

www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

خوشگاه تفصلي مهندسي عمران

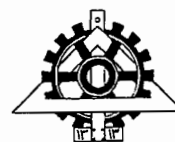
بسمه تعالی



نام جزوه: دینامیک سازه ها

نام استاد: دکتر خسرو برگی

دانشگاه: تهران



دانشکده فنی دانشگاه تهران

مجموعه مطالب کلاسی درس

دینامیک سازه‌ها

دکتر خسرو برگی

عضو هیات علمی دانشکده فنی

دانشگاه تهران

مجموعه بیوست در حقیقت یکی مطالب مورد بحث در کلاس دیناسیک سازه ها می باشد که بصورت تراستران (کامپوزیت) بوده و برای صرفه جویی در وقت کلاس و افزایش راندمان آن در اختیار دانشجویان قرار می گیرد تا دانشجو با دقت بیشتر به مطالب توجه نماید و وقت وی صرف نوشته مطالب از روی تراستران نشود.

بنابراین مجموعه این مطالب بصورت کلی و گلاسه بوده و همراه با مباحث شفاهی اینجانب در کلاس و توضیحات تکمیلی، کامل می باشد و به تنهایی دارای تمامی جزئیات نخواهد بود.

جهت کتب رفرنس (مرجع) و کتب تمرینات به کتابهای زیر مراجعه شود:

۱- دیناسیک سازه ها چاپ چهارم دانشگاه تهران ^{تالیف} حسین درویشی

۲- دیناسیک سازه ها، ماشین آلات چاپ اول دانشگاه تهران ترجمه حسین درویشی

* کتاب اول دارای تئوری دیناسیک سازه کم و مثال های حل شده و حل نشده است و کتاب دوم نیز دارای مباحث دیناسیک سازه کم (بسیاری از مباحث جدید و کاربردی) و همچنین تعداد زیادی مثال حل شده و تمرینات می باشد.

حسین درویشی

دینامیک سازه‌ها - کارشناسی ارشد - ۳ واحد

کتاب مرجع: دینامیک سازه، ضروری، انتشارات دانشگاه تهران

اهم مطالب مورد بحث در طول سال

- ۱- ضرورت آموزش و ارائه درس (امور تحصیلی - امور حرفه ای مهندسی و طراحی)
- ۲- یادآوری اصول دینامیک سازه (با توجه به درس اصول مهندسی زلزله در مقطع کارشناسی)
 - الف - خصیصیات (متغیر زمان - تفاوت تحلیل دینامیکی و استاتیکی - ارتعاش)
 - ب - درجه آزادی و روش های کاهش (جرم متمرکز - تغییر مکان تعمیم داده شده - اجزای مکرر)
 - ج - نیروهای مقاوم (الاستیک و میرایی - رفتار و کماتیزم هر یک)
 - د - سختی و حالت های مختلف برای سیستم های ساده و پیچیده
 - ه - روش های تعیین معادلات حاکم بر رفتار سازه (تعادل دینامیکی - دالامبر - کار مجازی - روش انرژی ...) در حالت سیستم های یک درجه آزادی
 - و - ارتعاش آزاد و حل معادله مربوط - حالت های بحرانی و زیر بحرانی و فوق بحرانی
 - ز - بررسی معادله حرکت و حل آن در بارگذاری هارمونیک و نتایج آن - انتقال دو هامل
- ۳- تحلیل سیستم های معادل یک درجه آزادی در برابر بارگذاری ضربتی و نتایج بحث
- ۴- روش های عددی تحلیل دینامیکی سازه ها برای سیستم های یک درجه آزادی
- ۵- رفتار غیر خطی سازه ها در حالت تحلیل دینامیکی برای سازه های یک درجه آزادی
- ۶- روش رایله در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد آن در تعیین خصیصیات دینامیکی
- ۷- تعیین معادله حرکت برای سیستم ها چند درجه آزادی و بررسی ارتعاش آزاد آنها و سیستم های پیوسته
- ۸- تحلیل دینامیکی سازه های چند درجه آزادی به روش آنالیز مودال و نتایج حاصل
- ۹- روش تبدیل ضربتی در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد نتایج آن
- ۱۰- روش های عددی تحلیل دینامیکی برای سازه های چند درجه آزادی و پایایی آنها - رفتار غیر خطی

فصل اول - ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

در رشته مهندسی عمران اکثر سازه ها (ابنیه) تحت اثر نیروهای دینامیکی هستند. نیروهایی که مقدار (شدت) ، جهت و احتمالاً نقطه اثر آنها با زمان تغییر می کنند و البته نرخ تغییرات فوق به حدی است که پدیده ارتعاش که مشخصه اصلی رفتار دینامیکی

است در سازه بوجود می آید . $P(t)$

ابنیه مهم و بارگذاری دینامیکی وارد

انواع سدها - زلزله ، هیدرو دینامیک (پدیده اندرکنش سازه - خاک - آب)
ارتعاش تجهیزات و ماشین های نیروگاه

انواع پل ها - زلزله ، ترافیک ، ترمز ، باد ، ضرب ، جریان رودخانه
سیلوها - ویدائز (تخلیه سریع مواد ذخیره شده) ، زلزله ، حرکت تسمه ها
برج آب - زلزله ، هیدرو دینامیک ، باد

اسکله و مویچینگی - امواج دریا ، زلزله ، برخورد کشتی ، جریان های دریایی ، باد
دکل و دودکش و برج ها خنک کننده - زلزله ، باد

استقامت و پناهمها - انفجار (دور - نزدیک - مجار - برخورد متیم) ، زلزله
تأسیسات هسته ای - انفجار هسته ای ، زلزله ، برخورد هواپیما

ورزشگاه ها - تشویق تماشاچیان ، زلزله

لوله ها - زلزله ، عبور سیال

برج های ساقمائی - زلزله ، باد

تونل ها - عبور و ترافیک قطار ، زلزله

هدف: تطبیق و سازگاری تحلیل بارمقار واقعی (دینامیکی)

روش برخورد در گذشته: به دلیل پیچیدگی و سختی ← حالت معادل استاتیکی

تغییر و تحول اخیر: پیشرفت فسیلگر در فن آوری سخت افزاری و نرم افزاری (کامپیوترها)

روش امروزی: بکارگیری روش های تحلیل دینامیکی در حد امکانات

اصلاح آیین نامه های طراحی مطابق با نتایج حاصل

تغییراتی: در نظر گرفتن حالت های واقعی بارگذاری (انفجاری و تصادفی)

حالت های تحلیل تصادفی (تحلیل ریسک و قابلیت اعتماد)

بارگذاری منفرد و معین ← طیف بارگذاری

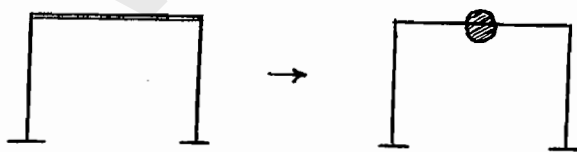
مصل دوم - یادآوری اصول دینامیک سازه ها

- قانون حاکم: اصل دوم نیوتن $\Sigma F = m\ddot{u}$

u: تغییر مکان \dot{u} : سرعت \ddot{u} : شتاب

- درجه آزادی و روش های کاهش آن متناسب با امکانات در دسترس

الف - روش تمرکز جرم Lumped-mass Procedure



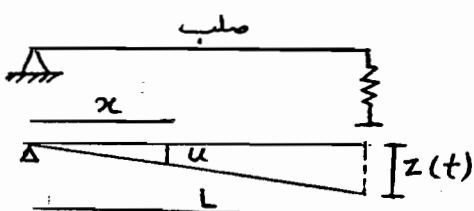
Generalized Displacement

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(x)$$

ب - روش تغییر مکان ها تعمیم داده شده

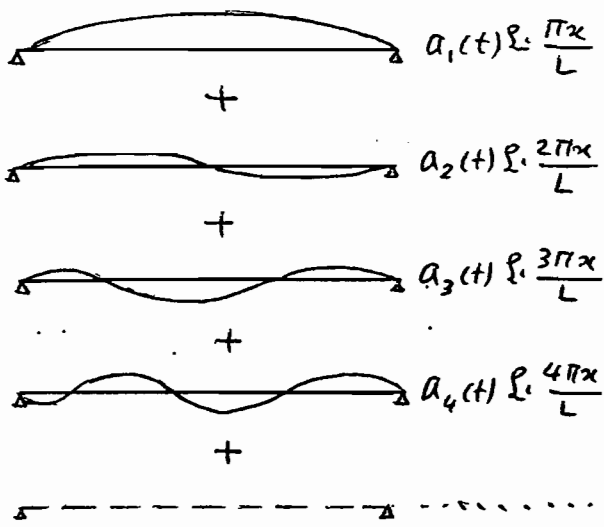
$a_i(t)$ تابع زمانی

$\phi_i(x)$ تابع مکانی (شرایط حد و سازگاری)



فرض: تیر صلب $n=1$ → $U(x,t) = \frac{x}{L} \cdot z(t)$

فرض: تیر صلب ← $n=1$



$$U(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{L}$$

$$= U(x,t)$$

Finite Element concept

ج - روش اجزاء محدود

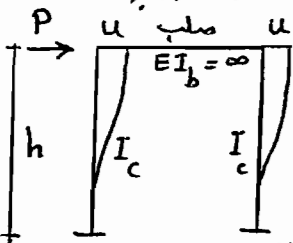
- مبانی خاص خود در تمرکز خاص رقماری سازه در تعداد محدود گره (درجه آزادی)

> - روش اجزاء مرزی

- تمرکز خاص رقماری محیط مورد نظر در تقاطع در مرز با محیط (سازه) دیگر

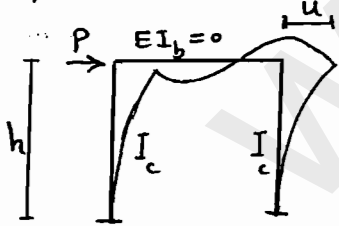
سروهای مؤثر در رفتار دینامیکی

الف - سروی سطحی (متر و ارتعاشی ... الاستیک ...) f_s عبودان سروی مقاوم در برابر حرکت



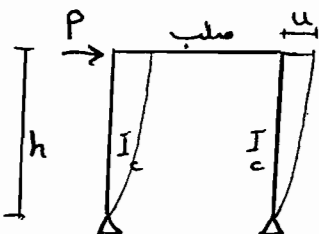
از تحلیل سازه ها $P = \frac{24EI_c u}{h^3} \rightarrow u=1 \rightarrow P=K = \frac{24EI_c}{h^3}$

$P = f_s = KU$



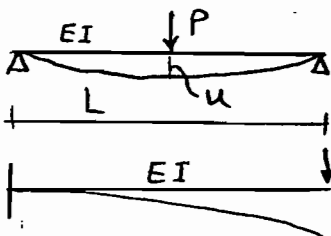
$$K = \sum_{\text{تعداد گره}} \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

حالت خطی (رقماری)



$$K = \sum \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

مرد نظر است.



$$P = \frac{48EIu}{L^3} \rightarrow u=1 \rightarrow K = \frac{48EI}{L^3}$$



$$P = \frac{3EIu}{L^3} \rightarrow u=1 \rightarrow K = \frac{3EI}{L^3}$$

(ف)

5

* در تعیین سختی ، جهت و نقطه مورد نظر باید معلوم باشد (درجه آزادی)

* در حالت چند درجه آزادی ← ماتریس سختی با عناصر K_{ij}

K_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییر مکان یا جابجایی واحد در درجه آزادی j

اعمال می شود و سایر درجات آزادی گرفته می شوند ،

در تعیین سختی ؛ مدل سازی و تعیین درجات آزادی خیلی مهم است ،

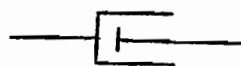
ب - نیروی میرایی (استهلاك) f_D بعنوان نیروی مقاوم در برابر حرکت

این نیرو از مکانیزم های مختلف اتلاف انرژی در حرکت (ارتعاش) ناشی می شود ، اصطکاک در اتصالات ، ترک ها ، مصالح و ...

مکانیزم های پیچیده و نامعلوم ← روش مناسب لحاظ کردن در معادلات رقماری آنه است که معادل میرایی لزجی فرضی شوند ،

فالت خطی مد نظر است ، $f_D = C \dot{u}$ → Viscous damper

پدیده میرایی به ابعاد و هندسه سازه ارتباطی ندارد ولی به نوع مصالح و نوع اتصال وابسته است ، تبدیل مکانیزم های واقعی اتلاف انرژی به مکانیزم لزجی از طریق آزمایش روی مدل



مدل Damper (کرمک فنر)

ضریب میرایی C یا درصد میرایی در عمل بصورت تجربی تعیین می شود

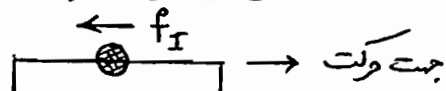
ج - نیروی اینرسی (لختی) f_I از قانون دوم نیوتن بدست می آید

$$\sum \vec{F} = m \vec{u} \rightarrow \sum \vec{F} - m \vec{u} = 0$$

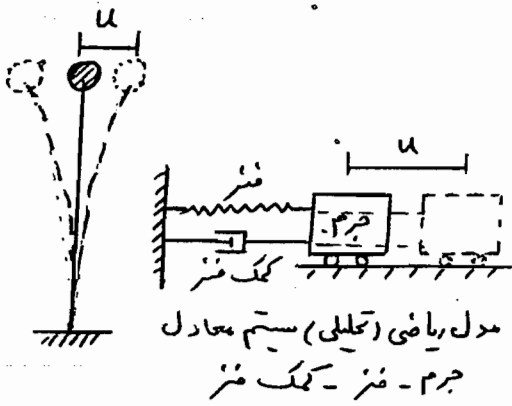
علامت منفی ؛ مقاوم در برابر حرکت

$$f_I = m \ddot{u}$$

چون از قانون ناسی می شود ، ارائه مدل مینرایی بی معنی است



نیرو و در صد میرایی در سیستم های مرتعش



در سیستم مرتعش اوبرو، وقتی جرم به اندازه u جابجا شود، کشش آمدگی ارجحایی ستون (کشیدگی فنر) بکاری آیند تا جرم به موقعیت اولیه برگردد، این نیرو در ستون یا فنر که تابع تغییر مکان u می باشد، بنام

نیروی فنر (سختی) موسوم است (f_s) ، البته اگر u کوچک باشد، این نیرو تابع خطی u است جرم مورد نظر با یک سرعت مشخص به موقعیت اولیه برگشته و به سمت دیگر پرت خواهد شد و بنابراین مرتعش می شود.

پس نتیجه سیستم ارجحایی باشد و اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، جرم برای همیشه مرتعش خواهد بود، ولی در عمل، اصطکاک با هوا، اصطکاک بین ذرات سیستم یا در اتصالات، تسلیم مصالح و وجود آمدن ترک ها و اصطکاک بین آنها و غیره، باعث اتلاف انرژی ارتعاش شده، به نحوی که طی زمان، ارتعاش مستمک شده و از بین می رود، نیروهایی که باعث اتلاف انرژی می شوند بنام نیروهای میرایی (استهلاک) $Damping$ موسوم هستند.

اگر نیروی میرایی متناسب با سرعت حرکت جرم باشد، به آن میرایی لزجی گفته می شود، اگرچه در عمل، میرایی بطور ظاهری لزجی نمی باشد ولی فرض می گردد که چنین باشد که این امر به دلیل سهولت حل معادلات حرکت می باشد، معمولاً برای میرایی غیر لزجی می توان میرایی لزجی معادل آنرا که دارای تأثیر مشابه در حرکت باشد، بدست آورد که این امر کاملاً تجربی است. همانطوریکه قبلاً گفته شد، میرایی یک سازه بستگی به مصالح آن، ماهیت اتصالات، کیفیت ساخت، نوع پی و... دارد. نیروی میرایی لزجی معادل $f_D = C \dot{u}$ انتخاب میرایی در یک سیستم، معمولاً دلخواه است بویژه به این دلیل که میرایی با کرنش مصالح و طبیعت و جزئیات ساخت، متغیر است.

میرایی در تحلیل دینامیکی سازه ها بصورت درصد میرایی بکاری رود:

$$\xi = \frac{C}{C_{cr}}$$

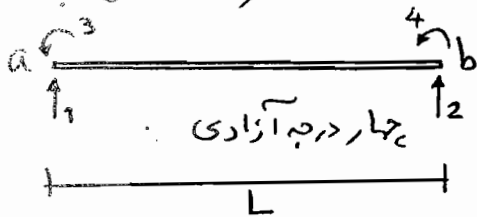
حدود درصد میرایی برای مصالح مختلف به شرح زیر است:

بتن	5 - 10%	افزایش با کرنش	2 - 10%	چوب	به دلیل تفاوت زیاد
فولاد	2 - 5%	" "	" "	"	تغییرات در کیفیت چوب، مقادیر نامطمئن است.
پنای	4 - 10%	" "	" "	"	"
خاک	10 - 30%	" "	" "	"	"

محاسبه سختی یک تاپ خمشی

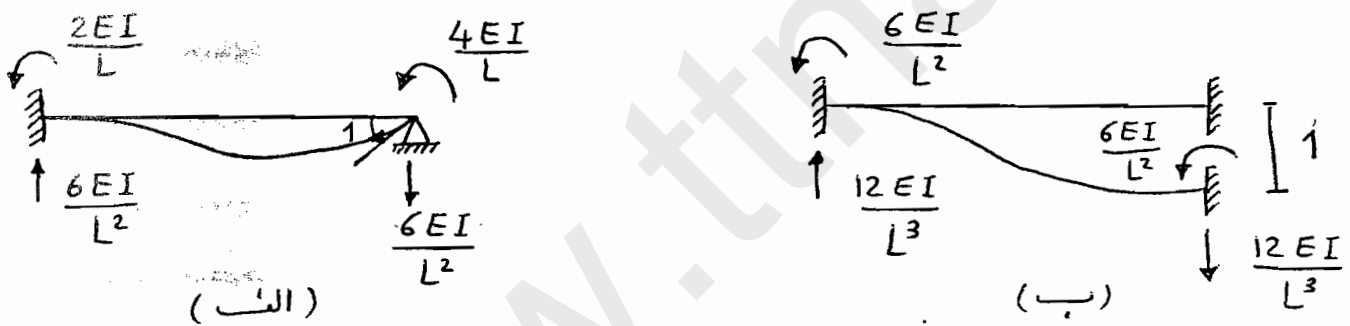
یادآوری: برای محاسبه لنگر و برش در یک المان سازه‌ای (تیر یا ستون) ضرایب سختی برای المان مورد نیاز است. موضوع برای یک المان همگن بظرف L و ممان اینرسی I و مدول انعطافی E ، بطور شمایک ارائه می‌شود.

ضرایب سختی برای چرخش‌گره در شکل الف و برای انتقال‌گره در شکل ب نشان داده شده است.



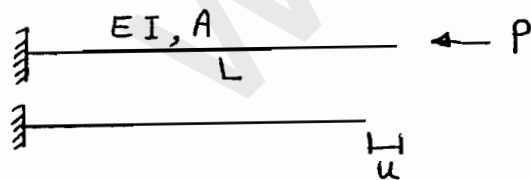
به جهت ها و شماره گذاری توجه شود.

زنگ K (ضرایب سختی) طبق تعریف: نیرو در u وقتی تغییر مکان واحد در u داده می‌شود.



برای محاسبه ضرایب سختی، در درجه آزادی مربوط تغییر مکان یا چرخش واحد اعمال می‌شود در حالی که سایر درجات آزادی مقید و گرفته می‌شوند.

درجه آزادی محوری به دلیل سهولت زیاد در نظر گرفته نشده است.



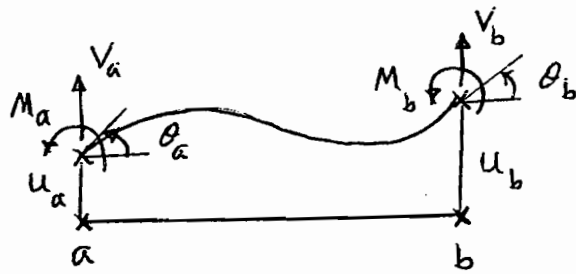
$$\sigma = E \epsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{u}{L} \Rightarrow P = \frac{EAu}{L}$$

→ تعریف ضرایب سختی

$$u=1 \rightarrow P \rightarrow K \Rightarrow K = \frac{EA}{L} \quad \text{عدد بزرگ}$$

بنابراین برای المان تیر و ستون به چهار درجه آزادی نشان داده شده مربوط به تغییر مکان‌های u_a ، u_b و چرخش‌های θ_a و θ_b ، لنگر خمشی و نیروی برشی در گره‌ها برابر خواهد بود با:



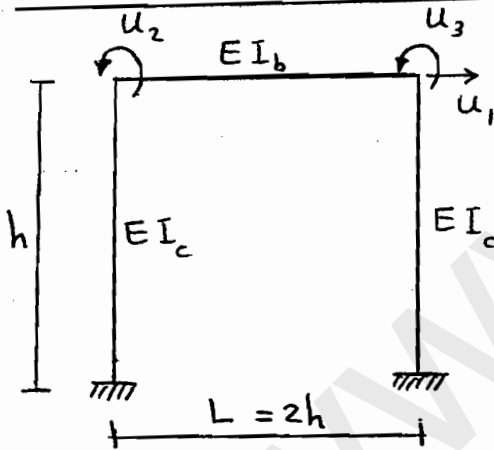
تغییر شکل کلی سازه

$$M_a = \frac{4EI}{L} \theta_a + \frac{2EI}{L} \theta_b + \frac{6EI}{L^2} u_a - \frac{6EI}{L^2} u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L} \theta_a + \frac{4EI}{L} \theta_b + \frac{6EI}{L^2} u_a - \frac{6EI}{L^2} u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{L^3} u_a - \frac{12EI}{L^3} u_b + \frac{6EI}{L^2} \theta_a + \frac{6EI}{L^2} \theta_b$$

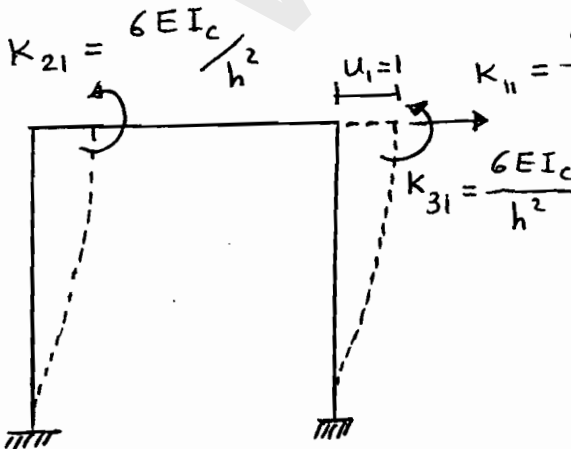
$$V_b = -\frac{12EI}{L^3} u_a + \frac{12EI}{L^3} u_b - \frac{6EI}{L^2} \theta_a - \frac{6EI}{L^2} \theta_b$$



مثال - مطلوب است بحاسبه سختی جانبی قاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر؟

از روش‌های مختلف تحلیل سازه از جمله پیش لنگر و غیره می‌توان مساله را حل نمود. در اینجا از تعریف ضرایب تأثیر سختی استفاده می‌شود.

سه درجه آزادی داریم ← ماتریس سختی 3x3 خواهد بود.

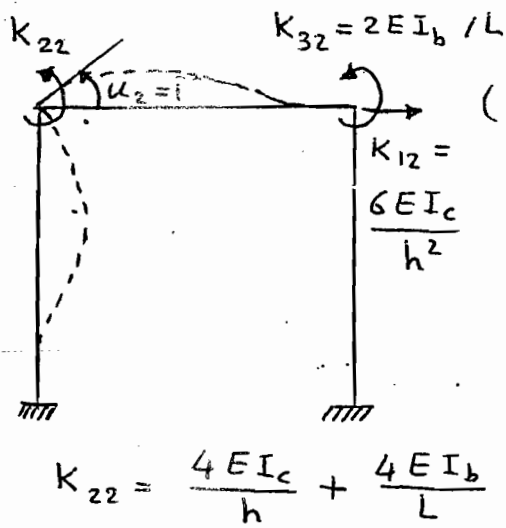


برای بدست آوردن ضرایب سازه اول ماتریس، در تغییر مکان u_1 ، تغییر مکان واحد اعمال می‌شود در حالی که سایر تغییر مکان‌های درجات آزادی گرفته می‌شوند

یعنی: $u_2 = u_3 = 0$ و $u_1 = 1$

بسیروهای K_{21} (ضرایب سختی) و تغییر شکل مربوط

در شکل رویو نمایش داده شده است. (از تحلیل سازه که یادآوری)



برای تعیین ضرایب ستون در ماتریس سختی (K_{12}) خواهیم داشت: $u_1 = u_3 = 0$ و $u_2 = 1$

برای ضرایب K_{13} (ستون سوم ماتریس)

مشابه حالت دو عمل می شود:

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ و } u_3 = 1$$

اگر در حالت خاص $I_b = I_c$ و $L = 2h$ باشد، ماتریس سختی بصورت زیر خواهد بود:

$$[K] = \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

اگر ماتر تحت اثر نیروی جانبی (f_s مثلاً) قرار داشته باشد، معادله حاکم برای تغییر شکل

$$[K]\{u\} = \{f_s\}$$

$$\frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از معادلات ردیف ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 6h \\ 6h \end{Bmatrix} u_1 = - \frac{6}{7h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u_1$$

رابطه اخیر در معادله حاکم رفتاری قرار گیرد، خواهیم داشت:

$$f_s = \left(\frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3} \frac{6}{7h} \langle 6h \quad 6h \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) u_1$$

$$f_s = \frac{96}{7} \left(\frac{EI_c}{h^3} \right) u_1$$

سختی جانبی ماتر $\Rightarrow f_s \rightarrow K$ $u_1 = 1$

$$K = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3}$$

این روش که همراه با حذف چرخش های گره ها است، به عنوان روش حذف استاتیکی معروف است.

با توجه به مباحث پایه ای مطرح در حالت سازه های معادل یک درجه آزادی
 مطالب بعدی در این حالت خواهد بود.
 SDOF
 Single - Degree - of - Freedom Systems

نوشتن معادلات رفتاری (معادله حرکت)

$$\Sigma F = m\ddot{u}$$

$$P(t) - f_s - f_d = m\ddot{u}$$

الف - کاربرد مستقیم اصل دوم نیوتن

$$m\ddot{u} + f_d + f_s = P(t)$$

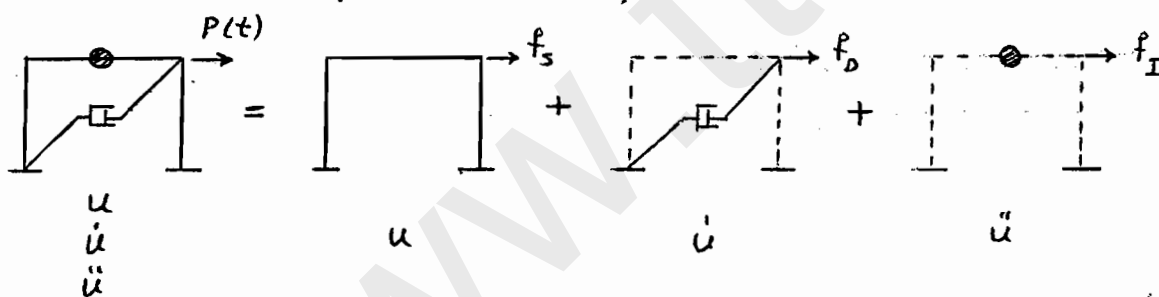
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = P(t)$$

ب - تعادل دینامیکی (اصل دالامبر) (D'Alembert's Principle)

مشابه حالت اول با بیان تساوت نیروی $m\ddot{u}$ از ابتدا نیروی مقاوم است.

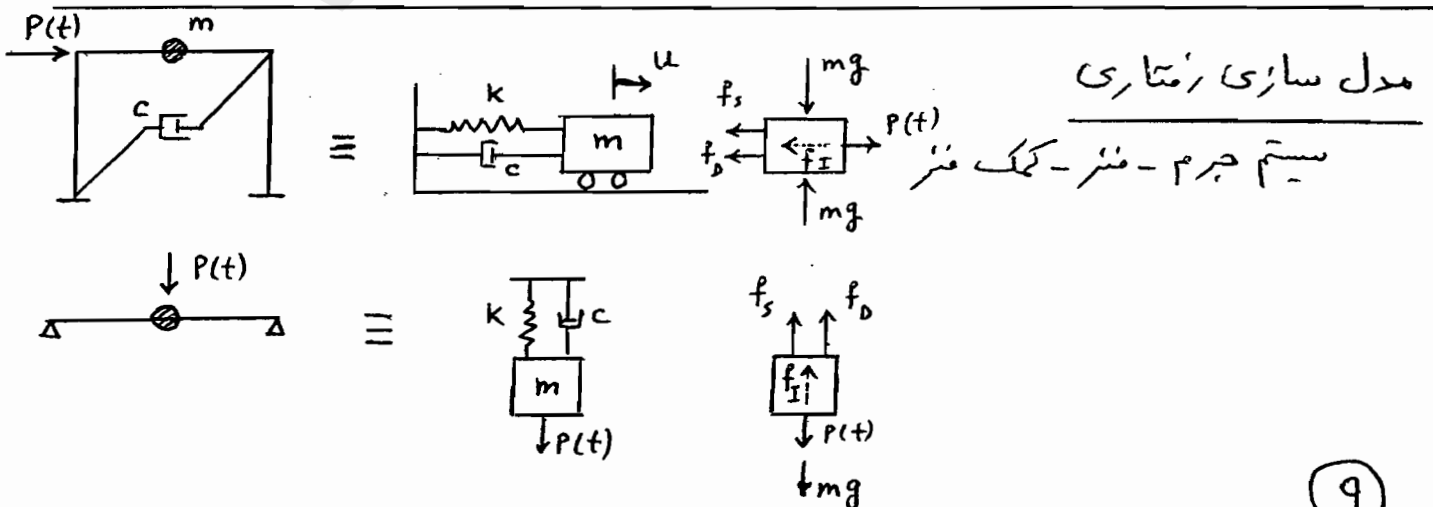
ج - ترکیب مولفه های نیروهای سختی، میرایی و جرم

در حالت رفتار خطی و در اصول مشابه حالت های الف و ب



د - روش کار مجازی: تصور تغییر مکان کاذب و صرف بود کار انجام شده

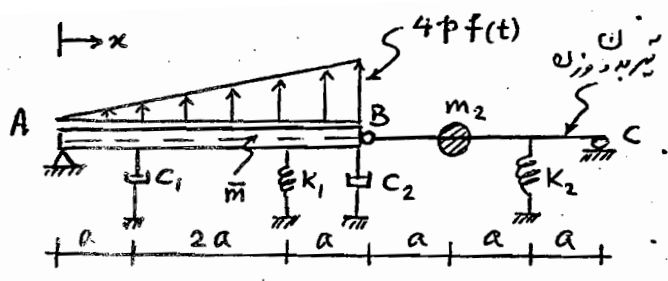
ه - اصل انرژی: اصل بقای انرژی (جنبشی و پتانسیل)



* مطلوبست تعیین معادله حرکت

سیستم داده شده در رویبرو؟

حل:



از روش متعارف تعادل استفاده می‌کنیم:

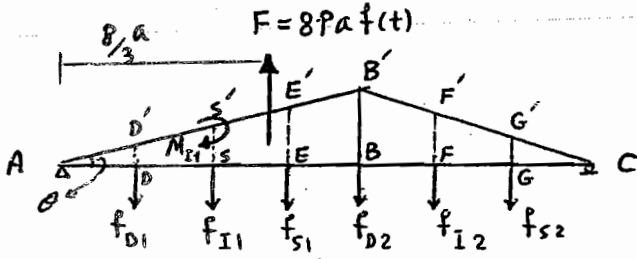
ارتعاش در دامنه‌ی کوچک است (ارتعاشی).

سیستم را در یک لحظه (مثلاً t) در حالت تغییر شکل

نشان می‌دهیم (به همراه نیروی مؤثر):

سیستم معادل یک درجه آزادی به نقطه شاخص

یا درجه آزادی شاخص را $Z(t) = BB'$ انتخاب می‌کنیم.



$$DD' = \frac{Z}{4}, EE' = \frac{3}{4}Z, FF' = \frac{2}{3}Z, GG' = \frac{1}{3}Z, SS' = \frac{Z}{2}$$

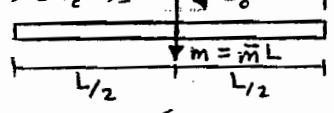
تعیین نیروی مؤثر:

$$f_{S1} = k_1(EE') = k_1 \frac{3}{4}Z(t), f_{S2} = k_2(GG') = k_2 \frac{1}{3}Z(t), f_{D1} = C_1(\dot{DD}') = C_1 \frac{1}{4}\dot{Z}(t)$$

$$f_{D2} = C_2\dot{Z}(t), f_{I1} = m_1(\ddot{SS}') = m_1 \frac{\ddot{Z}(t)}{2} = \bar{m} 2a \ddot{Z}(t) \leftarrow \text{اینرسی انتقالی المان AB}$$

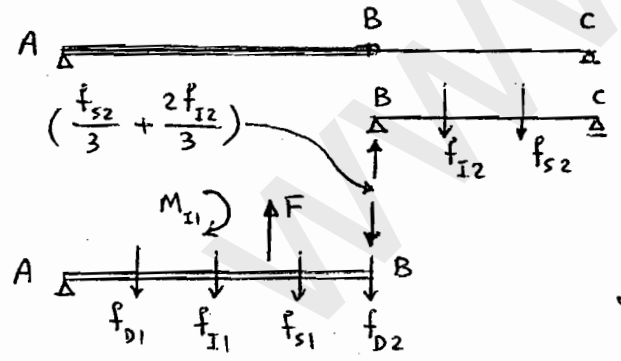
$$f_{I2} = m_2(\ddot{FF}') = m_2 \frac{2}{3}\ddot{Z}(t)$$

$$I_o = m \frac{L^2}{12} \left\{ \begin{aligned} M_{I1} = I_o \ddot{\theta} &= \left[4a\bar{m} \times \frac{(4a)^2}{12} \right] \frac{\ddot{Z}(t)}{4a} = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{Z}(t) \\ \theta = \frac{BB'}{4a} = \frac{Z}{4a} &\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{Z}}{4a} \end{aligned} \right.$$



المان تیری شکل

$$\sum M_{/A} = 0 \leftarrow \text{دستوری به معادله حرکت از روش تعادل}$$



$$\sum M_{/A} = 0 \quad f_{I1} \times 2a + M_{I1} + \frac{2f_{I2}}{3} \times 4a + f_{D1} \times a + f_{D2} \times 4a + \underbrace{f_{S1} \times 3a + \frac{f_{S2}}{3} \times 4a}_{\text{سختی}} = \underbrace{8pa f(t) \times \frac{8}{3} a}_{\text{نیروی خارجی عملی}}$$

پس از جایگذاری عبارات ها، ساده کردن روابط در نهایت خواهیم داشت:

$$\left(\frac{4}{3} \bar{m} a + \frac{4}{9} m_2 \right) \ddot{Z}(t) + \left(\frac{C_1}{16} + C_2 \right) \dot{Z}(t) + \left(\frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \right) Z(t) = \frac{16}{3} pa f(t)$$

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) = P^*(t)$$

معادله سیستم معادل یکدرجه آزادی

با جرم مؤثر، میرایی مؤثر، سختی مؤثر و نیروی مؤثر

توجه: با توجه به ارائه درس مهندسی زلزله در نیمسال بعدی، حالت‌های حرکت زمین بعنوان عامل ارتعاش در سازه‌ها در مدل‌سازی و تحلیل‌ها در درس دینامیک سازه‌ها ارائه نمی‌شود.

