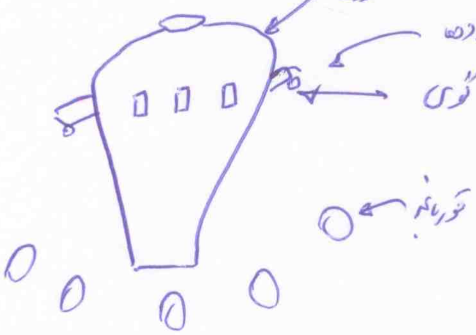
جهت زلزله

132 B.C. → chang-heng فیلسوف چینی

لرزه‌نگاری بنام لرزه‌نما (Seismoscope) اختراع نمود

اساساً در وسط یک کوزه به قطر ۲ متر پاندولی وجود داشت که به تغییر مکان آن یک گوی از دهان یک مجسمه اژدها رها شده و به این ترتیب جهت زمین لرزه قابل تعیین بوده است.



در سال ۱۸۸۹ به‌صورت همزمان در ایتالیا، انگلستان و ژاپن اولین لرزه‌نگاشت روی کاغذ به‌دست آمد. (سیستم پاندولی)

نسل جدید شتابنگارها در دهه ۶۰ میلادی بنام SMA1 ساخت شرکت Kinematrics

(Strong motion accellometer 1)

شامل سه حسگر x و y و z بود که روی فیلم 70 mm ثبت می‌کرد.

مزیت‌ها:
- سنسورهای قوی داشت
- مصرف برق کمی داشت
- حجم کمی داشت
- دستگاه‌ها مقاوم‌تر بودند

معایب:
- برای زلزله‌های بزرگ clip میکرد.
- خواندن آن مشکل بود.

در مرحله بعد دستگاه SMA2 اختراع شد (توسط همان شرکت قبلی) که بر روی نوارها مغناطیسی ثبت می‌کرد.

سپس اطلاعات توسط دستگاه دیگری بنام Magnetic play back خوانده می‌شد. ولی در این مورد مصرف برق بیشتری احتیاج بود.

مشکل اصلی آن این بود که با هر بار استخراج یک رکورد جدید می‌داد.

انواع خطاها

- Long Period error ← مانند این است که رکوردها یک موج long Period جمع کرده ایم (اصلاح کنیم)
- Base line error (ناشی از دیجیتال شدن)
- High frequency error → Digitization, Instruments, Cultural Noise

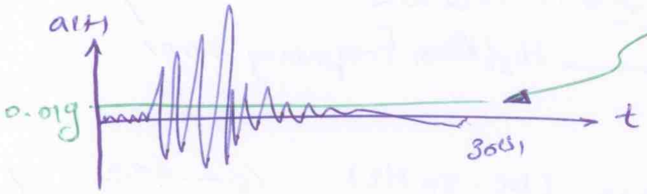
Sensors — سنسورها هر کدام بازه فرکانسی خاص خودشان را دارند

- Acceleration (DC - 50 Hz) — برای اهداف مهندسی
- Velocity
  - Short Period (0.01 - 2 s) — برای ثبت زلزله‌های نزدیک
  - long Period (> 5 s) — 〃 〃 دور ([illegible])
  - Broad Band
  - VBB (DC - 50Hz)

* هر چیزی که دستگاه ثبت کرده، مجموع سیگنال + نویز است که باید از هم جدا شوند.

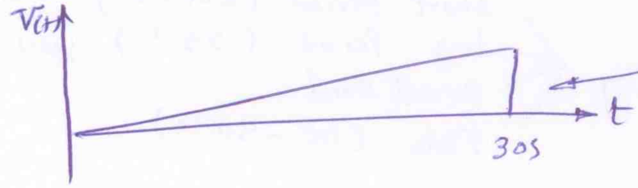
* دستگاهی خوب است که نسبت $\frac{\text{Signal}}{\text{Noise}}$ بالایی داشته باشد.

Base-line Correction



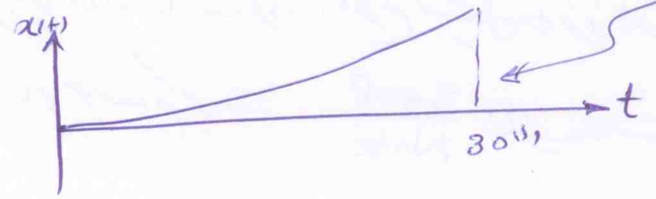
فرض کنید خط مبنا به اندازه 0.01g بالاتر بوده و ما به اشتباه آن را صفر گرفته‌ایم.

Int.



$0.01 \times 1000 \frac{cm}{s^2} \times 30 \times \frac{1}{2} = 150 \, cm/s$

Int.



$\frac{1}{2} \times 150 \times 30 = 2250 \, cm$

بنابراین این نوع خطا در شتاب اهمیت ندارد ولی برای V و x اختلاف‌های زیادی را ناشی می‌شود.

برای رفع این مشکل:

$$a(t) = \underbrace{\bar{a}(t)}_{\text{شتاب خوانده شده}} - (\underbrace{c_1 + c_2 t}_{\text{اگر خطا را خطی در نظر بگیریم}})$$

که شتاب واقعی

$$I = \int_0^t \left[\bar{a}(t) - c_1 - c_2 t\right]^2 dt \longrightarrow$$ هدف کمینه کردن این انتگرال است

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow -2\int_0^{t_d} (\bar{a}(t) - c_1 - c_2 t)\, dt = 0 \\ \\ \dfrac{\partial I}{\partial c_2} = 0 \Rightarrow -2\int_0^{t_d} t\left[\bar{a}(t) - c_1 - c_2 t\right] dt = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{t_d} \bar{a}(t)\, dt - c_1 \int_0^{t_d} dt - c_2 \int_0^{t_d} t\, dt = 0 \\ \int_0^{t_d} \underbrace{t}_{u}\, \underbrace{\bar{a}(t)\, dt}_{dv} - \frac{c_1}{2} t_d^2 - \frac{c_2}{3} t_d^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(t)\Big|_0^{t_d} - c_1 t\Big|_0^{t_d} - \frac{c_2}{2} t^2\Big|_0^{t_d} = 0 \\ t_d V(t_d) - D(t_d) - \frac{1}{2} c_1 t_d^2 - \frac{1}{3} c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{6}{t_d^2} D_d - \dfrac{2}{t_d} V_d \\[2ex] c_2 = \dfrac{6}{t_d^2} V_d - \dfrac{12}{t_d^3} D_d \end{cases}$$

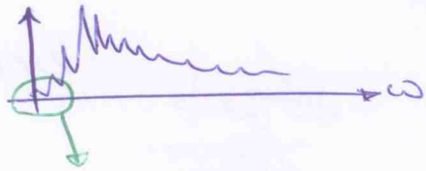
$$\Rightarrow a(t) = \bar{a}(t) - (c_1 + c_2 t)$$

Long Period Noise Filtration.

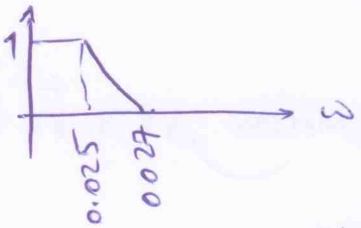
Fourier Amplitude

$$A(\omega) = \alpha + i\beta \Rightarrow |A(\omega)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$a(t) \xrightarrow{F.T.}$$



چنین چیزهایی نباید داشته باشیم.

$$\Rightarrow FA + \left(-FA \times \right.$$  $$\left. \right) = A'(\omega)$$

یعنی در حقیقت ثبت ۰ تا 0.025 Hz را صفر کرده ام.

$$\Rightarrow IFT(A'(\omega)) = a(t)$$

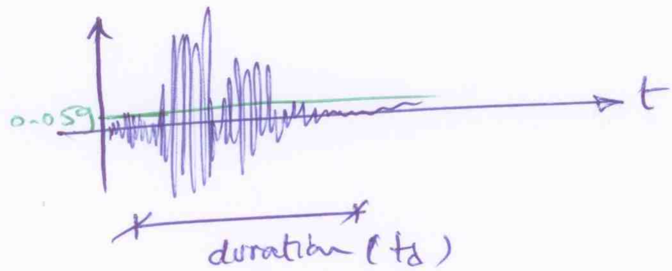
Duration

- duration را برای شناخت زلزله پس از اعمال کلیه تصحیحات محاسبه می‌کنیم.

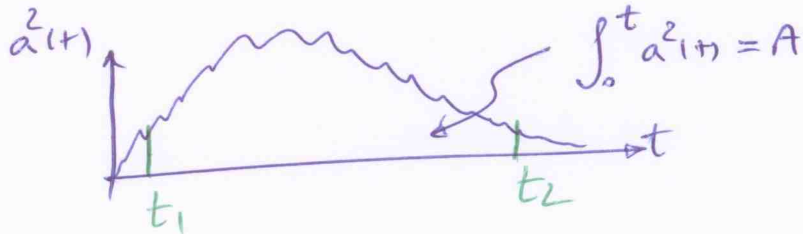
- اگر دامنه کم، انرژی کم، سازه الاستیک (خطی) و مدت زمان زلزله طولانی باشد، آنگاه duration زیاد تأثیر ندارد. ولی اگر سازه در ناحیه غیرالاستیک وارد شود، duration می‌تواند باعث خستگی در سازه گردد.

Fatigue Failure

Page & Bolt



Trifunac & Brady



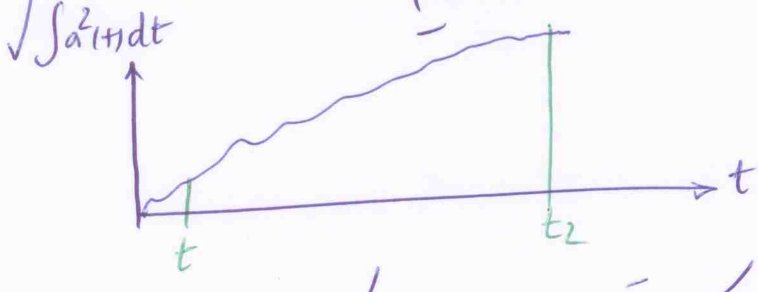
زمان t_1 و t_2 چنان انتخاب می‌شوند که:

$$\int_0^{t_1} a^2(t)\,dt = 0.05A$$

$$\int_{t_2}^{end} a^2(t)\,dt = 0.05A$$

یعنی ۹۰٪ کل را انتخاب کرده‌ایم.

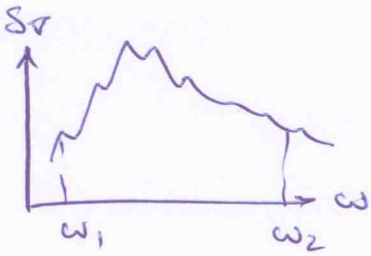
Mc Cann & Shah



آنجایی که نرخ تغییرات ثابت و یا منفی گردد، t_2 انتخاب می‌شود. حال از ابتدا به پایین در نظر می‌گیریم و t_1 را انتخاب می‌کنیم.

تک پارامترهای زلزله

Spectrum intensity



$$S_I = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_v \, d\omega$$

Arias Intensity

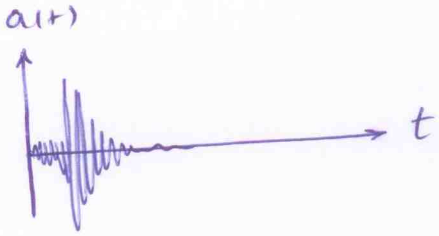
$$I_A = \frac{\pi}{2g} \int_0^{t_d} \ddot{u}_g^2(t)\, dt$$

بیانی است از انرژی با واحد
(g.sec)

Housner earthquake power

$$P_A = \frac{1}{t_{0.95} - t_{0.05}} \int_{t_{0.05}}^{t_{0.95}} \frac{1}{2} \ddot{u}_g^2(t)\, dt$$

RMS_A = Root mean squar acceleration $= \sqrt{P_A}$

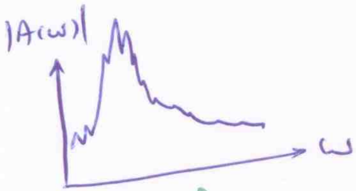


$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \int_0^{t_d} a(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

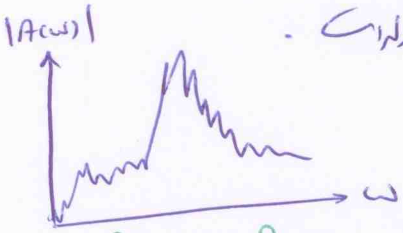
$$= \underbrace{\int_0^{t_d} a(t) \cos\omega t\, dt}_{\text{Real part}} + i \underbrace{\int_0^{t} a(t) \sin\omega t\, dt}_{\text{Imaginary part}}$$

$$\Rightarrow \; |A(\omega)| = \text{Fourier Amplitude} = \sqrt{\left[\int_0^{t_d} a(t) \cos\omega t\, dt\right]^2 + \left[\int_0^{t_d} a(t) \sin\omega t\, dt\right]^2}$$

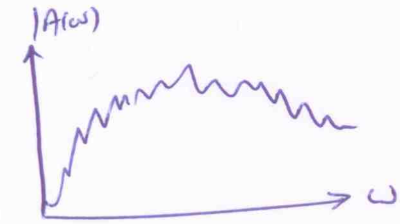
$|A(\omega)|$ یکی از راه‌های بیان ویژگی‌های زلزله است.



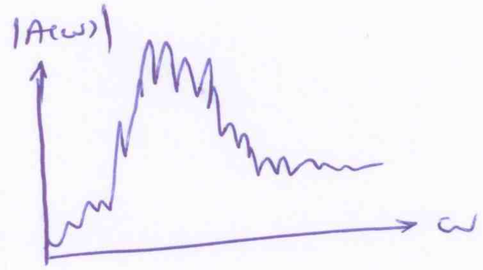
Low frequency



high frequency



Braud-band freq.



Intermidiate freq.

* رابطه طیف فوریه و طیف سرعت

دوهامل $\Rightarrow X(t) = \int a(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \dfrac{1}{\omega_n} \int a(\tau)\, e^{-\xi \omega_n (t-\tau)} \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau$

$$\text{if } \xi = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(t) = \dfrac{1}{\omega_n} \int a(\tau) \underbrace{\sin\omega_n (t-\tau)}_{\sin\omega_n t \cos\omega_n \tau - \cos\omega_n t \sin\omega_n \tau}\, d\tau \\[2ex] \dot{X}(t) = \int a(\tau) \cos\omega_n (t-\tau)\, d\tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(t) = \dfrac{1}{\omega} \left[\sin\omega t \int a(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau - \cos\omega t \int a(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau \right] \\[2ex] \dot{X}(t) = \left[\cos\omega t \int a(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau + \sin\omega t \int a(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau \right] \end{cases}$$

طیف سرعت $= \dot{X}_{max} = \left\{ \left[\underbrace{\int a(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau}_{C} \right]^2 + \left[\underbrace{\int a(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau}_{S} \right]^2 \right\}^{1/2}$

$$= \sqrt{C^2 + S^2}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} K X^2 \longrightarrow \begin{cases} E_{max} = \frac{1}{2} m \dot{X}_{max}^2 \\[2ex] E_{max} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow E_{max} = \frac{1}{2} m \left[C^2 + S^2 \right] \Rightarrow \sqrt{\dfrac{2E_{max}}{m}} = \sqrt{C^2 + S^2} =$ Fourier Amplitude

= حداکثر سرعت یک سیستم SDOF نامیرا

* در سیستم میرا

$S_{v_{\text{میرا}}} < |A(\omega)|$

یعنی طیف فوریه یک پوش است برای طیف سرعت

در حالی که $\xi = 0$ می‌شد این دو بر هم منطبق است.

Time domain & Frequency domain

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = a(t)$$

حل در حوزه زمان :

$$x(t) = \int_0^t a(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

حل در حوزه فرکانس :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = A e^{i\bar{\omega} t}$$

$$x_p(t) = \bar{A} e^{i\bar{\omega} t} \xrightarrow{\text{جواب خصوصی در معادله}} \bar{A} = \frac{1}{\omega^2 - \bar{\omega}^2 + 2i\zeta\omega\bar{\omega}} A$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_p(t)}_{\text{output}} = \frac{1}{\omega^2 - \bar{\omega}^2 + 2i\zeta\omega\bar{\omega}} \underbrace{A e^{i\bar{\omega} t}}_{\text{input}}$$

می توان گفت :

$$x(t) = H(\omega)\, p(t)$$

تابعی از فرکانس که ورودی را به پاسخ تبدیل می کند

$$x(t) = \int_0^t p(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \xrightarrow{F.T.} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t p(\tau)\, e^{i\omega t} h(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, e^{i\omega(t-\tau)} dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{X(\omega)}_{\text{پاسخ در حوزه فرکانس}} = \underbrace{P(\omega)}_{\text{ورودی در حوزه فرکانس}} \cdot \underbrace{H(\omega)}_{\text{تابع پاسخ فرکانسی}} \leftarrow \text{Frequency response}$$

where $h(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_D t$

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \bar{\omega}^2 + 2i\zeta\omega\bar{\omega}}$$

مراحل انجام برای حل در حوزه فرکانس :

$$p(t) \longrightarrow P(\omega)$$

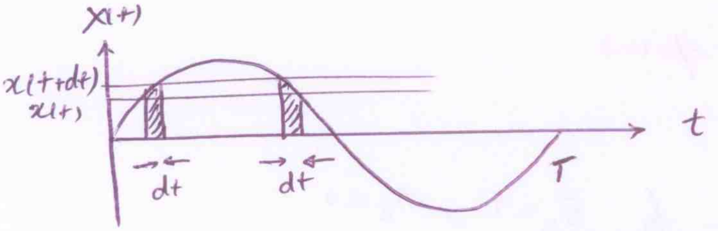
$$X(\omega) \longrightarrow P(\omega)\, H(\omega)$$

$$x(t) = IFT\,(X(\omega))$$

اگر $p(t)$ یک تابع پیچیده باشد این روش بسیار بهتر است .

وقتی صحبت از فرآیند پیش می‌شود، منظور مجموعه‌ای از ارتعاشات زمانی فرآیند می‌باشد و لذا یک نمونه از فرآیند به تنهایی مشخص نمی‌باشد.

تابع چگالی احتمال:

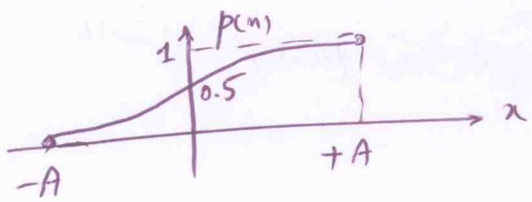


$$x(t) = A\sin(\omega t - \phi) \Rightarrow dx = A\omega\cos(\omega t-\phi)\,dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{A\omega\cos(\omega t-\phi)}$$

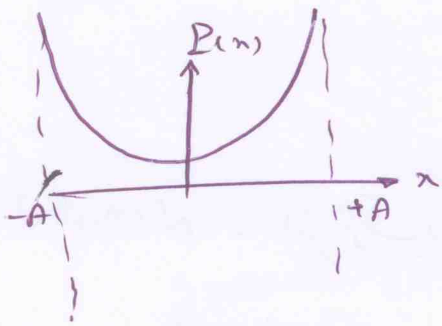
$$= \frac{dx}{\omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t-\phi)}} = \frac{dx}{\omega\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$\text{Prob}\left[\, x \le X \le x+dx \,\right] = \frac{2dt}{T} = \frac{2dx}{T\omega\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2-x^2}} = p(x)\,dx$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}} \qquad -A \le x \le A$$



اشکال جوابات



تابع چگالی احتمال

PDF

Probabilty Density Function

تابع توزیع احتمال

CDF

Cumalative Distribution Func.

$$P_X(x) = P\left[X \le x\right] = \int_{-A \text{ or } -\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi \Rightarrow$$

$$P\left[a < X < b\right] = \int_a^b p(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{b} - \int_{-\infty}^{a} = P_X(b) - P_X(a)$$

Normal Distribution

(تابع توزیع نرمال (گوسی

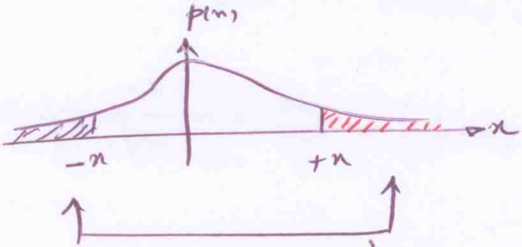
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] = \phi(x)$$

$$\text{if } z = \frac{x-m_x}{\sigma_x} \Rightarrow p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \& \quad \sigma_z = 1 \;,\; m_z = 0$$

تابع توزیع احتمال نرمال

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} p(z)\,dz = \Phi(z)$$

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$$



دو سطح برابرند

با استفاده از تابع $\Phi(x)$ می‌توان احتمال فرآیندهای نرمال غیر استاندارد ، $N(m_x, \sigma_x)$ را نیز به ترتیب ذیل محاسبه نمود:

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx$$

$$\text{if } z = \frac{x-m_x}{\sigma_x} \Rightarrow x = z\sigma_x + m_x \longrightarrow dx = \sigma_x\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz = \Phi(u) = \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)$$

Log-Normal distribution

تابع توزیع لوگ نرمال

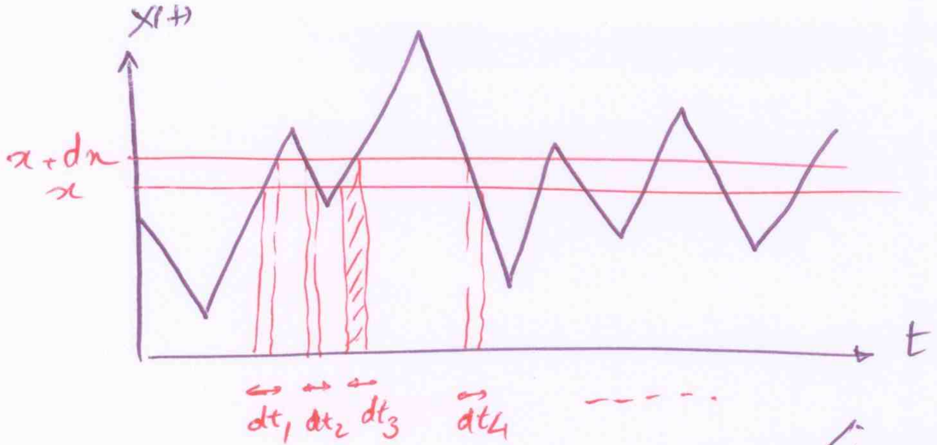
اگر مقدار لگاریتم فرآیند پیش‌رو x دارای توزیع نرمال باشد، توزیع فرآیند را "نرمال لگاریتمی" می نامند.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \alpha_x} \exp\left[\frac{-(\log x - \mu_x)^2}{2\alpha_x^2}\right]$$

where $\alpha_x = \sigma_{(\log x)}$ ، $\mu_x = m_{\log x} = E[\log x]$

$$V_x = e^{\alpha^2} - 1$$

تابع چگالی احتمال فرآیند :



$$p(x)\,dx = \frac{\text{کل مدت زمانی که در آن } X(t) \text{ در محدوده } x \text{ و } x+dx \text{ قرار دارد}}{\text{طول دوره یا مدت زمان مورد مطالعه}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} dt_i}{T}$$

به شرطی که خواص آماری آن با زمان تغییر نکند.

$\Rightarrow \quad T \to \infty$

به عبارت دیگر این فرآیند باید از ابتدای (شروع) تا ابد (بی‌نهایت) بدون تغییر مشخصه‌های آماری ادامه داشته باشد. تا تابع چگالی احتمال بدست آمده صحیح باشد.

Statistical Expectation امید آماری

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$$

$$E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx \longleftarrow$$

گشتاور مرتبه دوم $=$ Root Mean Square (RMS) $=$ میانگین مربع فرآیند

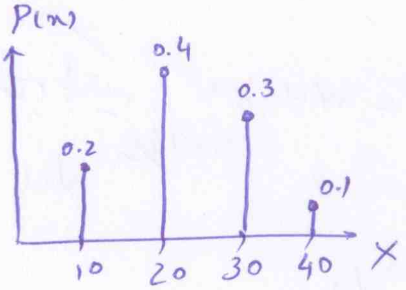
$$\vdots$$

$$E[x^n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\, dx$$

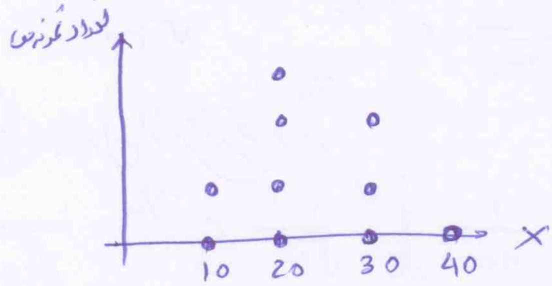
$$V_x = \sigma_x^2 = E\left[(x - E[x])^2\right] = E\left[(x - m_x)^2\right] = E\left[x^2 + m_x^2 - 2 x m_x\right]$$

$$= E[x^2] + m_x^2 - 2 m_x E[x] = E[x^2] - m_x^2 \Rightarrow E[x^2] = \sigma^2 + m^2$$

مثال:



توزیع احتمال فرآیند x



توزیع نمونه‌های x

Temporal Average $= \langle x \rangle =$ میانگین x $= \frac{1}{10}(10 + 10 + 20 + 20 + 20 + 20 + 30 + 30 + 30 + 40) = 23$

$$= 10(0.2) + 20(0.4) + 30(0.3) + 40(0.1) = 23$$

$S_0 = \sum_{i=1}^{4}$ (مقدار فرآیند x) (توزیع چگالی فرآیند x)

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i \underbrace{P(X = x_i)} \xlongequal{\text{Cont.}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{p(x)}\, dx$$

مثال: ساختمان یک طبقه ای با جرم m تحت تأثیر زلزله قرار گرفته است. برای محاسبه انرژی جنبشی وارد بر طبقه اگر سرعت افقی طبقه در دو جهت x و y برابر x و y باشد، کل سرعت ترکیبی برابر خواهد بود با $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

اگر x و y متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشند، مطلوب است تابع توزیع احتمال انرژی جنبشی حاصل از ارتعاشات ساختمان.

