آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه اول

تابستان 1388

جلسه اول ۸۸/۴/۲۴

۱) آنالیز ترکیبی و احتمال
۲) متغیرهای تصادفی
۳) توزیع های گسسته و پیوسته
۴) * برآورد و آزمون

یادآوری :

۱) حادثه : پرتاب تاس

فضای نمونه $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$ چیزی که می تواند اتفاق بیافتد $n(S) = 6$

پیشامد A هر زیرمجموعه از فضای نمونه (الزاماً) $A = \{2, 4, 6\}$ $n(A) = 3$

فرآیند : $0 \leq P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} \leq 1$

۲) انواع پیشامد :

① غیرممکن : $P(A) = 0$

② تصادفی : $0 < P(A) < 1$

③ حتمی $P(A) = 1$

- مجموع کلیه احتمالات برابر 1 خواهد بود :
(کل پیشامدهای که یک حادثه را پوشش دهد)

* $\sum_{i} P(A_i) = 1$

۳) دنباله هندسی (با قدر نسبت q)

$$a_1 + \overset{a_1 q^1}{a_2} + \cdots + \overset{a_1 q^{n-1}}{a_n} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow[q^n = 0]{n\to\infty,\ 0<q<1} = \frac{a_1 \rightarrow \text{جمله اول}}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} = q^1 + q^2 + \cdots = \frac{q}{1-q} \qquad 0<q<1$$

مهم * $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\right)' = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Subject .... Year .... Month .... Day .... ( )

تمرین:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} npq^{n} = pq\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = pq\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n}\right)' = pq(q^0+q^1+\cdots)' \\ 0\le q,\ p\le 1 \\ p+q=1 \Rightarrow p=1-q \end{cases}$$

$$= pq\left(\frac{q^0}{1-q}\right)'$$

قدر نسبت

$$= pq\left(\frac{1}{\underbrace{(1-q)}_{p}{}^{2}}\right) = \boxed{\frac{q}{p}}$$

۴) تصاعد حسابی (با قدر نسبت d)؟

$$a_1 + \overset{a_1+d}{a_2} + \cdots + \overset{a_1+(n-1)d}{a_n} = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

مثال: $1+2+\cdots+n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

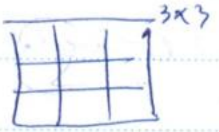
$$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

تبصره:

سری‌های شبیه سری زیر تصاعد نیستند:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مهم مثال: یک مربع $n\times n$ چند تا مربع می‌توان دید؟



$$1^2+2^2+3^2 = \frac{3(3+1)(6+1)}{6} = 14$$

مربع به طول ۱ — به طول ۲ — به طول ۳

* تعداد مربع‌های موجود در یک مربع $n\times n$

۵) متغیر تصادفی : (X)

✓ تابعی است از فضای نمونه ← مجموعه اعداد حقیقی (تعریف ریاضی)

✓ کمیتی است که مقادیر خود را با احتمال دریافت می‌کند (به عبارتی ...)

مثال: X، نتیجه پرتاب هر بار تاس = ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶

$X=1 \longleftrightarrow p(X=1)=\frac{1}{6}$

$\vdots$

$X=6 \longleftrightarrow p(X=6)=\frac{1}{6}$

فضای نمونه

انواع متغیرهای تصادفی:

گسسته: $X = x_1, x_2, \dots$

✓ تعداد پسرها در ۴ فرزند: $X=0,1,2,3,4$ دوجمله‌ای

✓ تعداد امتحان لازم برای رسیدن به اولین ...: $X=1,2,3,\dots$ هندسی

✓ تعداد مشتری در ۱ ساعت: $X=0,1,2,\dots$ پواسن

پیوسته: عواملی که می‌توانند به عنوان پیوسته انتخاب شوند (زمان، طول، وزن، ...)

$-\infty < X < +\infty$

مثلاً: زمان لازم برای خرابی دستگاه برقی $0 < X < \infty$

توزیع هندسی: تعداد آزمایش لازم برای رسیدن به اولین موفقیت

پواسن: [illegible]

توابع متغیر تصادفی:

① تابع احتمال متغیر گسسته: $f(x)$ با شرایط زیر برای متغیر تصادفی گسسته X تابع احتمال است:

1) $\forall x: 0 \le f(x) = p(x) \le 1$ ؛ f در هر نقطه همان احتمال است.

2) $\sum f(x) = 1$

3) $f(\text{بازه}) = \sum_{\text{بازه}} f(x)$

مثال ۱: معمولاً گسسته ها را با جدول نمایش می دهند.

x	۱	۰	۱	۲
$f(x)$	۰٫۲	?	۰٫۴	۰٫۱

$\sum f(x)=1 \Rightarrow \boxed{f(0)=0.3}$

$$\begin{cases} f(x=1)=0.4 \\ f(x>1)=0.1=f(x=2) \\ f(x\geq 1)=0.5=f(x=1)+f(x=2) \end{cases}$$

چون نقطه وجود دارد مساوی اهمیت پیدا می کند.

* چیزهایی که وجود ندارند دارای احتمال صفر می باشند.

$$\begin{cases} f(x=\sqrt{2})=0 \\ f(x>\sqrt{2})=f(2)=0.1 \\ f(x\geq\sqrt{2})=f(2)=0.1 \end{cases}$$

اینجا مساوی مهم است چون نقطه وجود داشته باشد.

مثال ۲: برای $x=0,1,2$ تابع احتمال به شرح زیر است.

$$\begin{cases} P(X=i)=cP(X=i-1) \\ i=0,1,2 \end{cases}$$

امید ریاضی آن را بدست آورید.

* مهم: اولین قدم در بدست آوردن امید ریاضی به دست آوردن تابع احتمال آن است.

$$\begin{cases} p(0)+\overset{cp(0)}{p(1)}+\overset{c^2p(0)}{p(2)}=1 \\ p(0)(1+c+c^2)=1 \\ i=1:\ p(1)=cp(0) \\ i=2:\ p(2)=cp(1)=c^2p(0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p(0)=\dfrac{1}{1+c+c^2} \\ p(1)=\dfrac{c}{1+c+c^2} \\ p(2)=\dfrac{c^2}{1+c+c^2} \end{cases}$$

x	۰	۱	۲
$p(x)=f(x)$	$\frac{1}{1+c+c^2}$	$\frac{c}{1+c+c^2}$	$\frac{c^2}{1+c+c^2}$

مثال ۳: شخصی میخواهد - دوست خود تلفن می زند و در اولین شماره بین 9 و 7 و 6 و 5 مشکوک است. اگر x تعداد دفعات لازم برای موفقیت باشد = 1, 2, 3, 4 تابع احتمال آن کدام است؟

$$\begin{cases} f(x) = ? & \frac{1}{4} \\ x = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$x=1: \ P(x=1) = \frac{1}{4}$

$x=2: \ P(x=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

احتمال اشتباه دفعه اول — احتمال درست در بین مرحله ۲

$x=3: \ P(x=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$x=4: \ P(x=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$

نکته: فراوانیها از یکدیگر مستقل هستند و احتمال به ازاء جمیع مقادیر ثابت است.

مثال ۴:

$$\begin{cases} f(x) = Cx = \frac{x}{45} \\ x = 1, 2, 3, \dots, 9 \quad \text{(گسسته)} \end{cases}$$

الف) $C = ? \ \frac{1}{45}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $\sum f(x) = 1 \Rightarrow C\sum_{x=1}^{9} x = 1 \Rightarrow C(1+2+\dots+9) = 1$

$\Rightarrow C\,45 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{45}$

x	1	2	3	...	9
$f(x)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{3}{45}$	...	$\frac{9}{45}$

ب) $f(x>2) = 1 - P(x \leq 2) \Rightarrow f(x>2) = 1 - P(x=1) - P(x=2)$

$= 1 - \frac{1}{45} - \frac{2}{45} = \frac{42}{45}$

Subject

Year Month Day ( )

مثال ۵:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{100}\left[2(10-x)+a\right] \\ x = 1, 2, \ldots, 10 \end{cases}$$

$a = ?$

$$\sum f(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{100} \sum 2(10-x) + a = 1$$

$$\frac{1}{100}\left(\sum 2(10-x) + \sum_{x=1}^{10} a\right) = 1$$

$$\frac{1}{100}\left(2\underbrace{(0+1+\cdots+9)}_{\frac{9(9+1)}{2}=45} + 10a\right) = 1$$

$$\frac{1}{100}(90 + 10a) = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

تمرین: $A = ?$

$$\begin{cases} f(n) = A\binom{n+1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حل: $\binom{n+1}{n} = n+1 \Rightarrow f(n) = A(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = 1 \Rightarrow A \times \frac{4}{9} \times \boxed{\overset{\frac{9}{4}}{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}} = 1$$

← معادل مشتق q^{n+1} می باشد

فرض: $q = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow A \times \frac{4}{9} \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow A \times \frac{4}{9} \times \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

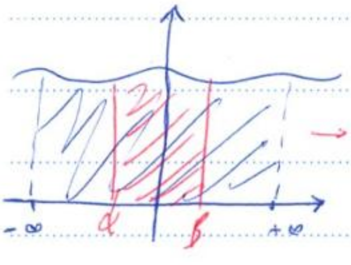
Pars Rasam

تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته: (pdf)

احتمال چگالی

مخصوص متغیرهای پیوسته است.

$f(x)$ با شرایط زیر برای متغیر پیوسته x در بازه $-\infty < x < +\infty$ تابع چگالی احتمال است: (پیش فرض)



۱) $f(x) \geq 0$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ ← سبب می‌شود که حد زیر سطح آن کمتر از یک شود ← $f(x) \geq 0$

۳) $P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

داشتن تساوی فرقی نمی‌کند زیرا طبق شرط ۴ انتگرال تابع در یک نقطه صفر است زیرا معادل یک نقطه سطحی دیده نمی‌شود.

۴) $P(X = \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

مثال ۱) برق (کارشناسی ۸۴)

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{c}{1+x^2} \\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

الف) $c = ?$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx = 1 \Rightarrow c[\operatorname{Arctang} x]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 \Rightarrow c\pi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

پس: $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

ب) $P(|x| < \sqrt{3})$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $P(-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}[\operatorname{Arctag} x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \times \frac{2\pi}{3}$$

$= \frac{2}{3}$ جواب

مثال ۲:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ a-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) $a = ?$

$$\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (a-x)\,dx = 1 \Rightarrow a = 2$$

ب) $P(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}) = ?$

$$\int_{1/2}^1 x\,dx + \int_1^{3/2} 2-x\,dx$$

$- P(-2<x<-1) = 0$

$- P(-2<x<5) = 1$ [illegible]

$- P(-2<x<\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} x\,dx + \int_{-2}^0 0\,dx$

نکته:

محاسبه تابع $y = g(x)$ از روی $f(x)$:

۱- پیوسته:

$f(x) = \checkmark \xrightarrow{y=g(x)\ \checkmark} f(y) = ?$

[illegible]

۱) $x = g^{-1}(y)$ برحسب y

مشتق

۲) $f(y) = |{g^{-1}}'(y)| \cdot f_x(g^{-1}(y))$

[illegible]

مثال ۴ :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\; y = \frac{2x+1}{3} \;}$$

$1)\; x = \dfrac{3y-1}{2} = g(y)$

$g'(y) = \dfrac{3}{2}$

$2)\; f(y) = \left|\dfrac{3}{2}\right| \times 2 \times \dfrac{3y-1}{2}$

$$\begin{matrix} y = 2x+1 \\ 0 < x < 1 \end{matrix} \Longrightarrow \tfrac{1}{3} < y < 1$$

مثال ۵ :

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

توزیع تابع $y = -\ln x$ معلوم است.

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\; y = -\ln x \;} \; 2)\; f(y) = |-e^{-y}| \cdot 1 = e^{-y}$$

$1)\; x = e^{-y}$

$$\left.\begin{matrix} y = -\ln \underset{-\infty}{\ldots} \\ y = -\ln x' = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < y < \infty$$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه دوم

تشکل دانشجویان و فارغ التحصیلان کامپیوتر دانشگاه آزاد کاشان

تابستان 1388

جلسه دوم

تمرین: مثال: اگر $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$ باشد، آنگاه تابع چگالی $y=x^2$ کدام است؟

حل:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ -\infty<x<+\infty \end{cases} \xrightarrow[1)\ x=\pm\sqrt{y} = g^{-1}(y)]{y=x^2 = g(x)} 2)\ f(y)= \begin{cases} x=\sqrt{y} \Rightarrow \left|\frac{1}{4\sqrt{y}}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}} \\ + \\ x=-\sqrt{y} \Rightarrow \left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$$
$$0<y<\infty$$

تابع چگالی توابع گسسته:

میخواهیم تابع $y=g(x)$ را از روی $f_X(x)$ در توابع گسسته:

x	0	1	2	3
y	0.1	0.3	0.4	0.2

$y=x^2$	0	1	4	9
$f(y)$	0.1	0.3	0.4	0.2

استثناء:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

$y=x^2$	0	1	4
$f(y)$	0.3	0.5	0.2

$f(y)$ همان $f(x)$ است با این تفاوت که در نقاطی که y ها یکی می‌شوند $f(y)$ ها جمع می‌شوند.

توابع یکنواخت (هم‌تراز، هم‌شانس):

هرگاه متغیر تصادفی X مطرح شود اما تابع توزیع آن بیان نشود آن را به طور پیش‌فرض یکنواخت فرض می‌کنیم:

Subject ....

Year .... Month .... Day .... ( )

X یکنواخت:
- گسسته: $\begin{cases} f(x) = p(x) = \frac{1}{N} \\ x = x_1, x_2, \dots, x_N \end{cases}$
- پیوسته: $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \\ \alpha < x < \beta \end{cases}$

اگر در $f(x)$ یک عدد شود حتماً یکنواخت است $f(x)$

مثل $f(x) = \frac{1}{3}$ و ...

$f(x) = \frac{1}{c} = \frac{1}{\beta - \alpha}$

شاخص‌ها مهم

گروه	عمل	شاخص بدست آمده از ...	مشخصات شاخص	آیا خطا دارد؟ آیا از سوال نیاز دارد	میانگین واریانس نسبت
آمار توصیفی: جامعه	سرشماری N	پارامتر θ	مجهول - ثابت	ندارد	μ σ^2 P → θ
آمار استنباطی: نمونه	نمونه‌گیری n	آماره برآوردگر تخمین‌زن $\hat{\theta}$ یا T	متغیر - معلوم تصادفی	دارد	$\bar{X}$ s^2 $\bar{p}$ → $\hat{\theta}$

شاخص‌های جامعه:

مرکزی:
- μ (میانگین)
- M_o (مد - نما)
- M_d (میانه)

پراکندگی:
- σ^2 (واریانس)
- σ (انحراف معیار)

پراکندگی نسبی:
- $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ (ضریب پراکندگی)

نکته) امید ریاضی = $E(X)$ = μ = $\bar{X}$ = میانگین = متوسط = ارزش انتظاری X

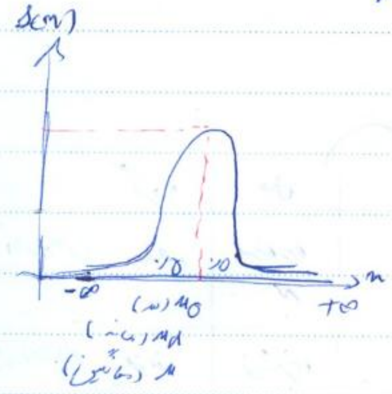
تعریف: معیار مرکزی که نشان دهنده نقطه تعادل یا مرکز ثقل جامعه و تعیین کننده ارزش مورد انتظار متغیر تصادفی X است

Subject

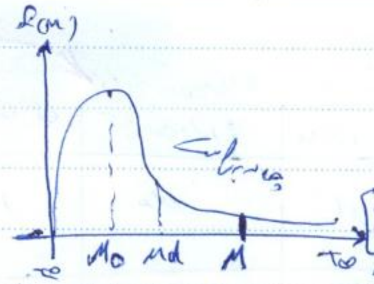
Year Month Day ( )

$$\sum(x_i-\mu)=0 \qquad x_i = 2 , 3 \qquad -0.5+0.5=0 \qquad \mu=\frac{2+3}{2}=2.5$$

مثال ۲ :



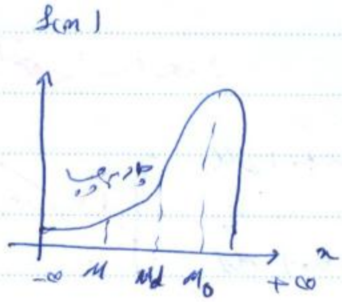
[(زنگوله متقارن) [زنگوله]



[غیر زنگوله (نامتقارن)]

میانگین همیشه متمایل به سمت دم است اگر آن را در شکل بگیریم تعادل به سمت شاخص

مثل صفحه که روی نقطه میانگین تعادل حفظ می‌شود



مثال ۳ :

بطور متوسط انتظار می‌رود در هر پرتاب ۵۰ تومان ضرر کنم.

$$\underbrace{\underbrace{+300\times\frac{1}{2}}_{150}\quad\underbrace{-400\times\frac{1}{2}}_{-200}}_{-50}$$

نحوه محاسبه امید ریاضی :

$(\bar{X}$ یا $\mu)$

$$E(x) = \begin{cases} \text{گسسته} & \sum_{\forall x} x\,p(x) = \sum_{\forall x} x f(x) \\ \text{پیوسته} & \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \end{cases}$$

(امید ریاضی) $E(x)$: $\bar{X}$ یا μ

میانگین $\mu = \frac{\sum x_i}{n} = x_1 \times \frac{1}{n} + x_2 \times \frac{1}{n} + \cdots + x_n \times \frac{1}{n}$

نکته: $E(g(x)) = \int g(x) \cdot f(x)\, dx$

خواص امید ریاضی: $\mu = \bar{x} \simeq E(x)$

اگر a و b اعداد ثابتی فرض شوند:

$E(a)$ امید ثابت برابر خود عدد (a) می‌باشد.

1) $E(a) = a$

از $E(x)$ هر چند بار E بگیریم باز هم $E(x)$ می‌شود.

