تحلیل سازه (۱)

★ سرفصل های درس :

۱ـ پایداری و معینی

۲ـ تحلیل سازه های معین (تیرها ، خرپاها ، قوس ها ، قاب ها و ...)

۳ـ تغییرشکل (تغییرمکان سازه)
- الف) روش سطح لنگر
- ب) بار الاستیک
- ج) تیر مزدوج

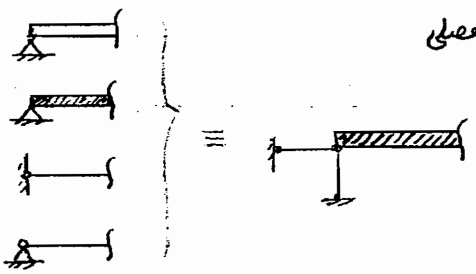
۴ـ روش های انرژی
- الف) کار مجازی (بار واحد)
- ب) روش کار حقیقی (حداکثر تغییرمکان در اثر ضربه)
- ج) قضیه اول کاستیلیانو (تحلیل سازه های نامعین با روش تغییرمکان)
- د) قضیه دوم کاستیلیانو
- هـ) قضیه کراتی ـ انگسر
- و) قضیه تقابل (کار و تغییرمکان)

۵ـ تحلیل سازه های نامعین (روش نیرو)
- الف) روش بار واحد
- ب) روش حداقل کار
- ج) روش سه لنگری

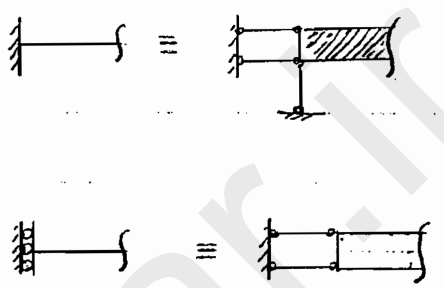
۶ـ خط تأثیر
- الف) سازه های معین
- ب) سازه های نامعین

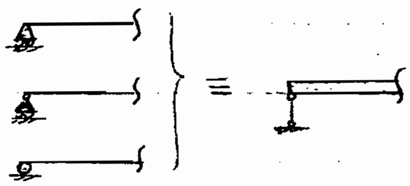
« شبیه سازی تکیه‌گاه‌ها :

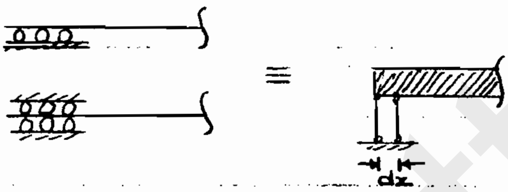
◄ تکیه‌گاه مفصلی



◄ گیردار کامل







« این فاصله کم جلوی θ را می‌گیرد.

$n = r - (c+3)$

n ↓ درجه نامعینی — c ↓ تعداد معادلات شرط

★ $n<0$ ← سازه ناپایدار

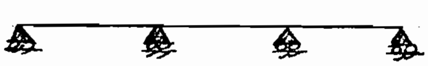
★ $n=0$ ← سازه معین و پایدار (به شرط عدم ناپایداری هندسی)

★ $n>0$ ← سازه نامعین و پایدار (به شرط عدم ناپایداری هندسی)

$n = 3-3 = 0$ معین و پایدار

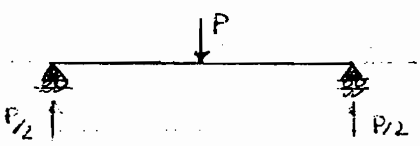
$n = 3-3 = 0$

از نظر هندسی ناپایدار است. (نیروهای موازی)



$n = 4-3 = 1$

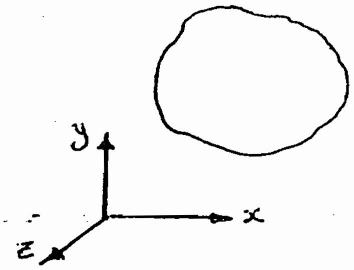
نامعین و ناپایدار



ناپایدار (چون تحت هر بارگذاری باید پایدار باشد)

سازه بالا تحت بارگذاری قائم پایدار است ولی تحت بارگذاری افقی ناپایدار می‌باشد.

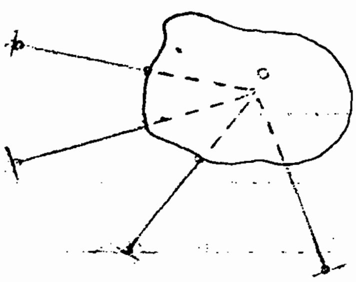
★ پایداری هندسی :

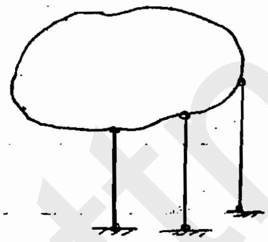


$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

◄ برای اینکه جسم دارای حرکت نباشد
حداقل سه قید نیاز داریم .

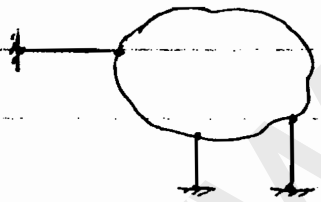
★ برای پایداری یک جسم ، عکس العمل ها نباید موازی باشند و یا در یک نقطه همدیگر را قطع کنند .
اگر این اتفاق رخ دهد ناپایداری هندسی خارجی ایجاد می شود .





★ اگر قیدها کمی حرکت کنند
آنگاه سازه ناپایدار می شود.

« عکس العمل ها باید مستقل باشند تا پایداری برقرار شود .



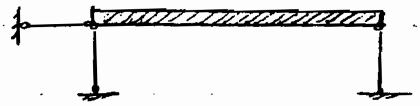
◄ سازه پایدار

◄ تیرها :

یک بعد تیرها از دیگری خیلی کوچکتر است .

- $(\frac{h}{\ell})$ کوچک است درنتیجه از $(\frac{h}{\ell})^2$ درمقابل $(\frac{h}{\ell})$ صرف نظر می کنیم .
- $(\frac{b}{\ell})$ کوچک است درنتیجه از $(\frac{b}{\ell})^2$ درمقابل $(\frac{b}{\ell})$ صرف نظر می کنیم .

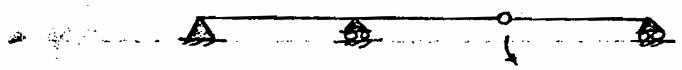
★ اگر تیر پیوسته باشد ، ازنظر داخلی پایدار است .
سازه پایدار ، سازه ای است که هر باری روی آن بگذاریم تعادل داشته باشد .



▲ یک سازه پایدار داخلی و خارجی

• ناپایداری هندسی
- خارجی ← نوع قرارگیری قیدها (موازی و یا متقارب)
- داخلی ← مثلاً در تیرها مفصل داشته باشیم.

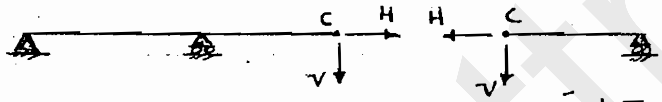
▲ ناپایداری هندسی داخلی :



مفصل خنثی

★ لنگر در خود مفصل هم صفر است.

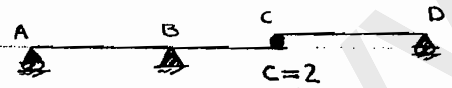
★ در این نوع مفصل شیب دو طرف می‌تواند متفاوت باشد اما اگر نقطهٔ عادی بود، نمی‌توانست متفاوت باشد.

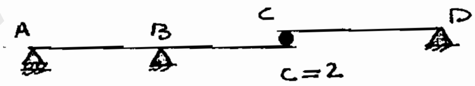


$c=1$

$\Sigma M_c=0$ چپ $\qquad$ $\Sigma M_c=0$ راست

این دو معادله در حقیقت یک معادله هستند بنابراین c یکی اضافه می‌شود



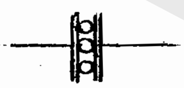


▲ در این نوع مفصل نیروی افقی و لنگر خمشی صفر است.

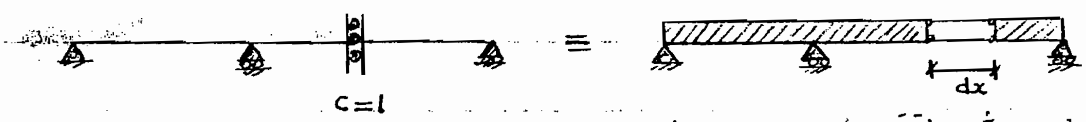
$n=4-(2+3)=-1$ ناپایدار

$n=5-(2+3)=0$ پایدار و معین

AB پایدار و CD پایدار ⇐ کل سازه پایدار



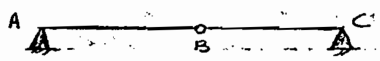
مفصل برشی ⇒ حرکت در جهت x نداریم، ناپیوستگی θ ⇒ نیروی برشی = 0



(ناپایدار)

★ نیروی برشی را انتقال نمی‌دهد و θ دو طرف برابر

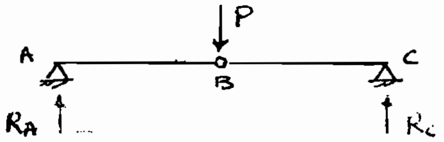
$n=4-(1+3)=0$



$n=4-(1+3)=0$

حول B دوران داریم ← ناپایداری هندسی داخلی

★ حالا با روش اعمال نیرو ، ناپایداری این سازه را ثابت می‌کنیم . به این ترتیب که در نقطهٔ B یک نیروی P وارد می‌کنیم و داریم :

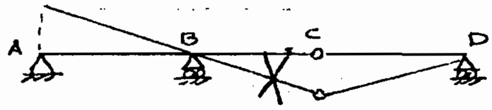


$\Sigma M_{BR} = 0 \Rightarrow R_C = 0$

$\Sigma M_{BL} = 0 \Rightarrow R_A = 0$

$\Sigma F_y = P \neq 0 \rightarrow$ سازه ناپایدار است

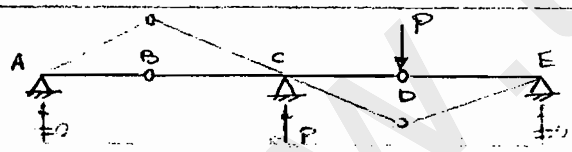
◄ ناپایدار آنی : به محض اینکه نیروی P وارد شود سازه ناپایدار می‌شود .



★ در سازه روبه‌رو اگر نقطهٔ C پایین بیاید ، نقطهٔ A باید بالا رود ولی امکان‌پذیر نیست .

★ پایداری قسمت ABC ، پایداری CD را در پی دارد .

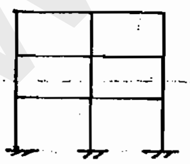
« اگر سازه تبدیل به مکانیسم بشود (یعنی حرکت داشته باشد) ، ناپایدار است .



★ سازه تبدیل به مکانیسم می‌شود بنابراین سازه ناپایدار است .

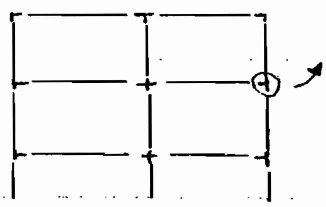
$\Sigma M_E = Pl \neq 0$ ناپایداری هندسی داخلی

◄ قاب‌ها :



تفاوت قاب و خرپا این است که اتصالات خرپا مفصلی است ولی اتصالات قاب ، صلب است یعنی زاویهٔ اتصال بعد از تغییر شکل تغییر نمی‌کند . (قاب خمشی)

می‌توان گفت خرپا صورت خاصی از قاب است که تمامی اتصالاتش مفصلی است .



◄ هر گره در حال تعادل است .

راه اول) با هر برش ، سه مولفهٔ مجهول بوجود می‌آید .

$n = 3m + r - (3j + c)$

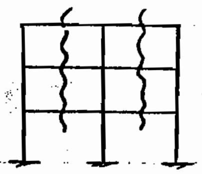
تعداد اعضا — عکس‌العمل‌ها — تعداد اتصالات

◄ درقاب بالا داریم : $n = 3(15) + 9 - 3(12) = 18$

18 درجه نامعین و پایدار

سازه‌ای که کاملاً پیوسته و یکپارچه باشد از لحاظ داخلی پایدار است .

راه دوم) قاب را تبدیل به چند درخت می‌کنیم که هر درخت باید در تعادل باشد .



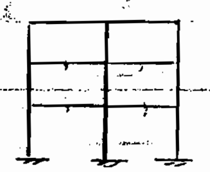
« اگر مفصل را برش بزنیم ، دو مجهول ایجاد می‌شود .

$n = \underbrace{F}_{\text{تعداد مجهولات}} - (3\underbrace{t}_{\text{تعداد درخت‌ها}} + C)$

$n = 27 - (3\times3) = 18$

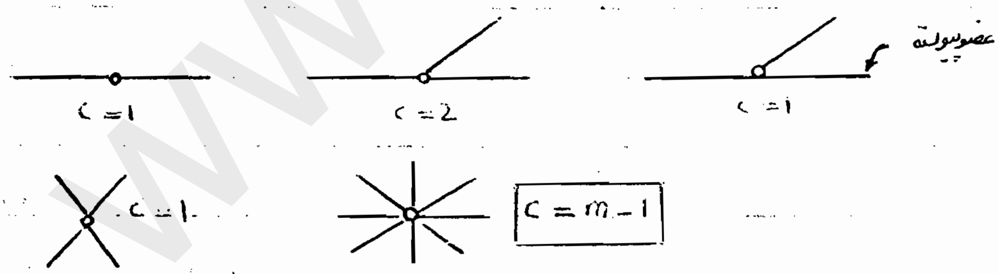
◄ هر درخت ، سه معادله تعادل دارد .

راه سوم) قاب را تبدیل به یک درخت می‌کنیم یعنی هر فضای بسته را با یک برش به فضای باز تبدیل می‌کنیم .



★ $n = 3\underbrace{K}_{\text{تعداد فضاهای بسته}} + r - (C+3)$

$n = 3(4) + 9 - 3 = 18$

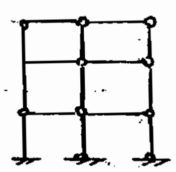


$\boxed{c = m - 1}$

• دو روش برای تعیین معینی یا نامعینی سازه‌ها داریم :

۱- روش برشی ← پایداری قطعه قطعه سازه را بررسی می‌کنیم

۲- روش اعمال بار ← نیرویی به سازه وارد می‌کنیم و تعادل سازه را بررسی می‌کنیم .



$n = 3(15) + 7 - (3\times12 + 16) = 0$

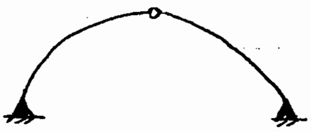
✗ با روش برشی مشخص می‌شود که سازه پایدار است و معین .

▸ قوس ها :

✓ تفاوت آن با قاب این است که اعضایش خمیده هستند. (روابط همان روابط قاب است).

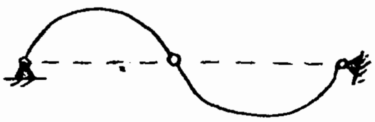
$n = r - (c+3)$

$n = 3 - 3 = 0$ معین و پایدار

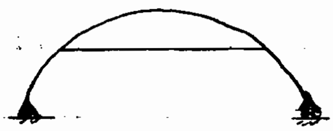


$n = 4 - (3+1) = 0$ معین

چون سه مفصل در یک راستا نیستند سازه پایدار است.



چون سه مفصل در یک راستا هستند سازه ناپایدار است.

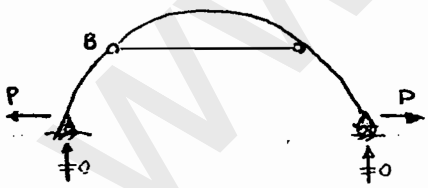


$n = 3 + 3 - 3 = 3$ نامعین

$n = 3 + 3 - (3+2) = 1$ نامعین

$n = 4 + 3 - (3+3) = 1$

سازه پایدار و نامعین



$n = 3 + 3 - (3+3) = 0$

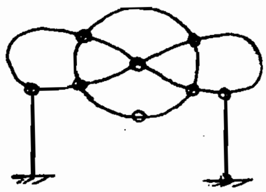
با استفاده از روش اعمال نیرو داریم :

$\Sigma M_B = Py \neq 0 \Rightarrow$ سازه ناپایدار

$n = 4 - (3+1) = 0$ معین

قسمت AB یک گیردار و یک مفصل است پس پایدار می باشد.

قسمت BC هم پایدار است پس کل سازه پایدار است.



نامعین $n = 3(6) + 6 - 3 = 21$ ← بدون مفصل

معین $n = 3(6) + 5 - (3+20) = 0$ ← با مفصل

با استفاده از روش بررسی سازه پایدار است.

▲ خرپاها:

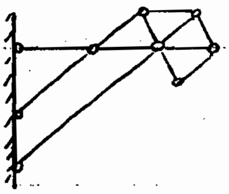
۱- خرپای ساده ← الف) نوع اول / ب) نوع دوم

۲- خرپای مرکب

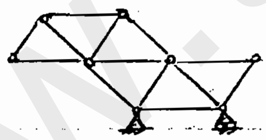
۳- خرپای مختلط

! اگر سه مفصل در یک راستا باشند و مفصل وسط رها باشد، مشکلی در پایداری سازه به وجود می‌آید.

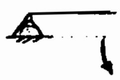
▲ خرپای نوع اول



▲ خرپای نوع دوم



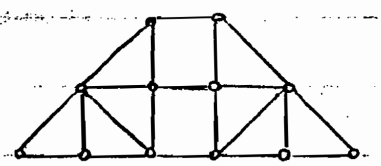
* هر مفصل کار دو میله را انجام می‌دهد.



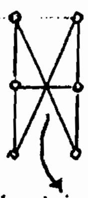
می‌تواند تغییر زاویه بدهد.

! خرپای نوع اول حتماً پایدار است و خرپای نوع دوم از نظر داخلی پایدار است ولی پایداری خارجی آن باید بررسی گردد.

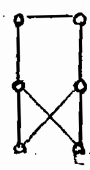
▲ از ترکیب چند خرپای ساده، خرپای مرکب تشکیل می‌شود به شرط آنکه به صورت پایدار به هم متصل شده باشند.



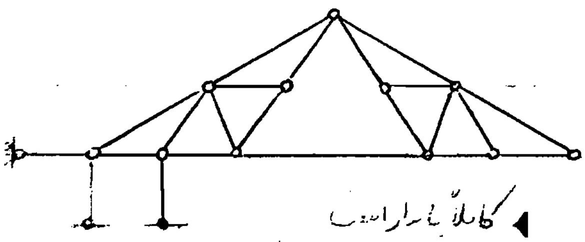
اتصال ناپایدار (سه عضو موازی)



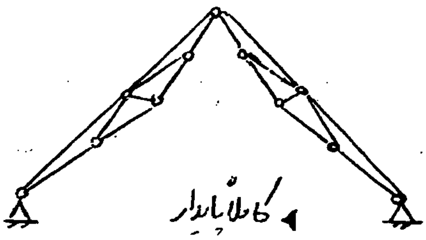
حول این نقطه دوران داریم



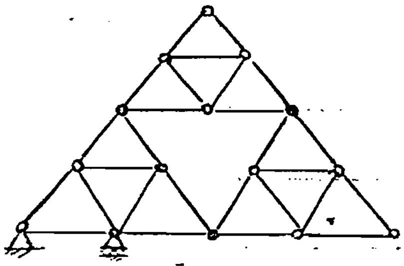
اتصال پایدار (سه میله مستقل)



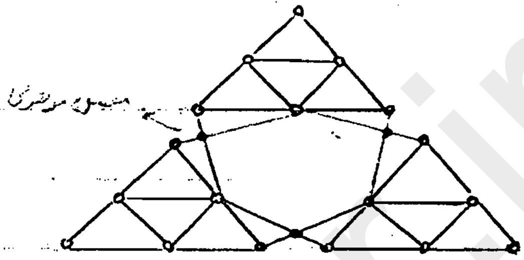
◀ کاملاً ناپایدار است



◀ کاملاً پایدار

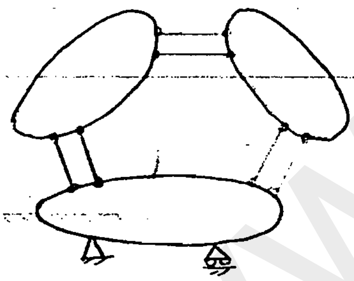


از نظر داخلی حتماً پایدار است ← یک مثلث

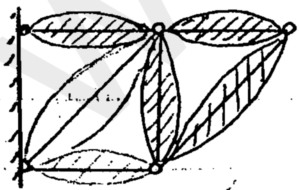


◀ زمانی سازه پایدار است که محل برخورد میله ها بر روی یک خط قرار نگیرند.

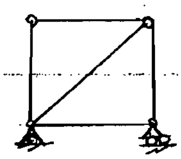
تمرین) ثابت کنید خرپای شکل زیر، ناپایدار است.



★ می‌توان در یک خرپای ساده به جای هر عضو، یک خرپا قرار دهیم. در آن صورت یک خرپای پایدار مرکب به دست می‌آید.



◀ خرپای مرکب ناپایدار



◀ خرپای مرکب

$$n = m + r - 2j$$

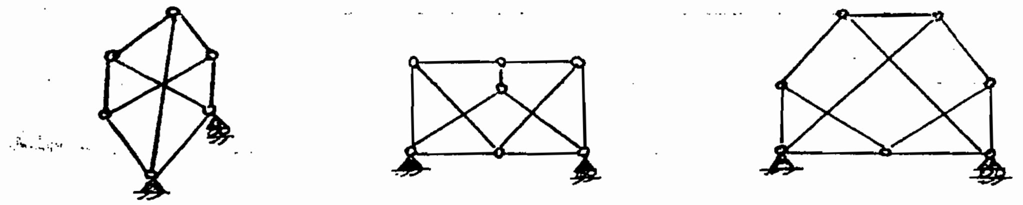
چون لنگر نداریم هر گره دو معادله تعادل دارد.

★ $n < 0$ ← ناپایدار

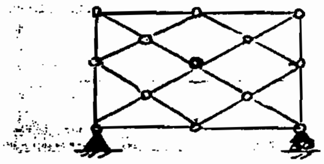
★ $n = 0$ ← معین و پایدار (عدم ناپایداری هندسی)

★ $n > 0$ ← نامعین و پایدار (عدم ناپایداری هندسی)

▸ خرپاهای زیر از کدام دسته اند ؟



$n=9+3-2(6)=0$ $n=11+3-2(7)=0$ $n=11+3-2(7)=0$



$n = 3 + 24 - 2(13) = 1$ نامعین

▸ این خرپا، یک خرپای مختلط است یعنی نه ساده است و نه مرکب.

★ برای بررسی پایداری یک خرپا پنج روش داریم:

۱ـ روش بررسی $n \geq 0$

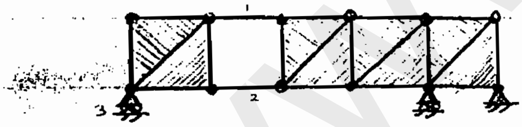
۲ـ روش اعمال بار $n \geq 0$

۳ـ روش آزمایش بار صفر $n=0$

۴ـ روش دترمینان ضرایب $n=0$

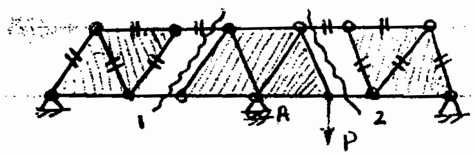
۵ـ روش هنبرگ $n=0$

▸ با ذکر چند مثال روش ها را به کار می بریم:



$n = 20+4-24 = 0$ معین

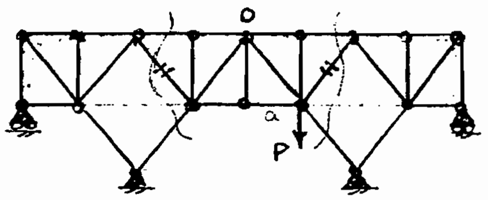
خرپا کاملاً پایدار است چون خرپای سمت راست هم از لحاظ داخلی و هم از لحاظ خارجی پایدار است و مانند این است که خرپای سمت چپ توسط سه میلهٔ مستقل ۱، 2 و 3 به خرپای سمت راست متصل شده است. (روش بررسی)



$n = 21+5-26 = 0$ معین

(روش اعمال بار) $\Sigma M_A = Pa \neq 0 \Rightarrow$ ناپایدار

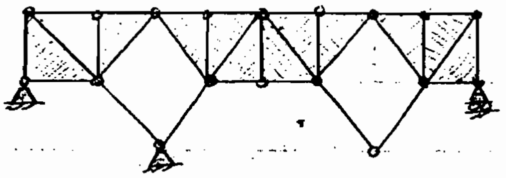
▸ خرپا را از خطوط ۱ و 2 برش می زنیم و حول A لنگرگیری می کنیم.



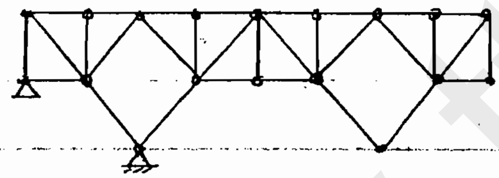
$n = 31 + 6 - 36 = 1$ نامعین

★ با استفاده از روش اعمال بار نیروی P را به خرپا وارد می‌کنیم:

$\Sigma M_o = Pa \neq 0 \Rightarrow$ ناپایدار



◄ خرپای روبه‌رو کاملاً پایدار است چون خرپای سمت چپ سه عکس‌العمل مستقل دارد و همین طور دو خرپای دیگر پس در کل خرپا، پایدار است.

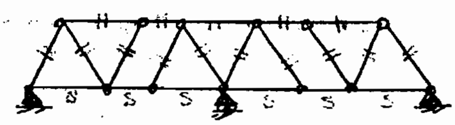


تمرین) پایداری و ناپایداری خرپای روبه‌رو را بررسی کنید.

روش آزمایش بار صفر:

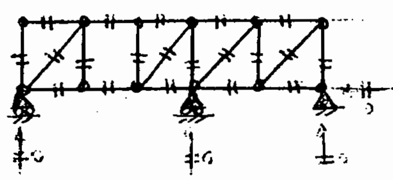
★ اصل جواب واحد؛ یعنی یک مسئله فیزیکی پایدار دارای یک جواب است. پس اگر در یک مسئله فیزیکی فقط یک جواب در معادلات صدق کند بیانگر جواب واحد است. ولی اگر در یک مسئله بی‌نهایت جواب داشته باشیم یعنی مسئله ناپایدار است.

◄ در این روش هیچ باری نباید روی سازه قرار بگیرد و n باید صفر باشد. پس برای تعادل باید تمامی میله‌ها و عکس‌العمل‌ها صفر باشند بنابراین اگر میله‌ای غیرصفر شود سازه ناپایدار است.



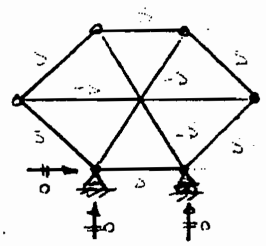
$n = 21 + 5 - 26 = 0$ معین

چون عضوهای افقی صفر نمی‌شوند بی‌نهایت جواب داریم ← ناپایدار



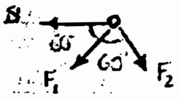
$n = 20 + 4 - 24 = 0$ معین

با روش آزمایش بار صفر ← سازه پایدار



$n = 12 - 12 = 0$ معین

با استفاده از روش بررسی و اعمال بار نمی‌توانیم پایداری را تشخیص دهیم بنابراین از روش آزمایش بار صفر استفاده می‌کنیم. چون هیچ عضو صفری نمی‌توانیم پیدا کنیم بنابراین یکی از اعضا را S می‌نامیم، اگر S و همهٔ اعضا صفر شد سازه پایدار است



$F_1 = S$

$F_2 = -S$

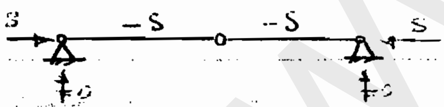
با استفاده از S نیروی سایر اعضا را بدست می‌آوریم که همگی S هستند بنابراین بی‌نهایت جواب داریم پس سازه ناپایدار است. (ناپایدار آنی)

روش دترمینان ضرایب:

وقتی $n=0$ است یعنی تعداد معادلات و مجهولات با هم برابر است.

در این حالت اگر دترمینان ضرایب معادلات تعادل استاتیکی مخالف صفر شد مسئله پایدار است

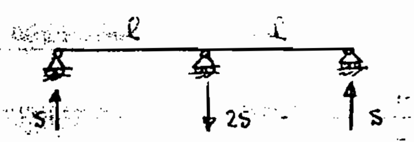
اگر دترمینان ضرایب صفر شود یعنی حداقل یکی از معادلات ترکیبی از معادلات دیگر است درحالیکه باید تمامی معادلات مستقل باشند یعنی بی‌نهایت جواب داریم و مسئله ناپایدار است

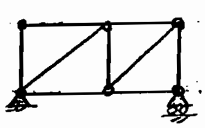


$n = 0$

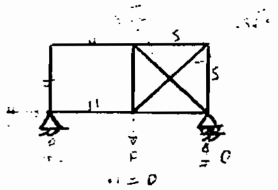
با استفاده از روش بار صفر، چون بی‌نهایت جواب برای S داریم پس سازه ناپایدار است.

تمرین) با استفاده از روش دترمینان ضرایب ناپایداری سازهٔ بالا را بررسی کنید.

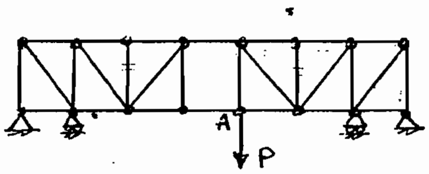




$n = 0$



◄ پایداری و معینی خرپای زیر را بررسی کنید.

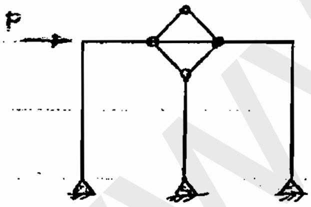


$n = 26 + 6 - 32 = 0$ معین

در مفصل A ← $\Sigma F_y = P \neq 0$ ⟹ سازه ناپایدار

* با استفاده از روش بار صفر ببینیم تمامی عضوها صفر می‌شوند فقط اعضای افقی پایینی S. پس بی‌نهایت جواب داریم.

تمرین) پایداری و ناپایداری سازه روبه‌رو را بررسی کنید. ناپایدار

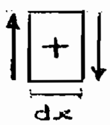


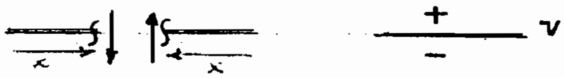
$n = 3(2) + 6 - (9+3) = 0$ معین

◄ تحلیل سازه‌های معین

» تیرها و قاب‌ها:

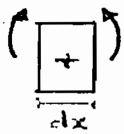
◄ نیروی برشی (V)

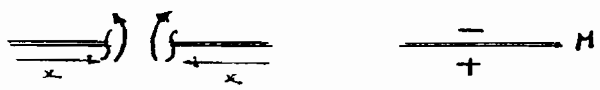




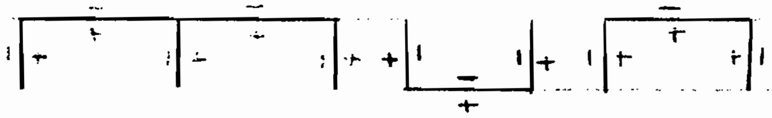
◄ لنگر مثبت ← تار پایین را وادار به کشش می‌کند.

◄ لنگر خمشی (M)

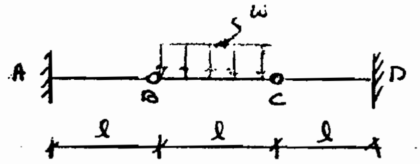




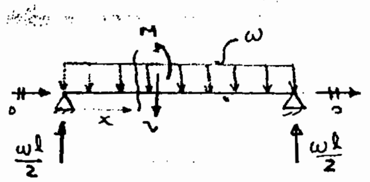
◄ لنگر خمشی را روی تار کششی رسم می کنیم.



مثال) عکس العمل های تکیه گاهی را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.



◄ قبل از حل کردن تیر مقابل که یک درجه نامعین است به حل تیرهای زیر می پردازیم:

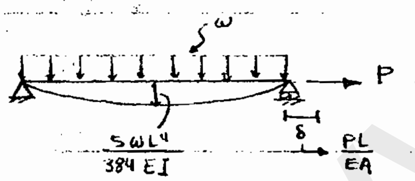


$$V = \frac{wl}{2} - wx$$

$$M = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

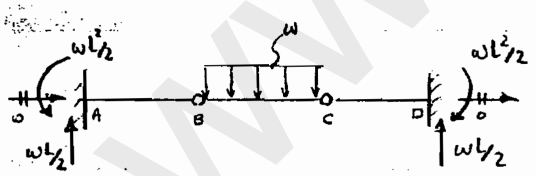
تیر مقابل هم یک درجه نامعین است ولی توانستیم آن را حل کنیم.

؟ ولی اتکا داریم، تیر تغییر طول می دهد ولی از آن صرف نظر می کنیم بنابراین عکس العمل های افقی صفرند.



؟ تغییر شکل های خمشی خیلی بیشتر از تغییر شکل های محوری هستند بنابراین می توانیم از تغییر شکل های محوری صرف نظر کنیم.

◄ حال تیر مربوط به مسئله را حل می کنیم:

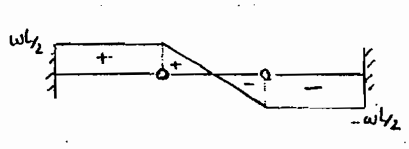


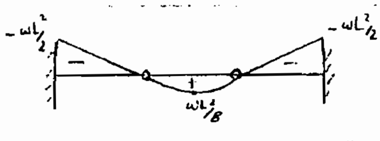
$$AB: \begin{cases} V = wl/2 \\ M = wl/2\,x - wl^2/2 \end{cases}$$

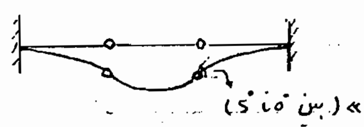
$$BC: \begin{cases} V = wl/2 - wx \\ M = wl/2\,(l+x) - wl^2/2 - wx^2/2 \end{cases}$$

$$CD: \begin{cases} V = -wl/2 \\ M = wl/2\,x - wx^2/2 \end{cases}$$

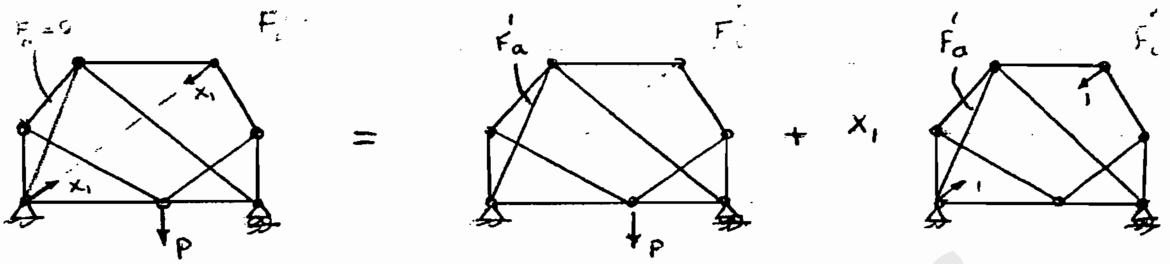
✓ از روی نمودار لنگر خمشی، تغییر شکل نسبی تیر را رسم می کنیم.







◄ می‌توانیم با جابه‌جا کردن یک میله، خرپای مختلط را به خرپای ساده تبدیل کنیم:



$$F_a = F_a' + X_1 f_a' = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{F_a}{f_a'} \Rightarrow F_i = F_i' + X_1 f_i'$$

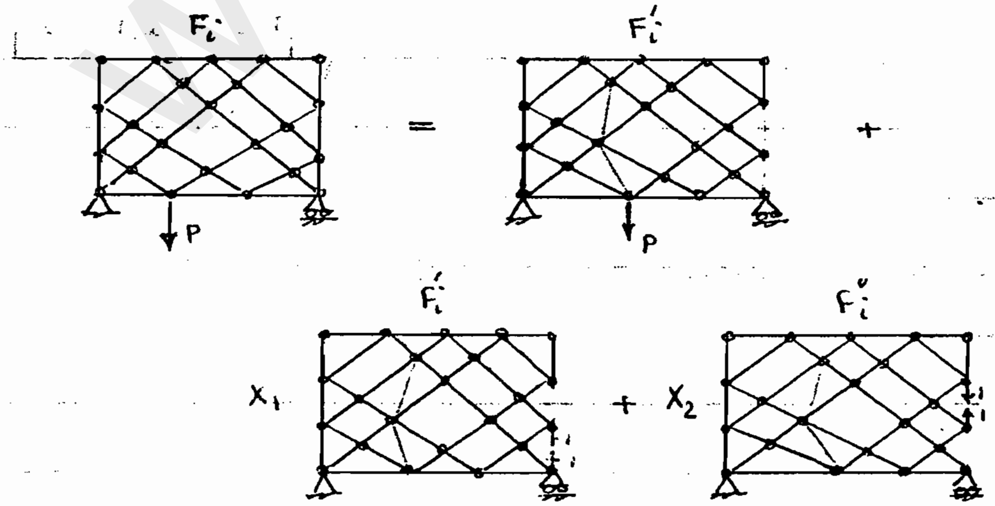
با بدست آمدن X_1 و رابطهٔ آخر تمامی اعضای خرپا، نیروهایشان مشخص می‌شود. این روش را روش هنبرگ می‌نامند که بیشتر برای تحلیل خرپاهای مختلط به کار می‌رود.

● نکته: اگر احیاناً f_a' صفر شود، مانند آزمایش بار صفر، چون یکی از اعضا غیرصفر است، سازهٔ اولیه ناپایدار می‌باشد و به عبارت دیگر X_1 بی‌نهایت می‌شود و نشان می‌دهد یکی از اعضا باید نیروی بسیار بزرگ تحمل کند بنابراین سازه ناپایدار است.

► $f_a' = 0 \rightarrow$ سازه ناپایدار

► $f_a' \neq 0 \rightarrow$ سازه پایدار

★ اگر با جابه‌جا کردن یک میله، خرپا ساده نشود مجدداً یک میلهٔ دیگر را جابه‌جا می‌کنیم.



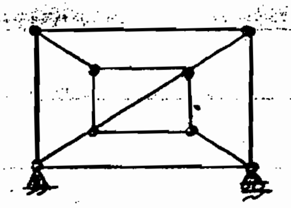
$$F_i = F_i' + x_1 f_i' + x_2 f_i''$$

$$\begin{cases} F_a = F_a' + x_1 f_a' + x_2 f_a'' = 0 \\ F_b = F_b' + x_1 f_b' + x_2 f_b'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\quad}{f_a' f_b'' - f_a'' f_b'} \\ x_2 = \dfrac{\quad}{f_a' f_b'' - f_a'' f_b'} \end{cases}$$

$\Delta = f_a' f_b'' - f_a'' f_b' \neq 0 \longrightarrow$ سازه پایدار

$\Delta = f_a' f_b'' - f_a'' f_b' = 0 \longrightarrow$ سازه ناپایدار

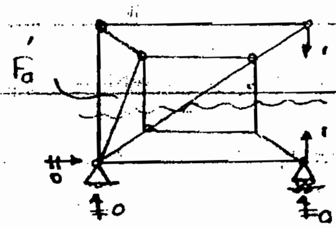
مثال) پایداری و ناپایداری خرپاهای زیر را بررسی کنید.



$n = m + r - 2j = 13 + 3 - 16 = 0$ یعنی

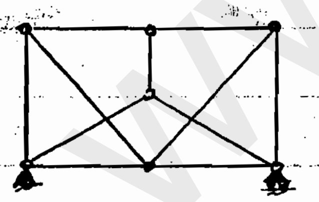
◂ چون چهار نیرو در خرپا . از یک نقطه می‌گذرند بنابراین خرپا ناپایدار است.

حال با روش هنبرگ خرپا را بررسی می‌کنیم:



پس از برش، اگر تعادل را در نقطه بالایی بنویسیم داریم:

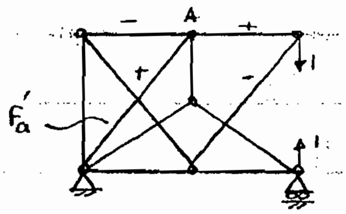
$f_a' = 0 \Rightarrow$ سازه ناپایدار

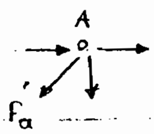


$n = 11 + 3 - 14 = 0$ یعنی

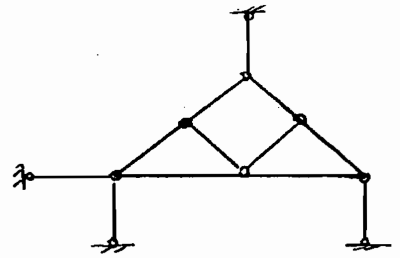
◂ با استفاده از روش آزمایش با صفر، سازه پایدار است. (همه اعضا صفر می‌شوند)

◂ روش هنبرگ:



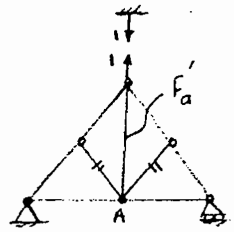


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_a' > 0 \Rightarrow$ سازه پایدار

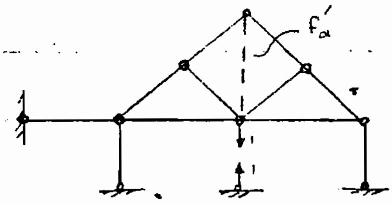


$n = 12 + 8 - 20 = 0$ معین

روش هنبرگ



در گره A: $\sum F_y = 0 \Rightarrow F'_a = 0 \rightarrow$ سازه ناپایدار



$n = 8 + 4 - 12 = 0$ معین

خرپای مقابل ، خرپای نوع اول است ⇐ سازه پایدار

با استفاده از روش هنبرگ $F'_a \neq 0$ ⇐ سازه پایدار

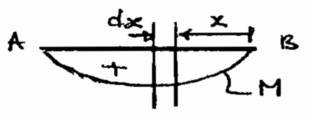
◀ تغییر شکل در سازه ها

الف- روش سطح لنگر: در این روش از لنگر خمشی استفاده می کنیم و کاری به نیروی محوری و برشی نداریم. درحقیقت تغییر شکل را تنها تحت اثر لنگر خمشی به دست می آوریم.