حل:

$$\text{انرژی جنبشی} = W = \frac{1}{2} m (x^2 + y^2) = u + v$$

اگر فرض کنید x نرمال باشد، آنگاه فرض کنید $u = \frac{1}{2} m x^2$ نیز نرمال خواهد بود

$$u = \frac{1}{2} m x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2u}{m}} \longrightarrow dx = \pm \frac{du}{\sqrt{2mu}}$$

$$P_u(u) = \left[P_x\left(\sqrt{\frac{2u}{m}}\right) + P_x\left(-\sqrt{\frac{2u}{m}}\right) \right] \times \frac{1}{\sqrt{2mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m u}} e^{-u/m}, \quad u \geq 0$$

$$\& \quad P_v(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi m v}} e^{-v/m} \qquad v \geq 0$$

حال با توجه به اینکه $v = w - u \geq 0$ تابع چگالی احتمال انرژی جنبشی خواهد شد:

$$P_w(w) = \frac{1}{\pi m} \int_0^w \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u/m} \cdot \frac{1}{\sqrt{w-u}} e^{-(w-u)/m} du$$

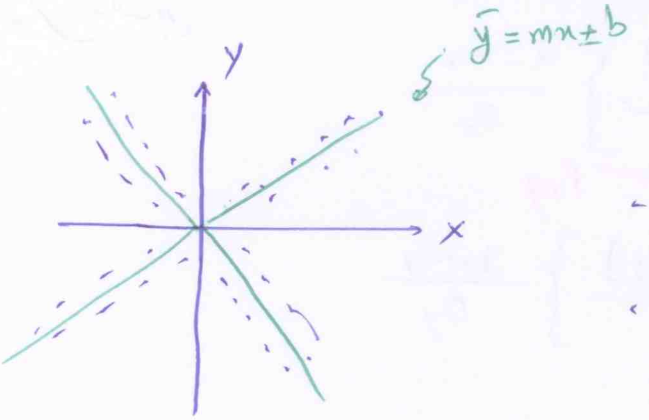
$$= \frac{1}{\pi m} e^{-w/m} \int_0^w u^{-1/2} (w-u)^{-0.5} du$$

با فرض $r = \frac{u}{w}$ خواهیم داشت:

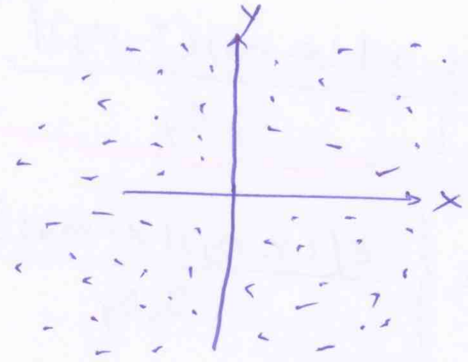
$$= \frac{1}{\pi m} e^{-w/m} \int_0^1 r^{-1/2} (1-r)^{-1/2} dr$$

$$= \frac{1}{m} e^{-w/m}$$

ضریب همبستگی



دو فرآیند همبسته



دو فرآیند ناهمبسته

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - m x_i - b)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta^2}{\partial m} = 0 \Rightarrow -2 \sum x_i (y_i - m x_i - b) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 0 \Rightarrow -2 \sum (y_i - m x_i - b) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{N}\times & \sum x_i y_i - m \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \\[2ex] \frac{1}{N}\times & \sum y_i - m \sum x_i - \sum b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E[XY] - m E[X^2] - b E[X] = 0 \\[2ex] E[Y] - m E[X] - b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - (E[X])^2} \\[2ex] b = E[Y] - m E[X] \end{cases} \xrightarrow{\text{if } E[X]=E[Y]=0} \begin{cases} m = \dfrac{E[XY]}{E[X^2]} \\[2ex] b = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{مورد خط از مبدأ}} \bar{y} = mx \Rightarrow \bar{y} = \frac{E[XY]}{E[X^2]} x \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } \sigma_y}$$

σ_x^2

$$\frac{\bar{y}}{\sigma_y} = \left(\frac{E[XY]}{\sigma_x \sigma_y} \right) \frac{x}{\sigma_x} \quad \text{or} \quad \frac{x}{\sigma_x} = \left(\frac{E[XY]}{\sigma_x \sigma_y} \right) \frac{y}{\sigma_y}$$

این دو رابطه برای فرآیندها که zero mean هستند ضریب همبستگی است.

پس در حالت کلی :

$$\begin{cases} \dfrac{y-m_y}{\sigma_y} = \left\{ \underbrace{\dfrac{E[(X-m_x)(Y-m_y)]}{\sigma_x \sigma_y}}_{\rho_{xy}} \right\} \dfrac{x-m_x}{\sigma_x} \\[2ex] \dfrac{x-m_x}{\sigma_x} = \left\{ \dfrac{E[(Y-m_y)(X-m_x)]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \dfrac{y-m_y}{\sigma_y} \end{cases}$$

$$\rho_{xy} = \frac{E[(X-m_x)(Y-m_Y)]}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

صورت کسر $= E[(X-m_x)(Y-m_Y)] = E[XY] - m_x E[Y] - m_y E[X] + m_x m_y$

در صورتیکه X و Y مستقل باشند. $= E[X]E[Y] - m_x m_y = 0$

مثال: ثابت کنید که مقدار ضریب همبستگی ρ همیشه بین $+1$ و -1 می باشد.

اگر x_1 و x_2 دو فرآیند تصادفی مرتبط با یک پارامتر α باشند، خواهیم داشت:

$$E[(\alpha x_1 - x_2)^2] \geq 0$$

با فرض $E[x_1^2] = a > 0$ و $-2E[x_1 x_2] = b$ و $E[x_2^2] = c$ خواهیم داشت:

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c \geq 0 \qquad (1)$$

$$\text{if } a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$$

برای اینکه رابطه (1) برقرار داشته باشیم:

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$\Rightarrow (E[x_1 x_2])^2 \leq E[x_1^2]\, E[x_2^2] \qquad (2)$$

اگر $x_1 = Y_1 - E[Y_1]$ و $x_2 = Y_2 - E[Y_2]$ خواهیم داشت:

$$E[x_1^2] = \sigma_1^2 \quad , \quad E[x_2^2] = \sigma_2^2 \longrightarrow \text{zero mean?}$$

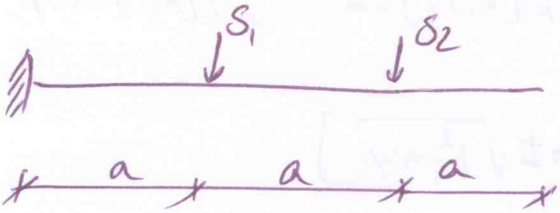
$$E[x_1 x_2] = E\left\{[Y_1 - E(Y_1)] \times [Y_2 - E(Y_2)]\right\} = Cov(y_1, y_2) \qquad (3)$$

با استفاده از روابط (2) و (3) خواهیم داشت:

$$[Cov(y_1, y_2)]^2 \leq \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

$$\Rightarrow \Bigg[\underbrace{\frac{Cov(y_1, y_2)}{\sigma_1 \sigma_2}}_{\rho}\Bigg]^2 \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \rho \leq +1$$

مثال: تیر طره شکل ذیل تحت تأثیر دو نیروی تصادفی مستقل S_1 و S_2 با میانگین و انحراف معیار به ترتیب m_1, σ_1 و m_2, σ_2 قرار دارد. اگر Q نیروی برشی و M گشتاور خمشی تکیه‌گاه باشند، مطلوبست ضریب همبستگی Q و M؟



اگر S_1 و S_2 فرآیندهای گوسی باشند، آنگاه M و Q نیز فرآیندهای گوسی هستند

$$Q = S_1 + S_2$$
$$M = aS_1 + 2aS_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_Q = m_1 + m_2 \\ m_M = am_1 + 2am_2 \end{cases} , \quad \begin{cases} \sigma_Q^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \sigma_M^2 = a^2(\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2) \end{cases}$$

اگرچه S_1 و S_2 از نظر آماری مستقل‌اند ولی Q و M همبسته خواهند شد:

$$E[QM] = E\left[(S_1+S_2)(aS_1+2aS_2)\right]$$
$$= aE[S_1^2] + 3aE[S_1S_2] + 2aE[S_2^2]$$
$$= a(\sigma_1^2 + m_1^2) + 3a\, m_1 m_2 + 2a(\sigma_2^2 + m_2^2)$$
$$= a(\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) + m_Q m_M$$

$$\Rightarrow Cov(q,m) = E[QM] - m_Q m_M = a(\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow \rho_{QM} = \frac{Cov(q,m)}{\sigma_Q \cdot \sigma_M} = \frac{\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\sigma_1^2+4\sigma_2^2)}}$$

$$\text{if } \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \rho_{QM} = 0.948$$

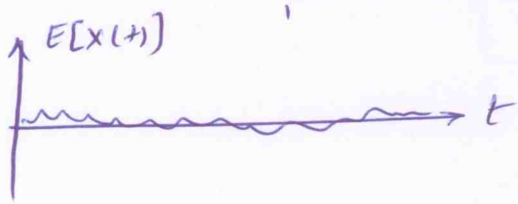
تابع چگالی احتمال : بیان خواص آماری یک سیستم در محدوده فرکانسی است .

وقتی n تا مشاهدات داشته باشیم :

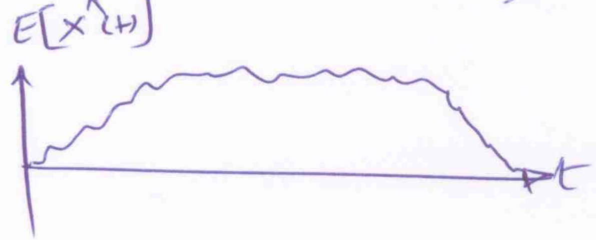
چگالی احتمال

$$E[X(t)] = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$$

هرچه n بیشتر شود ، $E[X(t)]$ بیشتر به سمت صفر میل میکند :



حال اگر $E[X^k(t)] = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i^k(t)$ را حساب کنیم :



فرایند تصادفی : فرایندی است که مشخصه‌های آن برای ما مشخص نیست .

فرایند تصادفی (از نظر آماری) مانا :

(Stationary Random Process)

فرایندی است که از نظر آماری از زمان مستقل باشد .

(یعنی فرایندی مستقل از زمان است که خصوصیات و ویژگی‌های آماری آن کلی از زمان ثابت و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند)

$$E[X(t)] = c_1 \qquad -\infty < t < \infty$$

$$E[X^2(t)] = c_2$$

$$E[X^3(t)] = c_3$$

$$\vdots$$

در ادامه ما می‌توان این فرایند تصادفی مانا در نظر گرفت .

برای گروهی از نمونه‌ها Ensemble	Temporal or Spatial → برای یک نمونه
$E[x]$	$\langle x \rangle$
$E[x^2]$	$\langle x^2 \rangle$
$R_x(\tau)$	$\langle x(t_1)\, x(t_1+\tau) \rangle = \phi_x$
$\vdots$	

اگر مقادیر Ensemble و Temporal در این فرایند مانا برابر شوند ، آنگاه آن فرایند Ergodic است .

$$E[x^2] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx$$

$\longrightarrow$ PDF

$$V_x = \sigma_x^2 = E\left[(X-m_x)^2\right] = E\left[X^2 + m_x^2 - 2m_x X\right] = E[X^2] + m_x^2 - 2m_x E[X]$$

$$= E[X^2] - m_x^2 \Rightarrow \boxed{E[X^2] = \sigma_x^2 + m_x^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2\, p_x(x)\, dx$$

Autocorrelation function

تابع خودهمبستگی)

$$R_x(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_1)\,x_i(t_2)$$

$$\text{if } \tau = t_2 - t_1 \Rightarrow R(t_j;\tau) = E[X(t_j)X(t_j+\tau)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_j)\,x_i(t_j+\tau)$$

حال اگر روی فرآیندهای ایستای ما صحبت کنیم، چون مستقل از زمان است ،

$$R(t_i;\tau) = R(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t)}_{x_1}\underbrace{x(t+\tau)}_{x_2}\, p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$[R(\tau)]_{max} = \lim_{\tau\to 0} R_x(\tau) = E[x^2(t)]$$

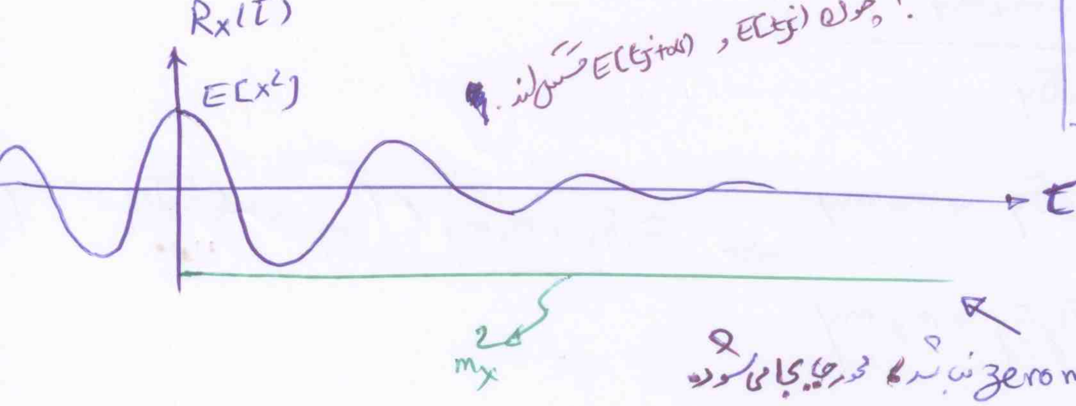
$$\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = (E[x])^2 \ \underset{\text{zero mean باشد}}{\overset{\text{اگر فرآیند}}{=\!=\!=}}\ 0$$

چون $E(t_j+\infty)$ و $E(t_j)$ مستقل‌اند.

تابع خودهمبستگی زمانی

$$\phi_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

if $\phi_x(\tau) = R_x(\tau) \Rightarrow$ Ergodic فرآیند



اگر فرآیند zero mean نباشد محورها جابجا می‌شود

نکته: ۱- $R_x(\tau) = E[\underbrace{X(t)}_{t'-\tau}\underbrace{X(t+\tau)}_{t'}] = R_x(-\tau) \Rightarrow$ $R_x(\tau)$ تابعی زوج است

۲- به $\sqrt{E[x^2]} = RMS =$ Root Mean Square گویند که معروف به محتمل‌ترین مقدار فرآیند است.

ثابت کنید:

$$\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = m_x^2$$

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) \pm x(t+\tau)]^2\,dx \geq 0 = \frac{1}{T}\int_0^T [x^2(t) \pm 2x(t)\,x(t+\tau) + x^2(t+\tau)]\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt \pm \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$= 2R_x(\tau=0) + 2R_x(\tau)$$

Cross Correlation

$$E[X(t_1)\,Y(t_2)] = R_{xy}(t_1,t_2) \xrightarrow[\text{Stationary}]{\text{for}} R_{xy}(t,\tau)$$

نکته :
$$R_{xy}(\tau) = E[X(t)\;Y(t+\tau)] = E[X(t'-\tau)\;Y(t')] = E[Y(t')\,X(t'-\tau)] = R_{yx}(-\tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\,y_i(t+\tau) = \int_x\int_y x(t)\,y(t+\tau)\,P_{xy}(x,y)\,dt$$

ضریب همبستگی متقاطع
$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{E[\{X(t)-m_X\}\{Y(t+\tau)-m_Y\}]}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$\text{"} \quad = \frac{R_{xy}(\tau) - m_x m_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{xy}(\tau) = \rho_{xy}(\tau)\,\sigma_x\sigma_y + m_x m_y \\ R_{yx}(\tau) = \rho_{yx}(\tau)\,\sigma_x\sigma_y + m_x m_y \end{cases} \Rightarrow -\sigma_x\sigma_y + m_x m_y \leqslant R_{xy}(\tau) \leqslant \sigma_x\sigma_y + m_x m_y$$

ضریب خودهمبستگی
$$\Rightarrow \rho_x = \frac{E[\{X(t)-m_x\}\{X(t+\tau)-m_x\}]}{\sigma_x(t)\,\sigma_x(t+\tau)}$$

برای فرآیند ایستان
$$\Rightarrow \rho_x = \frac{R_x(\tau) - m_x^2}{\sigma_x^2}$$

$$\Rightarrow R_x(\tau) = \rho_x\,\sigma_x^2 + m_x^2 \longrightarrow -\sigma_x^2 + m_x^2 \leqslant R_x(\tau) \leqslant \sigma_x^2 + m_x^2$$

ضریب خودهمبستگی

$$\rho_x = \text{ضریب خودهمبستگی} = \frac{E\left[\{x(t)-m_x\}\{x(t+\tau)-m_x\}\right]}{\sigma_{x(t)}\,\sigma_{x(t+\tau)}}$$

برای فرآیندهای مانا، مقدار متوسط و انحراف معیار فرآیند، مستقل از زمان است یعنی

$$E[x(t)] = E[x(t+\tau)] = m_x$$

$$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t+\tau)} = \sigma_x$$

$$\Rightarrow \rho_x = \frac{E[x(t)\,x(t+\tau)] - m_x E[x(t)] - m_x E[x(t+\tau)] + m_x^2}{\sigma_{x(t)}\,\sigma_{x(t+\tau)}}$$

$$\Rightarrow \rho_x = \frac{R_x(\tau) - m_x^2}{\sigma_x^2} \Rightarrow R_x(\tau) = \rho_x \sigma_x^2 + m_x^2$$

با در نظر گرفتن اینکه $-1 \leq \rho_x \leq +1$ آنگاه:

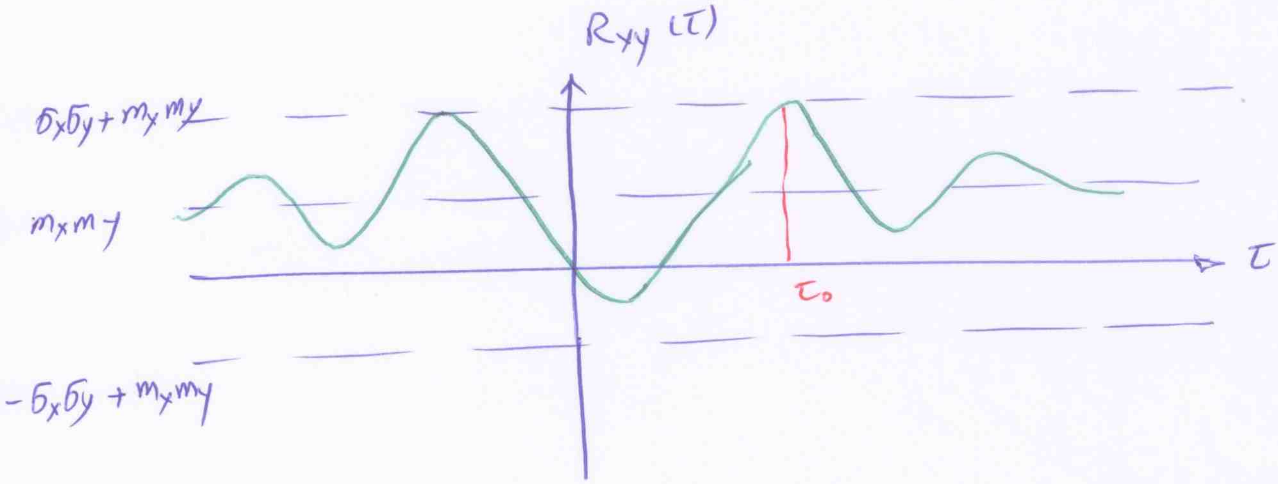
$$\boxed{-\sigma_x^2 + m_x^2 \leq R_x(\tau) \leq \sigma_x^2 + m_x^2}$$

ادامه همبستگی متقابل

برای اغلب فرآیندهای تصادفی همبستگی بین x و y وقتی τ زیاد می‌شود، کم می‌شود.

$$\lim_{\tau\to\infty} R_{xy}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} R_{yx}(\tau) = m_x m_y$$

$$\text{if } m_x = m_y = 0 \Rightarrow R_{xy} = R_{yx} = 0 \Rightarrow$$ x و y ناهمبسته است

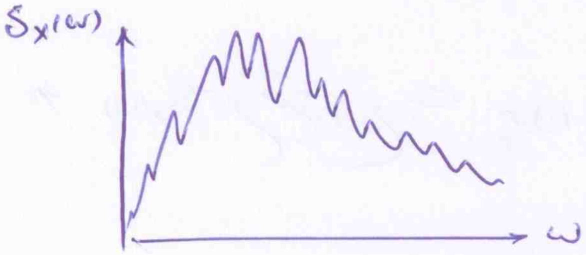


$x(t) \xrightarrow{F.T.} X(\omega)$

$R_x(\tau) \xrightarrow{F.T} S_x(\omega)$

تابع چگالی طیفی : بیان خواص آماری تابع یا سیستم در حوزه فرکانس است.

* چون $R_x(\tau)$ زوج است پس $S_x(\omega)$ حقیقی است.
* شکل ظاهری $S_x(\omega)$ شبیه طیف دامنه فوریه است.

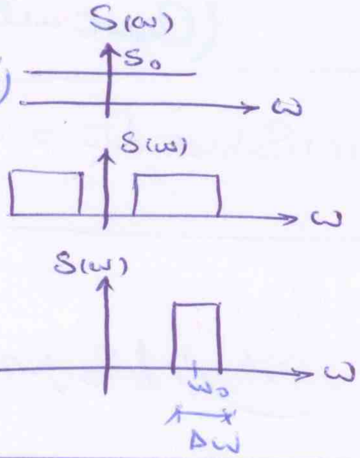


انواع مختلف چگالی طیفی:

مثل نور سفید که ترکیب همه رنگ‌ها است.

Wide-Band: white Noise (نویز سفید), limited band W.N.

Narrow-Band $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1\right)$



با فرض فرآیند رندم مانا، شرایط دیریکله ارضاء نمی‌گردد. یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt \to \infty$ در نتیجه لازم است که از $x(t)$ فوریه نمی‌گیریم بلکه از $R_x(\tau)$ فوریه می‌گیریم که شامل اطلاعات آماری فرآیند است.

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \longleftarrow \text{Spectral Density (SD)}$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

همانند تابع چگالی احتمال است ولی در حوزه فرکانس.

نکته:

$$R_x(\tau=0) = E[x^2] = m_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, d\omega = S_x(\omega) \text{ سطح زیر منحنی}$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} S_x(\omega)\, d\omega$$

دیمانسیون $R_x(\tau)$ از نوع $\dfrac{(\text{واحد فرآیند})^2}{\text{واحد فرکانس}}$

* براساس تئوری بوخنر Bochner تبدیل فوریه تابع مثبت زوج غیرصفر و حقیقی، تابعی مثبت خواهد بود لذا

$$R_x(\tau) \quad \text{زوج + غیرصفر + مثبت} \Rightarrow S_x(\omega) > 0$$

* $S_x(\omega)$ تابعی حقیقی و زوج است چون $R_x(\tau)$ حقیقی و زوج است پس

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, \underbrace{e^{-i\omega\tau}}_{(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau)}\, d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau = 0}$$

* با توجه به اینکه فرکانس منفی مفهوم فیزیکی ندارد، معمولاً تابع $S_x(\omega)$ را برای بازه $\omega > 0$ رسم می‌کنیم.

