جبر خطی

گروه مؤلفان:
دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر شهریار
فرهمندراد، دکتر چاپچی، دکتر احمد خاکساری،
دکتر مهدی صحت‌خواه، خانم دکتر خدیجه
احمدی آملی، فلکی، دکتر خسروپور

ویراستاران علمی
دکتر محمدحسن بیژن‌زاده و دکتر شهریار
فرهمندراد

۱۳۸۹

فهرست مطالب

فصل اول دستگاه‌های معادلات خطی ۱

۱-۱ ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی ۱

۱-۲ تمرین ۱۳

۱-۳ روش حذفی گاوس ـ جردن ۱۸

۱-۴ روش حذفی گاوس ـ جردن ۱۹

۱-۵ دستگاه‌های همگن معادلات خطی ۲۶

۱-۶ مجموعه‌ی تمرین‌ها ۲۷

۱-۷ Curve Fitting، شبکه‌های الکتریکی، و جریان ترافیک ۳۶

۱-۸ تحلیل شبکه الکتریکی ۳۹

۱-۹ جریان ترافیک ۴۲

۱-۱۰ مجموعه تمرینات ۴۶

۱-۱۱ تمرین‌های دوره‌ای فصل اول ۵۰

فصل دوم ماتریس‌ها ۵۶

۲-۱ جمع، ضرب عددی، و ضرب ماتریس‌ها ۵۶

۲-۲ جمع ماتریس‌ها ۵۸

۲-۳ ضرب اسکالر (عددی) ماتریس‌ها ۵۸

۲-۴ قرینه‌سازی و تفریق ۵۹

۲-۵ ضرب ماتریس‌ها ۵۹

۲-۶ اندازهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۶۲

۲-۷ علامت‌گذاری ماتریس و دستگاه معادلات ۶۴

۲-۸ ضرب سریع ماتریس ۶۵

۲-۹ تمرین‌ها ۶۷

۲-۱۰ ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها ۷۱

۲-۱۱ توان ماتریس‌ها ۷۷

۲-۱۲ تمرینات ۷۸

۲-۱۳ ماتریس‌های متقارن و مجموعه‌ای در باستان شناسی ۸۴

۲-۱۴ ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد مختلط ۸۹

سری‌ها و مجموعه‌ها در باستان‌شناسی ۹۱

۲-۱۶ تمرینات ۹۴

۲-۱۷ ماتریس معکوس و رمز نویسی ۹۹

۲-۱۸ تمرینات ۱۰۹

۲-۱۹ مدل ورودی ـ خروجی لینتیف در اقتصاد ۱۱۵

۲-۲۰ نکته محاسباتی ۱۱۹

۲-۲۱ تمرینات ۱۲۰

۲-۲۲ جنبش‌های آماری و ژنتیکی ـ زنجیرهٔ مارکوف ۱۲۲

۲-۲۳ تمرینات ۱۳۱

۲-۲۴ یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه ۱۳۵

۲-۲۵ تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم ۱۵۱

فصل سوم دترمینان‌ها ۱۵۶

۳-۱ مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها ۱۵۶

۳-۲ خواص دترمینان‌ها ۱۶۷

۳-۳ ارزیابی عددی یک دترمینان ۱۷۶

۳-۴ دترمینان‌ها، معکوس ماتریس و دستگاه معادلات خطی ۱۸۱

فصل چهارم فضای برداری $\mathbb{R}^n$ ۱۹۴

۴-۱ مقدمه بر بردارها ۱۹۴

۴-۲ حاصل‌ضرب نقطه‌ای، نرم، زاویه و فاصله ۲۰۵

۴-۳ تمرین ۲۱۶

۴-۴ مقدمه‌ای بر نگاشت‌های خطی ۲۱۸

۴-۵ نگاشت‌های ماتریسی، گرافیک‌های کامپیوتری و فراکتال‌ها ۲۲۷

۴-۶ تمرینات ۲۴۳

فصل پنجم فضاهای برداری عمومی ۲۵۱

۵-۱ فضاهای برداری ۲۵۱

۵-۲ فضاهای برداری ماتریس‌ها ۲۵۳

۵-۳ فضاهای برداری تابع‌ها ۲۵۴

۵-۴ فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$ ۲۵۶

۵-۵ زیرفضاها ۲۵۸

۵-۶ ترکیبات خطی بردارها ۲۶۷

۵-۷ استقلال و وابستگی خطی ۲۸۰

۵-۸ پایه و بعد ۲۸۹

۵-۹ بُعد برخی فضاها ۲۹۷

۵-۱۰ رتبه ماتریس‌ها ۲۹۹

۵-۱۱ بردارهای متعامد و تصاویر ۳۰۶

۵-۱۲ تصویر یک بردار روی بردار دیگر ۳۱۰

۵-۱۳ قضیه فرآیند گرام‌ـاشمیت یکّه متعامدسازی ۳۱۲

۵-۱۴ تصویر یک بردار روی‌یک زیرفضا ۳۱۴

۵-۱۵ فاصله یک نقطه از یک زیرفضا ۳۱۸

۵-۱۶ ماتریس‌های متعامد ۳۲۰

۵-۱۷ مسأله‌های مختلفه فصل پنج ۳۲۹

فصل ششم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ۳۳۴

۶-۱ بررسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های ۲ × ۲ ۳۳۸

۶-۲ بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های ۳ × ۳ ۳۴۰

۶-۳ مقادیر ویژه‌ی مختلط ۳۴۹

۶-۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی بردارها ۳۵۱

۶-۵ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریسی حقیقی که روی $\mathbb{C}^n$ عمل می‌کند ۳۵۲

۶-۶ قضیه‌گرشگورین ۳۵۵

۶-۷ نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ۳۵۸

۶-۸ قضیه کیلی-هامیلتون ۳۶۹

۶-۹ محاسبه‌ی A^kX ۳۷۱

۶-۱۰ جمعیت‌شناسی ۳۷۲

۶-۱۱ معادلات تفاضلی ۳۷۵

۶-۱۲ قطری کردن ماتریس‌ها ۳۸۲

۶-۱۳ کاربرد قطری کردن ماتریس‌ها ۳۸۴

۶-۱۴ قطری‌سازی متعامد ۳۸۵

۶-۱۵ فرم‌های درجه دوم ۳۸۶

۶-۱۶ دوران محورهای مختصات ۳۸۶

۶-۱۷ تعریف فرم‌های درجه دوم ۳۸۷

۶-۱۸ شناخت مقاطع مخروطی ۳۸۷

فصل هفتم نگاشت‌های خطی ۳۹۴

۷-۱ نگاشت‌های خطی، هسته و برد ۳۹۴

۷-۲ نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی ۴۱۱

۷-۳ معادلات همگن ۴۱۲
۷-۴ معادلات ناهمگن ۴۱۳
۷-۵ چند دستگاه ۴۱۶
۷-۶ بردار مختصات ۴۲۲
۷-۷ تغییر پایه ۴۲۵
۷-۸ یک‌ریختی‌ها ۴۲۸
۷-۹ نمایش ماتریسی نگاشت‌های خطی ۴۳۲
۷-۱۰ اهمیت نمایش ماتریسی ۴۳۷
۷-۱۱ ارتباط بین نمایش‌های ماتریسی ۴۴۰

فصل هشتم فضاهای ضرب داخلی ۴۵۲

۸-۱ فضاهای ضرب داخلی ۴۵۲
۸-۲ نرم یک بردار ۴۵۶
۸-۳ زوایه ۴۵۷
۸-۴ بردارهای متعامد ۴۵۸
۸-۵ فاصله ۴۵۸
۸-۶ اتحاد قطبی B ۴۶۵
۸-۷ هندسه نااقلیدسی و نسبیت خاص ۴۶۵
۸-۸ نسبیت خاص ۴۶۸
۸-۹ تقریب توابع و تئوری کدنگاری ۴۷۵
۸-۱۰ تقریب‌های فوریه ۴۷۸
۸-۱۱ نظریه کدنگاری ۴۸۰
۸-۱۲ منحنی کمترین مربعات ۴۸۴
۸-۱۳ منحنی‌های کمترین مربعات ۴۸۸
۸-۱۴ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۸ . . . . . . ۵۰۱
مرجع‌ها ۵۰۳

به نام خدا

پیشگفتار

ویژگی‌های کتاب. در این کتاب ریاضیات، محاسبات و کاربردها به طریقی انعطاف‌پذیر با هم درآمیخته است. هم چنان که قبلاً گفته شد، در عین حال که جبرخطی درسی مجرد بوده و مفاهیم آن در نهایت به گونه‌ای محض ارائه می‌گردد، هیچ مبحثی بدون کاربرد رها نشده است. اصولاً، هیچ بخشی از ریاضیات امروزه به لحاظ فلسفه آموزشی نباید بدون کاربرد در دانشگاه‌ها، و مدارس ارائه گردد. دانشجویان این درس کاربردهای آن را در محیطی طبیعی ملاحظه خواهند کرد. راهبرد کار از این قرار است که ابتدا ریاضیات مربوطه را توسعه داده و سپس کاربردهای آن ارائه می‌گردد. با این حال مدرسین این درس می‌توانند به منظور انگیزه‌بخشی به دانشجویان ابتدا اشاره‌ای به کاربردهای هر مبحث کرده و سپس شروع به مفهوم‌سازی و توسعه درس نمایند. از نظر آموزشی و تاریخی، ریاضیات از طریق تعامل و کار روی کاربردها توسعه یافته است.

موضوعات کتاب شامل مباحث کلاسیک و رسمی جبرخطی است که در دانشگاه‌های ایران و دانشگاه‌های معتبر جهان تدریس می‌گردد. از دستگاه‌های معادلات خطی گرفته، حساب ماتریس‌ها و دترمینان‌ها تا فضاهای برداری ملموس ($\mathbb{R}^n$) و مجرد و نگاشت‌های خطی و بالاخره بردارها و مقادیر ویژه را شامل می‌شود. بدین ترتیب این کتاب، که براساس کتاب مشهور گارث ویلیام [1] تألیف گردیده است، در هشت فصل به رشته تحریر درآمده است.

گروه مؤلفین پیشاپیش از هر نظر و نقدی که همکاران گرامی و دانشجویان عزیز در خصوص این درس مباحث آن و نحوه ارائهٔ مطالب داشته باشند استقبال می‌نمایند.

گروه مؤلفان جبرخطی
اعضای هیأت علمی دانشگاه پیام نور

هدف‌های رفتاری فصل یک

دانشجو پس از پایان این فصل باید بتواند

- روش حذفی گاوس ـ جردن را در حل دستگاه معادلات خطی بکارگیرد.
- عملیات سطری مقدماتی را درک کرده و تطابق مفهومی آن را با تبدیلات مقدماتی روی یک دستگاه معادلات بشناسد.
- مفهوم دستگاه معادلات خطی همگن را درک کرده و تعداد جواب‌های چنین دستگاهی را وقتی که تعداد متغیرها بیش از تعداد معادلات است بداند.
- کاربرد حل دستگاه معادلات خطی را در رسم نمودارها، شبکه‌های الکتریکی و جریان‌های ترافیکی بداند. در مواردی این چنین بتواند به مدل‌سازی دستگاه معادلات خطی براساس داده‌های مساله بپردازد.
- مساله‌های پایان هر بخش و پایان فصل را به راحتی حل کند.

فصل اول

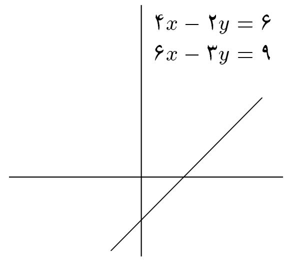
دستگاه‌های معادلات خطی

۱-۱ ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی

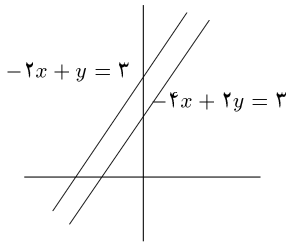
معادله‌ای به صورت $x + ۳y = ۹$ یک **معادلهٔ خطی** نامیده می‌شود. نمودار این معادله یک خط مستقیم در صفحهٔ $x - y$ است. دستگاه دو معادله خطی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x + ۳y = ۹$$
$$-۲x + y = -۴$$

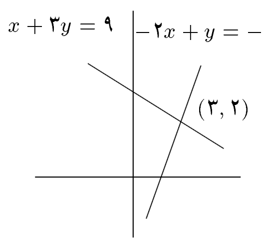
به هر دو زوج x و y که در هر دو معادله صدق کنند یک **جواب** می‌گوئیم. با جایگزینی می‌توان دید که $x = ۳$، $y = ۲$ یک جواب این دستگاه می‌باشد. یک جواب برای یک چنین دستگاهی نقطه‌ای در صفحه است که از محل تلاقی دو نمودار معادله به وجود می‌آید. مثال‌های زیر سه حالتی را که ممکن است برای چنین دستگاه‌هایی از معادلات رخ دهد، نمایش می‌دهد. این حالات عبارتند از: زمانی که یک جواب منحصربه‌فرد، هیچ جواب، و یا تعداد زیادی جواب وجود دارند.



شکل۱ـ۳



شکل۱ـ۲



شکل۱ـ۱

چند جواب	هیچ جواب	جواب منحصربفرد
$۴x - ۲y = ۶$	$-۲x + y = ۳$	$x + ۳y = ۹$
$۶x - ۳y = ۹$	$-۴x + ۲y = ۲$	$-۲x + y = -۴$
هر دو معادله دارای یک نمودارند.	خطوط موازی‌اند.	خطوط در $(۳, ۲)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.
هر نقطه روی نمودار یک جواب است.	نقطهٔ اشتراک ندارند.	جواب منحصربه‌فرد، $x = ۳$ و $y = ۲$ است.
تعداد جواب‌ها زیاد است.	هیچ جواب وجود ندارد.	

هدف اصلی‌مان در این فصل بررسی دستگاه‌های بزرگتری از معادلات خطی است.

یک **معادله‌ی خطی** از n متغیر $x_۱, x_۲, x_۳, \dots, x_n$ به فرم

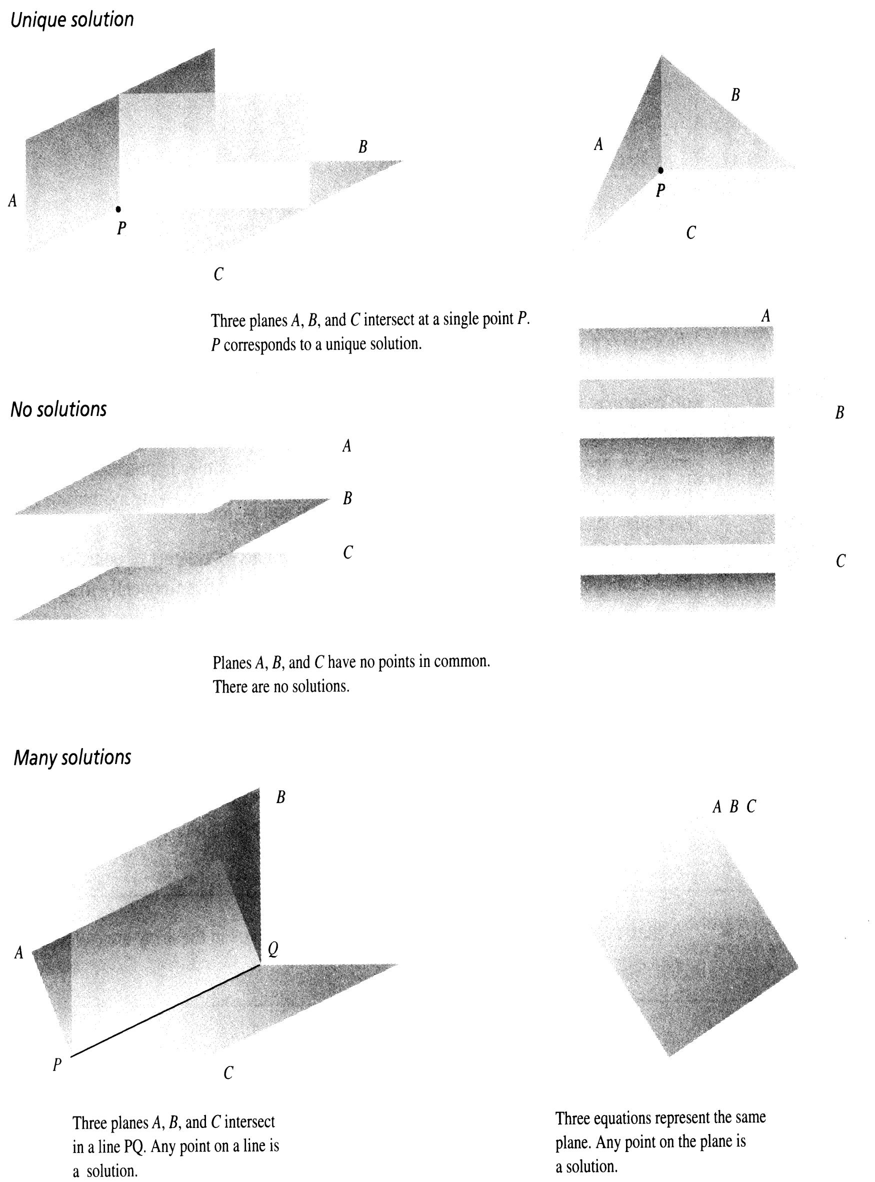
$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + a_۳x_۳ + \cdots + a_nx_n = b$$

می‌باشد که در آن ضرایب $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و b اعداد حقیقی‌اند. مثال زیر نمونه‌ای از یک دستگاه از ۳ معادله‌ی خطی است.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲$$
$$۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ = ۳$$
$$x_۱ - x_۲ - ۲x_۳ = -۶$$

هر معادله‌ی خطی برحسب سه متغیر متناظر با صفحه‌ای در فضای سه بعدی است. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که روی هر سه صفحه قرار دارند.

در مورد وجود جواب نیز همانند دستگاه دو معادله، سه حالت وجود دارد: یک جواب منحصربفرد، تعداد زیادی جواب و یا هیچ جواب. در شکل ۱ـ۴ چند نوع از این حالات نمایش داده شده است.



شکل ۱_۴

هرچه تعداد متغیرها افزوده شود، تعبیر هندسی چنین دستگاهی از معادلات پیچیده‌تر خواهد شد. هر معادله نمایانگر یک فضا است که در فضای بزرگتری قرار دارد. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که بر تمامی فضاهای نشانده شده قرار دارند. تعبیر هندسی‌ای برای تصور جواب‌ها عملاً وجود ندارد. برای همین به روش‌های

جبری متوسل می‌شویم. در بخش ۱ـ۳ روشی را برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تحت عنوان **روش حذفی گاوس ـ جردن** معرفی خواهیم کرد.

در این بخش چگونگی کاربرد این روش را برای دستگاه‌های معادلاتی که تنها یک جواب دارند، خواهیم دید. دستگاه‌هایی که تنها یک جواب منحصربفرد دارند به کرار به کار می‌روند. بنابراین چنین دستگاه‌هایی توجه خاصی را می‌طلبند. اغلب به‌خاطر موقعیتی که یک دستگاه معادلات توصیف می‌کند، از پیش فرض می‌شود که یک دستگاه معادلات دارای یک جواب منحصربفرد است؛ برای مثال، خواهیم دید که در یک شبکه الکتریکی شدت جریان‌ها از طریق حل یک چنین دستگاه معادلات خطی پیدا می‌شوند. روش حذفی گاوس ـ جردن مرتباً با حذف متغیرها از معادلات درگیر می‌باشد. در بخش بعدی این روش را به دستگاه‌های معادلات خطی کلی‌تری توسعه خواهیم داد.

برای توصیف کردن دستگاه‌های معادلات خطی از آرایه‌های مستطیلی از اعداد به نام **ماتریس** استفاده خواهیم کرد.

۱-۱-۱ تعریف. یک ماتریس عبارت است از آرایه‌ای مستطیلی از اعداد. اعداد واقع در آرایه‌ها درایه ماتریس نامیده می‌شوند.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. برای مثال به ماتریس‌های زیر توجه کنید:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۳\\ ۷ & ۰ & -۱\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} ۷ & ۱\\ ۰ & ۵\\ -۸ & ۳\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۰\\ ۰ & -۲ & ۷\\ ۶ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

سطرها و ستون‌ها. ماتریس‌ها از سطرها و ستون‌هایی تشکیل شده‌اند. سطرها از بالای ماتریس و ستون‌ها از سمت چپ شماره‌گذاری می‌شوند. ماتریس زیر دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۳\\ ۷ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

سطرها عبارتند از:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۳\end{bmatrix}}_{\text{سطر ۱}}\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & -۱\end{bmatrix}}_{\text{سطر ۲}}$$

ستون‌ها عبارتند از:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲\\ ۷\end{bmatrix}}_{\text{ستون ۱}}\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} ۴\\ ۰\end{bmatrix}}_{\text{ستون ۲}}\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -۳\\ -۱\end{bmatrix}}_{\text{ستون ۳}}$$

زیرماتریس‌ها. یک زیرماتریس از یک ماتریس مفروض، یک آرایه به دست آمده از حذف سطرها و ستون‌های مشخصی از آن ماتریس می‌باشد. برای نمونه، ماتریس A در زیر را درنظر بگیرید. ماتریس‌های P، Q، و R زیرماتریس‌های A هستند.

$$\underbrace{A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۶ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } A} \qquad \underbrace{P=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad R=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}}_{\text{زیرماتریس‌های } A}$$

اندازه و نوع. اندازه‌ی یک ماتریس با مشخص کردن تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس تعیین می‌شود. برای مثال، ماتریسی با دو سطر و سه ستون را یک ماتریس ۳ × ۲ می‌نامند؛ عدد اول تعداد سطرها و عدد دوم تعداد ستون‌ها را بیان می‌کند. زمانی که تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها با هم برابر باشند، ماتریس را یک **ماتریس مربعی** می‌نامند. ماتریسی که تنها یک سطر دارد، **ماتریس سطری** نامیده می‌شود. ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد یک **ماتریس ستونی** نام دارد.

مثال. به ماتریس‌های زیر با اندازه‌ها و نوع‌های داده شده توجه کنید.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ستونی } ۱ \times ۳} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سطری } ۴ \times ۱} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مربعی } ۳ \times ۳} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } ۳ \times ۲}$$

مکان. مکان یک درایه در یک ماتریس با داشتن سطر و ستونی که آن عنصر در آن قرارگرفته مشخص می‌شود. برای مثال ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۹ \\ ۰ & ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

درایه ۲− در سطر ۱، ستون ۲ قرارگرفته است. می‌گوئیم این درایه در مکان $(۱,۲)$ قرار دارد. درایه‌ای که در مکان $(۲,۳)$ قرار دارد، ۵ است. توجه کنید که بنابه قرارداد ابتدا سطری که عنصر در آن قرار دارد را می‌آوریم و سپس ستون را.

ماتریس‌های همانی. یک ماتریس همانی، ماتریسی مربعی با قطر ۱ در مکان‌های $(۱,۱)$، $(۲,۲)$ و $(۳,۳)$ و غیره و صفر در بقیهٔ جاها می‌باشد. ماتریس همانی $n \times n$ را با نماد I_n نشان می‌دهیم.

مثال. ماتریس‌های زیر همانی هستند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اینک بحث روی دستگاه‌های معادلات خطی را ادامه می‌دهیم. از ماتریس‌ها برای توصیف دستگاه‌های معادلات خطی استفاده می‌کنیم. در رابطه با هر دستگاه معادلات خطی دو ماتریس مهم وجود دارند: ضرایب متغیرها تشکیل ماتریسی می‌دهد که آن را **ماتریس ضرایب** دستگاه می‌نامند. ضرایب، به همراه جملات ثابت، تشکیل ماتریسی به نام **ماتریس افزوده** دستگاه می‌دهد.

مثال. ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات خطی زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \underset{\text{ماتریس ضرایب}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{ماتریس افزوده}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}}$$

توجه کنید که ماتریس ضرایب یک زیرماتریس از ماتریس افزوده است. ماتریس افزوده کاملاً دستگاه را توصیف می‌کند.

تبدیلاتی که **تبدیلات مقدماتی** نامیده می‌شوند می‌توانند یک دستگاه معادلات خطی را به دستگاه معادلات خطی دیگری با جواب یکسان تبدیل کنند. این تبدیلات برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با حذف متغیرها به کار برده می‌شوند. در عمل کار کردن برحسب ماتریس‌هایی ساده‌تر است که با تبدیلات خطی معادل به نام **اعمال سطری مقدماتی** به دست می‌آیند. در هر مرحله نیازی به نوشتن متغیرهای x_1، x_2، x_3 نمی‌باشد. دستگاه‌های معادلات خطی اغلب با رایانه‌ها برحسب چنین ماتریس‌هایی توصیف و انجام می‌پذیرند. این تبدیلات به شرح زیر می‌باشند.

تبدیلات مقدماتی	اعمال سطری مقدماتی
۱. تعویض دو معادله	۱. تعویض دو سطر یک ماتریس
۲. ضرب دو طرف یک معادله در یک عدد ثابت ناصفر	۲. ضرب درایه‌های یک سطر در یک عدد ثابت ناصفر
۳. افزودن مضربی از یک معادله به معادلهٔ دیگر	۳. افزودن مضربی از درایه‌های یک سطر به درایه‌های متناظر سطر دیگر

تبدیلات مقدماتی جواب‌ها را حفظ می‌کنند زیرا ترتیب معادلات روی جواب اثر نمی‌گذارد، ضرب یک معادله در یک عدد ثابت ناصفر، تغییری در یک تساوی ایجاد نمی‌کند، و جمع یک مقدار مساوی به طرفین یک تساوی نیز یک تساوی به دست می‌دهد.

دستگاه‌های معادلاتی که مربوط به تبدیلات مقدماتی می‌شوند، و لذا دارای جواب‌های یکسان هستند، **دستگاه‌های هم‌ارز** نامیده می‌شوند. نماد $\approx$ را برای نشان دادن دستگاه‌های معادلات هم‌ارز به کار می‌بریم. در روش حذفی گاوس- جردن از تبدیلات مقدماتی برای حذف متغیرها استفاده می‌شود. از آنجا که هر دستگاه معادلات جدید دارای جواب یکسان با دستگاه اولیه می‌باشد، می‌توانیم این روش را به کار گیریم. روش حذفی **گاوس -جردن** را با به کار بردن معادلات و ماتریس متشابه در مثال زیر ملاحظه خواهیم کرد. خواننده می‌بایست به روش اصولی که در آن متغیرها در معادلات ستون چپ حذف می‌گردند، دقت کند. هم‌زمان ملاحظه شود که چگونه برحسب ماتریس‌های ستون راست با ایجاد کردن صفر در مکان‌های معین انجام می‌گیرد و از آن به بعد از ماتریس به دست آمده استفاده می‌کنیم.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

حل.

روش معادله‌ای	روش ماتریس متشابه
دستگاه ابتدایی: $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &=& -6 \end{array}$	ماتریس متشابه: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$
x_1 از معادلات دوم و سوم را حذف کنید: $\begin{array}{rrcl} \approx & x_1 + x_2 + x_3 &=& 2 \\ Eq2 + (-2)Eq1 & x_2 - x_3 &=& -1 \\ Eq3 + (-1)Eq1 & -2x_2 - 3x_3 &=& -8 \end{array}$	صفر در ستون ۱ ایجاد کنید: $\begin{array}{r} \approx \\ R2 + (-2)R1 \\ R3 + (-1)R1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$
x_2 از معادلات اول و سوم را حذف کنید: $\begin{array}{rrcl} \approx & x_1 + 2x_8 &=& 3 \\ Eq1 + (-1)Eq2 & x_2 - x_3 &=& -1 \\ Eq3 + (2)Eq2 & -5x_3 &=& -10 \end{array}$	صفرهای مناسب دو ستون ۲ ایجاد کنید: $\begin{array}{r} \approx \\ R1 + (-1)R2 \\ R3 + (2)R2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$
ضریب x_3 در معادله‌ی سوم را ۱ کنید: $\begin{array}{rrcl} \approx & x_1 + 2x_3 &=& 3 \\ & x_2 - x_3 &=& -1 \\ (-\frac{1}{5})Eq3 & x_3 &=& 2 \end{array}$	عنصر $(3,3)$ را ۱ کنید: $\begin{array}{r} \approx \\ \\ (-\frac{1}{5})R3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
x_3 را از معادلات اول و دوم حذف کنید: $\begin{array}{rrcl} \approx & x_1 &=& -1 \\ Eq1 + (-2)Eq3 & x_2 &=& 1 \\ Eq2 + Eq3 & x_3 &=& 2 \end{array}$	در ستون ۳ صفر ایجاد کنید: $\begin{array}{r} \approx \\ R1 + (-2)R3 \\ R2 + R3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
جواب عبارت است از: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$	این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$ جواب عبارت است از: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$

از نظر هندسی، هر یک از معادلات ابتدایی در این مثال نمایانگر یک صفحه در فضای سه‌ـ بعدی است. این که یک جواب منحصربفرد وجود دارد به این معناست که این سه صفحه در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. جواب $(-1, 1, 2)$ مؤلفه‌های این نقطه‌ی مشترک را نشان می‌دهد. مثال دیگری از این روش می‌آوریم تا این روش را به خوبی یاد بگیرید.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$۲x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ = ۱۸$$
$$-x_۱ + ۳x_۲ - ۳x_۳ = -۸$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کنید و از اولین سطر برای ایجاد صفر در اولین ستون استفاده نمایید. (این کار متناظر با استفاده‌ی اولین معادله برای حذف $x_۱$ از دومین و سومین معادلات می‌باشد.)

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ & ۱۲ \\ ۲ & -۱ & ۵ & ۱۸ \\ -۱ & ۳ & -۳ & -۸ \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \approx \\ R۲+(-۲)R۱ \\ R۳+R۱ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ & ۱۲ \\ ۰ & ۳ & -۳ & -۶ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

سپس، سطر ۲ را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب کنید تا عنصر $(۳,۳)$ را ۱ نمائید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب $x_۲$ در معادله‌ی دوم به ۱ است.)

$$\begin{matrix} \approx \\ (\frac{۱}{۳})R۲ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ & ۱۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

در ستون دوم به صورت زیر صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله‌ی دوم برای حذف $x_۲$ از معادلات اول و سوم است.)

$$\begin{matrix} \approx \\ R۱+(-۲)R۲ \\ R۳+(-۱)R۲ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۸ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

سطر ۳ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب $x_۳$ در معادلهٔ سوم به ۱ است.)

$$\begin{matrix} \approx \\ (\frac{۱}{۲})R۳ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۸ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

در آخر، در ستون سوم صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادلهٔ سوم برای حذف $x_۳$ از معادلات اول و دوم است.)

$$\begin{matrix} \approx \\ R۱+(-۲)R۳ \\ R۲+R۳ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 2 \\ x_2 \quad &= 1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

جواب عبارت است از $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$.

روش گاوس ـ جردن برای حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس‌ها با ایجاد کردن اعداد ۱ و ۰ در مکان‌های معینی از ماتریس‌ها درگیر است. این اعداد به یک روش اصولی ستون به ستون ایجاد می‌شوند. مثال زیر نشان می‌دهد که گاهی لازم است دو سطر را در مرحله‌ای، به منظور پیشروی در روش فوق، با هم عوض کرد.

مثال. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 &= 44 \\ 3x_1 + 6x_2 - 8x_3 &= 32 \\ -2x_1 - x_2 \qquad &= -7 \end{aligned}$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و به صورت زیر پیش می‌رویم. (توجه شود که در ماتریس افزوده از صفر به عنوان ضریب متغیر x_3 در معادله سوم که وجود ندارد، استفاده می‌کنیم).

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{4})R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R2+(-3)R1 \\ R3+2R_1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

در این مرحله به عنصری ناصفر در مکان $(2, 2)$ نیاز داریم تا بتوانیم ادامه دهیم. برای به دست آوردن چنین عنصری، سطر دوم را با سطر سوم (یک سطر عقب‌تر) عوض کرده و سپس پیش می‌رویم.

$$\underset{R2 \longleftrightarrow R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{3})R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R1+(-2)R2}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\quad \underset{\substack{R1+(-1)R3\\ R2+2R3}}{\approx}\quad\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

جواب عبارت است از: $x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -1$.

اکنون روش گاوس ـ جردن را برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول که دارای یک جواب منحصربفرد است، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. ماتریس افزوده از یک ماتریس ضرایب A و یک ماتریس ستونی از جملات ثابت B بوجود می‌آید. از نماد $[A:B]$ برای نمایش این ماتریس استفاده می‌کنیم. از عملیات سطری استفاده کنید تا به تدریج این ماتریس را ستون به ستون، به یک ماتریس به فرم $[I_n : X]$ تبدیل کنید، که در آن I_n ماتریس $n \times n$ همانی است.

$$[A:B] \approx \ldots \approx [I_n : X]$$

این ماتریس آخری $[I_n : X]$ را **فرم پلکانی تحویل یافته‌ی** ماتریس افزوده ابتدایی می‌نامند. ماتریس ضرایب دستگاه معادلات آخری I_n و X ماتریس ستونی جملات ثابت است. در نتیجه عناصر X جواب منحصربفرد دستگاه هستند. ملاحظه کنید که در حین تبدیل $[A:B]$ به $[I_n : X]$، ماتریس A به I_n تغییر می‌کند. بنابراین

«اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه n معادله n مجهول باشد که دارای جواب منحصربفرد است، آنگاه Aبا I_n هم‌ارز سطری است».

اگر به این روش $[A:B]$ به ماتریسی به شکل $[I_n : X]$ قابل تبدیل نباشد، آنگاه دستگاه معادلات یک جواب منحصربفرد نخواهد داشت. در بخش بعدی درباره‌ی این چنین دستگاه‌هایی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

دستگاه‌های بیشتر

کاربردهای مشخصی در رابطه با حل تعدادی از دستگاه معادلات خطی، که همگی دارای ماتریس مربع ضرایب یکسان A هستند وجود دارد. فرض کنید دستگاه‌ها عبارتند از:

$$[A:B_1], [A:B_2], \ldots, [A:B_k].$$

جملات ثابت B_1، B_2، ...، B_k ممکن است، برای مثال، داده‌های آزمایشی باشند، که می‌خواهیم بدانیم جواب‌هایی که ممکن است منجر به چنین نتایجی شده باشند، چیست؟ غالباً وضعیت ایجاب می‌کند که جواب‌ها منحصربفرد باشند. اگر برای هر دستگاه روش **گاوس ـ جردن** انجام شود و هر دستگاه به طور مستقل حل گردد، روند کار منجر به فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ای به صورت زیر خواهد شد:

$$[I_n : X_1], [I_n : X_2], \ldots, [I_n : X_k]$$

و جواب‌ها X_1، X_2، ...، X_k خواهند بود. به هر حال، مشابه تبدیل A به I_n برای هر دستگاه تکرار می‌گردد، این کار منجر به انجام تعداد زیادی کار تکراری غیرلزوم می‌شود. دستگاه‌ها می‌توانند با یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ به صورت $[A : B_1, B_2 \ldots B_k]$ نمایش داده شوند، و روش **گاوس ـ جردن** می‌تواند برای این یک ماتریس به کار گرفته شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$[A : B_1\ B_2 \ldots B_k] \approx \ldots \approx [I_n : X_1\ X_2 \ldots X_k]$$

که از آنجا جواب‌ها عبارت خواهند بود از: X_1، X_2، ...، X_k.

مثال: سه دستگاه معادلات خطی زیر را، که تمامی آنها دارای یک ماتریس ضرایب هستند، حل کنید.

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = b_2$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = b_3$$

به‌ازای $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ به ترتیب برابر با $\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

حل. ابتدا ماتریس افزوده بزرگی که هر سه دستگاه را مشخص می‌کند، بسازید و فرم پلکانی تحویل یافته را به صورت زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+R2 \\ R3+(-1)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\approx\\ R۱+(-۱)R۳\\ R۲+۲R۳\end{array}\quad\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۳ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

جواب‌های سه دستگاه معادلات، در سه ستون فرم پلکانی تجویل یافته داده شده است. آنها عبارتند از:

$$x_۱=۱,\quad x_۲=-۱,\quad x_۳=۲$$

$$x_۱=۰,\quad x_۲=۳,\quad x_۳=۱$$

$$x_۱=-۲,\quad x_۲=۱,\quad x_۳=۲$$

در این بخش بحث خود را به دستگاه‌های n معادله‌ی خطی n مجهول، که یک جواب منحصربفرد دارند محدود می‌کنیم. در بخش بعدی روش حذفی گاوس ـ جردن را به منظور راه دادن به دیگر دستگاه‌هایی که دارای یک جواب منحصربفردند توسعه خواهیم داد. همچنین با این کار دستگاه‌هایی که دارای جواب‌های بسیار یا بدون جواب هستند نیز مشمول این روش خواهند شد.

تمرین

۱) اندازهٔ ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۴\\ ۰ & -۳ & ۲\\ ۴ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ -۱ & ۴ & ۹\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۹\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}-۴\\ ۳\\ -۵\end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۵ & ۹ & ۶\\ ۰ & ۱ & -۱ & -۷ & ۴\\ ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰\end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix}۴ & -۳ & ۵ & ۷\end{bmatrix}$

۲) درایه‌هایی که در مکان $(۱,۲)$، $(۲,۲)$، $(۳,۳)$، $(۱,۵)$، $(۲,۴)$ و $(۳,۲)$ در ماتریس زیر قرار دارند را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix}-۳ & ۵ & ۶ & ۰ & ۳\\ ۱ & ۹ & -۱ & ۰ & -۵\\ ۴ & -۷ & ۰ & -۴ & ۹\end{bmatrix}$$

۳) عناصر $(۲,۳)$، $(۳,۲)$، $(۱,۴)$، $(۳,۱)$، $(۴,۴)$ و $(۱,۳)$ از ماتریس زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۵ & ۰ & ۶ \\ -۱ & ۴ & ۱ & -۷ \\ ۰ & ۳ & ۲ & ۸ \\ ۹ & ۰ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس همانی $I_۴$ را بنویسید.

۵) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

الف)

$$\begin{aligned} -۳x_۱ + ۴x_۲ &= ۷ \\ -۲x_۱ - ۵x_۲ &= -۲ \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} ۶x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ &= ۲ \\ -x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ &= ۵ \\ ۳x_۱ - x_۲ + ۶x_۳ &= ۴ \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} ۲x_۱ - ۴x_۲ + ۳x_۳ &= -۱ \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ - ۳x_۳ &= ۵ \\ ۶x_۱ + x_۲ \qquad &= -۷ \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} -x_۱ + x_۲ &= ۳ \\ ۳x_۱ + ۸x_۲ &= ۵ \\ ۲x_۱ - ۳x_۲ &= -۱ \end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 4 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 \qquad - 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

و)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 2 \\ x_2 \quad &= -1 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

۶) ماتریس‌های زیر را به عنوان ماتریس‌های افزوده‌ی دستگاه‌های معادلاتی درنظر بگیرید. هر یک از دستگاه‌های معادلات متناظر را بنویسید:

الف) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 9 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

۷) در تمرین‌های زیر یک ماتریس به همراه یک عمل سطری مقدماتی داده شده است. ماتریس حاصل را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{3})R_1}{\approx}$

ب) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \\ 5 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_1 \longleftrightarrow R_2}{\approx}$

ج)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+R1 \\ R3+(-2)R1}}{\approx}$$

د)
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-4)R3 \\ R2+3R3}}{\approx}$$

۸) هر یک از اعمال سطری زیر را به عنوان مرحله‌ای برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته در نظر بگیرید. به چه دلیل اعمالی که به آن اشاره شده، انتخاب شده است؟ چه اهداف خاصی برحسب دستگاه‌های معادلات خطی که توسط این ماتریس‌ها توصیف می‌شود، انجام گرفته است؟

الف)
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+2R1 \\ R3+(-4)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 13 & 15 \\ 0 & 16 & -15 & -14 \end{bmatrix}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{3})R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

ج)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix} \underset{R2 \longleftrightarrow R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

ج)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-2)R2 \\ R3+3R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$

۹) هر یک از اعمال سطری زیر را به عنوان مرحله‌ای برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته‌ی یک ماتریس درنظر بگیرید. چرا این اعمال انتخاب شده‌اند؟

الف)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-2)R3 \\ R2+R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -8 \\ 5 & -7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{R1 \longleftrightarrow R2}{\approx} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{2})R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+2R3 \\ R2+(-3)R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

۱۰) دستگاه‌های معادلات زیر همگی دارای جواب‌های منحصربفرد هستند. این دستگاه‌ها را با به کار بردن روش حذفی گاوس ـ جردن با ماتریس‌ها حل کنید.

الف) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -8 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -11 \end{aligned}$

ب) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$

ج) $\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 3 \\ 2x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

د) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 11 \end{aligned}$

ه) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 36 \\ x_1 - x_2 \quad &= -4 \end{aligned}$

و) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 14 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 19 \\ x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 2 \end{aligned}$

ز) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 19x_4 &= 36 \\ 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 &= 28 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 &= -12 \end{aligned}$

ح) $\begin{aligned} -3x_1 - 6x_2 - 15x_3 &= -3 \\ x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{9}{2}x_3 &= \tfrac{1}{2} \\ -2x_1 - \tfrac{7}{2}x_2 - \tfrac{17}{2}x_3 &= -2 \end{aligned}$

۱۱) در تمرین‌های زیر هر یک از دستگاه‌های معادلات خطی با جواب‌های منحصربفرد، دارای ماتریس‌های

ضرایب یکسان می‌باشند. دستگاه‌ها را روش حذفی گاوس ـ جردن بر یک ماتریس افزوده بزگ که هر یک از دستگاه‌ها را توصیف می‌کند، حل کنید.

الف) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 5x_2 &= b_2 \end{aligned}$ ، برای $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$

ب) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= b_2 \end{aligned}$ ، برای $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

ج) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= b_3 \end{aligned}$ ، برای $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\5\\14\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-3\\-8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\9\end{bmatrix}$

د) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$ ، برای $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\-4\\18\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\-4\end{bmatrix}$

۱-۲ روش حذفی گاوس ـ جردن

در بخش قبل روش حذفی **گاوس ـ جردن** را برای حل دستگاه‌های n معادله در n مجهول که دارای یک جواب منحصربفرد بودند، به کار بردیم. اکنون این روش را در حالت کلی‌تری به کار می‌گیریم. در این حالت تعداد معادلات می‌توانند متفاوت با تعداد متغیرها باشند و تعداد جواب‌ها نیز می‌توانند منحصربفرد، زیاد، یا هیچ باشند. دوباره روشی را که در پیش می‌گیریم چنین خواهد بود که از ماتریس افزوده‌ی دستگاه داده شده شروع می‌کنیم و با انجام یک سری اعمال سطری مقدماتی که تبدیل به ماتریس ساده‌تر (فرم پلکانی تحویل یافته) خواهد شد، مستقیماً به جواب خواهیم رسید.

اکنون تعریف کلی فرم پلکانی تحویل یافته را می‌آوریم. خواننده ملاحظه خواهد کرد که فرم‌های پلکانی تحویل یافته که در بخش قبل موردبحث قرارگرفت همگی با این تعریف مطابقت دارند.

۱-۲-۱ تعریف. یک ماتریس به فرم **پلکانی تحویل یافته** است هرگاه:

۱) هر سطری که کاملاً شامل صفر است در پایین ماتریس قرار گیرد.

۲) اولین عنصر ناصفر هر سطر دیگر برابر ۱ باشد. (این عنصر یک **پیشرو ۱** نامیده می‌شود.)

۳) پیشرو ۱ هر سطر، در سمت راست پیشرو ۱ سطر قبلی قرار گیرد.

۴) تمام درایه‌های دیگر در ستونی که شامل پیشرو ۱ است، صفرند.

مثال. ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال. ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته نیستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

اولین عنصر ناصفر در سطر ۲ برابر نیست.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

سطری که متشکل از صفر است در پایین ماتریس نیست

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عنصر ناصفر بالای پیشرو ۱ در سطر ۲

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

پیشرو ۱ در سطر ۳ سمت راست پیشرو ۱ در سطر ۲ نیست.

معمولاً بسیاری از سری عملیات سطری که می‌توانند برای تبدیل یک ماتریس داده شده به فرم پلکانی تحویل یافته به کار گرفته شوند، همگی به یک فرم پلکانی تحویل یافته یکسان منتج می‌گردند. به همین دلیل، می‌گوئیم که فرم پلکانی تحویل یافته یک ماتریس منحصربفرد است. روش حذفی گاوس ـ جردن یک راه اصولی مهم (که یک الگوریتم نامیده می‌شود) برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته است. این کار قابل برنامه‌ریزی روی یک رایانه است. اکنون این روش را خلاصه کرده، سپس مثال‌هایی از اجرای آن می‌آوریم.

۱-۳ روش حذفی گاوس ـ جردن

۱) ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات خطی را بنویسید.

۲) با به کار بردن عملیات سطری مقدماتی فرم پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس افزوده را به دست آورید. این کار با ایجاد کردن پیشروهای ۱ و سپس صفر در بالا و پایین هر پیشرو ۱، ستون به ستون با شروع از اولین ستون قابل انجام است.

۳) دستگاه معادلات متناظر با فرم پلکانی تحویل یافته را بنویسید. این دستگاه جواب را می‌دهد.

بر اهمیت ماهر شدن بر این الگوریتم تاکید می‌کنیم، نه تنها به دست آوردن جواب صحیح مهم است بلکه روش بدست آوردن جواب نیز مهم است. برای مثال، برکارایی این الگوریتم (تعداد جمع‌ها و ضرب‌های به کار رفته) و مقایسه‌ی آن با دیگر الگوریتم‌ها که می‌توانند برای حل دستگاه‌های معادلات خطی به کارگرفته شوند، علاقه‌مند خواهیم بود.

مثال. روش حذفی گاوس ـ جردن را برای یافتن فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر به کار برید.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & -۳ & ۹ & ۱۲ \\ ۴ & ۴ & -۲ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

حل. **مرحله ۱.** اگر لازم است، سطرها را عوض کنید تا یک درایه‌ی ناصفر در بالای اولین ستون ناصفر به دست آید. این عنصر ناصفر **پاشنه** نامیده می‌شود.

$$\underset{R۱ \longrightarrow R۲}{\approx} \quad \begin{bmatrix} \boxed{۳} & ۳ & -۳ & ۹ & ۱۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۲ \\ ۴ & ۴ & -۲ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

مرحله ۲. یک ۱ در مکان پاشنه با ضرب سطر پاشنه در $\frac{۱}{\text{پاشنه}}$ ایجاد کنید.

$$\underset{(\frac{۱}{۳})R۱}{\approx} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۲ \\ ۴ & ۴ & -۲ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

مرحله ۳. در جاهای دیگر ستون پاشنه با جمع مضرب مناسبی از سطر پاشنه به سطرهای دیگر ماتریس صفر ایجاد کنید.

$$\underset{R۳ + (-۴)R۱}{\approx} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

مرحله ۴. سطر پاشنه و تمام سطرهای بالای آن را بپوشانید. مراحل ۱ و ۲ را برای زیرماتریس‌های باقیمانده تکرار کنید. مرحله‌ی ۳ را برای کل ماتریس تکرار کنید. تا جایی که به فرم پلکانی تحویل یافته برسید کار را

تکرار کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_{\text{اولین ستون ناصفر زیرماتریس}}$$

$$\underset{(\frac{1}{2})R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+R2 \\ R3+(-2)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+(-2)R3 \\ R2+R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

این ماتریس فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس داده شده است.

اکنون چگونگی به کارگیری این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات متنوع شرح می‌دهیم. مثال زیر چگونگی حل یک دستگاه معادلات خطی که دارای تعداد زیادی جواب است را نشان می‌دهد. ابتدا فرم پلکانی تحویل یافته به دست می‌آید. سپس لازم است که فرم پلکانی تحویل‌یافته را برای بیان روشنی از تعداد زیاد جواب تفسیر کنیم.

مثال. دستگاه معادلات زیر را، در صورت امکان، حل کنید.

$$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و الگوریتم گاوس ـ جردن را پی می‌گیریم. دور پاشنه‌ها و پیشروهای ۱ دایره کشیده شده‌اند.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{3})R1}{\approx} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+(-3)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+R2 \\ R3+2R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 + \quad 3x_3 = 4$$
$$x_2 + 2x_3 = 1$$

مقادیر بسیاری برای x_1، x_2 و x_3 وجود دارند که در این معادلات صدق کنند. این دستگاهی از معادلات است که جواب‌های بسیاری دارد. x_1 را **متغیر پیشرو** معادله‌ای اول می‌نامیم و x_2 متغیر پیشرو معادلهٔ دوم می‌باشد. برای بیان این جواب‌های بسیار، متغیرهای پیشرو در هر معادله را برحسب متغیرهای باقیمانده می‌نویسیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x_1 = -3x_3 + 4$$
$$x_2 = -2x_3 + 1$$

فرض می‌کنیم x_3 مقدار دلخواه r باشد. **جواب عمومی** دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = -3r + 4, \quad x_2 = -2r + 1, \quad x_3 = r$$

باتغییر r در مجموعه‌ی اعداد حقیقی جواب‌های بسیاری به دست می‌آید. r را یک **پارامتر** می‌نامیم. با دادن مقادیر مختلف به r جواب‌های مشخصی به دست می‌آید. برای مثال:

به‌ازای $r = 1$ داریم $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ ،

به‌ازای $r = 2$ داریم $x_1 = 10, x_2 = 5, x_3 = -2$.

مثال ۳. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$2x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 10x_4 = 58$$
$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -14$$
$$2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 44$$

حل. با ماتریس افزوده شروع می‌کنیم. داریم:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & 12 & -10 & 58 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\ 2 & -4 & 9 & -6 & 44 \end{bmatrix}
\underset{(\frac{1}{2})R1}{\approx}
\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 6 & -5 & 29 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\ 2 & -4 & 9 & -6 & 44 \end{bmatrix} \\
\underset{\substack{R2+R1 \\ R3+(-2)R1}}{\approx}
&\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -14 \end{bmatrix}
\underset{(\frac{1}{3})R2}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -14 \end{bmatrix} \\
\underset{\substack{R1+(-6)R2 \\ R3+(3)R2}}{\approx}
&\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\underset{\substack{R1+(-1)R3 \\ R2+R3}}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 \qquad &= -2 \\
x_3 \quad &= 6 \\
x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

تعداد جواب‌ها بسیار زیاد است. بار دیگر، متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقیمانده می‌نویسیم. داریم

$$x_1 = 2x_2 - 2, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 1$$

x_2 را مقدار دلخواه r می‌گیریم. جواب عمومی عبارت است از:

$$x_1 = 2r - 2, \quad x_2 = r, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 1$$

جواب‌ها را می‌توانید با دادن مقادیر مختلف به r به دست آورید.

مثال ۴. مثال زیر لزوم تعویض سطرها را در مرحله‌ای، نشان می‌دهد. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 \\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

با به کار بردن الگوریتم گاوس ـ جردن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+R1}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R2 \longleftrightarrow R3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{2})R2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R1+(-3)R2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+5R3 \\ R2+(-2)R3}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 3 \\ x_4 \quad &= -1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقیمانده به دست می‌آوریم:

$$x_1 = -2x_2 + x_3 + 3, \qquad x_4 = -1, \qquad x_5 = 2$$

مقادیر دلخواه r و s را به ترتیب برای x_2 و x_3 درنظر می‌گیریم. جواب کلی عبارت است از

$$x_1 = -2r + s + 3, \qquad x_2 = r, \qquad x_3 = r, \qquad x_4 = -1, \qquad x_5 = 2$$

مثال ۵. در این مثال دستگاهی را ملاحظه خواهید کرد که هیچ جوابی ندارد. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

حل. با ماتریس افزوده شروع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+(-1)R1}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R2 \longleftrightarrow R3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\frac{1}{3})R2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+R2 \\ R4+(-2)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+(-1)R3 \\ R2+R3 \\ R4+(-4)R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\frac{1}{13})R4}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

این ماتریس هنوز به شکل پلکانی تحویل یافته در نیامده است؛ هنوز می‌بایست صفرهایی را در بالای ۱ در سطر آخر ایجاد نمائیم. به هر حال، در چنین وضعیتی، زمانی که آخرین سطر ناصفر یک ماتریس به فرم $(0 \ 0 \ \ldots \ 0 \ 1)$ می‌باشد، دیگر نیازی به ادامه‌ی روند نیست. دستگاه جواب ندارد. زیرا اگر معادلهٔ متناظر با سطر آخر ماتریس را بنویسیم خواهیم داشت:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

این معادله به ازای هیچ یک از مقادیر x_1، x_2 و x_3 برقرار نمی‌باشد. بنابراین دستگاه معادلات جواب ندارد.

۱-۴ دستگاه‌های همگن معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی را **همگن** نامیم هرگاه تمامی جملات ثابت صفر باشند. دستگاه زیر یک دستگاه معادلات خطی همگن است.

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$$

ملاحظه نمائید که $x_1 = 0$، $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$ یک جواب از این دستگاه است. واضح است که چنین نتیجه‌ای را می‌توان به صورت زیر به هر دستگاه معادلات همگن تعمیم داد.

۱-۴-۱ قضیه. یک دستگاه معادلات خطی همگن n متغیره همواره دارای جواب $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ می‌باشد. این جواب را **جواب بدیهی** می‌نامند.

حال فرض کنیم دستگاه بالا دارای جواب‌های دیگری باشد. دستگاه بالا را به روش حذفی گاوس ـ جردان حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{R2+2R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\underset{R1+(-2)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

از این ماتریس پلکانی تحویل یافته، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$x_1 + \quad 3x_3 = 0$$
$$x_2 - 4x_3 = 0$$

متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقیمانده بیان می‌کنیم. داریم:

$$x_1 = -3x_3$$
$$x_2 = 4x_3$$

فرض کنیم $x_3 = r$، در این صورت ملاحظه می‌شود که دستگاه دارای جواب‌های بسیار است،

$$x_1 = -3r, \quad x_2 = 4r, \quad x_3 = r$$

ملاحظه می‌کنیم که جواب $x_۱ = ۰$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = ۰$ با قرار دادن $r = ۰$ به دست می‌آید.

ماتریس افزوده‌ی هر دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهای آن از تعداد معادلات بیشتر است، دارای فرم پلکانی تحویل یافته‌ای خواهد شد که در آن تعداد ستون‌ها از سطرهایش و ستون آخر صفر است. دستگاه معادلات متناظر، و در نتیجه دستگاه اول موردنظر، دارای جواب‌های بسیاری خواهد بود، که یکی از آنها جواب بدیهی می‌باشد. این مطالب را در قضیه‌ی زیر بیان می‌نمائیم.

۱-۴-۲ قضیه. یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش بیشتر از معادلات است، دارای تعداد بسیاری جواب است.

در این بخش، بحث‌مان را راجع به حل دستگاه‌های معادلات خطی به روش حذفی گاوس ـ جردن کامل کرده‌ایم. روش حذفی معروف دیگری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی وجود دارد که به آن روش **گاوسی** می‌گویند. این روش را در بخش ۹ـ۱ معرفی می‌کنیم و این دو روش را در آنجا مقایسه خواهیم کرد.

۱-۵ مجموعه‌ی تمرین‌ها

۱) مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است. اگر ماتریسی به این فرم نیست، دلیل آن را بیاورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۷ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۹ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۹ \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

ط) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است. اگر ماتریسی به این

فرم نیست، دلیل آن را بیاورید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

ح) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ط) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) هر یک از ماتریس‌های زیر فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی است. جواب را (در صورت وجود) برای هر یک از دستگاه معادلات به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

۴) هر یک از ماتریس‌های زیر فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی است. جواب را (در صورت وجود) برای هر یک از دستگاه معادلات به دست آورید:

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۵ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & ۳ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۵ & ۰ & ۴ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۹ & -۳ \end{bmatrix}$

۵) هر یک از دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی زیر را (در صورت امکان) با به کار بردن روش حذفی گاوس ـ جردن حل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ &= ۱ \\ ۲x_۱ + ۸x_۲ + ۱۱x_۳ &= ۷ \\ x_۱ + ۶x_۲ + ۷x_۳ &= ۳ \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ &= ۱۵ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۹x_۳ &= ۳۳ \\ x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳ &= ۲۰ \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۷ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ &= ۱۸ \\ -x_۱ + x_۲ - ۳x_۳ &= ۱ \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ &= ۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ &= ۰ \\ ۲x_۱ + ۶x_۲ \qquad &= ۳ \end{aligned}$$

(هـ)
$$x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۳$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7\\
3x_1 - 5x_2 - x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

(و)

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 24\\
2x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 17\\
-x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -11
\end{aligned}
$$

۶) هر یک از دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی زیر را (در صورت امکان) با به کار بردن روش حذفی گاوس ـ جردن حل کنید.

(الف)

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 6\\
-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -1\\
3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

(ب)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 11\\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 18
\end{aligned}
$$

(ج)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3\\
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6\\
3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

(د)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8\\
3x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 26\\
2x_1 + 6x_3 &= 11
\end{aligned}
$$

(ه)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 13 \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(و)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 14 \\ x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

۷) هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با به کار بردن روش حذفی گاوس- جردن (در صورت امکان) حل نمائید.

(الف)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 10 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 14x_3 &= 38 \\ -3x_1 + 7x_2 + 15x_3 &= -37 \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(د)

$$x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 4x_4 = 0$$

$$-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

(و)

$$x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$
$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

۸) هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با به کار بردن روش حذفی گاوس ـ جردن (در صورت امکان) حل نمائید.

(الف)

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -9$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -7$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

(ب)

$$x_2 + 2x_3 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -18$$
$$-x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$
$$2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = -46$$

(ج)

$$2x_1 - 4x_2 + 16x_3 - 14x_4 = 10$$
$$-x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 19x_4 = -2$$

$$x_۱ - ۳x_۲ + ۱۱x_۳ - ۱۱x_۴ = ۴$$
$$۳x_۱ - ۴x_۲ + ۱۸x_۳ - ۱۴x_۴ = ۱۷$$

(د)
$$\begin{aligned} x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ \qquad &= ۷ \\ ۲x_۱ - ۲x_۲ + ۲x_۳ - ۴x_۴ &= ۱۲ \\ -x_۱ + x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ &= -۴ \\ -۳x_۱ + x_۲ - ۸x_۳ - ۱۰x_۴ &= -۲۹ \end{aligned}$$

(ه)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۶x_۲ - x_۳ - ۴x_۴ &= ۰ \\ -۲x_۱ - ۱۲x_۲ + ۵x_۳ + ۱۷x_۴ &= ۰ \\ ۳x_۱ + ۱۸x_۲ - x_۳ - ۶x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

(یک دستگاه همگن)

(و)
$$\begin{aligned} ۴x_۱ + ۸x_۲ - ۱۲x_۳ &= ۲۸ \\ -x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ &= -۷ \\ -۳x_۱ - ۶x_۲ + ۹x_۳ &= -۲۱ \\ x_۱ + ۲x_۲ &= ۱ \end{aligned}$$

(ز)
$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ &= ۲ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ &= ۳ \\ x_۱ + ۳x_۲ &= ۰ \\ x_۱ + ۲x_۲ &= ۱ \end{aligned}$$

۹) در هر یک از موارد زیر مثال‌هایی بسازید.

الف) یک دستگاه معادلات خطی با تعداد متغیرهای بیشتر از تعداد معادلات که دارای هیچ جوابی نباشد.

ب) یک دستگاه معادلات خطی با تعداد معادلات بیشتر از تعداد متغیرها که دارای جواب منحصربفرد باشد.

۱۰) فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس‌های دستگاه‌های دو معادله دو مجهولی و انواع جواب‌هایی که وجود دارد را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد. (• نمایانگر عناصری است که ممکن است ناصفر باشند).

$$\begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix}$$

جواب‌های بسیار   بدون جواب   جواب منحصربفرد

به طور مشابه، فرم‌های پلکانی تحویل یافتهٔ ماتریس‌ها و انواع جواب‌هایی که وجود دارد را برای موارد زیر دسته‌بندی کنید.

الف) دستگاه‌های سه معادله دو مجهولی

ب دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی

۱۱) شرایطی را روی a، b، c و d برای ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مشخص نمائید به طوری که این ماتریس دارای فرم پلکانی تحویل یافته به صورت زیر باشد:

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۲) دستگاه معادلات خطی همگن زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

الف) اگر $x = x_0$، $y = y_0$ یک جواب باشد، نشان دهید $x = kx_0$، $y = ky_0$ برای هر مقدار ثابت k نیز یک جواب است.

ب) اگر $x = x_0$، $y = y_0$ و $x = x_1$، $y = y_1$ دو جواب باشند، نشان دهید $x = x_0 + x_1$ ، $y = y_0 + y_1$ نیز یک جواب می‌باشد.

۱۳) نشان دهید $x = 0$، $y = 0$ یک جواب برای دستگاه همگن از معادلات خطی

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

است. ثابت کنید این جواب تنها جواب است اگر و تنها اگر $ad - bc \neq 0$.

۱۴) دو دستگاه معادلات خطی با ماتریس‌های افزوده‌ی $[A : B_1]$ و $[A : B_2]$ را درنظر بگیرید که در آن ماتریس ضرایب هر دو دستگاه، ماتریس یکسان 3×3، A می‌باشد.

الف) آیا امکان دارد که $[A : B_1]$ یک جواب منحصربفرد داشته باشد و $[A : B_2]$ دارای جواب‌های بسیار باشد؟

ب) آیا امکان دارد که $[A : B_1]$ یک جواب منحصربفرد داشته باشد و $[A : B_2]$ دارای هیچ جوابی نباشد؟

ج) آیا امکان دارد که $[A : B_1]$ دارای جواب‌های بسیاری باشد و $[A : B_2]$ هیچ جوابی نداشته باشد؟

۱۵) دستگاه‌های زیر از معادلات خطی را با به کار بردن روش حذفی گاوس ـ جردن روی یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ که نمایانگر دو دستگاه با یک ماتریس ضرایب یکسان‌اند، حل کنید.

الف)

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = b_1$$

$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = b_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 16x_3 = b_3$$

برای $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ به‌ازای $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$، به ترتیب.

ب)

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2$$

$$۲x_۱ + ۳x_۲ + ۶x_۳ = b_۳$$

برای $\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{bmatrix}$ به‌ازای $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۵ \\ ۱۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$، به ترتیب.

۱۶) یک ماتریس ۳ × ۳ به طور تصادفی بنویسید. فرم پلکانی تحویل‌یافته‌ی آن را پیدا کنید. فرم پلکانی تحویل‌یافته احتمالاً ماتریس همانی $I_۳$ است! این را توضیح دهید. [راهنمایی: به هندسه فکر کنید].

۱۷) اگر یک ماتریس ۴ × ۳ را به طور تصادفی بنویسید، چه نوع فرم پلکانی تحویل یافته‌ای را احتمال می‌دهید که به دست آید و چرا؟

۱۸) رایانه‌ها تنها تعداد متناهی از ارقام را می‌توانند حمل کنند. این محدودیت، زمانی که انتهای اعداد کوتاه می‌شود، موجب خطایی به نام خطاهای گرد کردن[1] می‌شود. به خاطر این اتفاق، رایانه‌ها می‌توانند نتایج نادرستی را بدهند. بسیاری از تحقیقات برای توسعه‌ی الگوریتم‌هایی است که چنین خطاهای گرد کردن را به حداقل خود برساند. (خوانندگانی که علاقه‌مند به چنین الگوریتم‌هایی هستند، می‌بایست بخش ۹ـ۲ را مطالعه نمایند). یک رایانه برای مشخص کردن فرم پلکانی تحویل‌یافته‌ی یک ماتریس افزوده از یک دستگاه معادلات خطی به کار گرفته شده است. کدام یک از موارد زیر احتمال دارد رخ دهد؟

الف) رایانه یک جواب برای دستگاه ارائه می‌دهد در حالی که جوابی موجود نیست.

ب) رایانه می‌گوید جوابی وجود ندارد در حالی که یک جواب وجود دارد.

۱-۶ Curve Fitting، شبکه‌های الکتریکی، و جریان ترافیک

دستگاه‌های معادلات خطی در چنین زمینه‌های متنوعی از قبیل مهندسی الکترونیک، علم اقتصاد، و تحلیل ترافیک استفاده می‌شوند. اکنون کاربردهایی از آن را در چند زمینه مورد بحث قرار خواهیم داد.

Curve Fittingمساله‌ی زیر در شاخه‌های مختلفی از علوم رخ می‌دهد. مجموعه‌ای از نقاط به صورت داده‌ها به صورت زیر مفروض است.

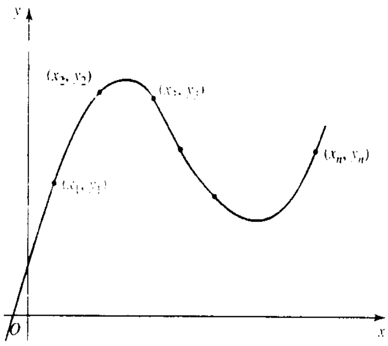
$$(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), \ldots, (x_n, y_n)$$

1) round-off

می‌بایست چندجمله‌ای بیابیم که نمودارش از این نقاط عبور کند. مؤلفه‌های x، **نقاط پایه** نامیده می‌شوند. می‌توان نشان داد که اگر نقاط پایه همه دوبه‌دو مجزا باشند، آنگاه یک چندجمله‌ای منحصربفرد از درجه‌ی $n-۱$ (یا کمتر)

$$y = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_{n-۲}x^{n-۲} + a_{n-۱}x^{n-۱}$$

به این نقاط قابل تطبیق است. شکل ۱ـ۵ را ببینید.



شکل ۱ـ۵

ضرایب $a_۰$، $a_۱$، ...، $a_{n-۲}$ و $a_{n-۱}$ که در چندجمله‌ای ظاهر شده‌اند با جایگذاری نقاط در معادله‌ی چندجمله‌ای و سپس حل یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آیند. (غالباً چندجمله‌ای را برحسب توانهای صعودی x می‌نویسیم تا این ضرایب به دست آیند. ستون‌های ماتریس ضرایب دستگاه معادلات یک الگوریتم خاص را تبعیت می‌کنند که در این باره بعداً بحث خواهیم کرد). اکنون روند کار را با یافتن یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲، یک سهمی، برای مجموعه‌ای از سه نقطه داده شده نشان خواهیم داد.

مثال ۱. معادله چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ را چنان تعیین کنید که نمودارش از نقاط $(۱, ۶)$، $(۲, ۳)$ و $(۳, ۲)$ بگذرد.

حل. ملاحظه می‌کنیم که در این مثال سه نقطه داده شده و می‌خواهیم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ (یکی کمتر از تعداد نقاط داده شده) بیابیم. فرض کنیم چندجمله‌ای

$$y = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲$$

باشد. به ما سه نقطه داده شده و از این سه نقطه برای تعیین مجهولات a_0، a_1 و a_2 استفاده خواهیم کرد. با جایگذاری

$$x_1 = 1,\ y = 6; \quad x = 2,\ y = 3; \quad x = 3,\ y = 2$$

به ترتیب در چندجمله‌ای، دستگاه سه معادله با سه مجهول a_0، a_1 و a_2 زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 6 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 &= 2 \end{aligned}$$

این دستگاه را به روش حذفی گاوس ـ جردن برحسب a_0، a_1 و a_2 حل می‌کنیم.

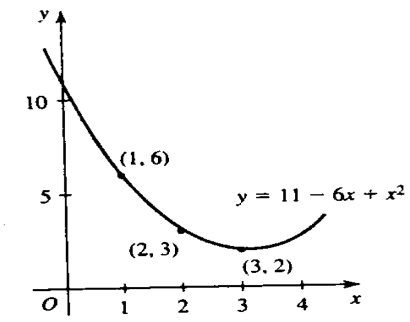
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2 + (-1)R1 \\ R3 + (-1)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1 + (-1)R2 \\ R3 + (-2)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\frac{1}{2})R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1 + 2R3 \\ R2 + (-3)R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

از آنجا $a_0 = 11$، $a_1 = -6$، $a_2 = 1$ به دست می‌آید. سهمی که از این نقاط می‌گذرد عبارت است از $y = 11 - 6x + x^2$. (شکل ۱ـ۶) را ببینید.



شکل ۱ـ۶

۱-۷ تحلیل شبکه الکتریکی

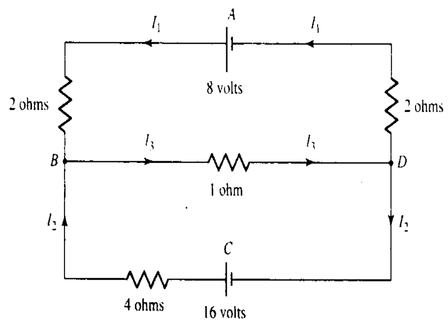
دستگاه‌های معادلات خطی برای مشخص کردن شدت جریان‌هایی که از انشعابات شبکه‌های الکتریکی می‌گذرد استفاده می‌شود. دو قانون زیر، که براساس تحقیقات به عمل آمده در آزمایشگاه حاصل شده، ما را به معادلات رهنمود می‌کنند.

قوانین کیرشهف

۱) **اتصالات.** تمام جریانات که به یک اتصال وارد می‌شوند می‌بایست از آن بگذرند.

۲) **مسیرها.** مجموع عبارات IR (I نمایانگر جریان، R نمایانگر مقاومت) در هر جهت در اطراف یک مسیر بسته مساوی با ولتاژکل در مسیر در آن جهت است.

مثال ۲. شبکه الکتریکی شکل ۱ـ۷ را درنظر بگیرید. شدت جریاناتی را که از هر شاخه از این شبکه می‌گذرد را تعیین می‌کنیم.



شکل ۱ـ۷

حل. باتری‌ها (که با || نشان داده شده‌اند) ۸ ولت و ۱۶ ولت می‌باشند. قرارداد زیر در مهندسی برق به کار می‌رود.

|| مقدار مقاومت‌ها (که با ⇝ نشان داده می‌شود) که یکی ۱ـ اهم، یکی ۴ـاهم و دو تا ۲ـ اهم هستند. جریان ورودی به هر باتری برابر خروجی آن است.

فرض کنیم جریان‌ها در انشعابات مختلف در مدار بالا I_1، I_2 و I_3 باشند. قوانین کیرشهف به اتصالات و مسیرهای بسته اشاره می‌کنند. در این مدار دو اتصال به نام‌های نقاط B و D وجود دارند. سه مسیر بسته به نام‌های $ABDA$، $CBDA$ و $ABCDA$ وجود دارند. قوانین را برای اتصالات و مسیرها به کار می‌گیریم.

اتصالات

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad :B \text{ اتصال}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad :D \text{ اتصال}$$

این دو معادله در یک معادله خطی منفرد صدق می‌کنند.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

مسیرها

$$2I_1 + 1I_3 + 2I_1 = 8 : \quad ABDA_{\text{مسیر}}$$

$$4I_2 + 1I_3 = 16 : \quad CBDC_{\text{مسیر}}$$

نیازی به مسیر $ABCDA$ نمی‌باشد. یک دستگاه از سه معادله خطی و سه مجهول I_1، I_2 و I_3 خواهیم داشت. در واقع مسیر $ABCDA$ به یک معادله که ترکیبی از دو معادله‌ی آخر است می‌انجامد.

مساله به حل دستگاه زیر از سه معادله و سه مجهول تحویل می‌یابد:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 4I_1 \qquad + I_3 &= 8 \\ 4I_2 + I_3 &= 16 \end{aligned}$$

این روش را با به کار بردن حذفی روش گاوس ـ جردن، به دست می‌آوریم:

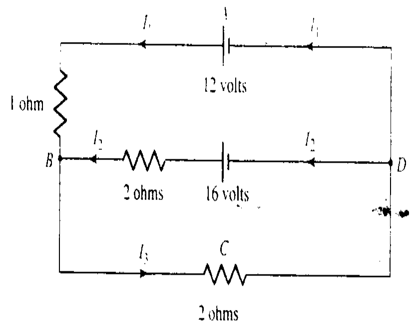
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \underset{R2+(-4)R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(-\frac{1}{4})R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-1)R2 \\ R3+(-4)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\frac{1}{6})R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1-\frac{1}{4}R3 \\ R2+\frac{5}{4}R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

شدت جریان‌ها عبارت‌اند از $I_1 = 1$، $I_2 = 3$ و $I_3 = 4$، که واحد آن آمپر است. جواب‌ها همان طور که از قبل انتظار داشتیم، منحصربفردند.

مثال ۳. شدت جریان‌هایی که از انشعابات مختلف شبکه‌ی الکتریکی در شکل ۱ـ۸ می‌گذرد را تعیین کنید.



شکل ۱ـ۸

حل.

اتصالات

$$\text{اتصال}B \quad : I_1 + I_2 = I_3$$

$$\text{اتصال}D \quad : I_3 = I_1 + I_2$$

از آنجا داریم: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

مسیرها

$$\text{مسیر} \quad ABCDA: \quad 1I_1 + 2I_3 = 12$$

$$\text{مسیر} \quad ABDA: \quad 1I_1 + 2(-I_2) = 12 + (-16)$$

ملاحظه می‌کنیم که جهت $ABDA$ به دور مسیر آخر را انتخاب کرده‌ایم. شدت جریان در طول انشعاب BD در این جهت برابر $-I_2$ و با ولتاژ -16 می‌باشد. اکنون سه معادله با سه مجهول I_1، I_2 و I_3 داریم:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 \qquad + 2I_3 &= 0 \\ I_1 - 2I_2 \qquad &= -4 \end{aligned}$$

با حل این معادلات، به دست می‌آوریم $I_1 = 2$، $I_2 = 3$ و $I_3 = 5$ اهم.

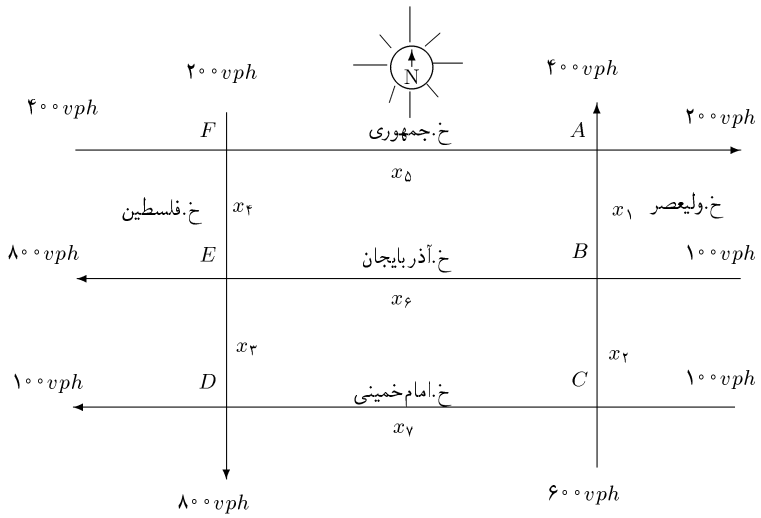
در عمل، شبکه‌های الکتریکی با مقاومت‌ها و مدارهای جریان زیادی سروکار دارند؛ تعیین شدت جریان گذرا از انشعابات به حل دستگاه‌های معادلات بزرگی بتوسط رایانه برمی‌گردد.

۱-۸ جریان ترافیک

همان طور که در مباحث گذشته اشاره شد، تحلیل شبکه نقش مهمی در مهندسی برق ایفا می‌کند. در سال‌های اخیر، مفاهیم و ابزارهای تحلیل شبکه در زمینه‌های زیاد دیگری مفید واقع شده است، از قبیل نظریه اطلاعات و مطالعه‌ی دستگاه‌های حمل و نقل. تحلیل زیر از جریان ترافیک از یک شبکه جاده‌ای

در زمان نقطه اوج خود، چگونگی کارایی دستگاه‌های معادلات خطی با جواب‌های بسیار زیاد را در عمل نشان می‌دهد.

در شکل ۱ـ۹ یک شبکه جاده‌ای نمونه‌ای نشان داده شده است. این ناحیه‌ای در مرکز شهر تهران، می‌باشد. خیابانها همه یک طرفه و با پیکان‌هایی که جهت حرکت ترافیک را نشان می‌دهند، می‌باشند. جریان ترافیک در داخل و خارج شبکه برحسب وسایل نقلیه در هر ساعت (vph) اندازه‌گیری می‌شوند. اشکالی که در زیر نشان داده شده است، براساس اوج نقطه ترافیک در وسط هفته، ۷ صبح تا ۹ صبح و ۴ بعدازظهر تا ۶ بعدازظهر داده شده است. یک افزایش ۲ درصدی در جریان کل برای جریان ترافیک بعدازظهر جمعه را می‌بایست پذیرفت. یک مدل ریاضی که بتوان برای تحلیل این شبکه به کار برد را می‌سازیم.



شکل ۱ـ۹: مرکز شهر تهران

فرض می‌کنیم جریانات ترافیکی در طول شاخه‌های مختلف $x_1, \ldots, x_7$ مطابق با شکل ۱ـ۹ باشد. فرض کنیم قانون ترافیکی زیر اعمال گردد.

تمامی ورودی ترافیکی به یک اتصال می‌بایست از آن اتصال خارج شوند. دستگاه معادلات خطی زیر را خواهیم داشت:

اتصال A: ورود ترافیک $= 400 + 200$. خروج ترافیک $= x_1 + x_5$.

بنابراین $x_1 + x_5 = 600$.

اتصال B: ورود ترافیک $= x_1 + x_6$. خروج ترافیک $= x_2 + 100$.

بنابراین $x_1 + x_6 = x_2 + 100$.

با ادامه، برای هر اتصال و نوشتن معادلات منتج به فرم مناسب به صورت متغیرها در سمت چپ و ثابت‌ها در سمت راست، دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{array}{lrrrrrrrl}
\text{اتصال } A & x_1 & & & & +x_5 & & & = 600 \\
\text{اتصال } B & x_1 & -x_2 & & & & +x_6 & & = 100 \\
\text{اتصال } C & & x_2 & & & & & -x_7 & = 500 \\
\text{اتصال } D & & & -x_3 & & & & +x_7 & = 200 \\
\text{اتصال } E & & & -x_3 & +x_4 & & +x_6 & & = 800 \\
\text{اتصال } F & & & & x_4 & +x_5 & & & = 600
\end{array}$$

روش حذفی گاوس ـ جردن برای حل این دستگاه معادلات به کار گرفته می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که ماتریس افزوده حاوی تعداد زیادی صفر است. این صفرها در حد زیادی مقدار محاسبات را تقلیل می‌دهند. فرم پلکانی تحویل یافته را ارائه می‌دهیم و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن را به صورت تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. در عمل، شبکه‌ها بسیار بزرگتر از آن چیزی است که در اینجا نمایش داده‌ایم، و دستگاه‌های معادلات خطی نیز خیلی بزرگتر از آن است که آن‌ها را توصیف کرده‌ایم. چنین دستگاه‌هایی توسط رایانه‌ها حل می‌شوند. به هر حال ماتریس‌های افزوده کلیه‌ی چنین دستگاه‌هایی شامل تعداد زیادی صفر می‌باشند. بسیاری از تحقیقات به سمت پیشرفته‌تر کردن الگوریتم‌های کارآمد برای حل چنین دستگاه‌های معادلات پراکنده به طور اثربخشی پیش می‌رود. ماتریس افزوده و فرم پلکانی تحویل یافته دستگاه فوق به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 600 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 800 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 600
\end{bmatrix} \approx \dots \approx$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 600 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -200 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات متناظر با این فرم پلکانی تحویل یافته عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad +x_6 - x_7 &= 600 \\ x_2 \quad\quad\quad\quad - x_7 &= 500 \\ x_3 \quad\quad\quad - x_7 &= -200 \\ x_4 + x_6 - x_7 &= 600 \\ x_5 - x_6 + x_7 &= 0 \end{aligned}$$

با بیان هر متغیر پیشرو برحسب متغیرهای باقی مانده، به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_6 + x_7 + 600 \\ x_2 &= \quad\ \ x_7 + 500 \\ x_3 &= \quad\ \ x_7 - 200 \\ x_4 &= -x_6 + x_7 + 600 \\ x_5 &= x_6 - x_7 \end{aligned}$$

همان طورکه انتظار می‌رفت، دستگاه معادلات دارای تعداد زیادی جواب است. تعداد زیادی جریان ترافیکی ممکن، وجود دارد.

اکنون این مدل ریاضی را برای رسیدن به اطلاعات به کار می‌بریم. فرض کنید که می‌خواهیم در طول خیابان امام خمینی بین ولیعصر و خیابان فلسطین اجرا نمائیم. حالت مطلوب، حالتی است که تا حد امکان جریان ترافیکی کمی در طول این خیابان داشته باشیم. جریان‌ها در طول انشعابات مختلف به وسیله‌ی چراغ‌های راهنمایی در اتصالات قابل کنترل می‌باشند. می‌نیمم جریان ممکن در طول خیابان امام خمینی که موجب ازدحام ترافیکی نمی‌شود، چیست؟ جریان‌ها در طول دیگر انشعابات وقتی که به انتها می‌رسند، چیست؟ این مدل ما را قادر به پاسخ به این سئوالات می‌کند.

می‌نیمم کردن جریان در طول خیابان امام خمینی متناظر با می‌نیمم کردن x_7 می‌باشد. از آنجا که تمام جریان‌های ترافیکی می‌بایست بزرگتر یا مساوی صفر باشند، معادله‌ی سوم ایجاب می‌کند که می‌نیمم مقدار x_7 برابر ۲۰۰ باشد، زیرا در غیر این صورت x_3 منفی می‌شود. (یک جریان منفی به عنوان حرکت ترافیکی در جهت خلاف جهتی که روی خیابان یک طرفه مشخص شده، توجیه می‌شود). بنابراین در دوره‌ی زمانی اوج ترافیک، در انشعاب CD، می‌بایست حداقل به ۲۰۰ ماشین در هر ساعت اجازه‌ی حرکت داده شود.

اکنون اجازه دهید جریان‌های دیگر انشعابات را در حالتی که در طول خیابان امام خمینی می‌نیمم جریان را داریم، آزمایش کنیم. از $x_7 = 200$ خواهیم دات:

$$x_1 = -x_6 + 800$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 700 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= -x_6 + 800 \\ x_5 &= x_6 - 200 \end{aligned}$$

چون $x_7 = 200$ داریم $x_3 = 0$ و برعکس، می‌بینیم که می‌نیمم جریان در انشعاب x_7 را می‌توان با قرار دادن $x_3 = 0$، یعنی با بستن DE به روی ترافیک، به دست آورد.

مجموعه تمرینات

در تمرینات ۱ الی ۵، معادلات چندجمله‌ای درجه‌ی دو را به گونه‌ای تعیین کنید که نمودارشان از نقاط داده شده عبور کنند.

۱) $(1, 2), (2, 2), (3, 4)$.

۲) $(1, 14), (2, 22), (3, 32)$.

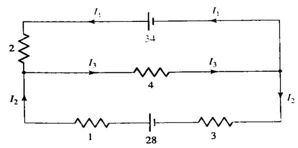
۳) $(1, 5), (2, 7), (3, 9)$.

۴) $(1, 8), (3, 26), (5, 60)$. مقدار y به‌ازای $x = 2$ چیست؟

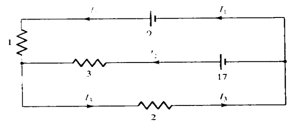
۵) $(-1, 1), (0, 1), (1, -3)$. مقدار y به‌ازای $x = 3$ چیست؟

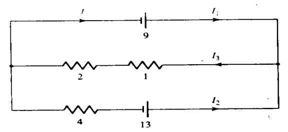
۶) معادله چندجمله‌ای درجه‌ی سه را چنان بیابید که نمودارش از نقاط $(1, -3), (2, -1), (3, 9), (4, 33)$ بگذرد.

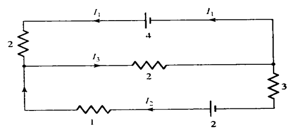
در تمرینات ۷ الی ۱۴ شدت جریانات در انشعابات مختلف شبکه‌های الکتریکی را تعیین کنید. واحد شدت جریان، آمپر و واحد مقاومت‌ها اهم می‌باشد. (راهنمایی: در تمرین ۱۴ یافتن جهت شدت جریان در طول AB مشکل است. یک حدس بزنید. نتیجه‌ی منفی برای شدت جریان به مفهوم این است که حدستان غلط بوده است و جهت عکس جهتی است که گرفته بوده‌اید. به هر حال مقدار به دست آمده صحیح است و نیازی به حل دوبارهٔ مسأله نمی‌باشد).



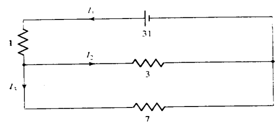
۷)

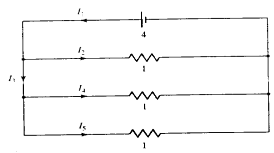


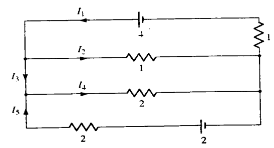


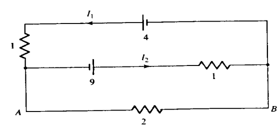


۸)









۹)

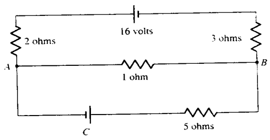
۱۰) شدت جریاناتی را که از شاخه‌های مختلف شبکه الکتریکی شکل ۱ـ۱۰ می‌گذرد را تعیین کنید.

الف) زمانی که باتری C، ۹۰ ولت است.

ب) زمانی که باتری C، ۲۳ ولت است.

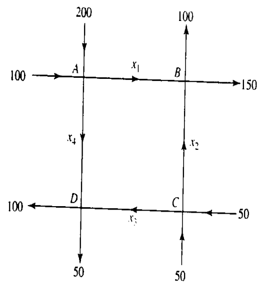
توجه کنید که چگونه شدت جریانی که از انشعاب AB می‌گذرد در (الف) عکس می‌شود. ولتاژ C

برای زمانی که هیچ جریانی از AB نمی‌گذرد، چه خواهد بود؟



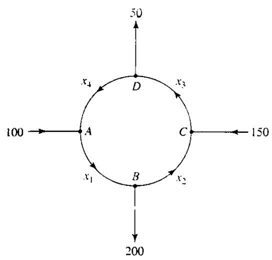
شکل ۱ـ۱۰

۱۱) مدل ریاضی بسازید که جریان ترافیک در شبکه جاده‌ای شکل ۱ـ۱۱ را توصیف کند. تمام خیابان‌ها در جهتی که نشان داده شده است یک طرفه می‌باشند. واحدها برحسب وسائط نقلیه در هر ساعت می‌باشند. دو جریان ترافیکی ممکن مجزا را بدهید. کمترین جریان ممکن که در طول شاخه‌ی AB انتظار می‌رود چیست؟



شکل ۱ـ۱۱

۱۲) شکل ۱ـ۱۲ نمایانگر یک ترافیک وارده و خارج شده از یک چهار راه میدانی می‌باشد. چنین اتصالاتی در ایران زیاد است. یک مدل ریاضی بسازید که جریان ترافیکی در طول اتصالات مختلف را توصیف کند. می‌نیمم جریان ممکن در طول انشعاب BC، به طور نظری، چیست؟ آیا این جریان در عمل قابل درک است؟



شکل ۱ـ۱۲

۱۳) چندجمله‌ای‌های درجه دو بسیاری وجود دارند که از نقاط (۱, ۲) و (۳, ۴) می‌گذرند. این وضعیت را می‌توان به وسیله‌ی یک دستگاه دو معادله خطی برحسب سه متغیر که جواب‌های بسیاری دارد، توصیف کرد. معادله‌ای (پارامتری) پیدا کنید که این خانواده از چندجمله‌ای‌ها را نمایش دهد.

۱۴) چندجمله‌ای‌های درجه‌ی سه بسیاری وجود دارند که از نقاط (۱, ۲)، (۳, ۴) و (۴, ۸) می‌گذرند. این وضعیت را می‌توان به وسیله‌ی یک دستگاه سه معادله خطی برحسب چهار متغیر که جواب‌های بسیار دارد، توصیف کرد. معادله‌ای (پارامتری) پیدا کنید که این خانواده از چندجمله‌ای‌ها را نمایش دهد. چندجمله‌ای منحصربفرد از درجهٔ ۳ که ضریب $x^۳$ در آن برابر ۱ و از این نقاط می‌گذرد را تعیین کنید.

تمرین‌های دوره‌ای فصل اول

۱) اندازه‌ی ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ \\ ۱ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۶ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۸ & ۵ & ۳ & -۷ & ۵ & ۹ \\ -۲ & ۳ & ۵ & ۷ & ۰ & ۲ \\ ۴ & -۳ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۸ & -۱ & ۵ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$

۲) درایه‌هایی که در مکان (۱, ۳)، (۲, ۱)، (۳, ۳)، (۲, ۵) و (۳, ۶) در ماتریس زیر قرار دارد را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ & ۷ & ۸ & ۴ \\ ۶ & ۷ & ۴ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

۳) ماتریس همانی $I_۵$ را بنویسید.

۴) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

الف)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -1 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= -3 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 5 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 &= -2 \\ x_1 + 5x_2 \qquad\quad - 6x_4 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

۵) ماتریس‌های زیر را به صورت ماتریس‌های افزوده‌ی دستگاه‌های معادلات تفسیر کنید. هر یک از دستگاه معادلات را بنویسید:

الف) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

۶) مشخص کنید که آیا ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته هستند یا خیر؟ اگر ماتریسی به فرم پلکانی تحویل یافته نیست، دلیل آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

۷) دستگاه‌های معادلات زیر دارای جواب منحصربفردند. این دستگاه‌ها را به کمک روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.

الف)

$$2x_1 + 4x_2 = 2$$
$$3x_1 + 7x_2 = 2$$

ب)

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -17$$
$$2x_1 - 6x_2 - 16x_3 = -46$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$$

ج)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 21 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 &= 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 &= -9 \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad - 6x_4 &= -4 \end{aligned}$$

۸) دستگاه‌های معادلات زیر را (در صورت امکان) با کمک روش حذفی گاوس ـ جردن حل کنید.

الف)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

ب)

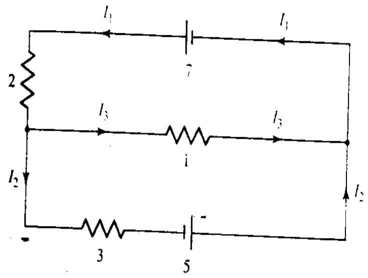
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= -7 \\ -2x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -10 \end{aligned}$$

۹) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ به فرم پلکانی تحویل یافته باشد. نشان دهید اگر $A \neq I_n$ باشد، آنگاه A دارای یک سطر متشکل از صفر است.

۱۰) فرض کنید A و B ماتریس‌های هم‌ارز سطری باشند. نشان دهید A و B دارای فرم پلکانی تحویل یافته‌ی یکسان هستند.

۱۱) معادله‌ی چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ی را که از نقاط $(1,3)$، $(2,6)$ و $(3,13)$ بگذرد مشخص نمائید.

۱۲) جریاناتی که از انشعابات شبکه‌ی زیر می‌گذرد را تعیین کنید.



شکل ۱ـ۱۳

هدف‌های رفتاری فصل دو

دانشجو پس از پایان این فصل باید بتواند:

- اعمال بر ماتریس‌ها را مرورکرده و ویژگی‌های آن را تشریح کند.
- در محاسبات با ضرب ماتریس‌ها، با استفاده از ویژگی شرکت‌پذیری تشخیص دهد که در محاسبه حاصلضرب‌های

$$((AB)C)D$$
$$A(BC)D$$
$$(AB)(CD)$$
$$A(B(CD))$$

کدامیک به تعداد عملیات کمتری نیاز دارد.

- مفهوم و تعریف ماتریس متقارن را توضیح دهد.
- ویژگی‌های ترانهاده را توضیح دهد.
- مفهوم ماتریس و ویژگی‌های آن را توضیح داده و از عهده استدلال و برهان آن برآید.
- مفهوم مزدوج و مزدوج ترانهاده را درک کرده و ویژگی‌های آن را بیان کند.
- طریقه پیدا کردن وارون یک ماتریس را توضیح داده و این طریقه را در محاسبات عملی پیاده کند. همچنین وارون را در رمزنگاری به کار گیرد.
- با استفاده از روش حذف گاوس ـ جردن وارون یک ماتریس را محاسبه کند.
- ماتریس متشکل از داده‌های ورودی و خروجی را شناخته و در مدل‌های اقتصادی از آن استفاده کند.
- ماتریس‌های استوشاستیک[1] را شناخته و نقش آن‌ها در پدیده‌ها و فرآیندهای تصادفی را دریابد.
- مفهوم دیگراف را توضیح داده و ماتریس وابسته آن را تعریف کند.
- ماتریس فاصله را تعریف کند و مدل ارتباطی را در ارتباط با روابط گروهی در جامعه شناسی توضیح دهد.
- از عهده حل تمرین‌ها و مسائل پایان فصل به راحتی برآید.

1) Stochastic

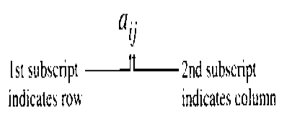
فصل دوم

ماتریس‌ها

در این فصل نظریه‌ی مربوط به ماتریس‌ها را توسعه می‌دهیم و چگونگی دید این مفاهیم را که در توسعه کاربردهایی از باستان‌شناسی تا اقتصاد استفاده می‌شوند، می‌بینیم. برای مثال ما قوانینی را ارائه می‌دهیم که در رابطه با جمع و ضرب ماتریس‌ها می‌باشند و خواهیم فهمید که چگونه این عملیات برای مشخص نمودن ترتیب رویدادهای مصنوعی در علم باستان‌شناسی و وابستگی در صنایع مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۱ جمع، ضرب عددی، و ضرب ماتریس‌ها

برای کارکردن با ماتریس‌ها یک نمادگذاری مناسب توسعه یافته است. محل یک درایه در ماتریس با ارائهٔ سطر و ستونی که در آن ماتریس قرار دارد مشخص می‌شود. درایه موجود در سطر i، ستون jام در ماتریس A با a_{ij} نمایش داده می‌شود.



دومین زیرنوشت شماره ستون را نشان می‌دهد اولین زیرنوشت شماره سطر را نشان می‌دهد. ما به a_{ij} به عنوان (i, j) امین درایه ماتریس A اشاره می‌کنیم. می‌توانیم ماتریس دلخواه $m \times n$، A را مانند شکل ۲ـ۱ نشان دهیم. اگر تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس A برابر باشند آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.

درایه‌های ماتریس مربعی A که در آن زیرنوشت‌ها مساوی می‌باشند، یعنی درایه‌های a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} قطر اصلی ماتریس می‌باشد. (شکل ۲ـ۲ را ببینید).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A مربعی $m \times n$

شکل ۲ـ۱

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A مربعی $n \times n$

شکل ۲ـ۲

مثال ۱) درایه‌های a_{22}، a_{12} و a_{31} را برای ماتریس زیر تعیین کنید. قطر اصلی ماتریس A را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: چون a_{12} درایه‌ای از سطر ۱ و ستون ۲ است $a_{12} = -2$. می‌بینیم که $a_{23} = 4$ و $a_{31} = 2$. قطر اصلی A شامل درایه‌های $a_{33} = 5$، $a_{22} = -3$ و $a_{11} = 1$ می‌باشد.

برای توسعه نظریهٔ جبری ماتریس‌ها، با تعاریفی مفهومی از تساوی ماتریس‌ها شروع می‌کنیم.

۲-۱-۱ تعریف: دو ماتریس را برابر گویند در صورتی که درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم برابر و دارای سطر و ستون مساوی باشند. بنابراین $A = B$ در صورتی که $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

این تعریف ما را قادر می‌سازد تا معادلاتی را که شامل ماتریس‌ها می‌شوند معرفی کنیم و هم‌چنین به ما این اجازه را می‌دهد که عمل جمع ماتریس‌ها را تعریف کنیم.

جمع ماتریس‌ها

۲-۱-۲ تعریف: فرض کنیم A و B ماتریس‌هایی با اندازهٔ مساوی باشند. جمع این دو ماتریس یعنی $(A+B)$ از طریق جمع درایه‌های نظیربه‌نظیر آنها به دست می‌آید. ماتریس $A+B$ نیز هم‌اندازه ماتریس‌های A و B می‌باشد. اگر A و B از اندازه‌ای مساوی برخوردار نباشند، نمی‌توانند با یکدیگر جمع شوند و می‌گوئیم عمل جمع امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین اگر $C=A+B$، آنگاه $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

مثال ۲) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۶ \\ -۳ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۵ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$. حاصل $A+B$ و $A+C$ را در صورت وجود بیابید.

حل: ماتریس‌های A و B هر دو ۲×۳ می‌باشند. لذا از اندازه‌های مساوی برخوردار هستند. پس جمع آنها موجود و یک ماتریس ۲×۳ می‌باشد. با جمع نظیربه‌نظیر درایه‌ها به دست می‌آوریم:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۶ \\ -۳ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱+۲ & ۴+۵ & ۷-۶ \\ ۰-۳ & -۲+۱ & ۳+۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۹ & ۱ \\ -۳ & -۱ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس A ماتریسی است ۲×۳ در حالی که ماتریس C، ۲×۲ می‌باشد. لذا A و C از اندازه‌های مساوی برخوردار نمی‌باشند. بنابراین $A+C$ امکان‌پذیر نمی‌باشد.

ضرب اسکالر (عددی) ماتریس‌ها

هنگام کار با ماتریس‌ها، به طور معمول به جای اعداد از اسکالرها نام برده می‌شود. از حروف بزرگ برای نمایش دادن ماتریس‌ها و از حروف کوچک برای نشان دادن اسکالرها استفاده می‌کنیم. قدم بعدی در توسعهٔ نظریهٔ ماتریس‌ها معرفی کردن قانونی برای اسکالرها در ماتریس‌ها می‌باشد.

۲-۱-۳ تعریف: فرض کنید A یک ماتریس و c یک اسکالر باشد. ضرب اسکالر c در A به صورت cA نمایش داده می‌شود. که ماتریسی است از ضرب هر مؤلفه A در اسکالر c به دست می‌آید، ماتریس cA هم‌اندازه ماتریس A می‌باشد. بنابراین اگر $B=cA$، آنگاه $b_{ij}=ca_{ij}$.

مثال ۳) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ ۷ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$. $۳A$ را تعیین کنید؟

حل: هر مؤلفهٔ A را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 21 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنید که A و $3A$ هر دو ماتریس‌هایی 2×3 هستند.

۲-۲ قرینه‌سازی و تفریق

ماتریس $-C$ را به صورت $(-1)C$ تعریف می‌کنیم. قرینه‌سازی ماتریس، یعنی این که هر مؤلفه از ماتریس را در -1 ضرب کنیم. بنابراین اگر $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ آنگاه $-C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

۲-۲-۱ تعریف: اکنون تفریق ماتریس‌ها را با روشی که آن را سازگار با جمع، ضرب اسکالر و قرینه‌سازی می‌نماید، بیان می‌کنیم:

$$A - B = A + (-1)B$$

این تعریف بر این نکته دلالت دارد که عمل تفریق بین ماتریس‌هایی با اندازهٔ برابر توسط تفریق مؤلفه‌های نظیربه‌نظیر انجام می‌پذیرد. بنابراین اگر $C = A - B$، آنگاه $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. می‌خواهیم $A - B$ را معین کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 3-2 & 0-8 & -2-(-1) \\ 3-0 & 6-4 & -5-6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ضرب ماتریس‌ها

قوانین جمع ماتریس‌ها و ضرب ماتریس‌ها با اسکالرها را معرفی کردیم. اکنون یک نگاه اجمالی به متداولترین ضرب ماتریس‌ها خواهیم انداخت. ضرب دو ماتریس A و B مانند ضرب مؤلفه‌های نظیربه‌نظیر A و B به نظر می‌رسد. اما این راه مفیدترین راه برای ضرب ماتریس‌ها نمی‌باشد.

ریاضی‌دانان قانون دیگری را معرفی می‌کنند که شامل ضرب سطرهای اولین ماتریس A در ستون‌های دومین ماتریس B در یک سیستم می‌باشد. ما این قانون را با وارد کردن یک عضو دلخواه از ماتریس به عنوان ماتریس حاصلضرب AB بیان می‌کنیم.

۲-۲-۲ تعریف: فرض کنیم تعداد ستون‌ها در ماتریس A مساوی با تعداد سطرها در ماتریس B باشد در این صورت حاصلضرب AB موجود می‌باشد. و مؤلفه موجود در سطر iام و ستون jام AB با ضرب مؤلفه‌های نظیربه‌نظیر سطر iام از A و ستون jام از B و جمع حاصل به دست می‌آید.

اگر تعداد ستون‌ها در A با تعداد سطرها در B برابر نباشد. می‌گوئیم عمل ضرب وجود ندارد. فرض کنیم A، n ستون و B، n سطر دارد. سطر iام از A $[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$ است و ستون jام از B، $\begin{bmatrix} b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ است. بنابراین اگر $C = AB$ آنگاه $c_{ij} = a_{11}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

مثال ۴) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ و $C = [6 \quad -2 \quad 5]$. AB، BA و AC را تعیین کنید اگر ضرب‌ها موجود باشند؟

حل: A دارای ۲ ستون و B دارای ۲ سطر است. بنابراین AB وجود دارد. A را برحسب سطرهای آن و B را برحسب ستون‌ها آن تعبیر می‌کنیم و سطرها را در ستون‌ها مطابق سیستم زیر ضرب می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اولین سطر A در هر ستون از B ضرب می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

سطر دوم از A در هر ستون از B ضرب می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1 \times 5) + (3 \times 3) & (1 \times 0) + (3 \times (-2)) & (1 \times 1) + (3 \times 6) \\ (2 \times 5) + (0 \times 3) & (2 \times 0) + (0 \times (-2)) & (2 \times 1) + (0 \times 6) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 & -6 & 2 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌خواهیم تا به حاصلضرب‌های باقیمانده یعنی BA و AC نگاهی بیندازیم. ماتریس B دارای ۳ ستون می‌باشد در حالی که A دارای ۲ سطر است بنابراین BA وجود ندارد. ماتریس A دارای ۲ ستون می‌باشد در حالی که ماتریس C یک سطر دارد. لذا AC نیز وجود ندارد.

مشاهده می‌شود که در مثال قبل AB وجود دارد اما BA وجود ندارد. ترتیب ضرب در ۲ ماتریس اهمیت به‌سزایی دارد. برخلاف ضرب اعداد حقیقی، ضرب در ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد. در حالت کلی برای ۲ ماتریس AB داریم $AB \neq BA$. بعضی اوقات AB و BA هر دو موجود هستند. اما در حالت کلی برابر نیستند.

مثال ۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$، AB را تعیین کنید.

حل: چون A دارای ۲ ستون و B دارای ۲ سطر است AB وجود دارد. ضرب سطرهای A در ستون‌ها B در یک حالت مناسب به شرح زیر است:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

اولین سطر از A در هر ستون از B ضرب می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

دومین سطر از A در هر ستون از B ضرب می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۷ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

سومین سطر از A در هر ستون از B ضرب می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -۲+۳ & ۰+۵ \\ -۷+۰ & ۰+۰ \\ ۳-۶ & ۰-۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۷ & ۰ \\ -۳ & -۱۰ \end{bmatrix}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ما می‌توانیم هر مؤلفه دلخواه در ضرب دو ماتریس را بدون محاسبه کردن کل ضرب تخمین بزنیم.

مثال ۶) $C = AB$ را برای ماتریس‌های A و B که در زیر آمده‌اند درنظر بگیرید. مؤلفه $c_{۲۳}$ از C را تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -۷ & ۳ & ۲ \\ ۵ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل: $c_{۲۳}$ مؤلفه موجود در سطر ۲ و ستون ۳ از ماتریس C می‌باشد. این ضرب، ضرب سطر ۲ از A و ستون ۳ از B می‌باشد. خواهیم داشت:

$$c_{۲۳} = [-۳ \ ۴] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = (-۳ \times ۲) + (۴ \times ۱) = -۲$$

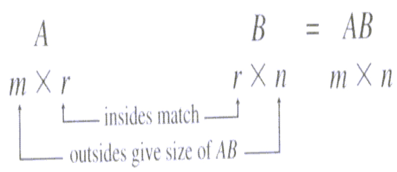
۲-۳ اندازهٔ ماتریس حاصل‌ضرب

اکنون در مورد اندازهٔ ماتریس حاصل‌ضرب بحث می‌کنیم. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد. A دارای r ستون و B دارای r سطر است. بنابراین AB وجود دارد. اولین سطر از AB با ضرب سطر اول از A با هر یک از ستون B به دست می‌آید. بنابراین تعداد ستون‌ها در AB با تعداد ستون‌ها در B برابر می‌باشد. همچنین تعداد سطرها در AB با تعداد سطرها در A برابر می‌باشد. بنابراین ماتریس AB یک ماتریس $m \times n$ است.

اگر A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد آنگاه AB یک ماتریس $m \times n$ می‌باشد.

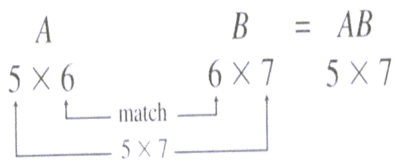
می‌توانیم نتیجهٔ فوق را مانند زیر به تصویر بکشانیم:

$$A \quad B = AB$$



مثال ۷: اگر A یک ماتریس ۶ × ۵ و B یک ماتریس ۷ × ۶ باشد، اندازهٔ ماتریس حاصل‌ضرب AB چقدر است؟

$$A_{۵\times۶}.B_{۶\times۷} = AB_{۵\times۷}$$



۲-۳-۱ تعریف: ماتریس صفر ماتریسی است که تمام مؤلفه‌های آن صفر می‌باشند. ماتریس قطری ماتریسی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند. یک ماتریس همانی، ماتریسی است قطری و اعضای قطر اصلی آن عدد یک است. (شکل ۲ـ۳ را ببینید).

$$O_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر   ماتریس قطری A ماتریس همانی

شکل ۲ـ۳

ماتریس‌های صفر در نظریه‌ی ماتریس‌ها نقش عدد صفر در اعداد حقیقی را ایفا می‌کنند و ماتریس‌های همانی مانند عدد ۱ عمل می‌کنند. این نقشها در قضیهٔ زیر توصیف می‌شوند که به وسیلهٔ یک مثال آن را نشان می‌دهیم.

۲-۳-۲ قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ و O_{mn} یک ماتریس صفر $m \times n$ باشد. فرض کنیم B یک ماتریس مربعی $n \times n$، O_n و I_n به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی $n \times n$ باشند. آنگاه

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$$

$$BO_n = O_nB = O_n$$

$$BI_n = I_nB = B$$

مثال ۸) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$A + O_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A$$

$$BO_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

$$BI_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

و به طور مشابه:

$$O_{23} + A = A \quad \text{و} \quad O_2B = O_2 \quad \text{و} \quad I_2B = B$$

۲-۴ علامت‌گذاری ماتریس و دستگاه معادلات

علامت‌گذاری در ماتریس‌ها برای سهولت در بیان و توصیف دستگاه معادلات خطی دلخواه استفاده می‌شود. ما می‌توانیم دستگاه m معادله خطی n مجهولی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

در این صورت طبق ضرب ماتریس‌ها دستگاه معادلات خطی بالا را به صورت ماتریس زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$AX = B$$

بنابراین، برای مثال از

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۵ \\ ۱ & -۸ & ۴ \\ ۲ & ۶ & -۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۹ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

می‌توان نوشت:

$$۳x_۱ + ۲x_۲ - ۵x_۳ = ۷, \quad x_۱ - ۸x_۲ + ۴x_۳ = ۹, \quad ۲x_۱ + ۶x_۲ - ۷x_۳ = -۲$$

این مدل از نمایش ماتریس برای دستگاه معادلات خطی می‌تواند در قسمت‌های بعدی بسیار مورد استفاده قرار گیرد.

۲-۵ ضرب سریع ماتریس

محاسبات ضربه ماتریس‌های بزرگ در کامپیوترها انجام می‌شود. تحقیقات و مطالعات زیادی روی پیدا کردن و انجام دادن محاسبات ماتریسی به طور سریع درکامپیوتر انجام شده است. در سال ۱۹۶۹ شخصی به نام استراسن یک الگوریتم و روشی برای ضرب سریع دو ماتریس مربعی با اندازه‌های یکسان به دست آورده است. این الگوریتم و روش امروزه درکامپیوترها برای ضرب ماتریس‌های بزرگ استفاده می‌شود. ما ایده‌های استراسن را برای نشان دادن این موضوع مهم از جنبهٔ جبر خطی عددی ارایه می‌دهیم.

تعداد اعمال ریاضی (اعمال ضرب و جمع) را که برای ضرب دو ماتریس ۲ × ۲، A و B مورد نیاز است، درنظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} + a_{۱۲}b_{۲۲} & a_{۱۱}b_{۱۲} + a_{۱۲}b_{۲۲} \\ a_{۲۱}b_{۱۱} + a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۲۱}b_{۱۲} + a_{۲۲}b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ هر درایه از AB شامل دو ضرب عددی (اسکالر) یک عمل جمع است. چون در ماتریس AB چهار درایه وجود دارد لذا تعداد کل اعمال ریاضی که لازم است برای ضرب دو ماتریس ۲ × ۲ انجام پذیرد، هشت عمل ضرب و چهار عمل جمع است.

استراسن روشی را به دست آورد که در آن تعداد کمتری عمل ضرب اما تعداد بیشتری عمل جمع لازم است. تساویهای زیر را درنظر بگیرید:

$$m_۱ = (a_{۱۲} - a_{۲۲})(b_{۲۱} - b_{۲۲})$$

$$m_2 = (a_{11} - a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$m_3 = (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12})$$

$$m_4 = (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$m_5 = (b_{12} - b_{22})a_{11}$$

$$m_6 = (b_{21} - b_{11})a_{22}$$

$$m_7 = (a_{21} + a_{22})b_{11}$$

خواننده می‌تواند مشاهده کند که:

$$AB = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 - m_4 + m_6 & m_4 + m_5 \\ m_6 + m_7 & m_2 - m_3 + m_5 - m_7 \end{bmatrix}$$

می‌توان مشاهده کرد که برای محاسبهٔ AB هفت عمل ضرب عددی و هجده عمل جمع نیاز است. تعداد ضرب‌ها به یک عمل کاهش یافته اما تعداد جمع‌ها به چهارده تا افزایش یافته است. این یک عمل ضرب ذخیره شده در نتیجه فوق‌العاده مهم است. ما اکنون می‌توانیم به خواننده این آموزش را دهیم که این الگوریتم و روش برای ضرب ماتریس‌ها به خصوص ماتریس‌های بزرگ از روش استاندارد بهتر و سریعتر است. فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند که در آن n توانی از ۲ است، A و B را برحسب زیرماتریس‌هایی که در زیر می‌آیند بنویسید.

$$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \qquad B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$$

ضرب AB با روش استاندارد معادل ضرب کردن این ماتریس‌ها می‌باشند، اگر آنها ماتریس‌های ۲ × ۲ باشند که درآیه‌هایشان زیرماتریس‌ها باشند.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} B_{12} \\ B_{21} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

در اینجا ۸ ضرب ماتریس از زیرماتریس‌های شامل شده وجود دارد. به هر حال می‌توانیم این تعداد ضرب را کاهش دهیم، اگر از الگوریتم استراسن به شرح زیر استفاده کنیم.

در الگوریتم استراسن اعداد اسکالر $a_{11} \dots b_{22}$ با ماتریس‌های $A_{11} \dots B_{22}$ جایگزین می‌شوند. در این الگوریتم اینک می‌توان برای محاسبه AB از انجام هفت ضرب ماتریس‌های $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ استفاده کرد. هر

ماتریس $\frac{n}{۲}\times\frac{n}{۲}$ به جای زیرماتریس‌های $\frac{n}{۲}\times\frac{n}{۲}$ می‌نشیند و الگوریتم ادامه می‌یابد تا زمانی که جواب به دست آید.

در هر مرحله یک ضرب ماتریس کم می‌شود. که این کم‌تر شدن تعداد ضرب‌ها با افزایش یافتن تعداد جمع‌ها جبران می‌شود و n را به اندازه کافی بزرگ و مناسب می‌نماید. این روش به طور مکرر و متناوب برای عمل ضرب ماتریس‌های کوچکتر و کوچکتر در صنعت و تکنیک برنامه‌ریزی کامپیوتر ارایه می‌شود که برنامه تکرار نامیده می‌شود (الگوریتم بازگشتی نامیده می‌شود). این روش هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر ماتریس اصلی مربع نباشد با گذاشتن صفر به جای درایه‌ها و توسعه ماتریس به طوری که سطر و ستون آن مربع باشد. در این مرحله ما روشهای استاندارد را گسترش می‌دهیم و از روش استاندارد ضرب ماتریسی استفاده خواهیم کرد. مرجع کار اصلی و کلی استراسن روش حذفی گاوس است.

تمرین‌ها

۱) فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ -۱ & ۷\\ ۹ & -۳\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۴ & ۲\\ ۵ & -۷\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$$

و $D=\begin{bmatrix}۹ & -۵\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$. مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف) $A+B$ ب) $۲B$ ج) $-D$ د) $C+D$

ه) $A+D$ و) $۲A+B$ ز) $a-B$.

۲) فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}۹\\ ۲\\ -۱\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & ۴ & & & \\ ۶ & -۸ & ۲ & -۴ & ۵ & ۹\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۵\\ -۷ & ۹ & ۳\\ ۵ & -۴ & ۰\end{bmatrix}$$

و $D=\begin{bmatrix}-۳\\ ۰\\ ۲\end{bmatrix}$. مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف) $A+B$ ب) $۴B$ ج) $-۳D$ د) $B-۳C$،

ه) $-A$ و) $۳A+۲D$ ز) $A+D$.

۳) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

و $D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۳ \\ ۵ & ۷ & ۲ \end{bmatrix}$. مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف) AB ب) BA ج) AC د) CA

ه) AD و) DC ز) BD ح) $A^۲$. (تذکر: $A^۲ = AA$).

۴) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۵ \\ ۳ & -۷ & ۸ \\ ۲ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

و $D = \begin{bmatrix} ۹ & -۵ \\ ۳ & ۰ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$. مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف) BA ب) AB ج) CB د) CA

ه) DA و) DB ز) AC ح) $B^۲$.

۵) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۰ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۹ \\ ۳ & ۵ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

و $D = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}$. عبارات زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $۲A - ۳(BC)$ ب) AB ج) $AC - BD$ د) $CD - ۲D$

ه) BA و) $AD + ۲(DC)$ ز) $C^۳ - ۲(D^۲)$. (نکته: $C^۳ = CCC$).

۶) فرض کنید A یک ماتریس ۵×۳ و B یک ماتریس ۲×۵ و C یک ماتریس ۴×۳ و D یک ماتریس ۲×۴ و E یک ماتریس ۵×۴ باشند. مشخص کنید کدامیک از عبارت‌های ماتریسی زیر وجود دارند و در صورت وجود اندازهٔ آنها را به دست آورید.

الف) AB ب) EB ج) AC د) $AB + CD$

ج) $۳(EB) + ۴D$ د) $CD - ۲(CE)B$ ه) $۲(EB) + DA$.

۷) فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ و B یک ماتریس ۲×۲ و C یک ماتریس ۲×۳ و E یک ماتریس ۱×۳ باشند. تعیین کنید کدامیک از عبارتهای ماتریسی زیر وجود دارند و در صورت وجود اندازهٔ هر یک از ماتریس‌های نتیجه شده را مشخص کنید.

الف) AB ب) $(A^{۲})C$ ج) $B^{۳} + ۳(CD)$ د) $DC + BA$

ه) $DA - ۲(DB)$ و) $C = ۳D$ ز) $۳(BA)(CD) + (۴A)(BC)D$.

۸) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۸ & ۴ \\ ۵ & -۶ & ۳ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ -۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$. فرض کنید $O_{۳}$ و $I_{۳}$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی باشند نشان دهید:

$$A + O_{۳} = O_{۳} + A = A, \quad BI_{۳} = I_{۳}B = B, \quad BO_{۳} = O_{۳}B = O_{۳}$$

۹) فرض کنید $C = AB$ و $D = BA$ و ماتریس‌های A و B به صورت زیر می‌باشند: $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۵ \\ ۲ & ۶ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۷ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ درایه‌های خواسته شده ماتریس‌های C و D را بدون محاسبهٔ کل ماتریس به دست آورید.

الف) $c_{۳۱}$ ب) $c_{۲۳}$ ج) $d_{۱۲}$ د) $d_{۲۲}$.

۱۰) فرض کنید $R = PQ$ و $S = QR$ که در آنها $P = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۶ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$ درایه‌های زیر را در صورت وجود R و S بدون محاسبهٔ کل ماتریس‌ها، تعیین کنید.

الف) $r_{۲۱}$ ب) $r_{۳۳}$ ج) $s_{۱۱}$ د) $s_{۲۳}$.

۱۱) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۵ \\ ۷ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ درایه‌هایی که در زیر داده شده‌اند را برای $D = AB + ۲C$ بدون محاسبه کامل ماتریس به دست آورید.

الف) $d_{۱۲}$ ب) $d_{۲۳}$

۱۲) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۷ & -۵ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ & ۴ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۱ \\ ۳ & ۸ & ۰ \end{bmatrix}$ درایه‌هایی که در زیر داده شده‌اند را برای $D = C^{۲}(AB)$ بدون محاسبهٔ کامل ماتریس به دست آورید.

الف) $d_{۱۱}$ ب) $d_{۲۱}$ ج) $d_{۳۲}$.

۱۳) هرکدام از دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت یک معادلهٔ ماتریسی منفرد $AX = B$ بنویسید.
الف) $2x_1 - 3x_2 = 4$ و $3x_1 - 8x_2 = -1$
ب) $4x_1 + 7x_2 = -2$ و $-2x_1 + 3x_2 = -4$
ج) $-9x_1 - 3x_2 = 4$ و $6x_1 - 2x_2 = 7$

۱۴) هرکدام از دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت یک معادلهٔ ماتریسی منفرد $AX = B$ بنویسید:
الف) $x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3$ و $4x_1 - 7x_2 + x_3 = -3$ و $-x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 1$
ب) $5x_2 + 2x_3 = 6$ و $4x_1 - 3x_2 = -2$ و $3x_1 + x_3 = 9$
ج) $x_2 - 3x_2 + 6x_3 = 2$ و $7x_1 + 5x_2 + x_3 = -9$
د) $2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4$ و $x_1 + 9x_3 + 5x_4 = 12$

۱۵) ماتریس A را به گونه‌ای درنظر بگیرید که سطر سوم آن همگی صفر هستند و B را ماتریسی درنظر بگیرید که حاصل ضرب AB وجود داشته باشد سپس ثابت کنید که سطر سوم AB همگی صفر می‌باشد.

۱۶) D را ماتریسی درنظر بگیرید که ستون دوم آن همگی صفر باشد، C را ماتریسی فرض کرده که حاصل‌ضرب CD وجود داشته باشد. ثابت کنید که ستون دوم CD همگی صفر هستند.

۱۷) A را یک ماتریس $m \times r$، B را یک ماتریس $r \times n$ و $C = AB$ درنظر بگیرید. زیرماتریس‌های ستونی ماتریس B را $B_1, B_2, \ldots, B_n$ و زیرماتریس‌های ستونی ماتریس C را $C_1, C_2, \ldots, C_n$ فرض نمایید. می‌توانیم B را به شکل $[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ و C را به شکل $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ بنویسیم. ثابت کنید که $C_j = AB_j$.

۱۸) A و B را به صورت ماتریس‌های زیر درنظر بگیرید. از نتیجهٔ تمرین ۱۷ برای محاسبهٔ ستون سوم ماتریس AB، بدون محاسبهٔ کل حاصل‌ضرب استفاده نمائید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۹) ماتریس‌های A و B را به صورت زیر درنظر بگیرید. سطر ۲ ماتریس AB را بدون محاسبهٔ کل

حاصل‌ضرب ماتریس محاسبه نمائید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲۰) با لیست کردن کلیهٔ ضرب‌ها و جمع‌ها نشان دهید که الگوریتم استراسن برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب دو ماتریس ۲×۲ به ۷ ضرب و ۱۸ جمع نیاز دارد.

۲۱) با استفاده از الگوریتم استراسن حاصل‌ضرب AB، ماتریس‌های ۲×۲ زیر را تعیین کنید.

الف) $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

ب) $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

ج) $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$

د) $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$

۲۲) با استفاده از الگوریتم استراسن حاصل‌ضرب AB، ماتریس‌های ۳×۳ زیر را تعیین کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۵ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & -۱ \\ ۲ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۲-۶ ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها

ما اعمال جمع، ضرب اسکالر (عددی یا نرده‌ای) و ضرب ماتریس‌ها را تعریف کرده‌ایم. در این قسمت در مورد ویژگی‌های جبری این عملیات بحث می‌کنیم. تاکنون دیده‌ایم که ماتریس‌ها دارای بعضی خصوصیات جبری اعداد حقیقی می‌باشند «اما همگی این خصوصیات را ندارند». برای مثال دیده‌ایم که ماتریس‌های همانی نقش مشابه به ۱ را در عبارت $AI_n = I_nA = A$ به عهده دارند. (بازی می‌کند). همچنین دیدیم که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارند در حالی که ضرب اعداد حقیقی دارای خاصیت جابجایی است.

۲-۶-۱ قضیه: فرض کنیم A، B و C سه ماتریس و a، b و c اسکالرهای دلخواه باشند. همچنین فرض کنیم اندازهٔ ماتریس‌ها به گونه‌ای باشند که عملیات زیر قابل اجرا باشند:

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب اسکالر

۱) خاصیت جابجایی عمل جمع

$$A+B=B+A$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

۳) در اینجا ۰ ماتریس صفر می‌باشند.

$$A+0=0+A=A$$

۴) خاصیت توزیع‌پذیری جمع

$$c(A+B)=cA+cB$$

۵) خاصیت توزیع‌پذیری جمع

$$(a+b)C=aC+bC$$

۶)

$$(ab)C=a(bC)$$

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱) خاصیت شرکت‌پذیری

$$A(BC)=(AB)C$$

۲) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب

$$A(B+C) = AB + AC$$

۳) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب

$$(A+B)C = AC + BC$$

۴) در اینجا I_n ماتریس واحد مناسب می‌باشد.

$$I_n = I_n A = A$$

نکته: به طور کلی $AB \neq BA$ (ضرب ماتریس‌ها تعویض‌پذیر نمی‌باشد).

هر کدام از این نتایج یک تساوی بین ماتریس‌ها را بیان می‌کند. می‌دانیم که دو ماتریس زمانی با یکدیگر برابر هستند که دارای اندازهٔ مساوی باشند و درایه‌های نظیربه‌نظیر آنها با هم یکی باشند. این روش را برای خاصیت شرکت‌پذیر عمل جمع توضیف می‌کنیم.

از خواننده خواسته می‌شود تا از یک روش یکسان برای اثبات بعضی از نتایج دیگر در تمرین‌هایی که در ادامه می‌یابد استفاده نماید. با توجه به قانون جمع ماتریس $A+B = B+A$ می‌دانیم که $A+B$ و $B+A$ دو ماتریس هم‌اندازه می‌باشند. لذا کافی است نشان دهیم که درایه‌های نظیربه‌نظیر (متناظر) آنها با هم برابرند. درایه (i,j)ام هر ماتریس را در نظر بگیرید:

$$A+B \text{ از } (i,j)\text{ام درایه } = a_{ij} + b_{ij}$$
$$B+A \text{ از } (i,j)\text{ام درایه } = b_{ij} + a_{ij}$$

جمع اعداد حقیقی تعویض‌پذیر هستند. $(a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij})$.

