جزوه

فیلتر و سنتز مدار

* فیلتر و سنتز مدار *

مراجع :

۱- فیلتر و سنتز مدار «اصفهانی»
2. فیلتر و سنتز مدار HAKIN
3- قاضی GHAVSI
4- LAM
5- TEMES
6. فیلتر JOHN SON
7- ZEVEREV
8- VANVALKENBERK

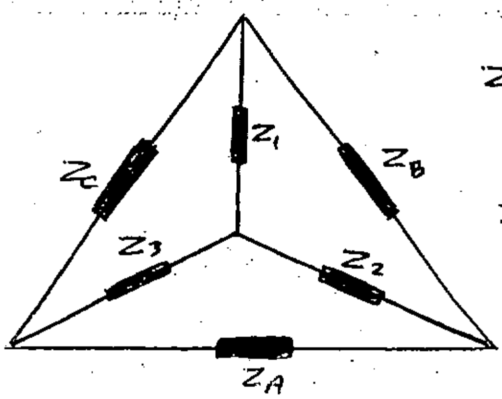
مباحث :

۱- خصوصیت‌های شبکه‌های دوسر (دوقطبی) - پارامترهای مداری - تئوری هم‌پاسی - تئوری حد الزاران مستقل DPS - positiv Real function PRF
عناصر LC - سنتز فوستر و کایر - مشخصات مدار LC - سنتز DP با عناصر LC - RC
تقریب مداری و توابع انتقالی - شبکه‌های نردبانی LC ، RC - صفر مداری - روشهای دارلینگتون - Loss Less
تانک با دو انتهای باز شده.

2- تقریب فیلتر: باتروث - خصوصیت‌های اصلی - تابع انتقالی - تقریب مداری - تقریب چبی شف
چندجمله‌ای چبی شف - تابع انتقالی - فیلترهای بیضوی - تقریب بسل - طراحی تقریب مداری -
تقریب چبی شف معکوس - تبدیلات شبکه ای و فرکانسی LP - B.D - H.P - B.K
مقیاس‌بندی فرکانس و امپدانس - H.P.F - حساسیت‌های فیلتر.

3- فیلتر اکتیو: خصوصیت‌های تقویت کننده‌های عملیاتی - فیلترها BT ، T.W ، DBT ، DTT - فیلتر با ساختار
فیدبک باترورث محدود - NI ، NIC - طراحی با NIC توسط ترانزیستور - ژیراتور - طراحی با ژیراتور

* فیلترها *



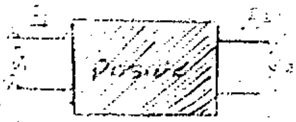
$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_1}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_2}$$

$$Z_1 = \frac{Z_C Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad , \quad Z_2 = \frac{Z_A Z_B}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad , \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

شبکه‌های دوقطبی :



* پارامترهای y ، z ، h ، g ، $A.B.C.D$ ، S ، T

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

مثال : رابطه‌های بین پارامترهای z و y را تعیین کنید.

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad I_1 = \frac{Z_{22} V_1 - Z_{12} V_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{21} Z_{12}} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} V_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta Z} V_2$$

بقیه هم به همین طریق حاصل می‌شوند. پس

$$y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} \qquad y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} \qquad y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} \qquad y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \qquad \Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$$

$$Z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} \qquad Z_{12} = \frac{-y_{12}}{\Delta y} \qquad Z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta y} \qquad Z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} \qquad \Delta y = y_{11} y_{22} - y_{21} y_{12}$$

H.W - رابطه بین پارامترهای A, B, C, D برحسب z, y, h, g را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$$

پارامترهای A, B, C, D

پارامترهای y

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow{\text{اگر } V_1 \text{ را حذف کنیم}} \begin{cases} V_1 = -\dfrac{y_{22}}{y_{21}} V_2 + \dfrac{1}{y_{21}} I_2 \\ I_1 = \dfrac{-\Delta y}{y_{21}} V_2 + \dfrac{y_{11}}{y_{21}} I_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{y_{22}}{y_{21}} \ , \quad B = \frac{-1}{y_{21}} \ , \quad C = \frac{-\Delta y}{y_{21}} \ , \quad D = \frac{-y_{11}}{y_{21}}$$

و اما ارتباط بین Δy ، ΔZ را بررسی می‌کنیم

$$\Delta y\,\Delta Z = (y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})\,\Delta Z$$

$$= \left(\frac{Z_{22}}{\Delta Z}\cdot\frac{Z_{11}}{\Delta Z} - \frac{-Z_{21}}{\Delta Z}\cdot\frac{-Z_{12}}{\Delta Z}\right)\Delta Z = 1$$

$$\boxed{\Delta y \cdot \Delta Z = 1}$$

پس با استفاده از روابط بین y و D ، C ، B ، A میتوان روابط A ، B ، C ، D را برحسب z تعیین کرد.

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad , \quad B = \frac{+\Delta Z}{Z_{21}} \quad , \quad C = \frac{1}{Z_{21}} \quad , \quad D = \frac{+Z_{22}}{Z_{21}}$$

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \xrightarrow{I_1 \text{ حذف}} V_1 = -\frac{\Delta h}{h_{21}}V_2 + \frac{h_{11}}{h_{21}}I_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}}V_2 + \frac{1}{h_{21}}I_2 \quad \Rightarrow$$

$$A = -\frac{\Delta h}{h_{21}} \quad , \quad B = \frac{-h_{11}}{h_{21}} \quad , \quad C = -\frac{h_{22}}{h_{21}} \quad , \quad D = \frac{-1}{h_{21}}$$

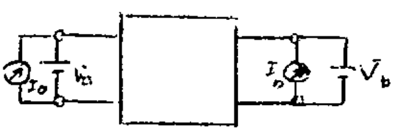
$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \xrightarrow{V_1 \text{ حذف}} I_1 = \frac{g_{11}}{g_{21}}V_2 - \frac{\Delta g}{g_{21}}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = -\frac{g_{22}}{g_{21}}I_2 + \frac{1}{g_{21}}V_2$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{g_{21}} \quad , \quad B = +\frac{g_{22}}{g_{21}} \quad , \quad C = \frac{g_{11}}{g_{21}} \quad , \quad D = +\frac{\Delta g}{g_{21}}$$

یکی از خواص پارامترهای A ، B ، C و D (پارامترهای انتقال) این است که هرگاه چند سیستم بصورت cascade بسته شوند از ضرب کردن ماتریسهای انتقال ماتریس انتقال کل بدست خواهد آمد. در ضمن پس از انجام محاسبات براحتی میتوان پارامترهای A،B،C،D را به پارامترهای دیگر تبدیل نمود.

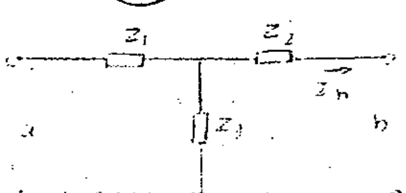
* تئوری هم‌پاسخی: میخواهیم در شبکه دوقطبی روبرو ثابت کنیم



$$\frac{V_a}{I_b} = \frac{V_b}{I_a}\bigg|_{V_a = V_b}$$

به عبارت دیگر $Z_{12} = Z_{21}$ یا $y_{12} = y_{21}$

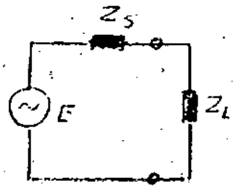
چون هر شبکه دوقطبی را میتوان بصورت مدار T نمایش داد پس رابطه فوق را برای مدار T ثابت می‌کنیم.



$$I_b = \frac{Z_3/(Z_3+Z_2)}{Z_1 + \frac{Z_3 Z_2}{Z_2+Z_3}}\,V_a = \frac{Z_3 V_a}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

$$I_a = \frac{Z_3/Z_1+Z_3}{Z_2+\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_3}} V_h = \frac{Z_3 V_h}{Z_2Z_1+Z_2Z_3+Z_1Z_3} \Rightarrow \frac{V_o}{I_h} = \frac{V_h}{I_a}\Big|_{V_i=V_h}$$

* قضیه انتقال حداکثر توان



توان مختلط $P = \frac{E^2}{Z_s+Z_L} = \frac{E^2}{R_s+R_L+j(X_s+X_L)} = \frac{E^2[(R_s+R_L)-j(X_s+X_L)]}{(R_s+R_L)^2+(X_s+X_L)^2}$

توان را تشکیل می دهد $P = Re\,P \Rightarrow P = \frac{E^2(R_s+R_L)}{(R_s+R_L)^2+(X_s+X_L)^2}$ $\quad \frac{dP}{dX_L}=0 \Rightarrow X_L=-X_s$

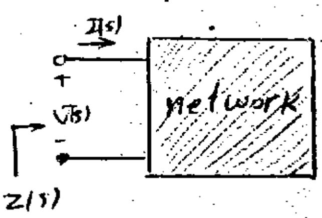
توان ارسالی به بار $P = \frac{E^2R_L}{(R_L+R_s)^2+(X_s+X_L)^2}$

$\frac{\partial P}{\partial R_L}=0 \Rightarrow R_s=R_L \quad \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_s^*}$

PRF $\qquad$ positive real function *

IF s is real then z(s) is real and Re{z(s)} Grater than zerro

یعنی تابعی وجود داشته باشد که به ازای s های حقیقی z(s) نیز حقیقی شود و همچنین به ازای هر s در نواحی ناحیه
سمت حقیقی z(s) مثبت باشد.



اثبات : $z(s) \longrightarrow$ Driving point Impedance (DPI)

$$v(t)=e^{\sigma_1 t}\cos\omega_1 t \qquad z(t)=Z=|Z|e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow i(t)=\frac{e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t-\varphi)}{|Z|} \qquad w(t)=\int_0^T v(t)\cdot i(t)\,dt$$

کار مصرف شده

$$\Rightarrow w(t)=\int_0^T\left[e^{2\sigma t}\cos\omega_1 t\cos(\omega_1 t-\varphi)\right]/|Z|\;dt$$

$$w(t)=\int_0^t \frac{e^{2\sigma t}}{2|Z|}\left(\cos(2\omega_1 t-\varphi)+\cos\varphi\right)dt=\int_0^t\frac{e^{2\sigma t}}{2|Z|}\cos(2\omega_1 t-\varphi)\,dt$$

$$+\int_0^t\frac{e^{2\sigma_1 t}}{2|Z|}\cos\varphi\,dt \Rightarrow w(t)=\frac{\cos\varphi\, e^{2\sigma_1 t}}{4\sigma_1|Z|}+\frac{1}{2|Z|}\int_0^t e^{2\sigma_1 t}\cos(2\omega_1 t-\varphi)\,dt$$

$$\Rightarrow w(t)=\frac{e^{2\sigma_1 t}\cos\varphi}{4\sigma_1|Z|}+\frac{1}{4|Z|}\left[\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2+\omega_1^2}\cos(2\omega_1 t-\varphi)+\frac{\omega_1}{\omega_1^2+\sigma_1^2}\sin(2\omega_1 t-\varphi)\right]$$

مثال:

$$Z(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1} \Rightarrow Z(s)=\frac{\sigma+j\omega+1}{(\sigma+j\omega)^2+\sigma+j\omega+1} \Rightarrow$$

$$Z(s)=\frac{(\sigma+1+j\omega)\left[\sigma^2-\omega^2+\sigma+1-j\omega(1+2\sigma)\right]}{(\sigma^2+\sigma+1-\omega^2)^2+\omega^2(1+2\sigma)^2} \Rightarrow Re\{Z(s)\}=\frac{(\sigma+1)(\sigma^2+\sigma+1)+\sigma\omega^2}{〃}$$

$$\text{IF } \sigma\geq 0 \Rightarrow Re\{Z(s)\}\geq 0 \quad , \quad \text{IF } s \text{ is real} \Rightarrow Z(s) \text{ is real}$$

پس تابع فوق PRF است.

مثال:

$$Z(s)=\frac{s+2}{s^2+s+1} \Rightarrow Z(s)=\frac{\sigma+2+j\omega}{(\sigma+j\omega)^2+\sigma+j\omega+1}$$

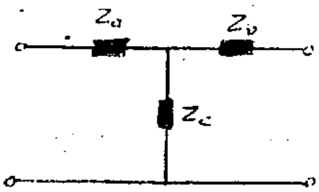
$$\Rightarrow Z(s)=\frac{(\sigma+2+j\omega)\left[\sigma^2+\sigma+1-\omega^2-j\omega(1+2\sigma)\right]}{〃} \Rightarrow (\sigma+2)(\sigma^2+\sigma+1)+\omega^2(\sigma-1)\,/\,〃$$

ملاحظه می شود که قسمت حقیقی $Z(s)$

امکان منفی شدن $Re\{Z(s)\}$ وجود دارد. مثلاً به ازای $\sigma=1/2$ ، $\omega^2>35/4$ ، $Z(s)$ کوچکتر از صفر خواهد شد. پس P.R.F نیست.

مدار T ، Π ، TT

* مدار T



$$Z_{11}=\frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}=Z_a+Z_c$$

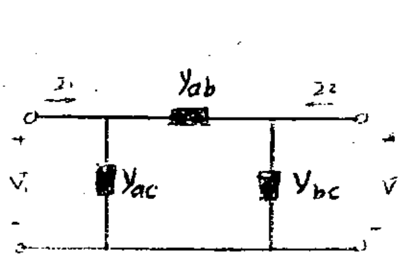
$$Z_{21}=\frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}=Z_c$$

$$Z_{12}=\frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}=Z_c \qquad Z_{22}=\frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}=Z_b+Z_c$$

$$\begin{cases} Z_{11}=Z_a+Z_c \\ Z_{21}=Z_c \\ Z_{12}=Z_c \\ Z_{22}=Z_b+Z_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z_a=Z_{11}-Z_{21} \\ Z_c=Z_{21} \\ Z_b=Z_{22}-Z_{21} \end{cases}$$

با استفاده از روابط فوق هر مداری را می توان تبدیل به مدار T نمود.

* مدار Π



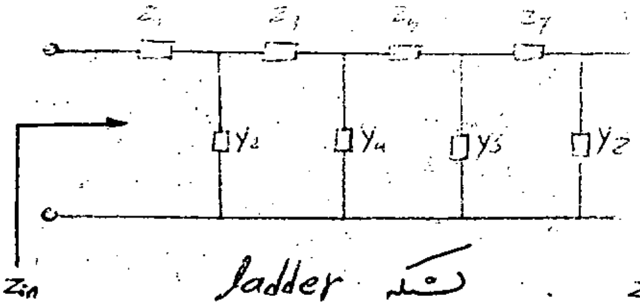
$$Y_{11}=\frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0}=Y_{ac}+Y_{ab}$$

$$Y_{12}=Y_{21}=\frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0}=-Y_{ab}$$

$$Y_{22}=\frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}=Y_{bc}+Y_{ab}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_{ab}=-Y_{12}=-Y_{21} \\ Y_{ac}=Y_{11}+Y_{12} \\ Y_{bc}=Y_{22}+Y_{12} \end{cases}$$

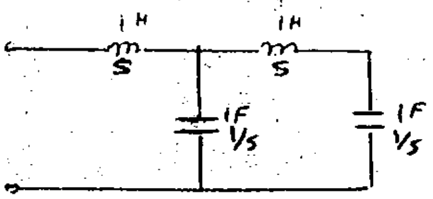
مثال اگر T و π را پشت سرهم ببندیم :



ladder شبکه

$$Z_{in} = z_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{z_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{z_5 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

مثال : $z_1 = s \ , \ y_2 = s \ , \ z_3 = s \ , \ y_4 = s$

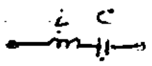


$$\Rightarrow Z_{in} = s + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s + \frac{1}{s}}} = s + \cfrac{1}{s + \frac{s}{s^2+1}}$$

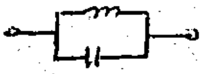
$$\Rightarrow Z_{in} = s + \frac{s^2+1}{s^3+2s} = \frac{s^4+3s^2+1}{s^3+2s} \quad (I)$$

* حال اگر تابعی بصورت (I) به ما بدهند با تقسیمات متوالی صورت بر مخرج میتوان مدار را رسم کرد.

* سنتز مدارهای LC *



$$z(s) = Ls + \frac{1}{Cs} = \frac{LCs^2+1}{Cs} \Rightarrow Y(s) = \frac{Cs}{1+LCs^2}$$



$$Y(s) = Cs + 1/Ls = \frac{1+LCs^2}{Ls} \Rightarrow z(s) = \frac{Ls}{1+LCs^2}$$

سنتز فوستر I و II برای مدارات LC و RC و LR

در فوستر I ، Z را و در فوستر II ، Y را سنتز می کنیم.

خصوصیات شبکه های LC :

الف) Z(s) یا DPI هیچ گونه قطب مثبتی (در سمت راست صفحه موهومی) و حقیقی ها ندارد

ب) صفرها و قطبها بطور تناوبی هستند یعنی همیشه بین دو صفر یک قطب و بین دو قطب یک صفر می باشد.

ج) تمام جملات مثبت می باشند.

د) همیشه یک صفر یا یک قطب در مبدأ وجود دارد.

ه) تفاوت مرتبه صورت و مخرج همیشه واحد است.

و) شیب منحنی همیشه مثبت است. ریشه های آنها بصورت موهومی خالص بوده بجز از قطب یا

ز) صفر در مبدأ [illegible] نیست.

فوستر I

$$Z(s) = Hs + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^{m} \frac{K_i s}{s^2+\omega_i^2} = Z_1 + Z_2 + \cdots$$

فوستر II

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots = \frac{K_0}{s} + H(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i s}{s^2+\omega_i^2}$$

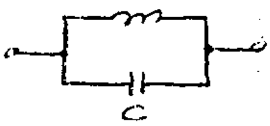
$(I)\ Z(s) = \frac{As^2+B}{Ds}$ $(II)\ Z(s) = \frac{As}{Bs^2+D}$ $(III)\ Y(s) = \frac{m+ns^2}{Ks}$ $(IV)\ Y(s) = \frac{Ks}{ns^2+m}$

میخواهیم مقادیر خازن و سلف را

(I) L C $\quad Z(s) = \frac{1+LCs^2}{Cs} \Rightarrow Z(s) = \frac{s^2+1/LC}{\frac{1}{L}s}$

$Z(s) = \frac{s^2+B/A}{\frac{D}{A}s}$

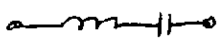
$$Z(s) = \frac{As}{s^2+B}$$



$$\Rightarrow Z(s) = \frac{Ls}{1+LCs^2} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2+1/LC}$$

$$\Rightarrow A = 1/C \Rightarrow C = 1/A \quad , \quad LC = 1/B \Rightarrow L = \frac{1}{BC} = \frac{A}{B} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} C = 1/A \\ L = A/B \end{cases}}$$

$$Y(s) = \frac{As}{s^2+B}$$



$$\Rightarrow Y(s) = \frac{Cs}{1+LCs^2} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2+1/LC} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} L = 1/A \\ C = A/B \end{cases}}$$

مثال: شبکه مقابل را بصورت فوستر I و II سنتز کنید.

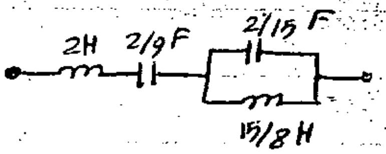
$$Z(s) = \frac{2(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

جواب: تمامی شرایط مدارهای LC را دارا است.

$$Z(s) = \frac{2s^4+20s^2+18}{s(s^2+4)} = 2s + \frac{A}{s} + \frac{Bs}{(s^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 12 \\ 4A = 18 \end{cases} \Rightarrow A = 9/2,\ B = 15/2$$

$$= 2s + \frac{12s^2+18}{s(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow Z(s) = 2s + \frac{9/2}{s} + \frac{15/2\,s}{s^2+4}$$



نکته: تعداد المانها به حداکثر درجه DPI ها بستگی دارد.

DPI : Driving Point Impedance.

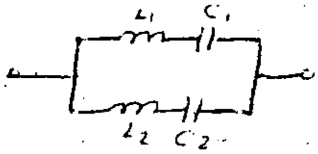
DPA : Driving Point Admitance.

. سنتز مدار فوق بروش فوستر II

$$y(s) = \frac{s(s^2+4)}{2(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{As}{(s^2+1)} + \frac{Bs}{s^2+9}$$

$A = 3/16 ، B = 5/16$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{\frac{3}{16}s}{s^2+1} + \frac{\frac{5}{16}s}{s^2+9}$$



$L_1 = 16/3\ H \qquad C_1 = 3/16\ F$

$L_2 = 16/5\ H \qquad C_2 = 5/144\ F$

سنتز بروش cauer (شبکه ladder)

با تقسیمات متوالی صورت بر مخرج و مخرج بر صورت میتوان Z ها و Y ها را بدست آورد.

همیشه در این روش ابتدا Z(s) را بصورت یک قطب جدا از صورت و یک قطب جدای از مخرج تبدیل می‌کنیم.

مثال: مثال قبل را بروش cauer سنتز کنید.

$$Z(s) = \frac{2(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} = \frac{2s^4+20s^2+18}{s^3+4s}$$

$\Rightarrow s^3+4s \,)\, 2s^4+20s^2+18 \,(\, 2s \to Z$

$2s^4+8s^2$

$12s^2+18 \,)\, s^3+4s \,(\, \frac{1}{12}s \to Y$

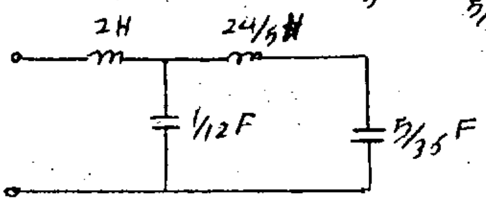
$s^3+\frac{3}{2}s$

$\frac{5}{2}s \,)\, 12s^2+18 \,(\, \frac{24}{5}s \to Z$

$12s^2$

$18 \,)\, \frac{5}{2}s \,(\, \frac{5}{36}s \to Y$

$$\Rightarrow Z(s) = 2s + \cfrac{1}{\frac{1}{12}s + \cfrac{1}{\frac{24}{5}s + \cfrac{1}{\frac{5}{36}s}}}$$



روش بالا به کایر I موسوم است در این روش صورت و مخرج تابع شبکه را بصورت توانهای نزولی s مرتب می‌کنیم و سپس عمل تقسیم متوالی را انجام می‌دهیم.

* کایر II در این روش صورت و مخرج را برحسب توانهای صعودی s مرتب می‌کنیم و سپس عملیات تقسیم را انجام می‌دهیم. در ضمن از DPA استفاده می‌کنیم.

مثال: همان مثال قبل را بروش کایر II سنتز کنید.

$$y = \frac{s^3+4s}{s^4+10s^2+9}$$

$$y = \frac{4s+s^3}{9+10s^2+s^4}$$

ممکن است ترکیبی از دو روش کایر I یا II جواب منفی بدست آوریم که در اینصورت محاسبات را متوقف می‌کنیم و با روش دیگر ادامه می‌دهیم.

$4s+s^3 \,\big)\, 9+10s^2+s^4 \,\big)\, \frac{9}{4s} \longrightarrow Z \quad \Rightarrow C_1 = 4/9F$

$9+\frac{9}{4}s^2$

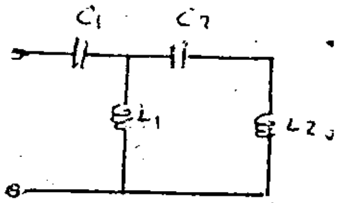
$\frac{31}{4}s^2+s^4 \,\big)\, 4s+s^3 \,\big)\, \frac{16}{31s} \longrightarrow Y \quad \Rightarrow L_1 = \frac{31}{16}H$

$4s+\frac{16}{31}s^3$

$\frac{15}{31}s^3 \,\big)\, \frac{31}{4}s^2+s^4 \,\big)\, \frac{961}{60s} \longrightarrow Z \Rightarrow C_2 = \frac{60}{961}F$

$\frac{31}{4}s^2+$

$s^4 \,\big)\, \frac{15}{31}s^3 \,\big)\, \frac{15}{31s} \longrightarrow Y \Rightarrow L_2 = \frac{31}{15}H$



• گاهی ممکن است قسمتی از شبکه را به یک روش و قسمت دیگر را به روشهای دیگر سنتز کنیم.

مثال:

$$Z(s) = \frac{5s(s^2+2)(s^2+4)(s^2+6)}{(s^2+1)(s^2+3)(s^2+5)} = 5s\left(A_0+\frac{A_1}{s^2+1}+\frac{A_2}{s^2+3}+\frac{A_3}{s^2+5}\right)$$

$$A_0=1 \qquad A_1 = \left.\frac{(s^2+2)(s^2+4)(s^2+6)}{(s^2+3)(s^2+5)}\right|_{s^2=-1} = \frac{15}{8}, \quad A_2=\frac{3}{4}, \quad A_3 = 3/8$$

$$\Rightarrow Z(s) = 5s\left(1+\frac{15/8}{s^2+1}+\frac{3/4}{s^2+2}+\frac{3/8}{s^2+5}\right) = 5s+\frac{75/8\, s}{s^2+1}+\frac{15/4\, s}{s^2+3}+\frac{15/8\, s}{s^2+5}$$

فرض می‌خواهیم دو جمله آخر را بصورت کایر I سنتز کنیم

$$Z(s) = 5s+\frac{75/8\, s}{s^2+1}+Z_2(s)$$

$$Z_2(s) = \frac{\frac{45}{8}s^3+\frac{195}{8}s}{(s^2+3)(s^2+5)} = \frac{45s^3+195s}{8s^4+64s^2+120}$$

$45s^3+195s \,\big)\, 8s^4+64s^2+120 \,\big)\, \frac{8}{45}s \longrightarrow Y$

$8s^4+\frac{8\times13}{3}s^2$

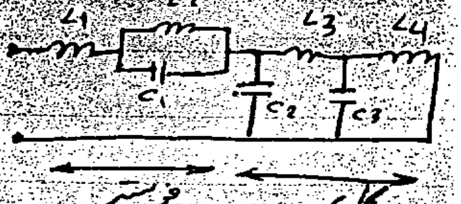
$\frac{88}{3}s^2+120 \,\big)\, 45s^3+195s \,\big)\, \frac{135}{88}s \longrightarrow Z$

$45s^3+\frac{2025}{11}s$

$\frac{120}{11}s \,\big)\, \frac{88}{3}s^2+120 \,\big)\, \frac{121}{45}s \longrightarrow Y$

$88/3\, s^2+\frac{88}{3}$

$\frac{272}{3} \,\big)\, \frac{120}{11}s \,\big)\, \frac{45}{374}s \longrightarrow Z$



$L_1 = 5H \qquad L_2 = \frac{75}{8}H$

$C_1 = \frac{8}{75}F \qquad C_2 = \frac{8}{45}F$

$L_3 = \frac{135}{88}H \qquad C_3 = \frac{121}{45}F$

$L_4 = \frac{45}{374}H$

- دیگر ای ماتریس پارامتر $[S]$

$$\begin{cases} [S] = \left([Z'] - [1]\right)\left([Z'] + [1]\right)^{-1} \\ [Z'] = \dfrac{[Z]}{(Z_0)} \qquad , Z_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

*** H.W. ***

* پارامترهای S_{11}، S_{12}، S_{21}، S_{22} را برحسب پارامترهای Z تعیین کنید.

* transfer function from Amplitud function *

همیشه در آزمایش یک جعبه (شبکه) $|H(j\omega)|$ مشخص می‌شود. می‌خواهیم از خواص تابع شبکه استفاده کنیم و خود $H(j\omega)$ را به دست آوریم.

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) \Rightarrow |H(j\omega)|^2 = H(j\omega)\cdot H^*(j\omega) = H(j\omega)\cdot H(-j\omega)$$

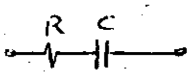
$$\underset{\substack{\downarrow \\ PRF}}{H(s)}\cdot \underset{\text{Not } PRF}{H(-s)}\Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 \qquad \text{IF } H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow \frac{P(s)}{Q(s)}\cdot\frac{P(-s)}{Q(-s)} = |H(j\omega)|^2\Big|_{\omega^2=-s^2}$$

مثال: در $|H(j\omega)|^2$ به جای ω^2 مقدار $-s^2$ قرار می‌دهیم سپس آن را به قسمت $H(s)$، $H(-s)$ تقسیم می‌کنیم.

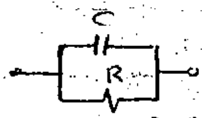
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{4+\omega^2}{1+\omega^6} \qquad \omega^2 \longrightarrow -s^2 \Rightarrow H(s)\cdot H(-s) = \frac{4-s^2}{1-6s^2} \Rightarrow$$

$$H(s)\cdot H(-s) = \frac{(2-s)(2+s)}{(1-s^3)(1+s^3)} = \frac{(2-s)(2+s)}{(1-s)(1+s^2+s)(1+s)(1-s+s^2)}$$

$$\Longrightarrow H(s) = \frac{s+2}{(1+s)(1+s^2+s)}$$



$$Z = \frac{1+RCS}{CS} \qquad y = \frac{CS}{1+RCS}$$



$$Y = \frac{1+RCS}{R} \qquad Z = \frac{R}{1+RCS}$$

سنتز مدارهای RC

ابتدا RC سری و موازی را بررسی می‌کنیم:

کوچکترین فرکانس بحرانی در $Z(s)$ برای مدارات RC یک قطب است.

سنتز مدارهای RC نیز دقیقاً شبیه سنتز مدارهای RL است.

و روشهای فوستر I و II، کائر I و II در اینجا نیز استفاده خواهد شد.

فوستر I

$$Z(s) = A_\infty + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\sigma_1} + \frac{A_3}{s+\sigma_2} + \cdots$$

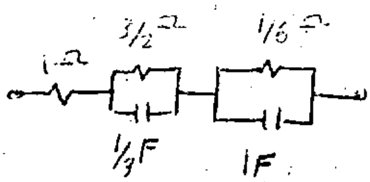
چون در فوستر I RC ها را به صورت جملات سری خواهند شد $Z(s)$ به صورت $\frac{A}{s+\sigma}$ ترکیب است.

مثال: فوستر I

$$Z(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{(s+2)(s+6)}$$

زوجهای نزدیکی بجز آنکه قطب است کمی RC است

$$Z(s) = A_0 + \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+6} = 1 + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+6} \Rightarrow$$



$$= 1 + \frac{1}{\frac{s}{3}+\frac{2}{3}} + \frac{1}{s+6}$$

* ولی در فوستر II ‏$Y(s)$ بصورت تبدیل شکسته خواهد شد.

$$Y(s) = A_0 + A_1 s + \frac{A_2 s}{s+\sigma_1} + \frac{A_3 s}{s+\sigma_2} + \cdots$$

زیرا در این حالت RC های سری با هم موازی خواهند شد و برای RC سری داریم

$$y = \frac{Cs}{1+RCs}$$

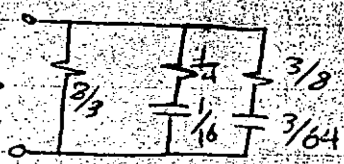
A_0 و $A_1 s$ نیز نشان دهنده مقاومت و خازن است که اضافتاً با RC های سری موازی می‌شود.

مثال برای فوستر II

$$Y(s) = \frac{(s+2)(s+6)}{(s+4)(s+8)}$$

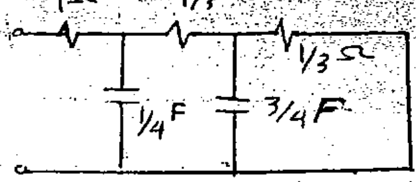
$$Y(s) = A_0 + \frac{A_1 s}{s+4} + \frac{A_2 s}{s+8} = \frac{3}{8} + \frac{1/4\, s}{s+4} + \frac{3/8\, s}{s+8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4+\frac{16}{s}} + \frac{1}{\frac{8}{3}+\frac{64}{3s}} \Rightarrow$$



همین مثال به روش کاور I

$$Z(s) = \frac{s^2+12s+32}{s^2+8s+12}$$



$s^2+8s+12\ )\ s^2+12s+32\ )\quad 1 \rightarrow z$

$s^2+8s+12$

$4s+20\ )\ s^2+8s+12\ )\quad \frac{1}{4}s \rightarrow y$

s^2+5s

$3s+12\ )\ 4s+20\ )\quad \frac{4}{3} \rightarrow z$

$4s+16$

$4\ )\ 3s+12\ )\quad \frac{3}{4}s \rightarrow y$

$3s$

$12\ )\ 4\ )\quad \frac{1}{3} \rightarrow z$

همین مثال به روش کایر II

$$Z(s) = \frac{32+12s+s^2}{12+8s+s^2}$$

اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم معلوم است که در ابتدا سری خواهیم داشت .

پس ابتدا مخرج را بر صورت تقسیم می کنیم .

$32+12s+s^2\ )\ 12+8s+s^2\ )\ \frac{3}{8} \rightarrow Y$

$12+4.5s+\frac{3}{8}s^2$

$3.5s+\frac{5}{8}s^2\ )\ 32+12s+s^2\ )\ 9.14/s \rightarrow Z$

$32+5.71s+\cdot$

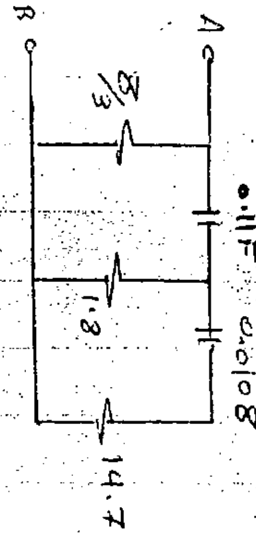
$6.28s+s^2\ )\ 3.5s+\frac{5}{8}s^2\ )\ 0.55 \rightarrow Y$

$3.5s+0.55s^2$

$0.068s^2\ )\ 6.28s+s^2\ )\ 92.1/s \rightarrow Z$

$6.28s$

$s^2\ )\ 0.068s^2\ )\ 0.068 \rightarrow Y$



سنتز مدارهای RL . که همانند تئوری مدارهای ... برای Z(s) در مدارات RL یک جزء است . با تفاوت با RC)

$$Z = R + Ls \quad , \quad Y = \frac{1}{R+Ls}$$

$$Z = \frac{1}{Y} \quad Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} = \frac{Ls+R}{RLs} \Rightarrow Z = \frac{RLs}{Ls+R}$$

پس در فوستر I که RL های موازی با هم سری خواهند شد Z را به صورت $\sum \frac{A_i s}{s+\sigma_i}$ تجزیه خواهیم کرد

در صورتی که در فوستر II که RL های سری با هم موازی خواهند شد Z را به صورت

$$\sum \frac{A_i}{s+\sigma_i}$$

تجزیه می کنیم .

