بردارها:

- انواع کمیت های اسکالر و کمیت های برداری:

کمیت های اسکالر:

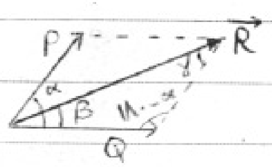
کمیت هایی هستند که تنها دارای اندازه هستند مانند: جرم، مسافت طی شده و زمان

کمیت های برداری:

کمیت هایی هستند که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز می باشند مانند: نیرو، شتاب، گشتاور و سرعت

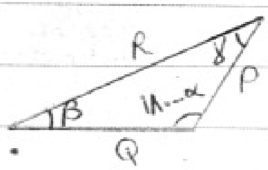
روش های جمع برداری:

۱) روش متوازی الاضلاع



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 + 2|P||Q|\cos\alpha$$



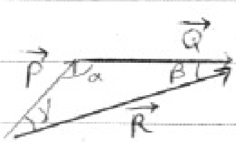
$$\frac{|R|}{\sin(180-\alpha)} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \text{—} \\ \gamma = \text{—} \end{cases}$$

با محاسبه یکی از دو زاویه β یا γ می توان زاویه بردار نتیجه با یکی از دو راستای اصلی افقی یا عمودی را بدست آورد

۲) روش مثلث



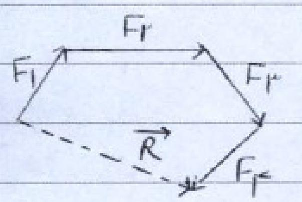
$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2|P||Q|\cos\alpha$$

$$\frac{|R|}{\sin\beta} = \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

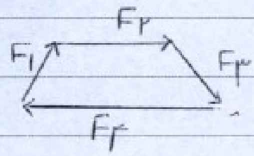
۳) روش ترسیمی

در این روش بردارها بطور متوالی ترسیم می‌شوند به گونه‌ای که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق گردد. برداری که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند بردار برآیند می‌باشد. در این رسم لازم است که ترسیم بردارها به صورت دقیق و با مقیاس مناسب انجام گیرد



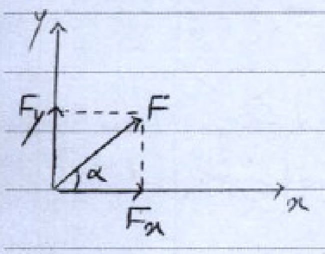
$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

نکته: اگر پس از ترسیم ابتدای اولین بردار و انتهای آخرین بردار بر هم منطبق شوند برآیند بردارها صفر می‌باشد



۴) روش جمع مؤلفه‌های برداری:

در این روش هر بردار را به مؤلفه‌های اصلی خود در راستای محورهای اصلی تجزیه می‌کنیم و سپس این مؤلفه‌ها را در راستای هر یک از جهات اصلی با هم جمع جبری می‌کنیم. مقادیری که بدست می‌آید مؤلفه‌های برداری بردار برآیند در هر یک از راستاهای اصلی خواهد بود



$$\Rightarrow F_x = |F|\cos\alpha$$
$$F_y = |F|\sin\alpha$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

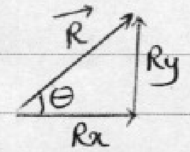
i و j بردارهای یکه در راستای هر یک از دو محور اصلی x و y هستند

بردار یکه: برداری است به بزرگی واحد و هم راستا و هم جهت با بردار اصلی

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n}$$

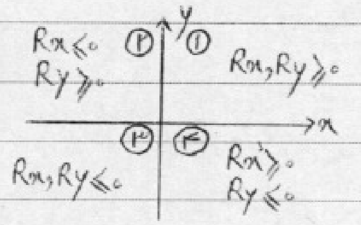
$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R_x i} + \vec{R_y j} \\ F_1 &= F_{1x} i + F_{1y} j \\ F_2 &= F_{2x} i + F_{2y} j \\ F_n &= F_{nx} i + F_{ny} j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum F_{iy} = F_{1y} + \dots + F_{ny} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

برحسب آنکه مقادیر R_x و R_y دارای چه علامتی باشند بردار نتیجه در یکی از چهار ناحیه دستگاه مختصات قرار می‌گیرد



بردارها در فضا:

در حالت سه بعدی بردارها علاوه بر دو بعد x و y دارای یک مؤلفه در راستای محور z نیز می‌باشند بردار یکه در راستای محور z با K نمایش داده می‌شود

$\vec{\lambda}$: بردار یکه بردار F است که دارای بزرگی (1) و هم موازات بردار F می‌باشد

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\vec{F}}{|F|} = \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \qquad \vec{\lambda} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$$

$$\lambda_x = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \dots$$

α : زاویه بردار F با محور x

β : 〃 〃 〃 y

γ : 〃 〃 〃 z

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 = 1$$

$$\vec{\lambda} = \underbrace{\cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k}_{\text{کسینوس های هادی بردار F}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\begin{cases} F_x = |F| \cdot \cos\alpha \\ F_y = |F| \cdot \cos\beta \\ F_z = |F| \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

نیروهایی که اندازه و دو نقطه از خط اثر آن معلوم است:

فرض کنید که بردار $\vec{F}$ با $|F|$ موجود است. این بردار از نقطه M به سمت نقطه N می باشد، مؤلفه های برداری این بردار به شکل زیر محاسبه می شود

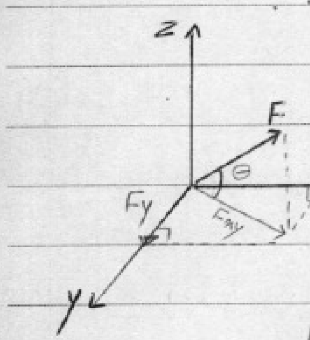
$$M(x_1, y_1, z_1)$$

$$N(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{MN} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{\vec{MN}}{|MN|}$$

مؤلفه های یک بردار فضایی بر روی یکی از صفحات اصلی:



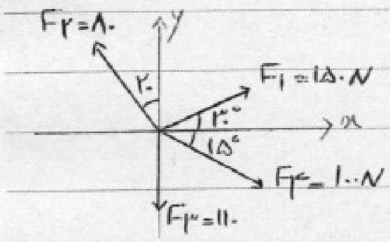
$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

فرض کنیم می خواهیم تصویر یا مؤلفه این بردار را در صفحه xy بدست آوریم از انتهای بردار F به موازات محور z یک عمود بر صفحه xy رسم می کنیم تا این صفحه را در یک نقطه قطع کند برداری که ابتدای بردار را به نقطه بدست آمده وصل می کند تصویر بردار خواهد بود

$$|F_{xy}| = |F| \cdot \cos\theta$$

$$|F_{xy}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow \vec{F_{xy}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند چهار نیروی که با شکل داده شده در شکل زیر با استفاده از روش جمع مؤلفه‌های برداری؟



$$F_{1x} = 150 \cdot \cos 30 = 129.9$$

$$F_{1y} = 150 \cdot \sin 30 = 75$$

$$F_{2x} = -80 \cdot \sin 20 = -27.4$$

$$F_{2y} = 80 \cdot \cos 20 = 75.2$$

$$F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{3y} = -110$$

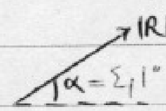
$$F_{4x} = 100 \cdot \cos 15 = 96.6$$

$$F_{4y} = -100 \cdot \sin 15 = -25.9$$

$$R_x = \Sigma F_x = 129.9 - 27.4 + 0 + 96.6 = 199.1$$

$$R_y = \Sigma F_y = 75 + 75.2 - 110 - 25.9 = 14.3$$

$$R = 199.1\vec{i} + 14.3\vec{j} \Rightarrow |R| = \sqrt{14.3^2 + 199.1^2} = 199.6$$



$$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{14.3}{199.1}\right) = 4.1^\circ$$

مثال: نیرویی به اندازه ۵۰۰N با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای ۶۰، ۴۵ و ۱۲۰° تشکیل می‌دهد مولفه‌های Fx، Fy، Fz این نیرو را تعیین کنید؟

$$|F| = 500$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \Rightarrow \vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\alpha = 60 \quad \beta = 45 \quad \gamma = 120 \qquad \vec{\lambda} = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$$

$$= \cos 60\, i + \cos 45\, j + \cos 120\, k$$

$$= 0.5\, i + 0.707\, j - 0.5\, k$$

Date : / /

$$\vec{F} = 500\,(0.5i + 0.707j - 0.5K) = \underbrace{250\,i}_{F_x} + \underbrace{354\,j}_{F_y} - \underbrace{250\,K}_{F_z}$$

مثال: اگر مؤلفه‌های بردار F به شرح زیر معلوم باشد مطلوبست محاسبه زوایای هادی؟

$$\vec{F} = 20i - 30j + 60K$$

$$|F| = \sqrt{20^2 + (-30)^2 + 60^2} = 70$$

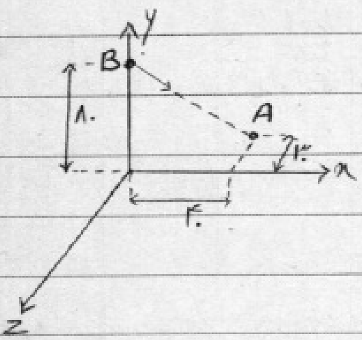
$$F_x = |F|\cdot\cos\alpha \Rightarrow 20 = 70\cdot\cos\alpha \quad \cos\alpha = 2/7 \quad \alpha = \mathrm{Arccos}(2/7) = 73.4$$

$$F_y = |F|\cdot\cos\beta \Rightarrow -30 = 70\cdot\cos\beta \Rightarrow \beta = \mathrm{Arccos}(-3/7) = 115.4 = -64.6$$

$$F_z = |F|\cdot\cos\gamma \Rightarrow 60 = 70\cdot\cos\gamma \Rightarrow \gamma = \mathrm{Arccos}(6/7) = 31^\circ$$

مثال: در شکل زیر مقدار نیرو N ۲۵۰۰ می‌باشد. بردار نیرو از نقطه B به سمت نقطه A می‌باشد مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های برداری و زوایای هادی؟ (۲-۷ ص ۳۰)

A در صفحه zx و B بر روی محور y



$$|F| = 2500\,N$$

$$A(40, 0, -30)\ ,\ B(0, 80, 0)$$

$$\vec{F} = |F|\cdot\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{BA}}{|BA|} = \frac{40i - 80j - 30K}{\sqrt{40^2 + 80^2 + 30^2}}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{40i - 80j - 30K}{94.3}$$

$$\vec{F} = \frac{2500}{94.3} \times (40i - 80j - 30K) = 1060i - 2120j - 795K$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|F|} = \frac{1060}{2500} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1060}{2500}\right) = 64.9$$

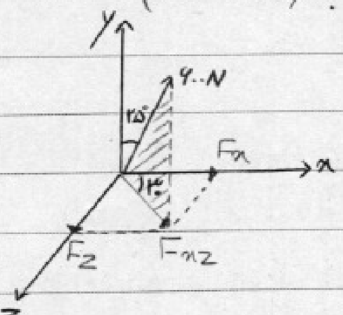
$$\cos\beta = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-2120}{2500} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{-2120}{2500}\right) = 148^\circ$$

Date : / /

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{|F|} = \frac{-795}{2500} \Rightarrow \alpha = 108.5^\circ$$

تمرین: در مثال قبل مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های بردار و زوایای بردار بر روی سه صفحه xy و xz و yz ؟

مثال: برای نیروی ۶۰۰ نیوتنی نشان داده شده در شکل مطلوبست محاسبه مؤلفه‌ها در راستای سه محور اصلی و زوایای هادی ؟ (۲-۷۱ ص ۳۴)



$$F_y = 600\cos 25^\circ = 543.8\ N$$

F_y: تصویر $600N$ روی محور y

زاویه نیرو با صفحه xz ← $90 - 25 = 65^\circ$

$$F_{xz} = 600\cos 65 = 253.6 \text{ یا } (F\sin 25^\circ)$$

$$F_x = F_{xz}\cos 30 = 253.6\cos 30 = 219.6$$

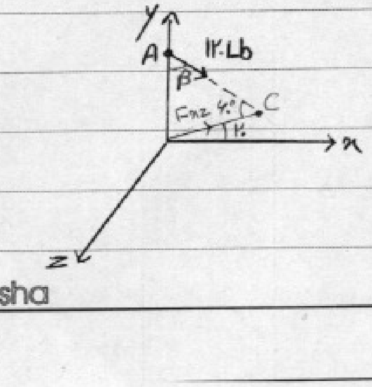
$$F_z = F_{xz}\sin 30 = 253.6\sin 30 = 126.8$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{219.6}{600} = 0.366 \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}(0.366) = 68.53$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{126.8}{600} = 0.211 \Rightarrow \gamma = 77.87^\circ$$

$$\beta = 25^\circ$$

مثال: راستای نیروی نشان داده شده در شکل زیر از نقطه C در صفحه xz عبور می‌کند مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های این نیرو و زوایای هادی ؟ (۲-۷۳ ص ۳۴)



