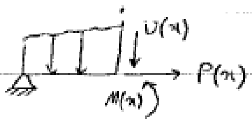
دیاگرام های برش و لنگر در تیرها :

در یک تیر با بارگذاری دلخواه اگر در هر نقطه از تیر یک مقطع ایجاد کنیم تا تیر به دو تکه تقسیم شود و یکی از دو تکه را بیرون کشیده و دیاگرام آزاد آن را رسم کنیم برای آنکه این تکه دارای تعادل باشد باید در مقطع برش سه واکنش داخلی وجود داشته باشد این سه واکنش به صورت دو نیروی موازات و عمود بر راستای تیر و یک گشتاور خمشی می باشد



این سه واکنش با نوشتن معادلات تعادل قطعه انتخاب شده از تیر قابل محاسبه است. نیروی بدست آمده به موازات تیر نیروی محوری در آن نقطه واکنش عمود بر راستای تیر، نیروی برشی آن نقطه و لنگر خمشی بدست آمده لنگر خمشی آن نقطه می باشد اگر برای تمامی نقاط تیر این واکنش های داخلی محاسبه شود از کنار هم قرار دادن مقادیر بدست آمده سه دیاگرام بدست می آید این دیاگرام ها عبارتند از دیاگرام نیروی محوری نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با توجه به آنکه معمولا در تیرها مقدار نیروی محوری قابل توجه نیست دیاگرام نیروی محوری از اهمیت کمتری برخوردار است و معمولا دو دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی ترسیم می شوند

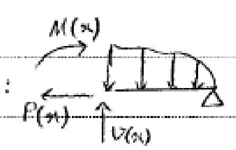
$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow P(x) =$ نیروی محوری

$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow V(x) =$ " برشی

$\Sigma M_C = 0 \Longrightarrow M(x) =$ لنگر خمشی

قرارداد برای جهت مثبت واکنش های داخلی بر حسب آنکه قطعه سمت چپ یا سمت راست تیر انتخاب شود حالات مختلف مطابق شکل است

قطعه سمت راست :

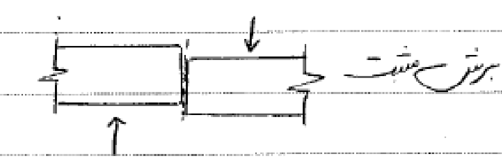


در حل مسائل بهتر است قطعه ای انتخاب شود که شکل ساده تری دارد اگر دو قطعه از این لحاظ تفاوتی با هم نداشته باشند بهتر است قطعه سمت چپ انتخاب شود

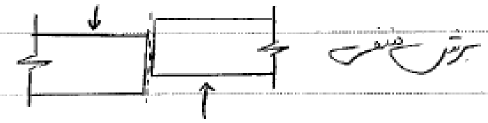
برای تعیین جهت مثبت و منفی واکنش های داخلی به شکل زیر نیز می توان عمل کرد :

در مورد نیروهای محوری، نیروهای کششی همیشه مثبت و نیروهای فشاری همیشه منفی است

در مورد نیروی برشی اگر نیروهای وارد بر تیر به گونه ای باشند که تمایل داشته باشند قطعه سمت چپ نقطه مورد نظر را نسبت به قطعه سمت راست به سمت بالا حرکت دهند برش مثبت است و عکس آن برش منفی است

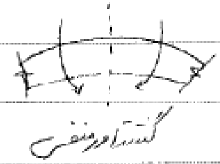


پس براین اساس اگر قطعه سمت چپ انتخاب شود و یا از چپ به راست جهت ترسیم دیاگرام حرکت می کنیم نیروهای رو به بالا مثبت و رو به پایین منفی است



برعکس آن اگر قطعه سمت راست را انتخاب کردیم و یا از راست به چپ دیاگرام را ترسیم می کنیم نیروهای رو به پایین مثبت و رو به بالا منفی است

در مورد گشتاور اگر گشتاورهای وارد بر تیر تمایل داشته باشند که تیر را در نقطه مورد نظر انحنای رو به بالا بدهند گشتاور مثبت و در غیر اینصورت منفی است



پس براین اساس اگر قطعه سمت چپ انتخاب شده باشد و یا حرکت از چپ به راست باشد گشتاورهای ساعتگرد مثبت و پادساعتگرد منفی فرض می شود برعکس آن اگر قطعه سمت راست انتخاب شود و یا حرکت از راست به چپ باشد گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی است

روش های ترسیم دیاگرام:

۱) روش مقطع: در این روش یک نقطه دلخواه با فاصله مجهول از ابتدای تیر مقطع زده می شود و با انتخاب یکی از دو قطعه و استفاده از یکی از روش های گفته شده مقادیر عکس العمل داخلی محاسبه می گردد چون موقعیت این نقطه مجهول است

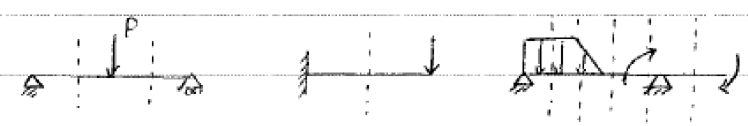
مقادیر بدست آمده برای واکنش های انتهایی از یک متغیر مثل x به واحد بودن میل
می‌توان با استفاده از روش های ریاضی نمودارهای مربوطه را ترسیم نمود
در هر تیر لزوماً به یک مقطع نیاز است و گاهی به بیش از یک مقطع نیاز داریم در انتخاب
مقاطع در تیر باید به نکات زیر توجه کرد:

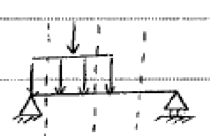
۱) به ازای هر بار متمرکز در تیر (شامل واکنش های تکیه‌گاهی) نیاز به یک مقطع قبل و بعد از
بار متمرکز می‌باشد

۲) اگر تنها یک بار گسترده در طول تیر تغییر کند به ازای هر قطعه نیاز به یک برش است

۳) اگر تکه‌ای از تیر شامل بار گسترده و تکه دیگر فاقد بار گسترده باشد برای هر تکه از دو قسمت
نیز یک مقطع مورد نیاز است

نکته) ترجیحاً باید یک مبدأ ثابت در انتهای سمت چپ تیر در نظر گرفت و تمامی مقادیر را نسبت
به این مبدأ ثابت محاسبه کرد





در ترسیم دیاگرام ها هر در مورد محاسبه واکنش های تکیه‌گاهی
نمی‌توان بارهای گسترده را به بار متمرکز تبدیل کرد

۲) روش محاسبه سریع: در این روش از یکی از دو انتهای تیر شروع کرده و با کمک یک
سری قواعد ساده‌شده دیاگرام ها را ترسیم می‌کنیم برخی از این قواعد به شرح زیر است:

۱- بار وارد بر تیر، دیاگرام برش و دیاگرام لنگر نسبت به هم دارای روابط مشتق و انتگرال می‌باشند
به این گونه که دیاگرام گشتاور، انتگرال دیاگرام برش و دیاگرام برش، انتگرال معادله
بار وارد بر تیر است برعکس آن معادله بار وارد بر تیر مشتق دیاگرام برش و دیاگرام
برش مشتق دیاگرام خمش است. در قسمت های بعدی به استفاده هایی که
از این نکات می‌شود اشاره می‌شود

۲_ در قسمتی که به تیر باری وارد نمی شود دیاگرام برش خط مستقیم و دیاگرام لنگر خط مایل است

۳_ در محل بارهای متمرکز در دیاگرام برش ایجاد جهش به مقدار بار متمرکز و هم جهت با آن (در صورت حرکت از سمت چپ به راست) خواهیم بود در همین نقطه دیاگرام لنگر یک شکستگی ایجاد می شود

۴_ در محل لنگر متمرکز دیاگرام برش بدون تغییر می ماند اما در دیاگرام لنگر یک جهش ایجاد می شود این جهش با توجه به مقدار گشتاور وارده می باشد در ترسیم چپ به راست گشتاور متمرکز ساعتگرد جهش مثبت فرض می شود

۵_ در محل اعمال بار گسترده یکنواخت نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است

