

به نام خدا

هرگونه چاپ و تکثیر از محتویات این اثر بدون اجازه کتبی ناشر ممنوع است
متخلفان به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از مؤلفان و مصنفان و هنرمندان
تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه است.

مکانیک جامدات

(استاتیک - مقاومت مصالح - طراحی اجزاء)

مجموعه مهندسی مکانیک

علیرضا گوهری انارکی

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

ویرایش چهارم: بهار ۸۶ | تیراژ: ۲۵۰۰ نسخه

شابک: ۲ - ۴۶ - ۸۷۱۹ - ۹۶۴ | ۹۶۴ - ۸۷۱۹ - ۴۶ - ۲ - ۸۸۴۹۲۱۱

نشانی: بالاتر از میدان ولی عصر | کوچه دانش کیان | ساختمان پارسه | تلفن: ۸۸۴۹۲۱۱



مقدمه

یکی از روش‌های رساندن اطلاعات و پیشرفت‌های روزافزون علوم، تالیف و ترجمه کتب و جزوات علمی است. نمی‌توان منکر این مطلب شد که تالیف و ترجمه کتاب یکی از ارکان پیشرفت‌های صنعتی و همچنین علمی جامعه است. با توجه به همین مطلب و با امید این که این مجموعه مطالب درسی بتواند نقشی هر چند کوچک در شناخت بیشتر مسائل مکانیک جامدات (Solid Mechanics) به دستداران آن داشته باشد آن را تقدیم به خوانندگان گرامی به خصوص متقاضیان آزمون کارشناسی ارشد می‌نماییم.

لازم به ذکر است که این مجموعه تنها برای دانش‌پژوهان و متقاضیان آزمون کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک مفید نیست بلکه برای کلیه متقاضیان آزمون کارشناسی ارشد رشته‌های مهندسی ساخت و تولید، هوافضا، بیومکانیک، عمران و صنایع نیز مفید خواهد بود.

در این جا لازم است که با استفاده از فرصت، از زحمات جناب آقای مهندس کاوه عابدین‌زاده مدیریت محترم موسسه آموزش عالی آزاد پارسه که همواره مشوق اصلی اساتید محترم موسسه در ترجمه و تالیف و انتشار کتب علمی و تحقیقاتی و کاربردی در گرایش‌های مختلف مهندسی بوده‌اند نهایت سپاسگزاری را بنماییم. موسسه آموزش عالی آزاد پارسه نیز تهیه جزوات و کتاب‌های مفید را به منظور توسعه دانش جوانان به خصوص جوانان مناطق دوردست و محروم میهن اسلامی در سرلوحه برنامه فعالیت‌های خود قرار داده و آن را یکی از موثرترین مسائل جهت رفع قسمتی از احتیاجات تعلیماتی و تحقیقاتی محسوب می‌دارد.

با امید توفیق

دکتر علیرضا گوهری انارکی

فصل اول تعاریف اولیه

- ۱..... اتصالات استاندارد
- ۳..... اعضای دنیروئی
- ۵..... تعادل اعضای سه نیروئی

فصل دوم تعادل

- ۶..... معادلات تعادل
- ۶..... تعادل نیروهای هم صفحه
- ۱۱..... تعادل نیروهای غیر هم صفحه ای (سه بعدی)

فصل سوم خرابها و قابها

- ۱۲..... خرابها
- ۱۳..... قابها
- ۱۵..... مسائل خرابها

فصل چهارم تیرها

- ۲۴..... تیرها
- ۲۸..... تیرهای خمیده

فصل پنجم اصطکاک

- ۳۱..... اصطکاک
- ۳۳..... پیچ دنده مربعی
- ۳۴..... اصطکاک تسمه
- ۳۴..... مقاومت غلتشی

فصل ششم خواص سطوح

خواص سطوح ۳۹

قضایای پاپوس - گلدینوس ۴۰

فصل هفتم روش انرژی و برداری برای حل مسائل

اصل کار مجازی ۴۳

روش برداری ۴۹

فصل هشتم مسائل و نکات عمومی مهم

مسائل و نکات عمومی مهم ۶۰

فصل اول

تعاریف اولیه

- اتصالات استاندارد:

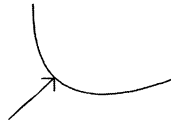
اولین قدم در حل مسائل مکانیک اعم از استاتیک، مقاومت مصالح، دینامیک و ... رسم نمودار جسم آزاد است. به عبارتی دیگر، منظور آن می‌باشد که باید تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم آزاد موردنظر را در یک نمودار ساده نشان دهیم. به عنوان مثال، در حل مسائل تعادل مربوط به یک جسم، باید تمام نیروهای وارد بر جسم را در نظر بگیریم و نیروهایی که مستقیماً بر جسم اثر نمی‌کنند را حذف کنیم. اما قبل از آن که بتوانیم نیروهای خارجی را رسم نماییم. باید در ابتدا جسم آزاد موردنظر را تعیین نماییم. در اکثر موارد این جسم می‌تواند جسمی باشد که معادلات تعادل مربوط به آن، دارای کمترین تعداد مجهول ممکن است. این جسم را از زمین و هر جسم دیگری که با آن در تماس است جدا نموده (به عنوان مثال توسط کشیدن یک دایره در اطراف آن) و آن را رسم می‌کنیم. اگر نیروهای جسمی قابل توجهی مثل جاذبه گرانشی یا مغناطیسی وجود داشته باشند، باید در نمودار جسم آزاد رسم شوند. مرحله دوم بعد از انتخاب جسم آزاد، تعیین کردن نیروهای خارجی (مقدار - امتداد و جهت) می‌باشد. به صورت خیلی ساده نیروی خارجی نیرویی می‌باشد که از خارج به جسم آزاد وارد می‌شود (نیروهایی که از خارج دایره‌ی رسم شده در اطراف جسم آزاد آن وارد می‌شوند را می‌توان نیروی خارجی فرض کرد).

توجه داشته باشید که وقتی جسم آزاد، از چند بخش ساخته شده است، نیروهایی که بخش‌های مختلف به یکدیگر وارد می‌کنند، نیروهای داخلی‌اند و نباید در نمودار جسم آزاد رسم شوند. مقدار و امتداد نیروهای خارجی معلوم را باید بر روی نمودار جسم آزاد مشخص نمود. نیروهای مجهول که جهتشان نیز معلوم نیست، توسط بردارهایی با جهت دلخواه در نظر گرفته می‌شوند. اگر جهت درست فرض شده باشد محاسبات مقدار آن را مثبت و در غیر این صورت مقدار آن را منفی نشان خواهد داد.

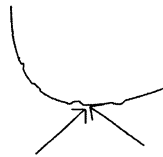
برای تعیین نیروهایی که دو جسم از طریق یک اتصال به هم انتقال می‌دهند می‌توان اجسام را به‌طور ذهنی در سه راستای عمود بر هم حرکت داد. در راستاهایی که بر اثر وجود اتصال حرکت نسبی کند یا متوقف می‌شود در نمودار آزاد دو جسم در محل اتصال می‌توان یک مولفه نیرو قرار داد و در هر راستایی که بر اثر وجود اتصال دوران دو جسم نسبت به هم کند یا متوقف می‌شود، در نمودار آزاد دو جسم، در محل اتصال، می‌تواند یک گشتاور جفت (ممان) وجود داشته باشد.

اتصالات استاندارد

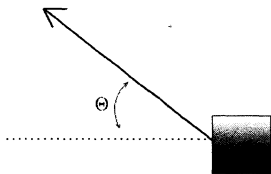
تعیین نیروی خارجی (راستا - جهت)
نیروی تماس فشاری و عمود بر سطح است.



نیروی تماس دارای دو مولفه فشاری قائم و مماسی (اصطکاک) است.



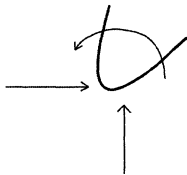
نیروی کششی در راستای طناب، کابل، تسمه یا زنجیر است



نیروی فشاری عمود بر سطح تکیه گاه است

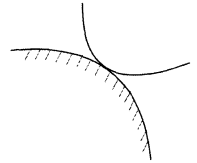


دو مولفه نیروی فشاری عمود بر هم بر آن وارد می شود. در صورتی که آزاد
به چرخش نباشد یک ممان هم به آن وارد می شود

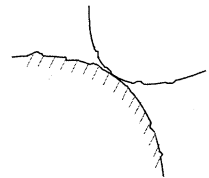


نیروی محوری، نیروی برشی، و ممان خمشی

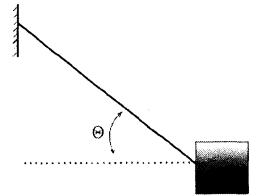
۱- سطوح صاف بدون اصطکاک



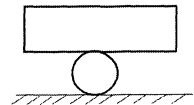
۲- سطوح ناصاف



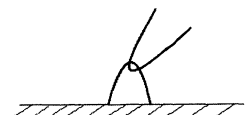
۳- طناب، کابل، تسمه یا زنجیر



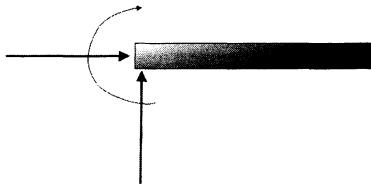
۴- تکیه گاه غلتکی یا ساچمه ای



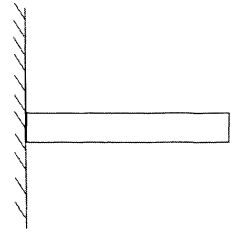
۵- اتصال پینی



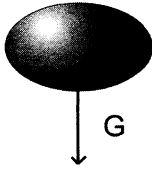
۶- تکیه گاه ثابت



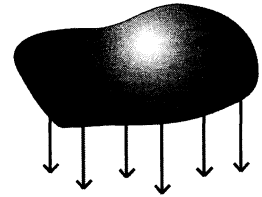
برآیند نیروی گرانشی که از مرکز جرم می‌گذرد.



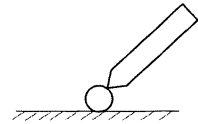
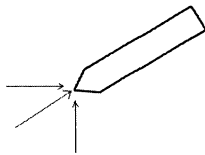
۷- نیروی گرانشی



سه نیروی دوجه دو عمودبرهم (سه بعدی)



۸- اتصال تویی (مفصلی)



مراحل رسم نمودار جسم آزاد:

۱- انتخاب جسم آزاد موردنظر

۲- جدا کردن جسم آزاد موردنظر از سایر اجزا توسط یک دایره فرضی

۳- در نظر گرفتن تمام نیروهایی که از خارج دایره به جسم وارد می‌شوند (نیروهای خارجی) با کمک جدول بالا

۴- در نظر گرفتن نیروی جاذبه‌ی گرانشی یا مغناطیسی به عنوان نیروی خارجی در صورت لزوم

توجه شود که در ادامه‌ی مطلب هر کجا نمودار جسم آزادی رسم شده باشد به آن معنی است که تمام مراحل بالا طی شده است و برای جلوگیری از تکرار از آوردن تک به تک مراحل خودداری شده است. به هر حال، خواننده خود می‌تواند برای تمرین بیشتر این مراحل را انجام دهد.

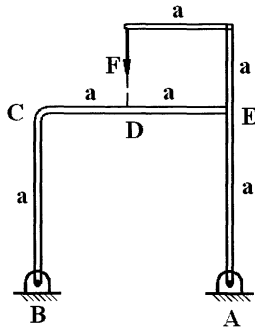
اعضای دو نیرویی:

در اعضای دو نیرویی نیروهای عکس‌العمل، در امتداد خطی است که ابتدا و انتهای سازه را به هم وصل می‌کند. این نیروها برابر و مخالف هم هستند.

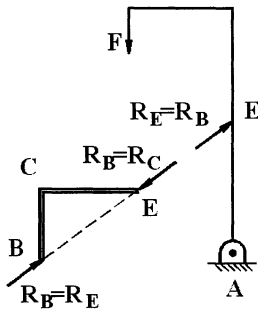
اعضای دو نیرویی: هر گاه یک عضو یا یک جسم فقط در دو نقطه تحت بارگذاری قرار بگیرد، در هنگام رسم دیاگرام آزاد نیروی این عضو که به منظور نوشتن روابط تعادل استاتیکی نوشته می‌شوند، عکس‌العمل‌ها در این دو نقطه در راستای خطی خواهند بود که ابتدا و انتهای این دو نقطه را به هم وصل می‌کنند. مثال‌های زیر، نمونه‌ای از این نوع نیروها را بر روی سازه‌ها یا اجسام نشان می‌دهد.

مثال: عکس‌العمل نقطه A از کدام نقطه می‌گذرد

- B (۱)
- C (۲)
- D (۳)
- E (۴)

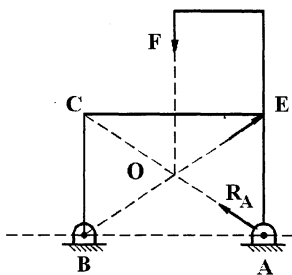


گزینه ۲ صحیح است. زیرا عضو BCE یک عضو دو نیرویی است و هنگام نوشتن دیاگرام آزاد به صورت زیر در می‌آید.



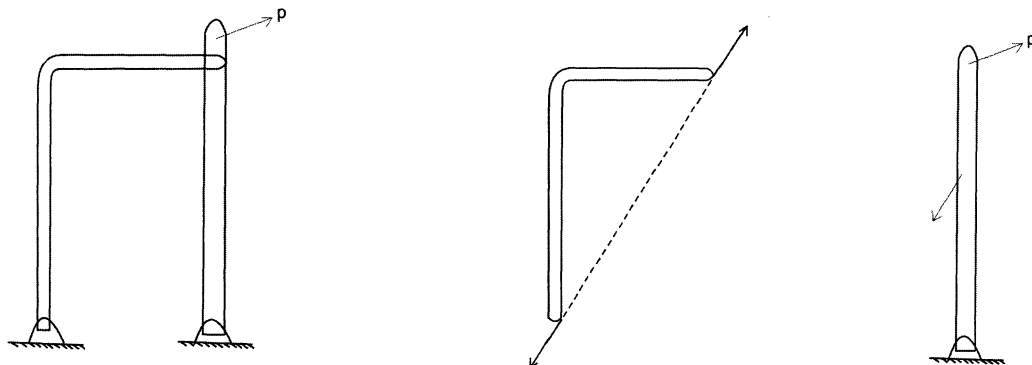
از طرفی عضو FEA یک عضو سه نیرویی است که هر سه نیرو بایستی در صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند (اصولاً در استاتیک سه نیرو و در یک صفحه موقعی در حال تعادل هستند که سه نیرو حتماً یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند).

یعنی سه نیروی اعمال شده در نقطه F و E و A بر روی دیاگرام آزاد عضو FEA بایستی بالاجبار از نقطه O، نقطه‌ی تقاطع امتداد سه نیرو یا راس C در متسطیل AEBC بگذرد. لذا گزینه ۲ صحیح است.



خط‌چین فرضی BE، خطی می‌باشد که ابتدا و انتهای سازی دو نیرویی را به هم وصل کرده و نیروهای R_B ، R_E در امتداد آن می‌باشند.

اگر اعضا دو نیرویی نباشد، یک بار کل جسم را در نظر می‌گیریم و دیاگرام جسم آزاد آن را می‌کشیم و سه معادله تعادل را برای آن می‌نویسیم. سپس یک جزء را جدا کرده و معادلات تعادل آن را می‌نویسیم. (نمونه آن بعداً در قاب‌ها بحث می‌شود). شکل زیر دیاگرام آزاد یک عضو دو نیروئی را نشان می‌دهد.



اعضای سه نیروی:

سه نیروی واقع بر یک جسم هنگامی در حال تعادل هستند که امتداد هر سه نیرو از یک نقطه بگذرد. یعنی خطوط اثر سه نیرو، باید متقارب باشد. اگر متقارب نباشد، آنگاه یکی از نیروها گشتاوری حول نقطه تقارب دوتای دیگر اعمال می‌کند که با صفر بودن گشتاور نیروها حول هر نقطه، با فرض تعادل در آن نقطه در تناقض است. تنها استثنا زمانی است که سه نیرو موازی باشند که در این صورت می‌توان نقطه تقارب را در بی‌نهایت در نظر گرفت.

فصل دوم

معادلات تعادل

تعادل را حالتی تعریف می‌کنیم که در آن برآیند همه نیروهای وارد بر جسم برابر صفر است. به عبارت دیگر جسم وقتی در تعادل است که همه نیروها و گشتاورهای وارد بر آن، در توازن باشند. معادلات تعادل را در حالت‌های خاص زیر در نظر می‌گیریم:

تعادل نیروهای هم‌صفحه

الف) نیروهای متقاطع: هر یک از مجموعه معادلات زیر می‌تواند تعادل یک سیستم نیروهای متقاطع را تضمین نماید.

$$۱- \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$
 یعنی نوشتن شرط تعادل نیروها در دو راستای عمود برهم

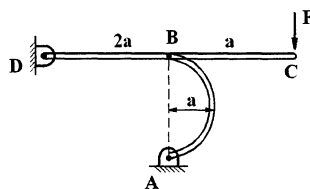
۲- $\sum M_A = 0, \quad \sum F_x = 0$ یعنی نوشتن تعادل نیروها در راستای محور x و تعادل گشتاورها حول نقطه A که نقطه‌ای دلخواه در فضا است که بر محور y واقع نشده است.

۳- $\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$ یعنی صفر بودن برآیند گشتاورها حول دو نقطه دلخواه A, B که با مبدا مختصات روی یک خط راست قرار ندارند.

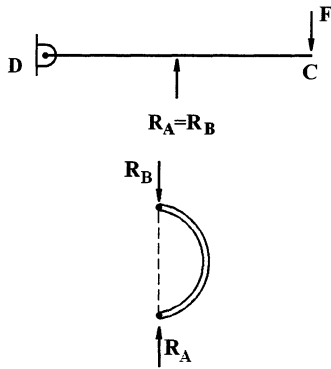
ب) نیروهای موازی: هر یک از مجموعه معادلات زیر، می‌تواند تعادل یک سیستم نیروهای موازی را تضمین کند.

۱- $\sum F = 0, \quad \sum M_A = 0$ یعنی صفر بودن برآیند نیروها در راستای اثرشان و صفر بودن برآیند گشتاور نیروها حول نقطه دلخواه A

۲- $\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$ یعنی صفر بودن برآیند گشتاور نیروها، حول دو نقطه دلخواه A و B به شرطی که خط واصل نقاط A و B با امتداد نیروها موازی نباشد.



مثال: عکس‌العمل A کدام است مشروط بر این‌که عضو نیم‌دایره AB دارای شعاع مساوی a باشد.



حل: عضو AB دو نیروئی است، لذا دیاگرام آزاد آن به صورت زیر می باشد. برای حل مسئله از حالت $\Sigma M_D = 0$ ، $\Delta F_x = 0$ استفاده می کنیم.

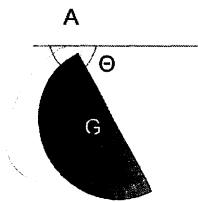
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_A = R_B$$

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow F(3a) = R_B(2A) \Rightarrow$$

$$F(3a) = R_A(2a)$$

$$\boxed{R_A = 1.5F}$$

مثال: در عضو نیم دایره ای زیر زاویه θ ، تعادل کدام است. مشروط بر این که وزن عضو نیم دایره W فرض گردد.

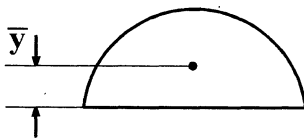


حل: برای حل مسئله از حالت $\Sigma M_D = 0$ ، $\Sigma F_x = 0$ استفاده می کنیم. عضو یا جسم دو نیرویی است که در دو نقطه A و G تحت نیرو قرار دارد و این دو نیرو حتماً در امتداد خط قائم که وزن در آن راستا است قرار می گیرد یعنی: به عبارت دیگر در صورتی که G دقیقاً در زیر نقطه A قرار نداشته باشد، شرط $\Sigma m_A = 0$ برقرار نخواهد بود.

مثلث AGH یک مثلث قائم الزاویه است، به طوری که:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{GH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{GH}}{R}$$

از طرفی در شکل مقابل داریم:



$$\bar{y}g = \frac{4R}{3\pi}$$

پس

$$\frac{\overline{GH}}{R} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4R}{3\pi \cdot R} = \frac{4}{3\pi}$$

از طرفی $\alpha + \theta = 90^\circ$ است، زیرا جسم عضو دو نیروئی است که نیروها در امتداد خط قائم AG قرار گرفته اند پس: $\tan(90 - \theta) =$

$$\text{tg } \alpha = \cot g \theta = \frac{4}{3\pi}$$

$$\theta = \text{arc cot g } \frac{4}{3\pi}$$

ج) نیروهای غیرمقاطع: هر یک از مجموعه معادلات زیر، می‌تواند تعادل یک سیستم نیروهای غیرمقاطع را تضمین کند.

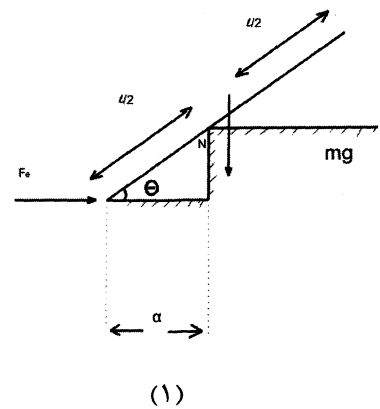
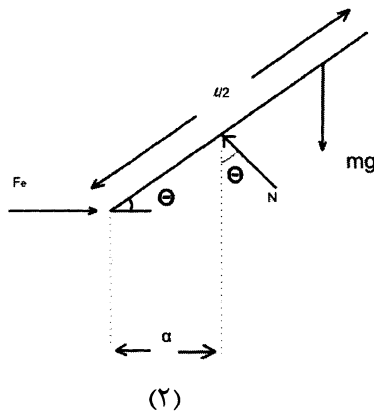
۱- $\sum M_A = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_x = 0$ یعنی تعادل نیروها در دو راستای عمود بر هم x و y و تعادل گشتاور نیروها، حول نقطه A .

۲- $\sum M_B = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum F_x = 0$ یعنی تعادل نیروها در راستای دلخواه x و صفر بودن گشتاور نیروها، حول دو نقطه دلخواه A و B به شرطی که خط واصل نقاط A و B بر راستای محور x عمود نباشد.

۳- $\sum M_C = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_A = 0$ یعنی تعادل گشتاورها حول سه نقطه دلخواه A و B و C بشرطی که سه نقطه روی یک خط راست قرار نگرفته باشند.

مثال: تیر باریک یکنواختی به جرم M مطابق شکل زیر روی لبه چاقویی قرار گرفته به طوری که عکس‌العمل لبه عمود بر تیر است. با فرض این که دیواره عمودی در سمت چپ کاملاً صاف باشد، زاویه θ برای تعادل تیر چقدر است. (سیستم نیروهای وارد بر تیر صفحه‌ای و متقاطع است).

حل: برای حل مسئله ابتدا با انتخاب تیر به عنوان جسم آزاد، دیاگرام آزاد آن را مطابق شکل (۲) رسم می‌کنیم و با در نظر گرفتن شرط $\sum M_0 = 0$, $\sum F_y = 0$ داریم:

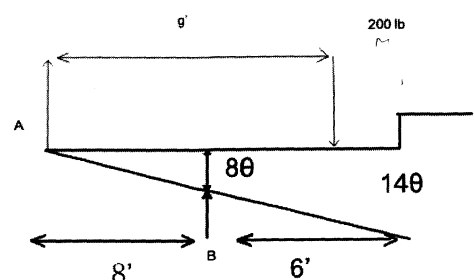
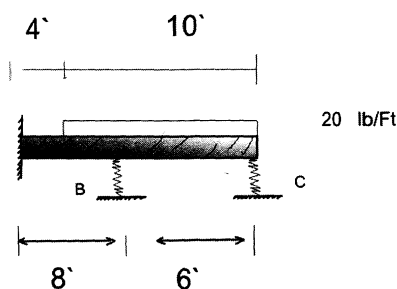


$$\sum M_0 = 0 = +N \frac{a}{\cos \theta} - Mg \left(\frac{1}{2} \ell \cos \theta \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = N \cos \theta - Mg = 0 \rightarrow N = \frac{Mg}{\cos \theta} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \frac{Mg}{\cos \theta} \frac{a}{\cos \theta} - Mg \left(\frac{1}{2} \ell \cos \theta \right) = 0 \rightarrow \cos \theta = \sqrt[3]{\frac{2a}{\ell}}$$

مثال: تیر صلب زیر در نقطه A دارای اتصال پینی است و در نقاط B , C روی دو فنر قرار گرفته است. این تیر تحت بار یکنواخت 20 lb/Ft مطابق شکل قرار گرفته است. عکس‌العمل در A و نیرو در هر فنر چقدر است؟



حل: سیستم نیروهای صفحه‌ای موازی است. با فرض زاویه θ کوچک، تغییر طولهای دو فنر B، C به ترتیب 8θ ، 14θ است. و بنابراین نیرو در فنرهای B و C به ترتیب $19200 = 8\theta \times 20 \times 12$ ، $33600 = 14\theta \times 240$ می‌باشد.

$$\sum M_A = 0 = -200 \times 9 + 19200 \times 8 + 33600 \times 14 \rightarrow \theta = 0.0288 \text{ rad}$$

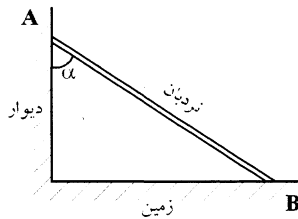
$$F_B = 19200 = 1920(0.0288) = 55.3 \text{ lb}$$

$$F_C = 33600 = 3360(0.0288) = 96.8 \text{ lb}$$

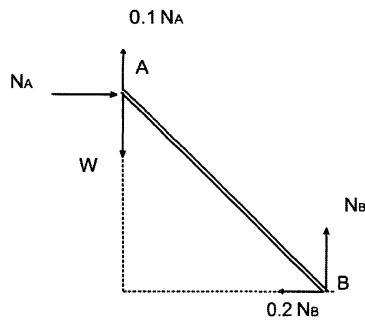
$$\sum F_y = 0 = F_A + 55.3 + 96.8 - 200 \rightarrow F_A = 47.9 \text{ lb}$$

در ساده‌سازی، بار یکنواخت آن را به صورت یک بار $200 \text{ lb} (20 \times 10)$ که در فاصله‌ی $9' \left(4' + \frac{10'}{2}\right)$ از A اعمال می‌شود در نظر گرفتیم.

مثال: یک شخص به وزن W ، می‌خواهد خود را به انتهای نردبان برساند. می‌نیمم زاویه α چقدر است؟ (یعنی زاویه‌ی α را طوری تعیین کنید که وقتی شخصی در نقطه‌ی A باشد نردبان سر نخورد)



مشروط بر این که ضریب اصطکاک نردبان با زمین 0.2 و با دیوار 0.1 و نردبان سبک و از وزن آن صرف نظر شود.



حل: حل این مثال از روی تعادل استاتیکی به طور مستقیم وقت گیر است. لذا از خاصیت دو نیرویی بودن عضو استفاده می‌شود یعنی: فرض می‌کنیم شخصی در انتهای نردبان، نقطه‌ی A قرار گرفته و آغاز لغزش در نردبان فرا می‌رسد. پس دیگرام آزاد به صورت زیر است.

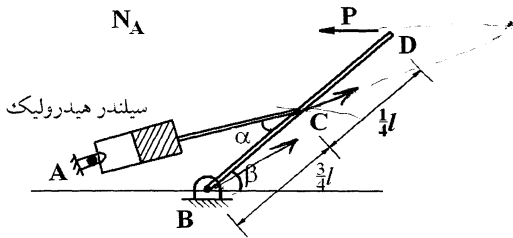
چون عضو (نردبان) دو نیروئی می‌باشد، پس عکس‌العمل نیروها بایستی در راستای نردبان باشد. یعنی مثلاً در نقطه B حتماً R_B بایستی در امتداد نردبان باشد. زاویه بین R_B ، N_B زاویه اصطکاک φ_θ است (زاویه بین نیروی عمود بر یک جسم با نیروی عکس‌العمل جسم را زاویه اصطکاک لغزشی φ_θ نامند) که همواره $\mu_B = \tan \varphi_\theta$ می‌باشد (μ_B ضریب اصطکاک لغزشی بین نردبان با زمین است). پس:

$$\tan \varphi_\theta = \mu_B = 0.2$$

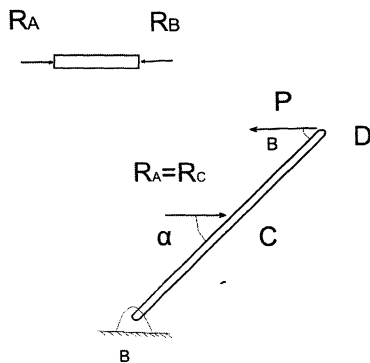
از طرفی با توجه به شکل (۲) $\varphi_\theta = \alpha$ است. پس:

$$\tan \alpha = 0.2 \Rightarrow \alpha = \arctan 0.2$$

مثال: عکس العمل تکیه گاه A کدام است.
نیروی P، افقی اعمال شده است.



