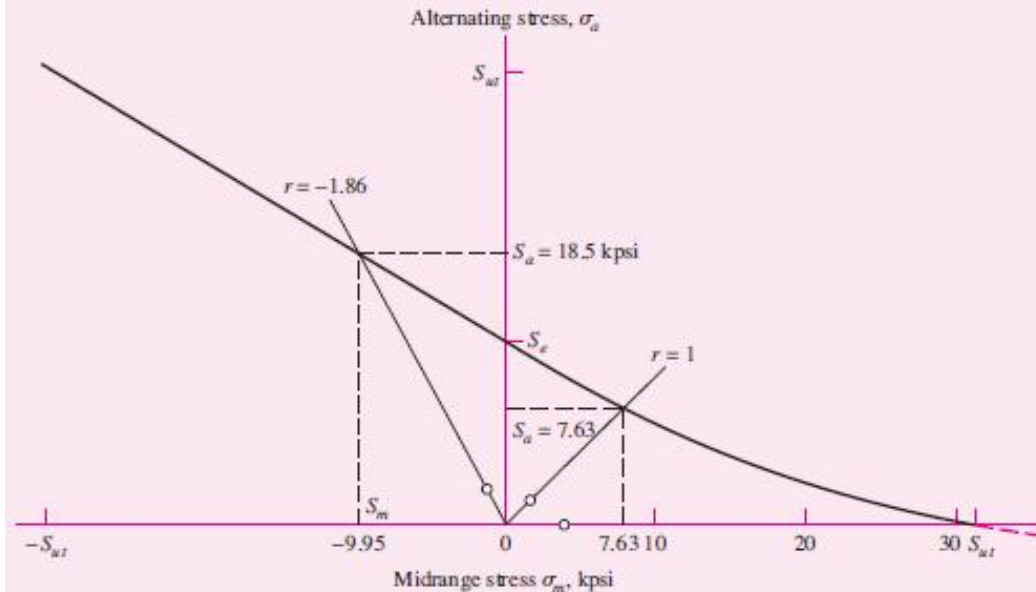
From Eq. (6-53),  $S_a = S_e + (S_e/S_{ut} - 1)S_m$  and  $S_m = S_a/r$ . It follows that

$$S_a = \frac{S_e}{1 - \frac{1}{r} \left( \frac{S_e}{S_{ut}} - 1 \right)} = \frac{12.6}{1 - \frac{1}{-1.86} \left( \frac{12.6}{31} - 1 \right)} = 18.5 \text{ kpsi}$$

Answer

$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{18.5}{2.98} = 6.20$$

Figure 6-31b shows the portion of the designer's fatigue diagram that was constructed.



(b)

## Torsional Fatigue Strength under Fluctuating Stresses

## مقاومت خستگی پیچشی زیر تنش های نوسانی

- آزمون های فراوان smith نتایج جالبی از خستگی پیچشی نوسانی داده است.
- Joerres با تایید نتایج Smith کاربرد رابطه بهبود یافته Goodman را برای پیچش نوسانی پیشنهاد می کند.
- برای تشکیل نمودار Goodman روابط زیر بکار می روند:

$$\begin{array}{l}
 S_{su} = 0.67 S_{ut} \\
 S_{sy} = 0.577 S_{yt}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \frac{t_a}{S_{se}} + \frac{t_m}{S_{su}} = \frac{1}{n}$$



## Combinations of Loading Modes

## بارگذاری ترکیبی

۱. برای مقاومت، حد دوام تصحیح شده خمشی  $S_e$  را به کار ببر.
  ۲. برای هر مولفه تنش خمشی، پیچشی یا محوری، ضرایب تمرکز تنش خودشان را به کار ببر. (به جای اعمال در حد دوام ضریب تمرکز تنش خستگی در مولفه های تنش ضرب می شود).
  ۳. هر مولفه تنش محوری نوسانی را در ضریب  $\frac{1}{k_{c,axial}} = \frac{1}{0.85}$  ضرب کن.
  ۴. از نتیجه مرحله 4، تنش نوسانی Von Mises را پیدا کن.
  ۵. برای یافتن ضریب اطمینان  $\sigma'_a$  را با  $S_a$  مقایسه کن.
- اگر تنش های میانه هم داشتیم، مراحل 4 و 5 را تکرار می کنیم و از برابری آنها مولفه یکنواخت تنش های Von Mises را برای تشکیل حل Gerber یا ASME به کار می بریم.

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

$$\sigma'_a = \left\{ \left[ (K_f)_{\text{bending}}(\sigma_a)_{\text{bending}} + (K_f)_{\text{axial}} \frac{(\sigma_a)_{\text{axial}}}{0.85} \right]^2 + 3 \left[ (K_{fs})_{\text{torsion}}(\tau_a)_{\text{torsion}} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\sigma'_m = \left\{ \left[ (K_f)_{\text{bending}}(\sigma_m)_{\text{bending}} + (K_f)_{\text{axial}}(\sigma_m)_{\text{axial}} \right]^2 + 3 \left[ (K_{fs})_{\text{torsion}}(\tau_m)_{\text{torsion}} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\sigma'_{\max} \doteq \sigma'_a + \sigma'_m$$

**EXAMPLE 6-14**

A rotating shaft is made of 42- × 4-mm AISI 1018 cold-drawn steel tubing and has a 6-mm-diameter hole drilled transversely through it. Estimate the factor of safety guarding against fatigue and static failures using the Gerber and Langer failure criteria for the following loading conditions:

- (a) The shaft is subjected to a completely reversed torque of 120 N · m in phase with a completely reversed bending moment of 150 N · m.  
 (b) The shaft is subjected to a pulsating torque fluctuating from 20 to 160 N · m and a steady bending moment of 150 N · m.

