Mehdi
Imanian
Najafabadi

مقدمه :

مکانیک سیالات : علم بررسی رفتار سیالات در حالت سکون یا حرکت و اثرات سیال بر مرزهای جامد یا سیال .

مکانیک سیالات از دو دیدگاه مورد بررسی قرار می گیرد { تئوری / تجربی

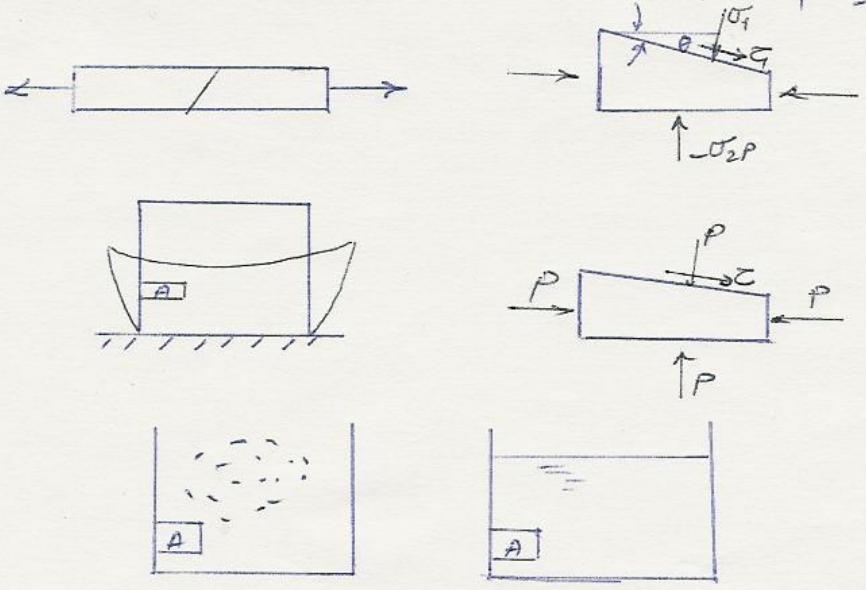
بررسی حرکت سیالات در حالت کلی بسیار پیچیده می باشد بنابراین همواره با استفاده از ساده سازی ها و فرض های مختلف راه را برای بررسی های تئوری هموار می نماییم و برای جلوگیری از خطاهای مختلف از تلفیق روش های تجربی و تئوری استفاده می کنیم .

حالت های مختلف ماده : { - سیال / - جامد

تفاوت اساسی این دو دسته در واکنش آنها نسبت به نیروی برشی وارد بر هر کدام مشخص می شود .

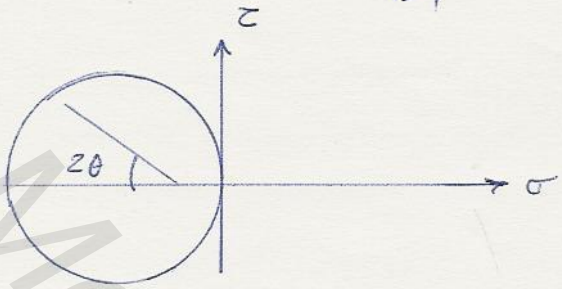
- جامد در مقابل یک تنش برشی با یک تغییر شکل معین و ثابت مقاومت می کند (حافظه دار)

- اگر تنش برشی (هر قدر هم کوچک باشد) به یک سیال وارد شود (تا زمانی که این تنش به سیال اعمال شود سیال در حال تغییر فرم خواهد بود .

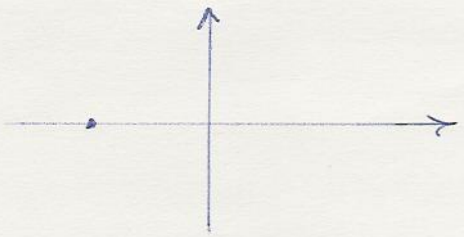


Mehdi Imanian Najafabadi

در سیال P داریم ولی تنش برشی نخواهیم داشت، اگر دایره مور را رسم کنیم:



(دایره موهر برای جامد)

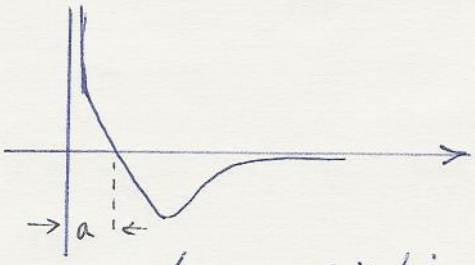


(دایره موهر برای سیال)

تحلیل نیروی در سیالات:
- استاتیکی: سیال تحت هیچ گونه تنش برشی قرار ندارد.
- دینامیکی: سیال تحت تنش برشی قرار دارد.

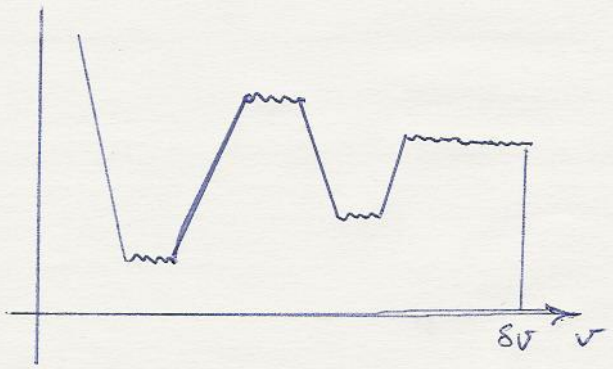
دسته بندی سیالات:
- مایعات: نیروی پیوستگی قوی‌تری نسبت به گازها دارند بنابراین شکل ظرف را بخود می‌گیرند
- گازها

فرضیه محیط پیوسته: هر ماده ای از مولکول هایی تشکیل یافته که بین آنها نیروهای قوی اثر می‌کنند



در فاصله های خیلی نزدیک یک نیروی قوی دافعه پیش می‌آید و در فاصله زیاد یک نیروی جاذبه ایجاد می‌شود که با زیاد شدن فاصله ابتدا بزرگ و سپس به طرف صفر میل می‌کند فاصله a که در آن نیروی برآیند صفر می‌شود مکان تعادل پایدار مولکول‌هاست.

حال اگر یک دستگاه اندازه‌گیری جسمی را اندازه نگیریم که عبارت است از جسم به اضافه تغییر شکل ایجاد شده به منظور اندازه‌گیری باشد شکل تعادل پس از اندازه‌گیری بدست خواهد آمد.



Mehdi Inanlar Najafabadi

در محدوده ابعاد ماکروسکوپی عموما دستگاه به علت پخش غیر یکنواخت جرم مقادیر متفاوتی را نشان می دهد، همانطور که از شکل پیداست، یک حجم حدی δV^* وجود دارد که در حجم کمتر از آن تغییرات ماکروسکوپی اهمیت دارد و در حجم بزرگتر از آن تغییرات مجمع ماکروسکوپی اهمیت دارد، بنابراین بهترین تعریف برای چگالی عبارتست از:

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}$$

حجم حدی δV^* برای تمام مایعات و گازها در فشار 1 atm برابر $10^{-9}\ mm^3$ است. با در نظر گرفتن حجم بزرگتر از δV^* جهت تحلیل ابعاد مسائل، سیال را می توان یک سیال پیوسته در نظر گرفت.

* با فرض یک محیط پیوسته متغیرهای مختلف که در تحلیل مسائل ظاهر می شوند، تابعی پیوسته از مکان و زمان هستند و شامل تعریف حد و پیوستگی که در پیوستگی تابع مقادیر حد داریم و چپ یا مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

ابعاد و واحدها:

* بعد یا دیمانسیون به عنوان ابزاری برای اندازه گیری به کار می رود.
* در مکانیک سیالات تنها چهار دیمانسیون اصلی وجود دارد که تمام دیمانسیون های فرعی دیگر را می توان از آنها بدست آورد، این دیمانسیون ها عبارتند از: جرم، طول، زمان و دما

سیستم های آحاد:
- SI : دستگاه آحاد استاندارد بین المللی
- BG : دستگاه آحاد انگلیسی

ابعاد اصلی	SI	BG
جرم M	kg	slug
طول L	m	ft
زمان T	s	s
دما θ	K	R

Mehdimanian.Kajabadi

مثال: اگر وزن فردی 150 lbf باشد، جرم او را بدست آورید؟

$$W = mg \rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{150\,(lbf)}{32.2\,(ft/s^2)} = 4.66\ slug$$

خواص سیالات: - خواص سینماتیکی سیالات
- خواص ترمودینامیکی سیالات

خواص سینماتیکی سیالات:

سوال: سرنوشت هر ذره از سیال چیست؟

* مهمترین ویژگی سینماتیکی سیال میدان سرعت است
* در بررسی سینماتیکی سیال دو دیدگاه وجود دارد { اویلری / لاگرانژی
* دیدگاه اویلری میدان جریان را مورد توجه قرار داده و در این دیدگاه از یک دستگاه مختصات ساکن استفاده میشود
* دیدگاه لاگرانژی یک ذره انتخابی متحرک را در میدان جریان دنبال می‌کند و در این دیدگاه دستگاه مختصات بر روی ذره‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد، قرار دارد.

میدان سرعت: $\vec{V}(x,y,z,t) = \hat{i}\,u(x,y,z,t) + \hat{j}\,v(x,y,z,t) + \hat{k}\,w(x,y,z,t)$

$\vec{V}$ مشتق = شتاب $\rightarrow$ $a(x,y,z,t) = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} =$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{\delta V}{\delta x} \times \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta V}{\delta y} \times \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta V}{\delta z} \times \frac{\delta z}{\delta t} =$$

Mehdi Imanian Najafabadi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$\frac{\partial V}{\partial t}$: شتاب محلی یا موضعی (local) است و در یک نقطه مورد بررسی جریان، برای جریان پایدار و دائمی که با زمان تغییر نمی‌کند صفر است.

$u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}$: شتاب انتقالی بیان کننده آن است که سیال در نقاط مختلف دارای سرعت‌های متفاوتی می‌باشد (بر خلاف جسم صلب)

$Q = \int_A (V \cdot n)\, dA = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$: دبی حجمی = انتگرال $\vec{V}$

* از ضرب دبی حجمی در جرم مخصوص، دبی جرمی ($\dot{m}$) بدست می‌آید $\dot{m} = \rho Q$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = div\,\vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$ انبساط حجمی = دیورژانس $\vec{V}$

مخالف صفر بودن این عبارت نشان دهنده تراکم پذیری جریان است $\left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$

$\omega = \frac{1}{2} curl\,\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V}$: سرعت زاویه‌ای موضعی ذرات سیال = کرل $\vec{V}$

مخالف صفر بودن این عبارت نمایش دهنده چرخشی بودن جریان است.

Mehdi Inanian Najafabadi

خواص ترمودینامیکی سیالات :

(۱- فشار (P) 2- حجم مخصوص (v) 3- دما (T)) ← همراهان دائمی بردار سرعت

(4- انرژی داخلی (e) 5- آنتالپی (h) 6- آنتروپی (s) 7- گرمای ویژه (c_p, c_v))

زمانی که با کار، گرما، موازنه انرژی سروکار داشته باشیم، اهمیت خواهند داشت

8- ضریب لزجت (μ) ← اثرات مربوط به اصطکاک

9- ضریب هدایت حرارتی (k) ← اثرات مربوط به هدایت حرارتی

* خواص ترمودینامیکی حالت یک سیستم را مشخص می‌کند

* سیستم : مجموعه‌ای از مواد با ماهیتی ثابت است که با محیط اطراف خود در حال تأثیر متقابل است.

* خواص به گونه‌ای نامیده می‌شوند که مقدار آنها در سیال به صورت پیوسته تغییر می‌کند.

۱- فشار :

* فشار یک کمیت اصلی نمی‌باشد (از نظر دیمانسیونی) بلکه کمیتی است که خود از دو کمیت نیرو و سطح مشتق شده است.

* فشار سیال حاصل تبادل اندازه حرکت میان مولکول‌های سیال و دیواره ظرف است.

۲- حجم مخصوص :

$$\rho = \lim_{\delta v \to \delta v^*} \frac{\delta m}{\delta v}$$

۳- دما :

* معیاری از جنبش مولکولی می‌باشد یا به عبارتی معیاری از بهره و نیروی اجسام می‌باشد.

Mehdi Imanian Najafabadi

۴- انرژی داخلی

* در ترمودینامیک تنها انرژی موجود در ماده انرژی داخلی است که در نتیجه فعالیت مولکولی و نیروهای پیوندی مولکولی ایجاد شده، در سیستم ذخیره می‌شود.

* در جریان یک سیال علاوه بر انرژی داخلی، دو انرژی دیگر به خاطر انرژی مکانیک نیوتونی یعنی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی به آن اضافه می‌شود.

$$e = u + \frac{1}{2}V^2 + gz$$

e: انرژی داخلی کل
u: انرژی داخلی مربوط به جنبش مولکولی
$\frac{1}{2}V^2$: انرژی جنبشی
gz: انرژی پتانسیل

۵- آنتالپی

* انرژی داخلی به علاوه کار جریان (Flow Work) آنتالپی را نتیجه می‌دهد.

$$h = u + \frac{P}{\rho} = u + Pv \qquad v = \frac{V}{M}$$

v: حجم مخصوص

۶- آنتروپی

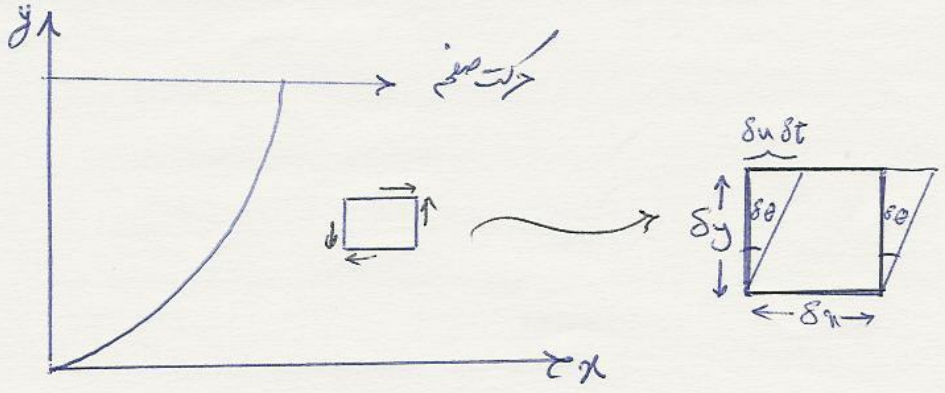
* معیاری از بی‌نظمی است.

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_0}$$

۷- گرمای ویژه

$$\begin{cases} C_p = \left(\frac{\delta u}{\delta T}\right)_p & \text{(در فشار ثابت)} \\ C_v = \left(\frac{\delta u}{\delta T}\right)_v & \text{(در حجم ثابت)} \end{cases}$$

۸- لزجت



Mehrimanian Najafabadi

* ارتباط بین تنش وی موضعی یک جزء سیال متحرک با میزان کرنش را ضریب لزجت معین می کند

* تا زمانی که تنش برشی (τ) وجود داشته باشد، سبب افزایش $\delta\theta$ و حرکت سطح بالایی المان نسبت به سطح پایینی المان با سرعت δu می شود.

* بنابراین تغییرات زمانی $\delta\theta$ متناسب با τ است.

$$\tau \propto \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$\tan\delta\theta = \frac{\delta u \cdot \delta t}{\delta y} \xrightarrow{\text{تغییرات بینهایت کوچک}} \delta\theta = \frac{\delta u \cdot \delta t}{\delta y}$$

با توجه به شکل

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta\theta}{\delta t}}$$

$$\Rightarrow \tau \propto \frac{\delta u}{\delta y} \Rightarrow \boxed{\tau = \mu \frac{\delta u}{\delta y}}$$ ← سیالات نیوتنی

* سیالاتی که از رابطه زیر پیروی می کنند را سیالات نیوتنی می نامند

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\{\tau\} = \left\{\frac{N}{m^2}\right\} = \left\{\frac{kg\,m/s^2}{m^2}\right\} = \left\{\frac{kg}{m\,s^2}\right\} = \left\{\frac{M}{LT^2}\right\}$$

$$\{\delta u\} = \{m/s\} = \{L/T\} \Rightarrow \{\mu\} = \left\{\frac{M}{LT}\right\} = \left\{\frac{kg}{m.s}\right\}$$

$$\{\delta y\} = \{m\} = \{L\}$$

* ضریب لزجت سیالات نیوتنی یک خاصیت واقعی ترمودینامیکی است که با فشار و دما تغییر می کند

* لزجت گازها با افزایش دما افزایش می یابد، لزجت مایعات با افزایش دما، کاهش می یابد.

* μ به عنوان لزجت دینامیکی شناخته می شود

Mehdi Hanian Nalfabadi

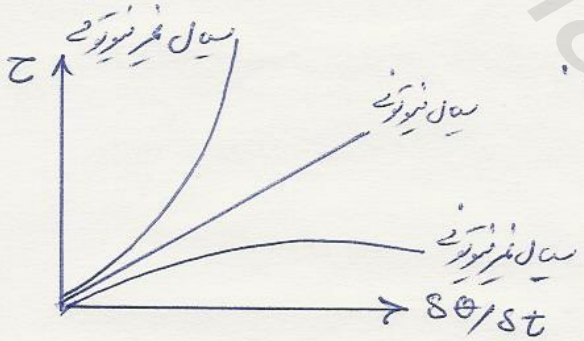
* از تقسیم μ بر ρ لزجت سینماتیکی حاصل می‌شود. $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \{\nu\} = \{\frac{L^2}{T}\}$

خواص لزجت چند ماده:

	20°C, 1 atm
هوا	$\mu = 8.8 \times 10^{-6}$ kg/m.s $\nu = 1.05 \times 10^{-4}$ m²/s
آب	$\mu = 10^{-3}$ kg/m.s $\nu = 1.01 \times 10^{-6}$ m²/s
جیوه	$\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ kg/m.s $\nu = 1.16 \times 10^{-7}$ m²/s

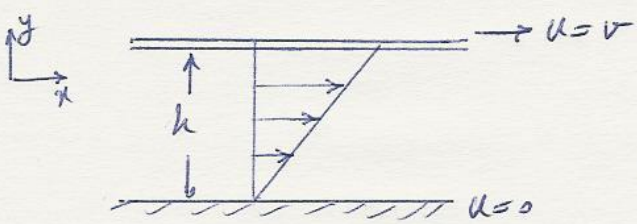
سیالات غیر نیوتنی:

* در سیالات غیر نیوتنی μ ثابت نبوده، تابعی از نرخ کرنش $(\frac{\delta\theta}{\delta t})$ می‌باشد.
* شاخه‌ای از سیالات که به مطالعه رفتار سیالات غیر نیوتنی می‌پردازد، رئولوژی نام دارد.
* بسیاری از سیالات غیر نیوتنی حائز اهمیت هستند.



مثال: جریان لزج بین دو صفحه:

دو صفحه تخت و موازی به فاصله h از همدیگر قرار دارند، صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی با سرعت U در حال حرکت است، با فرض سیال نیوتنی و پروفیل خطی سرعت معادله پروفیل سرعت و تنش برشی را بدست آورید.



- توزیع سرعت تنها در جهت x می‌باشد
- در جهات y و z هیچ گونه جریانی نداریم، بنابراین $V = W = 0$
- شتاب در کلیه جهات صفر می‌باشد.

