جــزوه آمــوزشـــی درس

دیــنــامــیــک

(رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات)

شرکت مهندسی پتروپالامحور

گردآوری و تنظیم :

فـــــرشـــــاد ســــــرایــــــی

با تقدیم والاترین درودها و احترامات به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر اثنی عشری که مطالب مندرج در این جزوه بر گرفته از آموزش های ایشان می باشد.

مقدمه :

جزوه حاضر که فرا روی شما خواننده گرامی قرار دارد ، مشتمل بر مباحث و سرفصل های مربوط به درس دانشگاهی « دینامیک » در رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات می باشد.

مطالب مندرج در این جزوه آموزشی به تجزیه و تحلیل و پیش بینی رفتار دستگاه ها و اجزاء آنها در شرایط مختلف حرکت و اعمال نیرو با استفاده از قوانین فیزیک و فرمولبندی های ریاضی می پردازد.

کتاب مرجع دانشگاهی که میبایست به عنوان مکمل در کنار این جزوه مطالعه شده و مورد استناد و ارجاع قرار گیرد عبارت است از :

- دینامیک ، نوشته : J.L.Meriam ، ترجمه : آقایان مجید ملکان ، کامران سپانلو ، محمد قوامی ، عبدالمجید رضایی و خانم هاله واحدی ، انتشارات : مرکز نشر دانشگاهی تهران

مطالب مندرج در این جزوه برگرفته از کلاس های آموزشی ارائه شده توسط جناب آقای دکتر اثنی عشری در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران در سال ۱۳۷۱ خورشیدی می باشد که به همان صورت دست نویس (برداشت شده توسط اینجانب) تقدیم حضور خوانندگان گرامی می شود ، به این امید که مفید فایده و مقبول نظر واقع گردد. بر خود لازم میدانم از حسن همکاری و زحمات سرکار خانم نیره رضائی که در تنظیم و انتشار این جزوه الکترونیکی اینجانب را یاری نمودند کمال سپاسگزاری را به عمل آورم.

همچنین از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فـرشـاد سـرایـی
دی ماه ۱۳۹۰

« سر درب ورودی دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران »

« پیشنهاد همکاری به مهندسین تازه فارغ التحصیل دانشگاه »

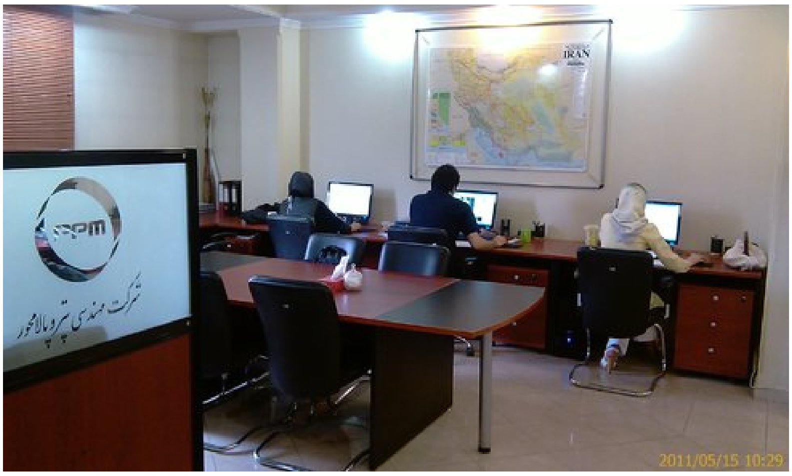
مدیریت شرکت مهندسی «پتروپالامحور» در راستای بسط و توسعه فرهنگ مهندسی دانش بنیان و حمایت از مهندسین جوان و علاقمند ، شرایطی را فراهم آورده که دانش آموختگان بتوانند با مراجعه به کتب ، جزوات و مقالاتی که بصورت رایگان در بخش «کتب و مقالات» وب سایت این شرکت در دسترس عموم قرار گرفته ، اصول و مبانی صحیح طراحی و مدلسازی سه بعدی سیستم های لوله کشی صنعتی (Piping) را به صورت خود آموز فراگرفته و سپس آموخته های خود را در قالب یک پروژه آموزشی پیاده سازی نموده و جهت بررسی مهندسین ارشد و با سابقه این شرکت ارسال نمایند تا پس از بررسی کارشناسی ، توصیه های فنی لازم در جهت بهبود طراحی به صورت رایگان به ایشان ارائه گردد.

مهندسین تازه فارغ التحصیل دانشگاه های معتبر در رشته «مکانیک» میتوانند با مراجعه به این کتابخانه الکترونیکی به آدرس : http://www.petropalamehvar.com/articles_fa.html ضمن دریافت فایل کتب ، جزوات و مقالات آموزشی با فرمت PDF به مطالعه آنها پرداخته و دانش مقدماتی مورد نیاز جهت طراحی و مدلسازی سه بعدی سیستم های لوله کشی صنعتی (Piping) را فرا گیرند.

پس از فراگیری مقدمات فوق ، مهندسین جوان میبایست به پروژه آموزشی ارائه شده در آیتم شماره ۳۲ کتابخانه الکترونیکی مراجعه نموده و بسته فشرده محتوی فایل های این پروژه را دانلود نمایند.
پروژه فوق متشکل از دو نقشه P&ID و Area Plot Plan یک واحد پتروشیمی فرضی می باشد که با ویرایش ۲۰۰۷ نرم افزار نقشه کشی Autocad و با فرمت فایل الکترونیک DWG تهیه شده و به همراه یک فایل PDF محتوی توضیحات مورد نیاز جهت اجرای پروژه ، در قالب یک پکیج رایگان ارائه گشته است.

مهندسین علاقمند میبایست بر اساس توضیحات ضمیمه این پروژه ، گام به گام نسبت به تکمیل طرح و تهیه نقشه ها و مدارک فنی مورد نیاز (که دقیقا مشابه یک پروژه واقعی تنظیم شده) اقدام نمایند.
نقشه ها و مدارک تهیه شده پس از تکمیل میبایست در قالب یک فایل فشرده با ظرفیت حداکثر ۱۰ مگابایت بسته بندی شده و جهت کنترل و بررسی مهندسین ارشد واحد تحقیق و توسعه شرکت مهندسی «پتروپالامحور» به آدرس پست الکترونیک این شرکت : info@petropalamehvar.co ارسال گردد. ذکر عبارت «درخواست بررسی پروژه آموزشی تکمیل شده» در عنوان (Subject) ایمیل و همچنین درج نام ، نام خانوادگی ، رشته تحصیلی ، میزان سابقه کار و شماره تماس مهندس طراح در متن ایمیل ارسالی ضروری بوده و به ایمیل هایی که فاقد مشخصات فوق الذکر باشد ترتیب اثر داده نخواهد شد.

طرح های دریافتی به نوبت توسط تیم بازبینی واحد تحقیق و توسعه شرکت مهندسی «پتروپالامحور» مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و نقاط قوت و ضعف موجود در آنها به انضمام توصیه های فنی و تجربی مورد نیاز جهت بهبود طرح ، متعاقبا به آدرس پست الکترونیک شخص فرستنده ارسال خواهد گشت.



علاوه بر خدمات فوق که به صورت رایگان از طرف مدیریت شرکت مهندسی «پتروپالامحور» برنامه ریزی و جهت استفاده عموم علاقمندان ارائه می گردد ، با هدف تشویق هر چه بیشتر دانشجویان و مهندسین جوان به شرکت در این خودآزمایی و توسعه دانش فنی طراحی لوله کشی صنعتی (Piping) در میان دانش آموختگان کشور ، هیئت بازبینی واحد تحقیق و توسعه این شرکت پس از بررسی طرح های دریافتی به آنها امتیازی بین ۰ الی ۱۰۰ خواهد داد.طرح هایی که موفق به کسب امتیاز ۸۰ یا بالاتر از مجموع ۱۰۰ امتیاز گردند به عنوان **طرح برگزیده** انتخاب گشته و مهندس طراح مربوطه پس از دعوت به محل دفتر مرکزی شرکت و انجام مصاحبه حضوری جهت اطمینان از صحت مدارک ارسالی و تهیه آن توسط خود شخص ، جهت **استخدام در شرکت مهندسی «پتروپالامحور»** دعوت به همکاری خواهد شد.

شماره های تماس شرکت مهندسی «پتروپالامحور»

۴۸ الی ۲۲۶۸۵۰۴۶ (کد شهر تهران ۰۲۱)

آدرس وب سایت شرکت مهندسی «پتروپالامحور»

www.petropalamehvar.com

آدرس وبلاگ تخصصی «طراحی تاسیسات مکانیکی و لوله کشی صنعتی»

به مدیریت آقای مهندس «فرشاد سرایی»

www.fsaraei.persianblog.ir

مهندس انی عشری

دینامیک

Dynamic (پویایی)

- سینماتیک Kinematic (نیرو در نظر نمی گیریم)
- Kinetic سینتیک (نیرو در نظر می گیریم)

- حرکت ذره Particle
- حرکت جرم Bodies

- Planer motion حرکت دو بعدی
- 3 Dimensioual motion

زمان (time) - معیاری است برای اندازه گیری توالی حوادث.

جرم (Mass) - مقاومت یا اینرسی جسم در مقابل حرکت است. ≠ وزن

نیرو (Force) - اثر برداری یک جسم در جسم دیگر است.

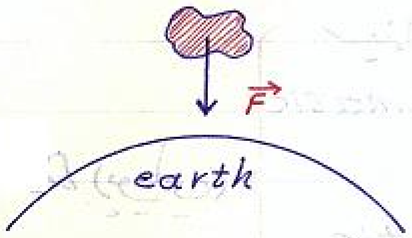
ذره (Particle) - اگر ابعاد جسمی به اندازه کافی کوچک باشد یا نسبت به دستگاهی که در آن حرکت می کند کوچک باشد میتوان آنرا ذره فرض کرد.

جسم صلب (Rigid Bodies) - جسمی است که تغییر شکل آن در طول حرکت - در مقایسه با ابعادش ناچیز باشد.

کمیت برداری واسکالر : Vectors & scalars

« ۱ مؤلفه » « ۳ مؤلفه »

در SI : $1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$ $\qquad 1\,N = MLT^{-2}$

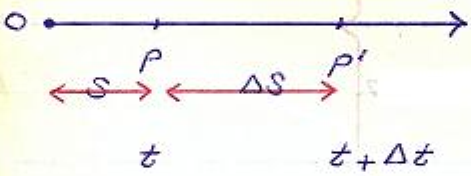


$$\vec{W} = m\vec{g}$$

$$m = 1\,kg \Rightarrow \vec{W} = 9/81\,N$$

$$" = 1\,kgf$$

حرکت مستقیم الخط یکنواخت : « Rectilinear motion »



نقطه مادی { در فاصله S در نقطه P در لحظه t
" S+ΔS " P' " t+Δt

سرعت متوسط $\quad V_{av} = \frac{\overbrace{(S+\Delta S)}^{\text{کنونی}} - \overbrace{S}^{\text{ابتدائی}}}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

سرعت لحظه‌ای $\quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow$

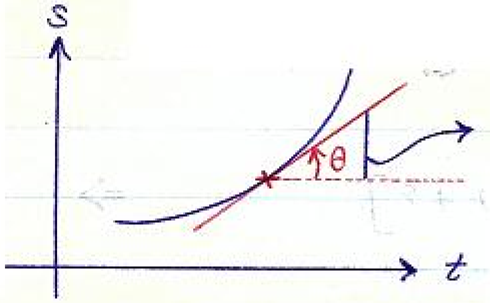
$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{S}}$$

$a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow$ لحظه‌ای $\quad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{dV}{dt} = \dot{V}} \qquad \qquad \boxed{a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}}$$

$$V = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} dt = \dfrac{ds}{V} \\ dt = \dfrac{dV}{a} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{V\,dV = a\,ds} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds}$$



$V_{\text{لحظه‌ای}} = \tan\theta$

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \quad \Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

$$\int_{V_1}^{V_2} V\,dV = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds}$$

مثال - $S = 2t^3 - 24t + 6$

a) زمان لازم برای رسیدن به $V = 72 \frac{m}{s}$. $\Rightarrow$

$V = \dot{S} = 6t^2 - 24$

$72 = 6t^2 - 24$

$t = 4 \text{ sec}$

b) $a = ?$, $V = 30 \frac{m}{s}$: $a = \dot{V} = \ddot{S} = 12t$

$30 = 6t^2 - 2t \Rightarrow$

$t = 3$

$a = 12t \Rightarrow$

$a = 12 \times 3 = 36 \frac{m}{s^2}$

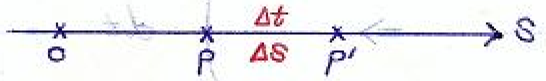
c) $\Delta S = ?$ $1s < t < 4s$ $\Delta S_{41} = S_4 - S_1$

$\Delta S_{4-1} = [2(4)^3 - 24(4) - 6 - 2(1)^3 - 24(1) + 6] \Rightarrow$

$\Delta S_{4-1} = 54 \, m$ جابجا شده

مسائل ۲/٤ و ۲/۱۰ و ۲/۱۲ و ۲/۱۸ « حل شود »

$$* \quad V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$



$$* \quad a = \frac{dV}{dt} = \ddot{S}$$

$$\left(\int_{S_1}^{S_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt \quad \text{و} \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \right) \Rightarrow$$

$$\int_{V_1}^{V_2} V\,dV = \int_{S_1}^{S_2} a\,dS$$

مثال ۲- یک لغزنده روی سطحی با اصطکاک ناچیز با سرعت V_0 در جهت S حرکت می کند. در لحظهٔ $t=0$ ، $S=0$ است. فنرهای دوطرف سیستم به جسم نیرو وارد می کنند که شتابی معادل $a=-K^2S$ را به جسم می دهند که K عددی ثابت است. رابطه‌ای برای V و S برحسب t بیابید.

$$\int V\,dV = \int a\,dS + C_1$$

* اگر حدود نگذاریم باید ثابتی مثل C_1 اضافه کنیم.

$$\Rightarrow \frac{V^2}{2} = \int -K^2 S\,dS + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{-K^2S^2}{2} + C_1 \xrightarrow[t=0]{S=0} C_1 = \frac{V_0^2}{2}$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{-K^2S^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} \Rightarrow * \; V = \sqrt{V_0^2 - K^2S^2}$$

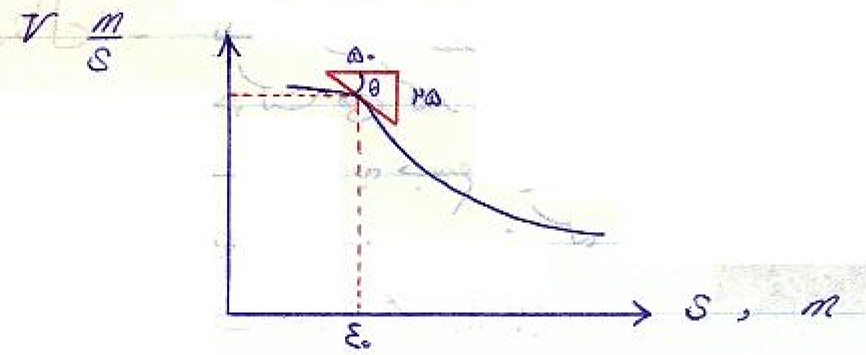
$$dt = \frac{dS}{V} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dS}{V} + C_2 \Rightarrow$$

$$t = \int \frac{dS}{\sqrt{V_0^2 - K^2 S^2}} + C_2 \Rightarrow t = \frac{1}{K} \sin^{-1} \frac{K}{V_0} S + C_2$$

$$\xrightarrow[S=0]{t=0} C_2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{K} \sin^{-1} \frac{K}{V_0} S \Rightarrow$$

$$\sin Kt = \frac{K}{V_0} S \Rightarrow S = \frac{V_0}{K} \sin Kt$$

م ۲ـ۱۰ کتاب ـ



$a = -30 \ \frac{m}{s}$ و $S = 40 \ m$ و $V = ?$

$$a\,dS = V\,dV \Rightarrow a = V \frac{dV}{dS}$$

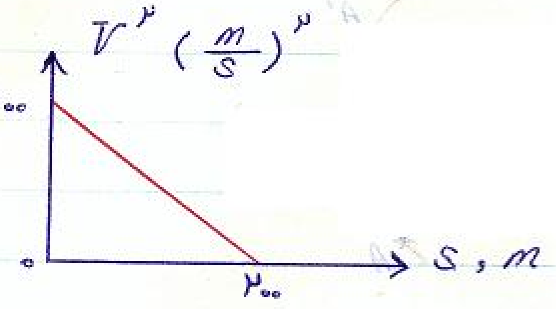
ضریب زاویه مماس بر منحنی که در $S=40$ داده شده.

$$\frac{dV}{dS} = \tan\theta = \frac{-25}{50} = -0/5$$

θ زاویه‌ای منفی است. (روی دایرهٔ مثلثاتی)

$$V = \frac{a}{\tan\theta} = \frac{-30}{-0/5} = 60 \ \frac{m}{s}$$

م ۲۲ـ۳ کتاب ـ صفحهٔ ۲۳ ـ



$(S = 200$ و $t = ?)$ $\qquad V^2 = -\frac{9}{2}S + 900$: (معادلهٔ خط)

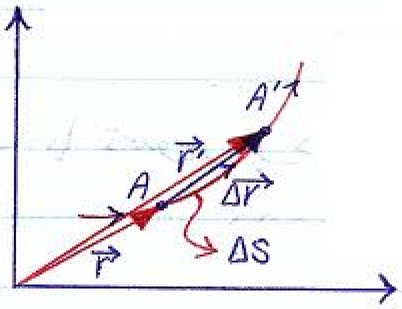
$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{V} \Rightarrow$$

$$\int dt = \int \frac{ds}{V} + C_1 \Rightarrow t = \int \frac{ds}{\sqrt{900 - \frac{9}{2}s}} + C_1$$

$$\Rightarrow t = f(s) + C_1$$

می توانیم برای انتگرالها حدود قرار دهیم تا C_1 بوجود نیاید. * : $\displaystyle\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{dV}$

حرکت در صفحه : (حرکت منحنی الشکل)

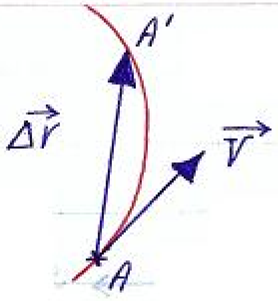


$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{\Delta r}$$

$$\vec{V}_{av} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}}$$ تندی (سرعت لحظه‌ای)

* $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$



* $V = |\vec{V}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \dot{S}$

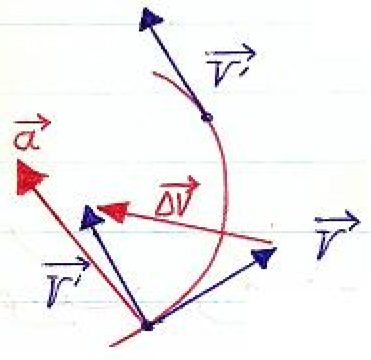
راستای آن
در هر لحظه مماس بر
مسیر است .

شتاب متوسط و لحظه‌ای :

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

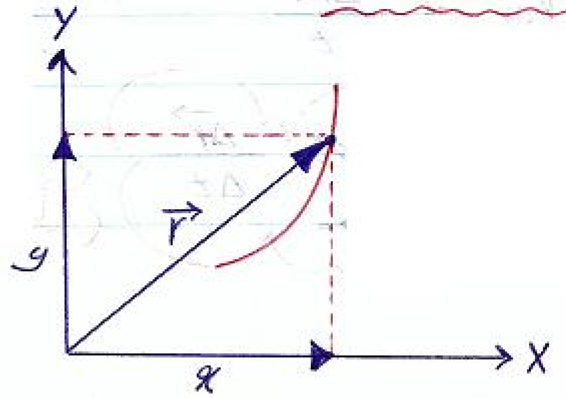
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}}$$

شتاب لحظه‌ای



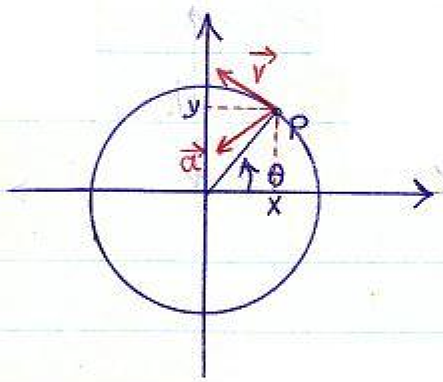
جهت شتاب همواره به
سمت داخل منحنی
است .

* ما اغلب با تصویر بردارها بر روی محورها کار می‌کنیم .



* $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$ $\rightarrow$ $\dot{x} = V_x$ $\quad \dot{y} = V_y$
* $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y}$ $\rightarrow$ $\ddot{x} = a_x$ $\quad \ddot{y} = a_y$
* $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y}$

* $V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ * $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$



مثال - ثابت کنید شتاب همواره به سمت مرکز است.

($\dot{\theta}$ = Const)

($\theta = f(t)$)

$x = \rho \cos\theta \Rightarrow \dot{x} = -\rho\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow$

$y = \rho \sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \rho\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow$

$\ddot{x} = -\rho\dot{\theta}^2\cos\theta$

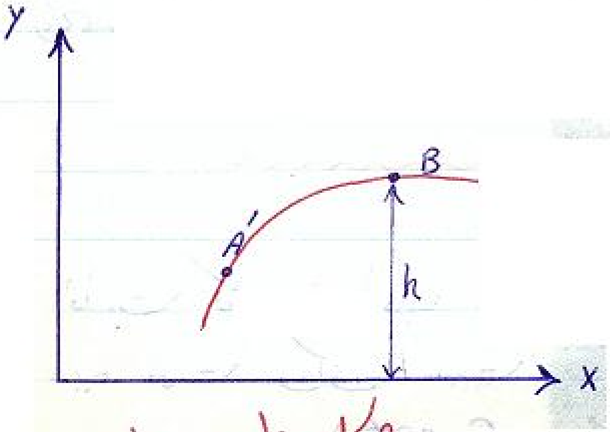
$\ddot{y} = -\rho\dot{\theta}^2\sin\theta$

* جهت $a = \tan^{-1}\underbrace{\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)} = \theta$

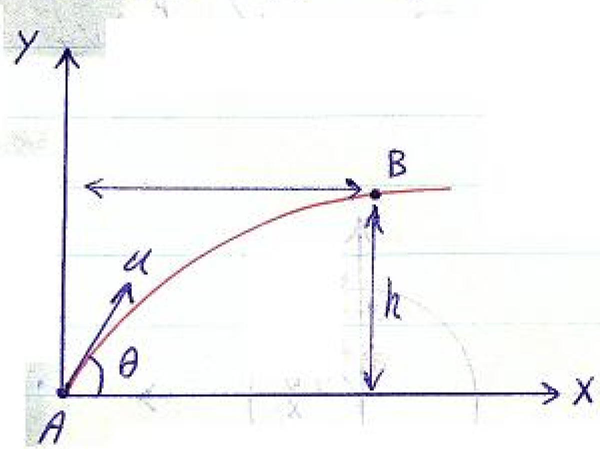
$\frac{-\rho\dot{\theta}^2\sin\theta}{-\rho\dot{\theta}^2\cos\theta} = \tan\theta$

حرکت پرتابی :

مثال - راکتی در نقطهٔ A با خاموش کردن موتور با سرعت اولیه u که با افق زاویه θ را می سازد درحال حرکت است. در نقطهٔ B به ماکزیمم ارتفاع h می رسد. دراین نقطه فاصله افقی S را پیموده است. روابطی برای h و S و t (زمان) بیابید. شتاب جاذبه را ثابت گرفته واز اثرات اصطکاک صرفنظر کنید.



«شکل نادرست»



نقطهٔ A : $V_x = V\cos\theta$ $\qquad a_x = 0$

$V_y = V\sin\theta$ $\qquad a_y = -g$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad dx = V_x\, dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t V\, dt = \int_0^t V\cos\theta\, dt \quad \Rightarrow \quad x = Vt\cos\theta$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V_y} \quad \Rightarrow \quad dV_y = a_y\, dt$$

$$\int_{V\sin\theta}^{V_y} dV_y = \int_0^t a_y\, dt \quad \Rightarrow$$

$$V_y - V\sin\theta = \int_0^t -g\, dt = -gt$$

$$\Rightarrow \quad v_y = -gt + u\sin\theta$$

$$dy = v_y\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^y dy = \int_0^t (u\sin\theta - gt)\,dt$$

$$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = -gt + u\sin\theta = 0$$ در نقطهٔ اوج

$$t = \frac{u}{g}\sin\theta$$ * زمان اوج

$$h = u\frac{u}{g}\sin\theta\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{u}{g}\right)^2\sin^2\theta$$

$$h = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$$ * ارتفاع اوج

$$x = u\left(\frac{u}{g}\sin\theta\right)\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{u^2}{2g}\sin 2\theta$$ * مسافت طی شده تا نقطهٔ اوج

* با حذف t بین x و y معادله مسیر بدست می آید :

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta$$

تمرین - حرکت ذره‌ای در صفحه با روابط زیر تعریف شده :

$* \; V_x = 50 - 16t$

$* \; y = 100 - 4t^2$

t بر حسب (s) و V_x $(\frac{m}{s})$ و y بر حسب (m) است
در $t=0 \rightarrow x=0$. مؤلفه‌های سرعت و شتاب را وقتی که $y=0$ است بدست آورید.

$$V_y = \dot{y} = -8t \qquad\qquad V_x = 50 - 16t$$

$$a_y = \ddot{y} = -8 \qquad\qquad a_x = \dot{V}_x = -16$$

$$x = \int (50 - 16t)\,dt + C_1 = \int V_x\,dt$$

$$x = 50t - 8t^2 + C_1 \xRightarrow{C_1=0} * \; x = 50t - 8t^2$$

$$y = 0$$

$$y = 100 - 4t^2 = 0 \Rightarrow * \; t = 5\,s$$

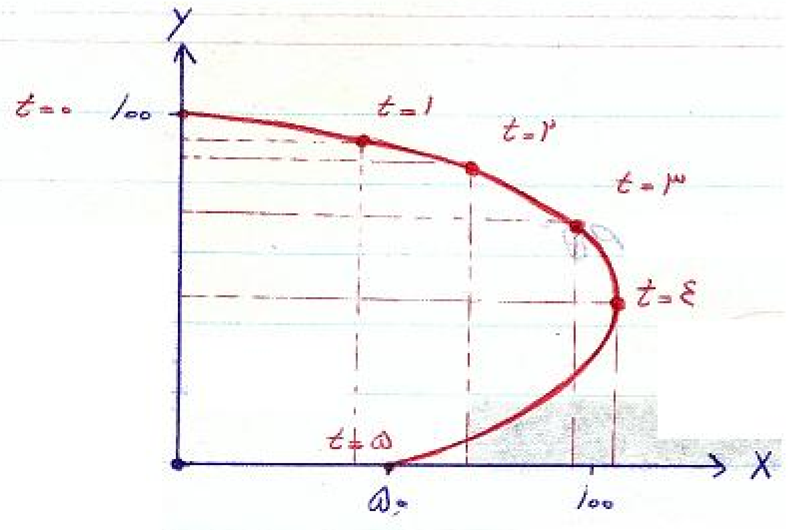
$$(y=0,\; t=5) \qquad * \; V_y = -8(5) = -40 \; m/s$$

$$* \; a_y = -8 \; m/s^2$$

$$x = 50t - 8t^2 = 50\,m \longleftarrow t = 5$$

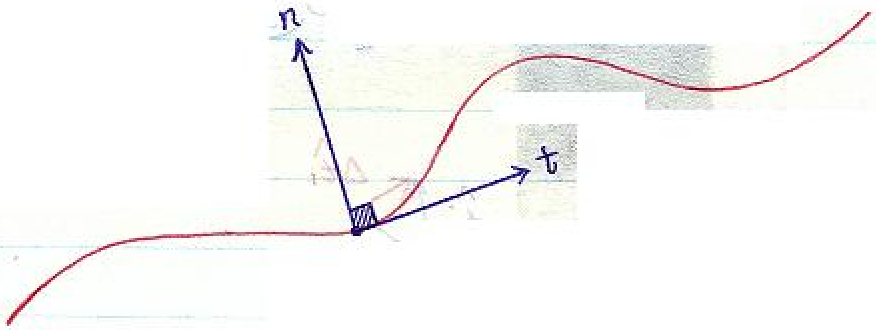
$$* \; V_x = 50 - 16t = -30 \; \frac{m}{s}$$

$$* \; a_x = -16 \; m/s^2$$



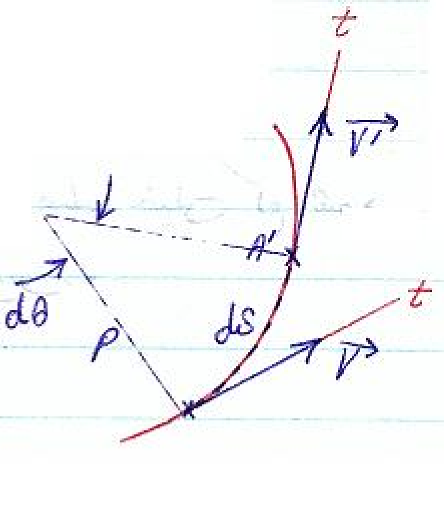
دستگاه مختصات قائم و مماسی :

« Normal and Tangentinal Coordinates »



با موقعیت متحرک دستگاه هم تغییر مکان می دهد.

* t_1 : بردار یکه t
* n_1 : 〃 〃 n



* در زمان دیفرانسیلی مرکز انحناء A و A' یکی است.

$$ds = \rho\, d\theta$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta^{\circ}$$

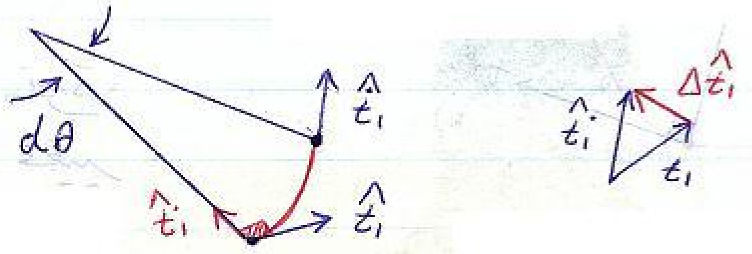
$$\vec{V} = V\hat{t}_1 = \rho\theta^{\circ}\,\hat{t}_1$$

* $\hat{t}_1 \rightarrow$ بردار یکه است.

$$\begin{cases} V_t = \rho\theta^{\circ} \\ V_n = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\hat{t}_1)}{dt} = V^{\circ}\hat{t}_1 + V\hat{t}_1$$

* $\hat{t}_1$ جهتش تغییر می کند لذا مثل $\hat{i}^{\circ}$ صفر نیست
بلکه $\hat{t}_1^{\circ}$ باید بدست آید.



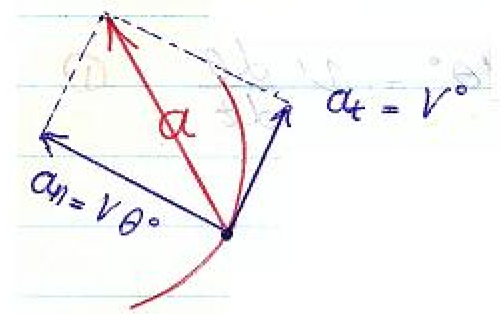
* $\hat{t}_1^{\circ} = \frac{\Delta\hat{t}_1}{\Delta\theta}$ زاویه

اگر فاصله خیلی کم شود $\hat{t}_1^{\circ}$ بر $\hat{t}_1$ عمود می شود یعنی بر محور n قرار
می گیرد.

$$\frac{d\hat{t}_1}{d\theta} = \hat{n}_1$$

$$\frac{d\hat{t}_1}{dt} = \frac{d\hat{t}_1}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \hat{n}_1 \dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{t}_1 + v\dot{\theta}\,\hat{n}_1$$



$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = v\dot{\theta} \xrightarrow{v = \rho\dot{\theta}}$$

$$a_n = \rho(\dot{\theta})^2 \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

* اگر مسیر دایره باشد ρ ثابت و برابر R است :

$$\left(a_n = \frac{v^2}{R}\right) \quad \text{و} \quad \left(\dot{v} = \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}) = \rho\ddot{\theta}\right)$$

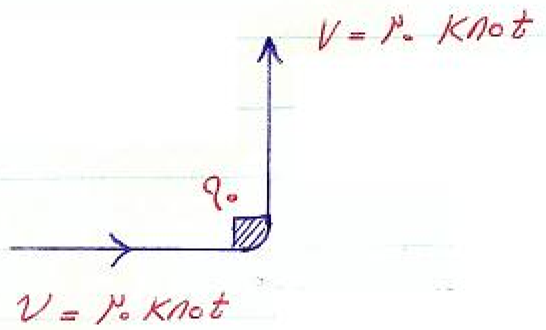
---

۳ ـ ۶۴ و ۶۸ و ۷۳ و ۷۴ و ۷۶ و ۷۷
حل شود .

دستگاه مختصات قطبی : * نخست چند مسئله از فصلهای قبل حل می کنیم .

مسأله ۱ ـ یک کشتی با سرعت ثابت $V = ۲۰$ Knot و $1\ \text{Knot} = ۱/۸۵۲\ \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. با نزدیک شدن به بندر با نرخ ثابتی شروع به دوران می کند اگر برای تغییر زاویه

به میزان °۹۰ مدت زمان 60s لازم باشد شتاب کشتی درحال دور زدن را بیابید.



$$a_n = V\dot{\theta} = V\frac{d\theta}{dt} \quad ①$$

$$a_t = 0$$

$$① \rightarrow \int_0^{60} a_n dt = \int_0^{90} V d\theta \Rightarrow$$

$$a_n t\Big|_0^{60} = V\theta\Big|_0^{90}$$

* چون a_n طبق گفته مسئله ثابت است (نرخ دوران ثابت است)

$$60\, a_n = 20 \times 1/852 \times \frac{3/14}{2} Rad = 0/269 \quad \frac{m}{s^2}$$

$$(a = a_n)$$

مسأله ۲ - ذره‌ای روی مسیر منحنی الشکل نشان داده شده درحال حرکت است. در لحظه‌ای که ذره از نقطه o عبور می‌کند - سرعت آن $12\frac{m}{s}$ و در نقطه A به فاصله ۱۸ متری از نقطه o سرعت ذره $6\frac{m}{s}$ است. اگر شتاب کل ذره $10\frac{m}{s}$ در لحظه عبور از A باشد شعاع انحنای مسیر در

نقطه A را بیابید. کاهش سرعت متناسب با فاصله از نقطه O است.

$$V_0 = ۱۲ \ \frac{m}{s}$$
$$V_A = ۶ \ \frac{m}{s}$$
$$\overline{OA} = ۱۸ \ m$$
$$a_A = ۱۰ \ \frac{m}{s^۲}$$
$$\dot{V} = KS$$
$$\rho_A = ?$$

* در نقطه A :

$$a_t = \dot{V}$$
$$a_t \, ds = V \, dV$$
$$\int a_t \, ds = \int V \, dV$$
$$\int_0^S KS \, ds = \int_{V_0}^{V_A} V \, dV \Rightarrow$$

$$\left.\frac{KS^۲}{۲}\right|_0^S = \left.\frac{۱}{۲} V^۲\right|_{V_0}^{V_A} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{KS^۲}{۲}\right|_0^{۱۸} = \left.\frac{۱}{۲} V^۲\right|_{۱۲}^{۶} \Rightarrow$$

$$K(۱۸)^۲ = (۶)^۲ - (۱۲)^۲ \Rightarrow K = -۰/۳۳۵$$

$$* \ a_t = -۰/۳۳۵ \times S \ *$$

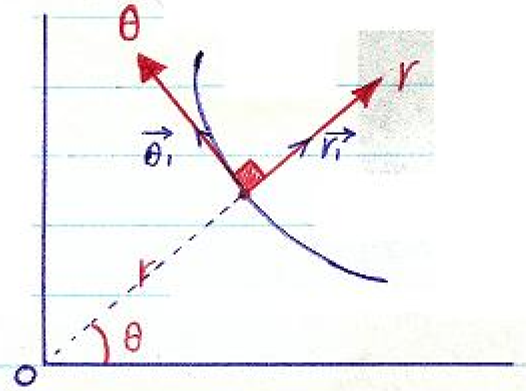
$$a_{tA} = ۰/۳۳۵ \times ۱۸ = -۶$$

$$a_A = \sqrt{a_{tA}^2 + a_{nA}^2} \Rightarrow a_{nA} = \sqrt{a_A^2 - a_{tA}^2}$$

$$\Rightarrow a_{nA} = \sqrt{10^2 - (-6)^2} \Rightarrow a_{nA} = 8 \ \frac{m}{s^2}$$

$$\rho_A = \frac{V_A^2}{a_{nA}} = 4.5 \ m$$

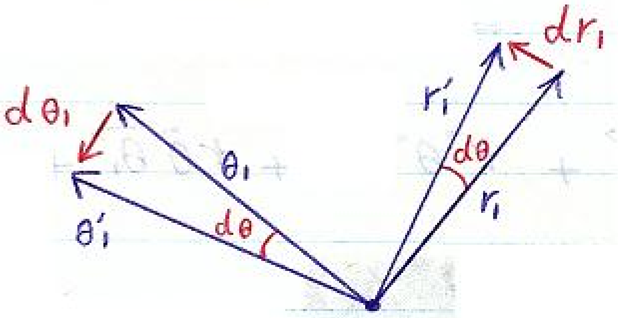
Poolar Coordinate $(r - \theta)$: مختصات قطبی



* انتخاب جهت بردار θ بستگی به جهت زاویه θ نسبت به دایره مثلثاتی دارد.

$$\vec{r} = r\,\vec{r_1} \qquad \vec{V} = \dot{\vec{r}}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{V}}$$

* فرض می کنیم که متحرک ما جا بجائی کوچکی داشته باشد.