درایه‌های نظیربه‌نظیر $A+B$ و $B+A$ مساوی هستند. بنابراین $A+B = B+A$. خاصیت‌های شرکت‌پذیری جمع و ضرب ماتریس‌ها به ما این فرصت را می‌دهد که ضرب و جمع را به بیش از ۲ ماتریس گسترش دهیم. می‌توانیم حاصل جمع‌ها و حاصل‌ضرب‌هایی نظیر $A+B+C$، ABC بدون پرانتز بنویسیم، زیرا نتایج یکسانی به دست می‌آید و این که چگونه این ماتریس‌ها دسته‌بندی می‌شوند مهم نیست. مثال‌های زیر نشان دهندهٔ این مفهوم‌هاست.

مثال ۱: $A+B+C$ را برای سه ماتریس زیر تعیین نمایید. فرض کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: A، B و C را با اضابه کردن درایه‌های متناظر اضافه می‌کنیم:

$$A+B+C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱+۳+۰ & ۳-۷-۲ \\ -۴+۸+۵ & ۵+۱-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۹ & ۵ \end{bmatrix}$$

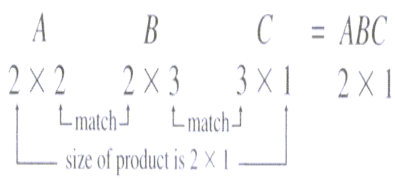
مطمئناً حاصل ضرب‌های ماتریس‌های نظیر $ABCD$ در حالی بوجود می‌آیند که حاصل‌ضرب‌های دیگر ایجاد نخواهد شد. می‌توانیم با استفاده از مقایسه تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس‌های کنار هم قرارگرفته در حاصل‌ضرب تعیین کنیم که آیا یک حاصل‌ضرب وجود دارد یا نه؟

مثال ۲: ABC را برای سه ماتریس داده شده زیر را محاسبه نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حل: قبل از شروع به ضرب ماتریس‌ها باید بررسی کنیم که آیا حاصلضرب ABC موجود می‌باشد. به دست می‌آوریم:

$$ABC = ABC$$



حاصل‌ضرب موجود می‌باشد و یک ماتریس ۱ × ۲ خواهد بود. از آنجا که ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر خواهد بود، ماتریس‌ها در حاصل‌ضرب ABC را می‌توان در هر حالتی برای حاصل‌ضرب طبقه‌بندی کرد. البته مادامی که ترتیب حفظ گردد. به ما اجازه دهید که از دسته‌بندی یا گروه‌بندی $(AB)C$ استفاده نماییم. احتمالاً این روش طبیعی‌ترین روش خواهد بود. اکنون داریم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۹ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

از آنجا که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر می‌باشد، ما در تقسیم‌بندی ماتریس‌ها با یکدیگر یک انتخاب داریم که آن حاصل‌ضرب زنجیری از ماتریس‌هاست. زمانی که ماتریس‌های زیادی در یک عمل ضرب وجود داشته باشند (چند ماتریس در یکدیگر ضرب شوند) توالی انتخاب شده برای ضرب می‌تواند تا حد زیادی بر میزان (ضرب زنجیری ماتریس‌ها) اثر بگذارد. مثال زیر مفاهیم فوق را توضیح می‌دهد.

مثال ۳: ماتریس‌های A، B و C مثال قبل را در یکدیگر ضرب نمایید. از توالی (ترتیب) $A(BC)$ حاصلضرب‌ها استفاده نمایید. تعداد حاصل‌ضرب‌هایی که شامل دو روش $(AB)C$ و $A(BC)$ که از محاسبهٔ ABC به دست می‌آیند را با یکدیگر مقایسه نمایید.

حل: داریم:

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

و

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها، به جوابی مشابه با جواب قبلی رسیدیم. هر چند اگر خواننده از هر دو روش برای مقایسه استفاده نماید، احساس خواهد کرد که روش دوم از روش اول بهتر و سریعتر است. محاسبهٔ این روشها درکامپیوترها انجام می‌پذیرد. زیرا ضرب نسبت به جمع توسط کامپیوتر زمان بیشتری را مصرف می‌کند. تحلیل، آنالیز و کارایی و بازده معمولاً برحسب ضرب‌ها صورت می‌گیرد. اجازه دهید که تعداد ضرب‌هایی که شامل هر دو روش است را بشماریم. با چشمپوشی کردن از جمعها، تعداد عمل ضرب به اندازهٔ ماتریس‌ها بستگی دارد نه به درایه‌های آنها. می‌توان نتیجه‌گیری زیر را نشان داد (تمرین ۸ ملاحظه شود).

اگر A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد، تعداد ضرب‌های اسکالر موجود در محاسبه حاصلضرب AB برابر با mrn می‌باشد. اندازهٔ ماتریس‌های ما عبارتند از:

$$A_{2\times 2}.B_{2\times 3}.C_{3\times 1} = D_{2\times 1}$$

اکنون به دو روش جدا از هم به $(AB)C$ و $A(BC)$ نگاهی می‌اندازیم:

$AB(C)$: محاسبهٔ $(AB)C$ در دو مرحله انجام می‌پذیرد با استفاده از ماتریس میانی F

- فرض کنیم $AB = F$، $FC = D$، F ماتریس 2×3 است.

- تعداد عمل ضرب برای محاسبهٔ F، ۱۲ = ۳ × ۲ × ۲ است.
- تعداد عمل ضرب برای محاسبهٔ D، ۶ = ۱ × ۳ × ۲ است.
- بنابراین تعداد کل ضرب‌ها برای محاسبه $(AB)C$، ۱۸ است.

$A(BC)$: محاسبهٔ $A(BC)$ در دو مرحله انجام می‌پذیرد. $BC = G$ و $AG = D$. G یک ماتریس ۱ × ۲ است.

- تعداد ضرب‌ها برای محاسبهٔ G، ۶ = ۱ × ۳ × ۲ است.
- تعداد ضرب‌ها برای محاسبهٔ D، ۴ = ۱ × ۲ × ۲ است.
- بنابراین تعداد کل ضرب‌ها برای محاسبهٔ $A(BC)$، مقدار ۱۰ است.

مشاهده می‌کنیم که حتی برای این مسئلهٔ کوچک، تعداد ضرب‌های موجود در محاسبه ABC از ۱۸ تا برای استفاده از ترتیب $(AB)C$ تا ۱۰ تا برای استفاده از ترتیب $A(BC)$ تغییر می‌یابد. روش دوم برای ضرب ماتریس‌ها نیز تقریباً دو برابر سریعتر از روش اول می‌باشد. اکنون این ضرب را در ماتریس‌های بزرگتر مشاهده می‌کنیم. فرض کنیم که می‌خواهیم حاصل‌ضرب $ABCD$ را برای ماتریس‌هایی با سایزهای زیر محاسبه کنیم:

$$A_{۵\times ۱۴}.B_{۱۴\times ۸۷}.C_{۸۷\times ۳}.D_{۳\times ۱۲} = E_{۵\times ۴۲}$$

۵ روش متفاوت برای محاسبه این حاصل‌ضرب وجود دارد. تعداد ضرب‌های موردنیاز برای هر روش از قرار زیر می‌باشد:

روش	تعداد ضرب‌ها
$((AB)C)D$	۸,۰۲۵
$(A(BC))D$	۴,۴۹۴
$(AB)(CD)$	۳۵,۳۲۲
$A((BC)D)$	۸,۳۵۸
$A(B(CD))$	۶۵,۰۵۸

مؤثرترین روش ۱۴ بار سریعتر ازکندترین روش می‌باشد. (برای استخراج این اعداد، تمرین‌های زیر را ببینید).

برای ضرب زنجیره‌ای از ماتریس‌ها به مؤثرترین روش، یک الگوریتم به کار رفته است، این الگوریتم از تکنیکی به نام برنامه‌نویسی پویا استفاده می‌نماید. می‌دانیم که در جبر از قوانین حذف استفاده می‌شود:

- اگر $ab = ac$ و $a \neq ۰$ آنگاه $b = c$،

- اگر $pq = ۰$ آنگاه $p = ۰$ یا $q = ۰$.

هرچند نتایج متناظر بالا برای ماتریس‌ها صادق نمی‌باشند، به عبارتی در حالت کلی:

- $AB = AC$ نتیجه نمی‌دهد که $B = C$
- $PQ = ۰$ نتیجه نمی‌دهد که $P = ۰$ یا $Q = ۰$.

این عبارتها را با استفاده از چندین مثال روشن می‌سازیم:
ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$، ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های $C = \begin{bmatrix} -۳ & ۸ \\ ۳ & -۲۴ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $AB = AC = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$ اما $B \neq C$. ماتریس‌های $P = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $PQ = ۰$ اما $P \neq ۰$ و $Q \neq ۰$.

۲-۷ توان ماتریس‌ها

علائم به کار رفته برای توان ماتریس‌ها مشابه علاماتی هستند که برای توان اعداد حقیقی به کار گرفته می‌شوند. اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه A، که k بار (مرتبه) در خودش ضرب می‌شود به صورت A^k نوشته می‌شود:

$$A^k = AA\ldots A \qquad \text{(برابر) مرتبه } k$$

قوانین آشنای توانهای اعداد حقیقی برای ماتریس‌ها نیزکاربرد دارد.

۲-۷-۱ قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و r و s اعداد صحیح غیرمنفی باشند آنگاه (بنابه تعریف):

$$۱)A^rA^s = A^{r+s} \qquad ۲)(A^r)^s = A^{rs} \qquad ۳)A^۰ = I_n$$

قانون اول را بررسی و اثبات می‌کنیم، اثبات قانون دوم و سوم نیز مشابه قانون اول است.

$$A^rA^s = \underbrace{A\ldots A}_{\text{بار } r} \cdot \underbrace{A\ldots A}_{\text{بار } s} = \underbrace{A\ldots A}_{\text{بار } r+S} = A^{r+s}$$

مثال ۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$، A^4 را محاسبه کنید.

حل: این مثال نشان می‌دهد که چطور از قوانین بالا برای کاهش دادن میزان ضرب ماتریس‌ها می‌توان استفاده کرد. می‌دانیم که $A^4 = AAAA$. ما می‌توانستیم ۳ نوع حاصل ضرب برای ماتریس انجام دهیم که به A^4 برسیم. اما ما می‌توانیم از قانون ۲ در بالا برای محاسبهٔ $A^4 = (A^2)^2$ استفاده نمائیم و سپس به این نتیجه می‌رسیم که از دو حاصل ضرب می‌توان استفاده کرد. پس داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال زیر این مطلب را توصیف می‌کند که ویژگی‌های اعمال ماتریسی می‌تواند برای ساده کردن عبارت‌های ماتریسی و به طریق مشابه برای ساده کردن عبارت‌های جبری معمولی مورد استفاده قرار بگیرند.

مثال ۵: عبارت ماتریسی زیر را ساده کنید:

$$A(A + 2B) + 3B(2A - B) - A^2 + 7B^2 - 5AB$$

حل: با استفاده از ویژگی‌های اعمال ماتریس داریم:

$$\begin{aligned} A(A + 2B) + 3B(2A - B) - A^2 + 7B^2 - 5AB &= A^2 + 2AB - 6BA - 3B^2 - A^2 \\ &\quad + 7B^2 - 5AB \\ &= -3AB + 6BA + 4B^2 \end{aligned}$$

دو ساده‌سازی $-3AB + 6BA$، ضرب ماتریسی تعویض‌پذیر نمی‌باشد.

تمرینات

۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

حال در صورت امکان حساب کنید:

الف) AB و BA ب) CA و AC ج) DA و AD

مشاهده می‌کنیم که $AB \neq BA$ زیرا BA وجود ندارد. $AC \neq CA$ و $AD \neq DA$، تمامی حالت‌های ممکن را هنگامی که مرتبه در ضرب ماتریسی وارونه می‌گردد در حال نمایش است.

۲) $A(BC)$ و $(AB)C$ را برای ماتریس‌های زیر حساب کنید:

$$C = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix},$$

مشاهده می‌کنیم که این حاصل‌ضرب‌ها مساوی می‌باشند، خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی در حال نمایش است.

۳) به دو روش مختلف حاصل ضرب ABC را برای سه ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{bmatrix},$$

۴) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ هرکدام از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $AC^۲$

ب) $A^۲ - ۳B$

ج) $BC^۲ + B^۲$

د) $۳A^۲ + ۲A - I_۲$

۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ هرکدام از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $(AB)^۲$

ب) $A - ۳B^۲$

ج) $A^۲B = ۲C^۳$

د) $۲A^۲ - ۲A + ۳I_۲$

۶) اگر اندازهٔ ماتریس‌های A، B و C و D به ترتیب ۲ × ۴، ۶ × ۲، ۴ × ۳ و ۳ × ۶ باشند در این صورت اندازهٔ ماتریس‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) ABC

ب) ABD

ج) CAB

د) $DCAB$

ه) $A^{2}BDC$

۷) اگر اندازهٔ ماتریس‌های P، Q، R، S و T به ترتیب ۲ × ۳، ۱ × ۲، ۳ × ۱، ۱ × ۳ و ۳ × ۳ باشد در این صورت اندازهٔ ماتریس‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) PQR

ب) $PQ + TPQ$

ج) $5QP - 2TPR$

د) $4SPQ + 3PQ$

ه) $QRSR + QR$

۸) اگر A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد، آنگاه تعداد ضرب‌های عددی موجود در محاسبه ضرب AB برابر است با mrn. فرض کنید C یک ماتریس $s \times m$ باشد. فرمولی را برای تعداد ضرب‌های ماتریسی موجود در محاسبه $(AB)C$ و $A(BC)$ به دست آورید.

۹) اگر A و B دو ماتریس هم‌اندازه باشند، تعداد ضرب‌های اسکالر موردنیاز برای محاسبه AB را محاسبه کنید.

الف) $A_{2\times 3}$ و$B_{3\times 7}$

ب) $A_{5\times 2}$ و $B_{2\times 8}$

ج) $A_{1\times 9}$ و $B_{9\times 27}$

د) $A_{8\times 5}$ و $B_{5\times 12}$

۱۰) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. تعداد ضرب‌های اسکالر موردنیاز برای محاسبهٔ A^{2}، A^{3} و A^{m} را محاسبه کنید.

۱۱) تعداد ضرب‌های موردنیاز برای محاسبهٔ ضرب‌های $(AB)C$ و $A(BC)$ زمانی که A ، B و C دارای اندازه‌های زیر باشند را به دست آورید.

الف) $A_{۲\times۴}$ و $B_{۴\times۳}$ و $C_{۳\times۱}$

ب) $A_{۳\times۷}$ و $B_{۷\times۵}$ و $C_{۵\times۲}$

ج) $A_{۶\times۲}$ و $B_{۲\times۵}$ و $C_{۵\times۳\times۵}$

د) $A_{۳\times۵}$ و $B_{۵\times۴۷}$ و $C_{۴۷}$

ه) $A_{۷\times۹۷}$ و $B_{۹۷\times۲}$ و $C_{۲\times۳}$

۱۲) تعداد ضرب‌های موردنیاز برای محاسبهٔ ضرب‌های $((AB)C)D$ و $(A(BC))D$ و $(AB)(CD)$ و $A((BC)D)$ و $(AB(CD))$ زمانی که A، B، C و D دارای اندازه‌های زیر می‌باشند را به دست آورید.

$$A_{۵\times۱۴}, B_{۱۴\times۸۷}, C_{۸۷\times۳}, D_{۳\times۴۲}$$

(مثالی در این بخش داده شده بود).

۱۳) فرض کنید A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشند. فرمولی برای تعداد جمع‌های اسکالر که شامل محاسبهٔ ضرب AB می‌باشد را استخراج کنید. فرض کنید C یک ماتریس $n \times s$ باشد. فرمولی برای تعداد جمع‌های اسکالر که شامل محاسبه $(AB)C$ و $A(BC)$ است را به دست آورید. فرمول‌های خود را برای ماتریس‌های $A_{۲\times۲}$ و $B_{۲\times۳}$ و $C_{۳\times۱}$ امتحان کنید.

جمع، ضرب اسکالر و ضرب ماتریس‌ها

۱۴) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ثابت کنید AB و BA هر دو وجود دارند به شرطی که اگر B یک ماتریس $n \times m$ باشد.

۱۵) ویژگی‌های ماتریسی زیر که در این بخش آمده است بررسی کنید.

الف) خاصیت شرکت‌پذیر جمع ماتریس‌ها $A + (B + C) = (A + B) + C$

ب) خاصیت توزیع‌پذیری $C(A + B) = CA + CB$

ج) اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد $AI_n = I_nA = A$

۱۶) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. نشان دهید که $AI_n = A$.

۱۷) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و O_{mn} یک ماتریس $m \times n$ صفر باشند. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و c یک اسکالر باشد. نشان دهید اگر $cA = O_{mn}$ آنگاه، $c = 0$ یا $A = O_{mn}$.

۱۸) عبارت‌های ماتریسی زیر را ساده کنید.

الف) $A(A - 4B) - 2B(A + B) - A^2 + 7B^2 + 3AB$

ب) $B(2I_n - BA) + B(4I_n + 5A)B - 3BAB + 7B^2A$

ج) $(A - B)(A + B) - (A + B)^2$

۱۹) عبارت‌های ماتریسی زیر را ساده کنید.

الف) $A - (A + B) - B(A + B)$

ب) $A(A - B)B + B2AB - 3A^2$

ج) $(A + B)^3 - 2A^3 - 3ABA - A3B^2 - B^3$

۲۰) تمام ماتریس‌هایی که با ماتریس‌های زیر جابجا می‌شوند را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

۲۱) نادرستی اثبات زیر در چیست؟

فرض کنید $AX = B$ یک دستگاه معادلات خطی با ریشه‌های X_1 و X_2 باشد. بنابراین:

$$AX_1 = B, AX_2 = B \qquad AX_1 = AX_2 \qquad X_1 = X_2$$

توان ماتریس‌ها

۲۲) الف) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ثابت کنید A^2 نیز یک ماتریس $n \times n$ است.

ب) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد $m \neq n$، ثابت کنید A^2 وجود ندارد. بنابراین ما فقط در مورد توان ماتریس‌های مربعی صحبت می‌کنیم.

۲۳) اگر A و B ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های مساوی باشند، ثابت کنید:

$$(A+B)^{۲} \neq A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$$

تحت چه شرایطی این تساوی برقرار است؟

۲۴) اگر A و B ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های مساوی باشند به طوری که $AB = BA$ آنگاه ثابت کنید $(AB)^{۲} = A^{۲}B^{۲}$. مثالی بیاورید که نشان دهد این نتیجه برای همه ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های یکسان درست نمی‌باشد.

۲۵) اگر n عدد صحیح غیرمنفی باشد و A و B ماتریس‌های مربعی با اندازهٔ یکسان باشد به طوری که $AB = BA$ آنگاه ثابت کنید که $(AB)^n = A^nB^n$. با یک مثال نشان دهید که این ویژگی برای همهٔ ماتریس‌های مربعی با اندازهٔ مساوی در حالت کلی صادق نمی‌باشد.

۲۶) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ مربعی باشد. در این صورت نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح مثبت r, s داریم $(A^r)^s = (A^s)^r$.

ماتریس‌های قطری

۲۷) فرض کنید A و B ماتریس‌های قطری با اندازه‌های مساوی و c یک اسکالر باشد.

الف) ثابت کنید $A + B$ قطری است.

ب) cA قطری است.

ج) AB قطری است.

۲۸) اگر A و B ماتریس‌های قطری با اندازه‌های برابر باشند ثابت کنید $AB = BA$.

۲۹) فرض کنید که ماتریس A با ماتریس قطری که دارای دو درایهٔ غیریکسان باشند جابجا شود. در این صورت نشان دهید که ماتریس A یک ماتریس قطری است.

ماتریس‌های خودتوان و پوچ توان

ماتریس مربعی A را خودتوان گوئیم هرگاه $A^{۲} = A.A$ باشد. ماتریس مربعی A را پوچ‌توان گوئیم هرگاه عدد صحیح مثبت p وجود داشته باشد به طوری که $A^p = ۰$، کوچکترین عدد صحیح در $A^p = ۰$ درجهٔ پوچ‌توان ماتریس نامیده می‌شود.

۳۰) تعیین کنید که آیا ماتریس‌های زیر خودتوان هستند؟

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۳۱) b، c و d را چنان بیابید که $\begin{bmatrix} ۱ & b \\ c & d \end{bmatrix}$ خودتوان باشد.

۳۲) a، c و d را چنان بیابید که $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ c & d \end{bmatrix}$ خودتوان باشد.

۳۳) ثابت کنید اگر A و B خودتوان باشند و $AB = BA$ آنگاه AB نیز خودتوان می‌باشد.

۳۴) نشان دهید که اگر A خودتوان باشد و n عدد صحیح مثبت باشد آنگاه $A^n = A$.

۳۵) نشان دهید که ماتریس‌های زیر پوچ‌توان، با درجهٔ پوچ‌توانی ۲ می‌باشند.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -۴ & ۸ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۳ & -۹ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$.

۳۶) نشان دهید که ماتریس زیرپوچ‌توان، با درجهٔ پوچ‌توانی ۳ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲-۸ ماتریس‌های متقارن و مجموعه‌ای در باستان شناسی

در این بخش اعمال جبری روی ماتریس‌ها را توسعه داده و ملاحظه می‌کنیم که چطور باستان‌شناسان ماتریس‌ها را برای تعیین نظم و ترتیب زمانی مصنوعات دست‌ساز استفاده می‌کنند.

۲-۸-۱ تعریف: ترانهاده ماتریس A که با A^t نشان داده می‌شود ماتریسی است که از جابجا کردن سطر و ستون A به صورت زیر دست می‌آید.

سطر اول A، اولین ستون A^t می‌شود. سطر دوم، دومین ستون و همین طور ادامه می‌یابد. درایه (i,j)ام از A می‌شود درایه (j,i)ام از A^t، اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد پس A^t یک ماتریس $n \times m$ است.

مثال ۱: ترانهاده هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۷\\ -۸ & ۰\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۷\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix} \qquad C=[-۱\ \ ۳\ \ ۴]$$

حل: سطرها را به عنوان ستون می‌نویسیم. داریم:

$$A^t=\begin{bmatrix}۲ & -۸\\ ۷ & ۰\end{bmatrix} \qquad B^t=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۵\\ -۷ & ۶\end{bmatrix} \qquad C^t=\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\\ ۴\end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که (۳, ۱)امین درایه که ۷− است می‌شود (۱, ۳)امین درایه از B^t . هم‌چنین توجه کنید که ماتریس ۳ × ۲، B به ماتریس ۲ × ۳، B^t تبدیل می‌گردد و ماتریس ۳ × ۱، C به ماتریس C^t که ۱ × ۳ تبدیل می‌گردد.

ما سه عمل برای ماتریس‌ها بیان کردیم که جمع، ضرب اسکالر و ضرب نامیده می‌شد. قضیهٔ زیر معرف این مطلب است که چطور ماتریس ترانهاده با این عملیاتها در ارتباط می‌باشد.

۲-۸-۲ قضیه (خواص ترانهاده) فرض کنیم A و B دو ماتریس و c یک اسکالر باشد. هم‌چنین فرض کنیم که اندازهٔ ماتریس‌ها طوری هستند که عملیات را می‌توان اجرا نمود در این صورت داریم

۱) ترانهاده جمع $(A+B)^t=A^t+B^t$

۲) ترانهاده ضرب اسکالر $(cA)^t=cA^t$

۳) ترانهاده ضرب $(AB)^t=B^tA^t$

۴) $(A^t)^r=(A^r)^t$

۵) $(A^t)^t=A$.

ما تکنیک‌هایی را ارائه می‌دهیم که در اثبات نتایج شامل ترانهاده‌ها از بازبینی خاصیت سوم استفاده می‌شوند. از خواننده تقاضا می‌شود که نتایج دیگری را که در تمرین‌های زیر می‌آید، استخراج نماید.

برای اثبات $(AB)^t=B^tA^t$ کافی است نشان دهیم که درایه‌های متناظر با هم، برابرند. داریم:

(i,j)امین درایه از ماتریس $(AB)^t$ برابر است با (j,i)امین درایه از AB که برابر است با:

$$a_{j۱}b_{۱i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}$$

هم‌چنین، (i,j)امین درایه از B^tA^t برابر است با:

$$(\text{ستون } j\text{ام از } A^t)\times(\text{سطر } i\text{ام از } B^t)$$

که مساوی است با

$$(\text{سطر } j\text{ام از } A) \times (\text{ستون } i\text{ام از } B)$$

و در نتیجه برابر است با

$$b_{۱i}a_{j۱} + b_{۲i}a_{j۲} + \cdots + b_{ni}a_{jn} = a_{j۱}b_{۱i} + a_{j۲}b_{۲i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

و این نشان می‌دهد که $(AB)^t = B^tA^t$.

۲-۸-۳ تعریف: ماتریس A را متقارن گوئیم هرگاه $A = A^t$. به عنوان مثال ماتریس‌های زیر متقارن می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۵ & -۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۴ \\ ۱ & ۷ & ۸ \\ -۴ & ۸ & -۳ \end{bmatrix}$$

مثال ۲) ماتریس زیر که نشان دهندهٔ فاصله به مایل بین شهرهای مختلف آمریکا می‌باشد درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{r} \text{Chicago} \\ \\ \text{Los-Angeles} \\ \\ \text{Miami} \\ \\ \text{New York} \end{array} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ ۰ & ۲۰۹۲ & ۱۳۷۴ & ۸۴۱ \\ \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ ۲۰۹۲ & ۰ & ۲۷۳۳ & ۲۷۹۷ \\ \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ ۱۳۷۴ & ۲۷۳۳ & ۰ & ۱۳۳۶ \\ \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ ۸۴۱ & ۲۷۹۷ & ۱۳۳۹ & ۰ \end{bmatrix}$$

مشاهده خواهیم کرد که این ماتریس متقارن می‌باشد. تمام عضوهای آن به صورت زوج ظاهر و به صورت متقارن در کنار قطر اصلی قرار گرفته‌اند. دلیلی برای این مطلب وجود دارد که مسافت از شهر x تا شهر y مانند مسافت از شهر y تا شهر x می‌باشد. برای مثال فاصله از شیکاگو تا میامی، حدود ۱۳۷۴ است (سطر اول ـ ستون سوم) که مانند فاصله و مسافت از میامی تا شیکاگو خواهد بود (سطر سوم ـ ستون اول). تمام این ماتریس‌ها متقارن خواهند بود.

اصطلاح و گزاره اگروتنهااگر و شرط لازم وکافی به طور متداول در ریاضیات به کار می‌روند و ما به طور متداول و مکرر در این قسمت از آنها استفاده خواهیم کرد. این اصطلاحات معنی یکسانی می‌دهند. فرض

کنید p و q عبارت هستند. می‌نویسیم $q \longrightarrow p$ و همچنین $p \longrightarrow q$ گزاره دومی، گزاره عکس نامیده می‌شود. ما می‌گوئیم p اگروتنهااگر q یا p لازم و کافی است برای q، مثال زیر بیانگر این مطلب است.

مثال ۳) اگر A و B ماتریس‌های متقارن و هم‌اندازه باشند آنگاه ضرب AB متقارن است اگروتنهااگر $AB = BA$.

هر مسئله «اگر و تنها اگر» شامل دو بخش است که ما آن را نشان می‌دهیم.

الف) اگر AB متقارن باشد آنگاه $AB = BA$.

ب) اگر $AB = BA$ آنگاه AB متقارن است.

اثبات الف) فرض کنیم AB متقارن باشد آنگاه :

$$AB = (AB)^t \quad \text{با استفاده از تعریف ماتریس متقارن}$$
$$= B^t A^t \quad \text{با استفاده از ترانهاده ضرب}$$
$$= BA \quad \text{چون } B \text{ و } A \text{ ماتریس‌های متقارن می‌باشند.}$$

اثبات ب) فرض کنیم $AB = BA$ آنگاه:

$$(AB)^t = (BA)^t \quad \text{با استفاده از ترانهاده ضرب}$$
$$= A^t B^t \quad \text{با استفاده از ترانهاده ضرب}$$
$$= AB \quad \text{چون } B \text{ و } A \text{ ماتریس‌های متقارن هستند.}$$

بنابراین AB متقارن می‌باشد. بنابراین برای دو ماتریس متقارن هم‌اندازه A و B، ضرب AB متقارن است اگروتنهااگر $AB = BA$. یا این که برای دو ماتریس متقارن و هم‌اندازه B و A، شرط لازم و کافی برای این که ضرب AB متقارن باشد این است که $AB = BA$.

ما در اینجا عددی را معرفی می‌کنیم که مربوط به ماتریس‌های مربعی می‌باشد که اثر (رَدِ)[1] ماتریس نام دارد.

۲-۸-۴ تعریف: فرض کنید A یک ماتریس مربعی است اثر (رد) ماتریس A با $\mathrm{tr}(A)$ نشان داده می‌شود و برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A می‌باشد. بنابراین اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد.

$$\mathrm{tr}(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn}$$

1) trace

مثال ۴) اثر (trace) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۵ & ۶ \\ ۷ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\mathrm{tr}(A) = ۴ + (-۵) + ۰ = -۱$$

اثر ماتریس نقش مهمی در نظریهٔ ماتریس و کاربرد آن دارد. به دلیل این که این عدد دارای خواص قابل توجهی است قابل ارزیابی است. این عدد در رشته‌هایی مانند مکانیک آماری، نسبت عام و مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اثر (trace) چه رابطه‌ای با اعمال جمع ماتریس، ضرب اسکالر ماتریس، ضرب ماتریس و ترانهاده دارد.

۲-۸-۵ قضیه (خواص اثر). فرض کنیم A و B دو ماتریس و c یک عدد اسکالر باشد، فرض کنیم اندازه‌های ماتریس‌ها طوری باشد که اعمال زیر قابل اجرا باشد:

۱) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

۲) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

۳) $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$

۴) $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$

نشان می‌دهیم که اثر $(A+B)$ برابر است با اثر A به اضافهٔ اثر B. فرض کنیم درایه‌های قطر اصلی $A+B$ به صورت زیر باشد:

$$(a_{۱۱} + b_{۱۱}), (a_{۲۲}, b_{۲۲}), \ldots, (a_{nn} + b_{nn})$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+B) &= (a_{۱۱} + b_{۱۱}) + (a_{۲۲} + b_{۲۲}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= (a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn}) + (b_{۱۱} + b_{۲۲} + \cdots + b_{nn}) \\ &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$

۲-۹ ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد مختلط

درایه‌های یک ماتریس ممکن است اعداد مختلط باشد. یک عدد مختلط به فرم زیر می‌باشد.

$$z = a + bi$$

که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و $i = \sqrt{-1}$. a را قسمت حقیقی و b را قسمت موهومی z گویند.

فرض کنید $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ اعداد مختلط باشند. قوانین زیر برای آنها صادق است:

تساوی: $z_1 = z_2$ اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$

جمع: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

تفریق: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

ضرب:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bdi^2 + (ad + cb)i \\ &= (ac - bd) + (ad + cd)i \end{aligned}$$

مزدوج عدد مختلط $z = a + bi$ به صورت $\bar{z} = a - bi$ تعریف می‌شود.

مثال ۵) دو عدد مختلط زیر را درنظر بگیرید. $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 1 - 2i$ و $z_1 + z_2$، $z_1 z_2$ و $\bar{z}_1$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (1 - 2i) \\ &= (2 + 1) + (3 - 2)i = 3 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 3i)(1 - 2i) = 2(1 - 2i) + 3i(1 - 2i) \\ &= 2 - 4i + 3i - 6i^2 \\ &= 8 - i \end{aligned}$$

$$\bar{z}_1 = 2 - 3i$$

ماتریس‌هایی که دارای اعداد مختلط هستند شبیه قوانین ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد حقیقی با یکدیگر جمع ضرب و تفریق می‌گردند.

مثال ۶) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۲+i & ۳-۲i \\ ۴ & ۵i \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲i \\ ۱-i & ۲+۳i \end{bmatrix}$. $A+B$ و $۲A$ و $۲B$ را محاسبه کنید.

حل: داریم:

$$A+B = \begin{bmatrix} ۲+i & ۳-۲i \\ ۴ & ۵i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۲i \\ ۱+i & ۲+۳i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲+i+۳ & ۳+۲i+۲i \\ ۴+۱+i & ۵i+۲+۳i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۵+i & ۳ \\ ۵+i & ۲+۸i \end{bmatrix}$$

$$۲A = ۲\begin{bmatrix} ۲+i & ۳+۲i \\ ۴ & ۵i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۲i & ۶-۴i \\ ۸ & ۱۰i \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۲+i & ۳-۲i \\ ۴ & ۵i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲i \\ ۱+i & ۲+۳i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (۲+i)۳+(۳-۲i)(۱+i) & (۲+i)(۲i)+(۳-۲i)(۲+۳i) \\ (۴)(۳)+(۵i)(۱+i) & ۴(۲i)+(۵i)(۲+۳i) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱۱+۴i & ۱۰+۹i \\ ۷+۵i & -۱۵+۱۸i \end{bmatrix}$$

مزدوج ماتریس A با $\bar{A}$ نشان داده می‌شود که با مزدوج کردن هر یک از درایه‌های ماتریس A حاصل می‌شود. همچنین ترانهاده مزدوج ماتریس A به صورت زیر تعریف و نوشته می‌شود:

$$A^* = \bar{A}^t$$

برای مثال اگر $A = \begin{bmatrix} ۲+۳i & ۱-۴i \\ ۶ & ۷i \end{bmatrix}$ باشد بنابراین:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} ۲-۳i & ۱+۴i \\ ۶ & -۷i \end{bmatrix}, \qquad A^* = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} ۲-۳i & ۶ \\ ۱+۴i & -۷i \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی C را هرمیتی گویند هرگاه $C = C^*$. به عنوان مثال ماتریس زیر هرمیتی است.

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۳-۴i \\ ۳+۴i & ۶ \end{bmatrix}$$

زیرا:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳+۴i \\ ۳+۴i & ۶ \end{bmatrix} \qquad C^* = \bar{C}^t = \begin{bmatrix} ۲ & ۳+۴i \\ ۳+۴i & ۶ \end{bmatrix} = C$$

برای ماتریس‌هایی که دارای درایه‌های اعداد مختلط هستند ماتریس‌های هرمیتی مهمتر از ماتریس‌های متقارن است. ویژگی‌های ترانهاده مزدوج شبیه ویژگی‌های قبلی ترانهاده است. این ویژگی‌ها را در قضیه زیر لیست می‌کنیم. اثبات تمرین‌ها به عهدهٔ خواننده می‌باشد.

۲-۹-۱ قضیه (خواص ترانهاده مزدوج) اگر A و B ماتریس‌هایی با درایه‌هایی از اعداد مختلط و z یک عدد مختلط باشد آنگاه داریم

۱) ترانهاده مزدوج از جمع $(A+B)^* = A^* + B^*$

۲) ترانهاده مزدوج از ضرب اسکالر $(zA)^* = \bar{z}A^*$

۳) ترانهاده مزدوج از حاصل ضرب $(AB)^* = B^*A^*$

۴) $(A^*)^* = A$.

اکنون وقت آن است که کاربرد خوبی از ماتریس جبری ارایه دهیم.

۲ — ۱۵* سری‌ها و مجموعه‌ها در باستان شناسی

مسئله‌ای که باستان‌شناسان با آن روبرو هستند مکانها و آثار هنری در جایگاه ترتیب تاریخ و زمان آنها است. این شاخه از باستان‌شناسی در قرن ۱۹ توسط آقای فلیندر پیتر به نام ترتیب و نظم و تقویم اطلاعات آغاز شد. پیتری در مورد آرامگاه‌های ناگادا، بالاس و هوال که در مصر باستان بود مطالعاتی را به عمل آورد. (اطلاعات کربنی اخیر نشان می‌دهد که تمام قبرها از سال ۶۰۰۹ قبل از میلاد تا ۲۵۰۰ سال قبل از میلاد قرارگرفته است) پیتری از اطلاعات ۹۰۰ قبر برای نظم بخشیدن به آنها استفاده کرد و برای هرکدام از آنها دورهٔ زمانی مشخصی را با استفاده از سفال پیدا کرد.

نگاهی اجمالی به مسئلهٔ اساسی مجموعهٔ قبرها و تغییرات انجام شده خاکها و سفال به دست آمده خواهیم انداخت. یک فرض در باستان شناسی وجود دارد که دو قبر محتویات یکسان در یک زمان مشخص وجود دارد که از حد عادی کوچکتر می‌باشد. مدل ریاضی ساخته شده باعث می‌شود که اطلاعات مربوط به محتویات قبرها را در اختیار ما قرار دهد و بنابراین نظم قبرهای باستان را پیدا می‌کنیم. ماتریس A را به

گونهٔ زیر می‌سازیم که تمام مؤلفه‌های آن ۱ یا ۰ می‌باشد که محتوی سفال قبرها را توصیف می‌کند. قبرها را ۱ و ۲ و ۳ و . . .و نوع سفالها را ۱ و ۲ و ۳ و . . .ماتریس A را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر قبر } A \text{ شامل نوع سفال } j \text{ باشد} \\ ۰ & \text{اگر قبر } A \text{ شامل نوع سفال } j \text{ نباشد} \end{cases}$$

ماتریس A شامل تمام اطلاعات دربارهٔ سفال و خاک قبرهای مختلف و متفاوت می‌باشد. حال مثال زیر این اطلاعات را در مورد ماتریس A به ما می‌دهد. مؤلفهٔ g_{ij} از ماتریس $G = AA^t$ مساوی تعدادی انواع سفالی رایج برای هر دو قبر i و j می‌باشد. بنابراین بزرگترین g_{ij} نزدیکترین قبر i و قبر j در یک زمان معین می‌باشد. با امتحان درایه‌های G، باستان‌شناس می‌تواند به ترتیب قبرها برسد. این نتیجه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= G \text{ درایه موجود در سطر } i \text{ و ستون } j \text{ از } \\ &= (A \text{ سطر } i \text{ از }) \times (A^t \text{ ستون } j \text{ از }) \\ &= [a_{i۱} a_{i۲} \dots a_{in}] \begin{bmatrix} a_{j۱} \\ a_{j۲} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix} \\ &= a_{i۱}a_{j۱} + a_{i۲}a_{j۲} + \dots + a_{in}a_{jn} \end{aligned}$$

هر جمله از این جمع ۱ یا ۰ خواهد بود. برای مثال جمله $a_{iz}a_{jz}$ یک خواهد بود. اگر a_{iz} و a_{jz} هر دو یک باشند. اگر سفال نوع ۲ رایج باشد i و j قبرهای موردنظر هستند و صفر خواهند بود اگر سفال نوع ۲ از قبرهای i و j رایج نباشد. بنابراین تعداد یکها در عبارت g_{ij}) تعداد نمونه‌های سفال رایج برای قبرها i و j می‌باشد. ماتریس $P = A^tA$ به دو روش آنالوگ اطلاعاتی دربارهٔ اطلاعات ترتیبی و تقدیمی ظروف سفالی منتهی می‌شود.

فرض بر این است که بزرگترین عدد قبرها در ۲ نمونهٔ سفالهای پدید آمده می‌باشد. نزدیکترین آنها تاریخی است. مؤلفهٔ p_{ij} از ماتریس $P = A^tA$ که تعداد قبرهای آن نمونه‌هایی از سفال به دست آمده از مؤلفه‌های iام و jام می‌باشد. نزدیکترین نمونه‌های سفالی، i و j در زمان هستند با امتحان مؤلفه‌های P می‌توانیم به یک ترتیب سفالی تاریخی برسیم. به طور ریاضی می‌توان نشان داد که ماتریس‌های $G = AA^t$ و $P = A^tA$ ماتریس‌های متقارن هستند. علاوه بر آن می‌توان از نظر فیزیکی هنگامی که P و G ماتریس‌های متقارن هستند بحث وگفتگو شود (تمرین زیر را ببینید) که این موضوع نشان دهندهٔ تطابق

و هماهنگی ریاضی با این بحث می‌باشد. این هماهنگی و تقارن نشان می‌دهد که تمامی این اطلاعات شامل درایه‌های بالایی قطر اصلی این ماتریس‌ها هستند. اطلاعات در زیر قطر اصلی کاملاً وارون درایه‌های دیگر است.

اکنون این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم. فرض کنید ماتریس A نشان دهندهٔ ۳ سفال که شامل ۴ قبر می‌باشد، است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین برای مثال $a_{13} = 1$ بر قبر ۱ که شامل ۳ نوع سفال است دلالت دارد. (درایه‌های سازنده سطر اول و ستون سوم دلالت می‌کند) $a_{23} = 0$ بر این نکته دلالت می‌کند که سطر دوم معادل ستون سوم نیست.

$$G = AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ضروری است که G کاملاً متقارن باشد، اطلاعات درایه‌های بالایی قطر اصلی معادل درایه‌های زیر آن است.

درایه‌های بالای قطر اصلی را به صورت سیستماتیک بررسی می‌کنیم.

رقم مشترک سطر اول و ستون دوم یک است. $g_{12} = 1$

رقم مشترک سطر اول و ستون سوم یک است. $g_{13} = 1$

رقم مشترک سطر اول و ستون چهارم صفر است. $g_{14} = 0$

رقم مشترک سطر دوم و ستون سوم صفر است. $g_{23} = 0$

رقم مشترک سطر دوم و ستون چهارم صفر است. $g_{24} = 0$

رقم مشترک سطر سوم و ستون چهارم یک است. $g_{34} = 1$

رقم مشترک سطر اول و ستون دوم اکثر اوقات به هم پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم نمودار با ترکیب سطر اول و دوم شروع شود. $2 - 1$.

سپس سطر سوم به این نمودار اضافه می‌کنیم $g_{13} = 1$ زمانی که $g_{23} = 0$ بنابراین سطر سوم با سطر اول ترکیب می‌شود اما با سطر دوم ترکیب نمی‌شود. $2 - 1 - 3$

سرانجام سطر چهارم را به نمودار اضافه می‌کنیم. $g_{34} = 1$ که $g_{14} = 0$ و $g_{24} = 0$. سطر چهارم با

سطر سوم ترکیب می‌شود با سطر ۱ و ۲ ترکیب نمی‌شود. (به یکدیگر نزدیک نیستند) داریم:

$$۴-۳-۱-۲$$

ریاضیات روش رسم این نمودار را به ما نمی‌گوید. دو امکان وجود دارد:

$$۴\longrightarrow ۳\longrightarrow ۱\longrightarrow ۲ \quad \text{و} \quad ۴\longleftarrow ۳\longleftarrow ۱\longleftarrow ۲$$

باستان شناسان معمولاً از منابع دیگر که در دو طرف سطر آمده آگاهند. بنابراین قدمت تاریخی سطرها را می‌دانستند ماتریس‌های G و P شامل اطلاعاتی دربارهٔ قدمت تاریخی سطرها و ستون‌ها و اهمیت نسبی اعضای آنها با هم می‌باشند.

این ماتریس‌ها متداولاً بزرگ می‌باشند و اطلاعات نمی‌توانند به آسانی ذخیره شوند یا اطلاعات را به صورت مبهم در قسمت بالای نمودار می‌دهند. ماتریس G، ۹۰۰ × ۹۰۰ می‌باشد. تکنیکهای ریاضی خاص برای استخراج اطلاعات از این ماتریس‌ها توسعه یافته است، اکنون این روشها در کامپیوترها اجرا می‌شوند. خواننده‌هایی که به این موضوع علاقهٔ بیشتری دارند می‌توانند با موضوع «بعضی مشکلات و روشها در باستان‌شناسی آماری» که اثر دیوید ج. کنرال، دنیای باستان‌شناسی در سال ۱۹۶۹ میلادی است مراجعه کنند. در این بخش نظریهٔ جبری ماتریس‌ها را توسعه خواهیم داد. این نظریه به صورت گسترده در فعالیت ریاضی است. ما باید از ماتریس‌ها در ارتباط با مدلهای ریاضی و بخش جمعیت‌های آماری استفاده نمائیم. آلبرت انشتین از معادله ماتریس برای توصیف ارتباط میان هندسه و ماده در نظریه نسبیت عامش استفاده کرد:

$$T = R - \frac{۱}{۲}rG$$

که در آن T یک ماتریس که نشان دهندهٔ هندسه است، R یک ماتریس، r یک اسکالر است. و G یک ماتریس است که گرانش‌ها را توصیف می‌کند. تمام ماتریس‌های ۴ × ۴ متقارن هستند. نظریهٔ عمومی نسبیت شامل حل معادلات ماتریس برای تعیین میدان گرانشی است. فیزیکدان آلمانی به نام ورنر هسن‌برگ از ماتریس‌ها برای توسعه مکانیک کوانتومی استفاده کرد که جایزهٔ نوبل را دریافت کرد. نظریهٔ ماتریس‌ها اساس دو نظریهٔ مهم فیزیکی در قرن بیستم است که همان نظریهٔ عمومی نسبیت و نظریهٔ کوانتومی است.

تمرینات

محاسبه

۱) ترانهاده هرکدام از ماتریس‌های زیر را بیابید. نشان دهید که آیا ماتریس داده شده متقارن است یا خیر؟

الف) $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ ب) $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$

ج) $C = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ د) $D = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ -۲ & ۳ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$

ه) $E = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۶ \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و) $F = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

ز) $G = \begin{bmatrix} -۲ & ۴ & ۵ & ۷ \\ ۱ & ۰ & ۳ & -۷ \end{bmatrix}$ ح) $H = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۲ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$

ط) $K = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$

۲) در ماتریس‌های زیر، به جای * اعداد مناسب انتخاب نمائید تا هر یک از ماتریس‌ها، متقارن گردند.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ * & ۶ & * \\ ۴ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & * \\ * & ۸ & ۴ \\ -۳ & * & ۳ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -۳ & * & ۸ & ۹ \\ -۴ & ۷ & * & ۷ \\ * & ۲ & ۶ & ۴ \\ * & ۷ & * & ۹ \end{bmatrix}$

۳) اگر A یک ماتریس ۱×۴ و B یک ماتریس ۳×۲ و C یک ماتریس ۴×۲ و D یک ماتریس ۳×۱ باشد اندازهٔ ماتریس‌های زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) ADB^t

ب) $CB - ۵AD$

ج) $۴CA - (CA)^۲$

د) $(ADB^tC)^۲ + I_۴$

ه) $(B^tC)^t - AB$.

۴) با استفاده از قضیهٔ ۲ـ۴ هرکدام از خاصیتهای ترانهادهٔ زیر را ثابت کنید.

الف) $(A+B)^t = A^t + B^t$

ب) $(CA)^t = CA^t$

ج) $(A^t)^t = A$

۵) با استفاده از قضیهٔ ۲ـ۴ خاصیتهای ترانهادهٔ زیر را ثابت کنید.

الف) $(A+B+C)^r = A^t + B^t + C^t$

ب) $(ABC)^r = C^t B^t A^t$

۶) اگر A یک ماتریس قطری باشد ثابت کنید $A = A^t$.

۷) اگر A یک ماتریس مربعی باشد ثابت کنید $(A^n)^t = (A^t)^n$.

۸) ثابت کنید یک ماتریس متقارن لزوماً مربعی است.

۹) اگر A یک ماتریس متقارن باشد ثابت کنید A^t نیز متقارن می‌باشد.

۱۰) فرض کنید A و B ماتریس‌های متقارن با اندازه‌های مساوی و c یک اسکالر می‌باشد. ثابت کنید:

الف) $A+B$ متقارن است.

ب) cA متقارن است.

۱۱) ماتریس A را پادمتقارن گویند هرگاه $A = -A^t$.

الف) مثالی برای ماتریس پادمتقارن ارایه دهید.

ب) ثابت کنید یک ماتریس پادمتقارن مربعی است و درایه‌های قطر اصلی آن صفر است.

ج) ثابت کنید مجموع دو ماتریس پاد متقارن با اندازه‌های مساوی یک ماتریس پادمتقارن است.

د) ثابت کنید که ضرب اسکالر یک ماتریس پادمتقارن، پادمتقارن است.

۱۲) اگر A ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

الف) $A + A^t$ متقارن است.

ب) $A - A^t$ پادمتقارن است.

۱۳) ثابت کنید هر ماتریس مربعی A می‌تواند به مجموع ماتریس متقارن B و ماتریس پادمتقارن C تجزیه شود به طوری که $A = B + C$.

۱۴) الف) ثابت کنید اگر A یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه A^t نیز خودتوان است.

ب) ثابت کنید اگر A^t یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه A نیز خودتوان است.

۱۵) اثر (trace) هرکدام از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۴ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ & ۵ \\ ۷ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۶-۷ & ۲ & \\ ۳ & ۹ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ثابت کنید خواص زیر در مورد اثر با استفاده از ویژگی‌های زیر از قضیه ۲ـ۵ مشخص می‌شود.

الف) $\operatorname{tr}(cA) = c\operatorname{tr}(A)$

ب) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

ج) $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A)$.

۱۶) با استفاده از نتایج قضیه ۲ـ۵ ویژگی اثر زیر را ثابت کنید.

$$tr(A+B+C) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(C)$$

۱۷) فرض کنید دو ماتریس A و B با اندازه‌های یکسان داده شده باشد. ثابت کنید $A = B$ اگروتنهااگر $A^t = B^t$.

۱۸) ثابت کنید ماتریس حاصلضرب AB وجود دارد اگروتنهااگر تعداد ستون‌ها در A با تعداد سطرها در B برابر باشد.

۱۹) ثابت کنید $AB = O_n$ برای تمام ماتریس‌های $n \times n$، B اگروتنهااگر $A = O_n$.

۲۰) AB، $A+B$ و BA را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳-i \\ ۲+۳i & -۵i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -۲+i & ۵+۲i \\ ۳-i & ۴+۳i \end{bmatrix}$$

۲۱) $A+B$، AB و BA را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۴+i & ۲+۳i \\ ۶+۲i & ۱+i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۲+i & -۳ \\ ۲ & ۴-۵i \end{bmatrix}$$

۲۲) مزدوج و ترانهاده مزدوج هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید، تعیین کنید کدام ماتریس هرمیتی است.

$$A = \begin{bmatrix} ۲-۳i & ۵i \\ ۲ & ۵-۴i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۴ & ۵-i \\ ۵+i & ۶ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۷i & ۴ - ۳i \\ ۶ + ۸i & ۱ - i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ - ۵i \\ ۳ + ۵i & ۹ \end{bmatrix}$$

۲۳) مزدوج و ترانهاده مزدوج هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید. تعیین کنید کدام ماتریس هرمیتی است.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۷ + ۲i \\ ۷ - ۲i & ۵ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۳ + ۵i & ۱ - ۲i \\ ۱ + ۲i & ۵ + ۶i \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} ۹ & -۳i \\ ۳i & ۸ \end{bmatrix}$$

۲۴) چهار خاصیت ترانهاده مزدوج زیر را ثابت کنید:

الف) $(A + B)^* = A^* + B^*$

ب) $(zA)^* = \bar{z}A^*$

ج) $(AB)^* = B^*A^*$

د) $(A^*)^* = A$

۲۵) نشان دهید ماتریس هرمیتی لزوماً مربعی است. ثابت کنید که درایه‌های روی قطر اصلی، بایستی اعداد حقیقی باشند.

۲۶) فرض کنید $G = AA^t$ و $P = A^tA$ برای هر ماتریس دلخواه A،

الف) ثابت کنید G و P هر دو ماتریس‌های متقارن هستند.

ب) G و P هر دو دارای یک تعبیر در مدل تاریخی هستند. از این تعبیر برای متقارن بودن G و P استفاده کنید. نتیجه‌ی ریاضی و تعبیر فیزیکی هر دو با یکدیگر سازگارند.

۲۷) این ماتریس‌ها محتویات سفالگری و حفاری گوناگون را شرح می‌دهند برای هر مورد امکان و ترتیب

سفارش گودال و سپس مدل سفالگری را تعیین کنید.

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 5)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \end{bmatrix} \qquad 6)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۸) نتیجهٔ تحلیل سفالگری در حفاری را نتیجه بگیرید. فرض کنید A محتویات سفالگری، حفاری‌های گوناگون را توصیف کند و $P = A^tA$. ثابت کنید: درایه P_{ij} از ماتریس $P = A^tA$ تعداد حفاری در هر i و j در یک زمان هستند. باستان‌شناس می‌تواند به این ترتیب به سفالگری برسد.

۲۹) مدلی که از باستان‌شناسی در اینجا معرفی شد مدلی است که برای تجزیه و تحلیل کردن روابط گروه انسانها استفاده می‌شود برای مثال رابطهٔ دوستی در یک گروه را درنظر بگیرید. فرض کنید همه‌ی دوستی‌ها دوطرفه باشد. طبقه‌بندی مردم از ۱، ...، n و تعریف ماتریس مربعی A در زیر آمده است. (درایه‌های قطر اصلی A صفر هستند) برای همهٔ iها $a_{ii} = 0$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ دوست باشند} \\ 0 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ دوست نباشند} \end{cases}$$

الف) ثابت کنید اگر $F = AA^t$ آنگاه f_{ij} تعداد دوستی‌هایی که به طور معمول شامل i و j هستند می‌باشد.

ب) فرض کنید روابط دوستی متقابل نباشد تأثیر این مدل چگونه است؟

۲-۱۱ ماتریس معکوس و رمز نویسی

در این بخش مفهوم ماتریس معکوس را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که چگونه ماتریس معکوس می‌تواند در حل برخی دستگاه‌های معادلات خطی استفاده شود و کاربرد ماتریس معکوس در رمزنویسی و مطالعهٔ

کدها را خواهیم دید. ما نظریهٔ ماتریس معکوس همراه با نگاهی به ضرب معکوس اعداد حقیقی را بررسی می‌کنیم. اگر عدد b معکوس a باشد آنگاه:

$$ab = ۱ \quad , \quad ba = ۱$$

برای مثال $\frac{۱}{۴}$ معکوس ۴ است و داریم:

$$۴(\frac{۱}{۴}) = (\frac{۱}{۴})۴ = ۱$$

این یک نظریه است که به ماتریس‌ها تعمیم می‌دهیم.

۲-۱۱-۱ تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر ماتریس $n \times n$، B وجود داشته باشد که $AB = BA = I_n$ آنگاه می‌گوئیم A معکوس‌پذیر است و B معکوس ماتریس A می‌نامیم. اگر ماتریس B وجود نداشته باشد آنگاه ماتریس A معکوس ندارد.

مثال ۱) ثابت کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ دارای معکوس $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ می‌باشد.

حل: داریم

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_۲,$$
$$BA = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & \frac{-۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_۲$$

بنابراین $AB = BA = I_۲$ و این نشان می‌دهد که ماتریس A دارای معکوس B می‌باشد. می‌دانیم که اعداد حقیقی نمی‌توانند بیشتر از یک معکوس داشته باشند این قضیه برای یک ماتریس نیز صادق است.

۲-۱۱-۲ قضیه: معکوس یک ماتریس در صورت وجود، منحصربه‌فرد است (یکتاست).

اثبات: فرض کنید B و C معکوسهای A هستند بنابراین $AB = BA = I_n$ و $AC = CA = I_n$ دو طرف تساوی $AB = I_n$ را در C ضرب کرده و از خواص جبری ماتریس‌ها استفاده کنید.

$$C(AB) = CI_n$$

$$(CA)B = C$$

$$I_nB = C$$
$$B = C$$

بنابراین یک ماتریس معکوس‌پذیر تنها یک معکوس دارد.

توجه: فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. معکوس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم و داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$
$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}\dots A^{(-1)}$$

اکنون با روش الگوریتم گوس جردن روشی برای پیدا کردن معکوس ماتریس ارایه می‌دهیم. فرض کنید A معکوس‌پذیر باشد. حال فرض کنید ستون‌های ماتریس A^{-1}، $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد و ستون‌های ماتریس I_n، $C_1, C_2, \dots, C_n$ باشد. حال ماتریس‌های A^{-1} و I_n را براساس ستون‌هایشان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^{-1} = [X_1X_2\dots X_n], \qquad I_n = [C_1C_2\dots C_n]$$

باید A^{-1} را با پیدا کردن $X_1 \dots X_n$ بیابیم. چون $AA^{-1} = I_n$ آنگاه:

$$A[X_1, \dots, X_n] = [C_1C_2\dots C_n]$$

از انجام دادن ضرب ماتریس‌ها برحسب ستون‌هایش نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$[AX_1AX_2\dots AX_n] = [C_1C_2\dots C_n]$$

بنابراین:

$$AX_1 = C_1 \quad , \quad AX_2 = C_2, \dots \quad AX_n = C_n$$

بنابراین $X_1, X_2, \dots, X_n$ ریشه‌هایی برای تساویهای $AX = C_1$، $AX = C_2$،... و $AX = C_n$ می‌باشند که در آن A ضرایب حد معادلات می‌باشد. حل این دستگاه‌ها با استفاده از روش حذفی گوس ـ جردن در ماتریس افزوده‌ای به صورت زیر است:

$$[A : C_1C_2\dots C_n] \approx \dots \approx [I_n : X_1X_2\dots X_n]$$

بنابراین:

$$[A : I_n] \approx \ldots \approx [I_n : A^{-1}]$$

بنابراین اگر شکل سطری پلکانی ماتریس $[A : I_n]$ را محاسبه کنیم و ماتریس به فرم $[I_n : B]$ به دست آوریم آنگاه $B = A^{-1}$.

به عبارت دیگر، اگر فرم تحویل شده سطری پلکانی را محاسبه کنیم و متوجه شویم که به فرم $[I_n : B]$ نیست آنگاه A معکوس‌پذیر نخواهد بود.

اکنون خلاصه‌ای از نتیجهٔ بحث را مرور می‌کنیم.

روش حذفی گوس برای پیدا کردن معکوس ماتریس

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد:

۱) ماتریس همانی $n \times n$، I_n را به ماتریس A وصل می‌کنیم تا ماتریسی به فرم $[A : I_n]$ به وجود آید.

۲) شکل تحویل شده سطری پلکانی $[A : I_n]$ را محاسبه می‌کنیم. اگر فرم ماتریس به دست آمده شبیه ماتریس به فرم $[I_n : B]$ بود در آن صورت B معکوس ماتریس A خواهد بود. اگر شکل تحویل شده سطری پلکانی به فرم $[I_n : B]$ نبود در این صورت اولین ماتریس $n \times n$ در ماتریس به دست آمده برابر با I_n نبوده پس می‌گوئیم که ماتریس A معکوس ندارد مثالهای زیر روش بیان شده را نشان می‌دهد.

مثال ۲) معکوس ماتریس A را معین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از روش حذفی گاوس جردن خواهیم داشت:

$$[A : I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & -۱ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۳ & -۵ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \frac{R_۲ + (-۲)R_۱}{R_۳ + R_۱}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & -۱ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{(-۱)R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & -۱ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+(-۲)R_۲]{R_۱+R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۱ & ۳ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۳ & ۲ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۲+(-۱)R_۳]{R_۱+R_۳}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۵ & -۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۳ & ۲ & ۱ \end{array}\right]$$

بنابراین:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۵ & -۳ & ۱ \\ -۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال زیر استفاده از روش گوس جردن را برای محاسبهٔ ماتریسی که معکوس ندارد نشان می‌دهد.

مثال ۳) معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از روش حذفی گاوس جردن خواهیم داشت:

$$[A:I_۳]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} ccc۱ & ۱ & ۵ & ccc۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۷ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۴ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+R_۱]{R_۲+(-۲)R_۱}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ccc۱ & ۱ & ۵ & ccc۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۲ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+۳R_۲]{R_۱+(-۱)R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ccc۱ & ۰ & ۳ & ccc۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۵ & ۳ & ۱ \end{array}\right]$$

نیاز نیست که بیشتر ادامه دهیم چون اولین ماتریس ۳×۳ در ماتریس نهایی به دست آمده یک ماتریس همانی نمی‌باشد و به عبارتی ماتریس به دست آمده به فرم $[I_n : B]$ نمی‌باشد. پس $A^{-۱}$ وجود ندارد. روش گوس جردن برای محاسبهٔ معکوس یک ماتریس به ما می‌گوید که A یک ماتریس معکوس‌پذیر است اگروتنهااگر تحویل شده سطری پلکانی $[A : I_n]$ به فرم $[I_n : B]$ باشد و ماتریس A نیز به ماتریس I_n تبدیل می‌شود و این مشاهده منجر به نتیجه زیر می‌شود:

۲-۱۱-۳ قضیه: ماتریس A که یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد معکوس‌پذیر است اگروتنهااگر فرم تحویل شده سطری پلکانی آن I_n باشد.

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی معکوس‌پذیر باشد آنگاه معکوس ماتریس می‌تواند قابل بحث در مورد جوابهای دستگاه باشد. قضیهٔ زیر یک نتیجهٔ کلیدی در این بحث می‌باشد.

۲-۱۱-۴ قضیه: فرض کنید $AX = B$ یک دستگاه معادلات خطی با n متغیر باشد اگر A^{-1} وجود داشته باشد جواب دستگاه منحصربفرد است و به صورت $X = A^{-1}B$ می‌باشد.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم $X = A^{-1}B$ یک جواب است. $X = A^{-1}B$ را در معادلهٔ ماتریس جایگزین می‌کنیم. با استفاده از خواص ماتریس خواهیم داشت:

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_nB = B$$

چون $X = A^{-1}B$ در معادله صدق می‌کند بنابراین یک جواب است.

اکنون ثابت می‌کنیم جواب دستگاه یکتاست. فرض کنیم X_1 جواب باشد پس $AX_1 = B$، با ضرب کردن دو طرف معادله در A^{-1} داریم:

$$A^{-1}AX_1 = A^{-1}B \Longrightarrow I_nX_1 = A^{-1}B \Longrightarrow X_1 = A^{-1}B$$

بنابراین $X_1 = A^{-1}B$ یک جواب یکتا می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم که چگونه این نتیجه می‌تواند برای حل یک دستگاه معادلات استفاده گردد.

مثال ۴) دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

حل: این دستگاه را می‌توان به فرم ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس ضرایب معکوس‌پذیر باشد جواب منحصربفرد دستگاه عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس بالا در مثال ۲ به دست آمده است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب منحصربفرد دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -2 \quad , \quad x_3 = 1$$

دانستن این مسئله که اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد آنگاه حل دستگاه معادلات $AX = B$ به صورت $X = A^{-1}B$ می‌باشد اصولاً از لحاظ نظری اهمیت دارد. یک عبارت جبری برای حل دستگاه به ما می‌دهد، که معمولاً در حل دستگاه معادلات خاص استفاده نمی‌شود. روش حذفی گاوس ـ جردن که در بخش ۱ـ۹ معرفی شد برای حل دستگاه معادلات خطی مؤثرتر می‌باشند. اکثر دستگاه معادلات توسط کامپیوتر حل می‌شوند.

دو عامل مهم هنگام استفاده از کامپیوتر عبارتند از: کارایی و دقت. برای حل یک دستگاه n معادله و n مجهولی روش معکوس ماتریس به $n^3 + n^2$ عمل ضرب و $n^3 - n^2$ عمل جمع نیاز داریم. در حالی که روش حذفی گاوس ـ جردن به $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ عمل ضرب و $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ عمل جمع نیاز خواهد داشت. بنابراین به عنوان مثال برای یک دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهولی روش معکوس ماتریس شامل ۸۰ عمل ضرب و ۴۸ عمل جمع می‌باشد در حالی که روش مؤثرتر حذفی گاوس شامل ۳۶ عمل ضرب و ۲۶ عمل جمع خواهد بود. به علاوه وقتی محاسبات بیشتری انجام می‌گیرد خطای گرد کردن نیز افزایش می‌یابد. بنابراین روش حذفی گاوس (و گاوس ـ جردن) دقت بیشتری نسبت به روش معکوس ماتریس دارند.

ممکن است شخصی دچار اشتباه شود و فرض کند که بهترین روش حل چنددستگاه معادلات خطی که به شکل $AX_1 = B_1$، $AX_2 = B_2$، $AX_3 = B_3$ و... و $AX_k = B_k$ به این صورت است که چون ماتریس A در همهٔ آنها مشترک است لازم است فقط یک بار A^{-1} محاسبه شود و سپس جواب

دستگاه به صورت $x_1 = A^{-1}B_1$ ز $x_2 = A^{-1}B_2$ و $x_3 = A^{-1}B_3$ و ...و $x_k = A^{-1}B_k$ محاسبه خواهد شد ولی به طور رایج، دقیق‌ترین و کارآمدترین روش حل چنین دستگاه‌هایی استفاده از یک ماتریس الحاقی بزرگ که بیانگر تمام دستگاه‌ها می‌باشد و سپس استفاده از یک روش حذفی مثل گاوس-جردن خواهد بود.

در مثالهای معینی روش معکوس ماتریس از حل دستگاه معادلات خطی برای رسیدن به جوابهای ویژه و معینی استفاده می‌شود. در بخش زیر این شرایط را نشان خواهیم داد (یک مدل برای تحلیل و بررسی وابستگی متقابل صنایع). درایه‌های ماتریس ضرایب در آن مثال برای محاسبه یک الگوریتم مؤثر برای محاسبه معکوس ماتریس مناسب می‌باشد.

اکنون بعضی از خواص جبری ماتریس‌های معکوس را مرور می‌کنیم.

خواص ماتریس معکوس

فرض کنیم A و B معکوس‌پذیر و c یک اسکالر غیرصفر باشد. آنگاه:

۱) $(A^{-1})^{-1} = A$

۲) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

۳) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۴) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

۵) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

نتایج ۱ و ۳ را بررسی می‌کنیم. اثبات بقیهٔ نتایج را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.
$(A^{-1})^{-1} = A$ این نتیجه مستقیم با استفاده از تعریف معکوس ماتریس به دست می‌آید. از آنجا که A^{-1} معکوس ماتریس A می‌باشد خواهیم داشت:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

این بیان هم چنین می‌گوید که A معکوس ماتریس A^{-1} می‌باشد بنابراین:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ نشان می‌دهیم که $B^{-1}A^{-1}$ معکوس ماتریس AB می‌باشد. با استفاده از

خواص ماتریس‌ها خواهیم داشت:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. بنابراین $B^{-1}A^{-1}$ معکوس ماتریس AB است.

مثال ۵: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، آنگاه می‌توان نشان داد $A^{-1} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$. با استفاده از این مطلب $(A^t)^{-1}$ را محاسبه کنید.

حل: نتیجه ۵ از بالا این نکته را بیان می‌کند که اگر معکوس ماتریس را بدانیم هم‌چنین معکوس ترانهادهٔ آن ماتریس را نیز می‌دانیم، داریم:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

رمزنویسی

رمزنویسی فرایند کدنویسی و از کد خارج کردن پیام‌ها است. این کلمه از کلمهٔ یونانی Krqptos به معنای مخفی می‌آید. این تکنیک به یونانیان باستان برمی‌گردد. امروزه دولتها روشهای پیچیده و پیشرفته‌ای برای کدگذاری و از حالت کد خارج کردن پیامها استفاده می‌کنند و یک نوع از این کدها که شکستن آن خیلی دشوار است موجب استفاده از ماتریس بزرگ برای از حالت کد خارج کردن یک پیام می‌باشد. گیرندهٔ پیام با استفاده از ماتریس معکوس بزرگ آن را از حالت کد خارج می‌کند. ماتریس اول، ماتریس رمزگذاری و معکوس آن ماتریس رمزگشایی است. این روش را برای یک ماتریس ۳ × ۳ توضیح می‌دهیم.

فرض کنید که پیام به صورت زیر باشد:

PREPARE TO ATTACK (آماده برای جنگ)

و ماتریس رمزگذاری به صورت $\begin{bmatrix} -۴ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد. برای سهولت کار به هر کدام از حروف الفبا یک شماره اختصاص می‌دهیم مثلاً برای A، ۱ و برای B، ۲و غیره. فرض کنیم فاصله بین دو کلمه با

شمارهٔ ۲۷ نشان داده شود بنابراین پیام به شکل زیر درمی‌آید:

$$P\ R\ E\ P\ A\ R\ E * T\ O * A\ T\ T\ A\ C\ K$$

۱۶ ۱۸ ۵ ۱۶ ۱ ۱۸ ۵ ۲۷ ۲۰ ۱۵ ۲۷ ۱ ۲۰ ۲۰ ۱ ۳ ۱۱

از آنجا که می‌خواهیم از یک ماتریس ۳ × ۳ برای کدگذاری پیام استفاده کنیم بنابراین پیام شماره‌گذاری شده را به ترتیب به صورت ماتریس‌های ۱ × ۳ ستونی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}16\\18\\5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}16\\1\\18\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\27\\20\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}15\\27\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}20\\20\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\11\\27\end{bmatrix}$$

ضروری است که یک فاصله در آخر پیام برای کامل کردن آخرین ماتریس اضافه کنیم. حال با ضرب کردن هرکدام از ماتریس‌های ستونی بالا در ماتریس رمزگذاری پیام به صورت رمز درمی‌آوریم. این مرحله می‌تواند به راحتی با نوشتن ماتریس‌های ستونی به عنوان ستون‌های ماتریس و ضرب مجدد ماتریس در ماتریس کدگذاری انجام شود. داریم

$$\begin{bmatrix}-3 & -3 & -4\\0 & 1 & 1\\4 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3\\18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11\\15 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150\\23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 38\\138 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153\end{bmatrix}$$

ستون‌های این ماتریس پیام رمزگذاری شده را می‌دهد. پیام را به فرم‌های خطی زیر منتقل می‌کند.

$$-122,\ 23,\ 138,\ -123,\ 19,\ 139,\ -176,\ 47,\ 181,$$

$$-130,\ 28,\ 145,\ -124,\ 21,\ 144,\ -150,\ 38,\ 153.$$

برای گشودن رمز پیام، گیرنده رشته‌ای را به عنوان یک ردیف از ماتریس‌های ستونی ۱ × ۳ می‌نویسد و با استفاده از معکوس ماتریس کدگذاری شده تکنیک را تکرار می‌کند. معکوس ماتریس کدگذاری شده به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\4 & 4 & 3\\-4 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

برای کشف کردن رمز ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۳ \\ -۴ & -۳ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱۲۲ & -۱۲۳ & -۱۷۶ & -۱۳۰ & -۱۲۴ & -۱۵۰ \\ ۲۳ & ۱۹ & ۴۷ & ۲۸ & ۲۱ & ۳۸ \\ ۱۳۸ & ۱۳۹ & ۱۸۱ & ۱۴۵ & ۱۴۴ & ۱۵۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۶ & ۱۶ & ۵ & ۱۵ & ۲۰ & ۳ \\ ۱۸ & ۱ & ۲۷ & ۲۷ & ۲۰ & ۱۱ \\ ۱۵ & ۱۸ & ۲۰ & ۱ & ۱ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس نهایی به فرم خطی زیر نوشته می‌شود، که پیام اصلی را می‌دهد:

۱۶ ۱۸ ۵ ۱۶ ۱ ۱۸ ۵ ۲۷ ۲۰ ۱۵ ۲۷ ۱ ۲۰ ۲۰ ۱ ۳ ۱۱

P R E P A R E * T O * A T T A C K

تمرینات

۱) با استفاده از معکوس $AB = BA = I_۲$ بررسی کنید که آیا B معکوس A برای هر کدام از ماتریس‌های ۲ × ۲، A و B زیرین است یا خیر؟

الف) $A = \begin{bmatrix} ۷ & -۳ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۵ & ۷ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۷ & -۴ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

د) $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ ۸ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۸ & ۷ \end{bmatrix}$

۲) با استفاده از تعریف معکوس $AB = BA = I_۳$ برای هر کدام از ماتریس‌های ۳ × ۳ ، A و B زیر بررسی کنید که آیا B معکوس A است یا خیر؟

الف) $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

ب) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

ج) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

۳) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 2×2 زیر را در صورت وجود معین کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمائید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

۴) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 3×3 زیر را در صورت وجود پیدا کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمائید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

۵) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 3×3 زیر را در صورت وجود معین کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمائید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

۶) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 4×4 زیر را در صورت وجود پیدا کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمائید.

الف) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

۷) دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

الف) $3x_1 + 5x_2 = 4$ و $x_1 + 2x_2 = 2$

ب) $2x_1 + 9x_2 = 3$ و $x_1 + 5x_2 = -1$

ج) $2x_1 + x_2 = 10$ و $x_1 + 3x_2 = 5$

د) $4x_1 + 3x_2 = 6$ و $2x_1 + x_2 = 4$

ه) $3x_1 + 8x_2 = 1$ و $2x_1 + 4x_2 = 6$

و) $2x_1 + 7x_2 = 4$ و $3x_1 + 9x_2 = 9$

۸) دستگاه‌های سه معادله و سه مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

الف) $x_1 - x_2 - x_3 = 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 0x_1 + 2x_2 - x_3 = 2,$

ب) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ و $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ و $x_1 - x_2 = 1$

ج) $x_1 + 8x_3 = 15$ و $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$ و $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

د) $x_۱ - x_۲ - ۴x_۳ = ۱$ و $-x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ = ۲$ و $x_۱ - ۲x_۲ + ۲x_۳ = ۳$

ه) $۶x_۱ - ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۱$ و $-x_۱ + x_۳ = -۲$ و $-x_۱ + x_۲ = ۵$

۹) دستگاه‌های چهار معادله و چهار مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ = ۵\\
&۲x_۱ + ۲x_۳ + x_۴ = ۶\\
&x_۲ + ۳x_۳ - x_۴ = ۱\\
&۳x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۴ = ۷
\end{aligned}
$$

۱۰) دستگاه معادلات زیر را که همگی دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند با استفاده از روش معکوس ماتریس حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = b_۱\\
&x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = b_۱\\
&x_۱ - x_۲ - x_۳ = b_۳
\end{aligned}
$$

برای

$$
\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۱ \\ b_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}
$$

۱۱) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نشان دهید که:

$$
A^{-۱} = \frac{۱}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}
$$

برای محاسبه معکوس ماتریس ۲×۲ این فرمول می‌تواند سریعتر از روش حذفی گاوس جردن باشد. معکوس ماتریس‌های ۲×۲ زیر را با استفاده از هر دو روش محاسبه کنید. شما کدامیک را ترجیح می‌دهید؟

الف) $\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۶ & ۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -۶ & ۴ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$

این فرمول را در مباحث بعد نیز خواهیم دید و به عنوان تئوری عمومی ماتریس معکوس ثبت می‌شود).

۱۲) هرکدام از ویژگی‌های معکوس ماتریس زیر را که در پایان بخش لیست شده است ثابت کنید.

الف) $(cA)^{-۱} = \frac{۱}{c}A^{-۱}$

ب) $(A^n)^{-۱} = (A^{-۱})^n$

ج) $(A^t)^{-۱} = (A^{-۱})^t$

۱۳) اگر $A^{-۱} = [۲۱]$، A را بیابید.

۱۴) اگر $A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۶ & -۱۰ \end{bmatrix}$ آنگاه A را بیابید.

۱۵) فرض کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ دارای معکوس $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ باشد. تعیین کنید:

الف) $(۳A)^{-۱}$ ب) $(A^۲)^{-۱}$ ج) $A^۲$ $(A^t)^{-۱}$

(نکته:از خاصیتهای جبری معکوس ماتریس استفاده کنید).

۱۶) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۵ & -۹ \end{bmatrix}$، با استفاده از این اطلاعات تعیین کنید.

الف) $(۲A^t)^{-۱}$ ب) $A^{-۳}$ $(AA^t)^{-۱}$

۱۷) x را در $\begin{bmatrix} ۲x & ۷ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ بیابید.

۱۸) x را در $۲\begin{bmatrix} ۲x & x \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ بیابید.

۱۹) A را در $(۴A^t)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$ بیابید.

۲۰) ثابت کنید $(ABC)^{-۱} = C^{-۱}B^{-۱}A^{-۱}$.

۲۱) ثابت کنید $(A^tB^t)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^t$.

۲۲) ثابت کنید که به طور کلی $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

۲۳) ثابت کنید که اگر A معکوس نداشته باشد A^t نیز معکوس ندارد.

۲۴) فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر است در این صورت:

الف) $AB = AC \Longrightarrow B = C$

ب) $AB = 0 \Longrightarrow B = 0$

۲۵) ثابت کنید که یک ماتریس معکوس ندارد هرگاه:

الف) دو سطر آن مساوی باشد.

ب) دو ستون آن مساوی باشد (نکته:از ترانهاده استفاده کنید.)

۲۶) ثابت کنید که ماتریس قطری معکوس‌پذیر است اگروتنهااگر تمامی درایه‌های قطری آن غیرصفر باشد. آیا می‌توانید راه سریعتری را برای تعیین معکوس ماتریس قطری معکوس‌پذیر بیابید.

۲۷) فرض کنید که $AX = B$ یک دستگاه ۵ معادله و ۵ مجهولی باشد. وقتی که A معکوس‌پذیر است. تعداد ضرب‌ها و جمع‌هایی را که برای حل این معادله نیاز است بیابید. با استفاده از

الف) روش حذفی گاوس ب) روش معکوس ماتریس

۲۸) فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. نشان دهید که میزان محاسبه حل دستگاه $AX = B$ با استفاده از روش حذفی گاوس جردن همان پیدا کردن ستون اول معکوس A می‌باشد. این تمرین این حقیقت را بیان می‌کند که برای حل دستگاه معادلات روش حذفی گاوس جردن مؤثرتر از روش معکوس ماتریس ضرایب است.

تمرینهای رمزگذاری

در تمرین‌های ۲۹ - ۳۲ هر حروف را با موفقیت در الفبا ارتباط دهید.

۲۹) پیام RETREAT را با استفاده از ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ کدگذاری نمایید.

۳۰) پیام The British Are Coming را با استفاده از ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدگذاری نمایید.

۳۱) پیام ۳۹− و ۶۱− و ۳− و ۵− و ۳۸ و ۴۹ را به رمز درآورید. با استفاده از ماتریس تمرین ۲۹ کدگذاری شده است.

۳۲) پیام ۲۷− و ۹۸ و ۹۶ و ۱۱− و ۱۲۲ و ۸۴ و ۵− و ۴۳ و ۲۸ و ۱− و ۱۰۰ و ۷۱ را کدگذاری نمایید با استفاده از ماتریس تمرین ۳۰ کدگذاری شده است.

۲-۱۲ مدل ورودی ـ خروجی لینتیف در اقتصاد

در این بخش، مدل ورودی ـ خروجی لینتیف که در آنالیزکردن وابستگی اقتصادی به کار می‌رود را معرفی می‌کنیم. وازلی لینتیف در سال ۱۹۷۳ برای این کارش در این رشته جایزه نوبل را اخذ کرده است. استفاده کاربردی از این روش اکنون به عنوان ابزار استاندارد برای درآمد ساختارهای اقتصاد از شهرها و همکاری‌های ایالتها و کشورها توسعه یافته است. یک موقعیت اقتصادی که شامل n صنایع وابسته است را درنظر بگیرید. خروجی هر صنعت نیازمند ورودی توسط صنعت‌های دیگر است و حتی در صورت امکان خود صنعت. خواهیم فهمید که چطور یک مدل ریاضی که شامل یک دستگاه معادلات خطی است می‌تواند این موقعیت را پایه‌گذاری سازد. برای سادگی کار فرض کنیم هرکدام از محصولات صنعتی یک کالا باشد. فرض کنید a_{ij} میزان ورودی یک کالای معین i برای تولید خروجی واحد کالای j اختصاص داده شود. در مدل ما فرض می‌کنیم میزان ورودی و خروجی کالا با دلار اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین برای مثال $a_{۳۴} = ۰{,}۴۵$ به این معناست که ۴۵ نسبت ارزش کالای ۳ برای تولید ۱ دلار از کالای ۴ فراهم شده است.

$$a_{ij} = \text{میزان کالای } i \text{ در یک دلار از کالای } j$$

درایه‌های a_{ij} ضرایب ورودی نامیده می‌شوند که ماتریس A را تعریف می‌کند، ماتریس ورودی ـ خروجی نامیده می‌شود که وابستگی صنایع را توصیف می‌کند.

مثال ۱) ماتریس‌های ورودی ـ خروجی بین‌المللی برای توصیف‌کردن صنایع وابسته که جایگزین محصول اقتصاد کشورهاست استفاده می‌شوند. اکنون قسمتی از ماتریس راکه برای توصیف وابستگی اقتصاد ایالات متحدهٔ آمریکا در سال ۱۹۷۲ است را توصیف می‌کنیم. ساختار اقتصاد در حقیقت در میان ۷۹ محصول قرار دارد. بنابراین یک ماتریس ۷۹ × ۷۹ است. البته ما نمی‌توانیم کل ماتریس را نشان دهیم. ما ۱۰ بخش را در اختیار خواننده قرار می‌دهیم که با طبقه‌بندی این ساختارکمی آشنا شود.

۱) محصولات دامی

۲) محصولات کشاورزی

۳) محصولات دریایی و جنگلی

۴) خدمات کشاورزی، جنگلی و دریایی

۵) استخراج آهن، سنگ معدن‌های آلیاژ آهن‌دار

۶) استخراج سنگ معدنی‌های فلزات غیرآهنی

۷) استخراج ذغال سنگ

۸) بنزین خام و سخت طبیعی

۹) استخراج خاک رس و سنگ و معدن سنگ

۱۰) استخراج آب معدنی حاصلخیز و شیمیایی

ماتریس A براساس این طبقه‌بندی‌ها عبارت است از

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱	۰٫۲۶۱۱۰	۰٫۰۲۴۸۱	۰	۰٫۰۵۲۷۸
۲	۰٫۲۳۲۷۷	۰٫۰۳۲۱۸	۰	۰٫۰۱۴۴۴
۳	۰	۰	۰٫۰۰۴۶۷	۰٫۰۰۲۹۴
۴	۰٫۰۲۸۲۱	۰٫۰۰۳۶۷۳	۰٫۲۵۰۲	۰٫۰۲۹۵۹
۵	۰	۰	۰	۰
۶	۰	۰	۰	۰
۷	۰	۰٫۰۰۰۰۲	۰	۰
۸	۰	۰	۰	۰
۹	۰٫۰۰۰۰۱	۰٫۰۰۲۵۱	۰	۰٫۰۰۰۳۴
۱۰	۰	۰٫۰۰۱۳۰	۰	۰
...	...	...	...	...

بنابراین، برای مثال $a_{۷۲} = ۰٫۰۰۰۰۲$ بر این نکته دلالت دارد که ۰٫۰۰۰۰۲ دلار از بخش استخراج معدن زغال سنگ (بخش ۷) به هر بخش از محصولات کشاورزی (بخش ۲)، یک دلار اختصاص یافته است.

اکنون مدلی که شامل یک بخش باز است را توسعه می‌دهیم. محصولات صنایع منجر به صنایع تولیدی دیگر می‌شوند، بلکه بخش‌هایی از اقتصاد غیرتولیدی از قبیل مصرف‌کننده‌ها و دولتها را شامل می‌شوند. تمامی چنین بخش‌های غیرتولیدی طبقه‌بندی می‌شوند به آنچه که بخش باز نامیده می‌شود. بخش باز اقتصادی در مدل بالا در سال ۱۹۷۲ در ایالات متحدهٔ آمریکا شامل خریدهای فدرال، ایالات و دولت مرکزی (محلی) می‌باشد.

تقاضای بخش باز از صنعت $d_i = i$

کل خرجی صنعتی i برای برخورد کردن با تقاضاهای تمامی n صنایع و بخش باز $x_i = a_{ij}$ میزان موردنیاز از صنعت i برای تولید خروجی واحد در صنعت j است. بنابراین $a_{ij}x_j$ می‌تواند میزان موردنیاز برای تولید x_j واحدهای خروجی در صنعت j می‌باشد. داریم:

$$\underbrace{x_i}_{\text{کل محصول صنعتی } i} = \underbrace{a_{i1}x_1}_{\text{تقاضای صنعتی ۱}} + \underbrace{a_{i2}x_2}_{\text{تقاضای صنعتی ۲}} + \cdots + \underbrace{x_{in}x_n}_{\text{تقاضای صنعتی } n} + \underbrace{d_i}_{\text{تقاضای صنعتی باز}}$$

این فرایند را به صورت یک دستگاه معادلات خطی نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2 1 \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + d_n \end{aligned}$$

این دستگاه معادلات را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

اجازه دهید به ما که نمادهای زیر را این چنین معرفی کنیم:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

اکنون دستگاه معادلات را می‌توان به عنوان یک ماتریس منفرد همراه با یک نتیجه‌گیری مهم نوشت:

$$X = AX + D$$

زمانی که این مدل برای صنعت یک کشور به کار گرفته می‌شود، X نشان دهندهٔ کل خروجی هر کدام از بخشهای تولیدی اقتصادی و AX نیازمندیهای ورودی اقتصادی را توصیف می‌کند. D مساوی است با

$(X - AX)$. یعنی اختلاف میان خروجی کل و معادله صنعتی AX. بنابراین D ناخالصی محصولات ملی اقتصادی است در عمل معادلهٔ $X = AX + D$ به روشهای مختلفی به کار گرفته می‌شود که به متغیرهای شناخته شده (معلوم) و شناخته نشده (مجهول) بستگی دارد. برای مثال یک محقق که جویای تعیین کردن دلیل و مفهوم تغییر در خریدهای دولتی یا تقاضاهای مصرف کننده است با توجیه اقتصادی A و D، حل معادله برای X را ارائه می‌دهد. این معادله می‌تواند در این روش استفاده شود از طریق پیش‌بینی مقدار خروجی از هر بخش که نیازمند به دست‌یابی GNP_sهای مختلف می‌باشد. (مثال ۲، که در پایین می‌آید کاربرد این مدل را نشان می‌دهد) از سوی دیگر، یک اقتصاد دادن می‌داند محدودیت ظرفیت تولیدی یک دستگاه اقتصادی توصیف شده با A و X را معلوم فرض خواهد کرد و پیش‌بینی مقدار ماکزیمم GNP حل دستگاه معادله برای D را امکان‌پذیر می‌کند.

مثال ۲) یک اقتصاد شامل سه صنعت که دارای ورودی ـ خروجی ماتریس A است را ملاحظه کنید (فرض کنیم) ترازهای خروجی موردنیاز این صنایع برای مواجه شدن با نیازها و تقاضاهای صنایع دیگر و هم‌چنین بخش باز در هر وضعیت را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 32 \end{bmatrix}$$

هر واحد D یک میلیون دلار است.

حل: می‌خواهیم تراهای خروجی X متناظر با تقاضاهای بخش‌های باز مختلف D را محاسبه نمائیم. X با معادله $X = AX + D$ مشخص می‌شود که به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$X - AX = D$$

$$(1 - A)X = D$$

برای حل معادله X می‌توانیم از روش حذف گاوس جردن و یا روش ماتریس معکوس استفاده کنیم. در حل تمرین از روش ماتریس معکوس استفاده می‌شود. داریم:

$$X = (1 - A)^{-1}D$$

از این رابطه برای تعیین X وقتی A و D معلوم هستند استفاده می‌کنیم. برای ماتریس A چنین به دست می‌آید:

$$I - XA = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۳} & \frac{۳}{۱۰} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} & \frac{۱}{۵} & \frac{۳}{۱۰} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

$(۱ - A)^{-۱}$ با استفاده از روش حذفی گاوس ـ جردن محاسبه می‌شود.

$$(I - A)^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۵}{۸} \\ \frac{۵}{۳} & \frac{۸}{۳} & \frac{۵}{۸} \\ ۰ & ۰ & \frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

می‌توانیم به طور مؤثری $X = (I - A)^{-۱}D$ را برای هر سه مقدار D با تشکیل دادن ماتریسی که شامل سه مقدار D به عنوان ستون است محاسبه کنیم:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۵}{۸} \\ \frac{۵}{۳} & \frac{۸}{۳} & \frac{۵}{۸} \\ ۰ & ۰ & \frac{۴}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ & ۶ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۹ & ۱۸ \\ ۱۶ & ۸ & ۳۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۳ & ۲۱ & ۵۲ \\ ۵۷ & ۳۹ & ۸۸ \\ ۲۰ & ۱۰ & ۴۰ \end{bmatrix}$$

$$= (I - A)^{-۱}$$

ترازهای خروجی لازم با تقاضاها به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} ۹ \\ ۱۲ \\ ۱۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۶ \\ ۹ \\ ۸ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۸ \\ ۳۲ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۳۳ \\ ۵۷ \\ ۲۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲۱ \\ ۳۹ \\ ۱۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵۲ \\ ۸۸ \\ ۴۰ \end{bmatrix}$$

که این واحدها میلیونها دلار هستند.

۲-۱۳ نکته محاسباتی

آنالیزکردن این نوع معمولاً شامل بخشهای زیادی می‌شود که ماتریس‌های خروجی و ورودی را نشان می‌دهد. معمولاً قسمتی از محاسبات بزرگ شامل پیاده کردن مدل و نیازمند یک الگوریتم کارآمد است. (درایه‌های ماتریس ورودی ـ خروجی A معمولاً صفر یا خیلی ناچیز هستند.)

این مشخصه A منجر به یک روش عددی مناسب برای محاسبه $(I - A)^{-۱}$ می‌شود که باعث می‌شود روش ماتریس معکوس برای حل معادلهٔ دستگاه $(I - A)X = D$ کارآمدتر از روش گاوس ـ جردن شود استفاده کنیم، نتیجهٔ بهتری نسبت به حل گاوس‌ـ جردن می‌دهد.

حال این روش را برای محاسبهٔ $(I-A)^{-1}$ توضیح می‌دهیم. ضرب ماتریسی زیر را برای هر عدد صحیح و مثبت m درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned}(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^m) &= I(I+A+A^2+\cdots+A^m)\\ &\quad -A(I+A+A^2+\cdots+A^m)\\ &=(I+A+A^2+\cdots+A^m)\\ &\quad -(A+A^2+\cdots+A^m+A^{m+1})\\ &=I-A^{m+1}\end{aligned}$$

مؤلفه‌های توانهای متوالی A سریعاً کوچک شده و A^{m+1} به ماتریس صفر نزدیک می‌شود بنابراین برای m مناسب بزرگ:

$$(I-A)(I+A+A^2+m+A^m)=I$$

که این نتیجه می‌دهد

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^m$$

از این عبارت در محاسبه کامپیوتری $(I-A)^{-1}$ استفاده می‌شود.

خوانندگانی که علاقمند به یافتن کاربردهای بیشتر این مدل هستند باید مقاله‌ی اقتصاد جهانی سال ۲۰۰۰ نوشتهٔ واسلی را بخوانند. این مقاله کاربرد این مدل در اقتصاد جهان را توضیح می‌دهد. این مدل، در آمریکا با پشتوانه‌های مخصوص مالی در دست اجرا بود.

در این مدل جهان به ۱۵ منطقه یا ناحیهٔ جغرافیایی مجزا که هر یک را یک ماتریس ورودی و خروجی یکتا می‌نامند تقسیم می‌شود. هر یک از این نواحی به یک ماتریس بزرگتر که برای این کار از مدل ورودی و خروجی استفاده می‌شود، مرتبط می‌شود. کلاً بیشتر از ۲۰۰۰ بخش اقتصادی این مدل را شامل می‌شوند. از میان مقدارهای مختلف ورودی، اقتصاددان‌ها می‌توانند وضعیت اقتصادی آینده را حدس بزنند یا بسازند.

تمرینات

۱) ماتریس ورودی ـ خروجی زیر را که وابسته به ۵ صنعت است درنظر بگیرید:

	۱	۲	۳	۴	۵
خودکار (۱)	۰٫۱۵	۰٫۱۰	۰٫۰۵	۰٫۰۵	۰٫۱۰
فولاد (۲)	۰٫۴۰	۰٫۲۰	۰٫۱۰	۰٫۱۰	۰٫۱۰
الکتریسیته (۳)	۰٫۱۰	۰٫۲۵	۰٫۲۰	۰٫۱۰	۰٫۲۰
زغال سنگ (۴)	۰٫۱۰	۰٫۲۰	۰٫۳۰	۰٫۱۵	۰٫۱۰
شیمیایی (۵)	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۰۵	۰٫۰۲	۰٫۰۵

تعیین کنید:

الف) میزان الکتریسیتهٔ مصرفی برای تولید یک دلار از فولاد

ب) میزان فولاد مصرفی در تولید یک دلار خودکار صنعتی

ج) بزرگترین مصرف کنندهٔ زغال سنگ

د) بزرگترین مصرف کنندهٔ الکتریسیته

ه) صنعتی که در صنعت خودکار بزرگترین وابسته است.

در تمرین‌های ۲ تا ۶ اقتصادهایی را درنظر بگیرید که شامل ۲ یا ۳ صنعت باشند. ترازهای خروجی موردنیاز برای هر کدام از صنعت‌ها برای مواجه شدن با مطالعات دیگر صنایع و بخش باز را محاسبه کنید.

۲) درگردش

$$A = \begin{bmatrix} ۰٫۲۰ & ۰٫۶۰ \\ ۰٫۴۰ & ۰٫۱۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} ۲۴ \\ ۱۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۸ \\ ۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$$

۳) درگردش

$$A = \begin{bmatrix} ۰٫۱۰ & ۰٫۴۰ \\ ۰٫۳۰ & ۰٫۲۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱۸ \\ ۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲۴ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$$

۴)

$$A = \begin{bmatrix} ۰٫۳۰ & ۰٫۶۰ \\ ۰٫۳۵ & ۰٫۱۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} ۴۲ \\ ۸۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۴۳ \\ ۴۲ \end{bmatrix}$$

۵)

$$A = \begin{bmatrix} ۰٫۲۰ & ۰٫۲۰ & ۰٫۱۰ \\ ۰ & ۰٫۴۰ & ۰٫۲۰ \\ ۰ & ۰٫۲۰ & ۰٫۶۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۸ \\ ۸ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۸ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

و $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۲۴ \\ ۸ \end{bmatrix}$ درگردش

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۲۰ & ۰/۲۰ & ۰ \\ ۰/۴۰ & ۰/۴۰ & ۰/۶۰ \\ ۰/۴۰ & ۰/۱۰ & ۰/۴۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} ۳۶ \\ ۷۲ \\ ۳۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳۶ \\ ۰ \\ ۱۸ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳۶ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۸ \\ ۱۸ \end{bmatrix}$ درگردش.

در تمرین‌های ۷ تا ۹ اقتصادهایی را درنظر بگیرید که شامل ۲ یا ۳ صنایع باشند. ترازهای خروجی صنایع داده شده‌اند. میزان دسترسی برای بخش باز از هر صنعت را معین کنید.

۶) $X = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۰/۲۰ & ۰/۴۰ \\ ۰/۵۰ & ۰/۱۰ \end{bmatrix}$

۷) $X = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۲۰ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۰/۱۰ & ۰/۲۰ & ۰/۳۰ \\ ۰ & ۰/۱۰ & ۰/۴۰ \\ ۰/۵۰ & ۰/۴۰ & ۰/۲۰ \end{bmatrix}$

۸) $X = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۰/۱۰ & ۰/۱۰ & ۰/۲۰ \\ ۰/۲۰ & ۰/۱۰ & ۰/۳۰ \\ ۰/۴۰ & ۰/۳۰ & ۰/۱۵ \end{bmatrix}$

۹) فرض کنید a_{ij} درایه دلخواه از ماتریس ورودی ـ خروجی باشد. چرا شما انتظار دارید a_{ij} باید در شرط $۰ \leq a_{ij} \leq ۱$ صدق کند؟

۱۰) در اقتصاد این احتمال وجود دارد که مجموع درایه‌های هر ستون از ماتریس ورودی ـ خروجی کمتر یا مساوی یک شود. علت این مورد را توضیح دهید.

۲-۱۴ جنبش‌های آماری و ژنتیکی ـ زنجیرهٔ مارکوف

ماتریس‌های خاصی، که ماتریس‌های تصادفی نامیده می‌شود در مطالعه پدیده تصادفی مهم می‌باشند به طوری که این پیامد دقیقاً شناخته شده نیست بلکه احتمالات می‌توانند تعیین شوند. در این بخش، ما ماتریس‌های تصادفی را معرفی می‌کنیم و بعضی از خواص‌شان را استخراج می‌نمائیم و مثالهایی از

کاربردهایشان را می‌آوریم. یک مثال تحلیلی از جنبش جمعیت میان شهرها و حومه شهرها در ایالات متحده می‌باشد. مثال دوم بیانگر استفاده از ماتریس‌های تصادفی در ژنتیک می‌باشد.

در این زمان، ما به خواننده بعضی از ایده‌های احتمالاتی را یادآور می‌شویم. اگر پیامد هر واقعه این باشد که مطمئناً رخ دهد، ما می‌گوئیم که احتمال این پیامد ۱ است. از طرف دیگر، اگر آن واقعه رخ ندهد، ما می‌گوئیم احتمال آن ۰ است. احتمالات دیگر توسط کسرهایی میان ۰ و ۱ نمایش داده می‌شود: بزرگتر سر، بزرگترین احتمال P از رخ دادن پیامد را دارد. بنابراین احتمال P به فاصله $۰ \leq P \leq ۱$ محدود می‌شود.

اگر هر یک از n پیامدهای به طورکامل مستقل از هم به نسبت مساوی رخ دهند، و اگر m تا از این پیامدها مطلوب ما باشد، آنگاه احتمال P که یکی از این پیامدها رخ خواهد داد با کسر $\frac{m}{n}$ تعریف می‌شود. به عنوان یک مثال، واقعه کشیدن یک ورق تکی از ۵۲ ورق بازی را درنظر بگیرید. احتمال این که نتیجه این پیامد یک آس یا شاه باشد چقدر است؟ اول از همه می‌بینیم که ۵۲ پیامد ممکن وجود دارد. ۴ آس و ۴ شاه در بسته وجود دارند: ۸ پیامد جالب وجود دارد. بنابراین احتمال کشیدن یک آس یا یک شاه برابر است با $\frac{۸}{۵۲}$ یا $\frac{۲}{۱۳}$. ما اینک ماتریس‌هایی را معرفی می‌کنیم که درایه‌هایشان احتمالات می‌باشند.

۲-۱۴-۱ تعریف: یک ماتریس تصادفی یک ماتریس مربعی است که درآیه‌هایشان احتمالات می‌باشند و جمع ستون‌هایشان ۱ می‌شوند. ماتریس‌های زیر ماتریس‌های تصادفی هستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۴} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۸} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های زیر ماتریس‌های تصادفی نیستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ \frac{۳}{۴} & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها در اولین ستون برابر ۱ نیست.

۲ موجود در اولین ردیف یک احتمال نیست زیرا از ۱ بزرگتر است.

یک ماتریس ۲×۲ تصادفی به طورکلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ ۱-x & ۱-y \end{bmatrix}$$

که در آن $۰ \leq x \leq ۱$، $۰ \leq y \leq ۱$.

ماتریس‌های تصادفی دارای خواص مفید زیر هستند (خواننده این نتیجه را برای ماتریس‌های ۲ × ۲ تصادفی در تمرینات اثبات می‌کند.)

۲-۱۴-۲ قضیه: اگر A و B ماتریس‌های تصادفی هم‌اندازه باشند (یکسان باشند) آنگاه AB نیز ماتریس تصادفی است. بنابراین اگر A تصادفی باشند آنگاه $A^۲, A^۳, A^۴, \ldots$ همگی تصادفی هستند.

مثال ۱: این مثال یک ماتریس تصادفی را توصیف می‌کند که در آنالیزکردن سطح مرکزی شهر تورنتو در دورهٔ زمانی ۱۹۶۲-۱۹۵۲ استفاده شده است.

محققان داده‌ها و اطلاعات را به فرم ماتریس تصادفی P جمع‌آوری و سپس نوشتند. سطرها و ستون‌های P نمایانگر استفاده‌های زمینی هستند. مؤلفه p_{ij} احتمال سطحی است که در j در سال ۱۹۵۲ استفاده می‌شده است و یا احتمال i است که در سال ۱۹۶۲ استفاده شده است.

استفاده در سال ۱۹۵۲

استفاده	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
تراکم پایین محلی	۰٫۲۵	۰٫۰۱	۰٫۰۱	۰٫۰۱	۰٫۰۸	۰٫۰۰	۰٫۰۲	۰٫۰۰	۰٫۰۲	۰٫۰۳
تراکم بالای محلی	۰٫۰۸	۰٫۱۸	۰٫۰۲	۰٫۰۳	۰٫۰۵	۰٫۰۰	۰٫۰۱	۰٫۰۷	۰٫۴۱	۰٫۳۴
اداری	۰٫۰۳	۰٫۱۴	۰٫۰۲	۰٫۰۲	۰٫۱۴	۰٫۱۱	۰٫۰۹	۰٫۴۳	۰٫۰۵	۰٫۱۰
تجارت اصلی	۰٫۰۳	۰٫۰۴	۰٫۰۳	۰٫۱۲	۰٫۰۸	۰٫۰۷	۰٫۳۰	۰٫۰۵	۰٫۰۴	۰٫۰۱
تجارت خودکار	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۰۳	۰٫۰۳	۰٫۱۲	۰٫۷۰	۰٫۰۹	۰٫۰۱	۰٫۰۰	۰٫۰۱
پارکینگ	۰٫۱۵	۰٫۳۹	۰٫۰۸	۰٫۱۱	۰٫۳۹	۰٫۰۶	۰٫۲۷	۰٫۲۸	۰٫۰۴	۰٫۲۲
خانه‌های فروشی	۰٫۲۲	۰٫۰۳	۰٫۱۸	۰٫۳۸	۰٫۰۴	۰٫۰۰	۰٫۱۵	۰٫۰۴	۰٫۰۰	۰٫۰۳
صنعت	۰٫۱۳	۰٫۰۳	۰٫۶۱	۰٫۲۱	۰٫۰۰	۰٫۰۱	۰٫۰۸	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۲
انتقال	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰	۰٫۰
حمل و نقل	۰٫۰۰	۰٫۰۸	۰٫۰	۰٫۰۱	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۱	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
بیکار اشتغال نشده	۰٫۰۶	۰٫۸۸	۰٫۰۲	۰٫۰۸	۰٫۰۹	۰٫۰۵	۰٫۰۸	۰٫۰۲	۰٫۴۴	۰٫۰۸

یکی از اطلاعات به دست آمده از این ماتریس را تفسیر می‌کنیم. برای مثال $p_{۶۳} =$ ۰٫۲۸ این احتمال بیانگر این است که سطح فضای دفتر در سال ۱۹۵۲ دارای احتمال ۰٫۲۸ از ناحیهٔ پارک شده در سال ۱۹۶۲ است.

حال ماتریس‌های احتمالی را مشخص می‌کنیم و تعدادی از مشخصه‌های آن را ثابت می‌کنیم. حال برای کاربردهای آن مثالهایی را بیان می‌کنیم.

مثال ۱) آنالیز جنبش آماری بین شهرها و حومهٔ آنها در آمریکا

مثال ۲) استفاده از ماتریس‌های احتمالی در ژنتیک.

حال تعداد نظریه‌های پایه‌ای احتمال را بیان می‌کنیم. اگر نتیجهٔ یک رخداد مطمئناً اتفاق بیفتد می‌گوییم احتمال اتفاق افتادن آن یک می‌باشد. از سوی دیگر اگر اتفاق نیفتد می‌گوییم احتمال آن صفر است. احتمالات دیگر بین صفر و یک هستند. بنابراین برای احتمال P داریم $۰ \leq P \leq ۱$.

اگر تعداد کل احتمالهای موجود n باشد و m تا از آنها اتفاق بیفتد احتمال P را به صورت جز $\frac{m}{n}$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فرض کنیم احتمال کشیدن یک کارت واحد از یک جعبه بازی ۵۲ کارتی را داریم. چقدر احتمال دارد که کارت خارج شده تک (آس) یا شاه باشد؟

ابتدا می‌بینیم که ۵۲ حالت برای خارج کردن کارت داریم. ۴ حالت برای تک کارتها و ۴ حالت برای شاه‌ها داریم ۸ حالت داریم. بنابراین احتمال تک آمدن یا شاه آمدن $\frac{۸}{۵۲}$ یا $\frac{۲}{۱۳}$ است.

حال ماتریس را می‌سازیم که عناصرش این احتمالات باشد.

سطر ششم احتمال نواحی مختلف شهر که دارای نواحی پارکینگ هستند. در سال ۱۹۶۲ نشان می‌دهد. این وابستگی ارقام بزرگ افزایش متقابل نقش پارکینگ در سطح را آشکار می‌سازد.

درایه‌های قطری سطح مورد استفاده باقیمانده در طبقهٔ یکسان را می‌دهد. برای مثال $P_{۷۷} = ۰/۳۸$ احتمال خانه‌های فروشی باقیمانده در سطح هستند. نسبت اعداد بزرگ این مؤلفه‌های قطری تمایل برای باقیماندهٔ همان طبقه عریض مورد استفاده را منعکس می‌کند. حمل و نقل و فاضلاب‌های خالی استثنائات هستند.

نکتهٔ جالب توجه این است که $P_{۱۰۲} = ۰/۴۴$ این عدد، احتمال سطحی است که تراکم مراکز مسکونی در سال ۱۹۵۲ است که در سال ۱۹۶۲ این سطح اشغال نشده است. این سطح برای مرکز شهر تورنتو مفید است ولی دیر کاربرد است.

خوانندگانی که بر ادامه‌ی این آنالیز علاقه دارند تشویق به خواندن مقاله‌ای که این ماتریس از آن سرچشمه گرفته است می‌شوند که نام آن «مراحل تطبیقی فیزیکی و سطح جانشینی (در تورنتو)» تالیف لاری اس بورنی جغرافیای اقتصاد ۴۷ـ شمارهٔ ۱ ژانویه ۱۹۷۱ صفحات ۱ تا ۱۵ است.

مثال ۲) در این مثال یک مدل جنبش جمعیت بین شهرها و حومه شهرهای آمریکا را توسعه می‌دهیم فرض می‌کنیم تعداد جمعیت در شهر آمریکا در سال ۲۰۰۰، ۵۸ میلیون است و جمعیت در حومه‌ی این شهر ۱۴۲ میلیون است. این اطلاعات را با ماتریس $X_۰ = \begin{bmatrix} ۵۸ \\ ۱۴۲ \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید جمعیت

از سمت شهرها به حومه‌های اطراف سرازیر می‌شود. در طول سال ۲۰۰۰ احتمال شخص باقی مانده در شهر ۰/۹۶ بود. بنابراین مهاجرت به حومه‌ها ۰/۰۴ بوده است. (فرض کنید تمام این مهاجرتها به سوی حومه‌ها باشد.)

اکنون فرض کنید معکوس جمعیت از حومه به شهر سرازیر شده است. احتمال شخص آمده به شهر ۰/۰۱ و احتمال باقیمانده به حومه ۰/۹۹ است. این احتمال به عنوان درایه‌های تصادفی ماتریس P به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{array}{ccc} & \text{شهر} \quad \text{حومه} & \\ P = & \begin{bmatrix} ۰/۹۶ & ۰/۰۱ \end{bmatrix} & \text{شهر} \\ P = & \begin{bmatrix} ۰/۰۴ & ۰/۹۹ \end{bmatrix} & \text{حومه} \end{array}$$

احتمال رفتن از محل A به محل B با درایه ستون A و سطر B داده شده است. این مورد از ماتریس تصادفیی احتمال تغییر وضعیت نامیده می‌شود.

اکنون توزیع جمعیت در سال ۲۰۰۱ یک سال بعد را درنظر بگیرید.

افرادی که به حومه‌ها رفتند + افرادی که از سال ۲۰۰۰ باقی ماندند = جمعیت شهر در سال ۲۰۰۱

$$(۰/۰۱ \times ۱۴۲) + (۰/۹۶ \times ۵۸) = ۵۷/۱ \text{ میلیون}$$

افرادی که در سال ۲۰۰۰ ماندند+ افرادی که از شهر آمدند = جمعیت حومه در سال ۲۰۰۱

$$(۰/۹۹ \times ۱۴۲) + (۰/۰۴ \times ۵۸) = ۱۴۲/۹ \text{ میلیون}$$

توجه کنید که ما می‌توانیم با استفاده از ماتریس حاصلضرب به این ارقام دست یابیم:

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۶ & ۰/۰۱ \\ ۰/۰۴ & ۰/۹۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵۸ \\ ۱۴۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۷/۱ \\ ۱۴۲/۹ \end{bmatrix}$$

از سال ۲۰۰۰ به عنوان پایه استفاده می‌کنیم. فرض کنید X_1 جمعیت در سال ۲۰۰۱ باشد یک سال بعد. می‌توانیم بنویسیم: $X_1 = PX_0$.

فرض کنید جمعیت نشان داده شده با ماتریس P بالای چند سال غیرقابل تغییر باشد.

توزیع جمعیت X_2 بعد از ۲ سال داده شده است $X_2 = PX_1$.

بعد از سه سال توزیع جمعیت این چنین است $X_3 = PX_2$.

بعد از n سال داریم: $X_n = PX_{n-1}$.

پیش گویی‌های این مدل (تا چهار رقم اعشار) به صورت زیر هستند و به همین ترتیب

$$X_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 57/1 \\ 142/9 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 56/245 \\ 143/755 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 55/4327 \\ 144/5672 \end{bmatrix} \qquad X_4 = \begin{bmatrix} 54/6611 \\ 145/3389 \end{bmatrix}$$

و غیره.

مشاهده می‌کنیم که چگونه جمعیت شهرها سالانه رو به کاهش است. در حالی که جمعیت افراد در حومه‌ها رو به افزایش است. به این مدل در بخش ۲ـ۶ رجوع می‌کنیم. بنابراین دنباله‌ای $X_0, X_1, X_2, \ldots$ را یافتیم که به سمت $\begin{bmatrix} 40 \\ 160 \end{bmatrix}$ میل می‌کند. اگر شرایط تغییر نکند، جمعیت شهر به تدریج به ۴۰ میلیون می‌رسد و جمعیت حومه به ۱۶۰ میلیون می‌رسد. به‌علاوه توجه کنید که دنبالهٔ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ به طور مستقیم از X_0 محاسبه می‌شود مانند زیر:

$$X_1 = PX_0 \qquad X_2 = P^2 X_0 \qquad X_3 = P^3 X_0 \ldots X_n = P^n X_0$$

ماتریس P^n یک ماتریس تصادفی از X_0 به سوی X_n در n مرحله است. این نتیجه می‌تواند کلی باشد که P^n در این حالت برای توزیع n مرحلهٔ بعد از هر توزیع داده شده و نیز پیش‌بینی شود.

$$X_{i+n} = P^n X_i$$

P^n ماتریس تغییر وضعیت n مرحله‌ای نامیده می‌شود. (i, j) مؤلفه‌ای از P^n می‌باشد که احتمال به دست آمده از مرحلهٔ jام به مرحلهٔ iام در n مرحله است. به عنوان مثال می‌توانیم ۲ رقم اعشار در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{lcc} & \text{شهر} & \text{حومه} \\ \text{شهر} \quad P^4 = & [\,0/85 & 0/04\,] \\ \text{حومه} \quad P^4 = & [\,0/15 & 0/96\,] \end{array}$$

بنابراین، احتمال زندگی در شهر در سال ۲۰۰۰ و احتمال بودن در حومه‌ها ۴ سال بعد ۰/۱۵ می‌باشد.

احتمالات در این مدل فقط به ثابت بودن تکرار افرادی که در شهر و حومه زندگی می‌کنند بستگی دارد. این مدل که احتمالاتش یکی پس از دیگری است مدلی رایج‌تر نسبت به نسخهٔ تاریخی کامل آن است، و

زنجیرهٔ مارکوف نامیده می‌شود. یک تغییر و تحول که برای آمار سالانه رشد یا کاهش جمعیت است به طور تخمینی از توزیع آماری آینده توسعه می‌یابد. خواننده ساخت این عامل را در تمرینها اثبات می‌کند. این مفهوم می‌تواند مراحل نظریه مارکوف را بیشتر از دو بیانیه توسعه دهد. مثال زیر زنجیرهٔ مارکوف را در سه بیانیه توضیح می‌دهد.

مثال ۳) زنجیرهٔ مارکوف ابزار مهمی برای دانشمندان در بسیاری از رشته‌ها مانند ژنتیک است. ژنتیک شاخه‌ای از زیست‌شناسی است که با وراثت سروکار دارد. ژنتیک مطالعه واحدهای ژنی است که تعیین کنندهٔ صفات موجودات زنده که از والدین به ارث رسیده است می‌باشد. وراثت این گونه صفات مثل جنسیت، قد، رنگ چشم، رنگ موی انسانها به وسیلهٔ ژنها مدیریت می‌شود. به دلیل این که بسیاری از بیماریها ارثی هستند. ژنتیک در پزشکی و نیز در علم کشاورزی اهمیت دارد، تولیدمثل کردن براساس ژنهای مهمی است که هم در گیاهان و هم در تولید مثل حیوانات وجود دارد صورت می‌گیرد. دانهٔ گیاهان پیوندی به عنوان مهمترین کمک کننده به ژنها برای افزایش محصول (مواد) غذایی است. در مورد یک مدل ریاضی برای آنالیز کردن رفتار اختصاصی یک جفت از ژنها بحث می‌کنیم. مفاهیمی را که شامل یک جفت خوک گینه‌ای است را شرح می‌دهیم. رفتارهای که می‌بایست در خوکهای گینه‌ای مطالعه کنیم آنهایی‌اند که دارای خصوصیت مو بلندی و موکوتاهی‌اند. طول مو متوسط یک جفت ژن که با علامت A و a مشخص می‌شود هدایت می‌شود. یک خوک گینه‌ای ممکن است دارای یکی از ترکیبات AA، AO و یا aa باشد هرکدام از این حالت‌ها به ژنوتایپ (معرف و نمایندهٔ یک جنس از موجودات دارای صفات مشابهٔ ارثی) معروفند. انواع خوکهای گینه‌ای که حاوی ژن AA می‌باشند. از نظر ظاهری از انواع Aa قابل تمایز نیستند در صورتی که خوکهایی که از نوع aa هستند با موهای کوتاه می‌باشند ژن A گفته می‌شود که به ژن a غالب است یک حیوان را زمانی غالب گویند که دارای ژن AA باشد و هیبرید (دوتایی) به آنهایی گفته می‌شود که ژن Aa را دارند و آنهایی که قد aa دارند مغلوب‌اند یک جمعیت خوک گینه‌ای را درنظر بگیرید. پس با AA، Aa، aa و با AA آمیزش می‌دهیم احتمال نتیجه زاد و ولد Aa، aa، یا AA درکدام از حالت‌ها چیست؟

آمیزش AA را با AA درنظر بگیرید، بنابراین باید از نوع AA باشد. بنابراین احتمالات AA، Aa، aA به ترتیب به صورت $1, 0, 0$ خواهد بود. همه زاد و ولدها دارای موی بلند هستند. در مرحلهٔ بعد آمیزش Aa را با AA تصورکنید، که یک ژن از هر والد احتمال A را می‌گیرد، A (با گرفتن A از والد اول و هر A به نوبت از والد دوم).

Aa و aA (با گرفتن a از والد اول و هر A به نوبت از والد دوم). بنابراین احتمالات AA، Aa، aa به ترتیب برابر با $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ و 0 می‌باشند. دوباره، تمام زاد و ولدها با موهای بلند هستند. سرانجام آمیزش بین aa و

AA فقط با یک احتمال وجود دارد که آن aA نام دارد. بنابراین احتمالات AA، Aa، Aa به ترتیب برابر با ۱۰۰ و ۰ می‌باشند. همهٔ نتایج حاصل از این آزمایشها دارای موهای بلند هستند و این سری از آزمایشها زنجیرهٔ مارکوف که دارای ماتریس جابه‌جایی است می‌باشد و به شکل زیر است:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

فرض کنید جمعیت اولیهٔ خوک‌های گینه‌ای از عددی مساوی با هر ژنوتایپ ساخته شده باشد. فرض کنید توزیع اولیه برابر با $x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ باشد، کسر خوک‌های گینه‌ای از هر نوع اولیه را دوباره نمایش می‌دهیم. اجزا x_1، x_2، x_3، ... به ترتیب کسرهایی از نسل‌های زیر را خواهند داد که از نوع AA، Aa و a می‌باشند. داریم:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{16} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

و غیره. مشاهده می‌کنید که نوع aa بعد از نسل اول ظاهر می‌شود و آن که نوع Aa کسر کوچکتر و کوچکتر از هر نسل بعدی می‌شود. این دنباله را در حقیقت به صورت یک ماتریس نمایش می‌دهیم: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ژنوتایپ AA در این مدل حالت جذبی نامیده می‌شود.

ملاحظه کردید که حالتی از زاد و ولد یک حیوان چیره دست را ارائه کردیم. خواننده در این قسمت مدلی مشابه با مدل قبلی با یک هیبرید در تمرین‌هایی که در زیر می‌آید را توصیف می‌کند. در این سری از آزمایشها بعضی از زاد و ولدها با موهای بلند و بعضی از آنها با موهای کوتاه می‌باشند.

تمرینات

۱) با ذکر دلیل ماتریس‌های تصادفی و غیرتصادفی را مشخص کنید.

الف) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 12 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

۲) ثابت کنید که ضرب دو ماتریس 2×2 تصادفی یک ماتریس تصادفی است.

۳) یک ماتریس تصادفی که مجموع سطرهای آن یک است ماتریس تصادفی دوبل نامیده می‌شود. مثالی برای ماتریس‌های تصادفی دوبل 2×2، 3×3 بیاورید آیا ضرب در ماتریس‌های تصادفی دوبل ماتریس تصادفی دوبل است؟

۴) با استفاده از ماتریس تصادفی مثال ۱ در این بخش سئوالهای زیر را پاسخ دهید.

الف) احتمال این که سطح مورد استفاده برای صنعت در سال ۱۹۵۲ مورد استفاده برای دفاتر در سال ۱۹۶۲ باشد چقدر است؟

ب) احتمال این که سطح مورد استفاده برای پارکینگ در سال ۱۹۵۲ در ناحیهٔ تراکم بالای محلی در سال ۱۹۶۲ باشد چیست؟

ج) سطوح اشغال نشده در سال ۱۹۵۲ بیشترین احتمال را داراست و دارای چه نوع سطحی در سال ۱۹۶۲ است؟

د) در دورهٔ زمانی ۱۹۶۲-۱۹۵۲ بیشترین استفاده پایا از سطوح کدام است؟

۵) در مدل مثال ۲ عبارتهای زیر را معین کنید.

الف) احتمال رفتن از شهر به حومه در ۲ سال؟

ب) احتمال رفتن از حومه به شهر در ۳ سال؟

۶) مدلی از جمعیت بسازید که از نواحی مرکزی و غیرمرکزی آمریکا روانه می‌شوند. به طوری که جمعیت آنها در ۲۰۰۰، به ترتیب ۲۰۰ میلیون و ۶۰ میلیون داده شده است. احتمالات با ماتریس زیر داده شده است:

	غیرمرکزی	مرکزی
مرکزی	۰٫۰۲	۰٫۹۹
غیرمرکزی	۰٫۹۸	۰٫۰۱

توزیعات جمعیتی از نواحی مرکزی و غیرمرکزی برای سالهای ۲۰۰۲ تا ۲۰۰۵ (برحسب میلیون تا چهار رقم اعشار) پیشنهاد کنید. اگر شخصی در ناحیه مرکزی در حال زندگی کردن در سال ۲۰۰۰ باشد احتمال این که شخص هنوز در ناحیه مرکزی در سال ۲۰۰۵ زندگی کند چقدر است؟

۷) مدل از جمعیت که میان شهرها، حومه‌ها و نواحی غیرمرکزی آمریکا روانه می‌شوند را بسازید جمعیت آنها در سال ۲۰۰۰، به ترتیب ۵۸ میلیون، ۱۴۲ میلیون و ۶۰ میلیون است.

ماتریس تصادفی احتمالات این مهاجرتها به صورت زیر است:

(به)	غیر مرکز	حومه	شهر
شهر	۰٫۰۱۵	۰٫۰۱	۰٫۹۶
حومه	۰٫۰۰۵	۰٫۹۸	۰٫۰۳
غیرمرکزی	۰٫۹۸	۰٫۰۱	۰٫۰۱

این مدل مناسب‌تر از مدل قبل در تمرین قبلی است که جمعیت مرکزی نیز داده شده بود. و هم‌چنین این مدل کاملتر از مثال ۲ در این بخش است که برای هر جمعیت خارج از شهر و حومه کاربرد دارد. جمعیت شهر، حومه و نواحی غیرمرکزی در سال ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را پیشگویی کنید. اگر شخص در سال ۲۰۰۰ در شهر زندگی کند احتمال این که این شخص در سال ۲۰۰۲ در نواحی غیرمرکزی زندگی کند چقدر است؟

۸) در دورهٔ زمانی ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۰ کل جمعیت آمریکا یک درصد در سال افزایش می‌یافت. فرض کنید جمعیت سالانه در طول ۱ درصد به سرعت افزایش یابد. عاملی از مدل مثال ۲ بسازید و جمعیت شهر و حومه را در سال ۲۰۰۵ پیشگویی کنید.

۹) فرض کنید جمعیت شهرها در آمریکا با توجه به تولدها، مرگها و مهاجرتها ۱٫۲ درصد در دورهٔ زمانی ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۵ افزایش یابد و جمعیت حومه‌ها تا ۸ درصد که ناشی از این عاملهاست افزایش یابد. این افزایشها را در مدل مثال ۲ درنظر بگیرید و نیز جمعیت را برای ۲۰۰۵ پیشگویی کنید.

۱۰) مدل حرکت جمعیت بین شهرها و حومه‌های مثال ۲ در همین بخش را ملاحظه کنید. توزیع‌های جمعیت برای سال ۱۹۹۵ تا ۱۹۹۹ و از قبل برای سال ۲۰۰۰ تعیین کنید. آیا زنجیره از سال ۲۰۰۰ به زنجیرهٔ گذشتهٔ مارکوف می‌رود؟ خصوصیتهای ماتریسی که از یک توزیع به توزیع گذشته می‌باشد چیست؟

۱۱) ماتریس تصادفی زیر که احتمالات گذار شغلی می‌باشد داده شده است:

		نسل اولیه	
		دستی	کارمند دفتری
نسل بعد	کارمند دفتری	۰٫۲	۱
	دستی	۰٫۸	۰

الف) اگر پدر کارمند دستی باشد احتمال این که پسر کارمند دفتری باشد چقدر است؟

ب) اگر ۱۰٫۰۰۰ طبقهٔ کارمند دفتری و ۲۰٫۰۰۰ طبقهٔ کارمند دستی وجود داشته باشند، توزیع احتمال نسل بعد چقدر خواهد بود.

۱۲) ماتریس زیر احتمالات گذار شغلی را نشان می‌دهد.