* scalling تئوری *

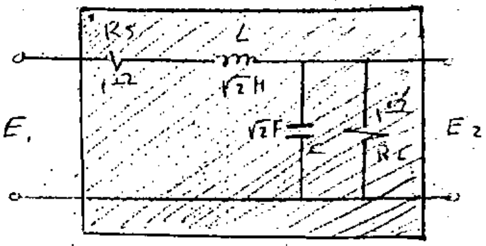
مقادیری که تا کنون در مسائل مطرح شده است مقادیر عملی نمی باشند بلکه مقادیر scall شده هستند .

مثلاً مقدار 2F بسیار غیر معقول است .

* [illegible] *	* [illegible] *	* در مجموع *
$R \longrightarrow KR = R'$	$R \longrightarrow KR = R'$	
$L\omega \longrightarrow KL\omega = L'\omega$	$L\omega \longrightarrow KL\omega = L'\omega'$	
$\frac{1}{C\omega} \longrightarrow \frac{K}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega}$	$\frac{1}{C\omega} \longrightarrow \frac{K}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega'}$	

$$\Rightarrow \begin{cases} R' = KR \\ L' = KL\frac{\omega}{\omega'} \\ C' = \omega C / K\omega' \end{cases}$$

مثال: فیلتر باترورث شکل زیر را در نظر بگیرید



$$H(s) = \frac{E_2}{E_1}$$

$$H(s) = \frac{1/2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

هرگاه بخواهیم $R_S = 1k\Omega$ و فرکانس 3dB- برابر 10KHZ باشد مقادیر جدید المانها را بدست آورید

$R_S = 1k\Omega \Rightarrow R_L = 1k\Omega$

$K = 1000$

$$\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (\sqrt{2}\omega)^2} = \sqrt{1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 2\omega^2} = \sqrt{2}$$

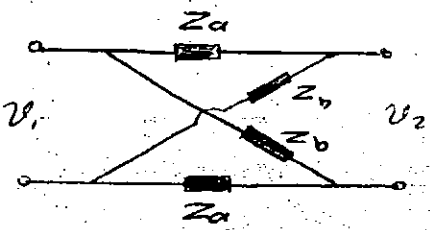
$$\Rightarrow \omega = 1$$

یعنی فرکانس قطع فیلتر 1Hz می‌باشد پس $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{10^{-4}}{2\pi}$ در نتیجه

$$L' = KL\,\omega/\omega' = 1000 \times \sqrt{2} \times \frac{10^{-4}}{2\pi} \Rightarrow L' = 22.5\ mH$$

$$C' = \frac{C\omega}{K\omega'} = \frac{\sqrt{2} \times 10^{-4}}{100 \times 2\pi} = 22.5\ nF$$

شبکه‌های ضربدری متقارن



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b)$$

$$Z_{12} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} = \frac{1}{2}[Z_b - Z_a]$$

$$\Rightarrow Z_a = Z_{11} - Z_{12} \quad , \quad Z_b = Z_{11} + Z_{12} \quad , \quad \boxed{H(s) = \frac{Z_{12}}{Z_{11}}\Big|_{I_2=0} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_a + Z_b}}$$

ملاحظه می‌شود که H(s) مشخصه یک فیلتر تمام گذر می‌باشد.

* سنتز مدارات ضربدری متقارن *

* 1- اگر Z_{11} و Z_{12} شبکه معلوم باشد بصورت زیر عمل می‌شود.

$Z_a = Z_{11} - KZ_{12}$

$Z_b = Z_{11} + KZ_{12}$

و K را طوری تعیین می‌کنیم که Z_a ، PRF باشد.

مثال:

$$Z_{11}=\frac{S^4+4S^2+1}{S(S^2+1)} \qquad Z_{12}=\frac{2S^4+3S^2+1}{S(S^2+1)}$$

$$Z_{11}=S+\frac{1}{S}+\frac{2S}{S^2+1} \qquad Z_{12}=\frac{1}{S}+2S+\frac{6S}{S^2+1} \qquad Z_a=Z_{11}-KZ_{12}$$

$$\Rightarrow Z_a=S(1-2K)+\frac{1}{S}(1-K)+\frac{2S}{\sigma}(1-3K)$$

$$1-2K\geqslant 0 \qquad 1-K\geqslant 0 \qquad 1-3K\geqslant 0 \Rightarrow K\leqslant\frac{1}{3}$$

$$IF \quad K=1/3 \Rightarrow \quad Z_a=\frac{S}{3}+\frac{2}{3S} \qquad Z_b=\frac{4}{3S}+\frac{5}{3}S+\frac{4S}{S^2+1}$$

---

* حالتی که فقط Z_{12} معلوم باشد. $\qquad 2Z_{12}=Z_b-Z_a$

در این حالت Z_{12} را تجزیه می‌کنیم و قسمتهای مثبت را بعنوان Z_b و قسمتهای منفی را بعنوان Z_a انتخاب می‌کنیم.

مثال:

$$2Z_{12}=\frac{3S^2+6S+1}{(S+1)(S+2)(S+3)}=-\frac{1}{S+1}+\frac{5}{S+3}-\frac{1}{S+2} \Rightarrow Z_b=\frac{5}{S+3} \quad Z_a=\frac{1}{S+2}+\frac{1}{S+1}$$

یک انتخاب دیگر میتواند بصورت زیر باشد.

$$Z_b=\frac{5}{S+3}+\frac{1}{S+2} \qquad Z_a=\frac{1}{S+1}+\frac{2}{S+2}$$

---

* حالتی که TF معلوم باشد که اکثراً نیز چنین است.

$$H(s)=\left.\frac{V_2(s)}{V_1(s)}\right|_{I_2=0}=\frac{Z_{12}}{Z_{11}}=\frac{Z_b-Z_a}{Z_b+Z_a}=\frac{1-Z_a/Z_b}{1+Z_a/Z_b}=\frac{Z_b/Z_a-1}{Z_b/Z_a+1}$$

فرض می‌کنیم $H(s)$ یک حیثه جدای گذری باشد و داشته باشیم

$$H(s)=\frac{Q(-s)}{Q(s)}=\frac{m(s)-n(s)}{m(s)+n(s)}$$

که $m(s)$ قسمت زوج $Q(s)$ و $n(s)$ قسمت فرد آن می‌باشد

$$\Rightarrow H(s)=\frac{m(s)/n(s)-1}{m(s)/n(s)+1}=\frac{1-n(s)/m(s)}{1+n(s)/m(s)}$$

بنابراین ممکن است Z_a و Z_b بصورت زیر انتخاب شوند.

$$Z_a=1 \;,\; Z_b=\frac{m(s)}{n(s)} \qquad or \qquad Z_b=1 \;,\; Z_a=\frac{n(s)}{m(s)}$$

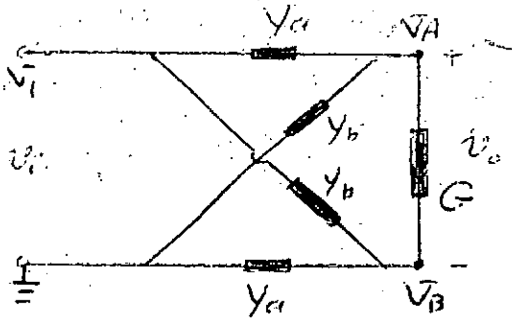
مثال

$$H(s)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{S^2-S+1}{S^2+S+1}=\underbrace{\frac{\frac{S^2+1}{S}-1}{\frac{S^2+1}{S}+1}}_{1}=\underbrace{\frac{1-\frac{S}{S^2+1}}{1+\frac{S}{S^2+1}}}_{2}$$

$$\Rightarrow 1 \Rightarrow Z_a=1 \;,\; Z_b=S+\frac{1}{S} \qquad 2 \Rightarrow Z_b=1 \;,\; Z_a=\frac{1}{S+\frac{1}{S}}$$

***

مثال: حالتی را در نظر می‌گیریم که $I_2 \neq 0$ باشد، در چنین حالتی خواهیم داشت:



$$H(s) = \frac{V_A - V_B}{V_1}$$

$$\begin{cases} G(V_A - V_B) + Y_b V_A + Y_a(V_A - V_1) = 0 \\ G(V_B - V_A) + Y_a V_B + Y_b(V_B - V_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} G+Y_b+Y_a & -G \\ -G & G+Y_b+Y_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{V_A}{V_1} = \frac{Y_a(G+Y_a+Y_b) + G Y_b}{(G+Y_b+Y_a)^2 - G^2} \qquad \frac{V_B}{V_1} = \frac{Y_b(G+Y_b+Y_a) + G Y_a}{(G+Y_a+Y_b)^2 - G^2}$$

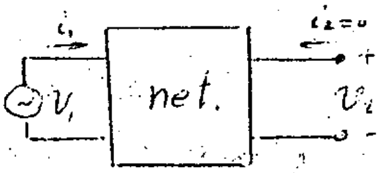
$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_A - V_B}{V_1} = \frac{Y_a^2 - Y_b^2}{2G(Y_a+Y_b) + (Y_a+Y_b)^2} = \frac{Y_a - Y_b}{Y_a + Y_b + 2G}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{Y_a - Y_b}{Y_a + Y_b + 2G}} = \frac{\frac{1}{2}(Y_a - Y_b)}{\frac{1}{2}(Y_a + Y_b) + G} = \frac{-Y_{12}}{Y_{22} + G}$$ ← که از قبل ثابت کرده بودیم

$$\begin{cases} Y_a = Y_{22} + Y_{12} \\ Y_b = Y_{22} - Y_{12} \end{cases}$$

* سنتز TF * : سنتزهایی که تا کنون بحث شد را سنتزهای DPZ یا DPA گویند ولی حالا می‌خواهیم H(s) یا TF را سنتز کنیم.

* حالت اول $R_L=\infty$ or $I_2=0$



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$I_2=0 \Rightarrow \begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{H(s) = \left.\frac{Z_{21}}{Z_{11}}\right|_{I_2=0}}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که صفرهای H(s) همان صفرهای Z_{21} و صفرهای Z_{11} همان قطبهای H(s) هستند. همچنین قطبهای Z_{21} نیز همان قطبهای Z_{11} هستند که از قبل نیز قابل پیش‌بینی بود زیرا هردو امپدانسی نسبت شبکه هستند.

فرض می‌کنیم تابع انتقال بصورت روبرو باشد.

$$H(s) = \frac{Ks^m}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}$$

در اینجا بین m و n سه حالت کلی وجود دارد که عبارتند از:

1) $m=0$ — فیلتر پایین گذر
2) $m=n$ — فیلتر بالاگذر
3) $0<m<n$ — فیلتر میان گذر

یکی از راههای مناسب سنتز TF روش نردبانی است. برای حالت 1 از کایر I استفاده می‌کنیم زیرا تمام صفرهای انتقالی در بینهایت هستند. برای حالت II از کایر II استفاده می‌کنیم و برای حالت 3، m صفر را با روش کایر II جدا می‌کنیم و باقیمانده یعنی n-m صفر بعدی را با روش کایر I.

مثال برای حالت 1-

$$H(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)} \Rightarrow$$

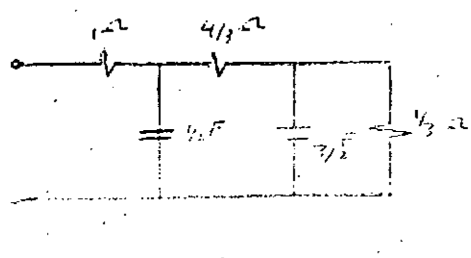
اگر بخواهیم مدار را بصورت RC سنتز کنیم باید Z_{11} و Z_{21} را بصورت زیر انتخاب کنیم.

$$Z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

زیرا باید که کوچکترین فرکانس بحرانی یک قطب باشد و ثانیاً صفرها و قطبها یک در میان باشند.

$$Z_{12} = \frac{k}{(s+1)(s+3)}$$

$$Z_{11} = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}s + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{\frac{3}{2}s + \frac{1}{1/3}}}}$$



$$s \to 0 \Rightarrow H(s) = \frac{K}{8}$$

$$H(s) = \frac{1/3}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1} = \frac{1}{8}$$

$K=1$

مثال برای حالت دوم

$$H(s)=\frac{Ks^2}{(s+4)(s+2)}$$

مانند حالت ۱ $Z_{11}=\frac{(s+4)(s+2)}{(s+1)(s+3)}$ را انتخاب می‌کنیم صفرهای سلف را عقب می‌کشیم

و بصورت زیر کائر سنتز می‌کنیم

$$Z_{11}=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

$8+6s+s^2\ )\ 3+4s+s^2\ )\ \frac{3}{8}\to y$

$3+\frac{9}{4}s+\frac{3}{8}s^2$

$\frac{7}{4}s+\frac{5}{8}s^2\ )\ 8+6s+s^2\ )\ \frac{32}{7s}\to z$

$8+\frac{20}{7}s$

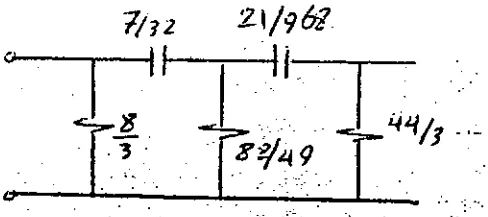
$\frac{22}{7}s+s^2)\ \ \frac{7}{4}s+\frac{5}{8}s^2)\ \ \frac{49}{88}\to y$

$\frac{7}{4}s+\frac{49}{88}s^2$

$\frac{6}{88}s^2)\ \ \frac{22}{7}s+s^2)\ \ \frac{968}{21s}\to z$

$\frac{22}{7}s$

$s^2\ )\ \frac{6}{88}s^2\ )\ \frac{6}{88}=\frac{3}{44}\to y$



$s\to\infty \Rightarrow \frac{V_o}{V_i}=H(s)=1$

$H(s)\big|_{s\to\infty}=K \Rightarrow$

$K=1$

مثال برای حالت سوم:

$$H(s)=\frac{Ks}{(s+2)(s+4)}$$

ابتدا بروش کائر I یک خازن را بیرون می‌کشیم

و بلافاصله بعد از بیرون آمدن یک خازن روش

سنتز را عوض می‌کنیم و مابقی Z را بروش کائر II سنتز می‌کنیم

و بالعکس

$$Z_{11}=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

$s^2+4s+3\ )\ s^2+6s+8\ )\ 1\to z$

s^2+4s+3

$2s+5)\ \ s^2+4s+3)\ \ \frac{s}{2}\to y \quad\Rightarrow\quad Z_{11}=1+\cfrac{1}{\frac{s}{2}+Y_R(s)}$

$s^2+2.5s$

$1.5s+3$

$$Y_{R(s)}=\frac{1.5s+3}{2s+5}$$

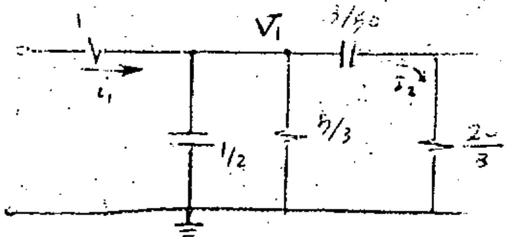
$5+2s\ )\ 3+1.5s\ )\ \frac{3}{5}\to y$

$3+\frac{6}{5}s$

$0.3s\ )\ 5+2s\ )\ \frac{50}{3s}\to z$

5

$2s\ )\ 0.3s\ )\ 0.15\to y$



$$H(s) = \frac{Ks}{s^2+6s+8}$$

برای بدست آوردن K که ضریب میزان اندازه است، از مراحل قبل استفاده کرده و باید تابع شبکه را بدست آوریم (از روی شکل) و با مقایسه آنها مقدار K را حساب کنیم.

برای محاسبه $H(s)$:

$$v_2 = 1 \Rightarrow i_2 = \frac{3}{20} \Rightarrow V_1 = 1 + \frac{3}{20} \times \frac{50}{3s} = 1 + \frac{5}{2s} = \frac{2s+5}{2s}$$

$$i_1 = \frac{3}{20} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2s+5}{2s} + \frac{s}{2}\cdot\frac{2s+5}{2s}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{s^2+4s+3}{2s} \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{s^2+4s+3}{2s} + \frac{2s+5}{2s} = \frac{s^2+6s+8}{2s} \Longrightarrow H(s) = \frac{2s}{s^2+6s+8}$$

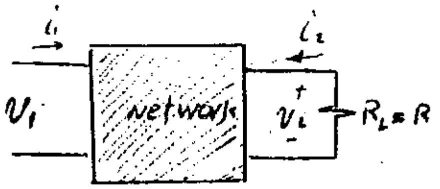
$$\Longrightarrow K = 2$$

برای شبکه های LC و RL نیز وضعیت بهمین صورت است منتهی باید مشخصات همین مدارها در نظر گرفته شود. مثلاً اگر بخواهیم $H(s) = \frac{K\cdot s}{(s+2)(s+4)}$ را بصورت RL سنتز کنیم بهتر است Z_{11} را بصورت $Z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)}$ انتخاب کنیم. زیرا نزدیک به کوچکترین فرکانس بحرانی یک صفر است.

---

* Resistivly terminated network *

توابع انتقالی را که تاکنون سنتز نمودیم همگی با فرض صفر بودن جریان خروجی ($R \to \infty$) بود و همچنین $R_S = 0$ ولی در اینجا میخواهیم حالت های کلی تری را بررسی کنیم.



۱- حالتی که $R_S = 0$ و $R_L = R$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = y_{11} v_1 + y_{12} v_2 \\ i_2 = y_{21} v_1 + y_{22} v_2 \end{cases}$$

از طرفی $i_2 = -v_2/R$

$$\Longrightarrow -\frac{v_2}{R} = y_{21} v_1 + y_{22} v_2 \Longrightarrow (y_{22} + 1/R) V_2 = -y_{21} v_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{-y_{12}}{y_{22} + 1/R}}$$

$y_{12} = y_{21}$

2- حالتی که $R_L = 0$ ، $R_S \neq 0$

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

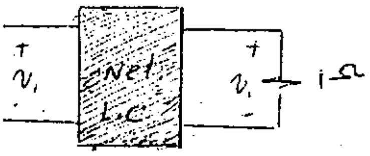
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

$$V_S = V_1 + R_S I_1 \Rightarrow V_S = (Z_{11} + R_S) I_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_S} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + R_S}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_2}{V_S} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + R_S}}$$

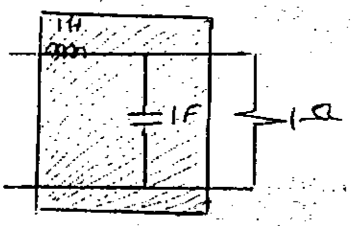
قبل از اینکه به ذکر حالت سوم ($R_L \neq 0$ ، $R_S \neq 0$) بپردازیم ابتدا در مورد حالتهای اول و دوم مسائلی حل می کنیم تا با روش سنتز آنالیز توابع آشنا شویم.

مثال، اگر تابع انتقال شبکه مقابل $H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ باشد المانهای شبکه را بدست آورید.



$$H(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1/s}{\frac{s^2+1}{s}+1} \Rightarrow Y_{12} = -\frac{1}{s} \;,\; Y_{22} = \frac{s^2+1}{s} = s + \frac{1}{s}$$

با روش کایر I سنتز می کنیم، زیرا صفر انتقال در بینهایت داریم.



* روش کلی سنتز چنین مدارهایی به این صورت است!

$$-Y_{11} = \frac{A(s)}{B(s)} \qquad Y_{22} = \frac{C(s)}{B(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{A(s)}{B(s)+C(s)}$$

و چون Y_{22} تابع ادمیتانس یک شبکه LC است بنابراین باید یک تابع فرد باشد. پس کافی است مخرج $H(s)$ را به دو قسمت فرد و زوج تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت.

$$H(s) = \frac{A(s)/B(s)}{\frac{C(s)}{B(s)}+1} \qquad Y_{22} = \frac{C(s)}{B(s)}$$

(انتخاب کایر مثل حالت قبل است)

مثال:

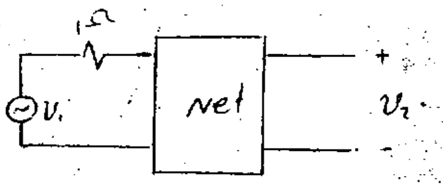
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+3s+1} \Rightarrow H(s) = \frac{s^2/3s}{\frac{s^2+1}{3s}+1} \Rightarrow Y_{22} = \frac{s}{3} + \frac{1}{3s}$$

مثال :

$$H(s) = \frac{ks}{s^3+s^2+3s+1} = \frac{ks/s^2+1}{\frac{s^3+3s}{s^2+1}+1} \Rightarrow Y_{22} = \frac{s^3+3s}{s^2+1}$$

کار I و II

مثال , $K=3$



$$H(s) = \frac{s^2}{s^3+s^2+3s+1}$$

$$H(s) = \frac{Z_{12}}{Z_{11}+R} \qquad H(s) = \frac{s^2/s^3+3s}{\frac{s^2+1}{s^3+3s}+1} \qquad Z_{11} = \frac{s^2+1}{s^3+3s}$$

کار I و II

---

* معمولاً یک فیلتر بین منبع و بار قرار می‌گیرد (هر منبع دارای یک مقاومت خروجی است) پس در عمل بیشتر با مدارهایی سروکار داریم که $R_s \neq 0$ و $R_L \neq 0$

یعنی بصورت زیر.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s}$$

ابتدا پارامترهای ضریب انتقال و ضریب انعکاس را تعریف می‌کنیم.

ضریب انتقال

$$T^2 = \frac{\text{توان خروجی که در مقاومت بار تلف می‌شود}}{\text{حداکثر توان قابل دسترس}} = \frac{P_L}{P_0} = \frac{|V_o(j\omega)|^2/R_L}{|V_s(j\omega)|^2/4R_s}$$

$$\Rightarrow \boxed{|T(j\omega)|^2 = \frac{4R_s}{R_L}|H(j\omega)|^2} \qquad \boxed{|\rho(j\omega)|^2 = 1-|T(j\omega)|^2}$$

$\rho(j\omega)$ ضریب انعکاس است

میتوان ثابت کرد که

$$\rho(j\omega) = \frac{Z_s - Z_{in}}{Z_s + Z_{in}} \qquad Z_s = 1 \Rightarrow$$

$$\rho(j\omega) = \frac{1-Z_{in}(j\omega)}{1+Z_{in}(j\omega)} \Rightarrow Z_{in}(j\omega) = \frac{1+\rho(j\omega)}{1-\rho(j\omega)}$$

$$\text{OR} \quad Z_{in}(j\omega) = \frac{1-\rho(j\omega)}{1+\rho(j\omega)}$$

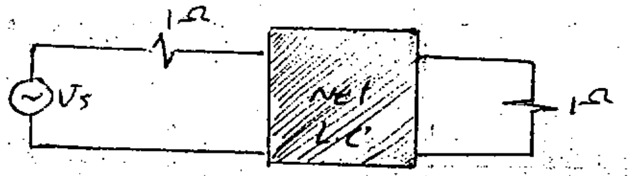
پس روش حل چنین شد که ابتدا $T(j\omega)$ را پیدا می‌کنیم سپس ... $\rho(j\omega)$ را بدست می‌آوریم.

$$\boxed{Z_{in}(s) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}}$$

با استفاده از $\rho(s)$ میتوان Z_{in} را بدست آورد و مدار را سنتز کرد.

OR $\boxed{Z_{in}(s) = \frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}}$ & $\boxed{|\rho(j\omega)|^2 = 1 - \frac{4R_s}{R_L}|H(j\omega)|^2}$

مثال:



$$\frac{V_o}{V_s} = H(s) = \frac{k}{s^2+3s+3} \qquad H(s)\Big|_{s=0} = \frac{R_L}{R_L+R_s} = \frac{1}{2} = \frac{k}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{4R_s}{R_L}|H(j\omega)|^2 \Rightarrow |\rho(j\omega)|^2 = 1 - \frac{4R_s}{R_L}|H(j\omega)|^2$$

$$\Rightarrow \rho(s)\cdot\rho(-s) = 1 - 4\,\frac{3/2}{s^2+3s+3}\cdot\frac{3/2}{s^2-3s+3} = 1 - \frac{9}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)}$$

$$\Rightarrow \rho(s)\cdot\rho(-s) = \frac{s^4-3s^2}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)} = \frac{s(s+\sqrt{3})(-s+\sqrt{3})(-s)}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)}$$

$$\Rightarrow \rho(s) = \frac{s(s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3}$$

یکی از انتخابهای ممکن برای ریشه‌ها میتواند بصورت روبرو باشد

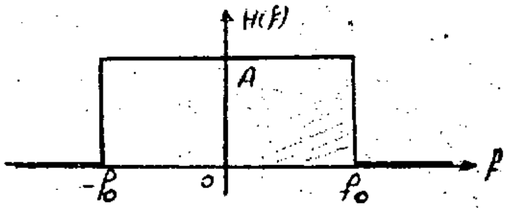
$$\Rightarrow Z_{in}(s) = \frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} = \frac{2s^2+(3+\sqrt{3})s+3}{(3-\sqrt{3})s+3}$$

[illegible]

حال میتوان بصورت کاور I سنتز کرد زیرا $H(s)$ یک فیلتر LP است.

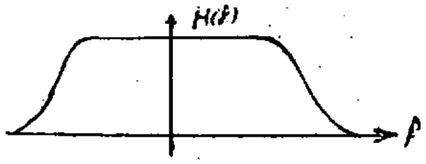
APROXIMATION

اساس کار و طراحی هر نوع فیلتری بر فیلتر پایین گذر (LPF) است بنابراین ابتدا فیلترهای پایین گذر را بررسی می‌کنیم و سپس بروشهایی آنرا به فیلتر میانگذر - میان نگذر و بالاگذر تبدیل می‌کنیم.



یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل دارای مشخصه زمانی روبرو است

میدانیم اگر پاسخ زمانی فیلتر فوق را بدست بیاوریم (یک تابع sinc است)
نشان می‌دهد که چنین سیستمی نمی‌تواند وجود داشته باشد و بعلاوه تابع فوق یک تابع تحلیلی نیست
بهمین دلیل همیشه در طراحی فیلترها تقریب استفاده می‌شود.



مثلاً شکل مقابل میتواند تقریبی برای یک فیلتر پایین گذر باشد.
حال تقریبهای مختلف را بررسی می‌کنیم

* تقریب باترورث (Butterworth approximation)

تقریب باترورث بصورت مقابل است

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

که به ازای n های بزرگ سمت ایده‌آل میل خواهد کرد.

هدف در اینجا بدست آوردن H(s) و نهایتاً تحقق مداری است.

بعنوان مثال H(s) را برای باترورث درجه 3 بدست می‌آوریم

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}$$

$$\Rightarrow H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1-s^6} = \frac{1}{1-s^3}\cdot\frac{1}{1+s^3} = \frac{1}{(1-s)(1+s+s^2)(1+s)(1-s+s^2)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

یکی از راههای محاسبه H(s) بدست آوردن قطبهای $|H(j\omega)|^2$ است.

$$H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{Q(s)\cdot Q(-s)}$$

$$Q(s)\cdot Q(-s) = 1+(s^2)^n \qquad \text{IF } n=2k$$ زوج باشد

اگر n فرد باشد خواهیم داشت.

$$Q(s)\cdot Q(-s) = 1+s^{2n}$$

$$1+S^{2n}=0 \Rightarrow S^{2n}=-1=\cos(2k-1)\pi+j\sin(2k-1)\pi$$

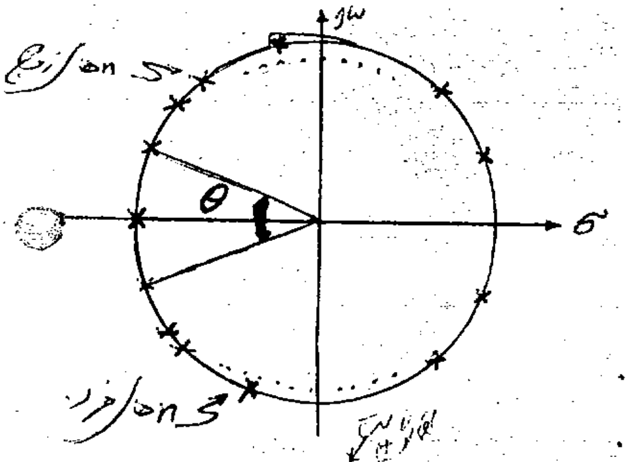
$$\Rightarrow S=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+j\sin\frac{2k-1}{2n}\pi=\cos\theta_k+j\sin\theta_k$$

حال باید ریشه‌های $Q(s)$, $Q(-s)$ را از هم جدا کنیم.

$$\theta_k=\frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n},\ \frac{5\pi}{2n},\ \ldots$$

* فاصله بین دو قطب $\frac{\pi}{n}$ می‌باشد.

پس یک دور دایره دارای $2N$ ریشه است.



n زوج

$\theta=\frac{\pi}{n}$

که قطب‌های طرف چپ قطب‌های $Q(s)$ می‌باشد.

در فرمول‌های بالا مبنای زاویه جهت مثبت محور σ است.

ولی اگر مبنا را جهت منفی محور σ بگیریم خواهیم داشت.

$$\boxed{S=+\cos\theta_k+j\sin\theta_k \qquad \theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi}$$

* n های زوج

برای n های فرد خواهیم داشت.

$$Q(s)\cdot Q(-s)=1-s^{2n}=0$$

$$\Rightarrow 1-s^{2n}=0 \Rightarrow s^{2n}=1=\cos 2k\pi+j\sin 2k\pi$$

$$\Rightarrow S=\cos\frac{k}{n}\pi+j\sin\frac{k}{n}\pi$$

باز اگر مبنا را زاویه را جهت منفی محور σ بگیریم خواهیم داشت.

$$\boxed{S=-\cos\theta_k+j\sin\theta_k \qquad \theta_k=\frac{k}{n}\pi}$$

* n های فرد

مکان قطبها برای n های فرد

در شکل بالا نشان داده شده است ملاحظه می‌شود که برای n های فرد همیشه یک ریشه در $S=-1$ خواهیم داشت.

$$\boxed{H(s)=\frac{1}{Q(s)}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}}$$

وقتی ریشه‌های $Q(s)$ معلوم شد می‌توان نوشت

وقتی $H(s)$ محاسبه شد می‌توان مداری را که دارای تابع $H(s)$ باشد طرح کرد که این کار را [illegible] خواهیم کرد.

$H(s)=\frac{1}{B_n(s)}$	* * * * * *	* راه دیگر برای تعیین $H(s)$ بصورت زیر است
$B_n(s)=\sum_{k=0}^{n} a_k s^k$	$a_0=1$	$a_{k+1}=\left(\cos\frac{k\pi}{2n}/\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)a_k$

ضرایب چندجمله‌ای $B_n(s)$ متقارن هستند پس کافی است $\frac{n+1}{2}$ (برای n های فرد) و $\frac{n}{2}+1$ (برای n های زوج) ضرایب را محاسبه کنیم.

در زیر ضرایب $B_n(s)$ و مخرج $H(s)$ برای n از 2 تا 8 داده شده است.

$H(s)=\frac{1}{B_n(s)}$

$n=2 \qquad B_n(s)=s^2+\sqrt{2}\,s+1$

$n=3 \qquad B_n(s)=s^3+2s^2+2s+1$

$n=4 \qquad B_n(s)=s^4+2.613s^3+3.414s^2+2.613s+1$

$n=5 \qquad B_n(s)=s^5+3.236s^4+5.236s^3+5.236s^2+\cdots$

$n=6 \qquad B_n(s)=s^6+3.857s^5+7.464s^4+9.141s^3+\cdots$

$n=7 \qquad B_n(s)=s^7+4.494s^6+10.097s^5+14.59s^4+\cdots$

$n=8 \qquad B_n(s)=s^8+5.125s^7+13.137s^6+21.84s^5+25.688s^4+\cdots$

اگر روابط بدست آمده در روش اول بدست آوردن $H(s)$ نگاه کنیم متوجه می‌شویم که همه ریشه‌ها جزوج هستند بجز یک ریشه در $s=-1$ برای n های فرد پس می‌توان روابط آن قسمت را بصورت ساده‌تر زیر تبدیل کرد.

$H(s)=1/\prod_{i=1}^{n}(s-s_k) \quad , s_k=-\cos\theta_k+j\sin\theta_k$
$\begin{cases}\theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi & \text{برای n های زوج} \\ \theta_k=\frac{k}{n}\pi & \text{برای n های فرد}\end{cases}$ از قبل ثابت کردیم

$(s-s_k)(s-s_k^*)=s^2+2\cos\theta_k s+1$

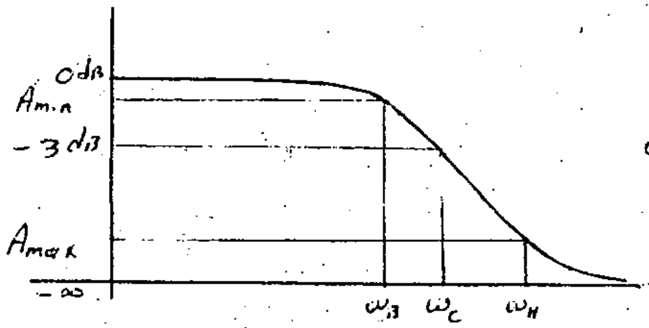
$$\Rightarrow \boxed{H(s)=\prod_{i=1}^{n/2}\left(\frac{1}{s^2+2\cos\theta_k s+1}\right)}$$ برای n های زوج

$$\Rightarrow \boxed{H(s)=\left[\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{s^2+2\cos\theta_k s+1}\right]\cdot\frac{1}{s+1}}$$ برای n های فرد

* حال میخواهیم درجه فیلتر یعنی n را برای مقاصد مختلف محاسبه کنیم *

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$

معمولاً وقتی از یک فیلتر خواسته می‌شود یا n یا ω_c آن معلوم است یا دو پارامتر دیگر را از آن شروع عبور رسد از



A_{min} یعنی تضعیف در یک نقطه از باند عبور

A_{max} تضعیف مورد نیاز در یک نقطه از باند توقف

در واقع A_{min} بیشترین تضعیف مورد قبول و A_{max} کمترین تضعیف مورد قبول هستند

با توجه به اطلاعات فوق میخواهیم n را محاسبه کنیم.

$$A = 10\log(1+\omega^{2n}) \quad \text{or} \quad A = 10\log\left[1+(\omega/\omega_c)^{2n}\right]$$

تضعیف $\equiv A$

$$A_{min} = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \qquad A_{max} = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_H}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \Longrightarrow n = \frac{\log\dfrac{10^{0.1A_{max}}-1}{10^{0.1A_{min}}-1}}{2\log(\omega_H/\omega_B)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{n = \frac{\log\left[(10^{0.1A_{max}}-1)/(10^{0.1A_{min}}-1)\right]}{2\log(\omega_H/\omega_B)}}$$

$$A_{min} = 10\log\left[1+\left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

پس از محاسبه n میتوان ω_c را محاسبه کرد.

$$\Longrightarrow \left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{0.1A_{min}} - 1 \Longrightarrow \boxed{\omega_c = \frac{\omega_B}{\sqrt[2n]{10^{0.1A_{min}}-1}}}$$

البته احتمال اینکه n یک عدد صحیح باشد خیلی کم است و معمولاً بصورت یک عدد اعشاری بدست می‌آید و از آنجایی که A_{min} حداکثر تضعیف مورد قبول در باند عبور و A_{max} حداقل تضعیف در باند عبور هستند حق نداریم که n کوچکتر از آن بگیریم بنابراین همیشه n را به عدد صحیح بزرگتر از آن گرد می‌کنیم.