تبصره: $E[\underbrace{E(x)}_{\text{عدد}}] = E(x)$

2) $E(bx) = bE(x)$

3) $E(bx \pm a) = bE(x) \pm a$

4) $E[x - E(x)] = 0$ مجموع انحرافات از میانگین صفر است $\frac{\sum (x_i - \mu)}{n} = \frac{0}{n} = 0$

مهم 5) $E[(x - \underbrace{E(x)}_{\simeq \bar{x} = \mu})^2] < E[(x - b)^2]$ واریانس

مثال: $x_i = 1, 2, 3 \rightarrow \mu = \frac{1+2+3}{3} = 2$

$\sum (x_i - \mu)^2 = (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 = 2$

مثال ۲ (گسسته):

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

$E(x) = -1 \times 0.1 + 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 = 1$

$E(x^2) = (-1)^2 \times 0.1 + 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.4 = 2$

$E(3x^2 - 2x + 1) = 3E(x^2) + 4E(x) + 1$

$= E(3x^2) \ldots E(x) = 3E(x) \ldots 2E(x)$

گسسته ...

مثال ۱: گسسته

اگر برای $x=0,1,2$ ، $\begin{cases} p(x=i)=c\,p(x=i-1) \\ i=1,2 \end{cases}$ متوسط x کدام است؟

x	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{1}{1+c+c^2}$	$\frac{c}{1+c+c^2}$	$\frac{c^2}{1+c+c^2}$

$$\Rightarrow E(x)=\sum x\,p(x)=\frac{c+2c^2}{1+c+c^2}$$

مثال ۲: پیوسته

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \qquad E(x)=?$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 x\times x\,dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx$$

$$=$$

مثال ۳: پیوسته و گسسته:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & 0<x<1 \quad \text{پیوسته} \\ \frac{1}{4} & x=1 \quad \text{گسسته} \\ \frac{1}{4} & x=2 \quad \text{گسسته} \\ \frac{1}{4} & 2<x<3 \quad \text{پیوسته} \end{cases}$$

حل:

$$E(x)=\int x\,f(x)dx+\sum x_i f(x_i)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\frac{x}{2}\,dx+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+\int_2^3 x\frac{1}{4}\,dx$$

هر دو واریانس به $\sigma^2 \simeq S^2 \simeq D(x) \simeq V(x) \simeq Var(x) \simeq$ پراش

* انحراف معیار (خطا) $\simeq \sigma \simeq S \simeq$ جذر مثبت واریانس (چون از جنس خود متغیر است)

 Subject

Year Month Day ( )

$$\sigma^2 = E\left((x-E(x))^2\right) = E(x^2) - (E(x))^2$$

مهم) واریانس معیار پراکندگی می باشد.

پراکندگی میان میانگین داده ها

$\sum(x_i-\mu)=0$ پراکندگی

$\sum|x_i-\mu| =$ $|x_1-\mu|=2$, ..., $|x_{100}-\mu|=2$ } 200, $|x_{101}-\mu|=200$

$\sum(x_i-\mu)^2$: $(x_i-\mu)^2=4$, ..., $(x_{100}-\mu)^2=4$ } 400 (100 تا), $(x_{101}-\mu)^2=40000$

$x_1-\mu=-2$, ..., $x_{100}-\mu=-2$ } 100 تا, $x_{101}-\mu=200$

خواص واریانس و انحراف معیار:

1) $\sigma^2=0,\ \sigma=0 \Longleftrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n$ اگر داده ها مساوی باشند

2) $\sigma^2(a)=0,\ \sigma(a)=0$

3) $\sigma^2(bx)=b^2\sigma^2(x),\ \sigma(bx)=|b|\sigma_x$

4) $\sigma^2(bx\pm a)=b^2\sigma^2_x \qquad \sigma(bx\pm a)=|b|\sigma_x$

اگر به داده ها عددی را اضافه یا کم کنیم میانگین اضافه یا کم می شود ولی در انحراف معیار تاثیری نمی کند.

یادآوری:

$E(a)=a \qquad E(bx)=bE(x)$

$E(x\pm a)=E(x)\pm a \qquad E(bx\pm a)=bE(x)\pm a$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه سوم

تابستان 1388

جلسه سوم:

پراکندگی

مرکزی	واریانس	انحراف معیار
$-\infty < \mu_x = E(x) = \bar{x} < +\infty$	$\sigma^2 \geq 0$ واریانس var(x) / v(x) D(x)	انحراف معیار $\sigma \geq 0$
$E(a) = a$	$\sigma^2(a) = 0$	$\sigma(a) = 0$
$E(bx) = bE(x)$	$\sigma^2(bx) = b^2\sigma^2(x)$	$\sigma(bx) = \lvert b\rvert \sigma_x$
$E(bx \pm a) = bE(x) \pm a$	$\sigma^2(bx \pm a) = b^2\sigma^2_x$	$\sigma(bx \pm a) = \lvert b\rvert \sigma_x$

تمرین:

اگر $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{c^2} \\ 0 < x < c \end{cases}$ آنگاه c چه باشد تا واریانس ۲ شود؟ $(\sigma^2 x = 2)$

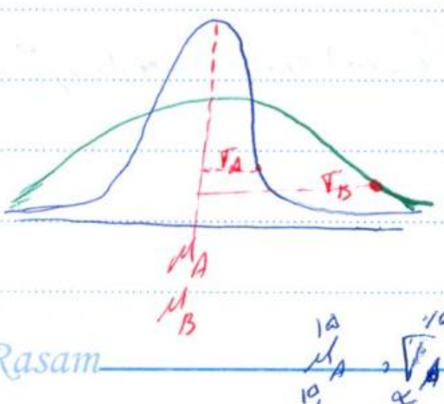
۱) $c=9$ ۲) $c=2$ ۳) $c=4$ ۴) $c=5$

$$\sigma^2 = E(x^2) - E(x)^2 = 2$$

$$E(x) = \int_0^c x f(x)dx = \frac{c^2}{2} \qquad \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3} = 2$$

$$E(x^2) = \int_0^c x^2 f(x)dx = \frac{c^2}{1}$$

CV_x (ضریب پراکندگی یا تغییرات):



هنگام مقایسه دو جامعه (متفاوت از نظر) اگر

۱- $\mu_A = \mu_B$

۲- واحدها یکسان باشند.

$\overset{15}{\mu_A}, \overset{0/5}{\sigma_A} = (14/5, 15/5)$

$\overset{10}{\mu_B}, \overset{4}{\sigma_B} = (11, 19)$

$\sigma_A < \sigma_B$ (انحراف معیار (خطا))

جامعه A پراکندگی کمتر
تمرکز بیشتر
خطا کمتر
دقت بیشتر
ثبات بیشتر

تعریف CV_x (ضریب پراکندگی):

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \geq 0 \quad -\infty < \mu_x < +\infty$$ (پراکندگی نسبی یا پارامتر)

هرگاه در دو جامعه یا $\mu_A \neq \mu_B$ یا واحدهای یکسانی نباشند آنگاه برای مقایسه از CV_x استفاده می‌کنیم.

خواص

(1) $CV_a = \frac{\sigma(a)}{\mu(a)} = \frac{0}{a} = 0$

(2) $CV_{x+a} = \frac{\sigma(x \pm a)}{\mu(x \pm a)} = \frac{\sigma_x}{\mu_x + a}$

(3) $CV_{bx} = \frac{\sigma(bx)}{\mu(bx)} = \frac{|b|\,\sigma(x)}{b\,\mu_x} = (b \text{ علامت}) \cdot CV_x$

تبصره:

۲۰٪ به مشاهدات اضافه یا کم شده است.

$$\begin{cases} x + \%20x = 1/2x \\ \text{۲۰} \ldots \end{cases}$$

مثال:

$$CV_{x+20} = \frac{\sigma(x+20)}{\mu(x+20)} = \frac{\sigma(x)}{\mu_x + 20}$$

$$CV_{x+\%20x} = CV_{1/2x} = \frac{\sigma(1/2x)}{\mu(1/2x)} = \frac{1/2\,\sigma(x)}{1/2\,\mu(x)} = \frac{\sigma(x)}{\mu(x)} = CV_x$$

توابع یکنواخت و امید و واریانس:

پیوسته یکنواخت ✓ (مهم)

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\alpha+\beta} & E(x)=\mu=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \alpha<x<\beta & \sigma^2=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12} \end{cases}$$

گسسته یکنواخت

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{n} & E(x)=\mu=\dfrac{n+1}{2} \\ x=1,2,\dots,n & \sigma^2=\dfrac{n^2-1}{12} \end{cases}$$

زمانی به ما می گویند تابع ~~...~~ در فاصله ای ثابت باشد یکنواخت

تابع مولد گشتاور:

خیلی مهم

$$M_x(t)=E\left[e^{tx}\right]=\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} e^{tx} f(x)\,dx = \quad t \ \text{برحسب}$$

شرط لازم: $M_x(t=0)=1$ →

توجه ← اگر شرط برقرار نبود اصلا مسئله را ادامه نمی دهیم

مهم قضیه:

$$M_x(t)^{(n)}\Big|_{t=0} = E(x^n) \quad \text{(مشتق n ام)}$$

$$M_x(t)^{(1)} = \left(\int e^{tx} f(x)\,dx\right)^{(1)}$$

$$= \int x e^{tx} f(x)\,dx\Big|_{t=0} = \int x f(x)\,dx = E(x)$$

$$\text{مشتق دوم} = \int x^2 e^{tx} f(x)\,dx\Big|_{t=0} = \int x^2 f(x)\,dx = E(x^2)$$

مثال: اگر $M_x(t)=(1-4t)^{-2}$ آنگاه واریانس کدام است.

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - E(x)^2$$

$$E(x) = M'_x(t) = -2 \times -4\,(1-4t)^{-3}\Big|_{t=0} = 8$$

$$E(x^2) = M''_x(t) = -2\times -4\times -3\times -4\,(1-4t)^{-4}\Big|_{t=0} = 96$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = 96-64 = 32$$

$$\sigma^2 = 32 \longrightarrow \sigma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته مهم:

بایستی تابع مولد گشتاور توابع مهم مانند: نرمال را حفظ باشیم.

$E[e^{2t}]\ ,\ E[e^{t/2}]$

خیلی مهم

نرمال $\longrightarrow$ $\boxed{M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$

تابع نرمال $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

مثال: در یک توزیع نرمال با $\mu=4$ و $\sigma^2=9$ حاصل $E[e^{\frac{x}{2}}]$ کدام است؟

$$E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\begin{cases} \mu = 4 \\ \sigma^2 = 9 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

تحقیق:

مهم: در توزیع نرمال $\mu=0$ و $E(x)=0$ باشد آنگاه با توجه به تابع مولد گشتاور، $E(x^3)=0$ ، $E(x^5)$ و ...

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \xrightarrow{\mu=0} M_x(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

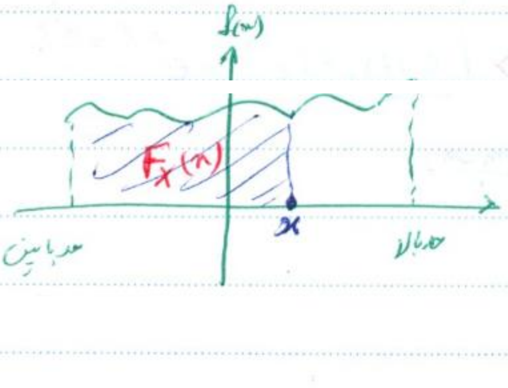
مشتق ۱ و ۳ و ۵ و ... در این تابع صفر می‌شود.

$$M'_x(t) = \frac{2t}{2}\sigma^2 e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \sigma^2 t e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Big|_{t=0} = 0$$

تابع توزیع تجمعی: $F_X(x)$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{\text{حد پایین}}^{x} f(x)\,dx$$

مفهوم (در پیوسته)



خصوصیات $F_X(x)$:

۱) $0 \le F_X(x) \le 1$

۲) همواره از راست پیوسته $F_X(x^+) = F_X(x)$

۳) غیر نزولی

مثال: اگر $y = F_X(x)$ آنگاه $p(y - E(y) < \frac{1}{4})$ کدام است؟

حل: در مرحله اول از یکنواخت بودن آن... باید تغییرات $f(y) = \frac{1}{0+1} = 1 \Rightarrow E(y) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$y = F_X(x)$ $0 < \cancel{y} = F_X(x) < 1$

اگر $\alpha < f(x) < B$ آنگاه $f(x) = \frac{1}{B-\alpha}$

در مرحله دوم: $p(y - \underbrace{E(y)}_{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4}) = p(y < \frac{3}{4}) = \int_0^{\frac{3}{4}} 1\, dy = \boxed{\frac{3}{4}}$

مثال ۲ (F برش نسبت)

نکته: ضرب نقطه شکسته بودن تابع F_X همواره از راست پیوسته است.

x	-۱	۰	۱	۲
$p(x=x) = f(x)$	۰.۱	۰.۳	۰.۲	۰.۴
$p(x \le x) = F_X(x)$	۰.۱	۰.۴	۰.۶	۱

$\begin{cases} F(1) = 0.2 \\ F(1) = 0.6 \end{cases}$ $\begin{cases} F(2) = 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} F(1) = 0.6 \\ F(1^+) = 0.6 \\ F(1^-) = 0.4 \end{cases}$ $\begin{cases} F(-2) = 0 \\ F(-3) = 0 \end{cases}$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0/1 & -1\leq x<0\\ 0/4 & 0\leq x<1\\ 0/6 & 1\leq x<2\\ 1 & x\geq 2\end{cases}$$

مثال ۲: پیوسته‌ها

صرف‌نظر از بحث پیوسته بودن، ما در توابع پیوسته کارمان خیلی ساده‌تر خواهد بود.

اگر $\begin{cases} f(x)=2x \\ 0\leq x\leq 1\end{cases}$ آنگاه تابع تجمعی $F_X(x)$ کدام است؟

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_0^x 2x\,dx=[x^2]_0^x=x^2$$

پس $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

مثال ۳:

اگر $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1\leq x\leq 2\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$ آنگاه تابع $F_X(x)$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1\leq x<2\\ 0 & \text{سایر}\end{cases} \longrightarrow F_X(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \int_0^x x\,dx & 0\leq x<1\\ \int_0^1 x\,dx+\int_1^x (2-x)\,dx & 1\leq x<2\\ 1 & x\geq 2\end{cases}$$

خیلی مهم تست مثال ۴ : (کامپیوتر)

اگر $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$ باشد آنگاه $F_X(x)$ (تابع تجمعی) کدام است ؟

$\begin{cases} x & |x| & x \geq 0 \\ -x & |x| & x < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} e^{x} & x < 0 \end{cases}$ $\quad f_X(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ & x \geq \end{cases}$

$$F_X(\overset{z}{x}) = P(X \leq \overset{z}{x}) = \int_{\text{ابتدای}}^{\overset{z}{x}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\overset{z}{x}} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \begin{cases} \xrightarrow{\overset{z}{x} < 0} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{x} \\ \xrightarrow{\overset{z}{x} \geq 0} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-x} dx \end{cases}$$

$-\infty \qquad z \geq 0 \quad +\infty$

$-\infty \qquad z < 0$

مثال و نکته مهم (مهم)

اگر $F_X(x) = x$ باشد و $Y = -\ln(x)$ آنگاه $F_Y(y)$ را حساب کنید.

روش تستی $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln x \leq y) = P(X \geq e^{-y})$

$= 1 - P(X < e^{-y})$

خیلی مهم

$= 1 - \underbrace{x}_{F_X(x)} = \boxed{1 - e^{-y}}$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه چهارم

تابستان 1388

جلسه چهارم:

تبدیل $F_X(x)$ به $f_X(x)$:

$$F_X(x) \xrightarrow[\text{2) ناپیوسته: } \underbrace{F_X(x^+) - F_X(x^-) \neq 0}_{f_X(x) = P_X(x)}]{\text{1) پیوسته} \text{ بازه: } F_X'(x)} f_X(x)$$

x	۱-	۰	۱	۲
$f(x)$	۰/۱	۰/۳	۰/۴	۰/۲
$F_X(x)$	۰/۱	۰/۴	۰/۸	۱

تست (سراسری ۸۱)

ج.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{4} & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\leq x<2 \\ \frac{x}{4} & 2\leq x<4 \\ 1 & x\geq 4 \end{cases} \xrightarrow{f_X(x)} \begin{cases} F(0^+)-F(0^-) = 0 & x<0 \\ \frac{x}{2} & 0<x<1 \\ F(1^+)-F(1^-) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4} & x=1 \\ 0 & 1<x<2 \\ F(2^+)-F(2^-) = \frac{2}{4}-\frac{1}{2} = \frac{0}{4} & x=2 \\ \frac{1}{4} & \\ F(4^+)-F(4^-) = 0 & x=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0<x<1 \text{ پیوسته} \\ \frac{1}{4} & x=1 \text{ گسسته} \\ \frac{1}{4} & x=2 \text{ "} \\ \frac{1}{4} & 2<x<4 \text{ پیوسته} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$f_X(x) = P_X(x)$ هم

" " "

امید ریاضی : $E(X) = \int x f(x) + \sum x f(x)$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{x}{2}\, dx + 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{6} + \int_2^3 x \times \frac{1}{4}\, dx$$

$$= \frac{19}{12}$$

نکته:

هر نقطه‌ای در $F_X(x)$ جهش داشته باشد $f_X(x)$ نیز در آن نقطه گسسته است ولی عکس آن صادق نیست.

نکته:

$$E(X) = \begin{cases} \int 1 - F_X(x) & x \geq 0 \\ \int -F_X(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

فقط می‌توانند $E(X)$ را که ... $E(X)$ را از فرمول حساب کند.

ص ۲۳۳ سؤال ۳۵:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ -1 + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{F'_X(x)} f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$x = 1$ نباید بررسی شود چون ماکزیمم و مینیمم در آنجا پیوسته باشد

نقطه ناپیوستگی ندارد.

$F(0^-) = F(0^+) = 0$

$F(1^+) = F(1^-) = \frac{1}{2}$ نقطه ناپیوستگی ندارد.