*

مثال : مطلوبست تعیین تابع چگالی طیفی فرآیند $x(t)$ قبل

$$R_x(\tau)=\begin{cases}\dfrac{A^2}{6}\left[1-3\dfrac{\tau}{T}+4\left(\dfrac{\tau}{T}\right)^3\right] & 0<\tau<T/2\\[2ex] \dfrac{A^2}{6}\left[1-\dfrac{3}{T}(T-\tau)+\dfrac{4}{T^3}(T-\tau)^3\right] & T/2<\tau<T\end{cases}$$

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\cdots\cdots=\cancel{\frac{A^2}{12\pi}\left(\frac{6}{\omega}-\frac{12T}{4\pi i}\right)}$$

$$=A^2\left(\frac{5}{8\pi^2\omega}+\frac{2}{\pi^2\omega T^2}\right)$$

چگالی طیفی مشتقات فرآیند

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\{x_r(t)\,x_r(t+\tau)\}$$

$$\lim N \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{dR_x(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\frac{d}{d\tau}\{x_r(t)\,x_r(t+\tau)\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} x_r(t)\,\dot{x}_r(t+\tau)$$

$$= E[x(t)\,\dot{x}(t+\tau)] = E[x(t-\tau)\,\dot{x}(t)] \cancel{= -R_{\dot{x}}(\tau)}$$

به همین ترتیب $\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}R_x(\tau) = E[\dot{x}(t-\tau)\,\dot{x}(t)] = -R_{\dot{x}}(\tau)$

تابع همبستگی مشتق فرآیند $(\dot{x})$

به همین ترتیب $\Rightarrow \frac{d^4}{d\tau^4}R_x(\tau) = \cdots = R_{\ddot{x}}(\tau)$

حال به چگالی طیفی ها می پردازیم:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

$\xrightarrow[\tau \text{ به}]{\text{مشتق نسبت}}$ $\frac{d}{d\tau}R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega\, S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{d\tau^2}R_x(\tau) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2 S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = -R_{\dot{x}}(\tau) \\ &\text{از طرفی}\quad R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{x}}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

به همین ترتیب $S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}}(\omega)$

چگالی طیفی متقاطع

$$\begin{cases} S_{\underset{yx}{xy}}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\underset{yx}{xy}}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \\[2ex] R_{\underset{yx}{xy}}(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\underset{yx}{xy}}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(-\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \xrightarrow[d\tau = -d\tau']{\tau' = -\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{\tau'=\infty}^{\tau'=-\infty} R_{yx}(\tau')\, e^{i\omega\tau'}\,(-d\tau')$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau')\, e^{i\omega\tau'}\, d\tau'$$

پس $S_{xy}(\omega)$ و $S_{yx}(\omega)$ مزدوج موهومی یکدیگرند.

پاسخ سیستم‌های خطی

$$m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=x(t) \Rightarrow \ddot{y}(t)+2\zeta\omega_n\dot{y}(t)+\omega_n^2 y(t)=\frac{1}{m}x(t) \quad , \quad \zeta=\frac{c}{2m\omega_n}$$

$$\Rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{where} \quad h(t)=\frac{1}{m\omega_D}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_D t \quad , \quad \omega_D=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

فرض کنید که هدف ما محاسبه پاسخ سیستم برای ورودی $x(t)=e^{i\omega t}$ باشد.

$$y=y_p+y_c$$

$$y_c=e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t)$$

معمولاً صفر فرض می‌گردد.

$$y_p=H(\omega)e^{i\omega t}=\frac{1}{m\left[(\omega_n^2-\omega^2)+2i\zeta\omega\omega_n\right]}\times e^{i\omega t}$$

$H(\omega)$: مشخصه فرکانسی سیستم (Freq. Resp. Funct.)

$$\Rightarrow y(t)=H(\omega)e^{i\omega t}$$

$h(t) \longrightarrow$ از مهندسی زلزله (دیوسل)

Recall
$$\begin{cases} y(t)=H(\omega)\,x(t) \\ \downarrow F.T \qquad\qquad \downarrow F.T \\ Y(\omega)=H(\omega)\,X(\omega) \end{cases} \xrightarrow{\text{if } x(t)=\delta(t)} \text{پاسخ} \begin{cases} y(t)=H(\omega)\,\delta(t) \\ \qquad\qquad\qquad \downarrow FT \\ Y(\omega)=H(\omega)\,e^{i\omega t_0} \end{cases}$$

$e^{i\omega t}$ پاسخ به ورودی
$$\begin{cases} y(t)=H(\omega)\,e^{i\omega t} \\ Y(\omega)=H(\omega)\,\delta(t) \end{cases}$$

پس $h(t)$, $H(\omega)$ تبدیل فوریه یکدیگرند:

$$\begin{cases} H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \\ h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \end{cases}$$

اثبات:

$$h(t)=H(\omega)\,\delta(t)$$

پاسخ به ضربه واحد

$$h(t) \text{ تبدیل فوریه } = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\,\delta(t)\,e^{i\omega t}\,dt=$$

$$H(\omega)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,e^{i\omega t}\,dt}_{1}=H(\omega)$$

میانگین پاسخ :

$$E[Y(t)] = \int_0^t E[X_1(\tau)]\, h_1(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t E[X_2(\tau)]\, h_2(t-\tau)\, d\tau$$

اگر X_1 و X_2 فرآیندهای ایستا باشند، آنگاه مقادیر $E[X_1]$ و $E[X_2]$ ثابت و مستقل از زمان خواهند بود. پس

$$E[Y(t)] = E[X_1(\tau)] \int_0^{t \to \infty} h_1(t-\tau)\, d\tau + E[X_2(\tau)] \int_0^{t \to \infty} h_2(t-\tau)\, d\tau$$

چون فرآیند ایستا است

$$= E[X_1(\tau)]\, H_1(0) + E[X_2(\tau)]\, H_2(0)$$

$H(0)$ برای سیستم SDOF برابر $\frac{1}{k}$ بوده که همان ضریب تبدیل یک بار استاتیکی به پاسخ می‌باشد. و مستقل از جهت ورودی است

پس:

$$E[Y(t)] = \left(E[X_1(\tau)] + E[X_2(\tau)]\right) H(0)$$

برای یک ورودی داریم:

$$H(0) = \frac{\text{میانگین پاسخ}}{\text{میانگین فرآیند ورودی}}$$

اغلب میانگین ورودی‌ها حول و حوش صفر است، بنابراین احتیاج به گشتاورهای مرتبه بالاتر (دوم) می‌باشد که مرتبط با خودهمبستگی است.

تابع خودهمبستگی پاسخ :

$$E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\left[\left\{\int_0^{t_1} x_1(\tau_1)h_1(t_1-\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^{t_1} x_2(\tau_1)h_2(t_1-\tau_1)\,d\tau_1\right\} \times \left\{\int_0^{t_2} x_1(\tau_2)\,h_1(t_2-\tau_2)\,d\tau_2 + \int_0^{t_2} x_2(\tau_2)\,h_2(t_2-\tau_2)\,d\tau_2\right\}\right]$$

$$= \underbrace{\boxed{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h_1(t_1-\tau_1)h_1(t_2-\tau_2)\; R_{x_1x_1}(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2}}_{I_1}$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h_1(t_1-\tau_1)\,h_2(t_2-\tau_2)\; R_{x_1x_2}(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h_2(t_1-\tau_1)\,h_1(t_2-\tau_2)\; R_{x_2x_1}(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h_2(t_1-\tau_1)\,h_2(t_2-\tau_2)\; R_{x_2x_2}(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$I_1 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h_1(t_1-\tau_1)h_2(t_2-\tau_2)\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_1x_1}(\omega)\,e^{i\omega(\tau_2-\tau_1)}\,d\omega\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_1x_1}(\omega)\,e^{i\omega(t_2-t_1)}\,d\omega\int_0^{t_1} h_1(t_1-\tau_1)\,e^{i\omega(t_1-\tau_1)}\,d\tau_1 \times \int_0^{t_2} h_1(t_2-\tau_2)\,e^{-i\omega(t_2-\tau_2)}\,d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_1x_1}(\omega)\; H_1^*(\omega,t_1)\,H_1(\omega,t_2)\,e^{-i\omega(t_2-t_1)}\,d\omega$$

for stationary $\downarrow$ $t_1 \to \infty$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_1x_1}(\omega)\; H_1^*(\omega)\;H_1(\omega)\,e^{i\omega(t_2-t_1)}\,d\omega$$

where $\xrightarrow{SDOF}$ $H(\omega,t) = H(\omega)\left\{1-\left(\cos\omega_D t + \dfrac{\zeta\omega_n + i\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)\exp\left[-(\zeta\omega_n+i\omega)t\right]\right\}$

$$H(\omega,t_k) = \int_0^{t_k} h(t_k-\tau)\;e^{-i\omega(t_k-\tau)}\,d\tau$$

$$\Rightarrow R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[S_{x_1x_1}(\omega) H_1^*(\omega) H_1(\omega) + S_{x_1x_2}(\omega) H_1^*(\omega) H_2(\omega) + S_{x_2x_1}(\omega) H_1(\omega) H_2^*(\omega) + S_{x_2x_2}(\omega) H_2(\omega) H_2^*(\omega) \Big] e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega$$

برای N ورودی

$$\Rightarrow R_Y(\tau) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{X_rX_s}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \Big\} \Rightarrow$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$S_Y(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{x_rx_s}(\omega)$$

$$\xRightarrow{N=1} S_Y(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

$$\xRightarrow{\tau=0} R_Y(\tau=0) = E[Y^2] = \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{X_rX_s}(\omega) d\omega$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{Y_rY_s}(\omega) d\omega$$

اگر ورودی های سیستم فرآیندهای مستقل از یکدیگر باشند

$$E[Y^2] = \sum_{r=1}^{N} \cancel{\sum} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(\omega)|^2 S_{X_r}(\omega) d\omega$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{Y_r}(\omega) d\omega$$

برای یک ورودی داریم:

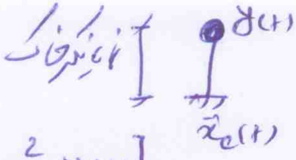
$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

پاسخ سیستم SDOF تحت فرآیند نوفه سفید:

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0}{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} d\omega$$

مدل کانای-تاجیمی

$$\ddot{y}(t)+2\xi_0\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2 y(t)=-\ddot{x}_c(t)$$



$$\text{شتاب کل}=\ddot{x}_g(t)=\ddot{y}(t)+\ddot{x}_c(t)=-\left[2\xi_0\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2 y(t)\right]$$

$$E\left[\ddot{x}_g(t)\ddot{x}_g(t+\tau)\right]=E\left[\left\{2\xi_0\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2 y(t)\right\}\left\{2\xi_0\omega_0\dot{y}(t+\tau)+\omega_0^2 y(t+\tau)\right\}\right]$$

$$=4\xi_0^2\omega_0^2 E\left[\dot{Y}(t)\dot{Y}(t+\tau)\right]+\omega_0^4 E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]$$

$$+4\xi_0\omega_0^3\left(E\left[\dot{y}(t)y(t+\tau)\right]+E\left[y(t)\dot{y}(t+\tau)\right]\right)$$

$$\Rightarrow E\left[\ddot{x}_g^2(t)\right]=4\xi_0^2\omega_0^2 E\left[\dot{y}^2(t)\right]+\omega_0^4 E\left[y^2(t)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{x}_g}(\omega)\,d\omega=4\xi_0^2\omega_0^2\int S_{\dot{y}}(\omega)\,d\omega+\omega_0^4\int S_y(\omega)\,d\omega$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow S_{\ddot{x}_g}(\omega)=4\xi_0^2\omega_0^2 S_{\dot{y}}(\omega)+\omega_0^4 S_y(\omega)\\ &S_y(\omega)=S_0\left|H(\omega)\right|^2\\ &S_{\dot{y}}(\omega)=\omega^2 S_0\left|H(\omega)\right|^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega)=S_0\left|H(\omega)\right|^2\left(4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2+\omega_0^4\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\ddot{x}_g}(\omega)=S_0\,\frac{4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2+\omega_0^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2}}$$

تابع چگالی طیفی در سطح زمین

مدل کامل‌تر چگالی طیفی کانای-تاجیمی که زمین را بصورت چندلایه (چند درجه آزادی) در نظر می‌گیرد بصورت زیر است:

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega)=\sum_{i=1}^{N} S_{0i}\,\frac{4\xi_{0i}^2\omega_{0i}^2\omega^2+\omega_{0i}^4}{(\omega_{0i}^2-\omega^2)^2+(2\xi_{0i}\omega_{0i}\omega)^2}$$

ξ_0 و ω_0 مشخصات ستون خاک زمین

پاسخ سیستم SDOF تحت تاثیر نوفه سفید

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega$$

اگر نوفه سفید را برابر با S_0 برای شتاب زلزله در نظر بگیریم، آنگاه چگالی طیفی $m\ddot{x}_g(t)$ خواهد شد: $m^2 S_0$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \left| \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega\omega_n} \right|^2 d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0}{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}\,d\omega$$

$$\underset{\text{انتگرال استاندارد}}{=} \frac{S_0 \pi}{2\xi\omega_n^3}$$

پاسخ سیستم SDOF تحت چگالی طیفی کانای-تاجیمی

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{x}_g}(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \frac{\omega_0^4 + 4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2} \times \frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}\,d\omega$$

$$= S_0 \pi \frac{N'}{D}$$

$$N' = 2\omega_0^3 \left[\xi_0\omega_0^2 + \xi\omega_0\omega_n + 4\xi\xi_0^2\omega_0\omega_n + 4\xi_0^3\omega_n^2\right]$$

$$D = 4\omega_0\omega_n\xi\xi_0 \left\{\omega_0^4 + \omega_n^4 + 2\omega_0\omega_n\left[2\xi\xi_0(\omega_0^2+\omega_n^2) - \omega_0\omega_n(1 - 2\xi^2 - 2\xi_0^2)\right]\right\}$$

ξ_0 : مربوط به زمین

ξ : مربوط به سازه

ضرایب لعج [illegible]

$$S_d^2 = C_d^2\, E[y^2] = C_d^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, |H(\omega)|^2\, d\omega$$

$$S_v^2 = C_v^2\, E[\dot{y}^2] = C_v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, \omega^2\, |H(\omega)|^2\, d\omega$$

$$S_a^2 = C_a^2\, E[\ddot{y}^2] = C_a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, \omega^4\, |H(\omega)|^2\, d\omega$$

اغلب در محاسبات ضرایب لعج را ثابت در نظر می‌گیریم.

سیستم های چند درجه آزادی :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\}+[C]\{\dot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=\{0\}\,p(t)=-[M]\{r\}\ddot{x}_g(t)$$

Assume: $\{y(t)\}=[\phi']\{V(t)\}$ $\xrightarrow[\text{و پیش ضرب در } [\phi']^T]{\text{جایگزینی در رابطه فوق}}$

$$\Rightarrow M_j\ddot{V}_j(t)+C_j\dot{V}_j(t)+K_jV_j(t)=L'_j\,\cancel{p(t)}$$

where $L'_j=-[\phi']^T[M]\{r\}\ddot{x}_g(t)$

$$M_j=\{\phi'_j\}^T[M]\{\phi'_j\}$$

$$K_j=\{\phi'_j\}^T[K]\{\phi'_j\}=\omega_j^2 M_j$$

$$C_j=\{\phi'_j\}^T[C]\{\phi'_j\}$$

$$L'_j=\{\phi'_j\}^T\{0\}=\gamma'_j M_j$$

ضریب شرکت نیروی وارده در مود j ام

اگر فرض کنیم $\{\phi_j\}=\frac{1}{\sqrt{M_j}}\{\phi'_j\}$ آنگاه خواهیم داشت :

$$\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_j\}=1\quad,\quad K_j=\omega_j^2$$

$$C_j=2\xi_j\omega_j$$

$$\gamma_j=\{\phi_j\}^T\{0\}$$

ضریب شرکت مود j ام $\gamma_j=\gamma'_j\sqrt{M_j}$

$$\Rightarrow \ddot{V}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{V}_j(t) + \omega_j^2 V_j(t) = \gamma_j P(t)$$

$$\gamma_j = -\{\phi_j\}^T [M]\{r\}$$ در مورد زلزله

$$= -\sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{ij} r_i$$

$$\underset{\text{در زلزله}}{=} -\sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{ij}$$

$$\Rightarrow V_j(t) = \int_0^t \gamma_j P(\tau) h_j(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \gamma_j \ddot{x}_g(\tau) h_j(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \{y(t)\} = \{\phi_1\} V_1 + \{\phi_2\} V_2 + \cdots + \{\phi_N\} V_N = \sum_{j=1}^{N} \{\phi_j\} V_j(t)$$

$$\Rightarrow y_i(t) = \phi_{i1} V_1 + \phi_{i2} V_2 + \cdots + \phi_{ij} V_j = \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij} V_j(t)$$

$$\Rightarrow y_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \phi_{ij} \int_0^t \underbrace{P(\tau)}_{-\ddot{x}_g(t)} h_j(t-\tau)\, d\tau$$

برای زلزله

در حالت کلی :

$$R(t) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \psi_j \int_0^t P(\tau) h_j(t-\tau)\, d\tau$$

تحلیل ترکیب پاسخ MDOF

$$E[R(t_1)R(t_2)] = E\left[\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \psi_j \int_0^{t_1} p(\tau_1)\, h_j(t_1-\tau_1)\, d\tau_1 \times \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \psi_k \int_0^{t_2} p(\tau_2)\, h_k(t_2-\tau_2)\, d\tau_2\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} E[p(\tau_1)\, p(\tau_2)]\, h_j(t_1-\tau_1)\, h_k(t_2-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{i\omega(\tau_2-\tau_1)}\, h_j(t_1-\tau_1)\, h_k(t_2-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2\right] d\omega\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{i\omega(t_2-t_1)}\, d\omega \int_0^{t_1} h_j(t_1-\tau_1)\, e^{i\omega(t_1-\tau_1)}\, d\tau_1 \int_0^{t_2} h_k(t_2-\tau_2)\, e^{-i\omega(t_2-\tau_2)}\, d\tau_2\right]$$

$$\Rightarrow E[R^2] = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, H_j^*(\omega)\, H_k(\omega)\, d\omega$$

$$\Rightarrow E[R^2] = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^2 \psi_j^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, |H_j(\omega)|^2\, d\omega + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \underbrace{\left[H_j(\omega) H_k^*(\omega) + H_j^*(\omega) H_k(\omega)\right]}_{A} d\omega$$

$$A = \left[H_j(\omega)\, H_k^*(\omega)\, \frac{H_j^*(\omega)\, H_k(\omega)}{H_j^*(\omega)\, H_k(\omega)} + H_j^*(\omega)\, H_k(\omega)\, \frac{H_j(\omega)\, H_k^*(\omega)}{H_j(\omega)\, H_k^*(\omega)} \right]$$

$$= |H_j(\omega)|^2\, |H_k(\omega)|^2 \underbrace{\left[\frac{1}{H_j^*(\omega)\, H_k(\omega)} + \frac{1}{H_j(\omega)\, H_k^*(\omega)} \right]}_{2N(\omega)}$$

$$\Rightarrow A = 2N(\omega)\, |H_j(\omega)|^2\, |H_k(\omega)|^2$$

where $$|H_j(\omega)|^2 = \frac{1}{\left[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_j^2 \omega^2\right]}$$

$$N(\omega) = (\omega_j^2 - \omega^2)(\omega_k^2 - \omega^2) + 4\zeta_j \zeta_k \omega_j \omega_k \omega^2$$

$$N(\omega)\,|H_j(\omega)|^2\,|H_k(\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2\left(\omega_j^2 + \omega_k^2 - 4\zeta_j\zeta_k\omega_j\omega_k\right) + \omega_j^2\omega_k^2}{\left[(\omega_j^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_j^2\omega_j^2\omega^2\right]\left[(\omega_k^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_k^2\omega_k^2\omega^2\right]}$$

$$= \frac{A_{jk} + B_{jk}\,\omega^2}{\left[(\omega_j^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_j^2\omega_j^2\omega^2\right]} + \frac{C_{jk} + D_{jk}\,\omega^2}{\left[(\omega_k^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_k^2\omega_k^2\omega^2\right]}$$

where

$$\begin{bmatrix} 1 & u-s & 1 \\ u & 1-t & s \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{jk} \\ \bar{B}_{jk} \\ C_{jk} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -(1+r^2-4\zeta_j\zeta_k r) \\ r^2 \end{Bmatrix}$$

$$B_{jk} = \frac{\bar{B}_{jk}}{\omega_k^2}, \quad D_{jk} = -B_{jk}$$

$$r = \frac{\omega_j}{\omega_k}, \quad u = -2(1-2\zeta_k^2)$$

$$s = -2r^2(1-2\zeta_j^2)$$

$$t = r^4$$

$$C_{jk} = \frac{(1-r^2)(1-t) + (u-s)(1+r^2-4\zeta_j\zeta_k r + ur^2)}{(1-t)^2 + (s-u)(s-ut)}$$

$$A_{jk} = r^2 - t\,C_{jk}$$

$$\bar{B}_{jk} = \frac{1 - A_{jk} - C_{jk}}{u-s}$$

$$E[R^2] = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^2 \psi_j^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, |H_j(\omega)|^2 d\omega \quad \mathrm{I}_1$$

$$+2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{k=j+1 \\ j \neq k}}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, N(\omega)\, |H_j(\omega)|^2 |H_k(\omega)|^2 d\omega \quad \mathrm{II}_2$$

اثر همبستگی بین مودها
(ضریب‌ها اثر همبستگی دارند)

$$\Rightarrow E[R^2] = \sum_{j=1}^{N} R_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{k=j+1 \\ j \neq k}}^{N} R_{jk}$$

$$\Rightarrow RMS(R) = \sqrt{E[R^2]}$$

نکته: اگر مودها از یکدیگر مستقل باشند، ترم ΣΣ برابر صفر است.

اگر پریود مودها (فرکانس مودها) نزدیک به هم باشند، همبستگی آنها زیاد خواهد بود و ترم ΣΣ قابل توجه است.

" " دور " " کم " " کم " "

لذا این یک قانون سرانگشتی!

if $0.9 < \frac{\omega_j}{\omega_k} < 1.1 \Longrightarrow$ مودها همبسته اند

$\frac{\omega_j}{\omega_k} < 0.3 \Longrightarrow$ مودها کاملاً مستقل اند. $\Longrightarrow$ ترم ΣΣ قابل صرف‌نظر است

قدیم‌ها از ترم ΣΣ صرف‌نظر می‌شد، چون اغلب تحلیل سازه‌ها دو بعدی بود. و به این روش SRSS می‌گفتند.

Square-Root-of-the-Sum-of-the-Squares

$S_d^2(\omega_j,\zeta_j) = C_d^2\, I_1(\omega_j,\zeta_j) \leftarrow$ Cd گذوئیه

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, N(\omega)\, |H_j(\omega)|^2 |H_k(\omega)|^2\, d\omega$$

باید تجزیه شود

$$N(\omega)\, |H_j(\omega)|^2 |H_k(\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2(\omega_j^2 + \omega_k^2 - 4\zeta_j\zeta_k\,\omega_j\omega_k) + \omega_j^2\omega_k^2}{\left[(\omega_j^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_j^2\,\omega_j^2\omega^2\right]\left[(\omega_k^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_k^2\,\omega_k^2\omega^2\right]}$$

$$= \frac{A_{jk} + B_{jk}\,\omega^2}{\left[(\omega_j^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_j^2\omega_j^2\omega^2\right]} + \frac{C_{jk} + D_{jk}\,\omega^2}{\left[(\omega_k^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_k^2\omega_k^2\omega^2\right]}$$

$$\Rightarrow I_3 = A_{jk} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, |H_j(\omega)|^2 d\omega}_{I_1(\omega_j,\zeta_j)} + B_{jk} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\times\omega^2 |H_j(\omega)|^2 d\omega}_{I_2(\omega_j,\zeta_j)}$$

$$+ C_{jk} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) |H_k(\omega)|^2 d\omega}_{I_1(\omega_k,\zeta_k)} + D_{jk} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\times\omega^2 |H_k(\omega)|^2 d\omega}_{I_2(\omega_k,\zeta_k)}$$

۵

$$\Rightarrow E[R^2] = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^2 \psi_j^2 I_1(\omega_j,\zeta_j) + 2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{\substack{k=j+1 \\ j\neq k}}^{N} \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k$$

$$\times \left[A_{jk} I_1(\omega_j,\zeta_j) + B_{jk} I_2(\omega_j,\zeta_j) + C_{jk} I_1(\omega_k,\zeta_k) + D_{jk} I_2(\omega_k,\zeta_k) \right]$$

$I_1 = \left(\frac{S_d}{C_d}\right)^2$, $I_2 = \left(\frac{S_v}{C_v}\right)^2$, $E[R^2] = \frac{R_D^2}{C_R^2}$

$$\Rightarrow R_D^2 = C_R^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \psi_j S_d(\omega_j,\zeta_j) / C_d \right]^2 + 2\sum\sum \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \right.$$

$$\left. \times \left[A_{jk} S_d^2(\omega_j,\zeta_j)/C_d^2 + B_{jk} S_v^2(\omega_j,\zeta_j)/C_v^2 + C_{jk} S_d^2(\omega_k,\zeta_k)/C_d^2 + D_{jk} S_v^2(\omega_k,\zeta_k)/C_v^2 \right] \right\}$$

الف

با فرض اینکه $C_d = C_v = C_R$ باشد داریم :

$$R_D^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\gamma_j \psi_j S_d(\omega_j,\zeta_j) \right]^2 + 2\sum\sum \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k \times$$

$$\left[A_{jk} S_d^2(\omega_j,\zeta_j) + B_{jk} S_v^2(\omega_j,\zeta_j) + C_{jk} S_d^2(\omega_k,\zeta_k) \right.$$

$$\left. + D_{jk} S_v^2(\omega_k,\zeta_k) \right]$$

ب

به صورت خلاصه‌تر رابطه طیف شتاب خواهد شد:

$$R_D^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\gamma_j \psi_j}{\omega_j^2} S_a(\omega_j, \xi_j) \right]^2 + 2 \sum \sum \gamma_j \gamma_k \psi_j \psi_k$$

$$\times \left[\left(\frac{A_{jk}}{\omega_j^4} + \frac{B_{jk}}{\omega_j^2} \right) S_a^2(\omega_j, \xi_j) + \left(\frac{C_{jk}}{\omega_k^4} + \frac{D_{jk}}{\omega_k^2} \right) S_a^2(\omega_k, \xi_k) \right] \quad (ج)$$

ضریب همبستگی مودها:

$$\rho_{jk} = \frac{\omega_k^2 \left(\frac{A_{jk}}{\omega_j^2} + B_{jk} \right) S_a^2(\omega_j, \xi_j) + \omega_k^2 \left(\frac{C_{jk}}{\omega_k^2} - B_{jk} \right) S_a^2(\omega_k, \xi_k)}{S_a(\omega_j, \xi_j)\, S_a(\omega_k, \xi_k)}$$

جمله دوم $\sum\sum$ مربوط به همبستگی مودها است لذا،

$$\rho_{jk} = \frac{E[R_j(t) R_k(t-\tau)]}{\sigma_j \sigma_k} = \frac{R_{jk}}{R_j R_k}$$

با استفاده از رابطه (الف) و (ب) و اینکه $D_{jk} = B_{jk}$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\rho_{jk} = \frac{A_{jk} S_d^2(\omega_j, \xi_j) + B_{jk} S_v^2(\omega_j, \xi_j) + C_{jk} S_d^2(\omega_k, \xi_k) - B_{jk} S_v^2(\omega_k, \xi_k)}{S_d(\omega_j, \xi_j)\, S_d(\omega_k, \xi_k)}$$

و فرم ساده‌تر آن رابطه شتاب طیفی به صورت ذیل است:

این غلط بوده.