Mehdi Imanian Najafabadi

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$ سیال نیوتنی

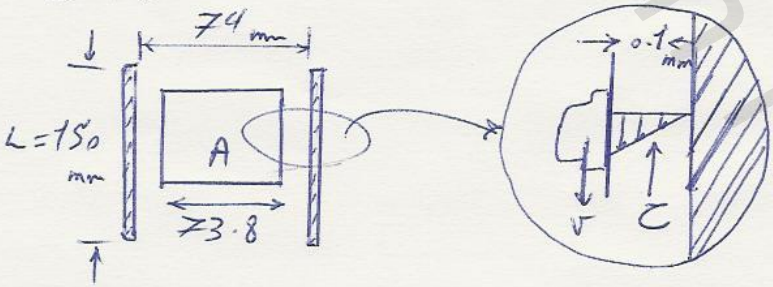
$\frac{du}{dy} = const \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu} = const$ پروفیل خطی سرعت

انتگرال‌گیری $\longrightarrow u(y) = \frac{\tau}{\mu} y + C$

شرط مرزی $\begin{cases} y=0 \\ u=0 \end{cases} \Rightarrow C=0 \Rightarrow \boxed{u(y) = \frac{\tau}{\mu} y}$ معادله پروفیل سرعت

شرط مرزی $\begin{cases} y=h \\ u=v \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\mu v}{h}}$ تنش برشی

مثال: استوانه‌ای جامد (A) به جرم 2.5 kg طوری که در شکل نشان داده شده است در داخل لوله‌ای قرار می‌گیرد. بین سطح خارجی استوانه و لوله، طوری کامل هم محور بوده، لایه‌ای از روغن به ضخامت 0.1 mm وجود دارد. ضریب لزجت روغن $7 \times 10^{-3}\ N.s/m^2$ می‌باشد. سرعت حد استوانه چقدر است؟ (از اثرات هوا صرف‌نظر کنید و پروفیل سرعت را خطی در نظر بگیرید)



پروفیل سرعت خطی است $\rightsquigarrow \frac{du}{dx} = \frac{v-0}{0.0001} = 10000v \ (1/s)$

$\tau = \mu \frac{du}{dx} = 7 \times 10^{-3} (10000v) = 70v$

* نیروی استوانه به سرعت حدی برابر است با نیروی وزن استوانه با نیروی حاصل از تنش برشی متعادل شود

$mg = w = \tau (\pi DL) \Rightarrow (2.5 \times 9.81) = (70v)(\pi)(0.0738)(0.15)$

$\Rightarrow \boxed{v = 10.07 \ m/s}$

Mehdi Imanian Najafabadi

۹- هدایت حرارتی :

* خاصیتی شبیه ضریب لزجت به نام ضریب هدایت حرارتی (k) وجود دارد که رابطه بین بردار نرخ جریان حرارتی q (در واحد سطح) و بردار گرادیان دمای حرارت DT است.

* قانون حاکم بین نرخ جریان حرارتی و بردار گرادیان دمای حرارت DT، قانون فوریه نامیده می‌شود.

$$q = -k\,DT \begin{cases} q_x = -k\dfrac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = -k\dfrac{\partial T}{\partial y} \\ q_z = -k\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

علامت منفی بدلیل این است که شار حرارتی در جهت کاهش دما مثبت است.

مرور مختصری بر مبانی ترمودینامیک

گاز و روابط حالت :

* خواص ترمودینامیکی گازها به وسیله روابط حالت که برای ماده متفاوت است، به هم مربوط می‌شوند.

* تمام گازها در دماهای بالا و فشارهای پایین با تقریب بسیار خوبی از قانون گاز کامل تبعیت می‌کنند.

$$P = \rho R T \qquad R = C_p - C_v$$

* ثابت هر گاز از تقسیم ثابت جهانی گازها بر جرم مولکولی همان گاز بدست می‌آید.

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \qquad \bar{R} = 8310 \ \frac{m^2}{s^2 \cdot k^\circ} = \frac{J}{kg \cdot k^\circ}$$

$$= 49700 \ \frac{ft^2}{s^2 \cdot R^\circ}$$

Mehdi Hamanian Najafabadi

تراکم پذیری در مایعات :

* مایعات در اثر فشار به میزان بسیار کمی متراکم می شوند
* قابلیت تراکم با معرفی دو کمیت زیر سنجیده می شوند

ضریب تراکم پذیری $\beta = \frac{-1}{V}\left(\frac{\delta V}{\delta P}\right)_T$

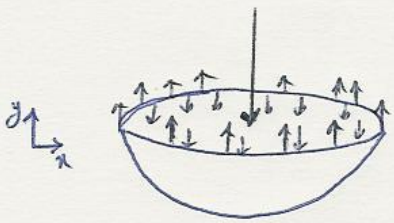
مدول حجمی $K = -V\left(\frac{\delta P}{\delta V}\right)_T = \frac{1}{\beta}$

کشش سطحی :

* کشش سطحی در سطح مشترک مایع و گاز تعریف می شود.
* پدیده کشش سطحی اساساً ناشی از جاذبه بین مولکول های یکسان (پیوستگی) و جاذبه مولکول های غیر یکسان (چسبندگی) است.
* در داخل مایع نیروهای پیوستگی یکدیگر را خنثی می کنند، ولی در سطح آزاد مایع نیروهای پیوستگی یکدیگر را خنثی نکرده و از پایین اثر می کنند و از نیروی چسبندگی مربوط به گاز در بالا بیشتر شده، سبب ایجاد کشش سطحی می شود.
* مولکول هایی که در عمق مایع قرار دارند، به علت فشردگی یکدیگر را می رانند و مولکول هایی که در سطح قرار دارند، کمتر متراکم بوده، در نتیجه یکدیگر را جذب می کنند
* مقدار کشش سطحی به عنوان شدت بارگذاری خطی (σ) عمود بر سطح بیان می شود، بر واحد طول خطی منطبق بر سطح آزاد مایع.

Mehdi Imanian Najafabadi

مثال: قطره آب در حال تعادل



تعادل نیروی: $-(P_i)_z(\pi R^2) + \sigma(2\pi R) = 0$

$$(P_i)_z = \frac{2\sigma}{R}$$

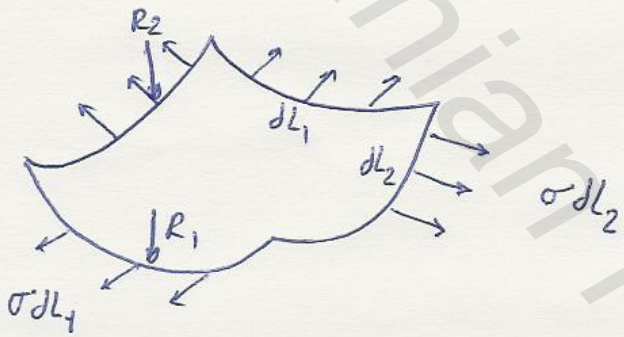
مثال: حباب

با توجه به اینکه ضخامت دیواره یک حباب بسیار نازک است،

بنابراین فشار داخل آن با فشار خارجی جز در یک لایه نازک متفاوت می‌شود.

تعادل نیروی: $(-P_i)_z(\pi R^2) + 2[\sigma(2\pi R)] = 0 \Rightarrow (P_i)_z = \frac{4\sigma}{R}$

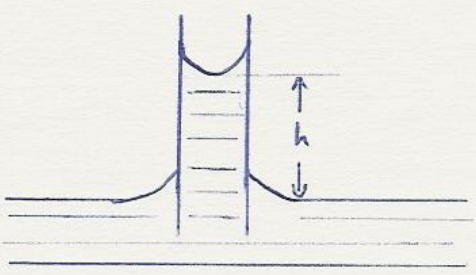
مثال: صفحه دلخواه



$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

اثر مویینگی:

* اگر چسبندگی مایع به جامد از پیوستگی مایع بیشتر باشد، مایع در داخل لوله باریک: سطح آزاد آن به صورت یک منحنی مقعر در می‌آید.

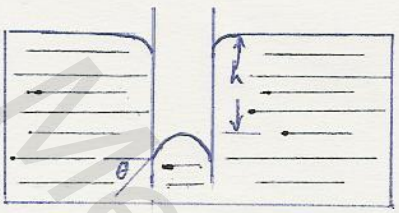


* اختلاف سطح مقعر در نزدیکی جامد با زاویه θ اندازه‌گیری می‌شود.

* هرچه اندازه قطر لوله کوچکتر باشد صعود مایع در داخل آن بیشتر است.

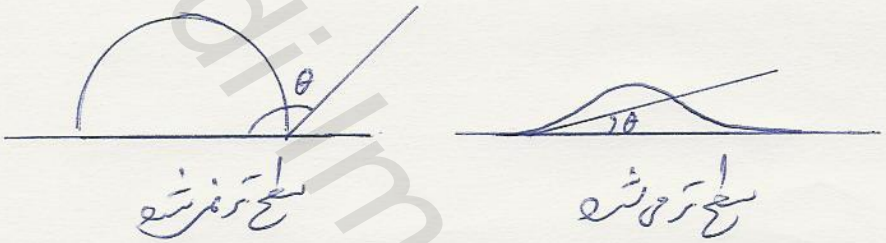
Mehdi Imanian Najafabadi

* اگر چسبندگی مایع به جامد از پیوستگی مایع کمتر باشد مایع در داخل لوله پائین رفته، سطح آزاد آن به صورت یک منحنی محدب در می آید.



* هرچه اندازه قطر لوله کوچکتر باشد، نزول مایع در داخل آن بیشتر است.

خاصیت تر کنندگی:



مثال: در شکل مربوط به آب و شیشه فرض می کنیم قطر داخلی لوله معین 2 mm است. اگر θ برابر با 20° و σ برای آب در مجاورت هوا 0.073 (N/m) باشد، ارتفاع بالا رفتن آب در لوله موئین را بدست آورید؟

$$(2\pi R)\sigma\cos\theta - W = 0$$

$$W = mg = \rho\frac{\pi D^2}{4}gh$$

$$\begin{cases} \rho = 1000 \ kg/m^3 \\ g = 9.81 \ m/s^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0.073)\pi(0.002)\cos 20 - (9810)\frac{\pi}{4}(0.002)^2 h = 0$$

$$\Rightarrow h = 13.99 \ mm$$

فشار بخار:

* فشار بخار فشاری است که در آن مایع شروع به جوشیدن کرده، با بخار خود به حالت تعادل می رسد.

* اگر فشار مایع به مقدار بیشتر از فشار بخار آن برسد مایع به راحتی تبخیر شده ولی اگر فشار مایع به مقدار کمتر از فشار بخار برسد، حباب های بخار در داخل آن تشکیل خواهد شد.

MehdiImanianNajafabadi

کاویتاسیون :

* اگر فشار مایع به دلیل ویژگی‌های جریان کمتر از فشار بخار شود، پدیده‌ی کاویتاسیون رخ می‌دهد.
* در بیشتر کاربردهای صنعتی طراحی باید به گونه‌ای باشد، تا از ایجاد پدیده‌ی کاویتاسیون پیشگیری شود.

شرایط عدم لغزش و عدم برش :

اگر جریانی یک سیال در یک سطح جامد محصور باشد، تأثیر متقابل مولکول‌های سیال و سطح خواهان تعادل اندازه حرکت و انرژی با سطح باشد.

$$V_{\text{سیال}} \equiv V_{\text{دیواره}}$$

$$T_{\text{سیال}} \equiv T_{\text{دیواره}}$$

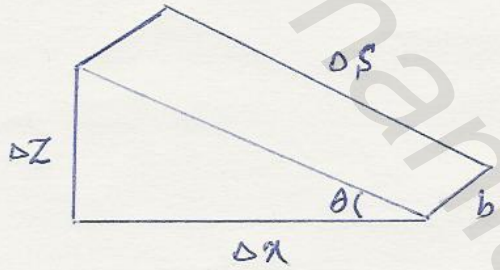
Mehdi Imanian Najafabadi

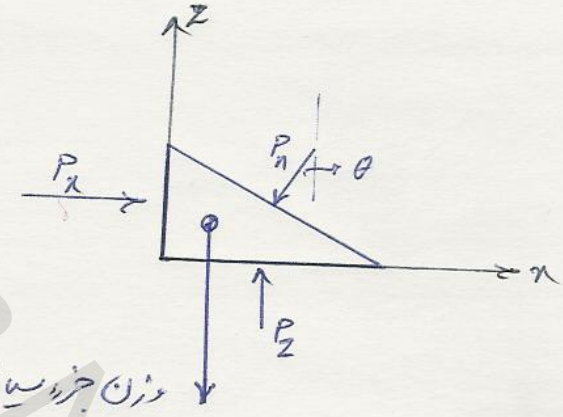
« فصل دوم »

استاتیک سیالات

اصول مهم هیدرو استاتیک :

* تغییر فشار در جهت افقی وجود ندارد .
* تغییرات فشار در جهت قائم با چگالی، شتاب جاذبه و ارتفاع متناسب است .





$dw = \rho g (\frac{1}{2} b \Delta x \Delta z)$ ← وزن جزء سیال

فرضیات

۱) تنش برشی نداریم

۲) فشارهای P_x، P_z و P_n روی هر وجه ممکن است دارای مقادیر متفاوت باشند

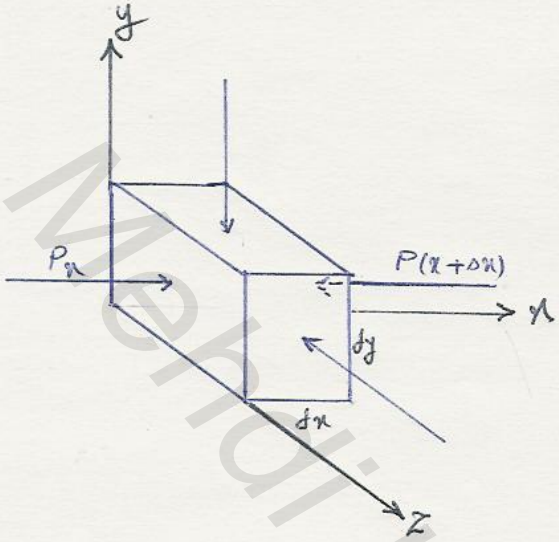
$$\begin{cases} \sum \Delta f_x = 0 \Rightarrow P_x b \Delta z - P_n b \Delta s \sin\theta = 0 \\ \sum \Delta f_z = 0 \Rightarrow P_z b \Delta x - P_n b \Delta s \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g (b \Delta x \Delta z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta s \cos\theta \\ \Delta z = \Delta s \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_x = P_n \\ P_z = P_n + \frac{1}{2}\rho g \Delta z \end{cases}$$

برای حالت حدی $\Delta z \to 0 \to P_z = P_n \to \boxed{P_x = P_z = P_n}$

چون زاویه θ در کوچه اختیاری است، فشار P در هر نقطه سیال مستقل از جهت می‌باشد .

Mehdi Imanian Nalfabadi



نیروی حاصل از فشار روی جزء سیال:

* برای بدست آوردن فشار نقطه‌ای در مجاورت محل فشار P_x از بسط تیلور استفاده می‌شود:

$$P(x+dx) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx + \cdots$$

(سری توان برای توابع مشتق‌پذیر)

* بنابراین نیروی خالص وارد شده به آن در جهت x:

$$dF_x = P\,dz\,dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dz\,dy = -\frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

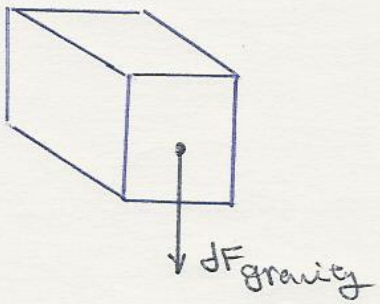
و به همین شکل
$$\begin{cases} dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy\,dz \\ dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z}dx\,dy\,dz \end{cases}$$

* $$dF_{Pr} = \left(-i\frac{\partial P}{\partial x} - j\frac{\partial P}{\partial y} - k\frac{\partial P}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

* از تقسیم طرفین رابطه اخیر نیروی خالص در واحد حجم جزء سیال بدست می‌آید.

نیرو در واحد حجم $F_{Pr} = -\nabla P$ گرادیان (نابط) P

* نیروی حاصل از گرادیان فشار به عنوان یک نیروی سطحی شناخته می‌شود.



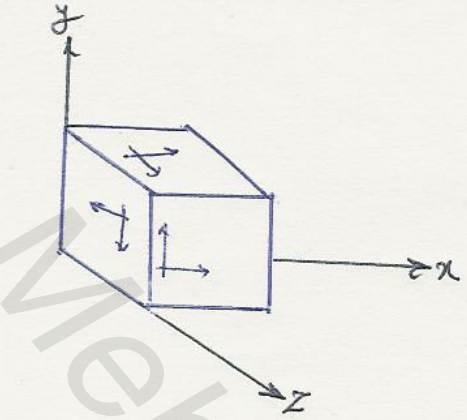
نیروی حجم (بدنه‌ای) وزن:

$$dF_{gravity} = \rho g\,dx\,dy\,dz$$

$$F_{gravity} = \rho g$$

Mehdi Imanian Nejafabadi

نیروی سطحی حاصل از تنش برشی (لزجتی)



τ_{xy}

صفحه مورد نظر عمود بر محور x و جهت تنش در راستای y

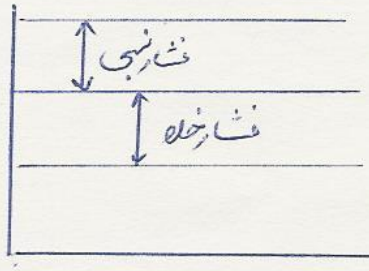
$f_{vs} = \mu \nabla^2 v$ $\quad (\text{لاپلاسین } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$

$P_a = \Sigma f = f_{pr} + f_{gravity} + f_{v.s} = -\nabla P + \rho g + \mu \nabla^2 v$

نیروی واحد حجم

* معادله اخیر یک رابطه کلی بوده، حالتهای خاص از آن نتیجه می‌شود.

فشار مطلق، فشار نسبی، فشار خلاء:



* اگر فشار پائین‌تر از فشار اتمسفر را با فشار اتمسفر بسنجیم، آن را فشار خلاء می‌نامیم.
* اگر فشار بالاتر از فشار اتمسفر را با فشار اتمسفر بسنجیم، آن را فشار نسبی می‌نامیم.
* رابطه فشار مطلق $P_{\text{فشار مطلق}} = P_a + P_z$
فشار اتمسفر $\quad$ فشار خلاء یا نسبی

توزیع فشار هیدرواستاتیک:

* اگر سیال در حال سکون باشد، $a=0$ و $\nabla^2 v$ هم باشد $\Leftarrow \nabla P = \rho g$
* ∇P همه جا بر سطوح با فشار ثابت (P ثابت) عمود است.

Mehdi Ingilian Najafabadi

* سطوح فشار ثابت یک سیال در حالت تعادل استاتیکی همواره بر بردار جاذبه محلی عمود است.

* سطح آزاد یک سیال که در فشار اتمسفر قرار دارد بر جهت جاذبه محلی عمود است.

* در دستگاه مختصات جهت Z به طرف بالا است، بنابراین برای شتاب جاذبه محلی داریم:

$$\vec{g} = -\hat{k} g$$

* در حالت کلی عوامل تنش جزای رابطه $\nabla p = \rho g$ به شکل زیر خواهند شد:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

* بنابراین فشار هیدروستاتیک مستقل از جهت‌های x و y می‌باشد

* می‌توان $\frac{\partial P}{\partial z}$ را به شکل دیفرانسیل کامل بیان کرد.

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow P_2 - P_1 = -\int_1^2 \rho g \, dz$$

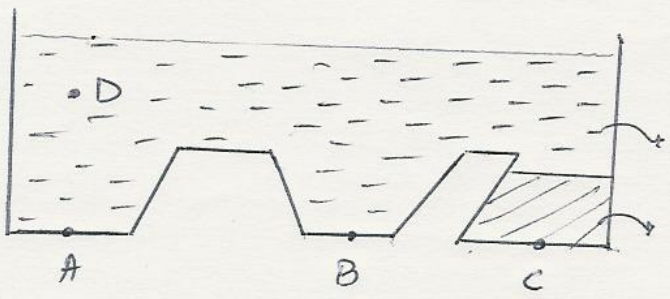
* برای یک سیال ساکن یکنواخت با توزیع همگن:

۱) فشار فقط با فاصله عمودی تغییر می‌کند و به شکل ظرف خود ارتباط ندارد.

۲) در یک صفحه افقی داخل سیال فشار در تمام نقاط یکنواخت است.

۳) با افزایش عمق فشار زیاد می‌شود

مثال



۱- فشار نقاط A و B به دلیل اینکه در یک عمق قرار دارند با یکدیگر برابرند

۲- فشار نقطه D به دلیل اینکه عمق آن نسبت به نقاط دیگر کمتر است از فشار بقیه کمتر است

۳- فشار نقطه C از فشار بقیه نقاط بیشتر است، چون نقطه C با سیال جیوه از مسیر آبی مجزا شده است.