$F(2^+) = F(2^-) = 1$

$$E(x) = \int x f(x) = \int_0^1 x \cdot x\, dx + \int_1^2 x(2-x)\, dx = 1$$

تابع احتمال تجمعی : $F_X(x)$

یادآوری :

پیوسته : $P(\alpha < x < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ گسسته : $P(\alpha < x < \beta) = \sum_{\alpha < x < \beta} f(x)$

تعریف : $P(X \leq \alpha) = F_X(\alpha) = \int_{\text{حد پایین}}^{\alpha} f(x)\, dx$

1) $P(x = \alpha) = F(\alpha^+) - F(\alpha^-) \xrightarrow{\text{در بازه}}$ پیوسته $= 0$ ، گسسته $\neq 0$

2) $\begin{cases} P(x \leq \alpha) = F_X(\alpha) \\ P(x > \alpha) = 1 - F_X(\alpha) \end{cases}$

3) $\begin{cases} P(x < \alpha) = F_X(\alpha^-) \\ P(x \geq \alpha) = 1 - F_X(\alpha^-) \end{cases}$

4) $P(\alpha \leq x \leq \beta) = P(x = \alpha) + \underbrace{P(\alpha < x < \beta)}_{F(\beta^-) - F(\alpha^+)} + P(x = \beta)$

مثال 1 :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{3} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} P(x = \frac{1}{2}) = ? \\ P(x = 1) = ? \\ P(x = 2) = ? \\ P(x = 3) = ? \end{cases}$ $\begin{cases} P(x < 1) = ? \\ P(x \leq 1) = ? \end{cases}$ $\begin{cases} P(x < \frac{1}{2}) \\ P(x \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$

نکته:
$P(x=\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}^+) - F(\frac{1}{2}^-) = 0$

$P(x=1) = F(1^+) - F(1^-) = \frac{1}{4}$

$P(x=2) = F(2^+) - F(2^-) = \frac{1}{6}$

$P(x=3) = F(3^+) - F(3^-) = 0$

در هر نقطه $x = x_0$ احتمال در هر نقطه دیگر ۰ (صفر) است

$P(x<1) = F(1^-) = \frac{1}{4}$

$P(x\le 1) = F(1) = \frac{1}{2}$

$P(x<\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}^-) = \frac{1}{16}$

$P(x\le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

$P(x>2) = 1 - P(x\le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(x\ge 2) = 1 - P(x<2) = 1 - F(2^-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(1\le x\le 3) = \overset{\frac{1}{4}}{P(x=1)} + \underbrace{P(1<x<3)}_{F(3^-) - F(1^+) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} + \overset{0}{P(x=3)}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

- محاسبه $F_Y(y)$ از روی $F_X(x)$ و $y = g(x)$

روش اول: $F_Y(y) = F_X(x)$ مستقیماً از

روش دوم: $F_X(x) \to f_X(x) \to f_Y(y) \to F_Y(y)$

ص ۳۴ س ۴

تمام بازه‌های F_X باید در نظر گرفته شود

$$F_X(x) = \begin{cases} \cancel{0} & \cancel{x\le 0} \\ x & 0\le x\le 1 \\ \cancel{1} & \cancel{x>1} \end{cases} \xrightarrow{y = -\ln x} F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} \end{cases}$$

سوال سوالاتی حل می‌کند چون بازه پیوسته است

روش اول: $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(-\ln x \le y) \overset{x-1}{=} P(x \ge e^{-y}) = 1 - P(x < e^{-y})$

$= 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y}$

روش تبدیل، $f_X(x) = x \xrightarrow[\text{پیدا کن}]{F_X(x)}$ $\boxed{f_X(x)=1 \quad 0<x<1 \xrightarrow[\ln x = e^{-y}]{y=-\ln x} y = 1-e^{-1} = e^{-y}}$ $\rightarrow F_Y(y) = \int_{\text{حد پایین}}^{y} f(y)dy$

$$= \int_0^y e^{-y}dy = [-e^{-y}]_0^y = 1-e^{-y}$$

مثال، اگر $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$ و $y = \frac{2x+1}{3}$ آنگاه $F_Y(y)$ کدام است؟

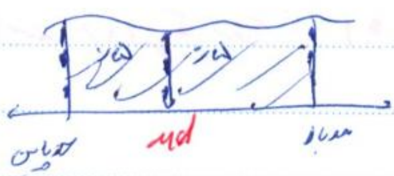
$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P\left(\frac{2x+1}{3}\le y\right) = P\left(\frac{3y-1}{2}\ge x\right) = F_X\left(\frac{3y-1}{2}\right) = \left(\frac{3y-1}{2}\right)^2$$

$$\cancel{= F_X(3)}$$

میانه (Me, md):

برخلاف میانگین که نقطه ثقل جامعه است، نقطه‌ای است که نقاط وسط جامعه را مشخص می‌کند.

$\mu = \bar{X} = E(x)$



$p(x\ge md)+p(X\le md)=1$

نکته 1:

اگر در نقطه‌ای مثل b که $p(x\le b) = p(x\ge b)$ باشد آنگاه قطعاً b میانه خواهد بود.

$p(x\le b) = p(x\ge b)$

$\downarrow\uparrow$

$b =$ میانه

* یادآوری: همواره $p(x\le b)+p(x\ge b)=1$

نکته 2:

محاسبه میانه، $= p(x\le md) = \int_{\text{حد پایین}}^{md=?} f(x)dx = \frac{1}{2} = F_X(md)$

شرط: پیوسته باشد

$$\begin{cases} F_X(md) = \frac{1}{2} \\ \int_{\text{حد پایین}}^{md} f(x)dx = \frac{1}{2} \end{cases}$$

تمرین سوال ۱۷

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

p(میانه $< x <$ میانگین) = ?

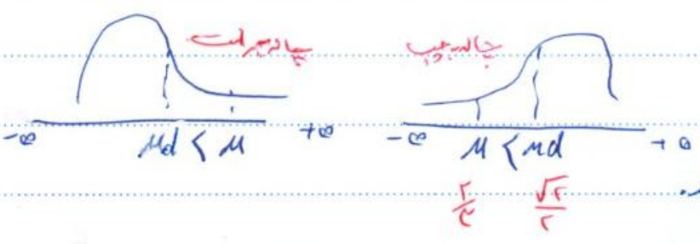
$$p(\text{میانگین} < x < \text{میانه}) = \int_{\mu}^{Md} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{Md} 2x\,dx = [x^2]_{\mu=\frac{2}{3}}^{Md=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\mu = E(x) = \int_0^1 x\, f(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\text{پایین}=0}^{Md} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \longrightarrow [x^2]_0^{Md} = \frac{1}{2} \Rightarrow Md^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow Md = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

غ ق ق (چون بازه $0<x<1$ هست)

یادآوری:



مجموعه فقط یک میانگین و یک میانه دارد
و هر دو مقدار میانه و میانگین می‌تواند + و - باشند.

تابع توزیع توأم $f(x,y)$:

$$\begin{cases} \text{I)}\ f(x,y) \geq 0 \\ \text{II)}\ \iint f(x,y)\, \underset{dy\,dx}{dx\,dy} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I)}\ 0 \leq f(x,y) \leq 1 \\ \text{II)}\ \sum_{\forall y} \sum_{\forall x} f(x,y) = 1 \quad (\forall x\ \forall y) \end{cases}$$

مثال مفهومی (گسسته):

$p(x=-1, y=3)$

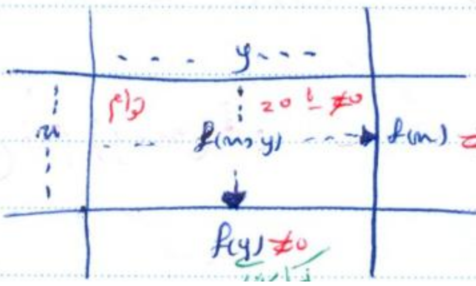
$x \backslash y$ (مقادیر x، مقادیر y)	۳	۴	۷	$f(x)$ کناره‌ای (حاشیه‌ای) $= \sum_{\forall y} f(x,y)$
-1	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۷ $p(x=-1)$
۲	۰/۱	۰	۰/۲	۰/۳ $p(x=2)$
$f(y)$ کناره‌ای (حاشیه‌ای) $\sum_{\forall x} f(x,y)$	۰/۲ $p(y=3)$	۰/۲ $p(y=4)$	۰/۶ $p(y=7)$	$\sum_{\forall x}\sum_{\forall y} f(x,y) = 1$

احتمال توأم

$p(x=-1, y=4)$

$x \backslash y$ (مقادیر x، مقادیر y)	۴	۷	۹	کناره‌ای (حاشیه‌ای) $f(x) = \sum_{\forall y} f(x,y)$
-1	۰/۵	۰	۰/۱	۰/۶
۳	۰/۲	۰/۱	۰/۱	۰/۴
$f(y) = \sum_{\forall x} f(x,y)$ کناره‌ای (حاشیه‌ای)	۰/۷ $p(y=4)$	۰/۱ $p(y=7)$	۰/۲ $p(y=9)$	$\sum\sum f(x,y) = 1$

یادآوری:



نکته: حتما کناره‌ای‌ها خلاف صفر هستند.

نکته: توابعی که توأم آنها صفر می‌شود ناسازگار هستند.

توابع کناره‌ای (حاشیه‌ای):

$$f(x) = \int_{\forall y} f(x,y)\,dy$$

$$f(y) = \int_{\forall x} f(x,y)\,dx$$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه پنجم

تابستان 1388

جلسه پنجم:

اصل ضرب (شمارش):

هرگاه عملی شامل k مرحله باشد به طوری که مرحله اول آن به n_1 طریق، ... و مرحله kام به n_k طریق قابل انجام باشد کل این عمل به $n_1 \times \dots \times n_k$ حالت قابل انجام است.

مثال:

با ارقام ۶ و ۲ و ۳ و ۰ و ۷ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت؟

تکرار مجاز: $\boxed{4}\,\boxed{5}\,\boxed{5} = 4 \times 5 \times 5 = 100$

تکرار غیرمجاز: $\boxed{4}\,\boxed{4}\,\boxed{3} = 4 \times 4 \times 3 = 48$

مثال: با ارقام ۰ تا ۹ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت؟

مجاز: $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

غیرمجاز: $9 \times 9 \times 8 \times 7 =$

مثال: با ارقام ۰ تا ۹ چند عدد ۳ رقمی فرد می‌توان ساخت؟

مجاز: $\boxed{9}\,\boxed{10}\,\boxed{5}$ $\quad 9 \times 10 \times 5 = 450$

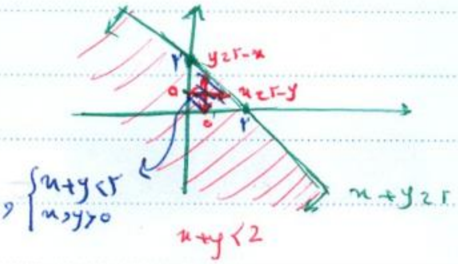
غیرمجاز: $\boxed{8}\,\boxed{8}\,\boxed{5}$ $\quad 8 \times 8 \times 5 = 320$

Subject

Year Month Day ( )

مثال ۳ :

$$\begin{cases} f(x,y) = cxy \\ x>0 \quad y>0 \\ x+y<2 \end{cases}$$

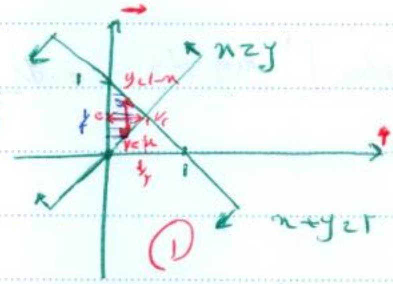


$$\int_0^2\int_0^{2-y} cxy \, dx = \int_0^2\int_0^{2-x} cxy = 1 \Longrightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

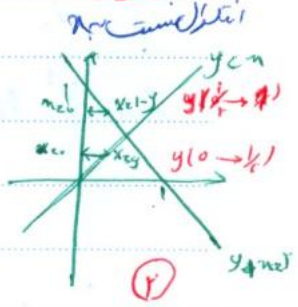
مثال ۴ :

$$\begin{cases} f(x,y) = ax \\ x>0 \quad y>0 \\ x+y<1 \quad , \quad x<y \end{cases}$$

انتگرال نسبت : y



انتگرال نسبت به x



نکته : آن انتگرالی را در نظر می‌گیریم که در دو ناحیه پوشش x حد را به عبارت در دو محدودیت مشخص شد)

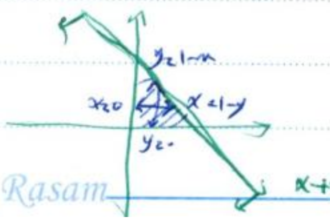
$$\underbrace{\int_0^{1/2}\int_x^{1-x} ax \, dy\,dx = 1}_{\text{با کرانت}} \quad (1)$$

یا

$$\int_0^{1/2}\int_0^{y} ax \, dx\,dy + \int_{1/2}^{1}\int_0^{1-y} ax \, dx\,dy \quad (2)$$

مثال ۵ :

$$x+y<1 , \quad x>0 , \quad y>0$$



$$f(x) = \int_0^{1-x} 4x \, dy = 4xy\Big|_0^{1-x} = 4x(1-x)$$

$$f(y) = \int_0^{1-y} 4x \, dx = \frac{4}{2}x^2\Big|_0^{1-y} = 2(1-y)^2$$

Pars Rasam

استقلال متغیرهای تصادفی:

فرم بکار رفته احتمال توأم

x, y مستقل (ناوابسته) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f(x,y) = \underbrace{f(x)}_{\text{حاشیه‌ای}} \cdot \underbrace{f(y)}_{\text{حاشیه‌ای}} \\ \forall x, y \end{cases}$

x, y وابسته $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f(x,y) \neq f(x) \cdot f(y) \\ \exists x, y \end{cases}$

مثال ۱ گسسته:

x \ y	۴	۹	f(x)
-۱	۰/۲	۰/۳	۰/۵
۷	۰/۲	۰/۳	۰/۵
f(y)	۰/۴	۰/۶	

f(x,y)

۰/۴ × ۰/۵ = ۰/۲
۰/۴ × ۰/۵ = ۰/۲
۰/۵ × ۰/۶ = ۰/۳
۰/۵ × ۰/۶ = ۰/۳

$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

پس مستقل هستند

x \ y	۴	۹	f(x)
-۱	۰/۲	۰/۳	۰/۵
۷	۰/۳	۰/۲	۰/۵
f(y)	۰/۵	۰/۵	

۰/۵ × ۰/۵ = ۰/۲۵ ≠ ۰/۲
۰/۵ × ۰/۵ = ۰/۲۵ ≠ ۰/۳

$\Rightarrow f(x,y) \neq f(x) \cdot f(y)$

پس وابسته هستند

نکته: اگر در یک جدول یکی از f(x,y) ها صفر باشد پس حتماً x,y وابسته اند زیرا

x \ y				
	۰/۱	۰	۰/۲	۰/۳ ≠ ۰
	۰/۳	۰/۲	۰/۱	
		۰/۳ ≠ ۰		

می باشد

→ حتماً وابسته است.

Subject
Year Month Day ( )

ص ۴۹ مثال ۲

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/3 & (x,y)=(-1,0),(0,1),(1,0) \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

	0	1	
-1	1/3	0	1/3
0	0	1/3	1/3
1	1/3	0	1/3
	2/3	1/3	1

وابسته هستند به دلیل وجود $f(x,y)=0$ ص ۴

مثال ۳ (پیوسته)

✓ شرط مستقل بودن در توابع پیوسته:

۱) حدود از هم آزاد باشند.

۲) بتوان تابع را به صورت ضرب دو تابع مستقل از هم (از x و y) نوشت.

* حتماً باید هر دو شرط فوق همزمان برقرار باشد.

$$\begin{cases} f(x,y)=e^{-(x+y)}=e^{-x}\cdot e^{-y} \\ 0<x<\infty \\ 0<y<\infty \end{cases}$$

حدود آزاد ✓

مستقل

ضرب دو تابع مستقل

$$\begin{cases} f(x,y)=x+y \neq (\quad)(\quad) \\ 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$$

حدود آزاد ✓

وابسته

$$\left\{ f(x,y)=2e^{-x}e^{-y} \right.$$

$$\begin{cases} f(x,y)=\frac{1}{4}\, x^0 y^0 \\ 0<x<2 \\ 0<y<4 \end{cases}$$

حدود آزاد

تابع یکنواخت می‌باشد

مستقل

$$f(x)=\frac{1}{2} \quad f(y)=\frac{1}{4} \Rightarrow f(x,y)=f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{8}$$

تمرین:

همواره $P(x<y)+P(x=y)+P(x>y)=1$

گسسته | پیوسته

$=0$ $\quad \neq 0$ یا $=0$

مثال 1 گسسته :

$x \backslash y$	۱	۳	۵
۱	۰/۱ ($x=y$)	۰/۴ ($x<y$)	۰/۲ ($x<y$)
۲	۰/۱ ($x>y$)	۰/۱ ($x<y$)	۰/۱ ($x<y$)

$P(X=Y)=۰/۱$

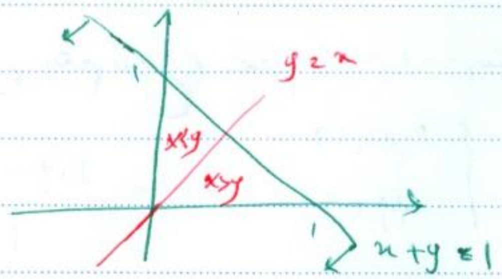
$P(X<Y)=۰/۸$

$P(X>Y)=۰/۱$

$P(X<Y)+P(X=Y)+P(X>Y)=1$

مثال 8

$$\begin{cases} f(x,y)=4x \\ x>0 \quad y>0 \\ x+y<1 \end{cases}$$



$P(x<y)=\int_0^{1/2}\int_x^{1-x} 4x \, dy\, dx = 1/6$

$P(x>y)=\int_0^{1/2}\int_y^{1-y} 4x \, dx\, dy = 5/6$

$P(x=y)=0$

قضیه 1:

در تابع پیوسته متقارن با حدود داریم $P(X<Y)=P(X>Y)=1/2$

مثال

$$\begin{cases} f(x,y)=x+y \\ 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$$

تابع متقارن: تابعی است که هرگاه جای x و y را عوض کنیم تابع تغییر نکند.

Subject............ Year........ Month........ Day........ ( )

سوال صفحه ۲۲۲ س ۶۴ ؟

$$\begin{cases} f(x,y) = k \cdot |1-x-y| \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \qquad P(x<y) = a$$

a و k را بیابید.