** وقتی دیفرانسیل به سمت صفر میل کند نهایتاً dr_1 با محور θ_1 موازی می شود. همینطور $d\theta_1$ موازی و مخالف جهت محور r_1 می شود.

* $dr_1 = r_1\, d\theta \Leftarrow$ زاویه x شعاع $\Rightarrow$

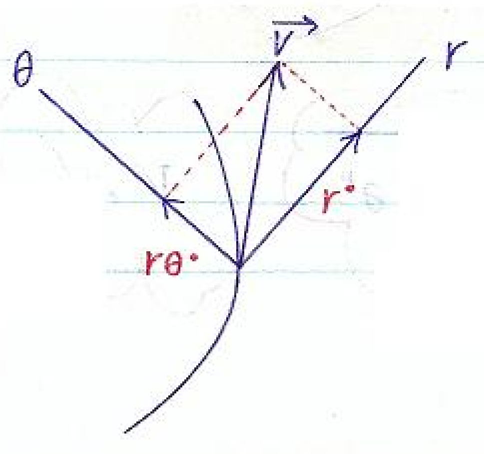
* $d\theta_1 = -\theta_1\, d\theta \Leftarrow$ " "

$$\left(\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\theta}\, \vec{\theta}_1 \quad \text{و} \quad \dot{\vec{\theta}}_1 = -\dot{\theta}\, \vec{r}_1 \right)$$

$$V = \dot{\vec{r}} = (r\vec{r}_1)^{\circ} = \dot{r}\,\vec{r}_1 + r\,\dot{\vec{r}}_1$$

$$V = \dot{r}\,\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\,\vec{\theta}_1 \quad \Rightarrow$$

$$(V_r = \dot{r}) \quad \text{و} \quad (V_\theta = r\dot{\theta})$$



$\vec{V}$: مماس بر مسیر

$* \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} \qquad \Rightarrow$

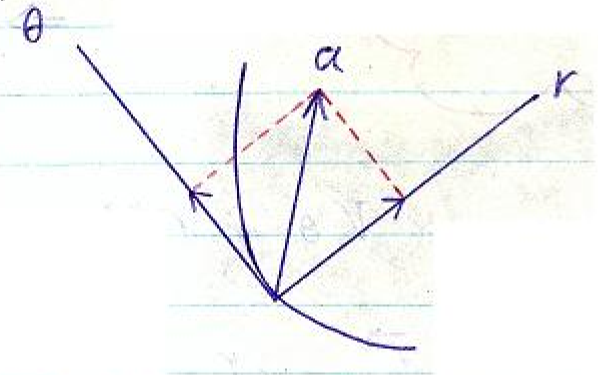
$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{r_1} + \dot{r}\,\dot{\vec{r_1}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{\theta_1} + r\ddot{\theta}\,\vec{\theta_1} + r\dot{\theta}\,\dot{\vec{\theta_1}}$$

(اما) : $\dot{\vec{r_1}} = \dot{\theta}\,\vec{\theta_1}$, $\dot{\vec{\theta_1}} = -\dot{\theta}\,\vec{r_1}$ $\Rightarrow$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{r_1} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{\theta_1} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{\theta_1} + r\ddot{\theta}\,\theta_1 + (-r\dot{\theta}^2\,\vec{r_1})$$

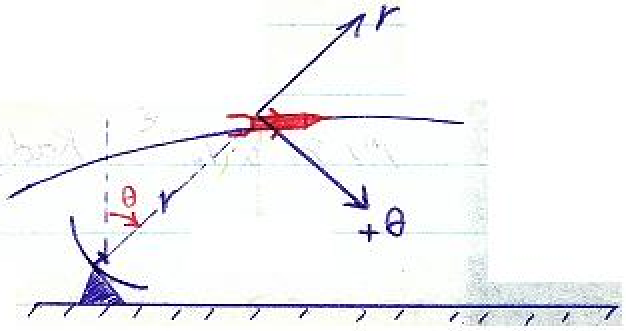
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{r_1} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{\theta_1}$$

$(a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$



مقدار a کل $= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$ $\qquad$ V کل $= \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$

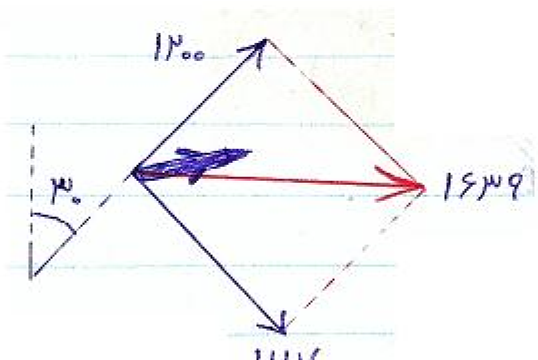
مسأله - یک رادار موشکی را در صفحه قائم رهگیری می کند. در لحظه نشان داده شده $\theta = 30°$ مقدار r برابر با $8 \times 10^4 \; m$ و $\dot\theta$ برابر $0/8 \; \frac{°}{s}$. شتاب راکت تنها ناشی از جاذبه زمین است که برابر $9/80 \frac{m}{s^2}$ است. برای شرایط فوق سرعت V راکت و مقادیر $\ddot r$ و $\ddot\theta$ را بیابید.
($\dot r$ برابر $1200 \frac{m}{s}$ است)

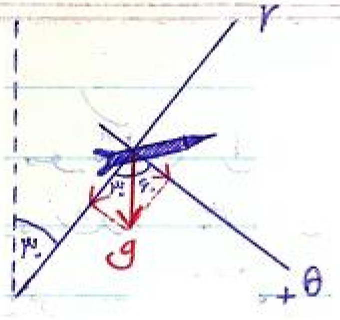


$$* \quad V_r = \dot r = 1200 \; \frac{m}{s}$$

$$V_\theta = r\dot\theta = 8 \times 10^4 \times 0/8 \times \frac{\pi}{180} \, \text{Rad} = 1117 \; \frac{m}{s}$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \left(1200^2 + 1117^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1639 \; \frac{m}{s}$$





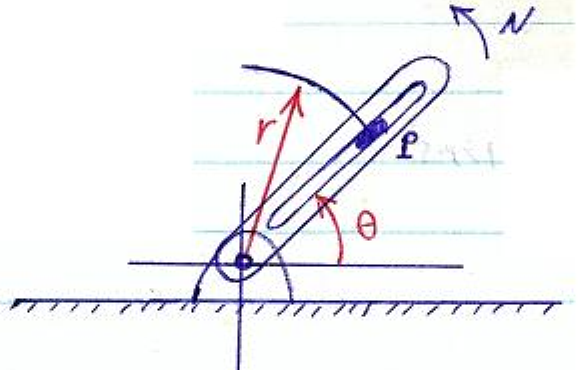
$$a_r = a\cos 30 = -9/2\cos 30 = -7/97\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_\theta = a\sin 30 = 9/2\sin 30 = 4/6\ \frac{m}{s^2}$$

⟹

$$(\ddot{r} = 7/63\ m/s^2) \qquad (\ddot{\theta} = -3/61\times 10^{-4}\ Rad/s^2)$$

مسأله - در لحظه نشان داده شده در شکل بازوی شیاردار با سرعت $N = 80\ rpm$ (دور در دقیقه) در حال حرکت است و با نرخ $80\ \frac{rpm}{s}$ از سرعت آن کاسته می شود. همچنین در این لحظه فاصله شعاعی r مربوط به لغزنده P برابر با $250\ mm$ است که با نرخ ثابتی به میزان $300\ \frac{mm}{s}$ کاسته می شود. برای این لحظه شتاب لغزنده P را بیابید.



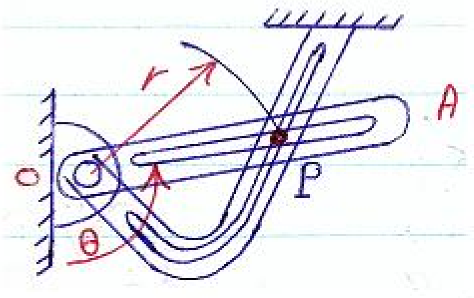
$$** \; rpm \times \frac{2\pi}{60} = \frac{Rad}{s} \; **$$

$$\dot{\theta} = 80 \times \frac{2\pi}{60} = \frac{8\pi}{3} \quad rad/s$$

$$\ddot{\theta} = -280 \times \frac{2\pi}{60} = -\frac{28}{3}\pi \quad rad/s^2$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

مسأله ـ بازوی شیاردار OA پین کوچکی را در یک هادی ماریپچ که انحنای آن از رابطه $r = K\theta$ تعریف شده به حرکت در می آورد. بازوی OA از حالت سکون در $\theta = \frac{\pi}{4}$ شروع به حرکت کرده و شتاب زاویه ای ثابت $\ddot{\theta} = \alpha$ را دارد. شتاب پین در لحظه ای که $\theta = \frac{3\pi}{4}$ است را بیابید.



* ۲ : شعاع op

$= \theta$

$(r = k\theta)$ $\qquad$ $\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $(\ddot{\theta} = \alpha)$

$$\ddot{\theta} = \alpha \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \alpha \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = \int \ddot{\theta}\, dt = \int \alpha\, dt = \alpha t + c_1$$

$$\theta = \int \dot{\theta}\, dt = \int (\alpha t + c_1)\, dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\begin{cases} t = 0 & \dot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad 0 = \alpha \times 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 & \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\alpha \times 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{\pi}{4}$$

$$\dot{\theta} = \alpha t$$

* $r = k\theta$

$\dot{r} = k\dot{\theta} = k\alpha t$

$\ddot{r} = k\ddot{\theta} = k\alpha$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = \frac{3\pi}{4} k$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow t^2 = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\left(\dot r = k\alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = k\sqrt{\pi\alpha}\right) \qquad \left(\ddot r = k\alpha\right)$$

$$\left(\dot\theta = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\alpha\pi}\right) \qquad \left(\ddot\theta = \alpha\right)$$

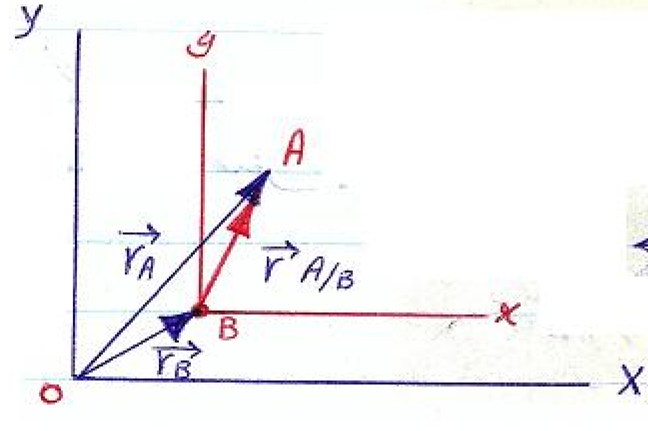
$$a_r = k\alpha - \frac{3\pi}{4}k(\sqrt{\alpha\pi})^2 = k\alpha\left(1 - \frac{3\pi^2}{4}\right)$$

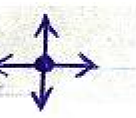
$$a_\theta = \left(\frac{3\pi}{4}k\right)\alpha + 2\left(k\sqrt{\pi\alpha}\right) = k\alpha\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right]$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 10/67\, k\alpha$$

حرکت نسبی : (Relative Motion)

برخی مواقع بیان یک حرکت با کمک یک دستگاه مختصات ثابت بسیار دشوار است.





جهات حرکت B

$$\vec r_A = \vec r_B + \vec r_{A/B}$$

$$\vec{V}_A = \dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

سرعت مطلق A

سرعت دستگاه متحرک

سرعت نسبی

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

* $\vec{V}_{A/B} = -\vec{V}_{B/A}$ *

* $\vec{a}_{A/B} = -\vec{a}_{B/A}$ *

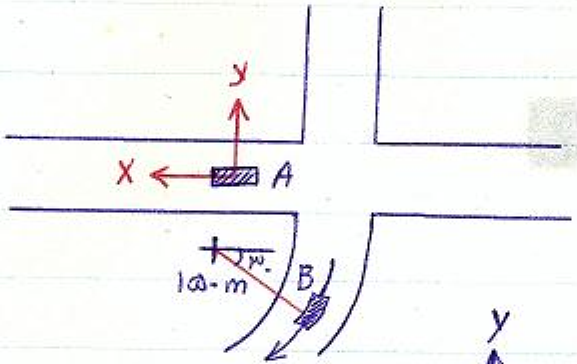
نکته - اگر سرعت دستگاه مختصات متحرک ثابت باشد یعنی شتاب صفر باشد آن را دستگاه مختصات اینرسی گوییم.

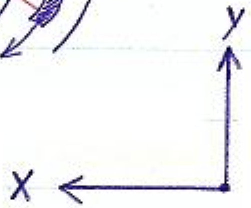
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A/B}$$

مثال - اتومبیل A در حال شتاب گیری در جهت نشان داده شده با نرخ ۱٫۲ $\frac{m}{s^2}$ است. اتومبیل B در حال دور زدن.

الف

قوس به شعاع $150\,m$ با سرعت ثابت $54\ \frac{km}{h}$ است. سرعت و شتاب B برای ناظر مستقر در اتومبیل A را بدست آورید در لحظه ای که $V_A = 72\ \frac{km}{h}$.

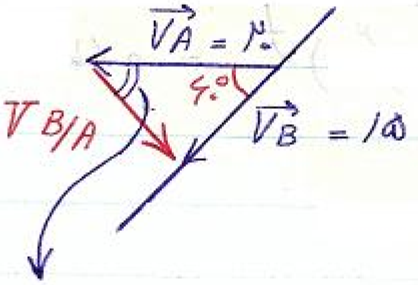




* $a_A = 1/2\ \frac{m}{s^2}$
* $\rho = 150\ m$
* $V_B = 54\ km/h = Cte$
* $V_A = 72\ km/h$

* $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

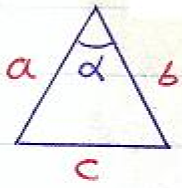
$$V_A = \frac{72}{3/6} = 20\ \frac{m}{s}$$
$$V_B = \frac{54}{3/6} = 15\ \frac{m}{s}$$



$$\Rightarrow \quad V_{B/A} = 18/03\ \frac{m}{s}$$

$\theta = 46/1^\circ$

(از قانون سینوسها)



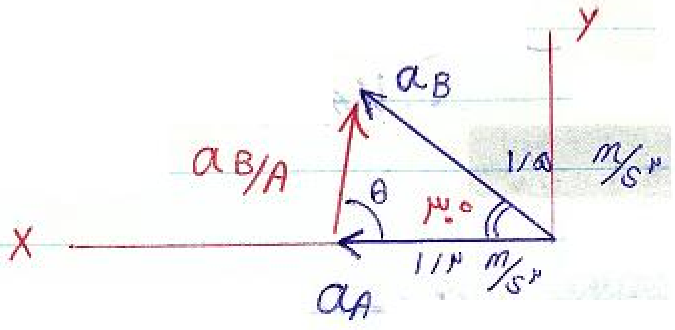
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

** $\vec{a}_B \Rightarrow$ (سرعت ثابت) : $a_{tB} = 0$

$$a_{nB} = \frac{V^2}{\rho} = 1/5\ m/s^2$$

$\vec{a}_B = \vec{a}_{nB} =$ ۱/۵ m/s^2



$\Rightarrow \quad a_{B/A} =$ ۰/۷۵۷ m/s^2

(ازروش غیرمثلثاتی)

$(a_{B/A})_x = a_B \cos$ ۳۰ $- a_A$

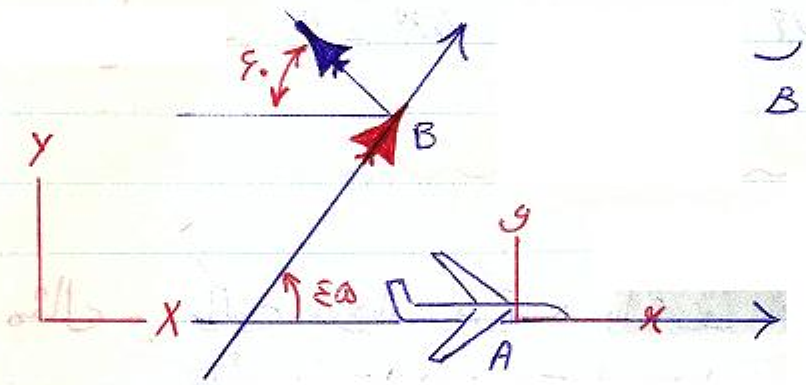
$(a_{B/A})_y = a_B \sin$ ۳۰ $\Rightarrow$

* $(a_{B/A}) = \left((a_{B/A})_x^2 + (a_{B/A})_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$ ۰/۷۵۷ m/s^2

$tg\,\theta = \dfrac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x}$

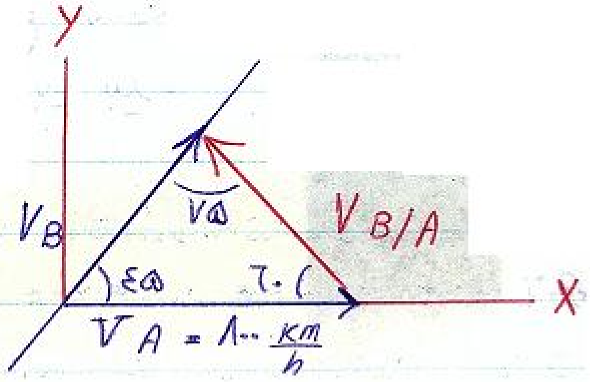
مسأله - مسافرین هواپیمای جت A که با سرعت ۸۰۰ km/h بسمت شرق درحال پرواز است جت B را که درهمان ارتفاع درحال پرواز است رؤیت می کنند. درحالی که زاویه بین مسیر حرکت درهواپیما ۴۵° است جت B ازدید مسافرین جت A با زاویه

ب



۶: در جهت نشان داده شده در حال دور شدن است. سرعت B را بیابید.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

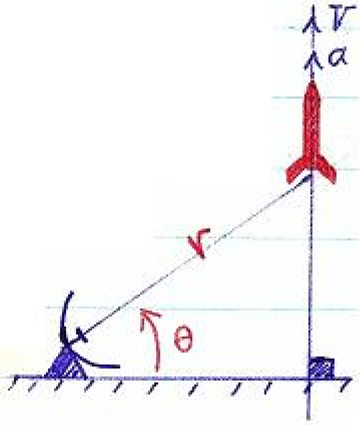


$$-\begin{cases} V_B \cos 45 = \overbrace{V_A}^{800} - V_{B/A} \cos 60 \\ V_B \sin 45 = V_{B/A} \sin 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$0 = -800 + V_{B/A}(\cos 60 + \sin 60) \Rightarrow$$

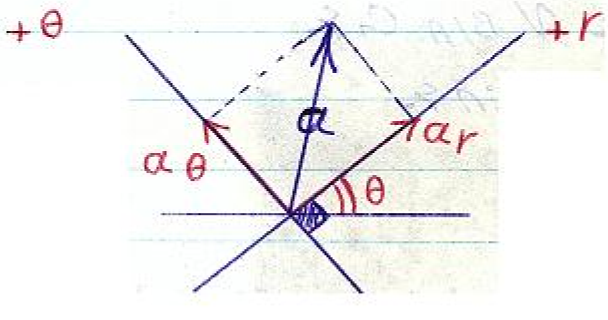
$$V_{B/A} = 566 \ \frac{km}{h} \Rightarrow V_B = 717 \ km/h$$

تمرینات - ~~۲~~ـ ۱۱۳ و ۱۱۵ و ۱۱۹ و ۱۳۸



مثال - راکتی درحال حرکت با محور قائم نسبت به زمین است و توسط رادار ردگیری می‌شود. در لحظه مورد بحث $\dot{\theta} = 0.03\ \frac{Rad}{s}$ و $\theta = 60^\circ$ ، $a = 20\ \frac{m}{s^2}$ و $r = 7500\,m$ شتاب قائم است. ($\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ را بیابید.

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$



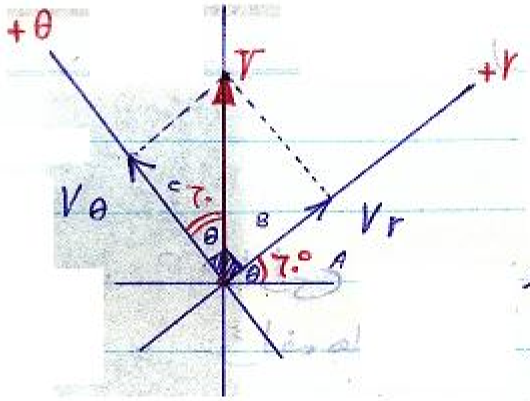
$$* \quad a_r = a\sin\theta = 20\sin 60 = 10\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}$$

$$* \quad a_\theta = a\cos\theta = 20\cos 60 = 10\ \frac{m}{s^2}$$

$$۱۰\sqrt{۳} = \ddot{r} - (۷۵۰۰)(۰/۰۳)^{۲}$$

$$\boxed{\ddot{r} = ۲۴/۱ \quad m/s^{۲}}$$

$$V_r = \dot{r}$$
$$V_\theta = r\dot{\theta}$$



* A و B متمم هستند
پس $B = ۳۰°$. B
و C هم متمم هستند.
پس $C = ۶۰°$.

$$V_\theta = r\dot{\theta} = (۷۵۰۰)(۰/۰۳) = ۲۲۵ \quad m/s$$

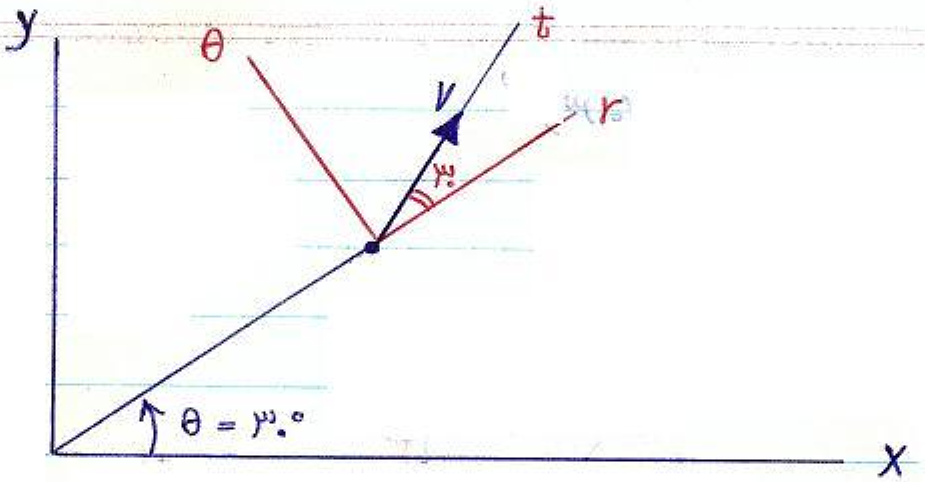
$$\text{تg}\,\theta = \frac{V_r}{V_\theta} \Rightarrow V_r = V_\theta \tan\theta \Rightarrow$$

$$V_r = ۲۲۵ \tan ۶۰ \Rightarrow V_r = \dot{r} = ۳۸۹/۷ \quad m/s$$

$$a_\theta = ۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \Rightarrow$$

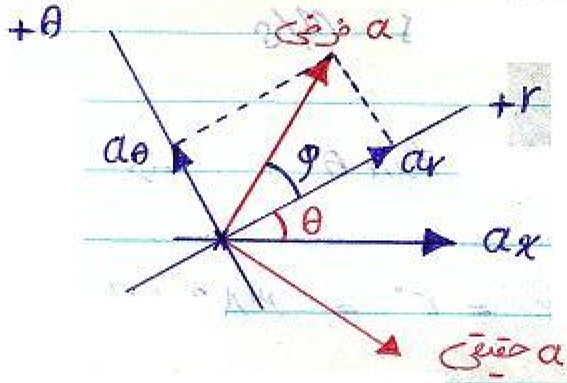
$$۱۰ = ۲(۳۸۹/۷)(۰/۰۳) + (۷۵۰۰)\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -۱/۷۸۴ \times ۱۰^{-۳} \quad rad/s^{۲}}$$ کند شونده



مثال ۳-

برای لحظه نشان داده شده ذره P دارای سرعت $V = 6\ m/s$ در جهت نشان داده شده است و مؤلفه‌های شتاب: $a_x = 15\ m/s^2$ و $a_\theta = -15\ m/s^2$. a_r و a_y و a_t و a_n و ρ را بدست آورید.



$$a_x = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta$$

$$15 = a_r\cos 30 - (-15)\sin 30$$

$$\boxed{a_r = 5\sqrt{3}\ \ m/s^2}$$

$$a_y = a_r \sin\theta + a_\theta \cos\theta$$

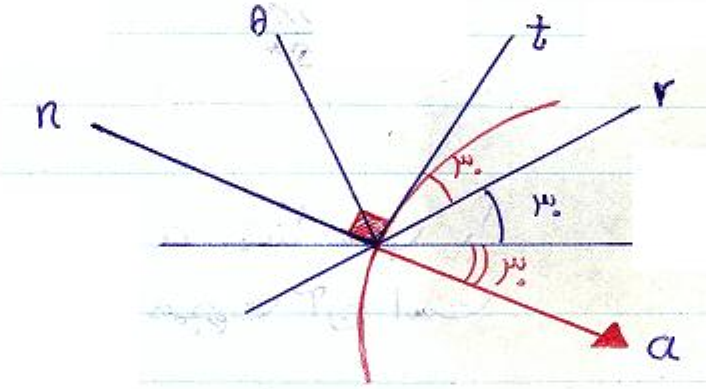
$$a_y = (۵\sqrt{۳}) \sin ۳۰ + (-۱۵) \cos ۳۰$$

$$a_y = -۵\sqrt{۳} \quad m/s^۲$$

$$a = \sqrt{۳۰۰} = ۱۰\sqrt{۳} \quad m/s^۲$$

$$\tan\varphi = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{-۱۵}{۵\sqrt{۳}} = -\frac{۳}{\sqrt{۳}} = -\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi = -۶۰^\circ$$



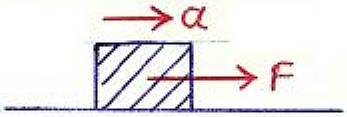
$$\begin{cases} a_t = ۰ \\ a_n = ۱۰\sqrt{۳} \quad m/s^۲ \end{cases}$$

* چون a کاملاً در جهت محور نرمال است.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{(6)^2}{10\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{6\sqrt{3}}{5}\, m}$$

« Kinetics Of Particles » - فصل ۳



$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F_n}{a_n}$$

$$\boxed{F = kma}$$

* در SI :

$$\begin{cases} K = 1 \\ F : N \\ a : \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

* یعنی مقدار a متناسب با مقدار F و همجهت آن است.

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

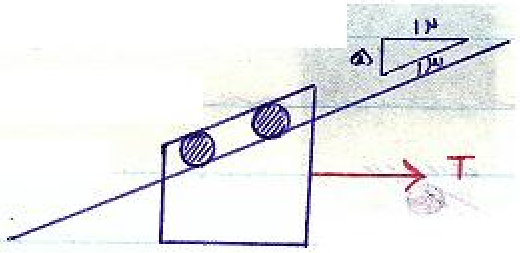
« رابطهٔ اصلی »

درس

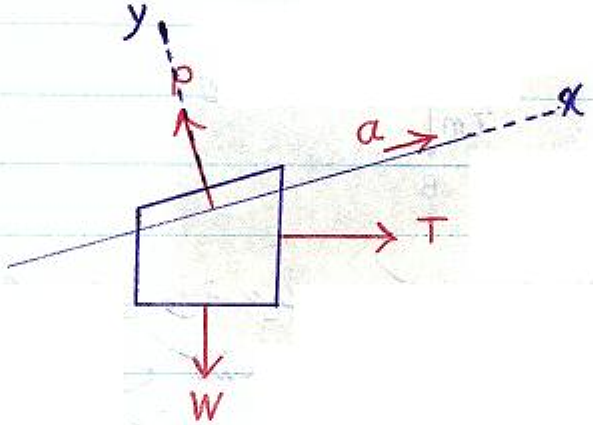
* برای حل مسائل دینامیک :

«Free Body Diagram» مسئله را رسم کرده و سپس نیروها را اعمال می کنیم و احتمالاً تصویر می کنیم تا مجهولات بدست آید.

مثال - یک اتاقک متحرک به جرم ۲۰۰ kg روی کابلی حرکت می کند. شتاب وسیله را وقتی که با کشش ثابت افقی $T = ۲/۴ \ kN$ کشیده می شود بیابید و نیروی اعمال شده از سوی کابل بر چرخها را محاسبه کنید.



(F.B.D)



* $\Sigma F_x = m a_x$

$$\frac{۱۲}{۱۳}(۲/۴)(۱۰۰۰) - (۲۰۰ \times ۹/۸۱)(\frac{۵}{۱۳}) = ۲۰۰\, a$$

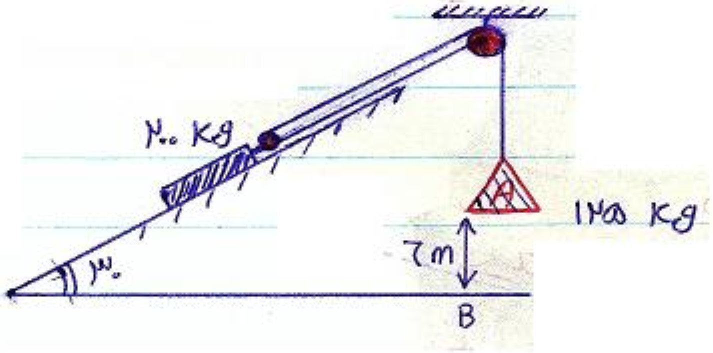
$$\boxed{a = ۷/۳ \ m/s^۲}$$

$$* \ \Sigma F_y = m a_y$$

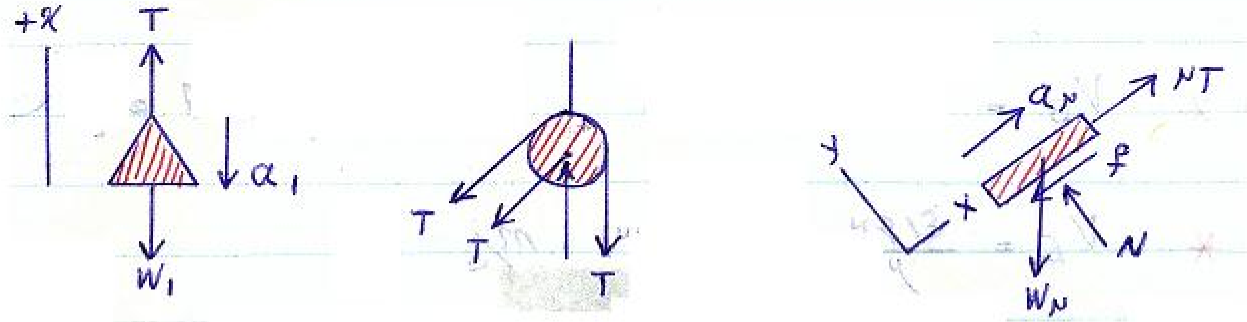
$$P - (۲/۴ \times ۱۰۰۰)(\frac{۵}{۱۳}) - (۲۰۰ \times ۹/۸۱)(\frac{۱۲}{۱۳}) = ۰$$

$$\boxed{P = ۲/۸۷۳ \ kN}$$

مثال-



وزنه A ۱۲۵ kg از وضعیت سکون رها شده و وزنه D = ۲۰۰ kg را روی سطح شیبداری می کشد. اگر ضریب اصطکاک قطعه D و سطح شیبدار (اصطکاک جنبشی) برابر ۰/۵ باشد سرعت D را وقتی A به زمین برخورد می کند بیابید.



(۱) (۳) (۲)

$\sum F = m_۱ a_۱$ | $\sum F_x = m_۲ a_x \rightarrow ۲T - f - W_۲ \sin\theta = m_۲ a_۲$

$T - W = m_۱ a_۱$ | $\sum F_y = m_۲ a_y \rightarrow N - W_۲ \cos\theta = ۰$

$f = \mu N$

$N = W_۲ \cos\theta = (۲۰۰ \times ۹/۸۱) \cos ۳۰ = ۱۶۹۹\ N$

$f = (۰/۵)(۱۶۹۹) = ۸۴۹/۵\ N$

$۲T - ۸۴۹/۵ - (۲۰۰)(۹/۸۱) \sin ۳۰ = ۲۰۰ \frac{a_۱}{۲}$

$T - (۱۲۵)(۹/۸) = ۱۲۵\, a_۱$

* $T = ۱۰۰۴\ N$ * $a_۱ = ۱/۷۸\ m/s^۲$

$V_B^۲ - V_۰^۲ = ۲ a_۱ x$

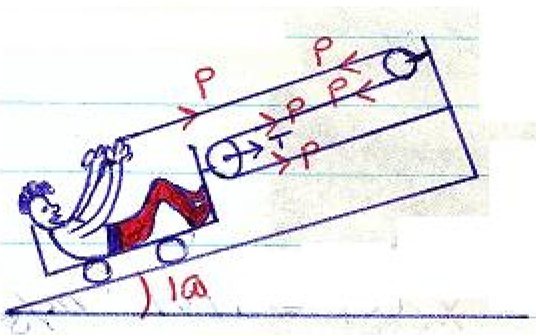
$V_B^۲ = ۲(۱/۷۸)(۶)$

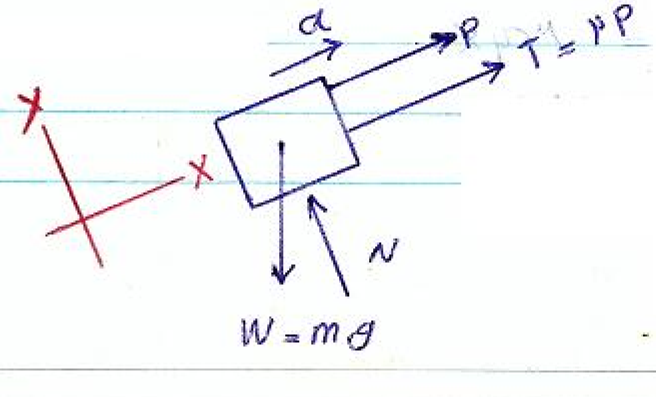
* $V_B = ۴/۶۲ \ m/s$ سرعت جسم A در برخورد

* $V_D = \frac{۴/۶۲}{۲} = ۲/۳۱ \ m/s$

$a_2 = \frac{a_1}{2}$ و $V_2 = \frac{V_1}{2}$ چون وقتی A قرقره را می کشد در قرقره های دیگر هر دو نخ هر یک به اندازه نصف آن کشیده می شود.

مثال - گاری متحرک توسط فرد سوار بر آن روی سطح شیبدار ۱۵° با قرقره های نشان داده شده کشیده می شود. اگر وزن گاری و نفر ۱۰۰ kg باشد شتاب گاری را وقتی که نفر نیروی ۲۵۰N را به طناب وارد می کند بیابید. از اصطکاک ها، جرم طناب، پولی و چرخ صرفنظر می کنیم.





