

## فهرست

- 1- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده ..... 1
- 2- دامنه تغییرات ..... 1
- 3- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی ..... 1
- 1-3- میانگین حسابی (Mean) ..... 1
- الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند ..... 1
- ب- اگر هر یک از داده‌ها تکراری باشند ..... 1
- 3-2- میانه (Median) ..... 2
- الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده) ..... 2
- ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده ..... 3
- 3-3- مد یا نما ..... 5
- 3-4- چارک‌ها (Quantile) ..... 6
- 3-4-1- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده ..... 6
- الف - تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده ..... 7
- ب- تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده ..... 7

**1- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده**

از این جدول برای تنظیم داده های گسسته که تنوع داده ها اندک است استفاده می کنند و فراوانی هر داده در مقابل آن ثبت می شود.

مثال 1. برای نمرات یک کلاس 30 نفری داریم:

| نمرات = $X_i$ | تعداد دانش آموزان = $F_i$ |
|---------------|---------------------------|
| 8             | 2                         |
| 10            | 1                         |
| 12            | 6                         |
| 13            | 5                         |
| 17            | 6                         |
| 19            | 8                         |
| 20            | 2                         |

**2- دامنه تغییرات**

اختلاف بین بزرگترین داده آماری و کوچکترین داده آماری را دامنه تغییرات گویند.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

چنانچه داده های آماری با تقریب کمتر از واحد گرد شده باشند دامنه تغییرات برابر است با:

$$R = X_{\max} - X_{\min} + 1$$

**3- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی****3-1- میانگین حسابی (Mean)**

الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

ب- اگر هر یک از داده ها تکراری باشند

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

مثال 2. در جدول زیر مطلوب‌ست میانگین حسابی:  $\bar{X} = \frac{654}{50} = 13.08$

| نماینده طبقات |         |       |           |
|---------------|---------|-------|-----------|
| حدود طبقات    | فراوانی | $X_i$ | $F_i X_i$ |
| 2-4           | 2       | 3     | 6         |
| 5-7           | 3       | 6     | 18        |
| 8-10          | 5       | 9     | 45        |
| 11-13         | 10      | 12    | 120       |
| 14-16         | 25      | 15    | 375       |
| 17-19         | 5       | 18    | 90        |

$$\sum F_i = 50 \quad \sum F_i X_i = 654$$

### 3-2 - میانه (Median)

عددی را که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری درست در وسط داده‌ها قرار گیرد، میانه گویند. برای تعیین میانه در یک سری داده‌های آماری ابتدا داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم. در صورتیکه تعداد داده‌ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار می‌گیرد عدد میانه بوده و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد نصف مجموع دو عددی که در وسط قرار گرفته عدد میانه را مشخص می‌کند، میانه را با  $\tilde{X}$  نشان می‌دهیم.

مثال 3.

$$\begin{array}{ll} 4,7,6,9,1,5,3 & 10,12,16,14,26,5 \\ 1,3,4,5,6,7,9 & 5,10,12,14,16,26 \\ \tilde{X} = 5 & \tilde{X} = \frac{12+14}{2} = 13/5 \end{array}$$

الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده)

ابتدا،  $\sum F_i$  را به دست آورده و  $N$  می‌نامیم. سپس اولین ردیفی را که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی  $\frac{N}{2}$  است را به عنوان ردیف میانه معین می‌کنیم. داده مربوط به این ردیف میانه خواهد بود.

مثال 4.

| $X_i$ | $F_i$ | $CF_i$ |
|-------|-------|--------|
| 4     | 3     | 3      |
| 6     | 2     | 5      |
| 7     | 4     | 9      |
| 10    | 1     | 10     |
| 11    | 3     | 13     |
| 16    | 2     | 15     |
| 20    | 1     | 16     |

ردیف میانه ←

$$N = \sum F_i = 16$$

$$\frac{N}{2} = 8$$

$$\tilde{X} = 7$$

ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

در جدول توزیع فراوانی دسته بندی شده ابتدا مثل قبل ردیف میانه را مشخص کرده و سپس میانه

را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{X} = L + \frac{\frac{N}{2} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

که در این فرمول

$$\tilde{X} = \text{میانه}$$

$L$  = کوچکترین عدد طبقه میانه دار (در صفات پیوسته کرانه پایین و در صفات گسسته حد پایین

طبقه میانه دار)

$$CF_{i-1} = \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه دار}$$

$$F_i = \text{فراوانی طبقه میانه دار}$$

$$C = \text{فاصله طبقات جدول (1+ حد پایین - حد بالا)}$$

مثال 5. در جدول ذیل میانه را مشخص کنید.

الف - اگر داده‌ها پیوسته باشند.

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = \frac{49}{5} + \frac{25-20}{6} \times 5 = 53/66$$

ب- اگر داده‌ها گسسته باشند.

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = 50 + \frac{25-20}{6} \times 5 = 54.167$$

|       | $F_i$ | $FC_i$ |
|-------|-------|--------|
| 40-44 | 12    | 12     |
| 45-49 | 8     | 20     |
| 50-54 | 6     | 26     |
| 55-59 | 10    | 36     |
| 60-64 | 4     | 40     |
| 65-69 | 10    | 50     |

ردیف میانه ←

نکته: اگر در ردیف فراوانی‌های تجمعی عدد  $\frac{N}{2}$  عیناً وجود داشته باشد آنگاه کرانه بالای طبقه

میانه دار را میانه بدانید.

مثال 6.

|        | 2-4 | 5-7 | 8-10 | 11-13 | 14-16 | 17-19 |
|--------|-----|-----|------|-------|-------|-------|
| $F_i$  | 2   | 3   | 5    | 15    | 20    | 5     |
| $FC_i$ | 2   | 5   | 10   | 25    | 45    | 50    |

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

طبقه میانه دار ↑

$$\tilde{X} = 13/5$$

نکته: اگر در یک جدول توزیع فراوانیهای طبقه بندی شده مربوط به صفات پیوسته، مجموع

فراوانیهای طبقه ماقبل میانه دار برابر فراوانیهای طبقات ما بعد طبقه میانه‌دار باشد آنگاه نماینده

طبقه میانه دار را میانه خواهیم دانست.

مثال 7. جدول زیر مربوط به اندازه قد دانشجویان یک کلاس می باشد. میانه را مشخص کنید.

|        | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-69 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F_i$  | 4     | 10    | 6     | 16    | 12    | 8     |
| $CF_i$ | 4     | 14    | 20    | 36    | 48    | 56    |

طبقه میانه دار ↑

$$\frac{N}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع فراوانی های قبل از طبقه میانه دار} &= 4+10+6=20 \\ \text{مجموع فراوانی های بعد از طبقه میانه دار} &= 12+8=20 \end{aligned} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{25-29}{2} = 27$$

**3-3- مد یا نما**

در اعداد آماری، عددی که بیشترین تکرار (فراوانی) را داشته باشند، نما نامیده می شود. لذا یک نمونه آماری می تواند نما داشته باشد یا بیش از یک نما داشته باشد.

مثال 8.

|               |                     |
|---------------|---------------------|
| 1,1,2,2,3,4   | 1,1,1,2,2,2,3,4,5,5 |
| Mode = 2      | Mode = 1,2          |
| 1,2,3,4,5,6,7 | 1,1,1,2,2,2,3,3,3   |
| مد ندارد      | مد ندارد            |

www.qie.ir

- تعیین مد در جدول توزیع فراوانی های دسته بندی شده

ابتدا طبقه ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان طبقه نمادار مشخص می کنیم و سپس مد را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\text{Mode} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$$

که در آن

M = نما

d<sub>1</sub> = تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما قبلd<sub>2</sub> = تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما بعد

C = فاصله طبقات

L = کوچکترین عدد طبقه نمادار (کرانه پایین)

مثال 9.

|                |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 |
| F <sub>i</sub> | 12    | 17    | 20    | 40    | 10    |

طبقه مد دار ↑

$$\text{Mode} = 39/5 + \frac{20}{20+30} \times 10 = 43/5$$

نکته: اگر در جدول توزیع فراوانی ها فراوانی طبقات ماقبل و مابعد طبقه نمادار مساوی باشند، نماینده طبقه نمادار را نما بدانید.

فراوانی طبقه مابعد = فراوانی طبقه مابعد

مثال 10.

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 10-12 | 13-15 | 16-18 | 19-21 | 22-24 |
| $F_i$ | 10    | 12    | 8     | 16    | 8     |

$$\text{Mode} = \frac{19+21}{2} = 20$$

طبقه نما دار ↑

### 3-4- چارک ها (Quantile)

سه نوع چارک داریم: چارک اول ( $Q_1$ )، چارک دوم ( $Q_2$ ) و چارک سوم ( $Q_3$ )

الف- چارک اول: عددی که در یک مجموعه از داده های آماری مرتب شده، مرز 25% داده ها را مشخص کند چارک اول است. بنابراین می توان ادعا کرد که 25% داده ها از نقطه  $Q_1$  کوچکتر و 75% داده ها از این نقطه بزرگتراند.

ب- چارک دوم: همان میانه است.

ج- چارک سوم: نقطه یا عددی که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری مرز 75% داده ها را نشان دهد چارک سوم است. یعنی نقطه ای که 75% داده ها از آن کوچکتر و 25% داده از آن بزرگتراند.

### 3-4-1- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده

ابتدا داده های آماری را به صورت صعودی از چپ به راست مرتب می کنیم. سپس اعداد را به 2 نیم تقسیم می کنیم. میانه نیمه سمت چپ را چارک اول و میانه اعداد سمت راست را چارک سوم می نامند و خود میانه اعداد همان چارک دوم می باشد.