**Solution**

Here we follow the procedure of estimating the strengths and then the stresses, followed by relating the two.

From Table A-20 we find the minimum strengths to be  $S_{ut} = 440$  MPa and  $S_y = 370$  MPa. The endurance limit of the rotating-beam specimen is  $0.5(440) = 220$  MPa. The surface factor, obtained from Eq. (6-19) and Table 6-2, p. 279 is

$$k_a = 4.51S_{ut}^{-0.265} = 4.51(440)^{-0.265} = 0.899$$

From Eq. (6-20) the size factor is

$$k_b = \left(\frac{d}{7.62}\right)^{-0.107} = \left(\frac{42}{7.62}\right)^{-0.107} = 0.833$$

The remaining Marin factors are all unity, so the modified endurance strength  $S_e$  is

$$S_e = 0.899(0.833)220 = 165 \text{ MPa}$$

(a) Theoretical stress-concentration factors are found from Table A-16. Using  $a/D = 6/42 = 0.143$  and  $d/D = 34/42 = 0.810$ , and using linear interpolation, we obtain  $A = 0.798$  and  $K_t = 2.366$  for bending; and  $A = 0.89$  and  $K_{ts} = 1.75$  for torsion. Thus, for bending,

$$Z_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi(0.798)}{32(42)}[(42)^4 - (34)^4] = 3.31(10^3)\text{mm}^3$$

and for torsion

$$J_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi(0.89)}{32}[(42)^4 - (34)^4] = 155(10^3)\text{mm}^4$$

Next, using Figs. 6-20 and 6-21, pp. 287-288, with a notch radius of 3 mm we find the notch sensitivities to be 0.78 for bending and 0.96 for torsion. The two corresponding fatigue stress-concentration factors are obtained from Eq. (6-32) as

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.78(2.366 - 1) = 2.07$$

$$K_{fs} = 1 + 0.96(1.75 - 1) = 1.72$$

The alternating bending stress is now found to be

$$\sigma_{xa} = K_f \frac{M}{Z_{\text{net}}} = 2.07 \frac{150}{3.31(10^{-6})} = 93.8(10^6)\text{Pa} = 93.8 \text{ MPa}$$

and the alternating torsional stress is

$$\tau_{xya} = K_{fs} \frac{TD}{2J_{\text{net}}} = 1.72 \frac{120(42)(10^{-3})}{2(155)(10^{-9})} = 28.0(10^6)\text{Pa} = 28.0 \text{ MPa}$$

The midrange von Mises component  $\sigma'_m$  is zero. The alternating component  $\sigma'_a$  is given by

$$\sigma'_a = (\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2)^{1/2} = [93.8^2 + 3(28^2)]^{1/2} = 105.6 \text{ MPa}$$

Since  $S_e = S_a$ , the fatigue factor of safety  $n_f$  is

Answer 
$$n_f = \frac{S_a}{\sigma'_a} = \frac{165}{105.6} = 1.56$$

The first-cycle yield factor of safety is

Answer 
$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_a} = \frac{370}{105.6} = 3.50$$

There is no localized yielding; the threat is from fatigue. See Fig. 6–32.

(b) This part asks us to find the factors of safety when the alternating component is due to pulsating torsion, and a steady component is due to both torsion and bending. We have  $T_a = (160 - 20)/2 = 70 \text{ N} \cdot \text{m}$  and  $T_m = (160 + 20)/2 = 90 \text{ N} \cdot \text{m}$ . The corresponding amplitude and steady-stress components are

$$\tau_{xya} = K_{fs} \frac{T_a D}{2J_{\text{net}}} = 1.72 \frac{70(42)(10^{-3})}{2(155)(10^{-9})} = 16.3(10^6) \text{ Pa} = 16.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xym} = K_{fs} \frac{T_m D}{2J_{\text{net}}} = 1.72 \frac{90(42)(10^{-3})}{2(155)(10^{-9})} = 21.0(10^6) \text{ Pa} = 21.0 \text{ MPa}$$

The steady bending stress component  $\sigma_{xm}$  is

$$\sigma_{xm} = K_f \frac{M_m}{Z_{\text{net}}} = 2.07 \frac{150}{3.31(10^{-6})} = 93.8(10^6) \text{ Pa} = 93.8 \text{ MPa}$$

The von Mises components  $\sigma'_a$  and  $\sigma'_m$  are

$$\sigma'_a = [3(16.3)^2]^{1/2} = 28.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_m = [93.8^2 + 3(21)^2]^{1/2} = 100.6 \text{ MPa}$$

From Table 6-7, p. 299, the fatigue factor of safety is

Answer 
$$n_f = \frac{1}{2} \left( \frac{440}{100.6} \right)^2 \frac{28.2}{165} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2(100.6)165}{440(28.2)} \right]^2} \right\} = 3.03$$

From the same table, with  $r = \sigma'_a/\sigma'_m = 28.2/100.6 = 0.280$ , the strengths can be shown to be  $S_a = 85.5 \text{ MPa}$  and  $S_m = 305 \text{ MPa}$ . See the plot in Fig. 6-32.

The first-cycle yield factor of safety  $n_y$  is

Answer 
$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m} = \frac{370}{28.2 + 100.6} = 2.87$$

There is no notch yielding. The likelihood of failure may first come from first-cycle yielding at the notch. See the plot in Fig. 6-32.