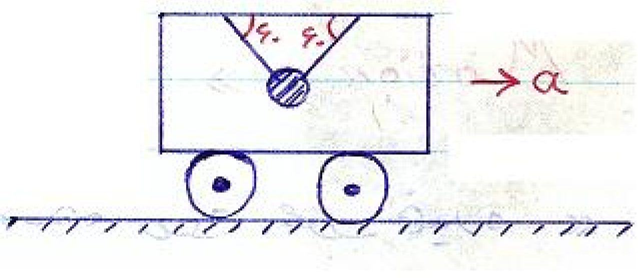
$$\sum F_x = ma$$
$$\sum F_y = 0$$

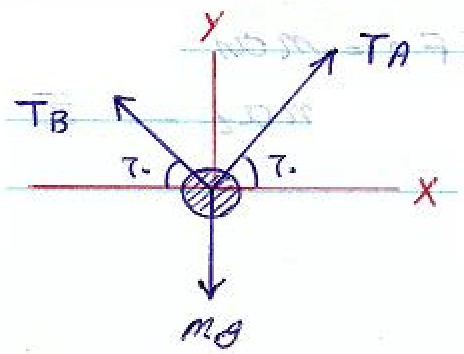
$$\begin{cases} 2P + P - W\sin\theta = ma & ① \\ N - W\cos\theta = 0 & ② \end{cases}$$

$$① \rightarrow 3(250) - (100 \times 9.8)\sin 15 = 100a$$

$$\boxed{a = 4.96 \ m/s^2}$$

مثال - گلوله‌ای فولادی در قاب در حال شتاب گیری توسط دو رشته سیم A و B معلق شده. شتاب A را بدست آورید در لحظه‌ای که کشش در A دو برابر B است.





$$T_A = 2T_B$$

$$\sum F_x = ma$$
$$\sum F_y = 0$$

$$\begin{cases} T_A \cos 60 - T_B \cos 60 = ma \\ T_A \sin 60 + T_B \sin 60 - mg = 0 \end{cases}$$

$$(2T_B + T_B)\sin 60 - mg = 0$$

$$* \; T_B = \frac{2mg}{3\sqrt{3}} \qquad * \; T_A = \frac{4mg}{3\sqrt{3}}$$

$$(2T_B - T_B)\cos 60 = ma$$

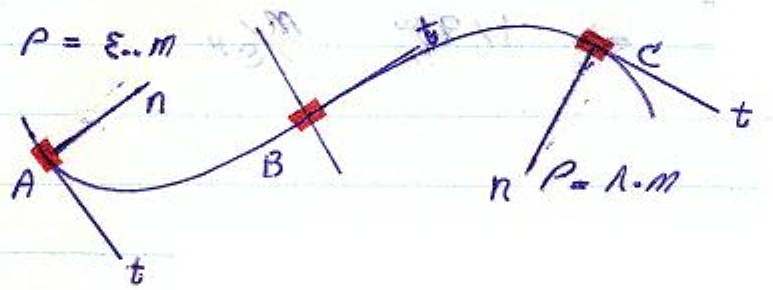
$$\frac{2mg}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = ma \Rightarrow a = \frac{g\sqrt{3}}{9}$$

« Curvilinear Motion »

« حرکت در صفحه روی محور خمیده »

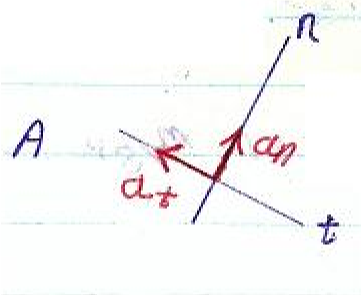
$$\left(\begin{array}{lll} \sum F_x = ma_x & \sum F_n = ma_n & \sum F_\theta = ma_\theta \\ \sum F_y = ma_y & \sum F_t = ma_t & \sum F_r = ma_r \end{array} \right)$$

مثال -



خودرو ۱۵۰۰ kg ، در مقطع (پیچ) A در صفحه افقی - با سرعت ۱۰۰ $\frac{km}{h}$ در حرکت است. در این لحظه سرعت خودرو را به صورت یکنواخت کاهش می دهد تا در C سرعت آن به ۵۰ $\frac{km}{h}$ می رسد. شعاع انحنای مسیر در A و C به ترتیب ۴۰۰m و ۸۰m است. نیروی افقی وارد شده از جاده بر خودرو را در نقاط A و B و C بیابید. نقطه B نقطه عطف منحنی است که در آن انحناء تغییر جهت می دهد. مسافت از A تا C ۲۰۰ m است.

* در نقطه B محور n نداریم چون شعاع انحناء ∞ است.

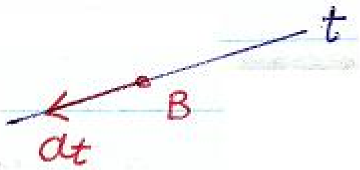


* $V\,dV = a_t\,ds$

$$\int_A^C V\,dV = \int_A^C a_t\,ds$$

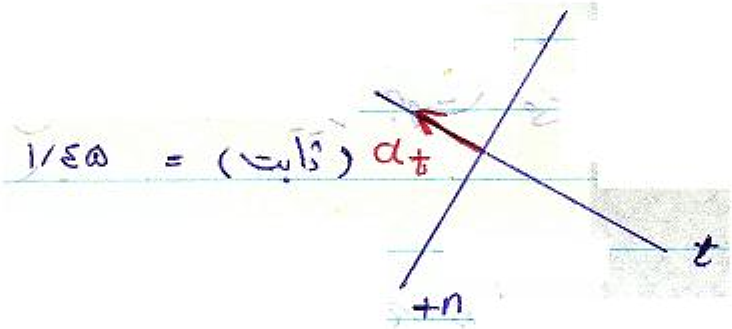
$$\frac{1}{2}\left(V_C^2 - V_A^2\right) = a_t\,\Delta S \quad \Rightarrow \quad A:\ a_t = 1/45\ \frac{m}{s^2}$$

A: $a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(۱۰۰/۳٫٦)^2}{٤۰۰} = ۱٫۹۳ \quad m/s^2$



B: $a_t = ۱٫٤۵ \quad m/s^2$

$a_n = ۰$



$$* \quad a_n = \frac{V_c^2}{\rho} = \frac{(۵۰/۳٫٦)^2}{۸۰} = ۲٫٤۱ \quad m/s^2$$

Ⓐ $F_n = m a_n = (۱۵۰۰)(۱٫۹۳) = ۲۸۹٤ \ N$

$F_t = m a_t = (۱۵۰۰)(۱٫٤۵) = ۲۱۷۰ \ N$

$$* \quad F = (F_n^2 + F_t^2)^{\frac{1}{2}} = ۳٦۱۷ \ N$$

Ⓑ $F_t = (۱۵۰۰)(۱٫٤۵) = ۲۱۷۰ \ N$

$F_n = ۰ \quad \Rightarrow \quad * \ F = ۲۱۷۰ \ N$

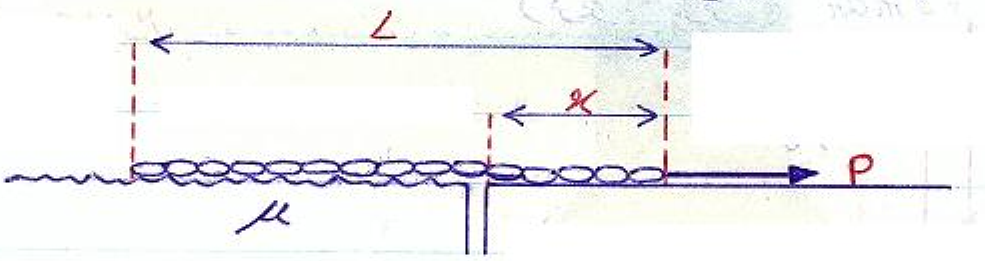
c

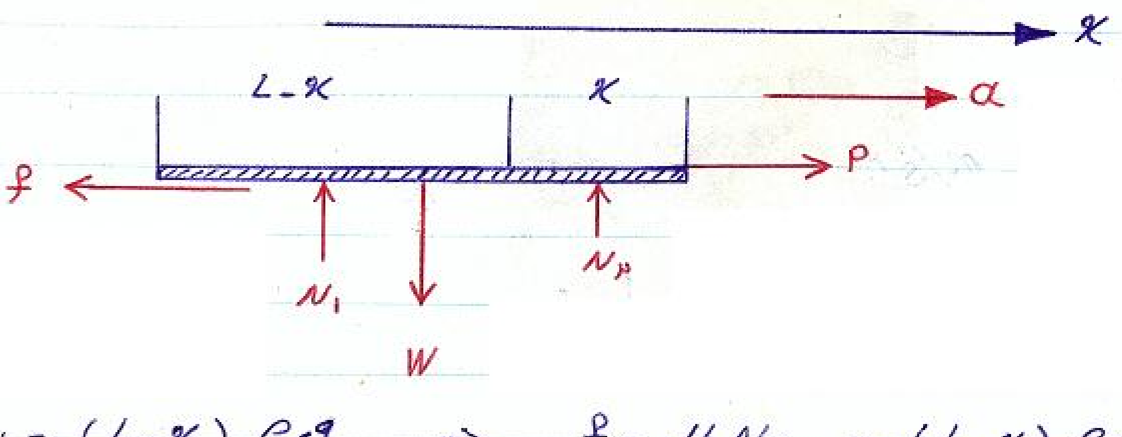
$$F_t = (۱۵۰۰)(۱/۴۵) = ۲۱۷۰\ N$$

$$F_n = (۱۵۰۰)(۲/۴۱) = ۳۶۱۷\ N$$

$$* \quad F = (F_t^2 + F_n^2)^{\frac{1}{2}} = ۴۲۱۸\ N$$

مسئله - یک زنجیر سنگین با جرم واحد طول ρ روی یک سطح افقی شامل دو ناحیه هموار و ناهموار قرار دارد. زنجیر در حالت اولیه در حال سکون قرار گرفته به قسمی که فاصله x از آن روی سطح هموار قرار دارد. اگر اصطکاک بین زنجیر و سطح زبر برابر μ باشد و زنجیر با نیروی P مطابق شکل کشیده شود، سرعت زنجیر را هنگامی که همه آن در ناحیه هموار قرار گرفته بدست آورید.





(F.B.D)

$$N_1 = \underbrace{(L-x)\rho}_{m} g \Rightarrow f = \mu N_1 = (L-x)\rho g \mu$$

$$P - f = ma \quad \Rightarrow \quad P - (L-x)\rho g \mu = L\rho a$$

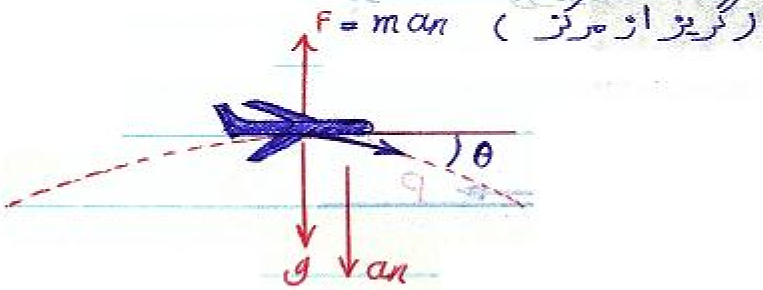
$$\Rightarrow \; * \; a = \frac{P - (L-x)\rho g \mu}{L\rho}$$

$$v\,dv = a\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^V v\,dv = \int_0^L a\,dx$$

$$\frac{1}{2}V^2 = \int_0^L \left(\frac{P}{L\rho} - \frac{(L-x)}{L}\mu g\right) dx \quad \Rightarrow$$

$$** \; V = \sqrt{\frac{2P}{\rho} - \mu g L} \; **$$

مسئله ۴۷-۲



$a_n = g$

$a_n =$ ۹/۸۱ m/s^2

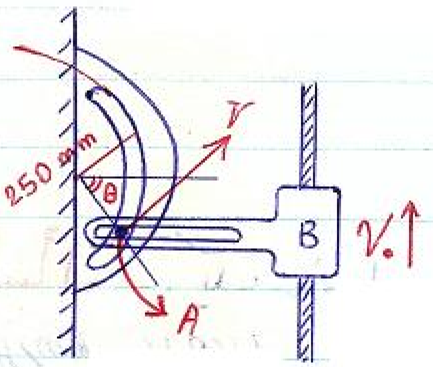
زیرا :

$$\begin{cases} \Sigma F = \Sigma m a_n \\ m g = m a_n \end{cases}$$

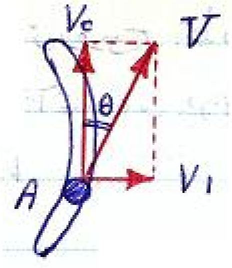
$a_n =$ ۹/۸۱ $= V\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta}$ (محاسبه می‌شود)

تمرین منزل - ۳ ، ۱۱ - ۱۲ - ۲۱ - ۳٤

مسئله ۱ - ۳۵۰



لغزنده A که ۰/۵kg دارد در شکافی حرکت کرده و توسط کنترل کننده B کنترل می شود. بازوی B با سرعت ثابت ۲m/s به سمت بالا در حرکت است. مؤلفه های قائم و مماسی پین A را وقتی از موقعیت θ=۳۰ عبور می کند پیدا کنید. (شتاب و سرعت)



$$* \quad v_0 = v \cos\theta$$

$$v = v_0 / \cos\theta$$

$$v = 2/\cos 30 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(4\sqrt{3}/3)^2}{0.250} = 21.3 \quad m/s^2$$

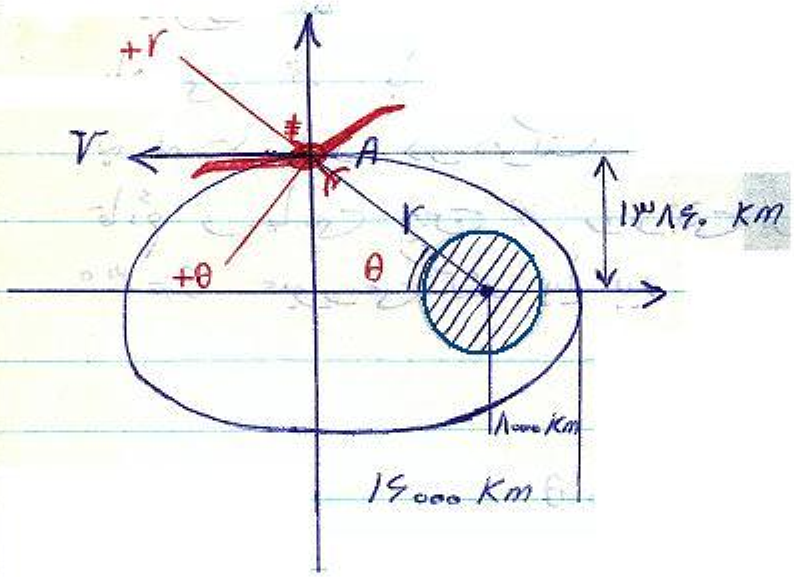
$$a_t = \dot{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{\cos\theta}\right) = v_0 \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\dot{\theta} \qquad \theta = f(t)$$

$$a_t = v_0 \dot{\theta} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \qquad (1)$$

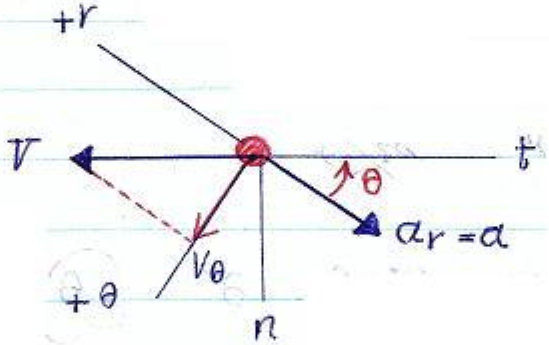
$$V = \rho\dot{\theta} \longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{V}{\rho} = \frac{(٤\sqrt{٣}/٣)}{٠/٢٥٠} \quad (٢)$$

$$\theta = ٣٠^{\circ} \quad (٣)$$

$$(١) \text{ و } (٢) \text{ و } (٣) \Rightarrow \quad a_t = ١٢/٣٢ \ m/s^٢$$



مسأله - یک ماهواره با سرعت ۱۷۹۷۰ km/h از موقعیت نشان داده شده نسبت به زمین می گذرد. شتاب جاذبه: $a = a_r = -۱/۵۵۶$ $m/s^۲$ از روی قانون جاذبه بدست آمده. برای موقعیت فوق $\dot{v}$ و $\ddot{r}$ را بیابید.



$$a_t = \dot{V}$$

$$a_t = \dot{V} = a\cos\theta = -۱/۵۵۶\cos\theta$$

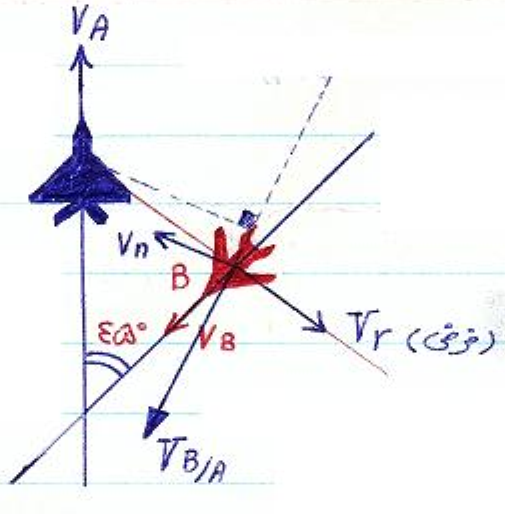
$$= -۰/۷۷۸ \ m/s^۲$$

$$V_\theta = r\dot{\theta} \quad (۱)$$

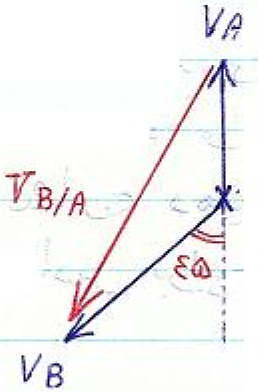
$$V_\theta = V\sin\theta \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \dot{\theta} \xrightarrow{a_r = \ddot{r} + r\dot{\theta}^۲} \ddot{r} = -۰/۳۸۸ \ m/s^۲$$

مسأله - هواپیمای A با سرعت ثابت ۵۰۰ km/h به سمت شمال در حال پرواز است و B به سمت جنوب غربی در همان ارتفاع با سرعت ۵۰۰ km/h در حرکت است. از دید ناظر مستقر در A مولفهٔ V_r سرعت نسبی B را بیابید. مؤلفهٔ V_n را بدست آورید.

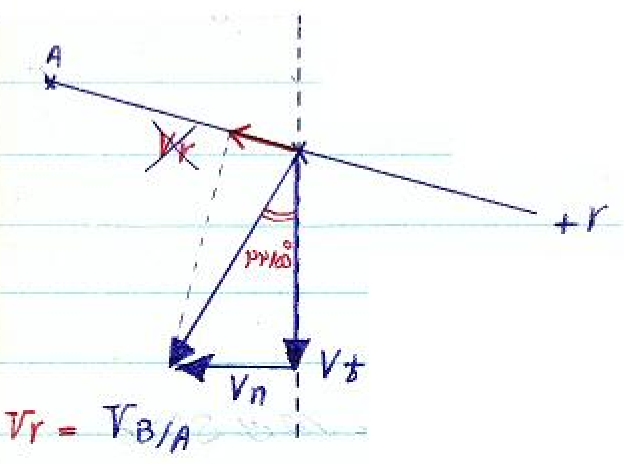


$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$



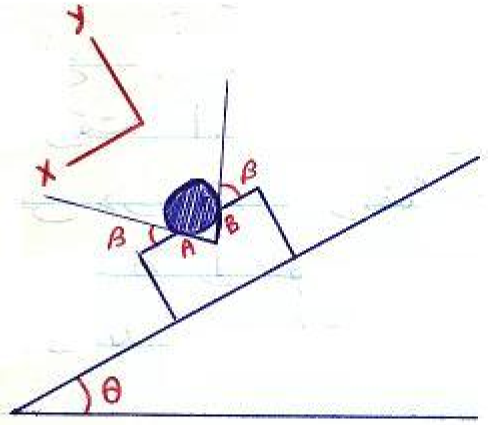
$$V_{B/A}^2 = (500)^2 + (500)^2 - 2(500)\cos 135$$

$$V_{B/A} = 924 \; km/h$$



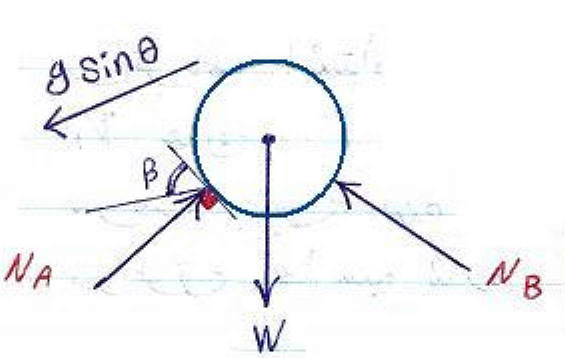
* در ترجمه اشتباه شده و مقصود از V_r همان V (Relative) یعنی سرعت نسبی $V_{B/A}$ است که در فوق محاسبه شده.

* $V_n = V_{B/A} \sin ۳۳٫۵ = ۳۵۴ \quad km/h$



مسأله -

* اگر سیلندری به جرم m با گاری نگهدارنده از حالت سکون رها شده و بدون اصطکاک به سمت پایین سطح شیبدار حرکت کند نشان دهید که نیروی تماس در سطوح A و B به ازای تمام مقادیر برای θ و β ثابت است. (اگر $\theta , \beta < \frac{\pi}{2}$).

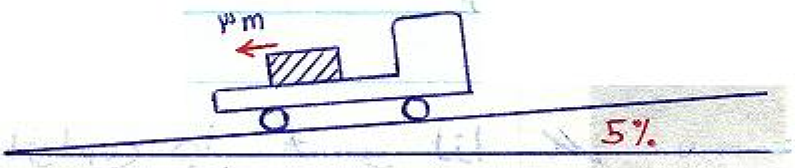


$$\sum F_x = mg \sin\theta$$
$$\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -N_A \sin\beta + N_B \sin\beta + W \sin\theta = mg \sin\theta \\ N_A \cos\beta + N_B \cos\beta - W \cos\theta = 0 \end{cases}$$

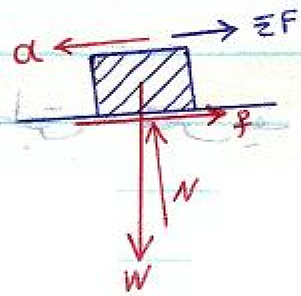
$$\Rightarrow \quad N_A = N_B$$

مسألهٔ ٤٣-٣-



$m_T = ٣٦٠٠ \ kg$ $\quad V_0 = 0$ $\quad V = ٤٠ \ km/h$

$m_B = ٧٥٠ \ kg$ $\quad d = ١٥ \ m$ $\quad a = cte$



$$* \ a = \frac{V^٢ - V_0^٢}{٢d} = ٤/١٢ \ m/s^٢$$

$$* \ N = W \cos\theta = ٧٥٠ \times ٩/٨١ \times \cos\theta = ٧٣٥٦/٤ \ N$$

$$\Sigma F = ma = ٧٥٠ \times ٤/١٢ = ٣٠٩٠ \ N$$

** اگر $\Sigma F > f = \mu N$ باشد حرکت اتفاق می افتد.

پس $\Sigma F > f$ است.

$$f - \sum F = m_B a_B$$

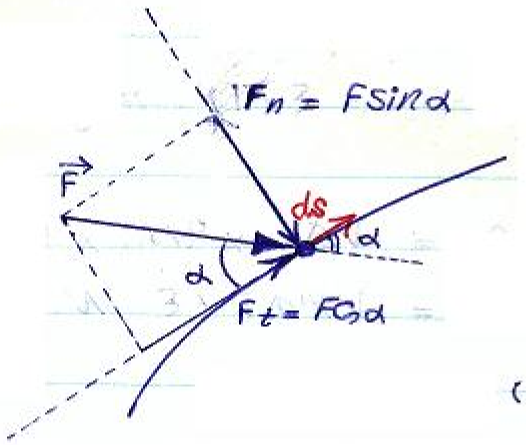
$$V = at + V_0 = at \Rightarrow t = \frac{V}{a} \quad ①$$

$$S = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t = \frac{1}{2} a t^2 \quad ②$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow$ $a =$ ۳/۲ m/s^2

* از این جا f و لذا μ بدست می آید.

« Work And Energy »



کار ـ طبق تعریف :

$$dU = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

(Work)

$$dU = F\cos\alpha \, ds$$
$$dU = F_t \, ds$$

$$U_{12} = \int_1^2 F_t \, ds$$

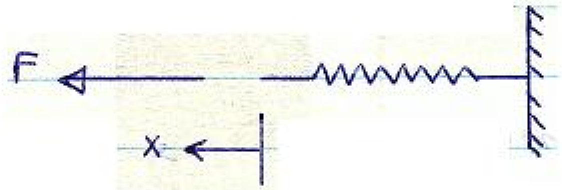
$$\boxed{U = \int_{1}^{2} \vec{F} \cdot \vec{ds}} \qquad N.m = J$$

$$* \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

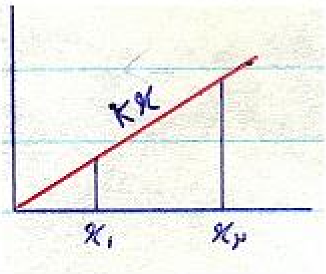
اگر زاویه در ربع (۱) یا (٤) $U > 0$

اگر " " " (۲) یا (۳) $U < 0$

مثال -

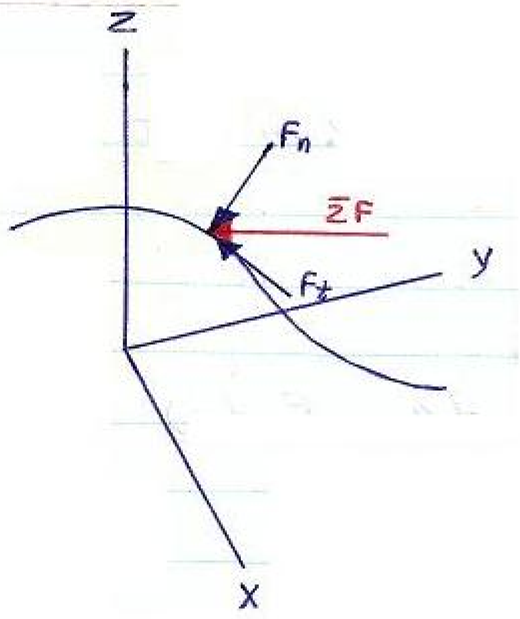


$$* \quad F = Kx$$



$$* \quad U = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} Kx\,dx = \frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2)$$

جزوه آموزشی درس دینامیک آقای دکتر اثنی عشری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (۱۳۷۱)



$$dU = \vec{F}\cdot\vec{dr} \Rightarrow U = \int \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$U = \int_{S_1}^{S_2} F_t\, ds \quad \text{و} \quad F_t = m a_t$$

$$U = \int_{S_1}^{S_2} m a_t\, ds \quad \text{و} \quad a_t\, ds = v\, dv$$

$$U = \int_{V_1}^{V_2} m v\, dv \Rightarrow U = \frac{1}{2} m \left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

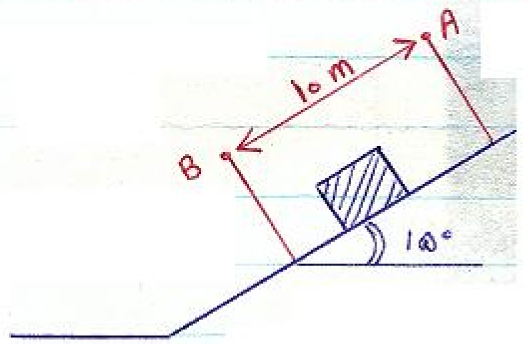
(تعریف) « $T = \frac{1}{2} m V^2$ » (Kinetic Energy)

$$\Rightarrow * \; U = T_2 - T_1 = \Delta T \; *$$

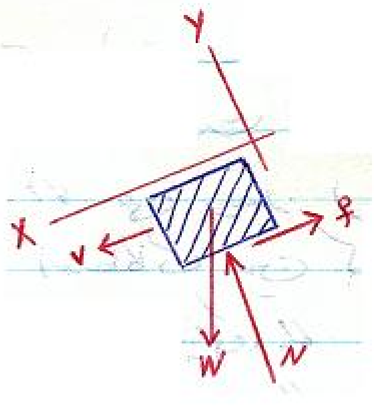
$$\boxed{U = \Delta T}$$

قضیه - کار برابر است با تغییرات انرژی جنبشی جسم.

مثال -



* سرعت جسم ۵۰ kg را وقتی که به B می رسد بدست آورید. سرعت اولیه در A، ۴ m/s و ضریب اصطکاک ۰/۳ است.



$$f = \mu N = \mu W \cos\theta$$

$$U = \left[-\mu W \cos\theta + W \sin\theta\right] s$$

$$U = \left[(-۰/۳)(۵۰)(۹/۸۱)(\cos ۱۵) + (۵۰)(۹/۸۱)(\sin ۱۵)\right] ۱۰$$

* $U = -۱۵۲ \ J$

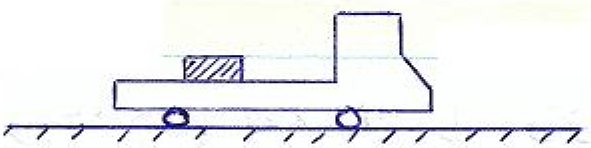
* یعنی اصطکاک بزرگتر از $W \sin\theta$ است و سرعت در حال کاهش است.

$U = \Delta T$ و $\Delta T = \frac{1}{۲} m (V_B^۲ - V_A^۲)$

$$\Delta T = \frac{1}{۲} (۵۰) (V_B^۲ - ۴^۲) = -۱۵۲$$

$$V_B = ۳/۱۵ \ m/s$$

مسأله -

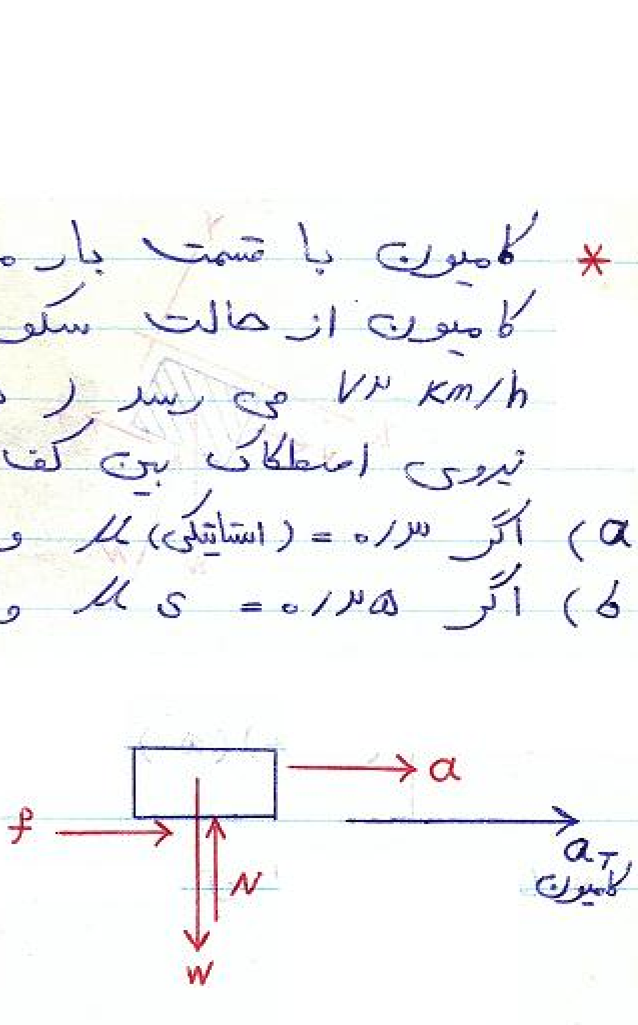


* کامیون با قسمت بار مسطح وزنه ۸۰kg را حمل می کند. - کامیون از حالت سکون شروع و در فاصله ۷۵ m به سرعت ۷۲ km/h می رسد (با شتاب ثابت) . کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک بین کف جعبه و کامیون را در این مدت بیابید.

a) اگر ۰/۳ = (استاتیکی) μ و $\mu_K = ۰/۲۸$ باشد.

b) اگر $\mu_S = ۰/۲۵$ و $\mu_K = ۰/۲۰$ باشد.

$$\Sigma F_x = m a$$
$$f = m a$$



$$a = \frac{V^2}{2d} = \frac{(72/3{,}6)^2}{2(75)} = 2{,}67 \ m/s^2$$

$$f = (80)(2{,}67) = 213 \ N$$

* در این جا f کار (+) دارد یعنی جعبه را حرکت می دهد
چون اگر نبود به محض حرکت کامیون جعبه می افتاد.

a) $\mu_s N = (0{,}3)(80)(9{,}81) = 235 \ N > f$ (حرکت نمی کند)

* $U = (213)(75) = 16 \ kJ$

b) $\mu_s N = (0{,}25)(80)(9{,}81) = 196 \ N < f$ (حرکت می کند)

$$f = (0{,}20)(80)(9{,}81) = 157 \ N$$
$$a = \frac{f}{m} = \frac{157}{80} = 1{,}96 \ m/s^2$$

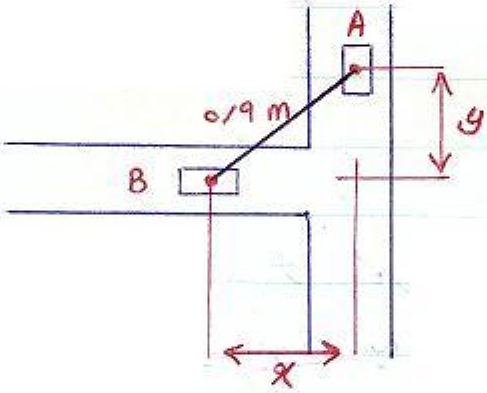
* چون هر دو از حال سکون حرکت کرده اند نسبت جابجائی ها
برابر نسبت شتابها است:

* $d_2 = \frac{a_2}{a_1} d_1 = \frac{1{,}96}{2{,}67} \, 75 = 55{,}2 \ m$

d_1 : کامیون
d_2 : جعبه

* $U = (157)(55{,}2) = 8{,}66 \ kJ$ *

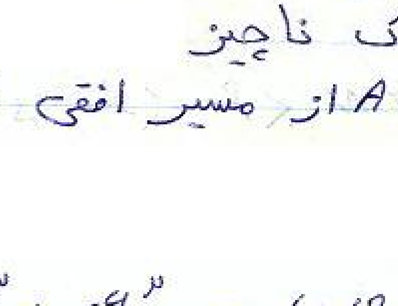
مسأله -

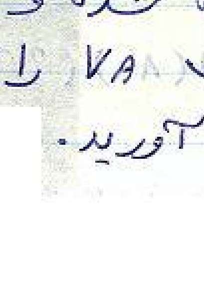


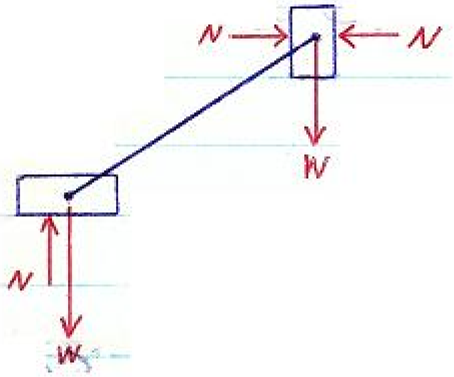
* لغزنده های A و B با جرم یکسان برای حرکت در مسیرهای عمودی و افقی داخل هادی قرار گرفته اند. جرم میلهٔ متصل کننده ناچیز است. اگر وقتی $x = y$ است از حالت سکون رها شده و با اصطکاک ناچیز حرکت کنند سرعت V_A را وقتی که A از مسیر افقی B می گذرد بدست آورید.

$$* \quad x^2 + y^2 = (0/9)^2$$
$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$
$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

$$* \quad \Delta T = \frac{1}{2} m_A \left(V_A^2 - \cancel{V_{0A}^2} \right) = \frac{1}{2} m_A \dot{y}^2$$







* هر دو را یک سیستم فرض کنیم :

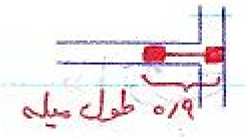
* $U = m_A g y \Rightarrow$

$U = (9.81)(0.9)(\cos 45)\, m_A$

$\underset{\checkmark}{U} = \underset{\checkmark}{\Delta T_A} + \underset{?}{\Delta T_B}$ (1)

$\begin{cases} x = 0.9 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0.9\dot{x} + 0\cdot\dot{y} = 0$

$V_B = \dot{x} = 0$ در لحظه عبور از مسیر B

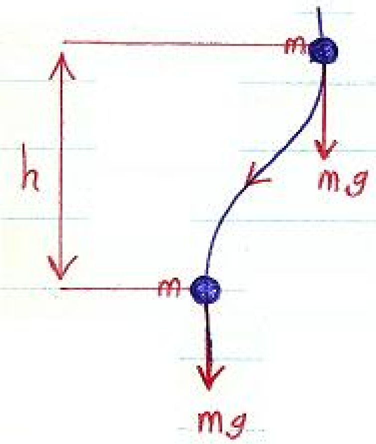


$\Delta T_B = \frac{1}{2} m_B (V_B^2 - V_{0B}^2) = 0$

(1) $\rightarrow$ $6.24\, m_A = \frac{1}{2} m_A \dot{y}^2$

$\boxed{V_A = \dot{y} = 3.53\ m/s}$

* در این مسائل معمولاً باید رابطه‌ای هندسی بین متغیرهای مسئله بدست آوریم.



* کار نیروی وزن :

$$U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U = mg \int \cos\theta \, ds$$

$$U = mgh$$

* کار نیروی وزن مستقل از مسیر و برابر mgh است.

«انرژی جاذبه» $V_g = mgh$ * (تعریف)

«Gravitional Energy»

$$U = \Delta T$$

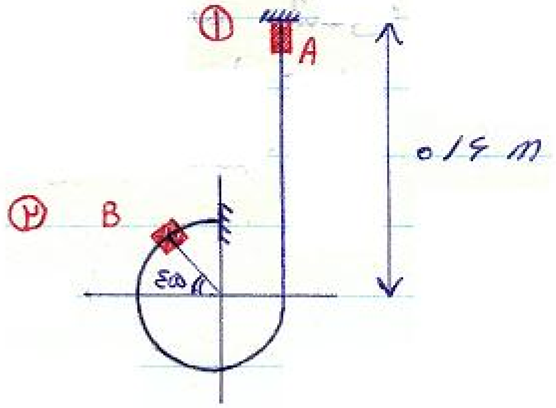
$$U - \Delta V_g = \Delta T$$

$$U = \Delta T + \Delta V_g$$

ΔT : کار نیروهای خارجی (بدون درنظر گیری نیروی جاذبه)

ΔV_g : کار نیروی جاذبه

مثال -



* لغزنده‌ای به جرم ۲۵ kg از حالت سکون از A رها می‌شود و روی میله بدون اصطکاک حرکت می‌کند. نیروی N بین میله و لغزنده را در لحظه عبور از B بدست آورید.