## مثال 11.

$$\begin{array}{l}
 14,16,12,17,20,19,17,11,10,18 \\
 10,11,12,14, 16,17,17, 18,19,20 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 Q_1=12 \quad Q_2=16/5 \quad Q_3=18 \\
 \\
 7,4,2,1,3,5,6 \\
 1,2,3, 4,5, 6,7 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 Q_1=2 \quad Q_2=4 \quad Q_3=6
 \end{array}$$

الف - تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

ابتدا فراوانی تجمعی را حساب می‌کنیم. سپس اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از  $\frac{N}{4}$  است طبقه چارک اول و داده مربوط به آن چارک اول، سپس اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از  $\frac{N}{2}$  است طبقه چارک دوم و داده مربوط به آن چارک دوم و اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن  $\frac{3N}{4}$  است طبقه چارک سوم و داده مربوط به آن چارک سوم است.

## مثال 12.

|        |   |    |    |    |    |    |    |     |
|--------|---|----|----|----|----|----|----|-----|
| $X_i$  | 8 | 10 | 15 | 16 | 20 | 28 | 40 | 42  |
| $F_i$  | 3 | 8  | 7  | 13 | 12 | 23 | 24 | 10  |
| $CF_i$ | 3 | 11 | 18 | 31 | 43 | 66 | 90 | 100 |

$\uparrow$  طبقه چارک سوم  $\uparrow$  طبقه چارک دوم  $\uparrow$  طبقه چارک اول  
 $Q_3=40$   $Q_2 = \tilde{X} = 28$   $Q_1=16$

$$N = 100 \quad \frac{N}{4} = 25 \quad \frac{N}{2} = 50 \quad \frac{3N}{4} = 75$$

ب- تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

برای تعیین چارک اول ابتدا اولین طبقه‌ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از  $\frac{N}{4}$  است را به عنوان طبقه چارک اول تعیین کرده و چارک اول را از فرمول زیر به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

چارک دوم را از تعریف میانه به دست می‌آوریم.



برای تعیین چارک سوم ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از  $\frac{3N}{4}$  است را به

عنوان طبقه چارک سوم تعیین کرده و چارک سوم را از فرمول زیر به دست می آوریم:

اگر داده ها از نوع پیوسته بود L کرانه پایین طبقه چارک دار است. و اگر داده ها از نوع گسسته بود

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

L حد پایین طبقه چارک دار است.

مثال 13.

|        |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|        | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 |
| $F_i$  | 2     | 8     | 6     | 14    | 7     | 3     |
| $CF_i$ | 2     | 10    | 16    | 30    | 37    | 40    |

↑ طبقه چارک اول

$$Q_1 = 19/5$$

↑ طبقه چارک دوم و سوم

$$Q_3 = 29/5$$

$$N = 40 \quad \frac{N}{4} = 10 \quad \frac{N}{2} = 20 \quad \frac{3N}{4} = 30$$

$$Q_2 = \tilde{X} = 24/5 + \frac{20-16}{14} \times 5 = 25/92$$

نکته: چون  $\frac{N}{4} = 10$  دقیقاً در ستون فراوانی تجمعی می باشد لذا  $Q_1$  کرانه بالای طبقه چارک اول است.

همین نکته در مورد چارک سوم صدق می کند.

## فهرست

|    |   |
|----|---|
| 1  | 1- تعاریف .....                               |
| 1  | 1-1- تعریف جامعه (Population) .....           |
| 1  | 2-1- تعریف پارامتر (Parameter) .....          |
| 1  | 3-1- تعریف نمونه (Sample) .....               |
| 2  | 4-1- اندازه نمونه (Sample Size) .....         |
| 2  | 5-1- تعریف نمونه تصادفی (Random Sample) ..... |
| 2  | 6-1- توزیع نمونه .....                        |
| 2  | 7-1- تعریف آماره .....                        |
| 3  | 8-1- میانگین نمونه .....                      |
| 3  | 9-1- گشتاور نمونه .....                       |
| 3  | 10-1- گشتاور $r$ ام حول میانگین .....         |
| 4  | 11-1- واریانس نمونه .....                     |
| 4  | 12-1- انحراف معیار نمونه .....                |
| 5  | 13-1- قضیه حد مرکزی .....                     |
| 5  | 14-1- توزیع Gamma .....                       |
| 6  | 2- توزیع مربع کای (Chi Square) .....          |
| 10 | 3- توزیع $t_{\text{student}}$ .....           |
| 13 | 4- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه .....     |
| 16 | 5- توزیع F .....                              |
| 19 | 6- توزیع میانگین جامعه های متنهای .....       |
| 22 | 7- آماره های ترتیبی .....                     |

**1- تعاریف****1-1- تعریف جامعه (Population)**

جامعه مجموعه عناصر مورد مطالعه است که ممکن است تعداد آن محدود یا نامحدود باشد. مثلاً جامعه متولدین در یک سال و یا قیمت یک کالا در طول زمان معین.

**1-2- تعریف پارامتر (Parameter)**

مقدار ثابتی مربوط به جامعه آماری است که معمولاً مورد علاقه بررسی کننده واقع می شود. مثلاً در مورد لامپ ها، متوسط طول عمر لامپ ها.

نکته: موقعی روش های آماری مفید است که پارامتر مجهول داشته باشیم.

|   |            |            |            |          |
|---|------------|------------|------------|----------|
| X | 0          | 1          | 2          | مدل آمار |
| P | $\theta/2$ | $1-\theta$ | $\theta/2$ |          |

|   |       |       |       |     |
|---|-------|-------|-------|-----|
| X | 0     | 1     | 2     | مدل |
| P | $1/4$ | $1/2$ | $1/4$ |     |

**1-3- تعریف نمونه (Sample)**

در حالتی که به جامعه دسترسی نداریم و یا به علت محدودیت در زمان و هزینه، بناچار مطالعه و بررسی بر روی بخشی از جامعه به عنوان نمونه انجام می شود. نمونه باید به گونه‌ای باشد که معرف جامعه اصلی بوده و نتایج حاصل از آن بتواند قابل تعمیم به جامعه برگرفته از آن باشد.

الف- نمونه تصادفی از جامعه متناهی بدون جاگذاری

در این حالت نمونه باید طوری انتخاب شود که احتمال انتخاب تمام نمونه‌های ممکن برابر باشد.

مثلا اگر جامعه دارای  $N$  عضو است انتخاب هر نمونه  $n$  تایی با احتمال  $\frac{1}{\binom{N}{n}}$  رخ می‌دهد.

تذکر: معمولا اگر در جریان انتخاب هیچ عاملی یا محدودیت و شرطی دخالت نکند نمونه تصادفی خواهد بود.

ب- نمونه تصادفی از جامعه نامتناهی (متناهی با جاگذاری)

مقدار هر متغیر که در نمونه تصادفی ظاهر می‌شود مربوط به یک متغیر تصادفی است و این متغیر دارای یک توزیع است.

#### 4-1- اندازه نمونه (Sample Size)

تعداد افراد نمونه را حجم نمونه یا اندازه نمونه می‌نامند.

www.qje.ir

#### 5-1- تعریف نمونه تصادفی (Random Sample)

متغیرهای تصادفی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تشکیل یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  می‌دهند اگر:

1- هم توزیع باشند.

2- از یکدیگر مستقل باشند.

#### 6-1- توزیع نمونه

اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نشان دهنده نمونه‌ای به حجم  $n$  باشد بنا به تعریف، تابع توزیع توام

$x_1, x_2, \dots, x_n$  را تابع توزیع نمونه می‌نامند. لذا اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی به حجم  $n$  از

جامعه  $f_x(x)$  باشد در این صورت توزیع نمونه تصادفی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  عبارتست از:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \dots f_{x_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) = [f_x(x)]^n$$

#### 7-1- تعریف آماره

تابعی است از نمونه تصادفی قابل مشاهده که شامل پارامتر مجهولی نیست (به پارامترهای نامعلوم

بستگی ندارد) مثلاً در یک نمونه‌گیری به اندازه  $n$ ،  $\bar{X}$ ،  $S^2$  و  $S$  همه آماره‌اند. در این ارتباط توزیع آماره‌ها را توزیع نمونه‌ای می‌گویند و استنباطهای آماری معمولاً بر آماره‌ها متکی است.

### 8-1- میانگین نمونه

اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای به حجم  $n$  باشد:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

### 9-1- گشتاور نمونه

فرض می‌کنیم  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی احتمال  $f_x(x)$  باشند. در این صورت  $r$  مین گشتاور نمونه حول مبدا برابر است با:

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$$

که در حالت خاص  $r=1$ ، میانگین نمونه بدست می‌آید.

### 10-1- گشتاور $r$ ام حول میانگین

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r \quad \text{گشتاور } r \text{ ام حول میانگین برابر است با:}$$

قضیه 1: فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی  $f_x(x)$  باشد و

$$E[\bar{X}] = \mu \quad , \quad \text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{میانگین نمونه باشد در این صورت:}$$

که در آن  $\mu$  و  $\sigma^2$  به ترتیب میانگین و واریانس جامعه هستند.

اثبات:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

## 11-1- واریانس نمونه

فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از جامعه  $f_x(x)$  باشد در این صورت:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad ; \quad n > 1$$

واریانس نمونه نامیده می‌شود.

## 12-1- انحراف معیار نمونه

انحراف معیار  $n$  مشاهده  $x_1, x_2, \dots, x_n$  را به عنوان ریشه دوم واریانس‌هایشان تعریف می‌کنیم:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

قضیه 2: اگر تمام نمونه‌های تصادفی به حجم  $n$  از یک جامعه نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$

باشد در این صورت  $\bar{X}$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\frac{\sigma^2}{n}$  است.

$$M_{\bar{X}} = M_X[(\sum x_i / n)t] = (M_X(t/n))^n = (e^{\mu(t/n) + 1/2(t/n)^2 \sigma^2})^n = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2(\sigma^2/n)}$$

قضیه 3: اگر تمام نمونه‌های تصادفی به حجم  $n$  از یک جامعه با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  با

جایگذاری انتخاب شود، توزیع نمونه  $\bar{X}$  تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\frac{\sigma^2}{n}$

است.

نکته:

اگر  $n \geq 30$  باشد، بدون توجه به نوع توزیع جامعه، توزیع  $\bar{X}$  نرمال است.

اگر  $n < 30$  باشد، توزیع  $\bar{X}$  تقریباً نرمال است اگر توزیع جامعه تقریباً نرمال باشد.