تمرین:

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 2 \end{cases} \quad \text{تابع چگالی مشترک} \quad P(x<y) = \tfrac{1}{2} \quad P(x>y) = \tfrac{1}{2}$$

نادرست، چون $f(x,y)$ متقارن $\Rightarrow P(x<y) = \frac{1}{2}$

identically independed destributed

قضیه ۷: هرگاه دو متغیر مستقل و هم توزیع باشند (iid) آنگاه: $P(x<y) = P(x>y)$

یادآوری: دو متغیر با توزیع یکسان (هم توزیع) فقط در اسم با هم متفاوتند.

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(y) = 2y \\ 0 < y < 1 \end{cases} \longrightarrow E(y) = E(x)$$

نتیجه:

توزیع:

پیوسته: $P(x<y) + P(x>y) = 1 \xrightarrow{iid} P(x<y) = P(x>y) = \frac{1}{2}$

گسسته: $P(x<y) + P(x=y) + P(x>y) = 1 \xrightarrow{iid} P(x>y) = P(x<y) = \dfrac{1 - P(x=y)}{2}$

در کل $\leq \frac{1}{2}$

صفحه ۲۴۰ س ۴۳ ؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) بستگی به توزیع دارد ✓

اگر گسسته بود در توزیع پیوسته $= \frac{1}{2}$ و اگر گسسته بود $\leq \frac{1}{2}$ (یعنی $P(x<y)$ هم درست بود. طبق نتیجه)

نکته: اگر x و y iid و گسسته بودند ؟ $P(x=y) = \sum\sum_{x=y} f(x,y)$

Pars Rasam

چون مستقل هستند پس: $\sum_{x<y}\sum f(x)\cdot f(y)$

و چون هم توزیع هستند پس می‌نویسیم: $\boxed{\sum_{\forall x} f(x)^2}$

مثال:

اگر $f(x)=q^{x-1}p$, $x=0 \dots \infty$ و $f(y)=q^{y-1}p$, $y=0 \dots \infty$ هم توزیع، x و y مستقل باشند $(p+q=1)$ آنگاه $P(x=y)$

x و y (iid) $\Rightarrow$ مستقل و هم توزیع

$$P(x=y)=\sum_{x=0}^{\infty} f(x)^2$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} q^{2x-2}p^2=\frac{p^2}{q^2}\sum_{x=0}^{\infty} q^{2x}$$

$0<p+q=1 \Rightarrow 0<p<1$
$0<q<1$

تصاعد هندسی

$$=\frac{p^2}{q^2}\cdot(q^0+q^2+q^4+\cdots)$$

$$=\boxed{\frac{p^2}{q^2}\times\left(\frac{1}{1-q^2}\right)}$$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه هفتم

تشکل دانشجویان و فارغ التحصیلان کامپیوتر دانشگاه آزاد کاشان

www.yadmane.com

تابستان 1388

جلسه‌ی هفتم:

محاسبه احتمال در توابع $f(x,y)$:

۱) متغیرهای گسسته

$$P(\text{محدودیت}) = \sum_{\text{محدودیت}}\sum f(x,y)$$

مثال:

$x \backslash y$	۰	۴	۵
۲	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۳	۰/۱	۰/۱	۰/۲

$$P(x+y<3) = \sum_{x+y<3}\sum f(x,y) = 0.1 = f(2,0)$$

$$P(x^2=y) = \sum_{x^2=y}\sum f(x,y) = f(2,4) = 0.2$$

$$P(x>y) = \sum\sum f(x,y) = f(2,0) + f(3,0) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

۲) پیوسته

روش عمومی: $P(A) = \int_A f(x,y)\,dx\,dy$ ($= dy\,dx$)

تبصره:

اگر x,y یکنواخت باشند:

روش سنتی: $P(A) = \dfrac{\text{سطح } A}{\text{سطح کل}}$

یادآوری:

- x,y یکنواخت هستند اگر $f(x,y) = \dfrac{1}{\text{سطح کل}}$ عدد
- اگر $f(x,y)$ را ندهند به طور پیش‌فرض یکنواخت فرض می‌کنیم

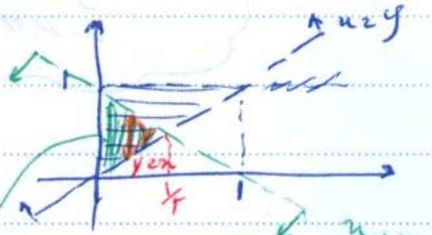
روش عمومی روی سطح یکنواخت: $p(A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ $dy\,dx$

یکنواخت $\rightarrow$ $\frac{1}{\text{سطح کل}}$ عدد

$\Rightarrow p(A) = \frac{1}{\text{سطح کل}} \times A$ مساحت

مثال ۱: (غیر یکنواخت)
سال ۸۲
س ۴۳

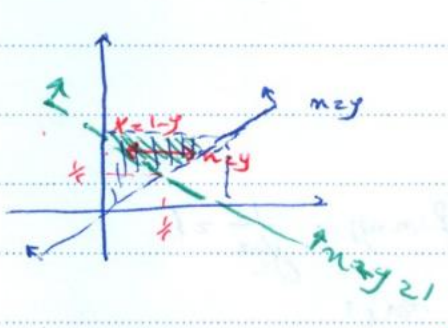
$$\begin{cases} f(x,y) = 6x \\ 0 < x < y < 1 \end{cases}$$



$p(x+y<1) = \int_0^{1/2}\int_x^{1-x} 6x\,dx\,dy = \frac{1}{4}$

چون توزیع یکنواخت نبوده است هیچ‌گاه سطح نیز یکنواخت در نظر گرفته نشده است.

$p(x+y>1) = \int_{1/2}^{1}\int_{1-y}^{y} 6x\,dx\,dy = \frac{3}{4}$

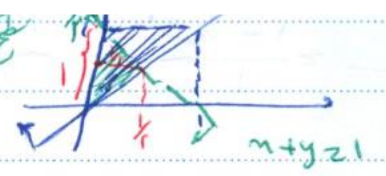


$p(x+y=1) = 0$

مثال ۲: (یکنواخت)

چون عدد مبین توزیع یکنواخت در ناحیه یک عدد باشد یعنی آن برابر

$$\begin{cases} f(x,y) = 2 = \frac{1}{1/2} \ \text{سطح کل} \\ 0 < x < y < 1 \end{cases}$$



روش عمومی: $\iint 2\,dx\,dy = \frac{1}{2}$

روش تستی: $p(x+y<1) = \frac{\text{سطح مساحت}}{\text{سطح کل}} = \frac{\frac{1 \times 1/2}{2}}{1/2} = \frac{1}{2}$

Subject

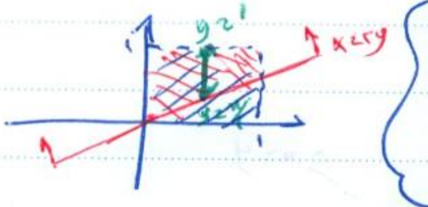
Year .... Month .... Day .... ( )

نکته: هیچ‌گاه نمی‌توان از روش تبدیل استفاده کرد، مگر اینکه تابع یکنواخت باشد.

مثال ۳: (غیر یکنواخت):

ص ۲۴۹ ش ۱۲

$$\begin{cases} f(x,y) = x+y \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$



یادآوری:

$P(x<y) + P(x>y) = 1$

$P(x=y) = 0$

همواره پیوسته

تابع متقارن

$$P\left(\frac{x}{y} < 2\right) = P(x < 2y)$$

$$= \int_0^1\int_{y/2}^1 x+y \, dy \, dx = \frac{19}{24}$$

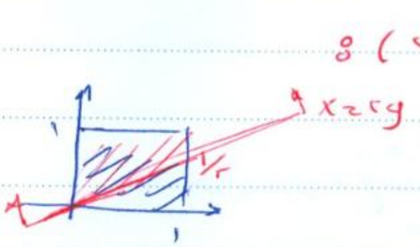
یا $\int_0^1\int_0^{x/2} x+y \, dy \, dx = \frac{5}{24}$

پس $1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$

راحت‌تر است چون هردو حد صفر دارد و در محاسبه راحت‌تر هستیم

مثال ۴: (یکنواخت):

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{1}{\text{سطح کل}} = 1 \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$



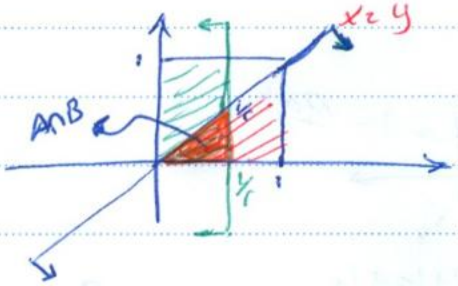
روش اول: $P\left(\frac{x}{y} < 2\right) = P(x < 2y) = \frac{\quad}{\text{سطح کل}} = \frac{\quad}{1} = \frac{\quad}{1} = \frac{3}{4}$

روش دوم: $P\left(\frac{x}{y} < 2\right) = P(x < 2y) = \int_0^1\int_{x/2}^1 1 \, dy \, dx = \frac{3}{4}$

مثال ۵: ص ۲۲۷ مس ۵۸ ، ص ۲۲۹ مس ۳۷ ، ص ۲۴۱ مس ۸۹

x و y در بازه ۰ تا ۱ قرار دارند (وقتی هیچ چیزی نمی‌گوییم تابع حتماً یکنواخت است)

$A=\{x<\frac{1}{2}\}$ $B=\{x>y\}$ $P(A|B)$

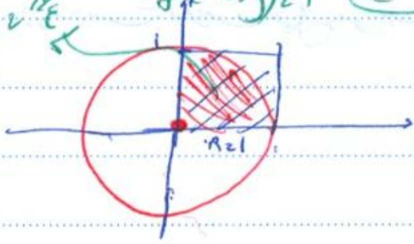


$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(x<\frac{1}{2}, x>y)}{P(x>y)}$

$=\frac{\frac{\text{سطح } A\cap B}{\text{سطح کل } 1}}{\frac{\text{سطح سایه}}{\text{سطح کل } 1}}=\frac{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{1}}{\frac{\frac{1}{2}}{1}}=\frac{1}{4}$

مثال ۶ (یکنواخت)
ص ۲۳۹ مس ۱۵

x و y یکنواخت در بازه ۰ تا ۱ ← چون ذکر شده یکنواخت $f(x,y)=1$



$\frac{\pi R^2}{4}=\frac{\pi}{4}$

روش تستی: $P(x^2+y^2<1)=\frac{\text{سطح سایه}}{\text{سطح کل}}=\frac{\frac{\pi r^2}{4}}{1}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{\pi}{4}$

مساحت دایره $=\pi r^2$

روش تشریحی $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 1\times r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{4}$

مثال ۷ (غیریکنواخت) ص ۲۴۰ مس ۴۲

$$\begin{cases} f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ -\infty<x<+\infty \\ -\infty<y<+\infty \end{cases}$$

دایره: $x^2+y^2=r^2$

$P(x^2+y^2<4)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\theta$

مثال الکترونیک ص ۴۴۷ س ۱۴

یادآوری: معادله بیضی با اقطار a و b:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مساحت بیضی: πab

x و y یکنواخت در بازه ۰ تا ۱ هستند:

$P(4x^2+9y^2>1)$

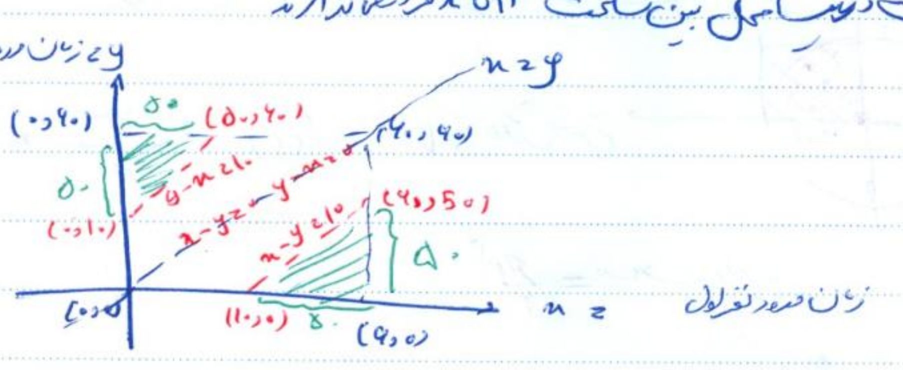
$P\left(\frac{x^2}{\boxed{1/4}}+\frac{y^2}{\boxed{1/9}}>1\right) = \frac{\text{مساحت}}{\text{مساحت کل}}$ ، $\frac{\pi ab}{4}$ ، $1-\frac{\pi ab}{4}$

a^2 b^2

$a=\frac{1}{2}\quad b=\frac{1}{3} = \frac{1-\frac{\pi ab}{4}}{1} = 1-\frac{\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{4} = 1-\frac{\pi}{24}$

- متغیرهای یکنواخت و نمایش هندسی آنها:

دو دوست در یک پارک بین ساعت ۱۲ تا ۱ قرار ملاقات گذارند



تاخیر ۱۰ دقیقه‌ای برای x و توقف ۵ دقیقه‌ای y (انتظار) $\quad x>y:\ x-y=10$ دقیقه

تاخیر ۱۰ دقیقه‌ای برای y و توقف ۵ دقیقه‌ای برای x (انتظار) $\quad x<y:\ y-x=10$ دقیقه

- احتمال آنکه تفاوت ... که به محل می‌رسند بیش از ۱۰ دقیقه باشد:

$$P(|x-y|>10) = \frac{\frac{50\times 50}{2} + \frac{50\times 50}{2}}{3600} = \frac{25}{36}$$

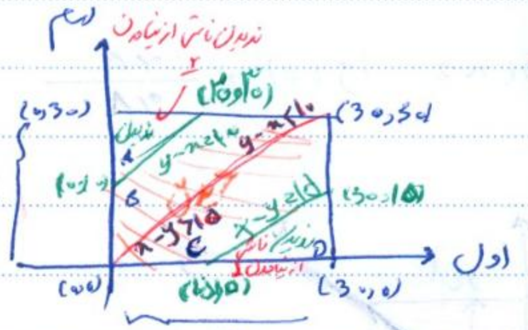
$\begin{cases} x-y>10 \\ y-x>10 \end{cases}$

قرار می‌گذارند هر که زودتر رسید ۱۰ دقیقه توقف کند پس بعد احتمال آنکه همدیگر را نبینند

مثال ۱، ص ۴۳ س ۹۰

دو قطار در فاصله ۱۲ تا ۱۲:۳۰ وارد ایستگاه می‌شوند. قطار اول ۱۰ دقیقه توقف پیش می‌رود

قطار دوم 15 دقیقه توقف پیش می‌رود.



A توقف بر قطار اول اگر قطار دوم نیامده باشد انتظار است ولی می‌تواند ۱۰ دقیقه تاخیر در قطار دوم باشد.

$$\frac{B+C}{900}$$ (سطح کل)

B توقف بر قطار دوم اگر قطار اول نیامده باشد انتظار است ولی می‌تواند ۱۵ دقیقه تاخیر در قطار اول باشد

C ״ ״ ״ ״ ״ ۱۵ دقیقه قطار اول

تابع شرطی $f(x|y)$ امید شرطی $E(x|y)$ تابع گشتاور توأم

جلسه هشتم :

تابع توزیع شرطی :

معنای عوض است و به همین دلیل در مخرج قرار می‌گیرد

y به شرط x : $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)} \overset{x, y \text{ مستقل}}{=} f(x)$

x به شرط y : $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} = f(y)$

مثال ۱ : (گسسته)

x \ y	۳	۵	۷
-1	./۱	./۲	./۱
0	./۰۵	./۰۵	./۱۵
1	./۰۵	./۰۵	./۲۵
		./۳	./۵

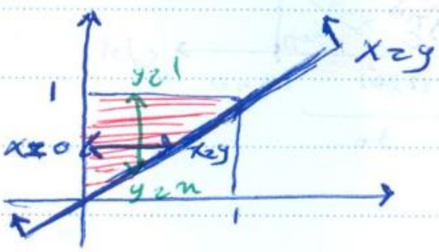
$y \geq ۵$; $x=-1$; $x \geq 0$

$P(x=-1 \mid y \geq ۵) = \dfrac{./۳}{./۸}$

$P(x \geq 0 \mid y \geq ۵) = \dfrac{./۵}{./۸}$

مثال ۲ : (پیوسته)

$$\begin{cases} f(x,y) = 4x \\ 0 < x < y < 1 \end{cases}$$

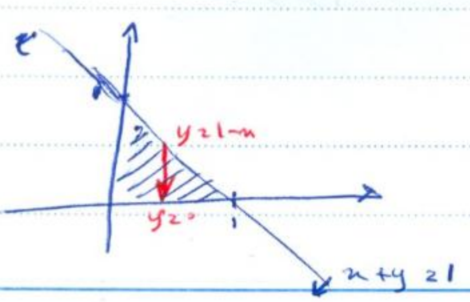


$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{4x}{\int_0^y 4x\,dx} = \frac{x}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y} = \frac{2x}{y^2}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{4x}{\int_x^1 4x\,dy} = \frac{1}{[y]_x^1} = \frac{1}{1-x}$$

تست سراسری :

$$\begin{cases} f(x,y) = 2 \\ x+y < 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$$



$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{2}{\int_0^{1-x} 2\,dx} = \frac{1}{[y]_0^{1-x}} = \frac{1}{1-x}$$

یادآوری:

می‌دانیم: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

حال

✓ $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$ $\quad dy\,dx$

$F_{X|Y}(x,y) = \dfrac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$

$F_{Y|X}(x,y) = \dfrac{F_{X,Y}(x,y)}{F_X(x)}$

(۴-۹) سوال ۹۰:

x و y مستقل و یکنواخت در بازه ۰ تا ۲: ←

یکنواخت $f(x)=\frac{1}{b-a}$

$f(x) = \frac{1}{2} \quad 0<x<2$

$f(y) = \frac{1}{2} \quad 0<y<2$

مستقل $f(x,y)=f(x)\times f(y)$

$f(x,y) = \frac{1}{4} \quad 0<x<2,\ 0<y<2$

$A = \{|y-x| \le 1\}$ $\qquad P(A \mid x=1) = ?$

$Z = |y-x|$

الف) $P(A \mid x=1) = f(A \mid x=1) = \dfrac{f(A, x=1)}{f(x=1)} = \dfrac{f(\overbrace{|y-x|}^{0\le y\le 2}, x=1)}{f(x=1)}$

$= \dfrac{\int_0^2 \frac{1}{4}\,dy}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\left[\frac{y}{4}\right]_0^2}{\frac{1}{2}} = 1$

