www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

جزوه درس:

مقاومت مصالح 2

For more courses visit:

www.DastyarKhoob.ir

با استفاده از جزوات اسکن شده، به محیط زیست کمک کنیم...

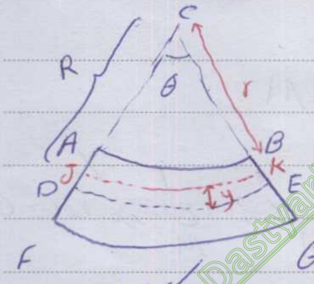
هر آنچه که در این جزوه می خوانید حاصل زحمات دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف می‌باشد که دانسته‌های خود از حضور در کلاس استاد محترم، دکتر عاصم پور را مکتوب کرده اند.

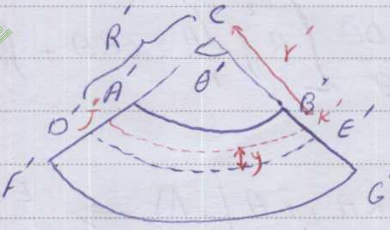
استفاده از این جزوات برای تمامی دانشجویان کاملا رایگان می‌باشد.

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

مقاومت مصالح ۲

خمش تیرهای خمیده





شعاع تار خنثی قبل از اعمال بارگذاری $= R$

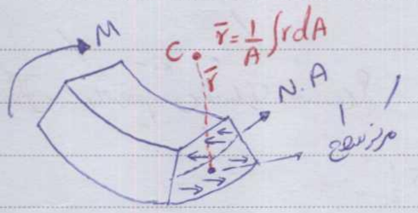
$$R\theta = R'\theta'$$

$R \rightarrow R'$ کاهش $\theta \rightarrow \theta'$ افزایش

$$\left.\begin{aligned} JK &= r\theta \\ J'K' &= r'\theta' \end{aligned}\right\} \longrightarrow \delta = r'\theta' - r\theta$$

$$\left|\begin{aligned} r &= R - y \\ r' &= R' - y \\ \theta' - \theta &= \Delta\theta \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \delta &= (R' - y)\theta' - (R - y)\theta \\ \delta &= -y\,\Delta\theta \end{aligned}$$

پس $\longrightarrow \varepsilon_x = \dfrac{\delta}{r\theta} = -\dfrac{y\,\Delta\theta}{r\theta} \longrightarrow$ $\boxed{\varepsilon_x = -\dfrac{\Delta\theta}{\theta}\,\dfrac{y}{R-y}}$ (1) $\sigma_x = E\,\varepsilon_x$



معادلات تعادل $\longrightarrow$

تعادل نیرو $= \int \sigma_x\, dA = 0$

تعادل ممان $= \int -y\,\sigma_x\, dA = M$

$$\int \sigma_x\, dA \overset{(1)}{=} -\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R-r}{r}\, dA = 0 \Longrightarrow \int \frac{R-r}{r}\, dA = 0$$

$$\longrightarrow R\int \frac{dA}{r} - \int dA = 0 \longrightarrow \boxed{R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}} \ (2)$$

$$\int -y\,\sigma_x\, dA = M \longrightarrow \int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R-r}{r}\, y\, dA = M \xrightarrow{y = R - r} \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\int \frac{(R-r)^2}{r}\, dA = M$$

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\left.\begin{array}{l}\bar{r} = \frac{1}{A}\int r\,dA \\ e = \bar{r} - R\end{array}\right\} \quad \frac{E\Delta\theta}{\theta}\left[R^2\underbrace{\int\frac{dA}{r}}_{A/R} - 2RA + \underbrace{\int r\,dA}_{\bar{r}A}\right] = M$$

e = فاصله مرکز سطح تا تار خنثی

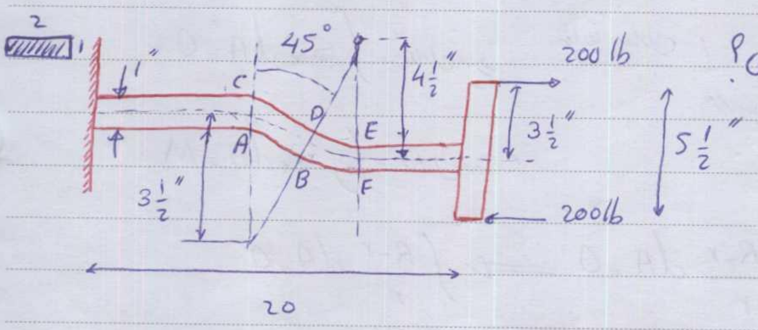
$$\longrightarrow \frac{E\Delta\theta}{\theta}\left[RA - 2RA + \bar{r}A\right] = M \Longrightarrow \frac{E\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{(\bar{r}-R)A} = \frac{M}{eA}$$

$$\longrightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R-y)} = \frac{M(r-R)}{Aer}}$$

$$R\theta = R'\theta' \longrightarrow \frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\frac{\theta'}{\theta} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{M}{EAe}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR}}$$

خوب است دقت e تا چهار رقم اعشار باشد.



سوال: ماکزیمم تنش فشاری و کششی؟

$$M = 200 \times \left(5\tfrac{1}{2}\right) = 1100 \text{ lb.in}$$

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R-y)}$$

$$R = \frac{A}{\int\frac{dA}{r}} = \frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

برای قسمت CD $\quad R = \dfrac{1}{\ln\frac{4}{3}} = 3.485$

سطح تار خنثی در منطقه CD

$$e = \bar{r} - R = 3.5 - 3.485 = 0.015''$$

$$\sigma = \frac{1100 \times (0.485)}{(2)(0.015)(4)} = 4720 \text{ psi}$$

تنش کششی برای CD

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

4.173 , 4.160

Subject:

Year. Month. Date. ( )

79 -7
75 -7

$$\sigma_x = \frac{1100 \times (0.515)}{(2)(0.015)(3)} = 5930 \text{ psi}$$ تنش فشاری روی $\widehat{AB}$

در مقطع $\widehat{DE}$، $\bar{r} = 4.5$ $R = \frac{h}{\ln \frac{5}{4}} = 4.48$ $e = \bar{r} - R = 0.02''$

$$\sigma_x = \frac{My}{Ae(R-y)} = \frac{1100(0.48)}{(2)(0.2)(4)} = 3300 \text{ psi}$$ تنش کششی روی $\widehat{DE}$

$$\sigma_x = \frac{1100(0.52)}{(2)(0.2)(5)} = 2860 \text{ psi}$$ تنش فشاری روی $\widehat{BF}$

تنش در راستای مستقیم $\sigma_x = \frac{MC}{I} = \frac{1100 \times (0.5)}{(2)(1^3)/12} = 3300$

انتقال تنش

	X	Y	Z
x'	λ_{x_1}	λ_{y_1}	λ_{z_1}
y'	λ_{x_2}	λ_{y_2}	λ_{z_2}
z'	λ_{x_3}	λ_{y_3}	λ_{z_3}

مثال $\lambda_{x_1} = \cos(x, x')$

$\lambda_{y_1} = \cos(y, x')$

$$\sigma_x' = \sigma_x \lambda_{x_1}^2 + \sigma_y \lambda_{y_1}^2 + \sigma_z \lambda_{z_1}^2 + 2(\tau_{yz} \lambda_{y_1} \lambda_{x_1} + \tau_{zy} \lambda_{z_1} \lambda_{y_1} + \tau_{xz} \lambda_{x_1} \lambda_{z_1})$$

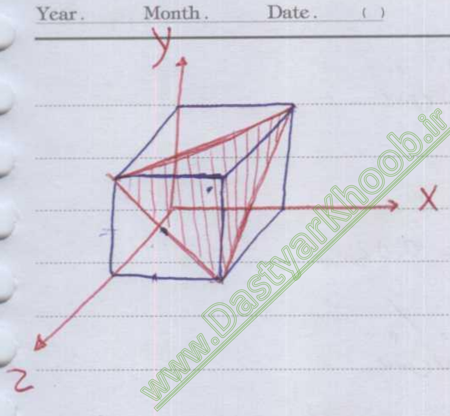
$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x_1} & \lambda_{y_1} & \lambda_{z_1} \\ \lambda_{x_2} & \lambda_{y_2} & \lambda_{z_2} \\ \lambda_{x_3} & \lambda_{y_3} & \lambda_{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{x_1} & \lambda_{x_2} & \lambda_{x_3} \\ \lambda_{y_1} & \lambda_{y_2} & \lambda_{y_3} \\ \lambda_{z_1} & \lambda_{z_2} & \lambda_{z_3} \end{bmatrix}$$

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین اول :



$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 60 & 30 \\ 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

www.DastyarKhoob.ir

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

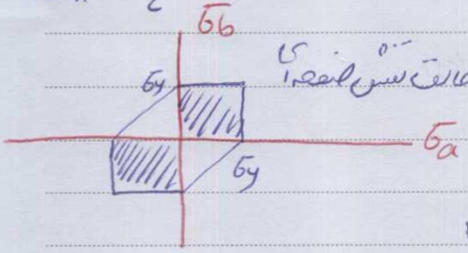
Subject:
Year. Month. Date. ( )

