

بِسْمِ اللَّهِ الْعَلِيِّ

نُورِي وَرُشْدِي حَاسِبِه

دِيْنَامِيْكَ سَاوَزِه

تَالِيْف : مَارِيُو پَار

تَرْجِمَه : حَسَن مَقْدَم

مَحْمَد مَهْدِي مَهْرَابِي زَادَه هَنْرَمَنْد

کتابخانه تخصصی زلزله شناسی ایران
 ویرایش و سبکده است

Paz, Mario	پاز، ماریو	TA
تئوری و روشهای محاسبه دینامیک سازه / تألیف ماریو پاز، ترجمه حسن مقدم.	۶۵۴	
عباس خواجه کرم الدینی، - ویرایش ۳ - تهران: وزارت فرهنگ و آموزش عالی، مؤسسه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله، ۱۳۷۴.	۲۵ /	
سیزده، ۵۵۰ ص: مصور، جدول، نمودار.	۹ ت	
Structural dynamics: Theory and Computation.	عنوان اصلی:	۱۳۷۴
	واژه نامه.	
	کتابنامه بصورت زیر نویس.	
۱. سازه - دینامیک ۲. سازه - طرح و محاسبه. الف. مقدم، حسن، مترجم.		
ب. خواجه کرم الدینی، عباس، مترجم. ج. عنوان.		

TA
 ۵۵۱۴
 ۲۵ / ب
 ۱۳۷۴
 ۹ ت

نام کتاب: تئوری و روشهای محاسبه دینامیک سازه
 تألیف: ماریو پاز
 چاپ: اول
 تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۷۴
 تیراژ: ۳۰۰۰ جلد
 لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مؤسسه چاپ و انتشارات وزارت امور خارجه
 شایان ذکر است مطالب مندرج در این نوشتار هیچ کدام نظر رسمی مؤسسه نیست و صرفاً دیدگاههای
 شخصی نویسنده می باشد.
 کلیه حقوق این گزارش متعلق به مؤسسه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله است.
 (ذکر مطالب با اشاره به مرجع آزاد است).

فهرست

صفحه	عنوان
۴	پیشگفتار مترجمان
۵	مقدمه چاپ دوم
۶	مقدمه چاپ اول

بخش I- سازه های مدل شده توسط سیستم يك درجه آزادی

۲	✓ ۱- سیستمهای يك درجه آزادی نامیرا.
۲	۱-۱- درجات آزادی
۴	۱-۲- سیستم های نامیرا
۶	۱-۳- فنرهای موازی و سری
۷	۱-۴- قانون حرکت نیوتن
۸	۱-۵- نمودار جسم آزاد
۹	۱-۶- اصل دالامبر
۱۰	۱-۷- حل معادله دیفرانسیل حرکت
۱۲	۱-۸- فرکانس و دوره تناوب
۱۴	۱-۹- دامنه حرکت
۱۷	۱-۱۰- خلاصه
۱۸	- مسائل
۲۲	✓ ۲- سیستم های يك درجه آزادی میرا
۲۳	۲-۱- میرایی لزج
۲۴	۲-۲- معادله حرکت
۲۵	۲-۳- میرایی بحرانی
۲۵	۲-۴- بیش میرایی
۲۶	۲-۵- کم میرایی
۲۸	۲-۶- کاهش لگاریتمی
۳۱	۲-۷- خلاصه
۳۲	- مسائل

۳۶	۳- پاسخ سیستم تک درجه آزادی به بارهارمونیک
۳۷	۱-۳- ارتعاش هارمونیک نامیرا
۳۹	۲-۳- ارتعاش هارمونیک میرا
۴۶	۳-۳- اندازه گیری میرایی در تشدید
۴۸	۳-۴- روش «عرض نوار» «نیم توان» برای محاسبه میرایی
۴۹	۳-۵- حرکت تکیه گاه
۵۳	۲-۶- نیروی منتقل شده به تکیه گاه
۵۶	۳-۷- وسایل اندازه گیری زلزله
۵۷	۳-۸- خلاصه
۵۹	-مسائل
۶۴	۴- پاسخ به بارهای دینامیکی کلی
۶۵	۱-۴- بارهای ضربه ای و انتگرال در حامل
۷۱	۲-۴- حل عددی انتگرال دو حامل - سیستم نامیرا
۷۵	۳-۴- حل عددی انتگرال دو حامل - سیستم میرا
۷۶	۴-۴- برنامه ۱، پاسخ دینامیکی به روش انتگرال دو حامل (DUHAMEL)
۸۰	۴-۵- خلاصه
۸۰	-مسائل
۸۴	۵- تحلیل فوریه و پاسخ در حوزه فرکانس
۸۵	۵-۱- تحلیل فوریه
۸۶	۵-۲- پاسخ به باری که باسری فوریه نشان داده شده است.
۸۸	۵-۳- ضرایب فوریه برای توابع چند خطی
۸۹	۵-۴- برنامه ۲- پاسخ دینامیکی سیستم تک درجه آزادی به روش فوریه (FOURIER)
۹۶	۵-۵- شکل توانی سری فوریه
۹۷	۵-۶- تحلیل فوریه نقطه ای
۱۰۱	۵-۷- تبدیل فوریه سریع
۱۰۳	۵-۸- برنامه ۳، پاسخ سیستم تک درجه در حوزه فرکانس (FREQRESP)
۱۰۷	۵-۹- خلاصه
۱۰۷	-مسائل

- ۱۱۲ -۶- مختصات عمومی و روش ریلی
- ۱۱۳ -۱-۶- اصل کار مجازی
- ۱۱۴ -۲-۶- سیستم يك درجه آزادی عمومی- جسم صلب
- ۱۱۷ -۳-۶- سیستم يك درجه آزادی عمومی - کشسانی گسترده
- ۱۲۵ -۴-۶- روش ریلی
- ۱۳۱ -۵-۶- روش ریلی اصلاح شده
- ۱۲۵ -۶-۶- دیوارهای برشی
- ۱۴۰ -۷-۶- خلاصه
- ۱۳۱ -مسائل-
- ۱۳۸ -۷- پاسخ غیر خطی سازه ها
- ۱۴۹ -۱-۷- مدل يك درجه آزادی غیر خطی
- ۱۵۱ -۲-۷- حل معادله غیر خطی حرکت
- ۱۵۲ -۳-۷- روش گام به گام باشتاب خطی
- ۱۵۳ -۴-۷- رفتار ارتجاعی خمیری
- ۱۵۶ -۵-۷- الگوریتم روش گام به گام برای سیستم تك درجه ارتجاعی خمیری
- ۱۶۰ -۶-۷- برنامه ۴، سیستم تك درجه ارتجاعی خمیری (STEPS)
- ۱۶۳ -۷-۷- خلاصه
- ۱۶۴ -مسائل-
- ۱۶۸ -۸- طیف پاسخ ✓
- ۱۶۹ -۱-۸- تهیه طیف پاسخ
- ۱۷۲ -۲-۸- طیف پاسخ حرکت تکیه گاهی
- ۱۷۴ -۳-۸- طیف سه جانبه
- ۱۷۷ -۴-۸- طیف پاسخ برای طراحی ارتجاعی
- ۱۸۱ -۵-۸- طیف پاسخ سیستمهای غیر ارتجاعی
- ۱۸۵ -۶-۸- طیف پاسخ برای طراحی غیر ارتجاعی
- ۱۸۸ -۷-۸- خلاصه
- ۱۸۹ -مسائل-

بخش II - سازه های مدل شده به صورت ساختمانهای برشی

- ۹- ساختمانهای برشی چند طبقه
- ۱۹۲ ۹-۱- معادلات سختی برای ساختمان برشی
- ۱۹۳ ۹-۲- معادلات نرمی برای ساختمان برشی
- ۱۹۶ ۹-۳- رابطه بین ماتریسهای سختی و نرمی
- ۱۹۸ ۹-۴- خلاصه
- ۱۹۹ - مسائل
- ۱۰- ارتعاش آزاد ساختمان برشی
- ۲۰۲ ۱۰-۱- فرکانسهای طبیعی و شکلهای ارتعاشی (مدهای نرمال)
- ۲۰۳ ۱۰-۲- خاصیت تعامد مدهای نرمال
- ۲۰۹ ۱۰-۳- زیر برنامه JACOBI
- ۲۱۲ ۱۰-۴- برنامه ۵، امتحان زیر برنامه JACOBI
- ۲۱۳ ۱۰-۵- خلاصه
- ۲۱۵ - مسائل
- ۲۱۶
- ۱۱- حرکت ساختمانهای برشی تحت اثر بار گذاری
- ۲۲۰ ۱۱-۱- روش جمع زدن مدها
- ۲۲۱ ۱۱-۲- پاسخ ساختمان برشی به حرکت تکیه گاه
- ۲۲۶ ۱۱-۳- برنامه ۶، امتحان زیر برنامه MODAL
- ۲۲۹ ۱۱-۴- برنامه ۷، پاسخ لرزه ای يك ساختمان برشی ارتعاشی
- ۲۳۳ ۱۱-۵- تحریک هارمونیک
- ۲۳۵ ۱۱-۶- برنامه ۸، امتحان برنامه HARMO
- ۲۳۹ ۱۱-۷- خلاصه
- ۲۴۱ - مسائل
- ۲۴۲
- ۱۲- حرکت میرای ساختمانهای برشی
- ۲۴۶ ۱۲-۱- معادلات ساختمان برشی میرا
- ۲۴۷ ۱۲-۲- معادلات میرای غیر وابسته
- ۲۴۸ ۱۲-۳- شرایط غیر همبستگی میرایی
- ۲۵۰

۲۵۵	۴-۱۲- زیر برنامه DAMP، محاسبه ماتریس میرایی
۲۵۶	۵-۱۲- برنامه ۹، امتحان زیربرنامه DAMP
۲۵۷	۶-۱۲- خلاصه
۲۵۷	- مسائل
۲۶۰	۱۲- کرجک کردن ماتریسهای دینامیکی
۲۶۱	۱-۱۲- تراکم استاتیکی
۲۶۴	۲-۱۲- تراکم استاتیکی در مسائل دینامیکی
۲۶۴	۳-۱۲- اصلاح روش تراکم استاتیکی
۲۷۵	۴-۱۲- تراکم دینامیکی
۲۸۴	۵-۱۲- برنامه ۱۰، امتحان زیربرنامه CONDE
۲۸۹	۶-۱۲- خلاصه
۲۹۰	- مسائل

بخش III- سازه های قابی مدل شده بصورت سیستم های چند درجه آزادی مجزا

۲۹۴	۱۴- تحلیل دینامیکی تیرها
۲۹۵	۱-۱۴- خواص استاتیکی قطعات تیر
۳۰۰	۲-۱۴- ماتریس سختی سیستم
۳۰۲	۳-۱۴- خواص ماند، جرم متمرکز
۳۰۴	۴-۱۴- خواص ماند، جرم همسان
۳۰۷	۵-۱۴- میرایی
۳۰۸	۶-۱۴- بارهای خارجی
۳۰۹	۷-۱۴- سختی هندسی
۳۱۳	۸-۱۴- معادلات حرکت
۳۱۸	۹-۱۴- نیروها در مختصات گرهی
۳۲۰	۱۰-۱۴- برنامه ۱۱، تحلیل دینامیکی تیرها (BEAM)
۳۲۵	۱۱-۱۴- خلاصه
۳۲۶	- مسائل

۲۳۰	۱۵- تحلیل دینامیکی قابهای دوبعدی ✓
۲۳۱	۱-۱۵- ماتریس سختی عضو
۲۳۲	۲-۱۵- ماتریس جرم عضو
۲۳۶	۳-۱۵- انتقال مختصات
۲۴۲	۴-۱۵- برنامه ۱۲ (FRAME)، تحلیل دینامیکی قابهای دوبعدی
۲۴۸	۵-۱۵- خلاصه
۲۴۸	- مسائل
۲۵۲	۱۶- تحلیل دینامیکی شبکه ها ✓
۲۵۲	۱-۱۶- مختصات محلی و کلی
۲۵۲	۲-۱۶- تأثیرات پیچشی
۲۵۵	۳-۱۶- ماتریسی سختی اعضای شبکه
۲۵۶	۴-۱۶- ماتریس جرم همساز اعضای شبکه
۲۵۶	۵-۱۶- ماتریس جرم متمرکز اعضای شبکه
۲۵۷	۶-۱۶- انتقال مختصات
۲۶۲	۷-۱۶- برنامه ۱۲ (GRID)، تحلیل دینامیکی شبکه ها
۲۶۷	۸-۱۶- خلاصه
۲۶۷	- مسائل
۲۷۰	۱۷- قابهای سه بعدی ✓
۲۷۱	۱-۱۷- ماتریس سختی عضو
۲۷۲	۲-۱۷- ماتریس جرم عضو
۲۷۲	۳-۱۷- ماتریس میرایی عضو
۲۷۲	۴-۱۷- انتقال مختصات
۲۸۰	۵-۱۷- معادلات دیفرانسیل حرکت
۲۸۰	۶-۱۷- پاسخ دینامیکی
۲۸۱	۷-۱۷- خلاصه
۲۸۲	۱۸- تحلیل دینامیکی خرپاها ✓
۲۸۲	۱-۱۸- ماتریسهای سختی و جرم خرپای دوبعدی
۲۸۵	۲-۱۸- انتقال مختصات

۳۹. ۱۸-۳- برنامه ۱۴ (TRUSS)، تحلیل دینامیکی خراباهای دو بعدی
 ۳۹۴ ۱۸-۳- ماتریسی سختی و جرم خراباهای فضایی
 ۳۹۵ ۱۸-۵- معادله حرکت خراباهای فضایی
 ۳۹۶ ۱۸-۶- خلاصه
 ۳۹۶- مسائل

- ۳۹۸ ۱۹- پاسخ ضربه خطی دستگاههای چند درجه آزادی
 ۳۹۹ ۱۹-۱- معادلات نموی حرکت
 ۴۰۰ ۱۹-۲- روش ویلسون - θ
 ۴۰۲ ۱۹-۳- الگوریتم حل گام به گام دستگاههای خطی به کمک روش انتگرال گیری ویلسون - θ
 ۴۰۷ ۱۹-۴- برنامه ۱۵، آزمایش زیر برنامه STEPМ
 ۴۱۲ ۱۹-۵- برنامه ۱۶، پاسخ لرزه ای ساختمانهای پرشی (SRSB)
 ۴۱۳ ۱۹-۶- رفتار ارتعاشی - خمیری قابها
 ۴۱۴ ۱۹-۷- ماتریس سختی عضو
 ۴۱۵ ۱۹-۸- ماتریس جرم عضو
 ۴۱۷ ۱۹-۹- چرخش لولای خمیری
 ۴۱۹ ۱۹-۱۰- محاسبه ضریب نرمی عضو
 ۴۲۰ ۱۹-۱۱- خلاصه
 ۴۲۰- مسائل

بخش IV- سازه های مدل شده با خواص گسترده

- ۴۲۴ ۲۰- تحلیل دینامیکی سیستم های با خواص گسترده
 ۴۲۵ ۲۰-۱- ارتعاش خمشی تیرهای یکنواخت
 ۴۲۷ ۲۰-۲- حل معادلات حرکت ارتعاش آزاد
 ۴۲۸ ۲۰-۳- فرکانس طبیعی و اشکال مدی تیرهای یکنواخت
 ۴۲۷ ۲۰-۴- شرایط تعامد بین مدهای متعامد
 ۴۲۹ ۲۰-۵- ارتعاش اجباری تیرها
 ۴۳۳ ۲۰-۶- تنشهای دینامیکی در تیرها
 ۴۴۵ ۲۰-۷- خلاصه

۴۴۶

-مسائل

- ۲۱- مجزا سازی سیستم های پیوسته
 ۲۵۰-۱-۲۱- ماتریس دینامیکی برای کنش خمشی
 ۴۵۱-۲-۲۱- ماتریس دینامیکی برای کنش محوری
 ۴۵۲-۳-۲۱- ماتریس دینامیکی برای کنش پیچشی
 ۴۵۶-۴-۲۱- خمش تیر با گنجانیدن اثر نیروی محوری
 ۴۵۷-۵-۲۱- بسط ماتریس دینامیکی خمشی به سری نمایی
 ۴۶۱-۶-۲۱- بسط ماتریس دینامیکی محوری-پیچشی به سری های نمایی
 ۴۶۲-۷-۲۱- بسط ماتریس دینامیکی متأثر از نیروی محوری به سری نمایی
 ۴۶۳-۸-۲۱- خلاصه
 ۴۶۴

بخش ۷ ارتعاشات اتفاقی

- ۲۲- مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی
 ۴۶۶-۱-۲۲- توصیف آماری توابع تصادفی
 ۴۶۷-۲-۲۲- توزیع نرمال
 ۴۷۰-۳-۲۲- توزیع ریلی
 ۴۷۳-۴-۲۲- همبستگی
 ۴۷۴-۵-۲۲- انتقال فوریه
 ۴۷۶-۶-۲۲- تحلیل طیفی
 ۴۷۷-۷-۲۲- تابع شدت طیفی
 ۴۸۲-۸-۲۲- فرآیندهای تصادفی باریک و پهن
 ۴۸۴-۹-۲۲- پاسخ به تحریک تصادفی
 ۴۸۷-۱۰-۲۲- خلاصه
 ۴۹۳-مسائل
 ۴۹۴

ضمیمه ۱: برنامه های کامپیوتری

۴۹۸

فهرست راهنما

۵۴۵

پیشگفتار مترجمان

علم دینامیک سازه نسبتاً جوان است و عمدتاً در همین قرن شکل گرفته است. در اوایل قرن بیستم توجه دینامیک سازه بیشتر متوجه تأثیر دستگاه های دینامیکی و ضربه ای بر ساختمانها بود لیکن بزودی دریافتند که بیشترین کاربرد آن در مطالعه رفتار ارتعاشی ساختمانها در زلزله است. امروزه ظهور و حضور گسترده کامپیوتر، نقش دینامیک سازه را در مسائل مهندسی زلزله بطور چشمگیری افزایش داده است و تقریباً بصورت دروس اصلی مهندسی عمران در اکثر دانشگاههای جهان تدریس می شود. نرزه خیزی کشورمان ایجاب می کند که دانشگاه ها و محافل علمی و مهندسی کشور توجه ویژه ای به مهندسی زلزله و بالتبع دینامیک سازه داشته باشند. نسل های اولیه کتابهای دینامیک سازه اهتمام خویش را صرف یافتن جوابهای سریع و یا روشهای عددی برای حل معادلات حرکت می نمودند.

وقور کامپیوتر در چند دهه اخیر موجب شده است که توجه دانش پژوهان بیشتر ممبروف چگونگی تهیه برنامه های کامپیوتری برای حل مسائل کلاسیک دینامیک سازه بشود. به کمک این ابزار امروزه می توان مسائلی را حل نمود که بررسی آنها تا اواسط این قرن بیشتر به رویا می ماند. مترجمان به هنگام تدریس دینامیک سازه در دانشگاه متوجه کاستی کتابهای کلاسیک و قدیمی دینامیک سازه در این باره شده و بدنبال مرجعی بودند که نیاز دانشجویان را در زمینه نگاشتن برنامه های کامپیوتری برای تحلیل دینامیکی سازه ها برطرف نماید. کتاب آقای باز یکی از بهترین کتابهایی است که در این مورد تهیه شده است. این کتاب مباحث مختلف دینامیک سازه را دسته بندی کرده و ابتدا به معرفی روش کلاسیک تحلیل دینامیکی هر يك می پردازد. آنگاه روش عددی مناسب برای حل را تشریح نموده و در ادامه نحوه تهیه برنامه کامپیوتری را توضیح می دهد. باز همچنین برای انواع سازه هایی که مهندسان و دانش پژوهان سروکار دارند، با استفاده از اصول تشریح شده، برنامه های کامپیوتری تهیه و مثالهایی را با این برنامه ها حل کرده و لیست این برنامه ها را هم در آخر کتاب ضمیمه نموده است.

کتاب مزبور در نوع خود کم نظیر می باشد. پیشک با گسترده شدن دامنه

مهندسی زلزله در کشورمان و رواج دوره های کارشناس ارشد در این زمینه، تهیه و ترجمه چنین کتابهایی می تواند مورد استفاده موثر جامعه مهندسی و دانش پژوهان کشور قرار گیرد.

در اینجا باید از زحمات بی شائبه و کارسان آقای مهندس زند در مراحل تایپ و صفحه آرایی کتاب یاد کرد که بدون آن چاپ کتاب دچار وقفه می شد. همچنین شکیبایی و همکاری گروه انتشارات و تایپ مؤسسه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله بویژه خانم حیاتی و آقای آقائی مورد قدردانی و سپاس این مترجمان می باشد.

حسن مقدم

عباس خواجه کرم الدیبتی

ساختار اصلی چاپ اول در اینجا حفظ شده، هر چند که مطالب اضافی و تجدید نظرهایی وارد شده است.

روش رایلی^۱ برای محاسبه سریع فرکانسهای طبیعی که در چاپ اول حذف شده بود، اکنون با جزئیات کامل ارائه می شود. روش تراکم دینامیکی که اخیراً توسط مولف برای کاهش مسائل ویژه ابداع شده در فصل ۱۳ مورد بحث قرار می گیرد. این روش که در واقع حل دقیق همه مدها را در سیستم کاهش یافته ارائه می کند. فصل جدیدی درباره ارتعاشات تصادفی، خواننده را با این موضوع جالب از نقطه نظر کاربردهای مهندسی آن آشنا می سازد.

چندین بخش از کتاب جهت روشن کردن مفاهیم، بازنویسی شده و مسائل متعددی به فصلهای مختلف کتاب اضافه شده اند. برنامه های کامپیوتری ارائه شده در ضمیمه ۱ مورد بازبینی قرار گرفته و عباراتی جهت تسهیل در استفاده از برنامه به آنها اضافه شده است. نهایتاً ضمیمه جدیدی به کتاب افزوده شده که پاسخ مسائل پیشنهادی بعنوان تمرین در بخش ۱ را در اختیار خوانندگان قرار می دهد. مولف مدیون بسیاری از دانشجویان و دوستان و همکاران حرفه ای خود بخاطر پیشنهادات، گوشزد اشتباهات چاپی و توصیه موضوعات اضافی برای کتاب می باشد. تمامی این پیشنهادات با دقت در نظر گرفته شده و در چاپ دوم تا حد امکان وارد شده اند.

مولف همچنین از آقای هربرت ساندروز^۲ از شرکت جنرال الکتریک به خاطر مرور کامل چاپ اول در مقاله ای در نشریه طراحی و مهندسی هسته ای^۳ کمال تشکر را دارد. (شماره ۷۱، ۱۹۸۲ - صفحه ۲۵۹)

بعلاوه جا دارد که از دانشجوی سابق خود، پروفیسور کارلوس مالپارتیدا^۴ در دانشگاه کوسکو^۵ در پرو که اینجانب را در ایجاد روش تراکم دینامیکی که در فصل ۱۳ معرفی شده یاری کرد، تشکر کنم. از همکارم در دانشگاه لوئیسویل^۶ دکتر مارون^۷ بخاطر مطالعه نهایی فصل ۱۳ و اصلاحات ویراستاری آن نیز بدینوسیله قدردانی می کنم.

از کلیه کسانی که بنده را در چاپ اول کتاب یاری رسانده اند نیز صمیمانه تشکر میکنم.

ماریو پاز

1- Rayleigh 2- Herbert Saunders 3-Nuclear Engineering and Design
4- Carlos Malpartida 5- Cusco 6-Louisville 7- Melvin J. Marson

مقدمه چاپ اول

پدیده های طبیعی و فعالیت های بشر باعث ایجاد نیروهای وابسته به زمان در سازه هائی ساده مانند تیرهای بتنی و لوله های فولادی یا سازه هائی پیچیده مانند ساختمان های چند طبقه و نیرو گاههای هسته ای میشود. تحلیل و طراحی چنین سازه هائی تحت بارهای دینامیکی مستلزم در نظر گرفتن نیروهای اینرسی وابسته به زمان است. مقاومت سازه در مقابل تغییر مکان ممکن است شامل نیروهای شود که تایمی از جابه جایی و سرعت می باشند. در نتیجه معادلات حاکم بر حرکت سیستم های دینامیکی از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی بوده که حل ریاضی آنها بسیار مشکل است. با این وجود، پیشرفتهای اخیر در زمینه دینامیک سازه ما را قادر میسازد که امر تحلیل و طراحی را بگونه ای عملی به انجام رسانیم این کار با استفاده از فرضیات و مدلهای ریاضی ساده، روشهای ماتریسی، و روشهای جدید محاسباتی تسهیل می شود.

طی تدریس در زمینه دینامیک سازه ها، مولف نیاز مبرم دانشجویان به کتابی در این زمینه را احساس کرد. و علیرغم وجود چندین کتاب، بسیار عالی در این زمینه بنظر وی این کتابها اغلب خارج از محدوده درک دانشجویست، در نتیجه هدف اصلی از نوشتن کتاب سازگار کردن روشهای تحلیل با برنامه های کامپیوتری به صورت روشن و ساده است. مؤلف بر این عقیده است که برنامه های کامپیوتری برای کمک به دانشجو در کاربرد روشهای جدید بایستی در کتاب نوشته شوند. بعلاوه مولف امیدوار است که مهندسیین طراح بتوانند از این کتاب بعنوان خودآموز و مرجع بهره گیرند. همچنین سعی شده است تا این کتاب به صورت مرجعی تحقیقاتی در نوشتن پایان نامه دانشجویان دوره های عالی مهندسی مورد استفاده قرارگیرد.

در مدرسه علمی سرعت¹، دانشگاه لوئیس ویل، اکثر دانشجویان مهندسی دوره کارشناسی ارشد سهاله خود را با نوشتن پایان نامه به اتمام می رسانند. تجربه مولف بعنوان استاد مشاور، وی را بر این باورداشته است که این کتاب به خوبی دانشجویان را در تحقیقاتشان و انتخاب موضوع مورد نظر برای تحقیقات در زمینه سازه یاری خواهد نمود.

موضوعات کتاب از چهار بخش تشکیل شده اند. بخش I در مورد دستگاههای یک درجه آزادی صحبت می کند. این بخش شامل مفاهیم مقدماتی بوده و روشهای اصلی برای حل چنین سیستمهای دینامیکی را ارائه می کند. بخش II درباره مفاهیم مهم دستگاههای چند درجه آزادی با استفاده از مدل ساختمانهای برشی بحث می کند. بخش III روشهایی برای تحلیل دینامیکی سازه های قابی که به صورت سیستمهای مجزا با درجات آزادی متعددی مدل شده اند را شرح می دهد. نهایتاً قسمت IV لحل عددی برای

سازه های ساده که به شکل سیستمهای با خواص گسترده مدل شده اند و در نتیجه دارای درجات آزادی زیادی هستند را ارائه می کند. قسمت همچنین رابطه ریاضی بین روش دقیق حل سیستمهای پیوسته و روش تقریبی حل سازه های مدل شده به شکل سیستمهای مجزا را نشان می دهد. لیست ۱۶ برنامه کامپیوتری در ضمیمه ارائه شده است. درباره این برنامه ها در فصل های مربوطه در طول کتاب بحث خواهد شد. این برنامه ها آنچنان پیچیده نیستند که قادر به حل مسائل گوناگون با بهترین کارایی باشند، و همچنین هدف از تنظیم آنها رقابت با برنامه های بزرگ تجارتي نیست.

این برنامه ها جنبه راهنما داشته و توسط مسائل ساده ای که با محاسبات سستی حل شده اند، کنترل گشته اند. بعنوان آخرین مطلب، مولف بایستی خواننده را مطمئن سازد که این برنامه ها عاری از خطا می باشند. متأسفانه تجربه ثابت کرده است اینگونه اطمینان دادن ها مخاطراتی را نیز همراه دارد. لذا مولف صمیمانه از خوانندگان درخواست می نماید در صورت یافتن خطائی در این برنامه ها ری را مطلع سازند.

در خاتمه اگر کتاب انتظارات مولف را در زمینه نشر دانش دینامیک سازه بر آورده سازد، وی پاداش خود را به خاطر تلاشهایش در تهیه و توسعه مطالب در این کتاب دریافت داشته است.

ماریو پاز

دسامبر ۱۹۷۹

فصل اول

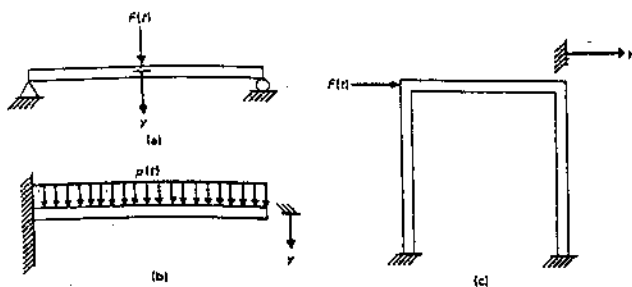
سیستم های يك درجه آزادی نامیرا

همیشه امکان به دست آوردن راه حل دقیق ریاضی در مسائل مهندسی عملی نمی باشد. در حقیقت راه حل‌های تحلیلی فقط برای تعداد محدودی از مسائل ساده شده مهندسی قابل ارائه می باشد. در مسائل پیچیده مهندسی برای حل ریاضی مسئله باید از فرضیات ساده کننده و ایده آل سازی استفاده نمود، اما در عین حال نتایج حاصل از حل باید تقریب کافی داشته و از نظر ایمنی و اقتصادی نیز قابل قبول باشد.

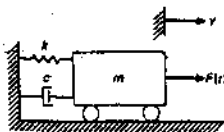
۱-۱- درجات آزادی

در دینامیک سازه ها تعداد مؤلفه های مستقلی که برای نشان دادن تغییر شکل یا موقعیت سیستم در هر لحظه لازم است را تعداد درجات آزادی می نامند. در حالت کلی یک سیستم پیوسته دارای بی نهایت درجه آزادی می باشد. اما با ایده آل سازی و یا انتخاب یک مدل ریاضی مناسب می توان درجات آزادی را به تعدادی محدود و گاهی حتی یک درجه کاهش داد. شکل (۱-۱) تعدادی سازه را نشان می دهد که می توان برای تحلیل دینامیکی، آنها را به صورت یک سیستم یک درجه آزادی یعنی با یک مؤلفه تغییر مکان مدل کرد. این سیستمهای یک درجه آزادی را می توان به صورت مدل ریاضی شکل (۲-۱) نشان داد. اجزای مختلف این مدل عبارتند از: (۱) جرم m ، نشان دهنده خصوصیات جرمی و اینرسی سازه می باشد، (۲) فنر k ، نشان دهنده مقاومت سازه در مقابل تغییر شکل و ظرفیت انرژی پتانسیل سازه است، (۳) میراساز c ، مبین خصوصیات اصطکاکی و اتلاف انرژی در سازه (۴) نیروی محرک $F(t)$ ، بیانگر نیروهای خارجی وارد بر سیستم است.

در مدل شکل (۲-۱) هر یک از اجزاء فقط نشان دهنده یکی از خصوصیات سیستم می باشند. یعنی فقط نشان دهنده خصوصیات جرمی و اینرسی سیستم می باشد و نه خصوصیات ارتجایی و میرایی سیستم، و فنر k فقط چنانچنین خصوصیات ارتجایی سیستم است و نه خصوصیات جرمی و اتلاف انرژی و بالاخره میراساز c فقط مدل اتلاف انرژی سیستم می باشد. بدیهی است که در سازه واقعی این اجزاء از یکدیگر جدا نیستند و مدل‌های ریاضی پرداخته ذهنی از سازه های واقعی میباشند، بنابراین اطلاعات حاصل از آنها فقط اطلاعاتی محدود و تقریبی از رفتار سیستم واقعی می باشند. با وجود این از نقطه نظر عملی برای درک رفتار دینامیکی سیستم واقعی این اطلاعات می تواند کاملاً کافی باشد و در طراحی مورد استفاده قرار گیرد.



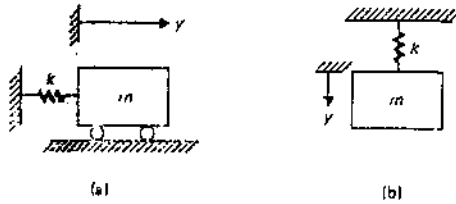
شکل (۱-۱): چند مثال از سازه هایی که به صورت سیستمهای يك درجه آزادی مدل شده اند.



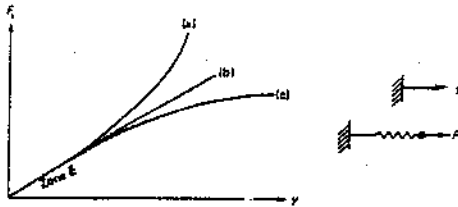
شکل (۲-۱): مدل ریاضی سیستمهای يك درجه آزادی.

۲-۱- سیستم های نامیرا

ابتدا يك سیستم ساده يك درجه آزادی را که در آن از نیروهای اصطکاکی یا میرایی صرفنظر شده است در نظر گرفته و ارتعاش سیستم را در حالت آزاد و بدون اثر نیروهای خارجی بررسی می نماییم. در این شرایط ارتعاش سیستم تحت تاثیر شرایط اولیه یعنی سرعت و تغییر مکان در شروع حرکت ($t=0$) انجام می پذیرد. این سیستم يك درجه آزادی نامیرا، نوسانگر ساده نامیرا، نامیده می شود و به صورت (شکل ۲-۱، الف) یا (۲-۱، ب) نشان داده می شود. مدل ریاضی این دو سیستم یکسان است و هر کدام از آنها را می توان به عنوان مدل نوسانگر ساده نامیرا انتخاب نمود. در هر يك از آنها جرم m به فنر k تکیه دارد و محدود به حرکت سیستم در امتداد يك مؤلفه می باشد. مشخصه مکانیکی هر فنر یعنی سختی آن، نسبت نیروی اعمال شده در انتهای فنر F به جابه جایی ایجاد شده در آن y می باشد که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است.



(شکل ۳-۱): اشکال مختلف مدلهای ریاضی برای سیستمهای یک درجه آزادی



(شکل ۳-۱): رابطه نیرو - تغییر مکان. الف - فنر سخت. ب - فنر خطی. ج - فنر نرم.

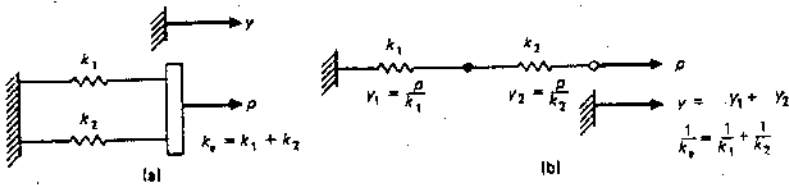
متحنی (الف) در این شکل نشان دهنده رفتار یک فنر «سخت شونده» می باشد یعنی با افزایش جابه جایی در فنر سختی آن افزوده می شود. فنر دوم (ب) یک «فنر خطی» می باشد زیرا سختی آن ثابت است و نمودار آن به صورت یک خط مستقیم نشان داده می شود. نسبت ثابت نیرو به جابه جایی (شیب خط ب) در یک فنر خطی «ثابت فنر» نامیده و با k نشان داده می شود. بنابراین می توانیم رابطه زیر را بین نیرو و جابه جایی در یک فنر خطی بنویسیم:

$$F_s = ky \quad (۱-۱)$$

منحنی (ج) در شکل (۳-۱) مشخصه یک فنر «نرم شونده» می باشد. در این فنر با افزایش جابه جایی برای ایجاد یک جابه جایی معوی نیروی کمتری لازم می باشد یعنی سختی آن کاهش پیدامی نماید. بدیهی است که ساده ترین حالت استفاده از فنر خطی برای تحلیل مدل ریاضی است. در عمل معمولاً چه رفتار سازه واقعاً خطی باشد چه برای ساده کردن تحلیل، رابطه نیرو - جابه جایی در سیستم خطی در نظر گرفته می شود. البته با توجه به اینکه جابه جایی ها و تغییر شکلها در سازه ها کوچک هستند (محدوده E در شکل ۳-۱) فرض خطی بودن، به رفتار افقی سازه نزدیک می باشد.

۳-۱- فنرهای موازی و سری

گاهی اوقات از چند فنر به صورت موازی مانند شکل (۵-۱، الف) و یا سری مانند شکل (۵-۱، ب) در یک سیستم استفاده می شود. در این صورت باید یک ثابت فنری معادل در سیستم به دست آورد.



(شکل ۵-۱) ترکیب فنرها: الف - فنرهای موازی ب - فنرهای سری

برای دو فنر موازی کل نیروی لازم برای ایجاد یک جابه جایی واحد در انتهای آنها برابر است یا مجموع سختی دو فنر که مطابق تعریف سختی معادل فنرها نامیده می شود:

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (۲-۱)$$

(تقریباً فنرها با هم برابر است)

در حالت کلی برای n فنر موازی داریم:

$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i \quad (۳-۱)$$

در دو فنر سری مانند شکل (۵-۱، ب) نیروی P در هر یک از فنرها جابه جایی های زیر را ایجاد می نماید:

$$y_1 = \frac{P}{k_1}$$

$$y_2 = \frac{P}{k_2}$$

بنابراین جابه جایی کل انتهای مجموعه فنرها برابر است با: $y = y_1 + y_2$ یا

$$y = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \quad (۳-۱)$$

در نتیجه، نیروی لازم برای ایجاد یک جابه جایی واحد (سختی معادل فنرها) برابر

خواهد شد با:

$$k_e = \frac{P}{y}$$

با قراردادن این مقدار در رابطه (۴-۱) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (5-1)$$

(تقریباً نرها با هم جمع می شود)

در حالت کلی برای n فنر سری داریم:

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (6-1)$$

۴-۱- قانون حرکت نیوتن

اکنون نوسانگر ساده شکل (۳-۱) را مورد مطالعه قرار می دهیم. هدف تعیین حرکت آن یعنی به دست آوردن جابه جایی و سرعت جرم در هر لحظه t برای یک شرایط اولیه مشخص می باشد. رابطه بین جابه جایی y و زمان t توسط قانون دوم حرکت نیوتن به شکل رابطه (۷-۱) نوشته می شود:

$$F = m a \quad (7-1)$$

در این رابطه F برآیند نیروهای وارد بر ذره ای به جرم m و a شتاب حاصل از آن می باشد. باید توجه داشت که رابطه (۷-۱) به شکل برداری است و می توان آن را به صورت مؤلفه هایش در امتدادهای x, y و z نوشت:

$$\sum F_x = m a_x \quad (8-1 \text{ الف})$$

$$\sum F_y = m a_y \quad (8-1 \text{ ب})$$

$$\sum F_z = m a_z \quad (8-1 \text{ ج})$$

با توجه به اینکه شتاب مشتق دوم بردار موقعیت نسبت به زمان می باشد در حقیقت روابط (۸-۱) معادلات دیفرانسیلی هستند. همچنین باید یادآور شد که این روابط برای ذرات مادی یعنی اجسام جرم دار بدون حجم و اجسام مادی حجم داری که حرکت انتقالی دارند صادق است.

در حرکت صفحه ای یک جسم صلب که نسبت به صفحه حرکت (x-y) دارای تقارن می باشد قانون حرکت نیوتن منجر به روابط زیر می شود:

$$\sum F_x = m (a_G)_x \quad (9-1 \text{ الف})$$

$$\sum F_y = m (a_G)_y \quad (9-1 \text{ ب})$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (9-1 \text{ ج})$$

در این روابط $(a_G)_x$ و $(a_G)_y$ مؤلفه های شتاب مرکز جرم جسم، G ، در امتدادهای x, y می باشند. α شتاب زاویه ای جسم، I_G ممان اینرسی جرم جسم نسبت به محوری که از مرکز جرم آن می گذرد و $\sum M_G$ برآیند گشتاور کلیه نیروهای وارد بر جسم حول محوری است که از مرکز جرم G می گذرد و بر صفحه حرکت عمود است. روابط (۹-۱) را می توان برای حرکت دورانی یک جسم صلب حول یک محور ثابت نیز به کار برد. در این حالت خاص رابطه (۹-۱) ج را می توان جایگزین رابطه (۹-۱) د را می توان با رابطه زیر جانشین کرد:

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (۹-۱) د$$

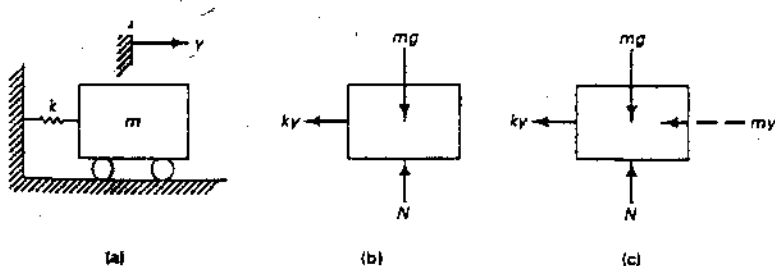
در این رابطه ممان اینرسی جرم، I_G و گشتاور نیروها M_G حول محور ثابت دوران محاسبه می شود. حرکت کلی جسم صلب توسط دو رابطه برداری بیان می شود: یکی رابطه بین برآیند نیروهای وارد بر جسم و شتاب حرکت مرکز جرم آن و دیگری رابطه بین گشتاور نیروها و شتاب زاویه ای جسم. بیان رابطه دوم به صورت مؤلفه های اسکالر آن نسبتاً پیچیده و مشکل است و کمتر در دینامیک سازه ها مورد استفاده است.

۵-۱- نمودار جسم آزاد

برای حل مسائل دینامیک بهتر است از یک روش سیستماتیک استفاده شود. اولین و احتمالاً مهمترین کار برای حل مسائل دینامیک رسم نمودار جسم آزاد سیستم قبل از نوشتن هر رابطه ریاضی می باشد. نمودار جسم آزاد (FBD) ترسیمه ای از جسم به صورت جدا شده از سایر اجسام می باشد که کلیه نیروهای خارجی مؤثر بر جسم بر روی آن نشان داده می شوند. (شکل ۶-۱، ب) نمودار جسم آزاد (FBD) جرم m نوسانگر را نشان می دهد که به اندازه y در جهت مثبت تغییر مکان داشته و نیروی فنر $F_p = ky$ (فنر خطی) بر روی آن اثر می نماید. برای کامل شدن نمودار وزن جسم mg و نیروی عکس العمل N نیز در روی شکل نشان داده شده اند. البته با توجه به اینکه این نیروها در امتداد عمود بر حرکت y هستند تأثیری در معادله حرکت نخواهند داشت. از قانون حرکت نیوتن خواهیم داشت:

$$-ky = m\ddot{y} \quad (۱۰-۱)$$

در این رابطه ky نیروی فنر است که در خلاف جهت مثبت اثر می کند و \ddot{y} شتاب حرکت جسم است.



الف-سیستم يك درجه آزادی با-تمایش نیروهای خارجی به تنهایی-ج- نمایش نیروهای خارجی داخلی.
شکل (۶-۱): اشکال مختلف نمودار جسم آزاد:

۶-۱- اصل دالامبر

روش دیگر برای به دست آوردن معادله (۱-۱) استفاده از «اصل دالامبر»^۱ می باشد. مطابق این اصل با اضافه کردن يك نیروی مجازی به نام «نیروی اینرسی»^۲ به نیروهای خارجی می توان سیستم را در حالت «تعادل دینامیکی»^۳ در نظر گرفت. شکل (۶-۱، ج) ترسیمه آزاد جسم را همراه با نیروی اینرسی $m\ddot{y}$ نشان می دهد. این نیروها حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن می باشد و همواره در خلاف جهت شتاب اثر می کند. براساس اصل دالامبر برای به دست آوردن معادلات حرکت می توان از معادلات تعادل استفاده نمود، به عنوان مثال، در شکل (۶-۱، ج) از تعادل نیروها در جهت y خواهیم داشت:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (1-1)$$

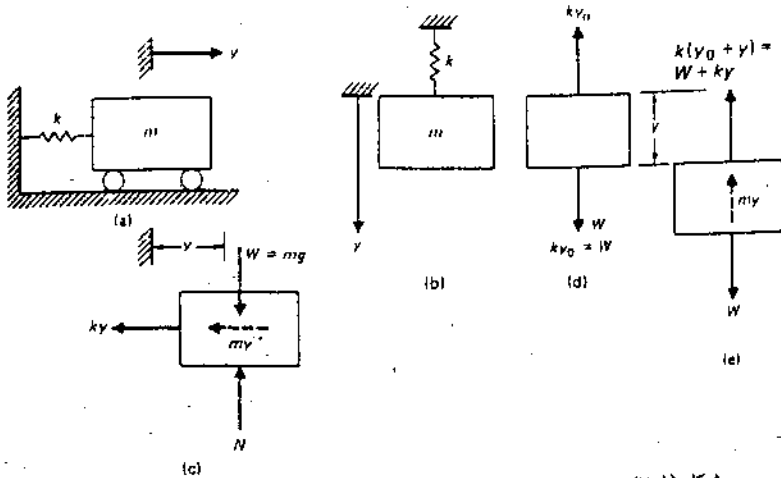
اصل دالامبر به تنهایی کارایی ندارد. تلفیق این اصل با اصل «کار مجازی»^۴ ابزاری بسیار قوی برای تحلیل را فراهم کرده است که البته این موضوع مساله را پیچیده تر نمی کند. همان طور که بعداً شرح داده می شود اصل کار مجازی برای هر سیستم در حال تعادل قابل استفاده می باشد. بنابراین چنانچه از اصل دالامبر استفاده شود اصل کار مجازی را می توان برای سیستمهای دینامیکی هم بکار برد.

مثال ۱-۱- نشان دهید که معادله دیفرانسیل حرکت يك جرم m متکی به فنر k هنگامی که در امتداد قائم ارتعاش می نماید. شکل (۷-۱، الف) با حالتی که در امتداد

-
- 1) D'Alambert's Principle 2) Inertial Force 3- Dynamic equilibrium
4) Principle of virtual work

افقی حرکت می نماید، شکل (۷-۱، ب) یکسان است.

نمودار جسم آزاد این دو حالت به ترتیب در شکل‌های (۷-۱، ج) و (۷-۱، هـ) نشان داده شده اند.



شکل (۷-۱): در شکل از نمایش یک نوسانگر ساده و نمودارهای جسم آزاد مربوط به آن

از جمع جبری نیروها در شکل (۷-۱، ج) داریم: $m\ddot{y} + ky = 0$ (الف)

در شکل (۷-۱، د) که جرم m در تعادل استاتیکی می باشد، نیرو یک نیروی

$ky_0 = W$ به سمت بالا به جسم وارد می نماید.

هنگامی که جسم به اندازه y جابه جا می شود داریم: $F_s = k(y_0 + y)$ یا $F_s = W + ky$ با نوشتن معادله حرکت نیوتن در شکل (۷-۱، هـ) خواهیم داشت:

$$-(W + ky) + W = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

(ب)

که همان رابطه (الف) است

۷-۱- حل معادله دیفرانسیل حرکت

مرحله بعدی حل معادله دیفرانسیل حرکت یعنی معادله (۱۱-۱) می باشد. با

توجه به اینکه متغیر y و مشتق دوم آن \ddot{y} هر دو از درجه یک هستند، لذا این یک

معادله دیفرانسیل خطی درجه اول است. همچنین از آنجایی که ضرایب y و \ddot{y}

(بترتیب k و m) اعداد ثابتی هستند و سمت راست معادله صفر است لذا یک معادله

«همگن» با ضرایب ثابت نیز می باشد. يك روش کلی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی (همگن یا «غیر همگن») از هر مرتبه ای وجود دارد. در این حالت ساده که يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داریم جوابهای زیر را امتحان می نماییم:

$$y = A \cos \omega t \quad (12-1)$$

یا

$$y = B \sin \omega t \quad (13-1)$$

که در آنها B, A ضرایب ثابت هستند و بستگی به شرایط اولیه حرکت دارند و ω همانطور که بعداً نشان داده خواهد شد، کمیتی است که نشان دهنده مشخصات فیزیکی سیستم می باشد. از قراردادن رابطه (12-1) در معادله (11-1) داریم:

$$(-m\omega^2 + k) A \cos \omega t = 0 \quad (14-1)$$

برای اینکه این رابطه برای کلیه مقادیر t صادق باشد باید مقدار داخل پرانتز صفر باشد یعنی:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (15-1)$$

می توان نشان داد که رابطه (13-1) نیز يك جواب معادله (11-1) می باشد که در آن ω همان مقدار رابطه (15-1) است.

ریشه مثبت رابطه (15-1)،

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (16-1)$$

«فرکانس طبیعی» سیستم نامیده می شود.

چون هم رابطه (12-1) و هم رابطه (13-1) جواب معادله (11-1) هستند، با توجه به خطی بودن معادله، جمع این دو رابطه یعنی رابطه (17-1) نیز جواب معادله است. در حقیقت رابطه (17-1) که دارای دو ثابت انتگرال گیری A, B می باشد جواب عمومی این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است.

(17-1)

با يك بار مشتق گرفتن از رابطه (17-1) رابطه تغییرات سرعت، \dot{y} به دست می آید:

$$\dot{y} = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \quad (18-1)$$

حال باید مقادیر ثابتهای B, A را به دست آورد. این مقادیر به کمک مشخصات

-
- 1) Homogeneous 2) Nonhomogeneous 3) Natural Frequency

شناخته شده حرکت که تقریباً همواره جابه جایی y_0 و سرعت v_0 در لحظه $t=0$ هستند تعیین می شوند این دو شرط را «شرط اولیه^۱» و حل معادلات دیفرانسیل برای شرایط اولیه را «مسئله مقدار اولیه^۲» می نامند.
از جایگذاری مقادیر $y = y_0$ و $y = v_0$ برای $t=0$ در معادلات (۱۷-۱) و (۱۸-۱) خواهیم داشت:

$$y_0 = A \quad (الف، ۱۹-۱)$$

$$v_0 = B \omega \quad (ب، ۱۹-۱)$$

بالاخره با قراردادن مقادیر A ، B در رابطه (۱۷-۱) داریم:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (۲۰-۱)$$

که نمایانگر جابه جایی y یک نوسانگر ساده به صورت تابعی از زمان t ، است. بنابراین به هدف خود که به دست آوردن حرکت یک نوسانگر ساده نامی را یعنی مدل سازی های تک درجه است رسیده ایم.

۱-۸- فرکانس و دوره تناوب^۳

از معادله (۲۰-۱) مشاهده می شود که این معادله نشان دهنده یک حرکت «هارمونیک^۴» و لذا «دوره ای^۵» می باشد. یعنی می توان آن را با یک تابع سینوسی یا کسینوسی یا همان فرکانس ω بیان نمود. دوره تناوب را می توان براحتی به دست آورد زیرا هم تابع سینوس و هم تابع کسینوس دارای تناوب 2π می باشند. بنابراین برای محاسبه دوره تناوب حرکت T داریم:

$$\omega T = 2\pi \quad \text{یا}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (۲۱-۱)$$

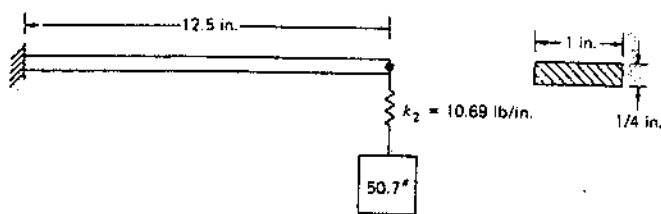
دوره تناوب معمولاً بر حسب ثانیه بر دور و یا به طور ساده تر بر حسب ثانیه بیان می شود. عکس دوره تناوب «فرکانس طبیعی» می باشد:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (۲۲-۱)$$

که بر حسب هرتز یا دور بر ثانیه (CPS) بیان می شود. البته ω هم که فقط درضریب 2π با f متفاوت است گاهی فرکانس طبیعی نامیده می شود. برای متمایز ساختن این

1) Initial Conditions 2) Initial Value Problem 3) Period 4) Harmonic 5) Periodic

دو مقدار می توان ω را فرکانس طبیعی «دورانی»^۱ یا «زاویه ای»^۲ نامید. فرق این دو مقدار را می توان از واحد آنها مشخص نمود؛ زیرا همان طور که گفته شد واحد f هرتز یا دور بر ثانیه (cps) است ولی واحد ω رادیان بر ثانیه (Rad/Sec) است.



شکل (۸-۱): برای سیستم مثال (۲-۱)

مثال (۲-۱) فرکانس طبیعی سیستم شکل (۸-۱) را به دست آورید. در این سیستم یک وزنه 50.7 lb توسط فنر k_2 به انتهای یک تیر کنسول آویزان شده است. ضخامت تیر کنسول $t = \frac{1}{4}$ in، عرض آن $b = 1$ in و طول آن $L = 12.5$ in است. مسطح بودن ارتجاعی مصالح تیر $E = 3 \times 10^6$ psi و سختی فنر $k_2 = 10.69$ (lb/in) می باشد. جابه جایی انتهای یک تیر کنسول تحت اثر یک نیروی استاتیکی P در انتهایش برابر است با:

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

بنابراین سختی معادل تیر کنسول k_1 برابر خواهد شد با:

$$k_1 = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

که برای مقاطع مستطیلی $I = \frac{bt^3}{12}$ می باشد. تیر کنسول و فنر k_2 به صورت سری به یکدیگر متصل شده اند، لذا سختی معادل سیستم توسط رابطه (۵-۱) به دست خواهد آمد:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

با جایگذاری مقادیر مربوط داریم:

- 1) Circular 2) Angular

$$I = \frac{1}{12} \times 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{768} (\text{in})^4$$

$$k_1 = \frac{3 \times 30 \times 10^6}{(12.5)^3 \times 768} = 60 \text{ lb/in}$$

$$k_e = \frac{1}{60} + \frac{1}{10.69} = 9.07 \text{ lb/in}$$

بنابراین فرکانس طبیعی این سیستم برابر خواهد شد با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{90.7 \times 386 / 50.7}$$

$$\omega = 8.31 \text{ rad/sec}$$

$$f = 1.32 \text{ cps}$$

(جواب)

۹-۱- دامنه حرکت

حال با جزئیات بیشتری معادله (۲۰-۱) یعنی معادله ارتعاش آزاد یک نوسانگر نامیرا را مورد مطالعه قرار می دهیم. با استفاده از روابط مثلثاتی این رابطه را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$y = C \sin(\omega t + \alpha) \quad (23-1)$$

یا

$$y = C \cos(\omega t + \beta) \quad (24-1)$$

که

$$C = \sqrt{y_0^2 + (v_0 / \omega)^2} \quad (25-1)$$

$$\tan \alpha = \frac{y_0}{v_0 / \omega} \quad (26-1)$$

و

$$\tan \beta = \frac{v_0 / \omega}{y_0} \quad (27-1)$$

ساده ترین راه برای به دست آوردن رابطه (۲۳-۱) یا (۲۴-۱)، با استفاده از رابطه (۲۰-۱) به شکل رابطه (۲۸-۱) است:

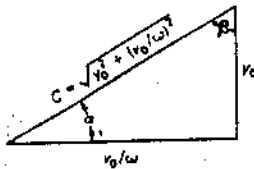
1) Amplitude

$$y = C \left(\frac{y_0}{C} \cos \omega t + \frac{v_0 / \omega}{C} \sin \omega t \right) \quad (28-1)$$

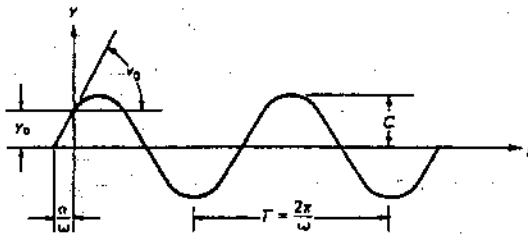
از شکل ۹-۱ نتیجه می گیریم که:

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{C} \quad (29-1)$$

$$\cos \alpha = \frac{v_0 / \omega}{C} \quad (30-1)$$



شکل (۹-۱): تعریف زاویه α



شکل (۱۰-۱): پاسخ ارتعاش آزاد نامیرا

از جایگذاری روابط (۲۹-۱) و (۳۰-۱) و (۲۸-۱) داریم:

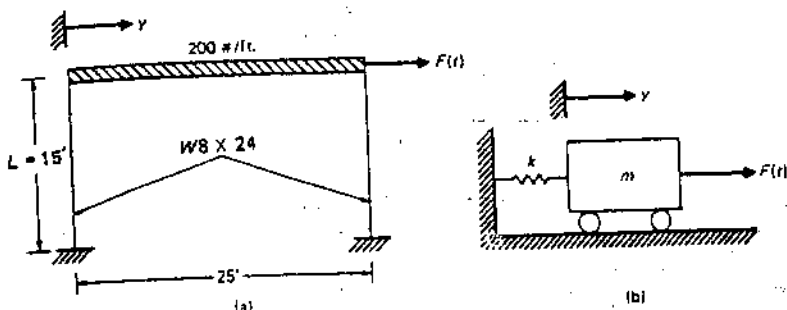
$$y = C(\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t) \quad (31-1)$$

جمله داخل پرانتز رابطه (۳۱-۱) را می توان به صورت $\sin(\omega t + \alpha)$ نوشت که حاصل همان رابطه (۲۳-۱) خواهد بود. به شکل مشابهی می توان رابطه (۲۴-۱) را از رابطه (۲۰-۱) به دست آورد.

مقدار C در رابطه (۲۳-۱) [یا رابطه (۲۴-۱)] دامنه حرکت و زاویه α (یا β)

زاویه فاز^۱ نامیده می شوند. معادله حرکت این نوسانگر ساده به صورت ترسیمی در شکل (۱-۱) نشان داده شده است.

مثال (۳-۱) یک نیروی دینامیکی افقی به بالای قاب فلزی شکل (۱-۱)، الف) اثر می نماید. برای طراحی این سازه نیاز است که فرکانس طبیعی قاب را به دست آوریم. برای این کار دو فرض در نظر گرفته شده است: الف) جرم ستونها و دیوارها ناچیز است؛ ب) سختی تیر زیاد است و از دوران انتهای فوقانی ستونها جلوگیری می کند. این فرضیات برای حل مسأله اجباری نیستند و فقط برای ساده کردن آن هستند.



شکل (۱-۱): قاب یک درجه آزادی

مثال (۳-۱) و مدل ریاضی مربوط به آن در این شرایط می توان قاب را به صورت یک سیستم جرم و فنر شکل ۱۱-۱ (ج) مدل می این مدل عبارتند از:

$$W = 200 \times 25 = 5000 \text{ lb}$$

$$I = 82.5 \text{ in}^4$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$k = \frac{12E(2I)}{L^3} = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 165}{(15 \times 12)^3} = 10185 \text{ lb/in}$$

بنابراین داریم:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10185 \times 386}{5000}}$$

$$f = 4.46 \text{ cps}$$

(جواب)

1) Phase Angle

۱-۱- خلاصه

مفاهیم اولیه ارائه شده در این فصل عبارتند از:

- ۱- مدل ریاضی يك سازه مدل ساده شده ای برای تحلیل آن می باشد.
- ۲- تعداد درجات آزادی يك سیستم برابر است با تعداد جابه جایی های مستقلی که برای تعیین موقعیت و تغییر شکل يك سیستم در هر لحظه مورد نیاز است.
- ۳- برای نوشتن تعادل دینامیکی (با استفاده از اصل دالامبر) آزمودار جسم آزاد (FBD) استفاده می شود در آن کلیه نیروهای خارجی و نیروی اینرسی نشان داده می شود.
- ۴- سختی یا ثابت يك فنر خطی مقدار نیروی لازم برای ایجاد يك تغییر مکان واحد در فنر است.

۵- معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد يك نوسانگر ساده نامیرا عبارت است از:

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

و جواب عمومی آن:

است که A, B ضرایب ثابت انتگرال گیری هستند و از شرایط اولیه تعیین می شوند:

$$A = y_0$$

$$B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرکانس طبیعی بر حسب rad/sec

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

فرکانس طبیعی بر حسب cps

$$T = \frac{1}{f}$$

پریود طبیعی بر حسب ثانیه

۶- شکل دیگر معادله حرکت به صورت زیر است:

$$y = C \sin (\omega t + \alpha)$$

$$y = C \cos (\omega t + \beta)$$

یا

$$C = \sqrt{y_0^2 + (v_0 / \omega)^2}$$

که

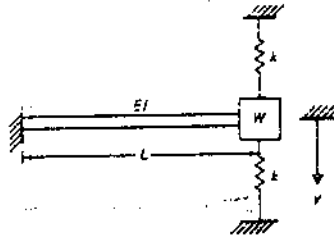
$$\tan \alpha = \frac{y_0}{v_0 / \omega}$$

و

$$\tan \beta = \frac{v_0 / \omega}{y_0}$$

مسائل

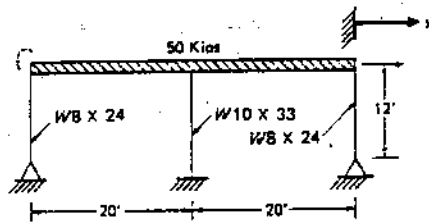
۱-۱ زمان تناوب ارتعاش سیستم شکل م (۱-۱) را به دست آورید. از وزن تیر و فترها صرف نظر نمایید.



شکل م (۱-۱)

۲-۱ چنانچه مساله (۱-۱) دارای مقادیر عددی زیر باشد $EI = 10^8 \text{ (lb.in}^2\text{)}$, $L = 100 \text{ in}$ و وزن $W = 3000 \text{ lb}$ و $k = 2000 \text{ lb/in}$ جابه جایی اولیه $y_0 = 1.0 \text{ in}$ و سرعت اولیه $v_0 = 20 \text{ in/sec}$ داشته باشد، سرعت و جابه جایی آن را پس از ۱ ثانیه به دست آورید.

۳-۱ فرکانس طبیعی حرکت افقی قاب فلزی شکل م (۳-۱) را به دست آورید. فرض نمایید تیر افقی کاملاً صلب است و از جرم ستونها صرف نظر کنید.



شکل م (۳-۱)

۴-۱ فرکانس طبیعی ارتعاش افقی قاب فلزی شکل م (۴-۱) را در شرایط زیر به دست آورید: الف) تیر افقی کاملاً صلب باشد ب) تیر انعطاف پذیر از پروفیل $W10 \times 33$ باشد.

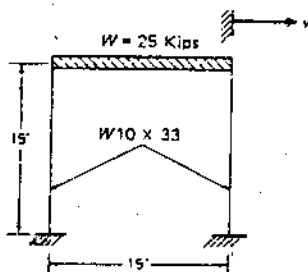
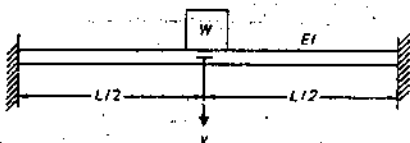


Fig. 1.14

شکل م (۳-۱)

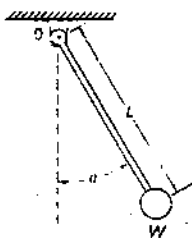
۵-۱ فرکانس طبیعی تیر در سرگیردار شکل م ۵-۱ را به دست آورید. از وزن تیر صرفنظر نمایید.



شکل م (۵-۱)

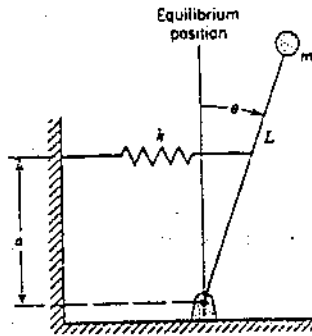
۶-۱ مقادیر عددی مساله (۵-۱) عبارتند از: $L = 120 \text{ in}$ ، $EI = 10^9 \text{ (lb-in}^2\text{)}$ و $W = 5000 \text{ lb}$ چنانچه شرایط اولیه حرکت $y_0 = 0.5$ و $v_0 = 15 \text{ in/sec}$ باشد، تغییر مکان، سرعت و شتاب وزنه W را پس از ۲ ثانیه به دست آورید.

۷-۱ X آونک ساده شکل م (۷-۱) به وزن W را در نظر بگیرید. این آونک چرم متمركزی است که به يك قطعه طناب بی وزن متصل می باشد و در صفحه قائم در يك مسیر قوسی نوسان می نماید. تنها نیروهای مؤثر نیروی وزن و کشش طناب هستند. (از مقاومت اصطکاکی صرفنظر می شود). چنانچه طول طناب L باشد و زاویه θ مقدار کوچکی باشد حرکت آونک را برای شرایط اولیه θ_0 ، $\dot{\theta}_0$ به دست آورید.



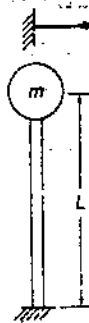
شکل م (۷-۱)

۸-۱ X معادله دیفرانسیل حرکت آونگ وارونه شکل م (۸-۱) را به دست آورید و فرکانس طبیعی آن را محاسبه کنید. زاویه نوسان را کوچک فرض کنید و از جرم میله صرفنظر نمایید.



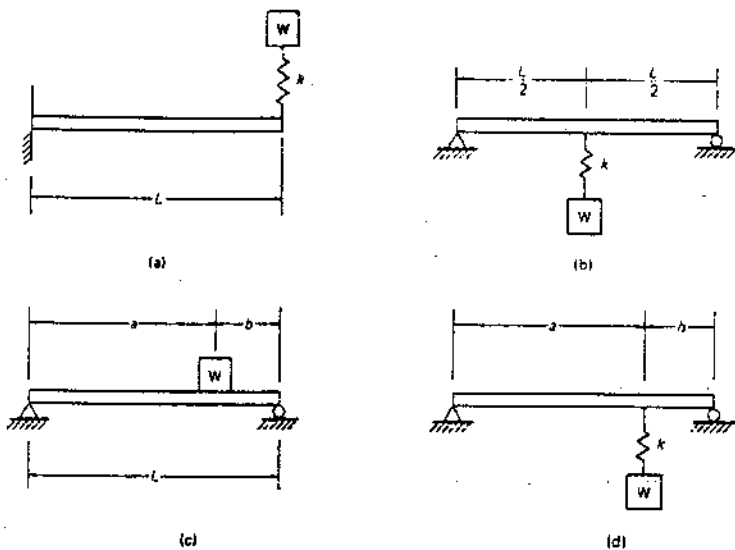
شکل م (۸-۱)

۹-۱ يك ستون قائم بطول L و سختی خمشی EI جرم m را مطابق شکل م (۹-۱) در انتهای آزادش تحمل می نماید. با صرفنظر از جرم ستون و فرض تغییر مکانهای کوچک معادله دیفرانسیل ارتعاش افقی جرم m را به دست آورید و فرکانس طبیعی آن را محاسبه کنید. اثر وزن را ناچیز فرض نموده و از اثرات غیرخطی صرفنظر نمایید.



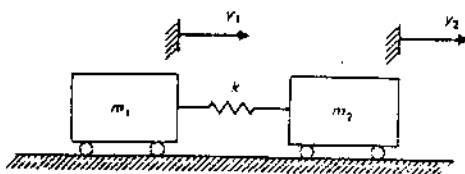
شکل م (۹-۱)

۱۰-۱ در هریک از حالت‌های شکل م ۱۰-۱ فرکانس طبیعی وزن W را به دست آورید. سختی خمشی تیر EI ثابت و از وزن آنها صرفنظر شود.



شکل م (۱۰-۱)

۱۱-۱ در سیستم شکل م (۱۱-۱) دو جرم m_1 ، m_2 توسط فنری به سختی k به هم متصل شده اند. معادله دیفرانسیل حرکت نسبی این دو جرم $u = y_2 - y_1$ را به دست آورید. همچنین فرکانس طبیعی این حرکت را تعیین نمایید.



شکل م (۱۱-۱)

فصل دوم

سیستم يك درجه آزادی میرا

در فصل قبل دیدیم که یک نوسانگر ساده در شرایط ایده آل بدون میرایی، در فرکانس طبیعی خود و بادامته ثابت بطور نامحدود نوسان می نماید. تجربه نشان می دهد که هیچ وسیله ای در این شرایط ایده آل ارتعاش نمی نماید. نیروهای اصطکاکی و میرایی^۱ همواره در سیستمهای فیزیکی متحرک وجود دارند. این نیروها باعث اتلاف انرژی می شوند. به عبارت دقیق تر وجود این نیروها، مکانیزم درسیستم به وجود می آورد که باعث می شود انرژی مکانیکی و انرژی جنبشی یا پتانسیل سیستم به شکلهای دیگری از انرژی مانند حرارت تبدیل میشوند. مکانیزم این اتلاف یا تبدیل انرژی پیچیده است و کاملاً شناخته شده نمی باشد. برای به حساب آوردن اثر این نیروها در تحلیل سیستمهای دینامیکی باید فرضیاتی را در مورد این نیروها بر اساس تجربیات در نظر گرفت.

۲-۱- میرایی لزج^۲

برای در نظر گرفتن اثر نیروهای میرایی در تحلیل دینامیکی سیستم ها معمولاً فرض بر این است که مقدار این نیروها متناسب با مقدار سرعت و جهت آنها در خلاف جهت حرکت می باشد. این نوع میرایی بنام میرایی لزج معروف است. این نوع میرایی مقاومتی است که سیال اطراف یک جسم در مقابل حرکت آن بوجود می آورد. شرایطی وجود دارند که در آن فرض میرایی لزج واقعی بوده و مکانیزم اتلاف انرژی تقریباً از نوع لزج است. اما در اغلب اوقات علی رغم مشخصات واقعی اتلاف انرژی، سیستم از نوع میرایی لزج استفاده می شود زیرا مدل ریاضی سیستم در این حالت شکل ساده ای خواهد داشت.

۲-۲- معادله حرکت

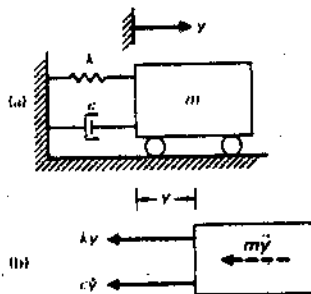
فرض کنید یک سیستم دینامیکی را به یک نوسانگر ساده بسا میرایی لزج مطابق شکل ۱-۲ (الف) مدل کرده باشیم. در این شکل m و k به ترتیب جرم و ثابت نيز نوسانگر و c ضریب میرایی لزج آن هستند. مانند حالت نوسانگر نامیرا ابتدا نمودار جسم آزاد (FBD) آن را رسم می نمائیم و سپس قانون حرکت نیوتن را برای آن می نویسیم. شکل ۱-۲ (ب) نمودار جسم آزاد این نوسانگر را نشان می دهد که نیروی اینرسی $m\ddot{y}$ نیز روی آن نشان داده شده است و لسی توان از اصل دالامبر

1) Damping forces

2) Viscous

استفاده نمود. از جمع نیروها در جهت y معادله دیفرانسیل حرکت به شکل زیر حاصل می شود.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (1-2)$$



(1-2): الف- نوسانگر با میرایی لزج. ب- نمودار جسم آزاد

نتیجه می گیریم که جوابهای $y = A \sin \omega t$ یا $y = B \cos \omega t$ در این معادله صدق نمی نمایند ولی جواب $y = Ce^{pt}$ معادله را ارضاء می نماید. از قرار دادن این جواب در معادله داریم:

$$m C p^2 e^{pt} + c C p e^{pt} + k C e^{pt} = 0$$

که پس از حذف جمله مشترك به معادله ساده شده زیر به نام «معادله مشخصه» تبدیل می شود:

$$m p^2 + C p + k = 0 \quad (2-2)$$

ریشه های این معادله درجه دوم عبارتند از:

$$p_1 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2-2)$$

بنابراین جواب عمومی معادله 1-2 از جمع دو جواب ممکن حاصل می شود:

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad (4-2)$$

که C_1 و C_2 ضرایب ثابت انتگرال گیری هستند و از شرایط اولیه به دست می آیند. جواب نهایی معادله (4-2) بستگی به علامت مقدار زیر رادیکال رابطه (2-2) دارد. سه حالت متمایز ممکن می باشد: یعنی مقدار زیر رادیکال ممکن است صفر، مثبت یا منفی باشد. ابتدا حالت خاصی که این مقدار صفر باشد بررسی می شود. میرایی در این حالت «میرایی بحرانی» نامیده می شود.

1) Characteristic equation

2) Critical Damping

۳-۲- میرایی بحرانی

برای يك سیستم نوسانگر با میرایی بحرانی مطابق تعریف فوق مقدار زیر را دیکال رابطه (۳-۲) صفر است؛ یعنی:

$$\zeta = 1 \quad \left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (5-2)$$

$$c = c_{cr}$$

یا

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad \text{یا} \quad \zeta_{cr} = 2m\omega \quad (6-2)$$

که c_{cr} میرایی بحرانی است. از آنجائیکه که $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است ضریب میرایی بحرانی را می توان بشکل زیر نوشت:

$$c_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} \quad (7-2)$$

در يك سیستم با میرایی بحرانی ریشه های معادله مشخصه مساویند و از رابطه (۳-۲) داریم:

$$p_1 = p_2 = -\frac{c_{cr}}{2m} \quad (8-2)$$

لذا جواب عمومی معادله یعنی رابطه (۳-۲) فقط يك ثابت انتگرال گیری و يك جواب مستقل خواهد داشت.

$$y_1(t) = C_1 e^{-(c_{cr}/2m)t} \quad (9-2)$$

يك جواب مستقل دیگر بشکل رابطه (۱۰-۲) است:

$$y_2(t) = C_2 t e^{-(c_{cr}/2m)t} \quad (10-2)$$

می توان امتحان نمود که این رابطه هم معادله (۱-۲) را ارضا می نماید. بنابراین جواب عمومی يك سیستم با میرایی بحرانی از جمع دو رابطه فوق حاصل خواهد شد.

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-(c_{cr}/2m)t} \quad (11-2)$$

۴-۲- پیش میرایی

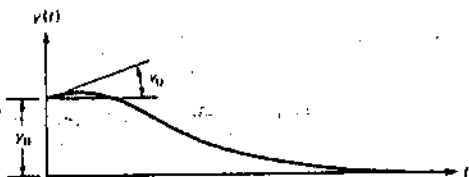
در يك سیستم پیش میرا ضریب میرایی سیستم از میرایی بحرانی بیشتر است یعنی:

$$c > c_{cr} \quad (12-2)$$

1) Over Damped

بنابراین در این حالت مقدار زیر رادیکال در رابطه (۲-۲) مثبت خواهد شد و معادله مشخصه دارای دو جواب حقیقی و متفاوت خواهد بود و لذا حل دقیقاً همان رابطه (۴-۲) خواهد بود. باید توجه داشت که در یک سیستم بامیرایی بحرانی و بیشتر از بحرانی حرکت سیستم نوسانی نمی باشد بلکه دامنه حرکت بصورت تابع توانی کاهش می یابد و به سمت صفر میل می کند. شکل ۲-۲ حرکت یک نوسانگر بیش میرا را به صورت ترسیمی نشان می دهد.

پاسخ یک سیستم بیش میرا مشابه حرکت سیستم بامیرایی بحرانی یعنی شکل (۲-۲) است ولی با افزایش میرایی زمان بیشتری برای رسیدن به حالت سکون لازم می باشد.



شکل (۲-۲): پاسخ ارتعاش آزاد با میرایی بحرانی

۲-۵- کم میرایی

هنگامی که میرایی سیستم از مقدار بحرانی کمتر باشد ($\zeta < \zeta_c$) عبارت زیر رادیکال رابطه (۲-۲) منفی خواهد شد و معادله مشخصه دارای جوابهای مختلط خواهد بود، به طوری که:

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (۱۳-۲)$$

که $i = \sqrt{-1}$ است. با استفاده از معادلات اولر داریم:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (۱۴-۲)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

از جایگذاری ریشه های p_1 و p_2 از رابطه (۱۳-۲) در معادله (۴-۲) و استفاده از روابط (۱۴-۲) حل معادله ارتعاش یک سیستم کم میرا بشکل زیر عبارت است از:

1) Underdamped

2) Complex Conjugate

$$y(t) = e^{-(c/2m)t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (15-2)$$

که A و B ضرایب ثابت هستند و ω_D ، فرکانس طبیعی میرا از رابطه زیر محاسبه می شود

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (16-2)$$

یا

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (17-2)$$

و

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (18-2)$$

در این روابط، نسبت میرایی ξ ، نامیده می شود و برابر است با:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (19-2)$$

چنانچه ضرایب ثابت را از شرایط اولیه y_0 و \dot{y}_0 به دست آوریم و در رابطه (15-2) قرار دهیم نهایتاً خواهیم داشت:

$$y(t) = e^{-\xi \omega t} \left(y_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{y}_0 + y_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) \quad (20-2)$$

این رابطه را می توان به شکل زیر هم نوشت:

$$y(t) = C e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad (21-2)$$

که

$$C = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + y_0 \xi \omega)^2}{\omega_D^2}} \quad (22-2)$$

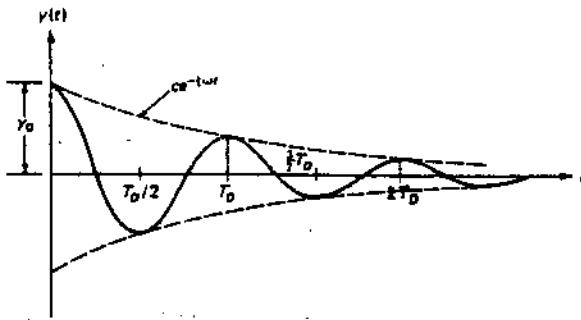
$$\tan \alpha = \frac{(\dot{y}_0 + y_0 \xi \omega)}{\omega_D y_0} \quad (23-2)$$

پاسخ یک چنین سیستمی با شرایط اولیه y_0 در شکل (2-2) نشان داده شده است. در این شکل دیده می شود که حرکت نوسانی است اما دوره ای نمی باشد، دامنه حرکت ثابت نمی باشد بلکه در ضمن حرکت مرتباً کاهش می یابد اما فاصله زمانی هر نوسان ثابت می باشد. این فاصله زمانی را زمان تناوب میرای ارتعاش می نامند و مقدار آن

1) Damping ratio

عبارت است از :

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \quad (22-2)$$



شکل (۲-۲): پاسخ ارتعاش آزاد سیستم کم میرا

ضریب میرایی در سازه های واقعی خیلی کمتر از میرایی بحرانی بوده و معمولاً بین ۲ تا ۲۰ درصد میرایی بحرانی است. با احتساب $\xi=0.20$ داریم :

$$\omega_D = 0.98 \omega \quad (25-2)$$

پدیده می شود که فرکانس ارتعاش یک سیستم با نسبت میرایی ۲۰٪ یا نقت خوبی با فرکانس ارتعاش نامیرای آن برابر است. بنابراین در عمل می توان فرکانس ارتعاش میرای یک سیستم را با فرکانس ارتعاش نامیرای آن برابر گرفت.

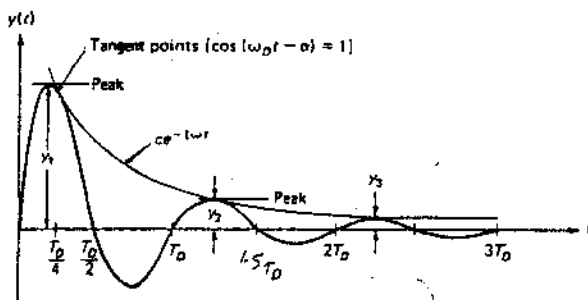
۲-۶- کاهش لگاریتمی

یک روش عملی برای تعیین ضریب میرایی یک سیستم این است که آن را به صورت آزاد مرتعش نموده، تاریخچه حرکت آن را مطابق شکل ۲-۳ ثبت نموده و کاهش دامنه حرکت را اندازه گیری نمائیم. این کاهش را می توان به شکلی مناسب توسط «کاهش لگاریتمی» بیان نمود. این کاهش طبق تعریف عبارت است از لگاریتم طبیعی نسبت در دامنه متوالی y_1 و y_2 در ارتعاش آزاد یعنی :

$$\delta = \ln \frac{y_1}{y_2} \quad (26-2)$$

1) Logarithmic Decrement

محاسبه میرایی با استفاده از کاهش لگاریتمی بدین شرح است. حرکت ارتعاش آزاد میرای شکل ۲-۴ با معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$y(t) = Ce^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha)$$


شکل (۲-۴): منحنی نشان دهنده تغییر مکانهای حداکثر و تغییر مکان در نقاط معاس از این رابطه دیده می شود هنگامی که ضریب کسینوس واحد می شود جابجایی بر روی منحنی $y(t) = Ce^{-\xi\omega t}$ قرار خواهد داشت. همانطور که در شکل (۲-۴) دیده می شود این نقاط نزدیک نقاط ماکزیمم و کمی فوسنت راست آنها قرار دارند. در بیشتر مسائل عملی از این اختلاف می توان صرفنظر نمود و فرض کرد که نقاط حداکثر جابجایی بر روی منحنی $y(t) = Ce^{-\xi\omega t}$ قرار دارند بطوری که اگر حداکثر جابجایی y_1 در لحظه t_1 باشد حداکثر y_2 در لحظه T_D خواهد بود و خواهیم داشت:

$$y_1 = Ce^{-\xi\omega t_1}$$

$$y_2 = Ce^{-\xi\omega(t_1 + T_D)}$$

لگاریتم نسبت این دو حداکثر برابر است با :

$$\delta = \ln \frac{y_1}{y_2} = \xi\omega T_D \quad (27-2)$$

با قراردادن T_D از رابطه (۲۴-۲) داریم :

$$\delta = 2\pi\xi / \sqrt{1 - \xi^2} \quad (28-2)$$

همان طور که دیده می شود با اندازه گیری دو جابجایی حداکثر متوالی در ارتعاش آزاد می توان نسبت میرایی را از رابطه (۲۸-۲) محاسبه نمود. اگر مقدار ξ کم باشد رابطه (۲۸-۲) را می توان بطور تقریبی به صورت زیر نوشت:

$$\delta = 2\pi \xi \quad (2-29)$$

مثال ۲-۱ در یک سیستم دینامیکی به وزن $W=10 \text{ lb}$ و سختی فنر $k=20 \text{ lb/in}$ با میرایی لزج نسبت دو حداکثر جابجایی متوالی در ارتعاش آزاد ۱ به ۰.۸۵ می باشد. مطلوب است (الف) فرکانس طبیعی نامیرای سیستم، (ب) کاهش لگاریتمی، (ج) نسبت میرایی، (د) فرکانس ارتعاش میرا.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{(20 \text{ lb/in} \times 386 \text{ in/sec}^2) / 10 \text{ lb}} \quad \text{الف) فرکانس ارتعاش نامیرا}$$

$$= 27.78 \text{ rad/sec}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4.42 \text{ cps} \quad \text{یا}$$

ب) کاهش لگاریتمی

$$\delta = \ln \frac{1.00}{0.85} = 0.163$$

ج) نسبت میرایی

$$\xi = \frac{0.163}{2\pi} = 0.026$$

$$c = \xi c_c = 2 \times 0.026 \sqrt{(10 \times 20) / 386} = 0.037 \frac{\text{lb} \cdot \text{sec}}{\text{in}} \quad \text{د) ضریب میرایی}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{ه) فرکانس طبیعی میرا}$$

$$\omega_D = 27.78 \sqrt{1 - (0.026)^2} = 27.77 \text{ rad/sec}$$

مثال ۲-۳ سکویی به وزن 4000 lb بر روی چهار ستون قرار دارد. اتصال ستونها به پی و سکو گیردار می باشد. در یک آزمایش مشاهده می شود که به ازای نیروی افقی $F=10000 \text{ lb}$ که به سکو وارد می شود تغییر مکانی معادل $\Delta=0.10 \text{ in}$ ایجاد می شود. نسبت میرایی سازه ۵٪ میرایی بحرانی تخمین زده شده است، مطلوب است:

الف: فرکانس طبیعی نامیرا ب: ضریب میرایی سازه ج: کاهش لگاریتمی و د: تعداد دوره های ارتعاش و زمان لازم برای اینکه تغییر مکان اولیه از 0.1 in به 0.001 in سانتیمتر تقلیل یابد.

الف) فرکانس طبیعی نامیرا

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{10000}{0.1} = 10000 \text{ lb/in}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{10000 \times 386}{4000}} = 31.06 \text{ rad/sec}$$

ب) میرایی بحرانی

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{10000 \times 4000 / 386} = 643.8 \frac{\text{lb. sec}}{\text{in}}$$

$$c = \xi c_{cr} = 0.05 \times 643.8 = 32.19 \frac{\text{lb. sec}}{\text{in}}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{y_0}{y_1}\right) = 2\pi\xi = 2\pi(0.05) = 0.314 \quad \text{ج) کاهش لگاریتمی}$$

نسبت دو دامنه متوالی

$$\frac{y_0}{y_1} = 1.37$$

د) نسبت بین اولین دامنه y_0 و دامنه y_k پس از k دور،

$$\frac{y_0}{y_k} = \frac{y_0}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y_2} \dots \frac{y_{k-1}}{y_k}$$

$$\ln \frac{y_0}{y_k} = \delta + \delta + \dots + \delta = k\delta$$

$$\ln \frac{0.1}{0.01} = 0.314 k$$

$$k = \frac{\ln 10}{0.314} = 7.33 \rightarrow 8 \text{ سیکل}$$

فرکانس طبیعی میرا

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 31.06 \sqrt{1 - (0.05)^2} = 31.02 \text{ rad / sec}$$

زمان تناوب طبیعی میرا

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{31.02} = 0.2025 \text{ sec}$$

زمان لازم برای ۸ دور

$$t(8 \text{ cycles}) = 8T_D = 1.62 \text{ sec}$$

۷-۲ - خلاصه

هر سازه ای در هنگام ارتعاش مقداری از انرژی را جذب می نماید. رایج ترین و عملی ترین راه حل برای در نظر گرفتن جذب انرژی در سازه استفاده از میرایی لزج است. مقدار این نیرو متناسب با سرعت و جهت آن در خلاف جهت حرکت است. تناسب، ضریب میرایی لزج نامیده می شود. بهتر است بجای ضریب میرایی از نسبت میرایی $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$ استفاده شود. میرایی بحرانی را می توان حداقل مقدار میرایی

تعریف کرد که به ازای آن چنانچه سازه از شرایط اولیه رها گردد نوسان نخواهد کرد بلکه بتدریج به سمت شرایط تعادل برگشت خواهد نمود.

معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد یک سیستم تک درجه میرا برابر است با :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

جواب این معادله دیفرانسیل بستگی به مقدار نسبت میرایی دارد. حالت‌های ممکن عبارتند از: (۱) میرایی بحرانی ($\xi=1$)، (۲) کم میرایی ($\xi < 1$)، (۳) بیش میرایی ($\xi > 1$). برای حالت کم میرایی جواب معادله دیفرانسیل برابر است با :

$$y(t) = e^{-\xi\omega_D t} \left[y_0 \cos \omega_D t + \frac{v_0 + y_0 \xi \omega_D}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

که

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ فرکانس نامیرا}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \text{ فرکانس میرا}$$

$$\xi = c / c_{cr} \text{ نسبت میرایی}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \text{ میرایی بحرانی}$$

و y_0 و v_0 به ترتیب جابه جایی و سرعت اولیه هستند.

یک روش معمول برای تعیین میرایی سیستم به دست آوردن کاهش لگاریتمی آن از آزمایش است. این کاهش طبق تعریف برابر است با لگاریتم طبیعی نسبت دو دامنه متوالی در ارتعاش آزاد سیستم یعنی :

$$\xi = \frac{\delta_n}{2\pi n} \text{ و } \delta = \ln \frac{y_1}{y_2}$$

نسبت میرایی در سازه ها معمولاً کمتر از ۲۰٪ میرایی بحرانی است ($\xi < 0.2$) در این سازه ها فرکانس میرا تقریباً با فرکانس نامیرا برابر است.

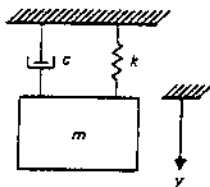
مسائل

۱-۲ مسأله (۱-۲) را با فرض ۱۵٪ میرایی حل کنید.

۲-۲ مسأله (۱-۶) را با فرض ۱۰٪ میرایی حل کنید.

۲-۲ دامنه ارتعاش سیستم شکل م (۲-۳) در هر دور ۵٪ کاهش می یابد. ضریب میرایی c را تعیین نمایید.

$$k = 200 \text{ lb/in}, m = 10 \text{ lbsec}^2/\text{in}$$



شکل م (۳-۲)

۳-۲ در يك آزمایش مشاهده می شود که دامنه ارتعاش يك سازه تك درجه پس از 10 دور ارتعاش از 1 به 0.4 سانتیمتر تقلیل می یابد. نسبت میرایی این سازه را تعیین نمایید.

۳-۲ نشان دهید که معادله حرکت يك سیستم تك درجه با میرایی بحرانی و بیشتر از بحرانی عبارتند از:

$$\xi = 1 \text{ برای } y = e^{-\omega t} [y_0(1 + \omega t) + v_0 t]$$

$$\xi > 1 \text{ برای } y = e^{-\xi \omega t} \left[y_0 \cosh \omega'_D t + \frac{v_0 + y_0 \xi \omega}{\omega'_D} \cosh \omega'_D t \right]$$

$$\text{که } \omega'_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \text{ است.}$$

۳-۲ سازه ای به صورت يك نوسانگر میرا باقتری به سختی $k=30 \text{ Kips/in}$ و فرکانس طبیعی $\omega=25 \text{ rad/sec}$ مدل شده است. آزمایش نشان می دهد نیروی 1 Kip سرعت نسبی 1.0 in/sec را در «میراساز» آن به وجود می آورد.

پیدا کنید:

الف: نسبت میرایی ξ ، ب: زمان تناوب میرا T_D ، ج: کاهش لگاریتمی δ و د: نسبت دو دامنه متوالی را.

۳-۲ در شکل (۳-۲) مشاهده می شود که نقاط مماس بر منحنی جابه جایی مربوط به $\cos(\omega_D t - \alpha) = 1$ هستند. بنابراین اختلاف بین $\omega_D t$ در نقطه مماس متوالی 2π می باشد. نشان دهید که اختلاف $\omega_D t$ بین دو دامنه متوالی نیز 2π است. ۳-۲ نشان دهید که برای يك سیستم کم میرا کاهش لگاریتمی برابر است با:

$$\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{y_i}{y_{i+k}}$$

۳-۲ يك سیستم تك درجه از جرمی به وزن 386 lb و فنری به سختی $k=3000 \text{ lb/in}$

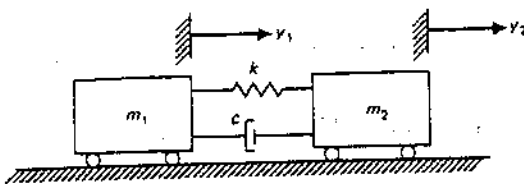
1) Damper

تشکیل شده است. آزمایش نشان می دهد که نیروی 100 lb سرعت نسبی 12 in/sec ایجاد می نماید. پیدا کنید:

الف: نسبت میرایی ب: فرکانس ارتعاش میرا ج: کاهش لگاریتمی و د: نسبت دو دامنه متوالی را.

۲-۱. مساله (۲-۹) را برای $c=2 \text{ lb sec/in}$ حل کنید.

۲-۱۱. یک سیستم دینامیکی از دو جرم m_1 و m_2 که توسط یک فنر و یک میراساز^۱ به هم متصل شده اند تشکیل یافته است؛ شکل م (۲-۱۱)، معادله دیفرانسیل حرکت نسبی بین این دو جرم $u = y_2 - y_1$ را به دست آورید.



شکل م (۲-۱۱)

۲-۱۲. حرکت نسبی بین جرم (شکل م ۲-۱۱) را برحسب فرکانس طبیعی ω ، فرکانس طبیعی میرا ω_D و میرایی نسبی به دست آورید. (راهنمایی: جرم معادل سیستم را $M = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ تعریف کنید).

1) Damping element

فصل سوم

پاسخ سیستم يك درجه آزادی به بار هارمونيك

در این فصل رفتار سازه های تک درجه در مقابل بارهای هارمونیک یعنی نیروها و تغییر مکانهایی که تابع آنها نسبت به زمان سینوسی یا کسینوسی است مورد بررسی قرار گرفته است. ارتعاش سیستم ها در مقابل این بارها یکی از مهمترین بخشهای مکانیک ارتعاشات و همچنین دینامیک سازه ها می باشد. بسیاری از سازه ها اغلب در مقابل اثرات دینامیکی ماشینهای دوار قرار دارند. خروج از مرکزیت جرم قسمت های دوار این ماشینها باعث بوجود آمدن نیروهای هارمونیک می شود. علاوه بر این در مواردی که نیروها هارمونیک نباشند می توان به روش فوریه^۱ آنها را به مجموع تعدادی بار هارمونیک تبدیل نمود. این روش در فصل ۵ مورد مطالعه قرار گرفته است.

۳-۱- ارتعاش هارمونیک نامیرا

فرض کنید نیروی محرکه $F(t)$ که بر نوسانگر ساده شکل (۳-۱) اثر می نماید یک نیروی هارمونیک و بردار $F_0 \sin \bar{\omega}t$ باشد بطوری که F_0 دامنه حداکثر و $\bar{\omega}$ فرکانس تغییرات نیرو بر حسب رادیان بر ثانیه است. معادله دیفرانسیل حاصل از جمع کلیه نیروها در نمودار جسم آزاد شکل (۳-۱) برابر است با :

$$m\ddot{y} + ky = F_0 \sin \bar{\omega}t \quad (۳-۱)$$

جواب حل این معادله عبارت است از :

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) \quad (۳-۲)$$

در این رابطه $y_c(t)$ جواب عمومی برای حالتی است که سمت راست معادله صفر باشد و $y_p(t)$ جواب خصوصی معادله (۳-۱) است. جواب عمومی $y_c(t)$ برابر است با :

$$y_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (۳-۳)$$

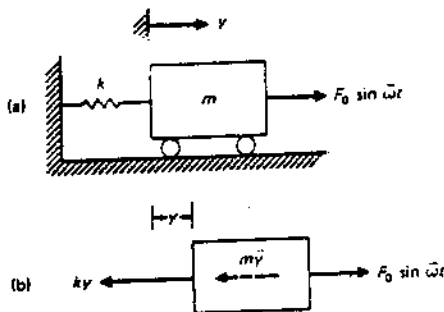
با توجه به سمت راست معادله داریم :

$$y_p(t) = Y \sin \bar{\omega}t \quad (۳-۴)$$

که Y حداکثر مقدار جواب خصوصی است. از قرار دادن رابطه (۳-۴) در معادله (۳-۱) و حذف ضرایب مشترک خواهیم داشت :

$$-m\bar{\omega}^2 Y + kY = F_0$$

1) Fourier Method



شکل ۱-۳: الف) نوسانگر نامیرا تحت اثر نیروی های هارمونیک (ب) نمودار جسم آزاد

یا

$$Y = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - r^2} \quad (5-3)$$

در این رابطه r (نسبت فرکانس) نسبت فرکانس نیروی خارجی به فرکانس طبیعی ارتعاش سیستم است یعنی:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (6-3)$$

از ترکیب روابط (۳-۲) تا (۵-۲) با رابطه (۲-۲) نتیجه خواهد شد:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_0/k}{1 - r^2} \sin \omega t \quad (7-2)$$

اگر شرایط اولیه را در لحظه $t=0$ برابر با صفر قرار دهیم ($y_0 = 0, v_0 = 0$) خواهیم داشت:

$$A = 0, \quad B = -\frac{r F_0/k}{1 - r^2}$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۷-۲) داریم:

$$y(t) = \frac{F_0/k}{1 - r^2} (\sin \omega t - r \sin \omega t) \quad (8-2)$$

همان طور که دیده می شود پاسخ از جمع دو جمله هارمونیک با فرکانس متفاوت حاصل می شود ولی خود پاسخ هارمونیک نمی باشد. البته در عمل وجود میرایی در سیستم باعث می شود جمله مربوط به ارتعاش آزاد بتدریج به سمت صفر میل نماید. به همین دلیل این جمله «پاسخ گذرا» نامیده می شود و جمله مربوط به اثر نیروی خارجی یعنی:

۱) Transient response

$$y(t) = \frac{F_0/k}{1-r^2} \sin \bar{\omega} t \quad (9-2)$$

پاسخ پایدار^۱ سیستم نامیده می شود. بدیهی است در حالتی که میرایی در سیستم وجود نداشته باشد، جمله پاسخ گذرا صفر نخواهد شد و پاسخ توسط رابطه (۸-۲) بیان می شود. همچنین از رابطه (۸-۳) یا (۹-۲) دیده می شود هنگامی که فرکانس یار خارجی برابر فرکانس طبیعی سیستم است ($r = 1.0$) دامنه حرکت بی نهایت بزرگ خواهد شد. در سیستمی که در این شرایط ارتعاش می نماید تشدید^۲ حاصل خواهد شد. در این حالت دامنه حرکت بتدریج به سمت بی نهایت میل خواهد نمود. البته در عمل مصالحی که مورد استفاده قرار می گیرند دارای مقاومت محدودی هستند و در سازه های واقعی قبل از اینکه دامنه حرکت به مقادیر بزرگی برسد گسیختگی ایجاد خواهد شد.

۲-۳- ارتعاش هارمونیک میرا

حال سیستم تک درجه شکل (۲-۲) را که دارای میرایی لزج می باشد مورد بررسی قرار می دهیم. از جمع نیروهای نشان داده شده در نمودار جسم آزاد شکل (۲-۲)ب) معادله دیفرانسیل حرکت به دست خواهد آمد، بنابراین:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \bar{\omega} t \quad (10-2)$$

جواب این معادله دیفرانسیل مشابه قبل شامل جواب عمومی $y_c(t)$ و جواب خصوصی $y_p(t)$ است. جواب عمومی برای میرایی کمتر از بحرانی ($c < c_c$) از رابطه (۱۵-۲) برابر است با

$$y_c(t) = e^{-\xi \bar{\omega} t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

جواب ویژه را در این حالت می توان به شکل زیر فرض نمود:

$$y_p(t) = C_1 \sin \bar{\omega} t + C_2 \cos \bar{\omega} t \quad (11-2)$$

از قراردادن این رابطه در معادله (۱۰-۲) و تساوی قراردادن ضرایب سینوس و کسینوس طرفین، ضرایب به دست خواهند آمد. در اینجا ما از یک روش دیگر و با استفاده از رابطه اولر، رابطه (۱۲-۲)، این کار را انجام می دهیم.

$$e^{i\bar{\omega} t} = \cos \bar{\omega} t + i \sin \bar{\omega} t \quad (12-2)$$

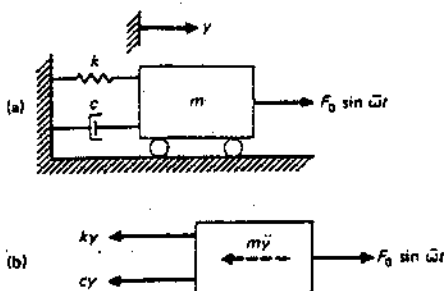
برای این کار ابتدا رابطه (۱۰-۲) را به شکل زیر می نویسیم:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 e^{i\bar{\omega} t} \quad (13-2)$$

1) Steady - state response

2) Resonance

البته باید توجه داشت که فقط جزو مجازی نیروی $F_0 e^{i\omega t}$ یعنی $F_0 \sin \omega t$ در معادله (۱۰-۳) وجود دارد. بنابراین فقط جزء مجازی جواب معادله (۱۲-۲) جواب معادله (۱۰-۳) خواهد بود.



شکل (۲-۳): الف- نوسانگر میرا تحت اثر نیروی هارمونیک

ب- نمودار جسم آزاد

جواب ویژه معادله (۱۲-۲) به شکل زیر است:

$$y_p = C e^{i\omega t} \quad (۱۴-۲)$$

از قراردادن رابطه (۱۴-۲) در معادله (۱۲-۲) داریم:

$$-m\omega^2 C + ic\omega C + kC = F_0$$

یا

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + ic\omega}$$

و

$$y_p = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (۱۵-۲)$$

با استفاده از شکل مختصات قطبی برای جمله مختلط مخرج کسر می توانیم بنویسیم:

$$y_p = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} e^{i\theta}}$$

یا

$$y_p = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \theta)}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (۱۶-۲)$$

که

$$\tan \theta = \frac{c\bar{\omega}}{k - m\bar{\omega}^2} \quad (17-2)$$

پاسخ سیستم به نیروی $F_0 \sin \bar{\omega}t$ (جزء مجازی نیروی $F_0 e^{i\bar{\omega}t}$) جزء مجازی رابطه (۱۶-۳) است یعنی:

$$y_p = \frac{F_0 \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}} \quad (18-2)$$

یا

$$y_p = Y \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (19-2)$$

که

$$Y = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}}$$

دامنه حرکت پایدار سیستم است. روابط (۱۷-۲) و (۱۸-۲) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$y_p = \frac{y_{st} \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (20-2)$$

$$\tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2} \rightarrow \text{زاویه فاز}$$

در این روابط $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ جابه جایی استاتیکی فنر تحت اثر نیروی F_0 نسبت میرایی

$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$ و نسبت $r = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ فرکانسها هستند. جواب نهایی معادله از جمع جواب عمومی (پاسخ گذرا) از رابطه (۲۰-۲) و جواب ویژه (پاسخ پایدار) از رابطه (۲۰-۳) حاصل می شود:

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{y_{st} \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (22-2)$$

باید توجه داشت که ضرایب ثابت A, B را پایدار از اعمال شرایط اولیه در معادله (۲۲-۲) به دست آورد. از مطالعه پاسخ گذرا مشاهده می شود که به علت وجود ضرایب در رابطه، این مقدار پس از مدتی به سمت صفر میل می نماید و فقط پاسخ پایدار سیستم یعنی رابطه (۲۰-۳) باقی خواهد ماند.

نسبت دامنه پاسخ پایدار $y_p(t)$ به جابه جایی استاتیکی y_{st} را «ضریب بزرگنمایی

دینامیکی» D_r می نامند. زیرا این نسبت را می توان به صورت زیر نوشت:

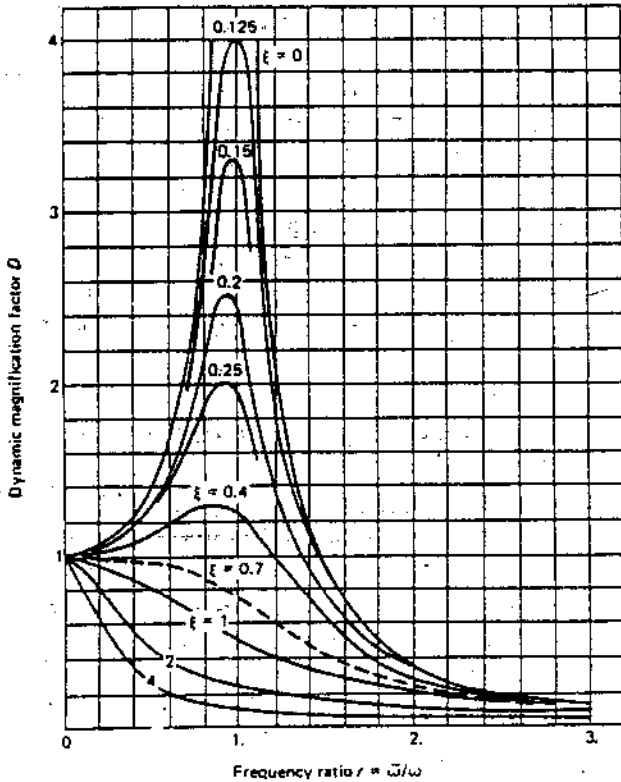
1) Frequency ratio

2) Dynamic magnification factor

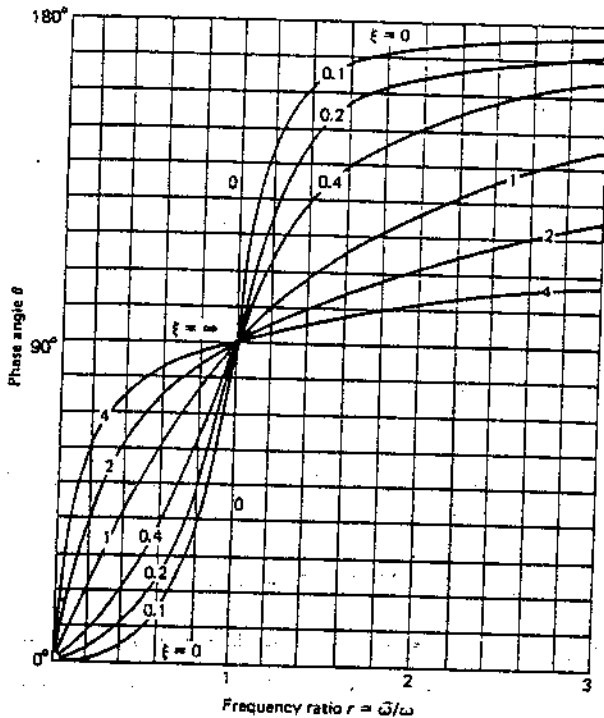
تبرکات دینامیک

$$D = \frac{Y}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (23-2)$$

مقدار تغییرات D بر حسب r و ξ در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. همچنین تغییرات زاویه فاز θ بر حسب این دو مقدار در شکل (۴-۳) رسم شده است. از شکل (۲-۳) دیده می شود که دامنه حداکثر به ازای مقادیر خیلی نزدیک ξ به یک اتفاق خواهد افتاد. به عبارت دیگر ضریب بزرگنمایی حداکثر مقدار خود را در یک حالت تشدید مجازی یعنی ($r=1$) خواهد داشت.



شکل (۲-۳): ضریب بزرگنمایی دینامیکی بر حسب نسبت فرکانس به ازای مقادیر مختلف



شکل (۳-۲): زاویه فاز θ بر حسب نسبت فرکانس به ازای مقادیر مختلف میرایی همچنین دیده می شود که در تشدید ضریب بزرگنمایی دینامیکی با نسبت میرایی رابطه عکس دارد یعنی:

$$D(r=1) = \frac{1}{2\xi} \quad (۳-۲)$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید نزدیک به حداکثر مقدار خود است، ولی دقیقاً مقدار حداکثر نمی باشد. اما برای مقادیر متوسط میرایی اختلاف بین مقدار تقریبی رابطه (۳-۲) و حداکثر واقعی ناچیز است.

مثال (۳-۱) بر وسط یک تیر ساده موتوری بوزن $W=16000$ lb قرار دارد. این تیر از دو پروفیل $S8 \times 23$ با دهانه 12 ft و ممان اینرسی $I = 2 \times 64.2 = 128.4$ in⁴ ساخته شده است. سرعت دوران موتور 300 rpm است و روزه خروج از مرکز آن بوزن $W'=40$ lb و خروج از مرکزیت $e_0 = 10$ in می باشد. چنانچه نسبت میرایی سیستم

10% فرض شود دامنه ارتعاش پایدار سیستم را به دست آورید.

این سیستم را می توان به صورت یک نوسانگر میرا مدل نمود. از جرم گسترده تیر در مقابل جرم موتور می توان صرف نظر نمود. شکل های ۲-۵، ۲-۶ بترتیب سیستم تیر و موتور و مدل آن را نشان می دهند. نیروی لازم برای جابه جایی واحد وسط تیر (ضریب سختی k) برابر است با :

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 30 \times 10^6 \times 128.4}{(144)^3} = 61920 \text{ lb/in}$$

فرکانس طبیعی

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{61920}{16000 / 386}} = 38.65 \text{ rad/sec}$$

فرکانس نیرو

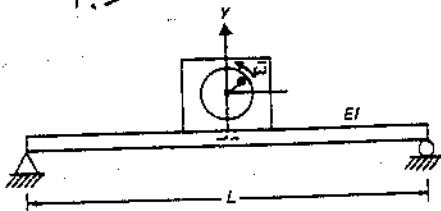
$$\bar{\omega} = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 31.41 \text{ rad/sec}$$

نسبت فرکانس

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{31.41}{38.65} = 0.813$$

با توجه به شکل (۲-۶) اگر m جرم کل موتور و m' جرم خروج از مرکز آن باشد هر گاه جابه جایی قائم غیر دوار یعنی $(m - m')$ از وضعیت تعادل باشد، جابه جایی جرم m' یعنی y_1 برابر است با :

$$y_1 = y + e_0 \sin \bar{\omega} t \quad (\text{الف})$$



شکل (۲-۵): سیستم تیر و موتور مثال (۲-۱)

معادله حرکت از جمع جبری نیروها در امتداد قائم که در نمودار جسم آزاد شکل (۲-۶) نشان داده شده اند به دست می آید. در این نمودار نیروهای اینرسی قسمت غیر دوار و دوار موتور نشان داده شده اند.

(ب)

با قراردادن y_1 از رابطه (الف) داریم:

$$(m - m')\ddot{y} + m'e_0\omega^2 \sin\omega t + cy + ky = 0 \quad \text{یا}$$

$$m\ddot{y} + cy + ky = m'e_0\omega^2 \sin\omega t \quad (ع)$$

نیروی دینامیکی خارجی موثر در سیستم یک نیروی هارمونیک با دامنه F_0 است به طوری که:

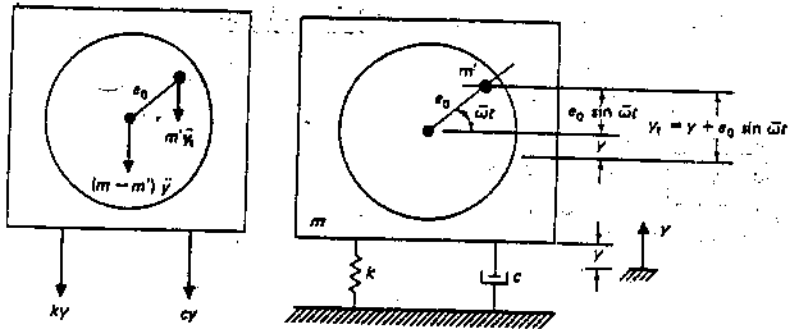
$$F_0 = m'e_0\omega^2 \quad (د)$$

از قراردادن مقادیر عددی در این رابطه داریم:

$$F_0 = (40)(10)(31.41)^2 / 386 = 1022 \text{ lb}$$

دامنه حرکت پایدار حاصل از رابطه (۲-۳) برابر خواهد شد با:

$$Y = \frac{1022 / 61920}{\sqrt{(1 - 0.813^2)^2 + (2 \times 0.813 \times 0.1)^2}} = 0.044 \text{ in} \quad (\text{جواب})$$



شکل (۲-۳): الف: مدل ریاضی مثال (۱-۳)

شکل (۲-۳): ب: نمودار جسم آزاد

مثال (۲-۳) قاب فلزی شکل (۷-۳) یک موتور دوار را تحمل می نماید. این موتور نیروی افقی $F(t) = 200 \sin 5.3t$ lb را بر بالای قاب اعمال می نماید. با فرض ۵٪ میرایی بحرانی مطلوب است:

الف) دامنه ارتعاش پایدار ب) حداکثر تنش دینامیکی در ستونها این قاب را می توان به صورت یک نوسانگر میرا مانند شکل (۷-۳) ب) مدل کرد. مشخصات این مدل عبارتند از:

$$k = \frac{3E(2I)}{L^3} = \frac{3 \times 30 \times 10^6 \times 2 \times 69.2}{(12 \times 15)^3} = 2136 \text{ lb/in}$$

$$\xi = 0.05$$

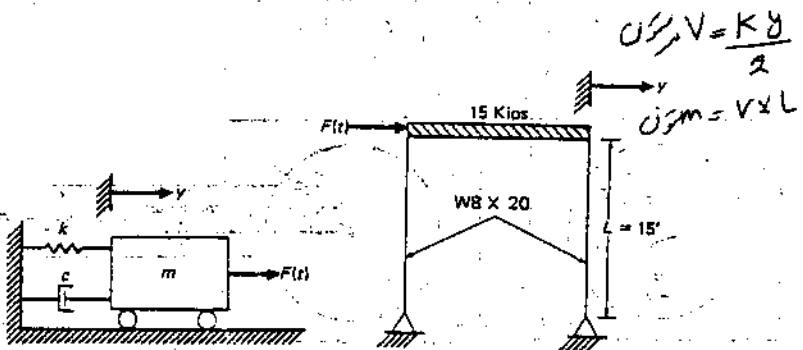
$$y_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{200}{2136} = 0.0936 \text{ in}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2136 \times 386}{15000}} = 7.41 \text{ rad/sec}$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{5.3}{7.41} = 0.715$$

دامت ارتعاش پایدار از رابطه (۲-۳)

$$Y = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 0.189 \text{ in} \quad (\text{جواب})$$



شکل (۲-۳): الف) قاب فلزی مثال (۲-۳) (ب) مدل ریاضی

$$V_{max} = \frac{3EIY}{L^3} = 201.8 \text{ lb} \quad \text{حداکثر نیروی برشی ستونها}$$

$$M_{max} = V_{max} L = 36324 \text{ lb.in} \quad \text{حداکثر لنگر خمشی ستونها}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I/c} = \frac{36324}{17} = 2136 \text{ psi} \quad (\text{جواب}) \quad \text{حداکثر تنش}$$

۳-۳- اندازه گیری میرایی در تشدید

در فصل ۲ نحوه محاسبه میرایی با استفاده از روش کاهش لگاریتمی توضیح داده شد. روش دیگر محاسبه میرایی بر اساس مشاهده پاسخ پایدار هارمونیک سازه در فرکانس حول و جوش تشدید می باشد. برای این کار نیروی هارمونیک $F_0 \sin \omega t$

با فرکانسهای مختلف بر سازه اثر داده می شود و نمودار دامنه حرکت بر حسب فرکانس ω مطابق شکل (۸-۳) رسم می گردد. مقدار میرایی در حالت تشدید با استفاده از رابطه (۲۴-۳) برابر است با:

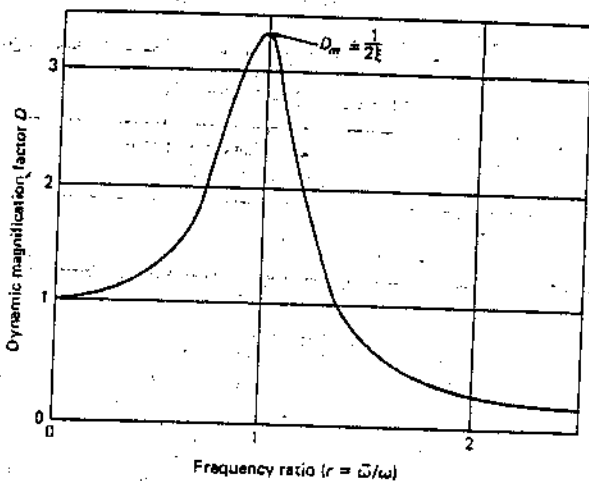
$$\xi = \frac{1}{2D(r=1)} \quad (25-3)$$

در این رابطه $D(r=1)$ ضریب بزرگنمایی دینامیکی در تشدید است. در عمل برای محاسبه ξ از ضریب بزرگنمایی دینامیکی در دامنه حداکثر استفاده می شود یعنی:

$$\xi = \frac{1}{2D_m} \quad (26-3)$$

ک

$$D_m = \frac{y_m}{y_{st}}$$



شکل (۸-۳): منحنی پاسخ فرکانس برای یک سیستم با میرایی متوسط

و y_m دامنه حداکثر است. خطای حاصل از محاسبه میرایی با استفاده از رابطه (۲۴-۳) برای سازه های قابل ملاحظه نمی باشد. برای محاسبه میرایی با این روش نیاز به یک وسیله برای مرتفع کردن سازه در فرکانسهای اطراف تشدید و یک جابه جایی

سنج^۱، برای اندازه گیری دامنه حرکت می باشد. برای محاسب $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ باید يك نیروی استاتیکی بر سازه وارد نمود که غالباً کمی مشکل است.

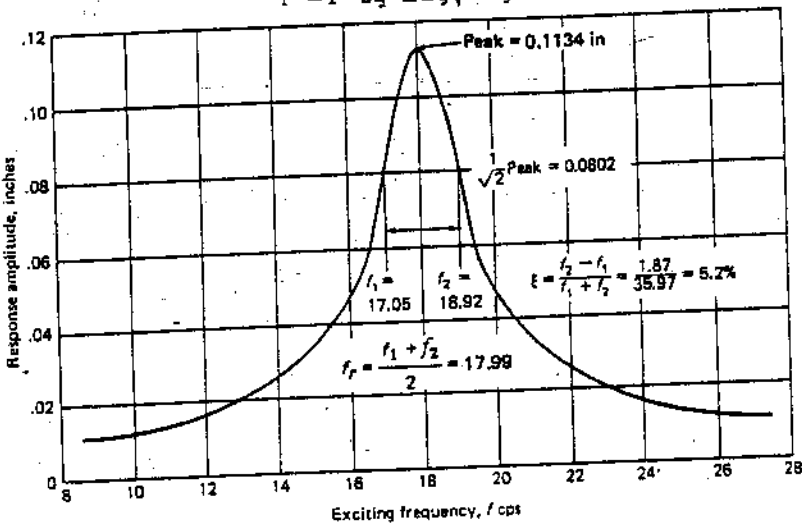
۳-۳- روش «عرض نوار^۲» «نیم توان^۳» برای محاسبه میرایی

از مشاهده منحنی های پاسخ شکل (۳-۲) دیده می شود که شکل آنها بستگی به مقدار میرایی دارد. چنانچه فاصله بین فرکانسهای مربوط به يك دامنه مشخص را در هر منحنی «عرض نوار» بنامیم این مقدار بستگی به مقدار میرایی دارد. يك نمونه منحنی تغییرات دامنه بر حسب ω در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. برای محاسبه میرایی عرض نوار را در دامنه $1/\sqrt{2}$ برابر دامنه حداکثر اندازه گیری می نماییم. فرکانسهای مربوط به این فاصله، f_2, f_1 ، را نقاط «نیم توان» می نامند. برای محاسبه این فرکانسها باید دامنه پاسخ مربوط به این فرکانسها را $1/\sqrt{2}$ برابر دامنه پاسخ تشدید قرار داد یعنی:

$$\frac{y_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{y_{st}}{2\xi}$$

اگر طرفین رابطه را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$r^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$



شکل (۳-۳) منحنی پاسخ فرکانس مثال (۳-۲)

1- Transducer

2- Band width

3- Half-Power

با صرفنظر کردن از مقدار ξ^2 در عبارت زیر رادیکال خواهیم داشت:

$$r_1^2 = 1 - 2\xi^2 - 2\xi$$

$$r_2^2 = 1 - 2\xi^2 + 2\xi$$

$$r_1 = 1 - \xi - \xi^2$$

$$r_2 = 1 + \xi - \xi^2$$

نسبت میرایی را می توان بطور تقریبی از رابطه زیر به دست آورد:

$$\xi = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$$

یا

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (27-3)$$

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{و} \quad r = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{f}}{f}$$

مثال (3-2) نمودار تغییرات دامنه پاسخ یک سیستم تک درجه بر حسب فرکانس بار \bar{F} که از آزمایش به دست آمده اند در شکل (3-9) رسم شده است. نسبت میرایی این سیستم را تعیین نمایید.

از شکل (3-9) دامنه حداکثر 0.1134 به دست می آید. لذا دامنه نیم توان برابر است با:

$$0.1134 / \sqrt{2} = 0.0802 \text{ in}$$

فرکانسهای مربوط به این دامنه از شکل 3-9 به دست می آیند.

$$f_2 = 18.92 \quad \text{و} \quad f_1 = 17.05$$

نسبت میرایی از رابطه (27-3) به دست می آید:

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

$$\xi = \frac{18.92 - 17.05}{18.92 + 17.05} = 5.2\% \quad (\text{جواب})$$



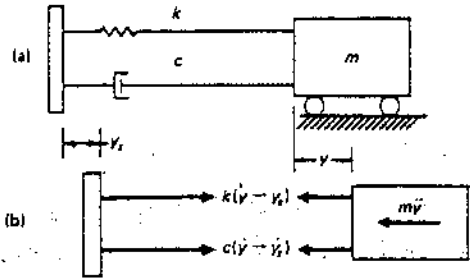
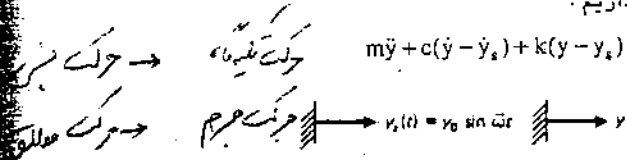
3-0- حرکت تکیه گاه

در بعضی موارد پی یا تکیه گاه یک سازه حرکت دارد. حرکت زمین حاصل زلزله، انفجار و اثر دینامیکی ماشین آلات مثالهایی از حرکت تکیه گاه در سازه ها هستند که در تحلیل دینامیکی آنها را می توان در نظر گرفت. در شکل (3-1) یک نوسانگر ساده به عنوان مدل یک سازه در نظر گرفته شده است که در معرض یک حرکت تکیه گاهی هارمونیک با معادله زیر قرار دارد.

$$y_s(t) = y_0 \sin \bar{\omega} t \quad (28-2)$$

دامت حرکت تکیه گاه y_0 و فرکانس آن $\bar{\omega}$ است. معادله دیفرانسیل حرکت از تعادل دینامیکی نیروهای نشان داده شد در نمودار جسم آزاد (شکل ۱-۳-ب) به دست می آید. از تعادل نیروها در جهت افقی داریم:

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s) = 0 \quad (29-2)$$



شکل (۱-۳-الف): نوسانگر ساده نیرو تحت اثر حرکت تکیه گاهی هارمونیک (ب) نمودار جسم آزاد

از قرار دادن رابطه (۲۸-۲) در معادله (۲۹-۲) نتیجه می شود:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = ky_0 \sin \bar{\omega} t + c\bar{\omega}y_0 \cos \bar{\omega} t \quad (30-2)$$

از ترکیب دو جمله هارمونیک سمت راست رابطه معادله حاصل می شود:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin(\bar{\omega} t + \beta) \quad (31-2)$$

که

$$F_0 = y_0 \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2} = y_0 k \sqrt{1 + (2r\xi)^2} \quad (32-2)$$

$$\tan \beta = c\bar{\omega} / k = 2r\xi \quad (33-2)$$

رابطه (۳۱-۲) معادله دیفرانسیل حرکت نوسانگر تحت اثر نیروی هارمونیک $F_0 \sin(\bar{\omega} t + \beta)$ است، لذا پاسخ پایدار آن با استفاده از رابطه (۳۰-۲) به شکل زیر نوشته می شود:

$$y(t) = \frac{F_0 / k \sin(\bar{\omega} t + \beta - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (34-2)$$

حرکت $y_s = y_0 \sin \bar{\omega} t$

$m\ddot{y}_s$

$c\dot{y}_s + ky_s$

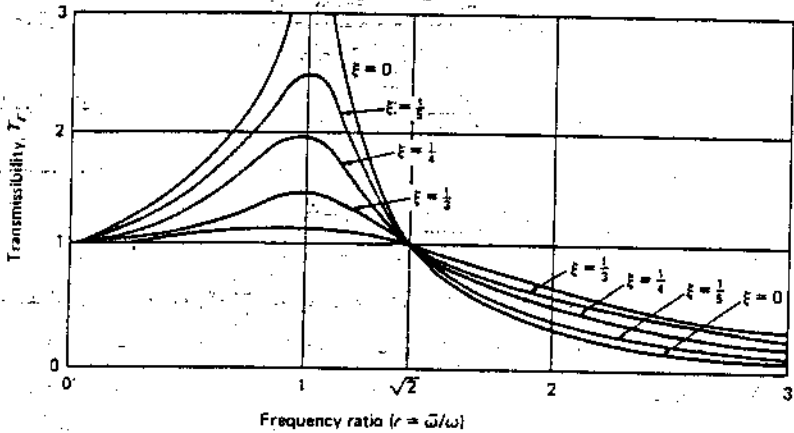
با قراردادن مقدار F_0 از رابطه (۲۲-۳) داریم:

$$\frac{y(t)}{y_0} = \frac{\sqrt{1+(2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\xi)^2}} \sin(\omega t + \beta - \theta) \quad (25-3)$$

رابطه (۲۵-۳) نمایانگر مقدار حرکتی است که از تکیه گاه به نوسانگر منتقل می شود. این مطلب از نظر عایق کردن سیستم از ارتعاش تکیه گاه بسیار مهم می باشد، زیرا در بعضی از دستگاهها و تجهیزات حرکات تشدید تکیه گاه نباید به آنها منتقل شود. میزان عایق بودن نسبی سیستم در مقابل حرکت تکیه گاه را انتقال پذیری می نامند که نسبت دامنه حرکت نوسانگر Y به دامنه حرکت تکیه گاه y_0 می باشد، انتقال پذیری T_r با استفاده از رابطه (۲۵-۳) به دست می آید:

سوال درسی

$$T_r = \frac{\sqrt{1+(2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\xi)^2}} \quad (26-3)$$



شکل (۱۱-۳): نسبتهای فرکانسی بر حسب انتقال پذیری برای عایقهای ارتعاشی

تغییرات انتقال پذیری بر حسب نسبت فرکانس r و نسبت میرایی در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده است. منحنی های این شکل مانند شکل (۳-۲) نمایانگر پاسخ فرکانس یک نوسانگر میرا هستند. در این نمودار کلیه منحنی ها به ازای $\xi = \sqrt{2}$ از یک نقطه

1) Transmissibility

سازگار است $\rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky$

عزل کننده است $\rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky$

عبور می نمایند. همچنین مشاهده می شود که به ازای نسبتهای فرکانس τ بزرگتر از $\sqrt{2}$ افزایش میرایی از مقدار عایق بودن سیستم می گاهد.