حل: سیلندر یک عضو دو نیرویی است. پس عکس العمل $R_A = R_L$ و در امتداد سیلندر واقع می گردد یعنی (شکل ۱):



$$\sum M_B = 0$$

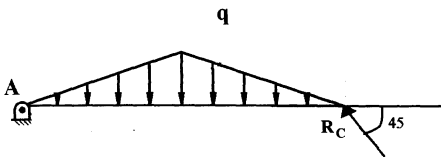
$$\rightarrow PL \sin \beta = R_C \left(\frac{3L}{4} \right) \sin \alpha \rightarrow Pl \sin \beta = R_A \left(\frac{3l}{4} \right) \sin \alpha$$

$$R_A = \frac{4P \sin \beta}{3 \sin \alpha}$$

(۱)

مثال: عکس العمل تکیه گاه C چقدر است؟

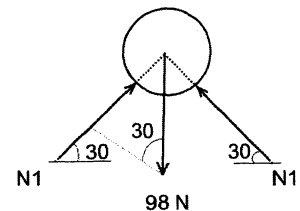
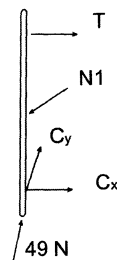
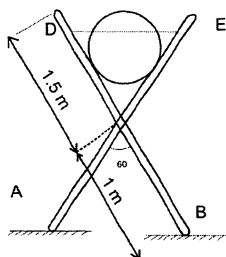
حل در افائی:



عضو AC یک عضو دونیروئی است و با نوشتن رابطه ممان حول نقطه A، عکس العمل محاسبه می گردد.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_C$$

مثال: استوانه ای به قطر 1 متر و وزن 10 کیلوگرم بین دو بازو مطابق شکل قرار گرفته است، به طوری که دو بازو، با هم زاویه 60 درجه می سازند. با فرض صاف بودن زمین، نیروی کشش در طناب DE را پیدا کنید؟



ابتدا کل جسم را به عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم، به دلیل تقارن می‌توان به راحتی محاسبه نمود که نیرو در تکیه‌گاه‌های A, B برابر و نصف نیروی وزن استوانه است. $F_A = F_B = 49N$. نیروی عکس‌العمل استوانه که بر بازو عمود است، از دیاگرام جسم آزاد استوانه به راحتی بدست می‌آید:

$$\sum F_y = 0 = 2N_1 \sin 30 - 98 \rightarrow N_1 = 98N$$

فاصله نقطه اثر نیروی N_1 تا پین C مطابق با شکل زیر برابر است با: $0.866m$ حال با استفاده از دیاگرام آزاد یکی از بازوها، داریم:

$$\sum M_C = 0 = -T \times 1.5 \cos 30 + 98 \times 0.866 + 49 \times 1 \sin 30$$

$$\rightarrow T = 84.2N$$

$$\tan(30) = \frac{ON}{NC} \Rightarrow NC = \frac{ON}{\tan(30)} = \frac{0.5}{\tan(30)} = 0.866m$$

تعادل نیروهای غیرهم صفحه (سه بعدی)

الف) نیروهای غیرمقاطع و غیرموازی: شرط لازم و کافی برای تعادل در این حالت که کلی‌ترین حالت است عبارتست از برقراری هر شش معادله زیر:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

دو حالت بعد که مورد بررسی قرار می‌گیرند، حالت‌های خاص این سیستم هستند.

ب) نیروهای متقاطع: مجموعه معادلات زیر، برای تعادل یک سیستم نیروی متقاطع و غیرهم صفحه لازم است:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

معادله $\sum M = 0$ می‌تواند جایگزین یکی از معادلات فوق گردد. اما باید توجه داشته باشید که اگر مثلاً جایگزین $\sum F_z = 0$ گردد $\sum M$ باید مجموع گشتاور نیروها حول محوری باشد که نه با محور Z موازی است و نه آن را قطع می‌کند.

ج) نیروهای موازی: مجموعه معادلات زیر برای تعادل یک سیستم نیروی موازی و غیرهم صفحه لازم است:

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_z = 0$$

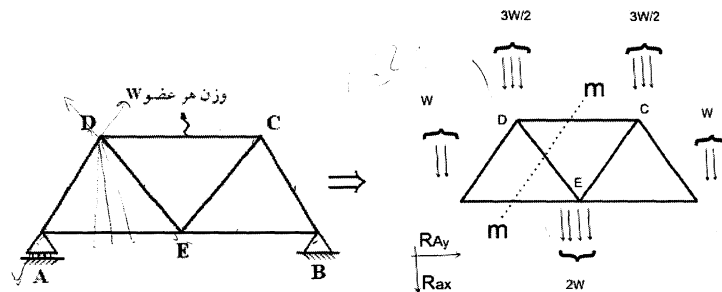
محوری است که راستای آن با راستای نیروهای موازی یکی است.

فصل سوم

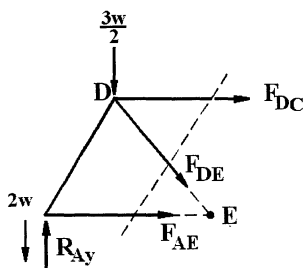
خرپاها و قابها

خرپاها

خرپاها را اصولاً در مسائل مهندسی مکانیک، بایستی به صورت اعضای دو نیروئی نگاه کرد. لذا چنانچه نیروئی به بدنه اعضاء اعمال گردد (مانند نیروی وزن عضو یا دیگر نیروهای خارجی)، شایسته است که ابتدا این نیروها به مفاصل منتقل گردد و سپس طبق رعایت عضو دو نیروئی مساله را حل نمود. مثلاً در سازه زیر که وزن هر میله W است داریم:

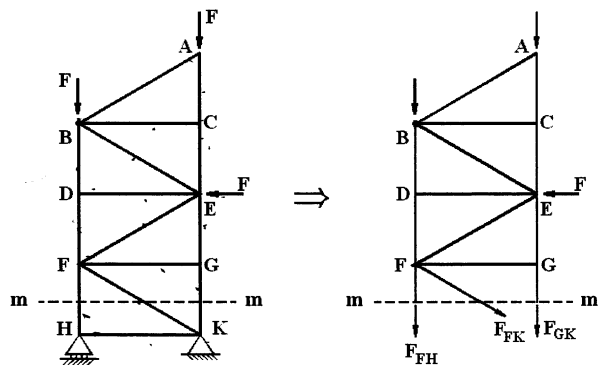


حال، مثلاً برای تعیین نیروی عضو DC مقطع mm را انتخاب می‌کنیم. دقت شود که چون تکیه‌گاه A و B در دو طرف مقطع قرار گرفته است. ابتدا بایستی با رسم دیاگرام آزاد کل جسم مقادیر تکیه‌گاه‌های R_{Ay} , R_{Ax} , R_{By} را محاسبه نمود و سپس نیروی وارد بر عضو DC را محاسبه نمود.



$$\Rightarrow \sum M_E = 0 \Rightarrow F_x = \text{محاسبه می‌شود}$$

اصولاً در مسائلی که تکیه‌گاه‌ها در دو طرف مقطع برش خورده mm قرار می‌گیرد دیگر نیاز به محاسبه تعیین نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها نمی‌باشد و می‌توان نیروی وارد بر عضو را مستقیماً محاسبه نمود (به‌خصوص در حل مسائل تستی به این موضوع دقت شود). مثلاً در سازه زیر برای محاسبه نیروی وارد بر عضو FH دیگر نیازی به محاسبه عکس‌العمل‌های H و K نمی‌باشد، مستقیماً با انتخاب برش mm مساله حل می‌گردد.



محاسبه می‌شود $\Rightarrow \sum M_K = 0 \Rightarrow F_{FH}$

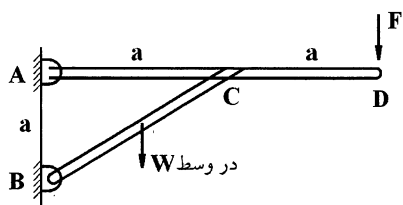
به مثال‌های این فصل در صفحات بعدی دقت گردد.

قاب‌ها:

اصولاً در قاب‌ها سه نوع مساله (مثلاً مسائل 1, 2, 3 در زیر) مطرح هستند. در امتحانات کنکور با توجه به محدودیت زمانی اصولاً مساله نوع اول مطرح نمی‌باشد و فقط مسائل نوع دوم و سوم مطرح هستند. به مسائل در زیر دقت گردد.

مسائل نوع اول: معمولاً حل آن‌ها زمان‌بر است و در امتحانات کنکور به روش تستی اصولاً چنین مسائلی مطرح نمی‌شوند.

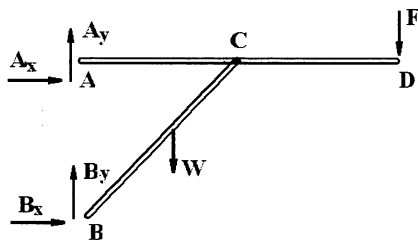
مثلاً در قاب زیر نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است.



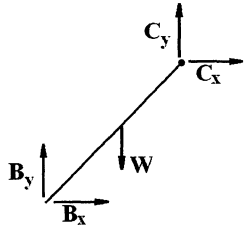
در این نوع مسائل در ظاهر چهار مجهول A_x, A_y, B_x, B_y وجود دارد و برای حل آن‌ها نهایتاً 6 معادله با 6 مجهول حاصل می‌گردد و مجهولات از این معادلات استخراج می‌شوند یعنی:

3 معادله تعادل با 4 مجهول A_x, A_y, B_x, B_y از دی‌گرام آزاد

مقابل، حاصل می‌شوند.



حال اجزا را جدا می‌کنیم، یعنی:



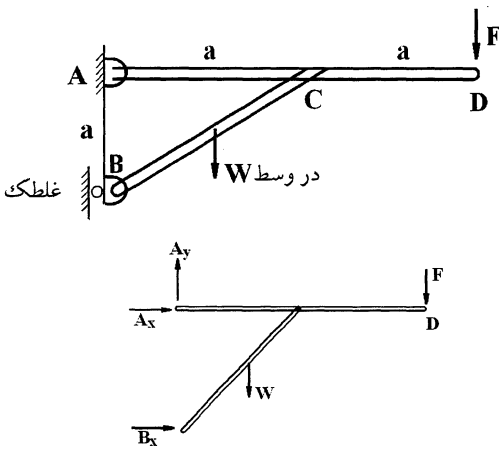
3 معادله تعادل با 2 مجهول جدید C_x, C_y حاصل می‌شوند.

در مجموع، با توجه به مطالب بالا 6 مجهول، حاصل شده و نهایتاً B_x, B_y از آن استخراج می‌شوند.

مسائل نوع دوم: مثلاً در قابریزی نیروی عکس‌العمل B کدام است.

در این مسائل چون یک تکیه‌گاه غلطک دارد لذا در ظاهر سه مجهول A_x, A_y و B_x وجود دارد و با نوشتن دیاگرام آزاد کل جسم به سادگی عکس‌العمل B محاسبه می‌گردد. یعنی:

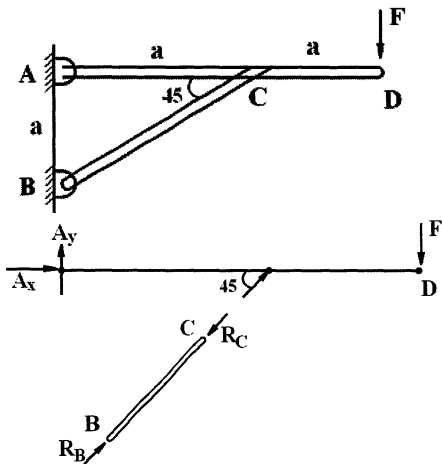
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_x \text{ محاسبه می‌گردد}$$



یعنی با نوشتن یک معادله تعادل عکس‌العمل محاسبه می‌گردد.

مسائل نوع سوم: عکس‌العمل B محاسبه گردد.

در این نوع مساله مانند مساله نوع اول صفحه قبل در ظاهر چهار مجهول A_x, A_y, B_x, B_y وجود دارد و بر خلاف مساله نوع اول عضو BC یک عضو دو نیروئی است که حل این نوع قاب‌ها را آسان می‌سازد. یعنی با نوشتن رابطه تعادل زیر عکس‌العمل B یعنی R_B محاسبه می‌گردد.



$$\sum M_A \Rightarrow F(2a) = R_B a \sin 45$$

$$R_B = \frac{2aF}{a \sin 45} = \frac{2F}{\sin 45}$$

مسائل خرپاها

تعریف : خرپا مجموعه‌ای از اعضای صلب است که از انتها به هم متصل‌اند و همه در یک صفحه قرار دارند و در مجموع به صورت یک جسم صلب در نظر گرفته می‌شوند. در مورد خرپاها نکات زیر را باید در نظر داشته باشید:

- ۱- اعضای خرپاها معمولاً در مقایسه با بارهای خارجی اعمال شده، بدون وزن در نظر گرفته می‌شوند.
- ۲- نیروهای خارجی فقط روی محل‌های اتصال اعضا اعمال می‌شوند و اتصال اعضا و انتقال نیرو بین آنها از طریق پین صورت می‌گیرد.
- ۳- اعضای تشکیل‌دهنده خرپا، همه عضوهای دو نیرویی هستند. یعنی امتداد نیروی داخلی هر عضو منطبق بر خط گذرنده از دو سر مفصل است.

- ۴- در صورتی که نتوان از وزن عضو، در برابر نیروی خارجی اعمال شده صرف‌نظر کرد، وزن عضو w ، را می‌توان با دو نیروی $\frac{w}{2}$ روی مفصل دو عضو جایگزین نمود، (طبیعتاً جهت نیروی وزن به سمت پایین خواهد بود).
- ۵- اگر بار گسترده روی اعضا بود، آن را تبدیل به بار منفرد کرده و به دو سر عضو منتقل می‌کنیم و با المان گیری مقدار مولفه‌ها را بدست می‌آوریم.

روش‌های حل مسائل خرپا:

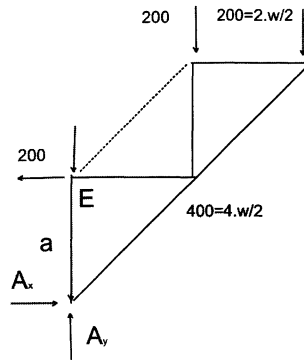
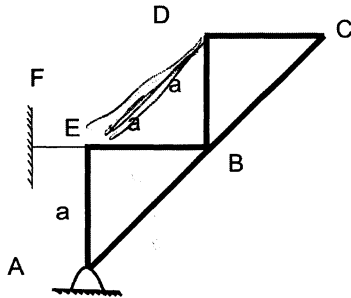
الف) روش مفاصل:

ابتدا دیاگرام آزاد همه پین‌های موجود در مفاصل خرپا را رسم می‌کنیم. سپس از مفصلی شروع به حل می‌کنیم که ماکزیمم ۲ مجهول (و یا به طور کلی کمترین تعداد مجهول را) داشته باشد و در آن مفصل از دو معادله $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ دو مجهول را بدست می‌آوریم. حال به سراغ مفصل بعدی می‌رویم. برای سه نیروی متقارب، از رابطه سینوس‌ها استفاده می‌کنیم.

ب) روش مقاطع :

در این روش خرپا، با یک مقطع فرضی و مناسب بریده می‌شود و با اعمال سه معادله تعادل $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ و $\sum M = 0$ در هر مقطع، مجهولات بدست می‌آیند. حتی‌الامکان سعی می‌شود، مقطع برش شامل اعضای باشد که امتداد آنها از مرکز گشتاورگیری بگذرد، زیرا گشتاور این نیروها صفر خواهد شد.
در ادامه با ذکر مثال‌هایی این روش‌ها توضیح داده شده است.

مثال (تست سال ۶۹): وزن هر یک از میله‌ها 200N است و از وزن کابل‌های EF, DE صرف نظر می‌شود. نیروی اعمال شده به تکیه‌گاه A چقدر است؟



ابتدا دیاگرام آزاد کل خرپا را رسم می‌کنیم.

با انتخاب نقطه‌ی E، گشتاور، 3 نیرو یعنی T و Ay و نیروی وزن حذف می‌شود.

$$\sum M_E = 0$$

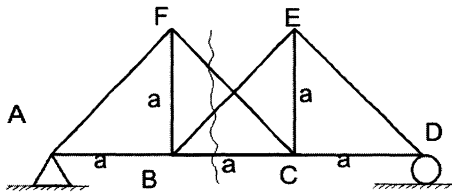
$$A_x a = 400a + 200a + 200(2a) \Rightarrow A_x = 1000N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y = 200 + 400 + 200 + 200 = 1200N$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 1562N$$

مثال (تست سال ۶۹): نیروی عضو FC در سازه مقابل چقدر است؟



8.4 kN (۱)

7.1 kN (۲)

9.5 kN (۳)

12 kN (۴)

ابتدا، کل خرپا را به عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

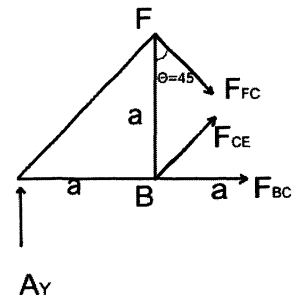
$$\sum M_A = 0 \rightarrow 15(2a) - D_y(3a) = 0 \Rightarrow D_y = 10kN$$

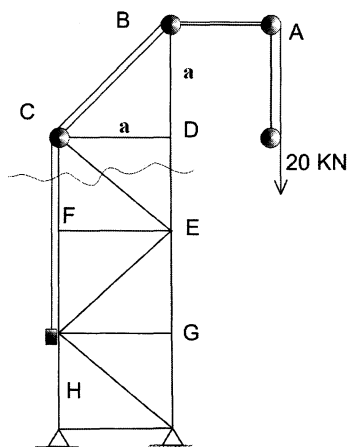
$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_y(a) = F_{FC} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) a$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 15 - D_y = 15 - 10 = 5kN \quad (\text{با در نظر گرفتن کل خرپا به عنوان جسم آزاد})$$

$$F_{FC} = 5\sqrt{2} = 7.1N$$

حال برای بدست آوردن نیروی F_{FC} مطابق شکل مقطع می‌زنیم.





مثال (تست سال ۶۹): در شکل زیر نیروی اعضای FC , CE

عبارتند از:

(۱) $CE = 10\sqrt{2}$ kN , $FC = 10$ kN

(۲) $CE = 10$ kN , $FC = \frac{10}{\sqrt{2}}$ kN

(۳) $CE = 0$ kN , $FC = 10$ kN

(۴) $CE = \frac{10\sqrt{2}}{2}$ kN , $FC = 10\sqrt{2}$ kN

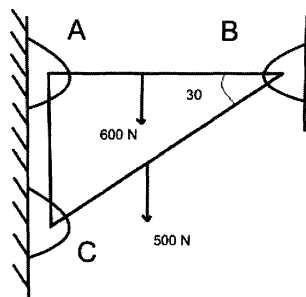
مطابق شکل مقطع می‌زنیم و دیاگرام آزاد قسمت بالای مقطع را در نظر می‌گیریم.

$$\Sigma M_E = 0 \rightarrow F_{FC}(a) = 20(a) - T(a)$$

سه نیروی خارجی $T, F_{CF}, 20$ را در نظر می‌گیریم.

$T = 10$ kN نیروی کششی طناب است که مطابق شکل، نصف نیروی اعمال شده است.

مثال: عکس‌العمل B کدام است؟

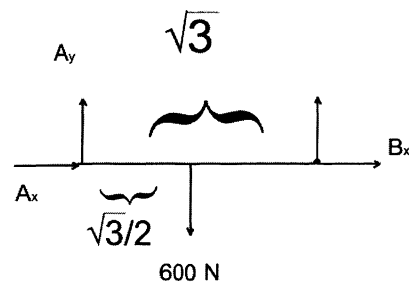
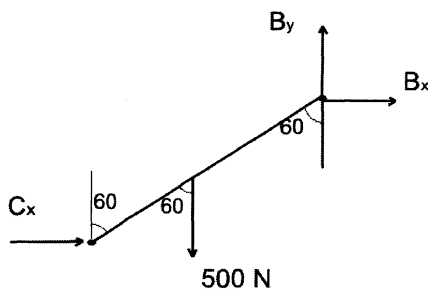


$$\rightarrow F_{CF} = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{CE} = 0$$

$$AB = \sqrt{3}m$$

$$BC = 2m$$



$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 600 \frac{\sqrt{3}}{2} = B_y \sqrt{3} \Rightarrow B_y = 300 \text{ N}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow B_y (2) \sin 60 - B_x (2) \cos 60 + 500 (1) \sin 60 = 0 \Rightarrow B_x = 550\sqrt{3} \text{ N}$$

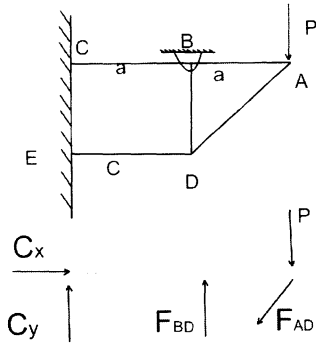
مثال: نیروی عضو BD کدام است؟

2P (۱)

0 (۲)

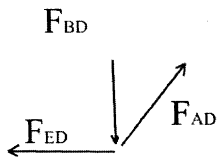
-P (۳)

5P (۴)



$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow F_{BD}(a) + F_{AD}(2a)\sin 45 + P(2a) = 0$$

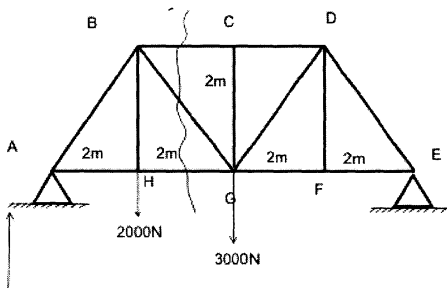
$$F_{BD} = -F_{AD} \cos 45 \rightarrow F_{AD} = -F_{BD} \sqrt{2}$$



حال پین D را به عنوان یک جسم آزاد در نظر می گیریم:

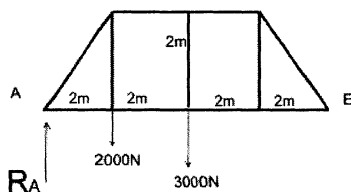
حال F_{AD} را در معادله قبل جایگذاری می کنیم.

$$F_{BD}(a) - F_{BD} \sqrt{2} (2a)\sin 45 + 2P = 0 \rightarrow F_{BD} = 2P$$

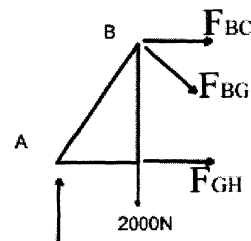


مثال: نیروی عضو GH کدام است؟

ابتدا کل جسم را به عنوان یک جسم آزاد در نظر می گیریم:



(۱)



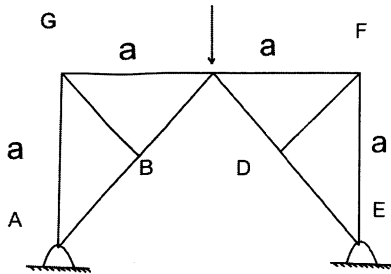
(۲)

$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow R_A(8) - 2000(6) - 3000(4) = 0 \rightarrow R_A = 3000 \text{ N}$$

حال مطابق شکل (۲) مقطع می‌زنیم و دیاگرام آزاد قسمت سمت چپ مقطع را رسم می‌کنیم.

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow F_{GH}(2) = R_A(2) \rightarrow F_{GH} = R_A = 3000 \text{ N}$$

مثال (تست سال ۶۹): در صورتی که تمام زوایا 45° . 90° باشد نیروهای BC و CF چقدر است؟



$$BC = \frac{200}{\sqrt{2}} \text{ N} \quad , \quad CF = 50 \text{ N} \quad (۱)$$

$$BC = \frac{200}{\sqrt{2}} \text{ N} \quad , \quad CF = -50 \text{ N} \quad (۲)$$

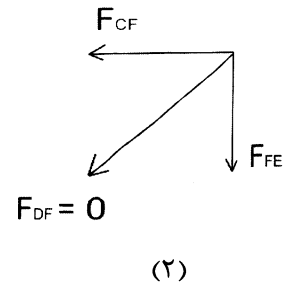
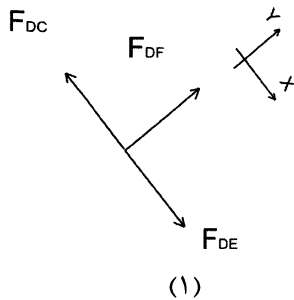
$$BC = \frac{200}{\sqrt{2}} \text{ N} \quad , \quad CF = 0 \text{ N} \quad (۳)$$

$$BC = \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ N} \quad , \quad CF = 0 \text{ N} \quad (۴)$$

دیاگرام آزاد پینهای C . F . D را رسم می‌کنیم.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{DF} = 0 \quad (\text{شکل (۱)})$$

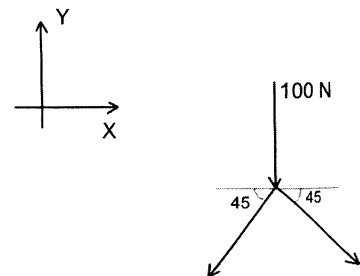
$$F_{CF} = F_{FE} = 0 \quad (\text{شکل (۲)})$$



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{CB} \cos 45 + F_{CD} \cos 45 = 0 \Rightarrow F_{CB} = F_{CD}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -100 - 2F_{CB} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{CB} = \frac{-100}{\sqrt{2}} \text{ N}$$

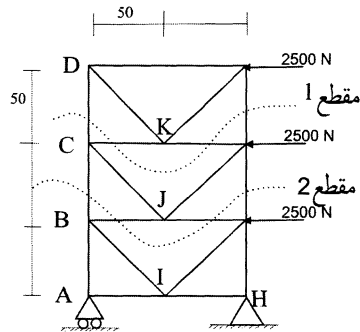
(شکل (۳))



علامت منفی نشان‌دهنده آنست که جهت نیروهای F_{CB} ، F_{CD} را اشتباه انتخاب کرده بودیم. بعد از تغییر دادن جهت نیروها:

$$F_{CB} = \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ N}$$

مثال (تست سال ۷۰): نیروی داخلی در عضو FJ را بدست آورید.

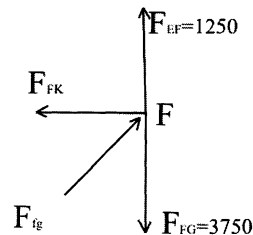


- (۱) 3750 N
- (۲) 1250 N
- (۳) -2500 N
- (۴) هیچ کدام

(۱) مقطع : $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow F_{EF}(100) = 2500(50) \Rightarrow F_{EF} = 1250 \text{ N}$

(۲) مقطع : $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_{FG}(100) = 2500(50) + 2500(100) \Rightarrow F_{FG} = 3750 \text{ N}$

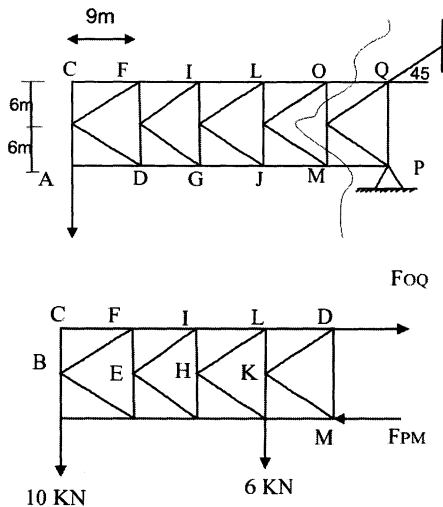
حال دیاگرام آزاد پین F را در نظر می گیریم:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1250 - 3750 + F_{FJ} \cos 45 = 0$

$F_{FJ} = 3535.5 \text{ N}$

مثال (تست سال ۷۳): نیروی موجود در عضو OQ از خربای شکل زیر چقدر است؟

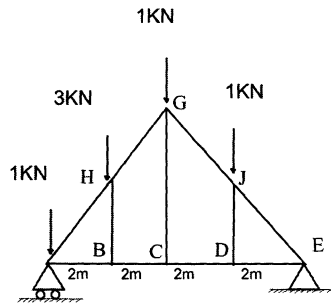


- (۱) 34.5 kN فشاری
- (۲) 30 kN فشاری
- (۳) 34.5 kN فشاری
- (۴) 4.5 kN فشاری

$\Sigma M_M = 0 \rightarrow F_{OQ}(12) = 6 \times 9 + 10 \times 9 \times 4$

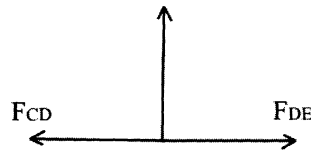
$F_{OQ} = 34.5 \text{ kN}$

مثال (تست سال ۷۱): در خریای مقابل نیروی عضو JD چقدر است؟



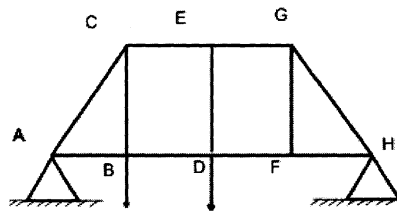
- (۱) صفر
- (۲) 4 kN
- (۳) 3 kN
- (۴) 6 kN

پین D را به عنوان جسم آزاد در نظر می گیریم:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{JD} = 0$$

مثال (تست سال ۷۲): در خریای مقابل، کدام یک از اعضا نیرویی تحمل نمی کنند؟

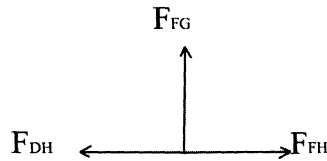


- (۱) ED , CB , GF
- (۲) CB , ED
- (۳) CB , GF
- (۴) ED , GF

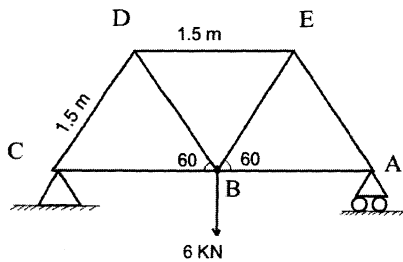
دیگرام آزاد پین های E , F را رسم می کنیم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DE} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FG} = 0$$

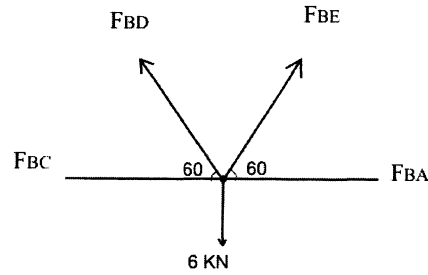


مثال (تست سال ۷۷): در خریای نشان داده شده نیروی داخل عضو BE چقدر است؟



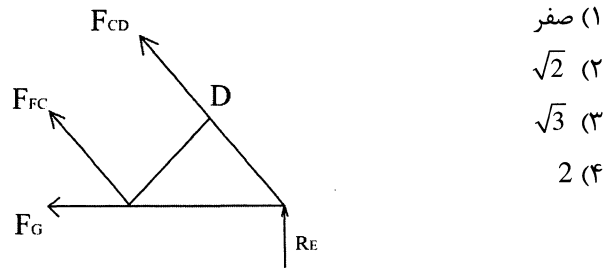
- (۱) کششی و $F_{BE} = 2\sqrt{3}$ kN
- (۲) فشاری و $F_{BE} = 2\sqrt{3}$ kN
- (۳) کششی و $F_{BE} = 6$ kN
- (۴) فشاری و $F_{BE} = 6$ kN

دیاگرام آزاد پین B را رسم می‌کنیم.



به دلیل وجود تقارن در مسئله، $F_{BC} = F_{BA}$ می‌باشد.

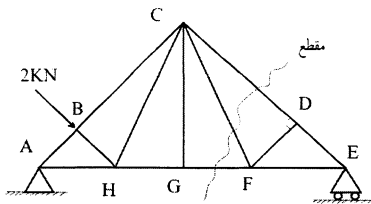
مثال: نیروی داخلی عضو FC را بدست آورید.



