فصل ۷ تبدیل لاپلاس

مقدمه

مسئله $\begin{cases} y'+y=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 1 & t>1\end{cases} \\ y(0)=1\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف ـ برای $0<t<1$ داریم $y'+y=0$ که دارای جواب عمومی $y=Ae^{-t}$ است و از شرط $y(0)=1$ به دست می‌آید $A=1$ یعنی در بازه $0<t<1$ جواب $y=e^{-t}$ است.

ب ـ برای $t>1$ داریم $y'+y=1$ که دارای جواب عمومی $y=Ae^{-t}+1$ است و از شرط $y(1)=e^{-1}$ (که از جواب قسمت قبل به دست می‌آید و برای پیوستگی y در $t = 1$ لازم است)، نتیجه می‌شود $A=1-e$ یعنی جواب در بازه $t>1$ به صورت $y=(1-e)e^{-t}+1$ است.

اینک می‌توان جواب کلی را به صورت زیر نوشت:

$$y=\begin{cases} e^{-t} & 0<t<1 \\ (1-e)e^{-t}+1 & t>1 \end{cases}$$

طبیعی است اگر طرف ثانی معادله اصلی از ضابطه‌های بیشتر و پیچیده‌تری تشکیل شده بود، به دست آوردن جواب هر محدوده و سپس مچ‌کردن این جواب‌ها در نقاط مرزی بسیار دشوار می‌شد.

در مسایل کاربردی، به‌طور مرتب با سیستم‌هایی روبه‌رو می‌شویم که تحت تأثیر نیروهایی شامل توابع متناوب پیچیده ـ نه صرفاً از جنس توابع متناوب ساده مثل سینوس ـ و یا توابع با ناپیوستگی و یا وضعیت‌های ضربه‌ای، قرار دارند.

در چنین مواردی یافتن پاسخ سیستم از طریق روش‌های گفته شده در فصول قبل معمولاً با اشکلاتی همراه است، درحالی‌که استفاده از تبدیل لاپلاس به عنوان یکی از تبدیلات انتگرالی می‌تواند بسیار کارآمد باشد.

به‌طور کلی در ریاضیات مدام با تبدیلات سروکار داریم مثلاً عمل مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری، تبدیلاتی هستند که به تابع معلوم $f(x)$ توابع $f'(x)$ یا $\int f(x)dx$ را نظیر می‌کنند، همچنین تبدیلات انتگرالی، تبدیلاتی هستند که از توابع مفروض، توابع جدید می‌سازند که به متغیری غیر از متغیر اولیه وابسته‌اند.
ایده کلی تبدیلات انتگرالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(f(x)) = F(s) = \int_a^b k(x,s)f(x)dx$$

که در آن $k(x,s)$ را هسته تبدیل می‌نامند.

مزیت اساسی استفاده از تبدیل لاپلاس آن است که در حل یک معادله خطی غیرهمگن که با شرایط اولیه خاص مطرح شده، مراحل مربوط به روش‌های قبلی یعنی:

۱ـ حل معادله همگن نظیر و یافتن پایه‌های جواب.

۲ـ حل معادله غیرهمگن و یافتن جواب خصوصی.

۳ـ بیان جواب عمومی و اعمال شرایط اولیه برای یافتن ثابت‌ها.

طی نمی‌شود، بلکه با بردن مسئله در فضای دیگر، تبدیل لاپلاس جواب مسئله اصلی به دست آمده و درنهایت با محاسبه معکوس آن، جواب مورد نظر به دست می‌آید، البته مشکل اصلی این فرآیند در قدم آخر یعنی یافتن جواب از روی لاپلاس آن خواهد بود.
اگرچه اساسی‌ترین کاربرد تبدیل لاپلاس حل معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی است، اما از آن در حل معادلات انتگرالی که با مفهوم پیچش دو تابع مرتبط هستند و همچنین محاسبه برخی انتگرال های خاص نیز استفاده خواهیم کرد.

در این فصل پس از تعریف تبدیل لاپلاس و شرایط وجودی آن، تبدیل لاپلاس چند تابع اصلی معرفی و سپس قضایای تبدیل لاپلاس مطرح خواهد شد.
به طور طبیعی مسایل این فصل در سه طبقه زیر قرار خواهند گرفت:

۱ـ محاسبه لاپلاس توابع.

۲ـ محاسبه لاپلاس معکوس توابع.

۳ـ حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی.

در انتهای فصل با بیان مجدد قضایای تبدیل لاپلاس در فرم‌های مستقیم و معکوس ـ این‌بار در قالب جملاتی به زبان عامیانه که می‌تواند به تثبیت آن‌ها در ذهن کمک شایانی بکند ـ جمع‌بندی و پیشنهادهایی در استفاده از این قضایا ارائه می‌شود.

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یکی از روش‌های مناسب برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه معلوم می‌باشد. در این فصل راجع به ویژگی‌های این تبدیل بحث خواهیم نمود.

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t>0$ تعریف می‌گردد را با نماد $L(f(t))$ یا $F(s)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (\text{با شرط } s>0)$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌نامیم و داریم:

$$L^{-1}(F(s))f(t)$$

تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس اپراتورهای خطی هستند، یعنی هر گاه a و b دو عدد ثابت باشند، داریم:

$$L(af(t)+bg(t))=aL(f(t))+bL(g(t))$$

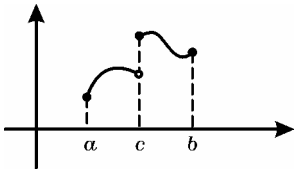
$$L^{-1}(aF(s)+bG(s))=aL^{-1}(F(s))+bL^{-1}(G(s))$$

تبدیل لاپلاس بعضی از توابع مهم را در زیر ملاحظه می‌کنید. توجه به این نکته بسیار اهمیت دارد که حفظ کردن روابط زیر به گونه‌ای که با داشتن $F(s)$ در هر حالت بتوان سریعاً $f(t)$ را مشخص نمود و برعکس، لازم و ضروری است.

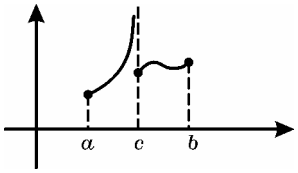
دقت کنید شرط نوشته شده برای s در هر قسمت، شرط همگرا شدن انتگرال مربوط به تعریف تبدیل لاپلاس تابع مورد نظر است و به تعبیری شرط وجود تبدیل لاپلاس خواهد بود. اگرچه ما در مسایل بدون بیان این شرایط، از فرمول‌های مذکور استفاده می‌کنیم.

تابع $f(t)$	تبدیل لاپلاس $F(s)$	شرط
a	$\frac{a}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n\in N$ و $s>0$
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$a>-1$ و $s>0$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
$J_n(at)$	$\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s>0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s>0$

تعریف: تابع f را در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته می‌گوئیم، هرگاه f در کل این فاصله بجز احتمالاً تعداد متناهی نقطه، پیوسته بوده و در هر نقطه ناپیوستگی دارای حدود چپ و راست باشد.



تابع در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته می‌باشد.



تابع در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته نمی‌باشد
(زیرا در نقطه c حد چپ موجود نیست)

تابع f را بر $[0,+\infty)$ قطعه‌ای پیوسته می‌نامیم هرگاه f برای هر $t_0>0$ در بازه $[0,t_0]$ قطعه‌ای پیوسته باشد.

مثلاً $f(t)=[t]$ بر $[0,+\infty)$ قطعه‌ای پیوسته است زیرا برای هر $t_0>0$ تابع مذکور در بازه $[0,t_0]$ تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی دارد (نقاط با طول صحیح) و البته در این نقاط حد چپ و راست موجود است.

ولی $f(t)=\tan t$ بر $[0,+\infty)$ قطعه‌ای پیوسته نیست زیرا تابع در $t=\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است و در این نقطه حد چپ و راست (متناهی) ندارد.

تعریف: تابع $f(x)$ را از مرتب $g(x)$ می‌گوئیم هر گاه اعداد مثبت M و x_0 ای موجود باشند که:

$$\forall x \ge x_0 \qquad |f(x)| \le Mg(x)$$

(در این بحث اگر $g(x)=e^{ax}$ باشد، می‌گوئیم $f(x)$ از مرتبه نمایی است)

ثابت می‌شود اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود (متناهی) باشد دو تابع $f(x),g(x)$ هم مرتبه‌اند.

تابع f را بر $[0,+\infty)$ از مرتبه نمایی می‌نامیم هرگاه $a>0$ هایی موجود باشند که $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{e^{at}}=0$

مثلاً $f(t)=(t^2+1)e^{3t}$ از مرتبه نمایی است زیرا برای هر $a>3$ داریم:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{(t^2+1)e^{3t}}{e^{at}}=0$$

ولی $f(t)=e^{t^2}$ از مرتبه نمایی نیست زیرا برای هر عدد a ای داریم:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{at}}=\infty$$

قضیه: اگر f در هر بازه متناهی $[0,b]$ برای $b>0$ تکه‌ای پیوسته بوده و $f(t)$ هنگامی که $t\in[0,\infty)$ از مرتبه نمایی باشد آن‌گاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ موجود است.

ثابت می‌شود:

$$\lim_{s\to+\infty} F(s)=0$$

نکته: شرایط مذکور شرایط لازم برای وجود تبدیل لاپلاس نمی‌باشند مثلاً ممکن است $f(t)$ در مجاورت نقطه $t=0$ کراندار نباشد ولی اعداد مثبت N,M,m موجود باشند به‌طوری که:

$$|f(t)|<\frac{m}{t^m} \quad , \quad 0<t<N$$

به‌عبارت دیگر $f(t)$ در بازه $(0\,,\,N)$ تکه‌ای پیوسته نیست، ولی به‌دلیل وجود حد حاصل از $\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}f(t)dt$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود است.

مثلاً $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ با وجودی که در $t=0^+$ حد کراندار ندارد ولی دارای تبدیل لاپلاس است.

مثلاً تابع $f(t)=\frac{1+\cos t}{t}$ در $t=0$ ناپیوسته و دارای حد بی‌نهایت است و از آن‌جا که رفتار تابع $e^{-st}\frac{1+\cos t}{t}$ در همسایگی صفر مشابه رفتار تابع $\frac{2}{t}$ بوده و می‌دانیم $\int_0^\infty \frac{2}{t}dt$ واگرا است لذا $\int_0^\infty e^{-st}\frac{1+\cos t}{t}dt$ نیز واگرا می‌باشد و تابع $\frac{1+\cos t}{t}$ تبدیل لاپلاس ندارد.

توجه ۱: در بسیاری از موارد استفاده از ایدهٔ تجزیه کسرها برای محاسبه لاپلاس معکوس توابع گویا (توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای‌هایی از s می‌باشند) مناسب می‌باشد.

برای یادآوری مثلاً هر گاه $T(s)=\frac{A(s)}{s^4(s+1)(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)^2}$ باشد. (مخرج به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل درجه اول و درجه دوم غیرقابل تجزیه می‌باشد) می‌نویسیم:

$$T(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\frac{D}{s^3}+\frac{E}{s^4}+\frac{Fs+G}{s^2+\alpha^2}+\frac{Hs+I}{s^2+\beta^2}+\frac{Js+K}{(s^2+\beta^2)^2}$$

که در آن ثابت‌های $A,B,\ldots,J,K$ که تعدادشان دقیقاً برابر درجه مخرج $T(s)$ می‌باشد، باید پس از مخرج مشترک‌گیری مجموع سمت راست و متحد قرار دادن صورت حاصل کار با صورت $T(s)$ به‌دست آیند.

تذکر: به سادگی می‌توان دید:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)\right)=\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{1}{s^2+b^2}\right)\right)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt\right)$$

دقت کنید در هر دو مورد گفته شده تفاضل دو عامل ضرب شده در مخرج کسر عدد ثابت است.

نکته: اگر $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)}$ بوده و $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ همگی متمایز و هیچ‌کدام $P(s)$ را صفر نکنند و مضافاً $P(s)$ چند جمله‌ای با درجه کمتر از n باشد می‌توان نشان داد:

$$L^{-1}(F(s))=f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

نکته: مطابق روش هویساید اگر داشته باشیم:

$$F(s)=\frac{A_1}{(s-\alpha)}+\frac{A_2}{(s-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-\alpha)^n}$$

می‌توان نشان داد:

$$A_n=\frac{1}{0!}\lim_{s\to\alpha}\left((s-\alpha)^n F(s)\right)$$

$$A_{n-1}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to\alpha}\left((s-\alpha)^n F(s)\right)'$$

$$\vdots$$

$$A_1=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to\alpha}\left((s-\alpha)^n F(s)\right)^{(n-1)}$$

توجه ۲: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس یعنی $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ می‌توان انتگرال‌هایی در فرم $\int_0^\infty$ را محاسبه کرد (بدون آنکه نیاز به عمل انتگرال‌گیری و محاسبه تابع اولیه و اعمال حدود انتگرال باشد)

به عنوان مثال:

$$\int_0^\infty e^{-at}p(t)q(t)dt=\left(L\{p(t)q(t)\}\right)\Big|_{s=a}$$

$$\int_0^\infty a^{-t}f(t)dt=\int_0^\infty e^{\ln a^{-t}}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-t\ln a}f(t)dt=L\left(f(t)\right)\Big|_{s=\ln a}$$

مثلاً برای محاسبه $I(\omega)=\int_0^\infty e^{-at}\cos^2\omega t\,dt$ داریم:

$$I(\omega)=\left(L\left(\cos^2\omega t\right)\right)\Big|_{s=a}=\left(L\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)\right)\Big|_{s=a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+(2\omega)^2}\right)\Big|_{s=a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2+4\omega^2}\right)$$

$$=\frac{a^2+2\omega^2}{a\left(a^2+4\omega^2\right)}$$

یا برای محاسبه $I(t)=\int_0^\infty\frac{\cos\omega t}{\omega^2+a^2}d\omega$ می‌نویسیم:

$$L(I(t))=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty\frac{\cos\omega t}{\omega^2+a^2}d\omega\,dt=\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2+a^2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt}_{L(\cos\omega t)}d\omega=\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\int_0^\infty\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{\omega^2+a^2}-\frac{1}{\omega^2+s^2}\right)d\omega=\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}-\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{\omega}{s}\right)\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{s}{s^2-a^2}\cdot\frac{s-a}{as}=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}$$

و لذا خواهیم داشت:

$$I(t)=L^{-1}\left(\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}\right)=\frac{\pi}{2a}e^{-at}$$

توجه ۳: تابع $N(t)$ را تابع تهی می‌گویند هر گاه به ازاء هر t_0 مثبت داشته باشیم $\int_0^{t_0} N(t)dt=0$ مطابق قضیه لرک داریم:

$$\text{اگر}: L(f_1(t))=L(f_2(t)) \rightarrow f_1(t)-f_2(t)=N(t)$$

یعنی تبدیل لاپلاس معکوس (به‌جز در یک اختلاف تابع تهی دلخواه) منحصر به فرد است. به‌خاطر داشته باشید اگر تابع تهی را کنار بگذاریم، اصولاً معکوس‌های $F(s)$ حداکثر می‌توانند در نقاط ناپیوستگی ، معادل همدیگر نباشند. به تعبیری دو تابع زیر دارای یک تبدیل لاپلاس خواهند بود.

$$\begin{cases} f(t) & 0\le t<a \\ g(t) & t\ge a \end{cases} , \quad \begin{cases} f(t) & 0\le t\le a \\ g(t) & t>a \end{cases}$$

معرفی سه تابع خاص

الف) تابع پله واحد

تابع پله واحد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_c(t)=u(t-c)=\begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t>c \end{cases}$$

توجه ۱: از آن‌جا که وقتی $b>a>0$ می‌باشد، داریم:

$$u_a(t)-u_b(t)=\begin{cases} 1 & a<t<b \\ 0 & t>b \quad , \quad t<a \end{cases}$$

لذا $f(t)(u_a(t)-u_b(t))$ تابعی است که برای $t>b$ و $t<a$ مقدار صفر داشته و برای $a<t<b$ دقیقاً همان رفتار $t(t)$ در بازه (a,b) را نشان می‌دهد. لذا توابع چند ضابطه‌ای را می‌توان بر حسب تابع پله واحد بیان کرد. مثلاً تابع:

$$\begin{cases} 0 & t<0 \\ p(t) & 0<t<a \\ q(t) & a<t<b \\ r(t) & t>b \end{cases}$$

به صورت زیر قابل بیان است:

$$p(t)\{u_0(t)-u_a(t)\}+q(t)\{u_a(t)-u_b(t)\}+r(t)u_b(t)$$

توجه ۲: با ضرب $f(t-c)$ در $u(t-c)$ تابعی حاصل می‌شود که انتقال یافته $f(t)$ را به اندازه c واحد به سمت جلو (در امتداد محور t ها) نشان می‌دهد و البته مقدار آن در $t<c$ صفر خواهد بود.

توجه ۳: با ضرب $f(t)$ در $u(t-c)$ تابعی حاصل می‌شود که در $t>c$ همان $f(t)$ است و البته مقدار آن در $t<0$ صفر خواهد بود.

دقت کنید:

برای ترسیم نمودار $f(t-c)$ کافی است نمودار $f(t)$ را ترسیم و سپس آن را به اندازه c واحد به سمت راست منتقل کنیم.

برای ترسیم نمودار $u_c(t)f(t-c)$ کافی است نمودار $f(t-c)$ را ترسیم کنیم و قسمت $t<c$ این نمودار را روی محور افقی تصویر کنیم.

برای ترسیم نمودار $u_c(t)f(t)$ کافی است نمودار $f(t)$ را ترسیم کنیم و قسمت $t<c$ این نمودار را روی محور افقی تصویر کنیم.

ب) تابع دلتای دیراک

فرض کنید داشته باشیم:

$$h_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & b<t<b+a\\ 0 & \text{بقیه جاها}\end{cases}$$

در حقیقت $h_a(t)=\frac{1}{a}\{u_b(t)-u_{b+a}(t)\}$ بوده و سطح زیر نمودار این تابع یک واحد است. اگر فاصله زمانی a خیلی کوچک شود باید اندازه تابع بسیار بزرگ گردد تا حاصل‌ضرب مقدار تابع در زمان a (سطح زیر نمودار) یک واحد باقی بماند. در چنین وضعیتی $h_a(t)$ به تابع ضربه واحد یا تابع دلتای دیراک تبدیل می‌شود، که به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\delta_a(t)=\delta(t-a)=\lim_{a\to 0} h_a(t)=\begin{cases}\infty & t=b\\ 0 & t\neq b\end{cases}$$

نکته: می‌توان نشان داد:

$$\int f(t)\delta_a(t)dt=f(a)$$ (انتگرال‌گیری در هر فاصله‌ای که شامل $t=a$ باشد.)

و البته:

$$\int f(t)\delta_a(t)dt=0$$ (انتگرال‌گیری در هر فاصله‌ای که شامل $t=a$ نباشد.)

به روابط فوق خاصیت غربالی تابع دلتای دیراک می‌گوئیم.

چند خاصیت دیگر تابع دلتای دیراک

۱- $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ (با شرط $a\neq 0$) $\rightarrow$ $\delta(-t)=\delta(t)$

۲- $\delta(\varphi(t))=\frac{1}{|\varphi'(t_0)|}\delta(t-t_0)$ (با شرط $\varphi'(t_0)\neq 0$)

۳- $f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a)$ (با این شرط که $\delta(t-a)$ را از طرفین رابطه حذف نمی‌کنیم)

۴- $\int_{-\infty}^{x}\delta(t)dt=u(x)$ و $u'(x)=\delta(x)$

نکته: با توجه به فرمول تعریف تبدیل لاپلاس و خاصیت غربالی تابع دلتای دیراک می‌توان نشان داد، با شرط $a>0$ داریم:

$$L\{\delta_a(t)f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\delta_a(t)f(t)dt=e^{-st}f(t)\Big|_{t=a}=e^{-sa}f(a)$$

نکته: مطابق تعریف می‌گوئیم:

$$u'_c(x)=\delta_c(x)$$
$$L(\delta'_a(t))=s\,e^{-as}$$
$$L(\delta''_a(t))=s^2\,e^{-as}$$

ج) تابع گاما

تابع گاما تعمیم تعریف فاکتوریل برای اعداد غیرطبیعی بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{a-1}\,dt$$

ثابت می‌شود این تابع برای $a\geq 0$ همگرا بوده و داریم:

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$$

لذا وقتی a یک عدد طبیعی باشد به‌دست می‌آید $\Gamma(a+1)=a!$

می‌توان نشان داد:

$$\Gamma(1)=1\ ,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

نکته: می‌توان نشان داد $L(\ln t)=\dfrac{\Gamma'(1)-\ln s}{s}$ که در آن $\Gamma'(1)=\gamma$ می‌باشد و $\gamma\simeq 0.577$ ثابت اویلر نامیده می‌شود.

مثال ۱ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\delta(t-1)\cos t$ کدام است؟ (عمران ۸۵)

۱) $\dfrac{s}{s^2+1}$ ۲) $(\cos 1)e^{-s}$ ۳) $1+\dfrac{s}{s^2+1}$ ۴) $(\cos 1)e^{s}$

حل : گزینه ۲ درست است.

با توجه به فرمول $L(\delta(t-c)f(t))=e^{-cs}f(c)$ داریم:

$$L(\delta(t-1)\cos t)=e^{-s}\cos 1$$

مثال ۲ اگر $F(s)=s\ln\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)+\alpha$، α کدام است؟

۱) 1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) -1

حل : گزینه ۳ درست است.

لاپلاس هر تابع واقعی برای $s\to\infty$ به صفر می‌گراید پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty} s\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)+\alpha=0\ \rightarrow\ \lim_{s\to\infty}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^s+\alpha=0\ \rightarrow\ \lim_{s\to\infty}\ln\left(\frac{(s+1)-2}{s+1}\right)^s+\alpha=0\ \rightarrow$$

$$\lim_{s\to\infty} \ln\left(1+\frac{-2}{s+1}\right)^{s} + \alpha = 0 \;\to\; \ln e^{-2} + \alpha = 0 \;\to\; -2+\alpha = 0 \;\to\; \alpha = 2$$

مثال ۳ اگر $f(t)=e^{1-e^{-3t}}$ و $F(s)$ لاپلاس این تابع باشد حاصل $F(3)$ کدام است؟

۱) $-\frac{e-1}{3}$ ۲) $-(e-1)$ ۳) $\frac{e-1}{3}$ ۴) $(e-1)$

حل : گزینه ۳ درست است.

با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{1-e^{-3t}}\, dt \;\to\; F(3)=\int_0^{\infty} e^{-3t}\, e^{1-e^{-3t}}\, dt$$

با تغییر متغیر $e^{-3t}=u$ داریم:

$$-3e^{-3t}dt = du \quad , \quad \begin{cases} t=0 & \to\; u=1 \\ t=+\infty & \to\; u=0 \end{cases}$$

$$F(3)=\int_1^{0} e^{1-u}\,\frac{du}{-3} = \frac{1}{3}e^{1-u}\Big|_1^{0} = \frac{1}{3}(e-1)$$

مثال ۴ اگر $F(s)=\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}$ تبدیل لاپلاس تابع f باشد. $f(t)$ برابر با چیست؟ (عمران ۸۷)

یادآوری می‌شود که تبدیل لاپلاس توابع t^n، $\sin at$ و $\cos at$ به‌ترتیب عبارتند از: $\frac{n!}{s^{n+1}}$ و $\frac{a}{s^2+a^2}$ و $\frac{s}{s^2+a^2}$.

۱) $\frac{1}{5}\left(e^{2t}-\cos t-2\sin t\right)$ ۲) $\frac{1}{5}\left(e^{t}+\cos t-\sin t\right)$

۳) $\frac{1}{5}\left(e^{2t}-2\cos t-\sin t\right)$ ۴) $\frac{1}{5}\left(e^{t}-\cos t-2\sin t\right)$

حل : گزینه ۱ درست است.

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$F(s)=\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+1} \qquad (*)$$

$$=\frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s-2)}{(s-2)(s^2+1)}=\frac{(A+B)s^2+(C-2B)s+(A-2C)}{(s-2)(s^2+1)}=\frac{1}{(s-2)(s^2+1)} \;\to$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ C-2B=0 \\ A-2C=1 \end{array}\right\} \;\to\; A=\frac{1}{5} \text{ و } B=-\frac{1}{5} \text{ و } C=\frac{-2}{5}$$

لذا به‌دست می‌آید:

$$F(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{-2}{s^2+1}\right) \;\to\; f(t)=\frac{1}{5}\left(e^{2t}-\cos t-2\sin t\right)$$

دقت کنید برای محاسبه ثابت‌ها می‌توانستیم این‌طور نیز عمل کنیم:

با ضرب طرفین رابطه $(*)$ در $s-2$ داریم:

$$\frac{1}{s^2+1}=A+\frac{(s-2)(Bs+C)}{s^2+1}\xrightarrow{s=2}A=\frac{1}{5}$$

با ضرب طرفین $(*)$ در s داریم:

$$\frac{s}{(s-2)(s^2+1)}=\frac{As}{s-2}+\frac{Bs^2+Cs}{s^2+1}\xrightarrow{s\to\infty}0=A+B$$

$$(*)\xrightarrow{s=0}-\frac{1}{2}=-\frac{A}{2}+C$$

لذا به دست می‌آید:

$$A=\frac{1}{5}\ \text{و}\ B=-\frac{1}{5}\ \text{و}\ C=-\frac{2}{5}$$

مثال ۵ اگر $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{t}$ باشد در بسط مک‌لوران $F(s)$ دو جمله اول کدامند؟

۱) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left(1+\frac{2}{s}\right)$ ۲) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left(1-\frac{2}{s}\right)$ ۳) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left(1+\frac{1}{4s}\right)$ ۴) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left(1-\frac{1}{4s}\right)$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$f(t)=t^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{(\sqrt{t})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{t})^4}{4!}-+\cdots\right\}=t^{-\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{24}-+\cdots$$

$$F(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{24}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}-+\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{24}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}}-+\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{2s}+\frac{1}{24}\frac{3}{4s^2}-+\cdots\right)$$

مثال ۶ اگر $F(s)=\frac{s^2+2}{(s+1)^3(s-2)}$ در عبارت $f(t)$ ضریب کلی جمله e^{-t} کدام است؟

۱) $\left(\frac{-2}{9}-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{2}\right)$ ۲) $\left(\frac{2}{9}-\frac{t}{3}-\frac{t^2}{2}\right)$ ۳) $\left(-\frac{2}{9}+\frac{t}{3}-\frac{t^2}{2}\right)$ ۴) $\left(\frac{2}{9}-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{2}\right)$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$\frac{s^2+2}{(s+1)^3(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}+\frac{D}{s-2}$$

ضرب طرفین رابطه فوق در $(s+1)^3$ و سپس قرار دادن $s=-1$ نتیجه می‌دهد:

$$C=\frac{(-1)^2+2}{-1-2}=-1$$

ضرب طرفین رابطه فوق در $s-2$ و سپس قرار دادن $s=2$ نتیجه می‌دهد:

$$D=\frac{(2)^2+2}{(2+1)^3}=\frac{2}{9}$$

ضرب طرفین رابطه فوق در s و سپس قرار دادن $s\to+\infty$ نتیجه می‌دهد:

$$A+D=0 \xrightarrow{D=\frac{2}{9}} A=-\frac{2}{9}$$

قرار دادن $s=0$ در رابطه فوق نتیجه می‌دهد:

$$A+B+C-\frac{D}{2}=\frac{(0)^2+2}{(0+1)^3(0-2)} \to A+B+C-\frac{D}{2}=-1 \xrightarrow{A=\frac{-2}{9}\ ,\ C=-1\ ,\ D=\frac{2}{9}} B=\frac{1}{3}$$

لذا داریم:

$$F(s)=\frac{-\frac{2}{9}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{(s+1)^2}+\frac{-1}{(s+1)^3}+\frac{\frac{2}{9}}{s-2} \to f(t)=\frac{-2}{9}e^{-t}+\frac{1}{3}te^{-t}-\frac{t^2e^{-t}}{2}+\frac{2}{9}e^{2t}$$

مثال ۷ حاصل $\int_0^1 x^2(\ln x)^3\,dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{27}$ ۲) $-\frac{2}{27}$ ۳) $-\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

حل : گزینه ۲ درست است.