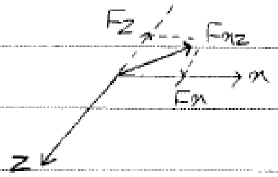
$$\beta = 90 - 60 = 30$$

$$F_y = -120\cos 30 = -103.9$$

$$F_{xz} = 120\sin 30 = 60\ Lb$$

$$F_x = 60\cos 20 = 56.4$$

$$F_z = -60\sin 20 = -20.5$$



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{54.6}{120} = 0.457$$

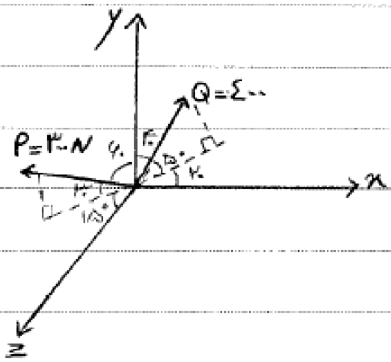
$$\alpha = \mathrm{Arccos}(0.457) = 61.96$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{-20.5}{120} = -0.117 \Rightarrow \gamma = 99.8$$

مثال: اندازه و جهت برآیند دو نیروی نشان داده شده در شکل را تعیین کنید. (۲-۹۲)

بردار 400 N با صفحه xz زاویه ۵۰ درجه می‌سازد

بردار 300 N با صفحه xz زاویه ۳۰ درجه می‌سازد



$$P = P_x i + P_y j + P_z K$$

$$P_y = 300 \cos 60 = 150$$

$$P_{xz} = 300 \cos 30 = 259.8$$

$$P_x = -259.8 \sin 15 = -67.24$$

$$P_z = 259.8 \cos 15 = 250.95\,N$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z K$$

$$Q_y = 400 \cos 40 = 306.4 \qquad Q_{xz} = 400 \cos 50 = 257.1$$

$$Q_x = 257.1 \cos 20 = 241.6 \qquad Q_z = -257.1 \sin 20 = -87.93$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-67.24 + 241.6)\vec{i} + (150 + 306.4)\vec{j} + (250.95 - 87.93)\vec{K}$$

$$\vec{R} = 174.36\,\vec{i} + 456.4\,\vec{j} + 163.02\,\vec{K}$$

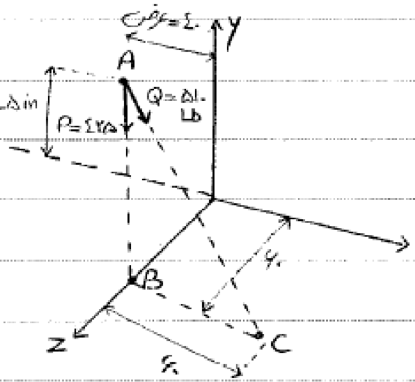
$$|R| = \sqrt{(174.36)^2 + (456.4)^2 + (163.02)^2} = 515\,N$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{174.36}{515}\right) = 70.21$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{456.4}{515}\right) = 27.6$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{163.02}{515}\right) = 71.54°$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه برآیند دو بردار نیروی اعمال شده به نقطه A ؟ (۲-۹۴)



A در صفحه xy

B,C در صفحه xz

$A(-40, 45, 0)$

$B(0, 0, 60)$

$C(60, 0, 60)$

$$\vec{P} = |P| . \lambda_P = |P| . \frac{\vec{AB}}{|AB|}$$

$$= 425 \times \frac{\vec{40i - 45j + 60k}}{\sqrt{40^2 + 45^2 + 60^2}}$$

$$= 425/85 \times (40i - 45j + 60k)$$

$$= 200i - 225j + 300k$$

$$\vec{Q} = |Q| . \lambda_Q = |Q| . \frac{\vec{AC}}{|AC|} = 510 \times \frac{100i - 45j + 60k}{\sqrt{100^2 + (45)^2 + 60^2}}$$

$$= \frac{510}{125} \times (100i - 45j + 60k) = 408i - 183/6j - 244/8k$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (200 + 408)i + (-225 - 183/6)j + (300 + 244/8)k$$

$$= 608i - 408/6j + 544/8k$$

تعادل ذره:

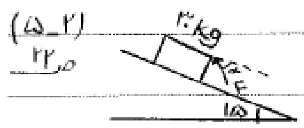
برای آنکه یک ذره دارای تعادل باشد باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد در مسائل تعادل ذره ابتدا دیاگرام آزاد ذره را رسم می کنیم، دیاگرام آزاد ذره شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر ذره است. سپس برآیند بردارهای نیروی وارده بر ذره را به گونه ای محاسبه می کنیم که برابر صفر شود برای این منظور می توان از روش های مختلف جمع بردارها کمک گرفت به طور مثال اگر از روش ترسیمی استفاده می کنیم بردارها را باید به صورت پیاپی به گونه ای رسم کنیم که انتهای آخرین بردار بر ابتدای اولین بردار منطبق شود. اگر

از روش جمع مؤلفه‌ها استفاده می‌کنیم باید از سه معادله تعادل زیر کمک بگیریم

$\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma F_z = 0$

مثال: مطلوبست تعیین اندازه و جهت کوچکترین نیروی F که بسته نشان داده شده در شکل را در حالت تعادل نگه دارد. P سطح شیب‌دار فاقد اصطکاک می‌باشد

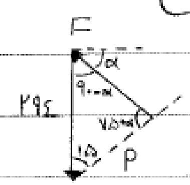
(۵-۲) ص ۲۲



بسته به عنوان یک ذره در نظر گرفته می‌شود

دیاگرام آزاد بسته را رسم می‌کنیم

برآیند سه نیرو باید صفر شود برای این منظور در اینجا با توجه به اینکه تنها سه بردار داریم از روش مثلث استفاده می‌کنیم



با توجه به نامشخص بودن راستای F از مثلث نیروها ضلع سوم مثلث که نشان دهنده نیروی F است بی نهایت شکل تعادل ترسیم است اما با توجه به اینکه کمترین مقدار نیروی F مورد نظر است این ضلع باید به گونه‌ای ترسیم شود که کمترین طول را داشته باشد. کمترین طول وقتی رخ می‌دهد که راستای F بر P عمود باشد

حالا از قانون سینوس‌ها کمک می‌گیریم

$75 + \alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

$90 - \alpha = 75^\circ$

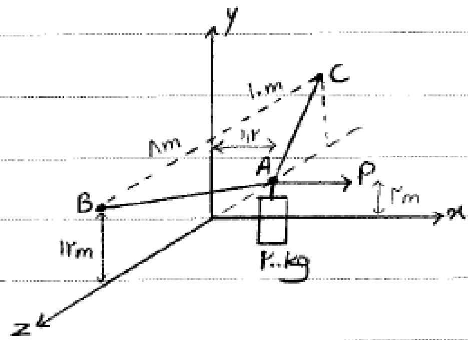
$$\frac{294}{\sin 90} = \frac{F}{\sin 15} \Rightarrow F = \frac{294 \sin 15}{1} = 76.1$$

مثال: استوانه‌ای 200kg از دو کابل AB و AC آویزان است. نیروی افقی P عمود بر صفحه yz در سه موازات محور x استوانه را نگه می‌دارد. مطلوبست اندازه نیروی P و کشش در هر کابل. (کابل‌ها در صفحه yz قرار ندارند) (۲-۹ ص ۳۵)

$A(1.2, 2, 0)$ — B و C در صفحه yz

$B(0, 12, 8)$ — A در صفحه xy

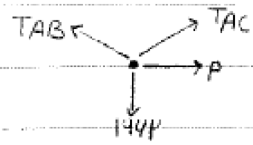
$C(0, 12, -10)$



$W = 200 \times 9.81 = 1962\,N$

$\vec{W} = -1962\,\vec{j}$

دیاگرام آزاد نقطه A را رسم می‌کنیم



$\Rightarrow \vec{P} = P\vec{i}$

$\vec{T}_{AC} = |T_{AC}| \cdot \lambda_{AC}$

$= |T_{AC}| \times \frac{\vec{AC}}{|AC|} = |T_{AC}| \times \frac{-1.2i + 10j - 10k}{\sqrt{1.2^2 + 10^2 + 10^2}}$

$= |T_{AC}| \times \frac{-1.2i + 10j - 10k}{14.191}$

$\Rightarrow \vec{T}_{AC} = |T_{AC}| \times (-0.08455i + 0.7046j - 0.7046k)$

$\vec{T}_{AB} = |T_{AB}| \times \frac{\vec{AB}}{|AB|} = |T_{AB}| \times \frac{-1.2i + 10j + 8k}{\sqrt{1.2^2 + 10^2 + 8^2}} = |T_{AB}| \times \frac{-1.2i + 10j + 8k}{12.862}$

$= |T_{AB}| \times (-0.0933i + 0.7775j + 0.622k)$

حال سه معادله تعادل را برای نقطه می‌نویسیم

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P - 0.08455\,T_{AC} - 0.0933\,T_{AB} = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -1962 + 0.7046\,T_{AC} + 0.7775\,T_{AB} = 0$ (2)

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -0.7046\,T_{AC} + 0.622\,T_{AB} = 0$ (3)

(3) $\Rightarrow T_{AB} = \frac{0.7046}{0.622} T_{AC} = 1.13\,T_{AC}$ (4)

(4),(2) $\Rightarrow -1962 + 0.7046\,T_{AC} + 0.7775\,(1.13\,T_{AC}) = 0$

$\Rightarrow -1962 + 1.58\,T_{AC} = 0 \Rightarrow T_{AC} = 1242\,N$ (5)

(5),(4) $\Rightarrow T_{AB} = 1.13 \times 1242 = 1403\,N$ (6)

(1),(5),(6) $\Rightarrow P - 0.08455 \times 1242 - 0.0933 \times 1403 = 0$

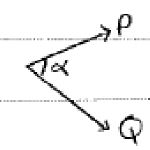
$\Rightarrow P = 235.9\,N$

ضرب داخلی و خارجی بردارها:

ضرب داخلی:

ضرب داخلی دو بردار یک عدد می شود و طبق رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\vec{P}.\vec{Q} = |P|.|Q|.\cos\alpha$$



$$P = ai + bj + ck \qquad Q = di + ej + Fk \implies \vec{P}.\vec{Q} = ad + be + cF$$

ضرب داخلی دارای خاصیت جابجایی می باشد $\quad \vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

ضرب داخلی دو بردار وقتی ماکزیمم است که دو بردار موازی هم باشند
و وقتی دو بردار عمود بر هم باشند ضرب داخلی آن ها صفر است

ضرب خارجی:

ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر صفحه ای که دو بردار ضرب شونده با هم تشکیل می دهند

$$\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} \implies |R| = |P|\times|Q|\times\sin\alpha$$

ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد $\quad P\times Q = -Q\times P$

برای تعیین جهت بردار نتیجه از قانون دست راست کمک می گیریم به گونه ای که انگشت شست در راستای بردار اول و انگشت اشاره در راستای بردار دوم قرار گیرد حال انگشت وسط نشان دهنده جهت بردار نتیجه خواهد بود

$$P\times Q = (ai + bj + ck)\times(di + ej + fk)$$
$$= (ae)k - (af)j - (bd)k + (bf)i + (cd)j - (ce)i$$

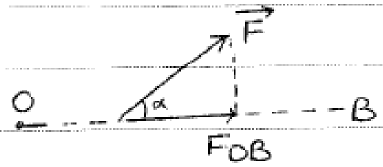
$i\times i = 0 \quad j\times j = 0 \quad k\times k = 0$

$i\times j = k \quad j\times i = -k \quad j\times k = i$

$k\times j = -i \quad i\times k = -j \quad k\times i = j$

$$\vec{R} = P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

محاسبه تصویر یک بردار بر روی یک راستای خاص:



$$|F_{OB}| = |F| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{F}_{OB} = |F_{OB}| \cdot \lambda_{OB} = |F_{OB}| \times \frac{\vec{OB}}{|OB|}$$

اگر زاویه α موجود نباشد از ضرب داخلی برای محاسبه این زاویه کمک می گیریم

$$\vec{OB} \cdot \vec{F} = |OB| \cdot |F| \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{F}}{|OB| \cdot |F|} = \vec{\lambda}_{OB} \cdot \vec{\lambda}_F$$

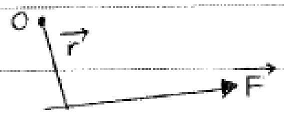
$$(F_{OB} = F \cdot \lambda_{OB})$$

گشتاور:

کمیتی است برداری که تمایل به چرخاندن جسم حول نقطه یا محوری خاص را دارد گشتاور با توجه به جهت چرخشی که ایجاد می کند می تواند به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد تعریف شود به طور قراردادی گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی فرض می شود

گشتاور یک نیرو حول نقطه ای خاص:

برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک نقطه، از آن نقطه به نقطه ای دلخواه در راستای نیرو، بردار $\vec{r}$ را رسم می کنیم ابتدای این بردار بر نقطه مورد نظر و انتهای آن بر راستای نیرو قرار می گیرد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ در بردار نیرو برابر بردار گشتاور خواهد شد

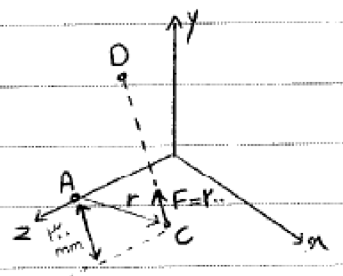


$$M_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

برای تشخیص جهت بردار گشتاور همانند حالت گفته شده در ضرب خارجی بردارها می‌توان از قانون دست راست کمک گرفت

برای تشخیص بردار گشتاور به شکل زیر نیز می‌توان از دست راست کمک گرفت در این حالت ابتدا باید تشخیص دهیم که گشتاور ساعتگرد است یا پادساعتگرد آنگاه دست راست را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که چهار انگشت در جهت چرخش گشتاور باشد در این حالت انگشت شصت نشان دهنده جهت بردار گشتاور خواهد بود