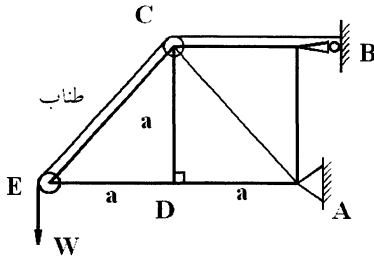
$$F_{BC} = F_{BA}$$

$$F_{BD} = F_{BE}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2F_{BE} \sin 60 = 6 \text{ kN} \Rightarrow F_{BE} = 2\sqrt{3} \text{ kN}$$



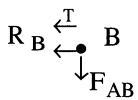
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{FC} = 0$$



در سیستم خرابی زیر نیروی وارد بر عضوهای AB و CE محاسبه می‌گردد. مشروط بر این‌که ضریب اصطکاک قرقه و طناب صفر فرض شوند.

(نقطه‌ی B)

$F_{AB} = 0$ است زیرا:

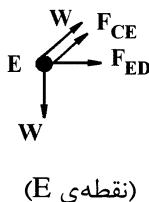


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

حل: حال برای محاسبه نیروی CE داریم:

$$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow W = W \sin 45 + F_{CE} \sin 45$$

$$\Rightarrow F_{CE} = \frac{W - W \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) W$$



(نقطه‌ی E)

مثال: در خریای زیر نیروی وارد بر عضو JK چقدر است؟

جواب:

$$F_{JK} = 0$$

زیرا

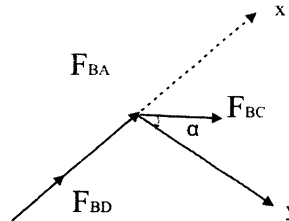
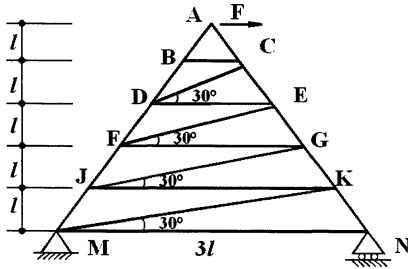
$$F_{BC} = F_{DC} = F_{DE} = F_{EF} = F_{FG} = F_{JG} = F_{KJ} = 0$$

به عنوان مثال، در نقطه B: محور عمودی xy را انتخاب

می‌کنیم و رابطه تعادل را می‌نویسیم

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0 + 0 + F_{BC} \cos \alpha = 0$$

$$F_{BC} = 0$$



فصل چهارم

تیرها

تیرها، اغلب میله‌های بلند منشوری هستند که علاوه بر نیروی محوری و برشی، لنگر خمشی را نیز تحمل می‌کنند. اندازه سطح مقطع این اعضا نسبت به طولشان کوچک است. (تیرها علاوه بر بارگذاری محوری به صورت مایل نیز بارگذاری می‌شوند) تیرهایی که واکنش‌های خارجی تکیه‌گاه آن‌ها را می‌توان تنها با روش‌های استاتیک محاسبه نمود، به تیرهای معین استاتیکی موسومند. تیری که تعداد تکیه‌گاه‌های آن بیش از تعداد موردنیاز برای تامین تعادل است را نامعین استاتیکی می‌نامند و لازم است خواص بار تغییر شکل تیر را علاوه بر معادله‌های تعادل استاتیکی برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاه در نظر بگیریم. در تیرهایی که نیروهای گسترده (متمرکز) دارند، یک روش، استفاده از نوشتن معادلات تعادل (تعادل نیروهای برشی، تعادل نیروهای محوری، تعادل گشتاورهای خمشی) است. علاوه بر این هر تیر با بار گسترده می‌توان روابطی بدست آورد که به تعیین گسترش‌های گشتاور و برش در طول تیر کمک می‌کند.

$$1) \omega(x) = -\frac{dv}{dx}$$

یعنی شیب نمودار برشی، باید در همه جا برابر منفی مقدار بار اعمالی باشد. این معادله در دو طرف بار متمرکز معتبر است. اما نه در مکان اعمال بار، زیرا تغییر یک باره نیروی برشی، موجب ناپیوستگی می‌شود.

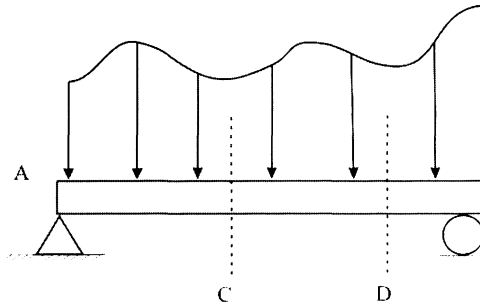
$$2) \omega(x) = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

$$3) V = \frac{dM}{dx}$$

یعنی نیروی برشی در هر کجا، برابر شیب منحنی گشتاور است. با انتگرال‌گیری از رابطه پیش، بین دو نقطه، می‌توان تغییر نیروی برشی و اندازه تغییر لنگر خمشی را بدست آورد.

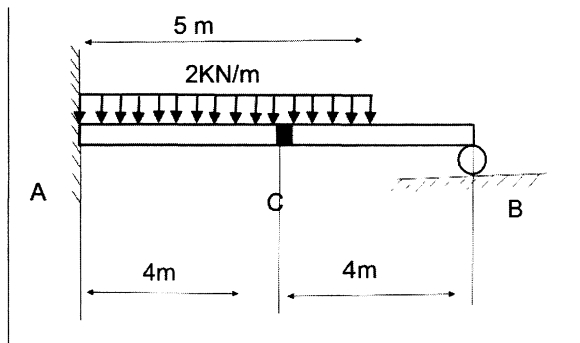
$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} \omega(x) dx$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V(x) dx$$



اثر یک خمشی متمرکز، ایجاد جهش به اندازه لنگر خمشی در نمودار لنگر خمشی - طولی تیر است.

مثال (تست سال ۷۸): دو تیر AC و BC بوسیله پین C به هم متصل شده‌اند، نیروی وارد به پین C را بدست آورید.



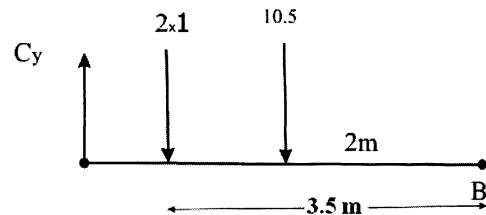
6 KN (۱)

7 KN (۲)

8 KN (۳)

14 KN (۴)

دیگرام جسم آزاد تیر BC را رسم می‌کنیم.

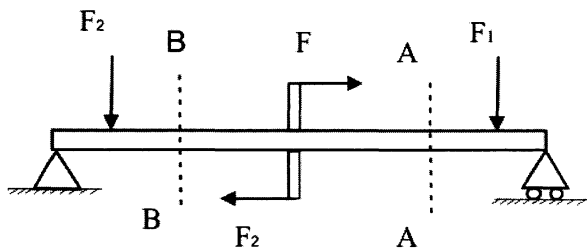


$$\sum M_B = 0 \rightarrow C_y(4) - 2(1)(3.5) - 2(10.5) \Rightarrow C_y = 7 \text{ KN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = 0$$

مثال (تست سال ۷۲): در تیر داده شده در شکل مقابل، منظور محاسبه نیروهای محوری و بررسی لنگر خمشی تیر در مقاطع AA و BB است.

در این دو مقطع BB



(۱) نیروهای برشی و محوری لنگرهای خمشی برابرند

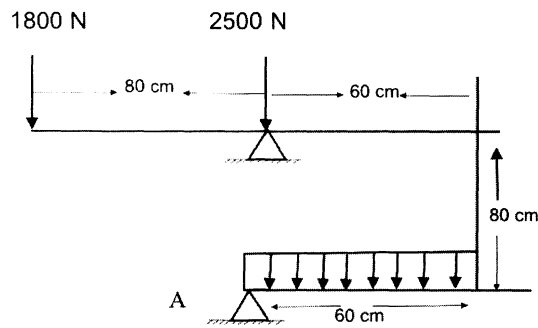
(۲) فقط نیروهای محوری متفاوتند

(۳) فقط لنگرهای خمشی دو مقطع متفاوتند

(۴) فقط لنگرهای خمشی و نیروهای محوری متفاوتند

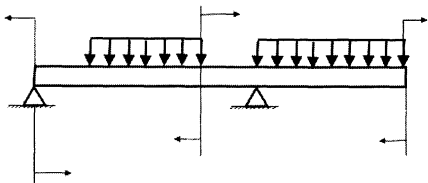
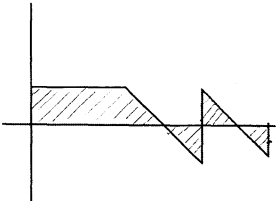
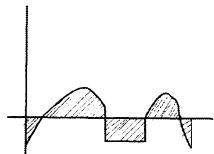
در تیر داده شده هیچ نیروی محوری وجود ندارد که در فاصله مقاطع خواسته شده تغییر کند. نیروی برشی هم در فاصله بین مقاطع A-A و B-B تغییر نمی‌کند، زیرا نیروی برشی در فاصله بین دو نیروی F_1 و F_2 ثابت است. تنها لنگر خمشی در فاصله بین A-A و B-B تغییر می‌کند. علاوه بر این کویل وارد شده در وسط تیر در نمودار لنگر خمشی، جهش ایجاد می‌کند. بنابراین گزینه سوم صحیح است.

مثال (تست سال ۷۲): در سیستم در حال تعادل شکل زیر، شدت بار گسترده بر حسب KN/m برابر است با

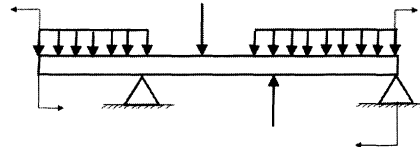


- (۱) 5
- (۲) 8
- (۳) 6
- (۴) هیچ کدام

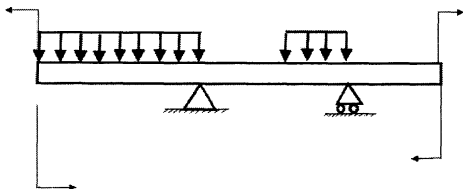
مثال (تست سال ۷۰): در شکل زیر، نمودارهای نیروی برشی و ممان خمشی یک تیر تحت بار نمایش داده شده است. بارگذاری و محل تکیه‌گاه را در تیر تعیین کنید.



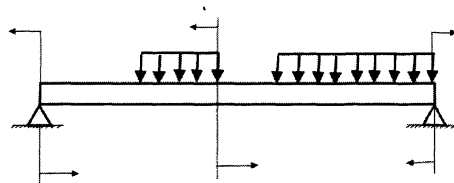
(۲)



(۱)



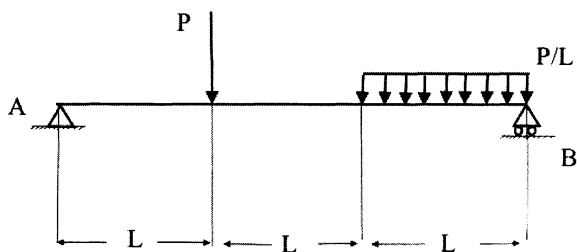
(۴)



(۳)

مطابق نمودار برشی، در دو سر تیر، نیروی برشی وجود دارد که بیانگر وجود تکیه‌گاه یا نیروی متمرکز در دو سر تیر است. بنابراین تنها گزینه سوم درست است. در دو سر تیر وسط آن ممان خمشی اعمال شده است که وجود جهش در نمودار ممان خمشی در وسط و دو سر تیر را تایید می‌کند.

مثال (تست سال ۶۹): در شکل مقابل، بیشینه لنگر خمشی چقدر است؟



(۱) $\frac{2}{3}PL$

(۲) $\frac{3}{4}PL$

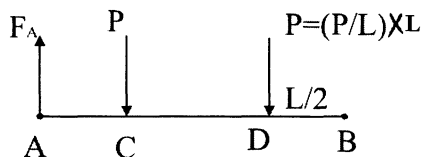
(۳) $\frac{5}{6}PL$

(۴) $\frac{6}{7}PL$

ابتدا باید اندازه عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها را بدست آوریم.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A(3L) - P(2L) - P\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_A = \frac{5}{6}P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_B = \frac{7}{6}P = \left(\frac{P}{6} + \frac{P}{6} - \frac{5}{6}P \right)$$

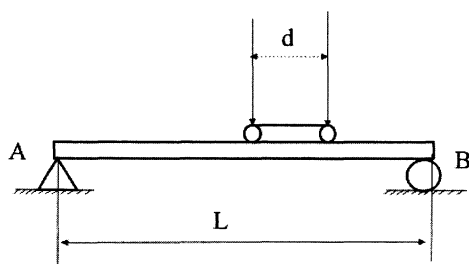


محل لنگر خمشی ماکزیمم را با استفاده از نمودار لنگر خمشی، تعیین می‌کنیم.

$$M_{\max} = F_A L = \frac{5}{6}PL$$

مثال (تست سال ۶۷): در شکل دو چرخ متحرک به فاصله $d=6\text{ cm}$ بر روی یک تیر به طول $L=24\text{ cm}$ را ملاحظه می‌کنید. در

صورتی که هر یک از چرخ‌ها نیروی $P=3\text{ kN}$ را بر روی تیر وارد نماید، مطلوب است، میزان ممان خمشی و ماکزیمم در تیر فوق.



(۱) $27\text{ kN} \cdot \text{m}$

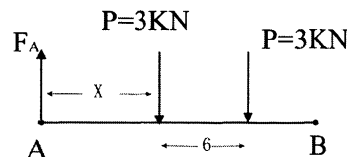
(۲) $28.8\text{ kN} \cdot \text{m}$

(۳) $28.2\text{ kN} \cdot \text{m}$

(۴) $27.6\text{ kN} \cdot \text{m}$

با فرض این‌که نیروی P سمت چپ با فاصله x از نقطه A قرار داشته باشد.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A(24) - 3(24-x) - 3[24-(x+6)] = 0 \Rightarrow F_A = \frac{21-x}{4}$$



گشتاور در محل اثر نیروی P سمت چپ.

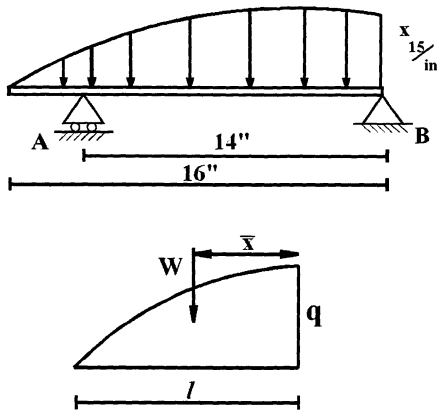
$$M = R_A x = \frac{21x - x^2}{4}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x = 10.5\text{ m}$$

$$M_{\max} = \frac{21(10.5) - (10.5)^2}{4} = 27.6\text{ kN} \cdot \text{m}$$

تیرهای خمیده

در تیرهای خمیده برای محاسبه نیروهای داخلی تیر یا نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهها مانند تیرهای ساده، بایستی با نوشتن روابط تعادل استاتیکی مسائل حل شوند. دقت شود که اصولاً سه نوع نیروی داخلی نرمال N و برشی V و ممان M در هر مقطع برش خورده از تیر وجود دارند که با نوشتن روابط تعادل می‌توان آن‌ها را محاسبه نمود. به چند حالت مهم در تیرهای خمیده در مثال‌های زیر توجه گردد.



مثال: عکس‌العمل A و B کدام است؟ مشروط به این‌که توزیع بار گسترده به صورت یک معادله پارابولیک باشد.

$$\bar{x} = \frac{3}{8}$$

$$W = \frac{2}{3} \ell q$$

با نوشتن رابطه تعادل برای تیر خواهیم داشت.

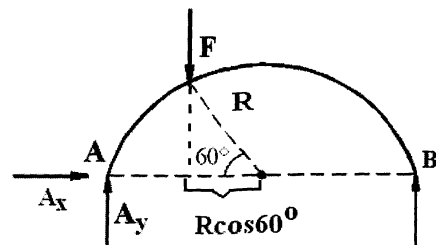
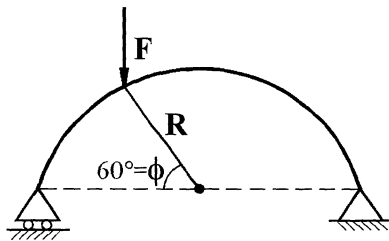
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -14 A_y + 6400 \times 6 = 0$$

$$A_y = 274015$$

$$A_y + B_y = W \Rightarrow B_y = 366015$$

$$B_x = 0$$

مثال: تعیین کنید اولاً عکس‌العمل‌ها در قوس نیم دایره را چنانچه نیروی متمرکز F در $\phi = 60^\circ$ اعمال گردد. ثانیاً نیروی داخلی در $\phi = 90^\circ$ ، $\phi = 30^\circ$ محاسبه می‌گردد.

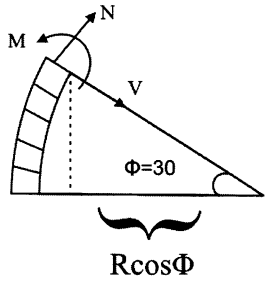


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B(2R) - F(R - R \cos 60) = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{4} F$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y(2R) - F(R + R \cos 60) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{3}{6} F$$

محاسبه نیروی داخلی در $\phi=30^\circ$ درجه:



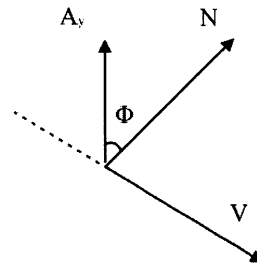
با توجه به دیاگرام آزاد مقابل سعی می‌شود که رابطه تعادل را در جهت N, V نوشته شود. یا به عبارت بهتر محوره‌های x, y را، همان جهت‌های V, N در نظر می‌گیریم.

در جهت $N \Rightarrow N + A_y \cos \phi = 0 \Rightarrow N = -\frac{3}{4} F \cos \phi$

در جهت $V \Rightarrow V - A_y \sin \phi = 0 \Rightarrow V = \frac{3}{4} F \sin \phi$

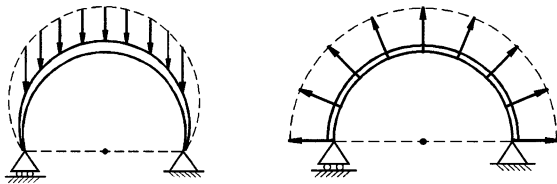
$\sum M_S = 0 \Rightarrow +A_y (R - R \cos \phi) - M = 0$

$\Rightarrow M = \frac{3}{4} (1 - \cos \phi) FR$

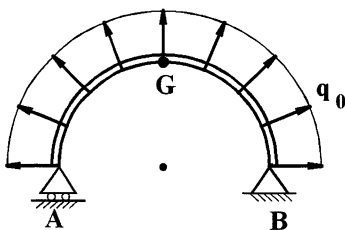


یعنی توزیع نیروهای داخلی خمیده، به صورت معادلات سینوسی و کسینوسی می‌باشد. در معادلات بالا $\phi=30^\circ$ را قرار می‌دهیم تا مقادیر N, V, M محاسبه گردد. به همین ترتیب در $\phi=90^\circ$ روابط تعادل داخلی را نوشته تا N, V, M محاسبه گردند.

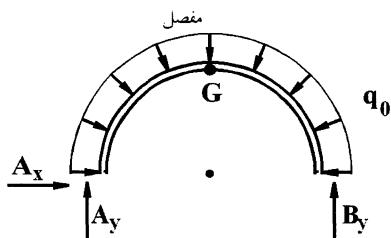
تذکر: معمولاً در تیرهای خمیده بارها یا به صورت متمرکز (مانند مثال بالا) یا به صورت گسترده به یکی از دو حالات زیر اعمال می‌گردند. در این دو حالت برای محاسبه نیروهای داخلی یا محاسبه عکس‌العمل‌ها، بایستی از روش انتگرال‌گیری استفاده نمود.



مثال: در قوسه سه مفصلی زیر، عکس‌العمل‌های A, B, G و همچنین نیروهای داخلی تیر را محاسبه نمایید.



حل: این مساله چون بار متقارن است به دو روش قابل حل است. روش اول روش تستی است که به علت تقارن نیرو و هندسه دیگر نیاز به حل مساله نبوده و سریعاً جواب داده می‌شود و روش دوم راه‌حل کلی‌تر است. در این جا هر دو روش اشاره می‌شود.



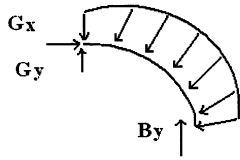
روش اول: چون نیرو گسترده متقارن است، پس تصویر آن در راستای x صفر است یعنی:

$\sum F_x = 0$

$A_x = 0$

تصویر بار گسترده در راستای محور y برابر $2Rq_0$ است، پس:

$$A_y + B_y = 2Rq_0 \Rightarrow A_y = B_y = Rq_0$$



و همچنین $G_y = 0$, $G_x = q_0 \cdot R$ (با در نظر گرفتن نیمه‌ی راست یا

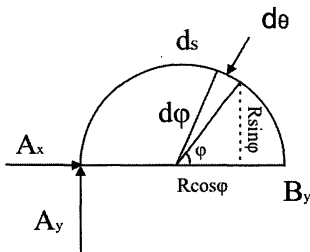
چپ قوس سه مفصلی) ←

روش دوم: روش کلی‌تر: یک المان به زاویه φ و طول ds از بار گسترده را در نظر می‌گیریم. این روش کلی به خصوص، برای حل مسائلی که بار گسترده به صورت عمودی اعمال می‌گردد، مناسب می‌باشد.

$$d\varphi_y = d\varphi \sin \varphi$$

$$d\varphi_x = d\varphi \cos \varphi$$

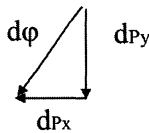
$$ds = R d\varphi$$



$$dQ = q_0 ds = q_0 R d\varphi$$

$$dQ_y = q_0 R \sin \varphi d\varphi$$

$$dQ_x = q_0 R \cos \varphi d\varphi$$

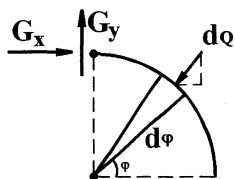


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - \int_0^\pi R q_0 \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \int_0^\pi R q_0 \sin \varphi d\varphi = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -B_y(2R) - \int_0^\pi dQ_x R \sin \varphi d\varphi + \int_0^\pi dQ_y (R + R \cos \varphi) d\varphi = 0$$

از معادلات بالا $A_x = 0$, $B_y = q_0 R$, $A_y = q_0 R$ استخراج می‌شوند.



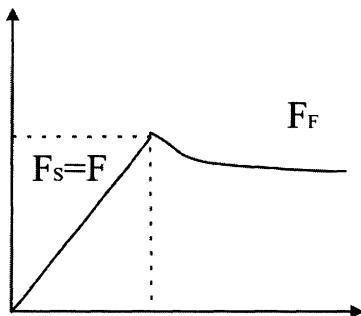
محاسبه عکس‌العمل G در محل مفصل

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow G_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R q_0 \cos \varphi d\varphi = 0 \Rightarrow G_x = q_0 R$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - G_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R q_0 \sin \varphi d\varphi = 0 \Rightarrow G_y = 0$$

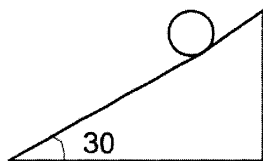
فصل پنجم

اصطکاک



در درس استاتیک مبحث اصطکاک فقط تا آستانه لغزش، بررسی می‌شود. بنابراین اصطکاک خشک یا استاتیکی موردنظر است. در اصطکاک خشک با افزایش نیروی کشنده F ، نیروی اصطکاک مساوی با آن افزایش پیدا می‌کند تا جایی که به حداکثر مقدار خود $\mu_s N$ برسد. با افزایش مجدد F در گذر از آستانه لغزش، نیروی اصطکاک به اندازه تفاوت ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s و دینامیکی μ کاهش پیدا کرده و ثابت باقی می‌ماند. پس همواره $F_f \leq \mu_s N$.

در صورتی که شعاع غلتک 40 mm و ضریب اصطکاک غلتشی 0.02 cm و ضریب اصطکاک لغزشی 0.2 باشد، کدام گزینه صحیح است؟



- (۱) جسم ابتدا می‌لغزد و سپس می‌غلتد.
- (۲) جسم ابتدا می‌غلتد و سپس می‌لغزد.
- (۳) همزمان غلتش و لغزش داریم.

$$f = \mu N \text{ نیروی اصطکاک لغزشی}$$

$$f = \frac{k}{R} N \text{ نیروی اصطکاک غلتشی}$$

$$\frac{k}{R} = \frac{0.02}{4} < 0.2 \Rightarrow \text{جسم ابتدا می‌غلتد و سپس می‌لغزد}$$

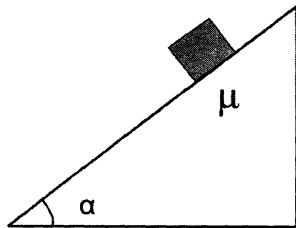
مثال: شرط اینکه جسم بطرف پایین حرکت نکند، کدام است؟

(۱) $\tan \alpha > \mu$

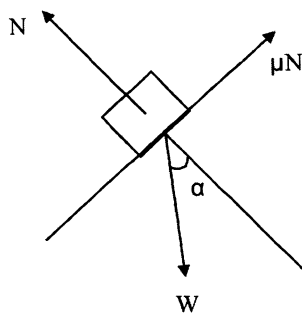
(۲) $\tan \alpha < \mu$

(۳) $\tan \alpha = \mu$

گزینه دوم صحیح است.



نیروی اصطکاک، باید بیشتر از نیروی وزن در جهت حرکت باشد.

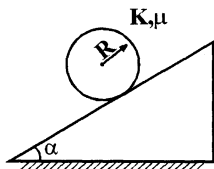


$N = W \cos \alpha$

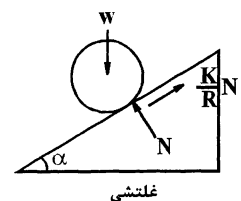
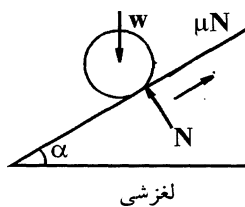
$\mu N > W \sin \alpha$

$\Rightarrow \mu W \cos \alpha > W \sin \alpha \rightarrow \mu > \tan \alpha$

مثال: یک جسم کروی به وزن W در روی یک سطح شیبدار با زاویه α قرار دارد. معین کنید آیا این جسم اول می لغزد یا می غلتد؟



حل: دیاگرام آزاد در دو حالت لغزش و غلتش رسم می شود.



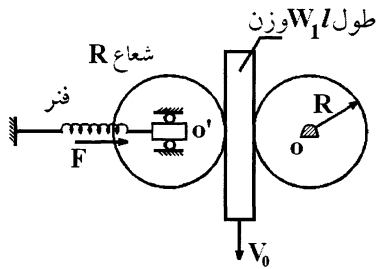
نیروین اصطکاک لغزشی: μN

نیروی اصطکاک غلتشی: $\frac{K}{R} N$

(a) اگر $\mu < \frac{K}{R}$ باشد جسم ابتدا می لغزد. (نیروی اصطکاک غلتشی بیشتر از نیروی اصطکاک لغزشی)

(b) اگر $\mu > \frac{K}{R}$ باشد جسم ابتدا می غلتد. (نیروی اصطکاک لغزشی بیشتر از نیروی اصطکاک غلتشی)

(c) اگر $\mu = \frac{K}{R}$ باشد لغزش و غلتک همزمان شروع می شوند.



مثال: بین دو استوانه با شعاع معلوم R ، یک صفحه با طول معلوم l و وزن W با سرعت یکنواخت V_0 بدون سرخوردگی پائین می‌آید. اگر ضریب اصطکاک غلتش K فرض شود وزن صفحه کدام است؟ مشروط بر این که نیروی فنر F باشد.

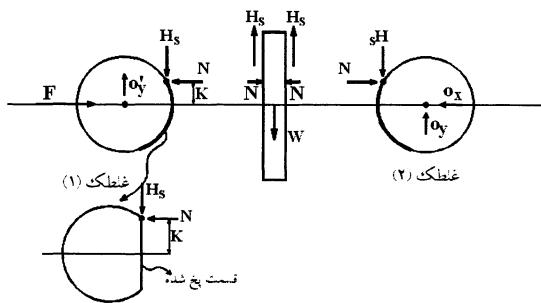
$$W = \frac{2R}{K} F \quad (۴)$$

$$W = \frac{K}{R} F \quad (۳)$$

$$W = \frac{R}{K} F \quad (۲)$$

$$W = \frac{2K}{R} F \quad (۱)$$

حل: گزینه ۱ صحیح است. زیرا در غلطک ۱ داریم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F = N}$$

$$\sum M_{O'} = 0 \Rightarrow H_s \cdot R = N \cdot K$$

$$\Rightarrow H_s = \frac{K}{R} N$$

یا

$$H_s = \frac{K}{R} F$$

در صفحه وسط، رابطه تعادل را می‌نویسیم

$$W = 2H_s = \frac{2K}{R} F$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

پیچ دنده مربعی:

پیچ دنده مربعی یک نمونه از وسایل اصطکاکی است که اصولاً دو نمونه مسئله در مورد آن مطرح می‌شود.

الف) ممان نیروی P که برای بالا بردن یک بار موردنظر، لازم است.

ب) ممان نیروی P که برای پایین آوردن یک بار موردنظر، لازم است.