در این حالت اگر ω_c را با n اصلی (همان عدد اعشاری) بدست آوریم بنابراین با n گرد شده A_{min} کوچکتر و A_{max} بزرگتر خواهد شد.

حال ممکن است بگوییم میخواهیم A_{min} ثابت بماند A_{max} و ω_c تغییر کند و هر ترکیب دیگری از اینها ممکن است انتخاب شود.

* تقریب چبی‌شف * Cheybyshev Approximation

برعکس فیلتر باتروورث این فیلتر در باند عبور دارای ریپل است
این فیلتر دارای مجذور دامنه ای بصورت روبرو است

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)}$$

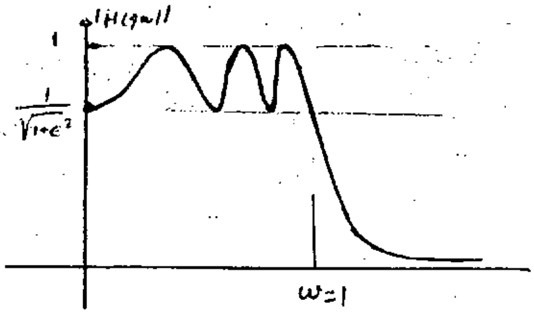
که $C_n(\omega)$ چندجمله‌ای درجه n ام چبی‌شف است.
و ϵ یک عدد ثابت کوچکتر از واحد است
برای $\omega<1$ خواهیم داشت

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1}\omega)$$

$$C_n(\omega) = \cosh(n \cosh^{-1}\omega)$$

روابط فوق نشان می‌دهد که پاسخ فرکانسی فیلتر چبی‌شف
در باند عبور بصورت نوسانی و در باند توقف بصورت نزولی است.

● معمولاً در شکل مقابل پاسخ فرکانسی فیلتر برای $n=6$ رسم شده است.
(البته بعداً بیشتر توضیح خواهیم داد)



در دید اول ممکن است گفته شود که چنین فیلتری با این همه ریپل در باند عبور به درد چه کاری می‌خورد. در اینجا نظر را به این نکته جلب می‌کنیم که منابع اطلاعات خود دارای ریپل هستند و مثلاً هرگاه خود منبع اطلاعات 1 dB ریپل داشته باشد وجود 0.5 dB ریپل در فیلتر هیچ مشکلی بوجود نخواهد آورد. ولی در عوض فیلتر چبی‌شف در ناحیه توقف دارای تضعیف بالاتری نسبت به فیلتر باتروورث با همان درجه است.

* نکاتی درباره چندجمله‌ای های چبی‌شف *

$$C_n(\omega) = \cos(n\cos^{-1}\omega)$$

$$\text{for } \omega>1 \quad \cos^{-1}\omega = jz \Rightarrow \cos(jz) = \omega = \frac{e^{j(jz)}+e^{-j(jz)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \cosh z \Rightarrow z = \cosh^{-1}\omega \Rightarrow \cos^{-1}\omega = j\cosh^{-1}\omega$$

$$\Rightarrow C_n(\omega) = \cos(nj\cosh^{-1}\omega) \Rightarrow C_n(\omega) = \cosh(n\cosh^{-1}\omega)$$

$$C_n(0) = \cos(n\cos^{-1}0) = \cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} C_n(0) = 0 & n \text{ odd} \\ C_n(0) = \pm 1 & n \text{ even} \end{cases}$$

$$C_n(1) = \cos(n\cos^{-1}1) = \cos(0) = 1 \quad \text{for all } n$$

$$\Rightarrow \boxed{|H(j\omega)|\Big|_{\omega=0} = 1 \quad n \text{ odd}} \qquad \boxed{|H(j\omega)|\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \quad n \text{ even}}$$

$$\boxed{|H(j\omega)|\Big|_{\omega=1} = 1 \quad \text{for all } n}$$

* محاسبه یک معادله تکراری برای تعیین چندجمله‌ای های چبی‌شف.

$$C_n(z) = \cos(n \cos^{-1} z)$$

$$\cos^{-1} z = \omega \Rightarrow z = \cos\omega$$

$$\Rightarrow C_n(\cos\omega) = \cos(n\omega) \Rightarrow$$

$$C_{n+1}(\cos\omega) = \cos(n\omega)\cos\omega - \sin(n\omega)\sin\omega$$

$$C_{n-1}(\cos\omega) = \cos(n\omega)\cos\omega + \sin(n\omega)\sin\omega$$

$$\Rightarrow C_{n+1}(\cos\omega) + C_{n-1}(\cos\omega) = 2\cos\omega\cos(n\omega)$$

$$= 2\cos\omega\, C_n(\cos\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{n+1}(z) = 2z\,C_n(z) - C_{n-1}(z)}$$

از طرفی داریم :

$$\boxed{C_0(z) = 1 \quad , \quad Z_1(z) = Z}$$

با توجه به معادله تکراری فوق می‌توان چندجمله‌ای های چبی‌شف را تا هر درجه‌ای محاسبه کرد.

$$C_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$C_3(z) = 4z^3 - 3z$$

* روابط فوق هم در باند عبور و هم در باند توقف معتبرند *

$$C_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$$

$$C_5(z) = 16z^5 - 20z^3 + 5z$$

$$C_6(z) = 32z^6 - 48z^4 + 18z^2 + 1$$

$$C_7(z) = 64z^7 - 112z^5 + 56z^3 - 7z$$

$$C_8(z) = 128z^8 - 256z^6 + 160z^4 - 32z^2 + 1$$

$$C_9(z) = 256z^9 - 576z^7 + 432z^5 - 120z^3 + 9z$$

$$C_{10}(z) = 512z^{10} - 1280z^8 + 1120z^6 - 400z^4 + 50z^2 - 1$$

$$C_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ \pm 1 & n \text{ even} \end{cases} \qquad C_n(1) = 1 \quad \text{for all } n$$

خاصیت مهم چند جمله‌ای های چبی‌شف این است که در فاصله ۱- و ۱ مقدار C_n^2 بین ۱ و ۱- نوسان می‌کند

$$|C_n| \leqslant 1 \quad \text{for } -1 \leq z \leq 1$$

ولی خارج از این فاصله با دور شدن از ۱ و ۱- مقدار $|C_n|$ به سرعت افزایش می‌یابد.

و این مسئله برای مقاصد ما خیلی مفید است.

Ripple یک تا یک نوسانات در ناحیه عبور ریپل نامیده می‌شود و داریم.

$$R = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \simeq \epsilon^2/2$$ زیرا $\epsilon \ll 1$ است.

$$\boxed{R = \epsilon^2/2}$$

در منحنی $|H(j\omega)|$ در نقاط ماکزیمم خواهیم داشت $C_n(j\omega) = 0$ و در نقاط مینیمم خواهیم داشت $C_n^2(j\omega) = 1$

مثلاً برای چبی‌شف درجه 6 داریم.

$$C_n(j\omega) = 0 \Rightarrow \cos(6\cos^{-1}\omega) = 0 \Rightarrow 6\cos^{-1}\omega = \frac{2k+1}{2}\pi \Rightarrow \omega = \cos\frac{2k+1}{12}\pi$$

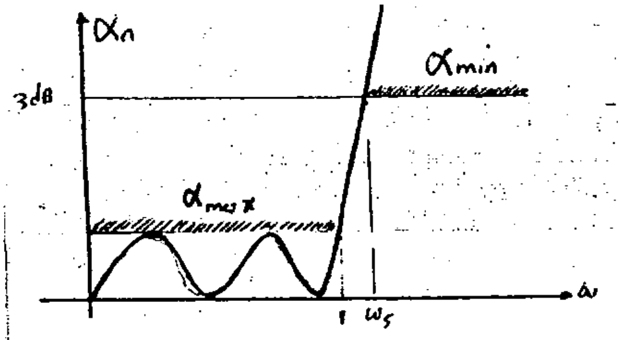
$$\Rightarrow \omega = 0.259 \qquad \omega = 0.707 \qquad \omega = 0.9659$$

$$C_n(j\omega) = \pm 1 \Rightarrow 6\cos^{-1}\omega = k\pi \Rightarrow \omega = \cos\frac{k\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \qquad \omega = 0.5 \qquad \omega = 0.866 \qquad \omega = 1$$

$$\alpha_n = 10\log[1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)]$$

* attenuation *



ممکن است به جای مشخص کردن ϵ ماکزیمم تضعیف در باند عبور داده شود در چنین حالتی

$$\alpha_{max} = 10\log(1+\epsilon^2) \Rightarrow \boxed{\epsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_{max}} - 1}}$$

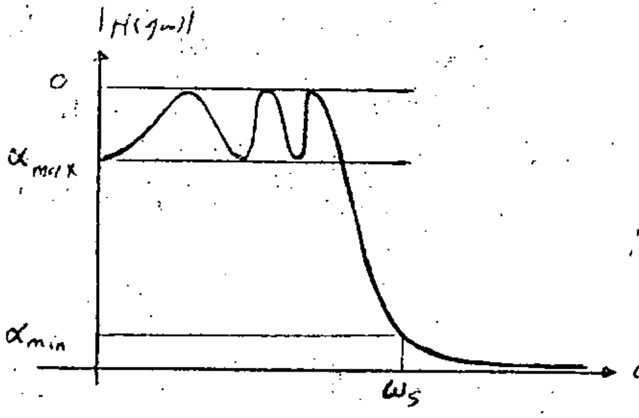
محاسبه فرکانس 3dB

چون $\omega_s > 1$

$$\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_s = \cosh\left[\frac{1}{n}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right]}$$

برای فیلتر چبی‌شف نیز مثل فیلتر باترورث تضعیف در یک نقطه از باند توقف داده می‌شود در واقع این تضعیف کمترین تضعیف مورد قبول برای فیلتر است و همچنین مقدار ریپل و یا ماکزیمم تضعیف در باند عبور مشخص است در چنین شرایطی می‌خواهیم درجه فیلتر را بدست آوریم.



$$\alpha_{max} = 10\log(1+\epsilon^2) \Rightarrow \boxed{\epsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_{max}} - 1}}$$

$$\alpha_{min} = 10\log\left\{1+\epsilon^2\left[\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s)\right]^2\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2}\left[\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s)\right]^2 = \frac{10^{0.1\alpha_{min}}-1}{\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow \left[\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s)\right]^2 = \frac{10^{0.1\alpha_{min}}-1}{10^{0.1\alpha_{max}}-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{\cosh^{-1}\left[(10^{0.1\alpha_{min}}-1)/(10^{0.1\alpha_{max}}-1)\right]^{1/2}}{\cosh^{-1}\omega_s}}$$

با مشخص بودن n و ε پاسخ مدار [H(jω)] مشخص خواهد شد وظیفه بعدی ما نشان دادن محل قطبی هاست.

---

* location of the chebyshev poles *

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \Rightarrow H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{s}{j})}$$

$$1+\epsilon^2 C_n^2(\tfrac{s}{j}) = 0 \Rightarrow C_n(\tfrac{s}{j}) = \pm\frac{j}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos\left[n\cos^{-1}(\tfrac{s}{j})\right] = \pm j/\epsilon} \qquad \cos^{-1}\frac{s}{j} = w = u+jv$$

* هدف حل این معادله است *

$$\Rightarrow \cos nw = \pm j/\epsilon \Rightarrow \cos(nu+jnv) = \pm j/\epsilon$$

$$\Rightarrow \cos nu \cos jnv - \sin nu \sin jnv = 0 \pm j/\epsilon$$

داریم: $\cos jnv = \cosh nv \qquad \sin jnv = \frac{e^{j(jnv)} - e^{-j(jnv)}}{j2} = j\sinh nv$

$$\Rightarrow \cos nu \cosh nv - j\sin nu \sinh nv = 0 \pm j/\epsilon$$

$$\Rightarrow \cos nu \cosh nv = 0 \Rightarrow \cos nu = 0 \Rightarrow nu = \frac{2k+1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{2k+1}{2n}\pi} \quad \Rightarrow \quad \sin nu = \pm 1$$

$$\Rightarrow \sinh nv = 1/\epsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}} \qquad \boxed{a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} = a$$

حال که مقادیر u و v را بدست آوردیم برگردیم و ریشه‌های مخرج را تعیین می‌کنیم.

$$\cos^{-1}\left(\frac{s}{j}\right) = \omega \Rightarrow j\cos\omega = s \quad \Rightarrow \quad s_k = j\cos(u + jv)$$

$$\Rightarrow \quad s_k = j\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi + ja\right) = j\left[\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\cosh a - j\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\sinh a\right]$$

$$\Rightarrow \quad s_k = \sinh a\sin\frac{2k+1}{2n}\pi + j\cosh a\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$$

$s_k = \sigma_k + j\omega_k$	$a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}$
$\sigma_k = -\sinh a\sin\frac{2k+1}{2n}\pi$	$\omega_k = \cosh a\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$

* ریشه‌های فیلتر چبی‌شف * ↑ (نقاط قطبهای طرف چپ صفحه s انتخاب شده)

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh a}\right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\cosh a}\right)^2 = 1$$

(معادله بیضی)

رابطه روبرو نشان می‌دهد که قطبهای فیلتر چبی‌شف روی یک بیضی قرار دارند

* فرکانس 3dB در فیلتر چبی‌شف *

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \Rightarrow \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega_{1/2})} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C_n^2(\omega_{1/2}) = \frac{1}{\epsilon^2} \Rightarrow \cosh\left(n\cosh^{-1}\omega_{1/2}\right) = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\omega_{1/2} = \cosh\left(\frac{1}{n}\cosh^{-1}\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

از آنجایی که معمولاً $\epsilon \ll 1$ است میتوان رابطه را ساده‌تر کرد.

$$a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} = \sinh na$$

$$= \omega_{1/2} = \cosh\left(\frac{1}{n}\cosh^{-1}(\sinh na)\right)$$

$$-\sinh^2 na + \cosh^2 na = 1 \Rightarrow \cosh na = \left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{\epsilon} = \sinh na$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{1/2} \simeq \cosh a}$$

با نرمالیزه کردن فرکانس خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \sigma'_k = -\tanh a \sin \frac{2k-1}{2n}\pi \\ \omega_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \end{cases}$$

مقایسه چبی شف و باترورث در فرکانسهای بالا: $\omega \gg \omega_c$ or $\omega \gg 1$

$$\omega \gg \omega_c \Rightarrow |H(s)|^2 = \frac{1}{1+(\omega)^{2n}} = \omega^{-2n} \xrightarrow{\text{تضعیف}} A = 20\log\omega^n$$

$$\Rightarrow A = 20n\log\omega$$

$$A_b = 20n\ \mathrm{dB/decade}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \qquad C_n(\omega)\ \text{for}\ \omega \gg 1 \equiv 2^{n-1}\omega^n$$

$$|H(j\omega)|^2 \cong \frac{1}{\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \Rightarrow A = 20\log[\epsilon \cdot 2^{n-1}\omega^n] = 20n\log\omega + 20\log(\epsilon \cdot 2^{n-1})$$

$$\Rightarrow A_{ch} = 20n\log\omega + 6(n-1) + 20\log\epsilon \Rightarrow$$

$$A_{ch} - A_b = 6(n-1) + 20\log\epsilon$$

هرگاه بخواهیم چبی شف و باترورث هم مرتبه در فرکانسهای خیلی بالا روی هم بیفتند باید $6(n-1)+20\log\epsilon$ برابر صفر گردد یا به ازای هر مرتبه ای کران ϵ را کم کنید ...

$$\boxed{A_{ch} - A_b = 6(n-1) + 20\log\epsilon}$$

* چبی شف معکوس *

برای چبی شف داریم

$$|H(j\omega)|_L^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad \text{or} \quad \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}$$

برای چبی شف بالاگذر خواهیم داشت:

$$|H(j\omega)|_H^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_c}{\omega})}$$

حال می‌خواهیم بالاگذر فوق را به پایین گذر تبدیل کنیم ریپل‌های باند گذر چبی شف اصلی در ناحیه توقف خواهند بود:

$$|H(j\omega)|_{L\,inv}^2 = 1 - \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_c}{\omega})} = \frac{\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_c}{\omega})}{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_c}{\omega})}$$

* محاسبه $H(s)$ برای چبی شف معکوس *

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \boxed{Q(s) = s^n Q_c(\frac{1}{s})}$$

$$\boxed{P(s)\cdot P(-s) = \omega^{2n} C_n^2(\frac{1}{\omega})\Big|_{\omega^2=-s^2}}$$

مثال: $n=3 \quad \epsilon = 0.5$

مخرج چبی شف بصورت زیر است

$$\Rightarrow Q_c(s) = s^3+s^2+1.25s+0.5$$

$$\Rightarrow Q(s) = s^3\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}+\frac{1.25}{s}+0.5\right) = 0.5(s^3+2.5s^2+2s+2)$$

$$P(s)\cdot P(-s) = \omega^6\left(\frac{4}{\omega^3}-\frac{3}{\omega}\right)^2 = 9\omega^4 - 24\omega^2+16 = (3\omega^2-4)^2 \Rightarrow$$

$$P(s) = 3s^2+4 \Rightarrow H(s) = \frac{0.5(3s^2+4)}{s^3+2.5s^2+2s+2}$$

* all pass filter * phase shift. فیلتر بسل

$$G(s) = \frac{s^2-as+b}{s^2+as+b} \qquad |G(s)| = 1 \qquad \varphi = 2tg^{-1}\frac{a\omega}{b-\omega^2}$$

[illegible]

مثال: تابع انتقالی زیر داده شده است

$$H(s)=\frac{V_2}{V_1}=\frac{KS(s^2-4)}{s^3+2s^2+2s+1}$$

آن را بصورت یک شبکه نردبانی سنتز کنید.

حل: در شبکه‌های LC ریشه‌ها موهومی خالصند مگر یک صفر و یک قطب در مبدأ بنابراین شبکه فوق یک LC نیست بلکه یک مدار LC است که به یک مقاومت ختم شده است $R_L=1\ \Omega$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-y_{12}}{1+y_{22}}=\frac{KS(s^2-4)/(2s^2+1)}{1+(s^3+2s)/(2s^2+1)} \Rightarrow y_{22}=\frac{s^3+2s}{2s^2+1}$$

$$y_{12}=\frac{-KS(s^2-4)}{2s^2+1}$$

$$y_{22}=\frac{1}{2}(y_b+y_a)$$

$$y_{12}=\frac{1}{2}(y_b-y_a)$$

$$\Rightarrow Y_b=y_{22}+y_{12}=\frac{s^3+2s}{2s^2+1}-\frac{KS(s^2-4)}{2s^2+1}=\frac{(1-K)s^3+2(1+2K)s}{2s^2+1}$$

$$Y_a=y_{22}-y_{12}=\frac{s^3+2s}{2s^2+1}+\frac{KS(s^2+4)}{2s^2+1}=\frac{(1+K)s^3+2(1-2K)s}{2s^2+1}$$

باید K را طوری انتخاب کنیم که Y_a و Y_b حقیقی باشند. realize

$$Y_b=\frac{1-K}{2}s+\frac{3}{2}\,\frac{1+3K}{2s^2+1}s \Rightarrow -\frac{1}{3}\leqslant K\leqslant 1$$

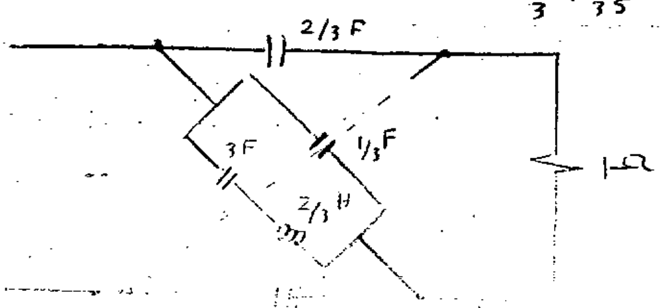
$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\leqslant K\leqslant\frac{1}{3}$$

$$Y_a=\frac{1+K}{2}s+\frac{3}{2}\,\frac{1-3K}{2s^2+1}s \Rightarrow -1\leqslant K\leqslant\frac{1}{3}$$

برای اینکه مدار طرح شده دارای مینیمم عناصر باشد K را طوری انتخاب می‌کنیم که در Y_a یا Y_b یک جمله را حذف کند مثلاً

$$K=\frac{1}{3} \Rightarrow Y_b=\frac{1-K}{2}s+\frac{3}{2}\,\frac{1+3K}{2s^2+1}s=\frac{1}{3}s+\frac{1}{\frac{2s}{3}+\frac{1}{3s}}$$

$$Y_a=\frac{2}{3}s$$



13.

H.W.1 مطلوب است تبدیل عکس رابطه تبدیل (پاسخ زمانی فیلتر مثل)

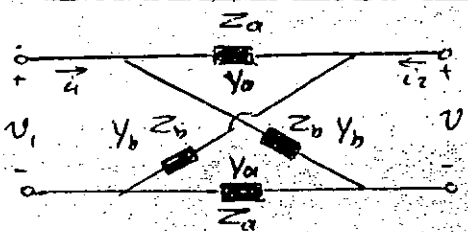
$$H(s) = \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b}$$

H.W.2 مقادیر فرمول transfer function یک فیلتر all pass را که با بار یک اهم ختم شده است بصورت یک شبکه خربزه‌ای بدست آورید. فیلتر دارای تغییر فاز برابر -90° در $\omega_0 = 10K\,rad/sec$ و ثابت damping برابر است با $\zeta = 2\times10^{4}$

H.W.3 یک دوقطبی با سیستم lattice را که با بار یک اهم ختم می‌شود با توابع انتقال زیر بدست آورید

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(s^2-s+1)(s^2-2s+3)}{(s^2+s+1)(s^2-2s+3)} \qquad \frac{V_2}{I_1} = \frac{k(s^2-2)}{s^3+3s^2+4s+2}$$

خواص کلی از شبکه‌های خربزه‌ای



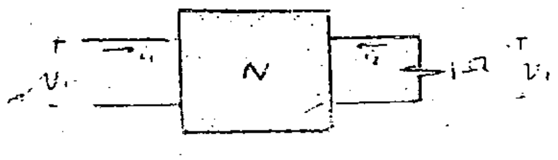
$$Z_{22} = Z_{11} = \frac{1}{2}(Z_b + Z_a) \quad , \quad Z_{21} = Z_{12} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a)$$

$$\Rightarrow Z_a = Z_{11} - Z_{12} = Z_{22} - Z_{21} \qquad Z_b = Z_{11} + Z_{12} = Z_{22} + Z_{21}$$

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{1}{2}(Y_b + Y_a) \qquad Y_{21} = Y_{12} = \frac{1}{2}(Y_b - Y_a)$$

$$Y_b = Y_{11} + Y_{12} = Y_{22} + Y_{21} \qquad Y_a = Y_{11} - Y_{12} = Y_{22} - Y_{21}$$

★ شبکه متقابل را در نظر بگیرید



$$V_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$V_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = -i_2 \Big|_{R_L = 1\Omega}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{-Z_{21}}{1+Z_{22}} i_1 \Rightarrow v_1 = \left(Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{1+Z_{22}}\right) i_1 \Rightarrow \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_{11}+\Delta Z}{Z_{22}+1}$$

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12} = \left[\frac{1}{2}(Z_b+Z_a)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(Z_b-Z_a)\right]^2 \Rightarrow$$ برای شبکه‌های ضربدری داریم

$$\boxed{\Delta Z = Z_a Z_b}$$ for lattice network

اگر بخواهیم از ورودی شبکه همان مقاومت بار یعنی یک اهم را ببینیم یعنی

$$\frac{v_1}{i_1} = 1 \Rightarrow \boxed{Z_a Z_b = 1}$$

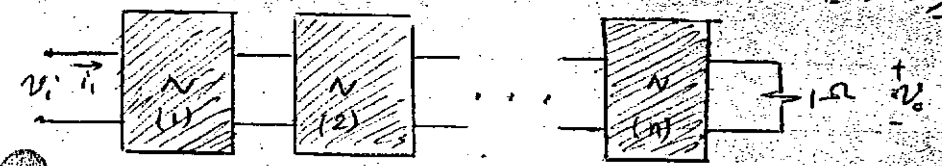
با چنین شرایطی برای شبکه فوق داریم:

$$G_{21} = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{-y_{21}}{1+y_{22}} = \frac{-\frac{1}{2}(Y_b-Y_a)}{1+\frac{1}{2}(Y_b+Y_a)} = \frac{Z_b-Z_a}{2Z_aZ_b+Z_a+Z_b} \qquad Z_b = \frac{1}{Z_a}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1-Z_a^2}{2Z_a+Z_a^2+1} = \frac{1-Z_a}{1+Z_a} \Rightarrow \boxed{G_{21}(s) = \frac{1-Z_a}{1+Z_a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_a = \frac{1-G_{21}(s)}{1+G_{21}(s)}} \qquad G_{21}(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)}$$

اگر n طبقه پشت سرهم قرار گیرند خواهیم داشت:



$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{v_{2n}}{v_{1n}} \cdot \frac{v_{2(n-1)}}{v_{1(n-1)}} \cdots \frac{v_{22}}{v_{12}} \cdot \frac{v_{12}}{v_{11}} \Rightarrow \boxed{G = G_{21}^{(1)} \times G_{21}^{(2)} \times \cdots \times G_{21}^{(n)}}$$

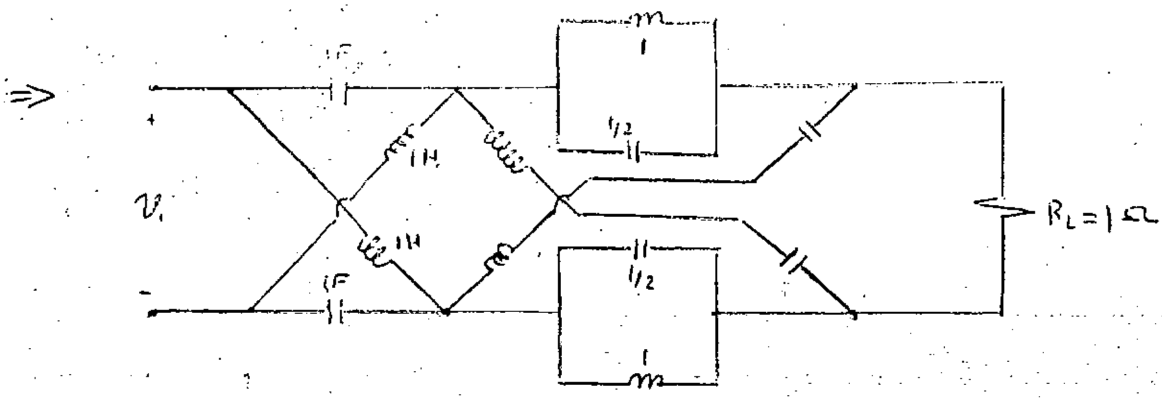
مثال:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(s-1)(s^2-2s+2)}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$G_{21}^{(1)} = \frac{s-1}{s+1} = \frac{1-1/s}{1+1/s} \Rightarrow Z_a = \frac{1}{s} \Rightarrow Z_b = s$$

$$G_{21}^{(2)} = \frac{s^2-2s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1-2s/s^2+2}{1+2s/s^2+2} \Rightarrow Z_a = \frac{2s}{s^2+2} = \frac{1}{\frac{s}{2}+\frac{1}{s}}$$

$$\Rightarrow Z_b = \frac{s}{2} + \frac{1}{s}$$



* Time delay *   * تاخیر زمانی *

$$x(t) \longrightarrow \boxed{Net.} \longrightarrow y(t)$$

فرض می‌کنیم رابطه زمانی شکل موج بصورت مقابل باشد. $\quad y(t) = K[x(t-\tau)]$

معادله فوق نشان می‌دهد که مقدار سیگنال خروجی در هر لحظه برابر مقدار سیگنال ورودی در τ ثانیه قبل است

البته اگر این تاخیر برای فرکانسهای مختلف یکسان باشد هیچگونه مسئله‌ای بوجود نخواهد آورد (حتی در بسیاری از موارد تاخیر اجتناب ناپذیر است. مثل سیگنال ورودی و خروجی یک کانال مخابراتی.
ولی در سیستم‌ها تاخیر تابعی از فرکانس بوده و باعث اعوجاج سیگنال خواهد شد. هدف از این قسمت بررسی فیلترهایی است که در ناحیه گذرشان دارای تاخیر تقریباً یکسانی برای فرکانسهای مختلف هستند.

* رابطه تاخیر زمانی با فاز سیگنال خروجی *

$$y(t) = k\,x(t-\tau)$$

$$Y(s) = \int_0^t k\,x(t-\tau)\,e^{-st}\,dt = k e^{-s\tau} X(s)$$

$$j\varphi = -s\tau \Rightarrow \varphi = -\omega\tau \Rightarrow \boxed{\tau(\omega) = \frac{-d\varphi(\omega)}{d\omega}}$$

ملاحظه می‌شود در حالت کلی τ تابعی از ω است

تابع تاخیری مقابل را در نظر بگیرید. $\quad K=1. \quad \underline{H_n(s) = e^{-s}}$

از آنجائیکه تاخیر سیستم یک ثانیه (1sec) است به تابع فوق تابع تاخیری نرمالیزه گویند.
تابع معمولی از نرمالیزه شده با میزان برحسب تابع نرمالیزه بصورت زیر است

$$\underline{H(s) = H_n\left(\frac{s}{\omega_0}\right)} \qquad \underline{\varphi(\omega) = \varphi_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \qquad \underline{T(\omega) = \frac{1}{\omega_0} T_n(\omega)}$$

* فیلتر بسل * فیلتر بسل فیلتری است که دارای تاخیر تقریباً ثابتی در ناحیه گذر (pass band) می‌باشد.

اگر بخواهیم فیلتری داشته باشیم که تاخیر در همه جا یک ثابت باشد باید تابعی دارای تابع تاخیری بصورت زیر باشد (تابع زمانی شیفت داده شده است)

$$H_n(s) = e^{-s} = \frac{1}{e^{s}} = \frac{1}{\cosh s + \sinh s} = \frac{1}{\underset{\text{even}}{m(s)} + \underset{\text{odd}}{N(s)}}$$

$$\cosh s = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \cdots$$

$$\sinh s = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots$$

$$(I) \quad \frac{m(s)}{n(s)} = \frac{1}{s} + \cfrac{1}{\frac{3}{s} + \cfrac{1}{\frac{5}{s} + \cdots + \cfrac{1}{\frac{2n-1}{s}}}}$$

ملاحظه می‌شود که برای داشتن یک فیلتر که دارای تاخیر کاملاً یکسان برای فرکانسهای مختلف باشد، نیاز به بینهایت المان است. ولی همیشه در عمل تغییرات جزئی قابل قبول است.

کافی است چند جمله از رابطه I انتخاب گردد.

$$* \text{for } n=2 \Rightarrow \frac{m(s)}{n(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s}} = \frac{1}{s} + \frac{s}{3} = \frac{3+s^2}{3s}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{3}{s^2+3s+3}$$

اگر چه فرکانس قطع فیلتر فوق 1rad/sec نیست ولی مقایسه تاخیر زمانی در دو فرکانس 0 و $\omega=1$ میتواند نمایشی جزئی از تغییرات تاخیر در pass band باشد.

$$H(j\omega) = \frac{3}{3-\omega^2+j3\omega} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{3\omega}{3-\omega^2}$$

$$\Rightarrow T(\omega) = +\frac{d}{d\omega}\left[\tan^{-1}\frac{3\omega}{3-\omega^2}\right] = \frac{3\omega^2+9}{\omega^4+3\omega^2+9} \qquad T(0)=1 \;\&\; T(1) = \frac{12}{13}$$

اگر فیلتر با درجه بالاتر انتخاب کنیم تفاوت دو مقدار فوق خیلی کمتر خواهد بود.

$$* \text{for } n=3 \Rightarrow \frac{m(s)}{n(s)} = \frac{1}{s} + \cfrac{1}{\frac{3}{s}+\cfrac{1}{5/s}} = \frac{6s^2+15}{s^3+15s}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{15}{s^3+6s^2+15s+15} \qquad T(0)=1 \;,\; T(1) = \frac{276}{277}$$

$n=4 \Rightarrow H(s) = \frac{105}{s^4+10s^3+45s^2+105s+105}$ $\quad T(0)=1 \;,\; T(1)=\frac{12745}{12745}$

* رابطه کلی برای محاسبه $H(s)$ از درجه $\underline{n}$

رابطه فوق همان روابط بین ضرایب تابع بسل است (دلیل نامگذاری فیلتر فوق)

$$\boxed{\begin{array}{c} B_n = (2n-1)B_{n-1} + s^2 B_{n-2} \\ \hline B_0 = 1 \;\;\&\;\; B_1 = s+1 \end{array}}$$

$$H(s) = \frac{K}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n}$$

$$H(s) = \frac{K}{B(s)}$$

maximally flat delay LPF

$$H(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |H(j\omega)| \exp[\measuredangle H(j\omega)]$$

$$\varphi(j\omega) = tg^{-1}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \Rightarrow T(\omega) = \frac{[X'(\omega)\cdot R(\omega) - R'(\omega)X(\omega)]/[R(\omega)]^2}{1+[X(\omega)]^2/[R(\omega)]^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\omega) = \frac{X'(\omega)R(\omega) - R'(\omega)X(\omega)}{|H(j\omega)|^2}}$$

$$H(s) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1}} = \frac{a_0}{M_2(s) + N_2(s)}$$

$$M_2(s) = a_0 + a_2 s^2 + \cdots \qquad N_2(s) = a_1 s + a_3 s^3 + \cdots$$

$$H(s) = \frac{a_0[M_2(s) - N_2(s)]}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} = \frac{a_0 M_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} - \frac{a_0 N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)}$$

$$H(s) = M(s) + N(s)$$

$$R(\omega) \triangleq Re[H(j\omega)] = \frac{a_0 M_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad , \quad X(\omega) \triangleq Im[H(j\omega)] = \frac{-a_0 N_2(s)}{j[M_2^2(s) - N_2^2(s)]}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{j a_0 N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \qquad |H(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{M_2^2(s) - N_2^2(s)}$$

$$T(\omega) = \frac{X'(\omega)R(\omega) - R'(\omega)X(\omega)}{|H(j\omega)|^2}$$

for $n=3$ $\quad H(s) = \dfrac{15}{s^3+6s^2+15s+15}$ $\quad a_0=15$

$M(s) = 6s^2+15 = a_0+a_2s^2$

$N(s) = s^3+15s = a_1s+a_3s^3$

$$\Rightarrow R(\omega) = \frac{a_0 M(s)}{M^2(s)-N^2(s)} = \frac{a_0^2+a_0a_2s^2}{a_0^2+(2a_0a_2-a_1^2)s^2+(a_2^2-2a_1)s^4-s^6}$$

$$X(\omega) = \frac{a_0 N(s)}{M^2(s)-N^2(s)} = \frac{a_0a_1s+a_0a_3s^3}{''}$$

$$\tau\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{a_0a_1+(3a_0-a_1a_2)s^2+a_2s^4}{''}$$

$$\tau(0)=1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_0}=1 \Rightarrow a_1=a_0$$

error function * تابع خطا را بصورت زیر تعریف می‌کنیم *

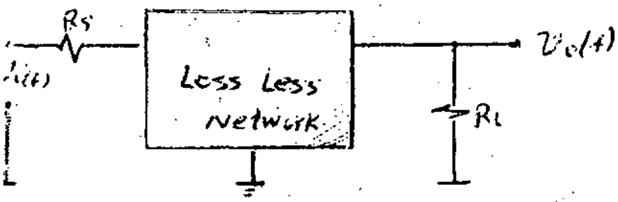
$$e\left(\frac{s}{j}\right) = \tau\left(\frac{s}{j}\right)-1 \overset{n=3}{=} \frac{(3a_1-3a_1a_2+a_1^2)s^2+(a_2+2a_1-a_2^2)s^4+s^6}{''}$$

برای اینکه $e\left(\frac{s}{j}\right)$ از نظر تابعی مختلف فیتی هم شود باید ازای بیشترین مقدار صفر باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-3a_2+a_1=0 \\ a_2+2a_1-a_2^2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad a_2=6 \quad , a_1=a_0=15$$

H.W. برای $\tau\left(\frac{s}{j}\right)$ تا مرتبه 8 بسط دهید. تابع خطا را برای $n=6$ بدست آورید سپس $H(s)$ را مشخص کنید.