**13-1- قضیه حد مرکزی**

اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نامتناهی با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد

در این صورت توزیع حدی متغیر

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

وقتی  $n \rightarrow \infty$ ، توزیع نرمال استاندارد است.

**14-1- توزیع Gamma**

اگر متغیر تصادفی گاما دارای تابع چگالی ذیل است:

$$f_x(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad ; \quad x > 0$$

$$\phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s; E[x] = \frac{s}{\lambda}; \text{Var}(x) = \frac{s}{\lambda^2}$$

## 2- توزیع مربع کای (Chi Square)

توزیع مربع کای حالت خاصی از توزیع گاما است که در آن  $s = \frac{v}{2}$ ;  $\lambda = \frac{1}{2}$  است و بر این اساس تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی مربع کای بشرح ذیل است.

$$f_x(x) = \frac{1}{2^{v/2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\left(\frac{v-2}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} ; x > 0$$

که  $\Gamma$  معرف تابع گاما و معرف درجه آزادی است و

$$E(\chi^2) = v, \text{Var}(\chi^2) = 2v, M_x(t) = \phi(t) = (1-2t)^{-\frac{v}{2}}$$

قضیه 4: اگر متغیر تصادفی  $Z_1$  دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه متغیر تصادفی  $Z_1^2$  دارای توزیع مربع کای با 1 درجه آزادی خواهد بود. این قضیه در واقع بیانگر اهمیت توزیع مربع کای است.

قضیه 5: اگر  $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_k^2$  متغیرهای تصادفی مستقل هر یک دارای توزیع مربع کای با درجات آزادی به ترتیب  $v_1, v_2, \dots, v_k$  باشند، آنگاه متغیر تصادفی  $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_k^2$  نیز یک توزیع مربع کای با  $v = \sum_{i=1}^k v_i$  درجه آزادی دارد.

اثبات:

$$M_{\chi_i}(t) = (1-2t)^{-v_i/2}; M_{\sum \chi_i}(t) = \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-v_i/2} = (1-2t)^{-\sum v_i/2}$$

قضیه 6: اگر متغیرهای تصادفی مستقل  $Z_v, \dots, Z_2, Z_1$  دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه متغیر تصادفی  $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_v^2$  یک توزیع مربع کای با  $v$  درجه آزادی خواهد بود.

تذکر: اگر  $x_1, x_2, \dots, x_v$  متغیرهای تصادفی مستقل نرمال به ترتیب با میانگین‌های  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v$  و واریانسهای  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_v^2$  باشند، جمع مربعات  $X$ ها یک توزیع مربع کای ندارد.

قضیه 7: اگر متغیرهای تصادفی  $x_1, x_2, \dots, x_v$  دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین‌های

$$Z = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

و واریانس‌های  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_v^2$  باشند در این صورت متغیر تصادفی



برای  $i=1,2,\dots,v$  دارای توزیع نرمال استاندارد می باشد و متغیر تصادفی:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^v \left( \frac{X_i - \mu_i}{\delta_i} \right)^2$$

دارای توزیع مربع کای با  $v$  درجه آزادی است.

قضیه 8: اگر  $Z_n, \dots, Z_2, Z_1$  نمونه های تصادفی حاصل از توزیع نرمال استاندارد  $N(0,1)$  باشند در

این صورت:

1-  $\bar{Z}$  دارای توزیع نرمال  $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$  است.

2-  $\bar{Z}$  و  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$  از هم مستقلند.

3-  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$  دارای توزیع Chi Square با  $n-1$  درجه آزادی است.

نتیجه: اگر  $x_n, \dots, x_2, x_1$  نمونه تصادفی حاصل از جامعه  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد در این صورت متغیر

تصادفی  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$  دارای توزیع مربع کای با  $n-1$  درجه آزادی است.

قضیه 9: اگر  $x_n, \dots, x_2, x_1$  یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از یک جامعه نرمال با میانگین  $\mu$

و واریانس  $\sigma^2$  باشد در این صورت  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  یک توزیع مربع کای با  $n-1$  درجه آزادی است.

اثبات: در ابتدا بدون اثبات می پذیریم که هرگاه  $x_n, \dots, x_1$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از یک جامعه

نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشند آنگاه توزیع های  $S^2, \bar{X}$  که به ترتیب میانگین و واریانس

نمونه است از یکدیگر مستقل هستند. حال داریم:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

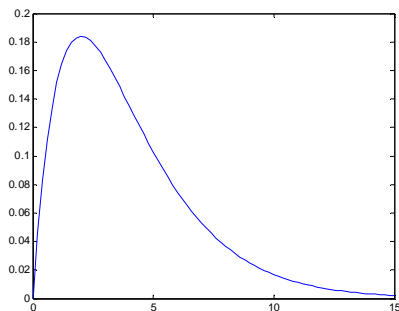
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)]^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2(\bar{x} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left( \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 = \chi_{(n-1)}^2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{توزیع مربع کای با } n \text{ درجه آزادی}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{یک درجه آزادی}}$

تذکر: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی مربع کای بزرگتر از عدد مشخصی شود عبارتست از سطح زیر چگالی مربع کای دم سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً توسط  $\chi_{\alpha}^2$  نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی توزیع مربع کای واقع در سمت راست آن عبارتست از  $\alpha$ .

مثال توزیع مربع کای با چهار درجه آزادی.



قضیه 10: اگر  $x_1, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نامشخص  $f_x(x)$  باشد آنگاه:  $E[S^2] = \sigma^2$

اثبات:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(\bar{x} - \mu) + n(\bar{x} - \mu)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 - 2n(\bar{x} - \mu)^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - n(\bar{x} - \mu)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(x_i - \mu)^2\right] - nE[(\bar{x} - \mu)^2] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \sigma^2 - n\text{Var}(\bar{x})\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

قضیه 11: اگر  $x_1, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد آنگاه:

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

اثبات:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2(n-1)$$

$$\text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \text{Var}(S^2) = 2(n-1) \rightarrow \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

## 3- توزیع t\_student

توزیع t حاصل از تقسیم دو متغیر تصادفی است که صورت کسر متغیر تصادفی نرمال استاندارد و مخرج کسر جذر یک متغیر تصادفی دارای توزیع مربع کای تقسیم بر درجه آزادی آن است یعنی:

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(v)}}{v}}}$$

با استفاده از تکنیک تبدیل متغیر در تابع توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t-student بشرح ذیل خواهد بود.

$$f_{t(v)} = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

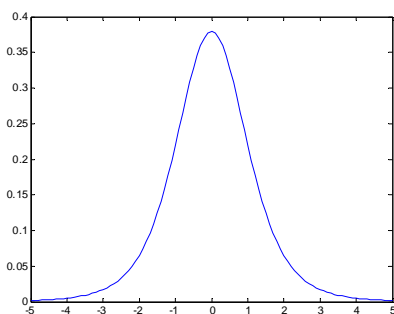
$$E[x] = 0$$

$$\text{Var}(x) = \frac{v}{v-2}; v > 2$$

شکل تابع چگالی متغیر تصادفی t، مانند توزیع نرمال با میانگین صفر حول نقطه صفر متقارن است.

تفاوت توزیع t با توزیع نرمال در آنست که توزیع t کمی پهن تر از توزیع نرمال است. در توزیع t با افزایش درجه آزادی، واریانس کمتر می شود.

مثال: توزیع t با 5 درجه آزادی



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی t بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی t در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً

با  $t_\alpha$  نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی  $t$  واقع در سمت راست  $t_\alpha$  عبارتست از  $\alpha$ .

$$P(T \geq t_{\alpha, v}) = \alpha$$

$$P(T_{(10)} \geq 1.812) = P(T \geq t_{(10), \%5}) = \%5$$

$$P(T_{(5)} \geq 2.015) = P(T \geq t_{(5), \%5}) = \%5$$

قضیه 12: در توزیع  $t$  هر چه  $v$  بزرگتر باشد، توزیع  $t$  به سمت توزیع نرمال استاندارد میل خواهد

کرد و وقتی که  $v = +\infty$  باشد توزیع  $t$  همان توزیع نرمال استاندارد است. یعنی:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} t_{(v)} = Z$$

### اهمیت توزیع $t$

در حالتیکه  $\sigma$  معلوم باشد بر اساس قضیه حد مرکزی، متغیر تصادفی  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  دارای توزیع نرمال

استاندارد است اما در عمل  $\sigma$  مجهول است لذا برای تصمیم‌گیری لازم است توزیع متغیر تصادفی

را داشته باشیم که این مهم بر اساس توزیع  $t$  و قضیه ذیل برآورده می‌شود.

قضیه 13: اگر  $x_n, \dots, x_2, x_1$  نمونه تصادفی حاصل از جامعه  $N(\mu, \sigma^2)$  و  $\bar{X}$  و  $S$  بترتیب

میانگین و انحراف معیار نمونه مزبور باشد در این صورت متغیر تصادفی  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  دارای

توزیع  $t$  با  $n-1$  درجه آزادی است.

$$t_{v=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_{(n-1)}^2}{n-1}}}$$

$$t_{v=(n-1)} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

لذا متغیر تصادفی  $\frac{\bar{X} - \mu}{\delta/\sqrt{n}}$  دارای توزیع  $t$  با  $(n-1)$  درجه آزادی است.