در هر دو حالت ممان پیچشی، حول محور عمودی پیچ است. در حالت الف باید ممان پیچشی بر نیروی اصطکاک غلبه کرده و بار w را

بالا ببرد در حالیکه در حالت ب بار w کمک می‌کند. فرض کنید β زاویه پیشروی باشد، یعنی زاویه‌ای که تانژانت آن برابر پیشروی

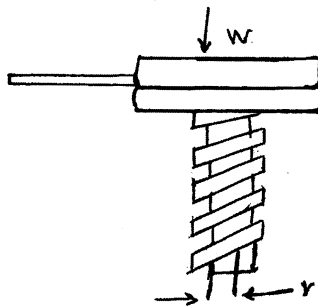
(L) تقسیم بر محیط متوسط ($2\pi r$) می‌باشد. همچنین فرض کنید ϕ زاویه اصطکاک باشد. در صورتی که r زاویه متوسط دندانه باشد،

ممان موردنیاز در دو حالت فوق برابر است با:

a) $M = wr \tan(\phi + \beta)$

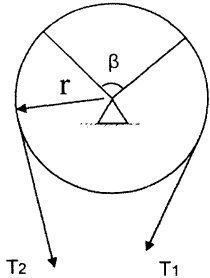
b) $M = wr \tan(\phi - \beta)$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{L}{2\pi r} \right)$$



اصطکاک تسمه:

تسمه تختی، دور محور استوانه‌ای ثابتی پیچیده شده است. مقدار پیچیدن با زاویه β یا زاویه پیچش نشان داده می‌شود. در صورتی که ضریب اصطکاک بین تسمه و محور μ و کشش دو سر تسمه T_1 , T_2 باشد، رابطه زیر بین کشش دو سر تسمه برقرار است:

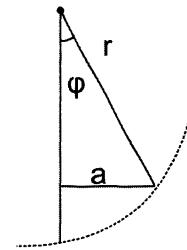
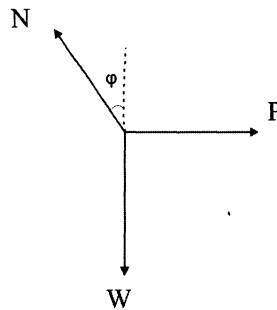
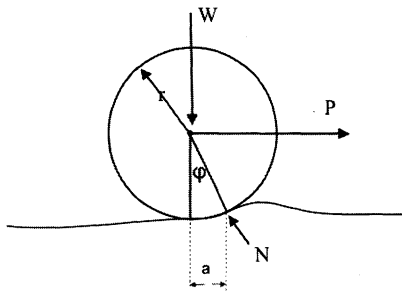


$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$$

دقت کنید که β باید برحسب رادیان بیان شود. اگر طناب، n بار دور محور استوانه‌ای پیچیده شود، زاویه پیچش $2\pi n$ رادیان می‌شود.

مقاومت غلتشی:

غلطکی را در نظر بگیرید که در حالی که بار W را در مرکز تحمل می‌کند، در راستای یک سطح افقی، بدون لغزش می‌گلتد. از آنجاکه برای حفظ حرکت یکنواخت، نیروی افقی P لازم است، نوعی مقاومت باید در کار باشد:



$$W = N \cos \varphi$$

$$P = N \sin \varphi$$

$$\frac{P}{W} = \tan \varphi$$

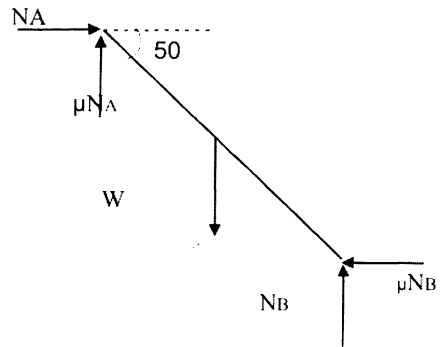
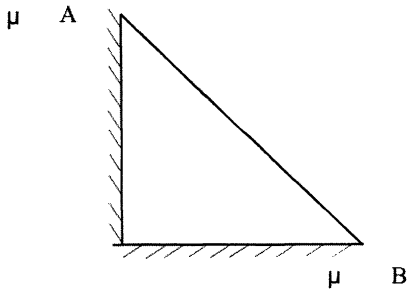
چون سطح تماس کوچک است، زاویه φ یک زاویه کوچک است و $\tan \varphi \approx \sin \varphi$ و مطابق شکل $\sin \varphi = \frac{a}{r}$ است. بنابراین می‌توان

$$\frac{P}{W} = \frac{a}{r}$$

گفت:

فاصله a در معادله فوق ضریب مقاومت غلتشی نام دارد.

میله 12 فوتی AB که 30 پوند وزن دارد به دیواری تکیه دارد. برای حفظ تعادل میله مطابق شکل، ضریب اصطکاک μ چقدر باید باشد؟



$$\Sigma F_x = 0 = N_A - \mu N_B$$

$$\Sigma F_y = 0 = N_B + \mu N_A - 30$$

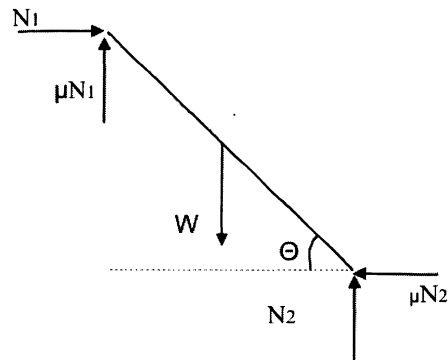
$$\Sigma M_A = 0 = -30(6 \cos 50^\circ) + N_B(12 \cos 50^\circ) - \mu N_B(12 \sin 50^\circ)$$

از دو معادله اول مقدار $N_B = \frac{30}{1+\mu^2}$ بدست می‌آید. با جایگذاری N_B در معادله سوم داریم:

$$-30(6 \cos 50^\circ) + \frac{30}{1+\mu^2}(12 \cos 50^\circ) - \frac{30}{1+\mu^2}\mu(12 \sin 50^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 0.36$$

مثال: کوچکترین زاویه θ برای تعادل میله‌ای بطول l و وزن w که به دیوار و زمینی با ضریب اصطکاک μ تکیه دارد، چقدر است؟



$$\Sigma F_h = 0 = N_1 - \mu N_2$$

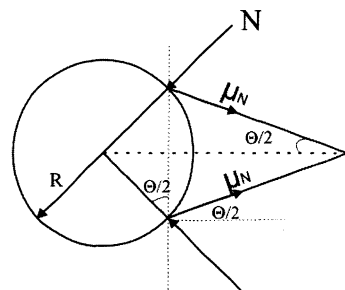
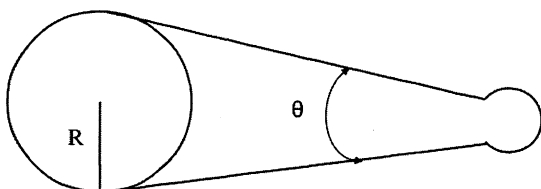
$$\Sigma F_v = 0 = N_2 - w + \mu N_1$$

$$\Sigma M_B = 0 = -w \frac{l}{2} \cos \theta + N_2 l \cos \theta - \mu N_2 l \sin \theta$$

با استفاده از دو معادله اول $N_2 = \frac{w}{1+\mu^2}$ و جاگذاری آن در معادله سوم مقدار θ بدست می‌آید.
$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{(1-\mu^2)}{2\mu} \right]$$

مثال (تست سال ۶۹): برای برداشتن حلقه‌های داغ از انبری مطابق شکل استفاده می‌کنیم. در صورتی که μ ضریب اصطکاک بین

حلقه و انبر 0.2 باشد، حداکثر زاویه θ چقدر است؟



(۱) 35 درجه

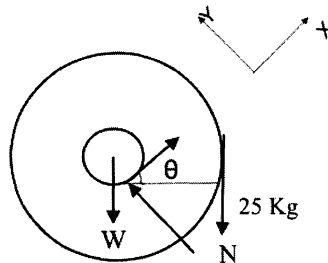
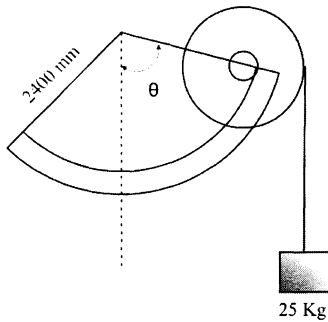
(۲) 28 درجه

(۳) 22 درجه

(۴) 14 درجه

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\mu N}{N} = \mu = 0.2 \Rightarrow \theta = 22^\circ$$

مثال (تست سال ۷۱): در شکل زیر وزن استوانه 100 kg و شعاع آن 200 mm و شعاع بزرگتر آن 500 mm است. برای اینکه لغزش بین استوانه و سطح حرکت وجود نداشته باشد حداقل ضریب اصطکاک حدوداً چقدر است؟



(۱) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{4}{5\sqrt{3}}$

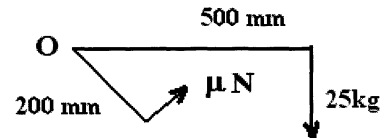
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\Sigma m_o = 0 \Rightarrow 25g(500) - \mu N(200) = 0 \Rightarrow \mu N = \frac{125(9.8)}{2}$$

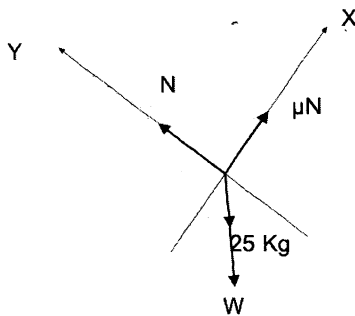
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \mu N - 25(9.8)\sin\theta - 100(9.8)\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 25(9.8)\cos\theta - 100(9.8)\cos\theta = 0$$

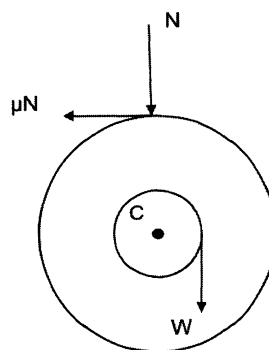
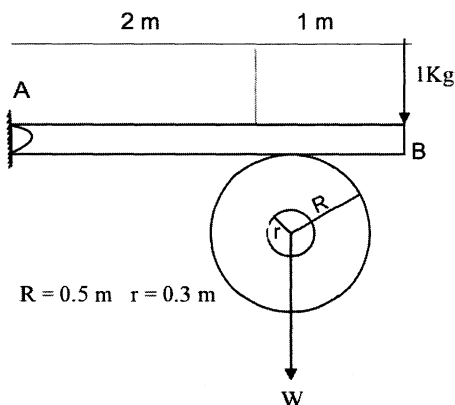
$$\Rightarrow N = 125(9.8)\frac{\sqrt{3}}{2}$$



از دو رابطه اول و آخر، مقدار μ برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ بدست می‌آید.



مثال (تست سال ۷۸): اگر ضریب اصطکاک در نقطه B برابر 0.3 باشد، حداکثر وزن W که می‌تواند به طناب وارد شود، کدام است؟



(۱) 0.75 kN

(۲) 1.2 kN

(۳) 1.35 kN

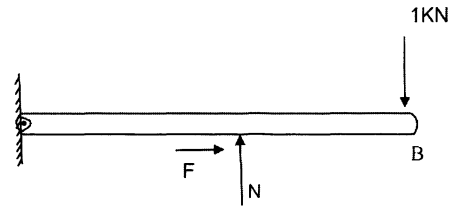
(۴) 1.5 kN

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -W r + F r = 0 \Rightarrow F = W \frac{0.3}{0.9} = \frac{W}{3}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N(2) - 1(3) = 0 \Rightarrow N = \frac{3}{2} \text{ kN}$$

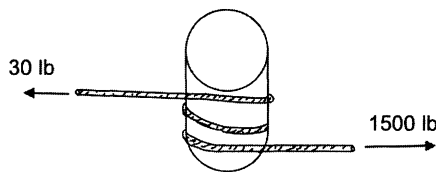
$$f = \mu N = 0.3 \left(\frac{3}{2} \right) = 0.45$$

$$f = \frac{W}{3} \Rightarrow W = 3f = 3(0.45) = 1.35 \text{ kN}$$



مثال (تست سال ۷۶): برای نگهداری یک کشتی، طنابی را حول یک پایه پیچیده‌اند. کشش وارد از کشتی برابر 1500 lb است.

می‌خواهیم به وسیله کشش 30 lb از لغزیدن طناب جلوگیری کنیم. ضریب اصطکاک بین طناب و ستون چقدر است؟



0.13 (۱)

0.21 (۲)

0.31 (۳)

0.62 (۴)

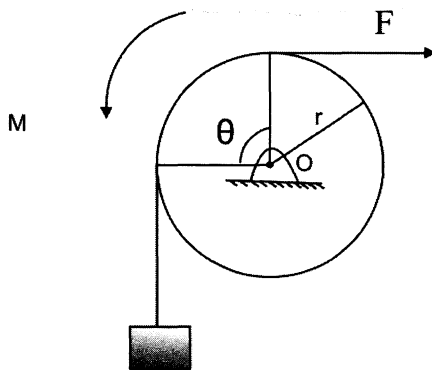
$$\beta = 2(2\pi) = 4\pi$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta}$$

$$\frac{1500}{30} = e^{\mu(4\pi)} \Rightarrow \mu = \frac{\ln 50}{4\pi} = 0.31$$

در شکل مقابل، نیروی F را برای بالا کشیدن وزنه وارد می‌کنیم. مقاومت چرخ، در مقابل گردش کوپل M است و ضریب اصطکاک بین

طناب و چرخ μ فرض می‌شود. مقدار M برای اینکه لغزش طناب روی چرخ و حرکت وزنه همزمان باشد، چقدر است؟



$$M = Fr \left(\exp\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) \quad (۱)$$

$$M = Fr \quad (۲)$$

$$M = Fr \frac{\exp\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\exp\left(\mu \frac{\pi}{2}\right)} \quad (۳)$$

$$M = Fr \left(1 - \exp\left(-\mu \frac{\pi}{2}\right) \right) \quad (۴)$$

$$\frac{F}{W} = \exp\left[\mu \frac{\pi}{2}\right]$$

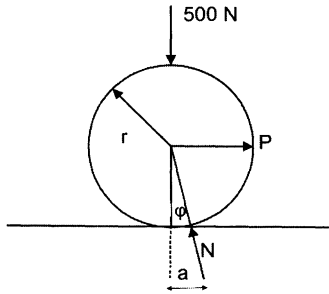
$$\frac{T_2}{T_1} = \exp(\mu\beta)$$

$$\sum M_0 = 0 = W r + M - F r \rightarrow -F r \exp\left[-\mu \frac{\pi}{2}\right] + F r = M$$

$$M = Fr \left[1 - \exp\left(-\mu \frac{\pi}{2}\right) \right] = Fr \left[\frac{\exp\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\exp\left(\mu \frac{\pi}{2}\right)} \right]$$

یک چرخ فولادی به قطر 760 mm روی یک ریل فولادی افقی می‌گردد و باری به وزن 500N را حمل می‌کند. ضریب اصطکاک غلتشی 0.305 mm است. نیروی P لازم برای غلتاندن چرخ روی ریل چقدر است؟

$$P = \frac{Wa}{r} = \frac{500(0.305)}{380} = 0.4 \text{ N}$$

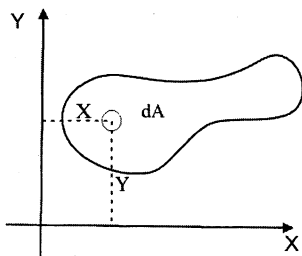


$$\begin{aligned} \omega &= N \cos \phi \\ \rho &= N \sin \phi \Rightarrow \frac{p}{\omega} = \frac{a}{r} \\ \tan \phi &\approx \sin \phi \\ \sin \phi &= \frac{a}{r} \end{aligned}$$

فصل ششم

خواص سطوح

گشتاور اول سطح و مرکز سطح:



$$M_x = \int_A y \, dA$$

گشتاور اول سطح نسبت به محور x

$$M_y = \int_A x \, dA$$

گشتاور اول سطح نسبت به محور y

می‌توان کل مساحت A را در مکانی به مختصات x_c , y_c بنام مرکز سطح متمرکز دانست که در این صورت، گشتاورهای اول سطح نسبت به محورهای x , y برابر با $x_c A$, $y_c A$ خواهند بود. با استفاده از این ترتیب، مختصات مرکز سطح از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x \, dA$$

$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y \, dA$$

محل مرکز سطح مستقل از محورهای مختصات بکار رفته است و فقط به خود سطح بستگی دارد. اگر مبدا مختصات، بر مرکز سطح منطبق باشد، محورهای مختصات را محورهای اصلی می‌نامند و بدیهی است که گشتاورهای اول سطح نسبت به این محورها صفر است. اگر سطحی مرکب از سطوحی باشد که مراکز سطح آنها از قبل معلوم است، مختصات مرکز سطح مرکب از روابط زیر بدست می‌آید:

$$x_c = \frac{\sum A_j \bar{x}_j}{A}$$

$$y_c = \frac{\sum A_j \bar{y}_j}{A}$$

A مساحت کل سطح مرکب است.

مرکز حجم:

مرکز حجم، نقطه‌ای است که برای محاسبه گشتاور اول حجم جسم، نسبت به نقطه O (مبدأ مختصات)، می‌توان کل حجم جسم را به‌طور فرضی در آن متمرکز کرد. مختصات مرکز حجم از روابط زیر بدست می‌آید:

$$x_c = \frac{\iiint x dV}{\iiint dV}$$

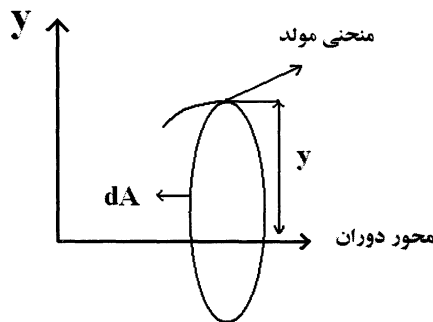
$$y_c = \frac{\iiint y dV}{\iiint dV}$$

$$z_c = \frac{\iiint z dV}{\iiint dV}$$

اگر dV را $\rho g dV$ جایگزین کنیم، مختصات مرکز ثقل جسم بدست می‌آید.

قضایای پاپوس - گلدینوس

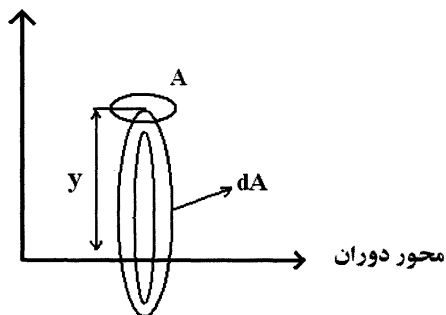
قضیه اول:



یک منحنی مولد و یک محور دوران، در صفحه این منحنی در نظر بگیرید. منحنی مولد می‌تواند با محور دوران تماس پیدا کند، اما نباید از آن بگذرد. سطح دوار حاصل از دوران منحنی مولد حول محور دوران، برابر است با طول منحنی مولد ضرب در محیط دایره‌ای که توسط مرکز منحنی مولد طی ایجاد سطح تشکیل می‌شود.

$$A = 2\pi \int y dl = 2\pi y_c L$$

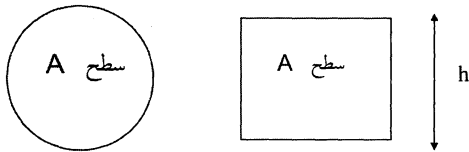
قضیه دوم:



یک سطح مستوی و یک محور دوران هم‌صفحه با سطح را در نظر بگیرید. به‌طوری‌که محور فقط می‌تواند بر مرز سطح مماس باشد. اما به هیچ وجه نباید آن را قطع کند. حجم جسم دوار حاصل از دوران سطح مستوی حول محور دوران برابر است با حاصل‌ضرب مساحت سطح در محیط دایره‌ای که توسط مرکز سطح مولد طی تشکیل جسم دوار تشکیل می‌شود.

$$V = 2\pi \int y dA = 2\pi y_c A$$

مثال (تست سال ۷۶): دو تیر با سطح مقطع یکسان یکی به شکل دایره و دیگری به شکل مستطیل به ارتفاع h مفروضند. گشتاور ماند



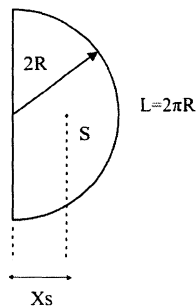
- (۱) مستطیل کوچکتر از گشتاور ماند دایره است.
- (۲) مستطیل برابر گشتاور ماند دایره است.
- (۳) مستطیل بزرگتر از گشتاور ماند دایره است.
- (۴) دایره نصف گشتاور ماند مستطیل است.

$$I_{\text{دایره}} = \frac{\pi r^4}{4} = A \frac{r^2}{4}$$

$$I_{\text{مستطیل}} = \frac{bh^3}{12} = A \frac{h^2}{12}$$

$$I_{\text{دایره}} > I_{\text{مستطیل}} \Rightarrow \frac{3r^2}{h^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

مثال (تست سال ۷۶): از یک سیم سفت و نازک، یک قوس نیم‌دایره بشعاع $2R$ ساخته شده است. x_{so} فاصله مرکز طولی آن قوس از مرکز نیم‌دایره برابراست با:



$$\frac{4}{3\pi} R \quad (۱)$$

$$\frac{4}{\pi} R \quad (۲)$$

$$\frac{6}{\pi} R \quad (۳)$$

$$\frac{8}{3\pi} R \quad (۴)$$

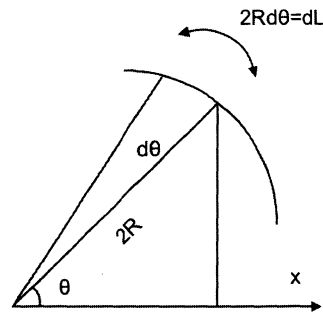
$$\bar{x} = x_{so} = \frac{\int x dL}{L}$$

$$L = 2\pi R$$

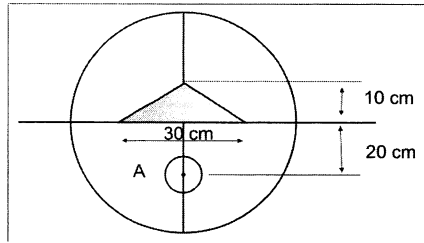
$$dL = 2R d\theta$$

$$x = 2R \cos \theta$$

$$x_{so} = \frac{2R \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta}{\pi} = \frac{4R}{\pi}$$



از ورق دایره‌ای شکلی بقطر 60 سانتی‌متر مثلث متساوی‌الساقینی بقاعده 30 سانتی‌متر و ارتفاع 10 سانتی‌متر را بریده‌ایم. قطر سوراخ دیگر را که مرکز آن در نقطه A به فاصله 20 سانتی‌متر از مرکز دایره اصلی است بیابید به طوری که مرکز ثقل همان مرکز دایره اصلی باشد؟



- (۱) 3.42 سانتی متر
- (۲) 4.64 سانتی متر
- (۳) 5.64 سانتی متر
- (۴) 7.24 سانتی متر

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$A_1 = 900\pi$$

$$y_2 = \frac{10}{3}$$

$$A_2 = 30 \times \frac{10}{2}$$

$$y_3 = -20$$

$$A_3 = \pi \frac{d^2}{4}$$

با جاگذاری مقادیر $A_1, A_2, A_3, y_1, y_2, y_3$ در رابطه \bar{y} مقدار d بدست می آید:

$$d = 5.64 \text{ cm}$$

حداکثر ممان سطح مقطع داده شده را نسبت به محوری که از مرکز سطح می گذرد، بدست آورید. همچنین، جهت محوری که ممان اینرسی سطح نسبت به آن ماکزیمم است را بدست آورید، مشروط بر اینکه مقادیر ممان اینرسی، نسبت به محورهای x, y, z به ترتیب زیر باشند؟

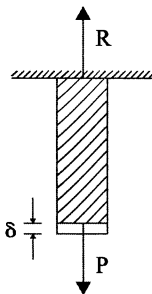
$$I_x = 1458 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 365 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 365 \text{ mm}^4$$

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + 4I_{xy}^2} = 15687 \text{ mm}^4$$

$$\tan \theta = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow \theta = 17^\circ$$



حل مسایل استاتیک عموماً از دو روش زیر صورت می گیرد:

- ۱- از ارتباط تعادل (با در نظر گرفتن دیاگرام جسم آزاد) این روش در بخش های قبل به طور مفصل توضیح داده شد.
- ۲- روش انرژی (کار مجازی)

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{رابطه نیرو و تغییر شکل) رابطه سازگاری}$$

در بسیاری مسائل استفاده از روش کار مجازی، حل مسئله را به طور قابل توجهی ساده می نماید.

فصل هفتم

روش انرژی و برداری برای حل مسائل

اصل کار مجازی

(۱) **تعریف کلی:** شرط لازم و کافی برای تعادل یک جسم یا یک جسم مرکب، از اتصال مجموعه‌ای از اجسام صلب آن است که نمو افزایش یا تغییرات کار مجازی کلیه نیروهای فعال و موثر بر آن به ازای تغییر مکان‌های سازگار با قیدهای موجود (تکیه‌گاه‌ها و اتصالات) برابر صفر می‌شود. یا به عبارت بهتر مشتق کار خارجی انجام شده، توسط نیروهای خارجی نسبت به تغییر مکان‌های موجود در راستای نیروهای خارجی صفر شود (اصل می‌نیم انرژی).

(۲) **کاربرد این روش در مسائل کنکور:** اصولاً برای حل مسائل استاتیک، نیاز به مجموعه‌ای از معادلات تعادل (یعنی روابط بین نیروهای خارجی وارد بر یک جسم) و معادلات سازگاری (یعنی روابط بین نیروهای خارجی وارد بر یک جسم، با تغییر مکان‌های ایجاد شده در اثر نیروهای خارجی) می‌باشد.

در مسائل استاتیک که جسم به صورت یک جسم صلب در نظر گرفته می‌شود متأسفانه نمی‌توان روابط سازگاری را به تنهایی نوشت. لذا، مجبوریم در مسائل استاتیک از روابط انرژی (اصل کار مجازی) که در واقع نیز خود ترکیبی از معادلات تعادل و معادلات سازگاری می‌باشند استفاده نماییم. دانشجویان عزیز قطعاً آگاه هستند که اصولاً برای حل مسائل استاتیک نامعین نیاز به هر دو سری معادلات تعادل و معادلات سازگاری می‌باشیم و بدون داشتن معادلات سازگاری قادر به حل مسائل نامعین نمی‌باشیم، لذا توجه شود که کاربرد روش اصل کار مجازی برای حل مسائل ذیل می‌باشند.

(a) مسائلی که فقط با روابط تعادل، قابل حل می‌باشند (یعنی مسائل استاتیکی معین).

(b) مسائلی که فقط با روابط سازگاری، قابل حل می‌باشند (یعنی مسائل سینماتیک معین).

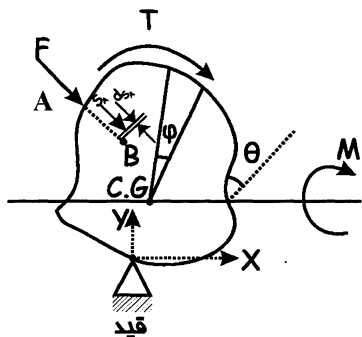
(c) مسائلی که با ترکیبی از معادلات تعادل و معادلات سازگاری، قابل حل می‌باشند (یعنی مسائل استاتیکی نامعین).

دانشجویان محترم در امتحان کنکور دقت نمائید که در هنگام پاسخگویی به سوالات استاتیک (نه مسائل مقاومت مصالح)، چنانچه مساله‌ای به استاتیکی نامعین باشد (یعنی تعداد مجهولات مساله بیش از 3 باشد) حتماً به روش انرژی حل شود. همچنین دقت نمایند برخی از مسائل که استاتیکی معین می‌باشند را هم می‌توانند از روابط تعادل حل کنند و هم می‌توانند از روش انرژی حل کنند. برخی

از این نوع مسائل اگر به روش تعادل حل گردد نیاز به زمان زیادی (خیلی بیشتر از 3 دقیقه) دارند و برای زمان امتحانات تستی کنکور مناسب نمی باشند. لذا شایسته است که حتماً از روش انرژی که زمان بسیار کوتاهی برای حل نیاز دارند استفاده نمایید. به عنوان مثال در تمام مسائل استاتیک که معمولاً صحبت از یک (یا چند) فنر با سختی K به میان آمده است، حتماً به جای روش معمولی تعادل استاتیکی از روش انرژی استفاده نمایید (مانند مثال های 1, 3, 4, 5, 6 در این فصل).

(۳) معادلات حاکم: فرض کنید که یک جسم تحت یک نیروی متمرکز F و یک ممان M و یک گشتاور T قرار گرفته است. مانند شکل زیر

نکته مهم:



- تغییر زاویه θ مربوط به ممان خارجی M است.
- تغییر زاویه ϕ مربوط به گشتاور پیچشی T است.
- تغییر مکان S_A مربوط به نیروی متمرکز F است.

نکته بسیار مهم، این است که حتماً برای نیروهای متمرکز (مانند F)، بایستی تغییر مکان آن در امتداد خط منطبق بر نیرو باشد. مثلاً در شکل بالا تغییر مکان نیروی F که S_A نامیده می شود. حتماً بایستی در امتداد خط AB که منطبق بر امتداد نیروی F می باشد، واقع شود.

برای شکل بالا رابطه انرژی یا کار انجام شده توسط نیروهای خارجی T و M و F ، به صورت زیر نوشته می شود.

$$W = FS_A + M\theta + T\phi \quad (1)$$

حال مشتق این انرژی نسبت به جهت محور x (یا محور x یا محور y یا هر محور دلخواه دیگر) بایستی برابر صفر شود (اصل می نیم انرژی). زیرا طبق قانون اول ترمودینامیک، هر سیستمی که بخواهد از حالت عدم تعادل به حالت تعادل برسد، مقدار خالصی از انرژی خود را از دست می دهد، به طوری که در شرایط تعادل انرژی به می نیم مقدار خود می رسد. پس:

$$\frac{dW}{dx} = F \frac{dS_A}{dx} + M \frac{d\theta}{dx} + T \frac{d\phi}{dx} = 0$$

$$\boxed{FdS_A + M d\theta + T d\phi = 0} \quad (2)$$

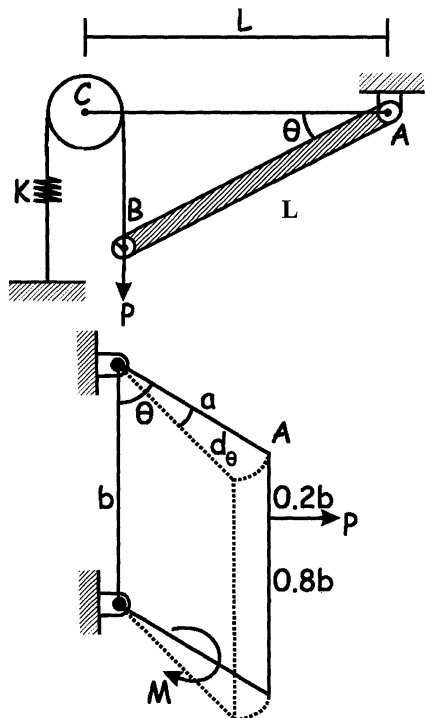
دقت شود که برای حل مسائل استاتیک دیگر نیاز به نوشتن رابطه (۱) در بالا نمی باشد و مسائل با استفاده از رابطه (۲) حل خواهند شد. یعنی بایستی جمع جبری نیروهای خارجی، ضربدر، تغییرات جزئی تغییر مکان هر نیرو برابر صفر شود. دقت شود که از جمع جبری استفاده گردد. یعنی در رابطه (۲) بالا بسته به هم سو یا غیر هم سو بودن جهت تغییرات مکان ها $d\phi$ و $d\theta$ ، dS_A بایستی از علامت های مثبت یا منفی استفاده شود. نمونه آن ها را در مثال های ارائه شده در بخش بعدی ملاحظه خواهید نمود.