مثال: در شکل زیر به نقطه C نیروی ۲۰۰N اعمال می‌شود راستای این نیرو از نقطه D عبور می‌کند مطلوبست محاسبه گشتاور این نیرو حول نقطه A (۳-۴۳ ص ۵۱)



C در صفحه xz

D در صفحه yz

A بر روی محور z

C (۳۰۰ , ۰ , ۴۰۰)

A (۰ , ۰ , ۳۲۰)

D (۰ , ۲۴۰ , ۸۰)

در ابتدا نیروی وارده را به صورت یک بردار نیرو می‌نویسیم

$$\vec{F} = |F| \times \frac{\vec{CD}}{|CD|} = 200 \times \frac{-300i + 240j - 320k}{\sqrt{300^2 + 240^2 + 320^2}} = 200 \times \frac{-300i + 240j - 320k}{500}$$

$$= -120i + 96j - 128k$$

حالا بردار $\vec{r}$ را رسم می‌کنیم، ابتدای $\vec{r}$ روی نقطه A قرار می‌گیرد و انتهای آن هر نقطه‌ای دلخواه در راستای نیروی $\vec{F}$، به طور مثال انتها را می‌توان بر روی یکی از دو نقطه C و D اختیار کرد در اینجا از نقطه C کمک می‌گیریم

$$\vec{r} = \vec{AC} = 300i + 80k$$

$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F} = (300i + 80k) \times (-120i + 96j - 128k)$$

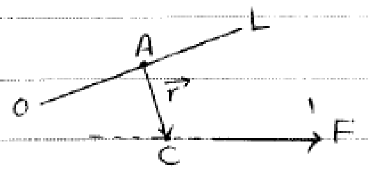
$$= (300 \times 96)\vec{k} + (300 \times 128)j - (80 \times 120)j - (80 \times 96)i =$$

$- 7680\,\vec{i} + 28800\,\vec{j} + 28800\,\vec{k} \quad N.mm$

$|M_A| = \sqrt{7680^2 + 28800^2 + 28800^2} = 41447 \; N.mm = 41{,}447 \; N.m$

گشتاور یک نیرو حول محوری مفروض:

گشتاور یک نیرو حول یک محور برابر یک عددی می‌شود در این حالت بردار گشتاور به موازات همان محور مورد نظر است. برای محاسبه بزرگی بردار گشتاور نقطه‌ای دلخواه بر محور مورد نظر را انتخاب می‌کنیم و سپس گشتاور نیرو حول آن نقطه دلخواه را مطابق روش گفته شده در قسمت قبل محاسبه می‌کنیم در انتها بردار گشتاور بدست آمده را در بردار یکه محور مورد نظر ضرب داخلی می‌کنیم



$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M_{OL}} = \lambda_{\vec{OL}} \cdot \vec{M_A} = \lambda_{\vec{OL}} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$

نکته: اگر راستای نیرو و راستای محور با هم متقاطع باشند گشتاوری ایجاد نمی‌شود

مثال: در مثال قبل مطلوبست محاسبه گشتاور حول محور $\vec{AB}$؟ $B(100,0,0)$

$\lambda_{\vec{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} = \frac{100\,i - 320\,k}{\sqrt{100^2 + 320^2}} = 0/3\,i - 0/96\,K$

لازم است که گشتاور نیروی وارده حول نقطه دلخواه در راستای AB محاسبه شود که در مثال قبل این کار برای نقطه A انجام شده و می‌توان از آن استفاده کرد

$M_{AB} = \lambda_{AB} \cdot (M_A)$

$M_{AB} = (0/3\,i - 0/96\,K) \cdot (-7680\,i + 28800\,j + 28800\,k)$

$= 0/3(-7680) - 0/96 \times 28800 = -29952 \; N.mm$

منفی بودن علامت نشانه آن است که گشتاور حول محور مورد نظر ساعتگرد است

کوپل نیرو:

دو نیروی مساوی، موازی و غیر هم جهت را کوپل می‌گویند.

گشتاور یک کوپل نیرو حول هر نقطه دلخواه در صفحه مقداری ثابت است و مقدار آن برابر حاصل ضرب مقدار نیرو در فاصله عمودی دو نیرو است. $M = F.d$

و با اینکه می‌توان بر راستای یکی از دو نیرو نقطه‌ای را انتخاب کرد و همچنین به طور مشابه بر راستای نیروی دوم نیز نقطه‌ای انتخاب کرد و با وصل این دو نقطه به هم بردار $\vec{r}$ را تشکیل داد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ × بردار نیرو تشکیل بردار گشتاور را می‌دهد. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

(بردار F، برداری است که انتهای بردار $\vec{r}$ بر روی آن قرار گیرد)

کوپل های هم ارز:

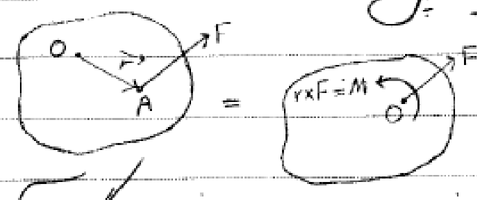
دو کوپل با هم هم ارزند وقتی که بردارهای گشتاوری که ایجاد می‌کنند با هم یکسان باشند.

جمع کردن کوپل ها:

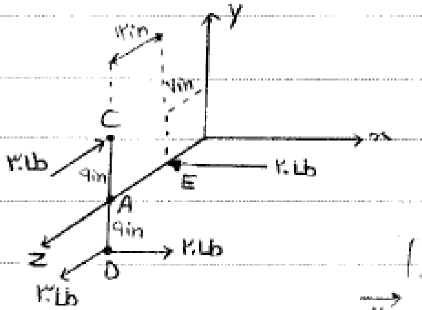
با توجه به اینکه هر کوپل می‌تواند با یک بردار گشتاور نمایش داده شود کوپل ها را می‌توان طبق قوانین جمع برداری با هم جمع کرد.

تجزیه نیروی مفروض به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل:

همچنین شکل نمایش داده شده نیرویی که به جسم وارد شود همه نیروها را می‌توان با یک تک نیرو و یک گشتاور در نقطه مورد نظر جایگزین کرد به گونه‌ای که یک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم می‌باشد و بردار گشتاور نیز برابر گشتاوری است که نیروهای وارد بر جسم حول نقطه مورد نظر ایجاد می‌کنند.



مثال: مطلوبست محاسبه برآیند دو کوپل نمایش داده شده در شکل زیر. (۳-۶ ص ۷۱)



$$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}$$

$\vec{M_1}$: ناشی از دو نیروی 20 Lb

$\vec{M_2}$: " " " 30 Lb

برای بردار M_1، بردار $\vec{r}$ را از نقطه E تا نقطه D در نظر می‌گیریم

$$\vec{M_1} = (-9j + 12k) \times 20i = 180k + 240j$$

برای بردار M_2 ابتدای بردار $\vec{r}$ را بر روی نقطه C و انتهای آن را بر D فرض می‌کنیم

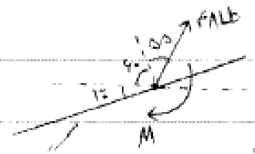
$$\vec{M_2} = -18j \times 30k = -540i$$

$$\Rightarrow \vec{M_1} + \vec{M_2} = -540i + 240j + 180k$$

مثال: در شکل زیر الف) سه نیروی نشان داده را با یک تک نیرو و کوپل معادل در نقطه B جایگزین کنید. ب) دو نیروی عمود را با یک تک نیرو و کوپل بدست آمده در قسمت الف را تعیین کنید و نقطه اثر آن را روی راستای ABC مشخص کنید.

دو نیروی 20 Lb تشکیل یک کوپل می‌دهند

با توجه به اینکه دو نیروی 20 Lb موازی و خلاف جهت هستند همدیگر را خنثی می‌کنند در نتیجه نیرو در نقطه B



همان نیروی 48 Lb است

گشتاور M دو قسمت است یکی گشتاور از کوپل دو نیروی 20 Lb و دیگری گشتاور ناشی از نیروی 48 Lb حول نقطه B

$$M = M_1 + M_2$$

$$M_1 = -20 \times 70 \sin(90 + 20) = -1316 \text{ Lb-in}$$

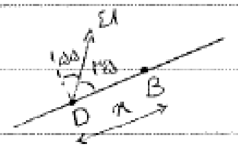
$$M_2 = 48 \times 30 \sin(90 + 55) = 826 \text{ lb-in}$$

$$M = -1316 + 826 = -490 \text{ lb-in}$$

چون منفی بدست آمده پس گشتاور ساعتگرد است

ب) می‌خواهیم بر راستای AC نقطه‌ای را پیدا کنیم که برای تمام نقاط یک تک نیرو جایگزین شود، آن تک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر سیستم است، برآیند نیروها در قسمت

قبل برابر 48lb محاسبه شد



این تک نیرو باید در نقطه ای قرار گیرد که گشتاور ناشی از آن حول نقطه B به صورت ... اثر دو نیرو مقدار محاسبه شده در مرحله قبل باشد. بنابراین جهت محل اثر تک نیرو باید در پایین نقطه B باشد.

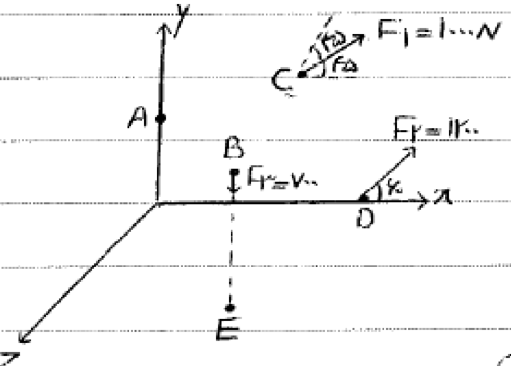
گشتاور نیرو حول نقطه B را محاسبه و با مقدار مرحله قبل مساوی قرار می دهیم

$$-48x \sin 35 = -490$$

(۳-۸۹ ص ۷۶)

$$x = \frac{490}{48 \sin 35} = 17.8 \, in$$

مثال: به جای سه نیروی نشان داده شده در شکل، یک سیستم نیرو - کوپل هم ارز در نقطه A قرار دهید. (۳-۱۰۰ ص ۸۳)



D(100, 0, 0)
A(0, 100, 0)
C(75, 100, -50)
B(75, 100, 50)
E(150, -50, 100)

1200 N در صفحه xy

1000 N در صفحه به موازات xz

واحد: N.mm

ابتدا سه بردار نیرو را به صورت برداری در می آوریم

$$\vec{F_1} = F_{1x} i + F_{1z} k = 1000 \cos 45 i - 1000 \sin 45 k = 707 i - 707 k$$

$$\vec{F_2} = F_{2x} i + F_{2y} j = 1200 \cos 60 i + 1200 \sin 60 j = 600 i + 1039 j$$

$$\vec{F_3} = |F_3| \cdot \lambda_{BE} = 700 \times \frac{\vec{BE}}{|BE|} = 700 \times \frac{75 i - 150 j + 50 k}{\sqrt{75^2 + 150^2 + 50^2}} = 300 i - 600 j + 200 k$$

حال برآیند سه بردار فوق را محاسبه می کنیم

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 1607 i + 439 j - 507 k$$

حال باید گشتاور هر یک از سه نیرو حول نقطه A را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم. برای این منظور، برای هر نیرو بردار R را از نقطه A تا ابتدای نیرو ترسیم می کنیم

$\vec{M_1} = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F_1} = (75i - 50K) \times (707i - 707K)$ $\qquad \vec{r}_{C/A} = \vec{AC}$

$= (75 \times 707)J + (50 \times 707)J = 17675\,J$

$\vec{M_2} = \vec{r}_{D/A} \times \vec{F_2} = (100i - 100j) \times (600i + 1039j) = 103900K + 60000K = 163900K$

$\vec{M_3} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F_3} = (75i + 50K) \times (300i - 600J + 100K)$

$= (-75 \times 600)K - (75 \times 100)J + (50 \times 300)J + (50 \times 600)i$

$= 30000i - 45000K$

$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \vec{M_3} = (30000i + 17675J + 11890K)\ N.mm$

تعادل اجسام صلب :

جسم صلب جسمی است که در اثر اعمال نیرو شکل خود را از دست نمی‌دهد و ابعاد و اندازه‌های آن قبل و بعد از اعمال نیرو ثابت است

روش حل مسائل تعادل اجسام صلب :

همانند مسائل تعادل ذره در اینجا نیز دیاگرام آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود و با نوشتن معادلات تعادل مقادیر مجهول محاسبه می‌شود. معادلات تعادل برای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی به شرح زیر است :

دوبعدی $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$ $\qquad$ سه‌بعدی $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$

انواع تکیه‌گاه :

۱) تکیه‌گاه غلطکی $\qquad$ ۲) گهواره‌ای

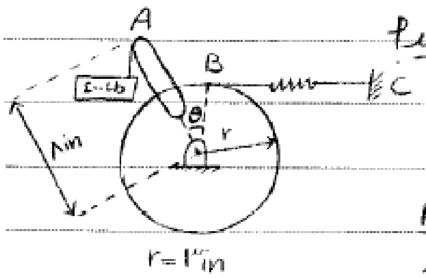
۳) جسم بر روی سطح بدون اصطکاک

واکنش : نیرو با خط اثر معلوم

کابل ←  میله ← 

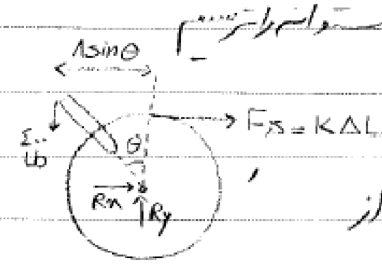
← نیروی داخلی اثر معلوم (به موازات کابل یا میله)