روش‌های حل معادلات حرکت

الف - روش کلاسیک و معارف (متیتم) Classical solution

حل معادله دیفرانسیل - حل عمومی و جواب خصوصی و اعمال شرایط اولیه

ب - روش انتگرال دو هامیل Duhamel's Integral رتقارخطی

ج - روش‌های تبدیل Transform Methods رتقارخطی

تبدیل لاپلاس و فوریه ← تحلیل در میدان فرکانس

* مناسب برای تحلیل‌های اندرکنش میله‌های غیر یکپارچه

* روش عددی قوی و سریع FFT

د - روش‌های عددی Numerical Methods رتقارخطی و غیرخطی

الگوریتم‌های مختلف و پایداری روش

پاسخ، واکنش سازه Response

از حل معادله حرکت ← $u(t)$ بدست می‌آید

مغزوم پاسخ شامل همه نوع مجهول محاسباتی و طراحی می‌تواند باشد

تغییرتقال، سرعت، شتاب، تنش، نیرو و ...

معمولاً در طراحی u_{max} و پاسخ‌های حداکثر بکار گرفته می‌شوند.

نیروهای اجزای Element Forces

از حل معادله حرکت (دینامیکی) ← $u(t)$ حاصل می‌شود و برای نیرو و ستون‌ها

می‌توانه لنگر خمشی و نیروی برشی حاصل شود.

$$f_x(t) = K u(t)$$

توجه: برای طراحی، از تنش‌های مجازی استفاده می‌شود که از آزمایش استاتیکی مصالح

بدست می‌آید و کافی است از f_x برای ارزیابی نیروها استفاده شود.

برای بدست آوردن پاسخ کامل باید از جواب دینامیکی و استاتیکی (ترکیب) استفاده شود. تغییرات تحت اثر وزن باید ملحوظ شود.

$$u^t(t) = u_p(t) + u_s$$

دستگاه واحد (مقیاس) رابطه اساسی $f = ma$

شتاب \times جرم = نیرو

SI دستگاه	}	نیرو = N واحد نیرو	
		شتاب = m/s^2	متر بر ثانیه تیرک
		جرم = kg	کیلو جرم kg mass
			$= N \cdot s^2 / m$

MKS دستگاه	}	واحد نیرو = kgf
		شتاب = m/s^2
		جرم = $kgf \cdot s^2 / m$

$$1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 981 \text{ cm/s}^2$$

$$= 386 \text{ in/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$$

$$1 \text{ kip} = 1000 \text{ lbf} = 453.4 \text{ kgf} = 4448.2 \text{ N}$$

$$1 \text{ psi} = 68.94.8 \text{ N/m}^2 = 0.7 \text{ t/m}^2$$

$$1 \text{ kip/in} = 175126 \text{ N/m}$$

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

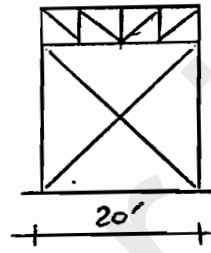
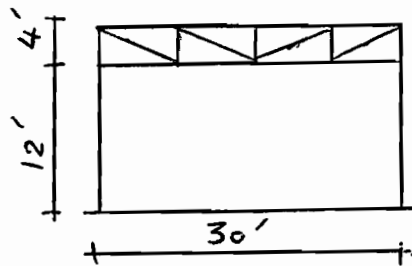
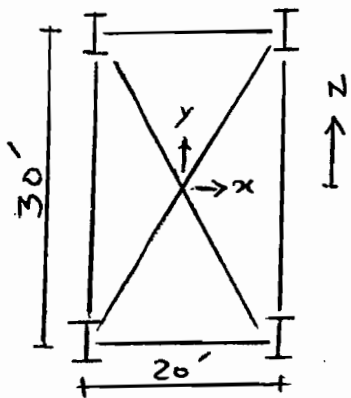
برای بکارگیری جرم (m)، مناسب است در فرمول ها از استناد شود (w وزنه).

* وزنه ماسه نیرو است.

مثال - یک ساختمان صنعتی یک طبقه 20x30 - در جهت شمال جنوب قاب خمشی و در جهت شرقی - غربی بصورت مهاربندی شده است. وزن در سقف 30 lb/ft² و مهارهای افقی در سقف زیر فرمای سقف است. ماله اینرسی ستونها :

$$\begin{cases} I_x = 82.8 \text{ in}^4 \\ I_y = 18.3 \text{ in}^4 \end{cases}$$

مهارها قائم میلگرد به قطر 1 و E = 29000 ksi و مطلوبست بقیه معادله حرکت در جهت شمال جنوب - غربی و شرقی



$$m = \frac{W}{g} = \frac{30 \times (30 \times 20)}{386} = 46.63 \text{ lb-s}^2/\text{in}$$

* با توجه به ضربدری های افقی سقف می توان بملگرد سقف را بصورت دیا فرامگ فرض نمود.

الف - جهت شمال - جنوب : سختی جانبی دو قاب خمشی عبارت است از

$$K_{N-S} = 4 \left(\frac{12 EI_x}{h^3} \right) = 4 \frac{12 (29 \times 10^3) (82.8)}{(12 \times 12)^3} = 38.58 \text{ kips/in}$$

معادله حرکت S-N : $m \ddot{u} + K_{N-S} u = 0$

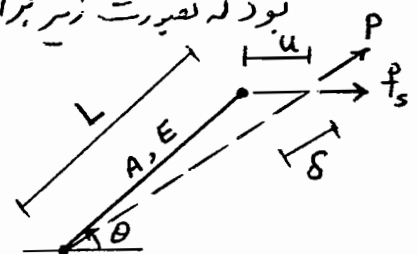
ب - جهت شرقی - غربی : معمولاً وقتی از مهار استناد می شود، فرض می گردد که قابها صلب بوده و پراس انتقال نیروی قائم (بار مرده وزنده) هستند و بار جانبی توسط مهارها تحمل می شود (با اتصال مفصلی). بنابراین سختی جانبی جمع سنتی هر یک از مهارها خواهد بود که بصورت زیر برآورد می شود :

$$P = \frac{AE}{L} \delta \quad (1)$$

$$f_s = P \cos \theta \quad , \quad u = \delta / \cos \theta$$

$$P = f_s / \cos \theta \quad , \quad \delta = u \cos \theta \quad \text{در معادله (1)}$$

$$\begin{cases} A = 0.785 \text{ in}^2 \\ L = 23.3 \text{ ft} \end{cases}$$



$$f_s = K_{\text{هر مهار}} u \rightarrow K_{\text{هر مهار}} = \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{20}{\sqrt{12^2 + 20^2}} = 0.8575$$

$$K_{\text{هر مهار}} = \frac{0.785 (29 \times 10^3)}{23.3 \times 12} (0.8575)^2 = 59.8 \text{ kips/in}$$

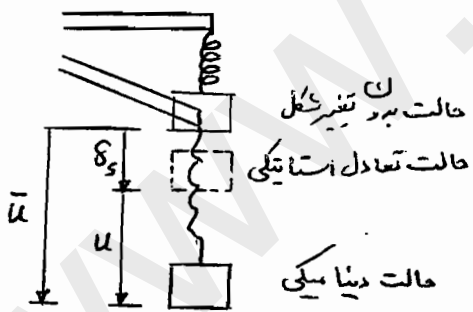
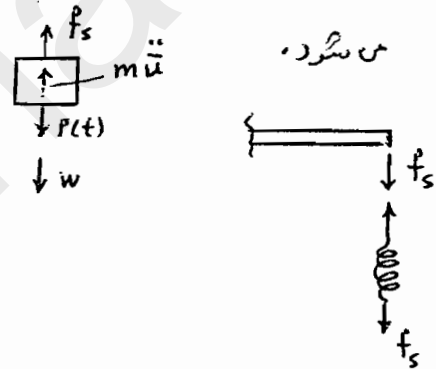
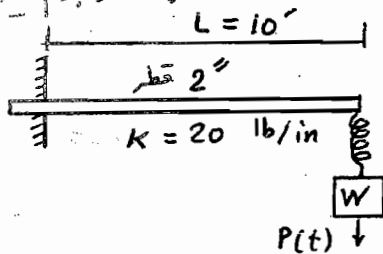
هر قاب دارای دو مهار است ولی یکی در گسش است که مقاومت جانبی را ایجاد می نماید و دیگری در شیار کار می کند که فرض می شود به گمانش برسد (در اثر نیروی محوری) و بسیار کم در مقاومت جانبی مشارکت می نماید. چون دو قاب مهار بود پس:

$$K_{E-W} = 2 \times 59.8 = 119.6 \text{ kips/in}$$

معادله حرکت: $m \ddot{u} + K_{E-W} u = 0$

توجه: سختی یک ستون در جهت شرق-غرب $K_{ستون} = \frac{12 EI_y}{h^3} = 2.13 \text{ kips/in}$ است که بر حال از نظر نسبی قابل توجه نمی باشد (پس صرف نظر شده).

مسئله - با توجه به سیستم زیر که وزنه W توسط فنری از انتهای یک سیر طره آویزان است، معادله حرکت وزنه W را بنویسید. سیر فلزی است ($E = 29000 \text{ ksi}$) و از جرم سیر و فنر صرف نظر می شود.



$$m \ddot{u} + f_s = W + P(t)$$

$$f_s = K_e \bar{u}$$

$$m \ddot{u} + K_e \bar{u} = W + P(t)$$

$$\bar{u} = \delta_s + u$$

$$\ddot{\bar{u}} = 0 + \ddot{u}$$

δ_s تغییر مکان در اثر W (استاتیکی)

$P(t)$ " " " " (دینامیکی)

$$K_e \delta_s = W$$

$$\rightarrow \underline{m \ddot{u} + K_e u = P(t)}$$

معادله حرکت K_e باید متناسب شود.

ملاحظه می شود وقتی معادله بر حسب تغییر مکان دینامیکی u است، وزن در معادله اثر ندارد. معمولاً معادله حرکت از حالت استاتیکی به بعد نوشته و حل می شود پس اثر حالت استاتیکی ملحوظ می شود (اگر مقارناتی باشد).

محاسبه سختی موثر

$$f_s = k_e \bar{u} \quad (1)$$

$$\bar{u} = \delta_{\text{متر}} + \delta_{\text{تیر}} \quad (2)$$

δ تیر عبارت از تغییر شکل انتهای تیر طره است

δ متر = ... = ...

$$f_s = k \delta_{\text{متر}} = k \delta_{\text{تیر}} \quad (3)$$

باتوجه به شکل کوچک صفت قبل:

در معادله (2) بجای \bar{u} از (1) و بجای δ ها از (3) قرار می دهیم:

$$\frac{f_s}{k_e} = \frac{f_s}{k} + \frac{f_s}{k_{\text{تیر}}} \quad \text{یا} \quad k_e = \frac{k k_{\text{تیر}}}{k + k_{\text{تیر}}}$$

$$k = 20 \text{ lb/in} \rightarrow , \quad k_{\text{تیر}} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(29 \times 10^6) [\pi (1) / 4]^4}{(10 \times 12)^3} =$$

$$39.54 \text{ lb/in}$$

$$\Rightarrow \underline{k_e = 13.28 \text{ lb/in}}$$

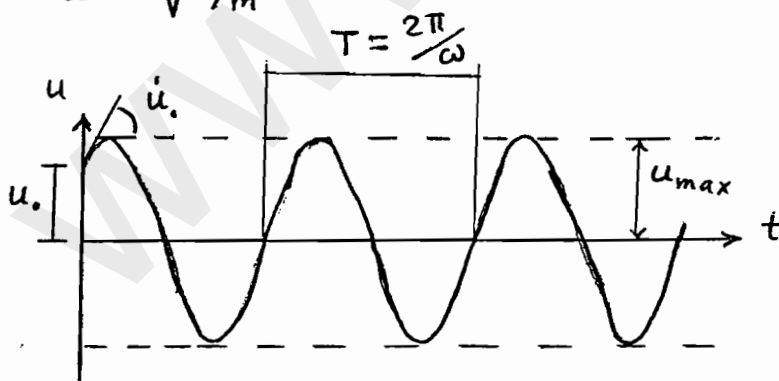
ارتعاش آزاد SDOF

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

الف - بدر میرایی

شرایط اولیه u_0 و \dot{u}_0 $\rightarrow u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

برود، فرکانس و فرکانس زاویه ای طبیعی سیستم

$$\delta_s = w/k = mg/k \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{g/\delta_s}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/\delta_s}, \quad T = 2\pi \sqrt{\delta_s/g}$$

دامنه حرکت $u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$$f_I + f_s = 0$$

$$m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مضرب: } u(t=0) = u_0 \\ \text{شرایط اولیه: } \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \end{array} \right\}$$

$$k/m = \omega^2 \leftarrow m \neq 0, k \neq 0 \leftarrow \text{فعللاً ک معلوم میزایی ندارد.}$$

$$\textcircled{1} \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \rightarrow \text{پاسخ فرضی } u(t) = \bar{c} e^{st} \rightarrow \text{برای حل}$$

$$\dot{u} = \bar{c} s e^{st} \rightarrow \ddot{u} = \bar{c} s^2 e^{st} \Rightarrow \textcircled{1} \text{ در معادله } \bar{c} e^{st} (s^2 + \omega^2) = 0$$

$$s^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\omega \quad (i = \sqrt{-1}) \leftarrow \bar{c} e^{st} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{پاسخ معادله } u(t) = \bar{c}_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega t} \quad \textcircled{2}$$

ترجیح می دهیم، رابطه از حالت تابع آکسیانسیل به حالت هارمونیک نوشته شود.

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \text{از رابطه مثلثاتی اولر استفاده می کنیم!}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \rightarrow u(t) = \bar{c}_1 \cos \omega t + i \bar{c}_1 \sin \omega t + \bar{c}_2 \cos \omega t - i \bar{c}_2 \sin \omega t$$

$$u(t) = \underbrace{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)}_A \cos \omega t + \underbrace{(i \bar{c}_1 - i \bar{c}_2)}_B \sin \omega t$$

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

برای تعیین ضرایب ثابت A, B از شرایط اولیه استفاده می کنیم!

$$u(t=0) = u_0 = A \times 1 + B \times 0 \rightarrow A = u_0$$

$$\dot{u}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -A\omega \times 0 + B\omega \times 1 \rightarrow B = \dot{u}_0 / \omega$$

$$\boxed{u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t}$$

$$\text{به کمک روابط مثلثاتی } u(t) = P \sin(\omega t + \alpha)$$

پاسخ بصورت تابع هارمونیک است با دامنه P (u_max) و

سیکل تناوب با فاصله زمانی T (پریود تابع)، فاصله زمانی T عبارت است از مدتی که

آرگومان تابع یعنی (wt + alpha) با مقدار 2pi افزایش می یابد!

$$(\omega t + \alpha) + 2\pi = \omega(t + T) + \alpha \Rightarrow T = 2\pi / \omega$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f$$

f فرکانس! تعداد سیکل در یک ثانیه

پس در تعداد سیکل تناوب در 2pi ثانیه که به فرکانس زاویه ای موسوم است.

مثال - در ساختمان صنعتی مثال های قبیل مطلوبست برآورد کن T ، f در دو جهت؟

$$\omega_{N-S} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{38.58}{0.04663}} = 28.73 \text{ Rad/sec}$$

$$T_{N-S} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28.73} = 0.219 \text{ Sec}$$

$$f_{N-S} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.219} = 4.57 \text{ Hz}$$

$$\omega_{E-W} = \sqrt{\frac{119.6}{0.04663}} = 50.64 \text{ Rad/sec}$$

$$T_{E-W} = \frac{2\pi}{50.64} = 0.124 \text{ Sec} , f_{E-W} = \frac{1}{0.124} = 8.06 \text{ Hz}$$

$$\omega_{N-S} < \omega_{E-W}$$

مثال - در مثال قبیل (طره با درزنه در انتها) ، مطلوبست تعیین T ، f های

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_s}} , \delta_s = \frac{W}{K_e} = \frac{20}{13.28} = 1.494 \text{ in}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{386}{1.494}} = 2.56 \text{ Hz} , T = \frac{1}{f} = 0.391 \text{ Sec}$$

ارتعاش آزاد SDOF

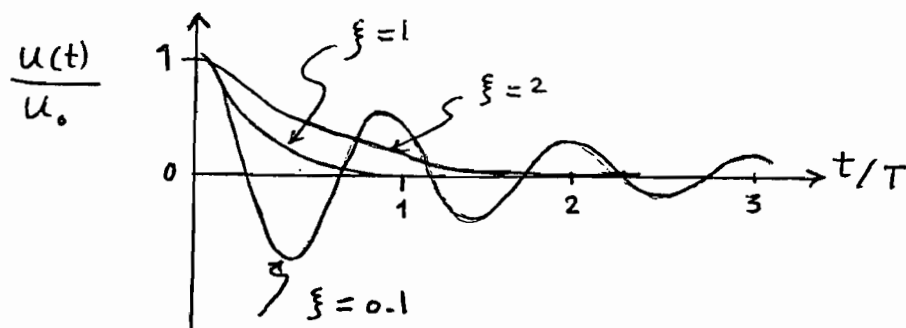
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

ب - حالت با میرایی

$$\left\{ \begin{array}{l} k/m = \omega^2 , \quad C_{cr} = 2m\omega \Rightarrow \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \text{میرایی بحرانی} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{C}{C_{cr}} \quad \text{در صد میرایی} \\ \text{موجود} \\ \text{بحرانی} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} C = C_{cr} \rightarrow \xi = 1 \quad \text{تا بحرانی} \\ C > C_{cr} \rightarrow \xi > 1 \quad \text{حالت فوق بحرانی} \end{array} \right.$$

در عمل (واقعتاً) ؛ حالت زیر بحرانی $\xi < 1$ یا $C < C_{cr}$



برای ساختمانها ، پل ، سد ، تاسیسات ای ، سازه های دریایی و ... $\xi < 0.05$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

$$f_I + f_D + f_s = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow m \neq 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (1)$$

جواب فرضی: $u(t) = \bar{c} e^{st}$, $\dot{u} = \bar{c}s e^{st}$, $\ddot{u} = \bar{c}s^2 e^{st} \rightarrow (1) \rightarrow$

$$\bar{c} e^{st} (s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2) = 0 \rightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \omega^2} \rightarrow \text{سه حالت برای زیررادیکال متصور است}$$

اگر $\frac{c}{2m} = \omega \rightarrow$ مقدار c را بحرانی نامند $\Rightarrow \boxed{C_{cr} = 2m\omega}$

الگرا: درصد استهلاک استاندارد شود $\xi = \frac{C_{\text{موجود}}}{C_{cr}} \rightarrow s = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$\frac{C}{2m} = \frac{C\omega}{2m\omega} = \frac{C\omega}{C_{cr}} = \xi\omega \rightarrow$$

تابع پاسخ اکسپونانسیل \rightarrow جواب s عدد حقیقی \rightarrow حالت بحرانی $\xi = 1$ یا 100% \rightarrow زیررادیکال صفر

" " \rightarrow جواب s در عدد حقیقی \rightarrow حالت فوق بحرانی $\xi > 1$ \rightarrow زیررادیکال مثبت

که در محمل، ارتعاش آزاد کلیه اولیه (سازه های متعارف عمرانی) دارای میرایی خیلی کمتری از بحرانی است

تابع پاسخ دارای حالت نوسانی (ارتعاش) است: 100% یا $\xi \ll 1$ و $C \ll C_{cr}$ موجود

برای بدست آوردن تابع پاسخ:

$$s = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}, \quad \omega\sqrt{1-\xi^2} = \omega_D \Rightarrow \text{فرض می کنیم}$$

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_D \Rightarrow u(t) = \bar{C}_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + \bar{C}_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (\bar{C}_1 e^{i\omega_D t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_D t})$$

عبارت داخل پرانتز نسبت به پاسخ ارتعاش آزاد بدون میرایی است فقط ω به ω_D تبدیل شده است.

پس می توان به کمک رابطه اولر میلکانی، پاسخ را بصورت هارمونیک نوشت:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

$$u_0 \text{ و } \dot{u}_0 \Rightarrow A = u_0, \quad B = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left(u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right)$$

می توان دو تابع هارمونیک را تبدیل به یک تابع نمود:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} p \sin(\omega_D t + \alpha) = e^{-\xi\omega t} p \cos(\omega_D t - \theta)$$

$$p = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \alpha = \text{Arctan } A/B, \quad \theta = \text{Arctan } B/A$$

که

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \left[u_0 \cos \omega_D t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_D} \right) \sin \omega_D t \right]$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{فرکانس زاویه‌ای میرایی} \quad \omega_D \neq \omega$$

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{پریود طبیعی میرایی} \quad \text{برای } \xi < 0.2$$

دامنه حرکت در ارتعاش آزاد با میرایی در هر سیکل حرکت کاهش می‌یابد و پهنای آنها:

$$\pm p e^{-\xi \omega t} \quad , \quad p = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_D} \right)^2}$$

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} = \exp\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \rightarrow \delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} \approx 1 \Rightarrow \delta \approx 2\pi\xi$$

کاهندگی لگاریتمی

معمولاً بهتر است بجای دو سیکل متوالی از چند سیکل فاصله برای کاهندگی لگاریتمی استفاده شود،

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2} \frac{u_2}{u_3} \frac{u_3}{u_4} \dots \frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{j} \ln \frac{u_1}{u_{j+1}} \approx 2\pi\xi$$

دایره بیان‌کننده تعداد سیکل لازم برای کاهش 50% دامنه حرکت:

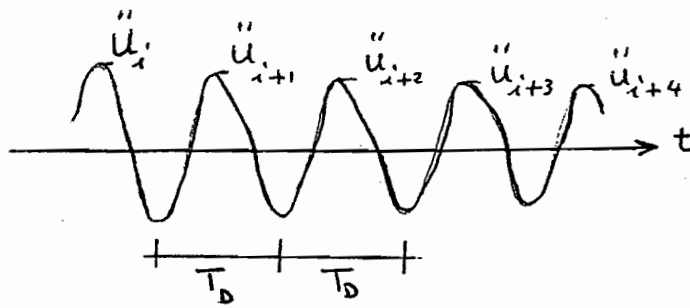
$$j_{50\%} \approx \frac{0.11}{\xi}$$

تعیین تحلیلی درصد میرایی ممکن نیست لذا از روش‌های تجربی استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها، حالت ارتعاش آزاد سازه واقعی است.

$$\xi = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} \quad \text{یا} \quad \xi = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i''}{u_{i+1}''}$$

اگر آزمایش اجازه ثبت شتاب را بدهد اگر آزمایش اجازه ثبت u را بدهد

معمولاً در محل حالت ثبت شتاب سازه در آزمایش ارتعاش آزاد سهل‌تر است.



شتاب نکات ارتعاش آزاد سازه

از ثبت می توان ارتعاش آزاد را بررسی و پریود واقعی را محاسبه نمود و از روش تحلیلی و کاربرد
سختی و جرم نیز محاسبه و مقایسه کرد تا دقت بصری سختی و جرم ارزیابی شود.

مثال - مطلوبست تعیین پریود طبیعی و درصد میرایی یک قاب (مدل) که تحت آزمایش ارتعاش
آزاد قرار گرفته است. نتیجه آزمایش بصورت زیر است:

Peak	Time, t_i (sec)	Peak, u_i'' (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273 \text{ Sec}$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi(10)} \ln \frac{0.915g}{0.076g} = 0.0396 \text{ یا } 3.96\%$$

مثال - یک مخزن آب هوایی که خالی است در نظر گرفته می شود. یک کابل به مخزن متصل بوده
و نیروی افقی 16.4 kips اعمال شده که باعث 2" تغییر مکان افقی مخزن شده است. کابل بصورت
نالهائی مطمح و ارتعاش آزاد رنج می دهد. در پایان چهار سیکل کامل، زمان ۲ ثانیه و دامنه حرکت
1" می باشد. با اطلاعات فوق مطلوبست محاسبه: الف) درصد میرایی ب) پریود طبیعی بدون
میرایی ج) سختی موثر سیستم > وزن موثر سیستم ه) ضریب میرایی و تعداد سیکل لازم
برای اینکه دامنه حرکت به 0.2" کاهش یابد.

$$\xi = \frac{0.11}{4} = 0.0275 = 2.75\% \rightarrow \xi_{50\%} \approx \frac{0.11}{4}$$

$$\text{ب) } T_D = \frac{2.0}{4} = 0.5 \text{ sec} , T \approx T_D = 0.5 \text{ sec} \text{ و ج) } K = \frac{16.4}{2} = 8.2 \frac{\text{kips}}{\text{in}}$$

$$\text{د) } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.57 \text{ Rad/s}$$

$$m = \frac{K}{\omega^2} = \frac{8.2}{(12.57)^2} = 0.0519 \text{ kip-sec}^2 / \text{in}$$

۱۸

$$W = mg = (0.0519) 386 = 20.03 \text{ kips}$$

$$c = \xi (2\sqrt{km}) = 0.0275 [2\sqrt{8.2(0.0519)}] = 0.0359 \text{ kip-sec/in}$$

$$9) \xi \approx \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_1}{u_1 + j} \rightarrow j \approx \frac{1}{2\pi(0.0275)} \ln \frac{2}{0.2} = 13.32 \sim 13 \text{ سیکل}$$

مثال - وزن آب لازم برای پر کردن مخزنه آب هوایی در شال قبل برابر 80 kips است. مطلوبست بیشترین درصد میرایی مخزنه پر؟

$$W = 20.03 + 80 = 100.03 \text{ kips}$$

$$m = \frac{100.03}{386} = 0.2591 \text{ kip-s}^2/\text{in}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2591}{8.2}} = 1.012 \text{ sec}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{0.0359}{2\sqrt{8.2(0.2591)}} = 0.0123 = 1.23\%$$

انرژی ارتعاشی آزاد

انرژی یک سیستم SDOF در اثر ارتعاشی آزاد (شرایط اولیه u_0 و \dot{u}_0) در لحظه شروع:

$$E_1 = \frac{1}{2} k (u_0)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{u}_0)^2$$

در هر لحظه از ارتعاشی آزاد، انرژی کل از جمع دو انرژی است؟ انرژی جنبشی E_k و انرژی

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{u}(t)^2 \text{ و } E_s = \frac{1}{2} k u(t)^2 \text{ پتانسیل از کرنش}$$

پس $u(t)$ از معادله در حالت ارتعاشی برده میرایی قرار می دهیم:

$$E_s(t) = \frac{1}{2} k \left[u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \right]^2$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left[-u_0 \sin \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \cos \omega t \right]^2$$

$$E_k(t) + E_s(t) = \frac{1}{2} k u_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}_0^2$$

انرژی کل

مقدار کل انرژی در هر لحظه مستقل از زمان بوده و برابر انرژی لحظه ابتدایی است (میرایی صفر نشده)

واکنش سیستم‌ها SDOF در بارگذاری هارمونیک

این بخش از مباحث کلاسیک و پایه‌ای دینامیک سازه‌هاست. چرا؟
 از یک طرف اکثر بارها بصورت هارمونیک بیان می‌شوند (سُرود نامتعادل
 ماشین‌های چرخان، امواج دریا، زلزله، بارهای پرتودینامیک و...)،
 از طرف دیگر، درک رفتار سازه‌ها در برابر نیروهای هارمونیک کمک فراوانی به درک
 واکنش سازه در برابر سایر نیروها می‌نماید.
 در ضمنه نوع تابع هارمونیک و نتایج حاصل از تحلیل و تفسیر آن‌ها ساده‌ی باشد.

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t$$

الف - حالت بدون میرایی؛

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$u(t) = \left[u_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \right) \sin \omega t \right] + \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \Omega t$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\underbrace{\sin \Omega t}_{\text{کنرا}} - \beta \underbrace{\sin \omega t}_{\text{پایدار}}) \quad ; \quad u_0 = \dot{u}_0 = 0$$

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} \quad \text{ضریب رفتار} \quad \leftarrow \quad u_{st} = \frac{P_0}{k}$$

$$R_{max}(t) = D = \frac{u_{max}(t)}{u_{st}} = \frac{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \Omega t}{\frac{P_0}{k}} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

ضریب بزرگنمایی تغییر مکان

$$\Omega = \omega \rightarrow \beta = 1 \rightarrow D = \frac{1}{0} = \infty$$

حالت تشدید (رزونانس)

: با رضع ایام $\rightarrow u(t) \rightarrow \infty$

$$u(t) = -0.5 \frac{P_0}{k} (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)$$

(۱۹)

اگر میرایی در نظر گرفته شود، برای محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل باید از حالت ارتعاش آزاد با میرایی استفاده نمود.

انرژی کل در این حالت دارای تابع کاهشی در زمان خواهد بود چون مقداری از انرژی به صورت لزجی استهلاک می‌شود که در مدت زمان صفر تا t برابر:

$$E_D = \int_0^u f_D(t) du = \int_0^u c \dot{u} du = \int_0^t c \dot{u}^2 dt$$

مقدار انرژی کل اولیه (لحظه اول شروع ارتعاش) به مرور مستهلک خواهد شد.

www.ttnar.ir

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

ب- حالت پایداری :

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) + M \sin \Omega t + N \cos \Omega t$$

$$M = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

A و B از شرایط اولیه بدست می آید.

$$N = \frac{P_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

اگر از جواب گذرا صرف نظر شود :

$$u(t) \simeq u_p(t) = P \sin(\Omega t - \alpha)$$

$$P = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$D = \frac{P}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\alpha = \text{Arctan} \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right)$$

$$\beta \rightarrow 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi} \quad \text{در ازونانس}$$

توجه : حداکثر D در مقادیری قدری کمتر از $\beta = 1$

$$\frac{dD}{d\beta} = -4\beta(1 - \beta^2) + 8\xi^2\beta = 0 \rightarrow \beta^2 = 1 - 2\xi^2$$

برای مثال $\xi = 15\%$ ← حداکثر D به ازاء $\beta = 0.977$ حاصل می شود.

اگر از جواب گذرا صرف نظر نشود (با شرایط اولیه صفر) : $(u_0 = \dot{u}_0 = 0)$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi \omega t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_0 t \right) - \cos \omega t \right]$$

ترم Sin در عبارت بالا کوچک است (صرف نظر می شود) و $\omega_D \simeq \omega$:

$$u(t) \simeq \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi \omega t} - 1) \cos \omega t$$

برای حالت حذف جواب گذرا :

۱- اگر $B \ll 1$ (تغییرات نیرو آهسته است) ، ضریب بزرگنمایی D کمی بزرگتر از یک است و مستقل از میرایی ، پس
 رفتار دینامیکی مانند تغییر شکل استاتیکی است ،
 $u_{max} \approx p \approx \frac{P_0}{K}$
 * سختی سیستم کنترل کننده است ، $D \approx 1$

۲- اگر $B \gg 1$ (تغییرات نیرو سریع است) ، با افزایش B مقدار D به سمت صفر میل می کند و میرایی اثر زیادی ندارد ، برای مقادیر بزرگ B ، ترم B^4 در بیان عبارت D تعیین کننده است و تقریباً داریم :

$$D = \frac{p}{P_0/K} \approx \frac{1}{B^2} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

* جرم کنترل کننده است .
 $m \approx \frac{P_0}{K} \frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{P_0}{m \Omega^2}$ دامنه حرکت

۳- اگر $B \approx 1$ (فرکانس بارگذاری و فرکانس طبیعی سیستم تقریباً برابر است) ، مقدار D بسیار به درصد میرایی حساس است ، تغییر شکل دینامیکی خیلی از تغییر شکل استاتیکی بزرگتر است .
 $p = \frac{P_0/K}{2\xi} = \frac{P_0}{C\omega}$
 * میرایی کنترل کننده است .