Mehdi Imanian Kalafabadi

اثر جاذبه متغیر:

* برای یک سیاره کروی با جرم مخصوص ثابت شتاب جاذبه متناسب با عکس مجذور فاصله از مرکز آن سیاره است.

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \qquad P_2 - P_1 = \rho g \int_1^2 dz = -\rho g (z_2 - z_1)$$

* فشار هیدروستاتیک در مایعات:

* در مسائل هیدروستاتیک مایعات را تراکم ناپذیر در نظر گرفته، از تغییرات جرم مخصوص آن صرف‌نظر می‌شود.

$$P_2 - P_1 = \rho g (z_2 - z_1) \qquad -(z_2 - z_1) = \frac{P_2 - P_1}{\rho g}$$

* ρg وزن مخصوص می‌باشد.

* دیاگرام $\frac{P}{\rho g}$ طول بوده و به هد فشار معروف است.

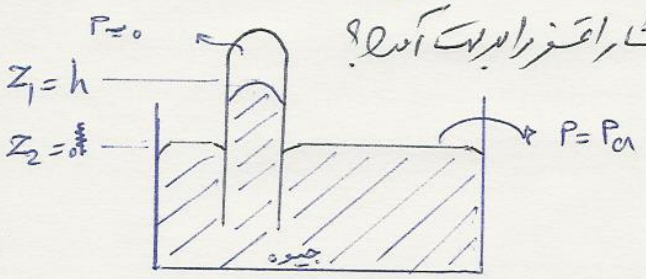
* فشار مطلق در عمق یک سیال از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$P = P_a - \rho g z$$

* فشار نسبی

$$P_z = -\rho g z$$

مثال: با استفاده از فرمول هیدروستاتیک چگونه می‌توان فشار اتمسفر را بدست آورد؟



$$P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$
$$P_a - 0 = -\rho g (0 - h)$$
$$\Rightarrow P_a = \rho g h$$

مثال: در دریاچه‌ای بیشترین عمق 60 m و فشار اتمسفر 91 kPa است، فشار مطلق و نسبی را در این عمق بر حسب kPa بدست آورید.

$\rho g = 9790 \ N/m^3$
$P_a = 91 \ kPa$
$z = -60 \ m$

$$P = P_a - \rho g z = 91 - 9.790(-60) = 91 + 587$$
$$\Rightarrow P = 678 \ kPa \quad \text{فشار مطلق}$$
$$P_z = -\rho g z = -9.79(-60) = 587 \ kPa \quad \text{فشار نسبی}$$

Mehdi Imanian Najafabadi

فشار هیدرواستاتیک در گاز

* گازها تراکم‌پذیر هستند، بنابراین متناسب با تغییرات فشار، تغییرات حجم نیز در آنها مشهود است.

$dP = -\rho g\, dz$ برای یک ارتفاع

* به کارگیری قانون گاز کامل در رابطه با فشار دقت قابل توجهی به خود دارد:

$$P = \rho RT \rightleftarrows \rho = \frac{P}{RT} \rightarrow dP = -\frac{P}{RT} g\, dz \rightleftarrows \frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT} dz$$

انتگرال‌گیری از رابطه بالا ←

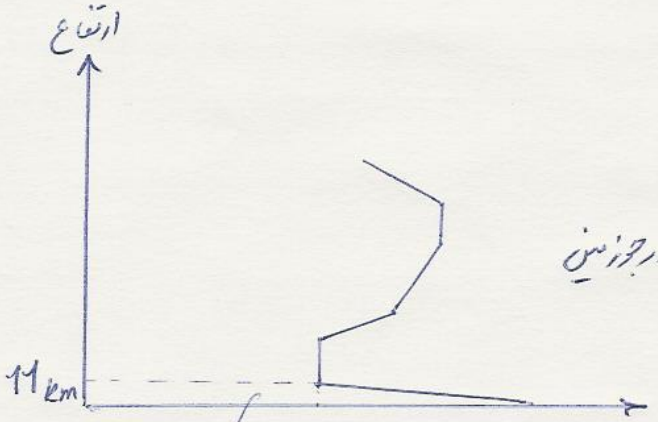
$$\int_1^2 \frac{dP}{P} = \frac{-g}{R} \int \frac{dz}{T} \qquad Ln\frac{P_2}{P_1} = \frac{-g}{R} \int \frac{dz}{T}$$

فرض ۱: از تغییرات دما در اثر با تغییرات ارتفاع چشم‌پوشی می‌شود و در کل مسیر انتگرال‌گیری شرایط همدما حاکم باشد:

$$Ln\frac{P_2}{P_1} = \frac{-g}{RT}(Z_2 - Z_1)$$

$$P_2 = P_1 \exp\left[-\frac{g(Z_2 - Z_1)}{RT}\right]$$

فرض ۲: شرایط غیرهمدما



نمودار تغییرات دما در جو زمین

$(T \simeq T_0 - BZ)$

$$\begin{cases} P = P_0\left(1 - \frac{BZ}{T_0}\right)^{g/RB} \\ g/RB \simeq 5.26 \end{cases}$$

Mehdi Imanian Najafabadi

اندازه‌گیری فشار با استفاده از مانومتر:

* با توجه به فرمول هیدرواستاتیک یک تغییر ارتفاع مایع معادل است با تغییر در فشار آن $Z_2 - Z_1 = -\frac{P_2 - P_1}{\rho g}$

* ستون ساکن یک یا چند مایع یا یک گاز را می‌توان برای اندازه‌گیری اختلاف فشار در دو نقطه بکار برد و به دستگاهی که از این خاصیت برای اندازه‌گیری فشار در آن استفاده می‌شود، مانومتر می‌گوییم.

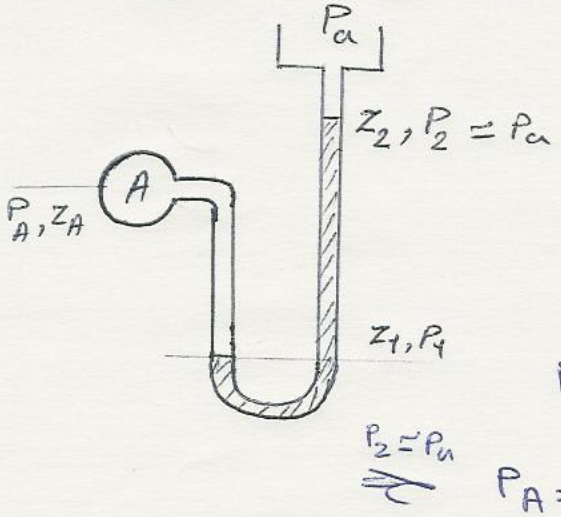
* اگرچند سیال متفاوت با جرم حجمی‌های متفاوت تشکیل یک ستون را بدهند، برای محاسبه اختلاف فشارها، اختلاف فشار مربوط به هر سیال باید به طور جداگانه محاسبه شود

Z_1	P_1	فشار معلوم
Z_2	ρ_o	روغن
Z_3	ρ_w	آب
Z_4	ρ_g	گلیسرین
Z_5	ρ_M	جیوه

$$P_2 - P_1 = -\rho_o g (Z_2 - Z_1)$$
$$P_3 - P_2 = -\rho_w g (Z_3 - Z_2)$$
$$P_4 - P_3 = -\rho_g g (Z_4 - Z_3)$$
$$P_5 - P_4 = -\rho_M g (Z_5 - Z_4)$$

$$P_5 - P_1 = -\rho_g (Z_2 - Z_1) - \rho_w g (Z_3 - Z_2) - \rho_g g (Z_4 - Z_3) - \rho_M g (Z_5 - Z_4)$$

مثال: در مانومتر نشان داده شده در شکل فشار داخل مخزن A را بدست آورید.



$$\begin{cases} P_A - P_1 = -\rho_1 g (Z_A - Z_1) \\ P_1 - P_2 = -\rho_2 g (Z_1 - Z_2) \end{cases}$$

$$P_A - P_2 = -\rho_1 g (Z_A - Z_1) - \rho_2 g (Z_1 - Z_2)$$

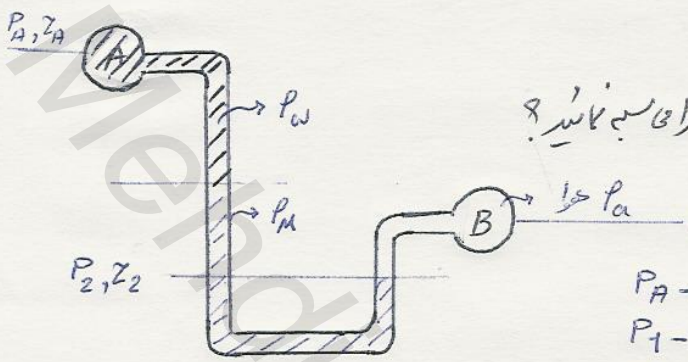
$P_2 = P_a$

$$P_A = P_a - \rho_1 g (Z_A - Z_1) - \rho_2 g (Z_1 - Z_2)$$

Mehdi Imanian Najafabadi

* در مثال حل شده، از این اصل که هر دو نقطه هم ارتفاع در جرم پیوسته یک سیال فشارهای یکسانی دارند استفاده شده است.

مثال: در شکل زیر اختلاف فشار دو مخزن A و B را بیابید؟

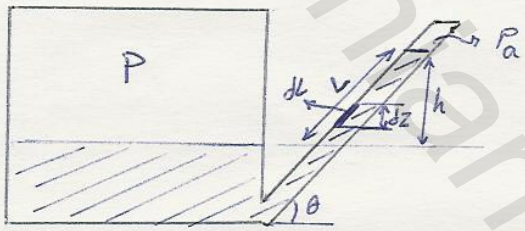


$$P_A - P_1 = -\rho_w g (Z_A - Z_1)$$
$$P_1 - P_2 = -\rho_M g (Z_1 - Z_2)$$
$$P_2 - P_B = -\rho_a g (Z_2 - Z_B) \simeq 0$$

$$P_A - P_B = -\rho_w g (Z_A - Z_1) - \rho_M g (Z_1 - Z_2)$$

* اگر دو سیال که سطح مشترک دارند، یکی گاز و دیگری مایع باشد، در بیشتر موارد می‌توان از اثرات ویسکوزیته چشم پوشی شود

مثال: مانومتر مورب:



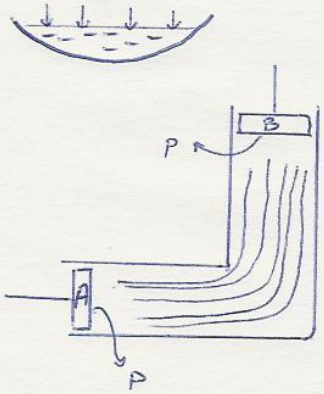
* تنها تغییر ارتفاع محرک با تغییر فشار نسبت مستقیم دارد.

$$dP = -\rho g dz = -\rho g dL \sin\theta \qquad \int_P^{P_a} dP = \int_0^L -\rho g dL \sin\theta$$

$$P - P_o = \rho g L \sin\theta = \rho g h$$

اثرات نیروی سطحی در سیال محبوس ساکن

* اگر به قسمتی از مرز یک سیال محبوس قابل تراکم یا غیر قابل تراکم فشار خارجی اعمال شود، پس از فروکش کردن نوسانات، این فشار عیناً به همه نقاط سیال منتقل می‌شود



* انتقال فشار در سیال لحظه‌ای است.

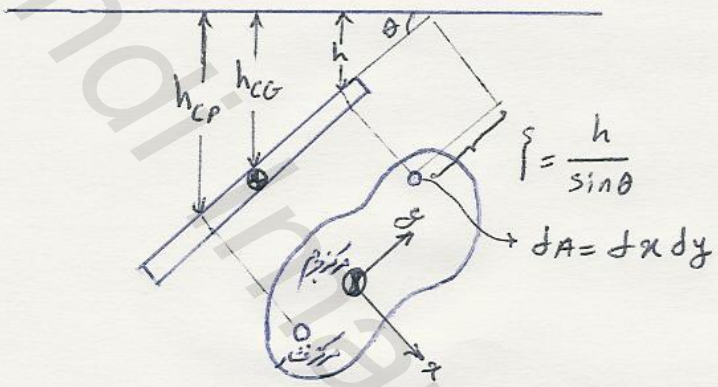
$$F_A = P S_A \qquad F_B = P S_B$$

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{P S_A}{P S_B} = \frac{S_A}{S_B}$$

Mehdi Imanian Najafabadi

نیروی هیدروستاتیک روی سطوح صاف:

* اگر یک صفحه در عمق سیال قرار بگیرد، نیروی هیدروستاتیک به هر دو طرف آن وارد می‌شود.
* در این بخش نیروی هیدروستاتیک وارد شده به یک طرف صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد.



* dA المان سطح در نظر گرفته شده
* اگر h عمق المان مورد نظر از سطح آزاد باشد: $P = P_a + \rho g h$

$$\Rightarrow dF = P\,dA \Rightarrow F = \int dF = \int (P_a + \rho g h)\,dA = \int P_a\,dA + \int \rho g h\,dA$$

$$= P_a A + \rho g \int dA$$

$$h = \xi \sin\theta \qquad F = P_a A + \rho g \int \xi \sin\theta\,dA$$

$$\bar{\xi}_{CG} = \frac{1}{A}\int \xi\,dA \Rightarrow \int \xi\,dA = A\,\xi_{CG}$$

$$\Rightarrow F = P_a A + \rho g \sin\theta\, A\,\xi_{CG} \qquad h_{CG} = \xi_{CG}\sin\theta \Rightarrow$$

$$F = P_a A + \rho g h_{CG} A \Rightarrow F = P_{CG} A$$

* نیروی برآیند F در مرکز سطح صفحه وارد نمی‌شود، بلکه در نقطه‌ای پایین‌تر از مرکز سطح وارد می‌شود.
* نقطه اثر نیروی برآیند F را مرکز فشار، CP صفحه گویند.

Mehdi Iranian Najafabadi

* بنابراین نیروی برآیند F سبب ایجاد گشتاور حول مرکز سطح می‌شود.

$$F y_{cp} = \int y P dA = \int y(P_a + \rho g h) dA = \int y(P_a + \rho g \ell \sin\theta) dA$$

$$\Rightarrow F y_{cp} = \int y P_a dA + \int y \rho g \ell \sin\theta dA = \rho g \sin\theta \int y \ell dA$$

$$\ell = \ell_{CG} - y \Rightarrow F y_{cp} = \rho g \sin\theta \left(\ell_{CG} \int y dA - \int y^2 dA \right)$$

I_{xx} گشتاور ماند (ممان اینرسی حول محور x)

$$\Rightarrow F y_{cp} = -\rho g \sin\theta I_{xx}$$

$$y_{cp} = -\rho g \sin\theta \frac{I_{xx}}{F} = -\rho g \sin\theta \frac{I_{xx}}{P_{CG} A}$$

* علامت منفی نشان دهنده آن است که مرکز فشار زیر مرکز سطح است

* اگر صفحه را به نقطه‌ای عمیق‌تر ببریم، مرکز فشار به مرکز سطح نزدیک‌تر می‌شود.

$$F x_{cp} = \int x P dA = \int x(P_a + \rho g \ell \sin\theta) dA = \int x [P_a + \rho g (\ell_{cg} - y) \sin\theta] dA$$

$$= \int x P_a dA + \rho g \ell_{CG} \int x dA - \rho g \sin\theta \int xy dA$$

$$= -\rho g \sin\theta \int xy dA = -\rho g \sin\theta I_{xy}$$

گشتاور ماند ضربی

$$\Rightarrow x_{cp} = -\rho g \sin\theta \frac{I_{xy}}{F} = -\rho g \sin\theta \frac{I_{xy}}{P_{CG} A}$$

* برای مقادیر مثبت I_{xy}، x_{cp} منفی است، زیرا بیشترین نیروی فشار در ربع سوم صفحه (قسمت پائین سمت چپ) وارد می‌شود

* اگر $I_{xy} = 0$ باشد، صفحه نسبت به محورها قرینه بوده و $x_{cp} = 0$ است و مرکز فشار زیر مرکز سطح روی محور y‌ها قرار می‌گیرد.

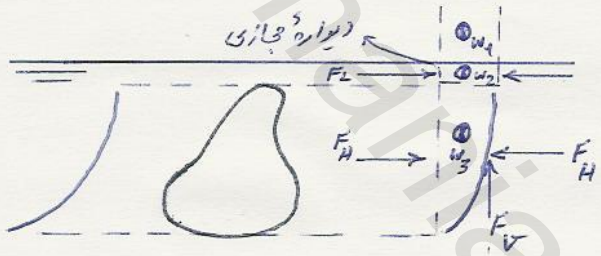
Mehdi Imanian Najafabadi

* بنابراین در بیشتر کاربردها، شرایط بگونه‌ای است که فشار اتمسفر بر هر دو طرف صفحه وارد می‌شود،

بنابراین در این حالت که روابط به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$F = \rho g h_{CG} A \Rightarrow \begin{cases} y_{CP} = \dfrac{-I_{xx}\sin\theta}{h_{CG}A} \\ x_{CP} = \dfrac{-I_{xy}\sin\theta}{h_{CG}A} \end{cases}$$

نیروی هیدروستاتیک روی سطوح منحنی:



* فرض می‌کنیم یک سطح منحنی در یک عمق مشخص از سطح آزاد یک سیال قرار دارد.

* نیروی F_1 همه نیروهای فشاری که

* نیروی F_H نیروی افقی وارد بر سطح می‌باشد

* نیروی F_V نیروی عمودی وارد بر سطح است.

* مولفه افقی نیروی وارد بر سطح منحنی برابر است با نیروی وارد بر سطح تصویری که از تصویر منحنی در جهت عمود بر آن نیرو بدست می‌آید.

* مولفه نیروی عمودی فشار سیال روی سطح منحنی از نظر اندازه برابر است با وزن کل ستون سیال شامل مایع و هوای اتمسفر بالای آن

$$F_V = W_1 + W_2 + W_3$$

Mehdi Imanian Najafabadi

* در بسیاری از شرایط از وزن ستون هوا چشم پوشی می‌شود.

* نقطه اثر نیروی وارد بر سطح منحنی و نقطه اثر نیروی وارد بر سطح تصویر شده در یک راستا و بر مولفات سطح آزاد می‌باشد.

نیروی هیدروستاتیک در سیال چند لایه:

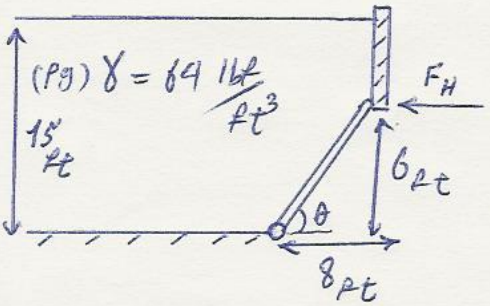
* برای هر ستون، نیرو به طور مجزا محاسبه می‌شود $F = \sum F_i = \sum P_{cg} A_i$

* از مرکز سطح هر قسمت از صفحه در یک لایه می‌توان برای تعیین مرکز فشار در آن لایه استفاده کرد.

$$X_{cp_i} = \frac{-\rho_i g \sin\theta I_{xy_i}}{P_{cg_i} A_i} \qquad Y_{cp_i} = -\frac{\rho_i g \sin\theta I_{xx_i}}{P_{cg_i} A_i}$$

* برای تعیین مرکز فشار کلی می‌توان از مساوی صفر قرار دادن گشتاور حول یک نقطه دلخواه استفاده کرد.