با تغییر متغیر $-\ln x=u$ داریم:

$$x=e^{-u} \to dx=-e^{-u}du$$

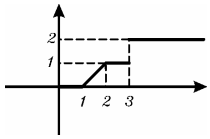
$$-\frac{dx}{x}=du$$

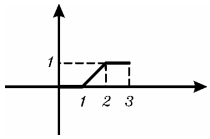
$$x=0^+ \to u=-\ln(0^+)=+\infty$$

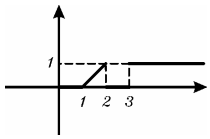
$$x=1 \to u=-\ln(1)=0$$

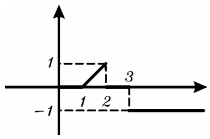
$$I=\int_{+\infty}^{0}(e^{-u})^2(-u)^3(-e^{-u}du)=-\int_0^{+\infty}u^3e^{-3u}du=-\left\{L(u^3)\right\}\Big|_{s=3}=-\frac{3!}{s^4}\Big|_{s=3}=\frac{-6}{81}=-\frac{2}{27}$$

مثال ۸ اگر $\begin{cases} f(t)=(t-1)u_1(t)-(t-2)u_2(t) \\ g(t)=f'(t) \\ h(t)=f(t)-u_1(t)g(t-1) \end{cases}$ شکل $h(t)$ کدام است؟

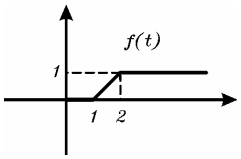
۱) 

۲) 

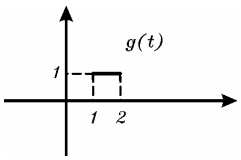
۳) 

۴) 

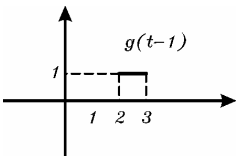
حل : گزینه ۳ درست است.

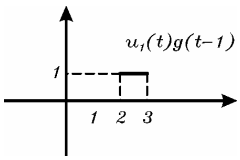


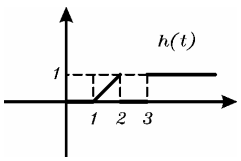
$$f(t)=(t-1)u_1(t)-(t-2)u_2(t)$$



$$g(t)=f'(t)$$







$$h(t)=f(t)-u_1(t)g(t-1)$$

قضایای تبدیل لاپلاس

قضیه تبدیل لاپلاس توابع متناوب

اگر $f(t)$ برای t های مثبت تابعی متناوب با دوره تناوب P باشد، داریم:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ps}}\int_0^P e^{-st}f(t)dt$$

تذکر: برای محاسبه لاپلاس تابع متناوب f که ضابطه‌اش برای $0<t<P$ داده شده می‌توان به دو صورت عمل کرد:

الف) استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس متناوب، یعنی:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ps}}\int_0^P e^{-st}f(t)dt$$

که نیاز به محاسبه انتگرال دارد.

ب) تابع f^* ای به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(t)=\begin{cases} f(t) & 0<t<P \\ 0 & t>P \end{cases}$$

اینک f^* را توسط تابع پله تعریف کرده و با استفاده از قضیه دوم انتقال (که گفته خواهد شد)، لاپلاس آن را به دست می‌آوریم تا به $F^*(s)$ برسیم.

حال می‌توان نوشت:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ps}}F^*(s)$$

تذکر: برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ps}}H(s)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نخست لاپلاس معکوس $H(s)$ را به دست می‌آوریم تا $h(t)$ ای محاسبه شود.

ضابطه تابع $f(t)$ مورد نظر به این صورت است که برای $0<t<P$ همان $h(t)$ بوده و برای $t>p$ گسترش متناوب $h(t)$ مذکور با دوره P می‌باشد.

مثلاً برای محاسبه تبدیل لاپلاس $f(t+2)=f(t)$ و $f(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 1 & 1<t<2 \end{cases}$ می‌توان نوشت:

الف) f تابعی متناوب با دوره تناوب $P=2$ بوده و داریم:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\int_0^1 te^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\left(-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\left(-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}\right)+\left(-\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-s}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}\right)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2}$$

ب)

$$f^*(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 1 & 1<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

$$f^*(t)=\left(u_0(t)-u_1(t)\right)t+\left(u_1(t)-u_2(t)\right)1 \quad \rightarrow$$

$$F^*(s)=e^{-0s}\,L(t+0)-e^{-1s}\,L(t+1)+\frac{e^{-1s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2}$$

پس داریم:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2}$$

مثلاً برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2}$ می‌نویسیم:

$$H(s)=\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s} \quad \rightarrow \quad h(t)=t-u_1(t)(t-1)-u_2(t)$$

حاصل فوق چنین است:

$0<t<1$ اگر $\rightarrow$ $h(t)=t$

$1<t<2$ اگر $\rightarrow$ $h(t)=t-(t-1)=1$

$t>2$ اگر $\rightarrow$ $h(t)=t-(t-1)-1=0$

یعنی داریم:

$$h(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 1 & 1<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

و به واسطه ترم $\frac{1}{1-e^{-2s}}$ تابع $f(t)$ مورد نظر چنین خواهد بود:

$$f(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 1 & 1<t<2 \end{cases} \quad , \quad f(t+2)=f(t)$$

مثال ۹ درصورتی که $[x]$ ، نشان دهندهٔ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با آن باشد، در این حال تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x-[x]$ کدام است؟ (مکانیک ۸۸)

۱) $\frac{e^s+1-s}{s^2(e^s+1)}$ ۲) $\frac{e^s-1-s}{s^2(e^s-1)}$ ۳) $\frac{e^s-1}{s^2(1-e^{-s})}$ ۴) $\frac{e^s+1}{s^2(1-e^s)}$

حل : گزینه ۲ درست است.

تابع $f(x)=x-[x]$ تابعی متناوب با دوره تناوب $P=1$ است، زیرا:

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=f(x)$$

لذا داریم:

مشتق		انتگرال
x	$\searrow^{+}$	e^{-sx}
1	$\searrow^{-}$	$-\frac{1}{s}e^{-sx}$
0		$\frac{1}{s^2}e^{-sx}$

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-1s}}\int_0^1 e^{-sx}\left(x-[x]\right)dx=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-sx}\left(x-0\right)dx \quad \rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{x}{s}e^{-sx}-\frac{1}{s^2}e^{-sx}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{-se^{-s}-e^{-s}+1}{s^2\left(1-e^{-s}\right)}=\frac{-s-1+e^{s}}{s^2\left(e^{s}-1\right)}$$

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد:

الف) با شرط وجود حد $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$ حاصل آن برابر $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ است.

ب) با شرط وجود حد $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ حاصل آن برابر $\lim\limits_{s\to 0} s\,F(s)$ است.

نکته۱: مطابق تعریف، دو تابع $g(t)$ و $f(t)$ را در $t\to\alpha$ هم ارز می‌گوئیم هرگاه $\lim\limits_{t\to\alpha}\frac{f(t)}{g(t)}=1$ باشد. اگر $L\{f(t)\}=F(s)\,,L\{g(t)\}=G(s)$ باشد می‌توان نشان داد:

الف) هر گاه $g(t)$ و $f(t)$ برای $t\to 0$ هم ارز باشند، آن‌گاه $G(s)$ و $F(s)$ برای $s\to\infty$ هم‌ارز یکدیگرند.

ب) هر گاه $g(t)$ و $f(t)$ برای $t\to\infty$ هم ارز باشند آن‌گاه $G(s)$ و $F(s)$ برای $s\to 0$ هم‌ارز یکدیگرند.

نکته۲: هرگاه $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ برابر صفر نباشد، می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(t)$ در $t=0$ پیوسته نخواهد بود. (به‌خاطر داشته باشید ما تبدیل لاپلاس را برای $t\geq 0$ تعریف کرده‌ایم و $f(t)$ را برای $t<0$ صفر فرض کرده‌ایم.) در حقیقت $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ جهش تابع $f(t)$ را در $t=0$ نشان می‌دهد.

نکته ۳: هرگاه مخرج $F(s)$ ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت داشته باشد، $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ بیکران خواهد شد و به تعبیری در این شرایط قضیه مقدار نهایی اعتبار ندارد.

مثال ۱۰ اگر $F(s)=\frac{s^2+s+2}{s^3+1}$ حاصل $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 0 ۴) موجود نمی‌باشد.

حل : گزینه ۴ درست است.

نقاط تکین : $s^3+1=0 \rightarrow (s+1)(s^2-s+1)=0 \rightarrow \begin{cases} s=-1 \\ s=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{3}{2} \end{cases}$

چون $F(s)$ در سمت راست محور موهومی دارای نقطه تکین است لذا $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ موجود نیست.

توجه داریم اگر به این موضوع توجه نمی‌کردیم طبق قضیه مقدار نهایی می‌گفتیم:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)=0$$

که البته غلط است (در حقیقت اگر $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ به حد مشخصی می‌گرایید حاصل آن صفر بود ولی این‌طور نیست).

قضیه تغییر مقیاس

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، داریم:

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \rightarrow L^{-1}\{F(as)\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ و $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st}=0$ باشد، داریم:

$$L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$$
$$L\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$
$$L\{f'''(t)\}=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$$

در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$L\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

و به تعبیری:

$$L\{f^{(n)}(t)\}=sL\{f^{(n-1)}(t)\}-f^{(n-1)}(0)$$

محاسبه تابع و مشتقات آن در نقطه $t=0$ با دانستن لاپلاس تابع:

می‌توان ثابت کرد وقتی $s\to\infty$، سمت چپ هر کدام از روابط فوق به صفر می‌گراید و لذا به‌دست می‌آید:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$
$$f'(0)=\lim_{s\to\infty} s^2F(s)-sf(0)$$
$$f''(0)=\lim_{s\to\infty} s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)$$

نکته: در قضیه فوق شرط پیوستگی $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ موردنیاز است (که معمولاً فرض می‌شود موجود است) . حال به‌عنوان مثال اگر f تنها تکه‌ای پیوسته باشد، باید نوشت:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) - \sum_{i=1}^{n} e^{-st_i}\left(f(t_i^+) - f(t_i^-)\right)$$

که در آن t_i طول نقاط ناپیوستگی تابع $f(t)$ می‌باشد.

تذکر: اصلی‌ترین استفاده قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است که مسئله را به یک معادله جبری برای لاپلاس جواب تبدیل می‌کند.

مثلاً در مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = \beta \end{cases}$ با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله و اعمال شرایط اولیه داده شده به دست می‌آوریم:

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + a\left(sY(s) - y(0)\right) + bY(s) = F(s) \quad \rightarrow$$

$$\left(s^2 + as + b\right)Y(s) = F(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s) + \alpha s + \beta + a\alpha}{s^2 + as + b}$$

مثال ۱۱ اگر $F(s) = \frac{1 - e^{-s^2}}{s^3}$ باشد، رفتار $f(t)$ در $t \to 0^+$ و $t \to +\infty$ چگونه است؟

حل :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1 - e^{-s^2}}{s^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{s \to 0} \frac{2se^{-s^2}}{2s} = 1$$

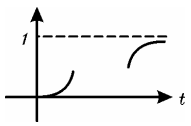
یعنی $f(t)$ در $t \to +\infty$ دارای مجانب افقی $y = 1$ می‌باشد.

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{1 - e^{-s^2}}{s^2} = \frac{1 - 0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{t \to 0^+} f'(t) = \lim_{s \to \infty} s^2F(s) - sf(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{1 - e^{-s^2}}{s} = \frac{1 - 0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{t \to 0^+} f''(t) = \lim_{s \to \infty} s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) = \lim_{s \to \infty} 1 - e^{-s^2} = 1 - 0 = 1$$

یعنی $f(t)$ در $t = 0$ از مبدأ می‌گذرد، دارای خط مماس افقی است و تقعر به سمت بالا دارد.



مثال ۱۲ بر تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{e^{-t}}$ کدام رابطه زیر حاکم است؟

۱) $sF(s) = -F(s+1)$

۲) $sF(s) - e = -F(s+1)$

۳) $sF(s) = -F(s-1)$

۴) $sF(s) - e = -F(s-1)$

حل : گزینه ۲ درست است.

فرض کنید لاپلاس $f(t)$ را $F(s)$ بنامیم. حال می‌نویسیم:

$$f(t)=e^{e^{-t}} \rightarrow f'(t)=-e^{-t}.e^{e^{-t}} \rightarrow L\{f'(t)\}=L\left(-e^{-t}e^{e^{-t}}\right) \rightarrow$$

$$sF(s)-f(0)=-L\left(e^{e^{-t}}\right)\Big|_{s\to s+1} \rightarrow sF(s)-e=-F(s+1)$$

مثال ۱۳ در جواب مسأله $\begin{cases} y''-3y'+2y=12e^{-2t} \\ y(0)=2\ ,\ y'(0)=6 \end{cases}$ ضریب e^{-2t} کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -6 ۴) 7

حل : گزینه ۱ درست است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-\cancel{sy(0)}_{2}-\cancel{y'(0)}_{6}\right)-3\left(sY(s)-\cancel{y(0)}_{2}\right)+2Y(s)=\frac{12}{s+2} \rightarrow$$

$$\left(s^2-3s+2\right)Y(s)=\frac{12}{s+2}+2s \rightarrow Y(s)=\frac{2s^2+4s+12}{(s+2)\left(s^2-3s+2\right)}$$

توجه داریم:

$$Y(s)=\frac{2s^2+4s+12}{(s+2)(s-2)(s-1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-1}$$

$s=-2$ ضرب طرفین در $s+2$ و قرار دادن $\rightarrow A=1$

$s=2$ ضرب طرفین در $s-2$ و قرار دادن $\rightarrow B=7$

$s=1$ ضرب طرفین در $s-1$ و قراردادن $\rightarrow C=-6$

پس داریم:

$$y(t)=1e^{-2t}+7e^{2t}-6e^{t}$$

(توجه کنید ما فقط به A (ضریب e^{-2t}) نیاز داشتیم و بقیه ضرایب را برای تمرین پیدا نموده‌ایم).

قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال‌های یک تابع

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد با شرط $s>0$ داریم:

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

$$L\left\{\int_0^t\int_0^t f(t)dt\,dt\right\}=\frac{1}{s^2}F(s)$$

و در فرم معکوس اگر $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(t)dt$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}F(s)\right\}=\int_0^t\int_0^t f(t)dt\,dt$$

مثال ۱۴ اگر $F(s)=\frac{1}{s(s^2+1)(s^2+4)}$ ضریب $\cos 2t$ در تابع $f(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}=\int_0^t\frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt=\frac{1}{3}\left(-\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(-\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t\right)-\left(-1+\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{1}{12}\cos 2t-\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{4}$$

قضیه اول انتقال (انتقال بر محور s)

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم:

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s)\Big|_{s\to(s-a)}=F(s-a)$$

و در فرم معکوس اگر $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$$

تذکر: در محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)$ اگر بتوانیم همه s ها را در قالب $s\pm a$ بنویسیم استفاده از قضیه اول انتقال مناسب خواهد شد.

مثلاً:

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+sb+c}{(s-a)^3}\right)=L^{-1}\left(\frac{(s-a)^2+(b+2a)(s-a)+(c+a^2+ab)}{(s-a)^3}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{(b+2a)}{(s-a)^2}+\frac{c+a^2+ab}{(s-a)^3}\right)=e^{at}+(b+2a)te^t+\frac{(c+a^2+ab)}{2}t^2e^t$$

$$L^{-1}\left(\frac{bs+c}{s^2+2as+a^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{b(s+a)+(c-ab)}{(s+a)^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{b(s+a)}{(s+a)^2+1}+\frac{c-ab}{(s+a)^2+1}\right)$$

$$=be^{-at}\cos t+(c-ab)e^{-at}\sin t$$

توجه: از قضیه اول انتقال نتایج زیر به‌سادگی قابل حصول است:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+a)^{n+1}}\right)=\frac{t^n e^{-at}}{n!} \quad , \quad L^{-1}\left(\frac{1}{(s+a)^{p+1}}\right)=\frac{t^p e^{-at}}{\Gamma(P+1)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+a)^2+b^2}\right)=\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s+a)^2+b^2}\right)=\frac{1}{b}e^{-at}(b\cos t-a\sin bt)$$

$$L^{-1}(F(as+b))=\frac{1}{a}e^{-\frac{bt}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

مثال ۱۵ اگر $F(s)=\frac{1}{s^3+1}$ ضریب جمله $e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

حل : گزینه ۲ درست است.

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-s+1}=\frac{A(s^2-s+1)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2-s+1)}$$

ضریب s^2 ، ضریب s

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B+C=0\\A+C=1\end{cases} \rightarrow A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$$

$$F(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s-2}{s^2-s+1}\right)=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{1}{3}\left(e^{-t}-e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

مثال ۱۶ اگر $L(J_0(t))=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ حاصل لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+2s+5}}$ کدام است؟

۱) $e^{-t}J_0(2t)$ ۲) $e^{t}J_0(2t)$ ۳) $e^{-t}J_0\left(\frac{t}{2}\right)$ ۴) $e^{t}J_0\left(\frac{t}{2}\right)$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+2s+5}}=\frac{1}{\sqrt{(s+1)^2+4}} \rightarrow f(t)=e^{-t}L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+4}}\right)=\frac{e^{-t}}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1}}\right)$$

و چون $L^{-1}\left(F(ks)\right)=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$ می‌توان گفت:

$$f(t)=\frac{e^{-t}}{2}\,.\,2\,J_0(2t)=e^{-t}J_0(2t)$$

قضیه دوم انتقال (انتقال بر محور t)

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم:

$$L\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}\cdot F(s)$$

یا:

$$L\{u_c(t)f(t)\}=e^{-cs}\cdot F\{f(t+c)\}$$

و در فرم معکوس اگر $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ باشد داریم:

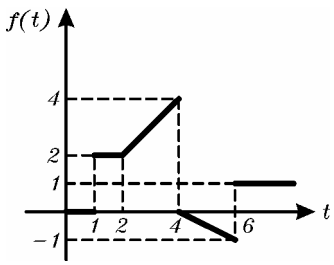
$$L^{-1}\left(e^{-cs}F(s)\right)=u_c(t)f(t-c)$$

نکته: برای بیان توابع تکه‌ای پیوسته که رفتار تغییراتشان در هر قسمت خطی است، بر حسب تابع پله واحد از دو قاعده زیر استفاده می‌کنیم:

الف) اگر در $t=a$ پرشی در مقدار تابع به اندازه k واحد وجود داشت، جمله $k\,u_a(t)$ را اضافه می‌کنیم.

ب) اگر در $t=b$ شیب به اندازه m واحد اضافه شد، جمله $m(t-b)u_b(t)$ را اضافه می‌کنیم.

به شکل زیر دقت کنید:



- تا قبل از $t=1$ مقدار تابع و شیب نمودار آن صفر است.
- در $t=1$ پرشی به اندازه $+2$ داریم.
- در $t=2$ شیبی به اندازه $+1$ اضافه شده (و خطی با شیب $+1$ ایجاد شده) است.
- در $t=4$ پرشی به اندازه -4 داریم و شیبی به اندازه $\frac{-3}{2}$ اضافه شده (و خطی با شیب $\frac{-1}{2}$ ایجاد شده) است.
- در $t=6$ پرشی به اندازه $+2$ داریم و شیبی به اندازه $\frac{1}{2}$ اضافه شده (و خطی با شیب 0 ایجاد شده) است.

لذا باید نوشت:

$$f(t)=2u_1(t)+1(t-2)u_2(t)-4u_4(t)-\frac{3}{2}(t-4)u_4(t)+2u_6(t)+\frac{1}{2}(t-6)u_6(t)$$

تذکر: برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int_c^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت: (دقت داریم $u_c(t)$ برای $t<c$ حاصلش صفر است)

$$\int_c^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} u_c(t) f(t)dt = L\left(u_c(t)f(t)\right) = e^{-cs} L\left(f(t+c)\right)$$

مثلاً برای محاسبه $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} te^{-2t}\sin t\,dt$ می‌توان نوشت:

$$I = \int_0^{\infty} u_{\frac{\pi}{2}}(t)\, t e^{-2t}\sin t\,dt$$

که مطابق تعریف، تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t)\, t\sin t$ به ازای $s=2$ می‌باشد.

$$F(s) = L\left(u_{\frac{\pi}{2}}(t)\, t\sin t\right) = e^{-\frac{\pi}{2}s} L\left(\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{2}s} L\left(\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos t\right)$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2} + \frac{\pi s}{2\left(s^2+1\right)}\right)$$

پس به دست می‌آید:

$$I = F(2) = e^{-\pi}\left(\frac{3}{25}+\frac{\pi}{5}\right) = e^{-\pi}\cdot\frac{3+5\pi}{25}$$

مثال ۱۷ تابع $f(t) = \begin{cases} \sin t & , \ 0 \le t < 2\pi \\ \sin t + \cos t & , \ t \ge 2\pi \end{cases}$، را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس f را پیدا کنید؟ (معدن ۸۶)

۱) $\frac{1}{s^2+1}e^{2\pi s}$ ۲) $\frac{s+1}{s^2+1}e^{2\pi s}$ ۳) $\frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}$ ۴) $\frac{s+se^{-2\pi s}}{s^2+1}$

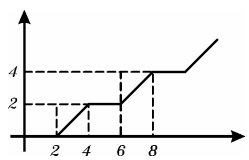
حل: گزینه ۳ درست است.

$$f(t) = \left(u_0(t) - u_{2\pi}(t)\right)\sin t + u_{2\pi}(t)\left(\sin t + \cos t\right) = u_0(t)\sin t + u_{2\pi}(t)\cos t \ \rightarrow$$

$$F(s) = e^{-0s}L\left(\sin(t+0)\right) + e^{-2\pi s}L\left(\cos(t+2\pi)\right) = L(\sin t) + e^{-2\pi s}L(\cos t)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

مثال ۱۸ تبدیل لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{1}{s^2\left(e^{-2s}-1\right)}$ ۲) $\frac{1}{s^2\left(e^{2s}-1\right)}$

۳) $\frac{1}{s^2\left(e^{-2s}+1\right)}$ ۴) $\frac{1}{s^2\left(e^{2s}+1\right)}$

حل : گزینه ۴ درست است.

- قبل از $t=2$ منحنی دارای شیب صفر بوده و دارای مقدار صفر می‌باشد.
- در $t=2$ شیب منحنی به اندازه یک واحد اضافه می‌شود.
- در $t=4$ شیب منحنی به اندازه یک واحد کم شده و دوباره به شیب صفر می‌رسد.
- در $t=6$ شیب منحنی به اندازه یک واحد اضافه شده و دوباره به شیب یک می‌رسد و این روال مرتباً ادامه پیدا می‌کند.

$$f(t)=(t-2)u_2(t)-(t-4)u_4(t)+(t-6)u_6(t)-+\cdots$$

$$F(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}+\frac{e^{-6s}}{s^2}-+\cdots=\frac{1}{s^2}\left(e^{-2s}-e^{-4s}+e^{-6s}-+\cdots\right)$$

عبارت داخل پرانتز حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی است با جمله اول e^{-2s} و قدرنسبت $-e^{-2s}$ و لذا حاصل آن $\frac{e^{-2s}}{1+e^{-2s}}$ بوده و می‌توان نوشت:

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\frac{e^{-2s}}{1+e^{-2s}}=\frac{1}{s^2\left(e^{2s}+1\right)}$$

مثال ۱۹ لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{e^{-ns}}{(ns-1)^n}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n^n n!}u_n(t)e^{\frac{t-n}{n}}(t-n)^{n-1}$

۲) $\frac{1}{n^n(n-1)!}u_n(t)e^{\frac{t-n}{n}}(t-n)^{n}$

۳) $\frac{1}{n^n(n-1)!}u_n(t)e^{\frac{t-n}{n}}(t-n)^{n-1}$

۴) $\frac{1}{n^n n!}u_n(t)e^{\frac{t-n}{n}}(t-n)$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$F(s)=\frac{e^{-ns}}{n^n\left(s-\frac{1}{n}\right)^n}$$

اما می‌دانیم:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-\frac{1}{n}\right)^n}\right)=\frac{e^{\frac{1}{n}t}t^{n-1}}{(n-1)!}\rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-ns}}{\left(s-\frac{1}{n}\right)^n}\right)=\frac{1}{(n-1)!}u_n(t)e^{\frac{1}{n}(t-n)}(t-n)^{n-1}\rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-ns}}{n^n\left(s-\frac{1}{n}\right)^n}\right)=\frac{1}{n^n(n-1)!}u_n(t)e^{\frac{t-n}{n}}(t-n)^{n-1}$$

مثال ۲۰ پاسخ سیستم میرای جرم ـ فنر متناظر با مسأله $y''+3y'+2y=\delta(t-1)$ و $y(0)=y'(0)=0$ در بازهٔ $[0,1]$ کدام است؟ (هوافضا ۸۷)

۱) $y=0$ ۲) $y=e^{t-1}$

۳) $y=e^{-1(t-1)-2(t-1)}$ ۴) $y=e^{2(t-1)}+e^{t-1}$

حل : گزینه ۱ درست است.