* هیچ نیروی خارجی وارد نمی‌شود چون نیروی وزن را جدا کرده‌ایم و نیروهای عمل وعکس العمل هم نیروهای داخلی محسوب می‌شود:

$$U = \Delta T + \Delta V_g$$

$$(U = 0) \Rightarrow \Delta T + \Delta V_g = 0 \Rightarrow$$

(و) $\Delta T = \frac{1}{2} m V_B^2$

$\Delta V_g = mgh = -mg(0.6 - 0.15\cos 45) \Rightarrow$

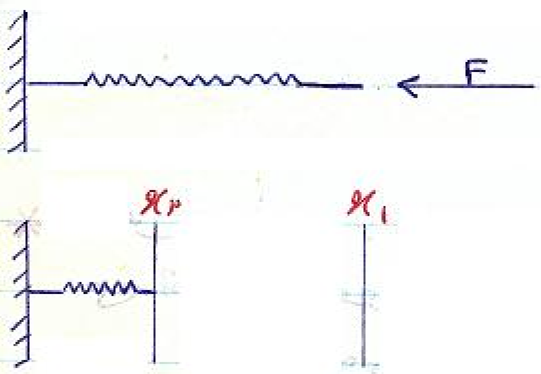
(منفی بخاطر نزدیک شدن به زمین)

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - mg(0.6 - 0.15\cos 45) = 0 \Rightarrow$$

$V_B^2 = \dots\dots \Rightarrow$ a_n محاسبه می‌شود

$\Rightarrow$ F_n " "

* انرژی جاذبه شکلی از انرژی پتانسیل است. نوع دیگری از انرژی پتانسیل انرژی ذخیره شده در فنر یا (انرژی الاستیک) است:



$$U = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

$$\Delta V_e$$

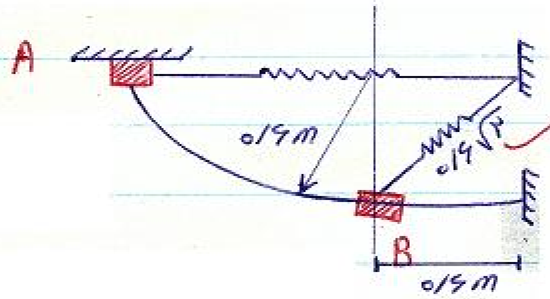
$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$U = \Delta (T + V_g + V_e) = \Delta E$$ تغییرات انرژی مکانیکی

($U = 0$ در سیستم Conservative) $\Rightarrow$

$\Delta E = 0 \Rightarrow E = Const$

مسأله -



* لغزنده ۳kg از حالت سکون در A رها شده و با اصطکاک ناچیز در صفحه قائم روی میله منحنی الشکلی می لغزد. سختی فنر متصل به جسم $K = ۳۵۰ \; N/m$ است و طول آزاد آن ۰/۶m است. سرعت لغزنده را در موقع عبور از B بیابید.

* $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$\Delta V_g = mgh = -(۳)(۹/۸۱)(۰/۶) = -۱۷/۶۶ \; J$

(-) به طرف زمین پایین می آید.

* $\Delta V_e = \frac{1}{۲} K (x_B^۲ - x_A^۲) =$

$\left\{ [۰/۶(\sqrt{۲}-۱)]^۲ - (۰/۶)^۲ \right\} = -۵۲/۲ \; J$

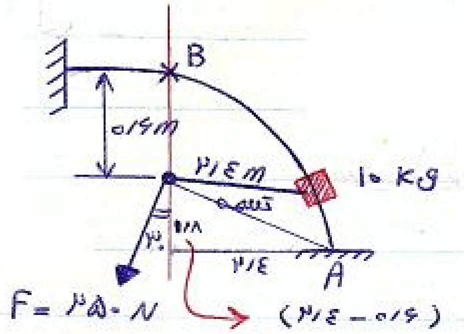
* $\Delta T = \frac{1}{۲} m V_B^۲ = ۱/۵ \; V_B^۲$ و $U = ۰ \Rightarrow$

$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = ۰$

$-۱۷/۶۶ - ۵۲/۲ + ۱/۵ \; V_B^۲ = ۰$

$V_B = ۶/۸۲ \; m/s$

مسأله -



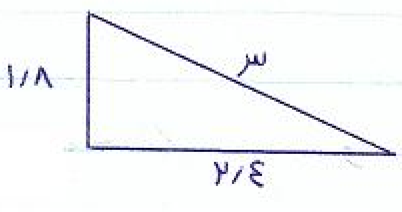
* لغزنده 10 kg روی مسیر دایره ای شکل ثابت و بدون اصطکاک می لغزد . سرعت آن را در B بیابید اگر از حالت سکون در A حرکت کرده و با نیروی ثابت ۲۵۰ N کشیده شود.

* $U = \Delta T + \Delta V_g$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \left(V_B^2 - \cancel{V_A^2}\right) = 5 V_B^2$$

$$\Delta V_g = mgh = (10)(9.81)(\underbrace{2.4}_{\text{شعاع}})$$ (+) بطرف بالا رفته

$$U = Fx = (250)\,\cancel{\left[0.6 - \left(2.4^2 + 1.8^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}\,(2.4) = 600\ J$$



* یعنی نیرو $x = 3 - 0.6 = 2.4$ جا بجا شده.

$$600 = 235.44 + 5 V_B^2$$

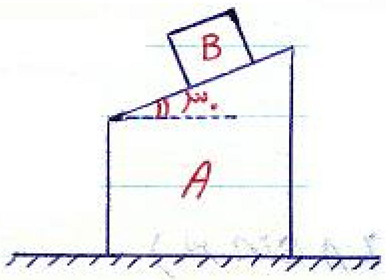
* $V_B = 8.54\ m/s$

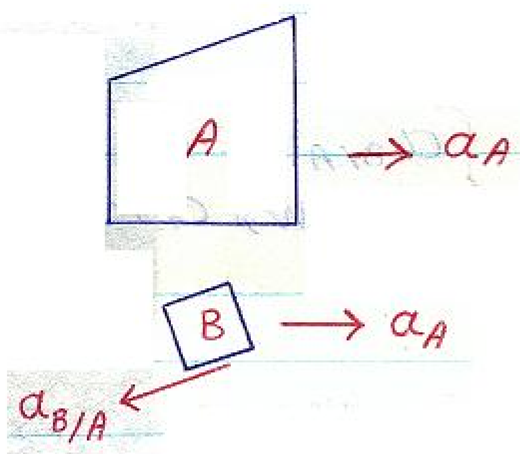
تمرین منزل - ۳ _ ۸۵ ، ۸۹ ، ۹۴ ، ۱۰۵

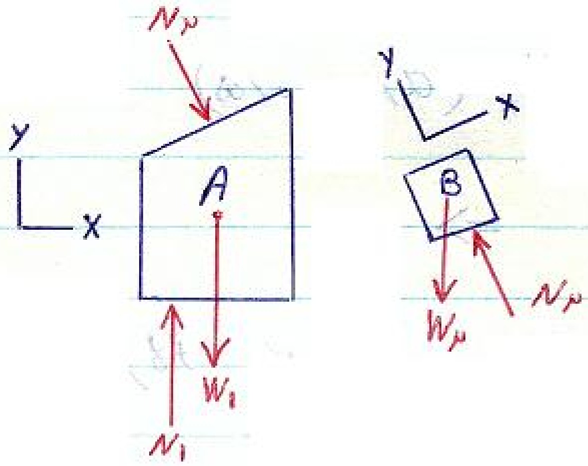
مثال- بلوک B ‏۱۲ lb از حالت سکون شروع به حرکت کرده و روی بلوک (A ‏۳۰ lb) می‌لغزد. با صرف‌نظر از اصطکاک

a) شتاب بلوک A را بیابید.

b) شتاب نسبی بلوک B را بیابید.







$\Leftarrow$ Kenetic of the problem

A : $\quad \Sigma F_x = m a_A \qquad \Sigma F_y = 0$

$$* \begin{cases} N_2 \sin 30 = m a_A \\ -W_1 + N_1 - N_2 \cos 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$0.5\, N_2 = \underbrace{\left(\frac{W_A}{g}\right)}_{m_A} a_A$$

* چون lb واحد وزن است و واحد جرم slug است.

B :

$$\Sigma F_x = -W_2 \sin\theta = m_B(-a_{B/A} + a_A \cos\theta)$$

$$\Sigma F_y = N_2 - W_2 \cos\theta = m_B(-a_A \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \quad -g\sin\theta = a_A \cos\theta - a_{B/A}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_{B/A} = a_A \cos 30 + g \sin 30 \\ N_2 - W_2 \cos 30 = \left(\frac{W_2}{g}\right)(-a_A \sin 30) \end{cases}$$

$$0.5\, N_2 = \left(\frac{W_A}{g}\right) a_A \quad \Rightarrow \quad N_2 = 2\,\frac{W_A}{g}\, a_A$$

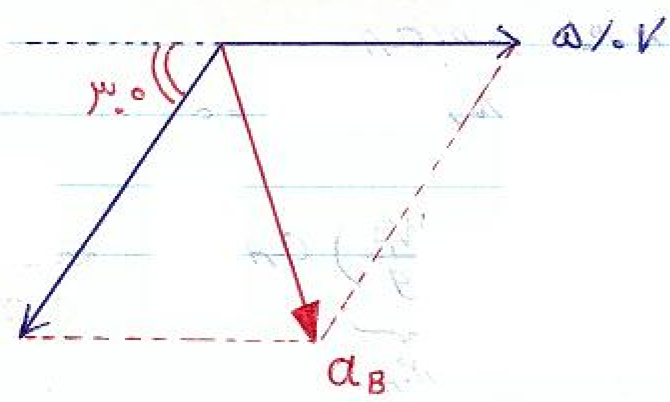
$$\Rightarrow \quad -2\,\frac{W_1}{g}\, a_A + \frac{\sqrt{3}}{2}\, W_2 = \frac{W_2}{g}\,(a_A \times 0.5)$$

$$\Rightarrow \quad a_A = \frac{W_2\,(\sqrt{3}/2)}{2W_1 + 0.5\,W_2}\, g \quad \Rightarrow$$

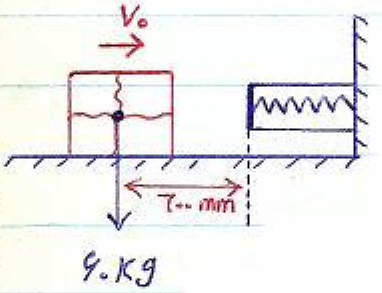
$$** \quad a_A = \frac{12\,(\sqrt{3}/2)}{2(30) + 0.5(12)}\; 32.2 = 5.07 \;\; ft/s^2$$

$$** \quad a_{B/A} = (5.07)\,\frac{\sqrt{3}}{2} + (32.2)\,\frac{1}{2} = 20.5 \;\; ft/s^2$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$



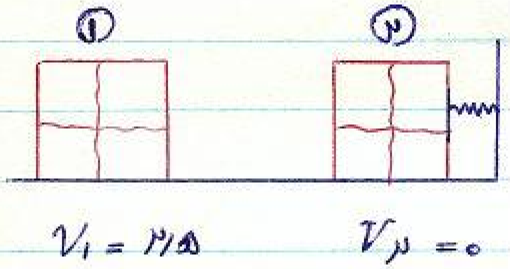
مثال - یک فنر برای متوقف کردن بسته‌های 60 Kg که روی سطح افقی می لغزند بکار می رود. ثابت فنر $K = 20\ KN/m$ است و توسط سیم‌هایی نگهداری شده به طوری که در حالت اولیه به میزان $120\ mm$ فشرده شده است. بسته با سرعت $2.5\ m/s$ از موقعیت نشان داده شده عبور کرده و باعث تغییر فرم فنر به میزان $40\ mm$ می گردد.



الف) μ_k بین بسته و سطح را بیابید.

ب) سرعت بسته را وقتی که از وضع نشان داده شده عبور می کند بیابید (در عبور مجدد)

جزوه آموزشی درس دینامیک آقای دکتر اثنی عشری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (۱۳۷۱)



$$* \; U_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

کار نیروی اصطکاک

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}(60)(0 - 2.5)^2$$

$$* \; \Delta T = -187.5\ J \; * \quad ①$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} K (\delta x_2^2 - \delta x_1^2) = \frac{1}{2}(20 \times 10^3)(0.160^2 - 0.120^2)$$

$(120\ mm + 40\ mm)$

$* \Delta V_e = ۱۱۲ J *$ ③

$U = -f \cdot x$ (f با حرکت هم جهت نیست)

$f = \mu m g = \mu (۶۰)(۹/۸۱)$

$U = -(۶۰)(۹/۸۱)(۰/۶۴۰)\mu$

$* U = -۳۷۷ \mu *$ ③

۱) و ۲) و ۳) $\Rightarrow$ $\mu = ۰/۲$

$U_{۲-۳} = \Delta T + \Delta V_e$

$\Delta V_e = -۱۱۲ J$

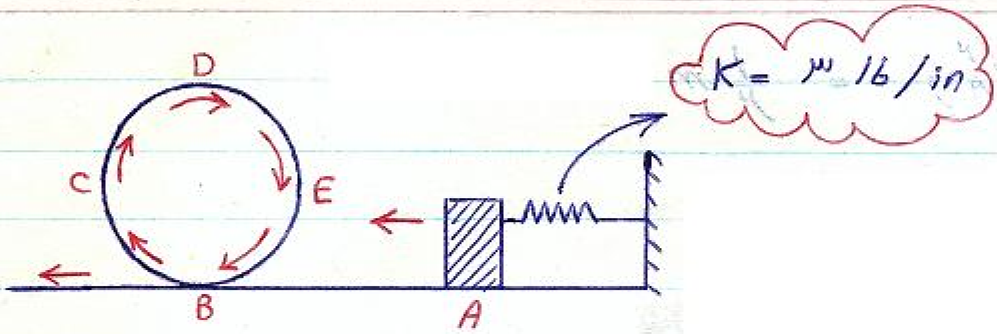
$U_{۲-۳} = -(۰/۲)(۳۷۷) = -۷۵/۵$ اصطکاک با حرکت هم جهت نیست .

$\Delta T = \frac{۱}{۲} m (V_۳^۲ - \cancel{V_۲^۲}) = \frac{۱}{۲}(۶۰) V_۳^۲$

$* -۷۵/۵ = ۳۰ V_۳^۲ - ۱۱۲$

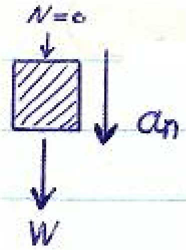
$V_۳ = ۱/۱ \ m/s$

مثال-



* گلوله ۰/۵ lb توسط فنر A از حالت سکون رها می شود. با صرفنظر از اصطکاک حداقل فشردگی را بدست آورید در صورتی که گلوله حلقه ABCDE را بطور کامل پیموده و در همه نقاط به حلقه چسبیده باشد.

* بحرانی ترین نقطهٔ مسیر D است:



* در D از دیدگاه حدّی N=0 است.

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow W = m a_n$$

می‌افتد ... فشرده می‌شود

$$(W \not> m a_n \qquad W \not< m a_n) \Rightarrow W = m a_n$$

$$a_n = \frac{W}{m} = g \quad \text{و} \quad a_n = \frac{V^2}{r} \Rightarrow$$

$$V_D^2 = a_n r = g r = (32/2)(2) = 64/4 \ (ft/s)^2$$

$$* \ U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \ *$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m\left(V_D^2 - \cancel{V_A^2}\right) = \frac{1}{2} m V_D^2$$

$$\Delta T = ۰/۵ \ ft.lb$$

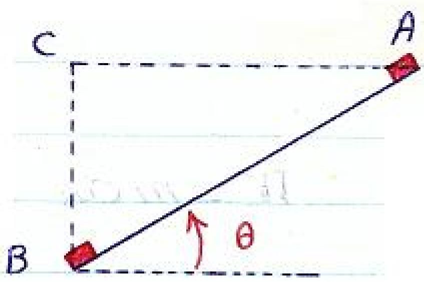
$$\Delta Ve = \frac{1}{2} K\left(\cancel{\delta_D^2} - \delta_A^2\right) \Rightarrow$$

$$\Delta Ve = -۱۸\, \delta_A^2$$

$$\Delta V_g = mgh = ۲ \ lb.ft$$

$$۰/۵ + ۲ - ۱۸\, \delta_A^2 = ۰ \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\delta_A = ۰/۳۷ \ ft \\ \delta_A = ۴/۴۷ \ in\end{array}}$$

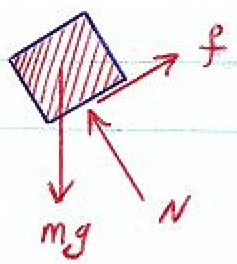
مسئله ۳ـ ۱۵ ـ



$V_0 = ۰/۴۵ \ m/s$

$V = ۰/۱۵ \ m/s$

$\mu = ۰/۳$



$$* \; f = \mu m g \cos\theta$$

$$U = \Delta T$$

$$U = f \cdot x$$

$$* \; U = [-\mu W \cos\theta + W \sin\theta]\, S \quad \nearrow \text{۷} g$$

$$\Delta T = \frac{1}{۲} m (V_۲^۲ - V_۱^۲) = ۰/۰۹\, m$$

$$* \; AB\left(-(۰/۲)(\cancel{m})(۹/۸۱)\cos\theta + (\cancel{m})(۹/۸۱)\sin\theta\right) = ۰/۰۹\, \cancel{m}$$

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲$$

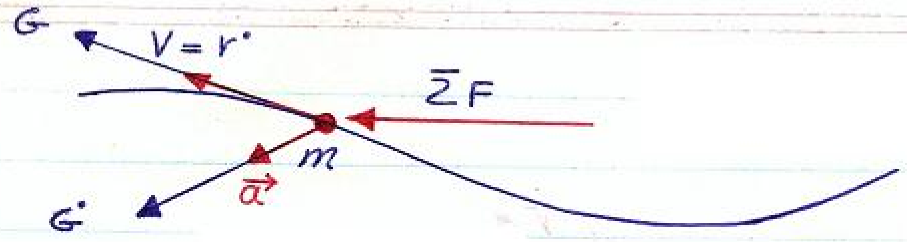
$$AB^۲ = AC^۲ + ۳/۲۴ \Rightarrow AC = \sqrt{AB^۲ - ۳/۲۴}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{AB^۲ - ۳/۲۴}}{AB} & (۱) \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{۱/۸}{AB} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow AB \simeq ۶/۳ \quad \text{و} \quad \theta \simeq ۱۶/۶$$

Impulse And Momentom

«ضربه و مُمنتم»



$$* \quad \Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{V^{\cdot}} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

$$m\vec{V} = \vec{G}$$ «Linear Momentom» $\frac{kg \cdot m}{S}$ $N \cdot S$

(ممنتم خطی)

$$* \quad \Sigma F = \frac{d}{dt}\vec{G} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = \vec{G^{\cdot}}$$

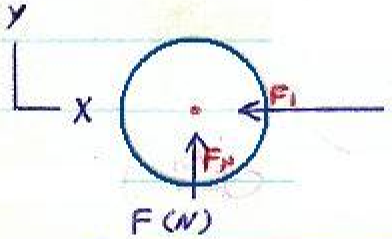
$$\begin{cases} \Sigma F_x = G^{\cdot}_x \\ \Sigma F_y = G^{\cdot}_y \\ \Sigma F_z = G^{\cdot}_z \end{cases}$$

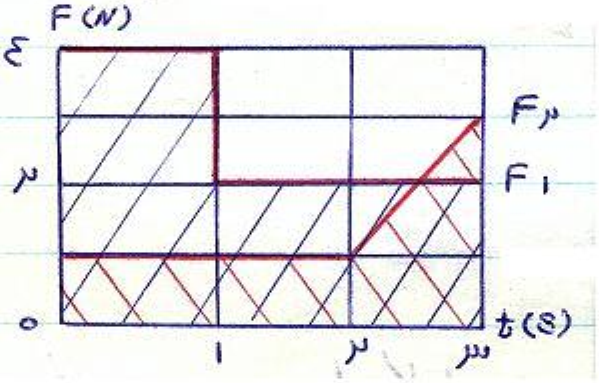
$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{G} \Rightarrow \Sigma \vec{F}\, dt = d\vec{G}$$

$$\int_{1}^{2} \Sigma \vec{F}\, dt = \int_{1}^{2} d\vec{G} \Rightarrow$$

Impulse $$\int_{1}^{2} \Sigma \vec{F}\, dt = \vec{G_2} - \vec{G_1}$$

مثال - ذره‌ای به جرم $0/5\ kg$ در لحظه $t=0$ سرعت اولیه $10\ m/s$ را در جهت محور x دارد. نیروهای F_1 و F_2 بر ذره عمل می‌کنند و مقادیر آنها نسبت به زمان طبق نمودار گرافیکی ذیل تغییر می‌کنند. بردار سرعت ذره را در پایان ثانیه سوم بیابید.





$$\int_0^3 \sum \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G}$$

$$\int_0^3 \sum \vec{F_x}\, dt = \Delta G_x = m\,(V_{3x} - V_{0x})$$

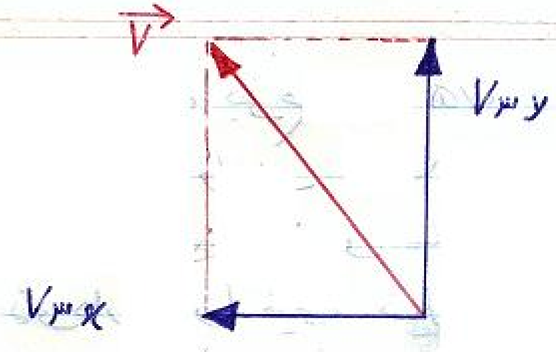
سطح زیر نمودار

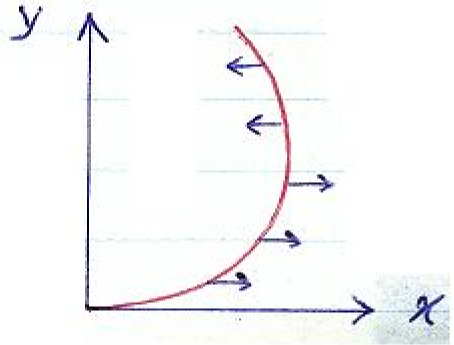
$$\int_0^3 \sum \vec{F_y}\, dt = \Delta G_y = m\,(V_{3y} - V_{0y})$$

سطح زیر نمودار

$$-8 = 0/5\,(V_{3x} - 10) \qquad V_{3x} = -6\ m/s$$

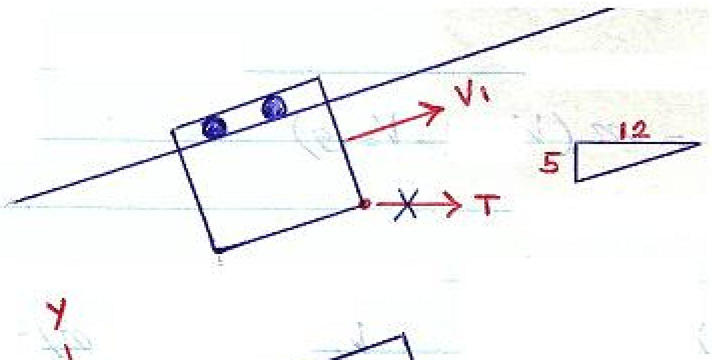
$$4 = 0/5\,(V_{3y} - 0) \qquad V_{3y} = 8\ m/s$$

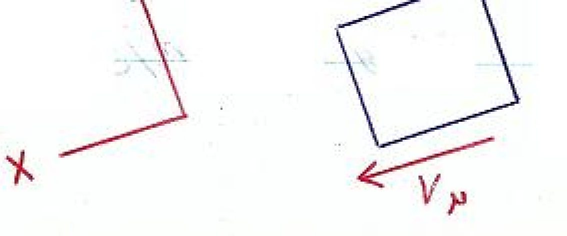




(شکل حرکت)

مثال- کابینی توسط کابل در مسیر شیبداری با سرعت ٤ m/s به سمت بالا کشیده می شود . اگر کابل به صورت ناگهانی قطع شود مدت زمانی را که طول می کشد تا سرعت کابین به ۸ m/s به طرف پایین برسد را حساب کنید (با فرض اصطکاک صفر و ذره‌ای بودن کابین) .





$$\int_1^2 \Sigma \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G}$$

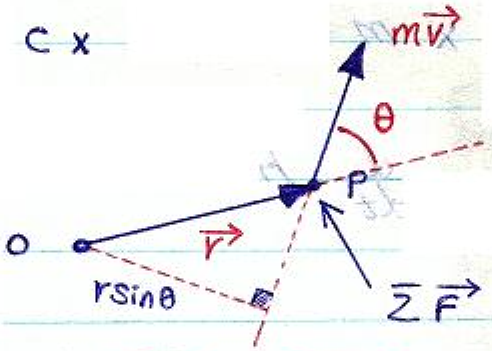
$$\int_1^2 \Sigma F_x\, dt = \Delta G_x = \Delta (m V_x)$$

$$\int_1^2 mg \sin\theta\, dt = m (V_2 - V_1)$$

$$\cancel{m} g \sin\theta\, \Delta t = \cancel{m} (V_2 - V_1)$$

$$* \quad \Delta t = \frac{(V_2 - V_1)}{g \sin\theta} = ۳/۱۸\ s$$

Momentom در حرکت زاویه‌ای :



$$\boxed{\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{V}}$$ «اندازه حرکت زاویه‌ای»

$|H_o| = r \cdot mv\sin\theta \qquad kgm^2/s \qquad N.m.S$

$(\vec{H_o} \neq \vec{H_c})$

اگر : $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$

$m\vec{V} = m(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})$

$$* \quad \vec{H_o} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

* اگر ΣF بر ذره اثر کند :

$\Sigma\vec{M_o} = \vec{r} \times \Sigma\vec{F} = \vec{r} \times m\dot{\vec{V}}$

$\Sigma\vec{M_o} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d}{dt}\vec{H_o}$

$$\Sigma\vec{M_o} = \dot{\vec{H_o}}$$

(M : گشتاور)

$\Sigma\vec{M_o}\,dt = d\vec{H_o} \Rightarrow \int \Sigma\vec{M_o}\,dt = \Delta\vec{H_o}$

* اگر سیستم کانسرواتیو باشد یعنی ($\sum F = 0$) باشد :

$\sum F = 0$ (نیروهای خارجی) $\Rightarrow \quad \dot{\vec{G}} = 0 \quad \Delta G = 0 \quad \Rightarrow$

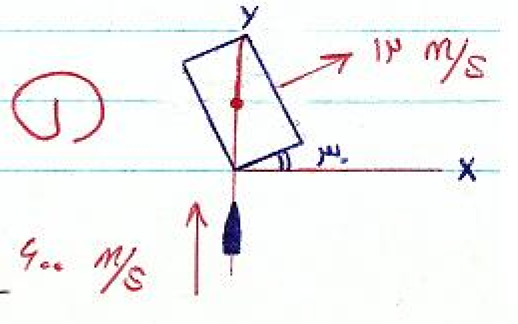
$$\vec{G} = Const$$

* اگر $\sum \vec{M}_O = 0$ باشد :

$$\sum \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{H}_O = Const$$

مثال- گلوله ۵۰g که با سرعت ۶۰۰ m/s در حال حرکت است به بلوک ۴kg به صورت مرکزی برخورد و در آن فرو می رود. اگر بلوک روی سطح هموار و افقی با سرعت ۱۲ m/s در جهت نشان داده شده قبل از ضرب در حال حرکت باشد سرعت بلوک و گلوله و جهت آن را بلافاصله پس از حرکت بیابید.

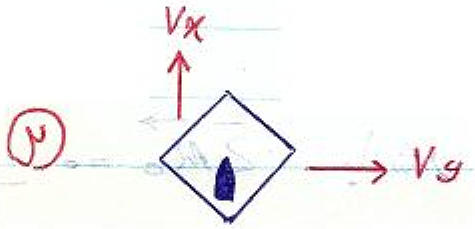


* برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم صفر است یعنی سیستم Conservative است :

$$\Delta \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{G}_2 = \vec{G}_1$$

* مجموعه را یک سیستم فرض کرده ایم :



$$\vec{G}_{2x} = \vec{G}_{1x} \Rightarrow (m_1 + m_2) V_x = m_1 V_1 \cos 30$$
$$\vec{G}_{2y} = \vec{G}_{1y} \Rightarrow (m_1 + m_2) V_y = m_1 V_1 \sin 30 + m_2 u$$

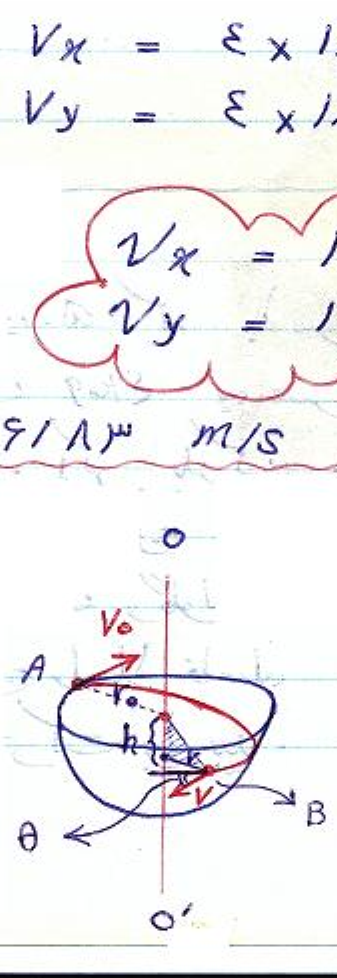
$$(4 + 0/050) V_x = 4 \times 12 \times \cos 30$$
$$(4 + 0/050) V_y = 4 \times 12 \times \sin 30 + 0/050 \times 600$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V_x &= 10/26 \ m/s \\ V_y &= 13/32 \ m/s \end{aligned}}$$

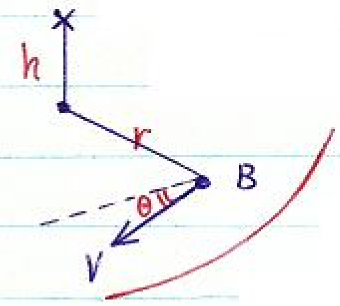
m_1 - جرم بلوک
m_2 - جرم گلوله

$$\Rightarrow \left(\!\left(V = 16/83 \ m/s \qquad \theta = 52/4^\circ \right)\!\right)$$

مثال-



* ذره از نقطه A با سرعت V_0 حرکت می کند و وقتی به B می رسد سرعت V را دارد که با مماس افقی در نقطه B زاویه θ را می‌سازد



* سیستم Conservative است (چون به جز وزن نیروی بر آن وارد نمی شود) پس :

* $\Delta H_0 = 0$

$$\vec{H_0} = \vec{r} \times m\vec{V}$$
$$H_A = r_0 . m . V_0 . \sin\alpha = m r_0 V_0$$
$$H_B = r . m . V_\theta . \sin\alpha$$
$$H_B = r . m . V\cos\alpha . \sin\alpha = m r V \cos\theta$$

* طبق اصل بقای ممنتم باید روابط ① و ② برابر باشند :

$$\cancel{m} r_0 V_0 = \cancel{m} r V \cos\theta$$

* $\alpha = 90°$ است چون $\vec{V}$ همواره بر $\vec{r}$ عمود است.

* حال باید V را طبق روابط کار و انرژی بدست آوریم :

* $\Delta T = \frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$

$$\Delta V_g = -mgh$$

پتروپالامحور پیشتاز در ارائه خدمات مهندسی و متعهد به کیفیت

PPM , Dedicated For The Best Quality

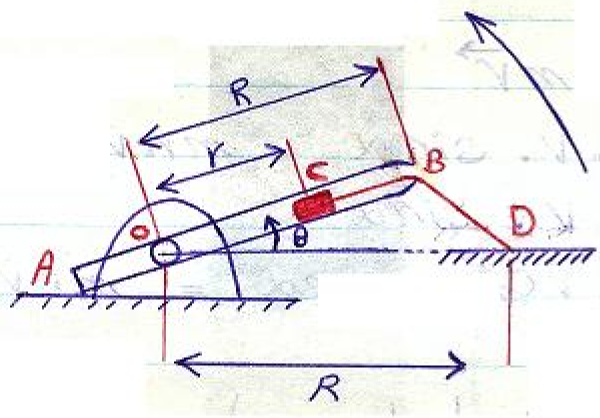
$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) - mgh = 0 \quad \Rightarrow$$

$$* \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

$$r^2 = r_0^2 - h^2 \quad \Rightarrow \quad * \quad r = \sqrt{r_0^2 - h^2}$$

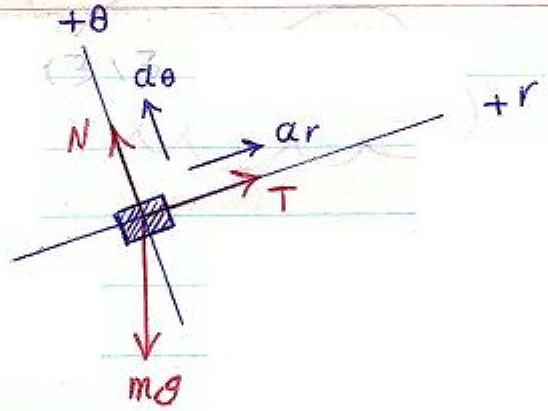
$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1} \ldots\ldots$$

مثال -



* در شکل فوق یک مکانیزم نشان داده شده. اگر بازو حول محور افقی در نقطه O دوران نموده و جرم لغزنده C - برابر M باشد کشش T نخ را در نقطه اتصال به لغزنده بر حسب θ بیابید.
  * $\dot{\theta} = \omega = Const$
  * $\theta = 0 \Rightarrow r = 0$
  * $R = 0/4\ m$

* به ازای زاویه معلوم θ حداکثر مقدار $\dot{\theta}$ قبل از این که T به سمت صفر میل کند چقدر است؟
(تمام سطوح بدون اصطکاک فرض می شوند)



$$\sum F_r = m a_r$$

$$T - mg\sin\theta = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} BC + BD = R \\ BC + r = R \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r = BD$$

$\overset{\triangle}{OBD}$ متساوی الساقین $\Rightarrow \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\, BD/OB$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\, r/R \quad \Rightarrow \quad r = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

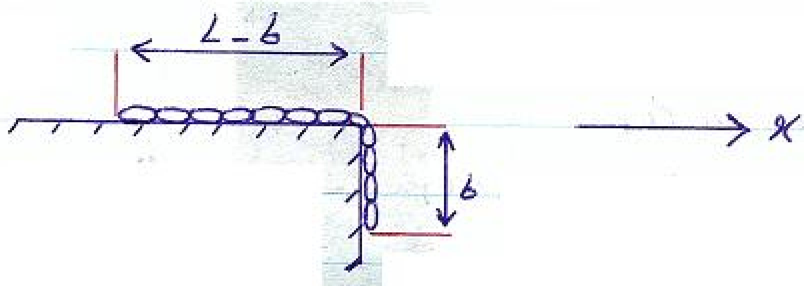
$$\dot{r} = 2R\,\dot{\theta}/2\,\cos\frac{\theta}{2} \quad \text{و} \quad \ddot{r} = 2R\left[\frac{\dot{\theta}^2}{4}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

« طبق فرض مسئله $\dot{\theta}$ ثابت است »

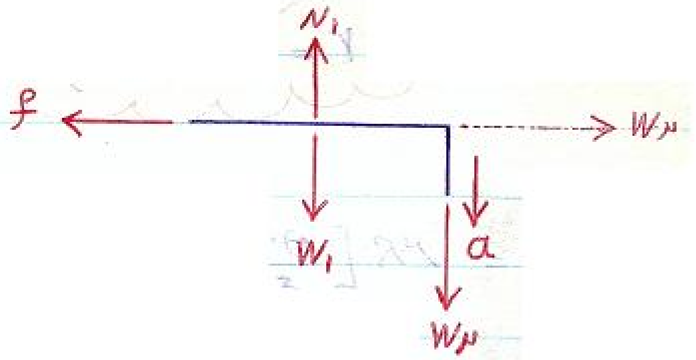
$$(I) \rightarrow \quad T - mg\sin\theta = m\left(\frac{-R}{2}\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2} - 2R\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$T = mg\sin\theta - \frac{5}{2} mR\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2}$$

ب - $T = 0 \Rightarrow \boxed{\theta^{\circ}_{Max} = ۴۱/۴۳\sqrt{\cos\frac{\theta}{2}}}$



در شکل فوق وزن قسمت آویزان به اندازه‌ای است که باعث شروع حرکت می گردد. ضریب اصطکاک μ است. سرعت زنجیر را وقتی که آخرین حلقه سطح را ترک می کند بدست آورید. جرم کل زنجیر m است.



$$W_2 = \frac{mb}{L} g \Rightarrow W_1 = m\frac{(L-b)}{L} g$$

$$f = \mu N = \mu W_1 = \mu m g \frac{L-b}{L}$$

در آستانه حرکت : $f = W_2$

(تعادل استاتیکی)

$$\Rightarrow \quad \mu m g \frac{L-b}{L} = m g \frac{b}{L} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{b_0 = \frac{\mu L}{1+\mu}}$$

* حداقل طول زنجیر برای شروع حرکت.