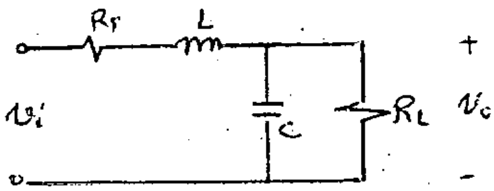
* Circuit realization * / * تحقق مداری *



یک فیلتر باترورث درجه دوم را در نظر بگیرید.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

حالت اول: $\underline{R_L > R_S}$ در این حالت آخرین المان خازن موازی با بار می‌باشد.



$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1/(G_L+sC)}{1/(G_L+sC)+Ls+R_S}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1+LCs^2+(R_sC+\frac{L}{R_L})s+R_S/R_L}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/LC}{s^2+(\frac{R_S}{L}+\frac{1}{R_LC})s+(1+\frac{R_S}{R_L})/LC}$$

فرض $R_L = 2R_S = 2R$

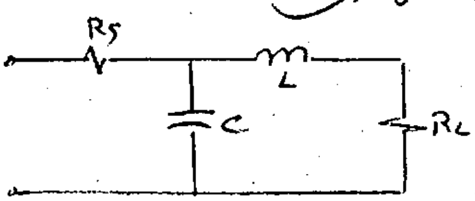
$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/LC}{s^2+\frac{2R^2C+L}{2RLC}s+3/2LC} \equiv \frac{A}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3/2LC = 1 \\ (2R^2C+L)/(2RLC) = \sqrt{2} \end{cases}$$

فرض $R_S = 1\Omega$ و $R_L = 2\Omega$

$$\Rightarrow \begin{cases} LC = 3/2 \\ 2C+L = 2\sqrt{2}LC \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 0.448, & C_2 = 1.673 \\ L_1 = 3.348, & L_2 = 0.896 \end{matrix}$$

حالت دوم: $\underline{R_L < R_S}$ در این حالت آخرین المان سلف سری با بار می‌باشد.



فرض $R_L = \frac{R_S}{2} = \frac{R}{2}$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1/2LC}{s^2+\frac{2L+R^2C}{2RLC}s+3/2LC} = \frac{B}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

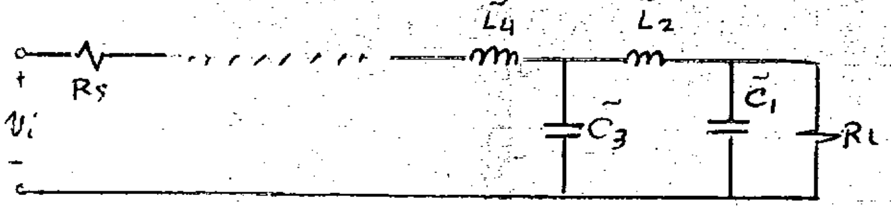
$$\Rightarrow \text{IF } R_L = \tfrac{1}{2}, R_S = 1 \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 3.342F, & L_1 = 0.448H \\ C_2 = 0.9F, & L_2 = 1.673H \end{matrix}$$

حالت سوم $R_L = R_S$ در این حالت از هر یک از دو روش قبل می‌توان استفاده کرد.

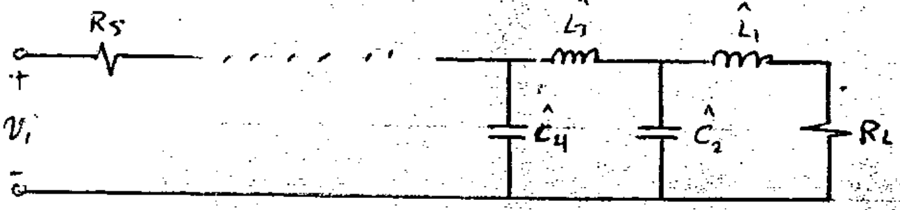
از آنجایی که روش فوق برای فیلترهای با درجه‌های بالا عملاً غیر عملی است از این به بعد از فرمولهای زیر برای حالت بالایی استفاده می‌کنیم.

B.W. Circuit Realization

حالت اول $R_L > R_S$



حالت دوم $R_L < R_S$



$R_L = R_S$ در این حالت از هر دو شکل استفاده می‌شود.

Minimom phase Refllection Coefficion $\qquad R_S = 1\,\Omega$

$$\underbrace{\tilde{C}_{2m-1}\tilde{L}_{2m}}_{\text{I حالت}}\ \text{or}\ \underbrace{[\tilde{L}_{2m-1}\tilde{C}_{2m}]}_{\text{II حالت}} = \frac{\alpha_{4m-3}\,\alpha_{4m-1}}{1-\lambda B_{4m-2}+\lambda^2}$$

$$\underbrace{\tilde{C}_{2m+1}\tilde{L}_{2m}}_{\text{I حالت}}\ \text{or}\ \underbrace{[\tilde{L}_{2m+1}\tilde{C}_{2m}]}_{\text{II حالت}} = \frac{\alpha_{4m-1}\,\alpha_{4m+1}}{1-\lambda B_{4m}+\lambda^2}$$

$$\begin{cases} \lambda = \left(\dfrac{R_L-1}{R_L+1}\right)^{1/n} & (a)\ \ R_L>1 \\ \lambda = \left(\dfrac{1-R_L}{1+R_L}\right)^{1/n} & (b)\ \ R_L<1 \end{cases}$$

$$\alpha_i = 2\sin\frac{\pi i}{2n} \qquad \tilde{C}_1 = \frac{\alpha_1}{R_L(1-\lambda)}$$

$$B_i = 2\cos\frac{\pi i}{2n} \qquad \tilde{L}_1 = \frac{\alpha R_L}{1-\lambda}$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \dots \dfrac{n-1}{2} & \text{odd} \\ 1, 2, \dots \dfrac{n}{2} & \text{even} \end{cases}$$

IF $R_L = R_S = 1\Omega \Rightarrow C_n = 2\sin\frac{2m-1}{2n}\pi$ odd

مثال : مقادیر یک فیلتر باترورث درجه ۲ را برای $R_L = 2R_S = 2\Omega$ بدست آورید

$$\lambda = \left(\frac{R_L-1}{R_L+1}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} = 0.58 \qquad \hat{C}_1 = \frac{2\sin \pi i/2n}{2(1-0.58)} = 1.57\,F$$

$$m=1 \Rightarrow \tilde{C}_1\tilde{L}_2 = \frac{\alpha_1\alpha_3}{1-\lambda\beta_2+\lambda^2} = \frac{\sin \pi/4 \ \sin 3\pi/4}{1-0.58\cos\frac{\pi}{2}+(0.58)^2} = 1.5 \Rightarrow L_2 = 0.9\,H$$

معمولاً حالت $R_L = R_S$ از فیلترها رخ دارد.

$R_L = R_S = 1\Omega$

n	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	---
2	1.414	1.414				
3	1	2	1			
4	0.7654	1.847	1.847	0.765		

* کلی روابط فوق را هم در جزوه در نظر بگیرید * $R_S = 1$

$R_L > R_S$: $\tilde{C}_1 = \dfrac{\alpha_1}{R_L(1-\lambda)}$

I) $\tilde{C}_{2m-1}\tilde{L}_{2m} = (\alpha_{4m-3}\alpha_{4m-1})/(1-\lambda\beta_{4m-2}+\lambda^2)$

II) $\tilde{C}_{2m+1}\tilde{L}_{2m} = (\alpha_{4m-1}\alpha_{4m+1})/(1-\lambda\beta_{4m}+\lambda^2)$

با محاسبه C_1 و قرار دادن آن در رابطه I مقدار L_2 محاسبه می‌شود و با استفاده از معادله 2 C_3 نیز محاسبه می‌شود و بقیه به همین ترتیب

$R_L < R_S$ $\tilde{L}_1 = \dfrac{\alpha R_L}{1-\lambda}$

$$\tilde{L}_{2m-1}\tilde{C}_{2m} = (\alpha_{4m-3}\alpha_{4m-1})/(1-\lambda\beta_{4m-2}+\lambda^2)$$

$$\tilde{L}_{2m+1}\tilde{C}_{2m} = (\alpha_{4m-1}\alpha_{4m+1})/(1-\lambda\beta_{4m}+\lambda^2)$$

برای هر دو حالت داریم :

$$\alpha_i = 2\sin\frac{\pi i}{2n} \qquad \beta_i = 2\cos\frac{\pi i}{2n} \qquad \lambda = \left|\frac{R_L-1}{R_L+1}\right|^{1/n}$$

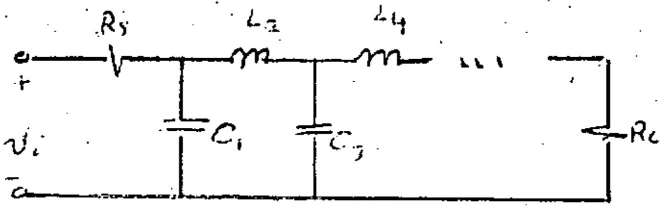
$R_L = R_S \Rightarrow$

$$\boxed{C_m = 2\sin\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad m \text{ odd}}$$

$$\boxed{L_m = 2\sin\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad m \text{ even}}$$

تحقق مداری چبی شف

* C.C Circuit realization *



در چبی شف از طرف اول شروع می کنیم:

$$H(-s)\cdot H(s) = |H(j\omega)|^2 = \frac{K}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)}$$

$$\omega=0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|^2 = K/(1+\epsilon^2) & n \text{ even} \\ |H(j\omega)|^2\big|_{\omega=0} = K & n \text{ odd} \end{cases}$$

بنابراین برای n های زوج محدودیت خواهیم داشت و R_L هر مقداری نمیتواند داشته باشد و باید در شرط زیر صدق کند،

$$\boxed{a = \frac{4R_L}{(R_L+1)^2}(1+\epsilon^2) \leq 1} \quad \text{for } n \text{ even}$$

$$\alpha_i = 2\sin\frac{\pi i}{2n}$$
$$\beta_i = 2\cos \pi i/2n$$

$$\gamma = \left[\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}+1}\right]^{1/n} \quad \& \quad \delta = \left[\sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}+1}\right]^{1/n}$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\gamma}$$
$$y = \delta - \frac{1}{\delta}$$

$$C_{2m-1}L_{2m} = (4\alpha_{4m-3}\,\alpha_{4m-1})/b_{2m-1}(x,y)$$

$$C_1 = \frac{2\alpha_1}{x-y}$$

$$C_{2m+1}L_{2m} = (4\alpha_{4m-1}\,\alpha_{4m+1})/b_{2m}(x,y)$$

$$b_i(x,y) = x^2 - \beta_{2i}\,x\cdot y + y^2 + \alpha_{2i}^2 \qquad n = 1,2,\ldots \frac{n-1}{2} \quad n \text{ odd}$$
$$n = 1,2,\ldots \frac{n}{2} \quad n \text{ even}$$

مثال: مطلوب است طرح یک فیلتر LP چبی شف با ریپل $R=0.1$ dB ، $BW=1$ R/s
و در $\omega \geq 5$ R/s تضعیف بیش از 20^{db}

$$n=\frac{\cosh^{-1}\left[(10^{0.1A_{min}}-1)/(10^{0.1A_{max}}-1)\right]^{1/2}}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_H}{\omega_p}\right)}=\frac{\cosh^{-1}\left[(10^{2}-1)/(10^{0.01}-1)\right]^{1/2}}{\cosh^{-1}6}$$

$$\Rightarrow n=1.965 \quad \Rightarrow \quad n=2 \qquad \epsilon=\sqrt{10^{0.1A_{max}}-1}=0.1526$$

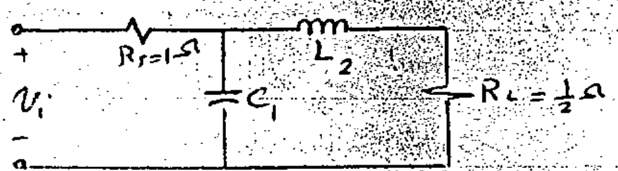
چون $R_s=1\Omega$ و n زوج است باید محدوده مجاز R_L تعیین شود.

$$\frac{4R_L}{(R_L+1)^2}(1+\epsilon^2)\leqslant 1$$

فرض می‌کنیم $R_L=0.5\Omega$ انتخاب شود.

$\gamma=3.63 \qquad a=0.70959$

$\delta=2.044$



$$\Rightarrow x=3.355 \qquad y=1.555 \qquad \alpha_1=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\,,\ \alpha_2=2$$

$$C_1=\frac{2\alpha_1}{x-y}\Rightarrow C_1=1.57\ F \qquad C_1L_2=\frac{4\alpha_1\alpha_3}{b_1(x,y)}$$

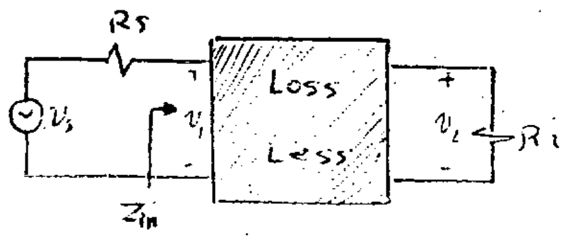
$$\alpha_3=2\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2} \qquad b_1(x,y)=x^2+B_2xy+y^2+\alpha_2^2=17.674$$

$B_2=0$

$$\Rightarrow L_2=0.288\ H$$

H.W - برنامه‌ای بنویسید که مقادیر n و R (ریپل یا ϵ) و R_L (با فرض اینکه $R_s=1\Omega$ است) را دریافت کرده و مقادیر L و C ها را در خروجی مشخص کند. (برای یک فیلتر چبی‌شف)
سپس فیلتری طراحی نمائید که دارای ریپل $R=0.1\ dB$ و $n=21$ و $n=22$
با فرض اینکه: $R_s=1\Omega$ $R_L=1\Omega$ for $n\equiv odd$
R_L را برای حالت زوج انتخاب کنید.

*** تحقق مداری * در این قسمت تحقق مداری فیلترهای مختلف را برحسب Γ بررسی می‌کنیم.

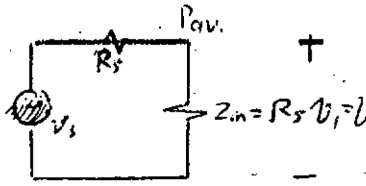


$$\Gamma=\frac{Z_{in}-Z_s}{Z_{in}+Z_s}$$ حالت خاص $R_s=1\Omega$

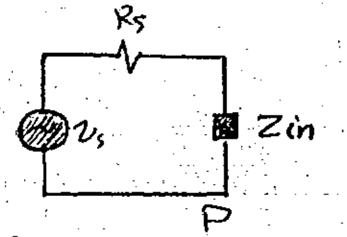
$$\Rightarrow \Gamma=\frac{Z_{in}-1}{Z_{in}+1}\Rightarrow Z_{in}=\frac{1-\Gamma}{1-\Gamma}$$

حداکثر توان وقتی منتقل می‌شود که داشته باشیم $Z_{in}=R_s$ (مثلاً اگر خط بدون اتلاف باشد که در این صورت
صفر داریم $Z_{in}=R_L=R_s$ و حداکثر توان منتقل خواهد شد و هیچگونه توان برگشتی نخواهیم داشت)

در حالت کلی میزان توان نوشت $Z_{in}=R_s$ $V_1=V_1'$



توان قابل دسترس $= \dfrac{V_s^2}{4R_s}$



توان انتقالی $P = \dfrac{(V_s)^2}{(R_s+Z_{in})^2}\cdot(Z_{in})$

توان برگشتی $\leftarrow P_r = \dfrac{V_s^2}{4R_s} - \dfrac{V_s^2 Z_{in}}{(R_s+Z_{in})^2} =$ توان قابل دسترس − توان انتقالی

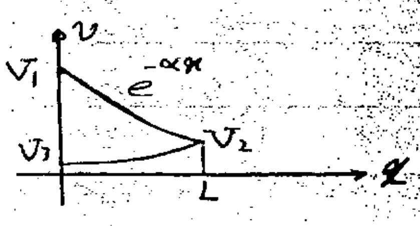
$$= \frac{V_s^2}{4R_s}\left(1-\frac{4R_sZ_{in}}{(R_s+Z_{in})^2}\right) = \frac{V_s^2}{4R_s}\left(\frac{Z_{in}-R_s}{Z_{in}+R_s}\right)^2$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{P_r}{P_a}} \Rightarrow \Gamma = \frac{Z_{in}-R_s}{Z_{in}+R_s} = \frac{Z_{in}-1}{Z_{in}+1} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

پس برای هر فیلتر کافی است Γ و در نتیجه Z_{in} را محاسبه کنیم و بعد سنتز کنیم.

یک خط انتقال را در نظر بگیرید هرگاه تضعیف این خط α' باشد خواهیم داشت

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{-\alpha' L}$$



V_3 ولتاژ برگشتی است.

فرض $\alpha' L = \alpha$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = e^{-\alpha}, \quad \frac{V_3}{V_1} = e^{-\alpha} \Rightarrow \left|\frac{V_3}{V_1}\right| = e^{-2\alpha}$$

$$|\Gamma|^2 = |1-e^{-2\alpha}| \qquad \left|\frac{V_2}{V_1}(j\omega)\right|^2 = |e^{-2\alpha}|$$

$$e^{-2\alpha} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Z \longrightarrow$$ سنتز

* پس روش فوق چنین شد:

$$\left|\frac{v_2}{v_1}(j\omega)\right|^2=|H(j\omega)|^2=e^{-2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\Gamma|^2=|1-e^{-2\alpha}|=|1-|H(j\omega)|^2|} \qquad \boxed{Z_{in}=\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \text{ or } \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}}$$

همیشه $R_L=R_s$ فرض می‌گیریم

مثال: روش فوق برای باترورث

$$|H(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

$$\text{IF } n \text{ even} \Rightarrow H(s)H(-s)=\frac{1}{1+s^{2n}} \Rightarrow \Gamma(s)\cdot\Gamma(-s)=1-H(s)H(-s)$$

$$\Rightarrow \Gamma(s)\Gamma(-s)=\frac{s^{2n}}{1+s^{2n}} \qquad \text{for } n=2 \Rightarrow \Gamma(s)\Gamma(-s)=\frac{s^4}{1+s^4}$$

$$\Rightarrow \Gamma(s)\Gamma(-s)=\frac{s^4}{(s^2+\sqrt{2}s+1)(s^2-\sqrt{2}s+1)} \Rightarrow \Gamma(s)=\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

$$\Rightarrow Z_{in}=\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}=\frac{2s^2+\sqrt{2}s+1}{\sqrt{2}s+1}$$

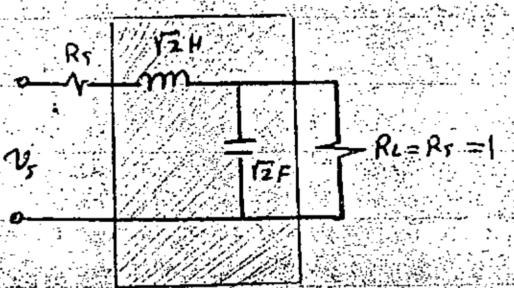
$\sqrt{2}s+1\ )\ 2s^2+\sqrt{2}s+1\ )\ \sqrt{2}s \rightarrow Z$

$2s^2+\sqrt{2}s$

$1\ )\ \sqrt{2}s+1\ )\ \sqrt{2}s \longrightarrow Y$

$\sqrt{2}s$

$1\ )\ 1\ )\ 1 \rightarrow Z$

$\Rightarrow$ 

باترورث مرتبه دوم

H.W - مطلوب است محاسبه عناصر یک فیلتر باترورث درجه (۵، ۶، ۷، ۸، ۹) با روش فوق.

مثال: روش فوق برای چبی‌شف

$$|\Gamma|^2=1-\frac{1}{1+\epsilon^2C_n^2(\omega)}=\frac{\epsilon^2C_n^2(\omega)}{1+\epsilon^2C_n^2(\omega)}$$

for $n=3$ & $R=0.1\ dB$

$\epsilon=\sqrt{10^{0.01}-1}=0.1526$

ابتدا $G(s)=\frac{v_2}{v_1}$ را پیدا می‌کنیم

$s_k = \sigma_k + j\omega_k$ $\qquad a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{3}\sinh^{-1} 6.552 = 0.85957$

$\sinh a = 0.9694 \qquad \cosh a = 1.3927$

قطبهای باترورث $\quad -1$ و $-1/2 + j\sqrt{3}/2$ و $-1/2 - j\sqrt{3}/2$

برای بدست آوردن قطبهای چبیشف قسمت حقیقی ریشه‌ها را در $\sinh a$ و قسمت موهومی را در $\cosh a$ ضرب می‌کنیم.

$\Rightarrow s_1 = -0.9694 \qquad s_2 = -0.4847 + j1.2061$ $\quad$ چون فرد است

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad s_3 = -0.4847 - j1.2061$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{k}{(s+0.9694)\left[(s+0.4847)^2 + 1.2061^2\right]} = \frac{1.64}{s^3 + 1.94s^2 + 2.66s + 1.64}$$

$$\Rightarrow \Gamma(s) = \frac{s^3 + 0.75s}{s^3 + 1.94s^2 + 2.66s + 1.64} \Longrightarrow Z_{in} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

$$\Rightarrow Z_{in}(s) = \frac{2s^3 + 1.94s^2 + 3.41s + 1.64}{1.94s^2 + 1.9s + 1.64} =$$ سنتز

---

frequency transmision $\qquad$ انتقال فرکانسی (Lp-BP ، Lp-HP ، Lp-BR)

$Lp \longrightarrow Hp$

$f \to \infty \Rightarrow H(s) = 0$

منحصر LPF $\quad f \to 0 \Rightarrow H(s) = A$

منحصر فیلتر بالاگذر $\quad \begin{cases} f \to \infty \Rightarrow H(s) = A \\ f \to 0 \Rightarrow H(s) = 0 \end{cases}$

روابط فوق نشان می‌دهند که اگر در تابع انتقال یک فیلتر $f \to \frac{1}{f}$ $\left(s \to \frac{1}{s}\right)$ تبدیل شود کل فیلتر Lp به فیلتر Hp و بالعکس تبدیل خواهد شد.

$$\boxed{s' = \frac{1}{s}} \Rightarrow Ls' = L/s = \frac{1}{\frac{1}{L}s} = \frac{1}{C's} \Longrightarrow \boxed{C' = \frac{1}{L}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Cs'} = \frac{s}{C} = \frac{1}{C}s = L's \Longrightarrow \boxed{L' = \frac{1}{C}}$$

یعنی با تبدیل خازن به سلف و از نظر مقدار عکس آن فیلتر Lp به فیلتر Hp تبدیل می‌شود.

و سلف به خازن

$LP \longrightarrow BP$

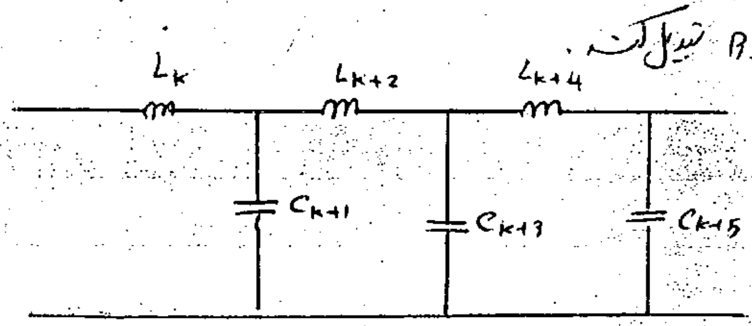
مشخصات BPF
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \Rightarrow H(s) = A \\ \omega \to 0 \Rightarrow H(s) \to 0 \quad , \ \omega = \omega_1 \Rightarrow H(s) = A - 3\,dB \\ \omega \to \infty \Rightarrow H(s) \to 0 \quad \ \ \omega = \omega_2 \Rightarrow H(s) = A - 3\,dB \end{cases}$$

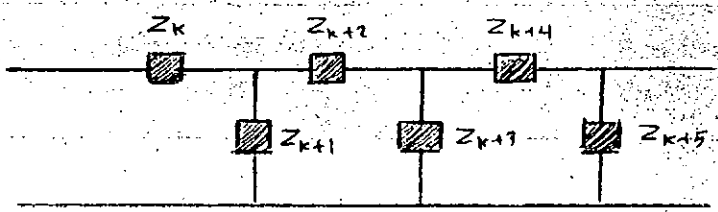
اگر از تبدیل روبرو استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\omega' = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \omega' \to \infty \Rightarrow H(j\omega') \to 0$$
$$\omega \to 0 \Rightarrow \omega' \to \infty \Rightarrow H(j\omega') \to 0$$
$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \omega' = 0 \Rightarrow H(j\omega') = A$$
$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \omega' = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1\omega_2 - \omega_1^2} = -1 \quad IF \ \omega_1\omega_2 = \omega_0^2$$
$$\Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow \omega' = -1 \Rightarrow H(j\omega') = A - 3\,dB$$
$$, \ \omega = \omega_2 \Rightarrow \omega' = 1 \Rightarrow H(j\omega') = A - 3\,dB$$

پس تبدیل فوق میتواند یک فیلتر LP را به یک فیلتر BP تبدیل کند.



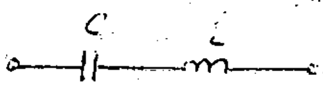


آنچه مسلم است تبدیل خازنی در عالم واقعی وجود ندارد و ما باید امپدانسها را تبدیل کنیم بگذارید اگر گوی فرکانس تبدیل شده است. یعنی:

$$Z_k = L_k \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad , \ Z_{k+1} = \left[C_{k+1} \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^{-1}$$

حال ببینیم که چه المانهایی میتوانند چنین امپدانسهایی را داشته باشند.

اگر ترکیب LC سری را بررسی کنیم به نتیجه مطلوب خواهیم رسید

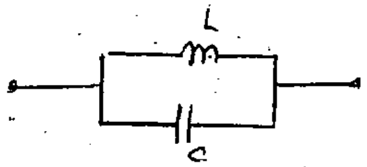


$$Z = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow jX_s = j\left[L\omega - \frac{1}{C\omega}\right]$$

$$\Rightarrow jX_s = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\sqrt{LC}\,\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\,\omega}\right] = \boxed{j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = jX_s}$$

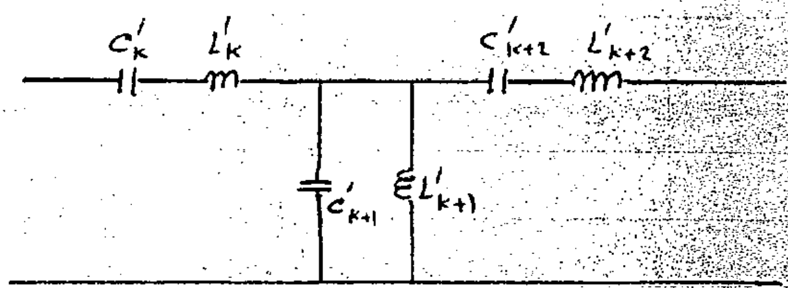
ملاحظه می‌شود که بجای امپدانسهای سری میتوان از LC موازی استفاده کرد.

محاسبه ادمیتانس مدار LC موازی نیز نشان می‌دهد که میتوان آنرا بجای ادمیتانس موازی استفاده کرد.



$$\boxed{Y = jB = j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

پس مدار BP بصورت زیر خواهد بود.
(در فرکانس ω_0 مدارات سری اتصال کوتاه و مدارات موازی open می‌شوند و $H(j\omega)$ مقدار ثابتی خواهد داشت).



* تمام عناصر در فرکانس ω_0 رزونانس می‌کنند.

باید داشته باشیم:

$$\sqrt{\frac{L'_k}{C'_k}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{L_k\omega_0}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{L'_k}{C'_k}} = \frac{L_k\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$$

از طرفی داریم

$$\sqrt{L'_kC'_k} = \omega_0 \Rightarrow \boxed{L'_k = \frac{L_k}{\Delta\omega}} \Rightarrow \boxed{C'_k = \frac{1}{L'_k\,\omega_0^2}}$$

$$\sqrt{\frac{C'_{k+1}}{L'_{k+1}}} = \frac{C_{k+1}\,\omega_0}{\Delta\omega} \Rightarrow \boxed{C'_{k+1} = \frac{C_{k+1}}{\Delta\omega}} \Rightarrow \boxed{L'_{k+1} = \frac{1}{C'_{k+1}\,\omega_0^2}}$$

H.W مقادیر یک فیلتر باترورث درجه چهار را مشخص کنید در صورتیکه اولین مدار طرف منبع یک LC موازی باشد.

$R_L = R_S = 50\,\Omega \qquad f_1 = 500\ \text{MHz} \qquad f_2 = 600\ \text{MHz}$

H.w چبی‌شف معکوس $n=3$ ، $R=0.1\,dB$

a) TF را بصورت $\frac{P(s)}{Q(s)}$ بدست آورید و رسم کنید.

b) اگر TF بصورت زیر باشد و فیلتر نردبانی با اهم ختم شده باشد عناصر را بدست آورید.

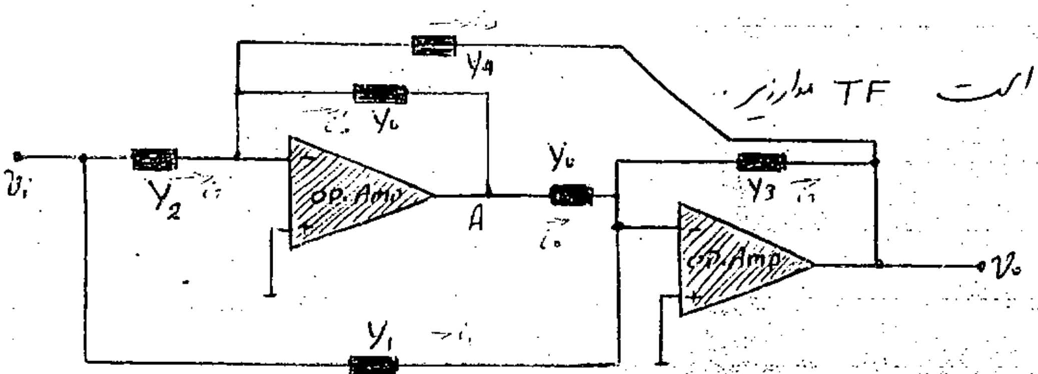
$$H(s) = \frac{1/3\,(3s^2+4)}{s^3+2.5s^2+2s+2}$$

H.w

پاسخ‌های step و impulse را برای فیلترهای BR و BP زیر بدست آورید.

$$H(s) = \frac{s}{s^2+0.2s+1} \qquad H(s) = \frac{s^2+1}{s^2+0.2s+1}$$

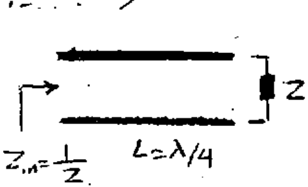
HW - (درس امروز) مطلوب است TF مدار زیر.



پس از بدست آوردن $TF = \frac{V_2}{V_1}$ مدار را با $TF = s^4$ سنتز نمائید.

Active filter. فیلترهای فعال

فیلترهایی که تاکنون بررسی کردیم برای فرکانسهای خیلی پایین و حتی فرکانسهای بالا عملی نیستند زیرا مقادیر بزرگی برای سلف و خازن بدست می‌آید. [برای فرکانسهای خیلی بالا نیز نمی‌توان از فیلترهای LC استفاده کرد بلکه در اینجا نیز از جعبه‌های رزونانسی و خطوط انتقال استفاده می‌شود.]

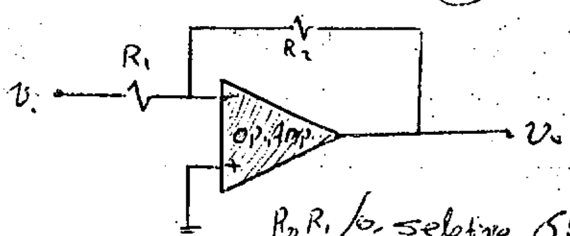


در این قسمت نیز مثل فیلترهای غیرفعال ابتدا فیلترهای LP را طرح می‌کنیم و تمامی بحث‌های لازم روی آن انجام می‌گیرد. در نهایت با تبدیلات فرکانسی بحث را کامل می‌کنیم.