از طرفین معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+3\left(sY(s)-y(0)\right)+2Y(s)=e^{-1s} \rightarrow \left(s^2+3s+2\right)Y(s)=e^{-s} \rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)}$$

از آن‌جا که:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)=e^{-t}-e^{-2t} \rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)}\right)=u_1(t)\left(e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}\right)$$

برای $0<t<1$ داریم $u_1(t)=0$ پس در این فاصله $y(t)=0$

راه دیگر: برای $0<t<1$ داریم $\delta(t-1)=0$ لذا معادله به فرم $\begin{cases} y''+3y'+2y=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ تبدیل می‌شود که دارای جواب بدیهی $y(t)=0$ می‌باشد.

مثال ۲۱ در لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{s^2\left(1-e^{-s}\right)}$ چند نقطه ناپیوستگی وجود دارد و در t های بزرگ شیب منحنی کدام است؟

۱) $3,0$ ۲) $1,0$ ۳) $3,1$ ۴) $1,1$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{1-e^{-s}}=\frac{1}{s^2}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+e^{-4s}+\cdots\right)=\frac{e^{-0s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s^2}+\cdots$$

$$f(t)=tu_0(t)+(t-1)u_1(t)+(t-2)u_2(t)+(t-3)u_3(t)+\cdots$$

رفتار شکل $f(t)$ چنین است:

۱) در $t=0$ با شیب 1 شروع می‌شود.

۲) در $t=1$ شیب 1 واحد اضافه شده و شیب منحنی 2 می‌شود.

۳) در $t=2$ شیب 1 واحد اضافه شده و شیب منحنی 3 می‌شود و این رفتار تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد.

۴) در هیچ مرحله‌ای ناپیوستگی پرش در نمودار تابع ایجاد نمی‌شود.

مثال ۲۲ جواب عکس تبدیل لاپلاس $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-2p}}{p^2-p-2}\right]$ کدام تابع است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) $y=f(x)=\begin{cases}-e^{-2(x-2)}+e^{-(x-2)} & x>2\\ 0 & 0\le x\le 2\end{cases}$

۲) $y=f(x)=\begin{cases}e^{2(x-2)}+e^{x-2} & x>2\\ 0 & 0\le x\le 2\end{cases}$

۳) $y=f(x)=\begin{cases}e^{-2(x-2)}+e^{x-2} & 0\le x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$

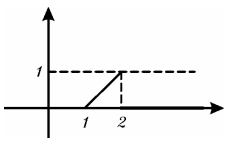
۴) $y=f(x)=\begin{cases}-e^{-2(x+2)}+e^{-(x+2)} & x>2\\ 0 & 0<x\le 2\end{cases}$

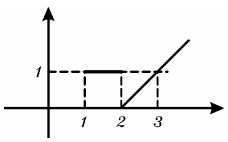
حل : هیچ‌کدام از گزینه‌ها درست نیستند.

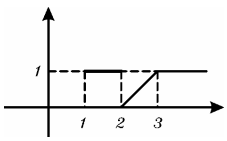
$$\frac{1}{p^2-p-2}=\frac{1}{(p-2)(p+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+1}\right)\ \rightarrow\ L^{-1}\left(\frac{1}{p^2-p-2}\right)=\frac{1}{3}\left(e^{2x}-e^{-x}\right)\ \rightarrow$$

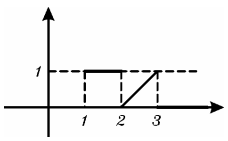
$$L^{-1}\left(\frac{e^{-2p}}{p^2-p-2}\right)=u_2(x)\ \frac{1}{3}\left(e^{2(x-2)}-e^{-(x-2)}\right)=\begin{cases}0 & 0<x<2\\ \frac{1}{3}\left(e^{2(x-2)}-e^{-(x-2)}\right) & x>2\end{cases}$$

مثال ۲۳ نمودار تابع $f(t)$ وقتی $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s}+\dfrac{e^{-2s}}{s^2}-\dfrac{e^{-2s}}{s}$ چگونه است؟

۱)


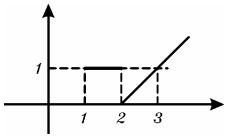
۲)


۳)


۴)


حل : گزینه ۲ درست است.

$$F(s)=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}\ \rightarrow\ f(t)=u_1(t)+(t-2)u_2(t)-u_2(t)$$



لذا شکل $f(t)$ چنین است:

در $t=1$ پرشی به اندازه 1 واحد به بالا داریم در $t=2$ شیب نمودار 1 واحد اضافه شده و همزمان پرشی به اندازه -1 واحد به پایین داریم.

مثال ۲۴ اگر $L(f(t+\alpha))=G(s-\alpha)$ باشد تبدیل لاپلاس $e^{\alpha t}f(t-2\alpha)u_\alpha(t)$ کدام است؟

۱) $e^{-\alpha s}G(s-2\alpha)$

۲) $e^{-\alpha s-\alpha^2}G(s+2\alpha)$

۳) $e^{-\alpha s}G(s)$

۴) $e^{-\alpha s+\alpha^2}G(s)$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$L\{u_\alpha(t)f(t-2\alpha)\}=e^{-\alpha s}.L\{f(t+\alpha-2\alpha)\}=e^{-\alpha s}.L(f(t-\alpha))=e^{-\alpha s}G(s+\alpha)\ \rightarrow$$

$$L(e^{\alpha t}u_\alpha(t)f(t-2\alpha))=\{e^{-\alpha s}G(s+\alpha)\}\Big|_{s\to s-\alpha}=e^{-\alpha(s-\alpha)}G(s-\alpha+\alpha)=e^{-\alpha s+\alpha^2}G(s)$$

مثال ۲۵ با فرض آن‌که $u_c(t)$ تابع پله‌ای واحد باشد، جواب مسأله مقدار اولیهٔ زیر کدام است؟ (ریاضی ۸۵)

$$y'+y=1-t\,u_1(t)$$
$$y(0)=0$$

۱) $y=t-e^{-t}-(t-1)u_1(t)$

۲) $y=-1+e^{-t}-(t-1)u_1(t)$

۳) $y=1+e^{-t}+(t-1)u_1(t)$

۴) $y=1-e^{-t}-(t-1)u_1(t)$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$L(t\,u_1(t))=-\frac{d}{ds}(L(u_1(t)))=-\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)=-\frac{-se^{-s}-e^{-s}}{s^2}=\frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}$$

حال اگر از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس بگیریم داریم:

$$sY(s)-y(0)+Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}\ \rightarrow\ Y(s)(s+1)=\frac{1}{s}-\frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}\ \rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)}-\frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$y(t)=1-e^{-t}-(t-1)u_1(t)$$

مثال ۲۶ اگر $\begin{cases} y''+y'+y=\delta(x-\pi)\cos^2 x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ باشد، $y(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}u_\pi(x)e^{-\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi)$

۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}u_\pi(x)e^{-\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi)$

۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}u_\pi(x)e^{-\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\pi)$

۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}u_\pi(x)e^{-\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\pi)$

حل : گزینه ۲ درست است.

$$L(y'')+L(y')+L(y)=L\left(\delta(x-\pi)\cos^2 x\right) \rightarrow$$
$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=e^{-\pi s}\cos^2\pi \rightarrow$$
$$\left(s^2+s+1\right)Y(s)=e^{-\pi s} \rightarrow Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+s+1}$$

از آن‌جا که:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)=L^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

داریم:

$$y(t)=L^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+s+1}\right)=u_\pi(x)\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi)$$

مثال ۲۷ تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

$$F(s)=\frac{1}{2^s.(s-1)}$$

۱) $\frac{1}{2}e^x$ ۲) $\frac{1}{2}e^x u_{\ln 2}(x)$ ۳) $e^x u_{\ln 2}(x)$ ۴) $2e^x u_{\ln 2}(x)$

حل : گزینه ۲ درست است.

$$F(s)=\frac{1}{2^s(s-1)}=\frac{1}{e^{s\ln 2}(s-1)}=e^{-(\ln 2)s}\frac{1}{s-1}$$

از آن جا که:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=e^x$$

طبق قضیه دوم انتقال داریم:

$$L^{-1}\left(e^{-(\ln 2)s}\frac{1}{s-1}\right)=u_{\ln 2}(x)e^{x-\ln 2}=\frac{1}{2}e^x u_{\ln 2}(x)$$

قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم:

$$L\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s) \rightarrow \begin{cases} L\left\{tf(t)\right\}=-F'(s) \\ L\left\{t^2 f(t)\right\}=+F''(s) \end{cases}$$

و در فرم معکوس اگر $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ باشد، داریم:

$$L^{-1}\left(\frac{d^n F(s)}{ds^n}\right)=(-1)^n\, t^n f(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L^{-1}\{F'(s)\}=-t f(t) \\ L^{-1}\{F''(s)\}=t^2 f(t) \end{cases}$$

نکته: قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس در فرم توسعه یافته به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L\left\{(a-t)^n f(t)\right\}=e^{-as}\frac{d^n}{ds^n}\left(e^{as}F(s)\right)$$

تذکر: اگر معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب چندجمله‌ای‌هایی از t داشته باشیم، با لاپلاس گرفتن از معادله به یک معادله دیفرانسیل خطی برای لاپلاس جواب مسئله خواهیم رسید.

مثلاً در مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} ty''+y=f(t) \\ y(0)=\alpha\ ,\ y'(0)=\beta \end{cases}$ با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله و اعمال شرایط اولیه داده شده به دست می‌آوریم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+Y(s)=F(s) \quad \rightarrow \quad -\left(2sY+s^2Y'-y(0)\right)+Y=F(s) \quad \rightarrow$$

$$-s^2Y'+(1-2s)Y=F(s)-\alpha$$

تذکر: قضیه مشتق تبدیل لاپلاس برای محاسبه دو نوع لاپلاس معکوس مناسب است:

الف) وقتی لاپلاس معکوس $F(s)$ را بخواهیم، در حالی که لاپلاس معکوس $F'(s)$ قابل محاسبه است، می‌نویسیم:

$$L^{-1}(F(s))=-\frac{1}{t}L^{-1}(F'(s))$$

مثلاً اگر $F(s)=\tan^{-1}\frac{a}{s}$ داریم:

$$F'(s)=\frac{-\frac{a}{s^2}}{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}=\frac{-a}{s^2+a^2}$$

پس می‌نویسیم:

$$L^{-1}(F(s))=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{-a}{s^2+a^2}\right)=-\frac{1}{t}\cdot(-\sin at)=\frac{\sin at}{t}$$

ب) وقتی لاپلاس معکوس $F'(s)$ را بخواهیم، در حالی که لاپلاس معکوس $F(s)$ قابل محاسبه است، می‌نویسیم:

$$L^{-1}(F'(s))=-t\,L^{-1}(F(s))$$

مثلاً اگر $F(s)=\frac{2s}{\left(s^2-a^2\right)^2}$ داریم:

$$\int \frac{2s}{\left(s^2-a^2\right)^2}ds=-\frac{1}{s^2-a^2}$$

یعنی اگر $G(s)=-\frac{1}{s^2-a^2}$ آنگاه $G'(s)=F(s)$ و هدف ما محاسبه $L^{-1}(G'(s))$ است، می‌نویسیم:

$$L^{-1}(G'(s))=-tL^{-1}\left(-\frac{1}{s^2-a^2}\right)=-t\left(-\frac{1}{a}\sin hat\right)=\frac{t}{a}\sinh at$$

مثال ۲۸ فرض کنید $y=\varphi(t)$ جواب مسئله مقدار اولیه $y'(0)=1$ ، $y(0)=0$ ، $(1-t^2)y''-2ty'+2y=0$ باشد. اگر Y تبدیل لاپلاس y باشد، Y در چه معادلهٔ دیفرانسیلی صدق می‌کند؟ (عمران ۸۸)

۱) $sY''+Y'-(s^2+1)Y=1$

۲) $s^2Y''+2sY'-(s^2+2)Y=-1$

۳) $s^2Y''+sY'-s^2Y=-1$

۴) $sY''+s^2Y'-(s^2+2)Y=1$

حل : گزینه ۲ درست است.

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L(y'')-L(t^2y'')-2L(ty')+2L(y)=0 \quad \rightarrow$$

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)-\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+2\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)+2Y(s)=0$$

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)\_\left(2Y+4sY'+s^2Y''\right)+2(Y+sY')+2Y=0 \quad \rightarrow$$

$$-s^2Y''-2sY'+(s^2+2)Y-sy(0)-y'(0)=0$$

با توجه به شرایط اولیه $y'(0)=1$ و $y(0)=0$ به دست می‌آید:

$$s^2Y''+2sY'-(s^2+2)Y=-1$$

مثال ۲۹ حاصل $I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty t^2e^{-\alpha t}\cos\beta t\,dt$ کدام است؟ $(\alpha,\beta>0)$

۱) $\frac{2\alpha^3-6\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^3}$

۲) $\frac{2\alpha^3-6\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^4}$

۳) $\frac{2\alpha^3-6\alpha^2\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^3}$

۴) هیچ‌کدام

حل : گزینه ۱ درست است.

مطابق تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=\left(L\left(t^2\cos\beta t\right)\right)\Big|_{s=\alpha}$$

اما می‌توان نوشت:

$$L\left(t^2\cos\beta t\right)=\frac{d^2}{ds^2}\{L(\cos\beta t)\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta^2-s^2}{(s^2+\beta^2)^2}\right)$$

$$=\frac{(-2s)(s^2+\beta^2)^2-(4s)(s^2+\beta^2)(\beta^2-s^2)}{(s^2+\beta^2)^4}=\frac{2s^3-6s\beta^2}{(s^2+\beta^2)^3}$$

پس داریم:

$$I=\frac{2\alpha^3-6\alpha\beta^2}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^3}$$

مثال ۳۰ لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\frac{s}{2}+\tan^{-1}s$ کدام است؟

۱) $f(t)=-\frac{2\sin 2t-\sin t}{t}$

۲) $f(t)=\frac{2\sin 2t-\sin t}{t}$

۳) $f(t)=-\frac{\sin 2t-\sin t}{t}$

۴) $f(t)=\frac{\sin 2t-\sin t}{t}$

حل : گزینه ۲ درست است.

$$F'(s)=-2\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{s}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+s^2}=-\frac{4}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+1}$$

از آن‌جا که $L^{-1}\left(F'(s)\right)=-tf(t)$ داریم:

$$-2\sin 2t+\sin t=-tf(t)\ \rightarrow\ f(t)=\frac{2\sin 2t-\sin t}{t}$$

مثال ۳۱ اگر $F(s)=\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ ، آن‌گاه $L^{-1}\left(F(s)\right)$ برابر کدام است؟ (معدن ۸۸)

۱) $\frac{2(1-\cos u)}{u}$

۲) $2\int_0^t\frac{1+\sin u}{u}du$

۳) $\frac{2(1+\sin u)}{u}$

۴) $2\int_0^t\frac{1-\cos u}{u}du$

حل : گزینه ۴ درست است.

با فرض $G(s)=\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ داریم:

$$G(s)=\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)=\ln\left(s^2+1\right)-2\ln s\ \rightarrow\ G'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}$$

از آن جا که:

$$L^{-1}\left(G'(s)\right)=-t.g(t)\ \rightarrow\ 2\cos t-2=-t.g(t)\ \rightarrow\ g(t)=\frac{2(1-\cos t)}{t}$$

و با توجه به آن که:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}G(s)\right)=\int_0^t g(u)du\ \rightarrow\ L^{-1}\left(\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right)=\int_0^t\frac{2(1-\cos u)}{u}du$$

مثال ۳۲ تبدیل لاپلاس جواب مسأله $xy''+y'+xy=0\ ,\ y(0)=1$ کدام است؟ (برق ۸۷)

۱) $\frac{C}{s^2-1}$ ۲) $\frac{C}{\sqrt{s^2-1}}$ ۳) $\frac{Cs}{s^2+1}$ ۴) $\frac{C}{\sqrt{s^2+1}}$

حل : گزینه ۴ درست است.

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{1}-y'(0)\right)+\left(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{1}\right)-\frac{d}{ds}Y(s)=0 \quad\rightarrow\quad -s^2Y'-2sY+1+sY-1-Y'=0$$

$$-\left(s^2+1\right)Y'=sY \quad\rightarrow\quad \frac{Y'}{Y}=-\frac{s}{s^2+1} \quad\xrightarrow{\int}\quad \ln Y(s)=-\frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right)+\ln C \quad\rightarrow\quad Y(s)=\frac{C}{\sqrt{s^2+1}}$$

مثال ۳۳ لاپلاس معکوس $s\ln\frac{s}{s-a}-a$ چگونه است؟

۱) $\frac{e^{at}-ate^{at}-1}{t^2}$ ۲) $\frac{-e^{at}+ate^{at}-1}{t^2}$ ۳) $\frac{ate^{at}-e^{at}+1}{t^2}$ ۴) $\frac{ate^{at}+e^{at}-1}{t^2}$

حل : گزینه ۳ درست است.

با فرض $F(s)=\ln\frac{s}{s-a}$ داریم:

$$F(s)=\ln s-\ln(s-a) \quad\rightarrow\quad F'(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-a}$$

حال ازآنجاکه $L^{-1}\left(F'(s)\right)=-tf(t)$ داریم:

$$1-e^{at}=-tf(t) \quad\rightarrow\quad f(t)=\frac{e^{at}-1}{t}$$

با توجه به اینکه:

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{e^{at}-1}{t}=\frac{0}{0} \quad\xrightarrow{\text{Hop}}\quad \lim_{t\to0^+}ae^{at}=a$$

و با عنایت به رابطه:

$$L\left(f'(t)\right)=sF(s)-f\left(0^+\right) \quad\rightarrow\quad f'(t)=L^{-1}\left(sF(s)-f\left(0^+\right)\right)$$

می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left(s\ln\frac{s}{s-a}-a\right)=\left(\frac{e^{at}-1}{t}\right)'=\frac{ate^{at}-e^{at}+1}{t^2}$$

راه دیگر:

$$F(s)=s\ln\frac{s}{s-a}-a$$

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(F'(s)\right)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(\ln\frac{s}{s-a}-\frac{a}{s-a}\right)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(\ln\frac{s}{s-a}\right)-\frac{1}{t}L^{-1}\left(-\frac{a}{s-a}\right)$$

با فرض $G(s)=\ln\frac{s}{s-a}$ داریم:

$$G(s)=\ln\frac{s}{s-a}=\ln s-\ln(s-a)\quad\rightarrow\quad G'(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-a}$$

و ازآنجاکه $L^{-1}(G'(s))=-tg(t)$ داریم:

$$1-e^{at}=-tg(t)\quad\rightarrow\quad g(t)=\frac{e^{at}-1}{t}$$

لذا:

$$L^{-1}(F(s))=-\frac{1}{t}\left(\frac{e^{at}-1}{t}\right)-\frac{1}{t}\left(-ae^{at}\right)=\frac{-e^{at}+1+ate^{at}}{t^2}$$

قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ و $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد، داریم:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds\qquad L\left\{\frac{f(t)}{t^n}\right\}=\overbrace{\int_s^\infty\int_s^\infty\cdots\int_s^\infty}^{\text{n تا انتگرال}}F(s)\ (ds)^n$$

و در فرم معکوس اگر $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\left(\int_s^\infty F(s)ds\right)=\frac{f(t)}{t}\qquad L^{-1}\left(\overbrace{\int_s^\infty\int_s^\infty\cdots\int_s^\infty}^{\text{n تا انتگرال}}F(s)(ds)^n\right)=\frac{f(t)}{t^n}$$

نکته: قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس در فرم توسعه‌یافته به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L\left(\frac{f(t)}{t+a}\right)=e^{as}\int_s^\infty e^{-as}F(s)ds$$

چند نکته:

۱ـ چنانچه $L(f(t))=F(s)$ باشد، می‌توان نشان داد:

$$L\left(e^{-\alpha t}f(t)\cos\beta t\right)=\mathrm{Re}\left(F(s+\alpha-i\beta)\right)$$
$$L\left(e^{-\alpha t}f(t)\sin\beta t\right)=\mathrm{Im}\left(F(s+\alpha-i\beta)\right)$$

۲ـ با فرض $\theta = \mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{s}$، می‌توان نشان داد:

$$L\left(t^n \cos\alpha t\right) = \frac{n!\cos\left((n+1)\theta\right)}{\left(s^2+\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

$$L\left(t^n \sin\alpha t\right) = \frac{n!\sin\left((n+1)\theta\right)}{\left(s^2+\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

۳ـ

$$L\left(\sin^{2n}\omega t\right) = \frac{(2n)!\,\omega^{2n}}{s\left(s^2+(2\omega)^2\right)\ldots\left(s^2+(2n\omega)^2\right)}$$

$$L\left(\sin^{2n+1}\omega t\right) = \frac{(2n+1)!\,\omega^{2n+1}}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+(3\omega)^2\right)\ldots\left(s^2+((2n+1)\omega)^2\right)}$$

مثال ۳۴ حاصل $\int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin^2 t}{t}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}\ln 2$ ۲) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۳) $\ln 2$ ۴) $2\ln 2$

حل : گزینه ۱ درست است.

با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I = \int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin^2 t}{t}dt = \left\{L\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)\right\}\Bigg|_{s=2}$$

اما می‌دانیم:

$$L\left(\sin^2 t\right) = L\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$L\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)ds = \frac{1}{2}\left\{\ln s - \frac{1}{2}\ln\left(s^2+4\right)\right\}\Bigg|_s^\infty = \frac{1}{2}\left\{\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right\}\Bigg|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln 1 - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

لذا داریم:

$$I = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\right)\Bigg|_{s=2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{4}\ln 2$$

مثال ۳۵ تبدیل لاپلاس $\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du$ کدام است؟ (هوافضا ۸۶)

۱) $\frac{s^2}{s+1}$ ۲) $\frac{s^2+1}{s^2}$ ۳) $\frac{1}{s}\ln\frac{s+1}{s}$ ۴) $s\ln\frac{s}{s^2+1}$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$L\left(1-e^{-u}\right)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1} \rightarrow L\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)=\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)ds=\left(\ln(s)-\ln(s+1)\right)\Big|_s^{+\infty}$$

$$=\left(\ln\frac{s}{s+1}\right)\Big|_s^{+\infty}=\ln(1)-\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)=\ln\left(\frac{s+1}{s}\right) \rightarrow L\left(\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\right)=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)$$

مثال ۳۶ اگر $L\left(g(t)e^{-t}\right)=\frac{1}{s^2+5s+4}$ باشد $L\left(\frac{g(t)}{t}\right)$ کدام می‌شود؟

۱) $\ln\sqrt[3]{\frac{s}{s+3}}$ ۲) $\ln\left(\frac{s}{s+3}\right)$ ۳) $\ln\sqrt[3]{\frac{s+3}{s}}$ ۴) $\ln\left(\frac{s+3}{s}\right)$

حل : گزینه ۳ درست است.

اگر $L\left(g(t)\right)=G(s)$ باشد داریم $L\left(g(t)e^{-t}\right)=G(s+1)$ اما طبق فرض داریم:

$$L\left(g(t)e^{-t}\right)=\frac{1}{s^2+5s+4}=\frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

پس می‌توان گفت:

$$G(s+1)=\frac{1}{(s+1)(s+4)} \rightarrow G(s)=\frac{1}{s(s+3)}$$

و داریم:

$$L\left(\frac{g(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty}G(s)ds=\int_s^{\infty}\frac{1}{s(s+3)}ds=\int_s^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)ds$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln s-\ln(s+3)\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{s}{s+3}\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{3}\left(\ln 1-\ln\frac{s}{s+3}\right)=\ln\sqrt[3]{\frac{s+3}{s}}$$

مثال ۳۷ حاصل $I(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\frac{1-\cos\beta t}{t}dt$ کدام است؟ $(\alpha,\beta>0)$

۱) $\ln\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}$ ۲) $\ln\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}$ ۳) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}$ ۴) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}$

حل : گزینه ۱ درست است.

مطابق تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\frac{1-\cos\beta t}{t}dt=\left\{L\left(\frac{1-\cos\beta t}{t}\right)\right\}\Bigg|_{s=\alpha}$$

اما مطابق قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس می‌توان گفت:

$$L\left(\frac{1-\cos\beta t}{t}\right)=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)ds=\left(\ln s-\frac{1}{2}\ln\left(s^2+\beta^2\right)\right)\Bigg|_s^{\infty}=\left(\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+\beta^2}}\right)\Bigg|_s^{\infty}$$

$$=\ln 1-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+\beta^2}}=\ln\frac{\sqrt{s^2+\beta^2}}{s}$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I(\alpha,\beta)=\left(\ln\frac{\sqrt{s^2+\beta^2}}{s}\right)\Bigg|_{s=\alpha}=\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}\right)$$

قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع

کانولوشن یا پیچش دو تابع $g(t)$ و $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)_{(t)}=\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda=\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda$$

می‌توان نشان داد:

$$f*0=0*f=0$$
$$f*g=g*f$$
$$f*(g+h)=f*g+f*h$$
$$f*(g*h)=(f*g)*h$$
$$f*(ag)=(af)*g=a(f*g)$$ (a ثابت است)

اگر $L\{g(t)\}=G(s)$ و $L\{f(t)\}=F(s)$ باشند، داریم:

$$L\left\{(f*g)_{(t)}\right\}=F(s)\,G(s)$$

و در فرم معکوس اگر $L^{-1}\{G(s)\}=g(t)$ و $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ باشند، داریم:

$$L^{-1}(F(s)\,G(s))=(f*g)_{(t)}$$
$$f(t)*\delta(t-a)=f(t-a)$$
$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$
$$(f(t)*g(t))'=f'(t)*g(t)=f(t)*g'(t)$$

تذکر: رابطه گفته شده در پیچش قابل تعمیم است، یعنی داریم:

$$L\left(f(t)*g(t)*h(t)\cdots\right)=F(s)G(s)H(s)\cdots$$

مثال ۳۸ حاصل $f(x)=\int_0^x \sin(x-t)\int_0^t \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t-\lambda}}d\lambda\, dt$ را بیابید.