رابطه (۳۳-۳) معادله جابه جایی کلی نوسانگر می باشد. می توان معادله دیفرانسیل (۲۹-۳) را بر حسب حرکت نسبی بین جرم m و تکیه گاه نوشت یعنی:

$$u = y - y_s \quad (۳۷-۳)$$

از قراردادن این مقدار در رابطه (۲۹-۳) داریم:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{eff}(t) \quad (۳۸-۳)$$

در این رابطه $F_{eff}(t) = -m\ddot{y}_s$ نیروی موثر بر نوسانگر است. با محاسبه \ddot{y}_s از رابطه

(۲۸-۳) و قراردادن آن در رابطه (۳۸-۳) نتیجه می شود:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = my_0\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \quad (۳۹-۳)$$

چنانچه $F_0 = my_0\bar{\omega}^2$ باشد، این رابطه مشابه رابطه (۱۰-۳) خواهد بود و معادله حرکت پایدار آن برابر است با:

$$u(t) = \frac{my_0\bar{\omega}^2 / k \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (۴۰-۳)$$

$$\frac{\bar{\omega}^2}{k/m} = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = r^2 \quad \text{با قرار دادن}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{u(t)}{y_0} = \frac{r^2 \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (۴۱-۳)$$

که مقدار θ از رابطه (۲۱-۳) به دست می آید.

مثال (۴-۳) چنانچه تکیه گاه قاب مثال ۲-۳ شکل (۷-۳) الف، یک حرکت سینوسی برابر $y_s(t) = 0.2 \sin 5.3t$ داشته باشد، مطلوب است: الف) انتقال پذیری حرکت به بالای قاب، ب) حداکثر نیروی برشی ستونها و ج) حداکثر تنش در ستونها.

مشخصات این سیستم عبارتند از:

$$k = 2136 \text{ lb/in}$$

$$\xi = 0.05$$

$$y_0 = 0.2 \text{ in}$$

$$y_{st} = 0.0936 \text{ in}$$

$$\omega = 7.41 \text{ rad/sec}$$

$$\bar{\omega} = 5.3 \text{ rad/sec}$$

$$r = 0.715$$

الف) انتقال پذیری

$$T_r = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 2.1 \quad (\text{جواب})$$

ب) حداکثر جاب جایی نسبی

$$U = \frac{y_0 r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 0.206 \text{ in}$$

ج) حداکثر نیروی برشی ستونها

$$V_{\max} = \frac{kU}{2} = 219.8 \text{ lb} \quad (\text{جواب})$$

حداکثر انگر خمشی

$$M_{\max} = V_{\max} L = 39567 \text{ lb. in}$$

حداکثر تنش خمشی

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I/c} = \frac{39567}{17} = 2327 \text{ psi} \quad (\text{جواب})$$

۳-۶- نیروی منتقل شده به تکیه گاه

در بخش قبلی پاسخ سازه را در مقابل حرکت هارمونیک تکیه گاه مورد بررسی قرار دادیم. در این بخش نوع مشابه دیگری از مساله عایق ارتعاشی را بررسی می نمایم. در اینجا مساله، پیدا کردن مقدار نیرویی است که به تکیه گاه منتقل می شود. بار دیگر یک نوسانگر میرا با نیروی هارمونیک $F(t) = F_0 \sin \bar{\omega} t$ را در نظر می گیریم [شکل (۳-۲)]. معادله دیفرانسیل حرکت برابر است با:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \bar{\omega} t$$

و جواب پایدار آن عبارت است از:

$$y = Y \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

که

$$Y = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (۳-۲۲)$$

$$\tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

نیرویی که از طریق فنر و میراساز به تکیه گاه منتقل می شوند به ترتیب برابرند با

ky و cy کل نیروی منتقل شده به پی برابر است با :

$$F_T = ky + cy \quad (۴۳-۳)$$

با مشتق گیری از رابطه (۴۳-۳) و قراردادن آن در رابطه (۴۲-۳) داریم :

$$F_T = Y [k \sin(\bar{\omega}t - \theta) + c\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta)]$$

یا

$$F_T = Y \sqrt{k^2 + c^2 \bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega}t - \theta + \beta) \quad (۴۴-۳)$$

$$F_T = Y \sqrt{k^2 + c^2 \bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega}t - \phi) \quad (۴۵-۳)$$

که در آن

$$\tan \beta = \frac{c\bar{\omega}}{k} = 2 \xi r \quad (۴۶-۳)$$

و

$$\phi = \theta - \beta \quad (۴۷-۳)$$

با استفاده از روابط (۴۳-۳) و (۴۵-۳) حداکثر نیروی انتقال یافته شده به پی برابر خواهد شد با :

$$A_T = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2r\xi)^2}{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (۴۸-۳)$$

انتقال پذیری T_r طبق تعریف برابر است با نسبت دامنه نیروی منتقل شده به پی به دامنه نیروی خارجی. بنابراین :

$$T_r = \frac{A_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2r\xi)^2}{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (۴۹-۳)$$

مشاهده می شود که انتقال نیروی حرکت تکیه گاه به سازه رابطه (۴۹-۳)، انتقال پذیری نیروی خارجی به پی رابطه (۴۹-۳)، هر دو دقیقاً توسط يك رابطه بیان می شوند، لذا منحنی های انتقال پذیری شکل (۱۱-۳) برای هر دو نوع انتقال پذیری صادق هستند. اگر از طرفین رابطه (۴۷-۳) تانژانت بگیریم داریم :

$$\tan \phi = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta}$$

با جایگزینی مقادیر $\tan \theta$ ، $\tan \beta$ بترتیب از روابط (۲۱-۳) و (۴۶-۳) نتیجه خواهد شد :

$$\tan \phi = \frac{2\xi r^3}{1-r^2+4\xi^2 r^2} \quad (۵۰-۳)$$

مثال (۵-۳) ماشینی به وزن $W=3860 \text{ lb}$ بر روی يك تیر ساده فلزی مطابق شکل

(۱۲-۳) قرار گرفته است پیستونی در داخل این ماشین به سمت بالا و پایین حرکت نموده و یک نیروی هارمونیک بادامنه $F_0 = 7000 \text{ lb}$ و فرکانس $\bar{\omega} = 60 \text{ rad/sec}$ ایجاد می نماید. با صرفنظر کردن از وزن تیر و فرض ۱۰٪ میرایی پمرانی مطلوب است: الف) دامنه حرکت ماشین، ب) نیروی منتقل شده به تکیه گاههای تیر و ج) زاویه فاز مربوط به آن.

نوسانگر شکل (۱۲-۳) مدل این سیستم را نشان می دهد. مقادیر عددی عبارتند از:

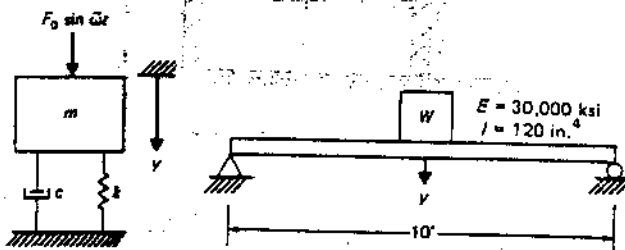
$$k = \frac{48EI}{L^3} = 10^5 \text{ lb/in}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ rad/sec}$$

$$\xi = 0.1$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 0.6$$

$$y_{st} = \frac{F_0}{k} = 0.07 \text{ in}$$



شکل ۱۲-۳: الف) تیر و ماشین مثال ۲-۲ ب) مدل ریاضی

الف) دامنه حرکت

$$Y = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 0.1075 \text{ in}$$

جواب)

زاویه فاز جابه جایی

زاویه فاز جابه جایی

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2r\xi}{1-r^2} = 10.6^\circ$$

ب) انتقال پذیری

$$T_r = \frac{A_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2r\xi)^2}{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 1.547$$

دامنه نیروی منتقل شده به پی

(جواب)

$$A_T = F_0 T_r = 10827 \text{ lb}$$

(ج) زاویه فاز نیرو

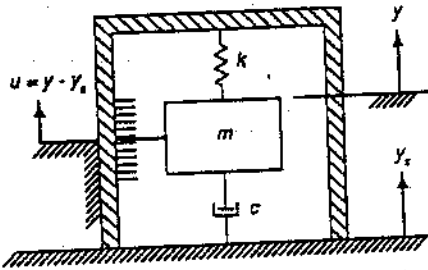
(جواب)

زاویه فاز نیرو

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi r^3}{1-r^2+(2r\xi)^2} = 3.78^\circ$$

۷-۳- وسایل اندازه گیری زلزله

هرگاه از سیستمی به شکل (۲-۱۳) برای اندازه گیری ارتعاشات استفاده شود، آنچه ثبت می شود جابه جایی نسبی بین جرم m و تکیه گاه است.



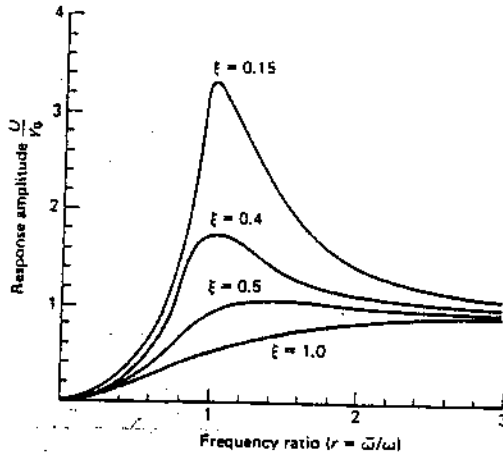
شکل (۲-۱۳): مدل لرزه نگار

این وسیله «لرزه نگار» نامیده می شود و می توان آن را برای اندازه گیری جابه جایی یا شتاب تکیه گاهش مورد استفاده قرار داد. حداکثر جابه جایی نسبی، y_0, U این لرزه نگار برای حرکت هارمونیک تکیه گاه از رابطه (۳-۴۱) به دست می آید:

$$\frac{U}{y_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (۳-۵۱)$$

نمودار تغییرات این رابطه بر حسب نسبت فرکانس r و نسبت میرایی ξ در شکل (۳-۱۴) نشان داده شده است. دیده می شود که برای $r > 1$ و میرایی ξ پاسخ دارای مقدار ثابتی است. بنابراین پاسخ وسیله ای از این نوع با میرایی مناسب و برای فرکانسهای بالای حرکت زمین متناسب با دامنه حرکت زمین است، لذا این وسیله یک جابجایی سنج خواهد بود. با کاهش فرکانس طبیعی آن یعنی کاهش سختی فنر یا افزایش

جرم محدوده کاربرد این وسیله افزایش پیدا می نماید.



شکل (۳-۱۴): پاسخ لرزه نگار به حرکت هارمونیک تکب گاه
 - حال چنانچه پاسخ این وسیله را در برابر شتاب هارمونیک تکب گاهش بررسی کنیم معادله حرکت آن از رابطه (۳-۳۸) برابر خواهد شد با:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y}_0 \sin \bar{\omega}t \quad (3-38)$$

هنزیب بزرگنمایی دینامیکی پاسخ پایدار آن برابر است با:

$$D = \frac{U}{m\ddot{y}_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3-39)$$

این رابطه به صورت ترسیمی در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. در این شکل دیده می شود که برای $\xi = 0.7$ و تغییرات $0 < r < 0.6$ مقدار D تقریباً ثابت است. بنابراین با استفاده از رابطه (۳-۳۹) می توان گفت که پاسخ این وسیله در این حالت متناسب با دامنه شتاب حرکت زمین است.

با افزایش فرکانس طبیعی یعنی افزایش سختی فنر و کاهش جرم محدوده کاربرد آن افزایش پیدا می نماید، لذا در این حالت این وسیله يك شتاب سنج خواهد بود.

۳-۸- خلاصه

در این فصل پاسخ يك سیستم تك درجه در مقابل بارهای هارمونیک مورد بررسی قرار گرفت. این بارگذاری به صورت يك تابع سینوسی، کسینوس یا توانی

است و حل ریاضی آن براحتی برای سیستم میرا و غیرمیرا به دست می آید. معادله دیفرانسیل حرکت یک سیستم تک درجه خطی یک معادله دیفرانسیل از مرتبه دوم است.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \bar{\omega}t \quad (۱۰-۲)$$

یا

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \bar{\omega}t$$

در این رابطه $\bar{\omega}$ فرکانس بار، $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$ نسبت میرایی و $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی سیستم است.

حل کلی معادله (۱۰-۲) از جمع حل عمومی (گذرا) و جواب خصوصی (پایدار) به دست می آید:

$$y = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{F_0 / k \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

B, A ضرایب ثابت انتگرال گیری، $r = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ نسبت فرکانس، $\omega_D = \omega\sqrt{1-r^2}$ فرکانس

طبیعی میرا و $\theta = \tan^{-1} \frac{2r\xi}{1-r^2}$ زاویه فاز هستند. جواب گذرا به دلیل ضریب توان

منفی سرعت صفر میل می نماید و فقط جواب پایدار باقی خواهد ماند. حالت تشدید از اهمیت ویژه ای برخوردار است؛ زیرا در این حالت دامنه حرکت سیستم میرا بسیار بزرگ خواهد بود و در سیستم غیر میرا بی نهایت خواهد شد. پاسخ سازه در مقابل حرکت پی یا زمین را می توان بر حسب جابه جایی مطلق یا جابه جایی آن نسبت به تکیه گاهش نوشت. در حالت دوم معادله حرکت شکل ساده تر و مناسب تری دارد یعنی:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{eff}(t) \quad (۲۸-۳)$$

که در آن $F_{eff}(t) = -m\ddot{y}_g(t)$ نیروی موثر و $u = y - y_g$ جابه جایی نسبی است.

در حالتی که حرکت زمین هارمونیک باشد حل معادله (۲۸-۳) بر حسب جابجایی نسبی مشابه رابطه (۱۰-۲) یعنی حالتی است که نیروی خارجی بر جرم m اثر می نماید.

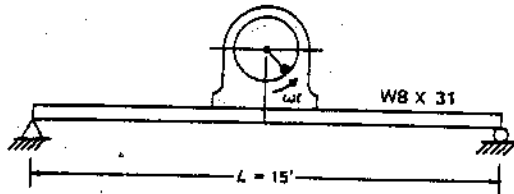
در این فصل همچنین نشان داده شد که میرایی یک سیستم را می توان از طریق آزمایش یا استفاده از دامنه حداکثر و یا عرض نوار به دست آورد. دامنه حداکثر یا عرض نوار را می توان از منحنی تغییرات دامنه حرکت سیستم برای فرکانسهای

مختلف يك بار هارمونيك تعيين نمود. مساله عايق ارتعاشي مورد بحث قرار گرفت:
 - انتقال پذيری حرکت یعنی مقدار حرکتی که از پی به سازه منتقل می شود!
 - انتقال پذيری نیرو یعنی مقدار نیرویی که از سازه به پی منتقل می شود. در هر دو این حالتها انتقال پذيری برابر است با:

$$T_r = \sqrt{\frac{1 + (2r\xi)^2}{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

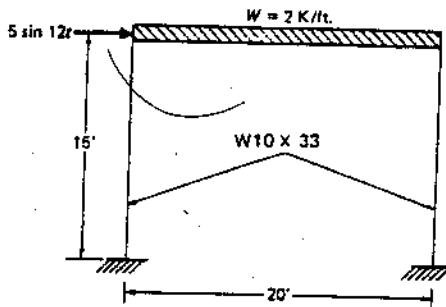
مسائل

۱-۳- الكترو موتوری به وزن $W=1000 \text{ lb}$ بر وسط يك تیر ساده مطابق شکل م (۱-۳) قرار دارد. خروج از مرکز يك داخل موتور برابر است با $W'e=1 \text{ lb.in}$. دامنه حرکت پایدار قائم موتور را برای سرعت 900 rpm به دست آورید. میرایی سیستم را 10% میرایی بحرانی فرض نمایید. از وزن تیر صرف نظر نمایید.



شکل م (۱-۳)

۲-۳- حداکثر نیروی منتقل شده به تکیه گاههای تیر مساله (۱-۳) را به دست آورید.
 ۳-۳- دامنه حرکت پایدار قاب فلزی شکل م (۲-۳) را تعیین و سختی تیر قاب را بینهایت فرض نموده و از جرم ستونها در میرایی صرف نظر کنید.



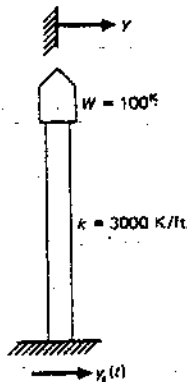
شکل م (۲-۳)

۴-۳- مساله (۳-۲) را برای 8% میرایی حل نمایید.

۵-۳- در مساله (۴-۳) مطلوب است: الف) حداکثر نیروی منتقل شده به پی، ب) انتقال پذیری.

۶-۳- یک دستگاه حساس توسط چند فنر به کمک آزمایشگاه نصب شده است. کف آزمایشگاه یک حرکت هارمونیک با دامنه 0.1 و فرکانس 10 cps دارد. چنانچه وزن دستگاه 100 lb باشد منحنی فنرها را چنان تعیین نمایید که دامنه حرکت دستگاه به 0.01 in محدود گردد. از میرایی صرفنظر نمایید.

۷-۳- قطاری از نزدیکی برج آب شکل م (۷-۳) عبور می نماید. شتاب حرکت زمین در اثر عبور قطار به صورت هارمونیک با دامنه 0.1 g و فرکانس 10 cps در نظر گرفته می شود. حرکت برج آب را نسبت به حرکت تکیه گاهش به دست آورید. میرایی سیستم را 10% میرایی بحرانی فرض نمایید.

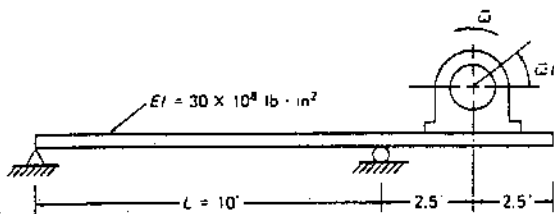


شکل م (۷-۳)

۸-۳- در مساله ۷-۳ انتقال پذیری را به دست آورید.

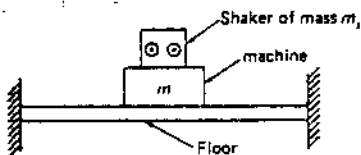
۹-۳- الکترو موتوری به وزن $W=3330$ lb بر روی تیری مطابق شکل م (۹-۳) قرار دارد. خروج از مرکز داخل این موتور $W'e=50$ lb.in است. الف) دامنه ارتعاش قائم موتور را برای سرعتهای 1200, 1000, 800 rpm به دست آورید.

ب) نمودار تقریبی تغییرات دامنه بر حسب سرعت دوران موتور را رسم کنید. (میرایی را 10% میرایی بحرانی فرض نمایید).



شکل م (۱-۳)

۱-۳-۱- ماشینی به جرم m مطابق شکل م (۱-۳) بر روی یک افق قرار گرفته است. برای تعیین فرکانس طبیعی ارتعاش قائم سیستم مرتعش کننده مکانیکی^۱ به جرم m_s بر روی آن پیچ شده است و با سرعت‌های مختلف مرتعش می‌شود تا اینکه به فرکانس حالت تشدید f_d به دست آید. فرکانس طبیعی ارتعاش سیستم f_n را برحسب f_d و سایر داده‌ها به دست آورید.

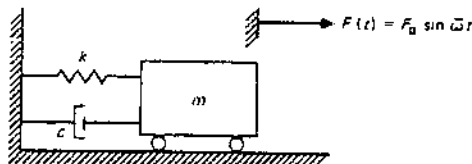


شکل م (۱-۳)

۱۱-۳- مطلوب است تعیین فرکانسی که در آن یک نوسانگر میرا حداکثر دامنه را خواهد داشت. همچنین دامنه حداکثر و زاویه فاز مربوط به آن را به دست آورید.

۱۲-۳- سازه ای مدل شده به صورت یک نوسانگر میرا (شکل م (۱۲-۳)) با $mg = 2520 \text{ lb}$ (است: الف) فرکانس طبیعی، ب) نسبت میرایی، ج) دامنه نیروی هارمونیک چنانچه دامنه ارتعاش 0.37 in اندازه گیری شده باشد و د) دامنه نیروی هارمونیک چنانچه دامنه اندازه گیری شده در فرکانس حداکثر یعنی در حالت تشدید اندازه گیری شده باشد.

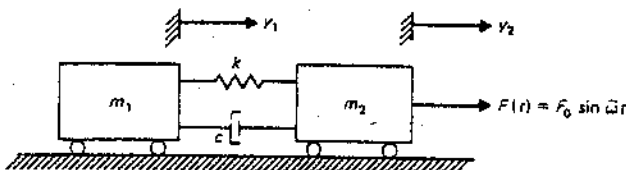
1) Mechanical shaker



شکل م (۱۲-۳)

۱۲-۲- یک سیستم سازه ای که به صورت یک نوسانگر میرا مدل شده است تحت اثر یک نیروی هارمونیک حاصل از یک الکترو موتور قرار دارد. منحنی فنر k و m مشخص هستند ولی میرایی و خروج از مرکزیت موتور معلوم نیستند. با استفاده از دو دامنه ارتعاش اندازه گیری شده Y_2 در حالت تشدید و Y_1 در فرکانس $\omega_1 \neq 1$ روابطی برای نسبت میرایی و دامنه نیروی هارمونیک در تشدید F_r به دست آورید.

۱۳-۳- مدلی از جرم m_1 و m_2 که توسط فنر k و میراساز c بهم متصل شده اند ساخته شده است. برای نیروی هارمونیک $F = F_0 \sin \omega t$ که بر جرم m_2 وارد می شود تعیین کنید: الف) معادله حرکت را بر حسب نسبی در جرم $u = y_2 - y_1$ ب) حال پایدار حرکت نسبی.



شکل م (۱۴-۳)

فصل چهارم

پاسخ به بارهای دینامیکی کلی

در فصل قبل پاسخ سیستم تک درجه به بارهای هارمونیک مورد مطالعه قرار گرفت. گرچه این حالت بارگذاری مهم است اما اغلب سازه های واقعی تحت اثر بارهای غیرهارمونیک قرار دارند. در این فصل پاسخ یک سیستم تک درجه به حالت کلی بارها مطالعه شده است. در این حالت پاسخ سیستم به صورت یک انتگرال بیان می شود که برای حالت های ساده بارگذاری از طریق تحلیلی قابل حل است. اما در حالت کلی برای حل این انتگرال باید از روشهای عددی استفاده شود.

۱-۴- بارهای ضربه ای و انتگرال دو هامل

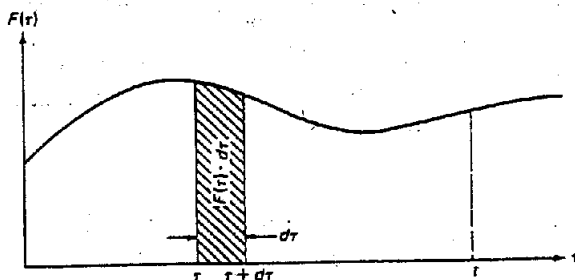
بارضربه ای باری است که درفاصله کوتاهی از زمان اثر می کند. ضربه حاصل از باربرابر است با حاصلضرب نیرو در زمان تداوم آن به عنوان مثال ضربه نیروی $F(\tau)$ در شکل (۱-۴) در مدت $d\tau$ برابر با مقدار $F(\tau) d\tau$ است که در شکل با سطح هاشورخورده نشان داده شده است. این ضربه بر روی جرم m تغییر سرعتی ایجاد می کند که طبق قانون حرکت نیوتن برابر است با:

$$m \frac{dv}{dt} = F(\tau)$$

یا

$$dv = \frac{F(\tau) d\tau}{m}$$

(۱-۴)



شکل (۱-۴): تغییرات بار ضربه ای نسبت به زمان

در این رابطه $F(\tau) d\tau$ ضربه و dv نمو سرعت است. این نمو را می توان سرعت اولیه

1) Impulsive Loading

جرم v_0 در لحظه t در نظر گرفت. حال فرض کنید که این ضربه بر سازه ای که به صورت یک نوسانگر نامیرا مدل شده است اثر کند. در لحظه t نوسانگر تغییر سرعتی برابر رابطه (۱-۴) پیدا خواهد کرد. این تغییر سرعت در لحظه t بعنوان سرعت اولیه همراه با تغییر مکان اولیه $y_0 = 0$ در لحظات بعد جابه جایی زیر را ایجاد خواهد نمود:

$$dy(t) = \frac{F(\tau) d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (۲-۴)$$

بار کلی را می توان به صورت یک سری ضربه های کوتاه متوالی با فواصل زمانی $d\tau$ در نظر گرفت که هر کدام از آنها جابه جایی جزئی رابطه (۲-۴) را ایجاد خواهد نمود. بنابراین جابه جایی کل در لحظه t در اثر بار $F(\tau)$ از جمع یا انتگرال جابجایی های جزئی $dy(t)$ از لحظه $t=0$ تا زمان t به دست می آید. یعنی:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (۳-۴)$$

این انتگرال به نام «انتگرال دو هامل» معروف است. رابطه (۳-۴) نشان دهنده جابجایی حاصل از نیروی $F(\tau)$ روی یک نوسانگر نامیرا است. این جواب شامل جواب گذرا و جواب پایدار می باشد. چنانچه نیروی $F(\tau)$ را نتوان به صورت یک تابع بیان نمود انتگرال (۳-۴) را همواره باید از طریق عددی حل کرد. برای احتساب تغییر مکان اولیه y_0 و سرعت اولیه v_0 در لحظه $t=0$ کافی است رابطه (۲-۱) را به رابطه (۳-۴) اضافه نماییم:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (۴-۴)$$

کاربرد رابطه (۴-۴) برای چند حالت بارگذاری که از طریق تحلیلی قابل حل است، در ادامه نشان داده خواهد شد.

۴-۱-۱- نیروی ثابت

نیروی ثابت F_0 را که بطور ناگهانی به نوسانگر نامیرای شکل (۲-۴) در لحظه $t=0$ اثر می کند، در نظر بگیرید. برای تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر با استفاده از رابطه (۴-۴) داریم:

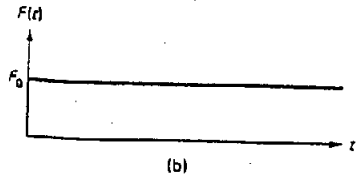
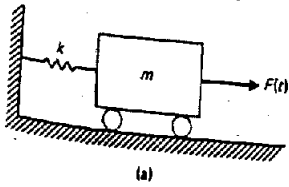
$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

پس از انتگرال گیری نتیجه خواهد شد:

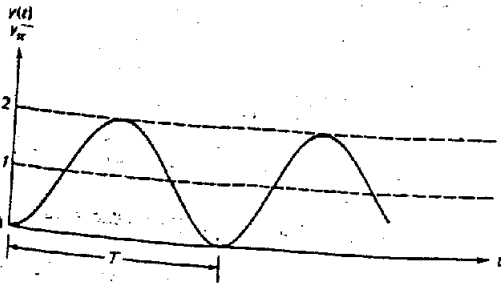
1) Duhamel's integral

$$y(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} |\cos \omega(t - \tau)|_0^t \quad (5-4)$$

$$y(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t) = y_{st} (1 - \cos \omega t)$$



شکل (۲-۳): نوسانگر نامیرا تحت اثر نیروی ثابت



شکل (۲-۳): پاسخ سیستم تک درجه نامیرا به نیروی ثابتی که به طور ناگهانی اثر کند که $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ است. پاسخ سیستم تحت اثر این نیروی ثابت در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. مشاهده می شود که پاسخ آن خیلی شبیه به حالت ارتعاش آزاد نوسانگر نامیرا است. اختلاف اصلی آن در این است که محور به اندازه $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ جابجا شده است. همچنین باید توجه کرد که حداکثر جابه جایی $2y_{st}$ دقیقاً دوبرابر مقداری است که نیروی F_0 در حالت استاتیکی ایجاد می نماید. این نتیجه گیری ساده اما بسیار مهم است که: حداکثر جابه جایی یک سیستم ارتعاشی خطی تحت اثر بار ثابتی که به طور ناگهانی اثر کند دو برابر حالتی است که به صورت استاتیکی (تدریجی) اثر کند. این نتیجه گیری در مورد نیروهای داخلی و تنشها نیز صادق است.

۴-۱-۲- نیروی مستطیلی

در این حالت نیروی ثابت F_0 را که به طور ناگهانی اما در مدت زمان

محدود t_d (مطابق شکل ۴-۴) اثر می نماید بررسی می نماییم. تا لحظه t_d رابطه (۵-۴) صادق است. در این لحظه جابه جایی و سرعت برابرند با:

$$\left. \begin{aligned} y_d &= \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_d) \\ v_d &= \frac{F_0}{k} \omega \sin \omega t_d \end{aligned} \right\} \text{ تا لحظه } t_d \text{ برابرند}$$

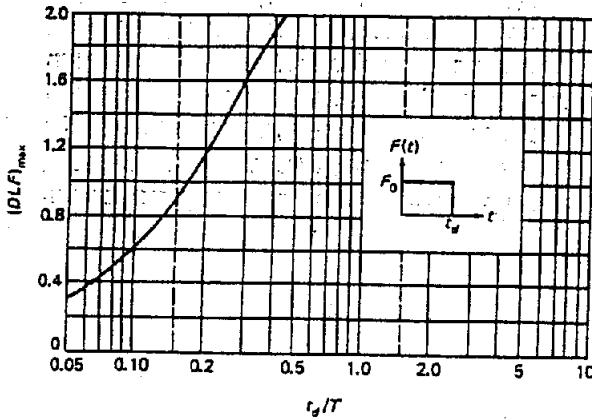
از این لحظه به بعد حرکت به صورت ارتعاش آزاد بوده و شرایط اولیه آن جابه جایی و سرعت در t_d است. از جایگذاری t به جای $t - t_d$ و y_0 و v_0 به جای y_d و v_d در رابطه (۲-۱) داریم:

$$y(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_d) \cos \omega(t - t_d) + \frac{F_0}{k} \sin \omega t_d \sin \omega(t - t_d)$$

که به صورت زیر ساده می شود،

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \{ \cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t \} \quad (۶-۴)$$

$$y_{\max} = 0.17 \times y_{st}$$



شکل (۴-۴): حداکثر ضریب بار دینامیکی برای نوسانگر میرا تحت اثر بار مستطیلی

اگر «ضریب بار دینامیکی» α طبق تعریف نسبت جابه جایی در هر لحظه t به جابه جایی استاتیکی باشد از روابط (۶-۴) و (۵-۴) خواهیم داشت:

$$DLF = 1 - \cos \omega t, \quad t \leq t_d$$

1) Dynamic Load Factor (DLF)

$$DLF = \cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t, \quad t \geq t_d \quad (7-4)$$

غالباً بهتر است زمان رابه صورت يك پارامتر بدون بُعد استفاده نمود. لذا به جای ω در روابط فوق از چیزیود استفاده می کنیم:

$$DLF = 1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad t \leq t_d$$

$$DLF = \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T} \right) - \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad t \geq t_d \quad (8-4)$$

استفاده از شکل بدون بعد زمان در رابطه (8-4) بر این نکته تاکید دارد که عامل مؤثر نسبت زمان تداوم t_d به پریود طبیعی است و نه مقدار عددی هر کدام از آنها. حداکثر ضریب بار دینامیکی $(DLF)_{max}$ که حداکثر مقدار رابطه (8-4) است در شکل (4-4) رسم شده است. مشاهده می شود که حداکثر ضریب بار دینامیکی برای بارهای با تداوم $\frac{t_d}{T} \geq 0.5$ مشابه حالتی است که زمان تداوم آن بی نهایت باشد.

نمودارهای مشابه شکل (4-4) که پاسخ حداکثر يك سیستم تك درجه را برای يك

بارگذاری نشان می دهد «طیف پاسخ» نامیده می شوند. همانطور که در فصل 8 خواهیم دید این نمودارها برای طراحی بسیار مفید هستند. برای بارهای کوتاه مدت، میرایی اثر قابل ملاحظه ای بر پاسخ سیستم ندارد. حداکثر ضریب بار دینامیکی معمولاً مربوط به اولین حداکثر است و میرایی سازه نمی تواند مقدار قابل توجهی از آن بکاهد.

3-1-4 بار مثلثی²

حال يك نوسانگر نامیرا با شرایط اولیه سکون را که تحت اثر يك نیروی مثلثی قرار دارد در نظر می گیریم. این نیرو دارای مقدار اولیه F_0 است که به طور خطی کاهش پیدا می نماید و در لحظه t_d صفر می گردد. (شکل 4-5) پاسخ یا استفاده از رابطه (4-4) در دوفاصله زمانی به دست می آید. ابتدا برای فاصله زمانی $t \leq t_d$ داریم:

$$y_0 = 0 \quad \text{و} \quad v_0 = 0 \quad \text{با مقادیر اولیه} \quad F(\tau) = F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_d} \right)$$

از قرار دادن این مقادیر در رابطه (۴-۳) و انتگرال گیری نتیجه خواهد شد:

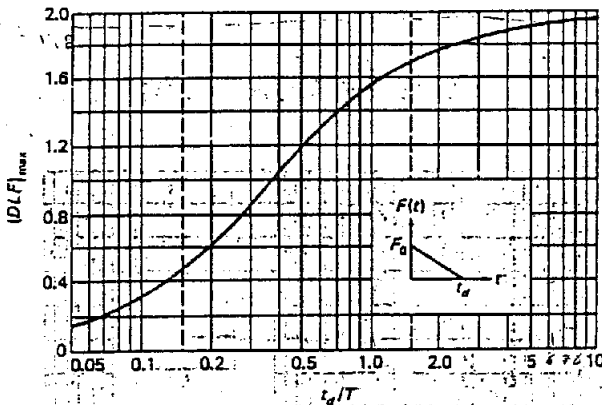
$$y = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t) + \frac{F_0}{k t_d} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \right) \quad (۴-۹)$$

این رابطه را می توان با استفاده از ضریب بار دینامیکی و پارامترهای بدون بعد به صورت زیر نوشت:

$$DLF = \frac{y}{y_{st}} = 1 - \cos(2\pi t / T) + \frac{\sin(2\pi t / T)}{2\pi t_d / T} - \frac{t}{t_d} \quad (۴-۱۰)$$

برای زمان $t \geq t_d$ از رابطه (۴-۹) در لحظه t_d داریم:

$$y_d = \frac{F_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t_d}{\omega t_d} - \cos \omega t_d \right)$$



شکل (۴-۵): حداکثر ضریب بار دینامیکی برای نوسانگر نامیذا تحت اثر بار مثلثی

$$v_d = \frac{F_d}{k} \left(\omega \sin \omega t_d + \frac{\cos \omega t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d} \right) \quad (۴-۱۱)$$

این دو مقدار شرایط اولیه حرکت در لحظه $t = t_d$ برای زینتهای هستند. از قراردادن $(t - t_d)$ به جای t و همچنین y_d و v_d به ترتیب به جای y_0 و v_0 در رابطه (۲-۱) خواهیم داشت:

$$y = \frac{F_0}{k \omega t_d} \left\{ \sin \omega t - \sin \omega (t - t_d) \right\} - \frac{F_0}{k} \cos \omega t$$

$$DLF = \frac{1}{\omega t_d} \{ \sin \omega t - \sin \omega(t - t_d) \} - \cos \omega t \quad (12-4)$$

این رابطه را با استفاده از پارامترهای بدون بعد به صورت زیر می توان نوشت:

$$DLF = \frac{1}{2\pi t_d / T} \left\{ \sin 2\pi \frac{t}{T} - \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T} \right) \right\} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (13-4)$$

نمودار حداکثر ضریب بار دینامیکی به صورت تابعی از زمان تداوم نسبی بار در شکل (4-5) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود با زیاد شدن t_d/T حداکثر ضریب بار دینامیکی به سمت ۲ میل می نماید، یعنی در مدت زمانی که سیستم نیاز دارد تا به حداکثر جا به جایی برسد مقدار کاهش نیرو قابل صرف نظر کردن است.

در بخش قبیل پاسخ یک نوسانگر نامیرا برای دو بار ضربه ای مستطیلی و مثلثی را مورد بررسی قرار دادیم. نمودارهای متعدد دیگری برای انواع بارهای ضربه ای توسط ویگان مهندسی ارتش آمریکا^۱ تهیه شده است. حال پاسخ را برای حالتی که انتگرال دو هامل به روش تحلیلی قابل حل نیست، به دست می آوریم. در این حالت لازم است که برای حل انتگرال دو هامل از روشهای عددی استفاده نمود.

4-2- حل عددی انتگرال دو هامل - سیستم نامیرا

در عمل گاهی نیروی وارد بر سازه به صورت داده های عددی در دسترس می باشند. در این موارد مانند زلزله باید از حل عددی انتگرال دو هامل استفاده نمود. برای این کار با استفاده از بسط مثلثاتی در انتگرال دو هامل و شرایط اولیه سکون

$$y(t) = \sin \omega t \overset{A(t)}{\frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau} - \cos \omega t \overset{B(t)}{\frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega \tau d\tau} \quad \text{داریم:}$$

$$y(t) = \{ A(t) \sin \omega t - B(t) \cos \omega t \} / m\omega \quad (14-4)$$

که

$$A(t) = \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (15-4)$$

$$B(t) = \int_0^t F(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

به این ترتیب حل انتگرال دو هامل نیاز به حل عددی انتگرالهای $A(t)$ و $B(t)$ دارد.

روشهای مختلفی برای حل عددی انتگرال وجود دارد. در این روشها به جای انتگرال گیری از جمع مقدار تابع زیر انتگرال به شکل مناسبی در n نقطه $\Delta\tau$ استفاده می شود. معمول ترین آنها روش نوزنقه ای و روش سیمسون است. اگر داشته باشیم:

$$A(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau$$

با استفاده از روش نوزنقه ای داریم:

$$A(t) = \Delta\tau \frac{1}{2} (I_0 + 2I_1 + 2I_2 + \dots + 2I_{n-1} + I_n) \quad (16-4)$$

و از روش سیمسون

$$A(t) = \Delta\tau \frac{1}{3} (I_0 + 4I_1 + 2I_2 + \dots + 4I_{n-1} + I_n) \quad (17-4)$$

در روش سیمسون $n = \frac{t}{\Delta\tau}$ باید یک عدد فرد باشد. جواب حاصل از این روشها تقریبی است زیرا در حقیقت در روش نوزنقه ای تابع را با یک سری قطعه خط و در روش سیمسون با یک سری قطعات سهمی شکل جانشین $I(\tau)$ نموده ایم. روش دیگر حل انتگرال در حامل حل دقیق تحلیلی آن برای نیرویی است که به صورت یک سری خط متوالی در نظر گرفته می شود. این روش تقریب روشهای عددی را ندارد و از این نظر دقیق است.

در این روش $F(\tau)$ کینه صورت یک سری قطعه خط متوالی مطابق شکل (۶-۴) فرض میشود. برای به دست آوردن پاسخ کامل زمانی، بهتر است انتگرال (۱۵-۴) به صورت زیر نوشته شود:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (18-4)$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \sin \omega\tau d\tau \quad (19-4)$$

در این روابط $A(t_i)$ و $B(t_i)$ مقادیر در لحظه t_i هستند. به همین ترتیب برای نیروی $F(\tau)$ داریم:

$$F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq \tau \leq t_i \quad (20-4)$$

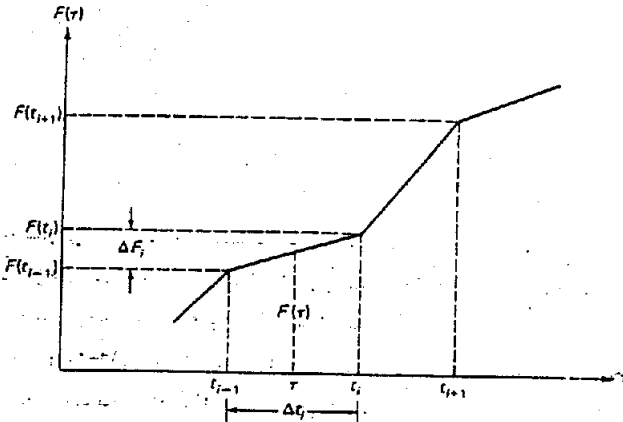
$$\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

از قراردادن رابطه (۲۰-۴) در رابطه (۱۸-۴) و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) \sin \omega t_i - \sin \omega t_{i-1} / \omega \quad (21-4)$$

$$+ \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i} \{ \cos \omega t_i - \cos \omega t_{i-1} + \omega (t_i \sin \omega t_i - t_{i-1} \sin \omega t_{i-1}) \}$$



شکل (۶-۴): تابع نیروی چند خطی

به همین ترتیب از رابطه (۱۹-۴) نتیجه می شود:

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) \{ \cos \omega t_{i-1} - \cos \omega t_i \} / \omega \quad (22-4)$$

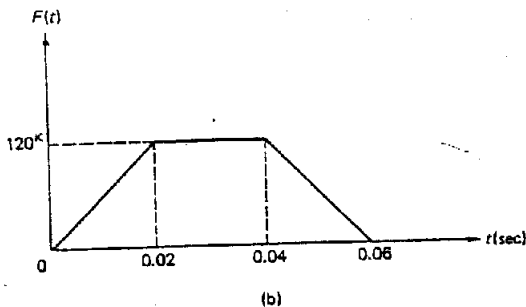
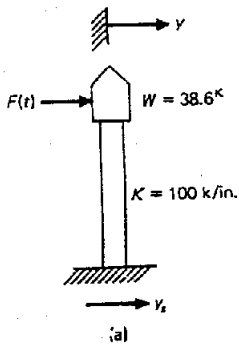
$$+ \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i} \{ \sin \omega t_i - \sin \omega t_{i-1} - \omega (t_i \cos \omega t_i - t_{i-1} \cos \omega t_{i-1}) \}$$

روابط (۲۱-۴) و (۲۲-۴) فرمولهای دیگری برای محاسبه انتگرال های (۱۵-۴) در لحظه $t = t_i$ هستند.

مثال (۱-۴) پاسخ برج نشان داده شده در شکل (۷-۴) را برای يك بار ضربه ای مطابق شکل به دست آورید. از میرایی صرفنظر کنید.

فرکانس طبیعی سیستم برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100000}{100}} = 31.62 \text{ rad/sec}$$



شکل (۷-۴): بارگذاری سازه برای مثال (۱-۴)

چون بارگذاری از چند پاره خط تشکیل شده است لذا محاسبه انتگرال در حامل با استفاده از ضرایب $A(t)$ و $B(t)$ که از روابط (۲۱-۴) و (۲۲-۴) به دست می آیند دقیق خواهد بود. محاسبات لازم به شکل مناسبی در جدول (۱-۴) آورده شده اند. انتگرال های (۱۸-۴) و (۱۹-۴) بر این جدول به صورت $\Delta A(t)$ و $\Delta B(t)$ نشان داده شده اند.

چون ضربه در $t=0.060$ تمام می شود، مقادیر A و B پس از این لحظه ثابت می مانند، لذا ارتعاش آزاد سیستم پس از پایان ضربه از جایگذاری مقادیر A و B در $t=0.060$ از رابطه (۱۴-۴) به دست می آید:

$$y(t) = (2571 \sin 31.62t - 3285 \cos 31.62t) / 3162$$

یا

$$y(t) = 0.8130 \sin 31.62t - 1.1338 \cos 31.62t \quad \text{برای } t \geq 0.060 \text{ sec}$$

جدول (۱-۴): محاسبات عددی پاسخ مثال (۱-۴)

t (sec)	$F(t)$	ωt	$\Delta A(t)$	$A(t)$	$\Delta B(t)$	$B(t)$	$y(t)$ (in)
0.000	0	0	0	0	0	0	0
0.020	120,000	0.6324	1082	1082	486	486	0.078
0.040	120,000	1.2649	1376	2458	1918	2404	0.512
0.060	0	1.8974	113	2571	1181	3585	1.134
0.080	0	2.5298	0	2571	0	3585	1.395
0.100	0	3.1623	0	2571	0	3585	1.117

۳-۴- حل عددی انتگرال دو هامل - سیستم میرا

به دست آوردن پاسخ يك سیستم میرا توسط انتگرال دو هامل کاملاً مشابه يك سیستم نامیرا است با این تفاوت که سرعت اولیه حاصل از ضرب $F(\tau)d\tau$ یعنی $dv = \frac{F(\tau)d\tau}{m}$ را در رابطه ارتعاش آزاد مربوط به سیستم میرا قرار می دهیم. از شرایط اولیه $y_0 = 0$ و $v_0 = \frac{F(\tau)d\tau}{m}$ و جایگذاری مقدار y به جای $(t-\tau)$ در رابطه (۲۰-۲) داریم:

$$dy(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin \omega_D(t-\tau) \quad (۲۳-۴)$$

از جمع این جاب جایی های جزئی در کل دوره بارگذاری نتیجه خواهد شد:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^{t_1} F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (۲۴-۴)$$

این رابطه پاسخ سیستم میرا توسط انتگرال دو هامل است. برای حل عددی، مشابه سیستم نامیرا عمل می کنیم که رابطه زیر به دست می آید:

$$y(t) = \left\{ A_D(t) \sin \omega_D t - B_D(t) \cos \omega_D t \right\} \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \quad (۲۵-۴)$$

$$A_D(t_1) = A_D(t_{1-1}) + \int_{t_{1-1}}^{t_1} F(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_D \tau d\tau \quad (۲۶-۴)$$

$$B_D(t_1) = B_D(t_{1-1}) + \int_{t_{1-1}}^{t_1} F(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_D \tau d\tau \quad (۲۷-۴)$$

برای يك تابع بار دوباره خطی $F(\tau)$ ، از رابطه (۲۶-۴) و (۲۷-۴) قرار داده می شود که انتگرال های زیر حاصل خواهند شد:

$$I_1 = \int_{t_{1-1}}^{t_1} e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_D \tau d\tau = \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} (\xi\omega \cos \omega_D \tau + \omega_D \sin \omega_D \tau) \Big|_{t_{1-1}}^{t_1} \quad (۲۸-۴)$$

$$I_2 = \int_{t_{1-1}}^{t_1} e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_D \tau d\tau = \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} (\xi\omega \sin \omega_D \tau - \omega_D \cos \omega_D \tau) \Big|_{t_{1-1}}^{t_1} \quad (۲۹-۴)$$

$$I_3 = \int_{t_{1-1}}^{t_1} \tau e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_D \tau d\tau = \left(\tau - \frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right) I_2 + \frac{\omega_D}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} I_1 \Big|_{t_{1-1}}^{t_1} \quad (۳۰-۴)$$

$$I_4 = \int_{t_{1-1}}^{t_1} \tau e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_D \tau d\tau = \left(\tau - \frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right) I_1 - \frac{\omega_D}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} I_2 \Big|_{t_{1-1}}^{t_1} \quad (۳۱-۴)$$

1) Piecewise Loading Function

I_2 ، I_1 همان انتگرال های (۲۸-۴) ، (۲۹-۴) قبل از قراردادن مقادیر حدی آنها هستند. با استفاده از این انتگرال ها مقادیر $A_D(t_i)$ و $B_D(t_i)$ از روابط زیر به دست می آیند:

$$A_D(t_i) = A_D(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) I_1 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_4 \quad (22-4)$$

$$B_D(t_i) = B_D(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) I_2 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_3 \quad (23-4)$$

نهایتاً از قراردادن این دو مقدار در رابطه (۲۵-۴) جابه جایی در لحظه t_i به دست می آید:

$$y(t_i) = \frac{e^{-\xi \omega t_i}}{m \omega_D} \{ A_D(t_i) \sin \omega_D t_i - B_D(t_i) \cos \omega_D t_i \} \quad (24-4)$$

۴-۴- برنامه ۱- پاسخ دینامیکی به روش انتگرال دو هامل (DUHAMEL)

این برنامه پاسخ یک نوسانگر میزا را که تحت اثر نیروی خارجی یا شتاب تکیه گاه قرار گرفته است محاسبه می نماید. تغییرات نیرو یا شتاب بین نقاطی که برای برنامه تعریف می شود خطی در نظر گرفته می شود. پاسخ شامل جابه جایی، سرعت، شتاب و عکس العمل تکیه گاه است. این پاسخها در فواصل زمانی مشخصی چاپ می شوند. برنامه به زبان فرترن نوشته شده است.

لیست کوتاهی از داده ها و متغیرهای مورد استفاده برنامه در جدول (۲-۴) آورده شده است. همچنین مشخصات کارتهای داده ها و فرمت های مربوط در جدول (۳-۴) نشان داده شده اند.

این برنامه، نسبتاً ساده بوده و شامل یک حلقه اصلی است. در این حلقه در هر دور یک فاصله زمانی افزوده می شود و پاسخ در هر بار محاسبه می گردد. زیربرنامه INTER در این برنامه در هر فاصله زمانی مقدار نیرو یا شتاب را از طریق درون یا بی خطی محاسبه می نماید. لیست برنامه در ضمیمه I به نام 1-DUHAMEL آورده شده است. توضیحاتی که نشان دهنده کارکرد هر قسمت از برنامه است در آن گنجانیده شده است. این برنامه در هر نوع سیستم احاد قابل استفاده است و فقط واحدهای بایکدیگر همساز باشند؛ بعنوان مثال، درسیستم انگلیسی که در آن از پوند برای نیرو، ثانیه برای زمان و اینچ برای طول استفاده می شود. واحد جرم از تقسیم نیرو بر شتاب ثقل $g=386.0 \text{ in/sec}^2$ به دست می آید که برابر است با $\text{lb sec}^2/\text{in}$.

در سیستم آحاد SI واحد جرم کیلوگرم، زمان ثانیه، طول متر و نیرو نیوتن است.

جدول (۲-۴): شرح متغیرهای ورودی برنامه ۲

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
NTYPE		نشانه بار 0 ← نیروی وارد بر جرم 1 ← شتاب تکیه گاه
N		تعداد نقاطی که نیرو یا شتاب را مشخص می کنند
M	m	جرم
K	k	ثابت فنر خطی
XI	ξ	نسبت میرایی
TMAX		حداکثر زمان انتگرال گیری
DT	dt	گام زمانی انتگرال گیری
INT		نشانه درون یابی 0 ← درون یابی نباشد 1 ← درون یابی باشد
GR	g	شتاب ثقل
T(I)	t _i	زمان در گام i
F(I)	F(t _i)	نیروی یا شتاب در لحظه i (شتاب به حسب خریدن از g)

جدول (۲-۴): داده های ورودی و فرمت آنها در برنامه ۱

فرمت	متغیر
(2I5, 5F10.3, I5, F10.5)	NTYPE N M K XI TMAX DT INT GR
(8F10.4)	T(I) F(I), (I = 1, N) (as many cards as needed)

مثال (۲-۴): بعنوان اولین مثال کاربرد برنامه دو هامل برج مثال (۱-۴) را با ۵٪ میرایی در نظر می گیریم. داده های ورودی لازم در جدول (۳-۴) و خروجی برنامه در جدول (۵-۴) آمده است.

جابه جایی های آمده در جدول (۵-۴) برای ۵٪ میرایی مطابق انتظار کمی کمتر از جابجایی های (۱) جدول (۱-۴) برای حالت نامیرا است
جدول (۳-۴): داده های ورودی مثال (۲-۴)

لیست داده ها								
0	4	100.	100000.	0.05	0.12.	0.005	1	0.
0.	0.	0.020	120000.	0.04	120000.	0.06	0.0	

RESPONSE OF SINGLE DEGREE SYSTEM USING DUHAMEL INTEGRAL

MASS = 100.0000
 SPRING CONSTANT = 100000.00
 NATURAL FREQUENCY = 31.623 RADIANS/SEC
 DAMPED FREQUENCY = 31.583 RADIANS/SEC
 DAMPING CONSTANT = 316.228
 RELATIVE DAMPING = 0.0500

TIME	FORCE	DISPL.	VELOCITY	ACC.	SUP. REAC.
0.0000	0.00	0.000	0.000	0.00	0.00
0.0050	30000.00	0.001	0.745	296.40	266.26
0.0100	60000.00	0.010	2.944	580.82	1356.95
0.0150	90000.00	0.033	6.521	846.40	3889.82
0.0200	120000.00	0.077	11.366	1086.86	8515.61
0.0250	120000.00	0.147	16.594	1000.24	15634.93
0.0300	120000.00	0.242	21.329	890.23	25153.09
0.0350	120000.00	0.360	25.463	759.91	36847.58
0.0400	120000.00	0.496	28.901	612.82	50413.83
0.0450	90000.00	0.646	30.825	456.47	65336.24
0.0500	60000.00	0.800	30.471	296.59	80601.41
0.0550	30000.00	0.947	27.883	135.21	95112.86
0.0600	0.00	1.076	23.161	14.74	107799.47
0.0650	0.00	1.177	17.198	130.96	117782.91
0.0700	0.00	1.247	10.904	1281.42	124741.06
0.0750	0.00	1.285	4.438	1299.36	128540.42
0.0800	0.00	1.291	-2.035	1284.87	129132.08
0.0850	0.00	1.265	-8.358	1238.80	126550.22
0.0900	0.00	1.208	-14.374	1162.79	120909.47
0.0950	0.00	1.122	-19.939	1059.19	112401.18
0.1000	0.00	1.010	-24.924	931.00	101288.64
0.1050	0.00	0.874	-29.214	781.77	87902.56
0.1100	0.00	0.719	-32.714	615.54	72639.51
0.1150	0.00	0.548	-35.349	436.68	55973.74

MAX DISPL. = 1.29
 MAX VELOC. = -35.35
 MAX ACC. = -1299.36
 MAX SUP. FORCE = 129132.08

جدول (۴-۴): داده های ورودی مثال (۳-۴)

1	24	100.00	100000.000	0.050	0.120	0.000	0	386
0.0000	0.0108	0.0420	0.0010	0.9700	0.0159	0.1610		-0.0001
0.2210	0.0189	0.2630	0.0001	0.2910	0.0059	0.3320		-0.0012
0.3740	0.0200	0.4290	-0.0237	0.4710	0.0076	0.5810		0.0425
0.6230	0.0094	0.6650	0.0138	0.7200	-0.0088	0.7250		-0.0256
0.7890	-0.0387	0.7940	-0.0568	0.8720	-0.0232	0.8770		-0.0343
0.9410	-0.0402	0.9460	-0.0603	0.9970	-0.0789	1.0660		-0.0666

جدول (۴-۷): نتایج کامپیوتری مثال (۳-۴)

RESPONSE OF SINGLE DEGREE SYSTEM USING DUHAMEL INTEGRAL

MASS = 100.0000
 SPRING CONSTANT = 100000.00
 NATURAL FREQUENCY = 31.623 RADIANS/SEC
 DAMPED FREQUENCY = 31.583 RADIANS/SEC
 DAMPING CONSTANT = 316.228
 RELATIVE DAMPING = 0.0500

TIME	FORCE	DISPL.	VELOCITY	ACC.	SUP. REAC.
0.0000	-416.88	0.000	0.000	-4.17	0.00
0.0420	-38.60	-0.002	-0.054	1.84	250.68
0.9700	-613.74	-0.006	-0.012	-0.50	560.14
0.1610	3.86	0.002	0.003	-1.86	188.90
0.2210	-729.54	-0.004	-0.204	-2.79	391.12
0.2630	-3.86	-0.010	-0.010	10.32	1032.83
0.2910	-227.74	-0.007	0.207	4.23	719.53
0.3320	46.32	0.003	0.230	-3.11	293.85
0.3740	-772.00	0.006	-0.169	-12.77	561.04
0.4290	914.82	-0.007	-0.008	16.13	695.39
0.4710	-293.36	0.001	0.252	-5.12	159.80
0.5810	-1640.50	-0.022	-0.381	7.25	2247.92
0.6230	-362.84	-0.026	0.326	21.00	2567.79
0.6650	-532.68	-0.001	0.663	-6.75	220.24
0.7200	339.68	0.017	-0.088	-13.11	1678.35
0.7250	988.16	0.016	-0.136	-5.90	1621.19
0.7890	1493.82	0.007	0.003	8.09	683.60
0.7940	2192.48	0.007	0.060	14.75	698.25
0.8720	895.52	0.024	-0.057	-14.54	2367.90
0.8770	1323.98	0.023	-0.117	-9.62	2323.55
0.9410	1551.72	0.008	-0.158	8.12	791.56
0.9460	2327.58	0.007	-0.097	16.34	725.09
0.9970	3045.54	0.023	0.615	5.58	2300.83
1.0660	2570.76	0.046	-0.264	-19.01	4555.68

MAX DISPL. = 0.05
 MAX VELOC. = 0.66
 MAX ACC. = 21.00
 MAX SUP. FORCE = 4555.68

مثال (۳-۴): بعنوان دومین مثال برنامه ۱، برج مثال (۱-۴) و (۲-۴) را در نظر می گیریم که تحت اثر شتاب تکیه گاهی قرار گرفته اند. در این مثال شتاب تکیه گاهی یک ثانیه اول شتابنگاشت زلزله ال سنترو ۱۹۴۰ در نظر گرفته شده است. میرایی، % ۵ میرایی بحرانی است. داده های ورودی برنامه در جدول (۴-۴) و نتایج خروجی آن در جدول (۴-۷) نشان داده شده اند. در این مثال نشانه درون یابی صفر ($INT=0$) انتخاب شده است بدین معنی که نیاز به درون یابی شتاب بین نقاط داده شده نمی باشد. در این حالت در برنامه نیاز به متغیرهای $TMAX$ و DT نمی باشد. لذا در داده های ورودی (جدول ۴-۴) محل آنها را خالی یا صفر قرار می دهیم.

۴-۵- خلاصه

در این فصل نشان داده شد که معادله دیفرانسیل حرکت را در یک سیستم خطی می توان در حالت کلی برای هر نوع تابع بارگذاری با استفاده از انتگرال دو حامل حل نمود. حل عددی این انتگرال را می توان به روشهای استاندارد یا مانند روش روزنق ای یا سیمسون انجام داد. روش عددی دیگری بر فرض پاره خطی بودن نیرو ارائه شد. برنامه کامپیوتری ارائه شده قادر است پاسخ زمانی یک سیستم خطی - ارتجافی تک درجه را به صورت جابه جایی، سرعت و شتاب تحت اثر نیروی خارجی یا شتاب تکیه گاهی محاسبه نماید.

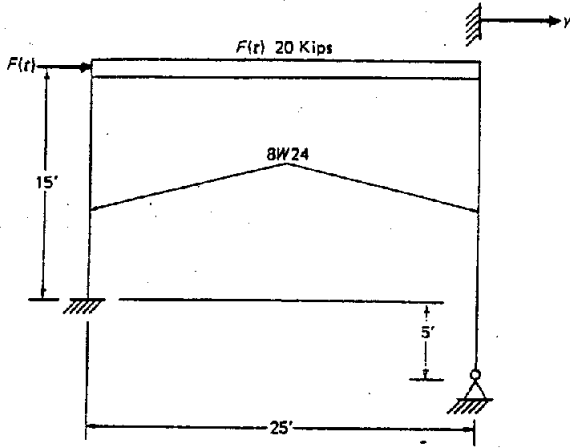
مسائل

۱-۴- بر بالای قاب فلزی شکل م (۱-۴) یک نیروی افقی اثر می کند. تیر از مقدار 5 kip در لحظه $t=0$ تا مقدار صفر در $t=0.6 \text{ sec}$ به طور خطی کاهش می یابد. تعیین کنید: الف) جابه جایی افقی را در $t=0.5 \text{ sec}$ و ب) حداکثر جابه جایی افقی را. (ستون را بدون جرم و تیر را کاملاً صلب فرض نمایید. از میرایی صرف نظر کنید).

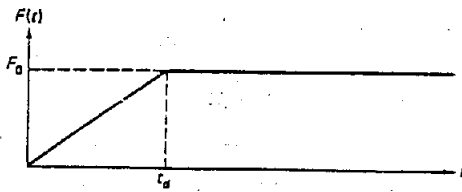
۲-۴- مسأله (۱-۴) را با % ۱۰ میرایی حل کنید.

۳-۴- معادله تغییرات ضریب بار دینامیکی یک نوسانگر ساده نامیرا را بر حسب برای بار نشان داده شده در شکل م (۲-۴) به دست آورید.

۴-۴- قاب نشان داده شده در شکل م (۱-۴) به طور ناگهانی تحت اثر یک شتاب تکیه گاهی $0.5g$ قرار می گیرد. حداکثر نیروی برشی ستونها را با صرف نظر کردن از میرایی به دست آورید.

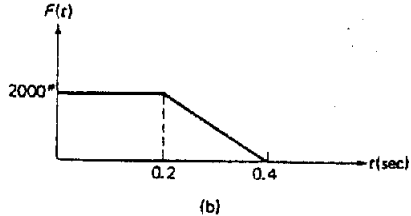
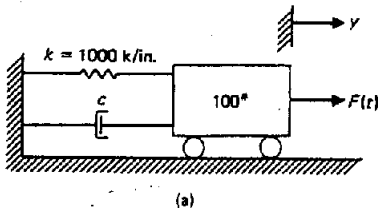


شکل م (۱-۴)



شکل م (۲-۴)

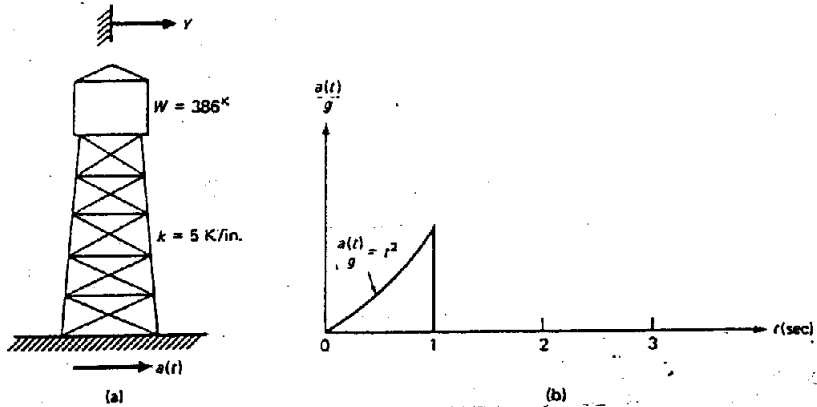
۴-۵- مساله (۴-۴) را برای ۱۰٪ میرایی حل کنید.
 ۴-۶- برای سیستم دینامیکی به شکل م (۶-۴) جاب جایی را برای $0 \leq t \leq 0.5 \text{ sec}$ دست آورده و نمودار آن را رسم نمایید. (از میرایی صرفنظر کنید).



شکل م (۶-۴)

۷-۴- مسأله (۴-۶): را برای 10% میرایی حل کنید.

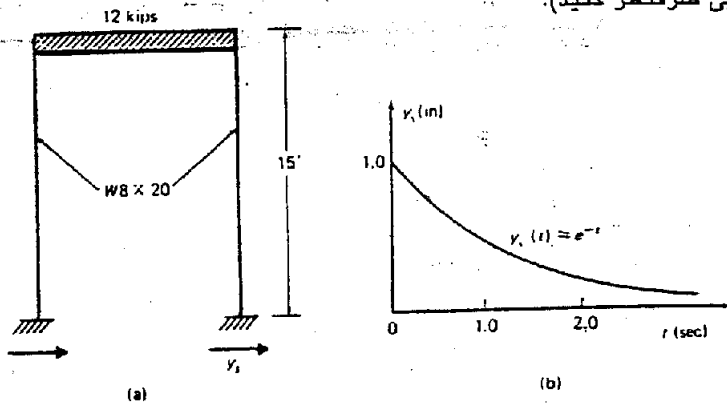
۸-۴- به برج نشان داده شده در شکل م (۴-۸، الف) يك شتاب تکیه گاهی $a(t)$ مطابق شکل م (۴-۸، ب) اثر میکند. جابه جایی نسبی بالای برج را در $t=1.0$ Sec به دست آورید. (از میرایی صرفنظر کنید).



شکل م (۴-۸)

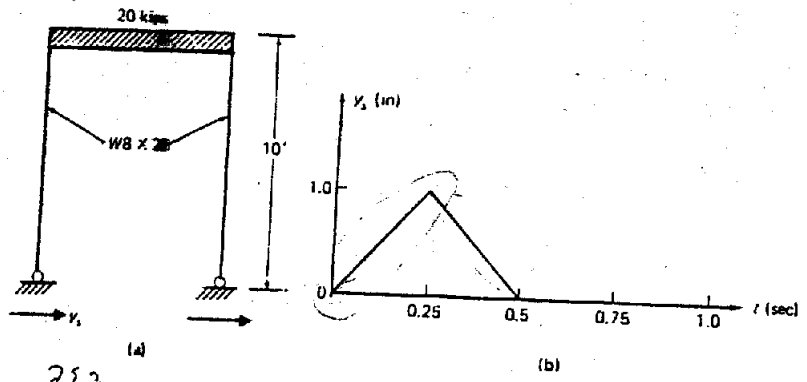
۹-۴- مسأله (۴-۸) را برای 20% میرایی حل کنید.

۱۰-۴- برای برج مسأله (۴-۹) حداکثر جابه جایی بالای برج را نسبت به زمین به دست آورید.
 ۱۱-۴- قاب شکل م (۴-۱۱، الف) تحت تاثیر حرکت افقی تکیه گاهی مطابق شکل م (۴-۱۱، ب) قرار می گیرد. حداکثر جابه جایی مطلق بالای قاب را به دست آورید. (از میرایی صرفنظر کنید).



شکل م (۴-۱۱)

۱۲-۴- مسئله (۱۱-۴) را برای ۱۰٪ میرایی حل کنید.
 ۱۳-۴- سازه نشان داده شده در شکل م (۳-۱۳، الف) به طور ناگهانی تحت تأثیر حرکت تکیه گاهی شکل م (۴-۱۳، ب) قرار می گیرد. حداکثر جابه جایی مطلق بالای قاب و حداکثر شتاب آن را به دست آورید. تیر قاب کاملاً صلب و میرایی آن صفر است.
 ۱۴-۴- مسئله (۱۳-۴) را برای ۲۰٪ میرایی حل کنید.



شکل م (۳-۱۳)

فصل پنجم

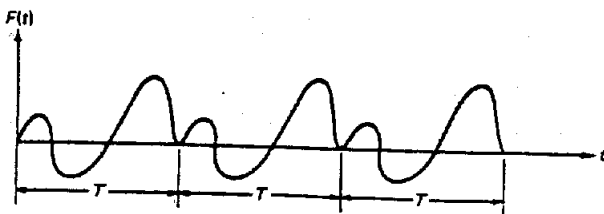
تحلیل فوریه و پاسخ در حوزه فرکانس

این فصل کاربرد سری «فوریه» را برای دو نوع تحلیل دینامیکی نشان می دهد:

۱) پاسخ سیستم به بارهای «دوره ای» و ۲) پاسخ سیستم به بارهای غیر دوره ای در حوزة فرکانس که به جای راه حل معمولی در حوزة زمان قابل استفاده است. در هر دو حالت در محاسبات نیاز به حل تعدادی انتگرال می باشد که جز در مورد بعضی بارهای ساده باید از روشهای عددی استفاده نمود. بنابراین برای استفاده عملی از روش فوریه باید عمل انتگرال گیری را با عمل جمع زدن جایگزین نمود.

۱-۵- تحلیل فوریه

سری فوریه و تحلیل فوریه در شاخه های مختلف علوم و ریاضیات کاربرد دارد. یک سیستم تک درجه را در نظر می گیریم که به آن یک نیروی دوره ای وارد می شود. نیروی دوره ای نیرویی است که در فواصل زمان یکسان T (زمان تناوب تابع) تکرار می شود. فوریه نشان داده است که یک تابع دوره ای را می توان توسط مجموعه بی نهایتی از توابع سینوسی و کسینوسی نشان داد. این مجموعه سری فوریه نامیده می شود.



شکل (۱-۵): یک تابع دوره ای

برای یک تابع دوره ای مانند شکل (۱-۵) می توان سری فوریه را به شکل معادلات (۱-۵)

نوشت:

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos \bar{\omega}t + a_2 \cos 2\bar{\omega}t + a_3 \cos 3\bar{\omega}t + \dots + a_n \cos n\bar{\omega}t + \dots \quad (1-5)$$

$$+ b_1 \sin \bar{\omega}t + b_2 \sin 2\bar{\omega}t + b_3 \sin 3\bar{\omega}t + \dots + b_n \sin n\bar{\omega}t + \dots$$

یا

1) Fourier Series

2) Periodic

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right\} \quad (2-0)$$

که $\omega = 2\pi/T$ فرکانس و T زمان تناوب تابع است. مقادیر ضرایب a_0 ، a_n و b_n از رابطه (2-0) به دست می آیند:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) dt \quad (2-0)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \sin n\omega t dt$$

در این روابط t_1 می تواند هر زمانی باشد ولی معمولاً $-T/2$ یا 0 انتخاب می شود. مقدار a_0 نشان دهنده مقدار متوسط تابع دوره ای $F(t)$ است.

2-0 پاسخ به یاری که با سری فوریه نشان داده شده است
 پاسخ يك سیستم تك درجه به بار دوره ای که توسط سری فوریه نشان داده شده است از جمع پاسخ آن به هریك از جملات سری به دست می آید. با حذف پاسخ گذرا، در يك سیستم نامیرا پاسخ به هر يك از جملات سینوسی برابر است با:

$$y_n(t) = \frac{b_n/k}{1-r_n^2} \sin n\omega t \quad (4-0)$$

که $r_n = \frac{n\omega}{\omega}$ و $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ می باشند. همچنین برای جملات کسینوسی داریم:

$$y_n(t) = \frac{a_n/k}{1-r_n^2} \cos n\omega t \quad (5-0)$$

پاسخ پایدار سیستم به بار ثابت a_0 مقدار a_n/k است و به این ترتیب پاسخ نهایی از جمع پاسخ به کلیه جمله ها به دست می آید:

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-r_n^2} \left(\frac{a_n}{k} \cos n\omega t + \frac{b_n}{k} \sin n\omega t \right) \quad (6-0)$$

با احتساب میرایی در سیستم پاسخ به جملات سینوسی برابر است با:

$$y_n(t) = \frac{b_n/k \sin(n\omega t - \theta)}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2r_n\xi)^2}} \quad (7-0)$$

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{\sin n\omega t \cos \theta - \cos n\omega t \sin \theta}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2r_n\xi)^2}} \quad \text{یا}$$

از جایگذاری مقادیر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ از رابطه (۲-۳) داریم:

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{(1-r_n^2) \sin n\bar{\omega}t - 2r_n \xi \cos n\bar{\omega}t}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n \xi)^2} \quad (۸-۰)$$

به همین ترتیب برای جملات کسینوسی خواهیم داشت:

$$y_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{(1-r_n^2) \cos n\bar{\omega}t + 2r_n \xi \sin n\bar{\omega}t}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n \xi)^2} \quad (۹-۰)$$

پاسخ نهایی از جمع جمله های روابط (۸-۰) و (۹-۰) و پاسخ به جمله ثابت سری به دست می آید. بنابراین پاسخ یک سیستم تک درجه میرا به شکل رابطه (۱۰-۰) نوشت می شود.

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n 2r_n \xi + b_n (1-r_n^2)}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n \xi)^2} \sin n\bar{\omega}t + \frac{a_n (1-r_n^2) - b_n 2r_n \xi}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n \xi)^2} \cos n\bar{\omega}t \right\} \quad (۱۰-۰)$$

مثال (۱-۰): برای نشان دادن کاربرد سری فوری در تحلیل دینامیکی یک سیستم تحت اثر بارهای دوره ای، نوسانگر ساده نامیرای شکل (۲-۰، الف) را که به آن بار دوره ای شکل (۲-۰، ب) وارد می شود در نظر بگیرید:

اولین قدم بسط فوری تابع $F(t)$ است. ضرایب مربوط از رابطه (۲-۰) به دست می آیند:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} t dt = \frac{F_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} t \cos n\bar{\omega}t dt = 0$$

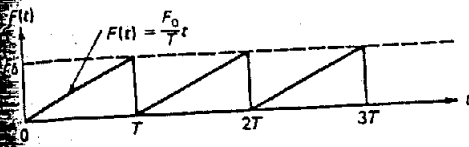
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} t \sin n\bar{\omega}t dt = \frac{-F_0}{n\pi}$$

بنابراین پاسخ این سیستم نامیرا از رابطه (۶-۰) به دست می آید:

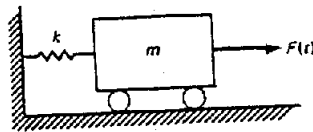
$$y(t) = \frac{F_0}{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0 \sin n\bar{\omega}t}{n\pi k (1-r_n^2)}$$

$$y(t) = \frac{F_0}{2k} - \frac{F_0 \sin n\bar{\omega}t}{\pi k (1-r_1^2)} - \frac{F_0 \sin 2\bar{\omega}t}{2\pi k (1-4r_1^2)} - \frac{F_0 \sin 3\bar{\omega}t}{3\pi k (1-9r_1^2)} - \dots$$

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad r_1 = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$



(ب)



(الف)

شکل (۲-۵): نوسانگر نامییرا تحت اثر بار دوره ای

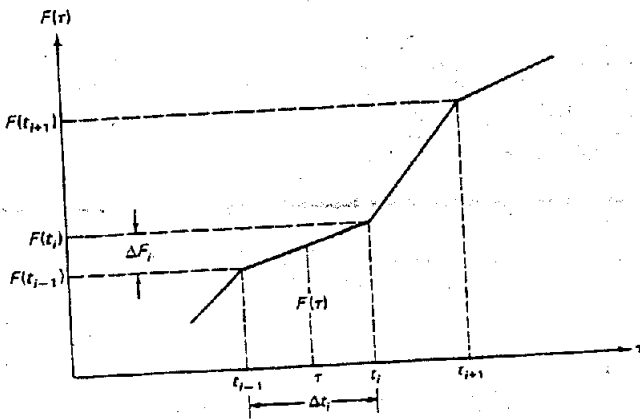
۳-۵- ضرایب فوریه برای توابع چند خطی

همانطور که قبلاً در مورد انتگرال دو حامل گفته شد می توان تابع نیرو را به صورت یک تابع پاره خطی مانند شکل (۳-۵) نشان داد. محاسبه ضرایب فوریه روابط (۳-۵)، برای این تابع از جمع انتگرال های مربوط برای هر یک از پاره خط ها به دست می آید یعنی:

$$a_0 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) dt \quad (۱۱-۵)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) \cos n\omega t dt \quad (۱۲-۵)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) \sin n\omega t dt \quad (۱۳-۵)$$



شکل (۳-۵): تابع نیروی چند خطی

که N تعداد پاره خط های تابع نیرو است. تابع نیرو در فاصله $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ با استفاده از رابطه (۲-۴) به صورت رابطه (۱۴-۵) نوشت می شود:

$$F(t) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (t - t_{i-1}) \quad (14-5)$$

که در آن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ و $\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$ است. انتگرال های لازم برای محاسبه a_n و b_n در روابط (۲۱-۴) و (۲۲-۴) به نام $A(t_i)$ و $B(t_i)$ محاسبه شده اند. برای محاسبه a_n و b_n با استفاده از روابط (۱۸-۴) تا (۲۲-۴) نتیجه خواهد شد:

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{n\bar{\omega}} \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) (\sin n\bar{\omega}t_i - \sin n\bar{\omega}t_{i-1}) \right. \quad (15-5)$$

$$\left. + \frac{\Delta F_i}{n^2 \bar{\omega}^2 \Delta t_i} \left((\cos n\bar{\omega}t_i - \cos n\bar{\omega}t_{i-1}) + n\bar{\omega} (t_i \sin n\bar{\omega}t_i - t_{i-1} \sin n\bar{\omega}t_{i-1}) \right) \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{n\bar{\omega}} \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) (\cos n\bar{\omega}t_{i-1} - \cos n\bar{\omega}t_i) \right. \quad (16-5)$$

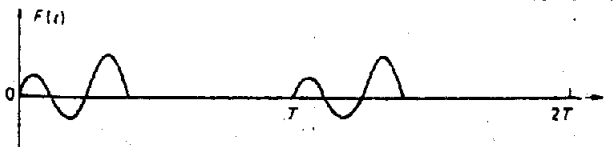
$$\left. + \frac{\Delta F_i}{n^2 \bar{\omega}^2 \Delta t_i} \left((\sin n\bar{\omega}t_i - \sin n\bar{\omega}t_{i-1}) + n\bar{\omega} (t_i \cos n\bar{\omega}t_i - t_{i-1} \cos n\bar{\omega}t_{i-1}) \right) \right\}$$

انتگرال مربوط به جمله a_0 براحتی از جایگذاری مقدار $F(t)$ از رابطه (۱۴-۵) در رابطه (۱۱-۵) به دست می آید که نتیجه خواهد شد:

$$a_0 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \{ \Delta t_i (F_i + F_{i-1}) / 2 \} \quad (17-5)$$

۴-۵- برنامه ۲- پاسخ دینامیکی سیستم تک درجه آزادی به روش فوریه (FOURIER)

در این بخش یک برنامه کامپیوتری برای محاسبه پاسخ یک سیستم تک درجه که تحت اثر نیروی خارجی دوره ای با شتاب تکیه گاهی دوره ای قرار گرفته معرفی شده است. هر نیرویی که در یک مدت زمان محدود اثر می کند را می توان به صورت یک بار دوره ای فرض نمود. برای این کار کافی است مدت زمان اثر بار را اضافه نمود به طوری که در این فاصله اضافه شده، نیرو صفر باشد. (شکل ۴-۵). نیرو در فاصله بین نقاط تعریف شده پاره خطی فرض می گردد. خروجی برنامه شامل لیستی از ضرایب سری فوریه (ضرایب بار و پاسخ) به تعداد مورد نظر و پاسخ سیستم بر حسب تغییر مکان، سرعت، شتاب و عکس العمل تکیه گاه است. پاسخ در فواصل زمانی مشخص چاپ می شود.



شکل (۳-۵): بارگذاری دلخواهی که به صورت یک تابع دوره ای نشان داده شده است

جدول (۱-۵): شرح متغیرهای ورودی برنامه ۲

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
NTYPE		نشانه بارگذاری: 0 ← نیروهای خارجی 1 ← شتاب تکیه گاه
N		تعداد نقاط معرف بارگذاری
NT		تعداد جملات سری فوریه
DT	dt	فواصل زمانی خروجی
TP		زمان تناوب
TT		زمان کل خروجی
AK	k	ثابت فنر
AM	m	جرم
XSI	ξ	نسبت میرایی
INT		نشانه درون یابی: 0 ← درون یابی نشود 1 ← درون یابی شود
NPRT		نشان چاپ خروجی: 0 ← پاسخ زمانی چاپ نشود 1 ← چاپ شود
T(I)	t_i	زمان در نقطه i
F(I)	$F(t_i)$	نیرو یا شتاب در t_i

برنامه به زبان فرترن نوشته شده است. متغیرهای ورودی برنامه همراه با علامتهای جبری به کار برده شده در متن کتاب در جدول (۱-۵) آورده شده اند داده های ورودی و فرمت آنها در جدول (۲-۵) نشان داده شده است. لیست برنامه در ضمیمه I آمده است. برنامه شامل دو حلقه اصلی است. در حلقه اول ضرایب بسط فوریه تابع بارگذاری محاسبه می شوند و در حلقه دوم پاسخ سیستم به هر یک از بارهای هارمونیک سری فوریه محاسبه می شود. در متن برنامه توضیحاتی برای روشن شدن عملکرد هر قسمت از برنامه گنجانیده شده است. این برنامه در هر سیستم آحاد قابل

جدول (۲-۰): داده های ورودی و فرمت آنها برای برنامه ۲

متغیرها	فرمت
F(315, 6F10.2, 2I2)	NTYPE N NT DT IP TT AK AM XSI INT NPRT
F(8F10.2)	T(1) F(1) T(2) F(2)...T(N) F(N)

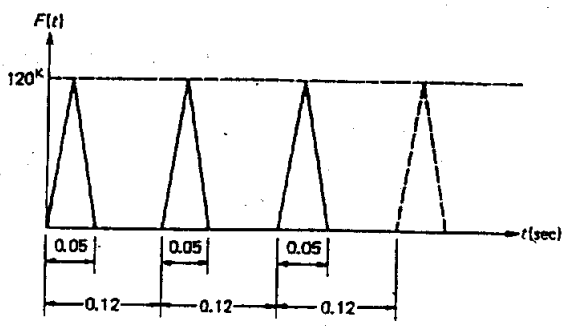
مثال (۲-۰): به عنوان اولین مثال استفاده از برنامه ۲ برج آب شکل (۰-۵، الف) را که تحت اثر نیروی دوره ای شکل (۰-۵، ب) قرار دارد در نظر بگیرید. ضرایب ۲۰ جمله اول سری فوریه تابع نیرو و تغییر مکان پایدار سازه را به دست آورید. (میرایی را ۱٪ فرض نمایید).

داده های ورودی برنامه برحسب نیوتن، سانتیمتر و ثانیه در جدول (۲-۰) نشان داده شده اند.

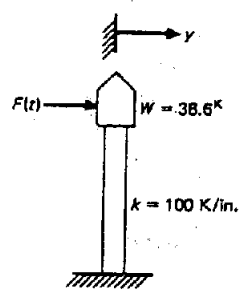
خروجی برنامه شامل ضرایب ۲۰ جمله اول تیروی خارجی و پاسخ پایدار سازه در جدول (۲-۰) آورده شده است همچنین پاسخ زمانی سازه برحسب تغییر مکان، سرعت، شتاب و نیروی تکیه گاهی در جدول (۰-۵) آمده است.

جدول (۲-۰): داده های ورودی مثال (۲-۰)

0	4	20	0.01	0.12	0.12	100000.	100.0	0.10	1	1
0.0		0.0	0.025		120000.	0.050	0.0	0.12		0.0



(ب)



(الف)

شکل (۰-۵): برج آب و نیروی دوره ای وارد بر آن

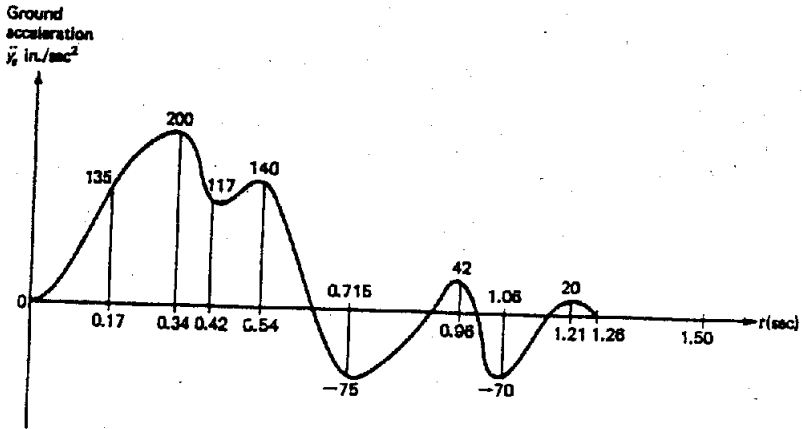
جدول (۴-۵): خرابی فوریه نیرو و پاسخ در مثال (۲-۵)

N	FREQUENCY		FOURIER FORCE COEFF.		FOURIER REPS. COEFF.	
	RAD/SEC	CPS	A(N)	B(N)	A(N)	B(N)
0	0	0	0.2400D 05		0.2400D 00	
1	52.36	8.33	0.1068D 05	0.3986D 05	-0.1012D 00	-0.2096D 00
2	104.72	16.67	-0.2189D 05	0.1264D 05	0.2102D-01	-0.1408D-01
3	157.08	25.00	-0.6485D 04	-0.6485D 04	0.2849D-02	0.2620D-02
4	209.44	33.33	0.2836D-06	-0.4913D-06	-0.6257D-13	0.1165D-12
5	261.80	41.67	-0.1594D 04	-0.4272D 03	0.2375D-03	0.5744D-04
6	314.16	50.00	0.1048D-11	-0.2911D-06	0.6057D-15	0.2979D-13
7	366.52	58.33	-0.8135D 03	0.2180D 03	0.6071D-04	-0.1740D-04
8	418.88	66.67	-0.1418D-06	-0.2456D-06	0.8341D-14	0.1395D-13
9	471.24	75.00	-0.7205D 03	0.7205D 03	0.3215D-04	-0.3303D-04
10	523.60	83.33	-0.8754D 03	-0.5054D 03	0.3227D-04	0.1811D-04
11	575.96	91.67	0.8827D 02	-0.3294D 03	-0.2559D-05	0.9989D-05
12	628.32	100.00	-0.9456D-22	-0.8769D-13	0.2247D-22	0.2227D-20
13	680.68	108.33	0.6320D 02	0.2359D 03	-0.1414D-05	-0.5089D-05
14	733.04	116.67	-0.4466D 03	0.2579D 03	0.8285D-05	-0.4879D-05
15	785.40	125.00	-0.2594D 03	-0.2594D 03	0.4245D-05	0.4178D-05
16	837.76	133.33	0.7091D-07	-0.1228D-06	-0.9985D-15	0.1760D-14
17	890.12	141.67	-0.1379D 03	-0.3696D 02	0.1746D-05	0.4546D-06
18	942.48	150.00	0.1156D-12	-0.9705D-07	0.7346D-17	0.1094D-14
19	994.84	158.33	-0.1104D 03	0.2959D 02	0.1115D-05	-0.3063D-06
20	1047.20	166.67	-0.5673D-07	-0.9826D-07	0.5232D-15	0.8937D-15

باید توجه داشت که نیروهای نشان داده شده در جدول (۵-۵) با استفاده از سری فوریه محاسبه شده اند و نشان دهنده دقت محاسبات هستند.

مثال (۳-۵): برج آب مثال (۲-۵) شکل (۵-۵، الف) را تحت اثر شتاب زلزله شکل (۶-۵) که بر تکیه گاهش وارد می شود در نظر بگیرید. مطلوب است: الف) خرابی ۲. جمله اول سری فوریه نیروی موثر $F_{eff} = -m\ddot{y}_s(t)$ ب) خرابی فوریه ۲. جمله اول جابجایی نسبی جرم و ج) پاسخ زمانی برج (جابجایی نسبی و سرعت نسبی، شتاب نسبی و نیروی منتقل شده به پی).

TIME	FORCE	DISPL.	VELOC.	ACC.	FOUND. FORCE
0.0000	0.1504D 04	0.1631D 00	-0.1203D 02	-0.7190D 02	
0.0100	0.4807D 05	0.4829D-01	-0.9950D 01	0.4954D 03	0.1799D 05
0.0200	0.9439D 05	-0.1771D-01	-0.2422D 01	0.9769D 03	0.7932D 04
0.0300	0.9439D 05	0.6697D-02	0.7161D 01	0.8919D 03	0.2342D 04
0.0400	0.4807D 05	0.1134D 00	0.1314D 02	0.2843D 03	0.4578D 04
0.0500	0.1504D 04	0.2485D 00	0.1287D 02	-0.3149D 03	0.1406D 05
0.0600	0.8103D 02	0.3591D 00	0.9098D 01	-0.4158D 03	0.2615D 05
0.0700	-0.7443D 02	0.4284D 00	0.4687D 01	-0.4587D 03	0.3637D 05
0.0800	0.2814D 02	0.4522D 00	0.9575D-01	-0.4525D 03	0.4294D 05
0.0900	0.2814D 02	0.4312D 00	-0.4225D 01	-0.4042D 03	0.4522D 05
0.1000	-0.7443D 02	0.3700D 00	-0.7874D 01	-0.3209D 03	0.4320D 05
0.1100	0.8103D 02	0.2770D 00	-0.1054D 02	-0.2095D 03	0.3733D 05
0.1200	0.1504D 04	0.1631D 00	-0.1203D 02	-0.7190D 02	0.2849D 05
					0.1799D 05



شکل (۶-۵): شتاب وارد بر پی برج آب شکل (۵-۵)

شکل (۷-۰) مدل این سیستم رانشان می دهد. معادله حرکت سیستم از تعادل نیروها در ترسیم آزاد شکل [(۷-۰)ب] برابر است با:

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s) = 0 \quad (\text{الف})$$

با تعریف حرکت نسبی

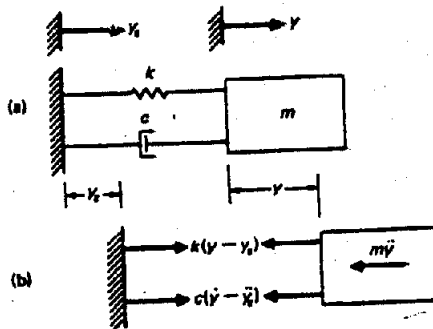
$$u = y - y_s$$

$$\dot{u} = \dot{y} - \dot{y}_s$$

$$\ddot{u} = \ddot{y} - \ddot{y}_s$$

این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{\text{eff}}(t) \quad (\text{ب})$$



شکل (۷-۰): مدل ریاضی سازه برج آب

در این رابطه $F_{\text{eff}} = -m\ddot{y}_s(t)$ نیروی موثر است. چنانچه نشانه بارگذاری NTYPE برابر یا یک قرار داده شود برنامه، مقدار $-m\ddot{y}_s(t)$ را نیروی موثر بحساب می آورد و پاسخ بر حسب حرکت نسبی بیان خواهد شد. داده های ورودی این مثال در جدول (۶-۰) نشان داده شده اند. جدول (۷-۰) ضرایب فوریه ۲. جمله اول نیروی موثر و جابجایی نسبی بین جرم و تکیه گاه رانشان می دهد.

جدول (۶-۰): داد های ورودی مثال (۳-۰)

لیست داده ها										
1	10	20	0.05	1.5	1.5	100000.	100	0.1	0	1
0.	0.	0.17	135.	0.34	200.	0.42	117.			
0.54	140.	0.71	-75.	1.06	-70.	1.21	20.			
1.26	0.	1.5	0.							

جدول (۷-۰): ضرایب فوریه نیرو و پاسخ مثال (۳-۰)

N	FREQUENCY		FOURIER FORCE COEFF.		FOURIER REFS. COEFF.	
	RAD/SEC	CPS	A(N)	B(N)	A(N)	B(N)
0	0	0	-0.2997D 04		-0.2997D-01	
1	4.19	0.67	-0.4406D 04	-0.1018D 05	-0.4202D-01	-0.1048D 00
2	8.38	1.33	0.4781D 04	0.6358D 03	0.5087D-01	0.9736D-02
3	12.57	2.00	0.6648D 03	-0.2678D 03	0.8122D-02	-0.2413D-02
4	16.76	2.67	0.1486D 04	-0.4857D 03	0.2119D-01	-0.3630D-02
5	20.94	3.33	-0.1066D 04	0.6751D 03	-0.2068D-01	0.7147D-02
6	25.13	4.00	0.2416D 03	-0.5519D 03	0.1098D-01	-0.1025D-01
7	29.32	4.67	0.8509D 03	0.3905D 03	0.8680D-02	0.3932D-01
8	33.51	5.33	-0.2890D 02	0.1606D 03	-0.5077D-02	-0.4309D-02
9	37.70	6.00	-0.2874D 03	-0.1341D 03	0.6532D-02	-0.5131D-03
10	41.89	6.67	0.1056D 03	-0.2459D 03	-0.2269D-03	0.3339D-02
11	46.08	7.33	0.1021D 03	0.1413D 03	-0.1157D-02	-0.9575D-03
12	50.27	8.00	0.4274D 02	0.3802D 02	-0.3180D-03	-0.1828D-03
13	54.45	8.67	0.8992D 02	0.9365D 02	-0.5249D-03	-0.3845D-03
14	58.64	9.33	0.5124D 00	-0.1799D 03	0.1076D-03	0.7211D-03
15	62.83	10.00	0.1032D 03	-0.1842D 02	-0.3356D-03	0.1077D-03
16	67.02	10.67	-0.6642D 02	0.1093D 03	0.1500D-03	-0.3313D-03
17	71.21	11.33	0.1430D 02	0.2302D 02	-0.4088D-04	-0.5203D-04
18	75.40	12.00	0.3967D 02	-0.2345D 02	-0.7877D-04	0.5807D-04
19	79.59	12.67	0.2851D 02	-0.2229D 01	-0.5258D-04	0.9141D-05
20	83.78	13.33	-0.1184D 02	-0.5023D 02	0.2681D-04	0.8111D-04

پاسخ زمانی حاصل از خروجی برنامه ۲ در جدول (۸-۰) از جمع جواب های پایدار هر يك از جمله های فوریه نیروی موثر حاصل شده است. بنابراین پاسخ گذرای سیستم در این جوابها در نظر گرفته نشده است. همچنین این جوابها با فرض دوره ای بودن تابع بارگذاری به دست آمده اند.

STEADY-STATE RESPONSE						
TIME	FORCE	DISPL.	VELOC.	ACC.	FOUND.	FORCE
0.0000	-0.3125D 03	0.6177D-02	0.5337D 00	-0.1268D 02		0.7039D 03
0.0500	-0.3973D 04	0.1340D-02	-0.9297D 00	-0.3519D 02		0.6030D 03
0.1000	-0.7914D 04	-0.7530D-01	-0.1764D 01	0.7313D 01		0.7613D 04
0.1500	-0.1198D 05	-0.1403D 00	-0.6898D 00	0.2482D 02		0.1404D 05
0.2000	-0.1466D 05	-0.1514D 00	0.7156D-01	0.4299D 01		0.1514D 05
0.2500	-0.1658D 05	-0.1515D 00	-0.2276D 00	-0.1283D 02		0.1515D 05
0.3000	-0.1853D 05	-0.1769D 00	-0.7068D 00	-0.3953D 01		0.1769D 05
0.3500	-0.1899D 05	-0.2097D 00	-0.3921D 00	0.2222D 02		0.2097D 05
0.4000	-0.1349D 05	-0.1855D 00	0.1545D 01	0.4079D 02		0.1857D 05
0.4500	-0.1222D 05	-0.8753D-01	0.1613D 01	-0.4484D 02		0.8813D 04
0.5000	-0.1329D 05	-0.7893D-01	-0.1267D 01	-0.4593D 02		0.7934D 04
0.5500	-0.1273D 05	-0.1656D 00	-0.1405D 01	0.4721D 02		0.1658D 05
0.6000	-0.6283D 04	-0.1482D 00	0.2317D 01	0.7068D 02		0.1489D 05
0.6500	-0.1805D 03	0.1355D-01	0.3219D 01	-0.3571D 02		0.2445D 04
0.7000	0.6175D 04	0.1097D 00	0.5128D 00	-0.5122D 02		0.1098D 05
0.7500	0.7499D 04	0.8914D-01	-0.9722D 00	-0.7995D 01		0.8935D 04
0.8000	0.7440D 04	0.4848D-01	-0.3370D 00	0.2805D 02		0.4852D 04
0.8500	0.7232D 04	0.6256D-01	0.6943D 00	0.5368D 01		0.6272D 04
0.9000	0.7235D 04	0.9081D-01	0.2202D 00	-0.1985D 02		0.9082D 04
0.9500	0.7208D 04	0.7925D-01	-0.5383D 00	-0.3767D 01		0.7933D 04
1.0000	0.7024D 04	0.5756D-01	-0.1825D 00	0.1383D 02		0.5757D 04
1.0500	0.6983D 04	0.6478D-01	0.3795D 00	0.2651D 01		0.6482D 04
1.1000	0.4645D 04	0.7386D-01	-0.2659D 00	-0.2573D 02		0.7388D 04
1.1500	0.1661D 04	0.3055D-01	-0.1289D 01	-0.5790D 01		0.3162D 04
1.2000	-0.1439D 04	-0.2785D-01	-0.8484D 00	0.1882D 02		0.2836D 04
1.2500	-0.3826D 03	-0.3875D-01	0.5415D 00	0.3150D 02		0.3890D 04
1.3000	-0.5724D 02	0.1104D-01	0.1006D 01	-0.1797D 02		0.1274D 04
1.3500	0.1818D 02	0.2814D-01	-0.3791D 00	-0.2557D 02		0.2825D 04
1.4000	0.5702D 02	-0.8202D-02	-0.7332D 00	0.1341D 02		0.9422D 03
1.4500	-0.6482D 02	-0.2043D-01	0.2749D 00	0.1805D 02		0.2051D 04
1.5000	-0.3125D 03	0.6177D-02	0.5337D 00	-0.1268D 02		0.7039D 03

5-5- شکل توانی سری فوریه

رابطه سری فوریه (2-5) را می توان به صورت توانی نیز نوشت. برای این کار کافی است به جای توابع مثلثاتی با استفاده از روابط اولر مقادیر زیر را قرار داد:

1) Exponential

$$\sin n\bar{\omega} = \frac{e^{in\bar{\omega}} - e^{-in\bar{\omega}}}{2i} \quad (18-0)$$

$$\cos n\bar{\omega} = \frac{e^{in\bar{\omega}} + e^{-in\bar{\omega}}}{2}$$

پس از جایگذاری این مقادیر نتیجه خواهد شد:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\bar{\omega}t} \quad (19-0)$$

که

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-in\bar{\omega}t} dt \quad (20-0)$$

فاصله انتگرال گیری در رابطه (۲۰-۰) برای تابع دوره ای از صفر تا T انتخاب شده است. شکل توانی سری فوریه، رابطه (۱۹-۰)، نسبت به شکل مثلثاتی آن، رابطه (۲۰-۰)، ساده تر می باشد. از شکل توانی سری فوریه می توان به صورت مشابهی برای محاسبه پاسخ دینامیکی سیستمهای سازه ای استفاده نمود. اما یک روش موثرتر هم برای محاسبه ضرایب C_n و محاسبه پاسخ یک سیستم تک درجه که نیروی موثر بر آن با رابطه (۱۹-۰) بیان شده است وجود دارد. این روش که میتنی بر تحلیل فوریه در حالت نقطه ای^۱ می باشد در بخش بعدی توضیح داده شده است.

۶-۰- تحلیل فوریه نقطه ای

هنگامیکه تابع دوره ای $F(t)$ فقط در N فاصله زمانی مساوی $t_j = j \Delta t$ که $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ ($\Delta T = T/N$) را می توان به صورت تقریبی زیر نوشت:

$$a_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \cos n\bar{\omega} t_j \Delta t \quad (21-0)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \sin n\bar{\omega} t_j \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

که در این روابط ضریب ۲ که قبلاً در ضرایب سری فوریه وجود داشت حذف شده است، لذا در این حالت رابطه (۲۰-۰) به صورت زیر نوشته می شود:

$$F(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos n\bar{\omega}t + b_n \sin n\bar{\omega}t\} \quad (22-0)$$

با استفاده از اعداد مختلط روابط (21-0) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$C_n = a_n - ib_n \quad (23-0)$$

با کمک رابطه اول:

$$e^{-in\bar{\omega}t_j} = \cos n\bar{\omega}t_j - i \sin n\bar{\omega}t_j \quad (24-0)$$

و از جایگذاری روابط (21-0) در رابطه (23-0) خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-in\bar{\omega}t_j} \Delta t \quad (25-0)$$

از قراردادن $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$, $T = N\Delta t$, $t_j = j\Delta t$ در رابطه (25-0) داریم:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i(nj/N)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26-0)$$

این رابطه شکل تقریبی محاسبه ضرایب فوریه مختلط یعنی رابطه (20-0) می باشد. شکل نقطه ای ضرایب فوریه، رابطه (26-0)، نمی تواند اطلاعات کافی در مورد تابع پیوسته $F(t)$ ارائه نماید. اما مهم ترین مسأله این است که به ما اجازه می دهد مقدار دقیق کلیه اجزای سری $\{F(t_j)\}$ را به دست آوریم*. بر اساس این واقعیت و تبدیل فوریه نقطه ای سری $\{F(t_j), j=0, 1, 2, \dots, (N-1)\}$ به صورت:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i(nj/N)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (27-0)$$

و تبدیل فوریه نقطه ای معکوس[†] آن به صورت

$$F(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{-2\pi i(nj/N)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (28-0)$$

تعریف می شود. برای اینکه تقارن در رابطه تبدیلی (27-0) و (28-0) حفظ گردد دامنه ضرایب C_n به 0 تا $N-1$ محدود می گردد. توجه به این نکته حائز اهمیت است که در

* Newland, D.E., Random Vibration and Spectral Analysis.

Longman Group Limited, London, 1975, PP.114-116

1) Discrete Fourier transform

2) Inverse discrete Fourier transform

محاسبه جمع رابطه (۲۸-۰) با افزایش $n = N/2$ فرکانسهای مربوط افزایش می یابند. می توان نشان داد که برای $n > N/2$ فرکانسهای مربوط برابر با مقدار منفی فرکانسهای $N-n$ هستند. این واقعیت حداکثر تعداد جملات هارمونیک سری را به $N/2$ محدود می نماید. فرکانس مربوط به $n = N/2$ یعنی $\omega_N/2$ «فرکانس آشفتهگی^۱» یا «فرکانس نیکویست^۲» نامیده می شود.

بنابراین چنانچه در تابع، اجزای هارمونیک با فرکانس بیش از $\omega_N/2$ وجود داشته باشند این اجزاء آشفتهگی هایی را در اجزاء هارمونیک پایین تر سری به وجود می آورند. با توجه به این واقعیت مناسب است که تعداد نقاط N حداقل دو برابر شماره بزرگترین جزء هارمونیک موجود در تابع باشد.

فرکانس آشفتهگی ω_y برحسب رادیان بر ثانیه برابر است با:

$$\omega_y = \frac{2\pi N/2}{T} = \frac{2\pi N/2}{N \Delta t} = \frac{\pi}{\Delta t} \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) \quad (29-0)$$

و بر حسب دور بر ثانیه:

$$f_y = \frac{\omega_y}{2\pi} = \frac{1}{2 \Delta t} \text{ (cps)} \quad (30-0)$$

در مثال (۵-۰) این بخش اهمیت انتخاب نقاط N به تعداد کافی برای تابع بارگذاری جهت جلوگیری از جوابهای ناصحیح حاصل از آشفتهگی نشان داده شده است.

با نمایش یک تابع نقطه ای دلخواه به صورت تعداد محدودی جمع و محاسبه پاسخ نوسانگر تحت اثر هریک از اجزای هارمونیک تابع بارگذاری پاسخ به صورت یک تابع نقطه ای به دست خواهد آمد.

چنانچه واحد تابع بارگذاری $E_n = e^{i\omega_n t}$ معرفی شود و فقط جواب پایدار مورد نظر باشد خواهیم داشت:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = e^{i\omega_n t} \quad (31-0)$$

و جواب آن برابر است با:

$$y(t) = H(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (32-0)$$

اگر این رابطه را در رابطه (۳۱-۰) قرار دهیم $H(\omega_n)$ که «پاسخ فرکانسی مختلط^۳» نامیده می شود به دست خواهد آمد:

$$H(\omega_n) = \frac{1}{k - m\omega_n^2 + ic\omega_n} \quad (33-0)$$

- 1) Folding frequency 2) Nyquist frequency 3) Complex frequency response

از طرفی داشتیم $r_n = \frac{\omega_n}{\omega}$, $\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ ، لذا:

$$H(\omega_n) = \frac{1}{k(1-r_n^2 + 2ir_n\xi)}$$

بنابراین پاسخ $y_n(t_j)$ در زمان $t_j = j\Delta t$ به جزء هارمونیک نیرو با دامنه C_n برابر خواهد شد با:

$$y_n(t_j) = \frac{C_n e^{2\pi i(nj/N)}}{k(1-r_n^2 + 2ir_n\xi)} \quad (24-0)$$

و جواب کل حاصل از جزء هارمونیک از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$y(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{C_n e^{2\pi i(nj/N)}}{k(1-r_n^2 + 2ir_n\xi)} \quad (25-0)$$

در این رابطه C_n به صورت نقطه ای از رابطه (27-0) به دست می آید. برای محاسبه $y(t_j)$ از رابطه (25-0) باید به خاطر داشت که در رابطه (28-0) جزء نیروی بافرکانس مرتبه n م برابر با مقدار منفی جزء نیرو با مرتبه $N-n$ است. با استفاده از این حقیقت می توان در ضریب توانی رابطه (28-0) به جای n مقدار $(N-n)$ را قرار داد که نتیجه خواهد شد:

$$e^{-2\pi i[(N-n)j/N]} = e^{-2\pi ij} \cdot e^{2\pi i(nj/N)} \quad (26-0)$$

زیرا به ازای کلیه مقادیر j داریم $e^{2\pi ij} = \cos 2\pi j + i \sin 2\pi j = 1$. از روابط (26-0) و (28-0) مشاهده می شود که اجزاء هارمونیک نیروهای مربوط به فرکانسهای مرتبه n و

$(N-n)$ دارای یک مقدار هستند، لذا برای محاسبه $r_n = \frac{\omega_n}{\omega}$ داریم:

$$\omega_n = n\bar{\omega} \quad \text{برای} \quad n \leq N/2$$

$$\omega_n = -(N-n)\bar{\omega} \quad \text{برای} \quad n > N/2$$

مجدداً یادآوری می شود که فرکانس مربوط به $n = N/2$ بالاترین فرکانسی است که باید در سری فوریه نقطه ای در نظر گرفته شود. محاسبه جمع لازم برای تعیین پاسخ با استفاده از تبدیل فوریه نقطه ای بسیار ساده است. زیرا توابع توانی آن هارمونیک هستند و همان طور که در بخش بعدی نشان داده خواهد شد در محدوده ای از N^2 گسترش یافته اند.

۷-۵- تبدیل فوریه سریع

يك روش عددی مناسب که برای محاسبه پاسخ در حوزه فرکانس با استفاده از کامپیوتر موجود است، روش «تبدیل فوریه سریع» (FFT) نامیده می شود. برنامه مربوط یکی از زیر برنامه های برنامه کامپیوتری ۳ می باشد که نیست آن در ضمیمه I آمده است. پاسخ یک سیستم تک درجه به یک نیروی کلی هر حوزه فرکانس با استفاده از رابطه (۲۵-۰) و ضرایب آن از رابطه (۲۷-۰) به دست می آیند. دیده می شود که مقدار هر یک از روابط (۲۵-۰) یا (۲۷-۰) را می توان به صورت توانی زیرنوشت:

$$A(j) = \sum_{n=0}^{N-1} A^{(0)}(n) W_N^{jn} \quad (27-0)$$

که

$$W_N = e^{2\pi i/N} \quad (28-0)$$

بهترین حالت برای محاسبه این جمع هنگامی است که تعداد فواصل N که زمان تناوب T به آن تقسیم می شود، توانی از ۲ باشد یعنی:

$$N = 2^M \quad (29-0)$$

و یک عدد صحیح است. در این حالت اعداد صحیح z و n را می توان به صورت «دودویی» نوشت. برای نشان دادن این کار حالت ساده ای را در نظر می گیریم که در آن زمان تناوب بار به ۸ فاصله تقسیم شده باشد یعنی $N=8$ و $M=3$. در این حالت اندیسه های n, z را می توان به صورت دودویی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 2z_1 + 4z_2 \\ n &= n_0 + 2n_1 + 4n_2 \end{aligned} \quad (30-0)$$

و برای رابطه (۲۷-۰) خواهیم داشت:

$$A(j) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 A^{(0)}(n) W_8^{(j_0 + 2j_1 + 4j_2)(n_0 + 2n_1 + 4n_2)} \quad (31-0)$$

همچنین ضریب توانی رابطه به صورت زیر نوشته می شود:

$$W_8^{jn} = W_8^{8(j_1 n_2 + 2j_2 n_2 + j_2 n_1)} W_8^{4n_2 j_0} W_8^{2n_1 (2j_1 + j_0)} W_8^{n_0 (4j_2 + 2j_1 + j_0)}$$

اولین ضریب سمت راست رابطه برابر با یک است زیرا از رابطه (۲۸-۰) داریم:

$$W_8^{8I} = e^{2\pi i(8/8)I} = \cos 2\pi I + i \sin 2\pi I = 1$$

که $I = j_1 n_2 + 2j_2 n_2 + j_2 n_1$ یک عدد صحیح است. بنابراین کافی است فقط سه ضریب

-
- 1) Fast Fourier transform 2) binary

باقیمانده در جمع در نظر گرفت شوند. این جمع را می توان به شکل مناسبی در سه
گام متوالی محاسبه نمود. اولین گام عبارت است از:

$$A^{(1)}(j_0, n_1, n_0) = \sum_{n_2=0}^1 A^{(0)}(n_2, n_1, n_0) W_8^{4n_2 j_0}$$

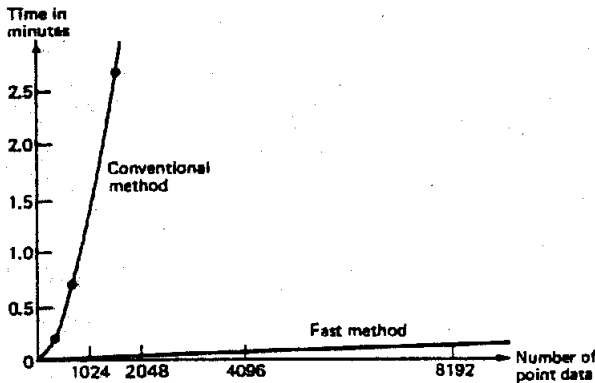
که $A^{(0)}(n_2, n_1, n_0) = A_{(n)}^{(0)}$ در رابطه (۲۷-۰) است. همچنین گام دوم برابر است با:

$$A^{(2)}(j_0, j_1, n_0) = \sum_{n_1=0}^1 A^{(1)}(j_0, n_1, n_0) W_8^{2n_1(2j_1 + j_0)}$$

و گام سوم (گام آخر برای $M=3$)

$$A^{(3)}(j_0, j_1, j_2) = \sum_{n_0=0}^1 A^{(2)}(j_0, j_1, n_0) W_8^{n_0(4j_2 + 2j_1 + j_0)}$$

نتیجه نهایی $A^{(3)}(j_0, j_1, j_2)$ برابر $A^{(j)}$ در رابطه (۲۷-۰) است. این فرایندی که برای
 $N=8$ نشان داده شد را می توان برای هر عدد صحیح $N=2^M$ تعمیم داد. از ویژگیهای
خاص این روش این است که مقدار به دست آمده در هر گام بلافاصله در گام بعدی مورد
استفاده قرار می گیرد و از حجم حافظه مورد نیاز می کاهد و دیگر اینکه اولین تابع
توانی موجود در جمع دارای مقدار واحد است که از حجم محاسبات می کاهد. کاهش
زمان محاسبات هنگامی که تعداد تقسیمات فواصل زمانی زیاد باشد کاملاً مشهود و
قابل ملاحظه است.



شکل (A-۵): زمان مورد نیاز برای تبدیل فوریه به روش معمولی و روش سریع*

* Cooley, J.W., Lewis, P.A.W., and Welch, P.D., IEEE Transactions and Education
Vol. E-12, No. 1, March 1969

مقایسه زمان لازم برای محاسبه کامپیوتری سری فوریه به روش معمولی و روش سریع در شکل (۸-۵) نشان داده شده است، به طوری که مشاهده می شود برای مقادیر بزرگ N ، زمان لازم برای انجام محاسبات به روش سریع بشدت کاهش می یابد.

۸-۵- برنامه ۳- پاسخ سیستم تک درجه درحوزه فرکانس (FREQRESP)

این برنامه برای محاسبه پاسخ يك سیستم تک درجه میرا در حوزه فرکانس است. نیروی موثر به صورت يك تابع نقطه ای داده می شود. خروجی برنامه شامل درجدول است:

(۱) يك جدول محتوی N ضریب فوریه مختلط بسط نیروی موثر و پاسخ سیستم،

(۲) جدول جابجایی پایدار سیستم بر حسب زمان

جدول دوم همچنین شامل تابع بارگذاری به صورت محاسبه شده از رابطه (۲۸-۵)

می باشد که می تواند به عنوان کنترل محاسبات حورد استفاده قرار گیرد. برنامه

به زبان فرترن نوشته شده است. لیست متغیرهای ورودی برنامه در جدول (۹-۵)

آورده شده است. داده های ورودی و فرمت آنها نیز در جدول (۱۰-۵) نشان داده شده

است. کار اصلی برنامه محاسبه ضرایب $A_n^{(0)}$ رابطه (۲۷-۵) و سپس اجرای زیر

برنامه FFT است که با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع جمع رابطه (۲۷-۵) را

محاسبه می نماید. این زیر برنامه سه بار از طریق برنامه اصلی اجرا می شود. يك

بار برای محاسبه ضرایب C_n در رابطه (۲۷-۵)، يك بار برای محاسبه جابه جایی Y

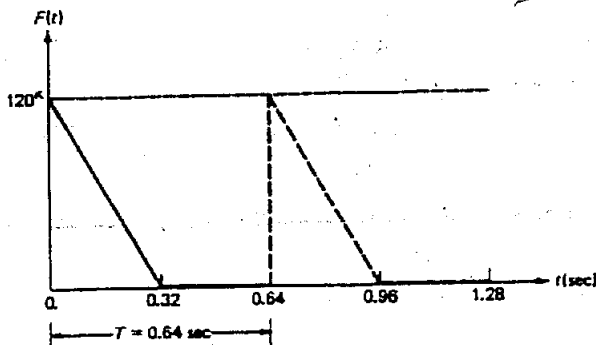
در رابطه (۲۵-۵) و يك بار هم برای محاسبه تابع نیروی در رابطه (۲۸-۵).

جدول (۹-۵): شرح متغیرهای ورودی برنامه ۳

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
M	M	تعداد $N = 2^M$
T	T	پریود
AK	k	ضریب سختی
C	c	ضریب میرایی
AM	m	جرم
NEQ		تعداد نقاط معرف نیرو
TC(I)	t_i	زمان در نقطه i
P(I)	F_i	نیروی در نقطه i

فرمت	متغیرها
(I10,4F10.2,2I5)	M T AK C AM INT NEQ
(8F10.2)	TC(1) P(1) TC(2) P(2) ... TC(NEQ) P(NEQ)

مثال (۴-۵): برای نشان دادن کاربرد برنامه ۳ برج آب مثال قبل را در نظر می گیریم که تحت اثر یک نیروی ضربه ای مثلثی مطابق شکل (۹-۵) قرار گرفته است. همان طور که در شکل نشان داده شده است پریود بارگذاری ۰.۶۴ ثانیه فرض شده است که از مدت زمان اثر ضربه بیشتر است. داده های ورودی این مثال در جدول (۱۱-۵) داده شده است. خروجی این مثال شامل ۸ ضربه فوریه. مختلط اول تابع بارگذاری و جابه جایی برج است. برای کنترل محاسبات مقدار نیروی بارگذاری به روش تبدیل فوریه معکوس محاسبه شده که نتایج آن در خروجی آمده است. خروجی کامپیوتر برای این مثال در جدول (۱۲-۵) نشان داده شده است.



شکل (۹-۵): تابع بارگذاری برای برج آب مثال (۴-۵)

جدول (۱۱-۵): داده های ورودی مثال (۴-۵)

FORCE FOURIER COEFFICIENTS

N	REAL	IMAG
0	24000.00	0.00
1	12994.09	-11588.22
2	4800.00	-4799.89
3	6205.89	-1988.22
4	4800.00	0.00
5	6205.88	1988.23
6	4800.00	4799.98
7	12994.08	11588.21

TIME	DISPL. REAL	DISPL. IMAG.	FORCE REAL	FORCE IMAG.
0.000	0.5652	-0.9596	119999.80	0.00
0.080	1.0465	0.6276	89999.81	-0.00
0.160	-0.0363	0.1845	59999.97	0.00
0.240	0.7095	0.1200	30000.08	0.02
0.320	0.0928	0.5015	0.09	0.00
0.400	0.1458	-0.2852	0.03	0.01
0.480	0.4208	0.0610	0.04	-0.00
0.560	0.0557	-0.2529	0.04	-0.02

مثال (۵-۵): یک سیستم تک درجه تاملیرا با مشخصات $k=200 \text{ lb/in}$ و $m=100 \frac{\text{lb sec}^2}{\text{in}}$ تحت اثر یک نیرو با تغییرات ،

$$P(t) = \sum_{n=1}^{16} 100 \cos 2\pi n t \quad (\text{الف})$$

قرار گرفته است. پاسخ پایدار سیستم را توسط برنامه ۲ برای $M=3, 4, 5, 6$ و $N=8, 16, 32, 64$ به دست آورید. از نتایج حاصله در مورد محدودیت‌های مربوط به فرکانس آشفتگی بحث نمایید.

فرکانس پایه تابع بارگذاری $\omega_1 = 2\pi$ و زمان تناوب آن $T = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1$ است.

چون بالاترین فرکانس در تابع بار $\omega_{16} = 16 \omega_1$ است. برای جلوگیری از آشفتگی تعداد نقاط معرف بارگذاری باید حداقل دو برابر بالاترین مرتبه فرکانس یعنی $N = 32$

عدد باشد.

به جای معرفی تابع بار به صورت نقطه ای می توان با اصلاح کوچکی در برنامه، تابع را به صورت یک رابطه تعریف نمود تا خود برنامه تابع را به صورت نقطه ای به دست آورد. نتایج کامپیوتری این مثال در دو جدول تنظیم شده اند: جدول (0-12) پاسخ جایجایی سیستم که در آن تمام 16 جمله هارمونیک بار در نظر گرفته شده اند و جدول (0-14) که در محاسبه جابه جایی سیستم تعداد کمتری از جملات تابع بار اثر داده شده اند.

جدول (0-12): پاسخ جابه جایی سیستم مثال 0-5 (تابع بار با 16 جمله هارمونیک)

Time (sec.)	Number of Sampling Points for the Excitation			
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$
0	0.8531	0.4201	-0.0416	-0.0416
0.125	0.9357	0.4698	-0.0153	-0.0153
0.250	1.022	0.5107	0.0052	0.0052
0.375	1.071	0.5358	0.0178	0.0178
0.500	1.089	0.5443	0.0221	0.0221
0.625	1.071	0.5358	0.0178	0.0178
0.750	1.022	0.5107	0.0052	0.0052
0.875	0.9357	0.4698	-0.0153	-0.0153
1.000	0.8531	0.4201	-0.0416	-0.0416

در این مثال که تابع بار دارای 16 جمله هارمونیک است از نتایج مندرج در جدول (0-12) حالت های $N=32$ و $N=64$ را می توان جواب های دقیق فرض نمود. از مقایسه نتایج مربوط به حالت های $N=8$ و $N=16$ مشاهده می شود که اگر N به اندازه کافی بزرگ انتخاب نشود، به طوری که تمام فرکانس های مربوط به اجزای هارمونیک تابع بار از فرکانس آشفتگی کوچکتر باشند، خطر حاصل شدن جواب های نادرست وجود دارد.

جدول (0-14) که نتایج را برای $N=8$ نشان می دهد نیز مؤید این نکته است که اگر تابع بار دارای اجزای هارمونیک با فرکانس بیشتر از فرکانس آشفتگی، در اینجا $N_p=4$ ، باشند نتایج نادرست خواهند بود.

در این مثال که تمام اجزای هارمونیک دارای دامنه یکسانی بودند اهمیت انتخاب عدد N برای جلوگیری از آشفتگی روشن گردید. در عمل معمولاً اجزای هارمونیک با فرکانس بالاتر دارای دامنه ای کمتر از اجزای هارمونیک با فرکانس پایین تر هستند. در این موارد میزان آشفتگی در جوابها به اندازه ای که در جدول (0-12) یا (0-14) نشان داده شده است نخواهد بود.

جدول (۱۴-۰): پاسخ جابه جایی، مثال ۰-۰
(تابع نیرو با $N=8$ نقطه)

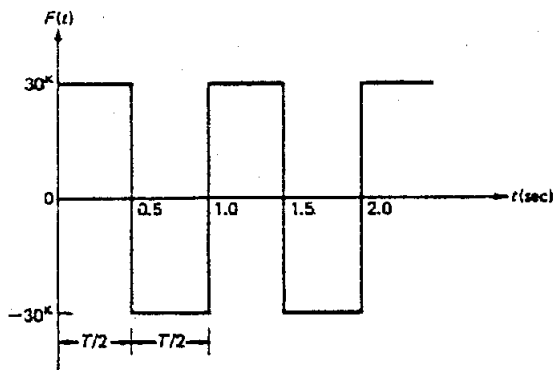
Time (sec.)	Number of Harmonic Components in the Excitation Force		
	$N = 4$	$N = 8$	$N = 16$
0	-0.0375	0.4246	0.8531
0.125	-0.0153	0.4679	0.9357
0.250	0.0048	0.5112	1.022
0.375	0.0184	0.5353	1.071
0.500	0.0215	0.5446	1.089
0.625	0.0184	0.5353	1.071
0.750	0.0048	0.5112	1.022
0.875	-0.0153	0.4679	0.9357
1.000	-0.0375	0.4246	0.8531

۹-۰- خلاصه

در حالت کلی هر تابع دوره ای را می توان به يك سری فوريه، رابطه (۱-۰) که همه جملات آن توابع سینوسی و کسینوسی با فرکانسی که مضربی از فرکانس اصلی باشند، بسط داد مضارب این جملات را می توان از انتگرال گیری حاصلضرب تابع در يك تابع سینوسی یا کسینوسی بر روی يك دوره به دست آورد، [رابطه (۲-۰)] پاسخ دینامیکی سیستم از مجموع پاسخ سیستم به هر يك از جملات سری فوريه به دست می آید. بسط دادن سری فوريه به توابع غیر دوره ای به انتگرالهایی منتهی می شود که تبدیل فوريه نامیده میشوند. شکل نقطه ای این تبدیل ها، روابط (۲۷-۰) و (۲۸-۰)، برای کاربردهای عددی مناسب هستند. از روش بسیار موثر تبدیل فوريه سریع (FFT) می توان تا ۹۹٪ در وقت کامپیوتر برای محاسبه ضرایب فوريه مختلط تابع بار و پاسخ سیستم صرفه جویی نمود.

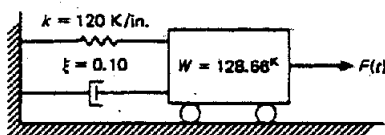
مسائل

۱-۰ سه جمله اول بسط سری فوريه تابع نیروی شکل ۱-۰ را به دست آورید.



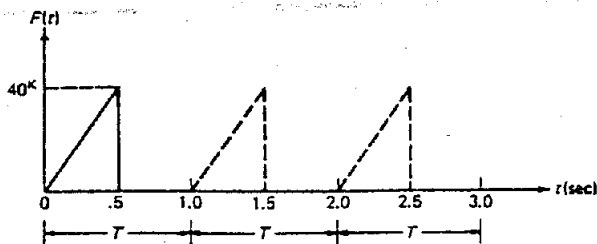
شکل م (۱-۰)

۲-۰- پاسخ پایدار سیستم جرم و فنر شکل م (۲-۰) را که تحت اثر تابع بار شکل م (۱-۰) قرار گرفته است محاسبه کنید.



شکل م (۲-۰)

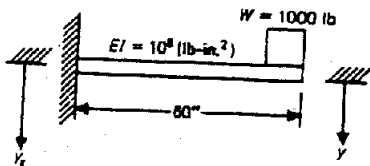
۳-۰- سیستم جرم و فنر شکل م (۲-۰) تحت اثر نیروی شکل م (۳-۰) قرار دارد چنانچه این نیرو یک تابع دوره ای با زمان تناوب $T=1 \text{ sec}$ باشد پاسخ پایدار سیستم را با استفاده از بسط فوریه $F(t)$ به دست آورید.



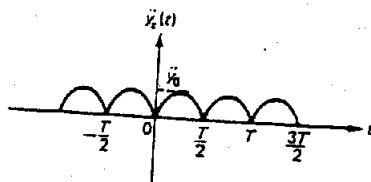
شکل م (۳-۰)

۴-۰- تیر طره ای شکل م (۴-۰) جرم متمرکزی را در انتهای آزادش تحمل می کند. تکیه

گاه این تیر دارای يك شتاب دوره ای نیم سینوسی با زمان تناوب $T=0.4 \text{ sec}$ و دامنه $\ddot{y}_0 = 180 \text{ in/sec}^2$ است (الف) بسط سری فوریه شتاب تکیه گاه، (ب) پاسخ پایدار سیستم با احتساب فقط سه جمله اول سری. (از جرم تیر و میرایی در سیستم صرف نظر ننمایید).



(ب)



(الف)

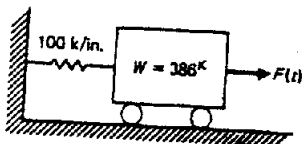
شکل م (۴-۵)

۵-۵- مساله (۴-۵) را با استفاده از برنامه ۲ حل کنید. برای حل از ۱۶ جمله فوریه استفاده کنید و $T=0.2$ و $dt=0.01$ اختیار کنید. جدول پاسخ زمانی را برای مدت زمان همادل يك دوره $T_{max} = 0.2 \text{ sec}$ چاپ کنید. مقادیر تابع یاز را در فواصل زمانی 0.025 sec وارد کنید.

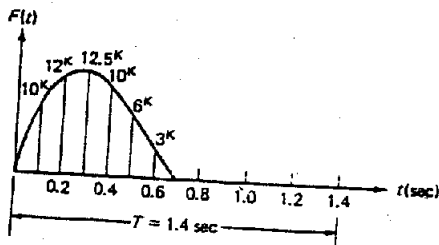
۶-۵- مساله (۴-۵) را در حوزه فرکانس و با استفاده از برنامه ۲ حل کنید. پریود $T = 0.2 \text{ sec}$ ، $N = 2^M$ ، $M = 4$ اختیار گیرند مقادیر نیروی موثر $F_{eff} = -m\ddot{y}_s(t)$ در فواصل زمانی 0.025 sec داده شوند.

۷-۵- مساله (۶-۵) را با ٪ 20 میرایی حل کنید.

۸-۵- تابع یاز شکل م (۸-۵، الف) در مدت زمان افزایش یافته $T = 1.4 \text{ sec}$ دوره ای فرض می شود. با استفاده از برنامه ۲، ده جمله اول سری فوریه و پاسخ پایدار سازه مدل شده شکل م (۸-۵، ب) را به دست آورید.