مثال - دامنه حرکت (با تقریب p) یک سیستم معادل یک درجه آزادی تحت اثر دو حالت بارگذاری هارمونیک بصورت زیر است ؛ مطلوبست تخمیر درصد میرایی سیستم ؟

$\Omega = \omega \leftarrow p = 5$ و $\Omega = 5\omega \leftarrow p = 0.02$ ،

$\omega = \Omega$:

$\Omega = 5\omega$
 $p = \frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi} = 5$ ، $p \approx \frac{P_0}{K} \frac{1}{B^2} = \frac{P_0/K}{25} = 0.02 \rightarrow \frac{P_0}{K} = 0.5$

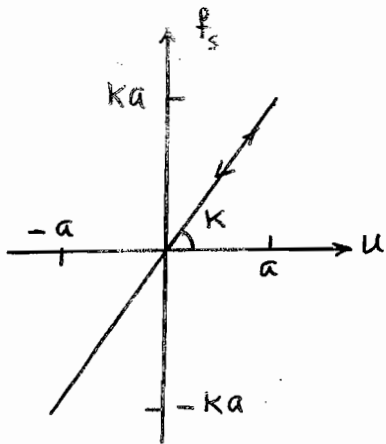
$\xi = 0.05 = 5\%$

بر آورد در صد میرایی از روش تئوری ها، مونیکی

تئوری: نوسان کننده ساده مستهلک شونده با فرکانس زاویه ای ω

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad , \quad \Omega = \omega \rightarrow \beta = 1$$

$$u(t) = u_p(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(2\xi\beta)^2} (-2\xi\beta \cos \omega t)$$



$$u(t) = -\frac{P_0}{2K\xi} \cos \omega t$$

الف - نیروی f_s در فنر $f_s = k u(t)$

دامنه $a = P_0 / 2K\xi$

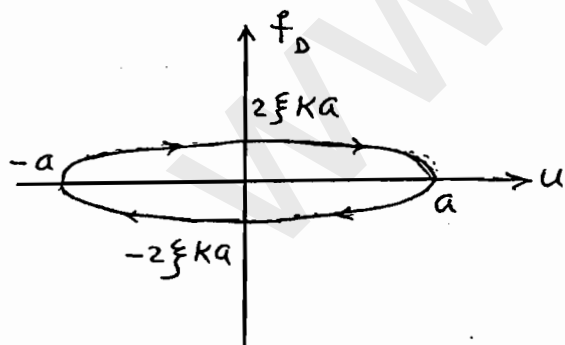
ب - نیروی f_D در میراگر $f_D = c \cdot \dot{u}(t)$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega \rightarrow c = 2m\xi\omega \rightarrow f_D = 2m\xi\omega \dot{u}$$

$$u(t) = -a \cos \omega t \rightarrow \dot{u}(t) = a\omega \sin \omega t$$

$$f_D = 2m\xi\omega a\omega \sin \omega t = 2m\xi\omega^2 a \sin \omega t$$

$$\omega^2 = k/m \rightarrow \omega^2 m = k \rightarrow f_D = 2K\xi a \sin \omega t$$



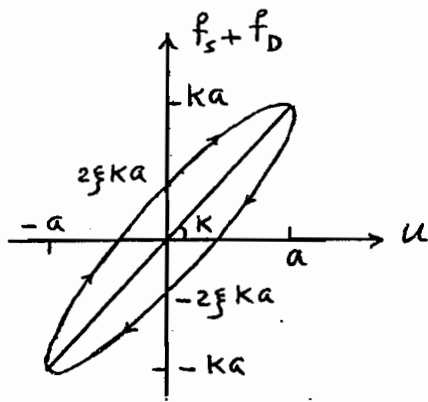
$$\frac{f_D}{2K\xi a} = \sin \omega t \rightarrow \left(\frac{f_D}{2K\xi a} \right)^2 = \sin^2 \omega t$$

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - u^2/a^2$$

$$f_D^2 / (2K\xi a)^2 = 1 - u^2/a^2 \quad \text{تابع بیضی}$$

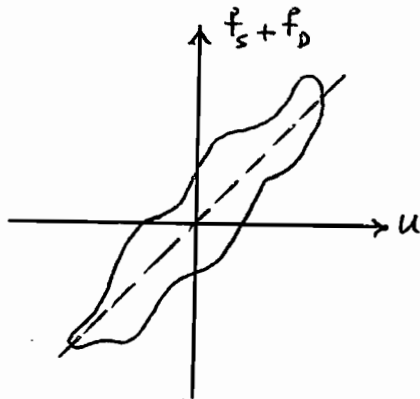
در یک سیلک کامل، مقدار انرژی پتانسیل در فنر تماماً پس داده می شود ولی انرژی مستهلک شده در میراگر مصرف می شود و مقدار آن برابر سطح زیر بیضی است!

$$A = 2\pi a^2 K \xi \Rightarrow \xi = \frac{A}{2\pi a^2 K}$$



رابطه بین مجموع دو نیروی f_s و f_d و تغییر مکان u :
 شکل پرست آمده برای حالت تکریک وایده آل
 پرده است ،

از شکل مساحت بیضی ، مقدار a و K
 محاسب و در ضد میرایی نسبی تخمین زده می شود



(مشخص در حالت واقعی)

$$\xi = A / 2\pi a^2 K$$

بتن مسلح 7% بتن پیش تنیده 5%
 فولادی پیچ رومره 7% فولادی چوبش شده 4%

(کتابچه سازمان انرژی اتمی آمریکا)

مقدار انرژی متحمل شده یک سیستم SDOF در یک سیکل تحت اثر $P(t) = P_0 \sin \Omega t$
 $E_D = \int f_D du = \int_0^{2\pi/\Omega} (c\dot{u})\dot{u} dt = \int_0^{2\pi/\Omega} c\dot{u}^2 dt$ (جواب پایدار) :

$$= c \int_0^{2\pi/\Omega} [\Omega p \cos(\Omega t - \alpha)]^2 dt = \pi c \Omega p^2$$

توجه از قبل داشتیم : $u(t) = u_p(t) = p \sin(\Omega t - \alpha)$

مثال - نیروی مقاوم برای حرکت جسمی در یک سیال با توان دو سرعت رابطه دارد $f_D = \pm b\dot{u}^2$
 مطلوبست تعیین ضریب میرایی معادل لزجی C_{eq} برای چنین نیرویی که بر سیستم مرتعش تحت اثر
 نیروی هارمونیک با دامنه حرکت p و فرکانس زاویه ای Ω و همچنین تخمین p در حالت $\Omega = \omega$ ؟

حل : اگر زمان از حالت تغییر مکان حداکثر معنی در نظر باشد :

$$E_D = \int f_D du = \int_0^{2\pi/\Omega} f_D \dot{u} dt = 2 \int_0^{\pi/\Omega} f_D \dot{u} dt = 2 \int_0^{\pi/\Omega} (b\dot{u}^2) \dot{u} dt =$$

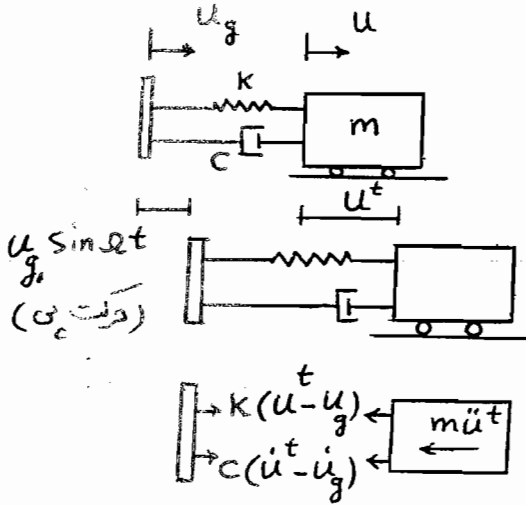
$$2b\Omega p^3 \int_0^{\pi/\Omega} \sin^3 \Omega t dt = \frac{8}{3} b \Omega^2 p^3$$

$$\pi C_{eq} \Omega p^2 = \frac{8}{3} b \Omega^2 p^3 \rightarrow C_{eq} = \frac{8}{3\pi} b \Omega p$$

$$\Omega = \omega \rightarrow p = \frac{P_0}{c\omega} \rightarrow p = \left(\frac{3\pi}{8b} \frac{P_0}{\omega^2} \right)^{1/2}$$

کاهندگی ارتعاش

الف - انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه
 ماسه آلات - مجبر، قطار - انفجار - زلزله ...



$$u_g(t) = u_{g_0} \sin \omega t \rightarrow \dot{u}_g = u_{g_0} \omega \cos \omega t$$

برای سادگی u^t را با u نشان می دهیم.

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_g) + k(u - u_g) = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = ku_{g_0} \sin \omega t + c\omega u_{g_0} \cos \omega t$$

$$P_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{c\omega}{k} = \frac{2c\omega}{2m\omega^2} = \frac{2c\omega}{2m\omega \times \omega} = 2\xi\beta$$

c_{cr}

$$P_0 = u_{g_0} \sqrt{k^2 + (c\omega)^2} = u_{g_0} k \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{c\omega}{k} = 2\xi\beta$$

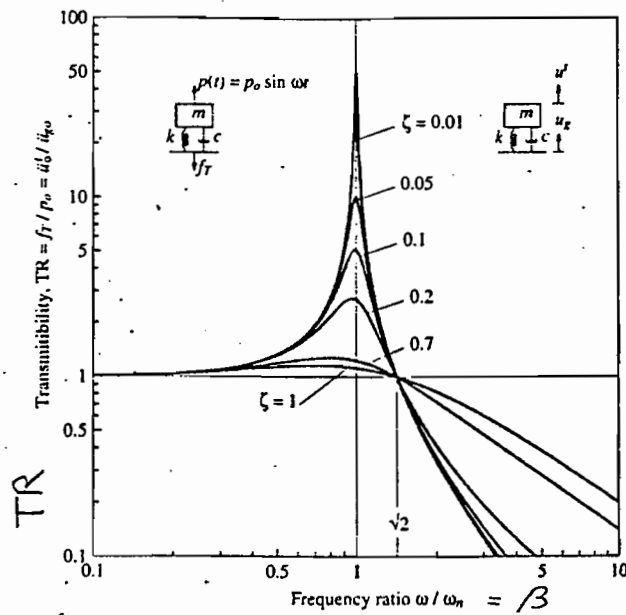
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow u_{max} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

حداکثر تغییر مکان منتقله از پی سازه به خود سازه وقتی پی نسبت $u_{g_0} \sin \omega t$ ارتعاش می کند.
 مساله مهم در کاهندگی ارتعاش؛ حفاظت سیستم از ارتعاشات مزاحم ناشی از حرکت تکیه گاه است.
 ضریب قابلیت انتقال؛ معیاری جهت تعیین میزان انتقال حرکت از پی به دستگاه

$$TR = \frac{u_{max}}{u_{g_0}} = \frac{\frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}}{\frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\leftarrow D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \leftarrow \text{در بارگذاری Sin}$$

$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



- به ازای $\beta = \sqrt{2}$ همه منحنی‌ها از یک نقطه عبور و $TR=1$ (حد اکثر تغییر مکان منتقله به سیستم برابر حد اکثر دامنه ارتعاش می‌باشد).

- هرچه β از $\sqrt{2}$ بزرگتر باشد، ضریب انتقال کاهش پیدا می‌کند، بنابراین تغییر مکان منتقله کمتر می‌شود.

- هرچه عمر کمتر باشد، ضریب انتقال کمتر می‌شود! تأثیر نیروی میرایی هم و هرچه کمتر باشد، بهتر است. نقش نیروی میرایی؟ نامطلوب!

u_{max} تغییر مکان حد اکثر سیستم است ولی برای نیروی داخلی سازه در اثر حرکت تکیه گاهی باید

$$u_r = u - u_g$$

تغییر مکان نسبی معلوم باشد u_r

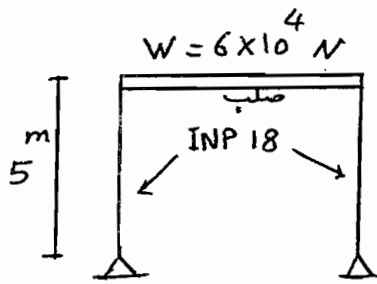
$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = -m\ddot{u}_g = mu_{g_0} \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$P_{eff} = -m\ddot{u}_g$$

$$u_{r \max} = \frac{mu_{g_0} \Omega^2}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{m\Omega^2}{k} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \beta^2 \rightarrow \frac{u_{r \max}}{u_{g_0}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_{r \max} = u_{g_0} D \beta^2$$



سال - $u_g(t) = 0.4 \sin 4t$ cm
 تغییرات وارد می شود
 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 1450 \text{ cm}^4$
 $\xi = 5\%$
 TR = ?
 حداکثر تنش موجود در ستونها؟

$$K = \frac{6EI}{h^3} = 146.2 \text{ kgf/cm} = \frac{6 \times 2.1 \times 10^6 \times 1450}{(500)^3}$$

$$K = 146.2 \times 9.8 \times 100 = 143276 \text{ N/m}, \quad u_{g_0} = 0.4 \text{ cm}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{143276 \times 9.8}{6 \times 10^4}} = 4.84 \text{ Rad/s}$$

$$\Omega = 4 \text{ Rad/s} \rightarrow \beta = \frac{4}{4.84} = 0.826$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.826^2)^2 + (2 \times 0.05 \times 0.826)^2}} = 3.046$$

$$TR = 3.046 \sqrt{1 + (2 \times 0.05 \times 0.826)^2} = 3.056$$

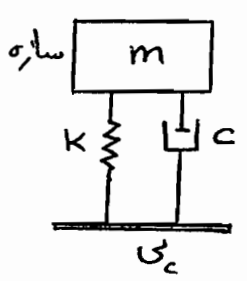
$$u_r \text{ max} = u_{g_0} D \beta^2 = 0.4 \times 3.046 \times (0.826)^2 = 0.83 \text{ cm}$$

$$\text{نیروی هر ستون} = \frac{146.2 \times 0.83}{2} = 60.67 \text{ kgf}$$

$$\text{نگهدارنده} \quad M_{\text{max}} = 60.67 \times 500 = 30335 \text{ kgf-cm}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{\frac{I}{h}} = \frac{30335}{1450/9} = 188.3 \text{ kgf/cm}^2$$

INP 18 $\rightarrow h = 9$



ب - انتقال نیرو از سازه به تکیه گاه
 در طراحی پی های ماسیبه های مرتعش بکار می رود.
 سازه مرتعش است و هدف بقیه مقدار نیروی منتقله از
 سازه به تکیه گاه است.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \omega t$$

جواب پایداری $u(t) = P \sin(\omega t - \alpha)$

$$P = \frac{P_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{P_0}{k} \times D$$

برای نیروهای انتقال یافته از سازه به زین برابر مجموع نیروهای فنر و کمک فنر است. در استاتیک فقط نیروی ku منتقل می شود اما در دینامیک، ku و $c\dot{u}$ منتقل می شود:

$$R = f_s + f_d = ku + c\dot{u}$$

$$R = P [k \sin(\omega t - \alpha) + c\omega \cos(\omega t - \alpha)] = P \sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \sin(\omega t - \alpha + \gamma)$$

$$\gamma = \text{Arctan} \left(\frac{c\omega}{k} \right) = 2\xi\beta$$

$$(\alpha - \gamma) = \theta \quad \text{زاویه فاز} \rightarrow \tan \theta = \frac{\tan \alpha - \tan \gamma}{1 + \tan \alpha \tan \gamma} = \frac{2\xi\beta^2}{1 - \beta^2 + 4\xi^2\beta}$$

$$R = Pk \sqrt{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2} \sin(\omega t - \theta) = Pk \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \sin(\omega t - \theta)$$

$$R_{\max} = \frac{P_0 \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

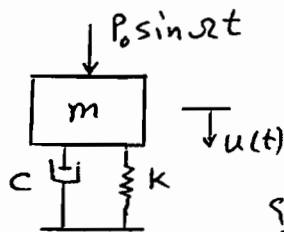
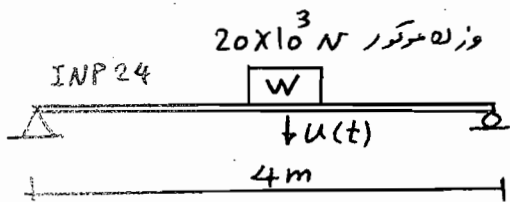
TR: قابلیت انتقال در این حالت عبارت از نسبت حداکثر نیروی انتقال یافته به تکیه گاه به حداکثر نیروی هارمونیک وارد بر سازه است.

$$TR = \frac{R_{\max}}{P_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \underline{\underline{D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}}$$

شبه حالت الف

انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه و انتقال نیرو از سازه به تکیه گاه از یک مافول نیرو می کنند. (متغی تغییرات TR مستجاب است).

سوال -



$$\xi = 10\%$$

میروی استتال یافته از مد تکرار به سیر؟

$$P(t) = (3 \times 10^4) \sin 40t \text{ N}$$

از دانه سیر به منتظر می شود.

$$I_x = 4250 \text{ cm}^4, \quad E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

حل:

$$K = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 2.1 \times 10^6 \times 4250}{(400)^3} = 6694 \text{ kgf/cm}$$

$$K = 6694 \times 9.8 \times 100 = 6560120 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{6560120 \times 9.8}{20 \times 10^3}} = 56.7 \text{ Rad/s}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{40}{56.7} = 0.7$$

$$U_{st} = \frac{P_0}{K} = \frac{3 \times 10^4}{6560120} \times 100 = 0.46 \text{ cm}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.7^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 0.7)^2}} = 1.89$$

$$p = \frac{P_0}{K} D = 0.46 \times 1.89 = 0.87 \text{ cm}$$

حد اکثر تغییر مکان

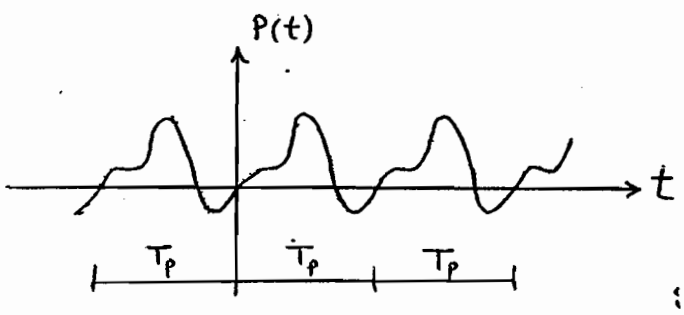
$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi/\beta)^2} = 1.89 \sqrt{1 + (2 \times 0.1 \times 0.7)^2} = 1.91$$

$$P_{max} = P_0 \times TR = 3 \times 10^4 \times 1.91 = 5.73 \times 10^4 \text{ N}$$

تا میتر میروی در نهایت

پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک
 Periodic excitation

نیروی پریودیک نیرویی که تابع آن پس از یک پریود ثابت، عیناً تکرار شود (پریود T_p).



نیروی پریودیک است، امواج روسکوها دریایی،
 نیروی گردابی باد بر سازه‌های بلند و لاغر و
 ضلعی نیروها دیگر، پریودیک یا نزدیک به آن هستند؛

شبیه‌سازی زلزله و حرکت اتومبیل روی دهانه بلند یا با بدین اثر بلند مدت خرس از آن جمله می‌باشند،
 یا کمک بسط سری فوریه، نیروی پریودیک به ترم‌های هارمونیک تبدیل می‌شود (رقتار سازه خطی).

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{2\pi}{T_p} \\ n=1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos(n\Omega t) dt \quad \text{و} \quad b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin(n\Omega t) dt$$

در سری صترم ولی در عمل چند ترم اول برای همگرایی کافی است.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{\frac{2\pi n}{T_p}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega}, \quad \Omega_n = n\Omega_1$$

$\Rightarrow u(t)$ از حل معادله برای هر ترم بارگذاری

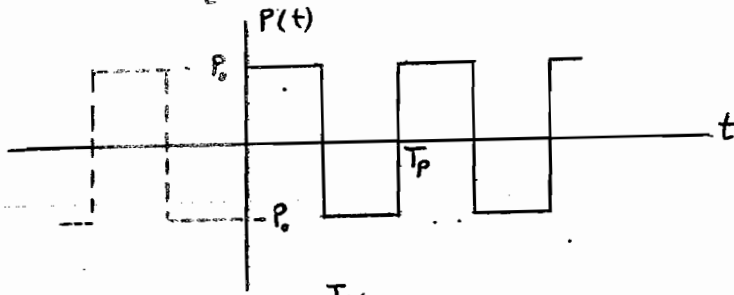
$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left\{ \begin{array}{l} [2\xi\beta_n a_n + (1-\beta_n^2)b_n] \sin \Omega_n t + \\ + [(1-\beta_n^2)a_n - 2\xi\beta_n b_n] \cos \Omega_n t \end{array} \right\}$$

$u(t)$ یک تابع پریودیک با پریود T_p

تأثیر نسبی هر ترم بستگی مستقیم به مقدار a_n و b_n از مولفه نیرو $P(t)$ و هم‌طور ضریب β_n دارد.

مثال - مطلوب است تحلیل یک SDOF تحت اثر نیروی پریودیک

$$P(t) = \begin{cases} P_0 & 0 \leq t \leq T_p/2 \\ -P_0 & T_p/2 \leq t \leq T_p \end{cases}$$



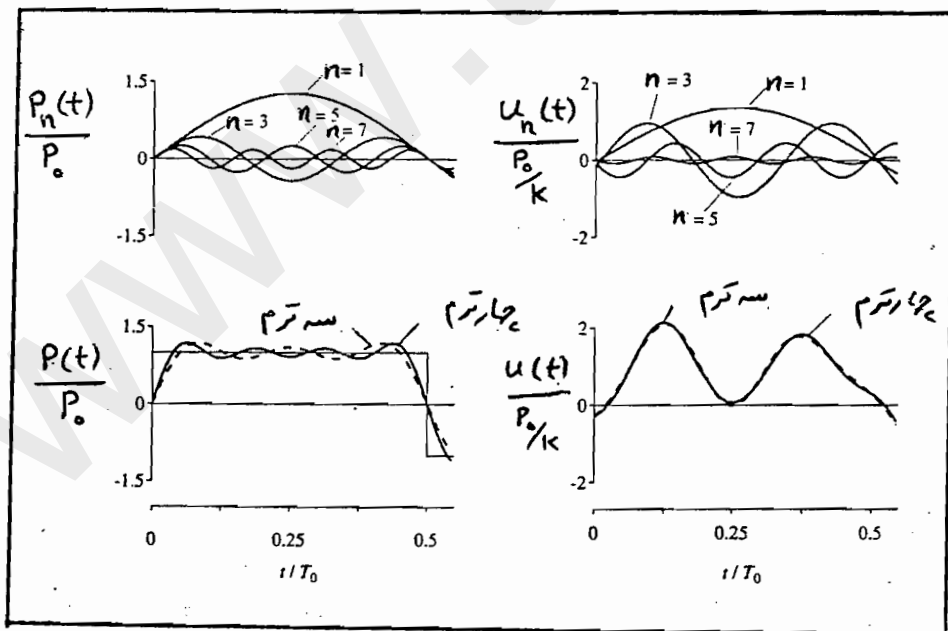
$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \left[P_0 \int_0^{T_p/2} \cos(n\omega t) dt + (-P_0) \int_{T_p/2}^{T_p} \cos(n\omega t) dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \left[P_0 \int_0^{T_p/2} \sin(n\omega t) dt + (-P_0) \int_{T_p/2}^{T_p} \sin(n\omega t) dt \right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ 4P_0/n\pi & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$P(t) = \sum P_n(t) = \frac{4P_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t)$$

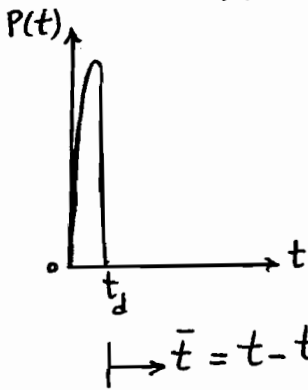
$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(1-\beta_n^2)^2 \sin(n\omega t) - 2\xi\beta_n \cos(n\omega t)}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}$$



تحلیل دینامیکی SDF در بارگذاری اختیاری و کلی (انتگرال دو هامل)

Duhamel's integral (Response to ARBITRARY Force)

قبل از پرداختن به بارگذاری کلی (بند محدودیت خاص) ، تحلیل دینامیکی در برابر بار آبی دیده می شود . مدت زمان اعمال بار بقدری کوتاه که سیستم فرصت بحسب انعطاف ندارد ،



بنابراین تغییر مکان در فاز بارگذاری تقریباً صفر است . میرایی در این نوع بارگذاری اثر بسیار ناچیز دارد . جواب سیستم در فاز ارتعاش آزاد خواهد بود : $t > t_d$

شرایط اولیه در لحظه t_d برآورده شده و رابطه ارتعاش آزاد (بدون میرایی) نوشته می شود ،

$$\text{ضربه} = \int_0^{t_d} P(t) dt = m \Delta \dot{u} = m (\dot{u}_{t_d} - \dot{u}_{\text{قبل}}) = m \dot{u}_{t_d}$$

$$u_{t_d} \neq 0 \quad \text{و} \quad \dot{u}_{t_d} = \frac{\int_0^{t_d} P(t) dt}{m}$$

$$\text{رابطه ارتعاش آزاد} \quad u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u_{t_d} \cos \omega \bar{t} = \frac{\int_0^{t_d} P(t) dt}{m \omega} \sin \omega \bar{t}$$

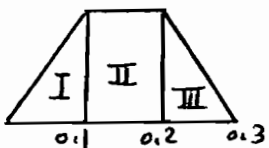
معمولاً اگر $t_d \ll \frac{T}{4}$ باشد ، جواب تقریبی فوق ، کاملاً مقبول خواهد بود .

مثال - یک سیستم SDF با $T = 0.4 \text{ sec}$ تحت بار ذوزنقه ای شکل است . $u(t=1.8) = ?$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.7 \text{ Rad/s}, \quad t_d = 0.3 > \frac{T}{4}$$

روش مستقیم یا ...



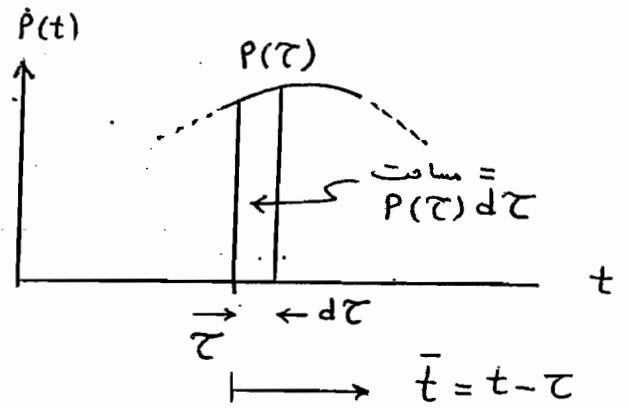
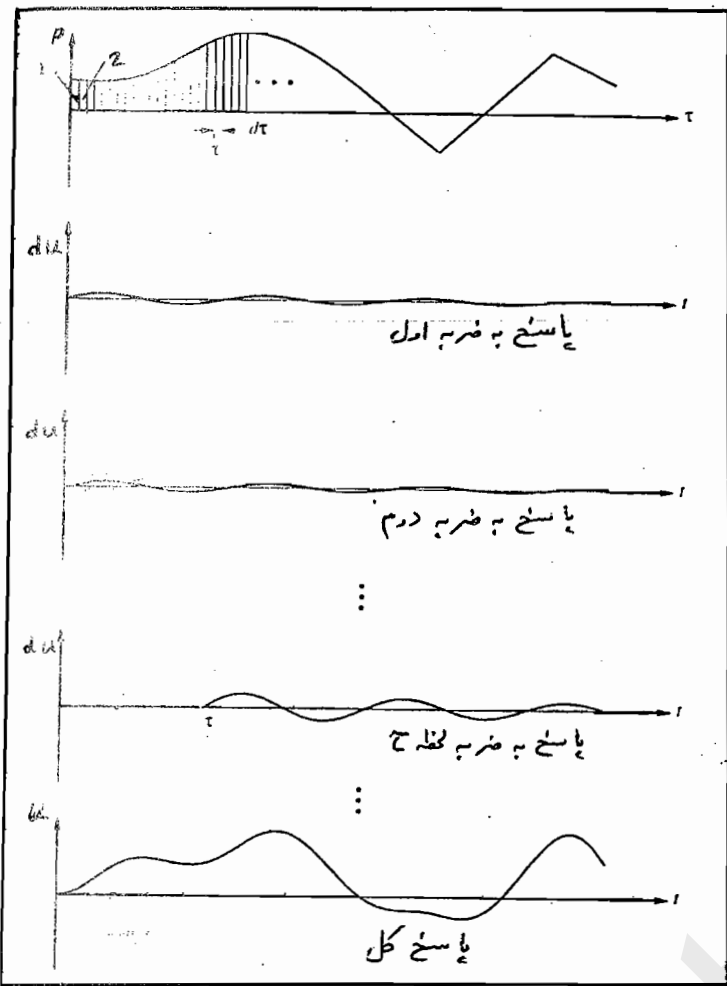
I مقطع باز $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_1(\bar{t}=1.7) = \frac{0.1 P_0}{2m\omega} \sin(1.7\omega)$

II مقطع باز $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_2(\bar{t}=1.6) = \frac{0.1 P_0}{m\omega} \sin(1.6\omega)$

III مقطع باز $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_3(\bar{t}=1.5) = \frac{0.1 P_0}{2m\omega} \sin(1.5\omega)$

سیستم خطی $\rightarrow u(t=1.8) = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{0.1 P_0}{2m\omega} (\sin 1.7\omega + 2\sin 1.6\omega + \sin 1.5\omega)$

اینک روش انتگرال دو هامل تشریح می‌شود:



$$du(t) = \frac{P(\tau) d\tau}{m\omega} \sin \omega \bar{t}$$

$$\int_0^t du = u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

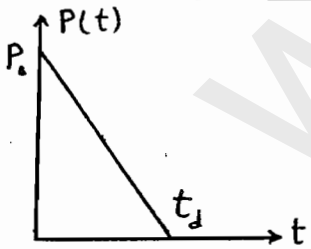
انتگرال دی هامل برای حالت بدو میرایی

جواب خیلی دقیق است چون $d\tau \ll \frac{T}{4}$

پاسخ انتگرال دو هامل برآ حالت با میرایی

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

اگر تابع $P(t)$ پیچیده باشد یا شکل خاصی نداشته باشد، از روش برآورد عددی استفاده می‌شود، در عمل، روش های عددی انتگرال دو هامل از کارایی خوبی برخوردار نمی باشند.



مثال - مطر بست تحلیل یک SDF باروش انتگرال دو هامل برای بارگذاری زیر:

$$P(t) = P_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) \quad 0 \leq t \leq t_d$$

حالت بدو میرایی

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

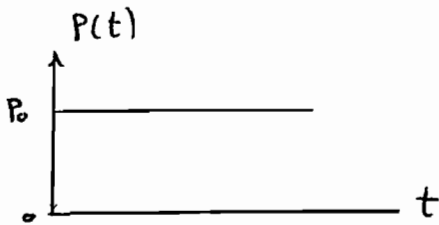
پس از عملیات بر حجم انتگرال گیری (شرایط اولیه صفر فرض شده است):

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left[1 - \frac{t}{t_d} - \cos \omega t + \frac{1}{\omega t_d} \sin \omega t \right] \quad 0 \leq t \leq t_d$$

برای $t > t_d$ (ارتعاش آزاد):

باید u در لحظه t_d برآورد شود و در رابطه ارتعاش آزاد قرار گیرد.

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بارگذاری خاص



الف - STEP Force $m\ddot{u} + ku = P(t) = P_0$

جواب برد میرایی $u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t)$

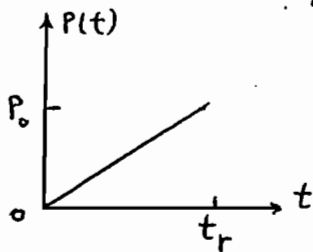
در این حالت $u_{max} = 2 \frac{P_0}{k}$ به ازای لحظه ای که پاسخ حداکثر می شود.

حالت بامیرایی: $u(t) = \frac{P_0}{k} \left[1 - e^{-\xi \omega t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 t \right) \right]$

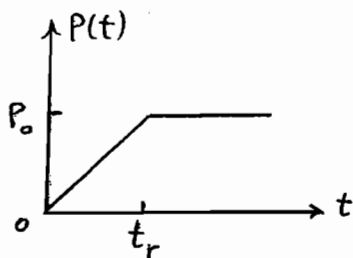
تحلیل بالا از روش مستقیم (حل معادله دیفرانسیل) یا انتگرال دو هامل قابل حصول است.

$P(t) = P_0 \frac{t}{t_r}$

ب - RAMP Force (سروری افزاینده خطی)



رتعاب سازه خطی است، $\xi = 0$: $u(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_r} \right)$



ج - STEP Force with FINITE RISE time (برد میرایی)

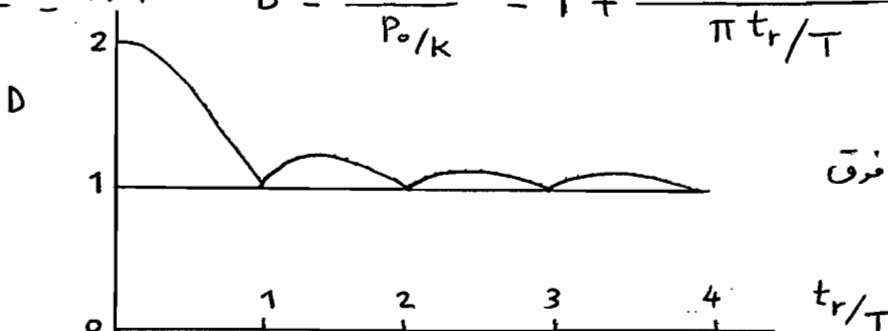
$$P(t) = \begin{cases} P_0 (t/t_r) & t \leq t_r \\ P_0 & t \geq t_r \end{cases}$$

$u(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_r} \right) \quad t \leq t_r$

$u(t) = \frac{P_0}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{\omega t_r} [\sin \omega t - \sin \omega (t - t_r)] \right\} \quad t \geq t_r$

$u_{max}(t) = \frac{P_0}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega t_r} \sqrt{(1 - \cos \omega t_r)^2 + (\sin \omega t_r)^2} \right\} \quad t \geq t_r$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی $D = \frac{u_{max}}{P_0/k} = 1 + \frac{|\sin(\pi t_r/T)|}{\pi t_r/T}$

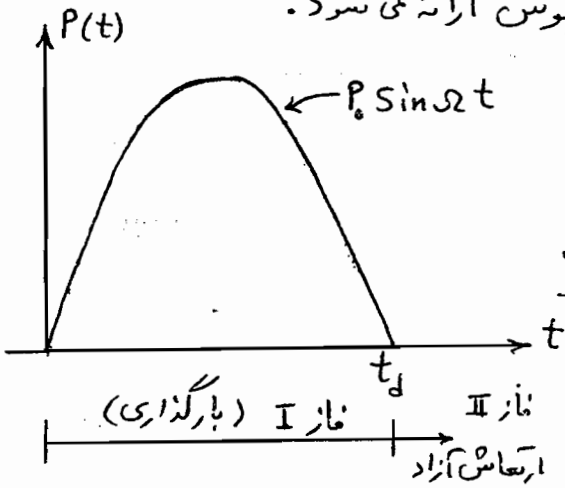


طیف جواب برای بارگذاری فوق حالت برد میرایی

PULSE Excitation تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه‌ای

انواع بارگذاری ضربه‌ای مثلثی، مستطیلی، نصف هارمونیک و... پهنای آنها اثر می‌کنند.

* جزئیات تحلیل برای نمونه در مورد بار ضربه‌ای نصف سینوس ارائه می‌شود.



موج انفجاری، ترمز جبرئیل‌های بزرگ، افزایش ناگهانی نیروی موتور

از جمله بارهای ضربه‌ای هستند، معمولاً اثر میرایی ضعیفی کم است.

تحلیل در دو فاز انجام می‌شود: فاز I و فاز II

تحلیل فاز بارگذاری (I) $0 \leq t \leq t_d$

شرایط اولیه صفر است.