همچنین توسط مدارات فعال میتوان خازن را با سلف تبدیل کرد، از این برای IC کردن فیلترها الزامی است.

طراحی مدارهای اکتیو توسط OP.Amp

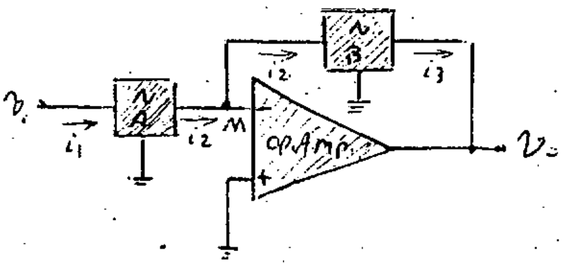
OP.Amp ها ایده‌آل فرض می‌شوند (گین بینهایت و مقاومت ورودی بینهایت)



مدار مقابل را در نظر بگیرید:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

تابع انتقال فوق ایده خوبی به ما می‌دهد زیرا اگر از شبکه‌های selective بجای R_2 , R_1
میتوان تابع انتقال یک فیلتر را بدست آورد.



حال شبکه مقابل را در نظر بگیرید:

$$i_1 = y_{11_a} v_i + y_{21_a} V_m$$

$$-i_2 = y_{21_a} v_i + y_{22_a} V_m \quad , \quad V_m = 0 \quad \text{(ایده‌آل)}$$

$$\Rightarrow -i_2 = y_{21_a} v_i \quad , \quad i_2 = y_{11_b} V_m + y_{21_b} v_o \Rightarrow i_2 = y_{21_b} v_o$$

$$-i_3 = y_{21_b} V_m + y_{22} v_o$$

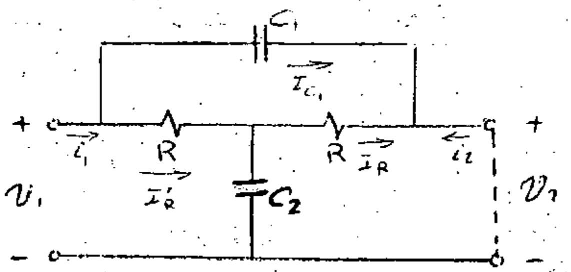
$$\Rightarrow y_{21a} v_i = -y_{21b} v_o \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{y_{21a}}{y_{21b}}}$$

کافی است $H(s)$ را معادل با تابع انتقال فیلتری قرار دهیم که مطلوب ماست. و از آنجا شبکه‌های A و B را بدست آوریم.

صفرهای y_{21a} همان صفرهای تابع انتقال است و صفرهای y_{21b} همان قطبهای تابع انتقال هستند.
پس باید شبکه‌های A,B طوری انتخاب شوند که قطبهای y_{21a} و y_{21b} از هم حذف شوند.

یکی از شبکه‌های مناسب برای B , A شبکه‌ای B.T.N است Bridge T Network

ابتدا باید روشها y_{21} و y_{22} را برای شبکه B.T.N بدست آوریم.

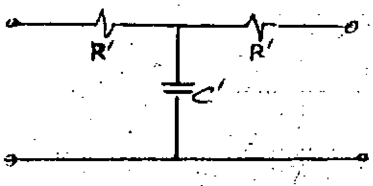


$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}$$

$$I_2 = -(I_{C_1} + I_R) \qquad I_{C_1} = SC_1 V_1 \qquad I'_R = \frac{V_1}{R + \frac{R}{1+RSC_2}}$$

$$I_R = I'_R \times \frac{1}{1+RC_2S} = \frac{V_1}{2R + R^2C_2S} \Rightarrow I_2 = -\left(SC_1 + \frac{1}{2R+R^2C_2S}\right)V_1$$

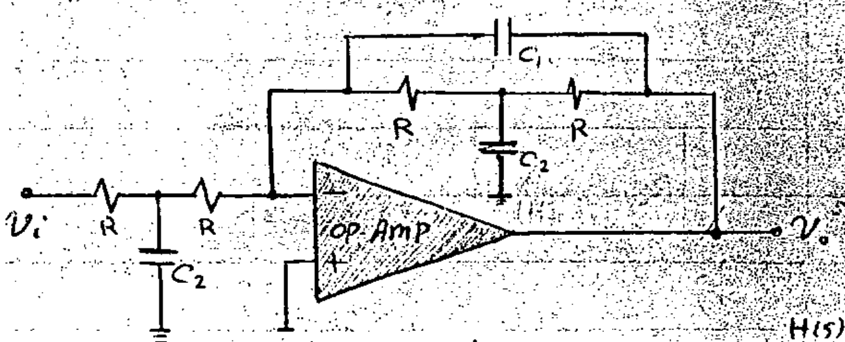
$$\Rightarrow \boxed{Y_{21} = -\frac{R^2C_1C_2S^2 + 2RC_1S + 1}{2R + R^2C_2S}}$$



ملاحظه می‌کنیم که قطبهای Y_{21} مستقل از C_1 است. بنابراین اگر شبکه‌ای بصورت مقابل انتخاب کنیم با انتخاب مناسب R' و C' می‌توان قطبهای Y_{21} را از بین برد.

$$\boxed{Y_{21} = \frac{-1}{R'^2C'S + 2R'}}$$

بنابراین برای طراحی فیلتر پایین‌گذر می‌توان از شبکه‌های فوق استفاده کرد (بصورت زیر)



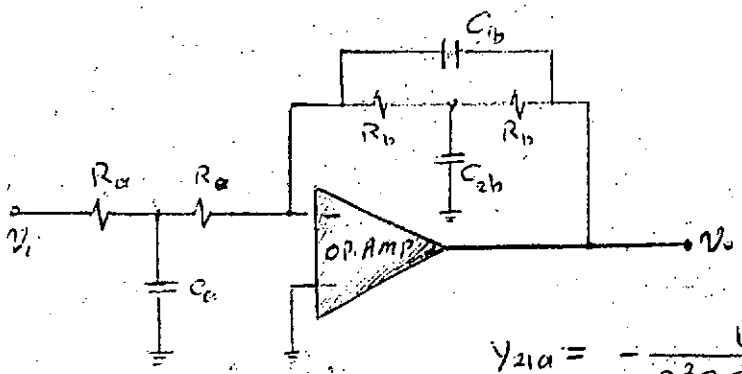
$$H(S) = \frac{-1/R^2C_1C_2}{S^2 + \frac{2}{RC_2}S + \frac{1}{R^2C_1C_2}}$$

$$H(S) = \frac{-1}{S^2 + \alpha S + 1} \qquad R^2 \times C_1C_2 = 1$$

α بستگی به نوع فیلتر خواهد داشت. مثلاً برای فیلتر باترورث $\alpha = \sqrt{2}$

توجه: البته هیچ لزومی ندارد که مقادیر شبکه‌های a و b باهم برابر باشند بلکه تنها شرط حذف قطبهای Y_{21a} و Y_{21b} است.

* برای بررسی فیلترهای مرتبه بالاتر می‌توان مدارهای Bridge T و T را بکار برد *



* حالت کلی * (وقتی که فیلتر دارای گین است)

$$H(s) = -\frac{y_{21a}}{y_{21b}}$$

$$y_{21a} = -\frac{1}{R_a^2 C_a S + 2R_a} \qquad y_{21b} = -\frac{R_b^2 C_{2b} C_{1b} S^2 + 2R_b C_{1b} S + 1}{R_b^2 C_{2b} S + 2R_b}$$

اگر $\underline{R_b C_{2b} = R_a C_a}$ آنگاه:

$$\Rightarrow H(s) = \frac{-\frac{R_b}{R_a}}{R_b^2 C_{2b} C_{1b} S^2 + 2R_b C_{1b} S + 1}$$

$$H(s) = \frac{-H\omega_0^2}{S^2 + \alpha\omega_0 S + \omega_0^2} \qquad \underline{H = \frac{R_b}{R_a}} \qquad \underline{\omega_0^2 = \frac{1}{R_b^2 C_{1b} C_{2b}}}$$

$$, \ \alpha\omega_0 = \frac{2}{R_b C_{1b}}$$

ملاحظه می‌شود که تعداد معادلات نسبت به تعداد مجهولات یکی کمتر است بنابراین دستمان برای طراحی باز است.

* برای طراحی بصورت زیر عمل می‌کنیم *

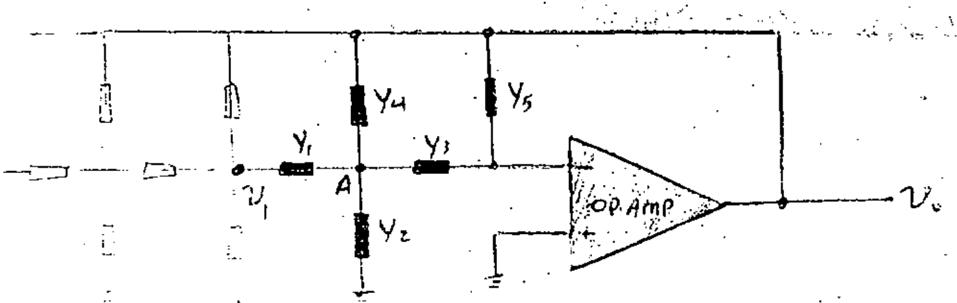
$$\boxed{H(s) = \frac{-H\omega_0^2}{S^2 + \alpha\omega_0 S + \omega_0^2}}$$

$$\boxed{C_{1b} = \frac{K}{\omega_0}} \qquad \boxed{C_{2b} = \frac{4K}{\omega_0 \alpha^2}} \qquad \boxed{R_a = \frac{\alpha}{2HK}} \qquad \boxed{R_b = \frac{\alpha}{2K}}$$

$$\boxed{C_a = \frac{4HK}{\omega_0 \alpha^2}}$$

K را طوری انتخاب می‌کنیم که مقادیر المانها معقول باشند. مثلاً 10^{-5}

multi feadback فیدبکهای چندتایی



برای مدار فوق داریم :

$$\begin{cases} (V_A - V_i)\,Y_1 + V_A(Y_2 + Y_3) + Y_4(V_A - V_o) = 0 \\ V_o = -V_A\, Y_3/Y_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4\left(1 + \frac{Y_3}{Y_5}\right)\right] V_A = Y_1 V_i$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Y_1 Y_5}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3} V_1 \Rightarrow V_o = \frac{-Y_1 Y_3 V_i}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3}}$$

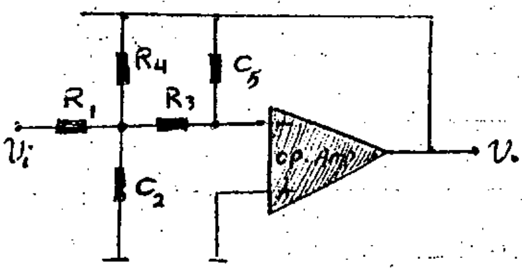
بسته به اینکه چه نوع فیلتری بخواهیم میتوانیم Y ها را انتخاب کنیم.

مثلاً میخواهیم یک فیلتر LP طراحی کنیم. * فیلتر مرتبه دوم *

Y_1, Y_3 حتماً مقاومتی هستند (زیرا صورت باید یک عدد باشد) Y_5 حتماً یک خازن است تا S^2 در مخرج ظاهر شود Y_4 باید مقاومت باشد تا ریشه های مخرج از صورت خارج شوند در غیر اینصورت مخرج بصورت $S^2 + AS$ خواهد شد. پس Y_2 باید خازن باشد.

$$Y_1, Y_3, Y_4 \equiv G \qquad Y_2, Y_5 \equiv C$$

بنابراین فیلتر LP با فیدبکهای چندتایی بصورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{G_1 G_3}{C_5 S(G_1 + C_2 S + G_3 + G_4) + G_3 G_4}$$

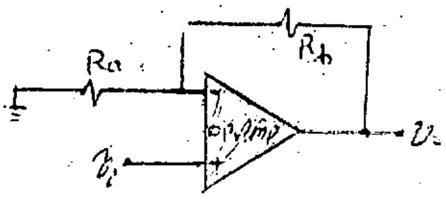
$$\Rightarrow H(s) = \frac{-G_1 G_3 / C_2 C_5}{S^2 + \frac{G_1 + G_3 + G_4}{C_2} S + \frac{G_3 G_4}{C_2 C_5}} \equiv \frac{-H\omega_o^2}{S^2 + \alpha\omega_o S + \omega_o^2}$$

$R_4 = \frac{\alpha}{2K}$	$R_1 = \frac{\alpha}{2HK}$	$R_3 = \frac{\alpha}{2K(1+H)}$	$C_2 = \frac{4K(1+H)}{\alpha^2 \omega_o}$	$C_5 = \frac{K}{\omega_o}$

مدارات فعال با گین محدود:

همیشه از تقویت کننده های با گین زیاد استفاده می شود حتی گاهی که لازم است تقویت کننده های با گین واحد داشته باشیم. ممکن است گفته شود چرا تقویت کننده ای با گین [illegible]

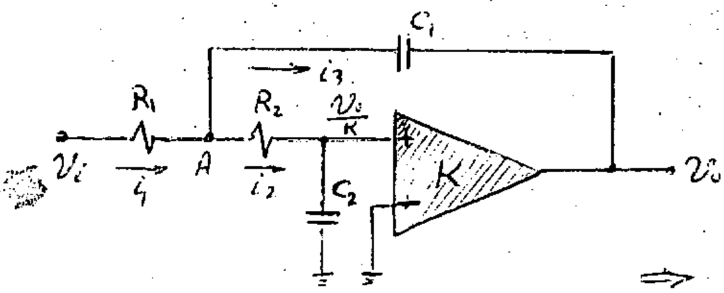
گرچه گین آن واحد است ولی دارای مقاومت ورودی خیلی زیاد (بی‌نهایت) است و لذا از مدار بار ایزوله می‌کند.



یک مدل از چنین مدارهایی می‌تواند به صورت روبرو باشد.

$$A_v = 1 + \frac{R_b}{R_a} = K$$

مثال: تابع انتقال فیلتر مقابل را بدست آورید.



$$i_2 = \frac{v_o}{K} s C_2$$

$$\frac{v_o}{K} = v_A \times \frac{1/sC_2}{1/sC_2 + R_2} = \frac{v_A}{1 + R_2 C_2 s}$$

$$\Rightarrow i_1 = \left(v_i - \frac{1 + R_2 C_2 s}{K} v_o\right) / R_1$$

$$\Rightarrow i_3 = i_1 - i_2 = \left(v_i - \frac{1 + R_2 C_2 s}{K} v_o\right)/R_1 - \frac{v_o}{K} s C_2$$

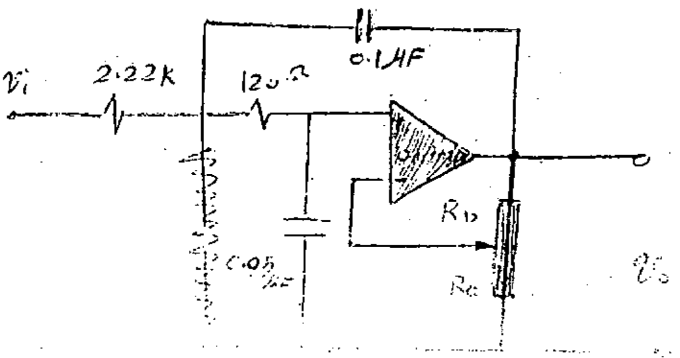
$$v_o = v_A - i_3 / C_1 s \Rightarrow v_o = \frac{1 + R_2 C_2 s}{K} v_o - \left[\left(v_i - v_o \frac{1 + R_2 C_2 s}{K}\right)/R_1 - \frac{v_o}{K} s C_2\right] / C_1 s$$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{1 + R_2 C_2 s}{K} - \frac{1 + R_2 C_2 s}{K R_1 C_1 s} - \frac{C_2}{K C_1}\right] v_o = -\frac{v_i}{R_1 C_1 s}$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - K R_1 C_1) s + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \left[C_1 C_2 s^2 + \left[G_1 C_2 + G_2 C_2 + (1-K) G_2 C_1\right] s + G_1 G_2\right]^{-1} \times K G_1 G_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_o}{v_i} = \frac{K G_1 G_2}{C_1 C_2 s^2 + \left[(G_1 + G_2) C_2 + (1-K) G_2 C_1\right] s + G_1 G_2}}$$

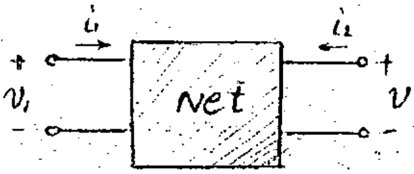


H.W. در مدار شکل مقابل با تغییر پتانسیومتر 100K برای نقاط (10-90) (20-80) ... (90 10) TF را رسم [نمایید] و بگویید برای چه مقداری از پتانسیومتر مسئله جواب ندارد. (تعیین کنید)

Negative Impedance Convertor *NIC*

INIC (current NIC)

هرگاه در یک شبکه چهارسر داشته باشیم



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$V_1 = a V_2$

$I_1 = b I_2$

یعنی جریان معکوس میشود

آنگاه اگر باری در خروجی قرار بگیرد امپدانس ورودی بصورت Convert شده، این خواهد شد. زیر داریم:

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L} = -\frac{V_1}{a Z_L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{b}{a}\frac{V_1}{Z_L} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{a}{b} Z_L} \quad \text{INIC \& VNIC}$$

VNIC (Voltage NIC)

$$V_1 = -a V_2, \quad I_1 = -b I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

* حال اگر در خروجی NIC (INIC or VNIC) یک خازن قرار بگیرد امپدانس ورودی برابر خواهد بود:

$$Z_{in} = -\frac{a}{b} Z_L \quad Z_L = \frac{1}{CS} \Rightarrow Z_{in} = -\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{j\omega C} = j\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow Z_{in} = j\left[\frac{a}{bC}\omega^{-2}\right]\omega \Rightarrow \boxed{Z_{in} = jL\omega} \ \boxed{\& \ L = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{C\omega^2}}$$

ملاحظه می‌شود امپدانس ورودی معادل یک سلف است البته این سلف خود تابع فرکانس می‌باشد ولی آنچه برایمان اهمیت دارد رفتار سلفی است.

بنابراین با تکنیک‌های فوق میتوان مداراتی با المانهای R, C طراحی کرد که دارای قطبهای مزدوج باشند. ("فیلترهای")

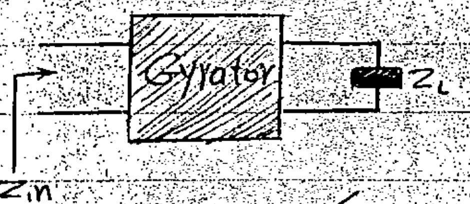
NNI (Negative impedance invertor) Gyrator ژیراتور *

$$\begin{cases} v_1 = -aI_2 \\ I_1 = b\,v_2 \end{cases} \Rightarrow$$

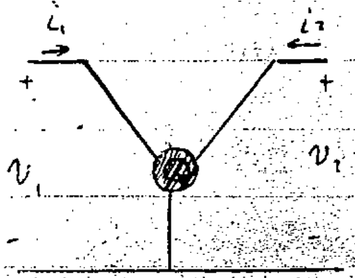
داریم: $\dfrac{I_2}{v_2} = -\dfrac{1}{Z_L} \Rightarrow \dfrac{v_1}{I_1} = -\dfrac{a}{b}\,\dfrac{I_2}{v_2}$

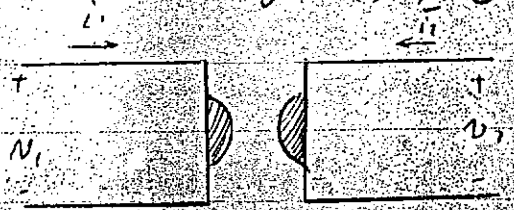
$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_1}{I_1} = Z_{in} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{Z_L}}$$

$$\text{or} \begin{cases} V_1 = aI_2 \\ I_1 = -bV_2 \end{cases} \Rightarrow Z_{in} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{Z_L}$$



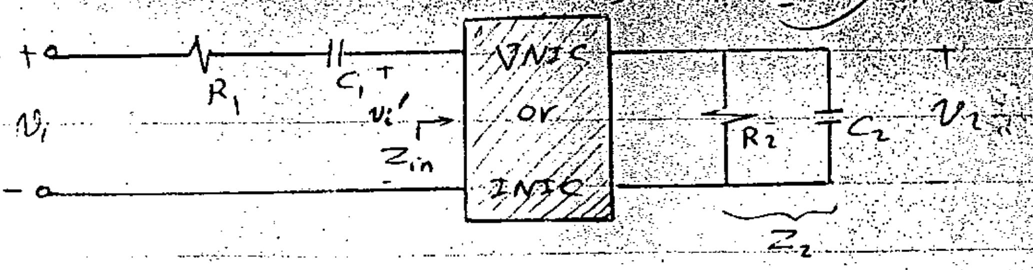
ملاحظه می‌شود ژیراتور امپدانس را invert می‌کند و اگر خازنی در خروجی قرار دهیم از ورودی کاملاً یک سلف دیده می‌شود.
می‌توان تابع فرکانسی هم ساخت.
معمولاً از پارامترهای زیر برای ژیراتور استفاده می‌کنند.





$$\begin{cases} i_2 = GV_1 \\ i_1 = -GV_2 \end{cases} \quad \text{oR} \quad \begin{cases} V_2 = -Ri_1 \\ V_1 = Ri_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = \frac{R^2}{Z_L}}$$

مثال: تابع انتقال را برای مدار زیر بدست آورید.



$$\begin{cases} V_2 = -V_1 \\ i_2 = -i_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -v_1 \\ i_2 = -i_1 \end{cases} \Rightarrow Z_{in} = -Z_2$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1+R_2C_2S} \Rightarrow Z_{in} = -\frac{R_2}{1+R_2C_2S} \Rightarrow$$

$$v_i' = \frac{Z_{in}}{Z_{in}+R_1+\frac{1}{C_1 S}}\, v_i = \frac{-R_2/(1+SC_2R_2)\cdot v_i}{R_1+1/C_1S+(-R_2)/(1+SC_2R_2)} =$$

$$v_o = -v_i' \Rightarrow$$

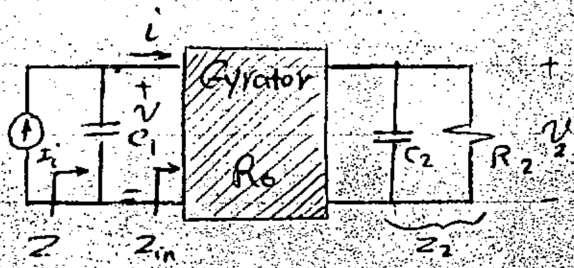
$$\frac{v_o}{v_i} = H(S) = \frac{R_2C_1S}{R_1C_1S(1+SC_2R_2)+(1+SC_2R_2)-R_2C_1S}$$

$$\Rightarrow H(S) = \frac{v_o}{v_i}(S) = \frac{R_1C_1S}{R_1C_1R_2C_2S^2+(R_1C_1+R_2C_2-R_2C_1)S+1}$$

$$\Rightarrow * H(S) = \frac{S/(R_2C_2)}{S^2+\frac{R_1C_1+R_2C_2-R_2C_1}{R_1R_2C_1C_2}S+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}} *$$

$$\Rightarrow \omega_o^2 = 1/R_1C_1R_2C_2 \quad \& \quad \frac{\omega_o}{Q} = \frac{R_1C_1+R_2C_2-R_2C_1}{R_1R_2C_1C_2}$$

مثال ۱: تابع انتقال را برای مدار زیر بیابید



$$Z_2 = \frac{R_2}{1+R_2C_2S} \Rightarrow Z_{in} = \frac{R_o^2(1+R_2C_2S)}{R_2} = \frac{R_o^2}{R_2}+R_o^2C_2S$$

$$\Rightarrow Z_{in} = \frac{R_o^2}{R_2}+LS \qquad \boxed{L = R_o^2C_2}$$

$$v = Z \times I_i \quad , \quad Z = \frac{1}{C_1S+\frac{R_2}{R_o^2(1+R_2C_2S)}} =$$

که تمام کلیت را لحاظ کنیم

مثلاً تحلیل کلیت را اجرا کنیم

زیرا که رابطه بین v_2 و i ما موجود است (ایرادی ندارد)

$$i = \frac{1/SC_1\, I_i}{1/SC_1+R_o^2/R_2+R_o^2C_2S} = \frac{R_2 I_i}{R_o^2 [illegible] R_2C_1C_2S^2+R_o^2C_1S+R_2}$$

$$\Rightarrow i = \frac{1/R_o^2C_1C_2 \quad I_i}{S^2+\frac{1}{R_2C_2}S+\frac{1}{R_o^2C_1C_2}} \Rightarrow * H(S) = \frac{v_2}{I_i} = \frac{-1/R_o^2C_1C_2}{S^2+\frac{1}{R_2C_2}S+\frac{1}{R_o^2C_1C_2}} *$$

* Q * برای یک مدار RLC سری داریم

$$Y = \frac{S/L}{S^2+\frac{R}{L}S+\frac{1}{LC}} = \frac{S/L}{S^2+\frac{\omega_0}{Q}S+\omega_0^2}$$

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

برای تمامی سیستمهای درجه دوم میتوان ω_0 و Q را به صورتی که در بالا برای مدار RLC سری توضیح داده شد محاسبه کرد.

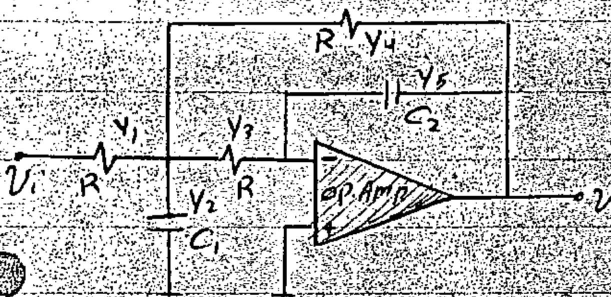
مثلاً برای فیلتر باترورث درجه 2 داریم:

$$H(s) = \frac{1}{S^2+\sqrt{2}S+1} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر مقدار Q در فیلتر تغییر کند دیگر تابع انتقال، تابع انتقالی که ما انتظار داشتیم نخواهد بود بنابراین حساسیت تغییرات Q برای ما دارای اهمیت است.

بنابراین یکی از پارامترهای مهم یک فیلتر این است که حتی الامکان Q باید ثابت باشد البته عملاً این است برای فیلترهای پایین گذر خیلی هم نمی‌تواند برای NBPF ها که مقدار Q برای آنها زیاد است Q high استفاده می‌شود دارای اهمیت زیادی است.

مثال: تابع انتقال شبکه روبرو را محاسبه کرده، ω_0 و Q را برای آن بدست آورید.



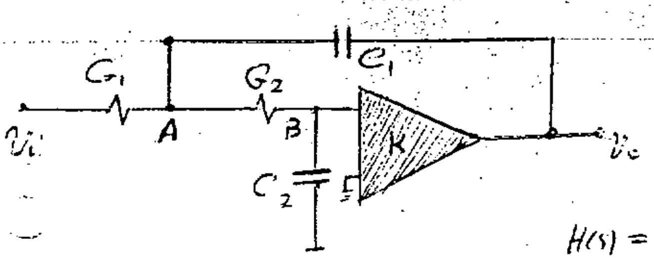
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_1Y_3}{Y_5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)+Y_4Y_3}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{R^2C_1C_2S^2+3RC_2S+1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/R^2C_1C_2}{S^2+\frac{3}{RC_1}S+1/R^2C_1C_2} \Rightarrow H(s) = \frac{K}{S^2+\frac{\omega_0}{Q}S+\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \qquad Q = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

مثال: تابع انتقال را برای مدار زیر به دست آورید و مقدار Q را تعیین کنید.



تابع انتقال فوق در صفحه 34 محاسبه شده است.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{KG_1G_2}{C_1C_2S^2+[(G_1+G_2)C_2+(1-K)G_2C_1]S+G_1G_2}$$

$$H(s)=\frac{KG_1G_2/C_1C_2}{S^2+\left[\frac{G_1+G_2}{C_1}+\frac{(1-K)G_2}{C_2}\right]S+\frac{G_1G_2}{C_1C_2}} \Rightarrow \omega_0^2=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$$

$$\text{for } K=1 \Rightarrow Q=\frac{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}{(R_1+R_2)\,C_1}$$

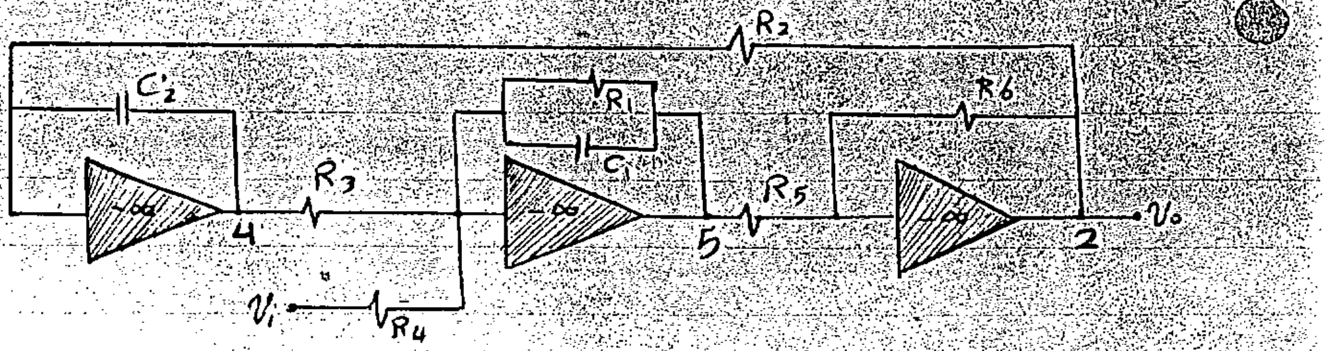
Defintion of sensitivity.　　　　* حساسیت *

بطور کلی هرگاه F تابعی از چند متغیر مثلاً K و غیره باشد حساسیت تابع نسبت به متغیرها اینصورت زیر تعریف می‌گردد

$$S_K^F=\frac{\partial F/F}{\partial K/K} \Rightarrow \boxed{S_K^F=\frac{K}{F}\frac{\partial F}{\partial K}}$$

گاهی لازم است در فیلترها و یا هر مدار دیگر بعضی از پارامترها را ثابت نگه داریم و از تغییرات آن جلوگیری کنیم مثلاً فرکانس notch در notch filter ، بنابراین مفید خواهد بود حساسیت حاصل فوق را نسبت به پارامترهای مختلف مدار حساب کنیم و هر المانی که تاثیر بیشتری از آن دارد از عناصر دقیق‌تر انتخاب کنیم

مثال: تابع انتقالی فیلتر زیر را بدست آورده و حساسیت Q را نسبت به R_1 تا R_6 و C_1 و C_2،
و ،، ،، پس را نسبت به R_1, R_2, R_3 ، ... R_6 و C_1, C_2
بدست آورید.



$$V_iG_4+V_4G_3+V_5(G_1+SC_1)=0 \quad \& \quad V_0=V_2=-\frac{G_5}{G_6}V_5$$

$$V_4=-\frac{G_2}{SC_2}V_2 \quad \Rightarrow V_iG_4+\left(-\frac{G_2}{SC_2}\right)G_3V_2+\left(-\frac{G_6}{G_5}\right)(G_1+SC_1)V_2=0$$

$$\Rightarrow V_i G_4 = \left[\frac{G_3 G_2}{SC_2} + \frac{G_6 G_1}{G_5} + \frac{G_6 SC_1}{G_5}\right] V_2 \qquad V_2 = V_o$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{G_4 G_5 S C_2}{G_6 C_1 C_2 S^2 + C_2 G_6 G_1 S + G_2 G_3 G_5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{(G_4 G_5 / G_6 C_1) S}{S^2 + \frac{G_1}{C_1} S + \frac{G_2 G_3 G_5}{G_6 C_1 C_2}}}$$

$$\omega_0 = \left(\frac{G_2 G_3 G_4}{G_6 C_1 C_2}\right)^{1/2} = \underline{R_1^{-1/2} R_3^{-1/2} R_4^{-1/2} R_6^{1/2} C_1^{-1/2} C_2^{-1/2}} = \omega_0$$

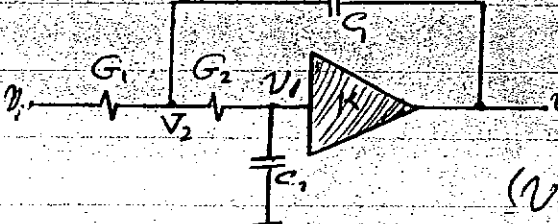
$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{G_1}{C_1} \Rightarrow Q = \frac{C_1}{G_1}\omega_0 \Rightarrow \underline{Q = R_1 C_1^{1/2} R_2^{-1/2} R_3^{-1/2} R_4^{-1/2} R_6^{+1/2} C_2^{-1/2}} = Q$$

$$S_k^F = \frac{\partial F/F}{\partial k/k} = \frac{k}{F}\frac{\partial F}{\partial k} \Rightarrow S_{R_1}^{\omega_0} = S_{R_3, R_4, C_1, C_2}^{\omega_0} = -1/2$$

$$S_{R_6}^{\omega_0} = \frac{1}{2} \quad S_{R_2}^{\omega_0} = S_{R_5}^{\omega_0} = 0 \quad S_{R_2}^{Q} = S_{R_3, R_4, C_2}^{Q} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{R_1}^{Q} = 1 \quad , \quad S_{C_1, R_6}^{Q} = \frac{1}{2}$$

مثال: تابع انتقال [illegible] مدار زیر را بدست آورده، ω_0 ، Q را تعیین کنید. سپس حساسیت آنها را نسبت به المانهای مدار تعیین کنید.



$$V_1 = V_2 \frac{G_2}{SC_2 + G_2} \quad V_o = \frac{KG_2}{G_2 + SC_2} V_2$$

$$(V_2 - V_i) G_1 + (V_2 - V_1) G_2 + (V_2 - V_o) SC_1 = 0$$

$$\Rightarrow (V_2 - V_i) G_1 + \left(V_2 - \frac{V_2 G_2}{G_2 + SC_2}\right) G_2 + \left(V_2 - \frac{KG_2}{G_2 + SC_2} V_2\right) SC_1 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{G_2 + SC_2}{G_1} \left(S^2 C_1 C_2 + [(G_1 + G_2) C_2 - KG_2 C_1 + C_1 G_2] S + G_1 G_2\right)^{-1} \times G_1^2$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{k G_1 G_2 v_i}{C_1 C_2 s^2 + [(G_1+G_2)C_2 - kG_2C_1 + G_2C_1]s + G_1G_2} \Rightarrow$$

$$v_c/v_i = H(s) = \frac{KG_1G_2/C_1C_2}{s^2 + [(G_1+G_2)/C_1 + (1-K)G_2/C_2]s + \frac{G_1G_2}{C_1C_2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{G_1G_2}{C_1C_2} = R_1^{-1}C_1^{-1}R_2^{-1}C_2^{-1} \Rightarrow \underline{\omega_0 = R_1^{-1/2}C_1^{-1/2}R_2^{-1/2}C_2^{-1/2}}$$

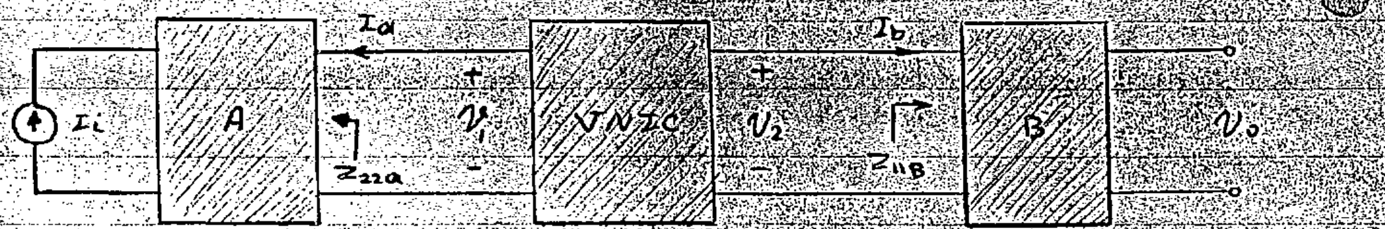
$$\Rightarrow S^{\omega_0}_{R_1,R_2,C_1,C_2} = -1/2 \quad \& \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{G_1+G_2}{C_1} + (1-k)\frac{G_2}{C_2}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\frac{G_1+G_2}{C_1} + (1-k)\frac{G_2}{C_2}} = \frac{1}{(R_1C_1R_2C_2)^{-1/2}\left[\frac{G_1+G_2}{C_1} + (1-k)\frac{G_2}{C_2}\right]}$$

$$S^{Q}_{R_1} = \frac{R_1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial R_1} =$$

Negative Impedance Convertor سنتز مدار تولید NIC

* Positive RC- negative RC cascade synthesis * PRC-NRC.S



$$I_b = -I_a$$

$$V_2 = -V_1$$

برای شبکه B داریم: $\begin{cases} V_o = Z_{21b} I_b \\ V_2 = Z_{11b} I_b \end{cases}$

برای شبکه A داریم: $V_1 = Z_{22a} I_a + Z_{21a} I_i$

اگر معادلات مربوط به سه شبکه را ادغام کنیم داریم:

$$V_2 = -V_1 \Rightarrow Z_{11b} I_b = -Z_{21a} I_i - Z_{22a} I_a \quad \& \quad I_a = -I_b$$

$$\Rightarrow Z_{11b} I_b = -Z_{21a} I_i + Z_{22a} I_b \Rightarrow (Z_{22a} - Z_{11b}) I_b = Z_{21a} I_i$$

$$\Rightarrow I_b = \frac{Z_{21a} I_i}{Z_{22a} - Z_{11b}} \Rightarrow v_o = \frac{Z_{21a} Z_{21b}}{Z_{22a} - Z_{11b}} I_i$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{v_o}{I_i} = \frac{Z_{21a} Z_{21b}}{Z_{22a} - Z_{11b}}}$$

اگر NIC نداشتیم تابع انتقال بفرم زیر می‌شد. $H(s) = \dfrac{Z_{21a} Z_{21b}}{Z_{22a} + Z_{11b}}$

ومراحظه می‌شود که چون شبکه‌های A و B قطبهای RC قطبهای ساده هستند بنابراین بدون NIC قطبهای تابع انتقال همگی ساده خواهند بود ولی بعلت وجود علامت منفی تابع انتقال میتواند دارای قطبهای مزدوج باشد. (ما همیشه برای طراحی فیلترها نیاز به قطبهای مزدوج داریم)

هدف، هدف ما از این قسمت تعیین شبکه‌های A و B میباشد بطوریکه H(s) دارای مشخصه مورد نظر باشد.