P_{jk} ضریب همبستگی مودهای j و K می‌باشد که ~~مستقل از شکل مود~~ و برای همه انواع بارگذاری یکی است.

و بستگی به فرکانس، میرایی و محتوای طیف بار مربوط به مودهای j و K می‌باشد.

اگر فرآیند نوفه سفید باشد:

$$P_{jk} = \left[\zeta_k \omega_k^3 \left(A_{jk} + \omega_j^2 B_{jk} \right) + \zeta_j \omega_j^3 \left(C_{jk} - \omega_k^2 B_{jk} \right) \right]$$

در دهه ۵۰ و ۶۰ اغلب تحلیل‌ها بدون درنظرگرفتن اثر تداخل مودها بوده است. ولی کم‌کم با گسترش روشهای تحلیل سازه‌ای اهمیت و ضرورت محاسبه این اثر روشن شد. لذا روش طیفی گسترش یافت.

روش روزنبلوث و ~~[illegible]~~ الدردی

اولین محققینی بودند که ترکیبی قابل توجهی در این زمینه ارائه کردند که به

DSC (Double Sum Combination)

معروف است .

براساس رابطه (ج)

$$R_D^2 = \sum_{j=1}^{N} R_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \rho_{jk} R_j R_k$$

تحقیقات زیادی انجام شده که ρ_{jk} بصورت مستقل از نوع فرکانس ورودی محاسبه شود. بدین منظور روزنبلوث و الدردی با فرض فرکانس نوفه سفید ضریب ρ_{jk} بصورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\rho_{jk} = \left[1 + \left\{ \frac{\omega'_j - \omega'_k}{\xi'_j \omega_j + \xi'_k \omega_k} \right\}^2 \right]^{-1}$$

where $\omega'_j = \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}$ و $\xi'_j = \xi_j + \frac{2}{S\omega_j}$

$\omega'_k = \omega_k \sqrt{1-\xi'^2_k}$ و $\xi'_k = \xi_k + \frac{2}{S\omega_k}$

S : مدت زمان (ثانیه) معادل طیف نوفه سفید برای قسمت بزرگ زلزله است . به عبارتی معادل فاصله زمانی است که موج تقریباً دارای شدت یکسان است .

مثلاً برای زلزله السنترو $S = 24.5$ ث

Complete Quadratic Combination   روش CQC

در سال ۱۹۸۱، درکورکیان ⊙ به سرپرستی ویلسون روش جمع مربعات (CQC) را ارائه نمودند.

$$R(t)=\sum_{j=1}^{N}\psi_j\, V_j(t)=-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\,\psi_j\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, h_j(t-\tau)\, d\tau$$

پس از حل مسئله با خود همبستگی و عملیات ریاضی به قرار زیر:

$$E[R^2]=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_j\gamma_k\,\psi_j\psi_k\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\,H_j(\omega)\,H_k^{*}(\omega)\,d\omega$$

$$=\rho_{jk}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\,|H_j(\omega)|^2 d\omega\times\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\,|H_k(\omega)|^2 d\omega\right]^{1/2}$$

$$=\rho_{jk}\left[I_1(\omega_j,\xi_j)\times I_1(\omega_k,\xi_k)\right]^{1/2}$$

با اعمال طیف پاسخ:

$$R_D^2=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_j\gamma_k\,\psi_j\psi_k\,\rho_{jk}\,\underbrace{S_d(\omega_j,\xi_j)}_{R_j}\,S_d(\omega_k,\xi_k)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_{jk}R_jR_k$$

where $R_j=\gamma_j\,\psi_j\,S_d(\omega_j,\xi_j)=\frac{1}{\omega_j^2}\gamma_j\,\psi_j\,S_a(\omega_j,\xi_j)$ (از طیف طرح)

$R_k=$ ----

با فرض فرکانس نرمال شده ... که

$$\rho_{jk}=\frac{8\sqrt{\xi_j\xi_k r^3}\,(\xi_j+\xi_k r)}{(1-r^2)^2+4\xi_j\xi_k\, r(1+r^2)+4(\xi_j^2+\xi_k^2)r^2}\quad \& \quad r=\frac{\omega_k}{\omega_j}$$

اگر $\xi_k=\xi_j=\xi$ آنگاه:

$$\rho_{jk}=\frac{8\xi^2 r^{3/2}(1+r)}{(1-r^2)^2+4\xi^2 r(1+r)^2}$$

۹

$$\text{if } r = 1 \implies \rho_{ij} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{if } r < 0.67 \\ \quad \text{or} \\ r < \dfrac{0.2}{\zeta_j + \zeta_k + 0.2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

می‌توان کلیه اثرات متقابل
مودها را صرف‌نظر کرد.

Humar شوبکی

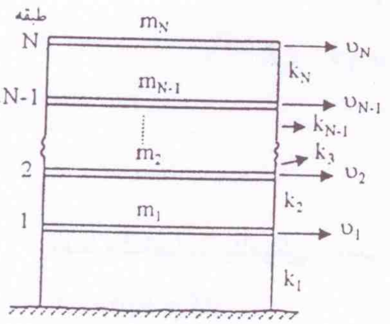
Grupta & ...

* چند صفحه مربوط به روش خودم را کپی نمایم ۲۸...

* مثال ملدینگ ۳ طبقه برای

گفته شود.

ماتریسهای جرم و سختی و میرایی ساختمان برشی و پیچشی

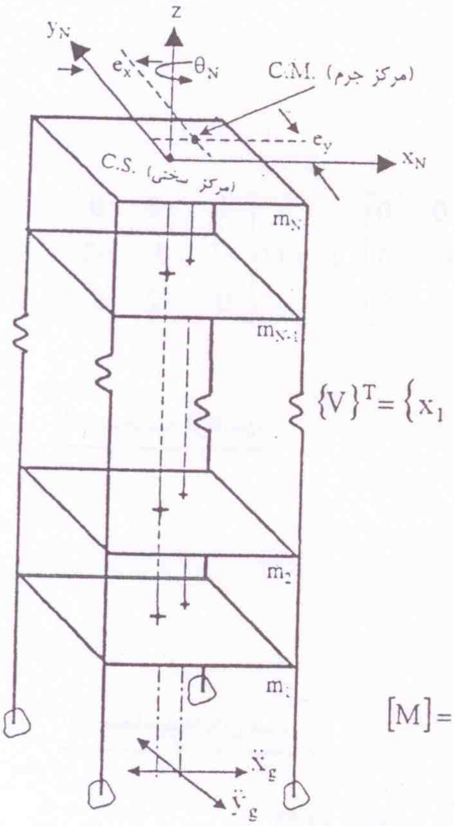


ساختمان برشی: هر طبقه دارای یک درجه آزادی (υ_i) که تغییرمکان طبقه i نسبت به فونداسیون می‌باشد.

$$\underset{(N\times N)}{[K]}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & & & \bigcirc \\ & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & & \\ & & k_3+k_4 & -k_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & \text{Sym.} & & & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ & & & & & k_N \end{bmatrix}$$

$$\underset{(N\times N)}{[M]}=\begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{N-1} & \\ 0 & & & & m_N \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم قطری می‌باشد.



ساختمان پیچشی: هر طبقه دارای سه درجه آزادی x_i ، y_i و θ_i می‌باشد (شکل مقابل):

$\{V\}$= بردار تغییرمکان درجات آزادی سیستم: $\{V\}^T=\{x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 | x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 | \cdots \quad x_N \quad y_N \quad \theta_N\}^T$

ماتریس جرم [M]:

با فرض متمرکز بودن جرم سازه در طبقات، ماتریس جرم سیستم قطری خواهد بود.

$$\underset{(3N\times 3N)}{[M]}=\begin{bmatrix} m_1 & & & & & & \\ & m_1 & & & \bigcirc & & \\ & & m_1 r_1^2 & & & & \\ & & & m_2 & & & \\ & \bigcirc & & & m_2 & & \\ & & & & & m_2 r_2^2 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

m_i= جرم طبقه i ام

$I_i = m_i r_i^2$= ممان اینرسی طبقه i ام

r_i= شعاع جیراسیون طبقه i ام

ماتریس سختی [K]:

$$\underset{(3N\times 3N)}{[K]}=\begin{bmatrix} K^1+K^2 & -K^2 & 0 & & \bigcirc \\ & K^2+K^3 & -K^3 & & \\ & & \ddots & & \\ & \text{Sym} & & K^{N-1}+K^N & -K^N \\ & & & & K^N \end{bmatrix};$$

$$\underset{3\times 3}{[K^i]}=\left[\begin{array}{c:c:c} k_{x_i} & 0. & -(e_{y_i} k_{x_i}) \\ \hdashline 0. & k_{y_i} & +(e_{x_i} k_{y_i}) \\ \hdashline -(e_{y_i} k_{x_i}) & (e_{x_i} k_{y_i}) & (k_{\theta_i} + e_{x_i}^2 k_{y_i} + e_{y_i}^2 k_{x_i}) \end{array}\right] \quad ; \quad e_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} k_{y_{ij}} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} k_{y_{ij}}}$$

بردار ضریب تأثیر زلزله

$$\{r_x\}^i = \{1 \quad 0 \quad 0\}^T \quad ; \quad \{r_y\}^i = \{0 \quad 1 \quad 0\}^T$$

$$k_{\theta_i} = \sum_{j=1}^{n} k_{x_{ij}} y_{ij}^2 + k_{y_{ij}} x_{ij}^2$$

x_{ij}= فاصله ستون j در طبقه i از محور مختصات در جهت x ; n = تعداد ستونهای در یک طبقه

ماتریس میرایی [C]:

ماتریس میرایی از نظر فرم، شبیه ماتریس سختی می‌باشد. با این تفاوت که مقادیر c_{x_i}، c_{y_i} و c_{θ_i} جایگزین مقادیر k_{x_i}، k_{y_i} و k_{θ_i} می‌شوند.

$$c_{x_i} = 2\zeta_{x_i}\sqrt{k_{x_i} m_i} \quad ; \quad c_{y_i} = 2\zeta_{y_i}\sqrt{k_{y_i} m_i} \quad ; \quad c_{\theta_i} = 2\zeta_{\theta_i}\sqrt{k_{\theta_i} I_i}$$

که در آن ζ_x و ζ_y = ضرایب میرایی‌سیستم در جهت x و y هر طبقه است.

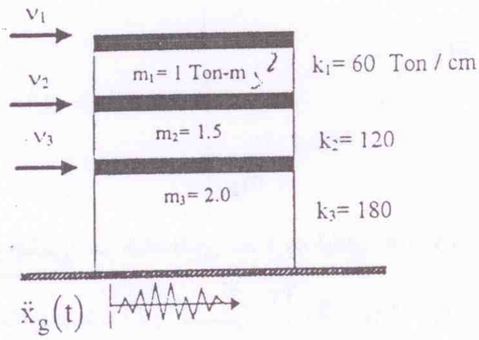
$\omega_1 = 7.04$
$\omega_2 = 19.72$
$\omega_3 = 28.49$

روش محاسبه دینامیکی
(پاسخ طیفی)

الف: مشخصات دینامیکی سیستم

۱- معادله حرکت

$$[M]\{\ddot{V}\}+[K]\{V\}=-[M]\{1\}\ddot{X}_g(t)$$



$$M=\begin{bmatrix}1.0&0&0\\0&1.5&0\\0&0&2\end{bmatrix},\ K=60\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&3&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$$

۲- محاسبه فرکانسها

$$\text{Det.}\left[K-\omega^2 M\right]=0 \Rightarrow \begin{array}{lcl}\omega_1=4.58\ \text{rad/sec.} & & T_1=1.37\ \text{sec.}\\ \omega_2=9.82\ \text{rad/sec.} & \rightarrow & T_2=.640\ \text{sec.}\\ \omega_3=14.59\ \text{rad/sec.} & & T_3=.431\ \text{sec.}\end{array}$$

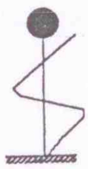
$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

۳- محاسبه اشکال مود

مود ۱ $\omega_1 = 4.58$ مود ۲ $\omega_2 = 9.82$ مود ۳ $\omega_3 = 14.59$

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}1.0\\.644\\.30\end{Bmatrix}$$

$$\phi_2=\begin{Bmatrix}1.0\\-.601\\-.676\end{Bmatrix},$$



$$\phi_3=\begin{Bmatrix}1.0\\-2.57\\2.47\end{Bmatrix}$$

٤- محاسبه جرم مودی (M_n)

$$M_1=\phi_1^T M\phi_1=\sum_{i=1}^{3} m_i\phi_{1i}^2=1\times(1)^2+1.5\times(.644)^2+2\times(.3)^2=1.802$$

$(\phi, \phi, m = \begin{pmatrix}30 & & \\ & 30 & \\ & & 30\end{pmatrix}$

$$M_2=1\times(1)^2+1.5(-.601)^2+2(-.676)^2=2.456$$

$$M_3=23.10$$

٥- محاسبه ضریب تاثیر زلزله در هر مود

$$\gamma_n=\frac{L_n}{M_n},\quad L_n=\{\phi_n\}^T[M]\{1\}=\sum_{i=1}^{3} m_i\phi_{ni}$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^{3} m_i\,\phi_{1i} = 1\times 1 + 1.5\times .644 + 2\times .3 = 2.566 \rightarrow \gamma_1 = \frac{2.566}{1.802} = 1.425$$

$$L_2 = -1.254 \quad \rightarrow \quad \gamma_2 = \frac{-1.254}{2.455} = -0.51$$

$$L_3 = 2.08 \quad \rightarrow \quad \gamma_3 = \frac{2.08}{23.10} = 0.09$$

درساختمان برشی $\sum \gamma_i = 1$

جرم موثر مودی که بیانگر تاثیر مودها نیز می باشد به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\overline{M}_n = \frac{L_n^2}{M_n} = L_n \gamma_n$$

$$\overline{M}_1 = 3.656 \;,\; \overline{M}_2 = 0.641 \;,\; \overline{M}_3 = 0.188 \;,\; \sum \overline{M}_n = 4.485 \approx \sum m_n = 4.5$$

مجموع جرم موثر مودی برابر با مجموع جرم سازه است $\quad \sum \overline{M}_n = \sum m_n$

• مشاهده می شود که ضریب تاثیر زلزله یا جرم موثر در مودهای بالا کاهش پیدا می کند. به عبارتی تاثیر مودهای بالا در پاسخ قابل صرفنظر کردن است. در ساختمانهای برشی جمع ضرایب تاثیر مودها ($\sum \gamma_i$) برابر با یک است.

بنابراین معیار در نظر گرفتن تعداد مودها در محاسبات پاسخ مقدار γ_n یا M_n است. تعداد مودها طوری انتخاب می شود که دربرگیرنده ۹۰ تا ۹۵ درصد جرم کل سازه ($\sum \overline{M}_n = ۰,۹ \sum m_n$) باشد یا مودهایی حذف می گردد که ضریب تاثیر مود در مقایسه با دیگر ضرایب تاثیر قابل صرف نظر کردن باشد.

۶- محاسبه پاسخ مودی

الف – تغییر مکان

$$\upsilon_n = \phi_n \gamma_n S_{dn} = \phi_n \gamma_n \frac{S_{vn}}{\omega_n} = \phi_n \gamma_n \frac{S_{an}}{\omega_n^2}$$

مقادیر طیف بستگی به فرکانس و ضریب میرایی دارد. لذا باید ضریب میرایی مناسب سازه انتخاب شود. اگر ضریب میرایی ۵٪ فرض شود مقادیر طیف تغییرمکان خواهند شد:

$$\omega_1 = .73\ HZ \quad \Rightarrow S_{d_1} = 17cm \;,\; S_{v_1} = 78\,cm/sec \;,\; S_{a_1} = 357\,cm/sec^2$$

$$\omega_2 = 1.56\ HZ \quad \Rightarrow S_{d_2} = 7cm \;,\; S_{v_2} = 68.7\,cm/sec \;,\; S_{a_2} = 675\,cm/sec^2$$

$$\omega_3 = 2.32\ HZ \quad \Rightarrow S_{d_3} = 5cm \;,\; S_{v_3} = 73\,cm/sec \;,\; S_{a_3} = 1065\,cm/sec^2$$

مود ۱

$$\upsilon_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ .644 \\ .3 \end{Bmatrix} (1.425)\,(17) = \begin{Bmatrix} 24.2 \\ 15.6 \\ 7.3 \end{Bmatrix}$$

مود ۲

$$\upsilon_2 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -.601 \\ -.676 \end{Bmatrix} (-.51)\,(7) = \begin{Bmatrix} -3.57 \\ 2.15 \\ 2.41 \end{Bmatrix}$$

مود ۳

$$\upsilon_3 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} (.09)\,(5) = \begin{Bmatrix} .45 \\ -1.16 \\ 1.11 \end{Bmatrix}$$

محاسبه تغییرمکان با روش ترکیب مودها

روش ABS: جمع قدر مطلق پاسخ هر مود (اعداد واقعی نیستند)

تغییرمکان طبقه بالا

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{3} |\upsilon_i| = \begin{Bmatrix} 28.2 \\ 18.9 \\ 10.82 \end{Bmatrix}$$

روش SRSS: جذر مجموع مربع پاسخ مودها

$$\upsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \upsilon_i^2} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2}$$

$$\upsilon^2 = \begin{Bmatrix} 24.2 \\ 15.6 \\ 7.3 \end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix} -3.57 \\ 2.15 \\ 2.41 \end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix} .45 \\ -1.16 \\ 1.11 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} 599 \\ 249 \\ 60 \end{Bmatrix} \Rightarrow \upsilon = \begin{Bmatrix} 24.4 \\ 15.8 \\ 7.76 \end{Bmatrix}$$

ب- نیروهای جانبی و برشی طبقات

۷- شکل مود نیروی جانبی

$$\phi_{s1} = K\phi_1 = 60\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ .644 \\ .3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21.36 \\ 19.92 \\ 12.72 \end{Bmatrix}$$

شکل مود نیروی جانبی طبقه اول (طبقه بالا)

$$\phi_{b1} = 54.00$$

شکل مود ۱ نیروی برشی پایه

$$\phi_{s2} = K\phi_2 = \begin{Bmatrix} 96.1 \\ -87.1 \\ -131 \end{Bmatrix}$$

شکل مود ۲ نیروی برشی پایه $\phi_{b2} = -121.7$

$$\phi_{s3} = K\phi_3 = \begin{Bmatrix} 214 \\ -819 \\ 1049 \end{Bmatrix}$$

شکل مود ۳ نیروی برشی پایه $\phi_{b3} = 444.6$

۸- پاسخ مودی نیروهای جانبی و برشی

$$f_{sn} = \phi_{sn}\,\gamma_n\,S_{dn}$$

$$f_{s1} = \begin{Bmatrix} 21.36 \\ 19.92 \\ 12.72 \end{Bmatrix} \times 1.425 \times 17 = \begin{Bmatrix} \overset{517.45}{\cancel{96.3}} \\ \cancel{-369}\ 483 \\ \cancel{472}\ 308 \end{Bmatrix}$$

$$f_{b1} = 1308$$

$$f_{s2}=\begin{Bmatrix}-343\\311\\+468\end{Bmatrix}\ ,\ \underline{f_{b2}=434.6}\quad ;\qquad f_{s3}=\begin{Bmatrix}96.3\\-369\\472\end{Bmatrix}\ ,\ \underline{f_{b3}=200}$$

روش ABS

$$f_s=\sum_{n=1}^{3}\left|f_{sn}\right|=\begin{Bmatrix}517+343+96\\483+311+369\\308+468+472\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}956\\1163\\1248\end{Bmatrix}$$

برش پایه $V=1308+434.6+200=1942.6$

روش SRSS

$$f_s=\sqrt{\sum f_{sn}^2}=\begin{Bmatrix}517^2+343^2+96^2\\483^2+311^2+369^2\\308^2+468^2+972^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}627\\682\\732\end{Bmatrix}$$

$$V=\sqrt{1308^2+434.6^2+200^2}=1392$$

روش دقیق پاسخ طیفی

$$R_D^2=\sum R_j^2+2\sum_j\sum_k\gamma_j\gamma_k\ \psi_j\psi_k\left[A_{jk}S_{dj}^2+B_{jk}S_{vj}^2+C_{jk}S_{dk}^2+D_{jk}S_{vk}^2\right]$$

که در آن R_j برابر پاسخ مودی کمیت مورد نظر است و ضرایب A_{jk} تا D_{jk} با استفاده از رابطه (۷-۵۳) کتاب ارتعاشات پیشا برای محاسبه اثر اندرکنش بین مودها محاسبه می گردد.

$$\begin{bmatrix}1&u-s&1\\u&1-t&s\\1&0&t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{jk}\\\overline{B}_{jk}\\C_{jk}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-\left(1+r^2-4\xi_j\xi_k\,r\right)\\r^2\end{Bmatrix}\qquad \begin{aligned}B_{jk}&=\overline{B}_{jk}/\omega_k^2\\D_{jk}&=-B_{jk}\end{aligned}$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۱ و ۲

$$\omega_1=4.59\ ,\quad \omega_2=9.82\ ,\quad r=\omega_1/\omega_2=0.4674\ ,\quad r^2=.21851\ ,\quad \xi_1=\xi_2=0.05$$

$$u=-2\left(1-2\xi_2^2\right)=-1.99\quad s=-2r^2\left(1-2\xi_1^2\right)=-.4348\quad t=r^4=.0477$$

$$\left(1+r^2-4\xi^2r\right)=\left(1+.2185+4\times.0225\times.4674\right)=1.2231$$

$$\begin{bmatrix}1&-1.555&1\\-1.99&.9523&-.4348\\1&0&.0477\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{12}\\\overline{B}_{12}\\C_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1.2231\\.2185\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}A_{12}&=.2759\\\overline{B}_{12}&=-1.254\\C_{12}&=-1.234\end{aligned}$$

$$B_{12}=-1.254/(9.82)^2=-0.13\quad ,\quad D_{12}=-B_{12}=.013$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۱ و ۳

$$\omega_1 = 4.59\ ,\ \omega_3 = 14.59\ ,\ r = \omega_1/\omega_3 = 0.3146\ ,\ r^2 = 0.99\ ,\ \xi_1 = \xi_3 = .05$$

$$u = -1.99 \quad s = -0.197 \quad t = 0.0098 \quad , \quad \left(1 + r^2 - 4\xi^2 r\right) = +1.0958$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.793 & 1 \\ -1.99 & .9902 & -.197 \\ 1 & 0 & .0098 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{13} \\ \overline{B}_{13} \\ C_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.0958 \\ 0.099 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{13} = .109 \\ \overline{B}_{13} = -1.0645 \\ C_{13} = -1.086 \end{matrix}$$

$$B_{13} = -1.0645/(14.59)^2 = -.005 \quad , \quad D_{13} = .005$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۲ و ۳