(۴) راهنمایی برای حل مسائل: تمام مسائل استاتیک را که به کمک روش انرژی (یا اصل می نیم انرژی) قابل حل می باشند، به چند نوع مختلف در زیر تقسیم بندی می کنیم. این تقسیم بندی می تواند کمک شایانی در امتحان و حل سریع مسائل، به دانشجویان محترم بنماید.

مسائل نوع اول: مسائلی که حالت اولیه (قبل از بارگذاری) و حالت ثانویه سیستم (بعد از بارگذاری)، در دسترس باشند.

مسائل نوع دوم: مسائلی است که حالت ثانویه، در دسترس نباشند.

مثلاً اشکال زیر که در بخش بعدی حل آن‌ها ارائه می‌شود، جزو مسائل نوع اول محسوب می‌شوند و حل آن‌ها روتین و ساده می‌باشد.



فرض شعاع قرقره خیلی کوچک و قابل چشم‌پوشی باشد. حالت تعادل مجهول مساله است. این مساله نوع اول می‌باشد، زیرا در $\theta=0$ حالت اولیه سیستم و در θ حالت ثانویه سیستم را نشان می‌دهد. که متعاقباً در بخش بعدی حل می‌گردد.

شکل زیر که نشان دهنده 4 میله است، جزو مسائل نوع دوم می‌باشد، زیرا حالت اولیه میله معلوم است و حالت ثانویه آن در دسترس نمی‌باشد. در این شکل خط پر حالت اولیه است و خط چین حالت ثانویه‌ای است که توسط خود ما ایجاد شده است.

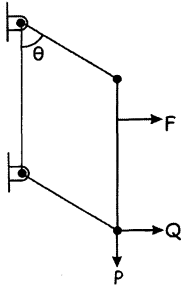
اصولاً مسائل نوع دوم به دو طریق قابل حل می‌باشند. روش اول این است که در این نوع مسائل چون حالت ثانویه در دسترس نمی‌باشد، خودمان به سیستم یک تغییر شکل بسیار کوچک، مثلاً به اندازه $d\theta$ می‌دهیم تا بدین ترتیب حالت ثانویه در یک مدت زمان بسیار کوچک معلوم گردد و سپس مانند مسائل نوع اول، حل مساله را ادامه می‌دهیم.

روش دوم روشی است که این روش را روش برداری می‌نامند.

اطلاعات مربوط به این روش، در بخش دیگر در این فصل به‌طور کامل توضیح داده خواهد شد.

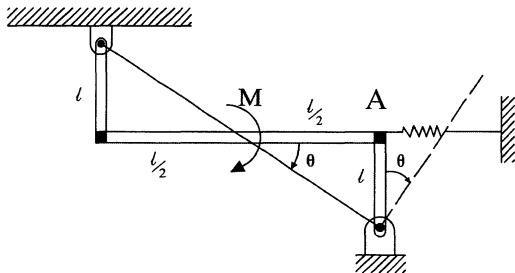
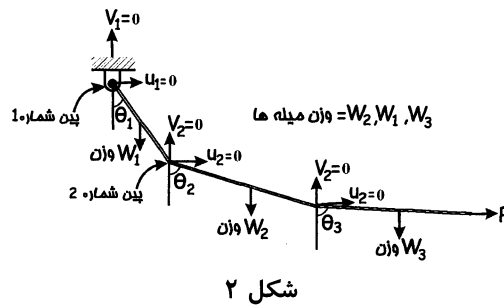
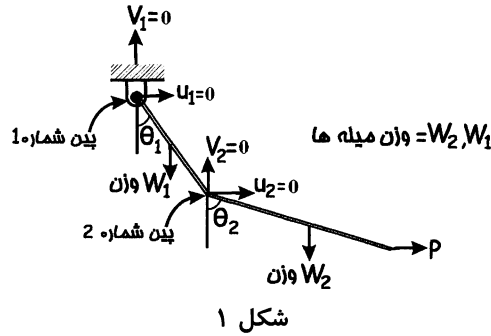
تذکر مهم: دقت شود در برخی از مسائل نوع دوم که بایستی تغییر شکل ثانویه به اندازه $d\theta$ توسط خودمان ایجاد شود، به دو دلیل زیر امکان دارد. این تغییر شکل ثانویه مشکل و پیچیده شود. لذا در این حالت بهتر است که حتماً مساله از روش دوم برداری حل گردد.

دلیل اول: در برخی از مسائل تعداد نیروهای متمرکز (مانند P و F در شکل‌های قبل) امکان دارد از یک عدد بیشتر شود و لذا دنبال کردن حرکت نقطه اثر این نیروها در امتداد خط منطبق بر نیرو خیلی مشکل شود. در این حالت بهتر است از روش برداری استفاده گردد. مانند شکل زیر که θ تعادل مجهول مساله می‌باشد.



در این شکل 4 میله‌ای در محل اتصال میله‌ها پین قرار دارد و لذا دنبال کردن تغییر مکان سه نیروی متمرکز F و P و Q در حالت ثانویه مشکل می‌باشد.

دلیل دوم: اصولاً در مسائلی که تعداد درجه آزادی موجود در بین‌های اتصال زیاد است، تخمین حالت ثانویه سیستم بسیار مشکل می‌شود و لذا بهتر است که از روش برداری مساله حل گردد. مثلاً در شکل 1 بین شماره یک و پین شماره دو سه درجه آزادی θ_2, u_2, v_2 است و این مسئله را می‌توان به روش اول (یعنی روشی که خود ما حالت ثانویه آن را حدس می‌زنیم)، حل نمود اما در شکل 2 سه پین شماره‌های 1, 2, 3 دارای چندین درجه آزادی $\theta_1, \theta_2, \theta_3, v_2, u_2, v_3, v_3$ می‌باشند و این مسئله را نمی‌توان به راحتی حل نمود (یعنی حدس شرایط ثانویه و تخمین تغییر مکان نقاط اثر نیروها مشکل می‌شوند) و لذا بهتر است از روش برداری حل گردد.



مثال ۱: در شکل زیر زاویه θ نظیر تعادل از کدام رابطه بدست می‌آید؟

(۱) $M = K\ell^2\theta$

(۲) $M = K\ell\theta$

(۳) $M = K/\ell\theta$

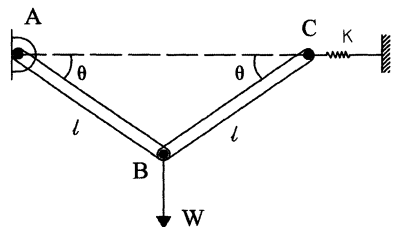
(۴) هیچ کدام

$\delta W = 0 \Rightarrow Fdx_A - Md\theta = 0$

$x_A = \ell\theta \Rightarrow dx_A = \ell d\theta$

$F = Kx_A = K\ell\theta \Rightarrow K\ell^2\theta d\theta = Md\theta \Rightarrow M = K\ell^2\theta$

مثال ۲: در شکل زیر θ نظیر تعادل، از کدام رابطه بدست می‌آید، مشروط بر اینکه وقتی AB و BC در حالت افقی قرار دارند، فنر در حالت آزاد باشد.



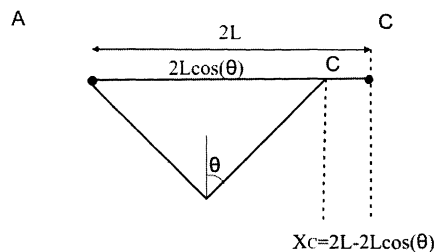
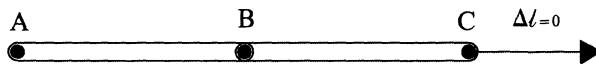
W

$$y_B \rightarrow y_B \rightarrow dx_C = 2l \sin \theta d\theta$$

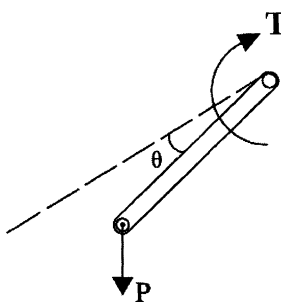
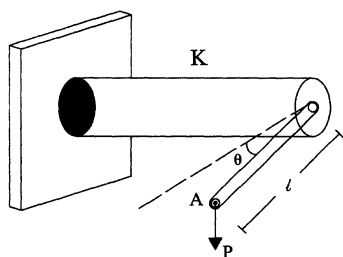
$$F = Kx_C = K2l(1 - \cos \theta)$$

$$Wl \cos \theta d\theta - k(2l)(1 - \cos \theta)(2l \sin \theta d\theta) = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \theta = \frac{W}{4Kl}$$



مثال ۳: در شکل زیر θ چقدر است؟



$$\sin \theta = \frac{K}{Pl} \theta \quad (1)$$

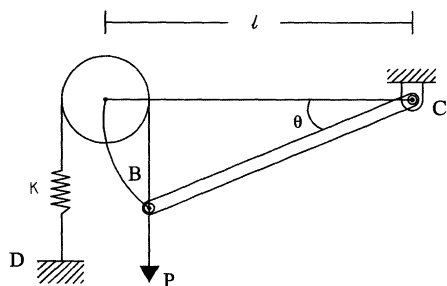
$$\cos \theta = \frac{K}{Pl} \theta \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{K}{2Pl} \theta \quad (3)$$

$$Pdy_A - Td\theta = 0$$

$$y_A = l \sin \theta \Rightarrow dy_A = l \cos \theta d\theta$$

$$T = K\theta \Rightarrow P l \cos \theta d\theta = K\theta d\theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{K}{Pl} \theta$$



$$Pdy_B - Fdy_D = 0$$

$$y_B = l \sin \theta \Rightarrow dy_B = l \cos \theta d\theta$$

$$y_D = l \sin \theta \Rightarrow dy_D = l \cos \theta d\theta$$

$$P(l \cos \theta d\theta) - (ky_B)(l \cos \theta d\theta) = 0$$

$$P = Ky_B = Kl \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{P}{Kl}$$

مثال ۴: کدام گزینه صحیح است؟

$$\sin \theta = \frac{P}{Kl} \quad (1)$$

$$\cos \theta = \frac{P}{Kl} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P}{Kl} \quad (3)$$

مثال ۵: تا رسیدن به شرایط تعادل، طوقه B در جهت y در اثر وزن W حرکت می کند. در $y = 0$ فنر آزاد است. کدام رابطه صحیح است؟

$$Wdy - Fds = 0$$

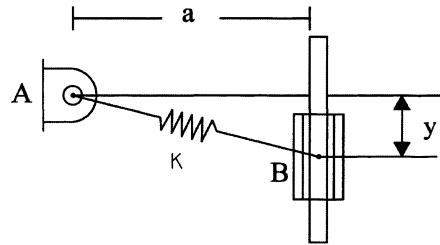
$$s = \sqrt{a^2 + y^2} - a$$

$$ds = \frac{1}{2}(2y)(a^2 + y^2)^{-1/2} dy$$

$$F = K \cdot s$$

$$Wdy - K(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \left[y (a^2 + y^2)^{-1/2} \right] dy = 0$$

$$\Rightarrow y \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right]^{-1} = \frac{W}{K}$$



مثال ۶: θ در حالت تعادل کدام است؟ مشروط بر آنکه در حالت افقی AB فنر آزاد باشد. (طول AB برابر با L می باشد).

$$Wdy_D - Fds = 0$$

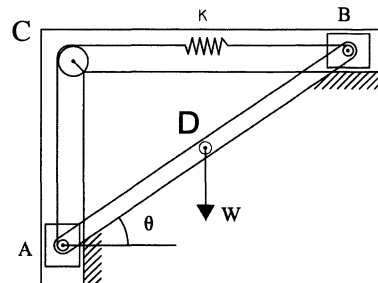
$$s = AC + CB - l = l \sin \theta + l \cos \theta - l$$

$$ds = (l \cos \theta - l \sin \theta) d\theta$$

$$y = \frac{l}{2} \sin \theta \Rightarrow dy_D = \frac{l}{2} \cos \theta d\theta$$

$$W \left(\frac{l}{2} \cos \theta d\theta \right) - kl(\sin \theta + \cos \theta - 1)(l \cos \theta - l \sin \theta) d\theta = 0$$

$$\frac{W}{2Kl} (\cos \theta + \sin \theta - 1)(1 - \tan \theta) = 0$$

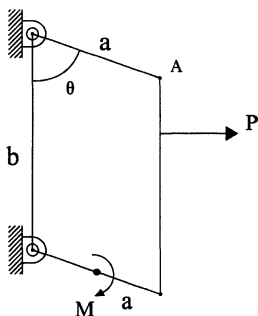


مثال ۷: در سیستم چهار میله ای زیر کدام گزینه مقدار زاویه θ ناشی از نیروی P و ممان M را بدست می دهد؟

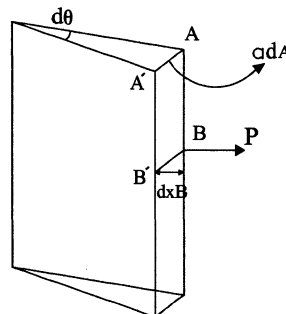
$$\cos \theta = \frac{M}{Pa} \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{M}{Pa} \quad (2)$$

$$\tan \theta = \frac{M}{Pa} \quad (3)$$



چون حالت ثانویه موجود نمی باشد، به اندازه $d\theta$ تغییر می دهیم.



$$Md\theta - Pdx_B = 0$$

$$dx_B = ad\theta \cos \theta$$

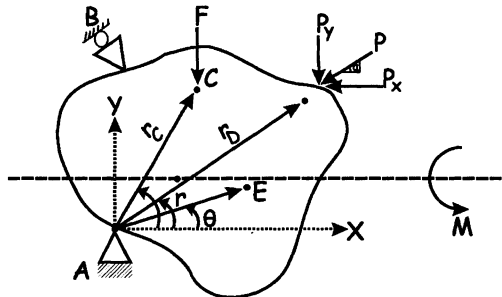
$$Md\theta - Pa \cos \theta d\theta = 0$$

$$\cos \theta = \frac{M}{Pa}$$

روش برداری:

همان طوری که در بخش قبل به طور خلاصه توضیح داده شده روش برداری، یک روش بسیار قوی برای حل مسائل استاتیکی می باشد. به خصوص این روش برای مسائل نامعین و حتی مسائل معینی که تعداد نیروهای متمرکز زیاد و یا تعداد درجه آزادی روی اعضای متصل شده به یکدیگر در محل پین ها در سازه زیاد است، کاربرد فراوانی دارد.

در این روش کار انجام شده توسط ممان ها $\left(\sum_{i=1}^n M_i \theta_i \right)$ و یا گشتاورهای پیچشی $\left(\sum_{i=1}^n T_i Q_i \right)$ ، به صورت برداری نوشته نمی شود، بلکه به همان حالت اسکالر نوشته می شود و فقط کار انجام شده توسط نیروهای متمرکز (مثلاً P و F در شکل زیر)، به صورت برداری نوشته می شود. یعنی:



فرض جسم صلب در محل A، B به صورت قید تکیه گاهی، متصل به یک دیواره صلب متصل است. در قید A مولفه های تغییر مکان صفر است و در قید B فقط مولفه های تغییر مکان در یک جهت صفر است و در جهت دیگر عمود بر آن دارای حرکت و تغییر مکان می باشد (یعنی در B تکیه گاه غلطک دار است). جسم تحت یک نیروی متمرکز عمودی F و یک نیروی متمرکز P که با افق زاویه α می سازد قرار دارد. نقطه C و D به ترتیب نقاط اثر نیروهای F و P می باشند. موقعیت هندسی هر نقطه روی جسم صلب، به صورت مختصات قطبی $E(r, \theta)$ بیان می شود که E یک نقطه دلخواه روی جسم صلب است.

در روش برداری ابتدا در محل یکی از تکیه گاه ها که در هر دو جهت (مثلاً X و Y) قید شده اند، یک محور مختصات XOY در نظر می گیریم. فاصله محل نقطه اثر نیروهای متمرکز تا مبدأ مختصات O را که در این جا r_C برای F و r_D برای نیروی P می باشد، به صورت برداری مانند زیر می نویسیم. نیروهای متمرکز را نیز در جهت X و Y به صورت برداری می نویسیم. نکته بسیار مهم این است که چون کار یا انرژی به صورت ضرب ماتریسی نوشته می شوند. از طرفی بایستی قوانین ضریب ماتریسی رعایت شوند. لذا بایستی نیروها به صورت یک ماتریس ردیفی و فاصله نقطه اثر نیروها تا مبدأ مختصات به صورت یک ماتریس ستونی نوشته شوند. طبق اصل می نیمم، انرژی رابطه، به صورت زیر نوشته می شود.

$$\bar{F} \cdot d\bar{r}_C + \bar{P} \cdot d\bar{r}_D + M d\theta = 0 \quad (1) \text{ معادله}$$

رابطه (1) به صورت ضرب برداری بین نیروها و فاصله نقطه اثر نیروها تا مبدأ مختصات نوشته شده است، برای سادگی در حل مسائل دویعدی در استاتیک ترجیحاً ممان ها یا گشتاور به صورت برداری نوشته نمی شوند و به همان صورت اسکالر نوشته می شوند. در رابطه بالا بایستی نیروها به صورت برداری و ستونی و تغییر مکان ها به صورت برداری و ردیفی به صورت زیر نوشته شوند.

$$\bar{F} = [F_x, F_y]$$

که در این جا چون نیرو عمودی است $F_x = 0$ است. همچنین در رابطه (1) دقت شود که علامت ها همواره مثبت نوشته می شوند. زیرا علائم از طریق مقایسه جهت نیروها، به محورهای X, Y مدنظر قرار می گیرند. یعنی مثلاً برای \bar{F} داریم:

$$\bar{F} = [0, -F] \quad (2)$$

نیروی F منفی نوشته شده چون در خلاف جهت محور y ها می باشد.

$$\dot{P} = [P_x, P_y] = [-P \cos \alpha, -P \sin \alpha] \quad (3)$$

نیروهای P به صورت منفی نوشته می شوند چون در جهت خلاف محورهای x, y است.

$$\vec{r}_C = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +r_C \cos \theta \\ +r_C \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (4)$$

دقت شود که چون x_C و y_C هر دو نسبت به جهت محورهای x, y مثبت هستند در ماتریس علامت مثبت انتخاب شده.

$$\vec{r}_D = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_D \cos \theta \\ r_D \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (5)$$

حال از معادلات ۴ و ۵ نسبت به θ مشتق می گیریم، یعنی:

$$d\vec{r}_C = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial \theta} d\theta \\ \frac{\partial y_C}{\partial \theta} d\theta \end{Bmatrix}, \quad d\vec{r}_D = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_D}{\partial \theta} d\theta \\ \frac{\partial y_D}{\partial \theta} d\theta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

حال مقادیر موجود در روابط ۲ و ۳ و ۶ را در رابطه ۱ قرار می دهیم.

تذکر بسیار مهم برای حل مسائل کنکور

روش شبه برداری: در مسائل استاتیک (در حد دوره کارشناسی)، اصولاً مسائلی را که به روش برداری حل می شوند، می توان به روش ساده تری به نام روش شبه برداری حل نموده، یعنی در این مسائل دیگر رابطه می نیمم انرژی را به صورت ضرب برداری نمی نویسیم بلکه به همان صورت ضرب معمولی (یا اسکالر) نوشته می شود. مثلاً معادله شماره ۱ قبل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F \cdot dy_C + P_x \cdot dx_D + P_y \cdot dy_D + M d\theta = 0 \quad (7)$$

دقت شود که (با توجه به شکل مربوط به فصل روش برداری) چون نیروی F در راستای y است، لذا در بالا از dy_C استفاده شده است و همچنین مولفه های نیروی P در دو جهت x, y که P_x و P_y می باشند. به ترتیب دارای تغییر مکان های dx_D و dy_D می باشند. حال مقادیر y_C و x_D و y_D که در واقع مختصات هندسی نقاط اثرات نیروهای F و P_x و P_y نسبت به محورهای x, y می باشند را می نویسیم.

مثلاً:

$$y_C = r_C \sin \theta \Rightarrow dy_C = r_C \cos \theta d\theta \quad (8)$$

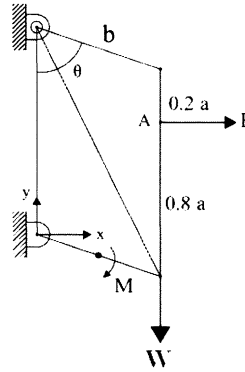
$$x_D = r_D \cos \theta \Rightarrow dx_D = -r_D \sin \theta d\theta \quad (9)$$

$$y_D = r_D \sin \theta \Rightarrow dy_D = r_D \cos \theta d\theta \quad (10)$$

حال مقادیر موجود در روابط ۸ و ۹ و ۱۰ را در معادله ۷ قرار می دهیم.

فقط دقت شود که هنگام جایگزینی مقادیر نیرو و تغییر مکان ها در رابطه ۷ حتماً علامت مثبت و منفی هم برای نیروها و هم برای تغییر مکان های dy_C و dx_D و dy_D در نظر گرفته شود. اگر نیروها و یا تغییر مکان ها در جهت مثبت محورهای x و یا y قرار دارند، مثبت و اگر در جهت مخالف محورهای x و y واقع هستند، منفی در نظر گرفته می شوند. در هر حال مثال های ارائه شده در این فصل اکثراً به جای روش برداری از روشی شبه برداری حل شده اند.

مثال ۸: در سیستم زیر θ در حالت تعادل از چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟



$$\vec{P} = [P \ 0]$$

$$\vec{W} = [0 \ -W]$$

$$r_P = \begin{bmatrix} b \sin \theta \\ 0.8a - b \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$r_W = \begin{bmatrix} b \sin \theta \\ -b \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$dr_P = \begin{bmatrix} b \cos \theta \\ b \sin \theta \end{bmatrix} d\theta$$

$$dr_W = \begin{bmatrix} b \cos \theta \\ b \sin \theta \end{bmatrix} d\theta$$

رابطه انرژی: $Pb \cos \theta - wb \sin \theta + M = 0$

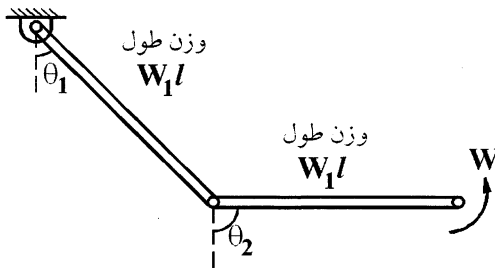
مثال ۹: اگر $d\theta_1 = 0$ باشد θ_2 در شکل زیر کدام است؟

$$\tan \theta_2 = \frac{2M}{wl} \quad (۴)$$

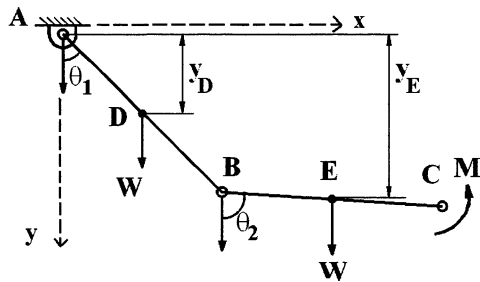
$$\theta_2 = 0 \quad (۳)$$

$$\sin \theta_2 = \frac{2M}{wl} \quad (۲)$$

$$\sin \theta_2 = \frac{2M}{wl} \quad (۱)$$



چون بر خلاف دیگر مسائل انرژی بیش از یک مفصل وجود دارد، لذا از روش شبه‌برداری مساله حل می‌شود. یعنی در محل تکیه‌گاه که تغییر مکان $u_x = 0, u_y = 0$ است. یک محور مختصات سروش اکن xy در نظر می‌گیریم و مختصات هندسی محل اعمال نیروهای خارجی را نوشته و سپس از رابطه انرژی، مساله را حل می‌کنیم. یعنی:



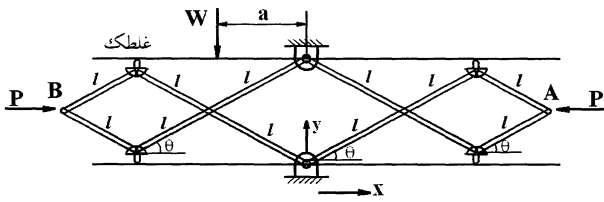
رابطه انرژی $W dy_D + W dy_E - M d\theta_2 = 0$

$$y_D = \frac{l}{2} \cos \theta_1 \Rightarrow dy_D = -\frac{l}{2} \sin \theta_1 d\theta_1$$

$$y_E = l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \Rightarrow dy_E = -l \sin \theta_1 d\theta_1 - l \sin \theta_2 d\theta_2$$

مقادیر را در رابطه انرژی قرار می‌دهیم $d\theta_1 = 0$ ، قرار می‌دهیم:

$$W \left(-\frac{l}{2} \sin \theta_2 d\theta_2 \right) = +M d\theta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\sin \theta_2 = \frac{2M}{Wl}}$$



مثال ۱۰: تعادل کدام است طول اعضا l و $2l$ می باشند.

چون بیش از یک مفصل وجود دارد از روش شبه برداری مساله حل می شود. یعنی در تکیه گاه پائین محور ساکن XY را خود فرض می کنیم و مختصات هندسی نقاط اعمال نیرو را نوشته و سپس از رابطه انرژی مقدار θ محاسبه می گردد.

$$x_A = x_B = 3l \cos \theta$$

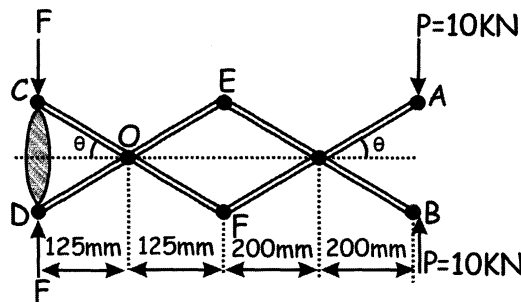
$$dx_A = dx_B = -3l \sin \theta d\theta$$

$$y_W = 2l \sin \theta \Rightarrow dy_W = 2l \cos \theta d\theta$$

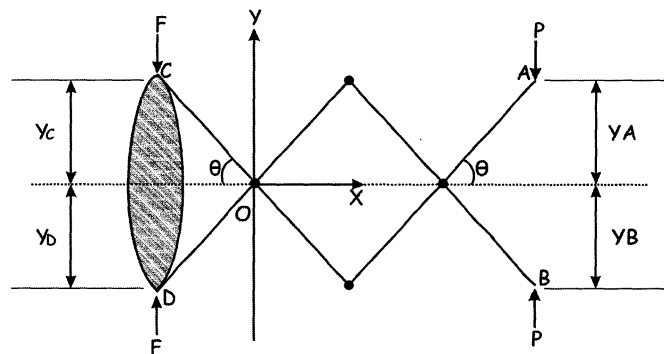
$$pdx_A + pdx_B - Wdy_W = 0 \quad \text{رابطه انرژی}$$

$$-P3L \sin \theta d\theta - P3L \sin \theta d\theta - W2l \cos \theta d\theta = 0 \Rightarrow \theta = \text{محاسبه}$$

مثال ۱۱: در انبر مکانیکی زیر حداقل نیروی F تعادل را محاسبه نمایید.



برای حل مساله ابتدا در نقطه ای که نه در جهت x و نه در جهت y حرکت دارد، یک محور XY در نظر می گیریم (مثلاً مفصل O در شکل) و از روش شبه برداری مساله را حل می کنیم. دقت شود که در مفاصلی مانند E و F که در جهت y حرکت دارند، نمی توان محور XY را در نظر گرفت. چون نیروهای F و P در جهت y دارای حرکت می باشند. لذا تغییر مکان های y_A و y_B و y_C و y_D که محل های اثرات نیروها می باشند را در نظر می گیریم و سپس برای محاسبه dy_A و dy_B و dy_C و dy_D از تغییر مکان های y_A و y_B و y_C و y_D مشتق می گیریم.



رابطه انرژی برای نیروها عبارتند از:

$$(-P)(dy_A) + P(-dy_B) + (-F)(dy_C) + (F)(-dy_D) = 0$$

مثلاً در عبارت چهارم این معادله، چون نیروی F واقع شده در نقطه D هم جهت با محور y است. پس آنرا مثبت در نظر گرفته‌ایم. همچنین چون y_D نسبت به محور y در قسمت منفی محور y قرار گرفته است، لذا تغییر مکان را $-dy_D$ در نظر گرفته‌ایم. دیگر عبارات این معادله نیز به همین ترتیب علامت‌گذاری شده‌اند.

$$y_A = y_B \Rightarrow dy_A = dy_B$$

$$y_C = y_D \Rightarrow dy_C = dy_D$$

این مقادیر را در رابطه انرژی قرار می‌دهیم.

$$-2Pdy_A - 2Fdy_C = 0 \quad (۲)$$

$$y_A = 200 \tan \theta \Rightarrow dy_A = \frac{200}{\cos^2 \theta} d\theta$$

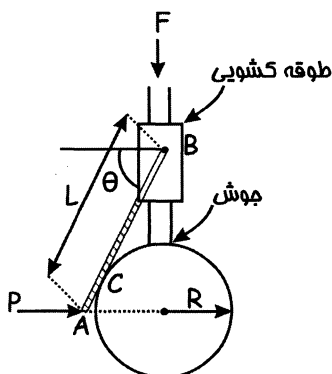
$$y_C = -125 \tan \theta \Rightarrow dy_C = -\frac{125}{\cos^2 \theta} d\theta$$

این مقادیر را در رابطه (۲) قرار می‌دهیم.

$$2P \frac{200}{\cos^2 \theta} d\theta = 2F \frac{125}{\cos^2 \theta} d\theta \Rightarrow F = 1.6P = 16 \text{ KN}$$

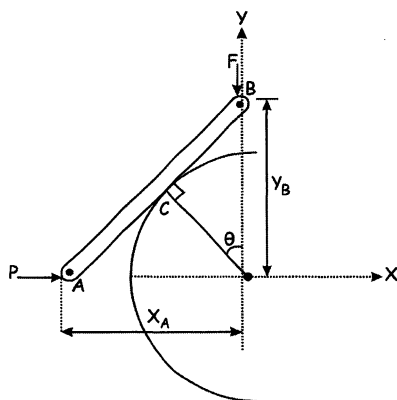
مثال ۱۲: مقدار نیروی F برای تعادل دستگاه کدام است.