مثال: در شکل دریچه‌ای مستطیل شکل به عرض $15\ ft$ در نقطه B لولا شده است و در نقطه A به دیوار متکی می‌باشد



الف) نیروی هیدروستاتیک وارد از طرف آب به دریچه را محاسبه کنید

ب) نیروی افقی P که دیوار در نقطه A بر دریچه وارد می‌کند را محاسبه کنید

الف) $F = P_{cg} A = \rho g h_{cg} A$

طول دریچه: با توجه به روابط هندسی $L = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ ft$

چون دریچه مستطیلی است $h_{cg} = 15 - 3 = 12\ ft$ $\quad A = 10(5) = 50\ ft^2$

$$F = \rho g h_{cg} A = 64(12)50 = 38400\ lbf$$

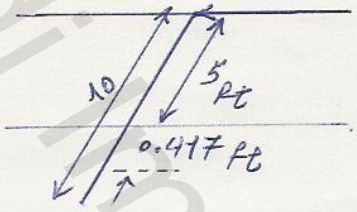
Mehdi Imanian Najafabadi

ب) در نخستین مرحله باید مرکز فشار را بدست آورد، چون دریچه به شکل مستطیل است:

$$I_{xy}=0\ ,\quad I_{xx}=\frac{bL^3}{12}=\frac{5(10)^3}{12}=417$$

$$y_{cp}=-\rho g\sin\theta\frac{I_{xx}}{P_{cg}A}=-64\left(\frac{6}{10}\right)\frac{417}{38400}=-0.417\ ft$$

یعنی مرکز فشار به اندازه $0.417\ ft$ در راستای طول دریچه در زیر مرکز سطح قرار دارد.

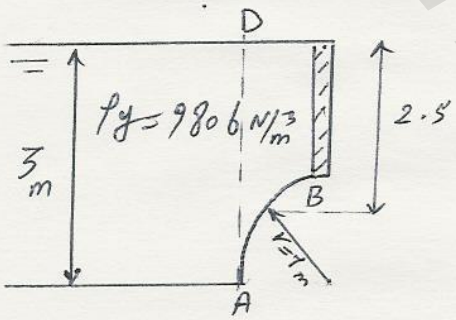


$$\Sigma M_B=0\Rightarrow -F(10-5-0.417)+F_H(10)\sin\theta=0$$

$$-38400(10-5-0.417)+F_H(10)(0.6)=0$$

$$\Rightarrow F_H=29300\ lbf$$

مثال: نیروهای افقی و قائم وارد بر دریچه ربع دایره‌ای شکل را بدست آورید، عرض دریچه ۲ متر است.



مساحت تصویر قائم دریچه: $A=1\times 2=2\ m^2$

$$\Rightarrow F_H=P_{cg}A=\rho g h_{cg}A$$

$$h_{cg}=2.5\ m\Rightarrow F_H=49\ kN$$

حجم آب بالای دریچه: $V=\left[(1)(3)(2)-0.25(\pi r^2)(2)\right]=4.42\ m^3$

$$\Rightarrow F_V=\rho g V=(18.6)(4.42)=43.4\ kN$$

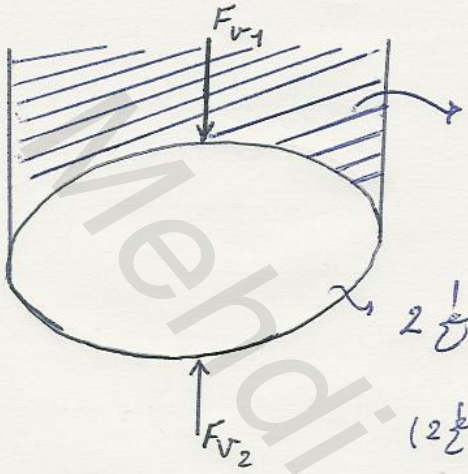
شناوری:

- دو قانون ارشمیدس

۱) هرگاه جسمی در سیالی فرو رود (غوطه‌وری) نیروی در جهت قائم به آن وارد می‌شود که برابر است با وزن سیال جابجا شده توسط جسم

۲) هرگاه جسم روی سیالی شناور بماند، وزن سیال جابجا شده برابر است با وزن خود جسم

Mehdi Imanian Najafabadi



* می‌توان گفت که جسم نشان داده شده، بین دو سطح محصور شده است

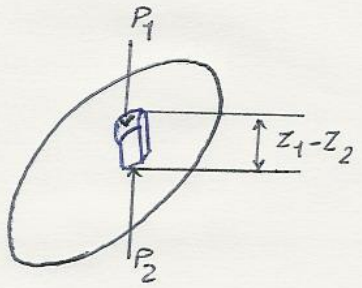
* بنابراین در جسم غوطه‌ور نیروی رانشی وارد بر جسم در حال تعادل برآورد می‌شود

* با توجه به اینکه اختلاف ارتفاع بین دو مرکز سطح وجود دارد بنابراین یک نیروی خالص عمودی به طرف بالا خواهیم داشت

$$F_B = F_{V_2} - F_{V_1}$$

(F_{V_2}: وزن سیال بالای سطح 2) (F_{V_1}: وزن سیال بالای سطح 1)

* به راحتی می‌توان به این نتیجه رسید که F_B معادل وزن سیال هم حجم جسم غوطه‌وری باشد.



$$dF_B = (P_2 - P_1)\,dA_H \Rightarrow F_B = \int_A (P_2 - P_1)\,dA_H$$

$$= \rho g \int (z_2 - z_1)\,dA_H = -\rho g V$$

* نیروی شناوری وارد بر جسم از طرف سیال از مرکز جسم می‌گذرد.

فرض می‌کنیم شناوری برآیند F_B با شناوری حاصل از توزیع فشار سیال حول محور x برابر باشند

$$F_B x_B = \rho g \int (z_1 - z_2)\, x\, dA_H = \rho g \int x\, dV$$

$$F_B = \rho g V \Rightarrow \rho g V x_B = \rho g \int x\, dV \Rightarrow x_B = \frac{\int x\, dV}{V}$$

* در یک سیال چند فازی $F_B = \sum \rho_i g (\text{حجم جابجا شده})_i$

* طبق تعریف شناوری یک جسم برروی سطح آزاد شامل یک سیال سبک‌تر و یک سیال سنگین‌تر می‌باشد.

* در محاسبات به طور معمول از نیروی شناوری حاصل از گاز صرف‌نظر می‌شود.

Mehdi Imanian Najafabadi

* اگر نیروی شناوری وارد بر یک جسم دقیقاً با وزن آن جسم باشد

الف) وزن مخصوص جسم با وزن مخصوص سیال برابر است

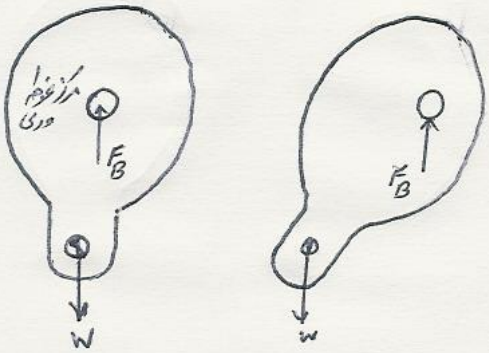
ب) جسم از نظر شناوری خنثی است

ج) جسم در هر نقطه از سیال تراگنیده (در همان نقطه باقی می ماند)

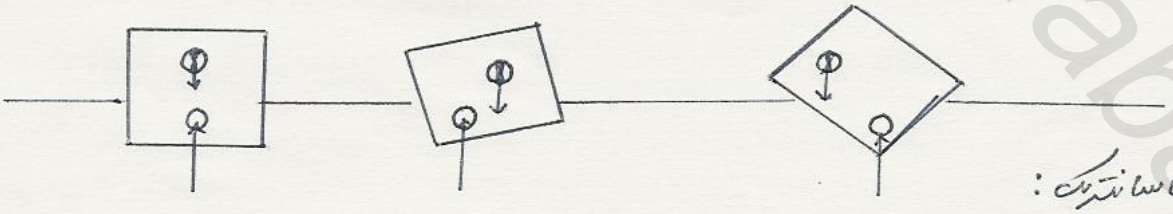
پایداری اجسام شناور:

* اگر با اعمال یک تغییر مکان کوچک به جسم در حال تعادل نیروهایی ایجاد شود که تمایل به برگرداندن جسم به حالت اولیه اش داشته باشد گفته میشود جسم در حال تعادل پایدار است.

* در حالت غوطه وری اگر مرکز جسم زیر مرکز شناوری باشد، تعادل پایدار خواهیم داشت



شناور ایجاد شده تمایل دارد جسم را به حالت اولیه برگرداند.



ارتفاع متاسانتر یک:

* اگر نقطه متاسانتر یک (M) بالاتر از مرکز جرم باشد، تعادل پایدار خواهیم داشت

* اگر نقطه متاسانتر یک، پایین تر از مرکز جرم باشد شناور ناپایدار خواهد بود.

Mehdi Imanian Najafabadi

« فصل سوم »

جریان سیالات

* در استاتیک سیالات با دانستن دانسیته موقعیت سطح آزاد و شتاب جاذبه قادر بودیم میدان سیال را تحلیل کنیم

اما جریان سیال به پارامترهای افزون بر پارامترهای نامبرده نیازمندیهایی دارد که عبارتند از :

۱- در حالت کلی حرکت سیال تابعی از هندسه محیطی است که سیال در آن در حال حرکت است

۲- حرکت سیال تابعی از شرایط مرزی است

۳- حرکت سیال تابعی از قوانین برقراری سیال است (قانون بقای جرم - قانون لزجت نیوتنی ... .

* تحلیل جریان سیال به ۳ روش ممکن است

۱- روش انتگرالی یا حجم کنترل (Large scale analyses)

اطلاعاتی که بدست می آید بسیار کلی هستند ولی به دلیل کوتاه بودن زمان محاسبات و نیز کم بودن هزینه برای کاربردهای مهندسی بسیار مفید هستند.

۲- روش دیفرانسیلی (Small scale analyses)

این روش دارای پاسخ های دقیق بوده و سیال را به صورت local بررسی می کند یعنی پاسخ های دقیق و موضعی و توزیع شده است. برای رفتار سیال باید معادله دیفرانسیلی یافت که در بیشتر حالت های محاسبات مربوط به پیچیدگی هزینه است

۳- روش تجربی :

در این روش سیال را در نزدیکترین حالت به واقعیت بررسی می کنند که برای این منظور نیازمند مدل سازی هستیم. در این روش در نهایت نیازمند آنالیز ابعادی خواهیم بود (یعنی تعمیم نتایج بدست آمده از مدل به سازه واقعی)

Mehdi Imanian Najafabadi

میدان سرعت:

* در دینامیک ذره یا جسم صلب می‌توانیم حرکت هر جسم را به طور جداگانه بررسی کنیم برای مثال برای n امین ذره از یک مجموعه ذرات متحرک در فضای توان سه معادله اسکالر زیر را بیان کرد.

$$\begin{cases} (v_x)_n = f_n(t) \\ (v_y)_n = g_n(t) \\ (v_z)_n = h_n(t) \end{cases}$$

* برای ماده شکل پذیری چون سیال تعداد نامحدود ذره وجود دارد که برای بررسی حرکت آن به روش (ظریفه) فوق عملی نیست از این رو به منظور مشخص کردن ذرات جریان از مختصات فضایی کمک می‌گیریم.

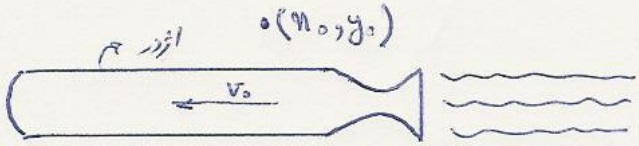
$$\begin{cases} v_x = f(x,y,z,t) \\ v_y = g(x,y,z,t) \\ v_z = h(x,y,z,t) \end{cases}$$

* اگر خواص سیال در نقطه‌ای از جریان در هر نقطه از فضا در طی زمان تغییر نکند جریان را دائمی نامند و از طرف دیگر جریان را نسبت به زمان جریان غیر دائمی نامیده می‌شود

میدان سرعت دائمی:

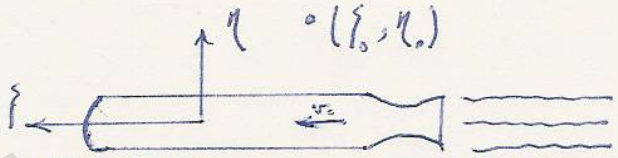
$$\begin{cases} v_x = f(x,y,z) \\ v_y = g(x,y,z) \\ v_z = h(x,y,z) \end{cases}$$

* در بسیاری از موارد می‌توان از یک میدان سرعت غیر دائمی، صرفاً با تغییر دستگاه مختصات یک جریان دائمی به دست خواهد آمد.



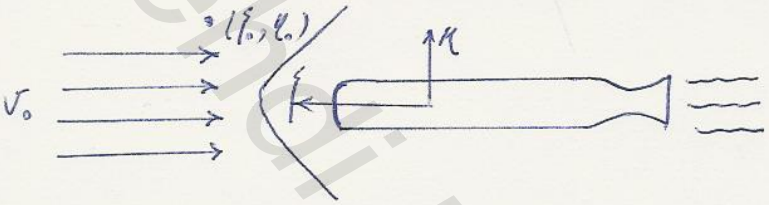
جریان مقابل از دید دستگاه مختصات متحرک xyz یک جریان غیر دائمی است. به این معنی که سرعت به طور مثال در نقطه (x_0, y_0) در یک لحظه صفر است ولی بعد از تأثیر امواج حاصل از حرکت اژدر سرعت نقطه مورد نظر متغیر خواهد بود.

MehdiraniamNajafabadi

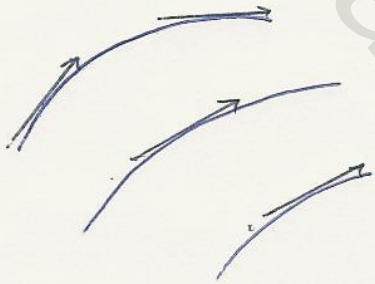


می بینیم که برای ایجاد یک میدان دائمی دستگاه مختصات xy که بردار متصل است مفید می باشد واضح است که سرعت در نقطه (x_0, y_0) نسبت به زمان ثابت است.

* برای تحلیل چنین مسائلی می توان بردار را ثابت در نظر گرفت، فرض کرد که سیال با سرعت V_0 به طرف آن در حال حرکت است.



* جریان را معمولاً به طور ترسیمی به وسیله خطوط جریان نشان می دهند این خطوط طوری رسم می شوند که بر بردارهای سرعت ذرات سیال مماس هستند.



* خط سیر، مسیری است واقعی که هر ذره معین داخل جریان آن را طی می کند
* در جریان دائمی شکل خطوط جریان ثابت می ماند در این حالت مسیرهایی که ذرات سیال طی می کنند بر خطوط جریان منطبق اند.
* در جریان های غیر دائمی خطوط جریان تنها به طور لحظه ای معرف جریان هستند و دیگر خطوط مسیر و جریان بر هم منطبق نیستند.

قوانین اصلی و فرعی برای محیط پیوسته:

* در حل کارهای مهندسی برای هر محیط پیوسته باید چهار قانون اصلی برقرار باشد این چهار قانون عبارتند از:

۱- اصل بقای جرم (معادله پیوستگی)
۲- قانون دوم نیوتن (معادله مومنتم یا اصل بقای حرکت)
۳- اصل بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)
۴- قانون دوم ترمودینامیک

Mehdi Iranian Nasrabadi

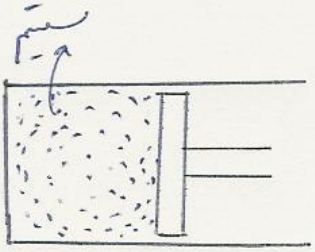
* قوانین نامبرده قوانین اصلی هستند که در کنار آنها قوانین فرعی که حاصل روابط ساختاری یا قوانین رفتاری نامیده می‌شوند نیز وجود دارند. (مثل معادله حالت گاز کامل - قانون لزجت نیوتن)

سیستم و حجم کنترل

*- در استفاده از قوانین اصلی و فرعی ممکن است یکی از موارد کاربردی زیر تطبیق داده شده

۱- رفتار جرم معینی باید طوری باشد که قوانین اصلی و قوانین فرعی مربوطه برقرار شوند

* تعریف ارائه شده برای مقدار معینی از ماده به نام (سیستم بسته، جرم کنترل) به کار می‌رود.

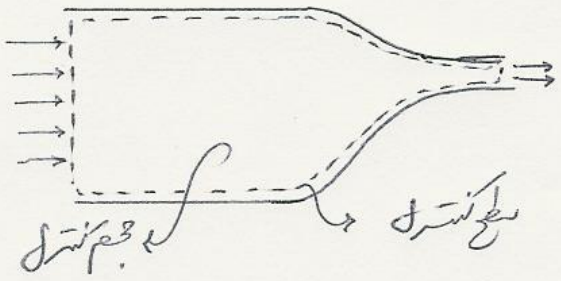


* سیستم ممکن است تغییر شکل، تغییر مکان و تغییر حالت دهد ولی همواره حاوی مقدار معینی از یک ماده است.

۲- رفتار در حجم معینی از فضا باید طوری باشد که قوانین اصلی و فرعی مربوطه برقرار شوند

* حجم معینی از فضا به نام حجم کنترل (سیستم باز) مشخص شده، مرزهای آن سطح کنترل نامیده می‌شوند.

در حجم کنترل مقدار و ماهیت ماده داخل حجم کنترل ممکن است در طی زمان تغییر کند ولی شکل حجم کنترل ثابت است.



* در یک سیستم یا سیستم بسته (حجم کنترل) که دارای جرم معینی m است روابطی که برای یک ذره یا یک جسم صلب

متغیر است را می‌توان به کار گرفت

۱- جرم سیستم ثابت است بنابراین

$$m_{sys} = const \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0$$

Mehdi Inanlan Najafabadi

۲- اگر محیط بر این سیستم، نیروی خالص F را بر آن وارد کند طبق قانون دوم نیوتن

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

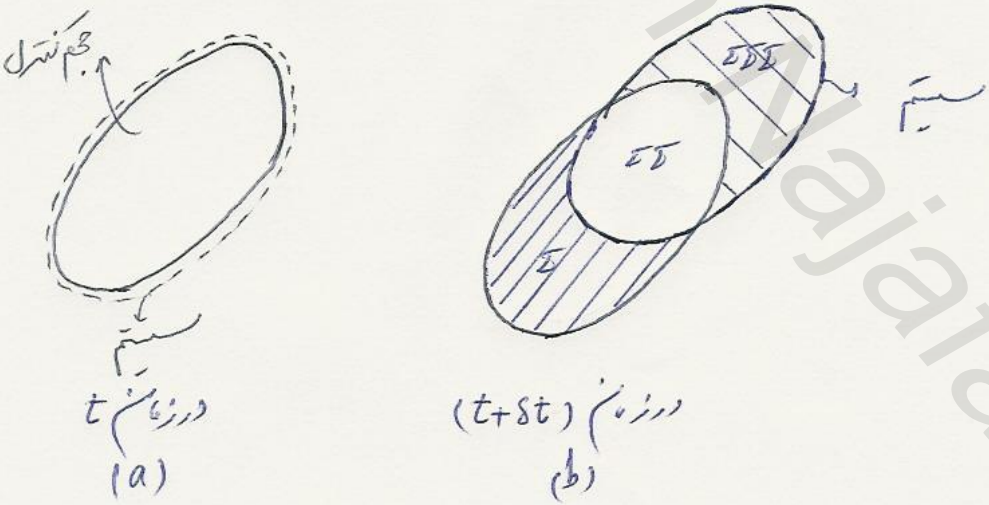
۳- اگر محیط بر این سیستم گشتاور خالص M حول مرکز جرم سیستم وارد کند $M = Ia = \frac{dH}{dt}$

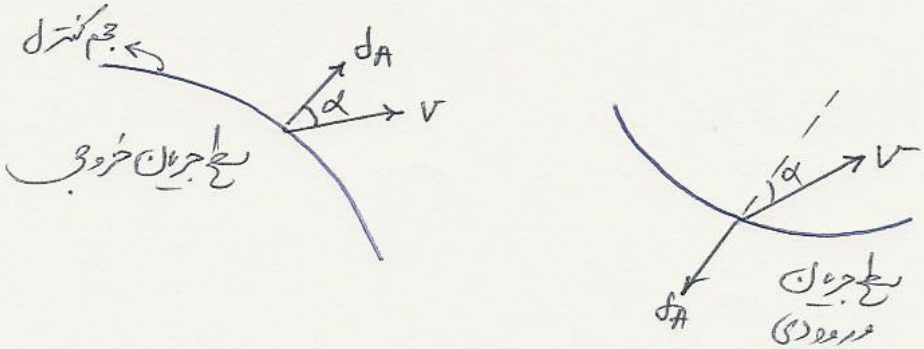
۴- اگر گرمای δQ به سیستم افزوده شود و یا کار δW توسط سیستم انجام پذیرد انرژی سیستم δE باید طبق روابط انرژی تغییر کند.

$$\delta Q - \delta W = \delta E$$

قضیه انتقال رینولدز:

* برای انتقال از یک تحلیل سیستمی به یک تحلیل حجم کنترل، باید ریاضیات خود را به نحوی عوض کنیم که به جای در نظر گرفتن جرم ثابتی متوجه یک محدوده یعنی ببریم. از این انتقال که تئوری انتقال رینولدز معروف است برای حل قوانین اساسی می‌توان استفاده کرد.