* $W_2 > f$ حرکت
* $W_2 < f$ ثابت

* $\sum F_x = m a$

$$W_2 - f = m a \quad \Rightarrow$$

$$m g \frac{b}{L} - \mu m g \frac{L-b}{L} = m a$$

* $a = g \left(b \frac{1+\mu}{L} - \mu \right)$

$$\int a\, ds = \int v\, dv \quad \Rightarrow \quad \int_{b_0}^{L} a\, db = \int_0^{v} v\, dv$$

$$\int_{b_0}^{L} g \left(b \frac{1+\mu}{L} - \mu \right) db = \frac{1}{2} v^2$$

$$g \left[\frac{b^2}{2} \left(\frac{1+\mu}{L} \right) - \mu b \right]_{b_0}^{L} = \frac{1}{2} v^2$$

$$\boxed{V=\sqrt{\frac{gL}{1+\mu}}}$$

* حال همین مسئله را به فرض عدم وجود اصطکاک از راه کار و انرژی حل می کنیم :

* اگر $\mu = 0$ باشد به محض بیرون آمدن گوشهٔ اوّلین - حلقه حرکت شروع می شود و سیستم هم Conservative - است .

* $U = 0$

$$U = \Delta T + \cancel{\Delta V_e} + \Delta V_g = 0 \Rightarrow \Delta T + \Delta V_g = 0$$

* $\Delta V_g = V_{g_2} - V_{g_1} = mg\frac{L}{2} - m\frac{b}{L}g\frac{b}{2}$

وقتی همه طول از سطح خارج می شود نسبت به وسط زنجیر می سنجیم .

سطح میز را مبداء پتانسیل فرض - کرده ایم .

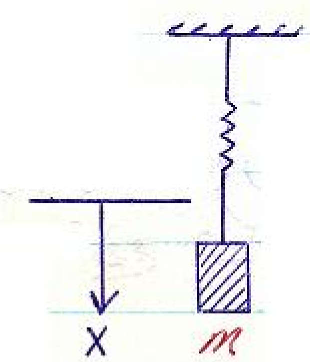
*** در صورت مسئله باید قید شود که در $t=0$ طول b از زنجیر خارج از سطح قرار دارد .

* $\Delta V_g = \frac{mg}{2}\left(\frac{b^2}{L} - L\right)$

$\Delta T = \frac{1}{2} m V^2$ و $\Delta T + \Delta V_g = 0 \Rightarrow$

$$V = \sqrt{gL\left(1 - \frac{b^2}{L^2}\right)}$$

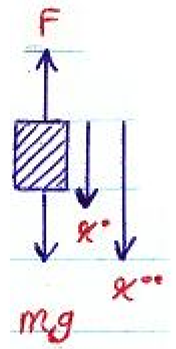
مثال- فنری با وزنهٔ $m = 10\,kg$ را یک متر پایین کشیده و سپس رها می کنیم.



$t = 0 \rightarrow V = 0$

$x = 1\,m$

$K = 450\ N/m$



« Conservative System »

* سرعت max را بیابید.

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$ (راه مشکل)

$a + b = 0$ ؛ $b_{min} \rightarrow a_{max}$

$E = T + V_g + V_e$

$T = 0 \Rightarrow (V_g + V_e)_{max} = E$ ①

$E = T_{max}$ ②

(۱) و (۲) $\Rightarrow T_{max} = (V_g + V_e)_{max}$

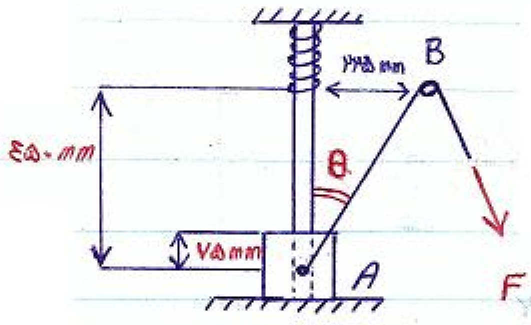
* چون انرژی جنبشی max از نظر مقدار با انرژی پتانسیل max برابر است .

* اگر $T = 0 \Rightarrow V_{g\,max} = mgx = -(10)(9/81)(1)$
$= -98/1\ J$ (شروع حرکت)

$V_e = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2}(450)(1) = 225\ J$

* $(V_g + V_e)_{max} = 225 - 98/1 = T_{max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2$

$\Rightarrow$ « V_{max} محاسبه می شود »



مسأله ۳ - ۸۹ -

۲۲۵ نصف ۴۵۰ است امّا $\theta = 30°$ را نمی توان نتیجه گرفت .

۱ - روی زمین
۲ - درحال فشردن فنر

$* \; U = \Delta V_e + \Delta V_g + \Delta T$

$\Delta T = ۰ - ۰ = ۰$

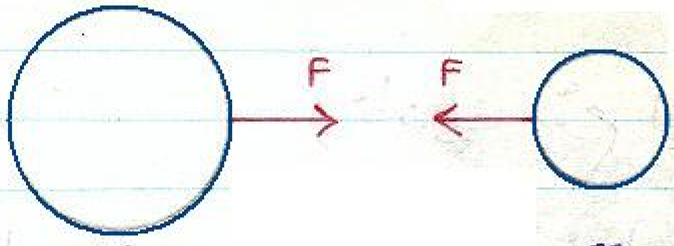
$\Delta V_g = mgh = (۷)(۹/۸۱)(۰/۴۵۰) = ۳۰/۹ \; J$

$\Delta V_e = \frac{1}{۲} K x^۲ = \frac{1}{۲}(K)(۰/۰۷۵)^۲ = ۲/۸ \times ۱۰^{-۳} K \; J$

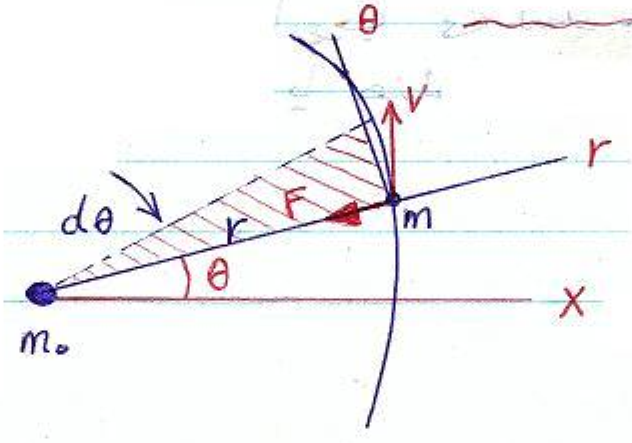
$* \; U = \int \vec{F} \cdot \vec{dr} = FS = ۲۰۰\left[\left((۰/۴۵۰)^۲ - (۰/۲۲۵۰)^۲\right)^{\frac{1}{۲}} - ۰/۲۲۵\right]$

Central Force Motion

«حرکت با نیروی مرکزی»



$F = K \frac{m m_0}{r^۲}$



$F = K \frac{m m_0}{r^۲}$

$$\Sigma F_r = m a_r \qquad \Sigma F_\theta = m a_\theta = 0$$

$$\begin{cases} K \dfrac{m m_0}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = h = Const$$

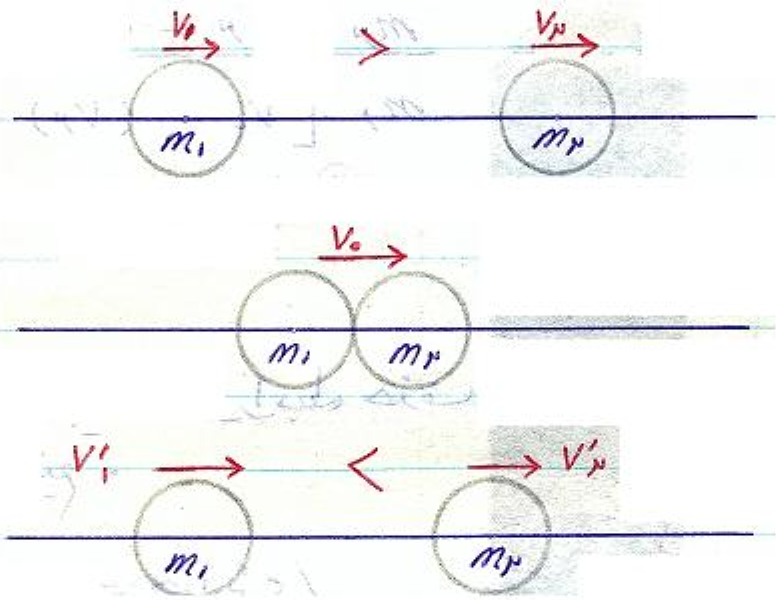
مساحت مثلث $\quad A = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad$: (ادامه)

$$\boxed{A = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta} = h = Const}$$

(قانون دوم کپلر در حرکت سیارات)

** سیارات در مسیر خود مساحتهای مساوی را در زمانهای مساوی جاروب می کنند. کپلر ثابت کرد که مسیر تمام سیارات باید بیضی یا هذلولی یا سهمی باشد.

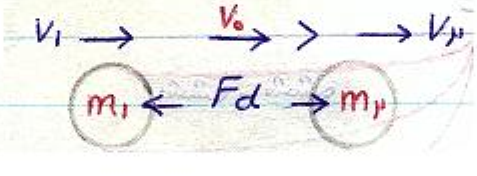
« Impact برخورد »



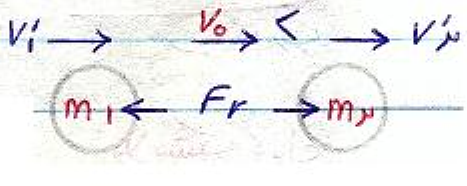
* $\Delta G = 0$

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

(Deformation Force
در لحظه آغاز برخورد)



(Restortion Force
در پایان برخورد)



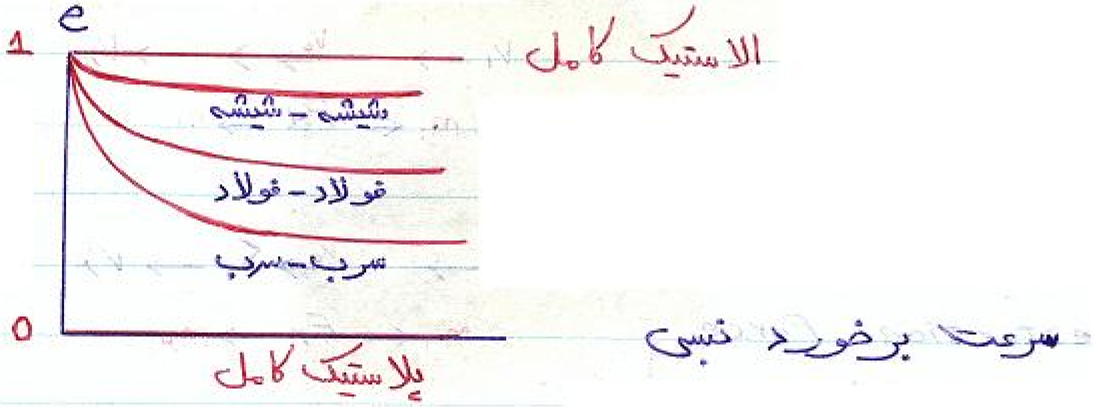
(بازگشت : Restortion)

ضریب برخورد
$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\,dt}{\int_{0}^{t_0} F_d\,dt} = \frac{m_1\left[-V'_1 - (-V_0)\right]}{m_1\left[-V_0 - (-V_1)\right]} = \frac{V_0 - V'_1}{V_1 - V_0}$$
برای جسم ①

ضریب برخورد
$$e = \cdots\cdots\cdots = \frac{m_2\left[V'_2 - (+V_0)\right]}{m_2\left[V_0 - (V_2)\right]} = \frac{V'_2 - V_0}{V_0 - V_2}$$
برای جسم ②

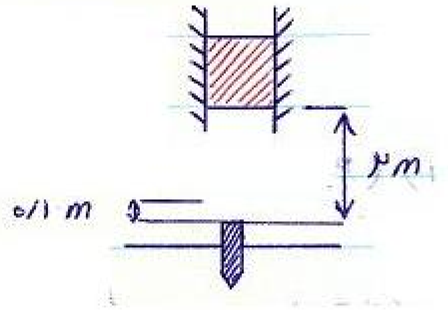
$e_① = e_②$ $\Rightarrow$ V_0 را بین دو رابطه حذف می کنیم.

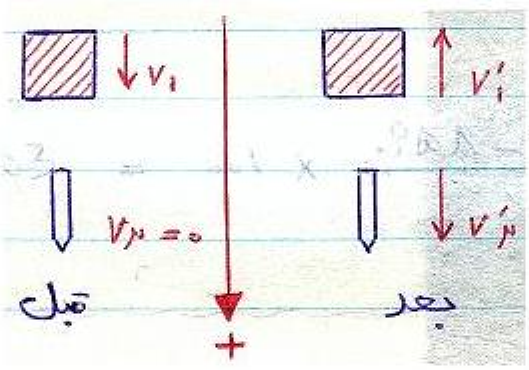
$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{V'_2 - V'_1}{V_1 - V_2}} = \frac{|\text{سرعت جدائی}|}{|\text{سرعت نزدیکی}|}$$



مثال- چکش یک شمع کوب به جرم ۸۰۰ Kg از حالت سکون در ارتفاع ۲ متری یک شمع ۲۴۰۰ Kg رها می شود. اگر چکش پس از

برخورد تا ارتفاع $0/1\,m$ به سمت بالا بلند شود، سرعت شمع را بلافاصله پس از برخورد بیابید. ب- ضریب برخورد e.
ج- درصد افت انرژی ناشی از برخورد.





$$* \quad \Delta T + \Delta V_g = 0$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m V_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} m V_1^2 = -mgh$$

$$\Delta V_g = -mgh$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = \sqrt{2gh} = 6/26 \ m/s \\ V'_1 = \sqrt{2gh'} = 1/40 \ m/s \end{cases}$$

$$* \quad \Delta G = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V'_1 + m_2 V'_2$$

$$(800)(6/26) + (2400)(0) = (800)(-1/40) + (2400) V'_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V'_{۲} = ۲/۵۵ \;\; m/s}$$

$$* \quad e = \frac{V'_{۲} - V'_{۱}}{V_{۱} - V_{۲}} = ۰/۶۳$$

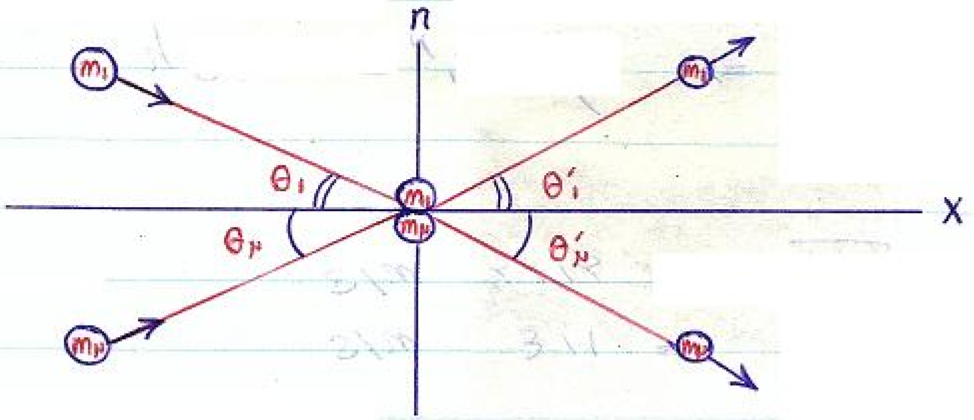
$$E_{۱} = \cancel{T}^{\circ} + V_g = mgh = (۸۰۰)(۹/۸۱)(۲) = ۱۵۷۰۰ \; J$$

$$E_{۲} = T + \cancel{V_g}^{\circ} = \frac{۱}{۲} m_{۱} V'^{۲}_{۱} + \frac{۱}{۲} m_{۲} V'^{۲}_{۲}$$

$$'' \qquad '' \quad = \frac{۱}{۲}(۸۰۰)(-۱/۴۰)^{۲} + \frac{۱}{۲}(۲۴۰۰)(۲/۵۵)^{۲} = ۸۵۹۰ \; J$$

(انرژی تلف شده) $= \dfrac{۱۵۷۰۰ - ۸۵۹۰}{۱۵۷۰۰} \times ۱۰۰ = ۴۵/۳ \, \%$

حالت ب) « برخورد روی خط المرکزین نباشد »



* در جهت محور یک برخورد normal مثل حالت (الف) است و
در جهت محور x تبادل Momentom نداریم .

* $\Delta \vec{G} = \int \vec{F} \cdot dt$

* $\Delta G_n = 0 \quad \Rightarrow$

$$(-m_1 V_1 \sin\theta_1 + m_2 V_2 \sin\theta_2 = m_1 V'_1 \sin\theta'_1 - m_2 V'_2 \sin\theta'_2) \quad (1)$$

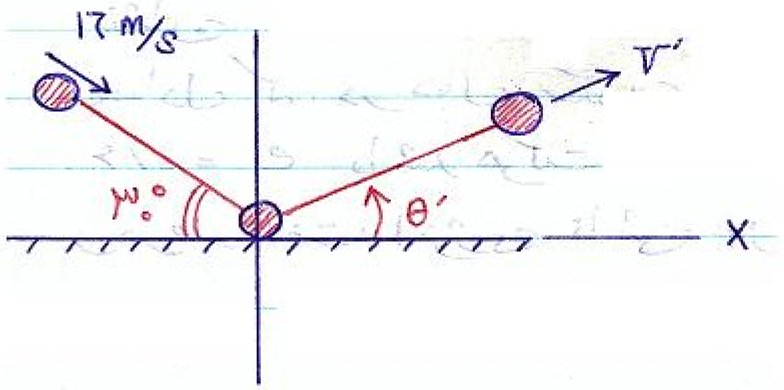
در جهت محور x برخوردی نداریم. $\Rightarrow$

$$\cancel{m_1} V_1 \cos\theta_1 = \cancel{m_1} V'_1 \cos\theta'_1$$
$$\cancel{m_2} V_2 \cos\theta_2 = \cancel{m_2} V'_2 \cos\theta'_2$$
(۲) و (۳)

* یعنی سرعت در راستای x تغییر نمی‌یابد، یعنی مؤلفه افقی سرعت ثابت است.

* $$e = \frac{V'_1 \sin\theta'_1 + V'_2 \sin\theta'_2}{V_1 \sin\theta_1 + V_2 \sin\theta_2} \quad (4)$$

مثال -



* یک گلوله فولادی با سرعت $16\ m/s$ و زاویه ۳۰° به سطح یک صفحه فلزی سنگین برخورد می کند اگر ضریب برخورد بین صفحه و گلوله ۰/۵ باشد سرعت و زاویه برگشت گلوله را بیابید.

$$* \quad e = \frac{V' \sin\theta' + 0}{V \sin\theta + 0} = 0/5$$

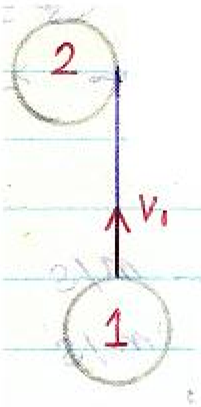
$$\Rightarrow \quad V' \sin\theta' = 4\ m/s \quad (1)$$

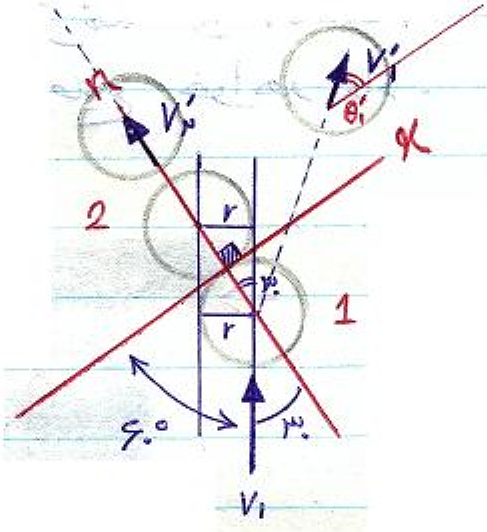
$$* \quad V \cos\theta = V' \cos\theta'$$

$$\Rightarrow \quad V' \cos\theta' = 8\sqrt{3} \quad (2)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} V' = 14/42\ m/s \\ \theta' = 16/1^\circ \end{array}}$

مثال - ذره کروی شکل (۱) با سرعت $V_1 = 6\ m/s$ در جهت نشان داده شده حرکت و با ذره (۲) با جرم و قطر معادل که در حال سکون است برخورد می کند اگر $e = 0/6$ باشد حرکت دو ذره را پس از برخورد یافته و درصد افت انرژی ناشی از برخورد را بیابید.





$$\cancel{m_1} V_1 \sin\theta_1 + m_2 V_2 \underset{0}{\cancel{\sin\theta_2}} = \cancel{m_1} V'_1 \sin\theta'_1 + \cancel{m_2} V'_2$$

$$\Rightarrow \qquad V'_1 \sin\theta'_1 + V'_2 = 6 \sin 60$$

$$V'_1 \sin\theta'_1 + V'_2 = 3\sqrt{3} \qquad (1)$$

$\Delta G = 0$ در راستای محور x :

برای جسم ۱ : $\cancel{m_1} V_1 \cos\theta_1 = \cancel{m_1} V'_1 \cos\theta'_1$

۲ " " : $0 = 0$

$$\Rightarrow \qquad V'_1 \cos\theta'_1 = 6 \cos 60$$

$$V'_1 \cos\theta'_1 = 3 \qquad (2)$$

$$e = \frac{V'_2 \sin\theta'_2 + V'_1 \sin\theta'_1}{V_1 \sin\theta_1 + V_2 \sin\theta_2} \qquad (\theta'_2 = 90^\circ)$$

$$0.6 = \frac{V'_2 - V'_1 \sin\theta'_1}{6 \sin 60 + 0} \qquad (3)$$

* اگر تنها ریاضی مسئله را در نظر گرفته و $V'_1 \sin\theta'_1$ را منفی - نگیریم خود مسئله به ما جواب صحیح خواهد داد.

(۱) و (۲) و (۳) →
$$\begin{cases} V'_1 = ۳/۱۸ \ m/s \\ V'_2 = ۴/۱۶ \ m/s \\ \theta'_1 = ۱۹/۱۱^\circ \end{cases}$$

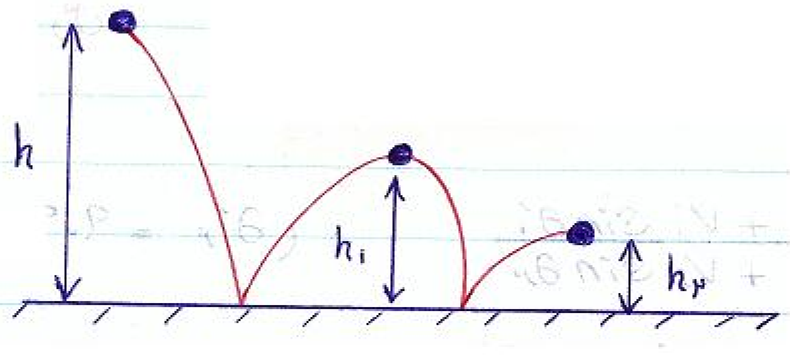
(ب) -
$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m\, ۶^2 = ۱۸\, m$$

$$T' = \frac{1}{2} m \left(V_1'^2 + V_2'^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(۳/۱۸^2 + ۴/۱۶^2 \right)$$

$$T' = ۱۳/۶۸\, m$$

* $$\frac{T - T'}{T} \times 100 = ۲۳/۸ \% = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta E}{E}$$

مثال -



* یک گلوله را بدون سرعت اولیه رها می کنیم و به سطح صاف یک صفحه فولادی می خورد اگر پس از دو بار پریدن ارتفاع مشخص h_2 را دارا باشد e را بیابید.

$$* \quad e = \frac{V_1'}{V_1} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \quad (1)$$

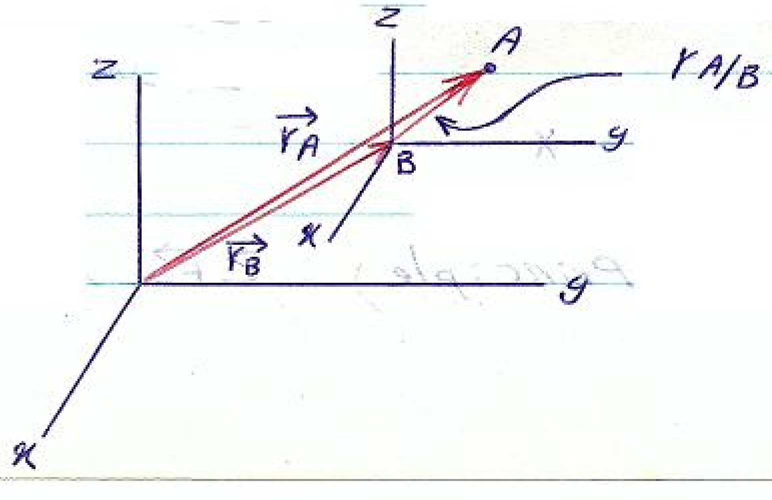
$$* \quad e = \frac{V_1''}{V_1'} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow e^2 = \sqrt{\frac{h_2}{h}} \Rightarrow e = \sqrt[4]{\frac{h_2}{h}}$$

تمرین منزل - ۳ - ۱۰۶ - ۱۱۹ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۴۲

۱۴۶

« Relative Motion »



$*\ \vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$

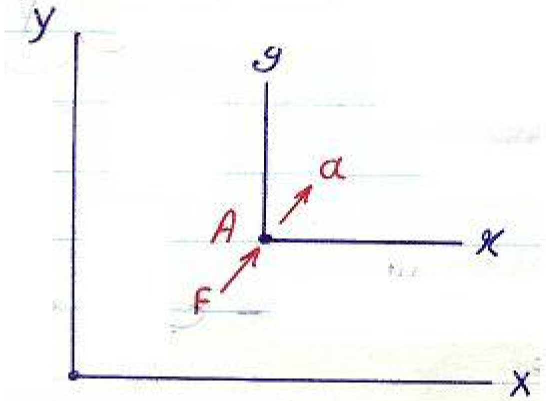
$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{rel}$

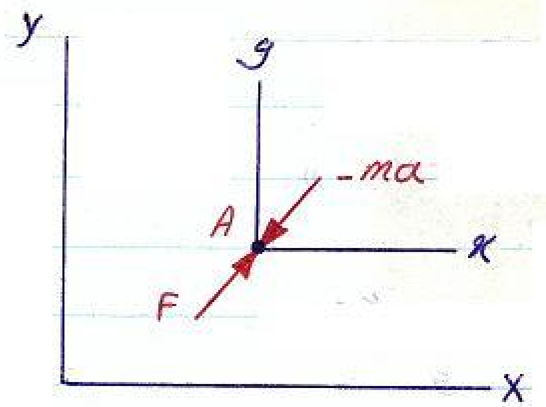
شتاب مطلق — شتاب دستگاه متحرک — شتاب نسبی

$*\ \sum \vec{F} = m\,\vec{a}_A$

$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_B + \vec{a}_{rel})$

$\sum \vec{F} \neq m\,\vec{a}_{rel}$





* برای فردی که در A نشسته $\vec{a}_{rel}$ برای او صفر خواهد بود.

(Dalambert's Principle) $\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$

* اگر : $V_B = Const$

$a_B = 0 \Rightarrow \left(\sum \vec{F} = m \vec{a}_{rel} \right)$

* در دستگاه متحرک با سرعت ثابت :

* $dU_{rel} = m a_{rel} \, dr_{rel}$

$dU_{rel} = m V_{rel} \, dV_{rel}$

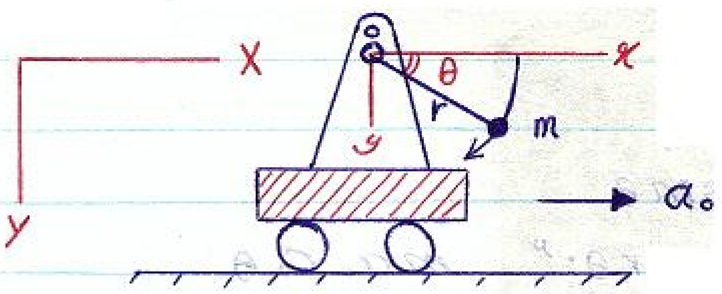
$\left(U_{rel} = \Delta T_{rel} \right)$

* $\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}_{rel} \Rightarrow \int \sum \vec{F} \, dt = \Delta \vec{G}_{rel}$

* $\sum \vec{M}_B = \dot{H}_{B\,rel}$

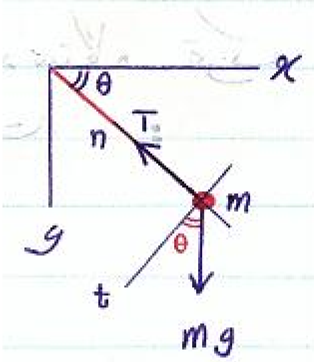
* $T_{rel} = \frac{1}{2} m V_{rel}^2$ و $T_{rel} \neq T$ مطلق

مثال -

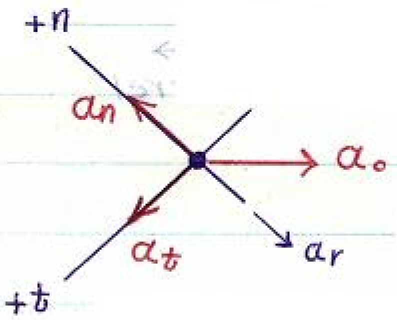


یک آونگ ساده به جرم m و طول r روی یک گاری که با شتاب ثابت افقی a_0 مطابق شکل در حال حرکت است نصب شده. اگر آونگ از حالت سکون نسبت به گاری در موقعیت $\theta = 0$ رها

شود نیروی کشش T را برای هر مقدار θ در میله متصل کننده با وزن ناچیز بیابید. T را به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \pi$ بیابید.



$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{rel}$$
$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\Sigma \vec{F} = m(\vec{a}_0 + a_{rel})$$



$$\Sigma \vec{F}_t = m\vec{a}_t$$
$$* \quad mg\cos\theta = m(a_t - a_0\sin\theta)$$

$$\Sigma \vec{F}_n = m\vec{a}_n$$
$$** \quad T - mg\sin\theta = m(a_n - a_0\cos\theta)$$

$$\begin{cases} a_n = -a_r = -(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2) = r\dot{\theta}^2 & r = Const \\ a_t = a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} & r = Const \end{cases}$$

$$\begin{cases} * \quad r\ddot{\theta} = g\cos\theta + a_0\sin\theta \\ ** \quad T = mg\sin\theta + mr\dot{\theta}^2 - ma_0\cos\theta \end{cases}$$

$$* \quad \ddot{\theta}\,d\theta = \dot{\theta}\,d\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\theta \ddot{\theta}\,d\theta = \int_0^\theta \dot{\theta}\,d\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \frac{1}{r}(g\cos\theta + a_0\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{3} = \frac{1}{2}\left(g\sin\theta - a_0\cos\theta + a_0\right) \quad \Rightarrow$$

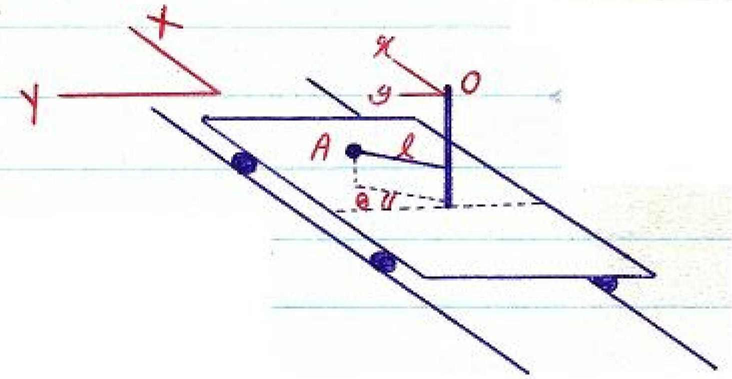
* مقدار $\dot{\theta}^2$ را در رابطهٔ (T) قرار می دهیم :

$$\boxed{T = m\left[3g\sin\theta - 3a_0\cos\theta + 2a_0\right]}$$

۱- $\theta = 0 \Rightarrow$	$T = -ma_0$	نیروی فشاری
۲- $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$	$T = m(3g + 2a_0)$	نیروی کششی
۳- $\theta = \pi \Rightarrow$	$T = 5ma_0$	نیروی کششی

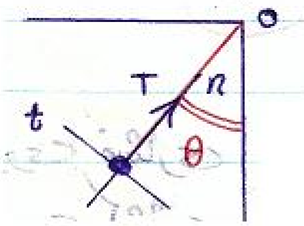
* در یک نقطه نیرو از فشاری به کششی تبدیل می شود که با حل معادله $T = 0$ زاویه مورد نظر بدست می آید .

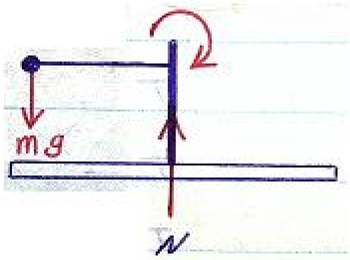
مثال -

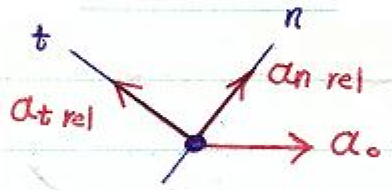


* گلوله A به جرم 2kg توسط میله سبک وزنی به طول 0/6m

بطور آزاد حول محور قائم (نصب شده) به گاری در صفحه افقی -
دوران می کند. گاری، میله و گلوله در حالت $\theta = 0$ ساکن -
هستند و پس از آن گاری با شتاب ثابت $a_0 = 1.2\ m/s^2$ شروع
به حرکت می کند. رابطه‌ای برای کشش در میله بر حسب θ نوشته
و T را در حالت $\theta = \frac{\pi}{2}$ بدست آورید.







$$\Sigma F_n = m a_n \qquad T = m(a_{n\ rel} + a_0 \sin\theta)$$

$$\Sigma F_t = m a_t \qquad 0 = \cancel{m}(a_{t\ rel} - a_0 \cos\theta)$$

$$a_{n\ rel} = l\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow$$

$$a_{t\ rel} = l\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} T = m(l\dot{\theta}^2 + a_0 \sin\theta) \\ 0 = l\ddot{\theta} - a_0 \cos\theta \end{cases}$$

$$* \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \ddot{\theta}\, d\theta \quad \text{و} \quad \left(\ddot{\theta} = \frac{a_0}{l}\cos\theta\right) \Rightarrow$$

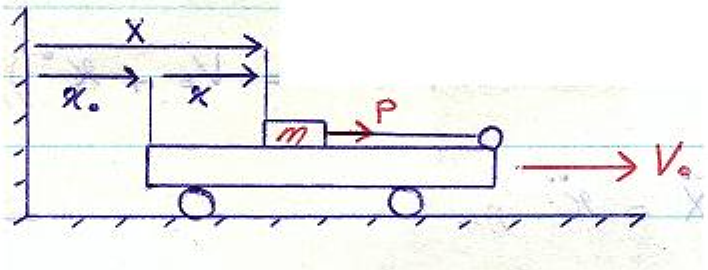
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{a_0}{l}\sin\theta$$

$$\boxed{T = 3ma_0\sin\theta}$$

$$* \quad \frac{dT}{d\theta} = 3ma_0\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(T_{max} = 3ma_0 = ۷/۲ \longleftarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \right)$$

مثال -



* گاری مسطحی با سرعت ثابت V_0 در حال حرکت است. روی سطح گاری یک موتور کشنده نصب شده که با کشش ثابت P جرم m را روی سطح گاری حرکت می دهد. جرم m روی سطح افقی آزادانه و بدون اصطکاک حرکت می کند در لحظهٔ شروع فاصله نسبی $x = 0$ و $X = x_0 = b$ است. به کمک روابط کار و انرژی ابتدا از دید ناظر سوار بر گاری و سپس از دید ناظر خارجی مقادیر سرعت را بدست آورید.