		کشاورزی	غیرکشاورزی
(نسل بعد)	غیرکشاورزی	۰٫۴	۱
	کشاورزی	۰٫۶	۰

الف) اگر پدر کشاورز باشد احتمال این که پسر کشاورز باشد چقدر است؟

ب) اگر ۱۰٫۰۰۰ طبقهٔ غیرکشاورز و ۱۰۰۰ طبقهٔ کشاورز از یک زمان معین وجود داشته باشد توزیع نسل بعد چقدر خواهد بود؟ چهار نسل بعد چطور؟

ج) اگر پدر کشاورز باشد احتمال این که نوهٔ کشاورز باشد چقدر است؟

۱۳) یک بازار خرید ماشین در یک منطقه معین وجود دارد که خانواده‌ای به طور متوسط هر ۳ سال یک بار یک ماشین جدید از این بازار خریداری می‌کند الگوهای خرید به شکل ماتریس زیر است:

$$P = \begin{array}{c|cc} & \text{کوچک} & \text{بزرگ} \\ \hline \text{کوچک} & ٪۴۰ & ٪۸۰ \\ \text{بزرگ} & ٪۶۰ & ٪۲۰ \end{array}$$

مؤلفه‌های P مانند زیر تعیین می‌شوند:

ستون اول نمایانگر ماشینهای کوچک رایج است. ٪۸۰ قابل جایگزین کردن با ماشینهای کوچک است. ٪۲۰ با ماشین بزرگ، ستون دوم دلالت بر این نکته دار د که ٪۴۰ از ماشینهای بزرگ رایج است، جایگزین با ماشینهای کوچک خواهند شد. در حالی که ٪۶۰ قابل جایگزین شدن با ماشینهای بزرگ است. درایه‌های P به عنوان ماتریس تصادفی که در تعریف زنجیره مارکوف آمده است را بنویسد.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{40}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}$$

اگر ۴۰٫۰۰۰ ماشین کوچک و ۵۰٫۰۰۰ ماشین بزرگ در منطقه وجود داشته باشد پیش‌بینی شما در مورد توزیع ۱۲ سال دیگر چیست؟

۱۴) نتیجه‌ای از تجزیه و تحلیل گرایشات رای دادن در یک منطقه معین الگوهای موفقیت‌آمیز نسلهاست که با ماتریس P در زیر توصیف می‌شود.

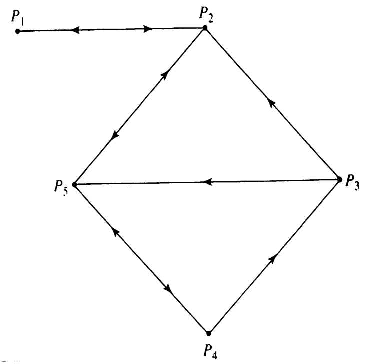
$$P = \begin{array}{c|ccc} & \text{دموکرات} & \text{جمهوری‌خواه} & \text{مستقل} \\ \hline \text{دموکرات} & ٪۶۰ & ٪۲۰ & ٪۸۰ \\ \text{جمهوری‌خواه} & ٪۳۰ & ٪۷۰ & ٪۱۵ \\ \text{مستقل} & ٪۱۰ & ٪۱۰ & ٪۵ \end{array}$$

در میان دموکرات‌های یک نسل ۸۰٪ از نسل بعد نیز دموکرات هستند. ۵۰٪ جمهوریخواه، ۵۰٪ خودمختار هستند و به همین ترتیب P را به عنوان یک ماتریس تصادفی بیان می‌کنیم که الگوهای رای دادن مدل زنجیره‌ای مارکوف است. اگر ۲٫۵ میلیون دموکرات ثبت‌نام شده، ۱٫۵ میلیون جمهوری‌خواه ثبت‌نام شده و ۰٫۲۵ خودمختار ثبت شده در یک زمان معین وجود داشته باشند. توزیع احتمالی نسل آینده چیست؟

۲-۱۵ یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه

بسیاری از شاخه‌های علوم فیزیک، علوم اجتماعی و تجارت از نظریه گراف برای تجزیه و تحلیل ارتباطات استفاده می‌کنند. به خواننده، این قسمت مهم از ریاضیات را که در جبر خطی از آن استفاده می‌شود با یک مثال از رشتهٔ ارتباطات، معرفی می‌کنیم.

یک شبکه ارتباطی که از ۵ قسمت تشکیل شده است و با $P_1, \ldots, P_s$ نامگذاری شده است را درنظر بگیرید. خطوطی که ایستگاه‌ها را به هم متصل می‌کند به صورت ارتباطات مستقیم می‌باشد و فلشها جهت این ارتباطات را نشان می‌دهند. برای مثال، ایستگاه P_1 و P_2 دو راه ارتباطی مستقیم دارند.



شکل ۲ـ۴

ایستگاه P_4 می‌تواند به P_1 پیام بفرستد از طریق ایستگاه‌های P_2 و P_3 یا به وسیلهٔ ایستگاه‌های P_5 و P_2. این شبکه ارتباطی یک مثال از یک دیگراف می‌باشد.

۲-۱۵-۱ تعریف: یک دیگراف مجموعه‌ای محدود از رأس‌های $P_1, P_2, \ldots, P_n$ می‌باشد که توسط کمان‌های مستقیم زوج‌هایی از رأس‌های مشخصی را به هم متصل می‌کند. مسیر بین رأسها حالتی

ازکمان‌هاست که به این مسیرها اجازه می‌دهد از یک رأس به رأس دیگر حرکت کند. طول این مسیر برابر با تعداد کمانها می‌باشد. مسیری به طول n، n مسیر نامیده می‌شود.

در شبکه ارتباطی بالا ۵ رأس وجود دارد به نام‌های $P_1, \ldots, P_s$. فرض کنیم علاقه‌مندیم تا پیامی را از P_1 به P_3 ارسال کنیم. از شکل می‌بینیم که مسیرهای مختلفی برای انتخاب وجود دارد. مسیر $P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3$ با طول ۲ (یک مسیر با طول ۲) وقتی که مسیر $P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_5 \longrightarrow P_3$ انتخاب شود طول ۳ است. (یک مسیر با طول ۳) مسیر $P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_5 \longrightarrow P_3$ با طول ۵ (یک مسیر با طول ۵) که از رأس ۳ دو بار استفاده شده است. این چنین مسیرها جالب خواهند بود اگر برای مثال P_3 بخواهد با P_5 و P_4 قبل از فرستادن پیام به P_1 هم‌فکر می‌کند. ما در این بخش کوتاه‌ترین مسیر را برای ارتباط برقرارکردن و فرستادن پیام از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر انتخاب کنیم.

شبکه‌های ارتباطی می‌توانند بسیار گسترده باشند و از ایستگاه‌های زیادی تشکیل شده باشند. این کار غیرعملی است برای این که اطلاعاتی را در مورد یک شبکهٔ بزرگ از نمودارها به دست آوریم. همانند آنچه که در بالا انجام داده‌ایم. در این نظریه ریاضی که در حال حاضر ارائه می‌دهیم استفاده از نظریه گراف، می‌تواند اطلاعاتی را در مورد شبکه‌های بزرگ به ما بدهد. این ریاضیات به وسیلهٔ کامپیوتر می‌تواند اجرا شود. یک دیگراف می‌تواند توسط ماتریس A تعریف شود که به آن ماتریس مجاورتی گویند.

این ماتریس از ۰ و ۱ تشکیل شده و به صورت ذیل تعریف می‌شود.

۲-۱۵-۲ تعریف: یک دیگراف را با رأس‌های $P_1, \ldots, P_n$ درنظر بگیرید ماتریس مجاورتی A به صورت زیر است:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک کمان از حلقه } P_i \text{ به } P_j \text{ داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ماتریس مجاورتی از شبکهٔ ارتباطی به این صورت می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای مثال $a_{12} = 1$ چون کمانی از P_1 به P_2 وجود دارد $a_{13} = 0$ چون کمانی از P_1 به P_3 وجود ندارد. شبکه کاملاً توسط ماتریس مجاورت توصیف می‌شود. این ماتریس یک تصویر ریاضی از شبکه است که

به کامپیوتر داده می‌شود. می‌توانیم طرح خلاصهٔ شبکه را که در شکل ۲ـ۴ داده شده است، مشاهده کنیم و در مورد بهترین فرستادن پیام از $P_۳$ به $P_۱$ تصمیم‌گیری نمائیم. چطور می‌توانیم این اطلاعات را از ماتریس مجاورت استخراج کنیم؟

قضیه زیر از نظریه گراف اطلاعاتی در مورد مسیرهای داخل دیگراف به ما می‌دهد.

۲-۱۵-۳ قضیه: اگر A یک ماتریس مجاورت از یک دیگراف باشد. فرض کنید $(a_{ij})^m$ درایه‌ای در سطر i و ستون j از ماتریس A^m باشد.

$$(a_{ij})^m = \text{تعداد } m \text{ مسیر از } P_i \text{ به } P_j$$

اثبات: یک دیگراف با n رأس را درنظر بگیرید. $a_{i۱}$ تعداد کمانها از P_i تا $P_۱$ و a_{ij} تعداد کمانها از $P_۱$ تا P_j است. بنابراین $a_{۱j}$ ، $a_{i۱}$ تعداد دو مسیر عبورکرده از P_i تا P_j است. خواهیم دید که با جمع همهٔ مسیرهای میانی، تعداد کل ۲ـمسیرهای از P_i به P_j عبارت است از:

$$a_{i۱}a_{۱j} + a_{i۲}a_{۲j} + \cdots + a_{in}a_{nj}$$

این درایه موجود در سطر i و ستون j از ماتریس $A^۲$ است. بنابراین $(a_{ij})^{(۲)}$ تعداد ۲ـمسیرهای از P_i به P_j است.

اکنون به سه مسیر توجه می‌کنیم. یک ۳ـمسیر همانند یک ۲ـمسیر با یک کمان تفسیر می‌کنیم. تعداد ۲ـمسیرهای از P_i به $P_۱$ با یک کمان از $P_۱$ به P_j برابر است با $(a_{ij})^{(۲)}a_{ij}$. با جمع همهٔ مسیرهای میانی خواهیم که کل تعداد ۳ـمسیرهای از P_i به P_j به صورت زیر است:

$$(a_{i۱}^{۲})a_j + (a_{i۲})^{(۲)}a_{۲j} + \cdots + (a_{in})^{(۲)}a_{nj}$$

این درایه در سطر i، ستون j از ماتریس حاصلضرب $A^۲A$ است که از $A^۳$ می‌باشد، بنابراین $(a_{ij})^{(۳)}$ تعداد ۳ـمسیرها از P_i به P_j می‌باشد.

با ادامهٔ این روند، می‌توانیم به یک ۴ـمسیر به عنوان یک ۳ـمسیر با یک کمال برسیم و به همین ترتیب. و در نهایت به نتیجه $(a_{ij})^{(۳)}$ که تعداد mـمسیرهای از P_i به P_j است می‌رسیم. اکنون کاربرد این قضیه را در شبکهٔ ارتباطی خودمان نشان می‌دهیم. توان‌های زنجیروار از ماتریس مجاورت در زیر نشان داده شده

است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad A^5 = \ldots$$

اجازه دهید به ما که از این ماتریس‌ها برای بحث بر روی مسیرهایی از P_4 تا P_1 استفاده کنیم.

ارتباط مستقیم وجود ندارد. A، $a_{41} = 0$ را می‌دهد. ۲ـمسیرهای از P_4 به P_1 وجود ندارد. A^2، $a_{41}^{(2)} = 0$ را می‌دهد. دو مسیر متمایز ۳ـمسیرها از P_4 به P_1 وجود دارد. A^3، $a_{41}^{(3)} = 2$ را می‌دهد. کوتاهترین مسیرها از P_4 به P_1 وجود دارند. اگر شکل ۲ـ۴ را بررسی کنیم به این مهم دست می‌یابیم. این دو مسیر با طول ۳ (۳ـمسیرهای) عبارتند از:

$$P_4 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \quad , \quad P_4 \longrightarrow P_5 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1$$

به عنوان دومین مثال اجازه دهید به ما که طول کوتاهترین مسیر از P_1 به P_3 را تعیین کنیم.

ارتباط مستقیم وجود ندارد. A، $a_{13} = 0$ را می‌دهد.

۲ـمسیرهای از P_1 به P_3 وجود ندارد. A^2، $a_{13}^{(2)} = 0$ را می‌دهد.

۳ـمسیرهای از P_1 به P_3 وجود ندارد. A^3، $a_{13}^{(3)} = 0$ را می‌دهد.

یک ۴ـمسیر منفرد از P_4 به P_3 وجود دارد. A^4، $a_{13}^{(4)} = 1$ را می‌دهد.

این نتیجه تایید می‌شود زمانی که دیگراف را امتحان می‌کنیم، سریعترین راه برای فرستادن پیام از P_1 به P_3 مسیری با طول ۴ (۴ـمسیر) است.

$$P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_5 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_3$$

این مدل طول‌های کوتاهترین مسیرها را از دیگراف می‌دهد و ایستگاه‌های میانی ساخته شده در آن مسیر را نمی‌دهد. ریاضی‌دانان هنوز موفق به استخراج کردن این اطلاعات از ماتریس مجاورت نشده‌اند. یک

الگوریتم برای یافتن کوتاهترین مسیرها برای دیگراف ویژه با استفاده از فرآیند تحقیق، باکامپیوتر داچ دانشمندی به نام **دیجک استرا** توسعه یافته است. بحث زیرکاربردی است، جایی که طول‌های کوتاهترین مسیرها نه مسیرهای حقیقی بلکه مسیرهایی را که مهم هستند، منجر می‌شود.

فاصله در دیگراف

فاصله از رأس یک دیگراف تا رأس دیگری طول کوتاهترین مسیر از آن رأس تا رأس دیگر است. اگر مسیری از یک رأس به رأس دیگر وجود نداشت می‌گوییم آن فاصله تعریف نشده است. فاصله‌های میان رأس‌های متفاوت از یک دیگراف، درایه‌های ماتریس را تشکیل می‌دهد. ماتریس فاصلهٔ D به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعداد کمانها در کوتاهترین مسیر از رأس P_i تا رأس P_j

$$d_{ij} = \begin{cases} ۰ & i = j \quad \text{اگر} \\ x & \text{اگر مسیری از } P_i \text{ به } P_j \text{ موجود نباشد} \end{cases}$$

اگر دیگراف کوچک باشد ماتریس فاصله D می‌تواند با مشاهده ساخته شود از توانهای ماتریس مجاورت برای ساخت ماتریس فاصله از یک دیگراف بزرگ، استفاده می‌شود. ماتریس فاصله شبکهٔ ارتباطی بالا چنین است:

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که نیازی نیست فاصله از P_i تا P_j با فاصله از P_i به P_j در دیگراف برابر باشد که این نکته بر این دلالت دارد که ماتریس فاصله درگراف نیازی ندارد که متقارن باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه یک دیگراف و یک ماتریس فاصله برای تحلیل ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی استفاده می‌شوند.

ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی

یک گروه ۵ نفرهٔ مردم را درنظر بگیرید. یک جامعه شناس علاقمند به شناخت و تسلط بر یکی از این ۵ نفر که پرتأثیرترین فرد نسبت به بقیه است را دارد. از گروه خواسته می‌شود که پرسشنامهٔ زیر را تکمیل کنند.

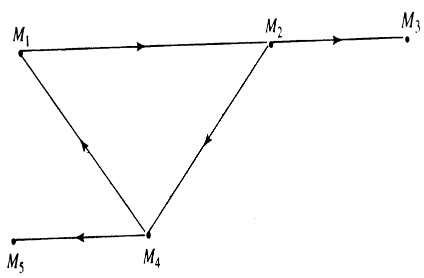
- اسم
- شخصی که به نظرش بیشترین ارزش را می‌دهید.

سپس این پاسخها جدول‌بندی می‌شوند. اعضای گروه را با $M_1, M_2, \ldots, M_5$ برچسب‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید که نتایج به صورت زیر در جدول ۲ـ۱ مشخص شده باشد:

عضو گروه	شخصی که نظرش با ارزش است
M_1	M_4
M_2	M_1
M_3	M_2
M_4	M_2
M_5	M_4

جدول ۱ـ۲

جامعه‌شناس فرضیه‌ای را می‌سازد که براساس آن شخصی که اعتقاد یا ایده‌اش بیشترین ارزش را در بین بقیه دارد، همان فردی است که بیشترین تأثیر را روی دیگر اعضا دارد. پس تأثیر (نفوذ) از ستون راست به ستون چپ در جدول بالا حرکت می‌کند. این نتایج را می‌توان با یک دیگراف نشان داد. اعضای گروه نشان دهندهٔ رأسها، تأثیر مستقیم با یک کمان، جهت اثر، جهت کمان است. شکل ۲ـ۵ را نگاه کنید.



شکل ۲ـ۵

ماتریس فاصله این دیگراف را تشکیل دهید و همهٔ درایه‌ها در هر سطر را با یکدیگر جمع می‌کند.

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ x & x & ۰ & x & x \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ x & x & x & x & ۰ \end{bmatrix}$$

در این گراف کمانها با اثر مستقیم متناظرند و مسیرهای ۲، مسیرهای ۳ و غیره با اثر غیرمستقیم متناظرند. بنابراین کوچکترین فاصله از M_i به M_j بزرگترین اثری است که M_i روی M_j دارد و مجموع درایه‌ها در سطر i کل فاصله از M_i به رأس‌های دیگر را می‌دهد و این موضوع منجر به تفسیر زیر از سطرها می‌شود.

کوچکترین مجموع سطر i، بزرگترین تأثیر شخص M_i بر روی گروه است. می‌دانیم که جمع کوچکترین سطر برای سطر ۲، ۶ می‌باشد. بنابراین $M_۲$ پرتأثیرترین شخص در گروه است که از $M_۴$ و سپس از $M_۱$ پیروی می‌کند. خوانندگانی که علاقمند به یادگیری بیشتر نظریه گرافها هستند به کتاب زیر رجوع کنند: معرفی نظریه گراف تألیف رابین جی ویلسون جان ویلی و پسران در سال ۱۹۸۷ و ساختارهای ریاضی گسسته تألیف فرد اس رابرتز پرنیتک هال در سال ۱۹۷۶ است.

کتاب سابق (اولی) معرف زیبایی از ریاضیات نظریهٔ گراف است، کتاب اخیر مجموعه باشکوهی از کاربردهاست «پیشگویی شیمی توسط توپولوژی» اثر دنیس رُوریْ دانشمند آمریکایی سپتامبر ۴۰ در سال ۱۹۸۶ است که شامل جذب میزان روش‌های نظریه گراف برای پیشگویی خاصیت‌های شیمیایی مولکول‌هایی که هنوز با هم ترکیب نشده‌اند می‌باشد.

تمرینات

۱) ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله هرکدام از دیگراف‌ها در شکل ۲ـ۶ را معین کنید.

۲) قطر یک دیگراف بزرگترین فاصله میان رأس‌هاست. قطرهای دیگراف‌های شکل ۲ـ۶ را تعیین کنید.

۳) طرح دیگراف‌هایی که دارای ماتریس‌های مجاورت زیر هستند را رسم کنید.

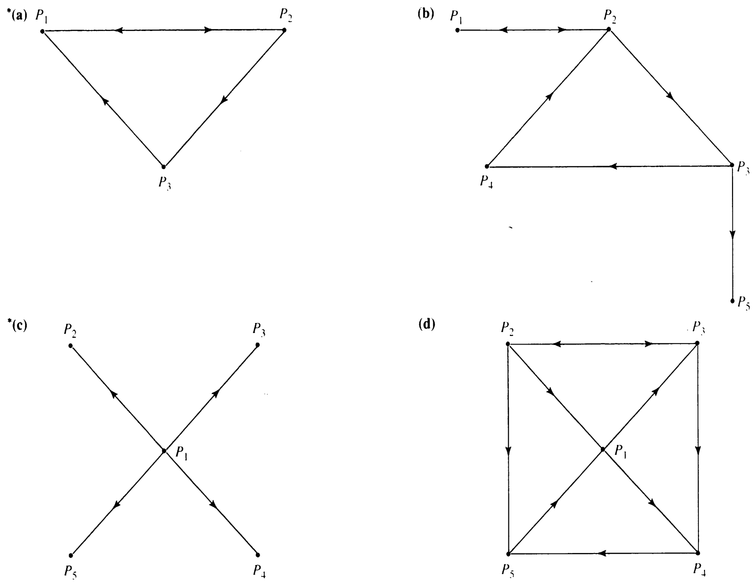
الف) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

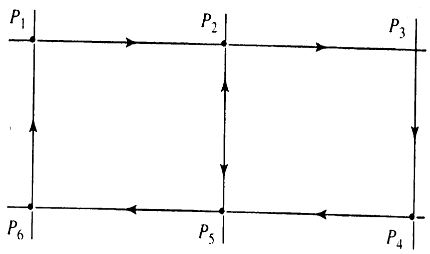
د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



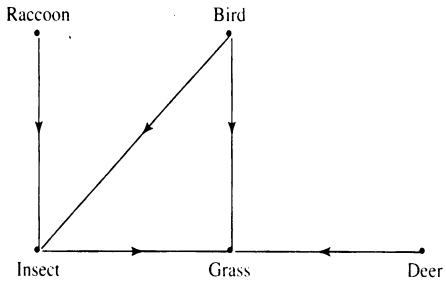
شکل ۲ـ۶

۴) شبکه داده شده در شکل ۲ـ۷ سیستمی از خیابانها را در منطقهٔ پایین شهر نشان می‌دهد بسیاری از خیابانها یک طرفه هستند. شبکه را به عنوان یک دیگراف تفسیر کنید. ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله را بیابید.



شکل ۲ـ۷

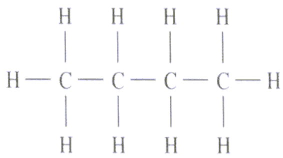
۵) از نظریه گراف در مدلهای ریاضی برای بهتر فهمیدن تعادل دقیق و ظریف طبیعت استفاده می‌شود. شکل ۲ـ۸ دیگرافی را ارائه می‌دهد که شبکهٔ غذایی یک جامعه محیط زیست را در یک جنگل ملی اُکالا نشان می‌دهد (در فلوریدای مرکزی) ماتریس مجاورت را تعیین کنید.



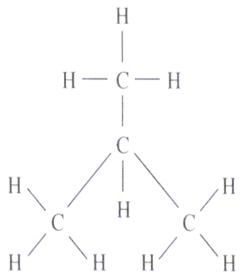
شکل ۲ـ۸

۶) وقتی که در یک شبکهٔ تمامی کمانها دو طرفه باشند از پلکان یا فلش استفاده نمی‌شود زیرا که آنها غیرضروری می‌باشند. پس از اصطلاح گراف استفاده می‌شود. دانشمندان از گرافها برای پیش‌بینی خواص شیمیایی مولکولها استفاده می‌کنند. گراف‌ها در شکل ۲ـ۹ ساختارهای مولکولی بوتان ایزوبوتان که هر دو ساختار شیمیایی مشابهی دارند، را نشان می‌دهد. ماتریس‌های مجاورت این گراف‌ها را تعیین کنید. توجه کنید که ماتریس‌ها متقارن می‌باشند. آیا انتظار دارید که ماتریس مجاورت هر گراف متقارن باشد؟

$$\begin{array}{cccccc}
 & H & H & H & H & \\
 & | & | & | & | & \\
H- & -C & -C & -C & -C & -H \\
 & | & | & | & | & \\
 & H & H & H & H &
\end{array}$$



Butane



Isobutane

شکل ۲ـ۹

۷) ماتریس زیر یک شبکهٔ ارتباطی را تعریف می‌کند. طرح شبکه را رسم کنید. کوتاهترین مسیر برای فرستادن یک پیام الف) P_5 به P_2 ب) P_2 به P_5 را معین کنید. ماتریس فاصله دیگراف را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۸) در هرکدام از تمرین‌های زیر، ماتریس A ماتریس مجاورت برای شبکهٔ ارتباطی است، طرح شبکه را رسم کنید. توانهای ماتریس مجاورت داده شده است. مؤلفه‌هایی که پررنگ‌تر از بقیه است را بیابید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

د) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ه) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۹) فرض کنید A یک ماتریس مجاورت از دیگراف باشد. در مورد دیگراف در هر یک از حالت‌های زیر چه می‌دانید؟

الف) سومین سطر از A همگی صفرند.

ب) چهارمین سطر از A همگی صفرند.

ج) مجموع مؤلفه‌ها در سطر پنجم از A، ۳ است.

د) مجموع مؤلفه‌ها در ستون دوم از A، ۲ است.

ه) سطر دوم از A^3 همگی صفر است.

و) ستون سوم از $A^۴$ همگی صفرند.

۱۰) فرض کنید دیگرافهایی با ماتریس‌های مجاورت دارای مشخصات زیر باشند چه چیزی می‌توانید در مورد هر یک از دیگرافهای زیر بگویید؟

الف) سطر دوم همگی صفرند.

ب) ستون سوم همگی صفرند.

ج) سطر چهارم همگی یک دارند به جز صفر در موقعیت قطری

د) ستون پنجم همگی دارای یک هستند به جز صفر در موقعیت قطری

ه) مجموع درایه‌ها در سطر سوم، ۵ است.

و) مجموع درایه‌ها در ستون دوم، ۴ است.

ح) تعداد یکها در ماتریس، ۷ است.

ط) مجموع درایه‌ها در سطر ۲ از توان چهارم برابر ۳ است.

ی) مجموع درایه‌ها در ستون ۳ از توان پنجم بر ابر ۴ است.

ک) سطر چهارم مربع ماتریس همگی صفر است.

ل) ستون سوم توان چهارم همگی صفر است.

۱۱) فرض کنید A ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. شکل دیگراف اگر $A^۲$ مانند زیر باشد را رسم کنید. از دیگراف برای پیدا کردن $A^۳$ استفاده نمایید.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

(توجه: تمام مسیرهای به طول ۲ (۲ـمسیرهای) در دیگراف داده شده است.)

۱۲) فرض کنید A ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. تمام حالت‌های ممکن دیگراف توصیف شده به وسیلهٔ A را اگر $A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، رسم کنید.

۱۳) جداول زیر اطلاعات برگرفته از پرسشنامه‌های داده شده به گروه‌های مردم را نمایش می‌دهد. در هر مورد دیگرافی بسازید که ساختار رهبری در گروه را توضیح دهد. مؤلفه‌ها را براساس تأثیرشان روی گروه دسته‌بندی کنید.

(الف)

عضو گروه	شخصی که نظرش با ارزش است
M_1	M_4
M_2	M_1
M_3	M_2
M_4	M_2

(ب)

عضو گروه	شخصی که نظرش با ارزش است
M_1	M_5
M_2	M_1
M_3	M_2
M_4	M_3
M_5	M_4

(ج)

عضو گروه	شخصی که نظرش با ارزش است
M_1	M_4
M_2	M_4, M_5
M_3	M_2
M_4	M_3
M_5	M_1

(د)

عضو گروه	شخصی که نظرش با ارزش است
M_1	M_5
M_2	M_1
M_3	M_1, M_4
M_4	M_5
M_5	M_3

۱۴) ماتریس زیر رابطهٔ دوستی بین گروه‌های مردم را توصیف می‌کند $a_{ij} = 1$ اگر M_i دوست M_j باشد در غیر این صورت $a_{ij} = 0$ است. نمودارهایی بکشید که این روابط را توضیح دهید. توجه کنید که تمام ماتریس‌ها متقارن هستند. اهمیت این تقارن چیست؟ آیا ارتباط توصیف شده را می‌توان با یک ماتریس نامتقارن توصیف کرد؟

الف) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۵) ساختار در دیگراف که مورد علاقهٔ دانشمندان علوم اجتماعی است یک دسته است. یک دسته بزرگترین زیرمجموعه دیگراف است که از ۳ رأس یا بیشتر، که هر جفت از آنها به طور متقابل ارتباط دارند، تشکیل شده است. کاربرد این مفهوم برای ارتباطات دوستی سریع است. سه فرد یا بیشتر یک دسته را تشکیل می‌دهند اگر همگی با هم دوست باشند و اگر هیچ کدامشان دوستی متقابلی با هر فرد بیرون از دسته نداشته باشند. مثالی از یک دیگراف که شامل یک گروه است ارایه دهید.

۱۶) ثابت کنید که ماتریس مجاورت از یک دیگراف الزاماً مربعی است؟

۱۷) فرض کنید A ماتریس مجاورت از یک دیگراف باشد. ماتریس A^t ماتریس مربعی است که شامل صفرها و یکها است. و آن هم چنین ماتریس مجاورت از یک دیگراف است. چگونه دیگراف A و A^t به یکدیگر مرتبط‌اند.

۱۸) اگر ماتریس مجاورت یک دیگراف متقارن باشد. این مطلب چه چیزی در مورد دیگراف در اختیار شما می‌گذارد؟

۱۹) ثابت کنید که کوتاهترین مسیر از رأس دیگراف به رأس دیگر نمی‌تواند شامل رأسهای تکراری باشد.

۲۰) در یک گراف با n رأس، بزرگترین فاصله ممکن بین دو رأس چیست؟

۲۱) فرض کنید که A ماتریس مجاورت از یک دیگراف ارتباطی باشد. فرض کنید $C = AA^t$ نشان دهید تعداد ایستگاه‌هایی که می‌توانند یک پیام مستقیم از هر دو ایستگاه i و j دریافت کنند $= c_{ij}$.

۲۲) ماتریس دست‌یابی R از دیگراف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر یک مسیر از رأس } p_i \text{ به } p_j \text{ وجود داشته باشد} \\ ۱ & \text{اگر } i = j \\ ۰ & \text{اگر مسیری از } p_i \text{ به } p_j \text{ موجود نباشد} \end{cases}$$

ماتریس‌های دست‌یابی دیگراف‌های تمرین ۸ را معین کنید.

۲۳) ماتریس‌های دست‌یابی از یک دیگراف می‌تواند با استفاده از اطلاعات ماتریس مجاورت و توانهای متفاوت آن ساخته شود. چه تعداد توانهای ماتریس مجاورت از یک دیگراف دارای n رأس بایستی محاسبه شوند تا تمام اطلاعات مورد نیاز را به دست آورند.

۲۴) الف) اگر ماتریس مجاورت یک دیگراف متقارن باشد. آیا این بدان معناست که ماتریس دستیابی نیز متقارن است.

ب) اگر ماتریس دستیابی یک دیگراف متقارن باشد آیا بدان معناست که ماتریس مجاورت نیز متقارن است.

۲۵) فرض کنید R یک ماتریس دستیابی از یک دیگراف ارتباطی باشد فرض کنید $r(i)$ مجموع درایه‌های سطر i از R و $c(j)$ مجموع درایه‌های ستون j از R باشد چه اطلاعاتی در مورد $r(i)$ و $c(j)$ می‌دهید.

۲۶) فرض کنید که R یک ماتریس دست‌یابی از یک دیگراف باشد چه اطلاعاتی در مورد دیگراف درایه‌ها موجود در سطر i و ستون j از $R^۲$ می‌توانید ارایه دهید.

۲۷) فرض کنید که R ماتریس دست‌یابی دیگراف باشد چه اطلاعاتی دربارهٔ دیگراف R^t می‌دهید.

۲۸) ماتریس مجاورت A و ماتریس دست‌یابی R از یک دیگراف هر دو هم از درایه‌های صفر و هم از درایه‌های یک ساخته شده‌اند.

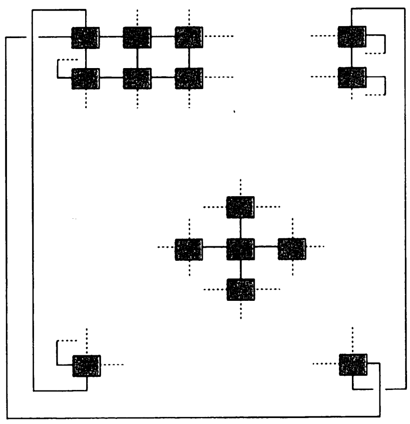
الف) آیا A و R عدد یکسان یکها را دارا می‌باشند.

ب) آیا A می‌تواند یکهای بیشتری نسبت به R داشته باشد.

ج) آیا A می‌تواند یکهای کمتری نسبت به R داشته باشد.

۲۹) ابرکامپیوتر IhhIAC IV در مرکز تحقیقات افرناسا NASA، ۶۴ پردازنده، تحت کنترل واحد دارد. پردازنده‌ها با یکدیگر در یک شبکه‌اند. اگر پردازنده‌ها را به عنوان ماتریسی با درایه‌های ۸×۸ تصویر

کنید سپس هر پردازنده در موقعیت (i, j) می‌تواند با همسایگان ضروری خود پردازنده‌ها در موقعیت $(i, j-1)$ و $(i-1)$ و $(i, j+1)$ و $(i+1, j)$ ارتباط داشته باشد. پردازنده‌ها در سطر اول با آنهایی که در سطر آخر در مدل گردش پنهان هستند ارتباط برقرار می‌کنند آنهایی که در ستون اول هستند با آنهایی که در ستون آخر مدل گردش پنهان هستند ارتباط دارند. شکل ۲ـ۱۰ را ببینید بیشترین فاصلهٔ بین پردازنده‌ها در این شبکه را مشخص کنید.



شکل ۲ـ۱۰

تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم

۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.
عبارت‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
الف) $2AB$ ب) $AB + C$ ج) $BA + AB$
د) $AD - 3D$ ه) $AC + BC$ و) $2DA + B$

۲) فرض کنید A ماتریس 2×2، B یک ماتریس 2×2، C یک ماتریس 2×3، D یک ماتریس 3×2 باشد و در صورت وجود اندازه نتایج ماتریس‌های حاصل را بیابید.
الف) AB ب) $(A^2)C$
ج) $B^3 + 3(CD)$ د) $DA - 2(DB)$
ه) $3(BA)(CD) + (4A)(BC)D$ و) $C - 3D$

۳) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۵ \\ ۷ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ درایه‌های عبارت $D = ۲AB - ۳C$ بدون محاسبهٔ کل ماتریس معین کنید.

الف) $d_{۱۲}$ ب) $d_{۲۳}$

۴) ضرب AB از ماتریس‌های ۲ × ۲ زیر را با استفاده از الگوریتم استراسن مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $(A^t)^۲$ ب) $A^t - B^۲$ ج) $AB^۲ - ۲C^۲$ د) $A^۲ - A + ۴I_۲$

۶) اگر A و B ماتریس‌هایی با اندازه‌های داده شده باشند، تعداد ضرب‌های اسکالر لازم برای محاسبه AB را معین کنید.

الف) $A_{۲۲}$ و $B_{۲۶}$ ب) $A_{۴\times۲}$ و $B_{۲\times۳}$

ج) $A_{۱\times۷}$ و $B_{۷\times۲۵}$ د) $A_{۹\times۵}$ و $B_{۵\times۱۱}$

۷) معکوس هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود با استفاده از روش حذفی گاوس- جردن معین کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$

۸) با استفاده از روش معکوس ماتریس دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_۱ + ۳x_۲ - ۲x_۳ = ۱$$
$$۲x_۱ + ۵x_۲ - ۳x_۳ = ۵$$
$$-۳x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ = ۷$$

۹) A را بیابید در صورتی که $۳A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد.

۱۰) خاصیت شرکت‌پذیری ضرب را بررسی کنید.

$$A(BC) = (AB)C$$

۱۱) عبارت $A(AB + A^{۲}) - B(A^{۲} + AB) + ۳ABA - ۴AB^{۲}$ را ساده کنید.

۱۲) اگر n عدد صحیح نامنفی باشد و c اسکالر باشد عبارت $(cA)^n = c^n A^n$ را ثابت کنید.

۱۳) فرض کنید A یک ماتریس باشد به طوری که $AA^t = ۰$ نشان دهید که $A = ۰$.

۱۴) ماتریس A را نرمال گوییم اگر $AA^t = A^t A$، ثابت کنید که تمام ماتریس‌های متقارن نرمال هستند.

۱۵) نشان دهید اگر A خودتوان باشد آنگاه A^t نیز خودتوان است.

۱۶) نشان دهید اگر A پوچ‌توان باشد آنگاه A^t نیز با درجهٔ یکسان از پوچ توانی، پوچ توان است.

۱۷) ثابت کنید که اگر A متقارن و معکوس‌پذیر باشد آنگاه $A^{-۱}$ نیز متقارن است.

۱۸) ثابت کنید که یک ماتریس با سطری از صفرها یا ستونی از صفرها معکوس ندارد.

۱۹) AB و $A + B$ را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید و نشان دهید که A هرمیتی است

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ - ۳i \\ ۴ + ۳i & -۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۳ + i & ۱ - ۲i \\ ۲ + ۷i & -۲ + i \end{bmatrix}$$

۲۰) ثابت کنید که تمام ماتریس‌های متقارن حقیقی، هرمیتی هستند؟

۲۱) ماتریس A که در زیر آمده محتویات سفال قبرهای مختلف را توصیف می‌کند. ترتیب زمانی ممکن قبور و انواع سفالگری آنها را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۲) ماتریس تصادفی P که در زیر می‌آید، احتالات ممکن برای خانواده‌های تحصیل کرده دانشگاهی و تحصیل نکرده یک ناحیه معین که حداقل یک فرزند تحصیل کرده دانشگاهی دارند را می‌دهد. با تحصیل‌کرده‌های دانشگاهی به این مهم دست می‌یابیم که حداقل یکی از والدین تحصیل کرده دانشگاهی می‌باشند، همراه با درنظرگرفتن تحصیل نکرده دانشگاهی منظور این است که هیچ یک از والدین تحصیل نکرده‌اند.

$P =$

	خانواده‌ها	
	تحصیل نکرده	تحصیل کرده
فرزند تحصیلات دانشگاهی	۰٫۲۵	۰٫۹
فرزند بدون تحصیلات دانشگاهی	۰٫۷۵	۰٫۱

اگر به طور عادی ۳۰۰٫۰۰۰ خانواده تحصیل کرده و ۷۵۰٫۰۰۰ خانوادهٔ تحصیل نکرده وجود داشته باشد توزیع پیش‌بینی شده برای این دو نسل چیست؟ احتمال این که یک زوج تحصیل نکرده باشد و یکی از نوه‌هایشان تحصیل کرده باشند چقدر است؟

۲۳) فرض کنید A ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. در مورد هر یک از حالت‌های زیر چه چیزی می‌دانید.

الف) تمام درایه‌های ستون چهارم A صفرند.

ب) مجموع درایه‌های ستون سوم A، ۲ است.

ج) مجموع درایه‌ها در سطر دوم از A^3 برابر ۴ است.

د) ستون سوم A^2 همگی صفر می‌باشند.

ه) مؤلفهٔ موجود در مکان $(4, 4)$ از A^3 برابر ۲ است.

و) تعداد درایه‌های غیرصفر در A^4 برابر ۳ است.

هدف‌های رفتاری فصل سه

دانشجو باید بتواند پس از مطالعه و کار روی این فصل

- مفهوم عددی دترمینان یک ماتریس مربعی را درک کرده و محاسبه آن را با استفاده از بسط سطری یا بسط ستونی انجام دهد.
- جدول علامت‌های دترمینان را به خاطر بسپارد.
- ویژگی‌های دترمینان را توضیح دهد از جمله این که هرگاه دو سطر (ستون) یک دترمینان را تعویض کنیم دترمینان آن قرینه می‌شود.
- مفاهیم ماتریس منفرد و ماتریس نامنفرد را برحسب مقدار دترمینان توضیح دهد.
- نقش و رابطه دترمینان را در ارتباط با ماتریس وارون و حل دستگاه معادلات خطی توضیح دهد. همچنین فرمول محاسبه وارون را برحسب ماتریس وابسته و دترمینان آن اثبات کرده و آن را به خاطر داشته باشد.
- تعداد جوابها و یا فقدان آن را در یک معادله خطی ماتریس

$$AX = B$$

برحسب دترمینان A ارتباط داده و از عهده‌ی اثبات آن برآید.

- سرانجام از عهده‌ی حل تمرین‌ها و مسائل پایان فصل به خوبی برآید.

فصل سوم

دترمینان‌ها

به هر ماتریس مربعی عددی نسبت داده می‌شود که آن را دترمینان آن ماتریس می‌نامیم، دترمینان یک ماتریس ابزاری است که در بیشتر شاخه‌های ریاضی، علوم و مهندسی به کارگرفته می‌شود. دترمینان را در این فصل تعریف کرده و خواص آن را گسترش خواهیم داد. مشاهده خواهیم کرد که این مفهوم اطلاعاتی در مورد حل دستگاه معادلات خطی به ما می‌دهد و به علاوه در فرمولی که برای به دست آوردن معکوس یک ماتریس مربع به دست می‌آوریم استفاده می‌گردد.

۳-۱ مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها

بحث دترمینان‌ها را با تعریف دترمینان یک ماتریس ۲×۲ آغاز می‌کنیم.

تعریف: دترمینان ماتریس ۲×۲، A را با $|A|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

دقت کنید که دترمینان یک ماتریس ۲×۲ به وسیلهٔ تفاضل حاصل ضرب‌های دو قطر ماتریس بیان شده است، از نماد $\det(A)$ نیز برای دترمینان A استفاده می‌شود.

مثال ۱: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل: با به کارگیری تعریف بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = (۲ \times ۱) - (۴ \times (-۳)) = ۲ + ۱۲ = ۱۴$$

دترمینان یک ماتریس ۳ × ۳ برحسب دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ تعریف می‌شود. دترمینان یک ماتریس ۴ × ۴ برحسب دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳ تعریف می‌شود و به همین ترتیب دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ برحسب دترمینان ماتریس‌های $n - ۱ \times n - ۱$ تعریف می‌شوند. برای این تعاریف به مفاهیم کهاد و همسازه که در زیر تعریف می‌شوند نیاز داریم.

تعریف: فرض کنیم A ماتریسی مربعی باشد.

کهاد: کهاد درایه a_{ij} را با M_{ij} نشان می‌دهیم و عبارت است از دترمینان ماتریس حاصل از حذف ردیف iام و ستون jام ماتریس A.

همسازه: همسازه درایه a_{ij} را با C_{ij} نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_{ij} = (-۱)^{i+j} M_{ij}$$

توجه کنید که کهاد و همساز یک درایه حداکثر تفاوت‌شان در یک علامت است.

$$C_{ij} = +M_{ij} \quad \text{یا} \quad - M_{ij}$$

مثال ۲: کهاد و همساز درایه‌های $a_{۱۲}$ و $a_{۳۳}$ را از ماتریس زیر به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

حل: با به کارگیری تعریف بالا داریم:

$$M_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} = ۰ \times (-۲) - (۴ \times ۲) = -۸$$

$$C_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} M_{۱۲} = -۱ \times -۸ = ۸$$

$$M_{۳۳} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = ۲ \times ۳ - (-۱) \times ۰ = ۶$$

$$C_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳} M_{۳۳} = ۱ \times ۶ = ۶$$

حال با استفاده از مفاهیم فوق دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ $(n \leq ۳)$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف: دترمینان ماتریس مربعی A عبارت است از مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های سطر اول در همساز مربوط به آن درایه.

اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد:

$$|A| = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۱۲}C_{۱۲} + a_{۱۳}C_{۱۳}$$

اگر A ماتریسی ۴×۴ باشد:

$$|A| = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۱۲}C_{۱۲} + a_{۱۳}C_{۱۳} + a_{۱۴}C_{۱۴}$$

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد:

$$|A| = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۱۲}C_{۱۲} + \cdots + a_{۱n}C_{۱n}$$

معادلات بالا بسط دترمینان A نسبت به سطر اول نامیده می‌شوند.

مثال ۳: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از درایه‌های سطر اول و همسازه‌های آن داریم:

$$|A| = (-۱) \times (-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۵ & -۱ \end{vmatrix} + ۲ \times (-۱)^{۱+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix} + ۰ \times (-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۵ \end{vmatrix}$$

$$= -[(۱ \times -۱) - (۳ \times ۵)] - ۲[(۱ \times -۱) - (۳ \times (-۲))] + ۰[(۱ \times ۵) - (۱ \times (-۲)]$$

$$= ۱۶ - ۱۰ + ۰ = ۶$$

در بالا دترمینان A بر حسب درایه‌های سطر اول تعریف شده است. می‌توان ثابت کرد که دترمینان یک ماتریس مربعی A براساس قاعده زیر به وسیلهٔ هر سطر یا هر ستون از این ماتریس قابل تعریف است.

قضیه ۳ـ۱ـ۱: دترمینان ماتریس مربعی A برابر است با مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های هر سطر یا هر ستون در همسازه مربوط به آن درایه.

دترمینان ماتریس A برحسب بسط سطر iام برابر است با

$$|A| = a_{i۱}C_{i۱} + a_{i۲}C_{i۲} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

و برحسب بسط ستون jام برابر است با

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{nj}C_{nj}$$

قاعده ساده و مفیدی وجود دارد که مقدار $(-1)^{i+j}$ را در بسط $|A|$ برحسب هر سطر یا هر ستون مشخص می‌سازد. این قاعده به وسیلهٔ آرایش علامت درایه‌های A به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}$$

اگر به عنوان مثال بخواهیم دترمینان ماتریسی مربعی A را برحسب سطر دوم بسط دهیم علامت‌ها به ترتیب $-$، $+$، $-$ و ...خواهند بود.

مثال ۴: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ را برحسب بسط سطر دوم به دست آورید.

حل:

$$|A| = -2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \times [(-1) \times 3 - (3 \times 0)] + 1 \times [(1 \times 3) - (3 \times (-5)] - 4 \times [(1 \times 0) - ((-1) \times (-5))]$$
$$= 6 + 18 + 20 = 44$$

دترمینان این ماتریس را برحسب هر سطر و یا ستون دیگر نیز بسط دهید، خواهیم دید که مقدار به دست آمده همان عدد ۴۴ خواهد بود.

نکته: محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی برحسب سطر یا ستونی که بیشترین ۰ را دارد به حداقل می‌رسد. مثال زیر، گویای این حقیقت است.

مثال ۵: دترمینان ماتریس ۴×۴ زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۵ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

حل: ستون سوم این ماتریس دارای بیشترین ۰ است. بنابراین $|A|$ را برحسب ستون سوم بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{۱۳}C_{۱۳} + a_{۲۳}C_{۲۳} + a_{۳۳}C_{۳۳} + a_{۴۳}C_{۴۳} \\ &= ۰C_{۱۳} + ۵C_{۲۳} + ۰C_{۳۳} + ۰C_{۴۳} \\ &= ۵ \times (-۱)^{۲+۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{vmatrix} = -۵ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{vmatrix} \end{aligned}$$

در این مرحله سطر سوم بیشترین صفر را داراست. پس ماتریس ۳×۳ حاصل را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم.

$$|A| = -۵ \times -۲ \times (-۱)^{۳+۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱۰[(۱ \times ۱) - (۳ \times (-۱))] = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$$

درایه‌های یک ماتریس می‌توانند به صورت متغیرهای x، y و ...باشند و معادلات می‌توانند به صورت دترمینان ماتریسها ظاهر شوند. مثال زیر یک چنین معادلاتی را نمایش می‌دهد.

مثال ۶: معادله زیر را برحسب x حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & x+۱ \\ -۱ & x-۲ \end{vmatrix} = ۷$$

حل: با استفاده از بسط دترمینان، معادله را به صورت طبیعی آن می‌توانیم بنویسیم:

$$x(x-۲) - (x+۱)(-۱) = ۷$$

با ساده کردن این معادله x را به دست می‌آوریم:

$$x^{۲} - ۲x + x + ۱ = ۷$$

$$x^{۲} - x - ۶ = ۰$$

$$(x + ۲)(x - ۳) = ۰$$

$$x = -۲ \quad \text{یا} \quad ۳$$

محاسبه دترمینان‌های ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳

دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را می‌توان با استفاده از قطر ماتریس با صرف وقت کمتری به دست آورد. برای ماتریس‌های ۲ × ۲ از دو قطر اصلی ماتریس استفاده می‌کنیم و برای ماتریس‌های ۳ × ۳ اقطاری را مورد استفاده قرار خواهیم داد که با اضافه کردن ۲ ستون اول به ماتریس اولیه به دست می‌آیند. دترمینان یک ماتریس ۲ × ۲ و ۳ × ۳ عبارت خواهد بود از مجموع حاصل ضرب‌های اعضای قطرهایی که جهت‌شان از چپ به راست است منهای حاصل‌ضرب‌های اعضای قطرهایی که جهت‌شان از راست به چپ است.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}} \qquad \overset{B}{\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{array}\right.}$$

$$|A| = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

$$|B| = (a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} + a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} + a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲}) - (a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} + a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} + a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳})$$

اثبات این که دترمینان یک ماتریس ۳ × ۳ در واقع به صورت فوق می‌باشد، به عهده دانشجو است.

مثال ۷:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}} \qquad \overset{B}{\left[\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۵ & ۱ & -۲ \end{array}\right.}$$

$$|A| = ۱۲ - ۷ = ۵$$

$$|B| = (۵ + ۸ + ۰) - (-۱ - ۸ + ۰) = ۱۳ - (-۹) = ۲۲$$

برای ماتریس‌های $n \times n$ ($n \geq ۳$) چنین قاعده‌ای وجود ندارد.

تعریف دیگری از دترمینان

در اینجا تعریف دیگری از دترمینان را با استفاده از مفهوم جایگشت‌ها بیان می‌کنیم. این تعریف جدید عمدتاً برای مقاصد نظری به کارگرفته می‌شود. ابتدا پیش زمینه‌های لازم را در مورد جایگشت‌ها ارایه می‌کنیم.

فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا n باشد، هر ترتیبی مانند $i_۱ i_۲ \ldots i_n$ از اعضای S را یک **جایگشت** روی S می‌نامیم. برای مثال ۱ ،۴ ،۳ ،۲ جایگشتی روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. منظور از یک تغییر روی یک جایگشت تغییر دو عدد متوالی با یکدیگر است. مثلاً با یک تغییر می‌توان جایگشت ۱ ،۲،۳،۴ را تبدیل به ۱ ،۲،۴،۳ کرد و با دو تغییر می‌توان ۲،۳،۴،۱ را به ۲،۱،۳،۴ تبدیل کرد.

با استفاده از این تعریف جایگشت $i_۱ \ldots i_n$ را یک **جایگشت زوج** می‌نامیم، اگر بتوان این جایگشت را با تعداد زوجی تغییر و تبدیل به جایگشت $n \ldots ۳\ ۲\ ۱$ کرد و آن را **جایگشت فرد** می‌نامیم اگر با تعداد فردی تغییر بتوان آن را به $n \ldots ۱۲۳$ تبدیل کرد. در این صورت $n \ldots ۱۲۳$ خود یک جایگشت زوج است زیرا با صفر تغییر تبدیل به $n \ldots ۱۲۳$ می‌شود و صفر عددی زوج است.

مثال ۸: نشان دهید ۱۳۴۲۵ یک جایگشت زوج و ۱۳۴۵۲ یک جایگشت فرد است.

حل: برای جایگشت ۱۳۴۲۵ داریم:

$$۱۳۴۲۵ \longrightarrow ۱۳۲۴۵ \longrightarrow ۱۲۳۴۵$$

و برای جایگشت ۱۳۴۵۲ داریم:

$$۱۳۴۵۲ \longrightarrow ۱۳۴۲۵ \longrightarrow ۱۳۲۴۵ \longrightarrow ۱۲۳۴۵$$

در اولین جایگشت دو تغییر و در دومین جایگشت سه تغییر مشاهده می‌کنیم. پس اولی زوج و دومی فرد است.

مثال ۹: تمام جایگشت‌های ممکن مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ را نوشته و زوج یا فرد بودن آن را مشخص کنید.

حل: ابتدا جایگشت‌های را درنظر می‌گیریم که با ۱ شروع می‌شود و سپس آنهایی که با ۲ و سرانجام آنهایی که با ۳ شروع می‌شوند.

زوج	۱ ۲ ۳
فرد	$۱۳۲ \longrightarrow ۱۲۳$
فرد	$۲۱۳ \longrightarrow ۱۲۳$
زوج	$۲۳۱ \longrightarrow ۲۱۳ \longrightarrow ۱۲۳$
زوج	$۳۱۲ \longrightarrow ۱۳۲ \longrightarrow ۱۲۳$
فرد	$۳۲۱ \longrightarrow ۲۳۱ \longrightarrow ۲۱۳ \longrightarrow ۱۲۳$

تذکر مهم: در جبر یک، جایگشت‌ها به صورت عمومی‌تری تعریف شده‌اند جایگشت‌هایی که در این کتاب از آن صحبت می‌کنیم در واقع جایگشت‌های بخصوصی در جبر یک هستند که آنها را جایگشت دوری از بعد n روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ می‌نامیم.

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد در این صورت:

$$\|A\| = \sum \pm a_{۱j_۱} a_{۲j_۲} \ldots a_{nj_n}$$

$\sum$ روی تمام جایگشت‌های $j_۱ j_۲ \ldots j_n$ از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ تغییر می‌کند. علامت‌های $+$ یا $-$ به ترتیب برای جایگشت‌های زوج و فرد استفاده می‌شود.

مثال ۱۰: برای ماتریس ۲×۲، A ثابت کنید $|A| = \|A\|$.

حل: فرض کنید A ماتریس ۲×۲، $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ باشد در این صورت:

$$|A| = a_{۱۱} a_{۲۲} - a_{۱۲} a_{۲۱}$$

و با توجه به این که جایگشت‌های روی $\{۱, ۲\}$، ۱۲ و ۲۱ هستند پس:

$$\|A\| = \sum_{\text{جایگشت}} \pm a_{۱j_۱} a_{۲j_۲} = a_{۱۱} a_{۲۲} - a_{۱۲} a_{۲۱}$$

نکته: می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر ماتریس $n \times n$، دو عدد $|A|$ و $\|A\|$ یکی هستند لذا تعریف $\|A\|$، را می‌توان تعریف دیگری از دترمینان ماتریس A دانست و از این پس $\|A\|$ را با علامت $|A|$ درنظر می‌گیریم.

۳-۱-۱ تمرین

۱) دترمینان ماتریس‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

آیا می‌توانید حدس بزنید که چرا دترمینان‌ها در قسمت‌های (ه) و (و) برابر صفر است (در قسمت (ه) به رابطه بین دو سطر توجه کنید).

۲) فرض کنید ماتریس A به صورت زیر تعریف شده است:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

در هر حالت کهاد و همسازهای داده شده را بیابید.

الف) $M_{۱۲}, C_{۱۲}$ ب) $M_{۲۱}, C_{۲۱}$

ج) $M_{۳۲}, C_{۳۲}$ د) $M_{۳۳}, C_{۳۳}$

۳) فرض کنید ماتریس B به صورت زیر داده شده است:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

در هر حالت کهاد و همسازهای داده شده را بیابید:

الف) $M_{۲۲}, C_{۲۲}$ ب) $M_{۳۱}, C_{۳۱}$

ج) $M_{۱۴}, C_{۱۴}$ د) $M_{۴۳}, C_{۴۳}$

۴) دترمینان ماتریس‌های زیر را یک بار از طریق بسط سطر اول و یک بار از طریق قطری به دست آورید:

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

می‌توانید حدس بزنید که چرا دترمینان قسمت (ج) صفر می‌شود.

۵) دترمینان ماتریس‌های زیر را طبق دستورالعمل ذکر شده در ذیل ماتریس به دست آورید:

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

بسط سطر اول و ستون دوم   بسط سطر دوم و ستون سوم

ج) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

بسط سطر دوم و ردیف دوم   بسط سطر سوم و ستون اول

۶) دترمینان ماتریس‌های زیر را با حداقل عملیات محاسباتی به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۷) معادلات زیر را برحسب x حل کنید:

الف) $\begin{bmatrix} x-1 & x \\ 7 & x+2 \end{bmatrix} = 5$ ب) $\begin{bmatrix} x+1 & 2 \\ -x & x \end{bmatrix} = 10$

۸) x را طوری تعیین کنید که دترمینان ماتریس زیر صفر شود:

$$\begin{bmatrix} x & ۳-x \\ ۲ & ۳x+۱ \end{bmatrix}$$

۹) به ازای چه مقادیری از x دترمینان ماتریس زیر صفر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x+۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۲x & ۲x+۲ \\ ۰ & ۱ & x \end{bmatrix}$$

۱۰) با چه استدلالی دترمینان دو ماتریس زیر برابر هستند، جواب‌تان را بدون محاسبه دترمینان این دو ماتریس ارایه دهید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۹ & ۰ & ۵ \\ ۷ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۵ \\ ۷ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۱) با چه استدلالی دترمینان ماتریس زیر به‌ازای هر a و b یکسان است؟

$$\begin{bmatrix} a & ۳ & ۱ \\ b & -۵ & ۲ \\ ۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۲) زوج و فرد بودن جایگشت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) ۴۲۱۳ ب) ۱۲۴۳

ج) ۲۴۱۳ د) ۴۳۲۱

۱۳) تمام جایگشت‌های $\{۱,۲,۳,۴\}$ را مشخص کرده و زوج و فرد بودن آنها را تعیین کنید.

۱۴) برای یک ماتریس ۳×۳ مانند A ثابت کنید دو عدد $\|A\|$ و $|A|$ در واقع یکی هستند.

۳-۲ خواص دترمینان‌ها

در این بخش خواص جبری دترمینان‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. بیشتر خواص دترمینان‌ها در مورد سطرهای یک ماتریس و ستون‌های آن یکی هستند. در یک چنین مواردی اغلب عبارت را به صورت سطر (ستون) می‌نویسیم تا نشان دهیم که می‌توان به جای کلمه سطر در بحث موردنظر کلمه ستون را قرار داد.

اثبات قضایا فقط در مواردی در متن درس و یا به صورت تمرین به عهده دانشجو گذاشته می‌شود که احساس شود این اثبات تکنیک مفیدی را ارایه می‌کند.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که چگونه اعمال مقدماتی روی سطرهای یک ماتریس بر دترمینان آن ماتریس اثر دارد. این قضیه هم نین می‌گوید که این اعمال را روی ستون نیز می‌توان بسط داد.

۳ـ۲ـ۱ قضیه: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و c عددی غیرصفر باشد.

الف) اگر ماتریس B با ضرب یک سطر (ستون) از A در عدد c به دست آمده باشد آنگاه $|B| = c|A|$.

ب) اگر ماتریس B با جابجایی دو سطر (ستون) متوالی ماتریس A به دست آمده باشد آنگاه $|B| = -|A|$.

ج) اگر ماتریس B با جمع جبری مضربی از یک سطر (ستون) با سطر (ستون) دیگر ماتریس A به دست آمده باشد آنگاه $|B| = |A|$.

اثبات: الف) فرض کنیم درایه‌های ماتریس A به صورت a_{ij} بوده و ماتریس B، با ضرب c در سطر kام A به دست آمده باشد در این صورت kامین سطر B عبارت است از:

$$ca_{k۱}ca_{k۲}\ldots ca_{kn}$$

$|B|$ را با بسط این سطر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|B| &= ca_{k۱}C_{k۱} + ca_{k۲}C_{k۲} + \cdots + ca_{kn}C_{kn}\\ &= c(a_{k۱}C_{k۱} + a_{k۲}C_{k۲} + \cdots + a_{kn}C_{kn})\\ &= c|A|\end{aligned}$$

نتیجه‌ی مشابه‌ای برای ستون‌ها از بسط kامین ستون ماتریس B به دست می‌آید، به شرطی که B ماتریسی باشد که از ضرب kامین ستون A در عدد c به دست آمده باشد. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه عملیات سطری (ستونی) که در قضیه قبل بیان کردیم می‌توانند در ایجاد هر چه بیشتر عدد صفر در سطرها (ستونها)، محاسبه دترمینان یک ماتریس را ساده کنند.

مثال ۱: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۴ & -۲ \\ -۱ & -۶ & ۳ \\ ۲ & ۹ & -۳ \end{vmatrix}$$

حل: با استفاده از اعمال سطری و ستونی در دترمینان فوق سعی می‌کنیم تا حد امکان درایه‌های یک سطر یا ستون را تبدیل به صفر کنیم. دقت کنیم که با جمع دو برابر ستون سوم با ستون دوم و جایگزینی آن در ستون دوم می‌توانیم دو درایه از این ستون را تبدیل به صفر کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۴ & -۲ \\ -۱ & -۶ & ۳ \\ ۲ & ۹ & -۳ \end{vmatrix} \underset{C_۲+۲C_۳}{=} \begin{vmatrix} ۳ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۳ \end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان روی ستون دوم ماتریس حاصل و این که صفرها محاسبه دترمینان را ساده می‌کنند خواهیم داشت:

$$(-۳)\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = (-۳)(۹-۲) = -۲۱$$

مثال ۲: فرض کنید A ماتریس ۳×۳ زیر باشد:

$$A = \begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۵ \\ -۲ & -۴ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

با استفاده از بسط همسازها می‌توان نشان داد که $|A| = ۱۲$ با استفاده از مقدار دترمینان A و خواص سطری و ستونی دترمینان، دترمینان ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

الف) $B_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱۲ & ۳ \\ ۰ & ۶ & ۵ \\ -۲ & -۱۲ & ۱۰ \end{bmatrix}$ ب) $B_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ -۲ & -۴ & ۱۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ ج) $B_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۱۶ \end{bmatrix}$

حل: مشاهده می‌شود که $B_۱$ می‌تواند با ضرب ستون دوم A در عدد ۳ به دست آید در این صورت

$$|B_۱| = ۳|A| = ۳۶$$

مشاهده می‌شود که $B_۲$ می‌تواند با تعویض سطر دوم و سوم از روی ماتریس A به دست آید در این صورت

$$|B_۲| = -|A| = -۱۲$$

مشاهده می‌شود که $B_۳$ می‌تواند از جمع دو برابر سطر اول با سطر سوم و جایگزینی آن در سطر سوم از روی ماتریس A به دست آید در این صورت

$$|B_۳| = |A| = ۱۲$$

از آنچه که در زیر می‌آید متوجه خواهیم شد که ماتریس‌های با دترمینان صفر نقش مهمی در نظریه دترمینان‌ها بازی خواهند کرد.

تعریف: ماتریس مربعی A را **منفرد** می‌گوئیم اگر $|A| = ۰$ در غیر این صورت A را **نامنفرد** می‌نامیم.

قضیهٔ زیر شرایطی به دست می‌دهد که تحت آن شرایط می‌توان منفرد بودن ماتریس را تشخیص داد.

۳ـ۲ـ۲ قضیه: فرض کنیم A ماتریسی مربعی باشد در این صورت A منفرد است اگر

الف) تمام اعضای یک سطر (ستون) صفر باشند.

ب) دو سطر (ستون) از ماتریس A یکسان باشند.

ج) یک سطر (ستون) از ماتریس A مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد.

توجه کنید که (ب) حالت خاصی از (ج) است ولی به دلیل اهمیت این حالت خاص، آن را جداگانه ذکر کرده‌ایم.

اثبات: الف) فرض کنیم اعضای سطر kام A همگی صفرند. در این صورت $|A|$ را با بسط سطر kام به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}|A| &= a_{k۱}C_{k۱} + a_{k۲}C_{k۲} + \cdots + a_{kn}C_{kn} \\ &= ۰C_{k۱} + ۰C_{k۲} + \cdots + ۰C_{kn} \\ &= ۰\end{aligned}$$

شرایط مشابه برای ماتریسی که یک ستون آن صفر است منجر به نتیجه مشابه می‌شود.

ب) فرض کنیم kامین و lامین سطر ماتریس A با هم برابرند در این صورت با ضرب عدد -۱ در سطر kام و جمع آن با سطر lام و جایگزینی حاصل در سطر lام ماتریس B به دست می‌آید که $|B| = |A|$ ولی سطر lام ماتریس B صفر است و طبق قسمت (الف)، $|B| = ۰$ در نتیجه $|A| = ۰$.

اثبات برای ستونها مشابه اثبات بالاست.

ج) مشابه قسمت (ب) اثبات می‌شود. ■

مثال ۳: نشان دهید که دو ماتریس زیر منفرد هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۶ & -۸ \\ -۲ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل: الف) تمام اعضای ستون سوم صفرند بنابراین $|A| = ۰$.

ب) ردیف دوم ۲ـ برابر ردیف سوم است پس طبق قسمت (ج) قضیه قبل $|B| = ۰$.

قضیهٔ بعدی رابطهٔ بین دترمینان ماتریس‌های حاصل از روی دترمینان ماتریس‌های داده شده را مشخص می‌کند.

۳ـ۲ـ۳ قضیه: فرض کنیم A و B ماتریس‌های $n \times n$ و c عددی غیرصفر است.

الف) دترمینان ضرب عدد در ماتریس $|cA| = c^n|A|$

ب) دترمینان ضرب دو ماتریس $|AB| = |A||B|$

ج) دترمینان ترانهاده یک ماتریس $|A^t| = |A|$

د) دترمینان معکوس یک ماتریس $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$

در صورتی که $A^{-۱}$ وجود داشته باشد.

مثال ۴: فرض کنید A ماتریسی ۲×۲ با $|A| = ۴$ باشد با استفاده از قضیه ۳ـ۲ـ۳ دترمینان‌های زیر را به دست آورید.

الف) $|۳A|$ ب) $|A^۲|$ ج) $|۵A^tA^{-۱}|$

در صورتی که $A^{-۱}$ وجود داشته باشد.

حل: با استفاده از قضیهٔ فوق

الف) $|۳A| = (۳^۲)|A| = ۹ \times ۴ = ۳۶$

ب) $|A^۲| = |AA| = |A||A| = ۴ \times ۴ = ۱۶$

ج) $|۵A^tA^{-۱}| = (۵)^۲|A^tA^{-۱}| = ۲۵|A^t||A^{-۱}| = ۲۵|A|\frac{۱}{|A|} = ۲۵$.

مثال ۵: ثابت کنید به‌ازای هر ماتریس مربعی A داریم $|A^{-۱}A^tA| = |A|$.

حل: با استفاده از خواص ماتریس‌ها، دترمینان‌ها و اعداد حقیقی داریم:

$$|A^{-1}A^tA| = |(\bar{A}A^t)A| = |A^{-1}A^t||A| = |A^{-1}||A^t||A| = \frac{1}{|A|}|A||A| = |A|$$

از دانشجو انتظار می‌رود در هر مرحله تشخیص دهید که از چه خواصی از ماتریس‌ها، دترمینان‌ها و اعداد حقیقی استفاده شده است.

مثال ۶: ثابت کنید که اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و A منفرد باشد آنگاه AB نیز منفرد است، آیا عکس مطلب نیز درست است؟

حل: چون A منفرد است. پس $|A| = 0$، با کاربرد خواص دترمینان داریم:

$$|AB| = |A||B| = 0|B| = 0$$

پس ماتریس AB نیز منفرد است.

حال عکس این مطلب را بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم اگر AB منفرد باشد آنگاه A نیز منفرد است.

$$|AB| = 0 \Longrightarrow |A||B| = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \quad \text{یا} \quad |B| = 0$$

بنابراین منفرد بودن AB نتیجه می‌دهد که یا A منفرد است و یا B (و یا ممکن است هر دو منفرد باشند). پس عکس قضیه لزوماً درست نیست. می‌توان این مثال را به شکل زیر و به صورتی لازم و کافی نیز ارایه کرد.

شرط لازم و کافی برای آن که ماتریس AB منفرد باشد آن است که A یا B منفرد باشند.

۳-۲-۱ تمرین

۱) با استفاده از عملیات سطری (ستونی) و ایجاد حداکثر صفر در سطرها (ستونها) محاسبه دترمینان ماتریس‌های زیر را به صورت ساده انجام دهید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۶ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$

۲) فرض کنید A ماتریس زیرباشد:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۲ & ۰ & -۴ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

با بسط همسازها می‌توان نشان داد که $|A| = -۲$ با استفاده از این مطلب و خواص دترمینان‌ها، دترمینان ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۲ & ۰ & -۴ \\ -۲ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۴ \\ ۱ & -۱ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & -۲ & -۱۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳) اگر A ماتریس ۳×۳ زیر باشد، آنگاه $|A| = ۵$

$$A = \begin{bmatrix} ۸ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

با استفاده از این مطلب و با به کارگیری خواص سطری و ستونی دترمینان‌ها، دترمینان ماتریس‌های

زیر را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

۴) در آنچه که در ذیل می‌آید دترمینان یک ماتریس به دو طریق با استفاده از عملیات سطری با دو مقدار مختلف به دست آمده است که یکی صحیح و دیگری غلط است. آیا می‌توانید مقدار صحیح را تشخیص دهید و ایراد عملیات سطری غلط را توضیح دهید؟

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} \underset{3R_2+R_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -1(-18-3) = 21$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} \underset{R_3+3R_2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6+1 = 7$$

۵) با استفاده از خواص سطری و ستونی دلیل این که چرا ماتریس‌های زیر منفرد هستند را بیان کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۶) اگر A ماتریسی 2×2 با دترمینان ۵ باشد دترمینان‌های زیر را با استفاده از خواص دترمینان‌ها به دست آورید.

الف) $|3A|$ ب) $|6A^t|$ ج) $|A^2|$ د) $|(A^t)^2|$

ه) $|(A^t)t|$ و) $|4A^{-1}|$

۷) اگر A و B ماتریس‌های 3×3 باشند به طوری که $|A| = 3$ و $|B| = -5$، دترمینان‌های زیر را به دست آورید:

الف) $|AB|$ ب) $|AA^t|$ ج) $|AB^t|$ د) $|4A^tB^2|$

ه) $|2AB^{-1}|$ و) $|3A^2B^{-1}A^t|$ ز) $|3AB^tA^{-1}B^{-1}|$

ح) $|(ABA^{-1})^t|$

۸) اگر A ماتریس 3×3، $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باشد و $|A| = 3$ دترمینان‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$

۹) معادله زیر را بدون به دست آوردن مستقیم دترمینان‌ها ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & f \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

۱۰) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن است.

۱۱) قسمت (ب) و (ج) قضیه ۳ـ۲ـ۱ را ثابت کنید.

۱۲) قسمت (ج) قضیه ۳ـ۲ـ۲ را ثابت کنید.

۱۳) ثابت کنید اگر جمع هر سطر (ستون) یک ماتریس مربعی A برابر صفر باشد آنگاه $|A| = 0$.

۱۴) فرض کنید A ماتریسی مربعی و n عددی طبیعی است به طوری که $A^n = 0$ ثابت کنید $|A| = 0$.

۱۵) ثابت کنید برای دو ماتریس $n \times n$، A و B داریم $|AB| = |BA|$.

۱۶) اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند آیا معادله $|A + B| = |A| + |B|$ برقرار است. آن را ثابت کنید و یا مثال نقضی برای آن ارایه دهید.

۱۷) فرض کنید A ماتریس مربعی و B ماتریسی است که با عملیات سطری (ستونی) از ماتریس A حاصل شده است ثابت کنید $|B| \neq 0$ اگر وفقط اگر $|A| \neq 0$.

۱۸) الف) فرض کنید A ماتریسی 2×2 است نشان دهید که تنها ماتریس به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست I_2 است.

ب) فرض کنید A ماتریسی 3×3 است نشان دهید که تنها ماتریسی به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست I_3 است.

ج) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ است نشان دهید که تنها ماتریس به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست I_n است.

د) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که فرم پلکانی آن E است نشان دهید $|A| \neq 0$ اگروفقط‌اگر $E = I_n$.

۳-۳ ارزیابی عددی یک دترمینان

در بخش‌های قبلی برای تعیین دترمینان یک ماتریس مربعی از روش تعیین همسازها استفاده کردیم. آن روش که براساس تعریف کهاد و همسازها بنا شده بود ما را درگیر محاسبات زیادی می‌کرد. در این بخش روش عددی کارایی را معرفی می‌کنیم، که برای برنامه‌ریزی کامپیوتری نیز مناسب است، این روش مقدار دترمینان یک ماتریس را سریع‌تر در اختیار ما قرار می‌دهد.

در روش حذفی گاوس ـ جردن که برای حل دستگاه معادلات به کار می‌رفت از روش عملیات سطری برای تبدیل یک دستگاه معادلات به دستگاه معادلات ساده‌تر استفاده کردیم و از این طریق جواب دستگاه معادلات را به دست آوردیم. برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی از روش مشابه استفاده خواهیم کرد. در بخش قبلی در مورد اثرات عملیات سطری برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس بحث کردیم. در اینجا روش تبدیلات سطری مقدماتی را برای تبدیل یک ماتریس به ماتریسی که آن را ماتریس بالا مثلثی می‌نامیم به کار خواهیم برد. این شکل از ماتریس محاسبه دترمینان را بسیار ساده خواهد کرد.

تعریف: یک ماتریس مربعی را **ماتریس بالا مثلثی** می‌نامیم اگر تمام درایه‌های زیر قطر صفر باشند. **ماتریس مربعی، پایین مثلثی** نامیده می‌شود اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

ماتریس‌های زیر مثال‌هایی از ماتریس‌های مثلثی هستند.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های مثلثی پایین

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های مثلثی بالا

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که به دست آوردن دترمینان ماتریس‌های مثلثی تا چه اندازه ساده است.

۳ـ۳ـ۱ قضیه: دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس $n \times n$، A بالا مثلثی باشد. دترمینان آن را روی اولین ستون بسط می‌دهیم و دترمینان به دست آمده از حاصل این بسط را نیز روی اولین ستون بسط داده و در مراحل بعدی نیز همین عمل را انجام می‌دهیم، مراحل به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & O & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & O & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & O & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

اثبات برای ماتریس‌های پایین مثلثی به طریقی مشابه است. ■

مثال ۱: دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۰ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

حل: چون ماتریس یک ماتریس مثلثی است داریم:

$$|A| = ۱ \times (-۳) \times (-۵) = ۱۵$$

حال روش عددی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی را به طور خلاصه بازگو می‌کنیم.

محاسبه عددی یک دترمینان

ماتریس داده شده را با استفاده از دو عمل سطری مقدماتی زیر به صورت ماتریس بالا مثلثی درمی‌آوریم.

۱) ضریبی از یک سطر را به سطر دیگر اضافه می‌کنیم، این عمل تغییری در مقدار دترمینان ماتریس جدید نمی‌دهد.

۲) تعویض دو سطر با یکدیگر، در این صورت اگر دو سطر متوالی باشند یعنی فاصله دو سطر ۱ باشد و یا در حالت کلی اگر فاصله دو سطر k باشد دترمینان حاصل $(-۱)^k$ برابر دترمینان اولیه است. برای مثال اگر بخواهیم سطر اول و سطر سوم را با یکدیگر تعویض کنیم دترمینان ماتریس حاصل برابر دترمینان ماتریس اولیه است و اگر بخواهیم سطر اول و چهارم را تعویض کنیم دترمینان ماتریس حاصل ۱− برابر دترمینان ماتریس اولیه است.

با این روش دترمینان ماتریس اولیه بسته به تعداد تعویض سطرها یا برابر حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مثلثی حاصل و یا منفی این مقدار می‌باشد. مثال زیر روش کار را نشان می‌دهد.

مثال ۲: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \\ ۴ & -۵ & -۲ \\ ۱۰ & ۹ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \\ ۴ & -۵ & -۲ \\ ۱۰ & ۹ & ۴ \end{vmatrix} \underset{R_۳+(-۲)R_۱}{\underset{R_۲+R_۱}{=}} \begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۰ \\ ۸ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_۳+R_۲}{=} \begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۰ \\ ۱۳ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۲ \times (-۱) \times ۱۳ = -۲۶$$

مثال ۳: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$$

حل: با به کارگیری الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2+(-2)R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4+R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4+2R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-2) \times 6 = 12$$

برای به دست آوردن ماتریس مثلثی بالا گاهی لازم است که جای دو سطر را با یکدیگر عوض کنیم مثال زیر یکی از این موارد است در این حالت هر زمان که دو سطر متوالی را با یکدیگر عوض می‌کنیم دترمینان ماتریس حاصل از این عمل برابر منفی دترمینان ماتریس قبلی خواهد شد.

مثال ۴: دترمینان زیر را به دست آورید:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

حل:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2+R_1 \\ R_3+(-2)R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

در این جا احساس می‌شود که درایه سطر دوم و ستون دوم باید غیرصفر باشد در این صورت سطر دوم را با سطر سوم تعویض کرده و به صورت زیر دترمینان را به دست می‌آوریم:

$$\underset{R_2 \to R_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 \times 2 \times (-1) = 2$$

اگر در مرحله‌ای عضوی از قطر صفر باشد و تمام درایه‌های زیر ستون مربوط به این صفر نیز صفر باشد در این صورت امکان این که با تعویض دو سطر درایه غیرصفری در قطر قرار دهیم وجود ندارد در این صورت ماتریس بالا مثلثی حاصل از عملیات سطری، ماتریسی خواهد بود که روی قطر اصلی آن صفر وجود دارد.

در این صورت عملیات بیشتر بی‌نتیجه است و دترمینان این ماتریس صفر خواهد بود. مثال زیر نمونه‌ای از این حالت است.

مثال ۵: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ & ۳ & ۴ \\ ۶ & -۶ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}$$

حل: داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ & ۳ & ۴ \\ ۶ & -۶ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} \underset{\substack{R_۲+R_۱ \\ R_۳+(-۲)R_۱ \\ R_۴+(-۶)R_۱}}{=} \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ & -۱۱ \end{vmatrix} = ۰$$

درایه قطر صفر است و تمام درایه‌های زیر آن نیز صفر است.

۳-۳-۱ تمرین

۱) دترمینان ماتریس‌های مثلثی زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ & ۵ \\ ۰ & -۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۲) با استفاده از عملیات سطری دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳ زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۸ \\ -۲ & -۳ & ۴ \\ ۴ & ۶ & -۲ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ -۲ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

۳) با استفاده از عملیات سطری، دترمینان ماتریسهای 4×4 زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴) I_n ماتریس $n \times n$ واحد است، ثابت کنید $|I_n| = 1$.

۵) نشان دهید اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد آنگاه $|A||A^{-1}| = 1$.

۶) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن ماتریس می‌باشد.

۷) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس پایین مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطر آن ماتریس است.

۸) نشان دهید:

الف) اگر $A = A^{-1}$، آنگاه $|A| = \pm 1$.

ب) اگر $A^t = A^{-1}$ آنگاه $|A| = \pm 1$.

۹) اگر A یک ماتریس باشد ثابت کنید، $|A| \neq 0$ اگروفقط‌اگر $|A^{-1}| \neq 0$.

۱۰) اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و $AB = I_n$ نشان دهید که، $|A| \neq 0$ و $|B| \neq 0$.

۱۱) ثابت کنید هر ماتریس مثلثی متقارن یک ماتریس قطری است.

۳-۴ دترمینان‌ها، معکوس ماتریس و دستگاه معادلات خطی

در بخش‌های قبلی مفهوم دترمینان را تعریف کرده و روش‌های مختلف محاسبه آن را بحث کرده‌ایم و به خواص جبری آن نیز نظر افکنده‌ایم در این جا می‌خواهیم ببینیم که چگونه مفهوم دترمینان می‌تواند در مورد معکوس یک ماتریس به ما کمک کند و چگونه می‌تواند اطلاعاتی در مورد حل دستگاه معادلات خطی ارایه دهد.

برای به دست آوردن فرمولی که بتوان از آن معکوس یک ماتریس نامنفرد را به دست آورد احتیاج به معرفی ابزاری داریم که در زیر می‌آید:

تعریف: فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و C_{ij} همسازه درایه a_{ij} باشد، ماتریسی که درایه سطر iام و ستون jام آن C_{ij} باشد **ماتریس همساز** A نامیده می‌شود و ترانهاده این ماتریس را **ماتریس الحاقی** می‌گوئیم و آن را با $\mathrm{adj}(A)$ نشان می‌دهیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} & \dots & C_{۱n} \\ C_{۲۱} & C_{۲۲} & \dots & C_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n۱} & C_{n۲} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس همساز } A} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} & \dots & C_{۱n} \\ C_{۲۱} & C_{۲۲} & \dots & C_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n۱} & C_{n۲} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^t}_{\text{ماتریس الحاقی } A}$$

مثال ۱: ماتریس همساز و الحاقی ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل:

$$C_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = ۵ \quad C_{۱۲} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = ۳ \quad C_{۱۳} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = -۱$$

$$C_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = -۶ \quad C_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = ۲ \quad C_{۲۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = ۴$$

$$C_{۳۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = ۳ \quad C_{۳۲} = -\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = -۱ \quad C_{۳۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = ۵$$

در این صورت ماتریس همساز عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۳ & -۱ \\ -۶ & ۲ & ۴ \\ ۳ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

و ماتریس الحاقی که ترانهاده ماتریس فوق است عبارت است از:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & ۳ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

قضیهٔ زیر معکوس یک ماتریس نامنفرد را به صورت فرمول ارایه می‌دهد.

۳ـ۴ـ۱ قضیه: فرض کنید A ماتریسی مربعی است که $|A| \neq \circ$، در این صورت A معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن عبارت است از:

$$A^{-\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{|A|} \operatorname{adj}(A)$$

اثبات: ماتریس حاصل ضربی $A.\operatorname{adj}(A)$ را درنظر بگیرید و b_{ij} را درایه سطر iام و ستون jام آن فرض کنید در این صورت:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \text{سطر } i\text{ام } A \times \text{ستون } j\text{ام } \operatorname{adj}(A) \\ &= [a_{i\text{۱}}\ a_{i\text{۲}}\ \dots\ a_{in}] \begin{bmatrix} c_{j\text{۱}} \\ c_{j\text{۲}} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{bmatrix} \\ &= a_{i\text{۱}}c_{j\text{۱}} + a_{i\text{۲}}c_{j\text{۲}} + \dots + a_{in}c_{jn} \end{aligned}$$

حال اگر $i = j$ آنگاه b_{ij} بسط $|A|$ روی سطر iام است و اگر $i \neq j$ باشد b_{ij} بسط دترمینان ماتریسی است که از جایگزینی jامین سطر ماتریس A در سطر iام به دست آمده است. یعنی ماتریسی که دارای دو سطر برابر است و به وضوح دترمینان یک چنین ماتریسی صفر است. پس

$$b_{ij} = \begin{cases} |A|, & \text{اگر } i = j \\ \circ, & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

بنابراین ماتریس $A.\operatorname{adj}(A)$ ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های قطر آن $|A|$ می‌باشد. با فاکتورگیری از عدد $|A|$ این ماتریس به صورت $|A|I_n$ درمی‌آید. بنابراین

$$A.\operatorname{adj}(A) = |A|I_n.$$

و چون می‌دانیم $|A| \neq \circ$ معادله بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$A.(\frac{\text{۱}}{|A|}\operatorname{adj}(A)) = I_n$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که

$$(\frac{\text{۱}}{|A|}\operatorname{adj}(A)).A = I_n$$

بنابراین $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)$ و قضیه ثابت می‌گردد. ■

اهمیت این قضیه در این است که فرمولی برای محاسبه هر ماتریس مربعی نامنفرد در اختیار می‌گذارد که برای گسترش مفاهیم نظری مفید خواهد بود. الگاریتم گوس ـ جردن در فصول قبل معرفی شد روش کاراتری را نسبت به این فرمول برای محاسبه معکوس یک ماتریس بخصوص ارایه می‌داد هر چند که روش حذفی گوس ـ جردن را نمی‌توان برای محاسبه معکوس هر ماتریس دلخواهی به کار گرفت.

قضیه‌ی زیر که در واقع مکمل قضیه بالاست بیان می‌دارد که ماتریس‌های نامنفرد دقیقاً همان‌هایی هستند که معکوس‌پذیرند.

۳ـ۴ـ۲ قضیه: یک ماتریس مربعی $n \times n$، A معکوس‌پذیر است اگروفقط‌اگر $|A| \neq 0$.

اثبات: فرض کنید A معکوس‌پذیر است در این صورت $AA^{-1} = I_n$ در نتیجه $|AA^{-1}| = |I_n|$ و با استفاده از خواص دترمینان $|A||\bar{A}| = 1$ و بنابراین $|A| \neq 0$.

بالعکس فرض کنیم $|A| \neq 0$، بنابر قضیه ۳ـ۴ـ۱ A معکوس‌پذیر است.

مثال ۲: با کاربرد مفهوم دترمینان مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیرند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ - & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 12 & -7 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: C منفرد است و معکوس‌پذیر نیست زیرا $|C| = 0$. A معکوس‌پذیر است چون که $|A| = 2 \neq 0$.

D معکوس‌پذیر است زیرا $|D| = 27 \neq 0$. B منفرد است و معکوس‌پذیر نیست $|B| = 0$.

مثال ۳: با استفاده از فرمول معکوس یک ماتریس، معکوس ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: با محاسبه دترمینان این ماتریس می‌بینیم که $|A| = ۱۴$ پس A معکوس‌پذیر است. $\operatorname{adj}(A)$ قبلاً در مثال ۱ معین شده است و عبارت است از:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & ۳ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۴}\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۱۴} & -\frac{۶}{۱۴} & \frac{۳}{۱۴} \\ \frac{۳}{۱۴} & \frac{۲}{۱۴} & -\frac{۱}{۱۴} \\ -\frac{۱}{۱۴} & \frac{۴}{۱۴} & \frac{۵}{۱۴} \end{bmatrix}$$

حال رابطه مابین وجود یکتایی جواب یک دستگاه n معادله و n مجهول را با ماتریس ضرایب آن دستگاه بررسی می‌کنیم.

۳ـ۴ـ۳ قضیه: فرض کنیم $AX = b$ یک دستگاه معادله، n مجهولی با n معادله باشد. اگر $|A| \neq ۰$ آنگاه یک جواب منحصربفرد برای این دستگاه وجود دارد در صورتی که $|A| = ۰$ دستگاه ممکن است هیچ جوابی نداشته باشد و یا دارای بی‌نهایت جواب باشد.

اثبات: اگر $|A| \neq ۰$ طبق قضیه ۳-۴-۳، $A^{-۱}$ وجود دارد و طبق قضیه ۳ـ۴ـ۳ جواب منحصربفرد عبارت خواهد بود از

$$X = A^{-۱}b$$

اگر $|A| = ۰$ هر ماتریسی که با عملیات سطری از ماتریس A حاصل شود و بخصوص ماتریس فرم پلکانی A باید دارای دترمینان صفر باشد (۳-۲). بنابراین فرم پلکانی A برابر I_n نیست پس جواب دستگاه معادلات $AX = b$ یکتا نیست. ■

مثال ۴: طی ارایه دو دستگاه معادلات زیر که ماتریس ضرایب‌شان منفرد است ملاحظه می‌کنیم که ممکن است این نوع دستگاه جوابی نداشته باشد و یا دارای بی‌نهایت جواب باشد.

$$\begin{array}{ll} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۳ & \qquad x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۱ \\ ۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ = ۳ & \qquad ۳x_۱ - ۴x_۲ + ۵x_۳ = ۳ \\ x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = ۰ & \qquad ۲x_۱ - ۳x_۲ + ۴x_۳ = ۲ \end{array}$$

ستون اول جواب ندارد و ستون دوم بی‌نهایت جواب دارد که عبارتند از:

$$x_۳ = r \quad x_۲ = ۲r \quad x_۱ = r + ۱, \quad r \in \mathbb{R}$$

مثال ۵: مشخص کنید که آیا دستگاه معادله زیر دارای جواب منحصربفرد است یا نه؟

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۳x_۲ - ۲x_۳ = ۲ \\ ۴x + x_۲ + ۳x_۳ = -۵ \\ ۷x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ = ۹ \end{cases}$$

حل: دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه را محاسبه می‌کنیم و می‌بینیم که

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۳ & -۲ \\ ۴ & ۱ & ۳ \\ ۷ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین دستگاه معادله بالا دارای جوابی منحصربفرد نیست.

حال روشی را معرفی می‌کنیم که به قاعده کرامر موسوم است و برای حل دستگاهی با n معادله و n مجهول به کار می‌رود که دارای یک جواب منحصربفرد است. این قاعده از لحاظ نظری بدین جهت دارای اهمیت است که فرمولی برای حل دستگاههای معادلات به دست می‌دهد.

۳ـ۴ـ۴ قضیه (قاعده کرامر): فرض کنیم $AX = b$ دستگاهی با n معادله با n معادله و n مجهول است به طوری که $|A| \neq ۰$ در این صورت دستگاه دارای جوابی منحصربفرد است که توسط فرمول زیر ارایه می‌شود:

$$x_۱ = \frac{|A_۱|}{|A|},\ x_۲ = \frac{|A_۲|}{|A|},\ \ldots x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

که به ازای هر i، A_i ماتریسی است که با جایگزینی ستون iام A به وسیله B به دست آمده است.

اثبات: از آنجا که $|A| \neq ۰$ دستگاه فوق دارای جواب منحصربفرد است.

$$X = A^{-۱}b = \frac{۱}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)b$$

به طوری که x_i، iامین عضو X به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|}[\text{adj}(A) \text{ سطر } i\text{ام}] \times b \\ &= \frac{1}{|A|}[C_{1i}, C_{2i}, \ldots, C_{ni}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|}(b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \cdots + b_n C_{ni}) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز عبارت است از بسط همساز $|A_i|$ برحسب ستون iام آن و بنابراین

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

مثال ۶: با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادله زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

حل: ماتریس A ماتریس ضرایب و ماتریس b ماتریس مقادیر ثابت به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

می‌توان به آسانی نشان داد که $|A| = -3 \neq 0$ و در نتیجه قاعده کرامر را می‌توان به کار گرفت.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

که با محاسبه‌ای ساده می‌بینیم که $|A_1| = -3$، $|A_2| = 6$، $|A_3| = -9$. و در این صورت قاعده کرامر مجهولات را به صورت زیر مشخص می‌کند:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-3} = -2 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

و جواب منحصربفرد عبارت است از $x_1 = ۱$، $x_2 = -۲$ و $x_3 = ۳$.

بسیار مهم است که دانشجو قاعده کرامر را با حل چندین دستگاه معادلات مختلف به خاطر بسپارد ولی تأکید بر این نکته کاملاً ضروری است که قاعده کرامر فقط برای حل دستگاه معادلاتی به کار می‌رود که دارای جواب منحصربفرد هستند. البته در عمل برای حل یک دستگاه معادلات معمولاً از قاعده کرامر استفاده نمی‌شود. روش گوس ـ جردن و روش حذفی گوس که در بخش ۹ـ۱ معرفی شده‌اند برای حل یک دستگاه معادلات کارآمدتر هستند. جالب است بدانید که برای حل یک دستگاه معادلات با n معادله و n مجهول روش حذفی گوس از $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ عمل ضرب و $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ عمل جمع استفاده می‌کند در حالی که این مقادیر برای حل یک چنین دستگاه معادله‌ای با روش کرامر $\frac{1}{3}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n^2 - \frac{1}{3}n - 1$ عمل ضرب و $\frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n$ عمل جمع می‌باشد. این بدان معناست که برای حل یک دستگاه معادلات با ۴ معادله و ۴ مجهول به روش قاعده حذفی گوس ۳۶ عمل ضرب و ۲۶ عمل ضرب و ۲۶ عمل جمع به کارگرفته می‌شود و همین دستگاه به روش قاعده کرامر به ترتیب با ۱۱۵ عمل ضرب و ۷۰ عمل جمع حل می‌گردد. در نتیجه کامپیوترها ترجیح می‌دهند که از روش حذفی گوس ـ جردن استفاده کنند!

قضیه‌ی ۲ـ۸ نتیجه می‌دهد که حل یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول $AX = b$ دارای جوابی منحصربفرد است اگروفقط‌اگر $|A| \neq ۰$. دستگاه همگن $AX = ۰$ را درنظر بگیرید می‌بینیم که $X = ۰$ یک جواب این دستگاه است، این جواب را یک جواب بدیهی می‌نامیم اگر قرار باشد که از این دستگاه انتظار جواب غیربدیهی داشته باشیم (همان طورکه در اغلب مواقع پیش می‌آید) باید $|A| = ۰$. مثال زیر نمونه‌ای از این حالت است.

مثال ۷: مقادیر λ را طوری به دست آورید که دستگاه معادله زیر دارای جواب غیربدیهی باشد و به‌ازای هر λ، جوابهای غیربدیهی را به دست آورید.

$$(\lambda + ۲)x_1 + (\lambda + ۴)x_2 = ۰$$

$$۲x_1 + (\lambda + ۱)x_2 = ۰$$

حل: دستگاه بالا یک دستگاه معادلات خطی همگن است و بنابراین جواب بدیهی $x_1 = ۰$ و $x_2 = ۰$ یک جواب این دستگاه است. قضیه ۳ـ۸ بیان می‌دارد که اگر دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه برابر صفر باشد ممکن است این دستگاه جواب غیربدیهی نیز داشته باشد پس دترمینان این دستگاه

را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+1) - 2(\lambda+4) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Longrightarrow (\lambda-2)(\lambda+3) = 0$$

بنابراین دترمینان ضرایب صفر است اگر $\lambda = -3$ و یا $\lambda = 2$، برای $\lambda = -3$ معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

که به‌ازای هر عدد حقیقی r، $x_2 = r$ و $x_1 = r$ یک جواب است. هم‌چنین اگر $\lambda = 2$ دستگاه معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$4x_1 + 6x_2 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

این دستگاه نیز به‌ازای هر عدد حقیقی r دارای جواب $x_2 = \frac{2}{3}r$ و $x_1 = r$ است.

۳-۴-۱ تمرین

۱) با استفاده از مفهوم دترمینان بدون محاسبه معکوس ماتریس‌های زیر، تعیین کنید کدام یک معکوس‌پذیرند.

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ط) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ی) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

۲) با استفاده از مفهوم دترمینان وبدون محاسبه معکوس ماتریس‌های زیر تعیین کنید کدام یک معکوس‌پذیرند.

الف) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، د) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

۳) تعیین کنید کدام یک از ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیرند و معکوس آنهایی را که معکوس‌پذیر هستند به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، ج) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ ، د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴) تعیین کنید کدام یک از ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیرند و معکوس آنهایی را که معکوس‌پذیر هستند به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ، ب) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ج) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ 0 & 13 & 8 \end{bmatrix}$ ، د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

۵) با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x_1 + 2x_2 = 11$ ، $x_1 - x_2 = 2$

ب) $x_1 - 5x_2 = 2$ ، $2x_1 + x_2 = 15$

ج) $3x_1 + 2x_2 = 0$ ، $2x_1 + 3x_2 = 1$

۶) با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$

ب) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_4 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$

ج) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

د) $\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$

۷) با محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیر مشخص کنید کدام دستگاه دارای جواب منحصربفرد است.

الف) $3x_1 - 2x_2 = 1$ ، $-6x_1 + 4x_2 = 3$

ب) $x_1 + 2x_2 = 0$ ، $x_1 - 2x_2 = 5$

ج) $x_1 - x_2 = 2$، $-3x_1 + 3x_2 = -6$

۸) با محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیر مشخص کنید کدام دستگاه دارای جواب منحصربفرد است.

الف)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 1.x_3 &= -2 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ج)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

۹) به‌ازای چه مقادیری از λ دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به‌ازای یک چنین λای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 5x_1 + (2-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

۱۰) به‌ازای چه مقادیری از λ دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به‌ازای یک چنین λای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (\lambda-3)x_1 - 8x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (\lambda+5)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

۱۱) به‌ازای چه مقداری از λ دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به‌ازای یک چنین λای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (5-\lambda)x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + (5-\lambda)x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (2-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

۱۲) فرض کنید $AX = \lambda X$ یک دستگاه معادلات با n معادله و n مجهول باشد. ثابت کنید این دستگاه دارای جوابهای غیربدیهی است اگروفقط‌اگر $|A - \lambda I_n| = 0$.

۱۳) نشان دهید که اگر A ماتریس مربعی متقارن باشد آنگاه $\mathrm{adj}(A)$ نیز متقارن است.

۱۴) نشان دهید که اگر ماتریس مربعی A معکوس‌پذیر نباشد $\mathrm{adj}(A)$ نیز معکوس‌پذیر نیست.

۱۵) نشان دهید که اگر ماتریس مربعی A معکوس‌پذیر باشد $\mathrm{adj}(A)$ نیز معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن به صورت زیر است:

$$(\mathrm{adj}(A))^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

۱۶) اگر A ماتریس مربعی معکوس‌پذیر باشد نشان دهید $(\mathrm{adj}(A))^{-1} = \mathrm{adj}(A^{-1})$.

۱۷) نشان دهید که اگر A و B هر دو ماتریس‌های $n \times n$ باشند به طوری که AB معکوس‌پذیر باشد آنگاه A و B هر دو معکوس‌پذیرند. آیا عکس این مطلب صحیح است.

۱۸) نشان دهید که اگر ماتریس معکوس‌پذیر A و بالامثلثی باشد A^{-1} نیز بالامثلثی است.

۱۹) فرض کنید A ماتریس مربعی باشد که تمام درایه‌های آن عدد صحیح هستند و $|A| = \pm 1$ در این صورت ثابت کنید درایه‌های A^{-1} نیز اعداد صحیح هستند.

۲۰) فرض کنید $AX = 0$ دستگاه معادلات همگن با n معادله و n مجهول باشد به طوری که فقط جواب بدیهی دارد. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی k، $A^k X = 0$ نیز فقط دارای جواب بدیهی است.

۲۱) فرض کنید دو دستگاه معادلات $AX = b_1$ و $AX = b_2$ دستگاههای با n معادله و n مجهول باشند که ماتریس ضرایب هر دو A است. ثابت کنید $AX = b_1$ دارای جواب منحصربفرد است اگروفقط‌اگر $AX = b_2$ دارای جواب منحصربفرد باشد.

هدف‌های رفتاری فصل چهار

- معرفی $\mathbb{R}^n$ به عنوان یک فضای برداری
- شناخت هندسه $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ و تعمیم مفاهیم هندسی آن به فضای کلی $\mathbb{R}^n$
- استفاده از مفاهیم ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی در مباحث مربوط به $\mathbb{R}^n$

هدف‌های آموزشی و رفتاری فصل

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند

- ماهیت برداری $\mathbb{R}^n$ را شناخته و خواص جبری آنها را توضیح دهد.
- مفاهیم بردار سطری، بردار ستونی و نرم بردار را تعریف کرده و برای هر یک مثال‌هایی ارایه دهد.
- نامساوی کوشی ـ شوارتز را بیان کرده و از عهده‌ی اثبات آن برآید.
- مفاهیم زاویه بین دو بردار را برحسب کسینوس آن تعریف کرده و دو بردار متعامد را تعریف کند.
- نامساوی مثلث و قضیه فیثاغورس را در $\mathbb{R}^n$ بیان و اثبات کند.
- ویژگی‌های نرم و ویژگی‌های فاصله را ذکر کرده و با هم مقایسه کند.
- مفهوم تبدیل خطی را تعریف و برای آن مثال‌هایی ارایه دهد.
- شکل ماتریس یک تبدیل خطی را بنویسید.
- تبدیلات ماتریسی، گرافیک کامپیوتری و فرکتالها را توضیح دهد.
- تبدیلات نامنفرد را تعریف کرده و ویژگی‌های آن را به لحاظ هندسی بیان کند.
- از تصاویر هندسی فرکتالها در طبیعت درک و آشنایی داشته باشد.

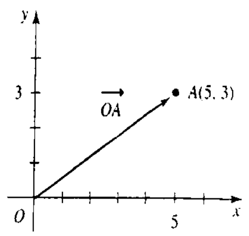
فصل چهارم

فضای برداری $\mathbb{R}^n$

در این قسمت درس ماهیت هندسی می‌گیرد فضاهای دوبعدی و سه‌بعدی را بررسی می‌کنیم که به فضاهای n بعدی منجر می‌شوند. ماتریس‌ها و دستگاه معادلات خطی ابزارهای باارزشی برای این بررسی خواهند بود.

۱-۴ مقدمه بر بردارها

موقعیت نقاط در یک صفحه معمولاً برحسب سیستم مختصات مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، در شکل ۴ـ۱، مکان هر نقطه در صفحه می‌تواند با استفاده از سیستم مختصات قائم بررسی شود. نقطهٔ A، نقطهٔ $(۵, ۳)$ است.

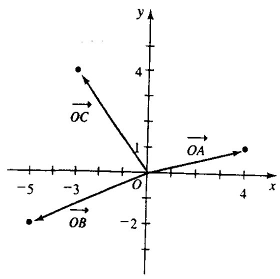


شکل ۴ـ۱

به علاوه، A به فاصلهٔ معینی از **مبدأ** $(0,0)$ و در جهت معینی از آن می‌باشد. فاصله و جهت، توسط **درازا** و جهت پاره‌خط از مبدأ O به A مشخص می‌شود. چنین پاره‌خط جهت‌دار را بردار مکان نامیده و آن را با $\vec{OA}$ نشان می‌دهیم. O نقطه ابتدا و A نقطه‌ی انتهای $\vec{OA}$ نامیده می‌شود. بنابراین دو نوع تعبیر برای $(5,3)$ وجود دارد، یکی این که مکان یک نقطه را در صفحه تعریف می‌کند، دوم آن که بردار مکان $\vec{OA}$ را بیان می‌کند.

مثال ۱: بردارهای مکانی $\vec{OA}=(4,1)$، $\vec{OB}=(-5,-2)$ و $\vec{OC}=(-3,4)$ را رسم کنید.

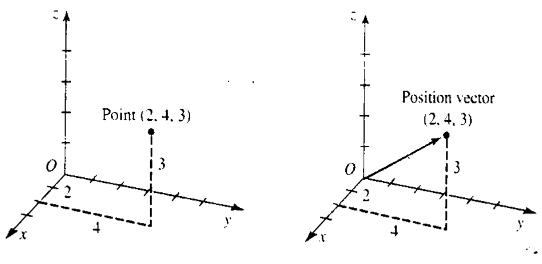
شکل ۴ـ۲ را ببینید.



شکل ۴ـ۲

مجموعه‌ی تمامی زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی را با R^2 نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که به عنوان مثال $(5,3)$ همان بردار $(3,5)$ نیست. ترتیب حائز اهمیت است.

این مفاهیم می‌تواند به آرایه‌های سه تایی از اعداد حقیقی مانند $(2,4,3)$ توسعه یابد که برای آن دو تعبیر ممکن بیان شود، به عنوان مکان یک نقطه در سه فضا نسبت به دستگاه مختصات x,y,z و یا به عنوان یک بردار مکان. این تعابیر در شکل ۴ـ۳ نشان داده شده‌اند. مجموعهٔ تمامی سه‌تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را با R^3 نشان می‌دهیم.



شکل ۴ـ۳

حال این مفاهیم را با تعریف زیر کلیت می‌دهیم.

۴-۱-۱ تعریف: فرض کنیم $(u_۱, u_۲, \ldots, u_n)$ دنباله‌ای از n عدد حقیقی باشد. مجموعهٔ تمامی این چنین دنباله‌ها nـ فضا نامیده و با R^n نشان می‌دهیم. $u_۱$ مؤلفه اول، $(u_۱, u_۲, \ldots, u_n)$، $u_۲$ مولفهٔ دوم و به همین ترتیب نامیده می‌شود.

بسیاری از نتایج و فنونی را که در حالت $n > ۳$ برای R^n به دست می‌آوریم، صرف‌نظر از اهمیت مستقیم هندسی، ابزارهای مفید ریاضی خواهند بود. با وجود این، عناصر R^n می‌توانند به عنوان نقاط به عنوان بردارهای مکانی در nـ فضا در نظر گرفته شوند. برای $n > ۳$، تصور nـ فضا مشکل است، اما خواننده تشویق می‌شود تا سعی کند یک تصویر ذاتی در ذهنش بسازد. یک «احساس» هندسی برای آن چه که اتفاق می‌افتد اغلب بحث جبری را برای ادامه آسان‌تر می‌کند. ریاضیاتی را که در R^n توسعه خواهیم داد از هندسه‌ای نشأت می‌گیرند که در $R^۲$ و $R^۳$ با آن آشنا هستیم.

با این طرح، فرض کنیم که R نشانگر اعداد حقیقی باشد.

مثال ۲: $R^۴$ گردایهٔ تمامی مجموعه‌های ۴ عضوی مرتب از اعداد حقیقی است. به عنوان مثال $(۱, ۲, ۳, ۴)$ و $(-۱, \frac{۳}{۴}, ۰, ۵)$ عضوهایی از $R^۴$ می‌باشند. $R^۵$، گردایهٔ تمامی مجموعه‌های ۵ عضوی مرتب از اعداد حقیقی است. و به عنوان مثال $(-۱, ۲, ۰, \frac{۷}{۸}, ۹)$ در این گردایه قرار دارد.

۴-۱-۲ تعریف: فرض کنیم $u = (u_۱, \ldots, u_n)$ و $v = (v_۱, \ldots, v_n)$ دو عضو از R^n باشند. می‌گوییم u و v مساوی هستند اگر $u_۱ = v_۱$، ...، $u_n = v_n$. بنابراین دو عضو R^n مساوی هستند هرگاه **مؤلفه‌های متناظر** آن‌ها با هم برابر باشند.

حال ساختار جبری R^n را می‌سازیم. تعریف‌های زیر برای جمع و ضرب اسکالر، شبیه اعمال ماتریس‌ها هستند. هم‌چنین خواهیم دید که ویژگی‌های جبری نیز مشابه هستند.

۴-۱-۳ تعریف: فرض کنیم $u = (u_۱, \ldots, u_n)$ و $v = (v_۱, \ldots, v_n)$ دو عضو R^n و c یک اسکالر باشد. جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

جمع: $u + v = (u_۱ + v_۱, \ldots, u_n + v_n)$

ضرب اسکالر: $cu = (cu_۱, \ldots, cu_n)$

در جمع دو عضو R^n، مؤلفه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم و برای ضرب عضوی از R^n در یک اسکالر، هر مؤلفه را در همان اسکالر ضرب می‌کنیم. توجه داشته باشید که عناصر به دست آمده در R^n هستند و

می‌گوییم که R^n نسبت به اعمال جمع و ضرب اسکالر بسته است. R^n با اعمال جمع مؤلفه‌وار و ضرب اسکالر مثالی از یک فضای برداری است و اعضای آن بردار نامیده می‌شوند.

از این به بعد، R^n را به عنوان یک فضای برداری درنظر خواهیم گرفت.

مثال ۳: فرض کنیم $u = (-۱, ۴, ۳, ۷)$ و $v = (-۲, -۳, ۱, ۰)$ بردارهایی در $R^۴$ باشند. $u + v$ و $۳u$ را بیابید.

حل: داریم:

$$u + v = (-۱, ۴, ۳, ۷) + (-۲, -۳, ۱, ۰) = (-۳, ۱, ۴, ۷)$$

$$۳u = ۳(-۱, ۴, ۳, ۷) = (-۳, ۱۲, ۹, ۲۱)$$

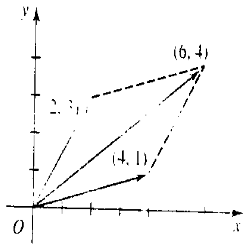
توجه داشته باشید که بردارهای حاصل تحت هر یک از اعمال، بردارهایی از فضای برداری $R^۴$ می‌باشند.

حال مثال‌هایی را برای بیان تعبیر هندسی این بردارها و اعمال آن می‌آوریم.

مثال ۴: این مثال تعبیری هندسی از جمع بردارها را بیان می‌کند. جمع بردارهای $(۴, ۱)$ و $(۲, ۳)$ را درنظر بگیرید. داریم:

$$(۴, ۱) + (۲, ۳) = (۶, ۴)$$

در شکل ۴ـ۴ این بردارها را به صورت بردارهای مکانی درنظر می‌گیریم. جمع دو بردار یعنی $(۶, ۴)$، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای $(۴, ۱)$ و $(۲, ۳)$ دو ضلع مجاور آن می‌باشد.



شکل ۴ـ۴

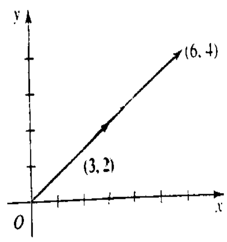
در حالت کلی اگر u و v بردارهایی در یک فضای برداری باشند، آنگاه $u + v$، قطر متوازی‌الاضلاعی است که توسط u و v تعریف می‌شود. شکل ۴ـ۵ را ببینید. (از حروف پررنگ (boldface) برای نشان دادن بردارها و از حروف ساده (plain) برای نشان دادن اسکالرها استفاده خواهیم کرد.) این روش نشان دادن جمع بردارها، در تمامی فضاهای برداری سودمند است.

شکل ۴ـ۵

مثال ۵: این مثال تعبیری هندسی از ضرب اسکالر است. ضرب عدد ۲ در بردار (۲, ۳) را درنظر بگیرید. داریم:

$$۲(۲, ۳) = (۶, ۴)$$

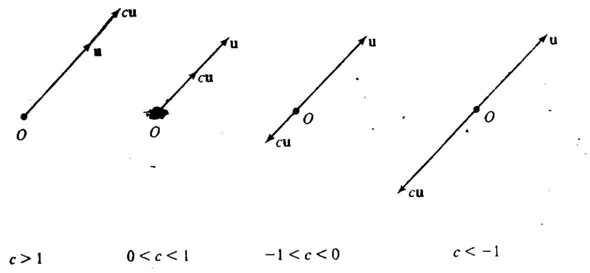
در شکل ۴ـ۶ ملاحظه می‌کنیم که (۶, ۴) برداری هم‌جهت با بردار (۲, ۳) بوده و طول آن ۲ برابر طول بردار (۲, ۳) است.



شکل ۴ـ۶

جهت بردار حاصل‌ضرب به علامت عدد بستگی دارد. نتیجه کلی به صورت زیر است.

فرض کنیم $\mathbf{u}$ یک بردار و c یک عدد باشد. اگر $c > ۰$، cu هم‌جهت با بردار $\mathbf{u}$ و اگر $c < ۰$، cu در خلاف جهت بردار $\mathbf{u}$ می‌باشد. طول بردار cu، $|c|$ برابر طول بردار $\mathbf{u}$ است. شکل ۴ـ۷ را ببینید.



شکل ۴_۷

بردار صفر بردار $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ که n مؤلفه‌اش صفر می‌باشد، بردار صفر R^n نامیده و با ۰ نشان داده می‌شود. برای مثال، $(۰, ۰, ۰)$ بردار صفر $R^۳$ می‌باشد. ملاحظه خواهیم کرد که بردار صفر نقش اساسی در توسعه فضاهای برداری خواهد داشت.

بردار قرینه[1]: بردار $(-۱)u$ که به صورت $-\mathbf{u}$ نوشته می‌شود، قرینه $\mathbf{u}$ نامیده می‌شود و برداری است که طول آن برابر با طول بردار $\mathbf{u}$ ولی جهت آن در خلاف جهت $\mathbf{u}$ می‌باشد.

تفاضل: تفاضل روی عناصر R^n با کم کردن مؤلفه‌های متناظر صورت می‌گیرد. برای مثال در $R^۳$، $(۵, ۳, -۶) - (۲, ۱, ۳) = (۳, ۲, -۹)$. توجه کنید که این عمل معادل است با

$$(۵, ۳, -۶) + (-۱)(۲, ۱, ۳) = (۳, ۲, -۹)$$

بنابراین تفاضل عمل جدیدی روی R^n نیست بلکه ترکیبی از جمع و ضرب اسکالر در -۱ است. فقط دو عمل مستقل روی R^n داریم، جمع و ضرب اسکالر.

۴-۱-۴ قضیه: فرض کنیم $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهایی در R^n، c و d اسکالر باشند.

الف) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

ب) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

پ) $\mathbf{u} + ۰ = ۰ + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

ت) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = ۰$

ث) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

ج) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

1) Negative vector

چ) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

ح) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

درستی این نتایج با نوشتن بردارها برحسب مؤلفه‌ها و با استفاده از تعاریف جمع و ضرب اسکالر بردارها و ویژگی‌های اعداد حقیقی، بررسی می‌شود. اثبات الف و پ را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. در این صورت

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}:$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) \\
&= (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n) \\
&= (v_1+u_1, \ldots, v_n+u_n) \\
&= \mathbf{v}+\mathbf{u}
\end{aligned}$$

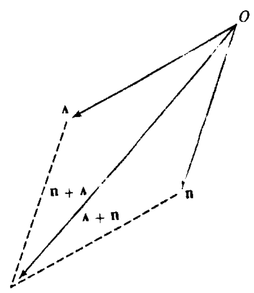
$$c(u+v) = cu+cv;$$

$$\begin{aligned}
c(u+v) &= c((u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n)) \\
&= c((u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)) \\
&= (c(u_1+v_1), \ldots, c(u_n+v_n)) \\
&= (cu_1+cv_1, \ldots, cu_n+cv_n) \\
&= (cu_1, \ldots, cu_n) + (cv_1, \ldots, cv_n) \\
&= c\mathbf{u}+c\mathbf{v}
\end{aligned}$$

برخی از احکام قضیه بالا می‌تواند به طور هندسی توسط شکل توضیح داده شود. ویژگی جابجایی جمع بردارها در شکل ۴ـ۸ نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که قطر متوازی‌الاضلاع در هر دو جمع بردار $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ یکی است. یکی از نکات (ب) در بالا، این است که در نوشتن برخی از عبارت‌های جبری که شامل بردارها می‌باشند شبیه عبارت‌های ماتریس، می‌توانیم پارامترها را ننویسیم.

جابجایی جمع بردارها



شکل ۴ـ۸

مثال ۶: فرض کنیم $\mathbf{u} = (۲, ۵, -۳)$، $\mathbf{v} = (-۴, ۱, ۹)$ و $\mathbf{w} = (۴, ۰, ۲)$. بردار $۲\mathbf{u} - ۳\mathbf{v} + \mathbf{w}$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} ۲\mathbf{u} - ۳\mathbf{v} + \mathbf{w} &= ۲(۲, ۵, -۳) - ۳(-۴, ۱, ۹) + (۴, ۰, ۲) \\ &= (۴, ۱۰, -۶) - (-۱۲, ۳, ۲۷) + (۴, ۰, ۲) \\ &= (۴ + ۱۲ + ۴, ۱۰ - ۳ + ۰, -۶ - ۲۷ + ۲) \\ &= (۲۰, ۷, -۳۱) \end{aligned}$$

کمیت‌های فیزیکی مانند نیرو و سرعت که دارای مقدار و جهت هستند، بردار می‌باشند. و می‌توانند به وسیله‌ی عناصری از $R^۲$ و $R^۳$ به طور ریاضی نشان داده شوند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷: اگر همه نیروهایی که روی یک جسم اثر می‌کنند در یک صفحه قرار داشته باشند، می‌توانند توسط عناصری از $R^۲$ نشان داده شوند و اگر در سه بعدی قرار داشته باشند، می‌توانند توسط عناصری از $R^۳$ نشان داده شوند. دو نیرویی که به طور هم‌زمان روی یک جسم اثر می‌کنند معادل با یک نیرو هستند که نیروی برآیند نامیده می‌شود.

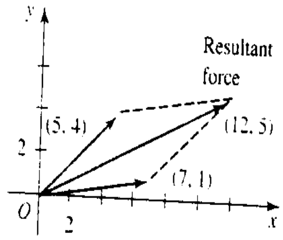
آزمایش‌ها نشان می‌دهد که اگر دو نیرو توسط عناصری از $R^۲$ یا $R^۳$ نشان داده شده باشند نیروی برآیند با جمع این دو بردار نشان داده می‌شود. این قانون، متوازی‌الاضلاع نیروها نامیده می‌شود. دیده‌ایم که این بردار حاصل جمع، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای داده شده دو ضلع مجاور آن می‌باشند بنابراین اصطلاح متوازی‌الاضلاح نیروها بامعنی است.

فرض کنیم که یک جسم در مبداء سیستم مختصات قائم قرارگرفته باشد، دو نیرو که توسط $(۵, ۴)$ و $(۷, ۱)$ نشان داده شده‌اند روی آن اثر کنند، شکل ۴ـ۹ را ببینید. می‌خواهیم بردار برآیند و مقدار آن را بیابیم. با جمع $(۵, ۴)$ و $(۷, ۱)$ داریم:

$$(۵, ۴) + (۷, ۱) = (۱۲, ۵)$$

نیروی برآیند عبارت است از $(۱۲, ۵)$.

نیروی برآیند :



شکل ۴ـ۹

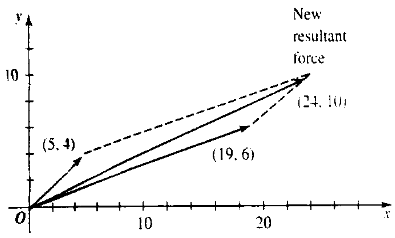
مقدار این نیرو توسط طول این بردار داده می‌شود و می‌تواند با استفاده از قضیه فیثاغورث محاسبه شود.

$$\text{طول } (۱۲,۵) = \sqrt{۱۲^۲ + ۵} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳.$$

مقدار نیرو برآیند برابر ۱۳ است.

فرض کنیم می‌خواهیم که با ثابت نگه داشتن نیروی $(۵, ۴)$ و تغییر نیروی $(۷, ۱)$، مقدار نیروی برآیند را دو برابر کنیم، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ از ضرب اسکالر استفاده می‌شود. نیروی برآیند جدید برابر $(۲۴, ۱۰) = ۲(۱۲, ۵)$ خواهد شد. این بردار هم جهت با $(۱۲, ۵)$ بوده و طولش دو برابر آن است. شکل ۴ـ۱۰ را ببینید. ملاحظه می‌کنیم که:

$$(۲۴, ۱۰) = (۵, ۴) + (۱۹, ۶)$$



شکل ۴ـ۱۰

برای دو برابر کردن نیروی برآیند روی جسم، نیروی (۷, ۱) باید با نیروی (۱۹, ۶) جایگزین شود.

بردارهای ستونی تا به حال فقط بردارهای سطری را بررسی کرده‌ایم که بردارهایی هستند که مؤلفه‌های آن‌ها به صورت سطری نوشته می‌شوند. خواهیم دید که گاهی اوقات استفاده از بردارهای ستونی که مؤلفه‌ها به صورت ستونی نوشته می‌شوند، مناسب‌تر است. مجدداً جمع و ضرب اسکالر بردارهای ستونی در R^n به روش مؤلفه‌ای تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} u_۱ \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_۱ \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_۱ + v_۱ \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \qquad c\begin{bmatrix} u_۱ \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_۱ \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال در $R^۲$:

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۹ \end{bmatrix}, \qquad ۴\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

۴-۱-۵ تمرین

۱) بردارهای مکانی (۱, ۰) و (۰, ۱) را در $R^۲$ رسم کنید. در علوم اغلب نماد i و j برای این بردارها به کار برده می‌شود.

۲) بردارهای مکانی (۱, ۰, ۰) و (۰, ۱, ۰) و (۰, ۰, ۱) را در $R^۳$ رسم کنید. در علوم اغلب نماد i، j و k برای این بردارها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳) بردارهای مکانی زیر را در $R^۲$ رسم کنید.

الف) $\vec{OA} = (۵, ۶), \quad \vec{OB} = (-۳, ۲), \quad \vec{OC} = (۱, -۳),$

ب) $\vec{OP}=(۲,۴)$، $\vec{OQ}=(-۴,۵)$، $\vec{OR}=(۳,-۳)$

پ) $\mathbf{u}=(۱,۱)$، $\mathbf{v}=(-۱,-۴)$، $\mathbf{w}=(۵,۳)$

۴) بردارهای مکانی زیر را در $R^۳$ رسم کنید.

الف) $(۲,۳,۱)$، $\vec{OB}=(\circ,۵,-۱)$، $\vec{OC}=(-۱,۳,۴)$

ب) $\mathbf{u}=(۱,۱,۱)$، $\mathbf{v}=(-۱,-۲,-۴)$، $\mathbf{w}=(\circ,\circ,-۳)$

۵) بردارها را با اعداد داده شده ضرب کنید:

الف) $(۱,۴)$، ۳ ب) $(-۱,۳)$، -۲

پ) $(۲,۶)$، $\frac{۱}{۲}$ ت) $(۲,۴,۲)$، $-\frac{۱}{۵}$

ث) $(-۱,۲,۳)$، ۳ ج) $(۲,-۱,۲,۳,-۲)$، ۴

چ) $(۵,-۲,۳,-۴,۱)$ ح) $(۱,-۲,۴,\circ,۳)$، ۳

۶) عبارت‌های زیر را برای بردارهای $\mathbf{u}=(۲,۱)$، $\mathbf{v}=(۴,-۱)$ و $\mathbf{w}=(-۳,۵)$ محاسبه کنید.

الف) $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ ب) $\mathbf{u}+۳\mathbf{v}$

پ) $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ ت) $۲\mathbf{u}+3v-\mathbf{w}$

ث) $-۳\mathbf{u}_۴\mathbf{v}-۲\mathbf{w}$

۷) عبارت‌های زیر را برای بردارهای $\mathbf{u}=(۲,۱,۳)$، $\mathbf{v}=(-۱,۳,۲)$ و $\mathbf{w}=(۲,۴,-۲)$ محاسبه کنید.

الف) $\mathbf{w}+\mathbf{w}$ ب) $۲\mathbf{u}+\mathbf{v}$

پ) $\mathbf{u}+۳\mathbf{w}$ ت) $۵\mathbf{u}-۲\mathbf{v}+۶\mathbf{w}$

ث) $۲\mathbf{u}-۳\mathbf{v}-۴\mathbf{w}$

۸) ویژگی‌های زیر را در مورد جمع و ضرب اسکالرها که در این بخش معرفی شدند. اثبات کنید.

الف) $u+(v+w)=(u+v)+w$ ب) $u+(-u)=\circ$

پ) $(c+d)u=cu+du$ ت) $۱u=u$

۹) هرگاه $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$، $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-۱\\-۴\end{bmatrix}$ و $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ بردارهای ستونی در $R^۲$ باشند، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $u+۲v$ ب) $-۴v+۳w$

پ) $۳u-۲v+۴w$ ت) $۲u+۳v-۸w$

۱۰) برآیند نیروهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $(۳,۲),(۵,-۵)$ ب) $(-۱,۳),(-۲,۳)$ پ) $(۹,-۱),(-۳,۲)$

۱۱) برآیند نیروهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $(۲,۵,۱),(۱,۴,۶)$ ب) $(-۲,۵,-۱),(۳,-۱,۷)$

۱۲) برآیند نیروهای (۳, ۰) و (۱, ۳) را بیابید. هرگاه (۱, ۳) ثابت نگه داشته شود، (۳, ۰) چگونه تغییر کند تا برآیند دو برابر شود؟

۱۳) برآیند نیروهای (۸, ۲) و (۳, ۱−) را بیابید. هرگاه برآیند به (۵, ۲) تغییر یابد و (۳, ۱−) ثابت نگه داشته شود، (۸, ۲) چگونه تغییر یابد؟

۱۴) کدام یک از کمیت‌های فیزیکی زیر بردار و کدام یک اسکالر است؟

الف) دما ب) شتاب پ) فشار ت) فرکانس ث) ثقل ج) مکان چ) زمان ح) صوت خ) هزینه

۴-۲ حاصل‌ضرب نقطه‌ای، نرم، زاویه و فاصله

در حالی که هندسه‌ای برای فضای برداری R^n می‌سازیم، شما باید توجه دقیق به روشی که استفاده می‌کنیم داشته باشید. (البته ضمن آنکه نتایج حاصله مهم هستند، روشی که به نتایج می‌رسیم مهم‌تر می‌باشند. مقدار، زاویه و فاصله برای R^n توسط تعمیم عبارت‌ها برای مقدار، زاویه و فاصله برای $R^۲$ تعریف می‌شوند. قضیه فیثاغورث را به R^n توسعه می‌دهیم. این فرآیند توسعه مفاهیم آشنا به حالت‌های کلی‌تر در ریاضیات، اساسی است.

بحث را با تعریف حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار شروع می‌کنیم. حاصل‌ضرب نقطه‌ای ابزاری است که در ساختن هندسهٔ برای R^n استفاده می‌شود.

تعریف: فرض کنیم $\mathbf{u} = (u_۱, \ldots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_۱, \ldots, v_n)$ دو بردار در R^n باشند. حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ که با $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ نشان داده می‌شود توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_۱v_۱ + \cdots + u_nv_n$$

حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج از بردارها یک عدد حقیقی است.