Z_{21} را بتوان بصورت زیر نوشت:

$$\boxed{Z_{21}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \cdot \frac{\prod_{i=1}^{L}(s+s_i')}{\prod_{i=1}^{m}(s+s_i)}} \quad \& \quad m > L$$

H فاکتور scaling است

$$\boxed{P(s) = \prod_{i=1}^{n}(s+\sigma_i) \qquad n \geq m}$$

P(s) را یک تابع دلخواه فرض میکنیم معمولاً $n = m$

$$Z_{21}(s) = \frac{N(s)/P(s)}{D(s)/P(s)}$$

σها را طوری انتخاب میشود که شامل قطبهای $Z_{21}(s)$ نباشد بنابراین صورت بعضی از نقاط بحرانی $\frac{D(s)}{P(s)}$ حذف خواهند شد.

حال به شبکه کلی برگردیم:

$$\left.\frac{v_o}{I_i}\right|_{I_2=0} = Z_{21}(s) = Z_T(s) = \frac{Z_{21a} Z_{21b}}{Z_{22a} - Z_{11b}}$$

$$\Rightarrow \frac{N(s)}{P(s)} = \boxed{Z_{21a} Z_{21b} = \frac{\prod_{i=1}^{L}(s+s_i')}{\prod_{i=1}^{n}(s+\sigma_i)}} \quad \& \quad \boxed{Z_{22a} - Z_{11b} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+s_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+\sigma_i)}}$$

(I) (II)

با توجه به اینکه D(s) قطبهای یک فیلتر است و بنابراین دارای ریشه های موهومی $\left[Z_{22a} - Z_{11b} = \frac{D(s)}{P(s)} \right]$

است و P(s) را نیز خودمان انتخاب کرده ایم و تماماً دارای ریشه های حقیقی است بنابر این $\frac{D(s)}{P(s)}$ بصورت RC سنتز نخواهد شد بلکه حتماً در بسط آن به ضرایب منفی برخورد خواهیم کرد.

بنابراین جملات منفی را بعنوان Z_{11b} و جملات مثبت را بعنوان Z_{22a} انتخاب می کنیم تا مشخص کردن Z_{11b} و Z_{22a} براحتی میتوان Z_{21a} ، Z_{21b} را مشخص کرد.

$$Z_{22a} - Z_{11b} = \frac{D(s)}{P(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+s_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+\sigma_i)} \xrightarrow{\text{for } n=m} 1 + \frac{K_1}{s+\sigma_1} + \frac{K_2}{s+\sigma_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+\sigma_n}$$

گفتیم که حتماً تعدادی از K ها منفی خواهد بود بنابراین:

$$\boxed{Z_{22a} = 1 + \sum_u \frac{K_u}{s+\sigma_u} \quad K_u > 0 \quad \& \quad Z_{11b} = \sum_u \frac{-K_u}{s+\sigma_u} \quad K_u < 0}$$

با تعیین Z_{11b} و Z_{22a} و با توجه به N(s) (صورت تابع انتقال) میتوانیم شبکه های A و B را تعیین کنیم

مثال 1: امپدانس انتقالی شبکه ای بصورت مقابل داده شده است

$$Z_T(s) = \frac{H}{s^3+2s^2+2s+1}$$

(باتروث از درجه سوم)

شبکه را بصورت PRC NRC سنتز کنید

$$P(s) = \prod_{i=1}^{m}(s+\sigma_i) \qquad n=m=3$$

فرض: $P(s) = (s+1/2)(s+2)(s+4)$

ملاحظه می کنید که (s+1) در P(s) وجود ندارد، زیرا (s+1) یکی از ترمهای مخرج $Z_T(s)$ است.

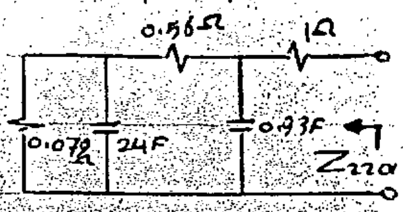
$$Z_{22a} - Z_{11b} = \frac{s^3+2s^2+2s+1}{(s+1/2)(s+2)(s+4)} = 1 + \frac{K_1}{s+1/2} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$\Rightarrow Z_{22a} - Z_{11b} = 1 + \frac{1/14}{s+1/2} + \frac{1}{s+2} - \frac{39/7}{s+4} \qquad \Rightarrow Z_{22a} = 1 + \frac{1/14}{s+1/2} + \frac{1}{s+2}$$

$$\& \; Z_{12a} = \frac{H_a}{(s+1/2)(s+2)} \quad \& \quad Z_{12b} = \frac{H_b}{s+4} \quad \& \quad Z_{11b} = \frac{39/7}{s+4}$$

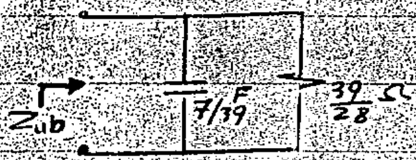
$$Z_{22a} = 1 + \frac{1/14}{s+1/2} + \frac{1}{s+2} = \frac{s^2+3.5714s+1.643}{s^2+2.5s+1}$$

با توجه به Z_{21a} ، Z_{22a} را بصورت کاپر I بسط می‌دهیم



$$Z_{22a} = 1 + \cfrac{1}{0.933s + \cfrac{1}{0.564 + \cfrac{1}{24.066s + \cfrac{1}{0.0789}}}}$$

$$Z_{11b} = \frac{39/7}{s+4} = \frac{1}{\frac{7}{39}s + \frac{28}{39}}$$



حال H_a ، H_b

$$Z_{21a} = \frac{H_a}{(s+1/2)(s+2)}\bigg|_{s=0} = H_a = \frac{V_2}{I_1}\bigg|_{\substack{I_2=0\\ s=0}} = 0.079 \quad \Rightarrow H = 0.44$$

$$Z_{21b} = \frac{H_b}{s+4}\bigg|_{s=0} = \frac{H_b}{4} = \frac{V_2}{I_1}\bigg|_{\substack{I_2=0\\ s=0}} = \frac{39}{28} \Rightarrow \quad H_b = \frac{39}{7} = 5.57$$

این مدار بصورت زیر خواهد بود

* RC filter realizing a third-order Butterworth characteristic *

* مثال 2 :

$$Z_{T(s)} = H\frac{s^2+1}{s^2+0.02s+1.02}$$

اگر بصورت بصورت s^2 می‌بود می‌توانستیم مثل حالت قبل عمل کنیم منتهی هنگام سنتز از کاپر II استفاده می‌کردیم
اما در اینجا باید ابتدا مداری که می‌تواند دارای صفرهای فوق باشد حدس زد. و بعد با توجه به شناختی که از آن
مدار داریم مثلاً Z_{22} ، Z_{21} شبکه را سنتز کنیم.
مداری که در اینجا می‌تواند بعنوان شبکه A مورد استفاده قرار گیرد Twin-T RC Net. است.

$$Z_{22a} - Z_{11b} = \frac{D(s)}{P(s)} \quad \begin{matrix} \leftarrow m \text{ مرتبه} \\ \leftarrow n \text{ "} \end{matrix}$$

گفتیم که $n \geq m$ ، ولی در اینجا $n=m$ را نمیتوان انتخاب کرد $m=2$

زیرا در اینصورت Z_{22a} از مرتبه یک خواهد شد و چون صورت Z_{21a} مرتبه دوم است بنابراین

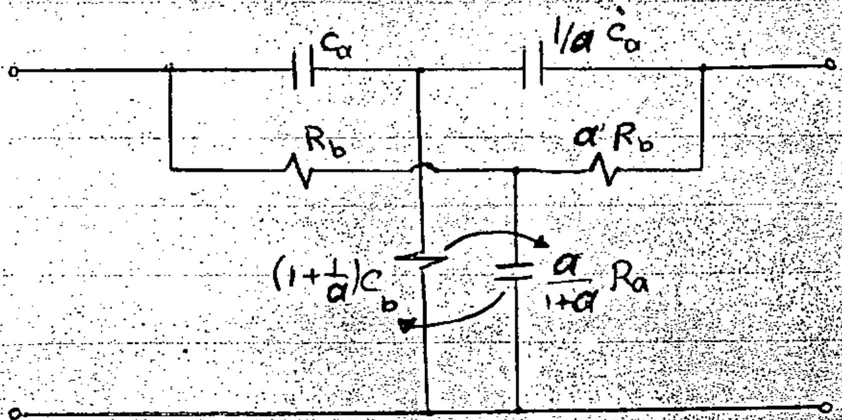
شبکه A قابل تحقق نخواهد بود. (از فرکانس بینهایت خروجی بینهایت)

بنابراین $P(s)$ را از مرتبه سوم انتخاب می کنیم

$$P(s) = s(s+0.5)(s+2)$$

$$\frac{D(s)}{P(s)} = \frac{s^2+0.025s+1.02}{s(s+0.5)(s+2)} = \frac{1.02}{s} + \frac{1.66}{s+2} - \frac{1.68}{s+0.5}$$

* برای مدار Twin-T داریم:



شبکه A

$$C_a = b(1+a)$$

$$C_b = b(1+a)\frac{\omega_0^2}{\sigma_1^2}$$

$$R_a = 1/\sigma_1 C_a$$

$$R_b = 1/\sigma_1 C_b$$

a و b دو اعداد ثابت هستند.

$$Z_{22a} = \frac{a}{b(1+a)^2}\left[\frac{1}{\sigma_1 + \omega_0^2/\sigma_1}\left(1+\frac{\sigma_1}{s}\right) + \frac{a}{s+\omega_0^2/\sigma_1}\right] \bigstar$$

$$Z_{21a} = \frac{a}{b(1+a)^2}\left[\frac{1}{\sigma_1 + \omega_0^2/\sigma_1}\left(1+\frac{\sigma_1}{s}\right) - \frac{1}{s+\omega_0^2/\sigma_1}\right] \bigstar$$

ملاحظه می شود که Z_{22} فرم زیر را دارد بنابراین $Z_{22} = A_0 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\alpha}$

باید $\frac{D(s)}{P(s)}$ را به فرم زیر بنویسیم (مقدار K را کم و زیاد کرده ایم)

$$\frac{D(s)}{P(s)} = K + \frac{1.02}{s} + \frac{1.66}{s+2} - \left(K + \frac{1.68}{s+0.5}\right)$$

$$Z_{11b} = K + \frac{1.68}{s+0.5}$$

$$Z_{22a} \equiv K + \frac{1.02}{s} + \frac{1.66}{s+2} \qquad Z_{21a} \equiv H_a \cdot \frac{s^2+1}{s(s+2)} \qquad Z_{12b} \equiv \frac{H_b}{s+0.5}$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega_0^2}{\sigma_1} = 2 \quad , \quad \frac{a^2}{b(1+a)^2} = 1.66 \quad , \quad \frac{\sigma_1 a}{b(1+a)^2\left(\sigma_1 + \omega_0^2/\sigma_1\right)} = 1.02$$

$$\frac{a}{b(1+a)^2}\cdot\frac{1}{\sigma_1+\omega_0^2/\sigma_1}=K$$

$$\text{IF } \underbrace{\omega_0=1} \Rightarrow \underline{\sigma_1=0.5} \Rightarrow \begin{cases} a^2/b(1+a)^2=1.66 & \text{I}\\ 0.2a/b(1+a)^2=1.02 & \text{II}\\ 0.4a/b(1+a)^2=K & \text{III}\end{cases}$$

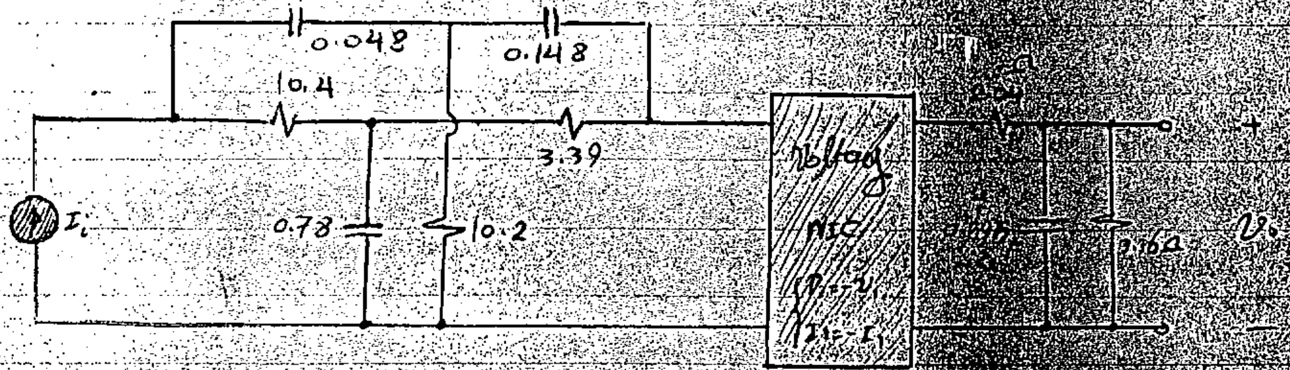
$$\frac{\text{I}}{\text{II}} \Rightarrow \frac{a^2}{0.2a}=\frac{1.66}{1.02} \Rightarrow \underline{a=0.3255} \Rightarrow \underline{b=0.0363} \Rightarrow \underline{K=2.04}$$

$$\Rightarrow C_a=b(1+a) \Rightarrow C_a=0.04815\ F \qquad C_b=0.1926,\quad R_a=41.537$$

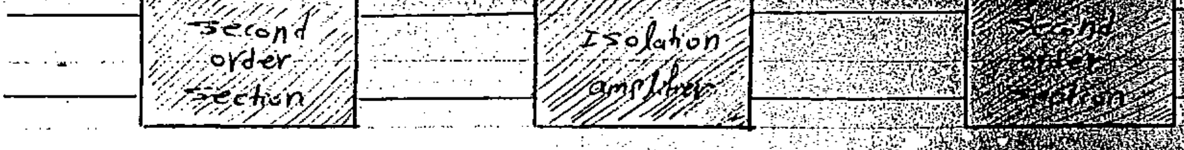
$$\& \quad R_b=10.98$$

$Z_{11b}=2.04+\frac{1.68}{s+0.5}$ با مشخص شدن K، Z_{11b} نیز مشخص است و مدار آن را رسم نمود.

پس مدار بصورت زیر خواهد بود.



برای ساختن فیلترهای مرتبه بالاتر می‌توان خروجی فیلترهای مرتبه دوم را توسط بافر پشت سر هم قرار داد.



★ Illustrating the realization of high order filters using a cascade of second-order sections and isolation amplifier.

$$K_2 = \frac{\sigma_2^2 - 2\rho\omega_0\sigma_2 + \omega_0^2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

از آنجایی که $D(s)$ دارای ریشه‌های موهومی است (مزدوج) بنابراین علامت آن همان علامت σ^2 می‌باشد و مثبت است

پس با فرض $\sigma_2 > \sigma_1$ خواهیم داشت $K_2 < 0 \;\&\; K_1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = \left[(s+\sigma_1)(s+\sigma_2) + K_1(s+\sigma_2) + K_2(s+\sigma_1)\right] / (s+\sigma_1)(s+\sigma_2)$$

$$D(s) = (s+\sigma_1)(s+\sigma_2) + K_1(s+\sigma_2) + K_2(s+\sigma_1) = A(s) - B(s)$$

$$A(s) = (s+\sigma_1)(s+\sigma_2) + K_1(s+\sigma_2) \qquad B(s) = -K_2(s+\sigma_1)$$

$$S_K^{s_1} = -\frac{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_2\omega_0 + \omega_0^2}{2(\sigma_2-\sigma_1)}\left(1 + j\,\frac{\rho\omega_0 - \sigma_1}{\omega_0\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$\left|S_K^{s_1}\right| = \frac{\sigma_2^2 - 2\rho\omega_0\sigma_2 + \omega_0^2}{2\omega_n(\sigma_2-\sigma_1)}\left(\frac{\sigma_1^2 - 2\rho\omega_0\sigma_1 + \omega_0^2}{1-\rho^2}\right)^{1/2}$$

حالت اپتیمم وقتی است که $\boxed{\sigma_1 = 0 \;\&\; \sigma_2 = \omega_0}$

در این شرایط داریم

$$S_K^{s_1} = -\omega_0(1-\rho)\left[1 + j\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \Rightarrow \boxed{\left|S_K^{s_1}\right|_{min} = \omega_0\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{P(s) = s(s+\omega_0)} \;,\; D(s) = s^2 + 2\rho\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = 1 + \frac{\omega_0}{s} + \frac{-2\omega_0(1-\rho)}{s+\omega_0} \Rightarrow \boxed{D(s) = (s+\omega_0)^2 - 2\omega_0(1-\rho)s}$$

مثال:

$$Z_{T(s)} = Z_{21}(s) = \frac{H}{s^2+s+1}$$ فیلتر مرتبه دوم

$$P(s) = s(s+1) \qquad D(s) = (s+1)^2 - s \quad \Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = \frac{s+1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Z_{22a} = \frac{s+1}{s} \quad \& \quad Z_{11b} = \frac{1}{s+1} \qquad Z_{21a} = \frac{H_a}{s} \quad \& \quad Z_{21b} = \frac{H_b}{s+1}$$

$$Z_{22a} = 1 + \frac{1}{s} \quad \Rightarrow$$

در حالت کلی برای فیلتر درجه دوم اپتیمم خواهیم داشت:

$* R_1 = 1\Omega \quad * C_1 = \frac{1}{\omega_0} \quad * C_2 = \frac{1}{2\omega_0(1-\rho)} \quad * R_2 = 2(1-\rho) \quad *$ * اپتیمم *

optimum

ولی از آنجایی که منبع جریان ایده‌آل وجود ندارد بهتر است بجای $\sigma_1 = 0$ ، $\sigma_1 = a$ قرار دهیم

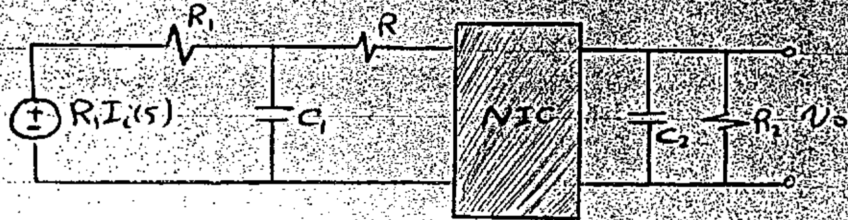
یعنی $p(s) = (s+a)(s+\omega_0)$

و برای اینکه خیلی از حالت اپتیمم دور نشویم a را مقدار کوچکی انتخاب می‌کنیم مثلاً

$$\boxed{P(s) = (s + \omega_0/10)(s+\omega_0)} \Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = \frac{s^2 + 2\rho\omega_0 s + \omega_0^2}{(s+\omega_0/10)(s+\omega_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = 1 + \frac{A}{s+\omega_0/10} + \frac{B}{s+\omega_0} \qquad A = (10.1 - 2\rho)\frac{\omega_0}{9} \quad \& \quad B = -20\omega_0(1-\rho)/9$$

$$\Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = 1 + \frac{(10.1-2\rho)\omega_0}{9(s+\omega_0/10)} - \frac{20\omega_0(1-\rho)}{9(s+\omega_0)}$$



* non-optimum *

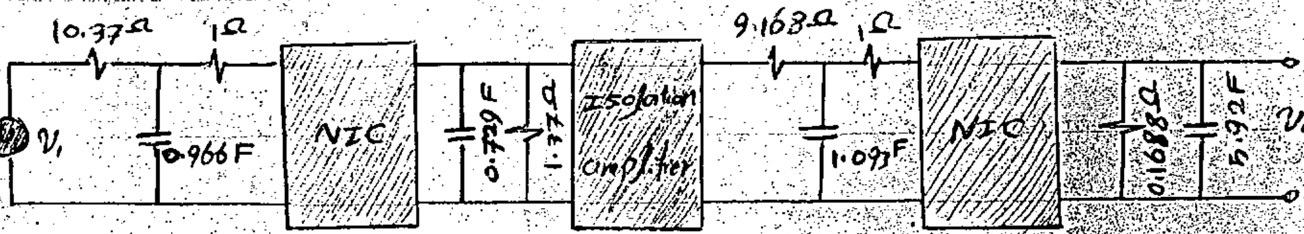
$* R = 1\Omega \quad * R_1 = 11.22 - 2.22\rho \quad * C_1 = \frac{1}{\omega_0(1.12 - 0.222\rho)} \quad *$

$* R_2 = 2.222(1-\rho) \quad * \quad C_2 = \frac{1}{2.222\omega_0(1-\rho)} \quad *$

مثال: مطلوب است فیلتر باتروث مرتبه چهارم توسط NIC بسازید.

$$H(s) = \frac{H'}{(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.848s+1)} = \frac{H_1}{s^2+0.7654s+1} \cdot \frac{H_2}{s^2+1.848s+1}$$

$\rho_1 = 0.3827$ & $\rho_2 = 0.924$



* optimization برای حالت کلی (فیلتر مرتبه n) *

هرگاه $D(s)$ (مخرج تابع انتقال) به فرم زیر باشد:

$$\boxed{D(s) = (s+a_1)^2(s+a_2)^2(s+a_3)^2 \cdots (s+a_n)^2 - \left[(s+b_1)^2(s+b_2)^2 \cdots (s+b_{n-1})^2\right] \times b_0 s}$$

آنگاه برای اینکه حساسیت فیلتر نسبت به تغییرات پارامترهای فعال مدار (مثلاً گین NIC ها) اپتیمم شود باید $P(s)$ بصورت زیر انتخاب گردد.

$$\boxed{P(s) = s(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)(s+b_1)(s+b_2)\cdots(s+b_{n-1})}$$

مثال: باتروث مرتبه 2

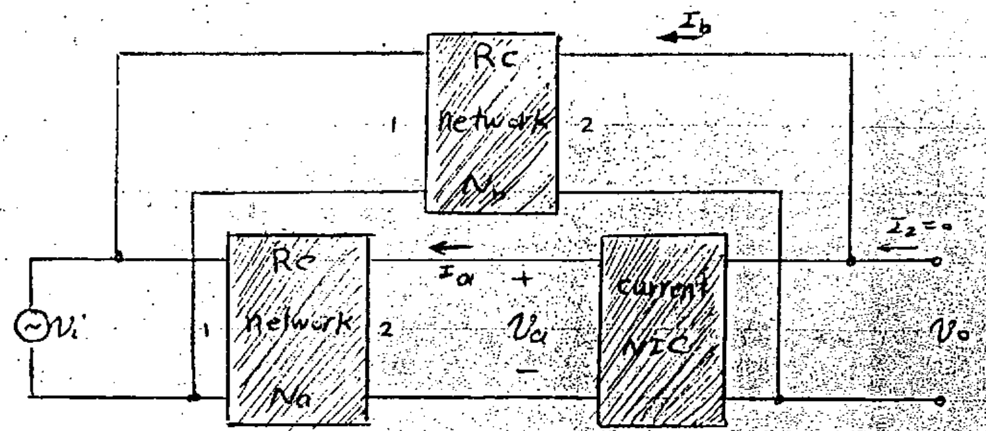
$D(s) = s^2+s+1 = (s+1)^2 - s$

$\Rightarrow a_1 = 1$ & $b_0 = 1$ بقیه ضرایب $= 0$ $\Rightarrow P(s) = s(s+1)$

با جوابهای قبلی توافق دارد.

توجه: وقتی ما حساسیت فیلتر را نسبت به تغییرات K (گین NIC) optimize می‌کنیم خودبخود حساسیت فیلتر نسبت به المانهای passive مدار نیز optimize خواهد شد.

* parallel realization * ——— * Yanagisawa *



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} I_b &= y_{21_b} V_i + y_{22_b} V_o \\ I_a &= y_{21_a} V_i + y_{22_a} V_a \end{aligned} \quad \& \quad \begin{aligned} V_a &= V_o \\ -I_b &= I_a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{21b} V_i + y_{22b} V_o = y_{21a} V_i + y_{22a} V_o \Rightarrow V_o = \frac{y_{21b} - y_{21a}}{y_{22a} - y_{22b}} V_i$$

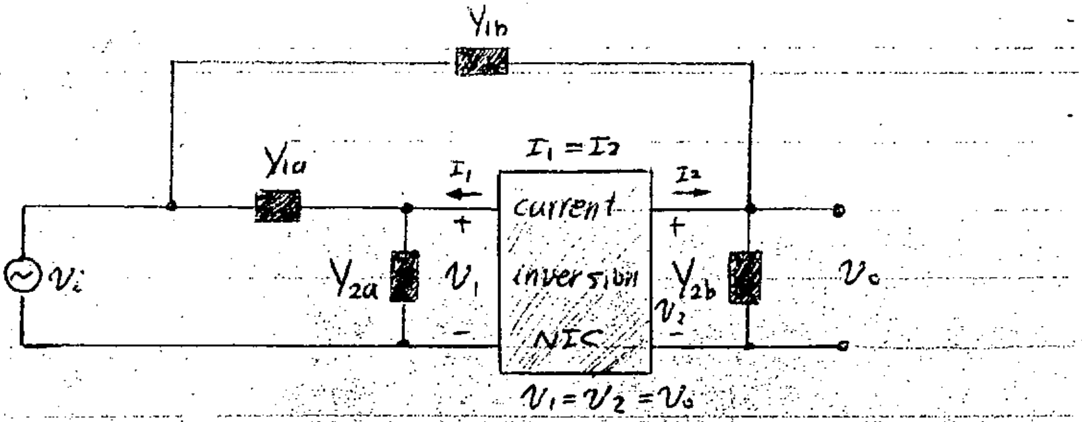
$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{y_{21b} - y_{21a}}{y_{22b} - y_{22a}}}$$

در فیلتر Yanagisawa شبکه اکتیو (NIC) فقط روی قطبها اثر می‌گذاشت و صفرها عوامل منفی که
در مخرج تولید می‌کرد تا بتوانیم فیلترهایی با ریشه‌های مزدوج توسط مدارات RC طرح کنیم. ولی در اینجا
(فیلتر Yanagisawa) شبکه اکتیو هم در صورت هم در مخرج اثر کرده است. بنابراین می‌توانیم مدار را
طوری سنتز کنیم که تابع انتقال دارای صفرهای مزدوج هم باشد. (فیلترهای میان‌گذر)

البته توسط فیلتر Yanagisawa نیز می‌توان فیلتر میان‌گذر طراحی کرد (مثالش قبلاً حل شده است)
اما همانطور که در مثال دیده شد نیاز به شبکه‌های Twin.T داریم ولی از روش فوق با شبکه‌های ساده
RC می‌توان به مقصود رسید.

سنتز H(s) به فرم فوق مشکل و یا شاید غیرممکن است برای حل این مشکل به جای شبکه‌های A و B
از فرم خاصی استفاده شده است (بسط Yanagisawa)

توجه: اگر بجای INIC از VNIC استفاده کنیم علامت منفی اکنون ظاهر می‌شود.



$$I_2 = (Y_{1b}+Y_{2b})V_o - Y_{1b}V_i \qquad I_1 = (Y_{2a}+Y_{1a})V_o - V_{1a}V_i$$

$$I_2 = I_1 \Rightarrow \left[(Y_{1b}+Y_{2b}) - (Y_{2a}+Y_{1a})\right]V_o = (Y_{1b}-Y_{1a})V_i$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_{1a}-Y_{1b}}{(Y_{2a}-Y_{2b})+(Y_{1a}-Y_{1b})}}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \& \quad P(s) = \prod_{i=1}^{m-1}(s+\sigma_i) \Rightarrow \boxed{Y_{1a}-Y_{1b} = \frac{N(s)}{P(s)}}$$

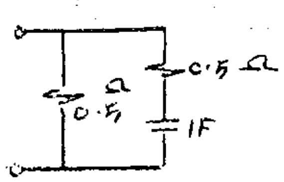
$$\& \quad \boxed{Y_{2a}-Y_{2b} = \frac{D(s)-N(s)}{P(s)}}$$

مثال: فیلتر میان‌نگذر با تابع انتقال $\frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2+2}{s^3+2s^2+2s+1}$ (Band Reject) را طراحی کنید.
به روشی که در بالا ذکر شد (فیلتر Yanagisawa)

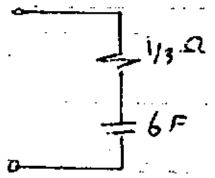
حل: برای اینکه هم $\frac{N(s)}{P(s)}$ و هم $\frac{D(s)-N(s)}{P(s)}$ تحقق پذیر باشند (از نظر علامت منفی مشکلی نداریم) بلامانع
تفاضل توابع مثبت حقیقی مجاز است که باید کل یا مساوی واحد باشد. بنابراین $\underset{[DPA]}{}$ درجه $[P(s)] = 2$

$$\underline{P(s) = (s+0.5)(s+2)} \Rightarrow \frac{N(s)}{P(s)} = \frac{s^2+2}{(s+0.5)(s+2)} = 2 + \frac{-3s}{s+0.5} + \frac{2s}{s+2}$$

$$\Rightarrow Y_{1a} = 2 + \frac{2s}{s+2} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}} \Rightarrow$$

$Y_{1a} \equiv$ 

$$Y_{1b} = \frac{3S}{S+0.5} = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6S}} \Rightarrow Y_{1b} \equiv$$



$$A(s) = \frac{D(s)-N(s)}{P(s)} = \frac{S^3+S^2+2S-1}{(S+0.5)(S+2)} = K_0 + K_1 S + \frac{K_2 S}{S+0.5} + \frac{K_3 S}{S+2}$$

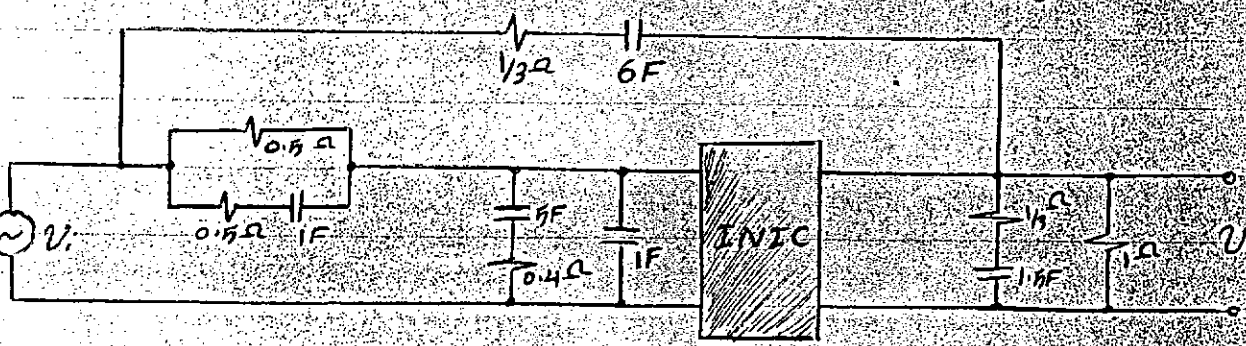
$$K_0 = \lim_{S\to 0} A(s) = -1 \qquad K_1 = \lim_{S\to\infty} \frac{A(s)}{S} = 1 \qquad K_2 = 2.5 \quad \& \quad K_3 = -3$$

$$\Rightarrow \frac{D(s)-N(s)}{P(s)} = Y_{2a} - Y_{2b} = -1 + S + \frac{2.5S}{S+0.5} - \frac{3S}{S+2}$$

$$\Rightarrow Y_{2a} = S + \frac{2.5S}{S+0.5} \quad \& \quad Y_{2b} = 1 + \frac{3S}{S+2}$$

$$Y_{2a} = S + \frac{1}{0.4+\frac{1}{5S}} \quad \& \quad Y_{2b} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3S}}$$

پس مدار بصورت زیر خواهد بود.