مثال: دو میله‌ای به وزن ۴۰ پوند به نقطه A از اهرم نشان داده شده در شکل متصل است. ثابت فنر BC عبارت است از $K = ۲۵۰\ lb/in$ و وقتی θ مساوی صفر است فنر کشیده نشده. وضعیت تعادل این سیستم را تعیین کنید؟



نمودار آزاد اهرم را رسم می‌کنیم

نمودار آزاد



ΔL برابر طول قوسی از دایره با زاویه θ می‌باشد

$\Delta L = r\theta = ۳\theta$

θ برحسب رادیان

$\circlearrowleft \Sigma M_O = 0 \Rightarrow ۴۰ \times ۸ \sin\theta - (۲۵۰ \times ۳\theta) \times ۳ = 0$

$\Rightarrow ۳۲۰ \sin\theta = ۲۲۵۰\, \theta$

$\sin\theta = ۷/۰۳\, \theta$

معادله بالا را به روش سعی و خطا حل می‌کنیم

$\theta = 0$ جواب اول

$0 < \theta < \pi/2$

هرگاه حاصل کسر به عدد یک نزدیک شد عدد فرض شده می‌تواند جواب مسأله باشد

$\theta = ۰/۵ \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{۰/۷۰۳\theta} = ۱/۳۶$

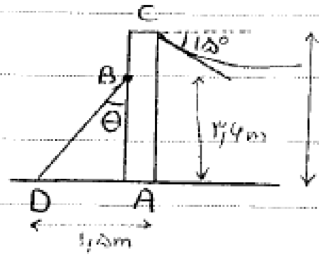
$\theta = ۱ \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{۰/۷۰۳\theta} = ۱/۲$

$\theta = ۱/۵ \Rightarrow ۰/۹۵$

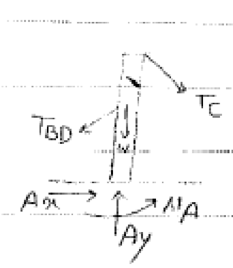
$\theta = ۱/۴ \Rightarrow ۱/۰۰۱ \Rightarrow \theta = ۱/۴\ Rad = ۸۰/۲۵^\circ$

(۴-۵ ص ۱۰۶)

مثال: تیر برقی به جرم $175\,kg$ مفروض است. سیم برق در نقطه C به آن تکیه دارد، کشش در سیم $600\,N$ است. سیم در نقطه C با افق زاویه ۱۵ درجه دارد. مطلوبست تعیین کوچکترین و بزرگترین کشش مجاز در کابل BD به طوری که اندازه کوپل وارد در نقطه A از $500\,N.m$ تجاوز نکند؟ (۴-۴۲ ص ۱۱۳)



دیاگرام آزاد تیر برق را رسم می‌کنیم



$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{1.5}{3.6}\right) = 22.6^\circ$$

$$M_A \leq 500\ N.m$$

$$W = 175 \times 9.81 = 1717\ N$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + T_{BD} \times 3.6 \times \sin 22.6 - T_C \times 4.5 \cos 15 = 0$$

$$M_A + 1.38\, T_{BD} - 4.34\, T_C = 0$$

$$M_A = 4.34\, T_C - 1.38\, T_{BD} = 4.34 \times 600 - 1.38\, T_{BD}$$

$$M_A = 2604 - 1.38\, T_{BD} \Rightarrow T_{BD} = \frac{2604 - M_A}{1.38} = \frac{2604 - 500}{1.38}$$

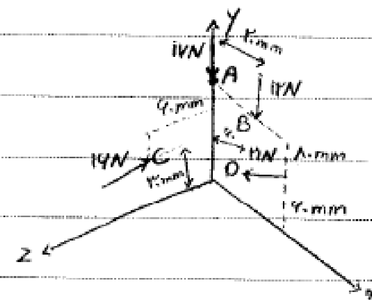
$$\Rightarrow T_{BD} = 1525\ N = T_{min}$$

در صورت سؤال مشخص نشده است که گشتاور A ساعتگرد است یا پادساعتگرد، پس باید هر دو حالت را بررسی کنیم. اگر فرض کنیم در ابتدا اول فرض شود که این گشتاور پادساعتگرد است، یک بار دیگر مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که گشتاور ساعتگرد است که در معادله اگر به جای M_A، ۵۰۰- قرار دهیم

$$M_A = -500$$

$$\Rightarrow T_{BD} = \frac{2604 - (-500)}{1.38} = 2250\ N = T_{max}$$

مثال: سیستم نیروهای داده شده در شکل را به یک تک نیرو-کوپل در نقطه C قرار دهید؟



A(۰,۱۴۰,۰)

B(۲۰,۱۴۰,۰)

C(۰,۳۰,۶۰)

D(۶۰,۶۰,۰)

D,B در صفحه xy

C در صفحه yz

ابتدا برآیند نیروها را بدست می‌آوریم

$$\vec{R} = -17j - 12j - 21i - 16K$$

$$\vec{R} = -21i - 29j - 16K$$

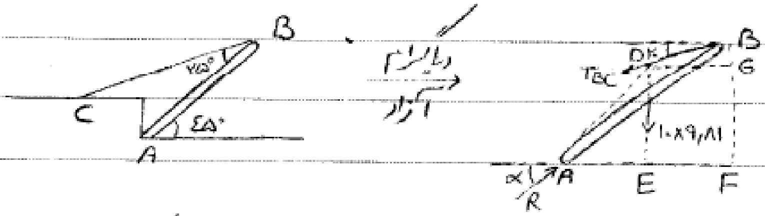
حال گشتاور این چهار نیرو را نسبت به نقطه C محاسبه می‌کنیم گشتاور نیروی 16N صفر است

$$\vec{M}_C = r_{A/C} \times (-17j) + r_{B/C} \times (-12j) + r_{D/C} \times (-21i)$$

$$= (110j - 60K)(-17j) + (20i + 110j - 60K)(-12j) + (60i + 30j - 60K)(-21i)$$

$$= -1020i - 240K - 720i + 630K + 1260j = -1740i + 1260j + 390K \quad N \cdot mm$$

مثال: در شکل روبرو وزن قطعه AB، 10kg و طول آن 4m است این قطعه با طناب BC نگه داری شده است مطلوبست تعیین کشش طناب BC و واکنش نقطه A ؟ (۴_۶۰ ص۱۱۵)

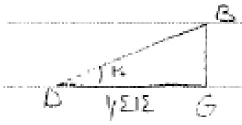


قطعه AB یک جسم سه نیرویی است شرط تعادل جسم سه نیرویی آنست که برآیند نیروها صفر شود و راستای سه نیرو نیز از یک نقطه عبور کند

مثلث متساوی الساقین $AF = BF = AB \cos 45$

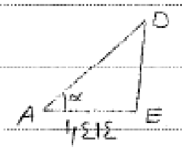
$= 4 \cos 45 = 2{,}828\ m$

$DG = EF = \dfrac{AF}{2} = 1{,}414$



$$\tan 20 = \frac{BG}{1.414} \Rightarrow BG = 1.414 \tan 20 = 0.515\ m$$

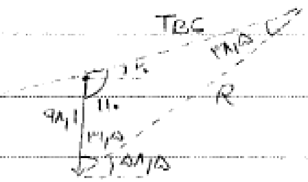
$\overset{\triangle}{ADE}$:



$$DE = BF - BG = 2.828 - 0.515 = 2.313$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2.313}{1.414}\right) = 58.5^\circ$$

با بدست آوردن زاویه α مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، برای این منظور بردارهای نیرو را صورت متوالی رسم می‌کنیم

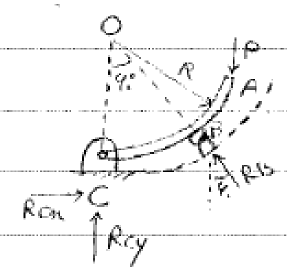


$$\frac{98.1}{\sin 38.5} = \frac{T_{BC}}{31.5} = \frac{R}{\sin 110}$$

$$T_{BC} = \frac{98.1 \sin 31.5}{\sin 38.5} = 82.343\ N$$

$$R = \frac{98.1 \sin 110}{\sin 38.5} = 148\ N$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست تعیین واکنش در نقطه B و نقطه C ؟ (۴-۸۲ ص ۱۱۸)



CBA : کمان دایره

تکیه‌گاه B غلطکی و دارای یک واکنش در راستای مرکز دایره

تکیه‌گاه C مفصلی و دارای دو واکنش است

برای گرفتن گشتاور RB

با توجه به آنکه راستای نیرو از مرکز دایره عبور می‌کند نیرو را در فاصله مرکز دایره تا نقطه C (شعاع دایره) در sin زاویه راستای نیرو و راستای خط رابط ضرب می‌کنیم

$$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -P.R + R_B.R.\sin 60 = 0$$

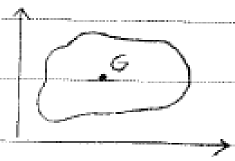
$$\Rightarrow R_B = \frac{P.R}{R\sin 60} = \frac{P}{\sin 60} = 1.15P$$

$$\overrightarrow{\Sigma F_x} = 0 \Rightarrow R_{Cx} - (1.15P)\sin 60 = 0$$

$$R_{Cx} = P$$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{cy} - P + ۱/۱۵ P \cos ۶۰ = ۰ \Rightarrow R_{cy} = ۰/۴۲۵ P$

مراکز سطوح :



$G(\bar{x}, \bar{y})$

Q_x : گشتاور اول سطح شکل حول محور x

Q_y : " " " " y

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{Q_x}{A}$$

اشکالی که دارای مرکز تقارن هستند مرکز سطح آن‌ها روی مرکز تقارنشان می‌باشد
شکل‌هایی که مرکز تقارن ندارند اما محور تقارن دارند مرکز سطح آن‌ها روی این محور قرار است

مرکز سطح برخی اشکال خاص :
برای برخی اشکال خاص . اشکال خاص بالا محاسبه شده و مختصات مرکز سطح آن‌ها به صورت جداول در پیوست آمده که برای این اشکال می‌توان با مراجعه به جداول مختصات مرکز سطح را بدست آورد

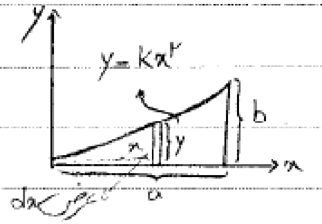
محاسبه مرکز سطح برای اشکال مرکب :
برای اشکال مرکب می‌توان آن‌ها را به چند شکل ساده تقسیم نموده و برای هر شکل ساده مساحت و مختصات مرکز سطح را نسبت به دستگاه مختصات ثابت تعیین کرد سپس با استفاده از روابط زیر می‌توان مختصات مرکز سطح شکل مرکب را تعیین کرد

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

x_i, y_i : مختصات مرکز سطح شکل iام

A_i : مساحت شکل iام

مثال: مطلوب است تعیین مختصات مرکز سطح منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر (مثال ۵-۱۴ ص ۱۴۸)



محاسبه K

به ازای $x=a$ داریم: $y=b$

$$\Rightarrow b = ka^2 \Rightarrow K = \frac{b}{a^2}$$

ابتدا مساحت شکل را با انتگرال گیری محاسبه می‌کنیم

یک المان عمودی در شکل در نظر می‌گیریم

$$A = \int dA = \int y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{3}$$

$$Q_y = \int x\,dA = \int_0^a x \times \frac{bx^2}{a^2}\,dx = \int \frac{b}{a^2} x^3\,dx = \left[\frac{bx^4}{4a^2}\right]_0^a = \frac{ba^2}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{ba^2/4}{ab/3} = \frac{3a}{4}$$

در انتگرال زیر با توجه به اینکه نقاط مختلف المان عمودی از yهای متفاوتی برخوردارند باید مقدار y را در مرکز سطح المان مستطیلی در نظر گرفت

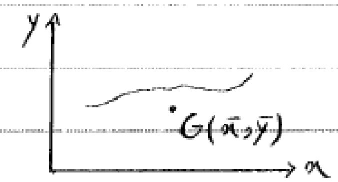
$$Q_x = \int y\,dA = \int_0^a \left[\frac{b}{2a^2}x^2\right]\left[\frac{b}{a^2}x^2\,dx\right]$$

$$= \int_0^a \frac{b^2}{2a^4} x^4\,dx = \left[\frac{b^2}{10a^4}x^5\right]_0^a = \frac{b^2a}{10}$$

$$\left(\frac{y}{2} = \frac{b}{2a^2}x^2\right)$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{b^2a/10}{ab/3} = \frac{3b}{10}$$

محاسبه مراکز خطوط و منحنی ها:



$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\int ds}$$

s: طول منحنی

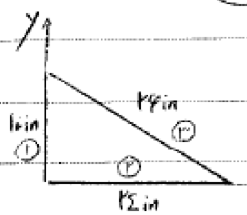
$$\bar{y} = \frac{\int y\,ds}{\int dx}$$

مانند سطوح مرکب در منحنی های مرکب نیز می‌توان از روابط مشابه استفاده کرد

$$\bar{x} = \frac{\sum s_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum s_i y_i}{\sum s_i}$$

مثال: مثلث نشان داده شده در شکل از سیم باریک و همگن ساخته شده مختصات مرکز گرانش آن را تعیین کنید؟ (۲-۵ ص ۱۴۱)