نکته: اگر از یک جامعه نرمال  $X \sim N(\mu, \sigma)$  یک نمونه  $n_1$  تایی بگیریم و  $\bar{X}$  را بر اساس این نمونه

$n_1$  تایی تعریف کنیم و پس یک نمونه  $n_2$  تایی مستقل از  $n_1$  گرفته و  $S^2$  را بر اساس آن تعریف

کنیم داریم آنگاه:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

$$t_{v=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_{(n-1)}^2}{n-1}}}$$

$$t_{v=(n_1-1)} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)\sigma^2}{\sigma^2}/(n_2-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n_1}}$$

نکته: اگر یک نمونه  $n_1$  از جامعه  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  گرفته و  $\bar{X}$  را از روی آن تعریف کنیم و سپس یک نمونه  $n_2$  از جامعه  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  مستقل از  $X$  گرفته و  $S_y^2$  را بر اساس آن تعریف کنیم داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_1}{S_y/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

نکته: توزیع  $t$  با یک درجه آزادی یک توزیع کوشی است. توزیع کوشی دارای میانگین نیست همچنین این توزیع دارای واریانس نیست.

$$f_{t(0)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

## 4- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه

فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_{n_x}$  یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_x$  متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین  $\mu_x$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد و فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y}$  یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_y$  متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین  $\mu_y$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد. همچنین فرض کنید که تمام  $X$ ها،  $Y$ ها مستقل باشند در این صورت:

الف- اگر  $\sigma$  معلوم باشد:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2}{n_x}\right)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma^2}{n_x} + \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

آنگاه متغیر تصادفی  $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$  دارای توزیع نرمال استاندارد است

ب- اگر  $\sigma$  مجهول باشد:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

آنگاه با استفاده از خاصیت جمع در توزیع مربع کای، متغیر تصادفی  $\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} + \frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2}$  دارای

توزیع مربع کای با  $n_x + n_y - 2$  درجه آزادی است. از طرفی توزیع آن از  $\bar{X} - \bar{Y}$  مستقل است. بنا

به تعریف متغیر تصادفی  $t$  داریم:

$$\frac{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} / (n_x + n_y - 2)}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

لذا متغیر تصادفی  $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$  دارای توزیع t با  $n_x + n_y - 2$  درجه آزادی است

آزادی است

مثال: نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه  $n_1 = 30$  و  $n_2 = 50$  از دو جامعه نرمال با میانگین‌های

$\mu_1 = 78$  و  $\mu_2 = 75$  و واریانس‌های  $\sigma_1^2 = 150$  و  $\sigma_2^2 = 200$  اختیار شده‌اند. احتمال اینکه میانگین

نمونه اول از میانگین نمونه دوم حداقل 4.8 بیشتر باشد چقدر است؟

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim Z$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 4.8) = P\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (78 - 75)}{\sqrt{\frac{150}{30} + \frac{200}{50}}} \geq \frac{4.8 - (78 - 75)}{\sqrt{\frac{150}{30} + \frac{200}{50}}}\right] = P(Z \geq 0.53)$$

مثال: میانگین نمرات تست هوش دانشجویان سال اول یک دانشکده 540 و انحراف معیار آن 50

است. دو نمونه تصادفی با حجم  $n_1 = 32$  و  $n_2 = 50$  انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه تفاضل

میانگین نمرات این دو نمونه:

الف- بیش از 20 باشد چقدر است؟

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 20) = P\left[\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} > \frac{20}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}}\right] =$$

$$P(Z > 1.76) = 1 - \phi(1.76)$$

ب- بین 5 و 10 باشد چقدر است؟

$$P(5 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 10) = P\left[\frac{5}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} < Z < \frac{10}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}}\right] = P(0.44 < Z < 0.88)$$



نکته: نتایج بدست آمده از توزیع نمونه  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ، نیز برای جمعیت‌های محدود و قتیکه نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام می پذیرد صادق باشد، مشروط بر آنکه اندازه جمعیت ها یعنی  $N_1$  و  $N_2$  به ترتیب در مقابل اندازه نمونه یعنی  $n_1$  و  $n_2$  بزرگ باشد. بهر حال اگر جمعیت ها کوچک باشند و نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام پذیرد در آنصورت ما باید  $\sigma_{\bar{x}_1}$  و  $\sigma_{\bar{x}_2}$  را بتوسط رابطه زیر محاسبه نمائیم:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

**F - توزیع**

اگر متغیرهای تصادفی مستقل  $\chi_1^2$  و  $\chi_2^2$  دارای توزیع های مربع کای با درجات آزادی به ترتیب  $v_1$  و  $v_2$  باشند متغیر تصادفی:

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$$

توزیع F با  $v_1$  و  $v_2$  درجه آزادی دارد. بر این اساس تابع چگالی متغیر تصادفی F به صورت ذیل است:

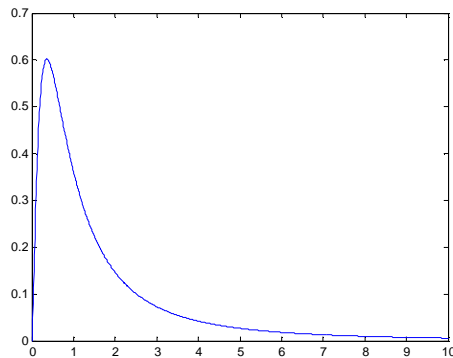
$$f_{F, v_1, v_2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} (v_1)^{\frac{v_1}{2}} (v_2)^{\frac{v_2}{2}} \frac{x^{\left(\frac{v_1-1}{2}\right)}}{(v_2 + v_1 x)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} ; x > 0$$

که در  $v_1$  و  $v_2$  بترتیب درجه آزادی صورت و مخرج است. شکل تابع چگالی متغیر تصادفی F مانند توزیع مربع کای است. اهمیت توزیع F در آنست که برای مقایسه واریانسهای دو جامعه بکار می‌رود. میانگین و واریانس توزیع F با درجات آزادی  $v_1$  و  $v_2$  به ترتیب برابر است با:

$$E[x] = \frac{v_2}{v_2 - 2} ; v_2 > 2$$

$$\text{Var}[x] = \frac{v_2^2(2v_2 + 2v_1 - 4)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)} ; v_2 > 4$$

مثال : توزیع F با 5 درجه آزادی در صورت و 3 درجه آزادی در مخرج



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی  $F$  بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی  $F$  در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً با  $F_{v_1, v_2, \alpha}$  نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی  $F$  واقع در سمت راست آن عبارتست از  $\alpha$  یعنی  $P(F > F_{\alpha; v_1, v_2}) = \alpha$

قضیه 14: اگر  $X_1, \dots, X_{m+1}$  یک نمونه تصادفی به حجم  $m+1$  از یک توزیع نرمال  $N(\mu_x, \sigma_x^2)$  باشد، همچنین اگر  $Y_1, \dots, Y_{n+1}$  یک نمونه تصادفی به حجم  $n+1$  از یک توزیع نرمال  $N(\mu_y, \sigma_y^2)$  باشد و نمونه‌های تصادفی ناهمبسته باشند در این صورت:

$$\frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{m+1} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(m)$$

$$\frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m+1} (X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})} \sim F_{m, n}$$

قضیه 15: (توزیع نسبت دو واریانس) فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_{n_x}$  یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_x$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین  $\mu_x$  و واریانس  $\sigma_x^2$  باشد. همچنین فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y}$  یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_y$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین  $\mu_y$  و واریانس  $\sigma_y^2$  باشد. همچنین فرض کنید تمام  $X$  ها و  $Y$  ها مستقل باشند لذا:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

چون  $X$  ها و  $Y$  ها مستقل اند پس این دو متغیر تصادفی مربع کای مستقل از هم هستند.

اثبات: طبق تعریف متغیر تصادفی  $F$  داریم:

$$F_{v_1, v_2} = \frac{\chi^2_{(v_1)}/v_1}{\chi^2_{(v_2)}/v_2}$$

$$\frac{\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma_x^2} / (n_x - 1)}{\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma_y^2} / (n_y - 1)} = F_{n_x - 1, n_y - 1}$$

لذا متغیر تصادفی  $\frac{S_x^2}{S_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$  دارای توزیع F با درجات آزادی  $n_x - 1$  و  $n_y - 1$  است.

چند نکته مهم

1- اگر  $x$  دارای توزیع  $F_{v_1, v_2}$  باشد آنگاه متغیر  $Y = \frac{1}{X}$  نیز دارای توزیع  $F_{v_2, v_1}$  است.

2- مربع توزیع  $t_{(v)}$  دارای توزیع F با درجات آزادی  $v, 1$  است.

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(v)}}{v}}} \rightarrow t_{(v)}^2 = \frac{Z^2/1}{\chi^2_{(v)}/v}$$

$$F_{1-\alpha; v_2, v_1} \frac{1}{F_{\alpha; v_1, v_2}} \text{ یا } F_{\alpha; v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha; v_2, v_1}} \quad -3$$

4- اگر  $X_1$  و  $X_2$  یک نمونه تصادفی از پخش  $f(x) = e^{-x}$  ;  $x > 0$  باشد آنگاه  $Z = \frac{X_1}{X_2}$  دارای

پخش  $F_{2,2}$  است. توزیع F با درجات آزادی 2 و 2 به صورت زیر است:

$$f_z(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

## 6- توزیع میانگین جامعه های متناهی

اگر آزمایش متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه ای متناهی از اعداد  $\{c_1, \dots, c_n\}$  باشد این مجموعه را جامعه‌ای متناهی با اندازه  $N$  می‌نامند. اگر انتخاب بدون جایگذاری باشد و  $x_1$  اولین و  $x_n$  امین عددی باشد که استخراج می‌شوند، این متغیرهای تصادفی، نمونه ای تصادفی به اندازه  $n$  این جامعه متناهی را تشکیل می‌دهند مشروط بر آنکه توزیع احتمال توأم آنها به ازای هر  $n$  تایی مرتب مقادیر انتخاب شده از مجموعه  $\{c_1, \dots, c_n\}$  به صورت زیر باشد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N(N-1)\dots(N-n+1)}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{N}, x_i = c_1, \dots, c_N, i = 1, \dots, n$$

میانگین و واریانس آنرا میانگین و واریانس جامعه متناهی می‌نامیم. یعنی میانگین و واریانس جامعه متناهی  $\{c_1, \dots, c_N\}$  عبارتست از:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N c_i}{N}, \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i - \mu)^2}{N}$$

توزیع حاشیه ای توأم هر دو تا از متغیرهای تصادفی  $x_1, \dots, x_n$  برای هر زوج مرتب از مقادیر جامعه متناهی است و برابر است با:

$$g(x_i, x_j) = \frac{1}{N(N-1)}$$

و کوواریانس آنها عبارتست از:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \frac{\sigma^2}{N-1}$$

اگر  $\bar{X}$  میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه ای متناهی به اندازه  $N$  با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \mu, \text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

قضیه 16: اگر تمام نمونه‌های تصادفی  $n$  تایی ممکنه با روش بدون جایگذاری از یک جمعیت محدود  $N$  تایی با حد متوسط  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  بیرون کشیده شود در آنصورت توزیع نمونه‌ای  $\bar{X}$  به طور تقریبی یک توزیع نرمال با حد متوسط و انحراف معیار زیر خواهد بود.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

مثال:

جمعیت 1 و 1 و 3 و 4 و 5 و 6 و 6 و 6 و 7 داده شده است. نمونه تصادفی 36 تایی به روش جایگزین انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از  $3/8$  و کوچکتر از  $4/5$  باشد چقدر است؟

توزیع احتمال جمعیت مربوط به صورت زیر است:

|      |     |     |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x    | 1   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
| P(x) | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

$$E(x) = \mu = 4$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = 5$$

$$\bar{x} \sim N\left(4, \frac{5}{36}\right)$$

$$P(3.8 < \bar{x} < 4.5) = P(-0.405 < z < 1.216) = 0.5453$$

نکته: برای  $N$ هایی که در مقابل تعداد نمونه  $n$  عدد بزرگی هستند، ضریب  $\frac{N-n}{N-1}$  به سمت 1 میل می‌کند.