۶_ در محل بار گسترده مثلثی نمودار برش درجه (۲) و نمودار لنگر درجه (۳) می شود

۷_ هرجا مقدار برش مثبت باشد نمودار لنگر صعودی است در غیر این صورت نزولی است

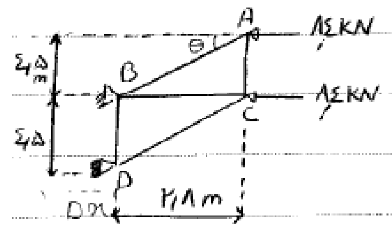
۸_ هرجا بار گسترده وارد بر تیر رو به پایین باشد نمودار برش نزولی و نمودار لنگر دارای تقعر رو به پایین است (بار رو به پایین منفی فرض می شود) و بالعکس

۹_ در مورد بارهای گسترده غیر یکنواخت هرگاه بار صعودی باشد نمودار برش دارای تقعر رو به بالا خواهد بود و بالعکس

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن بار باید از چپ به راست حرکت کنیم و همچنین توجه کنیم که بار با جهت پایین منفی و با جهت بالا مثبت است

۱۰_ مقدار لنگر در هر نقطه از تیر برابر انتگرال نمودار برش از ابتدا تا آن نقطه می باشد البته اگر در این محدوده به تیر گشتاور متمرکزی وارد شده باشد باید این گشتاور متمرکز به سطح زیر نمودار اضافه شود

مثال: با استفاده از روش مفصل، نیروی اعضای خرپای شکل زیر را محاسبه کنید.



$J=4 \;,\; n=5 \;,\; r=3$

$2\times4=5+3=8 \Rightarrow$ معین استاتیکی

$\uparrow\Sigma F_y=0 \Rightarrow B_y=0$

$\circlearrowleft \Sigma M_D=0 \Rightarrow 8.4\times9+8.4\times4.5-B_x\times4.5=0$

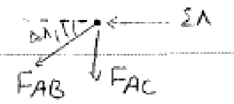
$\Rightarrow B_x=25.2\,KN$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow D_x+25.2-8.4-8.4=0$

$\Rightarrow D_x=-8.4\,KN \Rightarrow D_x=\overleftarrow{8.4\,KN}$

از یکی از دو گره A و D می‌توان شروع کنیم

گره A: $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{4.5}{2.8}\right)=0 \Rightarrow \theta=58.1^\circ$



$\Rightarrow \Sigma F_x=0 \Rightarrow -8.4-F_{AB}\cos58.1=0$

$\Rightarrow F_{AB}=-15.9 \Rightarrow F_{AB}=15.9\,KN\,(C)$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{AC}+15.9\times\sin58.1=0$

$\Rightarrow F_{AC}=13.5\,(KN)\,(T)$

گره D:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -8.4+F_{CD}\cos58.1=0$

$\Rightarrow F_{CD}=15.9\,KN\,(T)$

$\uparrow\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{BD}+15.9\sin58.1=0 \Rightarrow F_{BD}=-13.5$

$F_{BD}=13.5\,(C)$

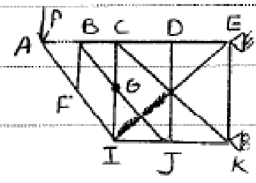
گره C:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -F_{BC}-8.4-15.9\cos58.1=0$

$F_{BC}=-16.8 \Rightarrow F_{BC}=16.8\,(C)$

(برای کنترل) $\Sigma F_y=0 \Rightarrow 13.5-15.9\sin58.1=0$

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟



تنها گره دو عضوی، گره A است که این گره دارای نیرو می‌باشد پس نیروی صفر ندارد. گره موازی هیچ یک از دو عضو متصل به گره نیست. اگر موازی بود عضو سوم عضو صفر نیرویی بود. بر این اساس دو عضو متصل به این گره عضو صفر نیرویی نیستند.

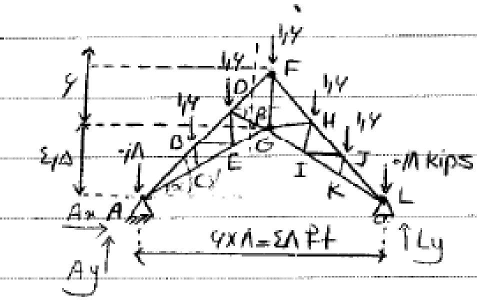
گره‌های سه عضوی با دو عضو موازی:

گره‌های F,D : BF, DH

گره B : BG   گره J : JH

گره G : JG   گره H : HE

مثال: در خرپای شکل زیر به روش مقطع نیروی عضوهای DF، DG و EG را محاسبه کنید؟



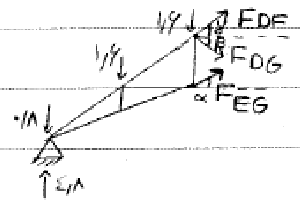
یک مقطع عمودی مطابق شکل عضوهای مورد نظر را قطع می‌کند ولی تعداد مجهولات نیز سه می‌باشد. یک سمت جسم را انتخاب می‌کنیم. در این سمت واکنش تکیه‌گاه A وجود دارد که ابتدا باید با استفاده از معادلات تعادل کل خرپا واکنش‌های این تکیه‌گاه را محاسبه کنیم.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\sum M_L = 0 \Rightarrow -A_y \times 48 + 0.8 \times 48 + 1.6 \times (40 + 32 + 24 + 16 + 8) = 0$

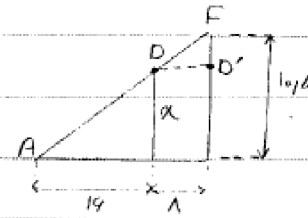
$A_y = 4.8 \text{ kips} \uparrow$

چون خرپا از لحاظ شکل و بارگذاری متقارن است واکنش عمودی دو تکیه‌گاه با هم برابر است و مقدار هر کدام نصف مجموع بارهای عمودی وارد بر خرپا است.



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4.5}{24}\right) = 10.6^\circ$

$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{10.5}{24}\right) = 23.6^\circ$



$$\text{تشابه}: \frac{16}{24} = \frac{x}{10.5} \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow D'F = 10.5 - 7 = 3.5$$

$$D'G = 6 - 3.5 = 2.5$$

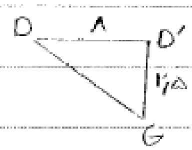
$$\tan\beta = \frac{D'G}{DD'} = \frac{2.5}{8} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{8}\right) = 17.35^\circ$$

F_{DG} محاسبه: $\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1.6\times 8 - 1.6\times 16 - F_{DG}\times AD\times \sin(\beta+\gamma) = 0$

$AD = \sqrt{16^2 + 7^2} = 17.46$ $\quad \beta + \gamma = 17.35 + 23.6 = 40.95^\circ \Rightarrow F_{DG} = -3.125$

$$\Rightarrow F_{DG} = 3.125\ (C)$$

F_{DF} محاسبه: $\circlearrowleft \Sigma M_G = 0 \Rightarrow -4.8\times 24 + 0.8\times 24 + 1.6\times 16 + 1.6\times 8 - F_{DF}\times DG\times \sin(\alpha+\beta) = 0$



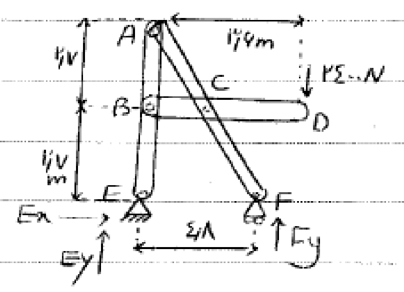
$\Rightarrow DG = \sqrt{8^2 + 2.5^2} = 8.38 \Rightarrow F_{DF} = -10.48$

$$\Rightarrow F_{DF} = 10.48\ (C)$$

F_{EG} محاسبه: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -10.48\cos\gamma - 3.125\cos\beta + F_{EG}\times\cos\alpha = 0$

$F_{EG} = 13.02\ \text{kips}\ (T)$

مثال: مولفه‌های نیروی وارد بر هر عضو از قاب نشان داده شده در شکل را تعیین کنید. P



مجموعه از سه قطعه ABE , ACF , BCD تشکیل شده است.