قوانین تسلیم و شکست

Tresca yield criteria

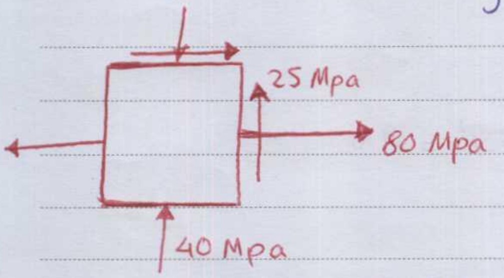
تا زمانی که تنش برشی ماکزیمم کوچکتر از نصف تنش تسلیم باشد شکست اتفاق نمی افتد.

$$\tau_{max} < \frac{\sigma_y}{2}$$



برای حالت تنش صفحه ای

مثال: ضریب اطمینان را مشخص کنید $\sigma_y = 250\ Mpa$



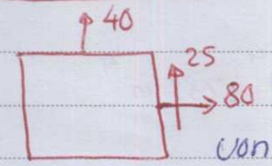
$$\sigma_{ave} = \frac{1}{2}(80-40) = 20\ Mpa$$

$$R = \sqrt{60^2 + 25^2} = 65$$

$$\sigma_a = 20 + 65 = 85 \qquad \sigma_b = 20 - 65 = -45$$

$$|\sigma_a - \sigma_b| = \frac{\sigma_y}{F.S} \xrightarrow{\text{Tresca}} \boxed{F.S = 1.92}$$

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \left(\frac{\sigma_y}{F.S}\right)^2 \xrightarrow{\text{von mises}} \boxed{F.S = 2.19}$$



$$\sigma_a = 92 \qquad \sigma_b = 28$$

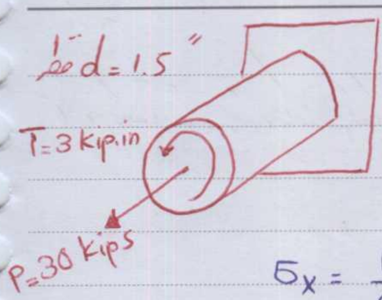
$$\text{von mises} \rightarrow (92)^2 - (92)(28) + (28)^2 = \left(\frac{250}{F.S}\right)^2 \quad F.S = 3.06$$

$$\text{Tresca} \longrightarrow F.S = \cancel{3.1}\ 2.72$$

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال: اگر $\sigma_y=36$ باشد ضریب ایمنی را در هر دو معیار ترسکا و von mises بدست آورید.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{30\times10^3}{\frac{\pi(1.5)^2}{4}} = 16.97 \text{ ksi}$$

$$\underset{\text{برشی}}{\tau_{max}} = \frac{Tc}{J} = \frac{3\times10^3 \times (\frac{1.5}{2})}{0.5\pi(\frac{1.5}{2})^4} = 4.53 \text{ ksi}$$

$\sigma_{ave} = 8.48$ $\qquad R = \sqrt{\left(\frac{16.97-0}{2}\right)^2 + (4.53)^2} = 9.6$

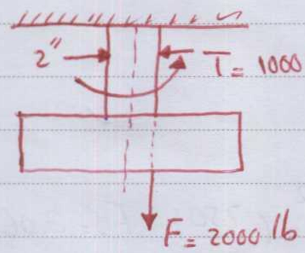
$\sigma_a = 18.08$ ksi

$\tau_{max} = \frac{1}{2}(18.08 + 1.12) = 9.6$

$\sigma_b = -1.12$ ksi

$$\boxed{F.S_{\text{ترسکا}} = \frac{18}{9.6} = 1.87} \qquad \boxed{\underset{\text{von mises}}{F.S} = 1.92} \qquad \sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 \le \left(\frac{\sigma_y}{F.S}\right)^2$$

مثال:



$\sigma_{y\,\text{تسلیم}} = 10$ ksi $\qquad \tau_y = 5$ ksi

$$I_{\text{دایره}} = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(2)^4}{64} = 0.785 \text{ in}^4$$

$$J = I \times 2 = 1.57 \text{ in}^4$$

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

7.165 , 7.97, 7.160, 7.161 $\sigma_y = 210$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

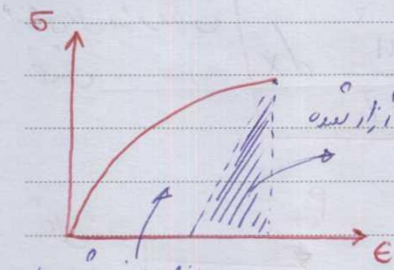
$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{2000}{\pi \frac{2^2}{4}} + \frac{(2000\times1)(1)}{0.785} = 3180\ psi$

$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{(1000)(1)}{1.57} = 637\ psi$ $\sigma_a = \left(\frac{3180}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{3180}{2}\right)^2 + (637)^2} = 3305\ psi$

$\sigma_{min} = -122\ psi$ $F.S$ ترسکا $= \frac{\tau_y}{\tau_{max}} = \frac{5000}{1713.5} =$

von mises $\rightarrow (3305)^2 + (122)(3305) + 122^2 = \left(\frac{10000}{F.S}\right)^2 \rightarrow F.S =$

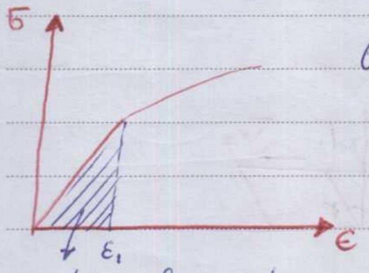
روش‌های انرژی فصل 11



انرژی آزاد شده

انرژی صرف شده برای تغییر شکل دائم

$U = \frac{U}{AL} = \int_0^x \frac{P}{A} \frac{dx}{L} = \int \sigma\, d\epsilon$ انرژی در واحد حجم



$U = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x\, d\epsilon_x \Longrightarrow \frac{E\epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma\epsilon$

$U = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x\, d\epsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x$ انرژی در واحد حجم با تنش قائم

Module of Resilience

U_y مدول جهندگی

$U = \int_0^V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dV$

تنش قائم: بار محوری P/A ، تنش خمشی $\frac{My}{I}$

www.DastyarKhoob.ir

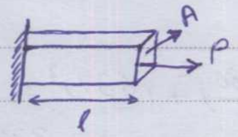
DastyarKhoob

Subject:

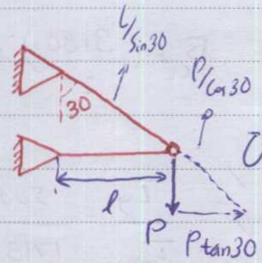
Year. Month. Date. ( )

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \qquad U = \int \frac{P^2}{2A^2E} A\,dx = \int_0^l \frac{P^2}{2AE}\,dx \;\; \xrightarrow{\text{اگر } A \text{ ثابت باشد}} \;\; \boxed{\frac{P^2 l}{2AE}}$$

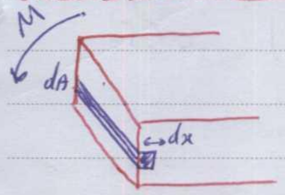
انرژی کل در اثر بار محوری



مثال:



$$U = \frac{(P/\cos 30)(L/\sin 30)}{2AE} + \frac{(P\tan 30)^2 L}{2AE} = \frac{1.5P^2L}{AE}$$



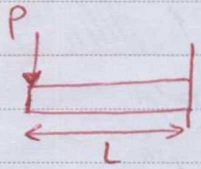
$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$U = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2}\,dV \qquad \underline{\underline{dV = dA \cdot dx}}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \Big(\underbrace{\int_0^y y^2 dA}_{I} \Big) dx \;\Rightarrow\; \boxed{U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx}$$

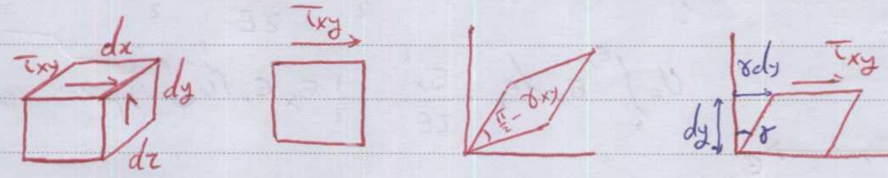
انرژی کل در اثر خمش خالص

مثال:



$$M = -Px$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI}\,dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$



$$U' = \frac{1}{2}(\gamma\,dy)(\tau\,dx\,dz) = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma\,dx\,dy\,dz$$

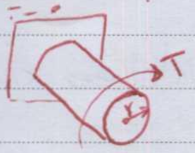
$$U = \frac{1}{2}\gamma\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 \qquad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

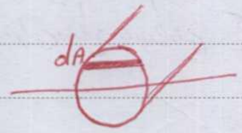
$$\tau_{xy} = G\gamma$$

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir

تنش برشی در اثر پیچش :
$$U=\int_0^V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dV=\int \frac{T^2 r^2}{2GJ^2}\,dV$$

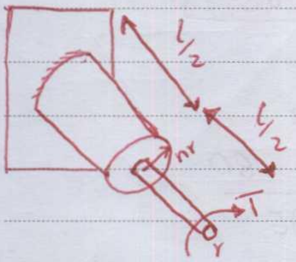




$dV = dA\,dx$

$$U=\int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\Big(\underbrace{\int r^2 dA}_{J}\Big)dx \longrightarrow U=\int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx=\boxed{\frac{T^2 L}{2GJ}}$$