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \omega t$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\sin \omega t - \beta \sin \omega t)$$

آیا u_{max} در فاز I است یا II؟

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\omega \cos \omega t - \beta \omega \cos \omega t) = 0$$

$$\omega \cos \omega t - \beta \omega \cos \omega t = 0 \Rightarrow \cos \omega t = \beta \cos \omega t$$

$$\omega t = 2\pi n \pm \omega t \rightarrow \text{لحظه پاسخ حداکثر} \quad t_{max} = \frac{2\pi n}{\omega \pm \omega} = \frac{2\pi n}{\omega(1 \pm \frac{2t_d}{T})}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega} = \frac{2\pi/T}{2\pi/T} = \frac{T}{2t_d}$$

برای اینکه حداکثر در فاز I باشد باید $t_{max} < t_d$

بارگذاری نصف Sin پس سیگنال اول ($n=1$) و اگر با علامت منفی ادامه دهیم خواهیم داشت

$\beta \leq -1$ که معنی ندارد پس رابطه شرطی را با $n=1$ و علامت + بررسی می‌کنیم.

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\omega(1+\frac{1}{\beta})} = \frac{2\pi}{\omega(1+\frac{2t_d}{T})} \leq t_d \Rightarrow \frac{2\pi}{1+\frac{1}{\beta}} \leq \omega t_d = \pi \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{\pi}{t_d} \rightarrow \omega t_d = \pi$$

(۳۵)

$$\Rightarrow \beta \leq 1 \quad \text{یا} \quad \omega \leq \frac{\pi}{t_d} \quad \text{یا} \quad \frac{T}{2} \leq t_d$$

تحلیل فاز ارتعاش آزاد (II) $t > t_d$

برای رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(\bar{t}=0)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(\bar{t}=0) \cos \omega \bar{t}$ باید تغییر مکان و

سرعت در لحظه t_d تعیین شوند (لحظه $\bar{t}=0$ یعنی $t=t_d$).

از رابطه I مقادیر u_{t_d} و \dot{u}_{t_d} محاسبه می‌شوند:

$$u(t_d) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\sin \Omega t_d - \beta \sin \omega t_d)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \rightarrow \omega = \Omega/\beta \rightarrow \omega t_d = \frac{\Omega t_d}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow u(t_d) = -\frac{P_0}{K} \frac{\beta \sin \frac{\pi}{\beta}}{(1-\beta^2)}$$

برای محاسبه $\dot{u}(t_d)$:

$$\dot{u}(t_d) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\Omega \cos \Omega t_d - \Omega \cos \omega t_d)$$

$$\dot{u}(t_d) = -\frac{P_0}{K} \frac{\Omega}{(1-\beta^2)} (1 + \cos \frac{\pi}{\beta})$$

$$u(\bar{t}) = -\frac{P_0}{K} \frac{\beta}{(1-\beta^2)} \left[(1 + \cos \frac{\pi}{\beta}) \sin \omega \bar{t} + \sin \frac{\pi}{\beta} \cos \omega \bar{t} \right]$$

برآورد حداکثر تغییر مکان در فاز II:

$$u(\bar{t}) = p \sin(\omega t + \alpha) \quad p = \sqrt{u_{t_d}^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\right)^2}$$

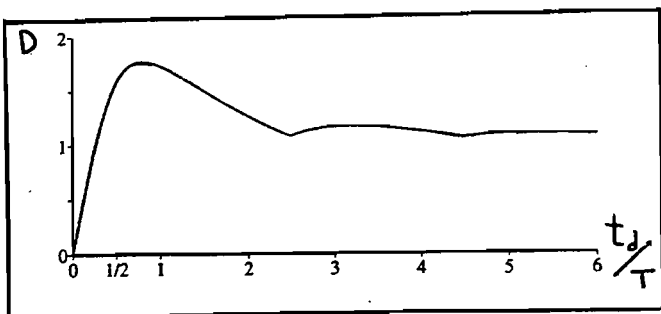
$u_{\max}(\bar{t}) = p$ که اگر بجای u_{t_d} و \dot{u}_{t_d} از معادله آنها استفاده شود:

$$\text{II در فاز } u_{\max} = \frac{P_0}{K} \frac{2\beta}{(1-\beta^2)} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

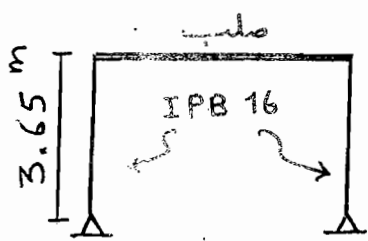
تیم طیف پاسخ بارگذاری نصف سینوسی

با توجه به تعیین تغییر مکان حداکثر در فاز I و II می‌توانه ضریب بزرگنمایی را محاسبه و بر حسب

$\frac{t_d}{T}$ های مختلف، منحنی مربوط ترسیم شود.



مثال - قاب یک طبقه مطابق شکل مفروض است. هرود طبیعی قاب برابر 0.5^{Sec} و ستون‌ها از مقطع IPB 16 می‌باشد (E = 2.1 x 10⁶ kg/cm²). مطلوبست تعیین حداکثر قاب تحت اثر بار ضربی نیم سینوس با حداکثر مقدار 1.8^{ton} و t_d = 0.25^{Sec}. منظور از پاسخ در این ساله



حداکثر تغییر مکان در بالای قاب و حداکثر تنش خمشی در ستون‌ها؟

$$\text{IPB 16} \rightarrow I_x = 2492 \text{ cm}^4, W_x = 311 \text{ cm}^3$$

$$\frac{t_d}{T} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \xrightarrow{\text{طینف مربوط}} D = 1.5$$

$$K \text{ یک ستون} = \frac{3EI}{h^3} = \frac{3(2.1 \times 10^6)2492}{(3.65 \times 100)^3} = 322.85 \text{ kg/cm}$$

$$K \text{ قاب} = 2 \times 322.85 = 645.7 \text{ kg/cm}$$

$$P_0 / K = \frac{1800}{645.7} = 2.79 \text{ cm}$$

$$U_{\max} = \frac{P_0}{K} \times D = 2.79 \times 1.5 = 4.185 \text{ cm}$$

$$M = \frac{3EI}{h^2} U_{\max} = \frac{3 \times 2.1 \times 10^6 \times 2492}{(365)^2} \times 4.185 = 493171.86 \text{ kg-cm}$$

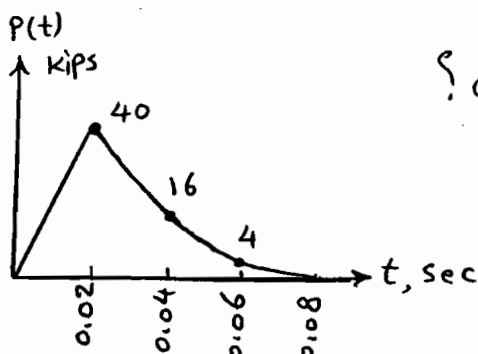
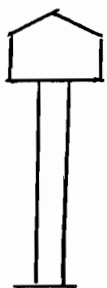
برآورد لنگر از روش دیگر! # 4.93 t-m

$$f_s \max = K U_{\max} = P_0 \times D = 1.8 \times 1.5 = 2.7 \text{ ton}$$

$$M = \frac{f_s \max}{2} \times h = \frac{2.7}{2} \times 3.65 = 4.93 \text{ ton-m}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{4.93 \times 10^5}{311} = 1585 \text{ kg/cm}^2$$

مثال - برج آب مثال‌های قبل با ارتفاع 80' تحت اثر نیروی P(t) نامی از انفجار قرار می‌گیرد. مطلوبست



تعیین حداکثر برش و لنگر خمشی در پای برج؟

از مثال‌های قبل

$$\left\{ \begin{array}{l} K \text{ برج} = 8.2 \text{ kips/in} \\ T \text{ بُر} = 1.12 \text{ Sec} \end{array} \right.$$

حل مثال - $t_d/T = \frac{0.08}{1.12} = 0.071 < 0.25 \rightarrow$ روش تقریبی OK

از قانون دوزنقه برای محاسبه انتگرال (مساحت منحنی بارگذاری) استفاده می شود:

$$\int_0^{0.08} P(t) dt = \frac{0.02}{2} [0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0] = 1.2 \text{ Kip-sec}$$

$$u(t) = \frac{\int P(t) dt}{m \omega} \sin \omega t \rightarrow u_{max} = \frac{\int P(t) dt}{m \omega} = \frac{I}{m \omega}$$

$$u_{max} = \frac{I}{K} \frac{2\pi}{T} = \frac{(1.2) 2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821 \text{ in}$$

$$f_{smax} = K u_{max} = (8.2)(0.821) = 6.73 \text{ kips}$$

$$\Rightarrow \text{برش حداکثر } V_b = 6.73 \text{ kips}, M_b = 6.73 \times 80 = 538 \text{ kip-ft}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

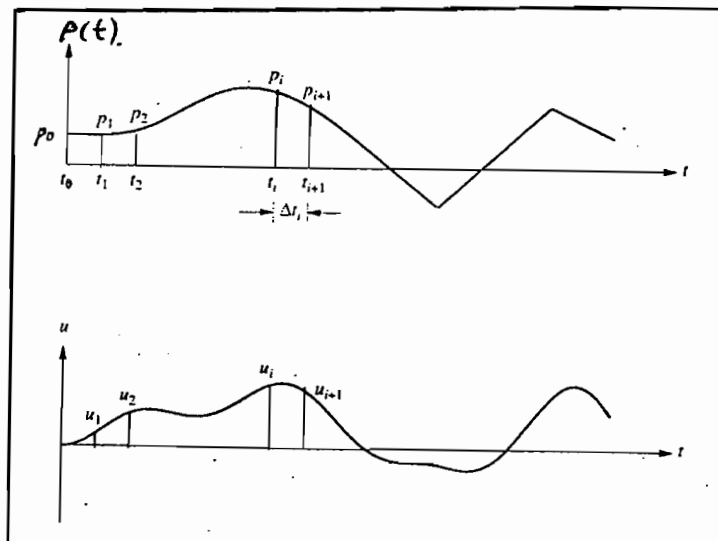
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

برای انواع بارگذاری دینامیکی بویژه اگر نیرو دارای تابع ریاضی مشخصی نباشد؛ $P(t)$ مسائل مهم: دقت، همگرایی، پایداری و نکات برنامه نویسی و اجرا در کامپیوتر در مورد روش

عددی مورد نظر

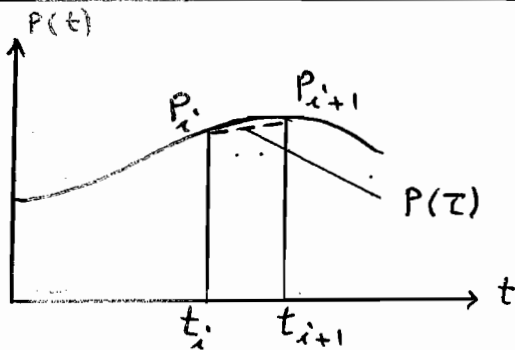
انواع روش: سه روش کلی عددی: درو یا بی تابع نیرو - تفاضل محدود در بیان سرعت

و شتاب - فرض تغییرات مختلف شتاب

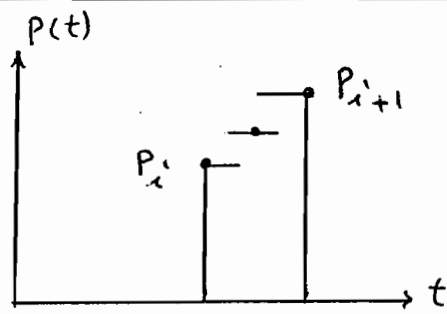


الف - روش های عددی مبتنی بر درون یابی در تابع نیرو

Numerical solution Based on interpolation of the Excitation



درون یابی خطی تابع نیرو



درون یابی ثابت تابع نیرو

$$\tilde{P}_i = P(\tau) = P_i \text{ یا } P_{i+1} \text{ یا } \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

$$P(\tau) = P_i + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right) \tau$$

۱- درون یابی ثابت تابع نیرو

برای سادگی؛ از میرایی صرف نظر می کنیم - جواب کل از دو قسمت تشکیل شده است:

- جواب سیستم تحت اثر نیروی ثابت در فاصله زمانی Δt_i بدون شرایط اولیه

- جواب سیستم در حالتی که نیرو وجود ندارد و فقط شرایط اولیه وجود دارد (ارتعاش آزاد)

$$m\ddot{\tilde{u}} + k\tilde{u} = \tilde{P}_i \rightarrow \tilde{u}_p = \frac{\tilde{P}_i}{k} \quad (1)$$

$$\tilde{u}_c = A_1 \sin \omega \tau + A_2 \cos \omega \tau$$

$$\tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k} + A_1 \sin \omega \tau + A_2 \cos \omega \tau \quad (\tilde{u}(0) = \dot{\tilde{u}}(0) = 0)$$

$$A_1 = 0, A_2 = -\tilde{P}_i/k \rightarrow \tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k} (1 - \cos \omega \tau)$$

$$\hat{u}(\tau) = u_1 \cos \omega \tau + \frac{\dot{u}_1}{\omega} \sin \omega \tau \quad ; \text{ ارتعاش آزاد (نیرو وجود ندارد)} \quad (2)$$

$$u(\tau) = \tilde{u}(\tau) + \hat{u}(\tau)$$

$$u(\tau) = u_1 \cos \omega \tau + \frac{\dot{u}_1}{\omega} \sin \omega \tau + \frac{\tilde{P}_i}{k} (1 - \cos \omega \tau)$$

$$\dot{u}(\tau) = \omega \left[-u_1 \sin \omega \tau + \frac{\dot{u}_1}{\omega} \cos \omega \tau + \frac{\tilde{P}_i}{k} \sin \omega \tau \right]$$

اگر در روابط قبلی $\tau = \Delta t_i$ قرار گیرد، تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} بدست می آید.

$$u_{i+1} = u_i \cos(\omega \Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin(\omega \Delta t_i) + \frac{\tilde{P}_i}{K} [1 - \cos(\omega \Delta t_i)]$$

$$\dot{u}_{i+1} = \omega \left\{ -u_i \sin(\omega \Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \cos(\omega \Delta t_i) + \frac{\tilde{P}_i}{K} \sin(\omega \Delta t_i) \right\}$$

۲- درون یا بی خطی تابع نیرو $P(\tau) = P_i + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right) \tau$

جزئیات حالت بدون میرایی ارائه می شود. جواب کل از سه قسمت تشکیل شده است:

نیروی ثابت P_i بدون شرایط اولیه + شرایط اولیه بدون نیرو (اعراض آزاد) + نیرو خطی $\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}$ بدون

شرایط اولیه (جزئیات در مورد اول در حالت ۱ دیده شد و اینجا جزئیات در مورد سوم)!

$$m \ddot{u} + k \bar{u} = \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right) \tau \quad (\bar{u}(0) = \dot{\bar{u}}(0) = 0, \quad 0 < \tau < \Delta t_i)$$

$$\bar{u}_p = \frac{1}{k} \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right) \tau, \quad \bar{u}_c = A_1 \sin \omega \tau + A_2 \cos \omega \tau$$

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}_p + \bar{u}_c = \left(\frac{\Delta P_i}{k \Delta t_i}\right) \tau + A_1 \sin \omega \tau + A_2 \cos \omega \tau$$

$$\bar{u}(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0, \quad \dot{\bar{u}}(0) = 0 \rightarrow A_1 = -\frac{\Delta P_i}{\omega k \Delta t_i}$$

$$\bar{u}(\tau) = \left(\frac{\Delta P_i}{k}\right) \left(\frac{1}{\omega \Delta t_i}\right) (\omega \tau - \sin \omega \tau)$$

اگر $\tau = \Delta t_i$ یا سطح در لحظه t_{i+1} بدست می آید (جواب ۲ مورد اول نیز لحاظ شده است):

$$u_{i+1} = u_i \cos \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin \omega \Delta t_i + \frac{P_i}{K} (1 - \cos \omega \Delta t_i) + \frac{\Delta P_i}{K} \left(\frac{1}{\omega \Delta t_i}\right) (\omega \Delta t_i - \sin \omega \Delta t_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \omega \left\{ -u_i \sin \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \cos \omega \Delta t_i + \frac{P_i}{K} \sin \omega \Delta t_i + \frac{\Delta P_i}{K} \left(\frac{1}{\omega \Delta t_i}\right) (1 - \cos \omega \Delta t_i) \right\}$$

روابط مربوط به درون یا بی خطی تابع نیرو در حالت سیرابی

$$\begin{cases} u_{i+1} = A P_i + B P_{i+1} + C \dot{u}_i + D \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} = A' P_i + B' P_{i+1} + C' \dot{u}_i + D' \dot{u}_i \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\xi}{\omega \Delta t} + e^{-\xi \omega \Delta t} \left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_0 \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin \omega_0 \Delta t - \left(1 + \frac{2\xi}{\omega \Delta t} \right) \cos \omega_0 \Delta t \right] \right\}$$

$$B = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{2\xi}{\omega \Delta t} + e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_0 \Delta t} \sin \omega_0 \Delta t + \frac{2\xi}{\omega \Delta t} \cos \omega_0 \Delta t \right) \right]$$

$$C = e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 \Delta t + \cos \omega_0 \Delta t \right) \quad \Bigg| \quad D = e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \Delta t \right)$$

$$A' = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi \omega \Delta t} \left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t \sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin \omega_0 \Delta t + \frac{1}{\Delta t} \cos \omega_0 \Delta t \right] \right\}$$

$$B' = \frac{1}{k \Delta t} \left[1 - e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 \Delta t + \cos \omega_0 \Delta t \right) \right]$$

$$C' = -e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 \Delta t \right) \quad \Bigg| \quad D' = e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\cos \omega_0 \Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 \Delta t \right)$$

اگر Δt_i ثابت فرض شود، ضرایب A تا D یکبار محاسبه می شود. در وقت روشن واسه به Δt

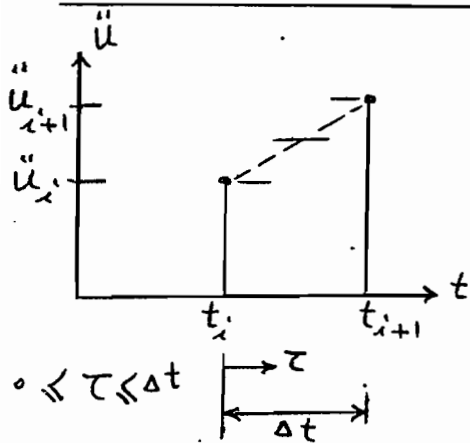
است که هر چه کوچکتر باشد، بهتر است. در حالت $\Delta t \ll \frac{T}{10}$ جوابها قابل قبول است.

مساله در حالت خطی صادق است. مثال: جزئیات صورت مساله و جدول پاسخ در ورق جداگانه

ب - روش‌ها عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تغییرات مختلف ستاب (گام به گام)

Numerical solution Based on Approximating Derivative

(Step-by-step numerical integration)



اساس روش‌ها؛ در یک گام زمانی، تغییرات ستاب در حالت‌های

مختلف فرض می‌شود (ثابت، متوسط یا خطی) و با انتگرال

گیری از رابطه ستاب، رابطه تغییرات حاصل می‌شود.

۱- روش عددی گام به گام با ستاب ثابت ابتدای گام

اعمال شرط اولیه در $\tau=0 \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i \tau + A$ (۱) $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ $\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i$

$\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i \tau + \dot{u}_i$ (۲)

$\tau = \Delta t \rightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \ddot{u}_i$ (۳)

$u(0) = u_i, \tau=0 \rightarrow u(\tau) = \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 + \dot{u}_i \tau + B$ (۲) \rightarrow انتگرال رابطه

$B = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2$ (۴)

$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i$ (۵)

برای بدست آوردن \ddot{u}_{i+1} و سرشکن کردن خطاها از رابطه اصلی تعادل کمک گرفته می‌شود:

$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = P_{i+1}$ (۶)

جای u_{i+1} از (۵) و جای \dot{u}_{i+1} از (۳) قرار می‌دهیم:

$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} \left\{ P_{i+1} - k u_i - (c + k \Delta t) \dot{u}_i - \left(c \Delta t + \frac{k \Delta t^2}{2} \right) \ddot{u}_i \right\}$

(۷)

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

۲- روش عددی گام به گام با شتاب متوسط

اعمال شرایط اولیه $\xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tau + A_1 \rightarrow \tau=0, \dot{u}(0) = \dot{u}_i$

$$\rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tau \rightarrow \tau = \Delta t \rightarrow$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \Delta \dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (1)$$

$$\dot{u}(\tau) \text{ انتگرال } \rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{1}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tau^2 + A_2$$

$$\tau=0 \rightarrow u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tau^2$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (2)$$

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (2\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (2\ddot{u}_i) + \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \ddot{u}_i$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) - 2\ddot{u}_i \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow \Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t)$$

$$(1) \rightarrow \Delta \dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) \Rightarrow$$

$$\Delta \dot{u}_i = \left(\frac{2}{\Delta t} \right) \Delta u_i - 2\dot{u}_i \quad (4)$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = P_{i+1}, \quad m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i$$

$$\Rightarrow m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + k\Delta u_i = \Delta P_i \quad (5)$$

در رابطه (5) بجای $\Delta \dot{u}_i$ و $\Delta \ddot{u}_i$ از روابط (3) و (4) استفاده می کنیم:

$$m \left[\frac{4}{\Delta t^2} \Delta u_i - \frac{4}{\Delta t^2} \dot{u}_i \Delta t - 2\ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{2}{\Delta t} \Delta u_i - 2\dot{u}_i \right] + k\Delta u_i = \Delta P_i$$

$$K_i^* \Delta u_i = \Delta P_i^* \quad (6) \quad K_i^* = k + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}$$

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left[\left(\frac{4m}{\Delta t} \right) + 2c \right] \dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i$$

بنابراین از رابطه (۶) مقدار Δu_i و در حقیقت u_{i+1} و سپس از رابطه (۴) و (۳) مقادیر $\Delta \dot{u}_i$ و $\Delta \ddot{u}_i$ که \dot{u}_{i+1} و \ddot{u}_{i+1} را ارائه می‌دهند، حاصل می‌شوند.

برای سرشتن کرده خطاها در هر گام می‌تواند \ddot{u}_{i+1} را از رابطه تعادل محاسبه نمود:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m} (P_i - c\dot{u}_i - Ku_i)$$

روش فوق را روش β NEWMARK'S گویند $(\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2})$

$$0 \leq \tau \leq \Delta t$$

۳- روش عددی گام به گام با استاب خطی

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t} \tau \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t} \frac{1}{2} \tau^2 + A_1$$

$$\text{اعمال شرایط اولیه} \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2$$

$$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + K \Delta u_i = \Delta P_i \quad (1)$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t} \Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u}_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u}_i \quad (2)$$

$$\dot{u}(\tau) \text{ انتگرال از } \rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t} \frac{\tau^3}{6} + A_2$$

$$u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t} \frac{\tau^3}{6}$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2} \Delta t^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t} \frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{6} \quad (3)$$

$$\text{از رابطه (۳)} \Rightarrow \Delta \ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta u_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \quad (4)$$

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t} \Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \quad (5) \quad \Leftarrow \text{در رابطه (۲) بجای } \Delta \ddot{u}_i \text{ از (۴) استفاده می‌کنیم}$$

در رابطه (۱) یعنی معادله جزئی حرکت بجای $\Delta \ddot{u}_i$ و $\Delta \dot{u}_i$ از معادله (۴) و (۵) قرار

می‌دهیم:

$$m \left[\frac{6}{\Delta t^2} \Delta u_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \right] + C \left[\frac{3}{\Delta t} \Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right] + K \Delta u_i = \Delta P_i \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{K} \Delta u_i = \Delta \tilde{P}_i \quad \text{④} \rightarrow \tilde{K} = K + \frac{6}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} C$$

$$\Delta \tilde{P}_i = \Delta P_i + m \left[\frac{6}{\Delta t} \dot{u}_i + 3\ddot{u}_i \right] + C \left[3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right]$$

به این روش، روش (Newmark's β) (با $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$) مطرح گردید.
 در هر گام می توان مقدار C و K آن لحظه را مقدار داد (برای رفتار غیر خطی).
 در این روش نیازی توان برآ سرشکل کردن خطاها، مقدار Δt را از معادله حرکت محاسبه نمود.
 مساله به Δt حاسن است (از نظر پایداری و دقت)؛

اشاره؛ پایداری روش های Newmark بصورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma-2\beta}} \leftarrow \text{میزبانیت در مبادت پیشرفته دینامیک سازه ها}$$

$$\frac{\Delta t}{T} < \infty \leftarrow \text{برای حالت کتاب متوسط } \gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$$

یعنی روش کتاب متوسط به ازای هر مقدار Δt ، پایدار است، البته در محل مقادیر منطقی در نظر گرفته می شود.

$$\frac{\Delta t}{T} \leq 0.551 \leftarrow \text{برای حالت کتاب خطی } \gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$$

یعنی پایداری روش مشروط است، البته در محل، معمولاً Δt کوچک فرض می شود و این شرط برقرار است. برای مثال در حالت زلزله، برای در نظر گرفتن تغییرات کتاب زلزله ثبت شده معمولاً Δt برابر 0.02 یا 0.01 در نظر گرفته می شود که با توجه به پیرورد طبیعی سازه ها، این Δt کمتر از $0.551 T$ خواهد بود.

$$\text{معمولاً } \Delta t \leq \frac{T}{10} \text{ مناسب است.}$$

خلاصه نتایج روش های عددی گام به گام

۱- روش ستاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} \left\{ P_{i+1} - k u_i - (c + k \Delta t) \dot{u}_i - \left(c \Delta t + \frac{k \Delta t^2}{2} \right) \ddot{u}_i \right\}$$

۲- روش ستاب متوسط

$$u_{i+1} = \frac{\left\{ P_{i+1} + m \left(\frac{4}{\Delta t^2} u_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i + \ddot{u}_i \right) + c \left(\frac{2}{\Delta t} u_i + \dot{u}_i \right) \right\}}{\left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k \right)}$$

$$\dot{u}_{i+1} = -\dot{u}_i + \frac{2}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i)$$

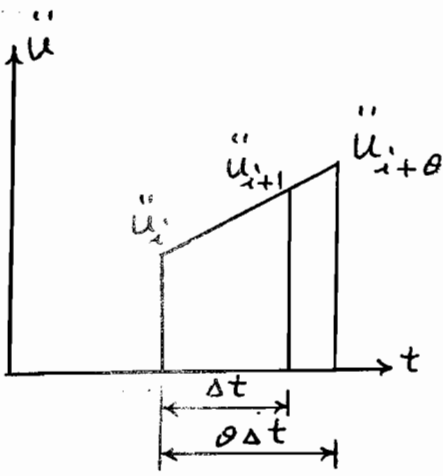
$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (u_{i+1} - u_i - \Delta t \dot{u}_i) - \ddot{u}_i$$

۳- روش ستاب خطی

$$\text{I } u_{i+1} = \frac{\left\{ P_{i+1} + m \left(\frac{6}{\Delta t^2} u_i + \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_i + 2 \ddot{u}_i \right) + c \left(\frac{3}{\Delta t} u_i + 2 \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right) \right\}}{\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k \right)}$$

$$\text{II } \dot{u}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) - 2 \dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i$$

$$\text{III } \ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2} (u_{i+1} - u_i - \Delta t \dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{u}_i)$$



اساس روش مشابه روش گام به گام شتاب خطی است
 با این تفاوت که E.L. WILSON فرض می کند شتاب در
 فاصله زمانی کمی بزرگتر از Δt ، خطی است $(\theta \Delta t)$.

این امر برای تعیین پایداری روش شتاب خطی است و مقدار θ معمولاً بین 1.4 تا 2 در
 نظر گرفته می شود، روابط اصلی این روش مشابه روابط I ، II و III از روش شتاب خطی است
 فقط بجای $i+1$ از $i+\theta$ و بجای Δt از $\theta \Delta t$ استفاده شده است .

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \left\{ u_{i+\theta} - u_i - \theta \Delta t \dot{u}_i - \frac{(\theta \Delta t)^2}{3} \ddot{u}_i \right\} \quad (a)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta \Delta t} (u_{i+\theta} - u_i) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_i \quad (b)$$

$$u_{i+\theta} = \left\{ P_{i+\theta} + m \left[\frac{6u_i}{(\theta \Delta t)^2} + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_i + 2\ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{3}{\theta \Delta t} u_i + \right. \right. \quad (c)$$

$$\left. \left. 2\dot{u}_i + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_i \right] \right\} / \left[\frac{6m}{(\theta \Delta t)^2} + \frac{3c}{\theta \Delta t} + k \right]$$

چون فرض شده که شتاب بطور خطی از زمان $i \Delta t$ تا $(i+\theta) \Delta t$ تغییر می کند ، بنابراین
 نیروی مؤثر هم فرض می شود که در این فاصله زمانی ، خطی تغییر می کند و $P_{i+\theta}$ بصورت :

$$P_{i+\theta} = P_i + \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} \right) \theta \Delta t = P_i (1-\theta) + P_{i+1} \theta \quad (d)$$

از رابطه (c) مقدار $u_{i+\theta}$ بدست آمده و آنرا در رابطه (a) قرار داده و $\ddot{u}_{i+\theta}$ محاسبه می شود ،

شتاب در گام زمانی معمولی Δt از رابطه زیر بدست می آید :

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} \quad (e)$$

④ مقدار u_{i+1}'' را در رابطه $u_{i+1}' = u_i' + \frac{\Delta t}{2} (u_i'' + u_{i+1}'')$

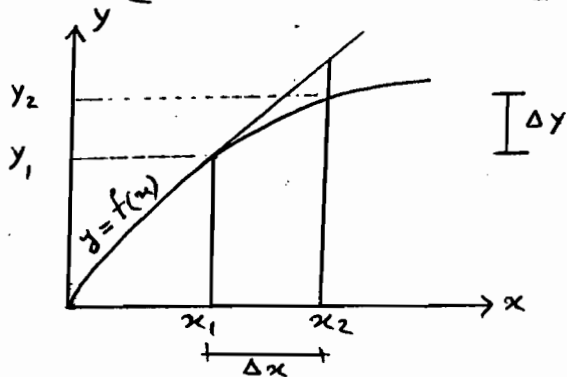
⑤ و منطبق در رابطه $u_{i+1} = u_i + \Delta t u_i' + \frac{\Delta t^2}{3} u_i'' + \frac{\Delta t^2}{6} u_{i+1}''$

از رابطه شتاب خطی مقدار داده و سرعت و تغییر مکان در لحظه t_{i+1} به دست می آید.

ج - روش عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تفاضل محدود سرعت و شتاب

CENTRAL DIFFERENCE METHOD (Finite Difference F.D.)

یکی از روش های حل دستگاه معادله دیفرانسیل آن است که به نحوی شتاب و سرعت را بر حسب تغییر مکان بیان نمود ، در این حالت مساله دینامیکی به صورت استاتیکی تبدیل می شود.



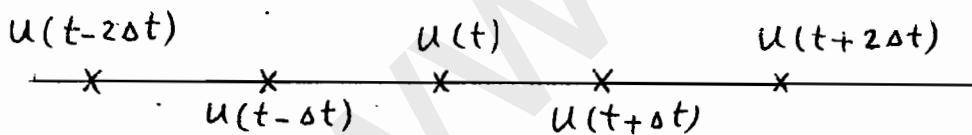
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{ریاضیات}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow{\text{در ریاضیات کاربرد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

$$u'(t) = \frac{du}{dt} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

شکل مشکل برای حل

شکل آسانه برای حل



$$\frac{du}{dt} \approx \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} \right)_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad \text{Forward F.D.} \quad \text{تفاضل محدود پیش رونده}$$

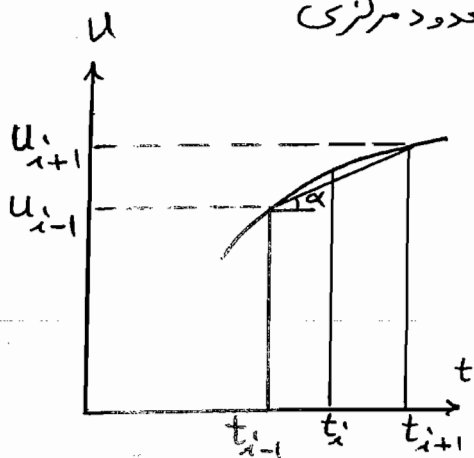
$$\frac{du}{dt} \approx \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} \right)_t = \frac{u(t) - u(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad \text{Backward F.D.} \quad \text{تفاضل محدود پس رونده}$$

$$\frac{du}{dt} \approx \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} \right)_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad \text{Central F.D.} \quad \text{تفاضل محدود مرکزی}$$

معمولاً در روش های عددی ، روش تفاضل محدود مرکزی از خطای کمتری نسبت به دو روش دیگر

برخوردار است .

فیزیات روش عددی تحلیل دینامیکی SDF از طریق تفاضل محدود مرکزی



باتوجه به اصول روش تفاضل محدود مرکزی:

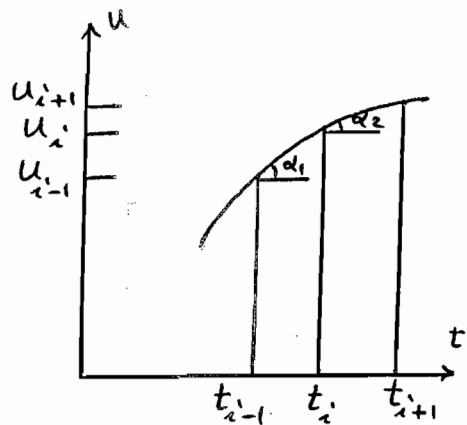
$$\alpha = \dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_{i-1}) + R \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

$$\frac{\text{تغییرت } \alpha \text{ (سرعت)}}{\text{زمان}} = \dot{\alpha} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\Delta t} = \ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + R \quad (2)$$



$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i \quad (3)$$

از نظاصرفنظر و از دو رابطه 1 و 2 در 3 قرار داده و \$u_{i+1}\$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right) u_{i+1} = P_i + \left(-k + \frac{2m}{\Delta t^2}\right) u_i + \left(\frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}\right) u_{i-1} \quad (4)$$

پس از تعیین \$u_{i+1}\$ از روابط 1 و 2 می‌تواند \$\dot{u}_i\$ و \$\ddot{u}_i\$ را تعیین کرد.

باتوجه به رابطه 4 و در شروع کار، نیاز به \$u_{-1}\$ و \$u_0\$ می‌باشد. روابط 1 و 2 برای

لحظه \$t=0\$ نوشته شده، بطور همزمان حل می‌شوند تا رابطه \$u_{-1}\$ حاصل شود:

$$u_{-1} = u_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_0 - \Delta t \dot{u}_0 \quad (5)$$

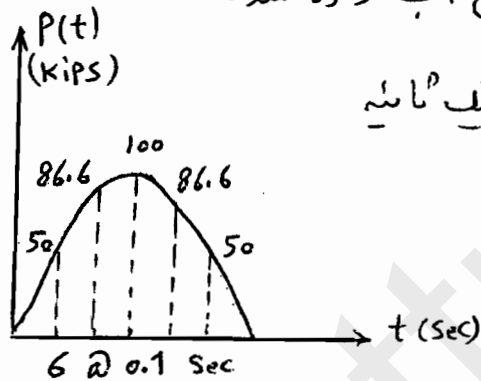
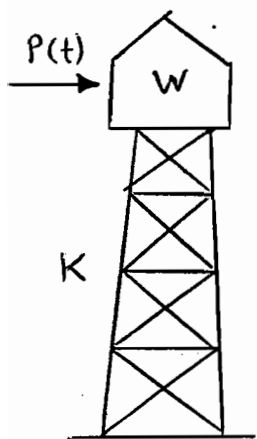
در یک مساله واقعی، دو پارامتر از سه پارامتر \$u_0\$، \$\dot{u}_0\$ و \$\ddot{u}_0\$ کافی است.