مثال ۱: حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{u} = (۱, -۲, ۴)$ و $\mathbf{v} = (۳, ۰, ۲)$ را بیابید.

حل: داریم:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (۱ \times ۳) + (-۲ \times ۰) + (۴ \times ۲) = ۲ + ۰ + ۸ = ۱۱$$

ویژگی‌های حاصل‌ضرب نقطه‌ای : فرض کنید $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهایی در R^n و c یک عدد باشد. آن‌گاه

الف) $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$

ب) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}).\mathbf{w} = \mathbf{u}.\mathbf{w} + \mathbf{v}.\mathbf{w}$

پ) $c\mathbf{u}.\mathbf{v} = c(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = \mathbf{u}.(c\mathbf{v})$

ت) $\mathbf{u}.\mathbf{u} \geq 0$ و $\mathbf{u}.\mathbf{u} = 0$ اگروتنهااگر $\mathbf{u} = 0$.

درستی بندهای الف و ت را بررسی کرده و بقیه را به تمرینات آتی واگذار می‌کنیم.

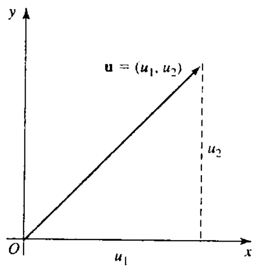
الف) فرض کنید $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}.\mathbf{v} &= u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + \cdots + v_nu_n \qquad \text{بنابه خاصیت جابجایی اعداد حقیقی} \\ &= \mathbf{v}.\mathbf{u}\end{aligned}$$

ت) $u.u = u_1u_1 + \cdots + u_nu_n = u_1^2 + \cdots + u_n^2$. $u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$، زیرا حاصل‌جمع مربعات است. بنابراین $u.u \geq 0$. به‌علاوه، $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 0$ اگروتنهااگر $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$. لذا $u.u = 0$ اگروتنهااگر $\mathbf{u} = 0$.

با استفاده از این ویژگی‌ها عبارت‌های شامل ضرب نقطه‌ای را ساده‌تر می‌کنیم. در این بخش، به عنوان مثال از این ویژگی‌ها برای به دست آوردن عبارت مناسبی برای زاویه بین دو بردار در R^n، استفاده خواهیم کرد. در بخش‌های بعد این ویژگی‌ها را در تعمیم مفهوم ضرب نقطه‌ای به فضای ماتریس‌ها و توابع به کار خواهیم برد.

نرم یک بردار در R^n فرض کنیم $u = (u_1, u_2)$ برداری در R^2 باشد. می‌دانیم که طول این بردار $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ می‌باشد. شکل ۴ـ۱۱ را ببینید. این نتیجه را برای تعریف طول (یا نام فنی نرم) یک بردار در R^n تعمیم می‌دهیم.)



شکل ۴ـ۱۱

تعریف نرم (طول یا مقدار): نرم بردار $u = (u_1, \ldots, u_n)$ در R^n که با $\|u\|$ نشان داده می‌شود به صورت $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$ تعریف می‌شود.

توجه کنید که نرم یک بردار می‌تواند برحسب حاصل‌ضرب نقطه‌ای نیز نوشته شود.

$$\|u\| = \sqrt{u.u}$$

تمرین ۲: نرم بردار $u = (1, 3, 5)$ در R^3 و $v = (3, 0, 1, 4)$ را در R^4 بیابید.

حل: با استفاده از تعریف بالا داریم:

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$
$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

تعریف: یک بردار یکه برداری است که نرم آن برابر ۱ باشد. اگر $\mathbf{v}$ یک بردار ناصفر باشد. آنگاه $u = \frac{1}{\|v\|}v$ برداری یکه در جهت $\mathbf{v}$ است. (تمرین زیر را ببینید.)

روش ساختن بردار یکه هم جهت با بردار داده شده نرمال سازی بردار نامیده می‌شود.

تمرین ۳: الف) نشان دهید که بردار $(1, 0)$ یک بردار یکه است.

ب) نرم بردار $(2, -1, 3)$ را بیابید و آن را نرمال کنید.

حل: الف) $\|(1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$. بنابراین $(1, 0)$ یک بردار یکه است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(0, 1)$ نیز یک بردار یکه در R^2 است.

ب) $\sqrt{۱۴} = \sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲ + ۳^۲} = \|(۲, -۱, ۳)\|$. نرم $(۲, -۱, ۳)$ برابر $\sqrt{۱۴}$ و بردار نرمال شده $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(۲, -۱, ۳)$ می‌باشد. این بردار می‌تواند به صورت $(\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}, \frac{-۱}{\sqrt{۱۴}}, \frac{۳}{\sqrt{۱۴}})$ نیز نوشته شود، که برداری یکه در جهت بردار $(۲, -۱, ۳)$ است.

بردارهای یکهٔ زیر حائز اهمیت می‌باشند.

$(۱, ۰)$، $(۰, ۱)$ بردارهای یکه در $R^۲$.

$(۱, ۰, ۰)$، $(۰, ۱, ۰)$، $(۰, ۰, ۱)$ بردارهای یکه در $R^۳$.

$(۱, ۰, \ldots, ۰)$، …، $(۰, ۰, \ldots, ۱)$ بردارهای یکه در R^n.

حال یک نتیجهٔ مهم ریاضی به نام نامساوی کوشی ـ شوارتز[۱] را معرفی می‌کنیم. این نامساوی به عنوان مثال ما را قادر خواهد ساخت که تعریف زاویه در $R^۲$ را به R^n تعمیم دهیم.

۴-۲-۱ قضیه (نامساوی کوشی شوارتز): اگر u و v دو بردار در R^n باشند آن‌گاه

$$|u.v| \leq \|u\|\|v\|$$

$|\mathbf{u.v}|$ در این جا نشان دهنده قدر مطلق عدد $u.v$ است.

برهان: ابتدا حالت خاص $\mathbf{u} = ۰$ را درنظر می‌گیریم. اگر $\mathbf{u} = ۰$، آن‌گاه $|u.v| = ۰$ و $\|\mathbf{u}\|\|v\| = ۰$ که تساوی برقرار است.

حال فرض کنیم $u \neq ۰$. اثبات نامساوی در این حالت شامل حالت بسیار جالبی از کاربرد فرمول درجهٔ دوم می‌باشد. بردار $ru + v$ را درنظر بگیرید که در آن r عدد حقیقی دلخواهی می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های حاصل‌ضرب عددی داریم:

$$(ru + v).(ru + v) = r^۲(u.u) + ۲r(u.v) + v.v$$

۱) آگوستین لوئیس کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) در پاریس تحصیل کرد و سپس قبل از این که برای تدریس به پاریس برگردد، مدتی به عنوان مهندس کار کرد. او یکی از بزرگترین و پرکارترین ریاضیدانان تا به امروز بوده است. او هفت جلد کتاب و بیش از هشتصد مقاله نوشت. بیش از هر ریاضیدان دیگری مفاهیم و قضایای زیادی بعد از او اسم‌گذاری شده‌اند. او زندگی متلاطمی داشت. بعد از انقلاب ۱۸۳۰، از بیعت با لوئیس فیلیپ خودداری نموده و به تورین تبعید شد. اما بعد توانست به پاریس برگردد. کوشی یک کاتولیک مذهبی و درگیر کارهای اجتماعی بود. او مشغول امور خیریه مادران ازدواج نکرده، کمک به گرسنگان ایرلند و توان‌بخشی و اسکان محرومان بود. هنگام بخشش حقوق یک ساله به شهردار ساوکس او چنین گفت: «نگران نباشید، آن فقط حقوق من است، پول من نیست، پول امپراطور است». هرمان آماندوس شوارتز (۱۸۴۳-۱۹۲۱) در برلین تحصیل کرد و در زوریخ، گوتنیگن و برلین تدریس کرد. بیشترین توانایی‌اش در نبوغ هندسی او بود و در مسائل تعریف شده ظریف کار کرد. این روش کار او اهمیت مسائل واقعی را توسعه داد. تدریس و علاقمندی او به دانشجویان، فرصت زیادی را برای تألیف به او نداد.

هم‌چنین بنابه خواص حاصل‌ضرب داخلی:

$$(ru+v).(ru+v) \geq 0$$

با ترکیب این نتایج داریم:

$$r^2(u.u) + 2r(u.v) + v.v \geq 0$$

فرض کنیم $a = u.u$، $b = 2u.v$ و $c = v.v$. بنابراین

$$ar^2 + br + c \geq 0$$

این نشان می‌دهد که تابع درجهٔ دوم $f(r) = ar^2 + br + c$ هرگز منفی نیست. لذا $f(r)$، که نمودار آن یک سهمی است باید یک ریشه داشته باشد و یا ریشه‌ای نداشته باشد. ریشه‌های $f(r)$ ریشه‌های معادلهٔ $ar^2 + br + c = 0$ می‌باشند.

دترمینان تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کند. هرگاه $b^2 - 4ac = 0$، یک ریشه و اگر $b^2 - 4ac < 0$ ریشه‌ای وجود نخواهد داشت. بنابراین

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$b^2 \leq 4ac$$

$$(2u.v)^2 \leq 4(u.u)(v.v)$$

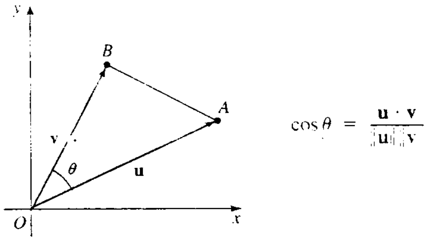
$$(u.v)^2 \leq (u.u)(v.v)$$

$$(u.v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

با جذرگیری از طرفین، نامساوی کوشی ـ شوارتز را نتیجه می‌دهد.

$$|u.v| \leq \|u\|\|v\|$$

زاویه بین بردارها فرض کنید $u = (a,b)$ و $v = (c,d)$ بردارهای مکانی در R^2 باشند. شکل ۴ـ۱۲ را ببینید. می‌خواهیم عبارتی را برای کسینوس θ، زاویهٔ بین بردارها به دست بیاوریم.



شکل ۴ـ۱۲

بنابه قانون کسینوس داریم:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2(OA)(OB)}$$

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 - AB^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [(c-a)^2 + cd - b)^2] \\ &= 2ac + 2db = 2u.v \end{aligned}$$

به علاوه

$$2(OA)(OB) = 2\|u\|\|v\|$$

بنابراین زاویهٔ θ بین دو بردار در R^2 توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

می‌دانیم که کسینوس زاویه‌ای در شرط $|\cos\theta| \leq 1$ صدق می‌کند. نامساوی کوشی شوارتز تعیین می‌کند که $|\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}| \leq 1$.

می‌توانیم مفهوم زاویهٔ بین دو بردار در R^2 را به شرح زیر به R^n توسعه دهیم.

تعریف: فرض کنید u و v دو بردار ناصفر در R^n باشند. کسینوس زاویهٔ θ بین این بردارها عبارت است

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

مثال ۴: زاویهٔ بین بردارهای $u=(1,0,0)$ و $v=(1,0,1)$ در R^3 را تعیین کنید.

حل: داریم

$$u.v=(1,0,0).(1,0,1)=1,\quad \|u\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1,\quad \|v\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

لذا $\cos\theta=\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و زاویهٔ بین u و v برابر 45° است.

دو بردار ناصفر را عمود برهم می‌گوئیم اگر زاویهٔ بین آن‌ها قائمه باشد. قضیهٔ بعدی که از خواننده خواسته می‌شود در تمرین زیر ثابت کنید شرط عمود بودن را بیان می‌کند.

۴-۲-۲ قضیه: دو بردار ناصفر u و v بر هم عمودند اگروتنهااگر $u.v=0$.

مثال ۵: نشان دهید که هر زوج از بردارهای زیر بر هم عمودند.

الف) $(0,1),(1,0)$

ب) $(1,2,4),(2,-3,1)$

حل: با استفاده از ضرب نقطه‌ای داریم:

الف) $(1,0).(0,1)=1\times 0+0\times 1=0$. بردارها بر هم عمودند.

ب) $(1,2,4).(2,-3,1)=2\times 1+(-3\times 2)+1\times 4=0$، لذا بردارها بر هم عمودند.

بردارهای زیر بردارهایی دوبه‌دو عمود بر هم مهمی هستند.

$(1,0),(0,1)$ در R^2 بر هم عمودند.

$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ در R^3 بر هم عمودند.

$(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)$ در R^n بر هم عمود هستند.

مثال ۶: در R^2، برداری را بیابید که بر $(3,-1)$ عمود باشد. نشان دهید که بردارهای زیادی با این شرط وجود دارند که همگی بر یک خط قرار دارند.

حل: فرض کنید که بردار (a,b) بر $(3,-1)$ عمود باشد. داریم:

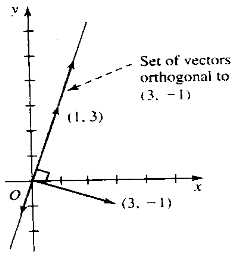
$$(a,b).(3,-1)=0$$

$$a\times 3+b\times(-1)=0$$

$$۳a - b = ۰$$

$$b = ۳a$$

بنابراین هر بردار به صورت $(a, ۳a)$ بر بردار $(۳, -۱)$ عمود است. چنین برداری به صورت $a(۱, ۳)$ نوشته می‌شود. مجموعهٔ چنین بردارهایی روی خطی قرار دارند که توسط بردار $(۱, ۳)$ تعریف می‌شود. شکل ۴ـ۱۳ را ببینید.



شکل ۴ـ۱۳

حال دو نتیجهٔ هندسی آشنا را از $R^۲$ به $R^۳$ تعمیم می‌دهیم.

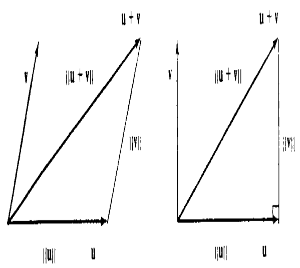
۴-۲-۳ قضیه: فرض کنید u و v بردارهایی در R^n باشند.

الف) نامساوی مثلثی:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

این نامساوی بیان می‌کند که اندازه یک ضلع مثلث نمی‌تواند از حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع دیگر بیشتر باشد. شکل ۴ـ۱۴ الف را ببینید.

ب) قضیه فیثاغورث: اگر $u.v = ۰$ آن‌گاه $\|u + v\|^۲ = \|u\|^۲ + \|v\|^۲$. مربع وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر، شکل ۴ـ۱۴ ب را ببینید.



$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \|u+v\|^{۲} = \|u\|^{۲} + \|v\|^{۲}$$

ب الف

شکل ۴ـ۱۴

برهان: الف) بنابه ویژگی نرم

$$\begin{aligned} \|u+v\|^{۲} &= (u+v).(u+v) \\ &= u.u + ۲u.v + v.v \\ &= \|u\|^{۲} + ۲u.v + \|v\|^{۲} \\ &\leq \|u\|^{۲} + ۲|u.v| + \|v\|^{۲} \end{aligned}$$

از نامساوی کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|u+v\|^{۲} &\leq \|u\|^{۲} + ۲\|u\|\|v\| + \|v\|^{۲} \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^{۲} \end{aligned}$$

با حذرگیری از طرفین نامساوی مثلثی حاصل می‌شود.

ب) بنابر ویژگی‌های نرم و این که $u.v = ۰$، داریم

$$\begin{aligned} \|u+v\|^{۲} &= (u+v).(u+v) \\ &= u.u + ۲u.v + v.v \\ &= \|u\|^{۲} + \|v\|^{۲} \end{aligned}$$

که اثبات قضیه فیثاغورث می‌باشد.

فاصلهٔ بین نقاط: فاصلهٔ بین نقاط $X = (x_۱, x_۲)$ و $Y = (y_۱, y_۲)$ در $R^۲$ برابر است با $d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲}$. با تعمیم این مطلب به شرح زیر فاصله را در R^n تعریف می‌کنیم.

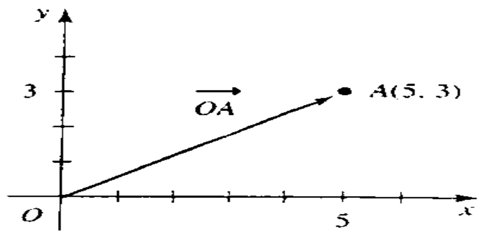
تعریف: فرض کنید $(x_۱, \dots, x_n) =$ و $Y = (y_۱, \dots, y_n)$ دو نقطه در R^n باشند. فاصله بین X و Y که با $d(X,Y)$ نشان داده می‌شود توسط

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + \dots + (x_n - y_n)^۲}$$

تعریف می‌شود.

توجه داشته باشید که می‌توانیم این فاصله را به صورت $d(X,Y) = \|X - Y\|$ نیز بنویسیم. شکل ۴ـ۱۵ را برای فاصله در $R^۲$ و $R^۳$ و R^n ببینید.

$$R^۲ : d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲}$$
$$R^۳ : d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲ + (x_۳ - y_۳)^۲}$$
$$R^n : d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + \cdots + (x_n - y_n)^۲}$$



شکل ۴ـ۱۵

تمرین ۷: فاصله بین نقاط $X = (۱, -۲, ۳, ۰)$ و $Y = (۴, ۰, -۳, ۵)$ را در $R^۴$ بیابید.

حل: با استفاده از فرمول فاصلهٔ بالا، داریم:

$$d(X,Y) = \sqrt{(۱ - ۴)^۲ + (-۲ - ۰)^۲ + (۳ + ۳)^۲ + (۰ - ۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۹ + ۴ + ۳۶ + ۲۵}$$
$$= \sqrt{۷۴}$$

مثال ۸: نشان دهید که تابع فاصله در R^n دارای خاصیت تقارن زیر است:

$$d(X,Y) = d(Y,X)$$

حل: فرض کنیم $X = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $Y = (y_۱, \ldots, y_n)$. داریم

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + \cdots + (x_n - y_n)^۲}$$
$$= \sqrt{(y_۱ - x_۱)^۲ + \cdots + (y_n - x_n)^۲} = d(Y,X)$$

این نتیجه بیان می‌کند که فاصلهٔ X از Y همان فاصله Y از X است. این ویژگی آن چیزی است که می‌خواهیم تابع فاصله، به طور طبیعی آن را داشته باشد. در زیر مهمترین ویژگی‌های نرم و فاصله را خلاصه می‌کنیم. در تمرینات آتی از شما خواسته می‌شود، آن ویژگی‌هایی را قبلاً بحث نشده‌اند ثابت کنید. نرم و فاصله‌ای که در این بخش معرفی شدند، از حاصل‌ضرب نقطه‌ای به دست آمده بودند. در کارهای عددی اغلب راحت‌تر است که نرم‌ها و فاصله‌های دیگری را تعریف می‌کنیم که در آن‌ها این ویژگیها به عنوان اصول یعنی خواص اساسی که هر نرم یا تابع فاصله‌ای باید دارا باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. شما برخی از این مفاهیم را در قسمت‌های بعدی این بخش خواهید دید.

ویژگی‌های فاصله	ویژگی‌های نرم
۱ـ $d(X,Y) \geq 0$	۱ـ $\|u\| \geq 0$
فاصلهٔ بین دو نقطه نمی‌تواند منفی باشد.	(طول یک بردار نمی‌تواند منفی باشد)
۲ـ $d(X,Y)=0$ اگروتنهااگر $X=Y$	۲ـ $\|u\|=0$ اگروتنهااگر $u=0$.
(فاصله بین دو نقطه برابر صفر است اگروتنهااگر	(طول بردار برابر صفر است اگروتنهااگر بردار برابر
دو نقطه بر هم منطبق باشند.)	بردار صفر باشد.)
۳ـ $d(X,Y)=d(Y,X)$ (ویژگی جابجایی)	۳ـ $\|cu\|=\|c\|\|u\|$
فاصله X از Y همان فاصله Y از X است	(طول cu، $\|c\|$ برابر طول بردار u است.
۴ـ $d(X,Z) \leq d(X,Y)+d(Y,Z)$	۴ـ $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$
(نامساوی مثلثی)	(نامساوی مثلثی)

(حاصل جمع طول‌های دو ضلع یک مثلث بزرگتر یا مساوی ضلع سوم است.)

حال این ساختارهای هندسی R^n را خلاصه می‌کنیم. این هندسه، هندسی اقلیدسی نامیده می‌شود.

هندسه اقلیدسی R^n:

حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار u و v: $u.v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$

نرم بردار U: $\|U\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$

زاویهٔ بین بردارهای u و v: $\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$

فاصلهٔ بین نقاط X و Y: $d(X,Y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + \cdots + (x_n - y_n)^۲}$

تمرین

حاصل ضرب نقطه‌ای

۱) حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج بردارهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $(۲,۱),(۳,۴)$ ب) $(۱,-۴),(۳,۰)$

پ) $(۲,۰),(۰,-۱)$ ت) $(۵,-۲),(-۳,-۴)$

۲) حاصل‌ضرب نقطه‌ای هر زوج بردارهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $(۱,۲,۳),(۴,۱,۰)$ ب) $(۳,۴,-۲),(۵,۱,-۱)$ پ) $(۷,۱,-۲),(۳,-۵,۸)$

۳) نرم بردارهای زیر را بیابید.

الف) $(۱,۳,-۱)$ ب) $(۳,۰,۴)$

پ) $(۵,۱,۱)$ ت) $(۷,-۲,-۳)$

۴) بردارهای زیر را نرمال نمائید.

الف) $(۴,۲)$ ب) $(۴,۱,۱)$ پ) $(۷,۲,۰,۱)$ ت) $(۰,۰,۰,۷,۰,۰)$

۵) زاویهٔ بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید:

الف) $(-۱,۱),(۰,۱)$ ب) $(۲,۰),(۱,\sqrt{۳})$ پ) $(۲,۳),(۳,-۲)$

۶) کسینوس زاویهٔ بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید.

الف) $(۳,-۱,۲),(۴,۱,۱)$ ب) $(۲,-۱,۰),(۵,۳,۱)$ پ) $(۱,۲,-۱,۳,۱),(۲,۰,۱,۰,۴)$

۷) نشان دهید که زوج‌های زیر از بردارها بر هم عمودند:

الف) $(۱,۳),(۳,-۱)$ ب) $(۱,۲,-۳),(۴,۱,۲)$ پ) $(۱,-۱,۲,-۵,۹),(۴,۷,۴,۱,۰)$

۸) بردارهای ناصفری را بیابید که بر هر یک از بردارهای زیر عمود باشد:

الف) $(۵,-۱)$ ب) $(۱,-۲,۳)$ پ) $(۵,۰,۱,۱)$ ت) $(۰,-۲,۳,۱,۵)$

۹) فاصلهٔ بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید.

الف) $(۴,۱),(۲,-۳)$ ب) $(۱,-۱,۴),(۲,۱,-۳)$ پ) $(۵,۱,۰,۰),(۲,۰,۱,۳)$

۱۰) ویژگی‌های زیر را از ضرب نقطه‌ای بردارها بیان کنید.

الف) $(u+v).w = u.v + v.w$

ب) $cu.v = c(u.v) = u + cv$

۱۱) ثابت کنید که اگر $\mathbf{v}$ برداری ناصفر باشد، آن‌گاه بردار $\mathbf{u} = \frac{۱}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ برداری یکه در جهت $\mathbf{v}$ است.

۱۲) ثابت کنید که دو بردار ناصفر u و v بر هم عمودند اگروتنهااگر $u.v = ۰$.

۱۳) نشان دهید که اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ دو بردار در فضای برداری U و برای تمامی بردارهای $u \in U$، $u.v = u.w$ آن‌گاه $v = w$.

۱۴) فرض کنید u، $v_۱$، ...، v_n بردارهایی در یک فضای برداری و $a_۱$، ...، a_n، b عدد باشد. ثابت کنید $u.(a_۱v_۱ + \cdots + a_nv_n) = a_۱u.v_۱ + \cdots + a_nu.v_n$.

۱۵) فرض کنید u، v و w بردارهایی در یک فضای برداری و c و d دو عد ناصفر باشد. تعیین کنید که کدام یک از عبارت‌های زیر یک عدد، یک بردار و یا بی‌معنی است.

الف) $(u.v)w$ ب) $(u.v).w$ پ) $u.v + cw$

پ) $u.v + c$ ت) $c(u.v) + dw$ ث) $\|u + cv\| + d$

ج) $cu.dv + \|w\|v$ چ) $\|u.v\|$

۱۶) مقادیر c را چنان بیابید که $\|c(۳,۰,۴)\| = ۱۵$.

۱۷) ثابت کنید u و v بردارهای عمود بر هم هستند اگروتنهااگر $\|u + v\|^۲ = \|u\|^۲ + \|v\|^۲$.

۱۸) فرض کنید (a,b) برداری در $R^۲$ باشد. ثابت کنید که بردار $(-b,a)$ بر (a,b) عمود است.

۱۹) فرض کنید u و v بردارهایی در $R^۲$ باشند. ثابت کنید که $\|u\| = \|v\|$ اگروتنهااگر $u + v$ و $u - v$ بر هم عمود باشند.

۲۰) فرض کنید u برداری در R^n و c یک عدد باشد. ثابت کنید که نرم یک بردار دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) $\|u\| \geq ۰$

ب) $\|u\| = ۰$ اگروتنهااگر $u = ۰$

پ) $\|cU\| = |c|\|U\|$.

۲۱) فضای برداری R^n را درنظر بگیرید. فرض کنید $u = (a_1, \ldots, a_n)$ برداری در R^n باشد. ثابت کنید هر یک از دو تابع زیر در ویژگیهای نرم مساله ۱۹ صدق می‌کند. این توابع هر چند که به هندسه اقلیدسی رهنمون نمی‌شوند، تمامی ویژگی‌های جبری را که انتظار می‌رود یک نرم داشته باشد، دارند. و در ریاضیات عددی استفاده می‌شوند.

الف) $\|u\| = |u_1| + \cdots + |u_n|$ نرم حاصل جمع مقادیر

ب) $\|U\| = \max_{i=1,\ldots,n} |u_n|$ نرم بیشترین مقدار

این نرم‌ها را برای بردارهای $(1, 2)$، $(-3, 4)$ و $(1, 2, -5)$ و $(0, -2, 7)$ محاسبه کنید.

۲۲) فرض کنید X، Y و Z نقاطی در R^n باشند. ثابت کنید که تابع فاصله دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) $d(X, Y) \geq 0$

ب) $d(X, Y) = 0$ اگروتنهااگر $X = Y$

پ) $d(X, Y) \leq d(X, Y) + d(Y, X)$

این ویژگی‌ها به عنوان اصول در تعمیم مفهوم فاصله برای فضاهای معین مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۴ مقدمه‌ای بر نگاشت‌های خطی

یک تابع قانونی است که بر هر یک از عناصر یک مجموعه، عنصری یکتا از مجموعهٔ دیگری را نسبت می‌دهد. توابع در اغلب زمینه‌های ریاضی مورد استفاده قرارگرفته و در تعیین وابستگی یکی از متغیرها به دیگری درکاربرد، بااهمیت می‌باشند. به عنوان مثال، ارتفاع یک Projectile تابعی از زمان است هزینه کل یک کالا تابعی از آیتم‌ها است و .... در این بخش، دستهٔ مهمی از توابع بین فضاهای برداری به نام نگاشت‌های خطی معرفی می‌کنیم. در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه نگاشت‌های خطی در زمینه‌هایی مانند گرافیک کامپیوتری و هندسه فراکتالی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف: یک نگاشت مانند T از R^n به R^m به صورت $T : R^n \longrightarrow R^m$ نوشته می‌شود، قانونی است که به هر بردار u از R^n، بردار یکتای v از R^m را نسبت می‌دهد.

R^n دامنه و R^m هم‌دامنه T نامیده می‌شود. می‌نویسیم $T(u) = v$ و v را تصویر u تحت T مجموعهٔ تمامی تصاویر، برد T نامیده می‌شود. برد ممکن است تمام R^m یا فقط قسمتی از آن باشد. اصطلاحات نگاشت و تابع نیز برای نگاشت‌های به کار برده می‌شوند.

برای مثال، نگاشت $T : R^۳ \longrightarrow R^۲$ با تعریف $T(x, y, z) = (۲x, y - z)$ را درنظر بگیرید. دامنهٔ T، $R^۳$ و هم دامنهٔ آن $R^۲$ است. تصویر هر بردار در $R^۳$ می‌تواند توسط این تعریف تعیین شود. مثلاً تصویر بردار $(۱, ۴, ۲)$ با فرض $x = ۱$، $y = ۴$ و $z = ۲$ برابر $(۲, ۲)$ است.

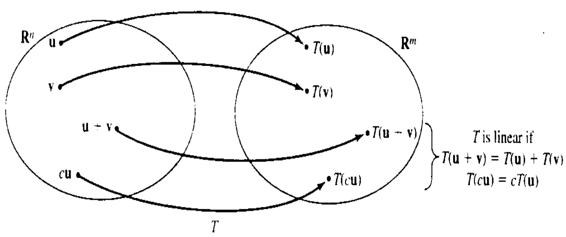
از هر فضای برداری دو عمل به نام‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف می‌شود. مهم‌ترین نگاشت‌های خطی بین فضاهای برداری آن‌هایی هستند که این ساختارهای خطی را به مفهوم زیر حفظ می‌کنند.

تعریف: فرض کنیم $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی در R^n و c یک عدد باشد. نگاشت خطی $T : R^n \longrightarrow R^m$ خطی نامیده می‌شود اگر

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = Y(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u})$$

اولین شرط به این معنی است که T حاصل جمع دو بردار را به جمع تصاویر آن دو بر ابر می‌نگارد دومین شرط به این مطلب دلالت می‌کند که T ضریب عددی یک بردار را به همان ضریب عددی از تصویر آن بردار می‌نگارد. بنابراین اعمال جمع و ضرب تحت تبدیلات حفظ می‌شوند. این مفاهیم حفظ کردن ساختارهای نگاشت‌های خطی در شکل ۴ـ۱۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴ـ۱۶

مثال ۱: نشان دهید که نگاشت $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ خطی است.

$$T(x, y) = (x - y, ۳x)$$

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که T جمع را حفظ می‌کند. فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عناصری از R^2 باشند. آن‌گاه

$$\begin{aligned} T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) && \text{بنابه جمع بردارها} \\ &= (x_1+x_2-y_1-y_2, 3x_1+3x_2) && \text{بنابه تعریف } T \\ &= (x_1-y_1, 3x_1)+(x_2-y_2, 3x_2) && \text{بنابه جمع بردارها} \\ &= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) && \text{بنابه تعریف } T \end{aligned}$$

بنابراین T جمع بردارها را حفظ می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنید c یک عدد باشد. بنابه ضرب اسکالر یک بردار

$$\begin{aligned} T(c(x_1,y_1)) &= T(cx_1, cy_1) && \text{بنابه ضرب اسکالر یک بردار} \\ &= (cx_1 - cy, 3cx_1) && \text{بنابه تعریف } T \\ &= c(x_1-y_1, 3x_1) && \text{بنابه ضرب اسکالر یک بردار} \\ &= cT(x_1,y_1) && \text{بنابه تعریف } T \end{aligned}$$

لذا، T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند و T خطی است.

یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به خودش یک عملگر خطی نامیده می‌شود. $T : R^2 \longrightarrow R^2$ با تعریف $T(x,y) = (x-y, 3x)$ مثالی از یک عملگر خطی است. مثال زیر نگاشتی را نشان می‌دهد که خطی نیست.

مثال ۲: نشان دهید که نگاشت

$$T : R^3 \longrightarrow R^2$$
$$T(x,y,z) = (xy, z)$$

خطی نیست.

حل: ابتدا شرط اول را آزمایش می‌کنیم. فرض کنید (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) عناصری از R^3 باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), z_1 + z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (x_1y_1, z_1) + (x_2y_2, z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

بنابراین در حالت کلی

$$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \neq T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$$

چون عمل جمع حفظ نمی‌شود، T خطی نیست.

حال در می‌یابیم که هر ماتریس یک نگاشت را تعریف می‌کند. به علاوه هر چنین نگاشتی خطی است. به عنوان مثال، ماتریس 2×3، $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ و بردار ستونی $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ از R^3 را درنظر بگیرید. این ماتریس نگاشت خطی $T(X) = AX$ از R^3 به R^2 را با استفاده از ضرب ماتریسی به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ 4y + z \end{bmatrix}$$

تصویر هر بردار مشخص با استفاده از مقادیر مناسب x، y و z محاسبه می‌شود. به عنوان مثال

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix}$$

۴-۳-۱ قضیه: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و X عضوی از R^n باشد که به صورت یک ماتریس ستونی درنظر گرفته می‌شود. تبدیل $T : R^n \longrightarrow R^m$ تعریف شده توسط $T(X) = AX$، خطی است. چنین تبدیل خطی، نگاشت ماتریسی نامیده می‌شود.

اثبات: توجه کنید که چون A، ماتریس $m \times n$ و X ماتریسی $n \times ۱$ بنابراین AX ماتریس $m \times ۱$ است. بنابراین $T(X) = AX$ نگاشتی از R^n به R^m را تعریف می‌کند. خطی بودن T باقی مانده است. فرض کنید X و Y عناصری از R^n باشند که به صورت ماتریس‌های ستونی نوشته شده‌اند و c یک عدد باشد. بنابر تعریف T و خواص ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{aligned} T(X+Y) &= A(X+Y) \\ &= AX + AY \\ &= T(X) + T(Y) \quad \text{جمع حفظ شده است} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(cX) &= A(cX) \\ &= cAX \\ &= cT(X) \quad \text{ضرب اسکالر حفظ شده است} \end{aligned}$$

بنابراین تبدیل، خطی است.

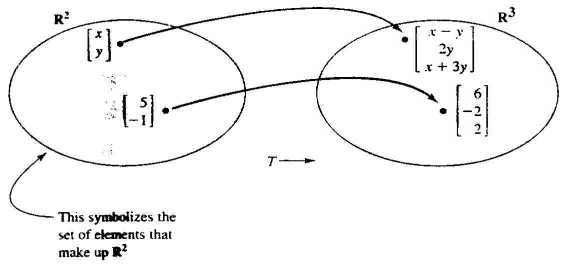
مثال ۳: نگاشت خطی T را در نظر بگیرید که توسط ماتریس ۳ × ۳، A تعریف شده است. تصویر برداری دلخواه را تحت T بیابید و این نتیجه را برای تعیین تصویر بردار داده شدهٔ X به کار ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

حل: چون A ماتریسی ۲ × ۳ است بنابراین تبدیل خطی $T : R^۲ \longrightarrow R^۳$ را تعریف می‌کند. داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ ۲y \\ x + ۳y \end{bmatrix}$$

با فرض $x = ۵$، $y = -۱$ داریم $\begin{bmatrix} ۶ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}\right)$ شکل ۴ـ۱۷ را ببینید.



شکل ۴ـ۱۷

تمرین ۴: فرض کنیم A ماتریسی ۲×۳ و B ماتریسی ۶×۴ باشد. دامنه و همدامنه نگاشت‌های خطی را که توسط A و B تعریف می‌شوند، تعیین کنید.

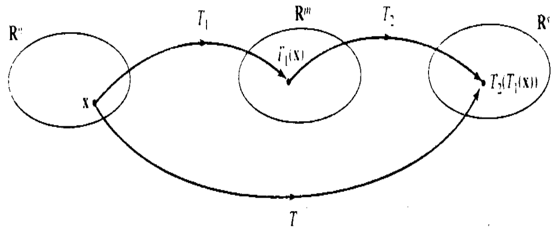
حل: فرض می‌کنیم X برداری از دامنهٔ نگاشت تعریف شده توسط A باشد، در این صورت $T(X) = AX$، A که ماتریسی ۲×۳ است. برای این که حاصل‌ضرب AX وجود داشته باشد، X باید ماتریس ۱×۲ یا یک بردار در $R^۲$ باشد. تصویر AX ماتریس ۱×۳ یا برداری در $R^۳$ خواهد بود. بنابراین دامنهٔ نگاشت $R^۲$ و هم دامنهٔ آن $R^۳$ است.

با استدلالی مشابه دامنهٔ نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ۶×۴، B برابر $R^۶$ و هم دامنهٔ آن $R^۴$ است.

ترکیب نگاشت‌های ماتریسی

شما با مفهوم ترکیب توابع به یک تابع مرکب آشنا هستید. نگاشت‌های ماتریسی نیز به طور مشابه ترکیب می‌شوند. فرض کنید $T_۱ : R^n \longrightarrow R^m$ و $T_۲ : R^m \longrightarrow R^s$ نگاشت‌های ماتریس تعریف شده توسط $T_۱(X) = A_۱X$ و $T_۲(Y) = A_۲Y$ باشند. این نگاشت‌های می‌توانند به طور طبیعی باز هم ترکیب شده و تبدیل T از R^n به R^s را بسازید. این تبدیل مرکب T، نگاشتی است که از ترکیب $T_۱$ با $T_۲$ ساخته شده و به صورت $T(X) = T_۲(T_۱(X_۱))$ تعریف می‌شود. شکل ۴ـ۱۸ را ببینید. نماد $T = T_۲ \circ T_۱$ برای ترکیب دو تبدیل به کار می‌رود.

حال ملاحظه می‌کنیم که نگاشت مرکب T یک نگاشت ماتریس است که توسط حاصل‌ضرب ماتریس‌های $A_۱, A_۲$ تعریف می‌شود.



شکل ۴ـ۱۸

۴-۳-۲ قضیه: نگاشت مرکب T از دو نگاشت ماتریس $T_۱ : R^n \longrightarrow R^m$ و $T_۲ : R^m \longrightarrow R^s$ که توسط ماتریس‌های $A_۱$ و $A_۲$ تعریف شده‌اند، نگاشت ماتریس $T : R^n \longrightarrow R^s$ است که توسط ماتریس حاصل‌ضرب $A_۲A_۱$ تعریف شده است.

اثبات: با استفاده از تعریف T داریم $T(X) = T_۲(T_۱(X)) = T_۲(A_۱X) = A_۲(A_۱X)$ چون حاصل‌ضرب ماتریس شرکت‌پذیر است، نتیجه می‌شود $T(X) = (A_۲A_۱)X$، $A_۲$ ماتریسی $s \times m$ و $A_۱$ ماتریس $m \times n$ است، ماتریس حاصل‌ضرب $A_۲A_۱$ ماتریسی از مرتبهٔ $s \times n$ است. بنابراین، T نگاشتی از R^n به R^s تعریف شده توسط ماتریس $A_۲A_۱$ است.

مثال ۵: فرض کنید $T_۱(X) = A_۱X$ و $T_۲(X) = A_۲X$ توسط ماتریس‌های $A_۱$ و $A_۲$ تعریف شده باشند. فرض کنید $T = T_۲ \circ T_۱$. تصویر بردار X را تحت T بیابید.

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \quad A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

حل: T توسط ماتریس حاصل‌ضرب $A_۲A_۱$ تعریف شده است. داریم:

$$A_۲A_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & -۴ & -۱ \\ ۱۲ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T(X) = \begin{bmatrix} -۵ & -۴ & -۱ \\ ۱۲ & ۰ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

می‌توانیم نتایج این بخش را به طور طبیعی توسعه دهیم. فرض کنید $T_۱$، ...، T_n یک دنباله از نگاشت‌های خطی روی R^p، ...، R^s باشند که با ماتریس‌های $A_۱$، ...، A_n تعریف شده‌اند ترکیب $T = T_۱, \dots, T_n$ توسط ماتریس حاصل $A_n \dots A_۱$ داده می‌شود. (در صورتی که حاصل‌ضرب موجود باشد).

۴-۳-۳ تمرین

۱) نشان دهید که نگاشت $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ با تعریف $T(x, y) = (۲x, x - y)$ خطی است. تصاویر عناصر $(۱, ۲)$، $(-۱, ۴)$ را تحت این نگاشت بیابید.

۲) نشان دهید که $T(x, y) = (۳x + y, ۲y, x - y)$ نگاشت خطی $T : R^۲ \longrightarrow R^۳$ را تعریف می‌کند. تصاویر بردارهای $(۱, ۲)$ و $(۲, -۵)$ را تحت T بیابید.

۳) نشان دهید که $T : R^۳ \longrightarrow R^۳$ تعریف شده توسط $T(x, y, z) = (۰, y, ۰)$ خطی است. این نگاشت تصویری نیز نامیده می‌شود. چرا این نامگذاری مناسب است؟

۴) نشان دهید که نگاشت‌های زیر خطی نیستند.

الف) $T(x, y, z) = (۳x, y^۲)$ ب) $T(x, y, z) = (x + y, y^۴)$

۵) نشان دهید که $T : R^۲ \longrightarrow R$ که توسط $T(x, y) = x + a$ تعریف شده است. در حالتی که a عددی ناصفر باشد، خطی نیست.

در تمرینات ۶ تا ۱۱ تعیین کنید که آیا نگاشت‌های داده شده خطی هستند؟

۶) $T(x, y, z) = (۲x, y)$ از $R^۳$ به $R^۲$.

۷) $T(x, y) = x - y$ از $R^۲$ به R.

۸) $T(x, y) = (x, y, z)$ از $R^۲$ به $R^۳$ هرگاه:

الف) $z = ۰$ ب) $z = ۱$

۹) $T(x) = (x, ۲x, ۳x)$ از R به $R^۳$.

۱۰) $T(x, y) = (x^۲, y)$ از $R^۲$ به $R^۲$.

۱۱) $T(x,y,z) = (x+2y, x+y+z, 3z)$ از R^3 به R^3.

۱۲) نگاشت $T: R^2 \longrightarrow R^3$ تعریف شده توسط ماتریس A در زیر را در نظر بگیرید. تصاویر بردارهای X، Y، Z را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۱۳) عملگر خطی T روی R^2 را که توسط ماتریس داده شده A در زیر تعریف شده است در نظر بگیرید. تصاویر بردارهای X، Y و Z را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۱۴) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ و c یک بردار ستونی در R^n باشد. نشان دهید که هرگاه $c \neq 0$ آن‌گاه نگاشت $T: R^n \longrightarrow R^m$ با تعریف $T(X) = AX + c$ خطی نیست.

۱۵) فرض کنید T یک نگاشت خطی با دامنهٔ U باشد. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهایی در U باشند، ثابت کنید:

الف) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ ب) $T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$

۱۶) فرض کنید $T_1(X) = A_1X$ و $T_2(X) = A_2X$ با ماتریس A_1، A_2 در زیر تعریف شده و $T = T_2 \circ T_1$. ماتریسی را که T تعریف می‌کند بیابید و توسط آن تصویر بردار X تحت T را تعیین کنید.

الف) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$، $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

ب) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$، $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

پ) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

۱۷) فرض کنید $T_1(x,y) = (2x, -y)$ و $T_2(x,y) = (0, x+y)$ و $T = T_2 \circ T_1$. معادله‌ای برای T بیابید و آن را برای تعیین تصویر $(2, -3)$ تحت T به کار ببرید.

۱۸) فرض‌کنید $T_1(x,y) = (x+y, ۲x, ۳y)$ و $T_۲(x,y,z) = (x, x+y, ۲x-z)$ و $T = T_۲ \circ T_۱$ معادله‌ای برای T بیابید و از آن برای تعیین تصویر $(۲,۵-)$ تحت T استفاده کنید.

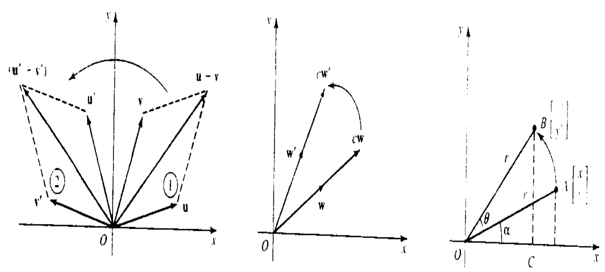
۱۹) فرض کنید U و V و W سه بردار و $T_۱$ یک نگاشت خطی از U به V و $T_۲$ یک نگاشت خطی از V به W باشد. آیا $T_۲ \circ T_۱ = T_۱ \circ T_۲$؟

۴-۴ نگاشت‌های ماتریسی، گرافیک‌های کامپیوتری و فراکتال‌ها

در بخش قبل دیدیم که هر ماتریس یک نگاشت خطی را تعریف می‌کند. در این بخش ملاحظه خواهیم کرد که هر نگاشت خطی $T : R^n \longrightarrow R^m$ می‌تواند توسط یک ماتریس مانند A تعریف شود. این نمایش ماتریسی از نگاشت‌های خطی ابزاری مهم برای بررسی نگاشت‌های خطی است. ماتریس‌هایی را معین خواهیم کرد که تعدادی از نگاشت‌های خطی مهم مانند دوران و انبساط را توصیف می‌کنند. کاربردها در هندسه فراکتالی دیده خواهند شد.

دوران حول مبداء

دورانی مانند $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$، حول مبداء را درنظر بگیرید. شکل ۴ـ۱۹ (الف) را ببینید.



(ج) (ب) (الف)

شکل ۴ـ۱۹

فرض کنید $T(\mathbf{u}) = u'$ و $T(\mathbf{v}) = v'$. متوازی‌الاضلاع (۱) به متوازی‌الاضلاع (۲) تبدیل می‌شود. چون قطر متوازی‌الاضلاع (۱) به قطر متوازی‌الاضلاع (۲) نگاشته می‌شود.

$$T(u+v) = u' + v'$$

$$= T(u) + T(v) \qquad \text{جمع حفظ می‌شود.}$$

به علاوه، در شکل ۴ـ۱۹ (ب)، $T(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$. چون تصویر بردار cw، cw' است،

$$T(cw) = cw'$$

$$= cT(w) \qquad \text{ضرب اسکالر حفظ می‌شود.}$$

بنابراین دوران حول مبداء یک عملگر خطی است.

برای ملاحظهٔ این که دوران یک عملگر خطی است، یک عبارت عملی برای چنین دورانی می‌یابیم، عبارتی که می‌تواند در تعیین مختصات تصویر هر نقطه داده شده تحت دوران مورد استفاده قرار گیرد.

دورانی را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تحت زاویه θ حول مبداء در نظر بگیرید. شکل ۴ـ۱۹ (پ) چنین دورانی نقطه A را به نقطهٔ B خواهد نگاشت. فاصله OA برابر OB است. فرض کنید این فاصله برابر r و زاویهٔ AOC برابر α باشد. داریم:

$$X' = OC = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

$$= x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$Y' = BC = r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta$$

$$= y\cos\theta + x\sin\theta$$

$$= x\sin\theta + y\sin\theta$$

این عبارت‌ها برای X' و Y' می‌توانند به معادلهٔ ماتریسی به صورت زیر درآیند:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

لذا

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

یک دوران حول مبداء توسط ضرب ماتریسی مشخص می‌شوند که در واقع تائید می‌شود که یک عملگر خطی است توجه داشته باشید که θ برای دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت مثبت و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، منفی است.

به عنوان یک مثال تصویر نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ تحت دوران $\frac{\pi}{۲}$ حول مبداء می‌یابیم. با استفاده از $\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$ و $\sin\frac{\pi}{۲} = ۱$، در ماتریس دوران، داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

تصویر نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ تحت دوران $\frac{\pi}{۲}$ حول مبداء عبارت است از $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$.

شبیه حالت دوران، هر تبدیل خطی می‌تواند توسط یک ماتریس تعریف شود. هر چند که ممکن است مثل دوران با استفاده از روش خاصی به نمایش ماتریس نگاشت‌های خطی رسید، اما مطلوب‌تر است که از یک حالت استاندارد در تمامی حالات استفاده شود. چنین روشی را برای نگاشت‌های خطی در R^n به دست می‌آوریم.

نمایش ماتریسی

فرض کنید $T : R^n \longrightarrow R^m$ یک نگاشت خطی باشد. در این مبحث بردارهای ستونی در نظر گرفته و بردارهای $e_۱$، $e_۲$، ...، e_n از R^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید بردار u بردار دلخواهی باشد.

$$e_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بردارهای $e_۱$،...،e_n مبنای استاندارد R^n نامیده می‌شود. این بردارها نقش مهمی در مبحث R^n دارند زیرا می‌توانیم هر بردار دلخواهی مانند u را به طور یکتا برحسب آن‌ها به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{u} = a_۱e_۱ + \cdots + a_ne_n$$

چون T یک تبدیل خطی است،

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_۱e_۱ + \cdots + a_ne_n) \\ &= a_۱T(e_۱) + \cdots + a_nT(e_n) \end{aligned}$$

$$= [T(e_1) \dots T(e_n)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

که در آن $[T(e_1) \dots T(e_n)]$ ماترسی با ستون‌های $T(e_1)$، ...، $T(e_n)$ است. بنابراین تبدیل خطی T توسط ماتریس $A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$ تعریف می‌شود.

A ماتریس استاندارد T نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که بردارهای R^n باید به صورت ستونی نوشته شوند، تا بتوان از این روش بیان یک تبدیل خطی، استفاده نمود. در تمرینات زیر از خواننده خواسته می‌شود که ماتریس دوران را به این روش به دست آورد.

مثال ۱: ماتریس استاندارد $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

حل: اثر T روی مبنای استاندارد را به دست می‌آوریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها ستون‌های ماتریس استاندارد A هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

T می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

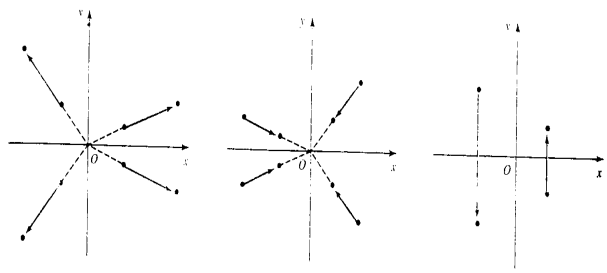
حال ماتریس‌هایی را پیدا می‌کنیم که تعدادی از نگاشت‌های مهم را تعریف می‌کنند.

انبساط و انقباض[1]

عملگر $T : R^2 \longrightarrow R^2$ را درنظر بگیرید که توسط $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تعریف شده است و r یک عدد است.اگر $r > 1$، آنگاه T نقاط را از مبداء دور می‌کند و انبساطی با ضریب r نامیده می‌شود. اگر $0 < r < 1$، آنگاه T نقاط را به مبداء می‌کشاند و انقباظی با ضریب r نامیده می‌شود. شکل ۴ـ۲۰ (الف) را ببینید.

به راحتی نشان داده می‌شود که T خطی است. حال ماتریس استاندارد T را پیدا می‌کنیم.

1) Dilation and Countraction



(الف) انعکاس نسبت به محور x انقباض $0 < r < 1$ (ب) انبساط $r > 1$

شکل ۴ـ۲۰

اثر T را روی مبنای استاندارد پیدا می‌کنیم:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}r\\0\end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\r\end{bmatrix}$$

ماتریس استاندارد عبارت است از

$$A=\begin{bmatrix}r & 0\\0 & r\end{bmatrix}$$

T می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}r & 0\\0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، انبساط T را درنظر بگیرید که توسط ماتریس $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ تعریف شده است. داریم

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

بنابراین T نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را به نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌نگارد. تصویر در همان جهت نقطه داده شده از مبداء ولی فاصله‌اش تا مبداء سه برابر فاصلهٔ نقطهٔ اولیه تا مبداء است.

انعکاس

عملگر $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ را درنظر بگیرید که توسط $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ تعریف شده است و هر نقطه را به قرینه‌اش نسبت به محور xها می‌نگارد. شکل ۴ـ۲۰ (ب) را ببینید. T یک انعکاس نامیده می‌شود.

نشان داده می‌شود که T خطی است و ماتریس استاندارد آن را پیدا می‌کنیم. اثر T روی مبنای استاندارد عبارت است از

$$T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس استاندارد عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

لذا یک انعکاس نسبت به محور xها می‌تواند به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

نوشته شود.

کاربردها اغلب شامل دنباله‌ای از نگاشت‌های خطی می‌باشند. یک تبدیل مرکب $T = T_n \circ \ldots \circ T_۱$ توسط حاصل‌ضرب ماتریس‌های نگاشت‌های مؤلفه‌ای $A_۱$، ...،A_n توصیف می‌شود.

مثال ۲: ماتریسی را تعیین کنید که از اعمال زیر حاصل شده است. انعکاس نسبت به محور xها سپس دوران به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ و بعد انبساط با ضریب ۳. تصویر نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را تحت این دنباله از نگاشت‌ها بیابید.

حل: ماتریس‌هایی که انعکاس، دوران و انبساط را تعریف می‌کند به ترتیب عبارتند از

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{۲} & -\sin\frac{\pi}{۲} \\ \sin\frac{\pi}{۲} & \cos\frac{\pi}{۲} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین نگاشت مرکب توسط ماتریس حاصل‌ضرب تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{۲} & -\sin\frac{\pi}{۲} \\ \sin\frac{\pi}{۲} & \cos\frac{\pi}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

تصویر نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$$

اکنون به تبدیلاتی می‌پردازیم که توسط ماتریس‌های نامنفرد تعریف می‌شوند.

۴-۴-۱ قضیه: یک نگاشت خطی نامنفرد T،

الف) خطوط را به خطوط می‌نگارد.

ب) پاره‌خط‌ها را به پاره‌خط‌ها می‌نگارد.

پ) خطوط موازی را به خطوط موازی می‌نگارد.

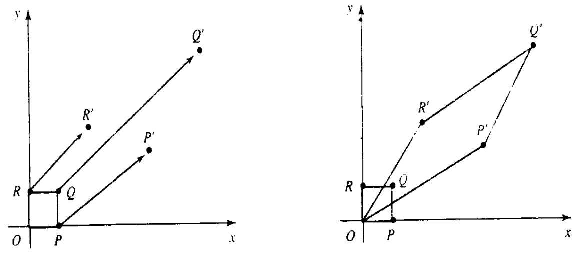
ت) خطوط گذرنده از مبداء را به خطوط گذرنده از مبداء می‌نگارد.

در تمریناتی که بعداً می‌آیند از خواننده می‌خواهیم که این نتایج را بررسی کنند.

مثال ۳: عملگر $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ تعریف شده توسط ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. تصویر مربع واحد را تحت این نگاشت تعیین کنید.

حل: مربع واحد در $R^۲$، مربعی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از:

$$P\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad Q\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad R\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad O\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$



شکل ۴ـ۲۱

شکل ۴ـ۲۱ را ببینید. تصاویر این نقاط را تحت تبدیل ماتریس می‌یابیم. استفاده از نماد $u \longrightarrow Au$ برای بررسی تصاویر نقاط معین، مفید است. با ضرب هر یک از نقاط به ماتریس داریم:

$$\overset{P}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{P'}{\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}} \quad \overset{Q}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{Q'}{\begin{bmatrix} ۶ \\ ۵ \end{bmatrix}} \quad \overset{R}{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{R'}{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}} \quad \overset{O}{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{O'}{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}}$$

به علاوه، $|A| = (۴ \times ۳) - (۲ \times ۳) = ۶ \neq ۰$. ماتریس A نامنفرد است، بنابراین، پاره‌خط‌ها به پاره‌خط‌ها نگاشته می‌شوند. داریم:

$$OP \longrightarrow OP', \quad PQ \longrightarrow P'Q', \quad QR \longrightarrow Q'R' \quad OR \longrightarrow O'R'$$

مربع $PQRO$ به متوازی‌الاضلاع $P'Q'R'O'$ نگاشته می‌شود. شکل ۴ـ۲۱ (ب) را ببینید.

این عملگرها در $R^۲$ نرم‌های کامپیوتری جهت دوران، منبسط یا منقبض نمودن اشکال به کار برده می‌شوند. بعداً در این بخش این کاربرد را بررسی خواهیم کرد.

اجسام جامد می‌توانند به طور هندسی بررسی شوند. وقتی که وزنه‌ها یا بارها به شکل اجسام را تغییر دهد، گوئیم تغییر شکل[1] روی داده است. به عنوان مثال، مربع PQRO در شکل ۴ـ۲۱ می‌تواند جسم فیزیکی را نشان می‌دهد که به شکل $P'Q'R'O'$ تغییر یافته است. این نوع تغییر شکل‌ها می‌تواند با استفاده از تکنیک‌های ریاضی درکامپیوتر مدل‌بندی و تحلیل شود. آن قسمت از علوم که چنین مسائلی را بررسی می‌کند، کشسانی[2] نامیده می‌شود.

نگاشت‌های نامنفرد نیز مهم هستند زیرا این نگاشت‌ها دارای نگاشت وارون هستند. فرض کنید که T یک نگاشت نامنفردی باشد که توسط ماتریس A تعریف شده و $AU = X$. چون A نامنفرد است، $A^{-۱}$

1) deformation 2) plaslicity, elaslicity

وجود دارد و $UA^{-1} = A^{-1}V$ بنابراین دارای یک نگاشت وارون است که وارون نامیده شده و با T^{-1} نشان داده می‌شود.

دوران، انبساط، انقباض و انعکاس نگاشت‌های نامنفرد هستند. آن‌ها دارای وارون هستند. حال نشان می‌دهیم که وارون یک انبساط با ضریب r، یک انقباض با ضریب $\frac{1}{r}$ است. ماتریس انبساط A و وارون عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

بنابراین A^{-1} یک انقباض با ضریب $\frac{1}{r}$ را تعریف می‌کند. در تمرینات زیر از شما می‌خواهیم که وارون‌های، دوران و انعکاس را بررسی کنید.

نگاشت‌های آفین

این بخش را با بحث در مورد نگاشت‌هایی به پایان می‌رسانیم که هر چند که خطی نیستند اما در ریاضیات و درکاربرد مهم هستند.

یک انتقال نگاشتی است مانند $T : R^n \longrightarrow R^n$ که توسط $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ تعریف می‌شود که در آن $\mathbf{v}$ برداری ثابت است.

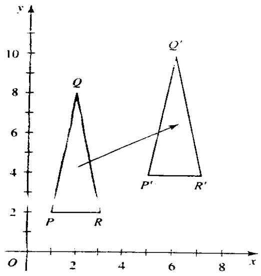
یک انتقال نقاط را در جهت و اندازهٔ بردار $\mathbf{v}$ می‌افزاید بنابراین به طور طبیعی، انتقال‌ها، خطوط، زوایا و فاصله‌ها را حفظ می‌کند. برای مثال، انتقال زیر را در R^2 درنظر بگیرید.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اثر T را روی مثلث PQR با رأس‌های $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\overset{P}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{P'}{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}} \qquad \overset{Q}{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{Q'}{\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}} \qquad \overset{R}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{R'}{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

در شکل ۴ـ۲۲، مثلث PQR به مثلث P'Q'R' انتقال می‌یابد.



شکل ۴ـ۲۲

مثال ۴: معادلهٔ تصویر خط $y = ۲x + ۳$ را تحت انتقال $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بیابید.

حل: معادلهٔ $y = ۲x + ۳$ نقاط خطی با شیب ۲ و عرض از مبداء ۳ تعریف می‌کند. T این خط را به خط دیگری می‌لغزاند. می‌خواهیم معادلهٔ این خط تصویر شده را بیابیم.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ۲x + ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x + ۲ \\ ۲x + ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که در نقاط تصویری $y' = ۲x'$. بنابراین معادلهٔ خط تصویر شده عبارت است از $y = ۲x$.

یک نگاشت آفینی[1] نگاشت $T : R^n \longrightarrow R'$ تعریف شده توسط $T(u) = Au + v$ است که در آن A یک ماتریس و v یک بردار ثابت است. یک نگاشت آفینی می‌تواند به عنوان یک نگاشت ماتریس و یک انتقال درنظر گرفته شود. برای مثال، نگاشت آفین زیر روی $R^۲$ را درنظر بگیرید.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم تصویر مربع واحد در شکل ۴ـ۲۳ را پیدا کنیم. داریم:

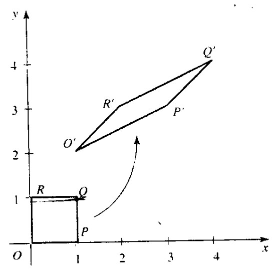
$$\overset{P}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{P'}{\begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}} \quad \overset{Q}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{Q'}{\begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}} \quad \overset{R}{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{R'}{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}} \quad \overset{O}{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{O'}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}}$$

چون ماتریس نامنفرد است، پاره‌خط‌ها به پاره‌خط‌ها نگاشته می‌شوند. در نتیجه

$$OP \longrightarrow O'P', \quad PQ \longrightarrow P'Q', \quad QR \longrightarrow Q'R' \quad OR \longrightarrow O'R'$$

1) Affine transformation

مربع PQRO به متوازی‌الاضلاع P'Q'R'O' تبدیل می‌شود.



شکل ۴ـ۲۳

در تمرینات بعدی از شما خواسته می‌شود نشان دهید که انتقال‌ها و نگاشت‌های آفینی، نگاشت‌های خطی نیستند.

در این قسمت تعدادی تبدیل اساسی معرفی کرده‌ایم. نگاشت‌های دیگری مانند، تصویری[1]، مقیاسی[2]، چرخشی[3] را در تمرینات بعدی خواهید دید. این نگاشت‌های پایه‌ای با استفاده از ترکیب توابع به مثابه بلوک‌های ساختمانی برای ایجاد نگاشت‌های جدید می‌باشند.

حال کاربردهای این نگاشت‌های را در گرافیک‌های کامپیوتری بررسی می‌کنیم.

نگاشت‌های در گرافیک‌های کامپیوتری

گرافیک‌های کامپیوتری حوزه‌ای است که ایجاد و بررسی تصاویر را توسط کامپیوتر مطالعه می‌کند. تأثیر گرافیک‌های کامپیوتری در بسیاری از منازل از طریق بازی‌ها مشاهده می‌شود و استفاده آن در تحقیقات، صنعت تجارت وسیع و در حال توسعه است. برخی از کاربردهای آن عبارتند از، بیان طرح‌های توسعه در شیتک‌ها، نمایش و بررسی مولکول‌ها توسط زیست‌شناسان مولکولی به منظور کسب دید عمیق در ساختار آن‌ها، شبیه‌سازی پروازها در تعلیم خلبان‌ها و استفاده مهندسین حمل و نقل در تولید گاشت‌های کامپیوتری در برنامه کاری.

کاربری تصاویر در گرافیک‌های کامپیوتری با استفاده از دنباله‌ای از تبدیلات انجام می‌شود. دوران‌ها، انعکاس‌ها، انبساط‌ها، انقباض‌ها توسط ماتریس‌ها تعریف شده و توسط ضرب ماتریس‌ها انجام می‌شود دنباله‌ای از چنین تبدیلات می‌تواند توسط یک ماتریس که با حاصل‌ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است

1) projection 2) scaling 3) shear

عملی شود. متأسفانه، در انتقال‌ها از جمع ماتریس‌ها استفاده می‌شود و هر دنباله از تبدیلات که شامل انتقال‌ها باشد نمی‌تواند در یک ماتریس ترکیب شود.

با وجود این اگر از مختصاتی که مختصات همگن نامیده می‌شود برای تعریف نقاط در صفحه استفاده شود آن‌گاه انتقالات نیز می‌توانند بر حسب ضرب ماتریس‌ها انجام گیرد و هر دنباله از چنین تبدیلات می‌تواند برحسب یک ماتریس تعریف شود. در مختصات همگن مؤلفه سوم ۱ به هر یک از مؤلفه‌ها اضافه می‌شود و دوران، انعکاس، انبساط، انقباض و انتقال به ترتیب R، E، D و T توسط ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند.

$$\underset{\text{نقطه}}{\overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix}}} \qquad A = \underset{\text{دوران}}{\overset{R}{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}}} \qquad B = \underset{\text{انعکاس}}{\overset{Rg}{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}}}$$

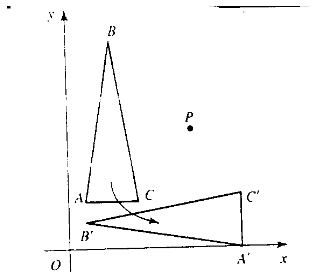
$$C = \underset{\text{انقباض/ انبساط}}{\overset{D}{\begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}}} \qquad E = \underset{\text{انعکاس}}{\overset{T}{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & h \\ ۰ & ۱ & k \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}}}$$

بنابراین برای مثال، انجام یک انبساط D، بعد یک انتقال T و سپس یک دوران R می‌تواند توسط $RTD(X) = AEC(X)$ تعریف شود. تبدیل مرکب RTD توسط ماتریس AEC تعریف شود.

برخی زبان‌های برنامه‌ریزی روش‌های اجرایی برای دوران، انتقال و انبساط/انقباض (و هم‌چنین برای مقیاس و نمایش، تمرین ۱۵ و ۱۸ را که خواهد آمد ببینید.) فراهم می‌کنند، که می‌تواند برای حرکت تصاویر روی صفحه نمایش استفاده شود. برای انجام این حرکت، روش اجرایی مختصات صفحهٔ نمایش را به مختصات همگن تبدیل کرده و از ماتریس‌هایی استفاده می‌کند که این تبدیلات را در مختصات همگن تعریف می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که چگونه تبدیلات برای دوران یک شکل هندسی حول نقطه‌ای غیر از مبداء مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۵: ماتریسی را تعیین کنید که دوران در یک صفحه به اندازه θ حول نقطه $P(h,k)$ را تعریف می‌کند. این نتیجه کلی را به کار برده و ماتریسی را بیابید که دوران در یک صفحه به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ حول نقطهٔ $(۵,۴)$ را تعریف می‌کند. تصویر مثلثی با رئوس $A(۱,۲)$، $B(۲,۸)$ و $C(۳,۲)$ را تحت این دوران بیابید. شکل ۴ـ۲۴ را ببینید.



شکل ۴ـ۲۴

حل: دوران حول P می‌تواند توسط دنباله‌ای از سه تبدیل زیر انجام یابد:

الف) انتقال T_1 در صفحه که نقطهٔ P را به مبداء O می‌برد.

ب) دوران R در صفحه به اندازهٔ θ حول مبداء

پ) انتقال T_2 در صفحه که O را به P برمی‌گرداند.

ماتریس‌هایی که این تبدیلات را تعریف می‌کنند، عبارتند از

$$\overset{T_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \overset{R}{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \overset{T_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

دوران R_p حول P می‌تواند به شرح زیر صورت گیرد:

$$\begin{aligned} R_p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= T_2RT_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -h\cos\theta + k\sin\theta + h \\ \sin\theta & \cos\theta & -h\sin\theta - k\cos\theta + k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به عنوان مثال برای به دست آوردن ماتریسی که دوران در صفحه به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ حول نقطهٔ $P(5, 4)$،

فرض کنید $h = ۵$، $k = ۴$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$. ماتریس دوران عبارت است از

$$M = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۹ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن تصاویر رئوس مثلث ABC، این مختصات را در مختصات همگن به صورت ستونی نوشته و آن‌ها را در M ضرب می‌کنیم. در نتیجه ضرب ماتریس داریم:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{A'}{\begin{bmatrix} ۷ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}} \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۸ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{B'}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}} \quad \overset{C}{\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{C'}{\begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}}$$

مثلث با رئوس $A(۱,۲)$، $B(۲,۸)$ و $C(۳,۲)$ به مثلث با رئوس $A'(۷,۰)$، $B'(۱,۱)$ و $C'(۷,۲)$ تبدیل می‌شود. شکل ۴ـ۲۴ را ببینید.

تصاویر فراکتال طبیعت

سیستم‌های گرافیک کامپیوتری که براساس هندسه اقلیدسی بنا شده‌اند برای ایجاد تصاویر اشیاء ساخته شده توسط انسان مانند ماشین‌آلات، ساختمان‌ها و هواپیماها مناسب می‌باشند. تصاویر این اشیاء می‌تواند با استفاده از خطوط، دایره‌ها و غیره رسم شود. با وجود این، در ساختن اشکال اشیاء طبیعی مانند، حیوانات، درختان، سرزمین‌ها، این اشکال مناسب نیستند.

به گفته ریاضیدانی به نام Benoit B., Mandelbrot، ابرها کره نیستند. کره‌ها مخروط نیستند. سواحل دایره نیستند. و روز در خط مستقیم حرکت نمی‌کند. با وجود این، پوشش طبیعت به سبک غیرمنتظره‌ای مرتب است و پر از اشکالی است که در یک شی با مقیاس‌های مختلفی تکرار می‌شوند. در سال ۱۹۷۵، مندل بروت Mandelbrot، هندسه جدیدی به نام هندسه فراکتالی معرفی کرد که می‌تواند پدیده‌های طبیعی را بیان کند. فراکتال یک برچسب ساده‌ای برای شکل‌های نامنظم و خرد شده، خودمتشابه است. اشیاء فراکتالی دارای ساختارهایی هستند که تودرتوی هم قرارگرفته و هر ساختار کوچکتر مینیاتوری از ساختار بزرگ است که لزوماً با آن یکی نیست. داستان پشت کلمه فراکتال جالب است مندل بروت با صفت لاتین fractus از فعل frangere به معنی شکستن در کتاب لاتین فرزندش برخورد کرد. طنین کلمات هم ریشهٔ انگلیسی اصلی، شکستگی و فراک به نظر مناسب آمد و او کلمهٔ فراکتال را برگزید.

حال روش‌هایی را بررسی می‌کنیم که توسط تیم تحقیقاتی انستیتو تکنولوژی جورجیا برای شکل‌بندی تصاویر اشیاء طبیعی با استفاده از فراکتال‌ها توسعه می‌یابند. این تصاویر فراکتالی از طبیعت با استفاده از نگاشت‌های آفین تولید می‌شوند. شکل ۴ـ۲۵ تصویر فراکتال سرخسی را نشان دهد که به تدریج تولید می‌شود. ببینیم که این امر چگونه صورت می‌گیرد.

شکل ۴ـ۲۵

چهار نگاشت آفینی $T_۱, \ldots, T_۴$ زیر را درنظر بگیرید. احتمال‌های $p_۱, \ldots, p_۴$ را به هر یک از این نگاشت‌ها نسبت دهید.

$$T_۱\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰٫۸۵ & ۰٫۰۳ \\ -۰٫۰۳ & ۰٫۸۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱٫۵ \end{bmatrix}, \qquad p_۱ = ۰٫۸۵$$

$$T_۲\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰٫۲ & -۰٫۲۵ \\ ۰٫۲۱ & ۰٫۲۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱٫۵ \end{bmatrix}, \qquad p_۲ = ۰٫۰۸$$

$$T_۳\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -۰٫۱۵ & ۰٫۲۷ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۲۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰٫۴۵ \end{bmatrix}, \qquad p_۳ = ۰٫۰۸$$

$$T_۴\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \qquad p_۴ = ۰٫۰۱$$

الگوریتم زیر در کامپیوتر برای تولید تصویر سرخس استفاده می‌شود.

۱) فرض کنید $x = ۰$، $y = ۰$

۲) یک مولد تصادفی را برای انتخاب یکی از تبدیلات آفین T_i نسبت به احتمالات داده شده به کار ببرید.

۳) فرض کنید $(x', y') = T_i(x, y)$

۴) (x', y') را رسم کنید.

۵) فرض کنید $(x, y) = (x', y')$

۶) مراحل ۲، ۳، ۴ و را پنج هزار مرتبه تکرار کنید.

با اجرای مرحله ۴ در هر ۵ هزار مرتبه، تصویر سرخس به تدریج ظاهر می‌شود. هر نگاشت آفین T_i شامل شش پارامتر a، b، c، d، e و f و یک احتمال P_i به شرح زیر است:

$$T_i\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \qquad P_i$$

نگاشت‌های آفین و احتمالات متناظر که یک فراکتال را تولید می‌کنند در سطرهای یک ماتریس به نام سیستم تابع تکراری IFS نوشته می‌شوند. IFS سرخس به شرح زیر است:

$$\begin{bmatrix} T & a & b & c & d & e & f & p \\ ۱ & ۰{,}۸۶ & ۰{,}۰۳ & -۰{,}۰۳ & ۰{,}۸۶ & ۰ & ۱{,}۵ & ۰{,}۸۳ \\ ۲ & ۰{,}۲ & -۰{,}۲۵ & ۰{,}۲۱ & ۰{,}۲۳ & ۰ & ۱{,}۵ & ۰{,}۸۳ \\ ۳ & -۰{,}۱۵ & ۰{,}۲۷ & ۰{,}۲۵ & ۰{,}۲۶ & ۰ & ۰{,}۴۵ & ۰{,}۰۸ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰{,}۱۷ & ۰ & ۰ & ۰{,}۰۱ \end{bmatrix}$$

نگاشت‌های آفین مناسبی که شی فراکتال داده شده را تولید می‌کنند، با تعیین نگاشت‌هایی پیدا می‌شوند که شی (به نام جذب کننده[1]) را به تصاویر مختلف مجزا می‌نگارد که اجتماع آن کل فراکتال است.

قضیه‌ای به نام Collage، تضمین می‌کند که تبدیلات می‌توانند در یک IFS گروه‌بندی شوند که فراکتال را به وجود می‌آورد.

احتمالات مختلف در حالت کلی، به تصاویر متفاوت منجر نمی‌شوند اما در آهنگ تشکیل تصویر اثر می‌کنند. احتمالات مناسب برابرند با :

$$p_i = \frac{T_۱ \text{ مساحت تصویر تحت نگاشت}}{\text{مساحت تصویر شی}}$$

خواننده‌هایی که علاقمند به اطلاعات بیشتر در این موضوع جالب هستند می‌توانند به مقالهٔ پژوهشی برجستهٔ مایکل بارنسلی مراجعه کنند. روشی که در انستیتو تکنولوژی جورجیا توسعه یافته است، بسیار مهم است زیرا می‌تواند با استفاده از داده‌های کمپرس شده، تصویری با هر دقت مطلوب تولید کند.

تصویر فراکتالی که شامل مقدار نامتناهی نقطه است که توصیف مستقیم مبداء آنها خیلی پیچیده است می‌تواند با استفاده از فرمول‌های ریاضی، مجدداً تولید شود. برای معرفی ریاضی‌وار بیشتر و عمیق هندسه فراکتالی که شامل جزئیات در مورد چگونگی ساخته شدن تبدیلات آفین است. مرج [۲] را پیشنهاد می‌کنیم. بسته نرم‌افزاری [۳] می‌تواند برای تولید فراکتال‌ها استفاده شود.

1) atractor

تمرینات

۱) ماتریس دوران در صفحه حول مبداء به اندازهٔ زاویه‌های داده شده را بیابید. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را تحت هر یک از ماتریس‌ها تعیین کنید.

الف) $\frac{\pi}{۲}$ ب) $-\frac{\pi}{۲}$ پ) $\frac{\pi}{۴}$ ت) π

ث) $-\frac{۳\pi}{۲}$ ج) $\frac{\pi}{۶}$ چ) $-\frac{\pi}{۳}$

۲) ماتریس دوران را به کمک اثر دوران روی مبنای استاندارد $R^۲$، بیابید.

۳) معادلهٔ تصویر بیضی $\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{a} = ۱$ را تحت دوران به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ بیابید.

۴) ماتریسی را بیابید که در صفحه، دوران حول مبداء به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ را انجام داده و همزمان نقاط را به اندازهٔ دو برابر فاصله‌شان از مبداء حرکت دهد. (راهنمایی: نگاشت مرکب را بسازید).

۵) ماتریسی را معین کنید که دوران به اندازهٔ θ حول مبداء و انبساط با ضریب r را تعریف کنید.

۶) معادلهٔ تصویر دایره واحد $x^۲ + y^۲ = ۱$ را تحت انبساط با ضریب ۳ بیابید.

۷) دنبالهٔ نگاشت‌های $T_n(u) = A^n u, n = ۱, \ldots, ۴$ را درنظر بگیرید که در آن A یک ماتریس انبساط با ضریب ۱/۵ است. تحت این دنباله از نگاشت‌های تصویر دایره واحد را در یک سیستم مختصات رسم کنید.

۸) ماتریسی را تعیین کنید که انعکاس نسبت به محور yها را تعریف کند. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را تحت این نگاشت بیابید.

۹) ماتریسی را بیابید که انعکاس نسبت به خط $y = x$ را تعریف کند.

۱۰) در $R^۲$ تبدیلاتی را درنظر بگیرید که توسط هر یک از ماتریس‌های زیر تعریف شده است. تصویر مربع واحد را تحت هر یک از این نگاشت‌های تعیین کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ -۴ & -۱ \end{bmatrix}$

ت) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۱) ماتریس استاندارد هر یک ازعملگرهای زیر را در $R^۲$ پیدا کنید.

الف) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲x\\x-y\end{bmatrix}$ ب) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-y\\x+y\end{bmatrix}$

پ) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲x-۵y\\۳y\end{bmatrix}$ ت) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲y\\-۳x\end{bmatrix}$

۱۲) ماتریس استاندارد عملگر $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\۰\end{bmatrix}$ را بیابید. توجه داشته باشید که این عملگر تمامی نقاط را به محور xها می‌نگارد و عملگر تصویری نامیده می‌شود.

۱۳) ماتریس تصویری روی محور yها را بیابید.

۱۴) ماتریس تصویری روی خط $y=x$ را تعیین کنید. تصویر بردار $\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ را تحت این عملگر تصویری بیابید.

۱۵) ماتریس استاندارد عملگر $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ax\\by\end{bmatrix}$ را بیابید که در آن a و b اعداد مثبتی می‌باشند. T مقیاس‌گذاری با ضریب a در جهت محور xها و ضریب b در جهت محور yها نامیده می‌شود. مقیاس‌گذاری شکل را به هم می‌ریزد زیرا، x و y به یک روش تغییر نمی‌کنند. تصویر مربع واحد را تحت تبدیلی که $a=۳$ و $b=۲$ است رسم کنید.

۱۶) معادلهٔ تصویر خط $y=۲x$ را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۲ در جهت محور xها و ضریب ۳ در جهت محور yها بیابید.

۱۷) معادلهٔ تصویر دایرهٔ واحد $x^۲+y^۲=۱$ را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۴ در جهت محور xها و ضریب ۳ در جهت محور yها بیابید.

۱۸) ماتریس استاندارد عملگر $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+cy\\y\end{bmatrix}$ را بیابید که c یک عدد است. T یک برش با ضریب c در جهت x نامیده می‌شود. تصویر مربع واحد را تحت برش با ضریب ۲ در جهت x رسم کنید. توجه کنید که چگونه مقدار x هر نقطه با ضریب $۲y$ افزایش یافته و برشی در شکل ایجاد می‌شود.

۱۹) تصویر مربع واحد تحت برشی با ضریب ۰٫۵ در جهت y را رسم کنید.

۲۰) معادلهٔ تصویر خط $y=۳x$ را تحت برشی با ضریب ۵ در جهت x بیابید.

۲۱) نشان دهید که نگاشت تعریف شده توسط یک ماتریس نامنفرد 2×2 همیشه، خطوط مستقیم را به خطوط مستقیم می‌نگارد.

۲۲) نشان دهید که انتقال‌ها و نگاشت‌های آفینی خطی نیستند.

۲۳) تصویر خط $y = 3x + 1$ را تحت انتقال

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

در دو حالت بیابید.

الف) $p = 2$، $q = 5$ ب) $p = -1$، $q = 1$.

۲۴) تصویرهای مربع واحد را تحت نگاشت‌های آفینی $T(u) = Au + v$ تعریف شده توسط ماتریس‌ها و بردارهای زیر پیدا کرده و رسم کنید:

الف) $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

پ) $v = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 1 ب) $v = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 3

۲۵) الف) نشان دهید که وارون یک دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ، دوران به اندازهٔ زاویهٔ $-\theta$ است.

ب) نشان دهید که وارون یک انعکاس در محور xها یک انعکاس در محور xها است.

۲۶) وارون نگاشت آفین $T(U) = AU + V$ را بیابید که A ماتریس نامنفرد است.

۲۷) ماتریس‌های 2×2 را بسازید که نگاشت‌های زیر را روی R^2 تعریف کنند. تصویر نقطهٔ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را تحت هر نگاشت بیابید.

الف) دوران به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و بعد انبساط با ضریب ۲.

ب) انبساط با ضریب ۴ و بعد انعکاس در محور xها.

۲۸) ماتریس‌های 2×2 را بسازید که نگاشت‌های زیر را در R^2 تعریف کند. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ را تحت هر نگاشت بیابید.

الف) انبساط با ضریب ۳ و سپس برش با ضریب ۲ در جهت x.

ب) مقیاس‌بندی با ضریب ۳ در جهت x با ضریب ۲ در جهت y و سپس انعکاس در خط $y = x$.

پ) انبساط با ضریب ۲ سپس برش با ضریب ۳ در جهت x و بعد دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ $-\frac{\pi}{4}$.

۲۹) نگاشت $T : R^n \longrightarrow R^n$ را با تعریف $T(U) = AU$ درنظر بگیرید. T هم چنین دارای ماتریس استاندارد A' است. نشان دهید که A و A' یکی هستند.

۳۰) فرض کنید A ماتریس دوران برای $\frac{\pi}{4}$ باشد. نشان دهید که $A^n = I$ ماتریس همانی ۲ × ۲ است. برای این نتیجه یک دلیل هندسی بیاورید.

۳۱) نشان دهید که برای ماتریس‌های A و B نیز $A^2BA^2 = I$. برای این نتیجه یک برهان هندسی بیاورید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۳۲) دنبالهٔ نگاشت‌های $T_n(u) = (B, A)^n u$ را درنظر بگیرید که A یک ماتریس دوران به اندازهٔ 1°، B یک انبساط با ضریب ۱٫۰۰۵ و u نقطهٔ $x = 1$ و $y = 0$ است. وقتی n از ۱ تا ۷۲۰ تغییر کند، نقاط تصاویر چه شکلی خواهند بود؟ (اگر کامپیوتر دارید، استفاده کنید).

۳۳) تصاویر مربع واحد را تحت نگاشت‌های آفین $n = 1, 2, 3$ و $T_n(u) = A^n u - v$ تعریف شده توسط ماتریس‌ها و نقاط v در زیر بیابید و رسم کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳۴) تصویر مثلث با رئوس $(1, 2)$، $(3, 4)$ و $(4, 6)$ را تحت انتقالی که نقطهٔ $(1, 2)$ را به $(2, -3)$ می‌برد بیابید.

۳۵) نگاشت‌های T_1 و T_2 جابجایی هستند هرگاه برای هر بردار $\mathbf{u}$

$$T_2 \circ T_1(\mathbf{u}) = T_1 \circ T_2(\mathbf{u})$$

فرض کنید R یک دوران، D یک انبساط، F یک انعکاس، S یک مقیاس‌گذاری H یک برش و A یک نگاشت آفین باشد. کدام زوج از نگاشت‌های جابجایی هستند؟

۳۶) ماتریسی را بیابید که دوران سه بعدی به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ را حول محور zها تعریف می‌کند. (هر زوج دلخواهی را می‌توانید درنظر بگیرید.)

۳۷) ماتریسی را بیابید که یک بسط از فضای سه بعدی به خارج از مبداء را چنان تعریف می‌کند که هر نقطه سه برابر فاصله‌اش از مبداء دور می‌شود.

۳۸) ماتریسی را معین کنید که می‌تواند برای تعریف یک دوران حول نقطهٔ $(۵,۱)$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ استفاده شود. تصویر مربع واحد تحت این دوران را بیابید.

۳۹) انتقال کلی راکه توسط ماتریس T در زیر تعریف می‌شود درنظر بگیرید. آیا این نگاشت دارای وارون است؟ در صورت وجود آن را بیابید.

$$T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & h \\ ۰ & ۱ & k \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴۰) ماتریس مقیاس‌گذاری کلی S را طبق تعریف زیر در نظر بگیرید. $(d \neq ۰, c \neq ۰)$ آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ وارون آن را در صورت وجود بیابید.

$$S = \begin{bmatrix} c & ۰ & ۰ \\ ۰ & d & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴۱) تصویر مثلث با رئوس A، B و C در زیر را (در مختصات همگن) تحت دنباله نگاشت‌های T بعد R و سپس S بیابید. تصاویر مثلث‌های اولیه و نهایی را رسم کنید.

$$A \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad C \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

تمرین‌های دوره‌ای

۱) بردارهای مکانی زیر را در $R^۲$ و $R^۳$ رسم کنید.

الف) $\vec{OA} = (۱,۴)$ در $R^۲$

ب) $(۱,۴,۲), (۰,-۱,۰), (۲,۰,۰)$ در $R^۳$

۲) عبارت‌های زیر را برای $u=(۳,-۱,۵)$، $v=(۲,۳,۷)$ و $w=(۰,۱,-۳)$ محاسبه کنید.

الف) $u+v$ ب) $۲u-۵v-w$ پ) $۴u-۲v+۳w$

۳) حاصل‌ضرب نقطه‌ای زوج بردارهای زیر را تعیین کنید:

الف) $(۱,۲),(۳,-۴)$

ب) $(۱,-۲,۳),(۴,۲,-۷)$

پ) $(۳,۲,-۱),(۲,۲,-۵)$

۴) نرم بردارهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $(۱,-۴)$ ب) $(-۲,۱,۳)$ پ) $(۱,-۲,۳,۴)$

۵) کسینوس زاویه بین بردارهای زیر را بیابید:

الف) $(-۱,۱),(۲,۳)$ ب) $(۱,۲,-۳),(۴,۱,۲)$

۶) برداری عمود بر بردار $(-۲,۱,۵)$ را بیابید.

۷) فاصلهٔ بین زوج بردارهای زیر را بیابید.

الف) $(۱,-۲),(۵,۳)$ ب) $(۳,۲,۱),(۷,۱,۲)$ پ) $(۴,۱,۶,۲),(۳,۱,-۱,۲)$

۸) تمام مقادیر c را بیابید به طوری که $\|c(۱,۲,۳)\|=۱۹۶$.

۹) تعیین کنید که نگاشت‌های زیر خطی هستند؟

الف) $T(x,y)=(۲x,y,y-x)$ از $R^۲$ به $R^۳$.

ب) $T(x,y)=(x+y,۲y+۳)$ از $R^۲$ به $R^۲$.

۱۰) ماتریسی را پیدا کنید که $R^۲$ را به $R^۲$ می‌نگارد به طوری که

$$\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-۱\\۱۱\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$$

۱۱) فرض کنید T یک نگاشت خطی بین فضاهای برداری، u و v بردارهایی در دامنه و a و b اعداد باشند. ثابت کنید T خطی است اگروتنهااگر

$$T(au+bv)=aT(u)+bT(v)$$

این نتیجه می‌تواند تعریف دیگری برای نگاشت خطی باشد.

۱۲) ماتریسی را بیابید که دوران به صفحه به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ حول مبداء را تعریف کرده و هم زمان نقاط را به سه برابر فاصله‌شان از مبداء منتقل می‌کند.

۱۳) ماتریسی را تعیین کنید که انعکاس نسبت به خط $y = -x$ را تعریف می‌کند.

۱۴) ماتریسی را تعیین کنید که تصویر روی خط $y = -x$ را تعریف می‌کند.

۱۵) معادلهٔ تصویر خط $y = -5x + 1$ را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۵ در جهت x و با ضریب ۲ در جهت y بیابید.

۱۶) معادلهٔ تصویر خط $y = 2x + 3$ را تحت یک برش با ضریب ۳ در جهت y بیابید.

۱۷) یک ماتریس 2×2 بسازید که برش با ضریب ۳ در جهت y سپس مقیاس‌گذاری با ضریب ۲ در جهت x و بعد انعکاس نسبت به محور y را تعریف می‌کند.

هدف‌های رفتاری فصل ۵

دانشجویی پس از مطالعه و کاربردی این فصل باید بتواند.

- مفهوم فضای برداری را براساس پنداشت‌های آن تعریف کرده مثال‌های ملموس از آن ارائه دهد.
- مفهوم زیرفضا را درک کرده مثال‌های از آن ارائه دهد.
- مفاهیم کلیدی، استقلال خطی و وابستگی خطی مجموعه‌ای از بردارها را دقیقاً تعریف کرده و قضیه‌های مرتبط با آنها را بیان و اثبات کند.
- مفاهیم پایه، رتبه ماتریس، بردارهای متعامد، ماتریس وارون‌پذیر را تعریف کرده و ارتباط آنها را توضیح دهد.

هدف‌های کلی فصل ۵

در این فصل مفهوم قبلی فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را تعمیم می‌دهیم. ساختار زیربنایی و اساسی جبری $\mathbb{R}^n$ را مورد بررسی قرار خواهیم داد. هر مجموعه‌ای که دارای چنین ساختاری باشد دارای همان ویژگی‌های ریاضی R^n بوده و یک فضای برداری نامیده می‌شود. نتیجه‌هایی که برای فضای برداری R^n توسعه یافته است در مورد چنین مجموعه‌هایی نیز به‌کار خواهد رفت. برای نمونه، خواهیم دید که مجموعه‌های معینی از تابع‌ها دارای همان ویژگی‌های ریاضی هستند که فضای برداری R^n دارا است.

فصل پنجم

فضاهای برداری عمومی

۱-۵ فضاهای برداری

فضاهای برداری R^n شامل مجموعه عناصری است که بردار نامیده شده که بر آنها دو عمل، یعنی جمع و ضرب اسکالر، تعریف شده است. در فصل قبل ملاحظه کردیم که فضای برداری R^n تحت این عمل‌ها بسته است؛ حاصل‌جمع دو بردار R^n در R^n قرار دارد و همچنین حاصل‌ضرب اسکالر در یک بردار R^n در R^n می‌باشد. همچنین فضای برداری R^n دارای ویژگی‌های جبری دیگری است. برای نمونه، ملاحظه کردیم که جمع بردارها جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است:

$$u + v = v + u$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

هدف‌مان در این بخش این است که بر این ویژگی‌ها و سایر ویژگی‌های جبری R^n تمرکز کنیم. ما مجموعه‌ای از **بنداشت‌ها** را که بر ویژگی‌های R^n استوار باشد استخراج می‌کنیم. هر مجموعه‌ای که در این بنداشت‌ها صدق کند ویژگی‌های جبری مشابه ویژگی‌های فضای برداری R^n خواهد داشت. چنین مجموعه‌ای یک فضای برداری و عناصر آن بردار نامیده می‌شوند. ارزش این رویکرد در این است که مفهوم‌ها و نتایجی که برای فضای برداری R^n به‌دست آمده‌اند برای سایر فضاهای برداری قابل اعمال هستند.

اینک تعریف رسمی فضای برداری را که بر پایه ویژگی‌های‌جبری R^n استوار است ارائه می‌کنیم. ویژگی‌هایی از R^n که در قضیه ۴ـ۱ عرضه شدند. ملاحظه می‌کنیم که این بنداشت‌ها را می‌توانیم به سه

گروه مناسب مجزا دسته‌بندی کنیم.

۵-۱-۱ تعریف. یک **فضای برداری** مجموعه‌ای مانند V متشکل از عناصری است که **بردار** نامیده می‌شوند، که اعمال جمع و ضرب اسکالری بر آن تعریف شده که در شرایط ذیل صدق می‌کنند ($\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\underline{w}$ عناصر دلخواه V، c و d اسکالر هستند).

بنداشت‌های بستاری ۱) حاصل‌جمع $u+v$ وجود دارد و متعلق به V است (V تحت جمع بسته است).

۲) cu عنصری از V است (V تحت ضرب اسکالر بسته است).

بنداشت‌های جمع ۳) $u+v=v+u$ (ویژگی جابه‌جایی).

۴) $u+(v+w)=(u+v)+w$ (ویژگی شرکت‌پذیری).

۵) عنصری از V، که **بردار صفر** نامیده می‌شود، به $\circ$ نشان داده می‌شود، وجود دارد به قسمی که $u+\circ=\circ$.

۶) متناظر هر عنصر u از V عنصری وجود دارد که **قرینه** u نامیده و به $-u$ نشان داده می‌شود، به قسمی که $u+(-u)=\circ$.

بنداشت‌های ضرب اسکالر ۷) $c(u+v)=cu+cv$

۸) $(c+d)u=cu+du$

۹) $c(du)=cd$

۱۰) $1u=u$

معمول‌ترین مجموعه‌هایی که به‌عنوان مجموعه‌های اسکالر در فضاهای برداری استفاده می‌شود مجموعه عددهای حقیقی و مجموعه عددهای مختلط می‌باشد. در این‌صورت فضاهای برداری را به‌ترتیب **فضای برداری حقیقی** و **فضای برداری** مختلط می‌نامیم. در این مبحث کوششمان اساساً بر فضاهای برداری حقیقی متمرکز شده، هر جا مناسب باشد، به اختصار نتایج به‌دست آمده را در مورد فضاهای برداری مختلط متذکر می‌شویم.

۲-۵ فضاهای برداری ماتریس‌ها

مجموعه ماتریس‌های حقیقی (ماتریس‌های با درایه‌های اعداد حقیقی) ۲ × ۲ را در نظر می‌گیریم. تاکنون عمل‌های جمع و ضرب اسکالر را برای این ماتریس‌ها تعریف کرده‌ایم. این مجموعه در واقع یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. ما بنداشت‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را بررسی کرده و برقراری مابقی بنداشت‌ها را به دانشجو محول می‌کنیم.

نماد برداری را برای عناصر $M_{2\times 2}$ به‌کار می‌بریم. فرض کنیم

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

دو ماتریس ۲ × ۲ دلخواه باشند. داریم:

بنداشت:

$$u + v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

پس $u + v$ یک ماتریس ۲ × ۲ است.

در نتیجه $M_{2\times 2}$ جمع بسته است.

بنداشت‌های ۳ و ۴: بنابر بررسی‌های قبلی می‌دانیم که ماتریس‌های ۲ × ۲ تحت جمع جابه‌جایی و شرکت‌پذیرند (قضیه ۲ـ۲).

بنداشت ۵: ماتریس صفر ۲ × ۲ عبارت است از ماتریس $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، زیرا

$$\mathbf{u} + 0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

بنداشت ۶: اگر $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه $-u = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ ، زیرا

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

مجموعه $M_{2\times 2}$ متشکل از همه ماتریس‌های ۲ × ۲ که فضای برداری است. ویژگی‌های جبری $M_{2\times 2}$ مشابه با ویژگی‌های R^n است. مشابهاً، داریم:

$M_{m\times n}$، مجموعه ماتریس‌های $m \times n$، یک فضای برداری است

۵-۳ فضاهای برداری تابع‌ها

فرض کنیم V مجموعه همه تابع‌های حقیقی با دامنه عددهای حقیقی باشد. هر عنصر V همانند f، خط حقیقی را به خط حقیقی می‌نگارد. اکنون عمل‌های جمع و ضرب اسکالری را در V تعریف کرده و آن را به یک فضای برداری تبدیل می‌کنیم.

فرض کنیم f و g دو عنصر دلخواه V باشند. حاصل‌جمع این دو، $f+g$ را به‌عنوان تابعی با ضابطه

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

تعریف می‌کنیم. این امر $f+g$ را به‌عنوان تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی معرفی می‌نماید. برای یافتن مقدار $f+g$ به‌ازای هر عدد حقیقی x، مقدار f را در x با مقدار g در x جمع می‌کنیم. این عمل را **جمع نقطه‌ای** می‌نامیم.

در مرحله بعد ضرب اسکالر را بر عناصر V تعریف می‌کنیم. فرض کنیم c یک اسکالر دلخواه باشد. مضرب اسکالری f، cf تابعی است با ضابطه

$$(cf)(x) = c(f(x))$$

این امر cf را به‌عنوان تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی معرفی می‌کند. برای یافتن مقدار cf در هر عدد حقیقی دلخواه x، مقدار f را در x یافته و آنرا در c ضرب می‌کنیم. این عمل **اسکالر نقطه‌ای** نامیده می‌شود.

برای آنکه احساسی هندسی از این دو عمل بر توابع داشته باشیم، دو تابع مشخص زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = x \quad , \quad g(x) = x^2$$

در این‌صورت $f+g$ تابعی است که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$(f+g)(x) = x + x^2$$

مضرب اسکالر f در اسکالری مانند ε تابع εf است که با ضابطه

$$(\varepsilon f)(x) = \varepsilon x$$

تعریف می‌شود.

با تعریف عمل‌های جمع و ضرب اسکالر بر این فضای تابعی V اکنونی نوبت به این می‌رسد که نشان دهیم V یک فضای برداری است.

بنداشت ۱: $f+g$ تابعی است که با ضابطه $(f+g)(x) = f(x) = g(x)$ تعریف شده و لذا تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی بوده و بنابراین عنصری متعلق به V است. بنابراین V تحت جمع بسته است.

بنداشت ۲: cf با ضابطه‌ی $(cf)(x) = c(f(x))$ تعریف شده، در نتیجه cf نیز تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی بوده و بنابراین به V تعلق دارد. بنابراین V تحت ضرب اسکالر بسته است.

بنداشت ۵: فرض کنیم 0 تابعی باشد که در آن $0(x) = \circ$ برای هر عدد حقیقی x، 0 **تابع صفر** نامیده می‌شود. در این‌صورت برای هر عدد حقیقی x:

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + \circ = f(x)$$

بنابراین مقدار $f+0$ در هر x برابر مقدار f در x است، از این رو $f+0 = f$، یعنی 0 **بردار صفر** است.

بنداشت ۶: تابع $-f$ را با ضابطه $(-f)(x) = -(f(x))$ در نظر می‌گیریم نشان می‌دهیم که $-f$ قرینه f است.

$$\begin{aligned}(f+(-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(f(x)) \\ &= \circ \\ &= 0(x)\end{aligned}$$

یعنی در هر x مقدار $f+(-f)$ با مقدار 0 برابر است. لذا $f+(-f) = 0$. بنابراین $-f$ قرینه f است.

فضاهای برداری بسیاری وجود دارد که عناصر آنها تابع هستند. برای نمونه، مجموعه همه تابع‌هایی با دامنه $(-\pi, \pi)$ با جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر نقطه‌ای یک فضای برداری است. دانشجو ضمن تمرین‌هایی که در دنباله این بحث ارائه می‌گردد به بررسی فضاهای برداری تابعی دیگری خواهد پرداخت.

۵-۴ فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$

اکنون مفهوم فضای برداری حقیقی $\mathbb{R}^n$ را به فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$ تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $(u_1.u_2, \ldots, u_n)$ دنباله‌ای متشکل از n عدد مختلط باشد. مجموعه همه چنین دنباله‌هایی (n–تایی مرتب) را به $\mathbb{C}^n$ نشان می‌دهیم. برای نمونه $(2 + 3i, 4 - 6i)$ عنصری از $\mathbb{C}^2$ است، در حالی که $(3i, 1 - 5i, 4)$ عنصری از $\mathbb{C}^3$ است.

فرض کنیم عمل‌های جمع و ضرب اسکالر (به‌وسیله اسکالر مختلط $\mathbb{C}$) را بر $\mathbb{C}^n$ به‌روش زیر تعریف شده باشد:

$$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

$$c(u_1, \ldots, u_n) = (cu_1, \ldots, cu_n)$$

برای نمونه دو بردار $\mathbf{u} = (2 + i, 3 - 4i)$ و $\mathbf{v} = (1 - 3i, 5 + 3i)$ از $\mathbb{C}^2$ و اسکالر $c = 4 + 3i$ را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + i, 3 - 4i) + (1 - 3i, 5 + 3i) = (3 - 2i, 8 - i)$$

$$c\mathbf{u} = (4 + 3i)(2 + i, 3 - 4i) = (5 + 10i, 24 - 7i)$$

می‌توان نشان داد که $\mathbb{C}^n$ با این عمل یک فضای برداری مختلط می‌باشد (تمرین‌های بعدی ملاحظه شود).

اکنون قضیه‌ای مطرح می‌کنیم که مشتمل بر ویژگی‌های مفید بردارها است. این‌ها ویژگی‌هایی هستند که در خصوص $\mathbb{R}^n$ وضوح فوری داشتند و بنابراین تقریباً دانسته و معلوم فرض شده بودند. با این وجود، در مورد سایر فضاهای برداری وضوح آنها چندان آشکار نمی‌نماید.

۵-۴-۱ قضیه. فرض کنیم V یک فضای برداری، A_v برداری در V، $A0$ بردار صفر V، c اسکالری داخواه و 0 اسکالر صفر باشد. در این‌صورت

الف) $A0Av = A0$

ب) $A0 = A0$

ج) $(-1)Av = -Av$

د) هرگاه $cAv = A0$، آنگاه $c = 0$ یا $Av = 0$

برهان. (الف) و (ج) را اثبات می‌کنیم، برهان (ب) و (د) را به‌عنوان تمرین به دانشجو محول می‌کنیم.

(الف)

$$0Av + 0Av = (0+0)Av \qquad \text{(بنداشت ۸)}$$
$$= 0Av \qquad \text{(ویژگی اسکالر 0)}$$

به دو طرف تساوی اخیر قرینه $-0Av$ را افزون می‌کنیم

$$0Av + 0Av + (-0Av) = 0Av + (-0Av)$$
$$0Av + [0Av + (-0Av)] = A0 \qquad \text{(بنداشت ۴ و ۶)}$$
$$0Av + A0 = A0 \qquad \text{(بنداشت ۶)}$$
$$0Av = 0 \qquad \text{(بنداشت ۵)}$$

(ج)

$$(-1)Av + Av = (-1)Av + 1Av \qquad \text{(بنداشت ۱۰)}$$
$$= [(-1)+1]Av \qquad \text{(بنداشت ۸)}$$
$$= 0Av \qquad \text{(ویژگی اسکالره)}$$
$$= A0 \qquad \text{(قسمت الف فوق)}$$

بنابراین $(-1)Av$ قرینه v است (بنداشت ۶).

۵-۴-۲ تمرین

۱) در درس ثابت کردیم که M_{22}، مجموعه ماتریس‌های ۲ × ۲، با اعمال معمولی جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها در بنداشت‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ صدق می‌کند. ثابت کنید M_{22} در مابقی بنداشت‌های فضای برداری نیز صدق کرده و لذا برهان اینکه M_{22} یک فضای برداری است را کامل کنید.

۲) در درس ثابت کردیم که مجموعه توابع با اعمال جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر، با دامنه اعداد حقیقی، در بنداشت‌های ۱، ۲، ۵ و ۶ از فضای برداری صدق می‌کند. ثابت کنید این مجموعه در مابقی بنداشت‌های فضای برداری نیز صدق کرده و لذا یک فضای برداری است.

۳) ثابت کنید مجموعه $\mathbb{C}^n$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر مشروح در ذیل یک فضای برداری است:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

$$= (u_۱, u_۲ \dots u_n) = (cu_۱, cu_۲, \dots, cu_n)$$

$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $c\mathbf{u}$ را برای برداری $\mathbf{C}^۲$، که ذیلاً ذکر می‌شوند، محاسبه کنید

۱ـ $\mathbf{u} = (۲ - i, ۳ + ۴i), \mathbf{v} = (۵, ۱, ۳i), c = ۳ - ۲i$

۲ـ $\mathbf{u} = (۱ + ۵i, -۲ - ۳i), \mathbf{v} = (۲i, ۳ - ۲i), c = ۴ + i$

۴) فرض کنیم $\mathbf{V}$ یک فضای برداری، $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهایی در $\mathbf{V}$، a، b و c اسکالرهایی باشند. با استفاده از بنداشت‌های فضای برداری احکام ذیل را ثابت کنید.

۱ـ $c0 = 0$.

۲ـ هرگاه $c\mathbf{v} = 0$، آنگاه $c = ۰$ یا $0 = 0$.

۳ـ $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

۴ـ اگر $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$، آنگاه $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

۵ـ هرگاه $\mathbf{u} \neq 0$ و $a\mathbf{u} = b\mathbf{u}$، آنگاه $a = b$.

۵-۵ زیرفضاها

زیر مجموعه‌های خاصی از فضاهای برداری خود تشکیل **فضای برداری** می‌دهند. برای آنکه این ایده را اثر بخشی ببخشیم بار دیگر به فضای برداری $\mathbb{R}^n$ نظری می‌افکنیم. فضای $\mathbb{R}^n$ مشتمل بر مجموعه بردارهایی است که بر آنها عمل‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف شده است. می‌دانیم $\mathbb{R}^n$ تحت این عمل‌ها بسته است. هرگاه دو بردار $\mathbb{R}^n$ را جمع کنیم برداری از $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آوریم. وانگهی، هرگاه عنصری از $\mathbb{R}^n$ را در یک اسکالر ضرب کنیم عنصری از $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آوریم. برای نمونه، در $\mathbb{R}^۳$:

$$\underset{\text{عنصر } \mathbb{R}^۳}{\underset{\uparrow}{(۱,۲,۵)}} + \underset{\text{عنصر } \mathbb{R}^۳}{\underset{\uparrow}{(۳,۱,۷)}} = \underset{\text{عنصر } \mathbb{R}^۳}{\underset{\uparrow}{(۴,۳,۱۲)}} \quad , \quad \underset{\text{عنصر } \mathbb{R}^۳}{\underset{\uparrow}{۵(۱,-۲,۵)}} = \underset{\text{عنصر } \mathbb{R}^۳}{\underset{\uparrow}{(۵,-۱۰,۲۵)}}$$

اکنون به زیر مجموعه‌های خاصی از $\mathbb{R}^۳$ می‌نگریم که همین ویژگی‌های بستاری را دارا هستند.

زیرمجموعه V از $\mathbb{R}^۳$ متشکل از همه‌ی بردارهایی به فرم (a, a, b) را در نظر می‌گیریم. V مشتمل بر همه بردارهایی از $\mathbb{R}^۳$ است که مؤلفه‌های اول و دوم یکسان دارند. برای نمونه $(۲, ۲, ۳)$ و $(-۱, -۱, ۶)$ در V خواهند بود. مشاهده می‌کنیم که هرگاه دو عنصر V را با هم جمع کنیم عنصری از V به‌دست می‌آید؛

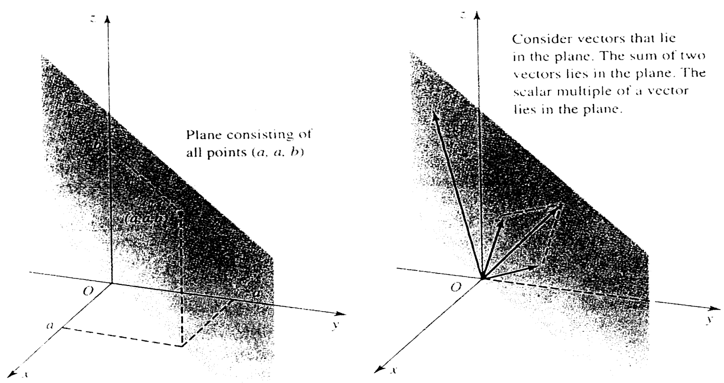
همچنین هرگاه یک عنصر V را در یک اسکالر ضرب کنیم باز عنصری از V حاصل می‌شود. فرض کنیم (a, a, b) و (c, c, d) دو عنصر دلخواه V و k یک اسکالر باشد. در این‌صورت

$$(a, a, b) + (c, c, d) = (a + c, a + c, b + d) \in V$$

$$k(a, a, b) = (ka, ka, kb) \in V$$

V دارای جمع و ضرب اسکالری است که بر آن تعریف شده‌اند. همین V تحت این عمل‌ها بسته است. V دارای ویژگی‌های جبریی است که $\mathbb{R}^3$ داراست. بنابراین ما به V به مثابه یک **فضای برداری** می‌نگریم که در $\mathbb{R}^3$ **محاط** شده باشد. چنین فضای محاط شده در فضای بزرگ‌تر را یک **زیرفضا** می‌نامیم.

اینک به تعبیر هندسی V می‌پردازیم. $\mathbb{R}^3$ مجموعه همه نقطه‌هایی است که در فضای سه‌بعدی معمولی واقع‌اند. V مجموعه همه نقطه‌هایی است که مؤلفه‌های x و y برابر دارند. این نقطه‌ها صفحه‌ای می‌سازند که عمود بر صفحه xy بوده و مارّ بر خط به معادله $y = x$ و $z = 0$ می‌باشد. شکل ۵ـ۱ ملاحظه شود. حاصل‌جمع هر دو بردار مکان که در این صفحه باشند نیز در این صفحه واقع است. همچنین مضرب اسکال هر بردار که در این صفحه باشد متعلق به این صفحه است. این بررسی به ما امکان تعریف کلی یک زیرفضا از یک فضای برداری را به‌دست می‌دهد.



شکل ۵ـ۱

تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری و U یک زیرمجموعه ناتهی V باشد. U را یک **زیرفضای** V نامیم هرگاه تحت جمع و ضرب اسکالر بسته باشد. برای آنکه ملاحظه کنیم که U یک فضای برداری است. یادآور می‌شویم که U در بنداشت‌های بستاری ۱ و ۲ صدق می‌کند. همچنین U شرایط بنداشت‌های ۳ تا

۱۰ را از فضای بزرگتر برداری V به «ارث» می‌برد. یک زیرفضا، فضای برداریی است که در یک فضای برداری بزرگتر محاط شده باشد.

مثال ۱: فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ متشکل از همه بردارهایی به‌فرم $(u, 0, 0)$ (یعنی مؤلفه‌های دوم و سوم صفر) باشد. نشان دهید که U یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

حل: فرض کنیم $(u, 0, 0)$ و $(b, 0, 0)$ دو بردار در U و k یک اسکالر باشد. داریم:

$$(a, 0, 0) + (b, 0, 0) = (a + 0, 0, 0) \in U$$

$$k(a, 0, 0) = (ka, 0, 0) \in U$$

حاصل‌جمع و ضرب اسکالر در U هستند. بنابراین یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

از نظر هندسی، U مجموعه همه بردارهایی است که بر محور x واقع‌اند. متذکر می‌شویم که حاصل‌جمع و همچنین ضرب اسکالر هر دو بردار واقع بر محور x بر این محور واقع‌اند.

مثال ۲: فرض کنیم W مجموعه بردارهایی به‌فرم (a, a^2, b) باشد، نشان دهید که W یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ نمی‌باشد.

حل: W مجموعه‌ی همه بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ است که برای آن‌ها مؤلفه دوم، مربع مؤلفه اول می‌باشد. برای نمونه بردار $(2, 4, 3)$ در W است در حالی که بردار $(1, 3, 5)$ در W نمی‌باشد.

فرض کنیم (a, a^2, b) و (c, c^2, d) دو بردار در $\underline{W}$ باشند. داریم

$$\begin{aligned}(a, a^2, b) + (c, c^2, d) &= (a + c, a^2 + c^2, b + d)\\ &\neq (a + c, (a + c)^2, b + d)\end{aligned}$$

بنابراین $(a, a^2, b) + (c, c^2, d)$ عنصری از W نمی‌باشد. W تحت جمع بسته نمی‌باشد، در نتیجه W یک زیرفضا نیست.

مثال ۳: ثابت کنید مجموعه $\underline{U}$ متشکل از ماتریس‌های قطری 2×2 یک زیرفضای فضای برداری $\underline{M}_{2\times 2}$ می‌باشد.

حل: باید نشان دهیم که $\underline{U}$ تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. دو عنصر دلخواه زیر را از $\underline{U}$ در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+p & 0 \\ 0 & b+q \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ یک ماتریس قطری 2×2 بوده و در این‌صورت عنصری از $\underline{U}$ است. $\underline{U}$ تحت جمع بسته است.

فرض کنیم c یک اسکالر باشد. داریم

$$c\mathbf{u}=c\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ca & 0 \\ 0 & cb \end{bmatrix}$$

$c\mathbf{u}$ یک ماتریس قطری 2×2 است. از این رو U تحت ضرب اسکالر بسته است.

U یک زیرفضای $M_{2\times 2}$ است. U یک فضای برداری ماتریس است. که در $M_{2\times 2}$ محاط شده است.

مثال ۴: فرض کنیم P_n نماش مجموعه تابع‌های چندجمله‌ای حقیقی (با ضرب عدد حقیقی) از درجه کوچکتر یا برابر n باشد. ثابت کنید P_n یک فضای برداری است که در آن جمع و ضرب اسکالر به شکل نقطه‌ای تعریف شده‌اند.

حل: می‌توانیم ثابت کنیم که P_n به همراه این دو عمل در همه بنداشت‌های فضای برداری صدق می‌کند. امّا راه ساده‌تری وجود دارد، P_n یک زیرمجموعه از فضای برداری V متشکل از همه تابع‌هایی با دامنه عددهای حقیقی است. نشان می‌دهیم که این زیرمجموعه یک زیرفضای V است؛ در آن‌صورت خود یک فضای برداری خواهد بود. نشان می‌دهیم که P_n تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است.

فرض کنیم f و g دو عنصر P_n باشند:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

ابتدا حاصل‌جمع $f+g$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\ &=[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0]+[b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dot{+}b_1x+b_0]\\ &=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\end{aligned}$$

$(f+g)(x)$ یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر برابر n است. بنابراین $f+g$ عنصری از P_n بوده و P_n تحت جمع بسته است.

اکنون به حاصل‌ضرب اسکالری می‌پردازیم، cf چنین تعریف شده است

$$\begin{aligned}(cf)(x) &= c[f(x)]\\ &= c[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0]\\ &= ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ca_1 x + ca_0\end{aligned}$$

$(cf)(x)$ چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است. لذا cf عنصری از P_n بوده و P_n تحت ضرب اسکالر بسته است.

بدین‌سان ثابت کرده‌ایم که P_n زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $\underline{V}$ از توابع است که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. بنابراین P_n یک زیرفضای $\underline{V}$ بوده و **خود یک فضای برداری** است.

قضیه‌ی زیر یک ویژگی مهم همه زیرفضاها را بیان می‌کند

۵-۵-۱ قضیه. فرض کنیم U یک زیرفضای فضای برداری V باشد. U شامل بردار صفر V است.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{u}$ یک بردار دلخواه U و $\mathbf{0}$ بردار صفر V باشد. همچنین فرض کنیم 0 اسکالر صفر باشد. بنابر قضیه ۵ـ۱ قسمت (الف) می‌دانیم که $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.چون U تحت ضرب اسکالر بسته است، این بدان معنی است که $\mathbf{0}$ در U است.

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^3$ شامل $(0,0,0)$اند. از نظر هندسی این بدان معنی است که همه زیر فضاهای فضای بسته سه‌بعدی از مبداء می‌گذرند. از این قضیه می‌توان به‌عنوان یک محک سریع بهره جست و در مواردی نشان داد که برخی از زیرمجموعه‌ها زیرفضا نمی‌باشند. هرگاه یک زیرمجموعه مفروض شامل بردار صفر نباشد نمی‌تواند یک زیرفضا بوده باشد.مثال زیر این رویکرد را به نمایش می‌گذارد.

مثال: فرض کنیم W مجموعه بردارهایی به فرم $(a, a, a+2)$ باشد نشان دهید که W یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ نمی‌باشد.

حل: چک می‌کنیم که آیا $(\circ,\circ,\circ)$ در W است. آیا مقداری از a هست که برای آن $(a,a,a+۲)$ برابر $(\circ,\circ,\circ)$ باشد؛ با تساوی کردن $(a,a,a+۲)$ و $(\circ,\circ,\circ)$ داریم

$$(a,a,a+۲)=(\circ,\circ,\circ)$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر، به‌دست می‌آوریم:

$$a=\circ\,,a+۲=\circ$$

این دستگاه معادلات فاقد جواب است. بنابراین $(\circ,\circ,\circ)$ عنصری از W نمی‌باشد و لذا W یک زیرفضا نیست.

در بخش‌های بعدی ابزاری به‌دست می‌آوریم که ما را قادر به شناخت بیشتر زیرفضاها خواهد کرد.

۵-۵-۲ تمرین

۱) مجموعه‌ای از بردارها به‌فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیرفضاهای $\mathbb{R}^۲$ هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

الف) $(a,\circ)$ ب) (a,a)

ج) $(a,۲a)$ د) $(a,a+۳b)$

۲) مجموعه بردارهای به‌فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیر فضاهای $\mathbb{R}^۳$ هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

الف) $(a,b,\circ)$ ب) $(\circ,a,\circ)$

ج) $(a,۲a,b)$ د) $(a,b,a+b)$

۳) مجموعه بردارهای به‌فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیر فضاهای $\mathbb{R}^۳$ هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

الف) (a,a,a) ب) $(\circ,a,۲a)$

ج) $(a,a+b,۳a)$ د) $(a,۲a,۳a+۵b)$

۴) مجموعه بردارهای به‌فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیرفضاهای $\mathbb{R}^۴$ هستند.

الف) $(a, ۲a, b, ۳b)$ ب) $(a, ۲a, ۳a, ۴a)$
ج) $(۰, a, b, a + ۲b)$ د) $(a, b, c, a + ۲b + ۳c)$

۵) فرض‌کنیم A مجموعه بردارهایی به‌فرم $(a, ۲a)$، B مجموعه بردارهایی به‌فرم $(a, a^۲)$ و C مجموعه بردارهایی به‌فرم $(a, a^۲ + ۳)$ باشد. تعیین کنید که آیا A، B یا C زیرفضاهای $\mathbb{R}^۲$ هستند؟

۶) مجموعه بردارهایی به‌فرم زیر را در نظر بگیرید. با چک کردن شرایط بستاری جمع و ضرب اسکالر تعیین کنید که آیا این مجموعه‌ها زیرفضاهای $\mathbb{R}^۳$ هستند؟

الف) $(a, b, a + ۳)$ ب) $(a, ۴a, -۳a)$
ج) $(a, b, ۲)$ د) $(a, b, ۴a - ۱)$

۷) مجموعه بردارهایی به‌فرم زیر را در نظر بگیرید. با چک کردن شرایط بستاری جمع و ضرب اسکالر تعیین کنید که آیا این مجموعه‌ها زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^۳$ هستند؟

الف) $(a, b, a - ۴b)$ ب) $(a, a^۲, ۵a)$
ج) $(a, ۱, ۱)$ د) $(a, b, ۲a + ۳b + ۶)$

۸) آیا مجموعه‌های زیر زیرفضاهای $\mathbb{R}^۳$ هستند؟ مجموعه همه بردارهای (a, b, c) که در آن

الف) $a + b + c = ۰$ ب) $a + b + c = ۱$
ج) $ab = ۰$ د) $ab = ۵$
ه) $ab = ac$, و) $a = b + c$

۹) کدامیک از مجموعه‌های زیر زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ هستند؟ مجموعه همه‌ی بردارهایی به‌فرم (a, b, c) که در آن a، b و c

الف) عددهایی صحیح‌اند ب)عددهایی حقیقی و نامنفی‌اند
ج) عددهایی گویااند د) $(a, a + ۳b)$

۱۰) آیا مجموعه‌های زیر زیرفضای $\mathbb{R}^۲$ هستند؟ مجموعه همه بردارهایی به‌فرم

الف) $(a, b^۲)$ ب) $(a, b^۳)$
ج) (a, b) که در آن $a > ۰$ د) (a, b) که در آن $ab < ۰$

۱۱) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ ارائه دهید که تحت جمع بسته بوده امّا تحت ضرب اسکالر بسته نباشد. همچنین زیرمجموعه‌ای ارائه دهید که تحت ضرب اسکالر بسته باشد امّا، تحت جمع بسته نباشد.

۱۲) نشان دهید که زیرمجموعه‌های زیر زیرفضای $\mathbb{R}^3$ نیستند. (بردار صفر را در نظر بگیرید). مجموعه همه بردارهایی به‌فرم

الف) $(a, a+1, b)$ ب) $(a, 3, 2a)$

ج) $(a, b, a+b-4)$ د) (a, b, c) که $a > 0$

۱۳) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ ارائه دهید که شامل بردار صفر باشد امّا زیرفضا نباشد. نظیر این مثال را برای $\mathbb{R}^3$ بیان و حل کنید.

۱۴) فرض کنیم U مجموعه همه بردارهایی به‌فرم $(a, 3a, b)$ و V مجموعه بردارهایی به‌فرم $(p, 2p, q)$ باشند. آیا U و V یکسان‌اند؟ آیا آنها زیرفضا هستند؟

۱۵) فرض کنیم U مجموعه همه بردارهایی به‌فرم (a, b, c) و V مجموعه بردارهایی به‌فرم $(a, a+b, c)$ باشند. آیا $U = V$؟

۱۶) فرض کنیم U مجموعه بردارهایی به‌فرم $(a, 3a, b+2)$ و V مجموعه بردارهایی به‌فرم $(p, 3p, r^3)$ باشند. نشان دهید که U و V یکی‌هستند. آیا این مجموعه یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است؟

۱۷) فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^3$، u_1 و u_2 بردارهایی در U و a و b دو اسکالر دلخواه باشند. ثابت کنید U یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است اگر و فقط اگر برای هر a و b، $au_1 + bu_2$ برداری در U باشد.

۱۸) تعیین کنید کدامیک از زیرمجموعه‌های $M_{2\times 2}$ تشکیل زیرفضا می‌دهند.

الف) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌ها که در آن عناصر قطری‌شان صفر باشد.

ب) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌ها که حاصل‌جمع عناصر آنها برابر باشد. (برای مثال ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ چنین ماتریسی خواهد بود).

ج) مجموعه ماتریس‌هایی به‌فرم

$$\begin{bmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{bmatrix}$$

د) مجموعه ماتریس‌هایی به‌فرم

$$\begin{bmatrix} a & a+2 \\ b & c \end{bmatrix}$$

ه) مجموعه ماتریس‌های متقارن 2×2

و) مجموعه ماتریس‌های وارون‌پذیر ۲ × ۲

۱۹) کدامیک از زیرمجموعه‌های ذیل از $M_{۲\times۲}$ تشکیل زیرفضا می‌دهند؟

الف) مجموعه ماتریس‌هایی به‌فرم

$$\begin{bmatrix} a & b & ۰ \\ c & d & ۰ \end{bmatrix}$$

ب) مجموعه ماتریس‌هایی به‌فرم

$$\begin{bmatrix} a & ۲a & ۳b\, b & ۲b & ۳b \end{bmatrix}$$

۲۰) ثابت کنید $P_۲$ یک زیرفضای $P_۳$ است. (به‌خاطر داریم که P_n مجموعه چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر n است).

۲۱) آیا $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{C}^n$ است؟

۲۲) ثابت کنید

الف) مجموعه ماتریس‌هایی به‌فرم

$$\begin{bmatrix} a & ۱ \\ b & c \end{bmatrix}$$

یک زیرفضای $M_{۲\times۲}$ نیست.

ب) مجموعه همه تابع‌هایی به‌فرم $f(x) = ax + ۲$ یک زیرفضای $P_۲$ نیست.

۲۳) فضای برداری تابعی را با تابع‌های دامنه عددهای حقیقی در نظر می‌گیریم. کدامیک از مجموعه‌های زیر زیرفضای این فضای برداری هستند؟

الف) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌ای f که در آن $f(۰) = ۰$

ب) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های f به‌قسمی که $f(۰) = ۳$

ج) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های ثابت

۲۴) فرض کنیم U یک زیرفضای فضای برداری V باشد. همچنین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی از U باشد؟ آیا ممکن است برای اسکالر غیرصفری مانند c، $cu \in U$ در حالی که $u \in U$؟

۲۵) فرض کنیم V یک فضای برداری و $U \subset V$.ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه U زیرفضا باشد آن است که برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ و هر اسکالرهای a و b، $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in U$.

۲۶) ثابت کنید

الف) اجتماع دو زیرفضا ممکن است زیرفضا نباشد.

ب) اشتراک دو زیرفضا یک زیرفضا است.

ج) اشتراک هر تعداد از زیرفضاهای یک فضای برداری، زیرفضاست.