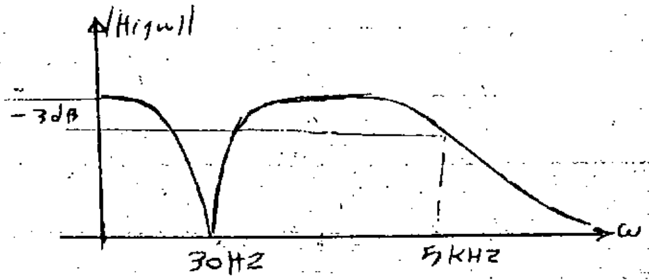
برای سنتز از فرمولهای زیر استفاده میکنیم

$$\frac{N(S)}{P(S)} = Y_{1a} - Y_{1b} = \underset{\text{خازن موازی}}{K_\infty S} + \underset{\text{مقاومت موازی}}{K_0} + \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{\frac{K_i S}{S+\sigma_i}}$$

مقاومت و خازن سری بصورت موازی باشند

$$\frac{D(s)-N(s)}{P(s)} = Y_{2a} - Y_{2b} = K'_\infty S + K'_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{K'_i S}{S+\sigma_i}$$

H.W. فیلتر مثال قبل را طوری طراحی کنید که فرکانس notch برابر 30Hz و فرکانس قطع بالا برابر 5KHz باشد.



* Sensitivity considerations and design optimization *

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ بازبراین دلیل اساس کار طراحی فیلترهای مرتبه های بالا برطراحی فیلترهای مرتبه دوم استوار است ، optimiz کردن حساسیت را برای فیلترهای مرتبه دوم بررسی می کنیم

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2}$$

بسته به اینکه فیلتر LP ، HP ، BP ویا BR باشد

N(s) به ترتیب بصورت زیر خواهد بود ...

$LP: N(s) = H \quad HP: N(s) = Hs^2 \quad BP: N(s) = Hs$

$BR: N(s) = H(s^2+\omega_0^2)$

$$\boxed{P(s) = s+\omega_n}$$

هرگاه p(s) بصورت روبرو انتخاب شود حساسیت فیلتر نسبت به پارامترهای اکتیو و passive مدار مینیمم خواهد شد.

* حالت اول : L.P.F

$$H(s) = \frac{H}{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2} \quad \& \quad P(s) = s+\omega_0$$

$$\Rightarrow Y_{1a}-Y_{1b} = \frac{H}{s+\omega_0} = K_0+K_1 s+\frac{K_2 s}{s+\omega_0} = \frac{H}{\omega_0} - \frac{H/\omega_0\, s}{s+\omega_0}$$

$$\underline{\text{IF} \quad H=\omega_0^2} \Rightarrow Y_{1a}-Y_{1b} = \omega_0 - \frac{\omega_0 s}{s+\omega_0} \Rightarrow \underline{Y_{1a} = \omega_0 \quad \& \quad Y_{1b} = \frac{\omega_0 s}{s+\omega_0}}$$

$$Y_{2a}-Y_{2b} = \frac{D(s)-N(s)}{P(s)} = \frac{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2-H}{s+\omega_0} = \frac{s^2+2\rho\omega_0 s}{s+\omega_0}$$

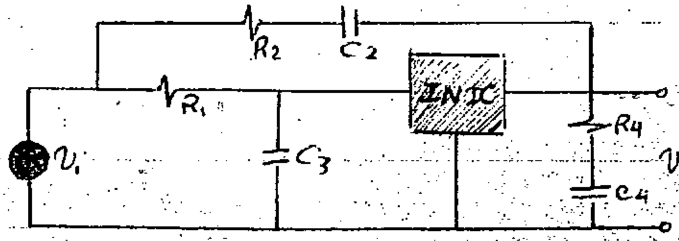
$$Y_{2a}-Y_{2b} = K_0+K_1 s+\frac{K_2 s}{s+\omega_0} = s+\frac{-\omega_0(1-2\rho)s}{s+\omega_0}$$

$$(\text{I}) \quad \tfrac{1}{2} > \rho > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Y_{2a} = s \quad \& \quad Y_{2b} = \frac{\omega_0(-2\rho+1)s}{s+\omega_0}}$$

$$(\text{II}) \quad \tfrac{1}{2} < \rho < 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{Y_{2a} = s+\frac{\omega_0(-1+2\rho)s}{s+\omega_0} \quad \& \quad Y_{2b} = 0}$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{H}{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2} \quad * LPF *$$

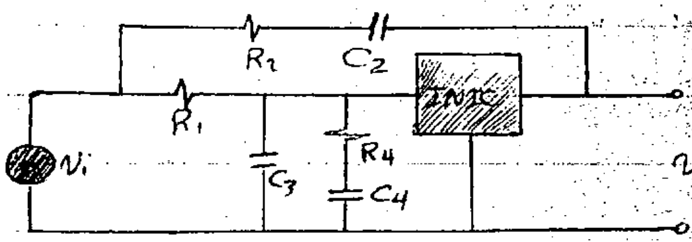
* برای $0 < \rho < \frac{1}{2}$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_0}\ \Omega \quad C_1 = C_3 = 1\,F$

$R_4 = \frac{1}{\omega_0(1-2\rho)} \quad \& \quad C_4 = 1-2\rho$

همچنین برای $\frac{1}{2} < \rho < 1$ خواهیم داشت:



$R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_0} \quad C_1 = C_3 = 1$

$R_4 = \frac{1}{\omega_0(2\rho-1)} \quad C_4 = 2\rho-1$

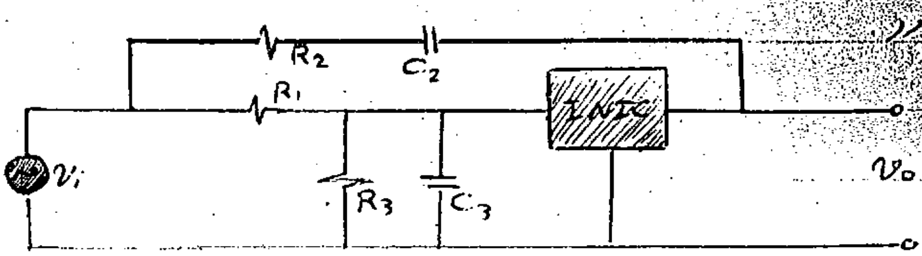
$H = 2\omega_0^2(1-\rho) \qquad \rho > \frac{1}{2}$ اگر H را بصورت زیر انتخاب کنیم مدار ساده‌تر خواهد شد
(این کار برای حالتی است که $\frac{1}{2} < \rho < 1$)

$$\Rightarrow y_{1a} = 2\omega_0(1-\rho) \quad \& \quad y_{1b} = \frac{2\omega_0(1-\rho)s}{s+\omega_0}$$

$$\frac{D(s)-N(s)}{P(s)} = \frac{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2-2\omega_0^2(1-\rho)}{s+\omega_0} = \frac{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2(2\rho-1)}{s+\omega_0}$$

$$\Rightarrow y_{2a}-y_{2b} = s+\omega_0(2\rho-1) \Rightarrow \underline{y_{2a} = s+\omega_0(2\rho-1) \quad \& \quad y_{2b} = 0}$$

پس مدار بصورت زیر خواهد بود.



$R_1 = \frac{1}{2\omega_0(1-\rho)} \quad , \quad R_3 = \frac{1}{\omega_0(2\rho-1)} \quad , \quad C_3 = 1 \quad , \quad R_2 = \frac{1}{2\omega_0(1-\rho)} \quad \& \quad C_2 = 2(1-\rho)$

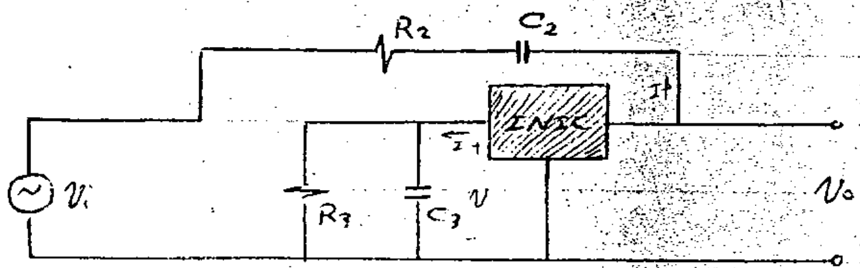
* An optimum low pass filter with ... *

$$H(s) = \frac{HS}{S^2 + 2\rho\omega_0 S + \omega_0^2}$$ BPF حالت دوم *

$$y_{2a} - y_{2b} = \frac{S^2 + 2\rho\omega_0 S + \omega_0^2 - HS}{S + \omega_0} = S + \omega_0 - \frac{[2\omega_0(1-\rho) + H]S}{S + \omega_0}$$

IF $H = -2\omega_0(1-\rho) \Rightarrow \underline{y_{2a} = S + \omega_0 \ \& \ y_{2b} = 0}$

$$\Rightarrow y_{1a} - y_{1b} = \frac{-2\omega_0(1-\rho)S}{S + \omega_0} \Rightarrow \underline{y_{1a} = 0 \ \& \ y_{1b} = \frac{2\omega_0(1-\rho)S}{S + \omega_0}}$$



$R_3 = \frac{1}{\omega_0}$ $C_3 = 1$

$R_2 = \frac{1}{2\omega_n(1-\rho)}$ $C_2 = 2(1-\rho)$

$$H(s) = \frac{HS^2}{S^2 + 2\rho\omega_0 S + \omega_0^2}$$ HPF حالت سوم

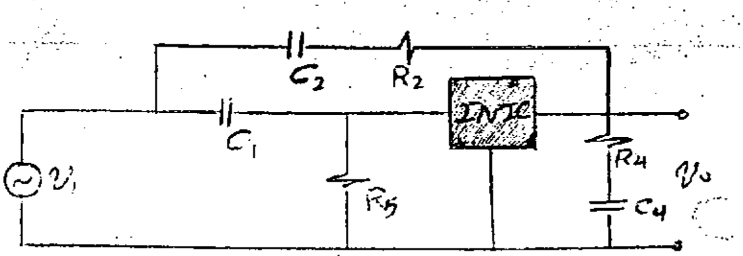
$$y_{2a} - y_{1a} = \frac{(1-H)S^2 + 2\rho\omega_0 S + \omega_0^2}{S + \omega_0} = A_0 + A_1 S + \frac{A_2 S}{S + \omega_0}$$

$$\Rightarrow y_{2a} - y_{2b} = \omega_0 + (1-H)S - \frac{\omega_n(2 - 2\rho - H)S}{S + \omega_0}$$ IF $H = 1$

$$\Rightarrow \underline{y_{2a} = \omega_0 \quad y_{2b} = \frac{\omega_0(1-2\rho)S}{S + \omega_0}}$$

$$y_{1a} - y_{1b} = \frac{S^2}{S + \omega_0} = A_0 + A_1 S + \frac{A_2 S}{S + \omega_0} = S - \frac{\omega_0 S}{S + \omega_0}$$

$$\Rightarrow \underline{y_{1a} = S \quad y_{1b} = \frac{\omega_0 S}{S + \omega_0}}$$



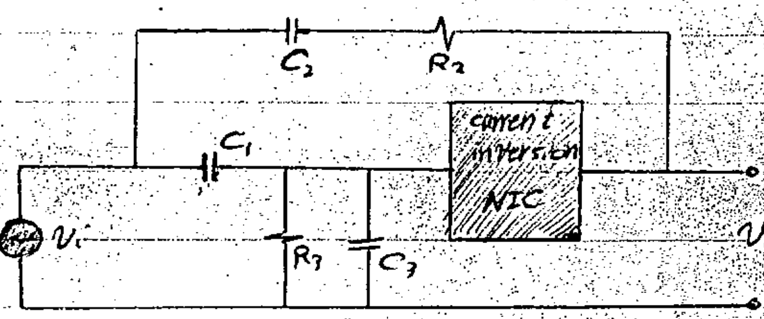
$R_5 = \frac{1}{\omega_0}$ $R_4 = \frac{1}{\omega_n(1-2\rho)}$ $C_4 = 1 - 2\rho$

$C_1 = C_2 = 1$ $R_2 = \frac{1}{\omega_0}$

for $\rho < \frac{1}{2}$

اگر H را بصورت زیر انتخاب کنیم $\quad H = 2(1-\rho)$

$$\Rightarrow \quad Y_{2a} = (2\rho-1)s+\omega_0 \qquad Y_{2b}=0 \qquad Y_{1a}=2(1-\rho)s \qquad Y_{1b}=\frac{2\omega_0(1-\rho)s}{s+\omega_n}$$



for $\frac{1}{2}<\rho<1$

$$C_1 = C_2 = (1-\rho)\times 2 \qquad C_3 = 2\rho-1 \qquad R_3=\frac{1}{\omega_n} \qquad R_2=\frac{1}{2\omega_n(1-\rho)}$$

حالت چهارم $\quad$ BR.

$$H(s)=\frac{H(s^2+\omega_0'^2)}{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$Y_{2a}-Y_{2b}=\frac{D(s)-N(s)}{P(s)} = \frac{(1-H)s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2-H\omega_0'^2}{s+\omega_0}$$

$$Y_{2a}-Y_{2b} = A_1 s + A_0 + \frac{A_2 s}{s+\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0}\left(\omega_0^2-H\omega_0'^2\right)+(1-H)s+$$

$$-\frac{(1/\omega_0)\left[2\omega_0^2(1-\rho)-H(\omega_0^2+\omega_0'^2)\right]s}{s+\omega}$$

IF $\quad H=\left(\frac{\omega_0}{\omega_0'}\right)^2$

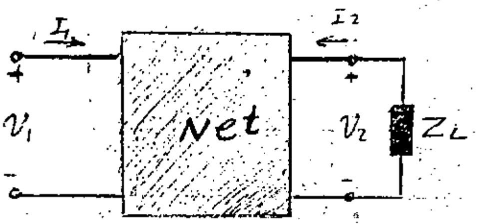
& IF $\quad H<1-2\rho$

$$\Rightarrow \quad Y_{2a}=\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right)s$$

$$Y_{2b}=\frac{\omega_n\left[1-2\rho(\omega_0^2/\omega_0'^2)\right]s}{s+\omega_0} \qquad Y_{1a}=\omega_n+\frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}s$$

$$Y_{1b}=\frac{\omega_n\left[1+(\omega_0^2/\omega_0'^2)\right]s}{s+\omega_n}$$

★ The gyrator ★



شبکه چهار سره متقابل را در نظر بگیرید

برای شبکه فوق داریم:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \quad \& \quad I_2 = -Y_L V_2$$

$$\Rightarrow Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 = -Y_L V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{-Y_{21}}{Y_L + Y_{22}} V_1$$

$$\Rightarrow I_1 = \left(Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}+Y_L}\right) V_1$$

هرگاه بخواهیم شبکه فوق امپدانس بار را بصورت invert شده به ورودی منتقل کند یعنی $Z_{in} = \frac{1}{Z_L}$ باید داشته باشیم

$$\star \; Y_{11} = 0 \;\; \& \;\; Y_{22} = 0 \;\; \& \;\; Y_{12} \cdot Y_{21} = -g^2 \; \star$$

★ شبکه‌ای که دارای شرایط فوق باشد ژیراتور نامیده می‌شود (ژیراتور ایده‌آل) ★

در چنین شرایطی: $I_1 = \frac{g^2}{Y_L} V_1 \Rightarrow Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{g^2} Y_L$

$$g = \frac{1}{R_0} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = \frac{R_0^2}{Z_L}}$$

$$\text{IF } Y_{12} = g \;\&\; Y_{21} = -g \Rightarrow \begin{cases} I_1 = gV_2 \\ I_2 = -gV_1 \end{cases}$$

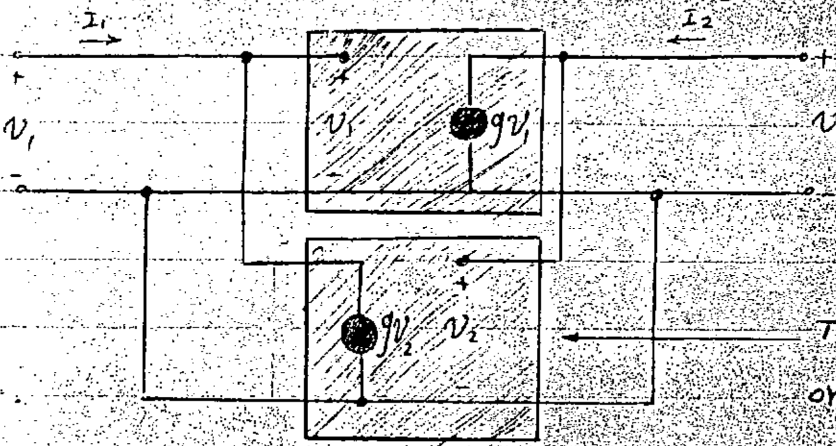
$$\text{IF } Y_{12} = -g \;\&\; Y_{21} = +g \Rightarrow \begin{cases} I_1 = -gV_2 \\ I_2 = gV_1 \end{cases}$$

★ ژیراتور واقعی: اولاً هرگز در مدارات عملی Y_{11} و Y_{22} دقیقاً صفر نیستند و ثانیاً Y_{12} و Y_{21} ممکن است دقیقاً با هم برابر نباشند و در ضمن تابع فرکانس نیز باشند.

* Gyrator circuits *

یکی از عناصر اصلی مدارات فعال ترانزیستور می‌باشد. ترانزیستور نیز یک عنصر یک طرفه است گرچه ممکن است ولتاژ خروجی اندکی به ورودی فیدبک شود. اما این مقدار قابل صرف نظر کردن است

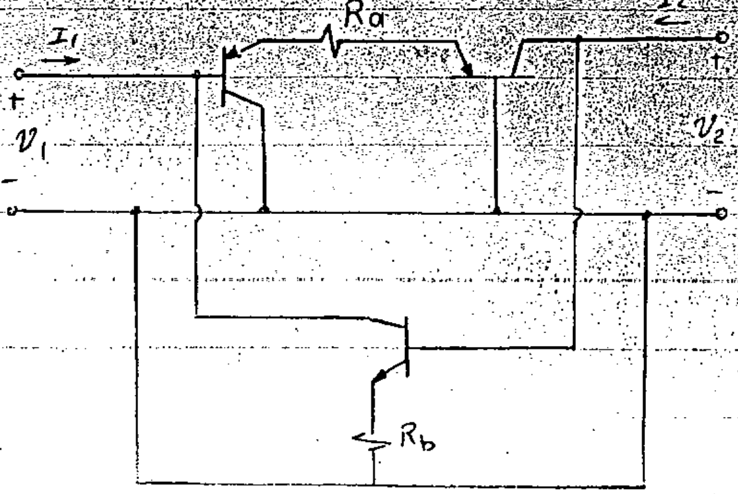
ولی رابطه ژیراتور نشان می‌دهد که ژیراتور یک عنصر دو طرفه است (جریان خروجی متناسب با ولتاژ ورودی و جریان ورودی متناسب با ولتاژ خروجی) بنابراین برای تحقق مداری یک ژیراتور کافی است دو تقویت کننده ادمیتانس با هم موازی شوند:



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

روشی که در بالا گفته شد یکی از راههای طراحی ژیراتورها است. روشهای دیگری نیز وجود دارد که مطالعه آنها بعهده دانشجو گذاشته می‌شود

یک مدار عملی برای روش فوق میتواند بفرم زیر باشد:



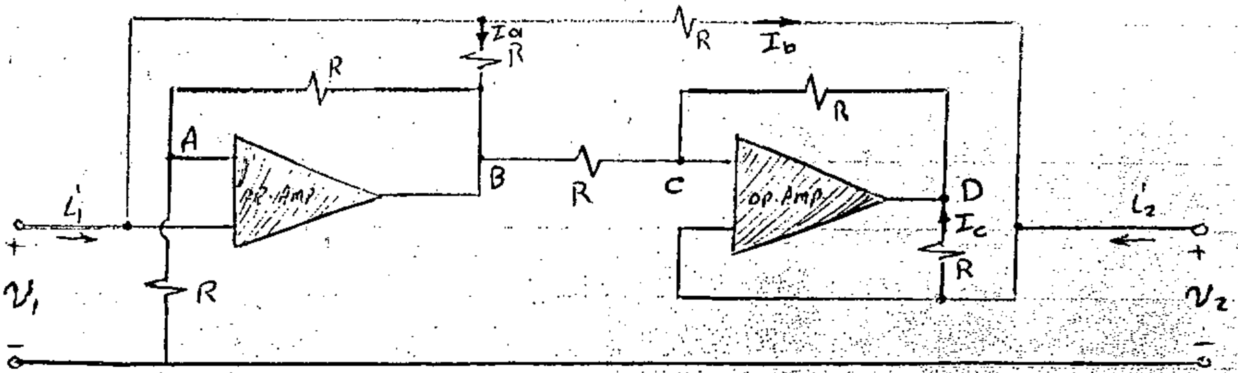
اگر β ی ترانزیستورها زیاد باشد میتوان از جریان بیس آنها صرف نظر کرد (Y_{22} & $Y_{11} \simeq 0$)

همچنین اگر $R = R_a = R_b \gg r_e$ در اینصورت خواهیم داشت

$$|g_{12}| = |g_{21}| = \frac{1}{R}$$

از نظر جهت (علامت) g_{21} و g_{12} نیز مشکلی وجود ندارد.

مثال: نشان دهید که مدار شکل زیر ژیراتور است.



$$V_A = v_1 \Rightarrow V_B = 2v_1 \Rightarrow \underline{I_a = -\frac{v_1}{R}} \qquad \underline{I_b = \frac{v_1 - v_2}{R}}$$

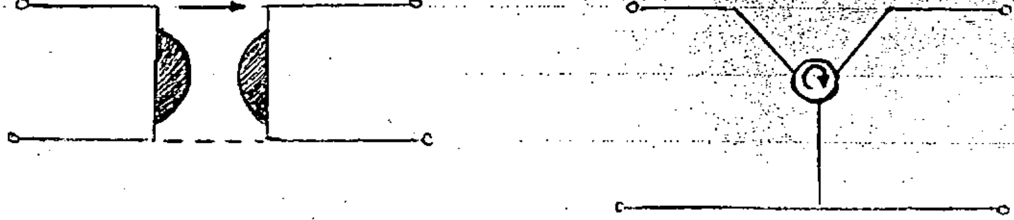
$$v_C = v_2 \quad , \quad v_D = V_C - \frac{2v_1 - v_C}{R} \times R = -2(v_1 - v_C) = -2(v_1 - v_2)$$

$$\Rightarrow I_C = \frac{+v_C - v_D}{R} = \frac{v_2 - v_D}{R} = \frac{2v_1 - v_2}{R} \Rightarrow \underline{I_C = \frac{2v_1 - v_2}{R}}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_a + I_b \\ I_2 &= I_C - I_b \end{aligned} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{-v_2}{R}} \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{v_1}{R}}$$

پس مدار یک ژیراتور است.

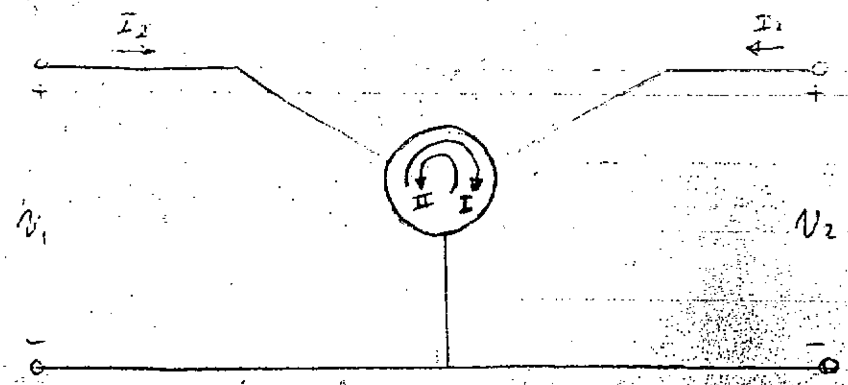
★ سمبل مداری ژیراتور: برای نشان دادن ژیراتور در مدارات از سمبل های زیر استفاده می شود



جهت فلشها برای نشان دادن دو حالت:

$$I \begin{cases} i_1 = g v_1 \\ i_2 = -g v_1 \end{cases} \qquad II \begin{cases} i_1 = -g v_2 \\ i_2 = g v_1 \end{cases}$$

و قرارداد بصورت ژیراتور است. کار برده.



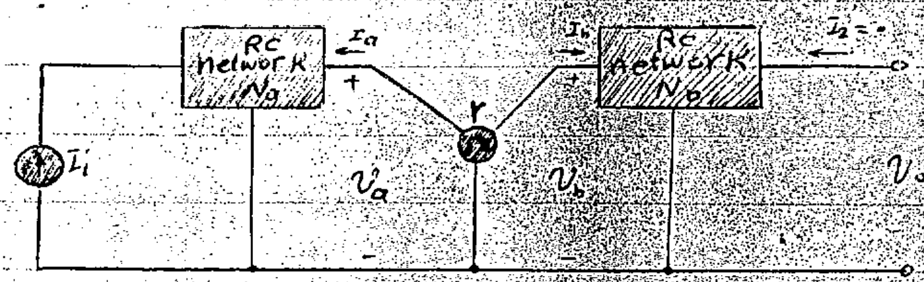
$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} I_2 = -g V_1 \\ I_1 = g V_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} I_2 = g V_1 \\ I_1 = -g V_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{bmatrix}$$

درواقع جهت فلش جهت هدایت ورودی ژیراتور است.

* synthesis using gyrators *   * سنتز با استفاده از ژیراتور *

1- positive Rc-positive RL cascade synthesis



net.A: $V_a = Z_{21a} I_i + Z_{22a} I_a$ for gyrator $\begin{cases} I_b = g V_a \\ I_a = -g V_b \end{cases}$ $g = \frac{1}{r}$

net.B: $V_b = Z_{11b} I_b$ & $V_o = Z_{21b} I_b$

$$\Rightarrow V_a = Z_{21a} I_i - Z_{22a}\, g V_b \quad , \quad V_b = Z_{11b}\, g V_a$$

$$\Rightarrow V_a = Z_{21a} I_i - Z_{22a}\, g^2 Z_{11b} V_a \Rightarrow V_a = \frac{Z_{21a}}{1 + g^2 Z_{22a} Z_{11b}} I_i$$

$$V_o = Z_{21b}\, g V_a \Rightarrow V_o = \frac{Z_{21a} Z_{21b}\, g}{1 + g^2 Z_{22a} Z_{11b}} I_i \Rightarrow \quad \times \frac{r^2/Z_{11b}}{r^2/Z_{11b}}$$

$$\boxed{\frac{V_o}{I_i} = Z_{21}(s) = \frac{r Z_{21a} Z_{21b}/Z_{11b}}{Z_{22a}+(r^2/Z_{11b})}} \quad (I)$$

حال میخواهیم شبکه‌های A، B را با مشخص بودن $Z_{21}(s)$ تعیین کنیم

برای سنتز:

صورت و مخرج $Z_{21}(s)$ را بر $P(s)$ که هم درجه $D(s)$ است تقسیم میکنیم.

$$Z_{21}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$P(s) = \prod_{i=1}^{n}(s+\sigma_i)$$

$$Z_{21}(s) = \frac{N(s)/P(s)}{D(s)/P(s)} \qquad \boxed{\frac{D(s)}{P(s)} = 1+\sum_{\mu}\frac{K_\mu}{s+\sigma_\mu}+\sum_{\nu}\frac{K_\nu}{s+\sigma_\nu}} \quad (II)$$

از آنجایی که $D(s)$ یک تابع با قطبهای مزدوج و $P(s)$ دارای قطبهایی روی محور حقیقی است در باز کردن کسر حتماً به ضرایب منفی برخورد خواهیم کرد.

بهمین دلیل جملات به دو قسمت مثبت و منفی تقسیم شده اند. $K_\mu > 0$ & $K_\nu < 0$

ولی در رابطه I هیچگونه علامت منفی وجود ندارد اما از آنجایی که Z_{11b} یک RC، DPI است و کوچکترین فرکانس بحرانی در Z_{RC} یک قطب است، r^2/Z_{11b} یک LR، DPI است (در Z_{RL} کوچکترین فرکانس بحرانی یک صفر است)

پس باید $D(s)/P(s)$ را بصورت دو جمله‌ای RC، DPI و دیگری RL، DPI تقسیم کنیم

برای این کار بصورت زیر عمل می‌کنیم

$$\frac{D(s)}{P(s)} = \left(1-K+\sum_{\mu}\frac{K_\mu}{s+\sigma_\mu}\right)+\left(K+\sum_{\nu}\frac{K_\nu}{s+\sigma_\nu}\right)$$

که K بصورت مقابل انتخاب شود $0 < K \leq 1$

پرانتز اول یک RC، DPI است. و اگر K در شرط مقابل نیز صدق کند $K \geq \sum_{\nu}\frac{-K_\nu}{\sigma_\nu}$

پرانتز دوم بصورت RL، DPI قابل سنتز خواهد بود.

* زیرا:

$$A(s) = K+\sum_{\nu}\frac{K_\nu}{s+\sigma_\nu} = A_0 + A_\infty s + \sum_{i=1}^{L}\frac{A_i s}{s+\sigma_i} \qquad A_0 = \left(K+\sum \frac{K_\nu}{s+\sigma_\mu}\right)\Big|_{\sigma_\mu=0}$$

$$\Rightarrow A_0 = K+\sum_{\nu}\frac{K_\nu}{\sigma_\nu} \qquad A_\infty = \lim A(s)/s = 0 \qquad A_i = -\frac{K_i}{\sigma_i}$$

از آنجایی که K_ν منفی و σ_ν مثبت است بنابراین $\underset{\nu=1,2,\dots,L}{A_\nu > 0}$ تنها شرط لازم این خواهد بود که

$$A_0 > 0 \Longrightarrow \quad \boxed{K \geqslant \left| \sum_\nu \frac{K_\nu}{\sigma_\nu} \right|}$$

حال که ثابت کردیم با انتخاب مناسب K برابر اولی یک DPI و RL است میتوان نتیجه گرفت که معکوس آن حتماً یک DPI و RC است بنابراین

$$\boxed{Z_{22a} = 1 + \sum_\mu \frac{K_\mu}{s+\sigma_\mu}} \quad \& \quad \boxed{Z_{11b} = r^2 \left[K + \sum_\nu \frac{K_\nu}{s+\sigma_\nu} \right]^{-1}}$$

بعد از مشخص شدن Z_{11b} و Z_{22a} با توجه به اینکه $N(s)$ چه باشد Z_{22a} و Z_{11b} را با روش مناسب سنتز خواهیم کرد.

* سنتز شبکه‌های درجه دوم *

$$LPF: \; Z_{21}(s) = \frac{H}{s^2 + 2\rho\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$P(s) = (s+\sigma_1)(s+\sigma_2) \Longrightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = 1 + \frac{K_1}{s+\sigma_1} + \frac{K_2}{s+\sigma_2} \qquad \sigma_2 > \sigma_1$$

$$K_1 = \frac{\sigma_1^2 - 2\rho\omega_0\sigma_1 + \omega_0^2}{\sigma_2 - \sigma_1} \qquad K_2 = \frac{\sigma_2^2 - 2\rho\omega_0\sigma_2 + \omega_0^2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

$$K_1 > 0 \;\&\; K_2 < 0 \Longrightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = \left(1 - K + \frac{K_1}{s+\sigma_1}\right) + \left(K + \frac{K_2}{s+\sigma_2}\right)$$

$$D(s) = (1-K)(s+\sigma_2)\left(s+\sigma_1 + \frac{K_1}{1-K}\right) + K(s+\sigma_1)\left(s+\sigma_2 + \frac{K_2}{K}\right)$$

$$D(s) = A(s) + r^2 B(s) \qquad A(s) = (1-K)(s+\sigma_2)\left(s+\sigma_1 + \frac{K_1}{1-K}\right)$$

$$\text{IF } r = 1 \Longrightarrow \qquad B(s) = K(s+\sigma_1)\left(s+\sigma_2 + \frac{K_2}{K}\right)$$

σ_1 و σ_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که همه ریشه‌های $D(s)$ منفی و حقیقی باشند

$$S_{r^2}^{s_i} = \frac{d s_i}{(dr^2)/r^2} = \frac{-r^2 B(-s_i)}{s_i - \bar{s}_i} = \frac{A(-s)}{s_i - \bar{s}_i}$$

ژیراتور مینیمم شود.