حل :

انتگرال داخلی به صورت زیر قابل بیان است:

$$g(t)=\int_0^t \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t-\lambda}}d\lambda=t^{\frac{3}{2}}*\frac{1}{\sqrt{t}}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\int_0^x \sin(x-t)g(t)dt=\sin x*g(x)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sin x*x^{\frac{3}{2}}*\frac{1}{\sqrt{x}}\quad\rightarrow\quad F(s)=L(\sin x)\cdot L\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\cdot L\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\pi}{4}\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

اما داریم:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\right)\right)=\int_0^x(x-\sin x)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\cos x\right)\Bigg|_0^x=\frac{x^2}{2}+\cos x-1$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}\left(\frac{x^2}{2}+\cos x-1\right)$$

مثال ۳۹ جواب مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y''+4y=f(t) \\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=-1 \end{cases}$ چیست؟ (عمران ۸۷)

۱) $y=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\int_0^t \cos 2(t-x)f(x)dx$

۲) $y=\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t+\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x)f(x)dx$

۳) $y=\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t+\int_0^t \cos 2(t-x)f(x)dx$

۴) $y=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x)f(x)dx$

حل : گزینه ۴ درست است.

از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=F(s) \rightarrow s^2Y(s)-3s+1+4Y(s)=F(s) \rightarrow$$

$$(s^2+4)Y(s)=3s-1+F(s) \rightarrow Y(s)=\frac{3s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}+F(s).\frac{1}{s^2+4} \rightarrow$$

$$y(t)=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+f(t)*\frac{1}{2}\sin 2t=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x)f(x)dx$$

مثال ۴۰ تبدیل لاپلاس $2e^x\int_0^x e^{-t}\sin^2 t\,dt$ عبارتست از: (ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{4}{s(s-1)(s^2+4)}$ ۲) $\frac{4}{(s-1)(s^2+4)}$ ۳) $\frac{4}{s(s+1)(s^2+4)}$ ۴) $\frac{4}{(s+1)(s^2+4)}$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=2e^x\int_0^x e^{-t}\sin^2 t\,dt=2\int_0^x e^{(x-t)}\sin^2 t\,dt=2\left(e^x*\sin^2 x\right)$$

لذا داریم:

$$F(s)=2\left(L\left(e^x\right)\cdot L\left(\sin^2 x\right)\right)=2\left(L\left(e^x\right)\cdot L\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\right)=\frac{1}{s-1}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{1}{s-1}\,\frac{s^2+4-s^2}{s\left(s^2+4\right)}$$

$$=\frac{4}{s(s-1)(s^2+4)}$$

مثال ۴۱ کانولوشن دو تابع $f(t) = t\cos t$ و $g(t) = t\cosh t$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)$ ۲) $\frac{t}{2}(\sinh t - \sin t)$ ۳) $\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)$ ۴) $\frac{t}{2}(\sinh t + \sin t)$

حل : گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم:

$$L\big((f*g)(t)\big) = F(s)\,G(s)$$

حال از آن‌جا که:

$$L\big(f(t)\big) = L(t\cos t) = \frac{-d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\frac{s^2+1-2s^2}{\left(s^2+1\right)^2} = \frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$L\big(g(t)\big) = L(t\cosh t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2-1}\right) = -\frac{s^2-1-2s^2}{\left(s^2-1\right)^2} = \frac{s^2+1}{\left(s^2-1\right)^2}$$

می‌توان نوشت:

$$(f*g)(t) = L^{-1}\left(\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\,\frac{s^2+1}{\left(s^2-1\right)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2-1\right)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)$$

مثال ۴۲ α چقدر باشد تا داشته باشیم $\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x f(x)(dx)^n = \alpha\int_0^x (x-u)^{n-1} f(u)\,du$

۱) $\frac{1}{n!}$ ۲) $\frac{1}{(n-1)!}$ ۳) $n!$ ۴) $(n-1)!$

حل : گزینه ۲ درست است.

از دو طرف معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\left\{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x f(x)(dx)^n\right\} = L\left\{\alpha\underbrace{\int_0^x (x-u)^{n-1} f(u)\,du}_{x^{n-1}*f(x)}\right\}$$

$$\frac{1}{s^n}F(s) = \alpha\,\frac{(n-1)!}{s^n}\,F(s) \quad\rightarrow\quad \alpha = \frac{1}{(n-1)!}$$

مثال ۴۳ جواب معادله انتگرالی $y(t) + \int_0^t y(t-\tau)\tau\cos\tau\,d\tau = \sin t$ کدام است؟ (برق ۸۶)

۱) $t + t\sin t$ ۲) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) - \frac{t}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) + \frac{t}{3}$ ۴) $\frac{t}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)$

حل : گزینه ۴ درست است.

با توجه به تعریف کانولوشن داریم:

$$y(t)+y(t)*t\cos t=\sin t$$

از آن‌جا که:

$$L(\cos t)=\frac{s}{s^2+1}\ \rightarrow\ L(t\cos t)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=-\frac{(s^2+1)-(2s^2)}{(s^2+1)^2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$Y(s)+Y(s)\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{s^2+1}\ \rightarrow\ Y(s)\left(1+\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{1}{s^2+1}\ \rightarrow$$

$$Y(s)\left(\frac{s^4+3s^2}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{1}{s^2+1}\ \rightarrow\ Y(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s^2+3)}=\frac{(s^2+3)-2}{s^2(s^2+3)}\ \rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^2(s^2+3)}=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+3}\right)\ \rightarrow\ y(t)=t-\frac{2}{3}\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t\right)=\frac{t}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t$$

مثال ۴۴ اگر $f(t)=\delta(t)+\int_0^t f(\omega)\cos(t-\omega)d\omega$ باشد در جواب $f(t)$ ضریب جمله $e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$f(t)=\delta(t)+(f(t)*\cos t)\ \xrightarrow{L}\ F(s)=1+F(s)\frac{s}{s^2+1}\ \rightarrow\ F(s)\left(1-\frac{s}{s^2+1}\right)=1\ \rightarrow$$

$$F(s)\left(\frac{s^2+1-s}{s^2+1}\right)=1\ \rightarrow\ F(s)=\frac{s^2+1}{s^2+1-s}\ \rightarrow\ F(s)=\frac{(s^2+1-s)+s}{s^2+1-s}\ \rightarrow$$

$$F(s)=1+\frac{s}{s^2-s+1}=1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ \xrightarrow{L^{-1}}\ f(t)=\delta(t)+e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

مثال ۴۵ جواب معادله انتگرال $y(t) = 4t - 3\int_0^t y(z)\sin(t-z)dz$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (عمران ۸۶)

۱) $y(t) = t + \frac{3}{2}\sin 2t$

۲) $y(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin 2t$

۳) $y(t) = 1 - \cos t$

۴) $y(t) = t - \cos t$

حل : گزینه ۱ درست است.

با توجه به تعریف پیچش دو تابع، معادله به فرم زیر بیان می‌شود:

$$y(t) = 4t - 3\left(y(t) * \sin t\right)$$

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2} - 3\left(Y(s)\frac{1}{s^2+1}\right) \rightarrow Y(s)\left(1+\frac{3}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s^2} \rightarrow Y(s)\cdot\left(\frac{s^2+4}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s^2} \rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{4\left(s^2+1\right)}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{4\left(\left(s^2+4\right)-3\right)}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{4}{s^2} - \frac{12}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{4}{s^2} - 12\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}$$

$$y(t) = t + \frac{3}{2}\sin 2t$$

توجه:

$$y(0) = 4(0) - 3\int_0^0 \quad = 0$$

لذا گزینه‌های دوم و چهارم که حاصلشان در $t = 0$ مخالف صفر است مردودند.

$$y(t) = 4t - 3\int_0^t y(z)\sin(t-z)dz \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t}$$

$$y'(t) = 4 - 3\left\{(1)y(t)\sin(t-t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(y(z)\sin(t-z)\right)dz\right\} = 4 - 3\left(0 + \int_0^t y(z)\cos(t-z)dz\right) \rightarrow$$

$$y'(0) = 4 - 3\int_0^0 \quad = 4$$

و تنها گزینه‌ای که شرط $y'(0) = 4$ را ارضاء می‌کند گزینه اول است.

$$y(t) = t + \frac{3}{2}\sin 2t \rightarrow y'(t) = 1 + 3\cos 2t \rightarrow y'(0) = 1 + 3 = 4$$

مثال ۴۶ اگر $\int_0^t y(\lambda)e^{t-\lambda}d\lambda = t^2 + \int_0^t y(t-\lambda)e^{2\lambda}d\lambda$ باشد در $y(t)$ ضریب t کدام است؟

۱) -3

۲) -6

۳) 6

۴) 3

حل : گزینه ۳ درست است.

طبق تعریف پیچش داریم:

$$\left(y(t)*e^{t}\right)=t^{2}+\left(y(t)*e^{2t}\right) \xrightarrow{L} Y(s).\frac{1}{s-1}=\frac{2}{s^{3}}+Y(s).\frac{1}{s-2} \rightarrow$$

$$Y(s)\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}\right)=\frac{2}{s^{3}} \rightarrow Y(s)\frac{-1}{(s-1)(s-2)}=\frac{2}{s^{3}} \rightarrow$$

$$Y(s)=-2.\frac{s^{2}-3s+2}{s^{3}}=-2\left(\frac{1}{s}-\frac{3}{s^{2}}+\frac{2}{s^{3}}\right) \rightarrow y(t)=-2\left(1-3t+t^{2}\right)$$

مثال ۴۷ جواب معادلهٔ انتگرالی $\sin 2x=y(x)+\int_{0}^{x}(x-t)y(t)dt$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) $y=4\sin 3x-\frac{1}{3}\sin x$

۲) $y=\frac{4}{3}\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x$

۳) $y=\sin 2x+\frac{2}{3}\cos x$

۴) $y=\frac{4}{3}\sin 2x-\frac{2}{3}\sin x$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$\sin 2x=y(x)+\int_{0}^{x}(x-t)y(t)dt \rightarrow \sin 2x=y(x)+\left(x*y(x)\right) \xrightarrow{L}$$

$$\frac{2}{s^{2}+4}=Y(s)+\frac{1}{s^{2}}.Y(s) \rightarrow \frac{2}{s^{2}+4}=Y(s)\left(\frac{s^{2}+1}{s^{2}}\right) \rightarrow Y(s)=\frac{2s^{2}}{\left(s^{2}+4\right)\left(s^{2}+1\right)} \rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{s^{2}+4}-\frac{2}{s^{2}+1}\right) \rightarrow y(x)=\frac{1}{3}\left(4\sin 2x-2\sin x\right)=\frac{4}{3}\sin 2x-\frac{2}{3}\sin x$$

۱۰ بیان خودمونی در قضایای تبدیل لاپلاس

۱) قضیه تبدیل لاپلاس توابع متناوب

فرم مستقیم: اگر $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب P باشد، برای محاسبه لاپلاس آن، انتگرال مربوط به تعریف تبدیل لاپلاس را می‌نویسیم، فقط به جای حدود از 0 تا ∞ حدود از 0 تا p را قرار می‌دهیم، بهای نرفتن حد بالا تا ∞ می‌طلبد پشت این انتگرال یک جمله اصلاحی به فرم $\frac{1}{1-e^{-Ps}}$ قرار دهیم.

فرم معکوس: برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ps}}H(s)$، جمله $\frac{1}{1-e^{-Ps}}$ را کنار گذاشته، لاپلاس معکوس $H(s)$ را پیدا می‌کنیم تابع حاصله ضابطه $f(t)$ را در بازه $(0,P)$ نشان می‌دهد، با گسترش این ضابطه با دوره تناوب P شکل کلی $f(t)$ به دست می‌آید.

۲) قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی

وقتی لاپلاس $f(t)$ به صورت $F(s)$ معلوم باشد، بدون محاسبه $f(t)$ می‌توان رفتار $f(t)$ را در 0 و ∞ ارزیابی حدی کرد، طوری که $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$، تکلیف $f(0^+)$ و $\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ تکلیف $f(+\infty)$ را مشخص می‌کند.

۳) قضیه مقیاس

فرم مستقیم: اگر لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت $F(s)$ معلوم باشد، چنانچه متغیر t به at تبدیل شود، برای لاپلاس تابع حاصله کافی است در $F(s)$ همه s ها را به $\frac{s}{a}$ تبدیل کرده و پشت عبارت حاصله $\frac{1}{a}$ قرار دهیم.

فرم معکوس: در محاسبه لاپلاس معکوس $F\left(\frac{s}{a}\right)$، نخست لاپلاس معکوس $F(s)$ را به دست می‌آوریم، سپس در عبارت حاصله t را به at تبدیل کرده و پشت عبارت حاصله a قرار می‌دهیم.

۴) قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

فرم مستقیم: وقتی تبدیل لاپلاس تابعی معلوم است، لاپلاس مشتق آن تابع با ضرب s در لاپلاس تابع اصلی منهای مقدار تابع اصلی در $t=0$ قابل محاسبه است.

فرم معکوس: اگر $F(s)$ لاپلاس $f(t)$ باشد، لاپلاس معکوس $sF(s)$ به صورت مجموع تابع $f(t)$ به علاوه مقدار $f(t)$ در $t=0$ قابل محاسبه است.

۵) قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع

فرم مستقیم: وقتی می‌خواهیم لاپلاس انتگرال 0 تا t تابعی را محاسبه کنیم، بی‌خیال عمل انتگرال‌گیری شده، لاپلاس تابع زیر علامت انتگرال را به دست می‌آوریم و در حاصل کار $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

فرم معکوس: در محاسبه لاپلاس معکوس $\frac{1}{s}F(s)$، بی‌خیال $\frac{1}{s}$ شده لاپلاس معکوس $F(s)$ را به دست می‌آوریم، سپس از حاصل کار یک‌بار انتگرال‌گیری معین از 0 تا t انجام می‌دهیم.

۶) قضیه اول انتقال

فرم مستقیم: وقتی تابعی در e^{at} ضرب می‌شود برای محاسبه لاپلاس آن، بی‌خیال e^{at} شده، لاپلاس تابع باقی‌مانده را به دست می‌آوریم، سپس در حاصل کار s ها را به $s-a$ تبدیل می‌کنیم.

فرم معکوس: در محاسبه لاپلاس معکوس عبارتی که در بسته‌های $s-a$ ظاهر شده، به جای $s-a$ ها s گذاشته و لاپلاس معکوس حاصل را به دست می‌آوریم، سپس در عبارت به دست آمده e^{at} ضرب می‌کنیم.

۷) قضیه دوم انتقال

فرم مستقیم: وقتی تابعی در $u_a(t)$ ضرب می‌شود برای محاسبه لاپلاس آن، $u_a(t)$ را بی‌خیال می‌شویم، در تابع باقی‌مانده t ها را به $t+a$ تبدیل کرده، حاصل را ساده کرده، لاپلاس آن را به دست می‌آوریم سپس در عبارت به دست آمده e^{-as} ضرب می‌کنیم.

فرم معکوس: در لاپلاس معکوس $e^{-as}F(s)$، بی‌خیال e^{-as} شده، لاپلاس معکوس $F(s)$ را به دست می‌آوریم، سپس عبارت حاصله را با دو عمل بازنویسی می‌کنیم اول هرچه t وجود دارد به $t-a$ تبدیل کرده، سپس حاصل را در $u_a(t)$ ضرب می‌کنیم.

۸) قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

فرم مستقیم: وقتی تابعی در t ضرب می‌شود، برای محاسبه لاپلاس آن، بی‌خیال t شده، لاپلاس تابع باقی‌مانده را به دست می‌آوریم، سپس مشتق عبارت حاصله را نسبت به s گرفته و آن را با علامت منفی می‌نویسیم.

فرم معکوس: اگر لاپلاس معکوس $F(s)$ را بخواهیم، کافی است لاپلاس معکوس $F'(s)$ را به دست آوریم و حاصل را بر $-t$ تقسیم کنیم.

و اگر لاپلاس معکوس $F'(s)$ را بخواهیم، کافی است لاپلاس معکوس $F(s)$ را به دست آوریم و آن را در $-t$ ضرب کنیم.

۹) قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس

فرم مستقیم: وقتی تابعی در $\frac{1}{t}$ ضرب می‌شود، برای محاسبه لاپلاس آن، بی‌خیال $\frac{1}{t}$ شده، لاپلاس تابع باقی‌مانده را به دست می‌آوریم، سپس از حاصل کار یک بار انتگرال‌گیری معین از s تا $+\infty$ انجام می‌دهیم.

فرم معکوس: اگر لاپلاس معکوس $G(s)$ای خواسته شود که آن $G(s)$، انتگرال از s تا $+\infty$ تابعی مانند $F(s)$ است، کافی است لاپلاس معکوس $F(s)$ را یافته و آن را در $\frac{1}{t}$ ضرب کنیم.

۱۰) قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع

فرم مستقیم: وقتی تبدیل لاپلاس پیچش چند تابع را می‌خواهیم، کافی است از تک‌تک توابع مذکور جداگانه لاپلاس گرفته و عبارات حاصله را در هم ضرب معمولی کنیم.

فرم معکوس: وقتی می‌خواهیم از حاصل‌ضرب چند عبارت، لاپلاس معکوس بگیریم، کافی است لاپلاس معکوس هر کدام از عبارات را جداگانه به دست آورده و پیچش توابع حاصله را به دست آوریم.

چند تذکر و پیشنهاد برای جمع‌بندی قضایای تبدیل لاپلاس

تذکر: برای محاسبه پیچش دو تابع همواره دو راه در دسترس است:

الف) استفاده از تعریف پیچش و سپس محاسبه انتگرال مربوط به آن

ب) محاسبه لاپلاس پیچش و سپس محاسبه لاپلاس معکوس عبارت به دست آمده.

مثلاً اگر هدف محاسبه پیچش دو تابع $g(t)=\sin t$ و $f(t)=e^{t}$ باشد، می‌توان نوشت:

الف)

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda=\int_0^t e^{\lambda}\sin(t-\lambda)d\lambda$$

با اعمال روش جزء به جزء برای $I=\int e^{\lambda}\sin(t-\lambda)d\lambda$ داریم:

مشتق		انتگرال
e^{λ}	$\overset{+}{\searrow}$	$\sin(t-\lambda)$
e^{λ}	$\overset{-}{\searrow}$	$\cos(t-\lambda)$
e^{λ}	$\overset{+}{\int}\!\!\rightarrow$	$-\sin(t-\lambda)$

$$I=e^{\lambda}\cos(t-\lambda)+e^{\lambda}\sin(t-\lambda)-I \quad\rightarrow\quad I=\frac{e^{\lambda}}{2}\left(\cos(t-\lambda)+\sin(t-\lambda)\right)$$

پس به دست می‌آوریم:

$$(f*g)(t)=\left(\frac{e^{\lambda}}{2}\left(\cos(t-\lambda)+\sin(t-\lambda)\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=t}=\frac{e^{t}-\cos t-\sin t}{2}$$

ب)

$$L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^{2}+1}$$

حال برای محاسبه لاپلاس معکوس عبارت فوق از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1}{(s-1)(s^{2}+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^{2}+1}=\frac{A(s^{2}+1)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^{2}+1)}=\frac{(A+B)s^{2}+(-B+C)s+(A-C)}{(s-1)(s^{2}+1)}\quad\rightarrow$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-B+C=0\\A-C=1\end{cases}\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\ ,\quad B=-\frac{1}{2}\ ,\quad C=-\frac{1}{2}$$

پس می‌توان گفت:

$$f(t)*g(t)=L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{s^{2}+1}\right)=\frac{e^{t}-\cos t-\sin t}{2}$$

تذکر: برخلاف مسئله فوق، معمولاً روش (ب) ساده‌تر از (الف) خواهد بود!

تذکر: معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت غیرهمگنی که طرف راست آن‌ها چهار نوع تابع (دلتای دیراک، پله واحد، تابع مجهول، تابع متناوب) وجود دارد را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

مثال ۴۸ معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}y''-2y'+y=\delta_{3}(t)\cos 2t\\y(0)=1\ ,\ y'(0)=2\end{cases}$$

حل :

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)-2\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=e^{-3s}\cos 6 \quad \rightarrow$$

$$\left(s^2Y-s-2\right)-2(sY-1)+Y=e^{-3s}\cos 6 \quad \rightarrow \quad \left(s^2-2s+1\right)Y=s+e^{-3s}\cos 6 \quad \rightarrow$$

$$(s-1)^2Y=s+e^{-3s}\cos 6 \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{(s-1)+1}{(s-1)^2}+\cos 6\cdot\frac{e^{-3s}}{(s-1)^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}+\cos 6\cdot\frac{e^{-3s}}{(s-1)^2}$$

حال ازآنجاکه $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)=te^t$ به دست می‌آید:

$$y(t)=e^t+te^t+\cos 6\cdot u_3(t)(t-3)e^{(t-3)}$$

مثال ۴۹ معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''+4y=\begin{cases}\sin t & 0<t<\frac{\pi}{2}\\ 0 & t>\frac{\pi}{2}\end{cases} \\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0\end{cases}$$

حل :

سمت راست معادله دیفرانسیل داده شده چنین بیان می‌شود:

$$f(t)=\left(u_0(t)-u_{\frac{\pi}{2}}(t)\right)\sin t$$

که لاپلاس آن به صورت زیر است:

$$F(s)=e^{-0s}\,L\left(\sin(t+0)\right)-e^{-\frac{\pi}{2}s}\,L\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

حال از طرفین معادله دیفرانسیل مورد نظر تبدیل لاپلاس می‌گیریم و شرایط اولیه صفر را اعمال می‌کنیم:

$$s^2Y(s)+4Y(s)=\frac{1}{s^2+1}-\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}-e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}$$

اما داریم:

$$G(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right) \quad \rightarrow \quad g(t)=\frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$H(s)=\frac{s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right) \quad \rightarrow \quad h(t)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$$

پس به دست می‌آید:

$$y(t)=g(t)-u_{\frac{\pi}{2}}(t)h\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال ۵۰ معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''+y'=f(t) \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$$

حل :

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)=F(s) \quad \rightarrow \quad \left(s^2Y-s-1\right)+\left(sY-1\right)=F(s) \quad \rightarrow$$

$$\left(s^2+s\right)Y=s+2+F(s) \quad \rightarrow \quad Y=\frac{(s+1)+1}{s(s+1)}+\frac{F(s)}{s(s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s(s+1)}+\frac{F(s)}{s(s+1)}$$

ازآنجاکه:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=1-e^{-t}$$

به دست می‌آید:

$$y(t)=1+1-e^{-t}+f(t)*\left(1-e^{-t}\right)=2-e^{-t}+\int_0^t f(t-\lambda)\left(1-e^{-\lambda}\right)d\lambda$$

مثال ۵۱ معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''+y=f(t) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

که در آن $f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0 & 1<t<2 \end{cases}$ و $f(t+2)=f(t)$ می‌باشد.

حل :

f تابعی متناوب با دوره تناوب $p=2$ است و داریم:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\int_0^1 e^{-st}(1)dt+\int_1^2 e^{-st}(0)dt\right\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1-e^{-s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$

حال اگر از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس بگیریم و شرایط اولیه صفر را اعمال کنیم به دست می‌آید:

$$s^2Y(s)+Y(s)=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{s\left(s^2+1\right)\left(1+e^{-s}\right)}$$

از آنجاکه $\left|e^{-s}\right|<1$ از سری هندسی داریم:

$$\frac{1}{1+e^{-s}}=1-e^{-s}+e^{-2s}-+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-ns}$$

پس به دست می‌آید:

$$Y(s)=\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s\left(s^2+1\right)}$$

با توجه به آنکه:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right)=\int_0^t \sin t\,dt=1-\cos t$$

خواهیم داشت:

$$y(t)=1-\cos t+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)\left(1-\cos(t-n)\right)$$

تذکر: استفاده از قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی می‌تواند ابزاری مناسب برای رد گزینه باشد.

مثال ۵۲ تبدیل لاپلاس جواب مسئله زیر کدام است؟

$$ty''+(1-t)y'+y=0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=-1$$

۱) $\frac{s(s-1)}{s+1}$ ۲) $\frac{s}{s^2+1}$ ۳) $\frac{1}{s(s-1)}$ ۴) $\frac{s-1}{s^2}$

حل : گزینه ۴ درست است.

انتظار داریم:

$$\lim_{s\to\infty} sY(s)=y(0)=1$$

بنابراین گزینه‌های اول و سوم مردود می‌شوند و چون باید $y'(0)=\lim_{s\to\infty}\left(s^2Y(s)-sy(0)\right)$ باشد، داریم:

در گزینه دوم : $\lim_{s\to\infty}\left(s^2Y(s)-sy(0)\right)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s^3}{s^2+1}-s\right)=\lim_{s\to\infty}\frac{-s}{s^2+1}=0$

در گزینه چهارم : $\lim_{s\to\infty}\left(s^2Y(s)-sy(0)\right)=\lim_{s\to\infty}\left(s^2\frac{s-1}{s^2}-s\right)=-1$

پس گزینه چهارم صحیح می‌باشد.

اما اگر می‌خواستیم مسئله را حل کنیم، از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گرفتیم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)+\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=0 \quad \rightarrow$$

$$-\left(2sY+s^2Y'-y(0)\right)+\left(sY-y(0)\right)+\left(Y+sY'\right)+Y=0 \quad \rightarrow \quad -\left(s^2-s\right)Y'+(2-s)Y=0 \quad \rightarrow$$

$$-s(s-1)\frac{dY}{ds}=(s-2)Y \rightarrow \frac{dY}{Y}=\frac{s-2}{-s(s-1)}ds \xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} \frac{dY}{Y}=\left(\frac{-2}{s}+\frac{1}{s-1}\right)ds \xrightarrow{\int}$$

$$\ln Y=-2\ln s+\ln(s-1)+\ln k \rightarrow Y(s)=\frac{k(s-1)}{s^2}$$

که فقط با گزینه چهارم انطباق دارد و البته با توجه به شرط $y(0)=\lim_{s\to\infty} sY(s)$ مقدار k نیز 1 به دست می‌آید.