Mehdi Imanian Ajafabadi

حجم کنترل ثابت یک بعدی :

* فرض می کنیم B هر خصوصیتی از سیال باشد (انرژی، اندازه حرکت، جرم ...)

* مقدار B را در واحد جرم را با β نشان داده و عنوان شدت خصوصیت B در حجم کنترل می باشد.

$$\beta = \frac{dB}{dm} \quad , \quad B_{cv} = \int_{cv} \beta \rho dv \qquad \rho dv = dm$$

* می خواهیم نرخ تغییرات B_{sys} را مورد بررسی قرار دهیم.

$$B_{sys}(t+\delta t) - B_{sys}(t) = \left(\int_{\text{آتی}} \beta\rho dv + \int_{\text{ثابت}} \beta\rho dv \right)_{t+\delta t} - \left(\int \beta\rho dv \right)_t$$

* به طرف راست رابطه اخیر عبارت $\left(\int_{\text{آتی}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t}$ را اضافه و کم نموده، طرفین را بر δt تقسیم می کنیم:

$$\frac{B_{sys}(t+\delta t) - B_{sys}(t)}{\delta t} = \frac{\left(\int_{\text{آتی}} \beta\rho dv + \int_{\text{ثابت}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t} - \left(\int_{\text{آتی}} \beta\rho dv\right)_t}{\delta t} + \frac{\left(\int_{\text{خروجی}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left(\int_{\text{ورودی}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t}}{\delta t}$$

* در معادله بدست آمده زمانی که $\delta t \to 0$ هر کدام از عبارت ها به شکل زیر می باشند :

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{sys}(t+\delta t) - B_{sys}(t)}{\delta t} = \frac{dB_{sys}}{dt}$$

$$\lim \frac{\left(\int_{\text{آتی}} \beta\rho dv + \int_{\text{ثابت}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t} - \left(\int_{cv} \beta\rho dv\right)_t}{\delta t} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \beta\rho dv$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{\left(\int_{\text{خروجی}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t}}{dt} = \int_{\text{out blow area}} \beta\rho \overbrace{V.dA}^{\text{بردار خروجی}} = \int \beta\rho V \cos\alpha \, dA_{out}$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{\left(\int_{\text{ورودی}} \beta\rho dv\right)_{t+\delta t}}{dt} = -\int_{\text{in blow area}} \beta\rho V.dA = \int \beta\rho V \cos\alpha \, dA_{in}$$

$$\longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} \beta\rho dv\right) + \iint_{cs} \beta\rho V \cos\alpha \, dA_{out} - \iint_{cs} \beta\rho V \cos\alpha \, dA_{in}$$

Mehdi Inanian Najafabadi

* نتیجه بدست آمده قضیه انتقال رینولدز برای حجم کنترل ثابت است

* سه عبارت بدست آمده بت است را طبق ذیل به ترتیب عبارتند از:

۱- نرخ تغییرات B در داخل حجم کنترل

۲- شار B، خروجی از سطح خروجی حجم کنترل

۳- شار B، ورودی از سطح ورودی حجم کنترل

* در معادله انتقال رینولدز برای حجم کنترل ثابت dA را برابر تصویر شده آن در راستای بردار (عمود) نرمال بر سطح می باشد بنابراین:

$$\text{عبارت های مربوط به شار} = \iint_{CS} \rho b V_n \, dA_{out} - \iint_{CS} \rho b V_n \, dA_{in}$$

* اگر n بردار عمود بر سطح باشد

$$\begin{cases} V \cdot n = V_n & \text{برای خروجی} \\ V \cdot n = -V_n & \text{برای ورودی} \end{cases}$$

* بنابراین عبارت های مربوط به شار و در نتیجه قضیه انتقال رینولدز به شکل زیر ساده می شود

$$\text{عبارت های مربوط به شار} = \iint_{CS} \rho b (V \cdot n) \, dA$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{CV} \rho b \, dV \right) + \iint_{CS} \rho b (V \cdot n) \, dA$$

Mehdi Imanian Najafabadi

قانون بقای جرم

* معادله کلی بدست آمده از قضیه انتقال رینولدز به شکل زیر می باشد

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{CV} \beta \rho \underbrace{dV}_{dm}\right) + \iint_{CS} \beta \rho (V\cdot n) dA$$

* برای دستیابی به قانون بقای جرم در معادله انتقال رینولدز به جای متغیر B جرم m را جایگزین می کنیم

$$B = m \Rightarrow \beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt}\iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho (V\cdot n) dA$$

* با توجه به اینکه در هر سیستم مقدار جرم همواره ثابت است بنابراین

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = 0$$

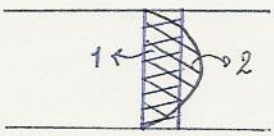
$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho (V\cdot n) dA = 0 \longrightarrow \text{قانون بقای جرم حالت کلی}$$

* اگر فرض کنیم جریان در داخل یک حجم کنترل دائمی (پایدار) باشد به معنی عدم وابستگی جریان به زمان است بنابراین:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \iint_{CS} \rho (V\cdot n) dA = 0 \quad \text{قانون بقای جرم برای جریان دائمی (پایدار)}$$

تقریب یک بعدی عبارت مربوطه شار:

* در بسیاری از کاربردهای معمول جریان مرزهای سطح کنترل را در قسمت های ساده و یعنی قطع می کند و تقریباً یک بعدی است به عبارت دیگر در بسیاری از شرایط کاربردی خواص سیال در سطح مقطع ورودی و خروجی جریان تقریباً یکنواخت است که در این حالت می توان از مقادیر متوسط خواص مختلف سیال استفاده کرد.



بنابراین با توجه به مطالب گفته شده عبارت های مربوطه را به یک جمع جبری ساده حاصل ضرب مثبت (خروجی) و منفی (ورودی) از خواص سیال در هر سطح مقطع خواهد شد.

$$\iint_{CS} \beta \rho (V\cdot n) dA = \sum (\beta_i \rho_i V_i A_i)_{out} - \sum (\beta_i \rho_i V_i A_i)_{in}$$

Mehdi Imanian Najafabadi

* سرعت و خواص سیال که در رابطه‌ها بالا به کار رفته‌اند سرعت و خواص متوسط در هر مقطع از جریان می‌باشد.

* با در نظر گرفتن تقریب یک بعدی معادله بقای جرم به شکل زیر خواهد شد:

$$\iiint \frac{d\rho}{dt} dv + \sum (\rho_i A_i V_i)_{out} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{in} = 0$$

* بنابراین در صورتی که جریان عبوری از حجم کنترل دائمی (یا پایدار) باشد:

$$\sum (\rho_i V_i A_i)_{in} = \sum (\rho_i V_i A_i)_{out} \longrightarrow \text{قانون بقای جرم در حالت یک بعدی پایدار}$$

* کمیت ρVA (دبی جرمی $\dot{m}$) گذرنده از مقطع یک بعدی است بنابراین برای یک جریان دائمی یک بعدی عبارت زیر ایرای قانون بقای جرم می‌توان نوشت:

$$\sum (\dot{m})_{in} = \sum (\dot{m})_{out}$$

* برای حالتی که جریان عبوری یک بعدی نمی‌باشد

$$\dot{m}_{cs} = \iint_{cs} \rho (V \cdot n) dA$$

جریان تراکم ناپذیر:

* جریان تراکم ناپذیر جریانی است که تغییرات جرم مخصوص در جریان قابل چشم پوشی و کوچک باشد بنابراین:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \iint_{cs} \rho (V \cdot n) dA \xrightarrow{\rho = const} \iint (V \cdot n) dA = 0$$

* در حالت شرایط یک بعدی

$$\sum (V_i A_i)_{out} = \sum (V_i A_i)_{in}$$

* کمیت AV (دبی حجمی Q) گذرنده از مقطع یک بعدی می‌باشد بنابراین

$$\sum Q_{out} = \sum Q_{in}$$

* برای حالتی که جریان عبوری یک بعدی نمی‌باشد

$$Q_{cs} = \iint_{cs} (V \cdot n) dA$$

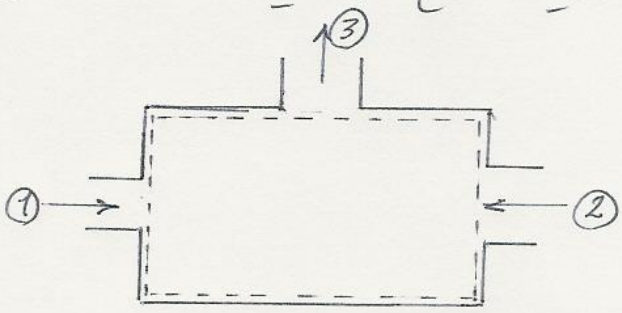
سرعت متوسط

$$V_{ave} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \iint_{cs} (V \cdot n) dA$$

Mehdi Imanian Najafabadi

مثال: در یک حجم کنترل ثابت، ۳ مقطع مرزی یک بعدی وجود دارد و مطابق شکل، جریان داخل حجم کنترل دائمی است. خواص جریان در هر مقطع در جدول زیر داده شده است. قانون بقای جرم را برای حجم کنترل نشان داده شده بررسی کنید.

مقطع	نوع جریان	ρ kg/m³	V m/s	A m²
1	ورودی	800	5	2
2	خروجی	800	8	3
3	خروجی	800	17	2



* با توجه به اینکه جریان در داخل حجم کنترل دائمی است بنابراین $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ خواهد بود.

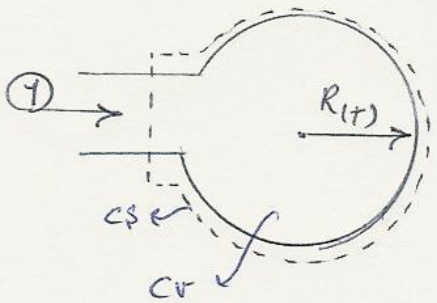
* جریان سطح مقطع های ورودی و خروجی یک بعدی است، بنابراین:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = \iint_{CS} \rho(V\cdot n)dA = \sum(\rho_i V_i A_i)_{out} - \sum(\rho_i V_i A_i)_{in}$$

$$= \rho_3 V_3 A_3 - \rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2 = (800\times 17\times 2) - (800\times 2\times 5) - (800\times 3\times 8) = 0$$

* بنابراین جرم سیستم تغییر نمی کند و این موضوع (قبلاً) بیانگر قانون بقای جرم است.

مثال: بالن نشان داده شده در شکل از مقطع (۱) با مساحت A_1 به سطح سیالی با جرم مخصوص ρ_1 و سرعت V_1 در حال پر شدن است. جرم مخصوص متوسط داخل بالن $\rho_b(t)$ می باشد. رابطه تغییرات سیستم داخل بالن را در هر لحظه بیابید.



$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt}\iiint_{CV}\rho dV + \iint_{CS}\rho(V\cdot n)dA$$

* رابطه ای برای قانون بقای جرم نوشته شده است:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV}\rho_b dV = \frac{d}{dt}\left(\rho_b \tfrac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Rightarrow \iint_{CS}\rho(V\cdot n)dA \xrightarrow{\text{تنها یک مقطع ورودی به صفحه دو بعدی}} -\rho_1 V_1 A_1$$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt}\left(\rho_b \tfrac{4}{3}\pi R^3\right) - \rho_1 V_1 A_1 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\rho_b \tfrac{4}{3}\pi R^3\right) = \rho_1 V_1 A_1$$

Mehdi Imanian Kaiafabadi

مثال: رابطه‌ی بقای جرم برای جریان پایدار داخل لوله: جریان که در آن خطوط جریان هم جا موازی دیواره‌ها است، با ورود و خروج یک بعدی را بنویسید در صورتی که سیال مورد نظر تراکم ناپذیر بوده نسبت سطح مقطع ورودی به خروجی $\frac{1}{2}$ باشد

نسبت سرعت ورودی به سرعت خروجی را بدست آورید

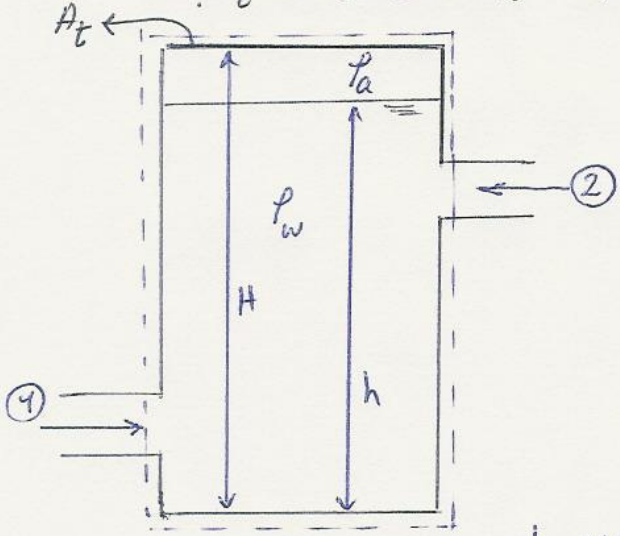
* جریان پایدار، یک بعدی و تراکم ناپذیر $\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys}=0 \Rightarrow -V_1A_1+V_2A_2=0$

$\Rightarrow Q=V_1A_1=V_2A_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{A_2}{A_1}=2$ دبی حجمی ورودی و خروجی با یکدیگر برابرند

مثال: مخزن نشان داده شده در شکل، از طریق دو ورودی یک بعدی در حال پر شدن از آب است. سطح آب در بالای مخزن محصور شده و ارتفاع آب h است

الف: رابطه‌ای برای تغییرات ارتفاع آب $\frac{dh}{dt}$ بیابید.

ب: در صورتیکه $A_t=2\,ft^2$، $V_2=2\,ft/s$، $V_1=3\,ft/s$، $D_2=3\,in$، $D_1=1\,in$ باشد $\frac{dh}{dt}$ را حساب کنید، دمای آب را $20^\circ C$ فرض کنید.



الف) قانون بقای جرم برای حجم کنترل در نظر گرفته شده به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV}\rho dV-\rho_1V_1A_1-\rho_2V_2A_2=0$$

* با توجه به اینکه جریان داخل حجم کنترل غیر دائم می‌باشد:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV}\rho dV=\frac{d}{dt}(\rho_wA_th)+\frac{d}{dt}\underbrace{[\rho_aA_t(H-h)]}_{\text{جرم هوای بالای مخزن}}$$

* با توجه به اینکه جرم هوای بالای مخزن ثابت است

$$\frac{d}{dt}[\rho_aA_t(H-h)]=\frac{d}{dt}(m_a)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\iiint_{CV}\rho dV\right)=\frac{d}{dt}(\rho_wA_th)=\rho_wA_t\frac{dh}{dt}$$

Mehdi Imanian Najafabadi

* با جاگذاری در معادله مربوط به قانون بقای جرم:

$$\rho_w A_t \frac{dh}{dt} - \rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 = 0 \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2}{\rho_w A_t} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_t}$$

ب)

$$Q_1 = A_1 v_1 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2 (3) = 0.016$$

$$Q_2 = A_2 v_2 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{3}{12}\right)^2 (2) = 0.098$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(0.016 + 0.098)\ ft^3/s}{2\ ft^2} = 0.057\ ft/s$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی:

- قانون اول نیوتن:

- قانون دوم نیوتن: اگر بخواهیم تغییر اندازه حرکت داشته باشیم باید یک نیروی خارجی داشته باشیم $F = \frac{d(mv)}{dt}$

* همان طور که گفته شد اندازه حرکت خطی حاصل ضرب جرم و سرعت (mv) می باشد بنابراین در رابطه قضیه انتقال رینولدز، متغیرهای کمی به شرح زیر می باشند:

$$B = mv \qquad \beta = \frac{d(mv)}{dm} = v$$

* با جاگذاری متغیرهای بدست آمده در رابطه انتقال رینولدز $\left(\frac{d(mv)}{dt}\right)_{sys} = \sum F = \frac{d}{dt}\iiint_{C.V} v\rho dV + \iint_{CS} v\rho(v\cdot n)dA$

* نکات زیر در رابطه با فرمول فوق همواره باید مورد توجه قرار گیرد:

۱- عبارت v سرعت سیال است که نسبت به یک دستگاه مختصات ساکن (بدون شتاب) در نظر گرفته می شود در غیر این صورت قانون نیوتن باید اصلاح شده و عبارت های غیر ساکن شتاب نسبی را نیز در بر گیرد.

۲- عبارت $\sum F$ اگر به صورت پیکره آزاد در نظر بگیریم شامل مجموع برداری تمام نیروهای وارده بر جامد سازنده حجم کنترل است به عبارت دیگر شامل دو گروه از نیروها می باشد اول نیروهای سطحی که بر تمام سطوح سیال و جامد توسط سطح کنترل جدا شده باشند اعمال می شود دوم نیروهای حجمی (جاذبه ای - الکترومغناطیسی) که بر جرم های داخل حجم کنترل اعمال می شوند.

Mehdi Imanian Najafabadi

۳ - کل معادله یک رابطه برداری است و در نتیجه هر دو انتگرال برداری هستند (چون عبارت $\vec{V}$ در آنها وجود دارد)

به همین دلیل ۳ مولفه خواهیم داشت برای مثال اگر مولفه x را بخواهیم

$$\sum F_x = \frac{d}{dt}\iiint_{CV} V\rho dV + \iint V\rho(V\cdot n)dA$$

مولفه در راستای x

شار یک بعدی اندازه حرکت

* مانند عبارت دبی جرمی انتگرال سطحی در معادله مربوط به قضیه انتقال رینولدز را شار اندازه حرکت می‌نامیم اگر اندازه حرکت را با M نشان دهیم خواهیم داشت $\dot{M}$ شاری که از سطوح سطح کنترل

$$M_{C.V} = \iint_{C.V} V\rho(V\cdot n)dA$$

بدلیل ضرب عددی V در m نتیجه برای اندازه حرکت ورودی منفی و برای اندازه حرکت خروجی مثبت خواهد بود بنابراین برای یک سطح متقاطع یک بعدی

$$\begin{cases} \dot{M}_i = v_i \rho_i V_{ni} A_i = \dot{m}_i v_i & \text{خروجی} \\ \dot{M}_i = v_i(-\rho_i V_{ni} A_i) = -\dot{m}_i v_i \end{cases}$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}\iiint_{C.V} V\rho dV + \sum(\dot{m}_i v_i)_{out} - \sum(\dot{m}_i v_i)_{in}$$

معادله اخیر بیان گر این است که نیروی برداری خالص روی یک حجم کنترل مساوی خواهد بود با نرخ تغییر اندازه حرکت برداری داخل حجم کنترل به علاوه جمع برداری شار اندازه حرکت خروجی منفی‌های جمع برداری شار اندازه حرکت ورودی

نیروی فشاری خالص روی سطح کنترل بسته :

بنابراین به طور کلی داخل وجود نیروهای سطحی روی یک حجم کنترل در عبارت $\sum F$ عبارتند از

۱ - نیروهای حاصل از برش اجسام صلب به وسیله سطح کنترل که از میان آنها عبور می‌کند

۲ - نیروهای ناشی از فشار و تنش های لزج سیال اطراف

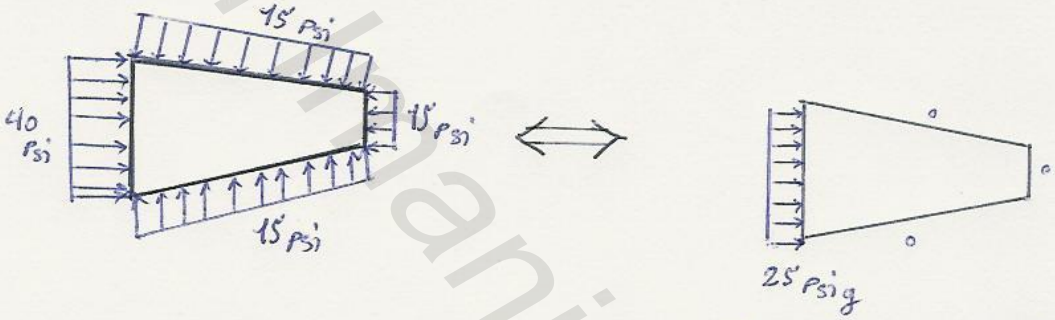
Mehdi Imanian Najafabadi

نیروی فشار خارجی وارد بر یک سطح بر آن عمود و جهتش رو به داخل است به علت رو به خارج بودن بردار واحد n نیروی فشاری چنین خواهد شد:

$$F_{Pressur} = \iint_{C.S} P(-n)dA$$

$$\iint_{C.S} (P - P_{atm})(-n)dA = \iint_{C.S} P_{gage}(-n)dA$$

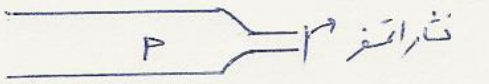
مثال: حجم کنترل مقطعی از یک نازل فشار سطحی $40\ lb/in^2$ را در مقطع 1 و $15\ lb/in^2$ (فشار اتمسفر) را در مقطع 2 بر دیواره‌های جانبی وارد می‌کند اگر $D_1 = 3in$ و $D_2 = 1in$ باشد نیروی خالص وارد بر حجم کنترل را محاسبه کنید.