اصطکاک، صفر و میله‌ها نازک و بدون وزن می‌باشند.



مساله، از روش شبه‌برداری انرژی حل می‌شود. ابتدا در یک محل ساکن که تغییر مکان در جهت افقی و عبوری صفر است، مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. کره به شعاع R در مرکز خود ساکن است. پس مبدأ را در آن نقطه در نظر گرفته و محور xy را حتماً جهت دلخواه انتخاب می‌کنیم.

مختصات نقاط اثر نیروهای F و P را که به ترتیب A ، B می‌باشند، نسبت به محور xy می‌نویسیم و سپس از آن‌ها مشتق می‌گیریم.



رابطه انرژی $Fdy_B + Pdx_A = 0$

$$y_B = \frac{r}{\cos \theta} \Rightarrow dy_B = \frac{r \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

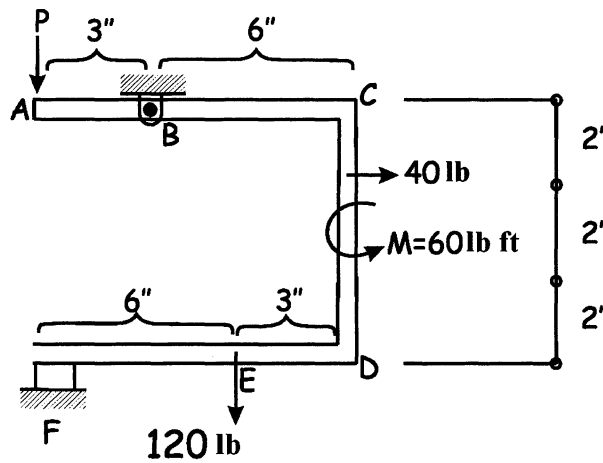
$$x_A = l \cos \theta \quad dx_A = -l \sin \theta d\theta$$

حال این مقادیر جزئی، تغییر مکان dx_A , dy_B را در رابطه انرژی قرار می‌دهیم، یعنی:

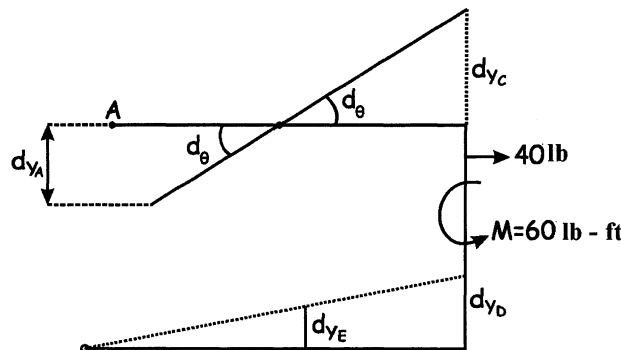
$$F \left(\frac{R \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \right) - Pl \sin \theta d\theta = 0$$

$$F = \frac{Pl}{R} \cos^2 \theta$$

مثال ۱۳: مطلوبست نیروی قائم P که بایستی در نقطه A به سیستم وارد شود، تا سیستم در وضعیت تعادل بماند.



حل: این مساله از نوع اول می‌باشد. یعنی می‌توانیم با یک تغییر شکل ثانویه مساله را حل کنیم. از طرفی چون تعداد نیروهای متمرکز بیش از یک عدد می‌باشد، لذا از روش شبه‌برداری نیز به سادگی قابل حل است. در هر حال از دانشجویان محترم تقاضا می‌شود که مانند دستورالعمل گفته شده مساله را از روش شبه‌برداری نیز حل نمایند. محور مختصات xy را یا در محل پاشنه B یا F در نظر بگیرید. در این جا مساله از روش انرژی نوع اول حل می‌شود. یعنی خودمان، یک تغییر چرخش $d\theta$ به سیم می‌دهیم. با توجه به ابعاد هندسی مساله و محل دو پاشنه، نقاط C و D حرکتی در جهت افقی نداشته و میله CD در امتداد خود جابجا می‌شود در نتیجه نیروی افقی 40Lb و ممان $M=60\text{Lb.ft}$ هیچ‌گونه کاری را در جهت امتداد خود، انجام نمی‌دهند. لذا



$$Pdy_A - 120dy_E + 40dx + Md\theta = 0$$

هیچ‌گونه کاری در جهت x, θ انجام نمی‌شود.

$$P dy_A - 120 dy_E = 0$$

$$dy_A = 3d\theta \downarrow \text{ حرکت به طرف پایین}$$

$$dy_C = 6d\theta \uparrow$$

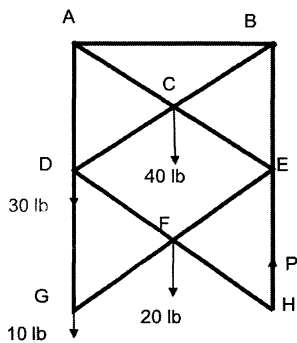
$$dy_D = dy_C = 6d\theta$$

$$dy_E = \frac{6}{9} dy_D = \frac{6}{9} (6d\theta) = 4d\theta$$

مقادیر را در رابطه انرژی، در بالا قرار می‌دهیم.

$$P(3d\theta) - 120(4d\theta) = 0 \Rightarrow P = 160 \text{ lb}$$

مساله ۱۴: در سیستم آکاردوانی زیر، مطلوبست نیروی اعمالی P برای نگهداری دستگاه راه طول تمام اعضا با یکدیگر مساوی بوده به طوری که در وسط به یکدیگر پین شده‌اند.



این مساله از نوع اول می‌باشد. لذا می‌توانیم با یک تغییر شکل ثانویه آن را حل نمائیم. از دانشجویان محترم تقاضا می‌شود (برخلاف مثال قبل یعنی مثال 13) این مساله را از روش تغییر مکان ثانویه نیز حل نمایند. در این‌جا مساله از روش شبه‌برداری حل می‌شود و امید است، دانشجویان عزیز جواب‌های خود را با جواب‌های ناشی از روش شبه‌برداری مقایسه نمایند.

ابتدا محور مختصات را در یک نقطه ساکن که در جهت افقی و عمودی حرکت ندارند، انتخاب می‌کنیم. مثلاً نقطه O و سپس روابط انرژی را می‌نویسیم. یعنی رابطه انرژی، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$40(dy_C) + 30(dy_D) + 20(dy_F) + 10(dy_G) - P(dy_H) = 0$$

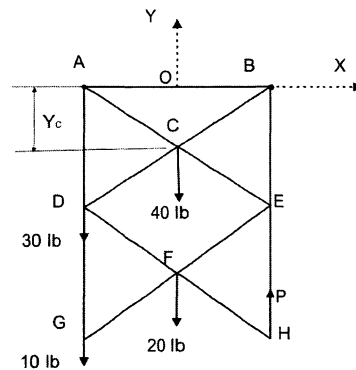
$$y_C = a \text{ فرض}$$

$$dy_C = da = \delta_c$$

$$y_E = 2a \Rightarrow dy_E = 2da = 2\delta_c$$

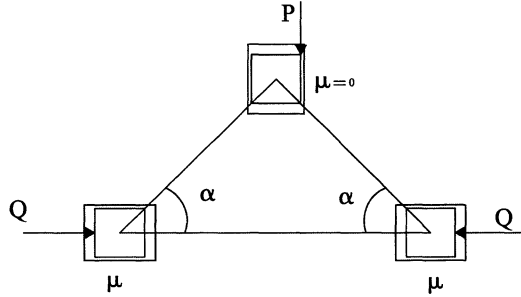
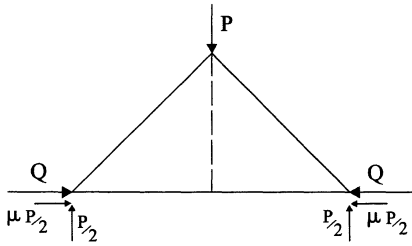
$$y_F = 3a \Rightarrow dy_F = 3da = 3\delta_c$$

$$y_H = y_G = 4a \Rightarrow dy_H = 4da = 4\delta_c$$



مقادیر را در رابطه انرژی بالا قرار می‌دهیم تا مقدار P محاسبه شود.

$$\Rightarrow P = 50 \text{ lb}$$



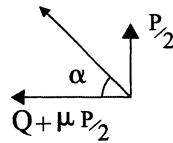
مثال: کدام گزینه صحیح است؟

$$\text{tg}\alpha = \frac{P}{2Q + P\mu} \quad (۱)$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{P}{Q + P\mu} \quad (۲)$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{2P}{Q + P\mu} \quad (۳)$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\frac{P}{2}}{Q + \mu \frac{P}{2}} = \frac{P}{2Q + \mu P}$$



مثال: حداکثر d برای تعادل چقدر است؟ ضریب اصطکاک با زمین 0.3 فرض شود.

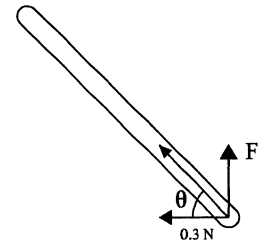
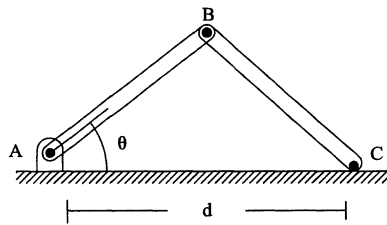
عضو دو نیرویی BC:

$$\text{tg}\varphi_0 = 0.3$$

$$\varphi_0 = \text{tg}^{-1} 0.3$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} 0.3$$

$$\text{Cotg}\theta = 0.3 = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}} = \frac{d}{\sqrt{4 - d^2}} \Rightarrow d =$$



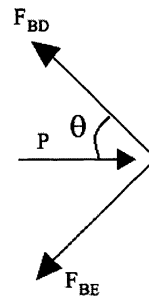
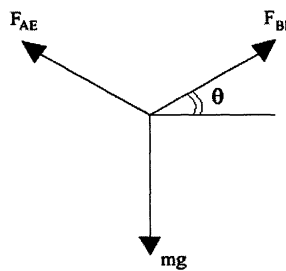
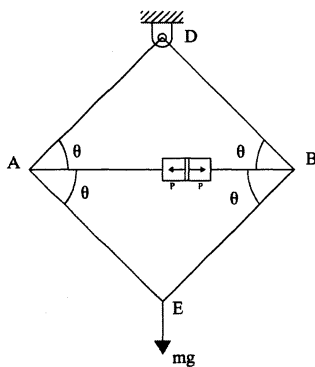
مثال: نیروی فشاری P از طرف سیلندر هیدرولیک به میله‌ها چقدر باشد، تا وزنه به حالت تعلیق درآید؟

$$P = \text{mgtg}\theta \quad (۱)$$

$$P = \text{mgCotg}\theta \quad (۲)$$

$$P = \text{mgSin}\theta \quad (۳)$$

$$P = \text{mgCos}\theta \quad (۴)$$



$$F_{BD} = F_{BE}$$

$$\text{mg} = 2F_{BE}\text{Sin}\theta$$

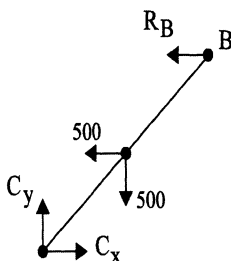
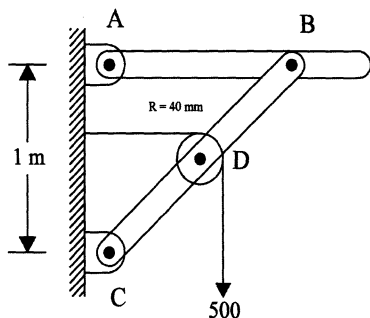
$$P = 2F_{BE}\text{Cos}\theta$$

$$\Rightarrow P = \text{mgCotg}\theta$$

مثال: عکس‌العمل A در هر یک از دو حالت زیر چقدر است؟

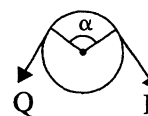
الف) اصطکاک بین طناب و قرقره صفر است.

ب) ضریب اصطکاک 0.3 است.



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_B(1) + 500\left(\frac{1}{2}\right) - 500\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow R_B = 0$$

$$Q = 500e^{-\frac{\pi}{2} \cdot 0.3} = 500e^{-\frac{3\pi}{20}}$$



الف)

ب)

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_B(1) + \frac{500e^{-\frac{3\pi}{20}}}{Q} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{500}{P} \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \dots \Rightarrow R_B = 93.9$$

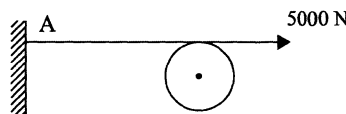
طناب چند دور بپیچد تا عکس‌العمل A ، 2000 N گردد. ضریب اصطکاک طناب و قرقره 0.3 فرض شود.

$$P = Qe^{\alpha \mu}$$

$$5000 = 2000e^{0.3\alpha}$$

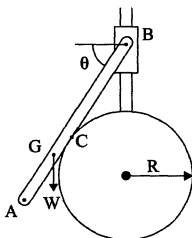
$$\alpha = \frac{1}{0.3} \ln \frac{5}{2} = \frac{10}{3} (\ln 5 - \ln 2) = 3.05$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = n \approx 0.48 \approx \text{نیم دور} = \text{تعداد دور طناب}$$



در مسائلی که به صورت دایره ، نیم دایره ، کره و ... مطرح هستند و نهایتاً با چند میله یک سیستم استاتیکی را تشکیل می‌دهند، نکاتی که در مثال‌های زیر مطرح شده مدنظر می‌باشد.

مثال: در شکل زیر تمام سطوح بدون اصطکاک فرض شده است. زاویه θ نظیر تعادل کدام است؟



$$\text{tg}\theta = 0.68 \quad (1)$$

$$\text{tg}\theta = 0.42 \quad (2)$$

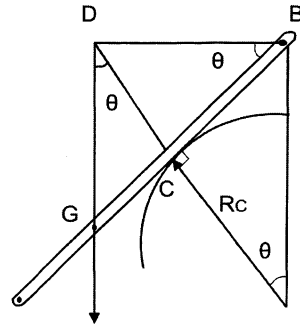
$$\text{tg}\theta = 0.53 \quad (3)$$

$$AB = 2R \quad (4) \text{ وزن میله } W \text{ است.}$$

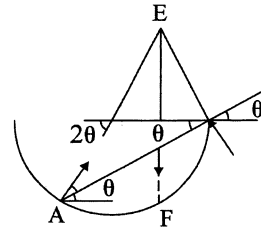
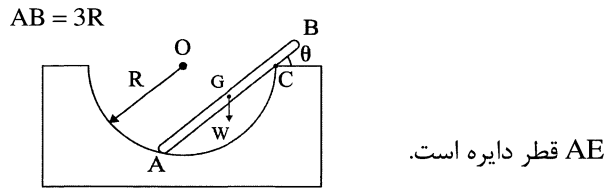
فرض:

در این مسایل با توجه به سه نیرویی بودن اعضا و اینکه هر سه نیرو از مرکز دایره می‌گذرد، می‌توان مسئله را حل کرد.

$$\begin{aligned}
 BG = R &= CG + CB \\
 BC &= R \tan \theta \\
 CG &= CD \tan \theta, \quad CD = BC \tan \theta \\
 R &= R \tan^3 \theta + R \tan \theta \Rightarrow \tan^3 \theta + \tan \theta - 1 = 0 \Rightarrow \tan \theta = 0.68
 \end{aligned}$$



مثال: زاویه θ نظیر تعادل چقدر است؟

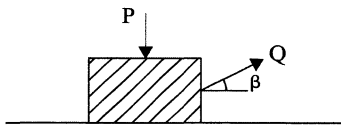


$$AF = 2R \cos 2\theta = \frac{3}{2} R \cos \theta \rightarrow 4 \cos(2\theta) = 3 \cos(\theta)$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$8 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 4 = 0 \rightarrow \theta = \dots$$

مثال: برای ایجاد یک حرکت یکنواخت زاویه β ، کدام یک انتخاب شود تا Q می نیمم باشد. مقدار Q_{Min} چقدر است؟



$$Q_{Min} = \frac{\mu P}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad \beta = \arctan \mu \quad (1)$$

$$Q_{Min} = \frac{\mu P}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \beta = \frac{1}{2} \arctan \mu \quad (2)$$

$$Q_{Min} = \frac{\mu P}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \beta = \arctan \mu \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Q \cos \beta = \mu N \Rightarrow N = \frac{Q \cos \beta}{\mu}$$

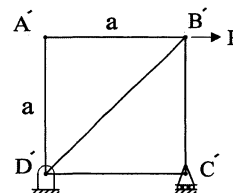
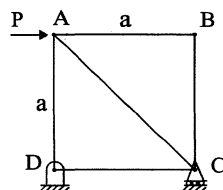
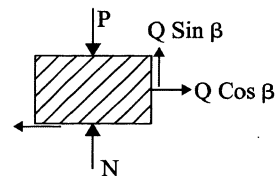
$$N - P + Q \sin \beta = 0 \Rightarrow N + Q \sin \beta = P$$

$$\Rightarrow \frac{Q \cos \beta}{\mu} + Q \sin \beta = P \Rightarrow Q \cos \beta + \mu Q \sin \beta = \mu P$$

$$Q = \frac{\mu P}{\cos \beta + \mu \sin \beta}$$

$$Q_{Min} : \text{where } \cos \beta + \mu \sin \beta = \text{Max} \Rightarrow \beta = \arctan \mu$$

$$Q_{Min} = \frac{\mu P}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

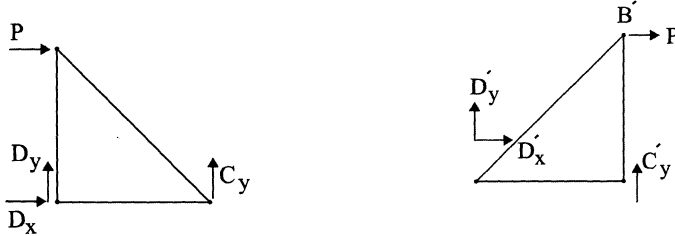


مثال: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱) $x_B > x_{B'}$

(۲) $x_B < x_{B'}$

(۳) $x_B = x_{B'}$



چون شکل 1 سه عضو غیر صفر دارد و شکل 2 دو عضو غیر صفر دارد، انرژی شکل 1 بیش از 2 است. پس تغییر مکان نقاطی که نیروی خارجی به آنها اعمال شده بیشتر است.

چون تمام نیروهای مقطع، غیر از CE عمودی است.

مثال: زاویه θ نظیر تعادل کدام است؟

وقتی $\theta = 0$ باشد، فنر در حالت آزاد است.

$$Pdy_B - Fdx_C = 0$$

$$y_B = (h+L) - (h+L)\cos\theta$$

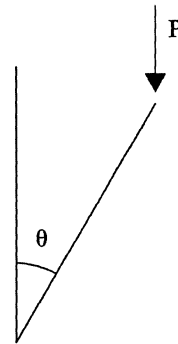
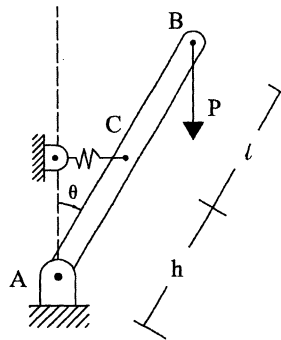
$$x_C = h\sin\theta$$

$$dx_C = h\cos\theta d\theta$$

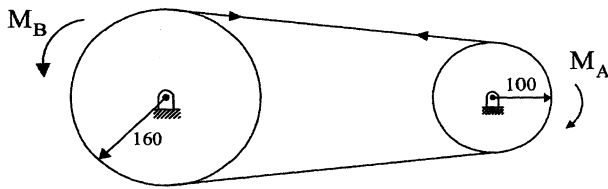
$$F = Kx_C = Kh\sin\theta$$

$$p(h+L)\sin\theta = Kh^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{P(\ell+h)}{Kh^2}$$



ضریب اصطکاک تسمه و چرخ 0.4 است. حداکثر گشتاور M_A که به چرخ A اعمال می‌گردد، بدون اینکه لغزشی ایجاد شود، $20N \cdot m$ است. کدام عبارت صحیح است؟



(۱) گشتاور مقاوم قرقره B بیشتر از $33N \cdot m$ است.

(۲) در صورتی که لغزشی ایجاد شود، در A شروع می‌شود.

(۳) در صورتی که لغزشی ایجاد شود، در B شروع می‌شود.

(۴) زاویه اصطکاک تسمه و چرخ، بیش از 45° است.

$$F_B = F_A \Rightarrow \frac{M_B}{R_B} = \frac{M_A}{R_A}$$

$$M_B = M_A \cdot \frac{R_B}{R_A} = 20 \times \frac{160}{100} = 32N \cdot m$$

اگر گشتاور یک چرخ کمتر باشد، لغزش در آن چرخ اتفاق می‌افتد. (به طراحی اجزاء ۲ رجوع شود) بنابراین لغزش در A شروع می‌شود.

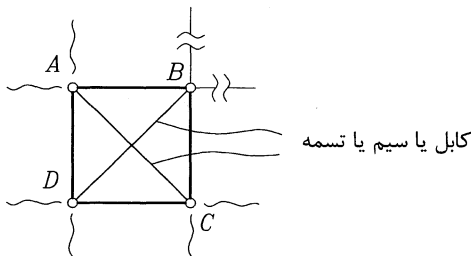
فصل هشتم

مسائل و نکات عمومی مهم

مقدمه: هدف اصلی از این بخش از جزوه استاتیک، جمع‌آوری و ذکر نکات مهم درس استاتیک در قالب مسائل نمونه در فصول مختلف می‌باشد. شایسته است که دانشجویان عزیز بعد از مطالعه دقیق جزوه، مروری بر این فصل و نکات مهم آن نیز داشته باشند. در نوشتن این فصل، علاوه بر نظرات مهم شخصی مؤلف، نکات برجسته استنتاج شده از امتحانات کنکور کارشناسی ارشد سال‌های گذشته تا سال ۱۳۸۵ نیز آورده شده است.

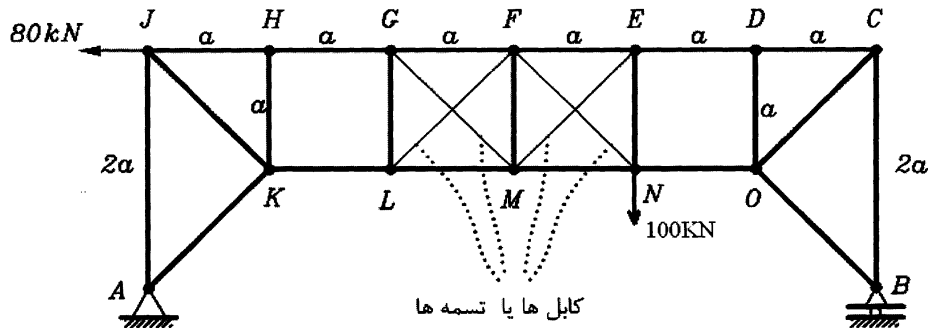
نکات اول: کاربرد کابل‌ها (یا تسمه‌های نازک) در خرپاها و سازه‌ها

در صفحه 13 این جزوه روش‌های مختلف حل خرپاها مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت چند مساله مهم در مورد کاربرد کابل‌ها (یا سیم بکسل‌ها یا تسمه‌ها) در خرپاها مطرح می‌گردد. اصولاً در خرپاها، برای تنظیم زوایای گوشه قاب‌ها، از کابل یا سیم بکسل به‌عنوان اعضای دو نیروئی استفاده می‌شود. (مثلاً در خرپای زیر که دارای قاب ABCD می‌باشد برای اینکه زوایای گوشه‌ها تحت شرایط متفاوت همواره گونیا شده باقی بماند. (مثلاً 90 درجه) از دو کابل AC و BD استفاده شده است).



نکته مهم در مسائل این است که کابل‌ها اصولاً می‌توانند نیروهای کششی را تحمل کنند و قادر به تحمل نیروهای فشاری نمی‌باشند. لذا در مسائل کنکور چنانچه از روی روابط معادل استاتیکی متوجه شدید که کابلی قرار است تحت بار فشاری قرار گیرد، بدین منزله است که شرایط مساله را بایستی به‌گونه‌ای تغییر دهید، تا بار اعمال شده به این کابل صفر گردد. به‌عنوان مثال، به دو مساله زیر توجه فرمائید.

مساله ۱: در خرابی زیر از چهار کابل (یا تسمه) FN و EM و GM و FL استفاده شده است. تعیین کنید اولاً نیروی وارد شده به این کابل‌ها چقدر است؟ ثانیاً نیروی وارد بر عضو MN چقدر است؟

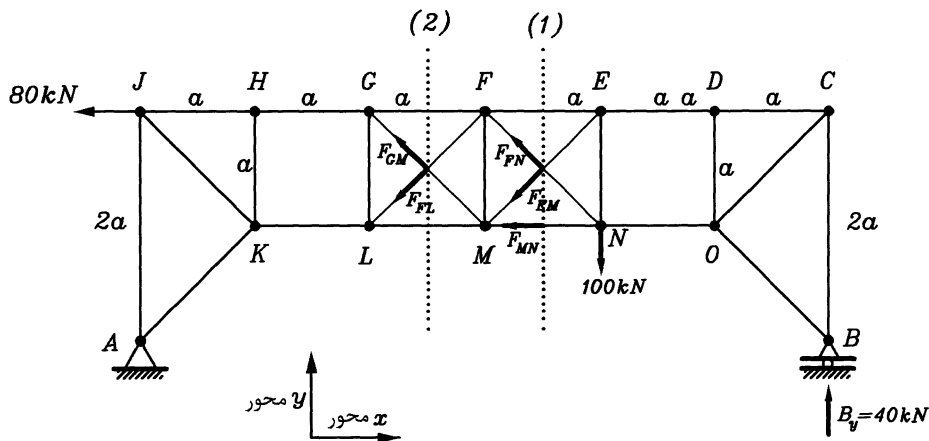


حل: قطعاً قبل از حل تشخیص می‌دهیم که نیروی وارد بر کابل‌ها یا بایستی کششی باشد یا بایستی صفر باشد. زیرا اصولاً کابل‌ها نمی‌توانند بار فشاری را تحمل کنند. لذا:

ابتدا عکس‌العمل A یا عکس‌العمل B را محاسبه می‌کنیم. ترجیحاً عکس‌العمل B را محاسبه می‌کنیم، زیرا دارای یک مجهول B_y می‌باشد. پس حول A معادلات تعادل ممانی را می‌نویسیم.

$$\sum m_A = 0 \Rightarrow 80(20) - 100(40) + B_y(90) = 0 \Rightarrow B_y = 40 \text{ kN}$$

حال طبق نکاتی که در فصل‌های قبل جزوه اشاره شد، ترجیحاً از روش مقاطع استفاده کرده تا نیروی وارد بر کابل‌ها را محاسبه کنیم. از این رو مقطع ۱ و ۲ را طوری انتخاب کرده تا مانند شکل زیر کابل‌ها را قطع نمایند.



فرض سازه توسط مقطع ۱ مانند شکل بالا قطع شده است. از آنجائی که دو کابل EM و FN فقط می‌تواند نیروی کششی را تحمل

می‌کند، لذا نیروهای کششی در این دو کابل مانند، شکل بالا به صورت F_{FN} و F_{EM} می‌باشند. به‌عنوان مثال اگر دو نیرو را در دو کابل

به صورت F_{FN} و F_{EM} نشان دهیم، غلط است. زیرا آن بدین معنی است که نیروی وارد بر کابل EM فشاری است (و اصولاً کابل‌ها نمی‌توانند نیروی فشاری را تحمل کنند). با توجه به هندسه مشابه قاب‌سازه، دو نیروی کششی F_{FN} و F_{EM} یا بایستی با هم برابر

بوده و یا اینکه بایستی یکی از آنها صفر (یا هر دو صفر شوند). با توجه به روابط تعادل (در جهت y یعنی $\sum F_y = 0$) برای قسمتی از سازه که در سمت چپ مقطع (۱) قرار گرفته است، دو نیروی F_{FN} و F_{EM} نمی‌توانند هر دو یکسان باشند. زیرا اگر یکسان باشند، $\sum F_y \neq 0$ می‌شود و سازه در جهت y در حال تعادل نمی‌باشد. برای اینکه قسمتی از سازه که در سمت چپ مقطع (۱) قرار گرفته در

جهت y در حال تعادل باشد، بایستی حتی $F_{EM} = 0$ باشد و مقدار F_{FW} از رابطه تعادل زیر که برای قسمتی از سازه که در سمت چپ مقطع (۱) قرار گرفته است، بدست می‌آید، یعنی:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 40 - 100 + F_{FN} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{FN} = 84.85 \text{ kw}$$

با دلایل مشابهی که برای مقطع (۱) بیان شد، در مقطع (۲) نیز می‌توان نتیجه گرفت، که:

$$F_{FL} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 40 - 100 + F_{GM} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{GM} = 84.85 \text{ kw}$$

برای محاسبه نیروی وارد بر عضو MN در مقطع (۱) رابطه تعادل ممان را نسبت به نقطه F می‌نویسیم. یعنی:

$$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow F_{MN} \times a + 100a - 40(3a) = 0 \Rightarrow F_{MN} = 20 \text{ KN}$$

لذا جواب کلی این مساله عبارتند از:

$$F_{FN} = 84.85 \text{ KN}$$

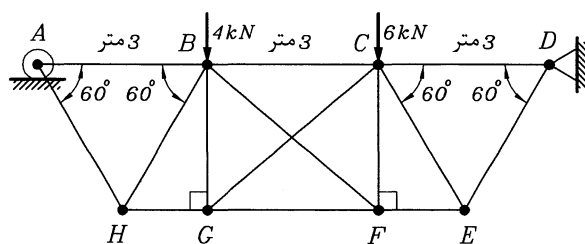
$$F_{ME} = 0$$

$$F_{GM} = 84.85 \text{ KN}$$

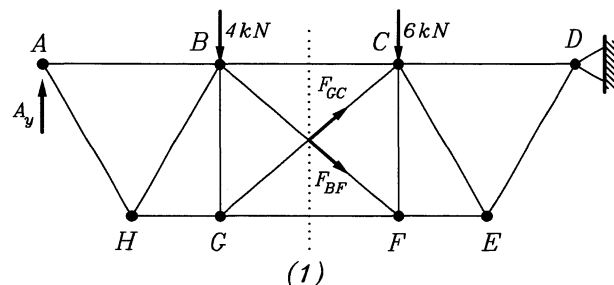
$$F_{FL} = 0$$

$$F_{MN} = 20 \text{ KN}$$

مساله ۲: در خرابی زیر، نیروی وارد بر عضو BG چقدر است؟ در این خرابی از دو کابل CG و EF استفاده شده است.