قضیه 17: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه‌ای متناهی که متشکل از  $N$  عدد صحیح مثبت است انتخاب شود آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

$$E(y) = \frac{n(N+1)}{2}$$

$$\text{Var}(y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}$$

$$\mu = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot f(x_i) - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(2N+1)(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) = \frac{N^2-1}{12n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

## 7- آماره‌های ترتیبی

فرض کنید از یک جامعه نامتناهی پیوسته یک نمونه تصادفی  $n$  تایی بشرح  $X_1, \dots, X_n$  انتخاب کرده‌ایم. اگر کوچکترین مقدار  $x$  ها را  $Y_1$  ، بزرگترین مقدار بعد از آن را  $Y_2$  و به همین ترتیب بزرگترین آنها را  $Y_n$  بنامیم در این صورت  $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$  را آماره ترتیبی می‌نامیم.

قضیه 18: برای نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه‌ای نامتناهی که دارای تابع چگالی  $f(x)$  است.

چگالی  $r$  امین آماره ترتیبی  $y_r$ ، به ازای  $-\infty < y_r < +\infty$  عبارتست از:

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[ \int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[ \int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1}$$

اثبات: فرض کنید که محور اعداد حقیقی را به سه بازه تقسیم کرده‌ایم یکی از  $-\infty$  تا  $y_r$ ، دومی از  $y_r$

تا  $y_r+h$  (که در آن  $h$  ثابت است) و سومی از  $y_r+h$  تا  $+\infty$ . در اینصورت اگر چگالی جامعه‌ای که از

آن نمونه برگرفته شده است  $f(x)$  باشد، احتمال اینکه  $r-1$  تا از نمونه‌ها در اولین باز قرار بگیرد،

یکی در بازه دوم و  $n-r$  تا در بازه سوم قرار بگیرند طبق فرمول توزیع چند جمله‌ای عبارتست از

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[ \int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} \left[ \int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx \right]^{r-1} \left[ \int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1}$$

با استفاده از قضیه میانگین در حسابان داریم:

$$\left[ \int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx \right] = f(\xi) \cdot h \quad y_r \leq \xi \leq y_r + h$$

و در زمانی که  $h \rightarrow 0$  خواهیم داشت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx = f(y_r)$$

و سرانجام



$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[ \int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[ \int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1}$$

بر این اساس توزیع اولین، آخرین و میانه آماره ترتیبی عبارتست از

الف - توزیع اولین آماره ترتیبی

$$g_1(y_1) = n f(y_1) \left[ \int_{y_1}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1} \quad -\infty \leq y_1 \leq +\infty$$

ب- توزیع آخرین آماره ترتیبی

$$g_n(y_n) = n f(y_n) \left[ \int_{-\infty}^{y_n} f(x) dx \right]^{n-1} \quad -\infty \leq y_n \leq +\infty$$

ج - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه  $n=2m+1$  توزیع  $\tilde{x} = y_{m+1}$  میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x}) = \frac{(2m+1)!}{m!m!} \left[ \int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x) dx \right]^m f(\tilde{x}) \left[ \int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x) dx \right]^m \quad -\infty \leq \tilde{x} \leq +\infty$$

د - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه  $n=2m$  توزیع  $\tilde{x}$  میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x}) = \frac{g_m(y_m) + g_{m+1}(y_{m+1})}{2}$$

ه- چگالی توام  $g_{r,j}(y_1, y_j)$  عبارتست از

$$g_{r,j}(y_r, y_j) = \frac{n!}{(r-1)!(j-r-1)!(n-j)!} \left[ \int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[ \int_{y_r}^{y_j} f(x) dx \right]^{j-1} f(y_j) \left[ \int_{y_j}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-j}$$

مثال: فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از یک جامعه‌ای نمایی با  $\lambda = 1$  باشد. تابع چگالی اولین و آخرین آماره ترتیبی را بدست آورید.

$$g_1(y_1) = n e^{-y_1} \left[ \int_{y_1}^{\infty} e^{-x} dx \right]^{n-1} = n e^{-y_1} (e^{-y_1})^{n-1} = n e^{-ny_1}$$

$$g_n(y_n) = n e^{-y_n} \left[ \int_{-\infty}^{y_n} e^{-x} dx \right]^{n-1} = n e^{-y_n} (1 - e^{-y_n})^{n-1}$$

## فهرست

- 1- مقدمه ..... 1
- 2- برآورد نقطه‌ای (Point Estimator) ..... 1
- 3- ارزیابی یک تخمین زنده یا مقایسه برآوردکننده ها ..... 1
- 3-1- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارایی نسبی آنها ..... 2
- 3-2- تعریف تخمین زنده بهینه ..... 2
- 3-3- برآوردکننده های ناریب ..... 2
- 3-4- برآوردکننده های سازگار ..... 5
- 3-5- تخمین زنده های ناریب کارا ..... 7
- 4- روش‌های برآورد نقطه‌ای ..... 9
- 4-1- روش گشتاورها ..... 9
- 4-2- روش حداکثر درستنمایی (روش MLE) ..... 11
- 5- برآوردکننده های کافی ..... 14

**1- مقدمه**

نظریه برآورد به دو موضوع برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای می‌پردازد. در برآورد نقطه‌ای یک آماره، تنها یک مقدار عددی بکار می‌رود تا بتوان به کمک آن یک پارامتر بخصوصی از جامعه را برآورد نمود در حالیکه در برآورد فاصله‌ای، یک فاصله مخصوصی معین می‌گردد که مقدار واقعی پارامتر در داخل این فاصله قرار دارد.

**2- برآورد نقطه‌ای (Point Estimator)**

یک مقدار به خصوصی از یک آماره که برای برآورد یک پارامتر مشخص به کار می‌رود به نام برآورد نقطه‌ای نامیده می‌شود. می‌توان مساله کلی برآورد نقطه‌ای را به شرح ذیل بیان کرد:

متغیر تصادفی  $X$ ، با تابع چگالی احتمال  $f_X(x; \theta)$  مفروض است که در آن پارامتر  $\theta$  مجهول می‌باشد. یک نمونه تصادفی،  $x_1, x_2, \dots, x_n$  از این جامعه انتخاب می‌نماییم و بر اساس تابعی از این نمونه تصادفی،  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  مقدار پارامتر  $\theta$  را برآورد می‌کنیم. در این صورت متغیر تصادفی  $\hat{\theta}$  یک برآورد کننده برای پارامتر  $\theta$  و مقداری که  $\hat{\theta}$  می‌گیرد برآورد نقطه‌ای  $\theta$  نامیده می‌شود.

بدیهی است، برای پارامتر  $\theta$ ، تعداد زیادی برآورد کننده وجود دارد. اما یک برآورد کننده خوب آن است که تا حد ممکن به مقدار واقعی پارامتر نزدیک باشد. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که از بین تخمین زنده‌های مختلف برای پارامتر  $\theta$  کدام بهتر است؟

از آنجایی که تخمین زنده‌ها، متغیرهای تصادفی هستند پس عملکرد آنها را نمی‌توان برای یک مورد خاص مدنظر قرار داد. بنابراین برآورد کننده‌ها باید براساس عملکردشان در بلندمدت مورد ارزیابی قرار گیرند.

**3- ارزیابی یک تخمین زنده یا مقایسه برآورد کننده‌ها**

در برآورد پارامتر  $\theta$  که بر اساس مقادیر نمونه تعیین می‌شود، در ابتدا تابع ضرر (زیان) به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

از آنجایی که تابع زیان یک متغیر تصادفی است بنابراین منطقی بنظر می‌رسد از امید ریاضی تابع

زیان تحت عنوان تابع ریسک برای نیل به ارزیابی بهتر استفاده شود. تابع ریسک عبارتست از:

$$R(\hat{\theta}, \theta) = \text{MSE} = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

### 3-1- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارایی نسبی آنها

اگر برآوردکننده  $\hat{\theta}_1$  دارای میانگین مربع خطای  $E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2$  (که آنرا با  $\text{MSE}_1$  نشان می‌دهند) و برآوردکننده  $\hat{\theta}_2$  دارای میانگین مربع خطای  $E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$  (که آنرا با  $\text{MSE}_2$  نشان می‌دهند) باشد در این صورت کارایی  $\hat{\theta}_2$  نسبت به  $\hat{\theta}_1$  بصورت  $\frac{\text{MSE}_1}{\text{MSE}_2}$  یا  $\frac{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}$  تعریف می‌شود. اگر کارایی  $\hat{\theta}_2$  نسبت به  $\hat{\theta}_1$  کمتر از یک باشد،  $\hat{\theta}_1$  برآوردکننده ای بهتر از  $\hat{\theta}_2$  برای  $\theta$  به شمار می‌آید. در غیر این صورت  $\hat{\theta}_2$  برآوردکننده ای بهتر از  $\hat{\theta}_1$  برای  $\theta$  است.