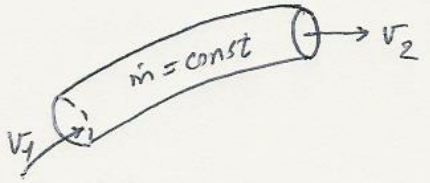
همان طور که در شکل نشان داده شده است با کم کردن مقدار 15 Psi از فشار تمام سطوح مقدار 25 Psi نسبی در مقطع 1 و 0 Psi در نقاط دیگر به دست می‌آید بنابراین نیروی فشار فقط از مقطع 1 می‌گذرد

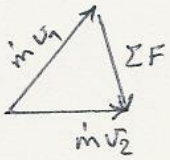
$$F = \int P_{gage}(-n)A_1 = 25\ (psi) \times \frac{\pi}{4}(3)^2_{in} = 177\ lbf$$

* وقتی جریان سیالی یک مجرای بسته را طی می‌کند با فشار محیط وارد شده سطح آزاد آن در معرض همان فشار محیط قرار می‌گیرد و در نتیجه خود نیز دارای فشار اتمسفر خواهد بود.



مثال: مطابق شکل این مسئله یک حجم کنترل ثابت مربوط به یک لوله جریان پایدار جریان تکمیل است ورودی (A_1, V_1, P_1) و یک جریان تکمیل است خروجی (A_2, V_2, P_2) دارای رابطه‌ای برای نیروی خالص وارد بر این حجم کنترل بیابید.





Mandi Iranian Najafabadi

$$\Sigma F = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\iiint_{CV} v\rho dV\right)}_{I} + \underbrace{\iint_{C.S} v\rho(v\cdot n)\,dA}_{II}$$

* بدلیل پایدار بودن جریان عبارت I از بحث رابطه معادله حذف خواهد شد و با توجه به یک بعدی بودن جریان در مقطع (1) و (2) داریم:

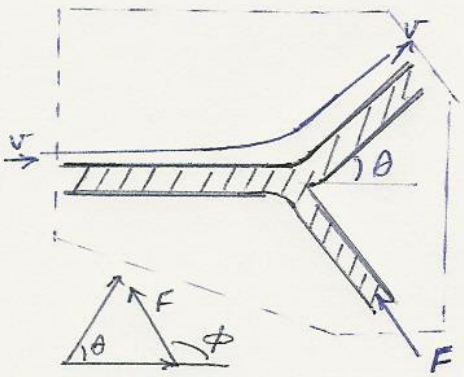
$$\iint_{C.S} v\rho(v\cdot n)\,dA = (\rho_2 v_2 A_2)v_2 - (\rho_1 v_1 A_1)v_1$$

$$\dot{m}$$

$$\Sigma F = (\rho_2 v_2 A_2)v_2 - (\rho_1 v_1 A_1) = \dot{m}(v_2 - v_1)$$

رابطه بدست آمده یک رابطه برداری می باشد در شکل این مسائل طراحی شده است عبارت ΣF نشاندهنده نیروی خالص وارد بر حجم کنترل است این نیرو در واقع برای موازنه کردن تغییرات اندازه حرکت سیال در عبور و شتاب گرفتن خود از این زانویی به کار می رود.

مثال) مطابق شکل این مثال یک پره ثابت خواهد ای به مقطع A را با اندازه زاویه θ و بدون تغییر سرعت منحرف می کند جریان پایدار و فشار در هم جا (P_a) بوده اصطکاک روی پره قابل چشم پوشی است



الف) نیروهای عمودی و افقی F_x و F_y وارد بر پره را حساب کنید.

ب) رابطه ای بین مقدار F (برآیند) و زاویه ϕ که بین خط افق و نیروی F به وجود آمده بدست آورید.

* الف) حجم کنترل به گونه ای انتخاب شده است که اثر اصطکاک آب روی پره خود به خود حذف می شود چون در تمام سطوح کنترل

* فشار اتمسفر وجود دارد نیروهای حاصل از فشار بر روی سطوح کنترل صفر خواهد شد.

* جریان پایدار است بنابراین تغییرات زمانی در داخل حجم کنترل صفر خواهد بود.

$$\Sigma F = \iint_{C.S} v\rho(v\cdot n)\,dA$$

چون جریان در نقاط مختلف سطح کنترل آن را قطع می کند که سرعت است بنابراین

$$\Sigma F = \dot{m}_2 v_2 - \dot{m}_1 v_1 = \dot{m}(v_2 - v_1)$$

Mehdi Maniaian Najafabadi

چون عبارت مربوط به $V_1 - V_2$ که جمع برداری است بنابراین F_x مساوی خواهد بود با :

$$F_x = \dot{m}(v_{2x} - v_{1x}) = \dot{m}(v\cos\theta - v) = \dot{m}v(\cos\theta - 1)$$

$$F_y = \dot{m}(v_{2y} - v_{1y}) = \dot{m}(v\sin\theta - 0) = \dot{m}v\sin\theta$$

ب)
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\dot{m}v(\cos\theta - 1))^2 + (\dot{m}v\sin\theta)^2}$$

$$F = 2\dot{m}v\sin\theta/2$$

$$\begin{cases} \varphi = 180 - \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}\right) & \Leftarrow \text{از طرفی } \phi \le 180 - \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} \\ \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}\right) = \frac{180 - \theta}{2} = 90 - \theta/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi = 180 - (90 - \theta/2) = 90 + \theta/2 \qquad \theta = 2\phi - 180$$

$$F = 2\dot{m}v\sin(\phi - 90)$$

حجم کنترل با سرعت ثابت :

* اگر حجم کنترل انتخاب شده با سرعت ثابت حرکت کند باید سرعت‌ها را نسبی را در رابطه‌ی انتقال رینولدز جایگزین کرد.

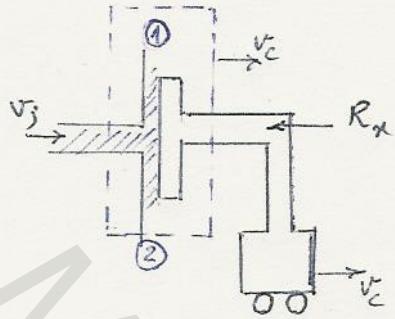
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt}\iiint_{cv} \beta\rho dv + \iint \beta\rho(v_r \cdot n)dA$$

سرعت سیال نسبت به دستگاه مختصات

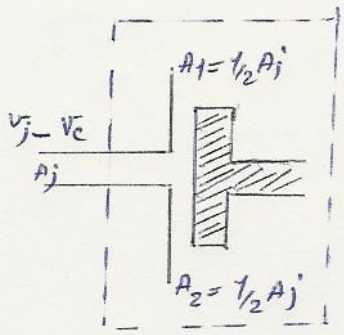
$v_r = v - v_{c.v}$ ← سرعت نسبی سیال از دید ناظری که بر حجم کنترل سوار است. ← سرعت حجم کنترل نسبت به دستگاه مختصات

مثال : یک فواره با سرعت v_j به طور عمودی به صفحه دستگاه شکل این مثال که با سرعت ثابت v_c در حال حرکت به راست است برخورد می‌کند اگر جرم مخصوص فواره $1000\ kg/m^3$ مساحت سطح آن $3\ cm^2$ و v_j و v_c به ترتیب 20 و 4 متر بر ثانیه باشند نیروی لازم برای ثابت نگه داشتن سرعت صفحه را پیدا کنید؟ (از وزن فواره و صفحه چشم پوشی کرده جریان را بایداز فرض نمایید پس از برخورد فواره با صفحه جریان به دو قسم فواره مساوی به طرف بالا و پائین تقسیم می‌شوند)

Mehdi Imanian Najafabadi



(الف)



(ب)

همان طور که در شکل نشان داده شده است حجم کنترل در نظر گرفته شده با سرعت V_c به طرف راست در حال حرکت است در شکل (ب) سرعت حجم کنترل برابر با صفر می باشد و جریان ورودی دارای سرعت نسبی $V_j - V_c$ است.

بنابراین برای این حجم کنترل باید هر دو قانون بقای جرم و اندازه حرکت ارضا گردد.

جریان پایدار می باشد بنابراین ترم تغییرات زمان مربوط به داخل حجم کنترل حذف می شود قانون بقای جرم برای حجم کنترل نشان داده شده به این ترتیب است:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = 0 \Rightarrow \iint_{C.S} \rho (V_r \cdot n)\, dA = 0$$

چون جریان در مقاطع ورودی و خروجی یک بعدی است:

$$\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 - \rho_j V_j A_j = 0$$

$$\Rightarrow V_1 A_1 + V_2 A_2 = (V_j - V_c) A_j \xrightarrow{A_1 = A_2 = \frac{A_j}{2}} V_1 + V_2 = 2(V_j - V_c)$$

$$\xrightarrow{V_1 = V_2} V_1 = V_2 = V_j - V_c = 20 - 15 = 5 \ m/s$$

قانون بقای اندازه حرکت (برای بدست آوردن نیروی مقاوم به منظور یکنواخت ماندن سرعت از این قانون بقای اندازه حرکت استفاده می شود)

در جهت x

$$\sum F_x = R_x = \dot{m}_1 V_{1x} + \dot{m}_2 V_{2x} - \dot{m}_j (V_{j_x} - V_{c_x})$$

$$R_x = -\dot{m}_j (V_{j_x} - V_{c_x}) = -\left[\rho_j A_j (V_j - V_c)\right](V_j - V_c) = -7.5$$

در جهت y

$$\sum F_y = R_y = \dot{m}_1 V_{1y} + \dot{m}_2 V_{2y} - \dot{m}_j (V_{j_y} - V_{c_y})$$

$$R_y = \dot{m}_1 V_{1y} + \dot{m}_2 V_{2y} = \dot{m} V_1 - \dot{m} V_2 = 0 \Rightarrow R_y = 0$$

Mehdi Imanian Najafabadi

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای :

* برای دستیابی به رابطه بقای اندازه حرکت زاویه‌ای در رابطه مربوط به قضیه انتقال رینولدز به جای متغیر کلی B از بردار اندازه حرکت زاویه‌ای H استفاده می‌شود .

* چون سیستم مورد نظر در سیالات از گروهی از ذرات سیال غیر صلب با سرعت‌های متغیر تشکیل شده است لذا در هر لحظه جرمی (dm) کمک می‌کند و باید اندازه حرکت زاویه‌ای را با انتگرال‌گیری روی اجزاء جرمی dm حساب کنیم .

* فرض می‌کنیم که کلیه گشتاورها حول نقطه دلخواه (o) در نظر گرفته شده‌اند

$$B = H_o = \int_{sys} (r \times v)\, dm \Rightarrow \beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dH_o}{dm} = r \times v$$

* با جاگذاری در رابطه قضیه انتقال رینولدز :

$$\left(\frac{dH_o}{dt}\right)_{sys} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} (r \times v)\rho\, dV\right) + \iint_{cs} (r \times v)\rho (v \cdot n)\, dA$$

* براساس قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای با تمام گشتاورهایی که حول نقطه o روی حجم کنترل طراحی می‌شوند برابر است .

$$\left(\frac{dH_o}{dt}\right)_{sys} = \sum M_o = \sum (r \times F)_o$$

$$\Rightarrow \sum M_o = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} (r \times v)\rho\, dV\right) + \iint_{cs} (r \times v)\rho (v \cdot n)\, dA$$

* برای ورودی و خروجی که یک بعدی عبارت‌های شار اندازه حرکت زاویه‌ای محاسبه شده روی سطح کنترل به شکل زیر خواهد شد :

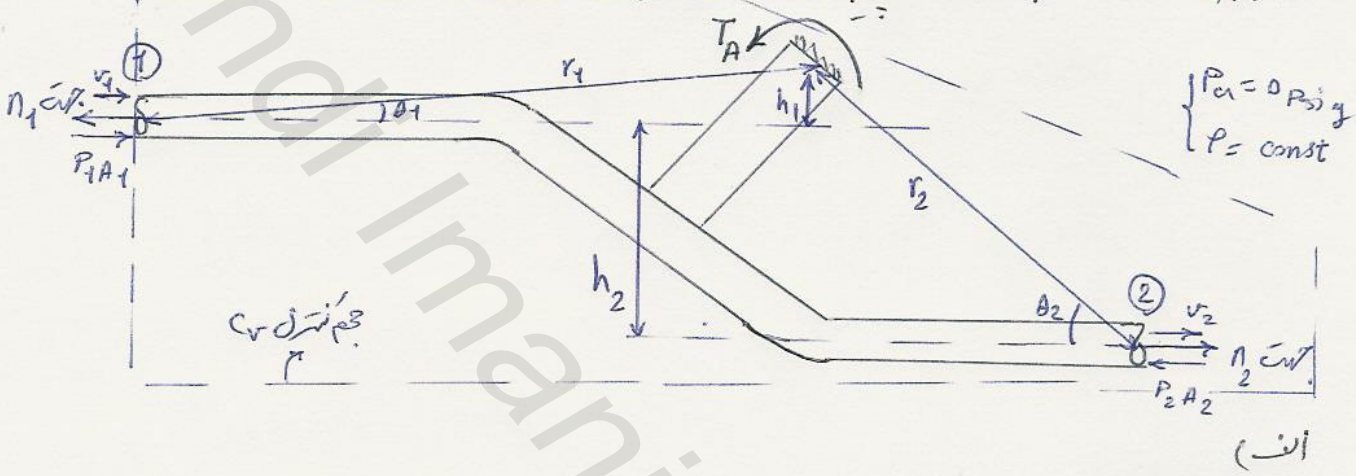
$$\iint_{cs} (r \times v)\rho (v \cdot n)\, dA = \sum_{out} (r \times v)_{out} \dot{m}_{out} - \sum_{in} (r \times v)_{in} \dot{m}_{in}$$

مثال : مطابق شکل این نازل لوله خمیده‌ای در نقطه A ثابت شده است و توسط کوپلینگ‌هایی انعطاف‌پذیر در مقاطع 1 و 2 یک سیستم جریان وصل شده است سیال تراکم‌ناپذیر و فشار محیط $P_a = 0$ (Pgage) باشد

Mehdi Imanian Najafabadi

الف) رابطه‌ای برای گشتاور پیچشی که باید در نقطه A، توسط دیواره روی لوله اعمال شود برحسب خواص جریان در مقاطع 1 و 2 و فواصل h_1 و h_2 بدست آورید.

ب) اگر $h_2 = 10\ in$، $h_1 = 20\ in$، $V_1 = 40\ ft/s$، $P_2 = 80\ (psig)$، $P_1 = 100\ (psig)$، $D_1 = D_2 = 3\ in$ و $\rho = 1.94\ slug/ft^3$ باشد گشتاور پیچشی T را محاسبه کنید.



الف)

* حجم کنترل پوشاننده مقاطع 1 و 2 و بدنه در نقطه A را مشخص کنید.
* کوپلینگ انعطاف پذیر به این معنا که هیچ گشتاور پیچشی در مقاطع 1 و 2 وجود ندارد.
* با توجه به رابطه مربوط به قضیه انتقال رینولدز برای بقای اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\sum M_A = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{C.V} (r \times V)\rho dv\right) + \iint_{C.S} (r \times V)\rho (V \cdot n) dA$$

I II

* با توجه به پایدار بودن جریان عبارت I از سمت راست معادله حذف می‌شود

$$\Rightarrow \sum M_A = \iint_{C.S} (r \times V)\rho (V \cdot n) dA$$

* با توجه به اینکه جریان در تمامی مقاطع کنترل یکنواخت است

$$\Rightarrow \iint_{C.S} (r \times V)\rho (V \cdot n) dA = (r_2 \times V_2)\dot{m}_2 - (r_1 \times V_1)\dot{m}_1$$

$$\Rightarrow \sum M_A = \dot{m}_2 (r_2 \times V_2) - \dot{m}_1 (r_1 \times V_1) = \dot{m}\left[(r_2 \times V_2) - (r_1 \times V_1)\right]$$

$$\Rightarrow \sum M_A = \dot{m}(r_2 V_2 \sin\theta_2 - r_1 V_1 \sin\theta_1) = \dot{m}(h_2 V_2 - h_1 V_1)$$

Mehdi Imanian Kalafabadi

* عبارت سمت راست مربوط به گشتاورهای دینامیکی است که باید گشتاورهای استاتیکی حول نقطه A معادل شده

* با توجه به شکل مربوط به حجم کنترل گشتاورهای استاتیکی شامل گشتاورهای حاصل از فشارهای نسبی در مقاطع جریان ورودی و خروجی نسبت به نقطه A است.

$$\sum M_A = T_A + r_1 \times (-P_1 A_1 n_1) + r_2 \times (-P_2 A_2 n_2) \quad \begin{cases} n_1 = -i \\ n_2 = +i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum M_A = T_A + r_1 \alpha (P_1 A_1 i) - r_2 \alpha (P_2 A_2 i) \Rightarrow$$

$$\sum M_A = T_A + r_1 P_1 A_1 \sin\theta_1 - r_2 P_2 A_2 \sin\theta_2 = T_A + h_1 P_1 A_1 - h_2 P_2 A_2$$

* حال گشتاورهای دینامیکی و استاتیکی را معادل قرار داده:

$$\sum M_A = T_A + P_1 A_1 h_1 - P_2 A_2 h_2 = m(v_2 h_2 - v_1 h_1)$$

$$\Rightarrow T_A = h_2 (\dot{m} v_2 + P_2 A_2) - h_1 (\dot{m} v_1 + P_1 A_1)$$

* ب) مساحت های ورودی و خروجی برابرند

$$A_1 = A_2 = \pi/4 (3)^2 = 7.07_{in^2} = 0.0491 \ ft^2$$

با توجه به برابر بودن مساحت های ورودی و خروجی و ثابت ماندن چگالی جریان

$$\rho v_1 A = \dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\dot{m} = \rho v_1 A = 1.94 (0.0491)(40) = 3.81 \ slug/s$$

$$T_A = \left(\frac{10}{12} ft\right) [80 (7.07) lbf + 3.81 (40) lbf]$$

$$T_A = 455 \ lbf_ft$$

Mehdi Imanian Najafabadi

قانون بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

* انرژی از حالتی به حالت دیگر تبدیل می‌شود ولی همواره مقدارش ثابت است
* در تحلیل حجم کنترلی قانون اول ترمودینامیک، ورود، خروج و تجمع انرژی در یک سیستم یا حجم کنترل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
* متغیرهای کمکی برای جانداری در قضیه انتقال رینولدز به شکل زیر می‌باشد:

$$B = E \qquad \beta = \frac{dB}{dm} = e$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dE}{dt}\right)_{sys} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\iiint_{CV} e\rho dV\right) + \iint_{CS} e\rho(V\cdot n)dA$$

بنابراین در حالت کلی دو دسته انرژی وجود دارد

۱- انرژی ذخیره‌ای (Stored energy): همتاهای انرژی اساساً مربوط به جرم مشخص باشد آن را به عنوان انرژی ذخیره‌ای در نظر می‌گیریم.