ابتدا نیروهای وارد بر دو کابل BF و CG را محاسبه می‌کنیم. برای این کار سازه را با مقطع (۱) قطع می‌کنیم.



حل: ابتدا با نوشتن رابطه تعادل، حول نقطه D برای کل سازه، می‌توان عکس‌العمل غلطک A یعنی A_y را محاسبه نمود. یعنی:

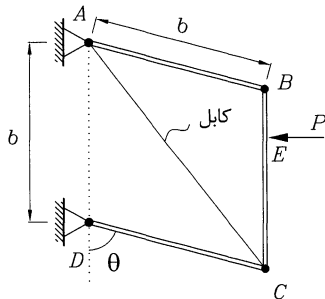
$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow A_y(9) - 6(6) - +6(3) = 0 \Rightarrow A_y = 6 \text{ kw}$$

حال با همان توجیه مشابهی که در مساله قبل ذکر گردید، اولاً دو نیروی وارد به دو کابل یعنی F_{BF} و F_{GC} بایستی کششی ثانیاً به علت تقارن سازه، این دو نیرو بایستی یا با یکدیگر یکسان و یا بایستی هر دو (یا یکی از آنها) صفر شود. با توجه به رابطه تعادل در جهت y برای قسمتی از سازه که در سمت چپ مقطع (۱) قرار گرفته نتیجه می‌گیریم، که F_{BF} و $F_{GC} = 0$ یک مقدار کششی یا صفر بوده که از رابطه زیر بدست می‌آید.

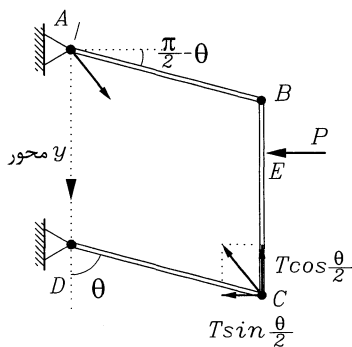
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 6 - 6 - F_{BF} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{BF} = 0$$

حال اگر رابطه تعادل را در مفصل G بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که نیروی وارد بر عضو BG بایستی صفر باشد. یعنی:

$$F_{BG} \uparrow \quad F_{GH} \leftarrow \rightarrow F_{GF} \Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BG} = 0$$



مساله ۳: کابل (یا تسمه نازک) AC سازه ABCD را تحت نیروی افقی P به صورت یک متوازی الاضلاع در حال تعادل نگهداری می‌کند. یقین کنید، نیروی وارد بر کابل را (T). زاویه متوازی الاضلاع و b ضلع آن می‌باشند.



حل: کابل AC فقط می‌تواند نیروی کششی را تحمل کند. لذا نیروی کششی مانند شکل زیر نشان داده می‌شوند. با توجه به دلایلی که در بحث انرژی (اصل کار مجازی) در جزوه آورده شده است، برای این مساله بهتر است که از روش انرژی استفاده شود. دو نیروی P و نیروی T واقع در مفصل C جزو نیروهای فعال بوده که کار انجام می‌دهند. نیروی کششی T واقع در مفصل A یک نیروی غیرفعال است، زیرا هیچ‌گونه کاری در مفصل قید شده A نمی‌تواند انجام دهد.

با توجه به مطالبی که در بحث انرژی جزوه بیان شده است، بهتر است مساله از روش شبه برداری (یعنی انتخاب محور مختصات XY) حل گردد. لذا در مفصل قید شده A محورها مختصات XY مانند شکل انتخاب می‌شوند و رابطه انرژی با توجه دقیق به علائم مربوط به نیروها و علائم مربوط به جابجائی‌ها، به صورت زیر نوشته می‌شود.

لازم به ذکر است که در روش برداری یا شبه برداری انرژی، بهتر است نیروها در راستای محور افقی X و عمودی Y تجزیه شوند. لذا نیروی T در محل مفصل C در دو جهت X و Y تجزیه شده است. رابطه کلی انرژی برای سازه، عبارت است از:

$$(-P)(dx_E) - \left(T \sin \frac{\theta}{2}\right)(dx_C) - \left(T \cos \frac{\theta}{2}\right)(dy_C) = 0$$

با توجه به شکل:

$$x_E = d \sin \theta \Rightarrow dx_E = b \cos \theta d\theta$$

$$x_C = b \sin \theta \Rightarrow dx_C = b \cos \theta d\theta$$

$$y_C = b + b \cos \theta \Rightarrow dy_C = -b \sin \theta d\theta$$

$$P \cos \theta = T \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right)$$

$$P \cos \theta = T \sin \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$P \cos \theta = T \sin \frac{\theta}{2}$$

$$T = \frac{P \cos \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

نیروی کششی وارد بر کابل

نکات دوم: خواص سطوح در چرخش محوره‌های مختصات

در صفحه ۳۶ این جزوه در مورد خواص سطوح (مانند ممان اول و دوم سطح) نسبت به محوره‌های کارتزین x و y بحث گردید. حال در این فصل به خواص سطوح نسبت به محوره‌های متعامد x' و y' که از دوران محوره‌های x و y به وجود آمده است، می‌پردازیم. همین‌طور در این فصل مختصری در مورد خواص سطوح جدار نازک که قبلاً در جزوه به آن پرداخته نشده است نیز می‌پردازیم. از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد که خواص سطوح برای سطوح جدار ضخیم با اشکال ساده (مانند مستطیل - مثلث - و دیگر سطوح ساده) را نیز مطالعه نمایند. به‌عنوان مثال در هر مرجع استاتیک، مثال‌های حل شده فراوانی وجود دارد و امید است که دانشجویان محترم مطالعه‌ای را نیز به روی خواص سطوح این اشکال ساده داشته‌باشند. در این فصل بیشتر به اشکال پیچیده‌تر پرداخته می‌شود. شایان ذکر است که در چند ساله اخیر (سال ۱۳۸۲ به بعد) در امتحانات کنکور کارشناسی ارشد، مسائل متعددی در مورد خواص سطوح در هنگام چرخش محور مختصات مطرح بوده است، لذا این فصل می‌تواند کمک شایان را برای دانشجویان محترم به‌همراه داشته باشد.

نکاتی چند در مورد ممان اول و دوم سطوح نسبت به محوره‌های مختصات x و y

محوره‌های x و y یعنی محوره‌های افقی و عمودی که در این فصل از آن یاد می‌گردد:

$$I_x = \int y^2 dA \quad \text{ممان دوم سطح نسبت به محور } x$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad \text{ممان دوم سطح نسبت به محور } y$$

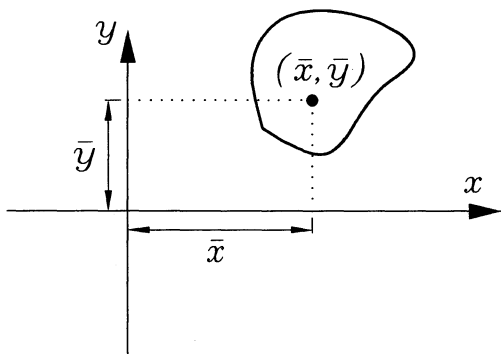
$$Q_x = \int y dA \quad \text{ممان اول سطح نسبت به محور } x$$

$$Q_y = \int x dA \quad \text{ممان اول سطح نسبت به محور } y$$

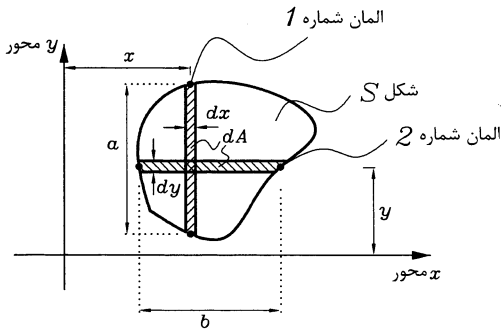
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{Q_y}{A} \quad \text{مختصات مرکز سطح}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{Q_x}{A} \quad \text{مختصات مرکز سطح}$$

که A سطح مقطع کل و \bar{x} و \bar{y} مختصات مراکز سطوح می‌باشند (مانند شکل زیر).



تذکر بسیار مهم: برای محاسبه I_x یا I_y (و همچنان Q_x یا Q_y)، حتماً دقت شود که المان‌های صحیح را از درون کل سطح انتخاب نمائیم. به عنوان مثال فرض کنید که می‌خواهیم I_x یا Q_x را در شکل بسته S در زیر محاسبه نمائیم.



$$I_x = \int y^2 dA \quad \text{ممان دوم سطح نسبت به } x$$

$$Q_x = \int y dA \quad \text{ممان اول سطح نسبت به } x$$

برای محاسبه I_x و Q_x حتماً بایستی از المان شماره ۲ در بالا استفاده کرد(نه از المان شماره ۱). یعنی از $dA = bdy$ (نه از $dA = adx$) زیرا اگر به شکل بالا توجه گردد المان شماره ۲ مقدار ممان اول سطح $\int y dA$ را بیان می‌کند، در صورتی که المان شماره ۱ مقدار ممان اول سطح $\int x dA$ را بیان می‌کند. لذا برای محاسبه I_x و Q_x بایستی از المان شماره ۲ استفاده نمود و برای محاسبه I_y و Q_y بایستی از المان شماره ۱ استفاده نمود. یا به عبارت دیگر:

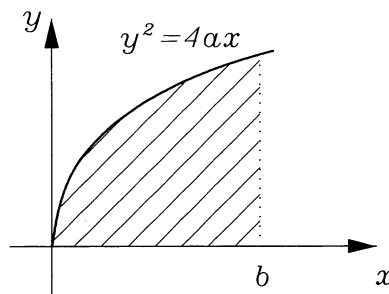
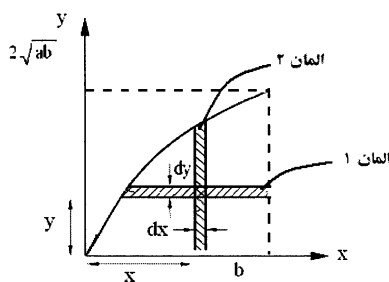
$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 b dy$$

$$Q_x = \int y dA = \int y b dy$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 a dx$$

$$Q_y = \int x dA = \int x a dx$$

مساله ۱: مرکز سطح زیر یعنی \bar{x} و \bar{y} را محاسبه نمائید.



\bar{x} و \bar{y} را مرکز سطح می‌نامیم: لذا

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x dA}{A} \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{A} \quad (2)$$

برای محاسبه A (یعنی مخرج رابطه ۱ و ۲) از المان ۱ یا المان ۲ استفاده می‌کنیم یعنی هیچ فرقی نمی‌کند از کدام المان ۱ یا ۲ استفاده شود. فرض کنید که از المان ۲ استفاده می‌کنیم. یعنی:

در المان ۲ $dA = y dx$

$$y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \int dA = \int_0^b y dx = \int_0^b 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} (ab^3)^{\frac{1}{2}}$$

سطح کل

برای محاسبه Q_y یعنی $\int x dA$ حتماً بایستی از المان شماره ۲ استفاده نمود (نه از المان شماره ۱):

$$Q_y = \int x dA$$

$$dA = y dx$$

$$Q_y = \int_0^b x y dx = 2a^{\frac{1}{2}} \int_0^b x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5} (ab^5)^{\frac{1}{2}}$$

حال برای محاسبه Q_x یعنی $\int y dA$ حتماً بایستی از المان شماره ۱ استفاده نمود (نه از المان شماره ۲):

$$Q_x = \int y dA$$

در المان شماره ۱ $dA = (b-x) dy$

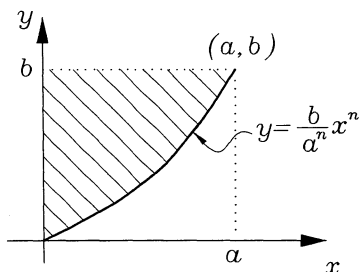
$$a_x = \int y dA = \int_0^{2\sqrt{ab}} y(b-x) dy = \int_0^{2\sqrt{ab}} y \left(b - \frac{y^2}{4a} \right) dy = ab^2$$

حال با داشتن مقادیر A و Q_x و Q_y و جایگزینی آن در روابط ۱ و ۲، خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3}{5} b$$

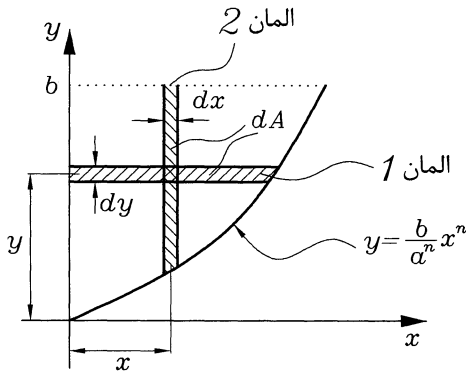
$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{3}{4} (ab)^{\frac{1}{2}}$$

مساله ۲: مرکز سطح هاشورزده محاسبه گردد.



$$\bar{x} = \frac{Q_x}{A}, \bar{y} = \frac{Q_y}{A}$$

برای محاسبه A و همچنین Q_x و Q_y بایستی دو المان شماره ۱ و شماره ۲ مانند زیر انتخاب نمود.



برای محاسبه A یعنی سطح کل از المان ۱ یا المان ۲ استفاده شود. فرض کنید که از المان ۲ استفاده می‌کنیم، پس:

$$dA = (b-y) dx \quad \text{در المان ۲}$$

$$A = \int_0^a (b-y) dx = \int_0^a \left(b - \frac{b}{a^n} x^n \right) dx = b \int_0^a \left(1 - a^{-n} x^n \right) dx$$

با حل انتگرال ساده مقدار A کل سطح، محاسبه می‌گردد.

برای محاسبه Q_y حتماً بایستی از المان شماره ۲ استفاده شود. یعنی:

$$Q_y = \int x dA$$

$$Q_y = \int_0^a x (b-y) dx = \int_0^a x \left(b - \frac{b}{a^n} x^n \right) dx = \int_0^a \left(bx - \frac{b}{a^n} x^{n+1} \right) dx$$

با حل انتگرال ساده مقدار Q_y محاسبه می‌شود و سپس از رابطه $\bar{x} = \frac{Q_y}{A}$ مقدار \bar{x} محاسبه می‌گردد.

حال برای محاسبه Q_x حتماً بایستی از المان شماره ۱ استفاده شود. یعنی:

$$Q_x = \int y dA = \int y \cdot x dy$$

از طرفی معادله منحنی را می‌توان بر حسب y ، به صورت زیر نوشت:

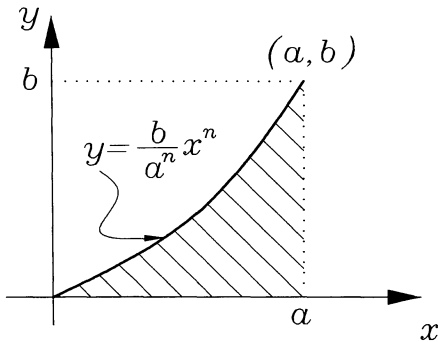
$$y = b a^{-n} x^n \Rightarrow x = \left(\frac{y}{b a^{-n}} \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \frac{a}{B^{\frac{1}{N}}} Y^{\frac{1}{N}}$$

پس مقدار Q_x عبارت است از:

$$Q_x = \int_0^b \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} y^{\frac{1+n}{n}} dy$$

با حل انتگرال ساده مقدار Q_x محاسبه شده و سپس از $\bar{y} = \frac{Q_x}{A}$ مقدار \bar{y} نیز محاسبه می‌شود.

مساله ۳: در شکل زیر مقدار \bar{x} و \bar{y} مرکز سطح هاشورزده، محاسبه گردد.



راهنمایی: دقیقاً مانند مثال قبل این مساله حل می‌شود، از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد، با توجه به مساله قبل و راهنمایی‌های زیر، خود اقدام به حل این مساله بنمائید،

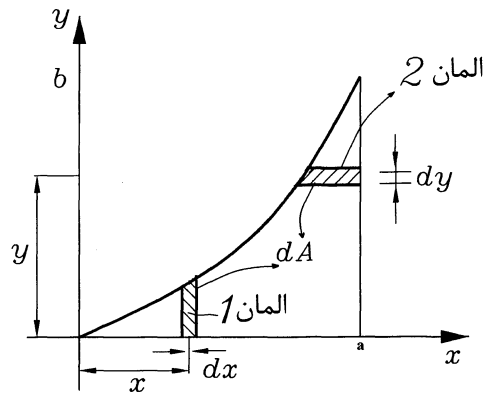
برای المان ۱ $dA = ydx$

برای المان ۲ $dA = (a-x)dy$

$$Q_x = \int y dA = \int_0^b y(a-x) dy$$

$$Q_y = \int x dA = \int_0^a xy dx$$

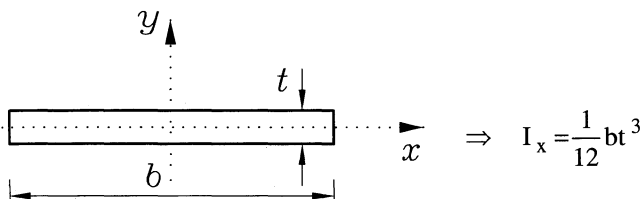
$$A = \int_0^a y dx$$



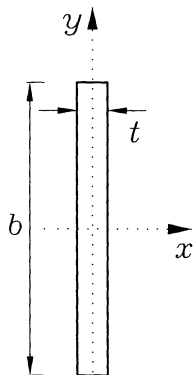
در سه معادله آخر به جای y مقدار $\frac{b}{a^n}x^n$ و به جای x مقدار $\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}}$ را قرار داده تا Q_x و Q_y و A محاسبه می‌شوند و سپس از رابطه $\bar{x} = \frac{Q_y}{A}$ و $\bar{y} = \frac{Q_x}{A}$ مقادیر \bar{x} و \bar{y} را بدست می‌آوریم.

محاسبه ممان اول و دوم سطوح جدار نازک نسبت به محور x و y

در این فصل از محورهای x و y به صورت محورهای افقی و عمودی (در مختصات جسم) نام برده می‌شود و ممان‌های اول و دوم سطح نسبت به این محورهای x و y محاسبه می‌شوند. در بخش‌های بعدی محاسبه ممان‌های اول و دوم سطوح نسبت به محورهای جدید x' و y' را که اولاً از انتقال محورهای x و y و ثانیاً از دوران محورهای x و y ایجاد شده‌اند بحث خواهد شد. نکته مهم در محاسبات خواص سطوح مقاطع جدار نازک که ضخامت اعضای آن، t می‌باشد. این است که معمولاً بایستی از عبارت‌های t^2 و توان‌های بالاتر صرف نظر نمود. مثلاً اگر فرض کنیم که در یک سازه جدار نازک دو عضو آن، به صورت زیر (شکل‌های ۱ و ۲) باشد. می‌توان I_x و یا I_y را به صورت زیر نوشت.

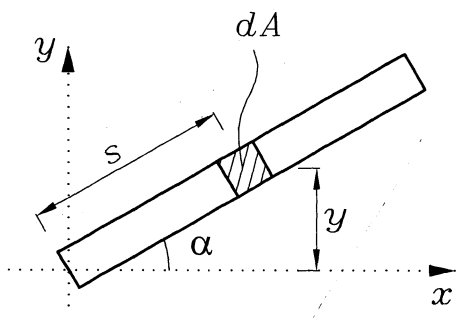
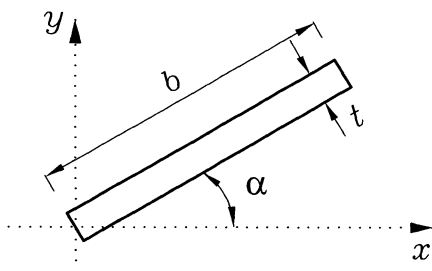


در محاسبات می توان از عبارت $\frac{1}{12}bt^3$ چشم پوشی نمود.



$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2}tb^3$$

و اگر عضو مربوط به سازه، مانند شکل ۳ در زیر با زاویه α بسازد، می توان I_x آنرا به صورت زیر محاسبه نمود.



برای محاسبه I_x بایستی به طور مستقیم، از انتگرال $\int y^2 dA$ استفاده نمود

یعنی:

یک المان کوچک به طور ds در فاصله S از مبدا در نظر می گیریم.

$$I_x = \int_0^b (S \sin \alpha)^2 t \cdot ds$$

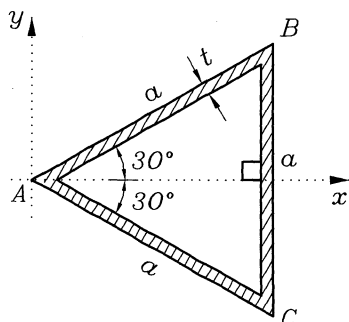
$$I_x = t \cdot \sin^2 \alpha \int_0^b S^2 ds$$

با حل انتگرال ساده بالا I_x محاسبه می شود.

مساله ۱: در شکل جدار نازک زیر که ضخامت اعضاء t و طول هر سه عنصر یکسان و برابر a است. مقدار I_x چقدر است؟ همین طور

ممان اول سطح Q_x چقدر است؟

حل: عضو جدار نازک BC دارای I_x به صورت زیر می باشد:



$$I_{x,BC} = \frac{1}{12}ta^3$$

عضوهای AB و AC متقارن و یکسان می باشند و:

$$I_{x,AB} = \int y^2 dA$$

$$dA = t ds$$

$$I_{x,AB} = \int (S \sin 30)^2 t ds$$

طبق نکاتی که در این فصل در قسمت قبلی بحث شد، می توان نوشت:

لذا I_x کل عبارت است از:

$$I_x \text{ کل} = 2I_{x,AB} + I_{x,BC}$$

$$I_x \text{ کل} = 2 \int_0^a (S \sin 30)^2 t ds + \frac{1}{12} ta^3$$

$$I_x = 2t \sin^2 30 \int_0^a S^2 ds + \frac{1}{12} ta^3$$

با حل انتگرال مقدار I_x محاسبه می شود.

برای محاسبه Q_x کل می توان نوشت.

$$Q_x \text{ کل} = 2Q_{x,AB} + Q_{x,BC}$$

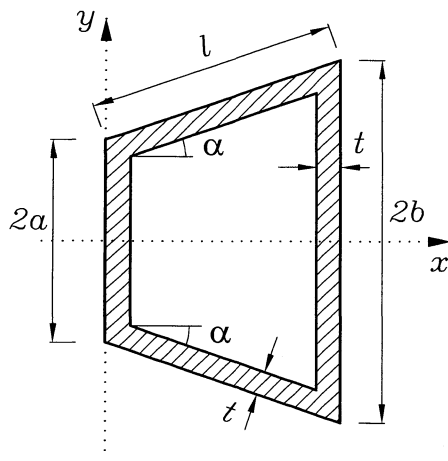
$$Q_{x,BC} = \bar{y}A = 0 \times a \times 1 = 0$$

$$Q_{x,AB} = \int y dA = \int_0^a (S \sin 30) t ds = \sin 30 \cdot t \int_0^a S ds = \frac{t \cdot a^2}{2} \sin 30$$

$$Q_x \text{ کل} = 2 \times \frac{ta^2}{2} \sin 30 = ta^2 \sin 30$$

مساله ۲: در پروفیل جدار نازک زیر به ضخامت t ، مقدار I_x چقدر است؟

همچنین مقدار Q_x (ممان اول سطح کل نسبت به محور x) را محاسبه نمایید



$$I_x \text{ کل} = I_{x,AD} + I_{x,AD} + 2I_{x,AB}$$

$$I_{x,AD} = \frac{1}{12} t (2a)^3 = \frac{2}{3} ta^3$$

$$I_{x,BC} = \frac{1}{12} t (2b)^3 = \frac{2}{3} tb^3$$

$$I_{x,AB} = \int y^2 dA$$

برای محاسبه این انتگرال، به شکل زیر توجه شود.

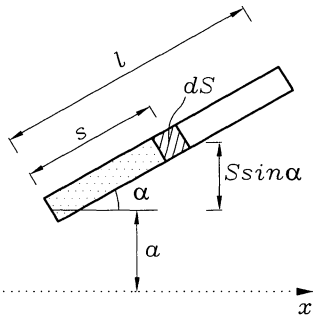
$$y = S \sin \alpha + a$$

$$dA = t \, ds$$

پس

$$I_{x,AB} = \int_0^\ell (S \sin \alpha + a)^2 t \, ds$$

$$I_{x,AB} = t \int_0^\ell (\sin^2 \alpha S^2 + 2a \sin \alpha \cdot S + a^2) \, ds$$



با حل این انتگرال ساده مقدار $I_{x,AB}$ محاسبه می‌شود و سپس با داشتن مقادیر $I_{x,AD}$ و $I_{x,BC}$ این مقادیر را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم تا I_x کل محاسبه شود.

محاسبه Q_x کل:

$$Q_x = Q_{x,AD} + Q_{x,BC} + 2Q_{x,AB} \quad (2)$$

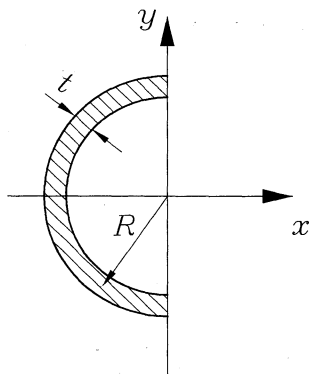
$$Q_{x,AD} = \bar{y} \cdot A = 0 \times 2 \times t = 0$$

$$Q_{x,BC} = \bar{y} \cdot A = 0 \times 2b \times t = 0$$

$$Q_{x,AB} = \int y \, dA = \int_0^\ell (S \sin \alpha + a) t \, ds = t \int_0^\ell (S \sin \alpha + a) \, ds$$

با حاصل این انتگرال ساده مقدار Q_{AB} محاسبه می‌شود و سپس با جایگزین مقادیر مربوط در رابطه ۲ مقدار Q_x کل، محاسبه می‌شود.

مسئله ۳: مقدار I_x و Q_x در نیم دایره جدار نازک به شعاع R چقدر است؟



حل: برای تمام سازه‌های خمیده که در مختصات قطبی (r, θ) حل می‌شوند، اصولاً خواص سطوح به‌طور مستقیم از حل انتگرال‌های

مربوط زیر قابل حل هستند.

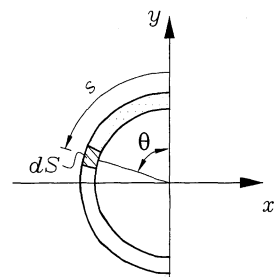
$$I_x = \int y^2 \, dA$$

$$Q_x = \int y \, dA$$

$$y = R \cos \theta$$

$$dA = t \, ds$$

$$dA = t \cdot R \, d\theta$$



$$I_x = \int_0^\pi (R \cos \theta)^2 t R d\theta$$

$$I_x = t R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \quad (1)$$

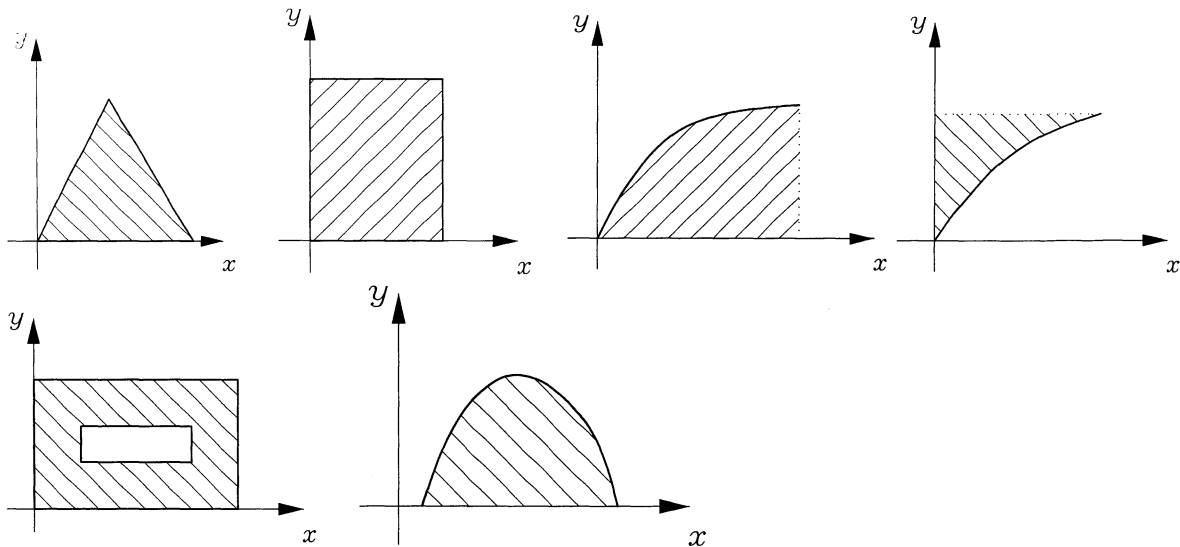
$$Q_x = \int_0^\pi R \cos \theta \cdot t R d\theta$$

$$Q_x = t R^2 \int_0^\pi \cos \theta d\theta$$

با حل انتگرال روی ساده ۱ و ۲ مقادیر I_x و Q_x محاسبه می‌گردد.