تذکر: توالی استفاده از قضایای تبدیل لاپلاس می‌تواند با ترتیب دلخواه صورت گیرد:

الف) برای محاسبه لاپلاس $f(t)=te^t\cos t$ می‌توان نوشت:

$$L(\cos t)=\frac{s}{s^2+1} \rightarrow L(e^t\cos t)=\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\Bigg|_{s\to s-1}=\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} \rightarrow$$

$$L(te^t\cos t)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}\right)=-\frac{(s-1)^2+1-2(s-1)^2}{\left((s-1)^2+1\right)^2}=\frac{(s-1)^2-1}{\left((s-1)^2+1\right)^2}=\frac{s^2-2s}{\left(s^2-2s+2\right)^2}$$

یا داریم:

$$L(\cos t)=\frac{s}{s^2+1} \rightarrow L(t\cos t)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=-\frac{s^2+1-2s^2}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2} \rightarrow$$

$$L(e^t t\cos t)=\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\Bigg|_{s\to s-1}=\frac{(s-1)^2-1}{\left((s-1)^2+1\right)^2}=\frac{s^2-2s}{\left(s^2-2s+2\right)^2}$$

ب) برای محاسبه لاپلاس $f(t)=\frac{e^{-t}\sin t}{t}$ می‌توان نوشت:

$$L(\sin t)=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow L(e^{-t}\sin t)=\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\Bigg|_{s\to s+1}=\frac{1}{(s+1)^2+1} \rightarrow$$

$$L\left(\frac{1}{t}e^{-t}\sin t\right)=\int_s^\infty \frac{1}{(s+1)^2+1}ds=\left(\operatorname{Arc}\tan(s+1)\right)\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\tan(s+1)=\operatorname{Arc}\cot(s+1)$$

یا داریم:

$$L(\sin t)=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow L\left(\frac{1}{t}\sin t\right)=\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds=(\operatorname{Arc}\tan s)\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\tan s=\operatorname{Arc}\cot s \rightarrow$$

$$L\left(e^{-t}\frac{\sin t}{t}\right)=(\operatorname{Arc}\cot s)\Big|_{s\to s+1}=\operatorname{Arc}\cot(s+1)$$

ج) برای محاسبه لاپلاس $f(t)=\int_0^t e^t\frac{1-\cos t}{t}dt$ می‌توان نوشت:

$$L(1-\cos t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1} \rightarrow$$

$$L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)ds=\left(\ln s-\frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right)\right)\Big|_s^{\infty}$$

$$=\left(\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)\Big|_s^{\infty}=\ln 1-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}=\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\quad\rightarrow$$

$$L\left(e^t\frac{1-\cos t}{t}\right)=\left(\ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right)\right)\Bigg|_{s\to s-1}=\ln\frac{\sqrt{(s-1)^2+1}}{s-1}=\ln\frac{\sqrt{s^2-2s+2}}{s-1}\quad\rightarrow$$

$$L\left(\int_0^t e^t\frac{1-\cos t}{t}dt\right)=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sqrt{s^2-2s+2}}{s-1}\right)$$

یا داریم:

$$L(1-\cos t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\quad\rightarrow\quad L\left(e^t(1-\cos t)\right)=\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{s\to s-1}=\frac{1}{s-1}-\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\quad\rightarrow$$

$$L\left(\frac{1}{t}e^t(1-\cos t)\right)=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right)ds=\left(\ln(s-1)-\frac{1}{2}\ln\left((s-1)^2+1\right)\right)\Big|_s^{\infty}$$

$$=\left(\ln\frac{s-1}{\sqrt{s^2-2s+2}}\right)\Big|_s^{\infty}=\ln 1-\ln\frac{s-1}{\sqrt{s^2-2s+2}}=\ln\frac{\sqrt{s^2-2s+2}}{s-1}\quad\rightarrow$$

$$L\left(\int_0^t\frac{e^t(1-\cos t)}{t}dt\right)=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sqrt{s^2-2s+2}}{s-1}\right)$$

تذکر: می‌توان لاپلاس معکوس عبارات به دست آمده را نیز به دست آورید.

الف) برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{s^2-2s}{\left(s^2-2s+2\right)^2}$ می‌نویسیم:

$$F(s)=\frac{(s-1)^2-1}{\left((s-1)^2+1\right)^2}\quad\rightarrow\quad L^{-1}\left(F(s)\right)=e^tL^{-1}\left(\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\right)$$

حال ازآنجاکه $\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)'=-\dfrac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$ و با توجه به رابطه $L^{-1}\left(G'(s)\right)=-tL^{-1}\left(G(s)\right)$ می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left(-\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\right)=L^{-1}\left(\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'\right)=-tL^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=-t\cos t\quad\rightarrow\quad L^{-1}\left(\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}\right)=t\cos t$$

و لذا داریم:

$$L^{-1}\left(F(s)\right)=e^{t}\cdot t\cos t$$

ب) برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\operatorname{Arccot}(s+1)$ می‌نویسیم:

$$F'(s)=\frac{-1}{(s+1)^{2}+1}$$

حال با توجه به رابطه $L^{-1}\left(F(s)\right)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(F'(s)\right)$ می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left(F(s)\right)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{-1}{(s+1)^{2}+1}\right)=\frac{1}{t}e^{-t}\sin t$$

ج) برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sqrt{s^{2}-2s+2}}{s-1}\right)$ می‌نویسیم:

با فرض $G(s)=\ln\left(\frac{\sqrt{s^{2}-2s+2}}{s-1}\right)$ داریم:

$$G(s)=\ln\sqrt{s^{2}-2s+2}-\ln(s-1)=\frac{1}{2}\ln\left(s^{2}-2s+2\right)-\ln(s-1)\quad\rightarrow$$

$$G'(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s-2}{s^{2}-2s+2}-\frac{1}{s-1}=\frac{s-1}{(s-1)^{2}+1}-\frac{1}{s-1}$$

ازآنجاکه $L^{-1}\left(G'(s)\right)=-t\,g(t)$ داریم:

$$-t\,g(t)=L^{-1}\left(\frac{(s-1)}{(s-1)^{2}+1}-\frac{1}{s-1}\right)=e^{t}\cos t-e^{t}\quad\rightarrow\quad g(t)=\frac{e^{t}(1-\cos t)}{t}$$

و خواهیم داشت:

$$L^{-1}\left(F(s)\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}G(s)\right)=\int_{0}^{t}g(t)dt=\int_{0}^{t}\frac{e^{t}(1-\cos t)}{t}dt$$

یک پیشنهاد: در محاسبه لاپلاس استفاده از قضیه دوم انتقال را در اولین مرحله انجام دهید و در محاسبه لاپلاس معکوس استفاده از قضیه دوم انتقال را در آخرین مرحله انجام دهید.

الف) برای محاسبه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{2t}\sin t$ می‌نویسیم:

$$F(s)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot L\left\{e^{2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot L\left\{e^{2t+\pi}\cos t\right\}=e^{-\frac{\pi}{2}s}e^{\pi}L\left(e^{2t}\cos t\right)$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}(s-2)}\left(L(\cos t)\right)\Big|_{s\rightarrow s-2}=e^{-\frac{\pi}{2}(s-2)}\frac{(s-2)}{(s-2)^{2}+1}$$

ب) برای محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s)=e^{-2s}\dfrac{2}{s\left(s^2-2s+2\right)}$ می‌نویسیم:

$$\frac{2}{s\left(s^2-2s+2\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+2}=\frac{A\left(s^2-2s+2\right)+(Bs+C)s}{s\left(s^2-2s+2\right)}=\frac{(A+B)s^2+(-2A+C)s+2A}{s\left(s^2-2s+2\right)}\quad\rightarrow$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+C=0\\2A=2\end{cases}\Rightarrow\quad A=1\quad,\quad B=-1\quad,\quad C=2$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s\left(s^2-2s+2\right)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{-s+2}{s^2-2s+2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{-(s-1)+1}{(s-1)^2+1}\right)$$

$$=1-e^t\cos t+e^t\sin t\quad\rightarrow$$

$$L^{-1}\left(e^{-2s}\frac{2}{s\left(s^2-2s+2\right)}\right)=u_2(t)\left(1-e^{(t-2)}\cos(t-2)+e^{(t-2)}\sin(t-2)\right)$$

پیشنهاد: برای محاسبه لاپلاس معکوس، حتی‌الامکان از بقیه قضایای تبدیل لاپلاس استفاده کنید و مفهوم کانولوشن را در اولویت آخر قرار دهید.

مثلاً برای محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s^3\left(s^2+a^2\right)}$ می‌توان نوشت:

الف)

$$F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2\left(s^2+a^2\right)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)$$

حال می‌توان گفت:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)=t-\frac{1}{a}\sin at\quad\rightarrow\quad L^{-1}\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right)=\frac{1}{a^2}\int_0^t\left(t-\frac{1}{a}\sin at\right)dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{a^2}\cos at\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{a^2}\cos at-\frac{1}{a^2}\right)$$

ب) ازآنجاکه:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)=\frac{1}{2}t^2\quad,\quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)=\frac{1}{a}\sin at$$

می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right)=\frac{1}{2}t^2*\frac{1}{a}\sin at=\int_0^t\frac{1}{2}(t-\lambda)^2\cdot\frac{1}{a}\sin a\lambda\,d\lambda$$

و با استفاده از روش جزء به جزء خواهیم داشت:

مشتق		انتگرال
$(t-\lambda)^2$	$\searrow^{+}$	$\sin a\lambda$
$-2(t-\lambda)$	$\searrow^{-}$	$-\frac{1}{a}\cos a\lambda$
2	$\searrow^{+}$	$-\frac{1}{a^2}\sin a\lambda$
0		$\frac{1}{a^3}\cos a\lambda$

$$f(t)=\frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{a}(t-\lambda)^2\cos a\lambda-\frac{2}{a^2}(t-\lambda)\sin a\lambda+\frac{2}{a^3}\cos a\lambda\right)\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=t}$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\frac{2}{a^3}\cos at+\frac{1}{a}t^2-\frac{2}{a^3}\right)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{a^2}\cos at-\frac{1}{a^2}\right)$$

مثلاً برای لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ می‌توان نوشت:

الف) با فرض $G(s)=\frac{-1}{2(s^2+a^2)}$ داریم $G'(s)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ (تلاش کنید تا با انتگرال‌گیری به این رابطه برسید)

اینک با توجه به رابطه $L^{-1}(G'(s))=-tL^{-1}(G(s))$ می‌توان نوشت:

$$L^{-1}(F(s))=L^{-1}(G'(s))=-tL^{-1}(G(s)) \quad\rightarrow\quad f(t)=-tL^{-1}\left(\frac{-1}{2(s^2+a^2)}\right)=\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{a}\sin at=\frac{1}{2a}t\sin at$$

ب) ازآنجاکه:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)=\frac{1}{a}\sin at \quad , \quad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=\cos at$$

می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right)=\frac{1}{a}\sin at * \cos at=\int_0^t\frac{1}{a}\sin a\lambda\cdot\cos a(t-\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\sin(a\lambda+a(t-\lambda))+\sin(a\lambda-a(t-\lambda))d\lambda$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t(\sin at+\sin(2a\lambda-at))d\lambda=\frac{1}{2a}\left(\lambda\sin at-\frac{1}{2a}\cos(2a\lambda-at)\right)\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=t}$$

$$=\frac{1}{2a}\left(t\sin at-\frac{1}{2a}\cos at+\frac{1}{2a}\cos at\right)=\frac{1}{2a}t\sin at$$

دونکته:

۱ـ محاسبه e^{At} هنگامی که A یک ماتریس مربعی می‌باشد

وقتی a یک عدد است داریم $L\left\{e^{at}\right\}=\frac{1}{s-a}=(s-a)^{-1}$ با یک مشابهت ساختاری وقتی A یک ماتریس مربعی است می‌گوئیم $L\left\{e^{At}\right\}=\frac{I}{Is-A}=(Is-A)^{-1}$ که در آن I ماتریس همانی (یکه) می‌باشد. لذا اگر از طرفین رابطه فوق تبدیل لاپلاس معکوس بگیریم به‌دست می‌آید:

$$e^{At}=L^{-1}\left\{(Is-A)^{-1}\right\}$$

مثال ۵۳ اگر $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ باشد e^{At} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\ \sin t&\cos t\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\ -\sin t&\cos t\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\cosh t&\sinh t\\ -\sinh t&\cosh t\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\cosh t&\sinh t\\ \sinh t&\cosh t\end{bmatrix}$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$L\left(e^{At}\right)=\frac{I}{Is-A}=(Is-A)^{-1}\quad\rightarrow\quad e^{At}=L^{-1}\left\{(Is-A)^{-1}\right\}$$

داریم:

$$Is-A=\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s&-1\\-1&s\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad(Is-A)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s&1\\1&s\end{bmatrix}}{s^2-1}$$

بنابراین داریم:

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2-1}&\frac{1}{s^2-1}\\ \frac{1}{s^2-1}&\frac{s}{s^2-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh t&\sinh t\\ \sinh t&\cosh t\end{bmatrix}$$

۲ـ استفاده از مانده توابع برای محاسبه لاپلاس معکوس

اگر $F(s)$ یک تابع گویا که صورت و مخرج چند جمله‌ای‌هایی از s می‌باشد، فرض شود، می‌توان نشان داد که:

$$L^{-1}\left\{F(s)\right\}=\sum \operatorname{Res}\left\{e^{st}F(s)\right\}\Big|_{\text{at Poles of } F(s)}$$

یعنی کافی است مجموع مانده‌های تابع $e^{st}F(s)$ را در قطب‌های آن محاسبه کرده تا تابع $f(t)$ به‌دست آید.

جهت یادآوری اگر z_0 یک قطب مرتبه m ام تابع $f(z)$ باشد، مانده تابع در این نقطه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

مجموعه تست تبدیل لاپلاس

۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}-2 & 0<t<1\\ 1 & 1<t<3\\ e^{2t} & t>3\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{2}{s}+\frac{3}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-3s}+\frac{1}{s-2}e^{6-3s}$

۲) $-\frac{2}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{3}{5}e^{-3s}+\frac{1}{s-2}e^{6-3s}$ با شرط $s>2$

۳) $-\frac{2}{s}+\frac{3}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-3s}+\frac{1}{s-2}e^{6-3s}$ با شرط $s>2$

۴) $-\frac{2}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{3}{s}e^{-3s}+\frac{1}{s-2}e^{6-3s}$

حل: گزینه ۳ درست است.

با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{1}e^{-st}(-2)dt+\int_1^{3}e^{-st}(1)dt+\int_3^{\infty}e^{-st}e^{2t}dt$$

$$=-2\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^1+\left(\frac{-1}{s}\right)e^{-st}\Big|_1^3+\frac{1}{2-s}e^{(2-s)t}\Big|_3^{\infty}$$

$$=\frac{2}{s}\left(e^{-s}-1\right)-\frac{1}{s}\left(e^{-3s}-e^{-s}\right)+\frac{1}{2-s}\left(e^{(-s+2)(\infty)}-e^{(-s+2)(3)}\right)$$

که در شرایط $-s+2<0$ داریم:

$$e^{(-s+2)(\infty)}=e^{-\infty}=0$$

و به دست می‌آید:

$$F(s)=-\frac{2}{s}+\frac{3}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-3s}+\frac{1}{s-2}e^{6-3s}$$

۲.تبدیل لاپلاس $f(t)=\sin^2 kt$ کدام است؟

۱) $\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$ ۲) $\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$ ۳) $\frac{k^2}{s(s^2+4k^2)}$ ۴) $\frac{s^2+k^2}{s(s^2+4k^2)}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$f(t)=\sin^2 kt=\frac{1-\cos 2kt}{2}\quad\rightarrow\quad F(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4k^2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{s^2+4k^2-s^2}{s(s^2+4k^2)}=\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$$

۳.پس از محاسبه لاپلاس معکوس $Y(s)=\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}$ ضریب e^{2t} چه خواهد بود؟

۱) $-\frac{2}{15}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{3}{10}$

حل: گزینه ۴ درست است.

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}=\frac{s+1}{s(s^2+s-6)}=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}\quad\rightarrow\quad\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+3}$$

لذا برای محاسبه ضریب e^{2t} در $y(t)$ کافی است B محاسبه شود، برای این منظور با ضرب طرفین رابطه فوق در $s-2$ بدست می‌آید:

$$\frac{s+1}{s(s+3)}=\frac{A(s-2)}{s}+B+\frac{c(s-2)}{s+3}\quad\xrightarrow{s=2}\quad\frac{3}{10}=0+B+0\rightarrow B=\frac{3}{10}$$

پس ضریب e^{2t} برابر $\frac{3}{10}$ می باشد.

۴.در لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{s^{10}+s^9-2s}$ ضریب e^t کدام است؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{17}$ ۴) $\frac{1}{18}$

حل: گزینه ۳ درست است.

عبارت $s^{10}+s^9-2s$ در $s=1$ صفر می‌شود ولی مشتق این عبارت یعنی $10s^9+9s^8-2$ در $s=1$ صفر نمی‌شود. بنابراین می‌توان گفت:

$$\frac{1}{s^{10}+s^9-2s}=\frac{1}{(s-1)H(s)}$$

که در آن $H(s)$ یک عبارت درجه 9 می‌باشد که فاقد جمله $s-1$ است.

لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{s^{10}+s^{9}-2s}=\frac{A}{s-1}+\frac{k(s)}{H(s)}$$

با ضرب طرفین عبارت فوق در $s-1$ داریم:

$$\frac{s-1}{s^{10}+s^{9}-2s}=A+\frac{k(s)(s-1)}{H(s)}$$

و چون:

$$\lim_{s\to 1}\frac{s-1}{s^{10}+s^{9}-2s}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}=\lim_{s\to 1}\frac{1}{10s^{9}+9s^{8}-2}=\frac{1}{17}$$

لذا $A=\frac{1}{17}$ و در لاپلاس معکوس $F(s)$ ضریب جمله e^{t} برابر $\frac{1}{17}$ خواهد بود.

۵.حاصل $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt\,ds$ **کدام است؟**

۱) ∞ ۲) 0 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\ln 2$

حل: گزینه ۳ درست است.

طبق تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت:

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt\,ds=\int_0^\infty L\{\sin t\}\,ds=\int_0^\infty\frac{1}{s^2+1}ds=\tan^{-1}s\Big|_0^\infty=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

۶.تبدیل لاپلاس تابع $f(t+4)=f(t)$, $f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t<4\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{s(1+e^{-2s})}$ ۲) $\frac{1}{s(1-e^{-2s})}$ ۳) $\frac{1}{s^2(1+e^{-2s})}$ ۴) $\frac{1}{s^2(1-e^{-2s})}$

حل: گزینه ۱ درست است.

تابع مورد نظر تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $P=4$ بوده و لذا:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-4s}}\int_0^4 e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left\{\int_0^2\left(e^{-st}\right)(1)dt+\int_2^4\left(e^{-st}\right)(0)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4s}}\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^2=\frac{1}{1-e^{-4s}}\frac{-1}{s}\left(e^{-2s}-1\right)=\frac{1}{s}\frac{1}{\left(e^{-2s}-1\right)\left(e^{-2s}+1\right)}\left(e^{-2s}-1\right)=\frac{1}{s\left(1+e^{-2s}\right)}$$

راه دیگر:

می‌توان نوشت:

$$f(t)=u_0(t)-u_2(t)+u_4(t)-+\cdots$$

$$F(s)=\frac{e^{-0s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}-+\cdots=\frac{1}{s}\left(e^{-0s}-e^{-2s}+e^{-4s}-+\cdots\right)$$

عبارت داخل پرانتز حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی است و داریم:

$$F(s)=\frac{1}{s}\frac{e^{-os}}{1+e^{-2s}}=\frac{1}{s\left(1+e^{-2s}\right)}$$

۷.اگر $F(s)=\frac{1}{s}\frac{e^{3s}+s}{e^{2s}+e^{3s}}$ **باشد حاصل** $\lim_{t\to 0} f(t)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) 1 ۴) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۳ درست است.

طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s}\frac{e^{3s}+s}{e^{2s}+e^{3s}}=\lim_{s\to\infty}\frac{e^{3s}+s}{e^{2s}+e^{3s}}$$

با مقایسه مرتبه بی نهایت ها خواهیم داشت: $\lim_{s\to\infty}\frac{e^{3s}}{e^{3s}}=1$

۸.اگر $F(s)=\frac{\operatorname{Arctg} s}{s\sin s}$ **باشد** $\lim_{t\to\infty} f(t)$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s\operatorname{Arctg} s}{s\sin s}=\lim_{s\to 0}\frac{s.s}{s.s}=1$$

۹.تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $y''+4y=\begin{cases}4t & 0\le t\le 1\\ 4 & t>1\end{cases}$ **همراه با شرایط اولیه** $y'(0)=0$ **و** $y(0)=1$ **کدام است؟**

۱) $\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)}\left(1-e^{-s}\right)$

۲) $\frac{1}{s^2+4}+\frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)}\left(1+e^{-s}\right)$

۳) $\frac{1}{s^2+4}+\frac{4}{s^2+4}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}\right)$

۴) $\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2+4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

طرف راست معادله دیفرانسیل داده شده یعنی $f(t)=\begin{cases}4t & 0\le t\le 1\\ 4 & t>1\end{cases}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t)=4tu_0(t)-4(t-1)u_1(t)$$

لذا اگر از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده لاپلاس بگیریم داریم:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=4\frac{e^{-0s}}{s^2}-4\frac{e^{-1s}}{s^2}$$

با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آید:

$$\left(s^2+4\right)Y(s)=\frac{4}{s^2}\left(1-e^{-s}\right)+s \quad\rightarrow\quad Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)}\left(1-e^{-s}\right)$$

۱۰. جواب مسئله با مقادیر اولیه $\begin{cases} y''+4y'+5y=0 \\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0 \end{cases}$ **، کدام است؟** **(عمران ۸۵)**

۱) $y=e^{-x}\cos x+e^{-2x}\sin x$

۲) $y=e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}\sin x$

۳) $y=e^{-2x}\cos x+3e^{-2x}\sin x$

۴) $y=e^{-2x}\cos x+e^{-x}\sin x$

حل: گزینه ۲ درست است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+4\left(sY(s)-y(0)\right)+5Y(s)=0$$

با اعمال شرایط اولیه $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ داریم:

$$\left(s^2Y-s-0\right)+4(sY-1)+5Y=0 \quad\rightarrow\quad \left(s^2+4s+5\right)Y=s+4 \quad\rightarrow\quad Y(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+5}$$

و در نتیجه به دست می‌آید:

$$Y(s)=\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1}+\frac{2}{(s+2)^2+1} \quad\rightarrow\quad y(x)=e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}\sin x$$

راه دیگر: معادله از نوع مرتبه دو همگن با ضرایب ثابت است که معادله مشخصه زیر را دارد:

$$\lambda^2+4\lambda+5=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=-2\pm i$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$y=Ae^{-2x}\cos x+Be^{-2x}\sin x$$
$$y'=A\left(-2e^{-2x}\cos x-e^{-2x}\sin x\right)+B\left(-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x\right)$$

با اعمال شرایط اولیه به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y(0)=1 & \rightarrow\quad A(1)+B(0)=1 \\ y'(0)=0 & \rightarrow\quad A(-2)+B(1)=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A=1\ ,\ B=2$$

و جواب موردنظر عبارت است از:

$$y=e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}\sin x$$

توجه: می‌توانید چک کنید شرط $y(0)=1$ در همه گزینه‌ها ارضاء می‌شود.

شرط $y'(0)=0$ فقط در گزینه سوم ارضاء نمی‌شود.

اما اگر در $x=0$ به معادله اصلی نگاه کنیم به دست می‌آوریم:

$$y''(0)+4y'(0)+5y(0)=0 \quad \rightarrow \quad y''(0)+4(0)+5(1)=0 \quad \rightarrow \quad y''(0)=-5$$

حال می‌توان دید از سه گزینه باقی‌مانده فقط گزینه دوم این شرط را ارضاء می‌کند.

گزینه دوم : $y=e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}\sin x$

$$y'=-2e^{-2x}\cos x-e^{-2x}\sin x-4e^{-2x}\sin x+2e^{-2x}\cos x=-5e^{-2x}\sin x$$

$$y''=10e^{-2x}\sin x-5e^{-2x}\cos x \quad \rightarrow \quad y''(0)=-5$$

۱۱. اگر $\begin{cases} y''-y'-6y=2\cos t+\sin t \\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0 \end{cases}$ **در جواب** $y(t)$ **ضریب جملات** e^{3t} **و** e^{-2t} **و** $\cos t$ **به ترتیب کدام است؟**

۱) $\frac{7}{50}$ و $\frac{3}{25}$ و $\frac{-13}{50}$

۲) $-\frac{3}{25}$ و $\frac{13}{50}$ و $\frac{1}{25}$

۳) $\frac{7}{25}$ و $\frac{3}{25}$ و $\frac{13}{50}$

۴) $\frac{3}{50}$ و $-\frac{3}{25}$ و $-\frac{13}{50}$

حل: گزینه ۱ درست است.

از طرفین معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=0$ را اعمال می‌کنیم:

$$s^2Y-sY-6Y=\frac{2s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{2s+1}{(s^2+1)(s^2-s-6)}=\frac{2s+1}{(s^2+1)(s-3)(s+2)}$$

با روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{2s+1}{(s^2+1)(s-3)(s+2)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{s+2} \qquad (1)$$

با ضرب طرفین معادلهٔ (1) در $s-3$ و سپس قرار دادن $s=3$ داریم: $C=\frac{6+1}{(9+1)(3+2)}=\frac{7}{50}$

با ضرب طرفین معادلهٔ (1) در $s+2$ و سپس قرار دادن $s=-2$ داریم: $D=\frac{-4+1}{(4+1)(-2-3)}=\frac{3}{25}$

با ضرب طرفین معادلهٔ (1) در s و سپس بررسی در $s\rightarrow\infty$ داریم:

$$A+C+D=0 \quad \rightarrow \quad A=-(C+D)=-\frac{13}{50}$$

لذا می‌توان گفت:

$$y(t)=A\cos t+B\sin t+Ce^{3t}+De^{-2t}=\frac{-13}{50}\cos t+B\sin t+\frac{7}{50}e^{3t}+\frac{3}{25}e^{-2t}$$

۱۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} y''+2y'+5y=0 \\ y(0)=2\ ,\ y'(0)=-4 \end{cases}$$

۱) $e^{t}(2\cos 2t-\sin 2t)$

۲) $e^{t}(2\cos 2t+\sin 2t)$

۳) $e^{-t}(2\cos 2t+\sin 2t)$

۴) $e^{-t}(2\cos 2t-\sin 2t)$

حل: گزینه ۴ درست است.