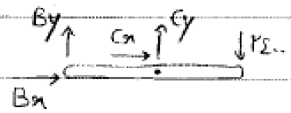
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow E_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow F_y\times 4.8 - 2400\times 3.6 = 0$

$F_y = 1800\ N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1800 - 2400 + E_y = 0 \quad E_y = 600\ N\uparrow$

عضو BCD :



$$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \quad -2400 \times 3.6 + C_y \times BC = 0$$

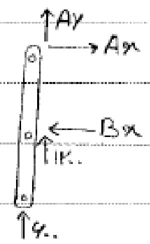
$$\Rightarrow C_y = 3600\ N \uparrow$$

تشابه : $\frac{BC}{4.8} = \frac{2.7}{5.4} \Rightarrow BC = 2.4$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + 3600 - 2400 = 0 \Rightarrow B_y = -1200 \Rightarrow B_y = 1200 \downarrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x + C_x = 0 \quad (1)$$

عضو ABE :



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 600 + 1200 + A_y = 0$$

$$A_y = -1800 \rightarrow A_y = 1800 \downarrow$$

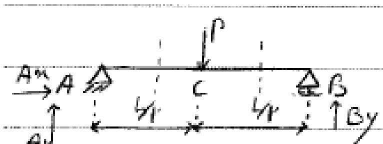
$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -B_x \times 2.7 = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$(1) \Rightarrow 0 + C_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

با توجه به اینکه تمام مجهولات محاسبه شده نیازی به رسم دیاگرام آزاد قطعه ACF نیست در صورت تمایل فقط جهت کنترل جواب‌ها این قطعه را نیز رسم کرده و معادلات تعادل آن را می‌نویسیم

مثال : نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در تیر با بارگذاری نشان داده شده را ترسیم کنید. P



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

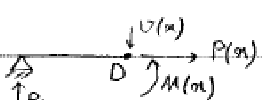
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_y \cdot L + \frac{PL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P/2 - P + B_y = 0 \Rightarrow B_y = P/2$$

روش مقطع : A مبدأ

به دو مقطع نیاز داریم

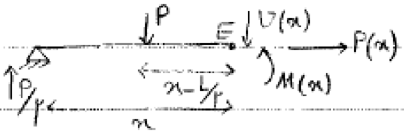
1) $0 < x < L/2 \Rightarrow$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V(x) + P/2 = 0 \Rightarrow V(x) = P/2$$

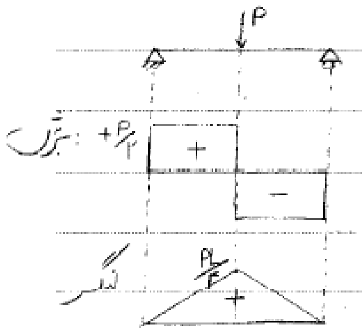
$$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \quad -\frac{Px}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{Px}{2}$$

۲) $L/2 < x \le L$

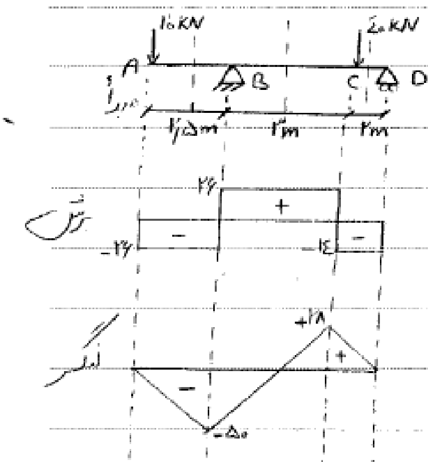


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -\frac{P}{2}$

$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow -\frac{Px}{2} + P(x - \frac{L}{2}) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2}(L - x)$



مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده را رسم کنید.



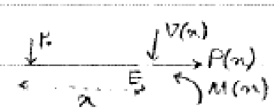
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$

$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow 20 \times 7.5 - B_y \times 5 + 40 \times 2 = 0$

$B_y = 46\,kN \uparrow \qquad \Sigma F_y = 0$

$-20 + 46 - 40 + D_y = 0 \Rightarrow D_y = 14\,kN \uparrow$

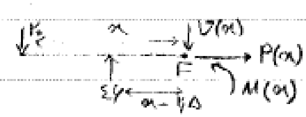
$0 \le x < 2.5 \Rightarrow$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -20$

$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow +20x + M(x) = 0 \quad M(x) = -20x$

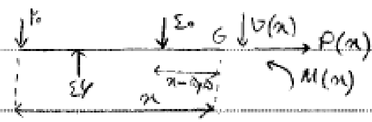
$2.5 \le x < 5.5 \Rightarrow$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 + 46 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 26$

$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow +20x - 46(x - 2.5) + M(x) = 0$

$M(x) = 26x - 115$

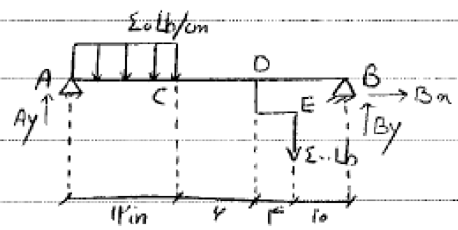
$5/5 \leq x \leq 7/5 \Rightarrow$ 

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -20 + 46 - 40 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -14$

$\sum M_G = 0 \Rightarrow 20x - 46(x - 2/5) + 40(x - 5/5) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -14x + 105$

معادله لنگر بصورت معادله خط است برای رسم یک خط کافیست که نقاط ابتدا و انتهای محدوده را جایگذاری کرده و لنگر در آنها را محاسبه کنیم

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر AB را ترسیم کنید؟



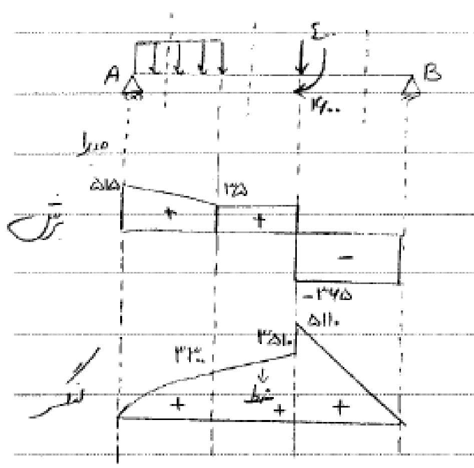
$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times 32 + (40 \times 12) \times 26 + 400 \times 10 = 0$

$\Rightarrow A_y = 515\,Lb \uparrow$

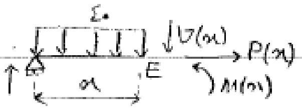
$\sum F_y = 0 \Rightarrow 515 - (40 \times 12) - 400 + B_y = 0$

$B_y = 365\,Lb$



نیروی وارد بر نقطه E را به همراه لنگری که ایجاد می‌کند به نقطه D منتقل می‌کنیم و قطعه DE را از تیر حذف می‌کنیم

به سه مقطع مطابق شکل نیاز داریم

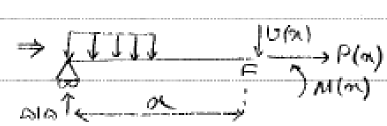
$0 \leq x \leq 12$ 

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40x - V(x) = 0$

$V(x) = 515 - 40(x)$

$\sum M_E = 0 \Rightarrow -515x + (40x)\,x/2 + M(x) = 0$

$M(x) = -20x^2 + 515x$

$12 < x < 18 \Rightarrow$ 

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40\times 12 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 35\ lb$

$\checkmark\ \Sigma M_F = 0 \Rightarrow -515x + (40\times 12)\times(x-6) + M(x) = 0 \qquad M(x) = 35x + 2880$

$18 \leq x \leq 32$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40\times 12 - 400 - V(x) = 0$