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.09 & 1 \\ -1.99 & .795 & -.901 \\ 1 & 0 & .205 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{23} \\ \overline{B}_{23} \\ C_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.446 \\ .453 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{23} = .795 \\ \overline{B}_{23} = -1.724 \\ C_{23} = -1.668 \end{matrix}$$

$$B_{23} = -1.724/(14.59)^2 = -.0081 \quad , \quad D_{23} = .0081$$

برش پایه (V):

$$V^2 = \left[(1308)^2 + (434.6)^2 + (200)^2\right]$$

۱ و ۲ $\rightarrow$ $+2\Big\{ 1.425 \times .51 \times 54 \times 121.7 \left[.2759 \times (17)^2 - .013 \times (78)^2 - 1.234(7)^2 + .013(68.7)^2\right]$

۱ و ۳ $\rightarrow$ $+1.425 \times .09 \times 54 \times 444.6 \left[.109(17)^2 - .005(78)^2 - 1.086(5)^2 + .005(78)^2\right]$

۲ و ۳ $\rightarrow$ $+.51 \times .09 \times 121.7 \times 444.6 \left[.795(7)^2 - .008(68.7)^2 - 1.668(5)^2 + .008(78)^2\right]\Big\}$

$$1939741 + 2\{4776 \times 1.53 + 3079 \times 4.35 + 2483.55 \times 8.1695\}$$

$$V^2 = 1939741 + 2\{\cancel{7336 \times 1.536 + 815 \times .265 + 5295 \times 2.13}\}$$

$$1968169.91$$

$$V^2 = \cancel{1965604} \Rightarrow \underline{\underline{V = 1402}}$$

نیروی جانبی طبقه ۲

$$f_{s2}^2 = (682)^2 + 2(-5592) = 453940 \quad \Rightarrow \quad f_{s2} = 673.8$$

روش CQC

$$R_D^2 = \sum R_j^2 + 2\sum\sum \rho_{jk} R_j R_k$$

ضریب همبستگی مودها:

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2(1+r)\, r^{3/2}}{\left(1 - r^2\right)^2 + 4\xi^2 r\,(1+r)^2}$$

مود ۱ و ۲:

$$r = \omega_2/\omega_1 = 9.82/4.59 = 2.139$$

CQC $\rho_{12} = \dfrac{8(.05)^2(1+2.139)\ 2.139^{3/2}}{\left(1-2.139^2\right)^2 + .01\times 2.139(1+2.139)^2} = \dfrac{0.1964}{12.993} = 0.0151$

مود ۱ و ۳:

$r = \omega_3/\omega_1 = 3.1786$

$$\rho_{13} = \frac{A_{12}\ S_{d1}^2 + B_{12}\ S_{v1}^2 + C_{12}\ S_{d2}^2 + D_{12}\ S_{v2}^2}{S_{d_1}\ S_{d_2}}$$

$$= \frac{.2759(17)^2 - .013(78)^2 - 1.234(7)^2 + .013(68.7)^2}{17\times 7} = .012$$

[illegible] $\rho_{13} = \dfrac{.265}{17\times 5} = .003$

[illegible] $\rho_{23} = \dfrac{2.13}{7\times 5} = .067$

CQC $\rho_{23} = \dfrac{.02\ (4.1786)\ 3.1786^{3/2}}{\left(1-3.1786^2\right) + .031786(4.1786)^2} = \dfrac{0.474}{83.43} = .0056$

مود ۲ و ۳:

$r = \omega_3/\omega_2 = 1.4857$

CQC $\rho_{23} = \dfrac{.02\ (2.4857)\ 1.4857^{3/2}}{\left(1-1.4857^2\right)^2 + 0.14857\ (2.485.7)^2} = \dfrac{0.0900}{1.5494} = 0.058$

برش پایه (V)

$R_j = V_j$: $V_1 = 1308$, $V_2 = 434.6$, $V_3 = 200$

$$V^2 = \sum V_j^2 + 2\sum\sum \rho_{jk}\ V_j\ V_k$$

$$= \left[1308^2 + 434.6^2 + 200^2\right] + 2\{.0151\times 1308\times 434.6 + .0056\times 1308\times 200$$

$$+ .058\times 434.6\times 200\} = 1939741 + 15090 = 1954831$$

$\underline{V = 1398}$

نیروی جانبی طبقه ۲

$f_{s2}^2 = (682)^2 + (-5389) \Rightarrow \underline{\underline{f_{s2} = 678}}$

$$K_s = P\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k \psi_k}{\omega_k^2}$$

Seismograms

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \longleftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$F(\omega)$ را میشود به فرم ذیل هم نوشت :

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{i\phi(\omega)}$$

where $|F(\omega)| = [F(\omega) F^*(\omega)]^{1/2} = [Re^2(F(\omega)) + Im^2(F(\omega))]^{1/2}$

amplitude spectrum

$$\phi(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{Im(F(\omega))}{Re(F(\omega))}\right)$$

phase spectrum

خواص فوریه //

1) $F^*(\omega) = -F(\omega)$

2) تبدیل فوریه $(af(t) + bg(t)) = aF(\omega) + bG(\omega)$

3) if تبدیل فوریه $(f(t)) = F(\omega) \Rightarrow$ تبدیل فوریه $(f(t-a)) = e^{-i\omega a} F(\omega)$

4) $IFT(F(\omega - a)) = e^{iat} f(t)$ (shift theorems)

5) $FT\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = (i\omega) F(\omega)$ & $FT\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (i\omega)^n F(\omega)$

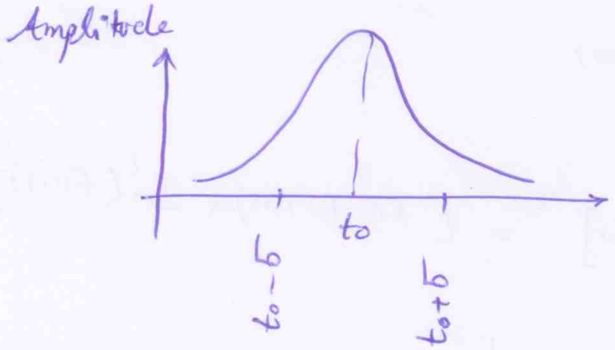
6) The total energy in a Fourier transform is the same as that in the time series:

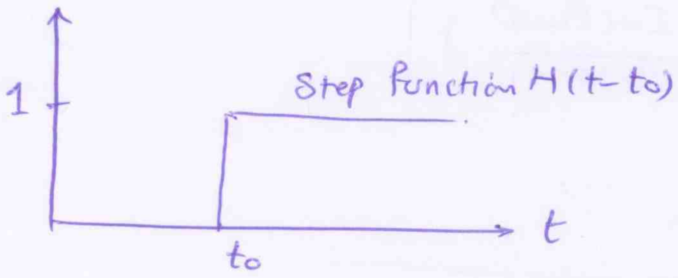
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \longleftarrow \text{Parseval's theorem}$$

Delta functions

$$\delta_{ij} = \text{Kronecker delta} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\delta(t-t_0) = \text{Dirac delta} = \begin{cases} 1 & t=t_0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$





Dirac function is defined as the limit of a Gaussian function that keeps the area Constant (=1) as the width (σ) narrows and the height $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ increases.

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2\right]$$

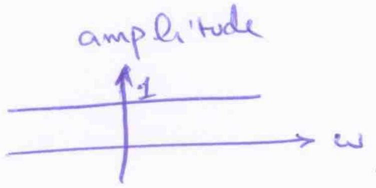
$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t-t_0)\, dt =$$ مقدار تابع در $t=t_0$

= "Sifting out"

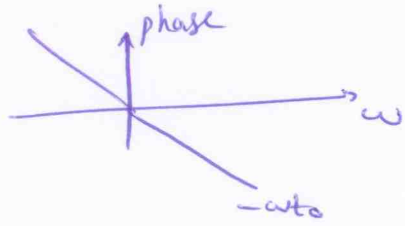
تعبیر دیگر این است ← $\delta(t-t_0)$ مشتق تابع $H(t-t_0)$ است.

$$FT(\delta(t-t_0)) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt = e^{-i\omega t_0}$$

for $\delta(t) \longrightarrow F(\omega) = 1$



for $\delta(t-t_0) \longrightarrow \begin{cases} |F(\omega)| = \left(e^{-i\omega t_0} \cdot e^{i\omega t_0} \right)^{1/2} = 1 \\ \phi(\omega) = -\omega t_0 \end{cases}$



* از خاصیت (۱۴) صفحه (۱) نیز می‌شد استفاده کرد.

به همین ترتیب می‌توان تابع $\delta(\omega-\omega_0)$ را در حوزه فرکانس تعریف کرد.

Linear Systems

سیستم خطی (مانند سیستم SDOF) است که ورودی $x(t)$ را به خروجی $y(t)$ تبدیل می‌کند.

Impulse $h(t)=\delta(t)$ $\longrightarrow$ $\boxed{L.S}$ $\longrightarrow$ $f(t)$ Impulsive response; $H(\omega)$ transfer function

Arbitrary $x(t)$ $\longrightarrow$ $\boxed{L.S}$ $\longrightarrow$ $y(t) = x(t) * f(t)$; $Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega) \\ y(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, H(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, e^{-i\omega\tau'}\, d\tau'\right] e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(\tau')\, \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau'-\tau)}\, d\omega\right]}_{\delta(t-\tau'-\tau)} d\tau\, d\tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, \delta(t-\tau'-\tau)\, d\tau'\right] d\tau$$

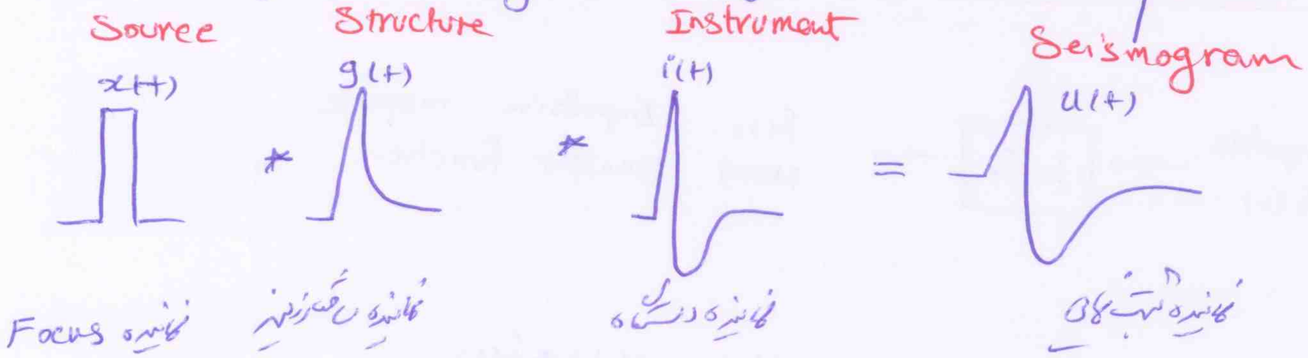
Sifting out $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \xrightarrow[\text{of the } x(t)\ \&\ h(t)]{\text{Convolution}}$

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

— یعنی تابع خروجی سیستم خطی ($y(t)$) برابر است با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه‌ای

— با توجه به آنکه از رابطه $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ به این نتیجه می‌رسیم که * در حوزه زمان = ضرب در حوزه فرکانس است و همچنین برعکس آن نیز صادق است.

If a signal $x(t)$ goes through two linear systems:



$$u(t) = x(t) * g(t) * i(t)$$

$\Rightarrow$

حال فرض کنید که تابع $f(t)$ را در یک بازه مشخص ضرب در $b(t)$ می‌کنیم (پنجره)

$\uparrow$ window function

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega'') e^{i\omega'' t} d\omega'' \right] e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega'') \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t + i\omega' t + i\omega'' t} dt \right\}}_{\delta(\omega - \omega' - \omega'')} d\omega'' \right] d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega'') \, \delta(\omega - \omega' - \omega'') d\omega'' \right] d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega') \, F(\omega - \omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} B(\omega) * F(\omega)$$

پس اثر ضرب در حوزه زمان = اثر کانولوشن در حوزه فرکانس

if $b(t) = \begin{cases} 1 & -T < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad B(\omega) = \int_{-T}^{+T} e^{-i\omega t}\, dt = \left. \frac{-e^{-i\omega t}}{i\omega} \right|_{-T}^{+T} = \frac{2T \sin \omega T}{\omega T}$$

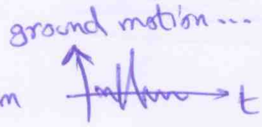
Seismometers and Seismological Networks

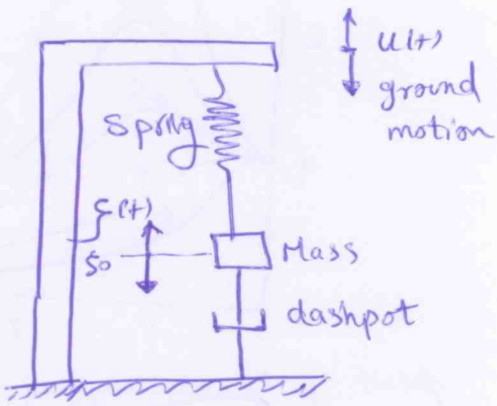
Seismograph

↓

three Seismometers ⟨ amplifying, timing, recording

↓

Seismogram 



* مانند چشم برخی از حیوانات است مانند چشم خرس که فقط نزدیک را می‌بیند یا چشم عقاب که دورها را می‌بیند. *

* حرکت جرم درون دستگاه ≠ حرکت زمین بلکه تابع یک سیستم یک درجه آزادی است.

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left[\xi(t)+u(t)\right]+d\,\frac{d\xi(t)}{dt}+k\left[\xi(t)-\xi_0\right]=0$$

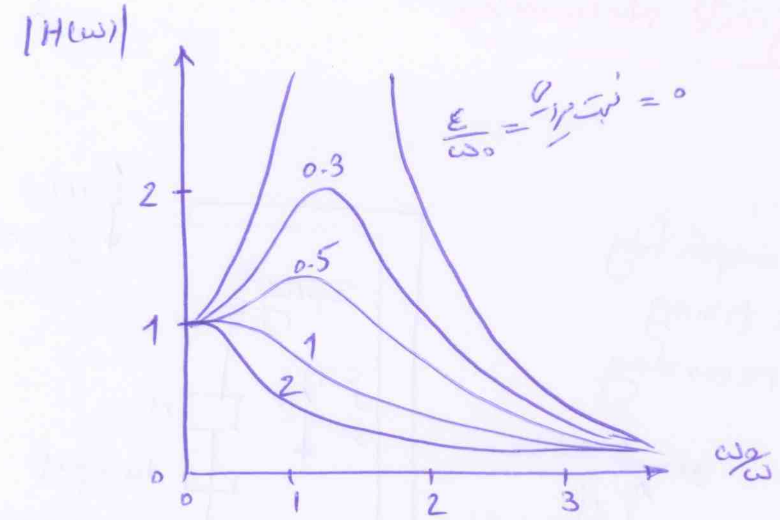
$\xi_0=0 \Longrightarrow \quad m\ddot{\xi}+d\dot{\xi}+k\xi=-m\ddot{u} \quad$ or $\quad \ddot{\xi}+2\varepsilon\dot{\xi}+\omega_0^2\xi=-\ddot{u}(t) \quad \& \quad \omega_0=\sqrt{k/m}$

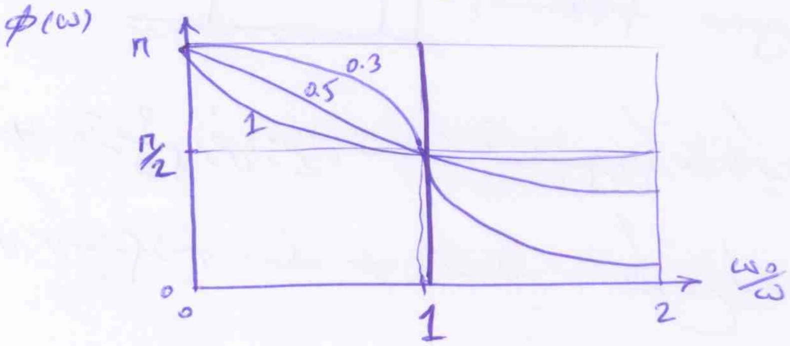
$$\varepsilon=\frac{d}{2m}$$

if $u(t)=e^{-i\omega t} \Longrightarrow \xi(t)=H(\omega)\,u(t)=H(\omega)\,e^{-i\omega t}$

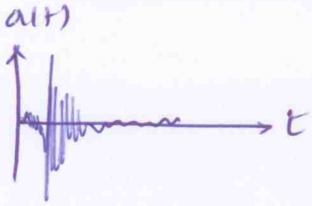
جایگذاری در معادله دیفرانسیل $\Longrightarrow \quad H(\omega)=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2+2\varepsilon i\omega}$ = instrument response based on a $e^{i\omega t}$ g.m.

$$\Longrightarrow H(\omega)=|H(\omega)|\,e^{i\phi(\omega)} \quad \begin{cases} |H(\omega)|=\dfrac{\omega^2}{\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2\right]^{1/2}} \\[2ex] \phi(\omega)=-tg^{-1}\dfrac{2\varepsilon\omega}{\omega^2-\omega_0^2}+\pi \end{cases}$$

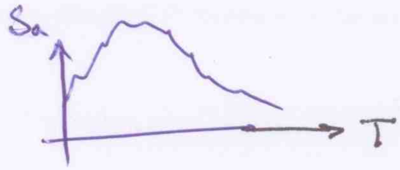

|H(ω)|
ε/ω₀ = نسبت میرائی = 0
0.3
0.5
1
2
2
1
0
0
1
2
3
ω/ω₀


ϕ(ω)
π
π/2
0.3
0.5
1
0
0
1
2
ω/ω₀

تولید زلزله مصنوعی



$\xrightarrow{\text{طیف}}$



چون $\frac{S_a}{\omega} = S_v \approx |X(\omega)|$

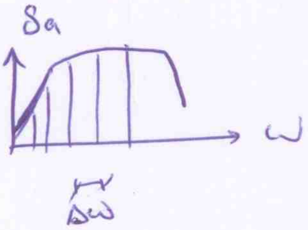
$$\underset{\uparrow \text{Real}}{x(t)} = \int X(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = \int |X(\omega)|\, e^{-i(\omega t - \theta)}\, d\omega$$

$$= \sum |X(\omega_j)| \cos(\omega_j t - \theta_j)\, \Delta\omega$$

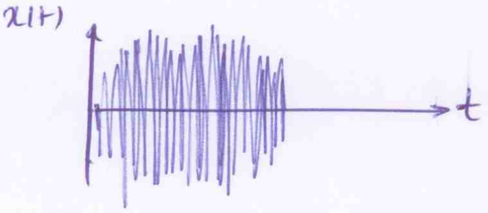
$$= \sum S_v(\omega_j) \sin(\omega_j t - \theta_j)\, \Delta\omega$$

$$= \sum S_a(\omega_j) \sin(\omega_j t - \underset{\downarrow [0, 2\pi]}{\theta_j})\, \frac{\Delta\omega}{\omega_j}$$

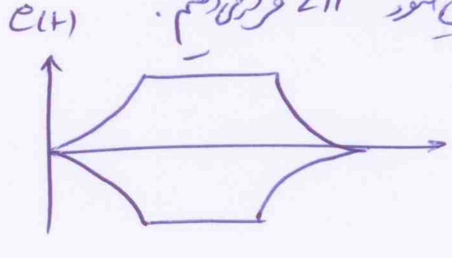
مثلاً اگر طیف طراحی زیر را داشته باشیم،



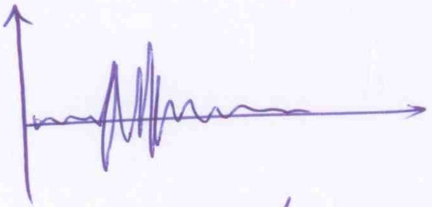
بجای θ_j یک عدد رندم بین صفر و 2π قرار می‌دهیم.



$\times$



$=$



شکل زلزله واقعی می‌شود

حال طیف این زلزله به طیف طرح اولیه منطبق نیست. حال با تغییر دادن طیف آنقدر سعی و خطا می‌کنیم که این دو بر هم منطبق شوند.

"سیستم‌های بار جانبی"

مشخصات مطلوب یک سیستم:
- مقاومت
- سختی
- پایداری
- شکل‌پذیری

قاب‌ها:

متشکل از تعدادی مجموعه خمشی موازی و یا متعامد شامل ستون‌ها - تیرها و اتصالات صلب می‌باشد.

مزایا:
- جا دادن بازشوهای مستطیلی
- امکان فضاهای داخلی و خارجی

معایب:
- تا ۲۵ طبقه مفید هستند (تغییر مکان زیادی شود)
- اگر با دیوار برشی پیوسته ترکیب شوند تا ۵۰ طبقه هم می‌توان رفت

دیوار برشی: (مناسب تا ۳۵ طبقه)

سیستم متقارن: نسبت صلبیت خمشی دیوارها در ارتفاع دیوار ثابت است. ⟸ مرکز چرخش = مرکز صلبیت خمشی دیوارها = مرکز برش

سیستم نامتقارن: " " " " نیست.

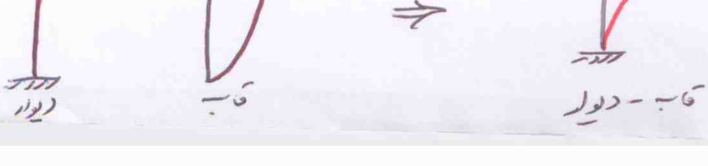
اگر کوتاه باشند برشی عمل می‌کنند و اگر بلند باشند (>3) خمشی عمل می‌نمایند.

قاب - دیوار:

- جابجایی کنترل شده دارند
- ستون‌های قاب را می‌توان بصورت مهاربندی شده کامل طراحی نمود (k=1).
- اغلب برش قاب‌ها در ارتفاع توزیع یکسان است، لذا کف‌ها را می‌توان بصورت تیپ طراحی نمود.

نرمی قاب $\propto H$ ، نرمی دیوار $\propto H^3$

نکته: چنانچه دیوارهای برشی یک سازه (قاب - دیوار) در بالای یک تراز مشخص حذف و یا کوتاه شوند، یا اینکه در یک یا چند طبقه میانی دیوارهای برشی حذف گردند، به شرطی که محل حذف یا قطع بالاتر از نقطه عطف سازه با دیوارهای پیوسته کامل باشد، عملاً سختی جانبی سازه تغییری نخواهد کرد.



هسته‌ها :

هسته‌های بتن مسلح معمولاً از تعدادی دیوار برشی متصل به هم تشکیل می‌شوند و یک مقطع توخالی شکل می‌سازند.

از نظر پیچشی در طبقه نهایی تیرهای جداکننده نازک وارد می‌گردند. از آنجا که هسته می‌پیچد، مقاطع صفحه‌ای آن تابیده می‌شوند و چون پایای سازه ثابت است، در اثر پیچش دیوارهای هسته، تنش‌ها و واکنش‌های تابیدگی بوجود می‌آیند که در تحلیل ملاحظات نیز می‌باشند.

سازه‌های لوله‌ای

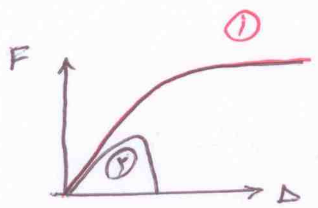
- هدف اصلی جایگیری حداکثر المان‌های باربر جانبی در محیط سازه است. (برای حداکثرسازی صلبیت خمشی)
- قاب‌های موازی جهت نیرو، عمل جان تیره محیطی و قاب‌های عمود بر جهت نیرو، عمل بال‌های آن را انجام می‌دهند.
- بنابراین این سیستم سازه‌ای امکان استفاده از روش‌های پیشرفته در ساخت و ساز (قالب‌های تونلی مدرن - پیش ساخته) را فراهم می‌سازد.
- فضای باز بدون ستون در طبقات بوجود می‌آید.

شکل پذیری

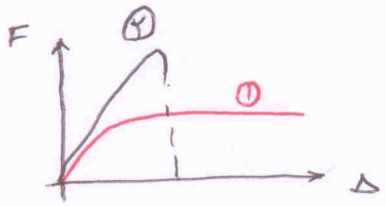
شکل پذیری:
- مصالح
- مقاطع
- المان
- سازه

نحوه شکل پذیر کردن:
- ۱- المان (تیر، ستون و ...) ← با طراحی و جزئیات
- ۲- سازه:
  - در هر مسیر انتقال بار حداقل یک المان شکل پذیر موجود باشد.
  - مقاومت المان شکل پذیر باید کمتر از المانهای دیگر باشد.

مثال:



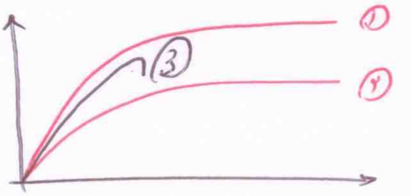
خوب نیست چون قبل از اینکه ① وارد شکل پذیر شود، ② می شکند.