یک دستگاه مختصات به صورت اختیاری به گونه ای تعیین می کنیم که مبدا آن گوشه پایین و سمت چپ مثلث باشد مثلث را به سه خط تجزیه می کنیم دارای سه خط طول و مختصات مرکز گرانش آن را تعیین می کنیم، با توجه به اینکه اضلاع مثلث از سیم همگن ساخته شده مرکز گرانش هر خط در وسط آن قرار می گیرد

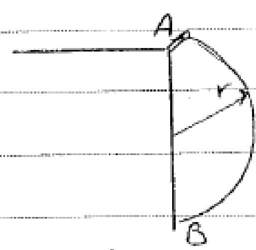
شکل ① : $S_1=10$, $\bar{x}_1=0$, $\bar{y}_1=5$

شکل ② : $S_2=24$ $\bar{x}_2=12$ $\bar{y}_2=0$

شکل ③ : $S_3=26$ $\bar{x}_3=12$ $\bar{y}_3=5$

$$\bar{x}=\frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}=\frac{10\times 0+24\times 12+26\times 12}{10+24+26}=10\,in \qquad \bar{y}=\frac{10\times 5+24\times 0+26\times 5}{10+24+26}=3\,in$$

مثال: میله ای یکنواخت به شکل نیم دایره به وزن W و به شعاع r به پین A متصل است و به سطح بدون اصطکاک تکیه دارد واکنش های تکیه گاهی A و B را تعیین کنید؟
(۳-۵ ص ۱۴۲)



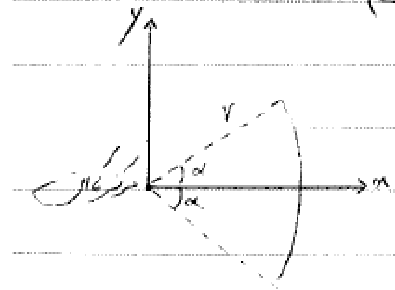
دیاگرام آزاد نیم دایره را رسم می کنیم
تکیه گاه A که یک پین است دو واکنش افقی و عمودی دارد و تکیه گاه B که سطح بدون اصطکاک است یک واکنش عمود بر سطح تکیه به صورت افقی دارد
وزن نیم دایره به مرکز گرانش آن وارد می شود
مرکز گرانش نیم دایره توخالی به فاصله $2r/\pi$ از مرکز دایره قرار می گیرد

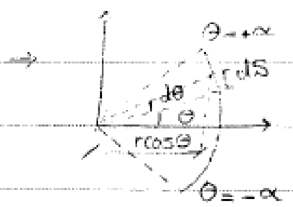
$$\uparrow \sum F_y=0 \Rightarrow A_y-W=0 \quad A_y=W$$

$$\curvearrowleft \sum M_A=0 \quad -W\times \frac{2r}{\pi}+B_x\times 2r \Rightarrow B_x=\frac{W}{\pi}$$

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \frac{W}{\pi}+A_x=0 \Rightarrow A_x=-W/\pi \quad \overleftarrow{A_x=W/\pi}$$

مثال: مطلوبست تعیین مختصات مرکز گرانی کمان نمایش داده شده در شکل زیر؟ (کمان بصورت توخالی می‌باشد) (۵-۵ ص۱۴۱)





چون شکل نسبت به محور x متقارن است مقدار $\bar{y}$ آن صفر است

$$S=\int ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\,d\theta=\left[r\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}=\left(r\alpha-(-r\alpha)\right)=2r.\alpha \Rightarrow$$ اندازه دو برابر شعاع

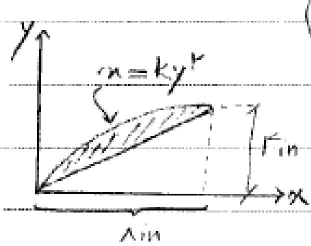
$$\int x\,ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\cos\theta\times(r\,d\theta)=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\cos\theta\,d\theta=r^2\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}=r^2\left[\sin\alpha-(\sin(-\alpha))\right]$$

$$=2r^2\sin\alpha$$

α: بر حسب رادیان

$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}=\frac{2r^2\sin\alpha}{2r.\alpha}=\frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مرکز سطح شکل زیر؟ (ص۱۴۲)



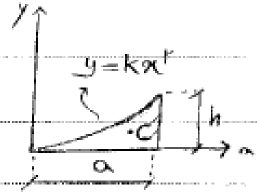
محاسبه K:

$$x=8 \Rightarrow y=4 \Rightarrow 8=k\times 4^2$$

$$k=0.5$$

برای محاسبه مرکز سطح از جدول کمک می‌گیریم

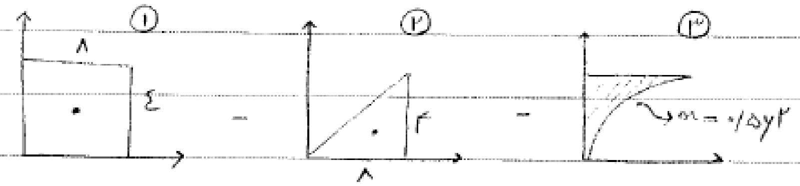
مطابق جدول برای زیر منحنی سهموی داریم:



$$A=\frac{ah}{3}\qquad \bar{x}=\frac{3}{4}a\qquad \bar{y}=\frac{3}{10}h$$

در شکل بالا نسبت به شکل جدول بصورت مثال مختصر ج ...

۱. در جدول منحنی است با معادله $y=kx^2$ ... است ... بنابراین در شکل بالا مساحت هاشور خورده در زیر منحنی است اما در شکل صورت سوال مساحت هاشور خورده در بالای منحنی است می‌توان شکل را بصورت زیر تفریق کرد:



شکل ① : $a_1 = 32$ $\quad \bar{x}_1 = 4$ $\quad \bar{y}_1 = 2$

شکل ② : $A_2 = \frac{8\times 4}{2} = 16$ $\quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3}\times 8 = 5.33$ $\quad \bar{y} = \frac{4}{3} = 1.33$

در مورد مثلث اگر فاصله مرکز سطح از رأس مثلث محاسبه شود از ضریب ۲/۳ و اگر از قاعده مثلث محاسبه شود از ضریب ۱/۳ استفاده می کنیم

شکل ③ : $A_3 = \frac{4\times 8}{3} = 10.66$

برای سهمی با توجه به اینکه منحنی برحسب توان دوم y است و نه x (جای x و y عوض شده) مقدار a را برابر طول می گیریم و h را برابر طول افقی در نظر می گیریم و به جای آن جای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را نیز عوض می کنیم ⟸

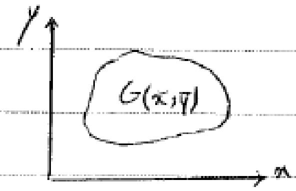
$\bar{x} = \frac{3}{10}\times 8 = 2.4$ $\quad \bar{y} = \frac{3}{4}\times 4 = 3$

برای این نکته نیز توجه شود که روابط بالا به شرط آنست که رأس سهمی بر روی مبدا مختصات قرار گیرد اگر این امر اتفاق نیفتد باید به مقادیر بالا مختصات رأس سهمی نیز اضافه می شود در اینجا مرکز سهمی بر روی مبدا قرار گرفته و نیازی به این مسئله نیست

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32\times 4) - (16\times 5.33) - (10.66\times 2.4)}{32 - 16 - 10.66} = 3.2\ in$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32\times 2) - (16\times 1.33) - (10.66\times 3)}{32 - 16 - 10.66} = 2.01\ in$$

تمرین: مثال قبل را با استفاده از روش انتگرال گیری حل کنید.



حجم ناشی از دوران سطح :

اگر یک شکل را حول محوری خاص دوران داده شود از دوران سطح یک حجم حاصل می شود. اگر این شکل به صورت یک منحنی باشد از دوران آن یک حجم توخالی بدست می آید. حجم حاصل از دوران سطح حول محورهای x و y به شرح زیر محاسبه می شود

دوران حول محور x : $V = A\times(2\pi\bar{y})$

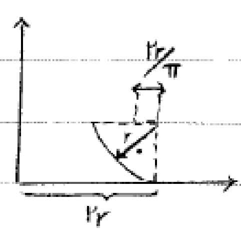
y " " " : $V = A\times(2\pi\bar{x})$

در مورد خطوط و منحنی ها سطح جانبی شکل بدست آمده به شرح زیر محاسبه می شود:

دوران حول محور x : $A = S\times(2\pi\bar{y})$

y " " " : $A = S\times(2\pi\bar{x})$

مثال: ربع دایره نشان داده شده در شکل زیر را حول محور y دوران داده ایم مطلوبست محاسبه سطح جانبی شکل بدست آمده؟ (۵-۵۶ ص ۱۵۰)



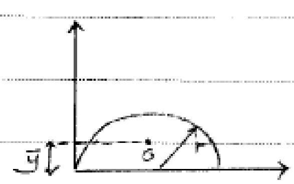
$S = \frac{\pi r}{2}$ (طول) $\quad \bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$

$A = 2\pi\bar{x}\times S = 2\pi\left(2r\left(1-\frac{1}{\pi}\right)\right)\times\frac{\pi r}{2} \Rightarrow$

$= 2\pi^2 r^2\left(1-\frac{1}{\pi}\right) = 2\pi r^2(\pi-1)$

مثال: می دانیم که حجم و سطح کره به ترتیب برابرند با $\frac{4}{3}\pi r^3$ و $4\pi r^2$ با استفاده از آن مطلوبست محاسبه مرکز سطح نیم دایره و همچنین مرکز گرانی نیم دایره توخالی؟ (۵-۵۸ ص ۱۵۰)

در صورت دوران نیم دایره توپر حول محور x یک کره بدست می آید



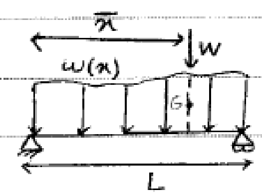
توپر $V = A\times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2}\times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

از دوران نیم دایره توخالی، کره توخالی بدست می آید

$A = S\times 2\pi\bar{y} \Rightarrow 4\pi r^2 = \pi r\times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$

بارهای گسترده:

اگر یک بار به جای آنکه بصورت متمرکز به یک نقطه وارد شود به یک سطح یا خط پخش شود بار گسترده است



بار گسترده را می توان با یک بار متمرکز جانشین کرد

مقدار بار متمرکز برابر انتگرال بار گسترده روی سطح یا خط است

$W = \int_0^L w(x)\,dx$ که بار متمرکز

یا به عبارت دیگر بزرگی بار برابر مساحت شکلی است که بار گسترده ایجاد می کند

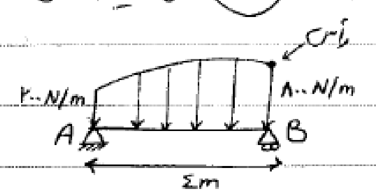
$\bar{x} = \frac{\int x\,w(x)\,dx}{\int w(x)\,dx}$

محل اثر بار متمرکز معادل مرکز ثقل شکل بار است

همانند سطوح مرکب در مورد بارهای گسترده مرکب نیز می توان آن را به اجزایی به شکل های ساده تر تقسیم نمود و با فرمول هایی مشابه سطوح مرکب مقدار بار متمرکز معادل و محل اثر آن را پیدا کرد

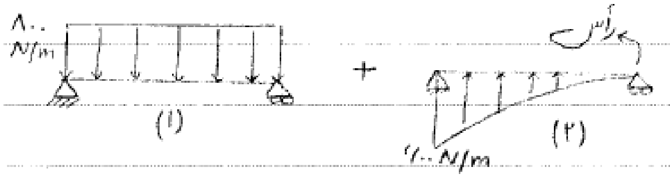
بارهای گسترده شکل های متنوعی می توانند داشته باشند که از جمله می توان به بار گسترده یکنواخت، مثلثی، ذوزنقه ای و سهمی شکل اشاره کرد

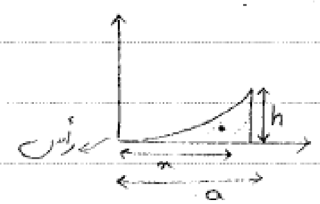
مثال: در تیر شکل زیر بار گسترده را با یک بار متمرکز جانشین کرده و واکنش های تکیه گاهی را محاسبه نمایید؟



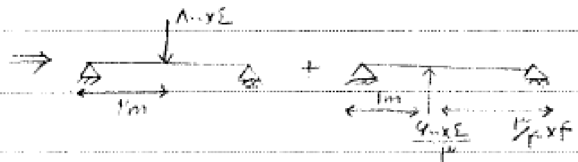
بار گسترده به صورت مرکب است. آن را تبدیل به یک بار گسترده یکنواخت که از آن یک بار سهمی شکل کم شده است می نماییم

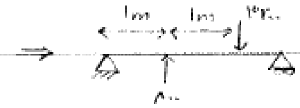
به جای آنکه بار منفی را لحاظ کنیم، جهت بار را عوض کرده و رو به بالا در نظر می‌گیریم





$A = ah/3$ و $\bar{x} = 3a/4$



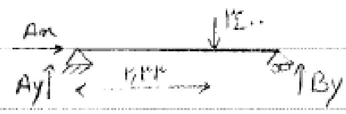


با همین وضعیت نیز می‌توان واکنش‌های تکیه‌گاهی را بدست آورد اما صورت سوال یک بار تک به عنوان برآیند خواسته شده است

$P = \sum P_i = 3200 - 800 = 2400$

$$\bar{x} = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{-800\times 1 + 3200\times 2}{-800 + 3200} = 2.33$$