### 3-2- تعریف تخمین زنده بهینه

تخمین زنده بهینه به تخمین زنده‌ای گفته می‌شود که  $\text{MSE}$  مربوط به آن، از  $\text{MSE}$  سایر تخمین زنده‌ها به ازای تمام مقادیر  $\theta$  کمتر باشد. به عنوان مثال  $\bar{X}$  یک تخمین زنده بهینه  $\mu$  مربوط به توزیع نرمال می‌باشد.

### 3-3- برآوردکننده‌های نارایب

$\hat{\theta}$  یک برآوردکننده نارایب برای  $\theta$  است اگر امید ریاضی آن با  $\theta$  مساوی شود. یعنی اگر به ازای تمام مقادیر  $\theta$  داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

اگر یک برآوردکننده نارایب نباشد، اریب نامیده می‌شود و مقدار  $b = E(\hat{\theta}) - \theta$  به عنوان اریبی شناخته می‌شود. در اینصورت، اگر  $b > 0$  باشد اریبی مثبت و اگر  $b < 0$  باشد اریبی منفی است. در اینصورت میانگین مربعات خطا بر حسب مقدار اریبی عبارتست از:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$$

نکته: اگر متغیر تصادفی  $T$  یک برآوردکننده نارایب برای پارامتر مجهول  $\theta$  باشد و  $\text{Var}(T) \neq 0$  در این صورت  $T^2$  همواره برای  $\theta^2$  اریب است.

مثال: دو برآوردکننده  $\hat{\theta}_1$  و  $\hat{\theta}_2$  برای پارامتر  $\theta$  به شرح ذیل بیان شده است:

$$\begin{cases} E(\hat{\theta}_1) = \theta \\ \text{Var}(\hat{\theta}_1) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} E(\hat{\theta}_2) = \frac{2}{3}\theta \\ \text{Var}(\hat{\theta}_2) = 3 \end{cases}$$

بر حسب مقادیر مختلف  $\theta$  این دو تخمین زنده را مقایسه کنید.

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$$

$$MSE(\hat{\theta}_1) = 7 + [E(\hat{\theta}_1) - \theta_1]^2 = 7 + (0)^2 = 7$$

$$MSE(\hat{\theta}_2) = 3 + [E(\hat{\theta}_2) - \theta_2]^2 = 3 + \left(\frac{2}{3}\theta - \theta\right)^2 = 3 + \frac{1}{9}\theta^2$$

اگر  $\hat{\theta}_2$  برآورد کننده بهتری برای  $\theta$  باشد آنگاه:

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2)$$

$$7 > 3 + \frac{\theta^2}{9} \rightarrow -6 < \theta < 6$$

مثال 1: متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول  $\mu$  و واریانس مجهول  $\sigma^2$  است. یک

نمونه تصادفی 9 تایی می‌گیریم و 2 برآورد کننده نقطه‌ای  $T_1 = 0.1 \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$  و

و  $\text{Var}(T_1) = 0.16\sigma^4$  را برای  $T_2 = 0.125 \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$  تعریف می‌کنیم اگر

$\text{Var}(T_2) = 0.25\sigma^4$  باشد. کارایی  $T_1$  نسبت به  $T_2$  برابر است با:

$$\frac{\text{کارایی } T_1}{\text{کارایی } T_2} = \frac{MSE_2}{MSE_1} = \frac{\text{Var}(T_2) + (E(T_2) - \sigma^2)^2}{\text{Var}(T_1) + (E(T_1) - \sigma^2)^2} = \frac{0.25\sigma^4}{0.16\sigma^4 + 0.04\sigma^4} = 1.25$$

$$E(T_1) = 0.1 \times 8 \times \sigma^2 = 0.8\sigma^2$$

$$E(T_2) = 0.125 \times 8\sigma^2 = \sigma^2$$

مثال 2: اگر  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشند،

کارایی نسبی برآورد کننده  $\bar{X}$  (میانگین نمونه) نسبت به برآورد کننده  $\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$  چقدر

است؟

$$\frac{\text{کارایی } \bar{x}}{\text{کارایی } y} = \frac{MSE(y)}{MSE(\bar{x})} = \frac{\text{Var}(y)}{\text{Var}(\bar{x})} = \frac{\frac{1}{16} \times 6\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{3}} = \frac{9}{8}$$

مثال 3: فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  برآورد کننده های  $\theta$  هستند و بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} E(T_1) = \theta \\ \text{Var}(T_1) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} E(T_2) > \theta \\ \text{Var}(T_2) = 2 \end{cases}$$

و  $[E(T_2) - \theta]^2 = 7$  است. کدام برآوردکننده بهتری برای  $\theta$  است؟

$$MSE_{T_1} = \text{Var}(T_1) + b^2 = 4 + 0 = 4$$

$$MSE_{T_2} = \text{Var}(T_2) + [E(T_2) - \theta]^2 = 2 + 7 = 9$$

چون  $\frac{MSE_{T_1}}{MSE_{T_2}} < 1$  است لذا  $T_1$  برآوردکننده بهتری برای  $\theta$  است.

مثال 4: فرض کنید  $T$  بر اساس یک نمونه تصادفی  $n$  تایی، برآوردکننده‌ای برای  $\theta$  باشد. اگر

$$E(x_i) = \theta \quad \text{و} \quad T = \sum a_i x_i \quad \text{باشد. } a_i \text{ ها چه محدودیتی باید داشته باشند تا } T \text{ یک برآوردکننده}$$

ناریب  $\theta$  شود؟

$$T = \sum a_i x_i \rightarrow E(T) = E\left[\sum a_i x_i\right] = \sum [E(a_i x_i)] = \sum [a_i E(x_i)]$$

چون  $T$  یک برآوردکننده ناریب  $\theta$  است لذا:

$$\theta = \sum (a_i \theta) = \theta = \theta \sum a_i \rightarrow \sum a_i = 1$$

مثال 5: فرض کنید  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  باشد. اگر  $\hat{\theta}_1$  و  $\hat{\theta}_2$  دو تخمین زننده برای پارامتر  $\sigma^2$  باشند، آنها

را مقایسه کنید.

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+1}$$

$$E(\hat{\theta}_1) = E(S^2) = \sigma^2, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}, \quad MSE(\hat{\theta}_1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right] = \frac{n-1}{n+1} \sigma^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right] = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2} \sigma^4$$

$$MSE(\hat{\theta}_2) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2} \sigma^4 + \left[\frac{n-1}{n+1} \sigma^2 - \sigma^2\right]^2 = \frac{2\sigma^4}{n+1}$$

$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2) \Rightarrow \hat{\theta}_2$  برآورد کننده بهتر از  $\hat{\theta}_1$  برای پارامتر  $\sigma^2$  است

## 3-4- برآوردکننده های سازگار

خاصیت نارایی بر حسب تکرار آزمایش‌ها بیان شده است اما خاصیت سازگاری مربوط به رفتار یک تخمین‌زننده در یک آزمایش است و تئیکه حجم نمونه اجازه یابد بسیار بزرگ شود.

تعریف: گفته می‌شود برآوردکننده  $\hat{\theta}_{(n)}$  یک برآوردکننده سازگار است هرگاه:

$$1-\hat{\theta}_{(n)} \text{ نارایب باشد.}$$

2- با بزرگ شدن اندازه نمونه ( $n$ ) داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{(n)} = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_{(n)}) = 0$$

نماد  $\hat{\theta}_{(n)}$  به کار می‌رود تا نشان دهد که ممکن است برآوردکننده تابعی از نمونه تصادفی باشد. بطور کلی برآوردکننده‌هایی که تابع ریسک آنها، با بزرگ شدن اندازه نمونه به سمت صفر میل می‌گیرند، برآوردکننده های سازگارند.

اگر این برآوردکننده ها اریب باشند، مقدار اریبی آنها نیز به سمت صفر میل می‌کند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{MSE}_\theta(\hat{\theta}_n) = 0$$

مثال 6: نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  را از متغیر تصادفی دلخواه  $X$  با میانگین  $\mu$  واریانس  $\sigma^2$  در نظر

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad U_n = \bar{x}_n + 1 \quad \text{می‌گیریم. فرض کنید:}$$

نشان دهید که  $\bar{X}_n$  یک برآوردکننده سازگار و  $U_n$  یک برآوردکننده ناسازگار برای  $\mu$  می‌باشد.

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \quad \text{است.}$$

$$E(U_n) = E(\bar{X}_n + 1) = \mu + 1 \quad \text{یک برآوردکننده ناسازگار است.}$$

نکته: سازگاری یک خاصیت مجانبی است یعنی خاصیت حدی یک برآوردکننده است. به عبارت دیگر وقتی  $n$  به حد کافی بزرگ است می‌توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک برآوردکننده سازگار صورت می‌گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود.

نکته: شرط کافی (نه لازم) برای اینکه آماده  $\hat{\theta}$  یک برآوردکننده سازگار پارامتر  $\theta$  باشد این است

که:

(1)  $\hat{\theta}$  ناریب باشد.

(2) وقتی  $n \rightarrow \infty$ ،  $\text{Var}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$

این شرط، شرط کافی است و شرط لازم نیست. لذا یک برآوردکننده می تواند سازگار باشد بدون اینکه ناریب باشد.

مثال 7: نشان دهید برآوردکننده  $\frac{x+1}{n+2}$  یک برآوردکننده سازگار پارامتر  $\theta$  جامعه دو جمله ای است.

نکته: یک برآوردکننده اریب تنها وقتی می تواند سازگار باشد که بطور مجانبی ناریب باشد یعنی وقتی  $n \rightarrow \infty$  ناریب باشد.