خوب است چون المان ① وارد ناحیه غیر خطی می شود و در اثر نیروی ثابت ② نمی شکند.

مبنای اساسی طراحی براساس ظرفیت Capacity Design نیز همینها دیگر است.

مثلاً طراحی اتصال براساس Min { مقاومت خمشی تیر / " برشی چشمه اتصال } انجام می گردد.



برای المان ③ لازم نیست مقاومت آن بیشتر از هر دوی ① و ② گردد.

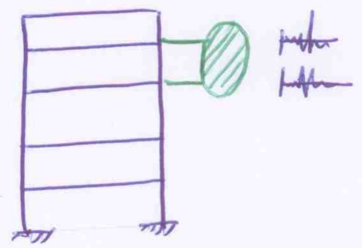
چون وقتی از ② بیشتر باشد، نیرو بیشتر از مقاومت المان ② نمی شود و به مقاومت المان ① که نمی رسد.

Secondary Systems

سیستم‌هایی که به یک سیستم اصلی وصل شده مانند دستگاه‌های هواساز یا حتی کولر خانه

در مقابل سیستم اولیه (Primary Structure)

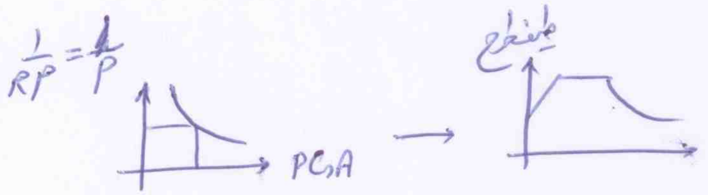
* اغلب سیستم‌های ثانویه Mult Support Excitation هستند که قابل صرف‌نظر کردن نیست.



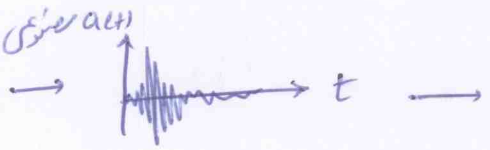
* حل همزمان و درگیر این نوع سیستم‌ها کار ساده‌ای نیست، چون در ماتریس عددهای کوچک در مقابل عددهای بسیار بزرگ در کنار هم قرار می‌گیرند.

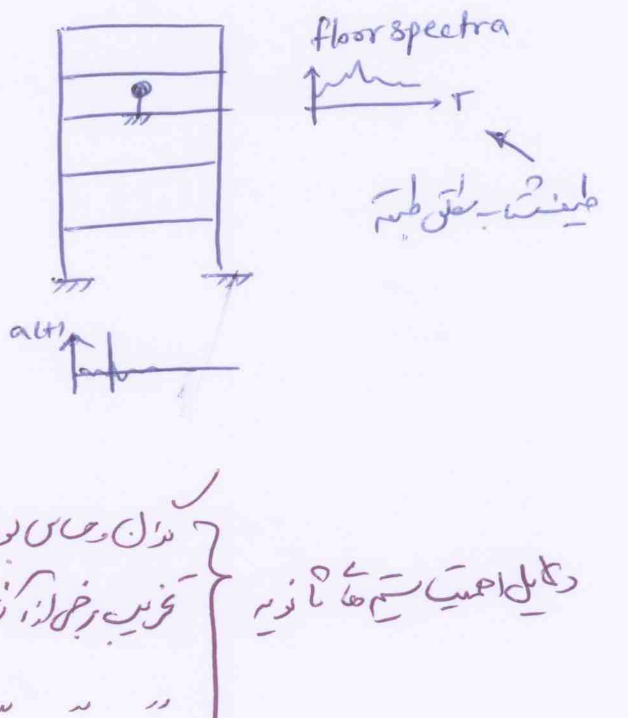
→ Equipment - structure - intraction

* همچنین احتمال دارد که داخل سیستم ثانویه لرزش مستقل از زلزله وجود داشته باشد.



تا دهه ۷۰ روش کار بدین صورت بود:





دلایل اهمیت سیستم‌های ثانویه:
- گران و حساس بودن تجهیزات SS
- تخریب برخی از آن‌ها باعث تشدید خسارت بعد از زلزله می‌گردد (لوله‌کشی گاز)
- " " " روی عملکرد و بقیه شریان‌های امدادی تأثیر می‌گذارد (بیمارستان‌ها)
- باعث از بین رفتن اطلاعات در سیستم‌های رایانه‌ای می‌شود.

مرکز جرم = محل برآیند نیروهای اینرسی طبقه است.

* مرکز صلبیت: نقطه‌ای است از کف که اعمال بار افقی در آن هیچ چرخشی نکند / نگردد.

طبقه / مرکز برش: نقطه‌ای است از طبقه (محل عبور برش طبقه وقتی که ~~…~~ طبقات سازه در آن دوران نداشته باشند)

مرکز چرخش: نقطه‌ای است که وقتی سازه دوران می‌کند، این نقطه ثابت است.

مرکز سختی: (اردوگان)

(Twist Centre)

یکی‌اند

$$\text{مرکز سختی} = \frac{\text{First moment of the lateral stiffnesses}}{\cancel{\ldots}\ \text{Total}\ \text{"}\quad\text{"}}$$

مرکز decoupling: نقطه‌ای که باعث جدا شدن معادلات تعادل انتقالی و چرخشی سازه می‌گردد

در یک سازه یک طبقه همه این نقاط یک نقطه‌اند!

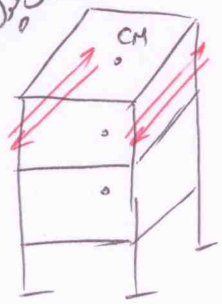
به خاطر همین است که در تحلیل این مفاهیم بکار نمی‌روند.

استفاده می‌شوند.

خصوصیت در SDOF مستقل از نیروی جانبی است چون فقط یک نیرو داریم!

خروج از مرکزیت کف: فاصله مرکز جرم و مرکز صلبیت

" طبقه: فاصله مرکز برش تا محل وارد شدن برآیند نیروی طبقات بالاتر



نکته: برای بدست آوردن مرکز صلبیت (براساس ۲۸۰۰)

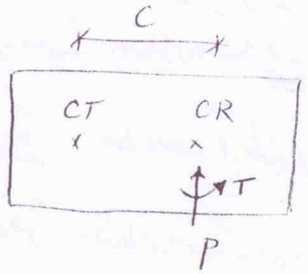
- نیروی زلزله را روی CM می‌گذاریم

- برش طبقات را بدست می‌آوریم

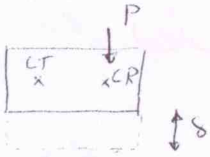
- دوران کف سازه برای دوران بسته شده است (مقید شده)

- برای هر طبقه محل برآیند برش طبقات = مرکز سختی می‌باشد.

اثبات: اینکه در سازه یک طبقه، مراکز صلبیت و چرخش روی یک نقطه واقع باشند.

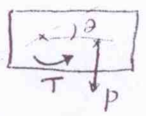


حالت اول: ابتدا بار جانبی سپس لنگر وارد می‌گردد:



$$W_1 = \frac{P\delta}{2}$$

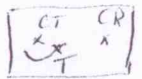
+



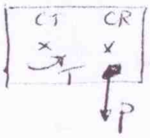
$$W_2 = P\theta C + \frac{T\theta}{2}$$

$$\Rightarrow W_{t_1} = \frac{P\delta}{2} + P\theta C + \frac{T\theta}{2}$$

حالت دوم: ابتدا لنگر و سپس بار جانبی وارد می‌گردد:



$$W_1 = \frac{T\theta}{2}$$



$$W_2 = \cancel{T\theta} + \frac{P\delta}{2}$$

$$\Rightarrow W_{t_2} = \frac{T\theta}{2} + \frac{P\delta}{2}$$

$$\text{Because } W_{t_1} = W_{t_2} \Rightarrow P\theta C = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

برای سازه چند طبقه:

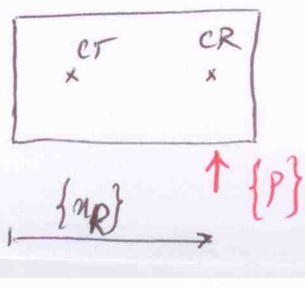
$\{P\}^T$

$$W_{t_1} = \frac{1}{2}\langle P\rangle\{\delta\} + \frac{1}{2}\langle T\rangle\{\theta\} + \langle P\rangle\left(\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & x_R & \\ & & \ddots\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\ddots & & \\ & x_T & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\right)\{\theta\}$$

$$W_{t_2} = \frac{1}{2}\langle T\rangle\{\theta\} + \frac{1}{2}\langle P\rangle\{\delta\}$$

$$\text{Because } W_{t_1} = W_{t_2} \Rightarrow \underbrace{\langle P\rangle\left(\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & x_R & \\ & & \ddots\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\ddots & & \\ & x_T & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\right)\{\theta\}}_{\text{لزوماً صفر نیستند}} = 0$$

مرکز صلبیت و مراکز دوران می‌توانند متفاوت باشند.



— در زلزله Michanocan 1985، ۱۵ درصد ساختمان‌هایی که خراب شدند (یا آسیب جدی دیدند) دارای نامنظمی (پیچش زیاد) بوده اند.

روش اول

لنگر کف = نیروی جانبی × خروج از مرکزیت کف

لنگر طبقه = Σ لنگر طبقات بالا

Australia, Portugal, Egypt
F.R.Germany, IRAN
New Zealand,
Nicaragua

SEAOC 1975 ← کد قبلی ایران.

روش دوم

لنگر طبقه = برش طبقه × خروج از مرکزیت طبقه

Argentina, Canada, Chile, Indonesia
Peru, Venezuela, Yugoslavia

UBC

نکته: در واقع مرکز صلبیت برای سازه چند طبقه معنی ندارد (حتی برای زمانی که کف‌ها صلب باشند)

- خروج از مرکزیت کف و خروج از مرکزیت طبقه دو مفهوم متفاوت اند.

خروج از مرکزیت کف: بر اساس مرکز صلبیت کف

خروج از مرکزیت طبقه: بر اساس مرکز برش طبقه

با تعریف مناسب برای کمیت‌های فوق، نتایج دو روش یکسان می‌شود.

برای یک سازه چند طبقه، اگر برای همیشه یک محور به نیروی افقی (زلزله) قابل محاسبه است که می‌تواند حالتی را بوجود آورد که ساختمان فقط حرکت انتقالی داشته باشد.

محل اثر این محور به نیروها مراکز صلبیت را مشخص می‌کند.

همچنین نقطه‌هایی قابل محاسبه است برای مراکز چرخش که در حالت کلی برای یک سازه چند طبقه آزاد

مراکز چرخش و صلبیت بر هم منطبق نیستند! و همچنین تابعی از بارگذاری می‌باشند.

(اثبات این مسئله معلوم گفته شود)

ـ سقف‌ها صلب‌اند

مثال :

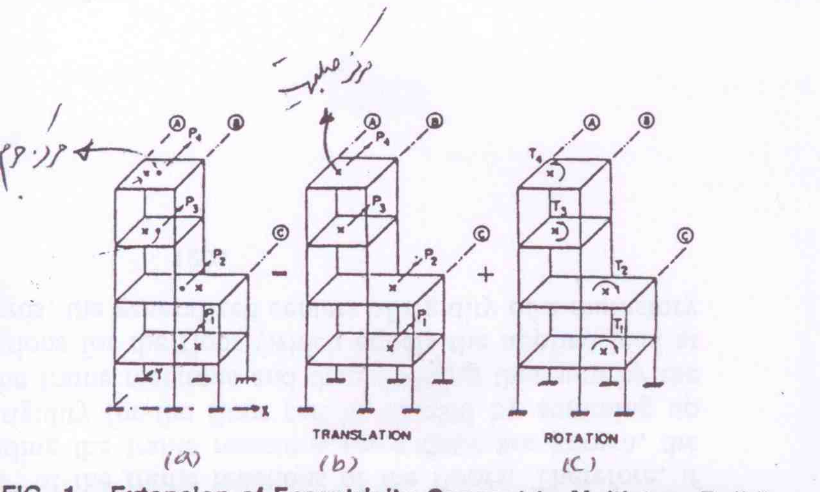


FIG. 1. Extension of Eccentricity Concept to Multistory Building

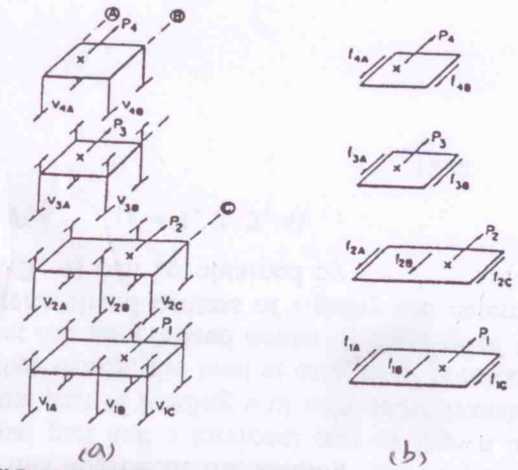


FIG. 2. Free Body Diagrams of Each Floor

روش اول: (بر اساس پیچش کف‌ها) در این روش بارهای موجود در Fig 1.a تبدیل به شکل (b) و (c) می‌شود به قسمی که در (b) فقط انتقال داریم و در (c) فقط دوران داریم. پس نیروها در (b) به مراکز صلبیت و در (c) به مراکز چرخش اعمال می‌شوند.

$T_i = P_i \cdot e_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$

پیچش کف

خروج از مرکزیت کف = فاصله مرکز جرم و صلبیت کف‌ها $= (x_m)_i - (x_R)_i$

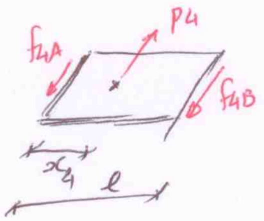
$\Rightarrow$ لنگر پیچشی طبقه k ام $= (M_t)_k = \sum_{i=k}^{4} T_i =$ مجموع T_i های طبقات فوقانی

حال برای محاسبه مراکز صلبیت به شکل ۲ (a) نگاه می‌کنیم.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \underbrace{(V_{iA} - V_{i+1,A})}_{\text{Frame A Reaction}} + (V_{iB} - V_{i+1,B}) + (V_{iC} - V_{i+1,C}) = P_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$

~~Floor~~ Frame A Reaction

$\Sigma M = 0 \xrightarrow[\text{rotation}]{\text{no}}$ e.g. for the 4th floor $\Rightarrow$



$\Rightarrow P_4 x_4 = f_{4B}\, l \Rightarrow x_4 = \checkmark$

مراحل روش اول:

- محاسبه مراکز صلبیت کف‌ها
- محاسبه خروج از مرکزیت کف‌ها
- محاسبه گشتاور پیچشی کف‌ها

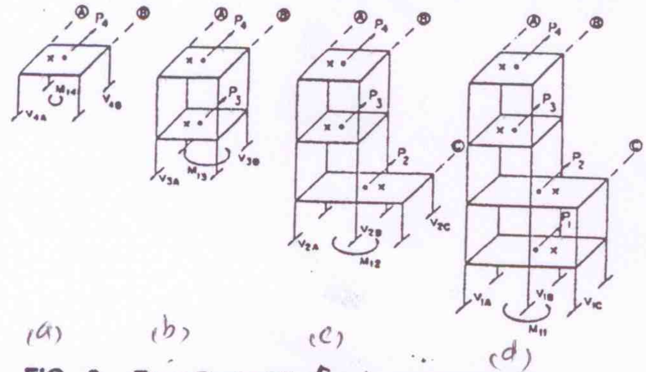


FIG. 3. Free Body Diagrams of Substructures

روش دوم (بر اساس خروج از مرکزیت طبقه و برش طبقه)

$$(M_t)_k = V_k \cdot e^*_k \quad (7)$$

لنگر پیچشی طبقه kام

برش طبقه

خروج از مرکزیت طبقه k

که بر اساس نوشتن معادلات تعادل در برش های استاتیکی شکل (۳) قابل محاسبه است.

فرض کنید $(x_s)_k$ محل برآیند نیروهای برشی (مرکز برشی) در طبقه k باشد. بنابراین $(M_t)_k$ باید با لنگر حاصل از نیروهای P_i در تعادل باشد.

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{4} P_i \left[(x_m)_i - (x_s)_k \right] \quad (8a)$$

$$V_k = \sum_{i=k}^{4} P_i \quad (8b)$$

$$\Rightarrow (M_t)_k = \sum_{i=k}^{4} P_i \cdot (x_m)_i - V_k (x_s)_k \quad , k = 1, 2, 3, 4 \quad (8c)$$

محل برآیند نیروهای وارده در طبقه kام

$$= (x^*)_k = \frac{\sum_{i=k}^{4} P_i \cdot (x_m)_i}{V_k} \quad (9)$$

$$\xRightarrow{\text{جایگذاری در (8c)}} (M_t)_k = V_k \, x^*_k - V_k (x_s)_k$$

$$\Rightarrow (M_t)_k = V_k \left[(x^*)_k - (x_s)_k \right] \xRightarrow[(7)]{\text{مقایسه با}} e^*_k = (x^*)_k - (x_s)_k$$

محل وارد شدن برش طبقه (برآیند نیروهای طبقات بالاتر)

مرکز برشی

مراحل روش دوم:

- محاسبه مراکز برش طبقات
- محاسبه مرکز "برآیند نیروهای کف های بالاتر"
- محاسبه خروج از مرکزیت طبقات
- محاسبه لنگر پیچشی طبقات

Static Eccentricity Concept for Torsional Moment Estimations

خروج از مرکزیت سازه ← فاصله مرکز جرم و مرکز صلبیت

خروج از مرکزیت طبقه ← فاصله مرکز برش تا محل وارد شدن برش طبقه

برآیند نیروهای طبقات بالاتر

متفاوتند

By Wai K. Tso,[1] Member, ASCE

Abstract: This paper clarifies the definitions of eccentricity used in two of the approaches to calculate story torsional moments in the design of torsionally unbalanced regular multistory structures. One approach uses the floor eccentricities, in conjunction of the static equivalent loading, to calculate the floor torques. The story torsional moment is then obtained by summing the floor torques above the story. This approach was suggested in the *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary* by the Structural Engineers Association of California. In this approach, the floor eccentricity should be defined as the distance between the generalized center of rigidity and the load resultant at that floor. In the second approach, the story torsional moment is obtained directly as the product of story shear and the story eccentricity, as suggested by Uniform Building Code. In this approach, the story eccentricity should be defined as the horizontal distance between the shear center at the story and the resultant of all lateral forces above the story being considered. It is shown that if the proper definitions of eccentricity are used, both approaches result in the same story torsional moments. A simple example is worked out in detail to show the steps involved in each of the approaches.

مرکز برش: محل عبور برش طبقه وقتی که طبقه، طبقات سازه دوران نداشته باشند.

Introduction

The need to allow for torsional effect due to structural asymmetry in the seismic design of buildings was reconfirmed by the 1985 Michanocan earthquake in which 15% of buildings that were severely damaged or collapsed in Mexico City could be considered as having pronounced asymmetry in stiffness (Rosenbleuth and Meli 1986). While there exist many alternatives such as static and dynamic three-dimensional analyses to determine the torsional effect, the use of the eccentricity concept, in conjunction with equivalent static loading, remains a basic approach to allow for this effect for regular buildings as recommended by seismic codes (*Earthquake* 1988).

Code provisions generally require the determination of the torsional moment in any story following one of two approaches. In the first approach, the floor torques at different floors are determined first. Each floor torque is the product of the lateral load and the floor eccentricity at that floor. The torsional moment at any story is then obtained by summing the floor torques above that story level. Such an approach is suggested by countries that include Australia, Egypt, Federal Republic of Germany, Iran, New Zealand, Nicaragua, and Portugal (*Earthquake* 1988). In the second approach, the calculation of torsional moment in a particular story is expressed in terms of the story shear at that level. It is specified as the product of the story shear and an "eccentricity" at that level. To make a distinction from floor eccentricity, this "eccentricity" quantity will be referred to as story eccentricity in this paper. This approach is used by countries that include Argen-

[1]Prof. of Civ. Engrg., Dept. of Civ. Engrg. and Engrg. Mech., McMaster Univ., Hamilton, Ontario, Canada L8S 4L7.

Note. Discussion open until October 1, 1990. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the ASCE Manager of Journals. The manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on October 31, 1988. This paper is part of the *Journal of Structural Engineering*, Vol. 116, No. 5, May, 1990. ©ASCE, ISSN 0733-9445/90/0005-1199/$1.00 + $.15 per page. Paper No. 24629.

57

tina, Canada, Chile, Indonesia, Peru, Venezuela, and Yugoslavia (*Earthquake* 1988).

Seismic codes used in the United States are less specific. For example, Structural Engineers Association of California (SEAOC) 1975 (*Recommended* 1975) suggested that "provisions be made for the increase in shear resulting from the horizontal torsion due to an eccentricity between the center of mass and the center of rigidity." If one interprets the "horizontal torsion" implies the floor torques, then SEAOC 1975 was using the first approach to calculate the torsional moments. In the commentary, it stated that "it is recognized that in a strict sense, centers of rigidity cannot be defined for a story or stories of a multistory structure," even for structures with rigid floor diaphragms. Hence, some means of locating the center of rigidity was then necessary, based on consideration of the stiffness of the vertical frame or bracings. Because of this difficulty, the current edition of this document (*Recommended* 1988), all of which have been essentially incorporated into the Uniform Building Code (UBC) ("Section" 1988), makes no reference to centers of rigidity. The current recommendation in UBC 1988 is that "the torsional design moment at a given story shall be the moment resulting from eccentricities between applied design lateral forces at levels above that story and the vertical resisting elements in that story. . . ." This implies that the current UBC code has adopted the second approach to obtain design torsional moments.

Although the concept of eccentricity is used, there is no uniformity in the definitions of eccentricity among codes. Some codes define eccentricity as a distance measured from the center of rigidity to some load resultant. However, they do not provide specific guidelines to locate centers of rigidity in a multistory structure. An example of this is SEAOC 1975. Alternatively, eccentricity is defined in a general manner, as a distance depending on the applied loads and the lateral load-resisting elements. UBC 1988 is an example of such code. In either case, the important task of determining torsional moment using the eccentricity approach lacks clear definition. Designers are left to their interpretations of eccentricities for their own specific structures or must perform three-dimensional analyses in order to comply with the code provisions.

The purpose of this paper is to clarify the way the static eccentricity concept is to be used to evaluate torsional moments in the seismic design of torsionally unbalanced regular multistory structures. The clarification is achieved by showing the following points: (1) Floor eccentricity and story eccentricity are different quantities in general, where floor eccentricity is measured from the center of rigidity of the floor, the story eccentricity is measured from the shear center of the story; (2) while the centers of rigidity cannot be defined for a story or stories of a multistory building in a strict sense, they can be defined on a rational basis for the purpose of calculating floor eccentricity and hence torsional moments; and (3) with floor eccentricity and story eccentricity properly defined, both approaches lead to the same torsional moment distribution. Therefore, one would reach a rational equivalent static torsional moment distribution if one applies the concept of eccentricity consistently.

The confusion in applying the eccentricity concept to multistory structures arises mainly because the concept was originally derived for single-story structures with rigid floor diaphragms. The location of the center of rigidity

58

in a single-story building possesses a number of special structural properties. First, it denotes the point where application of a lateral load will not cause rotation of the floor (center of rigidity). Second, it is the location in plan where the resultant of the story shears passes when there is no rotation of the floor (shear center). Third, it is the point that remains stationary when the structure is subjected to torque loading (center of twist). For computation, this point is located as the ratio of the sum of the first moment of the lateral stiffnesses to the total lateral stiffness (center of stiffness). Finally, the equations for translational and torsional equilibrium of the floor become uncoupled when this point is used as the reference point (center for decoupling). In a single-story building, all these centers are at the same location. As a result, these terms are often used interchangeably in practice. In addition, the location of these centers appears to be load distribution independent, since there can only be one single load resultant acting in single-story structures.

If such concepts are extendable to multistory structures in the strict sense, one would demand that the centers of rigidity, centers of twist, and shear centers be the same set of points, and that their locations be independent of the lateral loading distribution. In this strict sense, centers of rigidity cannot be defined as stated in SEAOC 1975 (*Recommended* 1975). Only in a special class of multistory structures can the centers of rigidity be defined in the strict sense. The criteria that define this special class of multistory structures have been given by Cheung and Tso (1986). However, given a set of lateral loads, one can determine a set of points at the floor levels in a multistory structure such that when these lateral loads are applied at these points, the structure deflects laterally without floor rotations. Similarly, one can locate sets of points that satisfy the physical definition of centers of twist (Tso and Cheung 1986). To avoid confusion, these centers are referred to in this paper as the generalized centers of rigidity, and generalized centers of twist, respectively. These generalized centers of rigidity and twist centers can always be defined in a multistory structure. However, they are different sets of points and are lateral load distribution dependent. For the purpose to determine the equivalent static seismic torsional moments, the generalized centers of rigidity are reference points used to obtain floor eccentricities.