حال دیاگرام آزاد تیر را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم



$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

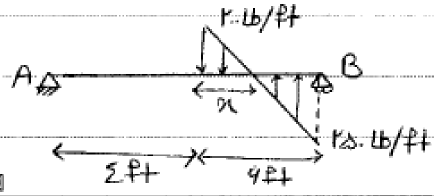
$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 4 - 2400 \times 2.33 = 0$

$B_y = 1400$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2400 + 1400 = 0 \quad A_y = 1000\,N$

مثال: در تیر شکل زیر مطلوبست محاسبه بار متمرکز معادل و مقدار واکنش‌های تکیه‌گاهی؟

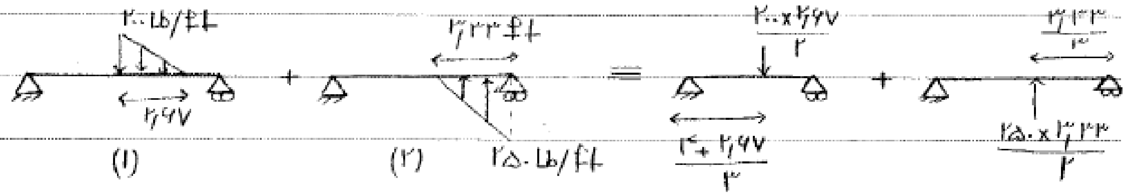
(۵-۸۱ ص ۱۵۹)

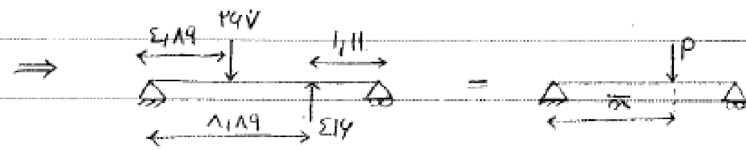


شکل بارگذاری را تقسیم می‌کنیم، عرض این بارگذاری نامشخص است که می‌توان آن را با استفاده از تشابه بارگذاری بدست آورد

تشابه : $\dfrac{x}{6-x}=\dfrac{200}{250}=0.8 \Rightarrow 0.8(6-x)=x$

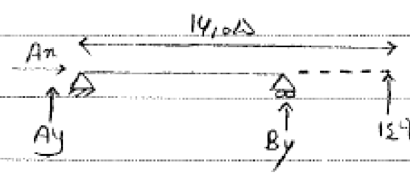
$x=2.67\ ft$





$P=267-416=-149\ Lb \Rightarrow P=149\ Lb \uparrow$

$$\bar{x}=\frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}=\frac{267\times 4.89-416\times 8.89}{267-416}=16.05$$



$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x=0$

$\sum M_A=0 \Rightarrow 149\times 16.05+B_y\times 10=0$

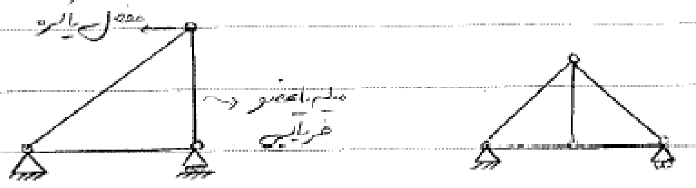
$B_y=-239.14\ Lb=239.14 \downarrow$

$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y-239.14+149=0$

$A_y=90.14\ Lb \uparrow$

خرپاها:

خرپا مجموعه ای از میله هاست که بوسیله مفصل هایی بهم متصل شده اند و ترکیبات مثلثی شکل تشکیل داده اند از خرپاها معمولاً برای پوشاندن دهانه های بزرگ مانند سوله ها و دالان های بزرگ استفاده می شود در خرپاها هر کدام از میله ها تنها نیروهای محوری را تحمل کرده و توان تحمل نیروهای برشی و خمشی را ندارند



n: تعداد اعضا

J: تعداد گره ها

r: تعداد واکنش های تکیه گاهی

شرط لازم برای پایداری خرپا : $n+r \geq 2J$

خرپا معین : $n+r = 2J$

خرپا نامعین : $n+r > 2J$

درجه نامعینی : $(n+r)-2J$

خرپا ناپایدار : $n+r < 2J$

روش های حل مسائل خرپا:

۱) روش گره یا مفصل: در این روش مراحل کار به شرح زیر است:

۱- با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل جسم صلب واکنش های تکیه گاهی را بدست می آوریم

۲- در هر یک از گره های خرپایی به ترتیب دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل گره نیروهای اعضای متصل به گره را محاسبه می کنیم در این زمینه لازم است به نکات زیر توجه شود:

- هر عضو خرپایی معادل یک نیروی مجهول با راستای معلوم به موازات عضو خرپایی باشد

با توجه به آنکه برای هر گره در حالت دو بعدی تنها دو معادله تعادل وجود دارد و با این دو معادله تنها دو مجهول را می توان محاسبه کرد در ابتدا باید به سراغ گره هایی برویم

گره فقط دو عضو به آن ها متصل باشد (در حالت سه بعدی سه معادله وجود دارد و باید به سراغ گره های با حداکثر سه عضو برویم)

با محاسبه نیروی اعضا از تعداد مجهولات در گره های مجاور نیز کاسته می شود و می توان به سراغ گره های با بیش از دو عضو نیز رفت

- باید توجه کرد که نیرو در هر عضو مقداری ثابت است. هر عضو خرپایی به دو گره ابتدا و انتهای خود دو نیروی موازی، مساوی اما مختلف الجهت وارد می کند پس اگر بطور مثال نیرویی وارد به گره ابتدای عضو به صورت آمده در شکل رسم کردیم آنگاه در گره انتها باید اعمال نیرو را با جهتی مخالف قرار دهیم

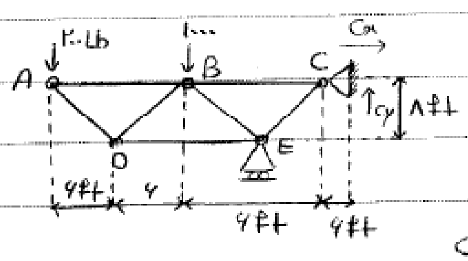
جهت نیروی عضو خرپایی را معمولاً با توجه به فشاری یا کششی بودن نیروی عضو نمایش می دهند اگر نیرویی که عضو به گره وارد می کند به سمت خارج عضو باشد عضو در فشار است و اگر این نیرو به سمت محور عضو باشد عضو در کشش است

$\Rightarrow$ P, C (-) فشاری

$\Rightarrow$ T , (+) کششی

توجه: نیروی عکس العملی که گره به عضو وارد می کند مساوی و خلاف جهت نیرویی است که عضو به گره وارد می کند. معمولاً در حل مسائل خرپا با نیروی اعمال شده از طرف عضو به گره سروکار داریم

مثال: با استفاده از روش مفصل ها نیرو در اعضای خرپای زیر را بدست آورید.
(۶-۱ ص ۱۸۳)



J = ۵ , n = ۷ , r = ۳

۲×۵ = ۷ + ۳ $\Longrightarrow$ خرپا پایدار

اگر خرپا ناپایدار شود از روش های استاتیکی قابل حل نیست

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow 2000 \times 24 + 1000 \times 12 - E_y \times 6 = 0 \Rightarrow E_y = 10000\ Lb$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2000 - 1000 + 10000 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -7000\ Lb$

حال باید به سراغ گره‌ها رفته و دیاگرام آزاد آن‌ها را رسم کنیم، برای شروع باید به سراغ گره‌های ۲ عضوی رفت، در اینجا گره A و C دو عضوی هستند

گره A : $\Rightarrow \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{8}{6}\right) \simeq 53°$

چون نیروی اعضا نامشخص است بطور قراردادی آن‌ها را با جهت کششی رسم می‌کنیم در انتها اگر برای عضو مقدار نیرو مثبت بدست آمد فرض اولیه صحیح است وگرنه جهت نیرو فشاری است

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2000 - F_{AD} \sin 53 = 0$

$\Rightarrow F_{AD} = -2500\ Lb$

$\Rightarrow F_{AD} = 2500\ Lb$ (P) L (C)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 2500 \cos 53 = 0 \Rightarrow F_{AB} = 1500\ Lb$ (T)

با محاسبه نیروی عضو AD در گره D دو مجهول وجود خواهد داشت و این گره نیز قابل حل است.
در مورد نیروی عضو AD، چون جهت نیرو در گره A به سمت بالا و چپ است، در گره D این نیرو برعکس به سمت پایین و راست خواهد بود

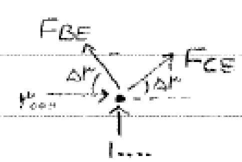
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2500 \sin 53 + F_{BD} \sin 53 = 0$

$\Rightarrow F_{BD} = 2500\ Lb$ (T)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 2500 \times \cos 53 + F_{DE} + 2500 \cos 53 = 0$

$\Rightarrow F_{DE} = -3000\ Lb$ (C)

گره E :



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3000 - F_{BE} \cos 53 + F_{CE} \cos 53 = 0$

$\Rightarrow 0.6 F_{BE} + 0.6 F_{CE} = -3000$

$F_{CE} - F_{BE} = 5000$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10000 + F_{BE} \sin 53 + F_{CE} \sin 53 = 0$

 $10000 + 0.8 F_{BE} + 0.8 F_{CE} = 0$ (2)

$$10000+0.8F_{BE}+0.8(F_{BE}-5000)=0 \Rightarrow 10000+1.6F_{BE}-4000=0$$

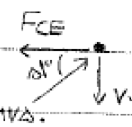
$$\Rightarrow 1.6F_{BE}=-6000 \Rightarrow F_{BE}=-3750$$

$$\Rightarrow F_{BE}=3750\ Lb\ (C)$$

مقدار بدست آمده را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$F_{CE}=-3750-5000=-8750 \Rightarrow F_{CE}=8750\ Lb\ (C)$$

گره C :



$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -F_{BC}+8750\cos 53^\circ=0$$

$$\Rightarrow F_{BC}=5250\ (T)$$

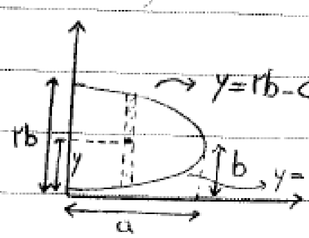
معادله تعادل در راستای محور y را نیز فقط جهت کنترل جواب می‌نویسیم

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -7000+8750\sin 53^\circ=-7000+8750\times 0.8$$

$$-7000+7000=0 \ \checkmark$$

مثال: مرکز سطح شکل نشان داده شده را با انتگرال‌گیری مستقیم بدست آورید؟ (۵-۴۷ ص ۲۵۲)

محاسبه K :



$$x=a \Rightarrow y=b$$

$$b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

محاسبه C :

$$x=a \Rightarrow y=b$$

$$b=2b-ca^2 \Rightarrow -b=-ca^2 \Rightarrow c=\frac{b}{a^2}$$

عرض المان : dx ارتفاع المان : $(2b-cx^2)-(kx^2)=\left(2b-\frac{b}{a^2}x^2\right)-\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)$

$$=2b-\frac{2b}{a^2}x^2$$

$$dA=dx\times\left(2b-\frac{2b}{a^2}x^2\right)$$

$$A=\int dA=\int_0^a\left(2b-\frac{2b}{a^2}x^2\right)dx=2b\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=2b\left[a-\frac{a^3}{3a^2}\right]=\frac{4ab}{3}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int x\left(2b-\frac{2b}{a^2}x^2\right)dx=2b\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a=2b\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4a^2}\right]=\frac{ba^2}{2}$$

$$Q_x=\int y\,dA=\int y\left(2b-\frac{2b}{a^2}x^2\right)dx$$

در محاسبه Q_x در انتگرال به جای y باید مختصات y مرکز المان قرار داده شود

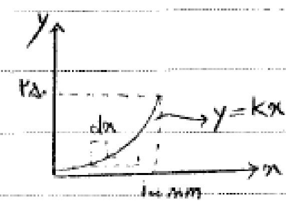
$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a^2}x^2+\left(2b-\frac{b}{a^2}x^2\right)\right]=b$$

$$\Rightarrow Q_x=\int_0^a b\left(2b-\frac{2b}{a^2}\right)x^2dx=2b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=2b^2\left[a-\frac{a^3}{3a^2}\right]=\frac{4ab^2}{3}$$

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{ba^2/2}{4ab/3}=\frac{3}{8}a \qquad \bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{4ab^2/3}{4ab/3}=b$$

مثال: منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر را به اندازه ۱۸۰° حول محور y دوران می‌دهیم. مساحت جانبی شکل فضایی به دست آمده چقدر است؟

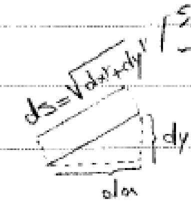
محاسبه K:



$$x=100 \Rightarrow y=250 \Rightarrow 250=K\times100^2$$
$$K=0/025$$
$$\rightarrow y=0/025x^2$$

$$A=[2\pi\bar{x}\times S]\times\frac{\pi}{2\pi}=\pi\bar{x}.S$$

چون دوران کامل نیست باید سطح جانبی را با توجه به تناسب به دست آوریم



$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=dx\sqrt{1+y'^2} \qquad y'=0/05x$$

ماشین حساب

$$S=\int_0^{100}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{100}\sqrt{1+0/0025x^2}\,dx=212/01$$

$$\int\sqrt{a^2+u^2}\,dx$$

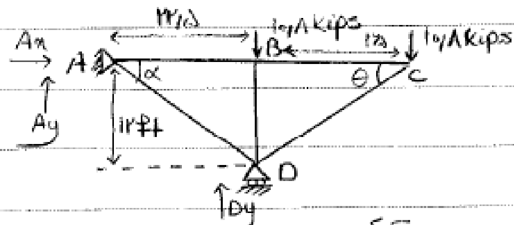
$$u=a\tan t \Rightarrow 0/05x=\tan t \Rightarrow x=20\tan t$$

$$du=a\sec^2t\,dt \Rightarrow du=a(0/05x)=0/05dx=\sec^2t\,dt$$
$$\Rightarrow dx=20\sec^2t\,dt$$

$$S=\int\sqrt{1+20\tan^2t}\times20\sec^2t\,dt=\left[\frac{(1+20\tan^2t)^{3/2}}{3/2}\right]$$

حل نشد

مثال: با استفاده از روش مفاصل نیروی اعضای خرپای زیر را حساب کنید.