محاسبه ممان اول و دوم سطوح جدار ضخیم نسبت به محور X و Y

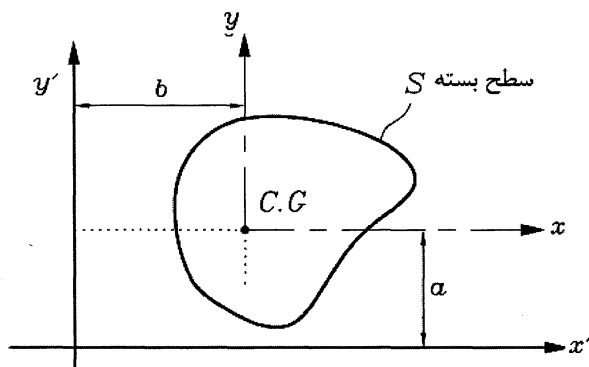
در این فصل مجدداً محورهای X و Y، یعنی محورهای متعامد افقی و عمودی واقع در صفحه در مورد محاسبه I_x و I_y و Q_x و Q_y به کار برده می‌شود. سطوح جدار ضخیم قبلاً بحث گردید و چند نمونه مساله حل گردید، مانند سطوح جدار ضخیم زیر. همان طوری که قبلاً از دانشجویان محترم تقاضا گردید برای مقاطع با شکل ساده سعی فرمائید به کتب و جزوات درسی خود مراجعه و چند نمونه مساله حل نمائید، در این جزوه علاوه بر نکات مهمی که در محاسبه خواص سطوح جدار ضخیم در بخش‌های قبل اشاره شد نیز در بخش بعدی محاسبه خواص سطوح در اثر اولاً انتقال محورهای متعامد X و Y و ثانیاً در اثر دوران (یا چرخش) محورهای متعامد X و Y بحث می‌شود. چند نمونه از سطوح جدار ضخیم به صورت زیر است:



محاسبه خواص سطوح در اثر انتقال محورهای متعامد X و Y

اگر فرض کنیم که I_x و I_y (یا Q_x و Q_y) خواص سطوح نسبت به محورهای متعامد، مرجع XY (که X, y محورهای افقی و عمودی می‌باشند) باشند، می‌توان این خواص سطوح را نسبت به محورهای مختصات متعامد X' و Y' که از انتقال عمودی و افقی دو محور به ترتیب X و Y ایجاد شده‌اند، نیز محاسبه نمود. فرض یک سطح بسته S نسبت به محورهای X و Y به ترتیب دارای I_x و I_y (یا Q_x و Q_y)، باشد. لذا می‌توان $I_{x'}$ و $I_{y'}$ (یا $Q_{x'}$ و $Q_{y'}$) را از رابطه زیر بدست آورد. شایان ذکر است که اولاً محورهای X و Y

به ترتیب به اندازه a و b در جهت عمودی و افقی جابجا شده تا محور $x'y'$ ایجاد گردد و ثانیاً محورهای اولیه x و y از مرکز سطح بسته S می گذرند.

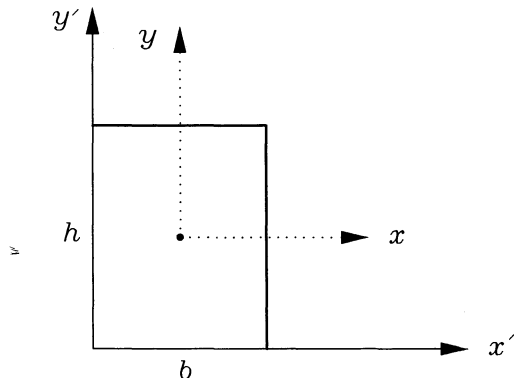


$$I_{x'} = I_x + Aa^2$$

$$I_{y'} = I_y + Ab^2$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + Aab$$

به عنوان مثال فرض در مستطیل $b \times h$ زیر می خواهیم $I_{x'}$ و $I_{y'}$ را محاسبه نماییم.



$$a = \frac{h}{2}$$

$$b = \frac{b}{2}$$

$$I_{x'} = I_x + Aa^2$$

$$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3 + bh \frac{h^2}{4} = \frac{1}{3}bh^3$$

$$I_{y'} = I_y + Ab^2$$

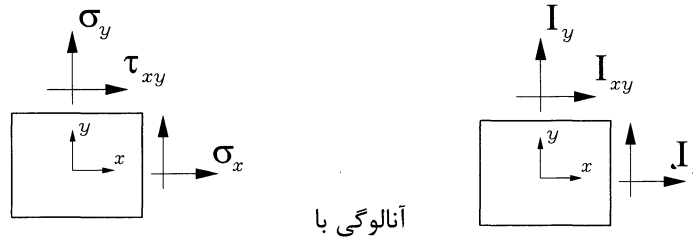
$$I_{y'} = \frac{1}{12}hb^3 + bh \frac{b^2}{4} = \frac{1}{3}hb^3$$

توجه: این قسمت معمولاً در کلاس های درسی دانشگاه دانشجویان محترم و در تمامی مراجع استاتیک وجود دارد و از دانشجویان خواهش می شود خود اقدام به حل مثال های بیشتری نمایند.

محاسبه خواص سطوح در اثر دوران محورهای متعامد x و y

از آنجائی که این فصل معمولاً در کلاس های درسی کمتر مورد بحث قرار می گیرد و از طرفی در سه سال گذشته در امتحانات کنکور ارشد این فصل مورد توجه طراحان سوالات امتحانی می باشد. و همچنین این فصل در مقاومت مصالح در بخش دایره مور از اهمیت بالائی برخوردار است. لذا از دانشجویان محترم تقاضا می گردد که این فصل را در اولویت های بالای درسی خود قرار دهند، زیرا هم در فصل استاتیک و هم در فصل مقاومت مصالح در امتحانات کنکور اهمیت به سزایی دارند.

این فصل دقیقاً مانند دایره مور در درس مقاومت مصالح می باشد مشروط بر اینکه به طور آنالوگی I_x با σ_x و I_y با σ_y و I_{xy} با τ_{xy} تشابه دارند. لازم به ذکر است که I_x و I_y و I_{xy} ، خواص سطوح نسبت به محورهای متعامد x و y بود که از مرکز سطح مورد نظر می گذرند.

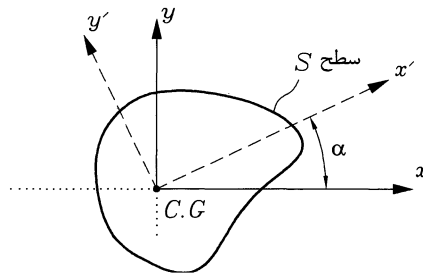


از آنجائی که خواص سطوح در درس استاتیک دو بعدی بحث می‌گردد، ولی مؤلفه‌های تنش در مقاومت مصالح سه بعدی بحث می‌گردد لذا در این فصل مباحث دو بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند و در انتها به طور بسیار خلاصه روابط برای شرایط سه‌بعدی نیز مورد بحث قرار می‌گیرند. یا به عبارت دیگر در فضای سه‌بعدی، خواص سطوح I_x و I_y و I_z و I_{xy} و I_{yz} و I_{zx} و ... نیز مورد توجه قرار می‌گیرد.

توجه بسیار مهم

در این جا بحث بر اساس سه روش متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد. یکی از این روش‌ها که بعداً آنرا روش «نامتغیر خواص سطوح» می‌نامیم اولاً برای مسائل کنکور که به صورت تستی بایستی در ماکزیمم دو دقیقه به سؤالات جواب داد مفید بوده و ثانیاً برای مسائل سه بعدی که حل آنها بسیار وقت‌گیر بوده نیز برای امتحان کنکور و حل سریع بسیار مفید می‌باشد ابتدا هدف اصلی از این بخش به صورت زبان ساده زیر بیان می‌شود.

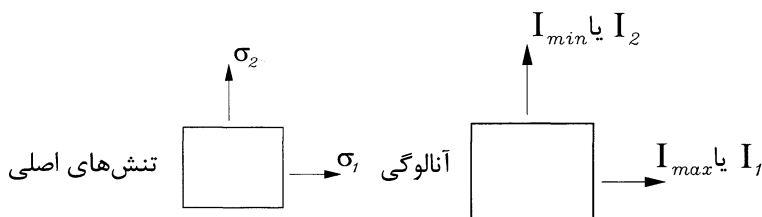
هدف: یک سطح S نسبت به محورهای متعامد x و y که از مرکز سطح می‌گذرند، دارای ممان‌های سطح دوم I_x و I_y و I_{xy} می‌باشد. اگر محور x را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه α دوران دهیم محور x' تشکیل می‌شود. یقین کنید. ممان دوم این سطح را نسبت به محورهای متعامد x' و y' (یعنی $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$) بدست می‌آوریم.



برای حل این مثال، سه روش زیر ارائه می‌گردد و سپس چندین مساله نمونه و کاربرد سریع هر کدام از این روش‌ها اشاره خواهد شد.

روش اول: روش دایره مور

همان طوری که اشاره شد هدفی که در بالا ذکر شد، می‌تواند آنالوگی با تنش‌ها در دایره مور، مورد بررسی قرار گیرد:



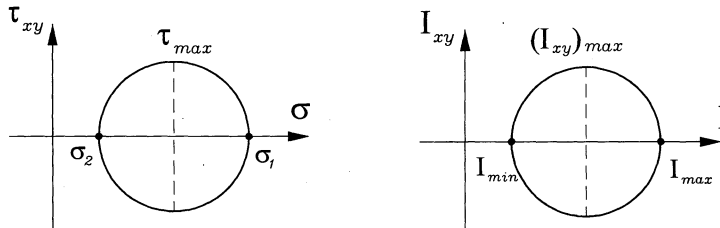
یعنی ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح (I_{max}, I_{min}) آنالوگی با I_{max}, I_{min} تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 می‌باشد، در برخی مراجع I_{min}, I_{max} را به ترتیب با I_2, I_1 نشان می‌دهند.

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rightarrow I_x, I_y, I_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$

یا به صورت ماتریس

و دایره مور به صورت زیر می‌باشد.



ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح (یعنی I_{max} و I_{min}) را مانند تنش‌های اصلی، می‌توان به صورت ماتریس، مانند زیر نوشت.

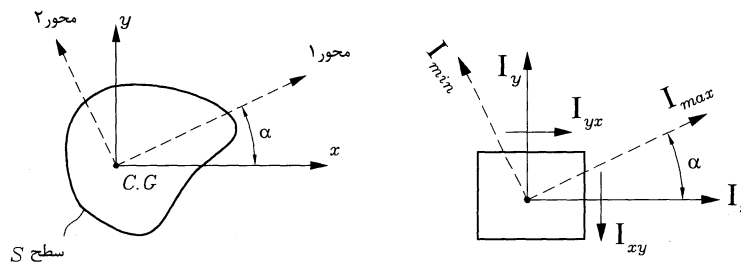
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{max} & 0 \\ 0 & I_{min} \end{bmatrix}$$

تنش اصلی

محاسبه ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح و تعیین جهت ماکزیمم ممان دوم سطح

برای فهم بهتر فرض کنید که در یک سطح باز یا بسته S ، خواص سطح نسبت به محورهای متعامد x و y (که محورهای xy از مرکز سطح S می‌گذرد) برابر با I_x و I_y و I_{xy} باشد. حال محور x را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه α درجه دوران می‌دهیم تا محور متعامد 1-2 که ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح در روی آنها قرار دارند ایجاد گردد. تعیین کنید اولاً ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح (I_{min} و I_{max} یا به تعریف دیگر I_1 و I_2) چقدر است؟ ثانیاً زاویه α چقدر است؟

برای جواب می‌توان یا مستقیماً از روش هندسی دایره مور استفاده نمود یا اینکه از روش ریاضی دترمینانت استفاده نمود. شایان ذکر است که چنانچه مسائل دو بعدی باشند، روش هندسی دایره مور ساده‌تر می‌باشد. ولی اگر مسائل سه بعدی باشند، روش هندسی دایره مور مشکل شده و بهتر است از روش ریاضی دترمینانت استفاده نمود. در هر حال در اینجا برای جواب به این مثال از هر دو روش استفاده می‌شود.



از روش هندسی دایره مور:

$$I_{max}, I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

و مقدار α از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

تذکر مهم: اگر دانشجویان عزیز به خاطر داشته باشند، محاسبات بالا برای محاسبه I_{\max} و I_{\min} و α دقیقاً مانند فرمول‌های زیر، برای مؤلفه‌های تنش‌های اصلی در دایره مور است.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$$

حال از روش ریاضی حل می‌کنیم. همان‌طوری که قبلاً اشاره شد روش ریاضی برای مسائل سه بعدی بسیار مفیدتر می‌باشد.

در این روش خواص سطوح به صورت ماتریس نوشته می‌شود که قطعاً همیشه ماتریس متقارن است، یعنی:

$$\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

$$I_{xy} = I_{yx}$$

حال از قطر اصلی یک I کم می‌کنیم و دترمینانت آنرا برابر صفر قرار می‌دهیم. یعنی:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

حال با حل این دترمینانت، یک معادله درجه دوم بدست می‌آید که ریشه‌های آن در واقع همان I_{\max} و I_{\min} می‌باشند. مثلاً:

$$I^2 - (I_x + I_y)I + (I_{xy} + I_{xy}) = 0$$

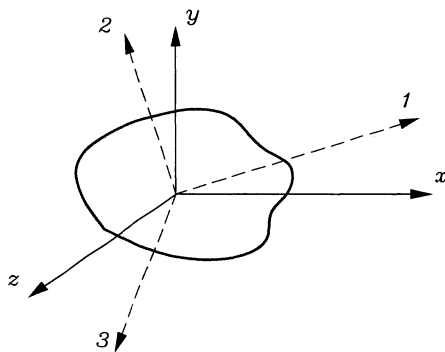
$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

تذکر مهم: این روش ریاضی برای مسائل سه بعدی هم بسیار مهم است مثلاً فرض کنیم خواص سطح S (یعنی ممان دوم سطح)

نسبت به محورهای متعامد x و y و z برابر I_x و I_y و I_z و I_{xy} و I_{yz} و I_{xz} باشد. حال می‌خواهیم این خواص را نسبت به

محورهای اصلی 1 و 2 و 3 که بزرگترین و کوچکترین ممان‌های دوم سطح I_1 و I_2 و I_3 در آن را وجود دارد، بدست آوریم. (مثلاً

$I_1 > I_2 > I_3$) جواب این مساله از روش هندسی دایره مور بسیار مشکل است. لذا از روش ریاضی به‌صورت زیر می‌نویسیم:



دقت شود که محورهای 1 و 2 و 3 محورهای متعامد

اصلی هستند که از دوران محورهای متعامد xyz ایجاد شده‌اند.

حل:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z - I \end{vmatrix} = 0$$

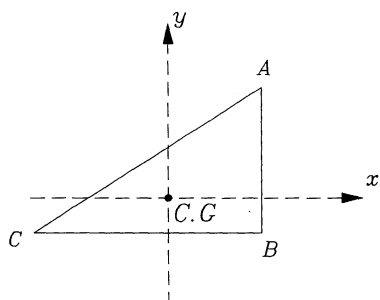
این ماتریس نسبت به قطر اصلی $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ متقارن است و از حل این دترمینانت معادله درجه سوم زیر برحسب I بدست می‌آید که ریشه‌های آن همان ماکزیمم و مینییم ممان دوم سطح را نشان می‌دهد. یعنی:

$$I^3 - (I_x + I_y + I_z)I^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)I - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2 + 2I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0$$

از این معادله درجه سوم I_1 و I_2 و I_3 بدست می‌آید.

توجه بسیار مهم: معمولاً در امتحان کنکور استاتیک مسائل معمولاً دو بعدی هستند، ولی چنانچه سه بعدی مطرح شد چون حل معادله درجه سوم بالا مشکل است و از روش حل تقریبی نیوتن، استفاده می‌شود و بسیار وقت‌گیر است. لذا از دانشجویان تقاضا می‌شود در امتحان تستی سریع ۴ گزینه داده شده را در معادله بالا چک کنند و جواب صحیح را پیدا کنند. البته در قسمت دیگر که روش ثابت‌های نامتغیر سطوح بحث می‌شود، دانشجویان می‌توانند این نوع مسائل را سریع‌تر حتی بدون نیاز به معادله درجه سوم قبل نیز جواب دهند.

مثال: فرض کنید که در دو مثلث قائم‌الزاویه ABC مقابل ممان‌های دوم سطح برابرند با:



$$I_x = 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

(البته اینجانب این اعداد را فرضی در نظر گرفته‌ام دانشجویان عزیز حتماً اگر ابعاد مثلث در دسترس بود بایستی خود ابتدا I_x و I_y و I_{xy} را محاسبه می‌نمودند).

تعیین کنید اولاً ماکزیمم و مینییم ممان دوم سطح، چقدر است؟

ثانیاً در چه زاویه‌ای ماکزیمم ممان دوم سطح اتفاق می‌افتد؟ (یعنی همان‌طوری که در قبل گفته شده محور x در خلاف عقربه ساعت چند درجه α بچرخد تا ماکزیمم ممان دوم سطح نسبت به آن محور ایجاد شود)

روش هندسی:

$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

مقادیر I_x و I_y و I_{xy} را در رابطه بالا قرار داده مقدار 2α بدست می‌آید و نصف آن (بر طبق دایره مور) یعنی α جواب مساله بدست می‌آید.

روش ریاضی:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

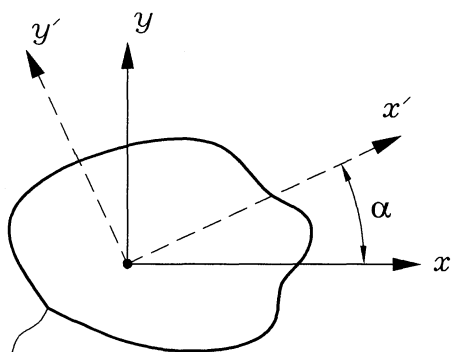
مقادیر I_x و I_y و I_{xy} را در دترمینانت بالا قرار می‌دهیم، یک معادله درجه دوم بر حسب I بدست می‌آید که جواب‌های آن همان I_{\max} و I_{\min} می‌باشند.

روش دوم: روش ماتریس انتقال

هدف: ابتدا به صورت دو بعدی که معمولاً هم در استاتیک مطرح است، بحث می‌کنیم. در قسمت قبل عموماً صحبت از ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح بود (مانند ماکزیمم و مینیمم تنش‌های اصلی در دایره مور). در این فصل هدف اصلی، به صورت مساله زیر است.

مساله: در یک سطح S ممان‌های دوم سطح نسبت به محور متعامد XY که از مرکز سطح S می‌گذرد، برابر I_x و I_y و I_{xy} می‌باشند. حال محور x را در خلاف جهت عقربه ساعت به اندازه یک زاویه دلخواه α می‌چرخانیم تا محور متعامد $x'y'$ ایجاد شود، ممان دوم سطح S نسبت به محور $x'y'$ (یعنی $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$) را تعیین کنید.

جواب: ابتدا فرمول ماتریس انتقال را که به صورت زیر است می‌نویسیم:



سطح S

$$[I'_{ij}] = [t][I_{ij}][t]^T$$

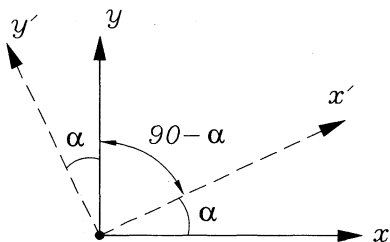
فرمول ۱

که در این فرمول ماتریس انتقال اجزاء عبارتند از:

$$[I'_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix}$$

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$

ماتریس t را ماتریس انتقال گویند که با توجه به چرخش محورها به صورت زیر نوشته می‌شود.



	محور	محور
محور x'	l_x	l_y
محور y'	m_x	m_y

معنی این جدول این است، مثلاً m_y یعنی کسینوس زاویه، بین محور y' و y

l_y یعنی کسینوس زاویه، بین محور x' با y

l_x یعنی کسینوس زاویه، بین محور x' با محور x

m_x یعنی کسینوس زاویه بین محور y' و محور x

پس با توجه به جدول بالا، ماتریس انتقال [t] در فرمول، به صورت زیر می باشد.

$$[t] = \begin{bmatrix} l_x & l_y \\ m_x & m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(90-\alpha) \\ \cos(90+\alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

در فرمول ماتریس انتقال $[t]^T$ یعنی ترانسپوز ماتریس [T] یعنی جای ردیف و ستون ماتریس عوض می شود، یعنی:

$$[t]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

پس جواب مساله عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

از حل این ماتریس مقادیر ممان دوم سطح $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ نسبت به محور متعامد $x'y'$ بدست می آید.

تذکر بسیار مهم برای سؤالات تستی کنکور:

اگر دانشجویان تمایل به استفاده مستقیم از روش ماتریس انتقال و حل ماتریس قبل را ندارند، جواب ماتریس قبل به صورت فرمول زیر است و می توانند به طور مستقیم از فرمول زیر برای امتحان استفاده نمایند.

فرمول شماره ۲

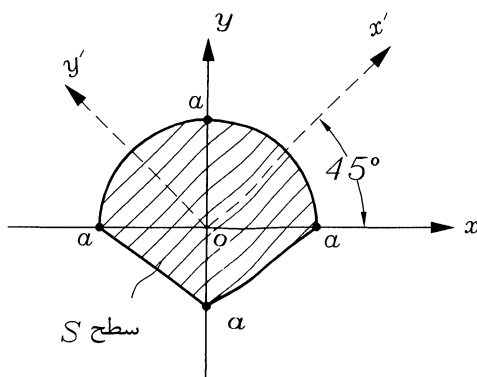
$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

توجه بسیار مهم در تست ها: در اکثر مواقع، در امتحان، تست سطح S را (مانند مثال زیر) طوری می دهند که نسبت به محور y (یا x) تقارن داشته باشد و لذا مقدار I_{xy} همواره برابر صفر می باشد.

مثال: در شکل زیر ممان دوم سطح حول محور x و y به ترتیب I_x و I_y است. مطلوبست اولاً: محاسبه ممان دوم سطوح نسبت به محورهای متعامد محور x' و y' (یعنی $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$) مشروط بر اینکه محور x' با محور x زاویه 45° بسازد. ثانیاً بزرگترین و کوچکترین ممان دوم سطح و زاویه ای که بزرگترین ممان دوم سطح اتفاق می افتد را نیز بدست آورید.



حل: شکل نسبت به محور y تقارن دارد. یعنی $I_{xy} = 0$ است. حال

دانشجویان محترم هم می توانند از فرمول ماتریس انتقال شماره یک مساله را حل کنند و یا می توانند به طور مستقیم از فرمول شماره ۲ استفاده کنند. مثلاً از فرمول ۲ به صورت زیر است.

$$I_{x'} = I_x \cos^2 45 + I_y \sin^2 45 - 0$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2 45 + I_x \sin^2 45 - 0$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 40 + 0$$

لذا از معادله بالا، مقادیر $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ برحسب داده‌های I_x و I_y بدست می‌آیند.
حل قسمت ثانیاً: محاسبه I_{\max} و I_{\min} و جهت آن یعنی زاویه α :

$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \times 0}{I_y - I_x} = 0 \text{ و بدست می‌آید } (I_2 \text{ و } I_1)$$

روش سوم: روش نامتغیرهای خواص سطح (یا ثابت‌های خواص سطح)

این روش برای مسائل دو بعدی و به خصوص سه بعدی در امتحانات تستی ارزشمند می‌باشد، زیرا با داشتن چهار گزینه دیگر شاید نیازی به استفاده از روش اول و دوم نباشد.

معنی این روش بدین صورت است که اگر در یک سطح در فضای دو بعدی ممان‌های دوم سطح نسبت به محور متعامد XY که از مرکز سطح می‌گذرد I_x و I_y و I_{xy} باشد.

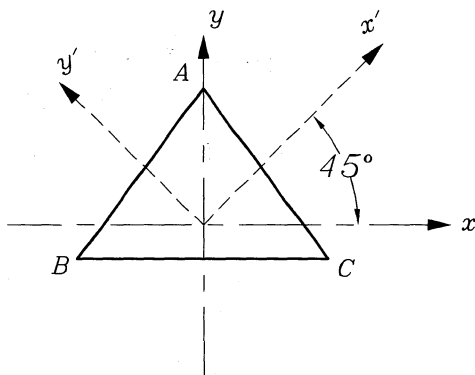
حال اگر محور X به اندازه یک زاویه دلخواه بچرخد و به صورت محور متعامد $x'y'$ درآید و ممان‌های دوم سطح $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ باشد. حتی اگر محور X به اندازه یک زاویه معین بچرخد و به صورت محور متعامد اصلی 1-2 که ماکزیمم و می‌نیمم ممان دوم سطح (یعنی I_{\max} و I_{\min} تشکیل) شود، همواره بین این ممان‌های دوم سطح I_x و I_y و $I_{x'y'}$ و I_{\max} و I_{\min} روابط زیر برقرار است، و چون همواره مقادیر این روابط ممان‌های دوم سطوح به محورهای XY و $x'y'$ و محور 1-2 وابسته نمی‌باشند، آنها را ثابت‌ها یا نامتغیرهای خواص سطوح نامند. یعنی:

فرمول شماره ۳

$$I_x + I_y = I_{\max} + I_{\min} = I_{x'} + I_{y'} = \text{const}$$

$$I_x I_y - I_{xy}^2 = I_{\max} \cdot I_{\min} = I_{x'} I_{y'} - I_{x'y'}^2 = \text{const}$$

مثال: در مثلث ABC ممان‌های دوم سطوح نسبت به محور متعامد XY برابر I_x و I_y است، اگر محور X به اندازه 45° بچرخد تا محور متعامد x' و y' بدست آید. تعیین کنید $I_{x'}$ و $I_{y'}$ کدامیک از گزینه‌های زیر است.



گزینه ۱

$$I_{x'} = \frac{1}{3}I_x + \frac{1}{2}I_y$$

$$I_{y'} = \frac{1}{3}I_x - \frac{1}{3}I_y$$

گزینه ۲

$$I_{x'} = \frac{1}{2}I_x + \frac{1}{2}I_y$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}I_x + \frac{1}{2}I_y$$

گزینه ۳:

$$I_{x'} = 0, I_{y'} = \frac{1}{2}I_y$$

گزینه ۴:

$$I_{x'} = \frac{1}{5}I_x - \frac{1}{6}I_y$$

$$I_{y'} = I_x - \frac{1}{3}I_y$$

جواب: طبق فرمول شماره ۳ بایستی همواره رابطه زیر برقرار باشد.

$$I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$$

لذا گزینه ۲ صحیح است. زیرا در گزینه ۲ داریم:

$$I_{x'} + I_{y'} = \frac{1}{2}I_x + \frac{1}{2}I_y + \frac{1}{2}I_x + \frac{1}{2}I_y = I_x + I_y$$

تذکر مهم: حتی اگر یک سطح سه بعدی در استاتیک مطرح شد، رابطه نامتغیر ممان‌های سطوح واقع در محورهای متعامد XYZ و x'y'z' 123 برقرار خواهد بود.

$$I_x + I_y + I_z = I_{x'} + I_{y'} + I_{z'} = I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}$$

$$I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2 = I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1 = \text{const}$$

$$I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2$$

فرمول شماره ۴

$$I_x + I_y + I_z = I_{x'} + I_{y'} + I_{z'} = I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}$$

$$I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2 = I_{x'} I_{y'} + I_{y'} I_{z'} + I_{z'} I_{x'} - I_{x'y'}^2 - I_{y'z'}^2 - I_{z'x'}^2 = I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1 = \text{const}$$

$$I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2 + 2I_{xy} I_{yz} I_{zx} = I_{x'y'z'} - I_{x'} I_{y'z'} - I_{y'} I_{x'z'} - I_{z'} I_{x'y'} + 2I_{x'y'} I_{y'z'} I_{z'x'}$$

$$= I_1 I_2 I_3 = \text{const}$$

تذکر I₁ و I₂ و I₃ در واقع ماکزیمم و مینیمم و متوسط ممان دوم سطح می‌باشد (مانند تنش‌های دو سطحی σ₁, σ₂, σ₃ در مقاومت مصالح).

تذکر مهم: معمولاً در امتحان استاتیک مساله دو بعدی یعنی فرمول ۳ کاربرد بیشتری دارد، ولی در مقاومت مصالح فرمول ۴ (اگر فرمول ۴ را برحسب تنش‌ها بنویسیم) کاربرد بیشتری دارد. مثلاً فرمول زیر. برای راحتی دیگر تنش‌ها در محورهای x'y'z' نوشته نمی‌شود و فقط در محورهای متعامد XYZ و محورهای اصلی 1,2,3 نوشته می‌شود.

فرمول شماره ۵

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \text{const}$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yx} \tau_{zx} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \text{const}$$

در فرمول بالا σ_1 ، σ_2 ، σ_3 تنش‌های اصلی می‌باشند.

در شرایط دو بعدی فرمول ۵ را می‌توان مانند فرمول ۳ (اما برحسب تنش) نوشت که در کنکور اهمیت بالایی دارد.

فرمول ۶

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$$

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 = \text{const}$$

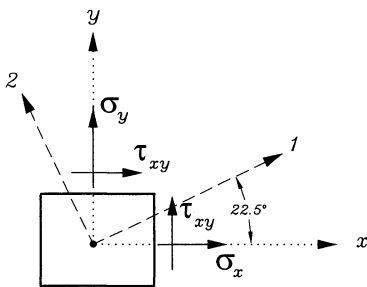
مثال مقاومتی: در نقطه‌ای از یک جسم نازک (تنش صفحه‌ای یا plane stress) مؤلفه‌های تنش نسبت به محور متعام XY برابر σ_x و σ_y و τ_{xy} می‌باشد. اگر محور X را در جهت خلاف عقربه ساعت به اندازه 22.5 درجه بچرخانیم تا محور اصلی متعام 1-2 ایجاد شود (تنش‌های اصلی روی محور 1-2 می‌باشند)، تنش‌های اصلی زوی این دو محور به ترتیب $\sigma_1 = 40 \text{ Mpa}$ و $\sigma_2 = -40 \text{ Mpa}$ می‌باشند. مؤلفه‌های تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} از کدام یک از چهارگزینه زیر بدست می‌آید.

گزینه ۱:

$$\sigma_x = 40 \text{ Mpa}, \sigma_y = -40 \text{ Mpa}, \tau_{xy} = 0$$

گزینه ۲:

$$\sigma_x = 28 \text{ Mpa}, \sigma_y = 28 \text{ Mpa}, \tau_{xy} = 28 \text{ Mpa}$$



$$\sigma_x = 28 \text{ Mpa}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 28 \text{ Mpa}$$

گزینه ۳:

$$\sigma_x = -28 \text{ Mpa}, \sigma_y = 28 \text{ Mpa}, \tau_{xy} = -28 \text{ Mpa}$$

گزینه ۴:

جواب:

از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد که سعی کنند، ابتدا این مساله را از روش اول (دایره مور) و روش دوم (ماتریس انتقال) به صورت کلی حل کنند (البته به در فرمول‌ها، به جای ممان‌های دوم سطح از مؤلفه‌های تنش استفاده نمایند).

ولی در امتحان کنکور به علت کمبود وقت از روش سوم یعنی فرمول ۶ استفاده نمایند. یعنی سریعاً چهارگزینه داده شده را در فرمول ۶ قرار دهند و تحقیق کنند که کدام گزینه در دو فرمول ۶ صادق است. لذا به نظر می‌رسد. گزینه ۱ صحیح باشد.

یادداشت

A series of horizontal dotted lines for writing.

یادداشت

A series of horizontal dotted lines for writing.