۲- انرژی انتقالی (energy in Tranisation): انرژی در حال انتقال از یک سیستم به سیستم دیگر را انرژی انتقالی می‌نامیم

* انرژی ذخیره‌ای دارای دسته‌بندی‌های جزئی زیر می‌باشد

1- انرژی جنبشی (E_k): انرژی مربوط به حرکت جرم است.

2- انرژی پتانسیل (E_p): انرژی مربوط به محل جرم در یک میدان پایستار (گانسرواتیو) خارجی

3- انرژی داخلی (U): انرژی مولکولی و اتمی مربوط به میدان‌های داخلی جرم

$$E = E_K + E_p + U$$

* انرژی انتقالی دارای دسته‌بندی جزئی زیر می‌باشد

1- حرارت: نوعی از انرژی است که در اثر اختلاف دما از یک سیستم به سیستم دیگر منتقل می‌شود

2- کار: انرژی منتقل شده از یک سیستم و یا به یک سیستم است همتاهای نیروهای خارجی وارد بر سیستم مسافتی را طی کنند

Mehdi Imanian Kalafabadi

* در تحلیل ها حرارت منتقل شده به سیستم و کاری که توسط سیستم انجام میشود را مثبت فرض می کنیم.

* تغییرات انرژی ذخیره ای همواره معادل انرژی انتقالی می باشد:

$$Q - W = \Delta E = E_2 - E_1 = (E_{K2} + E_{P_2} + U_2) - (E_{K_1} + E_{P_1} + U_1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \qquad \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{CV} e\rho dV\right) + \iint_{CS} e\rho(V\cdot n)dA$$

* e انرژی ذخیره ای در واحد جرم است که به شکل زیر تعریف میشود

$$\begin{cases} E_K = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow \frac{dE_K}{dm} = e_K = V^2/2 \\ E_P = mgz \Rightarrow \frac{dE_P}{dm} = e_P = gz \\ U = \frac{dU}{dm} \end{cases} \qquad e = e_K + e_P + u + e_{\text{غیره}}$$

e غیره می تواند شامل واکنش های شیمیایی، هسته ای، اثرات میدان الکترومغناطیس یا مغناطیس باشد.

کار ارائه شده در رابطه بقای انرژی شامل مولفه های جدای زیر می باشد

$$dW/dt = \dot{W} = \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{Press} + \dot{W}_{viscous\ stress} = \dot{W}_S + \dot{W}_P + \dot{W}_V$$

* کار محوری (W_S): کاری است که توسط یک ماشین (پره یک پمپ، پره توربین، پیستون ...) انجام میشود این کار از سطح کنترل عبور نموده و از جسم کنترل می شود

* کار فشار (W_P): میزان کار ارائه شده توسط نیروهای فشاری می باشد که فقط روی سطح اتفاق می افتد

نرخ انجام کار فشاری برابر است با نیروی فشار روی جزء کوچک dA ضرب در مولفه عمودی سرعت از یک دیگر و نهایتا کار خالص که در اثر نیروهای سطحی موجود در قسمت هایی از سطح کنترل کار از آنها جریان عبور می کند روی محیط انجام میشود این کار را کار جریان می نامیم.

$$dW_P = PdA(V\cdot n) \qquad \dot{W}_P = \iint_{CS} P(V\cdot n)dA$$

$$\xrightarrow[/\rho]{\times\rho} \iint_{CS} \frac{P}{\rho}\rho(V\cdot n)dA$$

Mehdi Nafaabadi Mehdinafaian

کار برشی $\dot{W}_v$: مربوط به تنش های لزج که در سطح کنترل اتفاق می افتد بوده متشکل از حاصل ضرب تنش لزج (یکی عمودی و دو تا مماسی) در سرعت های حرکت می باشد.

$$d\dot{W}_v = -\tau \cdot v\, dA \Rightarrow \dot{W}_v = -\iint_{cs} \tau \cdot v\, dA$$

* بنابراین رابطه مربوط به قضیه انتقال رینولدز به شکل زیر در می آید

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_p - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} e\rho\, dv\right) + \iint_{cs} e\rho (v\cdot n)\, dA$$

$$\Rightarrow \dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} e\rho\, dv\right) + \iint_{cs} \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho (v\cdot n)\, dA$$

* از انتگرال مربوط به شار انرژی از سطح کنترل می توان به جای انرژی داخلی از آنتالپی استفاده کرد.

$$e + \frac{p}{\rho} = u + v^2/2 + gz + \frac{p}{\rho} = \underbrace{\left(u + \frac{p}{\rho}\right)}_{\text{آنتالپی: } h} + \left(v^2/2 + gz\right) = h + v^2/2 + gz$$

$$\Rightarrow \dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} \left(u_t + v^2/2 + gz\right) dv\right) + \iint_{cs} \left(h + v^2/2 + gz\right) \rho (v\cdot n)\, dA$$

* لازم به ذکر است که عبارت مربوط به نیروی برشی $\dot{W}_v$ به ندرت از اهمیت برخوردار بوده در بسیاری از مسائل در نظر گرفته نمی شود.

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} (u + v^2/2 + gz)\, dv\right) + \iint_{cs} (h + v^2/2 + gz)\rho (v\cdot n)\, dA$$

* در جریان های پایا عبارت اول از سمت راست معادله برابر با صفر خواهد شد

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \iint_{cs} \left(h + v^2/2 + gz\right) \rho (v\cdot n)\, dA$$

* اگر ورودی و خروجی های حجم کنترل یک بعدی باشند عبارت های شار انرژی به شکل زیر در می آیند.

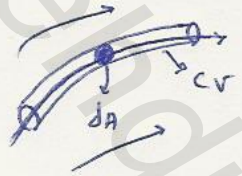
$$\iint_{cs} \left(h + v^2/2 + gz\right) \rho (v\cdot n)\, dA = \sum \left(h + v^2/2 + gz\right)_{out} \dot{m}_{out} - \sum \left(h + v^2/2 + gz\right)_{in} \dot{m}_{in}$$

Mehdi Imanian Naiafabadi

معادله‌ی برنولی:

رابطه‌ی مشهوری که بین فشار، سرعت و ارتفاع یک جریان در شرایط خاص به کار می‌رود غیر قابل تراکم و غیر لزج بودن جریان سرد و تنظیم. در حالت کلی جریان می‌تواند غیر دائم باشد ولی در این درس ما خود را به یک جریان دائم محدود می‌کنیم.

در جریان در تنظیم نرمته شده یک لوله جریان را به عنوان حجم کنترل در نظر می‌گیریم



اگر $dA \to 0$ میل کند، لوله جریان در تنظیم نرمته شده به یک خط جریان تبدیل می‌شود

حال قانون بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک) را برای حجم کنترل در تنظیم نرمته شده می‌نویسیم:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{CV} (u + \frac{v^2}{2} + gz)\rho\, dV\right) + \iint_{CS} (h + \frac{v^2}{2} + gz)\rho (V\cdot n)\, dA$$

برای یک خط جریان مشخص موارد زیر باید را در نظر داشته باشد:

1- هیچ گونه انتقال حرارت در سیستم وجود ندارد. $\dot{Q} = 0$

2- کار محوری در سیستم برای یا صفر است. $\dot{W}_s = 0$

برای ساده‌تر شدن شرایط تحلیلی فرض می‌شود که موارد بالا وجود داشته باشد بنابراین معادله بقای انرژی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\iint_{CS} (h + \frac{v^2}{2} + gz)\rho (V\cdot n)\, dA = 0$$

با توجه به اینکه سطح مقطع جریان در ورودی و خروجی بسیار کوچک است می‌توان این تقاطع را یک بعدی در نظر گرفت

بنابراین قانون بقای انرژی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\dot{m}_2 (h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2) - \dot{m}_1 (h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1) = 0$$

$$\Rightarrow h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1$$ بنابراین جریان دائمی است و دبی جرمی ثابت است.

با توجه به: $h = u + P/\rho \Rightarrow u_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = u_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1$

Mehdi Malian Kajafabadi

چون اصطکاک، انتقال حرارت و کار در سیستم وجود ندارد بنابراین تغییر انرژی داخلی نیز نخواهیم داشت

$$\frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \rightsquigarrow \text{معادله برنولی}$$

معادله برنولی بیان می‌کند که روی یک خط جریان انرژی مکانیکی کل بر واحد جرم تغییر نمی‌کند. عبارت دیگر برای هر نقطه از خطوط جریان می‌توان نوشت:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = const$$

معادله برنولی را با تقسیم طرفین بر g به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1}{\rho g = \gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

هد هر یک از جملات در رابطه اخیر [L] می‌باشد بهمین علت هر یک از این جملات ارتفاع نامیده شده

خط دم انرژی و هیدرولیک (Hydroulic and Energy Grade line):

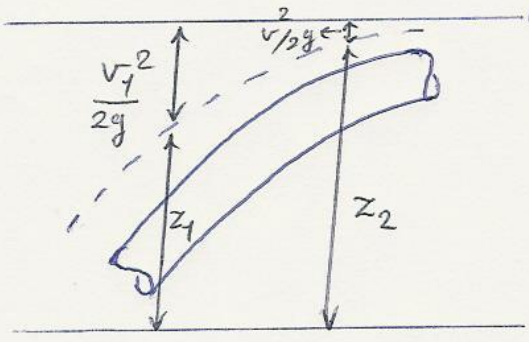
خط دم انرژی (EGL) نشان‌دهنده ارتفاع کل ثابت برنولی است. $h_0 = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = const$

در جریان بدون اصطکاک انتقال حرارت و کار محوری ارتفاع خط EGL ثابت است.

خط دم انرژی EGL شامل دو زیر مجموعه اصلی زیر می‌باشد:

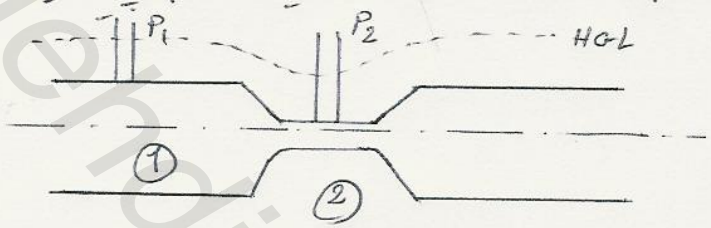
۱- خط دم هیدرولیک (HGL) که نشان‌دهنده ارتفاع مربوط به فشار $(z + \frac{P}{\gamma})$ است.

۲- هد سرعت $v^2/2g$



Mehdi Imanian Najafabadi

مثال: مطابق شکل این مثال گلوگاه در یک لوله باعث بالا رفتن سرعت جریان و پایین آمدن فشار در مقطع گلوگاه می‌شود. این اختلاف فشار بادی جریان در لوله متناسب است. این لوله که کاهش و افزایش تدریجی قطر دارد به لوله ونتوری معروف است. رابطه بین شار جرمی گذرنده از لوله و اختلاف فشار بین دو نقطه مزبور را پیدا کنید.



(جریان دائمی و تراکم ناپذیر)

با توجه به شرایط جریان فرض می‌کنیم که معادله برنولی در طول خط جریان مرکزی لوله صدق می‌کند

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gZ_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gZ_2$$

$$\Rightarrow V_2^2-V_1^2=\frac{2\Delta P}{\rho} \qquad \Delta P=P_2-P_1$$

با توجه به اینکه لوله افقی است

برای بدست آوردن رابطه بین سرعت‌ها از معادله پیوستگی استفاده می‌شود

$$P_1=P_2 \Rightarrow Q_1=Q_2 \Rightarrow A_1V_1=A_2V_2 \Rightarrow \frac{\pi D_1^2}{4}V_1=\frac{\pi D_2^2}{4}V_2$$

$$\Rightarrow V_1=\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 V_2=\beta^2 V_2$$

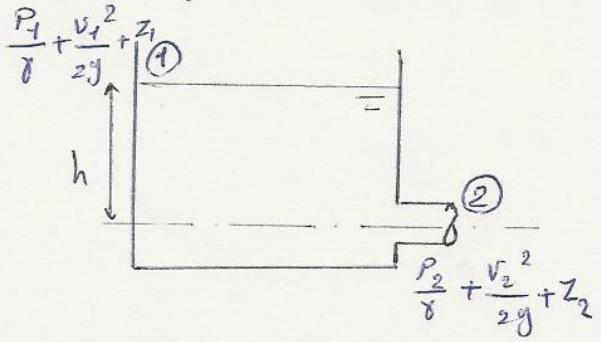
اگر رابطه بدست آمده را در معادله برنولی جایگذاری کنیم:

$$V_2=\left[\frac{2\Delta P}{\rho(1-\beta^4)}\right]^{1/2}$$

حال برای شار جرمی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد

$$\dot{m}=\rho A_2V_2=A_2\left[\frac{2\rho\Delta P}{(1-\beta^4)}\right]^{1/2}$$

مثال: یک مخزن بزرگ که در آن یک بازشدگی با لبه تیز وجود دارد در شکل نشان داده شده است. سرعت جت آب خروجی از مخزن چقدر است؟



$$\Rightarrow \frac{P_a}{\gamma}+h=\frac{P_a}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2=\sqrt{2gh}$$

Mehdi Imanian Nalefabadi

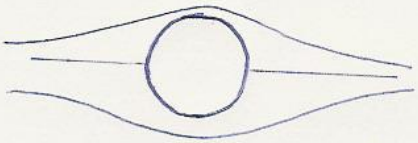
«فصل چهارم»

آنالیز ابعادی

* با استفاده از آنالیز ابعادی می‌توانیم تفاوت بین جریان‌های گوناگون سیال را بهتر درک نماییم و این مطالعات می‌تواند مبنای بررسی تجربی پدیده‌های سیالاتی نیز باشد.

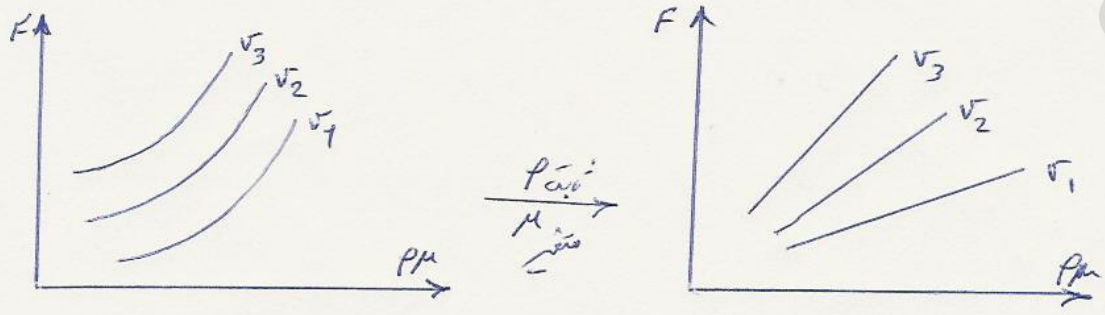
* هر پدیدهٔ سیالاتی می‌تواند به متغیرهای مختلفی وابسته باشد که با استفاده از روش آنالیز ابعادی می‌توان پدیدهٔ مورد نظر را به صورت رابطه‌ای بین چند گروه بدون بعد که تعدادشان کمتر از متغیرهای مؤثر فرمول‌بندی کرد که مزیت آن کاهش تعداد آزمایش‌های لازم برای تعیین رابطهٔ بین متغیرها در یک محدودهٔ معین می‌باشد.

مثال: نیروی درگ F وارد شده به یک کرهٔ صیقلی به قطر D که با سرعت کم V در یک سیال لزج در حال حرکت است علاوه بر دو متغیر نامبرده به جرم مخصوص ρ و لزجت سیال μ وابسته می‌باشد بنابراین نیروی درگ F را می‌توان به صورت تابعی از این متغیرها بیان کرد.



$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

* تعیین تابع نامعلوم فوق از طریق آزمایش مستلزم صرف مقدار زیادی کار (هزینه - زمان) می‌باشد چون در هر بار یکی از کمیت‌های داخل پرانتز را می‌توان تغییر داده و به همین ترتیب تعداد بسیار زیادی نمودار به وجود خواهد آمد همچنین در چنین روشی از تعداد زیادی کره و سیالات گوناگون با لزجت‌های و جرم مخصوص‌های مختلف باید استفاده کرد.



Mehdi Malian Najafabadi

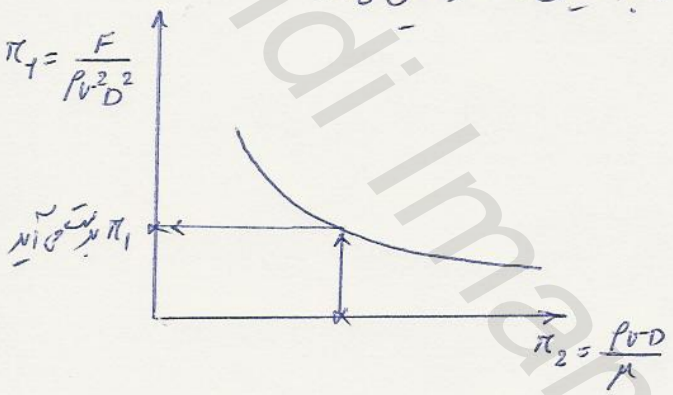
* با استفاده از روش آنالیز ابعادی این پدیده را می‌توان با یک رابطه بین تنها دو گروه بی بعد فرمول بندی کرد هر یک

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = g\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

از این گروه‌ها π نامیده می‌شوند

$$\pi_1 = g(\pi_2)$$

* تابع g نیز نامعلوم است اما با انجام آزمایش تنها یک منحنی رابطه میان πها را معین می‌کند

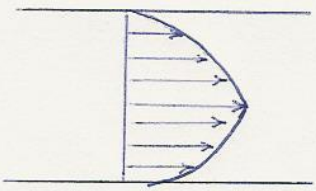


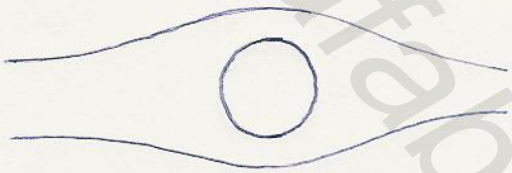
جریان لزج در مجاری:

دسته بندی جریان سیالات از دیدگاه هندسی

۱- جریان داخلی: جریانی است که توسط مرزهای جامد احاطه شده است

۲- جریان خارجی: جریانی است که حول یک جسم جامد جریان دارد.





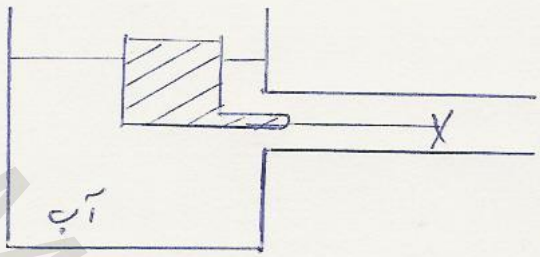
* رژیم‌های مختلف جریان

۱- آرام: در این رژیم جریان هموار و پایدار می‌باشد و این نوع جریان، جریان آرام یا لایه‌ای گفته می‌شود

۲- آشفته: که در این رژیم جریان دچار نوسان و آشفتگی می‌شود این نوع جریان را جریان آشفته یا درهم می‌نامند.

Mehdi Imanian Najafabadi

آزمایش رینولدز:



* در آزمایش رینولدز همان طور که در شکل نشان داده شده است آب در یک لوله شیشه ای جریان دارد سرعت آن از طریق شیر خروجی تنظیم می شود

* در دهانه ورودی لوله یک ماده رنگی که چگالی اش با چگالی آب برابر است به داخل لوله تزریق می شود

* وقتی شیر را فقط کمی باز می کنیم ماده رنگی در طول لوله شیشه ای بدون انحراف و به صورت یک رشته مستقیم جریان می یابد این رفتار که دارای طبیعت منظم می باشد را جریان آرام می نامند

* با باز کردن بیشتر شیر، نوسانات نامنظم در جریان پدید آمده و توسعه می یابد به طوری که رشته ماده رنگی قبل از این که مسافت زیادی را در لوله بپیماید به طور کلی پراکنده و محو می شود این جریان نامنظم را جریان آشفته یا درهم می نامیم.