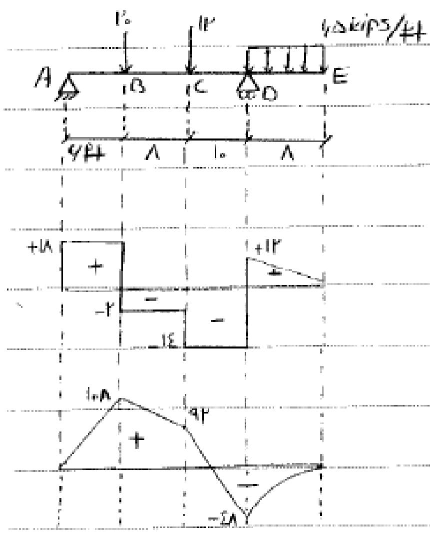
$V(x) = -365$

$\checkmark\ \Sigma M_G = 0 \Rightarrow -515x + (40\times 12)(x-6) + 400(x-18) - 1600 + M(x) = 0$

$\Rightarrow M(x) = 11480 - 365x$

در شکل اول منحنی گشتاور سهمی است چون ضریب x^2 منفی است تقعر منحنی رو به پایین است

مثال (۷-۴): نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر با بارگذاری نشان داده شده ترسیم کنید.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\checkmark\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(1.5\times 8)\times 28 + D_y\times 24 - 12\times 14 - 10\times 6 = 0$

$\Rightarrow D_y = 24\ kips$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 10 - 12 + 24 - 1.5\times 8 = 0$

$A_y = 18\ kips$

$V_E = 12 - 8\times 1.5 = 0$ روش سریع

$M_B = 18\times 6 = 108$

$M_C = 108 - 2\times 8 = 92$

$M_D = 92 - 14\times 10 = -48$

$M_E = -48 + \frac{12\times 8}{2} = 0\ \checkmark$

در مورد نمودارهای ترسیم شده نکات زیر قابل توجه است:

۱) ابتدا و انتهای نمودارها باید صفر شود

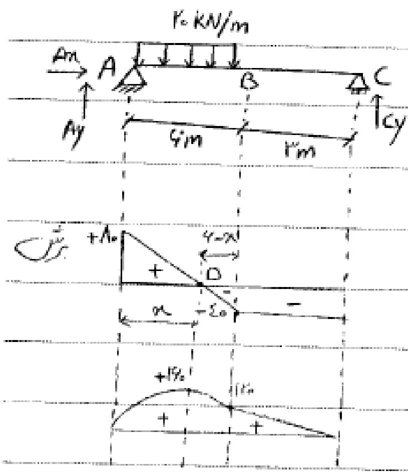
۲) در محل هایی که به تیر بار وارد شده است نمودار برشی خط مستقیم و نمودار گشتاور خط مورب

۳) در محل جاهای اعمال بارهای متمرکز در نمودار برش جهش به میزان بار در نمودار لنگر شکستگی ایجاد شده است

۴) در محل بار گسترده نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است چون بار گسترده رو به پایین است منحنی برش نزولی و منحنی لنگر دارای جهت تقعر رو به پایین است

۵) برای رسم نمودار لنگر از سطح زیر نمودار برش استفاده شده است

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده را رسم نمایید؟



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times 9 + (20 \times 6) \times 6 = 0 \Rightarrow A_y = 80\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 80 - 20 \times 6 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = +40$

روش سریع:

$V_B = 80 - 20 \times 6 = -40$

تشابه: $\frac{x}{6-x} = \frac{80}{40} \Rightarrow x = 4m$

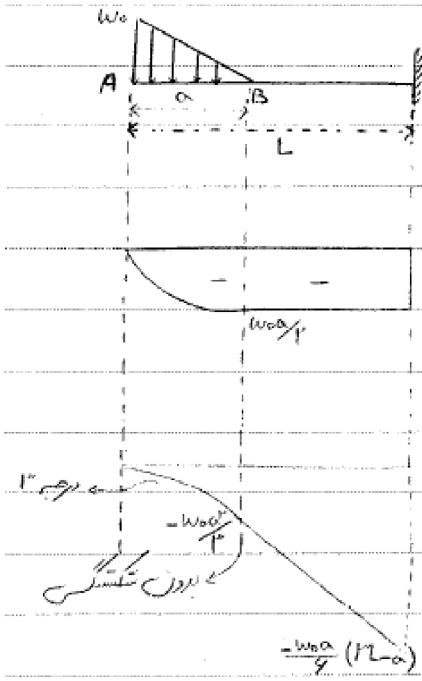
نقطه D که برش صفر است نقطه اکسترمم نمودار لنگر است

$M_D = \frac{80 \times 4}{2} = 160 \qquad M_B = 160 - \frac{40 \times 2}{2} = 120$

$M_C = 120 - 40 \times 3 = 0$ ✓

نکته: چون بار گسترده رو به پایین است جهت منحنی لنگر نیز رو به پایین است در نقطه B با توجه به اینکه بار متمرکزی اعمال نشده است باید شیب خط از جهت راست نقطه B با شیب منحنی از سمت چپ نقطه B در نمودار لنگر یکسان باشد (شکستگی نداشته باشد)

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر شکل زیر را مشخص کنید؟



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

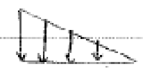
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{-w_0 a}{2} + C_y = 0$

$\Rightarrow C_y = \frac{w_0 a}{2}$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow +\left(\frac{w_0 a}{2}\right)\times\left(L - a/3\right) - M_C = 0$

$\Rightarrow M_C = \frac{w_0 a}{6}(3L - a)$

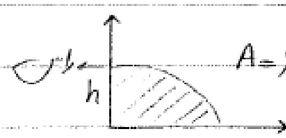
چون بار وارد بر تیر گسترده مثلثی است نمودار برش بصورت سهمی و نمودار لنگر درجه ۳ است. چون شدت بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر رو به پایین است



$\Rightarrow$ خم منحنی برش رو به بالا $\Leftarrow$ صعودی

بار گسترده از مقدار w_0 در نقطه A به صفر در نقطه B می رسد پس نمودار بار حالت نزولی دارد و مشتق بار که مشتق دوم برش است مثبت است بنابراین در نتیجه خم منحنی برش رو به بالا است

$V_B = -w_0 a/2$



$A = \frac{1}{3}ah$ $\quad M_B = -\frac{1}{3}\frac{w_0 a}{2}\times a = \frac{-w_0 a^2}{3}$

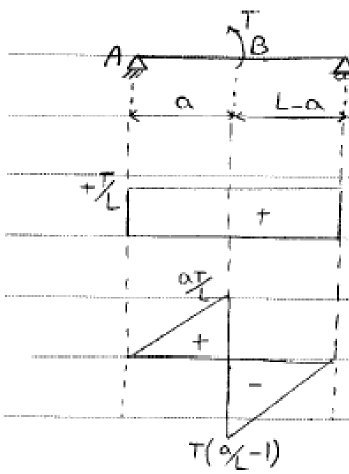
می توان بجای سطح زیر نمودار مستقیماً از تیر از سمت چپ یا راست نسبت به نقطه B لنگرها را محاسبه و با هم جمع کرد در این حالت باید توجه داشت که لنگر ساعتگرد مثبت فرض می شود

$M_B = -\left(\frac{w_0 a}{2}\right)\times \frac{1}{3}a = \frac{-w_0 a^2}{3}$

$M_C = \frac{-w_0 a^2}{3} - \frac{w_0 a}{2}(L-a) = \frac{-w_0 a}{6}(3L - a)$

نکته: در نقطه C که لنگر متمرکز وجود دارد یک جهش در نمودار ایجاد می شود چون از چپ به راست نمودار را ترسیم کرده ایم لنگر ساعتگرد مثبت فرض می شود در نقطه B با توجه به عدم وجود بار متمرکز نباید پس در نمودار شکستگی به وجود آید

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را رسم کنید؟



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times L + T = 0 \Rightarrow A_y = \frac{T}{L}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{T}{L} + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -\frac{T}{L} \downarrow$$