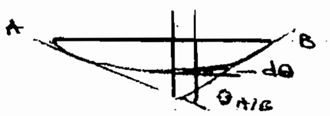
$$y'' = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M}{EI} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \theta$$

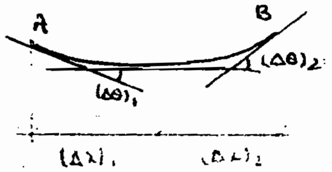
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \boxed{d\theta = \frac{M}{EI}\,dx}$$

◀ $d\theta$ تغییر زاویه دو سر المانی به طول dx است.



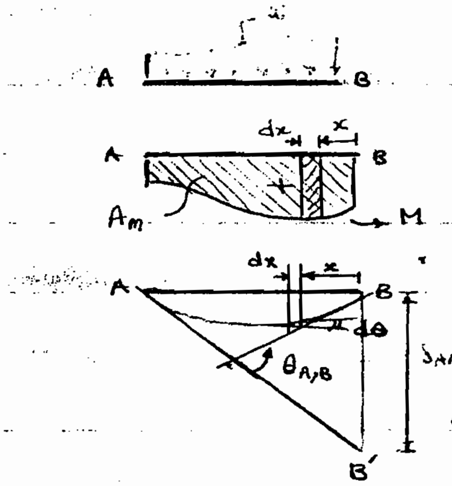
$$\theta_{A/B} = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M\,dx}{EI}$$





$$\theta_{A/B} = \sum_{i=1}^{n} (\Delta\theta)_i = \int_B^A d\theta$$

$$\boxed{\Delta\theta = \Delta\theta_{A/B} = \Delta\theta_{B/A}}$$



$$\theta_{A/B} = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M\,dx}{EI}$$

◄ $\theta_{A/B}$ برابر است با مساحت زیر منحنی $\frac{M}{EI}$.

(زاویهٔ بین مماس های رسم شده در نقاط ابتدا و انتها)

به این تعریف قضیه اول سطح لنگر می گویند .

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx$$

◄ $\delta_{B/A}$ برابر است با فاصلهٔ B از مماس رسم شده بر A که چون θ_A بسیار ناچیز و در حد ۰ متغیر است می توانیم $\delta_{A/B}$ را برای فاصله بگیریم .

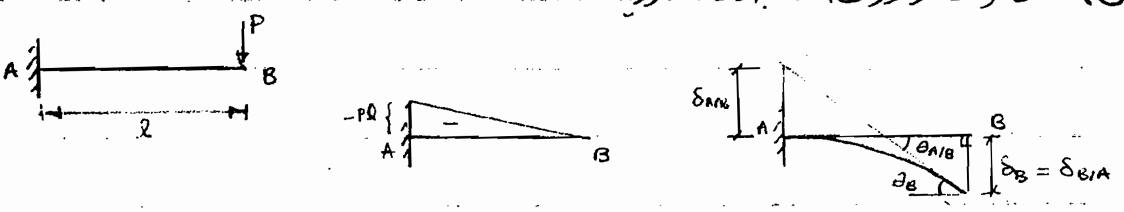
$$\delta_{B/A} = \int_0^l x\,d\theta = \int_0^l \frac{Mx}{EI}\,dx$$

اگر EI ثابت باشد ⟵ $\delta_{B/A} = \frac{\bar{x} A_m}{EI}$

✗ قضیه دوم سطح لنگر: فاصلهٔ نقطهٔ B از مماس رسم شده بر نقطهٔ A برابر است با لنگر اول مساحت زیر منحنی لنگر خمشی تقسیم بر EI .

* با استفاده از این دو قضیه تغییر شکل ها را در تیرها و قاب ها به دست می آوریم .

مثال) δ و θ را در نقطهٔ B به دست آورید .

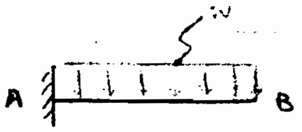


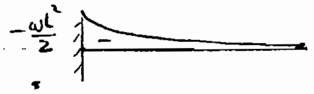
$$\theta_B = \theta_{A/B} = \frac{P\ell^2}{2EI} \qquad \delta_B = \delta_{B/A} = \frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{2\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

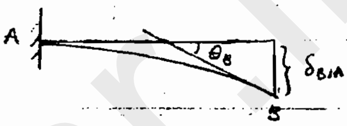
اگر در مسئله مقابل A از مماس B را می‌خواستیم داشتیم :

$$\delta_{A/B} = \frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{6EI}$$

مثال 2) δ و θ را در نقطه B به دست آورید .



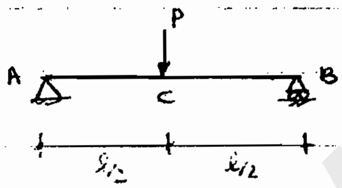


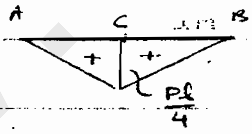


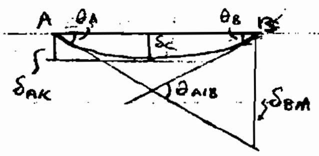
$$\theta_B = \theta_{A/B} = \frac{\omega\ell^2}{2}\cdot\frac{\ell}{3}\cdot\frac{1}{EI} = \frac{\omega\ell^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{\omega\ell^3}{6EI}\cdot\frac{3\ell}{4} = \frac{\omega\ell^4}{8EI}$$

مثال 3) در تیر مقابل δ_C ، θ_A و θ_B را به دست آورید



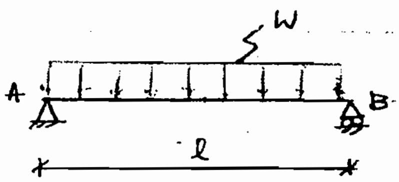




$$\begin{cases} \theta_A = \frac{1}{2}\theta_{A/B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{2EI} = \frac{P\ell^2}{16EI} = \theta_B \\ \theta_A = \theta_B = \frac{\delta_{B/A}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{8EI}\cdot\frac{\ell}{2}\right] = \frac{P\ell^2}{16EI} \\ \theta_A = \theta_{A/C} = \frac{P\ell^2}{16EI} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_C = \delta_{A/C} = \frac{P\ell^2}{16EI}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{48EI} \\ \delta_C = \frac{\ell}{2}\theta_A - \delta_{C/A} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{P\ell^2}{16EI}\right) - \frac{P\ell^2}{16EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{48EI} \end{cases}$$

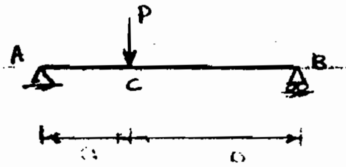
تمرین) در تیر مقابل δ_C ، θ_A و θ_B را به دست آورید



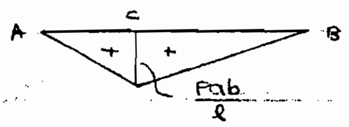
$$\theta_A = \theta_{A/C} = \theta_B = \frac{\omega\ell^3}{24EI}$$

$$\delta_C = \delta_{A/C} = \frac{5\omega\ell^4}{384EI}$$

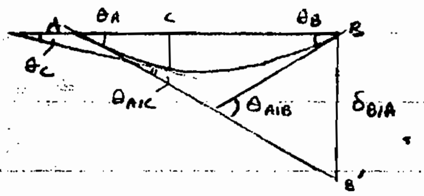
مثال 3) θ_A ، θ_B ، θ_C ، δ_C و δ_{max} و x مربوط به آن را بدست آورید.



$$EI = Cte \quad , \quad a + b = \ell$$



$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{Pab}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2EI}\cdot\frac{\ell+b}{3}\right] = \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI}$$



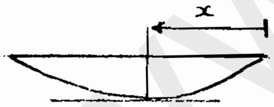
$$\theta_B = \theta_{A/B} - \theta_A = \frac{Pab}{2EI} - \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI} = \frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{A/B}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{Pab}{2EI}\cdot\frac{\ell+a}{3}\right] = \frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI}$$

$$\theta_C = \theta_A - \theta_{A/C} = \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI} - \frac{Pab}{\ell}\cdot\frac{a}{2EI} = \frac{Pab(b-a)}{3\ell EI}$$

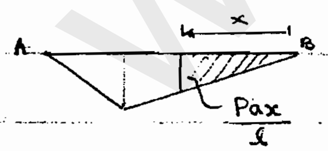
$$\delta_C = a\,\theta_A - \delta_{C/A} = \frac{Pa^2b(\ell+b)}{6\ell EI} - \frac{Pa^2b}{2\ell EI}\cdot\frac{a}{3} = \frac{Pa^2b^2}{3\ell EI}$$

در جایی که δ max است، مماس افقی است.



$$\theta_B = \theta_{B/x}$$

$$\frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI} = \frac{Pax}{\ell}\cdot\frac{x}{2EI}$$



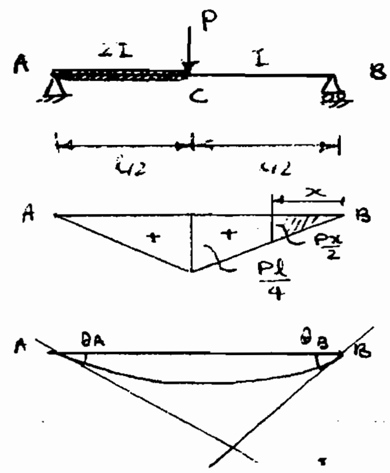
$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{b(\ell+a)}{3}}} \quad (x<b)$$

$$x<b \Rightarrow \frac{b(\ell+a)}{3} < b^2 \Rightarrow \ell+a < 3b \Rightarrow 2a<2b \Rightarrow a<b \checkmark$$

$$\delta_{max} = \delta_{B/x} = \frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{Pab(\ell+a)}{9\ell EI}x$$

$$\rightarrow \delta_{max} = \frac{Pab(\ell+a)}{9\ell EI}\sqrt{\frac{b(\ell+a)}{3}}$$

مثال 4) θ_A ، θ_B ، θ_C ، δ_C ، δ_{max} و x مربوط به آن را بدست آورید.



$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{16EI}\cdot\frac{\ell}{3} + \frac{P\ell^2}{32EI}\cdot\frac{2\ell}{3}\right] = \frac{P\ell^2}{24EI}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{A/B}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{16EI}\cdot\frac{2\ell}{3} + \frac{P\ell^2}{32EI}\cdot\frac{\ell}{3}\right] = \frac{5P\ell^2}{96EI}$$

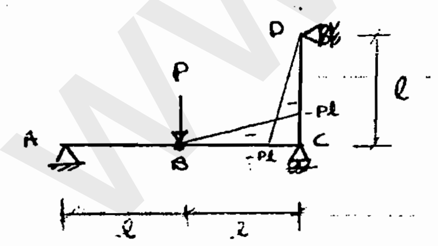
$$\theta_C = \theta_A - \theta_{A/C} = \frac{P\ell^2}{24EI} - \frac{P\ell^2}{32EI} = \frac{P\ell^2}{96EI}$$

$$\delta_C = \frac{\ell}{2}\theta_A - \delta_{C/A} = \frac{P\ell^3}{48EI} - \frac{P\ell^2}{32EI}\cdot\frac{\ell}{6} = \frac{P\ell^3}{64EI}$$

$$\theta_B = \theta_{B/x} \Rightarrow \frac{5P\ell^2}{96EI} = \frac{Px}{2EI}\cdot\frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}}$$

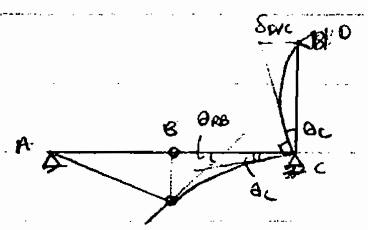
$$\delta_{max} = \delta_{B/x} = \frac{5P\ell^2}{96EI}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{5P\ell^3}{288EI}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

مثال 5) θ_A ، θ_{LB} ، θ_{RB} ، θ_C ، θ_D و δ_{VB} را بدست آورید.



$$\theta_C = \frac{\delta_{D/C}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{2\ell}{3}\right] = \frac{P\ell^2}{3EI}$$

$$\theta_D = \frac{\delta_{C/D}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{\ell}{3}\right] = \frac{P\ell^2}{6EI}$$

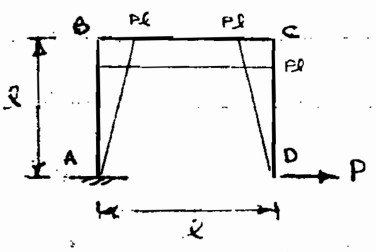


$$\delta_{VB} = \theta_C\,\ell + \delta_{B/C} = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{2\ell}{3} = \frac{2P\ell^3}{3EI}$$

$$\theta_A = \frac{\delta_{VB}}{L} = \frac{2P\ell^2}{3EI} = \theta_{LB}$$

$$\theta_{RB} = \theta_C + \theta_{B/C} = \frac{P\ell^2}{3EI} + \frac{P\ell^2}{2EI} = \frac{5P\ell^2}{6EI}$$

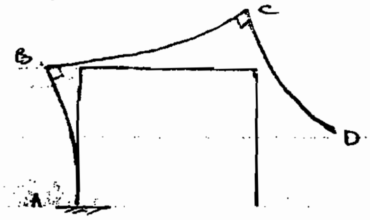
مثال 6) θ_B ، θ_C ، θ_D ، $\delta_{HB}=\delta_{HC}=?$ و $\delta_{VC}=\delta_{VD}=?$ و δ_{HD} را بدست آورید.

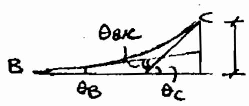


$$\theta_B=\theta_{A/B}=\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\delta_{HB}=\delta_{B/A}=\frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{\ell}{3}=\frac{P\ell^3}{6EI}$$

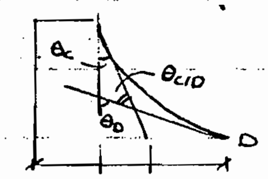
$$\theta_C=\theta_B+\theta_{B/C}=\frac{P\ell^2}{2EI}+\frac{P\ell^2}{EI}=\frac{3P\ell^2}{2EI}$$





$\delta_{VC}=\theta_B\ell+\delta_{C/B}$

$$\delta_{VC}=\delta_{VD}=\theta_B\ell+\delta_{C/B}=\frac{P\ell^3}{2EI}+\frac{P\ell^2}{EI}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{P\ell^3}{EI}$$



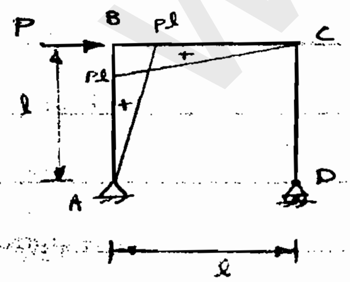
$$\theta_D=\theta_C+\theta_{C/D}=\frac{3P\ell^2}{2EI}+\frac{P\ell^2}{2EI}=\frac{2P\ell^2}{EI}$$

$(\delta_{HD}=-\delta_{HC}+\theta_C\ell+\delta_{D/C})$

◁ چون $\theta_A=0$ است پس زاویه هر نقطه دلخواه برابر است با سطح زیر منحنی لنگر تا نقطه A.

$$\delta_{HD}=-\delta_{HC}+\theta_C\ell+\delta_{D/C}=\frac{-P\ell^3}{6EI}+\frac{3P\ell^3}{2EI}+\frac{P\ell^3}{3EI}=\frac{5P\ell^3}{3EI}$$

مثال 7) θ_A ، θ_B ، θ_C ، θ_D ، $\delta_{HB}=\delta_{HC}$ و δ_{HD} را بدست آورید.

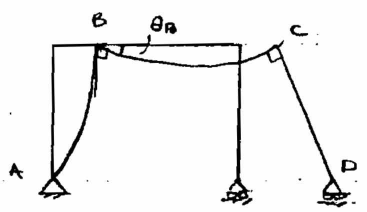


$$\theta_B=\frac{\delta_{C/B}}{\ell}=\frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{2\ell}{3}\right]=\frac{P\ell^2}{3EI}$$

$$\theta_D=\frac{\delta_{B/C}}{\ell}=\frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{\ell}{3}\right]=\frac{P\ell^2}{6EI}=\theta_C$$

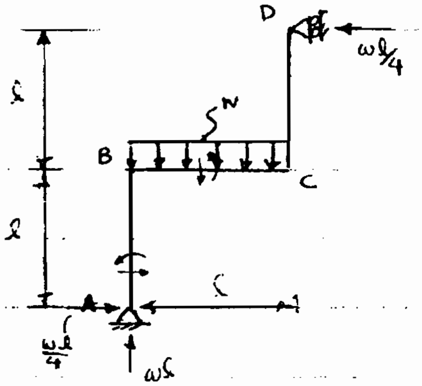
$$\theta_A=\theta_B+\theta_{A/B}=\frac{P\ell^2}{3EI}+\frac{P\ell^2}{2EI}=\frac{5P\ell^2}{6EI}$$

$$\delta_{HB}=\delta_{HC}=\ell\theta_A-\delta_{B/A}=\frac{5P\ell^3}{6EI}-\frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{\ell}{3}=\frac{2P\ell^3}{3EI}$$



$$\delta_{HD}=\delta_{HC}+\ell\theta_C=\frac{2P\ell^3}{3EI}+\frac{P\ell^3}{6EI}=\frac{5P\ell^3}{6EI}$$

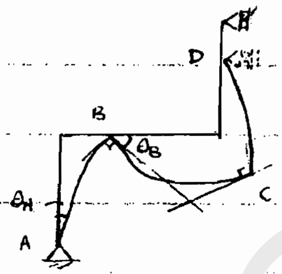
مثال ۸) θ_A ، θ_B ، θ_C ، θ_D ، $\delta_{HB}=\delta_{HC}$ ، $\delta_{VD}=\delta_{VC}$ را بدست آورید.

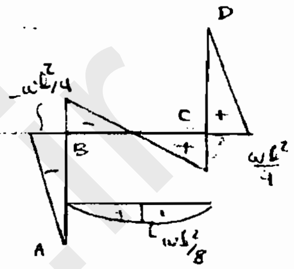


$$AB: \ M = -\frac{wl}{4}x$$

$$BC: \ M = -\frac{wl^2}{4} + wlx - \frac{wx^2}{2}$$

$$CD: \ M = \frac{wl}{4}x$$





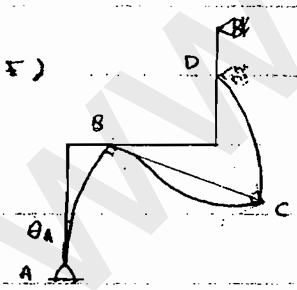
▷ بارهای منفی منحنی تغییر شکل را می‌آورند بالای حالت و بارهای مثبت می‌آورند پایین حالت.

▷ اگر $\delta_{C/B}$ مثبت شد یعنی منحنی آمد پایین حالت و اگر منفی شد یعنی آمده بالای حالت.

$$\delta_{C/B} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{wl^2}{4EI}\cdot\frac{5l}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{wl^2}{4EI}\cdot\frac{l}{6} + \frac{2l}{3}\cdot\frac{wl^2}{8EI}\cdot\frac{l}{2} = 0$$

$\delta_{C/B}$ صفر شد بنابراین باید منحنی تغییر شکل را روی حالت بکشیم.

حالت ۲)



$$\theta_B = \theta_A + \theta_{A/B} = \theta_A + \frac{wl^3}{8EI}$$

$$\delta_{HB} = \theta_A l + \delta_{B/A} = \theta_A l + \frac{wl^3}{8EI}\cdot\frac{l}{3} = \delta_{HC}$$

$$\theta_C = \theta_{B/C} - \theta_B = \frac{2}{3}l\cdot\frac{wl^2}{8EI} - \theta_A - \frac{wl^3}{8EI}$$

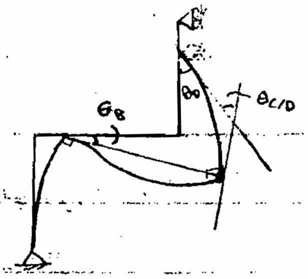
$$= -\theta_A - \frac{wl^3}{24EI}$$

$$\delta_{VC} = \delta_{VD} = \theta_B l - \underset{0}{\cancel{\delta_{C/B}}} = \theta_A l + \frac{wl^4}{8EI}$$

$$\theta_D = \theta_C + \theta_{C/D} = -\theta_A - \frac{wl^3}{24EI} + \frac{wl^3}{8EI} = -\theta_A - \frac{wl^3}{12EI}$$

$$\delta_{HD} = \delta_{HC} - \theta_C l - \delta_{DC} = \theta_A l + \frac{wl^4}{24EI} + \theta_A l + \frac{wl^4}{24EI} - \frac{wl^3}{8EI}\cdot\frac{2l}{3}$$

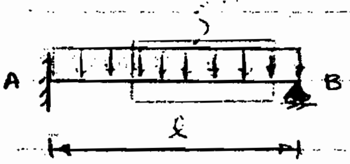
$$\delta_{HD} = 0 \Rightarrow \theta_A l = 0 \Rightarrow \theta_A = 0$$



$$\theta_C = \theta_B - \theta_{B/C} = \frac{wl^3}{8EI} - \frac{wl^3}{12EI} = \frac{wl^3}{24EI}$$

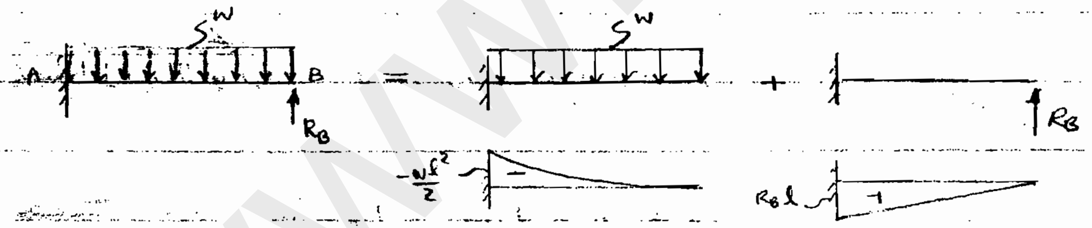
★ می‌توانیم روش سطح لنگر را برای یک تیر نامعین هم به کار ببریم.

مثال) تیر مقابل را حل کنید.



← به تعداد درجهٔ نامعینی، مجهول اضافی انتخاب می‌کنیم.

در این حالت معادلهٔ اضافه شده این است که تغییر مکان B صفر است

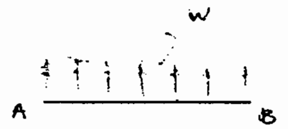


$$\delta_{B/A} = 0 \rightarrow \delta_{B/A} = -\frac{l}{3}\cdot\frac{wl^2}{2EI}\cdot\frac{3l}{4} + \frac{R_B l^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3wl}{8}$$

تمرین) در تیر مثال قبل، لنگر وسط دهانه را مجهول در نظر بگیرید.

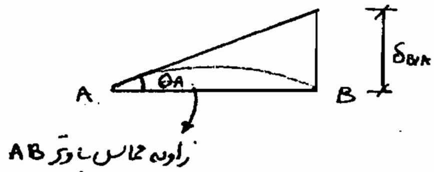
تمرین 2) در تیر مثال قبل، نیروی برشی وسط دهانه را مجهول بگیرید.

ب ـ روش بار الاستیک :

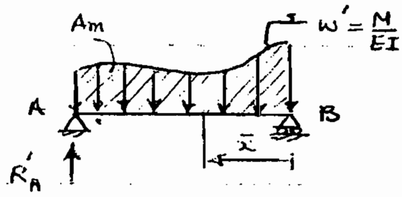


قطعه پیوسته‌ای از تیر ⟵

$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{l} = \frac{A_m \cdot \bar{x}}{l}$$



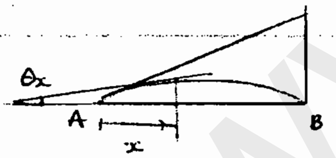
✓ در این روش یک تیر فرضی در نظر می‌گیریم که دو سر قطعه تکیه‌گاه می‌باشد. به این تیر، تیر الاستیک گفته می‌شود. بارگذاری روی تیر همان منحنی $\frac{M}{EI}$ در تیر اصلی است.



$$\Sigma M'_B = 0 \Rightarrow l R'_A = A_m \bar{x}$$

$$\Rightarrow R'_A = \frac{A_m \bar{x}}{l} \quad , \quad \boxed{\theta_A = R'_A}$$

◄ عکس العمل در تکیه‌گاه تیر فرضی برابر است با زاویه مماس بر منحنی در آن نقطه با وتر AB .



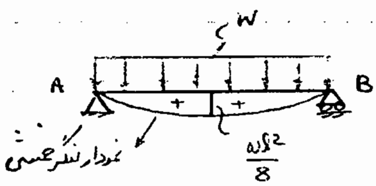
✓ قضیه اول بار الاستیک : θ در هر نقطه x از تیر اصلی برابر است با نیروی برشی در همان نقطه الاستیک.

$$\theta_x = \theta_A - \theta_{x/A} = R'_A - A_1 = V'_x$$

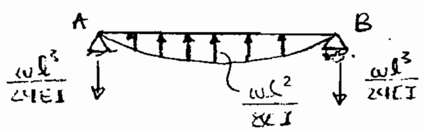
✓ قضیه دوم بار الاستیک : δ در هر نقطه x از تیر اصلی برابر است با لنگر خمشی در همان نقطه الاستیک

$$\delta_x = x\theta_A - \delta_{x/A} = xR'_A - A_1\bar{x}_1 = M'_x$$

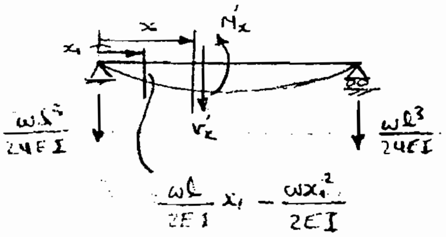
مثال) با استفاده از روش بار الاستیک تیر زیر را حل کنید و θ_x و δ_x را در هر نقطه بدست آورید.



⟶

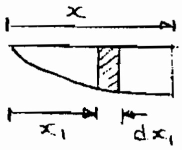


◄ چون لنگر خمشی مثبت است، بارگذاری به سمت بالا است.



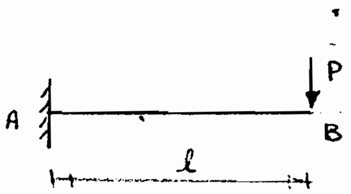
$$\theta_x = V'_x = -\frac{wl^3}{24EI} + \int_0^x \left(\frac{wl}{2EI}x_1 - \frac{wx_1^2}{2EI}\right) dx_1$$

$$\delta_x = M'_x = -\frac{wl^3}{24EI}x + \int_0^x \left(\frac{wl}{2EI}x_1 - \frac{wx_1^2}{2EI}\right)(x-x_1)\,dx_1$$

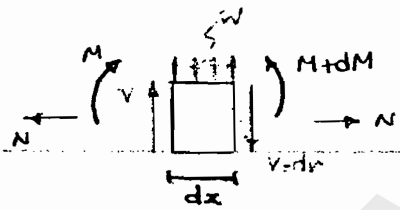


$$\int_0^x \left(\frac{wl}{2EI}x_1 - \frac{wx_1^2}{2EI}\right) dx_1$$

تمرین) با استفاده از روش بار الاستیک تیر زیر را حل کنید.



ج- روش تیر مزدوج (Conjugate Beam Method) :



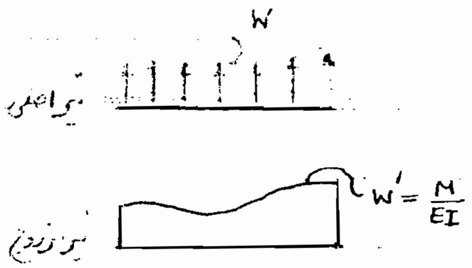
$$dV = w\,dx \quad , \quad dM = V\,dx$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \quad , \quad dy = \theta\,dx$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow dV = w\,dx$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow (M+dM) - M - V\,dx - \cancel{(w\,dx)\frac{dx}{2}} = 0 \Rightarrow dM = V\,dx$$

✓ با مبنا قراردادن روابط بالا، روش تیر مزدوج را مطرح می‌کنیم.



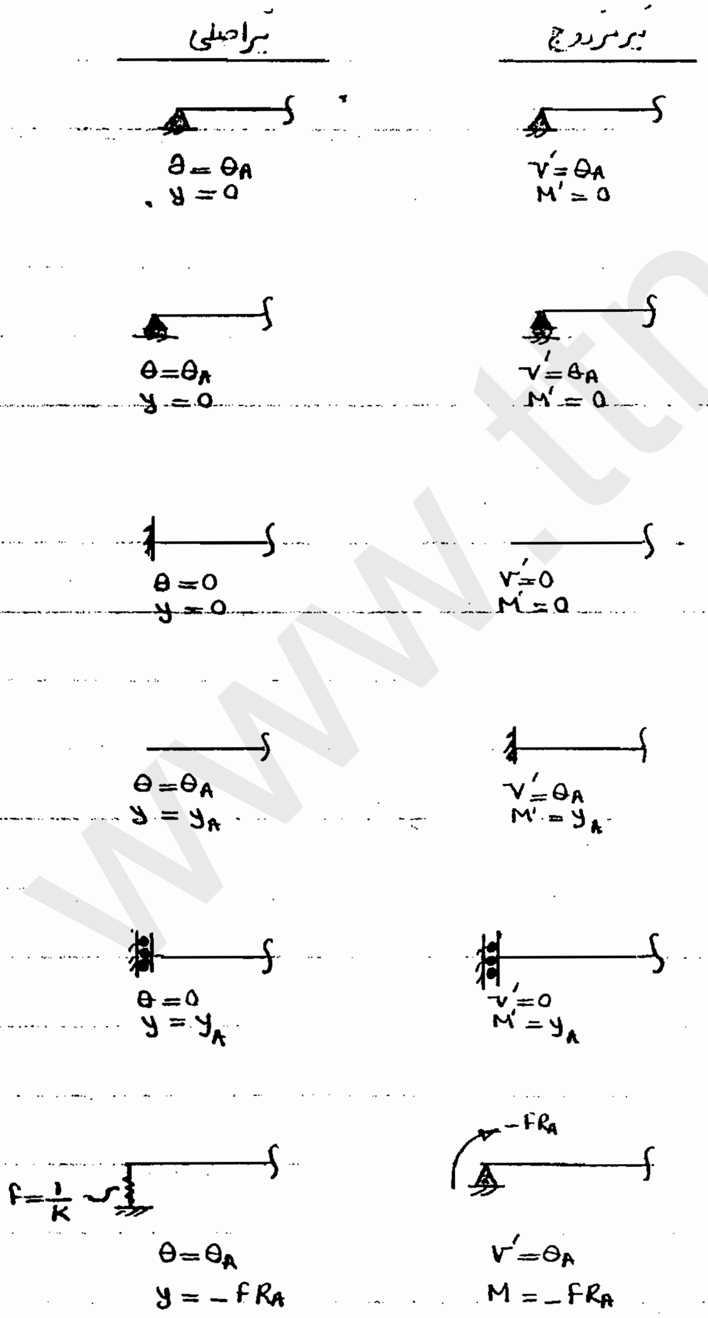
✓ در این روش یک تیر مزدوج در نظر می‌گیریم که بارگذاری روی آن $W' = \frac{M}{EI}$ می‌باشد.

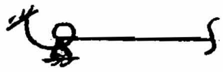
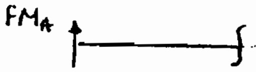
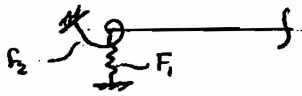
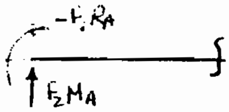
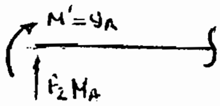
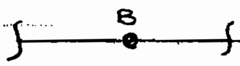
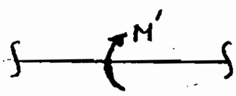
$$V' = \int w'dx = \int \frac{M}{EI}dx = \theta$$

✓ قضیه اول تیر مزدوج : نیروی برشی در تیر مزدوج برابر است با θ در هر نقطه از تیر اصلی .

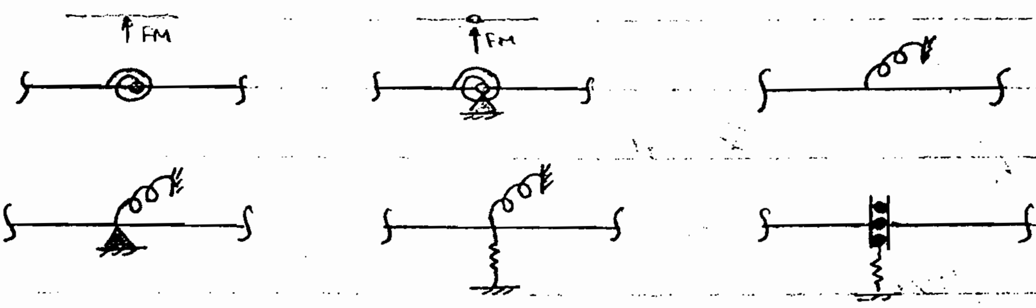
✓ قضیه دوم تیر مزدوج : لنگر خمشی در تیر مزدوج برابر است با خیز در همان نقطه از تیر اصلی به شرط آنکه خیز در نقاط مرزی در تیر اصلی با لنگر خمشی در تیر مزدوج برابر شود .

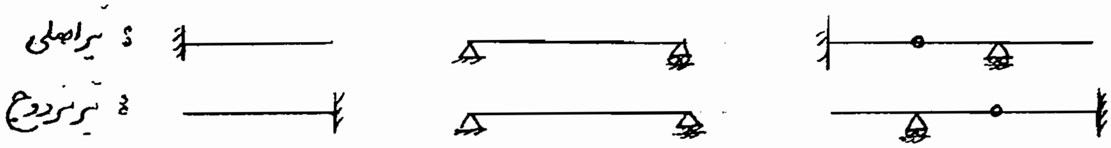
$$M' = \int V' dx = \int \theta \, dx = y \quad \Rightarrow \quad M' = y$$

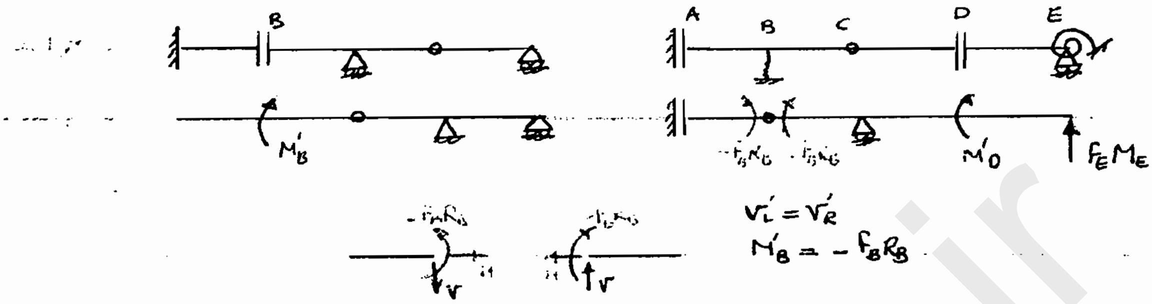


تیر اصلی	تیر مزدوج
	
$\theta = FM_A$ $y = 0$	$V' = FM_A$ $M' = 0$
	
$\theta = f_2 M_A$ $y = -f_1 R_A$	$V' = f_2 M_A$ $M' = -f_1 R_A$
	
$\theta = f_2 M_A$ $y = y_A$	
	
$\theta_L = \theta_R$ $y = 0$	$V'_L = V'_R$ $M' = 0$
	
$\Delta\theta_B = \theta_R - \theta_L = \theta_A$ $y = y_B$	$V'_R - V'_L = \Delta\theta_B$ $M' = y_B$
	
$\theta_L = \theta_R$ $y_R - y_L = \Delta y_B$	$V'_L = V'_R$ $M'_R - M'_L = \Delta y_B$

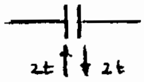
تمرین: تیر مزدوج مربوط به تیرهای زیر را تعیین کنید.







▲ لنگر متمرکز در تیر مزدوج نشان دهنده ناپیوستگی در تیر اصلی است.

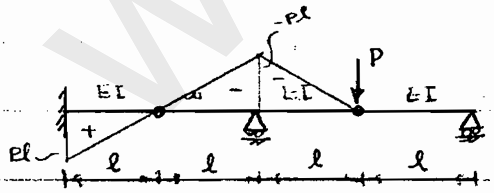
▲ اگر نیروی برشی در تیر مزدوج مقدار مشخصی داشته باشد آن را با  نمایش می‌دهیم.

مثال ۱) θ_B و δ_B را در تیر مقابل بدست آورید.

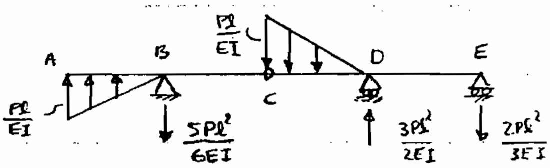
$$\theta_B = V'_B = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad , \quad \delta_B = M'_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

✓ در این روش مقدار و جهت θ و δ برای ما مشخص می‌شود.

مثال ۲) δ و θ را در نقاط A، B، C، D و E بدست آورید.



✓ EI وقتی بی‌نهایت است به این معناست که تیر تغییر شکل خمشی نخواهد داشت.



$\sum M'_C = 0$ چپ $\Rightarrow lR'_B + \frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{5l}{3} = 0$

$\Rightarrow -R'_B = \frac{5Pl^2}{6EI}$

$\sum M'_C = 0$ راست $\Rightarrow lR'_D + 2lR'_E = \frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{l}{3} \Rightarrow R'_D + 2R'_E = \frac{Pl^2}{6EI}$

$$\Sigma F'_y = 0 \Rightarrow R'_D + R'_E = \frac{5P\ell^2}{6EI} \Rightarrow R'_E = -\frac{2P\ell^2}{3EI} \ , \ R'_D = \frac{3P\ell^2}{2EI}$$

$$\theta_{LB} = V'_{LB} = \frac{P\ell^2}{2EI} \ , \ \theta_{RB} = V'_{RB} = \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{5P\ell^2}{6EI} = -\frac{P\ell^2}{3EI}$$

$$y_B = M'_B = \frac{P\ell^2}{2EI} \cdot \frac{2\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

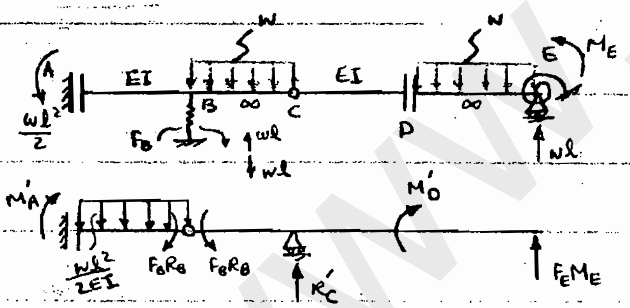
$$\theta_C = V'_C = V'_{RB} = -\frac{P\ell^2}{3EI} \longrightarrow \theta_C = \theta_{RB}$$ ◄ چون EI قسمت BC ، ∞ است بنابراین

$$\theta_{LD} = V'_{LD} = \frac{2P\ell^2}{3EI} - \frac{3P\ell^2}{2EI} = -\frac{5P\ell^2}{6EI} \ , \ \theta_{RD} = V'_{RD} = \frac{2P\ell^2}{3EI}$$

$$\delta_D = M'_D = -\frac{2P\ell^3}{3EI}$$

$$\theta_E = V'_E = \frac{2P\ell^2}{3EI} \ , \ \delta_E = 0 \longrightarrow$$ نقطه E تکیه‌گاه است

$F_B = \frac{\ell^3}{2EI}$, $F_E = \frac{\ell}{2EI}$ مثال 3) δ و θ را در نقاط A، B، C و D بدست آورید.