۲۷) مجموعه تمام توابع پیوسته بر $\mathbb{R}$ یعنی $c(\mathbb{R})$ زیرفضای $\mathrm{map}(\mathbb{R})$ است.

۲۸) $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ زیرفضای $c(\mathbb{R})$ است.

۵-۶ ترکیبات خطی بردارها

در بخش قبلی زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ متشکل از همه بردارهایی به‌فرم (a, a, b) را مورد بررسی قرار دادیم. ملاحظه می‌کنیم که یک بردار دلخواه در این فضا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$(a, a, b) = a(1, 1, 0) + b(0, 0, 1)$$

نتیجه این امر از این قرار است که هر بردار در این زیرفضا را می‌توان برحسب بردارهایی $(1, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ نوشت. برای مثال،

$$(2, 2, 3) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

و

$$(-1, -1, 7) = -1(1, 1, 0) + 7(0, 0, 1)$$

بردارهای $(1, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ به یک معنی مشخص کننده این زیرفضا هستند. در این بخش و بخش‌های بعدی این رویکرد را بیشتر بررسی کرده و از این امر برای درک بهتر فضاهای برداری برحسب بردارهای خاصی که نمایشگر کل فضا هستند بهره خواهیم برد.

تعریف. فرض کنیم $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \ldots, \mathbf{v}_m$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. گوییم $\mathbf{v}$، برداری در V، یک **ترکیب خطی** از $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \ldots, \mathbf{v}_m$ است هرگاه اسکالرهایی چون $c_۱, c_۲, \ldots, c_m$ موجود باشند به قسمی که $\mathbf{v}$ را بتوان چنین نوشت:

$$\mathbf{v} = c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

مثال ۱: بردار $(۵, ۴, ۲)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(۱, ۲, ۰)$، $(۳, ۱, ۴)$ و $(۱, ۰, ۳)$ است زیرا می‌تواند چنین نوشته شود؛

$$(۵, ۴, ۲) = (۱, ۲, ۰) + ۲(۳, ۱, ۴) - ۲(۱, ۰, ۳)$$

این مسأله که معین کنیم آیا یک بردار ترکیبی خطی از بردارهای دیگر است در واقع به حل یک دستگاه معادلات خطی منجر می‌شود.

مثال ۲: تعیین کنید که آیا بردار $(-۱, ۱, ۵)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(۱, ۲, ۳)$، $(۰, ۱, ۴)$ و $(۲, ۳, ۶)$ است یا خیر.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_۱(۱, ۲, ۳) + c_۲(۰, ۱, ۴) + c_۳(۲, ۳, ۶) = (-۱, ۱, ۵)$$

آیا می‌توانیم اسکالرهای $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ را چنان بیابیم که تساوی برقرار باشد؟ با استفاده از جمع و ضرب اسکالر به‌دست می‌آوریم

$$(c_۱, ۲c_۱, ۳c_۱) + (۰, c_۲, ۴c_۲) + (۲c_۳, ۳c_۳, ۶c_۳) = (-۱, ۱, ۵)$$
$$(c_۱ + ۲c_۳, ۲c_۱ + c_۲ + ۳c_۳, ۳c_۱ + ۴c_۲ + ۶c_۳) = (-۱, ۱, ۵)$$

با تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر هم به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} c_۱ \qquad + ۲c_۳ &= -۱ \\ ۲c_۱ + c_۲ + ۳c_۳ &= ۱ \\ ۳c_۱ + ۴c_۲ + ۶c_۳ &= ۵ \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به‌فرد زیر است

$$c_۱ = ۱ \ , \ \ c_۲ = ۳ \ , \ \ c_۳ = -۱$$

بنابراین بردار $(-۱, ۱, ۵)$ به شکل ترکیب خطی زیر از بردارهای $(۱, ۲, ۳)$، $(۰, ۱, ۴)$ و $(۲, ۳, ۶)$ نوشته می‌شود؛

$$(۰۱, ۱, ۵) = (۱, ۲, ۳) + ۲(۰, ۱, ۴) - ۱(۲, ۳, ۶)$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است این اتفاق بیفتد که یک بردار را بتوان به بیش از یک راه به شکل ترکیبی خطی از دیگر بردارها نوشت.

مثال ۳: بردار $(۴, ۵, ۵)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای $(۱, ۲, ۳)$، $(-۱, ۱, ۴)$ و $(۳, ۳, ۲)$ بنویسید.

حل: تساوی زیر را برحسب مقدارهای مجهول $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ بررسی می‌کنیم.

$$c_۱(۱, ۲, ۳) + c_۲(-۱, ۱, ۴) + c_۳(۳, ۳, ۲) = (۴, ۵, ۵)$$

داریم:

$$(c_۱, ۲c_۱, ۳c_۱) + (-c_۲, c_۲, ۴c_۲) + (۳c_۳, ۳c_۳, ۲c_۳) = (۴, ۵, ۵)$$

$$(c_۱ - c_۲ + ۳c_۳, ۲c_۱ + c_۲ + ۳c_۳, ۳c_۱ + ۳c_۲ + ۲c_۳) = (۴, ۵, ۵)$$

تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر منجر به دستگاه معادلات خطی زیر می‌شود:

$$c_۱ - c_۲ + ۳c_۳ = ۴$$

$$۲c_۱ + c_۲ + ۳c_۳ = ۵$$

$$۳c_۱ + ۴c_۲ + ۲c_۳ = ۵$$

این دستگاه معادلات دارای جواب‌های بیشماری است،

$$c_۱ = -۲r + ۳ \ , \ \ c_۲ = r - ۱ \ , \ \ c_۳ = r$$

بنابراین بردار $(۴, ۵, ۵)$ می‌تواند به راه‌های بسیاری به شکل ترکیبی خطی از بردارهای $(۱, ۲, ۳)$، $(-۱, ۱, ۴)$ و $(۳, ۳, ۲)$ نوشته شود؛

$$(۴, ۵, ۵) = (-۲r + ۳)(۱, ۲, ۳) + (r - ۱)(-۱, ۱, ۴) + r(۳, ۳, ۲)$$

برای نمونه

$r = ۳$ به‌دست می‌دهد
$$(۴,۵,۵) = -۳(۱,۲,۳) + ۲(-۱,۱,۴) + ۳(۳,۳,۲)$$

$r = -۱$ به‌دست می‌دهد
$$(۴,۵,۵) = ۵(۱,۲,۳) - ۲(-۱,۱,۴) - (۳,۳,۲)$$

مثال زیر نشانگر آن است که ممکن است یک بردار را نتوان به شکل ترکیبی خطی از بردارهای دیگر نوشت.

مثال ۴: نشان دهید که بردار $(۳,-۴,-۶)$ را نمی‌توان به شکل ترکیبی خطی از بردارهای $(۱,۲,۳)$، $(-۱,-۱,-۲)$ و $(۱,۴,۵)$ نوشت.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_۱(۱,۲,۳) + c_۲(-۱,-۱,-۲) + c_۳(۱,۴,۵) = (۳,-۴,-۶)$$

این تساوی منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود

$$\begin{aligned} c_۱ + c_۲ + c_۳ &= ۳ \\ ۲c_۱ - c_۲ + ۴c_۳ &= -۴ \\ ۳c_۱ - ۲c_۲ + ۵c_۳ &= -۶ \end{aligned}$$

این دستگاه فاقد جواب است. بنابراین $(۳,-۴,-۶)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(۱,۲,۳)$، $(-۱,-۱,-۲)$ و $(۱,۴,۵)$ نمی‌باشد.

مثال ۵: تعیین کنید که آیا ماتریس

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۷ \\ ۸ & -۱ \end{bmatrix}$$

ترکیبی خطی از ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

در فضای برداری $M_{۲\times۲}$ می‌باشد یا خیر؟

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 8 & -1\end{bmatrix}$$

آیا می‌توانیم اسکالرهای c_1، c_2 و c_3 را چنان بیابیم که این تساوی برقرار باشد؟ با استفاده از جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها به‌دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix}c_1+2c_2 & -3c_2+c+3\\ 2c_1+2c_3 & c_1+2c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 8 & -1\end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر، دستگاه معادلات خطی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
c_1+\ 2c_2 \qquad &= -1\\
-3c_2+\ c_3 &= 7\\
2c_1+ \qquad 2c_3 &= 8\\
c_1+\ 2c_2 \qquad &= -1
\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد $c_1=3$، $c_2=-2$ و $c_3=1$ است. از این رو ماتریس مفروض ترکیبی خطی از سه ماتریس دیگر به شکل زیر می‌باشد

$$\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 8 & -1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

تعریف. مجموعه بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ از یک فضای برداری را وقتی یک **مولد** این فضا می‌نامیم که هر بردار فضا ترکیبی خطی از این بردارها باشد. یک **مجموعه مولد** از بردارها به یک معنی فضای برداری مربوطه را معرفی می‌کند، زیرا هر بردار آن فضا را می‌توان از این بردارها به‌دست آورد.

مثال ۶: نشان دهید بردارهای $(1,2,0)$، $(0,1,-1)$ و $(1,1,2)$ مولد $\mathbb{R}^3$ هستند.

حل: فرض کنیم (x,y,z) برداری دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشد. باید مشخص کنیم که آیا می‌توانیم بنویسیم

$$(x,y,z)=c_1(1,2,0)+c_2(0,1,-1)+c_3(1,1,2)$$

با ضرب اسکالرها و جمع بردارها به‌دست می‌آوریم

$$(x,y,z)=(c_1+c_3,\ 2c_1+c_2+c_3,\ -c_2+2c_3)$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned} c_1 \quad + c_3 &= x \\ 2c_1 + c_2 + c_3 &= y \\ -c_2 + 2c_3 &= z \end{aligned}$$

این دستگاه معادلات را در متغیرهای c_1، c_2 و c_3 با استفاده از روش حذفی **گوس-جردن** حل کرده و جواب زیر را به‌دست می‌آوریم

$$c_1 = 3x - y - z \ , \ \ c_2 = -4x + 2y + z \ , \ \ c_3 = -2x + y + z$$

در این‌صورت بردارهای $(1, 2, 0)$، $(0, 1, -1)$ و $(1, 1, 2)$، $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند. یک بردار دلخواه $\mathbb{R}^3$ را به‌صورت ترکیبی خطی از این بردارها به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم

$$(x, y, z) = (3x-y-z)(1, 2, 0) + (-4x+2y+z)(0, 1, -1) + (-2x+y+z)(1, 1, 2)$$

این فرمول برداری ما را قادر می‌سازد تا به فوریت بتوانیم هر بردار $\mathbb{R}^3$ را به‌عنوان ترکیبی خطی از $(1, 2, 0)$، $(0, 1, -1)$ و $(1, 1, 2)$ بنویسیم. برای نمونه، هرگاه بخواهیم دریابیم که بردار $(2, 4, -1)$ چگونه برحسب این بردارها در می‌آید. $x = 2$، $y = 4$ و $z = -1$ در این معادله قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$(2, 4, -1) = 3(1, 2, 0) - (0, 1, -1) - (1, 1, 2)$$

مثال ۷: نشان دهید که ماتریس‌های زیرفضای برداری $M_{2\times 2}$ را تولید می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ عنصری دلخواه از $M_{2\times 2}$ باشد. می‌توانیم این ماتریس را به شکل زیر بیان کنیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که نتیجه مطلوب را ثابت می‌کنند.

تاکنون ریاضیاتی را توسعه داده‌ایم که به ما کمک می‌کند تا نگرش پیدا کنیم که به یک فضای برداری برحسب بردارهای مولد در آن فضا بنگریم. همچنین توانایی انجام عکس این‌کار نیز مفید خواهد بود، بدین معنی با استفاده از مجموعه‌ای از بردارها یک فضای برداری **تولید** کنیم.

۵-۶-۱ قضیه. فرض کنیم $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. همچنین فرض کنیم U مجموعه همه ترکیبات خطی $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ باشد. در این‌صورت U یک زیرفضا V بوده که به‌وسیله بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ گسترش یافته است.

برهان. فرض کنیم

$$\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m \quad , \quad \mathbf{u}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_m\mathbf{v}_m)$$

$$v_1 + v_2 = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_m + b_m)\mathbf{v}_m$$

یعنی $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ است. بنابراین $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ در U بوده و U تحت جمع برداری بسته است.

فرض کنیم c اسکالری دلخواه باشد، در این‌صورت

$$c\mathbf{u}_1 = c(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m)$$
$$= ca_1\mathbf{v}_1 + \cdots + ca_m\mathbf{v}_m$$

یعنی $c\mathbf{u}_1$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ است. بنابراین $c\mathbf{u}_1$ در U بوده و U تحت ضرب اسکالر بسته است. در این‌صورت U یک زیرفضای V است. بنابر تعریف U هر بردار در U ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ است. از این رو $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$، U را تولید می‌کنند.

مثال ۸: فضای برداری $\mathbb{R}^3$ را در نظر می‌گیریم. بردارهای $(-۱, ۵, ۳)$ و $(۲, -۳, ۴)$ در $\mathbb{R}^3$ هستند. فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ متشکل از همه بردارهایی به‌فرم

$$c_1(-۱, ۵, ۳) + c_2(۲, -۳, ۴)$$

بوده باشد. در این‌صورت U زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است و به‌وسیله $(-۱, ۵, ۳)$ و $(۲, -۳, ۴)$ گسترش یافته است.

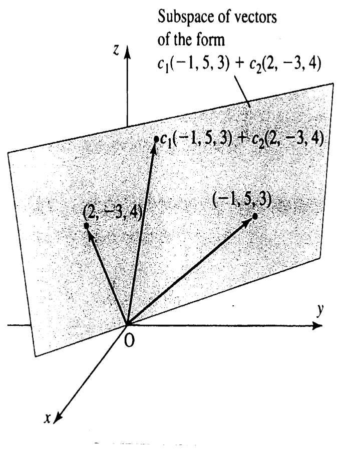
در زیر نمونه‌هایی از بردارهای U را، که با مقداردهی‌های متفاوت به c_1 و c_2 به‌دست آمده‌اند، نوشته شده‌اند

$$c_1 = ۱\,,\ c_2 = ۰ \quad \text{بردار} \quad (-۱, ۵, ۳)$$
$$c_1 = ۰\,,\ c_2 = ۰ \quad \text{بردار} \quad (۲, -۳, ۴)$$

$$c_1 = \circ\ ,\ c_2 = \circ \qquad \text{بردار} \qquad (\circ, \circ, \circ)$$

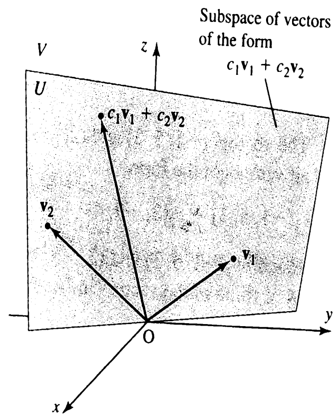
$$c_1 = ۲\ ,\ c_2 = ۳ \qquad \text{بردار} \qquad (۴, ۱, ۱۸)$$

می‌توانیم U را ببینیم. U از بردارهایی ساخته شده در صفحه‌ای قرار دارد که به‌وسیله بردارهای $(-۱, ۵, ۳)$ و $(۲, -۳, ۴)$ تعریف می‌شود. شکل ۵ـ۲ ملاحظه شود.



شکل ۵ـ۲

می‌توانیم نتیجه فوق را تعمیم دهیم. فرض کنیم $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بردارهایی در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ باشند. زیرفضای U تولید شده به‌وسیله $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مجموعه همه بردارهایی به‌فرم $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ است. هرگاه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ هم راستا نباشند، آنگاه U صفحه‌ای است که به‌وسیله $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ به‌وجود می‌آید. شکل ۵ـ۳ ملاحظه شود.



شکل ۵ـ۳

مثال ۹: فرض کنیم $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ زیرفضای U از فضای برداری V را تولید کنند. همچنین k_1 و k_2 اسکالرهایی غیرصفر باشند. نشان دهید که بردارهای $k_1\mathbf{v}_1$ و $k_2\mathbf{v}_2$ نیز U را تولید می‌کنند.

حل: فرض کنیم $\mathbf{v}$ برداری در U باشد. چون $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$، U را تولید می‌کنند اسکالرهای a و b وجود دارد به قسمی که

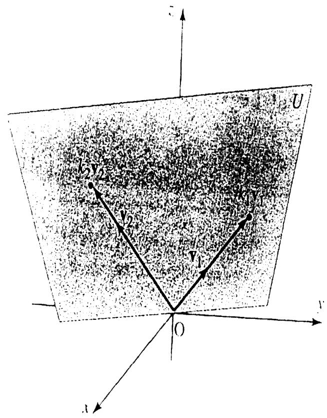
$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_1$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{v} = \frac{a}{k_1}(k_1\mathbf{v}_1) + \frac{b}{k_2}(k_2\mathbf{v}_2)$$

لذا بردارهای $k_1\mathbf{v}_1$ و $k_2\mathbf{v}_2$ مولد U هستند.

تبصره. هرگاه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ دو بردار $\mathbb{R}^3$ و هم‌راستا نباشند. می‌توانیم به U به‌عنوان صفحه‌ای در فضای معمولی (سه جهت‌دار) بنگریم. $k_1\mathbf{v}_1$ و $k_2\mathbf{v}_2$ بردارهایی در همان راستای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می‌باشند. شکل ۵ـ۴ ملاحظه شود.



شکل ۵ـ۴

یادآوری می‌کنیم که دو مجموعه وقتی مساوی هستند که دارای عناصر یکسان باشند. یک روش استاندارد که نشان می‌دهد دو مجموعه مانند A و B یکی هستند از این قرار است که نشان دهیم هر عنصر A در B است، و هر عنصر B در A است. ما از این روش برای نشان دادن اینکه دو زیرفضا برابرند استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۰: فرض کنیم U زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ باشد که به‌وسیله بردارهای $(1, 2, 0)$ و $(-3, 1, 2)$ تولید می‌شود. همچنین V زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است که به‌وسیله بردارهای $(-1, 5, 2)$ و $(4, 1, -3)$ تولید

می‌شود. نشان دهید که $U = V$.

حل: فرض کنیم $\mathbf{u}$ برداری در U باشد. نشان می‌دهیم که $\mathbf{u} \in V$. چون $\mathbf{u} \in U$، اسکالرهایی چون a و b هست به قسمی که

$$\mathbf{u} = a(۱, ۲, ۰) + b(-۳, ۱, ۲) = (a - ۳b, ۲a + b, ۲b)$$

اکنون بررسی می‌کنیم که چگونه $\mathbf{u}$ را می‌توانیم به شکل ترکیبی خطی از $(-۱, ۵, ۲)$ و $(۴, ۱, -۲)$ بنویسیم.

$$\mathbf{u} = p(-۱, ۵, ۲) + q(۴, ۱, -۲) = (-p + ۴q, ۵p + q, ۲p - ۲q)$$

چنین p و qهایی (مجهولات) باید در تساوی‌های زیر صدق کنند.

$$-p + ۴q = a - ۳b$$

$$۵p + q = ۲a + b$$

$$۲p - ۲q = ۲b$$

این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به‌فرد $p = \frac{a+b}{۳}$ و $q = \frac{a-۲b}{۳}$ باشد. بنابراین $\mathbf{u}$ را می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u} = \frac{a + b}{۳}(-۱, ۵, ۲) + \frac{a - ۲b}{۳}(۴, ۱, -۲)$$

از این رو $\mathbf{u}$ برداری در V است.

بالعکس، فرض کنیم

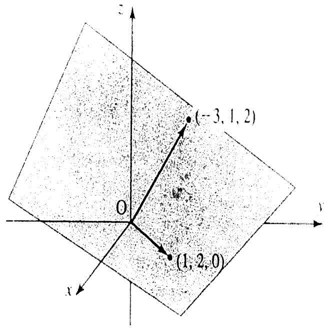
$$\mathbf{v} = c(-۱, ۵, ۲) + d(۴, ۱, -۲)$$

برداری در V باشد. $\mathbf{v}$ را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{v} = (۲c + d)(۱, ۲, ۰) + (c - d)(-۳, ۱, ۲)$$

(چرا؟). در این‌صورت $\mathbf{v}$ برداری در U است.

بنابراین $U = V$. این زیرفضا صفحه‌ای است که از مبداء گذشته و به‌وسیله بردارهای $(۱, ۲, ۰)$ و $(-۳, ۱, ۲)$ تعریف می‌گردد. شکل ۵ـ۵ ملاحظه شود.



شکل ۵ـ۵

مثال ۱۱: فرض کنیم U فضای برداری تولید شده به‌وسیله تابع‌های $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = ۲x^۲ - ۲x + ۳$ باشد. نشان دهید که تابع $h(x) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$ در U واقع است.

حل: تابع h وقتی در فضای تولید شده به‌وسیله f و g قرار دارد که اسکالرهایی چون a و b یافت شود به قسمی که

$$a(x + ۱) + b(۲x^۲ - ۲x + ۳) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$$

از این به‌دست می‌آید

$$۲bx^۲ + (a - ۲b)x + a + ۳b = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$$

با مساوی قرار دادن ضرایب متناظر

$$۲b = ۶$$

$$a - ۲b = -۱۰$$

$$a + ۳b = ۵$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد $a = -۴$ و $b = ۳$ می‌باشد. در این‌صورت

$$-۴(x + ۱) + ۳(۲x^۲ - ۲x + ۳) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$$

یعنی تابع $h(x) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$ در فضای تولید شده به‌وسیله $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = ۲x^۲ - ۲x + ۳$ قرار دارد.

۵-۶-۲ تمرین

۱) در مجموعه بردارهای داده شده، تعیین کنید که آیا بردار اول ترکیبی خطی از دیگر بردارها می‌باشد

الف) $(-۱, ۷)$ ؛ $(۱, -۱)$ ، $(۲, ۴)$

ب) $(۸, ۱۳)$ ؛ $(۱, ۲)$ ، $(۲, ۳)$

ج) $(-۱, ۱۵)$ ؛ $(۱-, ۴)$ ، $(۲, -۸)$

د) $(۱۳, ۶)$ ؛ $(۱, ۳)$ ، $(۴, ۱)$

۲) در مجموعه بردارهای زیر تعیین کنید که آیا بردار نخست ترکیبی خطی از دیگر بردارها است یا خیر؟

الف) $(۴, -۴, ۶)$ ؛ $(۱, ۲, -۳)$ ، $(۲, -۴, ۶)$ ، $(-۱, ۲, -۳)$

ب) $(-۱, ۴, -۹)$ ؛ $(-۱, ۳, ۱)$ ، $(۱, ۱, ۱)$ ، $(۰, ۱, ۴)$

ج) $(۱, ۵, ۳)$ ؛ $(۱, ۲, ۱)$ ، $(-۱, ۳, ۲)$ ، $(-۱, ۸, ۵)$

۳) نشان دهید که هر یک از مجموعه بردارهای زیر، $\mathbb{R}^۲$ را تولید می‌کنند. بردار $(۳, ۵)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از هر یک از مجموعه‌های مولد بنویسید.

الف) $(۱, -۱), (۱, ۱)$

ب) $(۱, ۴), (-۲, ۰)$

ج) $(۱, ۰), (۰, ۱)$

د) $(۱, ۳), (۳, ۱۰)$

۴) نشان دهید که هر یک از مجموعه‌های بردارهای زیر $\mathbb{R}^۳$ را تولید می‌کنند. بردار $(۱, ۳, -۲)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از هر یک مجموعه‌های مولد بنویسید.

الف) $(۱, ۲, ۳), (-۱, -۱, ۰), (۲, ۵, ۴)$

ب) $(۱, ۳, ۱), (-۱, ۱, ۰), (۴, ۱, ۱)$

ج) $(۵, ۱, ۳), (۲, ۰, ۱), (-۲, -۳, -۱)$

د) $(۱, ۰, ۰), (۰, ۱, ۰), (۰, ۰, ۱)$

۵) تعیین کنید که آیا مجموعه بردارها $R^۲$ را تولید می‌کند؟

الف) $(۱, -۳), (۲, -۵)$

ب) $(۱, ۱), (-۲, ۱)$

ج) $(۶, ۲), (۲, ۳), (۶, -۱)$

۶) سه بردار در $R^۳$ ارائه دهید که به‌وسیله بردارهای $(۱, ۲, ۳)$، $(۱, ۲, ۰)$ تولید شوند.

۷) سه بردار در $R^۲$ ارائه دهید که به‌وسیله $(۱, ۲)$ تولید شوند.

۸) سه بردار در $R^۴$ ارائه دهید که به‌وسیله $(۲, ۱, -۳, ۴)$، $(۱, ۵, ۰, -۳)$ و $(۴, ۱, ۲, ۰)$ تولید شوند.

۹) فرض کنیم U زیرفضایی از $R^۲$ باشد که با $(-۱,۳)$ تولید شده در V زیرفضایی از $R^۳$ باشد که با $(-۲,۶)$ تولید شده باشد. نشان دهید که $U=V$.

۱۰) فرض کنیم U زیرفضایی از $R^۳$ باشد که بوسیله $(۱,۲,۳)$ و $(-۱,۲,۵)$ تولید می‌شود و V زیرفضایی باشد که بوسیله $(۱,۶,۱۱)$ و $(۲,۰,-۲)$ تولید می‌شود. نشان دهید که $U=V$.

۱۱) فرض کنیم U زیرفضایی از $R^۳$ باشد که بوسیله بردارهای $(۲,-۱,۳)$ و $(۱,۰,۴)$ و همچنین V زیرفضایی از $R^۳$ باشد که توسط $(۶,-۱,۴)$ و $(-۶,-۱,-۱)$ تولید شده باشند. ثابت کنید که $U=V$.

۱۲) فرض کنیم $R^۲ \ni \mathbf{u} \neq ۰$. نشان دهید زیرفضای تولید شده بوسیله $\mathbf{u}$ مشتمل بر بردارهایی است که بر خطی واقع‌اند که از مبدا می‌گذرد.

۱۳) در هر مورد، تعیین کنید که آیا ماتریس نخست ترکیبی خطی از بقیه ماتریس‌ها است یا خیر؟

الف) $\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۵ & -۱۰ \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۵ & -۳ \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۱۴) در هر مورد، تعیین کنید که آیا تابع نخست ترکیبی خطی از بقیه توابع است یا خیر؟

الف) $f(x)=۳x^۲+۲x+۹$ ؛ $g(x)=x^۲+۱$ ، $h(x)=x+۳$

ب) $f(x)=۲x^۲+x-۳$ ؛ $g(x)=x^۲-x+۱$ ، $h(x)=x^۲+۲x-۲$

ج) $f(x)=x^۲+۴x+۵$ ؛ $g(x)=x^۲+x-۱$ ، $h(x)=x^۲+۲x+۱$

۱۵) آیا تابع $f(x)=x+۵$ در فضای تولید شده بوسیله $g(x)=x+۱$ و $h(x)=x+۳$ قرار دارد؟

۱۶) آیا تابع $f(x)=۳x^۲+۵x+۱$ در فضی تولید شده بوسیله $g(x)=۲x^۲+۳$ و $h(x)=x^۲+۳x-۱$ قرار دارد؟ سه تابع دیگر ارائه دهید که در فضای تولیده شده بوسیله g و h واقع باشند.

۱۷) فرض کنیم $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ بردارهایی در فضای برداری V بوده باشند. همچنین فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ بوده باشد. ثابت کنید برای هر دو اسکالر غیرصفر $c_۱$ و $c_۲$، $\mathbf{v}$ ترکیبی

خطی از $c_1\mathbf{v}_1$ و $c_2\mathbf{v}_2$ است.

۱۸) فرض کنیم $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بردارهایی در فضای برداری V و c_1 و c_2 اسکالرهای غیرصفری باشند. نشان دهید هرگاه $\mathbf{v}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نباشد، ترکیبی خطی از $c\mathbf{v}_1$ و $c\mathbf{v}_2$ نیز نخواهد بود.

۱۹) فرض کنیم $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بردارهایی در فضای برداری V و c_1 و c_2 اسکالرهای غیرصفر باشند. ثابت کنید هرگاه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$، V را تولید نکنند، $c_1\mathbf{v}_1$ و $c_2\mathbf{v}_2$ نیز V را تولید نخواهند کرد.

۲۰) فرض کنیم $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ فضای برداری V را تولید کنند و $\mathbf{v}_3$ بردار دلخواه دیگری در V بوده باشد. نشان دهید که $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ نیز V را تولید می‌کنند.

۵-۷ استقلال و وابستگی خطی

در این بخش به توسعه ساختاری فضاهای برداری ادامه می‌دهیم. در این رابطه مفهوم‌های استقلال ووابستگی بردارها را معرفی می‌کنیم. این مفهوم‌ها در ساختار مجموعه‌های مولد «کارا» برای فضاهای برداری مفید خواهند بود، مجموعه‌هایی که هیچ بردار مازادی باقی نخواهند ماند.

ابتدا ایده وابستگی بردارها را واکاوی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که بردار $(۴,-۱,۰)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(۲,۱,۳)$ و $(۰,۱,۲)$ است زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$(۴,-۱,۰) = ۲(۲,۱,۳) - ۳(۰,۱,۲)$$

این تساوی را می‌توانیم به چندین راه دیگر نیز بنویسیم. هر یک از بردارهای آن را می‌توانیم برحسب سایر بردارها بنویسیم:

$$(۲,۱,۳) = (\frac{۱}{۲})(۴,-۱,۰) + (\frac{۳}{۲})(۰,۱,۲)$$
$$(۰,۱,۲) = (\frac{۲}{۳}(۲,۱,۳) - (\frac{۱}{۳})(۴,-۱,۰)$$

هر یک از این سه بردار، در واقع، وابسته به دو بردار دیگر است. این ایده را با نوشتن تساوی زیر می‌توانیم بیان کنیم

$$(۴,-۱,۰) - ۲(۲,۱,۳) + ۳(۰,۱,۲) = (۰,۰,۰)$$

این مفهوم وابستگی بردارها را به‌طور رسمی با ارائه تعریف زیر دقیقتر بیان می‌کنیم.

تعریف. الف) مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ در یک فضای برداری V را **وابسته‌ی خطی** نامیم هرگاه اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_m$، که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد به قسمی که

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = 0$$

ب) مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ را **مستقل خطی** گوییم، هرگاه از $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = 0$ لازم آید که $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

مثال ۱: نشان دهید که مجموعه بردارهای $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 1), (8, 6, 10)\}$ در $\mathbb{R}^3$ وابسته‌ی خطی‌اند.

حل: تساوی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-2, 1, 1) + c_3(8, 6, 10) = 0$$

می‌خواهیم نشان دهید که حداقل یکی‌از c_iها غیر صفر است. داریم

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (-2c_2, c_2, c_2) + (8c_3, 6c_3 10c_3) = 0$$

$$(c_1 - 2c_2 + 8c_3, 2c_1 + c_2 + 6c_3, 3c_1 c_2 + 10c_3) = 0$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های این بردار با صفر دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود

$$c_1 - 2c_2 + 8c_3 = 0$$
$$2c_1 + c_2 + 6c_3 = 0$$
$$3c_1 + c_2 + 10c_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب $c_1 = 4$، $c_2 = -2$ و $c_3 = -1$ است. چون حداقل یکی از c_iها غیرصفر است. پس بردارها وابسته‌ی خطی هستند. این وابستگی خطی به‌وسیله تساوی زیر بیان شده است

$$4(1, 2, 3) - 2(-2, 1, 1) - (8, 6, 10) = 0$$

مثال ۲: نشان دهید که بردارهای $(2, -2, 3)$، $(4, -1, 3)$ و $(1, 0, 5)$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی هستند.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1(3,-2,2)+c_2(3,-1,4)+c_3(1,0,5)=0$$

باید نشان دهیم که این تساوی فقط وقتی برقرار است که c_1، c_2 و c_3 همگی صفر باشند. داریم

$$(3c_1,-2c_1,2c_1)+(3c_2,-c_2,4c_2)+(c_3,0,5c_3)=0$$

$$(3c_1+3c_2+c_3,2c_1-c_2,2c_1+4c_2+5c_3)=0$$

با صفر قرار دادن هر مؤلفه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 3c_1+3c_2+\ c_3&=0\\ -2c_1-\ c_2&=0\\ 2c_1+4c_2+5c_3&=0 \end{aligned}$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد $c_1=0$، $c_2=0$ و $c_3=0$ می‌باشد. بنابراین مجموعه مورد بحث مستقل خطی است. **مثال** بعدی نشانگر آن است که چگونه وابستگی و استقلال خطی به‌فضاهای برداری تابعی اعمال می‌شوند.

مثال ۳: تابع‌های $f(x)=x^2+1$، $g(x)=3x-1$ و $h(x)-4x+1$ از فضای برداری P_2 متشکل از چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲ را در نظر می‌گیریم نشان دهید مجموعه تابع‌های $\{f,g,h\}$ مستقل خطی است.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1f+c_2g+c_3h=0$$

$\{f,g,h\}$ در صورتی مستقل خطی است که از این تساوی بتوان نتیجه گرفت که $c_1=0$، $c_2=0$ و $c_3=0$. تساوی را به این‌صورت می‌نویسیم

$$c_1(x^2+1)+c_2(3x-1)+c_3(-4x+1)=0$$

که در آن x عدد حقیقی دلخواهی است. سه مقدار مناسب برای x در نظر می‌گیریم. داریم

$$x=0\quad;\quad c_1-\ c_2+\ c_3=0$$

$$x = \;\, ۱ \quad ; \quad ۲c_۱+۲c_۲-۳c_۳ = ۰$$

$$x =-۱ \quad ; \quad ۲c_۱-۴c_۲+۵c_۳ = ۰$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به‌فرد

$$c_۱ = ۰ \;\; , \;\; c_۲ = ۰ \;\; , \;\; c_۳ = ۰$$

است. در این‌صورت $c_۱f + c_۲g + c_۳h = 0$ مستلزم $c_۱ = ۰$، $c_۲ = ۰$ و $c_۳ = ۰$ است. مجموعه $\{f, g, h\}$ مستقل خطی است.

اکنون به بیان نتیجه مهمی می‌پردازیم که مفهوم‌های وابستگی خطی را به‌هم مرتبط می‌سازد.

۵-۷-۱ قضیه. مجموعه‌ای شامل حداقل دو بردار در یک فضای برداری وابسته‌ی خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را برحسب دیگر بردارهای این مجموعه نوشت.

برهان. فرض کنیم مجموعه $\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ وابسته خطی باشد. بنابراین اسکالرهایی مانند $c_۱, c_۲, \ldots, c_m$، که حداقل یکی از آن‌ها غیرصفر است. وجود دارند، به قسمی که

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = 0$$

فرض کنیم که $c_۱ \neq ۰$، تساوی فوق را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$\mathbf{v}_۱ = (\frac{-c_۲}{c_۱})\mathbf{v}_۲ + \cdots + (\frac{-c_m}{c_۱})\mathbf{v}_m$$

بنابراین $\mathbf{v}_۱$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_۲, \ldots, \mathbf{v}_m$ است.

برعکس، فرض کنیم $\mathbf{v}_۱$ ترکیبی خطی از $v_۲, \ldots, v_m$ باشد. بنابراین اسکالرهایی چون $d_۲, \ldots, d_m$ هست که

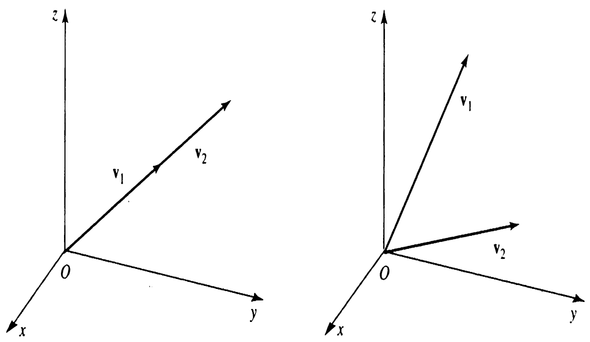
$$\mathbf{v}_۱ = d_۲\mathbf{v} - ۲ + \cdots + d_m\mathbf{v}_m$$

این تساوی را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$۱\mathbf{v}_۱ + (-d_۲)\mathbf{v}_۲ + \cdots + (-d_m)\mathbf{v}_m = 0$$

لذا مجموعه $\{\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ وابسته‌ی خطی بوده و این برهان را کامل می‌کند. این قضیه به ما کمک می‌کند تا معنی وابستگی خطی را برای دو یا سه بردار از $\mathbb{R}^۳$ مشاهده کنیم.

وابستگی خطی $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ مجموعه $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ وابسته خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار را برحسب مضربی از بردار دیگر نوشت. فرض کنیم $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$. این به معنی آن است که $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ هم‌راستا هستند. شکل ۵ـ۶ ملاحظه شود.



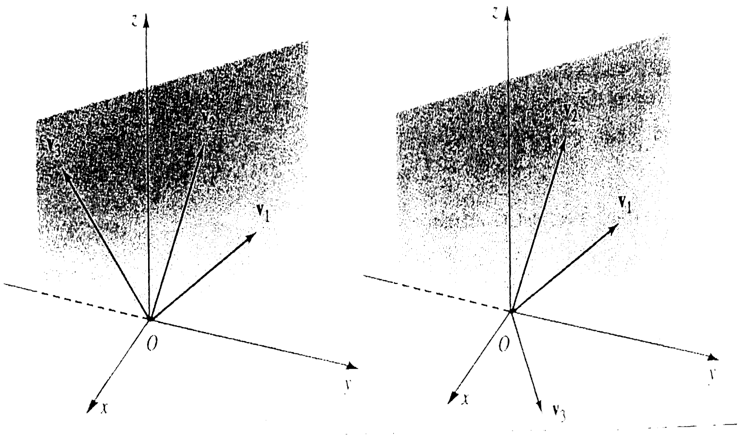
شکل ۵ـ۶

$\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی‌اند
بردارها در یک خط نیستند

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ وابسته خطی‌اند
بردارها در یک خط قرار دارند

استقلال و وابستگی خطی $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ در $\mathbb{R}^3$

وابستگی خطی $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ مجموعه $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ وابسته خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را برحسب ترکیبی خطی از دیگر دو بردار نوشت. فرض کنیم مثلاً $\mathbf{v}_3$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ باشد. پس $\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. در حالت کلی، وقتی که این بردارها مستقل خطی باشند v_3 در صفحه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ قرار دارد. شکل ۵ـ۷ برای $\mathbb{R}^3$ ملاحظه شود. هرگاه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ وابسته خطی باشند. آنگاه v_3 روی خطی گذرا از v_1 و v_2 قرار دارد.



شکل ۵ـ۷

$\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ مستقل خطی‌اند
بردارها در یک صفحه نیستند

$\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\}$ وابسته خطی‌اند
بردارها در یک صفحه قرار دارند

ما این بخش را با دو نتیجه دیگر در باب فضاهای برداری به پایان می‌رسانیم.

۵-۷-۲ قضیه. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. هر مجموعه بردار V که شامل بردار صفر باشد وابسته‌ی خطی است.

برهان. به عهده دانشجو است.

نتیجه. اگر بردارهای $\{v_۱, \ldots, v_m\}$ مستقل خطی باشند، آنگاه $v_i \neq 0 (۱ \leq i \leq m)$.

۵-۷-۳ قضیه. فرض‌کنیم مجموعه $\{v_۱, \ldots, v_m\}$ در فضای برداری V وابسته‌ی خطی باشد. در این‌صورت هر مجموعه از بردارها در V که شامل این مجموعه باشد نیز وابسته‌ی خطی است.

برهان. چون $\{\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ وابسته‌ی‌خطی است، اسکالرهایی چون $c_۱, \ldots, c_m$ هست که

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + c_m\mathbf{v}_m = 0$$

و برای حداقل یک i، $c_i \neq ۰$. مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+۱}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ راکه شامل مجموعه بردار مفروض وابسته است در نظر می‌گیریم. اسکالرهای $c_۱, \ldots, c_m, ۰, \ldots, ۰$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + \cdots + c_m\mathbf{v}_m + ۰\mathbf{v}_{m+۱} + \cdots + ۰\mathbf{v}_n = 0$$

و می‌دانیم برای حداقل یک i، $c_i \neq ۰$. بنابراین مجموعه $\{v_۱, \dots, v_m, v_{m+۱}, \dots, v_n\}$ وابسته خطی است.

مثال ۴: فرض کنیم مجموعه $\{v_۱, v_۲\}$ مستقل خطی باشد. ثابت کنید $\{v_۱ + v_۲, v_۱ - v_۲\}$ نیز مستقل خطی است.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$\mathbf{a}(v_۱ + v_۲) + \mathbf{b}(v_۱ - v_۲) = 0$$

باید نشان دهیم که از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که $a = ۰$ و $b = ۰$. داریم

$$a\mathbf{v}_۱ + a\mathbf{v}_۲ + b\mathbf{v}_۱ - b\mathbf{v}_۲ = 0$$

$$(a + b)\mathbf{v}_۱ + (a - b)\mathbf{v}_۲ = 0$$

چون $\{v_۱, v_۲\}$ مستقل خطی است:

$$a + b = ۰$$

$$a - b = ۰$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد $a = ۰$، $b = ۰$ می‌باشد. در این‌صورت $\{v_۱ + v_۲, v_۱ - v_۲\}$ **مستقل خطی** است.

۵-۷-۴ تمرین

۱) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای $\mathbb{R}^۲$ وابسته خطی‌اند.

الف) $\{(-۱, ۲), (۲, -۴)\}$

ب) $\{(۳, ۱), (۹, ۳)\}$

ج) $\{(۱, ۵), (۰, ۰)\}$

۲) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای $\mathbb{R}^۲$ مستقل خطی‌اند.

الف) $\{(۱, ۰), (۰, ۱)\}$

ب) $\{(۱, ۲), (۳, ۲)\}$

ج) $\{(۲,-۴),(۵,۳)\}$

۳) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای $\mathbb{R}^۳$ وابسته خطی‌اند. در هر مجموعه یک بردار را به‌صورت ترکیبی خطی از دیگر بردارها بنویسید.

الف) $\{(۱,-۲,۳),(-۲,۴,۱),(-۴,۸,۹)\}$

ب) $\{(۳,۴,۱),(۲,۱,۰),(۹,۷,۱)\}$

۴) ثابت کنید هر مجموعه از بردارها مستقل خطی است.

الف) $\{(۱,۲,۵),(۱,-۲,۱),(۲,۱,۴)\}$

ب) $\{(۱,۱,۱),(-۴,۳,۲),(۴,۱,۲)\}$

ج) $\{(۱,۳,-۴),(۳,-۱,۴),(۱,۰,-۲)\}$

د) $\{(۳,۴,۷),(۲,-۱,۱),(۴,۱,۳)\}$

۵) با استفاده از قضیه ۵ـ۹ـ۳ ثابت کنید که هر مجموعه از بردارها وابسته‌ی خطی است.

الف) $\{(۲,-۱,۳),(-۴,۲,-۶),(۸,۰,۱)\}$

ب) $\{۵,۲,-۳),(۳,۰,۴),(-۳,۰,-۴)\}$

۶) تعیین کنید که کدامیک از مجموعه‌ها مستقل خطی و کدامیک وابسته‌ی خطی است.

الف) $\{(۱,۲),(-۱,۴),(-۱,۱۶)\}$

ب) $\{(۱,۳),(-۲,۱)\}$

ج) $\{۱,۲,۸),(۱,-۱,-۱),(۱,۰,۳)\}$

د) $\{(۱,۲,۸),(۱,-۱,-۱),(۱,۰,۳)\}$

۷) به‌ازای چه مقدار t هر مجموعه از بردارهای داده شده وابسته‌ی خطی است.

الف) $\{-۱,۲),(t,-۴)\}$

ب) $\{(۳,t),(۶,t-۱)\}$

ج) $\{۲,-t),(۲t+۶,۴t)\}$

۸) ثابت کنید

الف) مجموعه $\{(۱,۲),(۰,۲)\}$ در $\mathbb{R}^۲$ مستقل خطی است.

ب) مجموعه $\{(۱,۱,۲),(۰,-۱,۳),(۰,۰,۵)\}$ در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی است.

ج) مجموعه $\{(۳,-۲,۴,۵),(۰,۲,۳,-۴),(۰,۰,۲,۷),(۰,۰,۰,۴)\}$ در $\mathbb{R}^۴$ مستقل خطی است.

۹) ماتریس زیر را که به‌فرم پلکانی تحویل یافته است در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که بردارهای سطری آن تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می‌دهند.آیا برای هر ماتریس پلکانی تحویل یافته می‌توان چنین نتیجه‌ای را ثابت کرد؟

۱۰) تعیین کنید کدامیک از مجموعه‌های زیر وابسته‌ی خطی هستند. تابع‌های پرسش‌های (الف)، (ب) و (ج) تابع‌هایی در فضای برداری $P_۲$ و ماتریس‌های (د)، (ه) و (و) در فضای برداری $M_{۲\times۲}$ هستند.

الف) $\{f,g,h\}$، که $f(x)=۲x^۲+۱$، $g(x)=x^۲+۴x$ و $h(x)=x^۲-۴x+۱$

ب) $\{f,g,h\}$، که $f(x)=x^۲+۳$، $g(x)=x+۱$ و $h(x)=۲x^۲-۳x+۳$

ج) $\{f,g,h\}$، که $f(x)=x^۲+۳x-۱$، $g(x)=x+۳$ و $h(x)=۲x^۲-x+۱$

د) $\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \right\}$

ه) $\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \right\}$

و) $\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \right\}$

۱۱) فرض کنیم مجموعه‌ی $\{\mathbf{v}_۱,\mathbf{v}_۲\}$ در فضای برداری V وابسته‌ی خطی باشد. ثابت کنید که $\{v_۱+v_۲, v_۱-v_۲\}$ نیز وابسته‌ی خطی است.

۱۲) فرض کنیم مجموعه‌ی $\{\mathbf{v}_۱,\mathbf{v}_۲,\mathbf{v}_۳\}$ وابسته‌ی خطی باشد. همچنین c یک اسکالر غیرصفر است. ثابت کنید که مجموعه‌های زیر نیز وابسته‌ی خطی‌اند

الف) $\{v_۱, v_۱+v_۲, v_۳\}$

ب) $\{v_۱, cv_۲, v_۳\}$

ج) $\{v_۱, v_۱ + cv_۲, v_۳\}$

۱۳) فرض کنیم مجموعه $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ در فضای برداری V مستقل خطی باشد. همچنین c اسکالری غیرصفر باشد. ثابت کنید مجموعه‌های زیر نیز مستقل خطی هستند

الف) $\{v_۱, v_۱ + v_۲, v_۳\}$

ب) $\{v_۱, cv_۲, v_۳\}$

ج) $\{v_۱, v_۱ + cv_۲, v_۳\}$

۱۴) فرض کنیم مجموعه S در فضای برداری V مستقل خطی باشد. ثابت کنید هر زیر مجموعه S نیز مستقل خطی است. آیا چنین حکم در مورد «وابسته‌ی خطی» به‌جای «مستقل خطی» نیز صادق است؟

۱۵) فرض کنیم $\{v_۱, v_۲\}$ مستقل خطی باشد. نشان دهید که هرگاه بردار $v_۳$ به‌فرم $cv_۱ + bv_۲$ نباشد آنگاه $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ نیز مستقل خطی است.

۱۶) ثابت کنید که در هر فضای برداری مجموعه‌ای مشتمل دو یا چند بردار مستقل خطی است «اگر و فقط اگر» هیچ یک از بردارهای آن ترکیبی خطی از دیگر بردارها نباشد.

۱۷) دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ به‌صورت تصادفی انتخاب کنید. آنکه این دو بردار وابسته‌ی خطی یا مستقل خطی نباشند احتمال کدامیک بیشتر است؟ اگر سه بردار به‌صورت تصادفی انتخاب کنیم چطور؟

۱۸) سه بردار به‌صورت تصادفی در $\mathbb{R}^۳$ بنویسید. احتمال کدامیک بیشتر است. اینکه این بردارها وابسته خطی باشند یا مستقل خطی باشند؟

۵-۸ پایه و بعد

معمولاً از خط به‌عنوان یک فضای یک بعدی و از صفحه به‌عنوان یک شی دو بعدی یاد می‌کنیم. در این بخش، ما به تعریف ریاضی مفهوم بعد می‌پردازیم.این مفهوم با درک شهودی ما از بعد مطابقت خواهد داشت. ابتدا مفهوم‌های مجموعه گسترش و استقلال خطی را با هم تلفیق می‌کنیم.

تعریف. مجموعه‌ای متناهی از بردارها همانند $\{v_۱, \dots, v_m\}$ را یک **پایه** فضای برداری V نامیم هرگاه این مجموعه مولد V و مستقل خطی باشد.

از نظر شهودی، یک پایه یک مجموعه کارآ برای مشخص کردن یک فضای برداری است، بدین معنی که هر بردار فضا را می‌توان به‌صورت ترکیبی از بردارهای پایه بیان کرده، و بردارهای پایه مستقل از یکدیگر هستند.

مفهوم پایه استاندارد را قبلاً برای $\mathbb{R}^n$ در بخش ۴ـ۴ در رابطه با تبدیلات ماتریسی معرفی کردیم. اکنون ملاحظه می‌کنیم که چنین پایه‌ای در واقع در شرایط پایه تعریف شده فوق صدق می‌کند.

تعریف. مجموعه بردارهای

$$\{(۱, ۰, \dots, ۰), (۰, ۱, \dots, ۰), \dots, (۰, \dots, ۱)\}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است. این پایه را **پایه استاندارد** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

درستی این نتیجه را محقق می‌سازیم. باید نشان دهیم که این مجموعه $\mathbb{R}^n$ مولد مستقل خطی نیز می‌باشد. فرض کنیم $(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ عنصری دلخواه از $\mathbb{R}^n$ باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$(x_۱, x_۲, \dots, x_m) = x_۱(۱, ۰, \dots, ۰) + x_۲(۰, ۱, \dots, ۰) + \cdots + x_n(۰, \dots, ۱)$$

از این رو مجموعه فوق $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند.

وانگهی، وقتی به بررسی استقلال خطی این مجموعه می‌پردازیم، به‌دست می‌آوریم

$$c_۱(۱, ۰, \dots, ۰) + c_۲(۰, ۱, \dots, ۰) + \cdots + c_n(۰, \dots, ۱) = (۰, ۰, \dots, ۰)$$

$$(c_۱, ۰, \dots, ۰) + (۰, c_۲, \dots, ۰) + \cdots + (۰, \dots, c_n) = (۰, ۰, \dots, ۰)$$

$$(c_۱, c_۲, \dots, c_n) = (۰, ۰, \dots, ۰)$$

در نتیجه $c_۱ = ۰$، $c_۲ = ۰$، ... و $c_n = ۰$. پس مجموعه مستقل خطی است.

بنابراین مجموعه

$$\{(۱, ۰, \dots ۰), (۰, ۱, \dots, ۰), \dots, (۰, ۰, \dots, ۱)\}$$

یک پایه $\mathbb{R}^n$ است. پایه‌های بسیاری برای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. لکن پایه استاندارد مهمترین آنها است.

مثال ۱: نشان دهید که مجموعه $\{(1,2,4)(1,1,1),(1,0,-1)\}$ یک پایه $\mathbb{R}^3$ است.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که این مجموعه $\mathbb{R}^n$ را گسترش می‌دهد. فرض کنیم (x_1,x_2,x_3) برداری دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشد. اسکالرهایی چون c_1، c_2 و c_3 پیدا می‌کنیم به قسمی که

$$c_1(1,0,-1)+c_2(1,1,1)+c_3(1,2,4)=(x_1,x_2,x_3)$$

در می‌یابیم که این تساوی منجر به دستگاه معادلات ذیل می‌شود:

$$\begin{aligned} c_1+c_2+\ c_3&=x_1\\ c_2+2c_3&=x_2\\ -c_1+c_2+4c_3&=x_3 \end{aligned}$$

این دستگاه دارای جواب زیر است

$$c_1=2x_1-3x_2+x_3\ ,\ \ c_2=-2x_1+5x_2-2x_3\ ,\ \ c_3=x_1-2x_2+x_3$$

اکنون نشان می‌دهیم که این مجموعه، مستقل خطی است. تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$b_1(1,0,-1)+b_2(1,1,1)+b_3(1,2,4)=(0,0,0)$$

این تساوی منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} b_1+b_2+\ b_3&=0\\ b_2+2b_3&=0\\ -b_1+b_2+4b_3&=0 \end{aligned}$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد $b_1=0$، $b_2=0$ و $b_3=0$ است. بنابراین مجموعه مورد بحث مستقل خطی است.

در نتیجه نشان داده‌ایم که مجموعه $\{(1,0,-1),(1,1,1),(1,2,4)\}$ مولد $\mathbb{R}^3$ و مستقل خطی است. لذا تشکیل یک پایه‌ی برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهد.

مثال ۲: نشان دهید $\{f,g,h\}$، که در آن $f(x)=x^2+1$، $g(x)=3x-1$ و $h(x)-4x+1$ یک پایه برای P_2 است.

حل: $\{f, g, h\}$ وقتی یک پایه $P_۲$ است که این فضا را گسترش داده و مستقل خطی باشد. در مثال ۳ بخش قبل ملاحظه کردیم که این مجموعه مستقل خطی است. حال ثابت می‌کنیم این مجموعه مولد $P_۲$ است. فرض کنیم p تابعی دلخواه در $P_۲$ باشد. p یک چندجمله‌ای به‌فرم ذیل خواهد بود

$$p(x) = bx^۲ + cx + d$$

تابع‌های f، g و h وقتی $P_۲$ را گسترش می‌دهند که اسکالرهایی مانند $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ یافت شود به قسمی که

$$p(x) = a_۱ f(x) + a_۲ g(x) + a_۳ h(x)$$

از این به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} bx^۲ + cx + d &= a_۱(x^۲ + ۱) + a_۲(۳x - ۱) + a_۳(-۴x + ۱) \\ &= a_۱ x^۲ + (۳a_۲ - ۴a_۱)x + (a_۱ - a_۲ + a_۳) \end{aligned}$$

که با مقایسه ضرایب متناظر منجر به دستگاه معادلات ذیل می‌شود

$$\begin{aligned} a_۱ \qquad\qquad &= b \\ ۳a_۲ - ۴a_۳ &= c \\ a_۱ - \ a_۲ + \ a_۳ &= d \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب $a_۱ = b$، $a_۲ = ۴b - ۴d - c$ و $a_۳ = ۳b - ۳d - c$ می‌باشد. در این‌صورت چندجمله‌ای p را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد.

$$p(x) = a_۱ f(x) + a_۲ g(x) + a_۳ h(x)$$

یعنی تابع‌های f، g و h مولد $P_۲$ هستند.

این تابع‌ها که $P_۲$ را گسترش داده مستقل خطی می‌باشند تشکیل یک پایه $P_۲$ می‌دهند.

قضیه ذیل منجر به این نتیجه‌ی کلیه می‌شود که همه پایه‌ها دارای یک تعداد بردار هستند.

۵-۸-۱ قضیه. فرض کنیم $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد. هرگاه $\{w_۱, \ldots, w_m\}$ مجموعه‌ای با بیش از n بردار V باشد، آنگاه این مجموعه وابسته خطی است.

برهان. تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1w_1 + \cdots + c_mw_m = 0 \qquad (1)$$

نشان می‌دهیم که مقادیر c_1، ... و c_m برای برقراری این تساوی وجود داشته و حداقل یکی از آنها غیرصفر است. این امر نشانگر این خواهد بود که بردارهای مورد بحث وابسته خطی هستند.

بردارهای $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه V است. از این رو هر یک از بردارهای $\mathbf{w}_1$، $\mathbf{w}_2$، ... و $\mathbf{w}_n$ را می‌توان به شکل ترکیبی خطی از v_1، ... و v_n نوشت. فرض کنیم

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{aligned}$$

با جایگزینی این مقادیر در تساوی (۱) به‌دست می‌آوریم

$$c_1(a_{11}v_1+\cdots+a_{1n}v_n)+c_2(a_{21}v_1+\cdots+a_{2n}v_n)+\cdots+c_m(a_{m1}v_1+\cdots+a_{mn}v_n) = 0$$

با جابه‌جایی ترتیب داریم

$$(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \cdots + c_ma_{m1})v_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})v_n = 0$$

چون v_1، ... و v_n مستقل خطی‌اند از این تساوی نتیجه می‌گیریم که همه ضرایب آن برابر صفر باشند، در این‌صورت

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین یافتن cهایی که در معادله (۱) صدق کنند به یافتن جواب‌های دستگاه معادلات اخیر با n معادله m مجهول تحویل می‌گردد. چون $m > n$، تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است. که جواب‌های بیشماری برای چنین دستگاه همگنی وجود دارد. بنابراین جواب‌های غیرصفری از c_iها وجود دارد که در معادله (۱) صدق می‌کند. از این رو مجموعه $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ وابسته‌ی خطی است.

۵-۸-۲ قضیه. هر دو پایه فضای برداری V دارای یک تعداد بردار هستند

برهان. فرض کنیم $\{v_1,\ldots,v_n\}$ و $\{w_1,\ldots,w_m\}$ دو پایه V باشند. چنانچه $\{v_1,\ldots,v_n\}$ را به‌عنوان یک پایه V و $\{w_1,\ldots,w_m\}$ را به‌عنوان یک مجموعه مستقل خطی بینگاریم از قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که $m \leq n$. بالعکس، هرگاه $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ را یک پایه تلقی کرده و $\{v_1,\ldots,v_n\}$ را به‌عنوان مجموعه‌ای مستقل خطی در نظر بگیریم نتیجه می‌گیریم که $n \leq m$. از این رو $m = n$ و این نشان می‌دهد که هر دو پایه مورد بحث مشتمل بر یک تعداد بردار هستند.

اکنون به‌جایی رسیده‌ایم که می‌توانیم به قولی که وعده داده بودیم وفا کرده و تعریفی برای بعد یک فضای برداری ارائه دهیم.

تعریف. هرگاه فضای برداری V دارای پایه‌ای مشتمل بر n بردار باشد. **بعد** V را برابر n می‌نامیم. بعد V را به $\dim V$ نشان می‌دهیم.

n بردار $\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ یک پایه (پایه استاندارد) $\mathbb{R}^n$اند. در نتیجه بعد فضای $\mathbb{R}^n$ برابر n است.

تبصره. متذکر می‌شویم که پایه را به‌عنوان مجموعه‌ای **متناهی** از بردارهای فضا تعریف کردیم که مستقل خطی بوده و فضا را گسترش دهند. چنین نیست که هر فضای برداری دارای چنین مجموعه‌ای (پایه متناهی) است. وقتی که چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد می‌گوییم فضا از **بعد متناهی** است، در غیراین‌صورت می‌گوییم فضا از **بعد نامتناهی** است.

در فصل بعدی به فضاهای برداری تابعی برخورد خواهیم کرد که از بعد نامتناهی هستند، با این وجود در این درس ما اساساً علاقمند به مطالعه فضاهای برداری با بعد متناهی هستیم.

مثال ۳: مجموعه بردارهای $\{(1,2,3),(-2,4,1)\}$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. این بردارها یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ مانند V تولید می‌کنند که همه بردارهای آن به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{v} = c_1(1,2,3) + c_2(-2,4,1)$$

پس بردارهای $(1,2,3)$ و $(-2,4,1)$ این زیرفضا را تولید می‌کنند.

وانگهی از آنجا که بردار دوم مضرب اسکالری از بردار او نمی‌باشد، این بردارها مستقل خطی هستند. بنابراین $\{(1,2,3),(-2,4,1)\}$ یک پایه برداری V است. در نتیجه $\dim(V) = 2$. در واقع می‌دانیم که V یک صفحه است که از مبداء می‌گذرد.

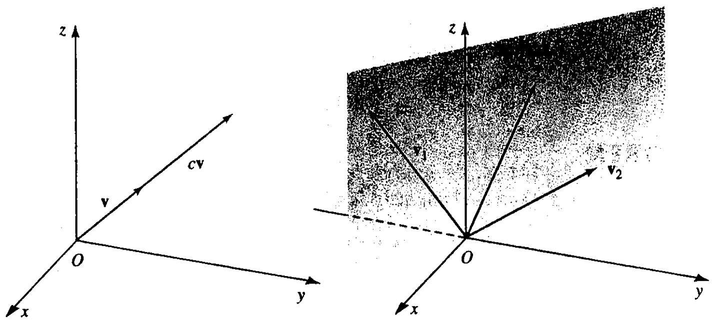
تبصره. در مثال اخیر ملاحظه کردیم که یک صفحه خاصی که از مبداء می‌گذشت یک زیرفضای دو بعدی $\mathbb{R}^3$ بود. قضیه بعدی اطلاعات بیشتری در باب زیرفضای $\mathbb{R}^3$ و بعد آنها به‌دست می‌دهد.

۵-۸-۳ قضیه. الف) مبداء یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است. بعد این زیرفضا را برابر صفر تعریف می‌کنیم.

ب) زیرفضاهای یک بعدی $\mathbb{R}^3$ خط‌هایی هستند که از مبداء می‌گذرند.

ج) زیرفضاهای دو بعدی $\mathbb{R}^3$ صفحه‌هایی هستند که از مبداء می‌گذرند.

شکل ۵ـ۸ ملاحظه شود.



یک زیرفضای یک بعدی $\mathbb{R}^3$ با پایه $\{\mathbf{v}_1\}$ خطی است که از مبداء می‌گذرد.

زیرفضای دو بعدی $\mathbb{R}^3$ صفحه‌ای است با پایه $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ که از مبداء می‌گذرد.

شکل ۵ـ۸

برهان. الف) فرض کنیم V مجموعه یکانی $\{(0,0,0)\}$ متشکل از بردار صفر $\mathbb{R}^3$ باشد. همچنین فرض کنیم c یک اسکالر دلخواه باشد. چون

$$(0,0,0)+(0,0,0)=(0,0,0) \quad , \quad c(0,0,0)=(0,0,0)$$

V تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. زیرا یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

ب) فرض کنیم $\mathbf{v}$ یک پایه برای زیرفضای یک بعدی V از $\mathbb{R}^3$ باشد. بنابراین هر بردار V به‌فرم $c\mathbf{v}$ به‌ازای اسکالری چون c است. می‌دانیم این بردارها تشکیل یک خط می‌دهند که از مبداء می‌گذرد.

ج) فرض کنیم $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ یک پایه برای زیرفضای دوبعدی V از $\mathbb{R}^3$ باشد. هر بردار V به‌فرم $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ است. از این رو V یک صفحه گذرا از مبداء می‌باشد.

تبصره. گفتیم که یک مجموعه بردار که مولد یک فضای برداری است به یک معنی آن فضا را مشخص می‌سازد، بدین قرار که هر بردار فضا ترکیبی خطی از بردارهای این مجموعه می‌باشد. در حالت کلی، ممکن

است بیش از یک ترکیب خطی برای بیان یک بردار مفروض وجود داشته باشد. فضای مولد یافته به‌وسیله مجموعه $\{(۱,۲,۳),(-۱,۱,۴),(۳,۳,۲)\}$ را در نظر می‌گیریم. بردار $(۴,۵,۵)$ را می‌توان چنین بیان کرد:

$$(۴,۵,۵) = -(۱,۲,۳) + (-۱,۱,۴) + ۲(۳,۳,۲)$$

همچنین

$$(۴,۵,۵) = ۵(۱,۲,۳) - ۲(-۱,۱,۴) - (۳,۳,۲)$$

قضیه آتی بیان می‌دارد که هرگاه مجموعه گسترش یک پایه باشد چنین ترکیبی منحصر به‌فرد خواهد بود. از این رو یک پایه بسیار بیشتر از یک مجموعه مولد یک فضای برداری را مشخص می‌کند.

۵-۸-۴ قضیه. فرض کنیم $\{v_۱,\dots,v_۲,\dots,v_n\}$ یک پایه فضای برداری V باشد. در این صورت هر بردار V به‌طریقی منحصر به‌فرد به‌صورت ترکیبی خطی از این بردارها نوشته می‌شود.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{v}$ برداری در V باشد. چون $\{\mathbf{v}_۱,\mathbf{v}_۲,\dots,\mathbf{v}_n\}$ یک پایه است، می‌توانیم v را به‌صورت ترکیبی خطی از این بردارها بنویسیم. فرض کنیم داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_۱ + \dots + a_n\mathbf{v}_n \quad , \quad \mathbf{v} = b_۱\mathbf{v}_۱ + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

در این‌صورت

$$a_۱\mathbf{v}_۱ + \dots + a_n\mathbf{v}_n = b_۱\mathbf{v}_۱ + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

که به‌نوبه خود منجر به تساوی زیر می‌شود.

$$(a_۱ - b_۱)\mathbf{v}_۱ + \dots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n = 0$$

چون $\{\mathbf{v}_۱,\dots,\mathbf{v}_n\}$ یک پایه است، این بردارها مستقل خطی هستند. از این رو $(a_۱ - b_۱) = ۰$، ... و $(a_n - b_n) = ۰$ و در نتیجه $a_۱ = b_۱$، ... و $a_n = b_n$. بنابراین فقط به یک طریق می‌توان $\mathbf{v}$ را به‌عنوان ترکیبی خطی از بردارهای پایه نوشت.

در اینجا به ذکر مسأله‌ای می‌پردازیم که به ما می‌گوید چه‌وقت یک مجموعه تشکیل یک پایه می‌دهد بدون آنکه نیاز داشته باشیم که استقلال خطی بردارها و یا ویژگی مولد آنها را نشان دهیم.

۵-۸-۵ مسأله. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد n باشد. در این‌صورت ثابت کنید

الف) هرگاه $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از n بردار باشد، آنگاه S یک پایه V است.

ب) هرگاه $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه شامل n بردار بوده که V را گسترش می‌دهد، آنگاه S یک پایه V است.

ج) نتیجه بگیرید که مجموعه

$$\{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (4, 2, 1)\}$$

یک پایه $\mathbb{R}^3$ است. (راهنمایی: نشان دهید که این مجموعه مستقل خطی است).

۵-۹ بُعد برخی فضاها

اکنون قادریم بعد فضاهایی را که در مثال‌های قبلی بررسی کرده‌ایم محاسبه کنیم همچنانکه برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ عمل کردیم.

الف) برای فضای برداری $M_{2\times 2}$ از ماتریس‌های 2×2 چنین استدلال می‌کنیم. ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فضای $M_{2\times 2}$ را گسترش داده و مستقل خطی هستند. این بردارها یک پایه $M_{2\times 2}$ هستند. بنابراین بعد فضای برداری $M_{2\times 2}$ برابر ۴ است. مشابهاً می‌توان نشان داد که بعد فضای برداری $M_{m\times n}$ برابر mn است.

ب) اکنون بعد P_2، فضای برداری چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲ را محاسبه می‌کنیم. چندجمله‌ای x^2، x و ۱ این فضا را گسترش می‌دهند، زیرا هر چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ را می‌توانیم به شکل

$$ax^2 + bx + c = a(x^2) + b(x) + c(1)$$

بنویسیم. x^2، x و ۱ مستقل خطی نیز می‌باشند، زیرا اگر

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{برای هر } x)$$

نتیجه می‌گیریم که $a = \circ$، $b = \circ$ و $c = \circ$. از این رو $\{x^{۲}, x, ۱\}$ یک پایه $P_{۲}$ است. پس بعد فضای برداری $P_{۲}$ برابر ۳ است. مشابهاً، مجموعه $\{x^n, x^{n-۱}, \ldots, x, ۱\}$ یک پایه P_n است و بعد P_n برابر $n + ۱$ است. این پایه را **پایه استاندارد** P_n می‌نامیم.

ج) فضای برداری $\mathbb{C}^{۲}$ را در نظر می‌گیریم. بردارهای $(۱, \circ)$ و $(\circ, ۱)$ فضای $\mathbb{C}^{۲}$ را گسترش می‌دهند زیرا یک بردار دلخواه $(a + bi, c + di)$ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(a + bi, c + di) = (a + bi)(۱, \circ) + (c + di)(\circ, ۱)$$

وانگهی $(۱, \circ)$ و $(\circ, ۱)$ در $\mathbb{C}^{۲}$ مستقل خطی هستند. لذا این بردارها یک پایه برای $\mathbb{C}^{۲}$ بوده و در نتیجه بعد $\mathbb{C}^{۲}$ برابر ۲ است. مشابهاً $\{(۱, \ldots, \circ), \ldots, (\circ, \ldots, ۱)\}$ یک پایه $\mathbb{C}^n$ بوده و بعد این فضا برابر n است. این پایه **پایه استاندارد** $\mathbb{C}^n$ است.

مثال بعدی کلیه مفاهیم کلیدی را که در بخش‌های قبلی مطرح کردیم همه را یکجا در خود دارد.

مثال ۵: از احکام زیر کدامیک درست و کدامیک نادرست‌اند. توضیح دهید

الف) بردارهای $(۱, ۲)$، $(-۱, ۳)$ و $(۵, ۲)$ در $\mathbb{R}^{۲}$ وابسته‌ی خطی هستند.

ب) بردارهای $(۱, \circ, \circ)$، $(\circ, ۲, \circ)$ و $(۱, ۲, \circ)$ $\mathbb{R}^{۳}$ را گسترش می‌دهند.

ج) $\{(۱, \circ, ۲), (\circ, ۱, -۳)\}$ یک پایه زیرفضای $\mathbb{R}^{۳}$ است، زیرفضایی که متشکل از بردارهایی به‌فرم $(a, b, ۲a - ۳b)$ می‌باشد.

د) از هر مجموعه شامل دو بردار می‌توان یک زیرفضای با بعد دو از $\mathbb{R}^{۳}$ گسترش داد.

حل: الف) درست است. بعد $\mathbb{R}^{۲}$ برابر ۲ است. در نتیجه هر مجموعه شامل سه بردار وابسته‌ی خطی هستند.

ب) نادرست است. سه بردار داده شده وابسته‌ی خطی هستند. از این رو بردارها نمی‌توانند یک فضای سه‌بعدی گسترش دهند.

ج) درست است. بردارها یک فضای دوبعدی گسترش می‌دهند.

$$(a, b, ۲a - ۳b) = a(۱, \circ, ۲) + b(۱, ۱, -۳)$$

این بردارها مستقل خطی نیز هستند زیرا هم‌راستا نمی‌باشند.

د) نادرست است. دو بردار باید مستقل خطی باشند. پس حکم در حالت کلی درست نیست.

۵-۹-۱ تمرین

۵-۱۰ رتبه ماتریس‌ها

در این بخش دانشجویان با رتبه یک ماتریس آشنا می‌شوند. مفهوم رتبه ما را قادر می‌سازد تا ماتریس‌ها را با بردارها مرتبط سازیم. رتبه یک ابزار وحدت بخش است که به ما این امکان را می‌دهد تا همه‌ی مفهوم‌هایی را که در این درس مطرح کردیم با هم مرتبط سازیم. جواب دستگاه معادلات خطی، منفرد بودن یک ماتریس، معکوس‌پذیری یک ماتریس، همگی تحت تأثیر رتبه قرار می‌گیرند.

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. سطرهای A را می‌توانیم به مثابه بردارهای سطری r_1، r_2، ... و r_m ستون‌های آن را به مثابه بردارهای ستونی c_1، c_2، ... و c_n بینگاریم. هر برداری سطری شامل n مؤلفه هر بردار ستونی شامل m مؤلفه می‌باشد. بردارهای سطری زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ را گسترش می‌دهند که **فضای سطری** A و بردارهای ستونی زیرفضای از $\mathbb{R}^n$ راگسترش می‌دهند که **فضای ستونی** A نامیده می‌شود.

مثال ۱: ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای سطری A عبارتند از:

$$\mathbf{r}_1 = (1\ 1\ -1\ 2) \qquad \mathbf{r}_2 = (3\ 4\ 1\ 6) \qquad \mathbf{r}_3 = (5\ 4\ 1\ 0)$$

این بردارها زیرفضای از $\mathbb{R}^4$ تولید می‌کنند که فضای سطری A نامیده می‌شود. بردارهای ستونی A عبارتند از:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad c_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این بردارها زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ تولید می‌کنند که فضای ستونی A نامیده می‌شود.

۵-۱۰-۱ قضیه. فضای سطری و فضای ستونی ماتریس A دارای یک بعد هستند.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{u}_1$، ... و $\mathbf{u}_n$ بردارهای سطری A باشند. بردار iاُم چنین است

$$\mathbf{u}_i = (a_{i1} a_{i2} \ldots a_{im})$$

فرض کنیم بعد فضای سطری برابر s باشد. و همین‌طور $\mathbf{v}_1$، ... و $\mathbf{v}_s$ یک پایه فضای سطری باشند. به‌علاوه فرض کنیم jاُمین بردار این مجموعه چنین باشد

$$\mathbf{v}_j = (b_{j1}\ b_{j2}\ \dots b_{jm})$$

هر بردار سطری A ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1$، ... و $\mathbf{v}_s$ است.

$$\begin{aligned}
u_1 &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \cdots + c_{1s}v_s \\
u_2 &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots + c_{2s}v_s \\
&\vdots \\
u_m &= c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + \cdots + c_{ms}v_s
\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن iامین مؤلفه‌های بردارها در سمت چپ و راست این تساوی‌ها به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
a_{1i} &= c_{11}b_{1i} + c_{12}b_{2i} + \cdots + c_{1s}b_{si} \\
&\vdots \\
a_{mi} &= c_{m1}b_{1i} + c_{m2}b_{2i} + \cdots + c_{ms}b_{si}
\end{aligned}$$

و این تساوی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = b_{1i}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2i}\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_{si}\begin{bmatrix} c_{1s} \\ c_{2s} \\ \vdots \\ c_{ms} \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که هر بردار ستونی A در فضای گسترش یافته به‌وسیله مجموعه‌ای از بردارها قرار دارد. چون s بعد فضای سطری A است، داریم

$$\dim(\text{فضای ستونی } A) \le \dim(\text{فضای سطری } A)$$

با استدلالی مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که

$$\dim(\text{فضای سطری } A) \le \dim(\text{فضای ستونی } A)$$

بنابراین

$$\dim(\text{فضای سطری } A) = \dim(\text{فضای ستونی } A)$$

و این برهان قضیه را اثبات می‌نماید.

تعریف. بعد فضای سطری (ستونی) ماتریس A را **رتبه** A می‌نامیم. رتبه‌ی A را با نِماد $\operatorname{rank}(A)$ نشان می‌دهیم.

خواهیم دید که رتبه یک ماتریس یک ابزار محاسباتی و هندسی مفید می‌باشد.

مثال ۲: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۸ \end{bmatrix}$$

حل: با بررسی در می‌یابیم که سطر سوم این ماتریس ترکیبی خطی از دو سطر آن است:

$$(۲, , ۵, ۸) = ۲(۱, ۲, ۳) + (۰, ۱, ۲)$$

در این‌صورت سه سطر این ماتریس وابسته‌ی خطی هستند. در نتیجه رتبه این ماتریس کوچک‌تر از ۳ است. چون $(۱, ۲, ۳)$ مضرب اسکالری از $(۰, ۱, ۳)$ نیست، این دو بردار مستقل خطی هستند.این دو بردار تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهند. از این رو $\operatorname{rank}(A) = ۲$.

این روش، که بر پایه تعریف استوار است، برای محاسبه رتبه ماتریس‌های بزرگ عملی نمی‌باشد. در آینده یک روش سیستماتیک‌تری برای یافتن رتبه یک ماتریس ارائه خواهیم داد. قضیه بعدی، که راه را برای این هدف هموار می‌کند، بیان می‌دارد که تعیین رتبه ماتریسی که به‌فرم پلکانی تحویل یافته است به فوریت قابل تشخیص است.

۵-۱۰-۲ قضیه. سطرهای غیرصفر ماتریس A که به‌فرم پلکانی تحویل یافته باشد تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهند. رتبه A برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر آن است.

برهان. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ با سطرهای غیرصفر $\mathbf{r}_۱$، $\mathbf{r}_۲$، ... و $\mathbf{r}_s$ باشد. فرض کنیم

$$k_۱\mathbf{r}_۱ + k_۲\mathbf{r}_۲ + \cdots + k_s\mathbf{r}_s = 0$$

که در آن $k_۱$، ... و k_s اسکالرهایی هستند.

اولین درایه غیرصفر $\mathbf{r}_۱$ برابر ۱ است؛ $\mathbf{r}_۱$ اولین برداری سطری است که درایه ۱ در این مؤلفه دارد. در نتیجه وقتی بردارهای $k_۱\mathbf{r}_۱$، $k_۲\mathbf{r}_۲$، ... و $k_s\mathbf{r}_s$ را جمع می‌کنیم برداری به‌دست می‌آوریم که اولین مؤلفه‌های آن $k_۱$ است. با تساوی قرار دادن این بردار با بردار صفر به‌دست می‌آوریم که $k_۱ = ۰$. از این رو تساوی فوق به شکل تساوی ذیل در می‌آید

$$k_۲\mathbf{r}_۲ + \cdots + k_s\mathbf{r}_s = 0$$

اولین درایه غیرصفر $\mathbf{r}_۲$ برابر ۱ است و $\mathbf{r}_۲$ تنها برداری در بین بردارهای باقی مانده است که عده ۱ را در این مؤلفه دارا است. در نتیجه $k_۲ = ۰$.

مشابهاً، $k_۳$، ... و k_s همگی برابر صفرند. بنابراین بردارهای $r_۱$، $r_۲$، ... و r_s مستقل خطی هستند. این بردارها، طبق تعریف فضای سطری A را گسترش می‌دهند و همین‌طور تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند. بعد فضای سطری برابر s است. در نتیجه رتبه‌ی A برابر s، یعنی تعداد بردارهای غیرصفر A است.

مثال ۳: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این ماتریس به‌فرم پلکانی تحویل یافته است. دارای سه بردار سطری غیرصفر (سه سطر اول) است. بنابر قضیه پیش، این سه بردار یک پایه فضای سطری هستند. از این رو $\operatorname{rank}(A) = ۳$.

قضیه بعدی فضاهای سطری را با ماتریس‌های سطری معادل مرتبط می‌سازد.

۵-۱۰-۳ قضیه. فرض کنیم A و B دو ماتریس سطری معادل باشند. در این‌صورت A و B دارای یک فضای سطری هستند و $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

برهان. چون A و B سطری معادل هستند. سطرهای B با اعمال عملیات سطری مقدماتی از سطرهای A حاصل می‌شوند. بنابراین هر سطر B ترکیبی خطی از سطرهای A است. و همین‌طور فضای سطری B جزء فضای سطری A است.

به‌طریق مشابه، فضای سطری A را با اعمال عملیات سطری مقدماتی می‌توان از سطرهای B به‌دست آورد. در نتیجه فضای سطری A نیز جزء فضای سطری B است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که فضاهای سطری A و B یکی‌هستند. چون A و B دارای فضاهای سطری مساوی هستند، رتبه‌ی‌آنها برابر است.

نتیجه‌ی بعدی دو نتیجه قبلی را بهم آمیخته و روشی برای یافتن یک پایه برای فضای سطری یک ماتریس و در نتیجه رتبه‌ی آن ارائه می‌دهد.

۵-۱۰-۴ قضیه. فرض کنیم E فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس A باشد. بردارهای سطری غیرصفر E تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهد. رتبه‌ی A برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر E است.

مثال ۴: پایه‌ای برای فضای سطری ماتریس مفروض زیر یافته و رتبه آن را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل: از عملگرهای سطری مقدماتی استفاده کرده و یک فرم پلکانی تحویل یافته برای A به‌دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بردارهای $(۱, ۰, ۷)$، $(۰, ۱, -۲)$ یک پایه برای فضای سطری A تشکیل می‌دهند، $\operatorname{rank}(A) = ۲$.

بردارهای ستونی ماتریس A همان بردارهای سطری ماتریس A^t هستند. در این‌صورت فضای ستونی A همان فضای سطری A^t است. بدین‌گونه می‌توانیم یک پایه برای فضای ستونی ماتریس A با به‌دست آوردن یک پایه برای فضای سطری A^t به‌دست آوریم.

مثال ۵: یک پایه برای فضای ستونی ماتریس مفروض زیر به‌دست آورید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & -۲ \\ -۱ & -۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

حل: ترانهاده A عبارت است از:

$$A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

فضای ستونی A تبدیل به فضای سطری A^t می‌شود. اینک پایه‌ای برای فضای سطری A^t می‌یابیم. یک فرم سطری پلکانی تحویل یافته برای A^t به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & +6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر سطری این ماتریس، یعنی $(1, 0, 5)$، $(0, 1, -3)$ یک پایه برای فضای سطری A^t هستند. این بردارها را به‌صورت ستونی نوشته تا یک پایه برای فضای ستونی A به‌دست آید. بردارهای زیر یک پایه برای فضای ستونی A هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

قضیه اخیر را برای تعیین یک پایه برای زیرفضای V که توسط یک مجموعه بردار تولید شده است نیز می‌توان بکار گرفت. بردارها را به‌صورت بردارهای سطری یک یک ماتریس نوشته، و فرم پلکانی تحویل یافته آن را محاسبه می‌کنیم. بردارهای غیرصفر این فرم پلکانی تحویل یافته یک پایه برای V به‌دست می‌دهد. مثال بعدی روش کار را روشن می‌کند.

مثال ۶: پایه‌ای برای زیرفضای V از $\mathbb{R}^n$ که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود به‌دست آورید

$$(1, 2, 3, 4), (-1, -1, -4, -2), (3, 4, 11, 8)$$

حل: ماتریس A را چنان می‌سازیم که بردارهای فوق بردارهای سطری آن باشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

یک فرم پلکانی تحویل یافته برای A به‌دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر این فرم پلکانی تحویل یافته، یعنی $(1, 0, 5, 0)$ و $(0, 1, -1, 2)$ پایه‌ای برای زیرفضای V هستند.

قضیه بعدی نتایج و مفاهیم جبری را که در این درس در مناسبت‌هایی آمده‌اند یکجا ارائه می‌کنند.

۵-۱۰-۵ قضیه فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. گزاره‌های زیر معادلند.

الف) A وارون‌پذیر است.

ب) $|A| \neq 0$ (A نامنفرد است).

ج) دستگاه معادلات $AX = B$ دارای جواب منحصر به‌فرد است.

د) A با I_n هم‌ارز سطری است.

ه) $\operatorname{rank}(A) = n$.

برهان. قبلاً دیده‌ایم که (الف)، (ب)، (ج) و (د) معادلند. در تمرین‌ها از شما خواسته شده است تا ثابت کنید که (د) و (ه) نیز معادلند. این نشان می‌دهد که همه احکام معادلند.

قضیه قبلی به ما می‌گوید که چگونه رتبه‌ی یک ماتریس اطلاعاتی در خصوص یکتایی جواب یک دستگاه n معادله خطی در n مجهول به‌دست می‌دهد. مفهوم رتبه نقش مهمی در شناخت رفتار دستگاه‌های معادلات خطی از هر اندازه‌ای به‌دست می‌دهد. تاکنون ملاحظه کرده‌ایم که چگونه دستگاه‌های معادلات خطی می‌توانند دارای جواب منحصر به‌فرد، جواب‌های بیشمار، و یا فاقد جواب باشند. چنین اوضاعی را می‌توان برحسب رتبه‌های ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دسته‌بندی کرد.

۵-۱۰-۶ قضیه. یک دستگاه m معادله با n مجهول را در نظر می‌گیریم.

۱) هرگاه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دارای رتبه برابر r بوده و $r = n$، جواب منحصر به‌فرد است.

۲) هرگاه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دارای رتبه برابر r بوده و $r < n$ جواب‌های زیادی وجود دارد.

۳) هرگاه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دارای رتبه‌های مخالف باشند. جوابی وجود ندارد.

برهان. فرض کنیم دستگاه موردنظر به‌صورت زیر بوده باشد

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

و یا

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \qquad (1)$$

اکنون به سه حالت ممکنه توجه می‌کنیم

۱) چون رتبه‌ی ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده یکی است، باید $\mathbf{b}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{a}_1$، ... و $\mathbf{a}_n$ باشد. به‌علاوه، چون این رتبه برابر n است، بردارهای $\mathbf{a}_1$، ... و $\mathbf{a}_n$ مستقل خطی بوده از این رو پایه‌ای برای فضای ستونی ماتریس افزوده تشکیل می‌دهند. بنابراین معادله (۱) دارای جواب منحصر به‌فرد بوده و جواب دستگاه یکتا است.

۲) چون رتبه ماتریس‌های ضرایب و افزوده یکسان است، $\mathbf{b}$ باید وابسته‌ی خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1$، ... و $\mathbf{a}_n$ با این‌حال چون این رتبه کوچکتر از n است، بردارهای $\mathbf{a}_1$، ... و $\mathbf{a}_n$ وابسته‌ی خطی‌اند. بنابراین $\mathbf{b}$ را می‌توان به بیش از یک طریق به‌صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{a}_1$، ... و $\mathbf{a}_n$ نوشت. در این‌صورت معادله (۱) دارای جواب‌های زیادی است؛ جواب دستگاه وجود داشته امّا منحصر به‌فرد نمی‌باشد.

۳) چون رتبه ماتریس افزوده برابر رتبه ماتریس ضرایب نمی‌باشد، $\mathbf{b}$ مستقل خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1$، ... و $\mathbf{a}_n$ می‌باشد. در این‌صورت معادله (۱) جواب ندارد؛ و جوابی برای دستگاه وجود ندارد.

۵-۱۰-۷ تمرین (صفحه ۲۵۶ و ۲۵۷)

۵-۱۱ بردارهای متعامد و تصاویر

اکنون توجه خود را به مجموعه بردارهای متعامد که یکه نیز می‌باشند معطوف می‌داریم. روشی برای ساختن اینگونه بردارها در $\mathbb{R}^n$ معرفی می‌کنیم. ویژگی‌های خاص این مجموعه بردارها نیز مورد بحث قرار می‌گیرد.

تعریف. مجموعه برداری را در فضای برداری V یک **مجموعه متعامد** نامیم هرگاه هر زوج بردار این مجموعه متعامد باشند چنین مجموعه را **یکّه متعامد** نامیم هرگاه متعامد بوده و هر بردار آن برداری یکّه باشد.

مثال ۱: نشان دهید مجموعه $\{(1,0,0),(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}),(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5})\}$ یک مجموعه یکّه متعامد است.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که هر زوج بردار این مجموعه متعامد است.

$$(1,0,0).(0,\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5})=0\ ;\ (1,0,0).(0,\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5})=0\ ;\ (0,\tfrac{3}{5},\frac{4}{5}).(0,\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5})=0$$

در این‌صورت این بردارها **دو به‌دو متعامدند**. حال نشان می‌دهیم که هر بردار، یک بردار یکّه است. داریم:

$$\|(1,0,0)\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$$
$$\|(0,\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5})\|=\sqrt{0^2+(\tfrac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2}=1$$
$$\|(0,\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5})\|=\sqrt{0^2+(\tfrac{4}{5})^2+(-\tfrac{3}{5})^2}=1$$

بردارها بردارهای یکّه بوده و متعامدند. از این رو مجموعه موردنظر یک مجموعه یکّه متعامد است.

۵-۱۱-۱ قضیه یک مجموعه یکّه متعامد (از بردارهای غیرصفر) در یک فضای برداری مستقل خطی است.

برهان. فرض کنیم $\{v_1,\dots,v_m\}$ یک مجموعه یکّه متعامد از بردارهای غیرصفر در فضای برداری V باشد. تساوی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_m\mathbf{v}_m=0$$

نشان می‌دهیم که $c_1=0$، ... و $c_m=0$ که ثابت می‌کند این بردارها مستقل خطی‌اند. فرض کنیم $\mathbf{v}_i$ iاُمین بردار این مجموعه یکّه متعامد باشد. حاصل‌ضرب نقطه‌ای این بردار را در دو طرف تساوی گرفته و از خواص حاصل‌ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. داریم

$$(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_m\mathbf{v}_m).v_i=0.v_i$$

$$c_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_i+c_2\mathbf{v}_2.v_i+\cdots+c_mv_m.\mathbf{v}_i=0$$

چون این بردارها دوبه‌دو متعامدند، $\mathbf{v}_j.\mathbf{v}_i=0$ مگر آنکه $j=i$ بنابراین

$$c_i\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i=0$$

چون $\mathbf{v}_i$ برداری غیرصفر است، $\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i \neq 0$. بنابراین $c_i = 0$. با قرار دادن $i = 1, 2, \ldots, m$، حاصل می‌شود که

$$c_1 = 0 \ , \ c_2 = 0 \ , \ \ldots \ , \ c_m = 0$$

و این ثابت می‌کند که بردارها مستقل خطی هستند.

برای یک فضای برداری ممکن است پایه‌های چیزی وجود داشته باشد. اینکه از چه پایه‌ای استفاده کنیم بستگی به مسأله مورد بحث دارد. پایه‌ای انتخاب می‌شود که به بهترین وجهی به موقعیت مربوطه بکار می‌آید.

غالباً مناسب‌ترین پایه یک پایه متعامد و یا یک مجموعه **یکه متعامد** می‌باشد.

تعریف. یک پایه را که یک مجموعه متعامد باشد یک پایه **پایه متعامد** می‌نامیم. پایه‌ای را که یک مجموعه یکّه متعامد باشد یک **پایه یکّه متعامد** می‌نامیم.

متذکر می‌شویم که پایه‌هایاستاندارد پایه‌هایی یکّه متعامد هستند. **پایه‌های استاندارد**

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R}^2: \ \{(1,0),(0,1)\} \\ &\mathbf{R}^3: \ \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ &\mathbf{R}^n: \ \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\} \end{aligned}\right\} \text{پایه‌های یکّه متعامد}$$

می‌دانیم که هر یک بردار فضای برداری را می‌توان به گونه‌ای منحصر به‌فرد به شکل ترکیبی خطی از بردارهای پایه نوشت. قضیه‌ی بعدی مبین آن است که ک پایه یکّه متعامد در بحث و بررسی یک فضای برداری از ویژگی مفیدتری برخوردار است زیرا ترکیبات خطی را ساده‌تر می‌توان یافت.

۵-۱۱-۲ قضیه. فرض کنیم $\{u_1, \ldots, u_n\}$ یک پایه یکّه متعامد برای فضای برداری $\mathbf{V}$ باشد. همچنین فرض کنیم $\mathbf{v}$ یک بردار در $\mathbf{V}$ باشد. $\mathbf{v}$ را به‌صورت زیر به شکل ترکیبی خطی از این بردارهای پایه می‌توان نوشت

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}.\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (v.\mathbf{u}_2)u_2 + \cdots + (v.u_n)u_n$$

برهان. چون $\{u_1, \ldots, u_n\}$ یک پایه است، اسکالرهایی مانند c_1، ... و c_n هست به قسمی که

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$$

نشان می‌دهیم که $c_1 = v.u_1$، ... و $c_n = v.u_n$.

فرض کنیم u_i، iاَمین بردار پایه باشد. حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو طرف این تساوی را با u_i گرفته و از خواص حاصل‌ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} v.u_i &= (c_1u_1 + \cdots + c_nu_n).u_i \\ &= c_1u_1.u_i + (c_2u_2).u_i + \cdots + (c_nu_n).u_i \end{aligned}$$

چون بردارهای u_1، u_2، ... و u_n دوبه‌دو متعامدند، $u_j.u_i = 0$ مگر آنکه $j = i$ بنابراین

$$v.u_i = c_iu_i.u_i$$

به‌علاوه، چون پایه مورد بحث یکّه متعامد است، $u_i.u_i = 1$. بنابراین

$$v.u_i = c_i$$

بدین ترتیب، با قرار دادن $i = 1, 2, \ldots, n$ به‌دست می‌آوریم $c_1 = v.u_1$ و $c_n = v.u_n$. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}.\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (v.u_2)u_2 + \cdots + (v.u_n)u_n$$

مثال ۲: بردارهای u_1، u_2 و u_3 ارائه شده در زیر یک پایه یکّه متعامد $\mathbb{R}^3$ هستند. بردار $\mathbf{v} = (7, -5, 10)$ را به‌صورت ترکیبی از این بردارها بنویسید.

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0) \ , \ \ \mathbf{u}_2 = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \ , \ \ \mathbf{u}_3 = (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

حل: داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{v}.\mathbf{u}_1 &= (7, -5, 10).(1, 0, 0) = 7 \\ \mathbf{v}.\mathbf{u}_2 &= (7, -5, 10).(0, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) = 5 \\ \mathbf{v}.\mathbf{u}_3 &= (7, -5, 10).(0, \tfrac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = -10 \end{aligned}$$

بنابراین

$$(7, -5, 10) = 7(1, 0, 0) + 5(0, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) - 10(0, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5})$$

اکنون مفهوم تصویر یک بردار را روی بردار دیگر معرفی می‌کنیم. از نظر شهودی، مفهوم تصویر مبین است که «چه مقدار» از یک بردار همسو در راستای بردار دیگری است. این مفهوم بویژه در بررسی و تحلیل نیروها مفید می‌باشد، و آن وقتی است که بخواهیم اثر فیزیکی یک نیرو را در جهت خاصی بدانیم. ما از تصاویر به‌منظور ساختن بردارهای **یکّه متعامد** استفاده می‌بریم.

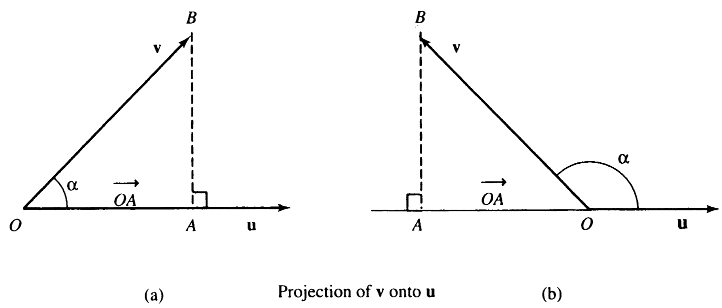
۱۲-۵ تصویر یک بردار روی بردار دیگر

فرض کنیم v و u بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ با زاویه بین α باشند. شکل ۵ـ۹ ملاحظه شود. بردار $\overrightarrow{0A}$ مبین آن است که «چه مقدار» از $\mathbf{v}$ همسو در راستای $\mathbf{u}$ است. $\overrightarrow{0A}$ را **تصویر** $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{u}$ می‌نامیم. اینک عبارتی برای $\overrightarrow{0A}$ می‌یابیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} 0A &= 0B\cos\alpha \\ &= \|\mathbf{v}\|\cos\alpha \\ &= \|v\|(\frac{v}{\|v\|}\cdot\frac{u}{\|u\|}) \\ &= \mathbf{v}.\frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

جهت بردار $\overrightarrow{0A}$ را برابر بردار واحد $\frac{u}{\|u\|}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$\overrightarrow{0A} = (v.\frac{u}{\|u\|})\frac{u}{\|u\|} = \frac{v.u}{u.u}u$$



$\overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\,\mathbf{u}$

تصویر v روی u

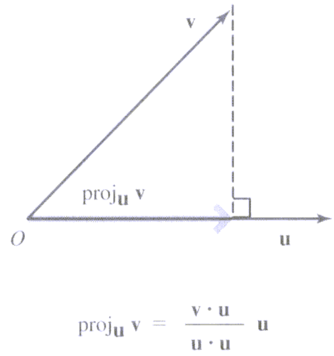
$$\overrightarrow{0A} = \frac{v.u}{u.u}u$$

شکل ۵ـ۹

تعریف. تصویر بردار v روی بردار غیرصفر u در v، که به proj_u^v نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد:

$$\text{proj}_u^v = \frac{v.u}{u.u}u$$

شکل ۵ـ۱۰ ملاحظه شود. اصطلاح مؤلفه v در جهت u نیز برای proj_u^v به‌کار می‌رود



شکل ۵ـ۱۰

مثال ۳: تصویر بردار $\mathbf{v} = (۶, ۷)$ را روی بردار $\mathbf{u}(۱, ۴)$ پیدا کنید

حل: برای این بردارها داریم

$$v.u = (۶, ۷).(۱, ۴) = ۶ + ۲۸ = ۳۴$$

$$u.u = (۱, ۴).(۱, ۴) = ۱ + ۱۶ = ۱۷$$

لذا

$$\text{proj}_u^v = \frac{v.u}{u.u}\mathbf{u} = \frac{۳۴}{۱۷}(۱, ۴) = (۲, ۸)$$

پس تصویر بردار v روی u برابر $(۲, ۸)$ است.

فرض کنیم بردار $v = (۶, ۷)$ نمایشگر نیروی باشد که بر یک جسم واقع در مبداء اثر می‌کند. در این‌صورت $\text{proj}_u^v = (۲, ۸)$ مؤلفه‌ای از نیرو است که در جهت بردار $u = (۱, ۴)$ می‌باشد. از نظر فیزیکی $(۲, ۸)$ اثر این نیرو در جهت بردار u می‌باشد.

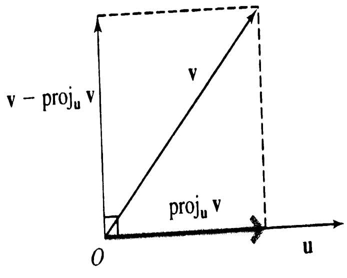
اینک روشی برای ساختن یک پایه **یکّه متعامد** براساس یک پایه مفروض ارائه می‌کنیم در این روش از بردارهای تصویر استفاده می‌شود.

۵-۱۳ قضیه فرآیند گرام-اشمیت یکّه متعامدسازی

فرض کنیم $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد. مجموعه بردارهای $\{u_1, \ldots, u_n\}$ که به‌طریق ذیل تعریف می‌شوند متعامدند. برای به‌دست آوردن یک پایه یکّه متعامد V، هریک از بردارهتای u_1، ... و u_n را یکّه‌سازی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}^{v} \\
u_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}^{v_3} - \mathrm{proj}_{u_2}^{v_3} \\
&\vdots \\
u_n &= v_n - \mathrm{proj}_{u_i}^{v_n} - \cdots - \mathrm{proj}_{u_{n-1}}^{v_n}
\end{aligned}
$$

برهان. اگر u و v بردارهایی در V باشند، آنگاه بنابر جمع برداری $v - \mathrm{proj}_u^v$ بر u عمود است. شکل ۵_۱۱ ملاحظه شود. از این نتیجه برای اثبات قضیه استفاده می‌کنیم. ساختار بردار u_i را در نظر می‌گیریم. با تفریق $\mathrm{proj}_{u_1}^{v_j}$ از v_i برداری به‌دست می‌آید که u_1 عمود است یا تفریق $\mathrm{proj}_{u_2}^{v_j}$ از بردار حاصله برداری به‌دست می‌دهد که بر u_2 عمود است، در حالی که هنوز عمودیت بر u_1 محفوظ می‌ماند و با ادامه این منجر به برداری مانند u_j می‌شود که بر هر یک از بردارهای قبلی u_1، u_2، ... و u_{j-1} عمود است.



$(\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}) \perp \mathbf{u}$

شکل ۵_۱۱

مثال ۴: مجموعه $\{(1,2,0,3),(4,0,5,8),(8,1,5,6)\}$ در $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی است. از این رو بردارها یک پایه برای یک زیرفضای سه_بعدی مانند V از $\mathbb{R}^4$ تشکیل می‌دهند. یک پایه **یکّه متعامد** برای V بسازید.

حل: فرض کنیم $v_1 = (1,2,0,3)$، $v_2 = (4,0,5,8)$ و $v_3 = (8,1,5,6)$. اینک از فرایند **گرام-اشمیت** استفاده می‌کنیم و یک مجموعه‌ی **یکّه متعامد** $\{u_1,u_2,u_3\}$ از این بردارها می‌سازیم.

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (1,2,0,3)\\
u_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}^{v_2} = v_2 - \frac{(v_2.u_2)}{u_1.u_1}u_1\\
&= (4,0,5,8) - \frac{(4,0,5,8).(1,2,0,3)}{(1,2,0,3).(1,2,0,3)}(1,2,0,3)\\
&= (4,0,5,8) - 2(1,2,0,3)\\
&= (2,-4,5,2)\\
u_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{u_2}^{v_1} - \mathrm{proj}_{u_1}^{v_3} = v_3 - \frac{v_3.u_1}{u_1.u_1}u_1 - \frac{v_3.u_2}{u_2.u_2}u_2\\
&= (8,1,5,6) - \frac{(8,1,5,6).(1,2,0,3)}{(1,2,0,3).(1,2,0,3)}(1,2,0,3)\\
&\quad - \frac{(8,1,5,6).(2,-4,5,2)}{(2,-4,5,2).(2,-4,5,2)}(2,-4,5,2)\\
&= (8,1,5,6) - 2(1,2,0,3) - 1(2,-4,5,2)\\
&= (4,1,0,-2)
\end{aligned}$$

مجموعه $\{(1,2,0,3),(2,-4,5,2),(4,1,0,-2)\}$ یک مجموعه‌ی متعامد برای V است.

این واقعیت را که حاصل‌ضرب نقطه‌ای هر زوج از این بردارها برابر صفر است می‌توانید چک کنید.

اکنون فرم هر یک از این بردارها را محاسبه کرده و از آنجا بردارها را یکّه‌سازی کرده تا یک پایه متعامد به‌دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned}
\|(1,2,0,3)\| &= \sqrt{1^2+2^2+0^2+3^2} = \sqrt{14}\\
\|(2,-4,5,2)\| &= \sqrt{2^2+(-4)^2+5^2+2^3} = 7\\
\|(4,1,0,-2)\| &= \sqrt{4^2+1^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{21}
\end{aligned}$$

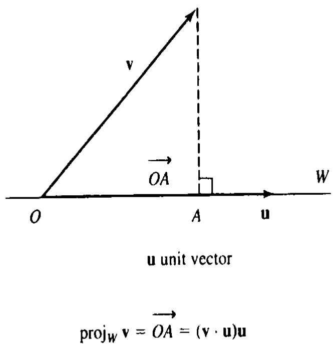
از این مقدارها استفاده کرده و بردارها را یکّه می‌کنیم، در نهایت به پایه یکّه متعامدی برای V دست می‌یابیم:

$$\left\{(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},0,\frac{3}{\sqrt{14}}),(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{2}{7}),(\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},0,\frac{-2}{\sqrt{21}}\right\}$$

۱۴-۵ تصویر یک بردار روی‌یک زیرفضا

تاکنون تصویر یک بردار را بر روی بردار دیگر تعریف کرده‌ایم. اینک این مفهوم را به تصویر یک بردار بر روی یک زیرفضا تعمیم می‌دهیم. از نظر شهودی، تصویر یک بردار روی یک زیرفضا مبین آن است که «چه مقدار» از یک بردار در آن زیرفضا واقع است.

فرض کنیم $\overrightarrow{0A}$ تصویر بردار v روی بردار u در $\mathbb{R}^n$ باشد. شکل ۵ـ۱۲ ملاحظه شود. فرض کنیم W زیرفضای یک بعدی $\mathbb{R}^n$ باشد که متشکل از همه بردارهایی است که بر خط تعریف شده به‌وسیله u واقع‌اند. یادآوری می‌شود که تصویر v روی هر بردار دیگر u که در این زیرفضا واقع باشد همان $\overrightarrow{0A}$ است. بنابراین می‌توانیم تصویر برداری بردار v روی زیرفضای W را، که با نماد proj_W^v نشان داده می‌شود، برابر $\overrightarrow{0A}$ تعریف کنیم. ساده‌ترین بیان $\overrightarrow{0A}$ وقتی به‌دست می‌آید که u را بردار



u بردار واحد است.

$$\text{proj}_W^v = \overrightarrow{0A} = (v.u)u$$

شکل ۵ـ۱۲

یکّه اختیار کنیم. در این‌صورت به‌دست می‌آوریم

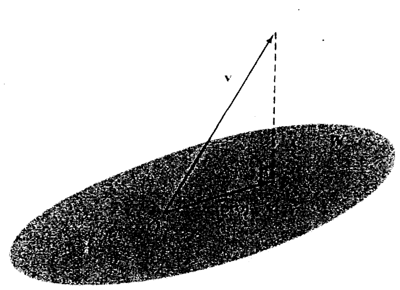
$$\text{proj}_W^v = \overrightarrow{0A} = (v.u)u \qquad (u \text{ یک بردار یکّه})$$

هرگاه W زیرفضایی از بعد n بوده باشد، آنگاه این مفهوم تصویر را می‌توانیم به شکلی طبیعی تعمیم دهیم. تصویر v روی W ترکیبی خطی از بردارهایی یکّه متعامد از W می‌باشد که در ذیل تعریف می‌گردد.

تعریف. فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ (و یا فضای کلی V) باشد. همچنین فرض کنیم $\{u_1, \ldots, u_n\}$ یک پایه یکّه متعامد W باشد. هرگاه v برداری در $\mathbb{R}^n$ (V) باشد، **تصویر** v روی W، که با proj_W^v نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد.

$$\mathrm{proj}_W^v = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2 + \cdots + (v.u_n)u_n$$

شکل ۵ـ۱۳ ملاحظه شود



$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ orthonormal basis for W
$\mathrm{proj}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_m)\mathbf{u}_m$

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ یک پایه یکّه متعامد W است و

$$\mathrm{proj}_W^v = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2 + \cdots + (v.u_n)u_n$$

شکل ۵ـ۱۳

گوییم بردار v بر **زیرفضای W عمود** است هرگاه v بر هر بردار W عمود باشد. قضیه بعدی مبین آن است که هرگاه v برداری در $\mathbb{R}^n$ (V) و W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه می‌توانیم v را به‌صورت برداری واقع در W و برداری عمود بر W تجزیه کنیم و این حقیقی است که از نظر شهودی برای وقتی که V فضاهای ملموس $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) است قابل ملموس می‌باشد.

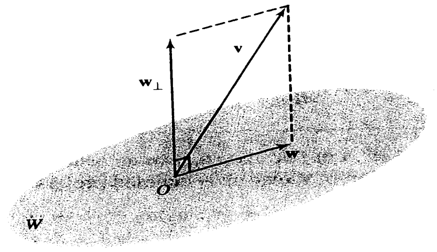
۵-۱۴-۱ قضیه. فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد. هر بردار v در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به‌صورتی منحصر به‌فرد به شکل

$$v = w_1 + w_2$$

نوشت که در آن $w_1 \in W$ و w_2 بر W عمود است. بردارهای w_1 و w_2 عبارتند از:

$$w_1 = \mathrm{proj}_W^v \quad , \quad w_2 = v - \mathrm{proj}_W^v$$

شکل ۵ـ۱۴ ملاحظه شود.



$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}_\perp$, where
$\mathbf{w} = \text{proj}_W \mathbf{v}$ and $\mathbf{w}_\perp = \mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}$

$$v = w_1 + w_2$$

$$w_1 = \text{proj}_W^v \ , \ w_2 = v - \text{proj}_W^v$$

شکل ۵ـ۱۴

برهان. ملاحظه می‌کنیم که

$$w_1 + w_2 = \text{proj}_W^v + (v - \text{proj}_W^v)$$

به‌علاوه w_1 در W است (چرا؟) باقی می‌ماند اثبات اینکه $v - \text{proj}_W^v$ بر W عمود است. ابتدا نشان می‌دهیم که proj_W^v بر هر بردار پایه W عمود است. سپس به آسانی می‌توانیم نتیجه بگیریم که proj_W^v بر هر بردار دلخواه W عمود است، داریم:

$$\begin{aligned}
u_j.(v - \text{proj}_W^v) &= u_j.(v - (v.u_1)u_1 - \cdots - (v.u_n)u_n) \\
&= u_j.v - u_j.(v.u_1)u_1 - \cdots - u_j.(v.u_n)u_n \\
&= u_j.v - (v.u_1)u_j.u_1 - \cdots - (v.u_n)u_j.u_n \\
&= u_j.v - v.u_j \qquad \text{زیرا } u_j.u_i = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $w' = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$ برداری دلخواه از W باشد. داریم

$$w'.(v - \text{proj}_W^v) = (c_1u_1 + \cdots + c_nu_n).(v - \text{proj}_W^v)$$

$$= c_1 u_1.(v - \mathrm{proj}_W^v) + \cdots + c_n u_n.(v - \mathrm{proj}_W^v)$$
$$= 0$$

از این رو $v - \mathrm{proj}_W^v$ بر W عمود است.

اثبات یکتایی تجزیه آسان بوده و به دانشجو واگذار می‌شود.

مثال ۵: بردار $v = (3, 2, 6)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ متشکل از همه بردارهایی به‌صورت (a, b, b) باشد. بردار v را به‌صورت حاصل‌جمع برداری در W و برداری عمود بر W تجزیه کنید.

حل: ابتدا محتاج یک پایه یکّه متعامد از W هستیم. هر بردار دلخواه W را به‌صورت زیر می‌توانیم بنویسیم

$$(a, b, b) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1)$$

مجموعه $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ زیرفضای W را تولید کرده و مستقل خطی نیز می‌باشد.

این بردارها متعامدند.بردارها را نرمال کرده و به یک پایه **یکّه متعامد** $\{u_1, u_2\}$ برای W می‌رسیم:

$$u_1 = (1, 0, 0).u_2 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

داریم

$$\begin{aligned} w_1 = \mathrm{proj}_W^v &= (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2 \\ &= ((3, 2, 6).(1, 0, 0))(1, 0, 0) + ((3, 2, 6).(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}))(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= (3, 0, 0) + (0, 4, 4) = (3, 4, 4) \end{aligned}$$

همچنین

$$w_2 = v - w_1 = (3, 2, 6) - (3, 4, 4) = (0, -2, 2)$$

در این‌صورت تجزیه مطلوب v عبارت است از:

$$(3, 2, 6) = (3, 4, 4) + (0, -2, 2)$$

در این تجزیه بردار $(3, 4, 4)$ در W واقع بوده و بردار $(0, -2, 2)$ بر W عمود است.

۱۵-۵ فاصله یک نقطه از یک زیرفضا

فاصله یک نقطه از نقطه‌ای دیگر را در $\mathbb{R}^n$ مورد بررسی قرار داده‌ایم. اکنون قادریم تا فاصله یک نقطه از یک زیرفضا را در $\mathbb{R}^n$ مورد بحث و بررسی قرار دهیم. فرض کنیم $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n$ و W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد. همچنین فرض کنیم $\mathbf{y} = (y_۱, \ldots, y_n)$ نقطه‌ای در W باشد. طبیعی‌ترین راه برای تعریف فاصله x از W، که به $d(\mathbf{x}, W)$ نشان داده می‌شود، آن است که آن را به‌عنوان مینیمم فاصله‌های $\mathbf{x}$ از نقاط W بینگاریم.

$$d(\mathbf{x}, W) = \min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{y} \in W\}$$

اکنون سعی می‌کنیم فرمولی برای $d(\mathbf{x}.W)$ بیابیم. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x\text{proj}_W^x) + (\text{proj}_W^x - y)$$

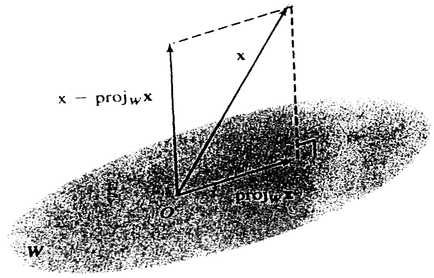
این عبارت تجزیه‌ای از بردار $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ به حاصل‌جمع بردار $(\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}})$ که عمود بر W و بردار $(\text{proj}_W^x - y)$ که واقع در W است می‌باشد.
از این رو بنابر قضیه فیثاغورس داریم

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^۲ = \|\mathbf{x}.\text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|^۲ + \|\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^۲$$

بنابراین $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$، که برابر $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ است، وقتی دارای مینیممی برابر $\|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|$ است که $\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - \mathbf{y} = ۰$؛ یعنی، وقتی که $\mathbf{y} = \text{proj}_W^{\mathbf{x}}$. لذا

$$d(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|$$

و این عبارت برای هر فضای برداری کلی‌تری مانند V نیز قابل تعریف است. به‌عبارت دیگر فاصله یک نقطه از یک زیرفضا همان فاصله آن نقطه از تصویر (بردار نقطه) در این زیرفضا است. شکل ۵ـ۱۵ ملاحظه شود.



Distance of x from W
$d(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W\mathbf{x}\|$

فاصله $\mathbf{x}$ از W

$$d(\mathbf{x}, W) = \|x - \text{proj}_W^x\|$$

شکل ۵ـ۱۵

مثال ۶: فاصله نقطه $\mathbf{x} = (۴, ۱, -۷)$ در $\mathbb{R}^۳$ را از زیرفضای W متشکل از بردارهای به‌فرم (a, b, b) پیدا کنید.

حل: از مثال قبلی می‌دانیم که مجموعه $\{\mathbf{u}_۱, \mathbf{u}_۲\}$ که در آن

$$\mathbf{u}_۱ = (۱, ۰, ۰) \quad , \quad \mathbf{u}_۲ = (۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

یک پایه یکّه متعامد برای W است. اکنون $\text{proj}_W^{\mathbf{x}}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\text{proj}_W^{\mathbf{x}} &= (\mathbf{x}.\mathbf{u}_۱)\mathbf{u}_۱ + (\mathbf{x}.\mathbf{u}_۲)\mathbf{u}_۲ \\ &= ((۴, ۱, -۷).(۱, ۰, ۰))(۱, ۰, ۰) + ((۴, ۱, -۷).(۰, \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}, \tfrac{۱}{۲}))(۰, \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}, \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}) \\ &= (۴, ۰, ۰) + (۰, -۳, -۳) = (۴, -۳, -۳)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\| = \|(۴, ۱, -۷) - (۴, -۳, -۳)\| = \|(۰, ۴, -۴)\| = \sqrt{۳۲}$$

در نتیجه فاصله $\mathbf{x}$ از W برابر $\sqrt{۳۲}$ است.

قبل از این ملاحظه کردیم که وقتی نگاهمان را به ماتریس‌ها به شکلی از ستون‌ها و یا سطرها تشکیل شده‌اند تعبیر می‌کنیم به مفهوم مهم رتبه ماتریس دست یازیدیم. اکنون رده مهمی از ماتریس‌ها را معرفی

می‌کنیم که ستون‌ها و سطرهای آنها تشکیل مجموعه‌های یکّه متعامد می‌دهند. خواهیم دید که این‌گونه ماتریس‌ها نقش محاسباتی مهمی ایفا می‌کنند. در فصل بعدی ملاحظه خواهیم کرد که این‌گونه ماتریس‌ها خواص هندسی ویژه‌ای داشته و برای تعریف توابع بر یک فضای برداری به‌کار می‌آیند.

۱۶-۵ ماتریس‌های متعامد

تعریف. یک ماتریس مربعی را که ستون‌های آن تشکیل یک مجموعه یکّه متعامد می‌دهند یک **ماتریس متعامد** می‌نامیم.

مثال ۷: نشان دهید که ماتریس A یک ماتریس متعامد است

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

حل: بردارهای ستونی A عبارتند از:

$$\mathbf{u}_۱ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{u}_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\|\mathbf{u}_۱\| = \sqrt{(\tfrac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (-\tfrac{۱}{\sqrt{۲}})^۲} = ۱$$
$$\|\mathbf{u}_۲\| = \sqrt{(\tfrac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (\tfrac{۱}{\sqrt{۲}})^۲} = ۱$$

$$\mathbf{u}_۱.\mathbf{u}_۲ = (\frac{۱}{\sqrt{۲}})(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}) + (\frac{۱}{\sqrt{۲}})(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) + (\frac{۱}{\sqrt{۲}})(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = ۰$$

بنابراین بردارهای ستونی A بردارهایی یکّه بوده و متعامد هستند. در نتیجه A یک ماتریس متعامد است.

اینک چهار ویژگی مهم ماتریس‌های متعامد را شرح می‌دهیم.

۱-۱۶-۵ قضیه. فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد. در این‌صورت

۱) بردارهای سطری A تشکیل یک مجموعه یکّه متعامد می‌دهند.

۲) A وارون‌پذیر است که در آن $A^{-۱} = A^t$

۳) $A^{-۱}$ نیز یک ماتریس متعامد است.

۴) $|A| = \pm ۱$

برهان. ابتدا قسمت (۲) را ثابت می‌کنیم. قسمت‌های دیگر از آن حاصل می‌شود.

۲) حاصل‌ضرب $P = A^tA$ را در نظر می‌گیریم. محاسبه این حاصل‌ضرب مستلزم محاسبه ضرب نقطه‌ای هر سطر A^t در ستون‌های ماتریس A می‌باشد. چون سطرهای A^t همان ستون‌های A هستند، و این سطرها یک مجموعه یکّه متعامدند، نتیجه می‌گیریم که $p_{ij} = ۱$ هرگاه $i = j$ و $p_{ij} = ۰$ هرگاه $i \neq j$. لذا $A^tA = I$، که I **ماتریس همانی** است.

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد، چون ستون‌های A یک مجموعه یکّه متعامدند، این ستون‌ها مستقل خطی بوده و از این رو رتبه A برابر n است. در نتیجه $A^{-۱}$ وجود دارد. حاصل‌ضرب دو طرف $A^tA = I$ را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم و $A^t = A^{-۱}$ به‌دست می‌آید.

۱) چون $AA^{-۱} = I$ و $A^{-۱} = A^t$، پس $AA^t = I$.از این نتیجه می‌شود که بردارهای سطری A تشکیل یک مجموعه متعامد می‌دهند.

۳) چون بردارهای سطری A تشکیل یک مجموعه یکّه متعامد می‌دهند. ستون‌های A^t نیز یک مجموعه یکّه متعامد هستند. بنابراین A^t یک ماتریس متعامد است، یعنی $A^{-۱}$ یکّه متعامد است.

۴) چون $AA^t = I$، از ویژگی‌های دترمینان‌ها به‌دست می‌آید که

$$|AA^t| = ۱ \;,\;\; |A||A^t| = ۱ \;,\;\; |A||A| = ۱ \;,\;\; |A|^۲ = ۱$$

در نتیجه $|A| = \pm ۱$.

۵-۱۶-۲ تمرین

۱) کدامیک از دسته بردارهای زیر یک مجموعه متعامد است؟

الف) $\{(۱, ۲), (۲, -۱)\}$
ب) $\{(۳, -۱), (۰, ۵)\}$
ج) $\{۰, -۲), (۳, ۰)\}$
د) $\{(۴, ۱), (۲, -۳)\}$

۲) کدامیک از دسته بردارهای زیر یک مجموعه متعامد است؟

الف) $\{(۱, ۲, ۱), (۴, -۲, ۰), (۲, ۴, -۱, ۰)\}$

ب) $\{(۳, -۱, ۱), (۲, ۰, ۱), (۱, ۱, -۲)\}$

ج) $\{(۱, ۴, ۲), (-۲, -۱, ۳), (۶, -۱, -۱)\}$

د) $\{(۱, ۲, -۱, ۱), (۳, ۱, ۴, -۱), (۰, ۱, -۱, -۳)\}$

۳) کدامیک از مجموعه‌های زیر یک مجموعه یکّه متعامد است؟

الف) $\{(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}), (\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}), (\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, -\frac{۲}{۳})\}$

ب) $\{(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}), (\frac{-۳}{\sqrt{۱۰}}, \frac{۱}{\sqrt{۱۰}})\}$

ج) $\{(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}}), (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}}), (۰, ۱, ۰)\}$

د) $\{(\frac{۱}{\sqrt{۶}}, \frac{-۱}{\sqrt{۶}}, \frac{۲}{\sqrt{۶}}), (۰, \frac{۲}{\sqrt{۵}}, \frac{۱}{\sqrt{۵}}), (\frac{۳}{\sqrt{۳۰}}, \frac{۱}{\sqrt{۳۰}}, \frac{-۲}{\sqrt{۳۰}})\}$

۴) بردارهای $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ و $\mathbf{u}_۳$ مشروح در ذیل یک پایه یکّه متعامد $\mathbb{R}^۳$ می‌باشند. بردار $\mathbf{v} = (۲, -۳, ۱)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از این بردارها بنویسید.

$$\mathbf{u}_۱ = (۰, -۱, ۰)\ ,\ \mathbf{u}_۲ = (\tfrac{۳}{۵}, ۰, -\tfrac{۴}{۵})\ ,\ \mathbf{u}_۳ = (\tfrac{۴}{۵}, ۰, \tfrac{۳}{۵})$$

۵) بردارهای $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ و $\mathbf{u}_۳$ ذیل یک پایه یکّه متعامد $\mathbb{R}^۳$ هستند. بردار $\mathbf{v} = (۷, ۵, -۱)$ را به‌صورت ترکیبی از بردارها بنویسید.

$$\mathbf{u}_۱ = (۱, ۰, ۰)\ ,\ \mathbf{u}_۲ = (۰, \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}, \tfrac{۱}{\sqrt{۲}})\ ,\ \mathbf{u}_۳ = (۰, \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}, \tfrac{-۱}{\sqrt{۲}})$$

۶) تصویر بردار $\mathbf{v}$ را روی بردار $\mathbf{u}$ در هر مورد پیدا کنید.

الف) $v = (۷, ۴)$ و $u = (۱, ۲)$

ب) $v = (-۱, ۵)$ و $u = (۳, -۲)$

ج) $v = (۴, ۶, ۴)$ و $u = (۱, ۲, ۳)$

د) $v = (۶, -۸, ۷)$ و $u = (-۱, ۳, ۰)$

۷) تصویر بردار $\mathbf{v}$ را روی بردار $\mathbf{u}$ در هر مورد پیدا کنید.

الف) $v = (۱, ۲)$ و $u = (۲, ۵)$

ب) $v = (-۱, ۳)$ و $u = (۲, ۴)$

ج) $v = (۱, ۲, ۳)$ و $u = (-۱, ۳, ۲)$

۸) بردارهای زیر یک پایه $\mathbb{R}^۲$ هستند. با استفاده از فرایند **گرام-اشمیت** از این بردارها یک مجموعه یکّه متعامد برای $\mathbb{R}^۲$ بسازید.

الف) $(-1,3)$ و $(1,2)$ ب) $(6,2)$ و $(1,1)$
ج) $(4,-2)$ و $(1,-1)$

۹) بردارهای زیر یک پایه $\mathbb{R}^3$ هستند. با استفاده از فرایند **گرام-اشمیت** از این بردارها یک مجموعه یکّه متعامد بسازید.

الف) $(1,1,1), (2,0,1), (2,4,5)$

ب) $(3,2,0), (1,5,-1), (5,-1,2)$

۱۰) یک پایه یکّه متعامد برای زیرفضای $\mathbb{R}^3$ که با بردارهای زیر تولید می‌شود بسازید.

الف) $(1,0,2), (-1,0,1)$

ب) $(1,2,-1), (1,-1,1)$

۱۱) یک پایه یکّه متعامد برای زیرفضایی از $\mathbb{R}^4$، که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود، بسازید.

الف) $(1,2,3,4)$ و $(-1,1,0,1)$

ب) $(3,0,0,0)$، $(0,1,2,1)$ و $(0,-1,3,2)$

۱۲) برداری در $\mathbb{R}^4$ ارائه دهید که بر بردار $(1,2,-1,1)$ عمود باشد.

۱۳) برداری در $\mathbb{R}^4$ ارائه دهید که بر بردار $(2,0,1,1)$ عمود باشد.

۱۴) فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ باشد که دارای پایه $(1,1,2)$ و $(0,-1,3)$ می‌باشد. تصویر بردارهای زیر را بر W بیابید.