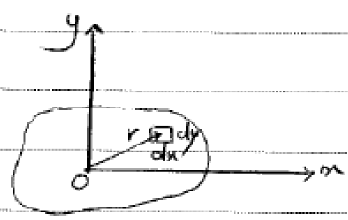
$$M_B = \frac{T}{L} \times a$$

$$M_C = T\left(\frac{a}{L} - 1\right) + \frac{T}{L} \times (L - a) = 0$$

$$\frac{aT}{L} - T = T\left(\frac{a}{L} - 1\right)$$

لنگر متمرکز نقطه B تاثیری بر نمودار برشی ندارد اما در نمودار لنگر یک جهش ایجاد می کند با توجه به اینکه این لنگر پاد ساعتگرد است و نمودار را از چپ به راست ترسیم می کنیم این جهش منفی است

ممان دوم اینرسی:



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$

$$J_0 = I_x + I_y$$

J_0: گشتاور قطبی نسبت به نقطه O

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

I_x, I_y: ممان های دوم اینرسی نسبت به دو محور x و y

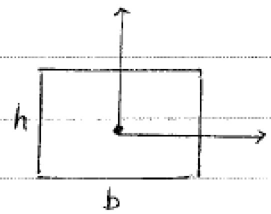
$$r_0^2 = r_x^2 + r_y^2 \qquad J_0 = \int r^2 dA$$

r_x, r_y: شعاع های چرخش یا ژیراسیون نسبت به محورهای x و y

r_0: شعاع چرخش قطبی نسبت به مبدا مختصات

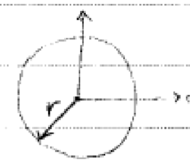
$$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

ممان‌های اینرسی نسبت به چند شکل خاص:



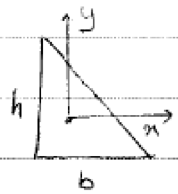
$I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{b^3h}{12}$, $r_x = \frac{h}{2\sqrt{3}}$, $r_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$

$J_0 = \frac{bh}{12}(b^2+h^2)$ $r_0 = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2\sqrt{3}}$, $I_{xy} = 0$



$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $J_0 = \frac{\pi r^4}{2}$ $r_x = r_y = r/2$

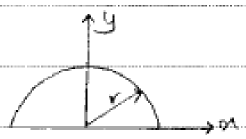
$r_0 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ $I_{xy} = 0$



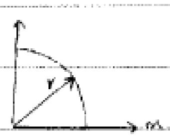
$I_x = \frac{bh^3}{36}$, $I_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_0 = \frac{bh}{36}(b^2+h^2)$

$r_x = \frac{h}{3\sqrt{2}}$ $r_y = \frac{b}{3\sqrt{2}}$, $r_0 = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{3\sqrt{2}}$

اگر یکی از دو محور x و y محور تقارن شکل باشد I_{xy} (حاصلضرب سطح) صفر است



$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $J_0 = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_{xy} = 0$



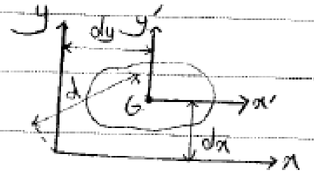
$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$, $J_0 = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_{xy} \neq 0$

قضیه محورهای موازی:

اگر محاسبه ممان اینرسی حول محوری غیر گذرنده از مرکز سطح مورد نظر باشد به شکل زیر عمل می‌کنیم:

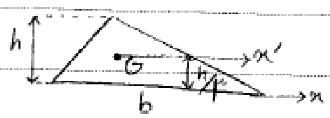
ابتدا محور دیگری به موازات محور اول از مرکز سطح عبور می‌دهیم و ممان اینرسی

حول یک محور جدید را محاسبه می کنیم اگر به مقدار محاسبه شده حاصلضرب مساحت مقطع در توان دوم فاصله دو محور اضافه شود ممان اینرسی حول محور اول بدست می آید



$$I_x = I_{x'} + A.d_x^2$$
$$I_y = I_{y'} + A.d_y^2$$
$$J_o = J_G + A.d^2$$
$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

مثال: محاسبه ممان دوم اینرسی مثلث نسبت به قاعده آن؟



$I_{x'} = \frac{bh^3}{36}$, $A = \frac{bh}{2}$, $d = h/3$

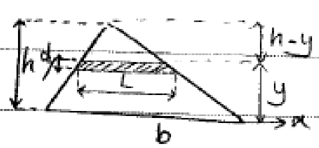
$$I_x = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

ممان اینرسی اشکال مرکب:

در اشکال مرکب آن ها را به چند شکل ساده تقسیم می کنیم و ممان اینرسی اشکال ساده را حول محور مورد نظر بدست می آوریم و با هم جمع جبری می کنیم اگر محور مورد نظر از مرکز سطح اشکال ساده عبور نکند باید از قضیه محورهای موازی نیز کمک بگیریم

$$I = \sum I_i$$

مثال: گشتاور دوم اینرسی یک مثلث حول قاعده اش را با روش انتگرال گیری محاسبه کنید؟



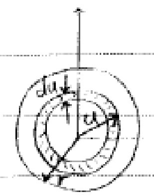
تشابه: $\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow L = b \times \frac{h-y}{h}$

$$dA = L.dy = b \times \frac{h-y}{h} dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \left(b \times \frac{h-y}{h} dy\right) = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y)\, dy$$

$$=\frac{b}{h}\int_0^h (y^2h-y^3)\,dy=\frac{b}{h}\left[\frac{y^3h}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^h=\frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{4}\right]=\frac{bh^4}{12h}=\frac{bh^3}{12}$$

مثال: گشتاور لختی قطبی یک دایره را نسبت به مرکز آن با روش انتگرال گیری بدست آورید.



$$J_0=\int r^2\,dA$$

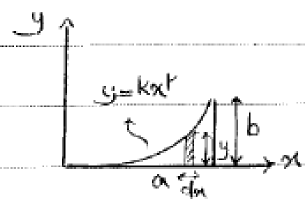
$$I_x=\int y^2\,dA$$

$$dA=2\pi u\,du$$

$$J_0=\int_0^r u^2(2\pi u\,du)=\int_0^r 2\pi u^3\,du=2\pi\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^r$$

$$=\frac{2\pi r^4}{4}=\frac{\pi r^4}{2}$$

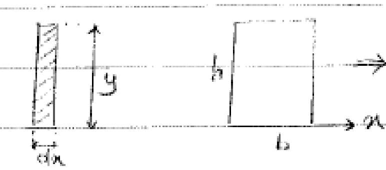
مثال: مطلوبست محاسبه گشتاور دوم اینرسی شکل زیر حول محور x و y و محاسبه شعاع های ژیراسیون حول این دو محور.



$$y=b\ ,\ x=a \Rightarrow b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

$$y=\frac{b}{a^2}x^2$$

$I_x=\int dI_x$ می توانیم برای المان انتخاب شده از ممان دوم اینرسی مستطیل استفاده کرده و آنرا انتگرال گیری کنیم.



$$\rightarrow I_x=\frac{bh^3}{3} \Rightarrow dI_x=\frac{dx\times y^3}{3}$$

$$I_x=\int_0^a \frac{y^3}{3}dx=\int_0^a\frac{\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3dx}{3}$$

$$=\int_0^a\frac{b^3}{3a^6}x^6\,dx=\frac{b^3}{3a^6}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a=\frac{b^3a}{21}$$

در این حالت چون برای المان مقدار متغیر بود استفاده از روش مسائل قبل ساده نبود

$$I_y=\int x^2 dA$$

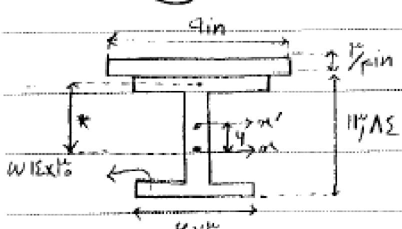
در اینجا چون عرض المان انتخاب شده مقداری ثابت است و برای نقاط مختلف المان تغییر نمی‌کند نیازی به استفاده از روش قبل نیست و از روش عادی استفاده می‌کنیم

$$I_y=\int x^2\times(y\,dx)=\int x^2\frac{b}{a^2}x^2dx=\int_0^a\frac{b}{a^2}x^4dx$$

$$=\frac{b}{a^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a=\frac{b}{a^2}\times\frac{a^5}{5}=\frac{ba^3}{5}$$

$$r_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}=\sqrt{\frac{b^3a/21}{ab/3}}=\frac{b}{\sqrt7}\qquad r_y=\sqrt{\frac{\frac{ba^3}{5}}{ab/3}}=a\times\sqrt{\frac{3}{5}}$$