* $U_{rel} = Px \qquad \Delta T_{rel} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^{2} - 0) = \frac{1}{2} m\dot{x}^{2}$

$U_{rel} = \Delta T_{rel} \Longrightarrow Px = \frac{1}{2} m\dot{x}^{2} \Longrightarrow$

$\left(\dot{x} = \sqrt{\frac{2Px}{m}} \right)$

* $U = \int_{0}^{X} P\,dX = (PX)_{b}^{X} = P(X-b)$: ناظر خارجی

* $\Delta T = \frac{1}{2} m(\dot{X}^{2} - V_0^{2})$ و $(U = \Delta T) \Longrightarrow$

* $P(X-b) = \frac{1}{2} m(\dot{X}^{2} - V_0^{2})$

《 $X = x_0 + x \rightarrow \dot{X} = \dot{x}_0 + \dot{x} = V_0 + \dot{x}$ 》

《 $\ddot{X} = \ddot{x}$ 》 $\Longrightarrow$

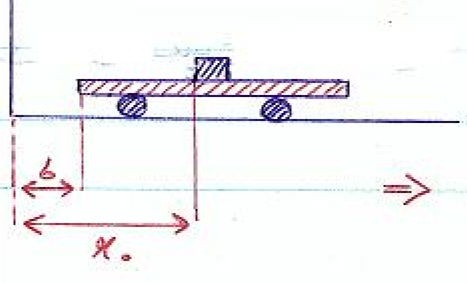
$P(X-b) = P(x_0 + x) - Pb = Px + P(x_0 - b)$

$(P = m\ddot{x}) \Longrightarrow$

$$= Px + m\ddot{x}(x_0 - b)$$
$$= Px + m\ddot{x}V_0 t$$
$$= Px + mV_0\dot{x}$$

$\ddot{x}t \rightarrow \dot{x}$

$at \rightarrow V$



$\Longrightarrow (x_0 - b = V_0 t)$

$$(X^{\circ 2} - V_\circ^{2}) = \left[V_\circ^{2} + x^{\circ 2} + 2x^{\circ}V_\circ - V_\circ^{2} \right] = x^{\circ 2} + 2x^{\circ}V_\circ$$

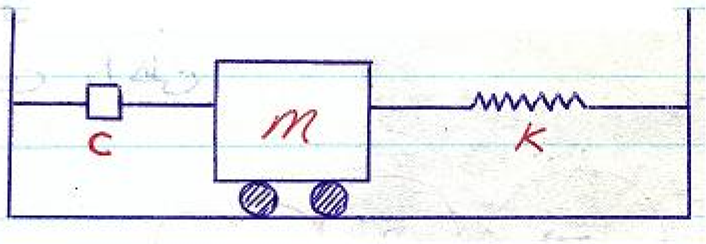
$$« \quad P(X-b) = \frac{1}{2} m (X^{\circ 2} - V_\circ^{2}) \quad » \quad \Longrightarrow$$

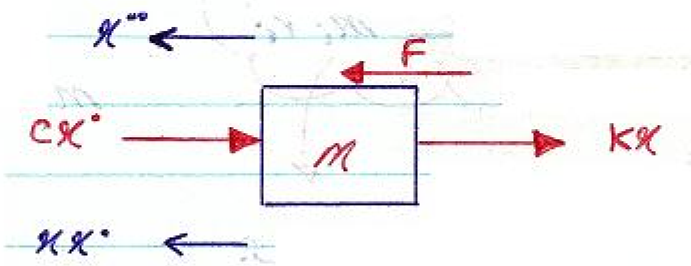
$$\Rightarrow \quad Px + mV_\circ x^{\circ} = \frac{1}{2} m (x^{\circ 2} + 2V_\circ x^{\circ})$$

$$\boxed{Px = \frac{1}{2} m x^{\circ 2}}$$

* واین همان رابطه‌ای است که در قسمت اول بدست آورده بودیم (ناظر داخلی) .

« Vibration » « ارتعاشات »





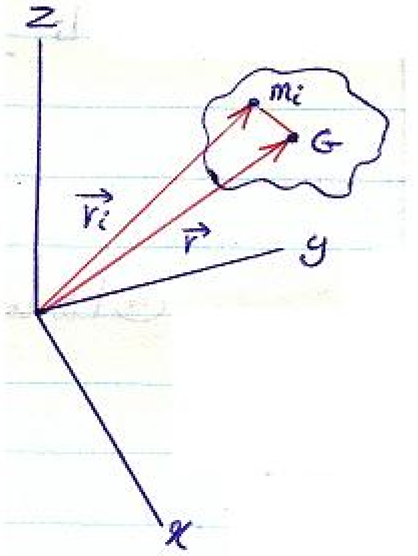
* $F = Cx^{\circ}$ نیروی (Damper)
بر خلاف حرکت .

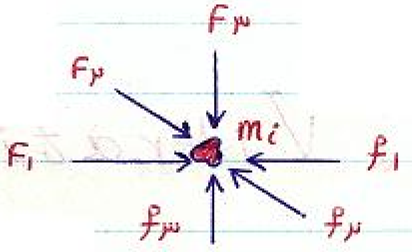
$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

« Kinetics Of System Of Particles »





$F_{(n)}$ - نیروی خارجی

$f_{(n)}$ - نیروی داخلی

(مرکز جرم) :

$$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r_i}$$

m ← جرم کل ، m_i ← جرم جزء

$$m = \sum m_i$$

$$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r_i}$$

* $\sum F = m_i \ddot{\vec{r}}_i$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \dots = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\sum \vec{F} + \sum \vec{f} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\sum \vec{F} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = m \ddot{\vec{r}}, \quad \sum \vec{F} = m \vec{a}$$

* مجموع نیروهای خارجی وارد بر سیستم برابر است با جرم کل سیستم ضرب در شتاب مرکز جرم سیستم.

* $F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$
* $f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$

m_i

$$U_i = \Delta T_i$$

* $T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$

* $\sum U_i = \sum \Delta T_i$

* $\sum U_i$ مجموع کارها است (کار f_i ها صفر است چون جفت نیرو هستند).

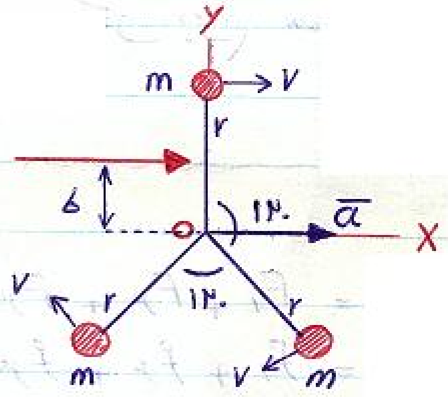
($\Sigma \Delta T_i$ مجموع انرژی جنبشی سیستم است .)

$$\boxed{U = \Delta T}$$

مثال ـ سه گلوله به جرم m به یک میلهٔ سه شاخه با جرم ناچیز متصل هستند و مجموعه روی سطح افقی هموار در حالت سکون قرار دارد. اگر نیروی F به شکل ناگهانی روی یکی از میله ها اعمال شود

الف ـ شتاب نقطهٔ o را بیابید.

ب ـ شتاب زاویه ای مجموعه را بیابید.



(o مرکز جرم است)

$\Sigma \vec F = m\vec a$ و $\bar a = \frac{F}{3m}$

$\bar a = a_o = \frac{F}{3m} i$

$\vec H_o = \vec H = 3m(r\dot\theta)r = 3mr^2\dot\theta$ $(\vec r \times m\vec V)$

($\vec H$ بسمت داخل صفحه است) $r\dot\theta$

$$\sum \vec{M}_o = \dot{H}_o \quad \Rightarrow \quad Fb = \frac{d}{dt}\left(3mr^2\dot{\theta}\right) = 3mr^2\ddot{\theta}$$

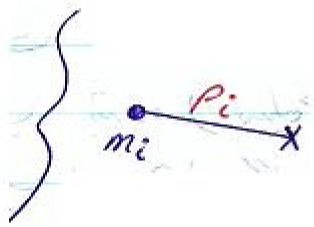
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{Fb}{3mr^2}$$

* اگر در سیستم ما المانها نسبت به هم (Rigid) نباشند یعنی ثابت نباشند مثل سیستمهای الاستیکی :

* $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

* $T = \frac{1}{2}\sum m_i V_i^2$

* $T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2$



* $\vec{V_i} = \vec{V} + \vec{\rho_i}$

* $\sum m_i \vec{\rho_i} = 0$

* $T = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2$

(جابجائی مرکز جرم)   (جابجائی های داخلی)

$$\vec{G} = \Sigma\, m_i \vec{v}_i$$

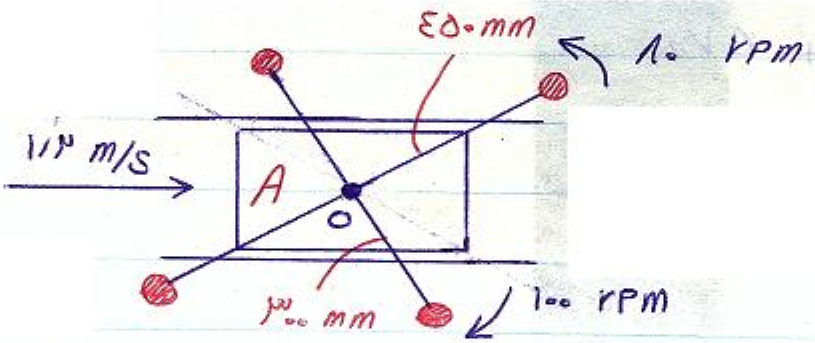
$$\vec{G} = \Sigma\, m_i (\vec{\bar{V}} + \vec{\rho'}_i)$$

$$\vec{G} = \Sigma\, m_i \vec{\bar{V}} + \underbrace{\Sigma\, m_i \vec{\rho'}_i}_{0}$$

$$\vec{G} = m\vec{\bar{V}}$$

$$(\Sigma \vec{F} = \dot{\vec{G}}) \qquad (\Sigma \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o)$$

مثال -



* لغزنده A با جرم ۱۲ Kg در هادی نشان داده شده در سطح افق با سرعت ۱/۳ m/s در حال حرکت است. دو میله با گلوله‌های نصب شده (میلهٔ سبک) حول محور o روی لغزنده حرکت می‌کنند هر یک از چهار گلوله ۱/۲ Kg جرم دارد. گلوله‌های (۱) و (۲) با سرعت ۸۰ دور در دقیقه در جهت خلاف عقربه ساعت و گلوله‌های (۳) و (۴) در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنند. برای کل سیستم انرژی جنبشی، ممنتم خطی و ممنتم زاویه‌ای حول o را بیابید.

$$* \quad T = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \Sigma\, m_i |\rho'_i|^2 \quad *$$

* $|\vec{\dot{\rho}}_i| = r\dot{\theta} = V_{rel}$

$$(V_{rel})_{1-2} = ۰/۴۵۰ \frac{(۸۰)(۲\pi)}{(۶۰)} = ۳/۷۷ \ m/s$$

$$(V_{rel})_{3-4} = ۰/۳۰۰ \frac{(۱۰۰)(۲\pi)}{(۶۰)} = ۳/۱۴ \ m/s$$

* $\frac{1}{2} m \bar{V}^2 = \frac{1}{2} \left[۱۶ + ۴(۱/۶) \right] (۱/۲)^2 = ۱۶/۱۳ \ J$

$$T = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2 =$$

$$۱۶/۱۳ + ۲\left[\frac{1}{2} (۱/۶)(۳/۷۷)^2 \right] + ۲\left[\left(\frac{1}{2}\right)(۱/۶)(۳/۱۴)^2 \right]$$

$$= ۵۴/۶۶ \ J$$

* $\vec{G} = m\vec{\bar{V}}$ (ممنتم خطی) $= \left[۱۶ + ۴(۱/۶) \right] (۱/۲)$

$$= ۲۶/۸۸ \ kgm/s$$

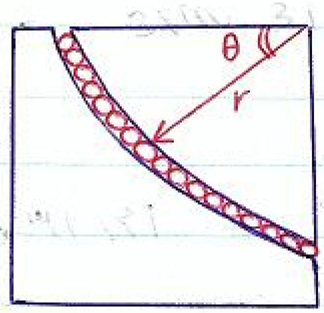
* $H_o = \sum |\vec{r}_i \times m\vec{V}_i| =$

$$\left[۲(۰/۴۵۰)(۱/۶)(۳/۷۷) - ۲(۰/۳۰۰)(۱/۶)(۳/۱۴) \right] = ۲/۴۱ \ \frac{kgm^2}{s}$$

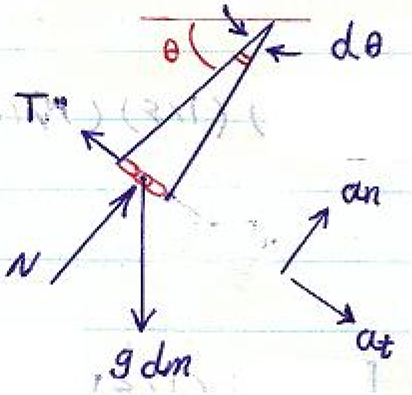
به علت معکوس بودن جهت.

« تمرین منزل ـ ۳ ـ ۱۲۸ ، ۱۸۹ ، ۱۹۱ »

مسأله ۳ ـ ۶۴ ـ



$$l = \frac{\pi r}{2}$$



* یک المان [در نظر] می گیریم :

$$\Sigma F_n = dm\, a_n$$

$$(N - dm\, g \sin\theta = dm\, a$$

$$\Sigma F_t = dm\, a_t$$

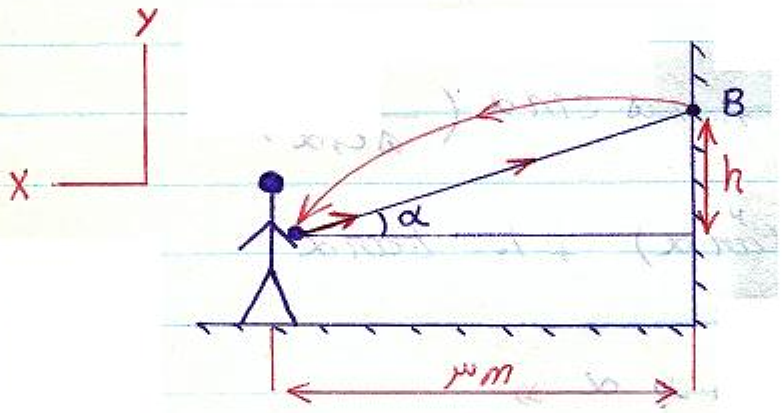
$$* \quad T + g \cos\theta\, dm = dm\, a_t)$$

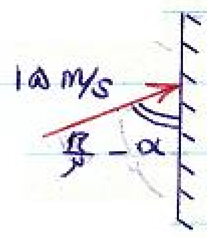
$$* \quad dm = \rho r\, d\theta \quad *$$

« این مسئله بعداً حل خواهد شد »

مسأله ـ توپی از نقطه A با سرعت $15\ m/s$ پرتاب شده و در

نقطه B به دیوار برخورد و سپس دقیقاً به A بر می‌گردد. زاویه α را بیابید اگر ضریب برخورد دیوار و توپ ۰/۵ باشد. فاصله ۳ متر است.





$$* \quad e = \frac{\cancel{V'_2 \sin\theta'_2} + V'_1 \sin\theta'_1}{V_1 \sin\theta_1 + \cancel{V_2 \sin\theta_2}} = 0/5$$

$$\Rightarrow \quad V'_1 \sin\theta'_1 = 0/5\, V_1 \sin\theta_1 = (0/5)(15)\cos\alpha$$

$$(V'_1 \sin\theta'_1 = 7/5 \cos\alpha) \quad (1)$$

$$V_1 \cos\theta_1 = V'_1 \cos\theta'_1$$

$$(15 \sin\alpha = V'_1 \cos\theta'_1) \quad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \quad {V'_1}^2 = (15)^2 \sin^2\alpha + (7/5)^2 \cos^2\alpha$$

* در برگشت حرکت پرتابه‌ای داریم با سرعت V'_1 و زاویه θ'_1 که برد آن را ۳m داده است:

$$(1) \div (2) \Rightarrow \quad tg\,\theta'_1 = 0/5\ cotg\,\alpha$$

$(h = ۳\tan\alpha)$ $\left(t = \frac{۳}{V_1' \sin\theta_1'} = \frac{۳}{۱۵\cos\alpha}\right)$

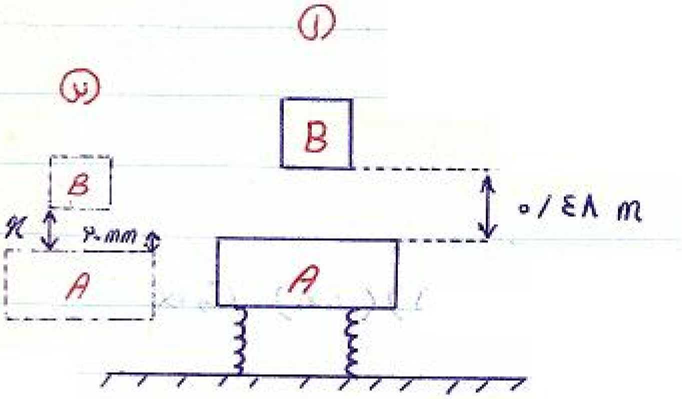
* $y = -\frac{1}{۲} g t^۲ + V_1' \cos\theta_1' t = ۳\tan\alpha$

$-۳\tan\alpha = -\frac{1}{۲} g \left(\frac{۳}{۵\cos\alpha}\right)^۲ + ۱۵\sin\alpha\left(\frac{۳}{۵\cos\alpha}\right)$

$-۳\tan\alpha = -\frac{1}{۲} g \frac{٤}{۲۵}(1+\tan^۲\alpha) + ۱۰\tan\alpha$

=> « α بدست می آید »

مسأله ۳ـ ۱۴۶ـ



$m_A = 3$ ton
$k = 2.88$ MN/m
$m_B = 500$ kg

« سیستم Conservative است »

$\Delta T = ۰$

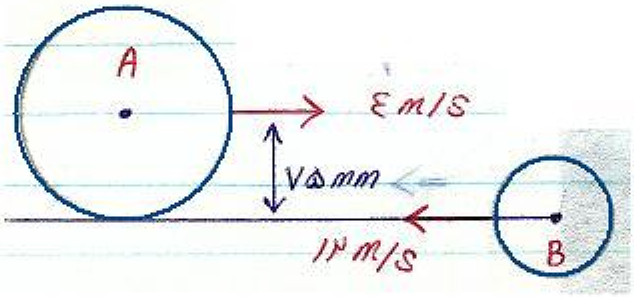
$\Delta V_g = m_A g h_A + m_B g h_B = (۳۰۰۰)(۹/۸۱)(۰/۰۲۰) + (۵۰۰)(۹/۸۱)(x - ۰/۴۸)$

$\Delta V_e = \frac{1}{۲} k y^۲ = \frac{1}{۲}(۲/۸۸ \times ۱۰^۶)(۰/۰۲۰)^۲$

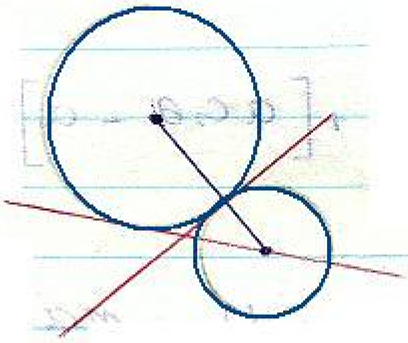
* اگر طول آزاد را داده باشند از Δy استفاده می کنیم و در غیر این صورت از y.

$$* \quad \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g = 0 \quad *$$

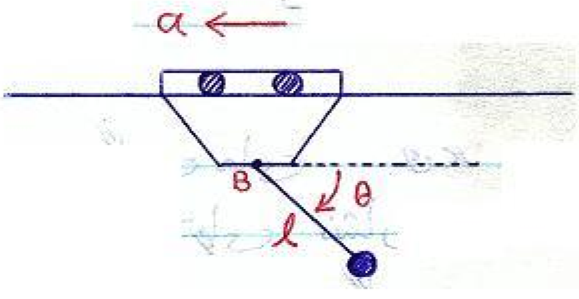
مسأله ۳ـ ۱۴۵ـ

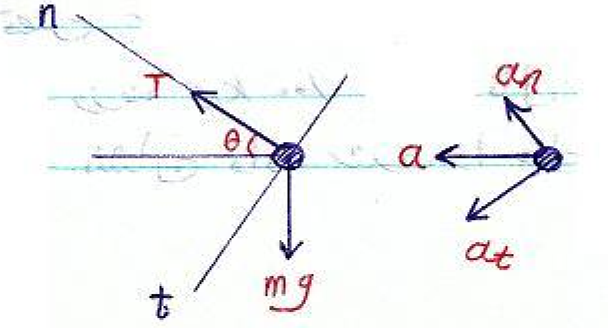


$$\begin{cases} m_A = ۲۳\ kg \\ r_A = ۷۵\ mm \\ m_B = ۴\ kg \\ r_B = ۵۰\ mm \\ e = ۰/۴ \end{cases}$$



مسأله ۳ـ ۱۹۸ـ





$$\sum F_t = m a_t \Rightarrow mg\cos\theta = m(a_t + a\sin\theta) \quad (1)$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow T - mg\sin\theta = m(a_n + a\cos\theta) \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow a_t = g\cos\theta - a\sin\theta$$

$$(\dot\theta \, d\dot\theta = \ddot\theta \, d\theta) \qquad (\ddot\theta = \frac{a_t}{r})$$

$$\int_0^{\dot\theta} r\dot\theta \, d\dot\theta = \int_0^{\theta} r\ddot\theta \, d\theta \Rightarrow$$

$$r\frac{\dot\theta^2}{2}\Big|_0^{\dot\theta} = \int_0^{\theta} (g\cos\theta - a\sin\theta)\, d\theta$$

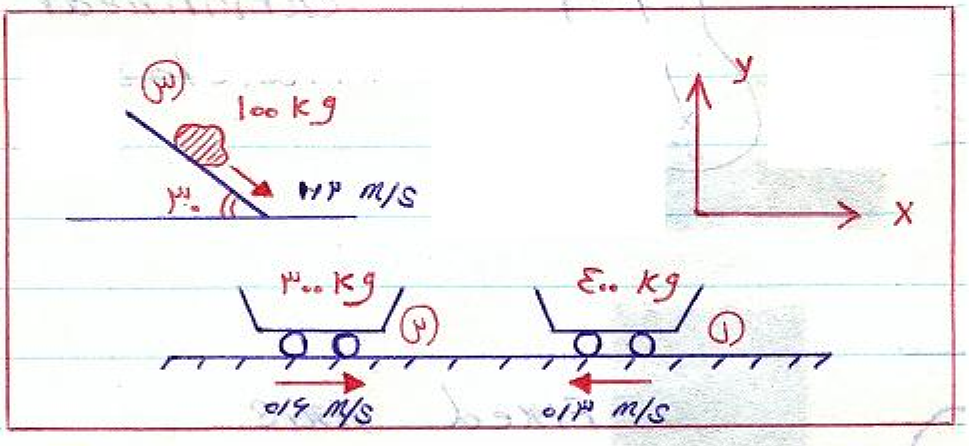
$$\frac{1}{2} a_n = g\sin\theta + a\cos\theta\Big|_0^{\theta} = g\sin\theta + [a\cos\theta - a]$$

$$T = mg\sin\theta + 2mg\sin\theta + 2ma(\cos\theta - 1) + ma\cos\theta$$

$$* \; T = mg\left[3\sin\theta + \frac{a}{g}(3\cos\theta - 2)\right] \; *$$

مثال - گاری های 300 kg و 400 kg در جهتهای مخالف هم با سرعتهای نشان داده شده در شکل حرکت می کنند. پس از برخورد دو گاری به هم متصل شده و باهم حرکت می کنند و درست در لحظه برخورد یک وزنه 100 kg از کانال تغذیه با سرعت 1/2 m/s در جهت نشان داده شده داخل گاری

kg ۳۰۰ می افتد. سرعت کل سیستم را پس از سقوط وزنه بدست آورید.



* $\Delta \vec{G} = 0$ (سیستم Conservative است.)

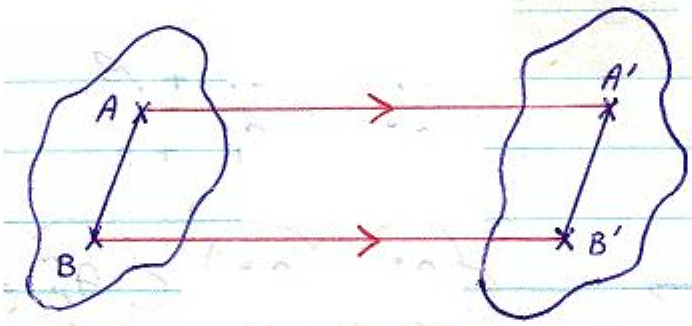
* $m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3 \cos 30 = (m_1+m_2+m_3)V$

$(400)(-0.3) + (300)(0.6) + (100)(1.2)(\cos 30) = 800\,V$

$\Rightarrow \boxed{V = 0.205 \ m/s}$

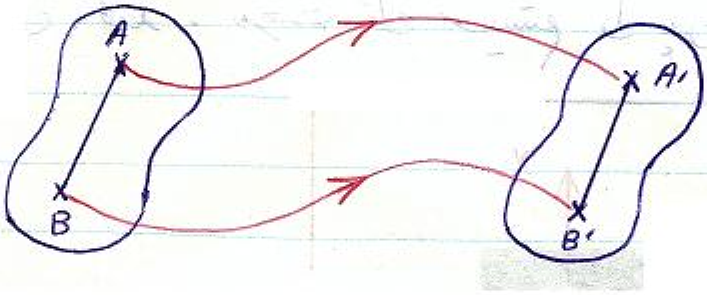
« سینماتیک اجسام صلب »

(Plane Kinematic of Rigid Bodies)

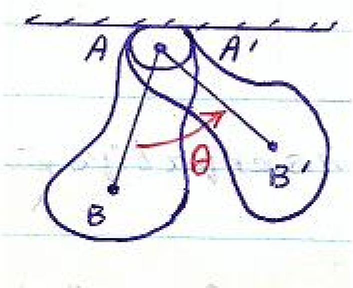


Rectilinear Translation

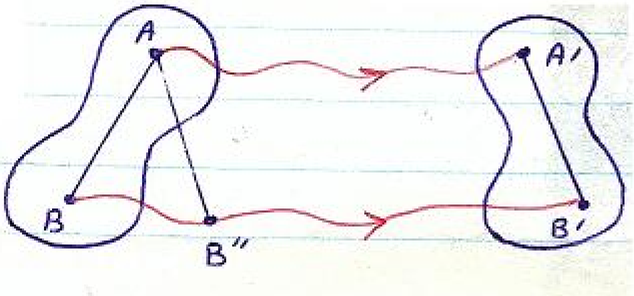
(جابجائی خطی)



Curvilinear Translation

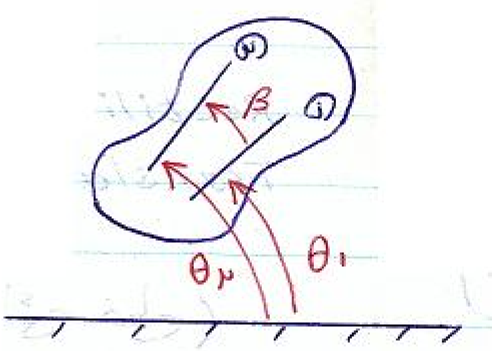


Fixed Axis Rotation



General Motion

(Rotation) (دوران)



$$\theta_2 = \theta_1 + \beta$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 + 0$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \qquad \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$$

* یعنی سرعت و شتاب زاویه‌ای برای تمام نقاط جسم صلب-
یکسان است.

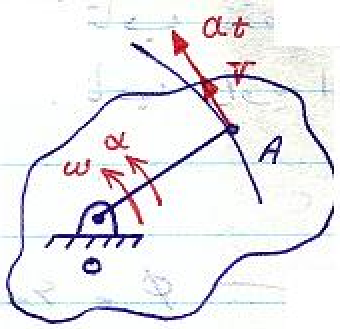
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$$\omega \, d\omega = \alpha \, d\theta$$

$$\begin{cases} \omega = \alpha t + \omega_0 \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \end{cases} \qquad (\alpha = const)$$

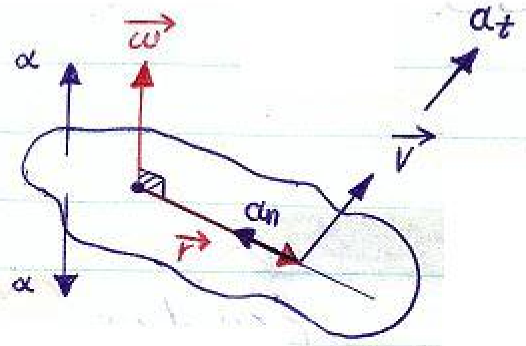
(Rotation about a fixed Axis) (دوران حول محور ثابت)



* می‌توان برای هر نقطه جسم صلب روابط ذیل را نوشت:

$$\begin{cases} V = r\omega \\ a_t = r\alpha \end{cases} \qquad a_n = r\omega^2 = \frac{V^2}{r} = V\omega$$

* از نظر برداری :



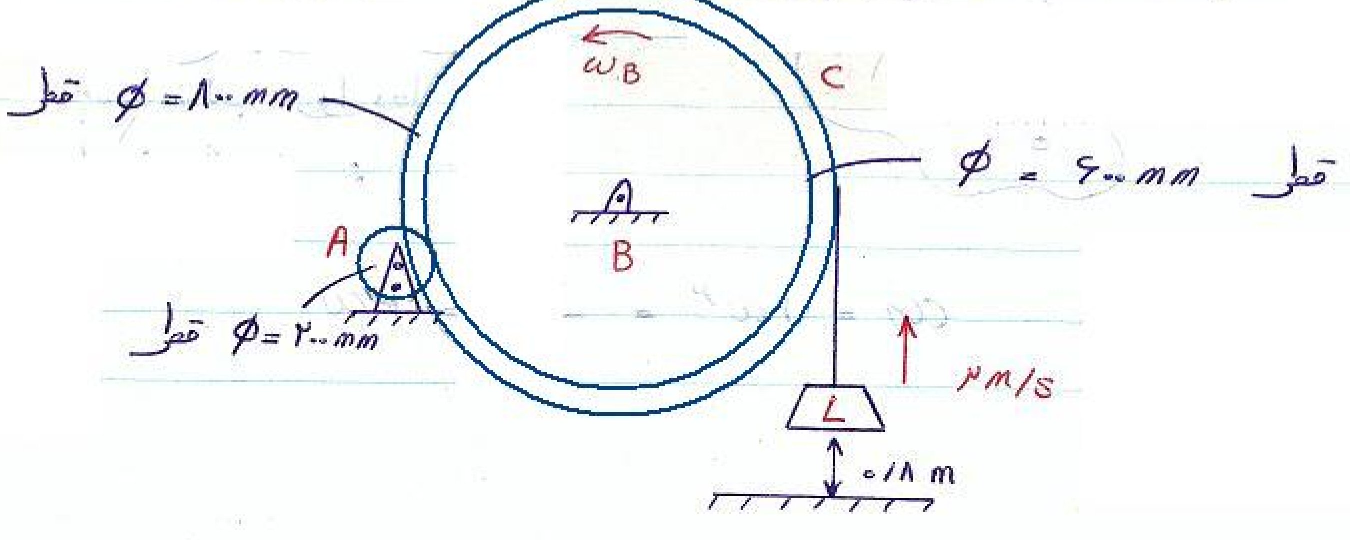
$\vec{\alpha}$ هم راستای $\vec{\omega}$ و موافق یا مخالف جهت آن است.

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a_n} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \end{cases}$$

مثال - پینیون A توسط یک موتور حرکت می کند و چرخ دنده B را که روی آن استوانه‌ای نصب است می گرداند. وزنه L از حالت سکون بلند شده و به سرعت $3\,m/s$ در فاصله $0/8\,m$ با شتاب ثابت می رسد. در زمانی که وزنه از موقعیت نشان داده شده می گذرد :

الف - شتاب نقطه C روی کابل مماس بر استوانه.

ب - شتاب زاویه‌ای و شتاب مماسی پینیون A .



* $a = Const \qquad V_0 = ۰$

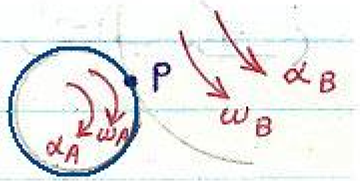
$V^۲ = ۲aS$

$a = \dfrac{V^۲}{۲S} = \dfrac{۲^۲}{۲ \times ۰/۸} = ۲/۵ \; m/s^۲$

* $C \begin{cases} V = ۲ \; m/s \\ a_t = ۲/۵ \; m/s^۲ \\ a_n = \dfrac{V^۲}{r} = \dfrac{۲^۲}{(۰/۸/۲)} = ۱۰ \; m/s^۲ \end{cases}$

$C : \quad a = (a_t^۲ + a_n^۲)^{\frac{1}{۲}} = ۱۰/۳۱ \; m/s^۲$

$\begin{cases} \omega_B = \dfrac{۲}{۰/۴} = ۵ \; rad/s \; CCW \\ \alpha_B = \dfrac{۲/۵}{۰/۴} = ۶/۲۵ \; rad/s^۲ \; CCW \end{cases} \Leftarrow \boxed{\begin{array}{l} V = r\omega \\ a_t = r\alpha \\ \omega_B = \omega_C \end{array}}$



$P \in B$ اگر به فرض : $V_P = r_B \omega_B$

$P \in A$ "   " $V_P = r_A \omega_A$

$\Rightarrow \quad r_B \omega_B = r_A \omega_A$

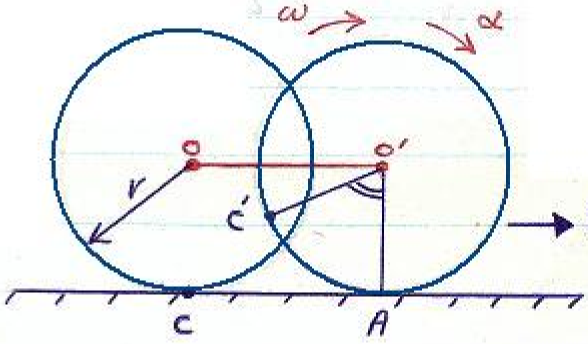
به طریق مشابه : $\quad r_B \alpha_B = r_A \alpha_A$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_A = \dfrac{0/3}{0/1}\, 5 = 15 \ \text{rad/s} & CW \\ \alpha_A = \dfrac{0/3}{0/1}\, 6/25 = 18/75 \ \text{rad/s}^2 & CW \end{cases}$$

CW ـ موافق جهت عقربه‌های ساعت.

CCW ـ مخالف " " " .

مثال مهم ـ استوانه‌ای به قطر ۳۲cm بدون لغزش در محور افقی می غلطد. می خواهیم روابط سرعت و شتاب زاویه‌ای را بر حسب سرعت و شتاب خطی بدست آوریم. سرعت و شتاب خطی a_0 و v_0 است.



$\rightarrow v_0 \rightarrow a_0$ (سرعت و شتاب مرکز)

$* \quad OO' = S$

$AC = \widehat{AC'} = S$

$\widehat{AC'} = r\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = r\theta}$

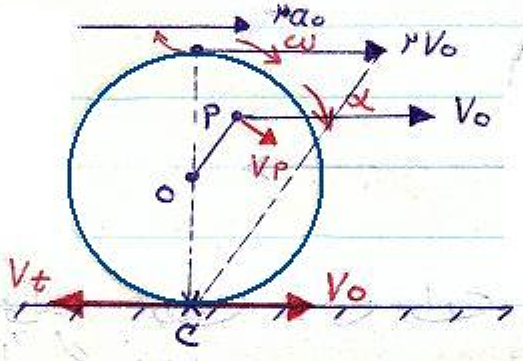
(مشتق می گیریم) $\Rightarrow \quad \dot{S} = r\dot{\theta} \rightarrow v_0 = r\omega$

$$\boxed{\omega = \frac{v_0}{r}}$$

$\ddot{s} = r\ddot{\theta} \Rightarrow a_0 = r\alpha \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{a_0}{r}$$

* حال می خواهیم سرعت و شتاب یک نقطه از آن را بیابیم :



* ω عمود بر صفحه کاغذ و بسمت داخل است.

$$\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \vec{V}_0$$
$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r}_1 + \vec{a}_0$$
(برای هر نقطه)

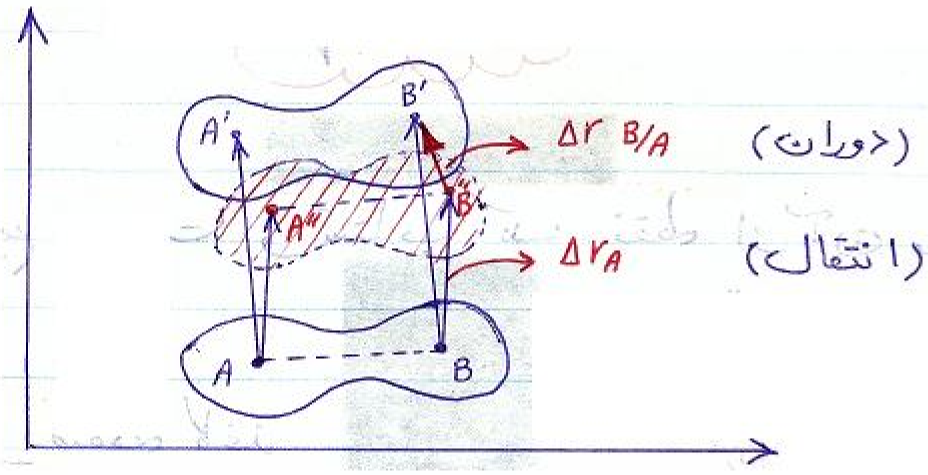
در نقطه تماس c :

$$\begin{cases} \vec{V}_c = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\vec{V}_0} + \vec{V}_0 = 0 \\ \vec{a}_c = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_0} + \vec{a}_0 = 0 \end{cases}$$

«یعنی نقطه تماس سرعت و شتابش صفر است.»