توجه: در تمام روش‌ها، یکی از سه رابطه اصلی بکار گرفته شده، رابطه حرکت در لحظه

\$t_{i+1}\$ بوده بجز روش تفاضل محدود مرکزی که معادله حرکت در لحظه \$t_i\$ بکار رفت.

روش‌هایی که معادله حرکت در لحظه $t=0$ را لازم دارند، روش‌ها ضعیف Implicit گویند.
 و روش‌هایی که معادله حرکت در لحظه t را لازم دارند، روش‌ها صریح explicit گویند.
 در تحلیل سیستم‌های چند درجه آزادی، عملیات محاسباتی بیشتری در روش ضعیف نسبت به روش
 صریح وجود خواهد داشت. در ضمن روش‌های صریح فقط بصورت مشروط پایدار خواهند بود
 در حالی که برخی روش‌های ضعیف بصورت غیر مشروط پایدار می‌باشند.

مثال - مطلوبیت تحلیل دینامیکی برج آب داده شده



تحت بار نصف سینوس مطابق شکل در یک ثانیه

با $\Delta t = 0.1$ sec ؟ $\xi = 10\%$

معادل $K = 100 \text{ kips/in}$

$W = 978.8 \text{ kips}$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{978.8}{386.4} = 2.533 \frac{\text{kips} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{2.533}} = 6.283 \text{ Rad/s}$$

برای مقایسه، از روش عددی، ستاب ثابت، متوسط، خطی، و سایر روش‌ها و تفاضل عددی

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.283} \approx 1 \text{ sec}$$

مرکزی استفاده می‌شود.

$$\Delta t = 0.1 = \frac{T}{10}$$

در فرمول‌ها مقدار C لازم است؛ $C = 2\xi\omega m = 3.183 \text{ kip} \cdot \text{s/in}$

$$u_0 = \dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$$

شرایط اولیه صفر است!

روابط اصلی u روش به شرح زیر بدست می‌آید:

الف - روش ستاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + 0.1 \dot{u}_i + 0.005 \ddot{u}_i \quad (a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.1 \ddot{u}_i \quad (b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{2.533} (P_{i+1} - 100u_i - 13.183\dot{u}_i - 0.8183\ddot{u}_i) \quad (c)$$

نتایج حاصل برای یک ماهه در جدول اول

ب - روش ستاب متوسط

$$1176.9 u_{i+1} = P_{i+1} + 11076.9 u_i + 104.5 \dot{u}_i + 2.533 \ddot{u}_i \quad (d)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 20(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i \quad (e)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 400(u_{i+1} - u_i) - 40\dot{u}_i - \ddot{u}_i \quad (f)$$

نتایج حاصل برای یک ماهه در جدول دوم

ج - روش ستاب خطی

$$1715.3 u_{i+1} = P_{i+1} + 1615.3 u_i + 158.35 \dot{u}_i + 5.225 \ddot{u}_i \quad (g)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 30(u_{i+1} - u_i) - 2\dot{u}_i - 0.05 \ddot{u}_i \quad (h)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 600(u_{i+1} - u_i) - 60\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i \quad (i)$$

نتایج حاصل برای یک ماهه در جدول سوم

→ روش WILSON-θ $\theta = 1.5$ فرض می‌کنیم

از روابط روشی که با حروف لایس در جزئیات آله برد استفاده می‌شود،

متغیر m ، c ، k ، Δt ، θ را در رابطه (c) قرار می‌دهیم.

$$839.13 u_{i+\theta} = P_{i+\theta} + 739.13 u_i + 107.69 \dot{u}_i + 5.305 \ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+\theta} = 266.7(u_{i+\theta} - u_i) - 40\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i \quad \text{د محاسبه می شود.}$$

↑ رابطه (a)

$$\ddot{u}_{i+1} = 0.6667 \ddot{u}_{i+\theta} + 0.3333 \ddot{u}_i \quad \leftarrow \text{رابطه (e)}$$

در نهایت رابطه اخیر را در معادلات (f) و (g) قرار داده:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.05 (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.1 \dot{u}_i + 0.00333 \ddot{u}_i + 0.00167 \ddot{u}_{i+1}$$

نتایج مراحل گام به گام در یک تابلو در جدول چهارم

ه - روش تفاضل محدود مرکزی

تعداد m ، c ، k و Δt را در رابطه (e) قرار داده خواهیم داشت:

$$269.21 u_{i+1} = P_i + 406.6 u_i - 237.39 u_{i-1}$$

$$\dot{u}_i = 5(u_{i+1} - u_{i-1}) \quad \text{رابطه (1) و (2)}$$

$$\ddot{u}_i = 100(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

برای شروع از رابطه (5) مقدار u_i محاسبه می شود، چون در مساله u_i ، \dot{u}_i و \ddot{u}_i

صفر است پس u_i هم صفر است.

نتایج مراحل گام به گام در یک تابلو در جدول پنجم

گروه شود در جداول بجای i از n استفاده شده است.

روابط مربوط به محاسبه نتایج دقیق تحت اثر بار نصف Sin :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{2\pi}{2 \times 0.6} = \frac{\pi}{0.6} = 5.236 \text{ Rad/s}$$

$$P_0 = 100 \text{ Kips} \quad P(t) = P_0 \sin \Omega t = 100 \sin(5.236t)$$

$$\omega = 6.283 \rightarrow \beta = \frac{\Omega}{\omega} = 0.833$$

برای $t > 0.6$ (ارتعاش آزاد) باید شرایط اولیه آن در $t = 0.6$ برآورد شود.

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 6.283 \sqrt{1 - 0.1^2} = 6.2515 \text{ Rad/s}$$

پاسخ سازه برای حالت بارگذاری (میرایی)

$$u(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left\{ (1 - \beta^2) \sin \Omega t - 2\xi\beta \cos \Omega t \right\} +$$

$$\frac{P_0}{K} \frac{e^{-\xi\omega t}}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left\{ 2\xi\beta \cos \omega_D t + \frac{\Omega}{\omega_D} \left(1 + \beta^2 - 2\frac{\omega_D^2}{\omega^2} \right) \sin \omega_D t \right\}$$

در رابطه $t = 0.6$ قرار داده و $u(t = 0.6)$ تعیین می شود.

از مودل $u(t)$ مشتق گرفته و در لحظه $t = 0.6$ سرعت $\dot{u}(t = 0.6)$ به دست می آید.

رابطه ارتعاش آزاد بصورت زیر است :

$$u(t) = e^{-\xi\omega(t-0.6)} \left\{ \frac{\dot{u}(0.6) + u(0.6)\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D(t-0.6) + u(0.6) \cos \omega_D(t-0.6) \right\}$$

'نتایج' متناوب متقطع و خطی خوب است و لن شتاب ثابت خوب است.

برای شتاب ثابت باید از Δt خیلی کوچکی استفاده شود.

Stability & Computational Error of Numerical Procedures

* یایداری روش عددی یعنی الگوریتم روش طوری باشد که با تغییر کوچک در گام زمانی Δt جوابهای مساله زیاد تغییر نکنند (در روش‌های ناپایدار به ازای برخی Δt ، جوابها استیاب و ضللی دور از جواب واقعی خواهد بود).

* با بررسی معیار خطا بر حسب Δt های مختلف برای یک روش عددی، می‌توان شرط یایداری را تعیین نمود (روش‌های پایدار غیر مشروط - روش‌های ناپایدار مشروط).

روش عددی کتاب متوسط پایدار غیر مشروط - کتاب خطی و تفاضل محدود مرکزی پایدار مشروط

* در سیستم‌های معادل یکدگر به آزادی، مساله یایداری روش عددی معمولاً مطرح نیست چون Δt بطور محسوسی کوچکتر از حد یایداری خواهد بود (به دلیل T کوچک این سیستم‌ها).

در سیستم‌های چنددگر به آزادی به دلیل نقشی پررودهای مودهای بالاتر، مناسب و لازم است از روش‌های غیر مشروط استفاده کنیم.

خطاهای محاسباتی از چند طریق وارد روش عددی می‌شود:

الف - Round-off error ناشی از گرد کردن اعداد تولید شده بوسیله ماشین برای

$$\frac{1}{5} = 0.2 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} = 0.3333\dots$$

ب - Propagated error خطای کسب‌شدگی تولید شده در اثر جاگزینی معادله دیفرانسیل

بوسیله تفاضل محدود معادل

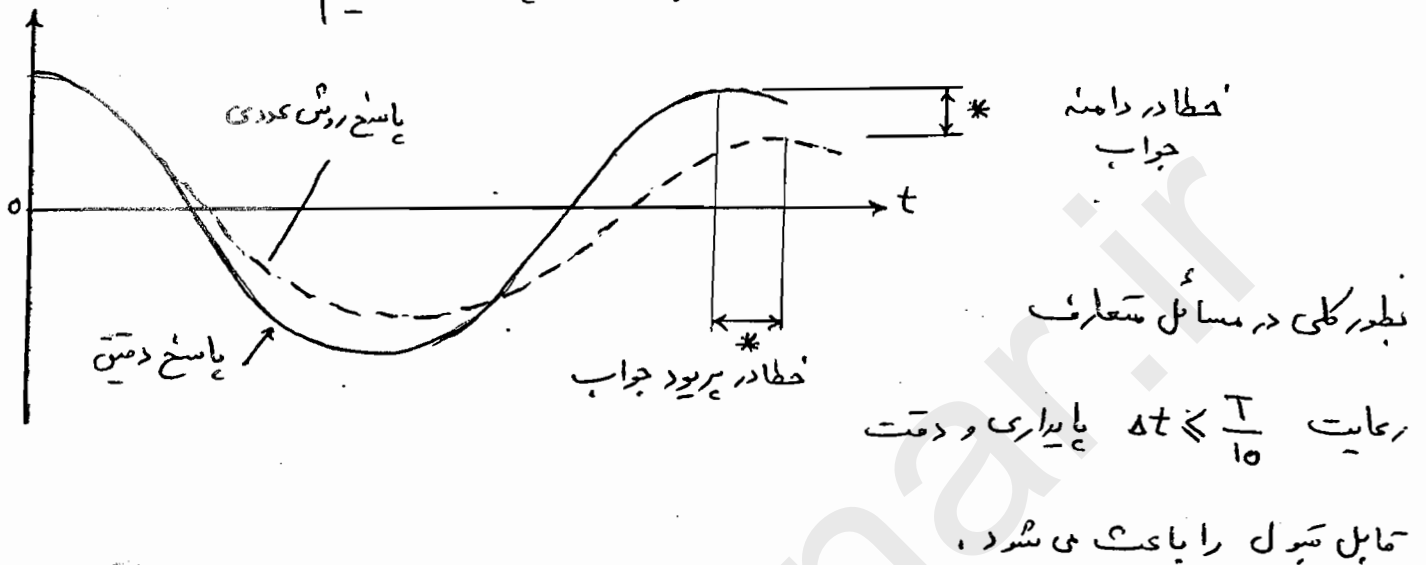
ج - Truncation error تولید شده در اثر بیان u_{i+1} یا u_{i+1} توسط تعداد

محدود عبارت در بسط سری تیلور

$$u_{i+1} = \sum_{l=i-k}^i A_l u_l + \sum_{l=i-k}^{i+1} B_l \dot{u}_l + \sum_{l=i-k}^{i+1} C_l \ddot{u}_l + R \quad \text{فقط}$$

A_l ، B_l و C_l ضرایب ثابت که بر مبنای صفر می‌شوند. در روش‌های عددی با توجه به الگوریتم

روش، فقط برخی عبارات از سری کلی یا لا وجود دارد، پس خطا خواهیم داشت.



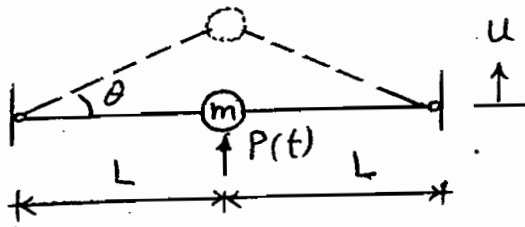
تحلیل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی / Analysis of Nonlinear Response

از دو طریق رفتار سیستم‌ها از حالت خطی به غیرخطی تبدیل می‌شود: هندسی و فیزیکی. تغییر مکان‌های بزرگ (غیرخطی هندسی) و عدم پیروی اجزاء و مصالح از قانون هریک (غیرخطی فیزیکی).

اساس روش‌های تحلیل دینامیکی، صادق بودن قانون جمع آثار قوا بوده است که در رفتار خطی مصداق دارد و در حال حاضر تنها روش تحلیل دینامیکی برای سیستم‌های غیرخطی، روش‌های عددی می‌باشد.

دلایل دیگری برای بکارگیری روش‌های عددی وجود دارد: اندرکنش خاک-سازه-آب که تحلیل در میدان مرکب را ضروری می‌سازد، ضربه‌های حلی ناکهانی (انفجار) که باعث تحریک مودهای بالایی شود و روش مناسب، روش عددی است.

مثال - سیستم ساده جرم که توسط دو کابل کشیده نگهداشته شده است، معادله حرکت ؟

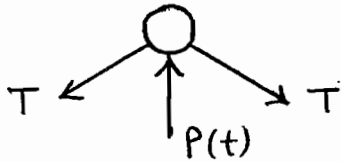


T_0 : کشش اولیه در حالت بدون تغییر طول کابل

اجزای سازه از قانون هوک پیروی می کنند: $\sigma = \epsilon E$

تغییر طول کابل $\delta = \sqrt{L^2 + u^2} - L$

$\epsilon = \frac{\delta}{L}$ و $\sigma = \frac{T}{A} \Rightarrow T = \frac{EA}{L} \delta$



$\sum F = m\ddot{u} \rightarrow P(t) - 2T \sin \theta = m\ddot{u}$

$\sin \theta = \frac{u}{\sqrt{L^2 + u^2}} \Rightarrow m\ddot{u} + 2 \left\{ T_0 + \frac{EA}{L} [(L^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} - L] \right\} \frac{u}{\sqrt{L^2 + u^2}} = P(t)$

رابطه غیر خطی هندسی رفتار جرم m

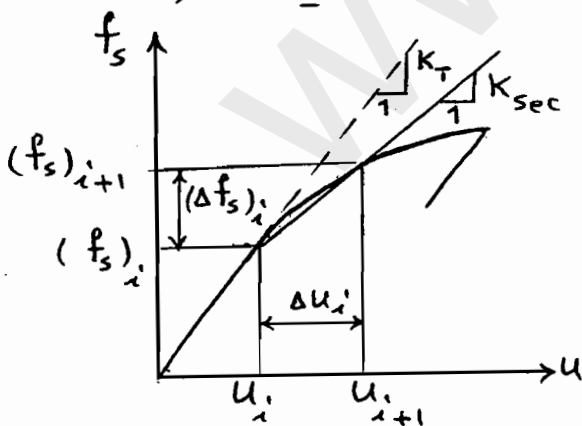
رابطه خطی $u \ll L \rightarrow m\ddot{u} + 2T_0 \frac{u}{L} = P(t)$

رفتار غیر خطی منبسطی از متغیر بودن جرم، میرایی و سختی وارد مساله می شود. معمولاً جرم

بازمانده تغییر نمی کند و با توجه به عدم قطعیت در تعیین دقیق میرایی، خطی در نظر راستی

آن در راز واقعیت نخواهد بود. بنابراین منساز اصلی رفتار غیر خطی در سیستم های متعارف

همانا عدم پیروی از قانون هوک در اجزاء و مصالح سازه خواهد بود. این رفتار توسط



بیانی علم تئوری پلاستیسیتی تعیین می شود:

در فاصله زمانی i و $i+1$ معادله جزئی حاکم:

$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta P_i$ (1)

$(\Delta f_s)_i = (K_i)_{sec} \Delta u_i$ (2)

(مغنی رفتاری سازه)

سختی سکانت Secant stiffness در فاصله گام زمانی به دلیل اینکه u_{i+1} مشخص نمی باشد

نمی تواند بکار رود چون معلوم نیست. اگر فاصله زمانی Δt کوچک باشد، می توان از سختی مماسی K_T

استفاده کرد: $(\Delta f_s)_i \approx (K_i)_T \Delta u_i$ (3)

بنابراین در الگوریتم روش‌های عددی قبلی تغییر کلی رخ نمی‌دهد بلکه فقط مقدار k در هر گام ثابت نبوده و مقدار آن برابر K_T (سختی ماسی ابتدای گام) خواهد بود.

برای نمونه کلیات روش نیومارک (ستاب خطی) در این حالت بیان می‌شود:

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t^3}{6} \Delta \ddot{u} \quad (4)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u \quad \text{و} \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}$$

$$\Delta \ddot{u} = \frac{6}{(\Delta t)^2} (\Delta u - \Delta t \dot{u}_i - \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i) \quad (5)$$

$$\Delta \dot{u} = \Delta t \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u} \quad (6)$$

که $\Delta \dot{u} = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i$ با بکارگیری (5) در (6):

$$\Delta \dot{u} = \frac{3}{\Delta t} \Delta u - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \quad (7)$$

حال اگر (3)، (5) و (7) را در (1) قرار دهیم:

$$\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T \right) \Delta u = \Delta P + m \left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i \right) + c \left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right)$$

$$\frac{1}{\Delta t} K_T^* \Delta u = \Delta P^* \quad (8)$$

$$\begin{cases} K_T^* = \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T \\ \Delta P^* = \Delta P + m \left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i \right) + c \left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right) \end{cases} \quad \text{که}$$

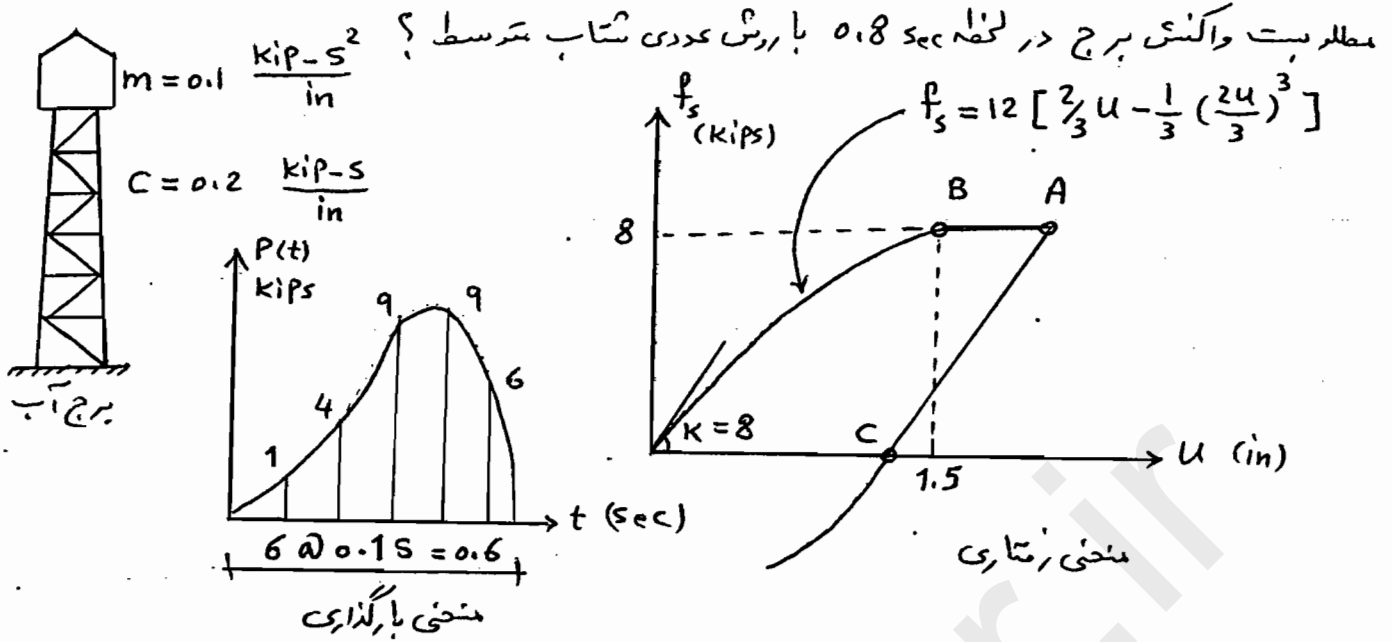
پس از تعیین Δu از رابطه (8)، مقدار \dot{u}_{i+1} را در (6) قرار داده و $\Delta \dot{u}$ محاسبه می‌شود.

و بنابراین با دانسته Δu و $\Delta \dot{u}$ می‌توان u_{i+1} و \dot{u}_{i+1} را تعیین نمود.

مقدار ستاب می‌تواند از رابطه (5) یا برای سرشکل کردن فضای سختی ماسی از رابطه تعادل

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} \left\{ P_{i+1} - f_s(t+\Delta t) - c\dot{u}_{i+1} \right\} \quad (9)$$

مثال - برج آب با جرم m و میرایی c تحت تغییر مکرری گیرد، منحنی زمانی $f_s - u$ داده شده است.



حل!

از الگوریتم روش شتاب متوسط:

$$\Delta \ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta u - \Delta t \dot{u}_1 - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1)$$

$$\Delta \dot{u} = \frac{2}{\Delta t} \Delta u - 2\dot{u}_1 = 20 \Delta u - 2\dot{u}_1 \quad \text{و} \quad K^* \Delta u = \Delta P^*$$

$$K^* = \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T \right) = 44 + K_T$$

$$\Delta P^* = \Delta P + m \left(\frac{4\dot{u}_1}{\Delta t} + 2\ddot{u}_1 \right) + 2c\dot{u}_1 = \Delta P + 4.4\dot{u}_1 + 0.2\ddot{u}_1$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 0.702 \text{ sec} \quad , \quad \Delta t = 0.1 \approx \frac{1}{7} T$$

جدول مربوط تکمیل می شود، به نکات زیر توجه شود!

* برای $u > 1.5$ in، نیروی f_s برابر 8 kips می باشد.

* در فاصله زمانی 0.4 به 0.5 تغییر مکان از 1.1128 به 1.7093 می رسد (بزرگتر از 1.5) و f_s از رابطه خود به مقدار ثابت 8 تغییر کند ولی چون Δt بزرگ است، محل زمان دقیق این تغییر مشخص.

* در فاصله زمانی 0.5 به 0.6، سرعت تغییر علامت داده، یعنی صفر شده سپس تغییر علامت، بنابراین منحنی از صفر باید به 8 تبدیل شود (پس از نقطه A منحنی رو به پایین است) ولی محل دقیق مشخص نیست.

* در گام های بعد از 0.6، K_T به 8 تغییر می کند و نیروی فنر در بخش تنزل منحنی رفتار مکرر دارد، مثلاً

$$f_s = 8 + 8 \Delta u = 8 - 8 \times 0.3459 = 5.2328 \text{ kips} \quad ; \quad 0.7 \text{ ثانیه}$$

* جدول حل مثال در صفحه ۶۲ بالای صفحه چیدمان

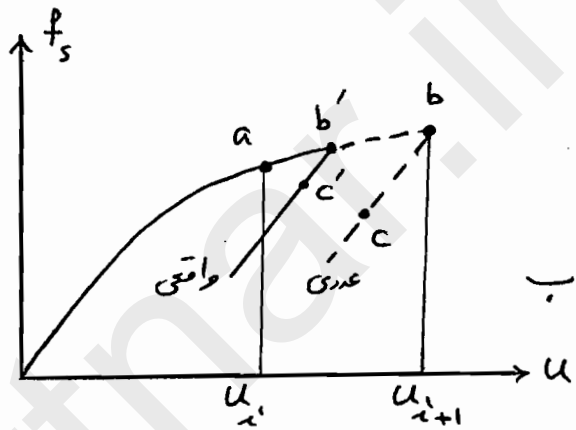
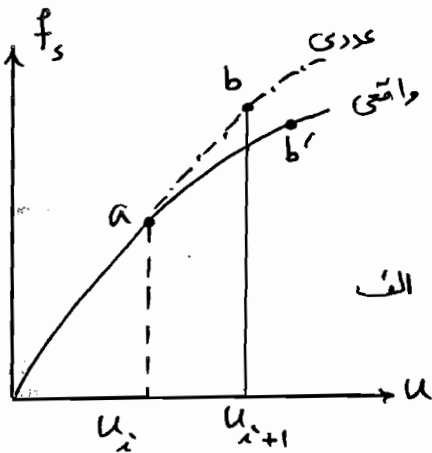
خطا در تحلیل غیرخطی دینامیکی سیستم‌ها

علاوه بر خطاهای رایج روش‌های عددی، خطاهای دیگری که مختص حالت غیرخطی

است، بوجود می‌آیند (در بکارگیری سطحی از رابطه و منحنی نیرو-تغییر مکان) :

الف - خطای ناشی از استفاده سطحی مماسی ابتدای گام به جای سطحی واقعی

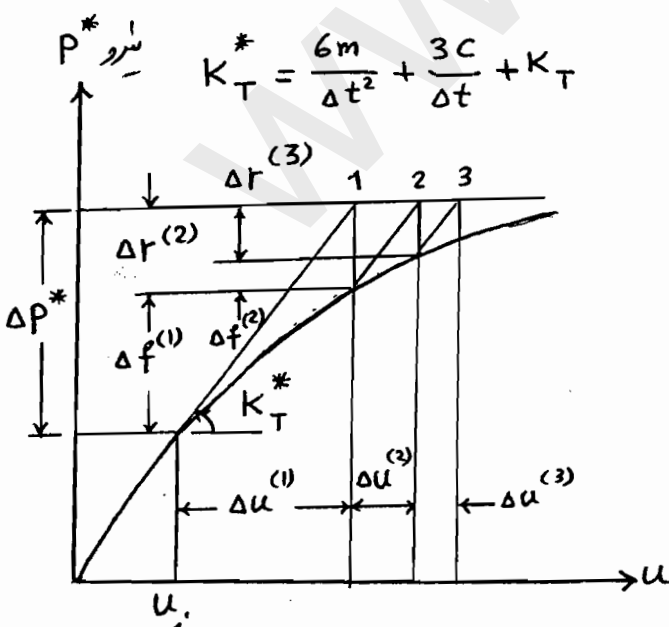
ب - تأخیر در آشکار سازی گذرای رابطه نیرو-تغییر مکان



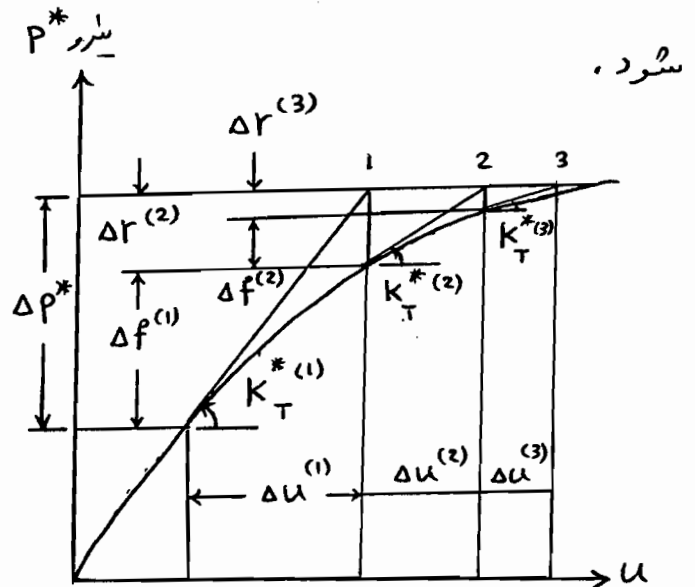
برای کاهش اثر خطاهای حالت ب می‌توان در محل‌های تغییر جهت منحنی، از Δt

کوچکتر استفاده شود که معمولاً از $\frac{\Delta t}{4}$ استفاده می‌شود (کنترل و اعمال توسط کامپیوتر).

خطای ناشی از بکارگیری سطحی مماسی با بکارگیری روش تکراری در هر گام، می‌تواند حداقل



(tangent stiffness)



(current tangent stiffness)

Modified NEWTON-RAPHSON ITERATION | Original N.-R. method

با توجه به شکل $f_s - u$ برای خطای مورد نظر و جهت دسترسی به نقطه u^* و معنی از طریق نقطه u^* ، روش تکراری Iteration در یک گام بکاری رود (به شرح زیر) :

$$K_T^* \Delta u^{(1)} = \Delta P^* \quad (8) \quad \text{رابطه ۸ روش نیوماک ستاب خطی}$$

در حالت غیرخطی که سختی فنر با افزایش تغییر مکان ، کاهش می یابد ، نیروی فنر معادل ناشی از تغییر مکان $\Delta u^{(1)}$ کمتر از مقداری است که رابطه (۸) ارائه می دهد ، بعنوان نتیجه ، یک نیروی اضافی باقی می ماند که در شکل ملاحظه می شود و آنرا با $\Delta r^{(2)}$ نشان داده ایم . تغییر مکان اضافی در اثر این نیروی باقی مانده بصورت زیر

$$K_T^* \Delta u^{(2)} = \Delta r^{(2)} = \Delta P^* - \Delta f^{(1)} \quad (9) \quad \text{است :}$$

از این تغییر مکان اضافی ، نیروی باقی مانده جدید پیدا شده و مساله به همین ترتیب ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود . مراحل تکرار در یک گام زمانی به شرح زیر است :

$$K_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)}$$

$$u_{i+1}^{(k)} = u_{i+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)} \quad (10)$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{(k-1)} + \frac{6m}{\Delta t^2} \Delta u^{(k)} + \frac{3c}{\Delta t} \Delta u^{(k)} \quad k=1, \hat{k}$$

$$\Delta r^{(k+1)} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

از رابطه (۸) مشخص است که مرحله تکرار با $\Delta r^{(1)} = \Delta P^*$ شروع می شود .

وقتی مراحل تکرار ، همگرا شد یعنی $\Delta r^{(k)}$ یا $\Delta u^{(k)}$ به اندازه کافی کوچک شد ،

تغییر مکان کل نحوی از رابطه $\Delta u = \sum_{k=1}^{\hat{k}} \Delta u^{(k)}$ حاصل می شود .

نرخ همگرایی می تواند بهتر شود چنانچه بجای سختی مماسی اولیه از جریانه مماسی سختی استفاده شود که البته برآورد سختی مماسی جدید مستلزم محاسبات بیشتر است .

مثال - برج آب مثال قبل مورد نظر است تحت اثر هاله پارگناری، منحنی این بار در منحنی رفتار غیرخطی از روش تکراری استفاده شود. تست انتقال A نیز با دقت بیشتری بررسی شود. روش عددی شتاب متوسط بکار می رود با $\Delta t = 0.1$ که در مرحله تغییر فاز از Δt کوچکتر استفاده خواهد شد.

$$K_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)}, \quad u_{i+1}^{(k)} = u_{i+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{(k-1)} + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(k)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(k)}$$

$$K_T^* = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T = 44 + K_T \quad \Delta r^{(k+1)} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

$$\Delta P^* = \Delta P + m \left(\frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i + 2\ddot{u}_i \right) + 2c\dot{u}_i = \Delta P + 4.4\dot{u}_i + 0.2\ddot{u}_i \quad \text{و}$$

نتایج 0.8 ثانیه و مراحل تکرار در قسمت غیرخطی در جدول ارائه شده است.

برای نمونه مراحل مربوط به فاصله زمانی 0.3 تا 0.4 به شرح زیر خواهد بود:

$$\Delta u^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta r^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta P^* = \frac{31.3839}{51.0968} = 0.6142$$

سی:

$$u^{(1)}(0.4) = u^{(1)}(0.3) + 0.6142 = 1.1182$$

$$\Delta f^{(1)} = f_s^{(1)}(1.1182) - f_s^{(1)}(0.5040) + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(1)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(1)}$$

$$= 7.2885 - 3.8803 + 44 \times 0.6142 = 30.4330$$

$$\Delta r^{(2)} = 31.3839 - 30.4330 = 0.9509$$

$$\Delta u^{(2)} = \frac{0.9509}{51.0968} = 0.0186 \rightarrow u^{(2)}(0.4) = 1.1182 + 0.0186 = 1.1368$$

$$\Delta f^{(2)} = f_s^{(2)}(1.1368) - f_s^{(2)}(1.1182) + 44 \times 0.0186$$

$$= 7.3532 - 7.2885 + 44 \times 0.0186 = 0.8831$$

$$\Delta r^{(3)} = \Delta r^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 0.9509 - 0.8831 = 0.0678$$

$$\Delta u^{(3)} = \frac{0.0678}{51.0968} = 0.0013 \rightarrow \text{و ادامه ...}$$

* بی 0.6 و 0.7 ثانیه ، سرعت از مثبت به منفی تبدیل می شود . بوسیله عملیات

تکراری ، زمان $t = 0$ برابر 0.60339 ثانیه است ، بعد از این لحظه ، سختی به

8 kips/in برمی گردد .

محاسبات بی 0.6 و 0.60339 با $\Delta t = 0.00339$ انجام شده است ،

بطور مشابه محاسبات بی 0.60339 و 0.7 ثانیه با $\Delta t = 0.09661$ انجام گردید ،

بعد از لحظه $t = 0.60339$ ، نیروی فنر f_s در قسمت منفی به طرف پایین افتد .

نیروی فنر به $8 \Delta u$ کاهش می یابد (در هر گام زمانی) ،

با مقایسه نتایج دو جدول در دو مثال اخیر ، ملاحظه می شود اگر در فاصله زمانی که

تغییر مکان و نیرو در منفی رفتار غیر خطی است ، از روش تکراری استفاده نشود ،

در اصلاح نتایج و ملحوظ داشته ماله غیر خطی در محاسبات ، اشتباه قابل توجهی

خواهد داشت ،

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده

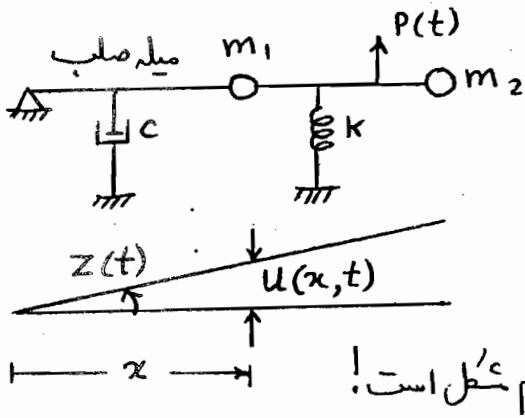
Dynamic Analysis of Generalized SDF systems

سیستم های پیچیده تر از حالت های یک درجه آزادی که مشابه حالت SDF تحلیل می شوند ،

اگر سیستم از اجزای صلب سرهم بندی شده تشکیل شده باشد و فقط در یک حالت تغییر شکل بدهد

بطور دقیق و اگر سیستم با جرم گسترده و انعطاف پذیر باشد ، بطور تقریبی تحلیل خواهد شد ،

در حالت تقریبی (انعطاف پذیر) دقت فرکانس زاویه ای بستگی به شکل ارتعاشی مفروض خواهد داشت.