Reviewing the literature, there is no generally accepted definition of the centers of rigidity for multistory buildings. Poole (1977) suggested that the shear center below each floor can be taken as the center of rigidity to compute the floor eccentricity. Humar (1984) interpreted the center of rigidity at a floor as the point through which the resultant lateral forces at that floor can pass without causing rotation at that floor. The other floors may or may not have rotations. Smith and Vezina (1985) defined the center of rigidity at a particular level of a multistory structure subjected to a particular vertical distribution of horizontal loading as the point in the plane of the floor through which the external horizontal load at that floor must act for it to apply no torque to the structure. Cheung and Tso (1986) suggested that to obtain the floor eccentricities, generalized centers of rigidity can be defined as the set of points located at the floor levels such that when the given equivalent static lateral loads are applied through these points, no rotations of any of the floors will occur. Based on matrix method of structural analysis, they showed that the generalized center of rigidity at any floor can be found by locating the resultant of the frame reactions at that floor. Riddell and Vasquez (1984)

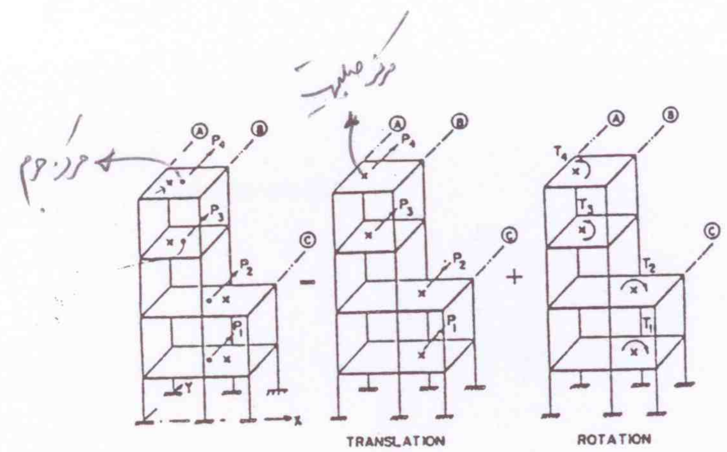


FIG. 1. Extension of Eccentricity Concept to Multistory Building

interpreted the concept of eccentricity in the dynamic sense, and concluded that the centers of rigidity exist only for a very special class of multistory buildings, namely buildings with proportional framing.

Statement of Problem

Consider the two-bay building shown in Fig. 1(*a*) having frames A, B and C spanning the Y-direction connected by rigid floor diaphragms. Frames A and B have four stories while frame C has two stories. The building has orthogonal framing and is symmetrical in the X-direction. It is subjected to a static load distribution of P_i (i = 1, 2, 3, 4) acting at the center of mass of each floor. Due to the eccentric setback nature of the structure, torsional moments will be induced by the set of lateral loads on the building. The torsional moments $(M_t)_k$ (k = 1, 2, 3, 4) at each story level will be obtained by the two approaches commonly specified by seismic codes.

The example bui'ding chosen has a large discontinuity between the second and third story to dramatize the eccentric nature of the problem. Such a structure may not fall in the category of regular structures using the criteria set out in SEAOC 1988 and Uniform Building Code (UBC) 1988 ("Section" 1988). It should be pointed out, therefore, that the structure chosen is for the purpose of illustrating the different approaches to obtain torsional moments only. There is no implication that torsional provisions using the static eccentricity concept are applicable to irregular structures such as the example building.

Approach 1

Torsional Moment Obtained Via Floor Torques

In this approach, the loading will be decomposed into two parts, a translational part and a torsional part as shown in Figs. 1(*b*) and (*c*). The translational part of loading will only cause translations but no rotations of floors. In other words, the load at each floor is relocated horizontally such that each acts at the generalized center of rigidity of the floor. Once the locations of the generalized centers of rigidity are determined, the floor torques T_i (i = 1, 2, 3, 4) can be obtained by

$$T_i = P_i e_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots \quad (1)$$

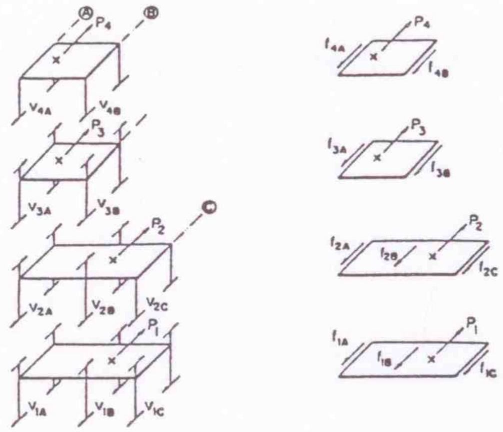


FIG. 2. Free Body Diagrams of Each Floor

where e_i = the floor eccentricity, defined as the distance between the center of mass and the generalized center of rigidity at that floor.

$$e_i = (x_m)_i - (x_R)_i \quad \text{(2)}$$

The torsional moment at story k is then obtained by

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{4} T_i \quad \text{(3)}$$

Σ floor Torques above story

The location of the generalized centers of rigidity at each floor can be obtained by considering the free body diagrams of each floor under the translational loading, as shown in Fig. 2(a). Let V_{iA}, V_{iB}, and V_{iC} (i = 1, 2, 3, 4) be the story shears below level i of frames A, B, and C, respectively, due to the lateral loading acting at the generalized centers of rigidity. Translational equilibrium at each floor leads to

$$(V_{iA} - V_{i+1,A}) + (V_{iB} - V_{i+1,B}) + (V_{iC} - V_{i+1,C}) = P_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{(4)}$$

Noting that the difference of frame shears between floor i is the frame reaction at floor i, one can write

$$(V_{i,j} - V_{i+1,j}) = f_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (j = \text{A, B, C}) \quad \text{(5)}$$

Then Eq. 4 can be rewritten as

$$f_{iA} + f_{iB} + f_{iC} = P_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{(6)}$$

and the free bodies can be redrawn to show the frame reactions for each floor as shown in Fig. 2(b). In order that there is no rotations of the floors, moment equilibrium about a vertical axis must exist for each floor. This moment equilibrium can be obtained if the loads P_i (i = 1, 2, 3, 4) act through the "centroids" of the frame reactions of the floors. Therefore, if under translational loading the frame reactions for a floor are known, the generalized center of rigidity for the floor can be located by summing up the first moments of the frame reactions and then dividing this sum by the total of the frame reactions for the floor (which equals the applied load at that floor). In other words, the generalized centers of rigidity of a multistory

61

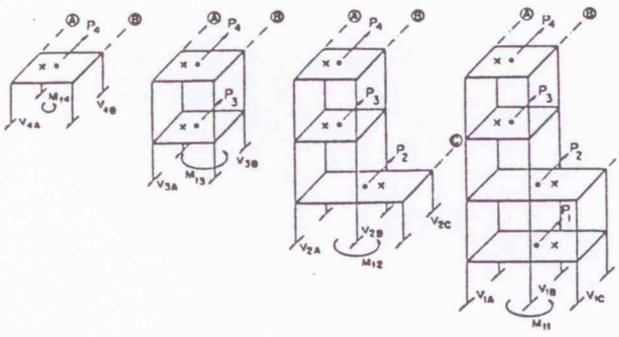


FIG. 3. Free Body Diagrams of Substructures

building are identified as the frame reaction centers. Such an interpretation has been pointed out by Cheung and Tso (1986) before, using the matrix method of structural analysis.

Approach 2

Torsional Moments Obtained Via Story Shear and Story Eccentricity

In this approach, the torsional moment at any story k is obtained directly from the story shear in that level by means of the equation

$$(M_t)_k = V_k e_k^* \quad (7)$$

where V_k = the story shear; and e_k^* = the story eccentricity at story k. The story eccentricity can be determined by making a cut at story k, and considering the lateral and torsional equilibrium of the free body diagram above the cut.

For the building at hand, a cut is made at each of the four-story levels, resulting in the free bodies shown in Figs. 3(a–d). For each free body, one can consider the internal forces exposed at the cut consisting of a set of frame shears plus a torsional moment. The set of frame shears is obtained to satisfy the lateral equilibrium of the free body, assuming only transitional deformation of the floors. The resultant of this set of frame shears equals the story shear V_k, and passes through the shear center at that level. Since the applied loads P_i do not pass the generalized centers of rigidity, torsional equilibrium of the free body will not be maintained with the set of frame shears alone without the inclusion of a torsional moment $(M_t)_k$ at that level. The magnitude of this torsional moment is equal to the summation of the torques generated between the applied loads P_i, and the resultant of the set of the frame shears V_k that passes through the shear center at the level considered.

Let $(x_s)_k$ be the location of the shear center at story k, the torsional moment $(M_t)_k$ needed to maintain torsional equilibrium is given by

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{4} P_i[(x_m)_i - (x_s)_k] \quad (8a)$$

Recognizing

$$V_k = \sum_{i=k}^{4} P_i \quad (8b)$$

62

Eq. 8a becomes

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{4} P_i(x_m)_i - V_k(x_s)_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{8c}$$

The x-coordinate of the resultant of all applied loads above story k can be obtained as the ratio of the sum of first moment of the applied loads to the sum of these loads, i.e.

$$(x^*)_k = \frac{\sum_{i=k}^{4} P_i(x_m)_i}{V_k} \tag{9}$$

Using Eq. 9, Eq. 8c can be rewritten as

$$(M_t)_k = V_k(x^*)_k - V_k(x_s)_k \tag{10a}$$

or

$$(M_t)_k = V_k[(x^*)_k - (x_s)_k] \tag{10b}$$

A comparison between Eqs. 7 and 10b shows that the story eccentricity e^* used in Eq. 7 is defined as the horizontal distance between the resultant of all forces above the story and the shear center of the story being considered.

Equivalence of Two Approaches

To show the equivalence of the two approaches to obtain torsional moment, consider a more general case of an N story multistory building, having orthogonal framing, with M frames of resistance spanning in the Y-direction and subjected to static loads P_i ($i = 1, \ldots, N$) acting at the centers of mass. The centers of mass are located at distances $(x_m)_i$ ($i = 1, \ldots, N$) from the reference axes. The x-coordinates of the frame locations are denoted as x_j ($j = 1, \ldots, M$). The torsional moment at story k will be computed using both approaches to show their equivalence. The subscripts i and k are used to denote the floor and story level, respectively; and subscript j denotes the frame numbering.

For approach 1, the location of the generalized center of rigidity at the ith floor is given as the center of frame reactions at that floor. The frame reactions f_{ij} are determined by applying the lateral loads to the building having the floors restraint from rotations. Therefore, the location of the generalized center of rigidity is obtained as

$$(x_R)_i = \frac{\sum_{j=1}^{M} f_{ij} x_j}{\left(\sum_{j=1}^{M} f_{ij}\right)} \tag{11}$$

The floor eccentricity e_i is then given by

$$e_i = (x_m)_i - (x_R)_i \tag{12}$$

The floor torques T_i are then given by

$$T_i = P_i e_i = \sum_{j=1}^{M} f_{ij} e_i \qquad (13)$$

Finally, the torsional moment at story k becomes

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{N} T_i \qquad (14a)$$

Using Eqs. 12 and 13, we have

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{N} \sum_{j=1}^{M} f_{ij}[(x_m)_i - (x_R)_i] \qquad (14b)$$

From Eq. 11

$$(x_R)_i \left(\sum_{j=1}^{M} f_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{M} f_{ij} x_j \qquad (15)$$

Therefore, Eq. 14b can be rewritten as

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{N} \sum_{j=1}^{M} f_{ij}[(x_m)_i - x_j] \qquad (16)$$

For Approach 2, it is necessary to first locate the shear center at story k. Let V_{kj} be the shear frame j at story k. Then, for the case when the lateral loads are applied such that there is no rotation of the floors

$$V_{kj} = \sum_{i=k}^{N} f_{ij} \qquad (17)$$

The shear center location at story k is then given by

$$(x_s)_k = \frac{\sum_{j=1}^{M} V_{kj} x_j}{\sum_{j=1}^{M} V_{kj}} = \frac{\sum_{j=1}^{M} V_{kj} x_j}{V_k} \qquad (18)$$

where V_k = story shear at story k.

When the lateral loads are applied to the centers of mass, the x-coordinate of the resultant of all loads above story k is given by $(x^*)_k$. From Eq. 9

$$(x^*)_k = \frac{\sum_{i=k}^{N} P_i (x_m)_i}{V_k} \qquad (19)$$

The story eccentricity at story k is given by

$$e_k^* = (x^*)_k - (x_s)_k \qquad (20)$$

The torsional moment at story k is obtained by the story shear multiplied by the story eccentricity

$$(M_t)_k = V_k e_k^* \quad (21)$$

Using Eqs. 17–20, Eq. 21 can be expressed as

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{N} \sum_{j=1}^{M} f_{ij}[(x_m)_i - x_j] \quad (22)$$

Comparing Eqs. 16 and 22, the equivalence of the two approaches is apparent.

Computation Procedure to Determine Generalized Centers of Rigidity and Shear Centers

Irrespective of which approach is used, the appropriate eccentricity can be determined if the frame reactions f_{ij}, or the frame shears V_{ij} are known. These quantities are the forces in the frames when all floors of the building are constrained to deflect laterally without rotation when subjected to the equivalent static seismic loading. For buildings with the main lines of lateral resistance orientated perpendicular to one another (orthogonal framing), this situation can be simulated readily by means of a plane frame program. In the computer model, each frame spanning in the same direction is linked at floor levels by hinged-ended rigid links to simulate the rigid diaphragm action. Applying the lateral loading P_i at the appropriate floor levels in the computer model, the frame shears V_{ij} can be determined from the output of most plane frame programs. Once the frame shears are known, the shear centers can be found for every level.

The difference of frame shears between a floor for a given frame is the frame reaction f_{ij}. Once the frame reactions are known, the generalized centers of rigidity, and hence the floor eccentricities can be computed. Such a computational procedure is illustrated in the following example.

Example

Consider the two-bay by one-bay structure as shown in Fig. 4(a), having bay widths of 10 m in the two-bay direction, uniform story heights of 4 m, and frames A, B, and C that have bay width of 6 m each. All beams in the frames are identical, having $I_b = 0.3\ m^4$. The column moment of inertia is $0.1\ m^4$ for frame B and $0.05\ m^4$ for frames A and C. The columns are assumed to be axially rigid, having very large cross-sectional areas. The lateral load P_i is taken as 10 kN acting at the centroid, which coincides with the center of mass of each floor. The computer model to obtain the frame shears when the floors are restrained from rotation is shown in Fig. 4(b). The column shears obtained directly from the plane frame program output are also shown in brackets, having units of kN. The frame shear at each level is obtained by summing the column shears. For example, $V_{4A} = 2.02 + 2.02 = 4.04$ kN. Other frame shears are summarized in Table 1. Once the frame shears are determined, the frame reaction at different levels can be obtained using Eq. 5. For example, $f_{3A} = V_{4A} - V_{3A} = 7.84 - 4.04 = 3.80$ kN. Other frame reactions are summarized in Table 2.

65

$I_b = 0.3\ m^4$

Frame B $I_c = 0.1\ m^4$

Frame A, C $I_c = 0.05\ m^4$

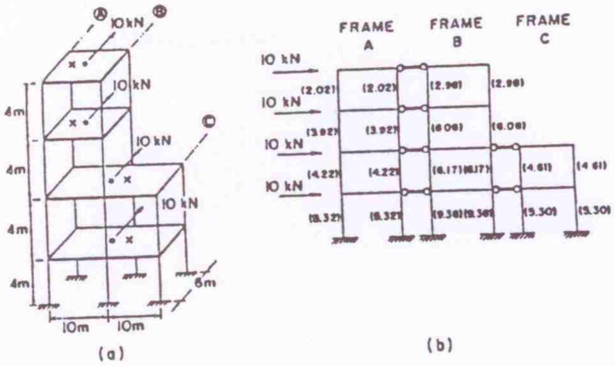


FIG. 4. Example Structure and Computer Modelling Using Plane Frame Program

The locations of the generalized centers of rigidity, as measured from the plane of frame A, can then be calculated. For example, the location of the generalized center of rigidity at 2nd floor is given by

$$(x_R)_2 = \frac{(0.6)(0) + (0.18)(10) + (9.22)(20)}{0.6 + 0.18 + 9.22} = 18.62 \text{ m} \quad \text{(23)}$$

The second-floor eccentricity is given by

$$e_2 = 10 - 18.62 = -8.62 \text{ m} \quad \text{(24)}$$

The second-floor torque is given by

$$T_2 = 10 \times (-8.62) = -86.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{(25)}$$

The location of the generalized centers of rigidity, floor eccentricities, floor torques, and finally torsional moments at different levels are summarized in Table 3.

To use the second approach to determine torsional moment, the locations

TABLE 1. Example Frame Shears

Floor (1)	Frame A (kN) (2)	Frame B (kN) (3)	Frame C (kN) (4)
4	4.04	5.96	—
3	7.84	12.16	—
2	8.44	12.34	9.22
1	10.64	18.76	10.60

TABLE 2. Example Frame Reactions

Floor (1)	Frame A (kN) (2)	Frame B (kN) (3)	Frame C (kN) (4)
4	4.04	5.96	—
3	3.80	6.20	—
2	0.60	0.18	9.22
1	2.20	6.42	1.38

TABLE 3. Evaluation of Torsional Moments Based on Floor Eccentricity Approach

Floor (1)	Location of center of rigidity (m) (2)	Floor eccentricity (m) (3)	Floor torque (kN-m) (4)	Torsional moment (kN-m) (5)
4	محل برآیند 5.96	−0.96	−9.6	−9.6
3	Reactions 6.20	−1.20	−12.0	−21.6
2	18.62	−8.62	−86.2	−107.8
1	9.18	+0.82	8.2	−99.6

TABLE 4. Evaluation of Torsional Moments Based on Story Eccentricity Approach

خروج از مرکزیت طبقه

Story (1)	Location of shear center (m) (2)	Story eccentricity (m) (3)	Story shear (kN) (4)	Torsional moment (kN-m) (5)
4	5.96	−0.96	10	−9.6
3	6.08	−1.08	20	−21.6
2	10.26	−3.59	30	−107.7
1	9.99	−2.49	40	−99.6

تفاوت مرکز برش با محل برآیند نیروهای جانبی بالایی

of the shear centers need to be determined. The shear center at each level can be directly located from the frame shears given in Table 1. For example

$$(x_s)_2 = \frac{(8.44)(0) + (12.34)(10) + (9.22)(20)}{8.44 + 12.34 + 9.22} = 10.26 \text{ m} \quad (26)$$

The story eccentricity at the second story is given by

$$e_2^* = \frac{(10)(5) + (10)(5) + (10)(10)}{10 + 10 + 10} - 10.26 = -3.59 \text{ m} \quad (27)$$

The first term represents the location of the line of action of the resultant of applied loads above the second story from the plane of frame A. The locations of the shear centers, the story eccentricities, the story shears, and the torsional moments for the whole structure are summarized in Table 4. As expected, the final columns in Tables 3 and 4 are the same, irrespective of the approach used.

Floor Eccentricity versus Story Eccentricity

Although the approaches to calculate torsional moments are equivalent, the eccentricity quantities used in each approach are different. Floor eccentricities are used in the first approach while story eccentricities are used in the second approach. In the traditional sense, eccentricity is a pure measure of the asymmetry of the structure and is therefore a structural property. It is independent of the applied load. However, in multistory structures, both the floor eccentricity and story eccentricity are dependent on the structure and the lateral load distribution.

TABLE 5. Comparison of Results for Two Different Load Distributions

Story (1)	Uniform Distribution Loading: Floor eccentricity (m) (2)	Uniform Distribution Loading: Story eccentricity (m) (3)	Uniform Distribution Loading: Story shear (kN) (4)	Uniform Distribution Loading: Torsional moment (kN-m) (5)	Triangular Distribution Loading: Floor eccentricity (m) (6)	Triangular Distribution Loading: Story eccentricity (m) (7)	Triangular Distribution Loading: Story shear (kN) (8)	Triangular Distribution Loading: Torsional moment (kN-m) (9)
4	−0.96	−0.96	10	−9.6	−1.00	−1.00	16	−16.0
3	−1.20	−1.08	20	−21.6	−1.22	−1.09	28	−30.6
2	−8.62	−3.59	30	−107.8	−15.05	−4.19	36	−151.0
1	0.82	−2.49	40	−99.6	2.95	−3.48	40	−139.2

The extent to which they are good measures of asymmetry of a structure depends on their sensitivity to load distribution variation. To illustrate such dependence, the results for the same example structure subjected to another load distribution are presented. The load distribution used is an inverted triangular distribution in which $P_1 = 4$ kN, $P_2 = 8$ kN, $P_3 = 12$ kN, and $P_4 = 16$ kN. The base shear of this loading is 40 kN, the same as the uniform loading in the example.

Shown in Table 5 are the floor eccentricity and story eccentricity locations, and also the story shear and torsional moments for both the uniformly and triangularly distributed loading cases. The floor eccentricity is sensitive to the load distribution. This is particularly apparent when there is a large change of stiffness distribution, as at the second story of the example structure. This sensitivity translates into the dependence of the floor torques on loading distribution. The story eccentricity is much less sensitive to load distribution changes. Therefore it is a more representative measure of structural asymmetry than floor eccentricity.

The high sensitivity of floor torques on the lateral load distribution may cause concern on using the eccentricity concept to torsionally unbalanced regular multistory structures. However, the design quantities of interest are the story torsional moments rather than individual floor torque. The torsional moment in any story is the product of the story shear and story eccentricity; and the story eccentricities are less sensitive to lateral load distribution. The change in torsional moments due to different lateral load distribution is not solely due to changes in story eccentricities, but also due to the changes of story shear distribution.

Nevertheless, results from the example building show that the story eccentricity for the bottom story computed using the triangularly distributed loading is nearly 40% larger than the eccentricity computed using the uniform load. Therefore, it is good practice to determine the story eccentricities using a lateral load distribution that is compatible with the equivalent static lateral load distribution specified by the appropriate code used.

Special Class of Buildings

When a multistory building has proportional framing such that the stiffness properties of resisting elements are proportional to one another, it has been shown that the generalized centers of rigidity lie along a vertical axis (Cheung and Tso 1986), and their locations are independent of the lateral load distributions. Therefore, they become the centers of rigidity in the strict sense.

If it is further assumed that the mass centers of the floors also lie along a vertical axis, then such a building will have constant floor eccentricities along the height. For this special class of buildings, $e_1 = e_2 = \ldots e_N = e$. From approach 1:

$$(M_t)_k = \sum_{i=k}^{N} P_i e_i \qquad (28a)$$

or

$$(M_t)_k = e \sum_{i=k}^{N} P_i = V_k e \qquad (28b)$$

From approach 2, we obtained from Eq. 7, $(M_t)_k = V_k e_k^*$. Therefore, the story eccentricity e_k^* is the same as the floor eccentricity, and it also remains constant. It can be shown readily that the centers of rigidity also coincide with the shear centers. Therefore, buildings with proportional framing represents a special class of building that, from a computation viewpoint, it is not necessary to make a distinction between floor eccentricity and story eccentricity.

Conclusions

The main purpose of this paper is to provide much needed clarification in the application of the static eccentricity concept in seismic torsional provisions. The following conclusions can be drawn:

1. It is necessary to recognize that there are two alternatives in applying the concept of static eccentricity to estimate torsional moments, namely, by means of the floor eccentricity approach and by means of the story eccentricity approach. Both approaches lead to the same torsional moment estimation.
2. For seismic codes that prefer to use the floor eccentricity approach, the floor eccentricity should be defined as the distance between the generalized center of rigidity and the center of mass at that floor. In this context, generalized the centers of rigidity in a multistory building are identified as the frame reaction centers. This definition allows the torsional provision in SEAOC 1975 to be applied in a rational manner. X
3. For code provisions that use the story eccentricity approach, the story eccentricity should be defined as the horizontal distance between the shear center at that story and the resultant of all lateral forces above the story being considered. This definition allows rational application of the torsional provision stated in UBC 1988.
4. The floor eccentricity, and to a less extent, the story eccentricities are dependent on the distribution of the lateral loads. For accuracy, they should be determined using a load distribution that is compatible with the actual static equivalent lateral loading on the structure.
5. For buildings with orthogonal framing, the determination of floor eccentricities or story eccentricities can be done readily using standard plane frame programs commonly found in design offices.
6. Buildings with proportional framing represent a special (degenerate) case in which the floor eccentricity and story eccentricity are equal. In this special

class of building, the eccentricity (both floor eccentricity and story eccentricity) remains constant along the height of the building.

ACKNOWLEDGMENT

The writer wishes to acknowledge the support of Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) for the work presented herein. Also, the writer thanks Tom Paulay of University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, for the many hours of stimulating discussion on this subject of eccentricities. The comments by the reviewers are well appreciated. They have helped to improve the clarity of this paper.

APPENDIX I. REFERENCES

Cheung, V. W.-T., and Tso, W. K. (1986). "Eccentricity in irregular multistorey buildings." *Canadian J. of Civ. Engrg.*, 13(1), 46–52.