(ب)

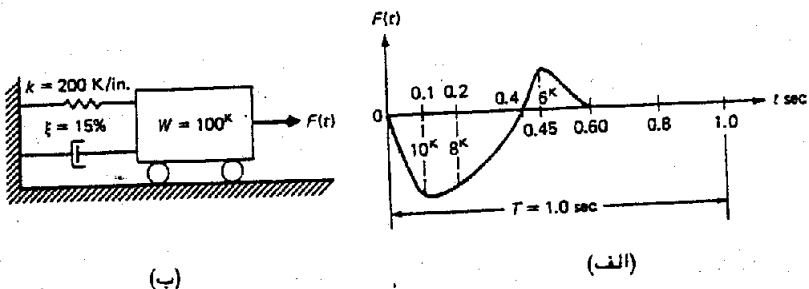


(الف)

شکل م (۸-۵)

۹-۰- مسأله (۸-۰) را در حوزة فرکانس با استفاده از برنامه ۳ حل کنید. $M=4$ و $N=2^M$ فرض شوند.

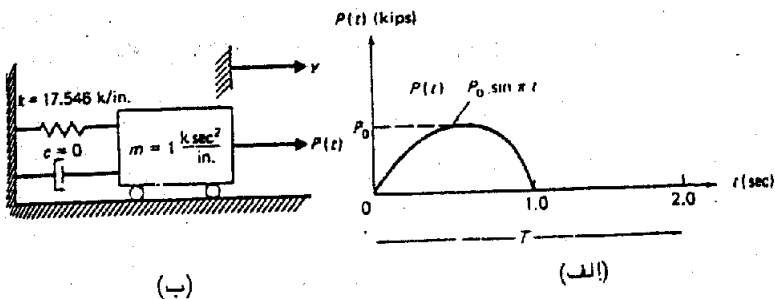
۱۰-۰- با استفاده از برنامه ۲ مطلوب است: (۱) بسط سری فوریه تابع شکل م (۱۰-۰)، (الف) و (۲) پاسخ پایدار سیستم جرم و فنر شکل م (۱۰-۰، ب) در حوزة فرکانس و با فرض ۱۵٪ میرایی.



شکل م (۱۰-۰)

۱۱-۰- مسأله (۱۰-۰) را با استفاده از برنامه ۲ در حوزة فرکانس، حل کنید، $M=4$ و $N=2^M$ فرض کردند.

۱۲-۰- سیستم دینامیکی شکل م (۱۲-۰) را با تابع بار آن با فرض $T=2$ sec در نظر بگیرید. مطلوب است: (الف) چهار جمله اول بسط سری فوریه تابع بار بر حسب P_0 ، (ب) چهار جمله اول بسط سری فوریه پاسخ.



شکل م (۱۲-۰)

۱۳-۰- مسأله (۱۲-۰) را با استفاده از برنامه ۲ حل کنید. جمله از سری فوریه را در نظر بگیرید و مقدار نیرو را در فواصل زمانی ۰.۱ ثانیه وارد کنید پاسخ را در فواصل زمانی $\Delta t = 0.0625$ sec چاپ کنید.

۱۴-۰- مسأله (۱۲-۰) را با فرض ۲۰٪ میرایی حل کنید.

۱۵-۵- مسأله (۱۲-۵) رادر حوزه فرکانس با استفاده از برنامه ۲ حل کنید، $M=5$ و $N=2^M$ فرض کردند.

۱۶-۵- مسأله (۱۲-۵) رادر حوزه فرکانس با فرض 20٪ میرایی حل کنید. $M=5$ و $N=2^M$ فرض شوند.

فصل ششم

مختصات عمومی^۱ و روش ریلی^۲

1) Generalized Coordinates

2) Rayleigh's Method

در فصلهای گذشته نحوه محاسبه پاسخ سازه هایی که به صورت يك نوسانگر
 داده مدل شده اند (یعنی سازه هایی که به صورت يك سیستم جرم و فنر میرا یا
 میرا تحلیل می شوند) تشریح شد. در این فصل در مورد سازه هایی بحث خواهیم
 رد که يك سیستم سازه ای متشکل از چند جسم صلب متصل به هم و یا يك سیستم با
 جرم و کشسانی گسترده را بتوان به صورت يك درجه آزادی مدل نمود. بحث را با
 اصل کار مجازی^۱ به عنوان راه حل دیگر استفاده از قانون حرکت نیوتن شروع
 می کنیم.

۱- اصل کار مجازی

به جای حل مستقیم معادلات حرکت، می توان از روش کار مجازی استفاده کرد.
 استفاده از این اصل به ویژه برای سازه های نسبتاً پیچیده ای که از چند جسم صلب
 متصل به هم ساخته شده اند مفید است. اصل کار مجازی برای يك سیستم در حال
 عادل به کار برده می شود. اما با کاربرد اصل دالامبر و دخالت دادن نیروهای اینرسی
 می توان يك سیستم دینامیکی را در حال تعادل دینامیکی فرض نمود و اصل
 کار مجازی را برای آن هم به کار برد.

اصل کار مجازی را می توان به این صورت بیان نمود: در يك سیستم در حال
 عادل، کار کل نیروها در يك جابه جایی فرضی (جابه جایی مجازی) که با شرایط
 کیه گاهی سازگار باشد صفر است. در حالت کلی معادلات حرکت را می توان با اعمال
 تابه جایی های مجازی مربوط به هر يك از درجات آزادی و مسای صفر قرار دادن کار
 نیروها به دست آورد.

رای نشان دادن کاربرد اصل کار مجازی در به دست آوردن معادله حرکت يك سیستم
 ك درجه، نوسانگر ساده میرای شکل (۱-۶، الف) را در نظر بگیرید. ترسیمه آزاد
 یکن نوسانگر در شکل (۱-۶، ب) نشان داده شده است با توجه به اینکه نیروی
 ینرسی در ترسیمه نیروها در نظر گرفته شده است، لذا سیستم در حال تعادل
 تعادل دینامیکی است. بنابراین اصل کار مجازی را می توان به کار برد. اگر يك
 تابه جایی مجازی δy ایجاد شود کل کار نیروهای شکل (۱-۶، ب) صفر است یعنی:

$$m\ddot{y}\delta y + c\dot{y}\delta y + ky\delta y - F(t)\delta y = 0$$

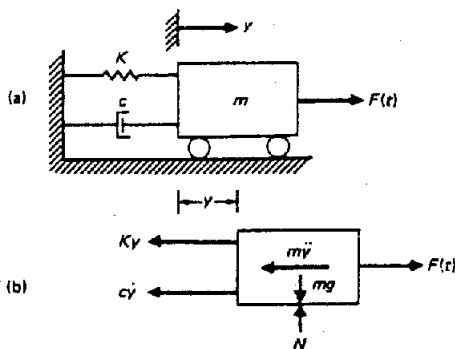
$$\{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - F(t)\}\delta y = 0$$

(۱-۶)

1) Principle of virtual work

چون مقدار اختیاری δy مخالف صفر است لذا داریم:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - F(t) = 0 \quad (2-6)$$



شکل (۱-۶): نوسانگر ساده میرا

معادله (۲-۶) همان معادله دیفرانسیل حرکت نوسانگر میرا است که به دست آمد.

۲-۶- سیستم يك درجه آزادی عمومی-جسم صلب

غالباً «موقعیت مکانی»^۲ يك سیستم دینامیکی توسط مختصاتی که نشان دهنده موقعیت انتقالی و زاویه ای اجزای آن هستند مشخص می شود. این مختصات لزوماً بطور مستقیم مربوط به چاب جایی ها نیستند، بلکه در حالت کلی کمیت‌هایی هستند که تعداد آنها برای مشخص نمودن موقعیت کلیه قسمت‌های سیستم کافی است. این مختصات معمولاً مختصات عمومی نامیده می شوند و تعداد آنها معادل تعداد درجات آزادی سیستم است.

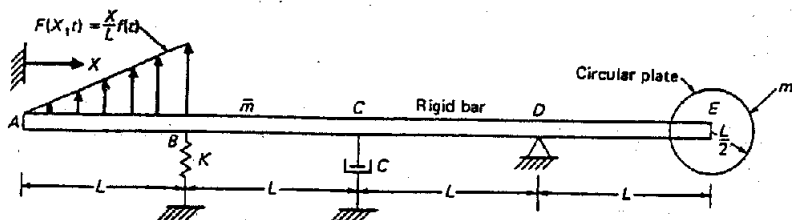
به عنوان مثال، سیستم «جسم صلب»^۳ شکل (۲-۶)، از يك میله صلب با جرم گسترده که در انتهای آن يك صفحه دایره ای قرار دارد تشکیل شده است. این میله بر روی يك فنر، يك میرا ساز و يك تکیه گاه بدون اصطکاک قرار دارد. تحریک دینامیکی سیستم توسط نیروی خطی $F(x, t)$ که بر قسمت AB از میله اثر می کند انجام میگیرد. هدف، به دست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت و تعیین مشخصات مدل این سیستم به صورت يك نوسانگر ساده است.

چون میله صلب است سیستم دارای يك درجه آزادی است و بنابراین پاسخ آن را

1) Generalized Single degree of Freedom

2) Configuration 3) Rigid - Body

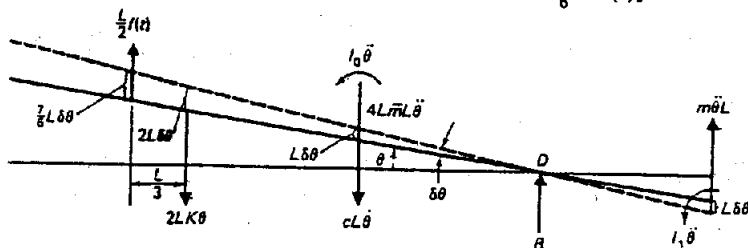
می توان از یک معادله حرکت به دست آورد. مختصه عمومی می توانست جابه جایی هر یک از نقاط میله مانند A, B, C, D و یا موقعیت زاویه ای آن باشد. موقعیت زاویه ای میله $\theta(t)$ به عنوان مختصه عمومی انتخاب شده است. کلیه نیروهای مؤثر بر سیستم از جمله نیروها و گشتاورهای اینرسی در ترسیمه جسم آزاد شکل (۳-۶) نشان داده شده اند. با فرض جابه جایی های کوچک، جابه جایی هر نقطه را می توان از حاصلضرب فاصله آن نقطه تا تکیه گاه D در جابه جایی زاویه ای $\theta = \theta(t)$ به دست آورد.



شکل (۳-۶): نمونه ای از سیستم یک درجه آزادی صلب

جابه جایی هایی که در نقاط اثر نیروهای شکل (۳-۶) در اثر یک جابه جایی مجازی $\delta\theta$ ایجاد می شوند در این شکل نشان داده شده اند. براساس اصل کار مجازی کل کار انجام شده توسط نیروها در این جابه جایی مجازی صفر است. بنابراین:

$$\delta\theta [I_0\ddot{\theta} + I_1\ddot{\theta} + 4L^3\bar{m}\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + 4kL^2\theta - \frac{7}{6}L^2f(t)] = 0$$



شکل (۳-۶): جابه جایی ها و نیروی حاصله در سیستم شکل (۳-۶)

چون مقدار دلخواه $\delta\theta$ مخالف صفر است نتیجه خواهد شد:

$$(I_0 + I_1 + 4L^3\bar{m} + mL^2)\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + 4kL^2\theta - \frac{7}{6}L^2f(t) = 0 \quad (۳-۶)$$

که

$$I_0 = \frac{1}{12} m(4\bar{m}L)(4L)^2 = \text{گشتاور اینرسی جرم میله}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \text{گشتاور اینرسی جرم صفحه ای دایره ای}$$

معادله بیفرانسیل، حرکت این سیستم، رابطه (۳-۶)، را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I^* \ddot{\theta} + C^* \dot{\theta} + K^* \theta = F^*(t) \quad (۴-۶)$$

در این رابطه I^* ، C^* ، K^* و $F^*(t)$ به ترتیب، اینرسی عمومی، میرایی عمومی، سختی عمومی و نیروی عمومی سیستم نامیده می شوند. این کمیتها در رابطه (۳-۶) به صورت ضرایب شتاب، میرایی، سختی و نیرو ظاهر شده اند و مقدار آنها برابر است با:

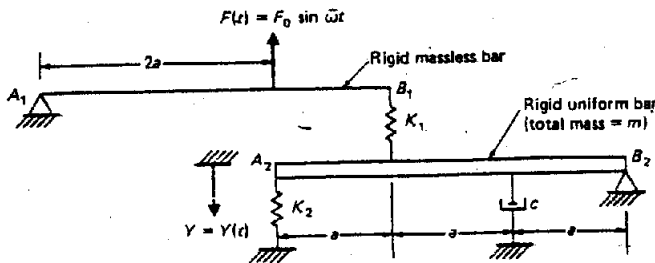
$$I^* = I_0 + I_1 + 4\bar{m}L^3 + mL^2$$

$$C^* = cL^2$$

$$K^* = 4kL^2$$

$$F^*(t) = \frac{7}{8} L^2 f(t)$$

مثال (۱-۶): برای سیستم شکل (۴-۶) خصوسیات فیزیکی M^* ، C^* ، K^* و نیروی عمومی $F^*(t)$ را به دست آورید. (جاب جایی $y(t)$ در نقطه A_2 به عنوان مختصه عمومی سیستم انتخاب شود).



شکل (۴-۶): سیستم مثال (۱-۶)

ترسیمه جسم آزاد سیستم شامل کلیه نیروهای موثر بر دو میله از جمله نیروها و گشتاورهای اینرسی در شکل (۵-۶) نشان داده شده است. مختصه عمومی سیستم $Y(t)$ و جاب جایی سایر نقاط باید بر حسب آن نوشت شود. مختصه $Y_1(t)$ که در شکل (۵-۶) نشان داده شده است به عنوان کمکی انتخاب می شود.

از جمع گشتاور نیروهای وارد بر میله $A_1 - B_1$ نسبت به A_1 و جمع گشتاور نیروهای وارد بر $A_2 - B_2$ نسبت به B_2 روابط زیر به دست می آید:

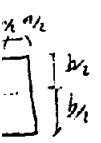
$$k_1 \left(\frac{2}{3} Y - Y_1 \right) 3a = 2a F_0 \sin \omega t \quad (۵-۶)$$

$$\frac{I_0}{3a} \ddot{Y} + \frac{3}{4} ma \ddot{Y} + \frac{a}{3} c \dot{Y} + k_1 \left(\frac{2}{3} Y - Y_1 \right) 2a + 3ak_2 Y = 0 \quad (6-6)$$

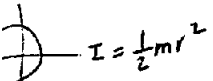
از محاسبه مقدار \ddot{Y}_1 از رابطه (6-6) و قرار دادن آن در رابطه (6-6) معادله دیفرانسیل حرکت سیستم بر حسب مختصه عمومی $Y(t)$ به دست می آید

$$M^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + K^* Y(t) = F^*(t)$$

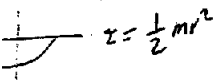
$$I_x = \frac{mL^2}{12}$$



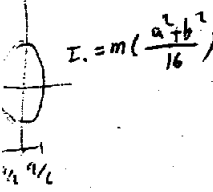
$$I_x = m \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right)$$



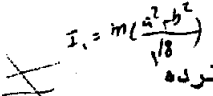
$$I = \frac{1}{2} mr^2$$



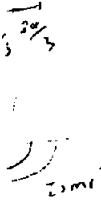
$$I = \frac{1}{2} mr^2$$



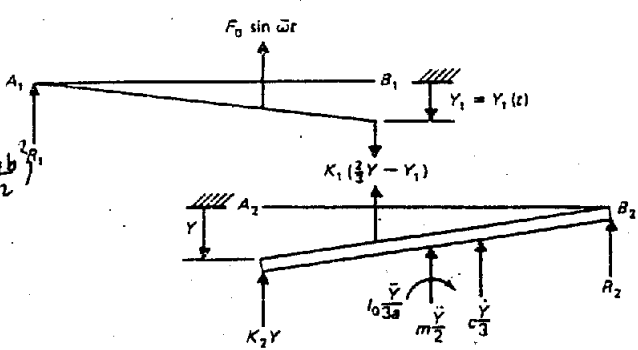
$$I_x = m \left(\frac{a^2 + b^2}{16} \right)$$



$$I_x = m \left(\frac{a^2 + b^2}{18} \right)$$



$$I_x = mr^2$$



شکل (6-6): جابجایی ها و نیروی حاصله برای مثال (1-6)

مشخصات عمومی سیستم در این رابطه برابرند با:

$$M^* = \frac{I_0}{3a^2} + \frac{3}{4} m$$

$$C^* = \frac{c}{3}$$

$$K^* = 3k_2$$

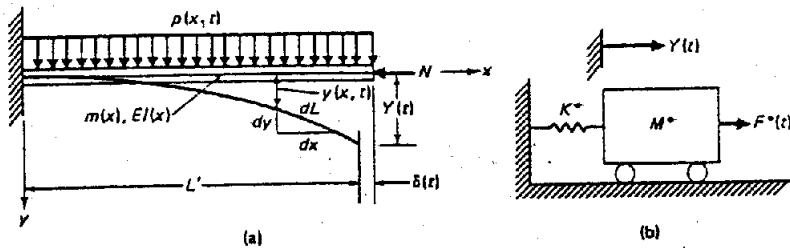
$$F^*(t) = -\frac{4}{3} F_0 \sin \omega t$$

6-3- سیستم یک درجه آزادی عمومی-کشسانی گسترده
 مثال ارائه شده در بخش قبل یک حالت ساده بود که سیستم دارای یک درجه آزادی بود، زیرا دو میله صلب توسط یک فنربه هم متصل شده بودند و یکی از میله ها بدون جرم بود، لذا فقط یک مختصه برای مشخص نمودن کامل حرکت کافی بود. اگر میله ها صلب نبودند و می توانستند خمیده شوند سیستم دارای بی نهایت درجه آزادی بود ولی با وجود این چنین سیستمی را می توان به صورت یک درجه آزادی

1- Distributed elasticity

تحلیل نمود، چنانچه فقط يك نوع تغییر شکل در حرکت وجود داشته باشد. در این صورت جابه جایی يك نقطه می تواند جابه جایی کل سیستم را مشخص نماید.

برای نشان دادن این روش در تحلیل تقریبی يك سیستم با بی نهایت درجه آزادی به صورت تك درجه، تیر طره شکل (۶-۶) را در نظر بگیرید. خصوصیات فیزیکی این سیستم، سختی خمشی آن $EI(x)$ و جرم واحد طول آن $m(x)$ هستند. فرض می شود این تیر تحت اثر يك نیروی گسترده دلخواه $p(x, t)$ و نیروی فشاری N قرار دارد.



شکل (۶-۶): سیستم پیوسته يك درجه آزادی

برای اینکه بتوان حرکت این سیستم را به طور تقریبی با يك مختصه بیان نمود لازم است فرض شود که تیر در حرکت فقط دارای يك نوع تغییر شکل مشخص می باشد. فرض کنید تابع $\phi(x)$ مشخص کننده تغییر شکل تیر به عنوان مختصه عمومی، و جابه جایی انتهای تیر باشد. بنابراین جابه جایی هر نقطه x روی تیر برابر است با:

$$y(x, t) = \phi(x) Y(t) \quad (۷-۶)$$

که $\phi(L)$ برابر با يك می باشد.

سیستم تك درجه معادل، شکل (۶-۶) ب، سیستمی است که در هر لحظه «انرژی جنبشی^۱»، «انرژی پتانسیل^۲»، «انرژی کرنشی^۳» و کار نیروهای خارجی آن با سیستم اصلی برابر باشند.

انرژی جنبشی تیر شکل (۶-۶) که با تغییر شکلی مطابق رابطه (۷-۶) ارتعاش می نماید برابر است با:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \{ \dot{\phi}(x) \dot{Y}(t) \}^2 dx \quad (۸-۶)$$

از مساری قرار دادن این انرژی جنبشی با انرژی جنبشی سیستم تك درجه معادل خواهیم داشت:

1) Kinetic Energy

2) Potential Energy

3) Strain Energy

$$M^* = \int_0^L m(x) \phi^2(x) dx \quad (۹-۶)$$

انرژی کرنشی خمشی تیر را می توان از کار لنگر خمشی $M(x)$ در جابه جایی زاویه ای $d\theta$ به دست آورد. جابه جایی زاویه ای $d\theta$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (۱۰-۶)$$

یا

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI} dx \quad (۱۱-۶)$$

از آنجایی که $\frac{dy}{dx} = \theta$ شیب منحنی تغییر شکل ارتجالی تیر است داریم:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} M(x) d\theta \quad (۱۲-۶)$$

از قراردادن مقدار $M(x)$ از رابطه (۱۰-۶) و مقدار $d\theta$ از رابطه (۱۱-۶) در این رابطه خواهیم داشت:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (۱۳-۶)$$

حال با مساوی قراردادن انرژی پتانسیل تیر با انرژی پتانسیل سیستم معادل و استفاده از رابطه (۷-۶) نتیجه خواهد شد:

$$\frac{1}{2} K^* Y(t)^2 = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) (\phi''(x) Y(t))^2 dx$$

یا

$$K^* = \int_0^L EI(x) (\phi''(x))^2 dx \quad (۱۴-۶)$$

$$\phi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{که}$$

نیروی عمومی $F^*(t)$ را می توان از مساوی قراردادن کار نیروهای خارجی در يك جابه جایی مجازی $\delta Y(t)$ با کار نیروی $F^*(t)$ در سیستم تك درجه به دست آورد. کار نیروی گسترده $p(x,t)$ در این جابه جایی مجازی برابر است با:

$$W = \int_0^L p(x,t) \delta y dx$$

از قراردادن $\delta y = \phi(x) \delta Y$ از رابطه (۷-۶) داریم:

$$W = \int_0^L p(x,t) \phi(x) \delta Y dx \quad (۱۵-۶)$$

کار نیروی عمومی $F^*(t)$ در سیستم تک درجه معادل در اثر جابه جایی مجازی δY برابر است با:

$$W^* = F^*(t) \delta Y \quad (۱۶-۶)$$

از مساوی قرار دادن روابط (۱۵-۶) و (۱۶-۶) و حذف مقدار غیر صفر δY داریم:

$$F^*(t) = \int_0^L p(x,t) \phi(x) dx \quad (۱۷-۶)$$

به همین ترتیب برای محاسبه ضریب میرایی عمومی سیستم، کار نیروهای میرایی حاصل از یک جابه جایی مجازی در سیستم فیزیکی را با کار نیروی میرایی در سیستم تک درجه معادل قرار می دهیم، یعنی:

$$C^* \dot{Y} \delta Y = \int_0^L c(x) \dot{y} \delta y dx$$

که $c(x)$ ضریب میرایی گسترده در واحد طول تیر است. از قرار دادن مقادیر $\delta y = \phi(x) \delta Y$ و $\dot{y} = \phi(x) \dot{Y}$ از رابطه (۷-۶) و حذف ضرایب مشترک خواهیم داشت:

$$C^* = \int_0^L c(x) [\phi(x)]^2 dx \quad (۱۸-۶)$$

که C^* همان ضریب میرایی عمومی است:

برای محاسبه انرژی پتانسیل نیروی محوری N که در مدت ارتعاش ثابت است باید مولفه افقی جابجایی $\delta(t)$ انتهای آزاد تیر را محاسبه نمود. برای این منظور جزء کوچکی از تیر بطول dL مطابق شکل (۶-۶، الف) را در نظر می گیریم. روابط زیر را برای این طول می توانیم بنویسیم:

$$dL = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

یا

$$dL = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (۱۹-۶)$$

از انتگرال گیری این مقدار روی تصویر افقی طول تیر (L') و بسط آن خواهیم داشت:

$$L = \int_0^{L'} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{L'} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \dots\right) dx$$

از احتساب فقط در جمله اول سری نتیجه خواهد شد:

$$L = L' + \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad (۲۰-۶)$$

$$\delta(t) = L - L' = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (21-6)$$

باید توجه داشت که روابط (21-6) و (20-6) تقریبی هستند زیرا در رابطه (20-6) فقط دو جمله اول سری در نظر گرفته شده اند و در رابطه (21-6) حد بالای انتگرال گیری به جای L' مقدار تقریبی آن یعنی L در نظر گرفته شده است.

حال سختی جدیدی را به نام «سختی هندسی» عمومی K_G^* تعریف می کنیم که برابر است با مقدار سختی سیستم تک درجه معادل به طوری که انرژی پتانسیل آن با انرژی پتانسیل نیروی محوری N برابر باشد یعنی:

$$\frac{1}{2} K_G^* Y(t)^2 = N \delta(t)$$

از قراردادن مقدار $\delta(t)$ از رابطه (21-6) و مشتق گیری $\frac{dy}{dx}$ از رابطه (7-6) داریم:

$$\frac{1}{2} K_G^* Y(t)^2 = \frac{1}{2} N \int_0^L \left\{ Y(t) \frac{d\phi}{dx} \right\}^2 dx$$

یا

$$K_G^* = N \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx \quad (22-6)$$

روابط (9-6)، (14-6)، (17-6)، (18-6) و (22-6) به ترتیب مقادیر جرم، سختی، نیرو، میرایی و سختی هندسی عمومی یک تیر با بار و خصوصیات گسترده است که به صورت یک نوسانگر ساده مدل شده است. هنگامی که یک نیروی محوری فشاری وجود داشته باشد انرژی پتانسیل و سختی تیر کاهش پیدا می نماید و بالعکس چنانچه نیروی محوری کششی باشد سختی خمشی تیر افزایش پیدا می کند. اما معمولاً سختی هندسی فقط برای نیروی محوری فشاری محاسبه می گردد. باین ترتیب سختی عمومی مرکب برابر است با:

$$K_c^* = K^* - K_G^* \quad (23-6)$$

نهایتاً معادله دیفرانسیل حرکت سیستم به شکل زیر نوشته می شود.

$$M^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + K_c^* Y(t) = F^*(t) \quad (24-6)$$

«نیروی کمانشی» بحرانی طبق تعریف مقدار نیروی محوری است که به ازای آن سختی مرکب صفر گردد یعنی:

$$K_c^* = K^* - K_G^* = 0$$

1) Geometric stiffness

2) Buckling load

از قرار دادن K^* و K_G^* از روابط (۶-۱۴) و (۶-۲۲) داریم:

$$\int_0^L EI \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx - N_{cr} \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx = 0$$

از حل این رابطه برای N_{cr} به دست خواهیم آورد:

$$N_{cr} = \frac{\int_0^L EI (d^2 \phi / dx^2)^2 dx}{\int_0^L (d\phi / dx)^2 dx} \quad (۶-۲۵)$$

به عنوان نمونه ای از جایگزینی یک سیستم تک درجه معادل با یک سیستم با جرم و سختی گسترده، برج آب شکل (۶-۷) را که دارای جرم گسترده \bar{m} و سختی EI در طول L و جرم متمرکز $M = \bar{m}L$ در بالای آن است در نظر بگیرید. این برج تحت اثر یک شتاب زلزله (t) و نیروی محوری حاصل از وزن پایه و مخزن قرار دارد. از میرایی در سیستم صرف نظر می شود. تغییر شکل برج در مدب حرکت به صورت زیر فرض میشود:

$$\phi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (۶-۲۶)$$

با انتخاب جاب جایی $Y(t)$ بالای برج به عنوان مختصه عمومی مطابق شکل (۶-۷) برای جاب جایی هر نقطه از برج داریم:

$$y(x,t) = Y(t) \phi(x) = Y(t) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (۶-۲۷)$$

جرم و سختی عمومی برج به ترتیب از روابط (۶-۹) و (۶-۱۴) به شکل زیر محاسبه میشوند.

$$M^* = \bar{m}L + \bar{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx \quad (۶-۲۸)$$

$$M^* = \frac{\bar{m}L}{2\pi} (5\pi - 8)$$

$$K^* = \int_0^L EI \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \cos^2 \frac{\pi x}{2L} dx$$

$$K^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (۶-۲۹)$$

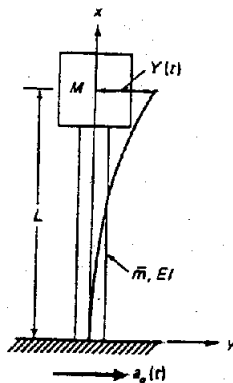
نیروی محوری در هر نقطه برابر است با وزن قسمت بالای آن نقطه و وزن متمرکز انتهای برج یعنی:

$$N(x) = \bar{m}Lg \left(2 - \frac{x}{L} \right) \quad (۶-۳۰)$$

که g شتاب ثقل است. چون در این حالت نیروی محوری تابعی از x است لذا باید در استفاده از رابطه (۶-۲۲) مقدار $N(x)$ را داخل انتگرال ببریم، لذا سختی هندسی K_G^*

برابر خواهد شد با:

$$K_G^* = \int_0^L \bar{m} L g \left(2 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2L} dx$$



شکل (۷-۶): برج آب با خصوصیات گسترده برای مثال (۷-۶)

پس از انتگرال گیری نتیجه خواهد شد:

$$K_G^* = \frac{\bar{m}g}{16} (3\pi^2 - 4) \quad (۳۱-۶)$$

لذا داریم:

$$K_c^* = K^* - K_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} - \frac{\bar{m}g}{16} (3\pi^2 - 4) \quad (۳۲-۶)$$

با قرار دادن $K_c^* = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\pi^4 EI}{32L^3} - \frac{\bar{m}g}{16} (3\pi^2 - 4) = 0$$

که مقدار بار بحرانی به دست می آید:

$$(\bar{m}g)_{cr} = \frac{\pi^4 EI}{2(3\pi^2 - 4)L^3} \quad (۳۳-۶)$$

معادله حرکت سیستم بر حسب جابه جایی نسبی $u = y(t) - y_g(t)$ برابر است با:

$$M^* \ddot{u} + K_c^* u = F_{eff}^*(t) \quad (۳۴-۶)$$

مقدار نیروی مؤثر برای جرم گسترده از رابطه (۱۷-۶) به دست می آید و برای جرم

متمرکز برابر است با $-\bar{m}L a_g(t)$ ، لذا

$$F_{eff}^*(t) = \int_0^L p_{eff}(x, t) \phi(x) dx - \bar{m}L a_g(t)$$

که $p_{\text{eff}}(x, t) = -\bar{m}a_g(t)$ نیروی گسترده موثر است.

$$F_{\text{eff}}^* = \int_0^L -\bar{m}a_g(t) \phi(x) dx - \bar{m}La_g(t)$$

با قرار دادن $\phi(x)$ از رابطه (۶-۲۶) و پس از انتگرال گیری نتیجه خواهد شد

$$F_{\text{eff}}^* = -\frac{2\bar{m}a_g(t)L}{\pi}(\pi - 1) \quad (۲۵-۶)$$

مثال (۶-۲): چنانچه برج آب شکل (۶-۷) تحت اثر یک شتاب تکیه گاهی سینوسی

$a_g(t) = 20 \sin 6.36t$ (in/sec²) قرار داشته باشد و مقادیر عددی آن بشرح زیر باشد

معادله حرکت انتهای برج نسبت به تکیه گاه را به دست آورید.

$$\bar{m} = 0.1 \text{ k} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}$$

برای هر واحد طول

$$EI = 1.2 \times 10^{13} \text{ k} \cdot \text{in}^2$$

$$L = 100 \text{ ft} = 1200 \text{ in}$$

$$\bar{\omega} = 6.36 \text{ rad/sec}$$

از رابطه (۶-۲۸) جرم عمومی برابر است با:

$$M^* = \frac{0.1 \times 1200}{2\pi} (5\pi - 8) = 147.21 \frac{\text{k} \cdot \text{sec}^2}{\text{in}}$$

و از رابطه (۶-۲۲) سختی عمومی به دست می آید:

$$K_c^* = \frac{\pi^4 \times 1.2 \times 10^{13}}{32 \times (1200)^3} - \frac{0.1 \times 386}{16} (3\pi^2 - 4) = 21077 \text{ k/in}$$

حال داریم:

$$\omega = \sqrt{K_c^* / M^*} = 11.96 \text{ rad/sec}$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{6.36}{11.96} = 0.532$$

نیروی موثر از رابطه (۰-۳۷) به دست می آید:

$$F_{\text{eff}}^* = \frac{2(0.1)(1200)(\pi - 1)}{\pi} 20.0 \sin 6.36t$$

$$F_{\text{eff}}^* = -3272 \sin 6.36t \text{ (kip)}$$

بنابراین پاسخ (با صرفنظر از میرایی) بر حسب حرکت نسبی عبارت است از:

$$u = \frac{F_{\text{eff}}^* / k^*}{1 - r^2} \sin \bar{\omega}t$$

(جواب)

$$= \frac{-3272 / 21077}{1 - (0.532)^2} \sin 6.36t$$

$$= -0.217 \sin 6.36t \text{ in}$$

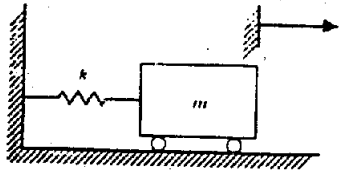
۴-۶- روش ریلی

در بخشهای گذشته این فصل روش دیگری برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت يك سیستم دینامیکی با استفاده از اصل کار مجازی توضیح داده شد. معادله حرکت يك سیستم دینامیکی نامیرا در ارتعاش آزاد را با استفاده از «اصل بقای انرژی» هم می توان به دست آورد. این اصل به این صورت بیان می شود: اگر در يك سیستم هیچ نیروی خارجی اثر نکند و به علت عدم وجود میرایی، هیچ گونه اتلاف انرژی هم وجود نداشته باشد آنگاه انرژی کل سیستم در ضمن حرکت ثابت باقی می ماند، لذا مشتق آن نسبت به زمان صفر خواهد شد.

برای نشان دادن کاربرد اصل بقای انرژی در به دست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت، سیستم جرم و فنر شکل (۸-۶) را در نظر بگیرید. انرژی کل سیستم در این حالت برابر است با مجموع انرژی جنبشی جرم m و انرژی پتانسیل فنر k . انرژی جنبشی T برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (۳۶-۶)$$

که \dot{y} سرعت لحظه ای جرم m است.



شکل (۸-۶): سیستم جرم و فنر در ارتعاش آزاد

مقدار نیروی فنر به ازای جابه جایی y مساوی است با ky و کار این نیرو در يك جابه جایی dy برابر است با $-ky dy$. علامت منفی در این رابطه به خاطر این است که نیروی ky در خلاف جهت جابه جایی dy است. اما طبق تعریف انرژی پتانسیل برابر است با مقدار کار این نیرو با علامت مخالف، لذا مقدار انرژی پتانسیل کل فنر برابر

1) Principle of Conservation of Energy

خواهد شد با:

$$V = \int_0^y ky dy = \frac{1}{2} ky^2 \quad (37-6)$$

از جمع این رابطه با رابطه (۳۶-۶) و ثابت قراردادن جمع آنها خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} ky^2 = C_0 \quad (38-6)$$

از مشتق گیری نسبت به زمان نتیجه خواهد شد:

$$m\ddot{y} + kyy = 0$$

چون \dot{y} نمی تواند برای کلیه مقادیر صفر باشد لذا

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (39-6)$$

این رابطه همان رابطه (۱۱-۱) فصل ۱ است که با استفاده از قانون حرکت نیوتن به دست آمد. در این حالت استفاده از روش انرژی مزیت خاصی بر روش تعادل ندارد. اما در عمل در بعضی موارد فقط فرکانس طبیعی مورد نیاز است. بار دیگر نوسانگر شکل (۸-۶) را در نظر بگیرید و فرض کنید که حرکت آن هارمونیک است. بر اساس این فرض معادله حرکت آن به شکل زیر خواهد بود:

$$y = C \sin(\omega t + \alpha) \quad (40-6)$$

به همین ترتیب داریم:

$$\dot{y} = \omega C \cos(\omega t + \alpha) \quad (41-6)$$

که C حداکثر جابه جایی و ωC حداکثر سرعت آن است. در حالتی که $(y=0)$ باشد نیروی فنر و انرژی پتانسیل صفر خواهد شد و کل انرژی سیستم انرژی جنبشی است. یعنی:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m (\omega C)^2 \quad (42-6)$$

در موقعیت حداکثر جابه جایی، سرعت صفر است و کل انرژی به صورت انرژی پتانسیل خواهد بود. لذا

$$V_{\max} = \frac{1}{2} kC^2 \quad (43-6)$$

مقدار انرژی سیستم بتدریج در طی یک چهارم دور از انرژی جنبشی خالص، رابطه (۴۲-۶)، به انرژی پتانسیل خالص، رابطه (۴۳-۶)، تبدیل می شود. چنانچه در این فاصله انرژی از سیستم کاسته و یا به آن اضافه نشود این دو مقدار باید برابر باشند. یعنی:

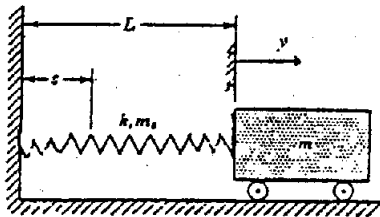
$$\frac{1}{2} m\omega^2 C^2 = \frac{1}{2} kC^2 \quad (44-6)$$

از حذف مقادیر مشترک داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (45-6)$$

ω همان فرکانس طبیعی سیستم است که قبلاً از حل معادله دیفرانسیل به دست آمده بود. این روش که فرکانس طبیعی از مساوی قرار دادن حداکثر انرژی جنبشی با حداکثر انرژی پتانسیل به دست می آید، روش ریلی نامیده می شود. مثال (۶-۳): در محاسبات قبلی برای سیستم جرم - فنر، جرم فنر آنقدر کوچک فرض می شد که از تأثیر آن بر فرکانس طبیعی صرفنظر می شد. مقدار واقعی فرکانس را می توان با تقریب بهتری با استفاده از روش ریلی به دست آورد. با فرض اینکه جابه جایی فنر در طول آن خطی است، جرم گسترده فنر را می توان به راحتی در محاسبات منظور نمود. در این مثال سیستم جرم و فنر شکل (۶-۹) را در نظر بگیرید که طول فنر آن L و جرم آن m_s است. جابه جایی یک نقطه دلخواه از فنر به فاصله s از تکیه گاه $u = \frac{sy}{L}$ فرض می شود. با فرض اینکه حرکت جرم m مطابق معادله (۶-۴) و هارمونیک است خواهیم داشت:

$$u = \frac{s}{L} y = \frac{s}{L} C \sin(\omega t + \alpha) \quad (46-6)$$



شکل (۶-۹): سیستم جرم - فنر با فنر جرم دار

حداکثر انرژی پتانسیل فنر مطابق رابطه (۶-۳۷) برابر است با:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k C^2 \quad (47-6)$$

جزء کوچکی از فنر به طول ds دارای جرم $m_s \frac{ds}{L}$ و حداکثر سرعت

$\dot{u}_{\max} = \omega u_{\max} = \omega s \frac{C}{L}$ است، لذا حداکثر انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با:

$$T_{\max} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{m_s}{L} ds \left(\omega \frac{s}{L} C \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 C^2 \quad (48-6)$$

پس از انتگرال گیری رابطه (۴۸-۶) و تساوی آن با رابطه (۴۷-۶) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} k C^2 = \frac{1}{2} \omega^2 C^2 (m + \frac{m_s}{3}) \quad (۴۹-۶)$$

فرکانس طبیعی از این رابطه به دست می آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}} \quad (۵۰-۶)$$

یا

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}} \quad (۵۱-۶)$$

کاربرد روش ریلی در این مورد نشان می دهد که مقدار دقیق تر فرکانس طبیعی از اضافه نمودن يك سوم جرم فنر به جرم اصلی به دست می آید. روش ریلی را می توان برای تعیین فرکانس طبیعی يك سیستم پیوسته به کار برد. برای این کار باید يك شکل ارتعاشی به عنوان مختصه عمومی انتخاب نمود. شکل ارتعاشی يك سازه

پیوسته و یا يك «سازه نقطه ای» چند درجه آزادی در حالت کلی می تواند انتخابی باشد. اما دقت جواب بستگی به این دارد که شکل ارتعاشی انتخاب شده چه مقدار به شکل واقعی سازه در هنگام ارتعاش منطبق است. پس از انتخاب شکل ارتعاشی، حداکثر انرژی جنبشی و حداکثر انرژی پتانسیل سازه را می توان از روابط مربوط مانند رابطه (۸-۶) و (۱۳-۶) به دست آورد. چنانچه شکل ارتعاشی انتخابی حاصل از بارهای استاتیکی خارجی باشد بهتر است به جای محاسبه انرژی پتانسیل کار نیروهای خارجی را محاسبه نمود، لذا در این حالت حداکثر انرژی جنبشی با کار نیروهای استاتیکی خارجی مساوی قرار داده می شود. مثالهای زیر کاربرد روش ریلی را برای سیستمهایی با خصوصیات گسترده نشان می دهد.

مثال (۴-۶): فرکانس ارتعاش طبیعی يك تیر طره را که يك جرم متمرکز در انتهایش قرار دارد با احتساب جرم تیر به دست آورید. جرم کل تیر m_0 ، طول آن L ، سختی خمشی آن EI و جرم متمرکز انتهای آن m است. [شکل (۱۰-۶)].

فرض می شود که شکل ارتعاشی تیر مطابق شکل (۱۰-۶، ب)، تغییر شکل حاصل از يك بار متمرکز F در انتهای تیر باشد. جابه جایی حاصل از این بار در هر نقطه بفاصله x از تکیه گاه برابر است با:

$$u = \frac{3y}{L^3} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (52-6)$$

که لجابه جایی انتهای تیر است. با قراردادن معادله هارمونیک $y = C \sin(\omega t + \alpha)$ در رابطه (52-6) خواهیم داشت:

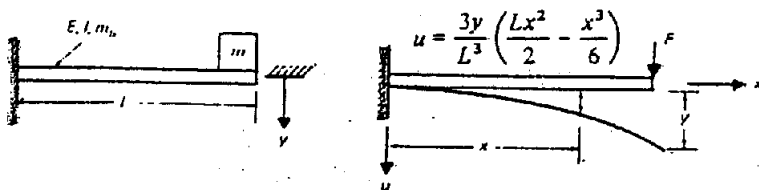
$$u = \frac{3x^2L - x^3}{2L^3} C \sin(\omega t + \alpha) \quad (53-6)$$

انرژی پتانسیل برآیر است با کار نیروی استاتیکی F . کار این نیرو برابر است با $\frac{1}{2} Fy$ و حداکثر مقدار آن، که برابر است حداکثر انرژی پتانسیل، برابر خواهد بود با:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} FC = \frac{3EI}{2L^3} C^2 \quad (54-6)$$

حداکثر جابه جایی انتهای تیر در اثر نیروی متمرکز F برابر است با:

$$y_{\max} = C = \frac{FL^3}{3EI} \quad (55-6)$$



شکل (۱-۶): الف) تیر طره با جرم یکنواخت و یک جرم متمرکز در انتهای تیر، ب) شکل ارتعاشی فرضی

انرژی جنبشی جرم گسترده تیر برابر است با:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{L} \right) \dot{u}^2 dx \quad (56-6)$$

با استفاده از رابطه (53-6) حداکثر انرژی جنبشی کل به دست خواهد آمد:

$$T_{\max} = \frac{m_b}{2L} \int_0^L \left(\frac{3x^2L - x^3}{2L^3} - \omega C \right)^2 dx + \frac{m}{2} \omega^2 C^2 \quad (57-6)$$

پس از انتگرال گیری و مساوی قرار دادن آن با رابطه (54-6) خواهیم داشت:

$$\frac{3EI}{2L^3} C^2 = \frac{1}{2} \omega^2 C^2 \left(m + \frac{33}{140} m_b \right) \quad (58-6)$$

و فرکانس طبیعی برابر خواهد شد با:

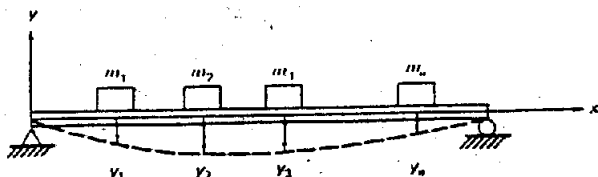
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{L^3 \left(m + \frac{33}{140} m_b \right)}} \quad (59-6)$$

دیده می شود که با اضافه نمودن جرم متمرکزی معادل $(\frac{33}{140} m_b)$ به انتهای تیر مقدار دقیق تری برای فرکانس طبیعی به دست خواهد آمد. در عمل کسر $(\frac{33}{140})$ به $\frac{1}{4}$ گرد می شود، لذا مقدار تقریبی فرکانس ارتعاش تیر طره برابر است با:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{L^3(m + \frac{m_b}{4})}} \quad (۶-۶)$$

مقادیر تقریبی روابط (۶-۶) و (۵۹-۶) حتی برای حالت $m=0$ نیز دقت خوبی دارند. در این حالت خطای این روابط نسبت به مقدار دقیق آن که در فصل ۲ ارائه خواهد شد $1/5\%$ است.

مثال (۵-۶): تیر ساده ای را مطابق شکل (۱۱-۶) در نظر بگیرید که چند جرم متمرکز بر روی آن قرار دارد. با صرف نظر از جرم تیر فرکانس طبیعی آن را به روش ریلی به دست آورید.



شکل (۱۱-۶): تیر ساده حامل چند جرم متمرکز

در روش ریلی باید یک شکل ارتعاشی برای تیر در نظر گرفت. یک شکل مناسب که نتایج خوبی می دهد تغییر شکلی است که در اثر نیروهای متناسب با جرم موجود در سیستم به وجود می آید. در این تیر ساده این نیروها، وزنهای $W_1 = m_1 g$ ، $W_2 = m_2 g$ ، ... و $W_N = m_N g$ هستند. جایه جایی استاتیک محل اثر این نیروها، به ترتیب، y_1, y_2, \dots, y_N می باشند. لذا انرژی پتانسیل سیستم برابر است با کار انجام شده توسط این نیروها یعنی:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} W_1 y_1 + \frac{1}{2} W_2 y_2 + \dots + \frac{1}{2} W_N y_N \quad (۶۱-۶)$$

در ارتعاش آزاد هارمونیک سیستم حداکثر سرعت این نقاط $\omega y_1, \omega y_2, \dots, \omega y_N$ هستند. بنابراین حداکثر انرژی جنبشی برابر است با:

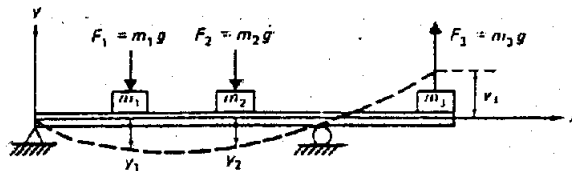
$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{W_1}{g} (\omega y_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{W_2}{g} (\omega y_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{W_N}{g} (\omega y_N)^2 \quad (62-6)$$

از معادل قرار دادن حداکثر انرژی پتانسیل، رابطه (61-6)، با حداکثر انرژی جنبشی، رابطه (62-6)، فرکانس طبیعی به دست می آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{g(W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_N y_N)}{W_1 y_1^2 + W_2 y_2^2 + \dots + W_N y_N^2}} \quad (63-6)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sum m_i y_i}{\sum m_i y_i^2}} \quad \text{یا}$$

که y_i جابه جایی در مختصه A و m_i جرم در این مختصه است. این روش را می توان برای نوع تیری به کار برد ولی باید توجه داشت که اینها نیروی وزن نیستند بلکه نیروهایی جانشین نیروهای داخلی هستند. به عنوان مثال، در تیر ساده کنسول دار شکل (6-12) نیرو در انتهای آزاد تیر باید متناسب با جرم m_3 ($F_3 = m_3 g$) ولی به سمت بالا باشد تا شکل ارتعاشی مناسبی را ایجاد نماید.



شکل (6-12): تیر کنسول دار ساده بدون جرم حامل چند جرم متمرکز

6-5- روش ریلی اصلاح شده¹

استفاده از مفهوم اعمال نیروهای داخلی به صورت نیروهای استاتیکی جهت

1) Improved Rayleigh's Method

تمیین شکل ارتعاشی در روش ریلی را می توان برای اصلاح این روش به کار برد. در روش ریلی اصلاح شده محاسبات با انتخاب يك شکل ارتعاشی فرضی شروع می شود. سپس حداکثر انرژی جنبشی و حداکثر انرژی پتانسیل محاسبه می شود. از مساوی قرار دادن این دو انرژی مقدار تقریبی فرکانس طبیعی به دست می آید. نیروهای اینرسی حاصل از شکل ارتعاشی اول روی سازه قرار داده می شود. تغییر شکل حاصل از این نیروها به عنوان شکل ارتعاشی جدید مورد استفاده قرار می گیرد. از مساوی قرار دادن حداکثر انرژی جنبشی و حداکثر انرژی پتانسیل این شکل مقدار دقیق تری برای فرکانس طبیعی حاصل می شود. این روش را می توان با يك مثال عددی بهتر نشان داد.

مثال (۶-۶): فرکانس طبیعی (اولین فرکانس یا فرکانس اصلی) قاب دو طبقه شکل (۶-۱۲) را به روش ریلی اصلاح شده به دست آورید. تیرها نسبت به ستونها خیلی صلب فرض می شوند. این فرض تعداد درجات آزادی را به دو درجه کاهش می دهد که این دو مختصه y_1 و y_2 در شکل نشان داده شده اند. جرم سازه که در کفها متمرکز شده، به ترتیب $k_1 = 30700 \text{ lb/in}$ و $k_2 = 44300 \text{ lb/in}$ هستند که در شکل نشان داده شده اند.

این سازه را می توان به صورت سیستم دو جرمی شکل (۶-۱۲) مدل نمود. برای استفاده از روش ریلی اصلاح شده فرض کنید يك شکل ارتعاشی انتخاب کنیم که در آن $y_1 = 1$ و $y_2 = 2$ به این ترتیب حداکثر انرژی پتانسیل برابر خواهد شد با:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} K_1 y_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (y_2 - y_1)^2$$

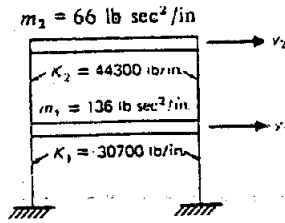
$$= \frac{1}{2} (30700) (1) + \frac{1}{2} (44300) (1)$$

$$= 37500 \text{ lb.in} \quad (\text{الف})$$

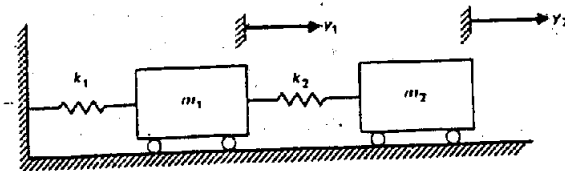
و حداکثر انرژی جنبشی برابر است با:

$$\begin{aligned}
 T_{\max} &= \frac{1}{2} m_1 (\omega y_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\omega y_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (136) \omega^2 + \frac{1}{2} (66) (2\omega)^2 \\
 &= 200 \omega^2
 \end{aligned}$$

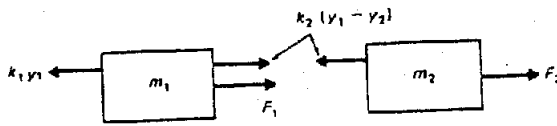
(ب)



شکل (۶-۱۳): قاب دو طبقه مثال (۶-۶)



(a)



(b)

شکل (۶-۱۳): مدل ریاضی سازه مثال (۶-۶)

از مسأله قرار دادن حداکثر انرژی پتانسیل و حداکثر انرژی جنبشی فرکانس طبیعی به دست می آید:

$$\omega = 13.69 \text{ rad / sec}$$

یا

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.18 \text{ cps}$$

فرکانس طبیعی محاسب شده $f = 2.18 \text{ cps}$ فقط تقریبی از مقدار دقیق است زیرا شکل ارتعاشی انتخاب شده دقت نداشته و فقط یک حدس اولیه بوده است. برای اصلاح فرکانس طبیعی محاسبه شده، نیروهای اینرسی حاصل از شکل ارتعاشی اول را بر روی مدل ریاضی شکل (۶-۱۴) قرار می دهیم:

$$F_1 = m_1 \omega^2 y_1 = (136) (13.69)^2 (1) = 25489$$

$$F_2 = m_2 \omega^2 y_2 = 66 (13.69)^2 (2) = 24739$$

از نوشتن معادلات تعادل برای ترسیمه آزاد شکل (۶-۱۴، ب) داریم:

$$30700 y_1 - 44300(y_2 - y_1) = 25489$$

$$44300(y_2 - y_1) = 24739$$

و از حل آنها:

$$y_1 = 1.64$$

$$y_2 = 2.19$$

و یا به شکل نسبی خواهیم داشت:

$$y_1 = 1.0$$

$$y_2 = 1.34$$

(ج)

با قراردادن این مقادیر y_1, y_2 در روابط (الف) و (ب) برای محاسبه حداکثر انرژی پتانسیل و حداکثر انرژی جنبشی نتیجه خواهد شد:

$$V_{\max} = 25293 \quad (\text{د})$$

$$T_{\max} = 160.03 \omega^2 \quad (\text{ه})$$

از تساوی T_{\max} و V_{\max} خواهیم داشت:

$$\omega = 12.57 \text{ rad / sec}$$

$$f = 2.00 \text{ cps}$$

یا

این مقدار محاسبه شده برای فرکانس طبیعی را می توان مجدداً اصلاح نمود. برای این کار باید نیروهای اینرسی جدیدی براساس آخرین مقدار فرکانس طبیعی محاسبه نمود و یک دور دیگر محاسبات قبلی را تکرار نمود. جدول (۱-۶) نتایج چهار دور محاسبات را نشان می دهد.

جدول (۱-۶): روش ریلی اصلاح شده برای مثال (۶-۶)

دور	شکل ارتعاش	نیروی اینرسی		فرکانس طبیعی
		F_1	F_2	
1	1:2.00	—	—	2.18 cps
2	1:1.34	25,489	24,739	2.00
3	1:1.32	21,489	18,725	1.88
4	1:1.27	19,091	12,230	1.88

مقدار دقیق فرکانس طبیعی و شکل ارتعاشی این سازه در فصل ۱۰، مثال (۱۰-۱)، به صورت یک سیستم دو درجه آزادی محاسبه شده است که نتایج آخرین دور محاسبات در جدول (۱-۶) به آنها بسیار نزدیک است.

۶-۶- دیوارهای برشی

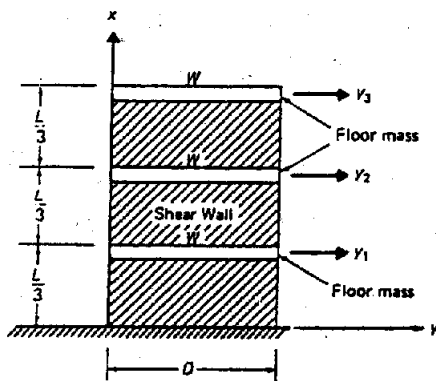
نیروهای جانبی افقی در ساختمانها مانند نیروهای زلزله و باد اغلب توسط اعضای بنام «دیوار برشی» تحمل می شوند. این امضاء عموماً به صورت دیوارهای بتنی مسلحی که در پی ساختمان گیردار شده اند طراحی می شوند. چنانچه نسبت

1) Shear wall

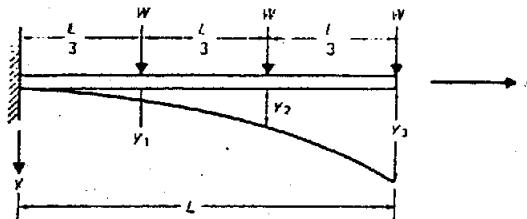
طول به عرض (L/D) دیوار بزرگتر از ۲ باشد رفتار دیوار برشی طره مانند یک عضو خمشی معمولی است. برای دیوارهای کوتاه ($L/D < 2$) رفتار برشی دیوار بیشتر است و در تحلیل باید تغییر شکلهای برشی و خمشی در نظر گرفته شوند.

هنگامی که سیستم کف یک ساختمان چند طبقه صلب باشد وزن یا جرم هر طبقه را می توان همانند ساختمان سه طبقه شکل (۶-۱۵)، به صورت یک بار متمرکز در نظر گرفت. پاسخ دینامیکی ساختمان تابعی از این جرمها و سختی دیوار برشی است. در عمل یک مدل ریاضی برای ساختمان در نظر گرفته می شود که در آن جرم و سختی در هر طبقه متمرکز می باشند. فرکانس اصلی (پایین ترین فرکانس طبیعی) این سازه را همان طور که در مثال (۶-۷) نشان داده شده است می توان به روش ریلی به دست آورد.

مثال (۶-۷) پریود طبیعی ساختمان سه طبقه شکل (۶-۱۵) را به روش ریلی به دست آورید. تمام طبقات دارای وزن یکسان W هستند. از وزن دیوار در مقایسه با وزن کفها صرف نظر کنید و فقط تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید. ($L/D \geq 2$)



شکل (۶-۱۵): مدل ریاضی دیوار برشی و کفهای صلب



شکل (۶-۱۶): شکل ارتعاشی فرضی مثال (۶-۷)

فرکانس طبیعی را می توان با استفاده از رابطه (۶-۶۲) که در زیر نوشته شده است محاسبه نمود:

$$\omega = \frac{g \sum_{i=1}^N W_i y_i}{\sum_{i=1}^N W_i y_i^2} \quad (\text{الف})$$

شکل ارتعاشی را مانند شکل (۶-۱۶)، تغییر شکل حاصل از وزنهای W روی یک تیر طره فرض می نماییم. جابه جایی های y_1, y_2, y_3 و با استفاده از روابط مقاومت مصالح عبارتند از:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{15}{162} \frac{WL^3}{EI} = 0.0926 \frac{WL^3}{EI} \\ y_2 &= \frac{49}{162} \frac{WL^3}{EI} = 0.3025 \frac{WL^3}{EI} \\ y_3 &= \frac{92}{162} \frac{WL^3}{EI} = 0.5679 \frac{WL^3}{EI} \end{aligned} \quad (\text{ب})$$

لذا داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{386(0.0926 + 0.3025 + 0.5679) EI}{(0.0926^2 + 0.3025^2 + 0.5679^2) WL^3}}$$

$$\omega = 29.66 \sqrt{\frac{EI}{WL^3}} \text{ rad / sec}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4.72 \sqrt{\frac{EI}{WL^3}} \quad \text{یا}$$

مثال (۸-۶) در مدل ریاضی ساختمان سه طبقه شکل (۶-۱۵) جابه جایی های تراز طبقات را با احتساب تغییر شکلهای خمشی و برشی به دست آورید.

جابجایی جانبی حاصل از تغییر شکل برشی Δy_s در يك قطعه تیر بطول Δx

برابر است با:

$$\Delta y_s = \frac{V \Delta x}{\alpha AG} \quad \text{(الف)}$$

که:

V ، نیروی برشی

A ، سطح مقطع

ضریب شکل α (برای مقطع مستطیلی $\alpha = 1.2$)

G ، مدول ارتجاعی برش

در طبقه اول $V=3W$. لذا جابه جایی برشی اولین طبقه از رابطه (الف) برابر

است با:

$$y_{s1} = \frac{3W(L/3)}{\alpha AG} = \frac{WL}{\alpha AG} \quad \text{(ب)}$$

جابه جایی برشی در تراز طبقه دوم برابر است با جابه جایی برشی طبقه اول بعلاوه

جابه جایی برشی نسبی طبقه دوم، یعنی:

$$y_{s2} = y_{s1} + \frac{2W(L/3)}{\alpha AG} = \frac{5}{3} \frac{WL}{\alpha AG} \quad \text{(ج)}$$

به همین ترتیب در تراز طبقه سوم داریم:

$$y_{s3} = y_{s2} + \frac{W(L/3)}{\alpha AG} = \frac{6WL}{3\alpha AG} \quad \text{(د)}$$

1) Shape Constant

و جابه جایی کلی از جمع جابه جایی خمشی در مثال (۷-۶) با جابه جایی های برشی بالا به دست می آید:

$$y_1 = \frac{15}{162} \cdot \frac{WL^3}{EI} = \frac{WL}{\alpha AG} \quad (۵)$$

$$y_2 = \frac{49}{162} \cdot \frac{WL^3}{EI} = \frac{5WL}{3\alpha AG}$$

$$y_3 = \frac{92}{162} \cdot \frac{WL^3}{EI} = \frac{6WL}{3\alpha AG}$$

اثر تغییر شکلیهای برشی در روابط بالا را بشکل زیر بهتر می توان مشاهده نمود.

برای يك دیوار برشی مستطیلی که در آن $E/G = 2.5$, $A = D \cdot t$ و $\alpha = 1.2 = \frac{tD^3}{12}$

(t = ضخامت دیوار)، خواهیم داشت:

جدول (۷-۶):

D/L	y_1^{**} (in)	y_2^{**} (in)	y_3^{**} (in)	ω^{***} (rad/sec)	f^{***} (cps)
0.00*	0.09259	0.30247	0.56790	29.66	4.72
0.50	0.13600	0.37483	0.65465	27.67	4.40
1.00	0.26620	0.59193	0.91489	23.30	3.71
1.50	0.48322	0.95376	1.34862	19.05	3.03
2.00	0.78704	1.46032	1.95585	15.71	2.50
2.50	1.17765	2.11161	2.73658	13.21	2.10
3.00	1.65509	2.90764	3.69079	11.33	1.80

$$y_1 = \frac{15}{162} \frac{WL^3}{EI} \left[1 + 1.875 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \right]$$

$$y_2 = \frac{49}{162} \frac{WL^3}{EI} \left[1 + 0.957 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \right] \quad (۶)$$

$$y_3 = \frac{92}{162} \frac{WL^3}{EI} \left[1 + 0.611 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \right]$$

در مثال بعدی اهمیت تغییر شکلهای برشی در محاسبه فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف D/L در یک جدول نشان داده شده است.
مثال (۶-۹): برای سازه مدل شده در شکل (۶-۱۵) اثر تغییر شکلهای برشی را در محاسبه فرکانس طبیعی مطالعه کنید.

برای این مطالعه مقادیر مختلفی را برای D/L (نسبت عرض به طول) دیوار بین ۰ و ۲ انتخاب می کنیم. جاب جایی های $0.7, 1.0, 1.3$ در تراز طبقات از روابط (ر) مثال (۶-۸) و فرکانس طبیعی از رابطه (۶-۶) به دست می آیند. محاسبات لازم در جدول (۶-۲) نشان داده شده است. از آخرین ستون این جدول دیده می شود که در این مثال برای حالتی که از اثر تغییر شکلهای برشی صرفنظر شود ($D/L=0$) فرکانس طبیعی $f=4.72$ cps است و برای دیوارهای کوتاه ($D/L>0.5$) اثر تغییر شکلهای برشی مهمتر می شود.

۶-۷- خلاصه

مفهوم مختصات عمومی ارائه شده در این فصل این امکان را می دهد که بتوان سیستمهای ساخته شده از اجسام صلب متصل به هم و اجسام ارتجاعي با خصوصیات پیوسته را به صورت یک درجه آزادی تحلیل کرد. این تحلیل هنگامی میسر است که بتوان موقعیت مکانی کل سیستم را با یک مختصه (مختصه عمومی) تعیین نمود. چنین سیستمی را می توان به صورت یک توسانگر ساده مدل نمود که چرم، سختی، میرایی و نیروی موثر و ازده بر آن با سیستم واقعی معادل هستند. از حل این مدل پاسخ بر حسب مختصه عمومی به دست می آید.
اصل کار مجازی که برای سیستمهای متعادل استاتیکی یا دینامیکی قابل استفاده است به عنوان یک روش قدرتمند جهت تعیین معادلات حرکت به کار می رود. براساس این اصل در یک سیستم متعادل کار انجام شده توسط کل نیروها در یک جاب جایی سازگار با شرایط تکیه گاهی صفر است.
روش ریلی برای محاسبه فرکانس طبیعی سیستمهای ارتعاشی بر اصل بقای

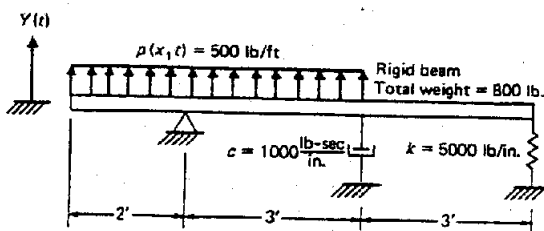
انرژی استوار است. برای این کار حداکثر انرژی جنبشی سیستم با حداکثر انرژی پتانسیل آن مساوی قرار داده می شود. برای استفاده از روش ریلی جهت محاسبه فرکانس طبیعی سیستمهای پیوسته و یا غیر پیوسته باید يك شکل ارتعاشی فرض نمود. این شکل اغلب جابه جایی حاصل از اثر نیروهای وزن در امتداد جابه جایی های مورد نظر انتخاب می شود. این روش به فرمول زیر برای محاسبه فرکانس طبیعی منجر می شود:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i y_i^2}}$$

که y_i جابه جایی در مختصه i و m_i جرم متمرکز در آن مختصه است. دیوارهای برشی در ساختمانها اعضایی هستند که برای تحمل نیروهای جانبی طراحی می شوند. برای دیوارهای کوتاه ($L/D \leq 2$) اثر تغییر شکلهای برشی قابل توجه است و باید در محاسبات به همراه تغییر شکلهای خمشی در نظر گرفته شوند.

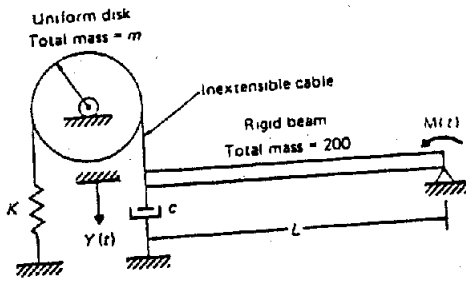
مسائل

۱-۶- برای سیستم شکل م (۱-۶) خصوصیات عمومی جرم M^* ، میرایی C^* ، سختی K^* و نیروی موثر $F^*(t)$ را به دست آورید. $Y(t)$ رابه عنوان مختصه عمومی انتخاب کنید.



شکل م (۱-۶)

۲-۶- مشخصات عمومی M^* ، C^* ، K^* و $F^*(t)$ را برای سازه شکل م (۲-۶) به دست آورید. $Y(t)$ را به عنوان مختصه عمومی سیستم انتخاب کنید.



شکل م (۲-۶)

۳-۶- کمیت‌های عمومی M^* ، C^* ، K^* و $F^*(t)$ را برای سازه شکل م (۳-۶) به دست آورید. $\theta(t)$ را به عنوان مختصه عمومی انتخاب کنید.

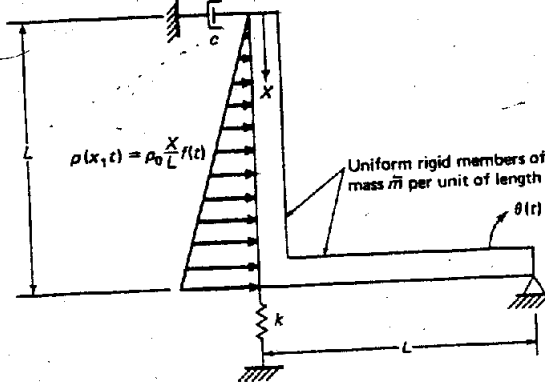
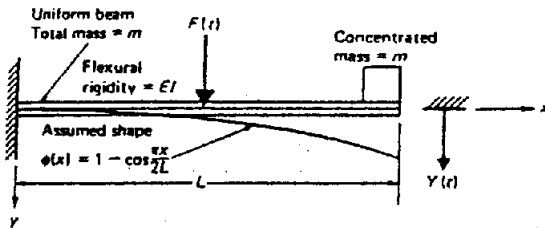


Fig. P6.3

شکل م (۳-۶)

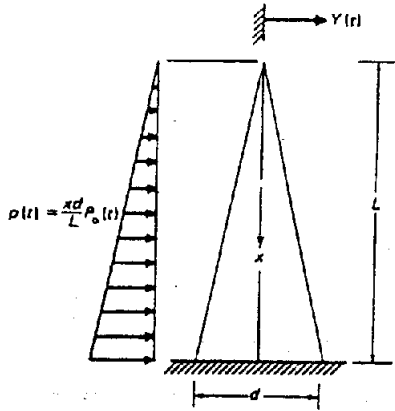
۴-۶- برای تیر ارتجاعي شکل م (۴-۶) کميتهای عمومی M^* ، C^* ، K^* و $F^*(t)$ را به دست آورید. از میرایی صرفنظر کنید. شکل ارتعاشی را $\phi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ فرض کنید و جابه جایی انتهای آزاد تیر $Y(t)$ را به عنوان مختصه عمومی انتخاب کنید. تیر تحت اثر نیروی $F(t) = F_0 f(t)$ در وسط دهانه قرار دارد.



شکل م (۴-۶)

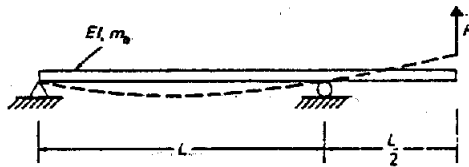
۵-۶- چنانچه يك نیروی کششی آلدن انتهای آزاد تیر م (۴-۶) اثر نماید سختی هندسی عمومی K_G^* را به دست آورید، سختی عمومی مرکب K_e^* را نیز تعیین کنید. ۶-۶- يك پایه مخروطی بتنی به قطر قاعده d و طول آلدن شکل م (۶-۶) نشان داده شده است. فشار دینامیکی باد $p_0(t)$ مطابق شکل بر پایه اثر می کند. مطلوب است تعیین کميتهای عمومی M^* ، C^* ، K^* و $F^*(t)$ (مدول ارتجاعي $E_c = 3 \times 10^6 \text{ psi}$ و وزن مخصوص بتن $\gamma = 150 \text{ lb/ft}^3$ است).

۷-۶- يك تیر ساده با جرم گسترده کل m_0 ، سختی خمشی EI و طول L يك جرم متمرکز را در وسط دهانه اش تحمل می کند. شکل ارتعاشی تیر را تغییر شکل حاصل از نیروی متمرکز در وسط دهانه فرض کنید. فرکانس طبیعی تیر را به روش ریلی به دست آورید.



شکل م (۶-۶)

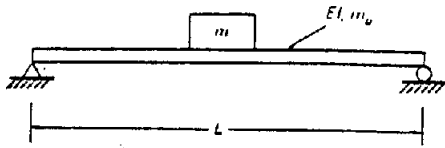
۸-۶- فرکانس طبیعی یک تیر ساده کنسول دار با جرم گسترده کل m_b ، سختی خمشی EI و ابعاد شکل م (۸-۶) را به دست آورید. شکل ارتعاشی تیر را تغییر شکل حاصل از یک بار متمرکز در انتهای تیر فرض کنید.



شکل م (۸-۶)

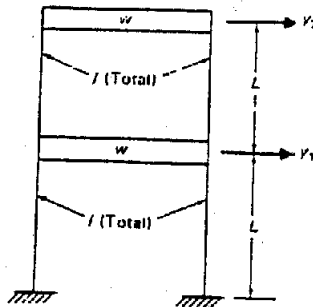
۹-۶- فرکانس طبیعی تیر ساده شکل م (۹-۶) را به روش ریلی به دست آورید. شکل ارتعاشی را $\phi(x) = Y \sin \frac{\pi x}{L}$ فرض کنید. جرم کل تیر $m_b = 10 \text{ lb. sec}^2 / \text{in}$ ، سختی

بر وسط دهانه تیر یک جرم متمرکز m قرار دارد. $EI = 10^8 \text{ lb.in}^2$ و طول آن $L = 100 \text{ in}$ است. بر وسط دهانه تیر یک جرم متمرکز $m = 5 \text{ lb.sec}^2/\text{in}$ قرار دارد.



شکل م (۱-۶)

۱-۶- یک ساختمان دو طبقه به صورت قاب شکل م (۱-۶) مدل شده است. با استفاده از روش ریلی فرکانس طبیعی قاب را به دست آورید. فقط تغییر شکل‌های خمشی را در نظر بگیرید، از جرم ستونها صرف‌نظر نمایید و کفها را صلب فرض کنید [راهنمایی: از رابطه (۶۳-۶) استفاده کنید].

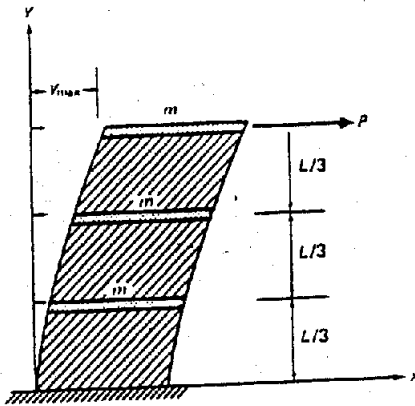


شکل م (۱-۶)

۱۱-۶- مساله (۱-۶) را برای حالتی که ستونها خیلی کوتاه بوده و فقط تغییر شکل‌های برشی موثر هستند حل کنید. (نیروی برشی یک ستون دو سرگیوه‌کار بطول L و سطح مقطع A بطور تقریبی از رابطه $V = \frac{AG\Delta}{L}$ به دست می‌آید که در آن G مدول

ارتجاعی برشی و Δ جابه جایی جانبی است).

۱۲-۶- فرکانس طبیعی دیوار برشی یک ساختمان سه طبقه با جرم متمرکز کفها مطابق شکل م (۱۲-۶) را به دست آورید. شکل ارتعاشی را تغییر شکل حاصل از یک نیروی متمرکز در انتهای دیوار فرض کنید، سختی خمشی دیوار $EI = 3 \times 10^{11} \text{ lb. in}^2$ ، طول آن $L = 36 \text{ ft}$ ، جرم کفها $m = 100 \text{ lb. sec}^2 / \text{in}$ و جرم واحد طول دیوار $m = 10 \text{ lb. sec}^2 / \text{in}$ است.



شکل م (۱۲-۶)

۱۳-۶- مسأله (۱۲-۶) را با این فرض که شکل ارتعاشی، تغییر شکل حاصل از یک بار گسترده در طول دیوار باشد حل کنید.

فصل هفتم

پاسخ غیرخطی^۱ سازه ها

1) Nonlinear

در بررسی رفتار دینامیکی سیستمهای تک درجه فرض بر این بود که نیروی فنر در مدل سازه متناسب با جابه جایی است. همچنین فرض می شد که در مکانیزم جذب انرژی میرایی لزج مقدار نیروی میرایی متناسب با سرعت است. همچنین جرم مدل همواره نسبت به زمان ثابت در نظر گرفته می شد. حاصل این فرضیات یک معادله دیفرانسیل حرکت خطی مرتبه دوم معمولی برای سیستم بود. یعنی:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \quad (1-7)$$

حل این معادله برای بعضی توابع بارگذاری مانند توابع هارمونیک نسبتاً ساده بود. همچنین این معادله با استفاده از انتگرال در در هامل برای هر نوع تابع بارگذاری قابل حل بود. بنابراین معادله (1-7) نشان دهنده رفتار دینامیکی سازه هایی است که به صورت تک درجه مدل شده اند. اما گاهی در عمل شرایطی وجود دارند که این معادله خطی نمی تواند بیانگر رفتار دینامیکی سازه باشد. در این موارد باید از مدلی استفاده نمود که در آن نیروی فنر متناسب با جابجایی و یا نیروی میرایی متناسب با سرعت باقی نمی ماند. در نتیجه معادله حرکت دیگر یک معادله خطی نخواهد بود و حل آن پیچیدگی بیشتری دارد و اغلب از روشهای مددی استفاده می شود.

1-7-1 مدل یک درجه آزادی غیرخطی

در شکل 1-7 (الف) مدل یک سازه تک درجه و در شکل 1-7 (ب) ترسیمه جسم آزاد آن نشان داده شده است. تعادل دینامیکی سیستم از مساوی صفر قرار دادن جمع نیروی اینرسی $F_I(t)$ ، نیروی میرایی $F_D(t)$ ، نیروی فنر $F_S(t)$ و نیروی خارجی $F(t)$ به دست می آید به طوریکه داریم:

$$F_I(t_i) + F_D(t_i) + F_S(t_i) = F(t_i) \quad (2-7)$$

پس از گذشت زمان Δt خواهیم داشت:

$$F_I(t_i + \Delta t) + F_D(t_i + \Delta t) + F_S(t_i + \Delta t) = F(t_i + \Delta t) \quad (3-7)$$

از تفاضل رابطه (2-7) از رابطه (3-7) معادله دیفرانسیل حرکت برحسب جزء نیروها

به دست می آید:

$$\Delta F_I + \Delta F_D + \Delta F_S = \Delta F \quad (4-7)$$

که داریم:

$$\Delta F_I = F_I(t_i + \Delta t) - F_I(t_i) \quad (5-7)$$

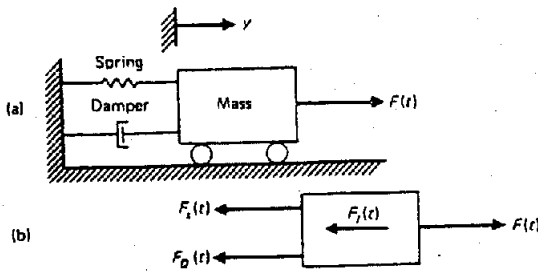
$$\Delta F_D = F_D(t_i + \Delta t) - F_D(t_i)$$

$$\Delta F_S = F_S(t_i + \Delta t) - F_S(t_i)$$

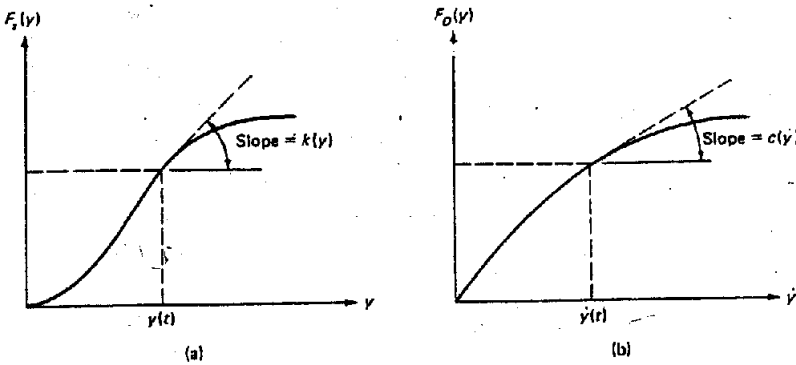
$$\Delta F = F(t_i + \Delta t) - F(t_i)$$

اگر فرض کنیم که نیروی میرایی تابعی از سرعت و نیروی فنر تابعی از

جابجایی مطابق شکل (2-7) باشند داریم: ۱۴۹



شکل (۱-۷): الف) مدل یک سیستم تک درجه (ب) ترسیمه جسم آزاد مدل



شکل (۲-۷): الف) سختی غیرخطی (ب) میرایی غیرخطی

$$\Delta F_s = m \Delta \ddot{y}_i \quad (۶-۷)$$

$$\Delta F_D = c_i \Delta \dot{y}_i$$

$$\Delta F_s = k_i \Delta y_i$$

از طرفی برای تغییرات جزئی جابجایی Δy_i ، سرعت $\Delta \dot{y}_i$ و شتاب $\Delta \ddot{y}_i$ داریم:

$$\Delta y_i = y(t_i + \Delta t) - y(t_i) \quad (۷-۷)$$

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}(t_i + \Delta t) - \dot{y}(t_i) \quad (۸-۷)$$

$$\Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}(t_i + \Delta t) - \ddot{y}(t_i) \quad (۹-۷)$$

ضریب k_i در رابطه (۶-۷) طبق تعریف مشتق نیروی فنر بازای جابجایی

است یعنی:

$$k_i = \left(\frac{dF_s}{dy} \right)_{y=y_i} \quad (۱۰-۷)$$

به همین ترتیب ضریب c_i در این رابطه طبق تعریف مشتق نیروی میرایی به ازای

سرعت است:

$$c_i = \left(\frac{dF_D}{dy} \right)_{y=y_i} \quad (11-7)$$

این دو ضریب که همان شیب منحنی های مربوط هستند، در شکل ۷-۲ نشان داده شده اند. از قراردادن رابطه (۷-۶) در رابطه (۷-۴) نتیجه خواهد شد:

$$m\Delta\ddot{y}_i + c_i\Delta\dot{y}_i + k_i\Delta y_i = \Delta F_i \quad (12-7)$$

ضرایب c_i و k_i مربوط به زمان t_i هستند و فرض می شود در فاصله زمانی Δt مقدار آنها ثابت باشد. با توجه به اینکه این دو ضریب در حالت کلی در این فاصله زمانی ثابت نیستند، لذا رابطه (۷-۱۲) یک رابطه تقریبی است.

۷-۲- حل معادله غیرخطی حرکت

در میان روشهای مختلفی که برای حل معادله غیرخطی حرکت وجود دارد روش انتگرال گیری گام به گام احتمالاً موثرترین روش است. در این روش پاسخ در فواصل زمانی Δt که معمولاً مساوی در نظر گرفته می شوند محاسبه می گردد. در ابتدای هر فاصله زمانی شرایط تعادل دینامیکی اعمال می شود. سپس پاسخ در فاصله زمانی Δt با فرض ثابت بودن ضرایب $k(y)$ و $c(\dot{y})$ محاسبه می گردد. غیرخطی بودن این ضرایب با محاسبه مجدد آنها در ابتدای هر فاصله زمانی در نظر گرفته می شود. پاسخ محاسبه شده در انتهای هر فاصله زمانی به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی در نظر گرفته می شود.

همانطور که گفته شد ضرایب سختی $k(y)$ و میرایی $c(\dot{y})$ در ابتدای هر فاصله زمانی محاسبه می شوند و تا ابتدای گام بعدی ثابت در نظر گرفته می شوند. بدین ترتیب رفتار غیرخطی سیستم به صورت تقریبی با یک سری خصوصیات خطی متوالی جانشین می گردد. بدیهی است که فرض ثابت بودن جرم ضرورتی ندارد زیرا در غیر این صورت هم فقط به صورت یک ضریب متغیر در رابطه ظاهر می شود. روشهای مختلفی برای انتگرال گیری گام به گام رابطه (۷-۱۲) وجود دارند. در

تا از معمول ترین آنها «روش شتاب ثابت»^۱ و «روش شتاب خطی»^۲ است. همانطور که از نام این دو روش معلوم است در روش اول فرض بر این است که شتاب در فاصله زمانی Δt ثابت است در حالی که در روش دوم فرض می شود که شتاب در این فاصله به صورت خطی تغییر می نماید. بدیهی است که روش شتاب ثابت نسبت به روش شتاب خطی بازای فاصله زمانی یکسان دقت کمتری دارد ولی محاسبات آن ساده تر است. در اینجا فقط روش شتاب خطی تشریح خواهد شد. با انجام محاسبات نسبتاً کمی در این روش نتایج بسیار خوبی حاصل شده است.

1) Constant Acceleration Method

2) Linear Acceleration Method

۳-۷- روش گام به گام با شتاب خطی

در روش شتاب خطی فرض می شود که شتاب در فاصله زمانی Δt تغییرات خطی دارد. در این روش خصوصیات سیستم یعنی c_i و k_i می توانند هر نوع شکل غیرخطی داشته باشند. یعنی اینکه ضرورتی ندارد نیروی فنر فقط تابعی از جابجایی و یا نیروی میرایی فقط تابعی از سرعت باشد. تنها محدودیت، محاسبه آنها در ابتدای هر گام و ثابت بودن آنها تا گام بعدی است. اگر $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ به ترتیب زمان در ابتدا و انتهای فاصله زمانی Δt باشند با فرض خطی بودن شتاب در این فاصله مطابق شکل (۲-۷) داریم:

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_i + \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\Delta t} (t - t_i) \quad (13-7)$$

که $\Delta \ddot{y}_i$ همان مقدار رابطه (۹-۷) است. با دو بار انتگرال گیری از این رابطه در محدوده t_i و t نتیجه خواهد شد.

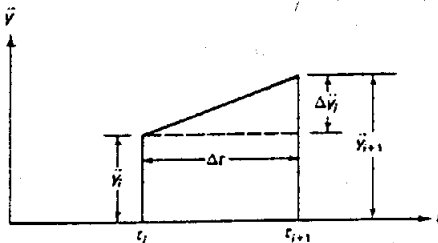
$$\dot{y}(t) = \dot{y}_i + \ddot{y}_i (t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\Delta t} (t - t_i)^2 \quad (14-7)$$

$$y(t) = y_i + \dot{y}_i (t - t_i) + \frac{1}{2} \ddot{y}_i (t - t_i)^2 + \frac{1}{6} \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\Delta t} (t - t_i)^3 \quad (15-7)$$

از محاسبه روابط (۱۴-۷) و (۱۵-۷) در زمان $t = t_i + \Delta t$ خواهیم داشت:

$$\Delta \dot{y}_i = \ddot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{y}_i \Delta t \quad (16-7)$$

$$\Delta y_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{y}_i \Delta t^3 \quad (17-7)$$



شکل (۲-۷): تغییرات فرضی خطی شتاب در فاصله زمانی

که Δy_i و $\Delta \dot{y}_i$ در روابط (۷-۷) و (۸-۷) داده شده اند. حال اگر Δy را بعنوان متغیر اصلی در تحلیل مورد استفاده قرار دهیم. مقدار $\Delta \ddot{y}_i$ را از رابطه (۱۷-۷) به دست می آوریم و در رابطه (۱۶-۷) قرار می دهیم:

$$\Delta \ddot{y}_i = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta y_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \quad (18-7)$$

$$\Delta \dot{y}_i = \frac{3}{\Delta t} \Delta y_i - 3\dot{y}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \quad (19-7)$$

از قرار دادن روابط (18-7) و (19-7) در رابطه (12-7) معادله حرکت به شکل رابطه (20-7) حاصل خواهد شد:

$$m \left\{ \frac{6}{\Delta t^2} \Delta y_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \right\} + c_i \left\{ \frac{3}{\Delta t} \Delta y_i - 3\dot{y}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \right\} + k_i \Delta y_i = \Delta F_i \quad (20-7)$$

از مرتب کردن این رابطه برای حل مجهول Δy_i خواهیم داشت:

$$\bar{k}_i \Delta y_i = \Delta \bar{F}_i \quad (21-7)$$

که در آن:

$$\bar{k}_i = k_i + \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c_i}{\Delta t} \quad (22-7)$$

$$\Delta \bar{F}_i = \Delta F_i + m \left\{ \frac{6}{\Delta t} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \right\} + c_i \left\{ 3\dot{y}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \right\} \quad (23-7)$$

نیده می شود که این رابطه معادل يك رابطه تعادل جزئی استاتیکی است و مقدار جابجایی جزئی Δy_i را می توان به راحتی از تقسیم نیروی جزئی $\Delta \bar{F}_i$ بر ضریب سختی معادل \bar{k}_i به دست آورد، یعنی:

$$\Delta y_i = \frac{\Delta \bar{F}_i}{\bar{k}_i} \quad (24-7)$$

برای به دست آوردن جابجایی $y_{i+1} = y(t_i + \Delta t)$ در زمان $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ این مقدار Δy_i را در رابطه (7-7) قرار می دهیم.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (25-7)$$

حال مقدار سرعت نویی Δy_i از رابطه (19-7) و سرعت در لحظه $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

از رابطه (8-7) به دست می آید:

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \quad (26-7)$$

نهایتاً شتاب \ddot{y}_{i+1} در انتهای هر گام را از نوشتن معادله ديفرانسیل حرکت،

رابطه (1-7)، برای زمان $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ به دست می آوریم:

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{1}{m} \{ F(t_{i+1}) - F_D(t_{i+1}) - F_S(t_{i+1}) \} \quad (27-7)$$

که مقدار نیروهای $F_D(t_{i+1})$ و $F_S(t_{i+1})$ برای t_{i+1} محاسبه می شوند.

پس از اینکه جابجایی، سرعت و شتاب در $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ محاسبه شدند این

عملیات مجدداً برای محاسبه آنها در $t_{i+2} = t_{i+1} + \Delta t$ تکرار می گردند و این روند تا

زمان مورد نظر ادامه پیدا می کند. باید توجه داشت که این روش عددی دارای دو

تقریب متمایز می باشد: ۱- فرض می شود تغییرات شتاب در فاصله زمانی Δt خطی

است، ۲- ضریب سختی و میرایی در ابتدای هر گام محاسبه می شوند و در طول گام

ثابت فرض می شوند. در حالت کلی این تقریب ها خطاهایی را ایجاد می نمایند که اگر

فاصله زمانی Δt کوچک باشد مقدار آنها تاچیز خواهد بود. اما این خطاها ممکن است در گامهای متوالی با یکدیگر جمع شوند. برای جلوگیری از انباشته شدن خطاها باید شرایط تعادل دینامیکی را در هر گام اعمال نمود. این کار با محاسبه شتاب هر گام از معادله تعادل دینامیکی آن گام انجام می شود. در هر حال مسأله انتخاب درست زمان Δt وجود دارد زیرا مانند هر روش عددی دیگر وقت روش انتگرال گیری گام به گام بستگی به فاصله زمانی Δt دارد. عواملی که باید در انتخاب Δt در نظر گرفته شوند: (۱) پریود طبیعی سازه، (۲) شدت تغییرات تابع بار و (۳) پیچیدگی شکل تغییرات توابع سختی و میرایی.

در حالت کلی دیده شده است که اگر این زمان بیش از یک دهم پریود طبیعی سازه نباشد جوابهایی با دقت کافی حاصل خواهد شد. براساس دومین عامل این زمان باید باندازه کافی کوچک باشد تا بتواند تغییرات بار را به خوبی نشان دهد. عامل سوم برای در نظر گرفتن تغییرات ناگهانی توابع سختی و میرایی است. بعنوان مثال هنگامی که رفتار مصالح را «ارتجاعی خمیری»^۱ فرض می کنیم سختی بطور ناگهانی از حالت خطی به حالت خمیری تبدیل می شود. در این حالت برای به دست آوردن دقت کافی باید در همسایگی این تغییر ناگهانی قواصل زمانی کوتاهتری را انتخاب نمود.

۴-۷- رفتار ارتجاعی خمیری

چنانچه در سازه ای که به صورت تک درجه مدل شده است (سیستم جرم و فنر) اجازه داده شود تا مرحله تغییر شکلهای خمیری بارگذاری شود تغییرات نیروی مقاوم فنر در آن به صورت شکل (۴-۷ الف) خواهد بود. تا مرحله ای از بارگذاری رفتار ارتجاعی خطی است ولی پس از آن تغییر شکلهای خمیری بوجود خواهند آمد. در هنگام باربرداری، رفتار مجدداً ارتجاعی خطی خواهد بود تا اینکه مجدداً در بارگذاری معکوس تغییر شکلهای خمیری فشاری بوجود خواهند آمد. اگر این دوره بارگذاری و باربرداری در سازه تکرار گردد در هر دور مقداری از انرژی توسط سازه جذب می گردد که مقدار آن متناسب با سطح زیر منحنی «حلقه پسماند»^۲ شکل (۴-۷، الف) است. این رفتار اغلب با فرض یک نقطه مشخص جاری شدن ساده می گردد بطوریکه جابجایی بعد از این نقطه بدون افزایش نیروی مقاوم فنر انجام می گیرد. این رفتار «ارتجاعی خمیری» نامیده می شود و نمودار نیرو جابجایی آن در شکل (۴-۷، ب) نشان داده شده است.

در یک سازه که به صورت تک درجه مدل شده است نوشتن رابطه تغییرات نیروی فنر

1) Elasto Plastic

2) Hysteresis Loop

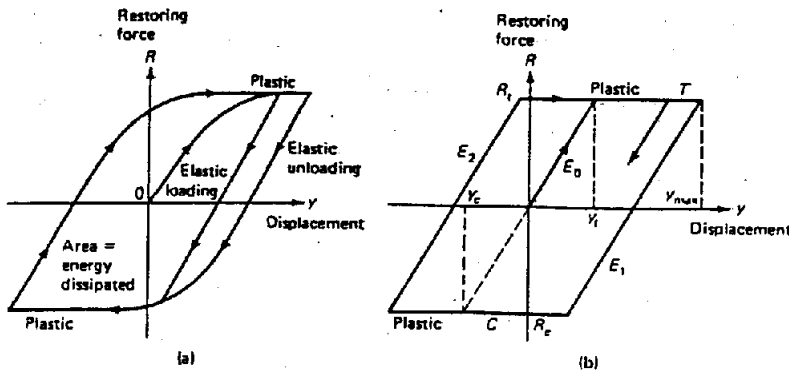
برای حالت ارتجاعی خمیری ساده است. این رابطه یستگی به مقدار نیروی فنر و صعودی ($\dot{y} > 0$) یا نزولی بودن جابه جایی ($\dot{y} < 0$) دارد. در شکل (۷-۴، ب) که یک دور رفتار ارتجاعی خمیری را نشان می دهد فرض می کنیم شرایط اولیه صفر ($y_0 = 0$ و $\dot{y}_0 = 0$) باشد. لذا هنگامی که سازه شروع به بارگذاری می شود رفتار آن ارتجاعی و در امتداد منحنی E_0 خواهد بود. جابجایی های y_c و y_t که در آنها رفتار خمیری در کشش و فشار شروع می شوند به ترتیب از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$y_c = R_c / k \quad (۷-۲۸)$$

$$y_t = R_t / k$$

که در آنها R_c ، R_t بترتیب نیروهای جاری شدن در کشش و فشار و k سختی ارتجاعی سازه است. تا زمانی که جابجایی y در محدوده زیر باشد سیستم برروی منحنی E_0 خواهد بود.

$$y_c < y < y_t \quad (۷-۲۹)$$



شکل (۷-۴): مدل های ارتجاعی خمیری سازه ها: الف) رفتار خمیری کلی ب) رفتار ارتجاعی خمیری

اگر جابجایی y به y_t برسد سیستم شروع به رفتار خمیری در کشش برروی منحنی T خواهد داشت و مادامی که ($\dot{y} > 0$) باشد برروی همین منحنی خواهد ماند. هنگامی که ($\dot{y} < 0$) گردد سیستم مجدداً به رفتار ارتجاعی در امتداد منحنی E_1 باز خواهد گشت که نقاط جاری شدن آن برابرند با:

$$y_t = y_{max} \quad (۷-۳۰)$$

$$y_c = y_{max} - (R_t - R_c) / k$$

که حداکثر جابجایی در امتداد منحنی T به ازای $\dot{y} = 0$ است.

بر روی این منحنی زمانی که y به y_c برسد رفتار خمیری در فشار بر روی منحنی C شروع خواهد شد و مادامی که $(\dot{y} < 0)$ است ادامه خواهد داشت. هنگامی که $(\dot{y} > 0)$ گردد سیستم مجدداً به رفتار ارتجاعي باز خواهد گشت و نقاط جاری شدن آن در این حالت عبارتند از:

$$y_c = y_{\min} \quad (31-7)$$

$$y_t = y_{\min} + (R_t - R_c) / k$$

که در آنها y_{\min} حداقل جابجایی بر روی منحنی C به ازای $\dot{y} = 0$ است. برای کلیه قسمتهایی از منحنی مانند E_0, E_1, E_2, \dots در شکل (۷-۴، ب) که سیستم بر روی آنها ارتجاعي عمل خواهد نمود شرایطی مشابه رابطه (۷-۲۹) وجود دارد.

حال می خواهیم مقدار نیروی فنر را برای قسمتهای مختلف دور ارتجاعي - خمیری به دست آوریم. در قسمتهای ارتجاعي منحنی (E_0, E_1, E_2, \dots) این نیرو و برابر است با:

$$R = R_t - (y_t - y) / k \quad (32-7)$$

برای حالت خمیری در کشش داریم:

$$R = R_t \quad (33-7)$$

و حالت خمیری در فشار نیز:

$$R = R_c \quad (34-7)$$

الگوریتم روش گام به گام یا شتاب خطی برای يك سیستم تك درجه با رفتار ارتجاعي خمیری در بخش بعد شرح داده شده است.

۷-۵- الگوریتم روش گام به گام برای سیستم تک درجه ارتجاعي خمیری

مقدمات و ورود داده ها

(۱) خواندن مقادیر R_c, R_t, c, m, k و لیست مقادیر F_i به ازای t_i

(۲) اعمال شرایط اولیه $y_0 = 0$ و $\dot{y}_0 = 0$

(۳) محاسبه شتاب اولیه

$$\ddot{y}_0 = \frac{F(t=0)}{m} \quad (35-7)$$

(۴) انتخاب گام زمانی Δt و ضرایب ثابت: $a_1 = \frac{3}{\Delta t}, a_2 = \frac{6}{\Delta t}, a_3 = \frac{\Delta t}{2}, a_4 = \frac{6}{\Delta t^2}$

(۵) محاسبه نقاط جاری شدن اولیه:

$$y_t = R_t / k \quad (36-7)$$

$$y_c = R_c / k$$

برای هر گام زمانی:

(۱) کنترل اینکه آیا سیستم در حالت ارتجاعي یا خمیری قبلی باقی مانده یا

اینکه وارد مرحله جدیدی می شود. برای این کار از کدهای زیر استفاده می شود:

$$\text{KEY}=0 \quad (\text{رفتار ارتجاعی}) \quad (27-7)$$

$$\text{KEY}=-1 \quad (\text{رفتار خمیری در فشار})$$

$$\text{KEY}=1 \quad (\text{رفتار خمیری در کشش})$$

(2) محاسبه جابجایی y و سرعت \dot{y} در انتهای گام زمانی و محاسبه مقدار KEY

براساس شرایط زیر:

(الف) هنگامی که سیستم در ابتدای گام زمانی ارتجاعی عمل می کند داریم:

$$y_c < y < y_t \quad \text{KEY}=0$$

$$y > y_t \quad \text{KEY}=1$$

$$y < y_c \quad \text{KEY}=-1$$

(ب) هنگامی که سیستم در ابتدای گام زمانی رفتار خمیری نوکش داشته باشد:

$$\dot{y} > 0 \quad \text{KEY}=1$$

$$\dot{y} < 0 \quad \text{KEY}=0$$

(ج) وقتی سیستم در ابتدای گام زمانی رفتار خمیری در فشار داشته باشد:

$$\dot{y} < 0 \quad \text{KEY}=-1$$

$$\dot{y} > 0 \quad \text{KEY}=0$$

(3) محاسبه سختی موثر:

$$\bar{k}_i = k_p + a_4 m + a_1 c_i \quad (28-7)$$

که

$$k_p = k \quad (\text{KEY}=0) \quad \text{برای رفتار ارتجاعی}$$

$$k_p = 0 \quad (\text{KEY}=1 \text{ or } -1) \quad \text{برای رفتار خمیری} \quad (29-7)$$

(4) محاسبه جزء نیروی موثر:

$$\bar{\Delta F}_i = \Delta F_i + (a_2 m + 3c_i) \dot{y}_i + (3m + a_3 c_i) \ddot{y}_i \quad (30-7)$$

(5) محاسبه مقدار جابجایی جزئی:

$$\Delta y_i = \bar{\Delta F}_i / \bar{k}_i \quad (31-7)$$

(6) محاسبه مقدار سرعت جزئی:

$$\Delta \dot{y}_i = a_1 \Delta y_i - 3\dot{y}_i - a_3 \ddot{y}_i \quad (32-7)$$

(7) محاسبه جابجایی و سرعت در انتهای فاصله زمانی:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (33-7)$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \quad (34-7)$$

(8) محاسبه شتاب در انتهای فاصله زمانی از رابطه تعامل:

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{1}{m} [F(t_{i+1}) - c_{i+1} \dot{y}_{i+1} - R] \quad (35-7)$$

KEY=0 اگر $R = R_t - (y_t - y_{t+1})k$
 KEY=1 اگر $R = R_t$ (۴۶-۷)
 KEY=-1 اگر $R = R_c$ یا

مثال (۷-۱): برای نشان دادن محاسبه بستی روش انتگرال گیری گام به گام که در بالا شرح داده شد سیستم تک درجه شکل ۷-۵ با رفتار ارتجاعي خمیری را که تحت اثر بارگذاري نشان داده شده قرار دارد در نظر بگیرید. در این مثال فرض می کنیم که ضریب میرایی ثابت ($\xi = 0.087$) است. بنابراین تنها رفتار غیرخطی سیستم تغییر سختی حاصل از جاری شدن است.
 سختی سیستم در حالت ارتجاعي برابر است با:

$$k = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 30 \times 10^3 \times 2 \times 100}{(15 \times 12)^3} = 12.35 \text{ k/in}$$

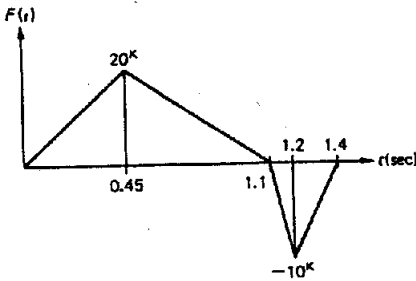
و ضریب میرایی برابر است با:

$$c = \xi c_{cr} = (0.087)(2)\sqrt{0.2 \times 12.35} = 0.274 \text{ k.sec/in}$$

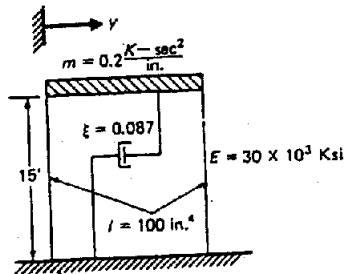
شرایط اولیه عبارتند از: $\dot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0$

شتاب اولیه برابر است با: $\ddot{y}_0 = \frac{F(0)}{k} = 0$

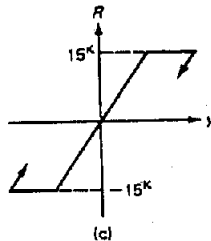
نقاط جاری شدن عبارتند از: $y_c = -1.215 \text{ in}$ و $y_t = \frac{R_t}{k} = \frac{15}{12.35} = 1.215 \text{ in}$



(ب) بارگذاري



(الف) قاب



(ج) رفتار ارتجاعي خمیری

شکل (۷-۵): قاب با رفتار ارتجاعي خمیری تحت اثر بارگذاري دینامیکی

جدول (۱-۷) - شتاب خطی به روش گام به گام برای مثال (۱-۷)

t (sec)	F (kip)	y (in)	KEY	\dot{y} (in/sec)	R (kip)	\ddot{y} (in/sec ²)	k_p (kip)	\bar{k} (kip)
0	0	0	0	0	0	0	12.35	140.57
0.1	4.444	0.0316	0	0.9485	0.390	18.972	12.35	140.57
0.2	8.888	0.2326	0	3.1844	2.871	25.723	12.35	140.57
0.3	13.333	0.6669	0	5.3760	8.233	18.134	12.35	140.57
0.4	17.777	1.2681	1	6.3768	15.00	5.152	0	128.22
0.5	18.462	1.9358	1	7.0190	15.00	7.691	0	128.22
0.6	15.358	2.6505	1	7.0189	15.00	-7.693	0	128.22
0.7	12.308	3.2916	1	5.5791	15.00	-21.105	0	128.22
0.8	9.231	3.7244	1	2.8840	15.00	-32.797	0	128.22
0.9	6.154	3.8319	0	-0.9054	15.00	-42.990	12.35	140.57
1.0	3.077	3.5397	0	-4.8048	11.39	-34.998	12.35	140.57
1.1	0	2.9268	0	-7.0295	3.825	-9.497	12.35	140.57
1.2	-10	2.1729	0	-8.0806	-5.481	-11.525	12.35	140.57
1.3	-5	1.4211	0	-5.8177	-14.76	56.784	12.35	140.57
1.4	0	1.1739	-1	1.3860	-15.00	73.109	0	128.22
1.5	0	1.6619	0	8.2227	-15.00	63.735	12.35	140.57

ΔF (kip)	ΔF (kip)	Δy (in)	$\Delta \dot{y}$ (in/sec)
4.444	4.444	0.0316	0.9485
4.444	28.249	0.2010	2.2359
4.444	61.050	0.4343	2.193
4.444	84.510	0.6012	1.000
0.685	85.609	0.6677	0.6422
-3.077	91.641	0.7147	-0.0001
-3.077	82.199	0.6409	-1.440
-3.077	55.506	0.4329	-2.695
-3.077	13.773	0.1074	-3.789
-3.077	-41.069	-0.2922	-3.899
-3.077	-86.162	-0.6130	-2.225
-10	-105.96	-0.7538	-1.051
5	-105.68	-0.7518	2.263
5	-34.746	-0.2472	7.198
0	62.568	0.4880	6.842
0	144.55	1.0283	2.995

پریود طبیعی برابر است با $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.8 \text{ sec}$ (برای سیستم ارتجاعی).
 برای راحتی محاسبات عددی $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ انتخاب می شود. سختی موثر از رابطه (۷-۲۸) برابر است با:

$$\bar{k} = k_p + \frac{6}{0.1^2} \cdot 0.2 + \frac{3}{0.1} \cdot 0.274$$

یا

$$\bar{k} = k_p + 128.22 \quad (۷-۴۷)$$

که

$$k_p = k = 24.7 \quad (\text{رفتار ارتجاعی})$$

(۷-۴۸)

$$k_p = 0 \quad (\text{رفتار خمیری})$$

نیروی جزئی موثر از رابطه (۷-۴۰) برابر است با:

$$\overline{\Delta F} = \Delta F + 12.822\dot{y} + 0.6137\ddot{y} \quad (۷-۴۹)$$

محاسبات لازم در جدول ۷-۱ را نشان داده شده اند. در این مثال با رفتار ارتجاعی خمیری، پاسخ سیستم بطور ناگهانی با شروع و خاتمه جاری شدن تغییر می کند. برای حصول دقت بیشتر، بهتر است که گام زمانی در همسایگی تغییر حالت رفتار به فواصل کوتاهتری تقسیم شود. اما برای به دست آوردن این فواصل باید از روش تکرار استفاده نمود. در این مثال و در برنامه کامپیوتری بخش بعدی از این روش استفاده نشده است. سختی محاسبه شده در ابتدای هرگام زمانی تا انتهای آن گام ثابت فرض شده است. باید توجه داشت که در هنگام تغییر رفتار سیستم خطای قابل توجهی ممکن است بوجود آید مگر اینکه فواصل زمانی نسبتاً کوچک انتخاب شده باشند.

۷-۶- برنامه ۴- سیستم تک درجه ارتجاعی خمیری (STEPS)

در این بخش یک برنامه کامپیوتری برای تحلیل سیستم تک درجه میرا با رفتار ارتجاعی خمیری تحت اثر بارگذاری دلخواه (نیروی خارجی یا شتاب تکیه گاهی) شرح داده می شود. برای حل معادله حرکت از روش انتگرال گیری گام به گام با شتاب خطی و از الگوریتم تشریح شده در بخش قبل استفاده می شود. در جدول (۷-۲) لیست متغیرهای ورودی برنامه شرح داده شده اند. جدول (۷-۳) داده های ورودی برنامه و فرمت آنها را نشان می دهد.

لیست برنامه در ضمیمه I آمده است. برنامه با خواندن و چاپ داده ها و اعمال شرایط اولیه در متغیرها و ضرایب ثابت روابط شروع می شود. سپس مقادیر تابع نیرو در فواصل زمانی انتخاب شده با استفاده از درون یابی خطی محاسب می شوند. در بخش اصلی برنامه جایجایی سرعت و شتاب در هرگام زمانی محاسب می شوند. رفتار غیرخطی نیروی فنر در هر گام با استفاده از متغیر «KEY» و توسط چند

جمله شرطی کنترل می شود. این کار برای محاسبه مقدار درست نیروی فنر و نقاط جاری شدن انجام می شود. خروجی برنامه جدولی است که در آن جایجایی، سرعت و شتاب در فواصل زمانی Δt داده می شوند. آخرین ستون جدول نشان دهنده تعداد نشانه KEY است که حالت رفتار سیستم را بیان می کند. همان طور که قبلاً گفته شد $KEY=0$ برای رفتار ارتجاعي و $KEY=1$ یا $KEY=-1$ بترتیب برای رفتار خمیری در کشش و فشار است.

جدول (۲-۷): شرح متغیرهای ورودی برنامه ۴

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
NTYPE		نشانه محرك 0 ← نیروی وارد بر جرم 1 ← شتاب در تکیه گاه
NEQ		تعداد نقاطی که معرف تابع محرك هستند
SK	k	سختی ارتجاعي
SM	m	جرم
SC	c	ضریب میرایی
DT	ΔT	گام زمانی
RT	R_f	حداکثر نیروی فنر در وضعیت کششی
RC	R_c	حداکثر نیروی فنر در وضعیت فشاری
TC(I)	t_i	زمان در نقطه i
X(I)	F_i	نیرو (یا شتاب) در لحظه t_i

جدول (۳-۷): شرح متغیرهای ورودی برنامه ۴

فرمت	متغیرها
(2I5, 6F10.3)	NTYPE NEQ SK SM SC DT RT RC
(8F10.2)	TC(I), X(I), (I = 1, NEQ) (as many cards as needed)

مثال (۲-۷): با استفاده از برنامه کامپیوتری ۴ پاسخ سازه مثال (۱-۷) را به دست آورید محاسبات را یکبار دیگر برای رفتار ارتجاعي تکرار کنید. نتایج حالت ارتجاعي خمیری و ارتجاعي را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. اطلاعات اصلی لازم در جدول (۴-۷) آمده اند. لیست داده های ورودی مورد نیاز برنامه نیز در جدول (۵-۷) نشان داده شده است.

از این برنامه کامپیوتری می توان برای رفتار کاملاً ارتجاعي استفاده نمود. فقط کافی است که حداکثر نیروی فنر در کشش و فشار را مقدار بزرگی انتخاب نمود به طوری که سازه در حالت ارتجاعي باقی بماند. در این مثال $R_f = 100 \text{ kip}$ و $R_c = -100 \text{ kip}$ کافی بنظر می رسند. نتایج کامپیوتری برای حالت ارتجاعي خمیری

در جدول (۶-۷) نشان داده شده است. برای مشاهده بهتر و مقایسه دو حالت ارتجاعی خمیری و ارتجاعی در این مثال جابه جایی هایی مربوطه در شکل (۶-۷) رسم شده اند. در این شکل جابه جایی های خمیری با خط چین نشان داده شده است.
 جدول (۴-۷) داده های ورودی مثال (۲-۷)

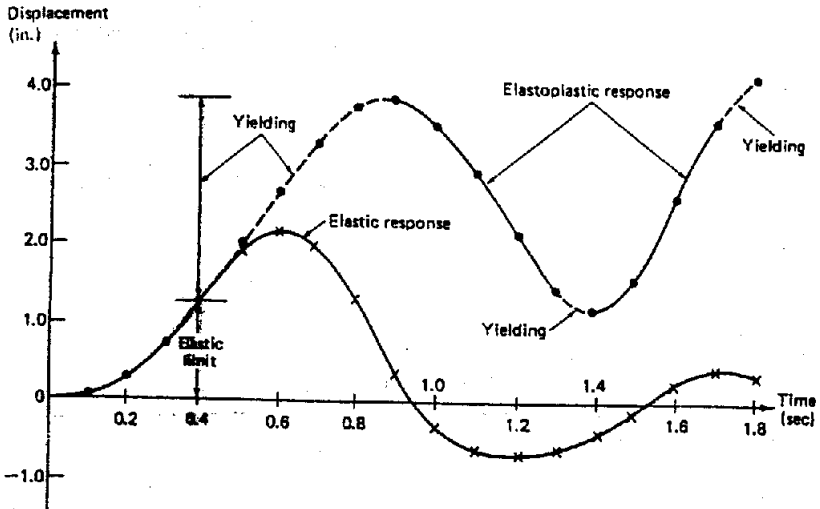
علامت	مقدار	واحد	شرح
NTYPE	0		نیروی وارده بر جرم
NEQ	6		تعداد نقاطی که معرف نیرو هستند.
SK	12.35	k/in	ضریب سختی
SM	0.2	k.sec ² /in	جرم
SC	0.27	k.sec ² /in	ضریب میرایی
DT	0.1	ثانیه	گام زمانی
RT	15.0	kip	حداکثر نیروی فنردروضعیت کششی
RC	-15.0	kip	حداکثر نیروی فنردروضعیت فشاری

جدول (۵-۷): لیست داده های ورودی مثال (۱-۷)

0	6	12.35	0.2	0.27	0.10	15.0	-15.0	
	0.00	0.00	0.45	20.00	1.10	0.00	1.20	-10.00
	1.40	0.00	2.00	0.00				

جدول ۶-۷ پاسخ سیستم شکل ۵-۷ با رفتار ارتجاعی خمیری

TIME	DISPL. (in)	VELOC. (in/sec)	ACC. (in/sec ²)	KEY
0.100	0.0316	0.9485	18.9709	0
0.200	0.2326	3.1834	25.7261	0
0.300	0.6669	5.3764	18.1344	0
0.400	1.2681	6.3768	5.1526	1
0.500	1.9358	7.0190	7.6916	1
0.600	2.6505	7.0189	-7.6929	1
0.700	3.2916	5.5791	-21.1048	1
0.800	3.7245	2.8840	-32.7972	1
0.900	3.8319	-0.9054	-42.9903	0
1.000	3.5397	-4.8048	-34.9975	0
1.100	2.9268	-7.0295	-9.4969	0
1.200	2.1729	-8.0806	-11.5254	0
1.300	1.4211	-5.8177	56.7840	0
1.400	1.1739	1.3806	73.1088	-1
1.500	1.6619	8.2227	63.7348	0
1.600	2.6902	11.2173	-3.8437	0
1.700	3.6966	7.9504	-61.4929	0
1.800	4.1534	0.8761	-76.2002	1



شکل (۶-۷): مقایسه رفتار ارتجاعی خمیری و ارتجاعی در معادله (۲-۷)

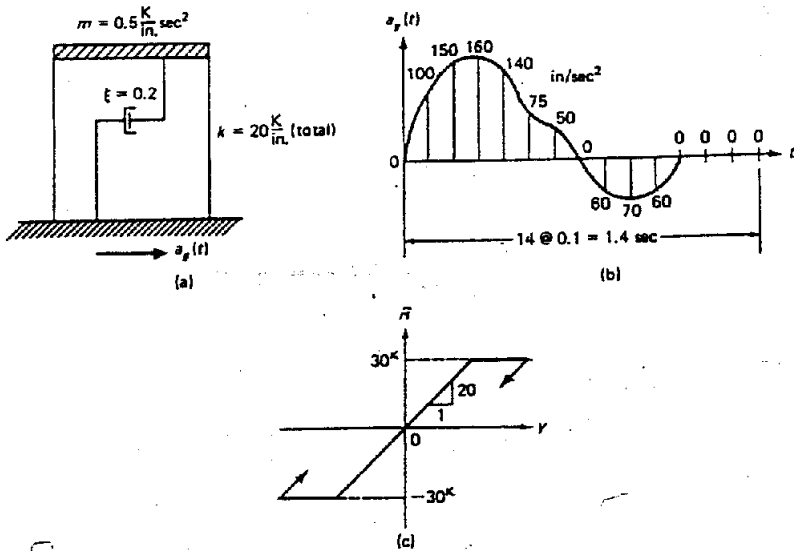
۷-۷- خلاصه

سازه‌ها معمولاً با فرض رفتار خطی و اینکه تحت اثر هرگونه بارگذاری دینامیکی خطی باقی می‌مانند طرح می‌شوند. با وجود این شرایطی وجود دارند که باید سازه را برای یک بارگذاری بزرگ مانند زلزله‌های قوی یا انفجارات هسته‌ای طرح نمود. در این شرایط سازه از خطی خارج شده و باید سازه‌ها برای تحمل تغییر شکل‌های خمیری طراحی نمود. ساده‌ترین و پذیرفته‌ترین فرض یوای رفتار غیرخطی، رفتار ارتجاعی خمیری است. در این نوع رفتار تا هنگامی که نیروی فنری به یک حداکثر مقدار (کشش یا فشار) نرسیده باشد رفتار ارتجاعی است ولی پس از آن نیرو در فنر ثابت باقی ماند تا اینکه جهت حرکت عوض شود و مجدداً بارده مرحله ارتجاعی گردد.

روش‌های مختلفی برای حل عددی معادله دیفرانسیل این نوع حرکت وجود دارد. روش انتگرال گیری گام به گام با شتاب خطی که در این فصل ارائه شد با محاسباتی نسبتاً ساده نتایج قابل قبولی دارد. ولی انجام این محاسبات با دست خسته‌کننده و وقت گیر است. استفاده از یک برنامه کامپیوتری مانند آنچه در این فصل ارائه شد کل محاسبات را به آماده کردن اطلاعات و داده‌ها محدود می‌نماید.

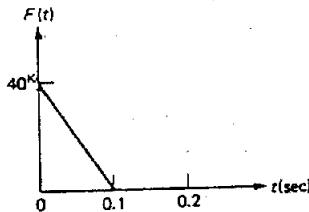
مسائل

۱-۷- سیستم تک درجه شکل م (۱-۷، الف) تحت اثر شتاب تکب گاهی شکل م (۱-۷، ب) قرار دارد. حداکثر جابه جایی نسبی ستونها را با فرض رفتار ارتجاعی خمیری شکل م (۱-۷، ج) به دست آورید.



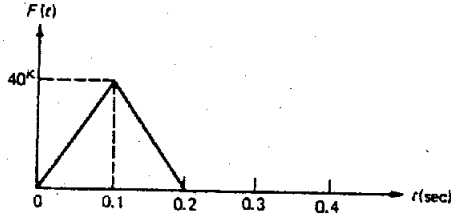
شکل م (۱-۷)

۲-۷- تغییرات جابجایی سازه شکل م (۱-۷) را تحت اثر بار ضربه ای شکل م (۲-۷) که به صورت افقی بر بالای قاب وارد می شود به دست آورید.



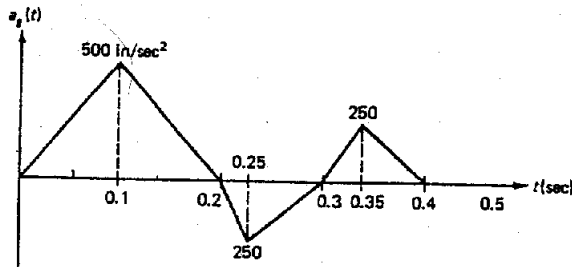
شکل م (۲-۷)

۳-۷- مساله (۲-۷) را برای بار ضربه ای شکل م (۳-۷) که به صورت افقی اثر می کند حل کنید.



شکل م (۳-۷)

۴-۷- مساله (۳-۷) را برای شتاب تکیه گاهی افقی شکل م (۴-۷) حل کنید.



شکل م (۴-۷)

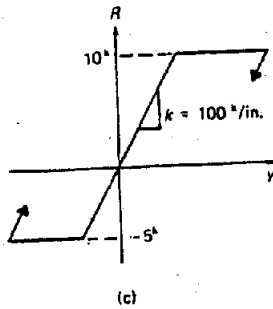
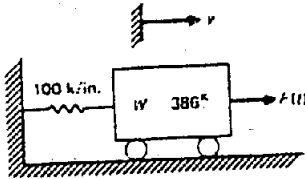
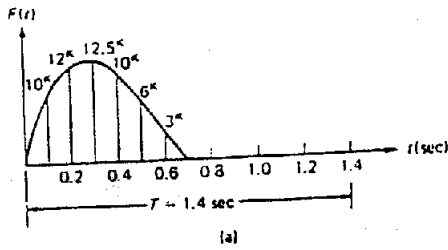
۵-۷- مساله (۱-۷) را با فرض رفتار ارتجالی سازه حل کنید. (راهنمایی: از برنامه کامپیوتری ۴ با $R_t = 200 \text{ kip}$ و $R_c = -200 \text{ kip}$ استفاده کنید).

۶-۷- مساله (۲-۷) را برای رفتار ارتجالی حل کنید. جابه جایی را رسم کنید و با نتایج مساله (۲-۷) مقایسه کنید.

۷-۷- ضریب شکل پذیری را از نتایج مساله (۲-۷) تعیین کنید. (ضریب شکل پذیری طبق تعریف نسبت جابه جایی حداکثر به جابه جایی نقطه جاری شدن است).

۸-۷- یک سازه که به صورت سیستم جرم - فنر شکل م (۸-۷، الف) مدل شده است تحت اثر بارگذاری شکل م (۸-۷، ب) قرار دارد. با فرض رفتار ارتجالی خمیری شکل

م (۸-۷، ج) پاسخ را به دست آورید. ۱۶۵



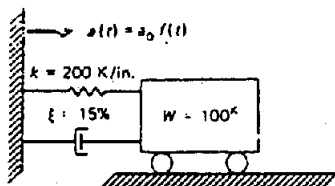
شکل م (۸-۷)

۹-۷- مساله (۸-۷) را با فرض 10٪ میرایی حل کنید.

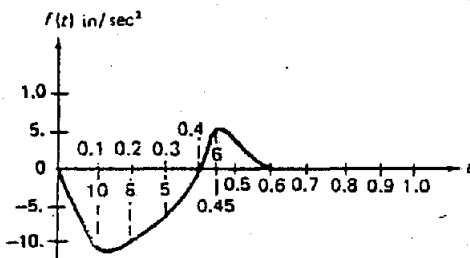
۱۰-۷- مساله (۸-۷) را با فرض رفتار کاملاً ارتجاعی حل کنید. (راهنمایی: از برنامه ۴ با $R_C = -1000 \text{ kip}$ و $R_T = 1000 \text{ kip}$ استفاده کنید).

۱۱-۷- مساله (۹-۷) را با فرض رفتار ارتجاعی حل کنید.

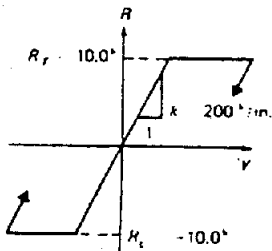
۱۲-۷- سازه ای که به صورت سیستم جرم - فنر میرایی شکل م (۷-۱۲، الف) مدل شده است تحت اثر شتاب تکیه گاهی $a(t) = a_0 f(t)$ قرار دارد که $f(t)$ در شکل م (۷-۱۲، ب) نشان داده شده است. حداکثر مقدار a_0 را برای اینکه سازه ارتجاعي بماند به دست آورید. فرض کنید سازه دارای رفتار ارتجاعي خمیری شکل م (۷-۱۲، ج) باشد.



(a)



(b)



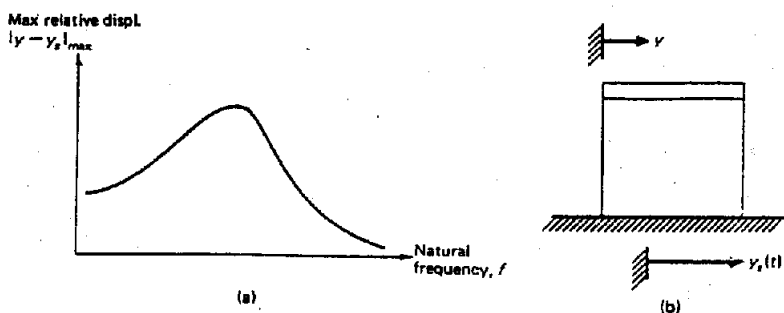
(c)

شکل م (۷-۱۲)
۱۶۷

فصل هشتم

طیف پاسخ

در این فصل مفهوم «طیف پاسخ» که در سالهای اخیر در دیتامیک سازه ها و خصوصاً در مهندسی زلزله کاربرد زیادی پیدا کرده است ارائه خواهد شد. به طور خلاصه طیف پاسخ نمودار پاسخ حداکثر (حداکثر جابه جایی، سرعت، شتاب یا هر کمیت مورد نظر دیگر) تمام سیستمهای تک درجه به یک بارگذاری خاص است. محور افقی نمودار فرکانس طبیعی (پریود طبیعی) سیستم و محور قائم آن پاسخ حداکثر است. ترسیمه ای از این نوع در شکل (۱-۸) نشان داده شده است که در آن یک ساختمان یک طبقه تحت اثر یک جابه جایی تکیه گاهی $y_g(t)$ قرار دارد. طیف پاسخ شکل (۱-۸، الف) حداکثر جابه جایی جرم m را نسبت به تکیه گاه برای هر سیستم تک درجه نشان می دهد. بنابراین برای تعیین پاسخ هر سیستم تک درجه با استفاده از طیف یک بارگذاری خاص کافی است فقط فرکانس طبیعی سیستم را بدانیم.