مثال 8: برآوردکننده مینیماکس پارامتر  $\theta$  ی دو جمله ای یعنی  $\frac{X + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$  مجانباً ناریب است.

$$E\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}\right) = \frac{E(x) + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} + \frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} \neq \theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} = \theta$$

مثال 9: نشان دهید که واریانس نمونه ای  $S^2$ ، برآوردکننده سازگار  $\sigma^2$  برای یک نمونه تصادفی از جامعه های نرمال است.

$$1) E(S^2) = \sigma^2 \text{ ناریب است}$$

$$2) \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(S^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

مثال 10: نشان دهید که  $\bar{x}^2$  یک برآوردکننده مجانباً ناریب  $\mu^2$  است.



$$E(\bar{x}^2) = \text{Var}(\bar{x}) + [E(\bar{x})]^2$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{x}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = \mu^2$$

پس  $\bar{x}^2$  یک برآوردکننده مجاناً نارایب است.

### 3-5- تخمین زننده های نارایب کارا

اگر برآوردکننده های پارامتر  $\theta$  متعلق به طبقه برآوردکننده نارایب باشند تابع ریسک، همان واریانس برآوردکننده می شود. در صورت وجود، برآوردکننده بهینه،  $\hat{\theta}_0$ ، در میان این طبقه برآوردکننده ای است که به ازای تمام مقادیر  $\theta$  واریانس آن از واریانس هیچ برآوردکننده نارایب دیگر تجاوز نکند. اگر چنین تخمین زننده ای وجود داشته باشد تخمین زننده  $\hat{\theta}_0$  به تخمین زننده نارایب با حداقل واریانس  $\theta$  معروف بوده و نیز در این طبقه از همه کارا تر است.

برای جستجو برای یک چنین برآورد کننده ای، تعیین یک حد پائین برای واریانس تمام برآوردکننده های نارایب مفید خواهد بود. یک چنین حدی بوسیله یک نامساوی مشهور به نامساوی کرایمر- رانو ارائه می شود.

فرض کنید  $\hat{\theta}$ ، یک برآورد کننده نارایب برای پارامتر  $\theta$  از جامعه ای با تابع چگالی  $f_x(x; \theta)$  باشد. تحت شرایط بسیار کلی  $\hat{\theta}$  در نامساوی ذیل صدق می کند.

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \text{Ln}f(x; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

است. اگر  $X$  گسسته باشد،  $f_x(x; \theta)$  را برداشته و به جای آن از  $P(x, \theta)$  استفاده می کنیم.

متأسفانه همواره برآوردکننده ای که عملاً دارای حد پائین کرایمر- رانو باشد وجود ندارد. اما در بسیاری از موارد می توان نشان داد که برآوردکننده ای مانند  $\hat{\theta}_0$  دارای چنین حدی است در این صورت  $\hat{\theta}_0$  باید برآوردکننده بهینه نارایب باشد. به عبارت دیگر حد پائین کرایمر- رانو متعلق به

تخمین زنده ناریب بهینه است.

قضیه: اگر  $\hat{\theta}$  یک برآوردکننده ناریب  $\theta$  باشد و  $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \text{Ln}f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$  باشد، آنگاه  $\hat{\theta}$  یک

برآوردکننده ناریب با کمترین واریانس از  $\theta$  است.

مثال 11: نشان دهید  $\bar{X}$  یک برآوردکننده ناریب با کمترین واریانس برای میانگین جامعه نرمال است.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_x(x; \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{Ln } f_x(x; \mu) = \text{Ln} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{d \text{Ln } f_x(x; \mu)}{d\mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$E\left\{\frac{d \text{Ln } f_x(x; \mu)}{d\mu}\right\}^2 = \frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{nE\left\{\frac{d \text{Ln } f_x(x; \mu)}{d\mu}\right\}^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1)$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

لذا واریانس میانگین نمونه به حد پائین کریمر-رائو می رسد. بنابراین  $\bar{X}$  برآوردکننده ناریب

کمترین واریانس برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم است.

## 4- روش‌های برآورد نقطه‌ای

## 4-1- روش گشتاورها

فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از یک توزیع دلخواه باشد. در این صورت  $k$  امین

گشتاور نمونه  $M'_k$  حول مبدا امین گشتاور توزیع حول مبدا بترتیب عبارتست از  $M'_k = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$

و  $E(X^k)$  که گشتاور توزیع حول مبدا، عموماً تابعی از  $p$  پارامتر مجهول است. در روش گشتاورها

با برابر قرار دادن  $p$  گشتاور اول توزیع با گشتاورهای نظیر نمونه

$$\begin{aligned} M'_1 &= E(x) & \bar{x} &= E(x) \\ M'_2 &= E(x^2) & \frac{\sum x_i^2}{n} &= E(x^2) \\ & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & \\ M'_p &= E(x^p) & \frac{\sum x_i^p}{n} &= E(x^p) \end{aligned}$$

و حل دستگاه حاصل پارامترهای مجهول جامعه بدست می‌آید. بطور خلاصه: این روش عبارتست از

مساوی قرار دادن گشتاورهای جامعه با گشتاورهای نمونه و بعد حل دستگاه معادلات حاصل.

مثال 12: برآورد کننده های  $\mu$  و  $\sigma^2$  یک جامعه نرمال با میانگین مجهول  $\mu$  و واریانس مجهول  $\sigma^2$

را به روش گشتاورها تعیین کنید.

برای یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال داریم:

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ E(x^2) &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

در این صورت با مساوی قرار دادن دو گشتاور اول نمونه با دو گشتاور اول توزیع داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \mu \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

می انجامد. از حل توام این معادلات، برآورد کننده های روش گشتاورها عبارتند از:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال 13: اگر  $x_1, \dots, x_n$  مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه ای با چگالی

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} & ; 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

باشد. برآورد کننده ای برای  $\theta$  به روش گشتاورها پیدا کنید.

$$E(x) = \int_0^{\theta} x \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2} \int_0^{\theta} (\theta x - x^2) dx = \frac{2}{\theta^2} \left[ \frac{1}{2} \theta x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\theta} = \frac{2}{\theta^2} \left( \frac{1}{2} \theta^3 - \frac{1}{3} \theta^3 \right) =$$

$$\frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{6} \theta^3 = \frac{1}{3} \theta$$

$$M'_1 = E(x)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \theta \rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{x}$$

مثال 14: اگر  $x_1, \dots, x_n$  مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه هندسی باشد. برآورد کننده

پارامتر  $\theta$  ی توزیع را به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}$$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} \quad \bar{x} = \frac{1}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{1}{\bar{x}}$$

مثال 15: نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه گاما داریم. برای برآورد کردن پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  روش

گشتاورها را بکار ببرید.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha\beta \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} &= \alpha\beta^2 + \bar{x}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n\bar{x}}$$

مثال 16: اگر  $x_1, \dots, x_n$  مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه بتا با  $\beta = 1$  باشد برآوردی

برای پارامتر  $\alpha$  به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \bar{x} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

مثال 17: تابع چگالی زیر داده شده است که در آن  $\theta$  پارامتر مجهول می باشد.  $\theta$  را به روش گشتاورها تخمین بزنید.

$$f_x(x) = \theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad 0 < \theta < \infty$$

$$E(x) = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1} \left[ x^{\theta+1} \right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

#### 4-2- روش حداکثر درستنمایی (روش MLE)

این روش عبارتست از حداکثر کردن درست نمایی احتمال بدست آوردن یک مجموعه از مقادیر نمونه تصادفی. فرض کنید  $x_n, \dots, x_2, x_1$  یک نمونه به حجم  $n$  از یک جامعه پیوسته با چگالی احتمال  $f_x(x, \theta)$  یا گسسته با احتمال  $P_x(x, \theta)$  باشد که  $\theta$  یک پارامتر مجهول است و باید برآورد شود. در حقیقت می خواهیم بجای برآورده  $\theta$ ، آن تابعی از مشاهدات نمونه ای را قرار دهیم که احتمال نمونه به ازای آن حداکثر شود. تابع احتمال  $L$  را بصورت:

$$L = P(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i = x_i)$$

$$L = f_x(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i, \theta)$$

تعریف می کنیم که همان احتمال توام برای مشاهدات نمونه است. تخمین  $\theta$  باید به گونه ای صورت پذیرد که بیشترین احتمال برای مشاهده مقادیر  $x_n, \dots, x_2, x_1$  حاصل شود. به عبارت دیگر تخمین زنده بیشترین احتمال  $\hat{\theta}$  مقداری خواهد بود که به ازای آن تابع  $L$  حداکثر شود. به تابع  $L$ ، تابع درست نمایی می گویند و  $\hat{\theta}$  حاصل از این روش را با نماد  $\hat{\theta} = \text{MLE}(\theta)$  نمایش می دهیم.

توجه: اغلب در حداکثر کردن تابع  $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$  راحت تر است که  $\ln L$  آن حداکثر شود زیرا

$\ln(L)$  یک تابع صعودی یکنواخت از  $L$  است و  $\theta$  که  $L$  را ماکزیمم می‌کند  $\ln(L)$  را نیز ماکزیمم می‌کند.

مثال 18: اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از یک جامعه نرمال  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، برآورد کننده‌ای برای  $\mu$  و  $\sigma$  بیابید.

$$L = f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\ln L = -n \ln \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال 19: اگر  $x_1, \dots, x_n$  مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از جامعه برنولی باشد. MLE پارامتر برنولی را بدست آورید.

$$p_x(x_i, p) = p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}, x_i = 0, 1$$

$$L = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$$

$$\ln L = (\ln p) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) + [\ln(1-p)] \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - n - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{n - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = np \Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

مثال 20: اگر  $x_1, \dots, x_2$  نمونه‌ای به اندازه  $n$  از جامعه دو جمله‌ای با پارامتر  $p = \theta$  باشد. MLE

پارامتر دوجمله‌ای را بدست آورید.

$$L(\theta) = f(x; \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad \text{راه حل اول:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \binom{n}{x} [x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x} - (n-x)\theta^x(1-\theta)^{n-x-1}] = 0$$

$$f_x(x; \theta) \left[ x\theta^{-1} - (n-x)(1-\theta)^{-1} \right] = 0$$

$$\frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0 \Rightarrow x = n\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

راه حل دوم:

$$\ln L(\theta) = \ln \binom{n}{x} + x \ln \theta + (n-x) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

### خواص MLE

1- با افزایش  $n$  توزیع MLE به توزیع نرمال میل می‌کند و در زمانیکه  $n \rightarrow \infty$  MLE توزیع نرمال دارد.