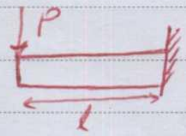
مثال :

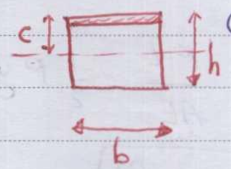


$$J_1=\frac{\pi r^4}{2} \qquad J_2=n^4\frac{\pi r^4}{2}=n^4 J_1$$

$$U=\frac{T^2 L/2}{2GJ_1}+\frac{T^2 L/2}{2n^4 GJ_1} \longrightarrow U=\frac{T^2 L/2}{2GJ_1}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$$

تنش برشی در اثر نیروی برشی : $\tau=\frac{VQ}{It}$





$$Q=\frac{bh^2}{8}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)$$

$$\tau_{xy}=\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right) \qquad U=\int_0^V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dV=\frac{1}{2G}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\right)^2\int_0^V\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

در نهایت
$$\boxed{U_\tau=\frac{3}{5}\frac{P^2 L}{GA}}$$

تیر نشان داده شده در بالا دو نوع انرژی U_τ و U_σ را دارد که

باهم جمع می‌شوند. $U_\sigma=\frac{P^2 L^3}{6EI}$

PAPCO

$$U=U_\tau+U_\sigma=U_\sigma\left(1+\frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

www.DastyarKhoob.ir

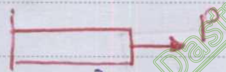
DastyarKhoob

Subject:

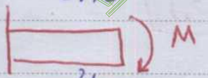
Year. Month. Date. ( )

حالت کلی انرژی ناشی از نیروی برشی که α یک ضریب ثابت ← $U = \int \alpha \frac{P^2}{2GA}\,dx$

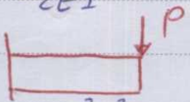
است. به عنوان مثال برای مقطع مستطیلی $\frac{6}{5}$ است.



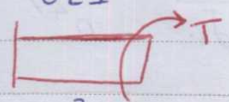
$U = \frac{P^2L}{2AE}$ $= \frac{1}{2}P\Delta x$



$U = \frac{M^2L}{2EI}$ $= \frac{1}{2}M\Delta\theta$

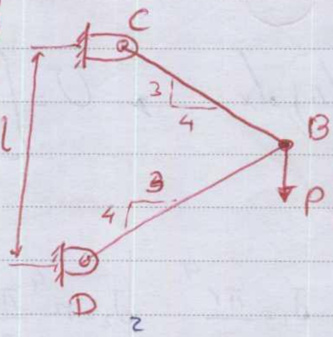


$U = \frac{P^2L^3}{6EI}$ $= \frac{1}{2}P\Delta y$



$U = \frac{T^2L}{2GJ}$ $= \frac{1}{2}T\Delta\varphi$

مثال:



$\boxed{y_B = ?}$

$$U = \frac{F_{BC}^2 \times BC}{2AE} + \frac{F_{BD}^2 \times BD}{2AE}$$

$F_{BC} = 0.6P$ $F_{BD} = -0.8P$

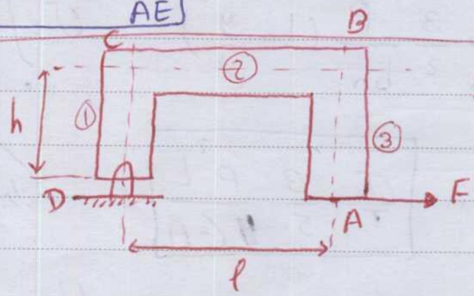
$BC = 0.6L$ $BD = 0.8L$

$$U = 0.364\frac{P^2L}{AE} = \frac{1}{2}Py_B$$

$$\rightarrow \boxed{y_B = 0.726\frac{PL}{AE}}$$

مثال:

تغییر مکان افقی نقطه A ؟



$W = \frac{1}{2}F\Delta x_A$

$U_3 = \frac{F^2h^3}{6EI}$ → از انرژی برشی صرف نظر می‌کنیم

$$U_2 = \frac{(F^2h^2)L}{2EI} + \frac{F^2L}{2AE}$$

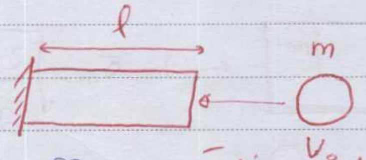
www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U_1 = \frac{F^2 h^3}{6EI}$$

$$W = U_1 + U_2 + U_3 \longrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{2Fh^3}{3EI} + \frac{Fh^2 l}{EI} + \frac{Fl}{AE}}$$

مثال: میزان تنش ایجاد شده در میله؟

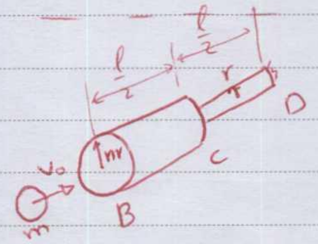


سرعت توپ بعد از برخورد صفر است.

$$U_m = \frac{1}{2} m V_0^2 = \int_0^V \frac{1}{2} (\sigma \epsilon) dv = \frac{\sigma_m^2 V}{2E} \leftarrow \text{حجم}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{m V_0^2 E}{V}}$$

مثال:



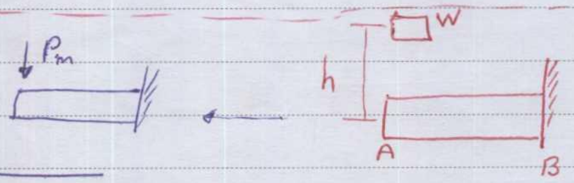
$$\sigma_{CD} = \sigma_m \qquad A_{BC} = n^2 A_{CD}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{1}{n^2} \sigma_m$$

$$U_m = \frac{(\sigma)_{CD}^2 V_{CD}}{2E} + \frac{(\sigma)_{BC}^2 V_{BC}}{2E} = \frac{1}{2E} (\sigma_m^2) \frac{Al}{2} + \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{n^2} \sigma_m\right)^2 \left(\frac{n^2 Al}{2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_m^2 Al}{4E} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} m V_0^2 \longrightarrow \sigma_m = \sqrt{\frac{2 m E V_0^2}{Al\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}}$$

مثال:



$$U_m = Wh$$

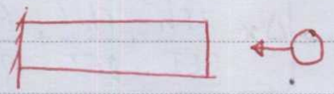
$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI} \qquad P_m = \sqrt{\frac{6 U_m E I}{L^3}}$$

$$\sigma = \frac{(P_m L) C}{I} = \sqrt{\frac{6 U_m E}{L (I/c^2)}}$$

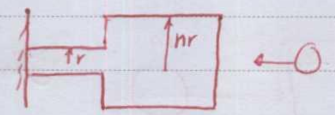
PAPCO

www.DastyarKhoob.ir

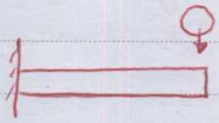
Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_mE}{V}}$$



$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2mEV_0^2}{Al\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}$$



$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_mE}{L\left(\frac{I}{c^2}\right)}}$$

برای مقاومت در مقابل ضربه:

1. سعی شود که تنش بصورت یکنواخت توزیع گردد.

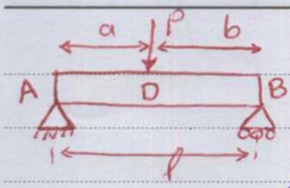
2. ـــ ـــ که از E کمتر استفاده شود.

3. ـــ ـــ ـــ V بیشتر ـــ ـــ.

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

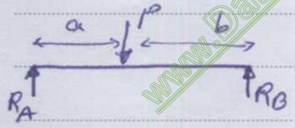
Subject:
Year. Month. Date. ( )



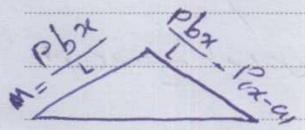
سؤال: $W10\times45 \Longrightarrow I = 248\ in^4$ $\quad P = 40\ kips$

$a = 3ft \quad b = 9ft \quad E = 2.9\times10^6\ psi \quad y_D = ?$

از اثر نیروی برشی صرف نظر می‌کنیم. (مقدار انرژی حاصل از آن قابل صرف نظر کردن است).



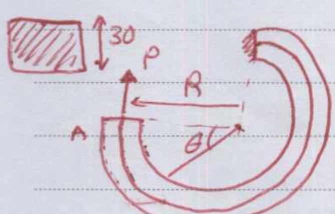
$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L}$



$$U = U_{AD} + U_{DB} = \frac{1}{2EI}\left[\int_0^a \left(\frac{Pbx}{L}\right)^2 dx + \int_a^L \left(\frac{Pbx}{L} - P(x-a)\right)^2 dx\right]$$

$$\longrightarrow U = \frac{P^2 a^2 b^2}{2EIL^2}(a+b) = \frac{(40)^2(36)^2(108)}{6(29\times10^3)(248)(144)} = 3.89\ (in)(klb)$$

$$\frac{1}{2}(40)\, y_D = 3.89 \longrightarrow \boxed{y_D = 0.1945''}$$



$R = 65mm \quad E = 200\ GPa \quad \nu = 0.29$

$P = 6\ kN \quad y_A = ?$ در این سؤال از انرژی برشی نمی‌توان صرف نظر کرد.