(مسائل ۵ ـ ٤ و ٦ و ۹)

* جسم صلبی در صفحه در نظر می‌گیریم :



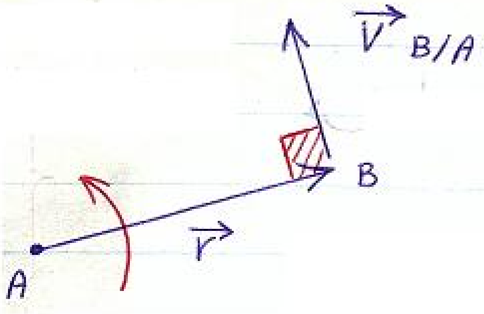
هر حرکت عمومی را می‌توان به صورت حاصل یک انتقال و یک دوران در نظر گرفت :

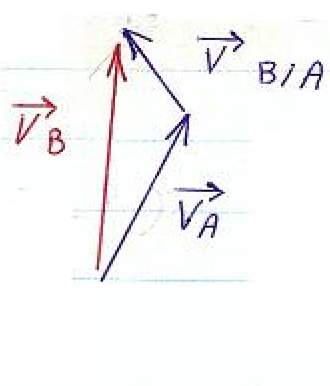
$$\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A + \Delta \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

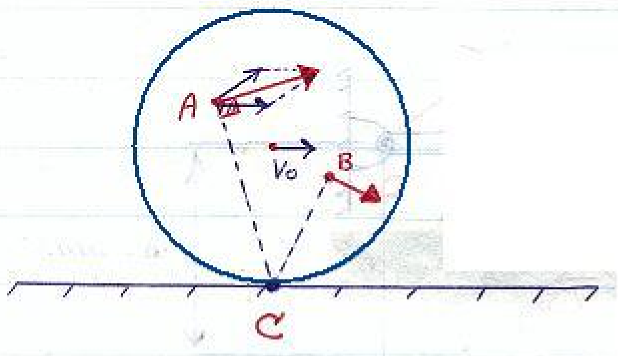
$$V_{B/A} = r\omega$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

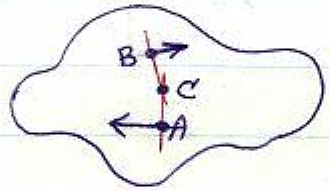




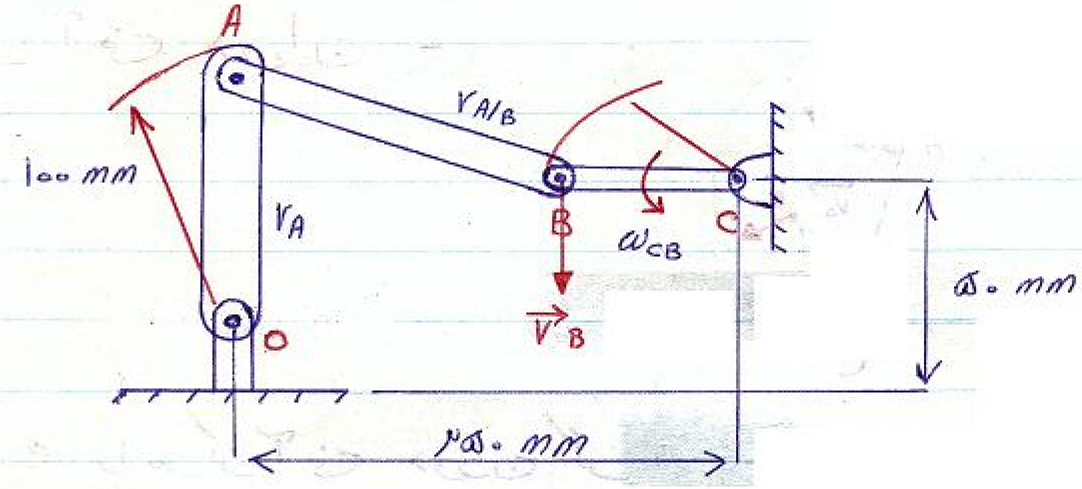
مرکز آنی دوران -



** C را مرکز آنی دوران گویند . برای بدست آوردن آن - دو بردار سرعت مربوط به دو نقطه جسم را در نظر گرفته و دو عمود بر آنها رسم می کنیم و هر جا این عمودها یکدیگر را قطع کنند آن نقطه مرکز آنی دوران است . (ممکن است این نقطه در داخل یا خارج جسم قرار گیرد) .



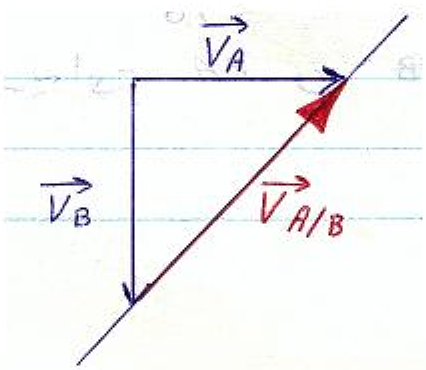
مثال - بازوی CB حول نقطه C دوران کرده (با یک زاویه محدود) و باعث دوران بازوی OA حول O می گردد . زمانی که اتصالات از موقعیت نشان داده شده در حالی که CB افقی و OA عمودی است عبور می کنند سرعت زاویه ای CB CCW ۲ Rad/s است . برای این لحظه - سرعت زاویه ای OA و AB را بیابید .



$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} \\ \vec{V}_C = ۰ \\ \vec{V}_{B/C} = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{BC} \\ V_{BC} = ۲ \times ۰/۰۷۵ = ۰/۱۵۰ \quad m/s \\ \vec{V}_B = \vec{V}_{B/C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V}^{?}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \\ \vec{V}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B} \end{cases}$$

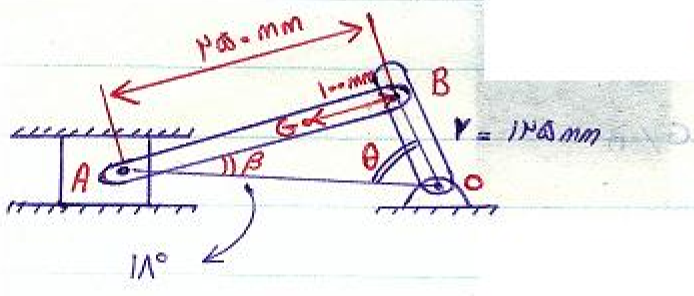
$$\begin{cases} \vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_O}^{\,۰} + \vec{V}_{A/O} \\ \vec{V}_A = \vec{V}_{A/O} = \vec{\omega}_{AO} \times \vec{r}_{AO} \end{cases}$$



* زوایای این مثلث را از روی ابعاد یافته و مثلث را حل می کنیم تا $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_{A/B}$ بدست آید.

($\vec{V}_A = \vec{\omega}_{Ao} \times \vec{r}_{Ao}$ $\Rightarrow$ بدست می آید $\vec{\omega}_{Ao}$)

مثال- درمکانیزم ذیل بازوی OB با سرعت زاویه ای ثابت $1500\ RPM$ CW دوران می کند. برای لحظه نشان داده شده وقتی $\theta = 60°$ است سرعت پیستون A را بیابید. همچنین سرعت زاویه ای میله رابط و سرعت نقطه G روی میله رابط را بدست آورید.



o و A در یک راستا هستند.

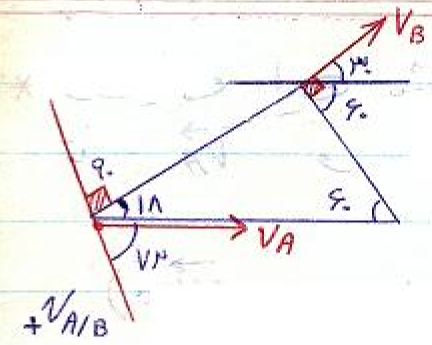
« $\omega_{oB} = 1500\ rpm$ »

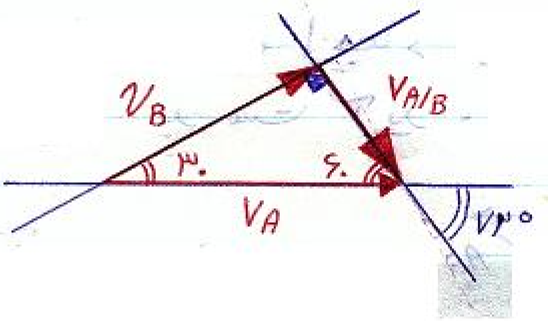
* $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$

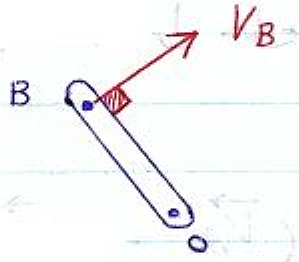
$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_o} + \vec{V}_{B/o}$

$\vec{V}_o = 0$ و $\vec{V}_{B/o} = r\omega = 0.125 \times 1500 \times \frac{2\pi}{60}$

$V_B = V_{B/o} = 19.63\ m/s$







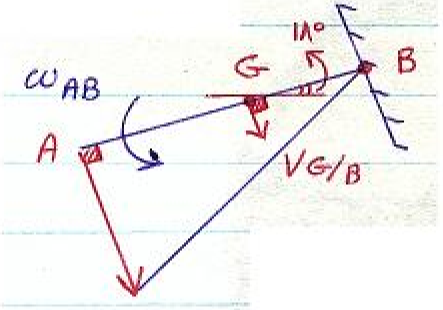
$$\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$|\vec{V}_A| =$ ۲۰/۲ m/s

$|\vec{V}_{A/B}| =$ ۱۰/۳۲ m/s

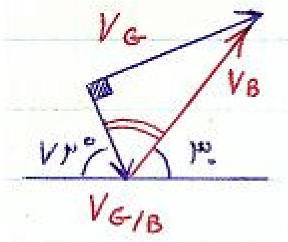
* $\omega_{AB} = \dfrac{V_{AB}}{r_{AB}} =$ ۲۹/۵ rad/s

$$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{V}_{G/B}$$



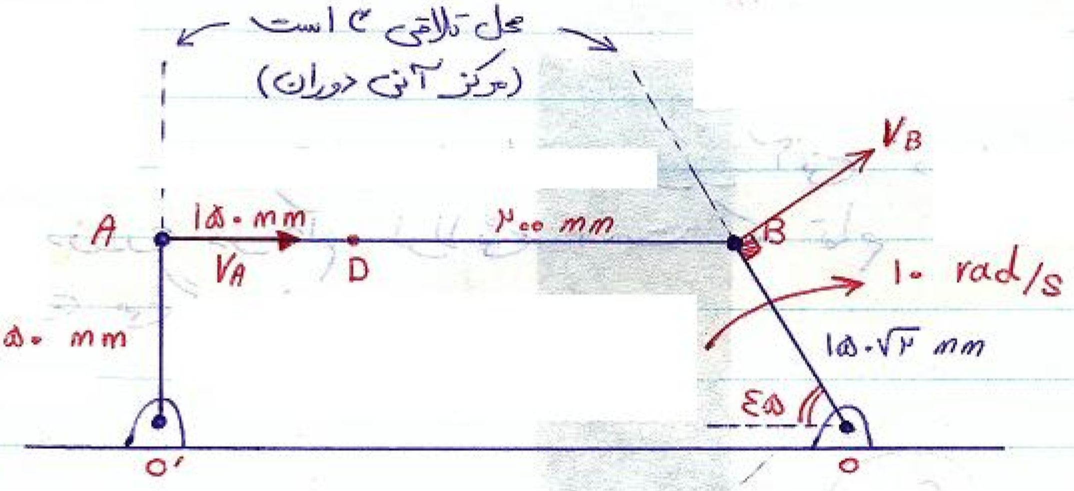
$V_{G/B} = r_{G/B} \times \omega_{AB}$

$V_{G/B} =$ ۰/۱۰۰ × ۲۹/۵ = ۲/۹۵ m/s



(V_G = ۱۹/۲٤ m/s)

مثال-



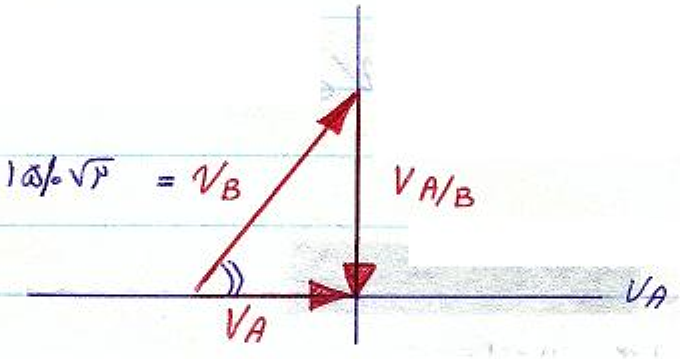
* بازوی OB یک مکانیزم چهار میله‌ای فوق با سرعت زاویه‌ای ۱۰ rad/s CW حرکت می کند. در موقعیت نشان داده شده $\theta = 45°$ است. سرعت نقطه A و D و سرعت زاویه‌ای AB را برای لحظه فوق بیابید.

$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_O} + \vec{V}_{B/O} = \vec{r}_{B/O} \times \omega_{OB}$$

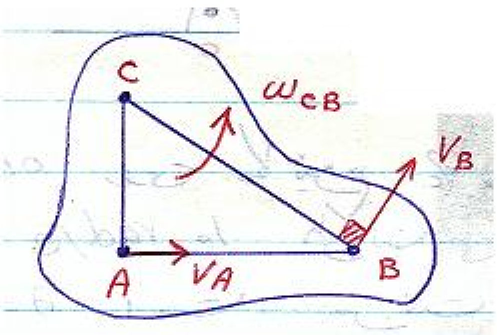
$$V_B = 150\sqrt{2} \times 10^{-3} \times 10 = 1.5\sqrt{2} \quad m/s$$

* برای میله AB $\qquad \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$

* برای میله AO' $\qquad \vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_{O'}} + \vec{V}_{A/O'} = r_{A/O'} \times \omega_{O'A}$



* این مسئله را می توان از راه مرکز آنی دوران حل کرد.
مرکز دوران در حکم لولائی است که تمام نقاط جسم صلب حول آن می گردند.

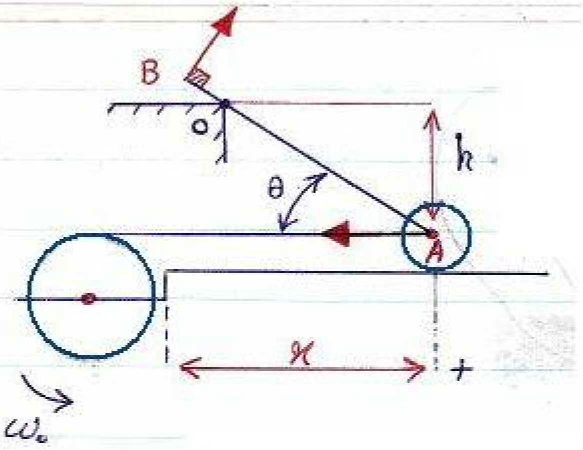


* $\omega_{CB} = \frac{V_B}{BC} = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۳۵۰\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۳}} = ۴۲/۹$ rad/s CCW

$V_A = V_C + V_{A/C}$ $\qquad \omega_{CB} = \frac{V_A}{AC}$

$V_A = \omega_{CB} \times AC = ۴۲/۹ \times ۰/۳۵۰ = ۱۵$ m/s

$\left(\frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_D}{DC} \right)$



«مسأله ۵ـ۹ـ»

$$\begin{cases} V_A = r\omega_0 \\ V_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \end{cases}$$

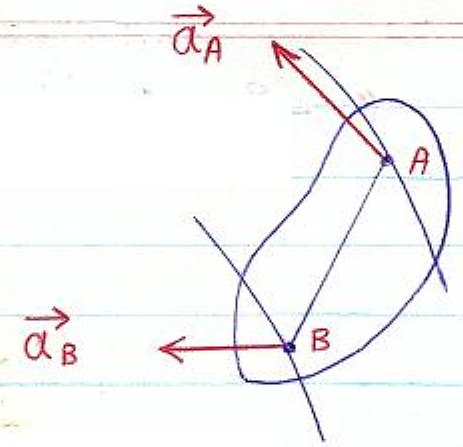
$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{h}{x} & (1+\tan^2\theta)\,\dot{\theta} = -\dfrac{h}{x^2}\dot{x} \\ \omega = \dot{\theta} \quad \text{و} & \dot{\theta}\left(1+\dfrac{h^2}{x^2}\right) = -\dfrac{h}{x^2}\, r\omega_0 \\ \omega = \dot{\theta} = \dfrac{(-h/x^2)\, r\omega_0}{1+h^2/x^2} = \dfrac{+hr\omega_0}{x^2+h^2} \end{cases}$$

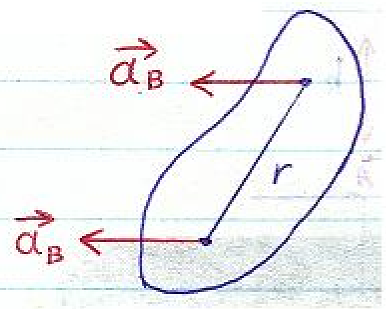
شتاب نسبی برای جسم صلب

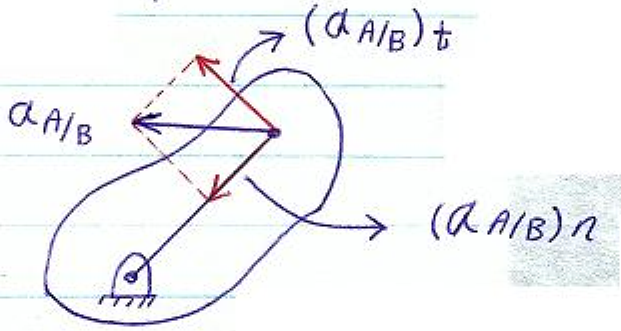
(Relative Accelerate of Rigid Body)

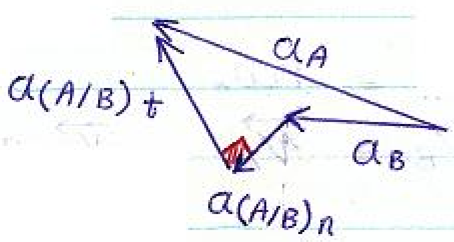
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$





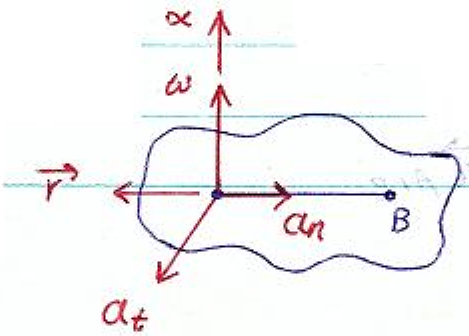




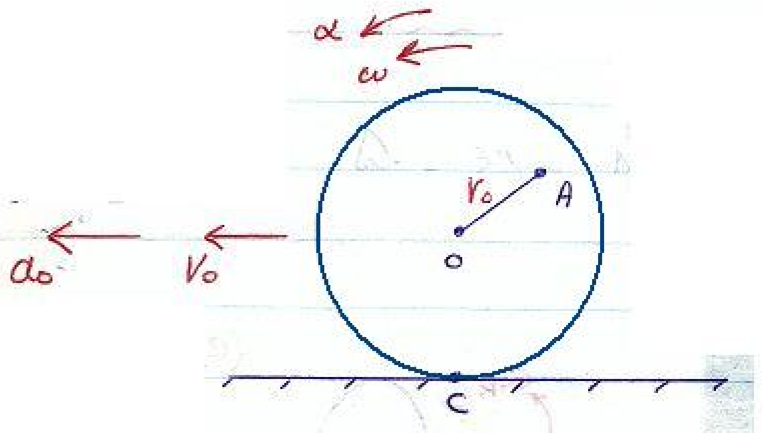
$$
\begin{cases}
\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t \\
(a_{A/B})_n = \dfrac{V_{A/B}^2}{r} = r\omega^2 \\
(a_{A/B})_t = r\alpha
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(\vec{a}_{A/B})_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
(\vec{a}_{A/B})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}
\end{cases}
$$

نگاه از بالا :



مثال - شتاب A و C را واقع بر سیلندر درحال غلطیدن - زیر بیابید .

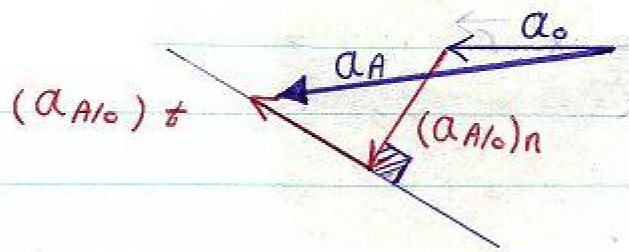


* V_0 و a_0 قبلاً محاسبه شده پس ω و α بدست می‌آید .

$$\left(\omega = \frac{V_0}{r} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{a_0}{r}\right)$$

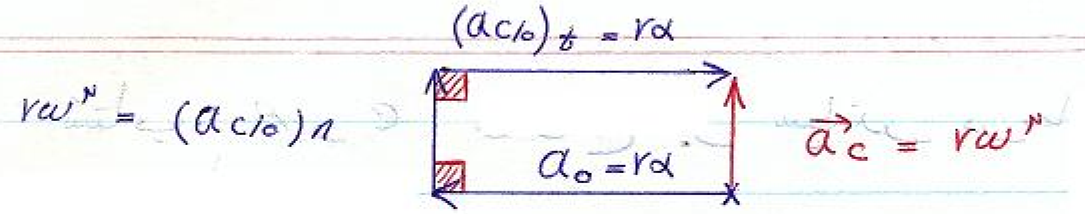
$$\vec{a}_A = \vec{a}_o + (\vec{a}_{A/o})_n + (\vec{a}_{A/o})_t$$

* $(a_{A/o})_n = r_0\,\omega^2$
* $(a_{A/o})_t = r_0\,\alpha$

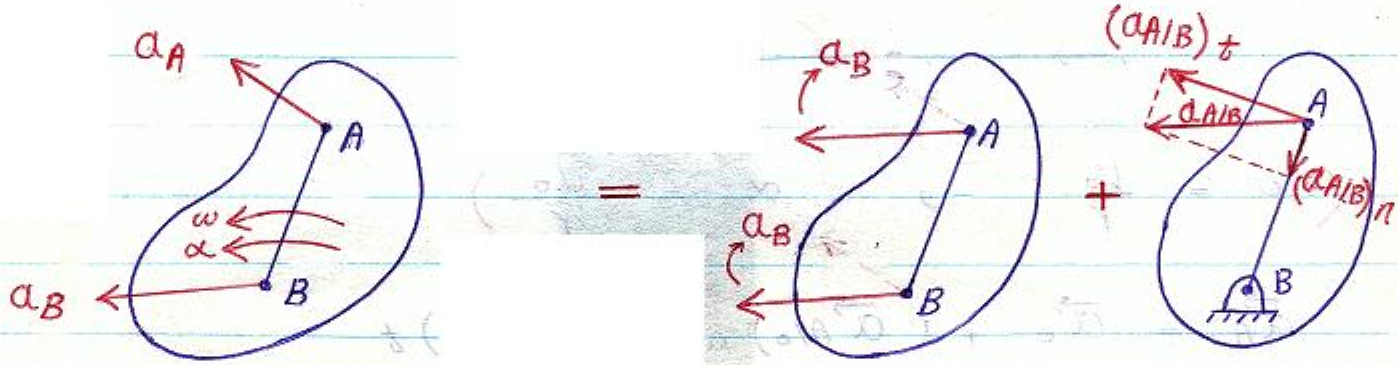


$$(a_{c/o})_n = r\omega^2 = r\left(\frac{V_0}{r}\right)^2 = \frac{V_0^2}{r}$$

$$(a_{c/o})_t = r\alpha$$



تمرینهای ـ ۵ ـ ۲٤ ـ ۲۸ ـ ۳۰ (حل شود)



$$* \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

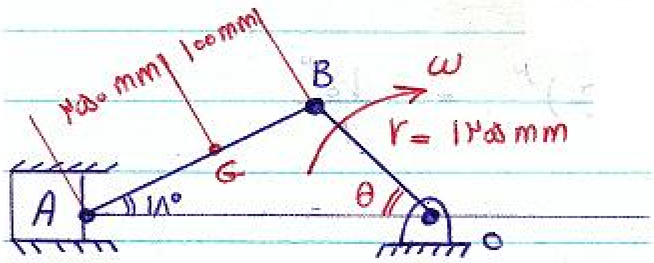
$$(\vec{a}_{A/B})_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$* \quad (a_{A/B})_n = r\omega^2$$

$$* \quad (\vec{a}_{A/B})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$* \quad (a_{A/B})_t = r\alpha$$

مثال ـ



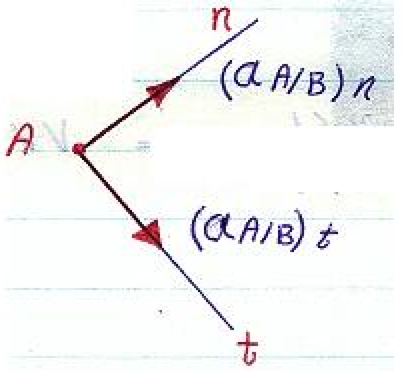
$$\begin{cases} \omega = n = 1500 \ \text{rpm} \quad CW = \text{const} \\ \theta = 60^\circ \\ a_A \ , \ \alpha_{AB} = ? \end{cases}$$

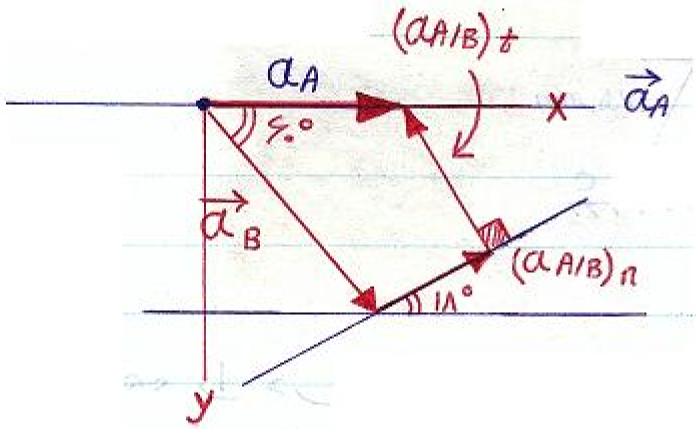
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\cancel{\vec{a}_o}}_{0} + \vec{a}_{B/o} = \underbrace{\cancel{(\vec{a}_{B/o})_t}}_{r\alpha} + \underbrace{(\vec{a}_{B/o})_n}_{r\omega^2}$$

$$= (\vec{a}_{B/o})_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_B = r\omega^2 = 0.125 \times \left(\frac{1500 \times 2\pi}{60} \right)^2 = 3084 \ m/s^2$$





$\ast \ (a_{A/B})_n = r_{AB}\,\omega_{AB}^2$ از حل مثلث سرعتها قبلاً بدست آمده و

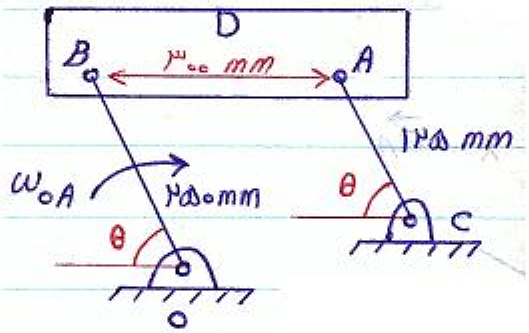
برابر است با : $(a_{A/B})_n = ۳۰۵ \ m/s^2$

* برای یافتن $(a_{A/B})_t$ برداری در انتهای $(a_{A/B})_n$ و عمود بر آن رسم می کنیم. پس $\vec{a}_A$ بدست می آید.

$$\begin{cases} \overset{?}{a}_A = \overset{\checkmark}{a}_B \cos ۶۰ + (\overset{\checkmark}{a}_{A/B})_n \cos ۱۸ = (\overset{?}{a}_{A/B})_t \sin ۱۸ \\ ۰ = a_B \sin ۶۰ - (a_{A/B})_n \sin ۱۸ - (a_{A/B}) \cos ۱۸ \end{cases} \Rightarrow$$

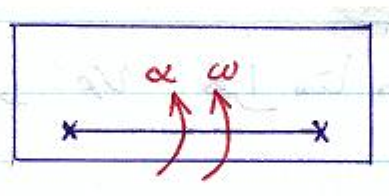
* $a_A = ۹۹۴ \ m/s^2$
* $(a_{A/B})_t = ۲۷۱۰ \ m/s^2$
* $\alpha_{AB} = \dfrac{(a_{A/B})_t}{r_{AB}} = \dfrac{۲۷۱۰}{۰/۳۵۰} = ۷۷۴۰ \ rad/s^2$ CW

مثال -

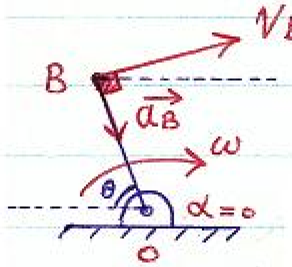


شتاب زاویه ای صفحه را در وضعیت فوق بیابید درحالی که $\omega_{OA} = ۴ \ rad/s$ ، در جهت عقربه های ساعت و ثابت است ، و $\theta = ۶۰°$ است.

* یک مسئله ۳ میله ای است چون می توان خط فرضی بین A و B را که جزئی از صفحه است یک میله و زمین را هم یک میله در نظر بگیریم.



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$



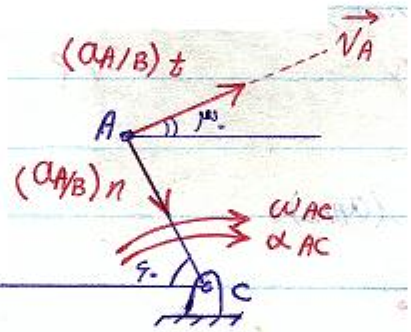
$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_O}^{\,0} + \vec{V}_{B/O} = \vec{\omega}_{OB} \times \vec{r}_{OB}$$

$$\vec{V}_B = 4 \times 0/250 = 1 \ m/s$$

$$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_O}_{\,0} + (\cancel{\vec{a}_{B/O}})_t + (a_{B/O})_n = \vec{\omega}_{OB} \times (\vec{\omega}_{OB} \times \vec{r}_{OB})$$

$$r\alpha = 0 \qquad \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$

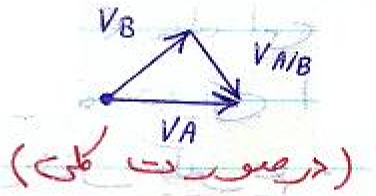
$$\vec{a}_B = r\omega^2 = 0/250 \times (4)^2 = 4 \quad m/s^2$$

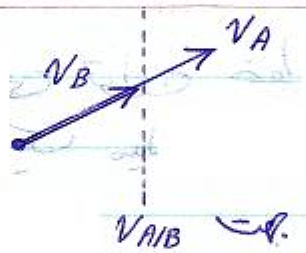


$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

$$\checkmark ? \qquad \checkmark\checkmark \qquad \checkmark ?$$

جهت ← ✓ → مقدار





(دراین مسئله)

* چون V_B و V_A هم‌راستا هستند : $\quad$ * $V_{A/B} = 0$

$$V_{A/B} = 0 = r_{AB}\,\omega_{AB} \quad \Rightarrow$$

* $\omega_{AB} = 0 \quad \longleftarrow$ (فقط به ازای θ های برابر)

$$V_A = V_B = 1\ m/s$$

$$\omega_{AC} = \frac{V_A}{r_{AC}} = \frac{1}{0/125} = 8\ rad/s$$

$$(a_A)_n = r_{AC}\,\omega_{AC}^2 = (0/125)(8)^2 = 8\ m/s^2$$

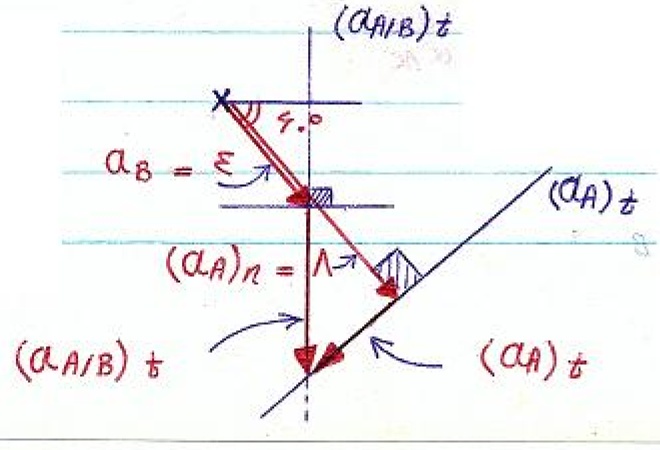
$$(a_{A/B})_n = r_{AB}\,\omega_{AB}^2 = 0$$

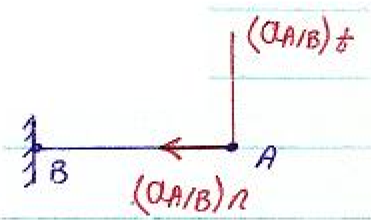
$$(a_{A/B})_t = r_{AB}\,\alpha_{AB}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

?? $\quad$ ✓✓ $\quad$ ✓✓ $\quad$ ✓?