ب) $f_{Z|X}(0|1) = f(Z=0|X=1) = ?$

$$f(Z=0|X=1) = \frac{f(Z=0, X=1)}{f(X=1)} = \frac{f(Y-X=0, X=1)}{f(X=1)} = \frac{f(X=1, Y=1)}{f(X=1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

ج) $F_{Z|X}(0|1) = F(Z=0|X=1) = \frac{F(Z=0, X=1)}{F(X=1)} = \frac{F(Y-X=0, X=1)}{F(X=1)}$

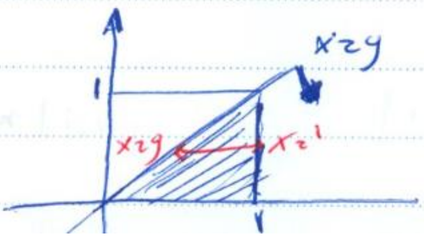
$$= \frac{F(X=1, Y=1)}{F(X=1)} = \frac{\frac{xy}{4}\Big|_{x=1,\,y=1}}{\frac{x}{2}\Big|_{x=1}} = \frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{\text{پایین}}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{\text{پایین}}^{y} \int_{\text{پایین}}^{x} \underbrace{f(x,y)}_{1/4}\,dx\,dy = \int_0^y \left[\frac{x}{4}\right]_0^x dy = \frac{xy}{4}$$

صورت سوال ۳۵ :

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x \\ 0 < y < x < 1 \end{cases}$$



ابتدا خود تابع شرطی را بدست آورده و پس مقدار آن احتمال را می‌کشیم.

$$P(x \le 3/4 \mid y = 1/2) = ?$$

$$g: f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{3x}{\int_y^1 3x\,dx} = \frac{x}{\frac{x^2}{2}\Big|_y^1} = \frac{x}{\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}}$$

از ص ۱۴۴ تا ص ۱۴۸ مطالعه شود

$$f(x < \tfrac{3}{4} \mid y = \tfrac{1}{2}) = \frac{f(x < 3/4 ,\, y = 1/2)}{f(y = 1/2)} = \frac{\int_0^{3/4} x\,dx}{\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^2}{2}} = \frac{\frac{x^2}{2}\Big|_0^{3/4}}{3/8}$$

اگر $y = 1/2$ در صورت و مخرج محدودیت داشتیم باید آن را هر کدام جداگانه را می‌نوشتیم

$$= \frac{3}{4}$$

امید شرطی:

$$E(x \mid y) = \int x\, f(x \mid y)\, dx \xrightarrow{x,y \text{ مستقل}} E(x)$$

$$E(y \mid x) = \int y\, f(y \mid x)\, dx \xrightarrow{x,y \text{ مستقل}} E(y)$$

نتیجه گیری:

x و y مستقل $\Longleftrightarrow$

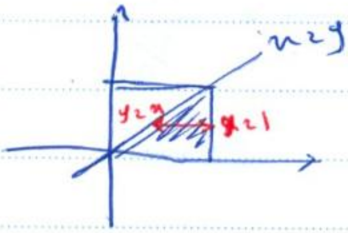
$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(x) \cdot f(y) \\ f(x \mid y) &= f(x) \\ f(y \mid x) &= f(y) \\ E(x \mid y) &= E(x) \\ E(y \mid x) &= E(y) \end{aligned}}$$

ص ۱۴۴ سوال ۸۸:

$$f(y \mid x) = \frac{3y^2}{x^3}$$

$$f(x) = 3x^2 \qquad 0 < x < 1$$

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \Longrightarrow \frac{3y^2}{x^3} = \frac{f(x,y)}{3x^2} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{9y^2}{x} \qquad \begin{matrix} 0 < y < x \\ 0 < x < 1 \\ \hline 0 < y < x < 1 \end{matrix}$$



$$E(x|y) = \int_y^1 x \cdot f(x|y)\, dx$$

$$= \int_y^1 x \times \frac{f(x,y)}{f(y)}\, dx = \int_y^1 -\frac{1}{\ln y}\, dx$$

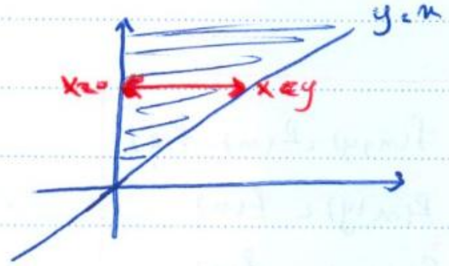
$$f(x,y) = \frac{9y^2}{x}, \quad f(y) = -9y^2 \ln y$$

$$= -\frac{1}{\ln y}[x]_y^1 = \frac{y-1}{\ln y}$$

$$f(y) = \int_y^1 f(x,y)\, dx = 9y^2[\ln x]_y^1 = -9y^2 \ln y$$

ص ۵۲ سوال ۹۵:

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{-y} \\ 0 < x < y < \infty \end{cases}$$



$$E[x^2|y=2] = \int x^2 f(x|y=2)\, dx$$

وقتی y ثابت است باید از همان اول مقدار ثابت آن را قرار دهیم.

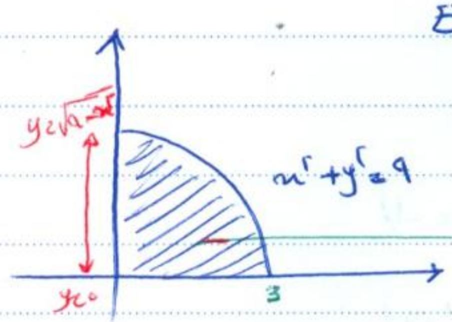
$$= \int_0^y x^2 f(x|y=2)\, dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{f(x,y)}{f(y=2)}\, dx, \quad f(x,y) = e^{-y}$$

$$= \int_0^2 x^2 \frac{e^{-2}}{2e^{-2}}\, dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f(y=2) = \int_0^{y=2} f(x,y=2)\, dx = e^{-2}[x]_0^2 = 2e^{-2}$$

ص ۲۴۳ سؤال ۵ و

x و y یکنواخت در شکل زیر $E[y|x=\sqrt{5}]=?$



مساحت $= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$

x و y یکنواخت $\Rightarrow$ $f(x,y) = \frac{1}{\text{مساحت ناحیه}} = \frac{1}{\frac{9\pi}{4}} = \frac{4}{9\pi}$

$$E[y|x=\sqrt{5}] = \int y\, f(y|x=\sqrt{5})\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\, f(y|x=\sqrt{5})\, dy = \int_0^2 y\, f(y|x=\sqrt{5})\, dy$$

$$= \int_0^2 y \times \frac{f(x=\sqrt{5},y)}{f(x=\sqrt{5})}\, dy = \int_0^2 y \times \frac{\frac{4}{9\pi}}{2\times\frac{4}{9\pi}} = \int_0^2 \frac{y}{2}\, dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

$$f(x=\sqrt{5}) = \int_0^2 f(x,y)\, dy = \int_0^2 \frac{4}{9\pi}\, dy = \frac{4}{9\pi}[y]_0^2 = 2\left(\frac{4}{9\pi}\right)$$

مثال گسسته:

$x \backslash y$	3	5	7	
-1	$0/1$	$0/2$	$0/3$	$0/6$
0	$0/1$	$0/1$	$0/1$	
1	0	$0/1$	0	
		$0/4$		

$$E[y^2 \mid x=-1] = \sum y \times f(y \mid x=-1)$$

$$= \sum y \times \frac{f(y, x=-1)}{f(x=-1)} = \frac{3^2 \times 0/1 + 5^2 \times 0/2 + 7^2 \times 0/3}{0/6}$$

$$E[x \mid y=5] = \frac{-1 \times 0/2 + 0 \times 0/1 + 1 \times 0/1}{0/4}$$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه هشتم

تشکل دانشجویان و فارغ التحصیلان کامپیوتر دانشگاه آزاد کاشان

www.yadmane.com

تابستان 1388

جلسه هشتم :

تابع توزیع شرطی :

معنای شرط است و به همین دلیل در مخرج قرار می‌گیرد

$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \xrightarrow{x,y \text{ مستقل}} f(x)$ x به شرط y :

$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = f(y)$ y به شرط x

مثال ۱ : گسسته :

x \ y	۳	۵	۷
-1	/.۱	/.۲	/.۱
0	/.۰۵	/.۰۵	/.۱۵
1	/.۰۵	/.۰۵	/.۲۵
		/.۳	/.۵

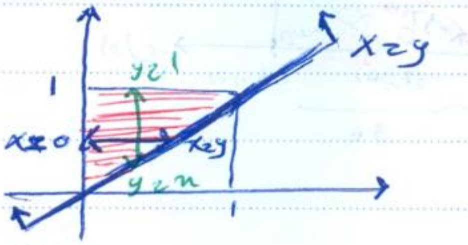
$y \geq ۵$; $x = -1$; $x \geq 0$

$p(x=-1 \mid y \geq ۵) = \frac{/.۳}{/.۸}$

$p(x \geq 0 \mid y \geq ۵) = \frac{/.۵}{/.۸}$

مثال ۲ : (پیوسته) :

$$\begin{cases} f(x,y) = 4x \\ 0 \leq x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

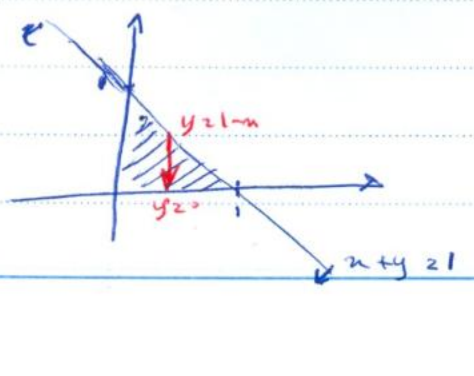


$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{4x}{\int_0^y 4x\,dx} = \frac{x}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y} = \frac{2x}{y^2}$$

$$f(x) \quad \int_x^1 \cancel{4x}\,dy \quad [y]_x^1 \quad 1-x$$

تست سراسری :

$$\begin{cases} f(x,y) = 2 \\ x+y \leq 1 \\ x,y > 0 \end{cases}$$



$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{2}{\int_0^{1-x} 2\,dx} = \frac{1}{[y]_0^{1-x}} = \frac{1}{1-x}$$

یادآوری:

می‌دانیم: $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ (منهای بینهایت)

حال

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)=\int_{-\infty}^{x\ \text{یا}\ y}\int_{-\infty}^{y\ \text{یا}\ x} f(x,y)\ \begin{matrix} dx\,dy \\ dy\,dx \end{matrix}$$

(منهای بینهایت)

$$F_{X|Y}(x,y)=\frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$$

$$F_{Y|X}(x,y)=\frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_X(x)}$$

حل سؤال ۹۰:

یکنواخت $f(x)=\frac{1}{b-a}$

مستقل $f(x,y)=f(x)\times f(y)$

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\tfrac{1}{2} \quad 0<x<2\\ f(y)&=\tfrac{1}{2} \quad 0<y<2\\ f(x,y)&=\tfrac{1}{4} \quad 0<x<2,\ 0<y<2 \end{aligned}\right\} \leftarrow$$

x و y مستقل و یکنواخت در بازه ۰ تا ۲:

$A=\{|y-x|\le 1\}$; $P(A|x=1)=?$

$Z=|y-x|$

الف) $P(A|x=1)=f(A|x=1)=\frac{f(A,x=1)}{f(x=1)}=\frac{f(\overbrace{|y-x|}^{0\le y\le 2},x=1)}{f(x=1)}$

$$=\frac{\int_0^2 \frac{1}{4}\,dy}{1/2}=\frac{\left[\frac{y}{4}\right]_0^2}{1/2}=1$$

ب) $f_{Z|X}(0|1) = f(Z=0|X=1) = ?$

$$f(Z=0|X=1) = \frac{f(Z=0, X=1)}{f(X=1)} = \frac{f(Y-X=0, X=1)}{f(X=1)} = \frac{f(X=1,Y=1)}{f(X=1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

ج) $F_{Z|X}(0|1) = F(Z=0|X=1) = \frac{F(Z=0, X=1)}{F(X=1)} = \frac{F(Y-X=0, X=1)}{F(X=1)}$

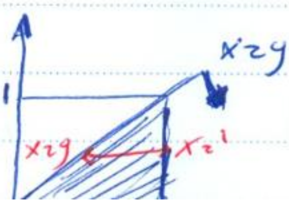
$$= \frac{F(X=1, Y=1)}{F(X=1)} = \frac{\frac{xy}{4}\Big|_{x=1,\,y=1}}{\frac{x}{2}\Big|_{x=1}} = 1/2$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{\text{حد پایین}}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{\text{حد پایین}}^{y}\int_{\text{حد پایین}}^{x} \underbrace{f(x,y)}_{1/4}\,dx\,dy = \int_0^y \left[\frac{x}{4}\right]_0^x dy = \frac{xy}{4}$$

حل سوال ۳۵ :

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x \\ 0 < y < x < 1 \end{cases}$$



ابتدا خود تابع شرطی را بدست آورده و پس مقدار را از آن (احتمال آن) می‌گیریم.

$$P(X \le 3/4 \mid Y = 1/2) = ?$$

$$g: f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{3x}{\int_y^1 3x\,dx} = \frac{x}{\frac{x^2}{2}\Big|_y^1} = \frac{x}{\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}}$$

از تست ۱۴۴ تا تست ۱۴۸ مطالعه شود

$$II: f(x \le \tfrac{3}{4} \mid y = \tfrac{1}{2}) = \frac{f(x \le 3/4 , y = 1/2)}{f(y = 1/2)} = \frac{\int_0^{3/4} x\,dx}{\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^2}{2}} = \frac{\frac{x^2}{2}\Big|_0^{3/4}}{3/8}$$

اگر چه $y=1/2$ در صورت و مخرج محدودیت داشتیم باید آن را هرکدام جداگانه را می‌نوشتیم

$$= 3/4$$

امید شرطی:

$$E(x \mid \overset{\text{ثابت}}{y}) = \int x\, f(x|y)\,dx \xrightarrow{\text{x,y مستقل}} E(x)$$

$$E(y \mid x) = \int y\, f(y|x)\,dx \xrightarrow{\text{x,y مستقل}} E(y)$$

نتیجه‌گیری:

x و y مستقل $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x,y) = f(x)\cdot f(y) \\ f(x|y) = f(x) \\ f(y|x) = f(y) \\ E(x|y) = E(x) \\ E(y|x) = E(y) \end{array}}$$

تست ۲۴۰ سوال ۸۸

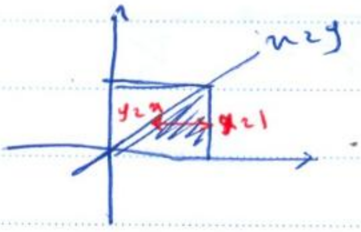
$$\frac{y}{x^3}$$

$$f(x) = 3x^2 \qquad 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \Longrightarrow \frac{3y^2}{x^3} = \frac{f(x,y)}{3x^2} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{9y^2}{x} \qquad \begin{array}{l} 0<y<x \\ 0<x<1 \\ \hline 0<y<x<1 \end{array}$$

Subject

Year Month Day ( )



$$E(x|y) = \int_y^1 x \cdot f(x|y)\,dx$$

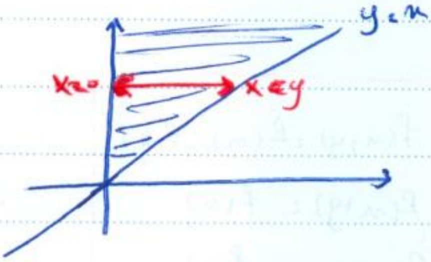
$$= \int_y^1 \cancel{x} \times \frac{f(x,y)}{f(y)}\,dx \qquad f(x,y) = \frac{9y^2}{\cancel{x}}, \quad f(y) = -\frac{9y^2}{\ln y}$$

$$= \int_y^1 -\frac{1}{\ln y}\,dx = -\frac{1}{\ln y}[x]_y^1 = \frac{y-1}{\ln y}$$

$$f(y) = \int_y^1 f(x,y)\,dx = 9y^2[\ln x]_y^1 = -9y^2 \ln y \qquad f(x,y) = \frac{9y^2}{x}$$

ص ۳۵۲ سؤال ۵۹ :

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{-y} \\ 0 \le x \le y < \infty \end{cases}$$



$$E[x^2|y=2] = \int x^2 f(x|y=2)\,dx$$

وقتی y ثابت است بهتر است از همان ابتدا مقدار ثابت آن را قرار دهیم.

$$= \int_0^y x^2 f(x|y=2)\,dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{f(x,y)}{f(y=2)}\,dx \qquad f(x,y) = e^{-y}$$

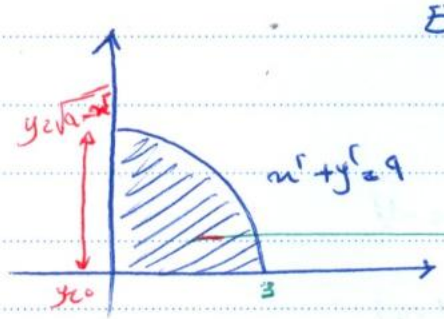
$$f(y=2) = \int_0^{y=2} f(x,y=2)\,dx = e^{-2}[x]_0^2 = 2e^{-2} \qquad f(x,y=2) = e^{-2}$$

Subject

Year Month Day ( )

ص ۲۶۲ سؤال ۵ و

x و y یکنواخت در شکل زیر $E[y|x=\sqrt{5}]=?$



مساحت $=\frac{\pi R^2}{4}=\frac{9\pi}{4}$

x و y یکنواخت $\Rightarrow$ $f(x,y)=\frac{1}{\text{مساحت ناحیه}}=\frac{1}{\frac{9\pi}{4}}=\frac{4}{9\pi}$

$$E[y|x=\sqrt{5}]=\int y\, f(y|x=\sqrt{5})\,dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{9-x^2=5}} y\, f(y|x=\sqrt{5})\,dy=\int_0^{2} y\, f(y|x=\sqrt{5})\,dy$$

$$=\int_0^{2} y\times\frac{f(x=\sqrt{5},y)}{f(x=\sqrt{5})}\,dy=\int_0^{2} y\times\frac{\frac{4}{9\pi}}{2\times\frac{4}{9\pi}}=\int_0^{2}\frac{y}{2}\,dy$$

$$=\left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2=1$$

$$f(x=\sqrt{5})=\int_0^{2} f(x,y)\,dy=\int_0^{2}\frac{4}{9\pi}\,dy=\frac{4}{9\pi}[y]_0^2=2\left(\frac{4}{9\pi}\right)$$