$M = PR(1-\cos\theta) \qquad N = P\cos\theta \qquad V = P\sin\theta$

$$dx = Rd\theta \qquad U = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{M^2}{2EI} R\,d\theta + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(P\cos\theta)^2}{2AE} R\,d\theta + \frac{3}{5}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(P\sin\theta)^2}{GA} R\,d\theta$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77.5\ GPa$$

$$\underset{\text{خمش}}{U_{\text{حاصل از}}} = \frac{P^2R^3}{2EI}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$M^2 = R^2P^2(1-\cos\theta)^2 = R^2P^2(1+\cos^2\theta - 2\cos\theta)$
$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

PAPCO

$$\underset{\text{نیروی کششی}}{U_{\text{حاصل از}}} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{P^2 R}{2AE}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

11- 66, 73, 61, 46, 39 | تحویلی تست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U_{\text{حاصل از برش}} = \frac{3}{5}\frac{P^2R}{GA}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$U=\frac{P^2R^3}{2EI}\left(\frac{9\pi+8}{4}\right)+\frac{P^2R}{2AE}\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3}{5}\frac{P^2R}{GA}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}y\times P=U \longrightarrow \boxed{y=\frac{2U}{P}}$$

انرژی همیشه باید در سیستم محاسبه شود نه یک نقطه خاص. (مثلاً در خرپا).

جلسه ۹۰/۱/۱۶

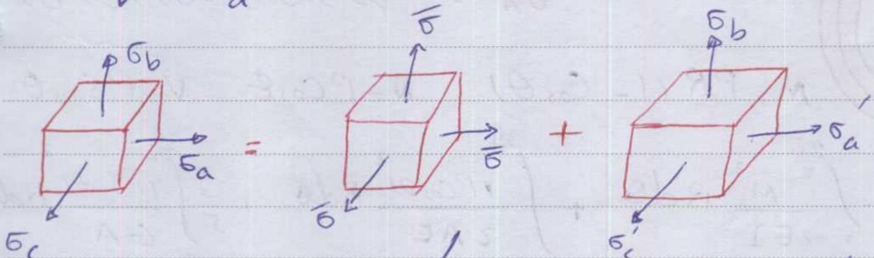
چگالی انرژی:

$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right]+\frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right]$$

اگر محورهای اصلی را بنویسیم چگالی انرژی بصورت زیر در می‌آید:

$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma_c^2-2\nu(\sigma_a\sigma_b+\sigma_b\sigma_c+\sigma_c\sigma_a)\right]$$

$$U=U_v+U_d$$



$$\bar{\sigma}=\frac{\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c}{3}=$$ تنش هیدرواستاتیک $\qquad \sigma_a'+\sigma_b'+\sigma_c'=0$

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_a'+\sigma_b'+\sigma_c')=0$$ یعنی این سه تنش در تغییر حجم هیچ تأثیری ندارند

PAPCO

و تغییر حجم ناشی از $\bar{\sigma}$ می‌باشد. تأثیر σ'ها در distorsion می‌باشد.

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر به جای مؤلفه‌های تنش $\bar{\sigma}$ را قرار دهیم و انرژی را بدست آوریم:

انرژی مربوط به تغییر حجم

$$U_v = \frac{3(1-2\nu)\bar{\sigma}^2}{2E} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c)^2$$

$$U_d = U - U_v = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_a-\sigma_b)^2+(\sigma_b-\sigma_c)^2+(\sigma_c-\sigma_a)^2\right]$$ انرژی مربوط به تغییر شکل

در حالت تنش صفحه‌ای $\sigma_c = 0$ $\rightarrow$

$$U_d = \frac{1}{6G}\left[\sigma_a^2-\sigma_a\sigma_b+\sigma_b^2\right]$$

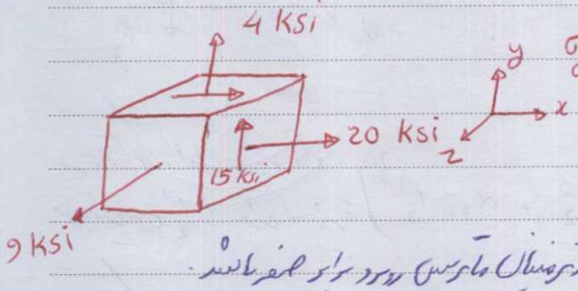
حالت تنش صفحه‌ای

آزمایش کشش $\sigma_a = \sigma_y \quad \sigma_b=\sigma_c=0 \rightarrow U_d = \frac{\sigma_y^2}{6G} \rightarrow \boxed{\sigma_a^2-\sigma_a\sigma_b+\sigma_b^2 < \sigma_y^2}$

در حالت سه بعدی $\boxed{(\sigma_a-\sigma_b)^2+(\sigma_b-\sigma_c)^2+(\sigma_c-\sigma_a)^2 < 2\sigma_y^2}$ $\leftarrow$ معیار انرژی برای تسلیم

این معادله مربوط به یک استوانه با شعاع $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_y$ است که از مبدأ مختصات نیز می‌گذرد.

مثال: $\sigma_y = 32\ ksi \quad E = 30\times10^6\ psi, \quad \nu = 0.3$



ضریب اطمینان؟

ابتدا باید تنش‌های اصلی را بیابیم. برای این کار باید دترمینان ماتریس روبرو برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 20-\sigma & 15 & 0 \\ 15 & 4-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 9-\sigma \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (20-\sigma)(4-\sigma)(9-\sigma) - 225(9-\sigma) = 0$$

ریشه‌ها $\sigma_c = 9 \quad \sigma_b = 5 \quad \sigma_a = 29$

PAPCO

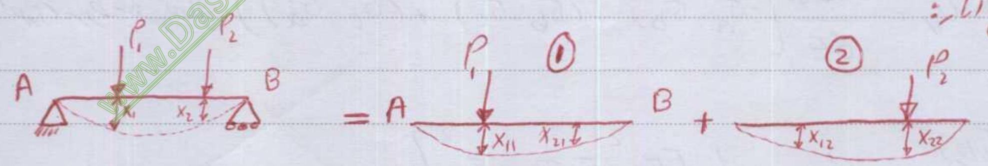
www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject: تمرین 11-77,78,79
Year. Month. 38,39 Date. ( )

$$(29-9)^2 + (29-5)^2 + (9-5)^2 = 992 \qquad 2\sigma_y^2 = 2048$$

$$F.S = \sqrt{\frac{2048}{992}}$$

اصل جمع آثار:



in ① $X_{11} = \alpha_{11} P_1$ in ② $X_{12} = \alpha_{12} P_2$

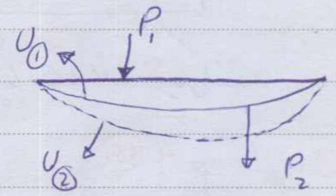
$X_{21} = \alpha_{21} P_1$ $X_{22} = \alpha_{22} P_2$

$$X_1 = X_{11} + X_{12} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2$$

$$U = U_{①} + U_{②}$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2$$

$$U_{①} = \frac{1}{2} P_1 X_{11} = \frac{1}{2} P_1 (\alpha_{11} P_1) = \frac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2$$



$$U_{②} = \frac{1}{2} P_2 X_{22} + P_1 X_{12}$$

$$U = U_{①} + U_{②} = \frac{1}{2}\left[\alpha_{11} P_1^2 + 2\alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2\right]$$ در حالتی که اول نیروی P_1 و بعد نیروی P_2 را وارد کنیم:

$$U = U_{①} + U_{②} = \frac{1}{2}\left[\alpha_{11} P_1^2 + 2\alpha_{21} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2\right]$$ در حالتی که اول نیروی P_2 و بعد نیروی P_1 را وارد کنیم.

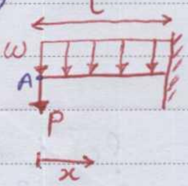
چون از لحاظ فیزیکی باید انرژی در هر دو حالت با هم یکسان باشند در نتیجه $\boxed{\alpha_{12} = \alpha_{21}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 = X_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 = X_2$$

در حالت کلی داریم $\delta_j = \frac{\partial U}{\partial F_j}$ = تغییر مکان نقطه j هم‌جهت $\frac{\partial U}{\partial T_j} = \varphi_j$ $\frac{\partial U}{\partial M_j} = \theta_j$

مثال: تغییر مکان محل نیروی P ؟

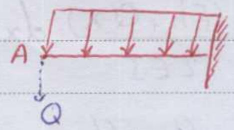


$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad M = +Px + \frac{1}{2}\omega x^2$$

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M} \times \frac{\partial M}{\partial P} = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} dx$$

$$y_A = \int_0^l \frac{M}{EI}(x) dx = \int_0^l \frac{1}{EI}\left[Px + \frac{1}{2}\omega x^2\right](x) dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} + \frac{\omega L^4}{8}\right)$$

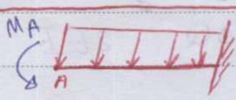
مثال: تغییر مکان A = ؟ با فرض Q را در A وارد می‌کنیم



$$M = Qx + \frac{1}{2}\omega x^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^l \left(\cancel{Qx} + \frac{1}{2}\omega x^2\right)(x) dx = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