مثال: ممان دوم اینرسی و شعاع ژیراسیون مقطع نشان داده شده در شکل زیر را نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح آن بدست آورید؟



ابتدا محاسبه محل مرکز سطح شکل مرکب: وسط ارتفاع مقطع I شکل را مبنا در نظر گرفتیم و فاصله مرکز سطح تا این محور مبنا را از روابط محاسبه مرکز سطح اشکال مرکب محاسبه می‌کنیم

$$\bar y=\frac{\sum A_iy_i}{\sum A_i}\qquad W14\times30\begin{cases}A=8.85\ in^2\\ I_x=291\ in^4\end{cases}$$

$$*=\frac{13.84}{2}+\frac{3/4}{2}=7.295$$

$$\bar y=\frac{8.85\times0+(9\times3/4)\times7.295}{8.85+9\times3/4}=3.156\ in$$

$$I_{x'}=\sum I_{x'i}=I_{x'1}+I_{x'2}$$

ورق $I_{x'1}=\frac{9\times(3/4)^3}{12}+(9\times3/4)\times(7.295-3.156)^2=116\ in^4$

$$I_{x'2}=291+8.85\times3.156^2=379.1\ in^4$$

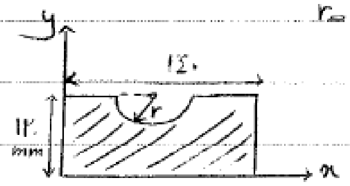
$$\Rightarrow I_{x'}=495.1\ in^4$$

$$r_{x'}=\sqrt{\frac{I_{x'}}{A}}\Rightarrow\quad A=8.85+9\times3/4=15.6\quad r_{x'}=\sqrt{\frac{495.1}{15.6}}=5.63\ in$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را نسبت به محور x محاسبه کنید؟

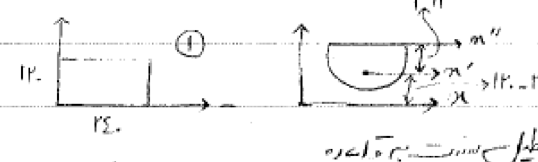
شکل را بصورت یک مستطیل که از آن یک نیم دایره کم شده در نظر می‌گیریم

$r = 90\,mm$



$$\frac{4r}{3\pi} = 38.2$$

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2}$$



$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3} = \frac{240 \times 120^3}{3} = 138.2 \times 10^6\ mm^4$$

مستطیل نسبت به قاعده

چون محور x از مرکز سطح نیم دایره نمی‌گذرد باید از قضیه محورهای موازی استفاده کنیم در اینجا محور x' را از مرکز نیم دایره عبور می‌دهیم (اما ممان اینرسی نیم دایره حول این محور را نداریم) و ممان اینرسی نیم دایره حول محور گذرنده از مرکز نیم دایره را داریم که ابتدا باید با کمک آن در قضیه محورهای موازی $I_{x'}$ را بدست آوریم

$$I_{x''} = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow \frac{\pi \times 90^4}{8} = I_{x'} + \left(\frac{\pi \times 90^2}{2}\right) \times 38.2^2$$

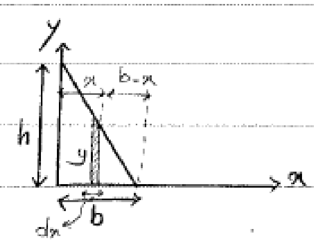
$$\Rightarrow I_{x'} = 7.2 \times 10^6\ mm^4$$

حال دوباره از قضیه محورهای موازی جهت محاسبه ممان اینرسی نیم دایره حول محور x کمک می‌گیریم

$$I_{x_2} = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow I_{x_2} = 7.2 \times 10^6 + \left(\frac{\pi \times 90^2}{2}\right) \times 81.8^2 = 92.3 \times 10^6\ mm^4$$

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2} = 138.2 \times 10^6 - 92.3 \times 10^6 = 45.9 \times 10^6\ mm^4$$

مثال: برای مثلث شکل زیر مطلوبست محاسبه حاصلضرب سطح نسبت به محورهای x و y برای مثلث شکل زیر؟

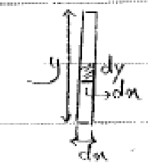


$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

تشابه $\Rightarrow \dfrac{y}{h} = \dfrac{b-x}{b} \Rightarrow y = \dfrac{b-x}{b} h$

درحالت انتخاب شده x ثابت و y متغیر است. پس ابتدا باید حول این المان باریک انتگرال گیری مقدار حاصلضرب سطح را محاسبه کرده و سپس دوباره آن را انتگرال گیری شود

$$I_{xy} = \int xy\,dA = \int dI_{xy} \qquad xy\,dA = dI_{xy}$$



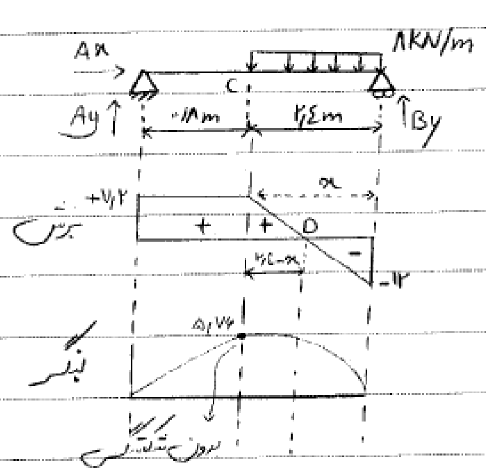
$$dI_{xy} = \int xy\,dA = \int_0^y xy\,dx.dy$$

$$= x\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y = \frac{xy^2}{2}dx$$

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int_0^b \frac{xy^2}{2}dx = \int_0^b \frac{x}{2}\times\left(\frac{b-x}{b}\times h\right)^2 dx = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b (b^2x - 2bx^2 + x^3)\,dx$$

$$= \frac{h^2}{2b^2}\left[\frac{b^2x^2}{2} - \frac{2bx^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^b = \frac{h^2}{2b^2}\left(\frac{b^4}{2} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{4}\right) = \frac{h^2}{2b^2}\times\frac{b^4}{12} = \frac{h^2b^2}{24}$$

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام برش و خمش برای تیر با بارگذاری نشان داده شده؟



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y\times 3.2 + 8\times 2.4\times 1.2 = 0$$

$$A_y = 7.2\,KN\uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 7.2 - 8\times 2.4 + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 12\,KN\uparrow$$

$$V_B = 7.2 - 8\times 2.4 = -12$$

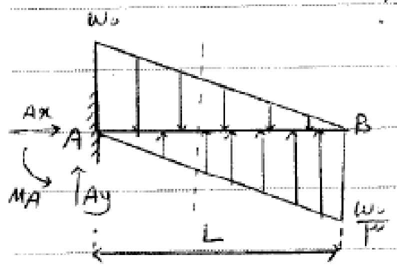
تشابه: $\frac{x}{2.4-x} = \frac{12}{7.2} \Rightarrow x = 1.5m$

$$M_C = 7.2\times 0.8 = 5.76$$

$$M_D = 5.76 + 7.2\times 0.9 = 9$$

$$M_B = 9 - 12\times 1.5 = 0$$

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را ترسیم کنید.