چپ $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow$

$$M_A + w\ell^2 - w\ell\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -M_A = \frac{w\ell^2}{2}$$

$$AB: \ M = -\frac{w\ell^2}{2} \ , \ CD: \ M = -\frac{w\ell^2}{2} + w\ell(\ell + x) - w\ell\left(\frac{\ell}{2} + x\right) = 0$$

چپ $\Sigma M'_B = 0 \Rightarrow M'_A + w\ell F_B - \frac{w\ell^3}{3EI}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \Rightarrow M'_A = -\frac{w\ell^4}{4EI}$

راست $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_E + w\ell(2\ell) - w\ell\left(\frac{3\ell}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_E = -\frac{w\ell^2}{2}$

راست $\Sigma M'_B = 0 \Rightarrow R'_C \ell - M'_D + \frac{w\ell^4}{2EI} - \frac{3w\ell^4}{4EI} = 0 \Rightarrow R'_C \ell - M'_D = \frac{w\ell^4}{4EI}$

$$\Sigma F'_y = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{w\ell^3}{2EI} + \frac{w\ell^3}{4EI} = \frac{3w\ell^3}{4EI} \Rightarrow M'_D = \frac{w\ell^4}{2EI}$$

$$\theta_A = 0 \quad , \quad \delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{4EI}$$

اگر داده‌های زیر در مسئله داده شده باشد:

$$W = 3\ t/m \ , \ l = 2\ m \ , \ E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \ , \ I = 10^4\ cm^4$$

$$\Rightarrow \quad EI = 2\times10^{10}\ kg.cm^2 = 2000\ t.m^2$$

$$\delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{4EI} = -\frac{(3)(2)^4}{4(2000)} = -0.006\ m = -6\ mm$$

$$\theta_B = V'_B = -\frac{wl^3}{2EI} = -\frac{3(2)^3}{2(2000)} = -0.006\ R$$

$$\delta_B = M'_B = -\frac{wl^4}{2EI} = -\frac{3(2)^4}{2(2000)} = -0.012\ m = -12\ mm$$

$$\theta_{LC} = V'_{LC} = -\frac{wl^3}{2EI} = -0.006\ R \quad , \quad \theta_{RC} = V'_{RC} = -\frac{wl^3}{2EI} + \frac{3wl^3}{4EI} = 0.003\ R$$

$$\delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI} = -\frac{3(16)}{2000} = -0.024\ m = -24\ mm$$

$$\theta_D = V'_D = \frac{wl^3}{4EI} = \frac{3(8)}{4(2000)} = 0.003\ R$$

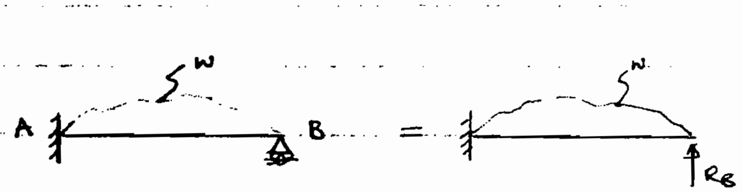
$$\delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI} = -\frac{3(3)(16)}{4(2000)} = -0.018\ m$$

$$\delta_{RD} = M'_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3(16)}{4(2000)} = -0.006\ m$$

نیرو در تیر دو دوج بی‌تعادل است و بعد اگر در تیر دو دوج صفر است.

$$\theta_E = V'_E = \frac{wl^3}{3EI} = \frac{3(8)}{3(2000)} = 0.003\ R \longrightarrow$$ دوران در جهت مثلثاتی

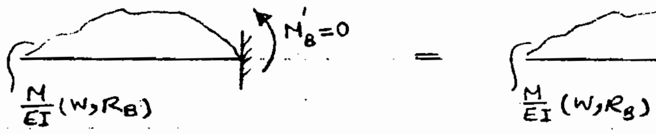
مثال 4) تیر نامعین زیر را حل کنید.



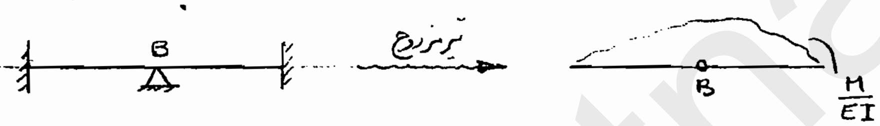
(تیر معین)

۱- تعیین درجه نامعینی   ۲- به تعداد درجه نامعینی، مجهول اضافی درنظر بگیریم.

تیر مزدوج



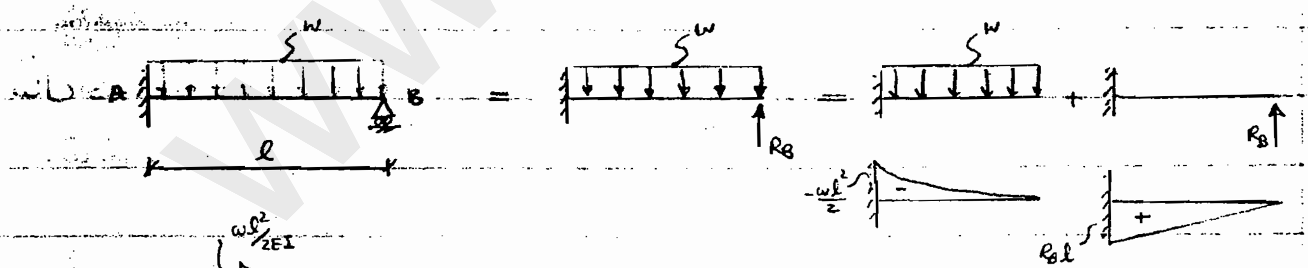
✓ اگر سازه‌ای یک درجه نامعین باشد، یک درجه ناپایداری شود (در تیر مزدوج) بنابراین یک معادله اضافی برای تعادل می‌نویسیم و شرایطی برای تعادل تیر قرار می‌دهیم.



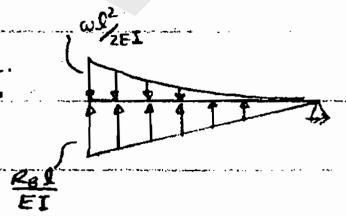
شرایط تعادلی ← $\Sigma F'_y=0$ ، $\Sigma M'_B=0$ راست ، $\Sigma M'_B=0$ چپ

✓ با نوشتن شرط‌های تعادل، مجهول اضافی به دست می‌آید. (هرچند مجهول اضافی نداشته باشیم)

مثال) سازه زیر را با روش تیر مزدوج حل کنید.



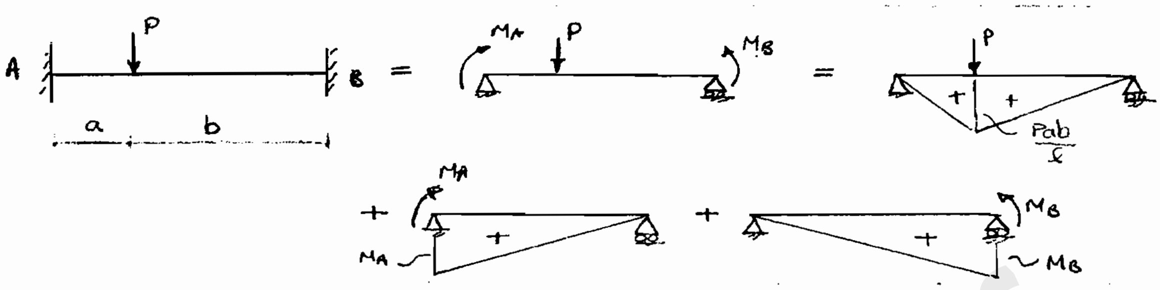
تیر مزدوج



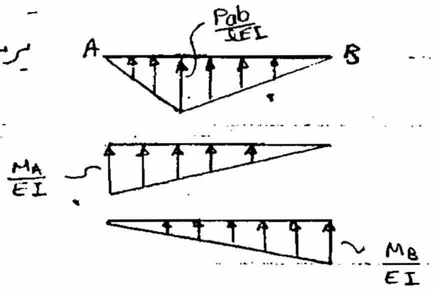
$$\Sigma M'_B=0 \Rightarrow \frac{R_B l^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3} = \frac{l}{3}\cdot\frac{wl^2}{2EI}\cdot\frac{3l}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_B=\frac{3wl}{8}}$$

مثال 2) با استفاده از روش تیر مزدوج، تیر زیر را حل کنید.



تیر مزدوج



$$\Sigma F_y' = 0 \Rightarrow \frac{M_A \ell}{2EI} + \frac{M_B \ell}{2EI} + \frac{Pab}{2EI} = 0$$

$$\Rightarrow M_A + M_B = -\frac{Pab}{\ell}$$

$$\Sigma M_A' = 0 \Rightarrow \frac{M_A \ell}{2EI} \cdot \frac{\ell}{3} + \frac{M_B \ell}{2EI} \cdot \frac{2\ell}{3} + \frac{Pab}{2EI} \cdot \frac{\ell + a}{3} = 0$$

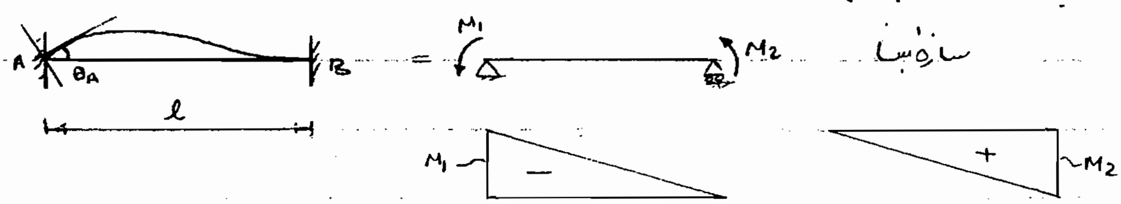
$$\Rightarrow M_A + 2M_B = -\frac{Pab(\ell + a)}{\ell^2}$$

$$M_B = -\frac{Pab(\ell+a)}{\ell^2} + \frac{Pab}{\ell} = \frac{Pab}{\ell}\left(1 - 1 - \frac{a}{\ell}\right) = -\frac{Pa^2b}{\ell^2}$$

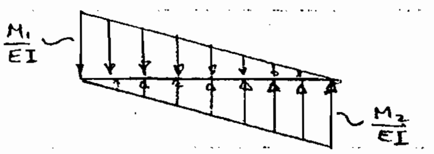
$$M_A = -\frac{Pab}{\ell} + \frac{Pa^2b}{\ell^2} = \frac{Pab}{\ell}\left(-1 + \frac{a}{\ell}\right) = -\frac{Pab^2}{\ell^2}$$

مثال 3) اگر یک تیر دو سر گیردار را تحت یک دوران تکیه‌گاهی قرار دهیم در آن نیرو ایجاد می‌شود. با استفاده از روش تیر مزدوج این تیر را حل کنید.

(θ در جهت مثلثاتی مثبت)



تیر مزدوج



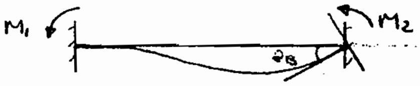
$$\Sigma M_A' = 0 \Rightarrow \frac{M_1 \ell}{2EI} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{M_2 \ell}{2EI} \cdot \frac{2\ell}{3}$$

$$\Rightarrow M_1 = 2M_2$$

$$\sum F_y' = 0 \Rightarrow \theta_A + \frac{M_2 \ell}{2EI} - \frac{M_1 \ell}{2EI} = 0 \longrightarrow \theta_A - \frac{M_2 \ell}{2EI} = 0$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{2EI}{\ell}\theta_A \quad , \quad M_1 = \frac{4EI}{\ell}\theta_A$$

◄ اگر تکیه گاه B را تحت دوران قرار دهیم، داریم:



$$M_1 = \frac{2EI}{\ell}\theta_B \quad , \quad M_2 = \frac{4EI}{\ell}\theta_B$$

◄ حال اگر یکی از تکیه گاه ها به اندازهٔ δ جابه جا شود، داریم: (δ در جهت پادساعتی مثبت)

$$M_1 = M_2 = -\frac{6EI\delta}{\ell^2}$$

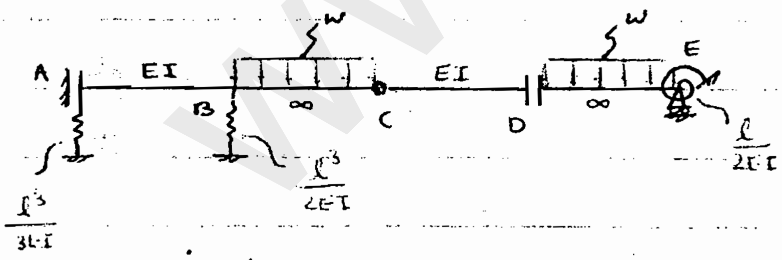
★ به طور کلی اگر تکیه گاه ها تحت دوران و یا جابه جایی قرار گیرند فرمول های زیر برای لنگرها بدست می آید:

$$M_1 = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_1 + \theta_2 - 3\frac{\delta}{\ell}\right)$$

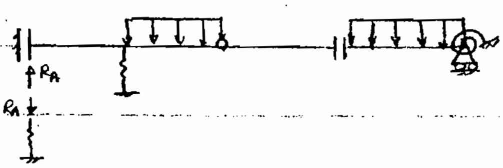
$$M_2 = \frac{2EI}{\ell}\left(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\frac{\delta}{\ell}\right)$$

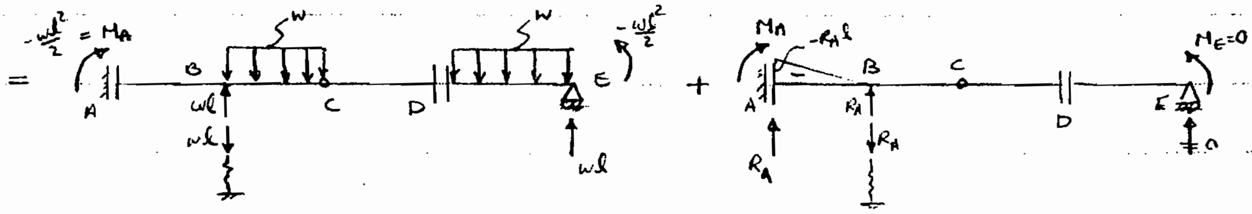
⟶ ◄ معادلات شیب - افت

مثال 4) تیر زیر را با استفاده از روش تیر مزدوج حل کنید.



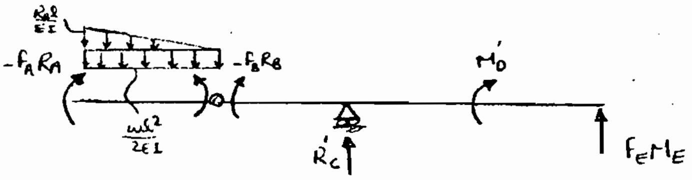
تیر ساده:





چپ $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_A - R_A l + 2R_A l = 0 \Rightarrow M_A = -R_A l$

تیر مزدوج :



$-f_B R_B = -\frac{l^3}{2EI}(wl - R_A)$, $f_E M_E = \frac{l}{2EI}\left(-\frac{wl^2}{2}\right) = -\frac{wl^3}{4EI}$

چپ $\Sigma M'_B = 0 \Rightarrow \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{l^3}{2EI}(wl - R_A) + \frac{wl^3}{2EI}\cdot\frac{l}{2} + \frac{R_A l^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3} = 0$

$\Rightarrow \frac{2R_A l^3}{3EI} + \frac{R_A l^3}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} + \frac{wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{3wl}{14}}$

$\Sigma F'_y = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} \Rightarrow R'_C = \frac{6wl^3}{7EI}$

راست $\Sigma M'_B = 0 \Rightarrow R'_C l - M'_D - \frac{wl^3}{4EI}(3l) + \frac{l^3}{2EI}(wl - R_A) = 0$

$\Rightarrow \frac{6wl^3}{7EI}(l) - M'_D - \frac{3wl^4}{4EI} + \frac{l^3}{2EI}\left(\frac{11wl}{14}\right) = 0 \Rightarrow M'_D = \frac{wl^4}{2EI}$

$\delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{14EI}$, $\theta_B = V'_B = -\frac{6wl^3}{7EI} + \frac{wl^3}{4EI} = \frac{-17wl^3}{28EI}$

$\delta_B = M'_B = -\frac{11wl^4}{28EI}$, $\theta_{LC} = V'_{LC} = V'_B = -\frac{17wl^3}{28EI}$

$\theta_{RC} = V'_{RC} = \frac{wl^3}{4EI}$, $\delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI}$

$\theta_D = V'_D = \frac{wl^3}{4EI}$, $\delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI}$

$\delta_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI}$, $\theta_E = V'_E = \frac{wl^3}{4EI}$

Subject. Year. Month. Date.

$$-f_A R_A = \Theta\frac{R_A l^3}{3EI}$$

جهت را عوض می کند

$$\text{چپ}\quad \sum M'_B=0 \Rightarrow \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{l^3}{2EI}(wl-R_A) + \frac{wl^3}{2EI}\times\frac{l}{2} + \frac{R_A l^2}{2EI}\times\frac{2l}{3} = 0$$

$$\frac{2R_A l^3}{3EI} + \frac{R_A l^3}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} + \frac{wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow \frac{7R_A l^3}{6EI} = \frac{wl^4}{4EI} \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{3wl}{14}}$$

$$\sum F'_y = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{R_A} R'_C = \frac{24}{28}\frac{wl^3}{EI} = \frac{6wl^3}{7EI}$$

$$\text{راست}\quad \sum M'_B = 0 \Rightarrow \underbrace{R'_C}_{\frac{6wl^3}{7EI}} l - M'_D - \frac{wl^3}{4EI}(3l) + \frac{l^3}{2EI}\times\underbrace{(wl-R_A)}_{\frac{11wl}{14}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M'_D = \frac{wl^4}{2EI}}$$

$$\delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{14EI} \qquad \theta_A = 0 \qquad \theta_B = V'_B = -\left(\frac{6wl^3}{7EI} + \frac{wl^3}{4EI}\right) = \frac{-17wl^3}{28EI}$$

درجهت عقربه‌های ساعت

$$\delta_B = M'_B = -\frac{11wl^4}{28EI}$$

$$\theta_{LC} = V'_{LC} = V'_B = \frac{-17wl^3}{28EI}, \quad \theta_{RC} = V'_{RC} = \frac{wl^3}{4EI}$$

کنج چپ

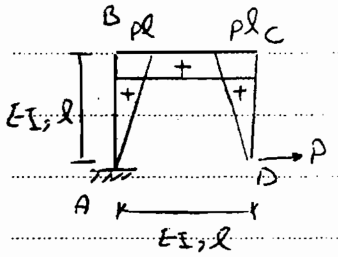
$$\delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI}$$

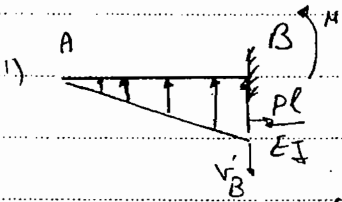
$$\theta_D = V'_D = \frac{wl^3}{4EI} \qquad \delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI}$$

$$\delta_{RD} = M'_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI}, \quad \theta_E = V'_E = \frac{wl^3}{4EI}$$

PAPCO

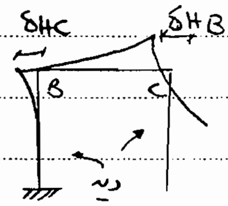
Subject:
Year. Month. Date.

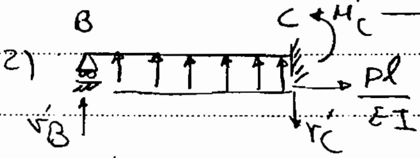




نتیجه: تغییر مکان عمودی در امتداد اصلی

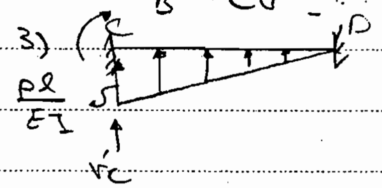
هم تغییر مکان عمودی در امتداد اصلی و هم دوران





$M'_C \rightarrow$ های ناشی

$-M'_B \rightarrow$) های ناشی



$\theta_B = \theta_C$

در 1 داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_B = \frac{P\ell^2}{2EI}$ $\quad \sum M'_B = 0 \Rightarrow M'_B = \frac{P\ell^2}{2EI} \times \frac{\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{6EI}$

در 2 داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_C = \frac{P\ell^2}{2EI} + \frac{P\ell^2}{EI} = \frac{3P\ell^2}{2EI}$

$$\sum M'_C = 0 \Rightarrow M'_C = \frac{P\ell^3}{2EI} + \frac{P\ell^3}{2EI} = \frac{P\ell^3}{EI}$$

در 3 داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_D = \frac{3P\ell^2}{2EI} + \frac{P\ell^2}{2EI} = \frac{2P\ell^2}{EI}$

$$\sum M'_D = 0 \Rightarrow M'_D = \frac{3P\ell^3}{2EI} + \frac{P\ell^2}{2EI} \times \frac{2\ell}{3} - \frac{P\ell^3}{6EI} = \frac{5P\ell^3}{3EI}$$

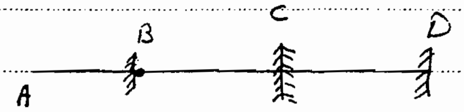
$\theta_B = V'_B = \frac{P\ell^2}{2EI}$ $\quad \delta_{HB} = M'_B = \frac{P\ell^3}{6EI}$ $\quad \delta_{HC} = M'_C\big|_{CD} = -M'_B = -\frac{P\ell^3}{6EI}$

(عمودی D)

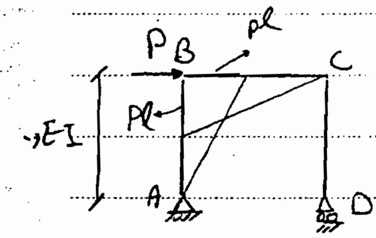
$\theta_C = V'_C = \frac{3P\ell^2}{2EI}$ $\quad \delta_{VC} = M'_C\big|_{BC} = \frac{P\ell^3}{EI}$

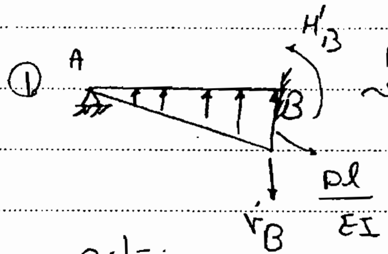
$\delta_{HD} = M'_D\big|_{CD} = \frac{5P\ell^3}{3EI}$ $\quad \theta_D = V'_D = \frac{2P\ell^2}{EI}$

$$\delta_{vD} = M'_D|_{CD} = M'_C|_{BC} = \frac{Pl^3}{EI}$$



رسم تیر صورت مستقل

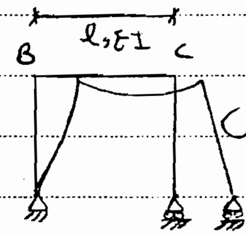




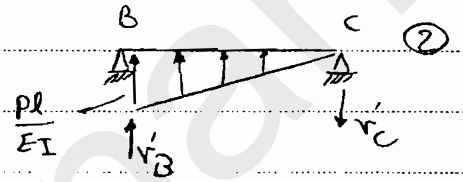
تغییرمکان نقطه A ← ۰

شکل ۱

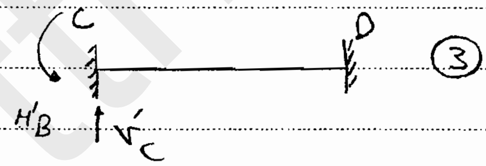
نیروی برشی داده ← θ_A دارد



نقطه B هم تغییرمکان و هم دوران دارد



جابجایی افقی B و C با هم برابرند اما مختلف القلاب هستند چون B را طاقه تیر بوده در حالی که C ضلع اثر رفته.



در ۲ داریم: $\sum M'_C = 0 \Rightarrow l v'_B = -\frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} \Rightarrow v'_B = -\frac{Pl^2}{3EI}$

$$\sum M'_B = 0 \Rightarrow l v'_C = \frac{Pl^2}{2EI} \times l/3 \Rightarrow v'_C = \frac{Pl^2}{6EI}$$

در ۱ داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow v'_A = v'_B - \frac{Pl^2}{2EI} \Rightarrow v'_A = -\frac{Pl^2}{3EI} - \frac{Pl^2}{2EI} = -\frac{5Pl^2}{6EI}$

$$\sum M'_B = 0 \Rightarrow M'_B = l v'_A + \frac{Pl^3}{6EI} \Rightarrow M'_B = -\frac{5Pl^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{6EI} = -\frac{2Pl^3}{3EI}$$

در ۳ داریم: $v'_D = v'_C = \frac{Pl^2}{6EI}$ $\quad M'_D = -M'_B + l v'_C \quad M'_D = \frac{2Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{5Pl^3}{6EI}$

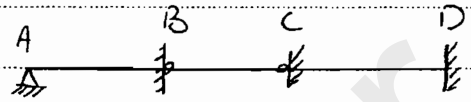
$$\theta_A = v'_A = -\frac{5Pl^2}{6EI} \qquad \theta_B = v'_B = -\frac{Pl^2}{3EI}$$

$$\theta_C = v'_C = \frac{Pl^2}{6EI} \qquad \theta_D = v'_D = \frac{Pl^2}{6EI}$$

$$\delta_{HB} = M'_B\Big|_{AB} = -\frac{2Pl^3}{3EI} \qquad \delta_{HC} = M'_C\Big|_{CD} = -M'_B\Big|_{AB} = \frac{2Pl^3}{3EI}$$

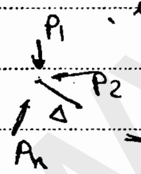
$$\delta_{HD} = M'_D = \frac{5Pl^3}{6EI}$$

رسم تیر بصورت حقیقی $\Longrightarrow$



روشهای انرژی: الف) اصل کار مجازی (روش بار واحد)

اگر یک نقطه مادی داشته باشیم تحت اثر بارهای P_1 و P_2 و ... و P_n که در حال تعادل باشد و اگر یک تغییر مکان Δ به نقطه مادی دهیم کار انجام شده توسط نیروها صفر می‌شود چون نیروها در حال تعادلند این تغییر مکان را تغییر مکان مجازی می‌گویند یعنی این تغییر مکان آنقدر کوچک است که امتداد نیروها را تغییر نمی‌دهد چون اگر تغییر دهد نیروها از حالت تعادل خارج می‌شوند و دیگر کار صفر نخواهد شد



$\Rightarrow \Delta W = 0$

پس وقتی اصل کار مجازی برقرار باشد نیروها در حال تعادل هستند.

حال اگر فرض کنیم یک جسم صلب تحت اثر نیروهای P_1 و P_2 و M_1 و M_2 و ... قرار گرفته حال اگر این نیروها و لنگرها در حال تعادل باشند و یک تغییر مکان Δ از نظر سطح به جسم دهیم و به اندازه

هم دوران دهیم (دوران جسم صلب) کار انجام شده در این حالت هم برابر صفر است چون نیروها در حال

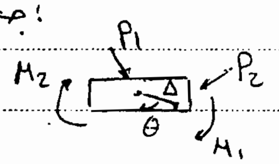
تعادلند ولی Δ و θ آنقدر کوچکند که امتداد نیروها را تغییر نمی دهند. کار ناشی از جسم صلب صفر است.

فرض کنیم تیر (جسم تغییر شکل پذیر) داریم تحت اثر بارها و نیروهای مختلف. این تیر را یک تغییر شکل

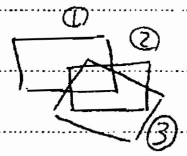
مجازی می دهیم مثلاً آن را خم می کنیم. منتها این تغییر شکل آنقدر کوچک است که امتداد نیروها تغییر نمی کند

پس به این تغییر شکلها هم تغییر شکلهای مجازی گویند.

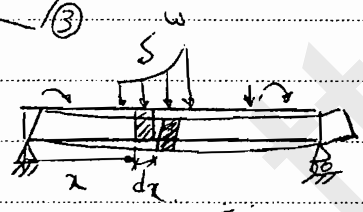
جسم صلب:



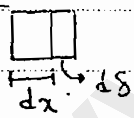
$\Rightarrow dW_c = 0$



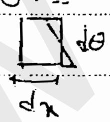
تیر



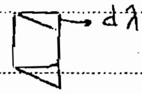
تغییر شکل محوری



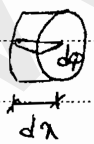
تغییر شکل خمشی



تغییر شکل برشی

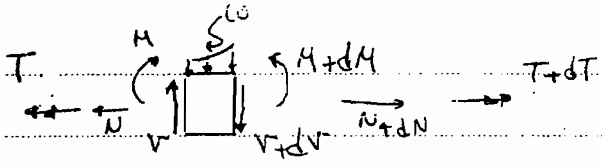


تغییر شکل پیچشی

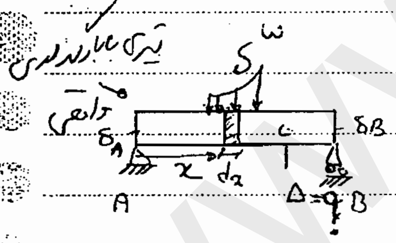


$dw_e = dw_r + dw_d$

Subject: Year. Month. Date.

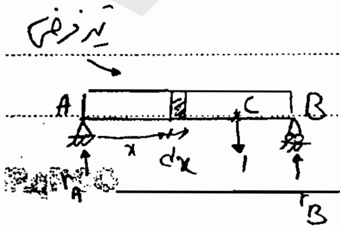


از اصل کار انرژی استفاده می کنیم و روش بار واحد را استفاده می کنیم روش بار واحد برای محاسبه تغییر مکانهاست.



ابتدا سازه ای را در نظر می گیریم. این تیر را تحت تعادل در نظر می گیریم

نقطه ای از این تیر مثلاً C را در نظر می گیریم تغییر مکان قائم C را بدست می آوریم



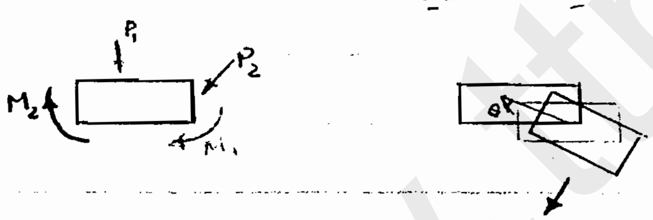
برای این کار با استفاده از اصل کار مجازی عمل می کنیم. در نقطه C بار واحدی

◄ روش های انرژی

الف ـ اصل کار مجازی (روش بار واحد):

◄ اگر یک نقطه مادی تحت اثر نیروهای P_1 و P_2 و ... و P_n قرار داشته باشد و در حال تعادل باشند آنگاه اگر یک تغییرمکان Δ به این نقطه مادی بدهیم کار انجام شده توسط نیروها صفر است چون نیروها در حال تعادل اند. به این تغییرمکان، تغییرمکان مجازی گفته می شود. تغییرمکان مجازی یعنی آنکه تغییرمکان آنقدر کوچک است که راستای نیروها را تغییر نمی دهد.

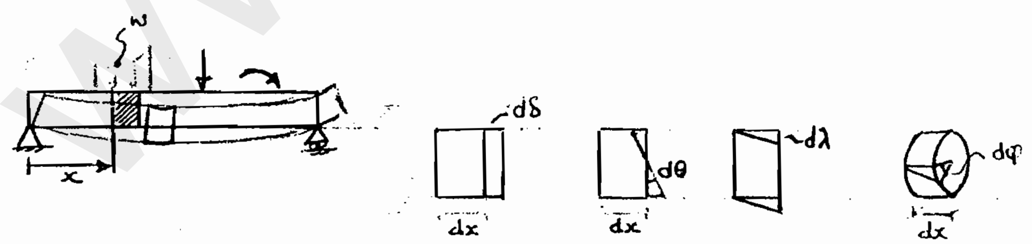
◄ اگر یک جسم صلب را هم که تحت اثر نیروهایی باشد که در حال تعادل اند به اندازه Δ جابجا کنیم و به اندازه θ دوران دهیم، کار انجام شده توسط نیروها صفر است. بنابراین این Δ و θ تغییرمکانهای مجازی هستند یعنی آنقدر کوچکند که امتداد نیروها را تغییر نمی دهد.

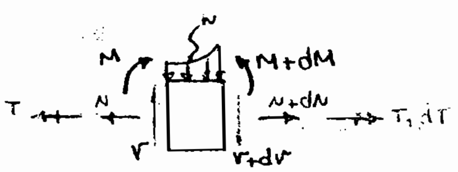


$W_e = 0$

تغییرمکان های مجازی

◄ اگر یک جسم غیرصلب را که تغییرشکل دارد تحت تغییرمکان مجازی قرار دهیم، جسم تغییرشکل پیدا می کند





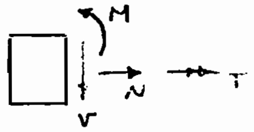
$$dW_e = \underbrace{dW_r}_{0} + dW_d$$

کار ناشی از جسم صلب — کار ناشی از تغییرشکل

$$dW_d = N\,d\delta + M\,d\theta + V\,d\lambda + T\,d\varphi \Rightarrow \boxed{\int_l dW_e = W_{int}}$$

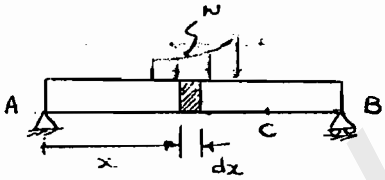
کار داخلی مجازی

◄ درکنار المانی که گرفتیم در فاصله‌ی x المان دیگری قرار دارد و به همین ترتیب تا آخر. حال فرض می‌کنیم که در فاصله‌ی x یک تغییر مکان افقی δ_1 و یک تغییر مکان قائم δ_2 و دوران θ داشته باشیم:



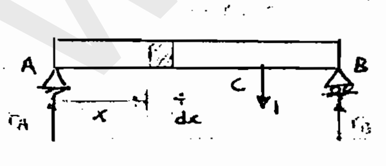
$$W = N\delta_1 + V\delta_2 + M\theta + T\varphi$$

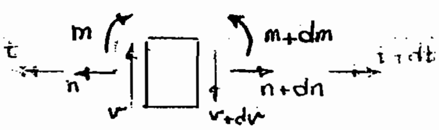
◄ روش بار واحد برای محاسبه‌ی تغییر مکان‌ها:



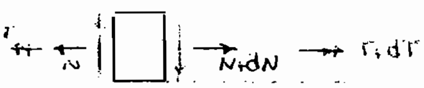
فرض می‌کنیم تیری بارگذاری قرار گرفته و در حال تعادل است. می‌خواهیم تغییر مکان نقطه‌ی C را پیدا کنیم.

در روش بار واحد، اگر تغییر مکان قائم را به سمت پایین بخواهیم یک بار واحد در آن نقطه به سمت پایین وارد می‌کنیم، اگر تغییر مکان را به سمت بالا بخواهیم، بار واحد را به سمت بالا وارد می‌کنیم. اگر تغییر مکان θ را بخواهیم لنگر واحد را در جهت θ به تیر وارد می‌کنیم که به این بار، بار واحد متناظر با تغییر مکان مجهول می‌نامیم.



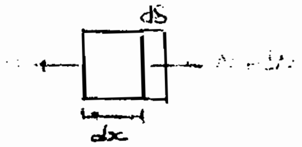


المان از تیر اصلی:

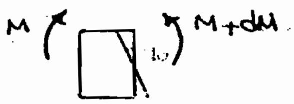


◄ رابطه کلی

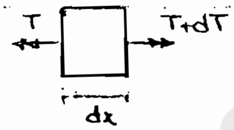
$$1\times\Delta + W_R = \int_l n\, d\delta + \int_l m\, d\theta + \int_l v\, d\lambda + \int_l t\, d\varphi$$



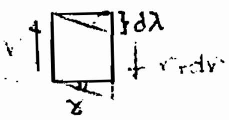
$$d\delta = \frac{(N+dN)\,dx}{EA} = \frac{N\,dx}{EA}$$



$$d\theta = \frac{M\,dx}{EA}$$



$$d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ}$$



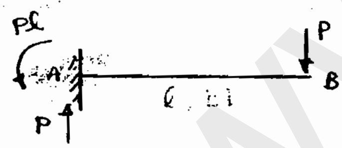
$$(d\lambda)_{max} = \gamma_{max}\,dx = \frac{\tau_{max}}{G}\,dx = \frac{\alpha_s V}{GA}\,dx$$

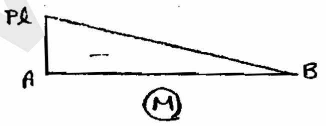
ضریب برش $\alpha_s = \dfrac{\tau_{max}}{\tau_m} \Longrightarrow \tau_{max} = \alpha_s \tau_m = \alpha_s \dfrac{V}{A}$

◄ رابطه بار واحد برای سازه‌هایی که خطی هستند

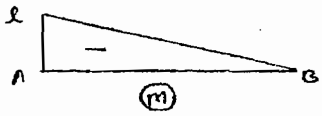
$$1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN}{EA}\,dx + \int_l \frac{mM}{EA}\,dx + \int \frac{\alpha_s V v}{GA}\,dx + \int \frac{tT}{GJ}\,dx$$

مثال) تیر طره‌ای به طول l تحت بارگذاری P قرار گرفته است. δ_{vB} و θ_B را بدست آورید.





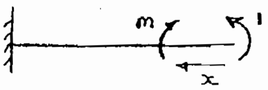
$M = -Px \quad ; \quad 0 \leq x \leq l$



$m = -x \quad ; \quad 0 \leq x \leq l$

$$1\times\delta_{vB} = \int_0^l \frac{(-x)(-Px)}{EI}\,dx = \frac{Pl^3}{3EI} \longrightarrow \delta_{vB} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

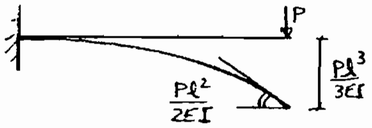
✓ مثبت بودن δ_{vB} نشان دهنده این است که تغییر مکان هم جهت با بار واحد است.



$m = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq l$

$$1\times\theta_B = \int_0^l \frac{(1)(-Px)}{EI}\,dx = \frac{-Pl^2}{2EI}$$

★ منفی بودن θ_B نشان دهنده این است که چرخش در خلاف جهت نیروی واحد است.



سمت تغییر شکل

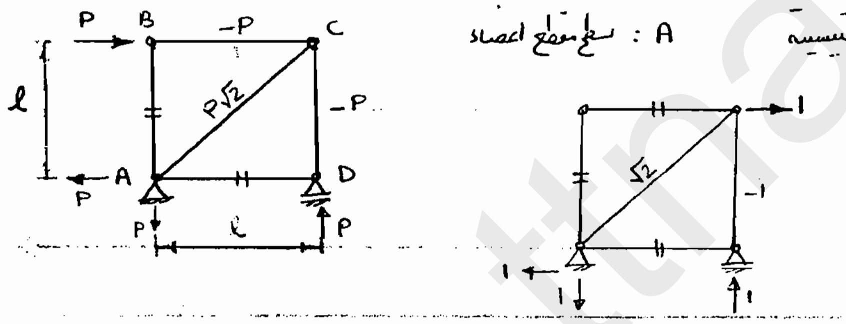
◀ رابطه بار واحد برای خرپاها به صورت زیر است:

$$1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN}{EA}\,dx = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_iN_il_i}{E_iA_i}$$

در صورتی برقرار است که اعضا غیر منشوری و یکپارچه باشند.

مثال ۱) در خرپای زیر δ_{HC} را به دست آورید.

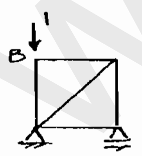
E : مدول الاستیسیته   A : سطح مقطع اعضا



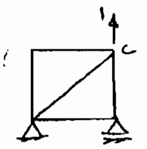
$$1\times\delta_{HC} = \sum\frac{nNl}{EA} = \frac{l}{EA}\left[(-1)(-P)+\sqrt{2}\,(P\sqrt{2})(\sqrt{2})\right] = \frac{Pl}{EA}\left(1+2\sqrt{2}\right)$$

★ می‌خواهیم دوران عضو BC را به دست آوریم:

در جهت ساعتی $\theta_{BC} = \dfrac{\delta_{vB}\downarrow + \delta_{vC}\uparrow}{l_{BC}}$



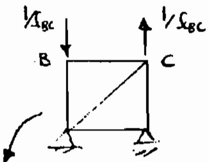
$\delta_{vB} = \sum\frac{n_1Nl}{EA}$



$\delta_{vC} = \sum\frac{n_2Nl}{EA}$

$$\theta_{BC} = \frac{1}{l_{BC}}\sum\frac{n_1Nl}{EA} + \frac{1}{l_{BC}}\sum\frac{n_2Nl}{EA} = \sum\left[\frac{\left(\frac{n_1}{l_{BC}}\right)Nl}{EA} + \frac{\left(\frac{n_2}{l_{BC}}\right)Nl}{EA}\right]$$

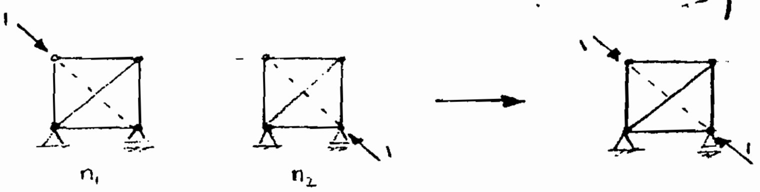
$$\Rightarrow\quad \theta_{BC} = \sum\frac{\left(\frac{n_1}{l_{BC}}+\frac{n_2}{l_{BC}}\right)Nl}{EA}$$



$n = \frac{n_1}{l_{BC}} + \frac{n_2}{l_{BC}}$

برای به دست آوردن θ در یک عضو کافی است یک کوپل $\frac{1}{l}$ در دو طرف قرار دهیم...

مفصل های B و D چقدر به هم نزدیک می شوند ؟

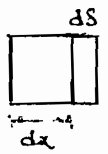


$$\delta_{B/D} = \delta_{B\to D} + \delta_{D\to B} = \sum \frac{n_1 N l}{EA} + \sum \frac{n_2 N l}{EA} = \sum \frac{(n_1+n_2) N l}{EA} = \sum \frac{n N l}{EA}$$

برای به دست دوران نسبی دو نقطه نسبت به هم از دو لنگر واحد مختلف العلامه استفاده می کنیم .

فرض می کنیم خرپایی داشته باشیم که در بعضی از اعضای آن تغییر درجه حرارت رخ داده باشد . اثر این تغییر درجه حرارت را بررسی می کنیم :

ΔT تغییر درجه حرارت و α ضریب انبساط حرارتی

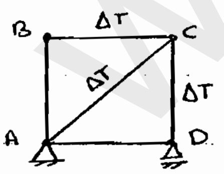


$$d\delta = \alpha(\Delta T)\,dx$$

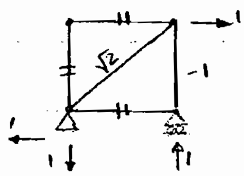
برای یک عضو : $\int_l n\,d\delta = \int_{l_i} n\alpha(\Delta T)\,dx = n_i l_i \alpha_i (\Delta T)_i$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \sum \frac{nNl}{EA} + \sum n l \alpha(\Delta T)$$

مثال : اگر اعضای BC و CD دارای تغییر حرارت ΔT باشند ، δ_{HC} را به دست آورید .

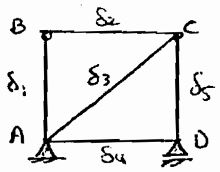


* چون بارگذاری خارجی نداریم $N=0$.



$$\delta_{HC} = l\alpha(\Delta T)\,[-1+2] = l\alpha(\Delta T)$$

مثال) فرض می کنیم تمامی اعضا خطای در ساخت دارند . δ_{HC} را به دست آورید .