Pars Rasam

مثال ۲: گسسته

$x \backslash y$	4	5	7	
-1	0.1	0.2	0.3	0.6
0	0.1	0.1	0.1	
1	0	0.1	0	
		0.4		

$$E[y^2 \mid x=-1] = \sum y \times f(y \mid x=-1)$$

$$= \sum y \times \frac{f(x=-1, y)}{f(x=-1)} = \frac{4^2 \times 0.1 + 5^2 \times 0.2 + 7^2 \times 0.3}{0.6}$$

$$E[x \mid y=5] = \frac{-1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1}{0.4}$$

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه نهم

تشکل دانشجویان و فارغ التحصیلان کامپیوتر دانشگاه آزاد کاشان

www.yadmane.com

تابستان 1388

جلسه ی نهم

تعریف $E(x^m y^n)$:

$$E(x^m y^n) = \sum\!\!\!\!\int \sum\!\!\!\!\int x^m y^n f(x,y)\, dx\, dy \quad (dy\, dx)$$

- $E(xy)=0$ (x و y بر هم عمودند)
- x و y مستقل $\Rightarrow E(x^m y^n) = E(x^m)\cdot E(y^n)$ ، $\not\Leftarrow$ برعکس پذیر نیست

مثال 1 : (گسسته)

x\y	۱	۲
-۱	۰/۱	۰/۲
۰	۰/۳	۰/۱
۱	۰/۱	۰/۲

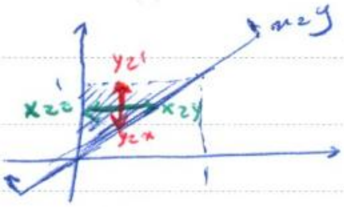
$x^3 y^2$ دارند

$$E(x^3y^2) = \sum\sum x^3 y^2 \times f(x,y)$$

$$(-1)^3\times1^2\times0.1 + (-1)^3\times2^2\times0.2 + 0^3\times1^2\times0.3 + 0^3\times2^2\times0.1 + 1^3\times1^2\times0.1 + 1^3\times2^2\times0.2$$

مثال 2 : (پیوسته)

$$\begin{cases} f(x,y) = 4x \\ 0<x<y<1 \end{cases}$$



$$E(xy) = \int_0^1\int_0^y xy\, \underbrace{\cancel{f(x,y)}}_{4x}\, dx\, dy = \int_0^1\int_x^1 xy\, \underbrace{\cancel{f(x,y)}}_{4x}\, dy\, dx$$

- x و y مستقل باشند $\Longleftrightarrow$ مستقل هستند: y, x^n ؛ $y, \frac{1}{x}$ ؛ $\frac{1}{y}, x$
- $E\left(\frac{x}{y}\right) = \sum\!\!\!\!\int \sum\!\!\!\!\int \frac{x}{y} f(x,y)\, dx\, dy \quad (dy\, dx)$
- $E\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{E(x)}{E(y)}$ هیچ گاه تساوی برقرار نیست

یادآوری:

$$E\left(\frac{x}{y}\right) = E\left(x \times \frac{1}{y}\right) \xrightarrow{x\text{ و }y\text{ مستقل}} = E(x) \times E\left(\frac{1}{y}\right) \neq E(x) \times \frac{1}{E(y)}$$

داریم $E\left(\frac{1}{y}\right) = \sum \frac{1}{y} f(y)$

$\frac{1}{E(y)} = \frac{1}{\sum y f(y)}$ $\neq$ هیچگاه با هم مساوی نیستند

نتیجه:

$$\begin{cases} E(x+y) = E(x) + E(y) \\ E(x-y) = E(x) - E(y) \\ E(xy) = E(x)E(y) \\ E\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{E(x)}{E(y)} \end{cases}$$

همواره درست (مستقل یا وابسته)

x و y مستقل باشند

واریانس: $var(xy)$

یادآوری: (

تعریف:

$$Var(xy) = E(x^2y^2) - E(xy)^2$$

$$\overset{x\text{ و }y\text{ مستقل}}{=} E(x^2)E(y^2) - E(x)^2 E(y)^2$$

صـ ۵۵ سوال ۸۷ :

x, y مستقل و هم توزیع با متوسط (امید) ۱- و انحراف معیار ۲ ؛ واریانس $var(x,y) = ?$

$var(x,y) \overset{\text{مستقل}}{=} E(x^2)E(y^2) - E(x)^2E(y)^2$ ← معروف

- $E(x) = -1$
- $E(y) = -1$
- انحراف معیار $= 2 \Rightarrow$ واریانس $\begin{cases} \sigma_x^2 = 4 = E(x^2) - \cancel{E(x)}^2 \\ \sigma_y^2 = 4 = E(y^2) - \cancel{E(y)}^2 \end{cases}$

$\Rightarrow E(x^2) = 5$

$E(y^2) = 5$

$\Longleftarrow$ $= 5 \times 5 - 1 \times 1 = 24$

همبستگی (رابطه خطی) :

گاهی اوقات به دنبال پیدا کردن ارتباط خطی بین دو متغیر هستیم :

x, y همبسته ⇐ وابستگی خطی

x, y ناهمبسته ⇐ یا مستقل و یا وابسته غیرخطی

- بی رابطه اند (مستقل) ← ناهمبسته
- رابطه دارند (وابسته)
  - غیرخطی ← ناهمبسته
  - خطی ← همبسته

کوواریانس (هم پراش) $cov(x,y)$ یا $\sigma_{x,y}$

تعریف: معیار عددی است که نوع و جهت ارتباط خطی دو متغیر را بیان می‌کند.

محاسبه $cov(x,y)$
- $=0$ ناهمبسته (یا مستقل یا رابطه غیرخطی)
- $\neq 0$ همبسته (ارتباط خطی)
  - >0 ارتباط خطی مستقیم
  - <0 ارتباط خطی معکوس

تعریف:

$$cov(x,y) = E[(x-E(x))(y-E(y))] = E(xy) - E(x)E(y)$$

x,y
- مستقل ($f(x,y)=f(x)f(y)$) → ناهمبسته: کوواریانس $cov(x,y)=0$، $E(xy)=E(x)E(y)$، ضریب همبستگی $r_{x,y}=0$
- وابسته
  - غیرخطی ← ناهمبسته
  - خطی → همبسته: $cov(x,y)\neq 0$، ارتباط خطی

(I)

ضریب همبستگی $r_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$

پیشنهاد: در محاسبه $cov(x,y)$:

۱) ابتدا استقلال را کنترل کنید

x,y مستقل ($f(x,y)=f(x)f(y)$) → $\boxed{cov(x,y)=0,\ r_{x,y}=0,\ \vdots}$ (I)

۲) اگر وابسته بودند ($f(x,y) \neq f(x)f(y)$)

$cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$ محاسبه کنید

الف) $cov(x,y)=0$ ناهمبسته (غیرخطی) زیرا ممکن است الف یا ب

همبسته (خطی) ...

مثال ۱:

مستقل

گسسته:

$x \backslash y$	۳	۴	$f(y)$
-1	۰/۱۵	۰/۳۵	۰/۵
۲	۰/۱۵	۰/۳۵	۰/۵
$f(x)$	۰/۳	۰/۷	

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{ناهمبسته} \quad Cov(x,y)=0 \quad V_{x,y}=0}$

ناپیوسته:

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}$$

$$0<x<\infty$$

$$0<y<\infty$$

مثال ۲:
۳۳۵ سؤال ۵۴:

$$\begin{cases} f(x,y) = [1-\alpha(1-2x)(1-2y)] & -1\leq\alpha\leq1 \\ f(x)=1 & 0<x<1 \\ f(y)=1 & 0<y<1 \end{cases}$$

به ازای کدام α ، x و y ناهمبسته هستند؟

راه اول: $Cov(x,y)=0 \rightarrow \underbrace{E(xy)}_{\int_0^1\int_0^1 xy\, f(x,y)\,dx\,dy} - \overbrace{E(x)}^{\int_0^1 x f(x)\,dx}\; \underbrace{E(y)}_{\int_0^1 y f(y)\,dy} = 0$

$\alpha=0$ مستقل

راه دوم: x و y مستقل $\xrightarrow{\alpha=0}$ ناهمبسته

$f(x,y)=f(x)f(y)$

$1 = 1\times1$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال ۳:

سوال ۴۱ ص ۳۴۹

مستقل نیست (وابسته)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3} & (x,y)=(-1,0),(0,1),(1,0)\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$x \backslash y$	0	1	$f(x)$
-1	1/3	0	1/3
0	0	1/3	1/3
1	1/3	0	1/3
$f(y)$	2/3	1/3	

$\rho_{x,y} \rightarrow$ ضریب همبستگی جامعه $r_{x,y} \rightarrow$ ضریب همبستگی نمونه

$$Cov(x,y)=\cancel{E(xy)}_{0}-\underset{\sum xf(x)}{E(x)}\;\underset{\sum yf(y)}{E(y)}=0$$

ناهمبسته

ضریب همبستگی $\rho_{xy}=r_{xy}=0$

$$=-1\times0\times\tfrac{1}{3}+-1\times1\times0+0\times0\times0+0\times1\times\tfrac{1}{3}+1\times0\times\tfrac{1}{3}+1\times1\times0$$

$$-1\times\tfrac{1}{3}+0\times\tfrac{1}{3}+1\times\tfrac{1}{3}$$

$$0\times\tfrac{2}{3}+1\times\tfrac{1}{3}$$

وابسته غیرخطی

خواص کوواریانس: (a، b، c، d عدد)

$$-\infty<Cov(x,y)=E(xy)-E(x)\,E(y)<+\infty$$

1) $Cov(x,y)=Cov(y,x)$

2) $Cov(x,x)=\sigma_x^2$

3) $Cov(x,a)=Cov(a,x)=0$

4) $Cov(ax,by)=ab\,Cov(x,y)$

5) پخش $Cov(ax+b,cy+d)=Cov(ax,cy)+Cov(ax,d)+Cov(b,cy)+Cov(b,d)$

$$=ac\,Cov(x,y)$$

$Cov(-2x+5y+\cancel{4},\ 3x-7y-\cancel{10})$ ..

$$\text{حل:} = (-2)(3)\,\underbrace{Cov(x,x)}_{\sigma_x^2\ \text{واریانس}} + (-2)(-7)\,Cov(x,y) + (5)(3)\,Cov(y,x) + (5)(-7)\,\underbrace{Cov(y,y)}_{\sigma_y^2}$$

$$-6 \qquad 14 \qquad 15 \qquad -35$$

$$= -6\,\sigma_x^2 + 29\,Cov(x,y) - 35\,\sigma_y^2$$

یادآوری:

$$E(ax+by+c) = aE(x) + bE(y) + c$$

تعریف:

$$\boxed{\sigma^2(ax+by+\cancel{c}) = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\,Cov(x,y)}$$

$$\xrightarrow[Cov(x,y)=0]{\text{اگر ناهمبسته}} a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$$

مثال:

$$E(3x-2y+4z-10) = 3E(x) - 2E(y) + 4E(z) - 10$$

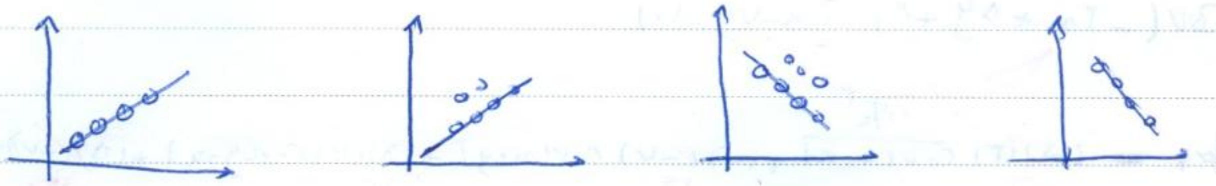
$$\sigma^2(3x-2y+4z\cancel{-10}) = (3)^2\sigma_x^2 + (-2)^2\sigma_y^2 + (4)^2\sigma_z^2 + 2(3)(-2)\,Cov(x,y) + 2(3)(4)\,Cov(x,z) + 2(-2)(4)\,Cov(y,z)$$

(از اتحاد اول استفاده می‌شود.)

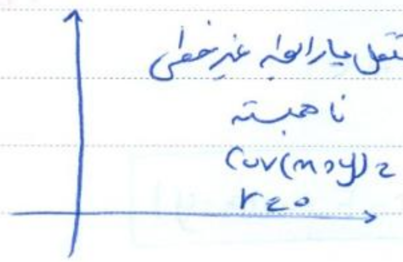
ضریب همبستگی:

$$-1 \leq \rho_{x,y} = r_{x,y} = \frac{Cov(x,y)}{\underset{>0}{\sigma_x}\ \underset{>0}{\sigma_y}} \leq 1$$

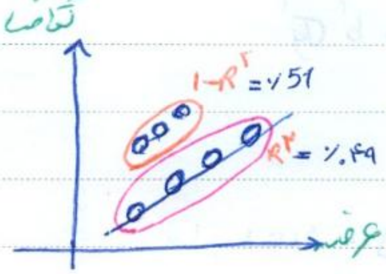
معیاری نسبی است که علاوه بر تعیین جهت و نوع ارتباط خطی شدت ارتباط را نیز فقط از جهت کامل یا ناموفق بودن مشخص می‌کند.



$r=1$ ارتباط مستقیم شدت کامل | $0<r<1$ ارتباط مستقیم شدت ناقص | $-1<r<0$ ارتباط معکوس در شدت ناقص | $r=-1$ ارتباط معکوس در شدت کامل



نکته مهم:



ضریب همبستگی r است چند درصد از تغییرات
y توسط x قابل بیان است؟ یا چند درصد از

$-1 \le r_{xy} = 0.7 \le 1$

تغییرات متغیر تابع توسط متغیر مستقل قابل بیان است؟

(یا چند درصد از تغییرات y تحت تأثیر x است)

$$\underset{\text{تابع و وابسته}}{y} = a\underset{\text{مستقل و آزاد}}{x} + b$$

حالا می‌توان درصد آن‌ها را مشخص کرد چرا درصد را از صفر می‌سنجیم.

$$-1 \le r_{x,y} = \%7 \le 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \le R^2 = r_{xy}^2 \le 1 \Longrightarrow 0 \le \%49 \le 1$$

پس جواب می‌شود ۴۹٪

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه دهم

تشکل دانشجویان و فارغ التحصیلان کامپیوتر دانشگاه آزاد کاشان

تابستان 1388

Year. ۹۸ Month. ۴ Date. ۱۷

- وقتی می‌گوئید چند درصد $R^2 = r^2_{x,y}$ است ρ حساب می‌کنیم.

جلسه دهم:

خواص ضریب همبستگی: (a، b، c، d ثابت باشند)

$$-1 \leq \rho_{x,y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \leq 1$$

۱) $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$

۲) $\rho_{x,a} = \rho_{a,x} = 0$

۳) $\rho_{x,x} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{Cov(x,x)}{\sigma_x \cdot \sigma_x} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} = 1$

۴) $\rho_{x,-x} = -1$

۵) $\rho_{-x,-x} = 1$

۶) $$\rho_{ax+b,\,cy+d} = \frac{\overbrace{Cov(ax+\cancel{b},\, cy+\cancel{d})}^{ac\,Cov(x,y)}}{\underbrace{\sigma(ax+\cancel{b})}_{|a|\sigma_x}\ \underbrace{\sigma(cy+\cancel{d})}_{|c|\sigma_y}}$$

a، c هم‌علامت $\rightarrow \rho_{x,y}$

a، c مختلف‌العلامه $\rightarrow -\rho_{x,y}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توزیع های گسسته و پیوسته (مهم):

$f(x) = p(x)$ → گسسته	$f(x=a) = 0 \rightarrow f(x)$ → پیوسته
یکنواخت	یکنواخت
برنولی	نمایی
دوجمله‌ای	گاما
دوجمله‌ای منفی (پاسکال)	نرمال
هندسی
فوق هندسی
پواسن

سئوالات:

- احتمال - $E(x)$ و σ_x^2 - تقریب توزیع ها

- توزیع گسسته:

✓ شناسایی توزیع ها:

① یکنواخت (هم شانس)

$$f(x) = p(x) = \frac{1}{n} \longleftrightarrow \text{یکنواخت}$$

② پواسن: تعداد اتفاقات در زمان یا مکان

مثال: تعداد تلفن زده شده در 1 ساعت

تعداد اتومبیل های عبوری از جلوی دوربین در زمان

تعداد لکه در ۱۰۰ متر پارچه

PAPCO

③ فوق هندسی (جامعه محدود و انتخاب بدون جایگذاری) 8

پیش فرض : بدون جایگذاری

مثال: از جعبه‌ای شامل ۶ کالای سالم و ۴ کالای معیوب، ۲ کالا انتخاب کرده‌ایم.

جامعه محدود — انتخاب بدون جایگذاری

④ آزمایش برنولی : ۱ بار ← توزیع برنولی ← تکرار برنولی
• دوجمله‌ای
• دوجمله‌ای منفی
• هندسی

آزمایش برنولی (جامعه نامحدود + احتمال ثابت + دوونیت)

هرگاه انجام هربار آزمایش مستقل از دفعات قبل فقط و فقط به یکی از دو نتیجه (موفقیت / شکست) $q + p = 1$

با احتمال ثابت p یا q بیانجامد.

موفقیت: چیزی است که خواسته سؤال است.

احتمال ثابت در هربار (جامعه نامحدود = یعنی نتوانیم بگوییم جامعه چند تا است) = اصل برنولی

✓ هرگاه در ابتدای سؤال «درصد»، «نسبت» یا «احتمال» ثابتی مطرح شود ← ۴۰٪ تولیدات کارخانه معیوب ا

✓ جامعه محدود را با جایگذاری خارج کنیم ← جامعه نامحدود می‌شود

خود جامعه تاس نامحدود است وقتی می‌گوییم احتمال ۳ بار عدد ۵ بیاید در ۳۰ پرتاب یک سکه از جامعه نامحدود تاس است و نامحدود است.