الف) $(3,-1,2)$ ب) $(1,1,1)$ ج) $(4,2,1)$

۱۵) فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^4$ باشد که دارای پایه $(-1,0,2,1)$ و $(1,-1,0,3)$ می‌باشد. تصویر بردارهای زیر را بر W بیابید. الف) $(1,-1,1,-1)$ ب) $(2,0,,1,-1)$ ج) $(3,2,1,0)$

۱۶) بردار $v=(1,z,-1)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم V زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ باشد که از بردارهایی به‌فرم (a,a,b) تشکیل می‌شود. v را به‌صورت حاصل‌جمع برداری در V و برداری عمود بر V بنویسید (تجزیه کنید).

۱۷) بردار $v = (۴, ۱, -۲)$ را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم V زیرفضایی از $\mathbb{R}^۳$ باشد که متشکل از بردارهایی به‌فرم $(a, ۲a, b)$ است. v را به‌صورت حاصل‌جمع برداری در V و برداری عمودی بر V بنویسید.

۱۸) فاصله نقطه $\mathbf{x} = (۱, ۳, -۲)$ در $\mathbb{R}^۳$ را از زیرفضای W مشتمل بر همه بردارهایی به‌فرم (a, a, b) پیدا کنید.

۱۹) فاصله نقطه $\mathbf{x} = (۲, ۴, -۱)$ از $\mathbb{R}^۳$ را از زیرفضای W مشتمل بر همه بردارهایی به‌فرم $(a, -۲a, b)$ پیدا کنید.

۲۰) فاصله نقطه $\mathbf{x} = (۱, ۳, -۲)$ از $\mathbb{R}^۳$ را از زیرفضای مشتمل بر همه بردارهایی به‌فرم $(a, ۲a, ۳a)$ پیدا کنید (فاصله یک نقطه از یک خط).

۲۱) یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^۳$ پیدا کنید که مشتمل بر بردارهای $(۱, ۲, -۲)$ و $(۶, ۱, ۴)$ باشد.

۲۲) فرض کنیم $\{u_۱, \dots, u_n\}$ یک پایه یکّه متعامد برای فضای برداری V باشد. همچنین فرض کنیم $\mathbf{v} \in V$. نشان دهید که $\|\mathbf{v}\|$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(v.u_۱)^۲ + (v.u_۲)^۲ + \cdots + (v.U_n)^۲}$$

۲۳) فرض کنیم $\{u_۱, \dots, u_n\}$ یک مجموعه یکّه متعامد V باشد. ثابت کنید که این مجموعه یک پایه V است.

۲۴) فرض کنیم u و v بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ (V) باشند. در برهان قضیه **گرام-اشمیت** گفته شد که $v - \mathrm{proj}_u^v$ بر u عمود است. با نشان دادن اینکه

$$(v - \mathrm{proj}_u^v).u = ۰$$

و استفاده از تعریف proj_u^v این حقیقت را رسماً ثابت کنید.

۲۵) ثابت کنید ماتریس‌های زیر ماتریس‌های متعامد هستند؛

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

۲۶) ماتریس‌های زیر متعامد هستند. ثابت کنید این ماتریس‌ها همه ویژگی‌های مندرج در قضیه ص۲۷ را دارا هستند؛

الف) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{-\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۲۷) فرض کنیم A و B ماتریس‌های متعامد و از یک اندازه باشند. ثابت کنید ماتریس AB نیز متعامد است.

۲۸) فرض کنیم $\mathbf{u}$ یک ماتریس یکّه باشد. $\mathbf{u}$ را به‌صورت یک ماتریس ستونی در نظر می‌گیریم. نشان دهید $A = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t$ متعامد است.

۲۹) ثابت کنید ماتریس A متعامد است اگر و فقط اگر $A^t = A^{-1}$.

۳۰) ماتریس مختلط A را یک **ماتریس یکانی**[1] نامیم هرگاه

$$A^{-1} = \bar{A}^t$$

این تعریف تعمیم مفهوم ماتریس متعامد در فضای مختلط می‌باشد (چرا؟).
ثابت کنید هرگاه A یکانی باشد، A^{-1} نیز یکانی است.

۳۱) ثابت کنید ماتریس A یکانی است اگر و فقط اگر ستون‌های آن مجموعه‌ای از بردارهای یکّه بوده که دوبه‌دو متعامدند.

۵-۱۶-۳ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۵

۱) مجموعه بردارهایی به‌فرم دیل را (در هر مورد) در نظر می‌گیریم. تعیین کنید که کدام مجموعه زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

1) unitary matrix

الف) $(a, b, a - ۲)$ ب) $(a, -۲a, ۳a)$

ج) $(a, b, ۲a - ۳b)$

۲) کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^۳$ زیرفضا هستند؟ مجموعه همه‌ی بردارهایی به‌فرم $p(۱, ۲, ۳)$ که در آن p عبارت است از:

الف) یک عدد حقیقی ب) یک عدد صحیح

ج) یک عدد حقیقی نامنفی د) یک عدد گویا

۳) کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از $M_{۲۲}$ تشکیل زیرفضا می‌دهند؟

الف) زیرمجموعه‌ای که شامل قطر اصلی با درایه‌های غیرصفر است.

ب) زیرمجموعه‌ای مشتمل بر ماتریس‌هایی که حاصل‌جمع درایه‌های آن صفر است. (برای مثال $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & -۷ \end{bmatrix}$ چنین ماتریسی می‌باشد).

ج) زیرمجموعه‌ای مشتمل بر ماتریس‌هایی به‌فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$.

د) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های به‌فرم $\begin{bmatrix} a & ۳ \\ b & c \end{bmatrix}$.

هـ) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های ۲×۲ که دترمینان آن‌ها برابر صفر است.

۴) فرض کنیم S مجموعه همه تابع‌هایی به‌فرم $f(x) = ۳x^۲ + ax - b$ باشد، که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند. آیا S یک زیرفضای $P_۲$ است؟

۵) آیا شرط آنکه یک زیرمجموعه از یک فضای برداری شامل بردار صفر باشد یک شرط لازم و کافی برای زیرفضا بودن آن زیرمجموعه است؟

۶) در هر مورد از مجموعه بردارهای زیر، تعیین کنید که آیا بردار نخست ترکیبی خطی از مابقی بردارها است.

الف) $(۱, ۲, ۳)$، $(-۲, ۴, ۱)$ و $(۰, ۶, ۴)$

ب) $(-۲, ۱, ۰)$، $(۱, ۲, -۱)$ و $(-۱, ۸, -۳)$

۷) نشان دهید که $f(x) = ۱۳x^۲ + ۸x - ۲$ ترکیبی خطی از $g(x) = ۲x^۲ + x - ۳$ و $h(x) = -۳x^۲ - ۲x + ۵$ است.

۸) در هر مورد تعیین کنید که مجموعه بردارهای داده شده وابسته‌ی خطی یا مستقل خطی‌اند.

الف) $\{(۲, ۰, ۱۲), (۰, ۱, ۳), (۱, -۲, ۰)\}$

ب) $\{(-۱, ۱۸, ۷), (-۱, ۴, ۱), (۱, ۳, ۲)\}$

ج) $\{(۵, -۱, ۳), (۲, ۱, ۰), (۳, -۲, ۲)\}$

۹) ثابت کنید که مجموعه بردارها یک پایه برای $\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{R}^۳$ است.

الف) $\{(-۱, ۲), (۳, ۱)\}$

ب) $\{(۴, ۲), (۱, -۱)\}$

ج) $\{(۱, ۲, ۳), (-۱, ۰, ۵), (۰, ۲, ۷)\}$

د) $\{(۸, ۱, ۰), (۴, -۱, ۳), (۵, ۲ - ۳)\}$

۱۰) نشان دهید که بردار $(۸, ۹, ۱۰)$ در فضای برداری تولید شده به‌وسیله $\{(۲, ۱, ۴), (۱, ۳, ۱۰)\}$ قرار دارد.

۱۱) نشان دهید که توابع $f(x) = ۲$، $g(x) = -۳x$ و $h(x) = -x^۲$ تولیدکننده $P_۲$ هستند.

۱۲) یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ پیدا کنید که شامل بردارهای $(۱, -۲, ۳)$ و $(۴, ۱, -۱)$ باشد.

۱۳) پایه‌ای برای زیرفضایی از $\mathbb{R}^۴$ پیدا کنید که شامل بردارهایی به‌فرم $(a, b, c, a - ۲b + ۳c)$ باشد.

۱۴) یک پایه برای فضای برداری ماتریس‌های بالا مثلثی[1] ۳×۳ پیدا کنید.

۱۵) نشان دهید $\{x^۲ + ۲x - ۳, ۳x^۲ + ۲ - ۱, ۴x^۲ + ۳x - ۳\}$ یک پایه $P_۳$ است.

۱۶) رتبه ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -۲ & ۴ & ۸ \\ ۱ & -۲ & ۴ \\ ۴ & -۸ & ۱۶ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ -۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$

1) upper trianguler

۱۷) فرض کنیم $\mathbf{v}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ باشد. همچنین فرض کنیم $\mathbf{v}_3$ برداری دیگر در همان فضای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ باشد. نشان دهید که $\mathbf{v}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ نیز می‌باشد.

۱۸) فرض کنیم $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ در V مستقل خطی باشد. ثابت کنید که هر یک از زیرمجموعه‌های زیر نیز مستقل خطی است.

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\ ,\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}\ ,\ \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\ ,\ \{\mathbf{v}_1\}\ ,\ \{\mathbf{v}_2\}\ ,\ \{\mathbf{v}_3\}$$

این مسأله را تعمیم دهید.

۱۹) فرض کنیم $\{v_1, v_2\}$ وابسته خطی باشد. ثابت کنید $\{v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$ نیز وابسته‌ی خطی است.

۲۰) با توضیحی مختصر تعیین کنید که احکام ذیل درست یا نادرست‌اند.

الف) $\{(1, 0, 1), (2, 1, 5)\}$ یک پایه برای زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ متشکل از بردارهایی به‌فرم $(a, b, a + 3b)$ است.

ب) سه بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد.

ج) هر مجموعه از سه بردار $\mathbb{R}^3$ که مستقل خطی باشند این فضا را تولید می‌کنند.

د) هر دو بردار غیرصفر $\mathbb{R}^2$ که پایه تشکیل ندهند هم‌خط[1] هستند.

ه) فرض کنیم $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند که به‌صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. این بردارها احتمالاً وابسته‌ی خطی هستند.

۲۱) فرض کنیم V یک فضای برداری از بعد n باشد. تعیین کنید که کدام حکم درست و کدامیک نادرست است.

الف) n بزرگترین عددی از تعداد بردارهای وابسته‌ی خطی است.

ب) n برابر بزرگترین عددی از تعداد بردارهای مستقل خطی است.

ج) هیچ تعداد کمتری از n بردار مولد V نمی‌باشد.

د) هر مجموعه متشکل از بیش از n بردار باید وابسته‌ی خطی باشد.

ه) هر مجموعه با بیش از n بردار می‌تواند V را تولید کند امّا وابسته‌ی خطی نمی‌باشد.

1) colinear

۲۲) ثابت کنید ماتریس $n \times n$ A هم‌ارز سطری I_n است اگر و فقط اگر $\operatorname{rank}(A) = n$.

۲۳) تصویر بردار v را بر بردار u در هر مورد پیدا کنید.

الف) $\mathbf{v} = (۱, ۳)$ و $\mathbf{u} = (۲, ۴)$

ب) $\mathbf{v} = (-۱, ۳, ۴)$ و $\mathbf{u} = (-۱, ۲, ۴)$

۲۴) یک پایه یکّه متعامد برای زیرفضای $\mathbb{R}^۴$ که به‌وسیله $(۱, ۲, ۳, -۱)$، $(۲, ۰, -۱, ۱)$ و $(۳, ۲, ۰, ۱)$ تولید می‌شود بسازید.

۲۵) یک پایه یکّه متعامد برای زیرفضایی از $\mathbb{R}^۳$ متشکل از بردارهایی به‌فرم $(x, y, x + ۲y)$ بسازید.

۲۶) فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^۳$ باشد که دارای پایه $\{(۱, ۱, ۲), (۳, ۱-, ۱)\}$ است. تصویر بردار $(۳, ۱, -۲)$ را روی W بیابید.

۲۷) فاصله نقطه $(۱, ۲, -۴)$ را از زیرفضای بردارهایی به‌فرم $(a, ۳a, b)$ پیدا کنید.

۲۸) ثابت کنید یک ماتریس مربعی A متعامد است اگر و فقط اگر A^t متعامد باشد.

۲۹) بردار $v = (۱, ۳, -۱)$ را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم W زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ متشکل از بردارهای $(a, b, a - ۲b)$ باشد. v را به‌صورت حاصل‌جمع برداری در W و برداری عمود بر W بنویسید.

۳۰) ثابت کنید که هرگاه دو بردار u و v متعامد باشند، مستقل خطی هستند.

۳۱) ثابت کنید هرگاه u بر دو بردار v و w عمود باشند، بر بردار واقع در زیرفضای تولید شده به‌وسیله v و w نیز عمود است.

۵-۱۷ مسأله‌های مختلفه فصل پنج

۱) فرض کنیم V یک فضای برداری و $U_۱$ و $U_۲$ دو زیرفضای V باشند. حاصل‌جمع $U_۱$ و $U_۲$، که با نماد $U_۱ + U_۲$ نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد

$$\boxed{U_۱ + U_۲ = \{u_۱ + u_۲ | u_۱ \in U_۱, u_۲ \in U_۲\}}$$

ثابت کنید $U_۱ + U_۲$ نیز یک زیرفضای V است و $U_i \subset U_۱ + U_۲$، $(i = ۱, ۲)$.

۲) تعریف گفته شده در مسأله (۱) را برای وقتی که n زیرفضای V، یعنی U_1، U_2، ... و U_n در دست است تعمیم دهید. سپس ثابت کنید که $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ کوچکترین زیرفضایی از V است که همه U_iها را در بردارد.

۳) (تعریف) فرض کنیم U_1، U_2، ... و U_n، n زیرفضای V باشند و

$$V = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

بنابراین هر عنصر V را می‌توان به‌فرم

$$u_1 + \cdots + u_n$$

نوشت که $u_j \in U_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

تعریف. هرگاه $V = U_1 + \cdots + U_n$
و هر بردار V مانند v را به‌شکل منحصر به‌فردی به‌صورت

$$v = u_1 + \cdots + u_n$$

بتوان نوشت که در آن $u_j \in U_j$ $(1 \leq j \leq n)$ می‌گوییم V حاصل‌جمع مستقیم زیرفضاهای U_1، ... و U_n است و می‌نویسیم

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus + \ldots \oplus U_n$$

۴) فرض کنیم

$$U = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \ , \ V = \{(0, 0, z) | z \in R\}$$

ثابت کنید که

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus V$$

۵) فرض کنیم U و W دو زیرفضای V باشند. ثابت کنید $V = U \oplus W$ اگر و فقط اگر $V = U + W$ و $U \cap W = \{0\}$.

۶) از احکام ذیل آنهایی را که فکر می‌کنید درست‌اند ثابت کنید و آنهایی را که فکر می‌کنید نادرست‌اند با مثال نقض رد کنید.

الف) فرض کنیم W، $U_۱$ و $U_۲$ زیرفضاهای V باشند به قسمی که

$$U_۱ + W = U_۲ + W$$

در این‌صورت $U_۱ = U_۲$.

ب) فرض کنیم U زیرفضایی از $P(R)$ (فضای چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{R}$) متشکل از همه چندجمله‌ای‌هایی به‌فرم

$$p(z) = az^۲ + bz^۵$$

باشد که $a, b \in R$. زیرفضایی مانند W از $P(R)$ هست به قسمی که

$$P(R) = U \oplus W$$

ج) فرض کنیم $U_۱$، $U_۲$ و W زیرفضاهای V باشند به قسمی که

$$V = U_۱ \oplus W \quad , \quad V = U_۲ \oplus W$$

در این‌صورت $U_۱ = U_۲$.

۷) فرض کنیم U و W زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^۸$ باشند به قسمی که $\dim U = ۳$، $\dim W = ۵$ و $U + W = R^۸$. ثابت کنید $U \cap W = \{۰\}$.

۸) فرض کنیم U و W هر دو زیرفضای $\mathbb{R}^۹$ و از بعد ۵ باشند. ثابت کنید

$$U \cap W \neq \{۰\}$$

۹) هرگاه $U_۱$ و $U_۲$ زیرفضاهایی از V با بعد متناهی باشند، آنگاه

$$\dim(U_۱ + U_۲) = \dim V_۱ + \dim V_۲ - \dim(U_۱ \cap U_۲)$$

۱۰) مسأله ۸ را تعمیم دهید.

۱۱) مسأله ۸ را برای وقتی که + را با $\oplus$ جایگزین کنیم، بیان و اثبات کنید.

هدف‌های آموزشی-رفتاری

خواننده بعد از مطالعه‌ی این فصل باید بتواند:

۱) تعاریف را دانسته و چگونگی محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بلد باشد.

۲) توصیفی هندسی از رابطه‌ی $Ax = \lambda x$ را برای λ حقیقی و λ موهومی ارائه دهد.

۳) دلیل یکی بودن مقادیر ویژه نگاشت خطی نسبت به هر پایه دلخواه را تحلیل کند.

۴) صورت کلی معادله‌ی مفسر و دلیل درستی آن را بیان کند.

۵) زیرفضای ویژه‌ی هر مقدار ویژه را تحلیل و توصیف کند.

۶) نوع عمل ماتریس حقیقی ۲ × ۲ با مقادیر ویژه‌ی مختلط را روی بردار ویژه شرح دهد.

۷) قضایای **گرشگورین** را به کار برده و آنها را ثابت کند.

۸) به سرعت مقادیر ویژه ماتریس‌های اسکالر، قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی را ارائه دهد.

۹) اثبات کند که شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری مخالف صفر بودن همه‌ی مقادیر، ویژه است.

۱۰) همراه با دلیل بیان کند که مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های A^{-1}، A^t، KA، A^m و $A+mI$ را از روی مقادیر ویژه‌ی A به‌دست می‌آیند و در هر حال فرمول مقدار ویژه مطلوب را ارائه کرده بردار ویژه را مشخص کند.

۱۱) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ را ارائه دهد.

۱۲) با دلیل بیان کند که چرا هم علامت بودن b و c در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ وجود مقادیر ویژه‌ی حقیقی متمایز را نتیجه می‌دهد.

۱۳) فرمولی برای زاویه بین راستای بردارهای ویژه ماتریس ۲ × ۲ ارائه دهد.

۱۴) وجود مقادیر ویژه حقیقی برای هر ماتریس متقارن و عمود بودن بردارهای ویژه را برای این ماتریس‌ها ثابت کند.

۱۵) بردارهای ویژه ماتریس‌های قطری و اسکالر را بشناسد.

۱۶) همراه با دلیل بیان کند که اگر مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون ماتریس مساوی s باشد یکی از مقادیر ویژه برابر s است.

۱۷) مقادیر ویژه ماتریس‌های قطر فرعی از مرتبه‌ی فرد را به سرعت ارائه دهد.

۱۸) چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های بلوکی مثلثی را به‌دست آورد.

۱۹) دلایل برابری مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های AB و BA را بیان کند.

۲۰) ارتباطی بین چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی AB و BA به‌دست آورد.

۲۱) ماتریس همراه هر چندجمله‌ای دلخواه را به‌دست آورد.

۲۲) چندگانگی هندسی و جبری مقادیر ویژه و نامساوی بین آنها را همراه با دلیل ارائه دهد.

۲۳) قضیه‌ی **کیلی-هامیلتون** را بیان و اثبات کرده و آن را در پیدا کردن وارون ماتریس‌ها مورد استفاده قرار دهد.

۲۴) روشی را برای محاسبه‌ی A^kX بیان کند.

۲۵) توضیح دهد چگونه از مفهوم مقدار ویژه و بردار ویژه در جمعیت‌شناسی و پیش‌بینی هوا استفاده می‌شود.

۲۶) از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در حل معادلات تفاضلی مرتبه اول استفاده کند.

۲۷) ماتریس‌های متشابه را تعریف و طریقه قطری کردن ماتریس‌ها را همراه با شرایط لازم بیان کند.

۲۸) از قطری کردن ماتریس‌ها در توان رساندن ماتریس‌ها استفاده کند.

۲۹) قطری‌سازی متعامد را تشریح کند.

۳۰) کاربرد قطری کردن را در شناخت نوع مقاطع مخروطی شرح دهد.

فصل ششم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه از مفیدترین عناوین جبرخطی بوده، در بسیاری از سطوح ریاضیات مانند فیزیک، مکانیک، مهندسی الکترونیک، فیزیک اتمی، هیدرودینامیک و آئرودینامیک استفاده می‌شوند. در واقع بعید است بتوان شاخه‌ای کابردی از علوم یافت که در آن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هرگز مورد استفاده واقع نشوند. هر چند شاید عجیب به‌نظر آید مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌ها قبل از ماتریس‌ها مطرح شده است، زیرا به تعبیر **کیلی**[1] بعید است که تئوری ماتریس‌ها (از خلال تئوری دترمینان‌ها) قبل از آنکه تعریف شده باشند توسعه یافته مقادیر ویژه تعریف شده باشند. بنا به نظریه‌ی **موریس کلاین**[2] مقادیر ویژه اساساً در مفهوم فرم‌های درجه دوم و مکانیک عالی (حرکت سیارات) ارائه شده به‌عنوان ریشه‌های مشخصه‌ی معادله‌ی عام شناخته شده‌اند. قبل از آن در سال ۱۷۴۰ **اویلر**[3] به صراحت مقادیر ویژه را برای توصیف هندسی فرم‌های درجه دوم سه متغیره به‌کار برد. در سال ۱۷۶۰ **لاگرانژ**[4] دستگاهی از شش معادله دیفرانسیل را برای حرکت شش سیاره مطالعه کرده از آن معادله‌ای چندجمله‌ای و از درجه‌ی شش به‌دست آورد که ریشه‌های آن مقادیر ویژه‌ی ماتریسی ۶×۶ بودند. **کوشی**[5] در سال ۱۸۲۰ به اهمیت مقادیر ویژه در تعیین محورهای اصلی و فرعی یک فرم nـمتغیره‌ی درجه دوم پی برد. وی همچنین از کشفیات خود در تئوری حرک سیارات استفاده کرد. اولین کسی که عبارات «**مقادیر مشخصه**» و «**معادله‌ی مشخصه**» را برای مقادیر ویژه و معادله اصلی که مقادیر ویژه در آن صدق می‌کنند، به‌کار برد، **کوشی** در سال ۱۸۴۰ بود.

در مطالعه‌ی نگاشت‌های خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این نوع از نگاشت‌ها استفاده کردیم. بدیهی است که این نوع نمایش سهم مهمی در مورد شناخت

1) Cayley   2) Morris Kline   3) Euler   4) Lagranje   5) Cauchy

رفتار آنها به‌خصوص ترکیب‌های متوالی این نگاشت‌ها خواهد داشت.

در آنچه که خواهد آمد هدف آن است که فقط یک نگاشت خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V را انتخاب کرده و با جداکردن آن از بقیه بررسی کنیم که در درون آن چه می‌گذرد. ساده‌ترین راه، بیان این هدف به زبان ماتریس‌هاست:

می‌خواهیم برای نگاشت خطی مفروض T پایه مرتبی در V پیدا کنیم که نسبت به این پایه ماتریس T شکل ساده‌ی منتخبی داشته باشد.

شاید ساده‌ترین ماتریس‌ها از نظر انجام کار روی آنها به‌غیراز ماتریس همانی، ماتریس‌های قطری

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

هستند. اگر T نگاشتی خطی روی فضای n بعدی V باشد و بتوانیم پایه‌ی مرتبی مانند:

$$B = \{x_1, \dots, x_n\}$$

در V بیابیم که در آن T توسط ماتریس قطری بالا نمایش داده شود مسلماً اطلاعات مهمی در مورد T مانند رتبه‌ی آن یا دترمینان T را با یک نگاه به ماتریس D به‌دست می‌آوریم. در ضمن برد و $\ker T$ نیز به‌آسانی به‌دست می‌آید، زیرا ماتریس T نسبت به پایه‌ی مرتب B، D است اگر و تنها اگر

$$T(x_k) = \lambda_k x_k \qquad k = 1, \dots, n$$

و برد مساوی زیرفضای تولید شده توسط x_kهایی است که به‌ازای آنها $\lambda \neq 0$ و $\ker T$ زیرفضای تولید شده به‌وسیله‌ی بقیه‌ی x_kهاست.

از آنچه گذشت در می‌یابیم که اگر پایه‌ای مرتب چون B و ماتریسی قطری چون D می‌شناختیم که ماتریس T نسبت به پایه‌ی B ماتریس D می‌شد می‌توانیم به سؤالات احتمالی در مورد T به‌آسانی پاسخ بدهیم.

برخی سؤالاتی که در پی پاسخ آنها هستیم عبارت‌اند از:

آیا هر نگاشت خطی T می‌تواند توسط ماتریسی قطری در پایه‌ای مرتب نمایش داده شود؟ اگر چنین نیست برای کدام عملگرهای T چنین پایه‌ای وجود دارد؟ در صورت وجود چطور می‌توایم چنین پایه‌ای

را پیدا کنیم؟ اگر چنین پایه‌ای وجود نداشته باشد ساده‌ترین نوع ماتریسی که به‌وسیله‌ی آن می‌توانیم T را نمایش دهیم کدام است؟

مقدمات فوق پیشنهاد می‌کند بردارهایی را در V مطالعه کنیم که توسط T به مضرب‌های اسکالر خودشان نگاشته می‌شوند.

تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و T نگاشتی خطی روی V باشد. یک مقدار ویژه‌ی T اسکالری مانند λ در $\mathbb{F}$ است که برای آن بردار غیرصفری مانند X در V با خاصیت $T(X) = \lambda X$ وجود داشته باشد.

اگر λ یک مقدار ویژه‌ی T باشد آنگاه هر X با خاصیت $T(X) = \lambda X$ یک بردار ویژه‌ی T وابسته‌ی به مقدار ویژه‌ی λ نامیده می‌شود.

مقادیر ویژه، مقادیر سرشت‌نما، ریشه‌های سرشت‌نما، ریشه‌های راکد، مقادیر سره یا مقادیر طیفی هم نامیده می‌شوند.

اگر T نگاشتی خطی و λ اسکالری دلخواه باشد به‌آسانی می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی بردارهای X به‌طوری که $T(X) = \lambda X$ همراه اجتماع با $\{\circ\}$ زیرفضایی از V است. از طرفی این زیرفضا، فضای پوچ نگاشت خطی $(T - \lambda I)$ است. λ را یک مقدار ویژه‌ی T می‌نامیم هرگاه این زیرفضا، زیرفضای صفر نباشد یعنی هرگاه $(T - \lambda I)$ یک‌به‌یک نباشد. اگر فضای زمینه‌ی V با بعد متنهای باشد $(T - \lambda I)$ دقیقاً زمانی یک‌به‌یک نیست که دترمینان آن صفر باشد. خلاصه‌ی این مطلب قضیه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد.

۶-۰-۱ قضیه. فرض کنیم T نگاشتی خطی روی فضای با بعد متناهی V و λ اسکالری دلخواه است. احکام زیر هم‌ارزند:

۱) λ یک مقدار ویژه‌ی T است.

۲) نگاشت $(T - \lambda I)$ معکوس‌پذیر نیست.

۳) $\det(T - \lambda I) = \circ$

معیار دترمینانی (۳) نشان می‌دهد که مقادیر ویژه چگونه جستجو شوند. اگر B پایه‌ی مرتبی برای V بوده A ماتریس T نسبت به این پایه‌ی مرتب باشد آنگاه $(T - \lambda I)$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس $(A - \lambda I)$ معکوس‌پذیر باشد در نتیجه تعریف زیر طبیعی می‌نماید:

تعریف. اگر A ماتریسی $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد یک مقدار ویژه‌ی A در میدان $\mathbb{F}$، اسکالری مانند λ از $\mathbb{F}$ است که ماتریس $(A - \lambda I)$ معکوس‌ناپذیر باشد.

چون λ یک مقدار ویژه‌ی A است اگر و تنها اگر $\det(A - \lambda I) = 0$ یا به‌طور هم‌ارز اگر و تنها اگر $\det(\lambda I - A) = 0$، پس ماتریس $(xI - A)$ را تشکیل داده چندجمله‌ای

$$f(x) = \det(xI - A)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح مقادیر ویژه‌ی A در $\mathbb{F}$ دقیقاً اسکالرهایی چون λ در $\mathbb{F}$ هستند که $f(\lambda) = 0$ باشد.

با استفاده از بسط دترمینان‌ها به‌کمک مفهوم جایگشت‌ها به‌آسانی ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ چندجمله‌ای تکینی است که دقیقاً از درجه‌ی n است. این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای **مفسر** یا **سرشت‌نمای** A می‌نامیم.

لم بعدی ما را قادر می‌سازد که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی که T را در پایه‌ی مرتبی از V نمایش می‌دهد تعریف کنیم، در واقع ماتریس T نسبت به هر پایه‌ی دلخواهی که به‌دست آید مقادیر ویژه‌ای یکسان نتیجه خواهد داد. این مطلب نشان می‌دهد که T نمی‌تواند بیش از n مقدار ویژه‌ی متمایز داشته باشد. البته ممکن است T هیچ مقدار ویژه حقیقی نداشته باشد.

لم. ماتریس متشابه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند.

برهان. اگر $B = P^{-1}AP$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) = \det(xIP^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P)\\ &= \det P^{-1} \times \det(xI - A) \times \det P = \det(xI - A). \qquad \square\end{aligned}$$

۶-۱ بررسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های ۲ × ۲

فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و درایه‌ها حقیقی‌اند، با تشکیل معادله‌ی سرشت‌نمای $\det(\lambda I - A) = ۰$ داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = ۰ \implies (\lambda-a)(\lambda-d)-bc=۰ \implies \lambda^۲-(a+d)\lambda+ad-bc=۰$$

$$\implies \lambda^۲ - tr(A)\lambda + \det A = ۰$$

اگر این معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشد داریم:

$$\begin{cases} \lambda_۱+\lambda_۲ = tr(A) \\ \lambda_۱\lambda_۲ = \det A \end{cases}$$

در صورتی که که از معادله‌ی سرشت‌نمایی بتوان λای حقیقی به‌دست آورد با توجه به تساوی $Ax=\lambda x$ برای بردار ناصفر x، می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{cases} (\lambda-a)x-by=۰ \\ -cx+(\lambda-d)y=۰ \end{cases}$$

حال λ به‌دست آمده را در یکی از معادلات دستگاه همگن بالا قرار داده به‌ازای مقادیر دلخواه x، y را محاسبه کرده Xای غیرصفر برمی‌گزینیم. در این‌صورت یکی از بردارهای ویژه متناظر با λ به‌دست می‌آید. هر مضرب اسکالر این بردار ویژه، برداری ویژه خواهد بود زیرا در حالت کلی اگر $k \neq ۰$ و $Ax=\lambda x$ آنگاه داریم

$$A(kx)=kAx=k(\lambda x)=\lambda(kx)$$

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\lambda^۲-(trA)\lambda+\det A=۰ \implies \lambda_۲-۷\lambda+۱۰=۰ \implies \lambda_۱=۲\,,\ \lambda=۵$$

$$\begin{cases} (\lambda-4)x-y=0 & \lambda_1=2 \Longrightarrow 2x+y=0 \overset{x=1}{\Longrightarrow} y=-2 \\ & \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow m\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ -2x+(\lambda-3)y=0 & \lambda_2=5 \Longrightarrow -x+y=0 \overset{x=1}{\Longrightarrow} y=1 \\ & \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

مثال: فرض کنیم T نگاشتی خطی روی $\mathbb{R}^2$ باشد که در پایه مرتب متعارف با ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شود. مقادیر ویژه T را مشخص کنید.

حل:

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

چون معادله‌ی مفسر دارای ریشه‌ی حقیقی نیست، T هیچ مقدار ویژه‌ی دقیق ندارد.

اگر U نگاشتی خطی روی $\mathbb{C}^2$ باشد که در پایه‌ی مرتب متعارف به‌وسیله‌ی A نمایش داده شود، آنگاه U دارای دو مقدار ویژه‌ی i و $-i$ است.

پس در بحث مربوط به مقادیر ویژه‌ی نگاشت خطی T (یا ماتریس A از آن) تصریح میدان مورد نظر الزامی است. مثلاً در مثال بالا A هیچ مقدار ویژه در $\mathbb{R}$ ندارد اما دو مقدار ویژه i و $-i$ در $\mathbb{C}$ دارد.

تذکر: با توجه به آنکه ماتریس هر تبدیل T در صفحه ماتریسی دودردو است تساوی $T(X)=\lambda X$ یا به‌طور معادل $AX=\lambda X$ با $\lambda \in \mathbb{R}$ در صفحه به این معنی است که T راستای (بردار ویژه) X را تغییر نمی‌دهد. پس اگر ماتریسی با درایه‌های حقیقی راستای همه‌ی بردارهای صفحه را تغییر دهد فاقد مقدار ویژه حقیقی و بردار ویژه است و بالعکس.این بحث در حالت کلی نیز صحیح است، در حالت کلی راستای AX و X متفاوت است اما اگر AX و X بردارهایی موازی باشند عدد حقیقی λ وجود دارد به‌طوری که $AX=\lambda X$.

نتیجه. در بین ماتریس‌های دوران، فقط ماتریس دوران به اندازه‌ی $K\pi$ دارای مقدار ویژه‌ی حقیقی و بردار ویژه است.

مثال: حدود m را به قسمی تعیین کنید که ماتریس زیر راستای همه‌ی بردارهای صفحه را تغییر دهد.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ m & ۳ \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس A باید فاقد مقدار ویژه‌ی حقیقی باشد

$$\lambda^۲ - (trA)\lambda + |A| = ۰ \Longrightarrow \lambda^۲ - ۲\lambda - ۳ + ۲m = ۰$$

$$\Delta' < ۰ \Longrightarrow ۱ + ۳ - ۲m < ۰ \Longrightarrow m > ۲$$

ایده‌ی نگاشتی که برداری مفروض را به برداری موازی با آن می‌نگارد در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، در مورد مدل‌های فیزیکی مانند انرژی اتم سهم مهمی دارد.

۶-۲ بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های ۳ × ۳

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ با تشکیل معادله سرشت‌نمای $\det(\lambda I - A) = ۰$ داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -c \\ -d & \lambda - e & -f \\ -g & -h & \lambda - i \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Longrightarrow (\lambda - a)\begin{vmatrix} \lambda - e & -f \\ -h & \lambda - i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -d & -f \\ -g & \lambda - i \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} -d & \lambda - e \\ -g & -h \end{vmatrix} = ۰$$

$$(\lambda - a)[\lambda^۲ - (e+i)\lambda + ei - hf] + b(-d\lambda + di - gf) - c(dh + g\lambda - gc) = ۰$$

$$\lambda^۳ - (e+i)\lambda^۲ + ei\lambda - hf\lambda - a\lambda^۲ + ae\lambda + ai\lambda - aei + ahf$$
$$- bd\lambda + bdi - bgf - cdh - cg\lambda + cge = ۰$$

$$\lambda^۳ - (a+e+i)\lambda^۲ + (ci - hf + ae + ai - bd - cg)\lambda - |A| = ۰$$

در نتیجه:

$$\lambda^{3} - (|a| + |e| + |i|)\lambda^{2} + (\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix})\lambda - |A| = 0$$

که در آن منظور از $|a|$ و $|e|$ و $|i|$ دترمینان ماتریس‌های یک‌دریک است. توجه داریم که ضریب λ مجموع دترمینان‌های ماتریس‌هایی 2×2 است که قطر اصلی آنها تعدادی از عناصر قطر اصلی ماتریس A می‌باشد. (دو عنصر از میان سه عنصر قطر اصلی A).

بنابراین معادله‌ی سرشت‌نمایی هر ماتریس 3×3، A به‌صورت کلی زیر است:

$$\lambda^{3} - (trA)\lambda^{2} + (\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix})\lambda - |A| = 0$$

با توجه به آنکه هر معادله از درجه‌ی سه لااقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد، در نتیجه هر ماتریس سه در سه با درایه‌های حقیقی در میدان $\mathbb{R}$ لااقل یک مقدار ویژه‌ی حقیقی دارد. حالات دیگر سه مقدار ویژه‌ی حقیقی متمایز یا یک مقدار ویژه حقیقی مضاعف، یک مقدار ویژه حقیقی ساده می‌باشند.

در هر یک از حالت‌های ذکر شده مقدار ویژه حقیقی به‌دست آمده را در دستگاه همگن $AX = \lambda X$ یعنی دستگاه مقابل قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by - cz = 0 \\ -dx + (\lambda - c)y - fz = 0 \\ -gx - hy + (\lambda - i)z = 0 \end{cases}$$

حال کافی است جواب‌های غیرصفر این دستگاه همگن را در هر حالت جستجو کنیم تا بردارهای ویژه وابسته به مقدار ویژه‌ی متناظر به‌دست آیند.

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ را مشخص کنید.

حل:

$$trA = 5 \, , \; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \; , \; |A| = 0$$

$$\lambda^{3} - 5\lambda^{2} + 0\lambda + 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda^{3} - 5\lambda^{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^{2}(\lambda-5)=0 \Longrightarrow \lambda=0 \text{ یا } \lambda=5$$

$$\begin{cases}(\lambda-1)x+2z=0\\ \lambda y=0\\ 2x+(\lambda-4)z=0\end{cases}$$

$$\lambda=0 \Longrightarrow x=2z \Longrightarrow (2k,m,k) \quad \text{صورت کلی بردار ویژه}$$

$$X_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad X_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{بردارهای ویژه‌ی (مستقل خطی)}$$

$$\lambda=5 \Longrightarrow \begin{cases}-2x=z\\ y=0\end{cases} \Longrightarrow (a,0,-2a) \Longrightarrow X_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} \quad \text{بردار ویژه}$$

قضیه بعد با استفاده از حکم کلی $\det(\lambda I-A)=0$ برای به‌دست آوردن معادله‌ی مفسر، فرم آن را برای هر ماتریس دلخواه $n\times n$، A نتیجه می‌دهد. فرض کنیم

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

با استفاده از بسط جایگشتی متناوب دترمینان‌ها (مجموع متناوب جملاتی که هر جمله حاصل‌ضرب درایه‌هایی است که از هر سطر و ستون انتخاب می‌شوند) جمله‌ای از $f(\lambda)$ که بزرگترین درجه را برای λ دارد از عبارت

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\dots(\lambda-a_{nn})$$

به‌دست آمده مساوی λ^n است. جملات با درجه‌ی $n-1$ نیز از همان عبارت بالا به‌دست می‌آیند. بنابراین ضریب λ^{n-1} برابر است با

$$-(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})=-tr(A)$$

جمله‌ی ثابت $f(\lambda)$ نیز با قرار دادن $\lambda = 0$ در $f(x) = \det(\lambda I - A)$ به‌دست می‌آید که برابر $(-1)^n|A|$ است و در نتیجه

$$f(\lambda) = \lambda^n - trA)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$$

توصیف بقیه ضرایب در چندجمله‌ای مشخصه آسان نیست، این ضرایب در واقع برحسب زیردترمینان‌های $\det A$ قابل بیان هستند. به‌عنوان مثال جمله‌های شامل λ^{n-2} را در نظر می‌گیریم. این جمله‌ها به‌دو صورت پدید می‌آیند: از عبارت $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn})$ و یا از حاصل‌ضرب‌هایی شبیه

$$-a_{12}a_{21}(\lambda - a_{33})\dots(\lambda - a_{nn})$$

بنابراین ضرایب λ^{n-2} از نوع $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ بوده در نتیجه این ضریب، مجموع همه‌ی دترمینان‌های 2×2 به‌فرم $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$ با $i < j$ می‌باشد.

۶-۲-۱ قضیه. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد معادله‌ی مشخصه‌ی آن به‌فرم ذیل است

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \cdots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n|A| = 0$$

که در آن s_m (برای $m = 1, 2, \dots, n-1$) برابر است با حاصل‌ضرب $(-1)^m$ در مجموع همه‌ی کهادهای اصلی $m \times m$ ماتریس A (**کهاد اصلی** کهادی است که درایه‌های روی قطر آن بخشی از عناصر روی قطر A هستند یعنی در کهادهای $m \times m$ ماتریس A، m عنصر از میان n عنصر روی قطر A انتخاب می‌شوند).

برهان. $f(\lambda)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \dots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & 0 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

هر درایه یک دوجمله‌ای می‌شود. بنابه خواص دترمینان حاصل دترمینان بالا مجموع 2^n دترمینان $n \times n$ است. یکی از آنها λ را روی قطر اصلی داشته بقیه درایه‌هایش صفر هستند مقدار آن λ^n می‌باشد. یکی دیگر از این دترمینان‌ها مستقل از λ بوده مقدار آن $(-1)^n|A|$ است. مابقی دترمینان‌ها شامل m ستون

$(m = 1, 2, \dots, n-1)$ از $(-A)$ و $n-m$ ستون دیگر است صورتی که هر یک از ستون‌ها شامل دقیقاً یک λ ناصفر می‌باشد. یکی از این دترمینان‌ها را در نظر گرفته ستون‌هایی از آن را که مساوی ستون‌های $(-A)$ هستند با $i_1, i_2, \dots, i_m$ شماره‌گذاری می‌کنیم. بعد از جابه‌جایی سطرهای مجاور و ستون‌های مجاور به دفعات زوج، دترمینان ذکر شده به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(-1)^m \left| \begin{array}{cccc:cccc} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_m} & & & & \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_m} & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & & \\ a_{i_m i_1} & a_{i_m i_2} & \dots & a_{i_m i_m} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n i_1} & a_{i_n i_2} & \dots & a_{i_n i_m} & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{array} \right| = (-1)^m \left| A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{i_1 i_2 \dots i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

که در آن $\left| A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{i_1 i_2 \dots i_m} \right|$ یک کهاد اصلی $m \times m$ از A است. حال می‌توان نوشت

$$S_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left| A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{i_1 i_2 \dots i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

در این تساوی $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ در $\rho = C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m}$ ترکیب m حرف از میان n حرف تغییر می‌کند.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی قبل $\det(\lambda I - A)$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: داریم:

$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= ۸ - ۳ + ۲ - ۵ + ۱۶ - ۹ = ۹$$

$$s_۲ = \text{تعداد کهادهای } = C_۴^۲ = \frac{۴!}{۲!۲!} = ۶$$

$$s_۳ = \begin{vmatrix} ۱ & -۴ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۵ \\ -۱ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & -۴ & -۴ \\ ۲ & ۰ & -۴ \\ -۱ & ۴ & ۶ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۴ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ -۱ & -۱ & ۶ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۰ & ۵ & -۴ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ & ۶ \end{vmatrix}$$

$$= -۳ + ۱۶ - ۸ + ۲ = ۷$$

$$s_۳ = \text{تعداد کهادهای } = C_۴^۳ = \frac{۴!}{۳!۱!} = ۴$$

$$|A| = ۲$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^۴ - ۵\lambda^۳ + ۹\lambda^۲ - ۷\lambda + ۲$$

مثال: فرض کنیم A ماتریسی ۳×۳ و $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ باشد. با استفاده از دستور مشتق دترمینان $f'(\lambda)$، $f''(\lambda)$ و $f'''(\lambda)$ را به‌دست آورده و نتایج را ساده کنید. در مورد مشتقات مراتب بالاتر $f(\lambda)$ چه می‌توان گفت؟

حل: چون $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۲} & -a_{۱۳} \\ -a_{۲۱} & \lambda - a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix}$ می‌توان نوشت:

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -a_{۲۱} & \lambda - a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۲} & -a_{۱۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۲} & -a_{۱۳} \\ -a_{۲۱} & \lambda - a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۲} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۳} \\ -a_{۳۱} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۲} \\ -a_{۲۱} & \lambda - a_{۲۲} \end{vmatrix}$$

$= (\lambda I - A)$مجموع همه‌ی کهادهای ۲×۲ اصلی ماتریس

$$f''(\lambda) = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ -a_{۳۲} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ -a_{۳۱} & \lambda - a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۳} \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ -a_{۲۱} & \lambda - a_{۲۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{۱۱} & -a_{۱۲} \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲[(\lambda - a_{۱۱}) + (\lambda - a_{۲۲}) + (\lambda - a_{۳۳})]$$

$$= ۲! \times (\text{مجموع همه‌ی کهادهای ۱ × ۱ اصلی ماتریس } \lambda I - A)$$

$$f'''(\lambda) = ۳! \implies f^{(۴)}(\lambda) = f^{(۵)}(\lambda) = \cdots = ۰$$

مثال: ثابت کنید اگر λ مقدار ویژه‌ی ناصفری از ماتریس نامنفرد $n \times n$، A باشد آنگاه $\frac{\det}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ای از $\mathrm{adj}A$ است.

حل: بنابر قضیه‌ی قبل

$$\lambda^n + \xi_۱ \lambda^{n-۱} + \cdots + \xi_{n-۱}\lambda + (-۱)^n \det A = ۰ \qquad (*)$$

که در آن s_i $(i = ۱, ۲, \ldots, n-۱)$ مساوی $(-۱)^i$ ضربدر مجموع همه‌ی کهادهای اصلی $i \times i$ ماتریس A است و

$$(\mu I - \mathrm{adj}A) = \mu^n + s_۱ \mu^{n-۱} + \cdots + s_{n-۱}\mu + (-۱)^n |\mathrm{adj}A|$$

که در آن s_j $(j = ۱, ۲, \ldots, n-۱)$ مساوی $(-۱)^j$ ضربدر مجموع همه‌ی کهادهای اصلی $j \times j$ ماتریس $\mathrm{adj}A$ است. می‌دانیم $|\mathrm{adj}A| = |A|^{n-۱}$ و بنا به تعریف ξ_i و s_j داریم:

$$s_۱ = (-۱)^n \xi_{n-۱}, s_۲ = (-۱)^n |A| \xi_{n-۲}, \ldots, s_{n-۱} = (-۱)^n |A|^{n-۲} \xi_۱$$

در نتیجه

$$|\mu I - \mathrm{adj}A| = (-۱)^n \Big\{ (-۱)^n \mu^n + \xi_{n-۱}\mu^{n-۱} + \xi_{n-۲}|A|\mu^{n-۲} + \ldots$$
$$+ \xi_۲ |A|^{n-۳}\mu^۲ + \xi_۱ |A|^{n-۲}\mu + |A|^{n-۱} \Big\}$$

و

$$|A|^{۱-n} |\mu I - \mathrm{adj}A| = (-۱)^n \Big\{ ۱ + \xi_۱ \frac{\mu}{|A|} + \cdots + \xi_{n-۱} (\frac{\mu}{|A|})^{n-۱} + (-۱)^n (\frac{\mu}{|A|})^n |A| \Big\}$$
$$= f(\mu)$$

حال می‌توان نوشت

$$f(\frac{|A|}{\lambda}) = (-۱)^n \Big\{ ۱ + \xi_۱ \frac{۱}{\lambda} + \cdots + \xi_{n-۱} (\frac{۱}{\lambda})^{n-۱} + (-۱)^n (\frac{۱}{\lambda})^n |A| \Big\}$$

$$\lambda^n f(\frac{|A|}{\lambda}) = (-1)^n\Big\{\lambda^n + \xi_1\lambda^{n-1} + \cdots + \xi_{n-1}\lambda + (-1)^n \det A\Big\} \stackrel{*}{=} (-1)^n \times 0 = 0$$

بنابراین $\frac{|A|}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ای از $\mathrm{adj}A$ است.

مثال: ابتدا ثابت کنید معادله‌ی مفسر هر ماتریس متعامد معادله‌ای معکوسه است سپس با ا ستفاده از آن نشان دهید مقادر ویژه ماتریس‌های متعامد قدرمطلقی مساوی یک دارند.

حل: فرض کنیم p ماتریسی متعامد باشد در این‌صورت $pp^t = I$ و $|p| = \pm 1$ است و می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - p| = |\lambda p I p^t - p| = |-p\lambda(\frac{1}{\lambda}I - p^t)| = \lambda^n|-p||\frac{1}{\lambda}I - p^t| \\ &= \pm\lambda^n|\frac{1}{\lambda}I - p| = \pm\lambda^n f(\frac{1}{\lambda}) \end{aligned}$$

پس معادله مفسر معادله‌ای معکوسه است و در نتیجه بنا به خواص معادلات معکوسه ریشه‌هایش قدرمطلقی مساوی یک دارند.

۶-۲-۲ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و λ مقدار ویژه‌ای از A باشد. مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با λ همراه با بردار صفر، زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است. این زیرفضا را فضای ویژه‌ی λ می‌نامیم.

برهان. برای آنکه نشان دهیم فضای ویژه، زیرفضای برداری است باید ثابت کنیم نسبت به ضرب اسکالر و جمع بردارها بسته است.

فرض کنیم X_1 و X_2 بردارهایی از فضای ویژه‌ی λ و c یک اسکالر باشد. در این‌صورت

$$AX_1 = \lambda X_1 \quad , \quad AX_2 = \lambda X_2$$

در نتیجه:

$$AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2 \implies A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$$

پس $x_1 + x_2$ عنصری از فضای ویژه است.

$$Ax_1 = \lambda x_1 \Longrightarrow cAx_1 = c\lambda x_1 \Longrightarrow A(cx_1) = \lambda(cx_1)$$

یعنی فضای ویژه نسبت به ضرب اسکالر نیز بسته است. □

مثال: پایه‌ای از فضاهای ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ به‌دست آورید.

حل:

$$|A - \lambda I_۳| = \begin{vmatrix} ۵-\lambda & ۴ & ۲ \\ ۴ & ۵-\lambda & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲-\lambda \end{vmatrix} \overset{-r_۲+r_۱}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} ۱-\lambda & -۱+\lambda & ۰ \\ ۴ & ۵-\lambda & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲-\lambda \end{vmatrix} \overset{c_۱+c_۲}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۹-\lambda & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۲-\lambda \end{vmatrix} = (۱-\lambda)[(۹-\lambda)(۲-\lambda) - ۸]$$

$$= (۱-\lambda)(\lambda^۲ - ۱۱\lambda + ۱۰) = (۱-\lambda)(\lambda - ۱۰)(\lambda - ۱)$$

$$= -(\lambda - ۱۰)(\lambda - ۱)^۲$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از: ۱ یا ۱۰ $= \lambda$. با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی $(A - \lambda I_۳)x = ۰$ داریم:

$$(A - ۱۰ I_۳)x = ۰ \Longrightarrow \begin{bmatrix} -۵ & ۴ & ۲ \\ ۴ & -۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow x_۱ = x_۲ = ۲r\,,\ x_۳ = ۳$$

پس فضای ویژه‌ی ۱۰ $= \lambda$ فضایی تک‌بعدی از بردارهایی به‌فرم $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} r$ است.

$$(A - ۱ I_۳)x = ۰ \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۲ \\ ۴ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow x_۱ = -s - t\,,\ x_۲ = s\,,\ x_۳ = ۲t$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ ۲t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ ۰ \\ ۲t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه فضای ویژه‌ی ۱ $= \lambda$ فضایی دوبعدی با پایه $B = \left\{ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$ است.

تذکر: اگر مقدار ویژه kبار به‌عنوان ریشه معادله مشخصه تکراری باشد می‌گوییم چندگانگی k دارد. در مثال قبل $\lambda = ۱۰$ و $\lambda = ۱$ به‌ترتیب چندگانگی یک و دو دارند.

۶-۳ مقادیر ویژه‌ی مختلط

چون معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس $n \times n$ معادله‌ای درجه n است‌با محسوب کردن ریشه‌های احتمالی مختلط و شمارش ریشه‌های مکرر، دقیقاً n ریشه خواهد داشت. نشان می‌دهیم که اگر معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس A تعدادی ریشه‌ی مختلط داشته باشد این ریشه‌ها اطلاعاتی مهم در مورد A مطرح می‌سازند. فرض کنیم A روی فضای $\mathbb{C}^n$ از nـتایی‌های مختلط عمل کند. منظور تعمیم نتایج قبلی نیست (هر چند از خواصی از قبیل $A(cx + dy) = cAx + dAy$ برای ماتریس $m \times n$ با درایه‌های مختلط و $x, y \in \mathbb{C}^n$ و $c, d \in \mathbb{C}$ استفاده خواهیم کرد). مطالعه مقادیر ویژه‌ی مختلط از این نقطه نظر اساسی است که اطلاعات پنهان و غیرآشکار در مورد ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی پوشش داده نمی‌شوند. این مطالعات در بررسی سیستم‌های دینامیکی حقیقی و بعضی دوران‌ها در فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مشابه تعاریف حالت حقیقی، اسکالر مختلط λ در $\det(A - \lambda I) = ۰$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر بردار ناصفر X در $\mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری که $AX = \lambda X$. λ را مقادیر ویژه‌ی مختلط و X را بردار ویژه‌ی مختلط متناظر با λ می‌نامیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آنگاه معادله‌ی مشخصه‌ی A، $\lambda^۲ + ۱ = ۰$ است که ریشه‌ای حقیقی ندارد. تنها ریشه‌های مختلط $\lambda = i$ و $\lambda = -i$ هستند و اگر A روی $\mathbb{C}^۲$ عمل کند آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ ۱ \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} ۱ \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ ۱ \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} ۱ \\ i \end{bmatrix}$$

پس i و $-i$ مقادیر ویژه و $\begin{bmatrix} ۱ \\ -i \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ i \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه هستند.

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۰/۵ & -۰/۶ \\ ۰/۷۵ & ۱/۱ \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه‌ی A را به‌دست آورده پایه‌ای برای هر فضای ویژه مشخص کنید.

حل: معادله‌ی مشخصه‌ی عبارت است از $\lambda^{۲} - ۱{,}۶\lambda + ۱ = ۰$ و در نتیجه

$$\lambda = \frac{۱}{۲}[۱{,}۶ \pm \sqrt{(-۱{,}۶)^{۲} - ۴}] = ۰{,}۸ \pm ۰{,}۶i$$

برای $\lambda = ۰{,}۸ - ۰{,}۶i$ داریم:

$$A - (۰{,}۸ - ۰{,}۶i)I = \begin{bmatrix} -۰{,}۳ + ۰{,}۶i & -۰{,}۶ \\ ۰{,}۷۵ & ۰{,}۳ + ۰{,}۶i \end{bmatrix}$$

این ماتریس معکوس‌پذیر نیست بنابراین سطرها به‌عنوان بردارهایی در $\mathbb{C}^{۲}$ وابسته خطی‌اند و در نتیجه یک سطر مضربی (مختلط) از دیگری است:

$$\begin{cases} (-۰{,}۳ + ۰{,}۶i)x - ۰{,}۶y = ۰ \\ ۰{,}۷۵x + (۰{,}۳ + ۰{,}۶i)y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۰{,}۷۵x = (-۰{,}۳ - ۰{,}۶i)y \\ x = (-۰{,}۴ - ۰{,}۸i)y \end{cases}$$

فرض کنیم؛ $y = ۵$ در این‌صورت $x = -۲ - ۴i$ و از آنجا پایه‌ای برای فضای بردار ویژه‌ی وابسته به $\lambda = ۰{,}۸ - ۰{,}۶i$ عبارت است از $v_{۱} = \begin{bmatrix} -۲ - ۴i \\ ۵ \end{bmatrix}$. محاسبه‌ای مشابه برای $\lambda = ۰{,}۸ + ۰{,}۶i$ نتیجه می‌دهد $v_{۲} = \begin{bmatrix} -۲ + ۴i \\ ۵ \end{bmatrix}$.

به‌عنوان یک بررسی ساده داریم:

$$Av_{۲} = \begin{bmatrix} ۰{,}۵ & -۰{,}۶ \\ ۰{,}۷۵ & ۱{,}۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ + ۴i \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ + ۲i \\ ۴ + ۳i \end{bmatrix} = (۰{,}۸ + ۰{,}۶i)v_{۲}$$

با اندکی توجه، ماتریس A در مثال بالا نگاشت $X \longmapsto AX$ را ارائه می‌دهد که اساساً یک دوران است. این واقعیت هنگامی‌که نقاط مقتضی رسم شوند بدیهی به‌نظر می‌آید.

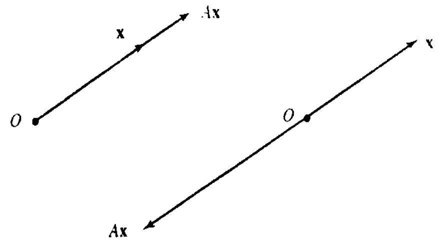
مثال: یک راه مشاهده‌ی تأثیر چگونگی ضرب A در مثال قبل، در نظرگرفتن نقطه اولیه‌ای دلخواه مانند $X_{۰} = (۲, ۰)$ و رسم نقاط حاصل از اثرکردن پی‌درپی A روی هر نقطه حاصل از تأثیر است. یعنی:

$$X_{۱} = AX_{۰} = \begin{bmatrix} ۰{,}۵ & -۰{,}۶ \\ ۰{,}۷۵ & ۱{,}۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱{,}۵ \end{bmatrix}$$

$$X_{۲} = AX_{۱} = \begin{bmatrix} ۰{,}۵ & -۰{,}۶ \\ ۰{,}۷۵ & ۱{,}۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱{,}۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰{,}۴ \\ ۲{,}۴ \end{bmatrix}$$

$$X_{۳} = AX_{۲} = \dots$$

با رسم این نقاط مداری بیضی شکل به‌دست می‌آید:



شکل ۶ـ۱

البته این شکل دلیل دوران را نشان نمی‌دهد. راز دوران در قسمت‌های حقیقی و آ موهومی مقدار ویژه‌ای مختلط نهفته است.

۶-۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی بردارها

مزدوج مختلط بردار مختلط X در $\mathbb{C}^n$ بردار $\bar{X}$ در $\mathbb{C}^n$ است که مؤلفه‌های آن مزدوج مختلط درایه‌های X هستند. قسمت‌های حقیقی و موهومی بردار مختلط X بردارهای $\mathrm{Re}X$و $\mathrm{Im}\,X$ هستند که از قسمت‌های حقیقی و موهومی مؤلفه‌های X ساخته می‌شوند.

مثال: اگر $X = \begin{bmatrix} ۳-i \\ i \\ ۲+۵i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ آنگاه

$$\mathrm{Re}X = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Im}\,X = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳+i \\ -i \\ ۲-۵i \end{bmatrix}$$

اگر B ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های مختلط احتمالی باشد آنگاه $\bar{B}$ نشان دهنده‌ی ماتریسی است که درایه‌هایش مزدوج مختلط درایه‌های B هستند. خواص مزدوج اعداد مختلط به مزدوج ماتریس‌ها القا می‌شود و داریم:

$$\overline{rX} = \bar{r}\bar{X} \quad , \quad \overline{BX} = \bar{B}\bar{X} \quad , \quad \overline{BC} = \bar{B}\bar{C} \quad , \quad \overline{rB} = \bar{r}\bar{B}$$

$$(\bar{B})' = \overline{(B')}$$

۶-۵ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریسی حقیقی که روی $\mathbb{C}^n$ عمل می‌کند

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ است که درایه‌هایش حقیقی می‌باشند، داریم $\overline{AX} = \bar{A}\bar{X} = A\bar{X}$. اگر λ مقدار ویژه‌ای از A و X بردار ویژه‌ی متناظرش در $\mathbb{C}^n$ باشد آنگاه

$$A\bar{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

در نتیجه $\bar{\lambda}$ نیز مقدار ویژه‌ای از A بوده $\bar{X}$ بردار ویژه‌ی متناظرش است. بنابراین وقتی A حقیقی است مقادیر ویژه‌ی مختلط آن در جفت‌های مزدوج ظاهر می‌شود.

مثال: همان‌طورکه دیدیم مقادیر ویژه‌ی ماتریس حقیقی $A = \begin{bmatrix} ۰٫۵ & -۰٫۶ \\ ۰٫۷۵ & ۱٫۱ \end{bmatrix}$ اعداد $۰٫۸ - ۰٫۶i$ و $۰٫۸ + ۰٫۶i$ بوده مزدوج یکدیگرند. بردارهای ویژه متناظر به‌دست آمده نیز،

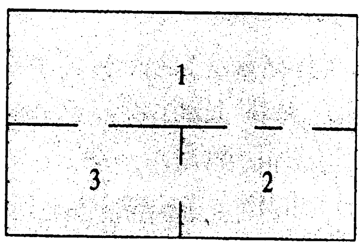
$$v_۱ = \begin{bmatrix} -۲ - ۴i \\ ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad v_۲ = \begin{bmatrix} -۲ + ۴i \\ ۵ \end{bmatrix} = \bar{v}_۱$$

هستند که بازهم مزدوج می‌باشند.

مثال: اگر $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ، a و b حقیقی و هر دو صفر نباشد آنگاه مقادیر ویژه‌ی C، $\lambda = a \pm bi$ هستند. همچنین اگر $r = |\lambda| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ باشد آنگاه

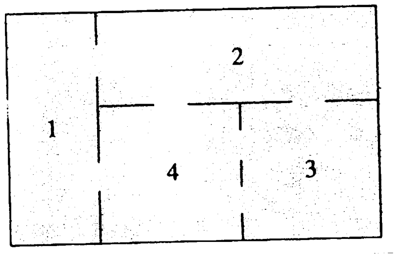
$$C = r\begin{bmatrix} \frac{a}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & ۰ \\ ۰ & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

است که در آن φ زاویه بین جهت مثبت محور xها و شعاع وصل شده از $(۰, ۰)$ به (a, b) می‌باشد.



شکل ۶-۲

زاویه‌ی φ شناسه‌ی $\lambda = a + ib$ نامیده می‌شود. بنابراین تبدیل $X \longmapsto CX$ می‌تواند ترکیب یک دوران به اندازه‌ی زاویه‌ی φ و سپس ضرب در $|\lambda|$ فرض شود.



شکل ۶ـ۳

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۰٫۵ & -۰٫۶ \\ ۰٫۷۵ & ۱٫۱ \end{bmatrix}$ و $\lambda = ۰٫۸ - ۰٫۶i$ و $v_۱ = \begin{bmatrix} -۲ - ۴i \\ ۵ \end{bmatrix}$ در ضمن P ماتریس ۲ × ۲ حقیقی $P = [\mathrm{Re}\, v_۱ \ \mathrm{Im}\, v_۱] = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ و

$$C = P^{-۱}AP = \frac{۱}{۲۰}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰٫۵ & -۰٫۶ \\ ۰٫۷۵ & ۱٫۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۸ & -۰٫۶ \\ ۰٫۶ & ۰٫۸ \end{bmatrix}$$

باشد. بنابر مثال قبل C یک دوران است زیرا $۱ = (۰٫۶)^۲ + (۰٫۸)^۲ = |\lambda|^۲$. از $C = P^{-۱}AP$ داریم:

$$A = PCP^{-۱} = P\begin{bmatrix} ۰٫۸ & -۰٫۶ \\ ۰٫۶ & ۰٫۸ \end{bmatrix}P^{-۱}$$

اینجا دورانی درون A است! ماتریس P تعویض متغیری مانند $X = Pu$ می‌باشد. عمل A را می‌توان یک تعویض متغیر از X به u و سپس یک دوران و در نهایت برگشت به متغیر اولیه به حساب آورد.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-۱}", "\text{تعویض‌پذیر}"'] & AX \\ u \arrow[r, "C", "\text{دوران}"'] & Cu \arrow[u, "P", "\text{تعویض‌متغیر}"'] \end{tikzcd}$$

قضیه بعدی نشان می‌دهد که محاسبات مثال قبل را می‌توان به هر ماتریس حقیقی ۲ × ۲، A که دارای مقدار ویژه‌ای مختلط ماندد λ است تعمیم داد. از جزئیات اثبات صرف‌نظر کرده خاطر نشان می‌سازیم که در برهان قضیه از این واقعیت که اگر A درایه‌هایی حقیقی داشته باشد آنگاه

$$A(\mathrm{Re}X) = \mathrm{Re}AX$$

$$A(\operatorname{Im} X) = \operatorname{Im} AX$$

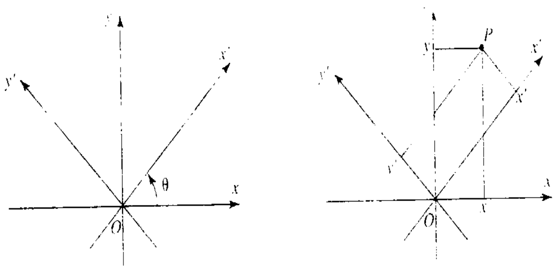
است، استفاده می‌شود. ضمناً اگر X برداری ویژه برای مقدار ویژه‌ای مختلط باشد آنگاه $\operatorname{Re}X$ و $\operatorname{Im} X$ در $\mathbb{R}^۲$ مستقل خطی‌اند.

۶-۵-۱ قضیه. فرض‌کنیم A ماتریسی حقیقی ۲ × ۲ با مقدار ویژه مختلط $\lambda = a - ib$ ($b \neq ۰$) و بردار ویژه متناظر $v \notin \mathbb{C}^۲$ باشد. در این‌صورت $A = PCP^{-۱}$ است که در آن $P = [\operatorname{Re} v \operatorname{Im} v]$ و $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

آنچه که در مثال قبل وقوع یافت در بعدهای بزرگتر نیز صحیح است. برای مثال اگر A ماتریسی ۳ × ۳ با مقدار ویژه‌ای مختلط باشد آنگاه صفحه‌ای در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارد که در آن A به‌عنوان یک دوران (احتمالاً با ضرب در یک اسکالر) عمل می‌کند. هر بردار در این صفحه به نقطه‌ای دیگر روی همین صفحه دوران می‌یابد. می‌گوییم صفحه تحت A پایدار است.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰/۸ & -۰/۶ & ۰ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱/۰۷ \end{bmatrix}$ دارای مقادیر ویژه‌ی $۰/۸ \pm ۰/۶i$ و ۱/۰۷ است. هر بردار در صفحه‌ی xoy (با سومین مؤلفه‌ی صفر) به‌وسیله‌ی A به نقطه‌ای دیگر در این صفحه دوران می‌یابد.

هر بردار غیرواقع در این صفحه با مؤلفه‌ی سوم z در ۱/۰۷ ضرب می‌شود. نقاط حاصل از تأثیر A روی نقاط $w_۰ = (۲, ۰, ۰)$ و $X_۰ = (۲, ۰, ۱)$ در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



شکل ۶ـ۴

تذکر: اگر A ماتریسی با درایه‌های حقیقی و بردارهای ویژه‌ی متمایز باشد ممکن است مقادیر ویژه‌ی A موهومی باشند.

هم چنان که تاکنون دیده‌ایم یافتن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس معادل پیدا کردن ریشه‌های معادله‌ای از درجه n است، در حالت $n \geq ۳$ ممکن است به‌دست آوردن این ریشه‌ها مشکل باشد. به‌خاطر اهمیت مقادیر ویژه در بسیاری از مباحث ریاضیات، روش‌های عددی و برنامه‌های کامپیوتری زیادی برای تقریب آنها وجود دارد. معمولاً این روش‌ها کوششی برای حل معادله‌ی مشخصه نیست؛ بلکه به‌جای آن ماتریس را به‌صورتی تبدیل می‌کند که مقادیر ویژه به‌راحتی قابل محاسبه باشند. قضیه‌ی بعد ما را قادر می‌سازد که به سرعت تقریب‌های سطری مقادیر ویژه را به‌دست آوریم. مقادیر ویژه را نقاط صفحه در نظر خواهیم گرفت. یادآوری می‌کنیم که عدد مختلط $a + bi$ می‌تواند نقطه‌ی (a, b) فرض شود.

۶-۶ قضیه گرشگورین[1]

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد. برای $k = ۱, ۲, \ldots, n$ گیریم

$$r_k = \sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

فرض کنیم C_k دایرهٔ به شعاع r_k و به مرکز (α_k, β_k) است که در آن $a_{kk} = \alpha_k + \beta_k i$ می‌باشد. در این‌صورت هر مقدار ویژه‌ی A وقتی به‌عنوان نقطه‌ای از صفحه در نظر گرفته شود روی مرز یا داخل یکی از دایره‌های $C_۱, \ldots, C_n$ قرار می‌گیرد.

توضیح دایره‌های $C_۱, \ldots, C_n$ دایره‌های **گرشگورین** A نامیده می‌شوند. شعاع kامین دایره مجموع قدرمطلق‌های درایه‌های سطر kام از A به‌جز a_{kk} است. یعنی

$$r_k = |a_{k۱}| + \cdots + |a_{kk-۱}| + |a_{kk+۱}| + \cdots + |a_{kn}|$$

مرکز kامین دایره عدد مختلط a_{kk} است که به‌عنوان نقطه‌ای در صفحه فرض می‌شود. (اگر a_{kk} حقیقی باشد مرکز این دایره روی‌محور طول‌هاست). اگر دایره‌های **گرشگورین** رسم شده درون آنها هاشور زده شود، مقادیر ویژه‌ی A به‌عنوان نقاط صفحه باید در ناحیه سایه‌خورده یا روی مرز یکی از دایره‌ها قرار گیرد.

برهان: فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای از A و $X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بردار ویژه‌ی متناظر است. گیریم مؤلفه‌ای از X که دارای بزرگترین مقدار قدرمطلق است X_k باشد. (اگر دو یا تعداد بیشتری از مؤلفه‌ها این بزرگترین

1) Gerschgorin

قدرمطلق را داشته باشند، یکی را انتخاب می‌کنیم). چون $AX = \lambda X$ داریم:

$$(\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$|(\lambda - a_{kk})x_k| \leq \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \Longrightarrow$$

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leq |x_k|r_k \Longrightarrow |\lambda - a_{kk}| \leq r_k$$

یعنی λ درون یا روی دایره‌ای گرشگورین قرار دارد. $\square$

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۱۲i & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۱ & -۶ & ۲+i & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۲i \\ ۰ & -۳ & ۱ & ۴-۷i \end{bmatrix}$ پیدا کردن مقادیر ویژه‌ی این ماتریس دشوار است. دایره‌های گرشگورین عبارتند از:

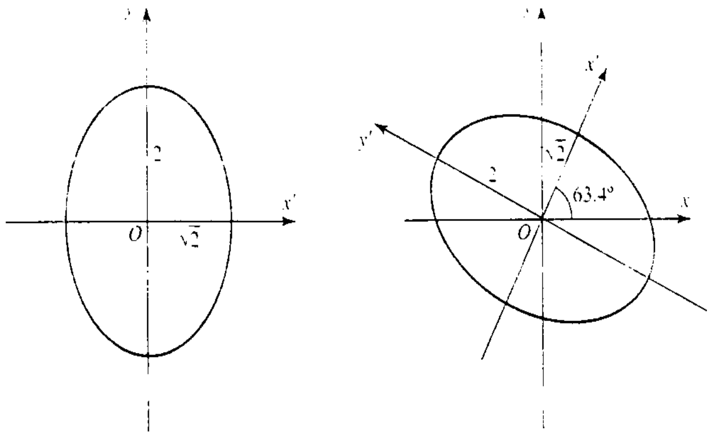
$C_۱$: مرکز $(۰, ۱۲)$ و شعاع $r_۱ = ۱ + |-۲| = ۳$

$C_۲$: مرکز $(-۶, ۰)$ و شعاع $r_۲ = ۱ + |۲ + i| = ۱ + \sqrt{۵}$

$C_۳$: مرکز $(-۱, ۰)$ و شعاع $r_۳ = ۲ + ۱ + |۲i| = ۵$

$C_۴$: مرکز $(۴, -۷)$ و شعاع $r_۴ = |-۳| + ۱ = ۴$

با توجه به شکل زیر، مقادیر ویژه درون یا روی این دایره‌ها قرار دارند؛



شکل ۶ـ۵

با تشکیل معادله‌ی مشخصه‌ی A داریم

$$\lambda^{۴} + (۳ - ۵i)\lambda^{۳} + (۵۹ + ۱۰i)\lambda^{۲} + (۵۳۴ + ۳۱۱i)\lambda + ۴۱ + ۱۴۳i = ۰$$

مقدار ریشه‌ها به کمک رایانه تقریباً برابر هستند با

$$۰/۰۰۶۵+۱۱/۹۰۷۱i\ ,\ -۰/۷۳۵۵+۰/۱۷۵۳i\ ,\ -۶/۱۸۹۲-۰/۲۷۷۲i\ ,\ ۳/۹۱۸۲-۶/۸۰۵۳i$$

می‌توان بررسی نمود که ریشه‌ها درون دایره‌های گرشگورین ماتریس A قرار می‌گیرند.

۶-۶-۱ قضیه. اگر s دایره گرشگورین حوزه‌ای یکپارچه تشکیل دهند به‌طوری که این حوزه از بقیه‌ی دایره‌ها مجزا می‌باشد آنگاه دقیقاً s مقدار ویژه‌ی A در این حوزه‌ی یکپارچه قرار می‌گیرند.

برهان: اثبات به پیوستگی بستگی دارد.قرار می‌دهیم $A = \text{diag}(a_{ii}) + C = D + C$ که در آن C ماتریس متشکل از درایه‌های خارج قطر اصلی A است و r_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ماتریس‌های $D + \varepsilon C$ را با خاصیت $۰ \le \varepsilon \le ۱$ در نظر می‌گیریم. برای $\varepsilon = ۰$ ماتریس D و برای $\varepsilon = ۱$ ماتریس A به‌دست خواهد آمد. ضریب‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی $D + \varepsilon C$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب ε هستند و بنا به تئوری توابع جبری ریشه‌های معادله‌ی مفسر توابع پیوسته‌ای از ε می‌باشند. بنابر قضیه‌ی قبل برای هر مقدار ε، مقادیر ویژه همه درون دایره‌های به مرکز a_{ii} و شعاع εr_i قرار می‌گیرند و اگر ε را به‌طور یکنواخت از صفر تا یک تغییر دهیم مقادیر ویژه همگی از مسیرهای پیوسته عبور می‌کنند.

بدون آنکه خللی به کلیت استلال وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم اولین s دایره تشکیل حوزه‌ای یکپارچه می‌دهند. در این صورت چون $n - s$ دایره با شعاع‌های $r_{s+۱}, r_{s+۲}, \ldots, r_n$ از بقیه دایره‌های‌با شعاع $r_۱$، $r_۲$، $\ldots$ و r_s مجزا هستند همان برای دایره‌های با شعاع εr_i برای هر $۰ \le \varepsilon \le ۱$ نیز صحیح است. حال اگر $\varepsilon = ۰$ مقادیر ویژه $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}$ هستند و از این‌ها اولین s تا در حوزه‌ی متناظر با اولین s دایره و $n - s$تای بقیه در بیرون حوزه قرار می‌گیرند. این مطلب برای هر ε بیشتر و $\varepsilon = ۱$ نیز صحیح است.

به‌خصوص اگر یکی از دایره‌های **گرشگورین** مجزا باشد دقیقاً شامل یک مقدار ویژه خواهد بود. توجه می‌کنیم که نتایج متناظر برای ترانهاده A به‌جای A نیز قابل بررسی هستند.

۶-۷ نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۱) با توجه به آنکه دترمینان هر ماتریس اسکالر، قطری، بالا مثلثی یا پایین مثلثی مساوی حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است، اگر A ماتریسی اسکالر یا قطری یا بالا مثلثی‌یا پایین مثلثی باشد درایه‌های واقع بر قطر اصلی مقادیر ویژه‌ی A خواهند بود.

مثال: مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A$ کدامند؟

حل: چون ماتریس بالا مثلثی است مقادیر ویژه‌ی آن درایه‌های روی قطر اصلی یعنی ۱ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ هستند.

مثال: فرض کنیم V فضای برداری nبعدی روی‌میدان $\mathbb{F}$ باشد. معادله‌ی مفسر نگاشت همانی روی V و ریشه‌های آن چیست؟ معادله‌ی مفسر نگاشت صفر و ریشه‌های آن چیست؟

حل: ماتریس نگاشت همانی روی V ماتریس همانی و ماتریس نگاشت صفر ماتریس صفر است بنابراین داریم:

$$\det(I-\lambda I)=0 \Longrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda-1 \end{bmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow (\lambda-1)^n=0 \Longrightarrow \lambda=1 \text{ مکرر از مرتبه‌ی } n$$

$$\det(Z-\lambda I)=0 \Longrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow \lambda^n=0 \Longrightarrow \lambda=0 \text{ مکرر از مرتبه‌ی } n$$

۲) برای آنکه ماتریس $n \times n$، A مقدار ویژه‌ای مساوی صفر داشته باشد لازم و کافی است که معادله‌ی $AX = 0X$ جوابی نابدیهی داشته باشد ولی تساوی قبل معادل $AX = 0$ است و جوابی نابدیهی دارد اگر و تنها اگر A معکوس‌ناپذیر باشد. بنابراین عدد صفر مقدار ویژه‌ای از A است اگر و تنها اگر A معکوس‌پذیر نباشد.

۳) اگر مقادیر ویژه‌ی A را λ_i فرض کنیم و A وارون‌پذیر باشد (در نتیجه $\lambda_i \neq \circ$) مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A^{-۱}$ برابر $\frac{۱}{\lambda_i}$ هستند اما بردارهای ویژه‌ی A و $A^{-۱}$ یکسان هستند زیرا:

$$AX = \lambda_i X \Longrightarrow A^{-۱}AX = A^{-۱}\lambda_i X \Longrightarrow X = \lambda_i A^{-۱}X \Longrightarrow \frac{۱}{\lambda_i}X = A^{-۱}X$$

۴) با توجه به تساوی‌های زیر

$$\circ = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)' = \det(\lambda I - A')$$

نتیجه می‌گیریم A و ترانهاده آن یعنی A' معادله‌ی مفسر یکسان و در نتیجه مقادیر ویژه‌ای برابر دارند. (اما بردارهای ویژه لزوماً برابر نیستند).

۵) اگر ماتریس A در اسکالر k ضرب شود مقادیر ویژه‌ی آن نیز در k ضرب می‌شوند اما بردارهای ویژه تغییر نمی‌کنند زیرا بنا به خواص ماتریس‌ها داریم:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow k(AX) = k(\lambda X) \Longrightarrow (kA)X = (k\lambda)X$$

۶) اگر ماتریس A به توان m برسد مقادیر ویژه‌ی آن نیز به توان m می‌رسند اما بردارهای ویژه تغییر نمی‌کنند زیرا می‌توان نوشت:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow A(AX) = A(\lambda X) \Longrightarrow A^{۲}X = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^{۲}X$$

و حکم با استقرا روی m به‌دست می‌آید.

۷) در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه $a+b$ و $a-b$ بوده و راستای بردارهای ویژه $x \pm y$ است. زیرا

$$\begin{aligned} \lambda^{۲} - (a+a) + a^{۲} - b^{۲} = \circ &\Longrightarrow \lambda^{۲} - (a+b+a-b)\lambda + (a+b)(a-b) = \circ \\ &\Longrightarrow (\lambda - (a+b))(\lambda - (a-b)) = \circ \\ &\Longrightarrow \lambda_۱ = a+b\,,\ \lambda_۲ = a-b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by = \circ & \lambda_۱ = a+b \Longrightarrow (a+b-a)x - by = \circ \Longrightarrow \quad x = y \\ -bx + (\lambda - a)y = \circ & \lambda_۲ = a-b \Longrightarrow (a-b-a)x - by = \circ \Longrightarrow -x = y \end{cases}$$

مثال: بردار ویژه‌ی نظیر کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف) $(۱, ۱)$ ب) $(۱, -۱)$ ج) $(۱, ۲)$ د) $(۲, ۱)$

حل:

$$\lambda_۱ = a + b = ۳\ ,\ \lambda_۲ = a - b = ۱$$

$$(\lambda - ۲)x - y = ۰ \xRightarrow{\lambda = ۱} -x - y = ۰ \Longrightarrow$$ گزینه‌ی (ب) صحیح است

۸) اگر مقدار ویژه‌ی ماتریس A برابر λ باشد مقدار ویژه‌ی ماتریس $A + mI$ برابر $\lambda + m$ است زیرا

$$AX = \lambda X \Longrightarrow AX + mIX = \lambda X + mIX \xRightarrow{IX = X} (A + mI)X = (\lambda + m)X$$

اما بردارهای ویژه یکسان هستند.

مثال: هرگاه $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$، مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های $۳A^۲$، $(A^{-۱})^۳$ و $A^۲ + ۳I$ را به‌دست آورید.

حل: ماتریس پایین مثلثی است بنابراین؛ مقادیر روی قطر مقادیر ویژه هستند.

$$\lambda_۱ = ۳, \lambda_۲ = ۲, \lambda_۳ = -۲$$

$$\lambda_{A^۲} = ۹, ۴, ۴ \Longrightarrow \lambda_{۳A^۲} = ۲۷, ۱۲, ۱۲$$

$$\lambda_{A^{-۱}} = \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲} \Longrightarrow \lambda_{(A^{-۱})^۳} = \frac{۱}{۲۷}, \frac{۱}{۸}, \frac{-۱}{۸}$$

$$\lambda_{A^۲ + ۳I} = \lambda_{A^۲} + ۳ = ۱۲, ۷, ۷$$

۹) اگر در ماتریس با درایه‌های حقیقی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ درایه‌های b و c هم‌علامت باشند ماتریس دارای دو مقادیر ویژه‌ی حقیقی متمایز است (عکس مطلب همیشه درست نیست) زیرا مبین معادله‌ی مفسر اکیداً مثبت می‌شود:

$$\lambda^۲ - (a + d)\lambda + ad - bc = ۰$$

$$\Delta = (a + d)^۲ - ۴ad + ۴bc = \underbrace{(a - d)^۲}_{\geq ۰} + \underbrace{۴bc}_{> ۰} > ۰$$

۱۰) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه‌ی حقیقی ماتریس و α زاویه بین راستای بردارهای ماتریس باشد آنگاه $\tan\alpha = \left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{b-c}\right|$. ($b \neq 0$)

برهان. معادله‌ی مفسر را تشکیل داده مقادیر ویژه حاصل را در یکی از معادلات دستگاه همگن $(\lambda I - A)X = 0$ قرار می‌دهیم تا بردارهای ویژه به‌دست آیند. ضریب زاویه این دو بردار را m_1 و m_2 نامیده **تانژانت** زاویه‌ی بین آنها را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda^2 = (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc})$$

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by = 0 \Longrightarrow y = \frac{\lambda-a}{b}x \\ -cx + (\lambda - d)y = 0 \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{-a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}$$
$$m_2 = \frac{-a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{2\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}}{1+\frac{(-a+d)^2-(a-d)^2-4bc}{4b^2}}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{b}}{1-\frac{c}{b}}\right|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{b-c}\right| = \left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{b-c}\right|$$

نتیجه. اگر مقادیر ویژه‌ی ماتریس دودردو A متمایز بوده و ماتریس متقارن باشد راستای بردارهای ویژه برهم عمودند.

مثال: کدامیک از دسته بردارهای زیر می‌توانند بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن 2×2 با مقادیر ویژه غیرمساوی باشند؟

الف) $m_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, m_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ب) $m_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ج) $m_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}, m_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ د) $m_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

حل: فقط در گزینه‌ی (ب) راستای بردارهای ویژه برهم عمودند زیرا ضرب اسکالر آنها برابر صفر است.

تذکر: مقادیر ویژه‌ی هر ماتریس متقارن حقیقی اعدادی حقیقی هستند.

برهان. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ متقارن حقیقی و λ مقدار ویژه‌ای دلخواه از آن باشد. می‌خواهیم نشان دهیم λ حقیقی است.

فرض کنیم $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ بردار ویژه‌ای متناظر با λ باشد، در این‌صورت $AE = \lambda E$. طرفین این رابطه را از چپ در ماتریس $n \times 1$، $\bar{E}' = [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]$ ضرب می‌کنیم، داریم؛

$$\bar{E}'AE = \bar{E}'\lambda E = \lambda \bar{E}'E = \lambda[\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \lambda[\bar{e}_1 e_1 + \bar{e}_2 e_2 + \cdots + \bar{e}_n e_n] \tag{1}$$

ملاحظه می‌کنیم آخرین مقدار داخل ماتریس 1×1 عددی حقیقی است. چون A ماتریسی حقیقی است می‌توان نوشت:

$$\overline{\bar{E}'AE} = \bar{\bar{E}}'\overline{AE} = \bar{\bar{E}}'\bar{A}\bar{E} = E'A\bar{E} \tag{2}$$

$E'A\bar{E}$ ماتریسی 1×1 بوده ترانهاده آن نیز 1×1 خواهد بود و داریم:

$$E'A\bar{E} = (E'A\bar{E})' = \bar{E}'A'E = \bar{E}'AE \tag{3}$$

$$(2), (3) \Longrightarrow \overline{\bar{E}'AE} = \bar{E}'AE$$

یعنی ماتریس 1×1، $\bar{E}'AE$ حقیقی است. حال به رابطه‌ی (۱) برمی‌گردیم. نشان داده‌ایم که سمت چپ این رابطه عددی حقیقی است و می‌دانیم سمت راست نیز حاصل‌ضرب λ در عددی حقیقی است پس λ باید حقیقی بوده اثبات تمام است.

تذکر: اگر A ماتریسی حقیقی و متقارن $n \times n$ باشد بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز برهم عمودند.

برهان. فرض کنیم λ و μ دو مقدار ویژه‌ی متمایز و $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ و $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه‌ی متناظر با آنها باشند. نشان می‌دهیم این بردارها برهم عمودند یعنی $e_1g_1 + e_2g_2 + \cdots + e_ng_n = 0$ است. داریم:

$$E'G = [e_1e_2\dots e_n]\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = [e_1g_1 + e_2g_2 + \cdots + e_ng_n]$$

چون $AE = \lambda E$ و $AG = \mu G$ می‌توان نوشت:

$$\lambda E'G = (\lambda E)'G = (AE)'G = E'A'G = E'(AG) = E'(AG) = E'(\mu G) = \mu E'G$$

در نتیجه $(\lambda - \mu)E'G = 0$ ولی $\lambda - \mu \neq 0$ است پس ماتریس 1×1، $E'G$ دارای عضو صفر است.

۱۱) اگر A ماتریسی 2×2 یا 3×3 قطری با درایه‌های روی قطر متمایز باشد راستای بردارهای‌ویژه محورهای مختصات است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = a_{11}\ ,\ \lambda_2 = a_{22}\ ,\ \lambda_3 = a_{33}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x = 0 \\ (\lambda - a_{22})y = 0 \\ (\lambda - a_{33})z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = a_{11} \Longrightarrow \text{دلخواه } x, y = 0, z = 0 \Longrightarrow \text{محور } x\text{ها} \\ \lambda = a_{22} \Longrightarrow \text{دلخواه } y, x = 0, z = 0 \Longrightarrow \text{محور } y\text{ها} \\ \lambda = a_{33} \Longrightarrow \text{دلخواه } z, x = 0, y = 0 \Longrightarrow \text{محور } z\text{ها} \end{cases}$$

۱۲) اگر A ماتریسی $n \times n$ اسکالر باشد هر بردار دلخواه بردار ویژه‌ی این ماتریس است.

$$A = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & 0 & \\ & & k & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & k \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - k & & & & \\ & \lambda - k & & 0 & \\ & & \lambda - k & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda - k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda - k)^n = 0 \Longrightarrow \lambda = k$$

$$\begin{cases} (\lambda - k)x_1 = 0 \\ (\lambda - k)x_2 = 0 \\ (\lambda - k)x_3 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda - k)x_n = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda=k} 0x_1 = 0, 0x_2 = 0, 0x_3 = 0, \dots, 0x_n = 0 \Longrightarrow$$ x_iها دلخواه

$$\Longrightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

۱۳) اگر در ماتریس $n \times n$، A مجموع درایه‌های هر سطر (و یا مجموع درایه‌های هر ستون دلخواه برابر عددی مانند s باشد آنگاه یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس برابر s است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \sum_{j=1}^{n} a_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = s$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

مجموع ستون‌های دوم به بعد را به‌ستون اول دترمینان اضافه می‌کنیم (مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند):

$$A = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{2j} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow A = \begin{vmatrix} \lambda - S & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \lambda - S & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda - S & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda - S) \begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 1 & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$ $\lambda = S$ یکی از مقادیر ویژه است

۱۴) در ماتریس‌های قطر فرعی از مرتبه‌ی فرد همواره درایه‌ی وسط یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس است. به‌طور مثال در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یکی از مقادیر ویژه برابر b (و با تجزیه معادله مفسر و یا تقسیم آن بر $\lambda - b$) دو مقدار ویژه دیگر آن $\pm\sqrt{ac}$ هستند.

مثال: ریشه‌های مشخصه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدامند؟

حل:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2, \lambda_3 = \pm\sqrt{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \pm 2 \end{cases}$$

۱۵) اگر $M = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ، A_1 و A_2 ماتریس‌های‌مربع باشند چندجمله‌ای مشخصه‌ی M مساوی حاصل‌ضرب چندجمله‌ای مشخصه‌ی A_1 و A_2 است. زیرا

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} \lambda I - A_1 & -B \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس بلوکی مثلثی حاصل‌ضرب دترمینان‌های بلوک‌های قطری است در نتیجه

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & -B \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = |\lambda I - A_1||\lambda I - A_2|$$

با تعمیم مطلب بالا می‌توان نتیجه گرفت چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس بلوکی مثلثی $M = \begin{bmatrix} A_1 & B & \cdots & C \\ 0 & A_2 & \cdots & D \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$ که در آن A_1، A_2، $\cdots$ و A_n ماتریس‌های مربع هستند و مساوی حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی A_1، A_2، $\cdots$ و A_n است.

مثال: چندجمله‌ای مشخصه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: چون A بلوکی مثلثی با بلوک‌های قطری $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ است، داریم:

$$|\lambda I - A| = |\lambda I_2 - A_1||\lambda I_2 - A_2| = (\lambda^2 - 6\lambda + 3)(\lambda^2 - 9\lambda + 28)$$

۱۶) اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند مقادیر ویژه‌ی AB و BA مساویند.

حل: می‌دانیم حاصل‌ضرب ماتریس‌های نامنفرد ماتریسی نامنفرد است. ابتدا ثابت می‌کنیم که احکام زیر هم‌ارزند:

(i) عدد صفر مقدار ویژه AB است.

(ii) AB منفرد است.

(iii) A یا B منفرد است.

(iv) BA منفرد است.

(v) عدد صفر مقدار ویژه‌ی از BA است.

حال فرض می‌کنیم λ مقدار ویژه‌ی ناصفری است، در این‌صورت بردار ناصفر v وجود دارد به‌طوری که $ABv = \lambda v$. قرار می‌دهیم $w = Bv$، چون $\lambda \neq 0$ و $v \neq 0$ در نتیجه $Aw = ABv = \lambda v \neq 0$ و بنابراین $w \neq 0$ است. ولی w بردار ویژه‌ی از BA متناظر با λ است زیرا

$$BAw = BABv = B\lambda v = \lambda Bv = \lambda w$$

در نتیجه λ مقدار ویژه‌ای از BA است. به‌طور مشابه هر مقدار ویژه‌ی ناصفر BA مقدار ویژه‌ای از AB است.

۱۷) اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ و $n \times m$ باشند چندجمله‌های مشخصه‌ی AB و BA در تساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\lambda^n|\lambda I_m - AB| = \lambda^m|\lambda I_n - BA|$$

به‌خصوص اگر $m = n$ باشد A و B، $n \times n$ شده مقادیر ویژه AB و BA به دلیل یکی‌شدن چندجمله‌ای مشخصه برابر می‌شوند.

حل: می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_m & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mu^2 I_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & -A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^2 I_m - AB & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix}$$

از طرفین تساوی‌های بالا دترمینان می‌گیریم. با فرض $X = \begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{cases} \mu^n \det X = \mu^m \det(\mu^2 I_n - BA) \xrightarrow{\text{ضرب در } \mu^m} \mu^{m+n} \det X = \mu^{2m}|\mu^2 I_n - BA| \\ \mu^n \det X = \mu^n \det(\mu^2 I_m - AB) \xrightarrow{\text{ضرب در } \mu^n} \mu^{m+n} \det X = \mu^{2n}|\mu^2 I_m - AB| \end{cases}$$

طرف چپ تساوی‌های اخیر مساویند پس طرف راست آنها برابر است و اگر قرار دهیم $\lambda = \mu^2$ داریم:

$$\lambda^n|\lambda I_m - AB| = \lambda^m|\lambda I_n - BA|$$

حال اگر $m = n$ و $\lambda \neq 0$ آنگاه $|\lambda I_m - AB| = |\lambda I_n - BA|$ یعنی چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی AB و BA یکی هستند و در نتیجه مقادیر ویژه AB و BA مساوی است.

۱۸) برای یک ماتریس مفروض $n \times n$ همان‌طور که دیدیم همواره می‌توان چندجمله‌ای مشخصه تشکیل داد، برعکس آیا برای یک چندجمله‌ای مانند

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

می‌توان ماتریسی یافت که $p(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن باشد؟

پاسخ به این سؤال مثبت است در واقع هر یک از ماتریس‌های زیر یا ترانهاده‌ی آنها جواب مسأله هستند و کافی است چندجمله‌ای مشخصه‌ی آنها را به‌دست آورده ملاحظه نمود که همان $p(x)$ می‌شود:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها را ماتریس همراه چندجمله‌ای $p(x)$ (یا ماتریس فروبنیوس) می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای از ماتریس $n \times n$، A باشد. چندگانگی جبری λ همان چندگانگی λ به‌عنوان ریشه‌ای از معادله‌ی مفسر تعریف می‌شود.

چندگانگی هندسی λ بعد زیرفضای ویژه تولید شده به‌وسیله‌ی بردارهای ویژه متناظر به λ در نظر گرفته می‌شود.

۶-۷-۱ قضیه. فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای از نگاشت خطی $T : v \longrightarrow v$ و v فضایی nبعدی باشد. در این‌صورت چندگانگی هندسی λ از چندگانگی جبری آن تجاوز نمی‌کند.

برهان. فرض کنیم چندگانگی هندسی λ برابر r باشد. در این‌صورت λ شامل r بردار ویژه مستقل خطی $v_1, \dots, v_r$ است. مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_r\}$ را به پایهٔ شامل n بردار $\{v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$ از فضای v توسعه می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda v_1 \\
T(v_2) &= \lambda v_2 \\
&\dots\dots\dots \\
T(v_r) &= \lambda v_r \\
T(w_1) &= a_{11}v_1 + \dots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \dots + b_{1s}w_s \\
T(w_r) &= a_{21}v_1 + \dots + a_{2r}v_r + b_{21}w_1 + \dots + b_{2s}w_s \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$T(w_s) = a_{s1}v_1 + \cdots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \cdots + b_{ss}w_s$$

ماتریس T نسبت به پایه‌ی فوق‌الذکر عبارت است از:

$$M = \left[\begin{array}{cccc:cccc}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\
0 & \lambda & \cdots & 0 & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{sr} \\
\hdashline
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1s} & b_{2s} & \cdots & b_{ss}
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c}
\lambda I_r & A \\
\hdashline
0 & B
\end{array}\right]$$

که در آن $A = [a_{ij}]'$ و $B = [b_{ij}]'$ است. چون M ماتریس بلوکی مثلثی است، چندجمله‌ای مفسر λI_r که $(t-\lambda)^r$ است باید چند جمله‌ای مفسر M و در نتیجه T را عاد کند. بنابراین چندگانگی جبری λ برای نگاشت T حداقل r است.

۶-۸ قضیه کیلی[1]ـهامیلتون[2]

هر ماتریس مربع در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند. (یعنی اگر A ماتریسی $n \times n$ و معادله‌ی مشخصه‌اش $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$ باشد آنگاه $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 I = 0$ می‌شود).

برهان. اگر $\Delta(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشد داریم؛

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

فرض کنیم $B(\lambda)$ الحاقی کلاسیک ماتریس $\lambda I - A$ باشد، عناصر $B(\lambda)$ همسازه‌های ماتریس $\lambda I - A$ هستند و لذا چندجمله‌ای‌هایی برحسب λ و با درجه نابیشتر از $n-1$ می‌باشند، بنابراین

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

2) Cayley

2) Hamilton

که در آن B_iها ماتریس‌هایی $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ هستند که مستقل از λ می‌باشند. می‌توان نوشت:

$$(\lambda I - A)B(\lambda) = |\lambda I - A|I$$

و از آنجا

$$(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0) = (\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0)I$$

با متحد گرفتن ضرایب توان‌های نظیر λ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
B_{n-1} \qquad\qquad &= I \\
B_{n-2} - \quad AB_{n-1} &= c_{n-1}I \\
B_{n-3} - \quad AB_{n-2} &= c_{n-2}I \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
B_0 \quad - \quad AB_1 \quad &= c_1 I \\
- \quad AB_0 \quad &= c_0 I
\end{aligned}$$

از ضرب معادلات ماتریسی بالا به ترتیب در I و A، $\cdots$، A^{n-1} و A^n به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
A^n B_{n-1} \qquad\qquad &= A^n \\
A^{n-1}B_{n-2} - \quad A^n B_{n-1} &= c_{n-1}A^{n-1} \\
A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} &= c_{n-2}A^{n-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
AB_0 \quad - \quad A^2 B_1 \quad &= c_1 A \\
- \quad AB_0 \quad &= c_0 I
\end{aligned}$$

مجموع روابط بالا نتیجه می‌دهد

$$0 = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1 A + c_0 I$$

یعنی $\Delta(A) = 0$، یعنی A در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند. □

یکی از کاربردهای قضیه کیلی-هامیلتون پیدا کردن وارون ماتریس‌ها است.

مثال: نشان دهید ماتریس زیر در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

حل:

$$\lambda^{۲}-(trA)\lambda+|A|=۰ \Longrightarrow A^{۲}-(۰+۳)A+(۰+۲)I \stackrel{?}{=} \bar{۰}$$

$$A^{۲}-۳A+۲I \stackrel{?}{=} \bar{۰} \qquad (*)$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$(*) \Longrightarrow \begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲+۲ & ۶-۶ \\ -۳+۳ & ۷-۹+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس B را وارون A می‌نامیم هرگاه $AB=I$ با استفاده از قضیه‌ی **کیلی-هامیلتون** وارون ماتریس مثال قبل را به‌دست آورید.

حل:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow A^{۲}-۳A+۲I=\bar{۰}$$

$$\Longrightarrow A(A-۳I)=-۲I \Longrightarrow A(-\frac{۱}{۲}A+\frac{۳}{۲}I)=I$$

$$\Longrightarrow A \text{ وارون} =-\frac{۱}{۲}A+\frac{۳}{۲}I=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}+\frac{۳}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{-۳}{۲} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

حال کاربردی بسیار جالب را ارائه می‌دهیم که در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، فیزیک و مسائل مهندسی، معادلات دیفرنسیل و سیستم‌های دینامیکی دارای محمل است.

۶-۹ محاسبه‌ی A^kX

می‌خواهیم A^kX را برای ماتریس $n\times n$، A و بردار n مؤلفه‌ای X به‌دست آوریم. بدیهی است این محاسبه برای مقادیر بزرگ k یا n مشکل خواهد بود. فرض کنیم X بتواند ترکیب خطی بردارهای ویژه‌ی

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ از A نوشته شود مثلاً $X = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m$. اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ مقادیر ویژه‌ی متناظر باشند آنگاه

$$AX = A(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = c_1Av_1 + \ldots c_mAv_m = c_1\lambda_1v_1 + \cdots + c_m\lambda_mv_m$$

این عمل را با به‌کار بردن Ax به‌جای X، $k-1$ دفعه تکرار کرده به‌دست می‌آوریم؛

$$A^kX = c_1\lambda_1^kv_1 + \cdots + c_m\lambda_m^kv_m$$

دقت می‌کنیم که با شناخت مقادیر c_iها و λ_iها و سپس دانستن v_iها محاسبه‌ی A^kX بسیار ساده می‌شود، زیرا سمت راست رابطه‌ی بالا شامل ضربی ماتریسی نیست.

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$.

حل: $(1, -2)$ و $(2, 1)$ بردارهای ویژه‌ی ماتریس و -2 و 3 مقادیر ویژه هستند. داریم

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\text{عبارت مطلوب} = 2 \times (-2)^8 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \times 3^8 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51976 \\ -27268 \end{bmatrix}$$

تذکر: روش فوق وقتی قابل استفاده است که X بتواند ترکیبی خطی از بردارهای ویژه‌ی A نوشته شود.

۶-۱۰ جمعیت شناسی

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در بررسی و پیش‌بینی رفتار زنجیرهای مارکوف در جمله‌های دور مورد استفاده قرار می‌گیرند این کاربرد در جمعیت‌شناسی ارائه خواهد شد.

در بخش ۶.۲ جابجایی‌های جمعیت مورد مطالعه قرارگرفت. ملاحظه کردیم که توزیع جمعیت سالانه می‌تواند با دنباله‌ای از بردارهای $x_0, x_1(= Px_0), x_2(= Px_1), x_3(= Px_2), \ldots$ تشریح شود. P ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت است که ما را از برداری در دنباله به بردار دیگر می‌برد. این نوع دنباله‌ها یا زنجیرهای متشکل از بردارها، زنجیر مارکوف نامیده می‌شوند. زنجیرهای مارکوف‌ای بیشتر مورد توجه‌اند که

دنباله‌ی $x_۰, x_۱, x_۲, \ldots$ به بردار ثابت x همگراست و در آن $Px = x$. پس از آن کوچ جمعیت «حالت پایا» به‌خود گرفته و جمعیت کل شهرها و حومه آنها ثابت باقی می‌ماند و می‌توانیم بنویسیم

$$x_۰, x_۱, x_۲, \ldots \longrightarrow x$$

از آنجا که هر بردار x در $Px = x$ صدق می‌کند، باید بردار ویژه‌ای از P متناظر با مقدار ویژه‌ی ۱ باشد. اگر بدانیم که چنین برداری وجود دارد اطلاعات مفیدی در مورد توزیع جمعیت بعد از گذشت سال‌های طولانی خواهیم داشت.

رده‌ی خاصی از زنجیرهای **مارکوف** دارای این خواص ذکر شده می‌باشد. این رده را تعریف کرده خواص آنها را بررسی می‌کنیم و نتایج حاصل را در مدل کوچ جمعیت به منظور پیش‌بینی وضعیت سال‌های دورآینده به‌کار می‌بریم.

تعریف. ماتریس تغییر وضعیت P از یک زنجیر مارکوف، منتظم نامیده می‌شود هرگاه توانی از P وجود داشته باشد که در آن همه‌ی درایه‌ها اکیداً مثبت باشند. در این حالت، زنجیر را یک زنجیر **مارکوف** منتظم می‌نامیم.

مثال: کدامیک از ماتریس‌های زیر منتظم هستند؟

الف) $A = \begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/۶ \\ ۰/۷ & ۰/۴ \end{bmatrix}$ ب) $B = \begin{bmatrix} ۰/۷ & ۱ \\ ۰/۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $C = \begin{bmatrix} ۰/۴ & ۰ \\ ۰/۶ & ۱ \end{bmatrix}$

حل: همه‌ی درایه‌های A مثبت هستند پس A منتظم است.

$$B^۲ = \begin{bmatrix} ۰/۷۹ & ۰/۷ \\ ۰/۲۱ & ۰/۳ \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad B \text{ منتظم است}$$

$$C^۲ = \begin{bmatrix} ۰/۱۶ & ۰ \\ ۰/۸۴ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow C^۳ = \begin{bmatrix} ۰/۰۶۴ & ۰ \\ ۰/۹۳۶ & ۱ \end{bmatrix}, \ldots$$

عنصر واقع در سطر اول ستون دوم همیشه صفر باقی می‌ماند، پس نتیجه می‌گیریم، C منتظم نیست. قضیه‌ی زیر، که آن را بدون اثبات می‌پذیریم اطلاعاتی در مورد رفتار زنجیرهای **مارکوف** منتظم در جمله‌های دور ارائه می‌دهد.

۶-۱۰-۱ قضیه. **زنجیر مارکوفی** با بردار اولیه $x_۰$ و ماتریس تغییر وضعیت P را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت

۱) $x_۰, x_۱, x_۲, \ldots \longrightarrow x$ که در آن x در $Px = x$ صدق می‌کند.

۲) $P, P^۲, P^۳, \ldots \longrightarrow Q$ که در آن Q ماتریسی تصادفی است.

ستون‌ای Q با هم برابرند و همه بردارهای ویژه‌ی P متناظر با $\lambda = ۱$ هستند. این قضیه را برای تحلیل کوچ جمعیت به‌کار می‌بریم.

مثال: پیشرفت‌های کوچ جمعیت بین شهرها و حومه‌های آمریکا را بعد ازگذشت سال‌های متمادی مشخص کنید.

حل: مدلی را که قبلاً بررسی کردیم یادآوری می‌کنیم. جمعیت شهرها و حومه‌های آمریکا در سال ۲۰۰۰ با بردار $x_۰$ به‌صورت زیر (برحسب واحد یک میلیون) و جمعیت در سال‌های بعدی با زنجیر **مارکوف** با ماتریس تغییر وضعیت P به شکل زیر داده می‌شود

$$P = \begin{array}{c} \text{(از)} \\ \begin{array}{cc} \text{شهر} & \text{حومه} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰/۹۶ & ۰/۰۱ \\ ۰/۰۴ & ۰/۹۹ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{array} \qquad x_۰ = \begin{array}{c} \text{جمعیت‌های اولیه} \\ \begin{bmatrix} ۵۸ \\ ۱۴۲۴۴ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{array}$$

تمام درایه‌های P اکیداً مثبت هستند، زنجیر منتظم است و قضیه‌ی قبل را می‌توانیم برای پیشرفت در سال‌های طولانی بعدی مورد استفاده قرار دهیم. مطابق این قضیه P مقدار ویژه‌ای برابر ۱ داشته و بردار «حالت پایا» بردار ویژه‌ی متناظر است. بنابراین

$$Px = x \Longrightarrow (P - I)x = ۰$$

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۶ - ۱ & ۰/۰۱ \\ ۰/۰۴ & ۰/۹۹ - ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -۰/۰۴x_۱ + ۰/۰۱x_۲ = ۰ \\ ۰/۰۴x_۱ - ۰/۰۱x_۲ = ۰ \end{cases}$$

داریم $x_۲ = ۴x_۱$. جواب‌های این دستگاه معادلات عبارتند از: $x_۱ = r$ و $x_۲ = ۴r$ که در آن $r \in \mathbb{R}$ است. بنابراین بردارهای ویژه‌ی P متناظر با $\lambda = ۱$ بردارهای غیرصفر به‌فرم $r \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ هستند.

بردار حالت پایای x به‌صورت ذکر شده است. فرض کنیم کل جمعیت سالیانه طی سال‌ها تغییر نکند. در نتیجه مجموع اعضای‌ی x و $x_۰$ مساویند.

$$r + ۴r = ۵۸ + ۱۴۲ \Longrightarrow r = ۴۰ \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} ۴۰ \\ ۱۶۰ \end{bmatrix}$$

و بنابراین پیش‌بینی‌ها عبارتند از:

جمعیت شهرهای آمریکا $\longrightarrow$ ۴۰میلیون

$$\text{میلیون ۱۶۰} \longrightarrow \text{جمعیت حومه‌ها}$$

قضیه‌ی ذکر شده در مورد پیشرفت‌های سال‌های بعدی اطلاعات مفیدی نتیجه می‌دهد. هر ستون از ماتریس Q بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی ۱ است. فرض کنیم $Q = \begin{bmatrix} S & S \\ ۴S & ۴S \end{bmatrix}$ ، چون Q ماتریسی تصادفی است مجموع درایه‌های هر ستون مساوی یک است، پس

$$S + ۴S = ۱ \Longrightarrow S = ۰٫۲$$

و در نتیجه

$$\overset{P}{\begin{bmatrix} ۰٫۹۶ & ۰٫۰۱ \\ ۰٫۰۴ & ۰٫۹۹ \end{bmatrix}}, \overset{P^۲}{\begin{bmatrix} ۰٫۹۲ & ۰٫۰۲ \\ ۰٫۰۸ & ۰٫۹۸ \end{bmatrix}}, \overset{P^۳}{\begin{bmatrix} ۰٫۸۹ & ۰٫۰۳ \\ ۰٫۱۱ & ۰٫۹۷ \end{bmatrix}} \cdots \longrightarrow \overset{Q}{\begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰٫۲ \\ ۰٫۸ & ۰٫۸ \end{bmatrix}}$$

اگر روی درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول دقت کنیم (به‌طور مثال)، دنباله‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$۰٫۰۴, ۰٫۰۸, ۰٫۱۱, \ldots \longrightarrow ۰٫۸$$

این‌ها احتمال‌های کوچ از شهر به حومه در یکسال، دوسال، سه‌سال و ... هستند.

$$Q = \begin{array}{cc} & \text{(از)} \\ \text{شهر} & \text{حومه} \end{array}$$
$$Q = \begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰٫۲ \\ ۰٫۸ & ۰٫۸ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{array}$$

این احتمال‌ها مستقل از وضعیت ابتدایی هستند و این خود مشخصه‌ای از زنجیرهای مارکوف منتظم است.

۶-۱۱ معادلات تفاضلی

فرض کنیم $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. این دنباله می‌تواند با جمله‌ی nام خود ارائه شود.

به‌طور مثال: $a_n = n^۲ + ۱$ که با قراردادن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ جملات دنباله را به‌صورت $۲, ۵, ۱۰, ۱۷, \ldots$ خواهیم داشت، به‌علاوه هر جمله‌ی خاص نیز به‌آسانی به‌دست می‌آید.

به‌طور مثال: اگر $a_{۲۰}$ را بخواهیم داریم:

$$n = ۲۰ \Longrightarrow a_{۲۰} = (۲۰)^۲ + ۱ = ۴۰۱$$

عموماً در بحث دنباله‌ها جمله‌هایی از ابتدا همراه با ارتباطی بین چندجمله دنباله داده می‌شوند. به‌طور مثال

$$\begin{cases} a_1 = 0 \,, a_2 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \ ; \ n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

چنین معادله‌ای را معادله‌ی تفاضلی (یا رابطه‌ای بازگشتی) نامیده و جملات داده شده را شرط‌های آغازی می‌گویند. بقیه جملات را می‌توان از روی شرط‌های آغازی و معادله‌ی تفاضلی به‌دست آورد. به‌طور مثال:

$$n = 3 \Longrightarrow a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2(1) + 3(0) = 2$$

$$n = 4 \Longrightarrow a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2(2) + 3(1) = 7$$

$$n = 5 \Longrightarrow a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2(7) + 3(2) = 20$$

ولی نمی‌توان با روش بالا به‌آسانی و به سرعت جمله‌ی خاصی مانند a_{20} را به‌دست آورد و باید جمله‌ی عمومی یا nام را به‌دست آورد. جمله‌ی nام را جواب معادله تفاضلی می‌نامیم.

معادله‌ی تفاضلی $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ را با $n = 3, 4, 5, \dots$ و $p, q \in \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم جملات a_1 و a_2 را نیز معلوم فرض می‌کنیم (جملات آغازی). این معادله را **خطی** می‌نامیم زیرا a_iها با توان یک ظاهر شده‌اند. مرتبه معادله‌ی نیز دو است زیرا a_n برحسب دوجمله‌ی a_{n-1} و a_{n-2} بیان شده است. رابطه‌ی دومی ایجاد می‌کنیم $b_n = a_{n-1}$ و در نتیجه روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \qquad\qquad n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

در فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad n = 3, 4, 5, \dots$$

اگر فرض کنیم $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ داریم $X_n = AX_{n-1}$ در نتیجه

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = A^3 X_{n-3} = \cdots = A^{n-2} X_2 \ , \ X_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

در بسیاری از کاربردها A مقادیر ویژه‌ی متمایز λ_1 و λ_2 دارد و در نتیجه دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی خواهد داشت. لذا می‌تواند قطری شود. فرض کنیم C ماتریسی است که ستون‌هایش بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی A هستند و

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{n-2} = (CDC^{-1})^{n-2} = (CDC^{-1})(CDC^{-1})\dots(CDC^{-1})$$

$$\Longrightarrow A^{n-2} = CD^{n-2}C^{-1} = C\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{n-2} C^{-1} = C\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} C^{-1}$$

و در نتیجه

$$X_n = C\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} C^{-1}X_2$$

مثال: معادله‌ی تفاضلی $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ را برای $n = 3, 4, 5, \dots$ با شرط‌های اولیه $a_1 = 0$ و $a_2 = 1$ حل کنید. در نهایت a_{15} را مشخص کنید.

حل: فرض کنیم

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ b_n = a_{n-1} \qquad\qquad n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = -1, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \ \lambda_2 = 3, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a_b \\ b_n \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} C^{-1}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

زیرا $b_۲ = a_۱ = ۰$ پس

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} (-۱)^{n-۲} + ۳(۳)^{n-۲} \\ (-۱)(-۱)^{n-۲} + ۳^{n-۲} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} (-۱)^{n-۲} + ۳^{n-۱} \\ (-۱)^{n-۱} + ۳^{n-۲} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{۱}{۴}\left[(-۱)^{n-۲} + ۳^{n-۱}\right] \quad ; \quad n = ۳, ۴, ۵, \ldots$$

$$n = ۱۵ \Longrightarrow a_{۱۵} = \frac{۱}{۴}\left[(-۱)^{۱۳} + ۳^{۱۴}\right]$$

مثال: دنباله‌ی **فیبوناچی**[1] تعریف شده به‌طور بازگشتی به‌وسیله $a_۰ = ۰$ و $a_۱ = ۱$ و برای $n \geq ۰$، $a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n$ را در نظر می‌گیریم. جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} a_{n+۲} = a_{n+۱} + b_{n+۱} \\ b_{n+۲} = a_{n+۱} \end{cases}$$

در این‌صورت با فرض $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ داریم $X_{n+۲} = AX_{n+۱}$. مقادیر ویژه‌ی A جواب‌های $\lambda^۲ - \lambda - ۱ = ۰$ یعنی $\lambda_۱ = \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵})$ و $\lambda_۲ = \frac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{۵})$ هستند. بردارهای ویژه $\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۱}{۲}(-۱ + \sqrt{۵}) \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵}) \end{bmatrix}$ می‌باشند. در نتیجه

$$X_n = \lambda^n X_۰ \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (\frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵}))^n \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{۵}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (\frac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{۵}))^n \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵}) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_n = \alpha\frac{۱}{۲^n}(۱ + \sqrt{۵})^n + \beta\frac{۱}{۲^n}(۱ - \sqrt{۵})^n$$

$$\begin{cases} n = ۰ \Longrightarrow ۰ = a_۰ = \alpha + \beta \\ n = ۱ \Longrightarrow ۱ = a_۱ = \frac{\alpha}{۲}(۱ + \sqrt{۵}) + \frac{\beta}{۲}(۱ - \sqrt{۵}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = ۰ \\ \alpha + \alpha\sqrt{۵} + \beta - \beta\sqrt{۵} = ۲ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}}, \beta = \frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

1) Fibonacci

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})]^n$$

مثال: دنباله‌ای از کسرهای به‌فرم

$$2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots$$

را در نظر می‌گیریم. جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

حل: جمله‌ی عمومی دنباله را با $\frac{a_n}{b_n}$ نشان می‌دهیم در این‌صورت داریم

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 2 + \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{2a_n + b_n}{a_n}$$

و از آنجا

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \qquad X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow X_{n+1} = AX_n$$

مقادیر ویژه‌ی A جواب‌های معادله‌ی $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ یعنی $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ و $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ و بردارهای ویژه $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$ و $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ هستند. در نتیجه

$$X_n = \lambda^n X_0 \Longrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (1-\sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$a_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n = b_{n+1}$$

$$\begin{cases} n = 1 \Longrightarrow 2 = a_1 = \alpha + \alpha\sqrt{2} + \beta - \beta\sqrt{2} \\ n = 2 \Longrightarrow \frac{5}{2} = a_2 = \alpha + 2\alpha + 2\alpha\sqrt{2} + \beta + 2\beta - 2\beta\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{7\sqrt{2}-6}{8}, \ \beta = \frac{-7\sqrt{2}-6}{8}$$

از آنجا a_n، در نتیجه $b_n = a_{n-1}$ به‌دست آمده و $\frac{a_n}{b_n}$ مشخص می‌شود.

تذکر: اگر در مطالب بالا به‌طور مثال، $X_n = AX_{n-1}$، چون $X_{n-1} = AX_{n-2}$ و ... می‌توان نتیجه گرفت:

$$X_n = A^{n-2}X_2$$

تذکر: پس از تشکیل معادله‌ی مشخصه‌ی A اگر ریشه‌ها متمایز نباشند از تذکر قبل استفاده کرده X_n را به‌دست می‌آوریم. این خود مستلزم به‌دست آوردن توان‌های بالای A است. برای آنکه بتوانیم توان‌های بالای A را به‌دست آوریم فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت چندجمله‌ای مشخصه‌ی A عبارت است از:

$$f(X) = X^2 - (a+b)X + ad - bc$$

از طرفی

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = (a+b)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (ad - bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= (a+d)A - (ad-bc)I_2$$

یعنی $f(A) = 0$. برای $n \geq 2$ عبارت تقسیم X^n را بر $f(X)$ در نظر می‌گیریم. چون f از درجه‌ی دو است داریم $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$ با قرار دادن A در این رابطه و توجه به آنکه $f(A) = 0$ داریم:

$$A^n = \alpha_1 A + \alpha_2 I_2$$

α_1 و α_2 را به روش زیر محاسبه می‌کنیم. اگر از طرفین رابطه $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$ مشتق گرفته و λ یعنی تنها مقدار ویژه‌ی A را جایگزین X نماییم چون $f(\lambda) = 0$ است می‌توان نوشت

$$n\lambda^{n-1} = \alpha_1$$

حال λ را به‌جای X در $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$ قرار داده با توجه به $f(\lambda) = 0$ داریم:

$$\lambda^n = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = n\lambda^n + \alpha_2 \Longrightarrow \alpha_2 = (1-n)\lambda^n$$

و در نهایت نتیجه می‌شود

$$A^n = n\lambda^{n-1}A + (1-n)\lambda^n I_2$$

مثال: دترمینان ماتریس $n \times n$ زیر را به‌دست آورید:

$$A_n = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم $a_n = \det A_n$ و نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم

$$a_n = ۲a_{n-۱} - \det \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۲ \end{bmatrix} = ۲a_{n-۱} - a_{n-۲}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_n = ۲a_{n-۱} - b_{n-۱} \\ b_n = a_{n-۱} \end{cases} \quad , X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \ , \ A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow X_n = AX_{n-۱}$$

معادله‌ی مفسر A به‌صورت $(\lambda - ۱)^۲ = ۰$ بوده فقط یک مقدار ویژه‌ی مساوی با یک دارد. حال می‌توان نوشت:

$$A^n = n\lambda^{n-۱}A + (۱-n)\lambda^n I_۲ \overset{\lambda=۱}{\Longrightarrow} A^n = nA + (۱-n)I_۲ = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & ۱-n \end{bmatrix}$$

$$X_n = A^{n-۲}X_۲ \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-۱ & -n+۲ \\ n-۲ & ۳-n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+۱ \\ n \end{bmatrix}$$

($X_۲ = \begin{bmatrix} a_۲ \\ b_۲ \end{bmatrix}$ است) در نتیجه مشاهده می‌شود

$$\det A_n = a_n = n + ۱$$

۶-۱۲ قطری کردن ماتریس‌ها

فرض کنیم A و B ماتریس‌های مربع هم اندازه باشند. می‌گوییم B متشابه با A است هرگاه ماتریس وارون‌پذیر C وجود داشته باشد به‌طوری که $B = C^{-1}AC$.

مثال: ماتریس‌های A و C زیر را در نظر می‌گیریم. C وارون‌پذیر است. تبدیل تشابه $C^{-1}AC$ را برای تبدیل A به B به‌کار ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} B = C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تعریف. ماتریس مربع A قطری شدنی نامیده می‌شود هرگاه ماتریس C وجود داشته باشد به‌طوری که $D = C^{-1}AC$ ماتریسی قطری باشد.

۶-۱۲-۱ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد.

الف) اگر A دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی باشد، قطری شدنی است. ماتریس C که ستون‌هایش n بردار مستقل خطی ویژه هستند در $C^{-1}AC$ به‌کار رفته، ماتریس قطری D را نتیجه می‌دهد. درایه‌های قطری D همان مقادیر ویژه‌ی A هستند.

ب) اگر A قطری شدنی باشد آنگاه n بردار ویژه‌ی مستقل خطی خواهد داشت.

برهان. فرض کنیم λ_1، ... و λ_n مقادیر ویژه‌ی نه لزوماً متمایز A باشند که متناظر با آنها بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی v_1، ... و v_n هستند. اگر C ماتریسی باشد که v_iها ستون‌هایش هستند. چون $Av_1 = \lambda_1 v_1$ و ... و $Av_n = \lambda_n v_n$ با فرض $C = [v_1 \dots v_n]$ می‌توان نوشت

$$AC = A[v_1 \dots v_n] = [Av_1 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n]$$

$$= [v_1 \dots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

چون ستون‌های C، بردارهای مستقل خطی هستند پس C وارون‌پذیر است و در نتیجه

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر ماتریس $n \times n$، A دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد این بردارها می‌توانند ستون‌های ماتریسی مانند C قرار بگیرند تا A را قطری کند. در ماتریسی که قطری است درایه‌های روی‌قطر اصلی، مقادیر ویژه‌ی A هستند.

ب) عکس مطلب نیز صحیح است. فرض کنیم $C = [v_1 \dots v_n]$ ماتریسی باشد که A را قطری می‌کند پس اسکالرهای γ_1، ... و γ_n وجود دارند به‌طوری که

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

با استدلالی، در طی عکس مراحل حالت قبل داریم:

$$Av_1 = \gamma_1 v_1, \dots, Av_n = \gamma_n v_n$$

v_1، ... و v_n بردارهای ویژه‌ی A هستند. چون C وارون‌پذیر است این بردارها (یعنی ستون‌های C) مستقل خطی‌اند. در نتیجه ماتریس A قطری شدنی است و دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی است. □

مثال: نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ قطری شدنی است.
ماتریس قطری D متشابه با A را پیدا کنید. تبدیلی را که A را قطری می‌سازد به‌دست آورید.

حل:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2\ ,\ v_1 = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\ \lambda_2 = -1\ ,\ v_2 = S \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

www.iedoc.ir

چون ماتریس A دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی دارد پس قطری شدنی است.
A با ماتریس $D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ متشابه است.

$$C = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow C^{-۱}AC = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} -۴ & -۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۴ & -۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = D$$

۶-۱۳ کاربرد قطری کردن ماتریس‌ها

از قطری کردن ماتریس‌ها می‌توان در محاسبه‌ی توان‌های ماتریس‌ها استفاده کرد. اگر A متشابه با ماتریس قطری تحت تبدیل $C^{-۱}AC$ باشد داریم؛

$$D = C^{-۱}AC \Longrightarrow D^k = (C^{-۱}AC)^k = \underbrace{C^{-۱}ACC^{-۱}AC \ldots C^{-۱}AC}_{k \text{ بار}} = C^{-۱}A^kC$$
$$\Longrightarrow D^k = C^{-۱}A^kC \Longrightarrow A^k = CD^kC^{-۱}$$

یادآور می‌شویم محاسبه توان‌های قطری D آسان است و فقط کافی است درایه‌های روی قطرش را به آن توان برسانیم.

