۲

سینماتیک ذرات

حرکت مستقیم‌الخط یک ذره

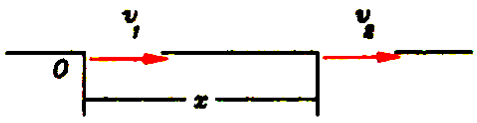
۲-۴ یک هواپیمای جت با سرعت فرود ۲۰۰ km/h پس از تماس با زمین، باندی به طول ۶۰۰ m در اختیار دارد که در طی آن سرعتش را به ۳۰ km/h برساند. شتاب متوسط a هواپیما را در طی ترمز گرفتن حساب کنید.

$$v_1 = ۲۰۰ \text{ km/h} = \frac{۲۰۰}{۳/۶} \text{ m/s} = ۵۵/۵۵ \text{ m/s}$$

$$v_2 = ۳۰ \text{ km/h} = \frac{۳۰}{۳/۶} \text{ m/s} = ۸/۳۳ \text{ m/s}$$

$$x = ۶۰۰ \text{ m}$$

$$a_{ave} = ?$$



۴ دینامیک ذرات

حل:

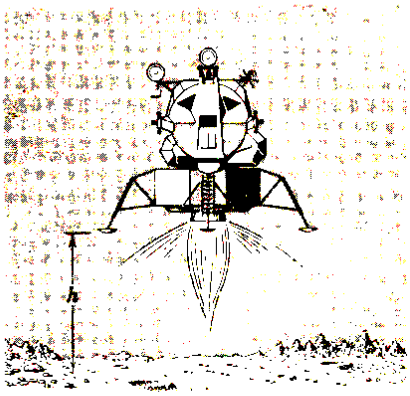
$$\int_{x=0}^{x=600} a_{ave}\,dx = \int_{v_1=55.55}^{v_2=8.33} v\,dv$$

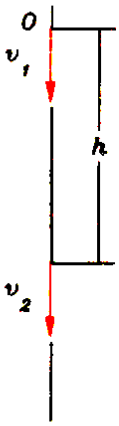
$$a_{ave}\,x\Big|_0^{600} = \frac{1}{2}\,v^2\Big|_{55.55}^{8.33}$$

$$600\,a_{ave} = \frac{1}{2}(8/33^2 - 55/55^2)$$

$$\boxed{a_{ave} = -2/51 \quad \mathrm{m/s^2}}$$

۲-۵ درمراحل نهایی فرود مدول ماهنورد برسطح‌ماه، موتور فرود ماهنورد روشن شده و آن‌را تا ارتفاع $h = 5\mathrm{m}$ پائین می‌آورد، درحالی که‌سرعتش دراین‌ارتفاع $4\mathrm{m/s}$ می‌باشد. اگر دراین نقطه ناگهان‌موتور فرود از کار بیفتد سرعت برخورد پایه‌های فرودبا کره ماه چقدر است؟ شتاب جاذبه ماه ۱/۶ زمین است.





$h = 5\ \mathrm{m}$

$v_1 = 4\ \mathrm{m/s}$

حل:

جهت مثبت‌محور را به‌طرف مرکز کره ماه‌می گیریم. بنابراین شتاب ثقل g و h مثبت هستند.

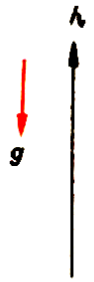
$$a = \frac{1}{6}g = \frac{1}{6} \times 9/81 = 1/635\ \mathrm{m/s^2}$$

$$adh=vdv \rightarrow \int_{0}^{h-5} ۱/۶۳۵\, dh=\int_{v_1-۴}^{v_2} vdv$$

$$۱/۶۳۵\, h\Big|_{0}^{5}=\frac{۱}{۲}v^{۲}\Big|_{۴}^{v_2} \rightarrow ۱/۶۳۵\times ۵=\frac{۱}{۲}(v_2^{۲}-۴^{۲})$$

$$\boxed{v_2=۵/۶۸\ \mathrm{m/s}}$$

۲-۶ پرتابه‌ای با سرعت اولیه ۲۰۰ m/s به‌صورت قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. حداکثر ارتفاعی که پرتابه به‌آن می‌رسد چقدر بوده و چه‌زمانی طول می‌کشد تا به زمین برگردد؟ ازمقاومت هوا صرف نظر نموده و شتاب ثقل را برابر ۹/۸۱ m/s² ثابت فرض کنید.