شکل (۱-۸): الف) نمونه ای از طیف پاسخ (ب) سیستم تک درجه تحت اثر تحریک $y_g(t)$ تکیه گاهی

۱-۸- تهیه طیف پاسخ

برای نشان دادن نحوه تهیه طیف پاسخ نوسانگر نامیرای شکل (۱-۸، الف) را که تحت اثر نیروی نیم سینوسی شکل (۱-۸، ب) قرار دارد در نظر بگیرید. شرایط اولیه سیستم سکون فرض می شود. مدت زمان اثر ضربه t_0 نامیده می شود معادل دیفرانسیل حرکت از تعادل نیروهای نشان داده شده در ترسیمه جسم آزاد شکل (۱-۸، ج) به دست می آید.

$$m\ddot{y} + ky = F(t) \quad (1-8)$$

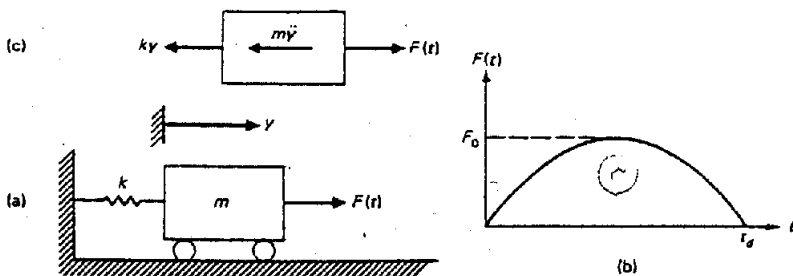
که در آن

1) Response Spectrum

2) excitation

$$F(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq t_d & \text{برای } F_0 \sin \bar{\omega} t \\ t > t_d & \text{برای } 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{t_d} \quad (2-8)$$



شکل (2-8): الف) نوسانتگر ساده نامیرا تحت اثر نیروی $F(t) = F_0 \sin \bar{\omega} t (0 \leq t \leq t_d)$ ب) تابع نیروی ج) ترسیه جسم آزاد

حل معادله (1-8) را می توان با استفاده از هر یک از روشهای ارائه شده در فصلهای قبل مانند انتگرال در هامبل (فصل 4) و یا انتگرال گیری گام به گام باشتاب خطی (فصل 7) به دست آورد. اما در این فصل به علت سادگی تابع بارگذاری می توان معادله دیفرانسیل خطی (1-8) را به روش مستقیم حل نمود. جواب معادله از جمع جواب عمومی y_c و جواب خصوصی y_p به دست می آید.

$$y = y_c + y_p \quad (4-8)$$

جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y_c = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5-8)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی است. جواب خصوصی برای فاصله زمانی

$0 \leq t \leq t_d$ برابر است با

$$y_p = C \sin \bar{\omega} t \quad (6-8)$$

از قرار دادن رابطه (6-8) در معادله (1-8) خواهیم داشت:

$$C = \frac{F_0}{k - m\bar{\omega}^2} \quad (7-8)$$

از ترکیب روابط (4-8) تا (7-8) پاسخ سیستم برای $0 \leq t \leq t_d$ به دست می آید:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_0 \sin \bar{\omega} t}{k - m\bar{\omega}^2} \quad (8-8)$$

از اعمال شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $\dot{y}(0) = 0$ در رابطه (8-8) و محاسبه ضرایب ثابت A و B خواهیم داشت:

$$y = \frac{F_0/k}{1 - (\bar{\omega}/\omega)^2} [\sin \bar{\omega} t - (\bar{\omega}/\omega) \sin \omega t] \quad (9-8)$$

با استفاده از تعاریف زیر

$$y_{st} = \frac{F_0}{k}, \quad \bar{\omega} = \frac{\pi}{t_d}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

و قرار دادن آنها در رابطه (9-8) این رابطه به شکل زیر نوشته می شود

$$0 \leq t \leq t_d \quad \text{برای} \quad \frac{y}{y_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{2t_d}\right)^2} \left[\sin \pi \frac{t}{t_d} - \frac{T}{2t_d} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right] \quad (\text{الف}, 10-8)$$

پس از زمان t_d نیروی خارجی صفر خواهد شد و سیستم حرکت ارتعاش آزاد خواهد داشت. لذا پاسخ سیستم برای $t > t_d$ از رابطه (8-8) با محاسبه ضرایب ثابت انتگرال گیری از رابطه (8-8) الف) برای $t = t_d$ به دست می آید. پاسخ نهایی عبارت است از:

$$t \geq t_d \quad \text{برای} \quad \frac{y}{y_{st}} = \frac{T/t_d}{\left(\frac{T}{2t_d}\right)^2 - 1} \cos \pi \frac{t_d}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{2T}\right) \quad (\text{ب}, 10-8)$$

از روابط (10-8) دیده می شود که پاسخ برحسب $\frac{y}{y_{st}}$ تابعی از «نسبت تدارم» ضربه

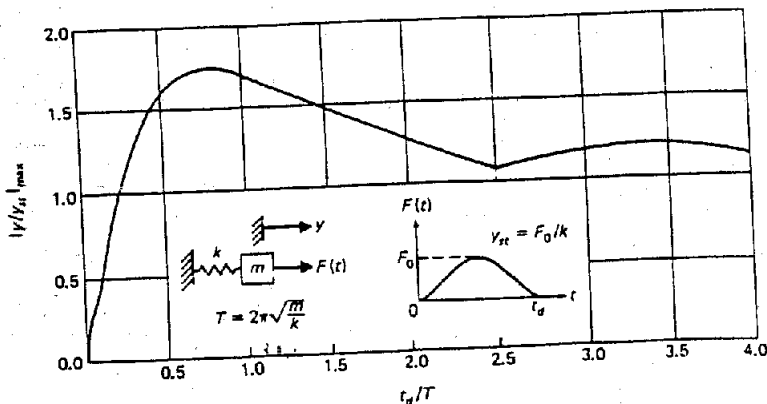
به پریود طبیعی سیستم (t_d/T) و زمان (t/T) است. لذا برای هر مقدار ثابت t_d/T می توانیم پاسخ حداکثر را از رابطه (10-8) به دست آوریم. نمودار شکل (3-8) که همان طیف پاسخ برای تابع نیروی نیم سینوسی است نشان دهنده مقدار این حداکثرها برحسب t_d/T است. از طیف پاسخ دیده می شود که حداکثر

حداکثر پاسخ «ضریب بزرگنمایی» $\frac{y}{y_{st}} = 1.76$ برای این ضربه خاص به ازای $t_d/T = 0.8$

به وجود می آید.

1) duration

2) Amplification factor



شکل (۸-۲): طیف پاسخ برای نیروی نیم سینوسی با تداوم

در این حالت به علت سادگی تابع نیرو امکان حل مستقیم معادله حرکت و رسم طیف پاسخ بر حسب نسبت‌های بدون بعد امکان پذیر است. یعنی طیف پاسخ حاصل برای کلیه توابع نیروی نیم سینوسی قابل استفاده است. اما در حالت کلی برای یک بارگذاری خاص نمی توان یک طیف پاسخ کلی به دست آورد و فقط می توان طیف پاسخ آن حالت خاص را به دست آورد.

۸-۲- طیف پاسخ حرکت تکیه گاهی

یک مسأله مهم در دینامیک سازه ها تحلیل سیستمی است که تحت اثر تحریک تکیه گاهی قرار دارد. یک مثال از اینگونه تحریک تکیه گاهی بر روی یک نوسانگر میرا که مدل یک سازه واقعی است در شکل (۸-۴) نشان داده شده است. تحریک در این حالت تابع شتابی است که در شکل (۸-۵) نشان داده شده است. معادله حرکت که از تعادل نیروهای ترسیمه جسم آزاد مربوط در شکل (۸-۴، ب) به دست می آید عبارت است از:

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s) = 0 \quad (۸-۱۱)$$

با قراردادن مقدار $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\xi = c/c_{cr} = c/2\sqrt{km}$ داریم:

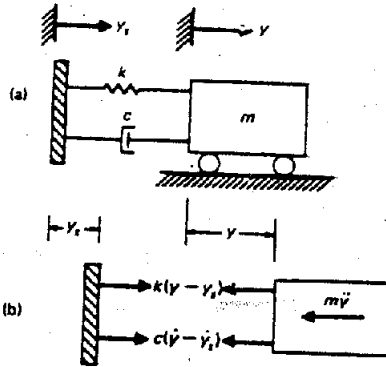
$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 y_s(t) + 2\xi\omega\dot{y}_s(t) \quad (۸-۱۲)$$

معادله (۸-۱۲) معادله دیفرانسیل حرکت مطلق نوسانگر میراست. نوشتن این معادله بر حسب حرکت جرم نسبت به تکیه گاه یعنی تغییر طول فنر مفیدتر است. جابه جایی نسبی u عبارت است از:

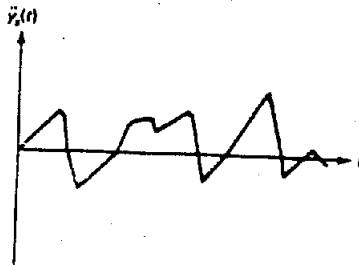
$$u = y - y_s \quad (۱۳-۸)$$

از قرار دادن این مقدار در رابطه (۱۲-۸) خواهیم داشت:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{y}_s(t) \quad (۱۴-۸)$$



شکل (۴-۸): الف) نوسانگر ساده میرا تحت اثر تحریک تکیه گاهی، ب) نمودار جسم آزاد مربوط



شکل (۵-۸): تابع شتاب محرک تکیه گاه نوسانگر شکل (۴-۸)

نوشتن معادله حرکت (۱۴-۸) برحسب حرکت نسبی u خصوصاً از این نظر اهمیت دارد که در طراحی، تغییر طول و یا نیروی فنر مورد نیاز است. علاوه براین

معمولاً تحريك تکیه گاهی توسط تابع شتاب آن (مثلاً «شتاب نگاشت»^۱، زلزله) مشخص می شود. لذا رابطه (۸-۱۴) که در سمت راست آن شتاب تکیه گاهی قرار دارد بهتر از رابطه (۸-۱۲) است که در سمت راست آن جابه جایی و سرعت تکیه گاهی قرار دارد.

حل معادله دیفرانسیل حرکت، رابطه (۸-۱۴)، به هر يك از روشهای ارائه شده در فصلهای قبل برای سیستم تک درجه قابل انجام است. خصوصاً حل آن با استفاده از انتگرال دو هامل به راحتی به دست می آید یعنی:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (۸-۱۵)$$

۸-۳ - طیف سه جانبه^۲

با استفاده از مقیاس لگاریتمی می توان حداکثر شتاب، حداکثر جابه جایی نسبی و يك کمیت سوم به نام حداکثر سرعت «مجازی نسبی»^۳ را بر روی يك نمودار نشان داد. سرعت مجازی دقیقاً همان سرعت واقعی نمی باشد ولی رابطه نزدیکی با آن دارد که برای راحتی به جای سرعت واقعی استفاده می شود. این سه کمیت یعنی حداکثر شتاب مطلق، حداکثر جابه جایی نسبی و حداکثر سرعت نسبی مجازی گاهی به ترتیب شتاب طیفی^۴، جابه جایی طیفی^۵، و سرعت طیفی^۶ نامیده میشوند. جابه جایی طیفی S_D یعنی حداکثر جابه جایی نسبی با شتاب طیفی S_a یعنی حداکثر شتاب مطلق، رابطه خطی دارد. برای نشان دادن این مسأله معادله حرکت (۸-۱۱) را در نظر بگیرید که پس از قراردادن رابطه (۸-۱۲) در آن برای سیستم میرا داریم:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (۸-۱۶)$$

و برای سیستم نامیرا داریم

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (۸-۱۷)$$

از رابطه (۸-۱۷) دیده می شود که شتاب مطلق \ddot{y} همواره با جابه جایی نسبی u متناسب است. بویژه برای حداکثر آنها شتاب طیفی با جابه جایی طیفی متناسب است یعنی از رابطه (۸-۱۷) داریم

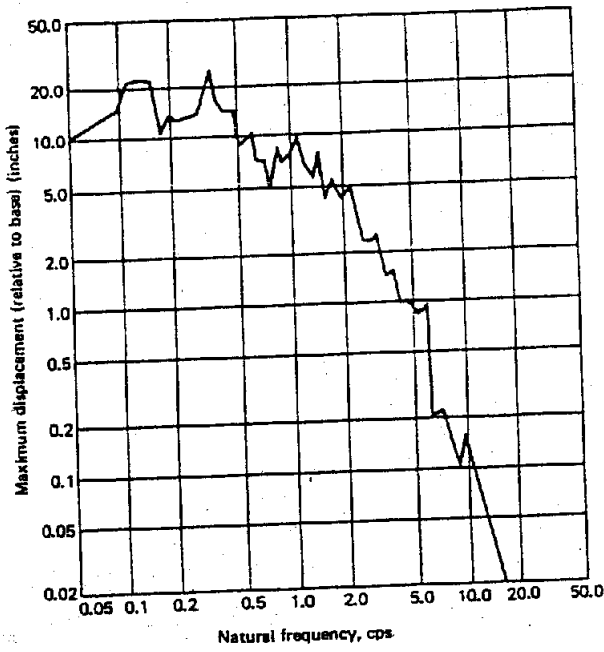
$$S_a = -\omega^2 S_D \quad (۸-۱۸)$$

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|----------------------|
| 1) Accelerograph | 2) Tripartite spectrum | 3) pseudo velocity |
| 4) Spectral acceleration | 5) Spectral displacement | 6) Spectral velocity |

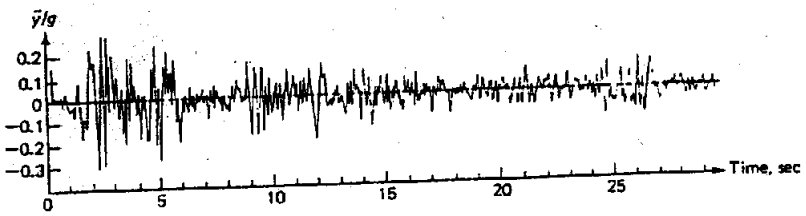
که $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی سیستم، $S_D = u_{\max}$ و $S_a = \ddot{y}_{\max}$ است. درحالتی که میرایی وجود داشته باشد می توان استدلال نمود که حداکثر جابه جایی نسبی هنگام اتفاق می افتد که سرعت نسبی صفر ($\dot{u} = 0$) باشد. لذا دوباره همان رابطه (۸-۱۸) بین شتاب طیفی و جابه جایی طیفی به دست می آید. این رابطه دقیقاً مشابه رابطه ای است که در یک حرکت هارمونیک وجود دارد. سرعت فرضی مربوط به این حرکت هارمونیک سرعت مجازی است که حداکثر مقدار آن S_v طبق تعریف سرعت طیفی است. لذا داریم:

$$S_v = \omega S_D = \frac{S_a}{\omega} \quad (۸-۱۹)$$

طیف پاسخ سیستم تک درجه ارتجاعي برای بعضی از حرکتها محاسبه شده است. یک نمونه از طیف پاسخ جابه جایی سیستم تک درجه تحت اثر حرکت تکیه گاهی در شکل (۸-۶) نشان داده شده است. این طیف پاسخ مربوط به شتابنگاشت زلزله «ال سنترو» سال ۱۹۴۰ است. شتابنگاشت این زلزله در مطالعات مهندسی زلزله بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. ترسیمه شتابنگاشت این زلزله در شکل (۸-۷) نشان داده شده است که قبل از زلزله «سان فرناندو»^۲، کالیفرنیا در سال ۱۹۷۱ یکی از معدود شتابنگاشتهای موجود با شتاب بالا و طولانی بوده است. در شکل (۸-۸) طیف سرعت همین زلزله برای مقادیر مختلف میرایی در مقیاس لگاریتمی رسم شده است. در این نوع ترسیمه با استفاده از روابط (۸-۱۸) و (۸-۱۹) می توان محور مختصات مربوط به جابه جایی را با زاویه 125° و محور مختصات مربوط به شتاب را با زاویه 25° نسبت به محور افقی رسم نمود به طوری که از یک نمودار مقادیر شتاب طیفی، سرعت طیفی و جابه جایی طیفی رابه دست آید.

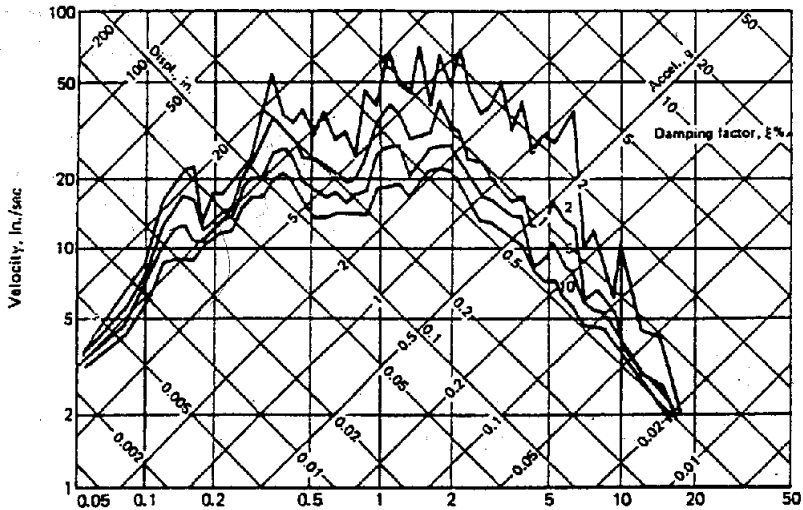


شکل (۶-۸) طیف پاسخ جابه جایی برای سیستم ارتجاعي تحت اثر شتاب زلزله ال سنترو سال ۱۹۴۰ *



شکل (۷-۸) شتابنگاشت مولفه شمالی - جنوبی زلزله ال سنترو کالیفرنیا سال ۱۹۴۰

* Design of Multistory Reinforced Building for Earthquake motions by J.A. Blum, N.M. Newmark and L.H. Corning, portland cement Association, 1961



شکل (۸-۸): طیف پاسخ سیستم ارتجاعي برای زلزله ال سنترو سال ۱۹۴۰

برای نشان دادن روش رسم طیف سه جانبه شکل (۸-۸) رابطه (۸-۱۹) را بر حسب فرکانس طبیعی f نوشته و از آن لگاریتم می گیریم.

$$S_v = \omega S_D = 2\pi f S_D \quad (۲۰-۸)$$

$$\log S_v = \log f + \log(2\pi S_D)$$

به ازای مقادیر ثابت S_D رابطه (۲۰-۸) رابطه يك خط با زاويه 45° است که مقادير $\log S_v$ را بر حسب $\log f$ نشان می دهد. به همین ترتیب از رابطه (۱۹-۸) داریم،

$$\log S_v = -\log f + \log \frac{S_a}{2\pi} \quad (۲۱-۸)$$

برای مقادیر ثابت S_a رابطه (۲۱-۸) معادله يك خط مستقیم با زاويه 135° است که مقدار $\log S_v$ از ابر حسب $\log f$ نشان می دهد.

۸-۴ طیف پاسخ برای طراحی ارتجاعي

معمولاً طیف پاسخ برای يك سیستم تك درجه تحت اثر يك تحريك مشخص و برای مقادير مختلف میرایی محاسبه و تهیه می گردند. برای محاسبه از انتگرال گیری عددی یا فواصل زمانی کوتاه استفاده می شود. روند گام به گام تا پایان شتاب زلزله

ادامه پیدا می کند و حداکثر مقدار تابع مورد نظر به عنوان پاسخ سیستم تک درجه ثبت می گردد. با تغییر مشخصات سیستم فرکانس طبیعی آن عوض شده و محاسبات بار دیگر تکرار می شود تا پاسخ حداکثر جدید محاسب و ثبت گردد. این فرایند تکرار می گردد تا اینکه پاسخ حداکثر برای کلیه فرکانسهای مورد نظر محاسبه و نتایج رسم گردند. چون هیچ دو زلزله ای مشابه نیستند این کار باید برای هر زلزله خاص به طور جداگانه انجام شود.

تا چند سال اخیر تعداد کمی از زلزله های قوی ثبت شده بودند، زیرا دستگاههای «شتاب نگار»^۱ برای ثبت آنها تعبیه نشده بود. زلزله ال سنترو کالیفرنیا در سال ۱۹۲۰ قوی ترین زلزله ثبت شده می باشد که اساس بسیاری از مطالعات تحلیلی قرار گرفته است. اما اخیراً تعدادی از زلزله های قوی دیگر ثبت شده اند. حداکثر مقدار شتاب زمین از مقدار $0.32 g$ برای زلزله ال سنترو تا بیش از $0.5 g$ برای بعضی زلزله های دیگر ثبت شده است. حتی اگر دستگاههای پیشتری در نقاط نزدیک به «مرکز زلزله»^۲ نصب گردند انتظار می رود که مقادیر بزرگتری نیز ثبت شود.

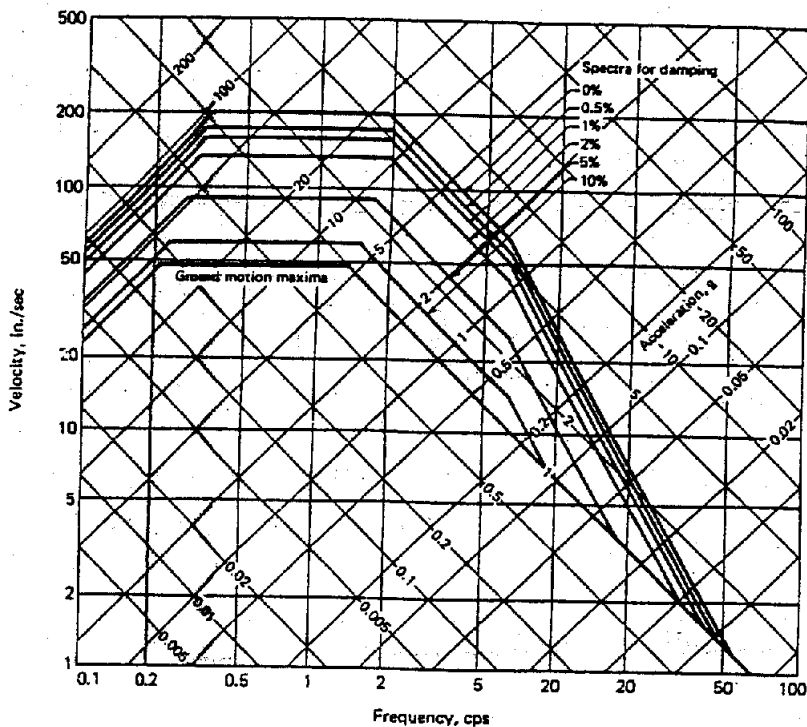
زلزله ها معمولاً مجموعه یک سری حرکتهای اتفاقی زمین هستند. معمولاً مولفه های شتاب شمالی - جنوبی، شرقی - غربی و عمودی آنها اندازه گیری می شوند. در حال حاضر روش دقیقی برای پیش بینی حرکتهای زلزله های آینده یک منطقه وجود ندارد. لذا منطقی است که از «طیف پاسخ طرح»^۳ استفاده شود. این طیف از کنار هم گذاشتن طیف چندین زلزله استنتاج می شود و نشان دهنده نومی طیف متوسط برای طراحی است. یک نمونه از این طیف که برای حداکثر شتاب $1.0 g$ رسم شده در شکل (۸-۹) نشان داده شده است.

این شکل نشان دهنده حداکثر حرکت طرح زمین و تعدادی طیف است که برای مقادیر مختلف میرایی رسم شده اند.

جزئیات روش تهیه طیف طرح پایه توسط نیومارک و هال* ارائه شده است. طور کلی برای هر منطقه باید حداکثر شتاب زمین، حداکثر سرعت زمین و حداکثر جابه جایی زمین تخمین زده شود. سه خط که نشان دهنده این مقادیر هستند بر روی یک کاغذ لگاریتمی سه جانبی که نمونه آن در شکل (۸-۱۰) نشان داده شده است رسم می گردند. این سه خط در این شکل حداکثر شتاب زمین را $1.0 g$ حداکثر سرعت را

1) Accelerometer 2) Epicenter 3) Design Response Spectrum
*Newmark, N.M., and Hall, W.J., " Procedures and criteria for Earthquake resistance design" Building practices for Disaster Mitigation, Dept. of Commerce, Feb. 1973.

48 in/sec حداکثر جاب جایی را 36 in نشان می دهند. این مقادیر بزرگتر از مقادیری هستند که معمولاً در طراحی انتظار می روند. اما تصبیت بین آنها برای بیشتر موارد عملی درست است. این مقادیر را که برای حداکثر شتاب 1.0 g در نظر گرفته شده اند برای سایر مقادیر شتاب زمین می توان به همان میزان کاهش داد. ضرایب بزرگنمایی پیشنهادی برای به دست آوردن طیف پاسخ طرح از حداکثر حرکت زمین در جدول (۸-۱) به دست آمده است.



شکل (۸-۱): طیف طراحی پایه برای شتاب 1.0 g*

برای هر مقدار میرایی خط شتاب در سمت چپ، خط سرعت در بالا و خط جاب جایی در سمت راست نمودار رسم می شود. در فرکانس تقریبی 6 cps [شکل (۸-۱)] خط شتاب توسط خطی قطع می گردد که از آن نقطه برای میرایی ۲٪ به سمت خط شتاب زمین

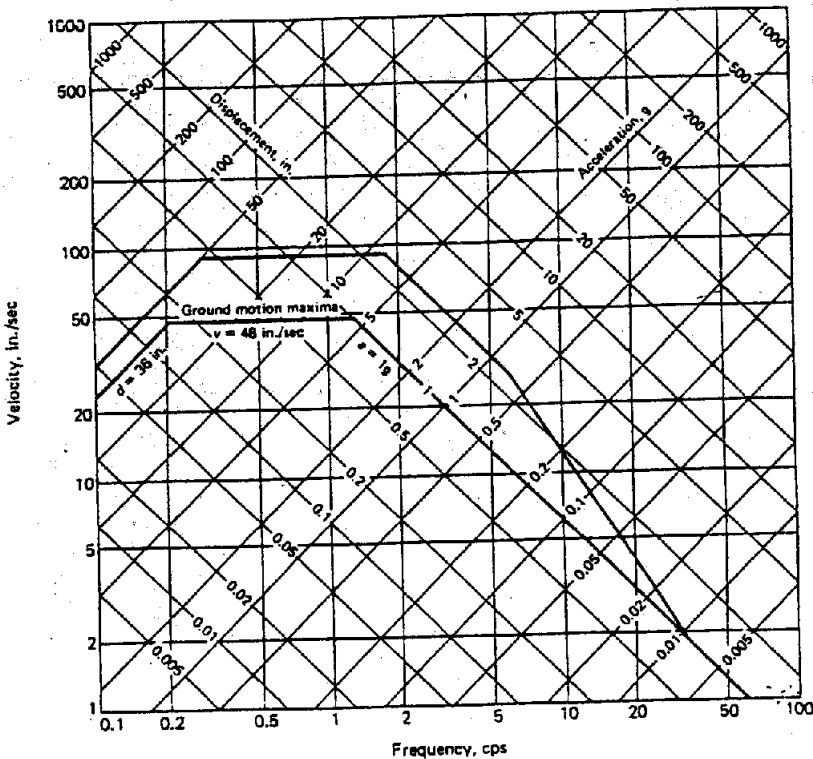
*Newmark, N.M. and Hall, W.J. "Procedures and criteria for Earthquake resistant design", "Building practices for Disaster Mitigation", Dept. of Commerce, Feb 1973

در فرکانس 30 cps امتداد پیدا می نماید. برای سایر مقادیر میرایی خط مربوط به آن به موازات خط مربوط به میرایی ۲٪ رسم می گردند. طیفی را که به این ترتیب حاصل می شود می توان به عنوان طیف طراحی ارتجایی مورد استفاده قرار داد. از ضرایب بزرگنمایی جدول (۱-۸) برای رسم طیف شکل (۸-۹) استفاده شده است.

مثال (۱-۸): سازه ای که به صورت تک درجه مدل شده است دارای پریود می باشد. با استفاده از روش طیفی حداکثر شتاب مطلق، حداکثر جابه جایی نسبی و حداکثر سرعت مجازی آن را برای حالتی زیر با فرض ۱۰٪ میرایی به دست آورید:

(الف) زلزله ال سنترو سال ۱۹۴۰

(ب) زلزله طرح با حداکثر شتاب زمین



شکل (۱-۸): طیف طرح پایه برای شتاب ۱/۰ و میرایی ۱۰٪

*Newmark, N.M. and Hall, W.J " Procedures and criteria for Earthquake resistant design", "Building practices for Disaster Mitigation", Dept. of Commerce, Feb 1973

جدول (۸-۱): ضرایب نسبی بزرگنمایی طیف

میرایی %	ضرایب بزرگنمایی		
	جابہ جایی	سرعت	شتاب
0	2.5	4.0	6.4
0.5	2.2	3.6	5.8
1	2.0	3.2	5.2
2	1.8	2.8	4.3
5	1.4	1.9	2.6
7	1.2	1.5	1.9
10	1.1	1.3	1.5
20	1.0	1.1	1.2

از طیف پاسخ شکل (۸-۸) برای $f = \frac{1}{T} = 1.0$ cps و میرایی $\xi = 0.10$ مقادیر زیر خوانده می شوند:

$$S_D = 3.3 \text{ in}$$

$$S_V = 18.5 \text{ in/sec}$$

$$S_a = 0.30 \text{ g}$$

از طیف طرح پایه برای فرکانس $f = 1$ cps و میرایی ۱۰٪ پس از اصلاح مربوط به شتاب 0.32 g زمین مقادیر زیر به دست می آیند

$$S_D = 9.5 \times 0.32 = 3.04 \text{ in}$$

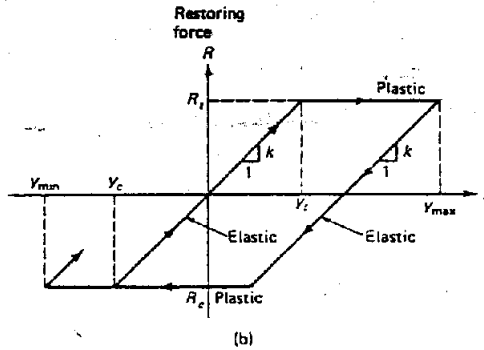
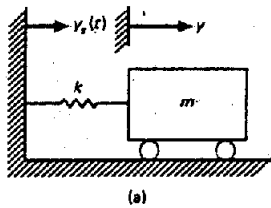
$$S_V = 60 \times 0.32 = 19.2 \text{ in/sec}$$

$$S_a = 0.95 \times 0.32 \text{ g} = 0.304 \text{ g}$$

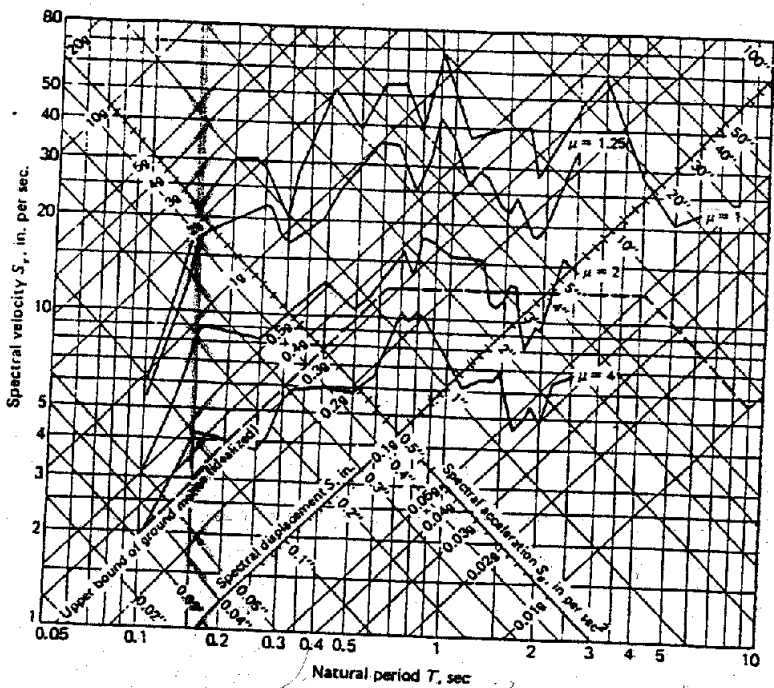
۸-۵- طیف پاسخ سیستمهای غیرارتجاعی

برای بعضی حوادث شدید مانند انفجارات هسته ای و زلزله های شدید گاهی لازم است سازه را برای تحمل تغییر شکلهای بیش از حد ارتجاعی طراحی نمود. به عنوان مثال، در طرح لرزه ای برای زلزله هایی با شدت متوسط معقول است سازه ای که خوب طراحی و اجرا شده است رفتار ارتجاعی داشته باشد؛ اما برای زلزله های بسیار شدید این فرض حتی برای سازه های خوب طراحی شده منطقی نمی باشد. گرچه می توان سازه را برای تحمل زلزله های شدید طراحی نمود اما از نظر اقتصادی مقرون

به صرفه نیست که ساختمان را طوری طراحی نمود که در مقابل زلزله های شدید رفتار ارتجاعي داشته باشد. به منظور طراحی سازه برای تغییر شکلهای بیش از حد خطی، طیف پاسخ برای محدوده غیرخطی نیز رسم شده است. عموماً در دینامیک سازه ها برای این کار از رفتار ارتجاعي خمیری که در فصل ۷ مفصلاً مورد بحث قرار گرفت استفاده می شود. این گونه رفتار در شکل (۸-۱۱) نشان داده شده است. بر اساس این رفتار اگر بار، قبل از جاری شدن برداشت شود جابه جایی در امتداد بارگذاری برگشت خواهد نمود. اما هنگامی که جاری شدن در y_i اتفاق می افتد نیروی مقاوم قنر در R_i ثابت باقی خواهد ماند و تا زمانی که جهت حرکت عوض نشود جابه جایی افزایش پیدا خواهد نمود. پس از رسیدن به يك جابه جایی حداکثر جهت حرکت عوض شده و سیستم مجدداً وارد يك مرحله ارتجاعي موازی با مرحله اولیه می شود تا اینکه نیروی قنر به مقدار منفی R_c رسیده و در جهت مخالف جاری گردد.



شکل (۸-۱۱): رابطه نیرو - جابه جایی برای يك سیستم تک درجه ارتجاعي خمیری



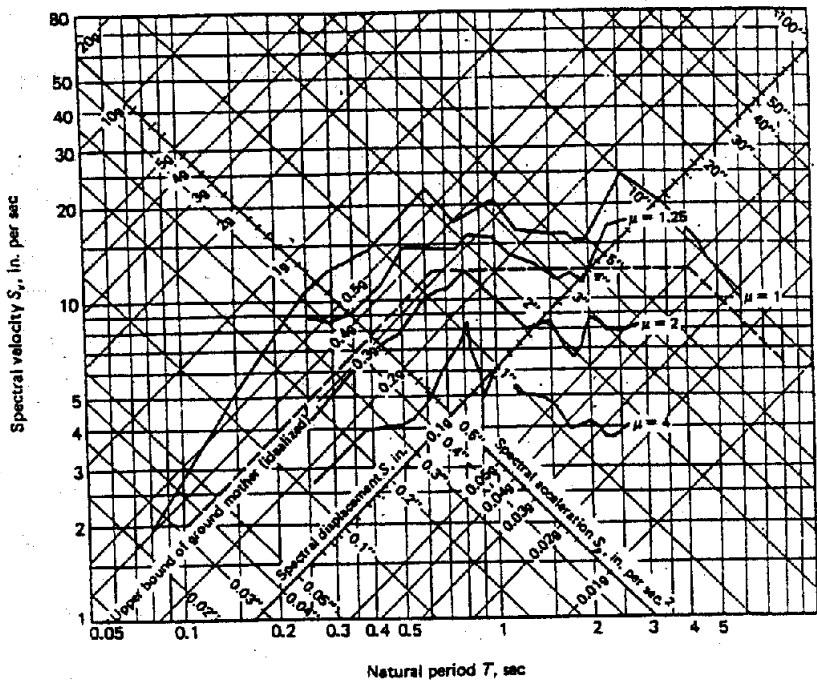
شکل (۸-۱۲): طیف پاسخ زلزله ال سنتروسال ۱۹۴۰ برای سیستمهای غیرمیرای ارتجاسی خمیری تهیه طیف پاسخ برای سیستمهای غیرخطی مشکل تر از سیستمهای خطی است. با وجود این طیف پاسخ غیرخطی برای تعدادی از زلزله ها و بارهای دیگر تهیه شده است. این طیف ها معمولاً برای نسبتهای مختلف شکل پذیری μ رسم می گردند. این نسبت طبق تعریف نسبت جابه جایی حداکثر سازه در محدوده غیر ارتجاسی به جابه جایی مربوط به نقطه جاری شدن y است یعنی:

$$\mu = \frac{y_{max}}{y} \quad (۲۲-۸)$$

1) ductility Ratio

*Design of Multistory Reinforced Building for Earthquake Motions by J.A. Blum, N.M. Newmark, and L.H. Corning, portland cement Association, 1961.

طیف پاسخ يك سيستم تك درجه ناميرا تحت اثر زلزله ال سنترو سال ۱۹۴۰ برای نسبت‌های مختلف شکل پذیری در شکل (۸-۱۲) نشان داده شده است. این طیف که در مقیاس لگاریتمی سه جانب رسم شده است برای يك سيستم تك درجه ناميرا با پریود طبیعی T و نسبت شکل پذیری μ به طور همزمان مقادیر شتاب، سرعت و جابه جایی طیفی را نشان می دهد. طیف پاسخ این زلزله برای سیستم‌های ارتجاعي خمیری با $\mu = 1$ میرایی نیز در شکل (۸-۱۲) نشان داده شده است. مقادیر شتاب طیفی و سرعت طیفی به طور مستقیم از این در طیف خوانده میشوند ولی برای به دست آوردن مقدار صحیح جابه جایی طیفی باید مقدار قرائت شده را در نسبت شکل پذیری ضرب نمود.

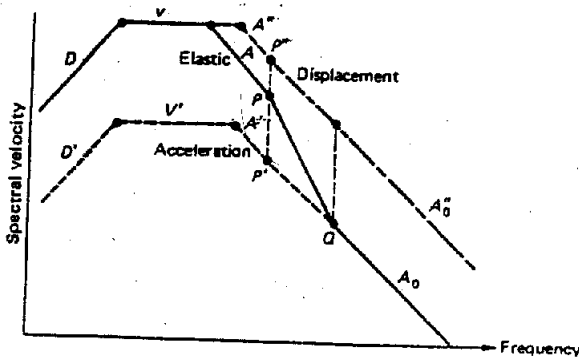


شکل (۸-۱۲): طیف پاسخ سیستم‌های ارتجاعي خمیری با $\mu = 1$ میرایی برای زلزله ال سنترو سال ۱۹۴۰*

*Design of Multistory Reinforced Building for Earthquake Motions by J.A. Blum, N.M. Newmark, and L.H. Corning, Portland Cement Association, 1961.

۸-۶- طیف پاسخ برای طرح غیرارتجاعي

در بخش قبل طيف طرح زلزله برای يك سيستم ارتجاعي با نسبتهاي مختلف ميرايي در شكل (۸-۶) نشان داده شد. همان روش رسم طيف پاسخ پايه را می توان برای طراحی در محدوده غير ارتجاعي به كار برد. شكل ظاهري طيف پاسخ سيستمهاي ارتجاعي خميري با شكل ظاهري طيف سيستمهاي ارتجاعي يكسان است و فقط منحنی ها مقداری، که بستگی به نسبت شكل پذيری μ دارد، به سمت پايين كشيده می شوند. شكل (۸-۱۴) يك روش جاری را که برای رسم طيف غيرخطی پيشنهاد شده است نشان می دهد. در اين شكل خط $D-V-A-A_0$ همان طيف پاسخ طرح سيستم ارتجاعي است. طيف پاسخ غير ارتجاعي توسط دو خط نشان داده شده است. يك خط که جابه جایی ناميده شده برای به دست آوردن حداکثر جابه جایی و دیگری که شتاب ناميده شده برای تعيين حداکثر شتاب مورد استفاده قرار می گيرد. در فرکانسهای خیلی پايين (يا پريودهای خیلی بالا) حداکثر جابه جایی طيفی با حداکثر جابه جایی زمين برابر است يعنی برای سازه های خیلی نرم جابه جایی ها در محدوده فرکانسهای پايين تغيير نمی کنند. از طرف ديگر برای فرکانسهای خیلی بالا (يا پريودهای خیلی پايين) شتاب طيفی با حداکثر شتاب زمين برابر است يعنی برای سازه های خیلی سخت شتاب زمين عيناً به سازه منتقل می شود.



شكل (۸-۱۴): طيف پاسخ طرح برای سيستم خميري*

* Procedures and Criteria for Earthquake Resistant Design

لذا در این ناحیه شتابها تغییر نمی کنند. در ناحیه فرکانسهای پایین که جابه جایی ها تغییر نمی کنند شتاب ها کاهش پیدا می نمایند زیرا نیرو در سازه های ارتجاعی خمیری پس از جاری شدن افزایش پیدا نخواهد نمود، لذا شتاب هم هنگام جاری شدن به حداکثر مقدار خود خواهد رسید [شکل (۸-۱۱)]. بنابراین شتاب به اندازه نسبت $\frac{1}{\mu}$ کاهش پیدا خواهد نمود. در انتهای دیگر طیف که شتابها تغییر نکرده اند حداکثر شتاب سازه با حداکثر شتاب زمین برابر است اما جابه جایی ها از جابه جایی های ارتجاعی بیشتر است. میزان انرژی ذخیره شده در سازه برای جابه جایی های ارتجاعی و ارتجاعی خمیری باید برابر باشد. خطهای A, A' در شکل (۸-۱۴) با اندازه ضریب $\sqrt{2(\mu-1)}$ با هم تفاوت دارند که این ضریب از مساوی قرار دادن انرژی ذخیره شده در سازه در این در حالت به دست آمده است.

روش رسم طیف پاسخ برای رفتار ارتجاعی خمیری توسط نیومارک و هال * ارائه شده است. به طور خلاصه برای این کار با توجه به شکل (۸-۱۴) باید به شکل زیر عمل نمود:

(۱) بر روی کاغذ لگاریتمی سه جانبه باید طیف طرح ارتجاعی مربوط به میرایی مورد نظر را رسم نمود
[خط $D-V-A-A_0$ شکل ۸-۱۴].

(۲) جابه جایی ها و سرعت های در خط D و V را بر نسبت شکل پذیری μ تقسیم نمود تا دو خط D' و V' به موازات آنها حاصل شوند.

(۳) شتاب نقطه P بر طیف ارتجاعی را بر $\sqrt{2(\mu-1)}$ تقسیم کرد تا نقطه P' به دست آید.

(۴) از نقطه P' خط A' را با زاویه 45° رسم نمود تا خط V' را قطع نماید.

(۵) P' را به Q' وصل نمود تا طیف شتاب کامل گردد.

(۶) با ضرب نمودن شتاب مربوط به خطهای A و A_0 در μ خطهای A' و A_0' را به موازات آنها رسم نمود.

* Newmark and Hall

به این ترتیب خط $D^2-V^2-A^2-A_0$ طیف غیر ارتجاعی شتاب و خط $D-V-A^2-A_0$ طیف غیر ارتجاعی جابه جایی خواهد بود. این دو خط برای میرایی مربوط به طیف ارتجاعی پایه $D-V-A-A_0$ و نسبت شکل پذیری مشخص رسم شده اند و برای سایر مقادیر میرایی و شکل پذیری باید به همین ترتیب طیف مربوط را رسم نمود.

مثال (۸-۲) پاسخ سیستم تک درجه مثال (۸-۱) را با فرض رفتار ارتجاعی خمیری و نسبت شکل پذیری $\mu = 4.0$ به دست آورید.

الف) با استفاده طیف پاسخ زلزله ال سنترال برای میرایی ۱۰٪ (شکل ۸-۱۲) و نسبت شکل پذیری $\mu = 4.0$ و $T = 1$ sec داریم:

$$S_D = 1.0 \times 4.0 = 4.0 \text{ in}$$

$$S_V = 6.2 \text{ in / sec}$$

$$S_a = 0.1 \text{ g}$$

همان طور که قبلاً گفته شد، مقدار شتاب و سرعت طیفی مستقیماً از نمودار به دست می آیند اما مقدار جابه جایی طیفی را باید در μ ضرب نمود. لذا مقدار قرائت شده از طیف در ۴ ضرب شده است.

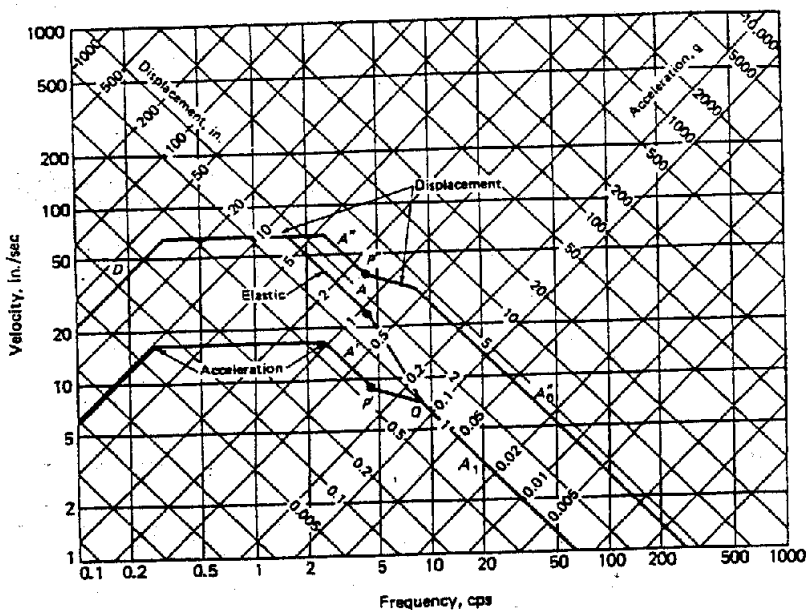
ب) ابتدا باید طیف پاسخ غیر ارتجاعی طرح را رسم نمود. برای این کار از طیف پاسخ طرح ارتجاعی با میرایی ۱۰٪ [شکل (۸-۱)] و روشهای ارائه شده در بالا استفاده می کنیم [شکل (۸-۱۰)]. در این طیف برای $f = 1$ cps خواهیم داشت:

$$S_D = 10 \times 0.32 = 3.2 \text{ in}$$

$$S_V = 15.5 \times 0.32 = 4.96 \text{ in / sec}$$

$$S_a = 0.23 \times 0.32 \text{ g} = 0.0736 \text{ g}$$

همان طور که دیده می شود نتایج به دست آمده از طیف طرح با نتایج حاصل از طیف زلزله ال سنترال کمی متفاوت است. همچنین اگر این مقادیر را با مقادیر مثال (۸-۱) که برای رفتار ارتجاعی به دست آمده بود مقایسه کنیم مشاهده می شود که حداکثر جابه جایی نسبی دارای مقدار مشابهی است در حالی که شتاب و سرعت نسبی خیلی کمتر است. این مشاهده در حالت کلی برای هر نوع سازه در مقایسه رفتار غیر ارتجاعی و ارتجاعی آن وجود دارد.



شکل (۸-۱۵): طیف طراحی الاستوپلاستیک با $\mu = 4.0$ و $\xi = 10\%$

۸-۷- خلاصه

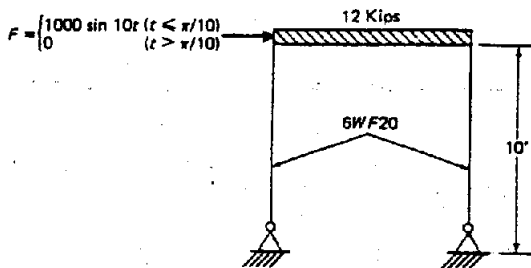
طیفهای پاسخ نمودارهایی هستند که حداکثر پاسخ یک سیستم تک درجه را تحت اثر یک تحریک خاص نشان می دهند. برای رسم این نمودارها باید سیستمهای تک درجه با فرکانسهای متوالی و میرایی های مختلف را حل نمود. هر بار حل فقط یک نقطه (حداکثر مقدار) از طیف پاسخ را به دست می دهد. برای حل سیستمهای تک درجه در حالت ارتجایی از انتگرال دو هامل (فصل ۴) و در حالت غیر ارتجایی از روش گام به گام یا شتاب خطی استفاده می شود. چون برای رسم هر طیف باید تعداد زیادی سیستم را حل نمود، لذا این کار حتی با استفاده از کامپیوتر نیز کاری طولانی و وقت گیر است. اما هنگامی که این کار یک بار انجام گرفت و طیف مربوط تهیه گردید تنها محاسبه لازم برای تحلیل سازه ها تحت اثر آن بارگذاری دینامیکی، فقط محاسبه فرکانس طبیعی و استفاده از طیف خواهد بود.

در فصلهای بعدی که در مورد سازه های چنددرجه آزادی بحث خواهد شد نشان داده می شود

که تحلیل يك سیستم بالدرجه آزادی تبدیل به حل سیستم تك درجه خواهند شد، لذا طیف پاسخ سیستمهای تك درجه برای سیستمهای چنددرجه آزادی هم مفید خواهد بود. باید توجه داشت که درك كامل مفاهیم و روشهای حل سیستمهای تك درجه اهمیت فراوان دارد زیرا تمام این روشها برای حل يك سیستم چند درجه پس از تبدیل به سیستمهای تك درجه مستقل قابل استفاده است.

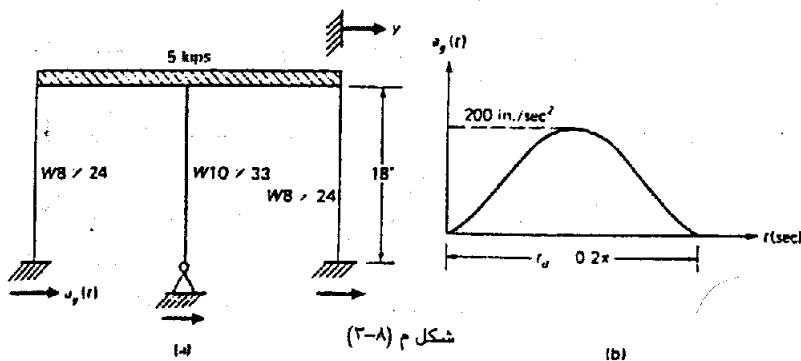
مسائل

۱-۸- قاب فلزی شکل م (۲-۸) تحت اثر يك نیروی افقی $(1000 \sin 10t \text{ lb})$ در بالای قاب قرار دارد. با استفاده از طیف پاسخ مربوط حداکثر جابه جایی قاب را به دست آورید. (از میرایی صرف نظر کنید)



شکل م (۱-۸)

۲-۸- حداکثر تنش در ستونهای قاب مسأله (۱-۸) را به دست آورید.
 ۳-۸ قاب شکل م (۲-۸) را در نظر بگیرید که تحت اثر يك تحريك تکیه گاهی قرار دارد. این تحريك نیم دور تابع $a_g = 200 \sin 10t \text{ in/sec}^2$ مطابق شکل م (۳-۸) ب) است. حداکثر جابه جایی بالای قاب را نسبت به تکیه گاه با صرف نظر از میرایی به دست آورید.



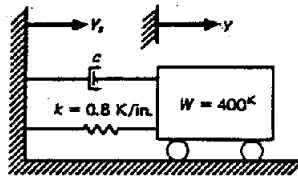
شکل م (۳-۸)

۴-۸- حداکثر تنش در ستونهای قاب مسأله (۳-۸) را به دست آورید.

۵-۸- قاب شکل م (۱-۸) تحت اثر زلزله ال سنتر و قرار دارد. با فرض ۱۰٪ میرایی و رفتار ارتجاعي مقادير طيفی جابه جایی سرعت و شتاب را به دست آورید.

۶-۸- مقادير طيفی جابه جایی، سرعت و شتاب مسأله (۵-۸) را برای طيف طرح پایه شکل (۹-۸) به دست آورید. (مقادير طيفی را در ۰.۳۲ ضرب کنید)

۷-۸- سازه ای که به صورت سيستم جرم- فنر شکل م (۷-۸) مدل شده است تحت اثر زلزله ال سنتر و قرار گرفته است. با فرض رفتار ارتجاعي و استفاده از طيف مربوط حداکثر جابه جایی نسبی بين جرم و تکیه گاه و همچنین حداکثر نیروی فنر را محاسبه کنید. (از میرایی صرف نظر شود)



شکل م (۷-۸)

- ۸-۸- مسأله (۷-۸) را با فرض ۱۰٪ میرایی حل کنید.
- ۹-۸- نیروی منتقل شده به پی را برای سیستم مسأله (۸-۸) تعیین کنید.
- ۱۰-۸- سیستم جرم و فنر مسأله (۷-۸) را با فرض رفتار ارتجاعي خمیری در نظر بگیرید. حداکثر نیروی فنر در کشش و فشار معادل نصف حداکثر نیروی ارتجاعي فنر در مسأله (۷-۸) است. مقدار جابه جایی طيفی را با صرف نظر از میرایی به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا $\mu = 2$ فرض کنید و S_D را به دست آورید. سپس μ را محاسبه کنید و S_D جدید را به دست آورید و ...)
- ۱۱-۸- مسأله (۱۰-۸) را برای ۱۰٪ میرایی حل کنید.
- ۱۲-۸- یک سازه که به صورت يك سیستم تك درجه مدل شده است دارای پریود $T = 0.5 \text{ sec}$ است. با استفاده از طيف پاسخ حداکثر شتاب مطلق، حداکثر جابه جایی نسبی و حداکثر سرعت مجازی را برای حالتی زیر با صرف نظر از میرایی محاسبه کنید:
- الف) زلزله ال سنتر و سال ۱۹۴۰؛
- ب) طيف طرح با حداکثر شتاب $0.3g$ برای زمین.
- ۱۳-۸- مسأله (۱۲-۸) را برای رفتار ارتجاعي خمیری با شکل پذیری $\mu = 4$ حل کنید.

بخش II

سازه های مدل شده به
صورت ساختمانهای برشی

فصل نهم

ساختمانهای برشی چند طبقه

در بخش ۱ کتاب پاسخ دینامیکی سازه هایی را که به صورت يك درجه آزادی مدل شده اند تحلیل نمودیم. اگر سازه در هنگام ارتعاش فقط دارای يك شکل ارتعاشی باشد مدل تك درجه جواب دقیق خواهد داد. در غیر این صورت اگر سازه دارای چند شكل ارتعاشی باشد مدل تك درجه فقط جواب تقریبی آن است.

سازه ها را همواره نمی توان به صورت تك درجه مدل كرد بلکه عموماً باید توسط مدلهای چند درجه آزادی نشان داده شوند. در حقیقت سازه ها سیستمهای پیوسته ای هستند که دارای بی نهایت درجه آزادی می باشند. روشهای تحلیلی برای تشریح رفتار دینامیکی سازه های پیوسته با خصوصیات مصالح یکنواخت و هندسه منظم وجود دارند. این روشهای تحلیلی گرچه از نظر به دست آوردن اطلاعات برای مدل سازی غیر پیوسته سازه ها مفید هستند، اما نسبتاً پیچیده بوده و فقط برای سازه های نسبتاً ساده قابل کاربرد می باشند این روشها دارای محاسبات ریاضی زیادی از جمله حل معادلات دیفرانسیل نسبی هستند. روشهای مذکور، در فصل ۲۰ ارائه شده اند. در این فصل یکی از عملی ترین انواع سازه های چند درجه آزادی یعنی ساختمانهای برشی چند طبقه مورد بررسی قرار گرفته اند.

۹-۱- معادلات سختی برای ساختمان برشی

يك ساختمان برشی طبق تعریف سازه ای است که در تراز کفهای افقی آن هیچ گونه دورانی وجود ندارد. به این ترتیب ساختمان تغییر شکل یافته دارای «ضمای»^۱ مانند تیر طره ای است که فقط تغییر شکلهای برشی داشته باشد و به همین دلیل ساختمان برشی نامیده شده است. برای اینکه چنین تغییر شکلی در ساختمان به وجود آید باید فرض کنیم که:

- جرم کل سازه در تراز کفها متمرکز شده است؛

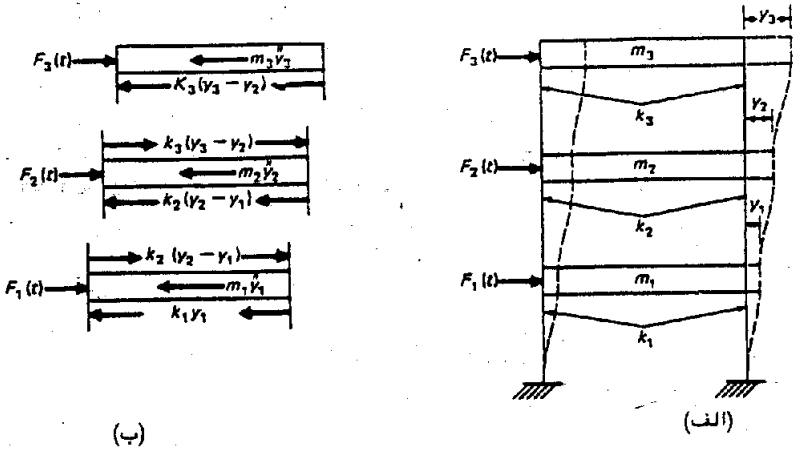
- تیرها نسبت به ستونها کاملاً صلب هستند؛

- تغییر شکل سازه مستقل از نیروی محوری ستونهاست.

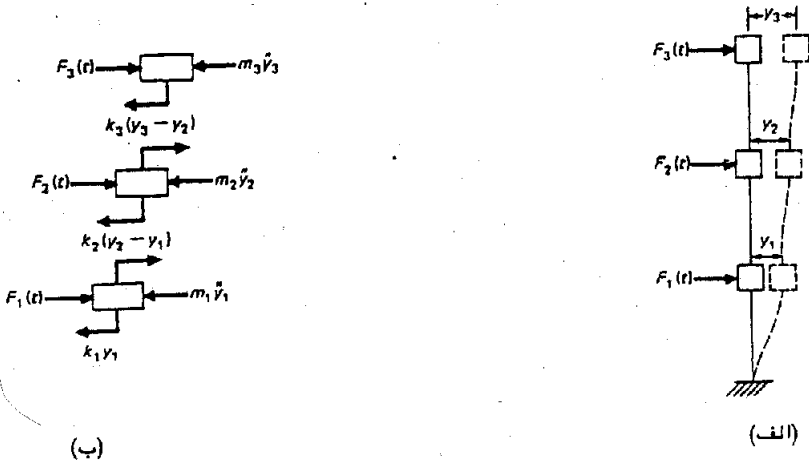
فرض اول، يك سازه با بی نهایت درجه آزادی (به علت جرم گسترده) را با سازه ای با تعداد محدودی درجه آزادی برابر با تعداد جرمهای متمرکز شده در تراز کفها تبدیل می نماید. يك سازه سه طبقه که به صورت يك ساختمان برشی مدل شده است [شکل (۹-۱)، الف] دارای سه درجه آزادی یعنی سه عدد جابه جایی در تراز کفهاست. فرض دوم از دوران گره های موجود بین تیرها و ستونها جلوگیری مینماید. فرض سوم به معنی این است که تیرهای صلب ضمن حرکت، افقی باقی می مانند.

1) feature

باید توجه داشت که ساختمان می تواند دارای هر تعداد دهانه باشد و فقط از نظر راحتی است که ساختمان را با يك دهانه نشان می دهیم. حتی می توانیم ساختمان را به صورت يك تك ستون با جرمهای متمرکز در تراز کفها که فقط دارای جابه جایی افقی هستند نمایش دهیم، [شکل (۹-۲، الف)]. شکل دیگر نمایش آن به صورت يك سیستم چند جرم و فنر مطابق شکل (۹-۳، الف) است. در هر يك از این مدلها ضریب سختی یا ثابت فنری k_i بین دو جرم متوالی مقدار نیروی لازم برای ایجاد يك جابه جایی نسبی واحد بین آن دو جرم است.



شکل (۹-۱): مدل نمایشی تك دهانه برای يك ساختمان پرشی



شکل (۹-۲): مدل نمایشی تك ستون برای يك ساختمان پرشی

برای يك ستون منشوری دو سرگیردار ضریب سختی برابر است با:

$$k = \frac{12EI}{L^3} \quad (۱-۹) \text{ الف}$$

و برای يك ستون يك سرگیردار يك سر مفصل برابر است با :

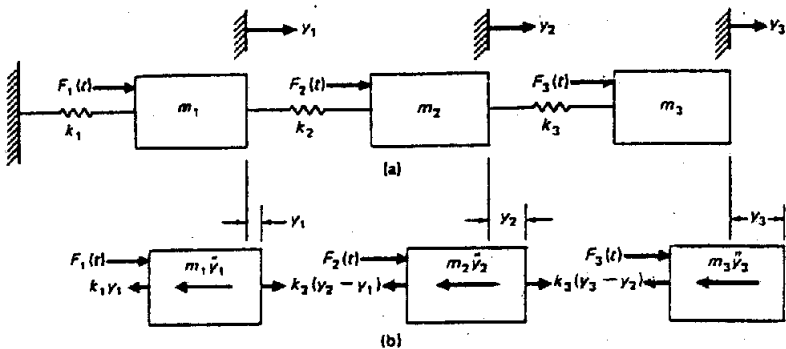
$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (۱-۹) \text{ ب}$$

که E مدول ارتجاعی مصالح، I گشتاور اینرسی مقطع ستون و L ارتفاع طبقه است. بدیهی است که تمام مدل‌های نشان داده شده در شکل‌های (۱-۹) تا (۳-۹) برای ساختمان برشی معادل هستند. بنابراین معادلات زیر را می‌توان از نوشتن تعادل نیروهای نشان داده شده بر روی ترسیمه آزاد هر يك از جرمها و نو هر يك از مدلها به دست آورد. لذا:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \quad (۳-۹)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - F_3(t) = 0$$



شکل (۳-۹): مدل نمایشی چند جرم و فنر برای يك ساختمان برشی

این دستگاه معادلات فرمول بندی سختی معادلات حرکت يك ساختمان برشی سه طبقه است. این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = [F] \quad (۳-۹)$$

که [M] و [K] به ترتیب ماتریسهای سختی و جرم هستند و عبارتند از:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (۳-۹)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

$\{y\}$ ، $\{\ddot{y}\}$ و $\{F\}$ به ترتیب بردارهای جابه جایی، شتاب و نیرو هستند و برابرند با:

$$\{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \{\ddot{y}\} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} \quad \{F\} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

باید توجه داشت که ماتریس جرم، رابطه (۹-۴)، ساختمان برشی یک ماتریسی قطری (اعضای غیر صفر فقط بر روی قطر اصلی قرار دارند) است. اعضای ماتریس سختی، «ضرایب سختی» نامیده می شوند.

به طور کلی ضریب سختی k_{ij} از طریق تعریف عبارت است از مقدار نیرو در مولفه i هنگامی که مولفه j دارای تغییر مکان واحد بوده و سایر مولفه ها جابه جایی نداشته باشند. به عنوان مثال، ضریب واقع در سطر دوم و ستون دوم در رابطه (۹-۵)، $k_{22} = k_2 + k_3$ ضریب لازم در تراز کف دوم به ازای جابه جایی واحد در همان تراز می باشد.

۹-۲- معادلات نرمی^۲ برای ساختمان برشی

روش دیگر به دست آوردن معادلات حرکت یک سازه روش فرمول بندی نرمی است. در این روش خصوصیات ارتجاعی سیستم توسط «ضرایب نرمی»^۳ مشخص می شوند. این ضرایب طبق تعریف عبارتند از: جابه جایی در یک مولفه تحت اثر نیروی واحد در یکی از مولفه ها، مشخصاً ضریب نرمی f_{ij} عبارت است از جابه جایی در مولفه i هنگامی که یک نیروی استاتیکی واحد در مولفه j اثر کند. (شکل ۹-۴) ضرایب نرمی مربوط به نیروی واحد در هر یک از ترازهای ساختمان برشی را نشان می دهد. با استفاده از این ضرایب و اصل جمع آثار قوامی توان گفت که جابه جایی در هر مولفه برابر است با مجموع حاصلضرب ضرایب نرمی آن مولفه در نیروهای مربوط به آن. نیروهای مؤثر بر ساختمان برشی سه طبقه (شامل نیروهای اینرسی) در شکل (۹-۵) نشان داده شده اند. بنابراین مولفه های جابه جایی این ساختمان برشی سه طبقه را بر حسب ضرایب نرمی می توان بدین صورت بیان نمود:

1) Stiffness Coefficients

2) flexibility

3) flexibility coefficients

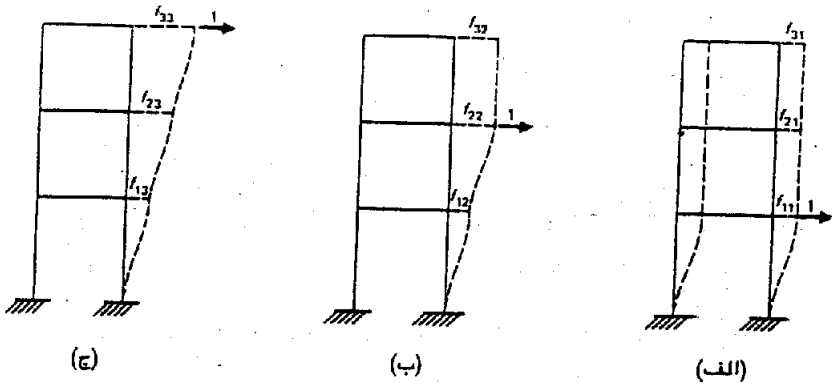
$$y_1 = (F_1(t) - m_1 \ddot{y}_1) f_{11} + (F_2(t) - m_2 \ddot{y}_2) f_{12} + (F_3(t) - m_3 \ddot{y}_3) f_{13}$$

$$y_2 = (F_1(t) - m_1 \ddot{y}_1) f_{21} + (F_2(t) - m_2 \ddot{y}_2) f_{22} + (F_3(t) - m_3 \ddot{y}_3) f_{23}$$

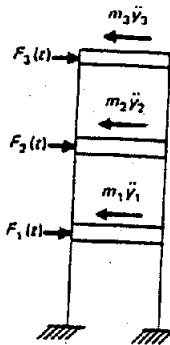
$$y_3 = (F_1(t) - m_1 \ddot{y}_1) f_{31} + (F_2(t) - m_2 \ddot{y}_2) f_{32} + (F_3(t) - m_3 \ddot{y}_3) f_{33}$$

با مرتب کردن روابط و استفاده از شکل ماتریسی خواهیم داشت:

$$\{y\} = [F]\{F\} - [F][M]\{\ddot{y}\} \quad (7-9)$$



شکل (7-9): ضرایب نرمی یک ساختمان پرشی سه طبقه



شکل (8-9): نیروهای مؤثر بر یک ساختمان پرشی سه طبقه

که $[M]$ ماتریس جرم، رابطه (7-9) و $\{F\}$ ماتریس نرمی و برابر است با:

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (8-9)$$

و $\{y\}$ ، $\{\bar{y}\}$ و $[F]$ به ترتیب بردارهای جابه جایی، شتاب و نیرو مطابق رابطه (8-9) هستند.

9-3- رابطه بین ماتریسهای سختی و نرمی

بنا به تعاریف قبل، ضرایب سختی و نرمی نشان دهنده رابطه بین نیروهای استاتیکی وارد بر سازه و تغییر شکل‌های حاصل از آن می باشد. رابطه بین نیروهای استاتیکی وارد بر سازه و جابه جایی‌های حاصل از آن را می توان با صفر قرار دادن بردار شتاب $\{\bar{y}\}$ در هر یک از روابط (9-8) یا (9-7) به دست آورد. لذا داریم:

$$[K]\{y\} = \{F\} \quad (9-9)$$

$$[f]\{F\} = \{y\} \quad (10-9)$$

از این دو رابطه دیده می شود که ماتریس سختی $[K]$ و ماتریس نرمی $[f]$ معکوس یکدیگرند. یعنی:

$$[K] = [f]^{-1}$$

یا

$$[f] = [K]^{-1} \quad (11-9)$$

بنابراین ماتریس نرمی $[f]$ را می توان از معکوس نمودن ماتریس سختی و یا مستقیماً با استفاده از تعریف ضرایب نرمی به دست آورد. یا استفاده از روش دوم برای ساختمان برداری سه طبقه شکل (9-4، الف) داریم:

$$k_1 f_{11} = 1$$

$$f_{11} = f_{21} = f_{31} = \frac{1}{k_1}$$

و

به همین ترتیب برای شکل‌های (9-4، ب) و (9-4، ج) خواهیم داشت:

$$f_{22} = f_{32} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad f_{12} = \frac{1}{k_1}$$

$$f_{33} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}, \quad f_{23} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

و

$$f_{13} = \frac{1}{k_1}$$

و

لذا ضرایب نرمی قشرهای موازی، از جمع معکوس ثابت‌های فنری آنها به دست می آید. از قرار دادن این ضرایب در ماتریس نرمی نتیجه خواهد شد:

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \quad (12-9)$$

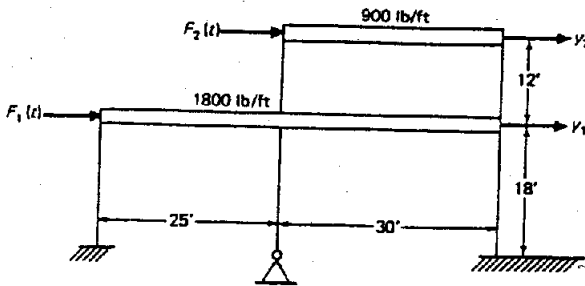
ماتریس نرمی ساختمان برشی به هر تعداد طبقه دارای شکلی مشابه با رابطه (12-9) است.

۴-۹- خلاصه

ایده ال سازی سازه ها به صورت ساختمان برشی مدل ساده ریاضی مفیدی را برای تحلیل دینامیکی سیستمها به وجود می آورد. این مدل را می توان توسط چند جرم صلب متمرکز که با فنر به هم متصل شده اند نشان داد. برای به دست آوردن معادلات حرکت از دو نوع فرمول بندی می توان استفاده نمود: روش سختی که معادلات حرکت برحسب ضرایب سختی بیان می شوند؛ و روش نرمی که «معادلات سازگاری» بر حسب ضرایب نرمی بیان می شوند و ماتریسهای سختی و نرمی یک سیستم معکوس یکدیگر هستند.

مسائل

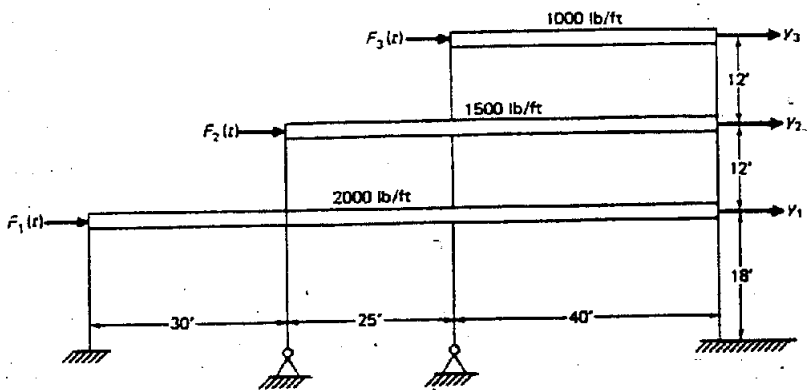
- ۱-۹- برای یک ساختمان برشی سه طبقه نشان دهید که ماتریس سختی، رابطه (9-0)، و ماتریس نرمی، رابطه (9-12)، معکوس یکدیگرند.
- ۲-۹- برای ساختمان برشی دو طبقه شکل م (9-2) ماتریسهای سختی و نرمی را به دست آورید و نشان دهید که معکوس یکدیگرند.



شکل م (۹-۲)

1) Compatibility

۳-۹- ماتریسهای سختی و نرمی را برای ساختمان برشی سه طبقه شکل م (۳-۹) به دست آورید و نشان دهید که این دو ماتریس معکوس یکدیگر هستند. تمام ستونها از نوع $W10 \times 21$ میباشند.



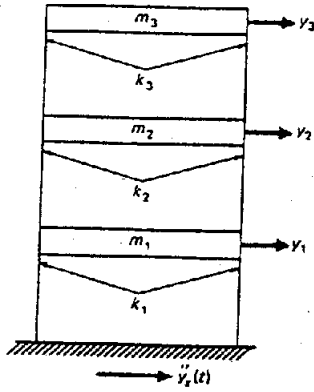
شکل م (۳-۹)

۴-۹- معادله دیفرانسیل حرکت ساختمان برشی شکل م (۳-۹) را به روش سختی به دست آورید. ساختمان را به صورت یک سیستم چند جرم و فنر مدل کنید.

۵-۹- معادله دیفرانسیل حرکت ساختمان برشی شکل م (۳-۹) را به دست آورید. ساختمان را به صورت یک تک ستون با جرم متمرکز در تراز کفها مدل کنید.

۶-۹- ساختمان برشی سه طبقه شکل م (۶-۹) تحت اثر یک شتاب تکیه گاهی $\ddot{y}_g(t)$ قرار دارد. معادله دیفرانسیل حرکت سازه را به روش سختی به دست آورید. جابجایی کفها را نسبت به پی بیان کنید (یعنی $u_i = y_i - y_g$)

۷-۹- نتیجه مسأله (۶-۹) را تعمیم داده و معادلات حرکت یک ساختمان برشی n طبقه را به دست آورید.



شکل م (۹-۲)

فصل دهم

ارتعاش آزاد ساختمان برشی

در ارتعاش آزاد سازه تحت اثر هیچ گونه تحریک خارجی (نیروی یا حرکت تکیه گاه) قرار ندارد و حرکت فقط تحت اثر شرایط اولیه انجام می گیرد. البته بندرت لازم است حرکت ارتعاش آزاد سازه را تعیین کنیم. اما تحلیل ارتعاش آزاد سازه از نظر تعیین خصوصیات دینامیکی آن یعنی فرکانس طبیعی و «شکلهای ارتعاشی» (یا مدی) بسیار اهمیت دارد. برای این کار هر دو روش فرمول بندی معادلات حرکت یعنی روش سختی و روش نرمی را در نظر می گیریم.

۱-۱- فرکانسهای طبیعی و شکلهای ارتعاشی (مدهای نرمال)

در ارتعاش آزاد باید بردار نیروی $\{F\}$ در معادلات حرکت یعنی معادله (۳-۹) در روش سختی و معادله (۷-۹) در روش نرمی را صفر قرار دهیم. با قرار دادن $\{F\} = \{0\}$ در معادلات سختی داریم:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (۱-۱۰)$$

برای ارتعاش آزاد سازه های نامیرا جواب معادلات (۱-۱۰) عبارت است از:

$$y_i = a_i \sin(\omega t - \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

و یا به صورت برداری:

$$\{y\} = \{a\} \sin(\omega t - \alpha) \quad (۲-۱۰)$$

که a_i دامنه حرکت مؤلفه i ام و n تعداد درجات آزادی است. از قرار دادن رابطه (۲-۱۰) در رابطه (۱-۱۰) داریم:

$$-\omega^2 [M]\{a\} \sin(\omega t - \alpha) + [K]\{a\} \sin(\omega t - \alpha) = 0$$

یا

$$([K] - \omega^2 [M])\{a\} = 0 \quad (۳-۱۰)$$

این رابطه یک دستگاه معادلات جبری خطی «همگن»^۲ (سمت راست صفر است) با n جابه جایی مجهول a_i و پارامتر مجهول ω^2 است. حال این نوع معادلات یکی از مسائل مهم ریاضیات به نام «مساله ویژه»^۳ است. برای به دست آوردن جواب غیر صفر $a_i \neq 0$ این دستگاه باید «دترمینان»^۴ ماتریس ضرایب $\{a\}$ را صفر قرار داد. در این حالت داریم:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (۴-۱۰)$$

- 1) Modal shape 2) Homogeneous 3) Eigenproblem 4) Determinant

بسط این دترمینان منجر به یک چند جمله ای مرتبه n بر حسب ω^2 خواهد شد. این چند جمله ای «معادله مشخصه^۱» سیستم نامیده می شود. از حل این چندجمله ای n مقدار برای ω^2 حاصل خواهد شد. از حل دستگاه معادلات (۷-۱۰) به ازای هر یک از مقادیر a_1, a_2, \dots, a_n بر حسب یک ثابت دلخواه به دست خواهد آمد. به همین ترتیب اگر در معادلات نرمی، معادله $\{F\} = 0, (7-9)$ قرار داده شود خواهیم داشت:

$$\{y\} + [F][M]\{\ddot{y}\} = \{0\} \quad (5-10)$$

چنانچه مجدداً جواب را معادله هارمونیک (۷-۱۰) انتخاب کنیم و در این معادله قرار دهیم نتیجه خواهد شد:

$$\{a\} = \omega^2 [f][M]\{a\} \quad (6-10)$$

یا

$$\frac{1}{\omega^2} \{a\} = [D]\{a\} \quad (7-10)$$

که $[D]$ «ماتریس دینامیکی^۲» نامیده می شود و طبق تعریف برابر است با:

$$[D] = [f][M] \quad (8-10)$$

معادله (۷-۱۰) را به شکل زیر هم می توان نوشت:

$$\left[[D] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right] \{a\} = 0 \quad (9-10)$$

که $[I]$ ماتریس واحد است. برای به دست آوردن جواب غیر صفر معادله (۹-۱۰) دترمینان ماتریس ضرایب $\{a\}$ را باید صفر قرار داد، یعنی:

$$\left| [D] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right| = 0 \quad (10-10)$$

معادله (۱۰-۱۰) یک چندجمله ای مرتبه n بر حسب $\frac{1}{\omega^2}$ می باشد. این چندجمله ای

معادله مشخصه سیستم در روش نرمی است. به ازای هر یک از n جواب $\frac{1}{\omega^2}$ معادله

(۱۰-۱۰) و حل معادله (۹-۱۰) مقادیر a بر حسب یک ثابت دلخواه به دست می آید.

محاسبات عددی را با حل یک مثال بهتر می توان نشان داد.

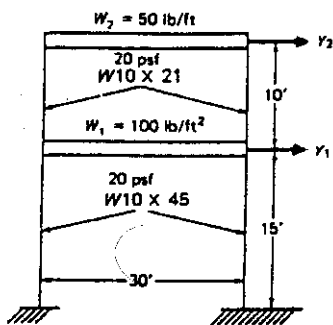
مثال (۱۰-۱): قاب فلزی شکل (۱۰-۱) را در نظر بگیرید وزن کفها و دیوارها که شامل

وزن سازه است در شکل نشان داده شده است. فاصله قابها از یکدیگر 15 ft است.

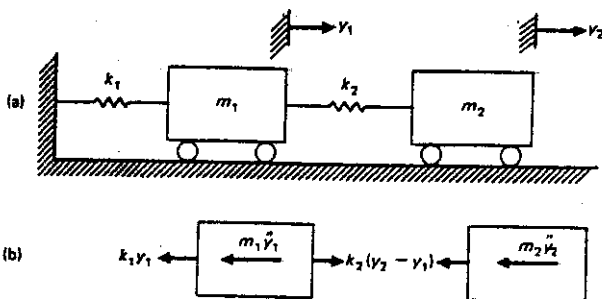
فرکانسهای طبیعی و شکلهای ارتعاشی آن را به دست آورید.

- 1) Characteristic equation 2) Dynamic Matrix

ساختمان به صورت ساختمان برشی مدل می شود که می توان آنرا توسط سیستم جرم-فنر شکل (۲-۱۰) نشان داد.



شکل (۱-۱۰): ساختمان برشی دو طبقه مثال (۱-۱۰)



شکل (۲-۱۰): مدل چندجرم - فنر برای ساختمان برشی دو طبقه الف) مدل ب) ترسیمه جسم آزاد

جرم متمرکز کفها و دیوارهای اطراف برابر است با:

$$W_1 = 100 \times 30 \times 15 + 20 \times 12.5 \times 15 \times 2 = 52500 \text{ lb}$$

$$m_1 = 136 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}$$

$$W_2 = 50 \times 30 \times 15 + 20 \times 5 \times 15 \times 2 = 25500 \text{ lb}$$

$$m_2 = 66 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}$$

چون تیرها صلب فرض شده اند سختی (ثابت فنری) هر طبقه مساوی است با:

$$k = \frac{12E(2I)}{L^3}$$

$$k_1 = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 248.6 \times 2}{(15 \times 12)^3} = 30700 \text{ lb/in}$$

لذا

$$k_2 = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 106.3 \times 2}{(10 \times 12)^3} = 44300 \text{ lb/in}$$

معادلات حرکت سیستم از نوشتن معادلات تعادل نیروهای وارد بر جرمها در ترسیم آزاد شکل (۱۰-۲، ب) به دست می آیند:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) = 0$$

جواب این معادلات عبارتند از:

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t - \alpha) \quad (۱۱-۱۰)$$

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t - \alpha)$$

پس از دو بار مشتق گیری داریم:

$$\ddot{y}_1 = -a_1 \omega^2 \sin(\omega t - \alpha)$$

$$\ddot{y}_2 = -a_2 \omega^2 \sin(\omega t - \alpha)$$

از قرار دادن این مقادیر در معادلات حرکت و نوشتن نتیجه به شکل ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۲-۱۰)$$

برای به دست آوردن جواب غیر صفر باید دترمینان ماتریس خراب را صفر قرار دهیم:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (۱۳-۱۰)$$

از بسط این دترمینان خواهیم داشت:

$$m_1 m_2 \omega^4 - ((k_1 + k_2)m_2 + m_1 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (۱۴-۱۰)$$

با قرار دادن مقادیر عددی این مثال داریم:

$$8976 \omega^4 - 10974800 \omega^2 + 1.36 \times 10^9 = 0 \quad (۱۵-۱۰)$$

جوابهای این معادله درجه دوم عبارتند از:

$$\omega_1^2 = 140$$

$$\omega_2^2 = 1082$$

بنابراین فرکانسهای طبیعی سازه برابر است با:

$$8976\omega^4 - 10974800\omega^2 + 1.36 \times 10^9 = 0$$

$$\omega_1 = 11.8 \text{ rad / sec}$$

$$\omega_2 = 32.9 \text{ rad / sec}$$

$$f_1 = \omega_1 / 2\pi = 1.88 \text{ cps}$$

$$f_2 = \omega_2 / 2\pi = 5.24 \text{ cps}$$

و پریودهای طبیعی برابرند با:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 0.532 \text{ sec}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 0.191 \text{ sec}$$

برای حل دستگاه معادلات (۱۰-۱۲) و به دست آوردن a_1 و a_2 باید توجه داشت که چون نترمینان ضرایب این معادلات صفر قرار داده شد تعداد معادلات مستقل از تعداد معادلات، یکی کمتر خواهد شد. بنابراین در این حالت که دو معادله داریم فقط یک معادله مستقل خواهد بود. اگر معادله اول را انتخاب کنیم و فرکانس طبیعی $\omega_1 = 11.8 \text{ rad / sec}$ را در آن قرار دهیم خواهیم داشت:

$$55960 a_{11} - 44300 a_{21} = 0 \quad (۱۰-۱۶)$$

در این رابطه یک زیرنویس به a_1 و a_2 اضافه شده است که نشان دهنده این است که از ω_1 در این رابطه استفاده شده است. چون فقط یک معادله و دو مجهول را داریم لذا فقط مقدار نسبی آنها را می توانیم به دست آوریم. این مقدار نسبی مود نرمال یا شکل مودی مربوط به فرکانس اول نامیده می شود. در این مثال داریم:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = 1.263$$

معمولاً در مدهای نرمال برای یکی از دامنه ها عدد یک انتخاب می شود. اگر برابر واحد انتخاب شود، خواهیم داشت:

$$a_{11} = 1.000 \quad (۱۰-۱۷)$$

$$a_{21} = 1.263$$

به همین ترتیب با قرار دادن $\omega_2 = 32.9 \text{ rad / sec}$ در معادله (۱۰-۱۲) مد نرمال دوم هم به دست خواهد آمد:

$$a_{12} = 1.000 \quad (۱۰-۱۸)$$

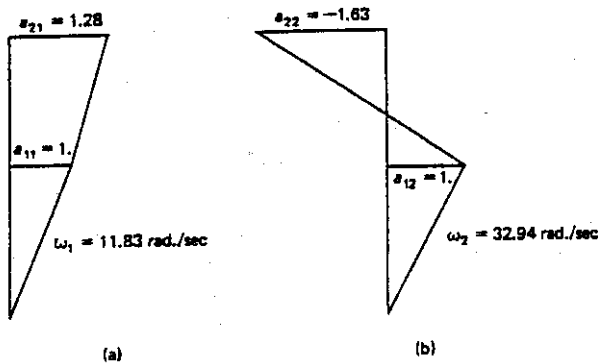
$$a_{22} = -1.629$$

باید توجه داشت که اگر چه در اینجا فقط مقدار نسبی دامنه ها به دست آمد، اما به دست آوردن مقدار مطلق آنها نیز با استفاده از شرایط اولیه امکان پذیر است. به این ترتیب در معادله حرکت هارمونیک برای سازه به دست می آید که تمام جرمهای موجود در سازه می توانند به طور همزمان و با فرکانس یکسان ω_1 یا ω_2 ارتعاش نمایند. این حرکت ارتعاش آزاد در یک سیستم نامیرا «مود ارتعاش طبیعی یا نرمال^۱» نامیده می شود. شکلهای ارتعاشی (در این مثال $\frac{a_{22}}{a_{12}}$ و $\frac{a_{21}}{a_{11}}$) نیز شکل مدهای نرمال یا بطور ساده «شکلهای مدی^۲» نامیده می شوند. شکلهای مدی به دست آمده در این مثال در شکل (۳-۱۰) نشان داده شده اند.

به شکل مدی مربوط به پایین ترین فرکانس، «مد اول^۳» یا «مد اصلی^۴» اطلاق می شود. سایر مدها گاهی «هارمونیک ها^۵» یا «هارمونیک های بالاتر^۶» نامیده می شوند. هر یک از مدهای ارتعاشی به همراه فرکانس طبیعی مربوط به خود به صورت یک سیستم تک درجه عمل می کنند. حرکت کلی سیستم یعنی حل کلی معادلات (۱-۱۰) از جمع مدهای ارتعاش هارمونیک با ضرایب ثابت انتگرال گیری به دست می آید یعنی:

$$y_1(t) = C'_1 a_{11} \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + C'_2 a_{12} \sin(\omega_2 t - \alpha_2) \quad (19-10)$$

$$y_2(t) = C'_1 a_{21} \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + C'_2 a_{22} \sin(\omega_2 t - \alpha_2)$$



شکل (۳-۱۰): مدهای نرمال مثال (۱-۱۰): الف) مد اول، ب) مد دوم

- | | | |
|--|----------------|---------------------|
| 1) Normal or Natural mode of Vibration | 2) Modal shape | 3) First Mode |
| 4) Fundamental mode | 5) Harmonic | 6) Higher Harmonics |

ضرایب C_1' و C_2' و همچنین α_1, α_2 چهار ضریب ثابت انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه مربوط به هر یک از جرمها در سیستم به دست می آیند. برای یک سیستم دو درجه آزادی این شرایط عبارتند از:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_{01} \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_{01} \\ y_2(0) &= y_{02} \quad \dot{y}_2(0) = \dot{y}_{02} \end{aligned} \quad (20-10)$$

برای محاسبه این ضرایب بهتر است ابتدا ضرایب α_1, α_2 در رابطه (19-10) بر حسب سایر ضرایب محاسبه شوند. از بسط توابع سینوسی و استفاده از ضرایب ثابت جدید خواهیم داشت:

$$y_1(t) = C_1 a_{11} \sin \omega_1 t + C_2 a_{11} \cos \omega_1 t + C_3 a_{12} \sin \omega_2 t + C_4 a_{12} \cos \omega_2 t \quad (21-10)$$

$$y_2(t) = C_1 a_{21} \sin \omega_1 t + C_2 a_{21} \cos \omega_1 t + C_3 a_{22} \sin \omega_2 t + C_4 a_{22} \cos \omega_2 t$$

که C_1, C_2, C_3, C_4 ضرایب ثابت جدید انتگرال گیری هستند.

از اولین دو شرط اولیه معادله (20-10) به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} y_{01} &= C_2 a_{11} + C_4 a_{12} \\ y_{02} &= C_2 a_{21} + C_4 a_{22} \end{aligned} \quad (22-10)$$

چون مدها مستقل هستند همواره می توان از این معادلات، C_2 و C_4 را به دست آورد. همچنین از شرایط اولیه مربوط به سرعتها در رابطه (20-10) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{01} &= \omega_1 C_1 a_{11} + \omega_2 C_3 a_{12} \\ \dot{y}_{02} &= \omega_1 C_1 a_{21} + \omega_2 C_3 a_{22} \end{aligned} \quad (23-10)$$

از حل این دو سری معادلات، حرکت سیستم بر حسب دو مد ارتعاشی کاملاً مستقل با فرکانس مربوط به آن به دست خواهد آمد. دامنه و زاویه فاز هر یک از این دو مد از شرایط اولیه به دست می آیند.

۲-۱ - خاصیت تعامد مدهای نرمال

یک ویژگی مهم مدهای نرمال ویژگی تعامد آنهاست. این ویژگی پایه یکی از جالب ترین روشها برای حل مسائل دینامیکی سیستمهای چند درجه آزادی است. ابتدا معادلات حرکت ارتعاش آزاد، رابطه (2-10)، را مجدداً می نویسیم:

$$[K]\{a\} = \omega^2 [M]\{a\} \quad (24-10)$$

برای سیستم دو درجه آزادی با استفاده از رابطه (12-10) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)a_1 - k_2 a_2 &= m_1 \omega^2 a_1 \\ -k_2 a_1 + k_2 a_2 &= m_2 \omega^2 a_2 \end{aligned} \quad (25-10)$$

1) Orthogonality

این روابط دقیقاً همان روابط (۱۰-۱۲) هستند که به این شکل نوشته شده اند. این معادلات را می توان به عنوان تعادل استاتیکی سیستم تحت اثر نیروهای $m_1\omega^2 a_1$ و $m_2\omega^2 a_2$ که به ترتیب بر جرمهای m_1 و m_2 وارد شده اند تفسیر نمود. شکلهای مدی را هم می توان به عنوان تغییر شکلهای استاتیکی حاصل از نیروهای وارد بر سمت راست روابط (۱۰-۲۵) در نظر گرفت. این تغییر استاتیکی مسأله به ما این امکان را می دهد که از نتایج عمومی نظریه استاتیک سازه های خطی استفاده کنیم. بویژه در اینجا می توان از «قضیه بتی» استفاده نمود. بر اساس این قضیه در سازه ای که تحت اثر دو سیستم نیرو - جابه جایی قرار گرفته است کار انجام شده توسط سیستم نیروی اول در جابه جایی های سیستم نیروی دوم برابراست با کار انجام شده توسط سیستم نیروی دوم در جابه جایی های سیستم نیروی اول. دو سیستم نیرو - جابه جایی در اینجا عبارتند از:

سیستم ۱ نیروها $\omega_1^2 a_{11} m_1$, $\omega_1^2 a_{21} m_2$

و جابه جایی ها a_{11} , a_{21}

سیستم ۲ نیروها $\omega_2^2 a_{12} m_1$, $\omega_2^2 a_{22} m_2$

و جابه جایی ها a_{12} , a_{22}

با استفاده از قضیه بتی برای این دو سیستم نتیجه خواهد شد:

$$\omega_1^2 m_1 a_{11} a_{12} + \omega_1^2 m_2 a_{21} a_{22} = \omega_2^2 m_1 a_{12} a_{11} + \omega_2^2 m_2 a_{22} a_{21}$$

یا

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)(m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) = 0 \quad (۲۶-۱۰)$$

اگر $\omega_1 \neq \omega_2$ باشد خواهیم داشت:

$$m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0$$

که همان رابطه تعامد بین شکلهای مدی یک سیستم دو درجه آزادی است. برای یک سیستم [n درجه آزادی] با ماتریس جرم قطری خاصیت تعامد بین هر دو مد i و j به شکل زیر بیان می شود:

$$i \neq j \quad \text{برای} \quad \sum_{k=1}^m m_k a_{ki} a_{kj} = 0 \quad (۲۷-۱۰)$$

و در حالت کلی برای یک سیستم n درجه آزادی داریم

$$i \neq j \quad \text{برای} \quad \{a_i\}^T [M] \{a_j\} = 0 \quad (۲۸-۱۰)$$

1) Betti's Theorem

که $\{a_i\}$ و $\{a_j\}$ دو بردار مدی دلخواه و $[M]$ ماتریس جرم است. همان طور که قبلاً گفته شد دامنه های ارتعاش در هر دو مد نرمال فقط مقادیر نسبی هستند و مقدار آنها را می توان به يك مقیاس دلخواه تغییر داد یا «نرمال» نمود. رابطه (۲۹-۱۰) شکل مناسبی از نرمال نمودن است:

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\{a_j\}^T [M] \{a_j\}}} \quad (29-10)$$

که برای يك سیستم با ماتریس جرم قطری به شکل زیر نوشته می شود

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n m_k a_{kj}^2}} \quad (30-10)$$

که ϕ_{ij} مقدار نرمال شده مؤلفه i از بردار مدی j است. مثال (۳۰-۱۰): برای ساختمان برشی دو درجه مثال (۱۰-۱) شکلهای مدی نرمال شده را به دست آورید و خاصیت تعامد آنها را نشان دهید. از قرار دادن روابط (۱۷-۱۰) و (۱۸-۱۰) و جرمهای مثال ۱۰-۱ در ضریب نرمال کردن رابطه (۳۰-۱۰) داریم:

$$\sqrt{(136)(1.00)^2 + (66)(1.263)^2} = \sqrt{241.31}$$

$$\sqrt{(136)(1.00)^2 + (66)(-1.629)^2} = \sqrt{311.8}$$

بنابراین مدهای نرمال عبارتند از:

$$\phi_{11} = \frac{1.00}{\sqrt{241.31}} = 0.06437, \quad \phi_{12} = \frac{1.00}{\sqrt{311.08}} = 0.0567$$

$$\phi_{21} = \frac{1.263}{\sqrt{241.31}} = 0.0813, \quad \phi_{22} = \frac{-1.6287}{\sqrt{311.08}} = -0.0924$$

مدهای نرمال شده را می توان به صورت ستونی در يك ماتریس به نام «ماتریس مدی» مرتب نمود. در حالت کلی ماتریس مدی برای يك سیستم n درجه آزادی به صورت زیر نوشته می شود:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (31-10)$$

1) Normalize

2) Modal matrix

در این صورت خاصیت تعامد مدها را می توان به صورت رابطه (۱۰-۳۲) نوشت:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (۱۰-۳۲)$$

که $[\Phi]^T$ «ترانزپوز» ماتریس $[\Phi]$ و $[M]$ ماتریس قطری جرم است. در این مثال دو درجه آزادی، ماتریس مدی برابر است با:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.06437 & 0.0567 \\ 0.0813 & -0.0924 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۳۳)$$

برای کنترل خاصیت تعامد داریم:

$$\begin{bmatrix} 0.06437 & 0.0813 \\ 0.0567 & -0.0924 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 136 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06437 & 0.0567 \\ 0.0813 & -0.0924 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱-۳- زیربرنامه JACOBI

همان طور که مشاهده گردید، که برای تعیین فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال ارتعاش يك ساختمان برشی باید يك مسأله مقادیر ویژه حل شود. روش مستقیم حل که براساس بسط دترمینان و حل معادله مشخصه می باشد در عمل فقط برای سیستمهایی با درجات آزادی محدود قابل کاربرد است. برای يك سیستم با درجات آزادی بیشتر محاسبات جبری و عددی لازم برای حل يك مسأله مقادیر ویژه آنقدر زیاد می شود که استفاده از روش مستقیم غیر ممکن می گردد. اما روشهای عددی مختلفی برای حل مسائل مقادیر ویژه وجود دارند. بحث در مورد این روشها مربوط به يك کتاب روشهای عددی است و از حوصله يك کتاب دیناميك سازه ها خارج است.

JACOBI جدول (۱۰-۱): متغیرهای زیر برنامه

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
A(I,I)	[K]	ماتریس سختی
B(I,I)	[M]	ماتریس جرم
x(I,I)	$[\Phi]_2$	ماتریس مدی
EIGV(I)	ω_1	بردارهای ویژه
D(I)		بردار
N		اندازه ماتریس های A, B
RTOL		تقریب مجاز (مقدار 10^{-12} - اختیاری شده است)
NSMAX		حداکثر تعداد تکریر (برابر با ۱۵)
IFPR		نشان چاپ 1 ← چاپ شود.
		برای هر تکریر 0 ← چاپ نشود.

1) Transpose

در اینجا ما از روشهای مختلفی که برای حل مسائل ویژه سیستمهای سازه ای وجود دارد روش جاکوبی را انتخاب نموده ایم که يك «روش تکرار» برای محاسبه مقادیر ویژه^۲ و «بردارهای ویژه^۳» يك سیستم است. روش اصلی جاکوبی برای حل حالت استاندارد مسائل ویژه $[M]$ ماتریس شناسایی باشد) ارائه شده است. این روش بیش از يك قرن پیش تهیه شده و به طور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته و برای تمام ماتریسهای متقارن $[K]$ بدون هیچ محدودیتی در مقادیر ویژه قابل کاربرد است. با استفاده از يك انتقال می توان مساله ویژه $0 = [\Phi] \{ [K] - \omega^2 [M] \}$ را با حفظ تقارن لازم در روش جاکوبی تبدیل نمود. روش جاکوبی تعمیم یافته که مستقیماً بر روی ماتریسهای $[K]$ و $[M]$ کار می کند توسط بت و ویلسون* ارائه شده است که لیست آن در ضمیمه کتاب تحت عنوان برنامه ۵ آمده است. متغیرهای به کار برده شده در این برنامه در جدول (۱-۱۰) شرح داده شده اند و يك برنامه کامپیوتری کوتاه برای امتحان زیربرنامه JACOBI در این بخش ارائه شده است.

۱-۴- برنامه ۵ - امتحان زیربرنامه JACOBI

برنامه کامپیوتری ۵ يك برنامه کوتاه است که برای امتحان زیر برنامه JACOBI نوشته شده است.

داده های ورودی این برنامه و فرمت آنها در جدول (۱-۱۰) آمده اند. لیست این برنامه و به دنبال آن لیست زیر برنامه JACOBI نیز در ضمیمه ۱ چاپ شده است. خروجی برنامه توسط زیربرنامه JACOBI چاپ می شود و شامل مقادیر ویژه (ω_i^2) و بردارهای ویژه نرمال شده مربوط به آن $\{\Phi_i\}$ می باشد.

جدول (۱-۱۰): داده های ورودی و فرمت آنها برای برنامه ۵

فرمت	متغیرها
(2I10)	N, IFPR
(8F10.4)	A(I,J) (read by rows)
(8F10.4)	B(I,J) (read by rows)

1) Iterative Method

2) Eigenvalues

3) Eigenvectors

*Bathe, K.J., and Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis

برشی) سه درجه آزادی را در نظر بگیرید که ماتریسهای سختی و جرم آن به شرح زیر هستند.

لیست داده های ورودی و خروجی برنامه برای این مثال در جدول (۳-۱۰) نشان داده شده اند.

$$[K] = \begin{bmatrix} 18.8600 & -12.0000 & 5.1430 \\ -12.0000 & 15.0000 & -12.0000 \\ 5.1430 & -12.0000 & 18.8600 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.8169 & 0.1286 & -0.0740 \\ 0.1286 & 0.8571 & 0.1286 \\ -0.0740 & 0.1286 & 0.8169 \end{bmatrix}$$

جدول (۳-۱۰): داده های ورودی و نتایج کامپیوتری مثال (۳-۱۰)

INPUT DATA

3	1	
18.8600	-12.0000	5.1430
-12.0000	15.0000	-12.0000
5.1430	-12.0000	18.8600
0.8169	0.1286	-0.0740
0.1286	0.8571	0.1286
-0.0740	0.1286	0.8169

EIGENVALUES

SWEEP= 1	0.60062D 02	0.21996D 01	0.15515D 02
SWEEP= 2	0.60803D 02	0.19628D 01	0.15397D 02
SWEEP= 3	0.60803D 02	0.19628D 01	0.15397D 02
SWEEP= 4	0.60803D 02	0.19628D 01	0.15397D 02
SWEEP= 5	0.60803D 02	0.19628D 01	0.15397D 02

EIGENVECTORS

0.72280D 00	0.43298D 00	-0.74915D 00
-0.77197D 00	0.79669D 00	-0.11363D-15
0.72280D 00	0.43209D 00	0.74915D 00

حرکت ارتعاش آزاد يك سيستم ديناميكي ناميرا توسط يك دستگاه معادلات
ديفرانسیل همگن به شرح زیر تعیین می شود

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0$$

روند حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل به يك دستگاه معادلات جبری خطی همگن
بشکل زیر منتهی می شود.

$$([K] - \omega^2[M])\{a\} = 0$$

که از نظر ریاضیات يك مساله ویژه نامیده می شود.
برای به دست آوردن جواب های غیر صفر این معادلات باید دترمینان ضرایب مجهولات
صفر قرار داده شوند یعنی:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

از ریشه های ω_i^2 این رابطه فرکانسهای طبیعی ω_i سیستم به دست می آیند. آنگاه
می توان مقدار مجهولات $\{a\}_i$ را به طور نسبی به دست آورد. بردارهای $\{a\}_i$ مربوط
به ریشه های ω_i^2 شکلهای مدی (بردارهای ویژه) سیستم ديناميكي هستند. از مرتب
کردن این شکلهای مدی به صورت ماتریس، ماتریس مدی $[\Phi]$ سیستم به دست می آید.
معمولاً بهتر است که بردارهای ویژه را طوری نرمال نمود که رابطه زیر برقرار باشد.

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

بردارهای مدی نرمال شده $\{\phi\}_i$ را می توان از تقسیم بردار $\{a\}_i$ بر $\sqrt{\{a\}_i^T [M] \{a\}_i}$ به
دست آورد.

بردارهای مدی دارای خاصیت تعامد هستند یعنی:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{برای} \quad i \neq j$$

که آن را به شکل زیر هم می توان نوشت:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

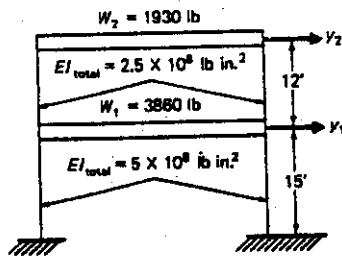
که $[\Phi]$ ماتریس مدی سیستم است.

برای يك سیستم با درجات آزادی کم فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی را می توان از
بسط دترمینان و حل معادله مشخصه حاصل به دست آورد. اما برای يك سیستم با
تعداد درجات آزادی بالا استفاده از این روش مستقیم غیر عملی است. لذا لازم است از
روشهای عددی که معمولاً به صورت تکرار هستند استفاده نمود. در میان روشهای
مختلفی که برای حل يك مساله ویژه وجود دارند روش جاکوبی انتخاب شده است.
برنامه کامپیوتری 0 که لیست آن در ضمیمه آمده است يك برنامه برای امتحان کردن

زیربرنامه JACOBI است. این زیربرنامه می تواند همراه با هر یک از برنامه های این کتاب برای تحلیل دینامیکی سازه ها استفاده شود.

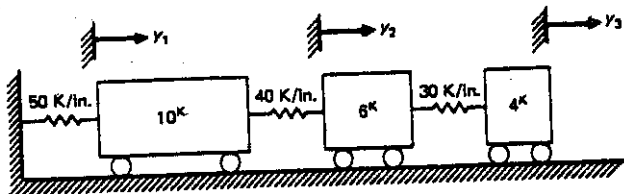
مسائل

۱-۱- فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال ساختمان برشی شکل م (۱-۱۰) را به دست آورید.



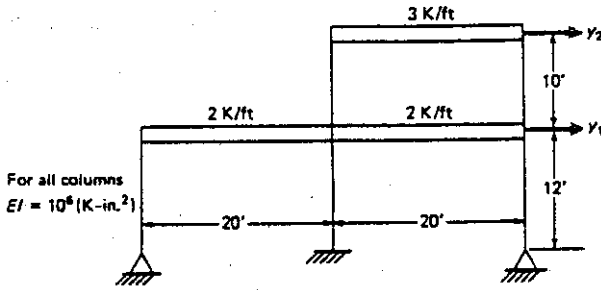
شکل م (۱-۱۰)

۲-۱- سازه ای به صورت یک مدل سه درجه آزادی با مقادیر عددی نشان داده شده در شکل م (۲-۱۰) مدل شده است. فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال سازه را به دست آورید. جوابهای خود را با استفاده از برنامه ۵ کنترل نمایید.



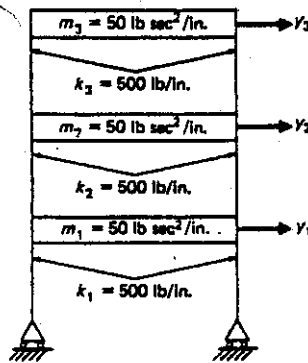
شکل م (۲-۱۰)

۳-۱- با استفاده از مدل ساختمان برشی برای قاب شکل م (۲-۱۰) فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال آن را به دست آورید.



شکل م (۴-۱۰)

۴-۱۰- یک قاب ساختمانی مطابق شکل م (۴-۱۰) بر روی غلتک قرار گرفته است. بریوهای طبیعی و مدهای نرمال آن را به دست آورید. ساختمان را به صورت مدل برشی فرض کنید و جوابها را با برنامه 0 کنترل کنید.



شکل م (۴-۱۰)

۵-۱۰- یک ساختمان برشی که جرم تمام کفهای آن m و سختی تمام طبقات آن k است را در نظر بگیرید شکل کلی معادلات دیفرانسیل حرکت این ساختمان را با N طبقه به دست آورید.

۶-۱۰- یک برنامه کامپیوتری بنویسید که با استفاده از زیربرنامه JACOBI فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی یک ساختمان برشی مطابق مساله (۵-۱۰) را به دست آورد. فرکانسهای طبیعی را بر حسب کمیت k/m بیان کنید.

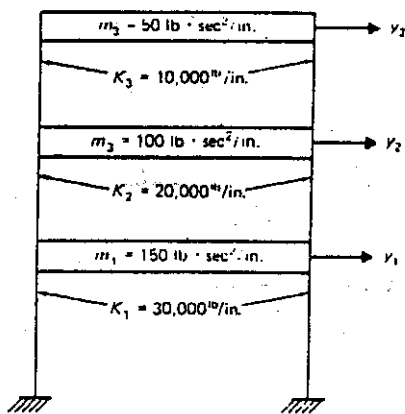
۷-۱۰- برنامه کامپیوتری مساله (۶-۱۰) را طوری اصلاح نمایید که بتواند برای k/m مقدار معینی را که مشخص کننده يك پریود طبیعی اصلی از پیش تعیین شده T برای ساختمان برشی است قرار دهد.

۸-۱۰- يك برنامه کامپیوتری بنویسید که به کمک زیربرنامه JACOBI بتواند فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی يك ساختمان برشی N طبقه را که سختی طبقات آن از k در اولین طبقه تا k_N در طبقه N ام بطور خطی تغییر می کند به دست آورد. جرم کفها را یکسان فرض کنید.

۹-۱۰- برنامه کامپیوتری مساله (۸-۱۰) را برای حالتی که جرم کفها به طور خطی از مقدار m در اولین کف تا مقدار m_N در کف N ام تغییر می کند اصلاح کنید.

۱۰-۱۰- برنامه کامپیوتری (۸-۱۰) را طوری اصلاح نمایید که بتواند برای جرم کفها m مقدار معینی را که مشخص کننده يك پریود طبیعی از پیش تعیین شده T برای ساختمان برشی است قرار دهد.

۱۱-۱۰- فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی ساختمان برشی سه طبقه شکل م (۱۱-۱۰) را به دست آورید.



شکل م (۱۱-۱۰)

۱۲-۱. با استفاده از نتایج مساله (۱۰-۱۱) رابطه تغییرات جابه جایی های y_1 و y_2 را در حرکت ارتعاش آزاد آن بر حسب ثابتهای انتگرال گیری بنویسید.

۱۳-۱. ماتریسهای سختی $[M]$ و جرم $[K]$ يك سازه سه درجه آزادی عبارتند از:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 210 & 0 & -5 \\ 0 & 210 & 5 \\ -5 & 5 & 0.333 \end{bmatrix} \text{ (lb/in)}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 23070 & 0 & -1886 \\ 0 & 23070 & 1886 \\ -1886 & 1886 & 187200 \end{bmatrix} \text{ (lbsec}^2\text{/in)}$$

فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی سازه را به دست آورید.

فصل یازدهم

حرکت ساختمانهای برشی

تحت اثر بارگذاری

در فصل قبیل نشان داده شد که حرکت ارتعاش آزاد يك سیستم دینامیکی را می توان بر حسب ارتعاش آزاد مدی آن بیان نمود. در این فصل خواهیم دید که حرکت يك سیستم تحت اثر بارگذاری را هم می توان بر حسب مدهای نرمال ارتعاش بیان نمود و پاسخ کلی از جمع پاسخ معادلات مدهای مستقل، به دست آورد. به عبارت دیگر نشان خواهیم داد که از مدهای نرمال می توان برای تبدیل يك دستگاه معادلات دیفرانسیل «وابسته»^۱ به يك سری معادلات دیفرانسیل «غیروابسته»^۲ که هر يك فقط يك متغیر مستقل دارد تبدیل نمود، لذا «روش جمع زدن مدها»^۳ مسأله تعیین پاسخ يك سیستم چند درجه را به تعیین پاسخ چند سیستم تك درجه تبدیل می کند.

۱-۱۱- روش جمع زدن مدها

همان گونه که بیان گردید ارتعاش آزاد يك سیستم چند درجه آزادی را می توان بر حسب ارتعاشهای آزاد مدی آن بیان نمود. اکنون نشان خواهیم داد که حرکت تحت اثر بارگذاری را هم می توان بر حسب ارتعاش مدهای نرمال بیان نمود. مجدداً به معادلات حرکت، رابطه (۳-۹)، که برای يك سیستم دو درجه آزادی به شرح زیر هستند باز می گردیم.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 &= F_2(t) \end{aligned} \quad (۱-۱۱)$$

می خواهیم این دستگاه معادلات وابسته را به معادلات غیر وابسته ای که هر يك فقط يك مجهول تابع زمان دارند تبدیل نماییم. ابتدا لازم است پاسخ را بر حسب مدهای نرمال که در ضرایبی ضرب شده اند بیان نماییم.

این ضرایب نشان دهنده سهم هر مد در پاسخ کل است. در حالت ارتعاش آزاد، این ضرایب توابع سینوسی از زمان بودند. در اینجا توابعی کلی از زمان هستند که با $z_1(t)$ نشان داده شده اند، لذا جواب معادلات (۱-۱۱) را می توان بدین شکل فرض نمود:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t) \\ y_2(t) &= a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t) \end{aligned} \quad (۲-۱۱)$$

از قراردادن آنها در معادلات (۱-۱۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m_1 a_{11} \ddot{z}_1 + (k_1 + k_2) a_{11} z_1 - k_2 a_{21} z_1 + m_1 a_{12} \ddot{z}_2 \\ + (k_1 + k_2) a_{12} z_2 - k_2 a_{22} z_2 &= F_1(t) \quad (۳-۱۱) \\ m_2 a_{21} \ddot{z}_1 - k_2 a_{11} z_1 + k_2 a_{21} z_1 + m_2 a_{22} \ddot{z}_2 - k_2 a_{12} z_2 + k_2 a_{22} z_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

1) Coupled

2) Uncoupled

3) Modal Superposition Method

برای تعیین ضرایب $z_1(t)$ و $z_2(t)$ که معادلات (۳-۱۱) را غیروابسته خواهد نمود از خاصیت تعامد مدها استفاده می شود. برای این کار رابطه اول در a_{11} و رابطه دوم در a_{22} ضرب می شوند. پس از ضرب نمودن و جمع کردن دو رابطه و ساده کردن آن با استفاده از روابط (۱۰-۲۵) و (۱۰-۲۷) نتیجه خواهد شد:

$$(m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2) \ddot{z}_1 + \omega_1^2 (m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2) z_1 = a_{11} F_1(t) + a_{21} F_2(t) \quad (\text{الف}, ۴-۱۱)$$

همچنین از ضرب معادله اول در a_{12} و معادله دوم در a_{22} خواهیم داشت:

$$(m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2) \ddot{z}_2 + \omega_2^2 (m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2) z_2 = a_{12} F_1(t) + a_{22} F_2(t) \quad (\text{ب}, ۴-۱۱)$$

نتیجه به دست آمده از روابط (۴-۱۱) یک تفسیر فیزیکی ساده دارد. نیروی موثر در تحریک هر مد کار انجام شده توسط نیروی خارجی است که به اندازه مد مورد نظر جا به جا شده باشند. از نقطه نظر ریاضی این کار جدا کردن یا غیروابسته کردن سیستم معادلات دیفرانسیل اصلی توسط تغییر متغیرها است. بنابراین هر یک از معادلات (۴-۱۱ الف) و (۴-۱۱ ب) مربوط به یک سیستم تک درجه است و می توان آنها را به شکل زیر نوشت:

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1 z_1 = P_1(t) \quad (۵-۱۱)$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + K_2 z_2 = P_2(t)$$

که $M_1 = m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2$ و $M_2 = m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2$ و $K_1 = \omega_1^2 M_1$ ، $K_2 = \omega_2^2 M_2$ و $P_1(t) = a_{11} F_1(t) + a_{21} F_2(t)$ و $P_2(t) = a_{12} F_1(t) + a_{22} F_2(t)$ و $K_1 = \omega_1^2 M_1$ ، $K_2 = \omega_2^2 M_2$ و $P_1(t) = a_{11} F_1(t) + a_{21} F_2(t)$ و $P_2(t) = a_{12} F_1(t) + a_{22} F_2(t)$ و $K_1 = \omega_1^2 M_1$ ، $K_2 = \omega_2^2 M_2$

و نیروهای مدی ω_1 هستند. اگر از مدهای نرمال شده، رابطه (۱۰-۳) استفاده کنیم این روابط را می توان به شکل ساده تر زیر هم نوشت:

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = P_1(t) \quad (۶-۱۱)$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = P_2(t)$$

که P_1 و P_2 در این حالت برابرند با:

$$P_1 = \phi_{11} F_1(t) + \phi_{21} F_2(t) \quad (۷-۱۱)$$

$$P_2 = \phi_{12} F_1(t) + \phi_{22} F_2(t)$$

حل معادلات دیفرانسیل غیروابسته، معادلات (۵-۱۱) یا (۶-۱۱) را می توان به هر یک از روشهای ارائه شده در فصلهای قبل به دست آورد. مخصوصاً روش انتگرال دو هامل که برای کلیه توابع بارگذاری قابل استفاده است. همچنین حداکثر پاسخ هر مد را می توان به راحتی با استفاده از طیفهای پاسخ موجود به دست آورد. اما جمع

1) Modal Mass

2) Modal Stiffness

3) Modal Force

پاسخ حداکثر مدها يك مسأله است. واقعیت این است که براساس رابطه (۲-۱۱) پاسخ حداکثر مدها لزوماً همزمان نخواهند بود. برای رفع مشکل لازم است از يك روش تقریبی استفاده شود. حد بالای پاسخ حداکثر را می توان از جمع قدر مطلق پاسخ حداکثر مدها یعنی قراردادن پاسخ حداکثر مدها (Z_{1max}, Z_{2max}) به جای مقادیر Z_1 و Z_2 در روابط (۲-۱۱)، و جمع قدر مطلق جمله های این روابط به دست آورد یعنی:

$$y_{1max} = |\phi_{11}z_{1max}| + |\phi_{12}z_{2max}| \quad (۸-۱۱)$$

$$y_{2max} = |\phi_{21}z_{1max}| + |\phi_{22}z_{2max}|$$

نتایج به دست آمده از این روش مقادیر نسبت بالای پاسخ حداکثر هستند. يك روش دیگر که بسیار مورد پذیرش است و تخمین قابل قبولی از پاسخ حداکثر می دهد، روش جذر مجموع مربعات سهم مدها است. لذا پاسخ حداکثر به طور تقریبی برابر است با:

$$y_{1max} = \sqrt{(\phi_{11}z_{1max})^2 + (\phi_{12}z_{2max})^2} \quad (۹-۱۱)$$

$$y_{2max} = \sqrt{(\phi_{21}z_{1max})^2 + (\phi_{22}z_{2max})^2}$$

مثال (۱-۱۱): قاب دو طبقه مثال (۱-۱۰) در تراز کفهایش تحت اثر يك نیروی ضربه ای مثلثی شکل مطابق شکل (۱-۱۱) قرار گرفته است. حداکثر جابه جایی کفها و حداکثر نیروی برشی ستونها را به دست آورید.
فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال شده به دست آمده از مثالهای (۱-۱۰) و (۲-۱۰) برای این قاب عبارتند از:

$$\omega_1 = 11.8 \text{ rad/sec} \quad \omega_2 = 32.9 \text{ rad/sec}$$

$$\phi_{11} = 0.06437 \quad \phi_{12} = 0.0567$$

$$\phi_{21} = 0.08130 \quad \phi_{22} = -0.0924$$

نیروهای مؤثر بر قاب مطابق شکل (۱-۱۱) عبارتند از:

$$F_1(t) = 10000(1-t/t_d) \text{ lb}$$

$$t \leq 0.1 \text{ sec} \quad \text{برای} \quad F_2(t) = 20000(1-t/t_d) \text{ lb}$$

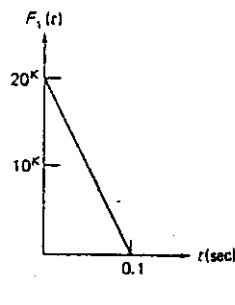
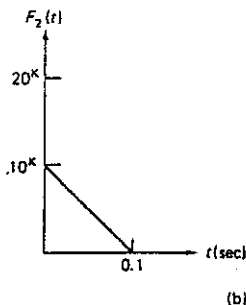
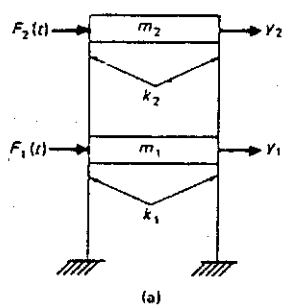
$$t_d = 0.1 \text{ Sec} \text{ و}$$

$$t > 0.1 \text{ sec} \quad \text{برای} \quad F_1(t) = F_2(t) = 0$$

از قراردادن این مقادیر در معادلات غیر وابسته حرکت، روابط (۶-۱۱)، داریم:

$$\ddot{z}_1 + 139.24z_1 = 2270f(t)$$

$$\ddot{z}_2 + 1082.41z_2 = -1281f(t)$$



شکل (۱-۱۱) ساختمان برشی بایارگذاری ضربه ای
 الف) ساختمان برشی دوطبقه ب) بارگذاری ضربه ای

که $f(t) = 1 - t/0.1$ برای $t \leq 0.1$ و $f(t) = 0$ برای $t > 0.1$: مقادیر حداکثر z_1 و z_2 را می توان از طیفهای موجود مانند طیف شکل (۴-۵) برای این مثال به دست آورد.

$$\frac{t_d}{T_1} = \frac{0.1}{0.532} = 0.188$$

$$\frac{t_d}{T_2} = \frac{0.1}{0.191} = 0.524$$

از شکل (۴-۵) خواهیم داشت:

$$(DLF)_{1_{max}} = \frac{z_{1_{max}}}{z_{1u}} = 0.590$$

$$(DLF)_{2_{max}} = \frac{z_{2_{max}}}{z_{2u}} = 1.22$$

در این مثال جابه جایی های استاتیکی عبارتند از:

$$z_{1u} = \frac{F_{01}}{\omega_1^2} = \frac{2270}{139.24} = 16.3 \quad , \quad z_{2u} = \frac{F_{02}}{\omega_2^2} = \frac{1281}{1082.41} = 1.18$$

لذا حداکثر پاسخهای مدی برابر خواهند بود با:

$$z_{1_{max}} = 0.59 \times 16.3 = 9.62 \quad , \quad z_{2_{max}} = 1.22 \times 1.18 = 1.44$$

همان طور که گفته شد این دو حداکثر، همزمان اتفاق نمی افتند بنابراین برای به دست آوردن پاسخ حداکثر نمی توان این دو مقدار را مستقیماً با هم جمع

نمود. اما حد بالای پاسخ حداکثر را می توان از رابطه (۸-۱۱) به دست آورد.

$$y_{1_{\max}} = |0.06437 \times 9.62| + |0.0567 \times 1.44| = 0.70 \text{ in}$$

$$y_{2_{\max}} = |0.08130 \times 9.62| + |-0.0924 \times 1.44| = 0.92 \text{ in}$$

روش دوم که تخمین قابل قبولی از پاسخ حداکثر است روش جذر مجموع

مربعات سهم مدها مطابق رابطه (۹-۱۱) است. در این مثال داریم:

$$y_{1_{\max}} = \sqrt{(0.06437 \times 9.62)^2 + (0.0567 \times 1.44)^2} = 0.62 \text{ in} \quad (\text{الف})$$

$$y_{2_{\max}} = \sqrt{(0.08130 \times 9.62)^2 + (-0.0924 \times 1.44)^2} = 0.79 \text{ in}$$

حداکثر نیروی برشی V_{\max} ستونها برابر است با:

$$V_{\max} = k\Delta y \quad (۱۰-۱۱)$$

که k سختی طبقه و Δy اختلاف جابه جایی انتهای دو ستون است. چون حداکثر جابه جایی های به دست آمده در روابط (۱۰-۱۱) ممکن است مثبت یا منفی باشند، لذا اختلاف جابه جایی Δy را نمی توان از اختلاف مقدار مطلق حداکثر جابه جایی دو انتهای ستون به دست آورد. حداکثر مقدار ممکن Δy را می توان از جمع مقدار مطلق حداکثر جابه جایی دو انتهای ستون به دست آورد. اما این روش در اغلب موارد مقادیر بسیار نسبت بالایی را نسبت به مقدار واقعی نیروی ستونها به دست می دهد. بهتر است ابتدا نیروی برشی ستونها را در هر مد به طور جداگانه محاسبه نمود و سپس این نیروهای مدی را به روش مناسبی مانند روش جذر مجموع مربعات ترکیب نمود زیرا جابه جایی های مدی با علامت نسبی صحیح خود در ستوس هستند. حداکثر نیروی برشی V_{ij} در طبقه i مربوط به مد j برابر است با:

$$V_{ij} = z_{j_{\max}} (\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}) k_i \quad (\text{ب})$$

که $z_{j_{\max}}$ حداکثر پاسخ مدی، $(\phi_{ij} - \phi_{i-1,j})$ جابه جایی نسبی مدی طبقه i (با $\phi_{0j} = 0$) و k_i سختی طبقه است. در این مثال برای طبقه اول داریم:

$$k_1 = \frac{12EI_1}{L_1^3} = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 248.6}{(15 \times 12)^3} = 15345 \text{ lb/in}$$

$$V_{11} = 9.62 \times 0.06437 \times 15345 = 9502 \text{ lb}$$

$$V_{12} = 1.44 \times 0.0567 \times 15345 = 1253 \text{ lb}$$

$$V_{1_{\max}} = \sqrt{9502^2 + 1253^2} = 9584 \text{ lb}$$

و برای طبقه دوم:

$$k_2 = \frac{12EI_2}{L_2^3} = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 106.3}{(10 \times 12)^3} = 22146 \text{ lb/in}$$

$$V_{21} = 9.62 \times (0.08130 - 0.06437) \times 22146 = 3607 \text{ lb}$$

$$V_{22} = 1.44 \times (-0.0924 - 0.0567) \times 22146 = 4755 \text{ lb}$$

$$V_{2\text{---}} = \sqrt{3607^2 + 4755^2} = 5968 \text{ lb}$$

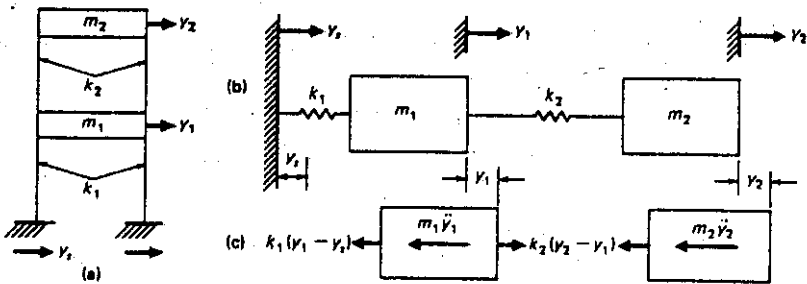
۲-۱۱- پاسخ ساختمان برشی به حرکت تکیه گاه

پاسخ يك ساختمان برشی به حرکت تکیه گاه برحسب جابه جایی کفها نسبت به تکیه گاه به دست می آید. برای ساختمان برشی دو طبقه شکل (۲-۱۱ الف) که به صورت شکل (۲-۱۱ ب) مدل شده است معادلات حرکت از تعادل نیروها در ترسیمه جسم آزاد شکل ۲-۱۱ (ج) عبارتند از:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_s) - k_2(y_2 - y_1) = 0 \quad (۱۱-۱۱)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = 0$$

که $y_s = y_s(t)$ جابه جایی تکیه گاه سازه است.



(ج) ترسیمه جسم آزاد

(ب) مدل ریاضی.

(الف) ساختمان برشی دو طبقه.