برای یک عضو $\int n\,d\delta = \pm n_i \delta_i$

برای همه اعضا $\sum n_i \delta_i$

• رابطهٔ کلی بار واحد برای خرپاها :

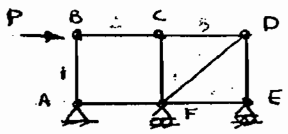
$$1\times\Delta + W_R = \frac{\sum nNl}{EA} + \sum n l \alpha (\Delta T) + \sum n\delta$$

خطا $\delta \to \pm$ اشتباه $\delta \to +$ اگر عضو بلندتر باشد ، $-$ اگر عضو کوتاهتر باشد

: اگر خطا داشته باشیم $\quad 1\times\Delta + W_R = \sum n l \alpha (\Delta T) \pm \sum |n\delta| + \frac{\sum nNl}{EA}$

★ اگر در سازهٔ نامعین تغییر درجه حرارت و یا خطای در ساخت داشته باشیم نیروهای داخلی به وجود می‌آید و اگر سازه معین باشد نیرویی به وجود نمی‌آید .

مثال) δ_{HD} را در خرپای روبه رو به دست آورید .

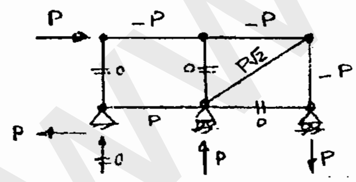


نشست تکیه گاهی $\Delta F\downarrow = 1\,cm \quad , \quad \delta_8 = 1\,cm$

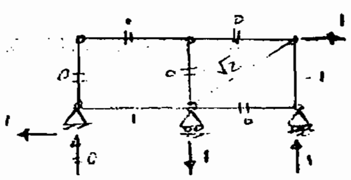
$\delta_5 = 2\,cm \quad , \quad \delta_4 = -2\,cm \quad , \quad \delta = \pm 1\,mm$

$(\Delta T)_1 = (\Delta T)_3 = (\Delta T)_5 = (\Delta T)_7 = 50^\circ C$

$(\Delta T)_2 = (\Delta T)_4 = (\Delta T)_6 = -(\Delta T)_8 = -50^\circ C$



N



n

i = شماره عضو	l_i	n_i	N_i	$n_iN_il_i$	$(\Delta T)_i$	$n_i(\Delta T)_i l_i$	Δ_i	$n_i\Delta_i$	$\lvert n_i\delta_i\rvert$
1	l	0	0	0	50	0			
2	l	0	$-P$	0	-50	0			
3	l	1	P	Pl	50	$50l$			0.001
4	l	0	0	0	-50	0	-0.02		
5	l	0	$-P$	0	50	0	0.02		
6	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}$	$P\sqrt{2}$	$2Pl\sqrt{2}$	-50	$-100l$			$0.001\sqrt{2}$
7	l	0	0	0	50	0			
8	l	-1	$-P$	Pl	50	$-50l$	0.01	-0.01	0.001
				$2Pl(1+\sqrt{2})$		$-100l$		-0.01	0.0034

$W_R =$ عکس‌العمل سازه با بار واحد $\times$ نشست تکیه‌گاه

$$1\times\delta_{HD} + (0.01)(1) = \frac{2P\ell(1+\sqrt{2})}{EA} - 100\alpha\ell - 0.01 \pm 0.0034$$

$$P = 2t \ , \quad \ell = 3m \ , \quad \begin{cases} E = 2\times10^{6} \ kg/cm^2 \\ A = 1 \ cm^2 \end{cases} \Rightarrow EA = 2\times10^{6} \ kg = 2000 \ t$$

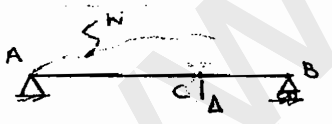
$$\delta_{HD} = -0.01 + \frac{2(2)(3)(2.41)}{2000} - 10^{-3}(3) - 0.01 \pm 0.0034$$

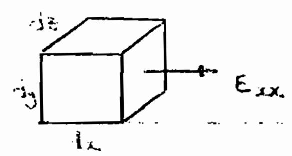
$$\delta_{HD} = -0.023 + 0.0144 \pm 0.0034 \Rightarrow \delta_{HD} = 0.0086 \pm 0.0034$$

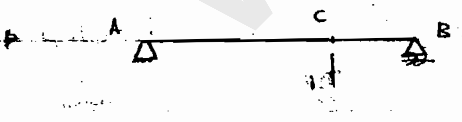
◀ فرمول کلی که برای روش بار واحد به دست آوردیم عبارت بود از:

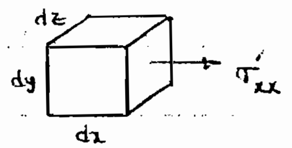
$$1\times\Delta + W_R = \int_\ell \frac{nNdx}{EA} + \int_\ell \frac{mMdx}{EI} + \int_\ell \frac{\alpha_s vVdx}{GA} + \int_\ell \frac{tTdx}{GJ}$$

سومین عبارت سمت راست دقیق نیست و با فرض به دست آوردن max برش به دست آمده است بنابراین با روش دیگری عبارت دقیق برای آن به دست می‌آوریم.









$$(\sigma'_{xx}\, dy\, dz)(\varepsilon_{xx}\, dx) = \sigma'_{xx}\,\varepsilon_{xx}\, dV_0 \qquad (\text{حجم} : V_0)$$

$$1\times\Delta + W_R = \int_{V_0} (\sigma'_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma'_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma'_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma'_{xy}\gamma_{xy} + \sigma'_{yz}\gamma_{yz} + \sigma'_{zx}\gamma_{zx})\, dV_0$$

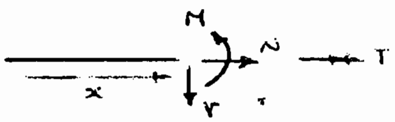
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

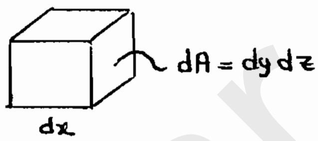
$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{V_0} \sigma' \varepsilon \, dV_0 + \int_{V_0} \tau' \gamma \, dV_0$$

◄ در سازه هایی مانند خرپا که فقط نیروی محوری داریم خواهیم داشت :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} \quad , \quad \sigma'_{xx} = \frac{n}{A}$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{\ell} \left[\int_A \frac{nN}{EA^2} \, dA \right] dx$$





◄ چون سطح مقطع در هر مقطعی ثابت است می توانیم آن را از انتگرال خارج کنیم حتی اگر در طول عضو متغیر باشد :

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{\ell} \frac{nN}{EA} \, dx$$

◄ حال فرمول را برای سازه هایی می نویسیم که فقط لنگر خمشی دارند :

$$1\times\Delta + W_R = \int_{\ell} \left[\int_A \frac{mMy^2}{EI^2} \, dA \right] dx = \int_{\ell} \frac{mM}{EI} \, dx$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{My}{EI} \quad , \quad \sigma'_{xx} = \frac{My}{I} \quad , \quad \int y^2 dA = I$$

◄ فرمول برای سازه هایی که فقط نیروی برشی دارند :

$$\gamma = \frac{VQ}{GIb} \quad , \quad \tau' = \frac{vQ}{Ib}$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{V_0} \frac{vVQ^2}{GI^2b^2} \, dV_0 = \int_{\ell} \left[\int_A \frac{vVQ^2}{GI^2b^2} \, dA \right] dx$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{\ell} \frac{vV}{GI^2} \left[\int_A \frac{Q^2}{b^2} \, dA \right] dx = \int_{\ell} \frac{vV}{GA} \left[\frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \right] dx$$

ضریب شکل مقطع برای برش : $f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \qquad (1 \leq f_s \leq \alpha_s)$

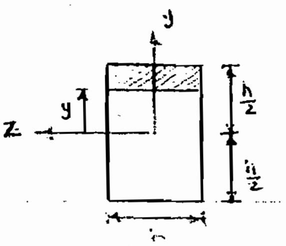
$$\Rightarrow \quad 1 \times \Delta + W_R = \int_l \frac{f_s v V dx}{GA}$$

◄ فرمول برای سازه‌هایی که مقطع تنگر پیچشی دارند :

$$\gamma = \frac{T\rho}{GJ} \quad , \quad \tau' = \frac{t\rho}{J}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \times \Delta + W_R = \int_l \left[\int_A \frac{tT\rho^2}{GJ^2} dA \right] dx = \int_l \frac{tT}{GJ} dx$$

مثال) f_s را در یک مقطع مستطیل به دست آورید .



$$A = bh \quad , \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{h/2 - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

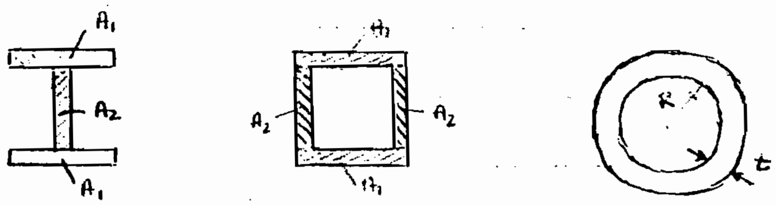
$$dA = dy\,dz \rightsquigarrow dA = b\,dy$$

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA = \frac{bh(144)}{b^2h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\frac{b^2}{4}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2}{b^2} b\,dy = 1.2$$

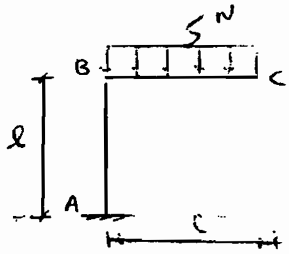
$$\alpha_s = \frac{\tau_{max}}{\tau_m} \quad , \quad \tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{Ib} = \frac{V\left(\frac{bh^2}{8}\right)}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)(b)} = 1.5\frac{V}{A} = 1.5\,\tau_m$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_s = \frac{1.5\,\tau_m}{\tau_m} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad f_s < \alpha_s$$

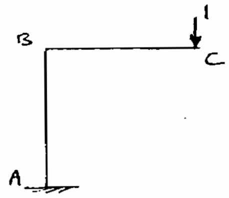
تمرین) f_s را برای مقاطع زیر به دست آورید .



مثال) اثرات خمش، برش و کشش یا فشار را در سازه زیر بررسی کرده و δ_{vc} را به دست آورید.



$$BC: \begin{cases} M = -\frac{wx^2}{2} \\ V = wx \\ N = 0 \end{cases} \qquad AB: \begin{cases} M = -\frac{w\ell^2}{2} \\ V = 0 \\ N = -w\ell \end{cases}$$



$$BC: \begin{cases} m = -x \\ v = 1 \\ n = 0 \end{cases} \qquad AB: \begin{cases} m = -\ell \\ v = 0 \\ n = -1 \end{cases}$$

$$1 \times \delta_{vc} = \int_0^\ell \frac{(-x)(-\frac{wx^2}{2})\,dx}{EI} + \int_0^\ell f_s \frac{(1)(wx)\,dx}{GA}$$

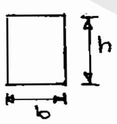
$$+ \int_0^\ell \frac{(-\ell)(\frac{w\ell^2}{2})\,dx}{EI} + \int_0^\ell \frac{(-1)(-w\ell)\,dx}{EA}$$

$$\delta_{vc} = \frac{w\ell^4}{8EI} + \frac{w\ell^4}{2EI} + \frac{f_s w\ell^2}{2GA} + \frac{w\ell^2}{EA} = \frac{5w\ell^4}{8EI}(1+\alpha+\beta)$$

△ معمولاً در قاب‌ها، از اثرات نیروی برشی و محوری صرف نظر می‌کنیم چون تغییرمکان برشی و محوری به خمشی ناچیز است.

$$\alpha = \frac{\frac{f_s w\ell^2}{2GA}}{\frac{5w\ell^4}{8EI}} = \frac{4EI f_s}{5GA\ell^2} = \frac{4EI f_s}{5\frac{E}{2(1+\nu)}A\ell^2} = \frac{8(1+\nu) I f_s}{5A\ell^2}$$

فرض



$f_s = 1.2 \quad , \nu = 0.25$

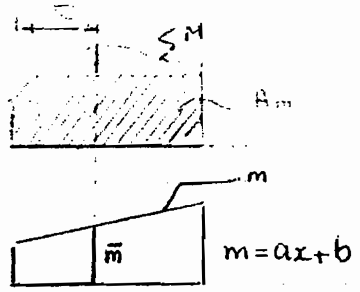
$I = \frac{bh^3}{12} \quad , (\frac{h}{\ell})^2 = 0.01 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{h^2}{5\ell^2} = 0.2(\frac{h}{\ell})^2$

$$\beta = \frac{\frac{w\ell^2}{EA}}{\frac{5w\ell^4}{8EI}} = \frac{8I}{5A\ell^2} = \frac{8\,bh^3/12}{5(bh)\ell^2} = \frac{2}{15}(\frac{h}{\ell})^2$$

△ α و β در حدود 0.01 است که در مقابل 1 قابل صرف نظر است بنابراین در قاب‌ها معمولاً اثرات خمش را به تنهایی در نظر می‌گیرند.

◀ روش مور برای افزایش سرعت بدست آوردن انتگرال ها :

$$1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN\,dx}{EA} + \int_l \frac{mM\,dx}{EI} + \int_l \frac{f_s v V\,dx}{GA} + \int_l \frac{tT\,dx}{GJ}$$



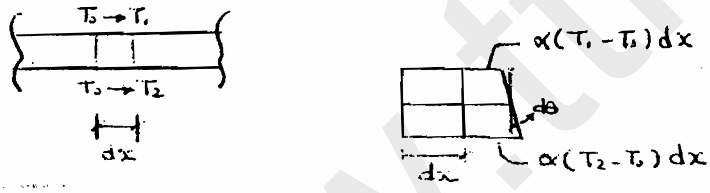
$$\int_0^l mM\,dx = \int_0^l (ax+b)M\,dx$$

$$= a\int_0^l xM\,dx + b\int_0^l M\,dx$$

چون بارگذاری رامداست m خطی است.

$$= a\bar{x}A_m + bA_m = A_m(a\bar{x}+b) = A_m\bar{m}$$

◀ اگر دمای تار بالا در یک عضو T_1 و دمای تار پایین T_2 باشد ، روابط به صورت زیر خواهد بود :



* تغییر درجه حرارت در سازه معین ایجاد نیروهای داخلی نمی کند .

$$1\times\Delta + W_R = \int n\,d\delta + \int m\,d\theta + \int v\,d\lambda + \int t\,d\varphi$$

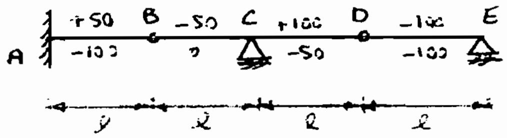
$$d\delta = \alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right)dx$$

$$d\theta = \frac{\alpha(T_2-T_0)dx - \alpha(T_1-T_0)dx}{h} = \frac{\alpha(T_2-T_1)dx}{h}$$

$$1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN\,dx}{EA} + \int_l \frac{mM\,dx}{EI} + \int_l \frac{f_s v V\,dx}{GA} + \int_l \frac{tT\,d\varphi}{GJ}$$

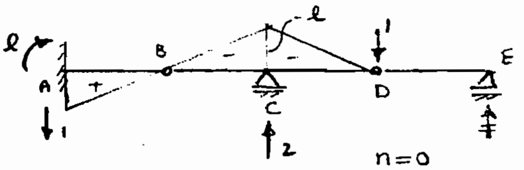
$$+ \int_l n\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right)dx + \int_l m\,\frac{\alpha(T_2-T_1)dx}{h}$$

مثال) تغییرمکان قائم D را بدست آورید.



$\alpha = 10^{-5}/^{o}C \quad , \quad l = 2m$

$h = 0.2\ m$

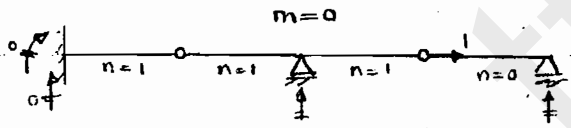


$$1 \times \delta_{VD} = \sum_i \left[\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \int_l m\,dx \right]_i$$

$$\Rightarrow 1 \times \delta_{VD} = \frac{\alpha(-150)l^2}{2h} - \frac{\alpha(50)l^2}{2h} - \frac{\alpha(-150)l^2}{2h} = -25\frac{\alpha l^2}{h}$$

$$\Rightarrow 1 \times \delta_{VD} = -25\frac{10^{-5} \times 4}{0.2} \Rightarrow \delta_{VD} = -0.005\ m \uparrow$$

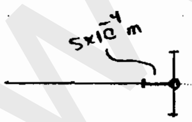
△ تغییرمکان افقی D را بدست آورید.



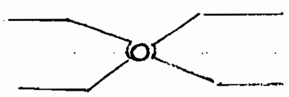
$$1 \times \delta_{HD} = \sum_i \left[\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right) n\, l \right]_i = \alpha(-25)l + \alpha(-25)l + \alpha(25)l$$

$$\Rightarrow 1 \times \delta_{HD} = -25\alpha l = -25 \times 10^{-5} \times 2 \Rightarrow \delta_{HD} = -5 \times 10^{-4}\ m \leftarrow$$

این مقدار تغییرمکان افقی میان تار است

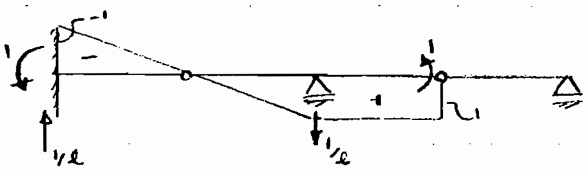


برای بدست آوردن تغییرمکان افقی تار بالا و پایین باید مقدار دوران (θ) مقطع را به دست آوریم.



دوران سمت چپ و راست متفاوت است

△ دوران سمت چپ نقطه D را بدست آورید.



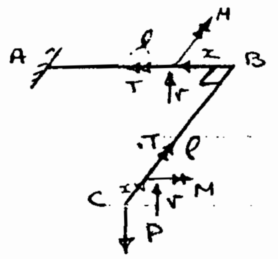
$$1\times\theta_{LO} = -\frac{\alpha(-150)l}{2h} + \frac{\alpha(50)l}{2h} + \frac{\alpha(-150)l}{h} = -\frac{50\alpha l}{h}$$

$$\Rightarrow\quad 1\times\theta_{LO} = -\frac{50(10^{-5})(2)}{0.2} = -5\times10^{-3}\ R$$

تغییرمکان افقی تار بالا در سمت چپ : $\delta_1 = -5\times10^{-4} + 5\times10^{-3}\times0.1 = 0$

〃 〃 تار پایین 〃 〃 〃 : $\delta_2 = -5\times10^{-4} - 5\times10^{-3}\times0.1 = -10^{-3}\ m$

مثال 2) تغییرمکان نقطهٔ C را بدست آورید.



$EI\ ,\ GA/f_s\ ,\ GJ$

$$BC:\begin{cases} M=-Px\ , & m=-x\\ V=P\ , & v=1\\ T=0\ , & t=0\end{cases}$$

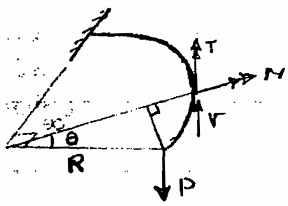
$$AB:\begin{cases} M=-Px\ , & m=-x\\ V=P\ , & v=1\\ T=Pl\ , & t=l\end{cases}$$

$$1\times\delta_C = \int_l \frac{mM\,dx}{EI} + \int_l \frac{f_s vV\,dx}{GA} + \int_l \frac{tT\,dx}{GJ}$$

$$1\times\delta_C = 2\int_0^l \frac{(-x)(-Px)\,dx}{EI} + 2\int_0^l \frac{f_s(1)(P)\,dx}{GA} + \int_0^l \frac{(l)(Pl)\,dx}{GJ}$$

$$= \frac{2Pl^3}{3EI} + \frac{2f_sPl}{GA} + \frac{Pl^3}{GJ}$$

مثال 3) تغییرمکان نقطهٔ B را بدست آورید.



$EI\ ,\ GA/f_s\ ,\ GJ$

$M = -PR\sin\theta\quad ,\quad m = -R\sin\theta$

$V = P\quad ,\quad v = 1$

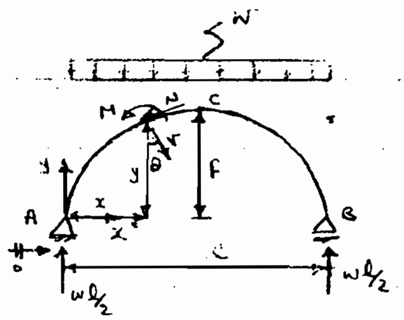
$T = PR(1-\cos\theta)\quad ,\quad t = R(1-\cos\theta)$

$$\delta_B = \int \frac{mMds}{EI} + \int \frac{f_s v V ds}{GA} + \int \frac{tTds}{GJ}$$

$$\delta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3 Sin^2\theta \, d\theta}{EI} + \int_0^{\pi/2} \frac{f_s (1)(R) d\theta}{GA} + \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3(1-Cos\theta)^2 d\theta}{GJ}$$

$$= \frac{\pi R^3 P}{4EI} + \frac{f_s P R \pi}{2GA} + \frac{PR^3}{GJ}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)$$

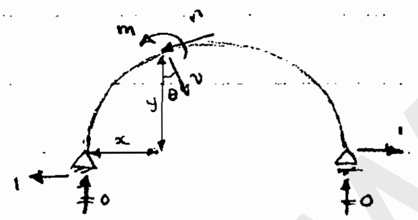
مثال ۴) تغییرمکان افقی B را بدست آورید.



معادله قوس : $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$

$$AC: \begin{cases} M = \frac{wl}{2}x - w\frac{x^2}{2} & , \quad m = y \\ V = (wl/2 - wx)\, Cos\theta & , \quad v = Sin\theta \\ N = (wl/2 - wx)\, Sin\theta & , \quad n = -Cos\theta \end{cases}$$

$dx = ds(Cos\theta)$



$$1 \times \delta_{HB} = \int_l \frac{mMds}{EI} + \int_l \frac{f_s v V ds}{GA} + \int_l \frac{nNds}{EA}$$

$$\delta_{HB} = \int_0^l \frac{4f}{l^2} x(l-x)\left(\frac{wl}{2}x - w\frac{x^2}{2}\right) \times \frac{1}{EI} \times \frac{dx}{Cos\theta}$$

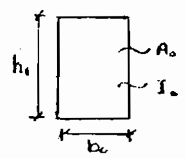
$$+ \int_0^l f_s \left(\frac{wl}{2} - wx\right) Sin\theta \times \frac{dx}{GA} + \int_0^l -\left(\frac{wl}{2} - wx\right) Sin\theta \times \frac{dx}{EA}$$

$$\tan\theta = y' = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) \quad , \quad \begin{cases} I_0 = I\, Cos\theta \\ A = A_0\, Cos\theta \end{cases}$$

با قرار دادن این روابط در انتگرال های بالا ، آنها را محاسبه می کنیم.

در نقطه C ، θ صفر است در نتیجه :

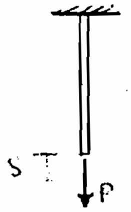
$A = A_0 \quad , \quad I = I_0$



$$I_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12} \quad , \quad A = b_0 h_0$$

$$\begin{cases} bh = b_0 h_0\, Cos\theta \\ b_0 h_0^3 = b h^3\, Cos\theta \end{cases} \Rightarrow h_0 = h\, Cos\theta \quad , \quad b = b_0\, Cos^2\theta$$

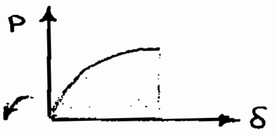
ب ـ اصل کار حقیقی :



اگر در میلهٔ روبرو رابطهٔ نیرو و تغییر مکان خطی باشد انرژی ذخیره شده در آن برابر است با :

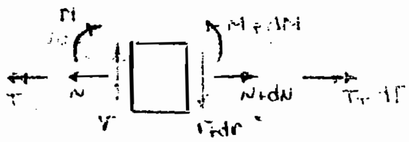
$$W = \frac{1}{2} P\delta$$

رابطهٔ نیرو و تغییر مکان غیرخطی است

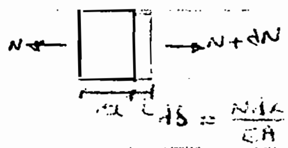


$$dW = P\,d\delta$$

$$W = \int P\,d\delta$$

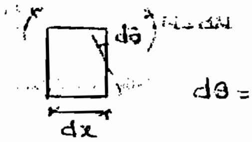


حال انرژی داخلی ناشی از تغییر شکل را بدست می آوریم :

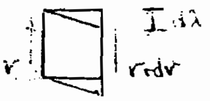


$$dU_a = \frac{1}{2} N\,d\delta = \frac{N^2 dx}{2EA}$$

$$\Rightarrow U_a = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA}$$



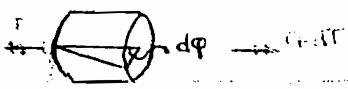
$$d\theta = \frac{M dx}{EI} \qquad dU_b = \frac{1}{2} M\,d\theta = \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U_b = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI}$$



$$d\lambda = \gamma\,dx \simeq \gamma_{max}\,dx = \frac{\tau_{max}}{G}\,dx = \frac{\alpha_s V dx}{GA}$$

$$dU_s = \frac{1}{2} V\,d\lambda = \frac{\alpha_s V^2 dx}{GA}$$

$$\Rightarrow U_s = \int_l \frac{\alpha_s V^2 dx}{GA}$$

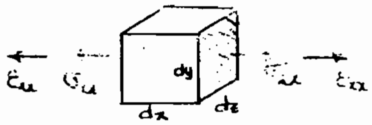


$$dU_T = \frac{1}{2} T\,d\varphi = \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

$$d\varphi = \frac{T dx}{GJ} \qquad \Rightarrow U_T = \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

انرژی کل ذخیره شده در یک سازه برابر است با :

$$U = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA} + \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$



$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\,dy\,dz)\,\varepsilon_{xx}\,dx = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\,dV_0$$

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz})\,dV_0$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dV_0} = u$$ چگالی انرژی

◄ انرژی کرنشی جسم حجیم به وجود آورده است :
$$U = \sum \int_{V_0} \sigma\varepsilon\,dV_0 + \sum \int_{V_0} \tau\gamma\,dV_0$$

* اثر نیروی محوری، برشی، لنگر خمشی و پیچشی را به طور جداگانه در یک تیر بررسی می‌کنیم :

N
$$\begin{cases}\sigma = \dfrac{N}{A}\\ \varepsilon = \dfrac{N}{EA}\end{cases} \Rightarrow U_a = \int_l \frac{N^2dx}{2EA}$$

M
$$\begin{cases}\sigma = \dfrac{My}{I}\\ \varepsilon = \dfrac{My}{EI}\end{cases} \Rightarrow U_b = \int_l \frac{M^2dx}{2EI}$$

V
$$\begin{cases}\tau = \dfrac{QV}{Ib}\\ \gamma = \dfrac{QV}{GIb}\end{cases} \Rightarrow U_s = \int_l \left[\int_A \frac{Q^2V^2}{2GI^2b^2}\,dA\right]dx$$

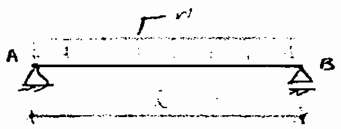
$$\Rightarrow U_s = \int_l \frac{V^2}{2GA}\underbrace{\left[\frac{A}{I^2}\int\frac{Q^2}{b^2}\,dA\right]}_{f_s}dx = \int_l \frac{f_sV^2}{2GA}\,dx$$

T
$$\begin{cases}\tau = \dfrac{T\rho}{J}\\ \gamma = \dfrac{T\rho}{GJ}\end{cases} \Rightarrow U_T = \int_l \frac{T^2dx}{2GJ}$$

$$\int dU_T = \int_l \left[\int_A \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2}\,dA\right]dx = \int_l \frac{T^2}{2GJ^2}\left[\int \rho^2 dA\right]dx = \int_l \frac{T^2dx}{2GJ}$$

انرژی کل ذخیره شده : $U = \int_l \frac{N^2dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2dx}{2EI} + \int_l \frac{f_sV^2dx}{2GA} + \int_l \frac{T^2dx}{2GJ}$

مثال) انرژی ذخیره شده در سازه زیر را بدست آورید.

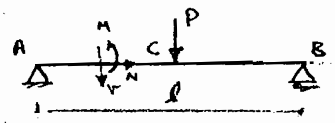


$$V = \frac{wl}{2} - wx \quad , \quad M = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} \quad , \quad N = T = 0$$

اصل کار حقیقی : اگر انرژی تلف شده نداشته باشیم ، کار نیروی خارجی P فقط سبب تغییر شکل می شود.

(اصل بقای انرژی هم گفته می شود.) $W=\frac{1}{2}P\delta \rightsquigarrow U=W$

مثال 2) با استفاده از اصل کار حقیقی تغییر مکان نقطه c را به دست آورید.



$$U=2\int_0^{\ell/2}\frac{\frac{P^2x^2}{4}dx}{2EI}+2\int_0^{\ell/2}\frac{f_s\,\frac{P^2}{4}\,dx}{GA}$$

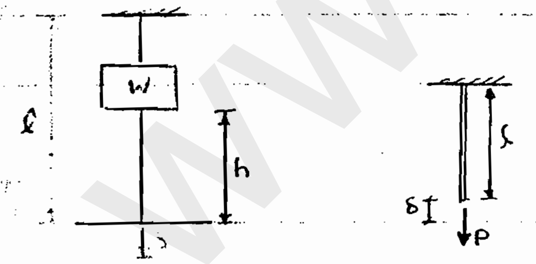
$$\Rightarrow U=\frac{P^2\ell^3}{96EI}+\frac{f_sP^2\ell}{8GA}$$

$$U=W \Rightarrow \frac{1}{2}P\delta=\frac{P^2\ell^3}{96EI}+\frac{f_sP^2\ell}{8GA} \Rightarrow \delta=\frac{P\ell^3}{48EI}+\frac{f_sP\ell}{4GA}$$

* اصل کار حقیقی را فقط می توان برای به دست آوردن تغییر مکان در سازه ها با یک بار نقطه ای و در جهت همان نیرو به کار برد.

★ تغییر مکان حداکثر بر اثر ضربه

اگر وزنه W را از فاصله h رها کنیم ، تغییر مکان حداکثر بر اثر ضربه را به دست آورید.



$$\delta=\frac{P\ell}{EA} \Rightarrow P=\frac{EA\delta}{\ell}$$

$$U=\frac{1}{2}P\delta=\frac{P^2\ell}{2EA}=\frac{EA\delta^2}{2\ell}$$

$$W(h+\delta)=\frac{EA\delta^2}{2\ell} \Rightarrow \frac{EA\delta^2}{2\ell}-W\delta-Wh=0 \Rightarrow \delta^2-\frac{2W\ell}{EA}\delta-\frac{2W\ell}{EA}h=0$$

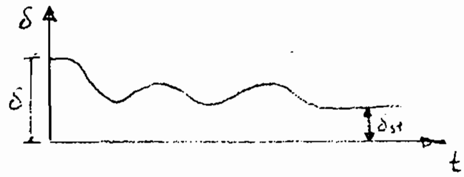
* اگر وزنه W به طور استاتیکی (تدریجی) به صفحه وارد شود ، تغییر مکان برابر است با : $\delta_{st}=\frac{W\ell}{EA}$

$$\Rightarrow \delta^2-2\delta_{st}\delta-2\delta_{st}h=0 \Rightarrow \delta=\delta_{st}+\sqrt{\delta_{st}^2+2\delta_{st}h}$$

$$\Rightarrow \delta=\delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right)=\beta\,\delta_{st}$$ (β: ضریب ضربه)

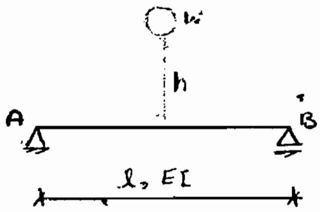
◄ اگر نیرو را یکدفعه روی سازه وارد کنیم، h صفر خواهد شد در نتیجه :

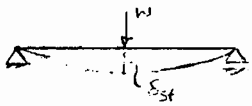
$P = 2 \implies \delta = 2\delta_{st}$



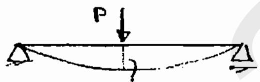
میرایی و اتلاف انرژی داریم

مثال) اگر وزنه W از ارتفاع h رها شود و به وسط تیر برخورد کند، تغییر مکان وسط تیر را بدست آورید.





$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48EI}$



$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}P\delta \\ P = \frac{48EI\delta}{l^3} \end{cases}$$

$$\implies U = \frac{24EI\delta^2}{l^2}$$

اصل کار حقیقی : $W(h+\delta) = \frac{24EI\delta^2}{l^3} \implies \frac{24EI}{l^3}\delta^2 - W\delta - Wh = 0$

$$\implies \delta^2 - \frac{Wl^3}{24EI}\delta - \frac{Wl^3}{24EI}h = 0 \implies \delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0$$

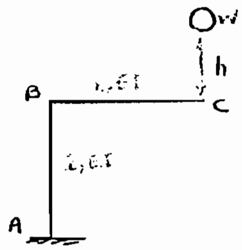
◄ در هر مسئله‌ای که رابطه نیرو و تغییر مکان خطی باشد، برای به دست آوردن تغییر مکان حداکثر در اثر ضربه از روابط زیر استفاده می‌کنیم :

$$\delta_{st} = \alpha W \quad , \quad \delta = \alpha P$$

$$W(h+\delta) = \frac{1}{2}P\delta = \frac{\delta^2}{2\alpha} \implies \frac{\delta^2}{2\alpha} - W\delta - Wh = 0$$

$$\implies \delta^2 - 2\alpha W\delta - 2\alpha Wh = 0 \implies \delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0$$

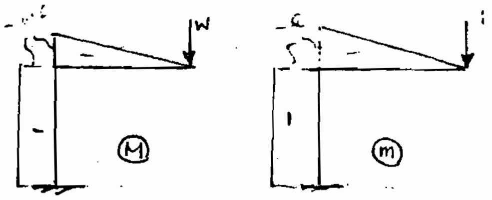
مثال) حداکثر تغییر مکان در اثر ضربه را به دست آورید. و همچنین δ_{HB}.



$W = 3t \quad , \quad l = 2m \quad , \quad h = 5m$

$E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \quad , \quad I = 10^4\ cm^4$

$\delta_{HB} = ?$

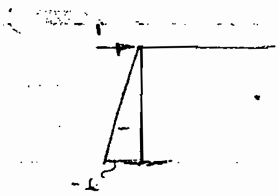


$$1\times\delta_{st} = \int_l \frac{mMdx}{EI} = \frac{wl^2}{EI}\cdot l + \frac{wl^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3}$$

$$= \frac{4wl^3}{3EI} = \frac{4(3)(8)}{3(2000)} = 0.016\ m$$

$$\delta = \beta\,\delta_{st} \quad , \quad \beta = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2(5)}{0.016}} \simeq 26$$

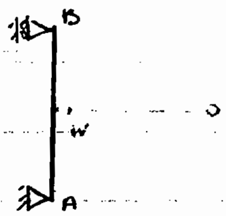
$$\Rightarrow \quad \delta_c = 26\,(0.016)$$



$$(\delta_{st})_{HB} = \int_l \frac{mMdx}{EI} = \frac{wl^2}{EI}\cdot\frac{l}{2} = \frac{wl^3}{2EI} = \frac{3\times 8}{2\times 2000} = 0.006\ m$$

$$\delta_{HB} = \beta(\delta_{st})_{HB} = 26\,(0.006) = 0.156\ m$$

◀ گلوله‌ای با سرعت V به یک تیر برخورد می‌کند. می‌خواهیم حداکثر تغییرمکان در اثر ضربه را بدست آوریم.
(فرض: رفتار مصالح خطی باقی می‌ماند.)

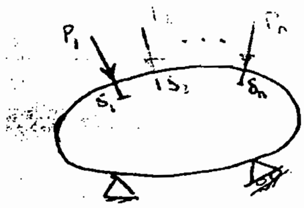


$$\frac{1}{2}mV^2 = W h_{eq} = mg\,h_{eq} \Rightarrow \boxed{h_{eq} = \frac{V^2}{2g}}$$

$$\beta = 1+\sqrt{1+\frac{V^2}{g\,\delta_{st}}}$$

◀ قضیه اول کاستیلیانو (Castigliano's First Theory)

✓ فرض می‌کنیم نیروهای P_1، P_2، ....، P_n به سازه‌ای وارد می‌شود و تغییرمکان δ_1، δ_2، ....، δ_n بوجود می‌آید.
می‌توانیم انرژی تغییرشکل را برحسب δها بیان کنیم.



$$U = U(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

$$\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2 = \dots = \Delta\delta_{n-1} = 0 \quad , \quad \Delta\delta_n \neq 0$$

برای سادگی مسئله فرض می‌کنیم که تنها یکی از تغییرمکان‌ها به اندازه Δ تغییر کند:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta_1}\Delta\delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \delta_2}\Delta\delta_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n = \frac{\partial U}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n$$

$$\Delta W = P_n(\Delta\delta_n)$$

۸ اگر اتلاف انرژی نداشته باشیم $\Delta U = \Delta W$ (اصل بقای انرژی):

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow P_n(\Delta\delta_n) = (\Delta\delta_n)\left(\frac{\partial U}{\partial \delta_n}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta_n} = P_n}$$

قضیه اول کاستیلیانو: اگر سازه‌ای داشته باشیم که انرژی تغییر شکل آن را بتوانیم برحسب تغییر مکان‌ها بنویسیم و از انرژی برحسب یکی از تغییر مکان‌ها مشتق بگیریم نیروی نظیر آن تغییر مکان بدست خواهد آمد.
(مشتق جزئی انرژی تغییر شکل نسبت به هر یک از تغییر مکان‌ها برابر است با نیروی متناظر آن تغییر مکان)

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \Delta U - \Delta W = 0 \Rightarrow \Delta(U - W) = 0$$

$U - W = \Pi$ انرژی پتانسیل کل $\Rightarrow \boxed{\Delta\Pi = 0}$

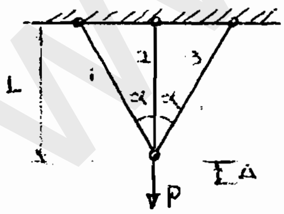
قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل

$$\Delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1}\Delta\delta_1 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = 0 \ , \ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = 0 \ , \ \ldots \ , \ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_n} = 0$$

◄ قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل متناظر است با قضیه اول کاستیلیانو.

مثال: نیروهای میله‌ها و Δ را بدست آورید.



$$\begin{cases} \delta_3 = \delta_1 = \Delta\cos\alpha \Rightarrow U_1 = U_3 = \dfrac{\delta_1^2 EA}{2l_1} \\ \delta_2 = \Delta \Rightarrow U_2 = \dfrac{\delta_2^2 EA}{2l_2} \end{cases}$$

$$U_1 = U_3 = \frac{(\Delta\cos\alpha)^2 EA}{2l/\cos\alpha} = \frac{\Delta^2\cos^3\alpha\, EA}{2l} \ , \quad U_2 = \frac{\Delta^2 EA}{2l}$$

$$U = \Sigma U_i = \frac{\Delta^2 EA}{2l}(1 + 2\cos^3\alpha) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{\Delta EA}{l}(1 + 2\cos^3\alpha) = P$$

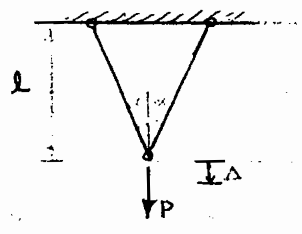
$$\Rightarrow \Delta = \frac{Pl}{EA(1 + 2\cos^3\alpha)}$$

$$S_1 = S_3 = \frac{\delta_1 EA}{L_1} = \frac{\Delta C^2\alpha\, EA}{\ell} = \frac{P C^2\alpha}{1+2C^3\alpha}$$

$$S_2 = \frac{\delta_2 EA}{L_2} = \frac{P}{1+2C^3\alpha}$$

Δ این نیروها در حال تعادل اند چون رابطهٔ $\frac{\partial U}{\partial \Delta} = P$ در حقیقت معادلهٔ تعادل است.

مثال ۲) نیروی میله‌ها و Δ را بدست آورید.



$$\delta_1 = \delta_2 = \Delta C\alpha$$

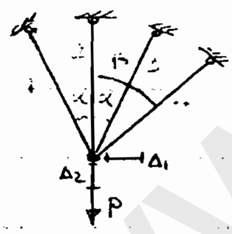
$$\Rightarrow U_1 = U_2 = \frac{(\Delta C\alpha)^2 EA\, C\alpha}{2\ell} = \frac{\Delta^2 EA\, C^3\alpha}{2\ell}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\Delta^2 EA C^3\alpha}{\ell}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{2\Delta EA C^3\alpha}{\ell} = P \Rightarrow \Delta = \frac{P\ell}{2EAC^3\alpha}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{P\ell}{2EAC^2\alpha} \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{\delta_1 EA}{\ell_1} = \frac{P\ell\, EA\, C\alpha}{2EAC^2\alpha(\ell)} = \frac{P}{2C\alpha}$$

مثال 3) نیروی میله‌ها، Δ_1 و Δ_2 را بدست آورید.



$EA = cte \quad , \quad \ell = cte$

$$\begin{cases} \delta_1 = \Delta_1 \sin\alpha + \Delta_2 C\alpha \\ \delta_2 = \Delta_2 \quad , \quad \delta_3 = \Delta_2 C\alpha - \Delta_1 \sin\alpha \\ \delta_4 = -\Delta_1 \sin\beta + \Delta_2 C\beta \end{cases}$$

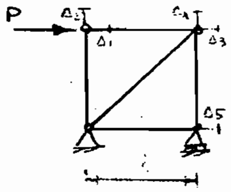
$$U_1 = \frac{(\Delta_1 \sin\alpha + \Delta_2 C\alpha)^2 EA}{2\ell} \quad , \quad U_2 = \frac{\Delta_2^2 EA}{2\ell}$$

$$U_3 = \frac{(\Delta_2 C\alpha - \Delta_1 \sin\alpha)^2 EA}{2\ell} \quad , \quad U_4 = \frac{(-\Delta_1 \sin\beta + \Delta_2 C\beta)^2 EA}{2\ell}$$

$$U = \frac{EA}{\ell}\left[2\Delta_1^2 \sin^2\alpha + 2\Delta_2^2 \sin^2\alpha + \Delta_2^2 + \Delta_1^2 \sin^2\beta + \Delta_2^2 C^2\beta - 2\Delta_1\Delta_2 \sin\beta C\beta\right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{EA}{2\ell}\left[4\Delta_1 \sin^2\alpha + 2\Delta_1 \sin^2\beta - 2\Delta_2 \sin\beta C\beta\right] = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{EA}{2\ell}\left[4\Delta_2 C^2\alpha + 2\Delta_2 + 2\Delta_2 C^2\beta - 2\Delta_1 \sin\beta C\beta\right] = P \end{cases}$$

مثال 4) خرپای زیر را با روش تغییرمکان حل کنید.