$v_1=۲۰۰$ m/s

$v_2=۰$ درنقطه اوج

$g=۹/۸۱$ m/s²

$h=?$

$t=?$

حل: جهت مثبت محور را به‌طرف بالامی‌گیریم. بنابراین g منفی می‌شود:

$$adh=vdv \rightarrow -gdh=vdv$$

$$\int_{0}^{h} -۹/۸۱\, dh=\int_{v_1-۲۰۰}^{v_2-۰} vdv \rightarrow \boxed{h=۲۰۴۰\ \mathrm{m}}$$

و زمان به‌صورت زیرمحاسبه می‌شود:

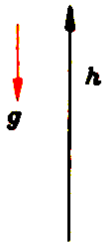
$$adt=dv \rightarrow \int_{0}^{t} -gdt=\int_{v_1-۲۰۰}^{v_2-۰} dv$$

۶ دینامیک ذرات

$-۹/۸۱\ t=۰ \quad -۲۰۰ \rightarrow$ زمان اوج $t_۱=۲۰/۴\ \text{s}$

زمان رفت و برگشت $\quad t=۲\times t_۱ \rightarrow \boxed{t=۴۰/۸\ \text{s}}$

۲-۷ دریك لوله قائم خلاء سرعت اولیه‌قائم $۳۰\ \text{m/s}$ به‌یك ذره داده می‌شود. صعود یا سقوط خالص ذره ازپایان اولین تا ابتدای چهارمین ثانیه حرکت راحساب نموده و سرعت‌آن را درپایان چهارمین ثانیه پس ازپرتاب به‌دست‌آورید.



$v_۱=۳۰\ \text{m/s}$

$h_۱=$ ارتفاع درثانیه یك

$h_۳=$ ارتفاع درثانیه سه

$\Delta h=h_۳-h_۱$

حل: جهت مثبت محور به‌طرف بالا و درنتیجه g منفی خواهد بود:

$$adt=dv \rightarrow \int_۰^t -gdt=\int_{v_۱}^{v} dv$$

$$-gt=v-v_۱ \rightarrow \boxed{v(t)=v_۱-gt} \qquad (۱)$$

$$vdt=dh \rightarrow \int_۰^t (v_۱-gt)dt=\int_۰^h dh$$

$$h=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۱t$$

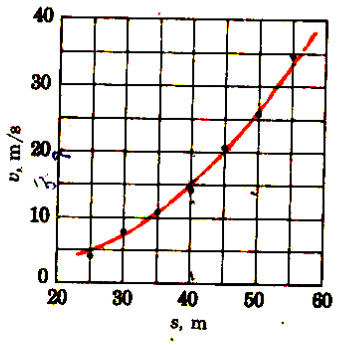
$$\Delta h=h_۳-h_۱=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸۱\,(۳^۲-۱^۲)+۳۰(۳-۱)$$

$$\boxed{\Delta h=۲۰/۷۶\ \text{m}}$$

$$(۱) \quad \rightarrow \quad v = -۹/۸۱ \times ۲ + ۲۰ \rightarrow \boxed{v = -۹/۲۴ \text{ m/s}}$$

علامت منفی بدین معنی است که ذره درخلاف جهت مثبت (رو به پائین) حرکت می‌کند.

۲-۸ نتایج تجربی حاصله ازحرکت یك ذره درامتداد خط مستقیم، مقادیر v را برحسب s مشخص نموده است. مطابق شکل، منحنی پیوسته‌ای این نقاط را دربرمی‌گیرد. شتاب ذره را به‌ازای $s = ۴۰\text{m}$ تعیین کنید.



$a = ?$

$s = ۴۰ \text{ m}$

حل:

$$a ds = v dv$$

$$(۱) \qquad a = v \frac{dv}{ds}$$

ازروی شکل‌در $s = ۴۰ \text{ m}$ مقادیرسرعت و شیب منحنی (dv/ds) به‌دست‌می‌آید:

$$v = ۱۵ \text{ m/s}$$

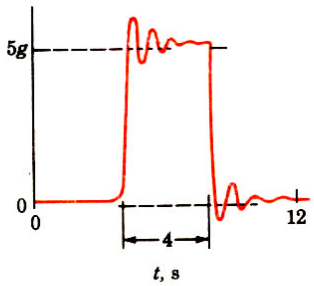
$$\frac{dv}{ds} = \frac{۲۰ - ۱۵}{۴۵ - ۴۰} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

نتایج را در رابطه (۱) می‌گذاریم:

$$a = ۱۵ \times ۱$$

$$\boxed{a = ۱۵ \ \text{m/s}^۲}$$

۲-۹ یک نیروی کند کننده ضربه‌ای به‌مدت ۴ s بر ذره‌ای که سرعت اولیه‌اش ۱۰۰ m/s می‌باشد اثر می‌کند. شکل زیر منحنی تغییرات شتاب ذره را بر روی صفحه اسیلوسکوپ نشان می‌دهد. سرعت ذره را در $t = ۱۲$ s تخمین بزنید.