X - - - - - - - -

---

* آرام یا آشفته بودن جریان به سرعت جریان، ابعاد هندسی، جرم مخصوص و لزجت سیال وابسته است.

* برای بیان آرام یا آشفته بودن جریان از یک عدد بدون بعد که به انتخار رینولدز، عدد رینولدز نامیده می شود استفاده می گردد. کلیه پارامترهای موثر در آرام یا آشفته بودن جریان در عدد رینولدز مستتر است

$$R_e = \frac{\rho u D}{\mu}$$

ρ: جرم مخصوص

u: سرعت متوسط جریان

D: برای جریان داخل قطر لوله

μ: لزجت سیال

* در عددهای رینولدز پائین جریان سیال آرام یا لایه ای می باشد و برعکس در عددهای رینولدز بالا جریان سیال آشفته خواهد شد.

Mehdi Imanian Najafabadi

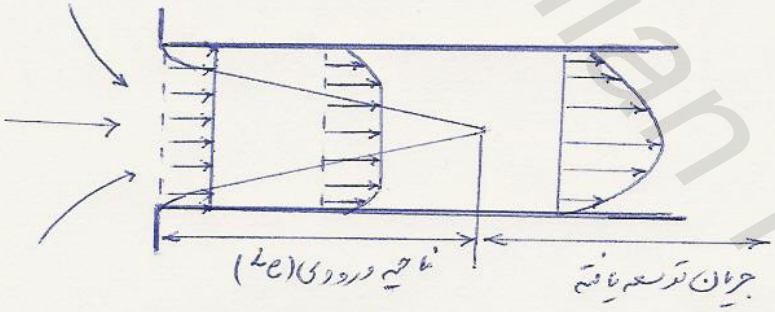
* با توجه به عدد رینولدز:

- با افزایش حجم مخصوص عدد رینولدز افزایش یافته جریان به سمت آشفتگی پیش می رود
- با افزایش سرعت جریان عدد رینولدز افزایش یافته جریان به سمت آشفتگی پیش می رود
- با افزایش ابعاد عدد رینولدز افزایش یافته جریان به سمت آشفتگی پیش می رود.
- با افزایش لزجت عدد رینولدز کاهش یافته جریان به سمت رژیم آرام پیش می رود

* برای تعیین عدد رینولدز از مقادیر متوسط P، ρ، μ استفاده می شود.

به طور معمول عدد رینولدز بحرانی در جریان های داخلی به منظور تغییر رژیم جریان آرام به آشفته معادل 2300 در نظر گرفته می شود

$$Re_{cr} = 2300$$



* اثرات لزجت در یک جریان داخلی که به وسیله دیواره محصور شده است رشد کرده پس از تلاقی در مرکز جریان نفوذ می کند در همین راستا رشد لایه های مرزی لزج در پائین دست جریان باعث عقب افتادن جریان محوری $u(r,x)$ در ناحیه لایه مرزی و در نتیجه شتاب گرفتن جریان در قسمت مرکزی می شود

* طولی از لوله که جریان تا توسعه یافتگی کامل طی می کند طول ورودی نامیده می شود.

* ناحیه ورودی تابعی از عدد رینولدز بوده برای جریان های آرام و آشفته به شکل زیر بدست می آید.

$$\frac{L_e}{d} \simeq 0.06\,Re \quad \text{(جریان آرام)}$$

$$\frac{L_e}{d} \simeq 4.4\,Re^{1/6} \quad \text{(آشفته)}$$

Mehdi Iranian Naiafabadi

مثال: یک لوله آب با قطر $\frac{1}{2}$ in و طول 60 ft آب $20^\circ C$ را با دبی 5 gal/min

انتقال می دهد چه کسری از این لوله باید به عنوان ناحیه ورودی در نظر گرفته شود؟

ابتدا واحد دبی را تبدیل می کنیم

$$Q = (5\ gal/min)\frac{0.00223\ ft^3/s}{1\ gal/min} = 0.0111\ ft^3/s$$

سرعت متوسط

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.0111\ ft^3/s}{\pi/4\,(1/12/12)^2} = 8.17\ ft/s$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \qquad \upsilon = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow Re = \frac{vD}{\upsilon}$$

برای آب در $20^\circ C$ $\upsilon = 1.09 \times 10^{-5}\ ft^2/s$

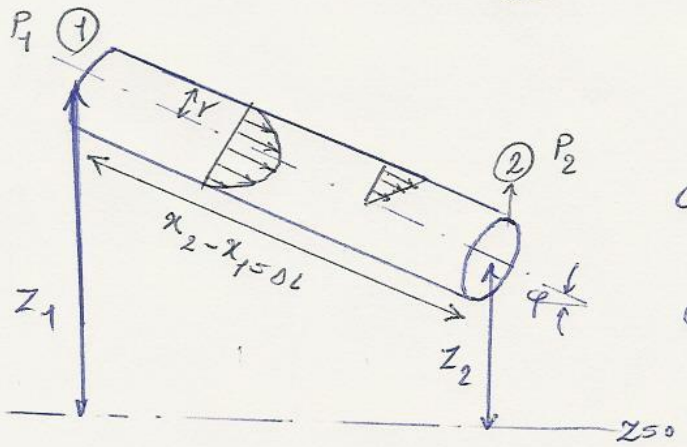
$$\Rightarrow Re = \frac{vD}{\upsilon} = \frac{(8.17)(0.5/12)}{1.09\times10^{-5}} = 31300 \qquad Re > 2300$$

جریان آشفته می باشد

$$\frac{Le}{d} \simeq 4.4(31300)^{1/6} \simeq 25$$

$$\Rightarrow Le = 25d = 1.04\ ft \qquad \frac{Le}{L} = \frac{1.04}{60} = 1.7\%$$

* همان طور که از عدد بدست آمده مشخص است این درصد چنان کم است که جریان در لوله را می توان به طور کامل توسعه یافته فرض کرده و این مسئله در بسیاری از مسائل مهندسی صادق می باشد.



جریان در لوله دایره ای:

* می توان یک تحلیل حجم کنترل برای جریان بین مقطع های 1 و 2 در نظر گرفت در هر گام نخست معادله انرژی برای حجم کنترل در نظر گرفته شده به شکل زیر می باشد

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \dot{m}_2\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \dot{m}_1\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)$$

Mehdi Imanian Kajafabadi

* با توجه به این که جریان تراکم ناپذیر و پایدار می باشد

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \xrightarrow{\rho_1=\rho_2} Q_1 = Q_2$$

$$\Rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 \xrightarrow{A_1=A_2} V_1 = V_2$$

* با تقسیم طرفین معادله بر $\dot{m}$ و با در نظر گرفتن $V_1=V_2$ خواهیم داشت :

$$Q - W_s - W_v = (h_2 + gz_2) - (h_1 + gz_1)$$

* با توجه به اینکه انتقال حرارت و کار محوری در سیستم برابر صفر است :

$$-W_v = (h_2 + gz_2) - (h_1 + gz_1) \qquad h = u + P/\rho$$

$$\Rightarrow -W_v = (u_2 + P_2/\rho_2 + gz_2) - (u_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + gz_1)$$

* چون تغییر دما بین نقطه های 1 و 2 وجود ندارد

$$u_1 = u_2 \Rightarrow W_v = (\frac{P_1}{\rho_1} + gz_1) - (\frac{P_2}{\rho_2} + gz_2) = \Delta(\frac{P}{\rho} + gz)$$

* طرفین رابطه اخیر را بر g تقسیم می کنیم

$$\frac{W_v}{g} = \Delta(z + \frac{P}{\rho g}) = \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho g} = \Delta HGL$$

* با توجه به رابطه بدست آمده و با نیوتن طول است بنابراین W_v/g را به عنوان افت هد اصطکاکی در نظر گرفته h_f نشان می دهیم.

$$h_f = \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho g}$$

* حال برای جسم کنترل در نظر گرفته شده ، معادله بقای اندازه حرکت نوشته می شود

$$\Delta P \pi R^2 + \rho g \pi R^2 \Delta L \sin\varphi - \tau_w (2\pi R)\Delta L = \dot{m}(V_1 - V_2)$$

$$\Delta L \sin\varphi = \Delta z \Rightarrow \Delta P \pi R^2 + \rho g (\pi R^2)\Delta z = \tau_w (2\pi R)\Delta L \rightarrow$$

پس از ساده سازی : $\frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta z = \frac{2\tau_w \Delta L}{\rho g R} = h_f$

$$(\tau = \mu \frac{\delta u}{\delta y})$$

Mehdi Imanian Najafabadi

تذکر: در جریان آشفته تغییرات سرعت جریان هر مقطع از جریان نسبت به جریان آرام کمتر است.

(جریان آشفته) (جریان آرام)

* با توجه به نکته گفته شده حال باید τ_w را برای شرایط مختلف جریان آرام و آشفته تعیین کرد.

* فرض می‌کنیم τ_w تابعی از متغیرهای زیر باشد:

$$\tau_w = F(\rho, V, \mu, d, \varepsilon)$$

(ε: ارتفاع زبری دیواره)

با استفاده از تحلیل ابعادی گروههای بدون بعد زیر حاصل می‌شود

$$\frac{8\tau_w}{\rho V^2} = F(R_e, \varepsilon/d) = f$$

* پارامتر بدون بعد f، ضریب اصطکاک دارسی نام دارد.

با جانگذاری f در رابطه h_f خواهیم داشت

$$h_f = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

معادله دارسی - وایسباخ

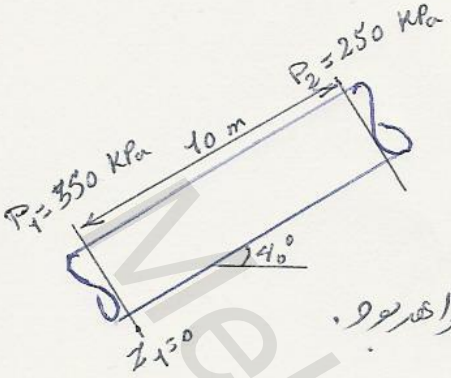
از این به بعد مهم‌ترین مسأله تعیین دقیق ضریب اصطکاک در لوله‌ها یعنی تعیین f می‌باشد

* برای جریان آرام f با استفاده از حل معادلات جریان، به شکل زیر بدست می‌آید.

$$f_{lam} = \frac{64}{R_e} \Rightarrow h_{f_{lam}} = \frac{64\mu}{\rho V d} \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{32\mu l v}{\rho g d^2} = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho g d^4}$$

مثال: مطابق شکل این مثال روغنی با $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ و $\nu = 0.0002 \text{ m}^2/\text{s}$ از لوله‌ای شیبدار به سمت بالا حرکت می‌کند در مقطع‌های 1 و 2 که فاصله آنها از هم 70 m است فشار و ارتفاع معلوم هستند از جریان آرام و پایدار باشد

Mehdi Imanian Najafabadi



الف) ثابت کنید که جریان به صورت بالا حرکت می کند

ب) h_f را بین مقطع های 1 و 2 بدست آورید؟

ج) مقادیر Q و V

د) رینولدز را محاسبه کنید آیا جریان واقعاً آرام خواهد بود.

* ابتدا برای استفاده های بعدی محاسبه های زیر را انجام می دهیم.

$$\mu = \rho\nu = (900\ kg/m^3)(0.0002) = 0.18\ kg/m.s$$

$$Z_2 = \Delta L \sin 40 = (10)(0.643) = 6.43$$

* رابطه ای که برای h_f بدست آمد به شکل زیر می باشد: $h_f = \Delta\left(Z + \frac{P}{\rho g}\right) = \Delta HGL = HGL_1 - HGL_2$

* با توجه به این رابطه بدست آمده، جریان در جهتی حرکت می کند که باعث کاهش HGL شود

$$HGL_1 = Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = 0 + \frac{350\times10^3}{900(9.81)} = 39.65 \qquad HGL_2 = \frac{250\times10^3}{900(9.81)} + 6.43 = 34.75$$

$HGL_2 < HGL_1$ جریان از مقطع 1 به مقطع 2 در حال حرکت است

ب) $h_f = HGL_1 - HGL_2 = 39.65 - 34.75 = 4.9\ m$

ج) حال Q را از رابطه ای که برای افت هد اصطکاکی که در جریان آرام ارائه نمودیم بدست می آوریم:

$$h_{f,lam} = \frac{128\mu LQ}{\pi\rho g d^4} \Rightarrow Q = \frac{\pi\rho g d^4 h_f}{128\mu L} = 0.00076\ m^3/s$$

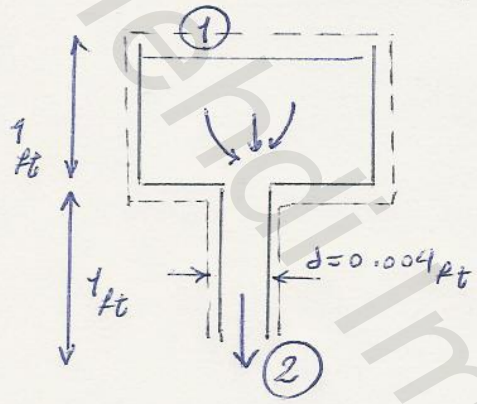
د) $$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.00076}{\pi(0.03)^2} = 2.7\ m/s$$

$$R = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(2.7)(0.06)}{0.0002} = 810$$

با اندازه کافی از رینولدز بحرانی (2300) کوچکتر است و می توان مطمئن بود که جریان آرام می باشد.

Mehdi Imanian Najafabadi

مثال: مطابق شکل این مثال مایعی با وزن مخصوص $58\ lb/ft^3$ و تحت تأثیر وزن خود با دبی $0.15\ ft^3/s$ از یک مخزن با عمق $1\ ft$ و لوله مویین با ارتفاع $1\ ft$ پرشده اگر فشار در مقاطع 1 و 2 فشار اتمسفریک باشد و از اثرات ناحیه ورودی چشم پوشی کنیم، ضریب لزجت مایع را برحسب $slug/ft.s$ بدست آورید.



* معادله انرژی را برای بیان جریان پایدار (شبه پایدار) نشان داده شده از شکل که بدون انتقال حرارت و کار محوری می باشد بین دو نقطه 1 و 2 می نویسیم

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\left(\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2\right)+h_f$$

* با توجه به اینکه $P_1=P_2=P_a$ بوده و نیز از مقدار V_1 در مقابل V_2 می توان چشم پوشی کرده و معادله انرژی به شکل زیر خلاصه خواهد شد:

$$h_f=Z_1-Z_2-\frac{V_2^2}{2g}=2_{ft}-\frac{V_2^2}{2g}$$

* V_2 با توجه به داده شده قابل محاسبه است

$$V_2=\frac{Q}{\pi R_2^2}=3.32\ ft/s \rightarrow h_f=2-\frac{(3.32)^2}{2(3.32)}=1.83\ ft$$

توجه: h_f نشان دهنده کل افت در طول 2 ft می باشد ولی چون قطر مخزن در مقایسه با لوله مویین بسیار بیشتر بوده و ما خواسته ایم افت ناشی از ناحیه ورودی چشم پوشی شود

* حال با فرض آرام بودن جریان می توان با استفاده از رابطه هاگن پوازی ضریب لزجت را بدست آورد.

$$h_f=\frac{32\mu l v}{\gamma d^2} \Rightarrow 1.83=\frac{32\mu(3.32)}{(58)(0.004)} \Rightarrow \mu=1.6\times10^{-5}\ slug/ft.s$$

* حال برای اطمینان از اینکه جریان واقعاً آرام بوده است عدد رینولدز را در لوله مویین محاسبه می کنیم

$$\rho=\frac{\gamma}{g}=\frac{58}{32.2}=1.8 \qquad Re=\frac{\rho v d}{\mu}=\frac{(1.8)(3.32)(0.004)}{1.6\times10^{-5}}=1500$$

جریان آرام

Mehdi Imanian Najafabadi

* برای جریان آشفته f با استفاده از روش εی تحلیلی موجود می‌توان به شکل زیر محاسبه شده

$$f = 0.316\, Re^{-1/6} \qquad 4000 < Re < 10^5$$

* با جایگذاری این رابطه در معادله دارسی - وایسباخ خواهیم داشت:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = 0.316\left(\frac{\mu}{\rho v d}\right)^{1/6}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

$$\Rightarrow \Delta P = 0.158\, l\, \rho^{3/4}\, \mu^{1/4}\, d^{-5/4}\, v^{7/4}$$

* با توجه به رابطه اخیر: (در جریان آشفته)

- افت فشار با توان 1.75 سرعت افزایش می‌یابد

- ΔP فقط کمی با لزجت تغییر می‌کند

* با جایگذاری رابطه $Q = \frac{1}{4}\pi d v^2$ در معادله افت فشار خواهیم داشت:

$$\Delta P = 0.241\, l\, \rho^{3/4}\, \mu^{1/4}\, d^{-4.75}\, Q^{1.75}$$

* با توجه به رابطه اخیر برای یک دبی مشخص Q با افزایش قطر، افت فشار در جریان آشفته شدیدتر از جریان آرام کاهش می‌یابد.

* بنابراین برای کاهش فشار مورد نیاز (که از پمپ گرفتیم) سیال بیشتر می‌آید) مؤثرترین راه افزایش قطر است یعنی با دو برابر کردن قطر برای یک دبی مشخص افت فشار 27 برابر کاهش می‌یابد.

- اثر زبری دیواره‌ها:

* اثر زبری دیواره‌ها در مقاومت اصطکاکی برای جریان آرام ناچیز می‌باشد ولی در جریان آشفته برای جداره‌های زبر نیز صادق است.

Mehdi Imanian Najafabadi

* جریان آشفته به شدت تحت تأثیر زبری دیواره قرار دارد.

* در سطح کاملاً زبر انرژی تحت تأثیر لزجت تا پدید شده بنابراین مستقل از عدد رینولدز خواهد بود در این شرایط

f را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log \frac{\epsilon/d}{3.7}$$

نمودار مودی:

* کلبروک (Colebrook) معادلات دیواره صاف و کاملاً زبر را با هم تلفیق کرده و فرمول کلی زیر را ارائه نمود:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon/d}{3.7} + \frac{2.5}{Re f^{1/2}} \right)$$

* این فرمول پذیرفته شده برای اصطکاک آشفته را مودی (Moody) در سال 1944 رسم کرد و نمودار مودی را ارائه نمود.

* دقت این نمودار در محاسبات مربوط به طراحی، در حدود ۵٪ ± است.

* این نمودار را می‌توان برای جریان در لوله‌های دایره‌ای و غیر دایره‌ای و جریان در کانال باز به کار برد.

* همان طور که از نمودار مودی مشخص است در جریان آشفته هرچه زبری نسبی بیشتر گردد تغییرات با رینولدز کم می‌شود.

* سطح هاشور خورده در نمودار مودی در حالت گذار از جریان آرام به آشفته را نشان می‌دهد. در این محدوده $2000 < Re < 40000$ ضرایب اصطکاک معتبر وجود ندارد.

مثال: اتکاف هدف را در $200\ ft$ از لوله چدنی قیر اندود شده افقی با قطر $6\ in$ که آب با سرعت متوسط $6\ ft/s$ در آن جاری است بدست آورید.

ابتدا عدد رینولدز را محاسبه می‌کنیم

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{6(6/12)}{1.09 \times 10^{-5}} = 2.7 \times 10^5$$

Mehdi Imanian Kajabadi

چون جریان آشفته است، زبری لوله اهمیت پیدا می کند، با توجه به اینکه لوله چدنی تراشیده داریم:

$$\epsilon = 0.0004\ ft \Rightarrow \frac{\epsilon}{d} = \frac{0.0004}{6/12} = 0.0008$$

$$f = 0.02 \Rightarrow h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = (0.02)\left(\frac{200}{0.5}\right)\left(\frac{6^2}{2(32.2)}\right) = 4.5\ ft$$

$$\Rightarrow \Delta P = \rho g h_f = (62.4\ lbf/ft^3)(4.5\ ft) = 280\ lbf/ft^2$$

Mehdi Imanian Najafabadi

E_mail:mehdiimanian@yahoo.com
Mobile:+989133327321

All Right Reserved