Earthquake Resistant Regulations, A World List—1988. (1988). Int. Assoc. for Earthquake Engrg., Tokyo, Japan.

Humar, J. L. (1984). "Design for seismic torsional forces." *Canadian J. of Civ. Engrg.*, 12(2), 150–163.

Poole, R. A. (1977). "Analysis for torsion employing provisions of NZRS 4203: 1974." *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 10(4), 219–225.

Recommended Lateral Force Requirements and Commentary. (1975). Fourth Ed., Seismology Committee, Struct. Engrs. Assoc. of California, San Francisco, Calif.

Riddell, R., and Vasquez, J. (1984). "Existence of centres of resistance and torsional uncoupling of earthquake response of buildings." *Proc. of 8th World Conference on Earthquake Engineering*, 4, 187–194.

Rosenbleuth, E., and Meli, R. (1986). "The 1985 earthquake: causes and effects in Mexico City." *Concrete Int.*, 8(5), 23–34.

"Section 2312: Earthquake Regulations." (1988). *Int. Conference of Building Officials*, Uniform Building Code, Whittier, Calif.

Smith, B. Stafford, and Vezina, S. (1985). "Evaluation of centers of resistance in multistorey building structures." *Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2*, Institution of Civil Engineers, 79(4), 623–635.

Tso, W. K., and Cheung, V. W.-T. (1986). "Decoupling of equation of equilibrium in lateral load analysis of multistorey buildings." *Computers and Structures*, 23(5), 679–684.

APPENDIX II. NOTATION

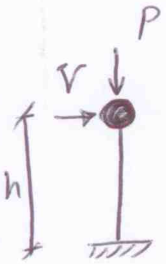
The following symbols are used in this paper:

e_i = eccentricity at floor i;
e_k^* = story level eccentricity at story k;
f_{ij} = jth frame reaction at floor i;
$(M_t)_k$ = torsional moment at story k;
P_i = lateral load at floor i;
T_i = floor torque at floor i;
V_k = story shear at story k;
V_{kj} = jth frame shear at story k;
x_j = x coordinate of frame j;
$(x_m)_i$ = x coordinate of center of mass at floor i;
$(x_R)_i$ = x coordinate of generalized center of rigidity at floor i;
$(x_s)_k$ = x coordinate of shear center at story k; and
$(x^*)_k$ = x coordinate of the resultant of all lateral loads above story k.

70

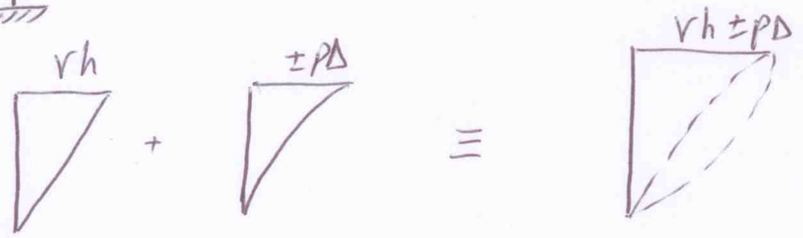
P-Δ Analysis

Structural Nonlinearity
- Material Non.
- Geometric Non. / Kinematic / Second-Order
- Large Displacement Non.



$M = Vh$ ← معادله تعادل برای حالت هندسه تغییر شکل نیافته ← اصل برهم نهی درست است

$M = Vh \pm P\Delta$ ← یافته " " " ← اصل برهم نهی اشکال دارد.



+P کششی → کاهش M

−P فشاری → افزایش M

$$M = Vh + P\Delta \longrightarrow V = \underbrace{\left(\frac{M}{h\Delta} - P\right)}_{\text{سختی کاهش یافته توسط نیروی فشاری}}\Delta$$

* در حالت تحلیل مرتبه اول سختی لازم بود ← $V = \frac{3EI}{\ell^3}\Delta$

* این اثر زمانی مهم می‌شود که P یا Δ زیاد باشند (ساختمان‌های نسبتاً بلند، لاغر و ...)

* اثرات دیگری نیز می‌توانند باعث غیرخطی شدن شوند، مانند شرایط مرزی (Contact element)

* روش Sap و Etabs : ماتریس سختی برای اثر بارگذاری ثقلی در تحلیل P-Δ تصحیح می‌شود و از این ماتریس برای تمامی انواع تحلیل‌های دیگر استفاده می‌گردد. در این حالت از جمع آثار قوا (ترکیبات بارگذاری) استفاده می‌شود چون همگی دارای ماتریس سختی مشابهی هستند.

* بهتر است از آنالیز بدون P-Δ شروع شود، سپس P-Δ و در نهایت (همگرایی) Large Dis. استفاده گردد.

* ضرایب بار ثقلی در ترکیب بارگذاری (که شامل زلزله است) بلافاصله وارد در نظر گرفته می‌شود → کنترل نیرو

کنترل تغییرمکان → کلیه ضرایب ثقلی $= 1$

15th story: $P_{cr} = 228(12)/0.0522 = 52{,}414$ kips

10th story: $P_{cr} = 435(12)/0.0609 = 85{,}714$ kips

5th story: $P_{cr} = 642(12)/0.0582 = 132{,}371$ kips

The corresponding magnification factors assuming $\gamma = \phi = 1.0$ are:

for the 15th story:

$$\mu = \frac{1}{1 - 7427/52{,}414} = 1.165$$

for the 10th story:

$$\mu = \frac{1}{1 - 13{,}616/85{,}714} = 1.189$$

for the 5th story:

$$\mu = \frac{1}{1 - 19{,}806/132{,}371} = 1.176$$

and the magnified story drifts are:

for the 15th story:

$$\mu\,\Delta = 1.165(0.0522) = 0.0608 \text{ ft}$$

for the 10th story:

$$\mu\,\Delta = 1.189(0.0609) = 0.0724 \text{ ft}$$

for the 5th story:

$$\mu\,\Delta = 1.176(0.0582) = 0.0684 \text{ ft}$$

A large-deformation analysis of this building[7-23] indicates story drifts of 0.0607 ft, 0.0723 ft, and 0.0686 ft for the 15th, 10th, and 5th stories, respectively.

7.4.3 Approximate P-Delta Analysis

Three methods for approximate P-delta analysis of building structures are presented in this section: the iterative P-delta method; the direct P-delta method; and the negative bracing member method. All three methods are shown to be capable of providing accurate estimates of P-delta effects.

Iterative P-Delta Method The iterative P-delta method[7-16, 7-24, 7-25, 7-26] is based on the simple idea of correcting first-order displacements, by adding the P-delta shears to the applied story shears. Since P-delta effects are cumulative in nature, this correction and subsequent reanalysis should be performed iteratively until convergence is achieved. At each cycle of iteration a modified set of story shears are defined as:

$$\sum V_i = \sum V_1 + \left(\sum P\right)\Delta_{i-1} / h \qquad (7\text{-}20)$$

where ΣV_i is the modified story shear at the end of ith cycle of iteration, ΣV_1 is the first-order story shear, ΣP is the sum of all gravity forces acting on and above the floor level under consideration, Δ_{i-1} is the story drift as obtained from first-order analysis in the previous cycle of iteration, and h is the story height for the floor level under consideration. Iteration may be terminated when $\sum V_i \approx \sum V_{i-1}$ or $\Delta_i \approx \Delta_{i-1}$.

Generally for elastic structures of reasonable stiffness, convergence will be achieved within one or two cycles of iteration[7-16]. One should note that since the lateral forces are being modified to approximate the P-delta effect, the column shears obtained will be slightly in error [7-16]. This is true for all approximate methods which use sway forces to approximate the P-delta effect.

EXAMPLE 7-1

For the 10 story moment resistant steel frame shown in Figure 7-14, modify the first-order lateral displacements to include the P-delta effects by using the Iterative P-delta Method. The computed first-order lateral displacements and story drifts for the frame are

Table 7-1. Applied forces and computed First-Order Displacements for the 10-story frame.

Level	Story height h, in.	Gravity force ΣP, kips	Lateral load V, kips	Story shear ΣV_1, kips	Lateral disp. D_1, in.	Story drift Δ_1, in.
10	144	180	30.22	30.22	7.996	0.517
9	144	396	21.94	52.17	7.479	0.736
8	144	612	19.57	71.74	6.743	0.785
7	144	828	17.20	88.93	5.958	0.907
6	144	1044	14.83	103.76	5.051	0.899
5	144	1260	12.45	116.21	4.152	0.914
4	144	1476	10.08	126.30	3.238	0.833
3	144	1692	7.71	134.01	2.400	0.867
2	144	1908	5.34	139.34	1.533	0.768
1	180	2124	2.97	142.31	0.765	0.765

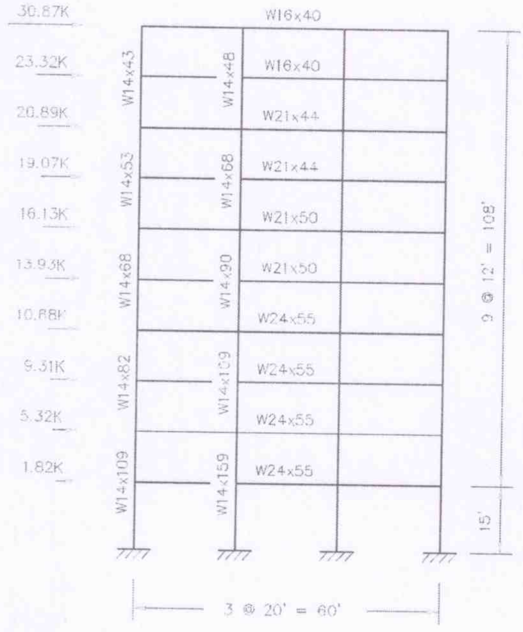


Figure 7-14. Elevation of the story moment frame used in Example 7-1.

shown in Table 7-1. The tributary width of the frame is 30 ft. The gravity load is 100 psf on the roof and 120 psf on typical floors. Use center-to-center dimensions.

The calculations for this example using the iterative P-delta method are presented in Tables 7-2 and 7-3. The convergence was achieved in two cycles of iteration. Table 7-3 also shows results obtained by an "exact" P-delta analysis.

To further explain the steps involved in the application of this method, let us consider the bent at the 8th level of the frame. The story height (h) is 12 feet (144 in.), the total gravity force at this level (ΣP) is 612 kips, the story shear (ΣV) is 71.74 kips, and the first-order story drift is 0.785 inches (see Table 7-1).

The P-Delta Contribution to the story shear is:

$$\frac{(\Sigma P)\Delta_1}{h} = \frac{(612)(0.785)}{144} = 3.34 \text{ kips}$$

and the modified story shear is:

$$\Sigma V_2 = \Sigma V_1 + (\Sigma P)\ \Delta_1 / h$$
$$= 71.74 + 3.34 = 75.08 \text{ kips}$$

Repeating this operation for all stories results in a modified set of story shears, from which a modified set of applied lateral forces is obtained (Table 7-2). A new first-order analysis of the frame subjected to these modified lateral forces results in a modified set of lateral displacements (D_2) and story drifts (Δ_2) as shown in Table 7-2. The maximum displacement obtained from the second analysis was 8.478 in., which is 9% larger than the original first-order displacement. Hence, a second iteration is necessary. Again performing the calculations for the bent at the 8th floor:

$$\frac{(\Sigma P)\,\Delta_2}{h} = \frac{(612)(0.823)}{144} = 3.50 \text{ kips}$$

$$\Sigma V_3 = \Sigma V_2 + (\Sigma P)\ \Delta_2 / h$$
$$= 71.74 + 3.50 = 75.24 \text{ kips}$$

Another first-order analysis for the new set of lateral forces indicates a maximum displacement of 8.508 inches, which is less than

Table 7-2. Iterative P-delta method (First cycle of iteration)

Level	$(\Sigma P)\,\Delta_1 / h$, kips	$\Sigma V_1+(\Sigma P)\,\Delta_1 / h$, kips	Modified lateral Force V_2, kips	Modified lateral Disp. D_2, in.	Modified story Drift Δ_2, in.
10	0.65	30.87	30.87	8.478	0.533
9	2.02	54.19	23.32	7.945	0.767
8	3.34	75.08	20.89	7.178	0.823
7	5.22	94.15	19.07	6.355	0.959
6	6.52	110.28	16.13	5.396	0.955
5	8.00	124.21	13.93	4.441	0.976
4	8.59	134.89	10.68	3.465	0.897
3	10.19	144.20	9.31	2.568	0.930
2	10.18	149.52	5.32	1.638	0.823
1	9.03	151.34	1.82	0.815	0.815

Table 7-3. Iterative P-delta method (Second cycle of iteration)

Level	$(\Sigma P)\,\Delta_2 / h$, kips	$\Sigma V_2+(\Sigma P)\,\Delta_2 / h$, kips	Modified lateral Force V_3, kips	Modified lateral Disp. D_3, in.	Modified story Drift Δ_3, in.
10	0.67	30.89	30.89	8.508 (8.510)	0.534 (0.534)
9	2.11	54.28	23.39	7.975 (7.976)	0.768 (0.768)
8	3.50	75.24	20.96	7.207 (7.209)	0.825 (0.825)
7	5.51	94.44	19.20	6.382 (6.384)	0.962 (0.963)
6	6.92	110.68	16.24	5.419 (5.421)	0.959 (0.959)
5	8.54	124.75	14.07	4.461 (4.462)	0.980 (0.980)
4	9.19	135.49	10.74	3.480 (3.481)	0.900 (0.901)
3	10.93	144.94	9.45	2.580(2.581)	0.935 (0.935)
2	10.90	150.24	5.30	1.645 (1.646)	0.827 (0.827)
1	9.62	151.93	1.69	0.818 (0.819)	0.818 (0.819)

* Values in parentheses represent results of an "exact" P-delta analysis.

1% larger than the displacements obtained in the previous iteration. Hence, the iteration was terminated at this point.

The first-order and second-order lateral displacements and story drifts are shown in Figures 7-15 and 7-16. As indicated by these figures, the results are virtually identical to the exact results.

Direct P-Delta Method The direct P-delta method[7-16] is a simplification of the iterative method. Using this method, an estimate of final deflections is obtained directly from the first order deflections.

The simplification is based on the assumption that story drift at the *i*th level is proportional only to the applied story shear at that level (ΣV_i). This assumption allows the treatment of each level independent of the others.

If F is the drift caused by a unit lateral load at the *i*th level, then the first order drift Δ_1 is:

$$\Delta_1 = F\,\Sigma V_1 \tag{7-21}$$

After the first cycle of iteration,

$$\Delta_2 = F\,\Sigma V_2 = F(\Sigma V_1)\left(1 + (\Sigma P)\frac{F}{h}\right) \tag{7-22}$$

and after the i th cycle of iteration:

$$\Delta_{i+1} = F\Sigma V_1\left[1 + \left((\Sigma P)\frac{F}{h}\right) + \left((\Sigma P)\frac{F}{h}\right)^2 + \cdots + \left((\Sigma P)\frac{F}{h}\right)^i\right] \tag{7-23}$$

$$\gamma = 1 + 0.22 \frac{4(G_A - G_B)^2 + (G_A + 3)(G_B + 2)}{[(G_A + 2)(G_B + 2) - 1]^2} \qquad (7\text{-}27)$$

where G_A and G_B are the stiffness ratios as defined in Section 7.4.1. The flexibility factor γ has a rather small range of variation (from 1.0 for $G_A = G_B = \infty$, to 1.22 for $G_A = G_B = 0$.). For design purposes a conservative average value of γ can be used for the entire frame. Lai and MacGregor(7-26) suggest an average value of γ = 1.15, while Stevens(7-10) has proposed an average value of γ = 1.11.

To include the C-S effect in the previously discussed P-delta methods, it is sufficient to use $\gamma \Sigma P$ instead of ΣP wherever the term ΣP appears.

EXAMPLE 7-4

For the 10-story frame of Example 7-1, compute the second-order displacements and story drifts at the first, fifth, and the roof levels by the modified direct P-delta method. An average value of γ = 1.11 is assumed for all calculations.

Using the values listed in Table 7-4 we have:

- at the roof:

$$\frac{\gamma(\Sigma P)\Delta_1}{(\Sigma V_1)h} = \frac{(1.11)(180)(0.517)}{(30.22)(144)} = 0.024$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.024} = 1.025$$

$$\Delta_2 = \mu\Delta_1 = (1.025)(0.517) = 0.530\,\text{in.}$$

- at the fifth level:

$$\frac{\gamma(\Sigma P)\Delta_1}{(\Sigma V_1)h} = \frac{(1.11)(1260)(0.914)}{(116.21)(144)} = 0.076$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.076} = 1.082$$

$$\Delta_2 = \mu\Delta_1 = (1.082)(0.914) = 0.989\,\text{in.}$$

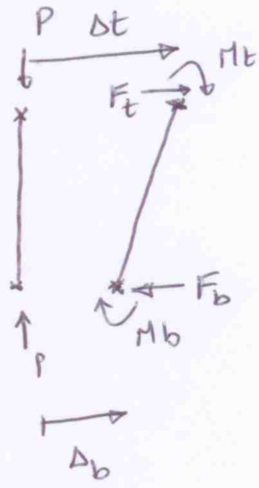
- and at the first level:

$$\frac{\gamma(\Sigma P)\Delta_1}{(\Sigma V_1)h} = \frac{(1.11)(2124)(0.765)}{(142.31)(180)} = 0.070$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.070} = 1.075$$

$$\Delta_2 = \mu\Delta_1 = (1.075)(0.765) = 0.822\,\text{in.}$$

Comparison of these results with those obtained by the original method reveals an increase of less than 1% in the story drifts due to this modification.



*7.4.4 "Exact" P-Delta Analysis

Construction of the geometric stiffness matrix is the backbone of any exact second-order analysis. The same matrix is also essential for any finite element buckling analysis procedure. In this section, the concept of geometric stiffness matrix is introduced, and a general approach to "exact" second-order structural analysis is discussed.

Consider the deformed column shown in Figure 7-18. For the sake of simplicity, neglect the axial deformation of the member, and the small C-S effect. The slope deflection equations for this column can be written as(7-12)

$$M_t = \frac{EI}{L}\left(4\theta_t + 2\theta_b - \frac{6\Delta_t}{L} + \frac{6\Delta_b}{L}\right) \qquad (7\text{-}28)$$

$$M_b = \frac{EI}{L}\left(2\theta_t + 4\theta_b - \frac{6\Delta_t}{L} + \frac{6\Delta_b}{L}\right) \qquad (7\text{-}29)$$

From force equilibrium:

$$F_t = -\frac{M_t + M_b}{L} - \frac{P(\Delta_t - \Delta_b)}{L} \qquad (7\text{-}30)$$

$$F_b = -F_t \qquad (7\text{-}31)$$

Substituting Equations 7-28 and 7-29 into Equation 7-30:

$$F_t = -\frac{6EI}{L^2}(\theta_t + \theta_b) + 12\left(\frac{EI}{L^3} - \frac{P}{L}\right)(\Delta_t - \Delta_b) \tag{7-32}$$

Now if we rewrite the above equations in a matrix form, we obtain:

$$\begin{bmatrix} M_t \\ M_b \\ F_t \\ F_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{P}{L} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{P}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{P}{L} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{P}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_b \\ \Delta_t \\ \Delta_b \end{bmatrix} \tag{7-33}$$

Since we wrote the equilibrium equations for the deformed shape of the member, this is a second-order stiffness matrix. Notice that the only difference between this matrix, and a standard first-order beam stiffness matrix, is the presence of *P/L* or geometric terms. The stiffness matrix given by Equation 7-33 can also be written as:

$$\lfloor K \rfloor = \lfloor K_f \rfloor - \lfloor K_g \rfloor \tag{7-34}$$

where $[K_f]$ is the standard first-order stiffness matrix (material matrix) and $[K_g]$ is the geometric stiffness matrix given by:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +P/L & -P/L \\ 0 & 0 & -P/L & +P/L \end{bmatrix}$$

Inspection of the simple second-order stiffness matrix given by Equation 7-33 shows why general second-order structural analysis has an iterative nature. The matrix includes *P/L* terms, but the axial force *P* is not known before an analysis is performed. For the first analysis cycle, *P* can be assumed to be zero (standard first-order analysis). In each subsequent analysis cycle, the member forces obtained from the previous cycle are used to form a new geometric stiffness matrix, and the analysis continues until convergence is achieved. If inelastic material behavior is to be considered, then the material stiffness matrix must also be revised at appropriate steps in the analysis.

Substantial research has been performed on the formulation of geometric stiffness matrices and finite element stability analysis of structures[7-28,7-36]. A complete formulation of the three-dimensional geometric stiffness matrix for wide flange beam-columns has been proposed by Yang and McGuire [7-36].

The common assumption that floor diaphragms are rigid in their own plane, allows condensation of lateral degrees of freedom into three degrees of freedom per floor level: two horizontal translations and a rotation about the vertical axis. This simplification significantly reduces the effort required for an "exact" second-order analysis. A number of schemes have been developed to permit direct and non-iterative inclusion of P-Delta effects in the analysis of rigid-diaphragm buildings [7-37, 7-38, 7-39].

The geometric stiffness matrix for a three dimensional rigid diaphragm building is given in Figure 7-19[7-37, 7-38]. For a three-dimensional building with N floor levels, $[K_g]$ is a $3N \times 3N$ matrix. For planar frames, the matrix reduces to an $N \times N$ tridiagonal matrix. The non-zero terms of this matrix are given by:

$$\alpha_i = \frac{(\Sigma P)_i}{h_i} + \frac{(\Sigma P)_{i+1}}{h_{i+1}} \tag{7-35}$$

$$\beta_i = \frac{(\Sigma T)_i}{h_i} + \frac{(\Sigma T)_{i+1}}{h_{i+1}} \tag{7-36}$$

$$\eta_i = -\frac{(\Sigma P)_i}{h_i} \qquad (7\text{-}37)$$

$$\lambda_i = -\frac{(\Sigma T)_i}{h_i} \qquad (7\text{-}38)$$

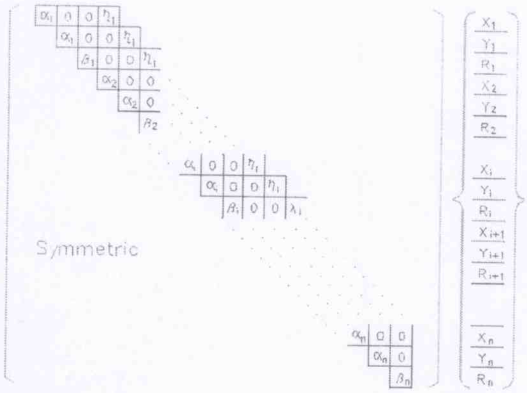


Figure 7-18. Geometric stiffness matrix for three-dimensional rigid diaphragm buildings.

where h_i is the floor height for level i, P_i is weight of the i th level, T_i is the second-order story torque, and

$$(\Sigma P)_i = \sum_{j=i}^{n} P_j \qquad (7\text{-}39)$$

$$(\Sigma T)_i = \sum_{j=i}^{n} T_j \qquad (7\text{-}40)$$

$(\Sigma P)_i$ can also be represented in terms of story mass, m_i, and gravitational acceleration, g, as

$$(\Sigma P)_i = \left(\sum_{j=i}^{n} m_j\right) \times g \qquad (7\text{-}41)$$

The story torque, T_i, is given by [7-38]

$$T_i = \left(\sum_{j=i}^{n} p_j d_j^2\right)\frac{\theta}{h_i} \qquad (7\text{-}42)$$

where p_j is the vertical force carried by the jth column, d_j is the distance of jth column from the center of rotation of the floor, and θ is an imposed unit rigid body rotation of the floor. Assuming that the dead load is evenly distributed over the floor and that a roughly uniform vertical support system is provided over the plan area of the floor, Equation 7-42 can be further simplified to

$$T_i = m_{Ri}\frac{g}{h_i} \qquad (7\text{-}43)$$

where m_{Ri} is the rotational mass moment of inertia of the ith floor and g is the gravitational acceleration. The approximation involved in the derivation of Equation 7-43 is usually insignificant[7-39]. Hence, for most practical problems, Equation 7-43 can be used instead of Equation 7-42, thereby allowing the direct inclusion of the P-delta effect in a three dimensional structural analysis.

7.4.5 Choice of Member Stiffnesses for Drift and P-Delta Analysis

A common difficulty in seismic analysis of reinforced concrete structures is the selection of a set of rational stiffness values to be used in force and displacement analyses. Should one use gross concrete section properties? Should one use some reduced section properties? Or should the gross concrete properties be used for one type of analysis and reduced section properties be used for another type of analysis?

The seismic design codes in the United States are not specific about this matter. Hence, the choice of section properties used in lateral analysis in general, and seismic analysis in particular, varies widely.

Contributing to the complexity of this issue, are the following factors:

1. Although elastic material behavior is usually assumed for the sake of simplicity, reinforced concrete is not a homogeneous, linearly elastic material.
2. Stiffness and idealized elastic material properties of a reinforced concrete section vary with the state of behavior of the section (e.g. uncracked, cracked and ultimate states).

77