از طرفین معادله داده شده تبدیل لاپلاس گرفته و شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+2\left(sY(s)-y(0)\right)+5Y(s)=0 \;\rightarrow\; \left(s^2+2s+5\right)Y(s)-2s+4-4=0 \;\rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{2s}{s^2+2s+5}=\frac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+4} \;\rightarrow\; Y(s)=2\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{2}{(s+1)^2+4} \;\rightarrow$$

$$y(t)=2e^{-t}\cos 2t-e^{-t}\sin 2t=e^{-t}\left(2\cos 2t-\sin 2t\right)$$

۱۳. اگر $\begin{cases} ty''+(3t-1)y'-(4t+9)y=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$ **باشد** $y(t)$ **کدام است؟**

۱) kt^2e^t ۲) kte^{-t} ۳) kt^2e^{-t} ۴) kte^t

حل: گزینه ۱ درست است.

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)-3\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)-\left(sY(s)-y(0)\right)+4\frac{d}{ds}Y(s)-9Y(s)=0$$

با اعمال شرط $y(0)=0$ و انجام عمل مشتق‌گیری‌ها نسبت به s به دست می‌آید:

$$-\left(2sY+s^2Y'\right)-3\left(Y+sY'\right)-sY+4Y'-9Y=0 \;\rightarrow\; \left(4-3s-s^2\right)Y'-(3s+12)Y=0 \;\rightarrow$$

$$-(3s+12)Y=\left(s^2+3s-4\right)Y' \;\rightarrow\; -3(s+4)Y=(s-1)(s+4)\frac{dY}{ds} \;\rightarrow$$

$$\frac{-3ds}{(s-1)}=\frac{dY}{Y} \;\xrightarrow{\int}\; \ln Y(s)=-3\ln(s-1)+\ln c \;\rightarrow\; Y(s)=\frac{c}{(s-1)^3} \;\rightarrow\; y(t)=\frac{c}{2}e^t t^2$$

۱۴. در معادله دیفرانسیل $ty''+2y'+ty=0$ **با شرط اولیه** $\lim\limits_{t\to 0} y=\pi$ **حاصل** $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) 2 ۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+2\left(sY(s)-y(0)\right)-\frac{d}{ds}\left(Y(s)\right)=0$$

با اعمال شرط اولیه و انجام مشتق‌گیری‌ها نتیجه می‌شود:

$$-\left(2sY+s^2Y'-\pi\right)+2(sY-\pi)-Y'=0 \;\rightarrow\; -\left(s^2+1\right)Y'=\pi \;\rightarrow\; Y'(s)=-\frac{\pi}{s^2+1}$$

و از آن‌جا که $L^{-1}\left(Y'(s)\right)=-t\,y(t)$ لذا داریم:

$$L^{-1}\left(\frac{-\pi}{s^2+1}\right)=-t\,y(t) \;\rightarrow\; -\pi\sin t=-t\,y(t) \;\rightarrow\; y(t)=\frac{\pi\sin t}{t} \;\rightarrow\; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=2$$

۱۵. تبدیل لاپلاس جواب معادلهٔ زیر کدام است؟ **(برق ۸۸)**

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\frac{dy}{dt}+y=0 \quad ; \quad t>0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=-1$$

۱) $\frac{s-1}{s^2}$ ۲) $\frac{1}{s^2}$ ۳) $\frac{s}{s^2-1}$ ۴) $\frac{1}{s^2-1}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$L\left(t\frac{d^2y}{dt^2}\right)+L\left(\frac{dy}{dt}\right)-L\left(t\frac{dy}{dt}\right)+L(y)=0 \quad \rightarrow$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)+\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=0 \quad \rightarrow$$

$$-\left(2sY+s^2Y'-y(0)\right)+\left(sY-y(0)\right)+\left(Y+sY'\right)+Y=0 \quad \rightarrow \quad \left(s^2-s\right)Y'+(s-2)Y=0 \quad \rightarrow$$

$$s(s-1)\frac{dY}{ds}=-(s-2)Y \quad \rightarrow \quad \frac{dY}{Y}=-\frac{(s-2)}{s(s-1)}ds \quad \rightarrow \quad \frac{dY}{Y}=-\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s-1}\right)ds \quad \xrightarrow{\int}$$

$$\ln Y=-2\ln s+\ln(s-1)+\ln K \quad \rightarrow \quad Y=\frac{K(s-1)}{s^2}$$

که فقط با گزینهٔ اول منطبق است (و نیازی به محاسبهٔ K نمی‌باشد).

توضیح اضافه: از قضیه مقدار اولیه داریم:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty} sY(s) \quad \rightarrow \quad 1=\lim_{s\to\infty} s\frac{K(s-1)}{s^2} \quad \rightarrow \quad K=1$$

توجه: می‌دانیم:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty} sY(s) \quad , \quad y'(0)=\lim_{s\to\infty} s^2Y(s)-sy(0)$$

چون $y(0)=1$ داده شده باید $\lim_{s\to\infty} sY(s)=1$ و از اینجا گزینه‌های دوم و چهارم مردود می‌شوند.

چون $y'(0)=-1$ داده شده باید:

$$\lim_{s\to\infty} s^2Y(s)-sy(0)=-1$$

در گزینه اول : $\lim_{s\to\infty} s^2Y(s)-sy(0)=\lim_{s\to\infty} s^2\left(\frac{s-1}{s^2}\right)-s(1)=\lim_{s\to\infty} s-1-s=-1$

در گزینه سوم : $\lim_{s\to\infty} s^2Y(s)-sy(0)=\lim_{s\to\infty} s^2\left(\frac{s}{s^2-1}\right)-s(1)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3}{s^2-1}-s$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3-s^3+s}{s^2-1}=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^2-1}=0$$

پس باید گزینه اول صحیح باشد.

۱۶. اگر $\begin{cases} y''+2y'+y=t\,\delta_2(t) \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$ **باشد** $y(1)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{3}{e}$ ۴) صفر

حل: گزینه ۳ درست است.

از طرفین معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$\left(s^2Y-sy(0)-y'(0)\right)+2\left(sY-y(0)\right)+Y=\int_0^{\infty} e^{-st}\,t\,\delta_2(t)\,dt \quad \rightarrow$$

$$\left(s^2Y-s-1\right)+2\left(sY-1\right)+Y=\left(te^{-st}\right)\Big|_{t=2} \quad \rightarrow \quad \left(s^2+2s+1\right)Y(s)-s-3=2e^{-2s} \quad \rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{s+3+2e^{-2s}}{(s+1)^2}=\frac{(s+1)+2+2e^{-2s}}{(s+1)^2} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2e^{-2s}}{(s+1)^2} \quad \rightarrow$$

$$y(t)=e^{-t}+2te^{-t}+2u_2(t)(t-2)e^{-(t-2)} \quad \rightarrow \quad y(1)=e^{-1}+2e^{-1}+\underbrace{\cancel{2u_2(1)}}_{0}(1-2)e^{-(1-2)}=3e^{-1}$$

۱۷. در جواب مسأله $\begin{cases} y''-y'-2y=e^t\cos t \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$ **ضریب جملات** e^{-t} **و** e^{2t} **به ترتیب کدام است؟**

۱) $\frac{1}{6}, -\frac{2}{15}$ ۲) $-\frac{1}{6}, -\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{1}{6}, \frac{2}{15}$ ۴) $-\frac{1}{6}, \frac{2}{15}$

حل: گزینه ۳ درست است.

از معادله داده شده تبدیل لاپلاس گرفته و شرایط $y(0)=y'(0)=0$ را نیز اعمال می‌کنیم:

$$\left(s^2-s-2\right)Y(s)=\frac{s-1}{(s-1)^2+1} \quad \rightarrow \quad Y=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)\left(s^2-2s+2\right)}$$

با روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{s-1}{(s+1)(s-2)\left(s^2-2s+2\right)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2} \quad \xrightarrow{\times(s-2)}$$

$$\frac{s-1}{(s+1)\left(s^2-2s+2\right)}=\frac{A(s-2)}{s+1}+B+\frac{(Cs+D)(s-2)}{s^2-2s+2} \quad \xrightarrow{s=2} \quad B=\frac{1}{6} \quad \xrightarrow{\times(s+1)}$$

$$\frac{s-1}{(s-2)\left(s^2-2s+2\right)}=A+\frac{B(s+1)}{s-2}+\frac{(Cs+D)(s+1)}{s^2-2s+2} \quad \xrightarrow{s=-1} \quad A=\frac{2}{15}$$

پس داریم:

$$Y(s)=\frac{\frac{2}{15}}{s+1}+\frac{\frac{1}{6}}{s-2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2} \quad \rightarrow \quad y(t)=\frac{2}{15}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\cdots$$

۱۸. جواب معادله $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+x(t)=f(t) \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $x(t)=\int_0^t \beta e^{-\beta} f(t-\beta)d\beta$

۲) $x(t)=\int_0^t e^{-\beta} f(t-\beta)d\beta$

۳) $x(t)=\int_0^t \beta e^{\beta} f(t-\beta)d\beta$

۴) $x(t)=\int_0^t \beta^2 e^{-\beta} f(t-\beta)d\beta$

حل: گزینه ۱ درست است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس گرفته و شرایط اولیه را نیز اعمال می‌کنیم:

$$\left(s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right)+2\left(sX(s)-x(0)\right)+X(s)=F(s) \quad \rightarrow \quad \left(s^2+2s+1\right)X(s)=F(s) \quad \rightarrow$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{\left(s^2+2s+1\right)}=\frac{1}{(s+1)^2}F(s)$$

چون:

$$L^{-1}\left(F(s)\right)=f(t)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)=te^{-t}$$

لذا:

$$x(t)=L^{-1}\left(F(s)\frac{1}{(s+1)^2}\right)=f(t)*\left(te^{-t}\right)=\int_0^t \beta e^{-\beta} f(t-\beta)d\beta$$

۱۹. معادله $y''+4y=4\cos 2x$ **با شرایط** $y(0)=1$ **و** $y'(0)=0$ **مفروض است. مقدار** y **در** $x=\frac{\pi}{4}$ **برابر است با:**

(برق ۸۶)

۱) $-\frac{\pi}{4}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) 0

۴) $\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۴ درست است.

از معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و شرایط اولیه داده شده را نیز اعمال می‌کنیم، لذا داریم:

$$s^2Y(s)-s+4Y(s)=\frac{4s}{s^2+4} \quad \rightarrow \quad \left(s^2+4\right)Y(s)=\frac{4s}{s^2+4}+s \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{s}{s^2+4}$$

از آن‌جا که:

$$L(\cos 2t)=\frac{s}{s^2+4}$$

$$L(\sin 2t)=\frac{2}{s^2+4}\ \rightarrow\ L(t\sin 2t)=-\left(\frac{2}{s^2+4}\right)'=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

بنابراین داریم:

$$y(t)=t\sin 2t+\cos 2t\ \rightarrow\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

راه دیگر:

معادله همگن $y''+4y=0$ دارای پایه‌های جوابی به صورت $\sin 2t$ و $\cos 2t$ است و جواب خصوصی معادله غیرهمگن $y''+4y=4\cos 2t$ به صورت $y_p=\frac{1}{D^2+4}(4\cos 2t)$ است. از آن‌جا که:

$$K=\frac{1}{D^2+4}\left(e^{2it}\right)=\frac{1}{(D-2i)(D+2i)}e^{2it}=t\frac{1}{2i+2i}e^{2it}=\frac{t}{4i}(\cos 2t+i\sin 2t)$$

$$=-i\frac{t}{4}\cos 2t+\frac{t}{4}\sin 2t\ \rightarrow\ y_p=4\,\mathrm{Re}(K)=4\frac{t}{4}\sin 2t=t\sin 2t$$

لذا جواب عمومی معادله غیرهمگن داده شده چنین است:

$$y=A\cos 2t+B\sin 2t+t\sin 2t$$

با اعمال شرایط اولیه داده شده به دست می‌آید:

$$y(0)=1\ \rightarrow\ A=1$$
$$y'(0)=0\ \rightarrow\ 2B=0$$

پس جواب مسأله مورد نظر چنین است:

$$y=\cos 2t+t\sin 2t\ \rightarrow\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

۲۰. اگر $\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right)=-x^{-n}J_{n+1}(x)$ **و** $L(J_0(x))=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ **باشد** $L\{J_1(x)\}$ **کدام است؟**

۱) $1-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ ۲) $-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ ۳) $\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}-1$ ۴) $\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$

حل: گزینه ۱ درست است.

با قرار دادن $n=0$ در فرض مسأله داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-0}J_0(x)\right)=-x^{-0}J_{0+1}(x)\ \rightarrow\ J_0'(x)=-J_1(x)$$

$$L\{J_0(x)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\ \rightarrow\ J_0(0)=\lim_{s\to+\infty}\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}=1$$

حال می‌توان نوشت:

$$L(J_0'(x))=L(-J_1(x))\ \rightarrow\ sL(J_0(x))-J_0(0)=-L(J_1(x))\ \rightarrow\ s\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}-1=-L\{J_1(x)\}\ \rightarrow$$

$$L(J_1(x))=1-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

۲۱. اگر $F(s)=\dfrac{9s-1}{s^2+7s+1}$ **باشد،** $f'(0)$ **کدام است؟**

۱) -63 ۲) -64 ۳) 63 ۴) 64

حل: گزینه ۲ درست است.

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{9s^2-s}{s^2+7s+1}=9$$

$$f'(0)=\lim_{s\to\infty} s^2F(s)-sf(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{9s^3-s^2}{s^2+7s+1}-9s=\lim_{s\to\infty}\frac{9s^3-s^2-9s^3-63s^2-9s}{s^2+7s+1}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{-64s^2-9s}{s^2+7s+1}=-64$$

۲۲. اگر لاپلاس $f(t)=e^{1-e^{-t}}$ **را** $F(s)$ **بنامیم حاصل** $sF(s)-F(s+1)$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) 0 ۳) -1 ۴) 2

حل: گزینه ۱ درست است.

$$f(t)=e^{1-e^{-t}} \quad\to\quad f'(t)=e^{-t}\cdot e^{1-e^{-t}}=e^{-t}f(t)$$

اگر از طرفین رابطه حاصل لاپلاس بگیریم بدست می‌آید:

$$L(f'(t))=L\left(e^{-t}f(t)\right) \quad\to\quad sF(s)-f(0)=F(s)\big|_{s\to s+1} \quad\to\quad sF(s)-f(0)=F(s+1) \quad\to$$

$$sF(s)-F(s+1)=f(0) \quad\to\quad sF(s)-F(s+1)=e^{1-e^{-0}}=1$$

۲۳. لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{s(s+3)^4}$ **کدام است؟**

۱) $\displaystyle\int_0^t \frac{t^3}{6}e^{-3t}dt$ ۲) $\displaystyle\int_0^t \frac{t^3}{6}e^{3t}dt$ ۳) $\displaystyle\int_0^t \frac{t^4}{24}e^{-3t}dt$ ۴) $\displaystyle\int_0^t \frac{t^4}{24}e^{3t}dt$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^4}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{3!}\frac{3!}{(s+3)^4}\right)=\frac{1}{6}e^{-3t}\,t^3$$

در نتیجه داریم:

$$f(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{(s+3)^4}\right)=\int_0^t \frac{1}{6}e^{-3t}\,t^3dt$$

۲۴. لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{s}{s^4+4a^4}$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{1}{2a^2}\sinh at\cos at$ ۲) $\dfrac{1}{2a^2}\sinh at\sin at$ ۳) $\dfrac{1}{2a^2}\cosh at\cos at$ ۴) $\dfrac{1}{2a^2}\cosh at\sin at$

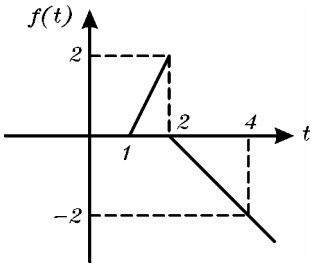
حل: گزینه ۲ درست است.

$$F(s)=\frac{s}{s^4+4a^4}=\frac{s}{\left(s^2+2a^2\right)^2-4s^2a^2}=\frac{s}{\left(s^2+2a^2-2sa\right)\left(s^2+2a^2+2sa\right)}$$

$$=\frac{1}{4a}\left(\frac{1}{\left(s^2+2a^2-2sa\right)}-\frac{1}{\left(s^2+2a^2+2sa\right)}\right)=\frac{1}{4a}\left\{\frac{1}{(s-a)^2+a^2}-\frac{1}{(s+a)^2+a^2}\right\}\rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{4a}\left\{\frac{1}{a}e^{at}\sin at-\frac{1}{a}e^{-at}\sin at\right\}=\frac{1}{2a^2}\sin at\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)=\frac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$$

۲۵. تبدیل لاپلاس تابع ترسیم شده در شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{2e^{-s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s^2}$

۲) $\frac{2e^{-s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}$

۳) $\frac{2e^{-s}}{s^2}-\frac{3e^{-2s}}{s^2}$

۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ درست است.

می‌توان نوشت:

$$f(t)=2(t-1)u_1(t)-2u_2(t)-3(t-2)u_2(t)\quad\rightarrow\quad F(s)=2e^{-1s}\frac{1}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}-3e^{-2s}\frac{1}{s^2}$$

۲۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=u_2(t)(3t-1)e^t$ کدام است؟

۱) $e^{-2s+2}\left(\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{7}{(s-1)}\right)$

۲) $e^{-2s}\left(\frac{3}{s^2}-\frac{1}{s}\right)$

۳) $e^{-2s}\left(\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)}\right)$

۴) $e^{-2s+2}\left(\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{5}{(s-1)}\right)$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$L\left\{u_2(t)(3t-1)e^t\right\}=e^{-2s}L\left\{(3(t+2)-1)e^{t+2}\right\}=e^{-2s+2}L\left\{(3t+5)e^t\right\}$$

$$=e^{-2s+2}\left\{L(3t+5)\right\}\Big|_{s\rightarrow s-1}=e^{-2s+2}\left(\frac{3}{s^2}+\frac{5}{s}\right)\Big|_{s\rightarrow s-1}$$

$$=e^{-2s+2}\left(\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{5}{(s-1)}\right)$$

۲۷.اگر $F(s)=\dfrac{1}{s\left(1-e^{-s}\right)}$ **باشد شکل** $f(t)$ **به کدام صورت زیر است؟**

۱) پلکانی ۲) موج مربعی ۳) موج مثلثی ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ درست است.

با توجه به سری هندسی داریم:

$$\frac{1}{1-A}=1+A+A^2+A^3+\cdots$$

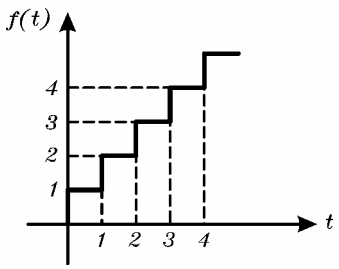
لذا می‌توان نوشت:

$$F(s)=\frac{1}{s}\ \frac{1}{1-e^{-s}}=\frac{1}{s}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots\right)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}+\cdots$$

و از آنجا که $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-cs}}{s}\right)=u_c(t)$ بدست می‌آید:

$$f(t)=u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+\cdots$$

که شکلی به فرم مقابل و با رفتار پلکانی دارد.



۲۸.اگر $F(s)=\dfrac{1}{\left(1+e^{-s}\right)^2}$ **باشد** $f(t)$ **کدام است؟**

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\,\delta_n(t)$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\delta_n(t)$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^{n+1}\,\delta_n(t)$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\,\delta_{n+1}(t)$

حل: گزینه ۱ درست است.

با توجه به سری هندسی داریم:

$$\frac{1}{1+A}=1-A+A^2-A^3+-\cdots$$

با مشتق گیری از این رابطه به دست می‌آید:

$$\frac{-1}{(1+A)^2}=-1+2A-3A^2+4A^3-+\cdots\ \rightarrow\ \frac{1}{(1+A)^2}=1-2A+3A^2-4A^3+-\cdots$$

حال می‌توان نوشت:

$$F(s)=\frac{1}{\left(1+e^{-s}\right)^2}=1-2e^{-s}+3e^{-2s}-4e^{-3s}+-\cdots \quad \rightarrow$$

$$f(t)=\delta_0(t)-2\delta_1(t)+3\delta_2(t)-4\delta_3(t)+-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\delta_n(t)$$

۲۹.اگر $F(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2-2s+5}$ ، $f(t)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}u_2(t)e^{(t+2)}\sin 2(t+2)$

۲) $\frac{1}{2}u_2(t)e^{(t-2)}\sin 2(t-2)$

۳) $u_2(t)e^{(t+2)}\sin(t+2)$

۴) $u_2(t)e^{(t-2)}\sin 2(t-2)$

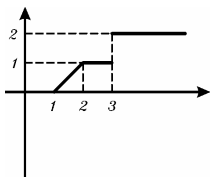
حل: گزینه ۲ درست است.

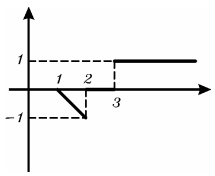
با استفاده از قضایای اول و دوم انتقال در فرم معکوس داریم:

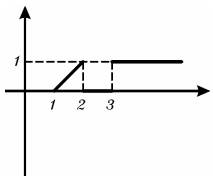
$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-2s+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+4}\right)=\frac{1}{2}e^{t}\sin 2t \quad \rightarrow$$

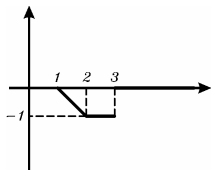
$$L^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s^2-2s+5}\right)=u_2(t)\frac{1}{2}e^{(t-2)}\sin 2(t-2)$$

۳۰.اگر $\begin{cases} f(t)=(t-1)u_1(t)-(t-2)u_2(t) \\ g(t)=f'(t) \\ h(t)=f(t)-u_1(t)g(t-1) \end{cases}$ **شکل** $h(t)$ **کدام است؟**

۱)


۲)


۳)


۴)


حل: گزینه ۳ درست است.

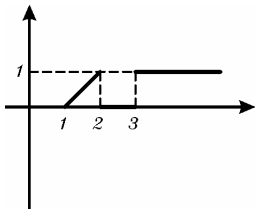
$$F(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2}$$

$$G(s)=sF(s)-f(0)=s\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2}-0=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$$

$$H(s)=F(s)-e^{-s}G(s)=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2}-e^{-s}\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}=\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}$$

لذا داریم:

$$h(t)=(t-1)u_1(t)-(t-2)u_2(t)-u_2(t)+u_3(t)$$



- در $t=1$ شیب یک واحد اضافه می‌شود. (شیب نمودار 1 می‌شود.)
- در $t=2$ پرش یک واحدی به سمت پایین رخ می‌دهد و شیب یک واحد کم می‌شود. (شیب نمودار 0 می‌شود.)
- در $t=3$ پرش یک واحدی به سمت بالا رخ می‌دهد. (شیب تغییر نمی‌کند و همان 0 باقی می‌ماند.)

۳۱. اگر $F(s)=\frac{e^{-3s}}{\sqrt{16s+1}}$ **باشد** $f(t)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u_3(t)e^{\frac{1}{16}(t-3)}(t-3)^{\frac{-1}{2}}$

۲) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u_3(t)e^{-\frac{1}{16}(t-3)}(t-3)^{\frac{-1}{2}}$

۳) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u_3(t)e^{\frac{1}{16}(t-3)}(t-3)^{\frac{1}{2}}$

۴) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u_3(t)e^{-\frac{1}{16}(t-3)}(t-3)^{\frac{1}{2}}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F(s)=\frac{e^{-3s}}{4\sqrt{s+\frac{1}{16}}}$$

حال می‌توان گفت:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{-1}{2}}\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s+\frac{1}{16}}}\right)=e^{-\frac{t}{16}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{-1}{2}}\rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{4\sqrt{s+\frac{1}{16}}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u_3(t)e^{-\frac{1}{16}(t-3)}(t-3)^{\frac{-1}{2}}$$

۳۲. در تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}0 & t<2\\ 1-t & 2<t<3\\ 2t & t>3\end{cases}$ **کدام جمله وجود ندارد؟**

۱) $\frac{3e^{-3s}}{s^2}$

۲) $\frac{8e^{-3s}}{s}$

۳) $-\frac{e^{-2s}}{s}$

۴) همگی جملات فوق موجودند

حل: گزینه ۴ درست است.

رفتار تابع:
- در $t=2^-$ شیب تابع صفر و مقدار تابع صفر
- در $t=2^+$ شیب تابع منفی یک و مقدار تابع منفی یک
- در $t=3^-$ شیب تابع منفی یک و مقدار تابع منفی دو
- در $t=3^+$ شیب تابع مثبت دو و مقدار تابع شش

می‌توان نوشت:

$$f(t)=-1u_2(t)-1(t-2)u_2(t)+8u_3(t)+3(t-3)u_3(t) \rightarrow$$
$$F(s)=\frac{-e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{8e^{-3s}}{s}+3\frac{e^{-3s}}{s^2}$$

۳۳. حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty xe^{-2x}\cos\beta x\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{4-\beta^2}{(4+\beta^2)^2}$ ۲) $\frac{4-\beta^2}{4+\beta^2}$ ۳) $\frac{4\beta}{(4+\beta^2)^2}$ ۴) $\frac{4\beta}{4+\beta^2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

بنا به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I=\int_0^\infty xe^{-2x}\cos\beta x\,dx=L\{x\cos\beta x\}\Big|_{s=2}$$

اما می‌دانیم:

$$L\{x\cos\beta x\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)=-\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}=\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

پس:

$$I=\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}\Big|_{s=2}=\frac{4-\beta^2}{(4+\beta^2)^2}$$

۳۴. لاپلاس معکوس $F(s)=\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(e^{bt}-e^{at})$

۳) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{-bt}-e^{-at})$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(e^{-bt}-e^{-at})$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$F(s)=\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b} \quad \rightarrow \quad F'(s)=\frac{1}{2\sqrt{s-a}}-\frac{1}{2\sqrt{s-b}}=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s-b)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

لذا می‌توان دید:

$$L^{-1}\left(F'(s)\right)=L^{-1}\left\{\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s-b)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\} \quad \rightarrow \quad -tf(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\frac{e^{at}}{\sqrt{t}}-\frac{e^{bt}}{\sqrt{t}}\right\} \quad \rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$$

۳۵. فرض کنید g تابعی فرد و لاپلاس $g(t)$ برابر $G(s)$ باشد تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ با فرض $\frac{f(t)}{t}=u_2(t)e^{-t}g(-t+2)$ کدام است؟

۱) $e^{-2s}\left(G'(s)-2G(s)\right)$

۲) $-e^{-2(s+1)}\left(G'(s+1)+2G(s+1)\right)$

۳) $e^{-2(s+1)}\left(G'(s+1)-2G(s+1)\right)$

۴) $-e^{-2(s-1)}\left(G'(s-1)-2G(s-1)\right)$

حل: گزینه ۳ درست است.