$$\Delta t = ۴ \ \text{s}$$

$$v_۱ = ۱۰۰ \ \text{m/s}$$

$$\begin{vmatrix} v = ? \\ t = ۱۲ \ \text{s} \end{vmatrix}$$

حل:

$$\int_۰^{۱۲} a\,dt = \int_{v_۱=-۱۰۰}^{v} dv$$

$$\int_۰^{۱۲} a\,dt = \text{(باتقریب) سطح زیرمنحنی ازصفرتا ۱۲ ثانیه}$$

$$= -۵\,g \times ۴ = -۱۹۶/۲ \ \text{m/s}$$

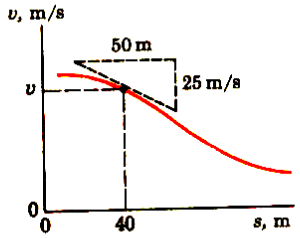
$$-۱۹۶/۲ = v - ۱۰۰$$

$$\boxed{v = -۹۶/۲ \ \text{m/s}}$$

یعنی ذره با سرعت ۹۶/۲ m/s درجهت خلاف حرکت می کند.

حرکت مستقیم‌الخط یک ذره ۹

۲-۱۰ درشکل منحنی تغییرات سرعت v ذره‌ای بـرحسب جابجایی s آن درقسمتی از حرکتش‌نشان داده شده است. سرعت v ذره رادر لحظه‌ای‌که $s = ۴۰\ \text{m}$ می‌باشد و درهرثانیه $۳۰\ \text{m/s}$ ازسرعتش‌کاسته می گردد، حساب‌کنید.



$$a = -۳۰\ \text{m/s}^۲$$

$$\begin{cases} s = ۴۰\ \text{m} \\ v = ? \end{cases}$$

حل:

$$ads = vdv \rightarrow v = a\frac{ds}{dv} \qquad (۱)$$

حال از روی شکل شیب منحنی را در $s = ۴۰\ \text{m}$ به‌دست می‌آوریم:

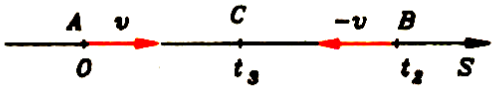
$$\frac{ds}{dv} = \frac{۵۰}{-۲۵} = -۲\ \ \frac{\text{m}}{\text{m/s}}$$

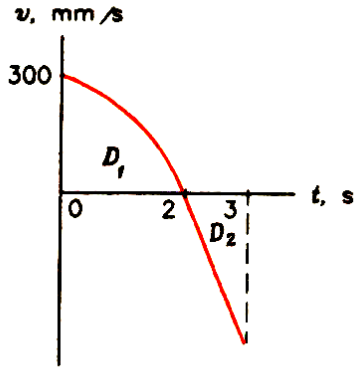
این نتیجه را در رابطه (۱) می گذاریم:

$$v = -۳۰(-۲)\ \text{m/s} \rightarrow$$

$$v = ۶۰\ \text{m/s}$$

۲-۱۱ ذره‌ای درحرکت مستقیم‌الخط دارای سرعت $v = ۳۰۰ - ۷۵t^۲$ می‌باشد. اگر v بر حسب mm/s و t برحسب ثانیه باشد، مطلوب است محاسبه کل مسافت‌پیموده شده D درفاصله‌زمانی $t = ۰$ تا $t = ۳$ ثانیه و جابجایی خالص ذره درهمین فاصله زمانی.





$t = ۳$ s

$v = ۳۰۰ - ۷۵\,t^۲$ mm/s

$D = ?$ مسافت کل

$s = ?$ جابه‌جایی خالص

حل:

$$v = ۰ \rightarrow ۳۰۰ - ۷۵t^۲ = ۰ \rightarrow t = ۲ \text{ s}$$

یعنی سرعت ذره در $t = ۲$ ثانیه صفر گردیده و به‌عبارت دیگر جهت حرکت از B به‌طرف A می‌شود.

$$D = AB + |BC| = D_۱ + D_۲ = \int_۰^{D_۱} ds + \int_۰^{D_۲} ds = \int_۰^{۲} (۳۰۰ - ۷۵\,t^۲)dt +$$