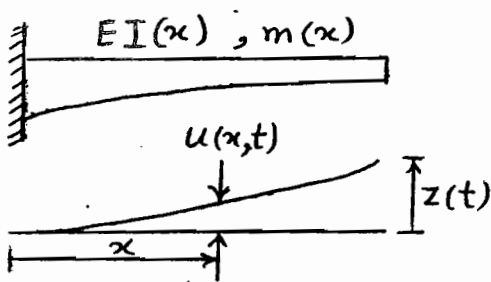


سیستم روبرو: صلب $\leftarrow u(x,t) = \psi(x)Z(t)$

مختصات شاخص SDF: می تواند پرفش $Z(t)$ باشد

تابع تغییر شکل، چوله میله صلب $\psi(x) = x$

چوله دو جرم متمرکز وجود دارد \leftarrow سیستم معادل SDF یک جرم شکل است!



سیستم روبرو: جرم و سختی گسترده متغیر (انعطاف پذیر)

دارای بینهایت درجه آزادی - فرکانس اصلی (اول)

در ارتعاش بسیار مهم - بطور تقریبی می توان تابع تغییر

شکل حالت ارتعاش اصلی (مود اول) را (فقط) در نظر گرفت $\psi(x)$ و در این حالت یک

مختصات شاخص را انتخاب نمود $Z(t)$ ، مثلاً انتهای سیر طره.

هر دو سیستم حالت تعمیم داده شده دارند چون تغییر مکان هر نقطه با رابطه $u(x,t) = \psi(x)Z(t)$

$$m^* \ddot{z} + c^* \dot{z} + k^* z = P^*(t)$$

مشخص می شوند.

جرم، میرایی، سختی و نیروی تعمیم داده شده (علامت ستاره). حل معادله از روش ها

متعارف امکان پذیر است. مرحله اصلی تحلیل سیستم جدید تعمیم داده شده، هانا از زبانی

مختصات تعمیم داده شده می باشد.

حالت الف - سیستم های صلب سرهم بندی شده

در این نوع سیستم، اجزای صلب همراه جرم گسترده و جرم متمرکز و سختی و میرایی متمرکز وجود دارند که تحت اثر نیروی دینامیکی قرار می گیرند، برای تکمیل معادله حرکت، روش مانده دوم نیوتن مشکل بوده و بهتر است از روش دالامبر استفاده شود (نیروها اینرسی در پیکره آزاد سیستم لحاظ شوند).

نیروی اینرسی گسترده برای یک جسم صلب با جرم گسترده با دمولفه جابجایی (بیاض) می‌شود؛
نیروی اینرسی منتجه کل جرم در مرکز ثقل و ماله اینرسی جسم.

سوال - در سیستم سرهم بندی شده زیر مطلوبست تعیین ۱- معادله حرکت ۲- فرکانس طبیعی

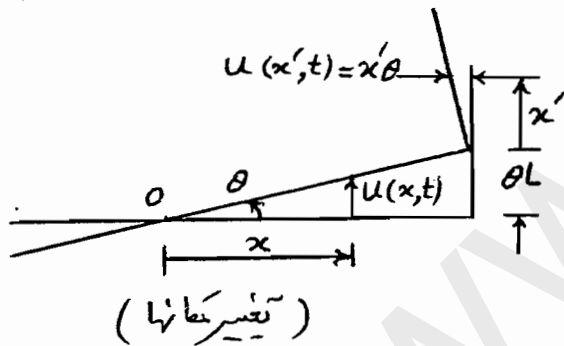
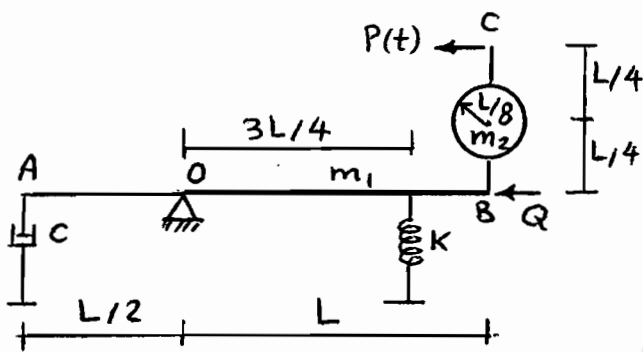
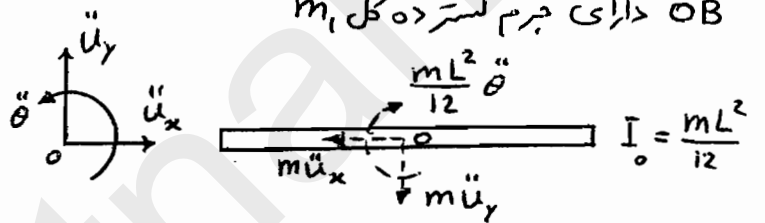
۳- درصد میرایی ۴- پاسخ سیستم بدون میرایی تحت اثر ناگهانی نیروی P_0 ۵- اصلاح معادله

حرکت وقتی نیروی افقی Q در میله افقی اثر می‌کند ۶- نیروی بحرانی (Q_{crit}) . تغییر مکانها کوچک

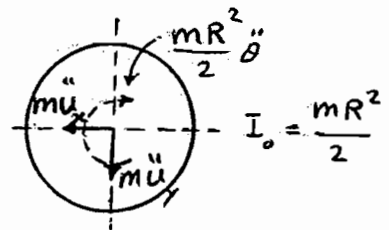
و مختصات شاخص، چرخشی حول نقطه O در نظر است.

حل: سیستم صلب - OA و BC بدون جرم -

OB دارای جرم گسترده کل m_1



$$u(x,t) = x \theta(t)$$



باتوجه به نیروها، نسبت به نقطه O نگرین کنیم؛

$$I_1 \ddot{\theta} + (m_1 \frac{L}{2} \ddot{\theta}) \frac{L}{2} + I_2 \ddot{\theta} +$$

$$(m_2 L \ddot{\theta}) L + (m_2 \frac{L}{4} \ddot{\theta}) \frac{L}{4} +$$

$$(c \frac{L}{2} \dot{\theta}) \frac{L}{2} + (k \frac{3L}{4} \theta) \frac{3L}{4} = P(t) \frac{L}{2}$$

$$I_1 = m_1 L^2 / 12, \quad I_2 = m_2 (L/8)^2 / 2 = m_2 L^2 / 128$$

$$\left(\frac{m_1 L^2}{3} + \frac{137}{128} m_2 L^2 \right) \ddot{\theta} + \frac{c L^2}{4} \dot{\theta} + \frac{9 K L^2}{16} \theta = P(t) \frac{L}{2}$$

$$m^* \ddot{\theta} + c^* \dot{\theta} + K^* \theta = P^*(t) \quad \leftarrow \text{معادله حرکت}$$

$$m^* = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2 \right) L^2, \quad C^* = \frac{cL^2}{4}, \quad K^* = \frac{9KL^2}{16}, \quad P^*(t) = P(t) \frac{L}{2}$$

$$\omega^* = \sqrt{K^*/m^*}, \quad \xi = \frac{C^*}{C_{cr}} = \frac{C^*}{2m^*\omega^*} = \frac{C^*}{2\sqrt{K^*m^*}}$$

$$P^*(t) = \frac{P(t)L}{2} = \frac{P_0 L}{2} \equiv P_0^* \quad \text{از حل معادله حرکت!}$$

$$\theta(t) = \frac{P_0^*}{K^*} (1 - \cos \omega t) = \frac{8P_0}{9KL} (1 - \cos \omega t)$$

$$u(x, t) = x \theta(t), \quad u(x', t) = x' \theta(t)$$

اگر نیروی افقی Q باشد! در نگرینی: $QL\theta$

$$m^* \ddot{\theta} + C^* \dot{\theta} + (K^* - QL)\theta = P^*(t)$$

$$K^* - QL = 0 \quad \text{نیروی افقی فشاری، سختی را کاهش می دهد.}$$

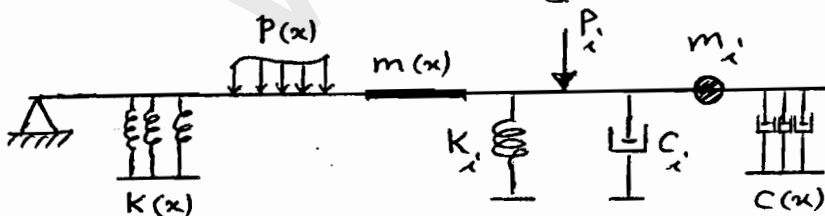
$$Q_{cr} = \frac{K^*}{L} = \frac{9KL}{16}$$

حالت ب سیستم های انعطاف پذیر

سیستم با سنجایت درجه آزادی با سختی و جرم گسترده در حالت مرتعش (غیر صلب)

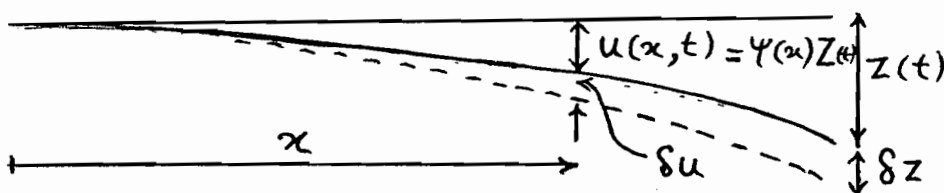
دقت مساله بستگی به تابع شکل $\psi(x)$ دارد $u(x, t) = \psi(x) Z(t)$

که تابع حدهی شرایط مرزی (هندسی) و شرایط میزبانی مساله را ارضاء می نماید.



حالت کلی!

کاربرد اصل کار مجازی!



کارشروهها برابر صفر

نیروی فنر گسترده

$$W_s = - \int k(x) u(x,t) dx \cdot \delta u - \sum_i k_i u_i \cdot \delta u_i$$

کار مجازی الاستیک

$$\begin{cases} u(x,t) = \psi(x) z(t) \rightarrow \delta u = \psi(x) \delta z \\ u_i = \psi_i z(t) \rightarrow \delta u_i = \psi_i \delta z \end{cases}$$

$$W_s = - \left\{ \int k(x) \psi^2(x) dx + \sum_i k_i \psi_i^2 \right\} z \delta z$$

نیروی میرایی

$$W_D = - \int c(x) \dot{u}(x,t) dx \cdot \delta u - \sum_i c_i \dot{u}_i \cdot \delta u_i$$

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) = \psi(x) \dot{z}(t) \rightarrow \delta u = \psi(x) \delta z \\ \dot{u}_i = \psi_i \dot{z}(t) \rightarrow \delta u_i = \psi_i \delta z \end{cases}$$

$$W_D = - \left\{ \int c(x) \psi^2(x) dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \right\} \dot{z} \delta z$$

به همین ترتیب؟ کار مجازی نیروی اینرسی!

$$W_I = - \left\{ \int m(x) \psi^2(x) dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \right\} \ddot{z} \delta z$$

$$W_p = \int p(x) dx \cdot \delta u + \sum_i p_i \delta u_i$$

کار مجازی نیروهای خارجی!

$$W_p = \left\{ \int p(x) \psi(x) dx + \sum_i p_i \psi_i \right\} \delta z$$

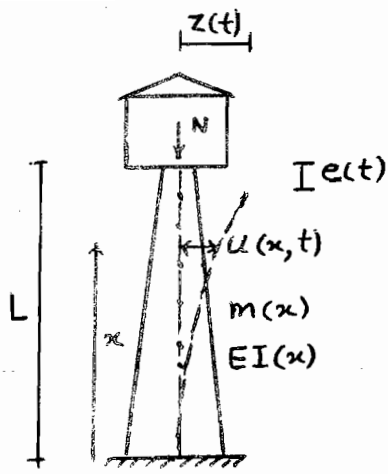
با توجه به جهت نیروها و جهت تغییر مکان مجازی و علامت کارها، خواهیم داشت: $\delta z \neq 0$

$$m^* \ddot{z} + c^* \dot{z} + k^* z = P^*(t) \quad ; \quad \text{معادله حرکت سیستم معادل SDF}$$

$$m^* = \int m(x) \psi^2(x) dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \quad \left| \quad k^* = \int k(x) \psi^2(x) dx + \sum_i k_i \psi_i^2 \right.$$

$$c^* = \int c(x) \psi^2(x) dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \quad \left| \quad P^* = \int p(x) \psi(x) dx + \sum_i p_i \psi_i \right.$$

جرم، میرایی، سختی و نیروی مؤثر معادل سیستم SDF تعیین داده شده با تابع $\psi(x)$



$$u(x,t) = \psi(x)z(t)$$

فیزیات بیشتر در یک حالت خاص

از مبانی انرژی استفاده می‌کنیم (انرژی جنبشی و پتانسیل):

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \dot{u}^2(x,t) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\psi^2(x) \dot{z}^2] dx \equiv \frac{1}{2} m^* \dot{z}^2 = T$$

$$m^* = \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx$$

برای بیان سختی معادل مؤثر K^* از اصول مقارنت مصالح (انرژی پتانسیل تغییر شکل):

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx, \quad u''(x,t) = \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$M = EI u'', \quad u'' = \psi''(x) z(t)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(EI)^2}{EI} (u'')^2 dx \Rightarrow V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (\psi''(x) z(t))^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} K^* z^2 \quad \checkmark \quad K^* = \int_0^L EI(x) \psi''^2(x) dx$$

سختی هندسی معادل مؤثر: نیروی محوری (قائم) N ← افت راس برج آب e

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u'^2(x,t) dx \quad \text{از مقارنت مصالح}$$

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^L u'^2(x,t) dx \quad \text{انرژی پتانسیل آن}$$

انرژی پتانسیل نیروی N در اثر افت $e(t)$ کم می‌شود ← علامت منفی

اگر وزن متغیر یا به مد نظر باشد، $N(x)$

$$V_N = -\frac{1}{2} \int_0^L N(x) u'^2(x,t) dx = -\frac{1}{2} \int_0^L N(x) [\psi'(x) z]^2 dx$$

$$V_N = -\frac{1}{2} K_G^* z^2 \quad \checkmark \quad K_G^* = \int_0^L N(x) \psi'^2(x) dx$$

$$K^* = K^* - K_G^* = \int_0^L EI(x) \psi''^2(x) dx - N_{cr} \int_0^L \psi'^2(x) dx = 0$$

$$N_{cr} = \frac{\int_0^L EI(x) \psi''^2(x) dx}{\int_0^L \psi'^2(x) dx}$$

برای (کاهش)

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}}$$

مکانیسم فرکانس را به افتدال برسر

مثال - در برج آب قبلی $EI(x)$ و $m(x)$ در طول ارتفاع ثابت فرض می شود. مطلوب است برآورد ω^* برای تابع مختلف شکل $\psi(x)$ (جرم گسترده m).

الف - اگر از شروع اول در پایداری سازه ها استفاده کنیم $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$

$$m^* = \int_0^L m \psi^2(x) dx = m \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L})^2 dx = 0.228 mL$$

$$K^* = \int_0^L EI \psi''^2(x) dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32 L^3 \times 0.228 mL}} = \frac{3.653}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ب - اگر شکل ارتفاعی برج را سهمی فرض کنیم: $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$$m^* = 0.2 mL, \quad K^* = \frac{4EI}{L^3}, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{4EI}{L^3 \times 0.2 mL}} = \frac{4.472}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega^* = \frac{3.517}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

* جواب دقیق از حل سیستم پیوسته!

در حالت ب، $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$ ، عدد ثابت

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{M}{EI} = Z \frac{2}{L^2}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = Z \psi'' = Z \frac{2}{L^2}$$

یعنی لنگر در طول ارتفاع ثابت است در صورتیکه در انتهای برج صفر و در تکیه گاه حداکثر است پس تابع مدنظر $\psi(x)$ یکی از شرایط فیزیکی را ارضاء نکرده و جواب از واقعیت دور است.

ج - در این حالت سعی می شود با ارضاء شرایط مرزی و میزبانی بیشتر، یک تابع

شکل $\psi(x)$ به دست یابیم. یک تابع درجه ۳ (چند جمله ای) فرض می کنیم:

$$\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{چهار ضریب پس چهار شرط لازم است.}$$

۱- تغییر مکان در تکیه گاه صفر است: $u=0 \rightarrow \psi(x=0) = 0$

۲- ضریب زاویه در تکیه گاه گیردار صفر است: $u'=0 \rightarrow \psi'(x=0) = 0$

۳- لنگر در انتهای برج صفر است: $u''=0 \rightarrow \psi''(x=L) = 0$

۴- همپه در نقطه شاخص (متممات شاخص): $u(x,t) = z(t) \rightarrow \psi(L) = 1$

$$\Rightarrow \text{اعمال شرایط} \Rightarrow a = -\frac{1}{2L^3}, b = \frac{3}{2L^2}, c = d = 0$$

$$\psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2} \quad \text{و} \quad \psi''(x) = \frac{3}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$K^* = \frac{3EI}{L^3}, m^* = 0.2357mL \Rightarrow \omega^* = \frac{3.568}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

برآورد سختی هندسی و نیروی N_{cr} :

حالت الف $\rightarrow \psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \rightarrow K_G^* = \int_0^L N \psi'^2(x) dx$

$$K_G^* = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 (\sin \frac{\pi x}{2L})^2 dx = \frac{N\pi^2}{8L} \rightarrow N_{cr} = 2.467 \frac{EI}{L^2}$$

حالت ب $\rightarrow \psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \rightarrow K_G^* = \frac{4}{3} \frac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = \frac{3EI}{L^2}$

حالت ج $\rightarrow \psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2} \rightarrow K_G^* = \frac{6}{5} \frac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = 2.5 \frac{EI}{L^2}$

حالت واقعی $\rightarrow N_{cr} = 2.67 \frac{EI}{L^2}$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله RAYLEIGH'S Method for ω

در سال ۱۸۷۳ با استفاده از اصل بقای انرژی، روش ساده برای برآورد ω (ارتعاش آزاد)

الف - سیستم جرم و فنر (سختی و جرم مؤثر معادل)

$$u(t) = u_0 \sin \omega t$$

$$\dot{u}(t) = u_0 \omega \cos \omega t \quad , \quad u_{max} = u_0 \quad , \quad \dot{u}_{max} = u_0 \omega$$

حد اکثر انرژی پتانسیل $V_{max} = \frac{1}{2} k u_{max}^2 = \frac{1}{2} k u_0^2$

حد اکثر انرژی جنبشی $T_{max} = \frac{1}{2} m \dot{u}_{max}^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 \omega^2$

$$T_{max} = V_{max} \Rightarrow \omega^2 = k/m$$

ب - سیستم با جرم و سختی گسترده بطول L

$$u(x,t) = \psi(x) z(t)$$

تغییر مکان نقطه شاخص $z(t) = z_0 \sin \omega t$

$$u(x,t) = \psi(x) z_0 \sin \omega t \rightarrow u_{max} = \psi(x) z_0$$

$$\dot{u}(x,t) = \psi(x) z_0 \omega \cos \omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = \psi(x) z_0 \omega$$

$$u''(x,t) = \psi''(x) z_0 \sin \omega t \rightarrow u''_{max} = \psi''(x) z_0$$

انرژی پتانسیل $V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) u''^2 dx \rightarrow V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^L EI(x) \psi''^2 dx$

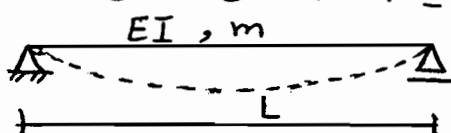
انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \dot{u}^2 dx \rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x) \psi^2 dx$

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) \psi''^2 dx}{\int_0^L m(x) \psi^2 dx} = K^*/m^*$$

Rayleigh's quotient

فارج قسمت رایله

مثال - مطلوبیت تعیین ω یک تیر ساده خمشی به روش رایله؟ مورد اصلی مدونتر است.



الف - $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$ ب - $\psi(x) = \frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right)$

$$\text{الف - } \psi''(x) = \frac{2}{L^2}, \quad V_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \int_0^L \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 \frac{4EI}{L^3}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 m \int_0^L \left[\frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \frac{mL}{30}$$

$$T_{\max} = V_{\max} \rightarrow \omega = \frac{10.95}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\text{ب - } \psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \rightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \rightarrow \psi''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \int_0^L \left(-\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 m \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

$$T_{\max} = V_{\max} \rightarrow EI \frac{\pi^4}{L^4} = \omega^2 m \rightarrow \omega = \frac{9.87}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

انتخاب تابع شکل $\psi(x)$ - پیشنهاد رایله ارتعاش آزاد
 بدون میرایی $f_I + f_s = 0$

تشریح؛ تغییر مکان u در اثر اعمال نیروی انبرسی؛ $m\ddot{u} = -ku$

$$u(x, t) = \psi(x) z(t) \rightarrow f_I = -m(x) \psi(x) Z_0 \omega^2 \sin \omega t$$

دقت تپاچ بنگی به درستی $\psi(x)$ دارد. $f_I \propto m(x) \psi(x)$

* پیشنهاد رایله؛ فرض می‌کنیم شکل تغییر مکان تحت اثر وزن سیستم موجودی آید: mg

با اینکار پارامتر اصلی (جرم) اثر کرده و شرایط تکیه گاهی نیز ارضاء می‌شود.

اساس روش رایله؛ تغییر مکان $u(x)$ باعث $p(x)$ نیرو

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) u_{\max}^2 dx \quad \text{مداکر انرژی پتانسیل حاصل}$$

$$u(t) = u_0 \sin \omega t \rightarrow u_{\max} = u_0, \quad \dot{u}(t) = u_0 \omega \cos \omega t \rightarrow \dot{u}_{\max} = u_0 \omega$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{u}_{\max}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L m u_{\max}^2 \omega^2 dx \quad \text{مداکر انرژی جنبشی}$$

$$T_{\max} = V_{\max} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L m u_{\max}^2 \omega^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) u_{\max} dx$$

فرض رایله $p(x) = m(x)g \Rightarrow$

$$\frac{\omega^2}{2} \int_0^L m(x) u^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) g u(x) dx$$

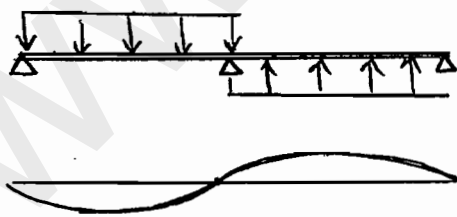
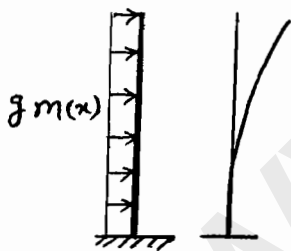
$$\omega^2 = \frac{g \int_0^L m(x) u(x) dx}{\int_0^L m(x) u^2 dx} = \frac{g \int_0^L m(x) \psi(x) dx}{\int_0^L m(x) \psi^2(x) dx}$$

در حالت سیستم یا جرم‌های متمرکز (قاب‌های برشی) داریم:

$$\omega^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i u_i}{\sum_{i=1}^n m_i u_i^2}$$

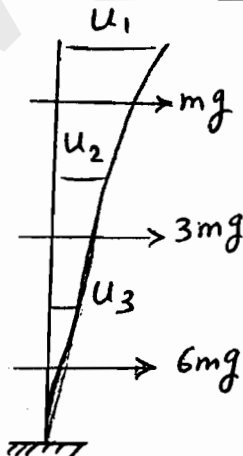
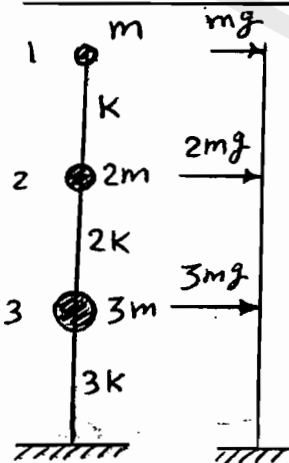
توجه! در فرض رایله، وزنه گسترده یا متمرکز، در جهت ارتعاش و بصورتی که باعث تغییر

شکل در مورد ارتعاشی مورد نظر باشد، در نظر گرفته می‌شود.



رعایت شرایط مرزی و مسازگاری

در شکل ارتعاشی:



مثال - مطلوبیت بعبارة آن اصلی سیستم سه جرمی رو برود؟

$$\Delta u_3 = \frac{F_3}{k_3} = \frac{6mg}{3K}$$

$$u_3 - \frac{u_3}{\cancel{\text{منه}} \cancel{\text{زمین}}} = u_3 = \frac{2mg}{K}$$

$$\Delta u_2 = u_2 - u_3 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{3mg}{2K}$$

$$u_2 = \frac{3mg}{2K} + \frac{2mg}{K} = \frac{7mg}{2K} = 3.5 \frac{mg}{K}$$

(۷۲)

$$\Delta u_i = u_i - u_2 = \frac{F_i}{k_i} = \frac{mg}{k} \rightarrow u_i = \frac{mg}{k} + \frac{3.5mg}{k} = 4.5 \frac{mg}{k}$$

$$\omega^2 = \frac{g \sum_1^3 m_i u_i}{\sum_1^3 m_i u_i^2} = \frac{g \times (\frac{mg}{k}) (1 \times 4.5 + 2 \times 3.5 + 3 \times 2)}{(\frac{mg}{k})^2 (1 \times 4.5^2 + 2 \times 3.5^2 + 3 \times 2^2)} =$$

$$\frac{k}{m} \frac{17.5}{56.25} = 0.312 \frac{k}{m} \rightarrow \omega = 0.56 \sqrt{k/m}$$

روش رایله اصلاح شده

یک روش ساده با تکرار مراحل (Iteration) و مناسب برای ساختارهای برشی

فرض تغییر مکان اولیه برای شکل ارتعاشی یا محاسبه آن از طریق اعمال وزن سازه: $u(x, t)$

$$\left. \begin{aligned} V_{max}^{(0)} &= \frac{1}{2} \int EI(x) u^{(0)2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \sum K_i \Delta u_i^{(0)2} \\ T_{max}^{(0)} &= \frac{1}{2} \int m(x) \dot{u}^{(0)2} dx = \frac{1}{2} \omega^2 \int m(x) u^{(0)2} dx \end{aligned} \right\} \begin{aligned} T_{max}^{(0)} &= V_{max}^{(0)} \\ \omega_{R00} & \text{ معلوم} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i u_i^{(0)2}$$

$$K_i = m_i \omega^2 \rightarrow P_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)}$$

تحت اثر نیروی اولیه، تغییر مکان جدید را محاسبه می کنیم $u_i^{(1)}$ و پس از آن تکرار می کنیم

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2} \int P^{(0)} u^{(1)} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \sum P_i^{(0)} u_i^{(1)}$$

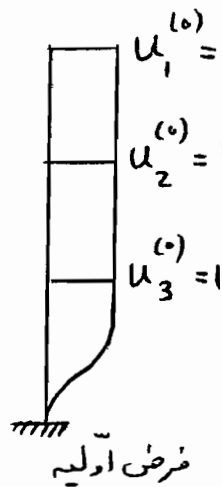
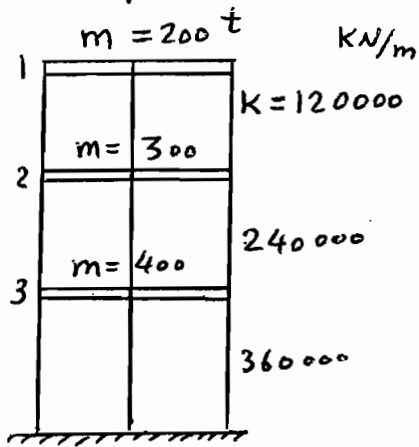
$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \omega_{R01} \text{ معلوم}$$

اگر انرژی جنبشی جدید را نیز از طریق تغییر مکان جدید $u^{(1)}$ محاسبه کنیم:

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2} \int m(x) \dot{u}^{(1)2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 u_i^{(1)2}$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \omega_{R11} \text{ معلوم} \xrightarrow{\text{به همین ترتیب ادامه}} P_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)}$$

مثال - مطلوبیت تعیین کن تا با سه طبقه به روش رابله اصلاح شده؟ (سقفها صلب)



$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 1$$

$$\dot{u}^{(0)} = \omega u^{(0)}$$

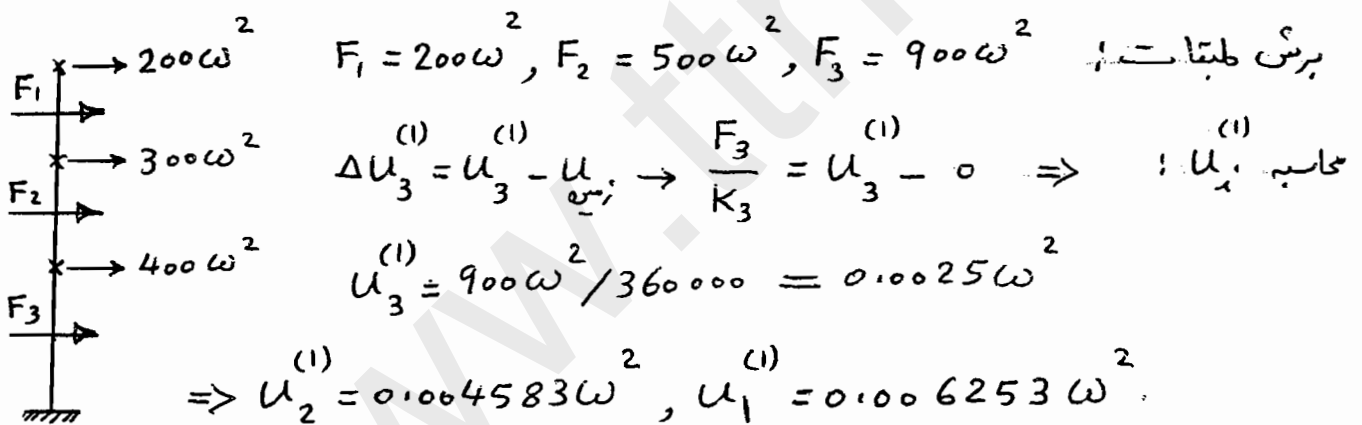
$$T_{max}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{u}_i^{(0)2} = \frac{1}{2} \omega^2 (900)$$

$$V_{max}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum K_i \Delta u_i^{(0)2} =$$

$$\frac{1}{2} [K_1(1-1)^2 + K_2(1-1)^2 + K_3(1-0)^2] = \frac{1}{2} (360000)$$

$$T_{max}^{(0)} = V_{max}^{(0)} \rightarrow \omega^2 = \frac{360000}{900} = 400 \rightarrow \omega_{R00} = 20 \text{ Rad/s}$$

$$P_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)} \rightarrow P_1^{(0)} = 200 \omega^2, P_2^{(0)} = 300 \omega^2, P_3^{(0)} = 400 \omega^2$$



$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum P_i^{(0)} u_i^{(1)} = \frac{1}{2} \omega^4 (3.625)$$

$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \frac{1}{2} (3.625) \omega^4 = \frac{900}{2} \omega^2 \rightarrow \omega_{R01} = 15.75 \text{ Rad/s}$$

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 u_i^{(1)2} = \frac{1}{2} \omega^6 (0.01661)$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2} \omega^6 (0.01661) = \frac{1}{2} \omega^4 (3.625) \Rightarrow \omega_{R11} = 14.77 \text{ Rad/s}$$

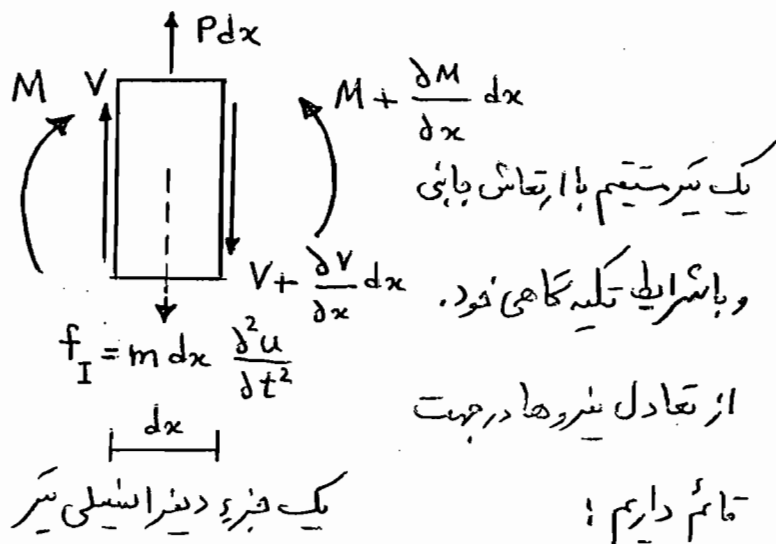
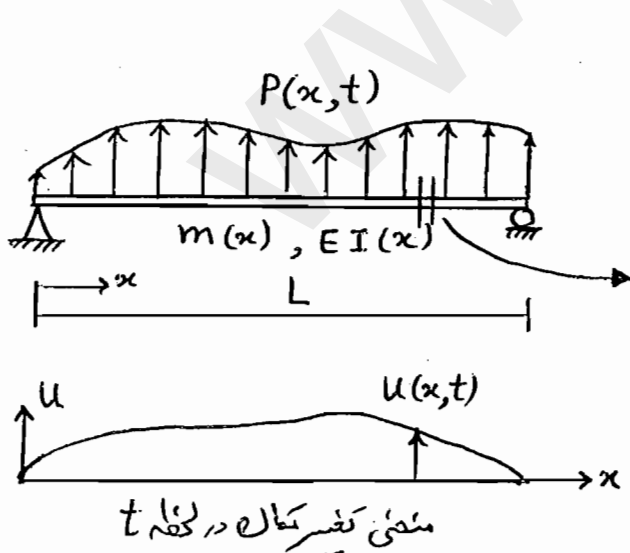
جوابها به سمت همگرا می آید. برای دقت بیشتر می توان

$$P_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)}$$

معادلات سیستم‌های پیوسته با جرم و سختی گسترده

Systems with Distributed Mass and Elasticity

اکثر سازه‌های توانمند بصیرت جرم متمرکز (در یک یا چند نقطه) مدل شوند (ساختارهای چند طبقه با کف صلب و ساختمان‌هایی با اجزای سیرستون با جرم ناچیز). بخش بزرگی از درس به تجزیه و تحلیل این نوع مدل‌ها پرداخته می‌شود. به دو دلیل اول اینکه چنین مدل‌هایی بصیرت بسیار مناسب و مؤثر رفتار دینامیکی سازه را بیان می‌دارد. دوم اینکه روش‌های محاسباتی مناسب با کامپیوتر جهت حل معادلات دفرانسیل معمولی حرکت این سازه‌ها به تعداد زیاد موجود است. با این حال برای برخی سازه‌ها با جرم و سختی گسترده نظیر دودکش‌ها، سدهای قوسی و سازه‌های آبرها هسته‌ای و ... روش فوق مناسب نیست و باید از روش تحلیل سیستم‌های پیوسته کمک گرفت. در این بخش به مسائل یک بُعدی با جرم گسترده نظیر سیرها و برج‌ها و تحلیل آنها پرداخته می‌شود. معادله حرکت (حالت به‌ویژه) برای نیروی اعمالی بصیرت زیر بیان می‌شود:



یک سرمتیم با ارتعاش باپی
و با شرایط تکیه گاهی خود.
از تعادل نیروها در جهت
تام داریم:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = P - m \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \quad (1)$$

* در رابطه رو برو، اگر سر می‌انرژی نبود، رابطه کلامیک بین برش و نیرو گسترده در تیرهای تحت بار گسترده حاصل می‌شود.