از هر کالا به اتفاق سومی نیم :

احتمال معیوب بودن	احتمال سالم بودن
٪۴۰	٪۶۰

معیوب ۴۰
سالم ۶۰
جعبه (محدود)

• اگر جاگذاری باشد جامعه نامحدود خواهد شد.

• تکرار برنولی منجر به ۳ توزیع می شود :

۱- احتمال اینکه در یک خانواده با ۳ فرزند، ۲ پسر داشته باشیم

۲- احتمال آنکه در یک خانواده فرزند سوم، ۲ امین پسر باشد.

۳- احتمال آنکه در یک خانواده سومین فرزند با لاخره پسر شود (اولین)

دو جمله‌ای

دو جمله‌ای منفی

هندسی

خانواده با ۳ فرزند

اول	دوم	سوم
ب	ب	ب
د	پ	پ
پ	د	ب
پ	پ	د
پ	د	د
د	ب	د
د	د	د

۱- توزیع یکنواخت

$$\begin{cases} f(x) = p(x) = \frac{1}{N} \\ x = 1, 2, \dots, N \end{cases} \qquad E(x) = \frac{N+1}{2} \qquad \sigma_x^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

مثال:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{9} \\ x = 1, 2, \dots, 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_x = \frac{N+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5 \\ \sigma^2 = \frac{9^2-1}{12} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3} \end{cases}$$

۲- توزیع برنولی (دو نقطه‌ای)

هرگاه آزمایش برنولی را ۱ بار انجام دهیم

تعداد موفقیت در انجام 1 بار آزمایش برنولی $= X = 0, 1$

تعداد موفقیت x	0	1
$p(x) = f(x)$	$\cancel{1-p}$ q	p

$$\begin{cases} f(x) = p(x) = p^{x} q^{1-x} \\ x = 0, 1 \\ E(x) = p \\ \sigma_x^2 = pq \end{cases}$$

x بار موفق، $1-x$ → شکست

هرگاه آزمایش را n بار (مستقل) انجام دهیم.

تعداد موفقیت در انجام n بار (مستقل) آزمایش مستقل برنولی $= X = 0, 1, 2, \dots, n$

حالات مختلف x بار موفقیت

• احتمال x بار موفقیت در n بار (نمونه)

$$\begin{cases} f(x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ E(x) = np \\ \sigma_x^2 = npq \end{cases}$$

$E(x) = np$ متوسط تعداد موفقیت در انجام n بار (نمونه)

$\sigma_x^2 = npq$ واریانس تعداد " " "

مثال :
احتمال آنکه در ۳ فرزند، ۲ پسر داشته باشیم ؟
(موفقیت) x بار — n بار

$$\begin{cases} p(x=2) = \binom{3}{2} p^2 q^1 = 3p^2q \\ n = 3 \\ p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

دختر پسر

اثبات شهودی :
۲ پسر در ۳ فرزند

$p\ p\ q = p^2q$ +
$p\ q\ p = p^2q$ +
$q\ p\ p = p^2q$
$\Rightarrow 3p^2q$

نکته : برای حل مسائل احتمال در دو جمله‌ای بهتر است به روابط زیر دقت کنید :

حداقل ۱ موفقیت $p(x \geq 1) = 1 - p(x=0)$

$$p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + \ldots + p(x=n) = 1$$

احتمال صفر موفقیت $\binom{n}{0} p^0 q^n$ احتمال ۱ موفقیت $\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$

$p(x \leq 1)$
حداکثر ۱ موفقیت

مثال ۵ : در یک کارخانه ۴۰٪ کالاها معیوب هستند. یک نمونه ۱۰ تایی از آن‌ها انتخاب (برنولی) (در جمله‌ای)
می‌کنیم . الف) امید مقدار کالاهای معیوب در نمونه

الف) متوسط تعداد معیوب مورد انتظار در نمونه

$$\begin{cases} \overset{\text{معیوب}}{E(x)} = np = 10 \times 0.4 = 4 \\ n = 10 \\ \text{معیوب } p = 0.4 \end{cases}$$

ب) احتمال آنکه هیچ کدام سالم نباشند؟

$$\begin{cases} \overset{\text{هیچکدام سالم}}{P(x=0)} = \binom{10}{0} p^0 q^{10} = (0.4)^{10} \quad \text{همه معیوب} \\ n = 10 \\ \text{سالم } p = 0.6, \ q = 0.4 \text{ معیوب} \end{cases}$$

ج) احتمال آنکه حداقل یک سالم داشته باشیم؟

تعداد سالم در ۱۰ تا $\overbrace{x = 0, 1, 2, \dots, 10}^{x \geq 1}$

$$\begin{cases} \overset{\text{حداقل ۱ سالم}}{P(x \geq 1)} = 1 - \overset{\text{هیچ سالم}}{P(x=0)} \\ \qquad = 1 - (0.4)^{10} \\ n = 10 \\ p = 0.6, \ q = 0.4 \end{cases}$$

ص ۳۳۷ سوال ۶۴ :

در ۶ بار پرتاب مستقل یک تاس سالم، احتمال آنکه عدد ۳ حداقل یک بار ظاهر شود

$$\begin{cases} P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \binom{6}{0} p^0 q^6 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \\ n = 6 \\ \underset{\text{ظاهر شدن}}{p} = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$x =$ تعداد ظهور عدد ۳ در ۶ بار

ص ۳۵۳ سوال ۶۹

۵٪ تولیدات کارخانه‌ای معیوب است، در یک نمونه ۱۰۰تایی، ضریب تغییرات ؟

پواسونی

دوجمله‌ای (دو نوعی که n بار از آن نمونه گرفته شود)

$$CV=\frac{\sigma}{\mu}=\frac{\sqrt{npq}}{np}=\frac{\sqrt{100\times\frac{5}{100}\times\frac{95}{100}}}{100\times\frac{5}{100}}=\frac{\sqrt{4.75}}{5}$$

$n=100$

معیوب $p=\%5=\frac{5}{100}$ $q=\%95=\frac{95}{100}$

ص ۳۵۲ سوال ۶۲ بسیار مهم (ص ۳۳۸ سوال ۷۵)

فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در [۰،۱] باشد. از 5 بار نمونه‌گیری احتمال آنکه 3 بار در فاصله [0.3, 0.8] باشد کدام است؟

n بار موفق

n بار

حتماً دوجمله‌ای

$$P(x=3)=\binom{5}{3}p^3q^2=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

(موفق) $p(0.3<x<0.8)=\int_{0.3}^{0.8}1\,dx=[x]_{0.3}^{0.8}=0.5=\frac{1}{2}$

$q=\frac{1}{2}$

ص ۳۲۸ سوال ۷۵

x = طول عمر لامپ رحسب ساعت یک متغیر تصادفی با تابع زیر :

پیوسته $\left\{ f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 100 \\ \frac{100}{x^2} & x \ge 100 \end{cases} \right.$ ثابت، متغیر $\quad 0 \underset{P=0}{\text{معیوب}} 100 \underset{P\neq 0}{\text{معیوب شدن}} \infty$

با فرض کارکرد مستقل لامپ ها احتمال آنکه ۲ تا لامپ از ۵ لامپ در اولین ۱۵۰ ساعت معیوب

معیوب شوند P

$$P(x=2) = \binom{5}{2} p^2 q^3$$

اولین ۱۵۰ ساعت $\quad p = P(0 < x < 150) = \int_0^{100} 0 + \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\, dx$

$q = 1-p$

موفقیت (هر لامپ در اولین ۱۵۰ ساعت بسوزد)

جلسه یازدهم :

- توزیع پواسن :

$0,1,2,\ldots$ X = تعداد اتفاقات در زمان یا مکان

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$ احتمال x اتفاق در زمان یا مکان

* $\lambda \leftarrow$ پارامتر پواسن

$$\sigma^2 = \lambda$$

نکته :

الف) محاسبه λ

متوسط مشتری در دقیقه

۱ دقیقه = ۶۰ ثانیه $\quad \lambda = 3$ $\longrightarrow$	$\lambda = 3$ مشتری
۸۰ ثانیه	$\lambda = \frac{3 \times 80}{60} = 4$ مشتری

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه یازدهم

تشکل دانشجویان و فارغ التحصیلان کامپیوتر دانشگاه آزاد کاشان

www.yadmane.com

تابستان 1388

Subject:

Year. ۸۸ Month. ۶ Date. ۲۴ ( )

۳۲۸ سوال ۷۵

x = طول عمر لامپ برحسب ساعت یک متغیر تصادفی با تابع زیر :

پیوسته
$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & x\geq 100\end{cases}$$

ساعت ۰ $\frac{\text{معیوب}}{p=0}$ ۱۰۰ $\frac{\text{معیوب شدن}}{p\neq 0}$ ∞

با فرض کارکرد مستقل لامپ ها احتمال آنکه دو لامپ از ۵ لامپ در اولین ۱۵۰ ساعت

معیوب شوند p

$$P(x=2)=\binom{5}{2}p^2q^3$$

اولین ۱۵۰ ساعت

$$p=P(0<x<150)=\int_0^{100}0+\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\,dx$$

$q=1-p$

ب-۱)

حداقل یک اتفاق $p(x \geq 1)$

$$p(x=0) + p(x=1) + \dots = 1$$

هیچ اتفاق   ۱ اتفاق

$p(x \leq 1)$
حداکثر ۱ اتفاق

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

مثال: بطور متوسط در هر ساعت ۸ تلفن زده می‌شود.

الف) احتمال آنکه در ساعت خاصی تلفنی زده نشود

$$\begin{cases} p(x=0) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-8} 8^{0}}{0!} = e^{-8} \\ \lambda = 8 \end{cases}$$

ب) احتمال آنکه در یک ربع ساعت حداقل یک تلفن زده شود؟ (مهم)

۱ ساعت = ۶۰ دقیقه	$\lambda = 8$
۱۵ دقیقه	$\lambda = \frac{15 \times 8}{60} = 2$

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x=0) = 1 - \frac{e^{-2} 2^{0}}{0!} = 1 - e^{-2}$$

مثال: ص ۲۵۰ سؤال ۵۰

تعداد مشتریان در هر روز یک متغیر پواسن با متوسط ۱۲۰ نفر است. آن فروشگاه از ۹ صبح تا ۷ بعد از ظهر باز باشد. احتمال آنکه حداقل ۲ نفر در ۱۰ دقیقه به فروشگاه مراجعه کنند.

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x=0) - p(x=1)$$

از ۹ صبح تا ۷ بعد از ظهر = ۱۰ ساعت

۱۰ ساعت = ۶۰×۱۰ دقیقه	۱۲۰ نفر
۱۰ دقیقه	$\lambda = \frac{120 \times 10}{600} = 2$

$$\Rightarrow P(x \geq 2) = 1 - \frac{e^{-2}\, 2^{0}}{0!} - \frac{e^{-2}\, 2^{1}}{1!} = 1 - 3e^{-2}$$

$$= 1 - \frac{3}{e^{2}} = \frac{e^{2}-3}{e^{2}}$$

مثال :

یادآوری :

الف)

✓ پواسن با پارامتر λ : بطور متوسط ۳ مشتری در ۲ ساعت $\lambda = 3$

$\neq$

✓ پواسن با میانگین λ : بطور متوسط ۳ مشتری در هر ۱ ساعت $\lambda = 6$

ب)

• متوسط تعداد موفقیت در n بار آزمایش برنولی $E(x) = np$

• متوسط تعداد اتفاقات در زمان یا مکان $E(x) = \lambda$

ص ۳۴۰ سوال ۸۴ :

فرض کنید تعداد اتوبیل عبوری از مقابل دوربین در زمان T یک متغیر پواسن با میانگین λ باشد. (پواسن)

۱) $p\lambda$ ۲) $\lambda T p$ ✓ نتیجه : متوسط تعداد اتومبیل عبوری $= \lambda T$

۳) pT ۴) $p^{\lambda T}$

تقریب پواسن

$$\begin{cases} n=100 \\ p=\frac{1}{100} \end{cases} \xrightarrow{np=1 < 10} p(x=0)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-1}1^0}{0!}=e^{-1}$$

$$=\frac{1}{e}=\frac{1}{2/7}$$

• هرگاه n بزرگ شود در دو جمله‌ای حقیقی الگوی استفاده از پواسن مجاز در جمله‌های محتمل خواهد شد.

- توزیع دو جمله‌ای منفی (پاسکال) :

X = مقدار آزمایش لازم برای رسیدن به r امین موفقیت $= r, r+1, \dots$

$$\begin{cases} p(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r} & \text{احتمال r امین موفقیت در x امین آزمایش} \\ E(x)=\frac{r}{p} & \text{متوسط آزمایش لازم برای r امین موفقیت} \\ \sigma_x^2=\frac{rq}{p^2} & \text{واریانس " " " " " "} \end{cases}$$

در x-1 آزمایش قبلی — x امین آزمایش

$$\underbrace{\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}q^{x-r}}_{\text{r-1 امین موفقیت داشته باشیم}} \times p = \binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$$

نکته:

به عنوان یک نکته کلی برای محاسبه احتمال در دو جمله‌ای منفی می‌توان سوال را دو جمله‌ای حل کرد
سپس یک واحد از ترکیبات آن کم نمود. $\binom{n-1}{x-1}$

مثال:

۳۰٪ تولیدات کارخانه معیوب است

برنولی

دو جمله‌ای

دو جمله‌ای منفی

احتمال آنکه در ۵ کالا، ۲ واحد معیوب باشد

$\binom{5}{2} p^2 q^3$

احتمال آنکه ۵ امین کالای انتخابی ۲ امین معیوب باشد.

$\binom{5}{2} p^2 q^3$

مثال: ۲۰٪ تولیدات کارخانه معیوب است.

دو جمله‌ای — الف) متوسط تعداد معیوب در یک نمونه ۸ تایی کدام است؟

دو جمله‌ای منفی — ب) متوسط تعداد آزمایش لازم برای رسیدن به ۸ امین معیوب؟

الف)

$E(x) = np = 8 \times 0/2 = 1/6$ بطور متوسط ۱/۶ معیوب در نمونه

(ب

$E(x) = \frac{r}{p} = \frac{8}{0.2} = \frac{80}{2} = 40$

بطور متوسط ۴۰ انتخاب لازم است تا به ۸ امین معیوب برسیم

توزیع هندسی (۱ ، ۲ ، ... دوعبارتی) :

x = تعداد آزمایش لازم برای رسیدن به اولین موفقیت (آزمایش‌ها و احتمالات مستقل) در کنکور ؟

$f(x) = q^{x-1} p^{1}$ احتمال اولین موفقیت در x امین آزمایش

$x = 1, 2, \ldots$

$\underbrace{qq\cdots q}_{x-1 \text{ بار شکست}}\underbrace{p}_{\text{اولین موفقیت}}$

$E(X) = \frac{1}{p}$ متوسط تعداد آزمایش برای اولین موفقیت

$\sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$ واریانس تعداد آزمایش برای اولین موفقیت

نکته:

$p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + \cdots = 1$

۱ آزمایش برای اولین موفقیت — ۲ آزمایش برای اولین موفقیت — ۳ آزمایش برای اولین موفقیت

$p + pq + pq^2 + \cdots$

جمله اول

قدر نسبت

$= \frac{p}{\underbrace{1-q}_{p}} = \frac{p}{p} = 1$

مثال: دو تا تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا مجموع ۷ بیاید. احتمال آنکه تعداد پرتاب لازم فرد باشد؟

فرد پرتاب ← برای اولین مجموع فرد

هندسی $p(x \text{ فرد}) = p(x=1)+p(x=3)+p(x=5)+\dots = \dfrac{p}{1-q^2}$

مجموع ۷ در هر دو تاس $p = \dfrac{(1,6)(6,1)\,(2,5)(5,2)\,(3,4)(4,3)}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$q = \dfrac{5}{6}$

$= \dfrac{1/6}{1-25/36} = \dfrac{6}{11}$

ص ۵۲ سوال ۴۴ com 85

احتمال آنکه شخص در امتحان گواهینامه قبول شود $\frac{1}{3}$ است. احتمال آنکه حداقل ۳ بار امتحان بدهد.

$p=\frac{1}{3} \quad q=\frac{2}{3}$

روش اول: $p(x\geq 3) = 1-\underbrace{p(x=1)}_{p}-\underbrace{p(x=2)}_{qp} = 1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

روش دوم (مستقیم): $p(x\geq 3) = \underbrace{p(x=3)}_{q^2p}+\underbrace{p(x=4)}_{q^3p}+\dots = \dfrac{q^2p}{\frac{1-q}{p}} = q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

ص ۵۰ سوال ۵

ص ۴۹ سوال ۴۶

a: تعداد پرتاب سکه تا اولین شیر
هندسی $a=1,2,\dots$

احتمال آنکه معادله زیر ریشه حقیقی داشته باشد.

$x^2+ax+4=0$

- باید $\Delta \geq 0$ باشد

$$P(\text{ریشه‌ها حقیقی}) = P(\Delta \geq 0) = P(a^2 - 12 \geq 0) = P(a^2 \geq 12)$$

$$= P(a \geq 4)$$

$$= P(a=4) + P(a=5) + \cdots$$

$$= q^3p + q^4p$$

$$= \frac{q^3p}{1-q} = q^3 = (1/2)^3 = 1/8$$

ص ۳۳۷ سؤال ۴۴

یادآوری:

x, y (iid) مستقل و هم‌توزیع

$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x)f(y)$

پیوسته:
$$\begin{cases} P(x=y) = 0 \\ P(x<y) = P(x>y) = 1/2 \end{cases}$$

گسسته:
$$P(x<y) = P(x>y) = \frac{1 - P(x=y)}{2}$$

$$P(x=y) = \sum\sum_{x=y} f(x,y) \overset{iid}{=} \sum_x f(x)^2$$

مثال: اگر x و y مستقل و هر دو دارای توزیع هندسی با پارامتر p باشند آنگاه $P(x=y)$ کدام است؟

iid

$$\text{هندسی}\begin{cases} f(y)=q^{y-1}p \\ y=1,2,\dots \end{cases} \qquad \text{هندسی}\begin{cases} f(x)=q^{x-1}p \\ x=1,2,\dots \end{cases}$$

$$P(x=y)=\sum_{x=y}\sum f(x,y)=\sum_{x=1}^{\infty} f(x)^2=\sum_{x=1}^{\infty} q^{2x-2}p^2$$

$$=\frac{p^2}{q^2}\sum_{x=1}^{\infty} q^{2x}$$

$$=\frac{p^2}{q^2}(q^2+q^4+\dots)$$

$$=\frac{p^2}{q^2}\times\frac{q^2}{1-q^2}=\frac{p^2}{\underbrace{(1-q)}_{p}\underbrace{(1+q)}_{2-q}}=\frac{p^2}{p(2-p)}$$

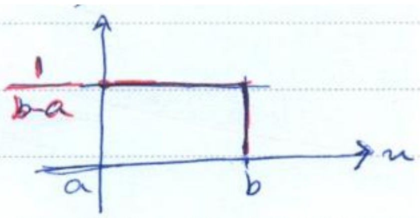
$$=\frac{p}{2-p}$$

توزیع های پیوسته:

- یکنواخت

$$f(x)=\boxed{\frac{1}{b-a}}$$

$$\begin{cases} a\le x\le b \\ \mu_x=\frac{a+b}{2} \\ \sigma_x^2=\frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$



- توزیع نمایی : λ پواسن

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & 0 \le x < \infty \\ E(x) = \frac{1}{\lambda} \\ \sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2} \\ \sigma_x = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

x : زمان لازم برای وقوع اتفاق بعدی   اگر   متوسط زمان لازم برای اتفاق بعدی

طول عمر   (اولین اتفاق ....)