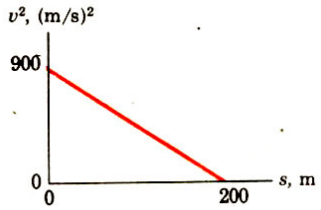
$$\left| \int_۲^{۳} (۳۰۰ - ۷۵t^۲)dt \right| = ۴۰۰ + ۱۷۵ \rightarrow \boxed{D = ۵۷۵ \text{ mm}}$$

برای محاسبه s هم می‌توان $D_۲$ را از $D_۱$ کم کرد وهم به‌طریق زیرعمل نمود:

$$\int_۰^{s} ds = \int_۰^{۳} (۳۰۰ - ۷۵t^۲)dt = ۳۰۰t - ۲۵t^۳ \Big|_۰^{۳} \rightarrow \boxed{s = ۲۲۵ \text{ mm}}$$

این مقدار برابر با مساحت خالص زیرمنحنی نمودار $v - t$ است.

۲-۱۲ جسمی درخط‌مستقیم با سرعتی‌حرکت‌می‌نماید که مجذورآن مطابق‌شکل به‌صورت خطی باجابجایی s کاهش می‌یابد. زمان لازمه t جهت پیمودن ۲۰۰m را تعیین نموده و مسافت پیموده شده درطی ۳ ثانیه‌آخرماقبل توقف رابه‌دست‌آورید.



$$\begin{vmatrix} t=? \\ s=۲۰۰\ \text{m} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta s=? \\ \text{۳ ثانیه آخر} \end{vmatrix}$$

حل: ابتدا باید معادله خط $v^۲-s$ را به‌دست آوریم: $y-y_۱=m(x-x_۱)$

$$y\equiv v^۲ \qquad x\equiv s \qquad \begin{vmatrix} x_۱=۰ \\ y_۱=۹۰۰ \end{vmatrix} \qquad m=-\frac{۹۰۰}{۲۰۰}=-۴/۵$$

$$v^۲-۹۰۰=-۴/۵\,s \rightarrow v=\sqrt{-۴/۵\,s+۹۰۰}$$

حال از رابطه $vdt=ds$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{-۴/۵\,s+۹۰۰}\,dt=ds \rightarrow \int_۰^t dt=\int_۰^{۲۰۰}\frac{ds}{\sqrt{-۴/۵\,s+۹۰۰}}$$

$$\rightarrow \boxed{t=۱۳/۳۳\ \text{s}}$$

برای محاسبه مسافت ۳ ثانیه آخر، مسافت ثانیه ۱۰/۳۳ را از مسافت ثانیه ۱۳/۳۳ که همان ۲۰۰ m باشد کم می‌کنیم. رابطه $s-t$ از انتگرال نامعین بالا به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} s=? \\ t=۱۰/۳۳ \end{vmatrix} \rightarrow ۱۰/۳۳=\frac{۲\sqrt{-۴/۵\,s+۹۰۰}}{-۴/۵}\Big|_۰^{s_{۱۰/۳۳}} \rightarrow s_{۱۰/۳۳}=۱۹۰\text{m}$$

$$\Delta s=s_{۱۳/۳۳}-s_{۱۰/۳۳}=۲۰۰-۱۹۰ \rightarrow \boxed{\Delta s=۱۰\ \text{m}}$$

۲-۱۳ گلوله‌ای باسرعت اولیه نه‌چندان زیاد v_0 به‌داخل یك ماده انرژی‌گیر که مقاومتش درمقابل حرکت متناسب با سرعت گلوله است به‌صورت افقی شلیك می‌شود. شتاب گلوله درامتداد حرکت $a=-kv$ می‌باشد، که درآن k ثابتی وابسته به‌خواص ماده انرژی‌گیر و شکل گلوله است. رابطه‌ای پیدا کنید که مسافت پیموده شده s راقبل ازتوقف برحسب v_0 و k بیان کند. همچنین زمان لازمه t جهت رسیدن به یك دوم سرعت اولیه را محاسبه نمائید.

$a=-kv$

$k=$ ثابت

$\begin{cases} s=f(v_0,\ k)=? \\ v=0 \end{cases}$

$\begin{cases} t=? \\ v=v_0/2 \end{cases}$

حل:

$$ads=vdv$$

$$-kvds=vdv \rightarrow -k\int_0^s ds=\int_{v_0}^{0} dv \rightarrow \boxed{s=\frac{v_0}{k}}$$

$$adt=dv \rightarrow -kvdt=dv$$

$$-k\int_0^t dt=\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v} \rightarrow \boxed{t=\frac{0/693}{k}}$$

۲-۱۴ پرتابه‌ای با سرعت اولیه افقی v_1 به‌داخل ماده مقاومی شلیك شده و شتاب کند شونده‌ای مساوی با cv^n به‌دست می‌آورد، درحالی که c و n ثابت بوده و v سرعت پرتابه در داخل ماده می‌باشد. رابطه سرعت v پرتابه را برحسب زمان نفوذ t بیان کنید.