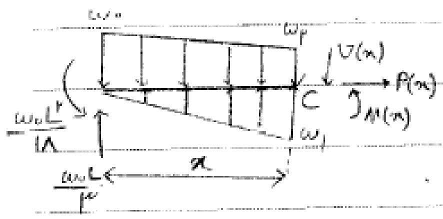
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{w_0 L}{2} + \frac{w_0}{3} \times \frac{L}{2} = 0$$

$$A_y = \frac{w_0 L}{3}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - \left(\frac{w_0 L}{2}\right)\frac{L}{3} + \left(\frac{w_0}{3} \times \frac{L}{2}\right) \times \frac{2L}{3} = 0$$

$$M_A = \frac{w_0 L^2}{18}$$



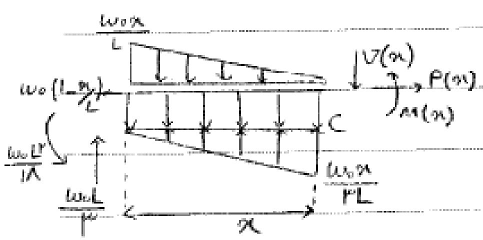
یک مقطع برای شکل C داریم

مقادیر w_1 و w_2 باید با توجه به تشابه دو مثلث بزرگ

مثلث پایین و بالا محاسبه شود

مثلث پایین: $\frac{w_1}{\frac{w_0}{3}} = \frac{x}{L} \Rightarrow w_1 = \frac{w_0 x}{3L}$

مثلث بالا: $\frac{w_2}{w_0} = \frac{L - x}{L} \rightarrow L w_2 = L w_0 - w_0 x \Rightarrow w_2 = \frac{L w_0 - w_0 x}{L} = w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$



ذوزنقه بالا را به یک مستطیل و مثلث تجزیه می‌کنیم

$$\Rightarrow w_0 - w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) = w_0 - w_0 + \frac{w_0 x}{L} = \frac{w_0 x}{L}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2} - w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)x + \frac{w_0 x}{3L} \times \frac{x}{2} - V(x)$$

$$= \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 x^2}{2L} - w_0 x + \frac{w_0 x^2}{L} + \frac{w_0 x^2}{6L} - V(x)$$

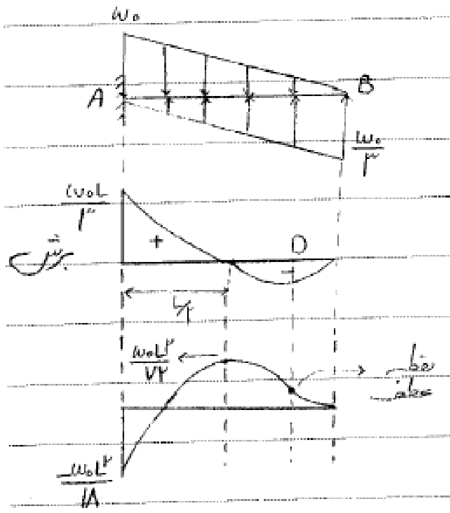
$$= \frac{w_0 L}{3} - w_0 x + \frac{2 w_0 x^2}{3L} - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{2 w_0 x^2}{3L} - w_0 x + \frac{w_0 L}{3}.$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \frac{w_0 L^2}{18} - \frac{w_0 L x}{3} + \left[\frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2}\right] \times \frac{2}{3}x + \left[w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)x\right]\frac{x}{2} -$$

$$\left[\frac{w_0 x}{3L} \times \frac{x}{2}\right] \times \frac{x}{3} + M(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w_0 L^2}{18} - \frac{w_0 L x}{3} + \frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 x^3}{L}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{18}\right] + M(x) = 0$$

$$M(x) = \frac{2 w_0 x^3}{9L} - \frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 L x}{3} - \frac{w_0 L^2}{18}$$



با توجه به معادله به دست آمده برای برش، نمودار برش یک سهمی است که چون ضریب x^2 مثبت است، تقعر آن رو به بالا می‌باشد. برای رسم این سهمی مقدار برش در ابتدا و انتها و ترجیحاً نقطه‌ای که برش در آن صفر می‌شود را بدست می‌آوریم

$$V(0) = \frac{w_0 L}{3} \quad و \quad V(L) = 0$$

$$V(x) = 0 \quad \left(V(x) \times \frac{3L}{2w_0}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{3L}{2}x + \frac{L^2}{2} = 0$$

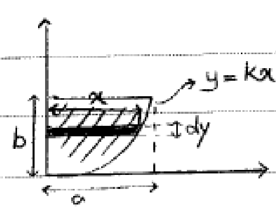
$$\Delta = \left(\frac{3L}{2}\right)^2 - \frac{4L^2}{2} \times 1 = \frac{9L^2}{4} - \frac{4L^2}{2} = \frac{L^2}{4}$$

$$x = \frac{3L/2 \pm \sqrt{L^2/4}}{2} \begin{cases} x = L \\ x = L/2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow V(L/2) = 0$$

دیاگرام خمش از درجه ۳ می‌باشد. از ابتدا تا وسط تیر که برش مثبت است، لنگر صعودی است و از وسط تا انتها نزولی.
از ابتدا تا نقطه D که برش نزولی است، خم منحنی لنگر رو به پایین و از نقطه D تا انتهای تیر که برش صعودی است، خم منحنی لنگر رو به بالا می‌باشد. نقطه D نقطه عطف منحنی است

$$M(0) = -\frac{w_0 L^2}{18}, \quad M(L/2) = \frac{w_0 L^2}{72} \quad M(L) = 0$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را با انتگرال گیری نسبت به محورهای x و y بدست آورید



$$x = a, \; y = b \Rightarrow b = ka^3$$

$$\Rightarrow k = b/a^3 \Rightarrow y = \frac{b}{a^3} x^3$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

برای تمام نقاط المان y مقدار ثابت است

$$dA = dy \times x \quad y = \frac{b}{a^3}x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{a^3 y}{b} \to x = a\sqrt[3]{y/b}$$

چون بر حسب dy انتگرال گیری انجام می‌شود باید تمام متغیرها نیز بر حسب y باشد

$$dA = a\sqrt[3]{y/b} \times dy \Rightarrow I_x = \int_0^b y^2 \times a\sqrt[3]{y/b}\, dy = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \int_0^b y^{7/3}\, dy$$

چون انتگرال بر حسب y است حدود انتگرال نیز بر حسب y تعیین می‌گردد

$$\Rightarrow I_x = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \left[\frac{y^{10/3}}{10/3} \right]_0^b = \frac{3a}{10\sqrt[3]{b}} \times b^{10/3} = \frac{3}{10} ab^3$$

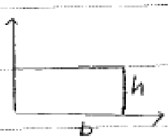
برای Iy می‌توان با همین المان انتگرال گیری کرد و یا اینکه المان عمودی را استفاده کرد. در اینجا از همین المان افقی استفاده می‌کنیم

در اینجا مقدار x در نقاط مختلف المان متغیر است پس

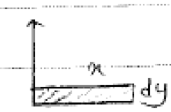
$$I_y = \int x^2 dA$$

بجای این روش ممان اینرسی المان را با توجه به ممان اینرسی مستطیل حساب و از آن انتگرال گیری می‌کنیم

$$I_y = \int_0^b dI_y$$



$$\Rightarrow I_y = \frac{b^3 h}{3}$$



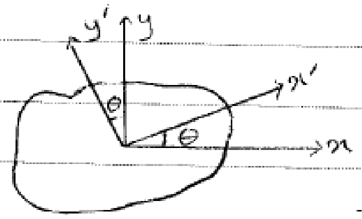
$$\Rightarrow dI_y = \frac{x^3 dy}{3}$$

چون انتگرال گیری بر حسب y انجام می‌شود باید x را نیز بر حسب y بنویسیم

$$\Rightarrow dI_y = \frac{(a\sqrt[3]{y/b})^3 dy}{3} = \frac{a^3 y}{3b} dy \qquad I_y = \int_0^b \frac{a^3 y}{3b} dy = \frac{a^3}{3b} \int_0^b y\, dy$$

$$= \frac{a^3}{3b} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^b = \frac{a^3 b^2}{6b} = \frac{a^3 b}{6}$$