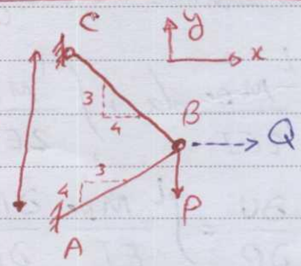
مثال: شیب در A = ؟



$$M = M_A + \frac{1}{2}\omega x^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_A} = \int_0^l \left(M_A + \frac{1}{2}\omega x^2\right)(1) dx = \frac{\omega L^3}{6EI}$$

مثال: تغییر مکان B در جهت افقی x ؟



$$U = \frac{F_{BC}^2 (BC)}{2EA} + \frac{F_{(AB)}^2 (AB)}{2EA}$$

$$X_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_{BC}(BC)}{EA}\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} + \frac{F_{AB}(AB)}{EA}\frac{\partial F_{AB}}{\partial Q}$$

PAPCO

Subject:

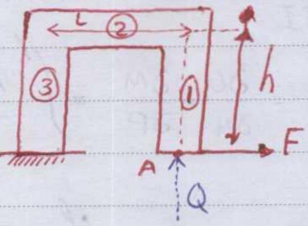
Year. Month. Date. ( )

$F_{AB} = -0.8P + 0.6Q \qquad F_{BC} = 0.6P + 0.8Q$

$$Q=0 \longrightarrow X_B = \frac{(0.6P)(0.6l)}{EA}(0.8) + \frac{(-0.8P)(0.8l)}{EA}(0.6) = -0.096\frac{PL}{EA}$$

علامت منفی یعنی جابجایی در جهت خلاف نیروی Q می‌باشد.

مثال:



تغییر مکان در جهت عمودی در نقطه A چقدر است؟

〃 〃 افقی 〃 〃 〃 〃

$$U_1 = \int_0^h \frac{(Fy)^2}{2EI}dy + \frac{Q^2 h}{2EA}$$

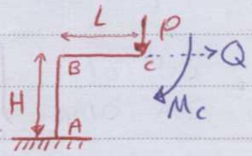
$$U_2 = \int_0^L \frac{(Fh+Qx)^2}{2EI}dx + \frac{F^2 L}{2EA} \qquad U_3 = \int_0^h \frac{(Fy+QL)^2}{2EI}dy + \frac{Q^2 h}{2EA}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{FLh}{2EI}(L+h) \qquad X_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fh^2}{EI}\left(\frac{2h}{3}+L\right)$$

مثال:

$X_C, y_C, \theta_C = ?$



BC درستون $\longrightarrow M = Px + M_c$

AB 〃 〃 $\longrightarrow M = PL + Qy + M_c$

$$U = \int_0^L \frac{M_{BC}^2}{2EI}dx + \int_0^H \frac{M_{AB}^2}{2EI}dy + \frac{P^2 H}{2EA} + \frac{Q^2 L}{2EA}$$

$$y_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M_{BC}}{EI}\frac{\partial M_{BC}}{\partial P}dx + \int_0^H \frac{M_{AB}}{EI}\frac{\partial M_{AB}}{\partial P}dy + \frac{PH}{EA}$$

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{(Px + \cancel{M_c})x}{EI}dx + \int_0^H \frac{PL + \cancel{Qy} + \cancel{M_c}}{EI}(L)dy + \frac{PH}{EA}$$

نهایتا
$$\boxed{y_c = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2 H}{EI} + \frac{PH}{EA}}$$

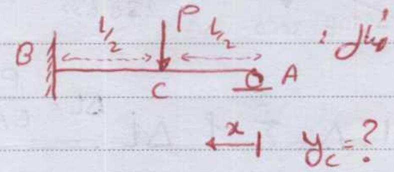
$$X_c = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \frac{Px + \cancel{M_c}}{EI}(0)dx + \int_0^H \frac{PL + \cancel{Qy} + \cancel{M_c}}{EI}y\,dy + 0$$

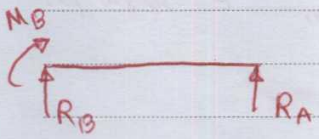
$$\longrightarrow \boxed{X_c = \frac{PLH^2}{2EI}}$$

$$\theta_c = \frac{\partial U}{\partial M_c} = \int_0^L \frac{Px + \cancel{M_c}}{EI}(1)dx + \int_0^H \frac{PL + \cancel{Qy} + \cancel{M_c}}{EI}(1)dy$$

$$\longrightarrow \boxed{\theta_c = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{PLH}{EI}}$$

مثال : این مسئله یک درجه نامعین است





$$M = R_A x \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$U = \int_0^{l/2} \frac{(R_A x)^2}{2EI}dx + \int_{l/2}^{l} \frac{[R_A x - P(x - \frac{l}{2})]^2}{2EI}dx$$

$$M = R_A x - P(x - \frac{l}{2}) \qquad \frac{l}{2} \le x \le l$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^{l/2} \frac{R_A x^2}{EI}dx + \int_{l/2}^{l} \frac{[R_A x - P(x - l/2)]}{EI}x\,dx$$

PAPCO

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{R_A}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{R_A}{3}\left[L^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^3\right] - \frac{P}{3}\left[L^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^3\right] + \frac{PL}{4}\left(L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3\right) = 0$$

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

11- 34, 33, 10, 19

Subject:

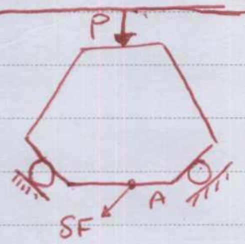
Year. Month. Date. ( )

$\boxed{R_A = \frac{5}{16}P}$ چون در نقطه A تکیه‌گاه داریم جابجایی در A صفر است یعنی $\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$ از نتیجه

حال با داشتن R_A مسئله حل می‌شود.

$$y_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left[\int_0^{l/2} \frac{(Rx)^2\,dx}{2EI} + \int_{l/2}^{l} \frac{[Rx - P(x-\frac{l}{2})]^2\,dx}{2EI}\right]$$

$$= \int_{l/2}^{l} \frac{-(x-\frac{l}{2})(Rx - P(x-\frac{l}{2}))}{EI} \longrightarrow \boxed{y_c = \frac{7}{768}\frac{PL^3}{EI}}$$

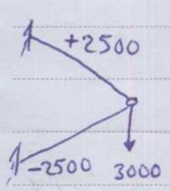


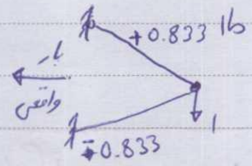
$\delta F \cdot \Delta = \sum \delta f \cdot \Delta L$

$1 \cdot \Delta = \sum f \cdot \Delta L$

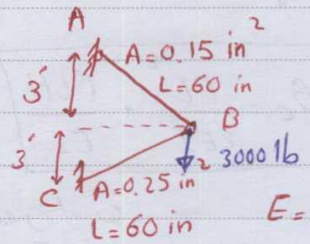
Virtual Work

Force Method (Unit Load)





بار واحد



مثال:

$E = 30\times10^6\ psi$

$$1\cdot\Delta = \sum_{i=1}^{2} f\cdot\Delta L \overset{\Delta L = \frac{PL}{EA}}{=\!=} \quad 1\cdot\Delta = \sum_{i=1}^{2} f\cdot\frac{PL}{EA}$$

	f	P	L	A
AB	+0.833	2500	60	0.15
BC	-0.833	-2500	60	0.25

$$1\times\Delta = \frac{f_{AB}P_{AB}L_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{f_{BC}P_{BC}L_{BC}}{EA_{BC}} = +0.0444\,in$$

تغییر طول از راستای عمودی در نقطه B

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject: Popof
Year. Month Date. ( )

Virtual Work (Force Method)
Unit Load

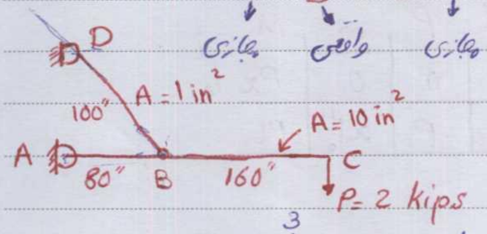
حالت بین بار مجازی $\delta F.\Delta \ell = \sum \delta f.\Delta l + \sum \delta m.\Delta\theta$

$1.\Delta = \sum f.\Delta l + \sum m.\Delta\theta$

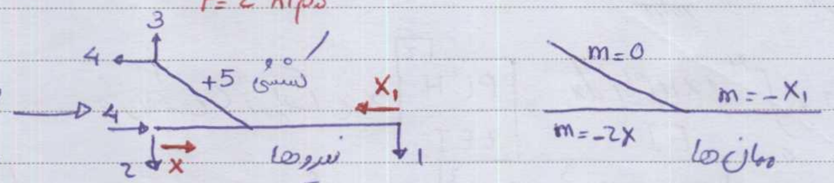
مجازی — واقعی — مجازی — واقعی — مجازی

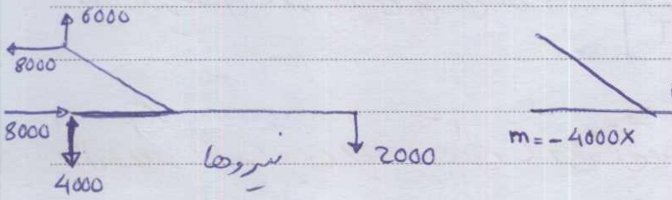
مثال: خیز نقطه C را بیابید

$E = 10^6\ psi$



اعمال یک بار مساوی برای نیروی واحد





$$1\times\Delta = \sum f\frac{PL}{EA} + \sum\int_0^L m\frac{M\,dx}{EI} = \frac{f_{AB}P_{AB}L_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{f_{BC}P_{BC}L_{BC}}{EA_{BC}} + \frac{f_{DB}P_{DB}L_{DB}}{EA_{DB}}$$

$$+\int_0^{80}\frac{m_{AB}M_{AB}\,dx_{AB}}{EI} + \int_0^{160}\frac{m_{BC}M_{BC}\,dx_{BC}}{EI}$$