شکل (۲-۱۱): ساختمان برشی با حرکت تکیه گاه

با بیان جابه جایی کفها نسبت به تکیه گاه داریم:

$$u_1 = y_1 - y_s \quad (۱۲-۱۱)$$

$$u_2 = y_2 - y_s$$

با دو بار مشتق گیری نتیجه خواهد شد:

$$\ddot{y}_1 = \ddot{u}_1 + \ddot{y}_s \quad (13-11)$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{u}_2 + \ddot{y}_s$$

از جایگذاری روابط (12-11) و (13-11) در روابط (11-11) خواهیم داشت:

$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = -m_1 \ddot{y}_s \quad (14-11)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = -m_2 \ddot{y}_s$$

با توجه به اینکه سمت راست روابط (14-11) هر دو متناسب با \ddot{y}_s هستند حل این معادلات در مقایسه با روابط (6-11) که دارای دو تابع نیروی متغیر هستند ساده تر است. برای حرکت تکیه گاهی ساختمان برشی روابط (14-11) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = -\frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2} \ddot{y}_s(t) \quad (15-11)$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = -\frac{m_1 a_{12} + m_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2} \ddot{y}_s(t)$$

یا

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = \Gamma_1 \ddot{y}_s(t) \quad (16-11)$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = \Gamma_2 \ddot{y}_s(t)$$

که Γ_1, Γ_2 ضرایب تاثیر¹ نامیده می شوند و برابرند با:

$$\Gamma_1 = -\frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2} \quad (17-11)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{m_1 a_{12} + m_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2}$$

رابطه بین جابه جایی های مدی z_1 و z_2 با جابه جایی های نسبی u_1 و u_2 از روابط (12-11) برابر است با:

$$u_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \quad (18-11)$$

$$u_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2$$

بهتر است با يك تغییر متغیر ضرایب Γ را از روابط (16-11) حذف کنیم تغییر متغیرهای لازم برای انجام این کار عبارتند از:

$$z_1 = \Gamma_1 g_1 \quad (19-11)$$

$$z_2 = \Gamma_2 g_2$$

با انجام این تغییر متغیر خواهیم داشت:

1) Participation Factor

$$\ddot{g}_1 + \omega_1^2 g_1 = \ddot{y}_s(t) \quad (۲۰-۱۱)$$

$$\ddot{g}_2 + \omega_2^2 g_2 = \ddot{y}_s(t)$$

از حل معادلات غیروابسته (۲۰-۱۱) و محاسبه $g_1(t)$ و $g_2(t)$ و قراردادن آنها در روابط (۱۸-۱۱) و (۱۹-۱۱) خواهیم داشت:

$$u_1(t) = \Gamma_1 a_{11} g_1(t) + \Gamma_2 a_{12} g_2(t) \quad (۲۱-۱۱)$$

$$u_2(t) = \Gamma_1 a_{21} g_1(t) + \Gamma_2 a_{22} g_2(t)$$

با محاسبه حداکثر پاسخهای مدی $g_{1\max}$ و $g_{2\max}$ از طیفهای مربوط به آن حداکثر مقادیر $u_{1\max}$ و $u_{2\max}$ را با استفاده از روابط (۱۹-۱۱) به این شرح می توان محاسبه نمود:

$$u_{1\max} = \sqrt{(\Gamma_1 a_{11} g_{1\max})^2 + (\Gamma_2 a_{12} g_{2\max})^2} \quad (۲۲-۱۱)$$

$$u_{2\max} = \sqrt{(\Gamma_1 a_{21} g_{1\max})^2 + (\Gamma_2 a_{22} g_{2\max})^2}$$

مثال (۲-۱۱): پاسخ قاب مثال (۱-۱۱) را که در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده است تحت اثر يك شتاب تکیه گاهی ناگهانی $\ddot{y}_s = 0.28g$ به دست آورید. فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال قاب که در مثالهای (۱-۱۰) و (۲-۱۰) محاسبه شده اند عبارتند از:

$$\omega_1 = 11.83 \text{ rad / sec}$$

$$\omega_2 = 32.9 \text{ rad / sec}$$

$$\Phi_{11} = 0.06437$$

$$\Phi_{12} = 0.0567$$

$$\Phi_{21} = 0.08130$$

$$\Phi_{22} = -0.0924$$

شتاب وارد بر تکیه گاه این سازه برابر است با:

$$\ddot{y}_s = 0.28 \times 386 = 108.47 \text{ in / sec}^2$$

ضرایب تأثیر از روابط (۱۷-۱۱) محاسبه می شوند. چون مدها نرمال شده اند مخرج این روابط برابر با يك خواهند شد. لذا داریم:

$$\Gamma_1 = -(136 \times 0.06437 + 66 \times 0.08130) = -14.120 \quad (\text{الف})$$

$$\Gamma_2 = -(136 \times 0.0567 - 66 \times 0.0924) = -1.613$$

روابط مدی (۲۰-۱۱) برابرند با:

$$\ddot{g}_1 + 140g_1 = 108.47 \quad (\text{ب})$$

$$\ddot{g}_2 + 1082g_2 = 108.47$$

جواب این معادلات برای شرایط اولیه جابجایی و سرعت صفر از رابطه (۴-۵) برابر خواهند شد با:

$$g_1(t) = \frac{108.47}{140}(1 - \cos 11.83t) \quad (ع)$$

$$g_2(t) = \frac{108.47}{1082}(1 - \cos 32.89t)$$

جابه جایی طبقات در تراز کفها نسبت به تکیه گاه به صورت تابعی از زمان از روابط (۱۱-۲۱) به دست می آیند:

$$u_1(t) = -14.120 \times 0.06437 \times 0.775(1 - \cos 11.83t)$$

$$-1.613 \times 0.0567 \times 0.100(1 - \cos 32.89t)$$

$$u_2(t) = -14.120 \times 0.08130 \times 0.775(1 - \cos 11.83t)$$

$$+1.614 \times 0.0924 \times 0.100(1 - \cos 32.89t)$$

یا

$$u_1 = -0.7135 + 0.704 \cos 11.83t + 0.009 \cos 32.89t$$

$$u_2 = -0.874 + 0.900 \cos 11.83t - 0.015 \cos 32.89t \quad (د)$$

در این مثال به دلیل ساده بودن تابع تحریک (شتاب ثابت) امکان حل تحلیلی مسأله و به دست آوردن پاسخ به صورت تابعی از زمان میسر بود. اما برای یک تابع تحریک پیچیده مانند یک زلزله واقعی باید از روشهای عددی و یا از طیف استفاده نمود. در این مثال حداکثر پاسخ مدی هنگامی خواهد بود که مقدار تابع کسینوس در روابط (ج) برابر با منفی یک (-۱) گردد. لذا خواهیم داشت:

$$g_{1_{\max}} = 1.55 \quad (ه)$$

$$g_{2_{\max}} = 0.20$$

حداکثر مقدار تقریبی پاسخ با استفاده از روابط (۱۱-۲۲) برابر خواهد شد با:

$$u_{1_{\max}} = 1.409 \text{ in} \quad (و)$$

$$u_{2_{\max}} = 1.800 \text{ in}$$

حداکثر مقدار ممکن پاسخ محاسبه شده از روابط (د) با حداکثر قراردادن توابع کسینوس به دست می آید:

$$u_{1_{\max}} = 1.426 \text{ in}$$

$$u_{2_{\max}} = 1.789 \text{ in}$$

که در این مثال به خوبی با مقادیر تقریبی در روابط (و) قابل مقایسه هستند.

۱۱-۳- برنامه ۶- امتحان زیر برنامه MODAL

زیر برنامه MODAL که برای محاسبه پاسخ یک سیستم چند درجه آزادی به روش جمع زدن مدها طراحی شده است در این قسمت تشریح می شود. این زیر برنامه

به همراه هریک از برنامه هایی که در فصلهای بعدی خواهد آمد برای تحلیل دینامیکی سازه ها قابل استفاده است. یک برنامه کامپیوتری کوتاه به نام برنامه ۶ که برای امتحان زیر برنامه MODAL مناسب است نیز در این قسمت تشریح خواهد شد. لیست کامل برنامه ۶ و زیر برنامه MODAL در ضمیمه I آمده است.

متغیرهای اصلی زیر برنامه MODAL در جدول (۱۱-۱) شرح داده شده اند و لیست داده های ورودی به همراه فرمت آنها برای اجرای برنامه ۶ در جدول (۱۱-۲) آمده اند.

جدول (۱۱-۱): متغیرهای زیر برنامه MODAL

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
ND	N	تعداد درجات آزادی
NM		تعداد مودهای مورد نظر در حل
GR	g	نشانه بارگذاری برای حرکت تکیه گاه شتاب $g=1$ نیروهای خارجی $g=0.0$
EIGEM(I)	ω_i^2	مجدور فرکانسهای طبیعی (مقادیر ویژه)
X(I,J)	$[\Phi]$	ماتریس مودی (بردارهای ویژه)
DT		گام زمانی انتگرال گیری
TMAX		حداکثر زمان انتگرال گیری
NQ(L)		تعداد نقاط مشخص کننده بار در مولفه ام
SM(I,J)	$[M]$	ماتریس جرم
T(I)	t_i	زمان در گام i
P(I)	$P(t_i)$	نیرو یا شتاب (برحسب g) در زمان t_i
XSI(I)	ξ_i	نسبتهای میرایی

جدول (۲-۱۱): داده های ورودی و فرمت آنها برای برنامه ۶

فرمت	متغیرها	برنامه
(2I10, F10.0)	ND, NM, GR	برنامه ۶
(8F10-4)*	SM(I,J) (سطر به سطر) (هنگامی GR=0 حذف می شود)	
(8F10-4)	EIGEN(I) (I=1,NM)	
(8F10-4)	X(I,J) (سطر به سطر) (I=1,NM)	
(I5)	GR	
(2F10>4, 12I5)	DT, TMAX, NQ(L)(L=1,...MG) NG=ND برای نیروی خارجی NG=1 برای شتاب تکیه گاهی	زیر برنامه MODAL
(8F10.2)	T(I), P(I)(I=1, NQ(L)) (برای هر تابع بارگذاری يك سری)	
(8F10.3)	XSI(I), (I=1,NM)	

* برای GR=0 این خط حذف می شود.

مثال (۲-۱۱): با استفاده از برنامه کامپیوتری ۶ پاسخ قاب مثال (۲-۱۱) را به دست آورید.
فرکانسهای طبیعی و ماتریس مدهای این قاب که در مثال (۱-۱۰) محاسبه شده اند عبارتند از:

$$\omega_1 = 11.83 \text{ rad / sec}$$

$$\omega_2 = 32.9 \text{ rad / sec}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.0644 & 0.0567 \\ 0.0813 & -0.0924 \end{bmatrix}$$

و ماتریس جرم عبارتست از:

$$[M] = \begin{bmatrix} 136 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix}$$

داده های ورودی برنامه مطابق جدول (۲-۱۱) در جدول (۲-۱۱) و نتایج کامپیوتری در

جدول (۳-۱۱): داده های ورودی مثال (۳-۱۱)

لیست داده ها			
2	2	386.0	
136.0	0.0		
0.0	66.0		
140.0	1082.0		
0.0644	0.0567		
0.0813	-0.0924		
386.0			
0.05	1.0	2	
0.00	0.28	1.00	0.28
0.00	0.00		

جدول (۴-۱۱): خروجی کامپیوتری مثال (۳-۱۱)

RESPONSE FOR ELASTIC SYSTEM

Time	Displacements at Nodal Coordinates	
	u_1	u_2
0.000	0.0000E+00	0.0000E+00
0.050	-0.4385E-01	-0.4495E-01
0.100	-0.2807E+00	-0.3096E+00
0.150	-0.6525E+00	-0.7840E+00
0.200	-0.1036E+01	-0.1302E+01
0.250	-0.1322E+01	-0.1653E+01
0.300	-0.1407E+01	-0.1727E+01
0.350	-0.1241E+01	-0.1534E+01
0.400	-0.8916E+00	-0.1122E+01
0.450	-0.4948E+00	-0.6020E+00
0.500	-0.1740E+00	-0.1698E+00
0.550	-0.2117E-01	-0.7906E-04
0.600	-0.1028E+00	-0.1268E+00
0.650	-0.4059E+00	-0.4828E+00
0.700	-0.8109E+00	-0.9742E+00
0.750	-0.1168E+01	-0.1454E+01
0.800	-0.1373E+01	-0.1729E+01
0.850	-0.1368E+01	-0.1691E+01
0.900	-0.1133E+01	-0.1383E+01
0.950	-0.7420E+00	-0.9233E+00

۱۱-۴- برنامه ۷- پاسخ لرزه ای يك ساختمان برشی

ارتجاعي

در این قسمت يك برنامه کامپیوتری شرح داده شده است که پاسخ دینامیکی يك سازه مدل شده به صورت ساختمان برشی را در محدوده خطی تحت اثر تحریک تکیه گاهی محاسبه می نماید. از روش جمع زدن مدها برای غیروابسته کردن معادلات دیفرانسیل حرکت و به دست آوردن معادلات حرکت مدها استفاده می شود. برای محاسبه مقادیر ویژه (ω^2) و بردارهای ویژه که ماتریس مدی $[D]$ را تشکیل می دهند از زیر برنامه JACOBI .

(فصل ۱۰) استفاده شده است. معادلات حرکت مدها با استفاده از برنامه MODAL و به روش انتگرال دو هامل (فصل ۴) حل می شوند. سپس در هر گام جواب معادلات حرکت مدها با هم ترکیب می شوند تا پاسخ برحسب مؤلفه های اصلی به دست آیند.

جدول (۱۱-۵): متغیرهای برنامه ۷

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
E	E	مدول ارتجاعي
GR	g	شتاب ثقل
ND	N	تعداد درجات آزادی
SI	I_i	گشتاد و اینرسی طبقه i
SL	L_i	ارتفاع طبقه i
SM(LI)	M_i	جرم کف تراز i
DT		گام زمانی انتگرال گیری
TMAX		حداکثر زمان انتگرال گیری
Na		تعداد نقاط معرف تابع تحریک
$\hat{T}(I)$	t_i	زمان در گام i
P(I)		شتاب در گام i (برحسب g)
XSI(I)	ξ_i	نسبتهای میرایی مودی

لیست کوتاهی از متغیرهای اصلی این برنامه به همراه علامتهای جبری آنها در جدول (۵-۱۱) آمده است. داده های ورودی برنامه و فرمت آنها نیز در جدول (۶-۱۱) نشان داده شده اند.

جدول (۶-۱۱): داده های ورودی و فرمت آنها برای برنامه ۷

فرمت	متغیرها
2F10.0 , 2I5	E, GR, ND, IFPR
3F10.2	SI, SL, SM(I,I) (یک خط برای هر طبقه)
I10	GR
2F10.4, 12I5	DT, TMAX, NQ
8F10.3	T(L), P(L)(L=1,NQ)
8F10.3	XSI(I) (I=1,ND)

مثال (۴-۱۱) پاسخ ساختمان برشی در طبقه مثال (۲-۱۱) که در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده، با استفاده از برنامه ۷ به دست آمده است. جدول (۷-۱۱) داده های ورودی مورد نیاز برنامه و جدول (۸-۱۱) خروجی کامپیوتری آن را نشان می دهد.

جدول (۷-۱۱): داده های ورودی مثال (۴-۱۱)

لیست داده ها				
	30000000.	386.	2	0
497.2	180.	136.		
212.0	120.	66.		
0.01	0.19	2		
0.00	0.28	1.00	0.28	
0.	0.			

جدول (۸-۱۱): خروجی کامپیوتری مثال (۴-۱۱)

Time	Displacements	
	u_1	u_2
0.000	0.0000E+00	0.0000E+00
0.010	-0.1799E-02	-0.1801E-02
0.020	-0.1255E-01	-0.1261E-01
0.030	-0.3380E-01	-0.3422E-01
0.040	-0.6510E-01	-0.6660E-01
0.050	-0.1058E+00	-0.1097E+00
0.060	-0.1550E+00	-0.1633E+00
0.070	-0.2118E+00	-0.2272E+00
0.080	-0.2751E+00	-0.3008E+00
0.090	-0.3438E+00	-0.3835E+00
0.100	-0.4169E+00	-0.4743E+00
0.110	-0.4932E+00	-0.5720E+00
0.120	-0.5718E+00	-0.6753E+00
0.130	-0.6517E+00	-0.7825E+00
0.140	-0.7319E+00	-0.8917E+00
0.150	-0.8116E+00	-0.1001E+01
0.160	-0.8899E+00	-0.1108E+01
0.170	-0.9661E+00	-0.1212E+01
0.180	-0.1039E+01	-0.1310E+01
0.190	-0.1109E+01	-0.1401E+01
0.200	-0.1173E+01	-0.1483E+01

۱۱-۰- تحریک هارمونیک

هنگامی که نیروهای خارجی یا حرکت تکب گاهی، هارمونیک (تابع سینوسی یا کسینوسی) باشند تحلیل کاملاً ساده است و پاسخ را می توان بدون استفاده از تحلیل مدها به دست آورد. فرض کنید ساختمان برشی در طبقه شکل (۴-۱۱) تحت اثر یک نیروی هارمونیک $F = F_0 \sin \omega t$ در تراز کف دوم قرار گرفته باشد. در این حالت

روابط (۱۱-۱) با $F_1(t) = 0$ و $F_2 = F_0 \sin \omega t$ به شکل زیر خواهند بود:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = 0 \quad (۱۱-۲۲)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 = F_0 \sin \omega t$$

برای پاسخ پایدار جواب زیر را انتخاب می کنیم:

$$y_1 = Y_1 \sin \bar{\omega}t \quad (24-11)$$

$$y_2 = Y_2 \sin \bar{\omega}t$$

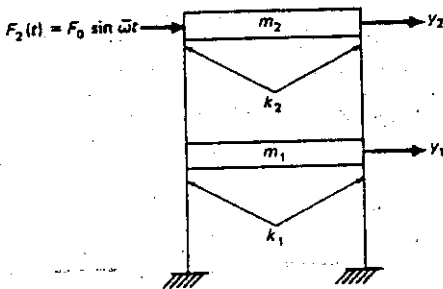
پس از قراردادن روابط (24-11) در روابط (23-11) و حذف ضریب مشترک $\sin \bar{\omega}t$ خواهیم داشت:

$$(k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2) Y_1 - k_2 Y_2 = 0 \quad (25-11)$$

$$-k_2 Y_1 + (k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) Y_2 = F_0$$

که یک دستگاه دو معادله و دو مجهول برحسب Y_2, Y_1 است. این دستگاه همواره دارای یک جواب یکه است مگر اینکه دترمینان ضرایب مجهولات صفر باشد. این حالت هنگامی به وجود می آید که فرکانس بارگذاری $\bar{\omega}$ برابر با یکی از فرکانسهای طبیعی باشد. زیرا صفرکردن دترمینان دقیقاً همان کاری است که برای محاسبه فرکانسهای طبیعی انجام می گیرد. به عبارت دیگر جز در حالتی که سازه در یکی از فرکانسهای تشدید بارگذاری می شود سیستم معادلات جبری (23-11) دارای یک جواب یکه برای Y_2, Y_1 می باشد.

مثال (5-11): پاسخ پایدار ساختمان برشی دو طبقه مثال (1-10) را هنگامی که نیروی $F_2(t) = 10000 \sin 20t$ مطابق شکل (3-11) به طبقه دوم آن اثر می کند به دست آورید.



شکل (3-11): ساختمان برشی بابارگذاری هارمونیک

فرکانسهای طبیعی این قاب در مثال (1-10) محاسبه شدند:

$$\omega_1 = 11.8 \text{ rad / sec}$$

$$\omega_2 = 32.9 \text{ rad / sec}$$

چون فرکانس بار 20 rad/Sec است، لذا سیستم در حالت تشدید نمی باشد. بنابراین پاسخ پایدار از حل معادلات (25-11) برای Y_2, Y_1 به دست می آید. از قراردادن مقادیر عددی این مثال در معادلات داریم:

$$(75000 - 136 \times 20^2)Y_1 - 44300Y_2 = 0$$

$$-44300Y_1 + (44300 - 66 \times 20^2)Y_2 = 10000$$

از حل این معادلات خواهیم داشت:

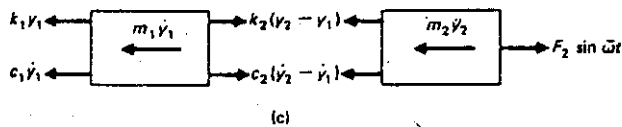
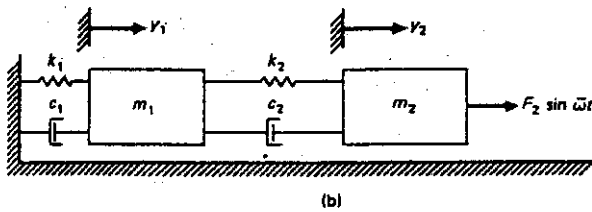
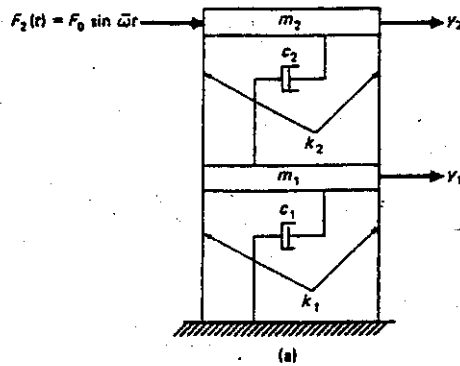
$$Y_1 = -0.28 \text{ in} , \quad Y_2 = -0.13 \text{ in}$$

بنابراین براساس روابط (۱۱-۲۴) پاسخ پایدار برابر است با:

$$y_1 = -0.28 \sin 20t \text{ in}$$

$$y_2 = -0.13 \sin 20t \text{ in}$$

(جواب)



شکل (۱۱-۴):

الف) ساختمان برشی میرا با بارگذاری هارمونیک ب) مدل چند جرم و فنر ج) ترسیمه جسم آزاد

میرایی را می توان به راحتی با اضافه کردن اعضای میراساز در مدل مطابق شکل (۴-۱۱) برای يك ساختمان برشی در طبقه، در تحلیل در نظر گرفت. معادله حرکت كه از تعادل نیروهای نشان داده شده در ترسیمه آزاد شكل (۴-۱۱، ج) به دست می آیند عبارتند از:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_2) \dot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - c_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 - k_2 y_1 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 &= F_0 \sin \bar{\omega} t \end{aligned} \quad (۲۶-۱۱)$$

همان طور كه در فصل ۲ برای سیستمهای تك درجه گفته شد بهتر است در سمت راست روابط به جای تابع سینوسی از يك تابع توانی مختلط به شكل زیر استفاده شود:

$$F_0 e^{i\bar{\omega}t} = F_0 (\cos \bar{\omega}t + i \sin \bar{\omega}t) \quad (۲۷-۱۱)$$

با اطلاع از اینکه بخش حقیقی جواب باید كنار گذاشته شود از قراردادن این مقدار در روابط نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_2) \dot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - c_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 - k_2 y_1 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 &= F_0 e^{i\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (۲۸-۱۱)$$

برای پاسخ پایدار جوابهای زیر را انتخاب می كنیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_1 e^{i\bar{\omega}t} \\ y_2 &= Y_2 e^{i\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (۲۹-۱۱)$$

بامشتق گیری از این روابط داریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= i\bar{\omega} Y_1 e^{i\bar{\omega}t} & \ddot{y}_1 &= -\bar{\omega}^2 Y_1 e^{i\bar{\omega}t} \\ \dot{y}_2 &= i\bar{\omega} Y_2 e^{i\bar{\omega}t} & \ddot{y}_2 &= -\bar{\omega}^2 Y_2 e^{i\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (۳۰-۱۱)$$

از قراردادن این مقادیر در روابط (۲۸-۱۱) سیستم معادلات جبری مختلط زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{aligned} \left\{ (k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2) + i\bar{\omega}(c_1 + c_2) \right\} Y_1 - (k_2 + i\bar{\omega}c_2) Y_2 &= 0 \\ -(k_2 + i\bar{\omega}c_2) Y_1 + \left\{ (k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) + i\bar{\omega}c_2 \right\} Y_2 &= F_0 \end{aligned} \quad (۳۱-۱۱)$$

از حل این دستگاه معادلات دامنه های Y_1 و Y_2 به دست می آیند. از قراردادن این دو مقدار در روابط (۲۹-۱۱) و جداکردن بخش حقیقی و مجازی آن، پاسخ به دست خواهد آمد. در این مثال چون تابع بارگذاری سینوسی بوده است بخش مجازی آن پاسخ سیستم خواهد بود. اگر تابع بارگذاری کسینوسی باشد بخش حقیقی آن پاسخ سیستم خواهد بود. محاسبات لازم را از طریق حل يك مثال عددی بهتر می توان نشان داد.

مثال (۶-۱۱): پاسخ پایدار ساختمان برشی دو طبقه مثال (۵-۱۱) را با در نظرگرفتن میرایی در تحلیل تعیین کنید. [شکل (۴-۱۱)] در این مثال فرض کنید که ثابتهای میرایی c_1 و c_2 متناسب با ثابتهای فنری k_1 و k_2 هستند به طوری که نسبت تناسب $a_0 = 0.01$ باشد. بنابراین داریم:

$$c_1 = a_0 k_1 = 307 \text{ lb. sec/ in} \quad (\text{الف})$$

$$c_2 = a_0 k_2 = 443$$

از قراردادن مقادیر عددی این مثال در روابط (۱۱-۲۱) دستگاه معادلات زیر به دست خواهند آمد:

$$(20600 + 15000i)Y_1 - (44300 + 8860i)Y_2 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$-(44300 + 8860i)Y_1 + (17900 + 8960i)Y_2 = 10000$$

جواب این دستگاه معادلات عبارت است از:

$$Y_1 = -0.2686 + 0.0007i \quad (\text{ج})$$

$$Y_2 = -0.1378 - 0.0631i$$

به صورت توانی نیز داریم:

با قراردادن $\bar{\omega} = 20 \text{ rad/sec}$ و توجه به اینکه در این مثال (نیرو تابع سینوسی است) پاسخ فقط بخش مجازی جواب است. جواب نهایی به شکل زیر خواهد بود:

$$y_1 = 0.2686 \sin(20t + 3.139) \text{ in} \quad (\text{جواب})$$

$$y_2 = 0.1515 \sin(20t + 3.571)$$

از مقایسه این نتایج با نتایج حالت نامیرا در مثال (۵-۱۱) مشاهده می شود که فقط مقدار کمی دامنه حرکت تغییر کرده است. این حالت همواره برای سیستمهای با میرایی کم تحت اثر یک نیروی هارمونیک که به فرکانسهای طبیعی آن نزدیک نمی باشد، وجود دارد. در این مثال فرکانس نیرو $\bar{\omega} = 20 \text{ rad/sec}$ نسبتاً از فرکانسهای طبیعی $\omega_1 = 11.83 \text{ rad/sec}$ و $\omega_2 = 32.94 \text{ rad/sec}$ دور می باشد.

۶-۱۱- برنامه ۸- امتحان زیر برنامه HARMO

برنامه کامپیوتری ۸ برنامه کوتاهی برای امتحان زیر برنامه HARMO است.

این زیر برنامه پاسخ پایدار یک سیستم را تحت اثر نیروهای هارمونیک محاسبه می نماید. تعداد درجات آزادی، ماتریس سختی و ماتریس جرم سیستم از برنامه اصلی به این برنامه منتقل می شوند. فرض می شود میرایی سیستم متناسب با ضرایب سختی و جرم آن باشند یعنی ماتریس میرایی از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (۱۱-۲۲)$$

که a_0 ، a_1 ضرایبی هستند که در داده های ورودی مشخص می شوند.

که a_0, a_1 ضرایبی هستند که در داده های ورودی مشخص می شوند.

زیربرنامه HARMO از جبر اعداد مختلط برای حل معادلات استفاده می نماید. متغیرهای ورودی برنامه ۸ در جدول (۹-۱۱) شرح داده شده اند و داده های ورودی برنامه با فرمت های مورد نیاز در جدول (۱۰-۱۱) نشان داده شده اند.

جدول (۹-۱۱): متغیرهای ورودی برنامه ۸

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
ND		تعداد درجات آزادی
SK(I,J)	[K]	ماتریس سختی
SM(I,J)	[M]	ماتریس جرم
FACK	a_1	ضریب سختی میرایی
FACK	a_0	ضریب جرم میرایی
W	$\bar{\omega}$	فرکانس بار (rad/sec)
$F_c(I), F_s(I)$		ضرایب نیروی $F_c \cos \bar{\omega}t + F_s \sin \bar{\omega}t$ در مختصه i

جدول (۱۰-۱۱): داده های ورودی و فرمت آنها برای برنامه ۸

برنامه	متغیرها	فرمت
برنامه ۸	ND	(I5)
	SK(I,J) (سطر به سطر)	(8F10.0)
	SM(I,J) (سطر به سطر)	(8F10.0)
زیربرنامه	FACK, FACM, W	(8F10.2)
HARMO	$F_c(I), F_s(I)$ (I= 1,ND)	(8F10.2)

مثال (۷-۱۱): پاسخ ساختمان برشی در طبقه میرایی مثال (۶-۱۱) را با برنامه ۸ به دست آورید.

لیست داده های ورودی و نتایج خروجی برنامه در جدول (۱۱-۱) آمده اند.
 براساس نتایج خروجی برنامه پاسخ این سیستم در درجه آزادی به شرح زیر می باشد:

$$y_1(t) = 0.00068 \cos 20t - 0.2686 \sin 20t$$

$$y_2(t) = -0.0631 \cos 20t - 0.1378 \sin 20t$$

یا

$$y_1(t) = 0.2686 \sin(20t + 3.139)$$

$$y_2(t) = 0.1516 \sin(20t + 3.571)$$

همان طور که انتظار می رفت نتایج با محاسبات دستی مثال (۱۱-۶) مطابقت دارد.

جدول (۱۱-۱): داده های ورودی و نتایج خروجی مثال ۱۱-۷

DATA LISTING			
2			
75000.	-44300.		
-44300.	44300.		
136.	0.		
0.	66.		
0.01	0.00	20.00	
0.00	0.00	0.00	100000.00
THE STEADY-STATE RESPONSE IS			
COORD.	COS COMP.	SIN COMP.	
1	0.6814D -03	-0.2686D 00	
2	-0.6309D -01	-0.1378D 00	

۱۱-۷- خلاصه

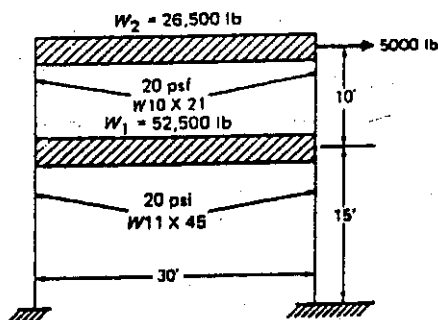
برای حل معادلات خطی حرکت می توان از روش جمع زدن مدها و یا روش انتگرال گیری عددی کام به کام استفاده نمود. روش جمع زدن مدها محدود به سازه هایی است که معادلات آنها خطی باشند در حالیکه روش انتگرال گیری کام به کام بطور مشابه برای سیستمهای با رفتار خطی و غیرخطی قابل استفاده است. روش انتگرال گیری کام به کام برای تحلیل پاسخ سازه های چند بوجه آزادی غیرخطی در فصل ۱۹ ارائه شده است.

در این روش جمع زدن مدها برای به دست آوردن پاسخ يك ساختمان برشی

تحت اثر نیروهای خارجی یا حرکت تکیه گاهی شرح داده شد. همچنین بیان گردید که استفاده از مدهای نرمال برای تبدیل مختصات، دستگاه معادلات دیفرانسیل وابسته را به يك سری معادلات دیفرانسیل غیروابسته تبدیل می نماید. جواب این معادلات را می توان با روشهای ارائه شده در بخش I برای سازه های تک درجه به دست آورد. در حالت خاص بارگذاری هارمونیک پاسخ رami توان از حل يك دستگاه معادلات جبری که مجهولات آن دامنه های پاسخ در مختصات مختلف هستند به دست آورد.

مسائل

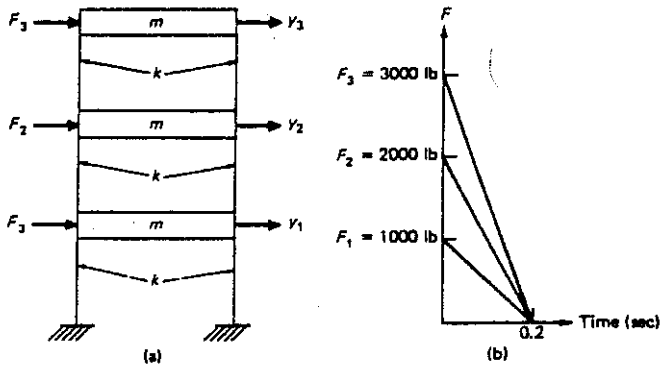
۱-۱۱- پاسخ زمانی ساختمان برشی دو طبقه شکل م (۱-۱۱) را تحت اثر يك نیروی ثابت 5000 lb که به طور ناگهانی در تراز کف دوم آن اثر می کند به دست آورید. فاصله قابها از یکدیگر 15 ft است.



شکل م (۱-۱۱)

۲-۱۱- مساله (۱-۱۱) را برای حالتی که سازه تحت اثر يك شتاب تکیه گاهی ناگهانی $0.5g$ قرار گیرد حل کنید.

۳-۱۱- حداکثر جابجایی کفهای ساختمان برشی سه طبقه شکل م (۳-۱۱، الف) را تحت اثر يك بار ضربه ای مثلثی مطابق شکل م (۳-۱۱، ب) به دست آورید، مجموع سختی ستونهای هر طبقه $k=1500 \text{ lb/in}$ و جرم کفها $m = 150 \text{ lbsec}^2/\text{in}$ است.

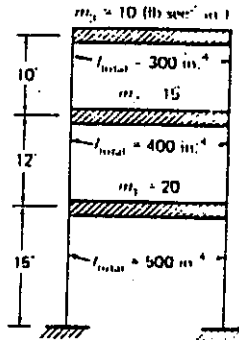


شکل م (۳-۱۱)

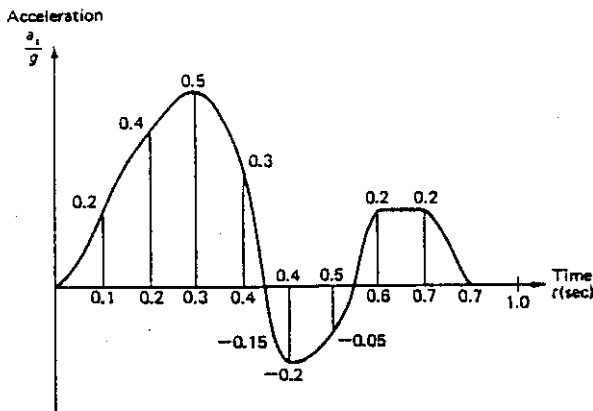
۳-۱۱- مساله (۳-۱۱) را با برنامه ۶ حل کنید. گام زمانی را $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ و حداکثر زمان انتگرال گیری را $T_{\max} = 0.3 \text{ Sec}$ انتخاب کنید.

۵-۱۱- حداکثر نیروی برشی ستونهای طبقه دوم مساله (۳-۱۱) را به دست آورید. (راهنمایی: نیروی برشی را در هر مد به دست آورید و به روش جذر مجموع مربعات ترکیب کنید).

۶-۱۱- با استفاده از برنامه ۷ پاسخ زمانی ساختمان برشی سه طبقه شکل م (۶-۱۱)، الف) را تحت اثر شتاب تکیه گاهی شکل م (۶-۱۱) ب) به دست آورید. پاسخ را برای مدت ۱ ثانیه و با استفاده از گامهای زمانی $\Delta t = 0.05 \text{ sec}$ و میرایی ۱۰٪ برای تمام مدها تعیین کنید. ($E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$)



شکل م (۶-۱۱) الف)



شکل م (۱۱-۶، ب)

۷-۱۱- پاسخ پایدار ساختمان برشی شکل م (۷-۱۱) را تحت اثر نیروهای هارمونیک

نشان داده شده با صرفنظر از میرایی به دست آورید.

۸-۱۱- مسأله (۷-۱۱) را با فرض اینکه خسرایب میرایی متناسب با سختی طبقه

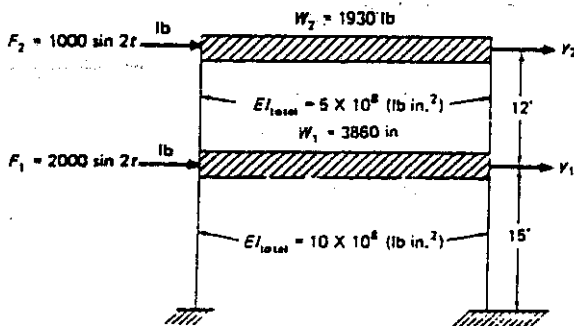
$c_i = 0.05K_i$ باشند حل کنید.

۹-۱۱- پاسخ پایدار سازه (ساختمان برشی) نشان داده شده در شکل م (۹-۱۱) را برای

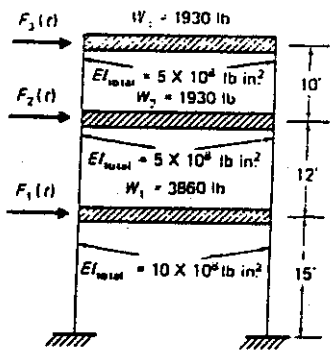
بارگذاری های زیر پیدا کنید.

(الف) $F_1(t) = 1000 \sin t$, $F_2(t) = 2000 \sin t$, $F_3(t) = 1500 \sin t$

(ب) $F_1(t) = 2000 \cos t$, $F_2(t) = 3000 \cos t$, $F_3(t) = 4000 \cos t$



شکل م (۱۱-۷)



شکل م (۹-۱۱)

فصل دوازدهم

حرکت میرای ساختمانهای برشی

در فصلهای گذشته فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی سازه های نامیرایی که به صورت ساختمان برشی مدل شده اند تعیین شد. همچنین پاسخ این سازه ها به روش جمع زدن مدها به دست آمد. در این روش به کمک خاصیت تعامد مدها و استفاده از یک تبدیل مختصات، معادلات دیفرانسیل حرکت غیروابسته حاصل می شوند.

در نظر گرفتن میرایی در تحلیل دینامیکی سازه ها مسأله را پیچیده می نماید. زیرا نه تنها معادلات دیفرانسیل حرکت جملاتی اضافه مربوط به نیروهای میرایی خواهند داشت بلکه غیروابسته بودن معادلات هنگامی ممکن خواهد بود که محدودیت یا شرایط خاصی برای تابع ضرایب میرایی اعمال نماییم.

معمولاً میرایی موجود در سازه ها نسبتاً کوچک است و عملاً تأثیری در محاسبات فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی سیستم ندارد، لذا از اثر میرایی در تعیین فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی سیستمهای سازه ای صرف نظر می شود. به این ترتیب در عمل مسأله ویژه سازه های میرا به همان روش سازه های نامیرا حل می گردد.

۱-۱۲- معادلات ساختمان برشی میرا

برای یک ساختمان برشی با میرایی لزج مانند ساختمان برشی سه طبقه شکل (۱-۱۲) معادلات حرکت که از تعادل نیروهای موجود در ترسیم آزاد مربوط به آن به دست می آیند عبارتند از:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) - c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3 (y_3 - y_2) &= F_2(t) \\ m_3 \ddot{y}_3 + c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 (y_3 - y_2) &= F_3(t) \end{aligned}$$

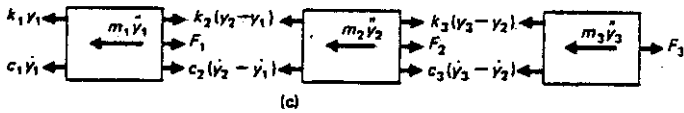
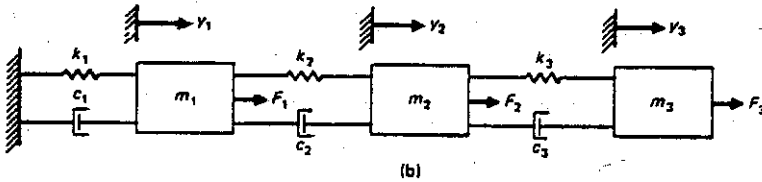
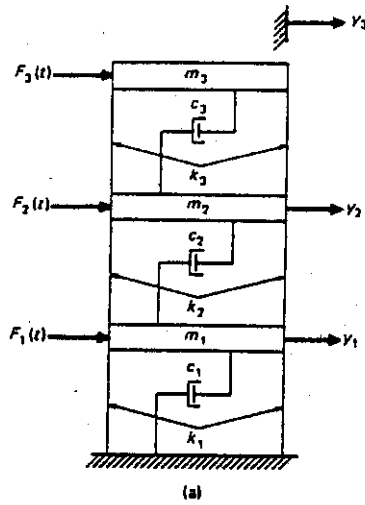
این معادلات را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \quad (۲-۱۲)$$

که تمام ماتریسها و بردارهای آن قبلاً معرفی شده اند، جز ماتریس میرایی که برابر است با:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (۳-۱۲)$$

در قسمت بعدی شرایطی را بررسی خواهیم نمود که معادلات حرکت میرا را بتوان به یک سری معادلات غیروابسته تبدیل نمود.



شکل (۱-۱۲): الف) ساختمان برشی میرا (ب) مدل ریاضی (ج) ترسیمه جسم آزاد

۲-۱۲- معادلات میرای غیروابسته

برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت، معادله (۲-۱۲)، آنها را باید غیر وابسته کرد. برای این کار از تبدیلیل مختصات زیر استفاده می شود:

$$\{y\} = [\Phi]\{z\} \quad (۴-۱۲)$$

که $[\Phi]$ همان ماتریس مدها است که از ارتعاش آزاد نامیرا به دست می آید. از قراردادن رابطه (۴-۱۲) و مشتقات آن در رابطه (۲-۱۲) نتیجه می شود:

$$[M][\Phi]\{\ddot{z}\} + [C][\Phi]\{\dot{z}\} + [K][\Phi]\{z\} = \{F(t)\} \quad (۵-۱۲)$$

از پیش ضرب رابطه (۵-۱۲) در ترانزاده بردار مدها $\{\Phi\}_n^T$ خواهیم داشت:

$$\{\Phi\}_n^T [M][\Phi]\{\ddot{z}\} + \{\Phi\}_n^T [C][\Phi]\{\dot{z}\} + \{\Phi\}_n^T [K][\Phi]\{z\} = \{\Phi\}_n^T \{F(t)\} \quad (۶-۱۲)$$

باید توجه داشت که باتوجه به خاصیت تعامد مدها یعنی:

$$\{\Phi\}_n^T [M]\{\Phi\}_m = 0 \quad (۷-۱۲)$$

$$m \neq n, \quad \{\Phi\}_n^T [K]\{\Phi\}_m = 0$$

تمام مؤلفه های جمله اول و سوم رابطه (۶-۱۲) جز مؤلفه مربوط به مد n ام صفر خواهند شد. یک چنین حالتی را برای جمله مربوط به میرایی هم فرض می نماییم یعنی اگر فرض کنیم که:

$$n \neq m, \quad \{\Phi\}_n^T [C]\{\Phi\}_m = 0 \quad (۸-۱۲)$$

از مؤلفه های مربوط به جمله میرایی، تنها مؤلفه زیر باقی خواهد ماند:

$$\{\Phi\}_n^T [C]\{\Phi\}_n$$

در این حالت رابطه (۶-۱۲) را می توان چنین نوشت:

$$M_n \ddot{Z}_n + C_n \dot{Z}_n + K_n Z_n = F_n(t)$$

یا بدین شکل:

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = F_n(t) / M_n \quad (۹-۱۲)$$

که در آن:

$$M_n = \{\Phi\}_n^T [M]\{\Phi\}_n \quad (الف، ۱۰-۱۲)$$

$$K_n = \{\Phi\}_n^T [K]\{\Phi\}_n = \omega_n^2 M_n \quad (ب، ۱۰-۱۲)$$

$$C_n = \{\Phi\}_n^T [C]\{\Phi\}_n = 2\xi_n \omega_n M_n \quad (ج، ۱۰-۱۲)$$

$$F_n(t) = \{\Phi\}_n^T \{F(t)\} \quad (د، ۱۰-۱۲)$$

از نرمال بودن مدها یعنی:

$$\{\Phi\}_n^T [M]\{\Phi\}_n = 1 \quad (۱۱-۱۲)$$

نتیجه خواهد شد:

$$M_n = 1$$

لذا رابطه (۹-۱۲) بدین شکل ساده می شود:

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = F_n(t) \quad (12-12)$$

به این ترتیب یک سری N معادله دیفرانسیل غیروابسته ($n=1, 2, \dots, N$) به دست خواهد آمد.

۱۲-۳- شرایط غیرهمبستگی میرایی

در به دست آوردن معادله میرایی غیر همبسته، رابطه (۱۲-۱۲)، فرض شد که تبدیل مختصات نرمال، رابطه (۱۲-۴)، نیروهای اینرسی و ارتجاعی و همچنین نیروهای میرایی را غیرهمبسته می نماید. می خواهیم شرایطی که تحت آن، این غیرهمبستگی به وجود می آید را بررسی نماییم؛ یعنی شکلی از ماتریس $[C]$ که رابطه (۸-۱۲) برای آن صادق باشد.

هنگامی که ماتریس میرایی به شکل زیر باشد:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (13-12)$$

که در آن a_0 و a_1 ضرایب متناسب دلخواهی هستند، شرایط تعامد برقرار خواهد بود. این را می توان با اعمال شرایط تعامد بر روی رابطه (۱۲-۱۳) مشاهده نمود. برای این کار کافی است طرفین این رابطه را در ترانهاده بردار مدام $\{\Phi\}_n^T$ پیش ضرب و در بردار مدها $[\Phi]$ پس ضرب نمود:

$$\{\Phi\}_n^T [C] [\Phi] = a_0 \{\Phi\}_n^T [M] [\Phi] + a_1 \{\Phi\}_n^T [K] [\Phi] \quad (14-12)$$

با استفاده از شرایط تعامد، رابطه (۱۲-۷)، رابطه بالا بدین شکل ساده می شود:

$$\{\Phi\}_n^T [C] [\Phi] = a_0 \{\Phi\}_n^T [M] \{\Phi\}_n + a_1 \{\Phi\}_n^T [K] \{\Phi\}_n$$

و یا از روابط (۱۲-۱۰):

$$\{\Phi\}_n^T [C] \{\Phi\}_n = a_0 M_n + a_1 M_n \omega_n^2$$

$$\{\Phi\}_n^T [C] \{\Phi\}_n = (a_0 + a_1 \omega_n^2) M_n$$

که نشان می دهد هنگامی که ماتریس میرایی شرایط رابطه (۱۲-۱۳) را داشته باشد نیروهای میرایی با تبدیل مختصات رابطه (۱۲-۴) غیر همبسته می شوند. البته می توان نشان داد که ترکیبهای دیگری از ماتریسهای جرم و سختی برای ماتریس میرایی وجود دارند که شرایط تعامد را ارضاء می نمایند. در حالت کلی ماتریس میرایی می تواند به شکل رابطه (۱۲-۱۵) باشد:

$$[C] = [M] \sum_i a_i ([M]^{-1} [K])^i \quad (15-12)$$

که i در محدوده $-\infty < i < \infty$ و تعداد جملات جمع به هر تعداد موردنیاز می تواند باشد.

بدیهی است که ماتریس میرایی، رابطه (۱۲-۱۳)، می تواند حالت خاصی از رابطه (۱۲-۱۵) باشد. اگر دو جمله مربوط به $i = 1, i = 0$ را از رابطه (۱۲-۱۵) در نظر بگیریم ماتریس میرایی رابطه (۱۲-۱۳) به دست می آید. با این شکل از ماتریس میرایی می توان ضرایب ماتریس را طوری به دست آورد که يك سیستم با هر نسبت میرایی دلخواه در هر تعداد مد، شرایط غیرهمبستگی را ایجاد نماید. برای هر مد n ، میرایی مدی از رابطه (۱۲-۱۰، ج) برابر است با:

$$C_n = \{\Phi\}_n^T [C] \{\Phi\}_n = 2\xi_n \omega_n M_n$$

اگر $[C]$ از رابطه (۱۲-۱۵) در این رابطه قرار داده شود خواهیم داشت:

$$C_n = \{\Phi\}_n^T [M] \sum_i a_i ([M]^{-1} [K])^i \{\Phi\}_n \quad (۱۲-۱۶)$$

حال با استفاده از رابطه (۱۰-۲۴) $(K\{\Phi\}_n = \omega_n^2 M\{\Phi\}_n)$ و تعدادی عملیات جبری می توانیم نشان دهیم* که ضریب میرایی مربوط به هر مد n به شکل زیر نوشته می شود:

$$C_n = \sum_i a_i \omega_n^{2i} M_n = 2\xi_n \omega_n M_n \quad (۱۲-۱۷)$$

که از آن:

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_i a_i \omega_n^{2i} \quad (۱۲-۱۸)$$

از رابطه (۱۲-۱۸) می توان ضرایب a_i را برای هر تعداد مقادیر دلخواه نسبتهای میرایی مدی مورد نظر مربوط به هر تعداد مد مشخص را تعیین نمود. به عنوان مثال، برای تعیین ضرایب a_i که نسبتهای میرایی مشخص $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ و ξ_4 را ایجاد نمایند می توانیم $i = 1, 2, 3, 4$ را انتخاب نماییم که در این مورد از رابطه (۱۲-۱۸) دستگاه معادلات زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \omega_1 & \omega_1^3 & \omega_1^5 & \omega_1^7 \\ \omega_2 & \omega_2^3 & \omega_2^5 & \omega_2^7 \\ \omega_3 & \omega_3^3 & \omega_3^5 & \omega_3^7 \\ \omega_4 & \omega_4^3 & \omega_4^5 & \omega_4^7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (۱۲-۱۹)$$

در حالت کلی رابطه (۱۲-۱۹) را می توان به شکل زیر نوشت:

* Clough, R.W. and Penzien, j., Dynamics of structures, McGraw Hill, New York, 1975, P. 195.

$$\{\xi\} = \frac{1}{2}[Q]\{a\} \quad (۲۰-۱۲)$$

که $[Q]$ ماتریس مربعی است که حاوی توانهای مختلف فرکانسهای طبیعی است. از این رابطه ضرایب ثابت $\{a\}$ به دست می آیند:

$$\{a\} = 2[Q]^{-1}\{\xi\} \quad (۲۱-۱۲)$$

به این ترتیب از قراردادن رابطه (۲۱-۱۲) در رابطه (۱۵-۱۲) ماتریس میرایی به دست می آید.

یک نکته جالب در رابطه (۱۸-۱۲) می توان دید: هنگامی که ماتریس میرایی متناسب با ماتریس جرم است $\{C\} = a_0[M]$, ($j=0$)، نسبتهای میرایی با فرکانسهای طبیعی نسبت عکس دارند که در این صورت سازه درمدهای بالاتر، میرایی خیلی کمی خواهد داشت. به همین ترتیب هنگامی که ماتریس میرایی متناسب با ماتریس سختی است $\{C\} = a_1[K]$ در رابطه (۱۸-۱۲) به ازای $i=1$ نسبتهای میرایی با فرکانسهای طبیعی مربوط به آن نسبت مستقیم دارند که در این حالت مدهای بالاتر سازه بسیار میرا خواهند بود.

مثال (۱-۱۲): ضرایب میرایی مطلق سازه مثال (۱-۱۰) را با فرض ۱۰٪ میرایی برای هرمد به دست آورید.

از مثال (۱-۱۰) داریم:

فرکانسهای طبیعی

$$\omega_1 = 11.83 \text{ rad / sec} \quad (\text{الف})$$

$$\omega_2 = 32.94 \text{ rad / sec}$$

ماتریس مودها

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.26 & -1.63 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 136 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس جرم}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 75000 & -44300 \\ -44300 & 44300 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس سختی}$$

با استفاده از رابطه (۱۸-۱۲) با $i=0, 1$ برای محاسبه ضرایب a_i خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11.83 & (11.83)^3 \\ 32.89 & (32.89)^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

از حل این دستگاه معادلات داریم:

$$a_1 = 0.01851$$

$$a_2 = -0.00001146$$

همچنین داریم:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.007353 & 0 \\ 0 & 0.01515 \end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1}[K] = \begin{bmatrix} 551.475 & -325.738 \\ -671.145 & 671.145 \end{bmatrix}$$

سپس:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_i ([M]^{-1}[K])^i &= 0.01851 \begin{bmatrix} 551.475 & -325.738 \\ -671.145 & 671.145 \end{bmatrix} \\ &\quad - 0.00001146 \begin{bmatrix} 551.475 & -325.738 \\ -671.145 & 671.145 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 4.2172 & -1.4654 \\ -3.0193 & 4.7556 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$[C] = \begin{bmatrix} 136 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.2172 & -1.4654 \\ -3.0193 & 4.7556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 573.5 & -199.3 \\ -199.3 & 313.9 \end{bmatrix}$$

روش دیگری هم برای محاسبه ضرایب ماتریس میرایی مربوط به نسبتهای میرایی مشخص تعدادی از مدها وجود دارد. برای شرح این روش از رابطه زیر شروع می‌کنیم:

$$[A] = [\Phi]^2 [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 M_1 & 0 & 0 & - \\ 0 & 2\xi_2 \omega_2 M_2 & 0 & - \\ 0 & 0 & 2\xi_3 \omega_3 M_3 & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \quad (12-22)$$

که اگر $\{\Phi\}$ ماتریس نرمال شده باشد جرمهای مدهای M_1, M_2, M_3, \dots مساوی یک خواهند بود. ماتریس $[C]$ را می‌توان به شرح زیر از رابطه بالا به دست آورد.

$$[C] = [\Phi]^{-T} [A] [\Phi]^{-1} \quad (12-23)$$

بنابراین به ازای هر تعداد نسبتهای میرایی مشخص مدها $\{\xi\}$ ، می‌توان ماتریس $[C]$ را از رابطه (12-23) و ماتریس $[A]$ را از رابطه (12-22) محاسبه نمود. اما در عمل محاسبه معکوس ماتریس مدها کار پر زحمتی است.

به جای این کار با استفاده از خاصیت تعامد مدها می توان رابطه را به شکل زیر ساده نمود:

ماتریس میرایی [C] که از رابطه (۱۲-۲۴) به دست می آید شرایط تعامد را ارضاء می نماید و بنابراین جمله مربوط به میرایی در رابطه (۱۲-۲) با همان تبدیل مختصات رابطه (۱۲-۴) غیرهمبسته خواهد شد.

$$[C] = [M] \left(\sum_{n=1}^N \frac{2\xi_n \omega_n}{M_n} \{\Phi\}_n \{\Phi\}_n^T \right) [M] \quad (12-24)$$

نکته جالب در رابطه (۱۲-۲۴) این است که مشارکت هر مد در ماتریس میرایی متناسب با نسبت میرایی آن مد است، لذا مدهای نامیرا در ماتریس میرایی شرکت نخواهند داشت.

تعیین و یا حتی تخمین میرایی مطلق سازه ها کاری نسبتاً مشکل است. در حالی که نسبتهای میرایی مدی را می توان از روی تجربیات گذشته تخمین زد. این تجربیات نشان می دهد که نسبتهای میرایی مدها در سازه ها عموماً بین ۲٪ تا ۱۰٪ و احتمالاً حداکثر ۲۰٪ هستند. به عبارت دیگر، با توجه به این مساله و نوع مصالح مورد استفاده در سازه می توان مقادیر عددی نسبتهای میرایی مدها را تعیین نمود. با داشتن نسبتهای میرایی مدها می توان ماتریس میرایی را که برای تحلیل دینامیکی سازه به روشهایی غیر از روش جمع زدن مدها مانند روش انتگرال گیری گام به گام مورد نیاز است به دست آورد.

مثال (۱۲-۲): ماتریس میرایی مثال (۱۲-۱) را با استفاده از رابطه (۱۲-۲۲) به دست آورید. برای محاسبه [C] میتوان از رابطه (۱۲-۲۳) یا (۱۲-۲۴) استفاده نمود. ماتریس مدهای نرمال شده از مثال (۱۰-۲) برابر است با:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.06437 & 0.0567 \\ 0.0813 & -0.0924 \end{bmatrix}$$

و معکوس آن:

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 8.752 & 5.370 \\ 7.700 & -6.097 \end{bmatrix}$$

از رابطه (۱۲-۲۲) خواهیم داشت:

$$2\xi_1 \omega_1 M_1 = (2)(0.1)(11.83)(1) = 2.366$$

$$2\xi_2 \omega_2 M_2 = (2)(0.1)(32.89)(1) = 6.578$$

* همان مرجع، صفحه ۱۹۷

آنگاه از رابطه (۱۲-۲۳) داریم:

$$[C] = \begin{bmatrix} 8.752 & 7.700 \\ 5.370 & -6.097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.366 & 0 \\ 0 & 6.578 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.752 & 5.370 \\ 7.700 & -6.097 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 572 & -198 \\ -198 & 313 \end{bmatrix} \quad (\text{جواب})$$

که تقریباً با ماتریس میرایی همین سازه در مثال (۱۲-۱) که با استفاده از رابطه (۱۲-۱۵) به دست آمد برابر است.

۱۲-۴- زیربرنامه DAMP- محاسبه ماتریس میرایی

این زیربرنامه ماتریس میرایی سیستم $[C]$ را از روی نسبتهای میرایی مدی مشخص با استفاده از رابطه (۱۲-۲۴) محاسبه می نماید. برنامه اصلی فرکانسهای طبیعی ω_n ، ماتریس مدها $[\Phi]$ و ماتریس جرم سیستم $[M]$ را در اختیار این زیربرنامه قرار می دهد. تنها داده اضافی که این زیر برنامه نیاز دارد مقادیر نسبتهای مدی هستند که با فرمت نشان داده شده در جدول (۱۲-۱) خوانده می شوند.

جدول (۱۲-۱): داده های ورودی زیر برنامه DAMP

متغیر	علامت در متن کتاب	فرمت	شرح
X(I)	ξ	8 F10.2	نسبتهای میرایی مدهای ۱ تا NL

جدول (۱۲-۲): داده های ورودی و فرمت آنها در برنامه ۹

متغیر	علامت در متن کتاب	فرمت	شرح
NL		I10	تعداد درجات آزادی
EIGEN(I)	ω_i^2	(8F10.4)	مقادیر ویژه ($i=1, NL$)
X(I,J)	$[\Phi]$	(8F10.4)	ماتریس مدها (سطر به سطر)
SM(I,J)	$[M]$	(8F10.4)	ماتریس جرم (سطر به سطر)
XSI (I)	ξ	(8F10.2)	نسبتهای میرایی ($i=1, NL$)

۱۲-۵- برنامه ۹-امتحان زیربرنامه DAMP

لیست يك برنامه کامپیوتری کوتاه به نام برنامه ۹ برای امتحان زیربرنامه DAMP به همراه لیست این زیربرنامه در ضمیمه I آمده است. داده های ورودی و فرمت آنها برای این برنامه در جدول (۱۲-۲) نشان داده شده اند. مثال (۱۲-۳): با استفاده از برنامه ۹ ماتریس میرایی يك سازه سه درجه آزادی را که مجذور فرکانسهای طبیعی و ماتریسهای مدها و جرم آن به شرح زیر هستند به دست آورید. (میرایی تمام مدها را ۱۰٪ فرض نمائید).

$$\omega_1^2 = 1.9618 \quad \omega_2^2 = 15.3927 \quad \omega_3^2 = 60.7968$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.7421 & 0.7228 \\ 0.7967 & 0.0000 & -0.7719 \\ 0.4330 & 0.7421 & 0.7228 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.8169 & 0.1286 & -0.0740 \\ 0.1286 & 0.8571 & 0.1286 \\ -0.0740 & 0.1286 & 0.8169 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

لیست داده های ورودی و خروجی کامپیوتری این مثال در جدول (۱۲-۲) داده شده اند.

جدول (۱۲-۲): داده های ورودی و خروجی کامپیوتری مثال (۱۲-۳)

INPUT DATA

3		
1.9618	15.3927	60.7986
0.4330	-0.7421	0.7228
0.7967	0.0000	-0.7119
0.4330	0.7421	0.7228
0.8169	0.1286	-0.0740
0.1286	0.8571	0.1286
-0.0740	0.1286	0.8169
0.10	0.10	0.10

THE DAMPING MATRIX IS

0.6921D 00	-0.2303D 00	0.6178D-02
-0.2303D 00	0.5296D 00	-0.2303D 00
0.6178D-02	-0.2303D 00	0.6921D 00

معمول ترین روش در نظر گرفتن جذب انرژی در دینامیک سازه ها این است که در مدل ریاضی نیروهای میرایی را متناسب با سرعت و در جهت مخالف با آن در نظر گرفت. این نوع میرایی را میرایی لزج می نامند؛ زیرا این نوع نیرو هنگام حرکت در یک مایع لزج ایده آل به وجود می آید. وجود این نوع میرایی در معادلات، خطی بودن معادلات دیفرانسیل حرکت را تغییر نمی دهد. چون عموماً میرایی موجود در سیستمهای سازه ای نسبتاً کوچک است، اثر آن در محاسبه فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی در نظر گرفته نمی شود. اما برای غیرهمبسته نمودن معادلات دیفرانسیل حرکت میرا باید محدودیتهایی برای ضرایب میرایی مطلق سیستم در نظر گرفت. این محدودیتها هیچ گونه پی آمدی را ایجاد نمی نمایند؛ زیرا در عمل ساده تر است که به جای ضرایب میرایی مطلق نسبتهای میرایی مدی را تعیین نمود و یا تخمین زد. به علاوه برای حل معادلات حرکت به روش جمع زدن مدها فقط نسبتهای میرایی مورد نیاز هستند. هنگامی که حل به روش دیگری انجام می گیرد، ضرایب میرایی مطلق را می توان از روی نسبتهای میرایی مدها به یکی از روشهای ارائه شده در این بخش محاسبه نمود.

مسائل

۱-۱۲- ماتریسهای سختی و جرم یک سازه در درجه آزادی عبارتند از:

$$[K] = \begin{bmatrix} 4 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای میرایی این سیستم را با فرض 20% میرایی برای مد اول و 10% میرایی برای مد دوم به دست آورید. (از روابط (۱۲-۱۶) و (۱۲-۱۷) استفاده نمائید).

۲-۱۲- مساله (۱-۱۲) را با استفاده از روابط (۱۲-۲۲) و (۱۲-۲۴) حل کنید.

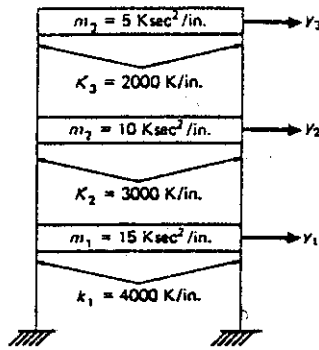
۳-۱۲- فرکانسهای طبیعی و ماتریس مدهای ساختمان برشی سه طبقه شکل م (۱۲-۳)

عبارتند از:

$$\omega_1 = 9.31 \text{ rad / sec} , \quad \omega_2 = 20.94 \text{ rad / sec} , \quad \omega_3 = 29.00 \text{ rad / sec}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.1114 & -0.1968 & -0.1245 \\ 0.2117 & -0.0277 & 0.2333 \\ 0.2703 & 0.2868 & -0.2114 \end{bmatrix}$$

ماتریس میرایی سیستم را برای ۱۰% میرایی در تمام مدها به دست آورید.



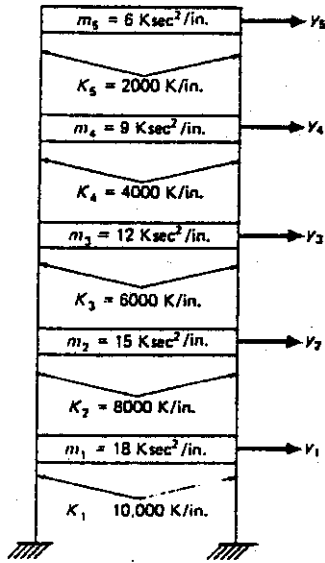
شکل م (۳-۱۲)

۴-۱۲- مساله (۳-۱۲) را برای 20% میرایی در تمام مدها حل کنید.

۵-۱۲- مساله (۳-۱۲) را برای نسبتهای میرایی زیر حل کنید.
 $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0.1$, $\xi_3 = 0.0$

۶-۱۲- با استفاده از برنامه 5, JACOBI, فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال ساختمان برشی ۵ طبقه شکل م (۶-۱۲) را به دست آورید. آنگاه با استفاده از برنامه ۹, DAMP, ماتریس میرایی مربوط به آن را برای 8% میرایی در تمام مدها به دست آورید.

۷-۱۲- مساله (۶-۱۲) را برای نسبتهای میرایی زیر حل کنید:
 $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0.15$, $\xi_3 = 0.10$, $\xi_4 = 0.05$, $\xi_5 = 0$



شکل م (۶-۱۲)

فصل سیزدهم

کوچک کردن ماتریسهای دینامیکی

در مدل نمودن يك سازه پيوسته به صورت غير پيوسته به علت تغييرات در هندسه، بارگذاري و مصالح گاهي اوقات لازم است كه سازه رايه تعدادزباني اعضا تقسيم نمود. هنگامي كه اين اعضا کنار هم قرار داده مي شوند تا مدل كل سازه را تشكيل دهند، تعداد جابه جايي هاي مجهول يعني تعداد درجات آزادي ممكن است بسيار زياد باشد. درنتيجه ماتريسهاي سختي، جرم و ميرايي داراي ابعاد بزرگي خواهند بود. حل مساله ويژه اين سازه براي تعيين فرکانسهاي طبيعي و شكلهاي مدني مشكل و پرهزينه است. در اين حالتها براي اينكه حل مساله ويژه راحت تر و اقتصادي تر باشد بهتر است كه ابعاد ماتريسها کاهش داده شود. اين چنين کاهش، "تراكم"^۱ ناميده مي شود.

يك روش معمول اين کاهش، "روش تراكم استاتيكي"^۲ است. اين روش، ساده ولي تقريبي است و کاربرد آن در مسائل ديناميكي ممكن است خطاهاي نسبتاً بزرگي را ايجاد نمايد. يك روش بهتر تراكم در مسائل ديناميكي كه جوابهاي دقيقی مي دهد اخيراً ارائه شده است. اين روش كه "روش تراكم ديناميكي"^۳ ناميده مي شود، در اين فصل پس از ارائه مقدمات روش تراكم استاتيكي و بعضي از اصلاحات آن شرح داده خواهد شد.

۱۳-۱- تراكم استاتيكي

يك روش عملي کاهش ماتريس سختي آن است كه درجات آزادي وابسته^۴ يا ثانويه^۵ را بر حسب درجات آزادي مستقل^۶ يا اوليه^۷ بيان نماييم. رابطه بين درجات آزادي اوليه و ثانويه همان رابطه استاتيكي بين آنهاست و به همين دليل روش تراكم استاتيكي ناميده مي شود. اين رابطه براي کاهش ماتريس سختي استفاده مي شود. اين روش در مسائل استاتيكي هم براي حذف درجات آزادي اضافي مانند درجات آزادي داخلي يك المان در روش اجزاي محدود به كار مي رود. براي شرح روش تراكم استاتيكي فرض كنيد كه آن درجات آزادي را كه مي خواهيم کاهش دهيم (ثانويه) S مختصه اول ماتريس سختي و باقيمانده درجات (اوليه) آزادي p مختصه آخر ماتريس سختي باشند. با اين تقسيم بندي درجات آزادي رابطه سختي سازه به شكل زير تقسيم بندي مي شود:

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sp}] \\ [K_{ps}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y_s\} \\ \{y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix} \quad (۱-۱۳)$$

1- Condensation 2- Static Condensation Method 3- Dynamic Condensation Method
4- Dependent 5- Secondary 6- independent 7- Primary

که $\{y_s\}$ بردار جابه جایی های مربوط به s درجه آزادی کم شدنی و $\{y_p\}$ بردار جابه جایی های مربوط به p درجه آزادی مستقل باقیمانده است. در رابطه (۱-۱۲) فرض شده است که نیروهای خارجی در درجات آزادی وابسته (ثانویه) صفر هستند. این فرض اجباری نیست اما توضیحات را بدون تغییر در نتیجه نهایی ساده می نماید. از ضرب ماتریسی سمت چپ رابطه (۱-۱۲) دو رابطه ماتریسی زیر حاصل می شود:

$$[K_{ss}]\{y_s\} + [K_{sp}]\{y_p\} = \{0\} \quad (۲-۱۲)$$

$$[K_{ps}]\{y_s\} + [K_{pp}]\{y_p\} = \{F_p\} \quad (۲-۱۲)$$

رابطه (۲-۱۲) معادل است با:

$$\{y_s\} = [\bar{T}]\{y_p\} \quad (۴-۱۲)$$

که "[\bar{T}]" ماتریس تبدیل^۱ است و داریم:

$$[\bar{T}] = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \quad (۵-۱۲)$$

از قرار دادن رابطه (۴-۱۲) در رابطه (۲-۱۲) و استفاده از رابطه (۵-۱۲) رابطه سختی کاهش یافته نیروها و جابه جایی ها در مختصات اولیه به شرح زیر به دست می آید:

$$[\bar{K}]\{y_p\} = \{F_p\} \quad (۶-۱۲)$$

که [\bar{K}] ماتریس سختی کاهش یافته بوده و عبارت است از:

$$[\bar{K}] = [K_{pp}] - [K_{ps}][K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \quad (۷-۱۲)$$

رابطه (۴-۱۲) که ارتباط استاتیکی بین مختصات ثانویه $\{y_s\}$ و مختصات اولیه $\{y_p\}$ را مشخص می نماید را با استفاده از رابطه $\{y_p\} = [I]\{y_p\}$ می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \{y_s\} \\ \{y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{T}] \\ [I] \end{bmatrix} \{y_p\}$$

یا

$$\{y\} = [T]\{y_p\} \quad (۸-۱۲)$$

که در آن

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{y_s\} \\ \{y_p\} \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad [T] = \begin{bmatrix} [T] \\ [I] \end{bmatrix} \quad (9-13)$$

از قرار دادن روابط (۸-۱۳) و (۹-۱۳) در رابطه (۶-۱۳) می توان ماتریس سختی کاهش یافته $[\bar{K}]$ را از تبدیل ماتریس سختی سیستم $[K]$ به دست آورد:

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (10-13)$$

دیده می شود که محاسبه ماتریس سختی کاهش یافته از رابطه (۷-۱۳) نیاز به محاسبه ماتریس معکوس دارد. اما در کاربرد عملی، روش تراکم استاتیکی نیاز به محاسبه ماتریس معکوس ندارد. بلکه به جای آن از روش حذفی استاندارد گوس - جردن استفاده می شود تا مرحله ای که مختصات ثانویه $\{y_s\}$ حذف شوند. در این مرحله از حذف، رابطه سختی (۱-۱۳) به رابطه (۱۱-۱۳) کاهش داده شده است:

$$\begin{bmatrix} [I] & -[\bar{T}] \\ [0] & [\bar{K}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y_s\} \\ \{y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix} \quad (11-13)$$

از بسط رابطه (۱۱-۱۳) دیده می شود که ماتریسهای تقسیم شده $[\bar{T}]$ و $[\bar{K}]$ دقیقاً همان ماتریسهای تبدیل و سختی کاهش یافته هستند که به ترتیب در روابط (۳-۱۳) و (۶-۱۳) داده شده اند. به این ترتیب با روش حذفی گوس - جردن ماتریسهای تبدیل $[\bar{T}]$ و سختی کاهش یافته $[\bar{K}]$ به دست می آیند. بنابراین نیازی به محاسبه $[K_{ss}]^{-1}$ برای کاهش مختصات ثانویه سیستم نمی باشد.

مثال (۱-۱۳): سیستم دو درجه آزادی مدل شده در شکل (۱-۱۳) را در نظر بگیرید. با استفاده از روش تراکم استاتیکی مختصه اول را کم نمایید.

در این سیستم معادلات تعادل عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (12-13)$$

با کاهش y_1 با استفاده از روش حذفی گوس خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{k}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (13-13)$$

از مقایسه رابطه (۱۳-۱۳) با رابطه (۱۱-۱۳) در این مثال داریم:

$$[\bar{T}] = \frac{1}{2} \quad (14-13)$$

$$[\bar{K}] = \frac{k}{2}$$

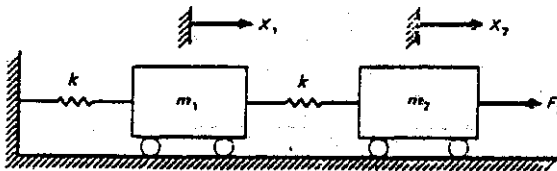
لذا از رابطه (۱۳-۹) ماتریس تبدیل برابر است با:

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10-13)$$

حال می توانیم رابطه (۱۳-۱۰) را با انجام ضربهای مربوط آن کنترل کنیم.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{2} \quad (16-13)$$

که با رابطه (۱۳-۱۴) مطابقت دارد.



شکل (۱۳-۱): مدل ریاضی یک سیستم دو درجه آزادی

۱۳-۲- تراکم استاتیکی در مسائل دینامیکی

برای کاهش ماتریسهای جرم و میرایی فرض می شود که همان رابطه استاتیکی بین درجات آزادی اولیه و ثانویه در مساله دینامیکی برقرار باشد. لذا همان تبدیل مبتنی بر تراکم استاتیکی برای کاهش ماتریس سختی، برای کاهش ماتریسهای جرم و میرایی هم استفاده می شود. در حالت کلی این روش کاهش مساله دینامیکی دقیق نیست و خطاهایی را در نتایج ایجاد می کند. مقدار خطاهای ایجاد شده بستگی به نسبت درجات آزادی کاهش یافته و انتخاب این درجات در یک سازه خاص دارد.

ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که مدل غیر پیوسته ما تعدادی درجات آزادی بدون جرم داشته باشد. در این حالت فقط لازم است که ماتریس سختی را متراکم نموده، و سطر و ستونهای مربوط به درجات آزادی بدون جرم را از ماتریس جرم حذف کرد. روش تراکم استاتیکی در این حالت مساله اولیه را تغییر نمی دهد و مساله ویژه یکسانی بدون هیچ گونه خطا خواهد داشت.

در حالت کلی یعنی در حالتی که در درجات آزادی کم شدنی هم جرم وجود داشته باشد ماتریسهای جرم و میرایی کاهش یافته با تبدیلی مشابه رابطه (۱۳-۱۰) به

دست می آیند. یعنی اگر $[M]$ ماتریس جرم سیستم باشد ماتریس جرم کاهش یافته برابر است با:

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] \quad (۱۷-۱۳)$$

که $[T]$ ماتریس تبدیل تعریف شده در رابطه (۹-۱۳) است، همچنین اگر میرایی وجود داشته باشد ماتریس میرایی کاهش یافته برابر خواهد بود با:

$$[\bar{C}] = [T]^T [C] [T] \quad (۱۸-۱۳)$$

که $[C]$ ماتریس میرایی سیستم است.

این روش تراکم ماتریسهای جرم و میرایی را می توان بدین شرح توجیه نمود: انرژی پتانسیل ارتجاعی V و انرژی جنبشی KE سازه به ترتیب برابرند با:

$$V = \frac{1}{2} \{y\}^T [K] \{y\} \quad (۱۹-۱۳)$$

$$KE = \frac{1}{2} \{\dot{y}\}^T [M] \{\dot{y}\} \quad (۲۰-۱۳)$$

به همین ترتیب کار انجام شده δW_d توسط نیروهای میرایی $F_d = [C] \{\dot{y}\}$ مربوط به جابه جایی $\{\delta y\}$ را می توان به شکل رابطه (۲۱-۱۳) نوشت:

$$\delta W_d = \{\delta y\}^T [C] \{\dot{y}\} \quad (۲۱-۱۳)$$

از تبدیل مختصات رابطه (۸-۱۳) در روابط بالا نتیجه خواهد شد:

$$V = \frac{1}{2} \{y_p\}^T [T]^T [K] [T] \{y_p\} \quad (۲۲-۱۳)$$

$$KE = \frac{1}{2} \{\dot{y}_p\}^T [T]^T [M] [T] \{\dot{y}_p\} \quad (۲۳-۱۳)$$

$$\delta W_d = \{\delta y_p\}^T [T]^T [C] [T] \{\dot{y}_p\} \quad (۲۴-۱۳)$$

از قراردادن $[\bar{K}]$, $[\bar{M}]$ و $[\bar{C}]$ به ترتیب در روابط بالا خواهیم داشت:

$$V = \frac{1}{2} \{y_p\}^T [\bar{K}] \{y_p\} \quad (۲۵-۱۳)$$

$$KE = \frac{1}{2} \{\dot{y}_p\}^T [\bar{M}] \{\dot{y}_p\} \quad (۲۶-۱۳)$$

$$\delta W_d = \{\delta y_p\}^T [\bar{C}] \{\dot{y}_p\} \quad (۲۷-۱۳)$$

سه رابطه اخیر به ترتیب بیان کننده انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار مجازی نیروهای میرایی بر حسب مختصات مستقل $\{y_p\}$ هستند. بنابراین ماتریسهای $[\bar{K}]$, $[\bar{M}]$ و $[\bar{C}]$ به ترتیب به عنوان ماتریسهای سختی، جرم و میرایی سازه مربوط به درجات آزادی مستقل $\{y_p\}$ هستند.

مثال (۲-۱۳): فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی ساختمان برشی سه طبقه شکل

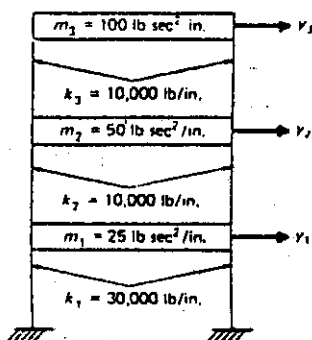
(۲-۱۳) را به دست آورید. سپس اولین درجه آزادی را کم نموده، فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی آن را با مقادیر اولی مقایسه نمایید. سختی طبقات و جرم کفها در شکل نشان داده شده اند.

محاسبه فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی

معادله حرکت ارتعاش آزاد این سازه برابر است با:

$$\{F\} = \{0\} \quad \text{وقتی}$$

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \quad \text{(الف)}$$



شکل (۲-۱۳): ساختمان برشی مثال (۲-۱۳)

که $[M]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریسهای سختی و جرم آن مطابق روابط (۳-۹) و (۵-۹) هستند. از قرار دادن مقادیر عددی مربوط در رابطه (الف) نتیجه خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 40000 & -10000 & 0 \\ -10000 & 20000 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از قرار دادن $y_i = Y_i \sin \omega t$ و حذف ضریب مشترک $\sin \omega t$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 40000 - 25\omega^2 & -10000 & 0 \\ -10000 & 20000 - 50\omega^2 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 - 100\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

برای اینکه این معادله جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان آن را صفر قرار داد:

$$\begin{vmatrix} 40000 - 25\omega^2 & -10000 & 0 \\ -10000 & 20000 - 50\omega^2 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 - 100\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

از بسط این دترمینان يك معادله درجه سه برحسب ω^2 به دست می آید که ریشه های آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 36.1 \\ \omega_2^2 &= 400.0 \\ \omega_3^2 &= 1664.0 \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

فرکانسهای طبیعی از رابطه $f = \frac{\omega}{2\pi}$ به دست می آیند:

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.96 \text{ cps} \\ f_2 &= 3.18 \text{ cps} \\ f_3 &= 264.8 \text{ cps} \end{aligned}$$

از قرار دادن هر يك از مقادیر فرکانس طبیعی در رابطه (ب)، حثث يك معادله اضافی و حل دو معادله باقیمانده برای دو تا از مجهولات برحسب مجهول سوم، شکلهای مدی به دست می آیند. همان طور که قبلاً گفته شد، در حل این معادلات بهتر است که اولین مجهول غیر صفر مساوی يك قرار داده شود. با انجام این عملیات از روابط (ب) و (ج) مقادیر زیر برای شکلهای مدی به دست می آیند:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= 1.00 & Y_{12} &= 1.00 & Y_{13} &= 1.00 \\ Y_{21} &= 3.91 & Y_{22} &= 3.00 & Y_{23} &= 3.338 \\ Y_{31} &= 6.11 & Y_{32} &= -1.00 & Y_{33} &= -2.025 \end{aligned}$$

تراکم مختصه y_1

ماتریس سختی این سازه عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 40000 & -10000 & 0 \\ -10000 & 20000 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

از حذف گوس اولین مجهول داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 17500 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix} \quad (د)$$

از مقایسه رابطه (د) با رابطه (۱۱-۱۲) می توان نوشت:

$$[\bar{T}] = [0.25 \quad 0] \quad (ه)$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 17500 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

و از رابطه (۹-۱۲)

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (و)$$

برای کنترل از رابطه (۱۲-۱۳) هم برای محاسبه $[\bar{K}]$ استفاده می کنیم:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40000 & -10000 & 0 \\ -10000 & 20000 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 17500 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

که با رابطه (ه) یکسان است. ماتریس جرم کاهش یافته از قرار دادن $[T]$ و ترانزاده آن

در رابطه (۱۲-۱۷) به دست می آید

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که نتیجه می شود:

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 51.6 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

بنابراین رابطه دینامیکی تراکم یافته به شکل زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} 51.6 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 17500 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی از حل مساله ویژه کوچک شده زیر به دست می آیند:

$$\begin{bmatrix} 17500 - 51.6\omega^2 & -10000 \\ -10000 & 10000 - 100\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (ز)$$

با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب رابطه (ز) و حل معادله درجه دو حاصل برای ω^2 داریم:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= 36.1 \\ \omega_2^2 &= 403.3\end{aligned}\quad (\text{ح})$$

که از آن

$$\begin{aligned}f_1 &= \sqrt{36.1} / 2\pi = 0.95 \text{ cps} \\ f_2 &= \sqrt{403.3} / 2\pi = 3.20 \text{ cps}\end{aligned}$$

شکلهای مدی مربوط از رابطه (ز) پس از قرار دادن مقادیر عددی ω_1^2 ای ω_2^2 و حل معادله اول برای Y_3 با فرض $Y_2 = 1$ به دست می آیند که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}Y_{21} &= 1.00 & Y_{22} &= 1.00 \\ Y_{31} &= 1.56 & Y_{32} &= -0.33\end{aligned}$$

از کاربرد رابطه (۱۳-۸) برای مد اول داریم:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 1.56 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 1.00 \\ 1.56 \end{Bmatrix}$$

پس از نرمال کردن بردار به طوری که اولین مؤلفه ۱ باشد خواهیم داشت:

$$Y_{11} = 1.00 \quad Y_{21} = 4.00 \quad Y_{31} = 6.24$$

و برای مود دوم

$$Y_{21} = 1.00 \quad Y_{22} = 4.00 \quad Y_{32} = -1.32$$

در این سیستم که فقط سه درجه آزادی داشت. از کاهش یکی از مختصات، فرکانسهای طبیعی حاصل شده برای دو مد با حالت کاهش داده نشده تطابق نسبتاً خوبی دارند. [روابط ح و ج]. اما تجربه نشان می دهد که تراکم استاتیکی، خطاهای بزرگی را در محاسبات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ای که از سیستم کاهش داده شده به دست می آیند ایجاد می نماید. یک توصیه عمومی که توسط استفاده کنندگان این روش ارائه می شود این است که فرض شود نتایج حاصل از حل مسائل ویژه با استفاده از تراکم استاتیکی نتایج تقریبی قابل قبولی را فقط برای حدود نیمی از مقادیر ویژه (فرکانسهای طبیعی) و بردارهای ویژه (شکلهای مدی) ایجاد می نماید. مثال (۱۳-۳): شکل (۱۳-۳) یک ساختمان برشی چهار طبقه را نشان می دهد. در این سازه مطلوب است:

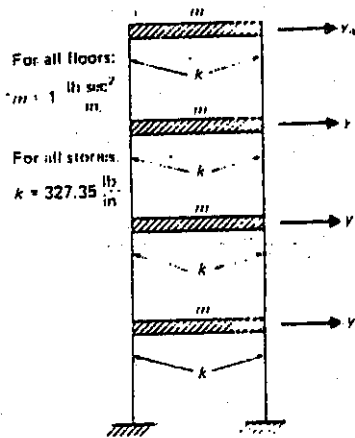
الف) فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی به عنوان یک سیستم چهار درجه آزادی

ب) فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی مربوط پس از تراکم استاتیکی

(الف) فرکانسهای طبیعی و شکل های مدی سیستم چهار درجه آزادی ماتریسهای سختی و جرم این سازه به ترتیب عبارتند از:

$$[K] = 327.35 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$



شکل (۳-۱۳): ساختمان برشی چهار طبقه مثال (۳-۱۳)

از قرار دادن روابط (الف) و (ب) در رابطه (۳-۱۰) و حل مساله ویژه مربوط (با استفاده از برنامه 0) نتیجه خواهد شد:

$$\omega_1^2 = 39.48 \quad \omega_2^2 = 327.35 \quad \omega_3^2 = 768.3 \quad \omega_4^2 = 1156.00$$

و فرکانسهای مربوط

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.00 \text{ cps} & f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = 2.88 \text{ cps} \\ f_3 &= \frac{\omega_3}{2\pi} = 4.41 \text{ cps} & f_4 &= \frac{\omega_4}{2\pi} = 5.41 \text{ cps} \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

و ماتریس نرمال شده مدها (به بخش ۱۰-۲ مراجعه کنید) برابر خواهد شد با:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.2280 & 0.5774 & -0.6565 & 0.4285 \\ 0.4285 & 0.5774 & 0.2280 & -0.6565 \\ 0.5774 & 0 & 0.5774 & 0.5774 \\ 0.6565 & -0.5774 & -0.4285 & -0.2280 \end{bmatrix} \quad (د)$$

(ب) فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی پس از کاهش به سیستم دو درجه آزادی

برای کاهش مختصات y_1 و y_3 ابتدا ماتریس سختی، رابطه (الف)، را دو باره مرتب می کنیم به طوری که مختصات به ترتیب y_1, y_3, y_2, y_4 قرار گیرند.

$$[K] = 327.35 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ه)$$

با انجام حذف گوس - جردن برای دو سطر اول ماتریس فوق نتیجه خواهد شد:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ \hline 0 & 0 & 327.35 & -163.70 \\ 0 & 0 & -163.70 & 163.70 \end{array} \right] \quad (و)$$

از مقایسه رابطه (و) با رابطه (۱۲-۱۱) داریم:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (ز)$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 327.35 & -163.70 \\ -163.70 & 163.70 \end{bmatrix} \quad (ح)$$

لذا از رابطه (۱۳-۹) خواهیم داشت:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم کاهش یافته از رابطه (۱۳-۱۷) به دست می آید:

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.25 & 1.25 \end{bmatrix} \quad (\text{ط})$$

لذا مساله ویژه کاهش یافته سیستم برابر خواهد شد با:

$$\begin{bmatrix} 327.35 - 1.5\omega^2 & -163.70 - 0.25\omega^2 \\ -163.70 - 0.25\omega^2 & 163.70 - 1.25\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{ی})$$

و حل آن عبارت است از:

$$\omega_1^2 = 40.39, \quad \omega_2^2 = 365.98 \quad (\text{ک})$$

$$[Y]_p = \begin{bmatrix} 0.4380 & 0.7056 \\ 0.6723 & -0.6128 \end{bmatrix} \quad (\text{ل})$$

که $[Y]_p$ ماتریس مودهای مربوط به درجات آزادی اولیه است. بردارهای ویژه برای

سیستم چهار درجه آزادی از رابطه (۸-۱۲) محاسبه می شوند:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_2 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4380 \\ 0.6723 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2190 \\ 0.5552 \\ 0.4380 \\ 0.6723 \end{Bmatrix} \quad \text{مد اول:}$$

یا

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2190 \\ 0.4380 \\ 0.5552 \\ 0.6723 \end{Bmatrix} \quad (\text{ز})$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_2 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7056 \\ -0.6128 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3528 \\ 0.0464 \\ 0.7056 \\ -0.6128 \end{Bmatrix} \quad \text{مد دوم:}$$

یا

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0.3528 \\ 0.7056 \\ 0.0464 \\ -0.6128 \end{Bmatrix} \quad (\text{ح})$$

مثال (۴-۱۲): ساختمان برشی مثال (۲-۱۲) تحت اثر یک زلزله قرار دارد. با استفاده از

طیف پاسخ طرح شکل (۸-۱۰) حداکثر جابه جایی افقی سازه در تراز کفها را به دست آورید.

مقدار ضرایب مشارکت برای يك سیستم دو درجه آزادی توسط رابطه (۱۱-۱۷) داده شده است، و در حالت کلی برای يك سیستم N درجه آزادی عبارت است از:

$$\Gamma_i = - \sum_{j=1}^N (m_j \phi_{ji}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{الف})$$

که m_j جرم کف j ام و ϕ_{ji} عنصر j ام بردار ویژه نرمال شده i ام است.

الف) پاسخ با در نظر گرفتن چهار درجه آزادی

با قرار دادن مقادیر عددی مثال (۱۳-۳) در رابطه (الف) داریم:

$$\Gamma_1 = -1.890, \Gamma_2 = -0.5775, \Gamma_3 = -0.2797, \Gamma_4 = -0.1213 \quad (\text{ب})$$

جابه جایی های طیفی مربوط به فرکانسهای طبیعی این ساختمان از رابطه (ج)، از

مثال (۱۳-۳) از طیف پاسخ شکل (۸-۱۰) به دست می آیند:

$$S_{D1} = 14.32, S_{D2} = 3.240, S_{D3} = 1.433, S_{D4} = 0.969 \quad (\text{ج})$$

حداکثر جابه جایی کفها نسبت به جابه جایی تکیه گاه از رابطه (۱۱-۲۲)

محاسبه می شوند:

$$u_{i \max} = \sqrt{\sum_j (\Gamma_j S_{Dj} \phi_{ij})^2} \quad (\text{د})$$

که خواهیم داشت:

$$u_{1 \max} = 6.274 \text{ in}, u_{2 \max} = 11.65 \text{ in}, u_{3 \max} = 15.64 \text{ in}, u_{4 \max} = 17.81 \text{ in}$$

ب) پاسخ سیستم دو درجه آزادی گاهش یافته

فرکانسهای طبیعی از مثال (۱۳-۳) عبارتند از:

$$f_1 = \sqrt{40.39} / 2\pi = 1.011 \text{ cps}$$

و

$$f_2 = \sqrt{365.98} / 2\pi = 3.044 \text{ cps} \quad (\text{ه})$$

از قراردادن بردارهای ویژه مربوط به آن از مثال (۱۳-۳) در رابطه (الف) ضرایب

مشارکت به دست خواهند آمد:

$$\Gamma_1 = -1.884$$

$$\Gamma_2 = -0.492$$

جابه جایی های طیفی مربوط به فرکانسهای رابطه (ه) از شکل (۸-۱) به دست می آیند:

$$S_{D1} = 14.16$$

$$S_{D2} = 2.913$$

با استفاده از رابطه (د) حداکثر جابه جایی نسبی آنها محاسبه می شوند:

$$u_{1 \max} = \sqrt{(1.884 \times 14.16 \times 0.2190)^2 + (0.4920 \times 2.913 \times 0.3528)^2} = 5.864 \text{ in}$$

$$u_{2 \max} = \sqrt{(1.884 \times 14.16 \times 0.4380)^2 + (0.4920 \times 2.913 \times 0.7056)^2} = 11.73 \text{ in}$$

$$u_{3 \max} = \sqrt{(1.884 \times 14.16 \times 0.5552)^2 + (0.4920 \times 2.913 \times 0.0464)^2} = 14.81 \text{ in}$$

$$u_{4 \max} = \sqrt{(1.884 \times 14.16 \times 0.6723)^2 + (0.4920 \times 2.913 \times 0.6128)^2} = 17.97 \text{ in}$$

این مقادیر تقریبی در جدول (۱۳-۱) با مقادیر دقیق محاسبه شده در بخش اول مثال مقایسه شده اند.

۱۳-۳- اصلاح روش تراکم استاتیکی

در سالهای اخیر افراد مختلفی * و ** برای کاهش قطعی موجود در روش تراکم استاتیکی در مسائل دینامیکی اصلاحاتی را برای این روش ارائه داده اند. به طور کلی در این روشهای اصلاح شده، تراکم استاتیکی مطابق قیلهای محاسبه مقادیر ویژه سیستم کاهش یافته انجام می شود. اما برای محاسبه درجات آزادی ثانویه از یک رابطه تبدیل اصلاح شده بین درجات آزادی اولیه و ثانویه استفاده می شود. این تبدیل اصلاح شده از بسط سری $^{-1}[\omega^2[M_{ss}] + [K_{ss}]]$ و صرف نظر از جملات جاری ω^4 و درجات بالاتر به دست می آید. همان طور که دیده می شود، این اصلاح نیاز به محاسبه معکوس ماتریس دارد ***.

گرچه این روش اصلاح شده نیاز به محاسبه معکوس یک ماتریس دارد و نیز خطای کوتاه کردن سری را در بر دارد اما نشان داده شده است که در مسائل دینامیکی نتایجی دقیق تر از نتایج روش تراکم استاتیکی دارد. برای حذف کامل این خطاها می توان از روش جدیدتری که به نیاز به محاسبه معکوس ماتریس و نه بسط سری ها دارد استفاده نمود. این روش "روش تراکم دینامیکی"^۱ نامیده شده است در بخش بعدی شرح داده شده است.

۱۳-۴- تراکم دینامیکی

یک روش تراکم که می توان آن را تعمیم روش تراکم استاتیکی در نظر گرفت اخیراً ارائه شده است. **** و *****
این روش با قرار دادن یک مقدار تقریبی (مثلاً "صفر") برای اولین مقدار ویژه ω_1^2 و

1-Dynamic condensation

*Kidder, R.L., "Reduction of Structural Frequency Equations," AIAA Journal, Vol.13, No.5, 1975, P.892

**Miller, C.A., "Dynamic Reduction of Structural Models," Journal of Structural Division, ASCE, 1980, PP. 2097- 2108.

***The Calculation of the inverse of a matrix is generally undesirable, and can introduce large errors when the number of secondary coordinates is very large

**** Paz, Mario, "Dynamic Reduction Method," Contributed Chapter for structural Mechanics software series, Vol. The University press of Virginia, 1984.

***** Paz, Mario, "Dynamic Condensation," AIAA Journal, Vol. 22, No.5, May 1984, PP.724-727

به کار بردن تراکم دینامیکی در ماتریس دینامیکی سیستم $[D_1] = [K] - \omega_1^2 [M]$ شروع می شود. آنگاه از حل مساله ویژه کاهش یافته اولین و دومین مقدار ویژه یعنی ω_1^2 و ω_2^2 به دست می آیند سپس برای ماتریس دینامیکی $[D_2] = [K] - \omega_2^2 [M]$ تراکم دینامیکی به کار برده شده دومین و سومین مقدار ویژه ω_2^2 و ω_3^2 محاسبه می گردند. این روند به همین ترتیب ادامه پیدا می کند و در هر گام يك مقدار ویژه دقیق و يك مقدار تقریبی برای مقدار ویژه بعدی به دست می آید.

روش تراکم دینامیکی نیاز به معکوس کردن ماتریس و بسط سری ندارد. برای نشان دادن این امر مساله ویژه يك سیستم سازه ای غیر پیوسته را که می خواهیم درجات آزادی ثانویه $\{y_s\}$ آن کاهش داده شوند و درجات آزادی اولیه $\{y_p\}$ آن باقی بمانند را در نظر بگیرید. در این حالت معادلات ارتعاش آزاد سیستم را میتوان به شکل تقسیم بندی شده زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} [M_{ss}] & [M_{sp}] \\ [M_{ps}] & [M_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}_s\} \\ \{\ddot{y}_p\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sp}] \\ [K_{ps}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y_s\} \\ \{y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (28-13)$$

از جایگذاری $\{y\} = \{Y\} \sin \omega t$ در این رابطه مساله ویژه عمومی زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}] - \omega^2 [M_{ss}] & [K_{sp}] - \omega^2 [M_{sp}] \\ [K_{ps}] - \omega^2 [M_{ps}] & [K_{pp}] - \omega^2 [M_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y_s\} \\ \{Y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (29-13)$$

که ω^2 مقدار ویژه نام است که در گام قبلی محاسبه شده است. برای شروع، يك مقدار تقریبی یا صفر برای مقدار ویژه ω_1^2 انتخاب می شود. برای محاسبه مقدار ویژه نام، ω_1^2 و بردار ویژه مربوط $\{Y\}_1$ و همچنین مقدار تقریبی مقدار ویژه بعدی ω_{1+1}^2 سه گام محاسباتی زیر انجام می شود.

گام ۱- مقدار تقریبی ω_1^2 در رابطه (۲۹-۱۳) قرار داده می شود. با استفاده از حذف گوس - جردن مختصات ثانویه $\{Y_s\}$ به شکل زیر از این رابطه کاهش داده می شوند.

$$\begin{bmatrix} [I] & -[T_1] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y_s\} \\ \{Y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (30-13)$$

از بسط رابطه اول داریم:

$$\{Y_s\} = [T_1] \{Y_p\} \quad (31-13)$$

لذا داریم:

$$\{Y\} = [T_1] \{Y_p\} \quad (32-13)$$

$$\{Y\} = \left\{ \begin{Bmatrix} Y_s \\ Y_p \end{Bmatrix} \right\} \quad \text{و} \quad [T_i] = \begin{bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{I} \end{bmatrix} \quad (۲۲-۱۲)$$

گام ۲ - ماتریس جرم کاهش یافته و ماتریس سختی کاهش یافته به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$[\bar{M}_i] = [T_i]^T [M] [T_i] \quad (۲۴-۱۲)$$

$$[\bar{K}_i] = [\bar{D}_i] + \omega_i^2 [\bar{M}_i] \quad (۲۵-۱۲)$$

که ماتریس تبدیل در $[T_i]$ در رابطه (۲۲-۱۲) و ماتریس دینامیکی $[\bar{D}_i]$ در رابطه (۲۰-۱۲) معرفی شده اند.

گام ۳ - مساله ویژه کاهش یافته زیر

$$[[\bar{K}_i] - \omega_i^2 [\bar{M}_i]] \{Y_p\} = \{0\} \quad (۲۶-۱۲)$$

برای به دست آوردن مقدار اصلاح شده ω_i^2 و برادر ویژه مربوطه، $\{Y_p\}$ و همچنین تقریبی از مقدار ویژه بعدی، ω_{i+1}^2 ، حل می‌شود.

این سه گام محاسباتی را می‌توان تکرار نمود. یعنی مقدار ω_i^2 به دست آمده در گام ۳ را می‌توان به عنوان تقریب اصلاح شده ω_i^2 در گام ۱ قرار داد و مقدار اصلاح شده بهتری را در گام ۳ به دست آورد. تجربه نشان می‌دهد که از يك یا در دور تکرار، مقادیر ویژه دقیقی به دست می‌آیند. پس از اینکه $\{Y_p\}$ برای سیستم کاهش یافته پیدا شد شکل مدی نام از رابطه (۲۲-۱۲) به دست می‌آید.

مثال (۵-۱۳): مثال (۳-۱۲) را به روش تراکم دینامیکی حل کنید. ماتریسهای سختی و جرم مختصات Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 به ترتیب در روابط (ه) و (ب) مثال ۱۲-۳ آمده اند. از قرار دادن این ماتریسها در رابطه (۲۹-۱۲) ماتریس دینامیکی سیستم به دست خواهد آمد:

$$[D] = \begin{bmatrix} 654.70 - \omega_i^2 & 0 & -327.35 & 0 \\ 0 & 654.70 - \omega_i^2 & -327.35 & -327.35 \\ -327.35 & -327.35 & 654.70 - \omega_i^2 & 0 \\ 0 & -327.35 & 0 & 327.35 - \omega_i^2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

گام ۱ - محاسبات را با فرض ω_i^2 باشد شروع میکنیم و آن را در رابطه (الف) قرار می‌دهیم:

$$[D_i] = \begin{bmatrix} 654.70 & 0 & -327.35 & 0 \\ 0 & 654.70 & -327.35 & -327.35 \\ -327.35 & -327.35 & 654.70 & 0 \\ 0 & -327.35 & 0 & 327.35 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

با انجام عملیات حذفی گوس - جردن بر روی دو سطر اول این ماتریس داریم:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0.5 & 0.0 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ \hline 0 & 0 & 327.35 & -163.67 \\ 0 & 0 & -163.67 & 163.67 \end{array} \right]$$

از این ماتریس با توجه به روابط (۱۲-۳) و (۱۳-۲۳) می توانیم بنویسیم:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{D}_1] = \begin{bmatrix} 327.25 & -163.67 \\ -163.67 & 163.67 \end{bmatrix}$$

گام ۲ - ماتریسهای جرم و سختی کاهش یافته برابر خواهند شد یا:

$$[\bar{M}_1] = [T_1]^T [M] [T_1] = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_1] = [\bar{D}_1] + \omega_1^2 [\bar{M}_1] = \begin{bmatrix} 327.35 & -163.67 \\ -163.67 & 163.67 \end{bmatrix}$$

گام ۳ - از حل مساله ویژه $[[\bar{K}_1] - \omega^2 [\bar{M}_1]] \{Y_p\} = \{0\}$ نتیجه خواهد شد:

$$\omega_1^2 = 40.39 \quad \text{و} \quad \omega_2^2 = 365.98$$

این مقادیر ω_1^2 و ω_2^2 می توان با تکرار محاسبات، یعنی با قرار دادن $\omega_1^2 = 40.39$ در رابطه (۱۲-۲۹) اصلاح نمود. از انجام این کار نتیجه خواهد شد:

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 614.31 & 0 & -327.35 & 0 \\ 0 & 614.31 & -327.35 & -327.35 \\ \hline -327.35 & -327.35 & 614.31 & 0 \\ 0 & -327.35 & 0 & 286.96 \end{bmatrix}$$

از انجام عملیات حذفی گوس - جردن بر روی دو سطر اول آن داریم:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0.533 & 0.0 \\ 0 & 1 & -0.533 & -0.533 \\ \hline 0 & 0 & 265.44 & -174.44 \\ 0 & 0 & -174.44 & 112.53 \end{array} \right]$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0.533 & 0.0 \\ 0.533 & 0.533 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{D}_1] = \begin{bmatrix} 265.44 & -174.44 \\ -174.44 & 112.53 \end{bmatrix}$$

و ماتریسهای جرم و سختی کاهش یافته برابر خواهند شد با:

$$[\bar{M}_1] = [T_1]^T [M] [T_1] = \begin{bmatrix} 1.568 & 0.284 \\ 0.284 & 1.284 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_1] = \bar{D}_1 + \omega_1^2 [\bar{M}_1] = \begin{bmatrix} 328.76 & -162.97 \\ -162.67 & 164.39 \end{bmatrix}$$

از حل مساله ویژه کاهش یافته،

$$[[\bar{K}_1] - \omega^2 [\bar{M}_1]] \{Y_p\} = \{0\}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه زیر به دست خواهند آمد:

$$\omega_1^2 = 39.48 \quad \text{و} \quad \omega_2^2 = 360.21 \quad (\text{ج})$$

$$\{Y_p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.4283 \\ 0.6562 \end{bmatrix} \quad \{Y_p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.6935 \\ -0.6171 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

حال همین فرآیند را برای مد دوم تکرار می نماییم؛ یعنی ابتدا مقدار ویژه

تقریبی $\omega_2^2 = 360.21$ از رابطه (ج) را در رابطه (۱۲-۲۹) قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 294.49 & 0 & -327.35 & 0 \\ 0 & 294.49 & -327.35 & -327.35 \\ \hline -327.35 & -327.35 & 294.49 & 0 \\ 0 & -327.35 & 0 & -32.86 \end{bmatrix}$$

از انجام عملیات حذفی گوس - جردن بر روی دو سطر اول آن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.112 & 0.0 \\ 0 & 1 & -1.112 & -1.112 \\ \hline 0 & 0 & -433.27 & -363.88 \\ 0 & 0 & -363.88 & -396.74 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1.112 & 0.0 \\ 1.112 & 1.112 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{D}_2] = \begin{bmatrix} -433.27 & -363.88 \\ -363.88 & -396.74 \end{bmatrix}$$

و ماتریسهای جرم و سختی کاهش یافته عبارتند از:

$$[\bar{M}_2] = [T_2]^T [M] [T_2] = \begin{bmatrix} 3.471 & 1.236 \\ 1.236 & 2.236 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_2] = [\bar{D}_2] + \omega_2^2 [\bar{M}_2] = \begin{bmatrix} 817.12 & 81.21 \\ 81.21 & 408.56 \end{bmatrix}$$

از حل معادله ویژه کاهش یافته $[[\bar{K}_2] - \omega^2 [\bar{M}_2]] \{Y_p\} = \{0\}$ برای مد دوم نتیجه خواهد شد.

$$\omega_2^2 = 328.61$$

محاسبات را با قراردادن $\omega_2^2 = 328.61$ در رابطه (۱۳-۲۹) تکرار می نماییم که رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 326.09 & 0 & -327.35 & 0 \\ 0 & 326.09 & -327.35 & -327.35 \\ -327.35 & -327.35 & 326.09 & 0 \\ 0 & -327.35 & 0 & -1.26 \end{bmatrix}$$

با انجام عملیات حذفی گوس - جردن بر روی دو سطر اول آن نتیجه خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.004 & 0.0 \\ 0 & 1 & -1.004 & -1.004 \\ 0 & 0 & -331.14 & -328.62 \\ 0 & 0 & -328.62 & -329.88 \end{bmatrix}$$

که از آن

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1.004 & 0.0 \\ 1.004 & 1.004 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{D}_2] = \begin{bmatrix} -331.14 & -328.62 \\ -328.62 & -329.88 \end{bmatrix}$$

و ماتریسهای کاهش یافته جرم و سختی عبارتند از:

$$[\bar{M}_2] = [T_2]^T [M] [T_2] = \begin{bmatrix} 3.015 & 1.008 \\ 1.008 & 2.008 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_2] = [\bar{D}_2] + \omega_2^2 [\bar{M}_2] = \begin{bmatrix} 659.78 & 2.54 \\ 2.54 & 329.89 \end{bmatrix}$$

اکنون از حل مساله ویژه $[[\bar{K}_2] - \omega^2 [\bar{M}_2]] \{Y_p\} = \{0\}$ برای مد دوم داریم:

$$\omega_2^2 = 327.35 \quad \{Y_p\} = \begin{Bmatrix} 0.5766 \\ -0.5766 \end{Bmatrix} \quad (ه)$$

بنابراین با توجه به روابط (ج)، (د) و (ه) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه دوم مد اول به شرح زیر به دست آمده اند:

$$\omega_1^2 = 39.48 \quad \text{و} \quad \omega_2^2 = 327.35 \quad (و)$$

$$\{Y_p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.4283 \\ 0.6562 \end{Bmatrix} \quad \{Y_p\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.5766 \\ -0.5766 \end{Bmatrix} \quad (ز)$$

بردارهای ویژه کل سیستم با استفاده از رابطه (۱۲-۲۲) محاسبه می شوند:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_2 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0.533 & 0.0 \\ 0.533 & 0.533 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4283 \\ 0.6562 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2283 \\ 0.5780 \\ 0.4283 \\ 0.6562 \end{Bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2283 \\ 0.4283 \\ 0.5780 \\ 0.6562 \end{Bmatrix} \quad (ح)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_2 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1.004 & 0.0 \\ 1.004 & 1.004 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5766 \\ -0.5766 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5789 \\ 0.0 \\ 0.5766 \\ -0.5766 \end{Bmatrix}$$

لذا:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0.5789 \\ 0.5766 \\ 0.0 \\ -0.5766 \end{Bmatrix} \quad (\text{ط})$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه [روابط (و)، (ح) و (ط)] محاسبه شده به روش تراکم دینامیکی در این مثال به مقادیر دقیق روابط (ج) و (د) مثال (۳-۱۳) بسیار نزدیک هستند.

باید توجه داشت که اگر بردارهای ویژه کاهش یافته نسبت به ماتریس جرم کاهش یافته نرمال باشند نیاز به نرمال نمودن بردارهای ویژه در روابط (ح) و (ط) نمی باشد. یعنی اگر بردار ویژه $\{Y_p\}$ رابطه زیر را ارضاء نماید

$$\{Y_p\}^T [\overline{M}] \{Y_p\} = 1$$

انگاه از رابطه (۱۳-۳۳)

$$\{Y_p\}^T [T]^T [M] [T] \{Y_p\} = 1$$

و چون از رابطه (۱۳-۳۲)

$$\{Y\} = [T] \{Y_p\}$$

خواهیم داشت:

$$\{Y\}^T [M] \{Y\} = 1$$

که نشان می دهد اگر $\{Y\}$ نسبت به $[M]$ نرمال شده باشد $\{Y_p\}$ هم نسبت به ماتریس جرم سیستم $[\overline{M}]$ نرمال خواهد بود.

مثال (۱۳-۶): مثال (۱۳-۴) را با استفاده از تراکم دینامیکی حل کنید. ضرایب مشارکت از رابطه زیر محاسبه می شوند.

$$\Gamma_i = -\sum_j m_j \phi_{ji}$$

با استفاده از مقادیر رابطه (ح) مثال (۱۳-۵) داریم:

$$\Gamma_1 = -(1 \times 0.2283 + 1 \times 0.4283 + 1 \times 0.5780 + 1 \times 0.6562) = -1.891$$

$$\Gamma_2 = -(1 \times 0.5789 + 1 \times 0.5766 + 1 \times 0.0 - 1 \times 0.5766) = -0.5789$$

جابه جایی های طیفی محاسبه شده از طیف پاسخ شکل (۸-۱۰) برای فرکانسهای طبیعی به دست آمده در رابطه (و) مثال (۱۳-۵)، یعنی:

$$f_1 = \frac{\sqrt{39.48}}{2\pi} = 1.00 \text{ cps} , \quad f_2 = \frac{\sqrt{327.35}}{2\pi} = 2.89 \text{ cps}$$

عبارتند از:

$$S_{D1} = 14.32 , \quad S_{D2} = 3.240$$

جدول (۱-۱۳) $S_{D1}=14.32$, $S_{D2}=3.240$ خطای جابه جایی (مثالهای ۴-۱۳ و ۶-۱۳)

طبقه	روش دقیق	جابه جایی in		خطا %	
		تراکم استاتیکی	تراکم دینامیکی	تراکم استاتیکی	تراکم دینامیکی
1	6.274	5.864	6.275	6.53	0.00
2	11.65	11.73	11.65	6.68	0.00
3	15.64	14.81	15.65	5.31	0.00
4	17.81	17.97	17.80	0.01	0.00
				هداکثر خطا %	0.00
				میانگین خطا %	0.00

* بایک تکریر

هداکثر جابه جایی کفها نسبت به تکیه گاه که از رابطه زیر به دست می آیند:

$$u_{j \max} = \sqrt{\sum_j (\Gamma_j S_{Dj} \phi_{ji})^2}$$

عبارتند از:

$$u_{1 \max} = \sqrt{(1.891 \times 14.32 \times 0.2283)^2 + (0.5789 \times 3.240 \times 0.5789)^2} = 6.275 \text{ in}$$

$$u_{2 \max} = \sqrt{(1.891 \times 14.32 \times 0.4283)^2 + (0.5789 \times 3.240 \times 0.5766)^2} = 11.65 \text{ in}$$

$$u_{3 \max} = \sqrt{(1.891 \times 14.32 \times 0.5780)^2 + (0.5789 \times 3.240 \times 0.0)^2} = 15.65 \text{ in}$$

$$u_{4 \max} = \sqrt{(1.891 \times 14.32 \times 0.6562)^2 + (0.5789 \times 3.240 \times 0.5766)^2} = 17.80 \text{ in}$$

در جدول (۱-۱۳) جابه جایی کفها با در نظر گرفتن چهار درجه آزادی یا نتایج به دست آمده از تراکم دو درجه آزادی به روش استاتیکی در مثال (۴-۱۳) و تراکم دینامیکی در مثال (۶-۱۳) مقایسه شده است. در این مثالها فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی محاسبه شده برای سیستم کاهش یافته به روش تراکم دینامیکی دقیق هستند. در نتیجه جابه جایی های محاسبه شده نیز دقیق هستند.

۱۳-۵- برنامه ۱- امتحان زیر برنامه CONDE

برنامه کامپیوتری ۱۰ یک برنامه کوتاه برای امتحان زیر برنامه CONDE است. این زیربرنامه هنگامی که توسط برنامه اصلی فرا خوانده می شود تعداد مختصات را به p مختصه اصلی انتخاب شده کاهش می دهد. برنامه امکان انتخاب تراکم به روش استاتیکی یا دینامیکی را دارد. متغیرهای اصلی برنامه در جدول (۱۳-۲) شرح داده شده اند. لیست برنامه ۱۰ به همراه لیست زیر برنامه CONDE در ضمیمه I آمده است. اجرای برنامه نیاز به زیر برنامه JACOBI دارد تا مسأله ویژه کاهش داده شده به روش تراکم دینامیکی را حل نماید. داده های ورودی و فرمت آنها در برنامه ۱۰ در جدول (۱۳-۳) مشخص شده اند.

جدول (۱۳-۲): متغیرهای زیر برنامه CONDE

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
ND	N	تعداد درجات آزادی
NCR	p	تعداد مختصات وابسته گرهی
NL	q	تعداد مختصات غیر وابسته گرهی
SM(I, J)	[M]	ماتریس جرم
SK(I, J)	[K]	ماتریس سختی
T(I, J)	[T]	ماتریس انتقال

فرمت	متغیرها
(2I10)	ND NCR
(8F10.2)	SK(I,J) (matrix read by rows)
(8F10.6)	SM(I,J) (matrix read by rows)

مثال (۷-۱۳): مثال (۲-۱۳) را با استفاده از برنامه ۱۰ حل کنید.
 داده های ورودی از مثال ۲-۱۳ به همراه نتایج کامپیوتری آن در جدول (۴-۱۳) آمده اند. در این مثال متغیرهای کنترل محاسبات به شرح زیر انتخاب شده اند: INDEX = -1 (تراکم دینامیکی) و IPR=1 (نتایج میانی چاپ شوند). خروجی شامل ماتریس سختی کاهش یافته $[K]$ ، ماتریس تبدیل $[T]$ ، ماتریس جرم کاهش یافته $[M]$ ، مقادیر ویژه و بردارهای سیستم است. نتایج حاصل از برنامه ۱۰ مطابق انتظار با نتایج مثال (۲-۱۳) یکسان هستند.
 مثال (۸-۱۳): فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی ساختمان برشی چهار طبقه شکل (۲-۱۳) را پس از کاهش مختصات به y_4, y_2 به روشهای زیر به دست آورید:

الف) تراکم استاتیکی

ب) تراکم دینامیکی

ج) تراکم دینامیکی با یک دور تکرار

د) حل دقیق به صورت یک سیستم چهار درجه آزادی

داده های ورودی و نتایج کامپیوتری برای حالت‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) به ترتیب در جدولهای (۵-۱۳)، (۶-۱۳)، (۷-۱۳) و (۸-۱۳) نشان داده شده اند. نتایج کامپیوتری بدست آمده در مثال (۸-۱۳) با محاسباتی که قبلاً به روش تراکم استاتیکی در مثال (۳-۱۳) و همچنین به روش تراکم دینامیکی در مثال (۵-۱۳) انجام شده است مطابقت دارد.

INPUT DATA

3	2	-1	1
2	3		
40000.		-10000.	0.
-10000.		20000.	-10000.
0.		-10000.	10000.
25.		0.	0.
0.		50.	0.
0.		0.	100.

THE REDUCED STIFFNESS MATRIX IS

0.1750E+05	-0.1000E+05
-0.1000E+05	0.1000E+05

THE TRANSFORMATION MATRIX IS

0.2500E+00	0.0000E+00
0.1000E+01	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+01

THE REDUCED MASS MATRIX IS

0.5156E+02	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+03

EIGENVALUES

0.36063E+02	0.40333E+03
-------------	-------------

EIGENVECTORS

0.14526E-01	0.31640E-01
0.58105E-01	0.12656E+00
0.90880E-01	-0.41724E-01

جدول (۵-۱۳): داده های ورودی و نتایج حالت (الف) در مثال (۸-۱۳)

INPUT DATA				
4	2	-1	0	
2	4			
654.70		-327.35	0.00	0.00
-327.35		654.70	-327.35	0.00
0.00		-327.35	654.70	-327.35
0.00		0.00	-327.35	327.35
1.00		0.00	0.00	0.00
0.00		1.00	0.00	0.00
0.00		0.00	1.00	0.00
0.00		0.00	0.00	1.00

STATIC CONDENSATION	
EIGENVALUES	
0.40386E+02	0.36598E+03

EIGENVECTORS	
0.21898E+00	0.35279E+00
0.43796E+00	0.70558E+00
0.55515E+00	0.46386E-01
0.67235E+00	-0.61281E+00

جدول (۶-۱۳): داده های ورودی و نتایج حالت (ب) در مثال (۸-۱۳)

INPUT DATA				
4	2	0	0	
2	4			
654.70		-327.35	0.00	0.00
-327.35		654.70	-327.35	0.00
0.00		-327.35	654.70	-327.35
0.00		0.00	-327.35	327.35

INPUT DATA				
1.00		0.00	0.00	0.00
0.00		1.00	0.00	0.00
0.00		0.00	1.00	0.00
0.00		0.00	0.00	1.00

DYNAMIC CONDENSATION

EIGENVALUES

0.40386E+02 0.32914E+03

EIGENVECTORS

0.21898E+00 0.62655E+00
0.43796E+00 0.55261E+00
0.55515E+00 0.34382E-01
0.67235E+00 -0.54958E+00

جدول (۷-۱۳): داده های ورودی و نتایج حالت (ج) در مثال (۸-۱۳)

INPUT DATA

4	2	1	0				
2	4						
654.70		-327.35		0.00		0.00	
-327.35		654.70		-327.35		0.00	
0.00		-327.35		654.70		-327.35	
0.00		0.00		-327.35		327.35	
1.00		0.00		0.00		0.00	
0.00		1.00		0.00		0.00	
0.00		0.00		1.00		0.00	
0.00		0.00		0.00		1.00	

DYNAMIC CONDENSATION WITH ONE ITERATION

EIGENVALUES

0.39484E+02 0.32735E+03

EIGENVECTORS

0.22822E+00 0.57884E+00
0.42828E+00 0.57660E+00
0.57787E+00 0.28790E-05
0.65617E+00 -0.57660E+00

INPUT DATA

4	4	0	0		
1	2	3	4		
654.70		-327.35		0.00	0.00
-327.35		654.70		-327.35	0.00
0.00		-327.35		654.70	-327.35
0.00		0.00		-327.35	327.35
1.00		0.00		0.00	0.00
0.00		1.00		0.00	0.00
0.00		0.00		1.00	0.00
0.00		0.00		0.00	1.00

EXACT SOLUTION

EIGENVALUES

0.39483E+02	0.32735E+03	0.76819E+03	0.11562E+04
-------------	-------------	-------------	-------------

EIGENVECTORS

0.22801E+00	-0.57735E+00	-0.65654E+00	0.42853E+00
0.42853E+00	-0.57735E+00	0.22801E+00	-0.65654E+00
0.57735E+00	-0.65654E-14	0.57735E+00	0.57735E+00
0.65654E+00	0.57735E+00	-0.42853E+00	-0.22801E+00

۹-۶ - خلاصه

کاهش درجات آزادی اضافی یا ثانویه در عمل معمولاً به روش تراکم استاتیکی انجام می گیرد. در این روش ماتریس سختی کاهش یافته و ماتریس تبدیل مختصات اولیه به مختصات کلی به کمک عملیات حذفی کوس - جردن محاسبه می شوند. از همین ماتریس تبدیل برای محاسبه ماتریسهای جرم و میرایی کاهش یافته در یک تبدیل متعامد استفاده می شود. تراکم استاتیکی در مسائل دینامیک سازه ها خطاهایی را ایجاد می نماید؛ اما همان طور که در این فصل نشان داده شد استفاده از روش تراکم دینامیکی به مقدار قابل ملاحظه ای از این خطاها کاسته و یا آنها را حذف می نماید. در این روش اگر محاسبات در هر مد تکرار گردند جوابهای سیستم کاهش یافته سریعاً "به سمت جوابهای دقیق همگرا می شوند.

مسائل

۱-۱۲- ماتریسهای سختی و جرم يك سازه عبارتند از:

$$[K] = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 12 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(الف) با استفاده از روش تراکم استاتیکی ماتریس تبدیل و ماتریسهای کاهش یافته

سختی و جرم را با حذف دو درجه اول (درجات آزادی بدون جرم) به دست آورید.

(ب) فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال مربوطه را برای سیستم کاهش یافته به دست آورید.

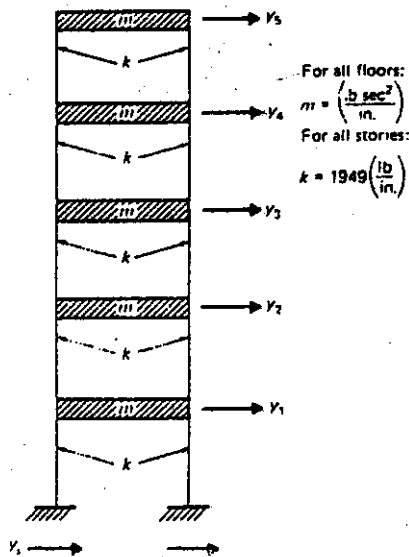
۱۲-۲- مساله (۱-۱۲) را برای سازه ای با همان ماتریس سختی و ماتریس جرم زیر حل کنید.

۱۲-۳- فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی سیستم مساله (۱۲-۲) را بر حسب چهار

مختصه اولیه اش به دست آورید. خطای ایجاد شده در دو مد به دست آمده از بند (ب)

مساله (۱۲-۲) را تعیین کنید.

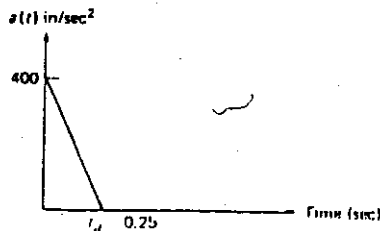
۱۲-۴- ساختمان برشی شکل م (۱۲-۴) را در نظر بگیرید.



شکل م (۱۲-۴)

- (الف) ماتریس تبدیل و ماتریسهای سختی و جرم مربوط به تراکم استاتیکی مختصات y_1, y_3, y_4 را به دست آورید.
- (ب) فرکانسهای طبیعی و مدهای نرمال سیستم کاهش یافته بند (الف) را تعیین کنید.
- (ج) با استفاده از نتایج بند (ب) شکلهای مدی مربوط به دو مد اول سیستم را بر حسب پنج مختصه اولیه آن به دست آورید.
- ۱۲-۵- با استفاده از نتایج به دست آمده در مساله (۱۲-۴) حداکثر جابه جایی کنها را نسبت به تکیه گاه سازه شکل م (۱۲-۴) هنگامی که تحت اثر زلزله ای با طیف پاسخ شکل (۸-۱۰) قرار گرفته باشد به دست آورید.
- ۱۳-۶- با استفاده از نتایج مساله (۱۲-۴) حداکثر نیروی برشی طبقات ساختمان شکل م (۱۲-۴) را هنگامی که تحت اثر زلزله ای با طیف پاسخ شکل (۸-۱۰) قرار داشته باشد به دست آورید.
- ۱۳-۷- مساله (۱۲-۲) را به روش تراکم دینامیکی حل کنید.
- ۱۲-۸- مساله (۱۲-۴) را به روش تراکم دینامیکی بدون تکرار و با يك دور تکرار حل کرده و نتایج را با جوابهای دقیق مقایسه نمایید.
- ۱۲-۹- ساختمان برشی پنج طبقه شکل م (۱۲-۴) تحت تاثیر يك شتاب تکیه گاهی مطابق شکل م (۱۲-۹) قرار گرفته است با استفاده از تراکم استاتیکی مختصات y_1, y_3, y_4 و y_4 مطلوب است:

- (الف) فرکانسهای طبیعی و شکلهای مدی مربوط برای سیستم کاهش یافته
- (ب) جابه جایی تراز کنها با در نظر گرفتن دو مد؛
- (ج) نیروی برشی ستونهای سازه با احتساب دو مد.



شکل م (۱۲-۹)

۱۲-۱- مساله (۹-۱۲) را با استفاده از تراکم دینامیکی حل کنید.

۱۲-۱۱- ماتریسهای سختی و جرم يك سازه عبارتند از:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 0.906 & 0.294 & 0.424 \\ 0.294 & 0.318 & 0.176 \\ 0.424 & 0.176 & 80000 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} 288 & -8 & 1556 \\ -8 & 304 & 644 \\ 1556 & 644 & 80000 \end{bmatrix}$$

فرکانس طبیعی اصلی سیستم را پس از کاهش اولین مختصه به روشهای زیر به دست آورید:

(الف) تراکم استاتیکی

(ب) تراکم دینامیکی بدون تکرار

(ج) تراکم دینامیکی با يك دور تکرار

همچنین فرکانس های طبیعی سیستم کاهش نیافت را به دست آورده و نتایج به دست آمده برای فرکانس طبیعی اصلی را با هم مقایسه نمایید.

بخش III

سازه‌های قاپی مدل شده
به صورت سیستم‌های چند
درجه آزادی مجزا

فصل چہارم

تحلیل دینامیکی تیرھا

در این فصل رفتار دینامیکی تیرها بررسی شده است. تیرها اعضایی هستند که تحت بارهای مرضی^۱ در آنها لنگر خمشی ایجاد می شود. ابتدا ویژگیهای استاتیکی تیرها بررسی شده و آنگاه تاثیر دینامیکی نیروهای ماند^۲ بیان می شود. دو روش برای در نظر گرفتن نیروهای ماند ارائه می گردد:

۱- روش جرم متمرکز^۳ که در آن جرم گسترده به جرمهای نقطه ای^۴ تبدیل می شود؛

۲- روش جرم همسان^۵ که در آن در جرمهای نقطه ای تاثیر چرخش نیز منظور گشته است.

روش دوم با جابه جایی ارتجاعي تیر همسان است.

در فصلهای ۲۰ و ۲۱ نظریه دقیق دینامیک تیرها با جرم و سختی گسترده، بیان و نشان داده خواهد شد که ضرایب سختی و جرم همسان در واقع در جمله اول بسط تیلور^۶ جواب دقیق می باشند.