در مقاومت مصالح اگر از لنگر انبساطی مرتبط (وابسته) به شتاب زاویه ای فیزه صرف نظر کنیم،

از تعادل چرخشی الاله رابطه استاندا در دستروداریم

$$V = \frac{\delta M}{\delta x} \quad (2)$$

باز هم در مقاومت مصالح اگر از تغییر شکل های برشی صرف نظر کنیم، داریم: (3)

$$M = EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$

اگر روابط 2 و 3 را در رابطه 1 قرار دهیم، معادله حاکم بر تغییر مکان (ارتعاش) جابجایی $u(x,t)$

سیر حاصل می شود: (4)

$$m(x) \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[EI(x) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right] = P(x,t)$$

برای حل معادله نیاز به دو شرط مرزی در هر یک از انتهای سیر و تغییر مکان و سرعت اولیه داریم.

مهمترین بخش حل معادله، مرحله ارتعاش آزاد آن است؛ براساس m, EI

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right] = 0 \quad (5)$$

برای حل فرض می کنیم پاسخ بصورت روبرو باشد: (6)

$$u(x,t) = \phi(x) \cdot q(t)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \phi(x) \cdot \ddot{q}(t) \quad , \quad \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \phi''(x) q(t) \quad (7)$$

با جایگزینی روابط 7 در 5، داریم: (8)

$$\phi(x) \ddot{q}(t) + \frac{EI}{m} q(t) [\phi''(x)]'' = 0$$

$$\phi(x) \ddot{q}(t) + \frac{EI}{m} \phi^{IV}(x) q(t) = 0 \quad (9)$$

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{EI}{m} \cdot \frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = \text{مقدار ثابت} = \omega^2$$

رابطه کلاسیک ارتعاش آزاد $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ ← (9) برای بدنه

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 & (9) \\ \phi^{IV}(x) - \frac{m\omega^2}{EI} \phi(x) = 0 & , \quad \frac{m\omega^2}{EI} = \lambda^4 \end{cases}$$

$$\phi^{IV}(x) - \lambda^4 \phi(x) = 0 \quad (10) \quad \text{یا} \quad [EI \phi''(x)]'' - \omega^2 m \phi(x) = 0$$

از معادله 9 به ازای هر دو با توجه به شرایط اولیه، تابع $q(t)$ مشخص خواهد شد:

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega_1 t + q_0 \cos \omega_1 t \quad (11)$$

$$\phi(x) = \bar{c} e^{sx} \rightarrow (s^4 - \lambda^4) \bar{c} e^{sx} = 0$$

برای حل معادله ۱۰

$$s^4 - \lambda^4 = 0 \rightarrow s = \pm \lambda, \pm i\lambda \Rightarrow$$

$$\phi(x) = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}$$

$$\phi(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos \lambda x + B_4 \sin \lambda x \quad (۱۲)$$

با اعمال شرایط مرزی در تکیه گاه‌ها به معادلاتی مثلثاتی خواهیم رسید که ما را به پهنای ω

هدایت خواهد کرد (سیستم پیوسته پس پهنای درجه آزادی). بنابراین جواب ارتعاش آزاد

جمع کلیه جوابها خواهد بود! $\Rightarrow \omega_i \rightarrow \phi_i(x), q_i(t)$

$$u_c(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (۱۳)$$

با توجه به شرایط تکیه گاهی و شرایط مرزی در انتهای آزاد سترها داریم:

تغییر مکان صفر	$\phi(x) = 0$	لنگر صفر	$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$
----------------	---------------	----------	-----------------------------

شیب صفر	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	برش صفر	$\frac{d^3 \phi}{dx^3} = 0$
---------	------------------------	---------	-----------------------------

در انتهای آزاد، لنگر و برش صفر - در تکیه گاه گیردار، تغییر مکان و شیب صفر - در تکیه گاه غلظتی،

تغییر مکان و لنگر صفر پس در هر انتها به هر حال دو شرط مرزی خواهیم داشت.

روش ساده شده! $\cosh \equiv \text{ch}, \sinh \equiv \text{sh}$

$$\text{ch}(\lambda x) + \cos(\lambda x) = S \rightarrow S' = \lambda(\text{sh}(\lambda x) - \sin(\lambda x)) = \lambda V$$

$$\text{sh}(\lambda x) + \sin(\lambda x) = T \rightarrow T' = \lambda(\text{ch}(\lambda x) + \cos(\lambda x)) = \lambda S$$

$$\text{ch}(\lambda x) - \cos(\lambda x) = U \rightarrow U' = \lambda(\text{sh}(\lambda x) + \sin(\lambda x)) = \lambda T$$

$$\text{sh}(\lambda x) - \sin(\lambda x) = V \rightarrow V' = \lambda(\text{ch}(\lambda x) - \cos(\lambda x)) = \lambda U$$

رابطه (۱۲) را بصورت اوبروی درسم: $\phi(x) = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$

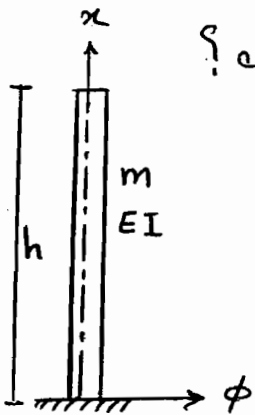
$$\frac{d\phi}{dx} = C_1 S' + C_2 T' + C_3 U' + C_4 V' = \lambda (C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \dots = \lambda^2 (C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T)$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = \dots = \lambda^3 (C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S)$$

با توجه به شرایط مرزی و استفاده از روابط ساده بین ضرایب C_1, C_2, C_3, C_4 می توان
این ضرایب را محاسبه نمود.

مثال - مطلوبست برآورد فرکانس های طبیعی یک تیر (ستون) طره پیوسته هگلی؟



$$(\phi)_{x=0} = 0 \quad (1) \quad \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x=h} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (2) \quad \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_{x=h} = 0 \quad (4)$$

از شرایط مرزی بالا $C_1 = C_2 = 0$ و

$$\begin{cases} C_3 [ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] + C_4 [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)] = 0 & (5) \\ C_3 [sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] + C_4 [ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) & sh(\lambda h) + \sin(\lambda h) \\ sh(\lambda h) - \sin(\lambda h) & ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

C_3 و C_4 نمی توانند صفر باشند چون در انضرت ارتعاشی وجود نخواهد داشت پس دترمینان ماتریس

ضرایب صفر است، از آنجا داریم:

$$[ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)]^2 - [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)][sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] = 0$$

$$\frac{\cosh^2(\lambda h) + \cos^2(\lambda h) + 2 \cosh(\lambda h) \cos(\lambda h) - \sinh^2(\lambda h) + \sin^2(\lambda h)}{x} = 0$$

$$1 + 1 + 2 \cosh(\lambda h) \cos(\lambda h) = 0 \rightarrow \underline{\cosh(\lambda h) \cos(\lambda h) + 1 = 0} \quad \textcircled{A}$$

از روش ساده امکان حل معادله بالا وجود ندارد پس به کمک روش عددی حل شده داریم:

$$\lambda_1 h = 1.8751, 4.6941, 7.8548, 10.996, 14.137, 17.279, \dots$$

$$\omega^2 = \frac{\lambda^4 EI}{m} \quad \text{باتوجه به} \quad \lambda_i h \approx \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{تقریباً} \quad i > 4$$

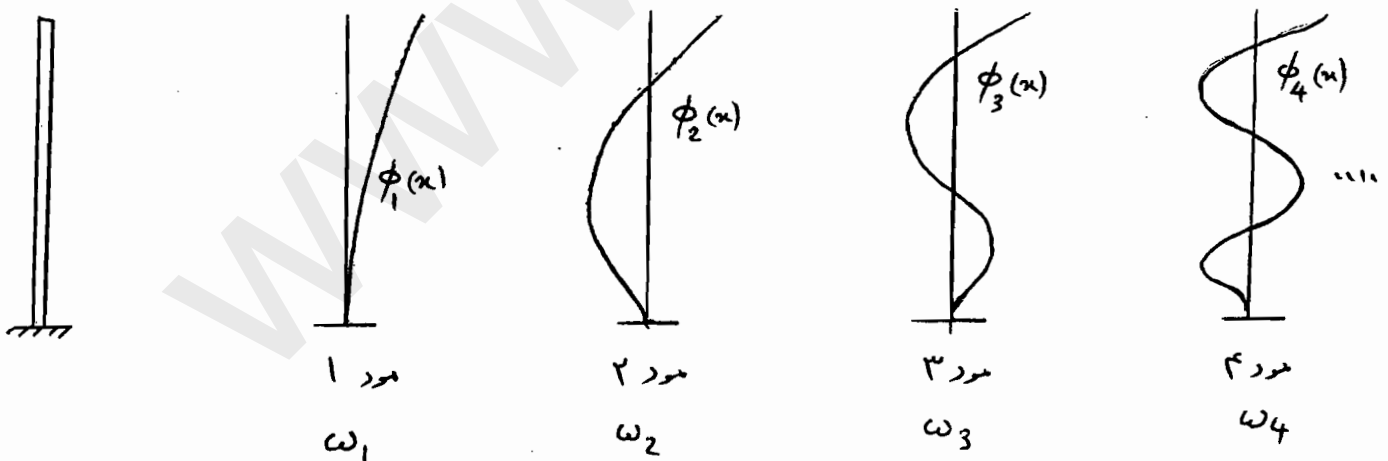
$$\omega_1 = \frac{3.516}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{22.03}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_3 = \frac{61.70}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\omega_4 = \frac{120.9}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \underline{\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

اگر C_3 را برابر صفر C_4 بنویسیم (رابطه ۵) و آنرا در رابطه (۱۲) قرار دهیم و از روابط

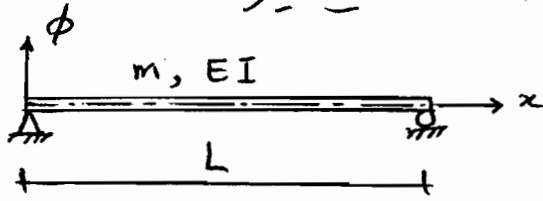
بیه ضرایب در شرایط مرزی کمک بگیریم، تابع $\phi_i(x)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\phi_i(x) = C_4 \left[\cosh(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \frac{\cosh(\lambda_i h) + \cos(\lambda_i h)}{\sinh(\lambda_i h) + \sin(\lambda_i h)} (\sinh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)) \right]$$



$$T = 2\pi/\omega \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi h^2}{(\lambda_1 h)^2} \sqrt{\frac{m}{EI}}$$

سوال - مطلوب است تعیین فرکانس ها و شکل تغییر مکانی ارتعاش آزاد یک سیر ساده.



در دوانتها با توجه به تکیه گاه ها، تغییر مکان و لنگر منفرجه است.

$$u(0) = 0 \rightarrow \phi(0) = 0 \rightarrow B_3 + B_1 = 0$$

$$M(0) = 0 \rightarrow EI\phi''(0) = 0 \rightarrow \lambda^2(-B_3 + B_1) = 0 \Rightarrow B_1 = B_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\phi(x) = B_4 \sin(\lambda x) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda x)$$

$$x=L \rightarrow u(L)=0 \rightarrow \phi(L)=0 \rightarrow B_4 \sin(\lambda L) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda L) = 0$$

$$M(L)=0 \rightarrow EI\phi''(L)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_4 \sin(\lambda L) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda L)) = 0$$

از جمع در رابطه اخیر $B_2 \operatorname{sh}(\lambda L) = 0$ در این حالت $\operatorname{sh}(\lambda L)$ نمی تواند منفرجه شود چاره ω

صفری شود که در ارتعاش بی معنی است پس $B_2 = 0 \leftarrow B_4 \sin(\lambda L) = 0$

اگر $B_4 = 0$ داریم $\phi(x) = 0$ که معنی ندارد پس $\sin(\lambda L) = 0 \Leftarrow$

$$\lambda L = n\pi \quad \text{برای } n=1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad n=1, 2, 3, \dots \leftarrow \lambda^4 = \frac{\omega_n^2 m}{EI}$$

اگر $\lambda L = n\pi$ را در رابطه $\phi(x)$ بکار ببریم:

$$\phi_n(x) = B_4 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

که B_4 مقدار اختیاری است.

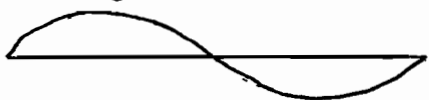
$$\phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

نصف سینوس

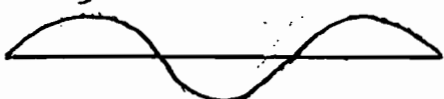
$$\phi_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$



$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 4\omega_1$$

یک سینوس

$$\phi_3(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$



$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 9\omega_1$$

یک و نیم سینوس

⋮

رابطه ارتعاش آزاد سیستم پیوسته بر اساس تئوری تیر تیموشنکو

اگر از لگر اینرسی چرخشی تیر صرف نظر نشود و تغییر شکل حاصل از تنش برشی ملحوظ شود

(تئوری تیر تیموشنکو)، معادله ارتعاش آزاد بصورت زیر در می آید:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - mr^2 \left(1 + \frac{E}{KG}\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m^2 r^2 \partial^4 u}{KGA \partial t^4} = 0$$

G مدول آرمیچری برشی، $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع تیر بر اساس طول مقطع، A سطح مقطع و K ضریب شکل

مقطع (مربوط به غیر یکنواخت بودن تنش برشی در مقطع) که مثلاً برابر $\frac{5}{6}$ در مقطع مستطیلی و $\frac{9}{10}$ در

مقطع دایره‌ای است (مقاومت مصالح)،

Modal ORTHOGONALITY

رابطه تعامد مودال در سیستم‌های پیوسته

در این بخش خاصیت عمود بودن مودهای ارتعاش آزاد در سیستم‌های پیوسته ملاحظه می‌شود. برای

سهولت بیان از یک تیر یک دهانه با انتهای مفصلی و گیردار یا آزاد و بدون جرم متمرکز در

انتهای استفاده می‌شود. برای شروع رابطه ۱۰ (معادله دیراچیل تفکیک شده تابع شکلی ϕ)

برای مود r ام باز نویسی می‌شود $\left(\frac{m\omega^2}{EI} = \lambda^4\right)$ ⑩ $\phi^{IV}(x) - \lambda^4 \phi(x) = 0$

$$[EI(x) \phi_r''(x)]'' = \omega_r^2 m(x) \phi_r(x) \quad \text{⑭}$$

طرفین را در $\phi_n(x)$ ضرب نموده و از صفر تا L انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)]'' dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad \text{⑮}$$

طرف چپ را بصورت \int بخش بخش انتگرال می‌گیریم (روش‌های انتگرال‌گیری):

$$\int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)]'' dx = \left\{ \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)]' \right\}_0^L - \left\{ \phi_n'(x) [EI(x) \phi_r''(x)] \right\}_0^L + \int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx \quad \text{⑯}$$

به سادگی ملاحظه می شود، مقادیر داخل آکولادها در $x=0, L$ (انتهای سیر بصورت آزاد، ساده یا گیردار) برابر صفر هستند. زیرا اگر گیردار باشد داریم $\phi=0$ و $\phi'=0$ و اگر ساده باشد داریم $\phi=0$ و به دلیل لنگر صفر $\phi''=0$ و اگر آزاد باشد، لنگر و برش صفر است $\phi''=0$ و $\phi'''=0$.

در این مرحله مقدار رابطه ۱۶ را در ۱۵ قرار می دهیم:

$$\int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad (17)$$

اینک مجدداً از ابتدا شروع کرده و رابطه ۱۰ را برای مورد n ام می نویسیم و طرفین را در $\phi_r(x)$ ضرب کرده و از صفر تا L انتگرال می گیریم که مشابه حالت قبل خواهیم داشت:

$$\int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx = \omega_n^2 \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad (18)$$

رابطه ۱۷ را از رابطه ۱۸ تفریق می کنیم:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx = 0 \quad (19)$$

در نتیجه با توجه $\omega_n \neq \omega_r$ خواهیم داشت:

$$\int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx = 0 \quad (20)$$

با استفاده از رابطه ۲۰ در رابطه ۱۵ داریم:

$$\int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)]' dx = 0 \quad (21)$$

روابط ۲۰ و ۲۱ روابط تعامد مودها نامیده می شوند.

MODAL Analysis of Forced
Dynamic Response

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

رابطه (معادله) حرکت سیستم پیوسته را می نویسیم (رابطه ۴):

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] = P(x, t)$$

اگر سیستم را برای حالت ارتعاشی آزاد حل کرده باشیم و ω و ϕ معلوم باشند

جواب (والشی) بصورت اوبرو خواهد بود (رابطه ۱۳): $u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t)$

ترکیب خطی مودها که در حقیقت جمع جوابهای حاصل از معادله دیفرانسیل است.

بنابراین، پاسخ $u(x,t)$ از جمع آثار هر یک از مودهاست (ترم ۴ در سری

بالا مقدار مشارکت (تأثیر) مود ۴ در کل پاسخ است).

ϕ را مود و q را مختصات مودال می‌نامند که مجهول است. البته مجهول اصلی

$u(x,t)$ است. جواب مفروض (رابطه ۱۳) را در معادله ۴ قرار می‌دهیم:

$$\sum_{r=1}^{\infty} m(x) \phi_r(x) \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{\infty} [EI(x) \phi_r''(x)] \ddot{q}_r(t) = P(x,t)$$

اینک هر ترم را در $\phi_n(x)$ ضرب و در طول سیر انتگرال می‌گیریم:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \ddot{q}_r(t) \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx + \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{q}_r(t) \int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)] dx = \int_0^L P(x,t) \phi_n(x) dx$$

با توجه به خاصیت تعامد مودها (رابطه ۲۰، ۲۱) همه ترم‌ها در ترکیب عبارات سمت چپ

بسیار صفر است بجز ترم مربوط $r=n$ که خواهیم داشت:

$$\ddot{q}_n(t) \int_0^L m(x) [\phi_n(x)]^2 dx + \ddot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_n''(x)] dx = \int_0^L P(x,t) \phi_n(x) dx$$

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (22)$$

$$M_n = \int_0^L m(x) [\phi_n(x)]^2 dx, \quad K_n = \int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_n''(x)] dx \quad (23)$$

$$P_n(t) = \int_0^L P(x,t) \phi_n(x) dx$$

$$K_n = \int_0^L EI(x) [\phi_n''(x)]^2 dx \quad (24)$$

M_n و K_n عبارت از جرم و سختی تعمیم داده شده (generalized) برای مورد

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \rightarrow K_n = \omega_n^2 M_n$$

می باشد که رابطه کلی فرکانس میانه آنها برقرار است

رابطه اضربه با ندرسته معادله ۱۴ برای مورد M_n و ضرب (۲۵) طرفیه رابطه در $\phi_n(x)$ و انتگرال گیری از صفر تا L و استفاده از بیان M_n و K_n (رابطه ۲۳) بدست می آید.

$P_n(t)$ نیروی تعمیم داده شده برای مورد M_n است. معادله ۲۲ یک معادله دیفرانسیل

معمول است که مجهول آن $q_n(t)$ می باشد (مسابه SDF) و فقط به مورد M_n یعنی

$\phi_n(x)$ ارتباط دارد. بنابراین می توانیم بنیهایت معادله مسابه معادله ۲۲ برای هر یک

از مورد ها داشته باشیم. در حقیقت معادله دیفرانسیل اولیه (معادله ۱۴) که بصورت

Partial بود و مجهول آن $u(x,t)$ است تبدیل به بنیهایت معادله دیفرانسیل معمول

(رابطه ۲۲) با مجهول $q_n(t)$ می شود که هر کدام متقل می باشد و بصورت مجزا و کلاسیک

قابل حل می باشد (با توجه به نوع بارگذاری $P(x,t)$). وقتی $q_n(t)$ معلوم باشد (مورد M_n)

می توانه میزان مشارکت مورد M_n در تغییر مکان $u(x,t)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$u_n(x,t) = \phi_n(x) q_n(t) \quad (26)$$

کل تغییر مکان از جمع آثار هر یک از مورد ها حاصل می شود

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (27)$$

لنگر خمشی و نیروی برشی در هر مقطع از سیر ناسی از تغییر مکان آن نقطه در لحظه t

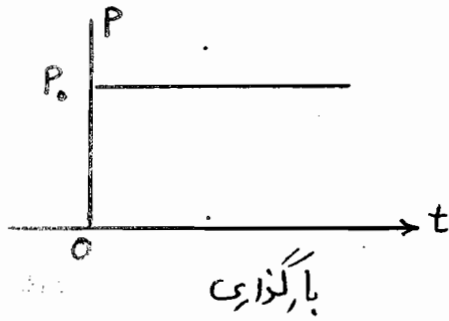
$$M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} EI(x) \phi_n''(x) q_n(t) \quad (28)$$

بصورت زیر می باشد!

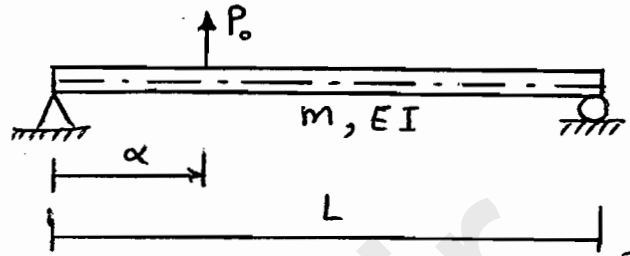
$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [EI(x) \phi_n''(x)]' q_n(t) \quad (29)$$

مثال - یک سیر ساده تحت بارگذاری داده شده مد نظر است، منظور است واکنش سیر

(تغییر مکان و لنگر خمشی) وقتی که نیروی متمرکز در فاصله α از تکیه گاه سمت چپ سیر



می کند. حالت خاص وقتی نیرو در وسط دهانه اثر می کند.



قبلاً ارتعاش آزاد سیر ساده را تحلیل نموده بودیم!

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_n &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \phi_n(x) &= \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \right.$$

(a)

مقدار $\phi_n(x)$ را در روابط ۲۳ قرار می دهیم!

$$M_n = \frac{mL}{2} \quad , \quad K_n = \frac{n^4 \pi^4 EI}{2L^3} \quad (b)$$

$$P(x,t) = P_0 \delta(x-\alpha)$$

$\delta(x-\alpha)$ دلتای دیراک ←
متمرکز در α

$$P_n(t) = P_0 \phi_n(\alpha) \quad (c)$$

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_0 \phi_n(\alpha) \quad (d) \quad \leftarrow \text{معادله مودال } n \text{ ام}$$

قبلاً حل یک سیستم SDF در بارگذاری پله ای (Step) ملاحظه شده بود فقط

پارامتر $q_n(t) \sim u(t)$ و $u_{st} = P_0 \phi_n(\alpha) / K_n$ مدالک، خواهد بود!

$$q_n(t) = \frac{P_0 \phi_n(\alpha)}{K_n} (1 - \cos \omega_n t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \frac{\phi_n(\alpha)}{n^4} (1 - \cos \omega_n t) \quad (e)$$

رابطه e را در معادله ۲۷ قرار داده و توجه شود که $\phi_n(x)$ از رابطه a معلوم است.

پس $u(x,t)$ بدست می آید.

در حالت خاص $\alpha = \frac{L}{2}$ ، مقدار فوق را در معادله e قرار می دهیم پس در رابطه ۲۷:

$$u(x,t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(L/2)}{n^4} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (f)$$

$$\phi_n\left(\frac{L}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n=2, 4, 6, \dots \\ 1 & n=1, 5, 9, \dots \\ -1 & n=3, 7, 11, \dots \end{cases} \quad \text{گ}$$

$$u(x, t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \left(\frac{1 - \cos \omega_1 t}{1} \sin \frac{\pi x}{L} - \dots \right) \quad \text{مقدار } g \text{ دارد } f \text{ مقدار دارد}$$

$$\text{h) } \frac{1 - \cos \omega_3 t}{81} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1 - \cos \omega_5 t}{625} \sin \frac{5\pi x}{L} - \frac{1 - \cos \omega_7 t}{2401} \sin \frac{7\pi x}{L} + \dots$$

تغییر مکان در وسط سیر:

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \left(\frac{1 - \cos \omega_1 t}{1} + \frac{1 - \cos \omega_3 t}{81} + \frac{1 - \cos \omega_5 t}{625} + \frac{1 - \cos \omega_7 t}{2401} + \dots \right)$$

ضرایب 1، 81، 625، 2401 و بقیه در مخرج کسر نشان می‌دهد که مشارکت

و تأثیر بودا در بقیه کم‌تر است و سری سریعاً همگرا می‌شود.

لگرژیسی از مقدار دارد رابطه h در 28 نسبت می‌آید:

$$M(x, t) = -\frac{2P_0 L}{\pi^2} \left(\frac{1 - \cos \omega_1 t}{1} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1 - \cos \omega_3 t}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1 - \cos \omega_5 t}{25} \sin \frac{5\pi x}{L} - \frac{1 - \cos \omega_7 t}{49} \sin \frac{7\pi x}{L} + \dots \right) \quad \text{ج}$$

$$M\left(\frac{L}{2}, t\right) = -\frac{2P_0 L}{\pi^2} \left(\frac{1 - \cos \omega_1 t}{1} + \frac{1 - \cos \omega_3 t}{9} + \frac{1 - \cos \omega_5 t}{25} + \frac{1 - \cos \omega_7 t}{49} + \dots \right) \quad \text{ک}$$

در مجموعی اخیر با توجه به n^2 در مخرج کسر، همگرا می‌گردد است البته نسبت به رابطه ج

که در مخرج n^4 دارد، از این مطلب در می‌آید یا هم که مشارکت (تأثیر) مودهای

بالتر در سیر و بیشتر است نسبت به تغییر مکان.

* توصیه مختصر در خصوص مسألات تحلیل سیستم‌های پیوسته در عمل

مشکل متغیر بودک $EI(x)$ ، $m(x)$ در روابط و انتگرال‌گیری مشکل - ارضاء مشکل شرایط مرزی

در سیرهای سه تایی (انگانه پذیردن پیچیده و طولانی) - گره‌های ارتباطی سیر و سیر در تارها

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس

Dynamic Analysis in the Frequency Domain

به چند دلیل، تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس بر تحلیل در حوزه زمانی ترجیح دارد:

۱- در بارگذاری زلزله (تابع غیر مشخص - مشکل انتگرال دو هابل - طیف طرح - FFT)

۲- اندرکنش خاک و سازه (مدل سازی خاک - FE، BE - امپدانس خاک)

۳- پدیده های تصادفی (آمار و احتمالات - ارتعاشات تصادفی - تحلیل ریسک)

شکل نمایی سری فوریه برای بارگذاری دینامیکی (پریودیک)

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T_p} + \sum_1^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_p}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi/T_p}{2\pi/T} = T/T_p$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega} = T/T_p, \quad \beta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega} = \frac{2 \times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{2T}{T_p} = \frac{2\Omega_1}{\omega}$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{n \times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \Rightarrow \Omega_n = n\Omega_1$$

$$\sin \Omega_n t = \sin n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} - e^{-in\Omega_1 t}}{2i}$$

$$\cos \Omega_n t = \cos n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} + e^{-in\Omega_1 t}}{2}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n e^{in\Omega_1 t}$$

ضرایب \bar{P}_n مجهول است و

مانند ضرایب a_n و b_n باید معلوم شوند.

$$\int_0^{T_p} e^{in\Omega_1 t} e^{-im\Omega_1 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_p & n = m \end{cases}$$

فاصلت تعامد تابع اکسپونانسیل

با توجه به فاصلت تعامد، طرفین رابطه $\textcircled{1}$ را در عبارت $e^{-im\Omega_1 t}$ ضرب و از صفر تا T_p انتگرال

می گیریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{P}_n &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-in\omega_1 t} dt & n \text{ سایر مقادیر} & \textcircled{۲} \\ \bar{P}_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt & n=0 & \textcircled{۳} \end{aligned} \right.$$

تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n e^{in\omega_1 t} \quad \textcircled{۴}$$

از جواب گذرا صرف نظر می شود - برای سهولت، فرضیات برای $n=1$ ارائه می شود؛

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \bar{P}_1 e^{i\omega_1 t} \quad \text{چون } \bar{P}_1 \text{ ضریب و ثابت است (مقاله)}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = e^{i\omega_1 t} \quad \text{پس برای سهولت بیشتر در انتها در نظر گرفته می شود} \leftarrow$$

$$u(t) = \bar{H} e^{i\omega_1 t}, \quad \dot{u} = \bar{H} i\omega_1 e^{i\omega_1 t}, \quad \ddot{u} = -\bar{H} \omega_1^2 e^{i\omega_1 t} \quad (i^2 = -1)$$

$$e^{i\omega_1 t} \bar{H} [-\omega_1^2 m + c\omega_1 i + k] = e^{i\omega_1 t} \quad \leftarrow e^{i\omega_1 t} \neq 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-\omega_1^2 m + i\omega_1 c + k} = \frac{1}{k \left(-\frac{\omega_1^2 m}{k} + \frac{i\omega_1 c}{k} + 1 \right)}$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega}, \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}}, \quad c_{cr} = 2m\omega$$

$$\frac{\omega_1 c}{k} = \frac{\omega_1}{k} \times \frac{c}{c_{cr}} c_{cr} = \frac{\omega_1}{k} \xi (2m\omega) = \frac{\omega_1}{\omega^2} \xi 2\omega = 2\beta_1 \xi$$

$$\bar{H}(\omega_1) = \frac{1}{k(-\beta_1^2 + 2i\beta_1 \xi + 1)}$$

در حالت کلی ω_n !

$$\bar{H}(\omega_n) = \bar{H}(n\omega_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1 \xi + 1)} \quad \textcircled{۵}$$

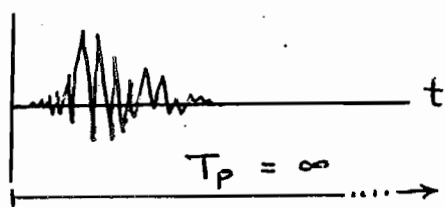
بنابراین در حالت کلی با توجه به فاکتور ثابت \bar{P}_n در تابع نیرو و ترکیب بار از جمله ت تابع آکسینال، جواب معادله مورد نظر بصورت زیر خواهد بود!

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{H}(n\Omega_1) \bar{P}_n e^{in\Omega_1 t} \quad (6)$$

زقتار سازه باید خطی باشد.

تحلیل سیستم SDF در بارگذاری غیر تناوبی - تبدیل فوریه

شرطهایی که تابع آنها شکل خاصی ندارد و پریودیک نمی باشند (زلزله - امواج تلی).



موضوع: یک نیروی پریودیک با زمان تناوب T_p

تغییر متغیر زمان به فرکانس $t \rightarrow \Omega$

برای حل معادله دفرانسیل تعادل دینامیکی از تغییر متغیر استفاده می شود؟ چید تعریف!

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_p} = \Delta\Omega \quad , \quad n\Omega_1 = \Omega_n$$

$$\bar{P}(\Omega_n) = T_p \bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Omega_1} \bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Delta\Omega} \bar{P}_n$$

$$\bar{P}_n = \bar{P}(\Omega_n) \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

$$P(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}_n e^{in\Omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n) e^{in\Omega_1 t} \Delta\Omega$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n) e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega \quad (7)$$

برای یافتن عبارت $\bar{P}(\Omega_n)$ ، طرفین عبارت را $\bar{P}_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) e^{-i\Omega_n t} dt$

که از قبل داشتیم در T_p ضرب می کنیم:

$$\bar{P}_n T_p = \bar{P}(\Omega_n) = \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} P(t) e^{-i\Omega_n t} dt$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T_p} \quad T_p \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta \omega \rightarrow d\omega$$

ω_n که به ازای n های مختلف دارای مقدار منفرد (نقطه ای) بود، حالا بصورت متغیر

پیوسته ای از ω در می آید. در ضمن شکل بیانی $P(t)$ که بصورت \sum بود، به شکل

انتهال در می آید که به آن انتهال فوریه می گویند!

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

$$\bar{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-i\omega t} dt \quad (9) \leftarrow \bar{P}(\omega) \text{ مقدار فوریه مقدار } P(t)$$

دو رابطه اخیر (8) و (9) را زوج تبدیل فوریه گویند.

$\bar{P}(\omega)$ را تبدیل فوریه $P(t)$ و $P(t)$ را تبدیل معکوس فوریه $\bar{P}(\omega)$ می نامند.

شرط لازم وجودی تبدیل فوریه آن است که $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt$ موجود باشد که البته اگر

توابع فیزیکی نظیر نیروها چنین فرصتی را دارند.

خلاصه نتایج روش برای متغیر فرکانس $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بصورت زیر می شود!