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} -۴ & -۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ است مطلوب است $A^۹$.

حل: در این مثال کافیست C و D را به‌دست آوریم. از مثال‌های قبل

$$D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۹ = CD^۹C^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵۱۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} -۵۱۴ & -۱۰۲۶ \\ ۵۱۳ & ۱۰۲۵ \end{bmatrix}$$

مثال: ثابت کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ قطری‌پذیر نیست.

حل:

$$\lambda^{۲} - ۴\lambda + ۴ = ۰ \Longrightarrow (\lambda - ۲)^{۲} = ۰ \Longrightarrow \lambda = ۰$$

$$(A - ۲I_{۲})x = ۰ \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow ۳x_۱ - ۳x_۲ = ۰ \Longrightarrow x_۱ = x_۲ = r \Longrightarrow r \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

فضای ویژه یک فضای تک بعدی است در حالی‌که A ماتریسی ۲ × ۲ است و دو بردار ویژه مستقل خطی ندارد، در نتیجه A قطری شدنی نیست.

۶-۱۴ قطری‌سازی متعامد

در حالتی که C ماتریسی متعامد است می‌دانیم $C^{-۱} = C^t$ پس اگر چنین ماتریسی در تبدیل تشابه‌ای مورد استفاده قرار گرفت به‌صورت $D = C^t AC$ خواهد بود. محاسبه با این نوع از تبدیل‌های تشابه به‌صورت طبیعی آسان‌تر از محاسبه‌ی $D = C^{-۱}AC$ است.

تبدیل‌های تشابه متعامد در تبدیل سیستمی از مختصات به سیستم دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف. ماتریس مربع A را قطری شدنی متعامد می‌نامیم، هرگاه ماتریس متعامد C وجود داشته باشد به‌طوری که $D = C^t AC$ ماتریسی قطری شود.

۶-۱۴-۱ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی مربع است، A قطری‌شدنی متعامد است، اگر و تنها اگر ماتریسی متقارن‌باشد.

برهان. فرض کنیم A متقارن باشد. مراحل ساخت ماتریس متعامد C به قسمی که $D = C^t AC$ قطری باشد به شرح ذیل است:

۱) پایه‌ای برای فضای ویژه‌ی A به‌دست می‌آوریم.

۲) پایه‌ای متعامد برای هر فضای ویژه به‌دست می‌آوریم (در صورت لزوم با استفاده از فرآیند **گرام-اشمیت**).

۳) فرض کنیم C ماتریسی است که این بردارهای متعامد ستون‌هایش هستند.

۴) ماتریس $D = C^t AC$ ماتریسی قطری خواهد بود.

برعکس اگر A قطری‌شدنی متعامد باشد آنگاه ماتریسی متعامد مانند C وجود دارد به قسمی که $D = C^t AC$. بنابراین $A = CDC^t$ و از آنجا

$$A^t = (CDC^t)^t = (C^t)^t (CD)^t = CDC^t = A$$

پس A متقارن است.

مثال: ماتریس متقارن $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را به‌طور متعامد قطری کنید.

حل: مشاهده می‌کنیم که

$$\lambda_۱ = -۱ \,,\; v_۱ = s \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_۲ = ۳ \,,\; v_۲ = r \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

چون A متقارن است قطری‌پذیر بوده و $D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ می‌شود. فضای ویژه $v_۱$ و $v_۲$ متعامد است. با یکه‌ای کردن و قرار دادن آنها در ستون‌های C داریم:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} \Longrightarrow C^t AC = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}.$$

۶-۱۵ فرم‌های درجه دوم

در این بخش چگونگی کاربرد قطری کردن را در هندسه خواهیم دید. ابتدا ایده‌ی تبدیل مختصات را بیان خواهیم کرد.

دوران محورهای مختصات

فرض کنیم سیستم محورهای متعامد مختصات xy داده شده و سیستم متعامد $x'y'$ از روی آن با دوران به میزان زاویه‌ی θ حول مبدا به‌دست آمده باشد. می‌دانیم ارتباط بین x و y، x' و y' به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

در فرم ماتریسی نیز داریم

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

به‌طور مثال، در دوران به اندازه‌ی ۴۵° حول مبدا محورهای مختصات، نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

۶-۱۶ تعریف فرم‌های درجه دوم

عبارت جبری $ax^۲ + bxy + cy^۲$ که در آن a، b و c مقادیر ثابت هستند و فرم درجه دوم نامیده می‌شود. این عبارت جبری را می‌توان به‌فرم ماتریسی زیر نوشت

$$ax^۲ + bxy + cy^۲ = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{۲} \\ \frac{b}{۲} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t A X$$

مثال: عبارت درجه دوم $۵x^۲ + ۶xy - ۴y^۲$ را به‌فرم ماتریسی بنویسید.

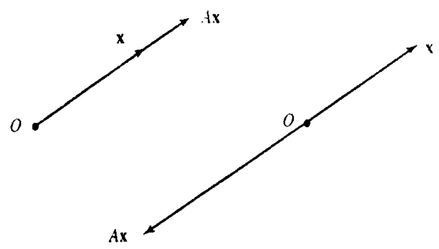
حل:

$$۵x^۲ + ۶xy - ۴y^۲ = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ & +۳ \\ +۳ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t A X$$

۶-۱۷ شناخت مقاطع مخروطی

می‌خواهیم تحلیلی از نمودار معادلات به‌فرم $ax^۲ + bxy + cy^۲ + d = ۰$ داشته باشیم. این معادله شامل فرم درجه دوم $ax^۲ + bxy + cy^۲$ است. به‌فرم ماتریسی می‌توان نوشت

$$X^t A X + d = ۰$$



شکل ۶ـ۶

چون A ماتریسی متقارن است، ماتریس متعامد C وجود دارد به‌طوری که C^tAC ماتریس قطری D است. به‌علاوه C متعامد است و $C^{-1} = C^t$ و $C^tC = I$ در نتیجه

$$X^TAX + d = \circ \Longrightarrow X^t(CC^t)A(CC^t)X + d = \circ$$

$$X^tC(C^tAC)C^tX + d = \circ \Longrightarrow X^tCDC^tX + d = \circ$$

ماتریس C^t ماتریسی متعامد است و دوران محورهای $X^t = C^tX$ متعامد را به سیستم متعامد $X'Y'$ تعریف می‌کند. در سیستم $X'Y'$ داریم:

$$(X'^t)^tDX^t + d = \circ$$

اگر $D = \begin{bmatrix} p & \circ \\ \circ & q \end{bmatrix}$ و $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ باشد آنگاه

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & \circ \\ \circ & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + d = \circ \Longrightarrow px'^{۲} + qy'^{۲} + d = \circ$$

$$\overset{d\neq\circ}{\Longrightarrow} \frac{x'^{۲}}{\frac{-d}{p}} + \frac{y'^{۲}}{\frac{-d}{q}} = ۱$$

و این خود معادله یک مقطع مخروطی است.

مثال: فرم زیر را بررسی و نمودار آن را مشخص کنید.

$$۶x^{۲} + ۴xy + ۹y^{۲} - ۲\circ = \circ$$

حل:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - ۲۰ = ۰$$

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda_۱ = ۱۰, v_۱ = r \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_۲ = ۵, v_۲ = s \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow C = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} - ۲۰ = ۰$$

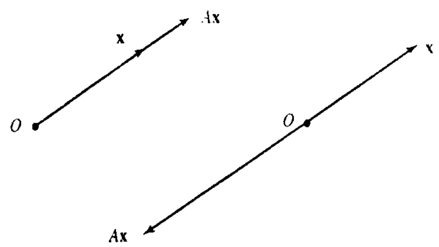
و با تبدیل مختصات

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{x'^۲}{۲} + \frac{y'^۲}{۴} = ۱ \qquad a = ۲, b = \sqrt{۲}$$

و این یک بیضی در مختصات $x'y'$ است.

برای تعیین میزان دوران می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۵}}, \sin\theta = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Longrightarrow \theta \simeq ۶۳/۵^\circ$$



شکل ۶ـ۷

۶-۱۷-۱ تمرین

۱) ثابت کنید شرلاط لازم و کافی برای آنکه همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A صفر باشند آن است که A پوچ توان باشد.

۲) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی نگاشت خطی مشتق را که روی فضای برداری چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی n عمل می‌کند به‌دست آورید.

۳) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ زیر را به‌دست آورید:

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$

۴) می‌دانیم که همواره مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس متشابه مساویند، چه ارتباطی بین بردارهای ویژه‌ی آنها برقرار است؟

۵) چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های زیر را به‌دست آورده در صورت امکان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را مشخص کنید:

الف) $\begin{bmatrix} x_۱y_۱ & x_۱y_۲ & \cdots & x_۱y_n \\ x_۲y_۱ & x_۲y_۲ & \cdots & x_۲y_n \\ x_۳y_۱ & x_۳y_۲ & \cdots & x_۳y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_۱ & x_ny_۲ & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & b_۱ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & b_۲ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & b_{n-۱} \\ c_۱ & c_۲ & \cdots & c_{n-۱} & a \end{bmatrix}$

۶) اگر A ماتریسی $n \times n$ وارون‌پذیر بوده و چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی ماتریس‌های A و $A^{-۱}$ را $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ بنامیم ثابت کنید:

$$g(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det A} \times f(\frac{۱}{\lambda})$$

۷) اگر A ماتریسی $n \times n$ و $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... و $\lambda_{n-۱}$ مقادیر ویژه‌ی آن باشند چگونه می‌توان مقدار ویژه λ_n از آن را به‌دست آورد؟

۸) اگر $la_۱$، $\lambda_۲$، $\lambda_۳$ و $\lambda_۴$ ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای (باضریب بزرگترین درجه یک) $f(\lambda)$ باشند، بردارهای ویژه‌ی ماتریس همراه این چندجمله‌ای را به‌دست آورید.

۹) فرض کنیم v بردار ویژه‌ای از نگاشت‌های خطی f و g باشد نشان دهید v بردار ویژه‌ی از $f+g$ است.

۱۰) ثابت کنید اگر A و B ماتریس‌های متشابه باشند آنگاه

الف) $|A| = |B|$

ب) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

ج) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

د) A^t و B^t متشابه هستند

ه) A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر B وارون‌پذیر باشد

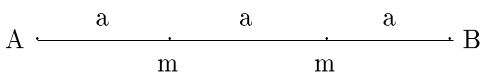
و) اگر A وارون‌پذیر باشد آنگاه $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ متشابه هستند

۱۱) اگر A ماتریسی متقارن باشد با ماتریسی قطری متشابه است. آیا این ماتریس قطری یکتا است؟ چرا؟

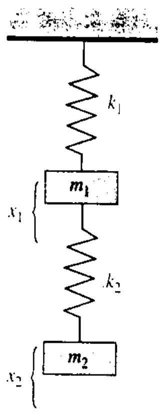
۱۲) نشان دهید اگر A ماتریسی متقارن باشد که فقط یک مقدار ویژه λ دارد آنگاه $A = \lambda I$ است.

۱۳) نمودار $-x^۲ - ۱۶xy + ۱۱y^۲ - ۳۰ = ۰$ را بررسی کنید.

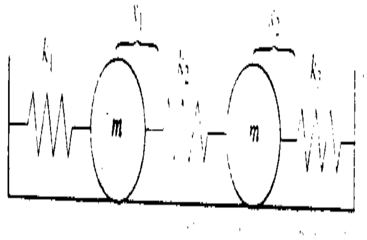
۱۴) معادله تفاضلی $a_n = ۴a_{n-۱} + ۵a_{n-۲}$ را با شرط‌های اولیه $a_۱ = ۳, a_۲ = ۲$ حل کنید.



شکل ۶ـ۸



شکل ۶ـ۹



شکل ۶ـ۱۰

هدف‌های رفتاری و آموزشی پس از مطالعه این فصل دانشجو باید بتواند:

- تبدیل خطی را تعریف و ویژگی‌های آن را بیان کند.
- هسته و برد تبدیل خطی و هسته را بیان و آنها را به‌دست آورد.
- قضیه بُعد را بیان و آن را ثابت کند.
- رابطه بین نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی را بداند.
- رابطه بین نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی را بداند.
- حل دستگاه معادلات خطی همگن و ناهمگن را بداند.
- بردار مختصات را بتواند به‌دست آورد.
- ماتریس نمایش نگاشت‌های خطی را تعیین کند.
- ماتریس تبدیل پایه‌ها به یکدیگر را به‌دست آورد.

فصل هفتم

نگاشت‌های خطی

در فصل ششم، مفهوم یک نگاشت خطی را معرفی کردیم. در آن جا نگاشت خطی تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ را به‌عنوان یک ماتریس در نظر گرفتیم. اکنون این ایده را روی هر فضای برداری تعمیم می‌دهیم.

برای مقایسه فضاهای برداری نگاشت‌های خطی را مورد استفاده قرار خواهیم داد. به نظر می‌رسد، در یک جمله ریاضی بتوان گفت، هر فضای برداری، با بعد متناهی برای nی، همان $\mathbb{R}^n$ است. در نتیجه غالباً می‌توانیم یک فضای برداری کلی را با در نظر گرفتن $\mathbb{R}^n$ مورد بحث قرار دهیم.

۱-۷ نگاشت‌های خطی، هسته و برد

یک فضای برداری دارای دو عمل تعریف شده روی آن است که آنها را جمع برداری و ضرب اسکالر می‌نامیم. نگاشست‌های خطی بین دو فضای برداری نگاشت‌هایی هستند که ساختار خطی را به معنی زیر حفظ می‌کنند.

تعریف. فرض کنیم U و V فضاهای برداری باشند، همچنین u_1 و u_2 بردارهایی در U و c یک اسکالر باشند. یک نگاشت $T : U \longrightarrow V$ **خطی** گفته می‌شود اگر:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

$$T(cu) = cT(u)$$

شرط اول بدین معنی است که T مجموع دو بردار را به‌روی مجموع تصویرهای آن دو بردار می‌نگارد. شرط

دوم مستلزم آن است که T مضرب اسکالر یک بردار را به همان مضرب اسکالر تصویر بردار می‌نگارد. بنابراین اعمال جمع و ضرب اسکالر تحت نگاشت خطی حفظ می‌شوند.

مثال ۱: ثابت کنید نگاشت $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ با ضابطه $T(x,y) = (۲x, x+y)$ یک نگاشت خطی است.

حل: اول نشان می‌دهیم T جمع را حفظ می‌کند فرض کنیم $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ اعضای $R^۲$ باشند، در این‌صورت

$$\begin{aligned}
T((x_۱,y_۱)+(x_۲,y_۲)) &= T(x_۱+x_۲, y_۱+y_۲) && \text{(با توجه به جمع بردارها)}\\
&= T(۲x_۱+۲x_۲, x_۱+x_۲+y_۱+y_۲) && \text{(با توجه به تعریف } T\text{)}\\
&= (۲x_۱, x_۱+y_۱)+(۲x_۲, x_۲+y_۲) && \text{(جمع بردارها)}\\
&= T(x_۱,y_۱)+T(x_۲,y_۲) && \text{(با توجه به تعریف)}
\end{aligned}$$

بنابراین T جمع برداری را حفظ می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنیم c یک اسکالر باشد:

$$\begin{aligned}
T(c(x_۱,y_۱)) &= T(cx_۱, cy_۱) && \text{(با توجه به ضرب اسکالر در بردار)}\\
&= (۲cx_۱, cx_۱+cy_۱) && \text{(با توجه به تعریف } T\text{)}\\
&= c(۲x_۱, x_۱+y_۱) && \text{(ضرب اسکالر در بردار)}\\
&= cT(x_۱,y_۱) && \text{(با توجه به تعریف)}
\end{aligned}$$

بنابراین T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. در نتیجه T خطی است. مثال بعدی نفاوت بین نگاشت‌های خطی فضاهای برداری و توابع را نشان می‌دهد.

مثال ۲: فرض کنید p_n فضای برداری متشکل از چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجه نابیشتر از n باشد نشان می‌دهیم تبدیل

$$T : P \longrightarrow F$$

$$T(ax^۲+bx+c) = (a+b)x+c$$

یک نگاشت خطی است.

حل: فرض کنیم $px^۲ + qx + r$ و $ax^۲ + bx + c$ اعضای دلخواهی از $P^۲$ باشند.

$$T((ax^۲+bx + c) + (px^۲ + qx + r))$$
$$= T((a + p)x^۲ + (b + q)x + (c + r)) \qquad \text{(با توجه به جمع برداری)}$$
$$= ((a + p + b + q)x + (c + r) = (a + b)x + c + (p + q)x + r$$
$$= T(ax^۲ + bx + c) + T(px^۲ + qx + r)$$

پس T جمع را حفظ می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنیم k یک اسکالر باشد، پس:

$$T(k(ax^۲ + bx + c)) = T(kax^۲ + kbx + kc) \qquad \text{(تعریف } T\text{)}$$
$$= (ka + kb)x + kc \qquad \text{(با توجه به ضرب اسکالر)}$$
$$= k((a + b)x + c)$$
$$= kT(ax^۲ + bx + c) \qquad \text{(تعریف } T\text{)}$$

T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند، بنابراین T یک نگاشت خطی است اکنون با توجه به خواص مشتق که خواننده در درس حساب با آن آشناست نتیجه می‌گیریم مشتق یک نگاشت خطی می‌سازد.

مثال ۳: فرض کنیم D عملگر مشتق باشد، D همان $\frac{d}{dx}$ است که این علامت بیشتر در این متن مورد استفاده قرار می‌گیرد) برای مثال

$$D(۴x^۳ - ۳x^۲ + ۲x + ۱) = ۱۲x^۲ - ۶x + ۲$$

D عضو $۴x^۳ - ۳x^۲ + ۲x + ۱$ از $p_۳$ را به‌روی عضو $۲x^۲ - ۶x + ۲$ از $p_۲$ می‌نگارد. حال نشان می‌دهیم D یک عملگر خطی روی p_n است. (یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به‌روی خودش است) فرض کنید g و f اعضای p_n و c یک اسکالر باشند، خواص مشتق به‌آسانی نتیجه می‌دهد که D عملگر خطی است:

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(cf) = cD(f)$$

می‌دانیم یک نگاشت خطی عبارت است از تابعی از یک فضای برداری (دامنه) به‌توی فضای برداری دیگر (هم دامنه بنامید) است. برای هر نگاشت خطی دو فضای برداری که هسته و تصویر نامیده می‌شوند وجود

دارد. که در این بخش معرفی می‌کنیم و خواص این فضاها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه زیر یک خاصیت مهم از تبدیلات خطی می‌دهد.

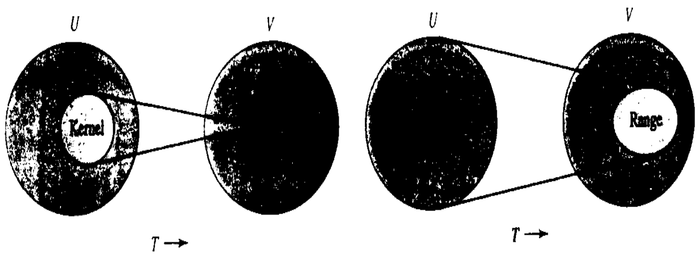
۷-۱-۱ قضیه. فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنیم O_u و O_v بردارهای صفر U و V باشند در این‌صورت $T(O_u) = O_v$ یعنی یک نگاشت خطی بردار صفر را به بردار صفر تصویر می‌کند.

اثبات. فرض کنیم u یک بردار در U و $T(u) = v$ باشند، همچنین فرض کنیم o یک اسکالر صفر باشد. از آنجا که $ou = O_v$ و $ov = O_v$ و T خطی است داریم:

$$T(o_u) = T(ou) = oT(u) = ov = O_v$$

تعریف. فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد.

مجموعه بردارهای از U که به صفر فضای برداری V تصویر می‌شوند هسته T نامیده می‌شوند. هسته با $\ker(T)$ نمایش داده می‌شود. مجموعه بردارهای در V که تصویر بردارهایی در U می‌باشند برد T نامیده می‌شود. برد T با $\mathrm{rang}(T)$ نمایش داده می‌شود. این مجموعه‌ها به طرز شهودی در شکل ۷ـ۱ نشان داده شده‌اند. وقتی یک مجموعه در جبر خطی معرفی می‌شود، بایستی قادر باشیم بدانیم که آنها فضای برداری هستند یاخیر، اکنون نشان می‌دهیم هسته و برد فضاهای برداری هستند.



شکل ۷ـ۱

۷-۱-۲ قضیه. فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد:

الف) هسته T زیرفضایی از U است.

ب) برد T زیرفضایی از V است.

اثبات. الف) از قضیه قبلی ما می‌دانیم که هسته ناتهی است زیرا شامل بردار صفر U است، برای اثبات اینکه هسته زیرفضایی از U است. نشان می‌دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است.

ابتدا ثابت می‌کنیم تحت جمع بسته است. فرض کنیم u_1 و u_2 دو عضو از هسته T باشند بنابراین $T(u_1) = 0$ و $T(u_2) = 0$ با استفاده از خطی بودن T داریم:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$$

بردار $u_1 + u_2$ به‌روی 0 تصویر می‌شود. بنابراین $u_1 + u_2$ در $\ker(T)$ است حال نشان می‌دهیم $\ker(T)$ تحت ضرب اسکالر همیشه بسته است، فرض کنیم c یک اسکالر باشد. دوباره با استفاده از خطی بودن T داریم:

$$T(cu_1) = cT(u_1) = c0 = 0$$

بنابراین cu_1 در $\ker(T)$ است و هسته تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، در نتیجه یک زیرفضایی از U است.

ب) بنابر قضیه قبل برد ناتهی است، زیرا این برد شامل بردار صفر V است. برای اثبات اینکه برد یک زیرفضای V است، نشان می‌دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. فرض کنیم v_1 و v_2 اعضای $\text{range}(T)$ باشند. بنابراین بردارهای w_1 و w_2 در قلمرو U وجود دارند که $T(w_1) = v_1$ و $T(w_2) = v_2$، با استفاده از خطی بودن T:

$$T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2) = v_1 + v_2$$

بنابراین $v_1 + v_2$ در برد است. فرض کنیم c یک اسکالر باشد. با استفاده از خطی بودن T:

$$T(cw_1) = cT(w_1) = cv_1$$

بردار cv_1 تصویر cw_1 است. بنابراین cv_1 در برد قرار می‌گیرد. برد تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است از آنجا زیرفضایی از V است.

مثال ۴: هسته و برد عملگرد خطی $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ را بیابید.

حل: از آنجا که عملگر خطی T فضای برداری R^3 را به توی R^3 تصویر می‌کند، هسته و برد هر دو زیرفضاهای برداری از R^3 می‌باشند.

هسته: $\ker(T)$ زیرمجموعه‌ای است که به‌روی بردار $(0, 0, 0)$ نگاشته می‌شود. می‌دانیم که:

$T(x,y,z)=(x,y,\circ)=(\circ,\circ,\circ)$ اگر و فقط اگر $x=\circ$ و $y=\circ$. بنابراین $\ker(T)$ مجموعه همه بردارهایی به شکل $(\circ,\circ,z)$ می‌باشد. این مجموعه را به این‌صورت بیان می‌کنیم:

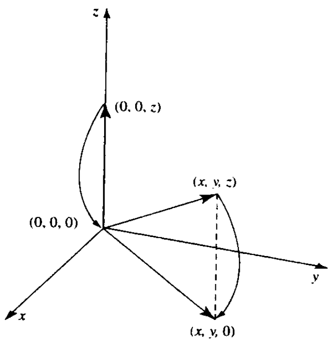
$$\ker(T)=\{(\circ,\circ,z)\}$$

به‌طور هندسی $\ker(T)$ مجموعه همه بردارهایی که روی محور zها واقع هستند می‌باشد. برد T مجموعه‌ی همه‌ی بردارهایی به شکل $(x,y,\circ)$ می‌باشد. بنابراین

$$\text{range}(T)=\{(x,y,\circ)\}$$

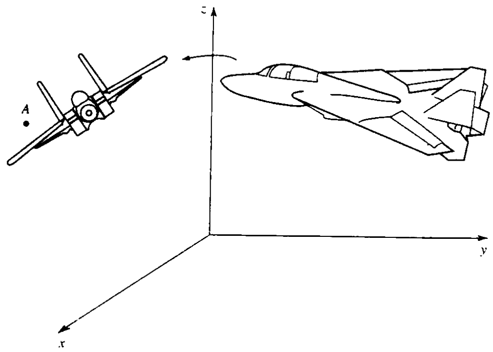
$\text{range}(T)$ مجموعه‌ی همه بردارهایی که در صفحه xy قرار دارند می‌باشد.

مشخصات این تبدیل خطی را در شکل ۷ـ۲ نشان داده‌ایم. مشاهده می‌کنیم T بردار (x,y,z) را به‌روی بردار $(x,y,\circ)$ در صفحه xy می‌نگارد. T همه بردارها را به‌روی صفحه xy می‌نگارد. T یک مثال از عملگر تصویری است.



شکل ۷ـ۲

تصاویر در کاربردها مهم هستند. در جهانی که ما زندگی می‌کنیم سه بعد دارد. وقتی که ما یک شئ را مشاهده می‌کنیم ما نقش دوبعدی از یک جسم را می‌گیریم، چشم‌انداز جابه‌جا تغییر می‌کند.تصویر می‌تواند آنچه اشیای سه‌بعدی از جابه‌جایی گوناگون آنها دیده می‌شود در معماری و به‌طور جدی در هر فضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. خطوط خارجی یک شئ جالب در ارتباط با دستگاه مختصات مناسبی به یک کامپیوتر مرکزی ارتباط دارند. برنامه‌های کامپیوتر شامل یک تبدیل تصویری است که اشیاء را روی یک صفحه تصویر می‌کند. خروجی چشم‌انداز دوبعدی اجسام است، که توسط تصاویر به کامپیوتر رسیده است. در این روش از تبدیلات گوناگونی می‌تواند استفاده شود که منجر به پرسپکتیو گوناگون جسم شوند.



شکل ۷ـ۳

اکنون هسته و برد ماتریس تبدیلات را توصیف می‌کنیم. قضیه بعد اطلاعاتی در مورد برد یک تبدیل ماتریس به ما نشان می‌دهد.

۷-۱-۳ قضیه. برد $T : R^n \longrightarrow R^m$ تعریف شده با $T(u) = Au$ توسط بردارهای ستونی A پدید می‌آید.

اثبات. فرض کنیم v یک بردار از برد T باشد، بردار u وجود دارد که $T(u) = v$، u را برحسب پایه استاندارد R^n بیان می‌کنیم.

$$u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$$

بنابراین

$$v = T(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = a_1T(e_1) + \cdots + a_nT(e_n)$$

در نتیجه بردارهای ستونی A به‌صورت $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ برد A را پدید می‌آورند.

مثال: هسته و برد تبدیل خطی توصیف شده توسط ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل: A یک ماتریس ۳×۳ است. بنابراین یک عملگر خطی $T : R^3 \longrightarrow R^3$ است $T(x) = A(x)$ اعضای R^3 به شکل ستونی نوشته می‌شوند که در ماتریس A ضرب می‌شوند.

هسته شامل همه بردارهای $x = (x_1, x_2, x_3)$ در $\mathbb{R}^3$ است به‌طوری که $T(x) = 0$ بنابراین

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این تساوی ماتریس‌ها متناظر با دستگاه معادلات خطی زیر است:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

برای حل این دستگاه مجموعه جواب‌ها را در نظر می‌گیریم، $x_1 = -5r$، $x_2 = r$ و $x_3 = r$. در نتیجه هسته بردارهایی به شکل $(-5r, r, r)$ می‌باشد.

$$\ker(T) = \{(-5r, r, r)\}$$

$\ker(T)$ یک زیرفضای یک بعدی از R^3 با پایه $(-5, 1, 1)$ می‌باشد.

برد: برد توسط بردارهای ستونی A تولید می‌شود. این بردارهای ستونی به‌عنوان سطرهای یک ماتریس نوشته می‌شوند و به شکل ماتریس تحویل یافته سطری تبدیل می‌شود. بردارهای سطری غیرصفر یک پایه برای برد تشکیل می‌دهند، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای $(1, 0, 1)$ و $(0, 1, 1)$ برد T را پدید می‌آورند. یک بردار دلخواه در برد ترکیب خطی از این بردارهای پایه خواهد بود.

$$s(1, 0, 1) + r(0, 1, 1)$$

بنابراین برد T چنین است.

$$\operatorname{range}(T) = \{(s, t, s + t)\}$$

$\operatorname{range}(T)$ زیرفضای دوبعدی از R^3 با پایه $(0, 1, 1)$ و $(1, 0, 1)$ است. قضیه‌ی زیر ارتباط مهم بین بعد هسته و برد یک تبدیل خطی را بیان می‌کند.

۷-۱-۴ قضیه. فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد، در این‌صورت

$$\dim\ker(T) + \dim\mathrm{range}(T) = \dim\dim(T)$$

مشاهده کنید این نتیجه برای نگاشت خطی T در مثال بالا برقرار است.
$\dim\ker(T) = ۱, \dim\mathrm{range}(T) = ۲, \dim\dim(T) = ۳$

اثبات. فرض کنیم هسته شامل بیش از بردار صفر باشد و بدین معنی که یک سوراخ از U نیست (شما در حالت خاصی در تمرینات بعد این را ثابت می‌کنید).
فرض کنید $u_۱$، ... و u_m یک پایه برای $\ker(T)$ باشند با اضافه کردن بردارهای $u_{m+۱}, \dots, u_n$ به این مجموعه پایه‌ی $u_۱, \dots, u_n$ برای U حاصل می‌شود. نشان می‌دهیم $T(u_{m+۱}), \dots, T(u_n)$ تشکیل یک پایه برای برد می‌دهد و در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. فرض کنیم u برداری در U باشد، u می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه به‌صورت زیر بیان شود.

$$u = a_۱u_۱ + \cdots + a_mu_m + a_{m+۱}u_{m+۱} + \cdots + a_nu_n$$

خطی بودن T نتیجه می‌دهد:

$$T(u) = a_۱T(u_۱) + a_mT(u_m) + a_{m+۱}T(u_{m+۱}) + \cdots + a_nT(u_n)$$

از آنجا که $u_۱, \cdots, u_n$ در هسته می‌باشند، به‌دست می‌آوریم:

$$T(u) = a_{m+۱}T(u_{m+۱}) + \cdots + a_nT(u_n)$$

$T(u)$ بردار دلخواهی از برد T است. بنابراین بردارهای $T(u_{m+۱})$، ... و $T(u_n)$ برد را پدید می‌آورند.
اکنون ثابت می‌کنیم این بردارها مستقل خطی هستند، فرض کنیم

$$b_{m+۱}T(u_{m+۱}) + \cdots + b_nT(u_n) = ۰ \qquad (۱)$$

که در آن اسکالرها جهت آسانی دارای اندیس‌های مناسب شده‌اند. خطی بودن T نتیجه می‌دهد که

$$T(b_{m+۱}u_{m+۱} + \cdots + b_nu_n) = ۰$$

این بدین معنی است که بردار $b_{m+۱}u_{m+۱} + \cdots + b_nu_n$ در هسته است. بنابراین به‌صورت یک ترکیب خطی از اعضای پایه بیان می‌شود.فرض کنیم

$$b_{m+۱}u_{m+۱} + \cdots + b_nu_n = c_۱u_۱ + \cdots + c_mu_m$$

بنابراین

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m - b_{m+1}u_{m+1} - \cdots - b_nu_n = 0$$

از آنجا که بردارهای $u_1, \ldots, u_m$ و $u_1, \ldots, u_{m+1}$ یک پایه می‌باشند پس مستقل خطی هستند. بنابراین ضرایب همگی صفر هستند. $c_1 = 0, \ldots, c_m = 0$ و $b_{m+1} = 0, \ldots, b_n = 0$. با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم $T(u_{m+1}), \ldots, T(u_n)$ مستقل خطی هستند. مجموعه بردارهای $T(u_{m+1}), \ldots, T(u_n)$ پایه‌ای برای برد هستند. بنابراین قضیه اثبات شد.

به خواننده یادآوری می‌کنیم که فضای تولید شده توسط بردارهای ستونی ماتریس فضای ستونی ماتریس نامیده می‌شوند و بعد فضای ستونی را رتبه ماتریس می‌نامیم. در نتیجه می‌توانیم بگوییم:
بعد برد یک ماتریس نگاشت خطی رتبه ماتریس است.

مثال ۶: بعد هسته و برد نگاشت خطی T تعریف شده توسط ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

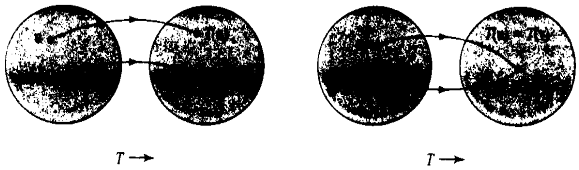
حل: مشاهده می‌کنیم که ماتریس A به شکل تحویل یافته است. بردارهای سطری مستقل خطی هستند بنابراین $\operatorname{rank}(A) = 2$ در نتیجه $\operatorname{dim range}(T) = 2$.

دامنه T برابر R^3 است پس $\operatorname{dim domain}(T) = 3$ بنابراین $\operatorname{dim ker}(T) = 1$ هسته یک نگاشت خطی T اغلب فضای پوچ نامیده می‌شود. $\operatorname{dim ker}(T) = 1$ بعد هسته و $\operatorname{dim range}(T)$ رتبه نگاشت خطی نامیده می‌شود. از آنچه مشاهده شد چنین برمی‌آید که بعد یک ماتریس نگاشت رتبه ماتریس است. قضیه قبلی اغلب به‌عنوان قضیه رتبه/ پوچی بیان می‌گردد و به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{nullity}(T) = \operatorname{dim domain}(T)$$

این بخش را با ارتباط دادن بیین هسته و یک به‌یک بودن تبدیل خطی به پایان می‌بریم و کاربرد تئوری این ارتباط را ملاحظه خواهیم کرد.

تعریف. یک نگاشت T یک‌به‌یک نامیده می‌شود اگر هر عضو در برد T متناظر با تصویر دقیقاً یک عضو از دامنه T باشد. شکل ۷ـ۴ را ببینید. این بدین معنی است که T یک‌به‌یک است اگر $T(u) = T(v)$ نتیجه می‌دهد $u = v$.



شکل ۷_۴

۷-۱-۵ قضیه. یک نگاشت خطی T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر هسته آن بردار صفر باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم T یک‌به‌یک باشد. هسته شامل همه بردارهایی که به‌توی بردار صفر نگاشته می‌شوند، می‌باشد. از آنجا که T یک‌به‌یک است هسته باید شامل یک بردار باشد. اما می‌دانیم بردار صفر در هسته بایستی باشد بنابراین هسته بردار صفر است. برعکس فرض کنیم هسته بردار صفر باشد.فرض کنیم u و v بردارهایی باشند که $T(u) = T(v)$. عملگر خطی T را به‌کار برده، داریم:

$$T(u) - T(v) = \circ$$

$$T(u - v) = \circ$$

بنابراین $u - v$ در هسته است. اما هسته بردار صفر است. بنابراین

$$u - v = \circ$$

$$u = v$$

در نتیجه نگاشت یک‌به‌یک است.

۷-۱-۶ قضیه. تبدیل $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تعریف شده توسط $T(x) = Ax$ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد.

اثبات: فرض کنیم T یک‌به‌یک باشد بنابراین $\ker(T) = \circ$ قضیه رتبه/پوچی نتیجه می‌دهد که $\dim\mathrm{range}(T) = n$ بنابراین nستون بردار A مستقل خطی هستند. نتیجه می‌گیریم که رتبه برابر n است و $|A \neq \circ|$.

برعکس فرض کنیم که A نامنفرد باشد بنابراین رتبه A برابر n است و n بردار ستونی آن مستقل خطی هستند. از قضیه رتبه/پوچی این نتیجه لازم به‌دست می‌آید که $\text{dimrange}(T) = n$ یعنی $\ker(T) = ۰$ بنابراین T یک‌به‌یک است.

مثال ۷: تعیین کنید که نگاشت‌های خطی T_A و T_B تعریف شده با ماتریس‌های زیر یک‌به‌یک هستند.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۵ & ۷ \\ ۰ & ۱ & ۹ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و ب) $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۴ & ۲ \\ ۰ & ۷ & ۵ \end{bmatrix}$

حل: الف) از آنجا که سطرهای A مستقل خطی هستند $\text{rank}(A) = ۳$ نتیجه می‌گیریم $\text{dimrange}(T_A) = ۳$ دامنه T در $\mathbb{R}^۴$ است بنابراین $\text{dimdomain}(T_A) = ۴$ با استفاده از قضیه رتبه/پوچی $\text{dimker}(T_A) = ۱$ از آنجایی که $\text{dimker}(T_A) \neq ۰$ هسته بردار ناصفر است، نگاشت یک‌به‌یک نیست.

ب) می‌توان نشان داد که $|B| \neq ۰$ ماتریس B نامنفرد است. بنابراین نگاشت T_B یک‌به‌یک است.

۷-۱-۷ قضیه. فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی یک‌به‌یک باشد. اگر مجموعه $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ در U مستقل خطی باشد، $\{T(u_۱), \ldots, T(u_n)\}$ در V مستقل خطی است. به‌عبارت دیگر که یک نگاشت خطی یک‌به‌یک، استقلال خطی را حفظ می‌کند.

اثبات. فرض کنیم

$$a_۱T(u_۱) + \cdots + a_nT(u_n) = ۰ \qquad (۲)$$

برای اسکالرهای $a_۱$ و ... و a_n، از آنجاییکه T خطی است می‌توان نوشت $T(a_۱u_۱+\cdots+a_nu_n) = ۰$، T یک‌به‌یک است، بنابراین هسته بردار صفر است. در نتیجه $a_۱u_۱ + \cdots + a_nu_n = ۰$ اما مجموعه $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ مستقل خطی است بنابراین

$$a_۱ = ۰, \ldots, a_n = ۰$$

با توجه به معادله (۲)، $\{T(u_۱), \ldots, T(u_n)\}$ مستقل خطی است.

۸-۱-۷ تمرین

۱) ثابت کنید که نگاشت $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (۳x, x + y)$ خطی است تصویر بردارهای $(۱, ۳)$ و $(-۱, ۲)$ تحت این عملگر را بیابید.

۲) ثابت کنید $T(x,y) = (x + ۲y, ۳y, x - y)$ یک نگاشت خطی $T : R^۲ \longrightarrow R^۲$ تعریف می‌کند. تصویر $(۱,۱)$ و $(۴,۰)$ را پیدا کنید.

۳) ثابت کنید عملگرهای $T : R^۲ \longrightarrow R$ زیر خطی نیستند.

الف) $T(x,y) = y - ۲$

ب) $T(x,y) = x - ۳$

۴) نشان دهید عملگر $T : P_۲ \longrightarrow p_۲$ تعریف شده در زیر خطی است. $T(ax^۲+bx+c) = cx^۲+a$. تصویر $۳x^۲ - x + ۲$ را پیدا کنید. عضو دیگری از $P_۲$ را بیابید که همان تصویر را داشته باشد.

۵) نشان دهید که عملگر $T(ax^۲ + bx + c) = bx + c$ از $p_۱ \longrightarrow p_۲$ خطی است. تصویر $۳x^۲ - x + ۲$ را بیابید. عضو دیگری از $p - ۲$ که دارای همان تصویر است را تعیین کنید.

۶) ثابت کنید عملگر $T(ax + b) = x + a$ از $p_۱ \longrightarrow p_۱$ خطی نیست.

۷) نگاشت‌های خطی T تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر را در نظرگرفته، هسته و برد هر نگاشت خطی را تعیین کنید. نشان دهید برای هر نگاشت $\dim\ker(T)+\dim\mathrm{range}(T) = \dim\mathrm{domain}(T)$

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ر) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ه) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ ی) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$

۸) هسته وبرد هر کدام از نگاشت‌های زیر را تعیین کنید.نشان دهید برای هر نگاشت

$$\dim\ker(T) + \dim\mathrm{range}(T) = \dim\mathrm{domain}(T)$$

الف) $T(x,y,z) = (x,۰,۰)$ از $R^۳ \longrightarrow R^۳$

ب) $T(x,y,z) = (x+y,z)$ از $R^۳ \longrightarrow R^۲$

ج) $T(x,y,z) = (x+y+z)$ از $R^۳ \longrightarrow R$

د) $T(x,y,z) = (۳x, x-y, y)$ از $R^۲ \longrightarrow R^۳$

۹) فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ و u بردار دلخواهی در U باشد، v بردار ثابت در U و ۰ بردار صفر U باشند، ثابت کنید نگاشت‌های زیر خطی هستند. هسته و برد هر نگاشت خطی را بیابید.

الف) $T(u) = 5u$

ب) $T(u) = 2u + 3v$

ج) $T(u) = u$ (نگاشت همانی روی u نامیده می‌شود)

د) $T(u) = o$ (نگاشت صفر روی u نامیده می‌شود)

۱۰) قضیه رتبه/پوچی را به‌کار ببرید و بعد هسته و برد هرکدام از نگاشت‌های خطی تعریف شده توسط ماتریس‌ها را تعیین کنید. کدام یک از نگاشت‌های یک‌به‌یک هستند؟

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

د) $D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ر) $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ ز) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

۱۱) با استفاده از دترمینان در مورد نگاشت خطی تعریف شده به توسط ماتریس‌های‌زیر تعیین کنید یک‌به‌یک هستند یا خیر؟

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ ر) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ز) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

۱۲) فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ یک بردار u نقطه ثابت از T است اگر $T(u) = u$ نقاط ثابت (در صورت وجود) هرکدام از نگاشت‌های زیر را بیابید.

الف) $T(x, y) = (x, 3y)$

ب) $T(x, y) = (x, 2)$

ج) $T(x, y) = (x, y + 1)$

د) $T(x, y) = (x, y)$

ه) $T(x,y)=(y,x)$

و) $T(x,y)=(x+y,x-y)$

ز) ثابت کنید اگر T خطی باشد مجموعه همه نقاط ثابت یک زیرفضا می‌باشد.

۱۳) فرض کنیم $T:U\longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که

$$\dim\ker(T)+\dim\mathrm{range}(T)=\dim\mathrm{domain}(T)$$

الف) وقتی که $\ker(T)=0$

ب) وقتی‌که $\ker(T)=U$

(اینها دو حالت خاص در اثبت قضیه ۷ـ۴ می‌باشد).

۱۴) فرض کنید $T:U\longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد

الف) ثابت کنید وقتی $\dim(U)=\dim(V)$ آنگاه $\mathrm{range}(T)=V$ اگر و تنها اگر $\ker(T)=0$.

ب) ثابت کنید $\ker(T)=U$ اگر و تنها اگر $\mathrm{range}(T)=0$.

۱۵) فرض کنید $T:U\longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید بعد برد T هرگز نمی‌تواند از بعد دامنه بیشتر باشد.

۱۶) فرض کنید A ماتریس $m\times n$ یک نگاشت $T:R^n\longrightarrow R^m$ تعریف می‌کند، A^t یک ماتریس $m\times n$ باشد که یک نگاشت $T^t:R^m\longrightarrow R^n$ تعریف می‌کند. نشان دهید:

$$\dim\mathrm{range}(T)=\dim\mathrm{range}(T^t)$$

۱۷) نگاشت تصویری در $T(x,y,z)=(x,y,0)$ از $R^3\longrightarrow R^3$ را در نظر بگیرید مجموعه همه بردارهای در R^3 که توسط T به‌روی بردار $(1,2,0)$ تصویر می‌شوند را بیابید این مجموعه را رسم کنید.

۱۸) عملگر خطی $T(x,y)=(x-y,2y-2x)$ از $R^2\longrightarrow R^2$ را در نظر بگیرید مجموعه همه بردارهای در R^2 که توسط T به‌روی بردار $(2,-4)$ تصویر می‌شوند را پیدا و رسم کنید.

۱۹) فرض کنیم عملگر خطی $T:R^2\longrightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x,y)=(2x,3x)$ باشد همه بردارهایی را که توسط T به‌روی بردار $(4,6)$ تصویر می‌شوند یافته و رسم کنید. آیا این مجموعه زیرفضایی از R^2 است.

۲۰) اگر نگاشت خطی $T : R^3 \longrightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ باشد، مجموعه همه بردارهای را که توسط T به‌روی بردار $(1, 4)$ تصویر می‌شود را پیدا و رسم کنید. آیا این مجموعه یک زیرفضا است؟

۲۱) فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد، هم‌نین فرض کنید v یک بردار ناصفر در V باشد همچنین W مجموعه بردارهایی در U باشد که $T(W) = v$. آیا W یک زیرفضایی از U است؟

۲۲) ثابت کنید $T : P_2 \longrightarrow P_2$ تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد T را بیابید.

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 + a_1)x^2 + a_1x + 2a_0$$

۲۳) ثابت کنید $T : P_3 \longrightarrow P_2$ تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد T و برای این زیرفضا پایه‌ای بیابید.

$$T(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3x^2 + (-a_0)$$

۲۴) ثابت کنید $g : p_2 \longrightarrow p_3$ تعریف شده در زیر خطی است، هسته و برد g را بیابید پایه‌ای برای این زیرفضا بیابید.

$$g(a_2x^2 + a - 1x + a_0) = 2a_2x^3 + a_1x + 3a_0$$

۲۵) فرض کنید D عملگر مشتق باشد، D را به‌عنوان یک عملگر خطی روی p_n در نظر بگیرید. تصویر $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ تحت D را بیابید هسته و برد D را بیابید.

۲۶) فرض کنید D^2 مشتق دوم باشد.

الف) تصویر $2x^3 + 3x^2 - 5x + 4$ تحت D^2 را به‌دست آورید. ثابت کنید D^2 یک عملگر خطی روی p_n است، هسته و برد D^2 را بیابید.

ب) نگاشت $D^2 + D + 3$ از p_n به‌روی خودش را در نظر گرفته و تصویر $x^3 - 2x2 + 6x + 1$ تحت این عملگر را بیابید. ثابت کنید این نگاشت خطی است؛ هسته و برد این نگاشت را بیابید.

۲۷) فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری باشد D را به‌عنوان یک عملگر روی p_n در نظر بگیرید. مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌هایی را که توسط D به‌روی $3x^2 - 4x + 7$ نگاشته می‌شوند بیابید.

۲۸) فرض کنید $D^۲$ عملگر مشتق‌گیری مرتبه دوم باشد و عملگر $D^۲$ را روی p_n در نظر بگیرید مجموعه چندجمله‌ای‌هایی که توسط $D^۲$ به‌روی $۴x^۳ - ۶x^۲ - ۲x + ۳$ نگاشته می‌شوند را بیابید.

۲۹) فرض کنید g عملگری باشد که یک انتگرال از ۰ به ۱ تعریف می‌کند، g می‌تواند یک نگاشت از P_n به‌روی R تعریف کند. برای مثال

$$g(۴x^۳-۶x^۲+۲x+۳) = \int_۰^۱ (۴x^۳-۶x^۲+۲x+۳)dx = [x^۴-۲x^۳+x^۲+۳x]_۰^۱ = ۳$$

g عضو $۴x^۳ - ۶x^۲ + ۲x + ۳$ از $P_۳$ را به‌روی عضو ۳ از R می‌نگارد نشان دهید g یک نگاشت خطی $R \longrightarrow P_n$ است.

۳۰) فرض کنید p یک چندجمله‌ای در p_n و $T(p) = \int_۰^۱ p(x)dx$ نگاشت خطی p_n به‌توی R باشد $T(۸x^۳ + ۶x^۲ + ۴x + ۱)$ را بیابید. هسته و برد T را بدست آورید. مجموعه عضوهای p_n که به‌روی ۲ تصویر می‌شوند را بیابید.

۳۱) فرض کنید U فضای برداری ماتریس‌های ۲ × ۲ باشد و A و B ماتریس‌های ۲ × ۲ باشند. تعیین کنید کدامیک از نگاشت‌های زیر خطی هستند هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های خطی را بیابید.

الف) $T(A) = A'$ ب) $T(A) = |A|$ ج) $T(A) = \mathrm{trac}(A)$

د) $T(A) = A^۲$ ر) $T(A) = A + B$ ز) $T(A) = a_{۱۱}$

و) $T(A) = ۰$ ه) $T(A) = I$ ی) $T(A) = A$ تحویل یافته

۳۲) فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که $\mathrm{dimrange}(T) = \mathrm{dimdomain}(T)$ اگر و تنها اگر T یک‌به‌یک باشد.

۳۳) نشان دهید که هیچ نگاشت خطی از $R^۲ \longrightarrow R^۳$ که یک‌به‌یک باشد وجود ندارد. به‌طورکلی نشان دهید هیچ نگاشت خطی یک‌به‌یک از $V \longrightarrow U$ وجود ندارد هرگاه بعد U بزرگتر از بعد V باشد.

۳۴) فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر مستقل خطی بودن را حفظ کند.

۳۵) فرض کنید T یک تبدیل خطی با دامنه U باشد فرض کنید $v_۱, \ldots, v_m$ بردارهایی در U و $a_۱, \ldots, a_m$ اسکالر باشد ثابت کنید که

$$T(a_۱v_۱ + \cdots + a_mv_m) = a_۱T(v_۱) + \cdots + a_mT(v_m)$$

این نتیجه را می‌توانید توسط استقرا ثابت کنید.

۳۶) فرض کنید X یک بردار دلخواه در R^n و Y یک بردار ثابت باشد ثابت کنید تبدیل $T(X) = X.Y$ یک نگاشت خطی از $R^n \longrightarrow R$ است. ($X.Y$ ضرب درونی X و Y نامیده می‌شود)

۳۷) فرض کنید T_1 و T_2 دو تبدیل خطی $V \longrightarrow U$ و c یک اسکالر باشند تبدیل‌های $T_1 + T_2$ و cT_1 تعریف شده توسط $(T_1 + T_2((u) = T_1(u) + T_2(u)$ و $(cT_1)(u) = cT_1(u)$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $T_1 + T_2$ و cT_1 هر دو نگاشت خطی هستند.

ب) ثابت کنید اگر T_1 و T_2 نگاشت‌های تعریف شده توسط ماتریس‌های A_1 و A_2 باشند، آنگاه $T_1 + T_2$ توسط ماتریس $A_1 + A_2$ و cT_1 توسط ماتریس cA_1 تعریف می‌شوند.

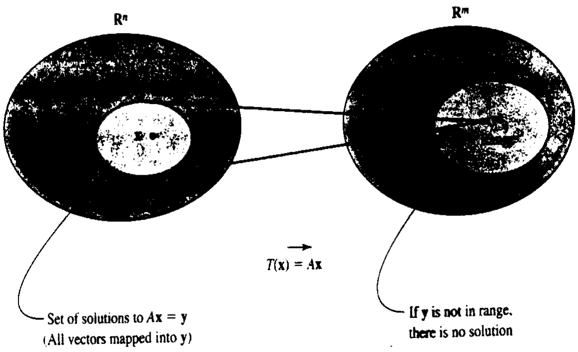
ج) ثابت کنید که مجموعه نگاشت‌های تحت این عملگرهای جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

۷-۲ نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی

نگاشت خطی و مفهوم هسته و برد نقش مهمی در تجزیه و تحلیل معادلات خطی بازی می‌کند خواهیم دید که اینها ابزاری هستند که به ما در پیدا کردن مجموعه جواب‌های معادلات کمک می‌کنند می‌دانیم که یک دستگاه m معادله خطی با n متغیر را به‌صورت ماتریسی $AX = Y$ می‌توان نوشت.

A یک ماتریس $m \times n$ است که ماتریس ضرایب نامیده می‌شود مجموعه جواب‌ها مجموعه همه Xها است که در معادله صدق می‌کنند. اکنون یک راه برای این مجموعه جواب‌ها داریم. فرض کنیم $T : R^n \longrightarrow R^m$ یک نگاشت خطی تعریف شده توسط A باشد دستگاه معادلات می‌تواند به این‌صورت نوشته شود $T(x) = y$.

بنابراین مجموعه جواب مجموعه بردارهای x در R^n است که توسط T به‌روی بردار y تصویر می‌شوند. اگر y در برد T نباشد چنین جوابی وجود نخواهد داشت. شکل ۷-۵ را ملاحظه شود.



شکل ۷ـ۵

۷-۳ معادلات همگن

راه قبلی برای دستگاه معادلات خطی ما را برای نتیجه زیر راهنمایی می‌کند.

۷-۳-۱ قضیه. مجموعه جواب‌های یک دستگاه همگن از m معادله خطی با n متغیر $AX = ۰$، زیرفضایی از R^n است.

اثبات. فرض کنیم T نگاشت خطی از R^n به R^m تعریف شده توسط A باشد مجموعه جواب، مجموعه بردارهایی در R^n است که توسط T به‌روی بردار صفر نگاشته می‌شوند. مجموعه جواب هسته نگاشت است و بنابراین یک زیرفضا است.

مثال ۱: دستگاه همگن معادلات خطی زیر را حل کنید. مجموعه جواب را به‌صورت زیرفضا بیان کنید، شکل این زیرفضا را رسم کنید.

$$
\begin{aligned}
x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ &= ۰ \\
- \quad x_۲ + \quad x_۳ &= ۰ \\
x_۱ + \quad x_۲ + ۴x_۳ &= ۰
\end{aligned}
$$

حل: روش حذفی گوس-جردن را به‌کار می‌بریم داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$x_1 + 5x_3 = 0$$

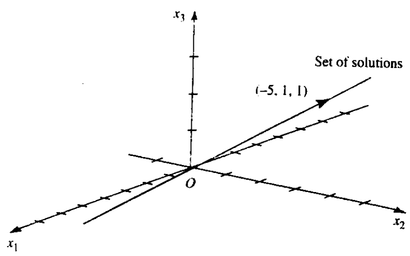
$$x_2 - \quad x_3 = 0$$

در نتیجه

$$x_2 = x_3 \quad , \quad x_1 = -5x_3$$

مقدار x_3 را r فرض می‌کنیم بنابراین یک جواب دلخواه برابر است با: $x_1 = -5r$، $x_2 = r$ و $x_3 = r$.
جواب بردارها به‌صورت $(-5r, r, r)$ می‌باشند.

این بردارها تشکیل یک زیرفضای یک بعدی از R^3 با پایه $(-5, 1, 1)$ می‌دهند. شکل ۷ـ۶ ملاحظه کنید. این زیرفضا برابر هسته تعریف شده توسط ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد.



شکل ۷ـ۶

۷-۴ معادلات ناهمگن

اکنون مجموعه جواب‌های یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن را پیدا می‌کنیم که تشکیل یک زیرفضا را نمی‌دهند.

فرض کنیم $AX = Y$ یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن باشد. همچنین فرض کنیم. X_1 و X_2 جواب‌های آن باشند بنابراین $AX_1 = Y$ و $AX_2 = Y$ از جمع این معادلات نتیجه می‌شود

$$AX_1 + AX_2 = 2Y$$

$$A(X_1 + X_2) = 2Y$$

بنابراین $X_1 + X_2$ در معادله $AX = Y$ صدق نمی‌کنند. پس جوابی از آن نیست مجموعه جواب‌ها تحت جمع بسته نیست در نتیجه یک زیرفضا نخواهد بود. معذالک ما می‌خواهیم مجموعه جواب یک دستگاه ناهمگن که خود زیرفضا نیست را بیابیم. این مجموعه می‌تواند توسط یک زیرفضا تعیین شود. قضیه بعد ما را در پیدا کردن مجموعه جواب قادر می‌سازد.

۷-۴-۱ قضیه. فرض کنیم $AX = Y$ یک دستگاه ناهمگن از m معادله خطی با n متغیر باشد همچنین فرض می‌کنیم X_1 یک جواب خصوصی باشد هر جواب دیگر می‌تواند به شکل $X = Z + X_1$ نوشته شود که در آن z یک عضو از هسته نگاشت T تعریف شده توسط A است. چنین جوابی منحصر به‌فرد است هرگاه هسته شامل تنها بردار صفر باشد.

برهان. X_1 یک جواب است بنابراین $AX_1 = Y$ فرض کنیم X یک جواب دلخواه باشد بنابراین $AX = Y$ تساوی $AX_1 = AX$ داریم:

$$AX_1 = AX$$

$$AX - AX_1 = 0$$

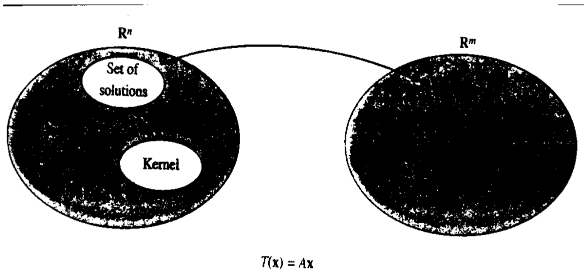
$$A(X - X_1) = 0$$

$$T(X - X_1) = 0$$

بنابراین $X - X_1$ یک عضو از هسته T است آن را Z می‌نامیم: $Z = X - X_1$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $X = Z + X_1$.

توجه کنید که جواب منحصر به‌فرد است اگر و تنها اگر ارزش Z برابر ۰ باشد اگر هسته بردار صفر باشد این نتیجه حاصل می‌شود که مجموعه جواب یک دستگاه خطی ناهمگن $AX = Y$ می‌تواند از هسته نگاشت حطی تعریف شده توسط ماتریس ضرایب و یک جواب خصوصی X_1 تولید شود. اگر هر بردار Z در هسته را در نظر بگیریم و با X_1 جمع کنیم جوابی از معادله به‌دست می‌آید. به‌طور هندسی چنین

معنی می‌دهد که مجموعه جواب به‌وسیله محاسبه هسته و در راستا و امتداد بردار X_1 می‌تواند تعیین شود. شکل ۷ـ۷ را ببینید.



شکل ۷ـ۷ صفحه ۳۲

مثال ۲ دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید مجموعه جواب را رسم کنید.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

$$-x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 9$$

حل: روش حذفی گوس‌ـجردن را به‌کار می‌بریم. داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$x_1 + 5x_3 = 7$$

$$x_2 - x_3 = 2$$

در نتیجه

$$x_2 = x_3 + 2$$

$$x_1 = -5x_3 + 7$$

برای x_3 مقدار r در نظر می‌گیریم. بنابراین یک جواب دلخواه چنین است:

$$x_1 = -5r + 7 \qquad x_2 = r + 2 \qquad x_3 = r$$

جواب‌ها بردارهایی به شکل

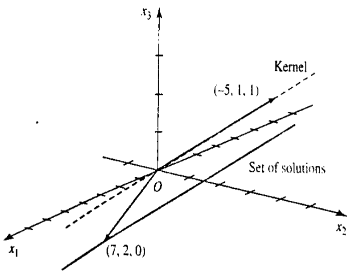
$$(-۵r + ۷, r + ۲, r)$$

هستند. ما قسمت‌هایی که پارامتر r دارند از این قسمت ثابت جدا می‌کنیم. قسمت شامل r در هسته نگاشت تعریف شده توسط A است و قسمت ثابت جواب خصوصی $X_۱$ برای $AX = Y$ می‌باشد.

$$(-۵r + ۷, r + ۲, r) = r(-۵, ۱, ۱) + (۷, ۲, ۰)$$

در مثال بالا هسته نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ضرایب را پیدا کردیم که مجموعه بردارهایی به شکل $(-۵, ۱, ۱)$ هستند خواننده می‌تواند با جایگذاری تحقیق کند که $(۷, ۲, ۰)$ در واقع یک جواب خصوصی دستگاه داده شده می‌باشد.

به‌طور هندسی مجموعه جواب می‌تواند به‌وسیله محاسبه هسته و خط تعریف شده توسط بردار $(-۵, ۱, ۱)$ در راستا و فاصله تعریف شده توسط بردار $(۷, ۲, ۰)$ نشان داده شود شکل ۷ـ۸ را ملاحظه کنید.



شکل ۷ـ۸

۷-۵ چند دستگاه

فرض کنیم یک تعداد از دستگاه خطی $AX = Y_۱$، $AX = Y_۲$، $AX = Y_۳$ و ... همه دارای ماتریس ضرایب A باشند. فرض کنیم T نگاشت خطی تعریف شده توسط A باشد. همچنین فرض کنیم $X_۱, X_۲, \ldots$ جواب‌های خصوصی این دستگاه‌ها باشند در این‌صورت مجموعه جواب برای این دستگاه‌ها چنین هستند.

$$\ker(T) + X_۱, \ker(T) + X_۲, \ker(T) + X_۳, \cdots$$

این مجموعه‌ها مجموعه‌های موازی هستند، هرکدام با انتقال $\ker(T)$ توسط بردارهای $X_۱, X_۲, X_۳, \ldots$ به‌وجود می‌آیند. برای مثال جواب دستگاه

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ &= a_۱ \\ - x_۲ + x_۳ &= a_۲ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ &= a_۳ \end{aligned}$$

خطی موازی با خط تعریف شده توسط بردار $(-۵, ۱, ۱)$ است.

مثال ۳: جواب‌های دستگاه معادلات زیر را حل و بحث کنید.

$$\begin{aligned} x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ &= ۱ \\ ۲x_۱ - ۳x_۲ + ۲x_۳ - x_۴ &= ۴ \\ ۳x_۱ - ۵x_۲ + ۵x_۳ \qquad &= ۵ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ - ۲x_۴ &= ۳ \end{aligned}$$

حل: با اعمال روش حل حذفی گوس-جردن داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & -۵ & ۵ & ۰ & ۵ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۳ & ۲ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۵ & -۵ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x_۱ - ۵x_۳ - ۵x_۴ &= ۵ \\ x_۲ - ۴x_۳ - ۳x_۴ &= ۲ \end{aligned}$$

متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقی‌مانده بیان می‌کنیم:

$$x_۱ = ۵x_۳ + ۵x_۴ + ۵ \qquad x_۲ = ۴x_۳ + ۳x_۴ + ۲$$

جواب دلخواه چنین است

$$(۵r + ۵s + ۵, ۴r + ۳s + ۲, r, s)$$

قسمت‌های این بردار را به‌شکل زیر جدا می‌کنیم:

$$\overset{\text{جواب دلخواه } Ax=y}{(5r+5s+5, 4r+3s+2, r, s)} = \overset{\text{هسته نگاشت تعریف شده به‌وسیله } A}{r(5,4,1,0)+s(5,3,0,1)} + \overset{\text{یک جواب خصوصی } Ax=y}{(5,2,0,0)}$$

مشاهده می‌کنیم که هسته زیرفضای دوبعدی از R^4 با پایه $(5,4,1,0)$ و $(5,3,0,1)$ است و آن صفحه‌ای است که از مبدا می‌گذرد. مجموعه جواب برای دستگاه داده شده انتقال یافته این صفحه توسط بردار $(5,2,0,0)$ است.

برای دانشجویانی که تاکنون معادلات دیفرانسیل را گذرانده‌اند جالب خواهد بود که ملاحظه کنند این مفاهیم با حل معادلات دیفرانسیل و روش‌های آن در ارتباط هستند. مثال زیر این ایده‌ها را توضیح می‌دهد.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $d^2y/dx^2 - 9y = 2x$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم D عملگر مشتق باشد می‌توانیم معادله دیفرانسیل را به شکل

$$D^2y - 9y = 2x$$

و یا

$$(D^2 - 9)y = 2x$$

بنویسیم.

فرض کنیم V فضای توابعی باشد که مشتق دوم دارند باشد. $D^2 - 9$ یک نگاشت خطی از V به توی خودش است جواب معادله دیفرانسیل تابعی است مانند y که تحت نگاشت $D^2 - 9$ به‌توی $2x$ نگاشته می‌شود. وضعیت شبیه حل یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن است. در نتیجه داریم:

(جواب خصوصی $D^2 - y - 9y = 2x$)+(عضو دلخواهی از هسته $D^2 - 9$)=جواب دلخواه

فرض می‌کنیم هسته $D^2 - 9$ را پیدا کردیم قضیه عمومی به ما می‌گوید از آنجا که عملگر از مرتبه دوم است هسته بایستی دوبعدی باشد یا بردارهای پایه‌ای به شکل e^{mx}. از آنجا که بردارها در هسته هستند:

$$(D^2 - 9)e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 9)e^{mx} = 0$$

$$(m-3)(m+3)e^{mn} = 0$$

$$m = -3 \text{ یا } m = 3$$

بنابراین بردارهای پایه هسته بردارهای e^{-3x} و e^{3x} می‌باشند بردار دلخواه در هسته می‌تواند به‌صورت $re^{3x}+se^{-3x}$ باشد.

باقی می‌ماند اینکه یک جواب خصوصی برای $D^2y-9y=2x$ را پیدا کنیم ساده‌ترین جواب جوابی است که مشتق دوم آن صفر باشد داریم $2x=-9y$ و $y=-2x/9$ بنابراین یک جواب دلخواه از معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=re^{3x}+se^{-3x}-\frac{2x}{9}$$

۷-۵-۱ تمرین دستگاه‌های معادلات خطی زیر را در نظرگرفته برای جواب‌های داده شده جواب‌ها را به‌صورت جمع دو جواب به‌عنوان هسته نگاشت خطی تعریف شده توسط ماتریس ضرایب و جواب خصوصی تجزیه کنید.

(۱

$$\begin{aligned} x_1-\ x_2+\ x_3&=1\\ 2x_1-2x_2+3x_3&=1\\ x_1-\ x_2-\ x_3&=-1 \end{aligned}$$

جواب‌ها $x_1=r+1$ $x_2=2r$ $x_3=r$

(۲

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3&=3\\ 2x_1+3x_2+\ x_3&=5 \end{aligned}$$

جواب‌ها $x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=2$

(۳

$$\begin{aligned} x_1-2x_2-3x_3&=1\\ 3x_1-4x_2+5x_3&=3\\ 2x_1-3x_2+4x_3&=2 \end{aligned}$$

جواب‌ها $x_1=r+1$ $x_2=2r$ $x_3=r$

۴)

$$x_1 - x_2 + x_3 = ۳$$
$$-۲x_1 + ۲x_2 - ۲x_3 = ۶$$

جواب‌ها $x_1 = r - s + ۳$ $x_2 = r$ $x_3 = s$

۵)

$$x_1 - x_2 - x_3 - ۲x_4 = ۴$$
$$۲x_1 - x_2 + ۳x_3 - x_4 = ۲$$

جواب‌ها $x_1 = -۴r + ۳s - ۲$ $x_2 = -۵r + ۵s - ۶$ $x_3 = r$
$x_4 = s$

۶)

$$x_1 - ۲x_2 - x_3 - x_4 - ۲x_5 = ۰$$
$$x_2 + ۲x_3 - ۳x_4 - ۳x_5 = ۲$$
$$x_3 + ۵x_4 + ۳x_5 = -۳$$

جواب‌ها $x_1 = -۳۲-r۲۳s-۱۹$ $x_2 = ۱۳r+۹s+۸$ $x_3 = -۵r-۳s-۳$
$x_4 = r$ $x_5 = s$

۷) نگاشت خطی $T : R^۳ \longrightarrow R^۳$ تعریف شده توسط ماتریس A را در نظر بگیرید. برد این نگاشت خطی مجموعه بردارهای به شکل $(x, y, x + y)$ که صفحه $z = x + y$ را مشخص می‌کند، می‌باشد این نگاشت را به‌کار ببرید و تعیین کنید چه موقع جواب‌های دستگاه معادلات $AX = Y$ وجود دارد Y روی متغیرهای خودش تغییر می‌کند (اگر جواب‌ها وجود دارند نیازی به تعیین آنها نیست)

الف) $y = (۱, ۱, ۲)$ ب) $y = (-۱, ۲, ۳)$
ج) $y = (۳, ۲, ۵)$ د) $y = (۲, ۴, ۵)$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

۸) در این بخش دستگاه معادلات ناهمگن را حل کردیم که جواب‌های دلخواه به‌دست آمده جواب به دو قسمت هسته نگاشت خطی تعریف شده براساس ماتریس ضرایب و یک جواب خصوصی دستگاه بود آیا جواب خصوصی X_1 منحصر به‌فرد است؟ اگر X_1 یکتا نیست، برداری غیر از $(۷, ۲, ۰)$ تعیین کنید که برای مسأله ۲ این بخش می‌تواند به‌کار رود.

۹) یک برداری به‌جزء $(۵, ۲, ۰, ۰)$ تعیین کنید که می‌تواند به‌عنوان یک جواب خصوصی در تجزیه مجموعه جواب برای مثال ۳ این بخش به‌کار رود.

۱۰) یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن $AX = Y$ بسازید که ماتریس ضرایب A و جواب خصوصی X_1 داشته باشد که در آن

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \qquad , \qquad x_1 = (۱, -۱, ۴)$$

۱۱) یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن $Ax = y$ بسازید که ماتریس ضرایب A و جواب خصوصی x_1 داشته باشد که

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad , \qquad x_1 = (۲, ۰, ۳)$$

۱۲) ثابت کنید جواب یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن یکتاست اگر و تنها اگر هسته نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ضرایب بردار صفر باشد.

تمرینات ۱۳ و ۱۴ برای دانشجویانی که اطلاعاتی از معادلات دیفرانسیل دارند طرح شده است.

۱۳) یک پایه برای هسته هر کدام از عملگرهای زیر را پیدا کنید. یک تابع دلخواه در هسته بیاورید.

الف) $D^۲ + D - ۲$ ب) $D^۲ + ۴D + ۳$ ج) $D^۲ + ۲D - ۸$

۱۴) معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

الف) $\frac{d^۲y}{dx^۲} + ۵\frac{dy}{dx} + ۶y = ۸$ ب) $\frac{d^۲y}{dx^۲} - ۳\frac{dy}{dx} = ۸$

ج) $\frac{d^۲y}{dx^۲} - ۷\frac{dy}{dx} + ۱۲y = ۲۴$ د) $\frac{d^۲y}{dx^۲} + ۸\frac{dy}{dx} = ۳e^{۲x}$

۷-۶ بردار مختصات

تاکنون در مورد انواع فضاهای برداری همانند فضای برداری R^n فضای ماتریس‌ها و فضای توابع، بحث کرده‌ایم در این بخش راهی پیدا می‌کنیم که چگونه می‌توانیم بردارها را در R^n به‌کار ببریم بردارها در هر فضای برداری با بعد متناهی مختصات برداری نامیده می‌شوند این توضیح راهنمایی می‌کند برای این نتیجه‌گیری که، همه فضاهای برداری با بعد متناهی در یک جمله ریاضی همان R^n هستند.

تعریف. فرض کنیم U یک فضای برداری با پایه $B = \{u_۱, \dots, u_n\}$ باشد و u یک بردار در U، می‌دانیم اسکالرهای یکتایی وجود دارد که

$$u = a_۱u_۱ + \cdots + a_nu_n$$

بردار ستونی $u_B = \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ بردار مختصات u در رابطه با این پایه نامیده می‌شود. اسکالرهای $a_۱$، ... و a_n مختصات u در ارتباط با این پایه نامیده می‌شوند.

توجه کنید که شکل بردار ستونی برای بردار مختصات به‌کار برده‌ایم نه ماتریس سطری را.

مثال ۱: بردار مختصات $u = (۴, ۵)$ در ارتباط با پایه‌های B و B' زیر را از $R^۲$ پیدا کنید.

الف) پایه استاندارد $B = \{(۱, ۰), (۰, ۱)\}$ و $B' = \{(۲, ۱), (-۱, ۱)\}$

حل الف): می‌بینیم که $(۴, ۵) = ۴(۱, ۰) + ۵(۰, ۱)$ بنابراین $u_B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$ که نمایش داده شده u در ارتباط با پایه استاندارد است.

ب) اکنون بردار مختصات u در ارتباط با B' را پیدا می‌کنیم که یک پایه استاندارد نیست. فرض کنیم

$$(۴, ۵) = a_۱(۲, ۱) + a_۲(-۱, ۱)$$

بنابراین

$$(۴, ۵) = (۲a_۱, a_۱) + (-a_۲, a_۲) \Longrightarrow (۴, ۵) = (۲a_۱ - a_۲, a_۱ + a_۲)$$

با مقایسه مؤلفه‌ها به دستگاه‌های زیر می‌رسیم

$$۲a_۱ - a_۲ = ۴$$

$$a_۱ + a_۲ = ۵$$

این دستگاه جواب‌های یکتای $a_۱ = ۳$ و $a_۲ = ۲$ دارد. بنابراین $u'_B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ این بردار مختصات نمایش هندسی دارند. بردارهای پایه همانند زیر نشان داده شده‌اند.

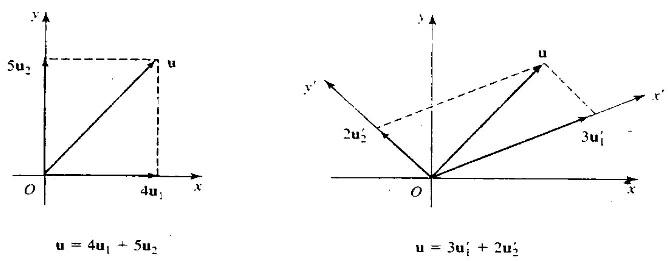
$$u_۱ = (۱, ۰) \qquad u'_۱ = (۲, ۱)$$

$$u_۲ = (۰, ۱) \qquad u'_۲ = (-۱, ۱)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$u = ۳u_۱ + ۵u_۲ \quad , \quad u = ۳u_۱ + ۲u_۲$$

شکل ۷ـ۹ را ببینید.



شکل ۷ـ۹

مثال ۲: بردار مختصات $u = ۵x^۲ + ۵ - ۳$ در ارتباط با پایه‌های B و B' از $p_۲$ را پیدا کنید.

الف) پایه استاندارد $B = \{x^۲, x, ۱\}$

ب) $B' = \{x^۲ - x + ۵, ۳x^۲ - ۱, ۲x^۲ + ۴x + ۲\}$

حل الف): مشاهده می‌کنیم که $۵x^۲ + x - ۳ = ۵(x^۲) + (x) - ۳(۱)$ بنابراین $u_B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$

مختصات u در ارتباط با پایه استاندارد، ضرایب $۵x^۲ + x - ۳$ می‌باشند.

حل ب): اگر بخواهیم بردار مختصات u در ارتباط با پایه B' که پایه استاندارد نیست. پیدا کنیم، مشکل‌تر خواهد بود.

$$۵(x^۲+x-۳) = (a_۱+۳a_۲+۲a_۳)x^۳+(-a_۱+۴a_۳)x_۲+(-a+۴a_۳)x+(۵a_۱-a_۲-۲a_۳)$$

با مقایسه ضرایب به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$-a_۱ + ۲a_۲ + ۲a_۳ = ۵$$

$$\begin{aligned} -a_1 \quad\quad + 4a_3 &= 1 \\ 5a_1 - \quad a_2 - 2a_3 &= -3 \end{aligned}$$

این دستگاه جواب‌های منحصر به‌فرد

$$a_1 = -\frac{1}{5} \quad , \quad a_2 = \frac{8}{5} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{5}$$

دارد بنابراین $u_{B'} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$.

مثال‌های بالا نشان دهنده است که چگونه پایه‌ها که، اغلب پایه‌ها استاندارد هستند، برای بیان یک بردار استفاده می‌شوند. به‌طور کلی یک دستگاه معادلات خطی برای پیدا کردن مختصات در ارتباط با پایه‌ی دیگری حل می‌شوند. معذالک بردار مختصات می‌تواند به‌آسانی در ارتباط با یک پایه‌ی متعامد به‌دست آید.

خواننده را به نتیجه‌ی قضیه ۵-۱۹ یادآوری می‌کنیم. اگر $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ یک پایه نرمال برای فضای برداری U باشد. آنگاه یک بردار دلخواه v در U می‌تواند به‌صورت

$$v = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2 + \cdots + (v.u_n)u_n$$

بیان شود. بنابراین

$$V_B = \begin{bmatrix} v.u_1 \\ \vdots \\ v.u_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات v است.

مثال ۳: بردار مختصات $v = (2, -5, 10)$ در ارتباط با پایه‌ی متعامد

$$B = \{(1, 0, 0), (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\}$$

را پیدا کنید.

حل: داریم

$$\begin{aligned} (2, -5, 10).(1, \ 0, \ 0) &= 2 \\ (2, -5, 10).(0, \frac{3}{5}, \ \frac{4}{5}) &= 5 \end{aligned}$$

$$(۲, -۵, ۱۰).(۰, \frac{۴}{۵}, \frac{-۳}{۵}) = -۱۰$$

بنابراین

$$V_B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$$

این مثال روشن می‌کند که چگونه پایه‌های متعامد بهتر از پایه‌های دیگر است. این که بدانیم چگونه بردار مختصات در ارتباط با پایه‌های مختلف ارتباط دارد امری ضروری است. موضوع مبحث بعدی است.

۷-۷ تغییر پایه

فرض کنیم $B = \{u_۱, \dots, u_n\}$ و $B' = \{y'_۱, \dots, u'_n\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری U باشند. یک بردار u در U بردارهای مختصات u_B و u'_B در ارتباط با این پایه‌ها خواهد داشت. اکنون ما رابطه بین u_B و u'_B را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم بردارهای مختصات $u_۱, \dots, u_n$ در ارتباط با پایه $B = \{u'_۱, \dots, u'_n\}$ برابر با $(u_۱)_B, \dots, (u_n)_B$ باشند ماتریس p که این بردارها را به‌عنوان ستون‌ها دارد، نقش اساسی در این بحث بازی می‌کن، چنین ماتریسی ماتریس تبدیلات از پایه B به پایه B' نامیده می‌شود.

ماتریس $p = [(u_۱)_B, \dots, (u_n)_B]$.

۷-۷-۱ قضیه. فرض‌کنیم $B = \{u_۱, \dots, u_n\}$ و $B = \{u'_۱, \dots, u'_n\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری U باشد اگر u برداری در U باشد که بردارهای مختصات u_B و u'_B در ارتباط با این پایه‌ها داشته باشد، آنگاه $u_{B'} = pu_B$. که در آن p ماتریس انتقال از B به B' است $p = [(u_۱)_{B'}, \dots, (u_n)_{B'}]$

اثبات. از آنجا که $\{u_۱, \dots, u_n\}$ پایه‌ای برای U است هرکدام از بردارهای $u_۱$، ... و u_n می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از این بردارها بیان شود. گیریم

$$u_۱ = c_{۱۱}u'_۱ + \cdots + c_{n۱}u'_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = c_{۱n}u'_۱ + \cdots + c_{nn}u'_n$$

اگر $u_۱ = a_۱u_۱ + \cdots + a_nu_n$ داریم:

$$\begin{aligned} u &= a_۱u_۱ + \cdots + a_nu_n \\ &= a_۱(c_{۱۱}u'_۱ + \cdots + c_{n۱}u'_n) + \cdots + a_n(c_{۱n}u'_۱ + \cdots + c_{nn}u'_n) \\ &= (a_۱c_{۱۱} + \cdots + a_nc_{۱n})u'_۱ + \cdots + (a_۱c_{n۱} + \cdots + a_nc_{nn})u'_n \end{aligned}$$

بردار مختصات در ارتباط با B' به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$u'_B = \begin{cases} a_۱c_{۱۱} + \cdots + a_nc_{۱n} \\ \quad \vdots \\ a_۱c_{n۱} + \cdots + a_nc_{nn} \end{cases}$$

یک تغییر پایه برای یک فضای برداری از یک پایه غیراستاندارد به پایه استاندارد واضح و سرراست به‌دست می‌آید.

مثال بعدی مثالی است که با ماتریس تبدیل پیدا شده است. ستون‌های p در حقیقت بردارهای پایه اولی هستند.

مثال ۴: فرض کنیم پایه‌های $B = \{(۱,۲),(۳,-۱)\}$ و $B' = \{(۱,۰),(۰,۱)\}$ از $R^۲$ باشند اگر u برداری باشد به‌طوری که $u_B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ آنگاه u'_B را پیدا کنید.

حل: بردارهای B را برحسب B' بیان می‌کنیم با استفاده از ماتریس تبدیل داریم

$$(۱,\ ۲) = ۱(۱,۰) + ۲(۰,۱)$$

$$(۳,-۱) = ۳(۱,۰) - ۱(۰,۱)$$

بردارهای مختصات $(۱,۲)$ و $(۳,-۱)$ برابر $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ هستند بنابراین ماتریس تبدیل p عبارت است از:

$$p = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

و مشاهده می‌کنیم که ستون‌های p بردارهای پایه B هستند داریم:

$$u'_B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم B و B' پایه‌هایی برای فضای برداری باشند. ملاحظه می‌کنیم که ماتریس‌های تبدیل از B به B' و از B' به B با هم مرتبط هستند.

۷-۷-۲ قضیه. فرض کنیم B و B' پایه‌هایی برای فضای برداری U باشند و p ماتریس تبدیل از B' به B باشد. در این‌صورت p وارون‌پذیر است و ماتریس تبدیل از B به B' برابر p^{-1} است.

اثبات. فرض کنیم u برداری در U با بردارهای مختصات ستونی u_B و u'_B در رابطه با پایه‌های B و B' داده شده باشد و ماتریس تبدیل p از B به B' باشد. فرض کنیم Q ماتریس تبدیل از B' به B باشد، می‌دانیم که

$$u_{B'} = pu_B \quad , \quad u_B = Qu_{B'}$$

حال این دو معادله را به دو روش ترکیب می‌کنیم. u_B از معادله دوم را در اولی جانشین می‌کنیم. سپس به‌جای $U_{B'}$ از اولی به‌توی دومی جانشین می‌کنیم داریم

$$u_{B'} = PQu_{B'} \quad , \quad u_B = QPu_B$$

از آنجا که این نتایج برای همه بردارهای u_B و $u_{B'}$ برقرار است داریم:

$$PQ = QP = I$$

بنابراین

$$Q = P^{-1}$$

مثال بعدی روش مفیدی را برای پیدا کردن ماتریس تبدیل از یک پایه به پایه دیگری که هیچ‌کدام پایه استاندارد نیستند معرفی می‌کند. در اینجا به سبب ساده‌تر بودن هرکدام از تبدیلات به پایه استاندارد، پایه استاندارد را به‌عنوان یک پایه مینای به‌کار می‌بریم.

مثال ۵: پایه‌های $B = \{(۱,۲),(۳,-۱)\}$ و $B' = \{(۳,۱),(۵,۲)\}$ از $R^۲$ در نظر بگیرید ماتریس تبدیل از B به B' را پیدا کنید. اگر u یک برداری باشد که $u_B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ سپس $u_{B'}$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم پایه استاندارد $S = \{(۱,۰),(۰,۱)\}$ به‌عنوان یک پایه میانی باشد ماتریس تبدیل p از B به S و ماتریس تبدیل p' از B' به S چنین هستند.

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad P' = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل خطی از S به B برابر $(p')^{-۱}$ خواهد بود ماتریس از B' به B برابر $(p')^{-۱}p$ است بنابراین ماتریس تبدیل از B به B' چنین است

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & ۱۱ \\ ۵ & -۶ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$u_{B'} = \begin{bmatrix} -۸ & ۱۱ \\ ۵ & -۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

۸-۷ یک‌ریختی‌ها

فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. T یک‌به‌یک گفته می‌شود اگر برای هر عضو در برد T دقیقاً یک عضو از دامنه T متناظر با آن باشد. اگر هر عضو V تصویر یک عضو از U باشد نگاشت T را یک نگاشت پوشا می‌نامیم.

تعریف بعد مفهوم یک‌به‌یک و پوشا به‌همراه خطی بودن یک نگاشت آورده می‌شود

تعریف. فرض کنیم T یک نگاشت خطی یک‌به‌یک و پوشا از U به W باشد در این‌صورت T **یک‌ریختی** نامیده می‌شود و U و W را فضاهای برداری یک‌ریخت می‌گویند. مفهوم فضاهای برداری یک‌ریخت این است که آنها از نقطه نظر ریاضی همانند هستند، از آنجا که یک‌ریختی یک‌به‌یک و پوشا است اعضای دوفضا با یکدیگر همانند می‌شوند. به‌علاوه یک‌ریختی یک نگاشت خطی است بنابراین چنین فضاهایی خواص جمع برداری و ضرب اسکالر مشابه دارند. ظاهر فیزیکی اعضای دو فضای برداری ممکن است متفاوت باشد اما به‌طور ریاضی آنها ممکن است از یک فضای برداری آمده باشند. عمل وابسته به بردار مختصات به هر بردار در یک فضای برداری حقیقی یک نگاشت از فضای برداری به R^n تعریف می‌کند. این نگاشت خطی است به‌علاوه ملاحظه می‌کنیم که یک‌به‌یک و پوشا است.

۷-۸-۱ قضیه. فرض کنیم U یک فضای برداری حقیقی با پایه $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ باشد. فرض کنیم u عضو دلخواهی از U با بردار مختصات $\begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ در ارتباط با این پایه باشد در این‌صورت نگاشت

T با ضابطه زیر یک یک‌ریختی از U به‌روی R^n است:

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

اثبات. نگاشت T یک‌به‌یک است یعنی اگر $T(u) = T(v)$ آنگاه $u = v$. فرض کنیم

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad , \quad T(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \quad , \quad v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$$

در نتیجه $u = v$ پس T یک‌به‌یک است.

اکنون با نشان دادن اینکه هر عضو از R^n تصویر عضوی از U است ثابت می‌کنیم T پوشا است.
فرض کنیم $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ عضوی از R^n باشد در این‌صورت

$$T(b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

بنابراین $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ تصویر بردار $b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$ است در نتیجه T پوشا است. این را به عهده خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد T خطی است. یک نتیجه مهم که از قضیه قبل به‌دست می‌آید این است که هر فضای برداری با بعد متناهی مانند U یک‌ریخت با R^n برای بعضی nها است. بنابراین هر فضای برداری با بعد متناهی از یک دید جبری با R^n یکسان است.

۷-۸-۲ تمرین‌ها در تمرینات ۱ تا ۴ بردار مختصات u را در رابطه با پایه داده شده B در R^2 بیابید.

۱) $u = (2, 3) \quad , \quad B = \{(1, 0), (0, 1)\}$

۲) $u = (8, -1) \quad , \quad B = \{(3, -1), (2, 1)\}$

۳) $u = (5, 1) \quad , \quad B = \{(1, 1), (0, 1)\}$

۴) $u = (-7, -5) \quad , \quad B = \{(1, -1), (3, 1)\}$

تمرینات ۵ تا ۸ بردار مختصات u در رابطه با پایه داده شده در R^3 را بیابید.

۵) $u = (4, 0, -2) \quad , \quad B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

۶) $u = (6, -3, 1) \quad , \quad B = \{(1, -1, 0), (2, 1, -1), (2, 0, 0)\}$

۷) $u = (3, -1, 7) \quad , \quad B = \{(2, 0, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\}$

۸) $u = (1, -6, -8) \quad , \quad B = \{(1, 2, 3), (1, -1, 0), (0, 1, -2)\}$

در تمرین‌های ۹ تا ۱۲ بردار مختصات u در رابطه با پایه داده شده برای P_n را پیدا کنید.

۹) $u = 7X - 3 \quad , \quad B = \{X, 1\}$

۱۰) $u = 2X - 6 \quad , \quad B = \{3X - 5, X - 1\}$

۱۱) $u = 4X^2 - 5X + 2 \quad , \quad B = \{X^2, X, 1\}$

۱۲) $u = 3X^2 - 6X - 2 \quad , \quad B = \{X^2, X - 1, 2X\}$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۵ بردار مختصات u در رابطه با پایه متعامد B داده شده را پیدا کنید.

۱۳) $u = (5, 0, -10) \quad , \quad B = \{(0, 1, 0), (\frac{3}{5}, 0, \frac{-4}{5}, (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\}$

۱۴) $u = (1, 2, 3) \quad , \quad B = \{9\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})\}$

۱۵) $u = (2, 1, 4) \quad , \quad B = \left\{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\right\}$

در تمرین‌های ۱۶ تا ۲۰ ماتریس تبدیل P از پایه داده شده B به پایه استاندارد B' از R^2 پیدا کنید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردار مختصات u، v و w در رابطه با B' به‌کار ببرید.

۱۶) $$B = \{(2, 3)(1, 2)\} \quad , \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\}$$
$$u_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \; v_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} , \; w_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۱۷) $$B = \{(4, 1)(3, -1)\} \quad , \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\}$$
$$u_B \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} , \; v_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \; w_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۸) $$B=\{(1,1)(2,-3)\} \quad , \quad B'=\{(1,0)(0,1)\}$$
$$u_B \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} , \ v_B=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} , \ w_B=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

۱۹) $$B=\{(3,2)(2,1)\} \quad , \quad B'=\{(1,0)(0,1)\}$$
$$u_B \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} , \ v_B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} , \ w_B=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

۲۰) $$B=\{(2,-3)(-3,4)\} \quad , \quad B'=\{(1,0)(0,1)\}$$
$$u_B \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} , \ v_B=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} , \ w_B=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

۲۱) پایه‌های $B=\{(1,0)(0,1)\}$ و $B'=\{(5,2)(3,2)\}$ از R^2 را در نظر بگیرید اگر u یک بردار باشد به‌طوری که $u_B=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$ سپس $U_{B'}$ را پیدا کنید (راهنمایی: ماتریس تبدیل از B به B' وارون از B' به B است).

۲۲) پایه‌های $B=\{(1,0),(0,1)\}$ و $B'=\{(1,2),(-1,-1)\}$ از R^2 را در نظر بگیرید اگر u برداری باشد به‌طوری که $u_B=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$ سپس $u_{B'}$ را پیدا کنید.

۲۳) ماتریس تبدیل P از پایه $B=\{(1,2),(3,0)\}$ از R^2 به پایه $B'=\{(2,1),(3,2)\}$ را پیدا کنید اگر $u_B=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ سپس $u_{B'}$ را پیدا کنید.

۲۴) فضای برداری P_2 را در نظر بگیرید $B=\{X^2,X,1\}$ و $B'=\{3X^2,X-1,4\}$ پایه‌هایی برای P_2 هستند. ماتریس تبدیل از B به B' را پیدا کنید این ماتریس ر ابه‌کار ببرید و بردارهای مختصات $3x^2+4x+4$، $6x^2+4$، $8x^2+12$ و $3x^2+4x+4$ را در رابطه با پایه B' پیدا کنید (راهنمایی: ماتریس تبدیل B به B' وارون ماتریس از B' به B است).

۲۵) فضای برداری P_1 را در نظر بگیرید $B=\{X,1\}$ و $B'=\{X+2,3\}$ پایه‌هایی برای P_1 هستند. ماتریس تبدیل از B به B' را بیابید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردارهای مختصات $12x-3$، $6x+9$، $6x$ و $3x+3$ در ارتباط با پایه B' به‌کار ببرید.

۲۶) یک یک‌ریختی از فضای برداری ماتریس‌های قطری 2×2 به‌روی R^2 بسازید.

۲۷) یک یک‌ریختی از فضای برداری ماتریس‌های متقارن 2×2 به‌روی R^3 بسازید.

۲۸) فرض کنید T یک ماتریس تبدیل تعریف شده به‌وسیله یک ماتریس مربع A باشد. ثابت کنید T یک یک‌ریختی است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد.

۲۹) فرض کنید A یک ماتریس نامنفرد باشد که یک یک‌ریختی از R^n به‌روی R^n تعریف می‌کند. (تمرین قبل را ببینید) ثابت کنید A^{-1} همچنین یک یک‌ریختی از R^n به‌روی خودش تعریف می‌کند.

۷-۹ نمایش ماتریسی نگاشت‌های خطی

دیدیم که یک نگاشت خطی $T : R^n \longrightarrow R^m$ توسط یک ماتریس A تعریف می‌شود. در این بخش ما یک روش نمایش‌گر یک نگاست خطی بین دوفضای برداری کلی به‌وسیله یک ماتریس معرفی می‌کنیم. این بحث را با توجه به اطلاعاتی برای تعریف یک نگاشت خطی لازم است به سرانجام می‌رسانیم.

فرض کنیم f یک تابع دلخواه باشد، می‌دانیم f تعریف شده است هرگاه اثر آن روی هر عضو از دامنه‌اش مشخص باشد. معمولاً ضابطه توسط یک معادله معین می‌شود که اثر تابع روی هر عضو دلخواه در دامنه آن را به‌دست می‌دهد. برای مثال فرض کنید تابع f تعریف شده به‌وسیله ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sqrt{x - ۳}$$

دامنه f، مجموعه xهایی است که $x \geq ۰$. معادله بالا اثر f روی هر x در این بازه را می‌دهد. برای مثال $f(۷) = ۲$ متشابهاً یک نگاشت خطی T تعریف می‌شود اگر ارزش آن برای هر بردار از دامنه مشخص شود. معذالک متفاوت با یک تابع کلی، خواهیم دید که اگر اثر تبدیل خطی را روی یک زیرمجموعه متناهی از دامنه (یک پایه) بدانیم اثر آن به‌طور خودکار روی همه اعضای دامنه تعریف می‌شود.

۷-۹-۱ قضیه. فرض‌کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. فرض‌کنیم $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ یک پایه برای U باشد T توسط اثرش روی بردارهای پایه یعنی $\{T(u_۱), \ldots, T(u_n)\}$ تعریف می‌شود. برد T توسط $\{T(u_۱), \ldots, T(u_n)\}$ پدید می‌آید.

بنابراین با تعریف یک نگاشت خطی روی یک پایه روی همه دامنه آن تعریف می‌شود.

اثبات. فرض کنیم u یک عضو از U باشد از آنجا که $\{u_۱, \ldots, u_n\}$ یک پایه برای U است. اسکالرهای $a_۱$، ... و a_n وجود دارند به‌طوری که

$$u = a_۱ u_۱ + \cdots + a_n u_n$$

با توجه به خطی بودن T

$$T(u) = T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n)$$

بنابراین $T(u)$ شناخته شده است اگر $T(u_1)$، ... و $T(u_n)$ تعریف شده باشند به‌علاوه $T(u)$ ممکن یک عضو دلخواهی از برد T باشد. البته می‌تواند به‌عنوان ترکیب خطی از $T(u_1)$، ... و $T(u_n)$ بیان شود بنابراین $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ برد T را پدید می‌آورند.

مثال ۱: تبدیل خطی $T : R^3 \longrightarrow R^2$ تعریف شده به‌صورت زیر به‌روی بردارهای پایه از R^3 را در نظر بگیرید، $T(1,-2,3)$ را پیدا کنید.

$$T(1,0,0) = (3,-1) \qquad T(0,1,0) = (2,1) \qquad T(0,0,0) = (3,0)$$

حل: از آنجا که T روی بردارهای پایه از R^3 تعریف شده است روی تمام فضا تعریف می‌شود. برای پیدا کردن $T(1,-2,3)$ بردار $(1,-2,3)$ را به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه بیان می‌کنیم و خطی بودن T را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} T(1,-2,3) &= T\Big(1(1,0,0) - 2(,1,0) + 3(0,0,1)\Big) \\ &= 1T(1,0,0) - 2T(0,1,0) + 3T(0,0,1) \\ &= 1(3,-1) - 2(2,1) + 3(3,0) = (8,-3) \end{aligned}$$

دیدیم که تبدیل خطی $T : R^n \longrightarrow R^m$ توسط ماتریس A می‌تواند تعریف شود

$$T(u) = Au$$

وقتی که $A = [T(e_1) \ldots T(e_n)]$، توجه کنید A به‌وسیله پیدا کردن اثر T روی هر بردار پایه استاندارد از R^n ساخته می‌شود. این ایده می‌تواند یک نگاشت خطی از $T : U \longrightarrow V$ بین دو فضای برداری کلی را تعریف کند. ما اعضای U و V را به‌وسیله بردار مختصات نمایش خواهیم داد و T را توسط ماتریس A که یک تبدیل از بردار مختصات تعریف می‌کند، مشخص می‌کنیم؛ هم‌چنانکه برای R^n ماتریس A به‌وسیله پیدا کردن اثر T روی بردارهای پایه ساخته می‌شود.

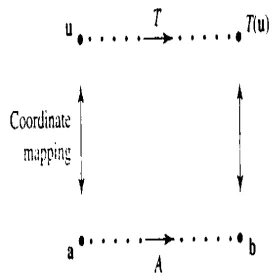
۷-۹-۲ قضیه. فرض کنیم U و V فضاهای برداری با پایه‌های $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ و $B' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ باشند و $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. اگر $\mathbf{u}$ یک بردار در U با

تصویر $T(\mathbf{u})$ باشد، که بردارهای مختصات $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در ارتباط با این پایه‌ها داشته باشند آنگاه

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a}$$

که در آن $A = [T(\mathbf{u}_1)_{B'}, \dots, T(\mathbf{u}_n)'_B]$، در این‌صورت A ماتریس نمایشگر T با در نظر گرفتن پایه‌های B و B' نامیده می‌شود. شکل ۷ـ۱۰ را ببینید.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u}_0 \arrow[r, dotted, "T"] \arrow[d, leftrightarrow] & T(\mathbf{u}) \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mathbf{a} \arrow[r, dotted, "A"] & \mathbf{b} \end{tikzcd}$$



شکل ۷ـ۱۰

اثبات. فرض کنیم $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$ خطی بودن T را به‌کار ببرید می‌توانیم بنویسیم

$$T(\mathbf{u}) = T(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_nT(\mathbf{u}_n)$$

همچنین فرض کنیم اثر T روی بردارهای پایه U به این‌صورت باشد

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= c_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1m}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= c_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{nm}\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

بنابراین:

$$T(\mathbf{u}) = a_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1m}\mathbf{v}_m + \dots + a_n(c_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{nm}\mathbf{v}_m)$$

$$= (a_1c_{11} + \cdots + a_nc_{n1})v_1 + \cdots + (a_1c_{1m} + \cdots + a_nc_{nm})v_m$$

بنابراین بردار مختصات $T(\mathbf{u})$ چنین است

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} (a_1c_{11} + \cdots + a_nc_{1n}) \\ \vdots \\ (a_1c_{1m} + \cdots + a_nc_{nm}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \vdots & \\ c_{1m} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} T(u_1)_{B'} & \ldots & T(u_n)_{B'} \end{bmatrix}$$

پس قضیه ثابت شده است.

مثال ۲: فرض‌کنید $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد T درارتباط با پایه‌های $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ و $B' = \{v_1, v_2\}$ از U و V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$
$$T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$
$$T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$$

نمایش ماتریس T را با در نظر گرفتن این پایه‌ها پیدا کنید و با استفاده از این ماتریس تصویر بردار $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ را بیابید.

حل: بردار مختصات $T(u_1)$، $T(u_2)$ و $T(u_3)$ چنین هستند.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

این بردارها ستون‌های ماتریس T را تشکیل می‌دهند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

اکنون تصویر $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ را با استفاده از این ماتریس پیدا می‌کنیم بردار مختصات u برابر $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ است داریم:

$$Aa = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$T(\mathbf{u})$ بردار مختصات $\begin{bmatrix} ۱۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ دارد، بنابراین $T(\mathbf{u}) = ۱۱\mathbf{v}_۱ + ۵\mathbf{v}_۲$.

مثال ۳: تبدیل خطی $T: R^۳ \longrightarrow R^۲$ تعریف شده توسط $T(x,y,z) = (x+y, ۲z)$ را در نظر می‌گیریم ماتریس T با در نظرگرفتن پایه‌های $\{\mathbf{u}_۱, \mathbf{u}_۲\}$ و $\{\mathbf{u}'_۱, \mathbf{u}'_۲, \mathbf{u}'_۳\}$ از $R^۳$ به $R^۲$ را پیدا کنید که در آن

$$\mathbf{u}_۱ = (۱,۱,۰) \quad \mathbf{u}_۲ = (۰,۱,۴) \quad \mathbf{u}_۳ = (۱,۲,۳) \quad \mathbf{u}'_۱ = (۱,۰) \quad \mathbf{u}'_۲ = (۲,۰)$$

این ماتریس را به‌کار برده و تصویر بردار $\mathbf{u} = (۲,۳,۵)$ را بیابید.

حل: ما اثر T روی بردارهای پایه از $R^۳$ را پیدا می‌کنیم.

$$T(\mathbf{u}_۱) = T(۱,۱,۰) = (۲,۰) = ۲(۱,۰) + ۰(۰,۲) = ۲u'_۱ + ۰u'_۲$$

$$T(\mathbf{u}_۲) = T(۰,۱,۴) = (۱,۸) = ۱(۱,۰) + ۴(۰,۲) = ۱u'_۱ + ۴u'_۲$$

$$T(\mathbf{u}_۳) = T(۱,۲,۳) = (۳,۶) = ۳(۱,۰) + ۳(۰,۲) = ۳u'_۱ + ۳u'_۲$$

بنابراین بردار مختصات $T(\mathbf{u}_۱)$، $T(\mathbf{u}_۲)$ و $T(\mathbf{u}_۳)$ برابر $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$ هستند. این بردارها ستون‌های ماتریس T را تشکیل می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A را برای پیدا کردن تصویر بردار $u = (۲,۳,۵)$ به‌کار می‌بریم. بردار مختصات u را تعیین می‌کنیم که این بردار می‌تواند چنین نشان داده شود.

$$\mathbf{u} = (۲,۳,۵) = ۳(۱,۱,۰) + ۲(۰,۱,۴) - (۱,۲,۳) = ۳\mathbf{u}_۱ + ۲\mathbf{u}_۲ + (-۱)\mathbf{u}_۳$$

بنابراین بردار مختصات u، $a = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ است. بردار مختصات $T(u)$ چنین است:

$$b = Aa = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T(\mathbf{u}) = ۵\mathbf{u}'_۱ + ۵\mathbf{u}'_۲ = ۵(۱,۰) + ۵(۰,۲) = (۵,۱۰)$$

می‌توانیم این نتیجه را با استفاده از تعریف $T(x,y,z)=(x+y, ۲z)$ امتحان کنیم. برای $\mathbf{u}=(۲,۳,۵)$ داریم:

$$T(u)=T(۲,۳,۵)=(۲+۳, ۲\times ۵)=(۵,۱۰)$$

مثال قبلی به ما کمک می‌کند ایده نمایش ماتریسی را بهتر بفهمیم. اهمیت مفهوم نمایش ماتریسی در استفاده از آن برای پیدا کردن $T(\mathbf{u})$ است ما اکنون ارتباط آن را بحث می‌کنیم.

۷-۱۰ اهمیت نمایش ماتریسی

در بخش گذشته دیدیم هر فضای برداری متناهی حقیقی یک‌ریخت با R^n است. این بدان معنی است که هر چنین فضایی برداری را می‌توان برحسب R^n مناسبی مورد بحث قرار داد. در حقیقت هر نگاشت خطی می‌تواند توسط یک ماتریس نمایش داده شود. که بدین معنی است همه قضایای ریاضی از این فضاهای برداری و نگاشت‌های خطی آنها می‌تواند به‌صورت مناسبی از فضاهای برداری R^n و ماتریس‌ها پذیرفته شود.

نتیجه دوم کامپیوتری است. اعضای R^n و ماتریس‌ها را می‌توان درکامپیوترها محاسبه کرد. بنابراین فضاهای برداری کلی و نگاشت‌های خطی آنها می‌تواند براساس این نمایش‌ها و به کمک کامپیوترها مورد بحث قرارگیرند. تعدادی کاربردهای ویژه نمایش ماتریسی وجود دارد ما به‌طور مثال می‌بینیم که عمل‌های سطری مقدماتی نگاشت‌های خطی هستند که نمایش ماتریسی دارند که ماتریس مقدماتی نامیده می‌شود. خواهیم دید که چگونه این نمایش‌ها برای یک روش که تجزیه U نامیده می‌شود و برای حل دستگاه معادلات از طریق کامپیوتر به‌طور گسترده استفاده می‌شود.

مثال ۴: تبدیل خطی $T: p_۲ \longrightarrow p_۱$ تعریف شده توسط $T(ax^۲+bx+c)=(a+b)x-c$ را در نظر می‌گیریم. ماتریس T با در نظرگرفتن پایه‌های $\{u_۱,u_۲,u_۳\}$ و $\{u'_۱,u'_۲\}$ از $p_۲$ به $p_۱$ را پیدا کنید هرگاه:

$$u_۱=x^۲ \quad u_۲=x \quad u_۳=۱ \ , \ u'_۱=x \quad u'_۲=۱$$

این ماتریس را به‌کار ببرید و تصویر $u=۲x^۲+۲x-۱$ را بیابید.

حل: اثر T را روی هر بردار پایه $p_۲$ در نظر بگیرید.

$$T(u_۱)=T(x^۳)=x=۱x+۰(۱)=۱u'_۱+۰u'_۲$$

$$T(u_2) = T(x) = 1x + 0(1) = 1u'_1 + 0u'_2$$

$$T(u_3) = T(1) = -1 = 0x + -1(1) = 0u'_1 + (-1)u'_2$$

بردارهای مختصات $T(1)$، $T(x)$ و $T(x^2)$ برابر $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هستند. بنابراین ماتریس T چنین است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال T را به‌کار می‌بریم و تصویر $u = 3x^2 + 2x - 1$ را به‌دست می‌آوریم. بردار مختصات u در ارتباط با پایه $\{x^2, x, 1\}$ برابر $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ است داریم:

$$b = Aa = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

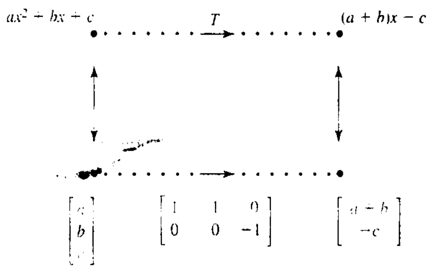
بنابراین $T(u) = 5u'_1 + 1u'_2 = 5x + 1$.

روش این نمایش ماتریسی را در شکل ۷ـ۱۱ تجسم کرده‌ایم. نیمه بالایی شکل نشان می‌دهد تبدیل خطی T از p_2 به p_1 است. نیمه پایینی که در ارتباط با نیمه بالایی است با A یک تبدیل از بردار مختصات از p_2 به‌روی بردار مختصات از p_1 تعریف می‌کند، با توجه به اینکه:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix}$$

نیمه پایینی نمایش مختصات نیمه بالایی است.

$$\begin{array}{ccc} ax^2+bx+c\cdots & \xrightarrow{T} & \cdots(a+b)x-c \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdots & \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}]{} & \cdots \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix} \end{array}$$



شکل ۷ـ۱۱

وقتی که یک نگاشت خطی از فضای برداری به‌توی خودش باشد نمایش ماتریسی معمولاً براساس یک پایه یکتا پیدا می‌شود. مثال بعدی نتیجه این ایده است.

مثال ۵: فرض کنیم $D = \frac{d}{dx}$ عملگر مشتق‌گیری باشد. D یک عملگر خطی روی $p_۲$ است ماتریس D را با در نظرگرفتن پایه $\{x^۲, x, ۱\}$ از $p_۲$ بیابید.

حل: ما اثر D روی بردارهای پایه را به‌دست می‌آوریم

$$D(x^۲) = ۲x = ۰x^۲ + ۲x + ۰(۱)$$

$$D(x) = ۱ = ۰x^۲ + ۰x + ۱(۱)$$

$$D(۱) = ۰ = ۰x^۲ + ۰x + ۰(۱)$$

بنابراین ماتریس D چنین است

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

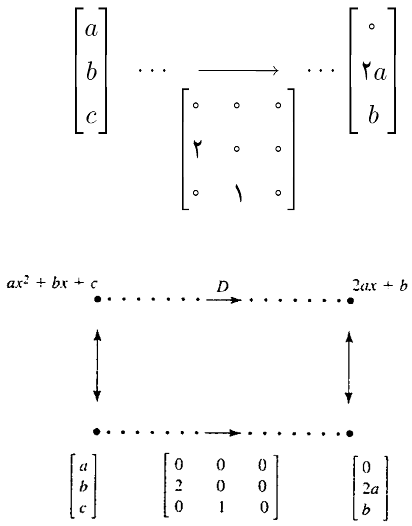
ماتریس A یک عملگر خطی روی $R^۳$ بوده که هم تراز با D روی $p_۲$ است. داریم:

$$D(ax^۲ + bx + c) = ۲ax + b \quad , \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ ۲a \\ b \end{bmatrix}$$

شکل ۷ـ۱۲ را ببینید.

$$ax^۲ + bx + c \cdots \xrightarrow{D} \cdots ۲ax + b$$

$$\updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow$$



شکل ۷ـ۱۲

۱۱-۷ ارتباط بین نمایش‌های ماتریسی

تاکنون ملاحظه کرده‌ایم که نمایش ماتریسی یک نگاشت خطی وابسته به پایه‌های انتخابی است. وقتی نگاشت خطی کاربردی می‌شود، هدف اصلی اغلب تعیین یک نمایش ماتریسی ساده است بعداً خواننده می‌بیند که به‌طور مثال چگونه پایه‌ها می‌توانند انتخاب شوند به‌گونه‌ای که نمایش نگاشت خطی قطری باشد. در اینجا این امر که چگونه نمایش‌های ماتریسی یک نگاشت خطی برحسب پایه‌های متفاوت در ارتباط با هم هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

برای خواننده یادآوری می‌شود که اگر A و B ماتریس‌های مربع از یک اندازه باشند آنگاه B مشابه با A گفته می‌شود اگر ماتریس وارون‌پذیر p موجود باشد به‌طوری که $B = p^{-1}Ap$ تبدیل ماتریسی A به ماتریس B تبدیل تشابهی نامیده می‌شود. اکنون نمایش ماتریسی یک عملگر خطی را در ارتباط با دو پایه ماتریس‌های متشابه پیدا می‌کنیم.

۱-۱۱-۷ قضیه. فرض کنیم U یک فضای برداری با پایه‌های B و B' باشد فرض کنیم p نمایش ماتریسی از B به B' باشد. اگر T یک عملگر خطی روی U باشد ماتریس داده شده A با در

نظرگرفتن پایه اول و A' با در نظرگرفتن پایه دوم باشند در این‌صورت

$$A' = p^{-1}Ap$$

اثبات. بردار u در U را در نظرگرفته و فرض می‌کنیم بردارهای مختصات در رابطه با B و B' برابر a و a' باشند بردارهای مختصات Aa'، Aa و $T(u)$ هستند از آنجا p ماتریس نمایشی از B' به B است می‌دانیم که

$$a = pa' \quad , \quad Aa = p(A'a')$$

معادله دوم به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$p^{-1}Aa = A'a'$$

با جانشینی $a = pa'$ در این معادله چنین به‌دست می‌آید:

$$p^{-1}Apa' = A'a'$$

اثر ماتریس‌های $p^{-1}Ap$ و A' به‌عنوان نگاشت خطی روی هر بردار محتصات a' برابرند پس این ماتریس‌ها مساوی‌اند.

مثال ۶: عملگر خطی $T(x, y) = (2x, x + y)$ روی R^2 را در نظر بگیرید ماتریس T با در نظرگرفتن پایه $B = \{(1,0), (0,1)\}$ از R^2 را بیابید. تبدیل $A' = p^{-1}Ap$ را به‌کار ببرید و ماتریس A' با در نظرگرفتن پایه $B' = \{(-2,3), (1,-1)\}$ را تعیین کنید.

حل: اثر T روی بردارهای پایه استاندارد برابر است

$$T(1,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

$$T(0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$$

ماتریس T در ارتباط با پایه استاندارد چنین است:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون P نمایش ماتریسی از B به B' را پیدا می‌کنیم بردارهای B' را برحسب بردارهای B می‌نویسیم.

$$(-2,3) = -2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(1,-1) = 1(1,0) - (0,1)$$

ماتریس تبدیل برابر است با $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ بنابراین

$$A' = P - 1AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریس قطری یک عملگر خطی

اکنون می‌بینیم چگونه نمایش یک ماتریس یک نگاشت خطی T را پیدا می‌کنیم، ماتریس قطری در صورت وجود معمولاً بیشتر از انواع دیگر کاربرد دارد.

فرض کنیم T یک عملگر خطی روی فضای برداری V از بعد n باشد. فرض کنیم B یک پایه برای V و A یک نمایش ماتریسی T متناظر با پایه B باشد نمایش ماتریسی T در رابطه با پایه دیگر B' می‌تواند به شکل تبدیل تشابهی $A' = p^{-1}Ap$ مشاهده شود که در آن p نمایش ماتریسی از پایه B' به پایه B باشد، فرض می‌کنیم A مقادیر ویژه λ_1، ... و λ_n با n بردار متناظر مستقل خطی v_1، ... و v_n داشته باشد اگر $p = \{v_1 \dots v_n\}$ آنگاه می‌دانیم (قضیه ۴-۶ بخش ۳-۶) که A' یک ماتریس قطری است.

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات B' در رابطه با B بردارهای ویژه v_1، ... و v_n هستند.

مثال: عملگر خطی $T(x,y) = (3x+y, x+3y)$ روی R^2 را در نظر بگیرید یک نمایش ماتریسی قطری T را پیدا کنید. برای این نمایش برداری، پایه را تعیین کنید و یک نمایش هندسی ارائه دهید.

حل: با نمایش ماتریسی A در رابطه با پایه $B = \{(1,0),(0,1)\}$ از R^2 شروع می‌کنیم. این نمایش برای پیدا کردن ساده‌تر است داریم:

$$T(1,0) = (3,1) = 3(1,0) + 1(1,0)$$
$$T(0,1) = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$$

بردارهای مختصات $T(۰,۱)$ و $T(۱,۰)$ در رابطه با B، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ هستند. بنابراین نمایش ماتریسی T در رابطه با پایه استاندارد B چنین است.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند ماتریس A مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه زیر را دارد.

$$\lambda_۱ = ۴ \quad v_۱ = r\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_۲ = ۲ \quad v_۲ = s\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A' زیر، نمایش ماتریسی قطری T است.

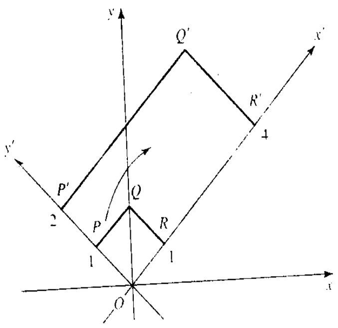
$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

حال پایه B' را که نمایش A' را می‌دهد به‌دست می‌آوریم. ماتریس تغییر وضعیت از B به B' متعامد خواهد بود فرض کنیم:

$$B' = \left\{ (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}}), (\frac{-۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}}) \right\}$$

توجه کنید که پایه B' از دوران پایه B به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به‌دست می‌آید.

اکنون به‌طور هندسی عملگر T را تغییر می‌دهیم پایه استاندارد B یک دستگاه مختصات xy را تعریف می‌کند شکل ۷ـ۱۳ را ببینید.



شکل ۷ـ۱۳

این مثال‌ها وضعیتی است که اغلب در فیزیک و مهندسی با آن برخورد می‌شود یکی در دستگاه مختصات xy شرح ریاضی داده می‌شود سپس برای دستگاه مختصات $x'y'$ دوم که وضعیت بهتر و مناسب برای تجزیه و تحلیل در آن دستگاه مختصات دارد بررسی می‌کند. تبدیل از یک دستگاه به دیگری معمولاً یک تبدیل تشابهی متعامد است.

۷-۱۱-۲ تمرین‌ها

۱) فرض کنیم $T : R^۳ \longrightarrow R^۲$ یک نگاشت خطی تعریف شده به‌صورت زیر روی پایه استاندارد $R^۳$ باشد. $T(۰, ۱, -۱)$ را پیدا کنید.

$$T(۱, ۰, ۰) = (۲, ۱) \quad T(۰, ۱, ۰) = (۰, ۲) \quad T(۰, ۰, ۱) = (-۱, ۱)$$

۲) فرض کنیم $T : R^۳ \longrightarrow R^۲$ یک نگاشت خطی تعریف شده به‌صورت زیر روی پایه استاندارد $R^۲$ باشد. $T(۳, -۲)$ را پیدا کنید

$$T(۱, ۰) = ۴ \qquad T(۰, ۱) = -۳$$

۳) فرض کنیم T یک عملگر خطی روی $R^۲$ تعریف شده به‌صورت زیر روی پایه استاندارد $R^۲$ باشد $T(۲, ۱)$ را پیدا کنید.

$$T(۱, ۰) = (۲, ۵) \qquad T(۰, ۱) = (۱, -۳)$$

۴) فرض کنیم $T : p_۲ \longrightarrow p_۱$ یک نگاشت خطی تعریف شده به‌صورت زیر روی پایه استاندارد $\{x^۲, x, ۱\}$ از $p_۲$ باشد. $T(۳x^۲ - ۲x + ۱)$ را پیدا کنید.

$$T(x^۲) = ۳x + ۱ \qquad T(x) = ۲ \qquad T(۱) = ۲x - ۵$$

۵) فرض کنیم T یک عملگر روی به $p_۲$ تعریف شده به‌صورت زیر روی پایه استاندارد $\{x^۲, x, ۱\}$ از $p_۲$ باشد. $T(x^۲ + ۳x - ۲)$ را پیدا کنید.

$$T(x^۲) = x^۲ + ۳ \quad T(x)۲x^۲ + ۴x - ۱ \quad T(۱) = ۳x - ۱$$

۶) فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنید T در ارتباط با پایه‌های $\{u_۱, u_۲\}$ و $\{v_۱, v_۲\}$ از U و V به‌صورت زیر باشد:

$$T(u) = ۲v_۱ + ۳v_۲ \qquad T(u_۲) = ۴v_۱ - v_۲$$

ماتریس T را با در نظرگرفتن این پایه‌ها بیابید. این ماتریس را به‌کار ببرید و تصویر بردار $u = 2u_1 + 5u_2$ را پیدا کنید.

۷) فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد، همچنین فرض کنید T تعریف شده در ارتباط با پایه‌های $\{v_1, v_2, v_3\}$ و $\{u_1, u_2\}$ از U و V به‌صورت زیر باشد:

$$T(u_1) = 2v_1 + v_2 - 3v_3 \qquad T(u_2) = v_1 - 2v_2 + v_3$$

ماتریس T را با در نظرگرفتن این پایه‌ها بیابید. این ماتریس را به‌کار ببرید و تصویر بردار $u = 4u_1 - 7u_2$ را پیدا کنید.

۸) فرض کنیم $T : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد، همچنین فرض کنید T تعریف شده در ارتباط با پایه‌های $\{v_1, v_2, v_3\}$ و $\{u_1, u_2, u_3\}$ از U و V به‌صورت زیر باشد:

$$T(u_1) = v_1 + v_2 \qquad T(u_2) = 3v_1 - 2v_2 \qquad T(u_3) = v_1 + 2v_2 - v_3$$

ماتریس T را بیابید و تصویر بردار $u = 3u_1 + 2u_2 - 5u_3$ را بیابید.

۹) ماتریس نگاشت‌های خطی زیر از $R^2 \longrightarrow R^3$ با در نظرگرفتن پایه‌های استاندارد این فضاها را بیابید و تصویر بردار $(1, 2, 3)$ را پیدا کنید.

الف) $T(y, z) = (x, z)$

ب) $T(x, y, z) = (3x, y = z)$

ج) $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y)$

۱۰) ماتریس عملگرهای زیر را در فضای R^3 به‌دست آورید. این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار $(-1, 5, 2)$ بیابید.

الف) $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$

ب) $T(x, y, z) = (x, y, z)$

ج) $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$

د) $T(x, y, z) = (x + y, 3y, x + 2y - 4z)$

۱۱) نگاشت خطی $T : R^3 \longrightarrow R^3$ تعریف شده توسط $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ را در نظر بگیرید. ماتریس T را با در نظرگرفتن این پایه‌های $\{u_1, u_2, u_3\}$ و $\{u'_1, u'_2\}$ از R^3 و R^2 را پیدا

کنید.

$$u_1 = (1, -1, 0) \qquad u_2 = (2, 0, 1) \qquad u_3 = (1, 2, 1)$$

$$u'_1 = (-1, 0) \qquad u'_2 = (0, 1)$$

این ماتریس را برای‌پیدا کردن تصویر $u = (3, -4, 0)$ به‌کار ببرید.

۱۲) نگاشت خطی $T : R^2 \longrightarrow R^3$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (x, x + y, 2y)$ را در نظر بگیرید. ماتریس T با در نظرگرفتن پایه‌های $\{u_1, u_2\}$ و $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$ از R^2 و R^3 را به‌دست آورید که در آن

$$u_1 = (1, 3) \qquad u_2 = (4, -1)$$

$$u'_1 = (1, 0, 0) \qquad u'_2 = (0, 2, 0) \qquad u'_3 = (0, 0, -1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار $u = (9, 1)$ به‌کار ببرید.

۱۳) عملگر خطی $T : R^2 \longrightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (2x, x + y)$ را در نظر بگیرید. ماتریس T با در نظرگرفتن پایه‌های $\{u_1, u_2\}$ از R^2 را پیدا کنید وقتی که

$$u_1 = (1, 2) \qquad u_2 = (0, -1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار $u = (-1, 3)$ به‌کار ببرید.

۱۴) ماتریس عملگر مشتق D را با در نظرگرفتن پایه $\{2x^2, x - 1\}$ از p_2 را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $3x^2 - 2x + 4$ به‌کار ببرید.

۱۵) فرض کنید V فضای برداری توابع با دامنه $[0, \pi]$ تولید شده توسط توابع $\sin$ و $\cos$ باشد. همچنین فرض کنید D عملگر مشتق با در نظر گرفتن x و D^2 عملگر گرفتن مشتق دوم باشد. ماتریس عملگر خطی $D^2 + 2D + 1$ از V با در نظرگرفتن پایه $\{\sin x, \cos x\}$ از V را بیابید. تصویر $3 \sin x + \cos x$ تحت این نگاشت را بیابید.

۱۶) ماتریس نگاشت‌های زیر را با در نظرگرفتن پایه $\{x, 1\}$ از p_2 و $\{x^2, x, 1\}$ از p_2 را بیابید.

الف) $T(ax^2 + bx + c) = (b + c)x^2 + (b - c)x$

ب) $T(ax + b) = bx^2 + ax + b$ از p_1 به‌توی p_2

ج) $T(ax^{۲}+bx+c)=۲cx+b-a$ از $p_{۲}$ به‌توی $p_{۱}$

۱۷) ماتریس تبدیل T از $p_{۲}$ به‌توی $p_{۱}$ را با در نظرگرفتن پایه $\{x^{۲}+x, x, ۱\}$ از $p_{۲}$ و پایه $\{x, ۱\}$ از $p_{۱}$ پیدا کنید که در آن

$$T(ax^{۲}+bx+c)=ax+c$$

تصویر $۳x^{۲}-۲x-۱$ را تعیین کنید.

۱۸) ماتریس عملگر خطی T روی $p_{۱}$ با در نظرگرفتن پایه $\{x+۱, ۲\}$ را پیداکنید که $T(ax+b)=bx-a$ تصویر $۴x-۳$ را تعیین کنید.

۱۹) ماتریس عملگر خطی زیر روی $p_{۱}$ را با در نظر گرفتن پایه استاندارد $\{x, ۱\}$ از $p_{۱}$ بیابید که $T(ax+b)=(a+b)x-b$ یک تبدیل تشابهی به‌کار ببرید و سپس ماتریس T را با در نظر گرفتن پایه $\{x+۱, x-۱\}$ از $p_{۱}$ پیدا کنید.

۲۰) عملگر خطی $T(x,y)=(۲x, x+y)$ را روی $R^{۲}$ در نظر بگیرید. ماتریس T را با در نظرگرفتن پایه استاندارد برای $R^{۲}$ پیدا کنید. یک تبدیل تشابهی به‌کار ببرید سپس ماتریس آن را با در نظرگرفتن پایه $\{(۲, ۱), (۱, ۱)\}$ از $R^{۲}$ پیدا کنید.