$n_s = m + r - 2j = 5 + 3 - 8 = 0$ سازه معین

مجهولات اضافی برای حل تغییرمکانی را درجات آزادی یا درجهٔ نامعینی سینماتیکی امند

$$\begin{cases} n_c = 2j - r & \text{خرپای} \\ n_c = 3j - r & \text{قاب‌های صفحه‌ای} \end{cases}$$

$$\delta_1 = \Delta_2 \;,\quad \delta_2 = \Delta_3 - \Delta_1 \;,\quad \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta_3 + \Delta_4) \;,\quad \delta_4 = \Delta_5 \;,\quad \delta_5 = \Delta_4$$

$$U_1 = \frac{\Delta_2^2 EA}{2l} \;,\quad U_2 = \frac{(\Delta_3 - \Delta_1)^2 EA}{2l} \;,\quad U_3 = \frac{\frac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_4)^2 EA}{2l\sqrt{2}}$$

$$U_4 = \frac{\Delta_5^2 EA}{2l} \;,\quad U_5 = \frac{\Delta_4^2 EA}{2l}$$

$$U = \sum U_i = \frac{EA}{2l}\left[\Delta_2^2 + (\Delta_3 - \Delta_1)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\Delta_3 + \Delta_4)^2 + \Delta_5^2 + \Delta_4^2\right]$$

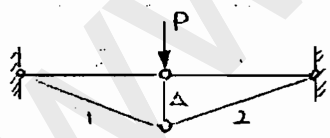
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{EA}{2l}\left[-2(\Delta_3 - \Delta_1)\right] = P \;,\quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{EA}{2l}\left[2\Delta_2\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta_2 = 0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_3} = \frac{EA}{2l}\left[2(\Delta_3 - \Delta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_3 + \Delta_4)\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_4} = \frac{EA}{2l}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_3 + \Delta_4) + 2\Delta_4\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_5} = \frac{EA}{2l}\left[2\Delta_5\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta_5 = 0}$$

مثال 5) مقدار Δ را بدست آورید.



$$\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{l^2 + \Delta^2} - l = l\left[\left(1 + \left[\frac{\Delta}{l}\right]^2\right)^{1/2} - 1\right]$$

$$= l\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 - 1\right] = \frac{\Delta^2}{2l}$$

$$U_1 = U_2 = \frac{\delta_1^2 EA}{2l} = \frac{\Delta^4}{4l^2}\,\frac{EA}{2l} = \frac{\Delta^4 EA}{8l^3} \Rightarrow U = \sum U_i = \frac{\Delta^4 EA}{4l^3}$$

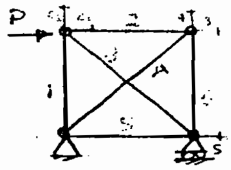
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{\Delta^3 EA}{l^3} = P \Rightarrow \Delta = \sqrt[3]{\frac{P}{EA}}$$

رابطهٔ نیرو - تغییرمکان خطی نیست ولی در این حالت هم می‌توانیم از قضیهٔ اول کاستیلیانو استفاده کنیم. (غیرخطی هندسی)

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{l}{2}\left(\frac{P}{EA}\right)^{2/3}$$

در مثال قبل رفتار مصالح خطی است اما سازه دارای رفتار غیرخطی هندسی است. اگر رفتار مصالح هم غیرخطی باشند باز هم قضیه اول کاستیلیانو برقرار است. (غیرخطی مادی)

مثال) خرپای زیر را تحلیل کنید.



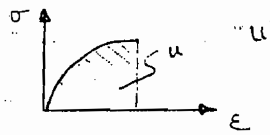
$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} \\ -\sigma = B\sqrt{-\varepsilon} \end{cases}$$

$$\delta_1 = \Delta_2 \quad , \quad \delta_2 = \Delta_3 - \Delta_1$$

$$\delta_3 = (\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta_4 = (\Delta_3 + \Delta_4)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta_5 = \Delta_5 \quad , \quad \delta_6 = \Delta_4$$



$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon$$

$$U = \int_{V_0} u \, dV_0 \quad , \quad u = \int_0^{\varepsilon} B\varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2B}{3}\varepsilon^{3/2}$$

برای یک عضو: $\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{\ell_i} \Rightarrow u_i = \frac{2B}{3}\left(\frac{\delta_i}{\ell_i}\right)^{3/2} \Rightarrow U_i = \int_{\ell}\int_A \frac{2B}{3}\left(\frac{\delta_i}{\ell_i}\right)^{3/2} dA\,dx$

$$\Rightarrow U_i = \frac{2B}{3}\left(\frac{\delta_i}{\ell_i}\right)^{3/2} A\ell_i \Rightarrow U = \sum_i \frac{2BA|\delta_i|^{3/2}}{3\sqrt{\ell_i}}$$ (δ را با علامت قرار دهیم)

$$\Rightarrow U = \frac{2BA}{3}\left[\frac{\Delta_2^{3/2}}{\sqrt{\ell}} + \frac{(\Delta_3-\Delta_1)^{3/2}}{\sqrt{\ell}} + \frac{(\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1)^{3/2}}{2^{3/4}\ell^{1/2}2^{1/4}} + \frac{(\Delta_3+\Delta_4)^{3/2}}{2^{3/4}2^{1/4}\ell^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_5^{3/2}}{\sqrt{\ell}} + \frac{\Delta_4^{3/2}}{\sqrt{\ell}}\right] = \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\Delta_2^{3/2} + \Delta_5^{3/2} + \Delta_4^{3/2} + (\Delta_3-\Delta_1)^{3/2} + \frac{1}{2}(\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1)^{3/2} + \frac{1}{2}(\Delta_3+\Delta_4)^{3/2}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[-\frac{3}{2}(\Delta_3+\Delta_1)^{1/2} - \frac{3}{4}(\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1)^{1/2}\right] = P$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\frac{3}{2}\Delta_2^{1/2} + \frac{3}{4}(\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1)^{1/2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_3} = \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\frac{3}{2}(\Delta_3-\Delta_1)^{1/2} + \frac{3}{4}(\Delta_3+\Delta_4)^{1/2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_4} = \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\frac{3}{4}(\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} + \frac{3}{2}(\Delta_4)^{1/2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_5} = \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\frac{3}{4}(\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1)^{1/2} + \frac{3}{2}\Delta_5^{1/2}\right] = 0$$

$$(2) \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\Delta_2} + \frac{3}{4}\sqrt{\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1} = 0$$ (فرض: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1 < 0$)

در روابط به جای $\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1$ ، مقادیر $-\Delta_2-\Delta_5+\Delta_1$ را قرار می‌دهیم در نتیجه :

$$(2) \longrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\Delta_2} - \frac{3}{4}\sqrt{-\Delta_2-\Delta_5+\Delta_1} = 0$$

$$(5) \longrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\Delta_5} - \frac{3}{4}\sqrt{-\Delta_2-\Delta_5+\Delta_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta_2 = \Delta_5}$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{\Delta_2} = 2\sqrt{-2\Delta_2+\Delta_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_1 = 6\Delta_2}$$

$$(4) \longrightarrow \frac{3}{4}(\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} - \frac{3}{2}(-\Delta_4)^{1/2} = 0 \qquad (\text{فرض: } \Delta_3+\Delta_4>0 \,,\, \Delta_4<0)$$

$$(3) \longrightarrow -\frac{3}{2}(-\Delta_3+\Delta_1)^{1/2} + \frac{3}{4}(\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} = 0 \qquad (\text{فرض: } \Delta_3-\Delta_1<0)$$

$$\Rightarrow (\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} = 2(-\Delta_4)^{1/2} \Rightarrow \Delta_3+\Delta_4 = -4\Delta_4 \Rightarrow \Delta_3 = -5\Delta_4$$

$$\Rightarrow (\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} = 2(-\Delta_3+\Delta_1)^{1/2} \Rightarrow 4(-\Delta_3+\Delta_1) = \Delta_3+\Delta_4$$

$$\Rightarrow 4(5\Delta_4+\Delta_1) = -5\Delta_4+\Delta_4 \Rightarrow \Delta_1 = -6\Delta_4$$

$$(1) \longrightarrow \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta_1}{6}\right)^{1/2} + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{6}\Delta_1\right)^{1/2}\right] = P$$

$$\Rightarrow \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[3\left(\frac{1}{6}\Delta_1\right)^{1/2}\right] = P \Rightarrow \Delta_1 = \frac{3P^2\ell}{2B^2A^2}$$

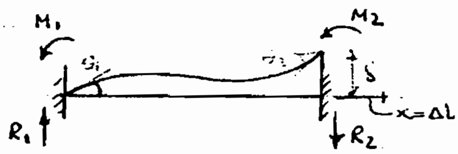
$$\Rightarrow \Delta_2 = \frac{P^2\ell}{4B^2A^2} \,,\quad \Delta_4 = -\frac{P^2\ell}{4B^2A^2} \,,\quad \Delta_3 = \frac{5P^2\ell}{4B^2A^2} \,,\quad \Delta_5 = \frac{P^2\ell}{4B^2A^2}$$

① نیروی میله : $\delta_1 = \Delta_2 = \frac{P^2\ell}{4B^2A^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta_1}{\ell} = \frac{P^2}{4B^2A^2}$

$$\sigma_1 = B\sqrt{\varepsilon_1} = B\frac{P}{2BA} = \frac{P}{2A} \,,\quad F_1 = \sigma_1 A \Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{P}{2}}$$

$$|\sigma| = B\sqrt{|\varepsilon|} \Rightarrow u = \int_0^{|\varepsilon|} |\sigma|\, d|\varepsilon| = \int_0^{|\varepsilon|} B|\varepsilon|^{1/2} d|\varepsilon| = \frac{2B}{3}|\varepsilon|^{3/2}$$

$$u_i = \frac{2B}{3}\left|\frac{\delta_i}{\ell_i}\right|^{3/2} \Rightarrow U_i = \frac{2BA}{3}\frac{|\delta_i|^{3/2}}{\sqrt{\ell_i}} \qquad \begin{cases} U_i = \frac{2BA}{3}\frac{\delta_i^{3/2}}{\sqrt{\ell_i}} & \delta_i>0 \\ U_i = \frac{2BA}{3}\frac{(-\delta_i)^{3/2}}{\sqrt{\ell_i}} & \delta_i<0 \end{cases}$$

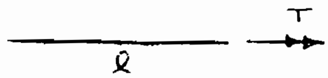


$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{2EI}{l}\left(2\theta_1 + \theta_2 - 3\dfrac{\delta}{l}\right) \\ M_2 = \dfrac{2EI}{l}\left(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\dfrac{\delta}{l}\right) \end{cases}$$

$$R_1 = -R_2 = \frac{6EI}{l^2}\left(\theta_1 + \theta_2 - 2\frac{\delta}{l}\right)$$

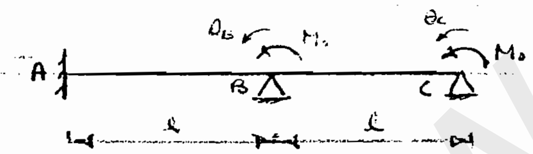
$$U = \frac{1}{2}M_1\theta_1 + \frac{1}{2}M_2\theta_2 + \frac{1}{2}R_2\delta = \frac{EI\theta_1}{l}\left(2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3\delta}{l}\right)$$
$$+ \frac{EI\theta_2}{l}\left(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\frac{\delta}{l}\right) - \frac{3EI}{l^2}\left(\theta_1 + \theta_2 - 2\frac{\delta}{l}\right)\delta$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{2EI}{l}\left(\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2\right) - \frac{6EI\delta}{l^2}\left(\theta_1 + \theta_2\right) + \frac{6EI\delta^2}{l^3} + \frac{(\Delta l)^2 EA}{2l}$$



$$U = \frac{1}{2}T\varphi = \frac{\varphi^2 GJ}{2l}$$

تمرین) انرژی تغییر شکل را برحسب درجات آزادی بنویسید.



$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2\right)$$

$$U = \sum U_i = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{2EI}{l}\left(4\theta_B + \theta_C\right) = M_0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_B + 2\theta_C\right) = M_0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_C} - \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 3\theta_B - \theta_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_C = 3\theta_B$$

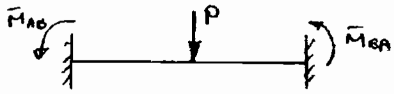
$$7\theta_B = \frac{M_0 l}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{M_0 l}{14EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{3M_0 l}{14EI}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\delta}{l}\right)$$

۴- برای تغییر مکان‌ها و تغییر شکل‌های دو انتهای میله، لنگرهای دو انتها از فرمول‌های بالا به دست می‌آید.

◁ اگر بارگذاری بر روی میله داشته باشیم به فرمول شیب - افت ، عبارت $\bar{M}$ افزوده می‌شود که ناشی از بارگذاری بر روی سازه است :



◁ فرمول کلی شیب - افت عبارتست از :

$$M_{ij} = \left(\frac{2EI}{l}\right)_{ij}\left(2\theta_i+\theta_j-3\psi_{ij}\right) + \bar{M}_{ij} \qquad \left(\psi_{ij}=\left(\frac{\delta}{l}\right)_{ij}\right)$$

◁ در این مسئله داریم :

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{M_0 l}{14EI} = \frac{M_0}{7}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{2M_0 l}{14EI} = \frac{2M_0}{7}$$

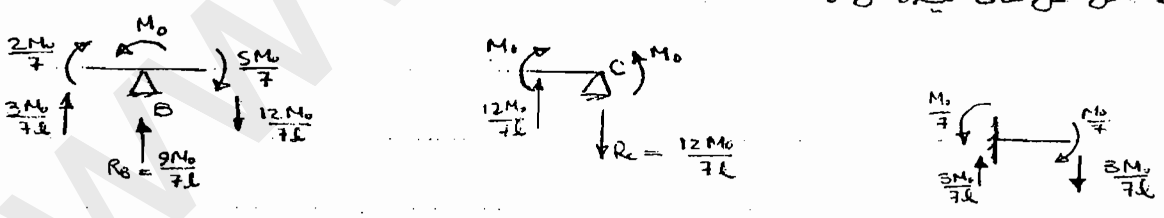
$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B+\theta_C-3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{5M_0 l}{14EI} = \frac{5M_0}{7}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C+\theta_B-3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{7M_0 l}{14EI} = M_0$$

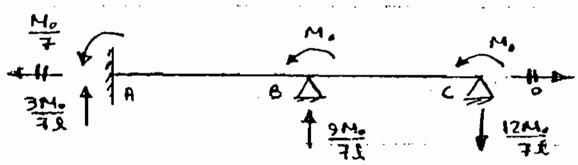
$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{3M_0}{7l}$$

$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{\frac{5M_0}{7}+M_0}{l} = \frac{12M_0}{7l}$$

◁ عکس العمل های تکیه گاهی :



◁ اگر تکیه گاه در روی میله قرار داشته باشد ، عکس العمل های تکیه گاهی همان نیروی داخلی میله است .



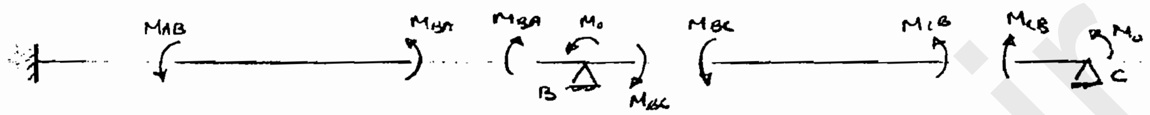
◀ می‌توانیم تمرین بالا را بدون استفاده از روابط انرژی و با استفاده از معادلات تعادل در هر گره حل کنیم .
(استفاده از معادلات شیب - افت)

$$M_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\theta_B$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{4EI}{\ell}\theta_B$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_C + \theta_B)$$

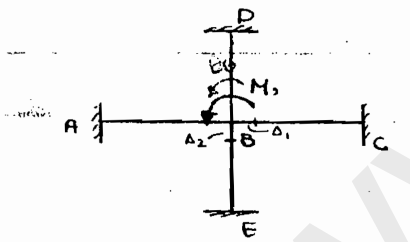


تعادل لنگری را در گره‌های B و C می‌نویسیم:

$$M_{BA} + M_{BC} = M_0 \Rightarrow \frac{2EI}{\ell}(4\theta_B + \theta_C) = M_0$$

$$M_{CB} = M_0 \Rightarrow \frac{2EI}{\ell}(2\theta_C + \theta_B) = M_0$$

مثال) فرض کنید چهار میله در نقطه B به هم متصل شده اند. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی را به دست آورید.



در قاب ها می‌توان درجه آزادی را از روابط زیر بدست آورد:

$n_c = 3j + c - r$ قاب مسطح

$n_c = 6j + c - r$ قاب فضایی

حل:

$$U_{BA} = \frac{2EI}{\ell}(\theta_B^2) - \frac{6EI(-\Delta_2)}{\ell^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_2)^2}{\ell^3} + \frac{EA(\Delta_1)^2}{2\ell}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\theta_B^2 - \frac{6EI(\Delta_2)}{\ell^2}\theta_B + \frac{6EI\Delta_2^2}{\ell^3} + \frac{EA(-\Delta_1)^2}{2\ell}$$

$$U_{BD} = \frac{2EI}{\ell}\theta_B^2 - \frac{6EI(\Delta_1)}{\ell^2}\theta_B + \frac{6EI\Delta_1^2}{\ell^3} + \frac{EA(\Delta_2)^2}{2\ell}$$

$$U_{BE} = \frac{2EI}{\ell}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\Delta_1)}{\ell^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_1)^2}{\ell^3} + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2\ell}$$

$$U = \Sigma U_i = \frac{8EI}{\ell}\theta_B^2 + \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell}\right)(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell}\right)(2\Delta_1) = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$$

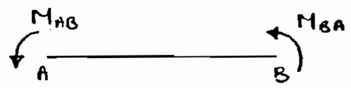
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell}\right)(2\Delta_2) = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{16EI}{\ell}\theta_B = M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0\ell}{16EI}$$

◀ درسازه ها از تغییر شکل محوری صرف نظر می کنیم . درحقیقت درمثال قبل از ابتدا $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$
فرض می شود در نتیجه می توانیم از ابتدا θ_B را به راحتی به دست آوریم :

$$U = \sum U_i = \frac{8EI}{l}\theta_B^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{16EI}{l}\theta_B = M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 l}{16EI}$$

◀ عکس العمل های تکیه گاهی :

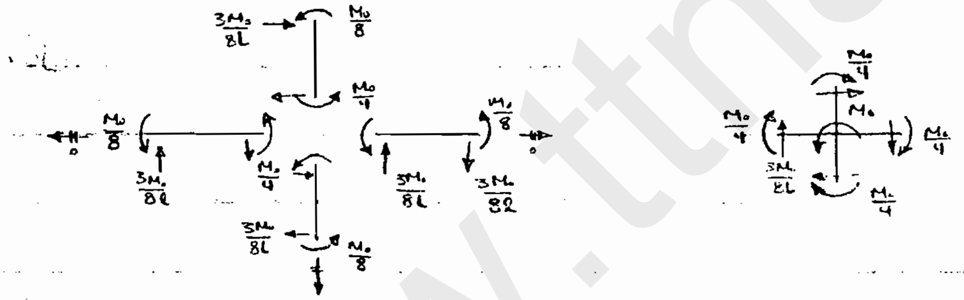


$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) = \frac{M_0}{8}$$

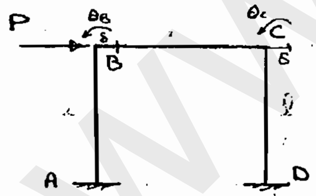
$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) = \frac{M_0}{4}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \cancel{\theta_B} - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) = \frac{M_0}{4} \qquad M_{BD} = \frac{M_0}{4} = M_{BE}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\cancel{\theta_B} + \theta_C - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) = \frac{M_0}{8} \qquad M_{DB} = \frac{M_0}{8} = M_{EB}$$



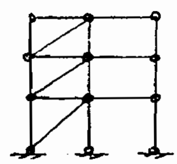
مثال 2) با استفاده از روش نیرو سازه را تحلیل کنید .



◀ از تغییر شکل های محوری صرف نظر کنیم . سازه سه درجه نامعین سینماتیکی است.

◀ می توانیم از روش زیر برای تعیین درجه نامعین سینماتیکی هر سازه ای استفاده کنیم :

همهٔ گره ها را به مفصل تبدیل می کنیم و تعداد میله هایی را که برای پایداری سازه مورد نیاز است بدست می آوریم .



درجه نامعینی سینماتیکی = تعداد میله های مورد نیاز

$n_c = 3$

با استفاده از این روش تعداد درجات آزادی تغییر مکانی بدست می آید و درجات آزادی دورانی باید تعیین گردد.

$$U_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\delta)}{\ell^2}\theta_B + \frac{6EI(-\delta)^2}{\ell^3}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{\ell}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$U_{CD} = \frac{2EI}{\ell}(\theta_C^2) - \frac{6EI(-\delta)}{\ell^2}\theta_C + \frac{6EI(-\delta)^2}{\ell^3}$$

$$U = \Sigma U_i = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + 2\theta_C^2) + \frac{6EI\delta}{\ell^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{12EI\delta^2}{\ell^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta_B} &= \frac{2EI}{\ell}(4\theta_B + \theta_C) + \frac{6EI\delta}{\ell^2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_C} &= \frac{2EI}{\ell}(\theta_B + 4\theta_C) + \frac{6EI\delta}{\ell^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_B = \theta_C$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{6EI}{\ell^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{24EI\delta}{\ell^3} = P$$

$$\Rightarrow \frac{10EI}{\ell}\theta_B = -\frac{6EI\delta}{\ell^2} \Rightarrow \theta_B = \theta_C = -\frac{3}{5}\frac{\delta}{\ell}$$

$$\frac{6EI}{\ell^2}\left(-\frac{6}{5}\frac{\delta}{\ell}\right) + \frac{24EI\delta}{\ell^3} = P \Rightarrow \delta = \frac{5P\ell^3}{84EI}, \quad \theta_B = \theta_C = -\frac{P\ell^2}{28EI}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\left(\frac{-\delta}{\ell}\right)\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{2P\ell}{7}$$

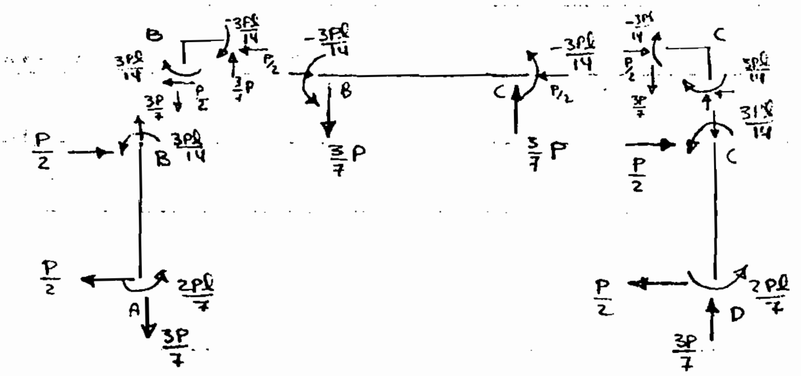
$$M_{BA} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} + 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{2P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{3P\ell}{14}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{3P\ell^2}{28EI}\right) = -\frac{3P\ell}{14}$$

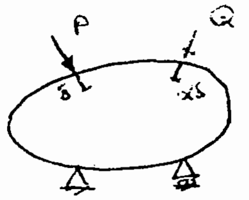
$$M_{CB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) = -\frac{3P\ell}{14}$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \cancel{\theta_D} + 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{2P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{3P\ell}{14}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\cancel{\theta_D} + \theta_C + 3\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{2P\ell}{7}$$



◀ در ادامه قضیه اول کاستیلیانو فرض می‌کنیم که تغییرمکانها به هم وابسته باشند :

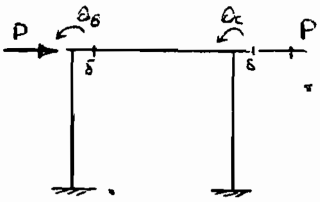


$$U = U(\delta)$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta}(\Delta \delta)$$

$$\Delta W = P(\Delta \delta) + \alpha Q(\Delta \delta)$$

$$\Delta U = \Delta W \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta} = P + \alpha Q}$$

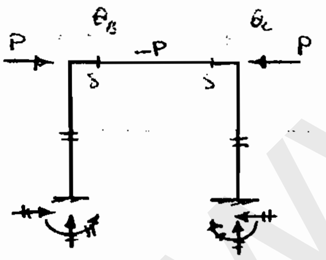


مثال) قضیه اول کاستیلیانو را به کار برید .

$$U = \frac{2EI}{l}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + 2\theta_C^2) + \frac{6EI\delta^2}{l^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{12EI\delta^2}{l^3}$$

◁ اگر تغییرمکانها به هم وابسته باشند $\frac{\partial U}{\partial \delta}$ برابر است با مجموع نیروها در امتداد آن تغییرمکان.

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 2P$$



◀ در مسئله روبرو از تغییرشکل های محوری صرف نظر می‌کنیم

✗ قضیه اول کاستیلیانو

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta_B = \theta_C = \delta = 0$$

✗ حل مسئله با استفاده از تقارن

$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 \quad , \quad U_{BC} = \frac{2EI}{l}[\theta_B^2 + (\theta_B)(-\theta_B) + (-\theta_B)^2]$$

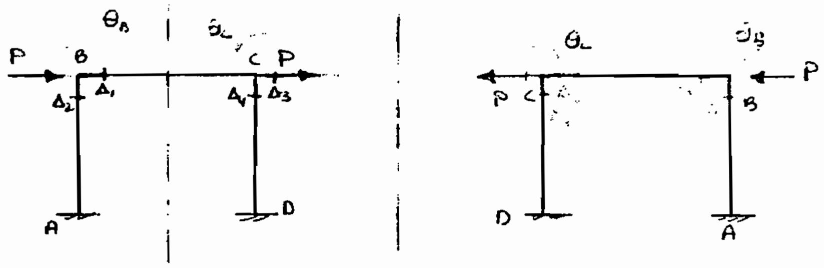
$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}(-\theta_B)^2 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{6EI}{l}\theta_B$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{12EI}{l}\theta_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B = 0$$

چون مسئله متقارن است بنابراین اگر B به اندازه δ به سمت راست برود ، گره C به اندازه δ به سمت چپ باید برود و چون میله صلب است امکان پذیر نیست درنتیجه $\delta = 0$.

در مسئله بالا به علت تقارن پس از صفر شدن δ ، یک درجه آزادی داریم که θ_B است .

۲- فرض: از تغییر شکل های محوری صرف نظر می کنیم. خود سازه متقارن است اما بارگذاری متقارن معکوس می باشد.



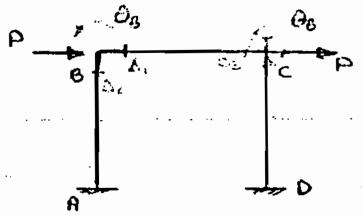
* وقتی بارگذاری، متقارن معکوس (پادتقارن) است که وقتی با بارگذاری متقارن نسبت به یک محور در هم جمع می شود، بارگذاری صفر شود.

$$\Delta_1 - \Delta_3 = 0 \rightarrow \Delta_1 = \Delta_3$$

$$\Delta_4 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = -\Delta_4$$

$$\theta_B - \theta_C = 0 \rightarrow \theta_B = \theta_C$$

از بارگذاری متقارن معکوس استفاده می کنیم و 6 درجه آزادی سازه را به 3 درجه آزادی کاهش می دهیم.

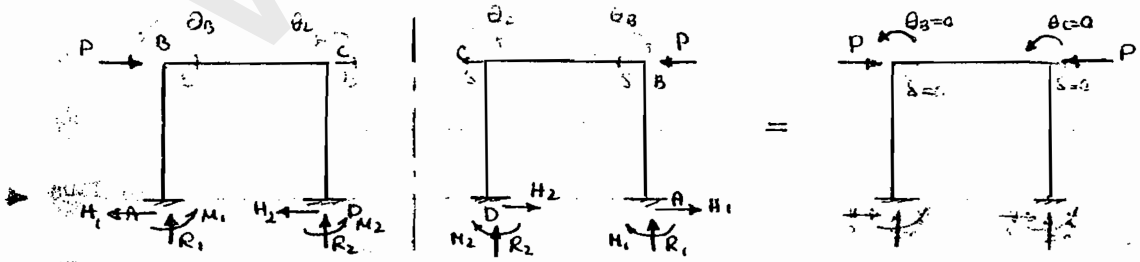


$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI}{l}(-\Delta_1)\theta_B + \frac{6EI}{l^3}(-\Delta_1)^2 + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_B + \theta_B^2) - \frac{6EI(2\Delta_2)}{l^2}(\theta_B + \theta_B) + \frac{6EI(2\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\Delta_1)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(\Delta_2)^2}{2l}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = 2P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 0$$



اگر از نیروهای محوری صرف نظر کنیم، مسئله متقارن معکوس خواهد شد.

$$\theta_B - \theta_C = 0 \Rightarrow \theta_B = \theta_C$$

$$M_1 - M_2 = 0 \Rightarrow M_1 = M_2$$

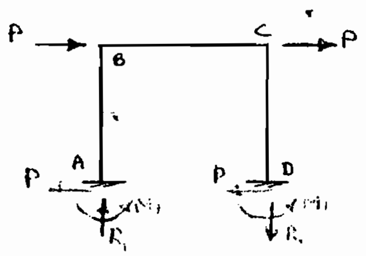
✓ استفاده از تقارن معکوس

$R_1 + R_2 = 0$, $H_1 - H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = H_2$

$\Rightarrow H_1 + H_1 = P \Rightarrow H_1 = H_2 = \frac{P}{2}$

★ هر بارگذاری که نه متقارن باشد و نه متقارن معکوس می توانیم به دو سازه تبدیل کنیم که یکی متقارن است و دیگری متقارن معکوس.

★ با توجه به مسئلهٔ بالا اگر مسئلهٔ متقارن معکوس بدهند و عکس العمل های آن را بخواهند خواهیم داشت:



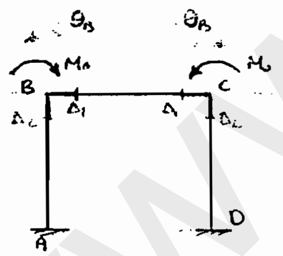
✓ تقارن معکوس در معادله اضافی به ما می دهد ...

$2M_1 - R_1 l - 2Pl = 0$

$\Rightarrow M_1 = \frac{1}{2}R_1 l + Pl$

(فقط R_1 مجهول است)

◄ از تغییر شکل های محوری در مسئلهٔ روبه رو صرف نظر نمی کنیم. مسئله متقارن است.



$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\Delta_1)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$

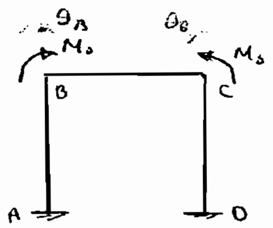
$U_{BC} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 + \frac{EA(-2\Delta_1)^2}{2l}$

$U_{CD} = \frac{2EI}{l}(-\theta_B)^2 - \frac{6EI(\Delta_1)}{l^2}(-\theta_B) + \frac{6EI(\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$

$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = -2M_0$, $\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0$

◄ از تغییر شکل های محوری در مسئلهٔ روبه رو صرف نظر می کنیم

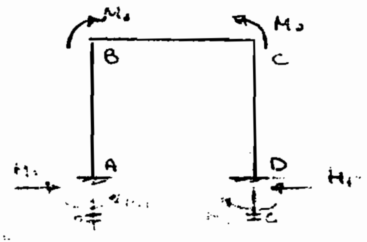
(درجه آزادی سازه ۱ است)



$U_{AB} = U_{BC} = U_{CD} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2$

$\Rightarrow U = \frac{6EI}{l}\theta_B^2$

$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{12EI}{l}\theta_B = 2M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 l}{6EI}$

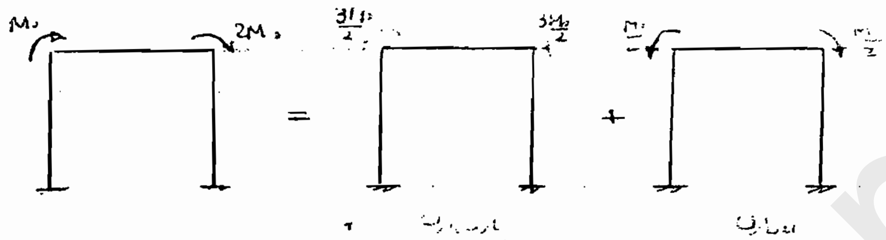


✓ استفاده از تقارن سازه

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = 0$$

(2 مجهول باقی می ماند)

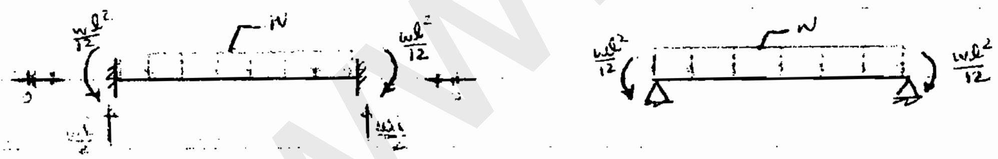
◀ هر سازه با بارگذاری نامشخص به یک بارگذاری متقارن و یک بار پادمتقارن قابل تبدیل است.

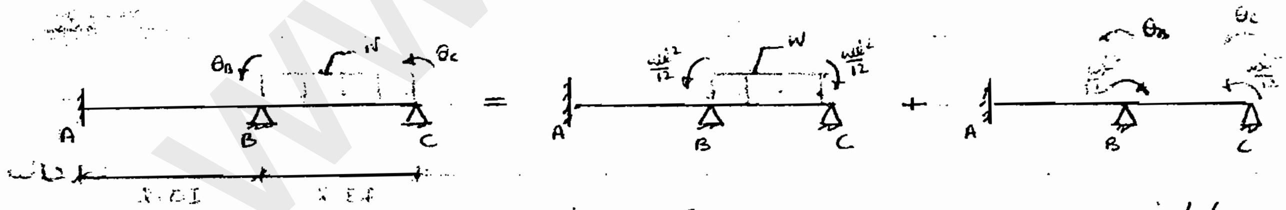


اگر از تغییر شکل محوری صرف نظر کنیم : درجه آزادی $3 = 2 + 1$

اگر از تغییر شکل محوری صرف نظر نکنیم : درجه آزادی $6 = 3 + 3$

◀ تا به حال قضیه اول کاستیلیانو را در سازه هایی بررسی می کردیم که در آنها ، نیرو در گره وارد می شد . حال سازه هایی را بررسی می کنیم که در آنها بارگذاری بر روی عضو است .





✓ کافی است θ_B و θ_C را در این سازه بدست آوریم یعنی بارگذاری بر روی عضو را به بارگذاری در گره ها تبدیل کنیم .

$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 \quad , \quad U_{BC} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$\rightarrow U = \frac{2EI}{l}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta_B} = \dfrac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) = -\dfrac{wl^2}{12} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta_C} = \dfrac{2EI}{l}(\theta_B + 2\theta_C) = \dfrac{wl^2}{12} \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \cancel{\bar M_{AB}}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \cancel{\bar M_{BA}}$$

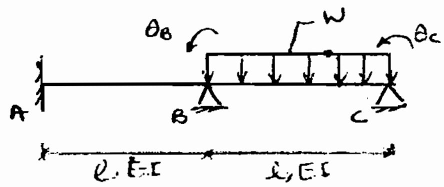
$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \bar M_{BC}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \bar M_{CB}$$

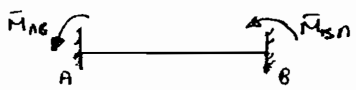
$$\begin{cases} \bar M_{BC} = \dfrac{wl^2}{12} \\ \bar M_{CB} = -\dfrac{wl^2}{12} \end{cases}$$

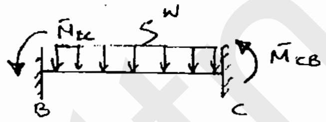
و عکس العمل های تکیه گاهی را از نوشتن تعادل در گره ها بدست می آوریم.

مثال ۱) عکس العمل های تکیه گاهی را بدست آورید.



$$U = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2\right)$$





$$\begin{cases} \bar M_{AB} = \bar M_{BA} = 0 \\ \bar M_{BC} = -\bar M_{CB} = \dfrac{wl^2}{12} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = -\sum_i M_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta_B} = -\bar M_{BA} - \bar M_{BC} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta_C} = -\bar M_{CB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2EI}{l}\left(4\theta_B + \theta_C\right) = -\dfrac{wl^2}{12} \\ \dfrac{2EI}{l}\left(\theta_B + 2\theta_C\right) = \dfrac{wl^2}{12} \end{cases}$$

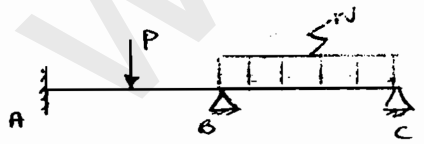
$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \cancel{\bar M_{AB}}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \cancel{\bar M_{BA}}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \bar M_{BC}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{l}}\right) + \bar M_{CB}$$

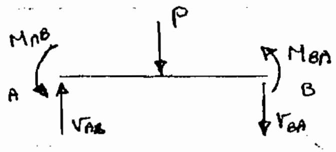
مثال ۲) مسئله زیر را حل کنید.

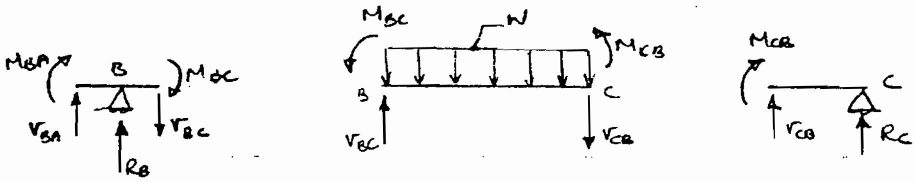


که تمامی روابط مانند مثال قبل است و فقط $\bar M_{AB}$ و $\bar M_{BA}$ تغییر خواهند کرد:

$$\bar M_{AB} = -\bar M_{BA} = \frac{Pl}{8}$$

$$\begin{cases} V_{AB} = \dfrac{P}{2} + \dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \\ V_{BA} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \end{cases}$$





$$V_{BC} = \frac{wl}{2} + \frac{M_{BC}+M_{CB}}{2} \quad , \quad V_{CB} = -\frac{wl}{2} + \frac{M_{BC}+M_{CB}}{2}$$

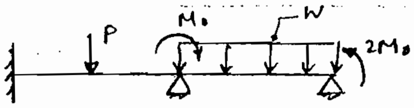
$$R_C = -V_{CB} \quad , \quad R_B = V_{BC} - V_{BA}$$

تعادل گره در B : $M_{BA} + M_{BC} = 0$

تعادل گره در C : $M_{CB} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) + \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 0 \\ \frac{2EI}{l}(\theta_B + 2\theta_C) + \bar{M}_{CB} = 0 \end{cases}$$

اگر لنگر خارجی در تکیه گاه ها داشتیم :



$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = -\bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC} - M_0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = -\bar{M}_{CB} + 2M_0 \end{cases}$$

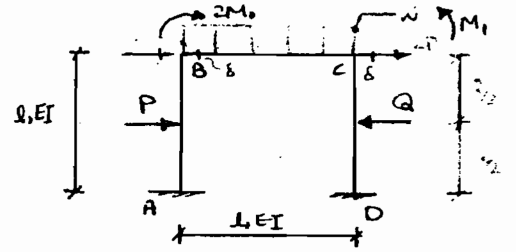
◄ درحالت کلی اگر هم P و هم M داشتیم رابطه زیر صادق بود :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = -\sum_i \bar{M}_{ij} + M_i$$

اگر معادله تعادل ها را در حالت بالا به صورت ماتریسی بنویسیم ، خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_0 \\ 2M_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} \\ \bar{M}_{BC} \end{Bmatrix} = \{JL\} - \{FEM\}$$

لنگرهای گیرداری : Fixed End Moment



مثال) با استفاده از قضیه اول کاستیلیانو مسئله را حل کنید.