محاسبه ممان اینرسی حول محورهای مورب

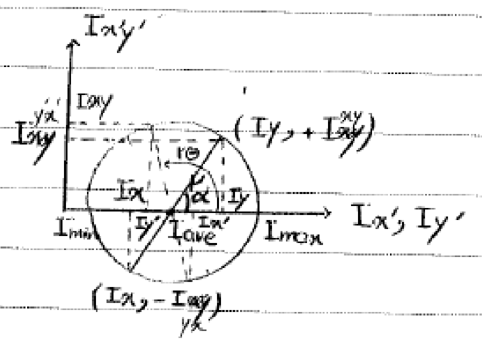


$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

روابط بالا را می‌توان به صورت یک دایره نشان داد نام دایره موهر ممان اینرسی نام دارد



$$\begin{cases} I_{max} = I_{ave} + R \\ I_{min} = I_{ave} - R \end{cases}$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

برای محاسبه ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات $x'y'$ قطر اولیه دایره را که ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات xy را مشخص می‌کند به اندازه 2θ می‌چرخانیم. جهت چرخش هم جهت با چرخشی است که محورهای x باید داشته باشند تا به محورهای $x'y'$ تبدیل شوند

ممان‌های اینرسی برای هر دستگاه مختصات با محورهای متعامد با یکی از قطرهای دایره موهر قابل نمایش است. در دایره موهر محور افقی نشان دهنده ممان‌های اینرسی حول دو محور اصلی و محور عمودی نشان دهنده ممان اینرسی حاصلضرب سطح متقاطع است

در حالتی که برای یک دستگاه مختصات حاصلضرب سطح مقطع صفر باشد، محورهای آن دستگاه مختصات را محورهای اصلی می‌نامند. در این حالت ممان اینرسی حول یکی از دو محور max و حول محور دیگر min می‌شود

α : زاویه محورهای اصلی با محورهای x و y

در محورهای اصلی : $I_{xy}=0$

$I_x, I_y = I_{max}, I_{min}$

نقاطی از دایره مور که منطبق بر محور افقی است نشان دهنده ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات اصلی است

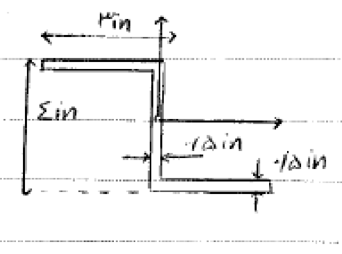
نکته: اگر قطر نشان دهنده ممان‌های اینرسی در دایره به صورت عمودی درآید، مقدار حاصلضرب سطح max و برابر شعاع دایره و ممان‌های اینرسی با هم برابر و مساوی مختصات مرکز دایره می‌شود

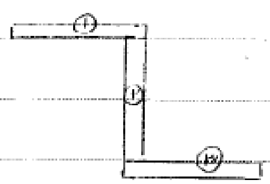
$(I_{xy})_{max} = R \qquad I_x = I_y = I_{ave}$

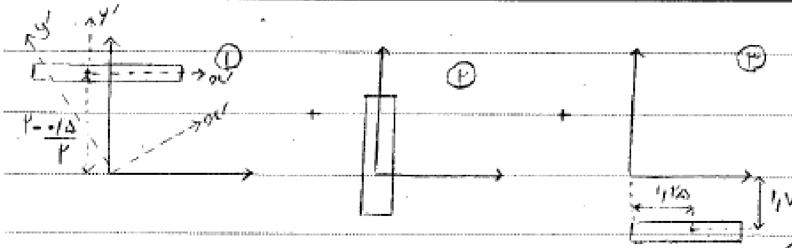
مثال: مقطعی در شکل نشان داده شده است. لنگرهای لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_x = 10.38\ in^4$ و $I_y = 4.97\ in^4$. مطلوب است تعیین: الف) جهت‌گیری محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) لنگرهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O؟

ابتدا مقدار I_{xy} را محاسبه می‌کنیم:

برای این منظور شکل را به ۳ مستطیل تقسیم می‌کنیم:







$I_{xy} = I_{x'y'} + A.\bar{x}\bar{y}$

محورهای x' و y' را از مرکز سطح شکل عبور می‌دهیم

چون برای هر ۳ شکل محورهای x' و y' گذرنده از مراکز سطح سه شکل

محورهای تقارن آن‌ها نیز هستند مقدار $I_{x'y'}$ برای هر سه شکل صفر است

$I_{xy_1} = 0 + (3\times0.5)\times(-1.25\times1.75) = -3.28\ in^4$

$I_{xy_2} = 0$

$I_{xy_3} = 0 + (3\times0.5)\times(1.25\times-1.75) = -3.28$

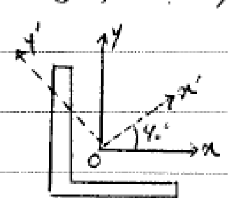
$I_{xy} = -3.28 + 0 - 3.28 = -6.56\ in^4$

$$\tan2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{-2\times6.56}{10.38-6.97} = 3.85 \Rightarrow \begin{cases}2\alpha = 75.4\\ 2\alpha = 255.4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 37.7\\ \alpha = 127.7\end{cases}$$

$$I_{max,min} = \frac{I_x+I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y-I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{10.38+6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38-6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}I_{max} = 15.45\\ I_{min} = 1.897\end{cases}\ in^4$$

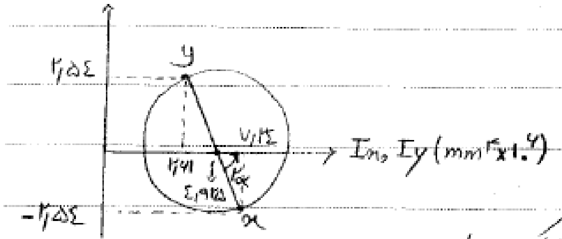
مثال: مقطعی مطابق شکل مفروض است. گشتاورها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از $I_x = 7.24\times10^6\ mm^4$ و $I_y = 2.91\times10^6\ mm^4$ و $I_{xy} = -2.54\times10^6$ با استفاده از دایره موهر مطلوبست تعیین: الف) محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) گشتاورهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O ج) گشتاورها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x' و y' که با محورهای x و y زاویه ۶۰° می‌سازند.



مختصات مرکز دایره:

$$I_{ave}=\frac{I_x+I_y}{2}=10^6\times\frac{7.24+2.61}{2}=4.925\times10^6\ mm^4$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}=10^6\sqrt{\left(\frac{7.24-2.61}{2}\right)^2+(-2.54)^2}=3.437\times10^6\ mm^4$$



$$x(I_x, I_{xy})=x(7.24\ ,\ -2.54)\times10^6$$
$$y(I_y, -I_{xy})=y(2.61\ ,\ 2.54)\times10^6$$

روی دایره دو نقطه با مختصات زیر را مشخص کرده و با اتصال آنها به هم قطر متناظر در دایره را رسم می‌کنیم

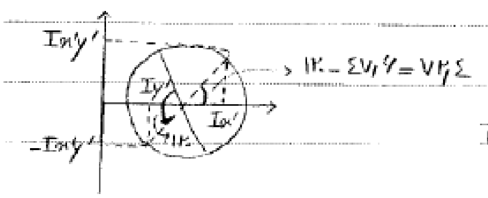
$$\tan2\alpha=\frac{2.54}{(7.24-2.61)/2}=1.097$$

$$\Rightarrow 2\alpha=47.6\ \Rightarrow\ \alpha=23.8^\circ$$

$$I_{max}=I_{ave}+R=(4.925+3.437)\times10^6=8.36\times10^6\ mm^4$$

$$I_{min}=I_{ave}-R=(4.925-3.437)\times10^6=1.49\times10^6\ mm^4$$

برای محاسبه ممان‌های اینرسی حول محورهای x' و y' قطر فعلی دایره را که مشخص کننده ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات xy است به اندازه 120° و پادساعتگرد می‌چرخانیم



$$I_{x'}=I_{ave}+R\cos72.4=(4.925+3.437\cos72.4)\times10^6$$
$$=5.96\times10^6\ mm^4$$

$$I_{y'}=I_{ave}-R\cos72.4=(4.925-3.437\cos72.4)\times10^6$$
$$=3.89\times10^6\ mm^4$$

$$I_{xy'}=R\sin72.4=3.437\times10^6\sin72.4=3.28\times10^6\ mm^4$$