داریم $f(t)=tu_2(t)e^{-t}g(-t+2)$ لذا می‌نویسیم:

$$L\left(u_2(t)g(-t+2)\right)=e^{-2s}L\left(g(-(t+2)+2)\right)=e^{-2s}.L\left(g(-t)\right)=e^{-2s}.L\left(-g(t)\right)$$
$$=-e^{-2s}G(s) \quad \rightarrow$$

$$L\left(t\,u_2(t)g(-t+2)\right)=-\frac{d}{ds}\left(-e^{-2s}G(s)\right)=-2e^{-2s}G(s)+e^{-2s}G'(s)$$
$$=e^{-2s}\left(G'(s)-2G(s)\right) \quad \rightarrow$$

$$L\left(e^{-t}tu_2(t)g(-t+2)\right)=e^{-2(s+1)}\left(G'(s+1)-2G(s+1)\right)$$

۳۶. تبدیل لاپلاس $\int_t^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ کدام است؟ **(ریاضی ۸۷)**

۱) $\frac{1}{s}\ln\left(1-\frac{1}{s}\right)$

۲) $\frac{1}{s}\ln(s-1)$

۳) $\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$

۴) $\frac{1}{s}\ln(s+1)$

حل: گزینه ۴ درست است.

با مشتق‌گیری از طرفین $f(t)=\int_t^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ داریم:

$$f'(t)=-\frac{e^{-t}}{t}\quad\rightarrow\quad -tf'(t)=e^{-t}$$

پس از لاپلاس گرفتن از طرفین رابطه فوق به دست می‌آید:

$$\frac{d}{ds}\left(sF(s)-f(0)\right)=\frac{1}{s+1}\quad\rightarrow\quad\frac{d}{ds}\left(sF(s)\right)=\frac{1}{s+1}\quad\rightarrow\quad d\left(sF(s)\right)=\frac{ds}{s+1}\quad\xrightarrow{\int}$$

$$sF(s)=\ln(s+1)+c$$

از آن‌جا که باید $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}s.F(s)$ و می‌دانیم:

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx=0$$

پس باید $\lim_{s\to 0}\ln(s+1)+c=0$ و این می‌طلبد که:

$$c=0\rightarrow sF(s)=\ln(s+1)\quad\rightarrow\quad F(s)=\frac{1}{s}\ln(s+1)$$

۳۷. تبدیل لاپلاس $f(t)=e^t\int_0^t te^{-2t}\sin t\,dt$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)^2}$

۲) $\frac{2(s+1)}{s(s^2+2s+2)^2}$

۳) $\frac{2(s-1)}{s^2(s^2-2s+2)^2}$

۴) $\frac{2(s+1)}{(s-1)(s^2-2s+2)^2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}\quad\rightarrow\quad L\{t\sin t\}=-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=-\frac{-2s}{(s^2+1)^2}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}\quad\rightarrow$$

$$L\{e^{-2t}.t\sin t\}=\frac{2(s+2)}{\left((s+2)^2+1\right)^2}\quad\rightarrow\quad L\left\{\int_0^t te^{-2t}\sin t\,dt\right\}=\frac{1}{s}\frac{2(s+2)}{\left((s+2)^2+1\right)^2}\quad\rightarrow$$

$$L\left\{e^t\int_0^t te^{-2t}\sin t\,dt\right\}=\frac{1}{s-1}\frac{2(s-1+2)}{\left((s-1+2)^2+1\right)^2}=\frac{1}{s-1}\frac{2(s+1)}{\left((s+1)^2+1\right)^2}=\frac{2(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)^2}$$

۳۸. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=(3t-\pi)\sin 2t\,.\,e^{t}\,.\,u_{\pi}(t)$ **کدام است؟**

۱) $e^{\pi(1-s)}\left\{\dfrac{12(s-1)}{\left((s-1)^2+4\right)^2}+\dfrac{4\pi}{(s-1)^2+4}\right\}$

۲) $e^{\pi(1-s)}\left\{\dfrac{6s}{s^2+4}+\dfrac{4\pi}{s^2+4}\right\}$

۳) $e^{\pi(1+s)}\left\{\dfrac{12(s-1)^2}{\left((s-1)^2+4\right)^2}+\dfrac{4\pi}{s^2+4}\right\}$

۴) $e^{\pi(1+s)}\left\{\dfrac{6s}{s^2+4}+\dfrac{4\pi}{s^2+4}\right\}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$L\left\{u_{\pi}(t)(3t-\pi)\sin 2t\ e^{t}\right\}=e^{-\pi s}.\,L\left\{\left(3(t+\pi)-\pi\right)\sin 2(t+\pi)e^{t+\pi}\right\}=e^{-\pi s}\cdot L\left\{(3t+2\pi)\sin 2t\ e^{t}e^{\pi}\right\}$$

$$=e^{-\pi s}e^{\pi}L\left\{(3t+2\pi)\sin 2t\right\}\Big|_{s\to s-1}=e^{\pi(1-s)}\left\{-3\left(\frac{2}{s^2+4}\right)'+2\pi\frac{2}{s^2+4}\right\}\Bigg|_{s\to s-1}$$

$$=e^{\pi(1-s)}\left\{(-3)\frac{-4s}{\left(s^2+4\right)^2}+2\pi\frac{2}{s^2+4}\right\}\Bigg|_{s\to s-1}$$

$$=e^{\pi(1-s)}\left\{\frac{12(s-1)}{\left((s-1)^2+4\right)^2}+\frac{4\pi}{(s-1)^2+4}\right\}$$

۳۹. حاصل $L^{-1}\left(\ln\dfrac{s^{n}}{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}\right)$ **کدام است؟**

۱) $\sum_{i=1}^{n}\left(e^{it}\right)-n$

۲) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(e^{it}\right)-n}{t}$

۳) $\sum_{i=1}^{n}n-\left(e^{it}\right)$

۴) $n-\left(e^{it}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F(s)=\ln\frac{s^{n}}{(s-1)(s-2)\cdots(s-n)}=n\ln s-\ln(s-1)-\ln(s-2)-\cdots-\ln(s-n)\ \rightarrow$$

$$F'(s)=n\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}-\cdots-\frac{1}{s-n}$$

حال مشاهده می‌شود:

$$L^{-1}\left(F'(s)\right)=-t\,f(t)\ \rightarrow\ n-e^{t}-e^{2t}-\cdots-e^{nt}=-t\,f(t)\ \rightarrow$$

$$f(t)=\frac{e^{t}+e^{2t}+\ldots+e^{nt}-n}{t}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(e^{it}\right)-n}{t}$$

۴۰. لاپلاس معکوس $F(s)=\ln\left(\frac{\sqrt{s+1}}{s^2+4s+5}\right)$ **کدام است؟**

۱) $f(t)=\frac{1}{t}\left(2e^{-2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-t}\right)$

۲) $f(t)=\frac{1}{t}\left(e^{-2t}\sin t-\frac{1}{2}e^{-t}\right)$

۳) $f(t)=\frac{1}{t}\left(2e^{-2t}\cos t-e^{-t}\right)$

۴) $f(t)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t+e^{-t}\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$F(s)=\ln\left(\frac{\sqrt{s+1}}{s^2+4s+5}\right)=\ln\left(\sqrt{s+1}\right)-\ln\left(s^2+4s+5\right)=\frac{1}{2}\ln(s+1)-\ln\left(s^2+4s+5\right)\ \rightarrow$$

$$F'(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{2s+4}{s^2+4s+5}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+1}$$

اما داریم:

$$L^{-1}\left(F'(s)\right)=\frac{1}{2}e^{-t}-2e^{-2t}\cos t=-t\,f(t)\ \rightarrow\ f(t)=\frac{2e^{-2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-t}}{t}$$

۴۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{\sin^3 t}{t}$ **کدام است؟ (راهنمایی:** $\sin^3 t=\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}$)

۱) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}s-\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3}\right)$

۲) $\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s+\tan^{-1}3s\right)$

۳) $\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}s+\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3}\right)$

۴) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s+\frac{1}{3}\tan^{-1}3s\right)$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$L\left\{\sin^3 t\right\}=L\left\{\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}\right\}=\frac{1}{4}\left\{3\frac{1}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+9}\right\}\ \rightarrow$$

$$L\left\{\frac{1}{t}\sin^3 t\right\}=\int_s^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+9}\right)ds=\frac{3}{4}\left\{\tan^{-1}s-\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3}\right\}\Bigg|_s^{\infty}$$

$$=\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\frac{\pi}{2}\right)-\left(\tan^{-1}s-\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3}\right)\right\}=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}s+\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3}\right)$$

۴۲.تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{t}\int_{0}^{t}e^{-2x}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right)$ ۲) $\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)$ ۳) $\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)$ ۴) $\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$L\left(1-e^{-x}\right)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\ \rightarrow\ L\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)=\int_{s}^{+\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\Bigg|_{s}^{+\infty}=\left\{\ln s-\ln(s+1)\right\}\Bigg|_{s}^{+\infty}$$

$$=\left(\ln\frac{s}{s+1}\right)\Bigg|_{s}^{+\infty}=\ln 1-\ln\frac{s}{s+1}=\ln\frac{s+1}{s}\ \rightarrow$$

$$L\left(e^{-2x}\frac{1-e^{-x}}{x}\right)=\left(\ln\frac{s+1}{s}\right)\Bigg|_{s\to s+2}=\ln\frac{s+3}{s+2}\ \rightarrow\ L\left(\int_{0}^{t}e^{-2x}\frac{1-e^{-x}}{x}dx\right)=\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+2}\ \rightarrow$$

$$L\left(e^{t}\int_{0}^{t}e^{-2x}\frac{1-e^{-x}}{x}dx\right)=\left(\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+2}\right)\Bigg|_{s\to s-1}=\frac{1}{s-1}\ln\frac{s+2}{s+1}$$

۴۳.اگر $m,n>0$ **باشند،** $\int_{0}^{1}\frac{x^{m}-x^{n}}{\ln x}dx$ **کدام است؟**

۱) $\ln\left(\frac{n+1}{m+1}\right)$ ۲) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$ ۳) $\ln\left(\frac{n-1}{m-1}\right)$ ۴) $\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

با تغییر متغیر $-\ln x=t$ داریم:

$$-\frac{dx}{x}=dt\ \rightarrow\ dx=-x\,dt=-e^{-t}\,dt\quad,\quad\begin{cases}x=0^{+}\ \rightarrow\ t=-\ln\left(0^{+}\right)=-(-\infty)=+\infty\\ x=1\ \rightarrow\ t=-\ln(1)=0\end{cases}$$

$$I=\int_{+\infty}^{0}\frac{\left(e^{-t}\right)^{m}-\left(e^{-t}\right)^{n}}{-t}\left(-e^{-t}dt\right)=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-nt}-e^{-mt}}{t}e^{-t}\,dt=\left\{L\left(\frac{e^{-nt}-e^{-mt}}{t}\right)\right\}\Bigg|_{s=1}$$

اما داریم:

$$L\left(\frac{e^{-nt}-e^{-mt}}{t}\right)=\int_{s}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+n}-\frac{1}{s+m}\right)ds=\left\{\ln\left(\frac{s+n}{s+m}\right)\right\}\Bigg|_{s}^{+\infty}=\ln 1-\ln\left(\frac{s+n}{s+m}\right)=\ln\left(\frac{s+m}{s+n}\right)$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I=\ln\left(\frac{s+m}{s+n}\right)\Bigg|_{s=1}=\ln\left(\frac{1+m}{1+n}\right)$$

۴۴.اگر $\frac{d}{dt}\left(t^{-n}J_n(t)\right)=-t^{-n}J_{n+1}(t)$ **و** $J_1(0)=0$ **تبدیل لاپلاس** $J_2(t)$ **کدام است؟** $\left(J_1(s)=1-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)$

۱) $\sqrt{1+s^2}-s+\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

۲) $2\sqrt{1+s^2}-s+\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}$

۳) $2\sqrt{1+s^2}-2s-\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

۴) $2\sqrt{1+s^2}-2s+\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$n=1 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(t^{-1}J_1(t)\right)=-t^{-1}J_2(t) \;\rightarrow\; -t^{-2}J_1(t)+t^{-1}J_1'(t)=-t^{-1}J_2(t) \;\rightarrow$$

$$J_2(t)=t^{-1}J_1(t)-J_1'(t) \;\rightarrow\; L\left(J_2(t)\right)=L\left(\frac{1}{t}J_1(t)\right)-L\left(J_1'(t)\right) \;\rightarrow$$

$$L\left(J_2(t)\right)=\int_s^{\infty}L\left(J_1(t)\right)ds-\left(sL\left(J_1(t)\right)-J_1(0)\right)$$

$$L\left(J_2(t)\right)=\int_s^{+\infty}\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)ds-\left(s\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)-J_1(0)\right)=\left(s-\sqrt{1+s^2}\right)\Big|_s^{+\infty}-s+\frac{s^2+1-1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$=-s+\sqrt{1+s^2}-s+\sqrt{1+s^2}-\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=2\sqrt{1+s^2}-2s-\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

۴۵.حاصل $\int_0^{\infty}e^{-4t}\,\frac{1-\cosh at}{t}dt$ **کدام است؟**

۱) $\ln\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{4}\right)$

۲) $\ln\left(\frac{\sqrt{16+a^2}}{4}\right)$

۳) $\ln\left(\frac{\sqrt{16+a^2}}{16}\right)$

۴) $\ln\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{16}\right)$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$I=\int_0^{\infty}e^{-4t}\,\frac{1-\cosh at}{t}\,dt=L\left\{\frac{1-\cosh at}{t}\right\}\Big|_{s=4}$$

اما ملاحظه می‌شود:

$$L\{1-\cosh at\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-a^2}$$

$$L\left\{\frac{1}{t}(1-\cosh at)\right\}=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-a^2}\right)ds=\left(\ln s-\frac{1}{2}\ln\left(s^2-a^2\right)\right)\Big|_s^{\infty}=\left\{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2-a^2}}\right)\right\}\Big|_s^{\infty}$$

$$=\ln 1-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2-a^2}}=\ln\frac{\sqrt{s^2-a^2}}{s}$$

پس داریم:

$$I=\ln\frac{\sqrt{s^2-a^2}}{s}\Big|_{s=4}=\ln\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{4}\right)$$

۴۶. $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s^2+4)}\right\}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{-1}{5}e^{-t}+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t$

۲) $\frac{-1}{5}e^{-t}+\frac{2}{5}\sin 2t+\frac{1}{5}\cos 2t$

۳) $\frac{-1}{5}e^{t}+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t$

۴) $\frac{-1}{5}e^{t}+\frac{2}{5}\sin t+\frac{1}{5}\cos 2t$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{A(s^2+4)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+4)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\B+C=1\\4A+C=0\end{cases}\rightarrow\ A=\frac{-1}{5},\ B=\frac{1}{5},\ C=\frac{4}{5}$$

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{s}{(s+1)(s^2+4)}\right)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{s+1}+\frac{s+4}{s^2+4}\right)\right\}=\frac{1}{5}\left(-e^{-t}+\cos 2t+2\sin 2t\right)$$

راه دیگر:

می‌دانیم:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)=e^{-t}\ ,\ L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)=\cos 2t$$

لذا می‌توان گفت:

$$f(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\frac{s}{s^2+4}\right)=e^{-t}*\cos 2t=\int_0^t e^{-(t-\lambda)}\cos 2\lambda d\lambda=e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}\cos 2\lambda d\lambda$$

با فرض $I=\int e^{\lambda}\cos 2\lambda\, d\lambda$ داریم:

مشتق		انتگرال
e^{λ}		$\cos 2\lambda$
	$\searrow^{+}$	
e^{λ}		$\frac{1}{2}\sin 2\lambda$
	$\searrow^{-}$	
e^{λ}	$\xrightarrow{+\int}$	$-\frac{1}{4}\cos 2\lambda$

$$I=e^{\lambda}\left(\frac{1}{2}\sin 2\lambda+\frac{1}{4}\cos 2\lambda\right)-\frac{1}{4}I\ \rightarrow\ I=\frac{1}{5}e^{\lambda}\left(2\sin 2\lambda+\cos 2\lambda\right)$$

پس به دست می‌آید:

$$f(t)=e^{-t}\left\{\frac{e^{\lambda}}{5}(2\sin 2\lambda+\cos 2\lambda)\right\}\Bigg|_0^t=e^{-t}\left\{\frac{e^{t}}{5}(2\sin 2t+\cos 2t)-\frac{1}{5}\right\}=-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{5}\sin 2t+\frac{1}{5}\cos 2t$$

۴۷.لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t)$

۲) $\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t+3t\cos 3t)$

۳) $\frac{1}{18}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t)$

۴) $\frac{1}{18}e^{-2t}(\sin 3t+3t\cos 3t)$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}=\frac{1}{(s+2)^2+9}\,\frac{1}{(s+2)^2+9}\rightarrow$$

از آن‌جا که $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+2)^2+9}\right)=\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$ داریم:

$$L^{-1}(F(s))=\left(\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t\right)*\left(\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t\right)=\int_0^t\frac{1}{3}e^{-2\lambda}\sin 3\lambda.\frac{1}{3}e^{-2(t-\lambda)}\sin 3(t-\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t e^{-2t}\frac{1}{2}\left(\cos(6\lambda-3t)-\cos(3t)\right)d\lambda=\frac{e^{-2t}}{18}\left(\frac{\sin(6\lambda-3t)}{6}-\lambda\cos 3t\right)\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{e^{-2t}}{18}\left(\left(\frac{\sin 3t}{6}-t\cos 3t\right)-\left(-\frac{\sin 3t}{6}-0\right)\right)=\frac{e^{-2t}}{18}\left(\frac{\sin 3t}{3}-t\cos 3t\right)$$

۴۸.تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=|\sin at|$ **،** $(a>0)$ **کدام است؟** **(ریاضی ۸۷)**

۱) $\frac{a}{s^2+a^2}\coth\left(\frac{\pi s}{a}\right)$

۲) $\frac{a}{s^2+a^2}\tanh\left(\frac{\pi s}{2a}\right)$

۳) $\frac{a}{s^2+a^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2a}\right)$

۴) $\frac{a}{s^2+a^2}\tanh\left(\frac{\pi s}{a}\right)$

حل: گزینه ۳ درست است.

تابع داده شده متناوب با دوره تناوب $p=\dfrac{\pi}{a}$ است و داریم:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}\int_0^{\frac{\pi}{a}}e^{-st}\underbrace{|\sin at|}_{\downarrow}dt$$

در بازه مورد نظر $\sin at$ است.

اینک با فرض $I=\int e^{-st}\sin at\,dt$ داریم:

مشتق		انتگرال
e^{-st}		$\sin at$
	$\searrow^{+}$	
$-se^{-st}$		$-\frac{1}{a}\cos at$
	$\searrow^{-}$	
s^2e^{-st}	$\xrightarrow{+\int}$	$-\frac{1}{a^2}\sin at$

$$I=-\frac{e^{-st}}{a}\cos at-\frac{s}{a^2}e^{-st}\sin at-\frac{s^2}{a^2}I \rightarrow$$

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)I=e^{-st}\left(-\frac{1}{a}\cos at-\frac{s}{a^2}\sin at\right) \rightarrow$$

$$I=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left(-a\cos at-s\sin at\right)$$

لذا خواهیم داشت:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}I\Bigg|_0^{\frac{\pi}{a}}=-\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}\left(\frac{ae^{-\frac{\pi}{a}s}}{s^2+a^2}+\frac{a}{s^2+a^2}\right)=\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{a}s}}\frac{a}{s^2+a^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{a}s}\right)$$

$$=\frac{a}{s^2+a^2}\frac{e^{\frac{\pi}{2a}s}+e^{-\frac{\pi}{2a}s}}{e^{\frac{\pi}{2a}s}-e^{-\frac{\pi}{2a}s}}=\frac{a}{s^2+a^2}\coth\frac{\pi}{2a}s$$

۴۹.معادله حرکت متحرکی به صورت $x(t)=t+\int_0^t x(t-\lambda)\cdot e^{-\lambda}\,d\lambda$ داده شده سرعت این متحرک در چه زمانی صفر می‌شود؟

۱) سرعت هیچگاه صفر نخواهد شد.

۲) $\frac{1}{2}$

۳) 1

۴) 2

حل: گزینه ۱ درست است.

$$x(t)=t+\int_0^t x(t-\lambda)\,.\,e^{-\lambda}d\lambda \rightarrow x(t)=t+x(t)*e^{-t}$$

با لاپلاس گیری از طرفین داریم:

$$X(s)=\frac{1}{s^2}+X(s)\frac{1}{s+1} \rightarrow X(s)\left(1-\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{s^2} \rightarrow X(s)\left(\frac{s+1-1}{s+1}\right)=\frac{1}{s^2} \rightarrow$$

$$X(s)=\frac{s+1}{s^3}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3} \rightarrow x(t)=t+\frac{t^2}{2}$$

لذا معادله سرعت به فرم زیر است:

$$x'(t)=1+t$$

و در تمام زمان‌های مثبت $(t>0)$، سرعت مثبت و هیچگاه صفر نمی‌شود.

۵۰. کانولوشن دو تابع $f(t)=t\,,\,g(t)=\cos 3t$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{9}(1+\cos 3t)$ ۲) $\frac{1}{9}(1-\cos 3t)$ ۳) $\frac{1}{9}(t-\sin 3t)$ ۴) $\frac{1}{9}(t+\sin 3t)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$(f*g)(t)=\int_0^t (t-\lambda)\cos 3\lambda\, d\lambda$$

با اعمال روش جزءبه‌جزء داریم:

مشتق		انتگرال
$t-\lambda$	$\searrow^{+}$	$\cos 3\lambda$
-1	$\searrow^{-}$	$\frac{1}{3}\sin 3\lambda$
0		$-\frac{1}{9}\cos 3\lambda$

لذا:

$$(f*g)(t)=\left(\frac{t-\lambda}{3}\sin 3\lambda-\frac{1}{9}\cos 3\lambda\right)\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=t}=\frac{-1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}$$

راه دیگر:

$$L\big((f*g)(t)\big)=F(s)G(s)=\frac{1}{s^2}\,\frac{s}{s^2+9}=\frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+9}\quad\rightarrow$$

$$(f*g)(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+9}\right)=\int_0^t \frac{1}{3}\sin 3t\,dt=-\frac{1}{9}\cos 3t\Big|_0^t=\frac{-1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}$$

۵۱. در معادله زیر $y(0)=y'(0)=0\quad,\quad y''(t)+y'(t)=\cos t+\int_0^t (t-\lambda).y'(\lambda)d\lambda$ **اگر لاپلاس** $y(t)$ **را با** $Y(s)$ **نمایش دهیم** $Y(1)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

با توجه به تعریف پیچش داریم:

$$y''(t)+y'(t)=\cos t+\big(t*y'(t)\big)$$

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$\big(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\big)+\big(sY(s)-y(0)\big)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}\cdot\big(sY(s)-y(0)\big)$$

با اعمال شرایط اولیه به دست می‌آید:

$$\left(s^2+s-\frac{1}{s}\right)Y(s)=\frac{s}{s^2+1} \rightarrow \frac{s^3+s^2-1}{s}Y(s)=\frac{s}{s^2+1} \rightarrow Y(s)=\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)\left(s^3+s^2-1\right)} \rightarrow$$

$$Y(1)=\frac{1}{(1+1)(1+1-1)}=\frac{1}{2}$$

۵۲. جواب معادله انتگرالی $y(x)=x+e^x\int_0^x y(t)\,e^{-t}dt$ **کدام است؟**

۱) $y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}e^{2x}$

۲) $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}e^{2x}$

۳) $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}e^{2x}$

۴) $y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}e^{2x}$

حل: گزینه ۱ درست است.