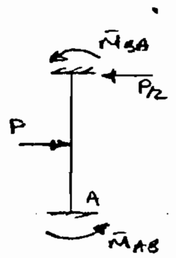
$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\delta)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\delta)^2}{l^3}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

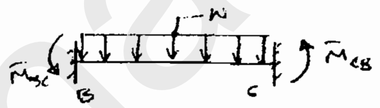
$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}\theta_C^2 - \frac{6EI(-\delta)}{l^2}\theta_C + \frac{6EI(-\delta)^2}{l^3}$$

$$\Rightarrow U = \frac{2EI}{l}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + 2\theta_C^2) + \frac{6EI\delta}{l^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{12EI\delta^2}{l^3}$$

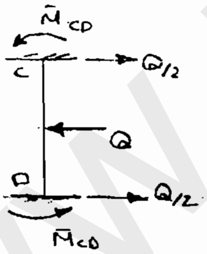
$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) + \frac{6EI\delta}{l^2} = -2M_0 - \bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC}$$



$$\bar{M}_{AB} = -\bar{M}_{BA} = \frac{Pl}{8}$$



$$\bar{M}_{BC} = -\bar{M}_{CB} = \frac{wl^2}{12}$$



$$\bar{M}_{CD} = -\bar{M}_{CD} = \frac{Ql}{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_C} = \frac{2EI}{l}(\theta_B + 4\theta_C) + \frac{6EI\delta}{l^2} = M_1 - \bar{M}_{CB} - \bar{M}_{CD} = M_1 + \frac{wl^2}{12} - \frac{Ql}{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{6EI}{l^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{24EI\delta}{l^3} = 2P + S + \frac{P}{2} - \frac{Q}{2}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\cancel{\theta_A} + \theta_B + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \cancel{\theta_A} + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{BA}$$

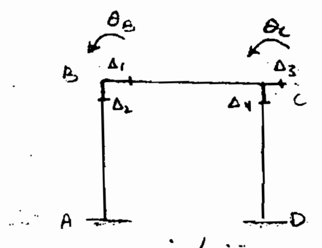
$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_C) + \bar{M}_{BC}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \theta_B) + \bar{M}_{CB}$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \cancel{\theta_D} + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{CD}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{l}(2\cancel{\theta_D} + \theta_C + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{DC}$$

ح حال از تغییرشکل های محوری صرف نظر کنیم با این 6 درجه آزادی داریم :



(تغییر مکانها)

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = -2M_0 - \bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC}$$

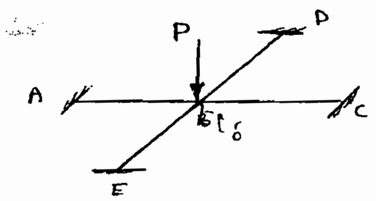
$$\frac{\partial U}{\partial \theta_C} = M_1 - \bar{M}_{CB} - \bar{M}_{CD}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = S + \frac{P}{2} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{wl}{2}$$

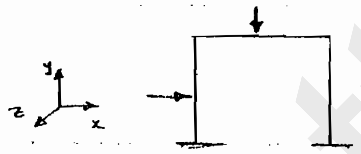
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_3} = 2P - \frac{Q}{2} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_4} = \frac{wl}{2}$$

مثال) با استفاده از قضیه اول کاستیلیانو، مسئله زیر را حل کنید.

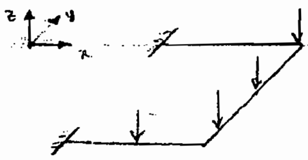
l , EI ، ثابت



ح تعیین درجات آزادی سازه :



$$\begin{cases} \delta_x \\ \delta_y \\ \theta_z \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x \\ V_y \\ M_z \end{cases}$$



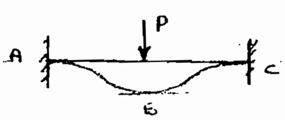
ح به سازه روبرو شبکه گفته می شود که هر گره آن سه درجه آزادی دارد.

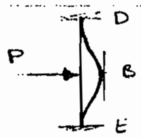
(سازه صفحه ای با بارگذاری عمود بر صفحه)

$$\begin{cases} \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{cases} \qquad \begin{cases} V_z \\ M_x \\ M_y \end{cases}$$

ح سازه ذکر شده در این مسئله هم یک شبکه است بنابراین سه درجه آزادی دارد.

چون تکیه گاه ها گیردارند بنابراین $\theta_x = \theta_y = 0$ فرض می شود. (اگر θ داشته باشیم این مسئله تقارن نیست)

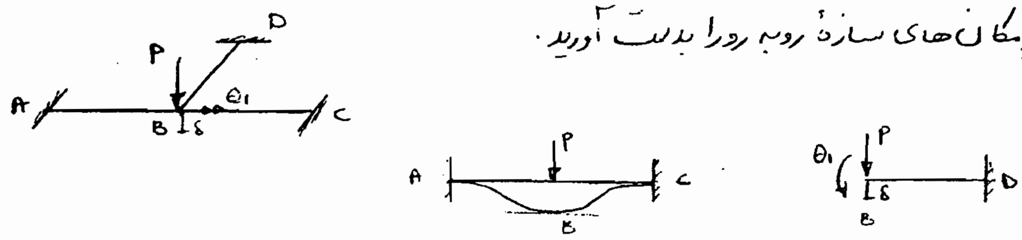




$$U_{AB} = \frac{6EI\delta^2}{l^3} \implies U = 4U_{AB} = \frac{24EI\delta^2}{l^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{48EI\delta}{l^3} = P \implies \delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

مثال) تغییرمکان های سازه روبه رو را بدست آورید.



$$U_{BD} = \frac{2EI}{\ell}\theta_1^2 - \frac{6EI(\delta)}{\ell^2}\theta_1 + \frac{6EI\delta^2}{\ell^3}$$

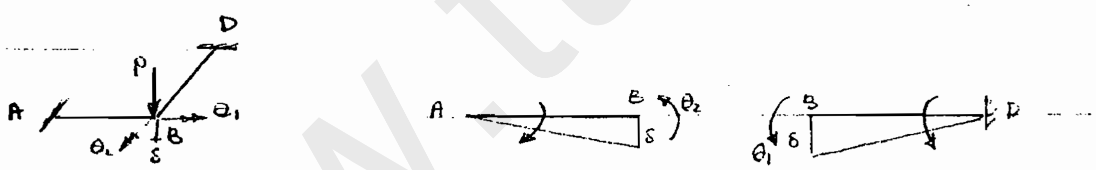
$$U_{AB} = U_{BC} = \frac{6EI\delta^2}{\ell^3} + \frac{GJ\theta_1^2}{2\ell}$$

$$\Longrightarrow U = \frac{2EI}{\ell}\theta_1^2 - \frac{6EI\delta}{\ell^2}\theta_1 + \frac{18EI\delta^2}{\ell^3} + \frac{GJ\theta_1^2}{\ell}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{4EI}{\ell}\theta_1 - \frac{6EI\delta}{\ell^2} + \frac{2GJ\theta_1}{\ell} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = -\frac{6EI}{\ell^2}\theta_1 + \frac{36EI\delta^2}{\ell^3} = P$$

مثال) تغییرمکان های سازه زیر را بدست آورید.



$$U_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\theta_2^2 - \frac{6EI(-\delta)}{\ell^2}\theta_2 + \frac{6EI(-\delta)^2}{\ell^3} + \frac{GJ(\theta_1)^2}{2\ell}$$

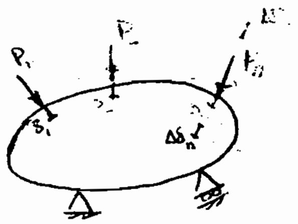
$$U_{BD} = \frac{2EI}{\ell}\theta_1^2 - \frac{6EI(\delta)}{\ell^2}\theta_1 + \frac{6EI(\delta)^2}{\ell^3} + \frac{GJ(\theta_2)^2}{2\ell}$$

$$\Longrightarrow U = \left(\frac{2EI}{\ell} + \frac{GJ}{\ell}\right)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{6EI\delta}{\ell^2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{12EI\delta^2}{\ell^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= \left(\frac{2EI}{\ell} + \frac{GJ}{2\ell}\right)(2\theta_1) - \frac{6EI\delta}{\ell^2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= \left(\frac{2EI}{\ell} + \frac{GJ}{2\ell}\right)(2\theta_2) + \frac{6EI\delta}{\ell^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = -\theta_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{6EI}{\ell^2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{24EI\delta}{\ell^3} = P$$

◄ قضیهٔ دوم کاستیلیانو



$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

* قضیه دوم کاستیلیانو برای رفتار خطی کاربرد دارد.

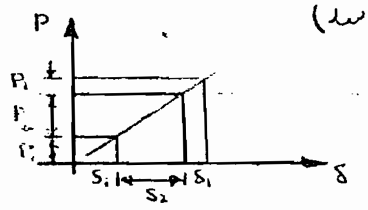
اگر رابطهٔ نیرو و تغییر شکل را داشته باشیم می‌توانیم انرژی تغییر شکل را برحسب نیرو بنویسیم.

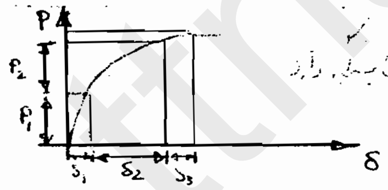
$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = \dots = \Delta P_{n-1} = 0 \quad , \quad \Delta P_n \neq 0$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n$$

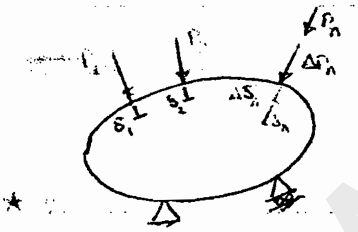
* با تغییر یکی از نیروها تمامی تغییرمکانها در سازه تحت تأثیر قرار می‌گیرند.

δ به تاریخچهٔ بارگذاری بستگی ندارد. (وقتی رابطهٔ نیرو و تغییرمکان خطی باشد)





δ به تاریخچهٔ بارگذاری بستگی دارد.



$$\Delta W = \frac{1}{2}(\Delta P_n)\cancel{(\Delta \delta_n)} + (\Delta P_n)(\delta_n)$$

قابل صرف نظر کردن است

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_n}(\Delta P_n) = \delta_n (\Delta P_n) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n$$

* قضیه دوم کاستیلیانو: مشتق جزئی انرژی تغییر شکل نسبت به هر کدام از نیروها برابر است با تغییرمکان آن نیرو.

◄ اگر رابطهٔ نیرو - تغییرمکان خطی باشد:

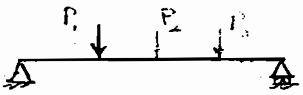
$$\delta_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \dots + \alpha_{1n} P_n$$

$$\delta_2 = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 + \dots + \alpha_{2n} P_n$$

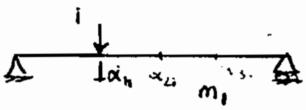
$$\vdots$$

$$\delta_n = \alpha_{n1} P_1 + \alpha_{n2} P_2 + \dots + \alpha_{nn} P_n$$

◄ برای بدست آوردن ماتریس ضرایب (ماتریس نرمی) یک بار همهٔ نیروها را به جز P_1 صفر قرار می‌دهیم و P_1 را 1 قرار می‌دهیم و ستون اول ضرایب را به دست می‌آوریم و همین طور برای بقیهٔ ضرایب این کار را انجام می‌دهیم تا ماتریس ضرایب به دست آید.



$$\alpha_{11} = \int_l \frac{m_1^2\,dx}{EI}$$



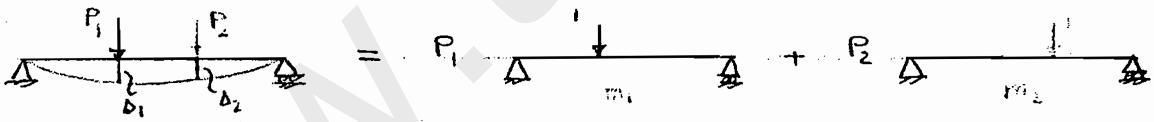
$$\alpha_{21} = \int_l \frac{m_1 m_2\,dx}{EI} \qquad \alpha_{31} = \int_l \frac{m_1 m_3\,dx}{EI}$$

$$\alpha_{ii} = \int_l \frac{m_i^2\,dx}{EI} \qquad \boxed{\alpha_{ij} = \int_l \frac{m_i m_j\,dx}{EI}}$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

α_{ij} ــ بار روی نقطهٔ j و تغییر مکان در نقطهٔ i

★ نوع دیگری از بیان قضیهٔ دوم:



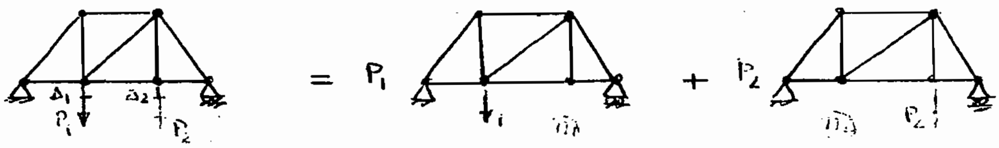
★ فرض می‌کنیم خمش در سازه غلبه دارد.

$$M = m_1 P_1 + m_2 P_2$$

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1}\int_l \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial P_1}\right)dx}{EI}$$

$$= \int_l \frac{M m_1\,dx}{EI} = \Delta_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P_2}\int_l \frac{M^2 dx}{EI} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial P_2}\right)dx}{EI} = \int_l \frac{M m_2\,dx}{EI} = \Delta_2$$

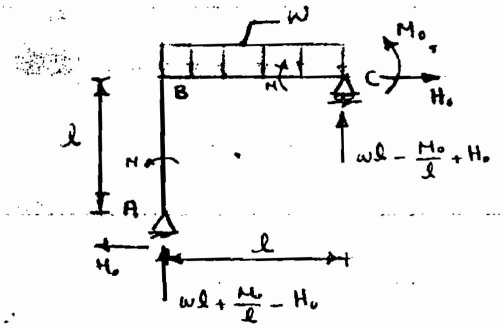


$$N = n_1 P_1 + n_2 P_2 \qquad , \qquad U = \sum_i \frac{N^2 l}{2EA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \sum \frac{N^2 l}{2EA} = \sum \frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial P_1}\right) l}{EA} = \sum_i \frac{N n_1 l}{EA} = \Delta_1$$

★ مشخص می‌شود که قضیه دوم کاستیلیانو با روابط مشابهند اما قابلیت بارواحد بیشتر است.

مثال ۱) با استفاده از قضیه دوم δ_{HC} و θ_c را بدست آورید.



★ برای بدست آوردن تغییر مکان افقی و دوران C، یک نیروی افقی و یک لنگر فرضی بروی C قرار می‌دهیم. فقط باید توجه کنیم که $M_0 = H_0 = 0$.

الف) $AB: \; M = H_0 x \quad , \quad BC: \; M = \left(\frac{wl}{2} - \frac{M_0}{l} + H_0\right)x - \frac{wx^2}{2} + M_0$

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{EI}$$

$$\theta_c = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right)dx}{EI} = \int_0^l \frac{(H_0 x)(0)\,dx}{EI} + \int_0^l \left[\left(\frac{wl}{2} - \cancel{\frac{M_0}{l}} + \cancel{H_0}\right)x - \frac{wx^2}{2} + \cancel{M_0}\right]\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_c = \int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)}{EI}\,dx$$

ب)

$$\delta_{HC} = \frac{\partial U}{\partial H_0} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial H_0}\right)dx}{EI} = \int_0^l \frac{(\cancel{H_0}x)(x)\,dx}{EI} + \int_0^l \left[\left(\frac{wl}{2} - \cancel{\frac{M_0}{l}} + \cancel{H_0}\right)x - \frac{wx^2}{2} + \cancel{M_0}\right](x)\frac{dx}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = \int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)(x)}{EI}\,dx$$

۵ اگر نیروی محوری و برش را هم در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$AB: \quad V = H_0 \quad , \quad N = -\left(\frac{wl}{2} + \frac{M_0}{l} - H_0\right)$$

$$BC: \quad V = -\left(\frac{wl}{2} - \frac{M_0}{l} + H_0\right) + wx \quad , \quad N = H_0$$

$$U=\int_l \frac{M^2dx}{2EI}+\int_l \frac{f_s V^2 dx}{2GA}+\int_l \frac{N^2dx}{2EA}$$

$$\star\ \theta_c=\frac{\partial U}{\partial M_0}=\int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right)dx}{EI}+\int_l \frac{F_s V\left(\frac{\partial V}{\partial M_0}\right)dx}{GA}+\int_l \frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial M_0}\right)dx}{EA}$$

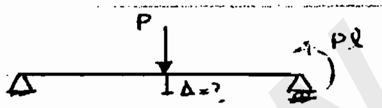
$$=\int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x-\frac{wx^2}{2}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)dx}{EI}+\int_0^l \frac{F_s\left[-\left(\frac{wl}{2}-\frac{M_0}{l}+H_0\right)+wx\right]\left(\frac{1}{l}\right)dx}{GA}$$

$$+\int_0^l \frac{\left[-\left(\frac{wl}{2}+\frac{M_0}{l}-H_0\right)\left(-\frac{1}{l}\right)\right]dx}{EA}=\,//\,+\int_0^l \frac{F_s\left(-wx-\frac{wl}{2}\right)\left(\frac{1}{l}\right)dx}{GA}+\int_0^l \frac{\left(\frac{w}{2}\right)dx}{EA}$$

$$\star\ \delta_{HC}=\frac{\partial U}{\partial H_0}=\int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial H_0}\right)dx}{EI}+\int_l \frac{F_s V\left(\frac{\partial V}{\partial H_0}\right)dx}{GA}+\int_l \frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial H_0}\right)dx}{EA}$$

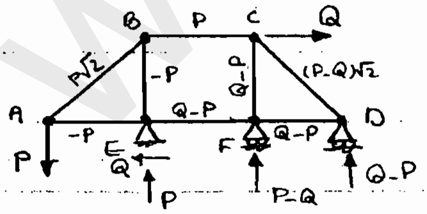
$$=\int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x-\frac{wx^2}{2}\right)(x)dx}{EI}+\int_0^l \frac{F_s\left[-\left(\frac{wl}{2}-\frac{M_0}{l}+H_0\right)+wx\right](-1)dx}{GA}+\int_0^l \frac{-\left(\frac{wl}{2}+\frac{M_0}{l}-H_0\right)(1)dx}{EA}$$

مثال) با استفاده از قضیه دوم، Δ را بدست آورید.



* چون مشتق نسبت به P با وجود لنگر Pl مشکل است اشتباه ایجاد کننده به جای P، نیروی Q را می‌گذاریم و پس از مشتق گرفتن $Q=P$ قرار می‌دهیم.

مثال) تغییر مکان افقی c را بدست آورید.



۱) بدست آوردن نیروهای داخلی

$$U=\sum \frac{N^2 l}{2EA}$$

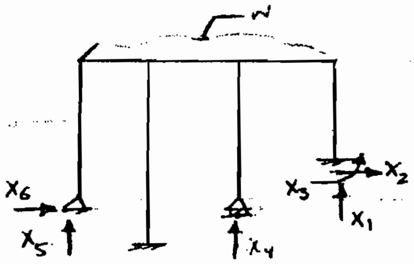
$$\delta_{HC}=\frac{\partial U}{\partial Q}=\sum \frac{N\frac{\partial N}{\partial Q}l}{EA}=\frac{(Q-P)(1)l}{EA}+\frac{(Q-P)(1)l}{EA}+\frac{(Q-P)(1)l}{EA}$$

$$+\frac{(P-Q)\sqrt{2}(-\sqrt{2})\,l\sqrt{2}}{EA}=-\frac{3Pl}{EA}-\frac{2\sqrt{2}Pl}{EA}$$

$$\Rightarrow\quad \delta_{HC}=-\frac{Pl}{EA}(3+2\sqrt{2})$$

◀ قضیه حداقل کار

✓ همان قضیه دوم کاستیلیانو در مورد سازه‌های نامعین است یعنی می‌خواهیم انرژی را نسبت به مجهولات، min کنیم.



قدم اول این است که ببینیم سازه چند درجه نامعینی استاتیکی دارد. قدم دوم: مجهول اضافی درنظر می‌گیریم.

درجه نامعینی استاتیکی $= 6$

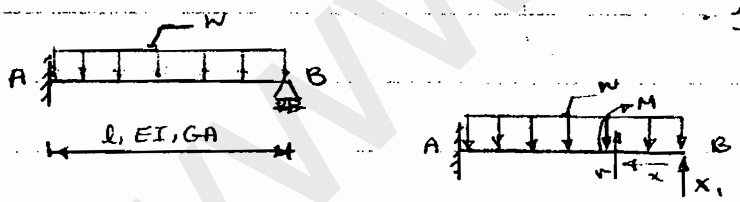
قدم سوم: انرژی را برحسب مجهولات اضافی می‌نویسیم و انرژی را نسبت به مجهولات اضافی min می‌کنیم. (چون انرژی max بی‌نهایت است بنابراین نمی‌توانیم انرژی را max کنیم)

یعنی:

$$U = U(w, X_1, \dots, X_6) \qquad \left[\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial X_6} = 0\right]$$

قضیه حداقل کار: مجهولات اضافی طوری تعیین می‌شوند که انرژی نسبت به مجهولات اضافی (نیروهای مقاوم) min شود.

مثال) قضیه حداقل کار را به کار ببرید.



$$AB: \quad M = X_1 x - w\frac{x^2}{2} \quad , \quad V = wx - X_1$$

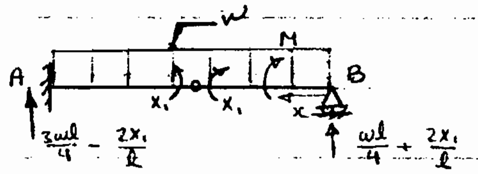
$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{f_s V^2 dx}{2GA} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} + \int_l \frac{f_s V \frac{\partial V}{\partial X_1} dx}{GA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{(X_1 x - \frac{wx^2}{2})(x)\,dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s (wx - X_1)(-1)\,dx}{GA}$$

داریم:

$$\Rightarrow \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{wl^4}{8EI} - \frac{f_s w l^2}{2GA} + \frac{X_1 l}{GA} = 0 \Longrightarrow X_1 = \frac{\frac{wl^4}{8EI} + \frac{f_s w l^2}{2GA}}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA}} = \frac{3wl}{8}$$

مثال) لنگر خمشی وسط دهانه را مجهول گرفته و مسئله را حل کنید.



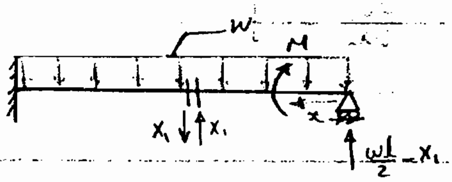
$$M = \left(\frac{wl}{4} + \frac{2X_1}{l}\right)x - \frac{wx^2}{2}$$

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{\left[\left(\frac{wl}{4} + \frac{2X_1}{l}\right)x - \frac{wx^2}{2}\right]\left(\frac{2x}{l}\right)dx}{EI} = \frac{wl^3}{6EI} + \frac{4X_1 l}{3EI} - \frac{wl^3}{4EI} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4X_1 l}{3EI} = \frac{wl^3}{12EI} \Rightarrow X_1 = \frac{wl^2}{16}$$

مثال) نیروی برشی وسط دهانه را مجهول گرفته و مسئله را حل کنید.



$$M = \left(\frac{wl}{2} - X_1\right)x - \frac{wx^2}{2}$$

در مسئله قبل اثر $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ ~~عرضه با آن یعنی تغییر زاویه در دو طرف~~ نقطه مورد نظر داریم که نادرست است چون θ دو طرف با هم برابر است و $\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$. در این مسئله هم چون در دو طرف نقطه، تغییر ارتفاع نداریم $\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$ است یعنی $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ معادله پیوستگی است ~~...~~

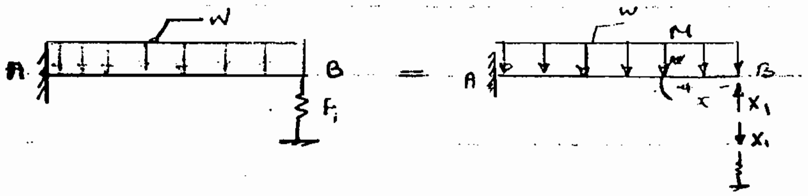
$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} = \int_0^l \frac{\left[\left(\frac{wl}{2} - X_1\right)x - \frac{wx^2}{2}\right](-x)dx}{EI}$$

$$\rightarrow -\frac{wl^4}{6EI} + \frac{X_1 l^3}{3EI} + \frac{wl^4}{8EI} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{wl}{8}$$

△ می توانیم انرژی را در نصف تیر در سمت چپ بدست آوریم (U_1) و با منفی انرژی در نصف دیگر تیر برابر قرار دهیم.

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} = -\frac{\partial U_2}{\partial X_1} \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} = 0$$

مثال) سازه زیر را حل کنید.



3

$$AB: \quad M = X_1 x - \frac{wx^2}{2} \qquad U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} + U_s = U_1 + U_2$$

$$U_s = \frac{1}{2} K \delta^2 = \frac{1}{2} K \left(\frac{X_1}{K}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{X_1^2}{K} = \frac{1}{2} f_1 X_1^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} + f_1 X_1 = \int_l \frac{(X_1 x - \frac{wx^2}{2})(x)\, dx}{EI} + f_1 X_1 = 0$$

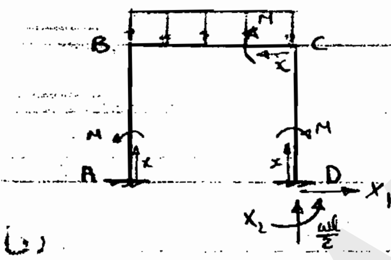
$$\rightarrow \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{wl^4}{8EI} + f_1 X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{\frac{wl^4}{8EI}}{\frac{l^3}{3EI} + f_1}$$

۵ روش دوم

$$U_1 = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{(X_1 x - \frac{wx^2}{2})(x)\, dx}{EI} = \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{wl^4}{8EI}$$

$$\frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{wl^4}{8EI} = -f_1 X_1 \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = -\frac{\partial U_2}{\partial X_1} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$$

مثال ۱) قاب روبرو را حل کنید.



$$AB, CD: \quad M = X_1 x + X_2$$

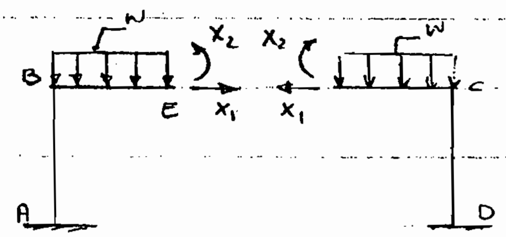
$$BC: \quad M = X_1 l + X_2 + \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2}$$

حل)

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} = 2\int_0^l \frac{(X_1 x + X_2)(x)\, dx}{EI} + \int_0^l \frac{(X_1 l + X_2 + \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2})(l)\, dx}{EI} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_2} dx}{EI} = 2\int_0^l \frac{(X_1 x + X_2)(1)\, dx}{EI} + \int_0^l \frac{(X_1 l + X_2 + \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2})(1)\, dx}{EI} = 0$$

۵ مجهولات را در وسط دهانه BC درنظر میگیریم



$$BE: \quad M = X_2 - \frac{wx^2}{2}$$

$$AB: \quad M = X_2 - X_1 x - \frac{wl^2}{8}$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

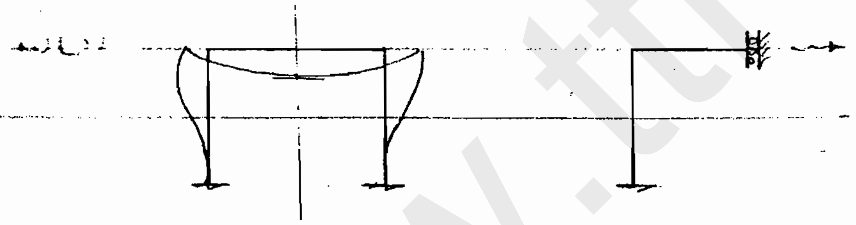
$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=\int \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_1}\right)dx}{EI}=2\int_0^{l/2}\frac{\left(X_2-\frac{wx^2}{2}\right)(0)\,dx}{EI}+2\int_0^{l}\frac{\left(X_2-X_1x-\frac{wl^2}{8}\right)(-x)\,dx}{EI}=0$$

⊲ $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ در حقیقت رابطهٔ پیوستگی است یعنی می‌خواهیم میزان نزدیک شدن یک نقطه از دو بریده‌ام بدست آوریم
بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\frac{\partial U}{\partial X_1}=0$.

$$\frac{\partial U}{\partial X_2}=\int \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_2}\right)dx}{EI}=2\int_0^{l/2}\frac{\left(X_2-\frac{wx^2}{2}\right)(1)\,dx}{EI}+2\int_0^{l}\frac{\left(X_2-X_1x-\frac{wl^2}{8}\right)(1)\,dx}{EI}$$

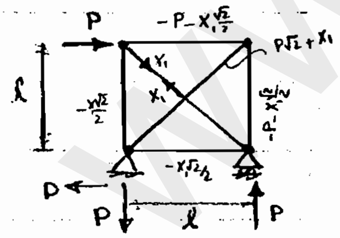
⊲ چون در دو طرف نقطه‌ای که بریده‌ایم تغییر شیب نداریم بنابراین $\frac{\partial U}{\partial X_2}=0$.

* در این مسئله $\frac{\partial U_1}{\partial X_1}=\frac{\partial U_1}{\partial X_2}=0$ برقرار است و نشان دهندهٔ این است که تغییرمکان افقی و دوران در وسط دهانه صفر است . تمامی این روابط به دلیل تقارن سازه برقرار است .



چون تغییرمکان افقی و دوران صفر است بنابراین تکیه‌گاه برشی باید قرار گیرد .

مثال) با استفاده از قضیهٔ حداقل کار مسئله را حل کنید .

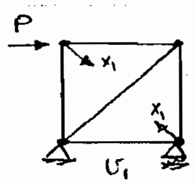


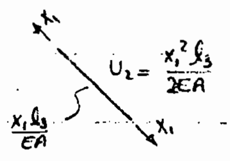
$$U=\sum\frac{N^2 l}{2EA}\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial X_1}=\sum\frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial X_1}\right)l}{EA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=2\frac{\left(-X_1\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l}{EA}+2\frac{\left(-P-\frac{X_1\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l}{EA}+\frac{(P\sqrt{2}+X_1)(1)\,l\sqrt{2}}{EA}+\frac{(X_1)(1)\,l\sqrt{2}}{EA}=0$$

(باید یک قطعه را ببریم و نیروی X_1 را در آن قرار دهیم تا $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ برای صفر شود)

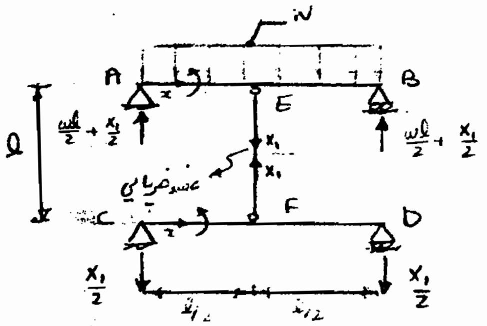
$$\Rightarrow\ \boxed{X_1=-\frac{P\sqrt{2}}{2}}$$





$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1}=-\frac{X_1 l_3}{EA}=-\frac{\partial U_2}{\partial X_1}\Rightarrow\frac{\partial U_1}{\partial X_1}+\frac{\partial U_2}{\partial X_1}=0$$

مثال) با استفاده از قضیه حداقل کار مسئله را حل کنید.



AB : $M = (\frac{w\ell}{2} + \frac{X_1}{2})x - \frac{wx^2}{2}$

CD : $M = -\frac{X_1}{2}x$

EF : $N = X_1$

$$U = \int_\ell \frac{M^2dx}{2EI} + \sum \frac{N^2\ell}{2EA}$$

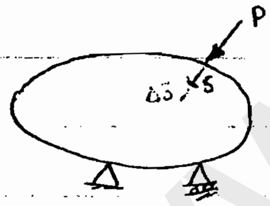
$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 2\int_0^{\ell/2} \frac{[(\frac{w\ell}{2}+\frac{X_1}{2})x - \frac{wx^2}{2}](\frac{x}{2})dx}{EI} + 2\int_0^{\ell/2}\frac{(-\frac{X_1}{2}x)(-\frac{x}{2})dx}{EI} + \frac{(X_1)(1)\ell}{EA} = 0$$

این سازه یک سازه مرکب است. ترکیبی از عضو خمشی و عضو خرپایی.

◄ قضیه کرانی - انگسر

این قضیه درواقع تعمیمی از قضیه دوم کاستیلیانو است.

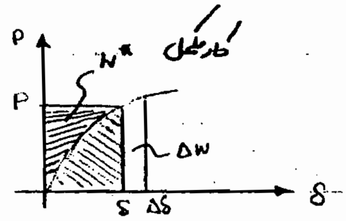
* اثبات قضیه اول کاستیلیانو را به روش دیگری بررسی می‌کنیم.



$U = U(\delta)$

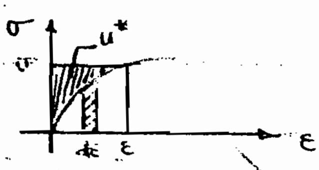
$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta}\Delta\delta$

$\Delta W = P(\Delta\delta)$



$\Delta U = \Delta W \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta} = P}$

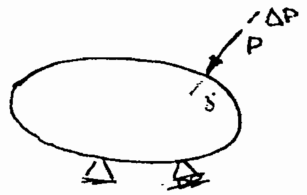
$W = \int_0^\delta P\, d\delta$, $W^* = \int_0^P \delta\, dP$ → متمم W^* می‌باشد



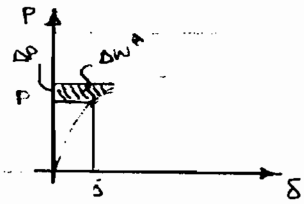
چگالی انرژی کرنشی

$u = \int_0^\varepsilon \sigma\, d\varepsilon \Rightarrow U = \int_{V_0} u\, dV_0$

چگالی انرژی مکمل $u^* = \int_0^\sigma \varepsilon\, d\sigma \rightarrow U^* = \int_{V_0} u^*\, dV_0$



$$U^* = U^*(P)$$
$$\Delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial P}(\Delta P)$$
$$\Delta W^* = \delta(\Delta P)$$



چون انرژی ثابت است نتیجه می گیریم که تغییر در انرژی مکمل برابر است با تغییر در کار مکمل.

$$\Delta U^* = \Delta W^* \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U^*}{\partial P} = \delta}$$

* قضیه کراتی انگسر: مشتق جزئی انرژی مکمل نسبت به هریک از نیروها برابر است با تغییر مکان نظیر آن نیرو

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \Delta U - \Delta W = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta(U - W) = 0 & \Rightarrow \Delta\pi = 0 \\ U - W = \pi & \text{انرژی پتانسیل کل} \end{cases}$$

$$U = U(\delta_1, \dots, \delta_n) \quad , \quad W = W(\delta_1, \dots, \delta_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \delta_1} = 0 \ , \ \dots\dots \ , \ \frac{\partial \pi}{\partial \delta_n} = 0$$ * قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل

قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل $\Leftrightarrow$ قضیه اول کاستیلیانو (روش تغییر مکان)

* روش نیرو

$$\Delta U^* = \Delta W^* \Rightarrow \Delta U^* - \Delta W^* = 0$$

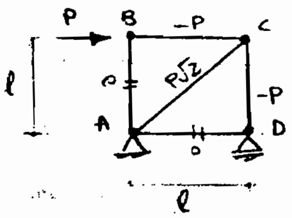
$$U^* = U^*(P_1, \dots, P_n) \quad , \quad W^* = W^*(P_1, \dots, P_n)$$

$$\begin{cases} \Delta(U^* - W^*) = 0 & \Rightarrow \Delta\pi^* = 0 \\ U^* - W^* = \pi^* & \text{انرژی مکمل کل} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi^*}{\partial P_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial P_n} = 0 \end{cases}$$

$$\pi^* = \pi^*(P_1, \dots, P_n)$$

قضیه حداقل انرژی مکمل $\Leftrightarrow$ قضیه کراتی - انگسر (قضیه دوم کاستیلیانو)

مثال ۱) δ_{HB} را به دست آورید.



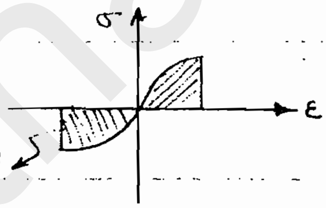
$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma > 0 \\ \sigma = -B\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon < 0 \Rightarrow \sigma < 0 \end{cases}$$

$$u^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon \, d\sigma = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma^2}{B^2} \, d\sigma = \frac{\sigma^3}{3B^2}$$

$$u_i^* = \frac{\sigma_i^3}{3B^2} = \frac{N_i^3}{3A_i^3B^2} \Rightarrow U_i^* = \frac{N_i^3}{3B^2A_i^3}(A_i l_i) = \frac{N_i^3 l_i}{3A_i^2B^2}$$

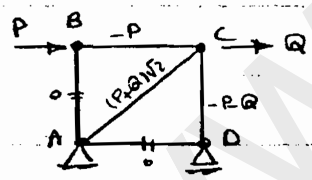
$$U^* = \sum \frac{|N_i|^3 l_i}{3A_i^2B^2} = 2 \cdot \frac{P^3 l}{3A^2B^2} + \frac{2\sqrt{2}\,P^3 l\sqrt{2}}{3A^2B^2} = \frac{2P^3 l}{A^2B^2}$$

$$\delta_{HB} = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{6P^2 l}{A^2B^2}$$



این مساحت ها مثبت اند بنابراین انرژی باید همواره مثبت باشد
درنتیجه N_i را در روابط با قدر مطلق مثبت قرار دهیم

مثال ۲) δ_{HC} را به دست آورید.



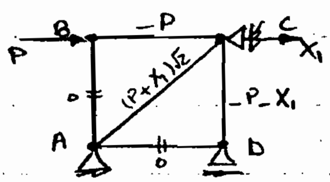
نیروی فرضی Q را قرار می‌دهیم

$$U_i^* = \frac{N_i^3 l_i}{3A_i^2B^2} \Rightarrow U^* = \sum U_i^*$$

$$U^* = \frac{P^3 l}{3A^2B^2} + \frac{5(P+Q)^3 l}{3A^2B^2} \Rightarrow \delta_{HC} = \frac{\partial U^*}{\partial Q} = \frac{5(P+Q)^2 l}{A^2B^2} = \frac{5P^2 l}{A^2B^2}$$

◁ برای بدست آوردن تغییر مکانی که نیرویی به آن وارد نمی‌شود، یک نیروی فرضی قرار می‌دهیم

مثال ۳) خرپای روبه‌رو را حل کنید.

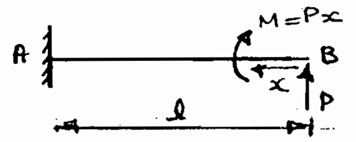


X_1: مجهول اضافی

$$U^* = \frac{P^3 l}{3A^2B^2} + \frac{2\sqrt{2}(P+X_1)^3 l\sqrt{2}}{3A^2B^2} + \frac{(P+X_1)^3 l}{3A^2B^2}$$

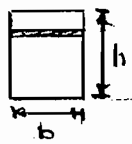
$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1} = \frac{5(P+X_1)^2 l}{B^2A^2} = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = -P}$$

مثال 4. δ_{vB} را بدست آورید.



$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon > 0 \\ \sigma = -B\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

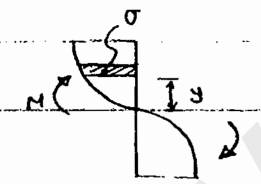
$$u^* = \int_0^\sigma \varepsilon \, d\sigma = \int_0^\sigma \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma^3}{3B^2}$$



مقطع تیر

* رابطهٔ M را با تقعر انحنا به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho}$$



$$M = 2\int_0^{h/2} (\sigma b \, dy)\, y = 2b\int_0^{h/2} B\varepsilon^{1/2} y \, dy$$

$$M = 2bB\int_0^{h/2} \frac{y^{3/2}}{\sqrt{\rho}} dy = \frac{2bB}{\sqrt{\rho}} \frac{h^{5/2}}{10\sqrt{2}} = \frac{bBh^{5/2}}{5\sqrt{2\rho}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{5\sqrt{2}M}{bBh^{5/2}} \Rightarrow u^* = \frac{1}{3B^2}(B^3\varepsilon^{3/2}) = \frac{B\varepsilon^{3/2}}{3} = \frac{By^{3/2}}{3\rho^{3/2}}$$

$$u^* = \frac{By^{3/2}}{3} \frac{250\sqrt{2}M^3}{b^3B^3h^{15/2}} = \frac{250\sqrt{2}P^3x^3y^{3/2}}{3b^3B^2h^{15/2}}$$ (u^* را برحسب x و y نوشتیم)

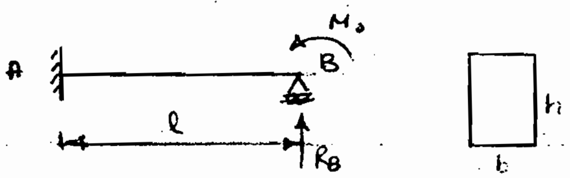
$$U^* = \int_V u^* dV = \int_l \int_A \left[\frac{250\sqrt{2}P^3x^3y^{3/2}}{3b^3B^2h^{15/2}} dA\right] dx = \frac{250\sqrt{2}P^3}{3b^3B^2h^{15/2}} \int_0^l x^3 \int_{-h/2}^{h/2} y^{3/2} b \, dy$$

$$U^* = \frac{500\sqrt{2}P^3}{3b^2B^2h^{15/2}} \int_0^l x^3 \left(\frac{h^{5/2}}{10\sqrt{2}}\right) dx = \frac{50P^3}{3b^2B^2h^5} \times \frac{l^4}{4} = \frac{25P^3l^4}{6b^2B^2h^5}$$

ثابت E)

$$\delta_{vB} = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{25P^2l^4}{2b^2B^2h^5}$$

تمرین) R_B و θ_B را به دست آورید.

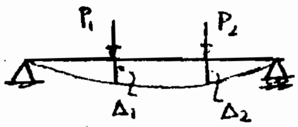


$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon > 0 \\ \sigma = -B\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

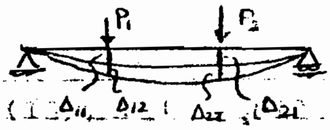
▵ در یک نقطه از تیر انحنا صفر می‌شود و از مثبت، منفی می‌شود بنابراین U^* منفی می‌شود. در نتیجه باید مکان صفر شدن انحنا را پیدا کنیم و مقدار U^* منفی را در روابط، مثبت قرار دهیم.

◀ قضیهٔ تقابل کار (بتی)

فرض: رفتار سازه، رفتار خطی باشد.



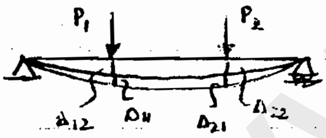
=



$$W_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12}$$

(اول بار P_1 را قرار می‌دهیم و سپس بار P_2 را)

نتیجه



$$W_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}$$

(اول بار P_2 را قرار می‌دهیم و سپس بار P_1 را)

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \boxed{P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}}$$

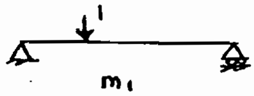
★ قضیه تقابل کار: اگر دو سیستم بارگذاری داشته باشیم، بارگذاری روی اولی در تغییر مکانهای دومی برابر است با بارگذاری دومی در تغییر مکانهای اولی.