پواسن

$\lambda = 2$

مشتری در ساعت

تعداد   زمان

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

ساعت برای مشتری بعدی

زمان

اگر عددی در به ما می دهد و حالت زمان باشد ← $\frac{1}{\lambda}$

اگر عددی به ما دهند و حالت تعداد باشد ← λ

مثال ۱ : طول عمر نوعی لامپ نمای با میانگین ۳ سال است.

متوسط   متوسط

لامپ در سال $\frac{1}{\lambda}$ ← ۳ سال در هر لامپ $\frac{1}{\lambda} = 3$

تابع احتمال : $\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{3} e^{-x/3} \\ 0 \le x < \infty \end{cases}$

مثال ۱ :

در مثال ۱ احتمال آنکه یک لامپ تا ۱ سال نسوزد ؟

$$P(x>1) = \int_1^\infty \frac{1}{3} e^{-x/3}\,dx = \left[-e^{-x/3}\right]_1^\infty = e^{-1/3}$$

مثال ۲ :

اگر شرکت لامپها را برای ۶ ماه گارانتی کرده باشد به چند درصد افراد جنس را می دهد ؟

$$P(x \le 6_{\text{ماه}}) = P(x \le \tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \frac{1}{3} e^{-x/3}\,dx = \left[-e^{-x/3}\right]_0^{1/2} = 1-e^{-1/6}$$

صفحه ۲۴۸ سوال ۲۷

نمایی

زمان ورود بین دو مشتری نمایی با میانگین ۱/۳ دقیقه است.

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3} \longrightarrow \lambda = 3$ نفر در دقیقه

دقیقه برای هر نفر

پواسن

احتمال آنکه در ۲ دقیقه ۳ نفر وارد شوند ؟

$$P(x=3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-6}6^3}{3!} = e^{-6}6^2 = \frac{6^2}{e^6}$$

برای ۲ دقیقه ... تعداد در ۲ دقیقه

آمار و احتمال

مهندس محسن طورانی

جلسه دوازدهم

تابستان 1388

جلسه دوازدهم

خاصیت عدم حافظه (بی حافظه بودن)

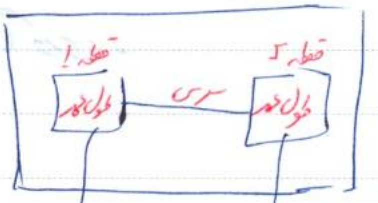
برای توزیع نمایی و هندسی صادق است.

$P(x > m+n \mid x > n) = P(x > m)$

مثال: اگر لامپی ۱۰ سال است روشن است. احتمال اینکه حداقل ۲ سال کار کند؟

$P(x \geq 2) = \int_2^{\infty} f(x)\,dx$

نکته:



$\underbrace{\text{طول عمر کل سیستم}}_{Z} = \min(x, y) \Rightarrow \mu_z = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

نمایی نمایی

$\mu_x = \frac{1}{\lambda_1}$ $\mu_y = \frac{1}{\lambda_2}$

مثال: صفحه ۳۴۰ سوال ۸۷
۳۴۲ سوال ۳۷

$x \sim$ نمایی $\mu_x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = 2$ سال

$y \sim$ نمایی $\mu_y = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\lambda_2} = 2$ سال

سری ⟵ میانگین طول عمر کل ⟵ $\mu_z = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$\underbrace{Z}_{\text{نمایی}}$

$= \frac{1}{1/2 + 1/2} = 1$ سال

توزیع گاما (ارلانگ از مرتبه ۲)

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $0 < x < \infty$

$\mu = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

⟵ ۲ متغیر مستقل نمایی با پارامتر λ ⟶

$r = 1$

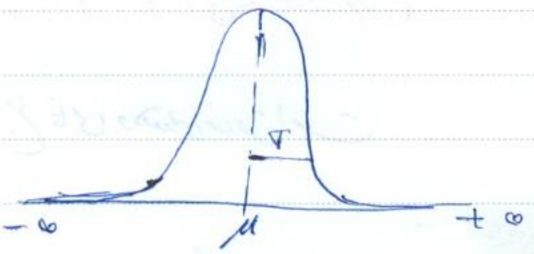
$f(x) = \frac{x \lambda^2 e^{-\lambda x}}{\Gamma(2)}$, $0 < x < \infty$

$\mu = \frac{2}{\lambda}$

$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توزیع نرمال :



$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

یادآوری :

تابع مولد گشتاور : $M_x(t) = E[e^{tx}] = ?$

$$\left.\begin{array}{l} E[x^2] = \\ E(x) = \\ \vdots \end{array}\right\} \longrightarrow$$

آیا توزیع خاصی دارد؟ : روش اول کار ← بله

خیر ← روش دوم کار : $E(x^n) = \int x^n f(x)\,dx$

مثال ۱ :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \\ 0 < x < \infty \end{cases} \xrightarrow[\text{توزیع نمایی}]{} \boxed{\begin{array}{c} \lambda = 1 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{array}} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

روش اول

روش دوم

$$\sigma^2 = E(x^2) - E(x)^2$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx - \left(\int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx\right)^2 = 1$$

ص ۳۴۱ س ۹۱

اگر $f(x)=ke^{-x^2-7x}$ باشد امید x^2 $[E(x^2)]$ کدام است؟

نکته: e^{-x^2} (نرمال)
e^{-x} (نمایی)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2x\mu+\mu^2}{\sigma^2}\right)}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}_{=k}\times e^{\frac{-x^2+2x\mu}{2\sigma^2}}=ke^{-x^2-7x}$$

$$\Rightarrow \sigma^2=\frac{1}{2},\quad \mu=\frac{7}{2}$$

$$\sigma^2=E(x^2)-E(x)^2$$

$$\frac{1}{2}=E(x^2)-\frac{49}{4}\Rightarrow E(x^2)=\frac{49}{4}-\frac{1}{2}$$

$$E(x^2)=\frac{47}{4}$$

مشخصات مهم نرمال:

$\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}$

$$E(x)=\mu=0\longrightarrow\begin{cases}E(x^3)=0\\E(x^5)=0\\\vdots\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یادآوری:

$$E(x^n) = \left(M_x(t)\right)^{(n)}_{t=0}$$

ص ۲۸۴ سؤال ۷۵
ص ۲۵۲ سؤال ۹۳

سؤال ۷۸ $\xleftarrow{\text{سال ۸۷}}$ $E\left[e^{\frac{x}{2}}\right]$

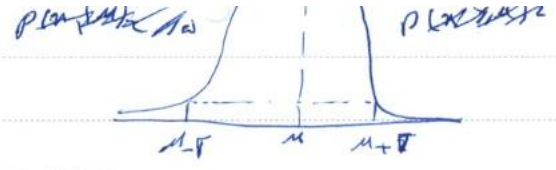
سؤال ۶۳ $\xleftarrow{\text{سال ۸۵}}$ $E\left[e^{2x}\right]$

ص ۲۴۹ سؤال ۲۴۴:

در یک توزیع نرمال میانگین $(\mu=0)$ و واریانس $(\sigma^2=9)$ آنگاه میانگین $x^2(x+1)$ کدام است؟

$$E\left(x^2(x+1)\right) = E(x^3+x^2) = \cancel{E(x^3)}^{0} + E(x^2)$$

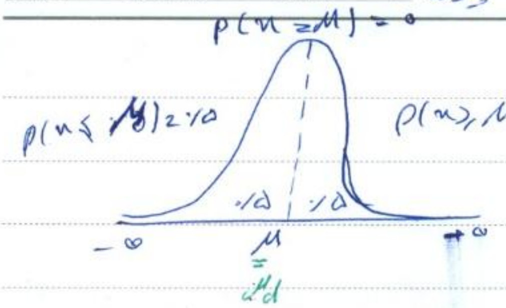
$$\underbrace{\sigma^2}_{9} = \underbrace{E(x^2)}_{9} - \underbrace{\cancel{E(x)^2}}_{0} \Rightarrow E(x^2) = 9$$



منحنی نرمال ۲ نقطه عطف دارد $(\mu \pm \sigma)$

$$f''(\mu \pm \sigma) = 0$$

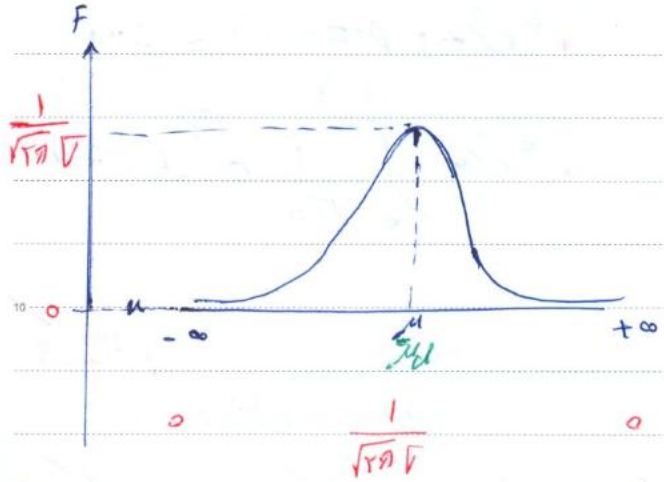
Subject:
Year. Month. Date. ( ) پیوسته



۳- تابع تجمعی

$$\begin{cases} F_X(-\infty)=0 \\ F_X(\mu)=0.5 \\ F_X(+\infty)=1 \end{cases}$$

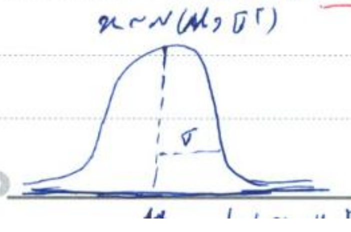
۴-



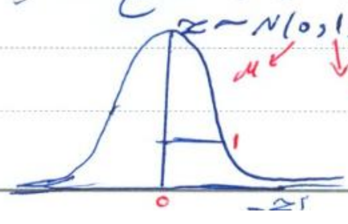
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

۵- از آنجایی که نمی‌توان انتگرال تابع نرمال را محاسبه کرد پس سطح زیر منحنی همواره مجهول است و آن را به روش های عددی تقریب می‌زنند و در حالت استاندارد در پیوست کتاب‌ها نگهداری می‌شود

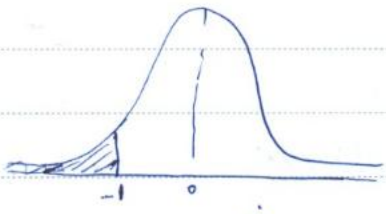
نرمال استاندارد :



$$Z=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )



جدول درسنامه کتاب:

φ: تابعی است که درآن تجمع احتمال را می‌کنند.

نمایش خاص: $\varphi(-1) = /14$ یا N

نمایش ۲: $P(Z<-1) = /14$.

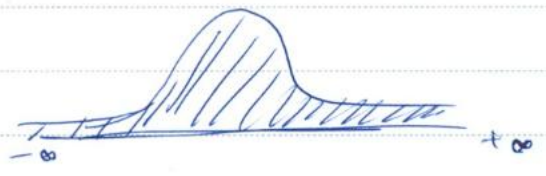
نمایش 1: $Z_{/14} = -1$.

نمایش ۴: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = /14$.

نمایش ۳: $\int_{-\infty}^{-1} f(z)dz = /14$.

نکته:

در نرمال استاندارد



محاسبه به کمک جدول:
$$\begin{cases} P(Z \le \alpha) = \varphi(\alpha) \text{ یا } N \\ P(Z > \alpha) = 1 - \varphi(\alpha) \end{cases}$$

محاسبه احتمال:

ابتدا سوال را استاندارد کرده (یعنی $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$) پس با آن را با جدول (φ یا N) نشان

[illegible]

PAPCO

مثال:

در یک توزیع نرمال $(\overset{\sigma^2}{25}, \overset{\mu}{4})$ است، احتمال x کمتر از -1 یعنی $p(x<-1)$ کدام است؟

$$p(x<-1) \overset{\text{استاندارد}}{=} p\left(\cancel{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{Z} < \frac{-1-\overset{4}{\mu}}{\underset{5}{\sigma}}\right)$$

$$= p(Z<-1)$$

$$= \varphi(-1)$$ مراجعه به جدول

ص ۲۴۸ سوال ۳۹

مستقل
$$\begin{cases} x_1 \sim N(\overset{\mu}{6}, \overset{\sigma^2}{1}) \quad \text{(میانگین، واریانس)} \\ x_2 \sim N(7, 3) \end{cases}$$

$$p(x_1 > x_2) = p(\overbrace{x_1 - x_2}^{\text{توزیع نرمال}} > 0)$$

$$= p(\underbrace{Z}_{\text{نرمال استاندارد}} > \frac{0 - \overset{\text{میانگین}}{\cancel{\mu(x_1-x_2)}}^{1}}{\cancel{\sigma(x_1-x_2)}_{2}}) = 1 - \varphi(\tfrac{1}{2})$$

$\mu(x_1 - x_2) = \mu \quad \mu = 6 - 7 = 1$

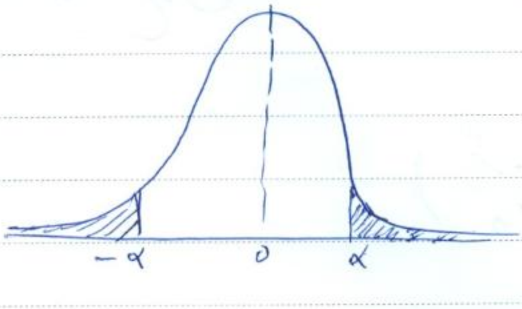
$$V(x_1 - x_2) = \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} - 2\cancel{Cov(x_1, x_2)} = 1 + 3 = 4$$

$$\sigma(x_1 - x_2) = 2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ص ۳۳۲ سوال ۳۲ مانند مثال قبل می‌باشد.

تبدیل معکوس (استاندارد)



$p(z<-\alpha)=p(z>\alpha)$

$p(z>-\alpha)=p(z<\alpha)$

نتیجه:

$p(z \gtrless A)=p(z \lessgtr B) \Longrightarrow \boxed{A=-B}$

$p(z \gtrless A)=p(z \gtrless B) \Longrightarrow \boxed{A=B}$

مثال:

ص ۳۵۱ سوال ۵۴

اگر $\begin{cases} x \sim N(1,4) \\ y \sim N(1,9) \end{cases}$ مستقل باشند آنگاه با توجه به رابطه زیر a کدام است؟

$p\left(z \leq \frac{a-\mu(2x+y)}{\sqrt{(2x+y)}}\right)=p\left(z \geq \frac{4a-\mu(4x-2y)}{\sqrt{(4x-2y)}}\right)$

$\Rightarrow \frac{a-3}{5}=-\frac{4a-2}{10}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu(2x+y) = 2\mu(x) + \mu(y) = 3 \\ \sigma^2(2x+y) = 4\sigma^2_x + \sigma^2_y = 25 \Rightarrow \sigma(2x+y) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu(4x-2y) = 4\mu(x) - 2\mu(y) = 2 \\ \sigma^2(4x-2y) = 4\sigma^2_x - 2\sigma^2_y = 100 \Rightarrow \sigma(4x-2y) = 10 \end{cases}$$

توزیع فوق هندسی (از گسسته) :

N: تا موفقیت k / تا شکست $N-k$

$$p(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

جامعه محدود N تایی ← نمونه n تایی

		μ	σ^2
بدون جایگذاری (پیش‌فرض)	x = تعداد موفقیت در n نمونه	np	$\frac{N-n}{N-1}pq$
با جایگذاری (دوجمله‌ای)	x = تعداد موفقیت در n نمونه	np	npq

$$p(x) = \binom{n}{x} q^{n-x}$$

* p احتمال ثابت در دوجمله‌ای (موفقیت ثابت) و احتمال موفقیت در بار اول فوق هندسی

$$p = \frac{k}{N}$$

یادآوری : $\binom{N}{n}$ = حالات مختلف انتخاب n از N بدون جایگذاری و بدون ترتیب

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جعبه سه تایی

$$\boxed{} = \overbrace{\frac{k}{N} \times \frac{k}{N} \times \cdots}^{\text{به طور بار تصادفی}}$$

باجایگذاری $\left(\frac{k}{N-k}\right)^{N}$

بار اول		بار دوم		...	بار nام
موفقیت	شکست	موفقیت	شکست	...	موفقیت
$\frac{k}{N}$	$1-\frac{k}{N}$	$\frac{k}{N}$	0	---	$\frac{k}{N}$
p	q	p	q		p

مثال: در یک مدرسه ۸ معلم مرد و ۴ معلم زن وجود دارد (محدود). می‌خواهیم یک کمیته ۳ تایی تشکیل دهیم (بدون جایگذاری).

تابع احتمال تعداد مردها در کمیته کدام است؟

$$\text{فوق هندسی} = p(x) = \frac{\binom{8}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{12}{3}}$$

تعداد مردها در کمیته = ۰ و ۱ و ۲ و ۳

کل حالات انتخاب: $\binom{12}{3} = \frac{\binom{8}{0}\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{8}{3}\binom{4}{0}}{\binom{12}{3}}$

$x \to k$, $n-x \to N-k$

$$1 = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{12}{3}}$$