$n=۵ \quad J=۴ \quad r=۳$

$۵+۳=۲\times۴=۸ \Rightarrow$ معین است

معادلات تعادل را می‌نویسیم:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0$

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow -۱۰/۸\times۵۷/۵-۱۰/۸\times۲۲/۵+D_y\times۲۲/۵=0$

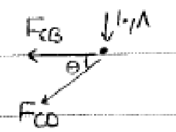
$\Rightarrow D_y=۳۸/۴$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y+۳۸/۴-۱۰/۸-۱۰/۸=0 \Rightarrow A_y=-۱۴/۸$

$A_y=۱۴/۸\downarrow$

از یکی از گره‌های دو عضوی شروع می‌کنیم، A و C دو عضوی اند

گره C:



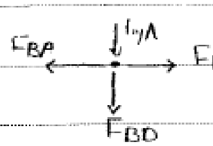
$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۳۵}\right)=۱۸/۹$

$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۲۲/۵}\right)=۲۸/۱$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -۱۰/۸-F_{CD}\sin۱۸/۹ \Rightarrow F_{CD}=-۳۳/۳ \Rightarrow F_{CD}=۳۳/۳\ \text{kips}\ (C)$ فشاری

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -F_{CB}+۳۳/۳\cos۱۸/۹=0 \Rightarrow F_{CB}=۳۱/۵\ (T)$ کششی

گره B:



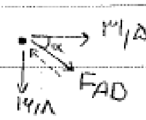
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -F_{BA}+۳۱/۵=0$

$F_{BA}=۳۱/۵\ (T)$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -۱۰/۸-F_{BD}=0 \Rightarrow F_{BD}=-۱۰/۸$

$\Rightarrow F_{BD}=۱۰/۸\ (C)$

گره A:



$\Sigma F_x=0 \Rightarrow ۳۱/۵+F_{AD}\cos۲۸/۱=0$

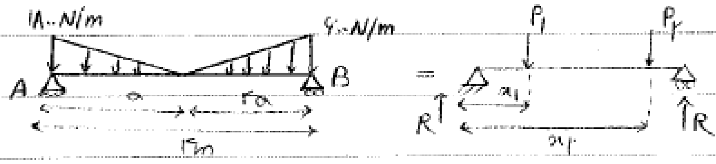
$F_{AD}=-۳۵/۷\ \text{kips}$

$F_{AD}=۳۵/۷\ (C)$ فشاری

معادله $\Sigma F_y=0$ را برای کنترل درستی جواب می‌نویسیم

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -۱۴/۸+۳۵/۷\sin۲۸/۱\simeq۰/۷$

مثال: در تیر شکل زیر فاصله a را به گونه‌ای تعیین کنید که واکنش‌های دو تکیه‌گاه با هم مساوی شوند؟ (۵-۸۵ ص ۱۸۱)



$P_1 = \frac{1800a}{2} = 900a \ , \quad x_1 = a/3$

$P_2 = \frac{600(4-a)}{2} = 300(4-a) \quad \rightarrow \quad x_2 = 4 - \frac{(4-a)}{3} = \frac{8-a}{3}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2R - 900a - 300(4-a) = 0 \longrightarrow 2R \ 900a - 1200 + 300a = 0$

$R = 300a + 600 \quad (1)$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \rightarrow 4R - P_2 \times x_2 - P_1 \times x_1 = 0 \rightarrow 4(300a + 600) \ 300(4-a)\left(\frac{8-a}{3}\right)$

$-900a \times a/3 = 0$

$\Longrightarrow 1200a + 2400 - 3200 + 1200a - 100a^2 - 300a^2 = 0$

$-400a^2 + 2400a - 800 = 0 \Longrightarrow a^2 - 6a + 2 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4(2)(1) = 28$

$a = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = \begin{cases} a = 5.64 > 4 \ \times \\ a = 0.35 \ \checkmark \end{cases}$

$\Rightarrow R = 300 \times 0.35 + 600 = 705 \ N$

روش مقطع:

این روش بیشتر در حالتی استفاده می‌شود که نیروی یک یا چند عضو خاص از خرپا مورد نظر باشد. نحوه حل مسئله در این روش به شرح زیر است:

۱) با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل، واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم.

۲) در خرپا یک مقطع ایجاد می‌کنیم. مقطع ایجاد شده باید دارای شرایط زیر باشد:

الف) خرپا را کاملاً به دو تکه مجزا تقسیم کند.

ب) عضو یا اعضای مورد نظر را قطع کند. اگر تعداد اعضای مورد نظر دو یا بیشتر باشد

ممکن است بیش از یک قطع نیاز باشد

ج) تعداد اعضای قطع شده حداکثر سه عضو باشند. اگر در مقطع جز عضو مورد نظر بقیه عضوهای قطع شده موازی یا همرس باشند می شود تعداد اعضای قطع شده بیش از ۳ عضو باشد

د) اعضای قطع شده همگی موازی یا همرس نباشند

۲) از تکه های ایجاد شده در خرپا یک تکه را انتخاب کرده دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم. دیاگرام آزاد این تکه شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر آن است. در دیاگرام آزاد اعضای قطع شده با رسم نیروی کششی نیروهای آنها به صورت مجهول ترسیم می گردد

۳) در تکه انتخاب شده معادلات تعادل را می نویسیم تا نیروی عضو یا اعضای مورد نظر محاسبه شوند

اگر نقطه همرسی دو عضو غیر از عضو مورد نظر باشد بهتر است برای راحتی کار نقطه معادلات لنگر را بنویسیم که منجر به نیروی آن عضو شود

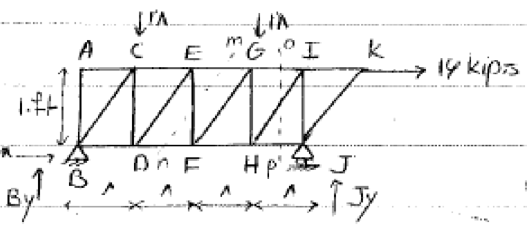
این معادله بیشتر برای کنترل است. ابتدا دو معادله تعادل $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$ را کنترل می کنیم که آیا نیروی عضو مورد نظر به دست می شود یا خیر (ممکن است برای تعیین مجبور شویم معادلات را به صورت همزمان در نظر بگیریم) اگر دو معادله فوق منجر به تعیین نشد سراغ معادله تعادل لنگر می رویم. در این حالت عضو مورد نظر را کنار گذاشته و دیگر نیروهای مجهول را امتداد می دهیم تا همدیگر را در یک نقطه قطع کنند (نقطه همرسی)

سپس معادله تعادل لنگر را حول نقطه مورد نظر می نویسیم تا نیروی عضو مورد نظر به دست آید

بعضاً ممکن است مقطعی وجود نداشته باشد که تمام شرایط مورد نظر را داشته باشد. در این حالت در مجاورت عضو مورد نظر مقطعی کمکی می زنیم و نیروی اعضای مجاور را به دست می آوریم سپس با کم شدن تعداد مجهولات به مقطع اصلی باز می گردیم و نیروی عضو مورد نظر را می یابیم

در برخی موارد پس از برش قطعه ای از خرپا به وجود می آید که در آن دو تکه حضور دارند در این حالت می توان از روش مفاصل و اتصالات برای قطع رفت

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای EF و GI در خرپای شکل زیر.
ابتدا نمودار آزاد خرپا را رسم می‌کنیم



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 16$

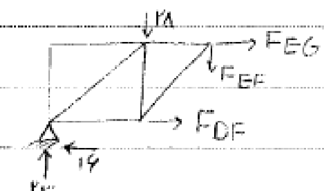
$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -16\times10 + J_y \times 32 - 28\times24 - 28\times8 = 0$

$\Rightarrow J_y = 33 \text{ kips}$

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y - 28 - 28 + 33 = 0 \Rightarrow B_y = 23$

مقطعی وجود دارد که شامل هر دو عضو مورد نظر بوده و تمام شرایط را نیز دارد، با این حال برای هر کدام از دو عضو یک مقطع به صورت جداگانه می‌زنیم

عضو EF: مقطع mn را می‌زنیم و یک سمت چپ را انتخاب کرده و دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم

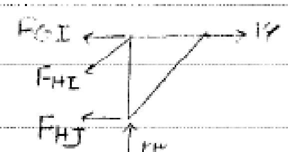


معادله $\Sigma F_y = 0$ مستقیماً نیروی عضو EF را نتیجه می‌دهد

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 23 - 28 - F_{EF} = 0$

$\Rightarrow F_{EF} = -5 \Rightarrow F_{EF} = 5 \text{ kips}$ فشاری

عضو GI: برای عضو GI از مقطع OP مطابق شکل کمک می‌گیریم. سپس دیاگرام آزاد سمت راست را رسم می‌کنیم



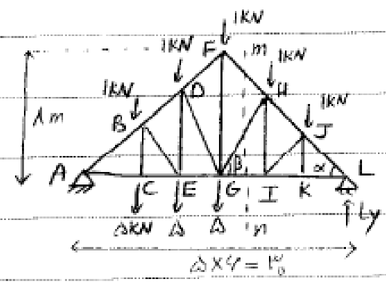
در اینجا دو معادله $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ منجر به نیروی عضو GI نمی‌شوند پس سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم

عضو GI را کنار گذاشته و نیروی دو عضو دیگر یعنی HI و HJ را امتداد می‌دهیم. این دو عضو دیگر را در نقطه H قطع می‌کنند پس معادله تعادل لنگر را حول این نقطه می‌نویسیم

$\circlearrowleft \Sigma M_H = 0 \Rightarrow -16\times10 + 33\times8 + F_{GI}\times10 = 0 \Rightarrow F_{GI} = -10.4$

$\Rightarrow F_{GI} = 10.4$ فشاری

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای FH، GI و GH در خرپای زیر؟

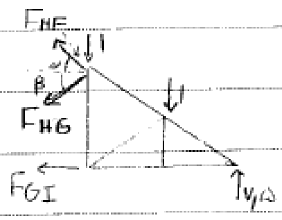


برای تعیین نیروی عضوهای خواسته شده از مقطع عبوری mn نشان داده شده در شکل استفاده کنیم و بهتر است تکه سمت راست که شکل و بارگذاری ساده‌تری دارد انتخاب کنیم. در تکه سمت راست واکنش تکیه‌گاه L وجود دارد که ابتدا باید این واکنش محاسبه شود.

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow L_y \times 30 - 1\times 25 - 1\times 20 - 1\times 15 - 1\times 10 - 1\times 5 - 5\times 15 - 5\times 10 - 5\times 5 = 0$$

$$\Rightarrow L_y = 7.5\,KN$$

حال دیاگرام تکه سمت راست مقطع mn از خرپا را رسم می‌کنیم. ابتدا با توجه به هندسه اندازه زوایای α و β و طول قطعه HI را بدست می‌آوریم.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) = 28.07^\circ$$

$$\text{تشابه}: \quad \frac{HI}{8} = \frac{10}{15} \Rightarrow HI = 5.33\,m$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{5.33}{5}\right) = 46.85^\circ$$

حال به سراغ معادلات تعادل می‌رویم. از دو معادله $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ به نتیجه نمی‌رسیم پس به سراغ معادله تعادل گشتاور می‌رویم. برای عضو GI معادله تعادل گشتاور حول نقطه H نوشته می‌شود.

$$\circlearrowleft \Sigma M_H = 0 \Rightarrow -F_{GI} \times 5.33 - 1\times 5 + 7.5\times 10 = 0 \rightarrow F_{GI} = 13.13$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_G = 0 \Rightarrow 7.5\times 15 - 1\times 10 - 1\times 5 + F_{HF} \times GH \sin(\alpha+\beta)$$

$$GH = \sqrt{5^2 + 5.33^2} = 7.31$$

$$\alpha+\beta = 28.07 + 46.85 = 74.92^\circ$$

مقادیر فوق را در معادله بالا جایگزین می‌کنیم.

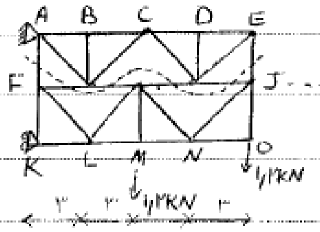
$$F_{FH} = -13.81 \Rightarrow F_{FH} = 13.81 \text{ فشاری}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_{HG} \sin 46.85 - 13.81 \sin 28.07 - 1 - 1 + 7.5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = -1.371\,KN \Rightarrow F_{HG} = 1.371\ (C)$$

تمرین: مطلوبست تعیین نیرو در اعضای AF و EJ در خرپای شکل زیر؟

راهنمایی: از مقطع ترسیم شده در شکل کمک بگیرید؟



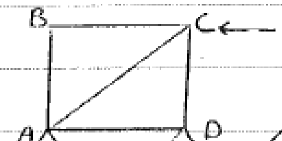
مقطع نشان داده شده در شکل بیش از ۳ عضو را قطع می‌کند اما با توجه به اینکه سه نیروی اعضای دیگر از یک نقطه می‌گذرند، مقطع قابل قبول است!

نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه تقارب سه نیروی دیگر، نیروی عضو مورد نظر را بدست می‌آورد

EJ : $\Sigma M_F = 0$, AF : $\Sigma M_J = 0$

موارد خاص در خرپا:

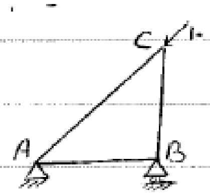
۱) گره‌های دو عضوی: در گره‌های دو عضوی می‌توان مستقیماً دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و نیروی هر دو عضو را بدست آورد. اگر گره متصل به تکیه‌گاه باشد ابتدا باید واکنش آن تکیه‌گاه را محاسبه کرد و سپس دیاگرام آزاد گره را رسم کرد. اگر گره فاقد نیرو باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند شد



گره B دو عضوی و فاقد نیرو است

$F_{AB}=F_{BC}=0$

اگر در گره دو عضوی یک نیرو داشته باشیم و آن نیرو موازی یکی از دو عضو باشد نیرو مستقیماً به آن عضو منتقل می‌شود و عضو دیگر صفر نیرویی می‌شود

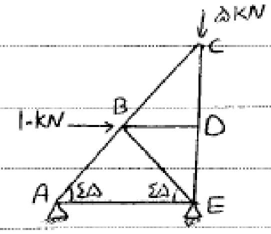


$F_{AC}=10KN$

$F_{BC}=0$

۲) گره سه عضوی وقتی که دو عضو موازی هم باشند.

در این حالت می‌توان دیاگرام آزاد گره را ترسیم نموده و معادله تعادل در راستای محوری عمود بر دو عضو موازی را نوشت و نیروی عضو سوم را محاسبه کرد. اگر در راستای این محور مؤلفه نیرویی نباشد عضو سوم صفر نیرویی است

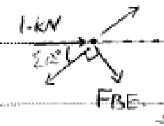


با صفر شدن عضو BD این عضو قابل حذف است آنگاه گره D نیز دارای همین شرایط است

گره D: سه عضوی } DE و CD موازی

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$

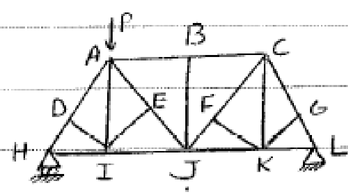
گره B:



$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow 1 \cdot \sin 45 + F_{BE} = 0$

$F_{BE} = -0.707 \Rightarrow F_{BE} = 0.707$ فشاری

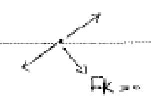
مثال: در خرپای شکل، اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید.



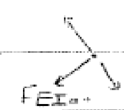
در ابتدا گره های دو عضوی فاقد نیرو می باشند گره H و L دو عضوی اند اما به دلیل واکنش های تکیه گاهی دو نیرو وارد می شود نیروهای تکیه گاهی در راستای یکی از دو عضو هستند پس نیروی عضو دیگر صفر نیرویی است

گره های "۳ عضوی با دو عضو موازی": گره B:

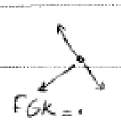
گره F:



گره E:



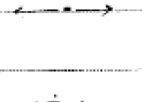
گره G:



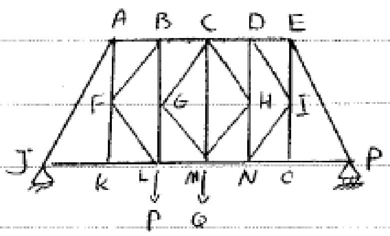
گره D:

گره K:

گره I:



مثال: در خرپای شکل، اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید.



هیچ گره دو عضوی دارای شرایط عضو صفر نیرویی نمی باشد

گره های سه عضوی با دو عضو هم راستا :

گره O :

گره K :

گره های دیگر فاقد شرایط عضو صفر نیرویی اند

قاب ها (سازه های دارای اعضای چند نیرویی) :

قاب مجموعه ای از اعضایی است که با اتصالات مفصلی به یکدیگر متصل شده اند آنچه قاب را از خرپا متمایز می کند وجود یک یا چند عضو چند نیرویی است

۱) اعضا می توانند غیر از مفصل ها در نقاط میانی خود نیز شامل بار باشند

۲) الزامی به مستقیم بودن عضو نیست و عضو می تواند به صورت منحنی یا چند تکه نیز باشد

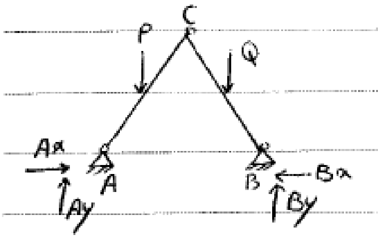
۳) الزامی ندارد که عضو فقط در دو انتهای خود به اعضای مجاور وصل شده باشد و غیر از نقاط فوق می تواند در نقاط میانی خود نیز با اعضای مجاور متصل شود

روش حل مسائل قاب

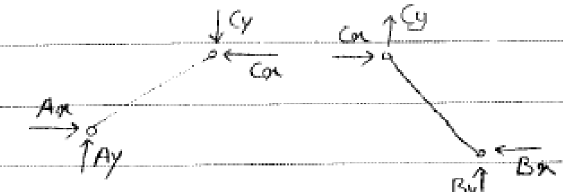
ابتدا با رسم دیاگرام آزاد قاب و نوشتن معادلات تعادل واکنش های تکیه گاهی قاب را محاسبه می کنیم سپس قاب را به چند تکه تقسیم می کنیم و برای هر تکه از قاب دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم و معادلات تعادل را می نویسیم در رسم دیاگرام آزاد در هر مفصل باید دو واکنش افقی و عمودی مجهول قرار داده شود. برای قطعات مجاور در محل مفصل مقادیر واکنش ها همان مقادیر ولی با جهات متفاوت هستند (برآیند نیروهای مختلف وارد بر مفصل از طرف قطعات مختلف باید صفر شود)

اگر بیش از دو قطعه به یک مفصل متصل شده باشند واکنش های وارد بر گره از طرف هر یک از قطعات لزومی ندارد که با هم مساوی باشند اما در هر صورت برآیند آنها باید صفر شود به جای دو واکنش افقی و عمودی مجهول می توان یک واکنش

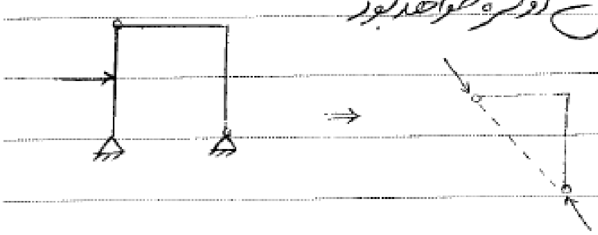
با مقدار و راستای مجهول نیرو جایگزین کرد



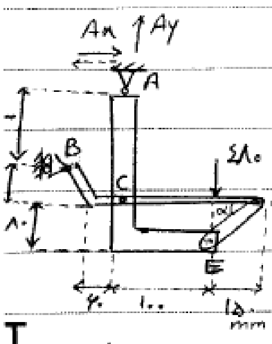
چون نیروها به گره‌ها وارد نمی‌شوند مجموعه قاب است نه خرپا، لزومی ندارد که در مرحله اول تمام واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه شود و ممکن است در حالتی که تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی چهار یا بیشتر باشد برخی از واکنش‌ها به جای استفاده از معادلات تعادل کل قاب از طریق معادلات تعادل قطعات قاب بدست آید



نکته: اگر عضوی از قاب فقط به دو مفصل متصل باشد و در فاصله ابتدا تا انتهای خود (غیر از دو مفصل) فاقد نیرو باشد، نیرویی که گره‌ها به قطعه وارد می‌کنند یک تک نیرو در راستای خط واصل دو گره خواهد بود



مثال: در قاب نشان داده شده عضوهای ACE و BCD بوسیله پین C و میله DE به هم متصل شده‌اند با توجه به بارگذاری مفروض نیرو در میله DE و مولفه‌های نیروی وارد بر عضو BCD در نقطه C را تعیین کنید.



مجموعه شامل سه تکه ACE و BCD و DE می‌باشد

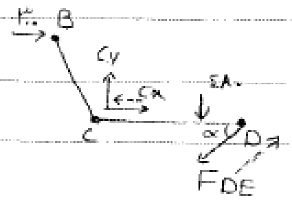
قطعه DE حالت یک میله را دارد و نیروی آن در راستای DE می‌باشد، دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می‌کنیم

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 480 = 0 \quad A_y = 480\,N \uparrow$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -480 \times 100 + B_x \times 160 = 0 \Rightarrow B_x = 300$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 300 + A_x = 0 \quad A_x = -300 \Rightarrow A_x = 300\,N \leftarrow$

عضو BCD :



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{80}{150}\right) = 28.07^\circ$

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow -300 \times 60 - C_y \times 250 + 480 \times 150 = 0$

$\Rightarrow C_y = 216\,N \uparrow$

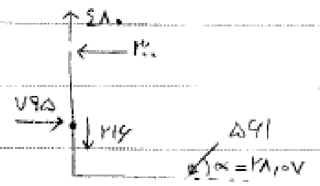
$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 216 - 480 - F_{DE} \sin 28.07 = 0 \Rightarrow F_{DE} = -561\,N$

$\Rightarrow F_{DE} = 561\,N\,(C)$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 300 + C_x + 561 \cos 28.07 = 0$

$\Rightarrow C_x = -795\,N \Rightarrow C_x = 795\,N \leftarrow$

قطعه ACE :

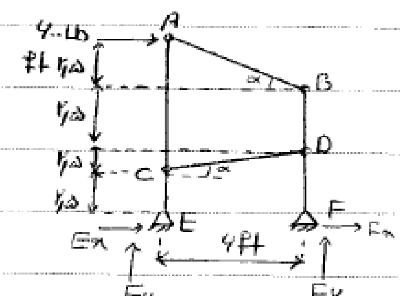


نکته : نیرویی که میله DE بر روی مفصل ابتدا و انتهای خود وارد می‌کند مساوی و خلاف جهت است

در اینجا هیچ واکنش مجهولی وجود ندارد فقط جهت کنترل جواب یکی از معادلات تعادل را می‌نویسیم

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 795 \times 320 - 561 \cos 28.07 \times 300 - 561 \sin 28.07 \times 100 = 0$ ✓

مثال : در قاب مطابق شکل نیروی افقی ۶۰ پوند بر پین A وارد می‌شود نیروهای وارد بر روی عضو عمودی این قاب را تعیین کنید؟



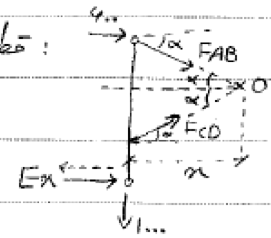
مجموعه شامل چهار تکه ACE ، BDF و AB و CD می‌باشد دو قطعه AB و CD میله می‌باشند میله‌ها دارای یک تک نیرو در راستای خود هستند که جهت این نیرو در روی مفصل ابتدا و انتها مخالف هم می‌باشند دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می‌کنیم

$\checkmark\ \Sigma M_E=0 \Rightarrow -400\times10+F_y\times4=0 \Rightarrow F_y=1000\ Lb\uparrow$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow E_y+1000=0 \Rightarrow E_y=-1000\ Lb \Rightarrow E_y=1000\downarrow$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow E_x+F_x+400=0 \Rightarrow E_x+F_x=-400 \quad (1)$

ACE قطعه :



$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2.5}{6}\right)=22.6^\circ$

$\tan\alpha=\frac{3.75}{x} \Rightarrow x=\frac{3.75}{\tan\alpha}=\frac{3.75}{\tan 22.6}=9\ ft$

گشتاور را حول نقطه O می نویسیم تا دو مجهول از ۳ مجهول کم شود

$\checkmark\ \Sigma M_O=0 \Rightarrow 1000\times9-400\times3.75+E_x\times6.25=0$

$\Rightarrow E_x=-1080\ Lb \Rightarrow E_x=1080\leftarrow$

مقدار بدست آمده را در معادله (۱) قرار می دهیم چون برای Ex عدد منفی بدست آمده است در آنجا نیز با علامت منفی جایگزین می شود

معادله (1) $\Rightarrow -1080+F_x=-400 \Rightarrow F_x=\overrightarrow{480\ Lb}$

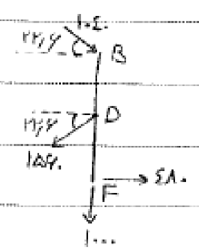
$\checkmark\ \Sigma M_A=0 \Rightarrow -1080\times10+F_{CD}\times7.5\times\cos22.6=0$

$\Rightarrow F_{CD}=1560\ Lb\ (T)$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -1080+400+1560\cos22.6+F_{AB}\cos22.6=0$

$F_{AB}=-1040\ lb \quad F_{AB}=1040\ (C)$

قطعه BDF فقط جهت کنترل جواب ترسیم و یکی از معادلات آن نوشته می شود



$\overrightarrow{\Sigma F_x=0} \Rightarrow 1040\cos22.6-1560\times\cos22.6+480=0\ \checkmark$