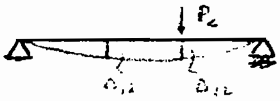
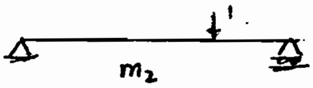
★ قضیهٔ تقابل تغییر مکان (ماکسول)

↙ اگر در قضیهٔ تقابل کار $P_1 = P_2$ باشد، قضیهٔ ماکسول حاصل می‌شود.

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \boxed{\Delta_{12} = \Delta_{21}}$$

◀ تغییر مکان در نقطهٔ اولی در اثر بارگذاری روی نقطهٔ دوم برابر است با تغییر مکان در نقطهٔ 2 در اثر بارگذاری در نقطهٔ 1.

 $= \quad P_1$ 

 $= \quad P_2$ 

$$\Delta_{21} = \int \frac{P_1 m_1 m_2 dx}{EI} \qquad \Delta_{12} = \int \frac{P_2 m_2 m_1 dx}{EI}$$

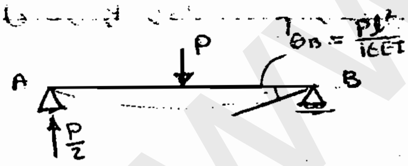
$$\frac{\Delta_{21}}{P_1} = \frac{\Delta_{12}}{P_2} \Rightarrow \boxed{P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}}$$

فرض می‌کنیم صلبیت خمشی تیر (1) ← $(EI)_1$ و صلبیت خمشی تیر (2) ← $(EI)_2$ باشد:

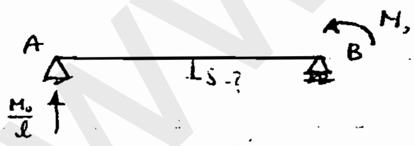
$$\Delta_{21} = \int \frac{P_1 m_1 m_2 dx}{(EI)_1} \qquad \Delta_{12} = \int \frac{P_2 m_1 m_2 dx}{(EI)_2}$$

$$\frac{\Delta_{21}}{P_1}(EI)_1 = \frac{\Delta_{12}}{P_2}(EI)_2 \Rightarrow \boxed{P_1 \Delta_{12} (EI)_2 = P_2 \Delta_{21} (EI)_1}$$

مثال) تغییر مکان وسط دهانه در سازه (2) چقدر است؟



$$P\delta = M_0 \frac{Pl^2}{16EI}$$



$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{M_0 l^2}{16EI}}$$

اگر سختی سازه (2) 3EI باشد: $(P)(\delta)(3EI) = M_0 \left(\frac{Pl^2}{16EI}\right)(EI) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{M_0 l^2}{48EI}}$

4 فرض می‌کنیم تکیه‌گاه A در سازه (2) به اندازه $\downarrow 0.01\,m$ نشست کند:

$$P(\delta)(3EI) - \frac{P}{2}(0.01)(3EI) = M_0 \left(\frac{Pl^2}{16EI}\right)(EI)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 0.005 + \frac{M_0 l^2}{48EI}}$$

▷ حال فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه A در سازه (1) هم به اندازه 0.01m ↓ نشست کند:

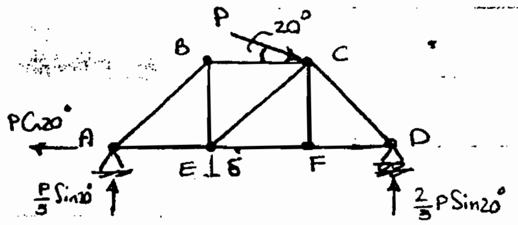
$$\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{0.01}{l}$$

چون در سازه (2) تغییری نداریم پس باید همان جواب قبلی بدست آید.

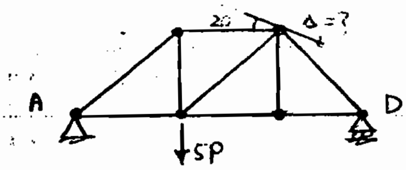
$$P(\delta)(3EI) - \frac{P}{2}(0.01)(3EI) = M_0\left(\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{0.01}{l}\right)(EI) - \frac{M_0}{l}(0.01)EI$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 0.005 + \frac{M_0 l^2}{48EI}}$$

مثال 2) تغییر مکان قائم E، δ است. (در سازه (1))
مقدار Δ را در سازه 2 بدست آورید.



$$P\Delta = 5P\delta \Rightarrow \boxed{\Delta = 5\delta}$$



▷ اگر صلبیت محوری (1) ← 3EA و (2) ← 5EA باشد:

$$P(\Delta)(5EA) = (5P)(\delta)(3EA)$$

$$\boxed{\Delta = 3\delta}$$

▷ اگر تکیه‌گاه D در سازه (2)، 0.01m ↓ و تکیه‌گاه A، 0.01m ↓ و 0.01m ← نشست کند:

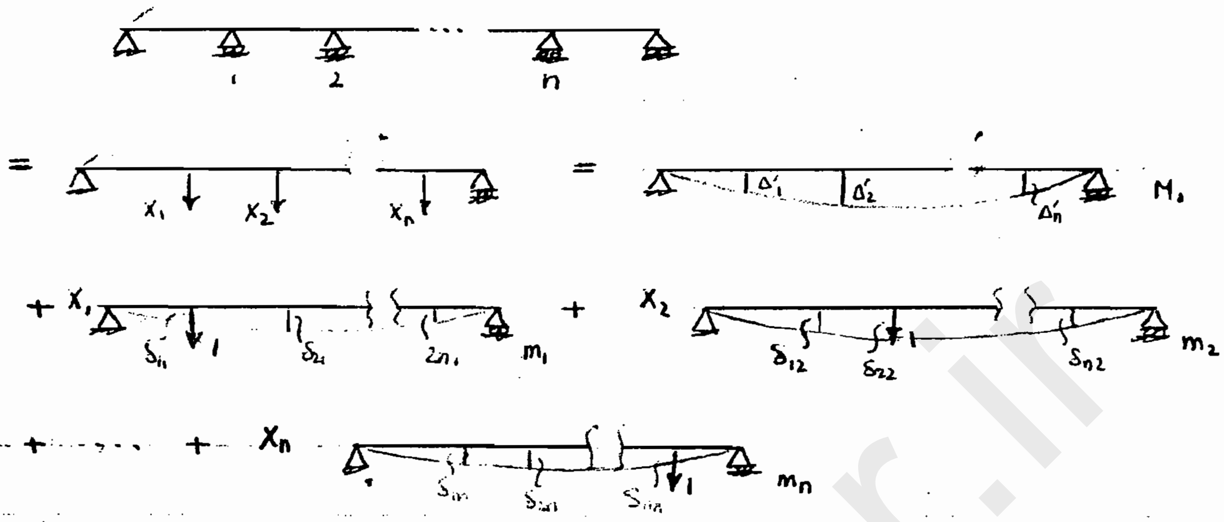
$$\left[P\Delta - \frac{2}{3}P\sin 20^\circ(0.02) - \frac{1}{3}P\sin 20^\circ(0.01) + P\cos 20^\circ(0.01)\right](5EA)$$
$$= 5P(\delta)(3EA)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{0.05}{3}\sin 20^\circ - 0.01\cos 20^\circ + 3\delta}$$

◀ تحلیل سازه‌های نامعین (روش نیرو)

1- روش حداقل کار
2- روش بار واحد
3- روش سه لنگری

◀ روش بار واحد :



δ_{ij} : تغییرمکان در امتداد X_i وقتی به جای $X_j = 1$ قرار دهیم .

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \cdots + \delta_{1n} X_n = 0$$
$$\Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \cdots + \delta_{2n} X_n = 0$$
$$\vdots$$
$$\Delta'_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \cdots + \delta_{nn} X_n = 0$$

$$\{\Delta'\} = \begin{Bmatrix} \Delta'_1 \\ \vdots \\ \Delta'_n \end{Bmatrix} \qquad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \qquad [F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمی ← عکس ماتریس سختی است .

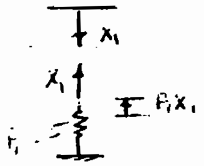
$$[F]\{X\} = \{\Delta'\} \implies \boxed{\{X\} = [F]^{-1}\{\Delta'\}}$$

◀ فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه ۱ به اندازهٔ Δ_1 ... تا تکیه‌گاه n به اندازهٔ Δ_n نشست کند .

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \cdots + \delta_{1n} X_n = \Delta_1$$
$$\Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \cdots + \delta_{2n} X_n = \Delta_2$$
$$\vdots$$
$$\Delta'_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \cdots + \delta_{nn} X_n = \Delta_n$$

$$\{X\} = [F]^{-1}\{\{\Delta\} - \{\Delta'\}\}$$

▶ فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه‌ها قابل نشست باشند. همهٔ تکیه‌گاه‌ها را با یک فنر مدل‌سازی می‌کنیم:



$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n = -f_1 X_1$$
$$\Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n = -f_2 X_2$$
$$\vdots$$
$$\Delta'_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_n + \dots + \delta_{nn} X_n = -f_n X_n$$

$$\Delta'_1 = \int_l \frac{M_0 m_1 dx}{EI} \quad , \quad \Delta'_2 = \int_l \frac{M_0 m_2 dx}{EI} \quad , \quad \dots \quad , \quad \Delta'_n = \int_l \frac{M_0 m_n dx}{EI}$$

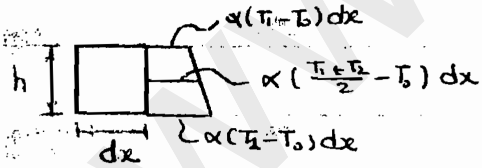
$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} \quad , \quad \delta_{12} = \int_l \frac{m_1 m_2 dx}{EI} \quad \Rightarrow \quad \delta_{ij} = \int_l \frac{m_i m_j dx}{EI}$$

▶ اگر اثرات نیروی برشی و محوری و پیچش را هم در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\Delta'_i = \int_l \frac{M_0 m_i dx}{EI} + \int_l \frac{N_0 n_i dx}{EA} + \int_l \frac{f_s V_0 v_i dx}{GA} + \int_l \frac{T_0 t_i dx}{GJ}$$

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{m_i m_j dx}{EI} + \int_l \frac{n_i n_j dx}{EA} + \int_l \frac{f_s v_i v_j dx}{GA} + \int_l \frac{t_i t_j dx}{GJ}$$

▶ اگر تغییر درجه حرارت هم در سازه داشته باشیم:



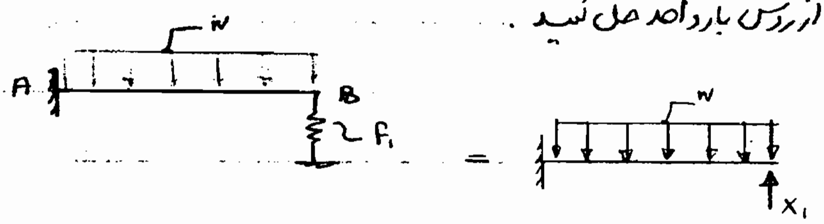
اگر تغییر درجه حرارت یکنواخت باشد دو جملهٔ زیر به طرف راست رابطهٔ Δ'_i اضافه می‌شوند:

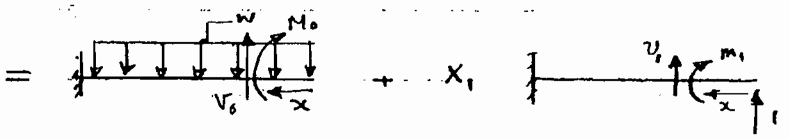
$$\int_l n_i \alpha \left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right) dx + \int_l \frac{m_i \alpha (T_2 - T_1) dx}{h}$$

* اگر نشست تکیه‌گاهی هم داشته باشیم جملهٔ $(W_R)_i$ به سمت چپ رابطهٔ Δ_i اضافه می‌شود.

۸ـ در δ_{ij} فقط بار واحد تأثیر می‌گذارد. بنابراین تغییر درجه حرارت و نشست تکیه‌گاهی تأثیری بر این رابطه ندارند.

مثال ۱) مسئله را با استفاده از روش بار واحد حل کنید.





$$\begin{cases} M_0 = -\dfrac{wx^2}{2} \ , & V_0 = wx \ , \quad N_0 = 0 \\ m_1 = x \ , & v_1 = -1 \ , \quad n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = -f_1 X_1$$

$$\Delta'_1 = \int_l \frac{M_0 m_1 dx}{EI} + \int_l \frac{f_s V_0 v_1 dx}{GA} = \int_0^l \frac{(-wx^2/2)(x)dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s (wx)(-1)dx}{GA}$$

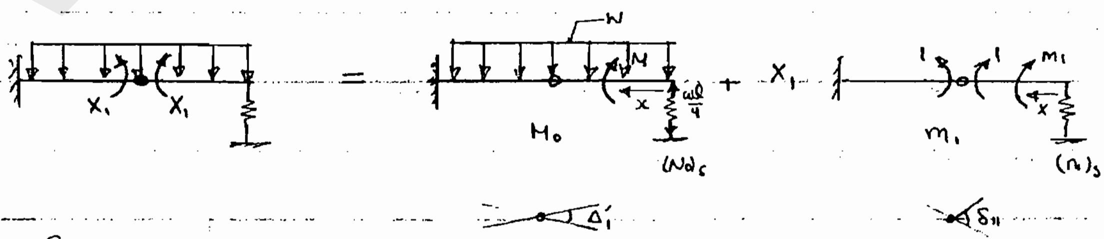
$$\Rightarrow \Delta'_1 = -\frac{wl^4}{8EI} - \frac{f_s w l^2}{2GA}$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} + \int_l \frac{f_s v_1^2 dx}{GA} = \int_0^l \frac{x^2 dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s dx}{GA} = \frac{l^3}{3EI} + \frac{f_s l}{GA}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\dfrac{wl^4}{8EI} + \dfrac{f_s w l^2}{2GA}}{\dfrac{l^3}{3EI} + \dfrac{f_s l}{GA} + f_1}$$

▲ اگر f_1 بی‌نهایت باشد و از اثرات برش صرف نظر کنیم $\Leftarrow$ $X_1 = \frac{3wl}{8}$

★ بار دیگر مسئله را با مجهول گرفتن لنگر وسط دهانه حل می‌کنیم:



$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\Delta'_1 = \int \frac{M_0 m_1 dx}{EI} + f_1 (N_0)_s (n_1)_s$$

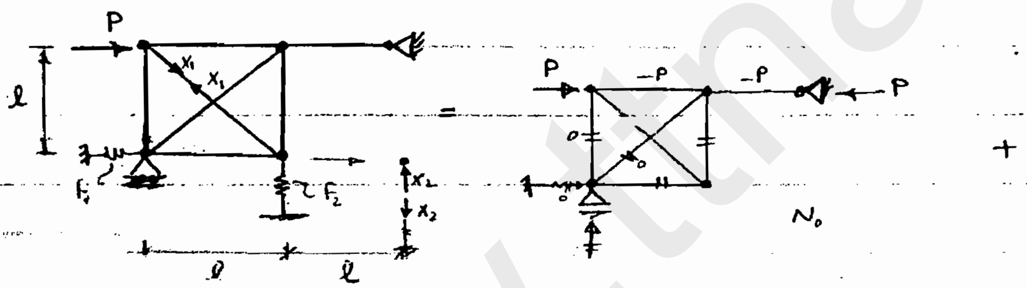
$$\begin{cases} M_0 = \dfrac{3\omega l}{4}x - \dfrac{\omega x^2}{2} \quad , \quad (N_0)_s = -\dfrac{\omega l}{4} \\ m_1 = \dfrac{2x}{l} \quad , \quad (n_1)_s = -\dfrac{2}{l} \end{cases}$$

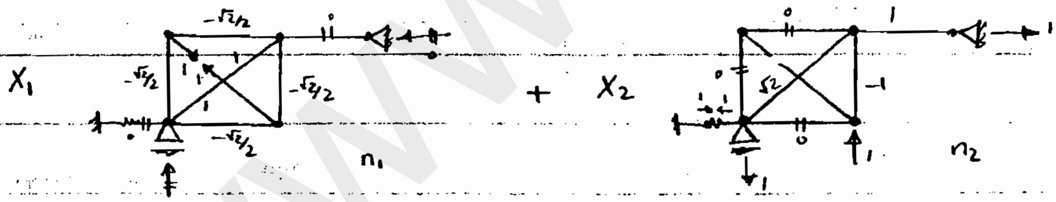
$$\Rightarrow \Delta'_1 = \int_0^l \frac{(\frac{\omega l}{4}x - \frac{\omega x^2}{2})(\frac{2x}{l})dx}{EI} + f_1(-\frac{\omega l}{4})(-\frac{2}{l}) = -\frac{\omega l^3}{12EI} + \frac{1}{2}f_1 \omega$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} + f_1 (n_1)_s^2 = \int_l \frac{4x^2/l^2}{EI}dx + f_1(-\frac{2}{l})^2 = \frac{4l}{3EI} + \frac{4f_1}{l^2}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-\frac{\omega l^3}{12EI} + \frac{1}{2}f_1 \omega}{\frac{4l}{3EI} + \frac{4f_1}{l^2}}$$

مثال 2) مسئله زیر را با استفاده از روش بار واحد حل کنید.





$$\Delta'_1 + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \quad , \quad \Delta'_2 + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -f_2 X_2$$

$$\Delta'_1 = \Sigma \frac{N_0 n_1 l}{EA} + f_1 (N_0)_s (n_1)_s = \frac{(-P)(-\sqrt{2}/2)l}{EA} = \frac{Pl\sqrt{2}}{2EA}$$

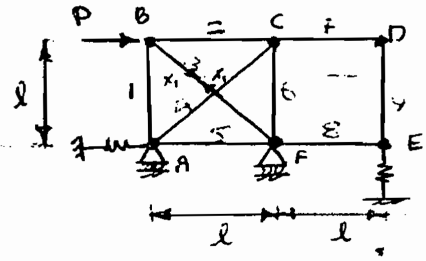
$$\Delta'_2 = \Sigma \frac{N_0 n_2 l}{EA} + f_1 (N_0)_s (n_2)_s = \frac{(-P)(1)l}{EA} = -\frac{Pl}{EA}$$

$$\delta_{11} = \Sigma \frac{n_1^2 l}{EA} + f_1 (n_1)_s^2 = \frac{(-\sqrt{2}/2)^2 l}{EA} \times 4 + \frac{(1)^2 l\sqrt{2}}{EA} \times 2 =$$

$$\delta_{22} = \Sigma \frac{n_2^2 l}{EA} + f_1 (n_2)_s^2 = \frac{(\sqrt{2})^2 l\sqrt{2}}{EA} + 2\frac{(1)^2 l}{EA} + f_1 (1)^2 =$$

$$\delta_{12} = \Sigma \frac{n_1 n_2 l}{EA} + f_1 (n_1)_s (n_2)_s = \frac{(1)(\sqrt{2})\, l \sqrt{2}}{EA} + \frac{(-1)(-\sqrt{2}/2)\, l}{EA}$$

مثال 3) با استفاده از روش بار واحد خرپا را تحلیل کنید.



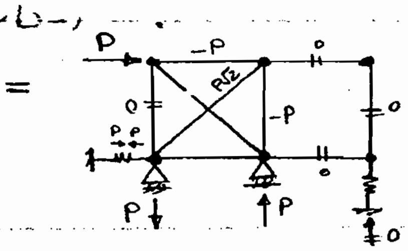
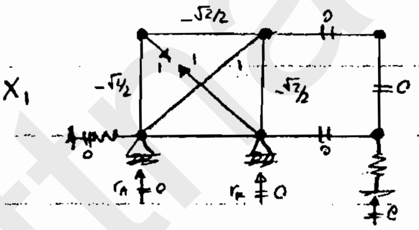
$$(\Delta T)_1 = (\Delta T)_3 = (\Delta T)_5 = 50^\circ C$$

$$-(\Delta T)_2 = (\Delta T)_4 = (\Delta T)_6 = -50^\circ C$$

$$(\Delta T)_7 = (\Delta T)_8 = (\Delta T)_9 = 100^\circ C$$

خطای ساخت $\delta = \pm 1\ mm$, $\Delta_F = 1 cm \downarrow$, $\Delta_A = 0.5 cm \uparrow$

حل:

=  $+ X_1$ 

(N_0) (n_1)

$$\Delta'_1 + (W_R)_1 = \Sigma \frac{N_0 n_1}{EA} + \Sigma \alpha (\Delta T)\, l\, (n_1) \pm \Sigma |n_1 \delta| + \Sigma F(N_b)_s (n_1)_s$$

$$\Delta'_1 + (r_A)(0.005) - (r_F)(0.01) = \frac{(-P)(-\sqrt{2}/2)\, l}{EA} + \frac{(P\sqrt{2})(1)\, l\sqrt{2}}{EA} + \frac{(-P)(-\frac{\sqrt{2}}{2})\, l}{EA}$$

$$+ (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(50)\alpha l + (+\tfrac{\sqrt{2}}{2})(-50)\alpha l + (1)(50)\alpha l\sqrt{2} + (1)(-50)\alpha l\sqrt{2}$$

$$+ (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(50)\alpha l + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(-50)\alpha l \pm (0.001)[2\sqrt{2} + 2]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta'_1 = \frac{Pl}{EA}(2+\sqrt{2}) - 50\sqrt{2}\,\alpha l \pm 0.002(1+\sqrt{2})$$

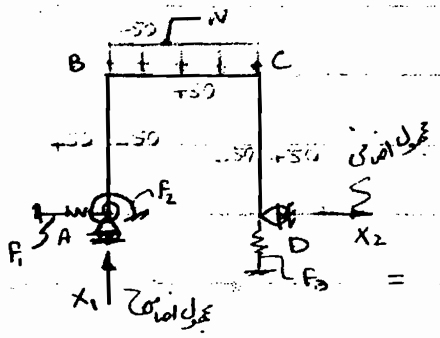
$$\delta_{11} = \Sigma \frac{n_1^2 l}{EA} + \Sigma f_i (n_1)_s^2 = 4\frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 l}{EA} + 2\frac{(1)^2 l\sqrt{2}}{EA} = \frac{2l}{EA}(1+\sqrt{2})$$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\frac{Pl}{EA}(2+\sqrt{2}) - 50\sqrt{2}\,\alpha l \pm 0.002(1+\sqrt{2})}{\frac{2l}{EA}(1+\sqrt{2})}$$

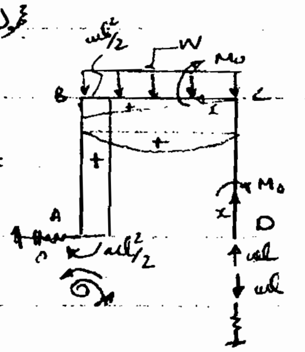
▷ اگر مقدار نیروها مشخص باشد و بخواهیم آنها را به عنوان مجهول اضافی بگیریم، سازه ناپایدار خواهد شد.

مثال 4) قاب زیر را با استفاده از روش بار واحد تحلیل کنید.

$\Delta_A \downarrow = 1cm$, $\Delta_D \rightarrow = 1cm$



=

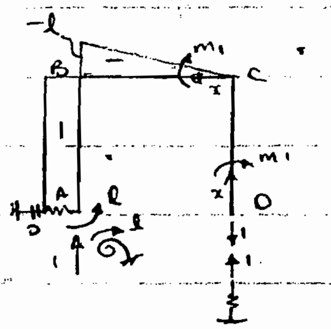


CD : $M_0 = 0$

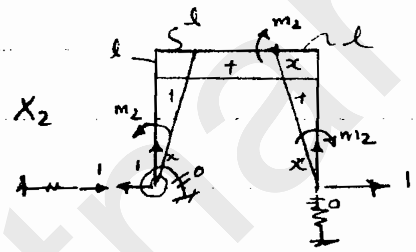
BC : $M_0 = \omega l x - \frac{\omega x^2}{2}$

AB : $M_0 = \frac{\omega l^2}{2}$

+ X_1



+ X_2



CD: $m_1 = 0$, BC : $m_1 = -x$ CD: $m_2 = x$, BC : $m_2 = l$

AB : $m_1 = l$ AB : $m_2 = x$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -0.01 \quad , \quad \Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0.01$$

$$\Delta'_1 + \cancel{(W_R)_1} = \int_l \frac{M_0 m_1 dx}{EI} + \int_l \frac{m_1 \alpha (T_2 - T_1) dx}{h} + \Sigma F(N_0)(n_1)_s + \Sigma F(M_0)(m_1)_s$$

چون نشست تکیه گاهی را در معادلات به کار برده‌ایم بنابراین W_R دراینجا صفر است

اگر می‌خواستیم دراینجا W_R را بنویسیم باید در معادلات بالا طرف راست را صفر می‌گذاشتیم

$$\Delta'_1 = -\frac{\omega l^4}{2EI} - \frac{\omega l^3}{4EI} \times \frac{2l}{3} - \frac{\omega l^3}{12EI} \times \frac{l}{2} + \frac{\alpha(-100)}{h}(-l^2) + \frac{\alpha(100)}{h}\left(-\frac{l^2}{2}\right)$$
$$+ F_3(-\omega l)(1) + F_2\left(\frac{\omega l^2}{2}\right)(-l)$$

$$\Delta'_2 + \cancel{(W_R)_2} = \int_l \frac{M_0 m_2 dx}{EI} + \int_l \frac{m_2 \alpha (T_2 - T_1) dx}{h} + \Sigma F(N_0)(n_2)_s + \Sigma F(M_0)(m_2)_s$$

$$\Delta'_2 = \frac{wl^3}{2EI}\times\frac{l}{2} + \frac{wl^3}{4EI}\times l + \frac{wl^3}{12EI}\times l + \frac{\alpha(-100)}{h}\left(\frac{l^2}{2}\right) + \frac{\alpha(100)}{h}(l^2) + \frac{\alpha(-100)}{h}\left(\frac{l^2}{2}\right) + f_2\left(\frac{wl^2}{2}\right)(0) + f_3(-wl)(0) = \frac{7wl^4}{12EI}$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2dx}{EI} + \sum f(m_1)_s^2 + \sum f(n_1)_s^2 = \frac{l^3}{EI} + \frac{l^2}{2EI}\times\frac{2l}{3} + f_2 l^2 + f_3(1)^2$$

$$\delta_{22} = \int_l \frac{m_2^2dx}{EI} + \sum F(m_2)_s^2 + \sum F(n_2)_s^2 = 2\,\frac{l^2}{2EI}\times\frac{2l}{3} + \frac{l^3}{EI} + f_1(1)^2$$

$$\delta_{12}=\delta_{21} = \int_l \frac{m_1m_2dx}{EI} + \sum f(m_1)_s(m_2)_s + \sum F(n_1)_s(n_2)_s = -\frac{l^3}{2EI} - \frac{l^3}{2EI} = -\frac{l^3}{EI}$$

◁ اگر میله‌ای به صورت بادبند در قاب داشتیم فقط یک مجهول X_3 به سازه اضافه می‌شد ؛

$CD:\ m_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $BC:\ m_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(l-x)$, $AB:\ m_3 = 0$

$$\Delta'_3 + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

$$\Delta'_3 + (W\Delta)_3 = \int_l \frac{M_0 m_3 dx}{EI} + \sum F(M_0)_s(m_3)_s + \sum (N_0)_s(n_3)_s + \int_l \frac{m_3\alpha(T_2-T_1)dx}{h}$$

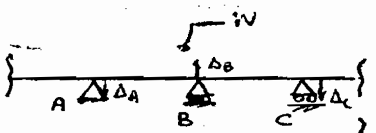
$$\Delta'_3 = -\frac{wl^2}{4EI}\left(\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}l\right) - \frac{wl^3}{12}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l\right) + \frac{\alpha(100)}{h}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}l^2\right) + \frac{\alpha(-100)}{h}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}l^2\right)$$
$$= -\frac{wl^3\sqrt{2}}{16EI}$$

◁ اگر میله دارای تغییر درجه حرارت 50°C باشد رابطه زیر به سمت راست Δ'_3 اضافه می‌شود :

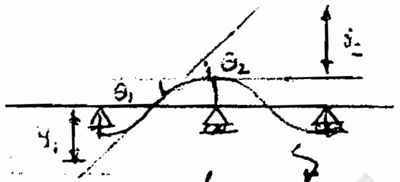
$$\sum n_3\alpha(\Delta T)l = (1)\alpha(50)l\sqrt{2}$$

◀ روش سه لنگری :

* اغلب برای تحلیل تیرهای سراسری به کار می رود. در این روش لنگر تکیه گاه ها را مجهول درنظر می گیریم و رابطه ای بین لنگرها را بدست می آوریم.



$\begin{cases}\Delta\uparrow & + \\ \Delta\downarrow & -\end{cases}$



$$tg\,\theta_1 = tg\,\theta_2 \Rightarrow \frac{y_1}{l_1} = \frac{y_2}{l_2}$$

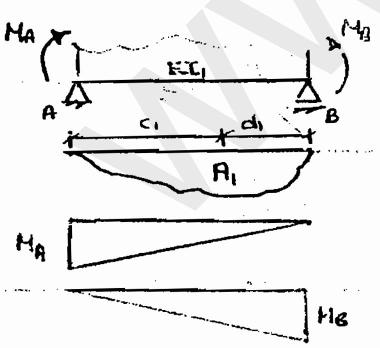
$$y_1 = \Delta_B - \Delta_A + \delta_{A/B} \quad , \quad y_2 = -\delta_{C/B} - \Delta_B + \Delta_C$$

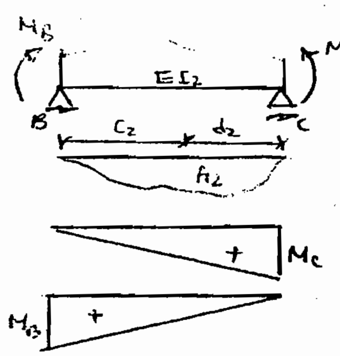
* وقتی نقطه A بالای مماس است $\delta_{A/B}>0$ و وقتی پایین مماس است $\delta_{A/B}<0$.

↳ لنگر خمشی مثبت　　　　↳ لنگر خمشی منفی

$$\frac{y_1}{l_1} = \frac{y_2}{l_2} \Rightarrow \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l_1} + \frac{\delta_{A/B}}{l_1} = -\frac{\delta_{C/B}}{l_2} + \frac{-\Delta_B + \Delta_C}{l_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_{A/B}}{l_1} + \frac{\delta_{C/B}}{l_2} = \frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_2} \qquad (1)$$





$$\delta_{A/B} = \frac{A_1 c_1}{EI_1} + \frac{M_A l_1}{2EI_1}\cdot\frac{l_1}{3} + \frac{M_B l_1}{2EI_1}\cdot\frac{2l_1}{3}$$

$$\delta_{C/B} = \frac{A_2 d_2}{EI_2} + \frac{M_C l_2}{2EI_2}\cdot\frac{l_2}{3} + \frac{M_B l_2}{2EI_2}\cdot\frac{2l_2}{3}$$

۸ معادلات بدست آمده را در رابطه (۱) جاگذاری می کنیم:

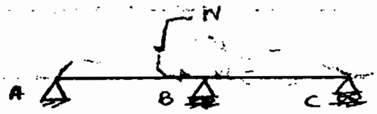
$$\frac{A_1 c_1}{EI_1 l_1} + \frac{M_A l_1}{6EI_1} + \frac{M_B l_1}{3EI_1} + \frac{A_2 d_2}{EI_2 l_2} + \frac{M_C l_2}{6EI_2} + \frac{M_B l_2}{3EI_2} = \frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_1}$$

$$\Rightarrow M_A\left(\frac{l_1}{I_1}\right) + 2M_B\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right) + M_C\left(\frac{l_2}{I_2}\right) = -6\frac{A_1 c_1}{I_1 l_1} - \frac{6A_2 d_2}{I_2 l_2} + 6E\left[\frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_2}\right]$$

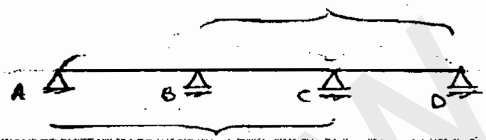
رابطه سه لنگری

◀ اگر $I_1 = I_2$ باشد:

$$M_A l_1 + 2M_B(l_1+l_2) + M_C l_2 = -6\frac{A_1 c_1}{l_1} - 6\frac{A_2 d_2}{l_2} + 6EI\left[\frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_2}\right]$$

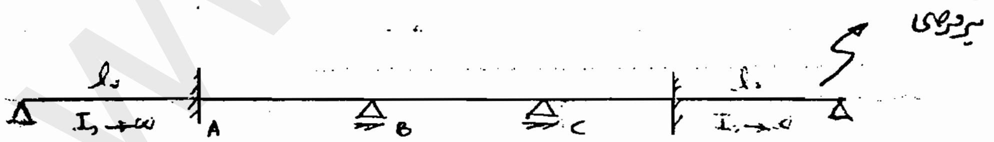


★ اگر تیری مانند شکل دو دهانه باشد، تیر یک درجه نامعین است، $(M_A = M_C = 0)$ یک معادله از رابطه سه لنگری بدست می آوریم در نتیجه مسئله حل خواهد شد.



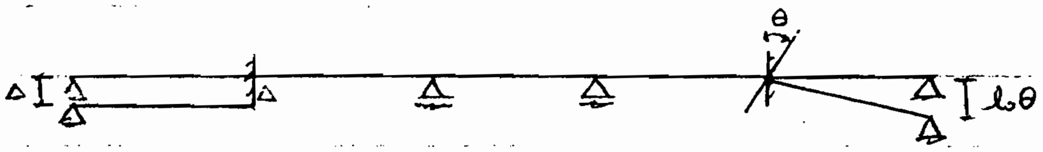
$n=2$ درجه نامعینی

★ معادلات سه لنگری را برای تیرهای مشخص شده می نویسیم و مسئله را حل می کنیم.



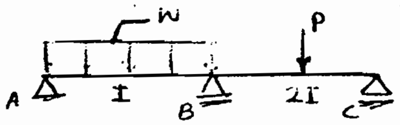
★ برای حل مسئله بالا چون فقط یک معادله سه لنگری می توانیم بنویسیم یک تیر فرضی با I_0 بی نهایت درنظر می گیریم که تغییر شکل ندارد و به طول هم بستگی ندارد و معادله سه لنگری دیگری هم می نویسیم.

◀ نشست تکیه گاهی در تیر فرضی با $I_0 \to \infty$ باید برابر با نشست تکیه گاهی تکیه گاه گیردار باشد.



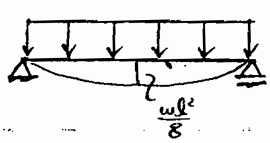
۸- اگر نشست تکیه گاهی و دوران را با هم داشتیم بالا تکیه گاه فرضی را به اندازه $\Delta + l_0\theta$ تغییر مکان دهیم.

مثال) لنگرهای تکیه گاهی را بدست آورید.

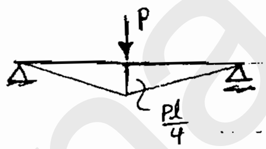


$\Delta_A = 0.01 \ m$, $\Delta_B = -0.01 \ m$

$\Delta_C = 0.005 \ m$



$$\begin{cases} A_1 = \frac{wl^3}{12} \\ c_1 = d_1 = \frac{l}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_2 = \frac{Pl^2}{8} \\ c_2 = d_2 = \frac{l}{2} \end{cases}$$

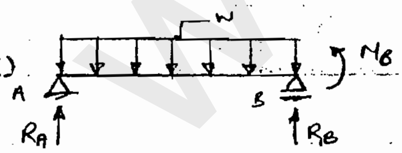
$$M_A\left(\frac{l}{I}\right) + 2M_B\left(\frac{l}{I} + \frac{l}{2I}\right) + M_C\left(\frac{l}{2I}\right) = -6\,\frac{\frac{wl^3}{12}\cdot\frac{l}{2}}{I\,l} - 6\,\frac{\frac{Pl^2}{8}\cdot\frac{l}{2}}{(2I)\,l}$$

$$+ 6E\left[\frac{0.01}{l} + 0.01\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l}\right) + \frac{0.005}{l}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{3M_B l}{I} = -\frac{wl^3}{4I} - \frac{3Pl^2}{16I} + 6E\left[\frac{0.035}{l}\right]$$

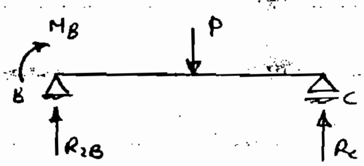
$$\Rightarrow M_B = -\frac{wl^2}{12} - \frac{Pl}{16} + \frac{0.07EI}{l^2}$$

دهانه



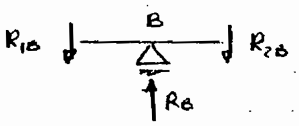
$$R_A = \frac{wl}{2} + \frac{M_B}{l}$$

$$R_{1B} = \frac{wl}{2} - \frac{M_B}{l}$$



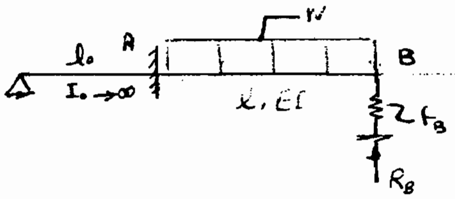
$$R_C = \frac{P}{2} + \frac{M_B}{l}$$

$$R_{2B} = \frac{P}{2} - \frac{M_B}{l}$$

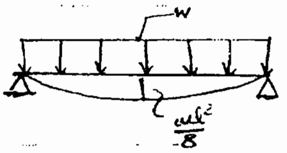


$$R_B = R_{1B} + R_{2B} = \frac{wl}{2} + \frac{P}{2} - \frac{2M_B}{l}$$

مثال ۲) مسئله را با روش سه لنگری حل کنید.



$$M_0\left(\frac{l_0}{I_0}\right) + 2M_A\left(\frac{l_0}{I_0}+\frac{l}{I}\right) + M_B\left(\frac{l}{I}\right) = -6\frac{A_0 c_0}{I_0 l_0} - 6\frac{A_1 d_1}{I l} + 6E\left[\frac{\Delta_0}{l_0} - \Delta_A\left(\frac{1}{l_0}+\frac{1}{l}\right) + \frac{\Delta_B}{l}\right]$$



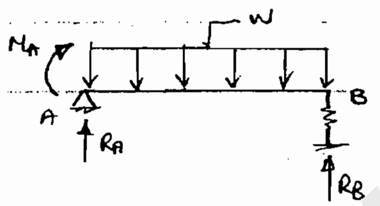
$$A_1 = \frac{wl^3}{12}, \quad c_1 = d_1 = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow 2M_A l = -6\frac{\frac{wl^3}{12}\cdot\frac{l}{2}}{l} + 6EI\left(\frac{-F_B R_B}{l}\right)$$

$$\Rightarrow 2M_A l = -\frac{wl^3}{4} - 6\frac{EI}{l}(F_B R_B)$$

$$\Rightarrow M_A = -\frac{wl^2}{8} - \frac{3EI}{l^2}(F_B R_B)$$

Δ این رابطه θ_A را صفر می‌کند.



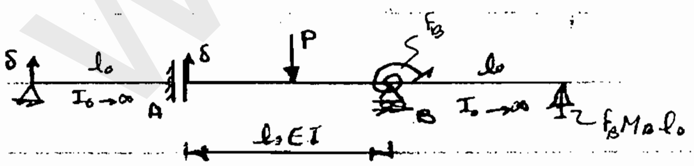
$$R_A = \frac{wl}{2} - \frac{M_A}{l}$$

$$R_B = \frac{wl}{2} + \frac{M_A}{l}$$

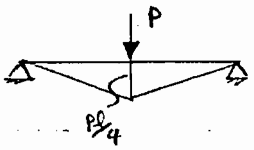
$$R_B = \frac{wl}{2} - \frac{wl}{8} - \frac{3EI F_B R_B}{l^3} = \frac{3wl}{8} - \frac{3EI}{l^3}(F_B R_B)$$

$$\rightarrow R_B = \frac{\frac{3wl}{8}}{1+\frac{3EIF_B}{l^3}}$$

مثال ۳) مسئله را با روش سه لنگری حل کنید.

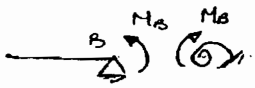


$$M_0\left(\frac{l_0}{I_0}\right) + 2M_A\left(\frac{l_0}{I_0}+\frac{l}{I}\right) + M_B\left(\frac{l}{I}\right) = -6\frac{A_0 C_0}{l_0 I_0} - 6\frac{\frac{Pl^2}{8}\cdot\frac{l}{2}}{l I} + 6E\left[\frac{\delta}{l_0} - \delta\left(\frac{1}{l_0}+\frac{1}{l}\right)\right]$$



$$\begin{cases} A = \frac{Pl^2}{8} \\ c = d = l/2 \end{cases}$$

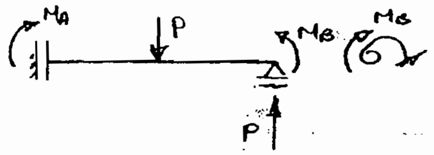
$$\Rightarrow 2M_A l + M_B l = -\frac{3Pl^2}{8} - \frac{6EI\delta}{l} \quad (1)$$



$$\theta_B = f_B M_B \Rightarrow \Delta_0 = -f_B M_B l_0$$

$$M_A\left(\frac{l}{I}\right) + 2M_B\left(\frac{l}{I}+\frac{l_0}{I_0}\right) + M_0\left(\frac{l_0}{I_0}\right) = -6\,\frac{\frac{PS^2}{8}\cdot l/2}{l} - 6\,\frac{A_0 d_0}{I_0 l_0} + 6E\left[\frac{\delta}{l} - \delta\left(\frac{1}{l_0}+\frac{1}{l}\right) + \frac{\Delta_0}{l_0}\right]$$

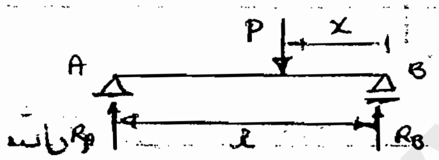
$$\Rightarrow M_A l + 2M_B l = -\frac{3Pl^2}{8} + \frac{6EI\delta}{l} - 6EI f_B M_B \qquad (2)$$



$$M_B + \frac{Pl}{2} = M_A \qquad (3)$$

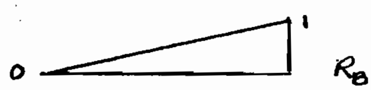
◄ خط تاثیر

◄ تغییرات یکی از عوامل (تلاش خمشی، نیروی برشی، نیروی محوری، شیب، خیز، عکس العمل تکیه‌گاه) وقتی که یک بار واحد روی سازه حرکت کند را خط تاثیر گویند.