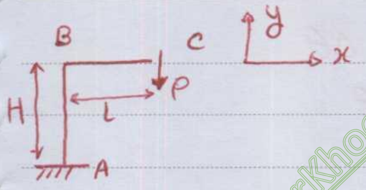
	f	P	l	A	m	M
AB	-4	-8000	80	10	$-2x\|_0^{80}$	$-4000\|_0^{80}$
BC	0	0	160	10	$-X_1\|_0^{160}$	$-2000\|_0^{160}$
BD	5	10000	100	1	0	0

در نهایت پس از جایگذاری $\boxed{1\times\Delta = 2.92\ in}$

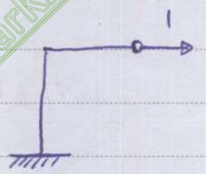
www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مطلوب است تغییر مکان نقطه‌ی C در راستای x.



	f	P	m	M
BC	1	0	0	$Px\|_0^L$
AB	0	-P	$x\|_0^H$	PL



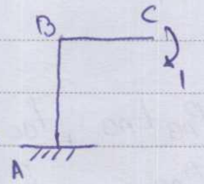
اعمال یک مسئله برای بار واحد

$$1\times\Delta = 0 + \int_0^H \frac{(x)(PL)\,dx}{EI} = \boxed{\frac{PLH^2}{2EI}}$$ تغییر نقطه‌ی C در راستای x

ضمناً تغییر نقطه‌ی C در راستای y می‌شود:

$$\boxed{\frac{PH}{EA}+\frac{PL^3}{3EI}+\frac{PHL^2}{EI}}$$

مثال: مطلوب است تعیین شیب نقطه‌ی C در سؤال قبل.



اعمال ممان واحد به C

	f	P	m	M
BC	0	0	1	$Px\|_0^L$
AB	0	-P	1	PL

$$1\times\Delta = 0+0+\int_0^L \frac{(1)(Px)\,dx}{EI}+\int_0^H \frac{(1)(PL)\,dx}{EI} = \boxed{\frac{PL^2}{2EI}+\frac{PLH}{EI}}$$

* در اینجا Δ همان شیب یعنی θ می‌باشد.

در حالتی که کشش و پیچش هم داشته باشیم رابطه‌ی کلی به صورت زیر می‌باشد:

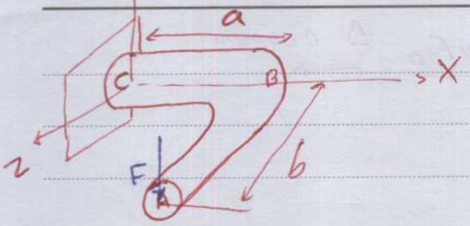
$$1\times\Delta = \sum f.\Delta L + \sum\int_0^L \frac{m\,M\,dx}{EI} + \sum\int_0^L t\,\frac{T\,dx}{GJ}$$

PAPCO

Subject: Year. Month. Date. ( )

HW - 17 ، ۲۷ ۲۹ ۴۳

مثال: خیز عمودی A ؟



باید از فرمول های منحنی مثل استفاده کنیم.

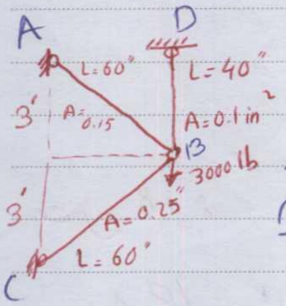
	L	f	P	m	M	t	T
AB	b	0	0	$z\|_0^b$	$Fz\|_0^b$	0	0
BC	a	0	0	$x\|_0^a$	$Fx\|_0^a$	b	Fb

$$1\times\Delta=\frac{f_{AB}P_{AB}L_{AB}}{EA_{AB}}+\frac{f_{BC}P_{BC}L_{BC}}{EA_{BC}}+\int_0^b\frac{m_{AB}M_{AB}}{EI}dz+\int_0^a\frac{m_{BC}M_{BC}}{EI}dx+\int_0^b\frac{t_{AB}T_{AB}}{GJ}dx+\int_0^a\frac{t_{BC}T_{BC}}{GJ}dx$$

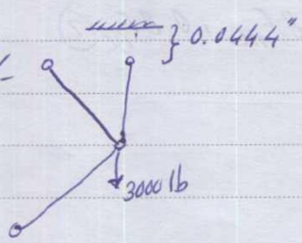
$$1\times\Delta=\int_0^b\frac{(z)(Fz)}{EI}dz+\int_0^a\frac{(x)(Fx)}{EI}dx+\int_0^a\frac{(b)(Fb)}{GJ}dx$$

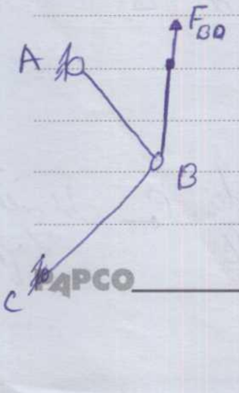
$$\Delta=\frac{Fb^3}{3EI}+\frac{Fa^3}{3EI}+\frac{Fb^2a}{GJ}$$

سؤال:



تکیه گاه D را برمی داریم





	L	A	f	F
AB	60	0.15	-0.833	$-0.833F_{BD}$
BC	60	0.25	0.833	$0.833F_{BD}$
BD	40	0.1	1	F_{BD}

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject: 17- 46, 47, 49

Year. Month. Date. ( )

1. $\Delta = \sum \frac{f\,FL}{EA} = \frac{278 F_{BD} + 167 F_{BD} + 400 F_{BD}}{E}$ $\xrightarrow{\Delta = 0.0444 \text{ in}}$

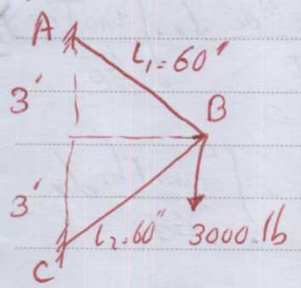
$\longrightarrow \boxed{F_{BD} = 1576 \text{ lb}}$

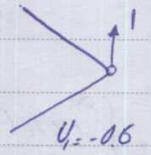
Displacement Method.

در این روش هدف به دست آوردن نیروها است.

$\underset{\text{جابجایی مجازی}}{1} \times \underset{\text{واقعی}}{\bar{P}} = \sum u_i \times F_i$ واقعی واقعی

سوال: مطلوب است نیروهای داخلی.



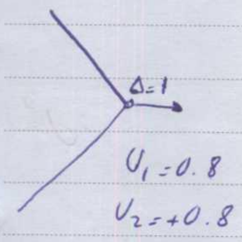


$u_1 = -0.6$

$u_2 = +0.6$

$(1)(-3000) = -0.6 F_{AB} + 0.6 F_{BC}$ ①

با حل همزمان ① و ② F_{AB} و F_{BC} به دست می‌آید.

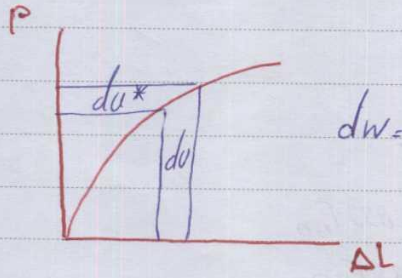


$(1)(0) = 0.8 F_{AB} + 0.8 F_{BC}$ ②

$u_1 = 0.8$

$u_2 = +0.8$

فصل 18:



$dW = dU = P \cdot \Delta L \quad dW^* = dU^* = dP \cdot \Delta$

$\downarrow \qquad \downarrow$

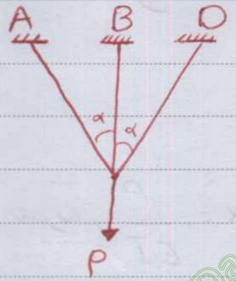
$\frac{dU}{d\Delta} = P \qquad \frac{dU^*}{dP} = \Delta$

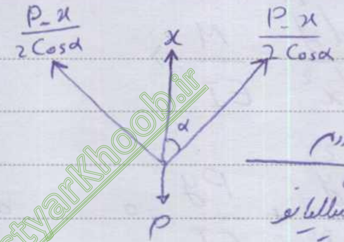
linear system of loading $\rightarrow W^* = W$, $U^* = U$, $\frac{dU}{d\Delta} = P \longrightarrow$ قضیه اول کاستیلیانو

$\frac{dW}{dP} = \frac{dU}{dP} = \Delta \longleftarrow$ قضیه دوم کاستیلیانو

www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )



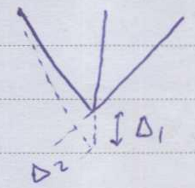


سؤال: مطلوب است نیروها در میله‌ها.