$v_1=$ سرعت اولیه

$a=-cv^n$

$c,\ n=$ ثابت

$$v = f(t) = ?$$

حل:

$$dv = a\,dt$$

$$dv = -cv^{n}dt$$

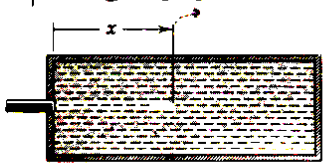
$$\int_{v_1}^{v} \frac{dv}{cv^{n}} = -\int_{0}^{t} dt$$

$$\frac{1}{c}\int_{v_1}^{v} v^{-n}dv = -t$$

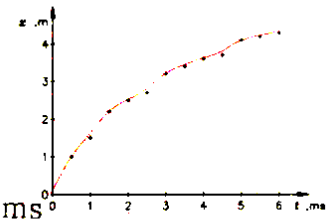
$$\frac{1}{c}\,\frac{1}{1-n}\,v^{1-n}\Big|_{v_1}^{v} = -t$$

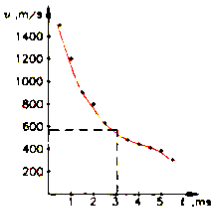
$$v = [v_1^{1-n} + ct(n-1)]^{\frac{1}{1-n}}$$

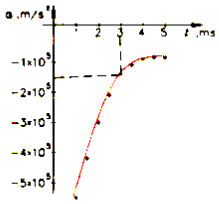
۲-۱۵ مطابق شکل پرتابه‌ای به‌صورت افقی به داخل سیالی شلیک می‌شود. جابجایی افقی x پرتابه برحسب‌متر نسبت به‌زمان متناظر t برحسب میلی‌ثانیه اندازه‌گیری شده‌و درجدول زیرا ارائه گردیده است. سرعت v وشتاب a را در $t = ۳$ میلی‌ثانیه‌در امتداد x تخمین‌بزنید.مسئله را به‌روش ترسیمی با رسم منحنی پیوسته تغییرات حل نمائید.



$v = ?$
$a = ?$
$t = ۳$ ms







: منحنی‌نمایش $s-t$ و بعد $v-t$ را از روی $s-t$ به‌دست می‌آوریم. سپس با داشتن روابط‌مربوطه $(v = ds/dt$ و $a = dv/dt)$ مقادیرخواسته‌شده به‌دست می‌آید.

$$v = ۵۵۰ \quad \text{m/s}$$

$$a = -۱۴۰ \ \text{km/s}^۲$$

۲-۱۶ تعدادی گلوله کوچك فولادی یکی پس ازدیگری ازحالت سکون به‌داخل روزنه‌ای سقوط می‌کنند. تواترثـابت سقوط n می‌باشد. ازمقاومت هوا صرف‌نظر نموده و فاصله قائم h بین هردوگلوله را برحسب زمان t که‌درطی‌آن گلوله فوقانی سقوط می‌کند بیان کنید.

زمان تناوب یا فاصله زمانی بین سقوط دوگلوله $\tau = \frac{۱}{n}$

$$h_۱ = \frac{۱}{۲} g t^۲$$

$$h_۲ = \frac{۱}{۲} g (t+\tau)^۲$$

حل:

$$h = h_۲ - h_۱ = \frac{۱}{۲} g (t^۲ + \tau^۲ + ۲t\tau - t^۲)$$

$$= \frac{۱}{۲} g (\tau^۲ + ۲t\tau)$$

$$= \frac{۱}{۲} g \left(\frac{۱}{n^۲} + \frac{۲t}{n}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲} g \left(\frac{۱ + ۲tn}{n^۲}\right)$$

$$h = \frac{g}{۲n^۲}(۲tn + ۱)$$

۲-۱۷ بین دوایستگاه به فاصله ۸ km از یکدیگر، یك تونل انتقال سریع خالی ازهوا (این مسئله درتکنولـوژی‌آینده فـرض می‌شود) احـداث گردیـده و قرار است کپسول حمل و نقل مناسبی جهت استفاده دراین تونل طراحی گردد. اگرحداکثر شتابهای حدی‌کندشونده وتندشونده ۰/۷g وسرعت حدی‌کپسول ۴۰۰ km/h باشد، حداقل زمان طی‌کردن تونل توسط‌کپسول چقدراست؟