$R_A = \frac{Px}{l}$ ضریب تاثیر : $y = \frac{x}{l}$

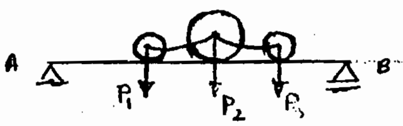
$R_B = \frac{P(l-x)}{l}$ $y = \frac{l-x}{l}$

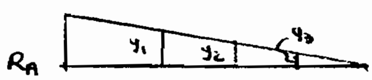


$R_A = Py$

◄ برای طراحی پل‌ها و تیرهای جرثقیل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

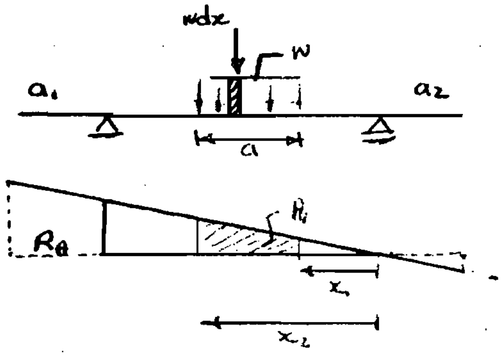
★ نکته: خط تاثیر به بارگذاری ارتباطی ندارد.





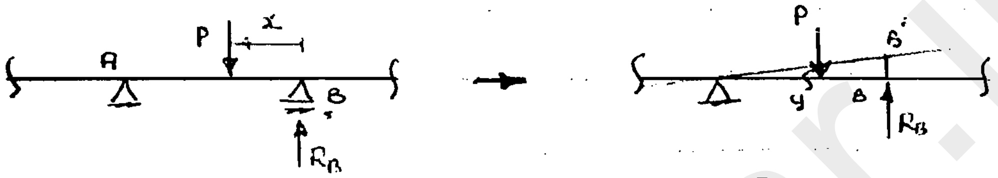
$$R_A = \sum_{i=1}^{3} P_i y_i$$

★ اصل اجتماع قوا (جمع آثار) برقرار است.



$$R_A=\int_{x_1}^{x_2}(w\,dx)y = w\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = wA_1$$

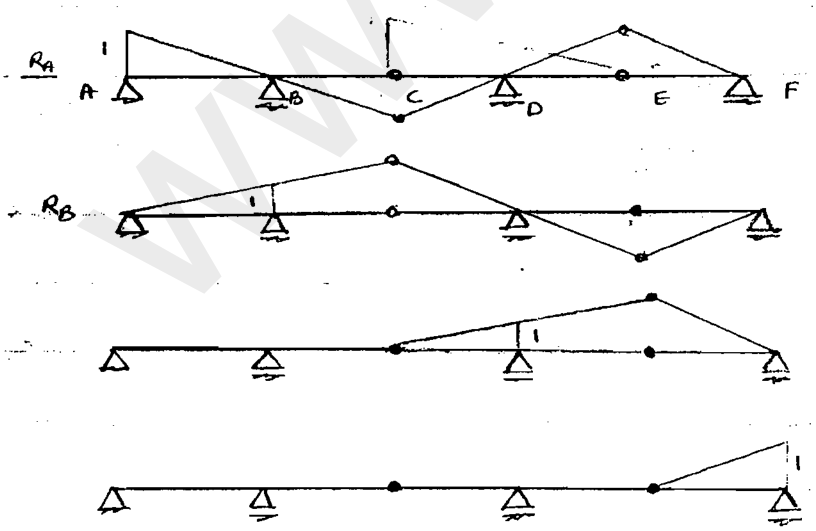
◄ اگر تیر از دوطرف ادامه پیدا کند R_A و R_B چون معادلات خطی هستند بنابراین خط تأثیر آنها از دوطرف ادامه پیدا می‌کند.



◄ تکیه‌گاه B را برمی‌داریم و به جای آن R_B را قرار می‌دهیم.
تغییر مکان دوران جسم صلب به سازه می‌دهیم (تغییرمکان مجازی). چون نیروها در حال تعادل اند بنابراین کار ناشی از تغییرمکان مجازی صفر است.

$$R_B(\overline{BB'}) - Py = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = P\frac{y}{\overline{BB'}}}$$

مثال) خط تأثیر R_A را بدست آورید.



◄ خط تأثیر R_A

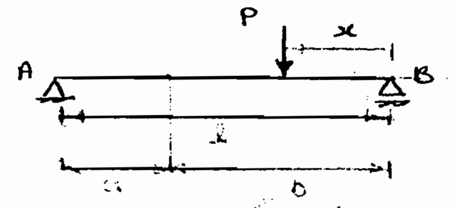
◄ خط تأثیر R_B

◄ خط تأثیر R_D

◄ خط تأثیر R_F

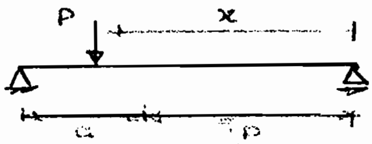
◄ از روی خط تأثیر می‌توانیم مکان بارگذاری برای max شدن عکس‌العمل تکیه‌گاهی را بدست آوریم.

★ خط تأثیر نیروی برشی :

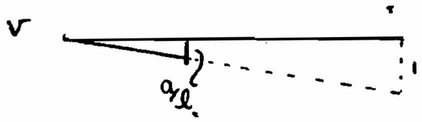


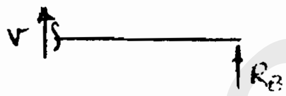
$0 < x < b$

$V = R_A$



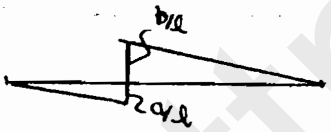
$b < x < l$





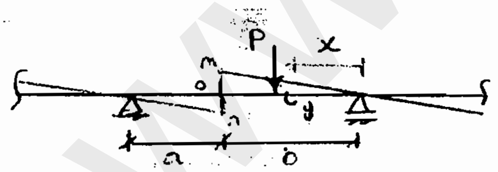
$V = -R_B$

خط تأثیر نیروی برشی

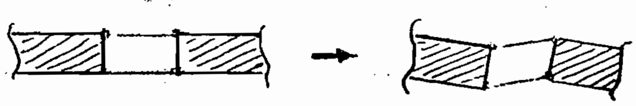


در تیرهای ساده برای رسم خط تأثیر نیروی برشی کافی است خط تأثیر R_A و $-R_B$ را رسم کنیم و در نقطهٔ مورد نظر یک ناپیوستگی در ارتفاع داریم ولی شیب سمت چپ و راست برابرند.

★ رسم خط تأثیر نیروی برشی با استفاده از روش کار مجازی :



✓ نقطه‌ای که برش می‌دهیم را تبدیل به مکانیسم می‌کنیم :



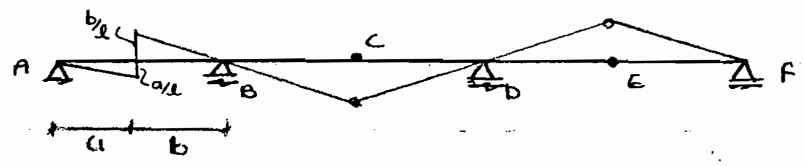
شیب دو طرف یکسان است.

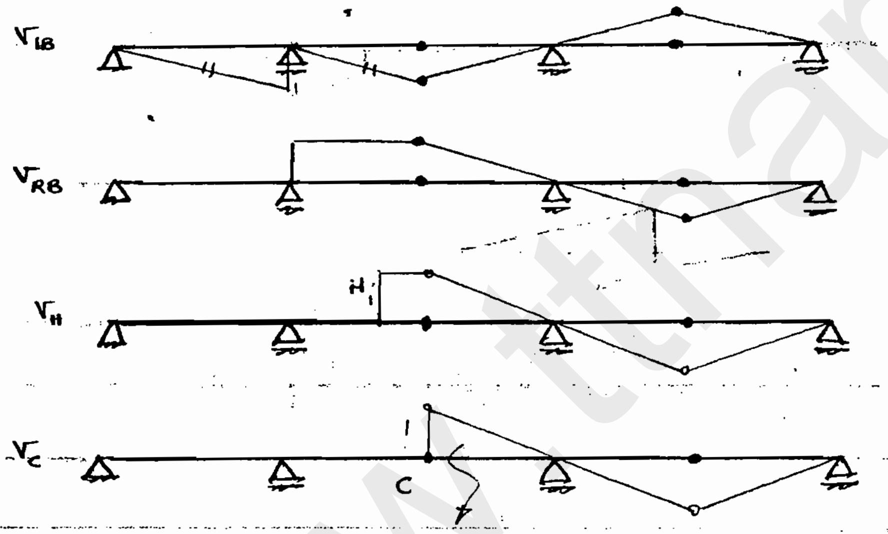
$$V(\overline{on}) + V(\overline{om}) - Py = 0 \Rightarrow V(\overline{nm}) = Py$$

$$\Rightarrow V = P\frac{y}{\overline{nm}}$$

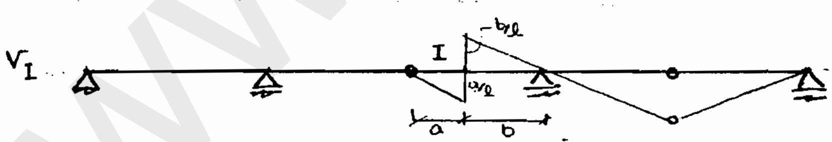
$$\frac{\overline{on}}{a} = \frac{\overline{om}}{b} = \frac{\overline{nm}}{l} = \frac{1}{l} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{on} = \frac{a}{l} \\ \overline{om} = \frac{b}{l} \end{cases}$$

مثال: خط تاثیر نیروی برشی را در نقطه مشخص شده رسم کنید.



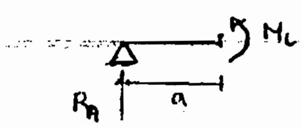


◄ چون مفصل داریم هم نسبت شیب سمت چپ و راست برابر شود

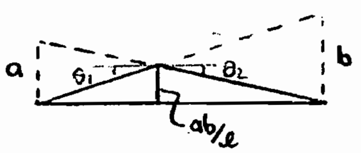


◄ خط تاثیر لنگر خمشی

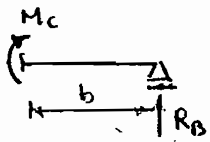
$a<x<b$



$M_c = R_A(a)$



$b<x<l$

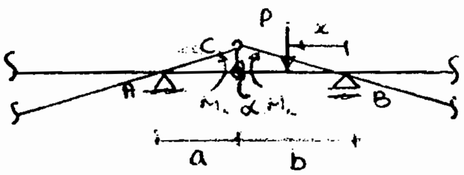


$M_c = R_B(b)$

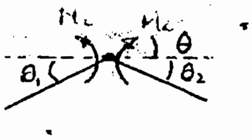
$$\tan\theta_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{b}{l} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{b_2}{b} = \frac{a}{l}$$

$$\Rightarrow \tan\theta_1 + \tan\theta_2 = 1$$

۸ رسم خط تاثیر لنگر خمشی با استفاده از روش کار مجازی:



باید مقدار α را بدست آوریم تا شیب سمت چپ و راست مشخص شود.



$$M_c(\theta_1) + M_c(\theta_2) - Py = 0$$

$$M_c(\theta_1+\theta_2) = Py$$

$$M_c(\theta) = Py \Rightarrow M_c = P\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

★ اگر $\theta=1$ باشد، y خط تاثیر لنگر خمشی خواهد شد.

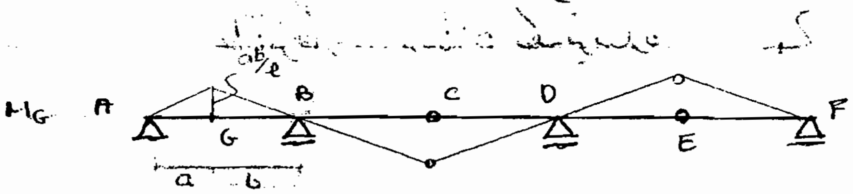
$$\theta_1 = \frac{\alpha}{a} \quad , \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{b} \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{b} = \alpha\frac{l}{ab}$$

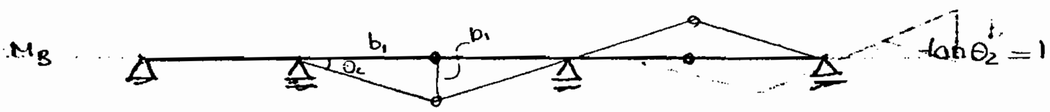
$$\Rightarrow M_c = \frac{Py}{\alpha\frac{l}{ab}} \quad , \quad \alpha\frac{l}{ab} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{ab}{l} \Rightarrow$$ خط تاثیر

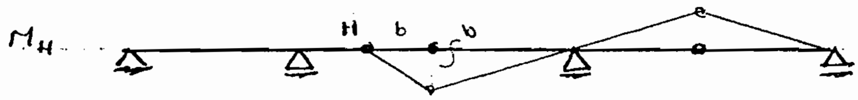
$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{b}{l} \quad , \quad \theta_2 = \frac{a}{l}$$

★ شیب ها را باید طوری قرار دهیم که لنگر مثبت، کار مثبت انجام دهد.

مثال) خط تاثیر لنگر خمشی را در نقاط مشخص شده رسم کنید.

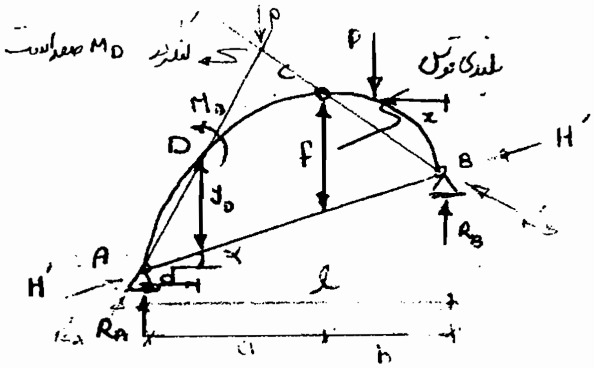






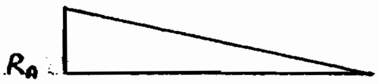
خط تاثیر مفصل خمشی صفر است

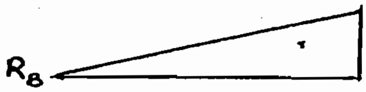
◄ خط تاثیر قوس ها

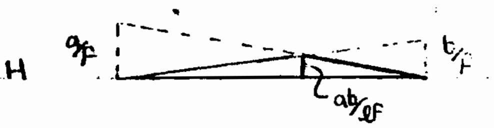


رانش افقی $H = H'\cos\alpha$

$R_A = \frac{Px}{l}$, $R_B = \frac{P(l-x)}{l}$







$0 < x < b$

$R_A(a) - H'f\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Hf = R_A(a) \Rightarrow H = R_A(\frac{a}{f})$

$b < x < l \Rightarrow R_B(b) - H'f\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Hf = R_B(b) \Rightarrow H = R_B(\frac{b}{f})$

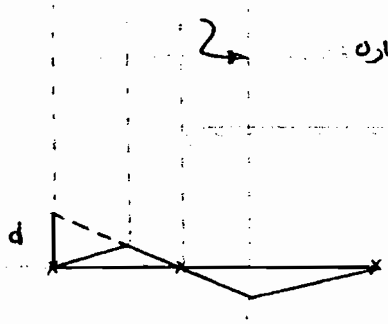
* خط تاثیر رانش افقی در یک قوس مانند خط تاثیر لنگرخمشی در تیرهای ساده است.

* می‌خواهیم خط تاثیر لنگرخمشی در نقطه D' را رسم کنیم.

$0 < x < l-d$ $\quad M_D = R_A(d) - Hy_D$

$l-d < x < l$ $\quad M_D = R_B(l-d) - Hy_D$

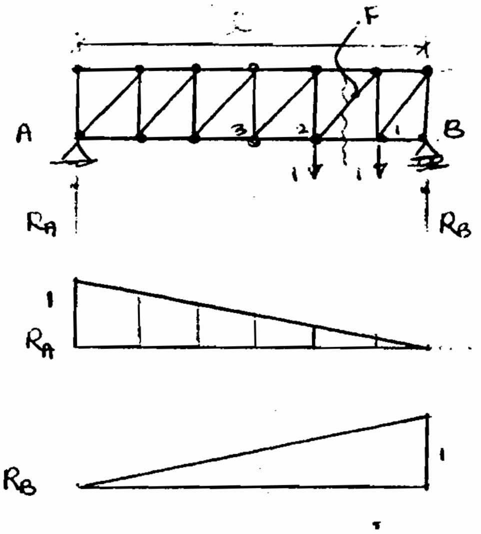
خط تاثیر لنگرخمشی در نقطه D' یک تیر ساده



◄ اگر تکیه‌گاه B را به مفصل C وصل کنیم و خط را امتداد دهیم و تکیه‌گاه A را به نقطه D' وصل کنیم و خط واصل بین آنها را امتداد دهیم محل برخورد این دو خط محل اثر P است که در آن صورت M_D صفر می‌شود.

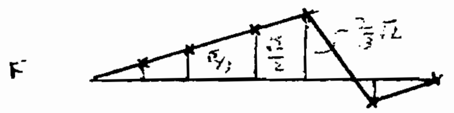
★ خط تأثیر در خرپاهای معین

/ در مسئله ذکر می‌شود که بار بر روی تار بالا حرکت می‌کند یا تار پایین.



◄ کلی‌ترین روش این است که بار واحد را بر روی هر گره قرار می‌دهیم و عکس‌العمل تکیه‌گاه را به‌دست می‌آوریم و نقاط بدست آمده را به هم وصل می‌کنیم تا خط تأثیر بدست آید.

◄ حال می‌خواهیم خط تأثیر عضو F را رسم کنیم. پس بار واحد را بر روی گره‌ها قرار می‌دهیم:

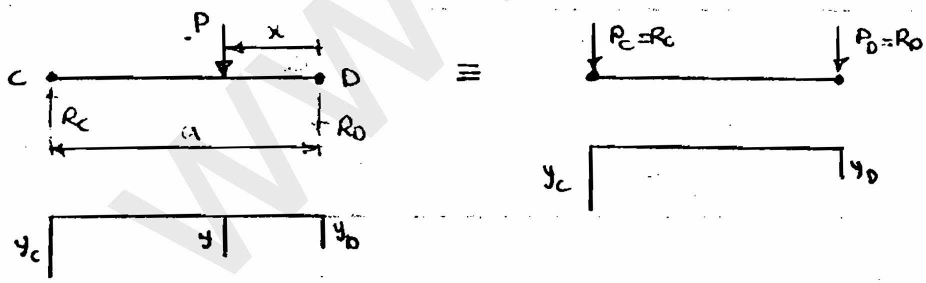


گره اول: $R_A + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

گره دوم: $\frac{1}{3} - 1 + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

گره سوم: $\frac{1}{2} - 1 + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

گره چهارم: $\frac{2}{3} - 1 + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{\sqrt{2}}{6}$



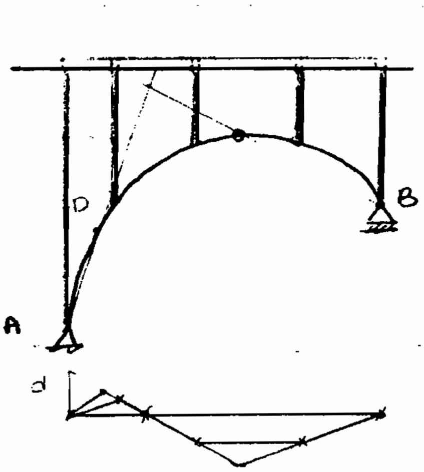
$$P_c = R_c = \frac{Px}{a} \quad , \quad P_D = R_D = \frac{P(a-x)}{a}$$

$$P_y = P_c y_c + P_D y_D = \frac{Px}{a} y_c + \frac{P(a-x)}{a} y_D \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{a} y_c + \frac{a-x}{a} y_D}$$

★ اثبات می‌شود که بین دو نقطه خط تأثیر، خطی است.

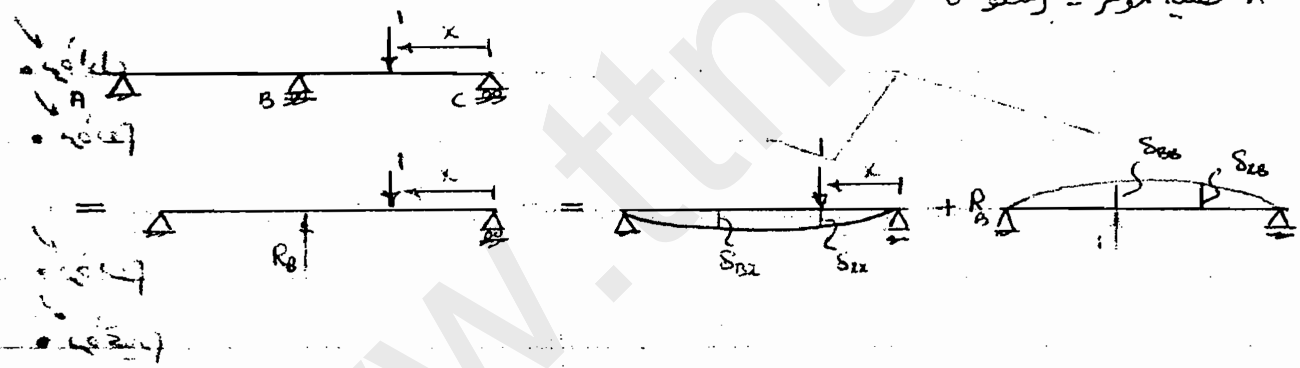
★ باید توجه داشته باشیم که اگر بار واحد بر روی تار بالا حرکت کند باید نیرو را در گره‌های بالایی قرار دهیم و خط تأثیر را رسم کنیم.

◄ اگر یک سری تیرچه‌هایی داشتیم که بار را به قوس منتقل می‌کنند باید برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی در یک نقطه -



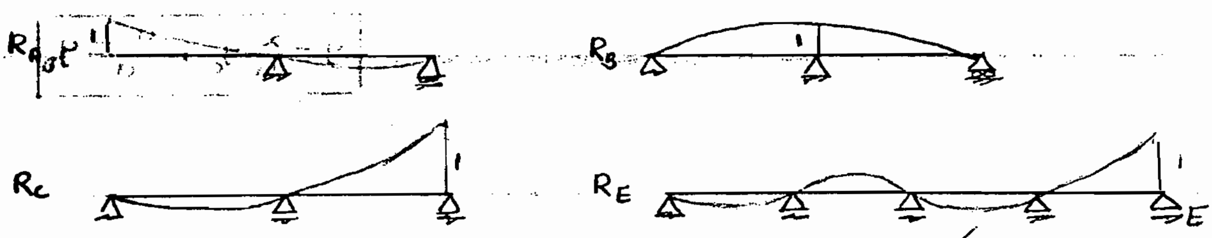
◄ خط تأثیر سازه‌های نامعین

A قضیه مولر - برسلو

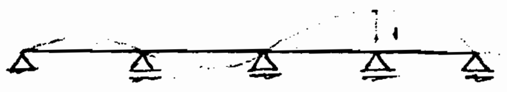


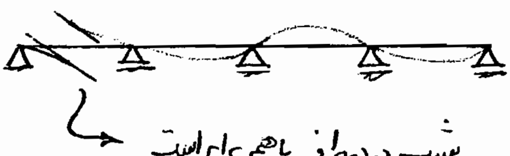
$$\delta_{BB} R_B = \delta_{BX} \Rightarrow R_B = \frac{\delta_{BX}}{\delta_{BB}} = \frac{\delta_{XB}}{\delta_{BB}}$$

◄ برای بدست آوردن خط تأثیر عکس العمل تکیه گاهی، تکیه گاه را برمی‌داریم و به جای آن یک بار واحد قرار می‌دهیم. تیر شکلی به خود می‌گیرد (منحنی الاستیک). اگر تمامی تغییرمکان‌ها را بر تغییرمکان نقطه تکیه‌گاه تقسیم کنیم خط تأثیر آن عکس العمل بدست می‌آید. بنابراین در خود تکیه‌گاه مقدار یک است.

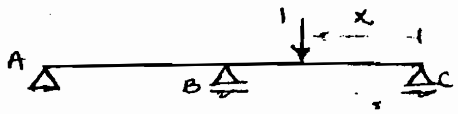


شمای خط تأثیر ← به طور تقریبی رسم می‌شود

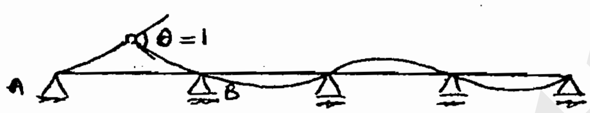




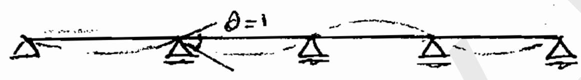
شیب در دو طرف باهم برابر است



◄ برای رسم خط تأثیر θ_A باید یک بار، بار واحد را در فاصلهٔ BC قرار دهیم و θ_A را برحسب x بدست آوریم و بار دیگر بار واحد را در فاصلهٔ AB قرار دهیم و خط تأثیر θ_A را بدست می‌آوریم.

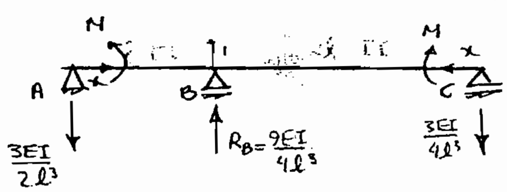


★ برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی در یک نقطه بالا توجه داشته باشیم که اختلاف شیب بین دو مماس سمت چپ و راست ۱ است.



کانون سمت راست است

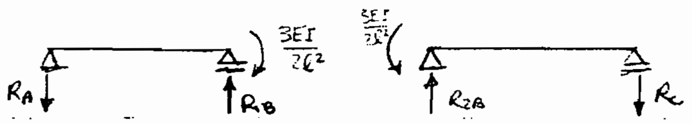
مثال: خط تأثیر R_B را رسم کنید.



$$M_A(l)+2M_B(l+2l)+M_C(2l)=6EI\left[-\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 6M_B\,l = 6EI\left(-\frac{3}{2l}\right)$$

$$\Rightarrow M_B = -\frac{3EI}{2l^2}$$



$$R_A = R_{1B} = \frac{3EI}{2l^3} \quad , \quad R_C = R_{2B} = \frac{3EI}{4l^3} \quad \rightarrow \quad R_B = R_{1B} + R_{2B} = \frac{9EI}{4l^3}$$

$$AB: \quad M = -\frac{3EI}{2l^3}x = EIy'' \Rightarrow y'' = -\frac{3x}{2l^3} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{4l^3} + A$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^3}{4l^3} + Ax \quad (I)$$

$$BC: \quad M = -\frac{3EI}{4l^3}x = EIy'' \Rightarrow y'' = -\frac{3x}{4l^3} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{8l^3} + B$$

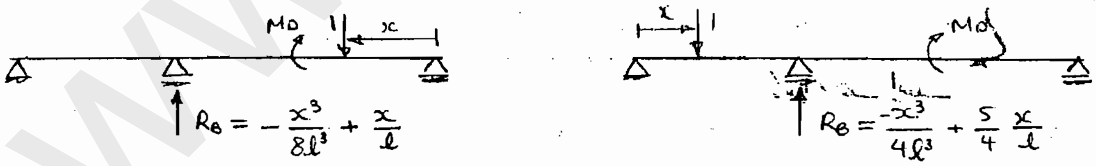
$$\rightarrow y = -\frac{x^3}{8l^3} + Bx \quad (II)$$

$$y_I(x=l) = y_{II}(x=2l) \Rightarrow -\frac{1}{4} + Al = -1 + 2Bl$$

$$y'_I(x=l) = -y'_{II}(x=2l) \Rightarrow -\frac{3}{4l} + A = \left(\frac{3}{2l} - B\right)$$

$$\begin{cases} A - 2B = -\frac{3}{4l} \\ A + B = \frac{9}{4l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{4l} \\ B = \frac{1}{l} \end{cases}$$

$$y_I = -\frac{x^3}{4l^3} + \frac{5}{4}\frac{x}{l} \quad , \quad y_{II} = -\frac{x^3}{8l^3} + \frac{x}{l}$$



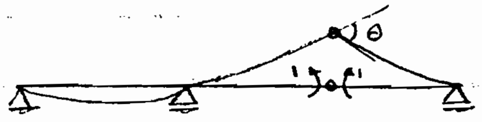
$$II \begin{cases} 0<x<l & M_D = R_C l - (1)(l-x) \\ l<x<2l & M_D = R_C l \end{cases} \Rightarrow$$

⊲ اختلاف شیب دو طرف ۱ است

$$I \left\{ 0<x<l \quad M_D = R_C l \right.$$

⊲ بقیه خطوط تأثیرها را می‌توانیم با استفاده از تعادل بدست آوریم.

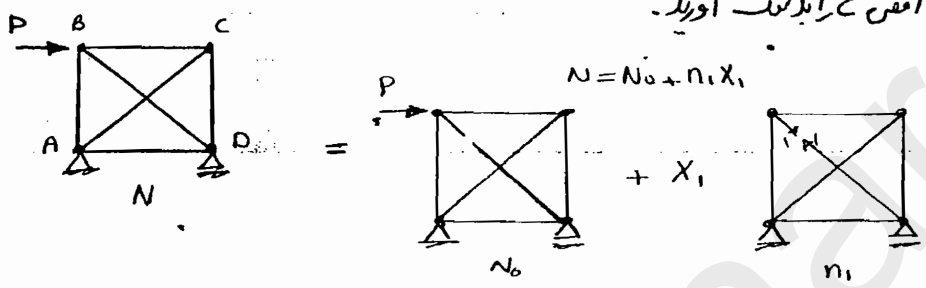
* اگر خط تأثیر R_B را داشتیم و می‌خواستیم خط تأثیر تغییر شکلی را در وسط دهانهٔ BC رسم کنیم.



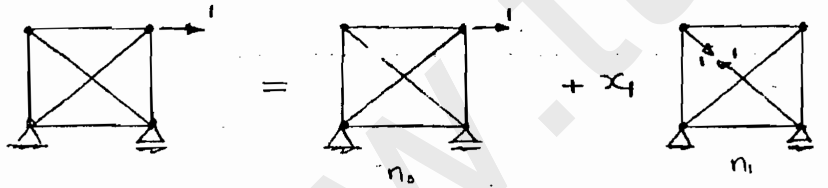
* در دو طرف نقطهٔ مورد نظر شکستگی قرار می‌دهیم و سپس منحنی تغییر شکل (همهٔ ارتفاعات) را تقسیم بر اختلاف شیب سمت چپ و راست نقطهٔ مورد نظر می‌کنیم ⇐ منحنی خط تأثیر بدست می‌آید.

مثال) تغییر مکان افقی C را بدست آورید.

$N = N_0 + n_1 X_1$



$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow \sum \frac{N_0 n_1 l}{EA} + X_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA} = 0$$



$n = n_0 + n_1 X_1$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} x_1 = 0 \Rightarrow \sum \frac{n_0 n_1 l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA} = 0$$

$$1 \times \delta_{HC} = \sum \frac{N n l}{EA} = \sum \frac{(n_0 + n_1 x_1) N l}{EA} = \sum \frac{n_0 N l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1 N l}{EA}$$

$$= \sum \frac{n_0 N l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1 (N_0 + n_1 X_1) l}{EA} = \sum \frac{n_0 N l}{EA} + x_1 \Big[\underbrace{\cancel{\sum \frac{n_1 N_0 l}{EA} + X_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA}}}_{0} \Big]$$

$$\Rightarrow 1 \times \delta_{HC} = \sum \frac{n_0 N l}{EA}$$

* نتیجه می‌شود که برای بدست آوردن تغییرمکان در یک سازهٔ نامعین کافی است سازه را با بار واحد را معین کنیم و تغییرمکان‌ها را طبق رابطهٔ بالا بدست آوریم.

$$1\times\delta_{HC} = \sum \frac{Nnl}{EA} = \sum \frac{n(N_0+n_1X_1)l}{EA} = \sum \frac{N_0 n l}{EA} + X_1 \sum \frac{n n_1 l}{EA}$$

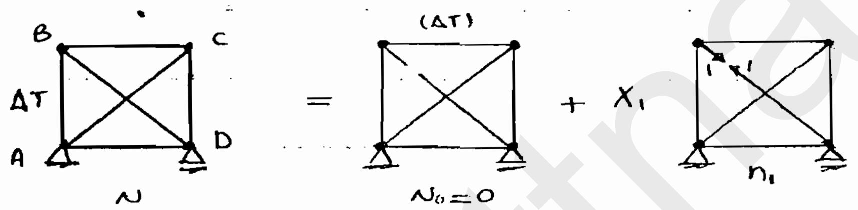
$$= \sum \frac{N_0 n l}{EA} + X_1 \sum \frac{(n_0+n_1X_1)n_1 l}{EA} = \sum \frac{N_0 n l}{EA} + X_1\left[\underbrace{\sum \frac{n_0 n_1 l}{EA} + X_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA}}_{0}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\delta_{HC} = \sum \frac{N_0 n l}{EA}$$

کافی است سازه با بارگذاری خارجی را حل کنیم

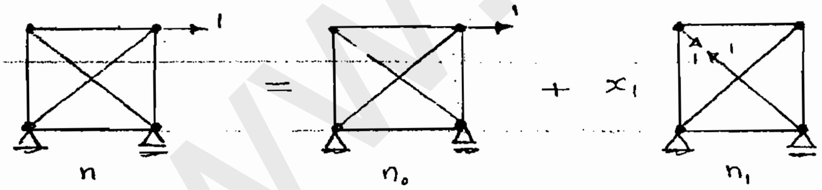
و سازه با بار واحد را نیز حل و تغییرمکان ها را بدست آوریم

◀ درصورتی که هر یک از اعضا به اندازه ΔT تغییر درجه حرارت داشته باشند، δ_{HC} را بدست آورید.



$N = n_1 X_1$

$$\Delta'_1 + \delta_{11}X_1 = 0 \Rightarrow \sum n_1\alpha(\Delta T)l + X_1\sum \frac{n_1^2 l}{EA} = 0$$



$n = n_0 + n_1 x_1$

$$\Delta'_1 + \delta_{11}x_1 = 0 \Rightarrow \sum \frac{n_0 n_1 l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA} = 0$$

$$1\times\delta_{HC} = \sum \frac{nNl}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)l = \sum \frac{(n_0+n_1x_1)Nl}{EA} + \sum (n_0+n_1x_1)\alpha(\Delta T)l$$

$$= \sum \frac{n_0 N l}{EA} + \sum n_0\alpha(\Delta T)l + x_1 \sum \frac{n_1 n_1 x_1 l}{EA} + \sum n_1 x_1 \alpha(\Delta T)l$$

$$= \sum \frac{n_0 N l}{EA} + \sum n_0\alpha(\Delta T)l + x_1\left[\underbrace{\sum n_1\alpha(\Delta T)l + X_1\sum \frac{n_1^2 l}{EA}}_{0}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = \sum n_0\alpha(\Delta T)l$$

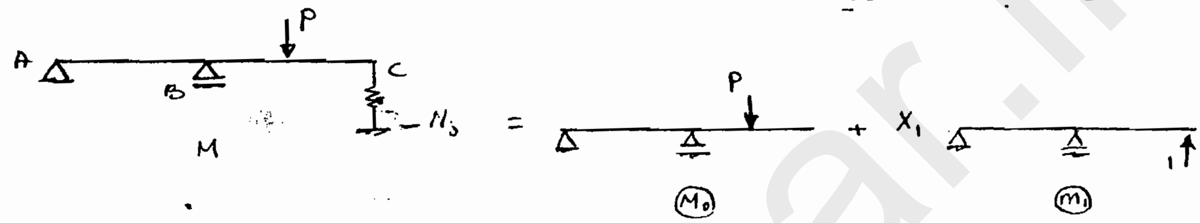
کافی است سازه با بار واحد را نیز حل کنیم.

$$1\times\delta_{HC} = \sum \frac{nN\ell}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum \frac{(n_0+n_1X_1)(n_1X_1)}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell$$

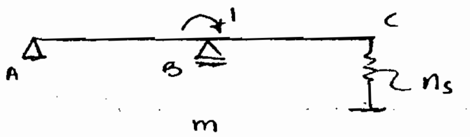
$$= X_1\left[\sum \frac{n_0 n_1 \ell}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1^2\ell}{EA}\right]$$

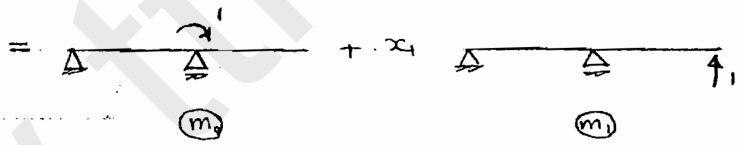
$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = \sum \frac{nN\ell}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum\frac{n_0 N\ell}{EA} + \sum n_0\alpha(\Delta T)\ell$$

◄ θ_B را به دست آورید. ٣



$$M = M_0 + m_1X_1 \quad , \quad N_S = X_1$$





$$m = m_0 + m_1x_1 \quad , \quad n_s = x_1$$

دستگاه اصلی : $\Delta_1' + \delta_{11}X_1 = -f_sX_1 \Rightarrow \int_\ell \frac{m_1M_0dx}{EI} + X_1\int_\ell\frac{m_1^2dx}{EI} = -f_sX_1$

دستگاه مجازی : $\Delta_1' + \delta_{11}x_1 = -f_sx_1 \Rightarrow \int_\ell \frac{m_1m_0dx}{EI} + x_1\int_\ell\frac{m_1^2dx}{EI} = -f_sx_1$

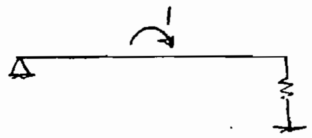
$$\star \quad \theta_B = \int\frac{Mm\,dx}{EI} + f_s n_s N_s = \int_\ell \frac{(m_0+m_1x_1)M\,dx}{EI} + f_s x_1 X_1$$

$$= \int_\ell \frac{m_0 M dx}{EI} + x_1\left[\int_\ell\frac{m_1Mdx}{EI} + f_sX_1\right]$$

$$\left[\int_\ell\frac{m_1M_0dx}{EI} + X_1\int_\ell\frac{m_1^2dx}{EI} + f_sX_1\right] = 0$$

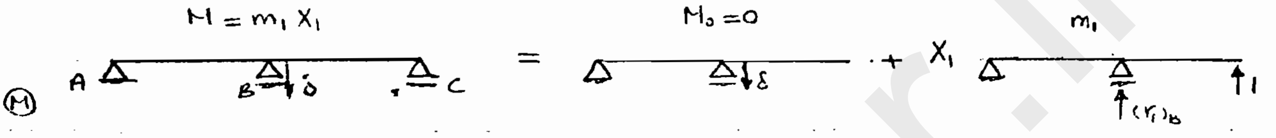
$$\Rightarrow \quad \theta_B = \int_\ell\frac{m_0Mdx}{EI} = \int_\ell\frac{mM_0\,dx}{EI}$$

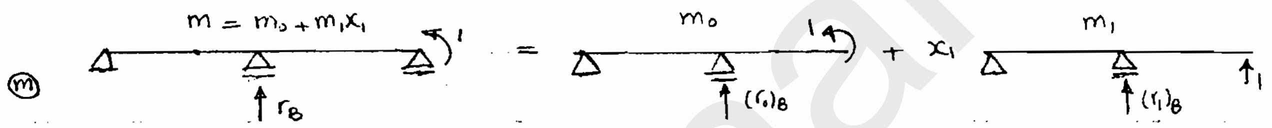
▲ اگر به جای فنر تکیه‌گاه را بردارم :



$$\theta_B = \int \frac{m_0 M\,dx}{EI} + f_s (n_0) N_s$$
$$= \int \frac{m M_0\,dx}{EI} + f_s n_s (N_0)_s$$

◀ اگر تکیه‌گاه B به اندازهٔ δ نشست کند ، θ_c را به دست آورید .





درسازه اصلی : $\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow (r_1)_B \delta + X_1 \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} = 0$

$(\Delta'_1 + (W_R)_1 = 0 \Rightarrow \Delta'_1 - (r_1)_B \delta = 0 \Rightarrow \Delta'_1 = (r_1)_B \delta)$

درسازه با بار واحد : $\Delta'_1 + \delta_{11} x_1 = 0 \Rightarrow \int_l \frac{m_0 m_1 dx}{EI} + x_1 \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} = 0$

$\star \quad 1 \times \theta_c + W_R = \int_l \frac{M m\,dx}{EI} \Rightarrow 1 \times \theta_c - (r_B)\delta = \int_l \frac{m M\,dx}{EI}$

$\Rightarrow 1 \times \theta_c - [(r_0)_B + x_1 (r_1)_B]\,\delta = \int_l \frac{(m_0 + m_1 x_1) M\,dx}{EI}$

$\Rightarrow 1 \times \theta_c - (r_0)_B \delta = \int_l \frac{m_0 M\,dx}{EI} + x_1 \underbrace{\left[\int_l \frac{m_1 (m_1 x_1)\,dx}{EI} + (r_1)_B \delta \right]}_{0}$

$\rightarrow 1 \times \theta_c - (r_0)_B \delta = \int_l \frac{m_0 M\,dx}{EI}$ ۵ کافی است سازهٔ با بار واحد را معین حل کنیم

$\star : 1 \times \theta_c - (r_B)\delta = 0$ ۵ کافی است سازهٔ با بار واحد را نامعین حل کنیم .

همان تقابل کار است ← این راه ساده‌تر است