$\xrightarrow[\text{کاستیلیانو}]{\text{قضیه دوم}}$ $\frac{\partial U}{\partial X} = 0$ $\quad X = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}$

www.DastyarKhoob.ir

قضیه اول



$U = U_{CB} + 2U_{CD}$

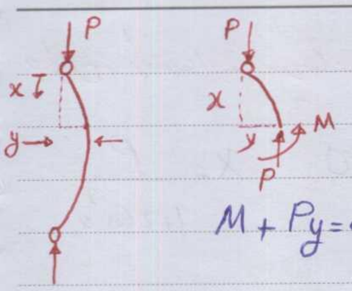
$U_{CB} = \frac{F^2 L}{2AE} = \frac{AE^2\Delta_1^2}{2L}$

$U = \frac{AE^2\Delta_1^2}{2L} + 2\frac{AE\Delta_1^2\cos^3\alpha}{2L}$ $\quad \frac{\partial U}{\partial \Delta} = P \longrightarrow \Delta = \frac{PL}{EA} \times \frac{1}{1+2\cos^3\alpha}$

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Buckling کمانش



$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow$$

$$M + Py = 0 \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{P}{EI} \text{ تغییر متغیر}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow B=0 \longrightarrow y = A\sin\alpha x$

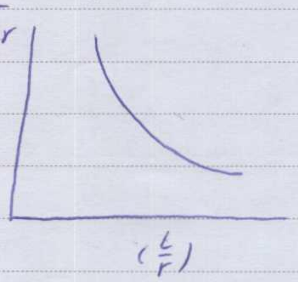
$\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=0 \text{ حالت قابل قبول نیست} \\ \sin\alpha x = 0 \longrightarrow \alpha L = n\pi \end{cases} \longrightarrow \boxed{P = n^2\frac{\pi^2 EI}{l^2}}$

$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$ ← در عمل با $n=1$ سروکار داریم و حالت های دیگر برای n رخ نمی دهد. پس

$\boxed{P_{cr} = \text{نیروی بحرانی}}$

* تا قبل از نیروی بحرانی تیرستون، هیچ تغییر شکلی ندارد و معادلات فوق‌الذکر بالا صادق نیست. همچنین $A = y_{max}$ البته مقدار A را نمی توانیم بدست آوریم.

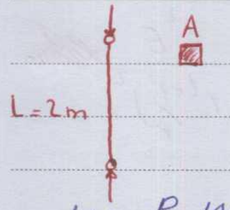
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI/A}{l^2} \xrightarrow{I = Ar^2} \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{L}{r})^2}$$



در فرمول σ_{cr} ، r شعاع ژیراسیون است.

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$E = 12.5\ GPa$ $\sigma_{all} = 12\ MPa$ $\begin{cases} P = 100\ N \\ P = 200\ N \end{cases}$ مسئله:

A چقدر باشد تا ضریب اطمینان بر کمانش 2.5 باشد؟

حل: $P = 100 \times 2.5 = 250\ N$

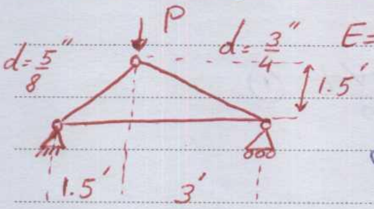
$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 E I}{l^2} \longrightarrow I = 8.106 \times 10^{-6}\ m^4$ $\quad I = \dfrac{1}{12} a^4$

$\longrightarrow \boxed{a = 100\ mm}$ $\quad \sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{100}{A} = 10\ MPa < 12\ MPa$

قسمت دو حل: $P = 200 \times 2.5 = 500 \longrightarrow I = 16.21 \times 10^{-6}\ m^4 \longrightarrow a = 118.1\ mm$

$\sigma = \dfrac{P}{A} = 14.34 > 12 \longrightarrow$ پس مقطع fail می‌کند.

$A = \dfrac{P}{\sigma_{all}} = \dfrac{200}{12 \times 10^6} = 16.67 \times 10^{-3}\ m^2 \longrightarrow a = 129.1\ mm \approx 130\ mm$



مسئله: بزرگترین بار P تا ضریب اطمینان بر کمانش 3 باشد؟ $E = 29 \times 10^6\ psi$

حل: $F_{AB} = \dfrac{P}{1.06}$

$L_{AB}^2 = 18^2 + 18^2 = 648$

$F_{AB} = \dfrac{\pi^2 E I_{AB}}{(L_{AB})^2} = \dfrac{\pi^2 (29 \times 10^6)\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{16}\right)^4\right)}{(18^2 + 18^2)} = 3308\ lb$

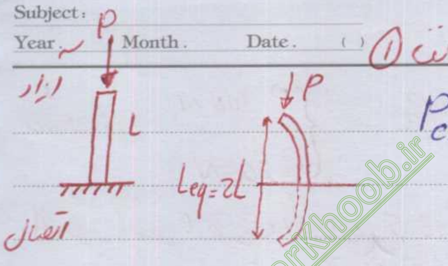
$F_{AB}/3 = \dfrac{3308}{3} \longrightarrow \boxed{P = 1.06 \times \dfrac{3308}{3} = 1169\ lb}$

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

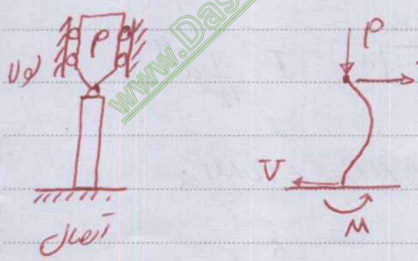
Subject:
Year Month Date

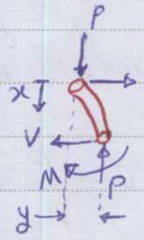
حالت ①



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_{eq}/r)^2}$$

حالت ②





$$\left.\begin{aligned} &Vx + Py + M = 0 \\ &\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \end{aligned}\right\}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = -\frac{V}{EI}x$$

تغییر متغیر $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$

حل معادله دیفرانسیل $\longrightarrow$ y = (جواب عمومی) + (جواب خصوصی)

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \left(-\frac{V}{P}x\right)$$

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow B=0 \qquad \begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow A\sin\alpha L = \frac{V}{P}L$ ①

$$\begin{cases} x=L \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{cases} \Longrightarrow A\alpha\cos\alpha L = \frac{V}{P} \quad ②$$

با تقسیم ① بر ② خواهیم داشت: $\tan(\alpha L) = \alpha L$

با حل معادله بالا داریم: $\alpha L = 4.4934$ پس:

$$\alpha^2 = \frac{(4.4934)^2}{L^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI} \longrightarrow P = \frac{20.19\,EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \Longrightarrow \boxed{L_{eq} = 0.7L}$$

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir

www.DastyarKhoob.ir

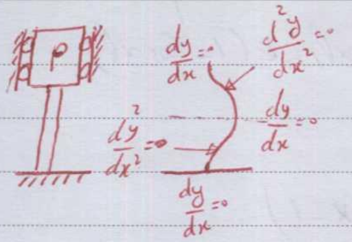
DastyarKhoob

HW 10_24,25,27,28

Subject:

Year. HW Month. Date. ( )

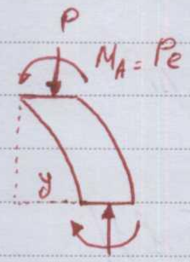
حالت ③

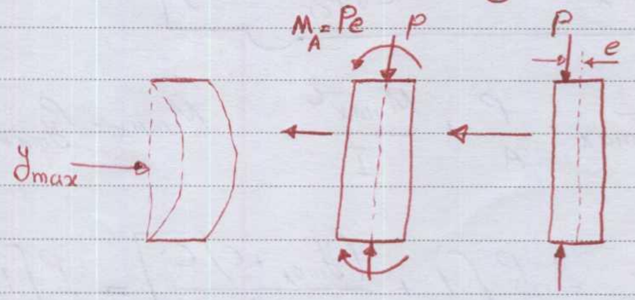


$L_{eq}=0.5L \qquad P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$

	L_{eq}	ضریب برابر مقاومت ستون دو سر لولا
دو سر لولا	$1L$	$1P_{cr}$
دو سر اتصال	$0.5L$	$4P_{cr}$
یک سر لولا یک سر اتصال	$0.7L$	$2P_{cr}$
یک سر اتصال یک سر آزاد	$2L$	$0.25P_{cr}$

بارگذاری خارج از محور:





$$M+M_A+Py=0 \longrightarrow M=-Py-M_A$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{-Py}{EI}-\frac{Pe}{EI} \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Py}{EI}=-\frac{Pe}{EI}$$

تغییر متغیر $\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=-\alpha^2 e \qquad y=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x-e$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow B=e$$

PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject: Year. Month. Date. ( )