۱-۱۴- خواص استاتیکی قطعات تیر^۷

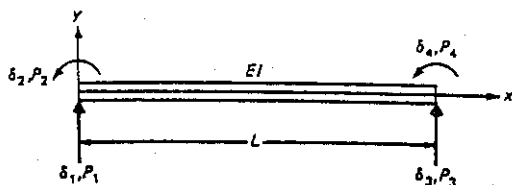
یک قطعه تیر یکنواخت به طول L ، لنگر ماند مقطع I و ضریب ارتجاعي E مطابق شکل (۱-۱۴) را در نظر بگیرید. می خواهیم رابطه بین نیروها و جابه جایی های گرهی را که ماتریس سختی نامیده می شود به دست آوریم. نیروهای P_1, P_2, P_3, P_4 و جابه جایی های $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ در مختصات گرهی قطعه تیر قرار دارند. معادله دیفرانسیل تیر برای جابه جایی های کوچک عبارت است از:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \quad (1-14)$$

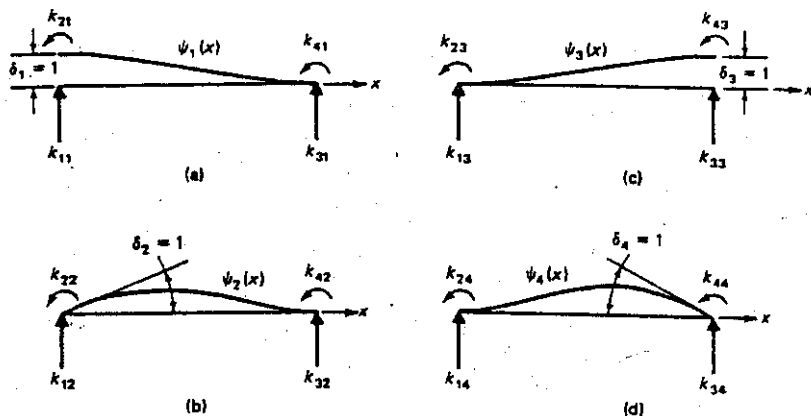
$M(x)$ لنگر خمشی تیر و δ_j جابه جایی آن می باشد. بنابه تعریف ضریب سختی k_{ij} نیرویی است که در مختصات گرهی i در اثر جابه جایی واحد در مختصات گرهی j در حالی که جابه جایی سایر مختصات گرهی برابر صفر باشد) ایجاد می شود. در شکل (۲-۱۴) منحنی جابه جایی تیر در اثر جابه جایی های گرهی نشان داده شده است. برای تعیین ضرایب سختی ابتدا معادله جابه جایی تیر را به دست می آوریم. برای قطعه تیر شکل (۲-۱۴) معادله لنگر خمشی برابر است با:

$$M(x) = k_{11}x - k_{21} \quad (2-14)$$

-
- 1) Transverse 2) Inertial Forces 3) Lumped Mass Method
4) Point Mass 5) Consistent Mass Method 6) Taylor's Series 7) Beam Segments



شکل (۱-۱۳): قطعه تیر همراه با نیروها و جابه جایی ها در مختصات گرهی آن



شکل (۲-۱۳): منحنی جابه جایی در اثر اعمال جابه جایی واحد در یکی از مختصات گرهی

و پس از جایگزینی در رابطه (۱-۱۴)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = k_{11}x - k_{21} \quad (۲-۱۴)$$

و پس از دوبار انتگرال گیری

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{k_{11}x^2}{2} - k_{21}x + C_1 \quad (۴-۱۴)$$

$$EIy = \frac{k_{11}}{6}x^3 - \frac{k_{21}}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (۵-۱۴)$$

در این معادله ثابتهای C_1, C_2 و k_{21}, k_{11} به کمک شرایط مرزی تعیین می گردند.

1) Boundary Conditions

در $x=0$ داریم:

$$\frac{dy(0)}{dx} = 0, \quad y(0) = 1 \quad (۶-۱۴)$$

و در $x=L$:

$$\frac{dy(L)}{dx} = 0, \quad y(L) = 0 \quad (۷-۱۴)$$

با اعمال شرایط مرزی به معادلات (۴-۱۴) و (۵-۱۴)، چهار معادله به دست می آید که جواب آنها عبارت است از:

$$C_1 = 0, \quad k_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad (۸-۱۴)$$

$$C_2 = EI, \quad k_{21} = \frac{6EI}{L^2}$$

با جایگزینی روابط (۸-۱۴) در (۵-۱۴)، معادله منحنی جابه جایی قطعه شکل (الف، ۲-۱۴) به دست می آید:

$$\Psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (الف، ۹-۱۴)$$

$\Psi_1(x)$ به جای $y(x)$ برای حالت $\delta_1 = 1$ به کار رفته است. با استفاده از روش فوق معادله جابه جایی قطعه تیر در حالات دیگر شکل (۲-۱۴) چنین به دست می آید:

$$\Psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (ب-۹-۱۴)$$

$$\Psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (ج-۹-۱۴)$$

$$\Psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (د-۹-۱۴)$$

از آنجا که $\Psi_1(x)$ در اثر جابه جایی واحد $\delta_1 = 1$ حاصل شده است، اگر جابه جایی دلخواه δ_1 اعمال گردد معادله جابه جایی برابر $\delta_1 \Psi_1(x)$ می گردد. پس به طور کلی معادله جابه جایی جزء خمشی تحت جابه جایی های گرهی $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ و برابر است با:

$$y(x) = \Psi_1(x)\delta_1 + \Psi_2(x)\delta_2 + \Psi_3(x)\delta_3 + \Psi_4(x)\delta_4 \quad (۱۰-۱۴)$$

از توابع جابه جایی در روابط (۹-۱۴) می توان برای تعیین ضرایب سختی استفاده کرد. به عنوان مثال، تیر شکل (۲-۱۴) را که با نیروهای حاصل از جابه جایی $\delta_2 = 1.0$ در حال تعادل است در نظر می گیریم. فرض می شود که تیر تحت یک جابه جایی مجازی مطابق جابه جایی تیر شکل (الف، ۲-۱۴) قرار گیرد. بنابراین اصل کار مجازی، کار نیروهای خارجی و داخلی تیر (۲-۱۴) در اثر این جابه جایی مجازی

باید برابر شود. کار خارجی W_E برابر است با:

$$W_E = k_{12} \cdot \delta_1 \quad (11-14)$$

و کار لنگرهای داخلی تیر برابر است با:

$$W_I = \int_0^L M(x) \cdot d\theta \quad (12-14)$$

$M(x)$ لنگز خمشی داخلی تیر در مقطع x و $d\theta$ تغییر انحنای این مقطع است.

برای تیر مورد نظر، جابه جایی حاصل از رابطه (۹-۱۴) به وسیله رابطه (۱-۱۴) به لنگر خمشی مربوط می شود. پس:

$$EI\Psi_2''(x) = M(x) \quad (13-14)$$

تغییر انحنا $d\theta$ ناشی از جابه جایی مجازی برحسب جابه جایی تیر $\Psi_1(x)$ قابل محاسبه است.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2} = \Psi_1''(x) \quad (14-14)$$

$$d\theta = \Psi_1''(x) dx$$

از تساوی کار مجازی خارجی W_E از رابطه (۱۱-۱۴) با کار مجازی داخلی W_I از رابطه (۱۲-۱۴) و جایگزینی $M(x)$ و $d\theta$ از روابط (۱۳-۱۴) و (۱۴-۱۴)، ضریب سختی k_{12} به دست می آید:

$$k_{12} = \int_0^L EI \Psi_1''(x) \Psi_2''(x) dx \quad (15-14)$$

و در حالت کلی هر ضریب سختی که با خمش تیر مرتبط باشد از رابطه زیر قابل تعیین است:

$$k_{ij} = \int_0^L EI \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) dx \quad (16-14)$$

از این رابطه مشخص می گردد که $k_{ij} = k_{ji}$ ، زیرا جابه جایی اندیس صرفاً به جابه جایی $\Psi_i''(x)$ و $\Psi_j''(x)$ می انجامد و تاثیری بر مقدار انتگرال ندارد و حالت خاصی از قانون بتی^۱ است که به قاعده ماکسول^۲ موسوم است.

قابل ذکر اینکه اگرچه توابع جابه جایی در روابط (۹-۱۴) برای تیر یکنواخت (با مقطع ثابت) به دست آمدند اما برای ضرایب سختی تیرهای غیریکنواخت (مقطع متغیر) نیز می توان از آنها استفاده کرد.

برای یک قطعه تیر یکنواخت به طول L و لنگر مانند مقطع I ، کلیه ضرایب

1) Betti's Theorem

2) Maxwell's Reciprocal Theorem

سختی را می توان از روابط (۱۴-۱۶) و به کمک رابطه (۱۴-۹) تعیین نمود. مثلاً برای k_{12} از رابطه (۱۴-۹، الف) داریم:

$$\Psi_1'(x) = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$\Psi_2''(x) = \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \text{و از رابطه (۱۴-۹، ب):}$$

و با جایگزینی در (۱۴-۱۵)

$$k_{12} = EI \int_0^L \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) dx$$

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{و پس از انتگرال گیری}$$

همانطور که می دانیم، بنا بر تعریف، ضریب سختی k_{1j} برابر نیرویی است که به مختصات گرهی ۱ در اثر جابجایی واحد در مختصات گرهی j وارد می گردد. پس در اثر جابه جایی های گرهی $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ و نیروی وارد به مختصات گرهی ۱ برابر است با:

$$P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4$$

و بطور مشابه برای نیرو در مختصات گرهی دیگر:

$$P_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4$$

$$P_3 = k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 \quad (۱۴-۱۷)$$

$$P_4 = k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4$$

و یا:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (۱۴-۱۸)$$

که با استفاده از نماد ماتریسی

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (۱۴-۱۹)$$

$\{P\}$ و $\{\delta\}$ بردارهای نیرو و جابه جایی در مختصات گرهی و $[K]$ ماتریس سختی قطعه تیر است.

با استفاده از رابطه (۱۴-۱۶) می توان همه ضرایب سختی را به دست آورد. در نتیجه برای یک قطعه تیر یکنواخت با (مقطع ثابت):

آورد. مثلاً" برای ضریب k_{33} می باید ضرایب سختی قطعات ۲، ۲ مربوط به گره ۲ یعنی $k_{33}^{(2)}$ و $k_{11}^{(3)}$ را با هم جمع کرد. اندیس فوقانی مربوط به شماره قطعه و اندیس تحتانی مربوط به موقعیت ضریب سختی در ماتریس سختی قطعه می باشد. با استفاده از رابطه (۱۴-۲) ماتریس سختی قطعه ۲ برابر است با:

$$[k^{(2)}] = 10^7 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (22-14)$$

شماره مختصات گرهی قطعه ۲، یک تا چهار است که تصادفاً با شماره مختصات سیستم منطبق است. در مورد قطعات ۱ و ۳، شماره مختصات گرهی قطعه باز هم یک تا چهار است، لیکن با شماره مختصات سیستم یکی نیست. مثلاً برای قطعه ۱، شماره مختصات سیستم، مطابق شکل (۱۴-۲) برابر ۱، ۷، ۷ و ۲ و برای قطعه ۲ برابر ۳، ۴، ۵ و ۶ می باشد؛ لذا به هنگام جمع ماتریس سیستم، ضرایب سختی قطعات مطابق این شماره ها مستقر می گردند. به هنگام محاسبات دستی، یک روش ساده برای استقرار ضرایب سختی این است که شماره مختصات کلی مطابق رابطه (۱۴-۲۲) در بالا و سمت راست ماتریس عضو نوشته شود. بنابراین ماتریس سختی قطعات ۱ و ۲ عبارت است از:

$$[k^{(1)}] = 10^7 \begin{bmatrix} 7 & 7 & 1 & 2 \\ 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (23-14)$$

و

$$[k^{(3)}] = 10^7 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (24-14)$$

برای جمع ماتریس سیستم، عناصر ماتریس های فوق را در جایگاه خویش مستقر می سازیم. به عنوان مثال، ضریب سختی قطعه ۲، $k_{13}^{(3)} = -12 \times 10^7$ می باید به ردیف ۲ و ستون ۵ در ماتریس کل منتقل گردد. بدین ترتیب همه عناصر ماتریس های

قطعات به جایگاه مربوط منتقل و با هم جمع می شوند. ضرایب سختی مختصات ثابت و مقید نادیده گرفته می شوند، زیرا این مختصات جزو مقادیر مجهول نمی باشند. با استفاده از این روش، برای مثال فوق ماتریس 6×6 زیر به دست می آید.

$$[k] = 10^7 \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad (14-20)$$

این ماتریس، ماتریس سختی تیر طره شکل (۱۴-۲) است که به سه قطعه تقسیم شده است و نیروها و جابجایی را در مختصات کلی به هم مربوط می سازد.

۱۴-۳- خواص ماند ^۱ - جرم متمرکز ^۲

ساده ترین روش در نظر گرفتن خواص ماند برای یک سیستم دینامیکی این است که جرم سازه در مختصات گرهی که دارای حرکت انتقالی اند متمرکز شوند که به روش جرم متمرکز موسوم است. جرم المان بین گره های آن براساس تعادل استاتیکی توزیع می شود. شکل (۱۴-۴) قطعات تیر به طول L و جرم گسترده $\bar{m}(x)$ را نشان می دهد. در این شکل سهم هر گره برای توزیع یکنواخت، مثلی و کلی جرم در طول تیر مشخص گشته است.

در این روش از تاثیر ماند ^۳ درجات آزادی چرخشی ^۴ اضماع شده است، هرچند با محاسبه لنگر ماند جرم بخشی از قطعه تیر حول گره ها می توان مقدار محدودی برای درجه آزادی چرخشی در نظر گرفت. مثلاً برای یک تیر یکنواخت، این عمل منجر به محاسبه لنگر ماند جرم ^۵ نیمی از تیر حول هر گره می شود یعنی:

$$I_A = I_B = \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{m}L}{2} \right) \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

\bar{m} جرم واحد طول تیر می باشد. برای تیر (۱۴-۲) که فقط اثر انتقالی جرم منظور شده است، ماتریس جرم به صورت قطری در می آید.


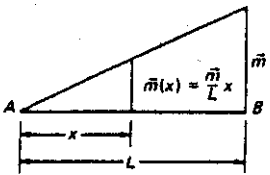
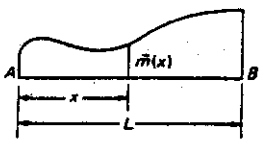
1- Inertial Properties

2- Lumped Mass

3- Inertial Effect

4- Rotational Degree of Freedom

5- Mass Moment Inertia

توزیع جرم	جرم متمرکز
	$m_A = \frac{\bar{m}L}{2}$ $m_B = \frac{\bar{m}L}{2}$
	$m_A = \frac{\bar{m}L}{6}$ $m_B = \frac{\bar{m}L}{3}$
	$m_A = \frac{\int_0^L (L-x)\bar{m}(x)dx}{L}$ $m_B = \frac{\int_0^L x\bar{m}(x)dx}{L}$

شکل (۳-۱۴): جرم‌های متمرکز برای قطعه تیر با جرم گسترده (۲۶-۱۴)

$$[M] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & m_3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & m_5 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \quad (۲۶-۱۴)$$

$$m_1 = \frac{\bar{m}L_1}{2} + \frac{\bar{m}L_2}{2}$$

$$m_3 = \frac{\bar{m}L_2}{2} + \frac{\bar{m}L_3}{2}$$

$$m_5 = \frac{\bar{m}L_3}{2}$$

که در آن:

اگر نماد ویژه $([])$ برای ماتریس قطری به کار گرفته شود، داریم:

$$[M] = [m_1 \ 0 \ m_3 \ 0 \ m_5 \ 0] \quad (۱۴-۲۷)$$

۱۴-۴- خواص ماند-جرم همسان

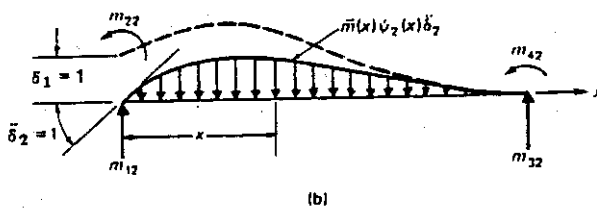
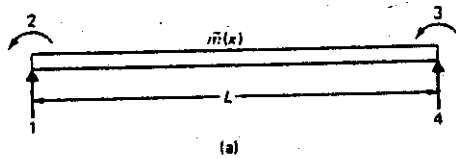
ضرایب جرم يك قطعه تیر را می توان مشابه ضرایب سختی تعیین کرد. جرم m_{ij} مطابق تعریف عبارت است از نیروی ایجاد شده در مختصات گرهی i در اثر شتاب واحد در مختصات گرهی j اگر شتاب بقیه مختصات گرهی صفر باشد.

قطعه تیر شکل (۱۴-۵، الف) با جرم واحد طول $\bar{m}(x)$ را در نظر بگیرید. در روش جرم همسان چنین فرض می شود که جابه جایی تیر در اثر جابه جایی های واحد در مختصات گرهی توسط همان توابع $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x), \Psi_4(x)$ طبق روابط (۱۴-۹) بیان شود. اگر تیر تحت شتاب واحدی در یکی از مختصات گرهی قرار گیرد، مثلاً $\delta_2 = 1$ ، شتاب نقاط مختلف در طول تیر از مشتق دوم رابطه (۱۴-۱) نسبت به زمان به دست می آید. در این حالت، با $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 0$ داریم:

$$\ddot{y}_2(x) = \Psi_2(x) \ddot{\delta}_2 \quad (۱۴-۲۸)$$

$f_1(x)$ نیروی ماند واحد طول تیر ناشی از شتاب فوق برابر است با:

$$f_1(x) = \bar{m}(x) \ddot{y}_2(x)$$



شکل (۱۴-۵): الف) قطعه تیر با جرم (ب) قطعه تیر تخت

$$f_1(x) = \bar{m}(x) \Psi_2(x) \ddot{\delta}_2$$

و یا

و چون $\delta_2 = 1$ است پس:

$$f_1(x) = \bar{m}(x)\Psi_2(x) \quad (29-14)$$

حال برای تعیین m_{12} ، تیر شکل (۱۴-۵الف) را تحت یک چپه جایی مجازی واحد در مختصات گرهی ۱ قرار می دهیم $\delta_1 = 1$ و با استفاده از اصل کار مجازی (برابری کارهای داخلی و خارجی) m_{12} را به دست می آوریم. کار مجازی نیروی خارجی برابر است با:

$$W_E = m_{12} \delta_1 = m_{12} \quad (30-14)$$

زیرا δ_1 تنها نیروی خارجی بوده، جابه جایی $\delta_1 = 1$ است. کار نیروهای مانند بر واحد طول تیر برابر است با:

$$\delta W_1 = f_1(x)\Psi_1(x)$$

با استفاده از رابطه (۱۴-۲۹)

$$\delta W_1 = \bar{m}(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x)$$

و برای تمام طول تیر:

$$W_1 = \int_0^L \bar{m}(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x)dx \quad (31-14)$$

از تساوی کارهای داخلی و خارجی:

$$m_{12} = \int_0^L \bar{m}(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x)dx \quad (32-14)$$

و در حالت کلی برای جرم همسان m_{ij} ،

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x)\Psi_i(x)\Psi_j(x)dx \quad (33-14)$$

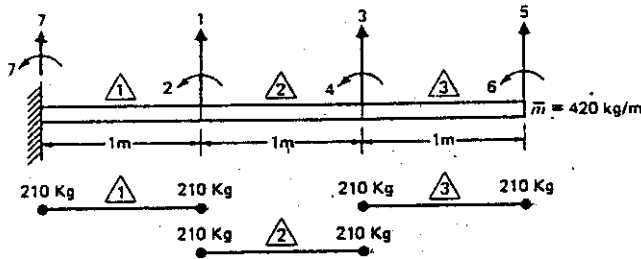
در رابطه (۱۴-۳۳) اگر جای اندیس های ۱ و ۲ را عوض کنیم مقدار داخل انتگرال عوض نمی شود؛ پس $m_{ij} = m_{ji}$ در عمل از معادلات درجه ۲ در روابط (۱۴-۹) برای محاسبه ضرایب جرم همه تیرهای مستقیم استفاده می شود. برای حالت خاص تیر یکنواخت با استفاده از (۱۴-۳۳) رابطه بین نیروها و شتابهای ماند در مختصات گرهی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (34-14)$$

پس از محاسبه ماتریس جرم قطعات، ماتریس جرم کل سیستم درست به همان روش ماتریس سختی از جمع ماتریس جرم قطعات به دست می آید. آرایش عناصر غیر صفر این ماتریس عموماً "همانند ماتریس سختی است. استفاده از روش جرم متمرکز به دلایل ذیل از روش جرم همسان وقت کمتری

برای محاسبه می گیرید: ماتریس جرم متمرکز قطری است در حالی که ماتریس جرم همساز دارای عناصری غیر قطری است که به درگیری جرمی موسوم است؛ همچنین بعضی از عناصر قطری ماتریس جرم متمرکز به دلیل اغماض از نیروهای ماند چرخشی صفرند و این باعث حذف درجات آزادی چرخشی به کمک تراکم استاتیکی (فصل ۱۳) و در نتیجه کاهش ابعاد مساله دینامیکی می شوند. در مقابل روش جرم همساز از تقریب بهتری در مقایسه با روش جرم متمرکز برخوردار است.

مثال (۱۴-۱): ماتریسهای جرم متمرکز و جرم همساز را برای تیر طره شکل (۱۴-۶) معین کنید. توزیع جرم را یکنواخت و برابر $\bar{m} = 420 \text{ kg/m}$ فرض نمایید:



شکل (۱۴-۶): جرمهای همساز مثال (۱۴-۱)

الف) ماتریس جرم متمرکز: جرم متمرکز در هر یک از گره های سه قطعه تیر برابر نیمی از جرم قطعه یعنی ۲۱۰ کیلوگرم است. بنابراین ماتریس جرم $[M_L]$ یک ماتریس قطری 6×6 است.

$$[M_L] = \begin{bmatrix} 420 & 0 & 420 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 420 & 0 & 420 & 0 & 210 \\ 0 & 0 & 420 & 0 & 420 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & 0 & 420 \\ 210 & 0 & 0 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 210 & 0 & 0 & 0 & 210 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس جرم همساز: در رابطه (۱۴-۲۳) ماتریس جرم همساز برای قطعه تیرهای یکنواخت داده شده است. با جایگزینی $l = 1 \text{ m}$ و $\bar{m} = 420 \text{ kg/m}$ ، ماتریس جرم همساز هر یک از قطعات، $[M_C]$ ، به دست می آید:

$$[M_C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

1- Mass Coupling

برای تشکیل ماتریس سختی سیستم، هریک از عناصر ماتریس جرم قطعه در مکان مربوط مستقر و با عناصر هم مکان جمع می شود. با توجه به شکل (۱۴-۶) شماره مختصات گرهی قطعه شماره ۲ با مختصات کلی سیستم که در بالا و سمت راست ماتریس فوق درج شده یکی می باشد. در قطعه ۲، شماره های مربوط، ۲، ۴، ۵ و ۶ و در قطعه ۱ برابر ۷، ۷، ۱ و ۲ می باشد. پس ماتریس جرم همساز سیستم برابر است با:

$$[M_C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 312 & 0 & 54 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ 54 & 13 & 312 & 0 & 54 & -13 \\ -13 & -3 & 0 & 8 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 0 & 0 & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

ملاحظه می شود که ماتریس $[M_C]$ متقارن بوده و همانند ماتریس سختی نواری می باشد. این خواص موجب سهولت فراوانی در محاسبه می شوند، زیرا فقط عناصر یک طرف ماتریس و حول قطر آن وارد محاسبات کامپیوتری می گردند. حداکثر تعداد عناصر غیر صفر در هر ردیف، که لازم است توسط کامپیوتر ذخیره شود عرض نوار ماتریس خواننده می شود. به عنوان مثال عرض نوار ماتریس (ب) برابر ۴ است. در این ماتریس تعداد ضرایبی که باید ذخیره شود $6 \times 4 = 24$ است در حالی که اگر بخواهیم ماتریس مربع را ذخیره سازیم به $6 \times 6 = 36$ جا احتیاج است. این صرفه جویی در سازه های بزرگ بسیار چشمگیر است. عرض نوار مستقیماً با بیشترین تفاوت در شماره مختصات اعضا مرتبط است. بنابراین می باید گره ها را طوری شماره کرد که کمترین عرض نوار حاصل شود.

۱۴-۵- میرایی

ضرایب میرایی مشابه ضرایب جرم و سختی تعریف می گردند. طبق تعریف ضریب میرایی c_{ij} نیرویی است که در اثر سرعت واحد در j ، در مختصات گرهی i ایجاد می شود. اگر توزیع نیروهای میرایی در سازه مشخص شود ضرایب میرایی را می توان از رابطه زیر حساب کرد.

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx \quad (۱۴-۲۵)$$

$\alpha(x)$ نیروی میرایی بر واحد طول می باشد. پس از تعیین ماتریس میرایی مقاطع می توان به روش قبل ماتریس سختی کل را تشکیل داد. تعیین $\alpha(x)$ امری غیرعملی است و در عمل به جای استفاده از رابطه فوق، نسبتهای میرایی مدهای ارتعاش با انجام آزمایش تعیین می گردد و چنانچه ماتریس [C] مورد نیاز باشد، می توان با استفاده از روشهای فصل ۱۲ آنرا محاسبه کرد.

۶-۱۴- بارهای خارجی

چنانچه بارهای دینامیکی به صورت نیرو و لنگر متمرکز در مختصات گرهی اعمال شود. بردار نیرو می تواند مستقیماً تعیین گردد. در حالت کلی نیروها ممکن است در نقاطی غیر از مختصات گرهی و به صورت گسترده وارد می شوند. در این صورت بردار نیرو شامل نیروهای معادل خواهد بود. برای تعیین نیروهای معادلی که با نحوه تعیین ماتریسهای جرم و سختی همساز باشد می باید از توابع چابہ جایی (۹-۱۴) استفاده کرد.

قطعه تیر شکل (۷-۱۴) را تحت نیروی دلخواه $p(x,t)$ در نظر می گیریم. این نیرو تابعی از مکان و زمان است. برای تعیین نیروی معادل P_1 در مختصات ۱ چابہ جایی مجازی $\delta_1 = 1$ را اعمال نموده و کار نیروهای داخلی و خارجی را برابر می سازیم. کار خارجی برابر است با:

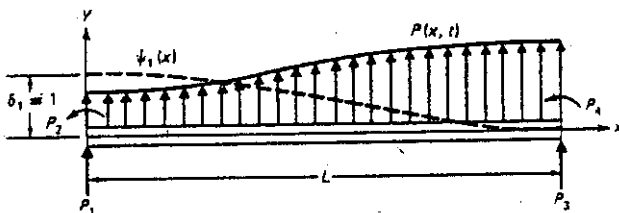
$$W_E = P_1 \delta_1 = P_1 \quad (۱۴-۲۶)$$

کار نیروی ماند بر واحد طول تیر برابر $\Psi_1(x) p(x,t)$ است و کار کل

$$W_I = \int_0^L p(x,t) \Psi_1(x) dx \quad (۱۴-۲۷)$$

از برابری کارهای خارجی و داخلی:

$$P_1(t) = \int_0^L p(x,t) \Psi_1(x) dx \quad (۱۴-۲۸)$$



شکل (۷-۱۴): تیر با بارگذاری دلخواه تحت چابہ جایی مجازی $\delta_1 = 1$

و به طور کلی نیروی گرهی معادل برابر است با:

$$P_i(t) = \int_0^L p(x,t) \Psi_i(x) dx \quad (۳۹-۱۴)$$

مثال (۲-۱۴): در قطعه تیر شکل (۸-۱۴) نیروهای گرهی را برای توزیع یکنواخت نیرو در طول تیر به دست آورید:

$$p(x,t) = 200 \sin 10t \text{ N/m}$$

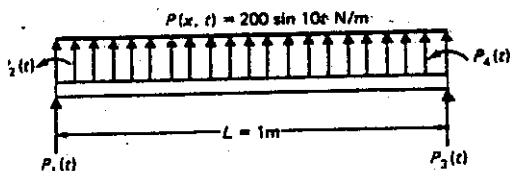
با قراردادن مقادیر در روابط (۹-۱۴) و جایگزینی در رابطه (۳۹-۱۴) داریم:

$$P_1(t) = 200 \int_0^1 (1 - 3x^2 + 2x^3) dx \sin 10t = 100 \sin 10t$$

$$P_2(t) = 200 \int_0^1 x(1-x)^2 dx \sin 10t = 16.67 \sin 10t$$

$$P_3(t) = 200 \int_0^1 (3x^2 - 2x^3) dx \sin 10t = 100 \sin 10t$$

$$P_4(t) = 200 \int_0^1 x^2(x-1) dx \sin 10t = -16.67 \sin 10t$$



شکل (۸-۱۴): تیر تحت بارگذاری گسترده خارجی با نیروهای گرهی معادل

۷-۱۴ - سختی هندسی

هنگامی که تیر علاوه بر نیروهای خمشی تحت نیروی محوری قرار گیرد ضرایب سختی به علت وجود نیروی محوری تغییر می یابند و ضریب k_{ij} به سختی هندسی k_{Gij} تبدیل می گردد که مطابق تعریف نیروی ایجاد شده در مختصات i به وسیله نیروی محوری و در اثر جابه جایی واحد در j می باشد. این ضرایب را می توان به وسیله روش کار مجازی به دست آورد. فرض کنید تیر مثال قبل تحت بار محوری گسترده با شدت $N(x)$ مطابق شکل (۹-۱۴) قرار گیرد. در شکل (۹-۱۴)ب) تیر تحت

جابجایی چرخشی $\delta_2 = 1$ واقع شده است. طبق تعریف، نیروهای گرهی ناشی از این جابه جایی ضرایب سختی هندسی هستند. مثلاً k_{G12} برابر نیروی قائم در انتهای چپ است. اکنون اگر تیر را تحت جابه جایی مجازی $\delta_1 = 1$ قرار دهیم کار خارجی برابر است با:

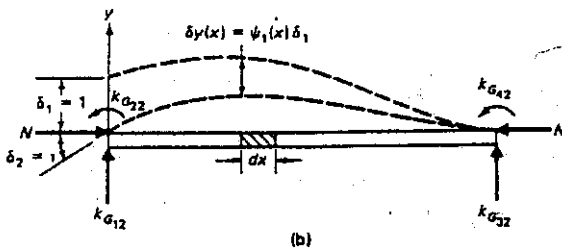
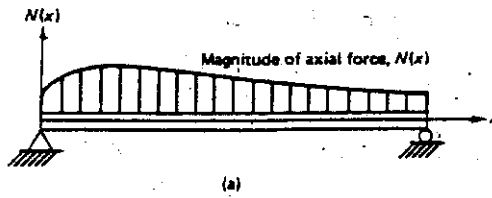
$$W_e = k_{G12} \delta_1$$

و یا:

$$W_e = k_{G12} \quad (۴-۱۴)$$

برای محاسبه کار داخلی ناشی از این جابه جایی مجازی، جزء dx در شکل (۴-۱۴ب) را در شکل (۱۰-۱۴) نشان داده ایم. کار نیروی $N(x)$ برابر است با:

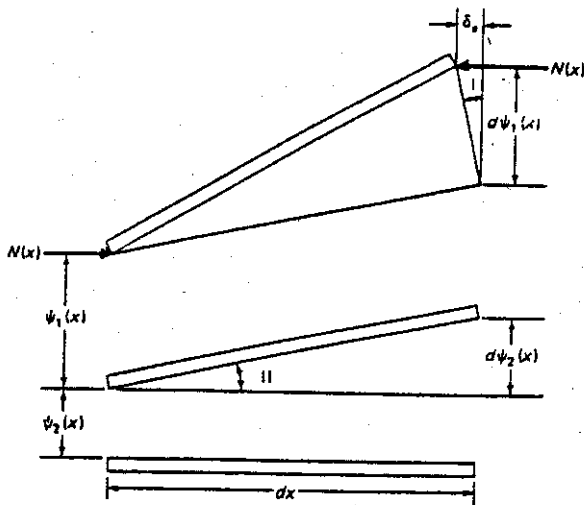
$$dW_i = N(x) \delta_e \quad (۴۱-۱۴)$$



شکل (۴-۱۴): المانی از تیر بارگذاری شده با توزیع محوری

که δ_e جابه جایی نیروی محوری $N(x)$ در جزء dx است. در شکل (۱۰-۱۴)، از تشابه مثلثهای I، II داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_e}{d\Psi_1(x)} &= \frac{d\Psi_2(x)}{dx} \\ \delta_e &= \frac{d\Psi_1}{dx} \cdot \frac{d\Psi_2}{dx} \cdot dx \\ &= \Psi_1'(x) \cdot \Psi_2'(x) dx \end{aligned}$$



شکل (۱۰-۱۴): المانی از تیر شکل (۹-۱۴)

شکل (۱۰-۱۴) و مشتق توابع جابجایی (۹-۱۴) نسبت به x می باشند. با جایگزینی δ_0 در معادله (۴۱-۱۴)

$$dW_E = N(x) \Psi_1'(x) \Psi_2'(x) dx \quad (۴۲-۱۴)$$

پس از انتگرال گیری از این رابطه و مساوی قرار دادن با کار خارجی از رابطه (۴۰-۱۴)

$$k_{G12} = \int_0^L N(x) \Psi_1'(x) \Psi_2'(x) dx \quad (۴۳-۱۴)$$

و به طور کلی برای ضریب سختی هندسی داریم:

$$k_{Gij} = \int_0^L N(x) \Psi_i'(x) \Psi_j'(x) dx \quad (۴۴-۱۴)$$

این رابطه با فرض مستقل بودن $N(x)$ نسبت به زمان به دست آمده است. اگر از توابع جابجایی روابط (۹-۱۴) در رابطه (۴۴-۱۴) استفاده گردد، نتیجه را ماتریس سختی هندسی همساز می نامند. در حالتی که نیروی محوری در طول تیر ثابت باشد با استفاده از روابط (۹-۱۴) و (۴۴-۱۴) رابطه سختی هندسی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (۴۵-۱۴)$$

۸-۱۴- معادلات حرکت

در بخشهای قبل خواص گسترده یک تیر و نیروهای وارد بر آن به صورت مقادیری مجزا در مختصات گرهی بیان گردید. با اعمال شرایط تعادل دینامیکی بین نیروهای مانند $\{F_1(t)\}$ ، نیروهای میرایی $\{F_D(t)\}$ ، نیروهای ارتجاعی $\{F_S(t)\}$ و نیروهای خارجی $\{F(t)\}$ می توان معادلات تعادل را به صورت توابعی از مختصات گرهی به دست آورد.

$$\{F_1(t)\} + \{F_D(t)\} + \{F_S(t)\} = \{F(t)\} \quad (۳۷-۱۴)$$

نیروهای سمت چپ این معادله را می توان برحسب ماتریسهای جرم، میرایی و

سختی نشان داد:

$$\{F_1(t)\} = [M]\{\ddot{y}\} \quad (۳۸-۱۴)$$

$$\{F_D(t)\} = [C]\{\dot{y}\} \quad (۳۹-۱۴)$$

$$\{F_S(t)\} = [K]\{y\} \quad (۵۰-۱۴)$$

از جایگزینی این روابط در (۳۷-۱۴) معادله دیفرانسیل حرکت به دست می آید:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \quad (۵۱-۱۴)$$

۱. در صورتی که لازم باشد تاثیر نیروهای محوری منظور شود:

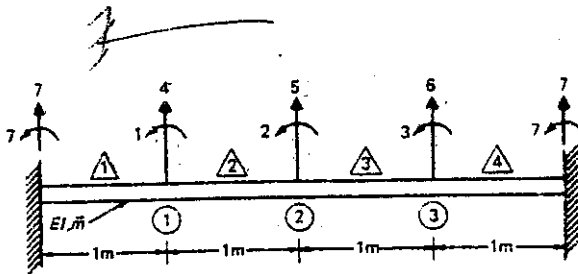
$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K_c]\{y\} = \{F(t)\} \quad (۵۲-۱۴)$$

که در آن:

$$[K_c] = [K] - [K_G] \quad (۵۲-۱۴)$$

در عمل، حل دستگاه معادلات (۵۱-۱۴) یا (۵۲-۱۴) به کمک برنامه های کامپیوتری مناسب مانند آنچه در این فصل و فصلهای بعدی آمده انجام می پذیرد. در اینجا این روشها را با مثالهای ساده ای تشریح می کنیم.

مثال (۴-۱۴): تیر یکنواخت دو سرگیردار شکل (۱۲-۱۴) را در نظر بگیرید که به چهار قطعه تقسیم شده است. فرکانسها و اشکال سه مد اولیه را به دست آورید. برای سادگی محاسبات از روش جرم متمرکز استفاده نمایید.



شکل (۱۲-۱۴): تیر دوسرگیردار که به چهار قطعه تقسیم شده است

مطابق شکل (۱۴-۱۲) شماره گذاری مختصات گرهی را از درجات آزادی چرخشی که در روش جرم متمرکز باید حذف شوند آغاز می کنیم و سپس به درجات آزادی انتقالی می پردازیم و در انتها شماره ۷ را به مختصات ثابت تخصیص می دهیم. ماتریس سختی هریک از قطعات از رابطه (۱۴-۲) به دست می آید:

$$[K] = EI \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 4 & 1 \\ 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (02-14)$$

شماره مختصات هر قطعه در بالا و سمت راست ماتریس فوق آمده است. ماتریس سختی سیستم با استفاده از ماتریس سختی قطعات محاسبه می شود. شماره مختصات قطعه ۱ برابر ۴، ۷، ۱ و ۱ می باشد. شماره ۷ به مختصات ثابت اختصاص دارد، لذا فقط زیر ماتریس ۲x۲ که با شماره ردیف و شماره ستون ۱ و ۴ مشخص شده است به ماتریس سیستم منتقل می شود. برای قطعه ۲ ماتریس (۱۴-۵۴) به جایگاه ۳، ۵، ۱ و ۲ منتقل میگردد و به همین ترتیب ماتریس سختی دو قطعه دیگر نیز منتقل و با عناصر ماتریس سختی سیستم جمع می شوند و حاصل آن:

$$[K] = EI \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 24 & -12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -12 & 24 \end{bmatrix} \quad (00-14)$$

کاهش یا تراکم این ماتریس آنچنان که در فصل ۱۳ آمد به روش گوس-چریدن یا حذف سه ردیف اول انجام می پذیرد، زیرا می باید مختصات چرخشی ۱، ۲، ۳ حذف کردند. با این حذف، رابطه (۱۴-۵۵) به ماتریس زیر تبدیل می شود:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.214 & -0.750 & 0.214 \\ 0 & 1 & 0 & 0.858 & 0 & -0.858 \\ 0 & 0 & 1 & -0.214 & 0.750 & 0.214 \\ 0 & 0 & 0 & 18.86EI & -12.00EI & 5.14EI \\ 0 & 0 & 0 & -12.00EI & 15.00EI & -12.00EI \\ 0 & 0 & 0 & 5.14EI & -12.00EI & 18.86EI \end{bmatrix} \quad (06-14)$$

از مقایسه رابطه (۱۴-۵۶) با رابطه (۱۳-۱۱)، می توان ماتریس سختی کاهش

یافته $[K]$ و ماتریس انتقال $[T]$ را شناسایی نمود:

$$[\bar{K}] = EI \begin{bmatrix} 18.86 & -12.00 & 5.14 \\ -12.00 & 15.00 & -12.00 \\ 5.14 & -12.00 & 18.86 \end{bmatrix} \quad (57-14)$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -0.750 & -0.214 \end{bmatrix} \quad (58-14)$$

ماتریس انتقال عمومی برابر است با:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -0.750 & -0.214 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59-14)$$

به عنوان تمرین خوانندگان می توانند رابطه (۷-۱۳) را با ضرب ماتریسهای زیروارسی کنند.

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T]$$

با استفاده از روش جرم متمرکز، سه جرم متساوی \bar{m} در هر یک از مختصات انتقالی تیر قرار می گیرند. بنابراین ماتریس جرم کاهش یافته برابر است با:

$$[\bar{M}] = \bar{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60-14)$$

فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی از حل معادله ارتعاش آزاد غیرمیرا به دست

می آید:

$$[\bar{M}]\{\ddot{y}\} + [\bar{K}]\{y\} = \{0\} \quad (61-14)$$

با جایگزینی جواب هارمونیک $\{y\} = \{a\} \sin \omega t$ در معادله فوق:

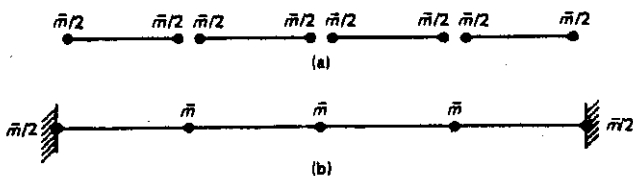
$$([\bar{K}] - \omega^2 [\bar{M}]) \{a\} = 0 \quad (62-14)$$

جواب غیر بديهی این معادله از صفرشدن دترمینان ضرایب به دست می آید:

$$|[\bar{K}] - \omega^2 [\bar{M}]| = 0 \quad (63-14)$$

و پس از جایگزینی $[\bar{K}]$ و $[\bar{M}]$ در این معادله:

$$\begin{vmatrix} 18.86 - \lambda & -12.00 & 5.14 \\ -12.00 & 15.00 - \lambda & -12.00 \\ 5.14 & -12.00 & 18.86 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (64-14)$$



شکل (۱۳-۱۲): الف) جرمهای متمرکز برای قطعات تیر. ب) جرمهای متمرکز در مختصات گرمی

$$\lambda = \frac{\bar{m}\omega^2}{EI} \quad (۶۵-۱۳)$$

ریشه های معادله درجه سه فوق عبارتند از:

$$\lambda_1 = 1.943, \lambda_2 = 13.720, \lambda_3 = 37.057 \quad (۶۶-۱۳)$$

آنگاه از (۶۵-۱۳)

$$\omega_1 = 1.393\sqrt{EI/\bar{m}}$$

$$\omega_2 = 3.704\sqrt{EI/\bar{m}} \quad (۶۷-۱۳)$$

$$\omega_3 = 6.087\sqrt{EI/\bar{m}}$$

سه فرکانس طبیعی اولیه برای تیر یکنواخت دو سرگیردار به طول ۴ متر با استفاده از تحلیل دقیق (فصل ۲۰) عبارتند از:

$$\omega_1(\text{exact}) = 1.398\sqrt{EI/\bar{m}}$$

$$\omega_2(\text{exact}) = 3.857\sqrt{EI/\bar{m}} \quad (۶۸-۱۳)$$

$$\omega_3(\text{exact}) = 7.540\sqrt{EI/\bar{m}}$$

دو فرکانس اولیه این سازه که تعداد درجات آزادی کاهش یافته آن سه است به جواب دقیق خیلی نزدیک اند. یک قاعده عملی برای کاهش درجات آزادی این است که بعد کاهش یافته، حداقل دو برابر تعداد فرکانسهای مورد نیاز برای آنالیز دینامیکی باشد. برای محاسبه اشکال مدی، عنصر اول شکل را برابر واحد اختیار نموده و آنگاه دو معادله از دستگاه معادلات (۶۲-۱۳) را پس از جایگزینی مقادیر ω_2, ω_1 و ω_3 حل می کنیم که نتیجه آن:

$$\{a\}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.84 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \{a\}_2 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0 \\ -1.00 \end{bmatrix}, \{a\}_3 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -1.08 \\ 1.00 \end{bmatrix} \quad (۶۹-۱۳)$$

با تقسیم اشکال مدی بر $\sqrt{\sum m_i a_{ij}^2}$ که در این مثال $m_i = \bar{m} = 100 \text{ kg/m}$ به شکل نرمالیزه در می آیند که در ستونهای ماتریس زیر جای گرفته اند.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.0431 & 0.0707 & 0.0562 \\ 0.0793 & 0 & -0.0607 \\ 0.0431 & -0.0707 & 0.0562 \end{bmatrix} \quad (7-13)$$

مثال (5-13): پاسخ پایدار تیر مثال (4-13) را تحت نیروهای هارمونیک زیر به دست آورید:

$$F_1 = F_{01} \sin \bar{\omega} t,$$

$$F_2 = F_{02} \sin \bar{\omega} t,$$

$$F_3 = F_{03} \sin \bar{\omega} t$$

این نیروها به ترتیب در گره های ۱، ۲ و ۳ تیر شکل (12-13) وارد می شوند. از میرایی صرف نظر کنید و

$$EI = 10^4 (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

$$m = 100 \text{ kg / m}$$

$$\bar{\omega} = 3000 \text{ rad / sec}$$

$$F_{01} = 2000 \text{ N}, F_{02} = 3000 \text{ N}, F_{03} = 1000 \text{ N}$$

معادلات معمولی (غیردرگیر^۱) به راحتی از نتایج مثال (4-13) به دست می آید.

معادله n ام

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = P_n \sin \bar{\omega} t \quad (71-13)$$

$$P_n = \sum_{i=1}^N \phi_{in} F_{0i} \quad \text{که در آن:}$$

جدول (1-13): پاسخ مدی برای مثال (5-13)

Mode			
n	ω_n^2	$P_n = \sum_i \phi_{in} F_{0i}$	$Z_n = \frac{P_n}{\omega_n^2 - \bar{\omega}^2}$
1	1.943×10^6	367.2	-5.200×10^{-5}
2	13.720×10^6	70.7	1.500×10^{-5}
3	37.057×10^6	-13.5	-0.048×10^{-5}

پاسخ پایدار معادله (71-13) از رابطه (3-3) به دست می آید:

$$z_n = Z_n \sin \bar{\omega} t = \frac{P_n \sin \bar{\omega} t}{\omega_n^2 - \bar{\omega}^2} \quad (72-13)$$

محاسبات لازم در رابطه (۷۲-۱۴) در جدول (۱-۱۴) آمده است.

جابه جایی در مختصات گرهی:

$$\{y\} = [\Phi] \{z\} \quad (۷۳-۱۴)$$

که در آن $[\Phi]$ ماتریس اشکال مدی و

$$\{y\} = \{Y\} \sin \bar{\omega} t$$

$$\{z\} = \{Z\} \sin \bar{\omega} t$$

از جایگزینی اشکال مدی از رابطه (۷۰-۱۴) و $\{Z\}$ از ستون آخر جدول (۱-۱۴) در

رابطه (۷۳-۱۴)، دامنه در مختصات گرهی به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0431 & 0.0707 & 0.0562 \\ 0.0793 & 0 & -0.0607 \\ 0.0431 & -0.0707 & 0.0562 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.200 \\ 1.500 \\ -0.048 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

یا

$$Y_4 = -1.207 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$Y_5 = -4.094 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$Y_6 = -3.329 \times 10^{-6} \text{ m}$$

بنابراین حرکت مختصات گرهی توسط روابط زیر به دست می آید:

$$y_4 = -1.207 \times 10^{-6} \sin 3000t \text{ m},$$

$$y_5 = -4.094 \times 10^{-6} \sin 3000t \text{ m} \quad (۷۴-۱۴)$$

$$y_6 = -3.329 \times 10^{-6} \sin 3000t \text{ m}$$

ضریب منفی بیانگر این است که حرکت دارای ۱۸۰° اختلاف فاز با نیروی محرک است.

۱۴-۹- نیروها در مختصات گرهی

مساله اصلی در روش سختی تعیین جابه جایی ها در مختصات گرهی است،

همین که این جابه جایی ها تعیین شد، به سهولت می توان با جایگزینی آنها در روابط

تعداد دینامیکی المانها، نیروها را در مختصات گرهی به دست آورد. نیروی گرهی

المان $\{P\}$ را می توان با جمع نیروی مانند $\{P_i\}$ ، نیروی میزایی $\{P_D\}$ و نیروی

ارتجاعی $\{P_S\}$ و تفاضل نیروهای گرهی معادل $\{P_E\}$ به دست آورد. پس:

$$\{P\} = \{P_i\} + \{P_D\} + \{P_S\} - \{P_E\}$$

ریا:

$$\{P\} = [m] \{\ddot{\delta}\} + [c] \{\dot{\delta}\} + [k] \{\delta\} - \{P_E\} \quad (۷۵-۱۴)$$

1) Nodal Equivalent Forces

در این رابطه نیروهای ماند، میرایی و ارتجاعی به ترتیب برابرنند با:

$$\{P_1\} = [m] \{\ddot{\delta}\}$$

$$\{P_D\} = [c] \{\dot{\delta}\} \quad (۷۶-۱۴)$$

$$\{P_S\} = [k] \{\delta\}$$

و $[m]$ ماتریسهای جرم، میرایی و سختی المان و $[c]$ و $[k]$ و $\{\delta\}$ ، $\{\dot{\delta}\}$ ، $\{\ddot{\delta}\}$ بردارهای جابه جایی، سرعت و شتاب المان در مختصات گرهی می باشند. روش تعیین نیروهای گرهی المان در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال (۶-۱۴) نیروهای گرهی و لنگرها را برای چهار قطعه تیر مثال (۵-۱۴) به دست آورید چون در این مساله از میرایی صرفنظر شده است و نیروی خارجی به جز نیروهای اعمال شده در مختصات گرهی وجود ندارد، رابطه (۷۵-۱۴) به صورت زیر در می آید:

$$\{P\} = [m] \{\ddot{\delta}\} + [k] \{\delta\} \quad (۷۷-۱۴)$$

معادلات جابه جایی ۶ مختصات گرهی تیر شکل (۱۲-۱۴) در رابطه (۷۴-۱۴) و (۷۹-۱۴) داده شده است. اینها جابه جایی مختصات گرهی المانها نیز هستند:

$$\{y_p\} = [\bar{T}] \{y_q\} \quad (۷۸-۱۴)$$

بردار جابه جایی گرهی برای قطعه تیر z ام است. با جایگزینی عناصر در رابطه

(۷۷-۱۴) برای قطعه تیر ۱ داریم:

$$\{y_p\} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad \{y_q\} = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}$$

برای تکمیل این مثال، مقادیر زیر را جایگزین می سازیم،

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -0.750 & -0.214 \end{bmatrix}$$

$$\{y_q\} = \begin{bmatrix} -1.207 \times 10^{-6} \sin 3000t \\ -4.094 \times 10^{-6} \sin 3000t \\ -3.329 \times 10^{-6} \sin 3000t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -0.750 & -0.214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.207 \\ -4.094 \\ -3.329 \end{bmatrix} 10^{-6} \sin 3000t$$

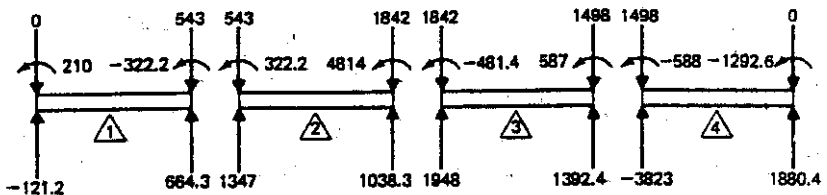
که حاصل آن:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.818 \\ 3.524 \end{bmatrix} 10^{-6} \sin 3000t$$

نیروهای گرهی المانها برای هر چهار قطعه به روش فوق محاسبه و در جدول (۲-۱۴) گردآوری شده است.

جدول (۲-۱۴): دامنه نیروهای گرهی المانها در مثال (۶-۱۴)

نیروی	قطعات تیر				
	1	2	3	4	
P_1	-121.2	1347.1	1947.9	-382.3	N
P_2	201.0	322.2	-481.4	-587.0	N·m
P_3	664.3	1038.3	1392.4	1880.4	N
P_4	-322.2	481.4	587.0	-1292.6	N·m



شکل (۲-۱۴): تعادل دینامیکی قطعات تیر مثال (۶-۱۴)

می توان با استفاده از نتایج جدول (۲-۱۴) تعادل دینامیکی قطعات تیر را واریسی نمود. نمودار آزاد این قطعات در شکل (۲-۱۴) به همراه نیروهای مانند در گره ها نشان داده شده است. این نیروها از حاصلضرب جرم گرهی در شتاب گرهی به دست آمده اند.

۱-۱۴- برنامه ۱۱- تحلیل دینامیکی تیرها (BEAM)

با استفاده از برنامه کامپیوتری BEAM می توان تیرها را به روش سختی تحلیل دینامیکی نمود. بخش اصلی این برنامه حول قطعات تیر می چرخد. در این چرخش ماتریسهای سختی و جرم محاسبه شده و با عناصر هم مکان (متناظر) خود در ماتریس اصلی سیستم جمع می شوند. پس از اینکه چرخش برای همه قطعات تکمیل شد، جرمهای متمرکز در گره ها- اگر وجود داشته باشد- خوانده شده و به عناصر هم مکان در ماتریس جرم افزوده می شود. بخش بعدی برنامه شامل شرطهایی است که منجر به احضار زیربرنامه هایی برای انجام وظایف خاصی می شود که در جدول (۲-۱۴) بیان شده است. لیست این زیر برنامه ها در ضمیمه I آورده شده است.

جدول (۳-۱۴): زیربرنامه

زیر برنامه	برنامه	فصل ارائه برنامه	هدف
JACOBI	۵	۱۰	فرکانسهای طبیعی و مدهای متعامد
MODAL	۶	۱۱	پاسخ توسط ترکیب مدی
HARMO	۸	۱۱	پاسخ به تحریک هارمونیک
DAMP	۹	۱۲	ماتریس میرایی از نسبت های میرایی
CONDE	۱۰	۱۳	تراکم مسئله دینامیکی
STEM	۱۵	۱۹	پاسخ توسط روش ویلسون - θ

جدول (۴-۱۴): متغیرهای اصلی برنامه ۱۱

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
NE		تعداد المانها
ND		تعداد درجات آزادی
NCR	p	تعداد درجات آزادی جهت متراکم نمودن
NCM		تعداد جرمهای متمرکز
LOC		نشان جرم: 0 ← جرم فشرده 1 ← جرم پیوسته
IFPR		چاپ مقادیر میانی در زیر برنامه JACOBI 0 ← چاپ نشود 1 ← چاپ شود
E	E	مدول ارتجاعی
LE		شماره عضو تیر
SL	L	طول عضو تیر
SMA	\bar{m}	جرم عضو تیر برای هر واحد طول
NC(L)		مختصات گرهی عضو تیر ($L=1,4$)
CM(L)		جرم های متمرکز (NCM, $L=1$)
JC(L)		مختصات گرهی برای CM(L)

شرح متغیرهای اصلی برنامه ۱۱ در جدول (۴-۱۴) آمده است و فهرست داده های

ورودی و فرمت آنها در جدول (۵-۱۴) ارائه شده است. ذیلاً مثالهایی برای استفاده از این برنامه برای تحلیل دینامیکی تیرها آورده شده است تا ضمن آشنایی با برنامه، نحوه آماده سازی داده های ورودی نیز روشن شود.

جدول (۵-۱۴): داده های ورودی برنامه ۱۱

فرمت	متغیرها
(6IS, E20.4)	NE ND NCR NCM LOC IFPR E
(110, 3F10.0, 4IS)	LE SL SI SMA NC(L), (L = 1, 4) (one card for each beam segment)
(8 (I2, F8.2))	JC(L) CM(L), (L = 1, NCM)

مثال (۷-۱۴): فرکانسها و اشکال مدی تیر دوسرگیردار شکل (۱۲-۱۴) را به دست آورید. تیر را به چهار قطعه تقسیم نموده و درجات آزادی چرخشی را حذف کنید. از روش جرم متمرکز استفاده کرده و از میرایی صرفنظر کنید.

برای حل این مسأله لازم است زیربرنامه CONDE احضار گردد تا درجات چرخشی را حذف کند. این زیربرنامه به نوبه خود زیربرنامه JACOBI را لازم دارد تا مسأله مشخصه^۱ را حل نماید. آنگاه پاسخ با زیر برنامه MODAL محاسبه می گردد. بنابراین "C" باید از بین دو جمله برنامه حذف شود تا این دو زیر برنامه احضار شود. در حالی که در بقیه جملات وجود "C" موجب عدم اجرای آنها می گردد. فهرست داده های مورد نیاز و نتایج کامپیوتری در جدول (۶-۱۴) داده شده است. این نتایج را با حاصل محاسبات دستی برای مقادیر زیر مقایسه کنید:

ماتریس سختی کاهش یافته در رابطه (۵۷-۱۴)، ماتریس انتقال (۵۹-۱۴)، ماتریس جرم کاهش یافته (۶۰-۱۴)، مقادیر مشخصه در ستون دوم جدول (۱-۱۴)، و بردارهای مشخصه در ستونهای ماتریس مدی (۷۰-۱۴).

مثال (۸-۱۴) پاسخ تیر مثال قبل را در حالی که یک نیروی متمرکز ۵۰۰ نیوتن ناگهان در وسط دهانه وارد شود به دست آورید. از روش جرم متمرکز استفاده کرده، از میرایی صرفنظر کنید.

برای حل این مسأله می باید به کمک برنامه ۱۱ از دنباله مسأله (۷-۱۴) ادامه داد بدین معنا که پس از آنکه نتایج مربوط به مثال (۷-۱۴) به دست آمد (جدول ۶-۱۴)، با احضار زیر برنامه MODAL پاسخ در سه مختصات گرهی انتقالی محاسبه می گردد. داده های ورودی و نتایج در جدول (۷-۱۴) آمده است.

1) EigenProblem

INPUT DATA

4	6	3	0	0	0	1000000000000.			
	1		1.00	0.0001	100.00	7	7	4	1
	2		1.00	0.0001	100.00	4	1	5	2
	3		1.00	0.0001	100.00	5	2	6	3
	4		1.00	0.0001	100.00	6	3	7	7

THE REDUCED STIFFNESS MATRIX IS

0.1886D 10	-0.1200D 10	0.5143D 09
-0.1200D 10	0.1500D 10	-0.1200D 10
0.5143D 09	-0.1200D 10	0.1886D 10

THE TRANSFORMATION MATRIX IS

0.2143D 00	0.7500D 00	-0.2143D 00
-0.8571D 00	0.0000D 00	0.8571D 00
0.2143D 00	-0.7500D 00	-0.2143D 00
0.1000D 01	0.0000D 00	0.0000D 00
0.0000D 00	0.1000D 01	0.0000D 00
0.0000D 00	0.0000D 00	0.1000D 01

THE REDUCED MASS MATRIX IS

0.1000D 03	0.0000D 00	0.0000D 00
0.0000D 00	0.1000D 03	0.0000D 00
0.0000D 00	0.0000D 00	0.1000D 03

EIGENVALUES

0.37057D 08	0.19430D 07	0.13714D 08
-------------	-------------	-------------

EIGENVECTORS

0.56043D-01	0.43119D-01	-0.70711D-01
-0.60979D-01	0.79256D-01	0.48677D-17
0.56043D-01	0.43119D-01	0.70711D-01

0.0100	0.2000	0	2	0
0.00	5000.00		0.20	5000.00
0.000	0.000		0.000	

RESPONSE FOR ELASTIC SYSTEM

TIME t	DISPLACEMENTS AT NODAL COORDINATES		
	y_4	y_5	y_6
0.0000	0.0000D 00	0.0000D 00	0.0000D 00
0.0100	0.6428D-05	0.1367D-04	0.6428D-05
0.0200	0.1612D-04	0.3194D-04	0.1612D-04
0.0300	0.1368D-04	0.2526D-04	0.1368D-04
0.0400	0.2172D-05	0.5309D-05	0.2172D-05
0.0500	0.5451D-06	0.3613D-05	0.5451D-06
0.0600	0.1192D-04	0.2235D-04	0.1192D-04
0.0700	0.1717D-04	0.3235D-04	0.1717D-04
0.0800	0.8002D-05	0.1741D-04	0.8002D-05
0.0900	-0.1098D-06	0.7007D-06	-0.1098D-06
0.1000	0.5164D-05	0.9831D-05	0.5164D-05
0.1100	0.1513D-04	0.3037D-04	0.1513D-04
0.1200	0.1465D-04	0.2838D-04	0.1465D-04
0.1300	0.4063D-05	0.7533D-05	0.4063D-05
0.1400	-0.1726D-06	0.1901D-05	-0.1726D-06
0.1500	0.9595D-05	0.1961D-04	0.9595D-05
0.1600	0.1758D-04	0.3233D-04	0.1758D-04
0.1700	0.1019D-04	0.2046D-04	0.1019D-04
0.1800	-0.3563D-07	0.2337D-05	-0.3563D-07
0.1900	0.3597D-05	0.6783D-05	0.3597D-05

می توان این نتایج کامپیوتری را به روش زیروارسی نمود. معادله مد نام عبارت است از:

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \sum \phi_{in} F_{0i} = P_n$$

و پاسخ مدی برای یک نیروی ثابت برابر است با:

$$z_n = \frac{P_n}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t), \quad n = 1, 2, 3$$

نتایج این محاسبات در جدول (A-14) برای $t = 0.1$ sec آورده شده است.

جدول (A-14): پاسخ مدها در مثال (A-12)

Mode	ω_n (rad/sec)	$P_n = \sum \phi_{in} F_{0i}$	$z_n (t = 0.1 \text{ sec})$
1	1394	396.3	$1.243 \cdot 10^{-4}$
2	3703	0	0
3	6087	-304.9	$-2.316 \cdot 10^{-6}$

و بالاخره پاسخ برحسب مختصات گرهی عبارت است از:

$$\{y\} = [\Phi] \{z\}$$

$$\begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0431 & -0.0707 & 0.0560 \\ 0.0793 & 0 & 0.0610 \\ 0.0431 & 0.0707 & 0.0560 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.243 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -2.316 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.523 \times 10^{-5} \\ 0.971 \times 10^{-5} \\ 0.523 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

ملاحظه می شود که این پاسخ با مقادیر جدول (۱۴-۷) برای لحظه $t = 0.1 \text{ sec}$ مطابقت دارد.

۱۴-۱۱- خلاصه

در این فصل معادلات دینامیکی تیرها برحسب مختصات گرهی به دست آمد. این مختصات شامل جابه جایی های انتقالی و چرخشی در گره های بین قطعات تیر می باشند. معادلات دینامیکی يك سیستم خطی به شکل ماتریسی عبارت است از:

$$[M] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{F(t)\}$$

که $F(t)$ بردار نیرو و $[M]$, $[C]$, و $[K]$ ماتریسهای جرم، میرایی و سختی سازه هستند و از جمع ماتریس قطعات به دست می آیند.

پاسخ معادلات دینامیکی را می توان از جمع پاسخ مدها به دست آورد. در این روش می باید فرکانسها و اشکال مدی را محاسبه نمود و با استفاده از انتقال خطی $\{y\} = [\Phi] \{z\}$ دستگاه معادلات درگیر را به شکل مجموعه ای از معادلات مستقل زیر در آورد.

$$\ddot{z}_n + 2\omega_n \xi_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = P_n(t)$$

ξ_n نسبت میرایی مدی و $P_n(t) = \sum_{i=1}^n \phi_{in} F_i(t)$ $\ddot{z}_n + 2\omega_n \xi_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = P_n(t)$ نیروی مدی است.

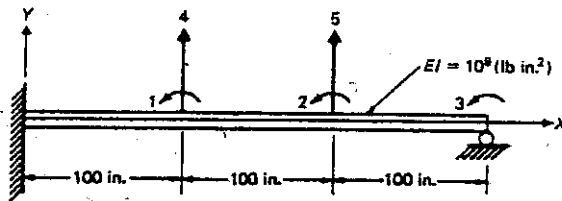
ظریقه دیگر برای محاسبه پاسخ سیستمهای خطی (که برای سیستمهای غیرخطی نیز معتبر است) انتگرال گیری عددی معادلات دینامیکی است. در فصل ۱۹ روش انتگرال گیری گام به گام با شتاب خطی (همراه با روش اصلاحی ویلسون) که روشی کارا است بیان شده است.

در این فصل يك برنامه کامپیوتری نیز برای تحلیل دینامیکی تیرها ارائه گردید. این برنامه ماتریسهای سیستم را تشکیل داده و زیر برنامه های لازم برای انجام محاسبات خاص را احضار می نماید.

مسائل

مسائل زیر برای محاسبه با دست طرح شده اند اما توصیه می شود در موارد ممکن با نتایج کامپیوتری برنامه ۱۱ (BEAM) مقایسه شوند.

۱۴-۱- تیر یکنواخت با سختی خمشی $EI = 10^9 (lb \cdot in^2)$ و طول 300 in در یک انتها تکیه گاه ثابت و در انتهای دیگر تکیه گاه ساده دارد. بادر نظر گرفتن تیر به صورت سه قطعه و با توجه به مختصات گرهی نشان داده شده در شکل، ماتریس جرم سیستم را به دست آورید.



شکل م (۱-۱۴)

۱۴-۲- برای تیر نشان داده شده در شکل (۱-۱۴) با فرض بار یکنواخت $q = 3.86 \text{ lb/in}$ بر روی تیر، ماتریس جرم سیستم را با روش جرم متمرکز به دست آورید. (Lumped mass)

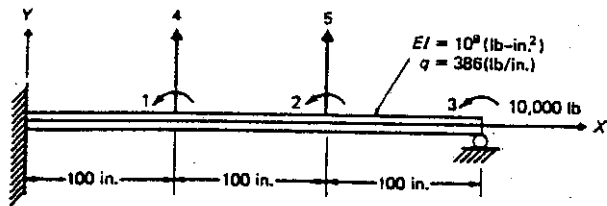
۱۴-۳- با بکارگیری روش جرم سازگار ماتریس سیستم مساله (۲-۱۴) را به دست آورید.

۱۴-۴- برای مساله (۱-۱۴) و (۲-۱۴) با بکارگیری تراکم استاتیکی، درجه آزادی بدون جرم را حذف کرده، ماتریس های انتقال، جرم و سختی کاهش یافته را به دست آورید.
۱۴-۵- برای تیر مساله (۱-۱۴) و (۳-۱۴) با بکارگیری روش تراکم استاتیکی درجه آزادی استاتیکی را حذف کرده، ماتریس های انتقال، جرم و سختی کاهش یافته را به دست آورید.

۱۴-۶- با بکارگیری ماتریس های جرم و سختی کاهش یافته به دست آمده از مساله (۴-۱۴)، فرکانس های طبیعی و مدها را به دست آورید.

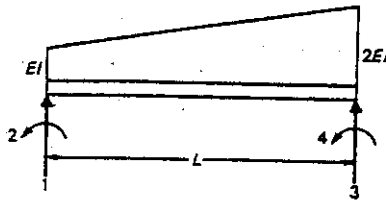
۱۴-۷- با بکارگیری ماتریس های جرم و سختی کاهش یافته [به دست آورده از مساله (۵-۱۴)] فرکانس های طبیعی و مدها را به دست آورید.

۱۴-۸- در مساله (۱-۱۴)، هنگامی که تیر تحت اثر یک نیروی کششی ثابت 10000 lb باشد، ماتریس سختی هندسی را به دست آورید. [شکل م (۸-۱۴)]



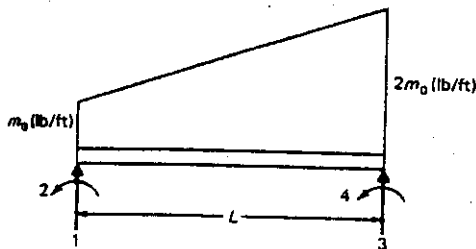
شکل م (۸-۱۴)

- ۹-۱۴- با بکارگیری تراکم استاتیکی ماتریس سختی هندسی به دست آمده در مساله (۸-۱۴) را کاهش دهید. مختصات چرخشی را حذف کنید.
- ۱۰-۱۴- با بکارگیری نتایج مساله (۴-۱۴) و (۹-۱۴)، فرکانس های طبیعی و مدها را برای تیر نشان داده شده در شکل م (۸-۱۴) به دست آورید.
- ۱۱-۱۴- با بکارگیری نتایج مساله (۵-۱۴) و (۹-۱۴) فرکانس های طبیعی و مدها را برای تیر نشان داده شده در شکل م (۸-۱۴) به دست آورید.
- ۱۲-۱۴- ماتریس سختی را برای قطعه ای از تیر که سختی خمشی آن تغییرات خطی دارد [شکل م (۱۲-۱۴)] به دست آورید.



شکل م (۱۲-۱۴)

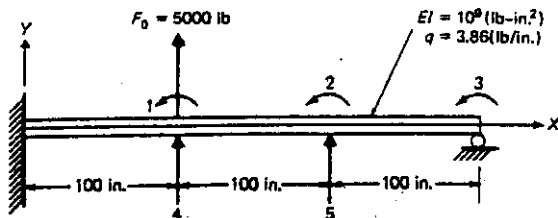
- ۱۳-۱۴- ماتریس جرم متمرکز را برای قطعه ای از تیر که در آن بخش جرم به صورت خطی است به دست آورید. [(شکل م ۱۳-۱۴)]



شکل م (۱۳-۱۴)

۱۴-۱۳- ماتریس جرم سازگار را برای قطعه ای از تیر که در شکل م (۱۳-۱۴) نشان داده شده است به دست آورید.

۱۵-۱۴- تیر یکتراخت نشان داده شده در شکل م (۱۴-۱۵) تحت تاثیر نیروی ثابت 5000 lb که به صورت ناگهانی، در مختصات گرهی ۱ وارد شده است قرار دارد. با بکارگیری نتایج به دست آمده از مساله (۹-۱۳) و روش ترکیب مدها پاسخ را تعیین کنید.

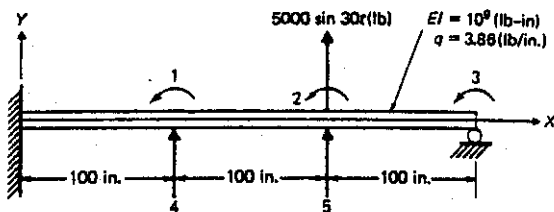


شکل م (۱۵-۱۴)

۱۶-۱۴- با بکارگیری نتایج به دست آمده از مساله (۷-۱۳) که براساس روش جرم سازگار می باشد، مساله (۱۵-۱۴) را دوباره حل نمایید.

۱۷-۱۴- با بکارگیری نتایج مساله (۹-۱۳) که مبتنی بر تاثیر نیروی محوری بر سختی سیستم می باشد، مساله (۱۵-۱۴) را حل کنید.

۱۸-۱۴- برای تیر نشان داده شده در شکل م (۱۴-۱۸) که تحت اثر نیروی هارمونیک $F(t) = 5000 \sin 30t$ (lb) می باشد، پاسخ پایدار سیستم را تعیین کنید. توسط تراکم استاتیکی مختصات چرخشی را حذف کنید. سیستم را بدون استهلاک فرض کنید.



شکل م (۱۸-۱۴)

مسائل زیر برای حل کامپیوتری توسط برنامه 11 (BEAM) در نظر گرفته شده اند.

۱۹-۱۴- فرکانس های طبیعی و مدها را برای تیر نشان داده شده در شکل م (۱۴-۱) در دو حالت زیر به دست آورید. الف) با تراکم سه مختصه گرهی چرخشی؛ ب) بدون در نظر گرفتن تراکم (روش جرم سازگار را به کار ببرید).

۲۰-۱۴- با چشم پوشی از استهلاک، پاسخ تیر نشان داده شده در شکل م (۱۴-۱۵) را در

در حالت به دست آورید. الف) مختصات را متراکم نکنید؛ ب) سه مختصه چرخشی را متراکم کنید.

۱۴-۲۱- با فرض 10% استهلاك برای همه مدها، مساله (۱۴-۲۰) را دوباره حل کنید.

۱۴-۲۲- برای تیر نشان داده شده در شکل م (۱۴-۱۸) پاسخ پایدار سیستم را هنگامی که طبق شکل تحت تأثیر نیروی هارمونیک می باشد به دست آورید. مختصات را متراکم نکنید و از استهلاك سیستم صرفنظر کنید.

۱۴-۲۳- با فرض متناسب بودن استهلاك با سختی سیستم و ثابت تناسب $a_0 = 0.2$ مساله (۱۴-۲۲) را دوباره حل کنید.

۱۴-۲۴- با بکارگیری زیر برنامه CONDE برای کاهش سه مختصه چرخشی، مساله (۱۴-۲۲) را دوباره حل کنید.

۱۴-۲۵- با فرض 15% استهلاك در تمام مدها، مساله (۱۴-۲۳) را دوباره حل کنید.

۱۴-۲۶- برای تیر نشان داده شده در شکل م (۱۴-۱۵) پاسخ پایدار سیستم را تعیین کنید. مختصات را متراکم نکنید و از استهلاك چشم پوشی نمایید.

فصل پانزدهم

تحلیل دینامیکی قابهای دو بعدی^۱

1) Plane Frames

در فصل ۱۴ به کمک روش ماتریس سختی نحوه تحلیل دینامیکی سازه های قابل تبدیل به تیر تشریح گردید.

کامهای اساسی در این روش عبارتند از: محاسبه ماتریسهای سختی، جرم و استهلاک هر عضو، انتقال ماتریسهای عضو به ماتریس کل سیستم، تشکیل بردار نیرو و حل معادلات حرکت مربوط به آن. چنانکه دیدیم این معادلات حرکت را می توان به روش ترکیب مدها و یا انتگرال عددی معادلات حل کرد. در این فصل و فصول بعدی، تحلیل دینامیکی قابها تشریح می گردد.

ابتدا به تحلیل قابهای دو بعدی تحت نیروهایی در صفحه قاب می پردازیم. برای تحلیل دینامیکی این گونه سازه ها می باید تاثیر نیروهای محوری اعضا بر ماتریس سختی منظور گردد. همچنین می باید مختصات محلی گره ها به مختصات کلی منتقل گردد. از این دو نکته که بگذریم، روش تحلیل دینامیکی قابهای دو بعدی مانند تحلیل تیرها در فصل ۱۴ می باشد.

۱۵-۱- ماتریس سختی عضو

برای اضافه نمودن اثر نیروی محوری در ماتریس سختی اعضاء خمشی، می باید ضرایب سختی برای نیروی محوری تعیین شود. برای این کار، با توجه به شکل (۱۵-۱)، عضو را تحت نیروهای محوری P_1, P_2 و جابه جایی های δ_1, δ_2 در نظر می گیریم. چنانچه سطح مقطع در طول عضو یکنواخت و برابر A و طول آن L باشد به کمک قانون هوك جابه جایی گره ۱ در حالتی که گره ۲ ثابت باشد برابراست با:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{AE} \quad (15-1)$$

از رابطه (۱۵-۱) و تعریف ضریب سختی k_{11} (نیرو در گره ۱ برای ایجاد جابه جایی واحد $\delta_1 = 1$)، داریم:

$$k_{11} = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{AE}{L} \quad (15-2, \text{الف})$$

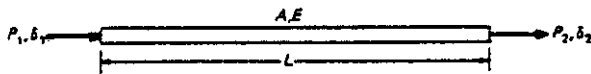
برای تعادل تیر که تحت نیروی k_{11} قرار دارد می باید نیروی k_{21} در انتهای دیگر آن وارد گردد:

$$k_{21} = -k_{11} = -\frac{AE}{L} \quad (15-2, \text{ب})$$

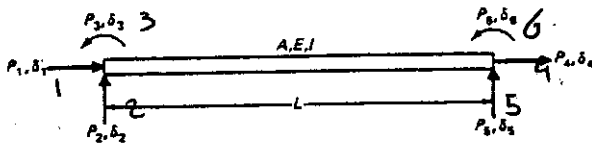
و به طریق مشابه سایر ضرایب سختی عبارتند از:

$$k_{22} = \frac{AE}{L} \quad (15-2, \text{ج})$$

$$k_{12} = -\frac{AE}{L} \quad (15-2, \text{د})$$



شکل (۱۰-۲): عضو با نیروهای گرهی P_1 و P_2 و جابه جایی های متناظر δ_1 و δ_2



شکل (۱۰-۲): عضو تحت نیروهای گرهی محوری و خمشی و جابه جایی های متناظر

ضرایب سختی حاصل از روابط (۱۰-۲) اجزای ماتریس سختی عضو برای نیروهای محوری را تشکیل می دهند. پس:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۳)$$

برای ماتریس سختی کلی عضو که در برگزیده نیروهای محوری و خمشی

شکل (۱۰-۲) باشد می باید ماتریسهای روابط (۱۰-۳) و (۱۳-۲) ترکیب کردند تا

ماتریس زیر به دست آید:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & 0 & 0 & & & \\ 0 & 12 & 6L & & & \\ 0 & 6L & 4L^2 & & & \\ -AL^2/I & 0 & 0 & AL^2/I & & \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 12 & \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

(۱۰-۴)

و در شکلی خلاصه تر

$$\{P\} = [K] \{\delta\} \quad (۱۰-۵)$$

۱۰-۲- ماتریس جرم عضو

ضرایب جرم را می توان با هر يك از دو روشی که قبلاً تشریح شد تعیین کرد:

- ۱- روش جرم متمرکز، ۲- روش جرم همسان. در روش جرم متمرکز، جرم عضو براساس تعادل استاتیکی در گره ها متمرکز می شود و برای تیر یکنواخت نیمی از جرم در هر گره قرار می گیرد. در تیر یکنواخت رابطه نیروی محوری و شتابهای گرهی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (6-10)$$

\bar{m} جرم واحد طول است. با ترکیب ماتریس های جرم خمشی و محوری رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} \quad (7-10)$$

برای محاسبه ضرایب ماتریس جرم همسان، لازم است که تابع جابه جایی عضو را تحت يك جابه جایی محوری واحد در گره به دست آوریم. تیر شکل (3-10) را با جابه جایی محوری واحد در گره 1 ($\delta_1 = 1$) و جابه جایی محوری صفر در گره 2 در نظر می گیریم. اگر $u = u(x)$ جابه جایی نقطه x باشد، جابه جایی نقطه $x + dx$ برابر $u + du$ خواهد بود. با توجه به قانون هوک:

$$\text{پس:} \quad \frac{du}{dx} = \frac{P}{AE} \quad (8-10)$$

$$u = \frac{P}{AE} x + C \quad (9-10)$$

C ثابت انتگرال گیری است. با توجه به شرایط مرزی

$$u = 1 \text{ در } x = 0$$

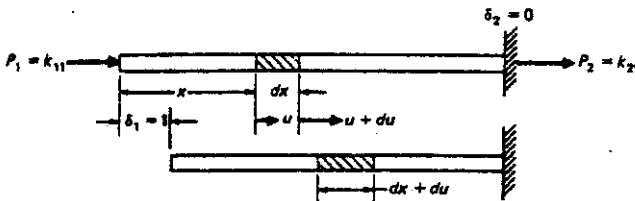
$$u = 0 \text{ در } x = L$$

تابع جابه جایی برای جابه جایی گرهی واحد δ_1 عبارتست از:

$$u_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (10-10)$$

و به طور مشابه، تابع جابه جایی برای جابه جایی گرهی واحد δ_2

$$u_2(x) = \frac{x}{L} \quad (11-10)$$



شکل (3-10): جابه جایی واحد در گره 1

با استفاده از روش کار مجازی می توان ضرایب سختی را تعیین کرد. مثلاً برای تیر شکل (۱۵-۳) با نیروی نشان داده شده، یک جابه جایی مجازی $\delta_2 = 1$ را اعمال می کنیم. کار مجازی نیروهای خارجی خارجی برابر است با:

$$W_E = k_{21} \delta_2 \quad (12-15)$$

$$W_E = k_{21}$$

نیروی $P(x)$ در هر مقطع x از رابطه (۱۵-۸) به دست می آید:

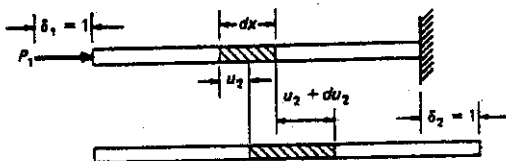
$$P(x) = AE u_1'(x) \quad (12-15)$$

که:

$$u_1'(x) = \frac{du_1}{dx}$$

جابه جایی نسبی المان dx طی این جابه جایی مجازی مطابق شکل (۱۵-۴) برابر است با:

$$du_2 = \frac{du_2}{dx} \cdot dx \quad (14-15)$$



شکل (۱۵-۴): جابه جایی مجازی در گره ۲ ($\delta_2 = 1$) هنگامی که مسؤمت جابه جایی محوری واحد در گره ۱ قرار گرفته است

پس کار داخلی با استفاده از رابطه (۱۵-۱۳) و (۱۵-۱۴)

$$dW_i = AE u_1'(x) u_2'(x) dx$$

و برای عضو به طول L :

$$W_i = \int_0^L AE u_1'(x) u_2'(x) dx \quad (15-15)$$

و بالاخره از برابری کارهای داخلی و خارجی:

$$k_{21} = \int_0^L AE u_1'(x) u_2'(x) dx \quad (16-15)$$

و در حالت کلی، ضریب سختی k_{ij} برابر است با:

$$k_{ij} = \int_0^L AE u_i'(x) u_j'(x) dx \quad (17-15)$$

با استفاده از رابطه (۱۵-۱۷) خوانندگان می توانند رابطه (۱۵-۳) را بررسی کنند. رابطه (۱۵-۱۷) را می توان برای اعضای غیر یکنواخت نیز به کاربرد. جابه جایی هر

نقطه از مغزو $y(x,t)$ ناشی از جابه جایی های گرهی دینامیکی $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ برابر است با:

$$y(x,t) = u_1(x) \delta_1(t) + u_2(x) \delta_2(t) \quad (10-18)$$

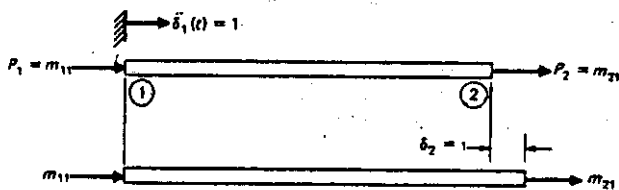
$u_1(x)$ و $u_2(x)$ در روابط (10-11) و (10-11) تعیین شده اند. اکنون تیر شکل

(10-5) را تحت شتاب گرهی واحد $\ddot{\delta}_1(t) = 1$ در نظر می گیریم. شتاب در هر نقطه x برابر است با:

$$\ddot{u}_1(x,t) = u_1(x) \ddot{\delta}_1(t)$$

و یا

$$\ddot{u}_1(x,t) = u_1(x)$$



شکل (10-5): جابه جایی مجازی واحد در گره ۲ ($\delta_2 = 1$) برای تیری تحت شتاب گرهی واحد $\ddot{\delta}_1(t) = 1$

شدت نیروی ماند در اثر شتاب گرهی واحد برابر است با:

$$f_1 = \bar{m}(x) u_1(x) \quad (10-19)$$

$\bar{m}(x)$ جرم واحد طول تیر است. حال اگر جابه جایی مجازی واحد را در گره ۲

اعمال کنیم، تنها کار خارجی توسط جرم m_{21} انجام می شود:

$$W_E = m_{21} \delta_2 \quad (10-20)$$

و

$$W_E = m_{21}$$

کار داخلی جزء dx برابر است با:

$$\delta W_T = \bar{m}(x) u_1(x) u_2(x)$$

و یا:

$$W_T = \int_0^L \bar{m}(x) u_1(x) u_2(x) dx \quad (10-21)$$

و بالاخره از بیزایی کارهای مجازی داخلی و خارجی:

$$m_{21} = \int_0^L \bar{m}(x) u_1(x) u_2(x) dx \quad (10-22)$$

و یا به طور کلی:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) u_i(x) u_j(x) dx \quad (23-10)$$

با به کارگیری این رابطه برای تیر یکنواخت:

$$m_{11} = \int_0^L \bar{m} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{\bar{m}L}{3} \quad (24-10)$$

و به طور مشابه:

$$m_{22} = \frac{\bar{m}L}{3}$$

$$m_{12} = m_{21} = \int_0^L \bar{m} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) dx = \frac{\bar{m}L}{6} \quad (25-10)$$

و رابطه نیروی محوری ماند برای تیر یکنواخت در شکل ماتریسی عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (26-10)$$

بالاخره از ترکیب ماتریس جرم رابطه (۲۴-۱۴) با ماتریس فوق، ماتریس جرم همسان برای مختصات گرهی تیر یکنواخت به دست می آید

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & \\ & 156 & & & & \\ & & 22L & 4L^2 & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & \\ & 54 & 13L & 0 & 156 & \\ & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (27-10)$$

و یا به طور خلاصه تر:

$$\{P\} = [M_c] \{\delta\}$$

$[M_c]$ ماتریس جرم همسان می باشد.

۱۵-۳- انتقال مختصات

ماتریس های سختی و جرم تیر در روابط (۴-۱۵) و (۲۷-۱۵) بر حسب مختصات

گرهه‌ی بیان شده اند که محورهای آن از تیر می گذرد و «محورهای محلی»^۱ یا «محورهای عضو»^۲ نامیده می شود. در مقابل محورهای مختصات کل سازه، «محورهای کلی»^۳ یا «محورهای سیستم»^۴ نامیده می شود.

1) Local axes

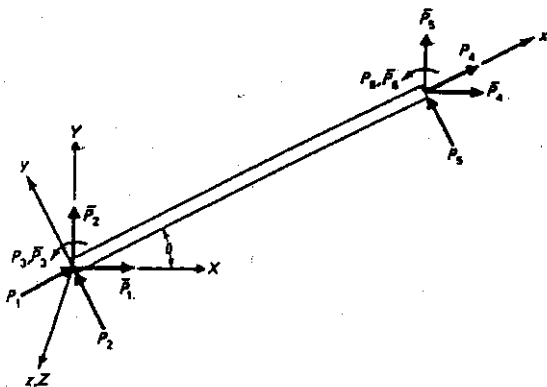
2) Element axes

3) Global axes

4) System axes

در شکل (۶-۱۵) عضوی تحت نیروهای گرهی نشان داده شده است. P_6, \dots, P_2, P_1 در دستگاه مختصات محلی Z, Y, X و $\bar{P}_6, \dots, \bar{P}_2, \bar{P}_1$ در دستگاه مختصات سیستم Z, Y, X می باشند. اکنون می خواهیم ماتریسها را از دستگاه محلی به دستگاه مختصات سیستم منتقل سازیم تا بدینوسیله دستگاه مختصات اعضای مختلف، یکسان شده و ماتریس اعضا قابل جمع گردد. برای شروع، نیروهای (P_3, P_2, P_1) را بر حسب $(\bar{P}_3, \bar{P}_2, \bar{P}_1)$ به دست می آوریم. از آنجا که این نیروها معادل هستند، با توجه به شکل (۶-۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} P_1 &= \bar{P}_1 \cos \theta + \bar{P}_2 \sin \theta \\ P_2 &= -\bar{P}_1 \sin \theta + \bar{P}_2 \cos \theta \\ P_3 &= \bar{P}_3 \end{aligned} \quad (۶-۱۵)$$



شکل (۶-۱۵): عضو با نیروهای گرهی در مختصات محلی (x, y, z) و کلی (X, Y, Z)

در معادله اول را می توان به شکل ماتریسی نشان داد:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۵)$$

و به طور مشابه برای انتهای دیگری عضو:

$$\begin{aligned} P_4 &= \bar{P}_4 \cos \theta + \bar{P}_5 \sin \theta \\ P_5 &= -\bar{P}_4 \sin \theta + \bar{P}_5 \cos \theta \\ P_6 &= \bar{P}_6 \end{aligned} \quad (۶-۱۵)$$

معادلات فوق را می توان به شکل ماتریسی در رابطه زیر خلاصه نمود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{bmatrix} \quad (21-10)$$

و یا به طور خلاصه:

$$\{P\} = [T]\{\bar{P}\} \quad (22-10)$$

که $\{P\}$ و $\{\bar{P}\}$ بردار نیروهای گرهی عضو در مختصات محلی و کلی هستند و ماتریس انتقال T به سمت آمده از رابطه (21-10) می باشد. با این روش می توان روابط مشابهی بین جابه جایی های گرهی در مختصات عضو و مختصات کلی به دست آورد.

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \\ \bar{\delta}_5 \\ \bar{\delta}_6 \end{bmatrix} \quad (23-10)$$

و یا

$$\{\delta\} = [T]\{\bar{\delta}\} \quad (24-10)$$

اکنون با جایگزینی $\{P\}$ از رابطه (22-10) و $\{\delta\}$ از (24-10) در رابطه $\{P\} = [K]\{\delta\}$ داریم:

$$[T]\{\bar{P}\} = [K][T]\{\bar{\delta}\} \quad (25-10)$$

$$\{\bar{P}\} = [T]^{-1}[K][T]\{\bar{\delta}\}$$

$[T]^{-1}$ ، معکوس ماتریس $[T]$ است. به راحتی می توان نشان داد که:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

بنابراین:

$$\{\bar{P}\} = [T]^T[K][T]\{\bar{\delta}\} \quad (26-10)$$

و یا

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\delta}\} \quad (27-10)$$

که در آن

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (38-10)$$

ماتریس سختی عضو در مختصات کلی با تکرار گامهای فوق برای ماتریسهای جرم رابطه مشابهی به دست می آید:

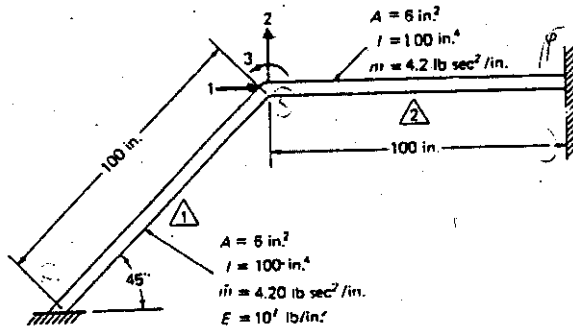
$$\{\bar{P}\} = [\bar{M}] \{\bar{\delta}\}$$

که در آن

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] \quad (39-10)$$

ماتریس جرم عضو در مختصات کلی $[M]$ ماتریس جرم عضو در مختصات محلی، تعیین شده از روابط (7-10) یا (27-10)، و $[T]$ ماتریس انتقال منتج از رابطه (23-10) به دست می باشد.

مثال (1-10): قاب شکل (7-10) با دو عضو یکنواخت دارای سه درجه آزادی است. با استفاده از ماتریس جرم همسان، سه فرکانس طبیعی و مدهای مربوط را برای این مدل گسسته به دست آورید.



شکل (7-10): قاب دویعدی مثال (1-10)

سختی اعضای او ۲ بر حسب مختصات محلی از رابطه (4-10) به دست می آید:

$$[K_1] = [K_2] = 1000 \begin{bmatrix} 600 & & & & & \\ & 0 & 12 & & & \\ & 0 & 600 & 40000 & & \\ -600 & 0 & 0 & 600 & & \\ & 0 & -12 & 600 & 0 & 12 \\ & 0 & 600 & 20000 & 0 & -600 & 40000 \end{bmatrix} \quad \text{Symmetric}$$

1) Discrete

$$\langle \psi \rangle = [\bar{K}_2] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0.600 & & & & & \\ & 0 & 0.012 & & & \\ & 0 & 0.600 & 40.000 & & \\ -0.600 & 0 & 0 & 0.600 & & \\ & 0 & -0.012 & -0.600 & 0 & 0.012 \\ & 0 & 0.600 & 20.000 & 0 & -0.600 & 40.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[\bar{M}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 140 & & & & & \\ & 0 & 156 & & & \\ & 0 & 2200 & 40000 & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & \\ & 0 & 54 & 1300 & 0 & 156 \\ & 0 & -1300 & -30000 & 0 & -2200 & 40000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}$$

ماتریس های سختی و جرم اعضاء به کمک روش مستقیم که قبلاً توضیح داده شده است جمع می گردند. در نتیجه ماتریس سختی سازه برابر است با:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 0.906 & 0.294 & 0.424 \\ 0.294 & 0.318 & 0.176 \\ 0.424 & 0.176 & 80.000 \end{bmatrix}$$

و ماتریس جرم سازه برابر است با:

$$[M] = \begin{bmatrix} 288 & -8 & 1556 \\ -8 & 304 & 644 \\ 1566 & 644 & 80000 \end{bmatrix}$$

فرکانسهای طبیعی، ریشه های معادله زیر می باشند:

$$[K] - \omega^2 [M] = 0$$

که پس از جایگزینی:

$$10^3 \begin{vmatrix} 906 - 0.288\omega^2 & 294 + 0.008\omega^2 & 424 - 1.556\omega^2 \\ 294 + 0.008\omega^2 & 318 - 0.304\omega^2 & 176 - 0.644\omega^2 \\ 424 - 1.556\omega^2 & 176 - 0.644\omega^2 & 80000 - 80\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ریشه های این معادله عبارت است از:

$$\omega_1^2 = 638 \quad \omega_2^2 = 976 \quad \omega_3^2 = 4212$$

و فرکانسهای طبیعی:

$$f_1 = 4.02 \text{ cps} \quad f_2 = 4.97 \text{ cps} \quad f_3 = 10.33 \text{ cps}$$

اشکال مدی از دستگاه معادلات زیر به دست می آید:

$$([K] - \omega^2[M])\{a\} = \{0\}$$

با جایگزینی $\omega_1^2 = 631.65$ و $a_{11} = 1.0$ شکل مد اول به دست می آید:

$$\{a_1\} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.38 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که با ضربیب زیر نرمالیزه می شود:

$$\sqrt{\{a_1\}^T [M] \{a_1\}} = 45.81$$

و شکل مدی نرمالیزه شده برابر است با:

$$\{\phi_1\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0218 \\ -0.0527 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و به طور مشابه برای دو مد دیگر

$$\{\phi_2\} = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00498 \\ 0.00206 \\ 0.00341 \end{bmatrix} \quad \{\phi_3\} = \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0583 \\ 0.0241 \\ -0.0016 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه ماتریس مدی برابر است با:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 0.0218 & 0.00498 & 0.0583 \\ -0.0527 & 0.00206 & 0.0241 \\ 0 & 0.00341 & -0.0016 \end{bmatrix}$$

مثال (۱۵-۲): جابه جایی بیشینه مختصات گرهی قاب (۱۵-۷) را هنگامی که يك نیروی ۱۰۰۰۰۰ پوندی به طور ناگهانی در گره ۱ اعمال شود حساب کنید. (از میرایی صرف نظر شود).

فرکانسها و اشکال مدی این سازه را در مثال قبل به دست آوردیم. معادلات

حرکت مدی عبارت است از:

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = P_i \quad (\text{الف})$$

$$P_i = \sum_j \phi_{ji} F_j \quad (\text{ب})$$

در این مثال:

$$F_1 = 100000 \text{ lb} , F_2 = 0 , F_3 = 0$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + 638z_1 &= 2180 \\ \ddot{z}_2 + 976z_2 &= 498 \\ \ddot{z}_3 + 4212z_3 &= 5830 \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

جواب این معادلات از نوع زیر می باشد:

$$z_i = \frac{P_i}{\omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t)$$

پس از نهادن مقادیر

$$\begin{aligned} z_1 &= 3.417 (1 - \cos 25.26t) \\ z_2 &= 0.510 (1 - \cos 31.24t) \\ z_3 &= 1.384 (1 - \cos 64.90t) \end{aligned} \quad (\text{د})$$

جابه جایی های گرهی از رابطه زیر به دست می آیند:

$$\{y\} = [\Phi]\{z\}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.1577 - 0.0745 \cos 25.26t - 0.00254 \cos 31.24t - 0.0807 \cos 64.9t \\ y_2 &= -0.1457 + 0.1800 \cos 25.26t - 0.00105 \cos 31.24t - 0.0333 \cos 64.9t \\ y_3 &= -0.0005 + 0 \cos 25.26t - 0.00174 \cos 31.24t + 0.0022 \cos 64.9t \end{aligned} \quad (\text{ه})$$

و مقادیر بیشینه جابه جایی ها:

$$\begin{aligned} y_{1\max} &= 0.3154 \text{ in} \\ y_{2\max} &= 0.2914 \\ y_{3\max} &= 0.0010 \end{aligned} \quad (\text{و})$$

۱۵-۳- برنامه ۱۲ (FRAME) - تحلیل دینامیکی قابهای دوبعدی

این برنامه با استفاده از روش سختی، قابهای دو بعدی را تحلیل دینامیکی می نماید. این برنامه کاملاً همانند برنامه ۱۱ (تحلیل دینامیکی تیرها) در فصل ۱۴ تنظیم شده است. تفاوت این دو برنامه این است که در یکی ماتریس عضو 4×4 و در دیگری 6×6 است. در برنامه قاب تأثیر نیروی محوری نیز گنجانده شده است. همچنین در این برنامه چرخش مختصات اجراء می شود تا مختصات محلی به مختصات کلی منتقل گردند.

زیربرنامه های جدول (۱۲-۳) مربوط به برنامه ۱۱، می باید برای برنامه ۱۲ نیز در دسترس باشند. متغیرهای برنامه ۱۲ در جدول (۱۵-۱) تشریح گردیده و داده های ورودی همراه با فرمت مربوط در جدول (۱۵-۲) آمده است.

شرح	علامت در متن کتاب	متغیر
تعداد المانها		NE
تعداد درجات آزادی		ND
تعداد مختصات جهت متراکم نمودن		NCR
تعداد جرمهای متمرکز		NCM
نشان جرم: 0 ← جرم فشرده		
1 ← جرم یکتواخت		
چاپ مقادیر میانی در زیر برنامه JACOBI		IFPR
0 ← چاپ نشود		
1 ← چاپ شود		
مدول ارتجاعی	E	E
شماره المان		LE
طول المان	L	SL
سطح مقطع المان	A	AR
لنگر ماند سطح مقطع المان	I	SI
جرم المان برای هر واحد طول	m	SMA
شیب المان	θ	TH
مختصات گرهی المان (L=1,6)		NC(L)
جرم های متمرکز (NCM, L=1)		CM(L)
مختصات گرهی برای CM(L)		JC(L)

جدول (۲-۱۵): داده های ورودی برنامه ۱۲ همراه با فرمت آنها

فرمت	متغیرها
(6I5, F10.0)	NE ND NCR NCM LOC IFPR E
(I10, 5F10.0, 6I2)	LE SL AR SI SMA TH NC(L) (L = 1, 6)
	(one card for each element)

مثال (۲-۱۵) فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی قاب شکل (۷-۱۵) را با استفاده از برنامه ۱۲ به دست آورید. همچنین پاسخ سازه را تحت يك نیروی ناگهانی 100,000 پوندی در مختصات گرهی ۱ تعیین کنید.

زیربرنامه JACOBI به وسیله برنامه ۱۲ احضار می شود تا فرکانسهای

طبیعی و اشکال مدی را محاسبه نماید. پاسخ سازه را می توان به وسیله زیر برنامه های MODAL و یا STEMP به دست آورد. MODAL پاسخ را به کمک ترکیب مدها (چنانکه در فصل ۱۱ تشریح شد) محاسبه می کند و STEMP با استفاده از روش گام به گام ویلسون - (که در فصل ۱۹ تشریح شده است) پاسخ را تعیین می سازد. در اینجا با استفاده از STEMP پاسخ مساله فوق محاسبه گردیده است و برای آنکه نتایج با محاسبات دستی مثال (۲-۱۵) قابل مقایسه باشد از روش میرایی صرف نظر شده است. صورت داده های ورودی در جدول (۳-۱۵) داده شده و پاسخ سازه در جدول (۴-۱۵) آورده شده است. مقادیر جدول تطابق خوبی با نتایج محاسبات دستی مثال (۲-۱۵) [با استفاده از رابطه (ه)] دارند. مثلاً در لحظه $t = 0.1 \text{ sec}$ در جدول (۴-۱۵) جابه جایی مختصات گرهی ۱ برابر است با $y_1(0.1) = 0.139 \text{ in}$ در حالی که با استفاده از رابطه (ه) داریم $y_1(0.1) = 0.142 \text{ in}$.

جدول (۳-۱۵): داده های ورودی مثال (۲-۱۵)

لیست داده ها									
2	3	0	1	1	10000000.				
1	100.	6.	100.	4.2	45.	4	4	4	1 2 3
2	100.	6.	100.	4.2	0.	1	2	3	4 4 4
1.4	0.001	0.02	2	0	0				
0.0	100000.	0.02	100000.						

جدول (۴-۱۵): نتایج کامپیوتری مثال (۲-۱۵)

EIGENVALUES			
SWEEP = 1			
0.42116D 04	0.63850D 03	0.97658D 03	
SWEEP = 2			
0.42116D 04	0.63850D 03	0.97658D 03	
0.42116D 04	0.63850D 03	0.97658D 03	
EIGENVECTORS			
0.58307D-01	-0.21830D-01	0.49789D-02	
0.24152D-01	0.52702D-01	0.20623D-02	
-0.16291D-02	-0.00000D 00	0.34093D-02	

بقیہ جدول (۲-۱۵): نتایج کامپیوتری مثال (۲-۱۵)

THE RESPONSE IS				
CORD.	TIME	DISPL.	VELOC.	ACC.
1	0.001	0.000	0.389	389.140
2	0.001	0.000	0.027	26.717
3	0.001	-0.000	-0.008	-7.778
1	0.002	0.001	0.777	386.241
2	0.002	0.000	0.053	26.461
3	0.002	-0.000	-0.016	-7.707
1	0.003	0.002	1.161	381.427
2	0.003	0.000	0.080	26.035
3	0.003	-0.000	-0.023	-7.590
1	0.004	0.003	1.538	374.720
2	0.004	0.000	0.105	25.442
3	0.004	-0.000	-0.031	-7.427
1	0.005	0.005	1.909	366.154
2	0.005	0.000	0.130	24.685
3	0.005	-0.000	-0.038	-7.218
1	0.006	0.007	2.270	355.773
2	0.006	0.000	0.155	23.768
3	0.006	-0.000	-0.045	-6.965
1	0.007	0.009	2.619	343.627
2	0.007	0.001	0.178	22.696
3	0.007	-0.000	-0.052	-6.669
1	0.008	0.012	2.956	329.778
2	0.008	0.001	0.200	21.474
3	0.008	-0.000	-0.058	-6.332
1	0.009	0.015	3.277	314.295
2	0.009	0.001	0.221	20.109
3	0.009	-0.000	-0.065	-5.955
1	0.010	0.019	3.583	297.255
2	0.010	0.001	0.240	18.608
3	0.010	-0.000	-0.070	-5.541
1	0.011	0.022	3.871	278.742
2	0.011	0.002	0.258	16.980
3	0.011	-0.000	-0.076	-5.091
1	0.012	0.026	4.140	258.850
2	0.012	0.002	0.274	15.232
3	0.012	-0.001	-0.080	-4.609

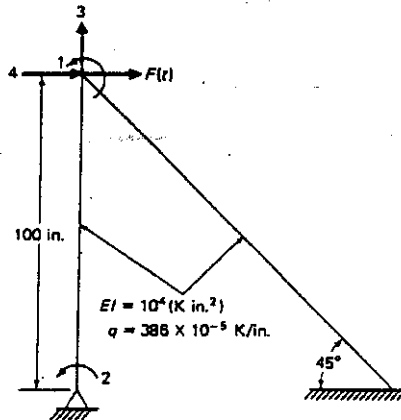
بقیه جدول (۲-۱۵): نتایج کامپیوتری مثال (۲-۱۵)

THE RESPONSE IS				
CORD.	TIME	DISPL.	VELOC.	ACC.
1	0.013	0.031	4.388	237.678
2	0.013	0.002	0.288	13.374
3	0.013	-0.001	-0.085	-4.095
1	0.014	0.035	4.614	215.331
2	0.014	0.002	0.300	11.415
3	0.014	-0.001	-0.089	-3.554
1	0.015	0.040	4.818	191.920
2	0.015	0.003	0.311	9.367
3	0.015	-0.001	-0.092	-2.987
1	0.016	0.045	4.997	167.563
2	0.016	0.003	0.319	7.240
3	0.016	-0.001	-0.095	-2.398
1	0.017	0.050	5.152	142.382
2	0.017	0.003	0.325	5.045
3	0.017	-0.001	-0.097	-1.791
1	0.018	0.055	5.282	116.501
2	0.018	0.004	0.329	2.794
3	0.018	-0.001	-0.098	-1.167
1	0.019	0.060	5.329	90.142
2	0.019	0.004	0.327	0.508
3	0.019	-0.001	-0.098	-0.533
1	0.020	0.066	5.267	-326.348
2	0.020	0.004	0.317	-28.577
3	0.020	-0.001	-0.095	7.902

برای تحلیل دینامیکی قابهای دو بعدی لازم است که تأثیر نیرو و جابه جایی محوری در ماتریسهای سختی و جرم گنجانده شود. همچنین می باید انتقال مختصات صورت گیرد تا بتوان ماتریس های کلیه اعضاء را بر حسب مختصات یکسانی بیان نموده و جمع کرد. در این فصل ماتریسهای لازم برای در نظر گرفتن تأثیر محوری و انتقال مختصات به دست آمده اند. همچنین يك برنامه کامپیوتری برای تحلیل دینامیکی قابهای دو بعدی ارائه شده است (FRAME). این برنامه با همان ساختار برنامه BEAM در فصل قبل تنظیم گردیده است و زیربرنامه هایی که برای « BEAM » تهیه شده است باید در دسترس برنامه « FRAME » نیز قرار گیرد.

مسائل

مسائل زیر برای حل دستی در نظر گرفته شده اند اگرچه توصیه می گردد در صورت امکان با برنامه کامپیوتری ۱۲ (FRAME) نیز حل گردند.
 ۱۵-۱- برای قاب صفحه ای نشان داده شده در شکل م (۱۵-۱) بر اساس چهار مختصه گرهی نشان داده شده، ماتریس سختی و جرم را تعیین کنید. (روش جرم سازگار را به کار ببرید).



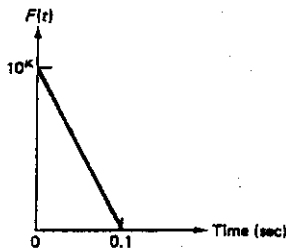
شکل م (۱۵-۱)

۱۵-۲- با بکارگیری نتایج مسأله (۱-۱۵) به کمک روش تراکم استاتیکی درجات آزادی چرخشی را حذف و ماتریس های انتقال، جرم و سختی کاهش یافته را به دست آورید.

۱۵-۳- فرکانس های طبیعی و مدها را برای سیستم کاهش یافته مسأله (۱-۱۵) به دست آورید.

۱۵-۴- پاسخ قاب شکل م (۱-۱۵) را تحت نیروی ناگهانی $F(t) = 10 \text{ kip}$ در مختصات گرهی ۱ تعیین کنید. نتایج مسأله (۲-۱۵) را برای به دست آوردن معادلات مدی به کار ببرید. از استهلاك سیستم صرفنظر کنید.

۱۵-۵- پاسخ اوج قاب شکل م (۱-۱۵) را تحت اثر بار ضربه ای مثلثی شکل م (۵-۱۵) در مختصات گرهی ۴ تعیین کنید. نتایج مسأله (۲-۱۵) را برای به دست آوردن معادلات مدی به کار ببرید. طیف پاسخ مناسب را برای پیدا کردن پاسخهای مدی اوج [شکل (۵-۴)] به کار ببرید. از استهلاك سیستم صرفنظر کنید.

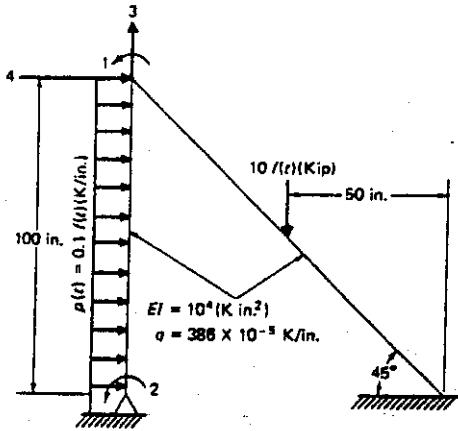


شکل م (۵-۱۵)

۱۵-۶- پاسخ پایدار شکل م (۱-۱۵) را تحت تأثیر نیروی هارمونیک $F(t) = 10 \sin 30t (\text{kip})$ در مختصات گرهی ۱ به دست آورید. نتایج مسأله (۲-۱۵) را برای تعیین معادلات کاهش یافته حرکت به کار گیرید. از استهلاك سیستم صرفنظر کنید.

۱۵-۷- مسأله (۶-۱۵) را با فرض متناسب بودن استهلاك با سختی سیستم حل کنید، $a_0 [C] = a_0 [K]$ که $a_0 = 0.2$.

۱۵-۸- قاب شکل م (۸-۱۵) تحت اثر نیروی دینامیکی نشان داده شده می باشد، نیروهای گرهی معادل مربوط به هر عضو از قاب را تعیین کنید [راهنمایی: نیروهای گرهی معادل برابرند با مقدار منفی عکس العمل تکیه گاهی اعضا در حالتی که انتهای اعضاء، ثابت فرض شده باشند].



شکل م (۸-۱۰)

۹-۱۰- نیروهای معادل گرهی سیستم را با نیروهای معادل گرهی اعضاء که در مساله (۸-۱۰) محاسبه شده اند جمع نمایید.

مسائل زیر برای حل کامپیوتری با برنامه ۱۲ (FRAME) در نظر گرفته شده اند.

۱۰-۱- فرکانس های طبیعی و مدهای قاب شکل م (۱۰-۱) به دست آورید.

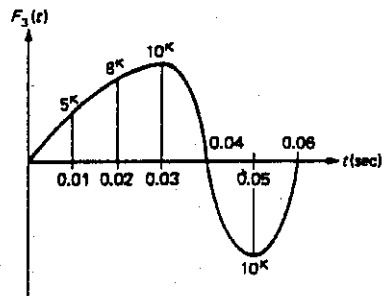
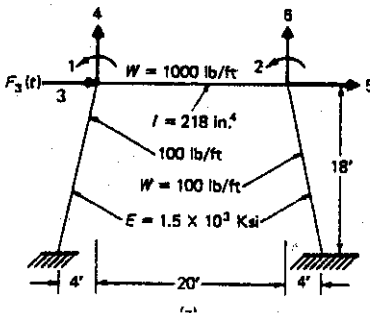
الف) مختصات گرهی چرخشی را متراکم کنید

ب) مختصات را متراکم نکنید.

۱۱-۱۰- پاسخ قاب شکل م (۱۰-۱۱) تحت نیروی در مختصه گرهی ۳ را به دست

آورید. مختصات چرخشی را متراکم کنید و استهلاك در تمام مدها را برابر ۵٪ در نظر

بگیرید.

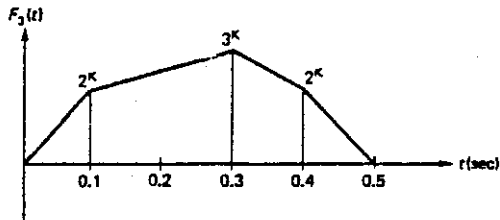


شکل م (۱۱-۱۰)

۱۵-۱۲- پاسخ پایدار شکل (۱۱-۱۵) را تحت نیروی هارمونیک $F_3(t) = 10 \cos 50t$ (kip) به دست آورید. سازه را بدون استهلاك فرض کنید.

۱۵-۱۳- با به کاربردن زیر برنامه CONDE برای متراکم کردن مختصات گرهی چرخشی، مساله (۱۲-۱۵) را دوباره حل کنید.

۱۵-۱۴- پاسخ قاب شکل م (۱۳-۱۵) را تحت نیروی $F(t)$ در مختصه گرهی ۳ به دست آورید. استهلاك همه مدها را برابر 10 % فرض کنید. روش توکیب مدی را به کار ببرید. (زیر برنامه MODAL)



شکل م (۱۳-۱۵)

۱۵-۱۵- مساله (۱۳-۱۵) را با به کارگیری روش شتاب خطی گام به گام دوباره حل کنید.

فصل شانزدهم

تحليل ديناميكي شبكه ها¹

در فصل ۱۵ تحلیل دینامیکی قابهای دو بعدی تحت نیروهای واقع در صفحه قاب مورد بحث قرار گرفت. هنگامی که يك سازه دو بعدی یا تخت^۱ تحت نیروهای عمود بر صفحه سازه قرار گیرد، شبکه نامیده می شود. این چنین سازه ای می تواند حالت ویژه ای از سازه های سه بعدی فصل ۱۷ نیز تلقی شود. علت بررسی جداگانه قابهای دو بعدی کاهش چشمگیر مختصات گرهی مجهول برای اعضاء (و در نتیجه برای کل سازه) می باشد. به هنگام بررسی قابهای دو بعدی تحت نیروهای صفحه ای، جابه جایی های گرهی عبارتند از: انتقال در جهات X ، Y و چرخش حول Z ، در حالی که تحت نیروهای عرضی (عمود بر صفحه قاب) جابه جایی های گرهی عبارتند از انتقال در جهت Z و چرخش حول X ، Y . بنابراین برای اعضاء شبکه، در هر انتها فقط ۳ جابه جایی در نظر گرفته می شود.

۱-۱۶- مختصات محلی و کلی

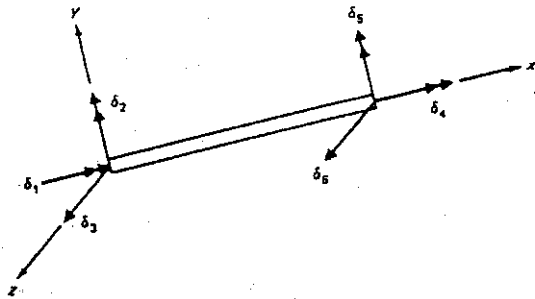
برای اعضاء شبکه، مختصات محلی به گونه ای در نظر گرفته می شود که x از امتداد عضو بگذرد و صفحه $x-y$ منطبق بر صفحه قاب باشد. بنابراین Z «محور ضعیف^۲» و y «محور قوی^۳» مقطع اعضاء خواهد بود. فرض می کنیم که مرکز برش مقطع عضو بر مرکز سطح آن منطبق باشد. سطح مقطع اعضاء می تواند ثابت یا متغیر باشد. جابه جایی های گرهی در مختصات محلی و کلی در شکل (۱-۱۶) نشان داده شده است. هر دو دستگاه مختصات، دارای محور Z مشترک می باشند، لذا جابه جایی در جهت Z در مختصات محلی و کلی یکی است در حالی که چرخش در گره ها در مختصات محلی و کلی متفاوت است و با انتقال مختصات محلی به کلی می باید ماتریسهای عضو را به مختصات کلی منتقل ساخت.

۱-۱۶-۲- اثرات پیچشی^۴

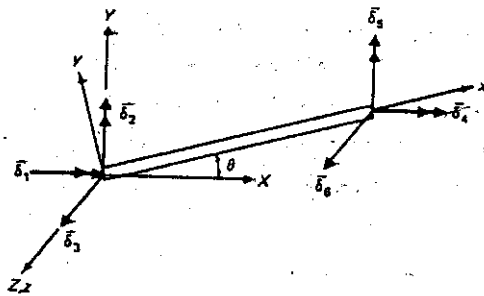
برای تحلیل دینامیکی شبکه ها به روش سختی می باید ضرایب سختی پیچشی و جرم اعضاء شبکه را تعیین نمود. این محاسبات عیناً همانند تعیین ضرایب سختی و جرم برای تأثیرات محوری در تیرهاست. این تشابه ناشی از همسانی معادلات دیفرانسیل برای این دو حالت است. برای جابه جایی محوری، معادله دیفرانسیل از رابطه (۱۵-۸) عبارت است از:

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$$

-
- 1) planar 2) Principal axis 3) major axis 4) Torsional effects



الف) سیستم مختصات محلی



ب) سیستم مختصات کلی

شکل (۱-۱۶): جابه‌جایی‌های گره‌های یک عضو شیبک

و برای جابه‌جایی پیچشی:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{JG} \quad (1-16)$$

θ جابه‌جایی پیچشی، T لنگر پیچشی، G مدول برشی و J لنگرمانند قطبی مقطع است. با استفاده از تشابه معادلات (۸-۱۵) و (۱-۱۶)، توابع جابه‌جایی برای تأثیرات

پیچشی همانند توابع مربوط به تأثیرات محوری می باشد، لذا با استفاده از روابط (۱۰-۱۵) و (۱۱-۱۵)، برای دستگاه مختصات شکل (۲-۱۶) داریم:

$$\theta_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2-16)$$

$$\theta_2(x) = \frac{x}{L} \quad (3-16)$$

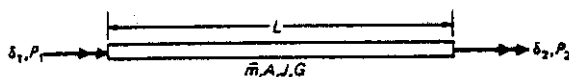
$\theta_1(x)$ تابع جابه جایی زاویه ای ناشی از اعمال جابه جایی زاویه ای واحد در گره ۱ و $\theta_2(x)$ تابع جابه جایی زاویه ای ناشی از اعمال جابه جایی زاویه ای واحد در گره ۲ می باشد. بر اساس تشابه، از رابطه (۱۷-۱۵) ضریب تأثیر سختی برای اثرات پیچشی برابر است با:

$$k_{ij} = \int_0^L JG \theta_i'(x) \theta_j'(x) dx \quad (4-16)$$

$\theta_1'(x)$ و $\theta_2'(x)$ مشتق این توابع نسبت به x می باشند. همچنین ماتریس جرم همساز با استفاده از رابطه (۲۳-۱۵):

$$m_{ij} = \int_0^L I_m \theta_i(x) \theta_j(x) dx \quad (5-16)$$

I_m لنگر ماند قطبی جرم برای واحد طول عضو می باشد. با استفاده از روابط (۴-۱۶) و (۵-۱۶) ماتریسهای سختی و جرم اعضای یکنواخت به دست می آید.



شکل (۲-۱۶): مختصات گرهی پیچشی عضو

بطوریکه،

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{JG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (6-16)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{JmL}{6A} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} \quad (7-16)$$

۱۶-۳- ماتریس سختی اعضای شبکه

از ترکیب ماتریس سختی پیچشی در رابطه (۶-۱۶) با ماتریس سختی خمشی رابطه (۲۰-۱۴) ماتریس سختی یک عضو شبکه به دست آید که بر حسب مختصات

محل شکل (۱۶-۷، الف) چنین خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} JGL^2/EI & & & & & \\ & 0 & 4L^2 & & & \\ & 0 & -6L & 12 & & \\ -JGL^2/EI & 0 & 0 & JGL^2/EI & & \\ & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 4L^2 \\ & 0 & 6L & -12 & 0 & 6L & 12 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (۸-۱۶)$$

یا به طور خلاصه

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (۹-۱۶)$$

۱۶-۴- ماتریس جرم همسان اعضای شبکه

ماتریس جرم همسان عضو از ترکیب حالت خمشی در رابطه (۱۴-۲۴) و

پیچشی در رابطه (۱۶-۷) مطابق ذیل به دست می آید:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{420} \begin{Bmatrix} 140J/A & & & & & \\ & 0 & 4L^2 & & & \\ & 0 & 22L & 156 & & \\ 70J/A & 0 & 0 & 140J/A & & \\ & 0 & -3L^2 & -13L & 0 & 4L^2 \\ & 0 & 13L & 54 & 0 & -22L & 156 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (۱۰-۱۶)$$

یا به طور خلاصه

$$\{P\} = [M_c]\{\delta\} \quad (۱۱-۱۶)$$

$[M_c]$ ماتریس جرم همسان عضو می باشد.

۱۶-۵- ماتریس جرم متمرکز اعضای شبکه

در اعضای شبکه استقرار جرمهای متمرکز در مختصات گرهی بر اساس

ملاحظات استاتیکی صورت می پذیرد. برای اعضای یکنواخت، جرم متمرکز برابر

نصف جرم پیچشی یعنی JmL/A است. در این حالت ماتریس جرم متمرکز برای

تأثیرات پیچشی عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{JmL}{2A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (12-16)$$

از ترکیب این رابطه با ماتریس جرم در حالت خمشی داریم:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} J/A & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & J/A & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (13-16)$$

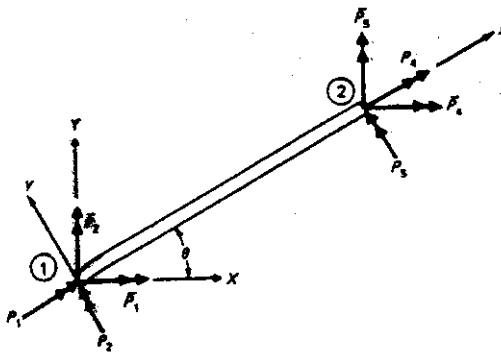
و یا به طور خلاصه

$$\{P\} = [M_L]\{\delta\} \quad (14-16)$$

که $[M_L]$ ماتریس جرم اعضای شبکه است.

۱۶-۶- انتقال مختصات

ماتریسهای سختی و جرم در روابط (۸-۱۶)، (۹-۱۶) و (۱۳-۱۶) بر حسب مختصات محلی است و می باید به مختصات کلی منتقل شود تا ماتریس اعضای مختلف قابل ترکیب باشد. همان طور که قبلاً گفته شد محور محلی Z با محور کلی Z منطبق است. بنابراین فقط یک چرخش حول Z در صفحه (XY) برای انتقال کافی است. ماتریس انتقال از تطابق لنگرها در دو دستگاه مختصات به دست می آید.



شکل (۱۶-۲): لنگرهای گرهی در مختصات محلی و کلی

با توجه به شکل (۱۶-۳) برای گره ۱:

$$\begin{aligned} P_1 &= \bar{P}_1 \cos \theta + \bar{P}_2 \sin \theta \\ P_2 &= -\bar{P}_1 \sin \theta + \bar{P}_2 \cos \theta \\ P_3 &= \bar{P}_3 \end{aligned} \quad (۱۶-۱۵، الف)$$

و برای گره ۲:

$$\begin{aligned} P_4 &= \bar{P}_4 \cos \theta + \bar{P}_5 \sin \theta \\ P_5 &= -\bar{P}_4 \sin \theta + \bar{P}_5 \cos \theta \\ P_6 &= \bar{P}_6 \end{aligned} \quad (۱۶-۱۵، ب)$$

همسانی این معادلات با آنچه قبلاً برای انتقال مختصات اعضای قابهای دو بعدی تحت نیروهای صفحه ای به دست آوردیم یعنی معادلات (۱۵-۲۸) و (۱۵-۳۰) قابل توجه می باشد. روابط فوق را می توان به شکل ماتریسی نوشت.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{bmatrix} \quad (۱۶-۱۶)$$

و یا به طور خلاصه:

$$\{P\} = [T]\{\bar{P}\} \quad (۱۷-۱۶)$$

$\{P\}$ و $\{\bar{P}\}$ بردارهای نیروهای گرهی در مختصات محلی و کلی هستند و $[T]$ ماتریس انتقال می باشد. همین ماتریس برای انتقال جابه جایی ها از مختصات محلی به کلی نیز به کار گرفته می شود یعنی:

$$\{\delta\} = [T]\{\bar{\delta}\} \quad (۱۸-۱۶)$$

$\{\delta\}$ و $\{\bar{\delta}\}$ بردارهای جابه جایی گرهی در مختصات محلی و کلی می باشند. از جایگزینی روابط (۱۶-۱۷) و (۱۶-۱۸) در رابطه سختی (۱۶-۹)، ماتریس سختی عضو در مختصات کلی به دست می آید:

$$[T]\{\bar{P}\} = [K][T]\{\bar{\delta}\}$$

و چون $[T]^{-1} = [T]^T$ است و متعامد است و

$$\{\bar{P}\} = [T]^T [K] [T] \{\delta\}$$

اگر $[\bar{K}]$ را چنین تعریف کنیم:

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (16-19)$$

انگاه:

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}] \{\delta\} \quad (16-20)$$

به طور مشابه، برای ماتریس جرم داریم:

$$\{\bar{P}\} = [\bar{M}] \{\delta\} \quad (16-21)$$

که در آن:

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] \quad (16-22)$$

ماتریس جرم عضو در مختصات کلی می باشد.

مثال (16-1): شکل (16-4) یک شبکه افقی با دو عضو یکنواخت و مجموع سه درجه آزادی را نشان می دهد. فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی را تعیین سازید. (از رابطه جرم همسان استفاده شود).

ماتریس سختی امضای ۱ و ۲ در مختصات محلی از رابطه (16-8) عبارت است

$$[K_1] = [K_2] = 10^6 \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & -5 & 0 & 100 & -5 \\ 0 & 5 & 0.167 & 0 & 5 & -0.167 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 5 & 0 & 200 & -5 \\ 0 & -5 & -0.167 & 0 & -5 & 0.167 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ماتریس انتقال عضو ۱ برای $\theta = 0^\circ$ ماتریس واحد $[T_1] = [I]$ است.