چنانچه e^x را داخل انتگرال ببریم داریم:

$$y(x)=x+\int_0^x y(t).e^{x-t}\,dt \rightarrow y(x)=x+\left(y(x)*e^x\right)$$

از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}+Y(s)\frac{1}{s-1} \rightarrow Y(s)\left(1-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{s^2} \rightarrow Y(s)\left(\frac{s-1-1}{s-1}\right)=\frac{1}{s^2} \rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{s-1}{s^2(s-2)}$$

با روش تجزیه کسرها ملاحظه می‌شود:

$$\frac{s-1}{s^2(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-2}=\frac{As(s-2)+B(s-2)+Cs^2}{s^2(s-2)}$$

$$\begin{cases}A+C=0\\-2A+B=1\\-2B=-1\end{cases} \rightarrow A=-\frac{1}{4}\ ,\ B=\frac{1}{2}\ ,\ C=\frac{1}{4}$$

پس داریم:

$$Y(s)=\frac{-\frac{1}{4}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s^2}+\frac{\frac{1}{4}}{s-2} \rightarrow y(x)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}e^{2x}$$

راه دیگر:

$$y(x)=x+e^x\int_0^x y(t)e^{-t}dt \rightarrow e^{-x}y(x)=xe^{-x}+\int_0^x y(t)e^{-t}dt \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}$$

$$-e^{-x}y+e^{-x}y'=-xe^{-x}+e^{-x}+ye^{-x} \rightarrow -y+y'=-x+1+y \rightarrow y'-2y=1-x \rightarrow$$

$$y(x)=e^{-\int -2dx}\left\{\int e^{\int -2dx}(1-x)dx+c\right\}=e^{2x}\left\{\int (1-x)e^{-2x}dx+c\right\}$$

با در نظر گرفتن $I=\int (1-x)e^{-2x}dx$ با روش جزءبه‌جزء داریم:

انتگرال	مشتق
e^{-2x}	$1-x$
$-\frac{1}{2}e^{-2x}$	-1
$\frac{1}{4}e^{-2x}$	0

$$I=\left(\frac{-(1-x)}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{-2x} \quad\rightarrow\quad y(x)=\frac{x-1}{2}+\frac{1}{4}+ce^{2x}$$

با توجه به اینکه $y(0)=0+e^{0}\int_0^0 y(t)e^{-t}dt=0$ داریم:

$$0=\frac{0-1}{2}+\frac{1}{4}+ce^{0} \quad\rightarrow\quad c=\frac{1}{4}$$

لذا:

$$y(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2x}$$

۵۳. $\begin{cases} y''+4y=3\sin 2t \\ y(0)=2 \quad , \quad y'(0)=-1 \end{cases}$ **ضریب** $t\cos 2t$ **و** $\cos 2t$ **در** y **کدام است؟**

۱) $\frac{-3}{4}$ و 2 ۲) 0 و $\frac{-1}{8}$ ۳) 0 و 2 ۴) $\frac{-3}{4}$ و $\frac{-1}{8}$

حل: گزینه ۱ درست است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right\}+4Y(s)=3\frac{2}{s^2+4} \quad\rightarrow\quad \left(s^2+4\right)Y(s)=\frac{6}{s^2+4}+2s-1$$

$$Y(s)=\frac{2s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}+\frac{6}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+4\right)}$$

$$y(t)=2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{6}{4}(\sin 2t*\sin 2t)=2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{3}{2}\int_0^t \sin 2\lambda\sin 2(t-\lambda)d\lambda$$

$$=2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{3}{4}\int_0^t\left\{\cos\left(2\lambda-2(t-\lambda)\right)-\cos\left(2\lambda+2(t-\lambda)\right)\right\}d\lambda$$

$$=2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{3}{4}\int_0^t\left\{\cos(4\lambda-2t)-\cos 2t\right\}d\lambda$$

$$= 2\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{4}\sin(4\lambda - 2t) - \lambda\cos 2t\right\}\Bigg|_{\lambda=0}^{t}$$

$$= 2\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{3}{4}\left\{\left(\frac{1}{4}\sin 2t - t\cos 2t\right) - \left(\frac{-1}{4}\sin 2t\right)\right\} = 2\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{3}{4}t\cos 2t$$

۵۴.در معادله انتگرالی $y(t) = e^t + \int_0^t \sin(t-\lambda).y(\lambda)d\lambda$ **در تابع** $y(t)$ **ضریب** e^t **چه خواهد بود؟**

۱) -1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است.

با توجه به تعریف پیچش داریم:

$$y(t) = e^t + \sin t * y(t)$$

با لاپلاس گیری از طرفین رابطه بالا داریم:

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1}.Y(s) \rightarrow Y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s-1} \rightarrow Y(s)\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s-1} \rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s-1)}$$

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{s^2+1}{s^2(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $s-1$ بدست می‌آید :

$$\frac{s^2+1}{s^2} = \frac{A(s-1)}{s} + \frac{B(s-1)}{s^2} + C$$

و در $s=1$ نتیجه می‌شود:

$$2 = 0 + 0 + C$$

لذا در $y(t)$ جمله $2e^t$ موجود است.

خودآزمایی

۱. لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s\left(1-e^{-s}\right)}$ **چگونه شکلی دارد؟**

۱) موج دندانه اره‌ای ✓ ۲) موج مثلثی ۳) موج مربعی ۴) موج پلکانی

۲. کدام گزینه جواب تبدیل لاپلاس معکوس زیر است؟ **(ریاضی ۸۸)**

$$L^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$$

۱) $e^{3t}\cos 4t+e^{3t}\sin 4t$ ۲) $2e^{t}\cos 4t+2e^{t}\sin 4t$

۳) $e^{t}\cos 4t+e^{t}\sin 4t$ ۴) $6e^{2t}\cos 4t+2e^{2t}\sin 4t$ ✓

۳. حاصل $L^{-1}\left(\frac{\sqrt{s-1}-\sqrt{s}}{s}\right)$ **کدام است؟**

۱) $\int_s^{\infty}\frac{1-e^{t}}{\sqrt{2\pi t}}dt$ ۲) $\int_0^{t}\frac{1-e^{t}}{\sqrt{2\pi t}}dt$ ۳) $\int_s^{\infty}\frac{1-e^{t}}{2\sqrt{\pi t}}dt$ ۴) $\int_0^{t}\frac{1-e^{t}}{2\sqrt{\pi t}}dt$ ✓

۴. اگر $F(s)=\frac{\left(e^{-2s}+s\right)^2}{s^2}$ **تابع** $f(t)$**، دارای کدام ویژگی زیر است؟**

۱) یک ضربه بی‌نهایت در $t=0$ یک پرش دو واحدی به بالا در $t=2$ یک افزایش یک واحدی شیب در $t=4$ ✓

۲) یک ضربه بی‌نهایت در $t=0$ یک پرش دو واحدی به بالا در $t=2$ یک پرش دو واحدی به سمت پایین به همراه یک افزایش شیب یک واحدی در $t=4$

۳) یک پرش یک واحدی به بالا در $t=0$ یک پرش دو واحدی در $t=2$ یک افزایش یک واحدی شیب در $t=4$

۴) یک پرش یک واحدی به بالا در $t=0$ یک پرش دو واحدی به بالا در $t=2$ یک پرش دو واحدی به سمت پایین به همراه یک افزایش شیب یک واحدی در $t=4$

۵. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = te^{-t}\cos 2t$ کدام است؟

۱) $\frac{s^2+2s-3}{(s^2+2s+5)^2}$ ✓

۲) $\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+5)^2}$

۳) $\frac{s^2-2s-5}{(s^2-2s+3)^2}$

۴) $\frac{s^2-2s+5}{(s^2-2s+3)^2}$

۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<1 \\ (t-1)^2 & t\geq 1 \end{cases}$ کدام است؟ (هوافضا ۸۵)

۱) se^{-s}

۲) s^3e^{-s}

۳) $\frac{2}{s^3}e^{-s}$ ✓

۴) $\frac{s^3}{s^2+1}$

۷. اگر f تابعی قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، جواب مسأله با مقادیر اولیه زیر چیست؟ (نقشه‌برداری ۸۶)

$$\begin{cases} y''+y=f(t) \\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

۱) $y=\int_0^t f(z)\sin(t-z)dz$ ✓

۲) $y=\int_0^t f(z)\cos(t-z)dz$

۳) $y=\int_0^t f(z)e^{-(t-z)}\sin(t-z)dz$

۴) $y=\int_0^t f(z)e^{-(t-z)}\cos(t-z)dz$

۸. حاصل $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{-\ln x}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$

۲) $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$

۳) $2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

۴) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ✓

۹. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ کدام است؟ (مکانیک ۸۶)

۱) $-\text{Arc}\tan s$

۲) $-\text{Arc}\tan\frac{1}{s}$

۳) $\text{Arc}\tan\frac{1}{s}$ ✓

۴) $\text{Arc}\tan s-\frac{\pi}{2}$

۱۰. لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{e^{-4s}}{s^2(s+1)}$ کدام است؟

۱) $u_4(t)\left(e^{-(t-4)}+t-5\right)$ ✓

۲) $u_4(t)e^{-(t-4)}$

۳) $u_4(t)\left(e^{-(t-4)}+t-4\right)$

۴) $-u_4(t)e^{-(t-4)}$

۱۱. لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+6s+10}$ **کدام است؟**

۱) $u_2(t)e^{-3(t-2)}\sin 3(t-2)$ ✓

۲) $e^{-3(t-2)}\sin 3(t-2)$

۳) $e^{-3(t-2)}\sin(t-2)$

۴) $u_2(t)e^{-3(t-2)}\sin(t-2)$

۱۲. مقدار انتگرال $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}dx$ **کدام است؟** **(ریاضی ۸۵)**

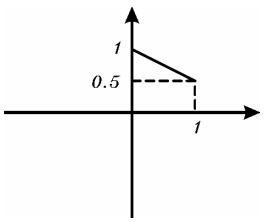
۱) $\ln 2$

۲) $\ln 3$

۳) $2\ln 2$ ✓

۴) $2\ln 3$

۱۳. تبدیل لاپلاس تابع نشان داده شده کدام است؟



۱) $\dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-s}}{2s}-\dfrac{1}{s^2}$

۲) $\dfrac{1}{2s^2}\left(e^{-s}-1\right)-\dfrac{e^{-s}}{2s}$

۳) $\dfrac{1}{2s^2}\left(e^{-s}-1\right)-\dfrac{e^{-s}}{2s}+\dfrac{1}{s}$ ✓

۴) $\dfrac{1}{2s^2}\left(e^{-s}-1\right)+\dfrac{1}{s}$

۱۴. لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{s^2+2}{s^4+4}$ **کدام است؟**

۱) $\cosh t\cos t$

۲) $\dfrac{1}{2}\cosh t\sin t$

۳) $\cosh t\sin t$ ✓

۴) $\dfrac{1}{2}\cosh t\cos t$

۱۵. لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{3t}{2}}$

۲) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{3t}{2}}$

۳) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3t}{2}}$

۴) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{3t}{2}}$ ✓

۱۶. جواب معادله $y(x)=e^x+\displaystyle\int_0^x e^{x-t}y(t)dt$ **برابر است با:** **(معدن ۸۶)**

۱) e^{2x} ✓

۲) e^{-x}

۳) e^{-2x}

۴) xe^{2x}

۱۷. اگر $F(s)=\dfrac{8s^2-4s+12}{s^3+4s}$ **حاصل** $f'(0)$ **کدام است؟**

۱) 4

۲) -4 ✓

۳) 2

۴) -2

۱۸. اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد تبدیل لاپلاس $e^{-2t} f(t-1)u_1(t)$ کدام است؟

۱) $e^{-(s-2)} F(s-2)$

۲) $e^{-(s+2)} F(s+2)$ ✓

۳) $e^{-(s+2)} F(s)$

۴) $e^{-s} F(s+2)$

۱۹. لاپلاس معکوس $F(s) = \ln\left(\frac{s^2+4}{s\sqrt{s^2+1}}\right)$ کدام است؟

۱) $f(t) = \frac{t+\cos t - 2\cos 2t}{2}$

۲) $f(t) = \frac{1+\cos t - 2\cos 2t}{t}$ ✓

۳) $f(t) = -\frac{t+\cos t - 2\cos 2t}{2}$

۴) $f(t) = -\frac{1+\cos t - 2\cos 2t}{t}$

۲۰. فرض کنید $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < c \\ 0 & 1 \le t < 2c \end{cases}$ و $f(t+2c) = f(t)$، تبدیل لاپلاس $f(t)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{1-e^{-sc}}{s(1+e^{-2sc})}$

۲) $\frac{1-e^{-sc}}{s(1+e^{-sc})}$

۳) $\frac{1}{s(1+e^{-sc})}$ ✓

۴) $\frac{1}{s(1+e^{-2sc})}$

۲۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$, $f(t+2) = f(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right)$

۲) $\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{-e^{-s}}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s^2}\right)$ ✓

۳) $\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1-e^{-s}}{s^2}\right)$

۴) $\frac{1}{1-e^{2s}}\left(\frac{-e^{-s}}{s} + \frac{1+e^{-s}}{s^2}\right)$

۲۲. اگر $L^{-1}(F(s)) = f(t)$ حاصل $L^{-1}(F(s)\tanh(cs))$ کدام است؟

۱) $f(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(t-2nc)u_{2nc}(t)$ ✓

۲) $f(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} f(t-2nc)u_{2nc}(t)$

۳) $f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(t-2nc)u_{2nc}(t)$

۴) $f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f(t-2nc)u_{2nc}(t)$

۲۳. مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} t \cdot e^{-2t} \cos t \cdot dt$ کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{-3}{25}$

۲) $-\frac{2}{25}$

۳) $\frac{2}{25}$

۴) $\frac{3}{25}$ ✓

۲۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t>4\end{cases}$ کدام است؟

۱) $e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}-\frac{8}{s^2}+\frac{16}{s}\right)$

۲) ✓ $e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{16}{s}\right)$

۳) $e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}-\frac{16}{s}\right)$

۴) $e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}-\frac{8}{s^2}-\frac{16}{s}\right)$

۲۵. حاصل $\int_0^\infty \frac{\cos t-\cos 2t}{t}dt$ کدام است؟

۱) $-\ln 2$

۲) $\frac{1}{2}\ln 2$

۳) $-\frac{1}{2}\ln 2$

۴) ✓ $\ln 2$

۲۶. تبدیل لاپلاس $f(t)=t\,u_2(t)\sin\frac{\pi t}{2}$ کدام است؟

۱) $-e^{-2s}\frac{\pi s}{\left(s^2+\frac{\pi^2}{4}\right)^2}$

۲) ✓ $-e^{-2s}\left(\frac{\pi}{s^2+\frac{\pi^2}{4}}+\frac{\pi s}{\left(s^2+\frac{\pi^2}{4}\right)^2}\right)$

۳) $-e^{-2s}\left(\frac{\pi}{s^2+\frac{\pi^2}{4}}-\frac{\pi s}{\left(s^2+\frac{\pi^2}{4}\right)^2}\right)$

۴) $\frac{e^{-2s}}{2s^2}\frac{\pi}{s^2+\frac{\pi^2}{4}}$

۲۷. اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{-\sqrt{t}}$ را $F(s)$ بنامیم تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=te^{-(t+\cos t)}$ کدام است؟

۱) $F'(s-1)$

۲) $F'(s+1)$

۳) $-F'(s-1)$

۴) ✓ $-F'(s+1)$

۲۸. اگر $tf(t)=e^{-t}g(t)$، تبدیل لاپلاس $f(t)$ کدام است؟

۱) ✓ $\int_s^\infty G(s+1)ds$

۲) $\int_s^\infty G'(s+1)ds$

۳) $-\int_s^\infty G(s-1)ds$

۴) $-\int_s^\infty G'(s-1)ds$

۲۹. اگر $L\left(tf(t)\right)=\dfrac{s^2-1}{\left(s^2+s+1\right)^2}$ حاصل $L\left\{\dfrac{1}{t}\int_0^t f(t)dt\right\}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{s+1}{\sqrt{3}}\right)$

۲) $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}(s+1)$

۳) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\dfrac{s+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)$

۴) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\dfrac{2s+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ ✓

۳۰. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را $F(s)$ نامیده‌ایم تبدیل لاپلاس $\dfrac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}t}f\left(\dfrac{t}{4}\right)$ کدام است؟

۱) $F(4s+3)$ ✓

۲) $\dfrac{1}{16}F(4s+3)$

۳) $F\left(4s+\dfrac{3}{4}\right)$

۴) $\dfrac{1}{16}F\left(4s+\dfrac{3}{4}\right)$

۳۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{at}+2e^{-\frac{1}{2}at}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}at$ کدام است؟

۱) $\dfrac{a^2}{s^3-a^3}$

۲) $\dfrac{3s^2}{s^3-a^3}$ ✓

۳) $\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$

۴) $\dfrac{3a^2}{s^3-a^3}$

۳۲. اگر $\int_0^1 x^{\alpha}\ln^2 x\,dx$ همگرا باشد α و مقدار همگرایی کدام است؟

۱) $\dfrac{2}{(\alpha+1)^3},\ \alpha>-1$ ✓

۲) $\dfrac{1}{(\alpha+1)^2},\ \alpha>-1$

۳) $\dfrac{2}{(\alpha+1)^3},\ \alpha>0$

۴) $\dfrac{1}{(\alpha+1)^2},\ \alpha>0$

۳۳. اگر $F(s)=\dfrac{\left(1-e^{-2s}\right)^2}{s^2}$ باشد شکل $f(t)$ کدام است؟

۱) یک پالس مثلثی متساوی‌الساقین در بالای محور زمان ✓

۲) یک پالس مثلثی غیرمتساوی‌الساقین در بالای محور زمان

۳) یک پالس مثلثی متساوی‌الساقین که در بالا و قسمتی از آن در پایین محور زمان است.

۴)یک پالس مثلثی غیرمتساوی‌الساقین که در بالا و قسمتی از آن در پایین محور زمان است.

۳۴. اگر $F(s)=\dfrac{8e^{-s}}{s}-\dfrac{e^{-2s}}{s^2}+\dfrac{e^{-3s}}{s}+\dfrac{4e^{-3s}}{s^2}$ شیب نمودار $f(t)$ در بازه $t>3$ و $f\left(\dfrac{10}{3}\right)$ کدام است؟

۱) 4,4

۲) 4,3 ✓

۳) 3,4

۴) 3,3

۳۵. حاصل $\int_0^{\infty} xe^{-x}\sin^2 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{14}{25}$ ✓ ۲) $\frac{11}{25}$ ۳) $\frac{13}{25}$ ۴) $\frac{17}{25}$

۳۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{-t^2}$ از چه معادله‌ای قابل محاسبه است؟

۱) $2F'(s)-sF(s)+1=0$ ✓ ۲) $2F'(s)+sF(s)-1=0$

۳) $2F'(s)+sF(s)=0$ ۴) $2F'(s)-sF(s)-1=0$

۳۷. اگر $f(t)=\cos t+\int_0^t f(t-\alpha)\,e^{-2\alpha}d\alpha$ در $f(t)$ کدام جمله وجود ندارد؟

۱) $-\frac{1}{2}e^{-t}$ ۲) $\frac{3}{2}\cos t$

۳) $\frac{1}{2}\sin t$ ۴) هر سه جمله وجود دارد. ✓

۳۸. اگر $\begin{cases} y''-9y=e^{3t} \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ رفتار $y(t)$ در $t\to+\infty$ به صورت مجانبی به کدام منحنی زیر نزدیک می‌شود؟

۱) $\frac{1}{36}e^{3t}+\frac{t}{6}e^{3t}$ ✓ ۲) $\frac{1}{8}e^{3t}-\frac{t}{6}e^{3t}$ ۳) $-\frac{1}{36}e^{3t}+\frac{t}{6}e^{3t}$ ۴) $\frac{1}{8}e^{3t}+\frac{t}{6}e^{3t}$

۳۹. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t \frac{1-\cos\lambda}{t-\lambda}\sin(t-\lambda)d\lambda$ کدام است؟

۱) $\left(\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$ ۲) $\left(\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$

۳) $\frac{1}{s(s^2+1)}\cot^{-1}s$ ✓ ۴) $\frac{1}{s(s^2+1)}\tan^{-1}s$

۴۰. مطلوب است محاسبه $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ با این فرض که $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۳) π ۴) 0

۴۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{e^{3t}-e^{2t}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{s-3}-\sqrt{s-2}$ ۲) $\sqrt{s-2}-\sqrt{s-3}$ ✓

۳) $\frac{1}{\sqrt{s-3}}-\frac{1}{\sqrt{s-2}}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{s-2}}-\frac{1}{\sqrt{s-3}}$

۴۲.اگر $\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \\ y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1 \quad , \quad y''(0)=0 \end{cases}$ ضریب e^{2t} در $y(t)$ کدام است؟

۱) ✓ 4 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{5}{2}$

۴۳.اگر $F(s)=\frac{s^3+3s}{s^4+6s^2+25}$ حاصل $f''(0)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) ✓ -3 ۴) -1

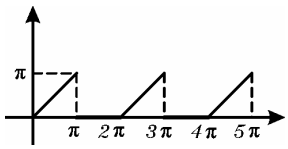
۴۴.اگر $\begin{cases} y''-y' = \begin{cases} t & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases} \\ y(0)=0 \, , \, y'(0)=1 \end{cases}$ برای $t>1$ ضریب کلی e^t کدام است؟

۱) $2+\frac{2}{e}$ ۲) $1-\frac{2}{e}$ ۳) ✓ $2-\frac{2}{e}$ ۴) $2-\frac{1}{e}$

۴۵.اگر $\begin{cases} y''+y = te^t \\ y(0)=0 \, , \, y'(0)=0 \end{cases}$ ضریب کلی e^t در جواب $y(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{t+1}{2}$ ۲) ✓ $\frac{t-1}{2}$ ۳) $\frac{1-t}{2}$ ۴) $-\frac{1+t}{2}$

۴۶.تبدیل لاپلاس تابع متناوب نشان داده شده کدام است؟



۱) ✓ $\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[-\frac{\pi}{s}e^{-\pi s}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]$

۲) $\frac{e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}}\left[-\frac{\pi}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{e^{\pi s}}{s^2}\right]$

۳) $\frac{e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{\pi}{s^2}-\frac{1}{s^2}-\frac{\pi}{s}\right]$

۴) $\frac{e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}}\left[-\frac{\pi}{s}-\frac{e^{\pi s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]$

۴۷.اگر $F(s)=\frac{1}{s^2(s-3)}$ ضریب t در $f(t)$ کدام است؟

۱) ✓ $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۴۸.جواب مسأله $y''' - y'' + y' - y = g(t)$ کدام است؟ $\left(y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\right)$

۱) $\frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{\lambda} - \cos\lambda - \sin\lambda\right) g(t-\lambda)\,d\lambda$ ✓

۲) $\frac{1}{2}\int_0^t \left(e^{\lambda} + \cos\lambda - \sin\lambda\right) g(t-\lambda)\,d\lambda$

۳) $\int_0^t \left(e^{\lambda} - \cos\lambda + \sin\lambda\right) g(t-\lambda)\,d\lambda$

۴) $\int_0^t \left(e^{\lambda} + \cos\lambda + \sin\lambda\right) g(t-\lambda)\,d\lambda$

۴۹. پیچش دو تابع $f(t) = e^t$ و $g(t) = \cos t$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\left(e^t + \cos t - \sin t\right)$

۲) $\frac{1}{2}\left(e^t - \cos t + \sin t\right)$ ✓

۳) $\frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t + \cos t\right)$

۴) $\frac{1}{2}\left(e^t + \cos t + \cos t\right)$

۵۰. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t^2 \cosh 3t$ کدام است؟

۱) $\frac{2s\left(s^2+27\right)}{\left(s^2-9\right)^3}$ ✓

۲) $\frac{s\left(s^2-27\right)}{\left(s^2-9\right)^3}$

۳) $\frac{s\left(s^2+27\right)}{\left(s^2-9\right)^3}$

۴) $\frac{2s\left(s^2+27\right)}{\left(s^2+9\right)^3}$

۵۱. اگر $\begin{cases} y'' + 4y = 4t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 5 \end{cases}$ حاصل $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} + 1$

۲) $\frac{\pi}{2} - 1$ ✓

۳) $\frac{\pi+1}{2}$

۴) $\frac{\pi-1}{2}$

۵۲.اگر $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)\cdots(s-10)}$ در $f(t)$ ضریب جمله e^{5t} کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2880}$ ✓

۲) $\frac{1}{2880}$

۳) $\frac{1}{576}$

۴) $-\frac{1}{576}$

۵۳. بر تبدیل لاپلاس جواب مسأله $\begin{cases} ty'' + (2t+3)y' + (t+3)y = 3e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ چه معادله‌ای حاکم است؟

۱) $Y'(s) + \frac{1}{s+1}Y(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$

۲) $Y'(s) - \frac{1}{s+1}Y(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$ ✓

۳) $Y'(s) + \frac{1}{s+1}Y(s) = \frac{-2}{(s+1)^2}$

۴) $Y'(s) - \frac{1}{s+1}Y(s) = \frac{-3}{(s+1)^2}$

۵۴.اگر $\begin{cases} y''-2y=f(t) \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$ و f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که $f(t)=\begin{cases} 2\sin t & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$

حاصل تبدیل لاپلاس $y(t)$ به ازاء $s=1$ کدام است؟

۱) $\frac{e^{-\pi}-2}{e^{-\pi}-1}$ ۲) $-\frac{e^{-\pi}-2}{e^{-\pi}-1}$ ✓ ۳) $\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}-2}$ ۴) $-\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}-2}$

۵۵.جواب مسأله $\begin{cases} y''+y=\delta(t-\pi)-\delta(t-2\pi) \\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 2\sin t & \pi<t<2\pi \\ \sin t & t>2\pi \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \\ -\sin t & t>2\pi \end{cases}$ ✓

۳) $\begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \\ -\cos t & t>2\pi \end{cases}$

۴) هیچ‌کدام

۵۶.در لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{s(s^2+4s+5)}$ ضریب جمله $e^{-t}\sin 2t$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{1}{10}$ ✓ ۴) $\frac{2}{5}$

۵۷.اگر $2\sqrt{t}=\int_0^t \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\,d\lambda$ باشد حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 1 ✓

۵۸. در مسأله $\begin{cases} y''+4y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 1 & t\ge 1 \end{cases} \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ حاصل $y(\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sin 2$ ✓ ۲) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 2$ ۳) $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin 2$ ۴) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2$

۵۹.اگر $\begin{cases} y''+2y'+2y=k\,\delta_\pi(t) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ به ازاء کدام مقدار k حداکثر مقدار $y(t)$ برابر 1 می‌شود؟

۱) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ✓ ۲) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$ ۴) $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{2}}$

۶۰. اگر $\begin{cases} y''+3y'-4y=te^t \\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0 \end{cases}$ ضریب e^t در جواب y کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}\left(\frac{t^2}{5}-\frac{t}{2}+\frac{1}{25}\right)$ ✓

۲) $\frac{1}{5}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t}{5}-\frac{1}{25}\right)$

۳) $\frac{1}{5}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{5}+\frac{1}{25}\right)$

۴) $\frac{1}{5}\left(\frac{t^2}{5}+\frac{t}{2}-\frac{1}{25}\right)$

۶۱. به ازاء کدام مقدار α جواب مسأله $\begin{cases} y'-\frac{1}{2}y=2\cos t \\ y(0)=\alpha \end{cases}$ تابعی متناوب می‌شود؟

۱) هیچ‌مقدار

۲) $a=-\frac{4}{5}$ ✓

۳) $\alpha=0$

۴) $\alpha=-\frac{4}{3}$

۶۲. اگر $\begin{cases} y''+y'=\cos x+\int_0^x \sin(x-t)y'(t)dt \\ y(0)=0\quad ,\quad y'(0)=1 \end{cases}$ حاصل $y\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)$ کدام است؟

۱) $1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

۲) $1-\frac{1}{2}e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

۳) $1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ ✓

۴) $\frac{1}{2}+e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

۶۳. اگر $\begin{cases} y''-y'=e^t\cos 2t \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ ضریب e^t و $e^t\sin 2t$ در جواب مساله به ترتیب کدام است؟

۱) $\frac{1}{5},0$

۲) $\frac{1}{10},0$ ✓

۳) $\frac{1}{5},1$

۴) $\frac{1}{10},1$