$= 2\sin^2 \alpha \frac{l}{2}$

$$\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \quad A \sin \alpha l + e \cos \alpha l - e = 0 \Longrightarrow A \sin(\alpha l) = e(1 - \cos \alpha l)$$

$$A = e \tan \frac{\alpha l}{2} \qquad y = e\left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1\right)$$

$$\rightarrow y_{max} \xrightarrow{x = \frac{l}{2}} y_{max} = e\left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha \frac{l}{2} + \cos \alpha \frac{l}{2} - 1\right)$$

$$= e\left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha l}{2} + \cos^2 \frac{\alpha l}{2}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1\right) = e\left(\sec \frac{\alpha l}{2} - 1\right)$$

$$y_{max} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2}\right) - 1\right] \longrightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

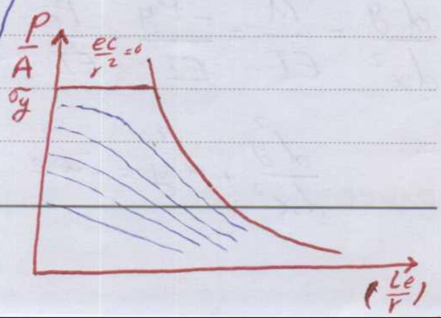
$$\boxed{y_{max} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right]}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max} C}{I} \qquad M_{max} = P y_{max} + P e \qquad I = A r^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{max} + e) C}{r^2}\right] = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$\longrightarrow \sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right]$$

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{le}{r}\right)}$$

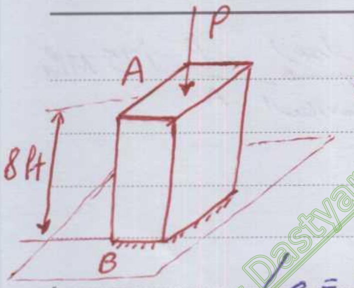


PAPCO

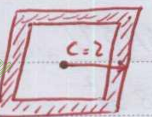
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )



سطح مقطع



$A = 3.54\ in^2 \quad I = 8\ in^4 \quad r = 1.5\ in$

$c = 2\ in$

الف) برای ضریب اطمینان ۲ مقدار بار و تنش مجاز را حساب کنید.

$$L_e = 2 \times 8 = 16 \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = 62.1\ kips$$

$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{F.S} = 31.1\ kips \qquad \sigma_{all} = \frac{P_{all}}{A} = 8.8\ ksi$$

ب) اگر نیروی وارده به اندازه‌ی 0.75 in خارج از مرکز باشد بیشترین مقدار خمش چقدر است؟ تنش max را نیز حساب کنید.

$$y_{max} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] = 0.75\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{31.1}{62.1}}\right) - 1\right]$$

$$\rightarrow \boxed{y_{max} = 0.939\ in} \leftarrow$$ خطر ما خمشی

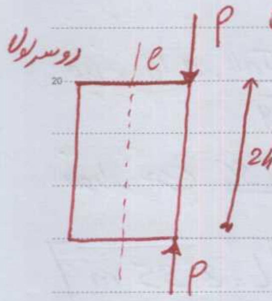
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right] = \frac{31.1}{3.54}\left[1 + \frac{(0.75)(2)}{(1.5)^2}\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

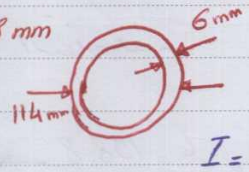
$$\rightarrow \boxed{\sigma_{max} = 22\ ksi}$$

مطلوب است بار مجاز P اگر: $e = 7.6\ mm$ ، $e = 15.2\ mm$ اگر ضریب اطمینان 2.5 باشد.

$\sigma_y = 250\ MPa \quad E = 200\ GPa$

دو سر لولا





حل: $I = \frac{\pi}{4} r^4 \quad L_e = L = 2438\ mm$

$$I = \frac{\pi}{4}\left[(57)^4 - (51)^4\right] = 30 \times 10^6\ mm^4$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left[(114)^2 - (102)^2\right] = 2035\ mm^2 \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = 38.3\ mm$$

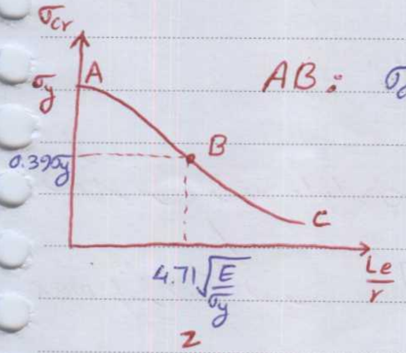
PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Hw 10-39, 41
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{L_e}{r} = \frac{2438}{38.3} = 63.6$ $\quad \frac{ec}{r^2} = \frac{(17.6)(57)}{(38.3)^2} = 0.295$ $\xrightarrow[\text{استفاده می کنیم}]{\text{از نمودار}}$ $\frac{P}{A} = 175\ MPa$

$P = 181125\ N \longrightarrow P_{\text{مجاز}} = \frac{P}{F.S} = \boxed{72450\ \text{نیوتن}}$

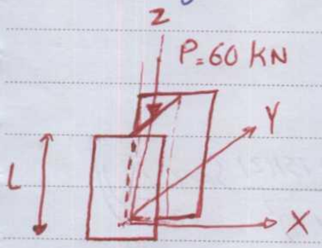


روابط تجربی:

$AB: \quad \sigma_{cr} = [0.658^{(\frac{\sigma_y}{\sigma_e})}]\sigma_y \qquad \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(\frac{L}{r})^2}$

$BC: \quad \sigma_{cr} = 0.877\sigma_e$

F.S که $\Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67}$



مثال: $\sigma_y = 250MPa$ ، $E = 200\ GPa$ $\quad S\ 100 \times 11.5$

از طریق روابط تجربی L_{max} را بیابید.

$A = 1460\ mm^2, \quad r_x = 41.6\ mm, \quad r_y = 14.8\ mm$

$\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3}{1460 \times 10^{-4}} = 41.1\ MPa$

چون $\frac{\sigma_{all}}{\sigma_y} = 0.16$ بنابراین باید از قسمت BC نمودار تجربی AISC استفاده کنیم.

$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e = 0.877\frac{\pi^2 E}{(\frac{L}{r})^2}$

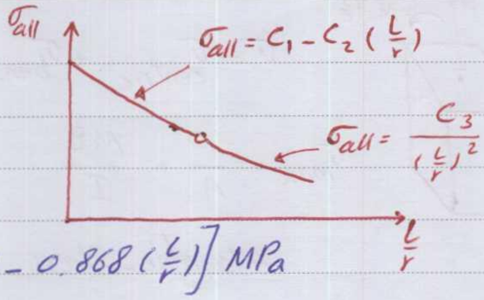
$= \frac{0.877(\pi)^2(200 \times 10^9)}{(\frac{L}{r})^2} = 41.1 \times 10^6 \longrightarrow \frac{L}{r} = 158.8 \longrightarrow \boxed{L = 2.35\ m}$

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روابط تجربی :

آلومینیوم 6061-T6



$$\frac{L}{r} < 66 : \sigma_{all} = \left[139 - 0.868\left(\frac{L}{r}\right)\right] \text{MPa}$$

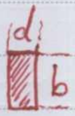
$$\frac{L}{r} > 66 : \sigma_{all} = \frac{351 \times 10^3}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \text{MPa}$$

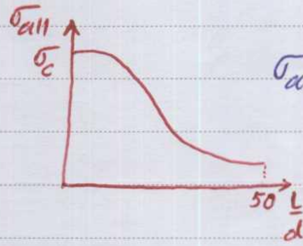
آلومینیوم 2014-T6

$$\frac{L}{r} < 55 : \sigma_{all} = \left[212 - 1.585\left(\frac{L}{r}\right)\right] \text{MPa}$$

$$\frac{L}{r} \geq 55 : \sigma_{all} = \frac{372 \times 10^3}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \text{MPa}$$

چوب (wood)



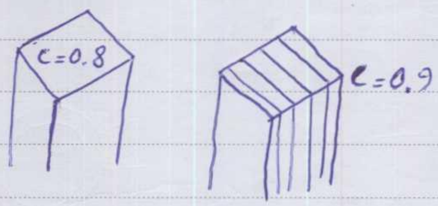


$$\sigma_{all} = \sigma_c C_p$$

توان 2 برای پرانتز است.

$$C_p = \frac{1 + \left(\sigma_{CE}/\sigma_c\right)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + \left(\sigma_{CE}/\sigma_c\right)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_c}{c}}$$

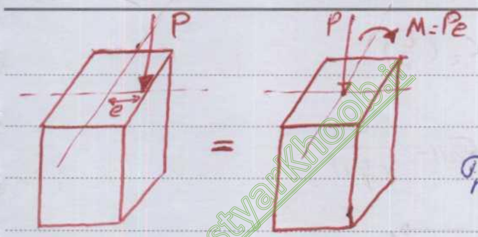
$$\sigma_{CE} = \frac{0.822\,E}{\left(\frac{L}{d}\right)^2}$$



PAPCO

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\sigma = \sigma_{centric} + \sigma_{bend}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

Allowable-Stress الف) روش تنش مجاز

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{all}$$

Interaction Method ب) روش برهم کنش

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{axial}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_{bending}} \leq 1$$

$$\sigma_{all\ bending} > \sigma_{all\ axial}$$

www.DastyarKhoob.ir

www.DastyarKhoob.ir