$\bar{s}_i$ مزدوج s_i است.

$$\left|S_{r^2}^{s_1}\right| = \frac{-r^2 |B(-s_1)|}{|s_1 - \bar{s}_1|} = \frac{|A(-s)|}{|s_1 - \bar{s}_1|} \qquad s_1, \bar{s}_1 = -\rho \pm j\sqrt{1-\rho^2} \quad \text{for } \omega_0 = 1$$

$$\Rightarrow |s_1 - \bar{s}_1| = 2\sqrt{1-\rho^2}$$

بنابراین برای optimize کردن حساسیت ریشه‌های $D(s)$ نسبت به تغییرات پارامترهای passive و active مدار کافی است $A(s)$ و $B(s)$ مینیمم شوند.

$$\frac{\partial A(s)}{\partial \sigma_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\sigma_1}\left(\sigma_1 + \frac{k_1}{1-k}\right) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 - 2\rho\omega_0\sigma_2 + \sigma_2^2 - k(\sigma_2 - \sigma_1)^2 = 0$$

$$\frac{\partial B(s)}{\partial \sigma_2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\sigma_2}\left(\sigma_2 + \frac{k_2}{k}\right) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 + 2\sigma_1(\sigma_2 - \rho\omega_0) - \sigma_2^2 + k(\sigma_2 - \sigma_1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \rho\omega_0 - \omega_0\sqrt{\frac{(1-k)(1-\rho^2)}{k}}} \quad \& \quad \boxed{\sigma_2 = \rho\omega_0 + \omega_0\sqrt{\frac{k(1-\rho^2)}{1-k}}}$$

$$\sigma_1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{(1-k)(1-\rho^2)}{k}} \leq \rho \Rightarrow k \geq 1-\rho^2 \Rightarrow \boxed{1-\rho^2 < k < 1}$$

$$\boxed{\left|S_{r^2}^{s_1}\right|_{min} = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{1-\rho^2}}$$

* رابطه اخیر نشان می‌دهد که حساسیت مینیمم برای فیلترهای طراحی شده توسط ژیراتور کمتر از فیلترهای NIC است. برای حالت اپتیمم خواهیم داشت:

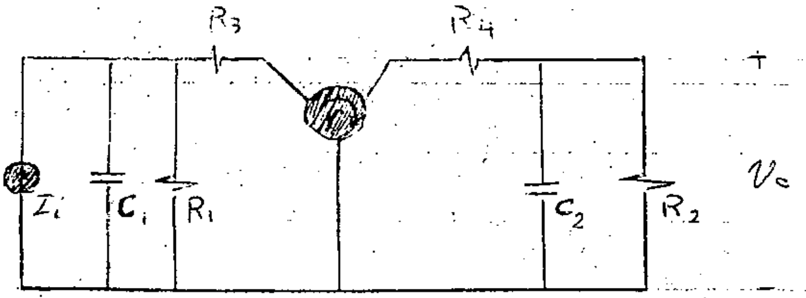
$$D(s) = (1-k)(s+\sigma_2)^2 + k(s+\sigma_1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = (1-k)\frac{s+\sigma_2}{s+\sigma_1} + k\frac{s+\sigma_1}{s+\sigma_2} \Rightarrow \boxed{Z_{22a} = (1-k)\frac{s+\sigma_2}{s+\sigma_1}}$$

$$\Rightarrow Z_{21a} = \frac{H_a}{s+\sigma_1} \quad \& \quad \boxed{Z_{11b} = \frac{1}{k}\left(\frac{s+\sigma_2}{s+\sigma_1}\right)}$$

$$\Rightarrow Z_{21b} = \frac{H_b}{s+\sigma_1} \qquad H = H_a H_b = \frac{1-k}{k}(\sigma_2 - \sigma_1)^2$$

پس مدار بصورت زیر خواهد بود



بعلت وجود مقاومت R_1 میتوان مدار نورتن را در ورودی استفاده کرد.

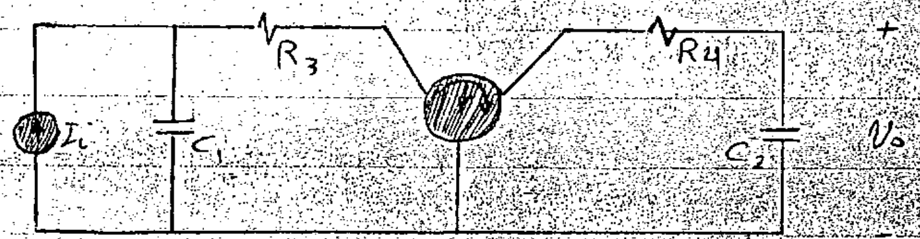
* $r=1$, $R_3 = 1-K$, $R_1 = (1-K)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)$ *

* $C_1 = 1/[(1-K)(\sigma_2-\sigma_1)]$, $R_4 = 1/K$, $R_2 = \frac{1}{K}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)$, $C_2 = \frac{K}{\sigma_2-\sigma_1}$ *

$1-\rho^2 < K < 1$

حالت اول $\quad K = 1-\rho^2 \Rightarrow \rho^2\left(s+\frac{\omega_0}{\rho}\right)^2 + (1-\rho^2)s^2 = D(s)$

$\sigma_1 = 0$ & $\sigma_2 = \omega_0/\rho \Rightarrow P(s) = s(s+\omega_0/\rho)$



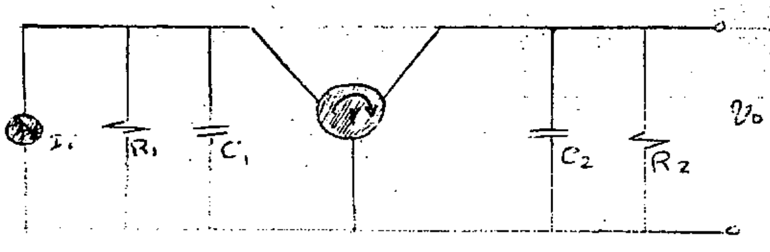
$r=1 \quad C_1 = 1/\rho\omega_0 \quad C_2 = \frac{\rho}{\omega_0}(1-\rho^2) \quad R_3 = \rho^2 \quad R_4 = \frac{1}{1-\rho^2}$

حالت دوم $\quad K=1 \Rightarrow \sigma_1 = \rho\omega_0 \quad \sigma_2 \to \infty$

$D(s) = (1-K)(s+\sigma_2)^2 + K(s+\sigma_1)^2$ & $\sigma_2 = \rho\omega_0 + \omega_0\sqrt{\frac{K(1-\rho^2)}{1-K}}$

$P(s) = \omega_0(s+\rho\omega_0)$

$\Rightarrow D(s) = \omega_0^2(1-\rho^2) + (s+\rho\omega_0)^2 \qquad H = \omega_0^2(1-\rho^2)$



$r=1 \quad R_1 = \frac{1-\rho^2}{\rho}$

$R_2 = 1/\rho$

$C_1 = 1/\omega_0(1-\rho^2)$

$C_2 = 1/\omega_0$

مثال: فیلتر باترورث مرتبه چهارم را توسط ژیراتور سنتز کنید.

$$H(s)=\frac{H}{(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.848s+1)}$$

حل: هرگاه دو فیلتر مرتبه دوم توسط یک ژیراتور با هم متصل شوند فیلتر مرتبه چهارم بدست می‌آید پس کافی است تک تک فیلترهای مرتبه دوم را طراحی کنیم.

برای آنکه مروری بر روابط قبلی داشته باشیم از نتایج نهایی استفاده نمی‌کنیم بلکه بعضی از جزئیات نیز مطرح خواهد شد.

$$\rho = 0.7654/2 \Rightarrow 0.854<K<1 \qquad \overset{\text{انتخاب}}{K=0.92} \qquad \omega_0=1$$

$$\rho' = 0.924 \Rightarrow 0.149<K'<1 \qquad K'=0.6 \qquad \omega_0'=1$$

$$\sigma_1=\rho\omega_0-\omega_0\sqrt{\frac{(1-K)(1-\rho^2)}{K}} \Rightarrow \sigma_1=0.11 \quad \& \quad \sigma_1'=0.612$$

$$\sigma_2=\rho\omega_0+\omega_0\sqrt{\frac{K(1-\rho^2)}{1-K}} \Rightarrow \sigma_2=3.516 \quad \& \quad \sigma_2'=1.392$$

$$\Rightarrow \frac{D_1(s)}{P_1(s)}=\frac{s^2+0.7654s+1}{(s+0.11)(s+3.516)}=1+\frac{0.272}{s+0.11}+\frac{-3.133}{s+3.516}$$

$$\Rightarrow \frac{D_1(s)}{P_1(s)}=0.08+\frac{0.272}{s+0.11}+\frac{0.925+0.102}{s+3.516}$$

$$\frac{D_1(s)}{P_1(s)}=Z_{22a}+r^2/Z_{11b} \qquad r=1 \Rightarrow Z_{22a}=0.08+\frac{0.272}{s+0.11}$$

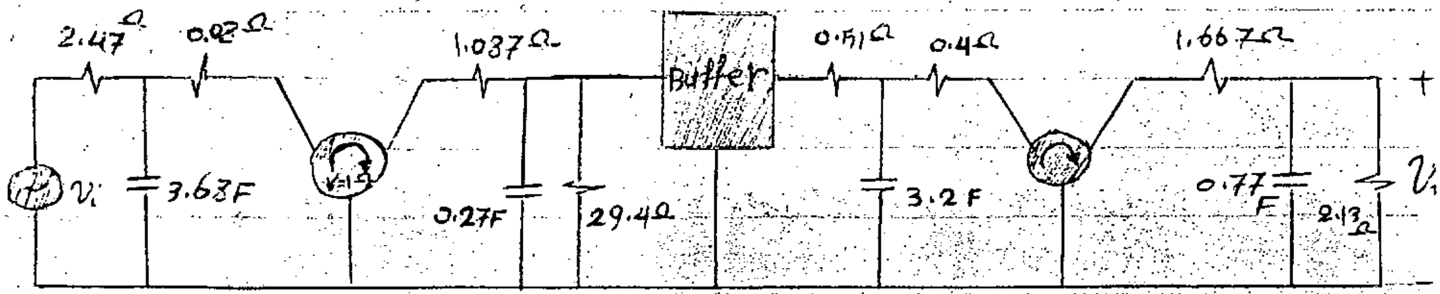
$$Z_{11b}=\frac{s+3.516}{0.925+0.102}=1.087+\frac{3.4}{0.925+0.102}$$

$$\frac{D_2(s)}{P_2(s)}=\frac{s^2+1.848s+1}{(s+0.612)(s+1.392)}=1+\frac{0.312}{s+0.612}+\frac{-0.468}{s+1.392}$$

$$\Rightarrow \frac{D_2(s)}{P_2(s)}=0.4+\frac{0.312}{s+0.612}+\frac{0.65+0.367}{s+1.392}$$

$$\Rightarrow Z_{22a}'=0.4+\frac{0.312}{s+0.612} \quad \& \quad Z_{11b}'=\frac{s+1.392}{0.65+0.367}$$

$$Z'_{11b} = 1.667 + \frac{0.78}{0.5S + 0.367}$$



مثال : مثال قبل را با K=1 حل کنید .

$K = 1$

$\rho = 0.3827 \implies \sigma_1 = 0.3827$

$\implies P(s) = \omega_0 (s + \rho \omega_0)$

$\rho' = 0.924 \implies \sigma_2 = \infty$

$P_1(s) = s + 0.3827$

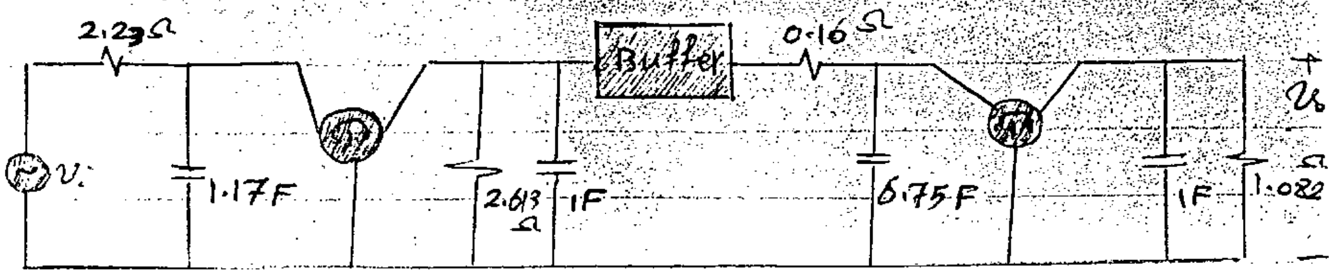
$P_2(s) = s + 0.924$

$$\frac{D_1(s)}{P_1(s)} = \frac{s^2 + 0.7654s + 1}{s + 0.3827} = A_0 + A_1 s + \frac{A_2}{s + 0.3827} = 0.382 + s + \frac{0.8535}{s + 0.3827}$$

$$\implies Z_{22a} = \frac{0.8535}{s + 0.3827} \qquad Z_{11b} = \frac{1}{s + (2.613)^{-1}}$$

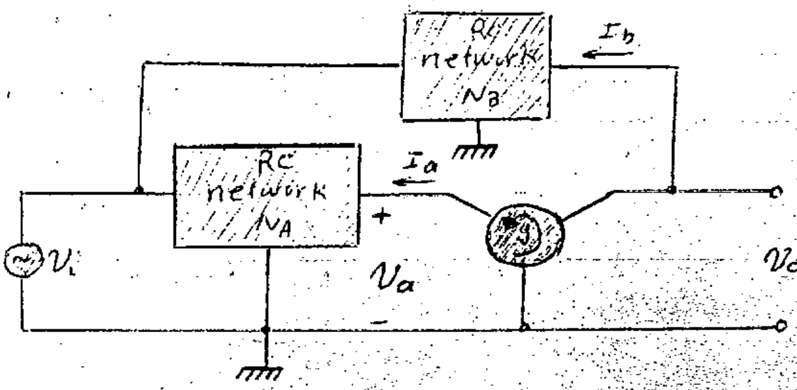
$$\frac{D'_2(s)}{P'_2(s)} = \frac{s^2 + 1.848s + 1}{s + 0.924} = (1.082)^{-1} + s + \frac{0.146}{s + 0.924}$$

$$\implies Z'_{22a} = \frac{0.148}{s + 0.924} \qquad Z'_{11b} = \frac{1}{s + (1.082)^{-1}}$$



البته در اینجا هم می‌توانیم از مدارهای صفحه 66 برای ... استفاده کنیم

*Parallel realization * 2*

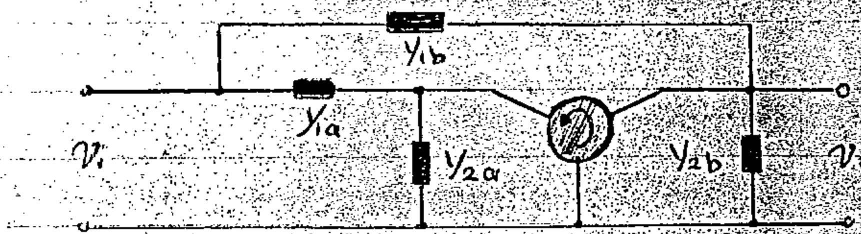


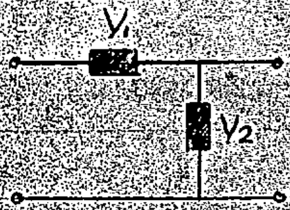
$$\begin{cases} I_a = g V_o \\ I_b = -g V_o \end{cases} \qquad \begin{cases} I_a = y_{22a} V_a + y_{21a} V_i \\ I_b = y_{22b} V_o + y_{21b} V_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-y_{21b} + g\, y_{21a}/y_{22a}}{y_{22b} + g^2/y_{22a}}}$$

ما در اینجا فرض می‌شود که خروجی گیرنده یک مدار RLC است زیرا y_{22b} یک DPA ، RC ، g^2/y_{22a} یک DPA ، RC است

تجزیه تحلیل شبکه‌های A ، B در حالت کلی پیچیده خواهد بود بنابراین برای شبکه‌های B ، A از یک شبکه خاص که معمولاً شبکه L است استفاده می‌کنیم .





$y_{22} = y_1 + y_2$ & $y_{21} = -y_1$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{y_{1b} - [g^2 y_{1a} / (y_{1a} + y_{2a})]}{y_{1b} + y_{2b} + [g^2/(y_{1a} + y_{2a})]}$$

سنتز شبکه‌ها را برای حالت Band pass ، Biquadratic در زیر انجام می‌دهیم .

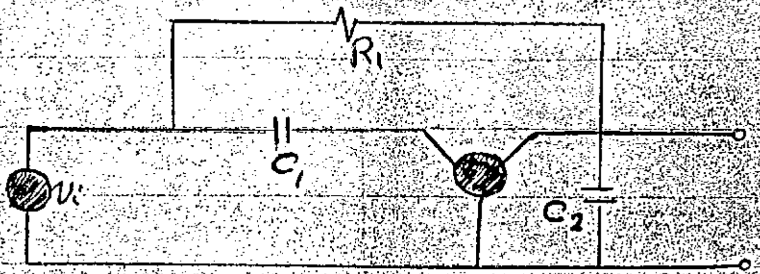
Band pass function $\qquad H(s) = \dfrac{H\,s}{s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2}$

$$P(s) = s \Rightarrow \frac{D(s)}{P(s)} = s + 2\rho\omega_0 + \frac{\omega_0^2}{s}$$

$$H(s) = \frac{Y_{1b} - gY_{1a}/(Y_{1a}+Y_{2a})}{Y_{1b}+Y_{2b} + g^2/(Y_{1a}+Y_{2a})} \Rightarrow Y_{1b} - \frac{gY_{1a}}{Y_{1a}+Y_{2a}} = H$$

$$Y_{1b}+Y_{2b} = s + 2\rho\omega_0 \quad \& \quad \frac{g^2}{Y_{1a}+Y_{2a}} = \frac{\omega_0^2}{s}$$ فرض : $g = 1$

$$Y_{2a} = 0 \quad , \quad Y_{1b} = 2\rho\omega_0 \quad , \quad Y_{2b} = s \quad , \quad Y_{1a} = s/\omega_0^2 \quad \Rightarrow H = 2\rho\omega_0 - 1$$



Band pass filter

$$C_1 = 1/\omega_0^2 \qquad R_1 = 1/(2\rho\omega_0) \qquad C_2 = 1 \qquad S_{g^2}^{s_1} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Biquadratic function

$$H(s) = \frac{H(s^2+a^2)}{s^2+2\rho\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$P(s) = s + \rho\omega_0 \qquad \frac{N(s)}{P(s)} = H\left[s + \frac{a^2}{\rho\omega_0} - \frac{a^2+\rho^2\omega_0^2}{\rho\omega_0(s+\rho\omega_0)} s\right]$$

$$\frac{D(s)}{P(s)} = s + \rho\omega_0 + \frac{\omega_0^2(1-\rho^2)}{s+\rho\omega_0}$$

ممکن است پارامترهای بالا را بصورت زیر انتخاب کنیم.

$$Y_{1b} = H\left(s + \frac{a^2}{\rho\omega_0}\right) \quad , \quad \frac{gY_{1a}}{Y_{1a}+Y_{2a}} = \frac{H(a^2+\rho^2\omega_0^2)}{\rho\omega_0(s+\rho\omega_0)} s$$

$$Y_{1b}+Y_{2b} = s + \rho\omega_0 \quad \& \quad \frac{g^2}{Y_{1a}+Y_{2a}} = \frac{\omega_0^2(1-\rho^2)}{s+\rho\omega_0}$$

برای اینکه تعداد المانها مینیمم شود انتخاب خاصی وجود دارد که در زیر شرح داده می‌شود.

حالت اول

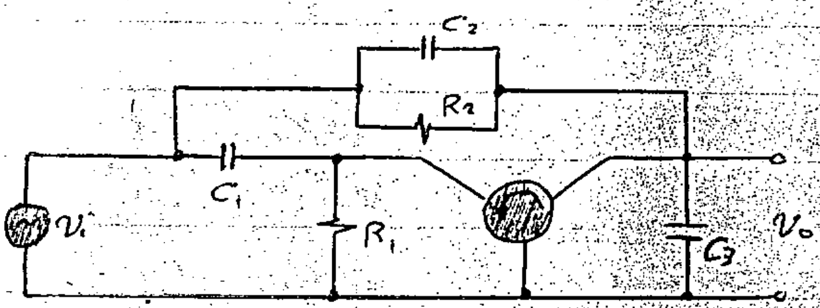
$$H = \frac{\rho^2 \omega_0^2}{\alpha^2} \quad \& \quad g = \frac{\omega_0 \rho}{\alpha^2}(\omega_0^2 \rho^2 + \alpha^2) \quad \& \quad \alpha > \rho\omega_0$$

$$\Rightarrow Y_{1b} = \frac{\rho^2 \omega_0^2}{\alpha^2}\left(s + \frac{\alpha^2}{\rho\omega_0}\right) \Rightarrow Y_{1b} = \frac{\rho^2\omega_0^2}{\alpha^2} s + \rho\omega_0$$

$$Y_{1b} + Y_{2b} = s + \rho\omega_0 \Rightarrow Y_{2b} = \left(1 - \frac{\rho^2\omega_0^2}{\alpha^2}\right) s$$

$$Y_{1a} = \frac{\rho^2(\alpha^2 + \rho^2\omega_0^2)^2}{\alpha^4(1-\rho^2)} s \qquad Y_{2a} = \frac{\rho^3\omega_0(\alpha^2 + \rho^2\omega_0^2)^2}{\alpha^4}$$

بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$* \; C_1 = \frac{\rho^2(\alpha^2+\rho^2\omega_0^2)^2}{\alpha^4(1-\rho^2)} \quad * \; R_1 = \frac{1}{\rho\omega_0 C_1} \quad * \; C_2 = \frac{\rho^2\omega_0^2}{\alpha^2} \; *$$

$$* \; R_2 = \frac{1}{\rho\omega_0} \quad * \; C_3 = 1 - C_2 \; *$$

حالت دوم

$$H = 1 \quad \& \quad g = \frac{\alpha^2 + \rho^2\omega_0^2}{\rho\omega_0} \quad \& \quad \rho\omega_0 > \alpha$$

در این حالت خواهیم داشت.

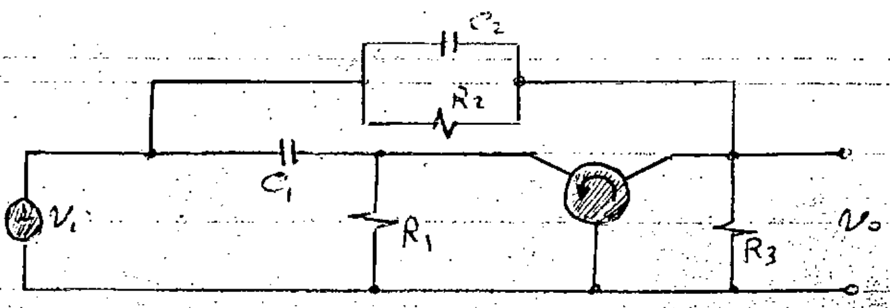
$$Y_{1a} = \frac{(\alpha^2+\rho^2\omega_0^2)^2}{\rho^2\omega_0^4(1-\rho^2)} s \quad , \quad Y_{2a} = \frac{(\alpha^2+\rho^2\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^3(1-\rho^2)}$$

$$Y_{1b} = s + \frac{\alpha^2}{\rho\omega_0} \quad ; \quad Y_{2b} = \rho\omega_0 - \frac{\alpha^2}{\rho\omega_0}$$

حساسیت برای هر دو حالت برابر است با:

$$S_{g^2}^{s_i} = -\frac{g\omega_0}{2}\sqrt{1-\rho^2}$$

مدار برای حالت دوم بصورت زیر خواهد بود..

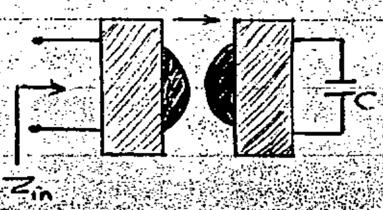


$$* \; C_1 = \frac{(a^2+\rho^2\omega_0^2)^2}{\rho^2\omega_0^4(1-\rho^2)} \; * \; R_1 = \frac{1}{\rho\omega_0 C_1} \; * \; R_2 = \frac{\rho\omega_0}{a^2} \; * \; C_2 = 1 \; *$$

$$* \; R_3 = \frac{\rho\omega_0}{\rho^2\omega_0^2 - a^2} \; *$$

---

* تبدیل خازن به سلف * و کاربرد آن در فیلترهای فعال



گفتیم هرگاه باری در خروجی ژیراتور قرار گیرد از ورودی بصورت معکوس آن دیده می‌شود

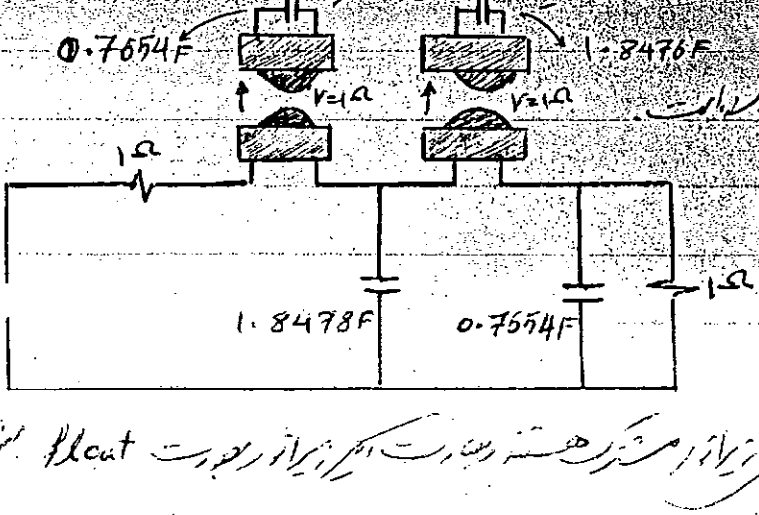
حال اگر این بار یک خازن باشد از ورودی بصورت یک سلف دیده می‌شود.

$$Z_L = \frac{1}{Cw} \Rightarrow Z_{in} = Cw \qquad for \quad r = 1$$

پس هر خازنی در طرف دوم ژیراتور قرار گیرد از ورودی سلفی دیده می‌شود که از نظر عددی با خازن برابر است.

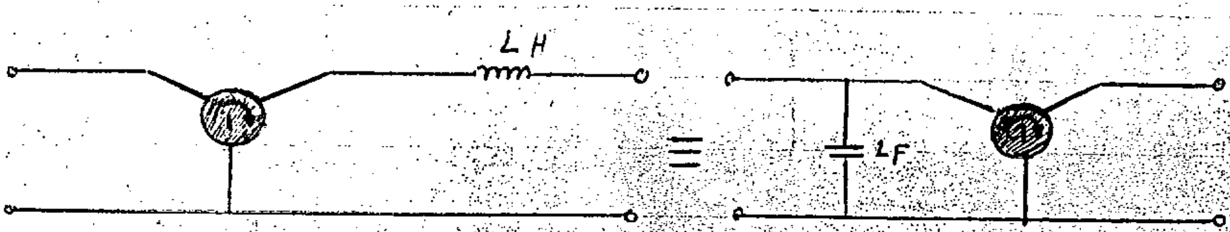
بنابراین یکی از راههای طراحی فیلترهای بدون سلف چنین است که ابتدا فیلتر مورد نظر با المانهای LC طراحی کرده و سپس هر سلف را توسط یک خازن و یک ژیراتور جایگزین کنیم.

• در شکل زیر فیلتر باترورث درجه چهارم نشان داده شده است.

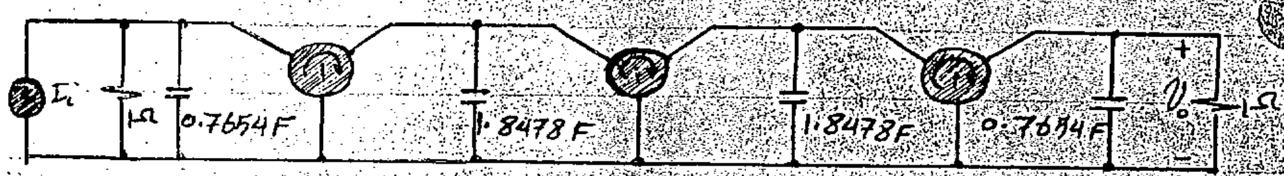


البته همیشه یک سر از خروجی و یک سر از ورودی ژیراتور مشترک هستند به عبارت دیگر ژیراتور بصورت float نیست.

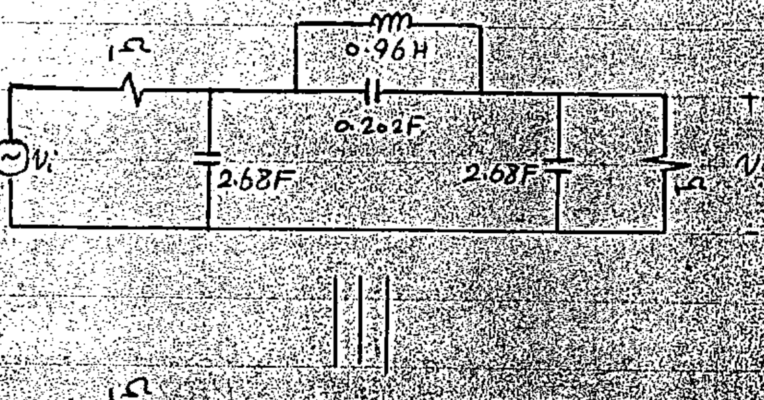
بنابراین باید مدار را بصورت زیری طراحی نمود. برای اینکار از معادل ژیراتور زیر استفاده می کنیم:

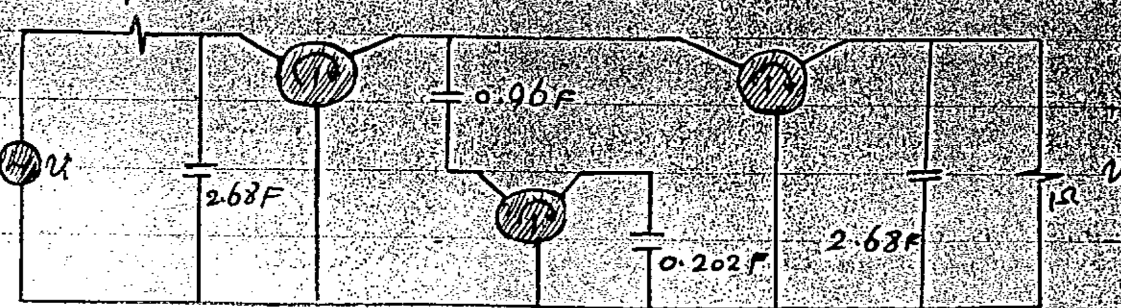


بنابراین فیلتر صفحه قبل را میتوان بصورت زیر طرح کرد



مثال:



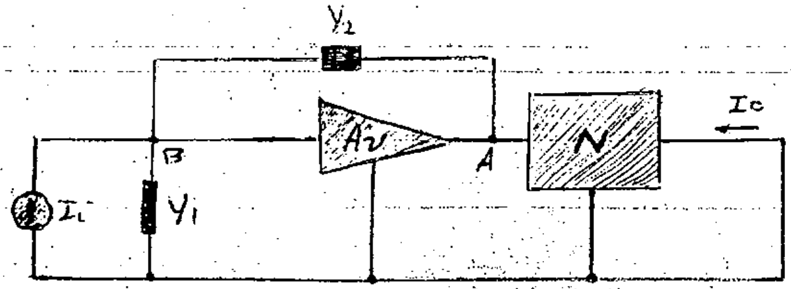


TRansformation — انتقال فرکانسی

تبدیل $LP \leftrightarrow HP$

$\frac{1}{R_i} \longrightarrow C_i$ & $\frac{1}{C_j} \longrightarrow R_j$

فیلتر Haykin



$$H(s)=\frac{I_o}{I_i}=?\qquad \frac{V_B}{V_{A_v}}=V_A \implies V_B=\frac{V_A}{A_v}$$

$$I_o=Y_{21N}V_A \qquad I_i=\frac{V_A}{A_v}Y_1+\left(\frac{V_A}{A_v}-V_A\right)Y_2$$

$$\Rightarrow I_i=\frac{V_A}{A_v}\left[Y_1+(1-A_v)Y_2\right] \implies \boxed{\frac{I_o}{I_i}=\frac{A_vY_{21N}}{Y_1+(1-A_v)Y_2}}$$

ملاحظه می شود اگر: اگر $A_v>1$ باشد مثل حالتی که NIC باشد علامت منفی در مخرج خواهیم داشت و میتوان توسط مدارات RC به قطبهای مزدوج رسید.

مثال: تابع انتقال زیر را بصورت فیلتر Haykin سنتز کنید.

$$\frac{i_o}{i_i}=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

حل: $A_v=2 \implies \frac{I_o}{I_i}=\frac{2Y_{21N}}{Y_1-Y_2}$ $\qquad H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$

برای سنتز بصورت زیر عمل میکنیم

$Y_1-Y_2=\frac{D_1(s)}{D_2(s)}$	&	$2Y_{21N}=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{D_1(s)}{D_2(s)}$

$D(s)=(s+1)(s^2+s+1)$ $\qquad$ انتخاب: $D_1(s)=s^2+s+1$ & $D_2(s)=s+2$

که میتواند ۱+ دکان باشد زیرا اینصورت Y_{21} قابل سنتز کردن نیست.

$$\Rightarrow Y_1-Y_2=\frac{s^2+s+1}{s+2}=s+\tfrac{1}{2}-\frac{3/2\,s}{s+2} \implies Y_1=s+0.5\ \&\ Y_2=\frac{3/2\,s}{s+2}$$

$$Y_{21N}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}\times\frac{s^2+s+1}{s+2}=\frac{0.5}{(s+1)(s+2)}$$

برای سنتز Y_{21} ابتدا باید Y_{11} را تعیین کنیم

$$Y_{11}=\frac{K(s)}{(s+1)(s+2)}$$

چون میخواهیم شبکه N بصورت مدار RC سنتز شود بنابراین باید کمترین مرتبه ممکن را داشت

در صورت ... باشد و در ضمن باید $K(s)$ طوری انتخاب گردد که $\frac{K(s)}{(s+1)(s+2)}$ دارای شرایط تابع RC باشد

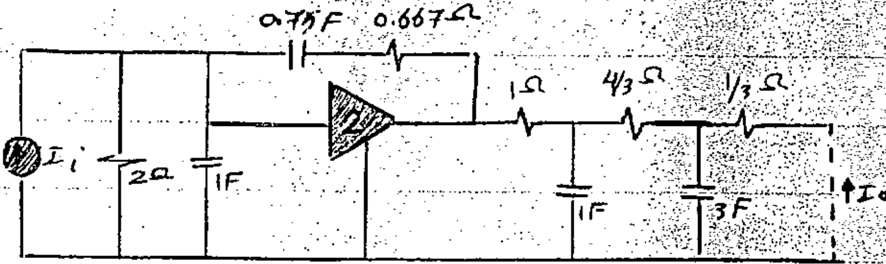
مثلاً قطب‌ها و صفرها باید یک در میان باشند.

$$Y_{11} = \frac{(s+0.5)(s+1.5)}{(s+1)(s+2)}$$

پس

باید بروش دارلینگتون I سنتز کنیم زیرا که Y_{21} یک عدد ثابت است.

$$Y_{11} = \frac{s^2+2s+0.75}{s^2+3s+2} \Rightarrow Z_{11} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+0.75} = 1 + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{3s+3}}}$$



پس فیلتر بصورت مقابل خواهد بود.

کافی است مقاومت موازی با منبع جریان و خود منبع جریان را بصورت تونن نشان داده و جریان خروجی را از روی مقاومت $1/3\,\Omega$ ارائه کنیم.