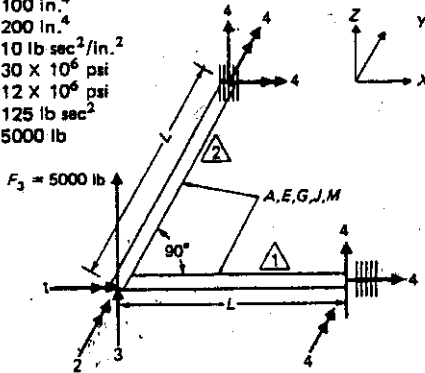
پس:

$$[\bar{K}_1] = [T_1]^T [K_1] [T_1] = [K_1]$$

و برای عضو ۲ با $\theta = 90^\circ$ داریم:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b = 125 \text{ in.}^4$
 $A = 10 \text{ in.}^2$
 $L = 60 \text{ in.}$
 $I = 100 \text{ in.}^4$
 $J = 200 \text{ in.}^4$
 $\bar{m} = 10 \text{ lb sec}^2/\text{in.}^2$
 $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$
 $G = 12 \times 10^6 \text{ psi}$
 $I/\bar{m} = 125 \text{ lb sec}^2$
 $F_3 = 5000 \text{ lb}$



شکل (۲-۱۶): شبکه مثال های (۱-۱۶) و (۲-۱۶)

و نیز:

$$[\bar{K}_2] = [T_2]^T [K_2] [T_2] = 13888 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 14400 & 0 & -360 & 7200 & 0 & 360 \\ 0 & 720 & 0 & 0 & -720 & 0 \\ -360 & 0 & 12 & -360 & 0 & -12 \\ 7200 & 0 & -360 & 14400 & 0 & 360 \\ 0 & -270 & 0 & 0 & 720 & 0 \\ 360 & 0 & -12 & 360 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}$$

ماتریس سختی سازه $[K_s]$ از جمع ماتریسهای $[\bar{K}_1]$ و $[\bar{K}_2]$ برابر است با:

$$[K_s] = 10^6 \begin{bmatrix} 210 & 0 & -5 \\ 0 & 210 & 5 \\ -5 & 5 & 0.333 \end{bmatrix}$$

و به طور مشابه ماتریس جرم اعضاء در رابطه (۱۶-۱) :

$$[M_1] = [M_2] = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 & -1250 & 0 & 0 \\ 0 & 20570 & 1886 & 0 & -15430 & 1114 \\ 0 & 1886 & 93600 & 0 & -1114 & 0 \\ -1250 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & -15430 & -1114 & 0 & 20520 & -1886 \\ 0 & 1114 & 0 & 0 & -1886 & 223 \end{bmatrix}$$

آنگاه از رابطه (۱۶-۲۲)

$$[\bar{M}_1] = [M_1]$$

چون

$$[T_1] = [I]$$

و به طور مشابه

$$[\bar{M}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 20570 & 0 & -1886 & 15430 & 0 & 1114 \\ 0 & 2500 & 0 & 0 & -1250 & 0 \\ 1886 & 0 & 93600 & 1114 & 0 & 0 \\ 13430 & 0 & 1114 & 20570 & 0 & 1886 \\ 0 & -1250 & 0 & 0 & 2500 & 0 \\ 1114 & 0 & 0 & 1886 & 0 & 223 \end{bmatrix}$$

و از جمع ماتریسهای $[\bar{M}_1]$ و $[\bar{M}_2]$

$$[M_s] = \begin{bmatrix} 23070 & 0 & -1886 \\ 0 & 23070 & 1886 \\ -1886 & 1886 & 187200 \end{bmatrix}$$

فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی جوابهای معادله مشخصه زیر می باشند:

$$([K_s] - \omega^2 [M_s])\{\phi\} = \{0\}$$

که در نتیجه:

$$\omega_1^2 = 0.509, \quad \omega_2^2 = 9110, \quad \omega_3^2 = 9110$$

آنگاه:

$$\omega_1 = 0.713 \text{ rad/sec}, \quad \omega_2 = 95.45 \text{ rad/sec}, \quad \omega_3 = 95.45 \text{ rad/sec}$$

و ماتریس اشکال مدی

$$[a] = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ -1.00 & 1.00 & -1.00 \\ 42.04 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس اشکال مدی را به وسیله ضرایب زیر نرمالیزه می کنیم:

ضریب ستون ۱

$$\sqrt{\{a_1\}^T [M_s] \{a_1\}} = 1.818$$

ضریب ستون ۲

$$\sqrt{\{a_2\}^T [M_s] \{a_2\}} = 0.0215$$

ضریب ستون ۳

$$\sqrt{\{a_3\}^T [M_s] \{a_3\}} = 0.0215$$

ماتریس اشکال مدی نرمالیزه برابر است با:

$$[\Phi] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.55 & 46.55 & 46.55 \\ -0.55 & 46.55 & -46.55 \\ 23.32 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال (۲-۱۶): پاسخ دینامیکی شبکه شکل (۴-۱۶) را تحت نیروی $F_3 = 5000 \text{ lb}$

مطابق شکل که به طور ناگهانی اعمال گشته است، معین کنید.

فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی این سازه قبلاً در مثال (۱-۱۶) به دست آمد.

معادله حرکت مدی در حالت کلی عبارت است از:

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = P_n$$

که

$$P_n = \sum_i \phi_{in} F_i$$

$F_3 = 5000 \text{ lb}$ و $F_1 = F_2 = 0$ در این مثال گزینی است و در این مثال $F_1 = F_2 = 0$ و $F_3 = 5000 \text{ lb}$

پس:

$$\ddot{z}_1 + 0.509 z_1 = 11.66$$

$$\ddot{z}_2 + 9110 z_2 = 0$$

$$\ddot{z}_3 + 9110 z_3 = 0$$

پاسخ این معادلات برای شرایط اولیه صفر عبارت است از:

$$z_1 = \frac{11.66}{0.509}(1 - \cos 0.713t)$$

$$z_2 = z_3 = 0$$

و جایه جایی در مختصات گرهی

$$\{y\} = [\Phi]\{z\}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.55 & 46.55 & 46.55 \\ -0.55 & 46.55 & -46.55 \\ 23.32 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1 - \cos 0.713t)$$

و بالاخره

$$y_1 = 0.001260 (1 - \cos 0.713t)$$

$$y_2 = 0.001260 (1 - \cos 0.713t)$$

$$y_3 = 0.05340 (1 - \cos 0.713t)$$

۱۶-۷- برنامه ۱۳ (GRID) - تحلیل دینامیکی شبکه ها

این برنامه کامپیوتری که برای تحلیل دینامیکی شبکه ها مورد استفاده قرار می گیرد دارای ساختاری مشابه برنامه هایی است که در فصول قبل برای تحلیل دینامیکی قابها و تیرها ارائه شد ولی تفاوت اساسی آنها این است که در این برنامه باید اثرات پیچشی نیز ملحوظ شود.

متغیرهای اصلی برنامه در جدول (۱-۱۶) و صورت داده های ورودی به همراه فرمت مربوط به آن در جدول (۲-۱۶) آورده شده است.

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
NE		تعداد المانها
ND		تعداد درجات آزادی
NCR	p	تعداد درجات آزادی جهت متراکم نمودن
NCM		تعداد جرمهای متمرکز
LOC		نشان جرم: 0 ← جرم فشرده
		1 ← جرم پیوسته
IFPR		چاپ مقادیر میانی در زیر برنامه JACOBI
		0 ← چاپ نشود
		1 ← چاپ شود
E	E	مدول ارتجاعی
G	G	ضریب صلبیت
		شماره عضو تیر
		سطح مقطع تیر
A	AR	
L	SL	طول عضو تیر
I	SI	لنگر ماند تیر
J	SJ	ثابت پیچشی تیر
\bar{m}	SMA	جرم بر واحد طول تیر
θ	TH	شیب عضو تیر
	NC(L)	مختصات گرهی عضو تیر (L=1,6)
	CM(L)	جرم های متمرکز (NCM, L=1)
	IC(L)	مختصات گرهی برای CM(L)
[K]	BK(I,J)	ماتریس سختی المان
[M]	BM(I,J)	ماتریس جرم المان
[T]	T(I,J)	ماتریس انتقال المان
[K _p]	SK(I,J)	ماتریس سختی دستگاه
[M _p]	SM(I,J)	ماتریس جرم دستگاه

جدول (۲-۱۶): داده های ورودی و فرمت آنها در برنامه ۱۲

(615, 3F10.0)	NE	ND	NCR	NCM	LOC	IFPR	F	G
(12, 2F8.2, 4F10.2, 6I2)	LE	AR	SL	SI	SJ	SMA	TH	(NC(L), L = 1, 6)
	(one card for each beam segment)							
(8(I2, F8.2))	JC(L)	CM(L)	(L = 1, NCM)					

صورت این برنامه کامپیوتری در ضمیمه I آمده است. همانند برنامه های قبلی، زیربرنامه های جدول (۲-۱۴) می باید قابل دسترس باشد تا به هنگام اجرای برنامه، چنانچه لازم شد احضار شوند.

مثال (۲-۱۶): برای شبکه شکل (۴-۱۶) به کمک برنامه ۱۲ فرکانسها و اشکال مدی و نیز پاسخ دینامیکی تحت نیروی ناگهانی 5000 پوند در مختصات ۲ را محاسبه کنید. نتایج را با محاسبات دستی مثالهای (۱-۱۶) و (۲-۱۶) مقایسه کنید.

برای حل این مسأله لازم است تا زیربرنامه های MODAL و JACOBI احضار شوند. بنابراین "C" باید از ابتدای دو جمله اول حذف گردد تا آنها احضار شوند. صورت داده های ورودی و نتایج برنامه برای فرکانسها و اشکال مدی در جداول (۲-۱۶) و (۴-۱۶) آمده است. در جدول (۵-۱۶) داده های اضافی مورد نیاز برنامه MODAL و پاسخ سازه در مختصات گرهی آمده است. این نتایج به مقادیر نظیر در مثالهای (۱-۱۶) و (۲-۱۶) بسیار نزدیکند. مثلاً جابه جایی در مختصات گرهی ۳ در لحظه $t = 0.1$

$$y_3(t=0.1) = 0.1336 \times 10^{-3} \text{ in}$$

و از محاسبات دستی مثال (۲-۱۶)

$$y_3(t=0.1) = 0.534 (1 - \cos 0.0713)$$

$$= 0.1356 \times 10^{-3} \text{ in}$$

جدول (۲-۱۶): داده های ورودی مثال (۲-۱۶)

لیست داده ها												
	2	3	0	0	1	0	30000000.	12000000.				
1	4.00	60.00	100.00	50.00	10.00	0.00	1	2	3	4	4	4
2	4.00	60.00	100.00	50.00	10.00	90.00	1	2	3	4	4	4

جدول (۴-۱۶): نتایج کامپیوتری مثال (۳-۱۶)

EIGENVALUES

0.91022D 04 0.91097D 04 0.50917D 00

EIGENVECTORS

0.46553D-02 -0.46588D-02 0.55045D-04
 -0.46553D-02 0.46588D-02 -0.55045D-04
 0.42320D-18 -0.66553D-04 0.23122D-02

جدول (۵-۱۶): داده های ورودی اضافی و نتایج کامپیوتری مثال (۳-۱۶)

0.0100 0.2000 0 -0 2
 0.00 5000.00 0.20 5000.00
 0.000 0.000 0.000

RESPONSE FOR ELASTIC SYSTEM

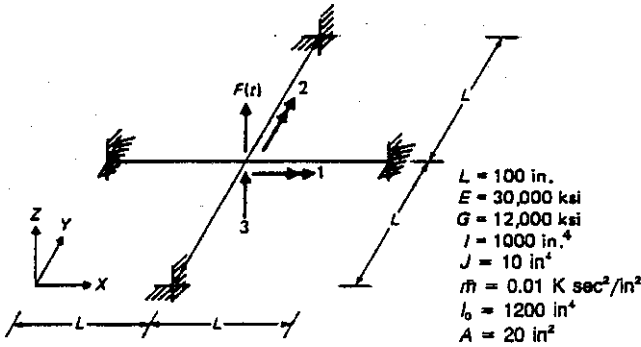
TIME t	DISPLACEMENTS AT NODAL COORDINATES		
	y ₁	y ₂	y ₃
0.000	0.0000D 00	0.0000D 00	0.0000D 00
0.010	0.1036D-06	-0.1036D-06	0.1338D-05
0.020	0.3539D-06	-0.3539D-06	0.5349D-05
0.030	0.6202D-06	-0.6202D-06	0.1203D-04
0.040	0.8120D-06	-0.8120D-06	0.2139D-04
0.050	0.9554D-06	-0.9554D-06	0.3341D-04
0.060	0.1171D-05	-0.1171D-05	0.4811D-04
0.070	0.1572D-05	-0.1572D-05	0.6548D-04
0.080	0.2169D-05	-0.2169D-05	0.8552D-04
0.090	0.2861D-05	-0.2861D-05	0.1082D-03
0.100	0.3520D-05	-0.3520D-05	0.1336D-03
0.110	0.4099D-05	-0.4099D-05	0.1616D-03
0.120	0.4674D-05	-0.4674D-05	0.1923D-03
0.130	0.5376D-05	-0.5376D-05	0.2257D-03
0.140	0.6282D-05	-0.6282D-05	0.2617D-03
0.150	0.7353D-05	-0.7353D-05	0.3004D-03
0.160	0.8461D-05	-0.8461D-05	0.3418D-03
0.170	0.9502D-05	-0.9502D-05	0.3858D-03
0.180	0.1048D-04	-0.1048D-04	0.4325D-03
0.190	0.1151D-04	-0.1151D-04	0.4818D-03

در این فصل نحوه تحلیل دینامیکی قابهای دو بعدی تحت نیروهای عرضی (عمودبر صفحه قاب) بیان شده است (شبهه ها). برای تحلیل دینامیکی شبکه ها لازم است که تأثیرات پیچشی در ماتریسهای جرم و سختی اعضا وارد شود. قبل از تشکیل ماتریس کل می باید ماتریس اعضا را از مختصات محلی به مختصات سیستم منتقل ساخت. ماتریس های مورد نیاز با رعایت تأثیرات پیچشی معین شده و برنامه ای کامپیوتری برای تحلیل دینامیکی شبکه ها ارائه گردیده است. این برنامه از ساختاری مشابه برنامه های فصول قبلی برای تحلیل دینامیکی تیرها و قابهای دو بعدی برخوردار است.

مسائل

مسائل زیر برای حل دستی در نظر گرفته شده اند، ولی توصیه می گردد در صورت امکان مسائل با برنامه ۱۲ (Grid) نیز حل شوند.

۱-۱۶- برای شبکه شکل م (۱-۱۶) سختی سیستم و ماتریس جرم را تعیین کنید. تحلیل را بر اساس سه مختصه گرهی نشان داده شده در شکل انجام دهید. روش جرم سازگار را به کار ببرید.



شکل م (۱-۱۶)

- ۲-۱۶- در مساله (۱-۱۶) با به کارگیری تراکم استاتیکی درجه آزادی چرخشی را حذف و ماتریس های انتقال، جرم و سختی کاهش یافته را به دست آورید.
- ۳-۱۶- فرکانس های طبیعی را برای سیستم کاهش یافته مساله (۱-۱۶) به دست آورید
- ۴-۱۶- فرکانس های طبیعی و مدهای مربوط به شبکه مساله (۱-۱۶) را تعیین کنید

۵-۱۶- پاسخ شبکه شکل م (۱-۱۶) را تحت نیروی ناگهانی $F(t) = 10 \text{ kip}$ در مختصات گرهی ۳ به دست آورید. معادلات حرکت نتایج مسأله (۲-۱۶) را برای متراکم کردن سیستم به کار ببرید. استهلاك مدی را برابر ۱۰٪ فرض کنید.

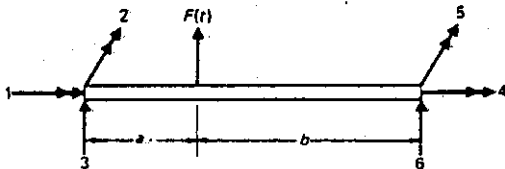
۶-۱۶- نتایج مسأله (۳-۱۶) را برای حل مسأله (۵-۱۶) به کار بگیرید. [براساس سه مختصه گرهی نشان داده شده در شکل م (۱-۱۶)]

۷-۱۶- پاسخ پایدار شبکه شکل (۱-۱۶) را تحت نیروی هارمونیک $F(t) = 10 \sin 50t \text{ kip}$ در مختصات گرهی ۳ به دست آورید.

۸-۱۶- در مسأله (۷-۱۶) استهلاك سیستم را متناسب با سختی فرض کرده و آن را دوباره حل کنید.

۹-۱۶- برای يك عضو از شبکه که بار یکنواخت گسترده دینامیکی $P(t) = P_0 f(t)$ در طول آن وارد می شود نیروهای معادل گرهی را به دست آورید.

۱۰-۱۶- نیروهای گرهی معادل را برای يك عضو از شبکه شکل م (۱۰-۱۶) تحت نیروی دینامیکی متمرکز $F(t)$ به دست آورید.



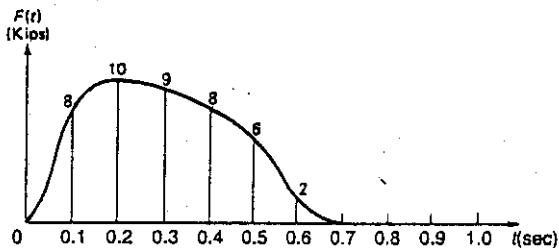
شکل م (۱۰-۱۶)

مسائل زیر برای حل یا برنامه کامپیوتری GRID۱۳ در نظر گرفته شده اند.

۱۱-۱۶- فرکانس های طبیعی و مدهای شبکه شکل (۱-۱۶) را به دست آورید.

۱۲-۱۶- پاسخ شبکه شکل م (۱-۱۶) را تحت نیروی شکل م (۱۲-۱۶) در مختصه گرهی ۳

به دست آورید. از استهلاك سیستم صرفنظر کنید.



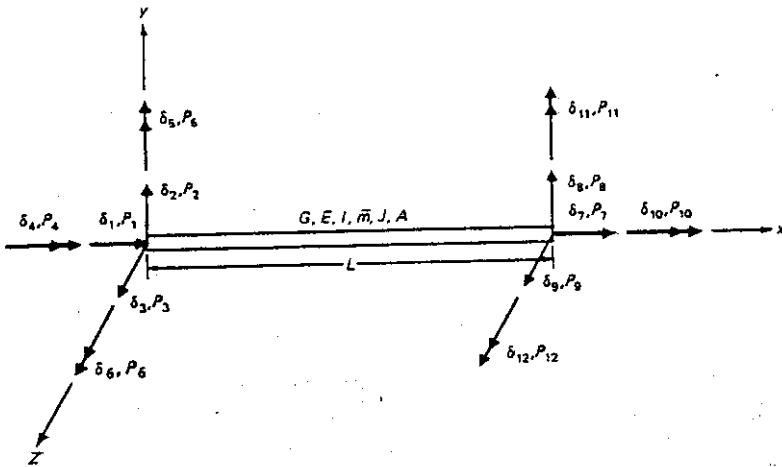
شکل م (۱۲-۱۶)

۱۳-۱۶- مساله (۱۲-۱۶) را با فرض 15٪ استهلاك در همه مدها تکرار کنید. روش ترکیب مدی را به کار ببرید.

۱۴-۱۶- مساله (۱۲-۱۶) را با فرض 15٪ استهلاك در همه مدها تکرار کنید. روش شتاب خطی گام به گام را به کار ببرید (زیربرنامه STEMP).

فصل هفدهم

قابهای سه بعدی



شکل (۱۷-۱): یک عضو از یک قاب فضایی با نیروها و جابه جایی های گرهی

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (2-17)$$

که در آن \bar{I}_y و \bar{I}_z «لنگر ماند» مقطع عضو نسبت به محورهای y و z و L طول عضو، A سطح مقطع و I ثابت پیچشی مقطع می باشد.

۲-۱۷- ماتریس جرم عضو

ماتریس جرم متمرکز برای یک عضو سه بعدی یکنواخت عبارت است از یک ماتریس قطری که در آن ضرایب مربوط به جابه جایی های انتقالی یا پیچشی برابر نصف اینرسی کل عضو است در حالی که ضرایب مربوط به چرخش خمشی برابر صفر فرض می شود. ماتریس قطری جرم متمرکز برای یک عضو یکنواخت با جرم واحد طول \bar{m} «جرم ماند قطبی» $\bar{I}_\pi = \bar{m}I_0 / A$ بر واحد طول برابر است با:

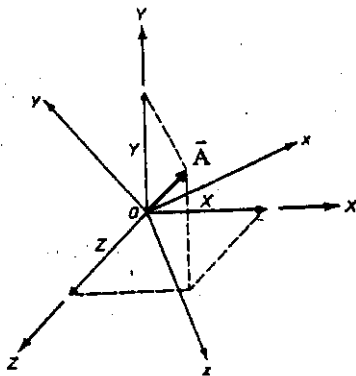
$$[M_L] = \frac{\bar{m}L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & I_0/A & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & I_0/A & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

1) Moment of Inertia

2) Polar Mass Moment of Inertia

(۲-۱۷) بستگاههای مختصات محلی و کلی با x, y, z و X, Y, Z نشان داده شده است. در این شکل بردار کلی \vec{A} و مولفه هایش در جهات X, Y, Z نشان داده شده است. این بردار می تواند بیانگر هر نیرو یا جابه جایی گرهی باشد. برای یافتن مولفه های \vec{A} در امتدادهای x, y, z داریم:

$$x = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma \quad (۱۷-۶, الف)$$



در بستگاه مختصات محلی و کلی شکل (۲-۱۷): مولفه های بردار کلی

در این رابطه $\cos \alpha$ کسینوس زاویه بین محورهای x و X است. به

طور مشابه برای مولفه های y و z بردار \vec{A}

$$y = X \cos \beta + Y \cos \gamma + Z \cos \alpha \quad (۱۷-۶, ب)$$

$$z = X \cos \gamma + Y \cos \alpha + Z \cos \beta \quad (۱۷-۶, ج)$$

و این روابط را می توان به شکل ماتریسی نشان داد:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha X & \cos \alpha Y & \cos \alpha Z \\ \cos \beta X & \cos \beta Y & \cos \beta Z \\ \cos \gamma X & \cos \gamma Y & \cos \gamma Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (۱۷-۷)$$

و یا به طور خلاصه:

$$\{A\} = [T_1] \{\bar{A}\}$$

که در آن $\{A\}$ و $\{\bar{A}\}$ مولفه های بردار A در مختصات محلی و کلی اند و $[T_1]$ ماتریس انتقال است.

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \alpha X & \cos \alpha Y & \cos \alpha Z \\ \cos \beta X & \cos \beta Y & \cos \beta Z \\ \cos \gamma X & \cos \gamma Y & \cos \gamma Z \end{bmatrix} \quad (۱۷-۸)$$

کسینوس های محور x یعنی $c_1 = \cos xX$ ، $c_2 = \cos xY$ و $c_3 = \cos xZ$ مستقیماً بر وسیله مختصات دو انتها عضو داده می شوند.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{X_2 - X_1}{L} \\ c_2 &= \frac{Y_2 - Y_1}{L} \\ c_3 &= \frac{Z_2 - Z_1}{L} \end{aligned} \quad (9-17)$$

که در آن

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (10-17)$$

در حالت خاص که مختصات محلی $x-y$ در صفحه قائم قرار دارند، کسینوس های محورهای y و z را نیز میتوان بر حسب مختصات نو انتهای عضو بیان کرد. در این حالت محور محلی z عمود بر صفحه قائم $x-Y'$ است که در آن مطابق شکل ۱۷-۲ محور Y' موازی محور کلی Y می باشد، لذا بردار \bar{z} در امتداد محور محلی z برابر است با،

$$\bar{z} = \hat{x} * \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -c_3 \hat{i} + c_1 \hat{k} \quad (11-17)$$

که

$$\hat{x} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k} \quad (12-17)$$

\hat{x} بردار واحد در امتداد محور محلی x بوده و \hat{i} ، \hat{j} و \hat{k} بترتیب بردارهای واحد در طول محورهای کلی X ، Y و Z می باشند. آنگاه بردار واحد \hat{z} در امتداد محور محلی z از رابطه (۱۱-۱۷) محاسبه میشود.

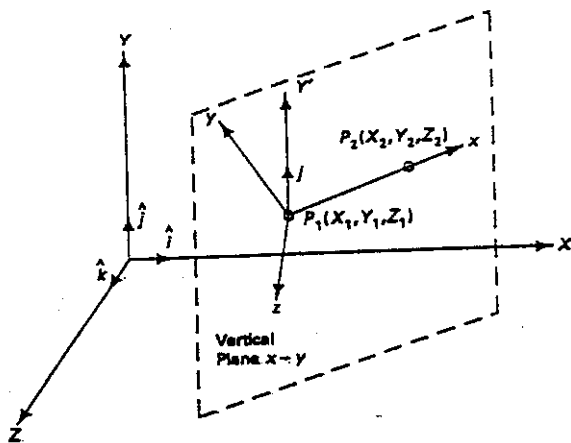
$$\hat{z} = \frac{\bar{z}}{d} = -\frac{c_3}{d} \hat{i} + \frac{c_1}{d} \hat{k} \quad (13-17)$$

که

$$d = \sqrt{c_3^2 + c_1^2} \quad (14-17)$$

سرتانجام، بردار واحد در امتداد محور محلی y برابر است با،

$$\hat{y} = \hat{z} * \hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{c_3}{d} & 0 & \frac{c_1}{d} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (15-17)$$



شکل ۱۷-۳- دستگاه مختصات کلی (X, Y, Z) و محلی (x, y, z) .

یا

$$\vec{y} = \frac{-c_1 c_2}{d} \hat{i} + d \hat{j} - \frac{c_2 c_3}{d} \hat{k} \quad (16-17)$$

بنابر این ، با استفاده از روابط (۱۲-۱۷) ، (۱۳-۱۷) و (۱۶-۱۷) ، رابطه انتقال (۷-۱۷) بصورت زیر در می آید.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -\frac{c_1 c_2}{d} & d & -\frac{c_2 c_3}{d} \\ -\frac{c_3}{d} & 0 & \frac{c_1}{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (17-17)$$

د در رابطه (۱۴-۱۷) داده شده است. همانطور که در ابتدا آمد، رابطه فوق برای حالتی که صفحه $x-y$ قائم باشد، برای حالتی که این صفحه قائم نباشد باید به روش زیر عمل کرد:

گام ۱- دستگاه مختصات محلی (x, y, z) را حول محور محلی x می چرخانیم تا صفحه $x-y$ قائم شود. این دستگاه جدید را دستگاه واسطه (x', y', z') می نامیم. رابطه انتقال بین این دو دستگاه مطابق زیر می باشد:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (17-18)$$

ϕ زاویه ایست که دستگاه محلی حول محور x چرخیده تا y به حالت قائم درآید و جهت مثبت آن برای ناظری که در جهت محور محلی x قرار گرفته در جهت مثلثاتی می باشد.

گام ۲- دستگاه مختصات کلی (X, Y, Z) را به دستگاه واسطه (x', y', z') منتقل می کنیم. از آنجا که صفحه x', y' قائم است می توان از رابطه (۱۷-۱۷) استفاده نمود.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -\frac{c_1 c_2}{d} & d & -\frac{c_2 c_3}{d} \\ -\frac{c_3}{d} & 0 & \frac{c_1}{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (17-19)$$

گام ۳- با ترکیب گامهای ۱ و ۲ میتوان انتقال نهایی را انجام داد.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -\frac{c_1 c_2}{d} & d & -\frac{c_2 c_3}{d} \\ -\frac{c_3}{d} & 0 & \frac{c_1}{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (17-20)$$

پس ماتریس انتقال برای تبدیل دستگاه کلی (X, Y, Z) به دستگاه محلی (x, y, z) که از ضرب دو ماتریس فوق بدست می آید.

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -\frac{c_1 c_2}{d} \cos \phi - \frac{c_3}{d} \sin \phi & d \cos \phi & -\frac{c_2 c_3}{d} \cos \phi + \frac{c_1}{d} \sin \phi \\ \frac{c_1 c_2}{d} \sin \phi - \frac{c_3}{d} \cos \phi & -d \sin \phi & \frac{c_2 c_3}{d} \sin \phi + \frac{c_1}{d} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (17-21)$$

باید توجه داشت که چنانچه محور محلی x موازی محور کلی Y باشد، $[T_1]$ قابل تعریف نیست. در این حالت با استفاده از روابط (۱۷-۹) و (۱۷-۱۴) $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ و $d = 0$

در این حالت که محور محلی x قائم است، دستگاه محلی را حول آن آنقدر می چرخانیم تا محور محلی z موازی محور کلی Z گردد و آنرا مطابق شکل ۱۷-۴

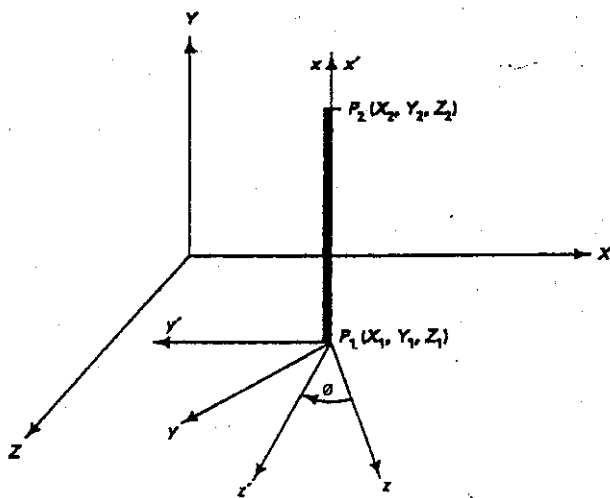
دستگاه واسطه (x', y', z') می نامیم. رابطه انتقال از دستگاه کلی به این دستگاه برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (۲۲-۱۷)$$

که اگر x هم جهت با Y باشد $c_2 = 1$ و کرونه $c_2 = -1$ است. رابطه انتقال از دستگاه واسطه به دستگاه محلی بطور ساده برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (۲۳-۱۷)$$

که در آن ϕ زاویه ای است که دستگاه محلی حول x می چرخد تا بر دستگاه واسطه منطبق شود. جهت مثبت برای ناظر در امتداد x همان جهت مثلثاتی است.



شکل ۲-۱۷- دستگاه های مختصات کلی (X, Y, Z) ، محلی (x, y, z) و واسطه (x', y', z')

از نهادن (۲۲-۱۷) در (۲۳-۱۷)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ -c_2 \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ c_2 \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (23-17)$$

بنابر این ماتریس انتقال برای حالتی که محور محلی x قائم است برابر است

با:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ -c_2 \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ c_2 \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (25-17)$$

که در آن ϕ ، c_1 و c_2 فوقاً تعریف شدند.

تاکنون نشان داده ایم که با در دست داشتن مختصات دو انتهای عضو و زاویه چرخش می توان کسینوس های هادی ماتریس انتقال (۸-۱۷) را محاسبه کرد.

برای اعضای یک قاب سه بعدی، انتقال جابه جایی های گروهی شامل بردارهای

«جابه جایی خطی^۱» و «زاویه ای^۲» است. پس در دو انتها می باید جمعاً چهار بردار منتقل شود. انتقال ۱۲ جابه جایی گروهی $\{\delta\}$ از مختصات کلی به مختصات محلی

می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\{\delta\} = [T]\{\bar{\delta}\} \quad (26-17)$$

که در آن

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_1] & & & \\ & [T_1] & & \\ & & [T_1] & \\ & & & [T_1] \end{bmatrix} \quad (27-17)$$

بطور مشابه برای انتقال نیروهای گروهی $\{\bar{P}\}$ در مختصات کلی به $\{P\}$ در

مختصات محلی:

$$\{P\} = [T]\{\bar{P}\} \quad (28-17)$$

سرانجام برای به دست آوردن ماتریس های سختی و جرم دستگاه در مختصات

کلی $\{\delta\}$ و $\{P\}$ را از روابط فوق در (۲۸-۱۷) می نهم

و چون $[T]$ متعامد است:

$$[T]\{\bar{P}\} = [K][T]\{\bar{\delta}\} \quad (29-17)$$

پس:

$$\{\bar{P}\} = [T]^T [K][T]\{\bar{\delta}\} \quad (30-17)$$

که:

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\delta}\} \quad (31-17)$$

و به طور مشابه ماتریس جرم رابطه (0-17) از مختصات محلی به کلی منتقل می شود:

$$[\bar{M}] = [T]^T [M][T] \quad (32-17)$$

و ماتریس میرایی:

$$[\bar{C}] = [T]^T [C][T] \quad (33-17)$$

17-5- معادلات دیفرانسیل حرکت

از روش مستقیم که به طور مشروح در فصل 14 بیان گردید می توان برای تشکیل ماتریس های سختی، جرم و میرایی در مختصات کلی، با استفاده از روابط (17-31)، (17-32) و (17-33) استفاده نمود. معادلات دیفرانسیل حرکت از تعادل نیروهای ماند، میرایی و ارتجایی یا نیروهای خارجی به شکل ماتریسی عبارت است از:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \quad (34-17)$$

$[\bar{M}]$ ، $[\bar{C}]$ و $[\bar{K}]$ ماتریسهای جرم، میرایی و سختی اند و $\{\ddot{y}\}$ ، $\{\dot{y}\}$ و $\{y\}$ بردارهای شتاب، سرعت و جابه جایی هستند و $\{F(t)\}$ بردار نیروهای خارجی وارد بر گره ها و نیروهای گرهی معادل برای نیروهای خارجی وارد بر نقاط غیرگره می باشد.

17-6- پاسخ دینامیکی

انتگرال گیری معادله (17-34) را می توان به وسیله هر يك از روشهای مذکور در فصلهای قبل انجام داد. انتخاب يك روش خاص بستگی به میزان خطی بودن معادلات دیفرانسیل دارد. یعنی اینکه ماتریسهای ضرایب نظیر ماتریس سختی $[K]$ تا چه حد ثابت هستند. انتخاب روش همچنین به پیچیدگی تحریک برحسب زمان بستگی دارد. در صورتی که معادلات حرکت (17-34) خطی باشد می توان از روش ترکیب مدها استفاده کرد. در این روش که در فصلهای قبل بیان شد، می باید جوابهای يك مسأله

ویژه^۱ را تعیین نمود تا معادلات غیر درگیر شده و معادلات حرکت مدها به دست آید.

چنانچه سازه دارای رفتار «ارتجاعی - خمیری»^۲ و یا هر رفتار غیر خطی دیگری باشد لازم است که برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت (۱۷-۲۷) از روشهای عددی انتگرال گیری استفاده گردد. در فصل ۱۹، روش شتاب خطی با اصلاح ویلسون-θ بیان گردیده و یک برنامه کامپیوتری نیز برای تحلیل لرزه ای سازه های ارتجاعی و ارتجاعی - خمیری معرفی شده است.

۱۷-۷- خلاصه

تحلیل دینامیکی قابهای فضایی به وسیله روش سختی در مقایسه با تحلیل تیرها، قابهای دو بعدی و شبکه ها که در فصلهای قبل تشریح شدند نیاز به تلاش محاسباتی بسیار زیادتری دارد. هر عضو قاب فضایی دارای ۱۲ مختصات گرهی است و بنابراین ماتریس های عضو، ۱۲×۱۲ هستند. اساس تحلیل دینامیکی قابهای فضایی کاملاً مشابه قابهای دو بعدی و شبکه ها است. در این فصل ماتریس های لازم برای تحلیل دینامیکی قابهای فضایی ارائه شده است. بر اساس برنامه های کامپیوتری فصلهای قبل برای سازه های قابی، می توان یک برنامه ترمیمبرای تحلیل دینامیکی قابهای فضایی تهیه کرد. این چنین برنامه ای به کامپیوتری با حافظه زیاد نیاز دارد تا بتواند هر قاب فضایی دلخواه را تحلیل نماید. استفاده از تکنیک های ویژه محاسباتی در چنین برنامه هایی برای کاهش حجم حافظه مورد نیاز و زمان محاسبه از اهمیت زیادی برخوردار است.

1) Eigen Problem

2) Elasto - Plastic

فصل هجدهم

تحليل ديناميكي خرپاها

تحلیل استاتیکی خرپاهای با اعضای مفصلی منجر به تعیین میله ها تحت نیروهای وارد به گره ها می شود. در صورتی که همین خرپاها تحت نیروهای منجر به دینامیکی قرار گیرند. آنگاه علاوه بر بوجود آمدن نیروهای محوری در امضاء نیروهای ماند در طول اعضای خرپاها موجب ایجاد لنگرهای خمشی در اعضا می شوند. اگر چه لنگر انتهای امضاء هنوز هم صفر باقی می ماند. روش روابط اساسی میان نیروهای ارتجاعي، میرایی، ماند و جابه جایی های گروهی در همان مسیر مشروح در فصلهای قبل صورت می پذیرد.

۱-۱۸- ماتریس های سختی و جرم خرپای دوبعدی^۱

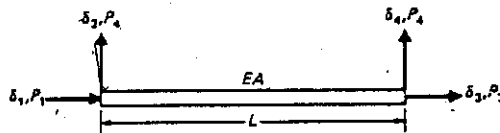
اعضای يك خرپای دو بعدی دارای دو مختصات گرهی در هر انتها می باشند. پس هر عضو مطابق شکل (۱-۱۸) دارای چهار مختصات گرهی می باشند. برای جابه جایی های کوچک، می توان فرض کرد که رابطه نیرو- جابه جایی در امتداد عضو [مختصات ۱ و ۳ در شکل (۱-۱۸)] مستقل از جابه جایی های عرضی در امتدادهای ۲ و ۴ است. این فرض معادل اینست که تغییر مکان در مختصات گرهی ۱ و ۳ نیرویی در مختصات گرهی ۲ و ۴ ایجاد نمی کند، بالعکس.

ضرایب سختی و جرم برای امتداد محوری در فصل ۱۵ در رابطه (۱۵-۱۷) برای سختی و رابطه (۱۵-۲۲) برای جرم همسان داده شده است. از این روابط برای عضو یکنواخت و با توجه به علائم شکل (۱-۱۸) داریم:

$$k_{11} = k_{33} = \frac{AE}{L}, \quad k_{13} = k_{31} = -\frac{AE}{L} \quad (1-18)$$

$$m_{11} = m_{33} = \frac{\bar{m}L}{3}, \quad m_{13} = m_{31} = \frac{\bar{m}L}{6} \quad (2-18)$$

\bar{m} جرم واحد طول، A سطح مقطع، L طول عضو است.



شکل (۱-۱۸): عضوی از يك خرپای دو بعدی با نیروها و جا به جایی های گرهی

ضرایب سختی مربوط به مختصات ۲ و ۴ صفر است، زیرا برای ایجاد جا به جایی در این امتدادها نیاز به نیرو نیست. پس از مرتب کردن ضرایب رابطه (۱-۱۸) ماتریس سختی يك عضو یکنواخت برابر است با:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

و یا:

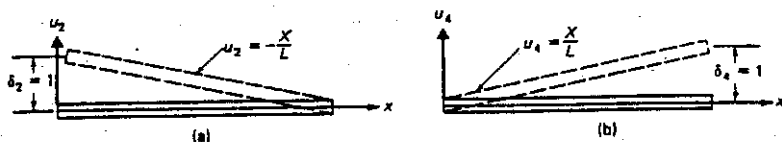
$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (3-18)$$

[K] ماتریس سختی عضو است.

همان طور که قبلاً نشان داده شد ماتریس جرم همساز با استفاده از ملاحظات استاتیکی و کار مجازی به دست می آید. مطابق شکل (۲-۱۸)، توابع جا به جایی حاصل از اعمال يك جابه جایی واحد در مختصات گرهی ۲ و ۴ برابر است با:

$$u_2 = 1 - \frac{x}{L} \quad (5-18)$$

$$u_4 = \frac{x}{L} \quad (6-18)$$



شکل (۲-۱۸): توابع جابه جایی

الف) برای جابه جایی گرهی ۲ واحد $\delta_2 = 1$ (ب) برای جابه جایی گرهی واحد $\delta_4 = 1$

ضرایب جرم همساز توسط رابطه (۲۲-۱۵) داده شده که عبارت است از:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) u_i(x) u_j(x) dx \quad (7-18)$$

برای عضو یکنواخت با جرم واحد طول جرم \bar{m} از جایگزینی روابط (۲-۱۸) و (۷-۱۸):

$$m_{22} = m_{44} = \frac{\bar{m}L}{3} \quad (8-18)$$

$$m_{24} = m_{42} = \frac{\bar{m}L}{6}$$

و بالاخره از ترکیب ضرایب جرم روابط (۲-۱۸) و (۸-۱۸) ماتریس جرم همساز به دست

می آید که نیروها و شتابهای گرهی را مرتبط می سازد:
و یا به طور خلاصه:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (9-18)$$

$$\{P\} = [M]\{\delta\} \quad (10-18)$$

۱۸-۲- انتقال مختصات

ماتریس های سختی و جرم در روابط (۱۸-۲) و (۱۸-۹) بر حسب مختصات محلی بیان شده اند و برای جمع این ماتریس ها و به دست آوردن ماتریس سازه می باید همه آنها را به مختصات کلی سیستم منتقل ساخت.

انتقال جابه جایی ها و نیروهای گرهی آنچنانکه در فصل ۱۵ تشریح شد به وسیله چرخش مختصات صورت می پذیرد. با مختصات زوایه ای در رابطه (۱۵-۲۱) و نام گذاری مجدد مختصات باقیمانده داریم:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{Bmatrix} \quad (11-18)$$

و یا به طور خلاصه:

$$\{P\} = [T]\{\bar{P}\} \quad (12-18)$$

$\{P\}$ و $\{\bar{P}\}$ نیروهای گرهی در مختصات محلی و کلی $[T]$ ماتریس انتقال در رابطه (۱۱-۱۸) است. همین ماتریس برای انتقال جابه جایی های گرهی از مختصات کلی به محلی به کار میرود.

$$\{\delta\} = [T]\{\bar{\delta}\} \quad (13-18)$$

از جایگزینی روابط (۱۲-۱۸) و (۱۳-۱۸) در رابطه سختی (۱۸-۴)

$$[T]\{\bar{P}\} = [K][T]\{\bar{\delta}\}$$

چون ماتریس $[\bar{T}]$ متعامد است یعنی $[\bar{T}]^{-1} = [T]^T$ پس:

$$\{\bar{P}\} = [T]^T [K] [T] \{\bar{\delta}\}$$

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\delta}\} \quad (14-18)$$

که در آن

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (15-18)$$

$[\bar{K}]$ ماتریس سختی عضو در مختصات کلی می باشد.

به طور مشابه از جایگزینی (2-18) و (12-18) در (10-18):

$$\{\bar{P}\} = [T]^T [M] [T] \{\bar{\delta}\} \quad (16-18)$$

یا

$$\{\bar{P}\} = [\bar{M}]\{\bar{\delta}\} \quad (17-18)$$

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] \quad (18-18)$$

$[\bar{M}]$ ماتریس جرم عضو در مختصات کلی است. رابطه مشابهی برای ماتریس میرایی

نیز به دست می آید.

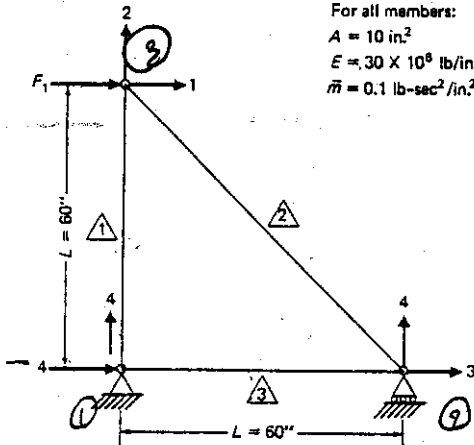
$$[\bar{C}] = [T]^T [C] [T] \quad (19-18)$$

$[\bar{C}]$ ماتریس میرایی عضو در مختصات کلی می باشد.

مثال (1-18): خرابای دو بعدی شکل (2-18) با سه عضو برای نمایش کاربرد روش سختی

در خراباها به کار گرفته شده است. ماتریس های سختی و جرم همسان این سازه را

تعیین نمایید.



شکل (2-18): نمونه ای از یک خرابای دو بعدی

ماتریس سختی رابطه (۳-۱۸) و ماتریس جرم رابطه (۹-۱۸) و ماتریس انتقال

رابطه (۱۱-۱۸) برای هر سه عضو خرابا تشکیل می شوند:

$$[K_1] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [M_1] = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \theta = 90^\circ \text{ برای عضو ۱}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

انگاه از روابط (۱۵-۱۸) و (۱۶-۱۸)

$$[\bar{K}_1] = [T_1]^T [K_1] [T_1] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}_1] = [T_1]^T [M_1] [T_1] = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

برای عضو ۲، $\theta = 135^\circ$

$$[K_2] = \frac{AE}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = \frac{\bar{m}\sqrt{2}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

انگاه از روابط (۱۵-۱۸) و (۱۸-۱۸)

$$[\bar{K}_2] = [T_2]^T [K_2] [T_2] = \frac{AE}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}_2] = [T_2]^T [M_2] [T_2] = \frac{\bar{m}L}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

برای هر عضو ۲، $\theta = 0^\circ$

$$[\bar{K}_3] = [K_3] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}_3] = [M_3] = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی مقادیر عددی درست در این مثال، $E = 3 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$ ، $\bar{m} = 0.1 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}^2$ ، $A = 10 \text{ in}^2$ ، $L = 60 \text{ in}$ و تبعیت از قواعد روش مستقیم جمع ماتریس ها، ماتریس های سختی و جرم سازه از جمع ماتریس های فوق به دست می آید:

$$[K_S] = 10^6 \begin{bmatrix} 1.768 & -1.768 & -1.768 \\ -1.768 & 6.768 & 1.768 \\ -1.768 & 1.768 & 6.768 \end{bmatrix}$$

$$[M_S] = \begin{bmatrix} 4.828 & 0 & 1.414 \\ 0 & 4.828 & 0 \\ 1.414 & 0 & 4.828 \end{bmatrix}$$

مثال (۲-۱۸): فرکانس های طبیعی و اشکال مدی خرابی شکل (۱-۱۸) را تعیین کنید. معادلات دیفرانسیل حرکت این سیستم عبارتند از:

$$[M_S]\{\ddot{y}\} + [K_S]\{y\} = 0 \quad (\text{الف})$$

از جایگزینی $\{y\} = \{a\} \sin \omega t$

$$([K_S] - \omega^2 [M_S])\{a\} = \{0\} \quad (\text{ب})$$

برای وجود جواب غیر بدیهی لازم است:

$$|[K_S] - \omega^2 [M_S]| = 0 \quad (\text{ج})$$

با نهادن مقادیر $[K_S]$ و $[M_S]$ از مثال قبل و بسط دترمینان فوق بر حسب $\lambda = \frac{\omega^2 m L^2}{6AE}$

یک معادله درجه ۳ به دست می آید که از حل آن:

$$\omega_1 = 415 \text{ rad/sec} \quad \text{یا} \quad \lambda_1 = 0.00344$$

$$\omega_2 = 1034 \text{ rad/sec} \quad \text{یا} \quad \lambda_2 = 0.0214$$

$$\omega_3 = 1526 \text{ rad/sec} \quad \text{یا} \quad \lambda_3 = 0.0466$$

با نهادن $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ و در رابطه (ب) و $a_1 = 1$ فرض معادلات را بر حسب a_2 و a_3 حل می کنیم و از آنجا:

$$\{a_1\} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.216 \\ 0.274 \end{bmatrix}, \quad \{a_2\} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 5.488 \\ -4.000 \end{bmatrix}, \quad \{a_3\} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.000 \\ -1.524 \end{bmatrix}$$

این بردارها را می توان به وسیله زیر نرمالیزه کرد.

$$\sqrt{\{a_1\}^T [M_S] \{a_1\}} = 2.489, \quad \sqrt{\{a_2\}^T [M_S] \{a_2\}} = 14.695$$

$$\sqrt{\{a_3\}^T [M_S] \{a_3\}} = 4.066$$

و پس از نرمالیزه کردن:

$$\{\phi_1\} = \begin{bmatrix} 0.402 \\ 0.087 \\ 0.110 \end{bmatrix}, \quad \{\phi_2\} = \begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.373 \\ -0.272 \end{bmatrix}, \quad \{\phi_3\} = \begin{bmatrix} 0.246 \\ -0.246 \\ -0.375 \end{bmatrix}$$

و ماتریس اشکال مدی به دست می آید:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0.402 & 0.608 & 0.246 \\ 0.087 & 0.373 & -0.246 \\ 0.110 & -0.272 & -0.375 \end{bmatrix}$$

مثال (۳-۱۸): پاسخ دینامیکی خرابی مثالهای (۱-۱۸) و (۲-۱۸) را تحت نیروی ۵۰۰ پوند که بطور ناگهانی در جهت مختصات ۱ مطابق شکل (۳-۱۸) اعمال شود به دست آورید.

معادله حرکت مدی عبارت است از:

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n$$

که در آن نیروی مدی:

$$P_n = \sum_i \phi_{in} F_i$$

با استفاده از نتایج مثال (۲-۱۸)

$$\ddot{z}_1 + (415)^2 z_1 = 2010$$

$$\ddot{z}_2 + (1034)^2 z_2 = 340$$

$$\ddot{z}_3 + (1526)^2 z_3 = 1230$$

پاسخ این معادلات برای شرایط اولیه صفر ($\dot{z}_n = 0, z_n = 0$) در رابطه (۲-۴) آمده است:

$$z_1 = \frac{2010}{(415)^2} (1 - \cos 415t)$$

$$z_2 = \frac{340}{(1034)^2} (1 - \cos 1034t)$$

$$z_3 = \frac{1230}{(1526)^2} (1 - \cos 1526t)$$

و پاسخ در مختصات گرهی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\{y\} = [\phi]\{z\}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.402 & 0.068 & 0.246 \\ 0.087 & 0.373 & -0.246 \\ 0.110 & -0.272 & -0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

و یا

$$y_1 = 10^{-3} [4.843 - 4.692 \cos 415t - 0.022 \cos 1034t - 0.130 \cos 1526t]$$

$$y_2 = 10^{-3} [1.004 - 1.015 \cos 415t - 0.119 \cos 1034t + 0.130 \cos 1526t]$$

$$y_3 = 10^{-3} [0.999 - 1.284 \cos 415t + 0.087 \cos 1034t + 0.198 \cos 1526t]$$

۳-۱۸- برنامه ۱۴ (TRUSS) تحلیل دینامیکی دوبعدی

در این بخش يك برنامه کامپیوتری برای تحلیل دینامیکی خرپاهای دو بعدی

ارائه می شود. صورت برنامه در ضمیمه آمده است و متغیرهای اصلی برنامه در جدول

(۱-۱۸) و داده های ورودی با فرمت مربوط جدول (۲-۱۸) تشریح شده است.

برنامه ۱۴ مشابه برنامه های قبلی برای تیرها، قاب ها و شبکه ها تنظیم شده

است و همان زیربرنامه ها باید در سسترس برنامه ۱۴ قرار گیرند.

جدول (۱-۱۸): متغیرهای اصلی برنامه ۱۴

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
NE		تعداد المانها
ND		تعداد درجات آزادی
NCR		تعداد درجات آزادی جهت متراکم نمودن
NCM		تعداد جرمهای متمرکز
LOC		نشان جرم : 0 ← جرم فشرده 1 ← جرم پیوسته
IFPR		چاپ مقادیر میانی در زیر برنامه JACOBI 0 ← چاپ نشود 1 ← چاپ شود
E	E	مدول ارتجاسی
LE		شماره المان
AR	A	مساحت سطح مقطع
SMA	\bar{m}	جرم یکنواخت
TH	θ	شیب المان
NC(L)		مختصات گرهی المان (L=1,4)
MC(L)		جرم های متمرکز (NCM, L=1)
JC(L)		مختصات گرهی برای MC(L)
BK(L)	[K]	ماتریس سختی المان
BM(L)	[M]	ماتریس جرم المان
T(L)	[T]	ماتریس انتقال المان
SK(L)	[K _s]	ماتریس سختی دستگاه
SM(L,J)	[M _s]	ماتریس جرم دستگاه

جدول (۲-۱۸): داده های ورودی و فرمت آنها در برنامه ۱۴

فرمت	متغیرها
(6I5, 2F10.0)	NE ND NCR NCM LOC IFPR E
(I10, 4F10.2, 4I2)	LE SL AR SMA TH (NC(L), L = 1, 4)
(8(I2, F8.2))	JC(L) CM(L) (L = 1, NCM)

مثال (۴-۱۸): از برنامه ۱۴ برای تحلیل دینامیکی خرابای شکل (۳-۱۸) استفاده کنید. فرکانس های طبیعی و اشکال مدی را تعیین و پاسخ سازه را تحت يك نیروی ۵۰۰۰ پوند که بطور ناگهانی در مختصات ۱ اعمال می شود به دست آورید. در این مساله، برنامه ۱۴، زیربرنامه JACOBI را برای تعیین فرکانس های طبیعی و اشکال مدی، و زیربرنامه MODAL را برای تعیین پاسخ دینامیکی احضار می کند. صورت داده های ورودی این مثال پاسخ کامپیوتری برای مساله ویژه (فرکانس ها و اشکال مدی) در جدول (۳-۱۸) و (۴-۱۸) آورده شده است. داده های اضافی برای حل پاسخ دینامیکی توسط زیربرنامه MODAL به همراه نتایج کامپیوتری پاسخ دینامیکی سازه در سه مختصات گرهی در جدول (۵-۱۸) آمده است.

جدول (۳-۱۸): داده های ورودی مثال (۴-۱۸)

لیست داده ها										
3	3	0	0	1	1	30000000.				
	1	60.00		10.	0.1	90.	4	4	0	2
	2	84.85		10.	0.1	135.	3	4	1	2
	3	60.00		10.	0.1	0.	4	4	3	4

جدول (۳-۱۸): پاسخ کامپیوتری مثال (۴-۱۸)

EIGENVALUES		
0.17258D 06	0.10685D 07	0.23288D 07
EIGENVECTORS		
0.40178D 00	0.68052D-01	-0.24594D 00
0.86811D-01	0.37346D 00	0.24516D 00
0.11034D 00	-0.27173D 00	0.37487D 00

ماتریس سختی

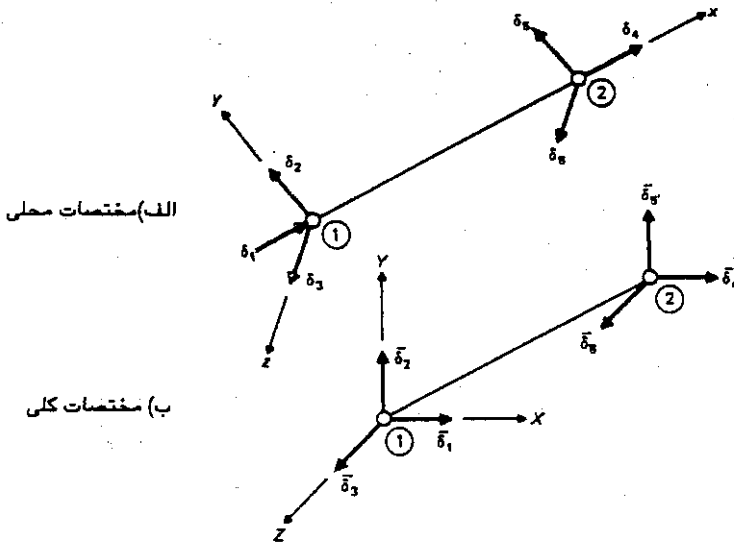
$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20-18)$$

ماتریس جرم همسان

$$[M_C] = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (21-18)$$

ماتریس جرم متمرکز

$$[M_L] = \frac{\bar{m}L}{2} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (22-18)$$



شکل (3-18): مختصات گرهی برای عضو یک خرپای فضایی

0.0100	0.2000	2	0	0
0.00	5000.00		2.00	5000.00
0.000	0.000		0.000	

RESPONSE FOR ELASTIC SYSTEM

TIME t	DISPLACEMENTS AT NODAL COORDINATES		
	y ₁	y ₂	y ₃
0.000	0.0000D 00	0.0000D 00	0.0000D 00
0.010	0.7436D-02	0.1491D-02	0.1449D-02
0.020	0.6806D-02	0.1554D-02	0.1666D-02
0.030	0.1861D-03	-0.1437D-03	-0.2427D-03
0.040	0.7750D-02	0.1697D-02	0.1671D-02
0.050	0.6352D-02	0.1410D-02	0.1577D-02
0.060	0.3534D-03	-0.1872D-03	-0.3750D-03
0.070	0.7961D-02	0.1948D-02	0.2002D-02
0.080	0.6079D-02	0.1067D-02	0.1181D-02
0.090	0.2864D-03	0.7820D-04	-0.6767D-04
0.100	0.8452D-02	0.1855D-02	0.1852D-02
0.110	0.5507D-02	0.1020D-02	0.1213D-02
0.120	0.4694D-03	0.1602D-03	-0.5848D-04
0.130	0.8827D-02	0.1810D-02	0.1819D-02
0.140	0.4863D-02	0.1053D-02	0.1334D-02
0.150	0.8934D-03	0.5672D-04	-0.3334D-03
0.160	0.8872D-02	0.2025D-02	0.2219D-02
0.170	0.4540D-02	0.7877D-03	0.9550D-03
0.180	0.1070D-02	0.2425D-03	-0.1494D-03
0.190	0.9075D-02	0.2019D-02	0.2303D-02

۴-۱۸- ماتریس های سختی و جرم خریاهای فضایی

ماتریس های سختی و جرم خریاهای فضایی را می توان از تعمیم ماتریس های خریاهای دو بعدی به دست آورد. در شکل (۴-۱۸) مختصات محلی، کلی برای يك عضو خریای فضایی نشان داده شده است. محور اصلی در جهت محور طولی عضو و محورهای y و z و منطبق با محورهای اصلی مقطع در نظر گرفته شده است. از تعمیم ماتریس های سختی و جرم خریای دو بعدی در روابط (۳-۱۸) و (۹-۱۸)، ماتریس های زیر برای اعضای یکنواخت يك خریای فضایی به دست می آید:

ماتریس انتقال $[T_1]$ مختصات سه گانه گره‌ی داده شده در رابطه (۱۷-۹) است که مجدداً در زیر آمده است:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\ \cos yX & \cos yY & \cos yZ \\ \cos zX & \cos zY & \cos zZ \end{bmatrix} \quad (۲۳-۱۸)$$

$\cos xY$ کسینوس زاویه محور محلی x و محور کلی Y است. ماتریس انتقال برای هر دو انتهای يك عضو برابر است با:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [T_1] \end{bmatrix} \quad (۲۴-۱۸)$$

که $[T_1]$ در رابطه (۲۳-۱۸) داده شده است. بنابراین برای انتقال ماتریس‌های سختی و جرم باید:

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (۲۵-۱۸)$$

ماتریس سختی در مختصات کلی

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] \quad (۲۶-۱۸)$$

ماتریس جرم در مختصات کلی

$[K]$ و $[M]$ ماتریس‌های سختی، جرم در مختصات محلی می‌باشند.

۱۸-۵- معادل حرکت خرپاهای فضایی

از ارضای شرایط تعادل دینامیکی در گره‌های يك خرپای فضایی معادله حرکت زیر به دست می‌آید:

$$[\bar{M}]\{\ddot{y}\} + [\bar{C}]\{\dot{y}\} + [\bar{K}]\{y\} = \{F(t)\} \quad (۲۷-۱۸)$$

$\{y\}$ و $\{\dot{y}\}$ و $\{\ddot{y}\}$ بردارهای جابه‌جایی، سرعت و شتاب در مختصات گره‌ی $\{F(t)\}$ بردار نیروهای گره‌ی، و $[\bar{M}]$ ، $[\bar{C}]$ و $[\bar{K}]$ ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سازه می‌باشند.

در این روش سختی، ماتریسهای سازه در رابطه (۲۷-۱۸) از جمع ماتریس اعضای به دست می‌آیند، همان گونه که در فصلهای قبیل بیان شد راه عملی بر آورد میرایی در نظر گرفتن يك ضریب میرایی برای هر مد ارتعاش است، بنابراین هنگامی که رابطه (۲۷-۱۸) به وسیله روش ترکیب مدها حل می‌شود، ضرایب میرایی مدها مستقیماً در معادلات مدی وارد می‌گردد. در این حال نیازی به محاسبه ماتریس $[C]$ نیست، اما چنانچه از روشهای دیگر نظیر روش گام به گام برای حل معادلات (۲۷-۱۸)

استفاده شود میباید ماتریس [C] را با استفاده از ضرایب میزایی مدها و به کمک روشهای مذکور در فصل ۱۲ محاسبه نمود.

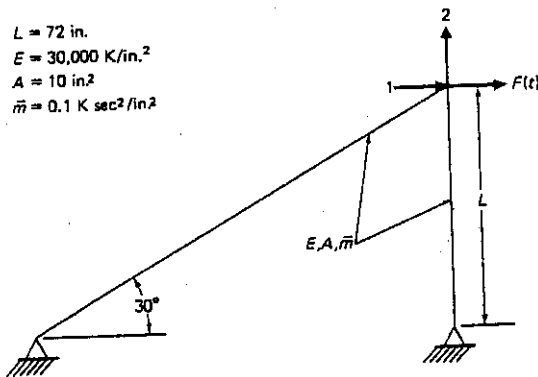
۱۸-۶- خلاصه

در این فصل نحوه تحلیل دینامیکی خراباها به وسیله روش سختی بیان شده است. همانند سازه های قابی مذکور در فصلهای قبل ماتریس های سختی و جرم برای اعضای خرابا مشخص شده است. اگر چه لنگر در انتهای اعضا صفر است، لیکن در طول عضو علاوه بر نیروهای محوری در اثر نیروهای ماند، لنگر خمشی نیز به وجود می آید. ماتریس های کل برای خرابا همانند قاب از جمع ماتریس های اعضا به دست می آید. تحلیل خراباها برای حالت های دو بعدی و قضایب نیز بیان شده است اما برنامه کامپیوتری ۱۴ صرفاً مختص دینامیکی خراباهای دو بعدی است.

مسائل

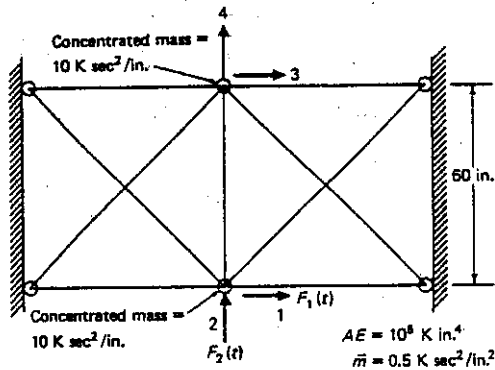
مسائل زیر برای حل دستی در نظر گرفته شده اند. گرچه توصیه می گردد در صورت امکان با برنامه ۱۴ (TRUSS) نیز حل می گردند.

۱۸-۱- برای خرابای مسطح شکل م (۱-۱۸) ماتریس های سختی و جرم مربوط به دو مختصه گرهی نشان داده شده در شکل را به دست آورید.



شکل م (۱-۱۸)

- ۱۸-۲- فرکانسهای طبیعی و مدهای ارتعاش خرابی م (۱-۱۸) را تعیین کنید.
- ۱۸-۳- با استفاده از نتایج مسأله قبل، پاسخ خرابی شکل م (۱-۱۸) را تحت يك نیروی ناگهانی 10 kips در امتداد 1 تعیین نمایید. (از میرایی چشم پوشی شود).
- ۱۸-۴- مسأله (۲-۱۸) را با فرض 10% استهلاك در تمام مدها حل کنید.
- ۱۸-۵- پاسخ اوج خرابی شکل م (۱-۱۸) را که تحت ضربه مثلثی با مقدار $F_0 = 10 \text{ kip}$ و زمان $T_0 = 0.1 \text{ sec}$ قرار دارد به دست آورید. طیف پاسخ را برای به دست آوردن پاسخ مدی اوج به دست آورید [شکل (۳-۴)] از استهلاك سیستم صرفنظر نمایید.
- ۱۸-۶- پاسخ دینامیکی قاب شکل (۱-۱۸) را تحت نیروی دینامیکی $F(t) = 10 \sin 10t (\text{kips})$ در مختصه گرهی ۱ به دست آورید. (از استهلاك سیستم صرفنظر کنید).
- ۱۸-۷- مسأله (۶-۱۸) را با فرض متناسب بودن استهلاك با سختی سیستم دوباره حل کنید. $[C] = a_0 [K]$, $a_0 = 0.1$.
- ۱۸-۸- پاسخ خرابی شکل م (۸-۱۸) را هنگامی که تحت اثر نیروی $F_1(t) = 10t$ و $F_2(t) = 5t^2$ در مدت ۱ ثانیه قرار دارد به دست آورید. (از استهلاك صرفنظر کنید).



شکل م (۸-۱۸)

- ۱۸-۹- مسأله (۸-۱۸) را با فرض 10% استهلاك در تمام مدها حل کنید.

فصل نوزدهم

پاسخ غیرخطی دستگاه‌های چنددرجه آزادی

در فصل ۷ تحلیل غیر خطی یک دستگاه یک درجه آزادی به وسیله روش گام به گام یا شتاب خطی بیان شد. در این فصل این روش طبق تکنیک موسوم به ویلسون- θ اصلاح شده و برای دستگاههای چند درجه آزادی به کار گرفته خواهد شد. اصلاح ویلسون^۱ پایداری عددی جواب را مستقل از اندازه گام زمانی تضمین می کند و به همین جهت، روش پایدار نامشروط^۲ نامیده می شود. به عبارت دیگر بدون اصلاح ویلسون - θ پایداری روش شتاب خطی مشروط است و باید اندازه گام زمانی بسیار کوچک اختیار شود که در نتیجه روش را غیرممکن و حتی غیر عملی می سازد. مبنای ریاضی تحلیل خطی و غیر خطی دستگاههای چند درجه آزادی به روش شتاب خطی مشابه دستگاه یک درجه آزادی است که در فصل ۷ بیان گردید.

۱۹-۱- معادلات نموی حرکت^۳

فرض اصلی روش ویلسون - θ این است که تغییرات شتاب در فاصله زمانی t تا $t + \theta \Delta t$ ($\theta \geq 1.0$) خطی است. مقدار θ طوری تعیین می شود که دقت و پایداری جواب بهینه گردد. ویلسون ثابت کرده است که برای ($\theta \leq 1.38$) این روش به طور نامشروط پایدار است. معادلاتی که شرایط نموی تعادل را برای دستگاههای چند درجه آزادی بیان می دارند به صورت معادل ماتریسی معادلات نموی حرکت دستگاه یک درجه آزادی یعنی رابطه (۱۷-۱۲) می باشند. بنابراین از تفاوت شرایط تعادل لحظه های $t_i + \tau$ و t_i که $(\tau = \theta \cdot \Delta t)$ است، داریم:

$$M\Delta\ddot{y}_i + C(\dot{y})\Delta\dot{y}_i + K(y)\Delta y_i = \Delta F_i \quad (1-19)$$

علامت : بیانگر آن است که مقادیر نموی مربوط به گام تممیم یافته $\tau = \theta \cdot \Delta t$ می باشند (در مقایسه با گام اصلی Δt - مترجم). بنابراین:

$$\Delta y_i = y(t_i + \tau) - y(t_i) \quad (2-19)$$

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}(t_i + \tau) - \dot{y}(t_i) \quad (3-19)$$

$$\Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}(t_i + \tau) - \ddot{y}(t_i) \quad (4-19)$$

$$\Delta F_i = F(t_i + \tau) - F(t_i) \quad (5-19)$$

1- Wilson, E.L., Farhoomand, I., and Bathe, K.J., "Nonlinear dynamic analysis of complex structures", Int. J. Earthquake Eng. and struc. Dynamics, Vol 1, PP. 241-252, 1973.

2- Unconditionally stable

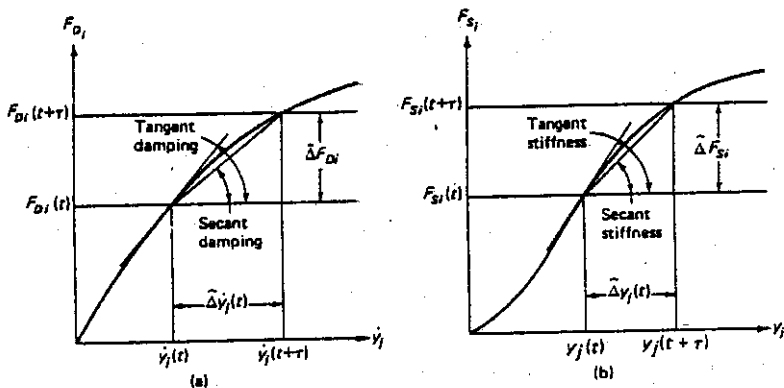
3- incremental equations of motion

در نوشتن این معادلات همان طور که در فصل ۷ در مورد دستگاههای تک درجه تشریح شده، سختی و میرایی در هر گام به کمک امتداد مماس (و نه سکانت) منحنی های مربوط مطابق شکل (۱۹-۱) به دست می آید. بنابراین ضریب سختی چنین تعریف می شود:

$$k_{ij} = \frac{dF_{Si}}{dy_j} \quad (6-19)$$

و ضریب میرایی عبارت است از:

$$c_{ij} = \frac{dF_{Di}}{d\dot{y}_j} \quad (7-19)$$



شکل (۱۹-۱): تعریف ضرایب تاثیر الف) میرایی لزوج غیر خطی c_{ij} ب) سختی غیر خطی k_{ij}

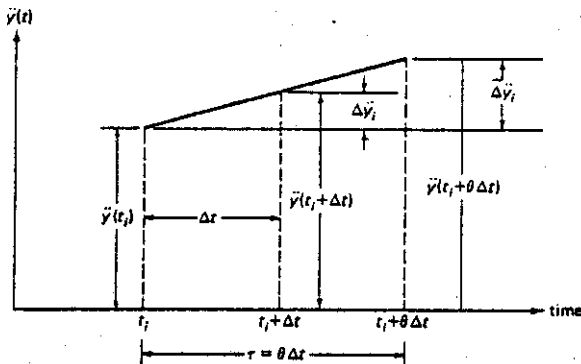
F_{Di} و نیروهای ارتجاعی و میرایی در گره i و j و Δy_j و $\Delta \dot{y}_j$ به جایی و سرعت در این گره می باشند.

۱۹-۲- روش ویلسون- θ

انتگرال گیری از معادلات غیر خطی حرکت به روش شتابهای خطی با گام تعمیم یافته ویلسون، که قبلاً بیان شده، بر این اساس است که شتاب را می توان در فاصله $\tau = \theta \Delta t$ ، با یک تابع خطی مطابق شکل (۱۹-۲) نمایش داد. با توجه به این شکل داریم:

1- Wilson - θ method

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_i + \frac{\hat{\Delta}\tilde{y}_i}{\tau}(t - t_i) \quad (8-19)$$



شکل (۸-۱۹): فرض شتاب خطی در گام تعمیم یافته ویلسون

در رابطه (۴-۱۹) داده شده است. پس از دو بار انتگرال گیری از این رابطه داریم:

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_i + \tilde{y}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{\hat{\Delta}\tilde{y}_i}{\tau}(t - t_i)^2 \quad (9-19)$$

$$y(t) = y_i + \dot{y}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \tilde{y}_i(t - t_i)^2 + \frac{1}{6} \frac{\hat{\Delta}\tilde{y}_i}{\tau}(t - t_i)^3 \quad (10-19)$$

از محاسبه روابط (۹-۱۹) و (۱۰-۱۹) در پایان گام تعمیم یافته $t = t_i + \tau$ داریم:

$$\hat{\Delta}\dot{y}_i = \tilde{y}_i\tau + \frac{1}{2} \hat{\Delta}\tilde{y}_i\tau \quad (11-19)$$

$$\hat{\Delta}y_i = \dot{y}_i\tau + \frac{1}{2} \tilde{y}_i\tau^2 + \frac{1}{6} \hat{\Delta}\tilde{y}_i\tau^2 \quad (12-19)$$

حال $\hat{\Delta}\tilde{y}_i$ را از رابطه فوق محاسبه و در (۱۱-۱۹) جایگزین می‌سازیم؛ پس:

$$\hat{\Delta}\tilde{y}_i = \frac{6}{\tau^2} \hat{\Delta}y_i - \frac{6}{\tau} \dot{y}_i - 3\tilde{y}_i \quad (13-19)$$

$$\hat{\Delta}\tilde{y}_i = \frac{3}{\tau} \hat{\Delta}y_i - 3\dot{y}_i - \frac{\tau}{2} \tilde{y}_i \quad (14-19)$$

و بالاخره از جایگزین ساختن این روابط در معادله نموی حرکت (۱۹-۱) رابطه ای برای
نموی جا به جایی^۱ به دست می آید.

$$\bar{K}_i \Delta y_i = \Delta F_i \quad (15-19)$$

که در آن:

$$\bar{K}_i = K_i + \frac{6}{\tau^2} M + \frac{3}{\tau} C_i \quad (16-19)$$

$$\Delta F_i = \hat{\Delta} F_i + M \left(\frac{6}{\tau} \dot{y}_i + 3\ddot{y}_i \right) + C_i \left(3\dot{y}_i + \frac{\tau}{2} \ddot{y}_i \right) \quad (17-19)$$

رابطه (۱۵-۱۹) مشابه معادله نموی تعادل استاتیکی است و نمودهای جا به جایی Δy_i
را می توان با حل يك دستگاه معادلات خطی به دست آورد.

برای تعیین نمودهای شتاب در گام تعمیم یافته، مقادیر $\hat{\Delta} y_i$ مذکور را در رابطه
(۱۲-۱۹) می نهیم. آنگاه نمود شتاب $\hat{\Delta} \ddot{y}_i$ در گام معمولی Δt از رابطه درون یابی خطی
زیر حاصل می شود:

$$\Delta \ddot{y} = \frac{\hat{\Delta} \ddot{y}}{\theta} \quad (18-19)$$

نمودهای سرعت و جا به جایی در گام معمولی Δt با استفاده از روابط (۱۱-۱۹) و
(۱۲-۱۹) و با جایگزینی Δt به جای τ به دست می آید:

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{y}_i \Delta t \quad (19-19)$$

$$\Delta y_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{y}_i \Delta t^2 \quad (20-19)$$

و بالاخره مقادیر جا به جایی و سرعت در پایان گام معمولی از روابط زیر به دست
می آیند:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (21-19)$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \quad (22-19)$$

همانگونه که در فصل ۷ در مورد دستگاههای تک درجه آزادی بیان شد، شتاب اولیه

1- Incremental displacement

برای گام بعدی می باید از شرایط تعادل دینامیکی در زمان $t + \Delta t$ به دست آید، پس:

$$\ddot{y}_{i+1} = M^{-1} [F_{i+1} - C_{i+1}\dot{y}_{i+1} - K_{i+1}y_{i+1}] \quad (22-19)$$

حاصلضربهای $C_{i+1}\dot{y}_{i+1}$ و $K_{i+1}y_{i+1}$ بردارهای نیروی حاصل از میرایی و سختی در پایان گام $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ می باشند. پس از تعیین بردارهای جا به جایی، سرعت و شتاب در لحظه t_{i+1} ، مراحل فوق برای گامهای بعدی عیناً تکرار می شود.

روش شتاب خطی گام به گام، همان طور که در مورد دستگاههای تک درجه بحث شد، دارای دو تقریب اساسی

است: ۱- تغییرات شتاب در هر گام خطی فرض می شود؛ ۲- سختی و میرایی سازه در ابتدای هر گام محاسبه و در طول آن گام ثابت فرض می شود. الگوریتم انتگرال گیری یک سیستم خطی به روش ویلسون - θ در بخش های بعدی بحث شده و بدنبال آن در بخش دیگر کاربرد این روش در سازه های خطی ارائه خواهد گردید.

۱۹-۳- الگوریتم حل گام به گام دستگاههای خطی به کمک روش انتگرال گیری ویلسون - θ

۱۹-۳-۱- شروع^۱

(شامل مراحل زیر)

(۱) تشکیل ماتریس های سختی، جرم و میرایی سیستم؛

(۲) تعیین مقادیر اولیه جا به جایی y_0 ، سرعت \dot{y}_0 و نیروهای F_0 ؛

(۳) شتاب اولیه \ddot{y}_0 از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$M\ddot{y}_0 = F_0 - C\dot{y}_0 - Ky_0$$

(۴) با انتخاب گام زمانی Δt و فاکتور θ (معمولاً مسازی $1/4$)، ثابتهای

a_1, a_2, a_3, a_4 از روابط زیر محاسبه می شود:

$$\tau = \theta \Delta t, \quad a_1 = \frac{3}{\tau}, \quad a_2 = \frac{6}{\tau}, \quad a_3 = \frac{\tau}{2}, \quad a_4 = \frac{6}{\tau^2}$$

(۵) تشکیل ماتریس سختی مؤثر \bar{K}

$$\bar{K} = K + a_4 M + a_1 C$$

۱۹-۳-۲- در هر گام زمانی

(۱) نمو نیرو ΔF_i برای فاصله زمانی τ_i تا $t_i + \tau$ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\hat{\Delta}F_i = F_{i+1} + (F_{i+2} - F_{i+1})(\theta - 1) - F_i$$

(۲) نمو نیروی موثر $\hat{\Delta}F_i$ را برای گام τ_i تا $t_i + \tau$ از رابطه زیر حساب می‌کنیم:

$$\bar{\Delta}F_i = \hat{\Delta}F_i + (a_2 M + 3C)\dot{y}_i + (3M + a_3 C)\ddot{y}_i$$

(۳) محاسبه نمو جا به جایی $\hat{\Delta}y_i$ از رابطه

$$\bar{K}\hat{\Delta}y_i = \bar{\Delta}F_i$$

(۴) محاسبه نمو شتاب در گام تعمیم یافته τ از رابطه زیر

$$\hat{\Delta}\ddot{y}_i = a_4 \hat{\Delta}y_i - a_2 \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i$$

(۵) محاسبه نمو شتاب در گام معمولی

$$\Delta\ddot{y} = \frac{\hat{\Delta}\ddot{y}_i}{\theta}$$

(۶) محاسبه نموهای سرعت و جابجایی $\Delta\dot{y}_i, \Delta y_i$ در فاصله τ_i تا $t_i + \Delta t$ از روابط

$$\Delta\dot{y}_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\ddot{y}_i \Delta t$$

$$\Delta y_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta\ddot{y}_i \Delta t^2$$

(۷) محاسبه سرعت و جا به جایی در لحظه $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ با استفاده از

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta\dot{y}_i$$

(۸) در لحظه $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ مستقیماً از رابطه حرکت به دست می‌آید

$$M\ddot{y}_{i+1} = F_{i+1} - C\dot{y}_{i+1} - Ky_{i+1}$$

مثال (۱۹-۱): پاسخ ساختمان دو طبقه شکل (۱۹-۳) را تحت نیروی 10 Kips که ناگهان

در طبقه دوم اعمال شده است محاسبه نمایید. از میرایی صرف نظر شده و رفتار

کاملاً ارتجاعي فرض شود.

معادلات حرکت این سازه عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

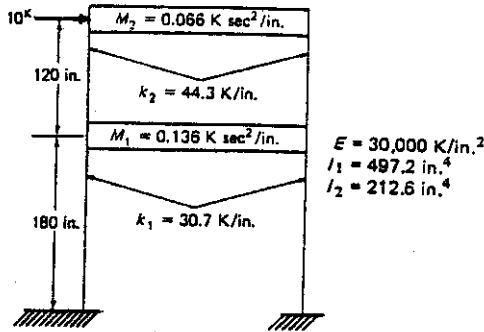
و برای ارتعاش آزاد داریم:

$$\begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جایگزینی $y_i = a_i \sin \omega t$ به مساله ویژه می‌انجامد:

از میرایی صرف نظر شده است

$$\begin{bmatrix} 75.0 - 0.13\omega^2 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 - 0.066\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



شکل (۳-۱۹): ساختمان در طبقه مثالهای (۱-۱۹) و (۲-۱۹)

و در نتیجه

$$\begin{vmatrix} 75 - 0.136\omega^2 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 - 0.066\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

از بسط این دترمینان

$$\omega^4 - 1222.68\omega^2 + 151516 = 0$$

و از حل این معادله

$$\omega_1^2 = 139.94 \quad , \quad \omega_2^2 = 1082.0$$

بنابراین، فرکانسهای طبیعی عبارتند از:

$$\omega_1 = 11.83 \text{ rad / sec} \quad , \quad \omega_2 = 32.90 \text{ rad / sec}$$

و یا

$$f_1 = 1.883 \text{ cps} \quad , \quad f_2 = 5.237 \text{ cps}$$

و

$$T_1 = 0.531 \text{ sec} \quad , \quad T_2 = 0.191 \text{ sec}$$

شتاب اولیه از رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_{10} \\ \ddot{y}_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

که

$$\ddot{y}_{10} = 0$$

$$\ddot{y}_{20} = 151.51 \text{ in / sec}^2$$

$$\Delta t = \frac{1}{\tau}$$

بافرض $\Delta t = 0.02$ ، $\theta = 1.4$ و $\tau = \theta \Delta t = 0.028$ ثابتهای صورت زیر محاسبه میشوند:

$$a_1 = \frac{3}{\tau} = 107.14 \quad , \quad a_3 = \frac{\tau}{2} = 0.014$$

$$a_2 = \frac{6}{\tau} = 214.28 \quad , \quad a_4 = \frac{6}{\tau^2} = 7653$$

سختی موثر عبارت است از:

$$\bar{K} = K + a_4 M + a_1 C \quad (C = 0)$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 75.0 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 \end{bmatrix} + 7653 \begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1115.8 & -44.3 \\ -44.3 & 549.4 \end{bmatrix}$$

و نیروی موثر:

$$\bar{\Delta F} = \Delta F + (a_2 M + 3C)\dot{y} + (3M + a_3 C)\ddot{y}$$

$$\bar{\Delta F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 214.28 \begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 151.51 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Delta F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه $\hat{\Delta y}$ از $\bar{K} \hat{\Delta y} = \bar{\Delta F}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1115.8 & -44.3 \\ -44.3 & 549.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta y}_1 \\ \hat{\Delta y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\Delta y} = \begin{bmatrix} 0.002175 \\ 0.054780 \end{bmatrix} \quad \text{ساده سیزده}$$

از حل رابطه (۱۹-۱۳) بر حسب $\hat{\Delta y}$

$$\hat{\Delta \ddot{y}} = 7653 \begin{bmatrix} 0.002175 \\ 0.054780 \end{bmatrix} - 214.28 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 151.51 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\Delta \ddot{y}} = \begin{bmatrix} 16.645 \\ -35.299 \end{bmatrix}$$

انگاه

$$\Delta \ddot{y} = \frac{\hat{\Delta \ddot{y}}}{\theta} = \frac{1}{1.4} \begin{bmatrix} 16.647 \\ -35.299 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.891 \\ -25.21 \end{bmatrix}$$

از رابطه (۱۹-۱۹)

$$\Delta \dot{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 151.51 \end{bmatrix} (0.02) + \frac{0.02}{2} \begin{bmatrix} 11.891 \\ -25.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1189 \\ 2.7781 \end{bmatrix}$$

از رابطه (۱۹-۲۰)

$$\Delta y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0.02) + \frac{(0.02)^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 151.51 \end{bmatrix} + \frac{(0.02)^2}{6} \begin{bmatrix} 11.891 \\ -25.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0008 \\ 0.0286 \end{bmatrix}$$

از روابط (۱۹-۲۱) و (۱۹-۲۲)

$$\{y_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0008 \\ 0.0286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0008 \\ 0.0286 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\{\bar{y}_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1189 \\ 2.7781 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1189 \\ 2.7781 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

سی در جدول زیر در جدول (۱۹-۲۳)

$$\begin{bmatrix} 0.136 & 0 \\ 0 & 0.066 \end{bmatrix} \{\bar{y}_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 75.0 & -44.3 \\ -44.3 & 44.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0008 \\ 0.0286 \end{bmatrix} \quad \text{(۱۹-۲۳)}$$

که از آن

$$\{\bar{y}_2\} = \begin{bmatrix} 8.875 \\ 132.85 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

روابط (الف)، (ب) و (ج) مقادیر جا به جایی، شتاب و سرعت را برای اولین حلقه انتگرال گیری در لحظه $t_2 = t_1 + \Delta t$ به دست می دهند. لامه این محاسبات در مثال (۱۹-۲)، با استفاده از برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

۱۹-۴- برنامه ۱۵- امتحان زیربرنامه STEPМ

زیربرنامه STEPМ، انتگرال گیری معادلات حرکت دستگاههای خطی را به روش شتاب خطی ویلسون- θ ، انجام می دهد. برنامه اصلی ماتریسهای سختی، جرم و میرایی سیستم را برای این زیربرنامه فراهم می سازد. ورودیهای این زیر برنامه عبارتند از: مقدار θ ، گام زمانی Δt ، حداکثر زمان محاسبه TMAX و عناصر بردارهای نیروهای گزهی بر حسب زمان.

اساس این زیربرنامه بر الگوریتم بخش قبل استوار است. تغییرهای اصلی این برنامه به همراه علائم جبری مربوط در جدول (۱۹-۱) و داده های ورودی و فرمت آنها در جدول (۱۹-۲) نشان داده شده است.

این برنامه با درون یابی، مقادیر نیروهای گزهی را در گامهای Δt محاسبه می کند. در طول برنامه، با استمرار جملات راهنما، درک آنچه در هر بخش از برنامه انجام می شود سهل تر شده است. خروجی شامل جدولی است که پاسخ هر گره را به صورت جا به جایی، سرعت و شتاب در گامهای Δt تا لحظه تعیین شده TMAX به

جدول (۱-۱۹): متغیرها و علامت زیربرنامه STEPМ

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
SK(I,J)	[K]	ماتریس سختی دستگاه
SM(I,J)	[M]	ماتریس جرم دستگاه
SC(I,J)	[C]	ماتریس میرایی دستگاه
ND	N	تعداد درجه آزادی
THETA	θ	ضریب ویلسون- θ
DT	Δt	گام زمانی برای انتگرال گیری
TMAX		حداکثر زمان برای انتگرال گیری
NEQ(L)		تعداد نقاط داده ها برای محرك در مختصات گرهی (L=1, ND)
TC(I), P(I)	$t_i, F_i(t)$	مقادیر زمان - نیرو

جدول (۲-۱۹): داده های ورودی و فرمتهای برنامه ۱۵

فرمت	متغیرها	زیر برنامه
(I10)	ND	
(8F10.0)	SK(I, J) (read by rows)	Testing
(8F10.0)	SM(I, J) (read by rows)	
(8F10.0)	SC(I, J) (read by rows)	
(3F10.3, 24I2)	THETA DT TMAX NEQ(L)	STEPM
(8F10.2)	TC(I) P(I) (I = 1, NEQ(L)) (one card and continuation cards as need to input the time-force values for every external load)	

دست می دهد. لیست برنامه کامپیوتری زیربرنامه STEPМ به همراه يك برنامه اصلی برای آزمایش آن، در ضمیمه آ بعنوان برنامه ۱۵ آمده است.

مثال (۲-۱۹): برنامه امتحان مربوط به زیربرنامه STEPМ را برای تعیین

پاسخ ساختمان دو طبقه شکل (۳-۱۹) به کار بگیریید. اولین دور انتگرال گیری برای این سازه در مثال (۱-۱۹) انجام گرفت. داده های ورودی لازم مسا له در جدول (۳-۱۹) و خروجیها در جدول (۴-۱۹) آمده است. نتایج این جدول برای دور اول را می توان با محاسبات دستی قبلی مقایسه نمود.

جدول (۳-۱۹): داده های ورودی مثال (۳-۱۹)

لیست داده ها			
2			
75.	-44.3		
-44.3	44.3		
0.136	0.		
0.	0.066		
0.	0.		
0.	0.		
1.400	0.020	0.400	0 2
0.000	10.000	0,400	10.000

جدول (۳-۱۹): نتایج کامپیوتری مثال (۲-۱۹)

THE RESPONSE IS CORD.	TIME	DISPL.	VELOC.	ACC.
1	0.020	0.001	0.119	8.886
2	0.020	0.029	2.778	132.836
1	0.040	0.007	0.533	31.343
2	0.040	0.107	4.911	83.897
1	0.060	0.025	1.405	57.243
2	0.060	0.218	5.978	21.894
1	0.080	0.066	2.685	74.236
2	0.080	0.339	5.923	-31.939
1	0.100	0.134	4.111	72.678
2	0.100	0.449	5.064	-60.432
1	0.120	0.229	5.297	49.555
2	0.120	0.539	3.946	-56.959
1	0.140	0.342	5.875	9.871
2	0.140	0.609	3.124	-27.793
1	0.160	0.458	5.635	-35.066
2	0.160	0.668	2.938	10.584
1	0.180	0.562	4.601	-71.805
2	0.180	0.731	3.377	38.161
1	0.200	0.639	3.031	-89.763
2	0.200	0.806	4.090	39.457
1	0.220	0.682	1.321	-85.142
2	0.220	0.893	4.532	9.826
1	0.240	0.693	-0.133	-62.247
2	0.240	0.982	4.188	-42.495
1	0.260	0.680	-1.077	-31.685
2	0.260	1.054	2.795	-99.378
1	0.280	0.653	-1.483	-6.153
2	0.280	1.087	0.465	-139.725
1	0.300	0.623	-1.535	4.540
2	0.300	1.069	-2.333	-147.611
1	0.320	0.592	-1.546	-2.702
2	0.320	0.995	-4.932	-118.509
1	0.340	0.560	-1.814	-23.111
2	0.340	0.876	-6.702	-61.154
1	0.360	0.517	-2.490	-45.996
2	0.360	0.735	-7.273	5.693
1	0.380	0.458	-3.505	-59.051
2	0.380	0.593	-6.666	60.333
1	0.400	0.376	-4.602	-54.135
2	0.400	0.471	-5.667	88.042
1	0.420	0.275	-5.446	-31.829
2	0.420	0.368	-4.996	-62.325

۱۹-۵- برنامه ۱۶- پاسخ لرزه ای ساختمانهای برشی (SRSB)

در این بخش برنامه ای برای تحلیل ساختمانهای برشی چند طبقه با رفتار ارتجایی - خمیری و میرایی لزج تحت شتاب بلخواه در پی ارائه شده است. این برنامه ترکیبی است از سه برنامه قبلی: (۱) برنامه خمیری - ارتجایی دستگاههای تک درجه (برنامه ۴ در فصل ۷): (۲) پاسخ لرزه ای ساختمانهای برشی ارتجایی بروش تحلیل مدی (برنامه ۷ فصل ۱۱): (۳) زیر برنامه STEPМ با استفاده از روش انتگرال گیری ویلسون-θ برای دستگاههای خطی در این فصل (برنامه ۱۵). زیر برنامه لیست برنامه ۱۶ در ضمیمه I آمده است. این برنامه، زیربرنامه JACOBI (فصل ۱۰) را برای حل مسا له ویژه سیستم در محدوده خطی احضار نموده و آنگاه زیربرنامه DAMP (فصل ۱۲) را برای تعیین ماتریس میرایی سیستم از ضرائب میرایی تعیین شده برای هر مد احضار می کند. متغیرهای اصلی این برنامه در جدول (۱۹-۵) آمده است. داده های ورودی و فرمت مربوط به آن در جدول (۱۹-۶) نشان داده شده است.

جدول (۱۹-۵): متغیرها و علائم برنامه ۱۶

متغیر	علامت در متن کتاب	شرح
SK(I,J)	[K]	ماتریس سختی
SM(I,J)	[M]	ماتریس جرم
SC(I,J)	[C]	ماتریس میرایی
THETA	θ	ضریب ویلسون-θ
DT	Δt	گام زمانی
E	E	ضریب ارتجایی
GR	g	شتاب ثقل
TMAX		حداکثر مدت محاسبه
NEQ(L)	NT	تعداد نقاط داده ها برای محرك
ND	N	تعداد درجه آزادی
IFPR		برای چاپ اندیس زیربرنامه ژاکوبی: ۱- مقادیر ویژگی و در مراحل تکراری چاپ میکند ← چاپ نمی کند
SI	I	ممان اینرسی ستونها در طبقات
SL	L	ارتفاع طبقات
SM(I,I)	M	جرم طبقات
PM	M _p	لنگر خمیری طبقه
TC(I), P(I)	t _i , F _i	مقدار لحظه ای شتاب (در لحظه i ام)
XSI(I)	ξ _i	نسبت میرایی مدی

1- Seismic Response of shear Buildings

جدول ۱۹-۶ داده های ورودی و فرمت آنها رای برنامه ۱۶

فرمت	متغیرها
(2F10.2, 3F10.0, 3I5)	THETA DT E GR TMAX NEQ ND IFPR
(8F10.0)	SI SL SM(I, I) PM (one card per degree of freedom)
(8F10.2)	TC(L) P(L) (L = 1, NEQ)
(8F10.3)	XIS(L) (L = 1, ND)

مثال ۱۹-۳- با استفاده از برنامه ۱۶، پاسخ ساختمان برشی دو طبقه مثال ۱۹-۲ را تحت یک شتاب پی ثابت $g/2$ بدست آورید. لنگر خمیری ستونهای طبقات اول و دوم برابر $M_p = 254942 \text{ lb.in}$ می باشد.

صورت داده های ورودی و نتایج کامپیوتری (تا لحظه ثانیه $t = 0.2$) در جدول ۱۹-۷ داده شده است.

جدول ۱۹-۷ داده های ورودی و نتایج کامپیوتری مثال ۱۹-۳

Input Data				
1.400	0.001300000000.000	386.000	0.047	2 2 0
497.20	180.00	136.00	254942.	
212.60	120.00	66.00	254942.	
EIGENVALUES				
0.81323D-01	0.92402D-01			
EIGENVECTORS				
0.64370E-01	-0.56652E-01			
0.81323E-01	0.92402E-01			
THE DAMPING MATRIX IS				
0.0000D 00	0.0000D 00			
0.0000D 00	0.0000D 00			
0.000	0.280	0.047	0.280	

THE RESPONSE IS

CORD.	TIME	DISPL.	VELOC.	ACC.
1	0.001	-0.0001	-0.1081	-108.0678
2	0.001	-0.0001	-0.1081	-108.0800
1	0.002	-0.0002	-0.2161	-108.0312
2	0.002	-0.0002	-0.2162	-108.0800
1	0.003	-0.0005	-0.3241	-107.9703
2	0.003	-0.0005	-0.3242	-108.0799
1	0.004	-0.0009	-0.4320	-107.8850

بقیه جدول (۷-۱۹): داده های ورودی و نتایج کامپیوتری مثال (۳-۱۹)

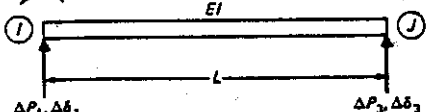
CORD.	TIME	DISPL.	VELOC.	ACC.
2	0.004	-0.0009	-0.4323	-108.0798
1	0.005	-0.0014	-0.5399	-107.7755
2	0.005	-0.0014	-0.5404	-108.0795
1	0.006	-0.0019	-0.6476	-107.6417
2	0.006	-0.0019	-0.6485	-108.0791
1	0.007	-0.0026	-0.7551	-107.4838
2	0.007	-0.0026	-0.7566	-108.0783
1	0.008	-0.0035	-0.8625	-107.3019
2	0.008	-0.0035	-0.8646	-108.0771
1	0.009	-0.0044	-0.9697	-107.0959
2	0.009	-0.0044	-0.9727	-108.0754
1	0.010	-0.0054	-1.0767	-106.8662
2	0.010	-0.0054	-1.0808	-108.0731
1	0.011	-0.0065	-1.1834	-106.6127
2	0.011	-0.0065	-1.1889	-108.0699
1	0.012	-0.0078	-1.2899	-106.3356
2	0.012	-0.0078	-1.2969	-108.0657
1	0.013	-0.0091	-1.3961	-106.0351
2	0.013	-0.0091	-1.4050	-108.0604
1	0.014	-0.0106	-1.5020	-105.7113
2	0.014	-0.0106	-1.5130	-108.0537
1	0.015	-0.0121	-1.6075	-105.3645
2	0.015	-0.0122	-1.6211	-108.0455
1	0.016	-0.0138	-1.7127	-104.9947
2	0.016	-0.0138	-1.7291	-108.0354
1	0.017	-0.0155	-1.8175	-104.6023
2	0.017	-0.0156	-1.8372	-108.0233
1	0.018	-0.0174	-1.9219	-104.1873
2	0.018	-0.0175	-1.9452	-108.0089
1	0.019	-0.0194	-2.0258	-103.7501
2	0.019	-0.0195	-2.0532	-107.9919
1	0.020	-0.0215	-2.1294	-103.2909
2	0.020	-0.0216	-2.1612	-107.9721

۱۹-۶- رفتار ارتجاعی - خمیری قابها

نحوه تحلیل دینامیکی قابها در حیطه خطی در فصل ۱۵ تشریح شد. برای تعمیم این روش به حیطه غیر خطی، لازم است ماتریس سختی عضو ارتجاعی - خمیری را بنویسیم. آنگاه می توان با انتگرال گیری گام به گام از معادلات حرکت تحلیل را به انجام رساند. در فاصله هر گام سازه خطی فرض میشود اما در گام بعدی خواص عضو بر حسب پاسخ سازه اصلاح می گردد. آنگاه پاسخ غیر خطی از توالی گامها بدست می آید. در هر گام، سختی سازه بر اساس لنگرهای عضو در لحظه آغازین آن گام محاسبه می شود. بردار نموجابجایی بوسیله انتگرال گیری معادلات حرکت در طول گام جدید محاسبه شده و از جمع این مقادیر با مقادیر جابجایی در آخرین گام، جابجایی کل بدست می آید. همچنین، از ضرب بردار نموجابجایی در ماتریس سختی عضو نیروها و لنگرهای عضو حاصل می شود. از مقایسه این نیروها با مقادیر حدی شان، وضعیت ماتریس سختی در گام بعدی مشخص می شود.

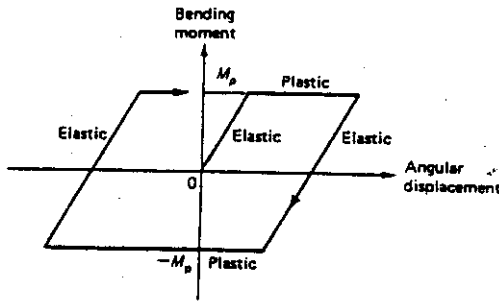
۱۹-۷- ماتریس سختی عضو

چنانچه فقط تغییر شکل های خمشی را در نظر بگیریم، رابطه لنگر-جابجایی (جابجایی خمشی) عضو خمشی (شکل ۱۹-۴) خطی در رابطه ۱۴-۲۰ آمده که بشکل نموی نیلاً آورده ایم:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \end{bmatrix} \quad (۱۹-۲۴)$$


شکل ۱۹-۴: نمایشی از نمو نیروهای انتهایی و نموجابجایی ها در يك عضو تیر

که در آن ΔP_i و $\Delta \delta_i$ نمو نیروها و جابجایی های گرهی عضو می باشند. هنگامی که لنگر در يك انتهای عضو به مقدار حدی M_p می رسد، در آن انتها لولا تشکیل می شود. با فرض اینکه رابطه لنگر-چرخش در انتهای عضو مطابق شکل ۱۹-۵ از نوع ارتجاعی-خمیری باشد، لولا قابلیت تحمل لنگری بیش از M_p را نداشته و تحت



شکل ۱۹-۵: رابطه ارتجاعی - خمیری بین لنگر خمشی و چرخش در مقطع یک تیر
 یک لنگر ثابت مدارماً تغییر شکل می دهد. با آغاز کاسته شدن از چرخش عضو، رفتار آن طبق شکل ۱۹-۵ به حالت خطی باز می گردد. در اینجا تشابه کامل رفتار چنین خمیری را با فنر ارتجاعی - خمیری شکل ۷-۴ مشاهده می کنیم.
 ماتریس سختی یک عضو خمشی با یک لولای انتهائی طبق رابطه ۱۴-۱۶ برابر است با:

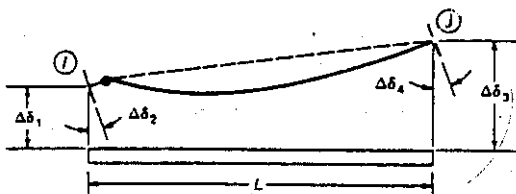
$$k_{ij} = \int_0^L EI \Psi_i'(x) \Psi_j'(x) dx \quad (19-20)$$

$\Psi_j(x)$ و $\Psi_i(x)$ توابع جابجائی می باشند. برای یک عضو با مقده ثابت که مطابق شکل ۱۹-۶ لولاد در انتهای i ایجاد شده باشد، توابع جابجائی تحت حرکت واحد در مختصات گرهی برابر است با:

$$\Psi_1(x) = 1 - \frac{3x}{2L} + \frac{x^3}{2L^3} \quad (19-26 \text{ الف})$$

$$\Psi_2(x) = 0 \quad (19-26 \text{ ب})$$

$$\Psi_3(x) = \frac{3x}{2L} - \frac{x^3}{2L^3} \quad (19-26 \text{ ج})$$



شکل ۱۹-۶: شکل هندسی تیر با لولای خمیری در i

$$\Psi_4(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2L^2} \quad (19-26)$$

برای مثال، برای محاسبه k_{11} مشتق دوم $\Psi_1(x)$ را از (19-26 الف) در می گذاریم و

$$k_{11} = EI \int_0^L \left(\frac{3x}{L^2} \right)^2 dx = \frac{3EI}{L^3} \quad (19-27)$$

به همین ترتیب هم ضرایب سختی با لولای انتهایی در از رابطه (19-25) با نهادن توابع جابجایی (19-26) بدست می آیند که در قالب نموی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \end{bmatrix} \quad (19-28)$$

باید توجه داشت که $\Delta \delta_2$ نمو چرخش گره A در قالب است و نمو چرخش عضو در انتهای A نمی باشد. بنابراین این نمو چرخش لولای خمیری از تفریق $\Delta \delta_2$ و چرخش عضو در انتهای A بدست می آید که نحوه محاسبه آن در بخش بعدی خواهد آمد. برای لولای خمیری در انتهای B بطور مشابه رابطه زیر بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 0 \\ 3L & 3L^2 & -3L & 0 \\ -3 & -3L & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \end{bmatrix} \quad (19-29)$$

و چنانچه لولای خمیری در هر دو انتها ایجاد شود، ماتریس سختی صفر می شود.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \end{bmatrix} \quad (19-30)$$

۸-۱۹- چرخش لولاهای خمیری

در جریان تحلیل، لازم است مقدار لنگرهای انتهایی امضاء را در پایان هر گام محاسبه کرد تا معلوم شود لولای خمیری ایجاد شده است یا خیر. برای این منظور می باید از رابطه نموی لنگر - چرخش را در نظر گرفت. همچنین می باید اطمینان حاصل کرد که چرخش خمیری گره با علامت لنگر همساز باشد زیرا در غیر اینصورت لولا

حذف و عضو به حالت ارتجایی در می آید.

مدل رفتار عضو مطابق شکل (۱۹-۰) می باشد که برشرایط زیر استوار است:

- (۱) لنکر نمی تواند از حد تسلیم فراتر رود
 - (۲) چنانچه لنکر کمتر از حد تسلیم باشد لولا می تواند بچرخد (و حذف شود)
 - (۳) در صورتیکه لنکر به حد تسلیم برسد لولا می تواند در جهت لنکر اعمال شده بچرخد
 - (۴) چنانچه لولا شروع به چرخش در خلاف جهت لنکر اعمال شده کرده باید حذف شود.
- نمو چرخش لولا از تفریق نمو های چرخش گره قاب و انتهای عضو بدست می آید. مثلاً چنانچه مطابق شکل (۱۹-۶) فقط در آ لولا تشکیل شوهه نمو چرخش گرهی برابر $\Delta\delta_2$ و نمو چرخش عضو در آ در اثر چرخش $\Delta\delta_4$ در گره زیوایر $\Delta\delta_4/2$ و در اثر اختلاف جابجائی های انتقالی $\Delta\delta_1$ و $\Delta\delta_3$ برابر $\frac{1.5(\Delta\delta_3 - \Delta\delta_1)}{L}$ می باشد. سپس نمو

چرخش لولای خمیری برابر است با:

$$\Delta p_i = \Delta\delta_2 + \frac{1}{2}\Delta\delta_4 - 1.5 \frac{\Delta\delta_3 - \Delta\delta_1}{L} \quad (۱۹-۳۱)$$

و بهمین ترتیب چنانچه مطابق شکل ۱۹-۷ لولا در انتهای ز ایجاد شود، نمو چرخش آن

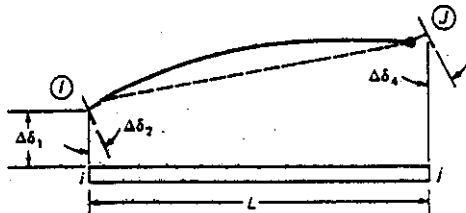
$$\Delta p_j = \Delta\delta_4 + \frac{1}{2}\Delta\delta_2 - 1.5 \frac{\Delta\delta_3 - \Delta\delta_1}{L} \quad (۱۹-۳۲)$$

و بالاخره برای حالتی که در هر دو انتها لولا ایجاد شود باتوجه به شکل (۱۹-۸):

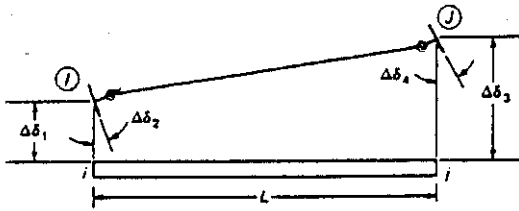
$$\Delta p_i = \Delta\delta_2 - \frac{\Delta\delta_3 - \Delta\delta_1}{L} \quad (۱۹-۳۳)$$

$$\Delta p_j = \Delta\delta_4 - \frac{\Delta\delta_3 - \Delta\delta_1}{L} \quad (۱۹-۳۴)$$

[توضیح مترجم - در چاپ اصلی در روابط (۱۹-۳۲) و (۱۹-۳۴) بجای $\Delta\delta_2$ و $\Delta\delta_4$ بترتیب $\Delta\delta_1$ و $\Delta\delta_2$ آمده است به نظر مترجم صحیح نیامد و اصلاح شد]



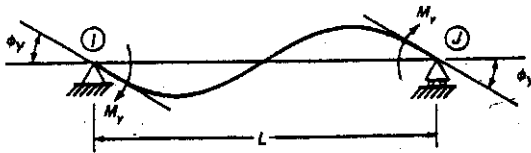
شکل ۱۹-۷: شکل هندسی تیر با لولای خمیری در ز



شکل ۱۹-۸: شکل هندسی تیر با لولای خمیری دوهردو انتهای

۹-۱۹- محاسبه نسبت نرمی عضو

تغییر شکل غیر خطی عضو از تقسیم چرخش انتهایی اوج بر حد چرخشی ارتجاعی بدست می آید. حد چرخش ارتجاعی ϕ_y از حالت بارگذاری متقارن معکوس در شکل (۹-۱۹) بدست می آید.



شکل ۹-۱۹: تعریف دوران برای یک عضو تسلیم یافته تیر

$$\phi_y = \frac{M_y L}{6EI} \quad (25-19)$$

نسبت نرمی عضو مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mu = \frac{\phi_y + p_{max}}{\phi_y} \quad (26-19)$$

که از جایگزینی ϕ_y

$$\mu = 1 + \frac{6EI}{M_y L} p_{max} \quad (27-19)$$

p_{max} چرخش اوج لولاهای خمیری است.

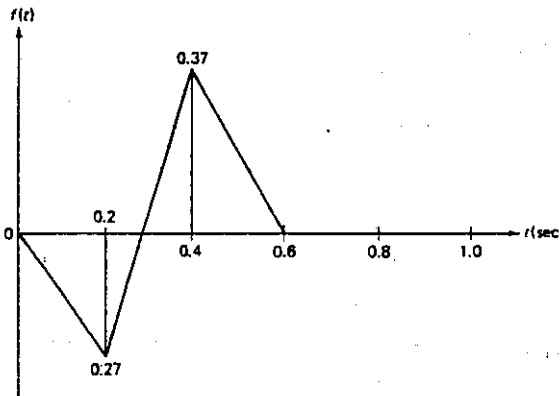
برای بدست آوردن پاسخ غیر خطی سازه های چند درجه باید از معادلات حرکت انتگرال گیری کرد. برای اینکار روش های گوناگونی وجود دارد. در این فصل روش گام به گام با شتاب خطی و ضریب اصلاح ویلسون تشریح شد. این روش همواره پایدار بوده و خطاهای عددی فارغ از اینکه اندازه گام چقدر باشد در دوره های تکراری عملیات انباشته نمی شوند. اساس روش ویلسون بر این است که تغییرات شتاب در گام تعمیم یافته $\tau = \theta \Delta t$ خطی است. برای دستیابی قطعی به پایداری باید $\theta \geq 1.38$ باشد. برنامه فرعی STEPMP برای انتگرال گیری عددی دستگاههای خطی در ضمیمه تحت عنوان برنامه ۱۵ آمده است. در این فصل همچنین برنامه SRSB غیر خطی سازه های پرشی چند درجه یا رفتار ارتجاعي-خمیری تشریح شد و صورت آن تحت عنوان برنامه ۱۶ در ضمیمه آمده است.

در انتهای این فصل ماتریس سختی بار رفتار ارتجاعي - خمیری داده شده و نیز روابطی برای محاسبه چرخش لولاهای خمیری و تعیین نسبت نرمی اعضاء ارائه گردیده است.

مسائل

۱۹-۱- ماتریس های جرم و سختی يك سازه دو درجه در زیر آمده است.

$$[K] = \begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 50 \end{bmatrix} (\text{kip/in}) \quad [M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\text{kip}\cdot\text{sec}^2/\text{in})$$



شکل م (۱-۱۹)

با استفاده از برنامه ۱۵ (STEPM) پاسخ سازه را تحت این نیرو حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 772 \\ 386 \end{bmatrix} f(t) \text{ kip}$$

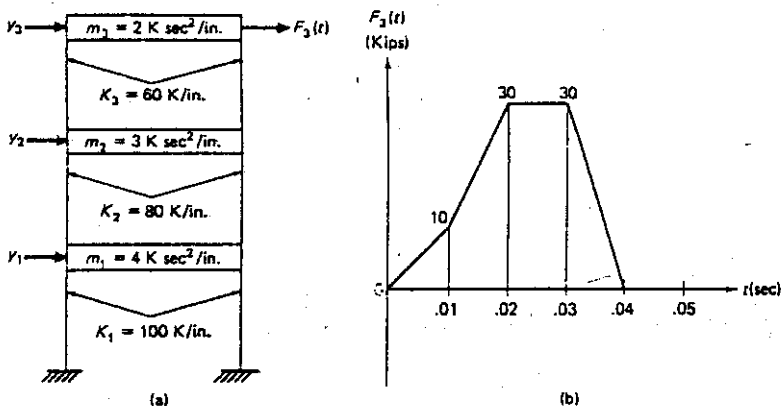
که $f(t)$ را در شکل نشان داده ایم. از میراثی صوف نظر شود.

۲-۱۹- مساله قبلی را با احتساب اثر میراثی زیر حل کنید.

$$[C] = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \text{ kip.sec/in}$$

۳-۱۹- با استفاده از برنامه ۱۵ (STEPM) پاسخ سازه برشی سه طبقه را تحت نیروی

$F_3(t)$ در شکل بدست آورید. از میراثی چشم پوشی شود.



شکل م (۳-۱۹)

۴-۱۹- مساله ۳-۱۹ را با احتساب ۱۰٪ میراثی حل کنید.

۵-۱۹- بکمک برنامه ۱۶ (SRSB) پاسخ ارتجاعي سازه مساله ۱-۱۹ را تحت شتاب پی $f(t)$

مشابه شکل م (۱-۱۹) بدست آورید. برای محاسبه پاسخ ارتجاعي لازم است لنگر

خمیری را بسیار بزرگ گرفت مثلاً $(PM=10^8 \text{ K.in})$

۶-۱۹- مساله ۵-۱۹ را با این فرض حل کنید که لنگر خمیری هر طبقه برابر نصف

لنگر حاصل از تحلیل ارتجاعي باشد. از میراثی صرف نظر کنید.

۷-۱۹- مساله ۶-۱۹ را با احتساب میراثی مذکور در مساله ۲-۱۹ حل کنید.

۸-۱۹- بکمک برنامه ۱۶ (SRSB) پاسخ خطی سازه مساله ۳-۱۹ را تحت شتاب پی $f(t)$

مطابق شکل م (۱-۱۹) محاسبه کنید. از میراثی اغماض شود.
۱۹-۹- مسأله ۱۹-۸ را با این فرض حل کنید که لنگر خمیری هر طبقه نصف لنگر
حاصل از تحلیل ارتجاعی است.

بخش IV

سازه های مدل شده با
خواص گسترده

فصل بیستم

تحلیل دینامیکی سیستم های

باخواص گسترده^۱

1) distributed

تحلیل دینامیکی سازه های با خواص متمرکز^۲ و مختصات مجزا^۳ در قسمت آ برای سیستمهای یک درجه آزادی و در قسمتهای II و III برای سیستمهای چند درجه آزادی ارائه شد. مدل سازی سازه ها با مختصات مجزا شیوه ای عملی برای تحلیل سازه ها تحت بارهای دینامیکی می باشد؛ لیکن نتایج حاصل از این مدلهاى مجزا صرفاً جوابی تقریبی از رفتار دینامیکی واقعی سیستمهای با خواص گسترده و درجات آزادی نامحدود رایبه دست می دهد.

در این فصل نظریه دینامیک تیرها و میله ها با سختی و جرم گسترده مطالعه خواهد شد. برای آنها معادلات دیفرانسیل جزئی بر حرکت حاکم می باشد. انتگرال گیری از این معادلات به طور کلی پیچیده تر از معادلات معمولی حاکم بر سیستمهای مجزاست. به علت همین پیچیدگی ریاضی، تحلیل سازه به عنوان یک سیستم پیوسته با خواص گسترده در عمل محدود می باشد. مع هذا در موارد خاصی، تحلیل سیستمهای پیوسته به آسانی انجام می شود و پایه ارزیابی دقت مدلهاى مجزا را فراهم می سازند.

۲-۱- ارتعاش خمشی تیرهای یکنواخت

در این بخش از نظریه خمش ساده تیرها که در مسائل مهندسی متداول است استفاده می شود، در این روش که به برنولی - اولر موسوم است فرض می شود سطح مقطع تیر به هنگام خمش، مسطح باقی می ماند. در شکل (۲-۱) نمودار آزاد قطعه کوچکی از تیر به طول dx تحت نیروهای نشان داده شده را در نظر بگیرید. این نیروها عبارتند از:

نیروهای برشی V و $V + \frac{\partial V}{\partial x} dx$ ، لنگرهای خمشی M و $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$ ، نیروی عرضی $p dx$ ، نیروی ماند $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (\bar{m} dx)$. \bar{m} جرم واحد طول و $p = p(x, t)$ شدت نیروی عرضی است. مشتقات جزئی بدین جهت ظاهر شده اند که نیروها تابع دو عامل: مکان (x) و زمان (t) هستند. اگر جابه جایی تیر کوچک باشد (که هست) انحراف امتداد قطعه مورد نظر از حالت اولیه کوچک است. در این شرایط معادله حرکت قطعه در جهت عمود بر x از تعادل کلیه نیروهای شکل (۲-۱) به دست می آید و یاب به طور ساده تر:

$$V - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) + p(x, t) dx - \bar{m} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

1) lumped parameters

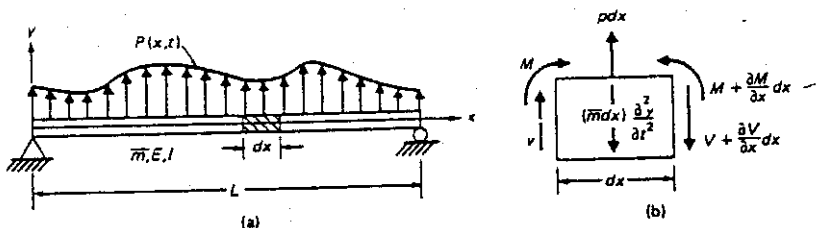
3) discrete models

5) Inertia force

2) discrete coordinates

4) Flexural vibration

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1-20)$$



شکل (۱-۲۰): تیر ساده با جرم و نیروی گسترده

از نظریه خمش ساده تیرها داریم:

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2-20)$$

و

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3-20)$$

E ضریب ارتجاعی یا تنگ و I گشتاورمانند مقطع تیر است. برای تیرهای یکنواخت از ترکیب روابط (۱-۲۰)، (۲-۲۰) و (۳-۲۰) داریم:

$$V = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (4-20)$$

و

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (5-20)$$

ملاحظه می شود که برای تعادل، یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه چهار تشکیل می شود. در محاسبات مذکور فقط جابه جایی های خمشی در نظر گرفته شده و از جابه جایی های ناشی از نیروهای برشی و نیروهای مانند ناشی از چرخش مقطع (اینرسی چرخشی) اضماع شده است. ورود این نیروها معادلات را به طور چشمگیری پیچیده تر می سازند. این معادلات به معادلات «تیموشنکو» موسوم است. در رابطه (۵-۲۰) تاثیر نیروهای محوری تیر نیز در خمش آن در نظر گرفته نشده است. این اثر در فصل ۲۱ بررسی خواهد شد.

۲-۲- حل معادلات حرکت ارتعاش آزاد

برای ارتعاش آزاد $(p(x,t)=0)$ ، معادله $(20-0)$ به یک معادله دیفرانسیل همگن

تبدیل می شود.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (6-20)$$

حل این معادله به روش جداسازی متغیرها انجام پذیر است. در این روش فرض می شود که بتوان جواب را به صورت حاصلضرب تابع مکان $\Phi(x)$ و تابع زمان $f(t)$ نشان داد، یعنی:

$$y(x,t) = \Phi(x)f(t) \quad (7-20)$$

از جایگزینی $(7-20)$ در $(6-20)$

$$EI f(t) \frac{\partial^4 \Phi(x)}{\partial x^4} + \bar{m} \Phi(x) \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8-20)$$

و یا

$$\frac{EI}{\bar{m}} \frac{\Phi^{IV}(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} \quad (9-20)$$

از آنجا که سمت چپ معادله فقط تابع x و سمت راست فقط تابع t است، پس هر دو سمت می باید مساوی مقدار ثابتی باشد وگرنه معادله دارای جواب نیست. این مقدار ثابت را با ω^2 نشان می دهند. پس:

$$\Phi^{IV}(x) - a^4 \Phi(x) = 0 \quad (10-20)$$

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (11-20)$$

که در آن

$$a^4 = \frac{\bar{m} \omega^2}{EI} \quad (12-20)$$

در عمل بهتر است رابطه $(12-20)$ را برحسب ω مرتب سازیم:

$$\omega = C \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}} \quad (13-20)$$

$$C = (aL)^2 \quad \text{که در آن}$$

رابطه $(13-20)$ در واقع همان معادله حرکت آزاد دستگاه تک درجه است که

پاسخ آن در رابطه $(17-1)$ آمده است.

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (14-20)$$

A ، B ثابتهای انتگرال گیری می باشند. برای حل معادله $(10-20)$ فرض کنیم

$$\Phi(x) = Ce^{ax} \quad (15-20)$$

از جایگزینی (15-20) در (10-20)

$$(s^4 - a^4)Ce^{ax} = 0$$

شرط جواب غیربدیهی¹ این معادله عبارت است از:

$$s^4 - a^4 = 0 \quad (16-20)$$

ریشه های این معادله

$$s_1 = a, \quad s_3 = ai \quad (17-20)$$

$$s_2 = -a, \quad s_4 = -ai$$

از جایگزینی هر یک از این ریشه ها در رابطه (15-20) پاسخی برای معادله (10-20)

حاصل می گردد، جواب کلی از ترکیب این چهار پاسخ به دست می آید.

$$\Phi(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{iax} + C_4 e^{-iax} \quad (18-20)$$

C_4, C_3, C_2, C_1 ثابتهای انتگرال گیری می باشند. توابع نمایی در رابطه (18-20) را می

توان به صورت توابع مثلثاتی و هذلولی بیان کرد.

$$e^{\pm iax} = \cosh ax \pm \sinh ax \quad (19-20)$$

$$e^{\pm iax} = \cos ax \pm i \sin ax$$

و از جایگزینی این روابط در (18-20)

$$\Phi(x) = A \sin ax + B \cos ax + C \sinh ax + D \cosh ax \quad (20-20)$$

D, C, B, A ثابتهای جدید انتگرال گیری می باشند. این چهار ضریب، شکل و دامنه

ارتعاش تیر را تعیین می سازند. آنها بر اساس شرایط انتهایی تیر، آنچنانکه

در مثالهای بخش بعدی قده، تعیین می شوند.

۲-۲-۲- فرکانس طبیعی و اشکال مدی تیرهای یکنواخت

۱-۲-۲- تیر با دوانتهای مفصلی

در این حالت جایی ولنگر در دوانتها صفر می باشد. پس شرایط انتهایی

عبارت است از:

$$y(0, t) = 0, \quad M(0, t) = 0$$

$$y(L, t) = 0, \quad M(L, t) = 0$$

با توجه به روابط (19-20) و (20-20)، انعکاس شرایط انتهایی بر تابع شکل $\Phi(x)$ در $x=0$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi''(0) = 0 \quad (21-20)$$

1) Nontrivial

در $x=L$

$$\Phi(L) = 0, \quad \Phi''(L) = 0 \quad (22-20)$$

از جایگزینی دو تایی اول شرایط انتهایی فوق [رابطه (21-20)] در رابطه (20-20)

$$\Phi(0) = A0 + B1 + C0 + D1 = 0$$

$$\Phi''(0) = a^2(-A0 - B1 + C0 + D1) = 0$$

پس:

$$B + D = 0$$

$$-B + D = 0$$

پس:

$$B = D = 0$$

به طور مشابه، از جایگزینی سایر شرایط انتهایی [رابطه (22-20)] در رابطه (20-20)

$$\Phi(L) = A \sin aL + C \sinh aL = 0 \quad (23-20)$$

$$\Phi''(L) = a^2(-A \sin aL + C \sinh aL) = 0$$

که از جمع این دو

$$2C \sinh aL = 0$$

چون تابع هذلولی نمی تواند صفر شود پس $C = 0$ شده و در نتیجه رابطه (23-20) به (20-20)

(24) تبدیل می گردد.

$$A \sin aL = 0 \quad (24-20)$$

پاسخ بدیهی این رابطه، $A = 0$ و پاسخ غیر بدیهی آن

$$\sin aL = 0 \quad (25-20)$$

که جوابهای آن عبارتند از:

$$a_n L = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26-20)$$

از جایگزینی (26-20) در (23-20)

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (27-20)$$

اندیس n درجه فرکانس طبیعی را نشان می دهد.

چون $B = C = D = 0$ ، پس رابطه (20-20) به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\Phi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L}$$

و یا به طور ساده

$$\Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (28-20)$$

حذف ثابت A در رابطه فوق به وسیله ثابتهای دیگری در رابطه زیر جبران شده است. از رابطه (7-20)، شکل مد ارتعاش عبارت است از:

$$y_n(x, t) = \Phi_n(x) f_n(t)$$

و یا از روابط (14-20) و (18-20)

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] \quad (29-20)$$

جواب کلی معادله حرکت ارتعاش آزاد که شرایط انتهایی (21-20) و (22-20) را

ارضا سازد از جمع کلیه مدهای متعامد ارتعاش بدست می آید.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] \quad (20-20)$$

ثابتهای B_n, A_n براساس شرایط اولیه تعیین می شوند. اگر در لحظه آغازین، $t=0$ باشد تابع شکل تیر عبارت است از:

$$y(x, 0) = \rho(x)$$

و سرعت

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \Psi(x)$$

برای $0 \leq x \leq L$ از رابطه (20-20) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \rho(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \Psi(x)$$

بنابراین، آنچنانکه در فصل 5 نشان دادیم، ضرایب قوییه برابرند با:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \rho(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (31-20)$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \Psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

پنج فرکانس اولیه و مدهای مربوط برای تیر دو سر مفصل در جدول (1-20) آمده است.

از نو رابطه اول

$$D = B, C = A \quad (24-20)$$

که اگر در دو رابطه بعدی جایگزین کنیم:

$$(\sinh aL - \sin aL)A + (\cosh aL - \cos aL)B = 0 \quad (25-20)$$

$$(\cosh aL - \cos aL)A + (\sinh aL + \sin aL)B = 0$$

برای به دست آوردن جواب غیربیهی روابط فوق، باید دترمینان ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} \sinh aL - \sin aL & \cosh aL - \cos aL \\ \cosh aL - \cos aL & \sinh aL + \sin aL \end{vmatrix} = 0 \quad (26-20)$$

از بسط این دترمینان معادله فرکانس تیر حاصل می شود که عبارت است از:

$$\cos aL \cdot \cosh aL - 1 = 0 \quad (27-20)$$

پنج فرکانس طبیعی اولیه از جایگزینی ریشه های معادله (27-20) در (12-20)

بدست می آید که در جدول (2-20) نشان داده شده است. برای تعیین مدهای

متعامد مربوطه، $A=1$ فرض شده و ریشه های a_n از معادله (27-20) در رابطه (25-20)

جایگزین می گردد. و این معادلات بر حسب B حل می شود و بالاخره ثابتهای C و D از

رابطه (24-20) همراه با مقدار B در رابطه (2-20) قرار می گیرند. آنگاه

$$\Phi_n(x) = \cosh a_n x + \cos a_n x - \sigma_n (\sinh a_n x + \sin a_n x) \quad (28-20)$$

که

$$\sigma_n = \frac{\cosh a_n L - \cos a_n L}{\sinh a_n L - \sin a_n L} \quad (29-20)$$

2-2-2- هر دو انتها گیردار

شرایط انتهایی تیر دو سر گیردار عبارتست از:

$x = 0$ در

$$y(0,t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi(0) = 0 \quad (30-20)$$

$$y'(0,t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi'(0) = 0$$

و در $x = L$

$$y(L,t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi(L) = 0 \quad (31-20)$$

$$y'(L,t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi'(L) = 0$$

از اعمال شرایط انتهایی (30-20) در رابطه (20-20)

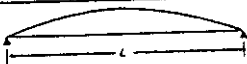
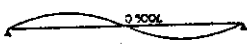
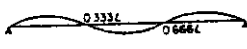
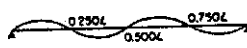
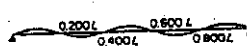
$$B + D = 0, \quad A + C = 0$$

جدول (۱-۲۰): فرکانسهای طبیعی و مدهای متعامد تیرهای دوسرمنصل

فرکانسهای طبیعی

$$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$\Phi_n = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

n	C_n	I_n^*	
1	π^2	$4/\pi$	
2	$4\pi^2$	0	
3	$9\pi^2$	$4/3\pi$	
4	$16\pi^2$	0	
5	$25\pi^2$	$4/5\pi$	

$$*I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$$

۲-۲-۲- هر دو انتهای آزاد (تیر آزاد)

شرایط انتهایی برای یک تیر دو سر آزاد عبارت است از:

در $x = 0$

$$M(0, t) = 0 \quad , \quad \Phi''(0) = 0 \quad (۲۲-۲۰)$$

$$V(0, t) = 0 \quad , \quad \Phi'''(0) = 0$$

در $x = L$

$$M(L, t) = 0 \quad , \quad \Phi''(L) = 0 \quad (۲۳-۲۰)$$

$$V(L, t) = 0 \quad , \quad \Phi'''(L) = 0$$

با نهادن این شرایط در رابطه (۲۰-۲۰)

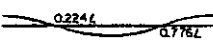
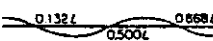


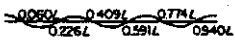
$$\Phi''(0) = a^2(-B + D) = 0$$

$$\Phi'''(0) = a^3(-A + C) = 0$$

$$\Phi''(L) = a^2(-A \sin aL - B \cos aL + C \sinh aL + D \cosh aL) = 0$$

$$\Phi'''(0) = a^3(-A \cos aL + B \sin aL + C \cosh aL + D \sinh aL) = 0$$

جدول (۲۰-۲): فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی تیر آزاد

فرکانسهای طبیعی				اشکال مدی
$\Phi_n(x) = \cosh a_n x + \cos a_n x - \sigma_n(\sinh a_n x + \sin a_n x)$				
$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$C_n = (a_n L)^2$	σ_n	I_n^*	
1	22.3733	0.982502	0.8308	
2	61.6728	1.000777	0	
3	120.9034	0.999967	0.3640	
4	199.8594	1.000001	0	
5	298.5555	1.000000	0.2323	

$$*I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$$

و با اعمال شرایط (۲۰-۴۱)

$$(\cos aL - \cosh aL)B + (\sin aL - \sinh aL)A = 0 \quad (۲۲-۲۰)$$

$$-(\sin aL + \sinh aL)B + (\cos aL - \cosh aL)A = 0$$

که از صفر نمودن دترمینان ضرایب معادله فرکانس به دست می آید:

$$\cos a_n L \cdot \cosh a_n L - 1 = 0 \quad (۲۲-۲۰)$$

اشکال مدی				فرکانسهای طبیعی
$\Phi_n(x) = \cosh a_n x - \cos a_n x - \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x)$				
$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$				
$\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L}$				
n	$C_n = (a_n L)^2$	σ_n	I_n^*	
1	22.3733	0.982502	0.8308	
2	61.6728	1.000777	0	
3	120.9034	0.999967	0.3640	
4	199.8594	1.000001	0	
5	298.5555	1.000000	0.2323	

$$*I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$$

از رابطه اول معادلات (۴۲-۲۰) داریم:

$$A = -\frac{\cos aL - \cosh aL}{\sin aL - \sinh aL} B \quad (۴۴-۲۰)$$

مقدار B دلخواه است. فرکانس طبیعی از جایگزینی ریشه معادلات (۴۳-۲۰) در (۴۲-۲۰) به دست می آید.

$$\omega_n = (a_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (۴۵-۲۰)$$

و مدهای مربوط

$$\Phi_n(x) = \cosh a_n x - \cos a_n x - \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) \quad (۴۶-۲۰)$$

$$\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L} \quad (۴۷-۲۰)$$

پنج فرکانس اول حاصل از روابط (۴۲-۲۰) و (۴۵-۲۰) و مدهای مربوط از رابطه (۴۶-۲۰) در جدول (۳-۲۰) آورده شده است.