۲۱) عملگر خطی $T(x,y)=(x-y, x+y)$ را روی $R^{۲}$ در نظر بگیرید. ماتریس T با در نظر گرفتن پا یه استاندارد برای $R^{۲}$ پیدا کنید یک تبدیل تشابهی به‌کار ببرید سپس ماتریس را با در نظر گرفتن پایه $\{(۱, ۲), (-۲, ۱)\}$ از $R^{۲}$ بیابید.

۲۲) فرض کنید

الف) V و W فضاهای برداری و U یک زیرفضای V باشد آیا همیشه ممکن است یک ساختار نگاشت خطی از V به‌توی W که U را به‌عنوان هسته داشته باشد موجود باشد؟

ب) یک نگاشت خطی از $R^{۲}$ به‌توی $R^{۲}$ که زیرفضایی شامل همه بردارهای به شکل $r(۴, ۱)$ به‌عنوان هسته داشته باشد بسازید.

ج) یک نگاشت خطی از $R^{۳}$ به‌توی $R^{۲}$ که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $(r+s, ۲r-s)$ به‌عنوان هسته داشته باشد بسازید.

۲۳) یک نگاشت خطی از $R^{۲}$ به $R^{۳}$ که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $r(۲, -۱)$ به‌عنوان هسته داشته باشد بسازید.

۲۴) یک نگاشت خطی از $R^۲$ به $R^۳$ که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $r(۴,۱)$ به‌عنوان هسته داشته باشد بسازید.

۲۵) فرض کنید $V \longrightarrow U : T$ برای یک فضای برداری U تعریف شده توسط $T(u) = u$ باشد، ثابت کنید T خطی است. T عملگر همانی U نامیده می‌شود. فرض کنید B یک پایه برای U باشد، نشان دهید ماتریس T با در نظر گرفتن B یک ماتریس همانی است.

۲۶) فرض کنید $V \longrightarrow U : T$ برای یک فضای برداری U تعریف شده توسط $T(u) = ۰$ باشد. ثابت کنید T خطی است. T عملگر صفر روی U نامیده می‌شود. فرض کنید B یک پایه برای U باشد نشان دهید ماتریس T با در نظر گرفتن B ماتریس صفر است.

۲۷) فرض کنید U، V و W فضاهای برداری با پایه‌های $B = \{u_۱, \dots, u_n\}$، $B' = \{v_۱, \dots, v_n\}$ و $B'' = \{w_۱, \dots, w_n\}$ باشند همچنین فرض کنید $T : U \longrightarrow V$ و $L : V \longrightarrow W$ نگاشت‌های خطی باشند.فرض کنید P ماتریس T با در نظر گرفتن Bز B' و Q ماتریس نمایشگر L با در نظر گرفتن B' و B'' باشند.ثابت کنید ماتریس LOT با در نظر گرفتن B و B'' برابر QP است.

۲۸) آیا امکان دارد برای دو نگاشت خطی متمایز $T_۱ : U \longrightarrow V$ و $T_۲ : U \longrightarrow V$ ماتریس‌های یکسان با در نظر گرفتن پایه‌های B B' از U و V داشته باشند؟

۲۹) یک نمایش ماتریسی قطری برای هرکدام از عملگرهای زیر پیدا کنید یک پایه برای هرکدام از نمایش قطری پیدا کنید و یک تعبیر هندسی از T ارائه دهید.

الف) $T(x,y) = (۴x + ۲y, ۲x + ۴y)$

ب) $T(x,y) = (۵x + ۳y, ۳x + ۵y)$

ج) $T(x,y) = (۹x + ۲y, ۲x + ۶y)$

د) $T(x,y) = (۱۴x = ۲y, ۲x + ۱۱y)$

۳۰) یک نمایش ماتریسی قطری برای هرکدام از عملگرهای زیر بیابید. پایه‌ای برای هرکدام از نمایش‌های قطری تعیین کنید. یک تعبیر هندسی از T بیاورید. (ممکن نیست یک تبدیل متعامد در این مثال‌ها پیدا کنید).

الف) $T(x,y) = (۸x - ۶y, ۹x - ۷y)$

ب) $T(x,y)=(-۲x+۲y,-۱۰x+۷y)$

ج) $T(x,y)=(۳x-۴y,۲x-۳y)$

د) $T(x,y)=(۷x+۵y,-۱۰x-۸y)$

۷-۱۱-۳ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۷

۱) هسته و برد نگاشت تعریف شده توسط ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را بیابید. نشان دهید که

$$\dim\ker(T)+\dim\mathrm{range}(T)=\dim\mathrm{domain}(T)$$

۲) پایه‌ای برای هسته و برد نگاشت تعریف شده توسط ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

بیابید.

۳) تعیین کنید کدامیک از نگاشت‌های خطی تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر یک‌به‌یک و پوشا هستند.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۴ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۲ & ۸ \\ -۴ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$

۴) هسته و برد نگاشت خطی $T(x,y,z)=(x,۲x,y-z)$ از $R^۳\longrightarrow R^۳$ را تعیین کنید.

۵) ثابت کنید $g:p_۲\longrightarrow p_۳$ تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد g را بیابید، پایه‌ای برای این زیرفضاها به‌دست آورید.

$$g(a_۲x^۲+a_۱x+a_۰)=(a_۲-a_۱)x^۳-a_۱x^۲a_۰$$

۶) فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری باشد D را به‌عنوان یک عملگر روی p_n در نظر بگیرید ثابت کنید $D^۲-۲D+۱$ عملگر خطی است مجموعه همه چندجمله‌ای‌هایی که توسط $D^۲-۲D+۱$ به‌توی $۱۲x-۴$ نگاشته می‌شوند را بیابید.

۷) بردار مختصات $(-۱,۸)$ در ارتباط با پایه $\{(-۱,۴),(۱,۳)\}$ را پیدا کنید.

۸) بردار مختصات $۱۳-۲x+۳x^۲$ را در رابطه با پایه $\{x^۲+۱, x+۲, x-۳\}$ را پیدا کنید.

۹) بردار مختصات $(۰,۵,-۱۵)$ را در رابطه با پایه متعامد $(\frac{۳}{۵},۰,\frac{۴}{۵})$، $(۰,۱,۰)$ و $(-\frac{۴}{۵},۰,\frac{۳}{۵})$ بیابید.

۱۰) ماتریس تبدیل p از پایه B زیر به پایه استاندارد B' از $R^۲$ را بیابید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردار مختصات u، v و w در رابطه با B' به‌کار ببرید.

$$B=\{(۱,۳),(۵,۲)\} \qquad\qquad B'=\{(۱,۰),(۰,۱)\}$$

$$u_B=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix} \qquad v_B=\begin{bmatrix}۵\\-۲\end{bmatrix} \qquad w_B=\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$$

۱۱) ماتریس تبدیل P از پایه $B=\{(-۱,۲),(۲,۱)\}$ از $R^۲$ به پایه $B'=\{(۴,۳),(-۳,۲)\}$ را پیدا کنید اگر $u_B=\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ آنگاه $u_{B'}$ را پیدا کنید.

۱۲) فرض کنید T یک نگاشت خطی روی $R^۲$ تعریف شده به‌صورت زیر روی پایه استاندارد $R^۲$ باشد $T(۰,۱)=(-۱,۴)$ و $T(۱,۰)=(۳,۲)$ در این‌صورت $T(۲,۷)$ را پیدا کنید.

۱۳) فرض کنید $T:U\longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد همچنین فرض کنید T در ارتباط با پایه‌های $\{u_۱,u_۲\}$ و $\{v_۱,v_۲,v_۳\}$ از V و U به‌صورت زیر باشد $T(u_۱)=v_۱-۵v_۲-۲v_۳$ و $T(u_۲)=۳v_۱-v_۲+۲v_۳$. ماتریس T در ارتباط با این پایه‌ها را بیابید. این ماتریس را به‌کار ببرید و تصویر بردار $a=۲u_۱-۳u_۲$ را پیدا کنید.

۱۴) ماتریس $T(x,y,z)=(۲x,-۳y)$ در ارتباط با پایه استاندارد را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $(۱,۲,۳)$ به‌کار ببرید.

۱۵) ماتریس $T(ax^۲+bx+c)=(a-b)x^۲+۲cx$ با در نظرگرفتن پایه $\{x^۲,x,۱\}$ از $P_۲$ را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $۳+x-۲x^۲$ به‌کار ببرید.

۱۶) نگاشت خطی $T(x,y)=(۳x,x-y)$ را روی $R^۲$ در نظر بگیرید ماتریس T را با در نظرگرفتن پایه‌های استاندارد برای $R^۲$ پیدا کنید از یک ماتریس متشابه استفاده کنید سپس این ماتریس را با در نظرگرفتن پایه‌های $\{(۱,۲),(۲,۳)\}$ از $R^۲$ بیابید.

هدف‌های رفتاری فصل ۸

دانشجویی پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتواند

- مفاهیم ضرب نقطه‌ای دو بردار، نرم یک بردار، زاویه بین دو بردار و فاصله دو نقطه را در فضاهای برداری کلی تعریف کرده و مشابهت آنها را به‌صورت مفاهیم تعمیم یافته‌ای از فضاهای ملموس $\mathbb{R}^n$ که در فصل ۵ مطالعه کرده است، درک کند.
- حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو تابع (یا دوچندجمله‌ای) را تعریف کرده و به کمک آن نرم یک تابع را تعریف کنید.
- بداند که در چه صورتی دو بردار برهم عمودند (بااستفاده از مفهوم حاصل‌ضرب نقطه‌ای)
- درکی از ارتباط حوزه‌ای مهمی چون تئوری نسبیت خاص و هندسه نااقلیدسی داشته باشد.
- تعریف دقیق تقریب به‌وسیله کمترین مربعات را ارائه دهد.
- مفهوم تقریب فوریه را توضیح دهد.
- منحنی‌های کمترین مربعات را توضیح دهد.
- مفاهیم کدها، کد تصحیح خطا و فاصله دوکد را تعریف کند.
- و بالاخره از عهده‌ی حل تمرین‌های پایان فصل به‌خوبی برآید.

فصل هشتم

فضاهای ضرب داخلی

فضای برداری R^n در فصل ۵ به‌طور قابل ملاحظه‌ای تعمیم داده شده. در آنجا مجموعه‌ای از اصول موضوعه را برای تبیین خواص R^n ارائه دادیم. به‌طوری که هر مجموعه‌ای که در این اصول موضوعه صدق می‌کرد فضای برداری نامیده می‌شد. چنین فضاهایی خواص جبری مشابهی با R^n دارند.

اینک یک قدم فراتر نهاده و مفاهیم فوق را به ضرب نقطه‌ای دو بردار، نرم یک بردار، زاویه بین بردارها و فاصله نقاط برای فضای برداری در حالت کلی تعمیم می‌دهیم.

۸-۱ فضاهای ضرب داخلی

ضرب نقطه‌ای یک مفهوم کلیدی در R^n برای تعیین نرم، زوایه و فاصله است. هدف ما تعمیم ضرب نقطه‌ای در R^n به فضاهای برداری با یک ساختار ریاضی موسوم به **ضرب داخلی** است. با این تعمیم می‌توانیم نرم، زاویه و فاصله را در فضاهای برداری دلخواه تعریف کنیم. ضرب داخلی زیر براساس خواص بیان شده برای ضرب نقطه‌ای در بخش ۲-۴ ارائه شده است.

تعریف. یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری v، تابعی است که به هر زوج از بردارهای u و v از v عددی را با نماد $< u, v >$ متناظر می‌کند. این تابع برای هر بردار u، v و w و هر اسکار c در خواص زیر صدق می‌کند.

۱) $< u, v > = < v, u >$ (اصل تقارنی)

۲) $< u+v, w > = < u, w > + < v, w >$ (اصل جمعی)

۳) $< cu, v > = c < u, v >$ (اصل همگنی)

۴) $< u, u > \geq ۰$ ، $< u, u > = ۰$ اگر و فقط اگر $u = ۰$ (اصل مثبت معین)

فضای برداری v که در آن ضرب داخلی تعریف شده باشد، یک فضای **ضرب داخلی** نامیده می‌شود.

هر تابعی که در یک فضای برداری در اصول ضرب داخلی صدق کند، یک ضرب داخلی روی آن فضا تعریف میکند. البته روی یک فضای برداری ضرب‌های داخلی زیادی می‌توان تعریف کرد. ضرب نقطه‌ای در $R^۲$، یک ضرب داخلی در این فضا است. مثال‌های زیر ضرب‌های داخلی دیگری را در $R^۲$ ارائه می‌کنند.

مثال ۱: فرض کنید $u = (x_۱, x_۲)$، $v = (y_۱, y_۲)$ و $w = (z_۱, z_۲)$ بردارهای دلخواهی در $R^۲$ باشند. ثابت کنید $< u, v >$ که به شکل زیر تعریف می‌شود، یک ضرب داخلی در $R^۲$ است.

$$< u, v > = x_۱y_۱ + ۴x_۲y_۲$$

ضرب داخلی بردارهای $(۲, ۵-)$ و $(۳, ۱)$ را با این ضرب داخلی به‌دست آورید.

حل: اصول چهارگانه ضرب داخلی را می‌آزماییم.از خواص جبری اعداد حقیقی و بردارها استفاده کنید و تعریف فوق را در جاهای مناسب به‌کار برید.

اصل ۱:

$$\begin{aligned} < u, v > &= x_۱y_۱ + ۴x_۲y_۲ \\ &= y_۱x_۱ + ۴y_۲x_۲ \\ &= < v, u > \end{aligned}$$

اصل ۲:

$$\begin{aligned} < u+v, w > &= < (x_۱, x_۲) + (y_۱, y_۲), (z_۱, z_۲) > \\ &= < (x_۱, y_۱, x_۲ + y_۲), (z_۱, z_۲) > \\ &= (x_۱, y_۱)z_۱ + ۴(x_۲ + y_۲)z_۲ \\ &= x_۱z_۱ + y_۱z_۱ + ۴x_۲z_۲ + ۴y_۲z_۲ \\ &= x_۱z_۱ + ۴x_۲z_۲ + y_۱z_۱ + ۴y_۲z_۲ \\ &= < (x_۱, x_۲), (z_۱, z_۲) > + (y_۱, y_۲), (z_۱, z_۲) \end{aligned}$$

$$=< u,v > + < v,w >$$

اصل ۳:
$$< cu.v > =< c(x_۱,x_۲),(y_۱,y_۲) >= (cx_۱,cx_۲),(y_۱,y_۲)$$
$$= cx_۱y_۱ + ۴cx_۲y_۲ = c(x_۱y_۱ + ۴x_۲y_۲)$$
$$= c < u,v >$$

اصل ۴:
$$< u,u > =< (x_۱,x_۲),(x_۱,x_۲) >$$
$$= x_۱^۲ + ۴x_۲^۲ \geq ۰$$

به‌علاوه $x_۱^۲ + ۴x_۲^۲ = ۰$ اگر و فقط اگر $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = ۰$. بنابراین $u = ۰$.در نتیجه $< u,u >\geq ۰$، و $< u,u >= ۰$ اگر و فقط اگر $u = ۰$. ملاحظه می‌کنیم که اصول چهارگانه ضرب داخلی برقرارند، در این‌صورت $< u,v >= x_۱y_۱ + ۴x_۲y_۲$ یک ضرب داخلی در $R^۲$ است.

ضرب‌های داخلی دیگری نیز در $R^۲$ وجود دارند. با این حال ضرب نقطه‌ای در $R^۲$ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا زاویه و فاصله را در هندسه اقلیدسی به‌دست می‌دهد.

بزودی هندسه نااقلیدسی را براساس ضرب داخلی که در بخش بعدی ارائه خواهیم کرد، مطالعه خواهیم کرد.

اینک ضرب داخلی را در فضای برداری ماتریس‌ها و توابع نمایش می‌دهیم.

مثال ۲: فضای برداری $M_{۲۲}$ متشکل از ماتریس‌های ۲ × ۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید uو v دو ماتریس ۲ × ۲ به شکل زیر باشند.

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی روی $M_{۲۲}$ است

$$< u,v >= ae + bf + cg + dh$$

(ضرب متناظر درایه‌ها و جمع آنها) ضرب داخلی ماتریس‌های زیرا به‌دست آورید.

$$u = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۹ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل: اصول موضوع ۱ و ۳ را بررسی و اصول موضوع ۲ و ۴ را به‌عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم.

اصل موضوع ۱:

$$(u, v >= ae + bf + cg + dh = ea + fb + gc + hd =< v, u >$$

اصل موضوع ۳: فرض کنیم k یک اسکالر باشد

$$\begin{aligned} < ku, v > &= kae + kbf + kcg + kdh \\ &= k(ae + bf + cg + dh) \\ &= k < u, v > \end{aligned}$$

و برای ضرب داخلی دو ماتریس داده شده داریم:

$$\left\langle \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۹ & ۰ \end{bmatrix} \right\rangle = (۲ \times ۵) + (-۳ \times ۲) + (۰ \times ۹) + (۱ \times ۰) = ۴$$

مثال زیر یک ضرب داخلی روی فضای چندجمله‌ای‌ها است.

مثال ۳: P_n را فضای برداری چندجمله‌ای‌های از درجه نابیشتر از n فرض می‌کنیم. f و g را دو عضو P_n در نظر می‌گیریم. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در P_n است.

$$< f, g >= \int_۰^۱ f(x)g(x)dx$$

ضرب داخلی توابع زیر را محاسبه کنید؟

$$f(x) = x^۲ + ۲x - ۱ \quad , \quad g(x) = ۴x + ۱$$

حل: اصول موضوع ۱ و ۲ بررسی و دو اصل دیگر را به خواننده وامی‌گذاریم. خواص انتگرال را در بررسی اصول موضوع به‌کار می‌بریم.

اصل موضوع ۱:

$$< f, g >= \int_۰^۱ f(x)g(x)dx = \int_۰^۱ g(x)f(x)dx =< g, f >$$

اصل موضوع ۲:

$$\begin{aligned} < f+g, h > &= \int_{۰}^{۱} [f(x)+g(x)]h(x)dx \\ &= \int_{۰}^{۱} [f(x)h(x)] + [g(x)h(x)]dx \\ &= \int_{۰}^{۱} f(x)h(x)dx + \int_{۰}^{۱} g(x)h(x)dx \\ &=< f, h > + < g, h > \end{aligned}$$

و اینک ضرب داخلی توابع داده شده را می‌یابیم

$$< x^{۲} + ۲x - ۱, ۴x + ۱ >= \int_{۰}^{۱} (۴x^{۳} + ۹x^{۲} - ۲x - ۱)dx = ۲$$

۲-۸ نرم یک بردار

نرم برداری در R^n براساس ضرب نقطه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \|(x_۱, \dots, x_n)\| &= \sqrt{(x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots x_n^۲)} \\ &= \sqrt{(x_۱, \dots, x_n).(x_۱, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

این تعریف نرم، دقیقاً همان نرمی را که در فضاهای $R^{۲}$ و $R^{۳}$ انتظار داریم به‌دست می‌دهد. ما این تعریف را برای ضرب داخلی تعمیم خواهیم داد. نرمی که به این طریق به‌دست می‌آید لزوماً تعبیر هندسی ندارد ولی در محاسبات عددی اهمیت ویژه‌ای دارد.

تعریف. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. نرم بردار v که با $\|v\|$ مشخص می‌شود عبارت است از:

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

مثال ۴: فضای برداری P_n را با ضرب داخلی

$$< f, g >= \int_{۰}^{۱} f(x).g(x).dx$$

در نظر می‌گیریم. نرم تابع f **تولید شده** با این ضرب داخلی عبارت است از:

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_{۰}^{۱} [f(x)]^{۲} dx}$$

نرم تابع $f(x) = ۵x^۲ + ۱$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\|۵x^۲ + ۱\| = \sqrt{\int_۰^۱ (۵x^۲ + ۱)^۲ dx}$$
$$= \sqrt{\frac{۲۸}{۳}}$$

بنابراین نرم تابع $f(x) = ۵x^۲ + ۱$، $\sqrt{\frac{۲۸}{۳}}$ است.

۸-۳ زاویه

ضرب نقطه‌ای در R^n برای تعیین زاویه بین بردارها به‌کار می‌رود و این زاویه θ بین دو بردار u و v در R^n عبارت است از:

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\| . \|v\|}$$

مثال ۵: فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها، P_n را با ضرب داخلی

$$< f, g >= \int_۰^۱ f(x)g(x)dx$$

در نظر بگیرید. زاویه بین دو تابع ناصفر f و g از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta = \frac{< f, g >}{\|f\| \, \|g\|} = \frac{\int_۰^۱ f(x)g(x)dx}{\|f\| \, \|g\|}$$

کسینوس زاویه بین توابع $g(x) = ۳x$ و $f(x) = x^۲$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا $\|f\|$ و $\|g\|$ را به‌دست می‌آوریم

$$\|۵x^۲\| = \sqrt{\int_۰^۱ [۵x^۲]^۲ dx} = \sqrt{۵} \quad , \quad \|۳x\| = \sqrt{\int_۰^۱ [۳x]^۲ dx} = \sqrt{۳}$$

حال

$$\cos\theta = \frac{\int_۰^۱ f(x)g(x)dx}{\|f\| \, \|g\|} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

۴-۸ بردارهای متعامد

فرض کنید V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی باشد. دو بردار ناصفر u و v در V متعامد نامیده می‌شود اگر

$$< u, v >= ۰$$

مثال ۶: نشان دهید توابع $f(x) = ۳x - ۲$ و $g(x) = x$ در P_n با ضرب داخلی $< f, g >= \int_۰^۱ f(x)g(x)dx$ متعامدند.

حل:

$$< ۳x - ۲, x >= \int_۰^۱ (۳x - ۲)(x)dx = x^۳ - x^۲|_۰^۱ = ۰$$

بنابراین توابع f و g متعامدند.

یادآوری. همان‌طورکه قبلاً تذکر دادیم با این تعریف ضرب داخلی، تعامد دو بردار تعبیر هندسی ندارد. با رسم نمودار f و g این موضوع را بکاوید.

۵-۸ فاصله

هدف نهایی تعمیم مفهوم اقلیدسی به فضاهای برداری است. همانند نرم، در حالت کلی مفهوم فاصله دارای تعبیر هندسی نمی‌باشد، با این حال در محاسبات عددی ما را قادر می‌سازد فواصل توابع متفاوت را به‌دست آوریم.

تعریف. V را یک فضای ضرب داخلی با نرم

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{< v, v >}$$

در نظر می‌گیریم. فاصله دو بردار (نقاط) $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ که با $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ نشان داده می‌شود از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \qquad (= \sqrt{< \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} >})$$

مثال ۷: P_n را با ضرب داخلی بیان شده در نظر بگیرید. کدام یک از توابع $g(x) = x^۲ - ۳x + ۵$ و $h(x) = x^۲ + ۴$ به تابع $f(x) = x^۲$ نزدیک است.

حل: فاصله f را از g و h به‌دست می‌آوریم. برای سهولت از مربع فواصل شروع می‌کنیم

$$[d(f,g)]^{۲} =< f-g, f-g >= (۳x-۵, ۳x-۵ >$$
$$= \int_{۰}^{۱} (۳x-۵)^{۲} dx = ۱۳$$

$$[d(f,h)]^{۲} =< f-h, f-h >=< -۴, -۴ >$$
$$= \int_{۰}^{۱} (-۴)^{۲} dx = ۱۶$$

بنابراین $d(f,g) = \sqrt{۱۳}$ و $d(f,h) = ۴$. پس f به g نزدیکتر از f به h است. **در عمل فاصله نسبی توابع مهمتر از فاصله مطلق آنها است.**

فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$ در بخش ۵-۱ تعریف شد، که در بسیاری از شاخه‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی اهمیت ویژه‌ای دارد. اینک ضرب داخلی متداول $\mathbb{C}^n$ را تعریف می‌کنیم؛

تعریف. ضرب داخلی $\mathbb{C}^n$

برای فضای برداری مختلط اصل موضوع اول را بازنویسی کرده و به شکل

$$< u, v >= \overline{< v, u >}$$

در می‌آوریم. این ضرب داخلی برای تعریف نرم، تعامد و فاصله همانند فضاهای برداری حقیقی به‌کار می‌رود.

فرض کنیم $u = (x_۱, \dots, x_n)$ و $v = (y_۱, \dots, y_n)$ دو عضو $\mathbb{C}^n$ باشند. یک ضرب داخلی کارا برای $\mathbb{C}^n$ عبارت است از

$$< u, v >= x_۱\bar{y}_۱ + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

می‌توان نشان داد این تعریف در اصول موضوع ضرب داخلی فضای برداری مختلط صدق می‌کند. (تمرین‌های زیر را مرور کنید). این ضرب داخلی تعاریف نرم، تعامد و فاصله را در $\mathbb{C}^n$ به اشکال زیر در می‌آورد.

$$u \perp v \qquad \text{اگر} \qquad < u, v >= ۰$$

$$\|u\| = \sqrt{x_۱\bar{x}_۱ + \cdots + x_n\bar{x}_n}$$

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

مثال ۸: بردارهای $u = (۲ + ۳i, -۱ + ۵i)$ و $v = (۱ + i, -i)$ را در $C^۲$ در نظر بگیرید. مطلوب است

الف) $< u, v >$ و نشان دهید u بر v عمود است

ب) $\|u\|$ و $\|v\|$

ج) $d(u, v)$

حل: الف) $< u, v >= (۲ + ۳i)(۱ - i) + (-۱ + ۵i)(i) = ۰$ بنابراین u بر v متعامدند.

ب) $\|u\| = \sqrt{۳۹}$ و $\|v\| = \sqrt{۳}$

ج) $d(u, v) = \|u - v\| = \|(۱ + ۲i, -۱ + ۶i)\| = \sqrt{۴۲}$

۸-۵-۱ تمرین

۱) فرض کنید $u = (x_۱, x_۲)$ و $v = (y_۱, y_۲)$ دو عضو $R^۲$ باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در $R^۲$ است.

$$< u, v >= ۴x_۱y_۱ + ۹x_۲y_۲$$

۲) فرض کنید $u = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $v = (y_۱, y_۲, y_۳)$ دو عضو $R^۳$ باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در $R^۳$ است.

$$< u, v >= x_۱y_۱ + ۲x_۲y_۲ + ۴x_۳y_۳$$

۳) فرض کنید $u = (x_۱, x_۲)$ و $v = (y_۱, y_۲)$ دو عضو $R^۲$ باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در $R^۲$ نمی‌تواند باشد.

$$< u, v >= ۲x_۱y_۱ - x_۲y_۲$$

۴) فضای برداری ماتریس‌های $M_{۲۲}$ را در نظر بگیرید. u و v را دو ماتریس ۲×۲ فرض کنید

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

ثابت کنید تابع زیر در اصول موضوع ۲ و ۴ ضرب داخلی صدق می‌کند.

$$< u, v >= ae + bf + cg + dh$$

(این تمرین مثال ۲ این درس را تکمیل می‌کند.)

۵) در تمرین ۴ ثابت کنید تابع

$$< u, v >= ae + ۲bf + ۳cg + ۴dh$$

یک ضرب داخلی در $M_{۲۲}$ است. ضرب داخلی ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $u = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

ب) $u = \begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$

۶) در فضای برداری P_n با تابع

$$< f, g >= \int_{۰}^{۱} f(x)g(x)dx$$

ثابت کنید این تابع در اصول موضوع ۳ و ۴ صدق می‌کند. (این تمرین مثال ۳ را تکمیل می‌کند)

۷) فضای برداری P_n را با تابع

$$< f, g >= \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx$$

در نظر بگیرید ثابت کنید این تابع یک ضرب داخلی است اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $a < b$.
ثابت کنید این تابع یک ضرب داخلی نیست هرگاه $a \leq b$.

در تمرین‌های ۸ تا ۱۵ تمام توابع در فضای ضرب داخلی P_n با ضرب داخلی به شکل

$$< f, g >= \int_{۰}^{۱} f(x)g(x)dx$$

می‌باشند.

۸) حاصل‌ضرب نقطه‌ای را در هر مورد پیدا کنید.

الف) $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = ۳x - ۲$

ب) $f(x) = x^{۲} + ۲$ و $g(x) = ۳$

ج) $f(x) = x^{۲} + ۳x - ۲$ و $g(x) = x + ۱$

د) $f(x) = x^{۳} + ۲x - ۱$ و $g(x) = ۳x^{۲} - ۴x + ۲$

۹) نرم توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = ۴x - ۲$

ب) $f(x) = ۷x^۳$

ج) $f(x) = ۳x^۲ + ۲$

د) $g(x) = x^۲ + x + ۱$

۱۰) ثابت کنید توابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = ۴x - ۳$ متعامدند.

۱۱) ثابت کنید توابع $f(x) = ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{۲} - x$ متعامدند.

۱۲) کسینوس زاویه بین توابع $f(x) = ۵x^۲$ و $g(x) = ۹x$ را محاسبه کنید.

۱۳) تابعی متعامد بر تابع $f(x) = ۶x + ۱۲$ به‌دست آورید.

۱۴) فاصله بین توابع $f(x) = x^۲ + ۳x + ۱$ و $g(x) = x^۲ + x - ۳$ را به‌دست آورید.

۱۵) کدامیک از توابع $g(x) = x^۲ + ۲x - ۳$ و $h(x) = x^۲ - ۳x + ۴$ به تابع $f(x) = x^۲$ نزدیکتر است.

در تمرین‌های ۱۶ تا ۲۰ همه ماتریس‌ها عضو فضای ضرب داخلی $M_{۲۲}$ با ضرب داخلی

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + bf + cg + dh$$

در نظر گرفته شده‌اند.

۱۶) ضرب داخلی ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ -۲ & -۷ \end{bmatrix}$

۱۷) نرم ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$

۱۸) ثابت کنید زوج ماتریس‌های زیر متعامدند.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۷ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۶ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۱۹) ماتریس متعامد به ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

۲۰) فاصله بین زوج ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۱) در فضای مختلط ضرب داخلی $C^۲$، بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ زیر را در نظر بگیرید. $<\mathbf{u},\mathbf{v}>$، $\|\mathbf{u}\|$، $\|\mathbf{v}\|$ و $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ را محاسبه کنید. تعیین کنید که آیا $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدند یا نه؟

الف) $\mathbf{u} = (۲-i, ۳+۲i)$ و $\mathbf{v} = (۳-۲i, ۲+i)$

ب) $\mathbf{u} = (۴+۳i, ۱-i)$ و $\mathbf{v} = (۲+i, ۴-۵i)$

ج) $\mathbf{u} = (۲+۳i, -۱)$ و $\mathbf{v} = (-i, ۳+۲i)$

د) $\mathbf{u} = (۲-۳i, -۲+۳i)$ و $\mathbf{v} = (۱, ۱)$

۲۲) در فضای مختلط ضرب داخلی $C^۲$، بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ زیر را در نظر بگیرید. $<\mathbf{u},\mathbf{v}>$، $\|\mathbf{u}\|$، $\|\mathbf{v}\|$ و $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ را محاسبه کنید و تعیین کنید آیا $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدند یا نه؟

الف) $\mathbf{u} = (۱+۴i, ۱-i)$ و $(\mathbf{v} = (۱+i, -۴-i)$

ب) $\mathbf{u} = (۲+۷i, ۱+i)$ و $\mathbf{v} = (۳-۴i, ۲+۵i)$

ج) $\mathbf{u} = (۱-۳i, ۱+i)$ و $(\mathbf{v} = (۲-i, ۵i)$

د) $\mathbf{u} = (۳ + i, ۲ + ۲i)$ و $\mathbf{v} = (۲ + i, -۲ + \frac{۲}{۳}i)$

۲۳) فرض کنید $\mathbf{u} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{v} = (y_۱, \ldots, y_n)$ عضوهای C^n باشند. ثابت کنید:

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= x_۱\bar{y}_۱ + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

در اصول موضوعه ضرب داخلی فضای برداری مختلط صدق می‌کند.

۲۴) ثابت کنید اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای در فضای ضرب داخلی مختلط C^n و k یک اسکالر باشد، آنگاه

$$< \mathbf{u}, k\mathbf{v} >= \bar{k} < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$$

۲۵) هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای در فضای داخلی حقیقی و c یک اسکالر باشد،

الف) $< ۰, \mathbf{v} >=< \mathbf{v}, ۰ >= ۰$

ب) $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

ج) $< \mathbf{u}, c\mathbf{v} >= c < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$

۲۶) فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی در R^n باشند. اگر A ماتریس متقارن $n \times n$ باشد که به‌ازای هر بردار تا صفر $\mathbf{w}$ در R^n، $\mathbf{w}A\mathbf{w}^t > ۰$. این ماتریس را مثبت معین می‌نامند.

الف) نشان دهید $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \mathbf{u}A\mathbf{v}^t$ در تمام اصول موضوع ضرب داخلی صدق می‌کند، بنابراین یک ضرب داخلی در R^n است. در نتیجه هر ماتریس مثبت معین یک ضرب داخلی در R^n است.

ب) نشان دهید ماتریس همانی I_n یک ضرب نقطه‌ای در R^n تعریف می‌کند.

ج) فرض کنید $\mathbf{u} = (۱, ۰)$ و $\mathbf{v} = (۰, ۱)$. مقدار $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$، $\|\mathbf{u}\|$، $\|\mathbf{v}\|$ و $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ را برای هر یک از ضرب‌های داخلی تعریف شده به‌وسیله ماتریس‌های معین مثبت زیر بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

د) ضرب داخلی مثال ۱، این بخش می‌تواند با یک ماتریس مثبت مبین A تعریف شود. A را به‌دست آورید.

۲۷) $\mathbf{v}$ را یک بردار ناصفر در فضای ضرب داخلی V در نظر بگیرید. فرض کنید W مجموعه بردارهایی در V باشد که بر $\mathbf{v}$ متعامدند. ثابت کنید W یک زیرفضای V است.

۸-۶ اتحاد قطبی B

در یک ضرب داخلی همواره خاصیت زیر برقرار است.

$$\|v \pm \|^{۲} = \|v\|^{۲} \pm ۲\mathrm{Re} < u, v > + \|u\|^{۲}$$

که در آن u و v برداری دلخواه و $\mathrm{Re} < u, v >$ قسمت حقیقی ضرب داخلی u و v است. در حالت خاص در فضای برداری حقیقی داریم:

$$< u, v > = \frac{۱}{۴}\|u + v\|^{۲} - \frac{۱}{۴}\|u - v\|^{۲} \qquad (۱)$$

حال با توجه به اینکه

$$< u, v > = \mathrm{Re} < u, v > + i\,\mathrm{Im} < u, v > \qquad (۲)$$

$$< u, v > = \mathrm{Re} < u, v > + i\,\mathrm{Re} < u, iv > \qquad (۲')$$

($\mathrm{Im} < u, v >$ قسمت موهومی ضرب داخلی u و v است و توجه داشته باشید که $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Re}(-iv)$ و $\mathrm{Re} < u, iv > = \mathrm{Re}[-i < u, v >] = \mathrm{Im}, u, v >$) در حالت کلی در یک فضای برداری مختلط داریم:

$$< u, v > = \frac{۱}{۴}\|u + v\|^{۲} - \frac{۱}{۴}\|u - v\|^{۲} + \frac{i}{۴}\|u + iv\|^{۲} - \frac{۱}{۴}\|u - iv\|^{۲} \qquad (۳)$$

روابط (۱) و (۳) را اتحادهای قطبی می‌نامند.

قانون دیگری موسوم به قانون متوازی‌الاضلاع در مورد نرم بردارها به شکل زیر برقرار است

$$\|u + v\|^{۲} + \|u - v\| = ۲\|u\|^{۲} + ۲\|v\|^{۲}$$

۸-۷ هندسه نااقلیدسی و نسبیت خاص

ضرب داخلی ابزاری توانا برای کنترل هندسه R^n است. این ضرب، نرم بردارها، زاویه بین بردارها و فاصله بین نقاط را کنترل می‌کند. در واقع این امر به کمک روابط زیر انجام می‌گیرد.

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >} \ , \ \cos\theta = \frac{< u, v >}{\|u\|\|v\|} \ , \ d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >}$$

ضرب‌های داخلی متفاوت در R^n، فاصله‌های متفاوت، زوایای متفاوت و نرم‌های متفاوت را برای هندسه متفاوت به‌دست می‌دهند. ضری نقطه‌ای، ضرب داخلی ویژه‌ای است که به هندسه اقلیدسی منجر می‌شود.

اینک می‌خواهیم ولو به اختصار برخی هندسه‌های دیگر را مرور کنیم که با قرار دادن ضرب‌های داخلی دیگری در R^n به‌وجود می‌آیند. چنین **هندسه‌های نااقلیدسی** که به‌وسیله ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، به‌وسیله دانشمندان به‌کار رفته‌اند. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه یکی از این هندسه‌ها برای توصیف **فضا-زمان** در تئوری نسبیت خاص به‌کار رفته است. ابتدا به هندسه نااقلیدسی در R^2 نظری می‌اندازیم. در R^2 ضرب داخلی خاصی را که در مثال ۱ توصیف کردیم، در نظر می‌گیریم.

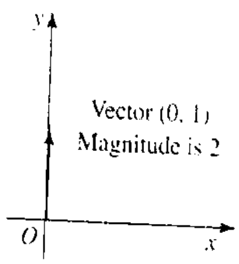
فرض کنیم (x_1, x_2) و (y_1, y_2) بردارهای دلخواهی در R^2 باشند و ضرب داخلی با ضابطه زیر تعریف شده باشد.

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 + 4x_2y_2$$

این ضرب داخلی با ضرب نقطه‌ای که در (الف ۴) ظاهر شد متفاوت است. در این فضا بردار $(0, 1)$ را در نظر بگیرید نرم این بردار عبارت است از:

$$\begin{aligned} \|(0, 1)\| &= \sqrt{< (0, 1), (0, 1) >} \\ &= \sqrt{(0 \times 0) + 4(1 \times 1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

این بردار را در شکل ۸-۱ نشان داده‌ایم. نرم این بردار در هندسه اقلیدسی برابر ۱ است. در حالی که در هندسه جدید این نرم برابر ۲ است. (دانشجویانی که درس توپولوژی را گذارنده‌اند دیده‌اند که در آن مبحث نیز با تغییر توپولوژی فاصله‌ها و نرم‌ها تغییر پیدا می‌کند).

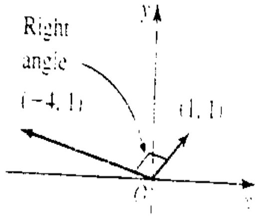


شکل ۸-۱

بردارهای $(۱, ۱)$ و $(-۴, ۱)$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی این بردارها عبارت است از:

$$< (۱, ۱), (-۴, ۱) >= ۰$$

بنابراین این دو بردار برهم عمودند. در شکل ۸-۲ این بردارها را تصویرکرده‌ایم. این بردارها در شکل متعامد به نظر نمی‌رسند و در هندسه اقلیدسی برهم عمود نیستند. با این حال زاویه بین این بردارها در هندسه جدید ما قائمه است.

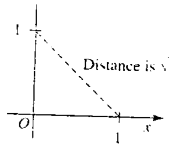


شکل ۸ـ۲

سرانجام با این ضرب داخلی، به کمک تعریف فاصله، فاصله نقاط $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} d((۱, ۰), (۰, ۱)) &= \|(۱, ۰) - (۰, ۱)\| \\ &= \|(۱, -۱)\| \\ &= \sqrt{< (۱, -۱).(۱, -۱) >} \\ &= \sqrt{(۱ \times ۱) + ۴(-۱ \times (-۱))} \\ &= \sqrt{۵} \end{aligned}$$

این مطلب در شکل ۸-۳ به تصویرکشیده شده است. توجه داشته باشید که فاصله این دو نقطه در فضای اقلیدسی (یعنی در هندسه اقلیدسی) با به‌کارگیری قضیه فیثاغورس برابر $\sqrt{۲}$ است.



شکل ۸ـ۳

شما باید بپذیرید که هندسه‌ای که اینک توصیف کردیم در اصول موضوعه ذکر شده کاملاً صدق می‌کند، گرچه جهانی را که در آن زندگی می‌کنیم توصیف نمی‌کند! ریاضیات به‌عنوان یک دنیای زیبا صرفاً برای خودش وجود دارد بی‌آنکه کاربردی داشته باشد یا با سایر مفاهیم جهانی ارتباط داشته باشد.

گرچه هدف ما در این درس نشان دادن توسیع کاربردی ریاضیات است، اما باید خواننده این نکته را دریابد که برخی از شاخه‌های زیبای ریاضی لزوماً در مسیر کاربرد قرار ندارند. البته کسی نمی‌داند چه موقع این ریاضیات محض به‌کار خواهد رفت. این مورد برای مثال در مورد هندسه نااقلیدسی اتفاق افتاد. قسمت عمده هندسه نااقلیدسی توسط ریاضیدانان آلمانی برنهاردر **یمان** در اواسط قرن نوزدهم توسعه داده شد. در اوایل قرن بیستم **آلبرت انیشتین** دریافت که هندسه‌ای که برای توصیف فضاـزمان نیاز دارد دقیقاً هندسه‌ای است که ریمان توصیف کرده است.

در هندسه **فضاـزمان**، R^4 برای توصیف سه بعد مکان و یک بعد زمان به‌کار می‌رود. هندسه اقلیدسی برای تلفیق فضا و زمان، هندسه مناسبی نیست.

همچنین یادآوری می‌کنیم که ماتریس فضاهای ضرب داخلی و تابع فضاهای ضرب داخلی پیکره‌ای می‌سازند که نظریه کوانتم مکانیک را بنا می‌نهند. کوانتم مکانیک یک مدل ریاضی است که در اواخر قرن بیستم توسط **نیل بوهر** ، **ماکس پلانک** و **ورنر هایزنبرگ** برای توصیف رفتار **اتم‌ها** و **الکترون‌ها** توسعه داده شده است.

باید اذعان کنیم تئوری فضاهای ضرب داخلی، ستون‌های اصلی دو نظریه ارزنده فیزیک در قرن بیستم است. این نظریه‌ها تاثیری شگرف در زندگی ما دارند، مثلاً منجر به توسعه انرژی اتمی و سلاح اتمی شده‌اند.

۸-۸ نسبیت خاص

نسبیت خاص برای توصیف جهان فیزیکی اطراف ما توسط آلبرت انیشتین[۱] مطرح شد. در آن زمان مکانیک نیوتن برای حرکت اجسام به‌کار می‌رفت. با این حال آزمایش‌های مکرر نشان داد که در ابعاد بسیار بزرگ

۱) **آلبرت انیشتین** (۱۹۵۵-۱۸۷۹) یکی‌از بزرگترین دانشمندان تمام اعصار است. در زوریخ تحصیل کرد و در زوریخ، پراک، برلین و پرینستون درس داده. به‌خاطر تئوری‌های **نسبیت** معروف است که مفاهیم جدید علمی از زمان، فضا، ماده، حرکت و جاذبه را بیان می‌کند. جایزه نوبل را به خاطر اثر پدیده فتوالکتریک دریافت کرد. در زمان به‌کار آمدن هیتلر به آمریکا مهاجرت کرد، کشوری که اعتقاد داشت رژیم هیتلر باید با زور سرنگون شود. وی با مشارکت تلر و ویگز نامه‌ای به روزولت نوشت که پروسه ساختن بمب اتمی را یاری می‌کرد. انیشتین موسیقی کلاسیک را به خوبی دریافت و با ویولنی می‌نواخت. وی گرچه مذهب رسمی نداشت، اما دارای طبیعتی مذهبی بود. وی هرگز باور نکرد که جهان یک پدیده تصادفی است.

نظیر حرکت سیارات، حرکت اشیاء توسط مکانیک نیوتنی از دقت کافی برخوردار نیست. یکی از هدایای نظریات انیشتین بر جهان علم، توسعه مدل‌های بسیار دقیق ریاضی بود.

وی ابتدا نظریه نسبیت خاص را مطرح کرد که جاذبه را در برنداشت، سپس جاذبه را در نظریه نسبیت عام به‌کار برد. در اینجا ما مدل‌های ریاضی نسبیت خاص را با توصیف نظریه و اینکه چگونه از ریاضیات الهام گرفته‌اند توضیح می‌دهیم.

نزدیکترین ستاره به کره زمین به جز خورشید، آلفا (قنطروس آلفا) است که ۴ سال نوری با ما فاصله دارد. (یک سال نوری فاصله‌ای است که نور در مدت یکسال می‌پیماید، $۵/۸۸ \times ۱۰^{۱۲}$ مایل)، یک جفت دوقلو را در نظر بگیرید که در یک زمان متولد می‌شوند یکی از دوقلوها در زمین باقی می‌ماند و دیگری بلافاصله پس از تولد توسط موشکی به طرف آلفا با ۰/۸ سرعت نور پرتاب می‌شود و بلافاصله پس از رسیدن به آلفا با همان سرعت به طرف زمین برمی‌گردد. نظریه نسبیت خاص ادعا می‌کند دوقلویی که در کره زمین مانده است در این لحظه ۱۰ ساله شده است در حالی‌که دوقلویی که به آلفا رفته و بازگشته است بچه‌ای ۶ ساله می‌باشد. این پدیده را پدیده **دوقلوها** می‌نامند. به‌وضوح پدیده رشد را در دوقلوها بیان می‌کند، این که یکی ۱۰ ساله و دیگری ۶ ساله می‌ماند. پدیده مشابه می‌تواند برای هر دو نفر رخ دهد که یکی در زمین می‌ماند و دیگری به ستاره‌های دور سفر می‌کند و برمی‌گردد. این اعداد برحسب آنکه کجا و با چه سرعتی سفر می‌کند متفاوت است.

به‌عنوان مثال این پدیده برای فضانوردی که به کره ماه سفر می‌کند و بر می‌گردد به‌صورت کسری از زمان جوان‌تر از فردی که در زمین می‌ماند قابل محاسبه است. در ارتباط با نظریه نسبیت عددی برای تایید این پدیده که زمان ثبت شده در زمین با زمان ثبت شده با اشیاء متحرک نسبت به زمین، متفاوت است انجام یافته است. به یکی از این آزمایش‌ها که توسط پروفسور **J.C. Hafele** در دپارتمان فیزیک واشنگتن در ایالت **سن‌لویینر** و دکتر **Richard E.Keatin** در **U.S. Naval observatory** واشنگتن انجام یافته و در مجله **Journal Science, Vol177, 1972** چاپ گردیده است اشاره می‌کنیم. در اکتبر ۱۹۷۱ چهار ساعت اتمی دوبار در یک فضاپیمای جت آویخته شدند. تفارت اندکی بین زمان‌های ثبت شده این ساعت‌ها و ساعت‌هایی که در زمین قرار داشتند ملاحظه شد. این اختلاف با نظریه نسبیت کاملاً تطابق داشت. البته در آتیه‌ای نزدیک امکان ثبت این تفاوت برای مسافرت به آلفا امکان‌پذیر نیست، زیرا انژی لازم برای سفری با چنین سرعت برای موجودی زمینی امکان‌پذیر نیست. امکان تحقق این امر فقط از دیدگاه جامعه‌شناسی محتمل است. به‌عبارت نظری، فردی می‌تواند به سفری برود و در چنان سنی برگردد که بتواند با نوه خود همکلاس شود، هنگامی که از سفر برمی‌گردد!

اینک مدل ریاضی نظریه نسبیت را توضیح می‌دهیم.

نسبیت خاص دارای مدلی برای فضا-زمان و بنابراین شامل چهار مختصات: سه مختصات فضا (x_1، x_2 و x_3) و یک مختص زمان (x_4) است. از فضای برداری R^4 برای نمایش فضا-زمان استفاده می‌کنیم. ضرب‌های داخلی زیادی وجود دارند، که می‌توانیم در R^4 قرار دهیم و هر کدام به یک هندسه منجر می‌شوند. هیچ‌کدام از این ضرب‌های داخلی با نتایج آزمایش مورد نظر مطابقت ندارد. هرگاه چهارمین اصل موضوع ضرب داخلی را کنار بگذاریم، یک شبه ضرب داخلی به‌دست می‌آوریم و این ضرب داخلی با نتایج هندسه مورد نظر ما تطابق خواهد داشت. این هندسه مختص نسبیت خاص، **هندسه مینکوفسکی** نامیده می‌شود که توسط **هرمان مینکوفسکی**[1] برای اولین بار مطرح گردید و هندسه مینکوفسکی تبیین نسبیت خاص گردید.

فرض کنیم $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ دو عضو دلخواه R^4 باشند. تابع $< X, Y >$ ضرب داخلی این هندسه را تشکیل می‌دهد:

$$< X, Y > = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$$

البته $< X, Y >$ به واقع یک ضرب داخلی نیست و علامات منفی اصل چهارم ضرب داخلی را نقض می‌کند. (به تمرین‌های بعدی توجه کنید)

این شبه ضرب داخلی برای تعریف نرم بردارها و فاصله نقاط به شکل زیر به‌کار می‌رود. به‌کاربرد قدرمطلق در این تعریف توجه کنید. مجاز بودن این تعاریف کاملاً محض و بسیار ساده است. این تعاریف دقیقاً همان جبرهایی هستند که برای توصیف فضا-زمان نیازمند هستیم!

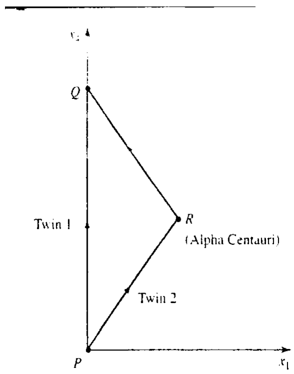
$$|X| = \sqrt{|< X, X >|}$$

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \|X - Y\| = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4)\| \\ &= \sqrt{|-(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2|} \end{aligned}$$

اینک ملاحظه می‌کنیم که چگونه این هندسه برای توصیف رفتار زمان برای سفر فضایی به ستاره آلفا به‌کار می‌رود. **دیاگرام فضا-زمان** را رسم می‌کنیم. برای سهولت، فرض می‌کنیم ستاره، آلفا در راستای محور x_1

۱) **هرمان مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹)** در کونینگزبورگ درس خواند و در بن، کونینگزبورگ، زوریخ و گوتینگن تدریس کرد. او به هندسه، نظریه اعداد و جبر علاقه‌مند بود. در اواخر عمر به نظریه نسبیت علاقه‌مند شد. نخستین کسی بود که تعبیر خاصی از اصول نسبیت به‌دست آورد که مفاهیم فضا-زمان را به‌طور مجزا به‌وسیله یک دستگاه چهار بعدی تبیین کرد. این تبیین کالبد، تحقیقات بعدی گردید و انیشتین نظریه نسبیت عام را در این قالب توسعه داد.

زمین قرار دارد. دوقلوی زمینی در مسیر زمان، محور x_4 حرکت می‌کند در حالی که دوقلوی فضایی هم در محور زمان و هم در راستای صعودی محور x حرکت می‌کند در مسیر حرکت از مبدأ و در راستای کاهش محور x حرکت می‌کند در مسیر حرکت به سوی مبدأ دیاگرام فضا_زمان در شکل ۸-۴ نشان داده شده است.مسیر دوقلوی ۱، مسیر PQ است و مسیر دوقلوی ۲ به سمت ستاره آلفا PR است و مسیر برگشت آن به زمین RQ است. هیچ حرکتی در محور x_2 یا x_3 وجود ندارد بنابراین این محورها را در دیاگرام حذف کرده‌ایم.



شکل ۸-۴

اینک به موقعیت‌ها از دیدگاه دوقلوها نگاه می‌کنیم.

دوقلوی ۱: فاصله ستاره آلفا و برگشت از آن ستاره= ۸ سال نوری با سرعت فضاپیما= ۰/۸ سرعت نور

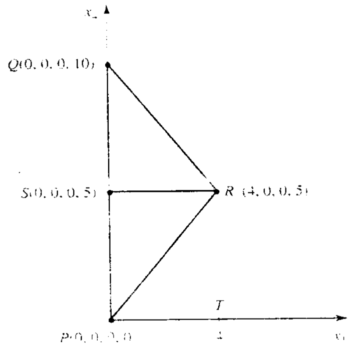
بنابراین

$$\text{سال } ۱۰ = \frac{۸}{۰/۸} = \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}} = \text{مسافت فضاپیما نسبت به زمین}$$

از دیدگاه هندسی این طول برابر با PQ که ۱۰ می‌باشد.

دوقلوی ۲: در دیاگرام فوق مختصات را دقیقاً بررسی می‌کنیم.

به شکل ۸-۵ نگاه کنید. فرض کنید P مبدأ $(۰, ۰, ۰, ۰)$ در R^4 باشد. چون $PQ = ۱۰$، Q نقطه $(۰, ۰, ۰, ۱۰)$ می‌باشد و S نقطه $(۰, ۰, ۰, ۵)$ می‌باشد.



شکل ۸-۵

PT فاصله فضایی ستاره آلفا از زمین است یعنی ۴ سال نوری. بنابراین R نقطه $(۴, ۰, ۰, ۵)$ است. اینک به کمک هندسه مینکوفسکی فاصله R و P را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} d(P,R) &= \|(۴, ۰, ۰, ۵) - (۰, ۰, ۰, ۰)\| \\ &= \sqrt{|-(۴-۵)^۲ - (۰-۰)^۲ - (۰-۰)^۲ + (۵-۰)^۲|} \\ &= \sqrt{|-۱۶+۲۵|} = \sqrt{۹} = ۳ \end{aligned}$$

به روش مشابه در این هندسه

$$d(R,Q) = ۳$$

محاسبات ریاضی در اینجا خاتمه یافته است. حال به جالب‌ترین قسمت یعنی ارتباط نتایج هندسی و موقعیت فیزیکی می‌پردازیم. عبارت زیر نتیجه منطقی نسبیت خاص است که مفاهیم هندسی فیزیکی زیر را در بردارد. فاصله بین دو نقطه از دیدگاه ناظری مانند دوقلوی ۲، در هندسه‌ی مینکوفسکی، متناظر است با زمان ثبت شده به‌وسیله‌ی ناظری که بین این دو نقطه سفر می‌کند.

بنابراین $d(R,P) = ۳$ ایجاب می‌کند دوقلوی ۲ در سفری از P به R، ۳ ساله باشد. به روش مشابه، $d(R,Q) = ۳$ ایجاب می‌کند دوقلوی ۲ در سفری از R به Q، ۳ ساله باشد، در سفر فضاپیما مجموع زمان برای دوقلوی ۲، ۶ سال است.

در نتیجه وقتی دوقلوها همدیگر را در نقطه Q ملاقات می‌کنند، دوقلوی ۱، ۱۰ساله و دوقلوی ۲، ۶ ساله است.

توجه داشته باشید که این مدل هندسه جدیدی را معرفی می‌کند که در آن خط مستقیم کوتاهترین فاصله بین دو نقطه نمی‌باشد. در شکل ۸-۵ فاصله خط مستقیم PQ از P به Q ۱۰ می‌باشد،

در حالی که فاصله $PR + RQ$ از P به Q، فاصله کوتاه‌تر ۶ است. بنابراین تعبیر فیزیکی مدل‌ها نه تنها مسحورکننده است، بلکه مرزهای جدیدی از تفکر هندسی را برمامی‌گشاید. این مثال انعطاف‌پذیری ریاضیات را در مسائل کاربردی نشان می‌دهد. هرگاه بدنه استاندارد ریاضیات (اصول موضوع ضرب داخلی در این مورد) با موقعیت خاصی سازگار نباشد، دوباره‌سازی اندکی ممکن است کارساز باشد. ریاضیدانان برای موقعیت‌های مورد نیاز ریاضیات را مدل‌سازی و توسعه می‌دهند.

ریاضیات یک علم خشک و مطلق همچنانکه غالباً فرض می‌شود، نمی‌باشد؛ بلکه حیطه‌ای است که منحصراً توسعه می‌یابد و در پیکره‌ای که در اینجا ارائه کردیم اعمال می‌گردد.

۸-۸-۱ تمرین

۱) $R^۲$ را با ضرب داخلی مثال ۱، در بخش قبل در نظر بگیرید.

$$<(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲)>= x_۱y_۱ + ۴x_۲y_۲$$

معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۱ را بیابید. این دایره را رسم کنید.

۲) $R^۲$ را با ضرب داخلی

$$<(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲)>= ۴x_۱y_۱ + ۹x_۲y_۲$$

الف) نرم بردارهای زیر را به‌دست آورید؟

$$(۱, ۰)(۰, ۱)(۱, ۱)(۲, ۳)$$

ب) ثابت کنید بردارهای $(۲, ۱)$ و $(-۹, ۸)$ متعامد هستند این بردارها را رسم کنید. نشان دهید این بردارها در فضای اقلیدسی متعامد نیستند.

ج) فاصله نقاط $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$ را در این فضا بیابید.

د) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضا بیابید. این دایره را رسم کنید.

۳) $R^۲$ را با ضرب داخلی

$$< x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲)>= x_۱y_۱ + ۱۶x_۲y_۲$$

در نظر می‌گیریم.

الف) نرم بردارهای $(۱,۰)$، $(۰,۱)$ و $(۱,۱)$ را در این فضا بیابید.

ب) نشان دهید بردارهای $(۱,۱)$ و $(-۱۶,۱)$ متعامدند.

ج) فاصله نقاط $(۵,۰)$ و $(۰,۴)$ را هم در این فضا و هم در فضای اقلیدسی بیابید.

د) فاصله نقاط $(۵,۰)$ و $(۰,۴)$ را هم در این فضا و هم درفضای اقلیدسی بیابید.

ه) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضا بیابید. این دایره را رسم کنید.

۴) ضرب داخلی‌ای را بیابید که باید در $R^۲$ جایگزین شود تا معادله‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱، $\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۲۵} = ۱$ گردد.

۵) ثابت کنید شبه ضرب داخلی هندسه مینکوفسکی اصل چهارم ضرب داخلی را نقض می‌کند (راهنمایی. عضو ناصفر X از $R^۴$ را چنان بیابید که $<X, Y> = ۰$).

۶) با استفاده از تعریف فاصله دو نقطه در فضای مینکوفسکی فاصله نقاط R و Q را در شکل ۸-۵ در ۳ بیابید.

۷) در هندسه مینکوفسکی فاصله نقاط $P(۰,۰,۰,۰)$ و $M(۱,۰,۰,۰)$ را بیابید. این مثال واقعیت جالب دیگری را در این هندسه آشکار می‌کند، اینکه نقاط غیرمنطبق می‌توانند فاصله صفر داشته باشند. نظریه نسبیت خاص تعبیری فیزیکی دارد که در آن خط PM دارای نقاطی است که همگی با هم فاصله صفر دارند؛ این خط مسیر یک **فوتون** یا **یک ذره نوری** است.

۸) ثابت کنید بردارهای $(۱,۰,۰,۲)$ و $(۲,۰,۰,۱)$ در هندسه مینکوفسکی متعامدند. این بردارها را رسم کرده و ملاحظه کنید که نسبت به بردار ۴۵° $(۱,۰,۰,۱)$ متقارنند. هر زوجی از بردارها که نسبت به بردار $(۱,۰,۰,۱)$ این چنین متقارن باشند، در هندسه مینکوفسکی متعامدند. این نتیجه را با نشان دادن تعامد بردارهای $(a,۰,۰,b)$ و $(b,۰,۰,a)$ اثبات کنید.

۹) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع‌های ۱، ۲ و ۳ در صفحه $x_۱x_۳$ را در فضای مینکوفسکی به‌دست آورید. این دوایر را رسم کنید.

۱۰) ستاره سیروس ۸ سال نوری از زمین فاصله دارد. بعد از خورشید ستاره سیروس نزدیکترین ستاره به زمین است که از قسمت‌های شمالی امریکا با چشم غیرمسلح قابل رویت است این ستاره پرنورترین ستاره قابل رویت است، نور خورشید در مدت ۸ دقیقه به زمین می‌رسد، در حالی که از ستاره سیروس در مدت ۸ سال نور به ما می‌رسد. فرض کنید یک فضاپیما که ستاره سیروس را ترک کرده

است، پس از ۲ سال به زمین برسد. زمان سفر برای فردی که در فضاپیما قرار دارد چقدر طول می‌کشد؟ سرعت فضاپیما چقدر خواهد بود.

۱۱) یک فضاپیما سفری رفت و برگشتی به ستاره درخشان کاپلا انجام می‌دهد که ۴۵ سال نوری از زمین فاصله دارد. اگر مدت سفر نسبت به زمین ۱۲۰ سال باشد، مدت زمان سفر از دیدگاه فضانورد داخل فضاپیما چقدر خواهد بود.

۱۲) ستاره خوشه‌پروین در صورت فلکی گاوگرودن، ۱۴۰ سال نوری از زمین فاصله دارد. فضانوردی که در مسافت دو طرفه به ستاره خوشه‌پروین پس از برگشت ۴۰ساله خواهد بود، از دیدگاهی زمینی این سفر چند قرن طول خواهد کشید؟

۱۳) ستاره خوشه Praesepe در صورت فلکی سرطان ۵۱۵ سال نوری از زمین فاصله دارد. فضانوردی مسافرتی رفت و برگشتی از زمین به ستاره خوشه Praesepe با سرعت معادل ۰٫۹۹۹۹۹ سرعت نور انجام می‌دهد. مدت سفر از دیدگاه فضانورد و از دیدگاه ناظر زمینی چقدر است؟

۸-۹ تقریب توابع و تئوری کدنگاری

مسائل متعددی در غلوم فیزیک و مهندسی با تقریب توابع به‌وسیله چندجمله‌اها یا توابع مثلثاتی درگیر است. به‌عنوان مثال شاید ضروری باشد $f(x) = e^x$ را به‌وسیله تابع خطی به شکل $g(x) = a + bx$ روی بازه $[0, 1]$ یا تابع مثلثاتی به شکل $h(x) = a + b\sin(x) + c\cos(x)$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ تقریب کنیم. به‌علاوه مسأله تقریب توابع به‌وسیله چندجمله‌ای‌ها یک مسأله کلیدی برای توسعه نرم‌افزاری در علوم کامپیوتر است، زیرا کامپیوترها ذاتاً برای کار با چندجمله‌ای‌ها طراحی شده‌اندو نه بیشتر.

اینک روش‌های تقریب توابع را معرفی می‌کنیم.

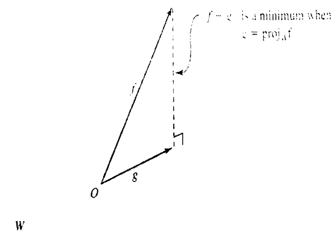
فرض کنیم $c[a, b]$ فضای ضرب داخلی توابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ با ضرب داخلی $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$ و هندسه تعریف شده به کمک این ضرب داخلی باشد، فرض کنید W زیرفضای $c[a, b]$ باشد. همچنین f در $c[a, b]$ و خارج W باشد. می‌خواهیم بهترین تقریب f را در W به‌دست آوریم. بهترین تقریب، تابع g در w است به‌طوری‌که فاصله $||f - g||$ بین f و g مینیمم باشد.

تعریف. فرض کنید $c[a,b]$ فضای برداری توابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد. f را عضو $c[a,b]$ و W را زیرفضای $c[a,b]$ در نظر بگیرید. تابع g در W به‌طوری‌که $\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx$ مینیمم گردد، تقریب کمترین مربعات f نامیده می‌شود.

این تقریب، تقریب کمترین مربعات نامیده می‌شود. زیرا فرمول فاصله براساس مربع فواصل تعریف شده است.

اینک روش پیدا کردن تقریب کمترین مربعات یعنی $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم. اینک می‌توانیم به عقب برگردیم و از فرایند توسعه ساختارهای هندسی و نتایج بیشتر بهره ببریم! قبلاً چنین موقعیتی را در R^n داشتیم. بنا به تجارب بخش ۵-۷، هرگاه W زیرفضای از R^n باشد و x نقطه‌ای در R^n باشد، نزدیک‌ترین عضو w به x x $\mathrm{proj}_w x$ است. این نتیجه گرچه در یک فضای هندسی اخذ شده است، با این حال در فضای توابع نیز به کمک ضرب داخلی قابل توسعه است.

بسیار مفید است هرگاه توابع را به‌عنوان بردارهای هندسی تصویر کنیم. به شکل ۸-۶ نگاه کنید.



شکل ۸-۶: تقریب کمترین مربعات f در زیرفضای W عبارت است از $g=\mathrm{proj}_w f$

اینک مجدداً می‌توانیم نتایج هندسی را برای محاسبه $\mathrm{proj}_w f$ به‌کار بریم. فرض کنید $(g_1,\dots,g_n)$ یک پایه متعامد یکانی برای W باشد. بنا به نتایج بخش ۷-۵

$$\mathrm{proj}_w f =< f,g > g_1 + \cdots + < f,g > g_n$$

مثال ۱: تقریب کمترین مربعات خطی تابع $f(x)=e^x$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ به‌دست آورید.

حل: فرض کنیم $g(x)=a+bx$ تقریب خطی باشد، همچنین f عضوی از $c[-1,1]$ و g عضوی از زیرفضای $P_1[-1,1]$ باشد، یعنی چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی یک روی $[-1,1]$. مجموعه

$[1, x]$ پایه‌ای برای $P_1[-1, 1]$ است. داریم:

$$< 1, x >= \int_{-1}^{1} (1 \cdot x) dx = 0$$

بنابراین توابع متعامدند. طول این بردارها

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} (1 \cdot 1) dx = 2 \quad , \quad \|x\|^2 = \int_{-1}^{1} (x \cdot x) dx = \frac{2}{3}$$

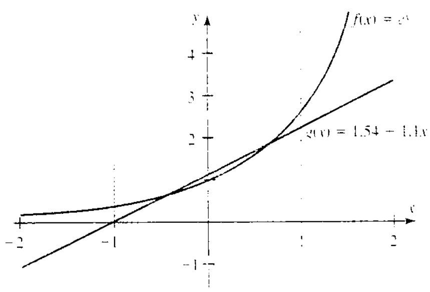
بنابراین مجموعه $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x\}$ یک پایه متعامد یکانی برای $P_1[-1, 1]$ است. حال داریم

$$\begin{aligned} \text{proj}_w f &=< f, g > g_1 + < f, g_2 > g_2 \\ &= \int_{-1}^{1} (e^x \sqrt{\frac{1}{2}}) dx \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{-1}^{1} (e^x \sqrt{\frac{3}{2}} x) dx \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &= \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1} x \end{aligned}$$

یعنی تقریب کمترین مربعات تابع $f(x) = e^x$ در بازه $[-1, 1]$ عبارت است از:

$$g(x) = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) + 3e^{-1}x + 3e^{-1}x$$

و این مقدار $g(x) = 1/54 + 1/1x$ را تا دو رقم اعشاری به‌دست می‌دهد. به شکل ۸-۷ نگاه کنید



شکل ۸-۷

در مثال اخیر تقریب خطی f را در $P_1[-1, 1]$ به‌دست آوردیم. تقریب‌های از درجات بالاتر چندجمله‌ای‌ها را می‌توان در فضای $P_n[-1, 1]$ با چندجمله‌هایی از درجه کوچکتر یا مساوی n به‌دست آورد. برای به‌دست آوردن چنین تقریبی می‌بایست یک پایه متعامد در $P_n[-1, 1]$ به کمک متعامدسازی گرام‌اشمیت ساخته شود. توابع متعامدی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند **چندجمله‌ای‌های لژاندر** نامیده می‌شوند.

نخستیم شش چندجمله‌ای لژاندر عبارتند از:

$$۱\ ,\ x\ ,\ x^{۲}-\frac{۱}{۳}\ ,\ x^{۳}-\frac{۳}{۵}x\ ,\ x^{۴}+\frac{۶}{۷}x^{۲}+\frac{۳}{۳۵}\ ,\ x^{۵}-\frac{۱۰}{۹}x^{۳}+\frac{۵}{۲۱}x$$

اینک به تقریب توابع به کمک توابع مثلثاتی می‌پردازیم. چنین تقریبی به‌طور گسترده در هدایت حرارتی، الکترومغناطیس، جریان‌های الکتریکی و ارتعاش‌های مکانیکی به‌کار می‌رود. اولین قدم در این زمینه توسط ریاضیدانان فرانسوی Jean Baptiste Fourier[۱] برداشته شد که روش‌هایی را برای آنالیز هدایت در یک بار ایزوله شده توسعه داد. تقریب‌ها غالباً برای حل معادلات با مشتقات جزئی به‌کار می‌رود که موقعیت‌های فیزیکی این پدیده‌ها را توصیف می‌کنند.

۱۰-۸ تقریب‌های فوریه

فرض کنید f یک تابع در $c[-\pi,\pi]$ با ضرب داخلی $<f,g>=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ و هندسه متناظر این ضرب داخلی باشد. اجازه دهید تقریب کمترین مربعات f را در فضای $T[-\pi,\pi]$، متشکل از چندجمله‌ای‌های مثلثاتی تولید شده به‌وسیله مجموعه

$$[۱, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx]$$

که در آن n یک عد صحیح مثبت است، به‌دست آوریم. می‌توان نشان داد بردارهای ۱، $\cos x$، $\sin x$، ...، $\cos nx$ و $\sin nx$ دوبه‌دو در این فضا متعامدند. (به تمرین‌های بعدی نگاه کنید) طول این بردارها

$$\|۱\|^{۲} = \int_{\pi}^{\pi} (۱\cdot ۱)dx = ۲\pi$$

$$\|\cos nx\|^{۲} = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx\cdot \cos nx)dx - \pi$$

$$\|\sin nx\|^{۲} = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx\cdot \sin nx)dx = \pi$$

بنابراین مجموعه‌های‌زیر یک پایه متعامد یکانی برای $T[-\pi,\pi]$ تشکیل می‌دهند.

$$\{g_{۰},\dots,g_{۲n}\} = \{\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}$$

۱) Jean Baptiste Fourier (۱۷۶۸-۱۸۳۰) درکودکی والدین خود را از دست داد. در یک مدرسه نظامی ثبت نام کرد. که اشتیاق وی را برای ریاضیات برانگیخت. در انقلاب فرانسه به‌خاطر دفاع از قربانیان ترور به زندان افتاد. سپس یک پست دیپلماتیک در زمان ناپلون در مصر و فرانسه گرفت که او را یک بارون و یک کنت کرد. فوریه به خاطر توسعه روش‌های ریاضی که در توصیف انتشار حرارت به‌کار برده است مشهور گردید.

از این پایه متعامد یکانی در فرمول زیر برای پیدا کردن تقریب کمترین مربعات g برای f استفاده می‌کنیم

$$g(x) = \mathrm{proj}_T\, f = < f, g_۰ > g_۰ + \cdots + < f, g_{۲n} > g_{۲n}$$

داریم

$$\begin{aligned} g(x) = \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} + \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos x \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos x + \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin x \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin x \\ + \cdots + \left\langle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos nx + \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin nx \end{aligned}$$

نمادهای زیر را برای ساده نگاری تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} a_۰ &= \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) . \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \right) dx \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \\ &= \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos ks \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) . \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right) dx \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \left\langle f, \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\rangle \frac{۱}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) . \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) dx \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx \end{aligned}$$

تعریف. تقریب مثلثاتی تابع $f(x)$ به‌صورت

$$g(x) = a_۰ + \sum_{k=۱}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

نوشته می‌شود، که $g(x)$ را **تقریب فوریه مرتبه** nام $f(x)$ می‌نامند. ضرایب $a_۰$، $a_۱$، $b_۱$، $\ldots$ ، a_n و b_n ضرایب فوریه نامیده می‌شوند. با افزایش n، به‌طور صعودی تقریب بهتر می‌شود و به این ترتیب $\|f - g\|$ کوچکتر می‌شود. مجموع نامتناهی

$$g(x) = a_۰ \sum_{k=۱}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

سری فوریه f درباره $(-\pi, \pi)$ نامیده می‌شود.

مثال ۲: تقریب فوریه مرتبه چهارم تابع $f(x) = e^x$ را در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ به‌دست آورید.

حل: با به‌کارگیری ضرایب فوریه برای تابع $f(x) = x$ و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\cos kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x.\cos kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\sin kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x.\cos kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

تقریب فوریه f عبارت است از:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

و با قرار دادن $k = 1, \ldots, 4$ تقریب مرتبه چهارم را به‌دست می‌آوریم.

$$g(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x)$$

تا به حال در این کتاب به فضاهای برداری حقیقی پرداخته‌ایم که در آن اسکالرها اعداد حقیقی بودند.

گاهی نیز به فضاهای برداری مختلط اشاره کردیم که اسکالرها اعداد مختلط بودند. پرواضح است که این بحث خالی از لطف خواهد بود اگر به فضاهای برداری اشاره نکنیم که در آن اسکالرها نه اعداد حقیقی و نه اعداد مختلط هستند. به‌علاوه این مثال از این نظر جالب خواهد بود که تنها تعداد متناهی بردار در این فضا وجود دارد.

۸-۱۱ نظریه کدنگاری

پیام‌ها به‌صورت الکترونیکی به شکل دنباله‌ای از صفرها و یک‌ها فرستاده می‌شود. اشتباهات در ارسال پیام در صورت تداخل و اعوجاج می‌تواند رخ دهد. مثلاً پیام $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ می‌تواند به‌صورت

$(1,0,1,0,1,1,1)$ دریافت شود که یک اشتباه در درایه پنجم رخ داده است. می‌خواهیم روش‌هایی را بررسی کنیم که چنین اشتباهاتی را اصلاح کند.

اسکالرهای یک میدان برداری می‌تواند مجموعه‌ای به جزء اعداد صحیح و مختلط باشد. کافی است این اسکالرها یک **میدان جبری** بسازد. یک میدان مجموعه‌ای از اشیاء است که دارای دو عمل می‌باشد که در اصولی خاص صدق کند. دانشجویانی که در جبر مدرن درسی گذارنده باشند با مفهوم میدان آشنا هستند. در این مثال میدان $\{0,1\}$ را متشکل از دو عضو با اعمال جمع و ضرب زیر به‌کار می‌بریم:

$$0+0=0 \qquad 0+1=1 \qquad 1+0=1 \qquad 1+1=0$$

$$0\cdot 0=0 \qquad 0\cdot 1=0 \qquad 1\cdot 0=0 \qquad 1\cdot 1=1$$

V_7 را فضای برداری ۷ـتایی‌های متشکل از ۰ و ۱ روی این میدان از اسکالرها در نظر می‌گیریم، که جمع و ضرب اسکالر به روش معمولی مؤلفه‌وار تعریف شده باشد. مثلاً

$$\begin{aligned}(1,0,0,1,1,0,1)+(0,1,1,1,0,0,1)&=(1+0,0+1,0+1,1+1,1+0,0+0,1+1)\\&=(1,1,1,0,1,0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0(1,0,0,1,1,0,1)&=(0\cdot 1,0\cdot 0,0\cdot 0,0\cdot 1,0\cdot 1,0\cdot 0,0\cdot 1)\\&=(0,0,0,0,0,0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1(1,0,0,1,1,0,1)&=(1\cdot 1,1\cdot 0,1\cdot 0,1\cdot 1,1\cdot 1,0\cdot 1,1\cdot 1)\\&=(1,0,0,1,1,0,1)\end{aligned}$$

از آنجایی که هر بردار در V_7 دارای هفت مؤلفه است، و هر یک از این مؤلفه‌ها ۰ و ۱ است، 2^7 بردار در این فضا وجود دارد. زیرفضای برداری چهار بعدی V_7 دارای پایه

$$\{(1,0,0,0,0,1,1),(0,1,0,0,1,0,1),(0,0,1,0,1,1,0),(0,0,0,1,1,1,1)\}$$

می‌باشد که **کدهامینگ** نامیده می‌شود و با $C_{7,4}$ نشان داده می‌شود. بردارهای $C_{7,4}$ به‌عنوان یک پیام به‌کار می‌روند. هر بردار در $C_{7,4}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v_1=a_1(1,0,0,0,0,1,1)+a_2(0,1,0,0,1,0,1)$$

$$+ a_3(0,0,1,0,1,1,0) + a_4(0,0,0,1,1,1,1)$$

از آنجایی که هر یک از چهار اسکالر a_1، a_2، a_3 و a_4 می‌تواند یکی از مقادیر ۰ یا ۱ باشد، $2^4 - 16$ بردار در $C_{7,4}$ داریم. **کدهامینگ** برای ارسال ۱۶ کد متفاوت v_1، . . . و v_{16} می‌تواند به‌کار رود. از شما در تمرین‌های بعدی خواسته شده است، این بردارها را بنویسید.

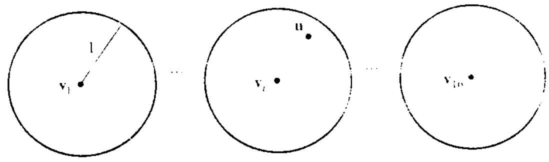
هنگامی که در یکی‌از مکان‌های پیام‌های ارسالی اشتباهی رخ دهد، برداری نادرست در V_7 و در خارج زیرفضای $C_{7,4}$ خواهد بود. می‌توان ثابت کرد دقیقاً یک بردار در $C_{7,4}$ وجود دارد که با این بردار نادرست در یک مکان تفاوت دارد. بنابراین این اشتباه قابل تشخیص و اصلاح است. مثلاً فرض کنیم بردار دریافت شده $(1,0,1,1,1,0,1)$ باشد. این بردار نمی‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه فوق نوشته شود، و در $C_{7,4}$ قرار ندارد. تنها یک بردار در $C_{7,4}$ قرار دارد که با این بردار در یک درایه متفاوت است و این بردار $(1,0,1,0,1,0,1)$ است. پیام صحیح در واقع $(1,0,1,0,1,0,1)$ است.

کدهامینگ، **کد اصلاح‌کننده خطا** نامیده می‌شود، زیرا معین‌کننده خطا و اصلاح‌کننده خطا است. اینک هندسه پایه این کد را بررسی می‌کنیم. فاصله بین دو بردار u و v از V_7 که با $d(u,v)$ نشان داده می‌شود، تعداد مؤلفه‌های متفاوت u و v تعریف می‌شود. مثلاً

$$d((1,0,0,1,0,1,1),(1,1,0,0,1,1,1)) = 3$$

زیرا مؤلفه‌های دوم، چهارم و پنجم این بردارها متفاوتند. کره‌ای به شعاع ۱ در حومه برداری در V_7، شامل تمام بردارهایی است که در یک مؤلفه از این بردار قرار دارند. می‌توان نشان داد که کره‌هایی به شعاع ۱ و به مرکز بردارهای $C_{7,4}$، متمایز و مجزا بوده و هر عضو V_7 در یکی از این کره‌ها قرار دارد.

به شکل ۸-۸ نگاه کنید. بنابراین اگر برداری مانند u دریافت شود و از $C_{7,4}$ نباشد، در یک کره منفرد به مرکز v_i، که همان پیام صحیح است، قرار دارد. عملاً مدارهای الکتریکی موسوم به گیت برای کنترل اینکه پیام دریافتی در $C_{7,4}$ قرار دارد به‌کار می‌رود و در صورتی که در $C_{7,4}$ نباشد، برای معین کردن مرکز این کره و دریافت پیام صحیح به‌کار می‌روند.



شکل ۸ـ۸: کد هامینگ $\{v_۱,\dots,v_{۱۶}\}$، پیام نادرست u و پیام صحیح v

کدهای اصلاح‌کننده خطای دیگر نیز وجود دارند. **کد گولای** مثالی دیگر از زیرفضای ۱۲ـبعدی $V_{۲۳}$ می‌باشد که با $C_{۲۳,۱۲}$ نشان داده می‌شود. فضای کد دارای $۲^{۱۲}$ عضو، برای معرفی ۴۰۹۶ پیام می‌باشد. این کد می‌تواند خطاهایی را آشکار و اصلاح کند که در یک، دو و یا سه مکان قرار دارند.

می‌توان نشان داد که کره‌های به شعاع ۳، به مرکز بردارهای $C_{۲۳,۱۲}$، مجزا بوده و هر عضو $V_{۲۳}$ در یکی‌از این کره‌ها قرار دارند. هرگاه پیام دریافتی u، دارای خطایی در یک، دو یا سه مکان باشد، درکره‌ای به مرکز v_i بوده و v_i می‌تواند باز پس گرفته شود.

برای مطالعه بیشتر به مرجع [۱] مراجعه کنید.

۸-۱۱-۱ تمرین

تقریب کمترین مربعات در تمرین‌های ۱-۴ تقریب کمترین مربعات خطی $g(x) = ۰ + bx$ را برای تابع‌های زیر در بازه داده شده بیابید.

۱) $f(x) = x^۲$ روی $[-۱,۱]$

۲) $f(x) = e^x$ روی $[۰,۱]$

۳) $f(x) = \sqrt{x}$ روی $[۰,۱]$

۴) $f(x) = \cos x$ روی $[۰,\pi]$

در تمرین‌های ۵-۸ تقریب کمترین مربعات درجه ۲، $g(x) = a + bx + cx^۲$، برای توابع داده شده در بازه‌های داده شده را بیابید.

۵) $f(x) = e^x$ روی الف) $[-۱,۱]$ و ب) $[۰,۱]$

۶) $f(x) = \sqrt{x}$ روی $[۰,۱]$

۷) $f(x) = x^۲$ روی $[۰,۱]$

۸) $f(x) = \sin x$ روی $[۰,\pi]$

در تمرین‌های ۹-۱۱ تقریب فوریه مرتبه چهارم توابع داده شده روی بازه‌های داده شده را بیابید.

۹) $f(x) = x$ روی $[۰,۲\pi]$

۱۰) $f(x) = ۱ + x$ روی $[-\pi,\pi]$

۱۱) $f(x) = x^{۲}$ روی $[۰, ۲\pi]$

۱۲) نشان دهید بردارهای ۱، $\cos x$، $\sin x$، ... ، $\cos nx$ و $\sin nx$ در فضای $c[-\pi, \pi]$ دوبه‌دو متعامدند.

۱۳) کلیه بردارهای کد هامینگ $C_{۷,۴}$ را بنویسید.

۱۴) کلیه بردارهای $V_{۷}$ را که در کره‌های به شعاع ۱ و مرکز زیر قرار دارند، بنویسید.

الف) $(۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ۰)$

ب) $(۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰, ۱)$

ج) $(۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$

د) $(۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰)$

۱۵) پیام‌های زیر با به‌کارگیری کد هامینگ دریافت شده است. پیام‌های صحیح را در هر مورد بیابید.

الف) $(۰, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰)$

ب) $(۰, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۱)$

ج) $(۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ۰)$

د) $(۱, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۰)$

۱۶) در فضای برداری $V_{۲۳}$ و زیرفضای **کد گولیا** $C_{۲۳,۱۲}$ ، ثابت کنید:

الف) $۲^{۲۳}$ بردار در $V_{۲۳}$ قرار دارد.

ب) ۴۰۹۶ بردار در $C_{۲۳,۱۲}$ قرار دارد.

ج) ۲۰۴۸ بردار در هر کره به شعاع ۳ و مرکز برداری از $C_{۲۳,۱۲}$ قرار دارد (به‌ازای هر عضو $V_{۲۳}$ یک کره وجود دارد). چند بردار به فاصله ۱، ۲ و ۳ در هر کره به شعاع ۳ وجود دارد؟

۸-۱۲ منحنی کمترین مربعات

این بخش احتمالاً جذاب‌ترین قسمت این کتاب است! ریاضیات را به بهترین نحو تصویر می‌کند. اخیراً نتایج نظری به زیباترین شکل به ابزاری قوی برای محاسبات منجر گردیده‌اند. در این قسمت روش یافتن

یک چندجمله‌ای که نقاط داده شده را به بهترین نحو برازنده کند، را ارائه می‌دهیم، روشی که به‌طور عمیق در علوم طبیعی، علوم اجتماعی و مهندسی به‌کار می‌رود.

قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که دستگاه nـمعادلات n متغیره $AX = Y$، که A یک ماتریس نامنفرد است، دارای جواب متحصر به‌فرد $X = A^{-1}Y$ است. با این حال اگر $AX = Y$ دستگاه nـمعادلات mمتغیره باشد که $n > m$، در حالت کلی این دستگاه جواب ندارد و این دستگاه را **فوق معین** می‌نامند. A برای چنین دستگاهی ماتریس مربع نیست و A^{-1} موجود نیست. بزودی ماتریسی موسوم به شبه معکوس برای A که با $\operatorname{pinv}(A)$ نشان داده می‌شود را معرفی می‌کنیم؛ این ماتریس برای **کمترین مربعات حل** $X = \operatorname{pinv}(Y)$ دستگاه فوق معین به‌کار می‌رود.

البته این یک حل واقعی نیست، اما از دیدگاهی نزدیک‌ترین حل برای این دستگاه است.

کاربردی از دستگاه‌های فوق معین را برای یافتن خم‌هایی که بهترین برازندگی را برای داده‌ها به‌دست می‌دهند نشان می‌دهیم.

تعریف. فرض کنید A یک ماتریس باشد. ماتریس $(A^tA)^{-1}\,A^t$، شبه معکوس A نامیده می‌شود و با نماد $\operatorname{pinv}(A)$ نشان داده می‌شود.

قبلاً دیدیم که تمامی ماتریس‌ها معکوس ندارند. مشابهاً تمام ماتریس‌ها لزوماً شبه معکوس ندارند. ماتریس A دارای شبه معکوس است هرگاه $(A^tA)^{-1}$ موجود باشد.

مثال ۱: شبه معکس ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: مرحله به مرحله شبه معکوس ماتریس A را حساب می‌کنیم

$$A^tA = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۷ \\ ۷ & ۲۹ \end{bmatrix}$$

$$(A^tA)^{-۱} = \frac{۱}{|A^tA|}\operatorname{adj}(A^tA) = \frac{۱}{۱۲۵}\begin{bmatrix} ۲۹ & -۷ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{pinv}(A) = (A^tA)^{-۱}A^t = \frac{۱}{۱۲۵}\begin{bmatrix} ۲۹ & -۷ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱۰ & ۶ \\ ۱ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

اینک از مفهوم شبه معکوس در دستگاه معادلات خطی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $AX = Y$ دستگاهی از nـمعادله‌ی خطی از m متغیر با $n > m$ باشد، که از رتبه m است. طرفین تساوی را در A^t ضرب می‌کنیم و داریم

$$A^t Ax = A^t y$$

ماتریس $A^t A$ برای این دستگاه معکوس‌پذیر بوده و با ضرب طرفین تساوی در $(A^t A)^{-۱}$ داریم:

$$\begin{aligned} x &= [(A^t A)^{-۱} A^t] y \\ &= \mathrm{pinv}(A) y \end{aligned}$$

مقدار به‌دست آمده x، حل کمترین مربعات دستگاه معادلات نامیده می‌شود.

$$\underset{\text{دستگاه}}{Ax = y} \qquad\qquad \underset{\text{دستگاه کمترین مربعات}}{x = \mathrm{pinv}(A) y}$$

فرض کنیم $Ax = y$ دستگاه nـمعادله m متغیره با $m < n$ باشد که A از رتبه m است. این دستگاه دارای جواب کمترین مربعات می‌باشد. اگر دستگاه دارای جواب منحصر به‌فردی باشد، جواب کمترین مربعات جواب منحصر به‌فرد است. اگر دستگاه فوق معین باشد، جواب کمترین مربعات نزدیکترین جواب به حل حقیقی است. دستگاه نمی‌تواند جواب‌های متفاوتی داشته باشد.

مثال ۲: حل کمترین مربعات دستگاه فوق معین زیر را به‌دست آورید. جواب را کنترل کنید.

$$\begin{aligned} x + \ y &= ۶ \\ -x + \ y &= ۳ \\ ۲x + ۳y &= ۹ \end{aligned}$$

حل: ماتریس ضرایب عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad , \qquad y = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

بردارهای ستونی A مستقل خطی‌اند. بنابراین رتبه این ماتریس ۲ است. این دستگاه دارای جواب کمترین مربعات است. $\mathrm{pinv}(A)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^tA=\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\\۱&۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\\۲&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۶\\۶&۱۱\end{bmatrix}$$

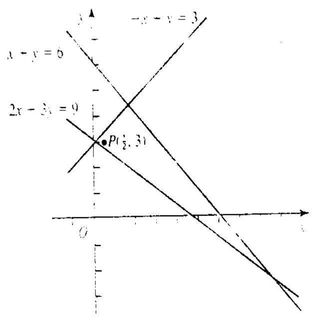
$$(A^tA)^{-۱}=\frac{۱}{|A^tA|}\mathrm{adj}(A^tA)=\frac{۱}{۳۰}\begin{bmatrix}۶&۶\\۶&۱۱\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{pinv}(A)=(A^tA)^{-۱}A^t=\frac{۱}{۳۰}\begin{bmatrix}۱۱&-۶\\-۶&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\\۱&۱&۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۳۰}\begin{bmatrix}۵&-۱۷&۴\\۰&۱۲&۶\end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$\mathrm{pinv}(A)y=\frac{۱}{۳۰}\begin{bmatrix}۵&-۱۷&۴\\۰&۱۲&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\۳\\۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\۳\end{bmatrix}$$

حل کمترین مربعات، نقطه $p(\frac{۱}{۲},۳)$ است که در شکل ۸-۹ نشان داده شده است.

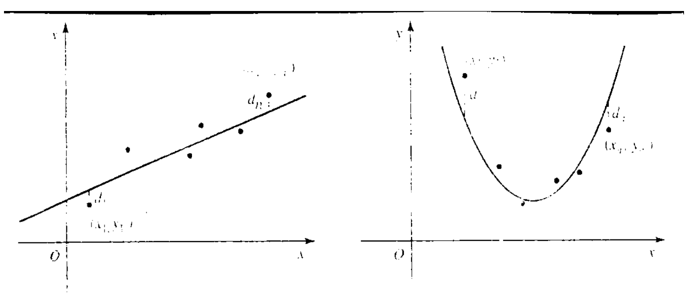


شکل ۸-۹

اکنون به بحث می‌پردازیم که جواب کمترین مربعات را چگونه می‌توان برای پیدا کردن منحنی‌هایی اعمال کرد که برای داده‌هایی دلخواه برازنده‌اند.

۸-۱۳ منحنی‌های کمترین مربعات

شاخه‌های بسیاری از علوم و تجارت از معادلاتی استفاده می‌کنند. که براساس اطلاعات نتایج عملی حاصل شده است. در بخش ۱-۳ مسأله یافتن چندجمله‌ای منحصر به‌فرد درجه ۲ای که از سه نقطه داده شده می‌گذرد را بررسی کردیم. درکاربردهای زیادی اطلاعات بیشتری وجود دارد که به معادله‌ای‌که تمام داده‌ها را برازش می‌کند به‌کار می‌رود. می‌توان معادله‌ای از خط یا منحنی به‌کار برد که از دیدگاهی بهترین برازش برای داده‌های دلخواه باشد. مثلاً فرض کنید داده‌ها نقاط (x_1, y_1)، ... و $(x_n y_n)$ باشند، که در شکل ۸-۱۰ (الف) نشان داده شده است. به‌طور تقریبی این نقاط در یک خط قرار دارند. می‌خواهیم معادله‌ی خطی را که این نقاط را که به بهترین وجه برازش کند بیابیم. از طرفی این نقاط به یک سهمی نزدیک هستند، همان‌طورکه در شکل ۸-۱۰ (ب) دیده می‌شود. می‌خواهیم نزدیکترین سهمی به این نقاط را بیابیم. شیوه‌های متفاوتی برای بهترین برازش در چنین مواردی وجود دارد. معمول‌ترین آنها که در علم آمار به‌کار می‌رود **منحنی یا خط کمترین مربعات** نامیده می‌شود که با حل دستگاه معادلات فوق معین به‌دست می‌آید. خط و منحنی کمترین مربعات چنان است که $d_1^2 + \cdots + d_n^2$ در شکل ۸-۱۰، مینیمم گردد. در بخش قبل تقریب کمترین مربعات توابع را بحث کردیم. این مبحث تحلیل گسسته چنین مسأله‌ای است. در مورد توابع، بایستی منحنی خاص را بیابیم که بهترین برازش دسته پیوسته از نقاط داده شده در بازه دلخواهی باشد (گراف یک تابع)، در اینجا می‌خواهیم بهترین برازش برای رده گسسته از نقاط داده شده روی بازه‌ای را به‌دست آوریم. گرچه شیوه‌های به‌کار رفته برای رسیدن به نتایج متفاوت است، با این حال بهتر است به مشابهت‌های خاص بین این موقعیت توجه کنیم. در هر دو موقعیت بهترین نتیجه با مینیمم کردن مربع‌های خاص به‌دست می‌آید و در نتیجه از واژه «کمترین مربعات» استفاده می‌کنیم.



شکل ۸-۱۰: مینیمم خط یا منحنی کمترین مربعات $d_1^2 + \cdots + d_n^2$

اینک نحوه برازش چندجمله‌ای کمترین مربعات داده‌های دلخواهی را بیان می‌کنیم. این شیوه متضمن ساختن دستگاهی از معادلات خطی است. جواب کمترین مربعات این دستگاه معادلات ضرایب چندجمله‌ای را به‌دست می‌دهد. پس از حصول نتایج این روش را تصدیق خواهیم کرد.

مثال ۳: خط کمترین مربعات داده‌های زیر را بیابید.

$$(۱,۱),(۲,۴),(۳,۲),(۴,۴)$$

حل: فرض کنیم معادله خط به‌صورت $y = a + bx$ باشد. با قرار دادن این نقاط در معادله خط، دستگاه فوق معین زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a + b &= ۱ \\ a + ۲b &= ۴ \\ a + ۳b &= ۲ \\ a + ۴b &= ۴ \end{aligned}$$

جواب کمترین مربعات را به‌دست می‌آوریم. ماتریس ضرایب A و بردار ستونی y به شکل زیر است

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \qquad , \qquad y = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\mathrm{pinv}(A) = (A^t A)^{-۱} = \frac{۱}{۲۰} \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۰ & ۰ & -۱۰ \\ -۶ & -۲ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

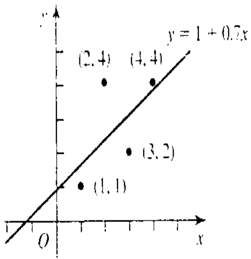
$$[(A^t A)^{-۱} A^t] y = \frac{۱}{۲۰} \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۰ & ۰ & -۱۰ \\ -۶ & -۲ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

بنابراین $a = ۱$ و $b = ۷$.

معادله‌ی خط کمترین مربعات این داده‌ها عبارت است از:

$$y = ۱ + ۷x$$

این خطی است که بهترین برازش این نقاط است. به شکل ۸-۱۱ نگاه کنید.



شکل ۸-۱۱

مثال ۴: سهمی کمترین مربعات داده‌های زیر را بیابید.

$$(۱,۷),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۳)$$

حل: فرض کنیم معادله سهمی $y = a + bx + cx^{۲}$ باشد با قرار دادن نقاط داده شده در این معادله داریم:

$$a+\ \ b+\ \ c=۷$$

$$a+۲b+۴c=۲$$

$$a+۳b+۹c=۱$$

$$a+۴b+۱۶c=۳$$

جواب کمترین مربعات را به‌دست می‌آوریم. ماتریس ضرایب A و بردار ستونی y عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۹ \\ ۱ & ۴ & ۱۶ \end{bmatrix} \qquad , \qquad y=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\operatorname{pinv}(A)=(A^tA)^{-۱}A^t=\frac{۱}{۲۰}\begin{bmatrix} ۴۵ & -۱۵ & -۲۵ & ۱۵ \\ -۳۱ & ۲۳ & ۲۷ & -۱۹ \\ ۵ & -۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

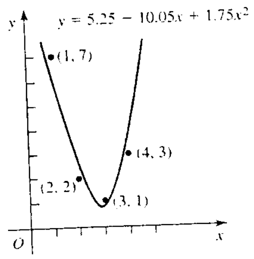
جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^tA)^{-۱}A^t]y = \frac{۱}{۲۰}\begin{bmatrix} ۴۵ & -۱۵ & -۲۵ & ۱۵ \\ -۳۱ & ۲۵ & ۲۷ & -۱۹ \\ ۵ & -۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵/۲۵ \\ -۱۰/۰۵ \\ ۱/۷۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین $a = ۱۵/۲۵$، $b = -۱۰/۰۵$ و $c = ۱/۷۵$ معادله سهمی کمترین مربعات این نقاط داده شده عبارت است از:

$$y = ۱۵/۲۵ - ۱۰/۰۵x + ۱/۷۵x^۲$$

در شکل ۸-۱۲ این سهمی را رسم کرده‌ایم.



شکل ۸-۱۲

اینک برهان روشی را که در مثال بالا برای یافتن چندجمله‌ای کمترین مربعات به‌کار بردیم، ارائه می‌دهیم. این برهان از مفهوم برداری روی برد یک ماتریس بهره می‌برد. در اینجا هندسه‌ای را ملاحظه خواهیم کرد که این نتیجه‌ی مهم را دربردارد. این برهان چالشی مهم و با ارزش است!

۸-۱۳-۱ قضیه. فرض کنیم $(x_۱, y_۱)$، ... و (x_n, y_n) مجموعه n نقطه داده شده باشند. فرض کنیم $y = a_۰ + \cdots + a_m x^m$ یک چندجمله‌ای درجه m $(n \geq m)$ باشد که به این نقاط برازنده باشد. با جایگذاری نقاط در این چندجمله‌ای دستگاه معادلات خطی $Ax = y$ به‌دست می‌آید که یک دستگاه از m متغیر $a_۰$، ... و a_m بوده که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \cdots & x_۱^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_۱ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات این دستگاه ضرایب چندجمله‌ای کمترین مربعات این نقاط داده شده را به‌دست می‌دهد.

اثبات. دستگاه $Ax = y$ متشکل از n معادله‌ی خطی با m متغیر $(n > m)$ در حالت کلی فوق معین است. این دستگاه جواب ندارد. (مثلاً این در حالتی اتفاق می‌افتد که تمام در یک خط عمودی قرار ندارند) بنابراین y در برد A قرار ندارد.

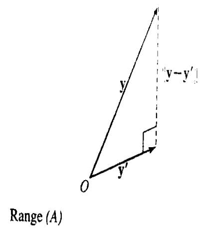
فرض کنید $(x_۱, y'_۱)$، ... و (x_n, y'_n) نقاطی باشند که در منحنی کمترین مربعات قرار دارند. فرض کنید دستگاه معادلات متناظر $Ax = y'$ باشد که

$$y' = \begin{bmatrix} y'_۱ \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

از آنجایی که منحنی از این نقاط می‌گذرد، دستگاه n معادله m متغیره مذبور دارای جواب منحصر به‌فرد x' است، که مؤلفه‌های x' ضرایب چندجمله‌ای کمترین مربعات هستند. بنابراین y' در برد A قرار دارند. شرط کمترین مربعات که $d_۱^۲ + \cdots + d_n^۲$ مینیمم گردد، معادل با مینیمم گردیدن $\|y' - y\|$ است. بنابراین y' تصویر y به‌روی برد A است. به شکل ۸-۱۳ نگاه کنید. این موضوع ایجاب می‌کند $y - y'$ بر برد A متعامد باشد، یعنی $y - y'$ بر بردارهای ستونی A متعامد باشد. ضرب نقطه‌ای $y - y'$ بر هر یک از بردارهای ستونی A، صفر است. با در نظر گرفتن بردارهای ستونی A به‌عنوان بردارهای سطری A^t، شرط تعامد اخیر به‌صورت ضرب ماتریسی $A^t(y - y') = ۰$ در می‌آید. از آنجایی که $Ax' = y'$، داریم:

$$\begin{aligned} A^t(y - Ax') = ۰ &\Longrightarrow -A^tAx' = -A^ty \\ &\Longrightarrow x' = (A^tA)^{-۱}A^ty \\ &\Longrightarrow x' = \mathrm{pinv}(A)y \end{aligned}$$

و به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.



شکل ۸-۱۳: y' تصویر y روی برد A است

مثال ۵: قانون هوک می‌گوید که وقتی نیرویی بر فنر اعمال می‌شود، طول فنر یک تابع خطی از نیروی وارده است. هرگاه طول فنر با اعمال نیروی F، L باشد، این به این معناست که ثابت‌های (فنر) a و b چنان وجود دارند که

$$L = a + bF$$

ملاحظه خواهیم کرد که ضرایب ثابت فنر و بنابراین رابطه بین طول و نیروی وارده بر فنر از نتایج تجربی به‌کارگیری روش کمترین مربعات به‌دست می‌آید. فرض کنید وزنه‌های متفاوتی از فنر آویزان شوند، و طول فنر در هر حالت اندازه‌گیری شود. فرض کنید نتایج به شرح زیر باشد

نیروی فنر (برحسب اینچ)	۲	۴	۶	۸
طول فنر (برحسب اینچ)	۸٫۲	۱۱٫۶	۱۴٫۳	۱۷٫۵

اطلاعات آماری فوق را به‌صورت نقاط درج می‌کنیم که مؤلفه اول F و مؤلفه دوم L است. داریم:

$$(۲, ۸٫۲), (۴, ۱۱٫۶), (۶, ۱۴٫۳), (۸, ۱۷٫۵)$$

به‌طور نظری این نقاط همگی می‌باید در خط راست قرار گیرند. به‌ویژه، با توجه به اندازه‌گیری‌های مکرر انجام یافته، نتایج عملی کاملاً دقیق نیستند. خط کمترین مربعات این نقاط سازگارترین معادله برای این خط است.

$$a + ۲b = ۸٫۲$$

$$a + ۴b = ۱۱٫۶$$

$$a + ۶b = ۱۴٫۳$$

$$a + ۸b = ۱۷/۵$$

ماتریس ضرایب A و ماتریس ستونی ثابت y به شکل زیر است

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۶ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix} \qquad , \qquad y = \begin{bmatrix} ۸/۲ \\ ۱۱/۶ \\ ۱۴/۳ \\ ۱۷/۵ \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\text{pinv}(A) = (A^tA)^{-۱}A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰ & -۰/۰۵ \\ -۰/۱۵ & -۰/۰۵ & ۰/۰۵ & ۰/۱۵ \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^tA)^{-۱}A^t]y = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰ & -۰/۰۵ \\ -۰/۱۵ & -۰/۰۵ & ۰/۰۵ & ۰/۱۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۸/۲ \\ ۱۱/۶ \\ ۱۴/۳ \\ ۱۷/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۲۵ \\ ۱/۵۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین ضرایب فنر عبارتند از: $a = ۵/۲۵$ و $b = ۱/۵۳$.

معادله‌ی فنر نیز عبارت است از:

$$L = ۵/۲۵ + ۱/۵۳F$$

در نتیجه مثلاً اگر وزنه‌ای ۲۰ اونسی از فنر آویخته شود، انتظار داریم طول فنر به‌طور تقریبی $(۲۰ \times ۱/۵۳) + ۵/۲۵$، یعنی ۳۵/۸۵ اینچ گردد.

کاربرد زیر موقعیتی را بیان می‌کند که گاهی در تحلیل شامل برازش کمترین مربعات به‌کار می‌رود. می‌خواهیم نتایج دو دسته از نقاط داده شده را که دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند مقایسه کنیم. روش‌های استعمال چندین دستگاه، که دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند، ... مفید می‌نماید.

مثال ۶: اطلاعات آماری زیر هزینه آموزش عمومی را برحسب دلار آمریکا نسبت به جمعیت در آمریکای شمالی و اروپا نشان می‌دهد[۱].

برای این اطلاعات آماری خطوط کمترین مربعات را ساخته و برخی نتایج را اخذ کنیم.

۱) مرجع [۶] ملاحظه شود

	۱۹۷۰	۱۹۷۵	۱۹۸۰	۱۹۸۵
Europe	۹۰	۱۹۷	۳۳۵	۳۹۴
North America	۳۱۷	۴۷۴	۸۱۶	۱۱۰۱

حل: برای سهولت اندازه سال را از ۱۹۷۰ شروع کنیم، یعنی در ۱۹۷۰-صفر، در سال ۱۹۷۵-۵ و به همین ترتیب. نتایج آماری فوق نقاط زیر را به‌دست می‌دهد.

اروپا $(0, 90)$، $(5, 197)$، $(10, 335)$، $(15, 394)$

آمریکا شمالی $(0, 317)$، $(5, 474)$ $(10, 816)$، $(15, 1101)$

دو دسته نقاط داده شده، دو دستگاه معادلات با ماتریس ضرایب A و بردارهای ثابت y_1 و y_2 را به شکل زیر به‌دست می‌دهد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \quad , \quad y_1 = \begin{bmatrix} 90 \\ 197 \\ 335 \\ 394 \end{bmatrix} \quad , \quad y_2 = \begin{bmatrix} 317 \\ 474 \\ 816 \\ 1101 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\mathrm{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 35 & 20 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t][y_1 y_2] = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 35 & 20 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 317 \\ 197 & 474 \\ 335 & 816 \\ 394 & 1101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96{,}5 & 272{,}9 \\ 21 & 53{,}88 \end{bmatrix}$$

خطوط کمترین مربعات عبارتند از:

اروپا $y = 96{,}5 + 21x$

امریکای شمالی $y = 272{,}9 + 53{,}88x$

این خطوط برای پیش‌بینی مخارج سال‌های بعد به‌کار رفته است. مثلاً برای سال ۲۰۰۰ $(x = 30)$ جواب ۷۲۶٫۵ (اروپا) و ۱۸۸۹٫۳ (برای آمریکای شمالی) به‌دست آمده است. با این حال نکته جالب این است

که شیب خط آمریکای شمالی یعنی ۵۳٫۸۸ بیش از دو برابر شیب خط اروپایی یعنی ۲۱ است. و این نشان می‌دهد که شکاف بین مخارج در حال افزایش است.

این بخش را با چرخشی هندسی از برهان قضیه فوق به پایان می‌بریم. خواهیم دید که ماتریس شبه معکوس برای یافتن تصویر یک بردار روی یک زیرفضا چگونه به‌کار می‌رود.

۸-۱۳-۲ قضیه. فرض کنیم W زیرفضای R^n تولید شده به‌وسیله بردارهای مستقل خطی $u_۱$، … و u_n باشد. فرض می‌کنیم $A = [u_۱, \ldots, u_m]$. تصویر بردار y روی w از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$\mathrm{proj}_w\, y = A\mathrm{pinv}(A)y$$

که $A\,\mathrm{pinv}(A)y$، **ماتریس تصویری** نامیده می‌شود.

اثبات. از آنجایی که بردارها مستقل خطی هستند، $\mathrm{pinv}(A)$ موجود است. نتیجه مطلوب به‌طور مستقیم از اثبات قضیه قبلی حاصل می‌شود. فرض کنید x' جواب کمترین مربعات $Ax = y$ باشد. در این‌صورت

$$x' = \mathrm{pinv}(A)y$$

با ضرب طرفین تساوی در A داریم

$$Ax' = A\mathrm{pinv}(A)y$$

اما Ax'، تصویر y روی برد (A) است. بنابراین

$$\mathrm{proj}_w\, y = A\mathrm{pinv}(A)y$$

مثال ۷: مطلوب است ماتریس تصویری صفحه $x - ۲y - z = ۰$ روی $R^۳$. از این ماتریس برای یافتن تصویر بردار $(۱, ۲, ۳)$ روی این صفحه استفاده کنید.

حل: W را زیرفضای بردارهایی در نظر بگیرید که در این صفحه قرار دارند. W شامل بردارهایی به شکل (x, y, z) است که $x = ۲y + z$. بنابراین $W = \{(۲y + z, y, z)\}$. می‌توانیم W را به شکل $W = \{y(۲, ۱, ۰) + z(۱, ۰, ۱)\}$ نیز نمایش دهیم. W فضای تولید شده به‌وسیله بردارهای $(۲, ۱, ۰)$ و $(۱, ۰, ۱)$ است. فرض کنید A ماتریسی شامل این بردارها به‌عنوان ستون‌های آن ماتریس باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\mathrm{pinv}(A) = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & -۲ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

ماتریس تصویری عبارت است از:

$$A\mathrm{pinv}(A) = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & -۲ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

تصویر $(۱, ۲, ۳)$ روی W با ضرب این بردار به‌صورت ستونی در $\mathrm{pinv}(A)$ به‌دست می‌آید که داریم:

$$\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & -۲ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین تصویر $(۱, ۲, ۳)$ روی‌صفحه $x - ۲y - z = ۰$، $(۲, ۰, ۲)$ است.

۸-۱۳-۳ تمرین شبه معکوس ماتریس‌های تمرین‌ها ۱-۴ را در صورت وجود، بیابید.

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$

شبه معکوس ماتریس‌های تمرین‌های ۵-۸ را در صورت وجود، بیابید.

۵) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۶) $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

۷) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$

۸) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$

خط کمترین مربعات نقاط داده شده در تمرین‌های ۹-۱۴ را بیابید (راهنمایی: توجه داشته باشید که شبه ماتریس‌های یکسان برای هر یک از داده‌ها وجود دارد).

۹) (۱, ۰), (۲, ۴), (۳, ۷)

۱۰) (۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۷)

۱۱) (۱, ۱), (۲, ۵), (۳, ۹)

۱۲) (۱, ۱), (۲, ۶), (۳, ۹)

۱۳) (۱,۷), (۲, ۲), (۳, ۰)

۱۴) (۱, ۱۲), (۲, ۵), (۳, ۱)

برای هر یک از نقاط داده شده تمرین‌های ۱۵-۱۸، خط کمترین مربعات را به‌دست آورید. (راهنمایی: توجه داشته باشید که شبه ماتریس‌های یکسان برای هر یک از داده‌ها وجود دارد).

۱۵) (۱, ۰), (۲, ۳), (۳, ۵), (۴, ۶)

۱۶) (۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۵), (۴, ۹)

۱۷) (۱, ۹), (۲, ۷), (۳, ۳), (۴, ۲)

۱۸) (۱, ۲۱), (۲, ۱۷), (۳, ۱۲), (۴, ۷)

خط کمترین مربعات را برای نقاط داده شده تمرین‌ها ۱۹-۲۰ به‌دست آورید.

۱۹) (۱, ۰), (۲, ۱), (۳, ۴), (۴, ۷), (۵, ۹)

۲۰) (۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۸), (۵, ۱۱)

سهمی کمترین مربعات را برای نقاط داده شده تمرینات ۲۱-۲۴ به‌دست آورید.

۲۱) (۱, ۵), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۸)

۲۲) $(1, 4), (2, 0), (3, 3), (4, 5)$

۲۳) $(1, 2), (2, 5), (3, 7), (4, 1)$

۲۴) $(1, 23), (2, 4), (3, 7), (4, 17)$

۲۵) وزنه‌های زیر (برحسب اونس) از یک فنر آویزان شده است و طول حاصل (برحسب اینچ) به‌دست آمده است. ثابت فنر را به‌دست آورده و معادله‌ی فنر را بنویسید. طول فنر را هنگامی که وزنه ۱۵ اونسی آویزان می‌شود، پیش‌بینی‌کنید.

الف)

نیروی F	۸	۶	۴	۲
طول L	۱۲٫۲	۱۰٫۳	۸	۵٫۹

ب)

نیروی F	۸	۶	۴	۲
طول L	۱۶٫۷	۱۳٫۷	۱۰٫۳	۷٫۴

۲۶) مصرف بنزین یک اتومبیل به سرعت آن بستگی دارد. برای تعیین اثر سرعت بر مصرف سوخت مدیریت اتوبان، اتومبیل‌های مختلفی را با وزن‌های متفاوت در سرعت‌های متفاوت آزمایش می‌کند. اتومبیلی به وزن ۳۹۸ پوند دارای نتایج زیر است. خط کمترین مربعات متناظر این اطلاعات را به‌دست آورید. از این معادله برای تخمین مسافت طی شده به‌وسیله یک گالن دارای این اتومبیل در سرعت ۵۵ mphبه‌دست آورید. (سرعت برحسب مایل در ساعت و بنزین مصرفی برحسب مایل بر گالن است).

سرعت	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰
بنزین مصرفی	۱۸٫۲۵	۲۰٫۰۰	۱۶٫۳۲	۱۵٫۷۷	۱۳٫۶۱

۲۷) یک شرکت بیمه درصد افرادی را که در سنین متفاوت فوت می‌کنند محاسبه کرده است (بین سنین ۲۵ تا ۵۰) درصد مرگ را در ۲۳ سالگی تخمین بزنید.

سن برحسب سال	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
درصد مرگ	۱۸	۱۹	۲۱	۲۵	۳۵	۵۴	۸۳

۲۸) زیرفضای W تولید شده به‌وسیله بردارهای $(۱,۱,۱)$ و $(۲,۱,۰)$ را در نظر بگیرید. ماتریس تصویری را برای W به‌دست آورید. از این ماتریس برای یافتن تصویر بردار $(۳,۰,۱۰)$ روی W استفاده کنید. نشان دهید تصویر $(۶,۳,۰)$ روی W بردار $(۶,۳,۰)$ است. این به چه معناست.

۲۹) فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. ثابت کنید $\mathrm{pinv}(A) = A^{-1}$.

۳۰) فرض کنید A و B دو ماتریس باشند که حاصل‌ضرب AB موجود باشد.

الف) آیا $\mathrm{pinv}(AB) = \mathrm{pinv}(A)\mathrm{pinv}(B)$ ؟

ب) آیا $\mathrm{pinv}(AB) = \mathrm{pinv}(B)\mathrm{pinv}(A)$ ؟

۳۱) اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\mathrm{pinv}(cA) = (\frac{1}{c})\mathrm{pinv}(A)$ و $c \neq 0$.

ب) $\mathrm{pinv}(\mathrm{pinv}(A)) = A$، اگر A یک ماتریس مربع باشد.

ج) $(\mathrm{pinv}(A^t) = (\mathrm{pinv}(A))^t$، اگر A یک ماتریس مربع باشد.

۳۲) اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، ثابت کنید $\mathrm{pinv}(A)$ موجود است اگر و فقط اگر A از رتبه n باشد. نشان دهید یک نتیجه این مطلب آن است که $\mathrm{pinv}(A)$ موجود نیست اگر $m < n$.
(راهنمایی: از قضیه رتبه/پوچ استفاده کنید).

۳۳) فرض کنی P یک ماتریس تصویری باشد ثابت کنید:

الف) P متقارن است.

ب) $P^2 = P$. (P خودتوان است)

تمرین‌های دوره‌ای فصل ۸

۱) فرض کنید $u = (x_۱, x_۲)$ و $v = (y_۱, y_۲)$ عضوهای $R^۲$ باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی روی $R^۲$ تعریف می‌کنند.

$$< u, v >= ۲x_۱y_۱ + ۳x_۲y_۲$$

۲) ضرب داخلی، نرم و فاصله بین توابع $f(x) = ۳x - ۱$ و $g(x) = ۵x + ۳$ را در فضای ضرب داخلی $P_۲$ با ضرب داخلی

$$< f, g >= \int_۰^۱ f(x)g(x)dx$$

به‌دست آورید.

۳) $R^۳$ را با ضرب داخلی

$$< (x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) >= ۲x_۱y_۱ + ۳x_۲y_۲$$

در نظر بگیرید. نرم و فاصله (۱, −۲) و (۲, ۳) را در این فضا به‌دست آورید.

۴) $R^۲$ را با ضرب داخلی

$$< (x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) >= ۲x_۱y_۱ + ۳x_۲y_۲$$

در نظر بگیرید.معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضا به‌دست آورید. این دایره را رسم کنید.

۵) تقریب کمترین مربعات $f(x) = x^۲ + ۲x - ۱$ را روی بازه $[-۱, ۱]$ به‌دست آورید.

۶) تقریب فوریه مرتبه چهارم را برای $f(x) = ۲x - ۱$ روی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

۷) تمام بردارهای $V_۷$ راکه درکره‌ای به شعاع ۱ و مرکز (۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰) هستند به‌دست آورید.

۸) **ماتریس شبه معکوس** $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

۹) سهمی کمترین مربعات $(۴, ۹), (۳, ۵), (۳, ۲), (۱, ۶)$ را به‌دست آورید.

۱۰) A را **ماتریسی با شبه معکوس** B بینگارید. نشان دهید.

الف) $ABA = A$.

ب) $BAB = B$.

ج) AB متقارن است.

د) BA متقارن است.

مراجع

[1] Arazi, Benjamin; A Common Space Approach to the Theory of Error Correcting Codes, Mitpress, 1988.

[2] Williams, Gareth; *Linear Algebra*, Jones and Bartlett Publishers, London 2001.

[3] Barnsley, Michael F; *Fractal Everywhere*, Academic Press Inc., 1988.

[4] Barnsley, Michael F; *The Desktop Fractal Design Handbook and Systems* (Software Package), Academic Press Inc., 1989.

[5] Sheldon, Axler; *Linear Algebra Done Right,* 2nd edition, Springer, New York, 1997.

[6] UNESCO Statistical Yearbook, 1987.

[۷] کمپل و تورپ، جبر خطی با کاربرد در معادلات دیفرانسیل، ترجمه بیژن‌زاده، محمدحسن؛ عالم‌زاده، علی‌اکبر؛ انتشارات نشر علوم نوین، تهران ۱۳۸۹.

نمایه

آلبرت انیشتین، ۴۷۴

ابتدا، ۱۹۷

اتم‌ها، ۴۷۴

اعمال سطری مقدماتی، ۶

الکترون‌ها، ۴۷۴

انتقال، ۲۳۷

انعکاس، ۲۳۴

اویلر، ۳۳۸

برد، ۲۲۱

بردار، ۱۹۹

بردار صفر، ۲۰۱

بردار مکان، ۱۹۷

بردار یکه، ۲۰۹

بردارهای ستونی، ۲۰۵

بردارهای سطری، ۲۰۵

بسته، ۱۹۹

بعد، ۲۹۷

بعد متناهی، ۲۹۷

بعد نامتناهی، ۲۹۸

پارامتر، ۲۳

پاشنه، ۲۱

پایه متعامد، ۳۱۱

پایه استاندارد، ۳۰۱

پایه یکّه متعامد، ۳۱۱

پایه‌های استاندارد، ۳۱۱

پیشرو، ۱۹

تانژانت، ۳۶۵

تبدیلات مقدماتی، ۶

تصویر، ۳۱۳، ۳۱۹

تصویری، ۲۲۷، ۲۴۶

تقارن، ۲۱۷
تقریب فوریه مرتبه nام، ۴۸۵
تولید شده، ۴۶۲
جایگشت، ۱۶۴
جایگشت زوج، ۱۶۴
جایگشت فرد، ۱۶۴
جواب، ۱
جواب بدیهی، ۲۸
جواب عمومی، ۲۳
چندجمله‌ای‌های لژاندر، ۴۸۴
حالت پویا، ۳۷۹
خطی، ۳۸۱، ۳۹۹
دامنه، ۲۲۱
درازا، ۱۹۷
دستگاه‌های هم‌ارز، ۷
دوبه‌دو متعامدند، ۳۱۰
دوقلوها، ۴۷۵
دوقلوی فضایی، ۴۷۷
دیاگرام فضا_زمان، ۴۷۷
رتبه A، ۳۰۴
روش حذفی گاوس ـ جردن، ۴
ریمان، ۴۷۴
زنجیر مارکوف، ۳۷۸
زنجیر مارکوفی، ۳۷۸
زوج‌های مرتب، ۱۹۷
زیرفضای W عمود، ۳۱۹
ستون ، ۴
سرشت‌نمای A، ۳۴۱
سری فوریه، ۴۸۵
سطر، ۴
سه‌تایی‌های مرتب، ۱۹۷
سیستم تابع تکراری، ۲۴۴
ضرب داخلی، ۴۵۸، ۴۵۹
عملگر خطی، ۲۲۳
عمود، ۲۱۳
فاصله فضایی، ۴۷۸
فرم پلکانی تحویل یافته، ۱۱
فرم درجه دوم، ۳۹۲
فروبنیوس، ۳۷۲
فضا_زمان، ۴۷۲، ۴۷۴
فضای برداری، ۱۹۹
فوتون، ۴۸۰
فوق معین، ۴۹۱
فیبوناچی، ۳۸۳
قانون هوک، ۴۹۹
قرینه، ۲۰۱
قطری شدنی، ۳۸۷
کد اصلاح‌کننده خطا، ۴۸۸
کد گولای، ۴۸۹
کد گولیا $C_{۲۳,۱۲}$، ۴۹۰
کدهامینگ، ۴۸۷، ۴۸۸
کمترین مربعات حل، ۴۹۱
کوشی، ۳۳۸
کهاد اصلی، ۳۴۷

کیلی، ۳۳۸
کیلی‌ـ‌هامیلتون، ۳۳۷، ۳۷۵
گاوس ـ جردن، ۱۹
گاوسی، ۲۹
گرام‌ـ‌اشمیت، ۳۱۷، ۳۲۸–۳۲۶، ۳۹۰
گرشگورین، ۳۳۶، ۳۵۹، ۳۶۲
گوس‌ـ‌جردن، ۴۱۸
لاگرانژ، ۳۳۸
ماتریس، ۴
ماتریس افزوده، ۶
ماتریس شبه معکوس، ۵۰۸
ماتریس استاندارد، ۲۳۲
ماتریس الحاقی، ۱۸۴
ماتریس بالا مثلثی ، ۱۷۹
ماتریس تصویری، ۵۰۲
ماتریس ستونی، ۵
ماتریس سطری، ۵
ماتریس شبه معکوس، ۵۰۱، ۵۰۷
ماتریس ضرایب، ۶
ماتریس متعامد، ۳۲۴
ماتریس مربعی، ۵
ماتریس مربعی، پایین مثلثی ، ۱۷۹
ماتریس همانی، ۳۲۵
ماتریس همساز، ۱۸۴
ماتریس یکانی، ۳۲۹
مارکوف، ۳۷۷، ۳۷۸
ماکس پلانک، ۴۷۴
مبدأ، ۱۹۷
مبنای استاندارد، ۲۳۲
متغیر پیشرو، ۲۳
متناهی، ۲۹۷
متوازی‌الاضلاع نیروها، ۲۰۳
مجموعه متعامد، ۳۱۰
مختصات همگن، ۲۴۰
مساوی، ۱۹۸
معادلهٔ خطی، ۱
معادله‌ی خطی، ۲
معادله‌ی مشخصه، ۳۳۸
مفسر، ۳۴۱
مقادیر مشخصه، ۳۳۸
منتظم، ۳۷۸
منحنی یا خط کمترین مربعات، ۴۹۴
منفرد، ۱۷۱
موریس کلاین، ۳۳۸
مؤلفه‌های متناظر، ۱۹۸
میدان جبری، ۴۸۷
نامساوی کوشی ـ شوارتز، ۲۱۰
نامنفرد، ۱۷۱
نرمال سازی، ۲۰۹
نقاط پایه، ۳۹
نگاشت آفینی، ۲۳۹
نگاشت ماتریسی، ۲۲۴
نیروی برآیند، ۲۰۳
نیل بوهر، ۴۷۴

وارون، ۲۳۷

ورنر هایزنبرگ، ۴۷۴

هرمان مینکوفسکی، ۴۷۶

هم‌خط، ۳۳۲

هم‌دامنه، ۲۲۱

همگن، ۲۷

هندسه مینکوفسکی، ۴۷۶

هندسه‌های نااقلیدسی، ۴۷۲

هندسی اقلیدسی، ۲۱۸

یک ذره نوری، ۴۸۰

یک‌ریختی، ۴۳۳

یکّه متعامد، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۷–۳۱۵، ۳۲۱