$(a_A)_t + (a_A)_n$





$$٤^{٢} + (a_A)_t^{٢} = (a_{A/B})_t^{٢}$$

$$(٢a_A)_t^{٢}$$

$$(a_A)_t^{٢} = \frac{١٦}{٣} \Rightarrow (a_A)_t = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣} \quad m/s^{٢}$$

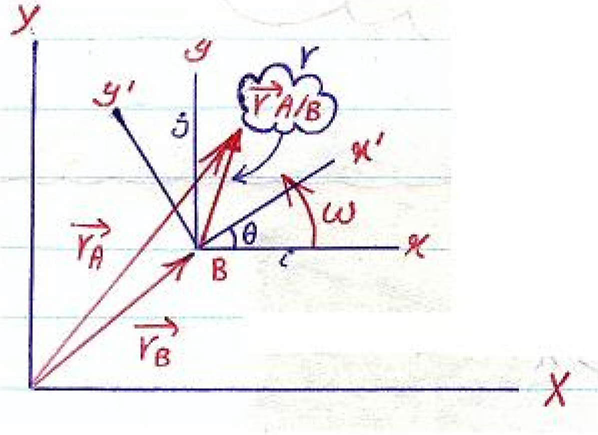
$$(a_{A/B})_t = \sqrt{\frac{٦٤}{٣}} = \frac{٨\sqrt{٣}}{٣}$$

$$(a_{A/B})_n = ٠ \Rightarrow a_{A/B} = \frac{٨\sqrt{٣}}{٣} \quad m/s^{٢}$$

$$(\alpha_{A/B}) = \frac{٨\sqrt{٣}}{٣} / ٠/٣٠٠ = ١٥/٤ \quad rad/s^{٢}$$

« حرکت نسبی با محورهای دوّار »

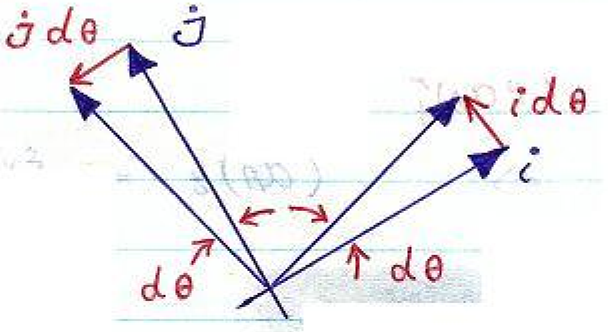
(Motion Relative to Rotating Axis)



$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} = \vec{r}_B + (\hat{i}x + \hat{j}y)$$

$$(r)$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d}{dt}(\hat{i}x + \hat{j}y)$$



$* \; d\theta = \omega \, dt$

$* \; \dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i}$

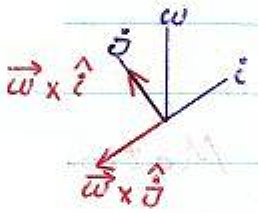
$* \; \dot{\hat{i}} = \omega \hat{j}$

$* \; \dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j}$

$* \; \dot{\hat{j}} = -\omega \hat{i}$

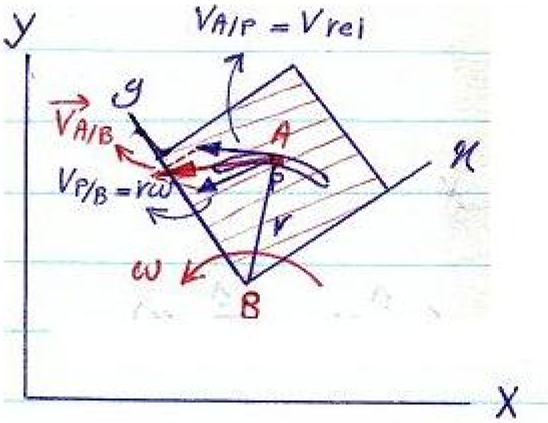
منفی چون خلاف جهت محور x است، در بعلی $\hat{j}$ وجود دارد.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + (\dot{\hat{i}}x + \dot{\hat{j}}y) + (\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y})$$

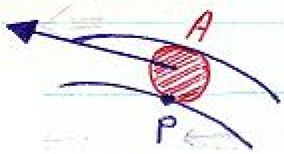


$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

مثال -



$v_{A/P}$ (v_{rel})



$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_{A/P} + \vec{V}_{P/B} = \vec{V}_{A/B} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{A/P}$$

$$* \quad \vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel} \quad *$$

** نتیجه -

$$(\dot{V})_{XY} = (\dot{V})_{xy} + \omega \times V$$

(V : هر بردار دلخواه)

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{V}}_{rel} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{cases} \Rightarrow$$

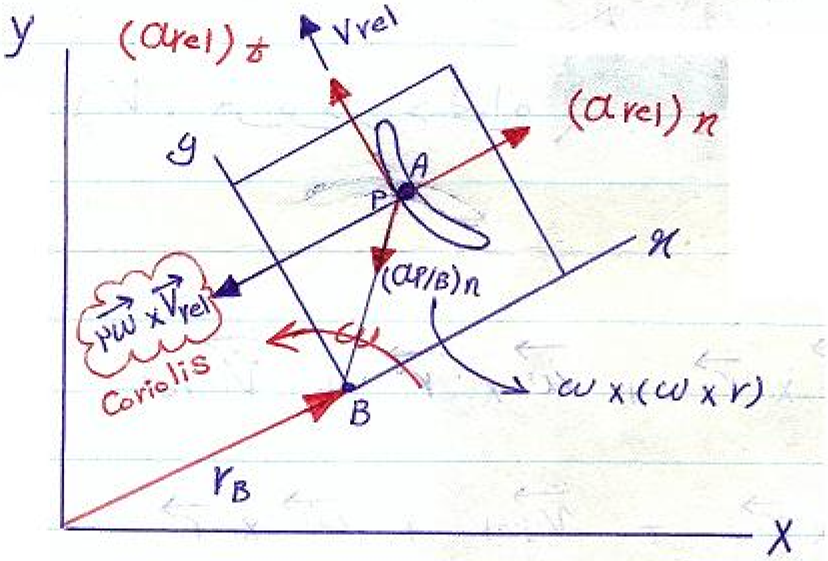
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{V}}_{rel}$$

$$\dot{\vec{V}}_{rel} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$$

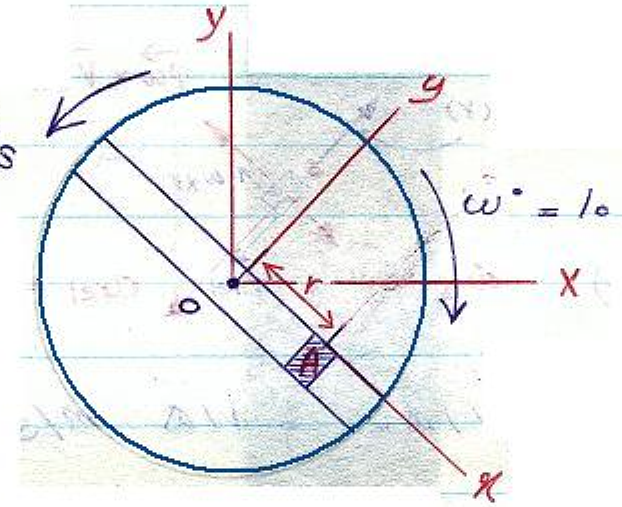
$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}}_{\text{(Coriolis شتاب)}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_{rel}}$$

مثال -



$$(a_{P/B})_t = \alpha \times r = \dot{\omega} \times r$$

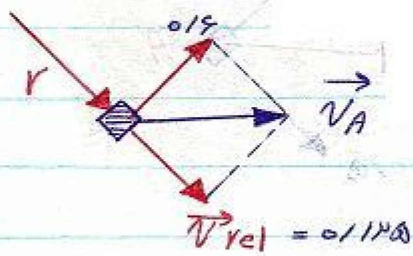
مثال - در لحظه نشان داده شده دیسکی با شیار شعاعی با سرعت زاویه ای $4\ rad/s$ ccw در حال دوران است که این سرعت با نرخ $10\ rad/s^2$ کاهش می یابد و حرکت لغزنده A بطور جداگانه کنترل شده و در لحظه $r = 150\ mm$ ، $\dot{r} = 125\ mm/s$ و $\ddot{r} = 2025\ mm/s^2$ سرعت و شتاب مطلق A را در این وضعیت بیابید.



$$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_B} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$$r\omega = 0/150 \times 4 = 0/6\ m/s$$

$$\vec{V}_{rel} = \dot{\vec{r}} = 0/125\ m/s$$

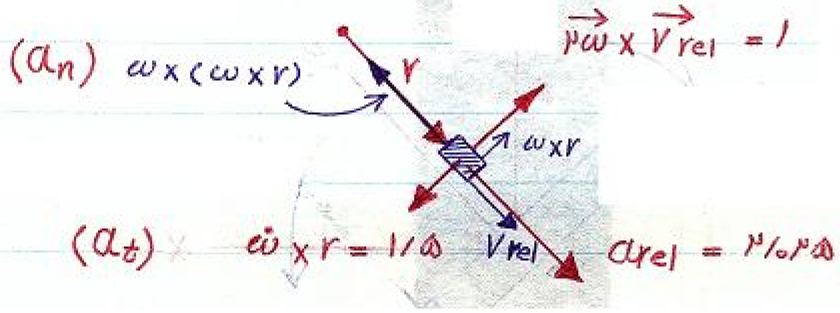


$$\vec{V}_A = \sqrt{0/6^2 + 0/125^2} = 0/613\ m/s$$

* $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$

* $\vec{a}_A = \underbrace{\cancel{\vec{a}_B}}_{۰} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + ۲\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \omega \times (\omega \times r) + \vec{a}_{rel}$

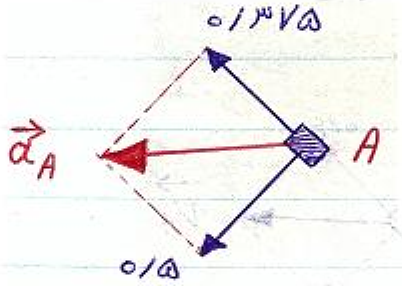
* $|\vec{a}_{rel}| = \ddot{r} = ۲/۰۲۵ \ m/s^۲$



$|\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}| = ۱۰ \times ۰/۱۵۰ = ۱/۵ \ m/s^۲$

$|۲\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}| = ۲ \times ۴ \times ۰/۱۲۵ = ۱ \ m/s^۲$

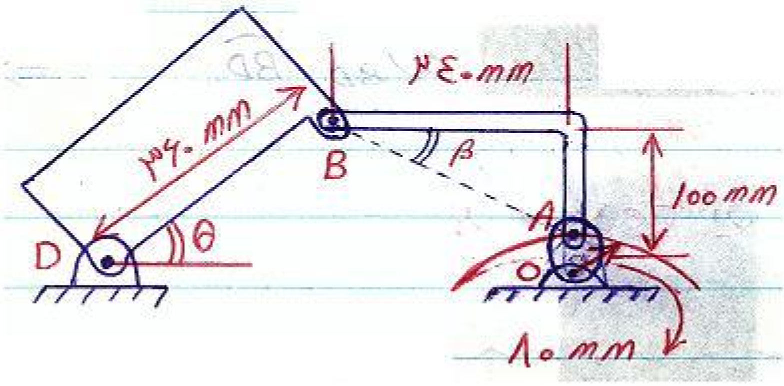
$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = r\omega^۲ = ۰/۱۵۰ \ (۴)^۲ = ۲/۴ \ m/s^۲$



مسائل ۵ - ۵۹ - ۶۱ - ۶۵

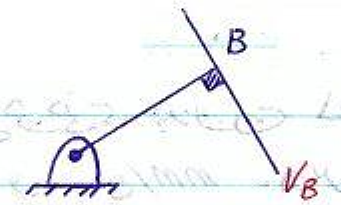
* $\vec{a}_A = ۰/۶۲۵ \ m/s^۲$ *

مثال - OA با سرعت ثابت $\omega_{OA} =$ ۱۲۰ rev/min CW = Const
اگر OA قائم بوده و θ = ۳۰° باشد سرعت BD را بیابید.

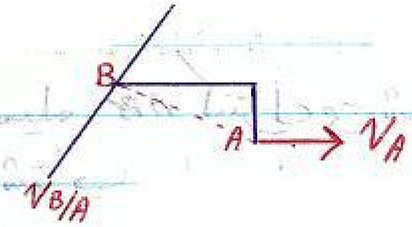


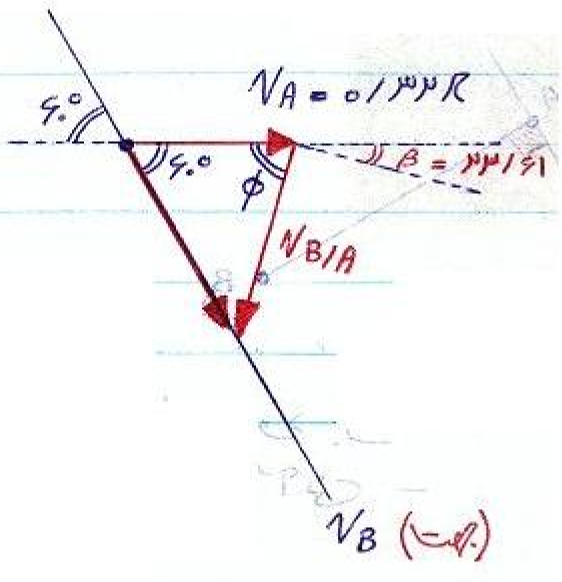
* $v_A = \omega_{OA}\,\overline{OA}$ = ۴π × ۰/۰۸۰ = ۰/۳۲π m/s

* $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$
؟؟   √√   √؟



$\vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_D} + v_{B/D}$
√؟   ۰





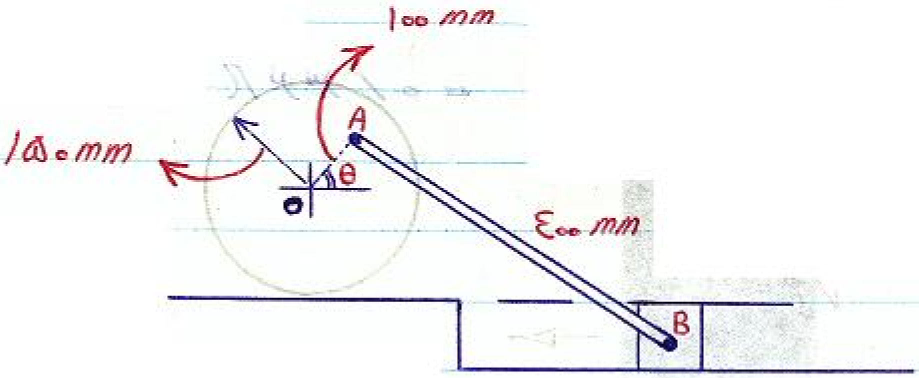
$$\begin{cases} V_A = V_B \cos 60 + V_{B/A} \cos(90 - 33.6) \\ V_B \sin 60 = V_{B/A} \sin(90 - 33.6) \end{cases}$$

$\phi = 180 - 90 - 33.6$

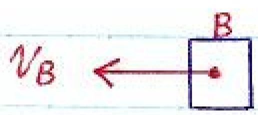
$\Rightarrow V_B \Rightarrow \overset{\checkmark\checkmark}{V_B} = \omega_{BD}\, \overline{BD} \Rightarrow$

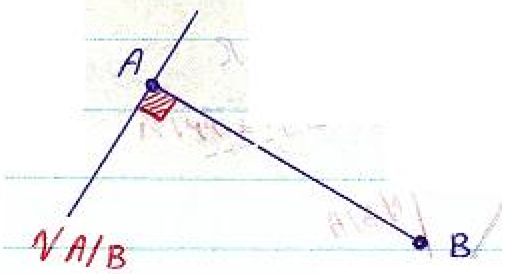
((ω_{BD} CW)) بدست می‌آید

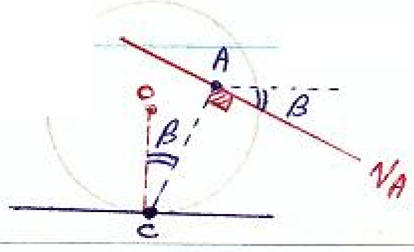
مثال-



چرخ بدون لغزش می غلطد و توسط میله AB کنترل می‌شود و $V_B = 250\ mm/s$ به سمت چپ. شتاب زاویه‌ای AB و سرعت نقطه O را وقتی $\theta = 0$ است بیابید.





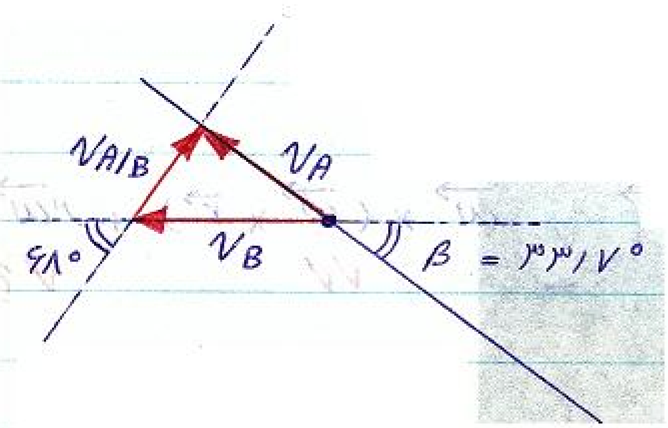


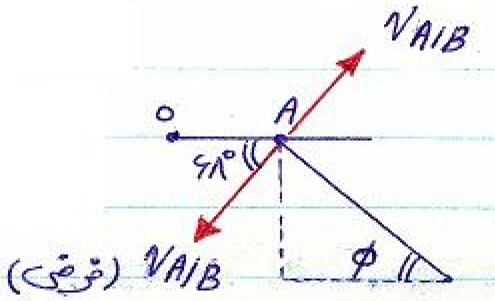
* سرعت A در هر لحظه عمود بر خط واصل از آن به مرکز آنی دوران است.

$$\boxed{\beta = \tan^{-1}\frac{100}{150}}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

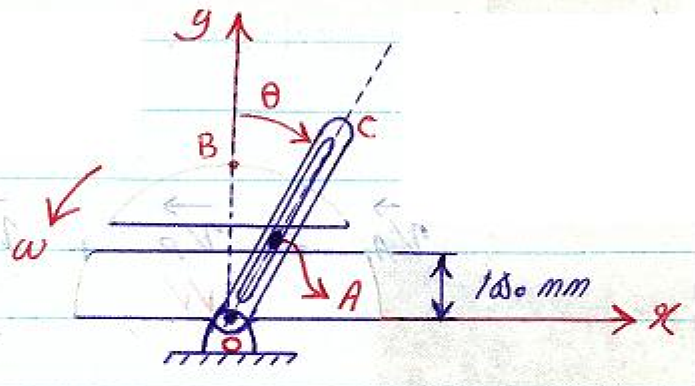
?? √√ √?



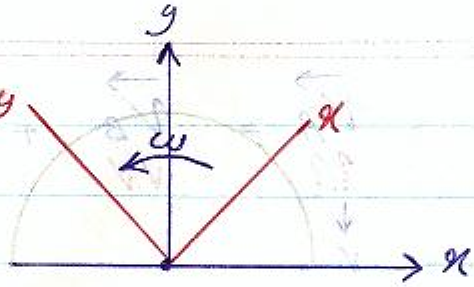


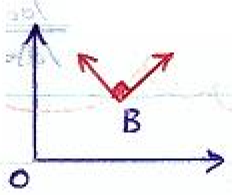
مسائل شتاب -

مثال -



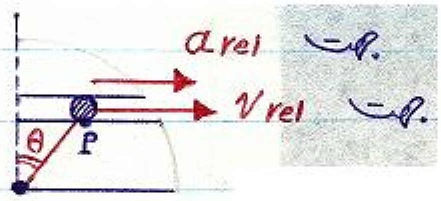
* بازوی OC در هنگام دوران دیسک در طول شیار نوسان می‌کند. ω دیسک ۳ rad/s CCW است و نوسان میله به قسمی است که $\dot{\theta}$ = ۲ rad/s CW و در حالتی که θ = ۳۰° است شتاب کلی پین را بیابید.





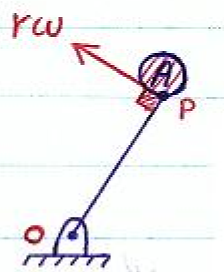
$$\vec{a}_n = r\omega^2$$

$$\vec{a}_A = \underset{0}{\vec{a}_B} + \underset{0}{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}} + \underset{\surd\surd}{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} + \underset{\surd ?}{2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}} + \underset{\surd ?}{\vec{a}_{rel}}$$



$$\vec{a}_A = \underset{\surd\surd}{\overset{(r\dot{\theta}^2)}{(\vec{a}_A)_n}} + \underset{\surd ?}{(\vec{a}_A)_t}$$

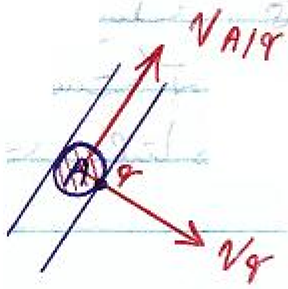
در شیار



$$\vec{V}_A = \underset{\surd\surd}{\vec{V}_P} + \underbrace{\vec{V}_{A/P}}_{V_{rel}}$$

چون P متعلق به دیسک است.

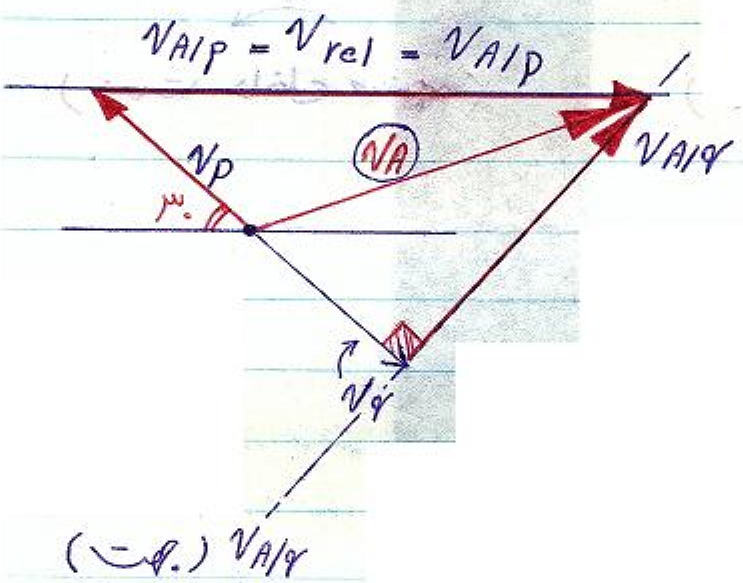
در بازو

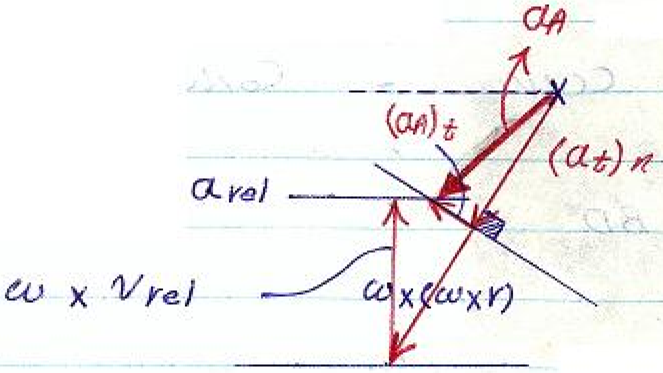


$$\vec{V}_A = \underset{\surd\surd}{\vec{V}_q} + \underset{\surd ?}{\vec{V}_{A/q}}$$

* A نمی تواند دو سرعت داشته باشد پس طرف ثانی معادلات فوق باهم برابر است .

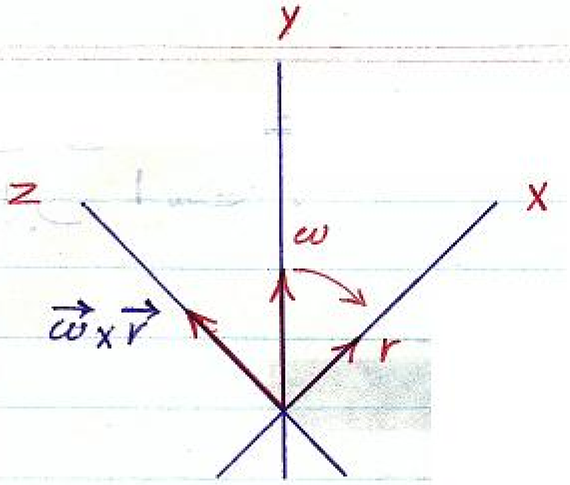
$$\begin{cases} |\vec{V}_P| = ۳ \times \dfrac{۰/۱۵۰}{\cos ۳۰} \\ |\vec{V}_Q| = ۲ \times \dfrac{۰/۱۵۰}{\cos ۳۰} \end{cases}$$





* شتاب Coriolis همواره عمود بر سرعت است و جهت آن بر طبق قاعده بدست می آید .

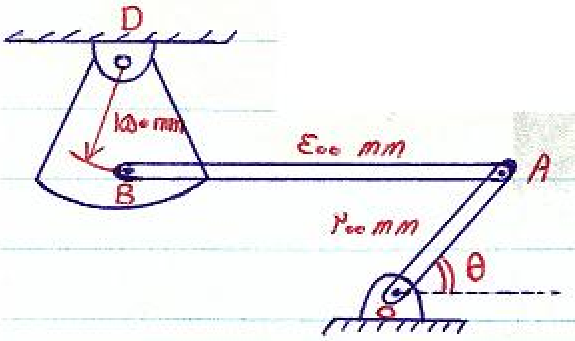
نکته -



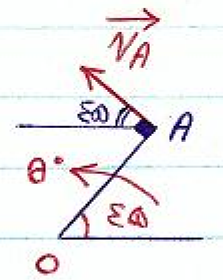
$\overset{\omega}{\curvearrowleft}$ (بسمت خارج صفحه)

$\overset{\omega}{\curvearrowright}$ (بسمت داخل صفحه)

مثال -



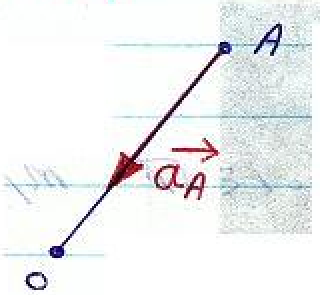
$$\begin{cases} \omega_{OA} = \dot{\theta} = 4 \ rad/s \ \ ccw = Const \\ \theta = 45^\circ \\ \text{افقی } AB \qquad \text{قائم } BD \\ \alpha_{BD} = ? \end{cases}$$



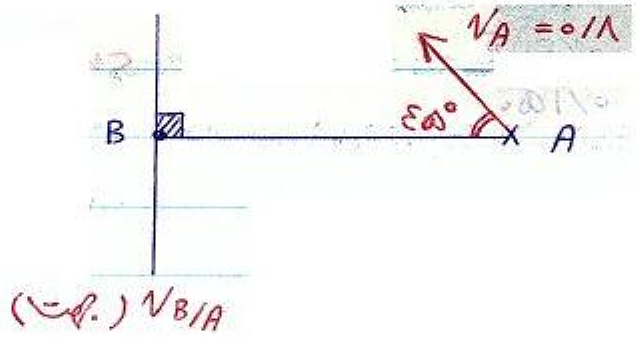
$$* \quad \vec{V}_A = \underset{0}{\cancel{\vec{V}_o}} + \vec{V}_{A/o}$$

$$* \quad V_A = \overline{OA} \cdot \dot{\theta} = 0.200 \times 4 = 0.8 \ m/s$$

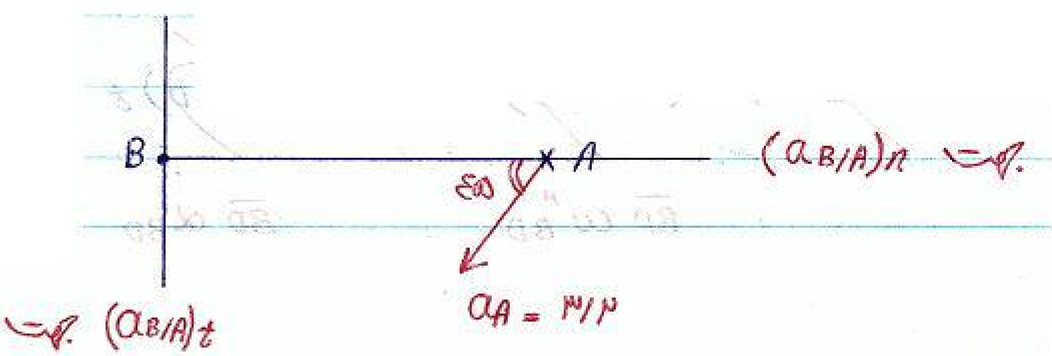
$$* \quad \vec{a}_A = \underset{0}{\cancel{\vec{a}_o}} + \underset{r\alpha_{OA}}{(\vec{a}_{A/o})_t} + \underset{\overline{OA}\,\omega^2_{OA}}{(\vec{a}_{A/o})_n}$$



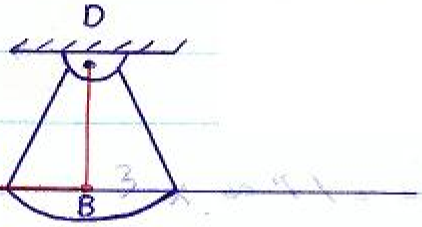
$$* \quad a_A = \overline{OA} \cdot \dot{\theta}^2 = 0.2\,(4)^2 = 3.2 \ m/s^2$$



$$* \quad \underset{??}{\vec{V}_B} = \underset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \underset{\checkmark ?}{\vec{V}_{B/A}}$$



ازروی مثلث سرعتها



جهت $\vec{V}_B$:

$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_D} + \vec{V}_{B/D}$$

$V?$ $\quad$ ٠ $\quad$ $V?$

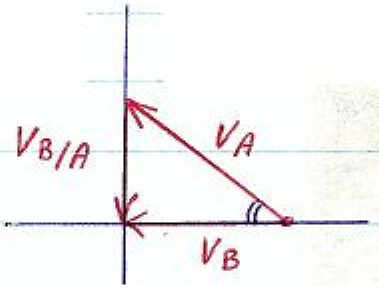
$$V_B = V_A \cos ٤٥$$

$$V_B = ٠/٨ \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٠/٤\sqrt{٢} \ m/s$$

$$V_{B/A} = V_B = ٠/٤\sqrt{٢} \ m/s$$

$$\omega_{AB} = \dot{\theta}_{AB} = \frac{V_{B/A}}{\overline{BA}} = \frac{٠/٤\sqrt{٢}}{٠/٤} = \sqrt{٢} \ rad/s \ \text{ccw}$$

$$\omega_{BD} = \frac{V_B}{\overline{BD}} = \frac{٠/٤\sqrt{٢}}{٠/١٥٠} \ rad/s \ \text{cw}$$

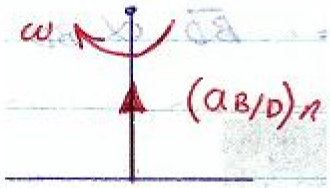


« مثلث سرعتها »

$$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_D} + (\vec{a}_{B/D})_n + (\vec{a}_{B/D})_t$$

٠ $\quad$ $\overline{BD}\,\omega_{BD}^2$ $\quad$ $\overline{BD}\,\alpha_{BD}$

* $(a_{B/D})_n = 0.1150 \times \left(\frac{0.4\sqrt{2}}{0.1150}\right)^2 = 2000\ m/s^2$

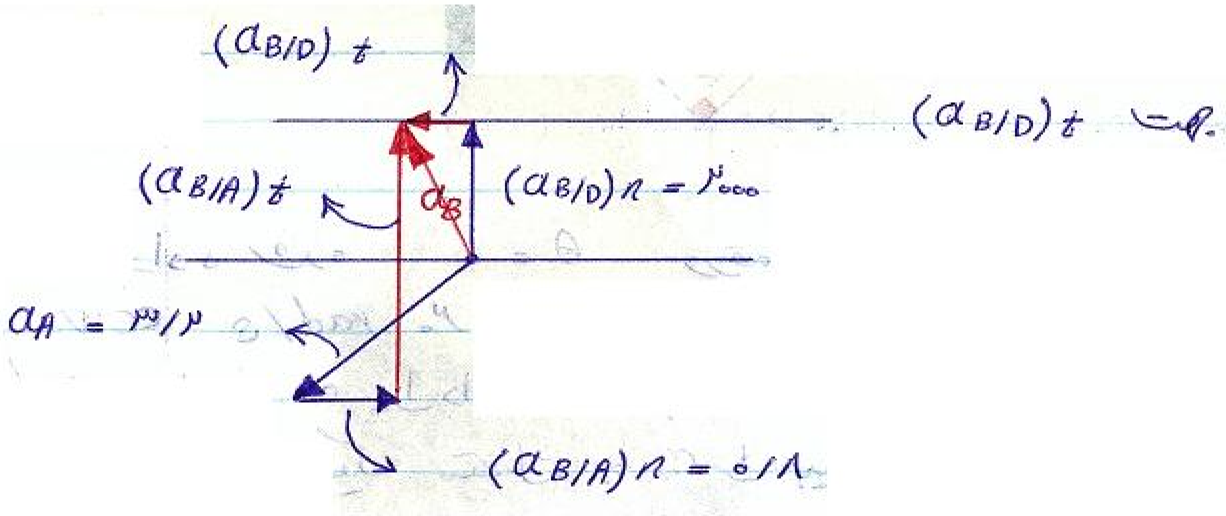


* $(a_{B/D})_n + (a_{B/D})_t = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

$\quad\checkmark\checkmark \qquad\quad \checkmark ? \qquad\quad \checkmark\checkmark \qquad\quad \checkmark\checkmark \qquad\quad \checkmark ?$

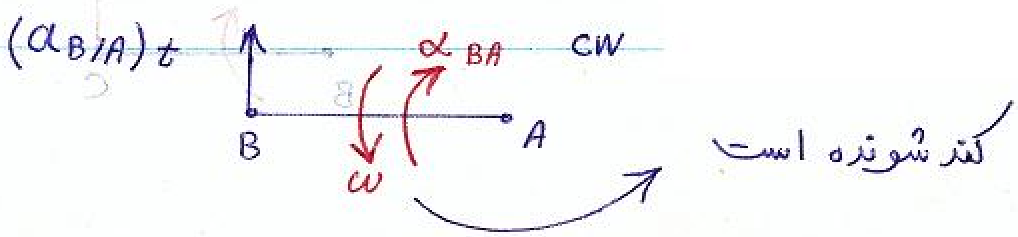
* $(a_{B/A})_n = \overline{BA}\ \omega_{BA}^2 = 0.4\,(\sqrt{2})^2 = 0.8\ m/s^2$

* پس یک دو معادله و دو مجهول داریم که به طریق برداری
آن را حل می کنیم:



* $(a_{B/A})_t = (a_{B/D})_n + a_A \cos 45$
$\qquad = 2000 + 3.2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{BA}\ \alpha_{BA}$

$\alpha_{BA} \downarrow$ CW



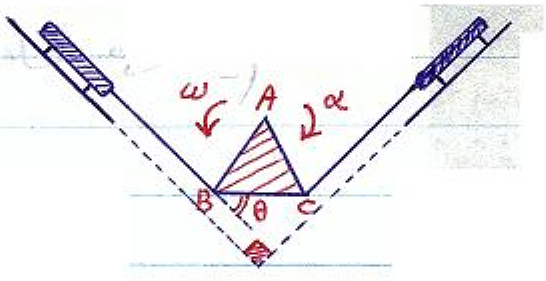
$$(a_{B/D})_t = a_A \cos ٤۵ - \underset{۰/۸}{(a_{B/A})_n}$$

$$= ۳/۲ \cos ٤۵ - ۰/۸ = \overline{BD}\,\alpha_{BD}$$

امتحان ترم

* ۱ مسئله حرکت جسم صلب (سینماتیک)
* ۱ " محورهای مختصات دوار
* ۱ " انتخابی از فصلهای گذشته تا ضربه
* ۱ " حرکت نسبی و فصل چهار

مثال -

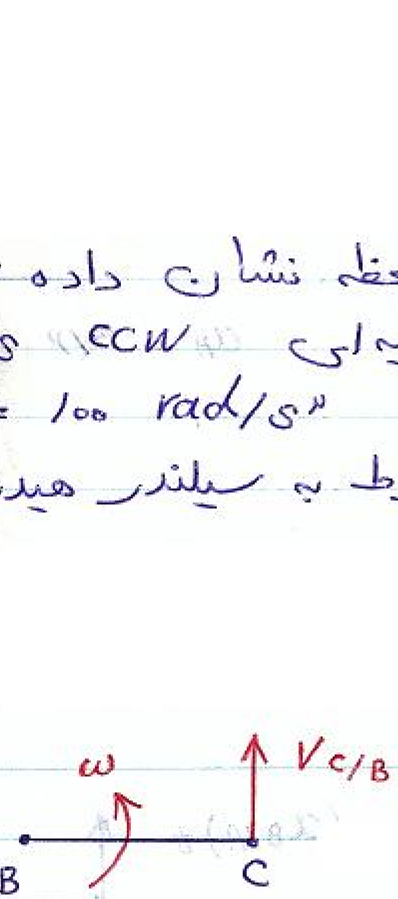


* در لحظه نشان داده شده $\theta =$ ورقه فلزی ABC سرعت زاویه‌ای $\omega = ۳۰\ rad/s$ CCW و شتاب زاویه‌ای $\alpha = ۱۰۰\ rad/s^۲$ CW را دارد. سرعت و شتاب پیستون مربوط به سیلندر هیدرولیک متصل به C را بیابید.

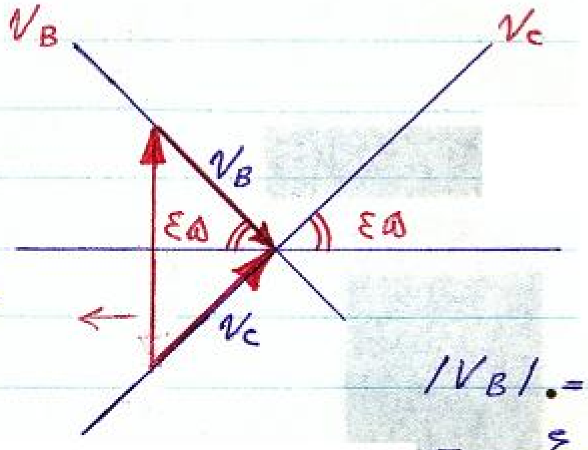
$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

$$\begin{array}{ccc} \surd ? & \surd ? & \surd\surd \end{array}$$

فقط در جهت پیستون



$v_{C/B} = \overline{CB}\,\omega$ = ۰/۳۰۰ × ۲۰ = ۶ m/s

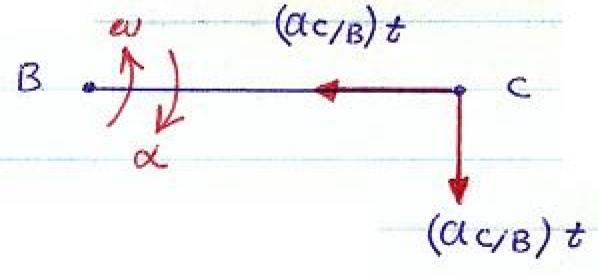


$v_{C/B}$ = ۶

$|v_B| = |v_C| = \frac{1}{\sqrt{۲}}$ ۶ $= \frac{۶}{\sqrt{۲}}$ m/s

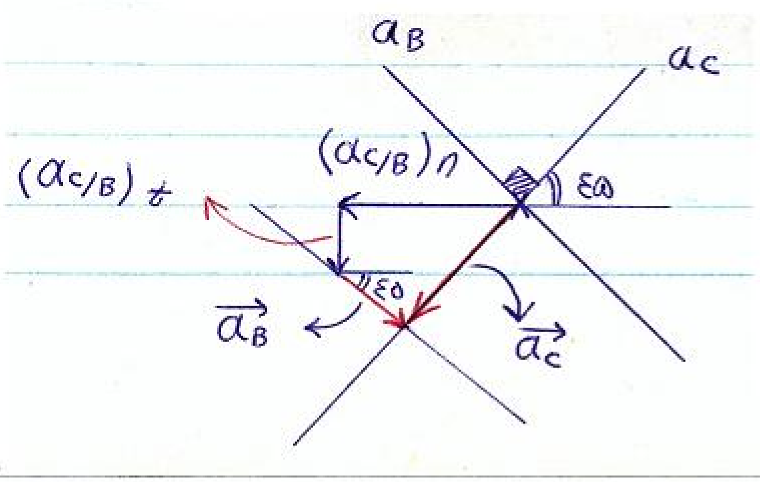
$\vec{a}_C = \vec{a}_B + (\vec{a}_{C/B})_n + (\vec{a}_{C/B})_t$

√? √? √√



$(a_{C/B})_n = \overline{BC}\,\omega^2$ = ۰/۳ × ۲۰^۲ = ۱۲۰ m/s^۲

$(a_{C/B})_t = \overline{BC}\,\alpha$ = ۰/۳ × ۱۰۰ = ۳۰ m/s^۲



خدمات فنی قابل ارائه از طرف شرکت مهندسی **پتروپالامحور** :

- طراحی سیستم های لوله کشی (Piping)
- طراحی سیستم های مکانیکی ثابت (Fixed Equipment)
- طراحی سیستم های مکانیکی دوار (Rotary Equipment)
- طراحی سیستم های تاسیسات مکانیکی و تهویه مطبوع (Plumbing & HVAC)
- طراحی تاسیسات مکانیکی زیربنائی
- طراحی سیویل و سازه در پروژه های عمرانی و صنعتی

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

کیفیت تعهد ماست