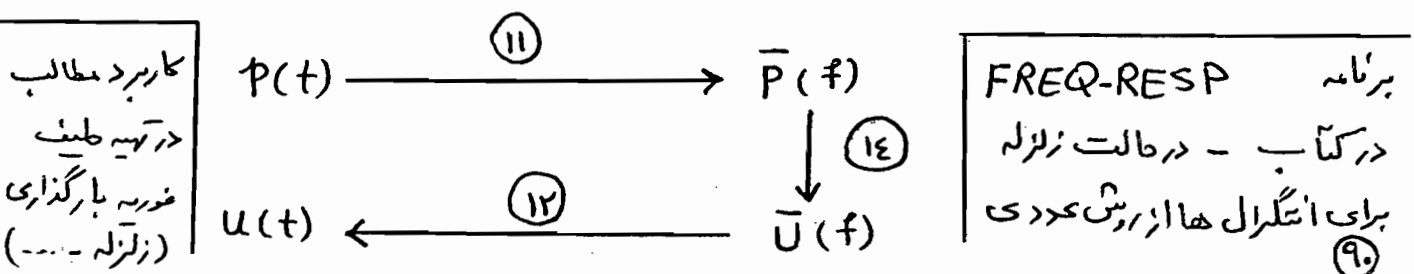
$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (10) \quad \bar{P}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-i(2\pi ft)} dt \quad (11)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}(f) \bar{P}(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (12)$$

یا بصورت دیگر زیر:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (13) \quad \bar{U}(f) = \bar{H}(f) \bar{P}(f) \quad (14)$$

تعبیر انتهال اخیر احتیاج به محاسبه انتهال هرزی در صحنه مختلط دارد.



سیستم‌ها چند درجه آزادی (MDF) Multi Degree of Freedom Systems

سیستم ساده (قاب برشی دو طبقه)

برای سادگی فرض می‌شود تیرها و کت صلب هستند.

از تغییر شکل محوری تیرها و ستون‌ها و از اثر نیروی محوری

در سختی ستون‌ها صرف نظر می‌شود، رفتار خطی است.

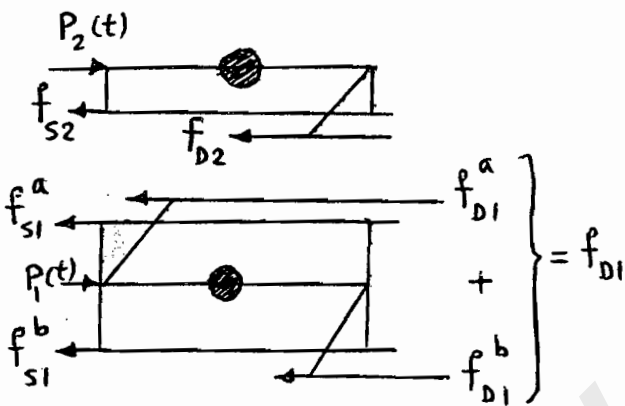
تعداد درجات آزادی مستقل برابر دو است (u_1, u_2) .

قانون دوم نیوتن برای حرکت هر یک از جرم‌ها:

$$P_i - f_{s_i} - f_{D_i} = m_i \ddot{u}_i \quad (i=1,2)$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + f_{s1} + f_{D1} = P_1$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + f_{s2} + f_{D2} = P_2$$



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$[m] \{\ddot{u}\} + \{f_D\} + \{f_s\} = \{P\} \quad \text{معادله برداری حرکت MDF}$$

نیروی سختی $\{f_s\}$ بستگی به بردار تغییر مکان طبقات $\{u\}$ دارد، سختی جانبی هر طبقه K_i که بستگی

به برش طبقه V_i داشته و رابطه $V_i = K_i \Delta_i$ و تغییر مکان طبقه است:

$\Delta_i = u_i - u_{i-1}$ و سختی هر طبقه (در قاب برشی) برابر سختی جانبی کل ستونهای طبقه می‌باشد:

$$K_i = \sum_{\text{ستونها}} \frac{12 E I_c}{h^3}$$

نیروی سختی مؤثر در سقف طبقه اول از دو بخش

تشکیل می‌شود: f_{s1}^a از طبقه بالا و f_{s1}^b از طبقه پایین:

$$f_{s1} = f_{s1}^b + f_{s1}^a$$

$$\Delta_1 = u_1 \quad \text{و} \quad \Delta_2 = u_2 - u_1 \rightarrow f_{s1} = K_1 u_1 + K_2 (u_1 - u_2)$$

توجه شود که f_{s1}^a و f_{s2} هر دو بیان کننده برش در طبقه

دوم هستند پس در مقدار مساوی ولی مختلف علامت می باشند پس:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \{f_s\} = [K]\{u\}$$

ماتریس سختی

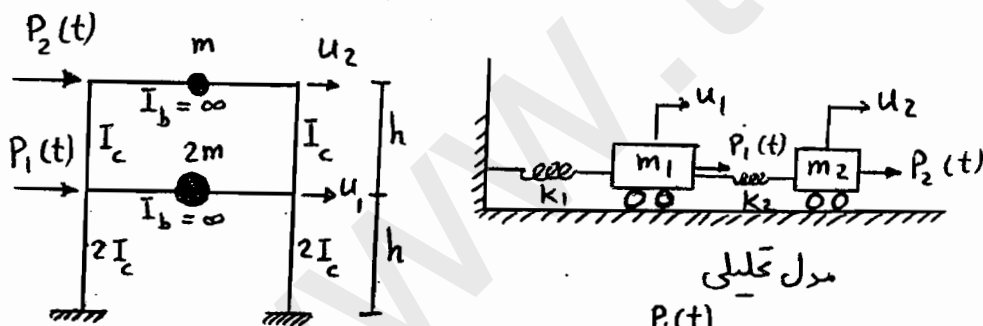
بطور مشابه می توان برای سیزوی میرایی نیز اقدام نمود که البته به دلیل مسائل مطرح در تعیین

میرایی در عمل، معمولاً بصورت درصد میرایی و در معادلات تفلیک شده اعمال می گردد.

در نهایت معادله حرکت بصورت معادله دینامیک برابری نوشته می شود که مجهولات u_1 و u_2

برده و معادله بصورت وابسته است (coupled) که بنابراین معادله باید بصورت همزمان

حل شود. مثال - مطلوب است تعیین معادله حرکت قاب برشی زیر؟ مدول الاستیسیته E



مدل تحلیلی

$$m_1 = 2m, \quad m_2 = m$$

$$K_1 = 2 \frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3}$$

بیکره آزاد

$$K_2 = 2 \frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

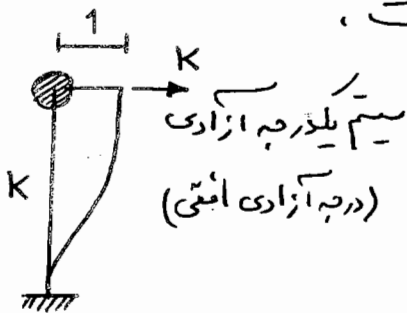
$$[m] = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24 \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

با استفاده از مدل جرم متمرکز، ماتریس جرم همیشه قطری خواهد بود (مانند درم بلوین)، برای تشکیل ماتریس سختی، جلوگیری استفاده از سختی طبقه در سازه‌های بررسی ملاحظه شود، البته در حالت کلی از ضرایب سختی برای تشکیل ماتریس سختی استفاده می‌شود که در ابتدای شروع درس، اسارتی به آنها شد (جلسات اول درس دینامیک سازه‌ها). یادآوری خلاصه:

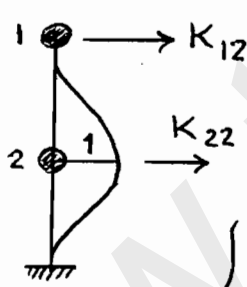
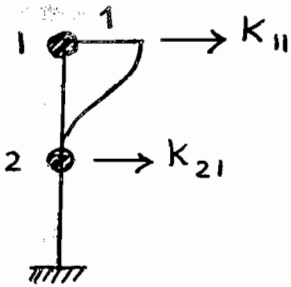
پیرو در درجه آزادی، وقتی تغییر مکان واحد در آن اعمال می‌شود و سایر

درجات آزادی گرفته (قفل) شده است،



$$f_s = K(u - 0) = Ku$$

تغییر مکان نسبی



$$f_{s1} = K_{11} u_1 + K_{12} u_2$$

$$f_{s2} = K_{21} u_1 + K_{22} u_2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

جزئیات تشکیل ماتریس سختی در درس تحلیل سازه‌ها تشریح می‌شود.

طریقه تعیین ضرایب ماتریس‌های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزای محدود

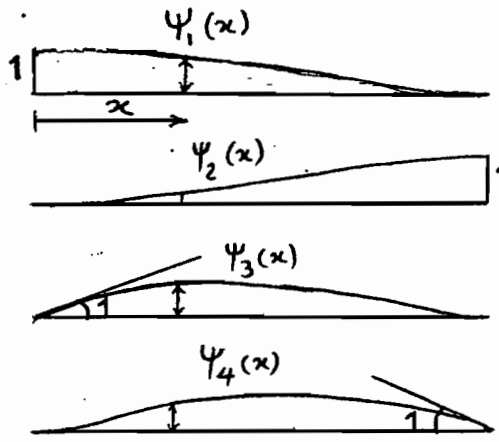
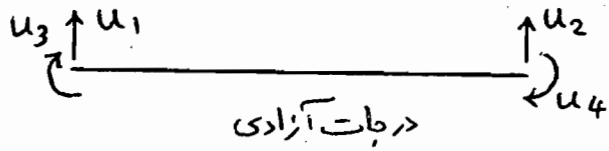
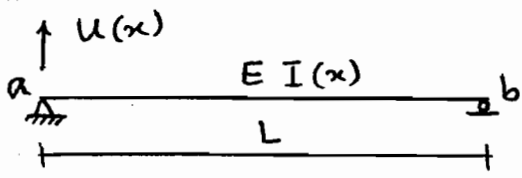
اساس: شبکه بندی، عناصر انتخابی، گره‌ها، توابع شکلی (Shape Function)

$\psi(x)$ با توجه به حالت بارگذاری (صاف یا ...). چند جمله‌ای هریتی یا لاگرانژی ...

خواص چند جمله‌ای‌ها: ارضاء شرایط تغییر شکلی مورد نظر در المان مورد بررسی

جزئیات روش اجزای محدود در درس مربوط بوده و اینجا فقط به نحوه تعیین K_{ij} و m_{ij}

پرداخته می‌شود.



$$\begin{aligned}
 u_a = u_1 = 1 &\rightarrow \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 u_b = u_2 = 1 &\rightarrow \psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 \theta_a = u_3 = 1 &\rightarrow \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\
 \theta_b = u_4 = 1 &\rightarrow \psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)
 \end{aligned}$$

این چهار تابع را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

در حالت کلی تغییر مکان یک نقطه از سیر بصورت زیر خواهد بود:

$$u(x) = \psi_1(x)u_1 + \psi_2(x)u_2 + \psi_3(x)u_3 + \psi_4(x)u_4$$

برای تعیین ضرایب می‌توان از روش تعادل، انرژی، کار مجازی استفاده کرد. اینجا کار مجازی:

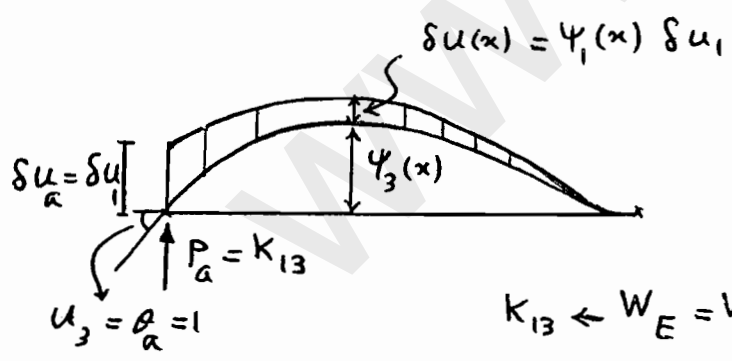
تساوی کار نیروهای خارجی با کار نیروهای داخلی در یک تغییر مکان مجازی

برای نمونه جزئیات سرتاب برای ضریب K_{13} ارائه می‌شود. نیروی تمام ایجاد شده در گره a

برابر چرخش واحد در همان نقطه.

در سیر چرخش واحد در a اعمال شده و

یک تغییر مکان تمام مجازی در a در نظر می‌گیریم.



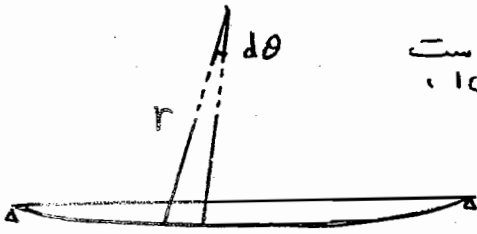
$$K_{13} \leftarrow W_E = W_I$$

در این حالت کار خارجی فقط توسط مرکز تمام نیرو در نقطه a انجام می‌شود زیرا تغییر مکانهای

$$W_E = \delta u_a P_a = \delta u_1 K_{13}$$

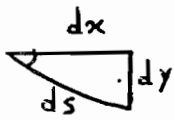
مجازی در گره‌های دیگر صفر است.

کار مجازی داخلی توسط لنگرهای داخلی ناشی از $\theta_a = 1$ بر روی اتکناهای مجازی انجام می‌شود.



در یک سیرت خمش؛ $\frac{1}{r}$ انحناء، $\frac{1}{r} dx = d\theta$ مقدار چرخش است.

$M d\theta$ کار مربوطه می باشد



$$ds \neq dx, \quad d\theta = \frac{ds}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\text{از طرفی} \rightarrow d\theta = \frac{dy}{dx}$$

مقدار انحنای مجازی با مرتظر کرده از اثرات ناشی از تغییر شکل بررسی عبارت از:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

در حالت سرد نظر در اینجا، تغییر کمال مجازی δu می باشد:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2}{dx^2} (\delta u(x)) = \frac{d^2}{dx^2} (\psi_1(x) \delta u_1) = \psi_1''(x) \delta u_1$$

لگر داخلی ناشی از چرخش $\alpha = \theta$ با توجه به $\frac{M}{EI} = y''$ ، $y = \psi_3(x)$

$$M(x) = EI(x) \psi_3''(x) \rightarrow \text{کار داخلی} \quad M d\theta = M \frac{dx}{r}$$

$$W_I = \delta u_1 \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_3''(x) dx$$

$$W_I = W_E \Rightarrow K_{13} = \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_3''(x) dx$$

در حالت کلی ضرایب سختی مربوط به خمش سیر:

$$K_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx$$

در حالت کلی با تعیین ضرایب دیگر

$$\text{ماتریس سختی به روش فوق برای سیر} \quad [K] = \frac{2EI}{L^3}$$

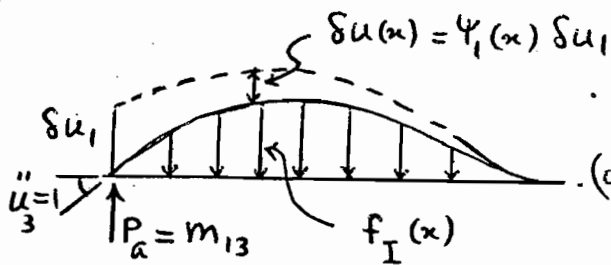
→ مورد نظر خواهیم داشت.

ماتریس کل یک سازه از سرهم بندی ماتریس اجزای

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

Consistent mass matrix

تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (بر)



شماره حالت K_3 عمل می شود (تساوی کارها داخلی و خارجی).

برای نمونه m_{13} مد نظر است.

اگر تحت اثر ستاب زاویه ای واحد در انتهای چپ قرار گیرد $\theta_a = \ddot{u}_3 = 1$ (تعیین)

شتابی در طول تیر ایجاد می شود: $u(x) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 u_3 + \psi_4 u_4$

$$\ddot{u}(x) = 0 + 0 + \psi_3(x) \ddot{u}_3 + 0 \Rightarrow \underline{\ddot{u}(x) = \psi_3(x) \ddot{u}_3}$$

نیروی اینرسی (طبق اصل دالامبر) مقاوم در برابر این شتاب:

$$f_I(x) = m(x) \ddot{u}(x) = m(x) \psi_3(x) \ddot{u}_3$$

ضرایب تأثیر جرم مربوط به این شتاب به عنوان نیروهای اینرسی گروهی نامی از آنه تعریف

می شوند. این نیروها به کمک اصل تغییر مکانهای مجازی از نیروی اینرسی گسترده معادله محاسبه می شوند.

مثلاً با ایجاد تغییر مکان مجازی تمام و مساوی قرار داده کار انجام شده توسط نیروی گروهی

خارجی P_a با کار انجام شده توسط نیروهای اینرسی گسترده $f_I(x)$ ، نیروی تمام در

انتهای چپ محاسبه می شود (هاله m_{13}):

$$W_E = W_I \rightarrow P_a \delta u_a = \int_0^L f_I(x) \delta u(x) dx$$

$$m_{13} \delta u_1 = \int_0^L \underbrace{(m(x) \psi_3(x) x)}_{f_I(x)} \times \underbrace{\psi_1(x) \delta u_1}_{\delta u(x)} dx$$

$$m_{13} = \int_0^L m(x) \psi_1(x) \psi_3(x) dx \rightarrow \boxed{m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx}$$

با تعیین سایر ضرایب از قیاس شکل خود در نهایت ماتریس جرم سازگار المان تیری بصورت زیر!

$$m(x) = \bar{m}$$

$$[m] = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس میرایی نیز بطور مشابه می توان عمل کرد $C_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$
 ولی مشکل ارزیابی $c(x)$ که بیانگر مشخصه استهلاک و ویسکوز پویسته برای هر المان است، می باشد.
 در عمل اثر میرایی بصورت درصد میرایی در معادلات نهایی در نظر گرفته می شود.

بردار بارگذاری

برای تعیین بردار بارگذاری مربوط به درجات آزادی مربوط، ساده ترین روش استفاده از اصول ساده استاتیکی است که بار پیوسته را به صورت گره ها را بطور ساده به درجات آزادی گره ها تقسیم و انتقال می دهد، البته می توان از بارهای گره ای سازگار نیز استفاده کرد، مثلاً تعیین نیروی سازگار سناظر با

$P(x,t)$

$\uparrow P_a = P_i$

$\delta u_1(x) = \psi_1(x) \delta u_1$

u_1 با استفاده از اصل کار مجازی؛ نتیجه:

$$P_i(t) = \int_0^L P(x,t) \psi_1(x) dx$$

در حالت کلی:

$$P_i(t) = \int_0^L P(x,t) \psi_i(x) dx$$

معادله حرکت در حالت کلی $[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{P(t)\}$

① معادله ارتعاش آزاد بدون میرایی $[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$

اگر تعداد درجات آزادی N باشد پس N معادله دیفرانسیل همبسته و وابسته خواهیم داشت. حل معادله ارتعاش آزاد با میرایی امکان پذیر است ولی مستلزم داشتن (تعیین) ماتریس میرایی $[c]$ می باشیم!

جواب معادله بصورت اوبرو در نظر گرفته می شود $\{u(t)\} = \{\phi\}_i \varphi_i(t)$ $\varphi_i(t)$ بردار تغییر شکل که وابسته به زمان نمی باشد و متغیر زمان با تابع $\varphi_i(t)$ وارد مساله می شود:

$\varphi_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t = D_i \sin(\omega_i t + \varphi)$
 A_i و B_i ضرایب ثابت که از شرایط اولیه بدست می آید.

③ $\{u(t)\} = \{\phi\}_i (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$

توجه شود که ϕ_i و φ_i مجهول هستند. رابطه (جواب) ③ در معادله ①!

④ $[-\omega_i^2 [m]\{\phi\}_i + [k]\{\phi\}_i] \varphi_i(t) = \{0\}$

$\varphi_i(t) \neq 0$ پس:

$[[k] - \omega_i^2 [m]] \{\phi\}_i = \{0\}$ یا $[k]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [m]\{\phi\}_i$ ⑤

⑥ $\{\phi\}_i \neq \{0\}$ پس: $\det [[k] - \omega_i^2 [m]] = 0$ معادله مشخصه

معروف N تا N ω_i \Rightarrow چند جمله ای مرتبه N بر حسب ω_i^2

اینها معادله مشخصه یعنی ω_i : مقادیر مشخصه، eigenvalues، فرکانس زاویه ای از رابطه ⑤ می توان بردار $\{\phi\}_i$ را به ازای ω_i ها بدست آورد (البته مقادیر نسبی دامنه حرکت و نه مقادیر مطلق آنها).

$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix}$

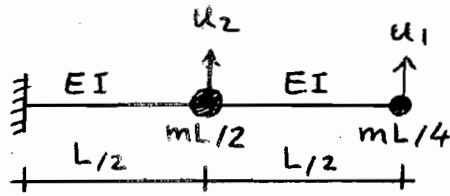
بردار مورد طبیعی، شکل مود ارتعاش، eigenvectors، بردار مشخصه، ...

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots <$

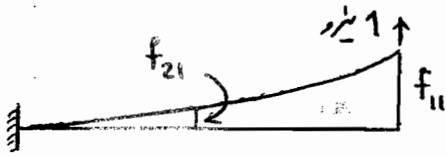
ترتیب شماره گذاری فرکانس ها و پرورها

$T_1 > T_2 > \dots$

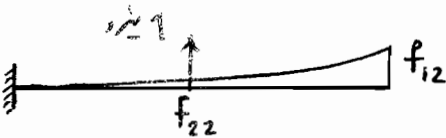
مثال - منظور است تعیین فرکانس زائده ای و نمود شکل های سیستم زیر؟



ابتدا باید معادله حرکت نوشته شود (ماتریس سختی و جرم)!
از روش ماتریس نرم استفاده می شود (احمال نیروی واحد
و محاسبه تغییراتهای حاصل در درجات آزادی) از تحلیل
سازه!



$$[f] = \frac{L^3}{48EI} \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس نرمی}$$



$$[k] = [f]^{-1} = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

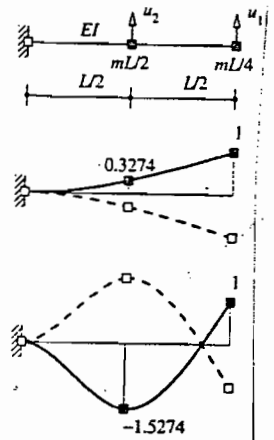
$$[m] = \begin{bmatrix} mL/4 & 0 \\ 0 & mL/2 \end{bmatrix} \rightarrow [m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$$

$$[k] - \omega^2 [m] = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{bmatrix} \leftarrow \lambda = \frac{7mL^4}{192EI} \omega^2 \quad \text{برای سادگی}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.36319, \quad \lambda_2 = 9.6368 \rightarrow \omega_1 = 3.15623 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$\omega_2 = 16.2580 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$



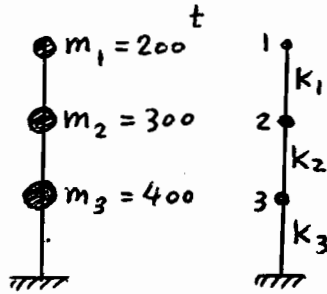
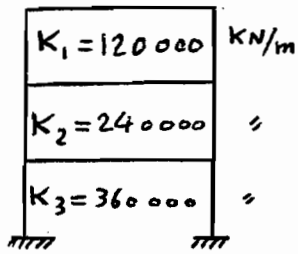
$$[k] - \omega_1^2 [m] \{\phi\}_1 = \{0\}$$

$$[k] - \omega_1^2 [m] \begin{Bmatrix} 1.0 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{21} = 0.3274$$

$$[k] - \omega_2^2 [m] \begin{Bmatrix} 1.0 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{22} = -1.5274$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.3274 \end{Bmatrix}, \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -1.5274 \end{Bmatrix}$$

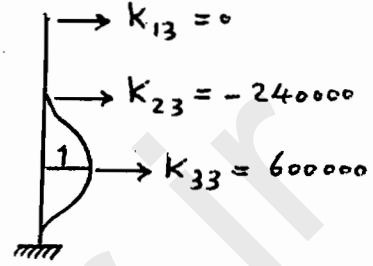
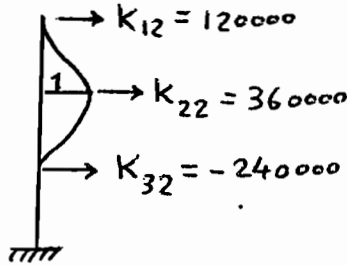
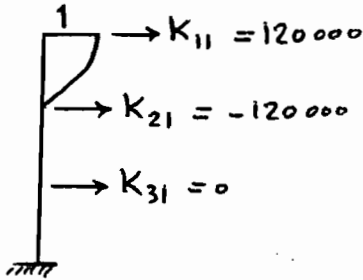
سؤال - در کتاب سه طبقه داده شده بطورست بقیه ϕ_1 و ϕ_2 ؟



$$f_{s1} = k_1(u_1 - u_2)$$

$$f_{s2} = k_2(u_2 - u_3) - k_1(u_1 - u_2)$$

$$f_{s3} = k_3 u_3 - k_2(u_2 - u_3)$$



$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$$

$$u_2 = 1, u_1 = u_3 = 0$$

$$u_3 = 1, u_1 = u_2 = 0$$

$$[K] = 120 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[m] = 200 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$[[K] - \omega^2 [m]] = 120 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 - \lambda_i & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2\lambda_i \end{bmatrix}$$

برای سادگی $\lambda_i = \frac{\omega_i^2}{600}$

$$\lambda_i^3 - 5.5\lambda_i^2 + 7.5\lambda_i - 2 = 0$$

دترمینان ماتریس ایزر صفر ←

$$\lambda_1 = 0.351, \lambda_2 = 1.61, \lambda_3 = 3.54$$

$$\omega_1^2 = 210, \omega_2^2 = 966, \omega_3^2 = 2124$$

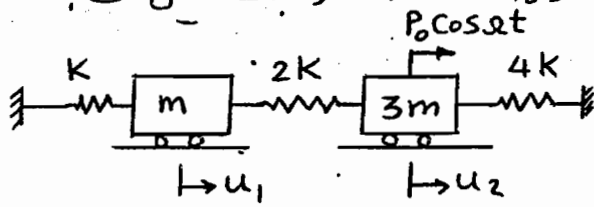
$$\omega_1 = 14.5 \text{ Rad/s}, \omega_2 = 31.1, \omega_3 = 46.1$$

$$[[K] - \omega_i^2 [m]] \{\phi\}_i = \{0\}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 - \lambda_i & -1 & 0 \\ \hline -1 & 3 - 1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2\lambda_i \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 = 1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 1 + \begin{bmatrix} 3 - 1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5 - 2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مسئله - یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است. مطلوب است تحلیل آن؟



$$\left\{ \begin{array}{l} K = 1000 \text{ و } m = 0.5 \\ \xi = 2\% \text{ ، واحد ها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03 \omega_1 \end{array} \right.$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} , \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det [[K] - \omega^2 [m]] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417 \text{ K/m} , \quad \omega_2^2 = 3.7584 \text{ K/m}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} , \quad \Omega = 1.03 \omega_1 = 51.32 \text{ Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319 m , \quad M_2 = 1.4314 m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212 K , \quad K_2 = 5.3798 K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos \Omega t \end{Bmatrix} , \quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792 P_0 \cos \Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792 P_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi] \{q\} = \sum_{i=1}^2 \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468) -$$

اثر برد اول

$$\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.1041 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)$$

اثر برد دوم

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفیه رابطه را در $\{\phi\}^T$ ضرب می کنیم:

$$\{\phi\}_i^T [m][\Phi]\{\ddot{q}\} + \{\phi\}_i^T [c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T [k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T \{P(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & & 0 \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i}_{\text{میز}} \ddot{q}_i + \underbrace{\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i}_{\text{میز}} \ddot{q}_2 + \dots + \underbrace{\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i}_{M_i} \ddot{q}_i + \dots$$

برای در نظر گرفته می برای معمولاً باریک رابطه عمل می شود $[c] = \alpha [m] + \beta [k]$
 بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می شود:

$$\{\phi\}_r^T [c] \{\phi\}_s = 0 \quad \text{و} \quad \{\phi\}_i^T [c] \{\phi\}_i = C_i$$

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i = P_i \quad \text{در نهایت:}$$

$$\{\phi\}_i^T [k] \{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T \{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بین جرم، سختی و میرایی

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i / M_i \quad \text{معادله یک درجه آزادی مستقل}$$

$$i = 1 \text{ تا } N$$

$$\Rightarrow q_i \quad \text{معلوم}$$

$$\{u\} = [\Phi] \{q\} = \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می توان چند مود اول را در نظر گرفت

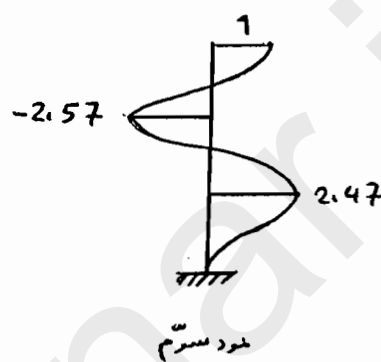
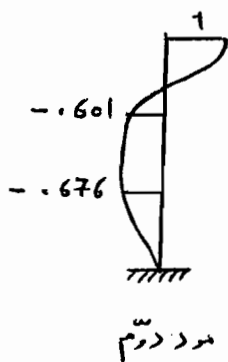
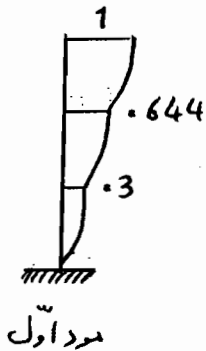
$$\{u\} = \sum_{i=1}^r \{\phi\}_i q_i \quad r \ll N$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5 - 2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.351 \rightarrow \begin{bmatrix} 2.475 & -2 \\ -2 & 4.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{21} = 0.644 \\ \phi_{31} = 0.300 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 1.61 \rightarrow \phi_{22} = -0.601, \phi_{32} = -0.676$$

$$\lambda_3 = 3.54 \rightarrow \phi_{23} = -2.57, \phi_{33} = 2.47$$



ORTHOGONALITY OF MODES

خاصیت تعامد مودها

معادله مشخصه $[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{m}] \{\phi\}_r = \{0\}$ را برای مود شماره r می نویسیم!

$$[\mathbf{K}] \{\phi\}_r - \omega_r^2 [\mathbf{m}] \{\phi\}_r = \{0\} \quad \text{طرفین رابطه را در } \{\phi\}_s^T \text{ ضرب می کنیم!}$$

$$\{\phi\}_s^T [\mathbf{K}] \{\phi\}_r - \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [\mathbf{m}] \{\phi\}_r = 0 \quad (1)$$

حال معادله را برای مود s می نویسیم!

$$[\mathbf{K}] \{\phi\}_s - \omega_s^2 [\mathbf{m}] \{\phi\}_s = \{0\} \quad \text{طرفین رابطه را در } \{\phi\}_r^T \text{ ضرب می کنیم!}$$

$$\{\phi\}_r^T [\mathbf{K}] \{\phi\}_s - \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [\mathbf{m}] \{\phi\}_s = 0 \quad (2)$$

چون $[\mathbf{K}]$ و $[\mathbf{m}]$ متقارن است، رابطه (2) ←

$$\{\phi\}_s^T [\mathbf{K}] \{\phi\}_r - \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [\mathbf{m}] \{\phi\}_r = 0 \quad (3)$$

$$\text{رابطه (3) - رابطه (1)} = (\omega_s^2 - \omega_r^2) \{\phi\}_s^T [\mathbf{m}] \{\phi\}_r = 0 \Rightarrow$$

$$\{\phi\}_s^T [\mathbf{m}] \{\phi\}_r = 0, \{\phi\}_s^T [\mathbf{K}] \{\phi\}_r = 0 \quad \text{رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس}$$

سختی و جرم

الف - با تقسیم مولفه های بردار مود بر بزرگترین عدد آنها، بردار مود به عدد یک مقیاس می شود.

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\phi\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

ب - مقیاس مودک به حسب ماتریس جرم به نحوی که

$$\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i = M_i \rightarrow \{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \{\phi\}_i'$$

ماتریس مودال

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_N]$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس مقادیر مشخصه (فرضاً) (فرضاً)

در مثال قبل:

$$\{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1' = M_1 = 360.2$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 / \sqrt{M_1} \\ 0.644 / \sqrt{M_1} \\ 0.3 / \sqrt{M_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0527 \\ 0.0339 \\ 0.0158 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 1$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال MODAL ANALYSIS

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{P(t)\}$$

از تحلیل ارتعاش آزاد مقادیر ω_i و $\{\phi\}_i$ معلوم است ($i = 1, 2, \dots, N$)

تغییر متغیر از مجهول فیزیکی $\{u\}$ به مجهول مودال $\{q\}$:

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i q_i(t)$$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طریقه رابطه را در $\{\phi\}^T$ ضرب می کنیم:

$$\{\phi\}_i^T [m][\Phi]\{\ddot{q}\} + \{\phi\}_i^T [c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T [k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T \{P(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & 0 \\ & m_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_1}_{\text{صنر}} \ddot{q}_1 + \underbrace{\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_2}_{\text{صنر}} \ddot{q}_2 + \dots + \underbrace{\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i}_{M_i} \ddot{q}_i + \dots$$

برای در نظر گرفته میز برای معمولاً باروش رابطه عمل می شود $[c] = \alpha [m] + \beta [k]$
 بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میز برقرار می شود:

$$\{\phi\}_r^T [c] \{\phi\}_s = 0 \quad , \quad \{\phi\}_i^T [c] \{\phi\}_i = C_i$$

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i = P_i \quad \text{در نهایت:}$$

$$\{\phi\}_i^T [k] \{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T \{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بین جرم، سختی و میز برای

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i / M_i \quad \text{معادله یک درجه آزادی مستقل}$$

$$i = 1 \text{ تا } N$$

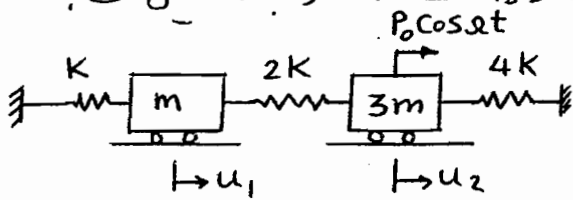
$$\Rightarrow q_i \quad \text{معلم}$$

$$\{u\} = [\Phi] \{q\} = \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه هم است، می توان چند مود اول را در نظر گرفت

$$\{u\} = \sum_{i=1}^r \{\phi\}_i q_i \quad r \ll N$$

مثال - یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است. مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000, & m = 0.5 \\ \xi = 2\%, & \text{واحدها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03 \omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix}, \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \left[[K] - \omega^2 [m] \right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417 \text{ K/m}, \quad \omega_2^2 = 3.7584 \text{ K/m}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix}, \quad \Omega = 1.03 \omega_1 = 51.32 \text{ Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319 \text{ m}, \quad M_2 = 1.4314 \text{ m}$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212 \text{ K}, \quad K_2 = 5.3798 \text{ K}$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos \Omega t \end{Bmatrix}, \quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792 P_0 \cos \Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792 P_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi] \{q\} = \sum_{i=1}^2 \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468) -$$

اثر برداول

$$\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)$$

اثر برد دوم