۲-۳-۴- یکسر گیردار و یکسر آزاد (تیر طره)

در انتهای گیردار تیر طره ($x = 0$) جابه جایی و شیب صفر است و در انتهای

آزاد، لنگر و برش صفر می باشد. پس شرایط انتهایی عبارتند از:

$$x = 0 \text{ در}$$

$$y(0, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi(0) = 0 \quad (۴۸-۲۰)$$

$$y'(0, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi'(0) = 0$$

$$x = L \text{ در}$$

$$M(L, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi''(L) = 0 \quad (۴۹-۲۰)$$

$$V(L, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi'''(L) = 0$$

از جایگزینی شرایط انتهایی در (۲۰-۲۰)

$$\cos a_n L \cdot \cosh a_n L + 1 = 0 \quad (۵۰-۲۰)$$

هر ریشه این معادله به یکی از فرکانس های طبیعی مربوط می شود.

$$\omega_n = (a_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (۵۱-۲۰)$$

و به يك شكل مدی

$$\Phi_n(x) = (\cosh a_n x - \cos a_n x) - \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) \quad (۵۲-۲۰)$$

که

$$\sigma_n = \frac{\cos a_n L + \cosh a_n L}{\sin a_n L + \sinh a_n L} \quad (۵۳-۲۰)$$

پنج فرکانس اول و اشکال مدی مربوط به تیر طره ای در جدول (۲۰-۴) آمده است.

۲-۳-۵- يك سرگیردار و يك سر مفصل

شرایط انتهایی در این حالت عبارتند از:

$$x = 0 \text{ در}$$

$$y(0, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi(0) = 0 \quad (۵۴-۲۰)$$

$$y'(0, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi'(0) = 0$$

$$x = L \text{ در}$$

$$y(L, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi(L) = 0 \quad (۵۵-۲۰)$$

$$M(L, t) = 0 \quad \text{یا} \quad \Phi''(L) = 0$$

با اعمال شرایط انتهایی در معادله شکل (۲۰-۲۰)

$$\tan a_n L - \tanh a_n L = 0 \quad (۵۶-۲۰)$$

هر ریشه این معادله به یکی از فرکانس های طبیعی مربوط می شود:

جدول (۲-۳): فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی تیرهای طره ای

اشکال مدی

فرکانسهای طبیعی

$$\Phi_n = (\cosh a_n x - \cos a_n x) - \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x)$$

$$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$\sigma = \frac{\cos a_n L + \cosh a_n L}{\sin a_n L + \sinh a_n L}$$

n	$C_n = (a_n L)^2$	σ_n	I_n^*	
1	3.5160	0.734096	0.7830	
2	22.0345	1.018466	0.4340	
3	61.6972	0.999225	0.2589	
4	120.0902	1.000033	0.0017	
5	199.8600	1.000000	0.0707	

$$\omega_n = (a_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (57-2.)$$

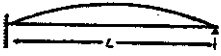

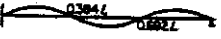

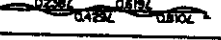
و شکلهای مدی مربوط

$$\Phi_n(x) = (\cosh a_n x - \cos a_n x) + \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) \quad (58-2.)$$

$$\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L} \quad (59-2.)$$

پنج فرکانس اول و اشکال مدی مربوط برای تیرهای یک سر گیردار- یک سر مفصل در جدول (۲-۵) نشان داده شده است.

جدول (۲۰-۰): فرکانسهای طبیعی و اشکال مدی تیرهای یکسر گیردار - یکسر مفصل

				اشکال مدی
فرکانسهای طبیعی				
	$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L}$	$\Phi(x) = \cosh a_n x - \cos a_n x + \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x)$	
n	$C_n = (a_n L)^2$	σ_n	I_n^*	
1	15.4118	1.000777	0.8600	
2	49.9648	1.000001	0.0826	
3	104.2477	1.000000	0.3345	
4	178.2697	1.000000	0.0434	
5	272.0309	1.000000	0.2076	

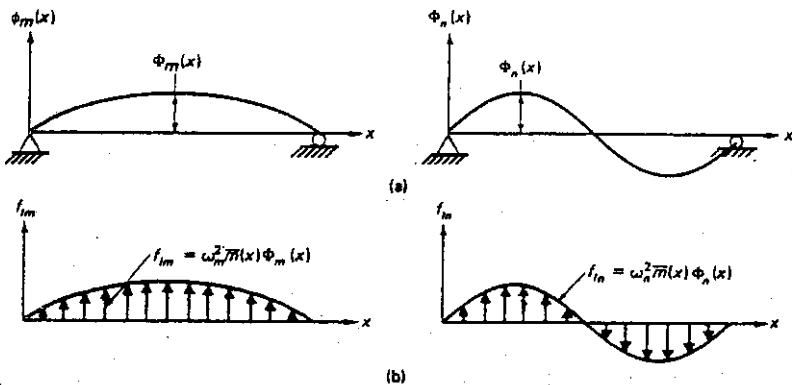
$*I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$

۲-۳- شرایط تعامد بین مدهای متعامد

تعامد مهمترین خاصیت مدهای متعامد است. این خاصیت، جداسازی معادلات حرکت را ممکن می سازد، که قبلاً برای سیستمهای مجزا^۲ تشریح گردید و برای سیستمهای پیوسته نیز مشابه سیستمهای مجزاست.

در شکل (۲-۲۰) تیر تحت نیروهای ماند ناشی از دو مد اوتعاش $\Phi_n(x)$, $\Phi_m(x)$ قرار گرفته است. نمودار جابه جایی این دو مد به همراه نیروهای ماند مربوطه در همین شکل دیده می شود.

- 1) Orthogonality condition 2) uncoupling 3) discrete systems



شکل (۲-۲۰) تیر با دو مد ارتعاش (الف) جابه جایی ها (ب) نیروهای مدی

طبق قانون یتی، کار انجام شده توسط نیروی ماند f_{im} روی جابه جایی مد Φ_m برابر است با کار نیروی ماند f_{in} روی جابه جایی مد Φ_n

$$\int_0^L \Phi_m(x) f_{in}(x) dx = \int_0^L \Phi_n(x) f_{im}(x) dx \quad (۲۰-۶)$$

نیروی ماند f_{im} بر واحد طول تیر برابر حاصلضرب جرم واحد طول و شتاب می باشد. برای یک مد ارتعاش هارمونیک دامنه شتاب برابر است با $\omega_n^2 \Phi_n(x)$ پس

$$f_{im} = \omega_n^2 \bar{m}(x) \Phi_n(x)$$

و برای مد m

$$f_{im} = \omega_m^2 \bar{m}(x) \Phi_m(x) \quad (۲۰-۶)$$

با قراردادن این روابط در (۲۰-۶)

$$\omega_n^2 \int_0^L \Phi_m(x) \bar{m}(x) \Phi_n(x) dx = \omega_m^2 \int_0^L \Phi_n(x) \bar{m}(x) \Phi_m(x) dx$$

و یا

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \Phi_m(x) \Phi_n(x) \bar{m}(x) dx = 0 \quad (۲۰-۶)$$

پس برای دو مد با فرکانسهای مختلف $\omega_n \neq \omega_m$ ، باید

$$\int_0^L \Phi_m(x) \Phi_n(x) \bar{m}(x) dx = 0 \quad (۲۰-۶)$$

که معادل همان شرایط تعامد در سیستمهای مجزا در رابطه (۱۰-۲۷) است.

۲-۵- ارتعاش اجباری تیرها

مفادله حرکت (۲۰-۵) برای يك تیریکنواخت تحت نیروهای عرضی $p(x,t)$ به

صورت زیر درمی آید

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x,t) - \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۲۰-۶۴)$$

$p(x,t)$ نیروی خارجی بر واحد طول تیر است. فرض می کنیم که پاسخ کلی تیر را بتوان به صورت جمع حاصلضرب مدهای $\Phi_n(x)$ درضریب $Z_n(t)$ نوشت.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) Z_n(t) \quad (۲۰-۶۵)$$

توابع مدی $\Phi_n(x)$ معادله لیفرانسیل (۲۰-۱۰) را ارضاء می کنند. این معادلات به کمک رابطه (۲۰-۱۲) به صورت زیر در می آید:

$$EI \Phi_n^{IV}(x) = \bar{m} \omega_n^2 \Phi_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۲۰-۶۶)$$

مدها می باید شرایط نیروهای مرزی در انتهای تیر را نیز ارضاء کنند. با نهادن در (۲۰-۶۵) در (۲۰-۶۴)

$$EI \sum_n \Phi_n^{IV}(x) Z_n(t) = p(x,t) - \bar{m} \sum_n \Phi_n(x) \ddot{Z}_n(t) \quad (۲۰-۶۷)$$

که با توجه به (۲۰-۶۶)

$$\sum_n \bar{m} \omega_n^2 \Phi_n(x) Z_n(t) = p(x,t) - \bar{m} \sum_n \Phi_n(x) \ddot{Z}_n(t) \quad (۲۰-۶۸)$$

با ضرب طرفین در $\Phi_m(x) dx$ و انتگرال گیری بین 0 و L

$$\omega_m^2 Z_m(t) \int_0^L \bar{m} \Phi_m^2(x) dx = \int_0^L \Phi_m(x) p(x,t) dx - \ddot{Z}_m(t) \int_0^L \bar{m} \Phi_m^2(x) dx \quad (۲۰-۶۹)$$

توجه داریم که در (۲۰-۶۸) جملات با اندیسهای متفاوت ($m \neq n$) به دلیل شرایط تعامد (۲۰-۶۳) صفر می شوند و رابطه فوق به صورت زیر درمی آید:

$$M_n \ddot{Z}_n(t) + \omega_n^2 M_n Z_n(t) = F_n(t) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, m, \dots \quad (۲۰-۷۰)$$

که

$$M_n = \int_0^L \bar{m} \Phi_n^2(x) dx \quad (۲۰-۷۱)$$

1) forced vibration

جرم مدی

(۷۲-۲۰)

$$F_n(t) = \int_0^L \Phi_n(x) p(x, t) dx$$

نیروی مدی

رابطه (۷۰-۲۰) برای حرکت مد m کاملاً نظیر معادله مدی (۱۲-۹) برای سیستمهای مجزاست. با افزودن میرایی مدی به رابطه (۷۰-۲۰)

$$M_n \ddot{z}_n(t) + C_n \dot{z}_n(t) + K_n z_n(t) = F_n(t) \quad (۷۳-۲۰)$$

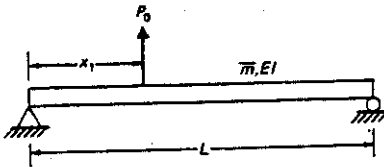
با تقسیم به

$$\ddot{z}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{F_n(t)}{M_n} \quad (۷۴-۲۰)$$

که $\xi_n = c_n / c_{n,c}$ ضریب میرایی مدی و $K_n = M_n \omega_n^2$ سختی مدی می باشد. آنگاه پاسخ کل از رابطه (۶۵-۲۰) و از ترکیب جواب معادلات مدی (۷۴-۲۰) با انتخاب تعداد دلخواه از مدها صورت می پذیرد. اگرچه در رابطه (۶۵-۲۰) تعداد نامحدودی از مدها جمع شده اند، لیکن در غالب مسائل سازه ای فقط چند مد اول برای بیان پاسخ، کافی هستند و بعضاً همان مد اول بیانگر پاسخ سیستم است.

معادله (۷۴-۲۰) کاملاً عمومی است و برای تیرها با هر نوع گسترش بار به کار می رود. برای بارهای متمرکز انتگرال (۷۲-۲۰) صرفاً به جمع ساده ای تبدیل می شود که برای هر نیرو یک جمله دارد. برای تیرهایی غیر از تیر دو سر مفصل اشکال مدی توانع پیچیده ای دارند و در نتیجه محاسبه انتگرال (۷۱-۲۰) و (۷۲-۲۰) طولانی و خسته کننده می شود. مقدار نسبت این انتگرالها برای مسائل مورد نیاز با بار گسترده بکخواخت در آخرین ستون جدولهای (۱-۲۰) تا (۵-۲۰) برای برخی از انواع تیرها داده شده است. مثال (۱-۲۰): در شکل (۲-۲۰) یک تیر دوسر مفصل دفعتاً تحت یک نیروی ثابت در فاصله x_1 از تکیه گاه قرار گرفته است. با استفاده از روش تحلیل مدی پاسخ رامعین سازید. از رابطه (۷۸-۲۰) اشکال مدی عبارتند از:

$$\Phi_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (الف)$$



شکل (۲-۲۰): تیر دوسر مفصل تحت یک نیروی ثابت

و نیروی مدی از رابطه (۷۰-۲۰)

$$F_n(t) = \int_0^L \Phi_n(x) p(x,t) dx$$

در این مساله در $x = x_1$ ، $p(x,t) = P_0$ و در سایر نقاط $p(x,t) = 0$ است. پس:

$$F_n(t) = P_0 \Phi_n(x_1)$$

با بکارگیری رابطه (الف) داریم

$$F_n(t) = P_0 \sin \frac{n\pi x_1}{L} \quad (\text{ب})$$

جرم مدی از رابطه (۷۱-۲۰) برابر است با

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^L \bar{m} \Phi^2(x) dx \\ &= \int_0^L \bar{m} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{\bar{m}L}{2} \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

با جایگزینی نیرو و جرم مدی از روابط (ب) و (ج) در معادله مدی (۷۰-۲۰)

$$\ddot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{P_0 \sin(n\pi x_1 / L)}{\bar{m}L / 2} \quad (\text{د})$$

اگر جابه جایی و سرعت اولیه صفر باشد، جواب رابطه (د) از رابطه (۵-۴) برابر است با

$$z_n = (z_n)_n (1 - \cos \omega_n t) \quad (\text{ه})$$

که در آن

$$(z_n)_n = \frac{2P_0 \sin(n\pi x_1 / L)}{\omega_n^2 \bar{m}L} \quad (\text{و})$$

به طوری که

$$z_n = \frac{2P_0 \sin(n\pi x_1 / L)}{\omega_n^2 \bar{m}L} (1 - \cos \omega_n t) \quad (\text{ز})$$

جابه جایی مدی برابر است با

$$y_n(x,t) = \Phi_n(x) z_n(t) \quad (\text{ح})$$

که از جایگزینی (الف)، (و)، (ز)

$$y_n(x,t) = \frac{2P_0 \sin(n\pi x_1 / L)}{\omega_n^2 \bar{m}L} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{ط})$$

و جابه جایی کل از رابطه (۶۵-۲۰)

$$y(x,t) = \frac{2P_0}{\bar{m}L} \sum_n \left[\frac{1}{\omega_n^2} \sin \frac{n\pi x_1}{L} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (\text{ی})$$

به عنوان مثال، فرض می کنیم نیرو در وسط وارد شود، یعنی $x_1 = \frac{L}{2}$ پس رابطه (ی)

تبدیل می شود به

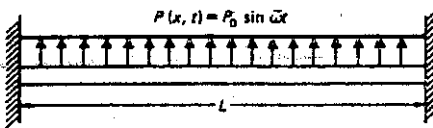
$$y(x, t) = \frac{2P_0}{mL} \sum_n \left[\frac{1}{\omega_n^2} \sin \frac{n\pi}{2} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (۷۵-۲۰)$$

در این رابطه به علت وجود جمله $\sin \frac{n\pi}{2}$ واضح است که مدهای زوج نقشی در جابه جایی ندارند. این به دلیل تقارن معکوس این مدهاست (جدول ۲۰-۱) که توسط نیروهای متقارن تحریک نمی شوند.

نحوه شرکت مدهای مختلف در جابه جایی وسط دهانه نیز قابل توجه است. این مقایسه بر پایه حداکثر جابه جایی مدی و بدون توجه به نحوه ترکیب مدها انجام می گیرد. دامنه هر مد بیانگر اهمیت نسبی آن است. حداکثر مقدار ضریب نیروی دینامیکی $(1 - \cos \omega_n t)$ در رابطه (۷۵-۲۰) برای همه مدها برابر ۲ است. از آنجا که همه سینوسی ها برای مدهای فرد برابر واحد و برای مدهای زوج برابر صفر است، تاثیر مدها به نسبت $\frac{1}{\omega_n^2}$ می باشد. بنابراین با توجه به جدول (۲۰-۱) حداکثر جابه جایی مدی برای مدهای اول تا سوم به ترتیب متناسب است با ۱، $1/81$ و $1/625$. در این مثال واضح است که مدهای بالا تاثیر خیلی کمی بر جابه جایی وسط دهانه دارند. مثال (۲۰-۲): جابه جایی تیر شکل (۲۰-۴) را در وسط دهانه تحت نیروی هارمونیک و یکنواخت $p(x, t) = p_0 \sin 300t$ lb/in به دست آورید. در تحلیل فقط سه مد اول را منظور نمایید.

فرکانس های طبیعی تیرهای یکنواخت از رابطه (۲۰-۱۲) برابر است با:

$$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$



$$\begin{aligned} EI &= 30 \times 10^8 \text{ lb-in}^2 \\ \bar{m} &= 0.1 \text{ lb-sec}^2/\text{in}^2 \\ p_0 &= 200 \text{ lb/in.} \\ \bar{\omega} &= 300 \text{ rad/sec} \\ L &= 240 \text{ in.} \end{aligned}$$

شکل (۲۰-۴): تیر دوسرگیردار تحت بار هارمونیک یکنواخت

با مد گذاری در این رابطه

$$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{30 \times 10^8}{0.1(240)^4}} \quad (\text{الف})$$

C_n برای پنج مد اول در جدول (۲۰-۳) داده شده است. جابه جایی تیر از رابطه (۲۰-۶۵)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) z_n(t) \quad (\text{ب})$$

$\Phi_n(x)$ شکل مدی است که برای تیر دوسر گیردار در رابطه (۲۰-۴۶) آمده و $z_n(t)$ پاسخ مدی است. معادله مدی (۲۰-۷) (با اضماع از میرایی) برابر است با:

$$\ddot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{\int_0^L p(x, t) \phi_n(x) dx}{\int_0^L \bar{m} \phi_n^2(x) dx}$$

با جایگزینی مقادیر عددی

$$\ddot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{200 \int_0^L \phi_n(x) dx}{0.1 \int_0^L \phi_n^2(x) dx} \sin 300t$$

یا

$$\ddot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = 2000 I_n \sin 300t \quad (\text{ج})$$

که در آن

$$I_n = \frac{\int_0^L \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2(x) dx}$$

I_n در جدول (۲۰-۲) برای پنج مد اول داده شده است. پاسخ ماندگار^۱ مدی برابر است با:

$$z_n(t) = \frac{2000 I_n}{\omega_n^2 - (300)^2} \sin 300t \quad (\text{د})$$

جدول (۲۰-۶): پاسخ مدها در وسط دهانه تیر دوسر گیردار شکل (۲۰-۴)

Mode	$\omega_n \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right)$	$a_n L$	I_n	$z_n = \frac{2000 I_n}{\omega_n^2 - \bar{\omega}^2} (\text{in})$	$\Phi_n \left(x = \frac{L}{2} \right)$
1	67.28	4.730	0.8380	-0.0194	1.588
2	185.45	7.853	0	0	0
3	363.56	10.996	0.3640	0.0173	-1.410
4	600.98	14.137	0	0	0
5	897.76	17.279	0.2323	0.00065	1.414

1) Steady-State Response

جوابها در جدول (۶-۲۰) نشان داده شده است.

جابه جایی وسط تیر از رابطه (ب) و مقادیر جدول (۶-۲۰) و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = [(1.588)(-0.0194) + (-1.410)(0.0173) + (1.414)(0.00065)] \sin 300t$$

$$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = -0.0541 \sin 300t (\text{in})$$

۶-۲۰- تنشهای دینامیکی در تیرها

برای تعیین تنشهای دینامیکی در تیرها، از روابط آشنای زیر برای لنگر خمشی و

نیروی برشی استفاده می کنیم:

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

پس برای محاسبه لنگر و برش کافی است از تابع جابه جایی $y = y(x, t)$ نسبت به x مشتق بگیریم. مثلاً برای تیر دوسر مفصل که یک بار متمرکز به طور ناگهانی در وسط آن اعمال می شود، از مشتق گیری از تابع جابه جایی (۷۵-۲۰) داریم:

$$M = -\frac{2\pi^2 P_0 EI}{mL^3} \sum_n \left[\frac{n^2}{\omega_n^2} \sin \frac{n\pi}{2} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (۷۶-۲۰)$$

$$V = -\frac{2\pi^3 P_0 EI}{mL^4} \sum_n \left[\frac{n^3}{\omega_n^2} \sin \frac{n\pi}{2} (1 - \cos \omega_n t) \cos \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (۷۷-۲۰)$$

می بینیم که تاثیر مدهای بالاتر روی لنگر، خیلی بیش از جابه جایی است و این تاثیر برای برش باز هم بیشتر است که منطبق با ضرایب n^3 و n^2 ، در روابط (۷۶-۲۰)، (۷۷-۲۰) و (۷۷-۲۰) است.

برای مثال دامنه مدهای اول و سوم را مقایسه می کنیم. با توجه به اینکه ω_3^2 یا n^4 متناسب است [رابطه (۷۷-۲۰)] از روابط (۷۵-۲۰)، (۷۶-۲۰) و (۷۷-۲۰) نسبتهای زیر به دست می آید.

$$\frac{y_1}{y_3} = 3^4 = 81$$

$$\frac{M_1}{M_3} = 3^2 = 9$$

$$\frac{V_1}{V_3} = 3$$

این روند عموماً برای تیرها برقرار است.

در مواردی که مد اول بر پاسخ حاکم است، می توان جابه جایی ها و تنشهای تقریبی را از ضرب مقادیر استاتیکی در ضریب بار دینامیکی به دست آورد. مثلاً جابه جایی اوج تیر دوسر مفصل تحت نیروی متمرکز در وسط دهانه با تقریب خوبی برابر است با

$$y(x = \frac{L}{2}) = \frac{P_0 L^3}{48EI} (1 - \cos \omega_1 t)$$

اگر فقط مد اول را در نظر بگیریم، از رابطه (۷۰-۲)

$$y(x = \frac{L}{2}) = \frac{2P_0}{mL\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t)$$

$$\text{چون } \omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{mL^4} \text{ پس}$$

$$\begin{aligned} y(x = \frac{L}{2}) &= \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} (1 - \cos \omega_1 t) \\ &= \frac{P_0 L^3}{48.7EI} (1 - \cos \omega_1 t) \end{aligned}$$

تزدیکی بین این در جواب ناشی از این حقیقت است که جابه جایی های استاتیکی نیز در قالب اجزای مدی قابل بیان اند و برای تیری با يك نیروی متمرکز در وسط، مد اول بر پاسخهای استاتیکی و دینامیکی حاکم است.

۷-۲- خلاصه

در این فصل تحلیل دینامیکی تیرهای تک دهانه با خواص گسترده (جرم و سختی) تحت بارهای خمشی تشریح شد. تعمیم این روش به تیرهای یکسره (چند دهانه) و سایر سازه ها اگرچه ممکن است، لیکن به طور فزاینده ای پیچیده و غیرعملی می گردد. نتایج حاصل از تحلیل تیرهای تک دهانه مخصوصاً در تعیین میزان دقت روشهای تقریبی مبتنی بر مدل‌های مجزا در فصل قبل اهمیت می یابد. این بررسیها نشان می دهد که تحلیل دینامیکی به روش سختی یا استفاده از جرم همساز از دقت مناسبی برخوردار است، حتی هنگامی که شبکه مجزا سازی فراخ باشد. فرکانسهای طبیعی و مدهای متعامد تیرهای تک دهانه با شرایط انتهایی مختلف از حل معادله حرکت و یا اعمال شرایط انتهایی به دست می آید. مدهای متعامد، شرایط تعامد را ارضاء می کنند یعنی:

$$\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) \bar{m} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

پاسخ کلی از ترکیب مدها به دست می آید.

$$y(x, t) = \sum_n \phi_n(x) z_n(t)$$

که $z_n(t)$ از حل معادله مد n ام حاصل می شود

$$\ddot{z}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = \frac{F_n(t)}{M_n}$$

که

$$F_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) p(x, t) dx$$

و

$$M_n = \int_0^L \bar{m} \phi_n^2(x) dx$$

لنگر خمشی M و نیروی برشی V در تیر از روابط آشنای زیر به دست می آید.

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$V = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

مسائل

۱-۲. سه فرکانس طبیعی اولیه و شکل مدها را برای یک تیر دوسر مفصل بتن مسلح که سطح مقطع آن به عرض 10" و عمق 24" و طول دهانه 36" می باشد، به دست آورید. سختی خمشی تیر $3.5 \times 10^9 \text{ lb.in}^2$ و وزن واحد حجم 150 lb/ft^3 می باشد. از اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی صرف نظر کنید.

۲-۲. مساله (۱-۲) را برای یک تیر دوسر گیردار حل کنید.

۳-۲. مساله (۱-۲) را برای یک سرگیردار و یک سر مفصل حل کنید.

۴-۲. ماکزیمم تغییر شکل در مرکز تیر دوسر مفصل مساله (۱-۲) هنگامی که تحت اثر یک نیروی ثابت 2000 lb که به طور ناگهانی در ۹ فوتی تکیه گاه چپ وارد می شود را به دست آورید.

۵-۲. یک تیر منشوری دوسر مفصل دارای خصوصیات زیر می باشد:

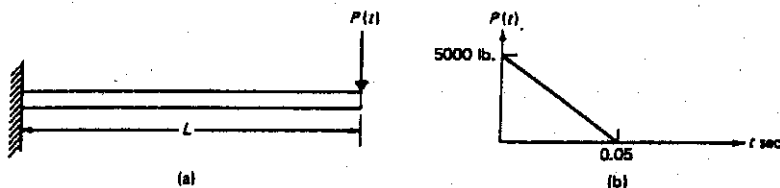
$\bar{m} = 0.3 \text{ lb.sec}^2 / \text{in}$, $EI = 10^6 \text{ lb.in}^2$, $L = 150 \text{ in}$ در هر اینچ طول تیر تحت اثر نیروی گسترده یکنواخت p_0 قرار دارد که به طور ناگهانی برداشته می شود. سربهایی را که بیانگر

نوسان آزاد حاصل می باشند نوشته و نوسان مد اول را بر حسب p_0 به دست آورید.

۶-۲. تیر مساله (۵-۲) تحت اثر نیروی متمرکز $P(t) = 1000 \sin 500t \text{ lb}$ در وسط دهات

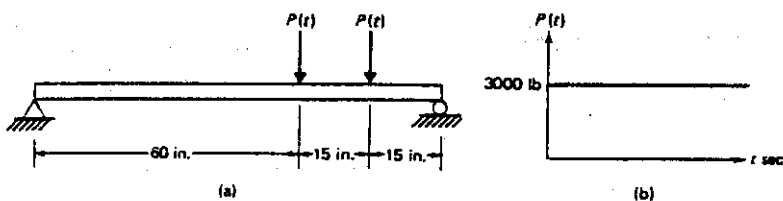
می باشد در هر دو مد اول نوسان پاسخ پایدار را در نقطه ای به فاصله $1/4$ دهانه از تکیه گاه چپ به دست آورید. (از استهلاك صرف نظر کنید).
 ۷-۲. مساله (۶-۲۰) را با فرض ۱۰٪ استهلاك بحرانی در هر مد حل کنید. همچنین حرکت پایدار در نقطه $1/4$ را در هر دو مد اول تعیین کنید.

۸-۲. تیر طره شکل م (۸-۲۰) منشوری می باشد و خصوصیات زیر را داراست:
 فقط مد $\bar{m} = 0.5 \text{ lb. sec}^2 / \text{in}$ در هر اینچ طول و $I = 120 \text{ in}^4$.
 اول را در نظر بگیرید و با توجه به تابع زمان-باز شکل م (۸-۲۰) ماکزیمم تغییر شکل را با ماکزیمم ممان خمشی دینامیکی مقایسه کنید. (نمودار شکل (۵-۴) ممکن است به کار برده شود.)



شکل م (۸-۲۰)

۹-۲. یک تیر منشوری دوسر مفصل با مشخصات زیر:
 بارگذاری شده است. سری های بیانگر تغییر شکل مقطع در وسط تیر را بنویسید.
 (۹-۲۰) $\bar{m} = 0.5 \text{ lb. sec}^2 / \text{in}$ در هر اینچ طول، مطابق شکل م (۹-۲۰)



شکل م (۹-۲۰)

۱۰-۲. فرض کنید نیروهای مساله (۹-۲۰) فقط در مدت $t_d = 0.1 \text{ sec}$ تاثیر می کنند. مد

اول را در نظر گرفته، تغییر مکان اوج را در هر نقطه بارگذاری شده از تیر به نسبت آورید.
(نمودار شکل (۴-۴) ممکن است به کار رود)

۱۱-۲۰- یک تیر منشوری دوسرگیردار دارای مشخصات زیر می باشد:

$\bar{m} = 1 \text{ lb. sec}^2 / \text{in.}$, $EI = 30 \times 10^8 \text{ lb. in}^2 = 180 \text{ in}$
ضربه ای گسترده یکنواخت $p(x,t) = 2000 \sin 400t \text{ lb}$ در طی فاصله زمانی مساوی با نصف
پریود تابع بار سینوسی ($t_d = \pi / 400 \text{ sec}$) می باشد، ماکزیمم تغییر مکان در مقطع وسط
تیر را تعیین کنید. (شکل (۳-۸) ممکن است به کار رود.)
۱۲-۲۰- مسأله (۱۱-۲۰) را با در نظر گرفتن دو مد اول حل کنید.

فصل بیست و یکم

مجاز سازی سیستمهای پیوسته

1- discretization

در فصل قبل از روش ترکیب مدها برای برخی سازه های ساده، با خواص گسترده استفاده شد. این روش نیازمند تعیین فرکانسها و اشکال مدی است که معمولاً حتی برای تیرهای ساده وقت گیر و خسته کننده بوده و برای تیرهای چند دهانه و سازه های پیچیده تر به مراتب مشکلتر می شود. اگر خواص هر جزء سازه را همچون پیش به شکل ضرایب دینامیکی نمایش دهیم تحلیل بسیار سهلتر می شود. این کار قبلاً به هنگام استفاده از توابع جاب جایی استاتیکی به جای دینامیکی در تعیین سختی، جرم و سایر ضرایب انجام شد.

در این فصل ضرایب دینامیکی مربوط به نیروهای هارمونیک و جاب جایی های گرهی، از توابع جاب جایی دینامیکی به دست خواهد آمد. این ضرایب آنچنانکه در فصل قبل دیدیم برای تشکیل ماتریس دینامیکی کل سازه به کار می رود. همچنین در این فصل رابطه ریاضی میان ضرایب دینامیکی مبتنی بر توابع جاب جایی دینامیکی و ضرایب ماتریسهای سختی و جرم همساز حاصل از توابع جاب جایی استاتیکی تعیین خواهد شد.

۲۱-۱- ماتریس دینامیکی برای کنش خمشی^۱

ضرایب تاثیر دینامیکی^۲ همانند همتای استاتیکی خود نیروها و جاب جایی ها را در مختصات گرهی تیر مرتبط می سازد (مثلاً ضرایب سختی). تفاوت این دو در این است که ضرایب دینامیکی به نیروهای گرهی و جاب جایی هایی که تغییرات هارمونیک دارند مربوط است در حالیکه ضرایب استاتیکی، نیروهای استاتیکی و جاب جایی های گرهی را مرتبط می سازد. طبق تعریف ضریب تاثیر دینامیکی S_{ij} برابر است با نیروهای هارمونیک با فرکانس $\bar{\omega}$ که در مختصات گرهی i در اثر یک جاب جایی هارمونیک با همان فرکانس و با دامنه واحد در مختصات j ایجاد می گردد. برای تعیین ضرایب دینامیکی تیر یکنواخت شکل (۲۱-۱)، به معادله دیفرانسیل حرکت (۲۰-۵) مراجعه می کنیم که در غیاب نیروهای عرضی، یعنی $p(x,t)=0$ برابر است با:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1-21)$$

برای جاب جایی های هارمونیک انتهایی با فرکانس $\bar{\omega}$ ، در این رابطه جواب زیر را امتحان می کنیم:

1- flexural effects 2-dynamic influence coefficients.

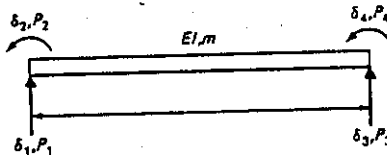
$$y(x, t) = \Phi(x) \sin \bar{\omega} t \quad (2-21)$$

که از جایگزینی رابطه (2-21) در (1-21):

$$\Phi^{IV}(x) - \bar{a}^4 \Phi(x) = 0 \quad (3-21)$$

که

$$\bar{a}^4 = \frac{m\bar{\omega}^2}{EI} \quad (4-21)$$



شکل (1-21): مختصات گرهی یک تیر خمشی

توجه داریم که رابطه (3-21) معادل رابطه (1-20) یعنی معادله تابع شکل ارتعاش آزاد تیر است. تفاوت بین این دو در این است که اولی تابعی از \bar{a} است که خود تابعی از فرکانس بارگذاری $\bar{\omega}$ می باشد، در حالی که \bar{a} در رابطه (1-20) به فرکانس طبیعی بستگی دارد. راه حل معادله (3-21) همانند معادله (1-20) می باشد. پس به طور مشابه:

$$\Phi(x) = C_1 \sin \bar{a}x + C_2 \cos \bar{a}x + C_3 \sinh \bar{a}x + C_4 \cosh \bar{a}x \quad (5-21)$$

برای یافتن ضرایب دینامیکی، شرایط انتهای در روابط (6-21) و (7-21) را

اعمال می کنیم:

$$\Phi(0) = \delta_1, \quad \Phi(L) = \delta_3 \quad (6-21)$$

$$\Phi'(0) = \delta_2, \quad \Phi'(L) = \delta_4$$

همچنین

$$\Phi'''(0) = \frac{P_1}{EI}, \quad \Phi'''(L) = -\frac{P_3}{EI} \quad (7-21)$$

$$\Phi''(0) = -\frac{P_2}{EI}, \quad \Phi''(L) = \frac{P_4}{EI}$$

در این روابط $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ و دامنه جاب جایی های خطی و زاویه ای هارمونیک در مختصات گرهی و P_1, P_2, P_3, P_4 نیروها و لنگرهای هارمونیک نظیرند [مطابق شکل -

1- Linear and angular harmonic displacements

از جایگزینی شرایط انتهایی رابطه (۶-۲۱) و (۷-۲۱) در (۵-۲۱) داریم:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \bar{a} & 0 & \bar{a} & 0 \\ s & c & S & C \\ \bar{a}c & -\bar{a}s & \bar{a}C & \bar{a}S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (۸-۲۱)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -\bar{a}^3 & 0 & \bar{a}^3 & 0 \\ 0 & \bar{a}^2 & 0 & -\bar{a}^2 \\ \bar{a}^3c & -\bar{a}^3s & -\bar{a}^3C & -\bar{a}^3S \\ -\bar{a}^2s & -\bar{a}^2c & \bar{a}^2S & \bar{a}^2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (۹-۲۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned} s &= \sin \bar{a}L, \quad S = \sinh \bar{a}L \\ c &= \cos \bar{a}L, \quad C = \cosh \bar{a}L \end{aligned} \quad (۱۰-۲۱)$$

ثابت‌های C_1, C_2, C_3, C_4 از (۸-۲۱) محاسبه شده و در (۹-۲۱) نهاده می‌شوند. در نتیجه ماتریس دینامیکی زیر برای مرتبط ساختن نیروها و جابه‌جایی‌های هارمونیک در مختصات گرهی تیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \bar{a}^2(cS+sC) & & & \\ \bar{a}sS & sC-cS & & \\ -\bar{a}^2(s+S) & \bar{a}(c-C) & \bar{a}^2(cS+sC) & \\ \bar{a}(C-c) & S-s & -\bar{a}sS & sC-cS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (۱۱-۲۱)$$

که

$$B = \frac{\bar{a}EI}{1-cC} \quad (۱۲-۲۱)$$

لازم است که مخرج کسر مخالف صفر باشد یعنی

$$1 - \cos \bar{a}L \cosh \bar{a}L \neq 0 \quad (۱۳-۲۱)$$

عناصر ماتریس دینامیکی (۱۱-۲۱) می‌توانند برای تشکیل ماتریس دینامیکی یک تیر یکسره یا قاب مسطح^۱ به کار آیند که کاملاً مشابه تشکیل ماتریس سختی سیستم به کمک ماتریس سختی اعضا می‌باشد.

۲۱-۲- ماتریس دینامیکی برای کنش محوری

معادله حرکت ارتعاش محوری آزاد تیر با نوشتن معادله تعادل يك جزء dx از

تیر مطابق شکل (۲۱-۲) به دست می آید.

$$\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) - P - (mdx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۱-۱۴)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

u جابه جایی در x است. پس جابه جایی در $x + dx$ برابر $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ می باشد. بدیهی

است که کرنش قطعه dx برابر است با $\frac{\partial u}{\partial x}$. باتوجه به قانون هوک مبنی بر تناسب

تنش و کرنش-

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{AE} \quad (۲۱-۱۵)$$

A سطح مقطع تیر است. با مشتق گیری نسبت به

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (۲۱-۱۶)$$

از ترکیب روابط (۲۱-۱۴) و (۲۱-۱۶)، معادله دیفرانسیل ارتعاش محوری تیر به دست می آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{AE} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۱-۱۷)$$

يك پاسخ این معادله بشکل زیر است:

$$u(x, t) = U(x) \sin \bar{\omega} t \quad (۲۱-۱۸)$$

که به يك حرکت هارمونیک با دامنه زیر ختم می شود:

$$U(x) = C_1 \sin bx + C_2 \cos bx \quad (۲۱-۱۹)$$

که

$$b = \sqrt{\frac{m\bar{\omega}^2}{AE}} \quad (۲۱-۲۰)$$

C_1 و C_2 ثابتهای انتگرال گیری هستند.

برای یافتن ماتریس دینامیکی ارتعاش محوری تیر شرایط مرزی از روابط زیر

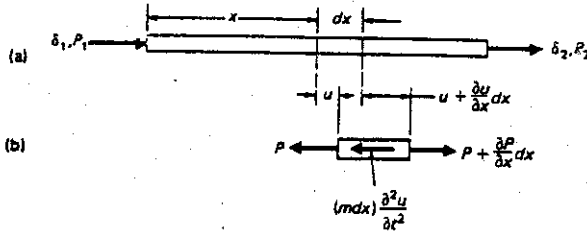
اعمال می شود:

1- Axial effects

$$U(0) = \delta_1, \quad U(L) = \delta_2 \quad (21-21)$$

$$U'(0) = -\frac{P_1}{AE}, \quad U'(L) = \frac{P_2}{AE} \quad (22-21)$$

مطابق شکل (21-21)، δ_2 و δ_1 جابه جایی های گرهی، و P_1 و P_2 نیروهای گرهی تیر می باشند.



شکل 21-22- کنش محوری تیر الف) مختصات گرهی محوری ب) نیروهای وارد بر یک جزء از تیر

از جایگزینی شرایط مرزی (21-21) و (22-21) در (19-21) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin bL & \cos bL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (23-21)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = AEb \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \cos bL & -\sin bL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (24-21)$$

از حل معادله (24-21) ثابتهای انتگرال گیری به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cot bL & \operatorname{cosec} bL \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (25-21)$$

مشروط به شرط

$$\sin bL \neq 0 \quad (26-21)$$

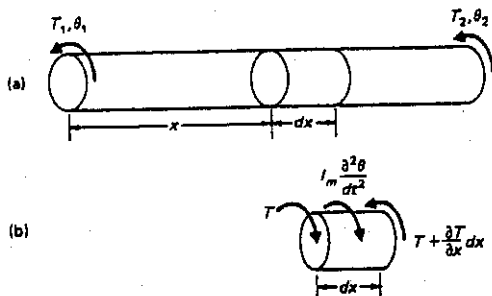
سرانجام با نهادن (25-21) در (24-21)، رابطه (27-21) برای مرتبط ساختن نیروها و جابه جایی های گرهی هارمونیک توسط ماتریس دینامیکی ارتعاش محوری تیر به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = EAb \begin{bmatrix} \cot bL & -\operatorname{cosec} bL \\ -\operatorname{cosec} bL & \cot bL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (27-21)$$

۳-۲۱- ماتریس دینامیکی برای کنش پیچشی^۱

معادله حرکت پیچشی تیر مشابه حرکت محوری است که در بخش قبل بحث

شد. با توجه به شکل (۳-۲۱) زاویه پیچش^۲ جزء dx تحت لنگر پیچشی T برابر است با



شکل (۳-۲۱): کنش پیچشی در تیر الف) مختصات گرهی پیچشی ب) لنگرهای وارد به یک جزء تیر

$$d\theta = \frac{T dx}{J_T G} \quad (28-21)$$

$J_T G$ سختی پیچشی، J_T ثابت پیچشی (گشتاور ماند قطعی برای مقاطع گرد) و G مدول برشی می باشد.

مطابق شکل (۳-۲۱)، لنگر وارد به دو سر جزء dx برابر T و $T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$ است. از

رابطه (۲۸-۲۱)، لنگر خالص برابر است با:

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = J_T G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \quad (29-21)$$

از برابری لنگر پیچشی با حاصلضرب گشتاور ماند جرم^۳ جزء dx (یعنی $I_m dx$) در

شتاب زاویه ای^۴ $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ ، معادله دیفرانسیل زیر به دست می آید:

$$J_T G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx = I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dx$$

یا

1-Torsional effects 2-Angle of twist 3-Mass moment of inertia 4-angular acceleration

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{I_m}{J_T G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (21-23)$$

I_m گشتاور ماند جرم واحد طول تیر است.

جواب زیر را امتحان می کنیم

$$\theta(x, t) = \theta(x) \sin \bar{\omega} t \quad (21-24)$$

از جایگزینی در (21-23)، یک حرکت پیچشی هارمونیک به دست می آید که دامنه آن

$$\theta(x) = C_1 \sin cx + C_2 \cos cx \quad (21-25)$$

که

$$C = \sqrt{\frac{I_m \bar{\omega}^2}{J_T G}} \quad (21-26)$$

برای مقاطع گرد، ثابت پیچشی J_T با گشتاور ماند قطبی J_0 یکی است. پس

رابطه (21-26) تبدیل می شود به:

$$C = \sqrt{\frac{m \bar{\omega}^2}{AG}} \quad (21-27)$$

توجه داریم که رابطه (21-27) برای ارتعاش پیچشی مشابه (21-17) برای ارتعاش

محوری است. با استفاده از این تشابه، رابطه دینامیکی لنگر پیچشی در تیر به

صورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = J_T G c \begin{bmatrix} \cot cL & -\operatorname{cosec} cL \\ -\operatorname{cosec} cL & \cot cL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (21-28)$$

۲۱-۴- خمش تیر بادر نظر گرفتن اثر نیروی محوری

وجود نیروهای محوری معادله دیفرانسیل تعادل را متاثر می سازد. شکل

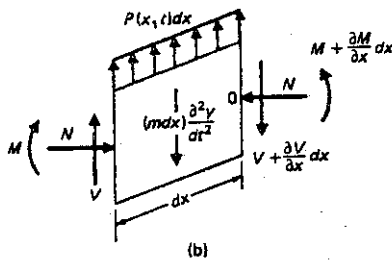
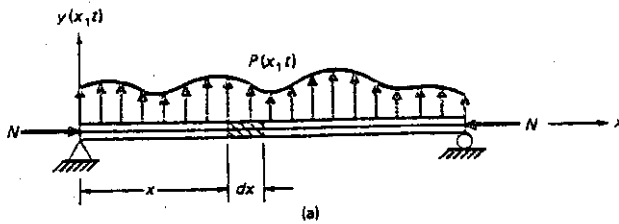
(21-4) تیری با یک نیروی محوری ثابت را نشان می دهد. از تعادل جزء dx در جهت

قائم:

$$V + p(x, t) dx - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - (\bar{m} dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (21-29)$$

یا

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (21-30)$$



شکل (۳-۲۱): تیر تحت نیروی محوری ثابت و نیروی عرضی دینامیکی
 الف) بارگذاری تیر ب) نیروهای اعمال شده به یک جزء آن

از تعادل لنگرها حول نقطه 0

$$M + Vdx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + \frac{1}{2} \left(p(x,t) - \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dx^2 - N \frac{\partial y}{\partial x} dx = 0 \quad (۳۸-۲۱)$$

با صرف نظر کردن از جملات با مشتقات جزئی مرتبه بالا معادله تعادل نیروهای برشی عبارت است از:

$$V = N \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \quad (۳۹-۲۱)$$

با استفاده از رابطه آشنای خمش ارتجاعی

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (۴۰-۲۱)$$

و با ترکیب روابط (۳۷-۲۱)، (۳۹-۲۱)، (۴۰-۲۱)، معادله حرکت تیر متأثر از نیروهای محوری به دست می آید:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (۴۱-۲۱)$$

از مقایسه روابط (۲۱-۴۱) و (۲۰-۵) مشخص می گردد که حضور نیروی محوری به یک نیروی عرضی اضافی منجر می شود. همان طور که قبلاً در بخش (۲۰-۱) اشاره شد، در رسیدن به رابطه (۲۱-۴۱) جابه جایی ها کوچک فرض شده و از اثر نیروهای برشی و نیروهای ماند چرخشی^۱ بر جابه جایی اگماض شده است.

در غیاب بارهای خارجی رابطه (۲۱-۴۱) تبدیل می شود به:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۲-۲۱)$$

جواب معادله (۲۲-۲۱) از جایگزینی رابطه زیر به دست می آید:

$$y(x, t) = \Phi(x) \sin \bar{\omega} t \quad (۲۳-۲۱)$$

که در نتیجه

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{N}{EI} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\bar{m} \bar{\omega}^2}{EI} \Phi = 0 \quad (۲۴-۲۱)$$

که جواب این معادله عبارتست از:

$$\Phi(x) = A \sin p_2 x + B \cos p_2 x + C \sinh p_1 x + D \cosh p_1 x \quad (۲۵-۲۱)$$

D, C, B, A ثابتهای انتگرال گیری هستند و

$$p_1 = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}} \quad (۲۶-۲۱)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}}$$

$$\alpha = \frac{N}{EI} \quad (۲۷-۲۱)$$

$$\beta = \frac{\bar{m} \bar{\omega}^2}{EI} \quad (۲۸-۲۱)$$

برای تعیین ماتریس دینامیکی ارتعاشات عرضی تیر (با در نظر گرفتن اثر

نیروی محوری)، شرایط مرزی اعمال می شود:

(۲۹-۲۱)

$$\Phi(0) = \delta_1, \quad \frac{d\Phi(0)}{dx} = \delta_2, \quad \Phi(L) = \delta_3, \quad \frac{d\Phi(L)}{dx} = \delta_4$$

$$\frac{d^3\Phi(0)}{dx^3} = \frac{P_1}{EI} - \frac{N}{EI} \delta_2, \quad \frac{d^3\Phi(L)}{dx^3} = -\frac{P_2}{EI} - \frac{N}{EI} \delta_4, \quad \frac{d^2\Phi(0)}{dx^2} = -\frac{P_3}{EI}, \quad \frac{d^2\Phi(L)}{dx^2} = \frac{P_4}{EI}$$

1- Rotary inertia forces

P_4 و P_3, P_2, P_1 و زاویه ای انتهایی تیر و δ_4 و $\delta_3, \delta_2, \delta_1$ نیروها و لنگرهای گرهی می باشند. از جایگزینی شرایط مرزی فوق در (۲۱-۴۰) هشت معادله جبری حاصل می شود که با حذف چهار ثابت انتگرال D, C, B, A دینامیکی به دست خواهد آمد. این ماتریس نیروها و جابه جایی های هارمونیک در مختصات گرهی را مرتبط می سازد. پس:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & & & \\ S_{21} & S_{22} & & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

symmetric

ک

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{33} &= B \left[(p_1^2 p_2^2 + p_1^4 p_2) c s + (p_1 p_2^4 + p_1^3 p_2^2) s c \right] \\ S_{21} = -S_{43} &= B \left[(p_1 p_2^3 - p_1^3 p_2) + (p_1^3 p_2 - p_1 p_2^3) c c + 2 p_1^2 p_2^2 s s \right] \\ S_{22} = S_{44} &= B \left[(p_2^2 p_1 + p_1^3) s c - (p_2^3 + p_1^2 p_2) c s \right] \\ S_{41} = -S_{32} &= B \left[(p_1 p_2^3 + p_1^3 p_2) (c - c) \right] \\ S_{31} &= B \left[(-p_1^2 p_2^3 - p_1^4 p_2) s - (p_1^3 p_2^2 + p_1 p_2^4) s \right] \\ S_{42} &= B \left[(p_1^2 p_2 + p_2^3) s - (p_1 p_2^2 + p_1^3) s \right] \end{aligned} \quad (51-21)$$

و

$$\begin{aligned} s &= \sin p_2 L, \quad S = \sinh p_1 L \\ c &= \cos p_2 L, \quad C = \cosh p_1 L \end{aligned} \quad (51-21)$$

$$B = \frac{EI}{2p_1 p_2 - 2p_1 p_2 c c + (p_1^2 - p_2^2) s s} \quad (52-21)$$

علاوه بر این، معادله (۵۰-۲۱) باید رابطه زیر را ارضاء کند:

$$2p_1 p_2 - 2p_1 p_2 c c + (p_1^2 - p_2^2) s s \neq 0 \quad (53-21)$$

۲۱-۵- بسط ماتریس دینامیکی خمشی به سری های نمائی^۱

ماتریسهای سختی (۱۴-۲۰) و جرم همسان (۱۴-۲۳) را می توان توسط سری

تیلور^۲ و* بسط داد. به عنوان مثال ضرایب دینامیکی ردیف ۲ از ستون ۱ ماتریس (۲۱-۱۱) را در نظر می گیریم:

$$S_{21} = \frac{\bar{a}^2 EI \sin \bar{a}L \sinh \bar{a}L}{1 - \cos \bar{a}L \cosh \bar{a}L} \quad (21-54)$$

ذیلاً عملگرهایی روی سری نمایی، شامل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به کار گرفته شده است. اعتبار این عملگرها و همگرایی سری های حاصل توسط ناپ** اثبات گردیده است. به طور کلی، سریهای همگرا می توانند جمع، تفریق و یا ضرب شوند و سریهای حاصل حداقل در محدوده همگرایی سریهای اصلی، همگرا می باشند. تقسیم در سری نمایی به روش متعارف انجام می شود، اما تعیین شعاع همگرایی سری حاصل پیچیده است. این کار مستلزم کاربرد قضایای متغیرهای مختلط بوده و با پیوستگی تحلیلی^۳ مرتبط است. اجمالاً می توان گفت که سری حاصل از تقسیم دو سری نمایی همگرا حول نقطه مختلط Z_0 ، در یک دایره به مرکز Z_0 و شعاع نزدیکترین نقطه انفصال^۴ این دو سری به نقطه Z_0 همگرا است.

از بسط آشنای سری های مثلثاتی و هذلولی به عنوان یک کام واسط در

بسط تابع رابطه (۲۱-۵۴) استفاده می شود.

$$\begin{aligned} \cos x \cosh x &= 1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{2520} - \frac{x^{12}}{7484400} + \dots \\ (1 - \cos x \cosh x)^{-1} &= \frac{6}{x^4} + \frac{1}{70} + \frac{85x^4}{2910600} + \dots \\ \sin x \sinh x &= x^2 - \frac{x^6}{90} + \frac{x^{10}}{113400} - \dots \end{aligned}$$

که $x = \bar{a}L$. از جایگزینی این سریها در ضرایب دینامیکی (۲۱-۵۴)

$$S_{21} = \frac{\bar{a}^2 EI \sin \bar{a}L \sinh \bar{a}L}{1 - \cos \bar{a}L \cosh \bar{a}L} = \frac{6EI}{L^2} - \frac{11\bar{m}L^2\bar{\omega}^2}{210} - \frac{223\bar{m}^2L^6\bar{\omega}^4}{2910600EI} - \dots \quad (21-55)$$

1- Power series 2- Taylor's series 3- Analytical Continuation 4- singularity

* Paz, M., "Mathematical observations in structural dynamics,"

Int. J. Computeres and Strutures, Vol. 3, PP. 385-386, 197

** Knopp, K. Theory and Application of Infinite Series. Blackie, London, 1963.

اولین جمله سمت راست این رابطه ضریب سختی k_{21} در ماتریس سختی (۲۰-۱۳) است. و جمله دوم ضریب جرم همساز m_{21} در ماتریس جرم (۱۴-۲۴) است. رابطه (۲۱-۵۵) در قلمرو مثبت و حقیقی زیر همگراست.

$$0 < \bar{\omega} L < 4.73 \quad (۵۶-۲۱)$$

و یا از (۲۱-۴)

$$0 < \bar{\omega} < (4.73)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (۵۷-۲۱)$$

در رابطه (۲۱-۵۶) عدد $۴/۷۳$ تقریبی از نزدیکترین نقطه انفصال به مبدأ توابع کسر (۲۱-۵۴) است.

برای تعیین بسط مربوط به سایر ضرایب ماتریس دینامیکی (۲۱-۱۱) از روش مشابه فوق برای S_{21} استفاده می شود و حاصل آن:

$$\begin{aligned} S_{33} = S_{11} &= \frac{12EI}{L^3} - \frac{13Lm\bar{\omega}^2}{35} - \frac{59L^5m^2\bar{\omega}^4}{161700EI} \dots \\ S_{21} = -S_{43} &= \frac{6EI}{L^2} - \frac{11L^2m\bar{\omega}^2}{210} - \frac{223L^6m^2\bar{\omega}^4}{2910600EI} \dots \\ S_{41} = -S_{32} &= \frac{6EI}{L^2} + \frac{13L^2m\bar{\omega}^2}{420} + \frac{1681L^6m^2\bar{\omega}^4}{23284800EI} \dots \\ S_{22} = S_{44} &= \frac{4EI}{L} - \frac{L^3m\bar{\omega}^2}{105} - \frac{71L^7m^2\bar{\omega}^4}{4365900EI} \dots \\ S_{31} &= \frac{12EI}{L^3} - \frac{9Lm\bar{\omega}^2}{70} - \frac{1279L^5m^2\bar{\omega}^4}{3880800EI} \dots \\ S_{42} &= \frac{2EI}{L} + \frac{L^3m\bar{\omega}^2}{140} + \frac{1097L^7m^2\bar{\omega}^4}{69854400EI} \dots \end{aligned} \quad (۵۸-۲۱)$$

۲۱-۶- بسط ماتریس دینامیکی محوری - پیچشی به سری های نمایی

با روشی مشابه آنچه در بخش قبل بیان شد می توان ضرایب دینامیکی را برای حالتی که تیر تحت ترکیب نیروهای پیچشی و محوری ارتعاش می کند به سری نمایی بسط داد. سه جمله اول سری تیلور برای ضرایب ماتریس دینامیکی (۲۱-۲۷) مربوط به کنش محوری عبارتند از:

$$\begin{aligned} AEb \cot bL &= \frac{AE}{L} - \frac{m\bar{\omega}^2 L}{3} - \frac{L^3 m^2 \bar{\omega}^4}{45AE} \dots \\ -AEb \operatorname{cosec} bL &= -\frac{AE}{L} - \frac{m\bar{\omega}^2 L}{6} - \frac{7L^3 m^2 \bar{\omega}^4}{300AE} \dots \end{aligned} \quad (۵۹-۲۱)$$

ملاحظه می شود که اولین جمله هر سری برابر ضریب سختی مربوط در رابطه (۱۰-۲) و جمله دوم برابر ضریب جرم همسان در ماتریس (۱۰-۲۶) می باشد. به طور مشابه، سری تیلور ضرایب ماتریس دینامیکی برای کنش پیچشی رابطه (۲۱-۲۵) برابر است با:

$$J_T G c \cos cL = \frac{J_T G}{L} - \frac{L I_m \bar{\omega}^2}{3} - \frac{L^3 I_m^2 \bar{\omega}^4}{45 G J_T} \dots \quad (۲۱-۶)$$

$$-J_T G c \operatorname{cosec} cL = -\frac{J_T G}{L} + \frac{L I_m \bar{\omega}^2}{6} - \frac{7 L^3 I_m^2 \bar{\omega}^4}{300 G J_T} \dots$$

ملاحظه می شود که در جمله اول این سریها با ضرایب سختی و جرم ماتریسهای (۱۶-۶) و (۱۶-۷) برابرند.

۲۱-۷- بسط ماتریس دینامیکی متأثر از نیروی محوری به سری های نمائی

بسط ضرایب ماتریس دینامیکی (۲۱-۵) (شامل تاثیر کنش محوری) توسط روشهای مذکور در در بخش قبلی انجام می پذیرد. جزئیات این کار توسط پاز* بیان گردیده است. این بسط عبارت است از:

$$[S] = [K] - [G_0]N - [M_0]\bar{\omega}^2 - [A_1]N\bar{\omega}^2 - [G_1]N^2 - [M_1]\bar{\omega}^4 - \dots \quad (۲۱-۶)$$

$[K]$ ، $[G_0]$ و $[M_0]$ ماتریسهای سختی، هندسه و جرم هستند که در فصلهای قبلی بر اساس چابده جایی های استاتیکی محاسبه شدند. این ماتریسها در روابط (۱۴-۲)، (۱۴-۳۵) و (۱۴-۲۳) ارائه شدند. بقیه ماتریسهای رابطه (۲۱-۶) که مربوط به درجات بالاترند نیلأ آمده است. ماتریس درجه دوم جرم هندسی:

$$[A_1] = \frac{\bar{m}L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3150}{L} & & & \\ & L^2 & & \\ 1260 & \frac{3150}{L} & & \\ & 1 & & 1 \\ \frac{3150}{L} & 1680 & \frac{3150}{L} & \\ & L & L^2 & \\ 1680 & 3600 & 1260 & \frac{3150}{L} \end{bmatrix} \quad \text{symmetric}$$

* Paz, M. and Duni, L., "Power Series expansion of the general stiffness matrix for beam elements," Int. J. Numerical Methods in engineering, Vol 9, PP. 449-459, 1975.

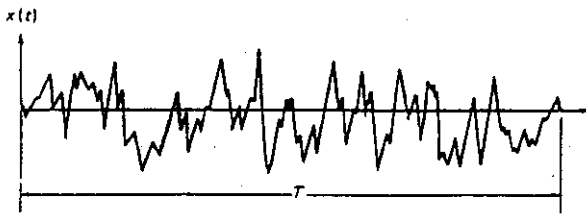
بخش V

ارتعاشات اتفاقی

فصل بیست و دوم

مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی^۱

در فصلهای قبل تحلیل دینامیکی سازه ها تحت نیروهای معین به صورت توابعی از زمان بررسی شد که آن را تحلیل جزمی^۱ می نامند. اگر تابع تحریک دارای شکل نامنظمی باشد و به گونه ای آماری تعریف شود، ارتعاش را تصادفی می خوانند. این چنین توابعی معمولاً مانند سری فوریه به صورت توابعی پیوسته یا مجزا^۲ از فرکانسهای محرک بیان می گردند. در دینامیک سازه ها ارتعاشات تصادفی غالباً از طریق پی و یا فشار هوا به سازه منتقل می گردد که هر دو بر اثر انفجار در مجاورت سازه رخ می دهند. کارهای ساختمانی و حفاری معادن منشأ این انفجارها می باشند. سایر نیروها همچون زلزله نیز می توانند به صورت توابع تصادفی از زمان بیان شوند. در این موارد، پاسخ سازه به وسیله نظریه ارتعاشات تصادفی در قالب احتمالات محاسبه می گردد. نگاشت^۳ يك ارتعاش تصادفی مثل شکل (۱-۲۲) تابعی از زمان است. ویژگی اصلی این تابع تصادفی این است که مقدار آن در هر لحظه را نمی توان به صورت جزمی پیش بینی کرد. برای تحلیل ارتعاشات تصادفی لازم است از ابزار موجود در نظریه آمار استفاده نمود.



شکل (۱-۲۲): نگاشت تابعی تصادفی از زمان

۱-۲۲- توصیف آماری توابع تصادفی

در همه روشهای آماری برای توصیف يك تابع تصادفی به تعداد زیادی پاسخ نیاز است. مثلاً برای تعیین رابطه آماری تحریک پی در اثر انفجار در نزدیکی يك سازه به تعداد زیادی نگاشت مانند شکل ۲-۲۲ احتیاج داریم. هر نگاشت را يك نمونه^۴ و جمع کل آنها را مجموعه^۵ می نامند. برای توصیف آماری يك مجموعه، می توانیم در هر لحظه با معدل جابجایی لحظه ای $x(t)$ را محاسبه کنیم. در صورتی که این معدل برای t_0 های

1) Deterministic
4) Sample

2) Discrete
5) Ensemble

3) Record

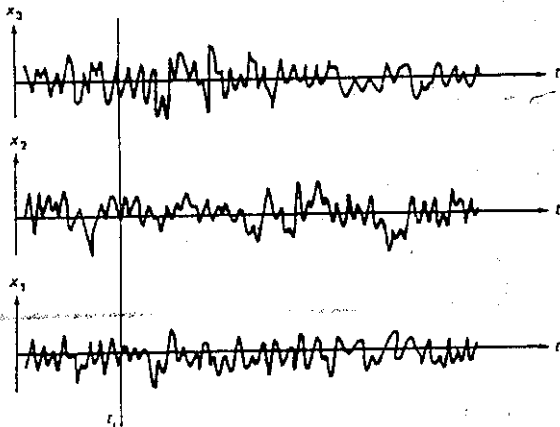
مختلف ثابت باشد فرآیند را ثابت^۱ می نامند. همچنین، اگر معدل به دست آمده برای يك عضو مجموعه با معدل حاصل در عرض مجموعه در هر لحظه اختیاری با برابر باشد فرآیند را معادل یابی می نامند. پس، برای يك فرآیند ثابت و معدل یابی می توان از يك نگاهش به تنهایی به توصیف آماری تابع تصادفی دست یافت. در اینجا فرض می کنیم که همه فرآیندهای تصادفی^۲ از نوع ثابت باشد.

تابع تصادفی از زمان در شکل (۱-۲۲) در طول زمان T ثبت شده است. برای توصیف این تابع می توان از میانگین های مختلفی استفاده نمود که معمول ترین شان مقدار متوسط^۳ \bar{x} مطابق تعریف زیر است:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-22)$$

(۲-۲۲) و متوسط مجذور^۴ \bar{x}^2

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$



شکل (۲-۲۲): مجموعه ای از توابع تصادفی

هر دو متوسط فوق برای اندازه گیری مقدار متوسط تابع تصادفی به کار

می آیند. اندازه گیری میزان تفاوت تابع $x(t)$ از مقدار متوسط بوسیله پراکندگی^۵

- 1) Stationary 2) Random Process 3) Mean Value 4) Mean-square 5) Variance

انجام می شود.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt \quad (3-22)$$

که پس از انتگرال گیری

$$\sigma_x^2 = x^2 - (\bar{x})^2 \quad (4-22)$$

این بدین معناست که پراکندگی از تفاضل میانگین مربعات و مربع میانگین ها

به دست می آید. جذر میانگین^۱ مربعات تابع تصادفی $x(t)$ برابر است با:

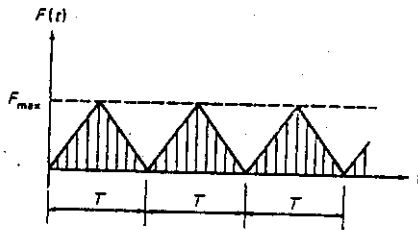
$$RMS_x = \sqrt{x^2} \quad (5-22)$$

انحراف استاندارد^۲ σ_x تابع $x(t)$ برابر است با جذر پراکندگی یعنی:

$$\sigma_x = \sqrt{x^2 - (\bar{x})^2} \quad (6-22)$$

مثال (۱-۲۲): مقدار متوسط \bar{F} ، میانگین مربعات F^2 ، پراکندگی σ_F^2 و جذر

میانگین مربعات را برای تابع نیروی شکل ۳-۲۲ به دست آورید.



شکل (۳-۲۲): تابع نیروی مثال (۱-۲۲)

از آنجا که $F(t)$ تابعی تناوبی با دوره T است، می توان مدت این تابع را برابر

T فرض کرد، لذا از رابطه (۱-۲۲)

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{F_{max}}{2}$$

و با توجه به اینکه در طی $0 < t \leq \frac{T}{2}$

$$F(t) = \frac{2F_{max}}{T} t$$

1) root mean - square

2) Standard deviation

$$\bar{F}^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2F_{\max}}{T} t \right)^2 dt = \frac{F_{\max}^2}{3}$$

حال پراکندگی از رابطه (۴-۲۲) به دست می آید:

$$\sigma_F^2 = \bar{F}^2 - (\bar{F})^2$$

$$\sigma_F^2 = \frac{F_{\max}^2}{3} - \frac{F_{\max}^2}{4} = \frac{F_{\max}^2}{12}$$

و بالاخره جذر میانگین مربعات این تابع برابر است با:

$$\text{RMS}_F = \sqrt{\bar{F}^2} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{3}}$$

۲-۲۲- توزیع نرمال

در شکل ۴-۲۲ بخشی از نگاشت تابع تصادفی $x(t)$ نشان داده شده است. برای تعیین احتمال وجود x در قلمرو (x_1, x_2) ، با توجه به شکل (۴-۲۲) داریم:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n}{T} \quad (۷-۲۲)$$

$P(x_1 \leq x \leq x_2)$ عبارتست از احتمال اینکه در هر لحظه دلخواه t_1 دارای مقداری بین x_1 و x_2 باشد. به طور مشابه می توان احتمال اینکه مقدار x یعنی $|x|$ از عدد داده باشد بیشتر باشد به دست آورد. برای این کار خطوطی در سطوح x_m و $-x_m$ رسم می کنیم و زمانی را که در آن $|x| > x_m$ است اندازه می گیریم. از تقسیم مجموع این گام های زمانی به T ، احتمال مورد نظر یعنی $P(|x| > x_m)$ به دست می آید.

در حالت کلی، احتمال اینکه متغیر تصادفی $x(t)$ بین x و $x + dx$ باشد برابر $p(x) dx$ است که $p(x)$ را تابع شدت احتمال می نامند. با تعیین $P(x)$ ، احتمال وجود x در قلمرو (x_1, x_2) در هر زمان دلخواه برابر است با:

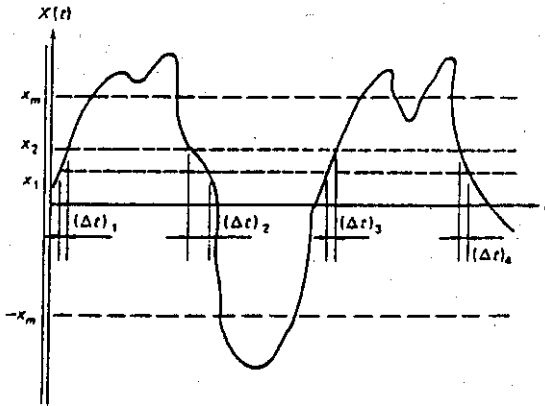
$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (۸-۲۲)$$

که برابر سطح هاشور خورده بین x_1 و x_2 در شکل (۵-۲۲) می باشد. بطور مشابه احتمال

1) Probability density function

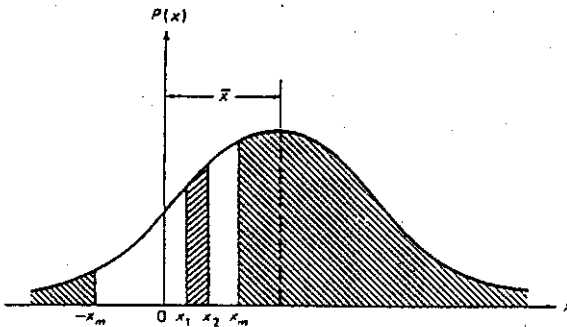
اینکه x از x_m بزرگتر باشد یعنی $P(|x| > x_m)$ برابر سطح انتهایی هاشورخورده در شکل (۵-۲۲) می باشد. با توجه به اینکه هر مقدار حقیقی x در قلمرو $(-\infty, +\infty)$ واقع است پس سطح زیر منحنی تابع شدت احتمال برابر یک است یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (۱-۲۲)$$



شکل ۴-۲۲ چگونگی تعیین احتمال برای بخشی از یک نگاهت تصادفی

هنگامی که x در هر سمت بسوی بی نهایت میل می کند $p(x)$ صفر می شود.



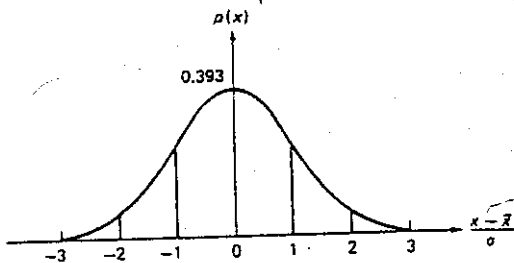
شکل (۵-۲۲): تابع شدت احتمال نرمال

متداول ترین تابع شدت احتمال، تابع توزیع نرمال است که به توزیع گوسی موسوم است و عبارت است از:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}} \quad (10-22)$$

این تابع در شکل (0-22) نمایانده شده است. ملاحظه می شود که تابع توزیع نرمال نسبت به میانگین \bar{x} متقارن است. در شکل 6-22 توزیع نرمال بدون بعد برحسب $\frac{(x-\bar{x})}{\sigma}$ رسم شده است. مقدار $P(-\infty, x_2)$ در رابطه (8-22) در جداولی در منابع مختلف و از جمله کتب ریاضی آمده است. احتمال وجود x بین $\bar{x}-\lambda\sigma$ و $\bar{x}+\lambda\sigma$ برای هر عدد مثبت λ از رابطه زیر به دست می آید:

$$P[\bar{x}-\lambda\sigma < x < \bar{x}+\lambda\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\bar{x}-\lambda\sigma}^{\bar{x}+\lambda\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}} dx \quad (11-22)$$



شکل (6-22) تابع استاندارد شدت احتمال نرمال

رابطه (11-22) احتمال اینکه x در فاصله ای معادل λ برابر انحراف استاندارد از \bar{x} باشد را به دست می دهد. احتمال اینکه x در فاصله ای بیش از λ برابر انحراف استاندارد از \bar{x} قرار گیرد یعنی احتمال فزونی $|x - \bar{x}|$ بر $\lambda\sigma$ ، برابر است با 1.0 منهای مقدار حاصل از رابطه فوق. در جدول زیر مقادیر عددی توزیع نرمال برای داده شده است.

λ	$P[\bar{x} - \lambda\sigma < x < \bar{x} + \lambda\sigma]$	$P[x - \bar{x} > \lambda\sigma]$
1	68.3%	31.7%
2	95.4%	4.6%
3	99.7%	0.3%

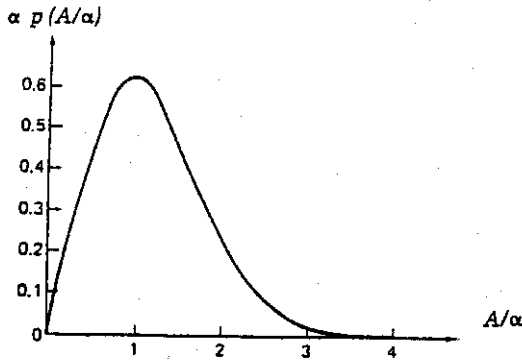
۲۲-۳- توزیع ریلی

متغیرهای تصادفی مثبت مانند قدر مطلق ارتعاش A بیشتر از توزیع

ریلی تابعیت می کنند که مطابق تعریف عبارتست از:

$$p(A) = \frac{A}{\alpha^2} e^{-A^2/2\alpha^2}, \quad A > 0 \quad (۱۲-۲۲)$$

شدت احتمال $p(A)$ برای $A < 0$ ، صفر می باشد و برای مقادیر مثبت A مطابق شکل (۷-۲۲) است.



شکل (۷-۲۲): تابع شدت احتمال ریلی

میانگین و میانگین مربعات تابع ریلی از روابط زیر به دست می آید:

$$\bar{A} = \int_0^{\infty} A p(A) dA = \int_0^{\infty} \frac{A^2}{\alpha^2} e^{-A^2/2\alpha^2} dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha$$

$$\overline{A^2} = \int_0^{\infty} A^2 p(A) dA = \int_0^{\infty} \frac{A^3}{\alpha^2} e^{-A^2/2\alpha^2} dA = 2\alpha^2$$

و پراکتندگی مربوط به تابع ریلی

$$\sigma_A^2 = \overline{A^2} - (\bar{A})^2 = \frac{4-\pi}{2} \alpha^2 = 0.429\alpha^2 \quad (۱۳-۲۲)$$

همچنین، احتمال فزونی A از يك مقدار داده شده $\lambda\sigma_A$ برابر است با:

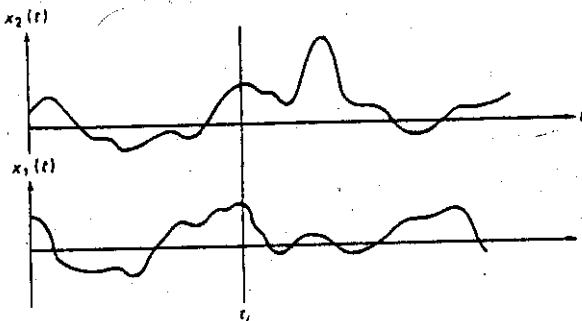
$$P[A > \lambda\sigma_A] = \int_{\lambda\sigma_A}^{\infty} \frac{A}{\alpha^2} e^{-A^2/2\alpha^2} dA \quad (۱۴-۲۲)$$

که مقادیر عددی آن عبارتست از:

λ	$P\{A > \lambda\sigma_A\}$
0	100%
1	80.7%
2	42.4%
3	14.5%
4	3.2%

۲۲-۴- همبستگی

همبستگی وسیله ای برای اندازه گیری ارتباط میان دو فرآیند تصادفی است. مثلاً نداشت های شکل ۲۲-۸ را در نظر بگیرید. همبستگی از ضرب مختصات این دو در هر لحظه t_1 و محاسبه معدل این مقادیر برای کلیه مقادیر t است. واضح است که همبستگی دو نداشت مشابه بزرگتر خواهد بود. برای دو نداشت نامشابه با متوسط صفر، بعضی از حاصلضرب ها مثبت و برخی منفی اند. لذا معدل آنها به صفر نزدیک می شود.



شکل (۲۲-۸): همبستگی بین $x_1(t)$ و $x_2(t)$

اکنون نداشت های شکل (۲۲-۹) را در نظر می گیریم که در آن $x_1(t)$ با $x(t)$ یکسان است لیکن به اندازه τ بسمت چپ منتقل شده است. یعنی $x_1(t) = x(t + \tau)$. همبستگی بین این دو خود بستگی $R(\tau)$ خوانده می شود و برابر است با:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (15-22)$$

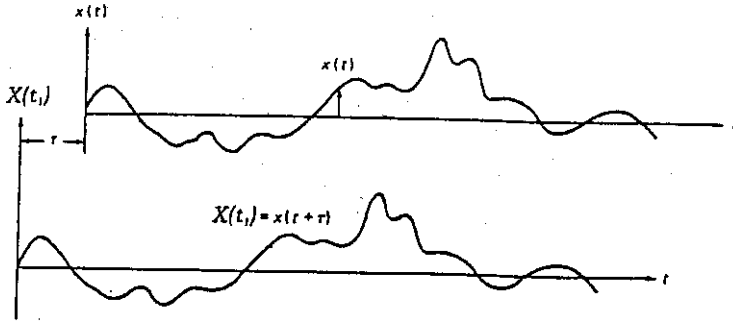
1) Correlation

2- Autocorrelation

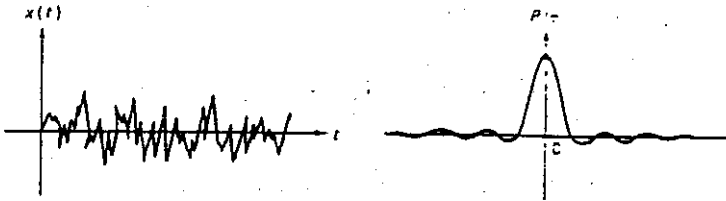
برای $\tau = 0$ ، خود بستگی به میانگین مربعات تبدیل می شود.

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt = \overline{x^2} \quad (۱۶-۲۲)$$

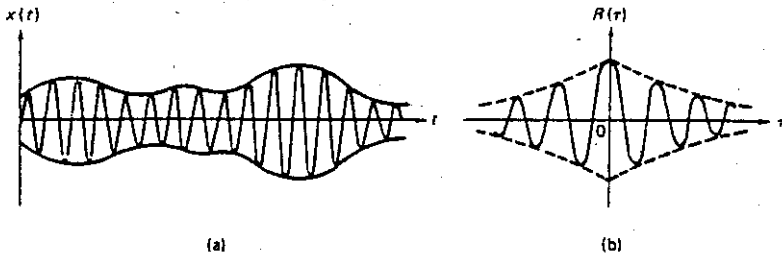
چون در شکل ۹-۲۲ می توان نگاهت اول را مقدم انگاشت، واضح است که $R(\tau) = R(-\tau)$ حول محور R متقارن بوده و همواره $R(\tau)$ از $R(0)$ کوچکتر است.



شکل (۹-۲۲): خود بستگی بین $x(t)$ و $x(t+\tau)$



شکل (۱۰-۲۲): فرایند تصادفی پهن $x(t)$ و تابع خود بستگی اش $R(\tau)$



شکل (۱۱-۲۲): فرایند تصادفی باریک $x(t)$ و تابع خود بستگی آن $R(\tau)$

توابع قویاً تصادفی نظیر شکل (۲۲-۱) در طول زمان کوتاهی تشابه خود را از دست می دهند. لذا خود بستگی این نوع توابع در $\tau = 0$ بسان قله تیزی است که بسرعت افت می کند. برای فرآیندهای تصادفی باریک که مانند شکل (۲۲-۱۱) دارای یک فرکانس غالبند، خود بستگی دارای ویژگی های شکل (۲۲-۱۱، ب) است، یعنی تابعی است. متقارن که در $\tau = 0$ به اوج رسیده و با فرکانس غالب $X(t)$ نوسان می نماید.

۲۲-۵- انتقال فوریه

در فصل ۵، از سری فوریه برای تعیین محتوای فرکانسی توابع تناوبی نسبت به زمان استفاده گردید. به طور کلی توابع تصادفی تناوبی نیستند، و برای تحلیل فرکانسی لازم است که سری فوریه به انتگرال فوریه تعمیم یابد. انتقال فوریه که از انتگرال های فوریه به نسبت می آید مطالعه وسیع تری از مسائل ارتعاشات تصادفی را ممکن می سازد. در آغاز، نشان می دهیم که انتگرال فوریه حالت حدی سری های فوریه است هنگامی که زمان تناوب بسمت بینهایت میل می کند. بدین منظور سری های فوریه را بشکل نمایی نشان داده و ضریب C_n از رابطه (۲۰-۵) را در (۱۹-۵) می نهیم تا رابطه (۲۲-۱۷) حاصل شود:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(\tau) e^{-in\omega\tau} e^{in\omega t} d\tau \quad (17-22)$$

در رابطه فوق علامت τ جایگزین t شده است. در اینجا فرکانس $\omega = n\bar{\omega}$ به صورت مقادیر مجزا با فواصل $\Delta\omega$ تعریف شده است.

$$\Delta\omega = (n+1)\bar{\omega} - n\bar{\omega} = \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$$

با جایگزینی ω بجای $n\bar{\omega}$ و $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$ بجای $\frac{1}{T}$ در (۲۲-۱۷) و توجه به اینکه برای

$\Delta\omega \rightarrow d\omega, T \rightarrow \infty$ رابطه (۲۲-۱۷) در حالت حدی به رابطه (۲۲-۱۸) تبدیل می شود:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} e^{i\omega t} d\omega \quad (18-22)$$

چون تابع داخل آکولاد فقط به ω بستگی دارد، می توان این رابطه را به دو بخش تقسیم کرد:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (19-22)$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (20-22)$$

بر اساس نظریه انتقال فوری، اعتبار این روابط به ارضاء شرط زیر بستگی دارد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt < \infty \quad (21-22)$$

تابع $C(\omega)$ انتقال فوری $F(t)$ است و این دو تابع جفت انتقال فوری^۱ نامیده می شوند. رابطه (۲۲-۱۹) تابع $F(t)$ را به اجزاء هارمونیک $C(\omega)$ مبدل می سازد، و رابطه (۲۲-۲۰) تابع $F(t)$ را به صورت مجموعه ای از اجزاء هارمونیک بیان می دارد. در عمل بهتر است از فرکانس f بر حسب دور بر ثانیه استفاده شود تا از ω بر حسب رادیان بر ثانیه. چون $d\omega = 2\pi df$ پس جفت انتقال فوری به شکلی متقارن تردری می آید:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) e^{i2\pi f t} df \quad (22-22)$$

$$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (23-22)$$

۲۲-۶- تحلیل طیفی

در فصل ۵ دیدیم که با بکارگیری روش فوریه برای یک تابع متناوب می توان اجزاء فرکانسی تابع را بشکل مثلثاتی [رابطه (۲-۵)] یا نمایی [رابطه (۱۹-۵)] به دست آورد. هنگامی که یک تابع متناوب در N فاصله مجزای زمانی تعریف شده است، اجزاء فرکانسی متوسط رابطه (۲۸-۵) به دست می آیند. در این بخش می خواهیم تحلیل فوریه تابع مفروض $x(t)$ را به میانگین مربعات x^2 مرتبط سازیم.

شرکت اجزاء فرکانسی $x(t)$ در مقدار x^2 تابع طیفی^۲ $x(t)$ نامیده می شود.

بنابراین برای تحلیل طیفی می باید x^2 را به صورت سری های فوریه (a_n, b_n) یا معادل آنها C_n برای $x(t)$ متناوب، یا انتقال فوریه $(C(\omega))$ برای توابع نامتناوب بیان کرد. کار را با تحلیل طیفی تابع متناوب $x(t)$ که به صورت سری های فوریه (۲-۵)

بیان گردیده آغاز می کنیم.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\bar{\omega}t + b_n \sin n\bar{\omega}t\} \quad (24-22)$$

که ضرایب، مطابق رابطه (۳-۵) عبارتند از:

1) Fourier Transform Pair

2) Spectral Function

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos n\omega t dt \quad (22-25)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin n\omega t dt$$

T زمان تناوب تابع و $\omega = \frac{2\pi}{T}$ فرکانس آن است. از جایگزینی $x(t)$ از (22-24) بجای یکی از عناصر در تعریف متوسط مجذور داریم:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \right\} dt \\ &= \frac{a_0}{T} \int_0^T x(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt + \frac{b_n}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt \right] \end{aligned}$$

سرانجام با جایگزینی انتگرال های (22-25)

$$\overline{x^2} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2} \right] \quad (22-26)$$

پس طیف تابع $x(t)$ برحسب سری های رابطه (22-26) داده شده است. هر جمله از این سری شرکت فرکانس مربوطه در میانگین مربعات $x(t)$ را بیان می دارد. اکنون به تابع مجزای زمانی $F(t_j)$ که به صورت انتگرال فوریه [رابطه (28-0)] بیان گردیده می پردازیم.

$$F(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{2\pi i(nj/N)} \quad (22-27)$$

که

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i(nj/N)} \quad (22-28)$$

همانطور که در فصل 5 دیدیم، در تابع $F(t_j)$ اجزاء هارمونیک بزرگتر از

فرکانس نیکویست¹ $\omega_{N/2} = \frac{\pi}{\Delta t}$ رادیان برثانیه، یا $f_{N/2} = 1/2\Delta t$ دور بر ثانیه، در

1) Nyquist Frequency

انتقال منفصل فوریه [رابطه (۲۲-۲۷)] وجود ندارند. همچنین در فصل ۵ دیدیم که اگر در $F(t_j)$ فرکانس های بزرگتر از محدودیت فوق وجود داشته باشد موجب اعوجاج فرکانس های پایین تر می شود. پس لازم است که مقدار N بقدر کافی بزرگ اختیار شود تا همه فرکانس های تابع اصلی را شامل شود. برای اطمینان از این شرط، می توان بوسیله فیلترهای الکترونیکی فرکانس های بالاتر از فرکانس نیکویست را حذف نمود. متوسط مجذور تابع منفصل $F(t_j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) از رابطه (۲۲-۲۷) به دست می آید:

$$\overline{F^2} = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F^2(t_j) \Delta t \quad (22-29)$$

با نهادن $\frac{\Delta t}{N}$ بجای $\frac{1}{N}$ و استفاده از (۲۷-۲۲) و (۲۸-۲۲)

$$\begin{aligned} \overline{F^2} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{2\pi i(nj/N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n \left[\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{2\pi i(nj/N)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n C_n^* \end{aligned}$$

که C_n^* مزدوج مختلط C_n است و چون $F(t_j)$ تابعی حقیقی است، پس با مزدوج خود برابر است:

$$F(t_j)^* = F(t_j)$$

$$\left[e^{-2\pi i(nj/N)} \right]^* = e^{2\pi i(nj/N)}$$

پس

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{2\pi i(nj/N)} = C_n^*$$

بنابراین از برابری C_n و C_n^*

$$\overline{F^2} = \sum_{n=0}^{N-1} |C_n|^2 = |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2 + \dots + |C_{N-1}|^2 \quad (22-30)$$

جملات این حاصل جمع طیف مورد نیاز تابع منفصل $F(t_j)$ هستند. بعبارت دیگر این

جملات بیانگر شرکت فرکانسها در میانگین مربعات $\overline{F^2}$ می باشند. اثر هر فرکانس برابر مربع مدول ضریب مختلط^۱ مربوطه C_n می باشد که در رابطه (۲۲-۲۸) داده شده است.

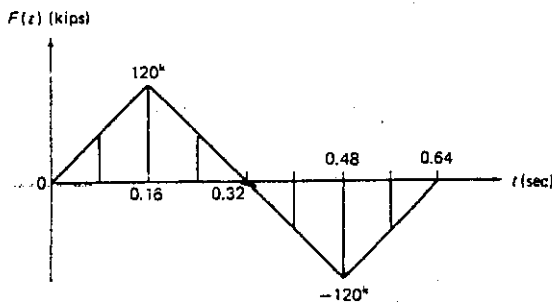
مثال ۲۲-۲- طیف تابع $F(t)$ در شکل ۲۲-۱۷ را بدست آورید. فرض شود که تابع در ۸ نقطه با فواصل زمانی مساوی تعریف شده است. یکمک طیف مقدار $\overline{F^2}$ را محاسبه کرده و نتیجه را با روشی که مستقیماً از تعریف $\overline{F^2}$ استفاده می شود مقایسه کنید. برای حل این مثال از برنامه ۴ با $N=8$ برای تعیین ضرایب فوریه C_n استفاده می شود. مقادیر بدست آمده در جدول ۲۲-۱ آمده است. جمع مقادیر طیفی در آخرین ستون این جدول برابر است با $\overline{F^2} = 0.5400 E10$ برای محاسبه $\overline{F^2}$ بروش مستقیم

$$\overline{F^2} = \frac{1}{T} \int_0^T F^2(t) dt$$

که با قرار دادن

$$F(t) = 120000t / 0.16$$

$$\overline{F^2} = \frac{4}{0.64} \int_0^{0.16} \left[\frac{120000}{0.16} \cdot t \right]^2 dt = 0.4800 E10$$



شکل ۲۲-۱۷- تابع نیرو در مثال ۲۲-۲

1- Complex Coefficient

جدول ۲۲-۱- تحلیل طیفی تابع $F(t)$ در شکل ۲۲-۱۲

n	ضرایب فوریه C_n			$ C_n ^2$
	Re (C_n)	Im (C_n)	$ C_n $	
0	0	0		0
1	0	-51210.	51210.	0.2623 E 10
2	0	0		0
3	0	8787.	8787.	0.7721 E 8
4	0	0		0
5	0	8787.	8787.	0.7721 E 8
6	0	0		0
7	0	51210.	51210.	0.2623 E 10

$\overline{F^2} = 0.5400 \text{ E } 10$

با توجه به تعداد نقاط کم انتخاب شده، مقدار $\overline{F^2} = 0.5400 \text{ E } 10$ که از طیف به دست آمد به مقدار دقیق $\overline{F^2} = 0.4800 \text{ E } 10$ نزدیک است. همانطور که قبلاً بیان شد چنانچه تعداد فواصل N برای انعکاس فرکانسهای بالا کافی نباشد خطا در محاسبات وارد می گردد. برای بهبود محاسبات طیفی لازم است این نقاط را افزایش داد. در جدول ۲۲-۲ نتایج برنامه ۳ با $M = 3, 4, 5, 6, 7$ در رابطه با $N = 2^M = 8, 16, 32, 64, 128$ (فواصل تابع $F(t)$ در شکل ۲۲-۱۲) آمده است. ملاحظه می شود که اعداد ستون آخر با افزایش بسمت مقدار دقیق $\overline{F^2} = 0.4800 \text{ E } 10$ نزدیک می شوند.

جدول ۲۲-۲- مقدار متوسط مجذور برای تابع $F(t)$ در شکل ۲۲-۱۲

M	$N = 2^M$	$\overline{F^2}$
5	8	0.5400 E 10
4	16	0.4950 E 10
5	32	0.4838 E 10
6	64	0.4809 E 10
7	128	0.4802 E 10

$\overline{F^2} = 0.4800 \text{ E } 10$

۷-۲۲- تابع شدت طیفی^۱

چنانچه يك فرآیند تصادفی بگونه ای منظم^۲ شوند که میانگین^۳ آن صفر گردد، و اگر $x(t)$ دارای اجزاء متناوب نباشد، تابع خود بستگی^۴ $R_x(\tau)$ با افزایش τ به صفر نزدیک می گردد.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0 \quad (۲۱-۲۲)$$

پس انتظار داریم که $R_x(\tau)$ شرط (۱-۲۲) را ارضا کند. حل برای تعیین انتقال فوریه برای تابع $R_x(\tau)$ می توان روابط (۱۹-۲۲) و (۲۰-۲۲) را به کار گرفت.

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (۲۲-۲۲)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (۲۳-۲۲)$$

$S_x(\omega)$ تابع شدت طیفی $x(t)$ نامیده می شود. مهمترین ویژگی این تابع این است که در $\tau=0$ داریم

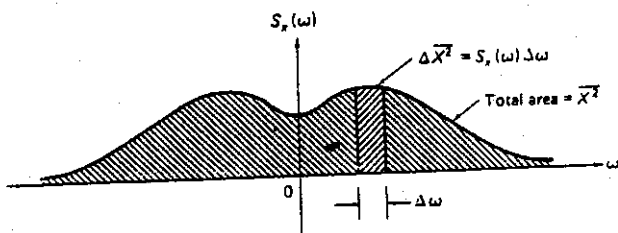
$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (۲۴-۲۲)$$

که طبق رابطه (۱۶-۲۲) برابر میانگین مربعات است یعنی

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (۲۵-۲۲)$$

پس مطابق شکل ۲۲-۱۲ میانگین مربعات يك تابع تصادفی با سطح زیر منحنی شدت طیفی برابر است. پس اثر نمر فرکانس $\Delta\omega$ بر متوسط مجذور برابر است با

$$\Delta\overline{x^2} = S_x(\omega)\Delta\omega \quad (۲۶-۲۲)$$



شکل ۲۲-۱۳- تابع شدت طیفی که سطح زیر آن با میانگین مربعات تابع اصلی برابر است

1- Spectral density function 2- Normalized (or adjusted) 3- Mean 4- Autocorrelation

شدت طیفی يك نكاشت را می توان با استفاده از تحلیل گره‌های الكترونیکی

فرکانس^۱ و طیف سنج ها^۲ به دست آورد. خروجی يك شتاب سنج^۳ و یا هر ارتعاش سنج مشابهی را به دستگاه متصل می سازند. این دستگاه اساساً به سان يك فیلتر فرکانسی باریك با فرکانس متغیر عمل کرده و بكمك طیف سنج خود خروجی فیلتر شده را نمایش می دهد. بكمك این دستگاه آزمایش كنده بدنبال فرکانسهایی غالب در يك سیگنال ارتعاشی می گردد. خروجی دستگاه طیف سنج^۴ عبارتست از سهم سیگنال ورودی $x(t)$ در محدوده كوچك $\Delta\omega$ حول يك فرکانس اختیاری، در میانگین مربعات $\overline{\Delta x^2}$.

در محاسبات نظری، واحد فرکانس، رادیان بر ثانیه در نظر گرفته می شود. لیكن در مسائل عملی فرکانس را با دور بر ثانیه یا هرتز (Hz) بیان می نمایند. پس با بازنویسی،

$$\overline{\Delta x^2} = S_x(f) \Delta f \quad (27-22)$$

كه f فرکانس هرتز است. چون $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ پس با توجه به روابط فوق،

$$S_x(f) = 2\pi S_x(\omega) \quad (28-22)$$

یا معلوم بودن تابع شدت طیفی برای يك تحريك، میانگین مربعات آن از (27-22) برابر است با،

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \quad (29-22)$$

تابع شدت طیفی $S_x(f)$ بر حسب مربع واحدهای x بر هرتز بیان می شود. چون تابع خود بستگی $R_x(\tau)$ حقیقی و زوج است با استفاده از رابطه اولر

$$e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau$$

از رابطه (22-22)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (30-22)$$

با توجه به رابطه (22-30) و اینکه $S_x(\omega)$ نیز تابع زوجی از ω است، رابطه (22-33) به صورت زیر در می آید:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (41-22)$$

و یا روابط (22-30) و (22-41) كه

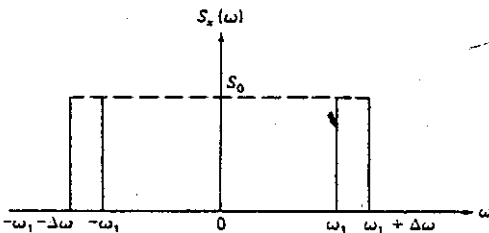
$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (42-22)$$

$$R_x(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (43-22)$$

اینها همان روابط وینر - کینچن^۱ هستند که نشان می دهند چگونه می توان تابع شدت طیفی را از تابع خود بستگی به دست آورد و یا بالعکس.

۲-۸- فرآیندهای تصادفی باریک^۲ و پهن^۳

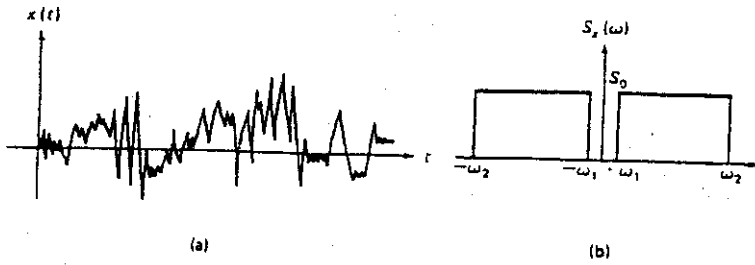
فرآیندی که تابع شدت طیفی اش مطابق شکل ۲۲-۱۴ فقط در قلمرو کوچکی دارای عناصر غیر صفر باشد فرآیند باریک نامیده می شود. بالعکس فرآیند پهن در قلمرو بزرگی دارای عناصر غیر صفر است. زمان نگاشت^۴ چنین فرآیندی مطابق شکل ۲۲-۱۵ - الف از ترکیب همه فرکانسها در قلمرو مذکور تشکیل می شود. در حالت حدی که باند فرکانس^۵ از $\omega_1 = 0$ تا $\omega_2 = \infty$ گسترده باشد طیف را اغتشاش سفید^۶ می نامند.



شکل ۲۲-۱۴- تابع شدت طیفی یک فرآیند تصادفی باریک

با توجه به رابطه (۲۲-۲۵)، میانگین مربعات یک فرآیند اغتشاش سفید می باید بینهایت باشد، لذا این فرآیند صرفاً مفهومی نظری است. در عمل هنگامی که عرض باند فرکانسی خیلی فراتر از فرکانسهای مورد نظر است، فرآیند را اغتشاش سفید می گویند.

- 1- Wiener- Kinchin 2- Narrow- band random process 3- Wide- band random process
4- Time history 5- Frequency band 6- White noise



شکل ۲۲-۱۵- فرآیند پهن (الف) زمان نکاشت، (ب) تابع شدت طیفی

مثال (۲۲-۲): میانگین مربعات و تابع خودبستگی فرآیند باریک $x(t)$ را به دست آورید. تابع شدت طیفی این فرآیند در شکل ۲۲-۱۴ نشان داده شده است.

از رابطه (۲۲-۲۵)

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = 2S_0\Delta\omega$$

و از رابطه (۲۲-۴۳)

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega \\ &= 2 \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \Delta\omega} S_0 \cos \omega \tau d\omega \quad (\text{الف}) \\ &= \frac{2S_0}{\tau} [\sin \omega \tau]_{\omega_1}^{\omega_1 + \Delta\omega} \\ &= \frac{2S_0}{\tau} [\sin(\omega_1 + \Delta\omega)\tau - \sin \omega_1 \tau] \end{aligned}$$

$$R_x(\tau) = \frac{4S_0}{\tau} \cos\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau \sin \frac{\Delta\omega}{2} \tau \quad (\text{ب})$$

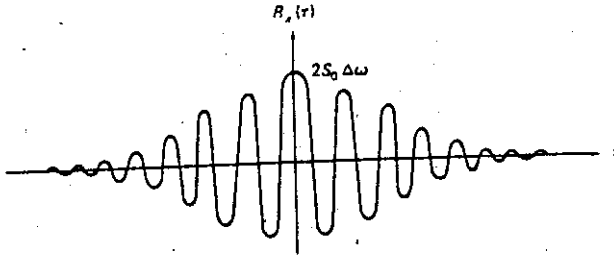
تابع خودبستگی یک فرآیند باریک در رابطه b در شکل ۲۲-۱۶ نمایانده شده است. فرکانس غالب $R_x(\tau)$ معادل مقدار $\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ است. تابع خود بستگی این چنین فرآیندی در $\tau=0$ به مقدار اوج $2S_0\Delta\omega$ رسیده و با دور شدن از نقطه صفر مانند منحنی کسینوسی کاهش می یابد.

تابع خود بستگی $R_x(\tau)$ برای یک فرآیند پهن که تابع شدت طیفی اش مطابق شکل ۲۲-۱۵-ب در قلمرو ω_1 تا ω_2 گسترده است می تواند نتایج مثال ۲۲-۲ به دست آید. در این حالت فرض می کنیم فرکانس کوچکتر $\omega_1=0$ و فرکانس بزرگتر $\omega_2 = \Delta\omega$

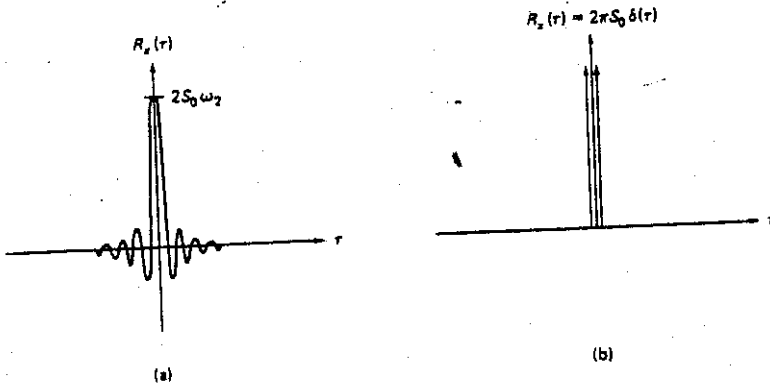
از رابطه (b) در مثال قبلی

$$R_x(\tau) = \frac{4S_0}{\tau} \cos\left(\frac{\omega_2 \tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{2S_0}{\tau} \sin \omega_2 \tau \quad (44-22)$$

این تابع در شکل ۲۲-۱۷ نشان داده شده است.



شکل (۲۲-۱۶) تابع خودبستگی برای یک فرآیند باریک



شکل (۲۲-۱۷) خودبستگی یک فرآیند پهن برای اغتشاش سفید تبدیل به تابع دلتا می شود

تابع خودبستگی اغتشاش سفید را می توان از رابطه (۲۲-۴) با فرض $\omega_2 \rightarrow \infty$ به دست آورد. در این حالت حلقه های مجاوره هم نزدیک شده و همانند شکل (۲۲-۱۷-ب) باعث ایجاد یک قله تیز در $\tau = 0$ و صفر شدن تابع در بقیه نقاط می شوند. ارتفاع این قله تیز بینهایت، و عرض آن صفر است لیکن مساحت آن مقدار محدودی می باشد. این

چنین رفتاری را بطور ریاضی می توان با تابع دلتای دیراک $\delta(\tau)$ توصیف کرد که طبق تعریف در همه جا صفر است مگر در $\tau = 0$ که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0) \quad (45-22)$$

با استفاده از $\delta(\tau)$ می توان تابع خودبستگی اغتشاش سفید را به دست آورد.

$$R_x(\tau) = C\delta(\tau) \quad (46-22)$$

C از رابطه (22-22) به دست می آید. از جایگزینی رابطه (46-22) در (22-22)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C\delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

و با استفاده از (45-22)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} C e^{-j\omega \cdot 0} = \frac{C}{2\pi} \quad (47-22)$$

پس

$$S_0 = \frac{C}{2\pi} \quad (48-22)$$

C از رابطه فوق در (46-22) قرار داده و تابع خودبستگی را برای اغتشاش سفید به دست می آوریم.

$$R(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (49-22)$$

۲۲-۹- پاسخ به تحریک تصادفی^۲

برای تعیین پاسخ یک سازه به تحریکی تصادفی می باید محتوای فرکانسی تابع تحریک معلوم گردد. توابع طیفی و شدت طیفی بیشتر مورد علاقه هستند.

تا همین اواخر، برای تعیین طیف سری های منفصل، ابتدا تابع خودبستگی (۱۵-۲۲) محاسبه می شود و سپس با اعمال انتقال فوریه طیف مورد نظر به دست

می آمد [رابطه (۲۲-۲۲) یا (۴۲-۲۲)]. اما با پیدایش انتقال فوریه سریع^۳ (FFT) این روش تغییر نموده است. در فصل ۵ دیدیم که FFT روش بسیار کارآیی برای محاسبه انتقال فوریه یک سری زمانی است. اکنون بجای اینکه ابتدا تابع خودبستگی تعیین و سپس انتقال فوریه محاسبه شود، برای دقت و کار آرائی بیشتر طیف مستقیماً^۴ از سری زمانی اصلی به دست می آید.

1- Dirac's delta function

2- Random excitation

3-Fast Fourier Transform

سیستم تکدرجه شکل ۲۲-۱۸-الف تحت نیروی تصادفی $F(t)$ در شکل ۲۲-۱۸-ب در نظر میگیریم. فرض می شود که نیرو در N نقطه با فواصل مساوی $t_j = j\Delta t$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) معلوم باشد. با تحلیل فوریه $F(t)$ به محتوای فرکانسی در روابط (۲۲-۲۷) و (۲۲-۲۸) می رسم. از ترکیب پاسخ سیستم تکدرجه به فرکانسهای مختلف $F(t)$ در رابطه (۲۰-۵)،

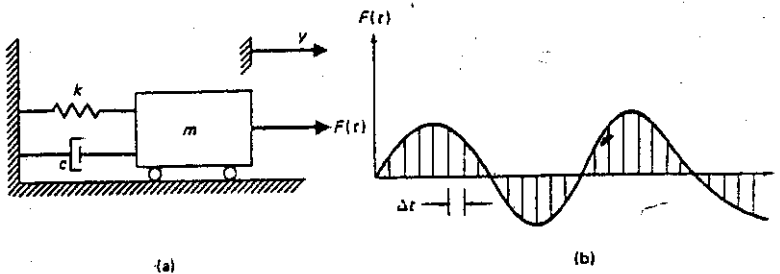
$$y(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{C_n e^{2\pi i n j / N}}{k(1 - r_n^2 + 2i r_n \xi_n)} \quad (50-22)$$

که طبق بحث بخش ۵-۶

$$n \leq N/2 \quad \text{برای} \quad \omega_n = n\bar{\omega} \quad (51-22)$$

$$n > N/2 \quad \text{برای} \quad \omega_n = -(N-n)\bar{\omega}$$

$$r_n = \frac{\omega_n}{\omega}, \quad \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (52-22)$$



شکل ۲۲-۱۸-ب دستگاه تکدرجه تحت تابمی تصادفی که در فواصل زمانی مساوی نمونه گیری شده است

در این روابط T طول تحریک، N تعداد فواصل زمانی مساوی، ξ_n ضریب میراثی تغییر ω_n است.

رابطه (۵۰-۲۲) را می توان چنین نوشت:

$$y(t_j) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{N-1} H_n C_n e^{2\pi i n j / N} \quad (53-22)$$

که H_n مقدار بدون بعد زیر است

$$H_n = \frac{1}{1 - r_n^2 + 2i r_n \xi_n} \quad (54-22)$$

میانگین مربعات پاسخ \bar{y}^2 از رابطه (۲۲-۳) به دست می آید.

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 |C_n|^2 \quad (55-22)$$

جای آن، می توان رابطه (55-22) را برحسب تابع شدت طیفی بیان کرد. سهم $\Delta \bar{F}^2$ در \bar{F}^2 در رابطه (22-20) داده شده است،

$$\Delta \bar{F}^2 = |C_n|^2 \quad (56-22)$$

که از رابطه (22-26)

$$\Delta \bar{F}^2 = S_F(\omega_n) \Delta \omega \quad (57-22)$$

و اکنون با استفاده از (22-56) و (22-57)، می توان (22-55) را دوباره نوشت،

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 S_F(\omega_n) \Delta \omega \quad (58-22)$$

یا

$$\bar{y}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} S_y(\omega_n) \Delta \omega \quad (59-22)$$

که

$$S_y(\omega_n) = \frac{1}{k^2} |H_n|^2 S_F(\omega_n) \quad (60-22)$$

و رابطه (22-59) برحسب هرتز

$$\bar{y}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} S_y(f_n) \Delta f \quad (61-22)$$

که

$$S_y(f_n) = \frac{1}{k^2} |H_n|^2 S_F(f_n) \quad (62-22)$$

این رابطه بیانگر این نتیجه مهم است که اگر تابع پاسخ سیستم H_n/k معلوم باشد شدت طیفی پاسخ را می توان از شدت طیفی تحریک $S_F(f_n)$ به دست آورد.

مثال 22-4- میانگین مربعات پاسخ بستگاه تکدرجه با $k=100000$ پوند بر اینچ،

$m = 100 \frac{\text{lb sec}^2}{\text{in}}$ و $c = 632 \frac{\text{lb sec}}{\text{in}}$ تحت نیروی $F(t)$ در شکل (22-17) را محاسبه کنید.

میانگین مربعات پاسخ \bar{y}^2 از رابطه (22-55) برابر است با

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 |C_n|^2$$

$$|H_n|^2 = \frac{1}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n\xi_n)^2} \quad \text{از رابطه (۲۲-۵۴)}$$

مقدار $|C_n|$ برای تابع $F(t)$ در شکل (۲۲-۱۲) در مثال ۲-۲۲ تعیین شد و در جدول ۲-۲۲ داده شده است. نحوه محاسبه $\overline{y^2}$ در جدول ۲-۲۲ آمده است. با استفاده از این جدول متوسط مجذور پاسخ $\overline{y^2} = 0.9351$.

جدول ۲-۲۲- محاسبه $\overline{y^2}$ برای مثال ۲-۲۲

n	ω_n (rad/sec)	$r = \omega_n/\omega$	$ H_n $	$ C_n $ (lb)	$\Delta \overline{y^2} = \frac{ H_n ^2 C_n ^2}{k^2}$ (in ²)
0	0	0	1.000	0	0
1	9.8175	0.3105	1.104	0.5121 E 5	0.3197
2	19.6350	0.6209	1.595	0	0
3	29.4524	0.9314	4.376	0.8787 E 4	0.1479
4	39.2699	1.2418	1.677	0	0
5	-29.4524	-0.9314	4.376	0.8787 E 4	0.1479
6	-19.6350	-0.6209	1.595	0	0
7	-9.8175	-0.3105	1.104	0.5121 E 5	0.3197

$\overline{y^2} = 0.9351$

تخلیر رابطه (۲۲-۵۸) برای حالتی که یک شتاب تصادفی^۱ به پی سازه وارد می شود برای میانگین مربعات شتاب پاسخ در نقطه P از سازه به دست می آید.

$$\overline{a_p^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} S(\omega_n) |H_n|^2 \Delta \omega \quad (۲۲-۶۲)$$

H_n/k پاسخ فرکانسی شتاب نقطه P در اثر شتاب هارمونیک واحد در پی سازه می باشد. پاسخ هر سازه تحت تحریک تصادفی نقطه ای^۲ با محاسبات عددی ساده به دست می آید بشرطی که تابع طیفی یا شدت طیفی تحریک و پاسخ فرکانسی سازه معلوم باشد. پاسخ فرکانسی H_n را می توان بطور تجربی با اعمال یک تحریک سینوسی با فرکانس متغیر در پی و اندازه گیری پاسخ در نقطه مورد نظر به دست آورد. محاسبات لازم در مثال عددی زیر تشریح شده است.

مثال (۲۲-۵): پاسخ نقطه P از سازه شکل ۲۲-۱۹-الف را تحت شتاب تصادفی پی

1- Random acceleration

2- Single point random excitation

تعیین نمائید. تابع شدت طیفی تحریک در شکل ۲۲-۱۹-ب نمایانده شده است برای تعیین پاسخ فرکانسی $\frac{a_p}{a_0}$ سازه در نقطه P، پی تحت شتاب سینوسی با دامنه a_p و فرکانس متغیر f_n قرار گرفته و پاسخ در شکل ۲۲-۱۹-۲ نشان داده شده است. میانگین مربعات پاسخ \bar{a}_p^2 در نقطه P از رابطه (۲۲-۶۳) برابر است با:

$$\bar{a}_p^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} S(f_n) |H_n|^2 \Delta f \quad (\text{الف})$$

که

$$|H_n|/k = a_p / a_0$$

خلاصه محاسبات در جدول ۲۲-۴ آمده است. از رابطه (الف)، جمع آخرین ستون این جدول برابر میانگین مربعات پاسخ $\bar{a}_p^2 = 1.8100 \text{ g}^2$ و از رابطه (۲۲-۳) [با فرض متوسط $\bar{a} = 0$]

$$\sigma = \sqrt{1.8100} \text{ g} = 1.345 \text{ g}$$

احتمال تجاوز از یک شتاب تعیین شده با استفاده از توزیع نرمال برای $|a_p| > \sigma = 1.345 \text{ g}$

و برای $|a_p| > 3\sigma = 4.041 \text{ g}$ عبارت است از

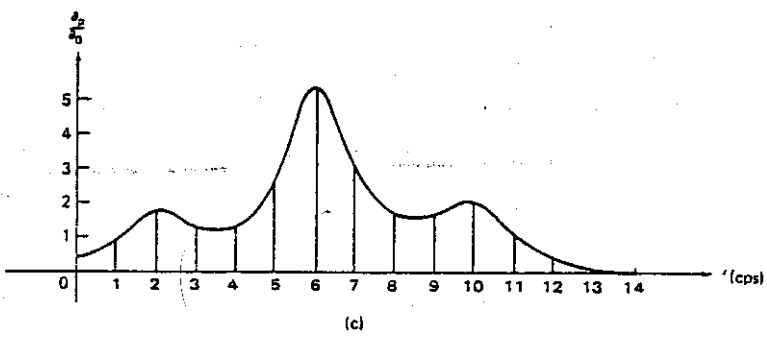
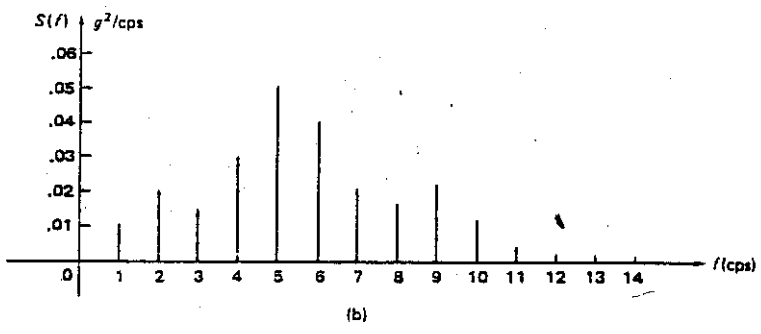
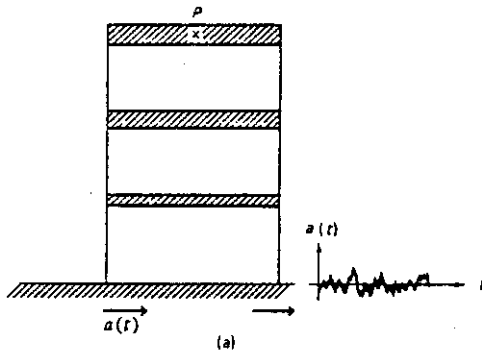
$$P[|a_p| > 1.345 \text{ g}] = 31.7\%$$

$$P[|a_p| > 4.041 \text{ g}] = 0.3\%$$

بطور مشابه، احتمال اینکه شتاب اوج A_p از یک مقدار معین تجاوز کند، با استفاده از توزیع ریلی

$$P[|A_p| > 1.345 \text{ g}] = 80.7\%$$

$$P[|A_p| > 4.041 \text{ g}] = 3.2\%$$



شکل ۱۹-۲۲

الف) سازه تحت شتاب تصادفی پی، ب) تابع شدت طیفی تحریک، ج) پاسخ فرکانسی نسبی در نقطه P

f_n (cps)	Δf (cps)	$S(f_n)$ (g ² /cps)	$ H_n /k$ (in/lb)	$(1/k^2) H_n ^2 S(f_n) \Delta f$ (g ² units)
0	1.0	0	0.5	0
1.0	1.0	0.010	1.0	0.0100
2.0	1.0	0.020	1.8	0.0648
3.0	1.0	0.015	1.3	0.0253
4.0	1.0	0.030	1.4	0.0588
5.0	1.0	0.050	2.2	0.2420
6.0	1.0	0.040	5.2	1.0816
7.0	1.0	0.020	3.0	0.1800
8.0	1.0	0.015	1.8	0.0486
9.0	1.0	0.020	1.7	0.0578
10.0	1.0	0.010	1.9	0.0361
11.0	1.0	0.005	1.0	0.0050
12.0	1.0	0	0.4	0
13.0	1.0	0	0	0
14.0	1.0	0	0	0
sum =				1.8100

۲۲-۱- خلاصه

هدف این فصل معرفی مبانی نظریه ارتعاشات تصادفی و کاربرد آن در دینامیک سازه هاست. در دینامیک سازه ها، انفجار سازه های مجاور معمولترین منشاء ارتعاشات تصادفی است. پاسخ سازه به زلزله نیز می تواند توسط نظریه ارتعاشات تصادفی پیش بینی شود.

یک فرآیند تصادفی عبارتست از تابعی از زمان که مقدارش در هر لحظه بوسیله مجموعه ای از نگاشتها معلوم می شود. این تابع را فقط با استفاده از ابزار آماری و به شکلی احتمالی می توان توصیف نمود. مهمترین ویژگیهای آماری یک فرآیند تصادفی $x(t)$ عبارتند از میانگین \bar{x} ، میانگین مربعات x^2 ، پراکندگی σ_x^2 ، که از روابط (۲۲-۱) و (۲۲-۲) و (۲۲-۳) به دست می آیند. متداولترین توزیع یک فرآیند تصادفی توزیع نرمال است. هنگامی که متغیر تصادفی فقط مقادیر مثبت را می پذیرد، (مثلاً مقدار مطلق دامنه های ارتعاش)، فرآیند از توزیع ریلی پیروی می کند.

برای یک متغیر تصادفی $x(t)$ ، تابع خودبستگی $R_x(\tau)$ طبق رابطه (۲۲-۱۵) تعریف می شود. تابع شدت طیفی $S_x(\omega)$ عبارتست از انتقال فوریه تابع خودبستگی [رابطه

(۲۲-۲۳) اگر چه طیف $X(t)$ را می توان از $R_x(\tau)$ به دست آورد، اما امروزه با استفاده از روش انتقال سریع فوریه FFT، می توان طیف يك تابع تصادفی را از سری فوریه آن [رابطه (۲۲-۲۳)] با کارائی بیشتری به دست آورد.

در صورتیکه تابع تحریک و پاسخ فرکانسی يك سیستم دینامیکی معلوم باشند، تعیین میانگین مربعات پاسخ از رابطه (۲۲-۵۵) براحتی انجام می گیرد. با داشتن متوسط مجذور پاسخ و استفاده از توابع استاندارد احتمال (مانند توزیع نرمال و ریلی) می توان پاسخ را به شکل احتمالی تعیین نمود.

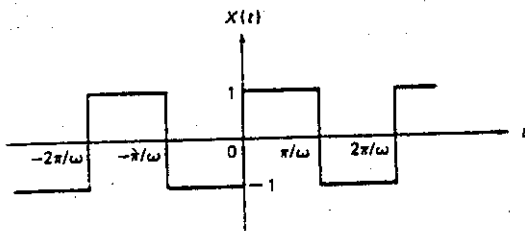
در این فصل مقدماتی در مورد ارتعاشات تصادفی، بحث به دستگاه تکدرجه محدود گردیده است. لیکن تمسیم روش به دستگاههای خطی چند درجه آزادی و سیستمهای پیوسته براحتی با استفاده از ترکیب مدها انجام پذیر است. آنچنانکه قبلاً ملاحظه شد در این روش يك دستگاه معادلات دیفرانسیل به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل مستقل از هم تبدیل می شود که هر معادله مبین يك دستگاه تکدرجه آزادی است و بنابراین مطابق روش مذکور در این فصل برای تحریک ارتعاشی تصادفی قابل حل می باشد.

مسائل

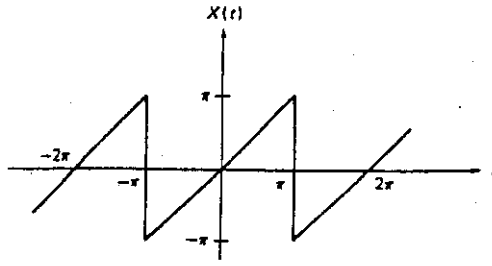
۱-۲۲ تا ۵-۲۲ مقادیر میانگین و میانگین مربعات توابع اشکال م (۱-۲۲) تا (۵-۲۲) را به دست آورید.

۶-۲۲ تا ۱-۲۲- بسط سری فوریه مربوط به توابع متناوب اشکال م (۱-۲۲) تا م (۵-۲۲) را تعیین کنید.

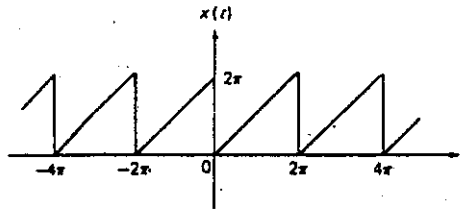
۱۱-۲۲ تا ۱۵-۲۲- توابع طیفی مربوط به توابع شکلهای م (۱-۲۲) تا م (۵-۲۲) را تعیین کرده و رسم نمایید.



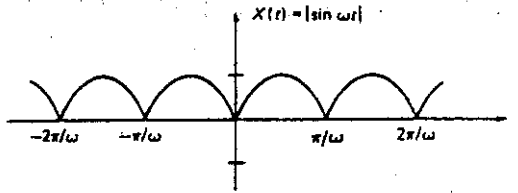
شکل م (۱-۲۲)



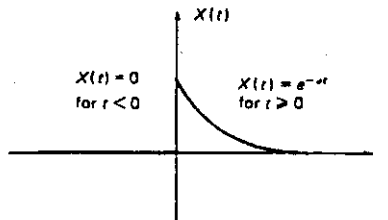
شکل م (۲۲-۷)



شکل م (۲۲-۳)



شکل م (۲۲-۳)



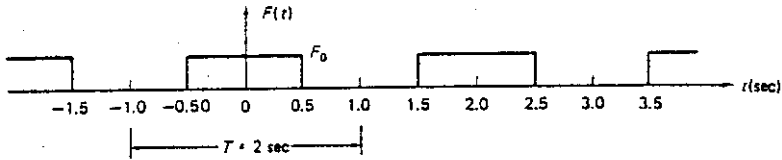
شکل م (۲۲-۵)

۱۶-۲۲- يك موج سینوسی زیر داده شده است

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin \bar{\omega} t$$

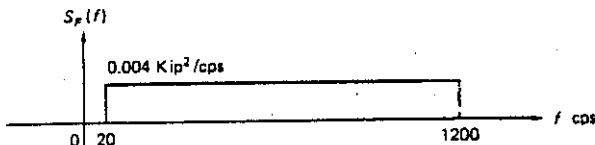
مقادیر میانگین \bar{x} و میانگین مربعات $\overline{x^2}$ آن را تعیین کنید.

۱۷-۲۲- ضرایب فوریه C_n و توابع طیفی مربوط به تابع متناوب شکل م (۱۷-۲۲) را تعیین کنید.



شکل م (۱۷-۲۲)

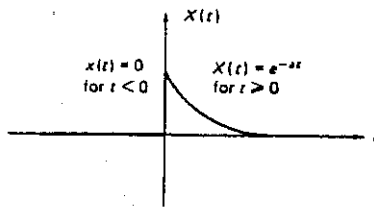
۱۸-۲۲- يك نیروی اتفاقی، که تابع شدت طیفی آن در شکل م (۱۸-۲۲) داده شده است، دارای مقدار میانگین $\bar{F} = 2 \text{Kips}$ می باشد. مقادیر انحراف استاندارد σ_F و جذر مجموع مربعات RMS_F آنرا تعیین نماید.



شکل م (۱۸-۲۲)

۱۹-۲۲- تابع خود بستگی فرآیند تصادفی ارگودیک $x(t)$ را محاسبه کنید. هر تابع نمونه عبارتست از يك موج مربع با دامنه a و پریود T .

۲۰-۲۲- انتقال فوریه و انتگرال فوریه را برای تابع شکل م (۲۰-۲۲) تعیین کنید.



شکل م (۲۰-۲۲)

۲۱-۲۲- یک سیستم یک درجه آزادی به جرم $1.0 \frac{\text{lb. sec}}{\text{in}}$ ، سختی 100 lb/in و میرایی 0.2 توسط نیروی $F(t) = 1000 \cos 5t + 1000 \cos 10t + 1000 \cos 15t$ (lb) تحریک می شود تابع طیفی و میانگین مربعات پاسخ آن را تعیین کنید. همچنین طیف مربوط به نیروی ورودی و غیر مکان پاسخ خروجی را رسم نمایید.