2- در زمانیکه  $n \rightarrow \infty$ ، MLE سازگار است و به تبع ناریب است.

3- اگر  $\hat{\theta}$  برآورد کننده به روش حداکثر درست نمایی برای  $\theta$  باشد و  $n$  به سمت  $\infty$  میل کند، آنگاه واریانس  $\hat{\theta}$  برابر حد پایین نامساوی کرایمر - راتو خواهد شد.

4- MLE دارای خاصیت پایایی است یعنی اگر فرض کنید  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$  که در آن

$\hat{\theta}_j = \hat{f}(x_1, \dots, x_n)$  است که برآورد کننده درستنمایی ماکزیمم  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_4)$  در چگالی

$f(\theta_1, \dots, \theta_n)$  باشد، آنگاه برآورد کننده درستنمایی ماکزیمم  $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$  برابر است با

$$\tau(\hat{\theta}) = (\tau_1(\hat{\theta}), \dots, \tau_r(\hat{\theta}))$$

مثال 21: فرض کنید  $x \sim N(\mu, 1)$  برآورد کننده MLE پارامتر  $\alpha = \mu^2$  را پیدا کنید.

$$\hat{\mu} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\mu}^2 = \bar{x}^2$$

## 5- برآوردکننده های کافی

برآورد کننده ای مانند  $\hat{\theta}$  را کافی می نامیم در صورتی که از همه اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر  $\theta$  یک جامعه بهره‌برداری کند. یعنی اگر تمام دانشی را که می توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه ها و ترتیب آنها بدست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهده مقدار آماره  $\hat{\theta}$  هم بدست آوریم. این را می توان بر حسب توزیع شرطی مقادیر نمونه به فرض  $\hat{\theta}$  بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می شود.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\theta})}{g(\hat{\theta})}$$

اگر این عبارت به  $\hat{\theta}$  بستگی داشته باشد، مقادیر خاص  $x_n, \dots, x_2, x_1$  که  $\hat{\theta}$  را بدست می دهند برای برخی مقادیر  $\theta$  محتملتر از سایر مقادیرند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد  $\theta$  کمک خواهد کرد. اگر این عبارت به  $\theta$  بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص  $x_n, \dots, x_2, x_1$  که  $\hat{\theta}$  را بدست می دهند برای هر مقدار  $\theta$  به یک اندازه محتمل اند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد  $\theta$  کمکی نخواهد کرد.

تعریف: آماره  $\hat{\theta}$  یک برآوردکننده کافی پارامتر  $\theta$  است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار  $\hat{\theta}$ ، توزیع شرطی نمونه تصادفی  $x_n, \dots, x_2, x_1$  به فرض  $\hat{\theta}$ ، مستقل از  $\theta$  باشد.

مثال 22: اگر  $x_n, \dots, x_2, x_1$  متغیرهای تصادفی برنولی با پارامتر یکسان  $\theta$  باشند. نشان دهید که

آماره  $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$  که در آن  $X = x_1 + \dots + x_n$ ، برآورد کننده کافی برای  $\theta$  است.

$$f(x; \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} \quad ; \quad x_i = 0,1$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} = \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}$$

$X$  یک متغیر دو جمله ای با پارامترهای  $n$  و  $\theta$  است لذا:



$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$g(\hat{\theta}) = \binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}} \quad ; \quad \hat{\theta} = 0, \frac{1}{n}, \dots, 1$$

$$f(x_1, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(\hat{\theta})} = \frac{\theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}} = \frac{1}{\binom{n}{x}}$$

که به  $\theta$  بستگی ندارد.

مثال 23: نشان دهید که آماره  $y = \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$  برای برآورد پارامتر  $\theta$  ی جامعه برنولی،

کافی نیست.

باید نشان دهیم  $f(x_1, x_2, x_3 | y) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, y)}{g(y)}$  به ازای برخی مقادیر  $x_3, x_2, x_1$  مستقل از  $\theta$

نیست. بنابراین حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن  $x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = 1$  بطوری که

$$f\left(1, 1, 0 \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, y = \frac{1}{2}\right)}{p\left(y = \frac{1}{2}\right)} = \frac{f(1, 1, 0)}{f(1, 1, 0) + f(0, 0, 1)} = \frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta) + \theta(1-\theta)^2} = \theta$$

که به  $\theta$  بستگی دارد.

قضیه: آماره  $\theta$  یک برآوردکننده کافی پارامتر  $\theta$  است اگر و فقط اگر چگالی یا توزیع احتمال توام

نمونه تصادفی را بتوان تجزیه کرد بطوری که

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h(x_1, \dots, x_n)$$

که در آن  $g(\hat{\theta}, \theta)$  تنها به  $\hat{\theta}$  و  $\theta$  بستگی دارد و  $h(x_1, \dots, x_n)$  به  $\theta$  بستگی ندارد.

مثال 24: نشان دهید که  $\bar{x}$  یک برآورد کننده کافی  $\mu$  جامعه نرمال یا واریانس معلوم  $\sigma^2$  است.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

$$\sum (x_i - \mu)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2$$

$$f(x_1, \dots, x_n; \mu) = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2} \right\} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2} \right\}$$

که در آن اولین عامل سمت راست تنها به برآورد  $\bar{x}$  و به میانگین جامعه،  $\mu$ ، بستگی دارد و دومین عامل شامل  $\mu$  نیست. بنابراین  $\bar{x}$  یک برآورد کننده کافی  $\mu$  جامعه نرمال با واریانس معلوم  $\sigma^2$  است.

## 3-1- مقدمه

نوع دیگر برآورد، برآورد فاصله‌ای به شکل  $[C_1, C_2]$  است که در آن  $C_1$  حد پائین و  $C_2$  حد بالا است بنابراین اگر پارامتری که باید برآورد کرده شود با  $\theta$  معرفی شود،  $[C_1, C_2]$  یک برآورد کننده فاصله‌ای  $\theta$  است به طوری که با احتمال مفروض،  $1-\alpha$ ،  $C_1 \leq \theta \leq C_2$  باشد.  $C_2, C_1$  حدود اطمینان پارامتر مفروض و فاصله بین آنها یک فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  نامیده می‌شود. به کسر  $(1-\alpha)$  اغلب ضریب اطمینان گفته می‌شود.

## 3-2- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار معلوم باشد

فرض کنید متغیر تصادفی  $x$  دارای توزیع نرمال  $N(\mu, \sigma)$  است. یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از این جامعه گرفته می‌شود. اگر  $\bar{x}$  میانگین نمونه باشد در نتیجه  $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  است. در این صورت فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu$  به صورت ذیل تعیین می‌شود:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim Z$$

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}\right\} = 1 - \alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  عبارتست از:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}$$

یعنی:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}$$

و طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$\frac{2z_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}}$$

در نهایت فاصله اطمینان یک طرفه  $(1-\alpha)100\%$  عبارت است از:

$$p(z \geq -z_{\alpha}) = 1-\alpha \quad p(z \leq z_{\alpha}) = 1-\alpha$$

$$p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_{\alpha}\right\} = 1-\alpha \quad p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha}\right\} = 1-\alpha$$

$$\mu \leq \bar{x} + z_{\alpha} \sigma / \sqrt{n} \quad \mu \geq \bar{x} - z_{\alpha} \sigma / \sqrt{n}$$

مثال 1. میانگین نمونه یک نمونه تصادفی 100 تایی از موشک‌های انبار شده 2208 شده است. انحراف معیار معلوم و مساوی 40 است. برای میانگین واقعی یک فاصله اطمینان 0/99 پیدا کنید.

$$p\left(\bar{x} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$2208 - z_{0.005} 40.10 \leq \mu \leq 2208 + z_{0.005} 40.10$$

مثال 2. متغیر تصادفی  $x$  توزیع نرمال با میانگین مجهول  $\mu$  دارد. یک فاصله اطمینان 95 درصد بصورت  $[7/12$  و  $3/72]$  برای  $\mu$  ارائه شده است. بدین ترتیب، مقدار بدست آمده برای میانگین نمونه چقدر است؟

$$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} = 7.12$$

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} = 3.72$$

$$\frac{2\bar{x}}{2} = 10.84 \Rightarrow \bar{x} = 5.42$$

تذکر: بنا به قضیه حد مرکزی، فاصله اطمینان فوق را در صورتی که  $n \geq 30$  باشد، می‌توان در مورد جامعه‌های غیر نرمال نیز به کار برد و در زمانی که  $\sigma$  نامعلوم است به جای  $\sigma$ ، مقدار انحراف معیار نمونه  $s$  را قرار می‌دهیم.

**3-3- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار مجهول باشد**

فرض کنید  $x$  یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار (مجهول)  $\sigma$  باشد. یک نمونه تصادفی  $n$  تایی گرفته و فرض کنید  $\bar{x}$  میانگین نمونه و  $S$  انحراف معیار نمونه باشد. در این صورت فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu$  بصورت ذیل بدست می‌آید.

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = t_{(n-1)}$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq t_{(n-1)} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{x - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1 - \alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  عبارتست از:

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}$$

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}$$

بعبارت دیگر:

طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$2t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه برای  $\mu$ :

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq t_{n-1}\right\} = 1 - \alpha \quad p(t_{n-1} \leq t_{\alpha})$$

$$p\left\{-t_{\alpha, n-1} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha \quad p\left\{\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha, n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

$$p\left\{\mu \leq \bar{x} + t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1 - \alpha \quad p\left\{\mu \leq \bar{x} - t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\mu \leq \bar{x} + t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n} \quad \mu \geq \bar{x} - t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n}$$

مثال 3. برای مدت چندین سال یک امتحان قوه ریاضی برای همه دانشجویان تازه وارد دانشگاهی ترتیب داده شده است. اگر برای 64 دانشجو که تصادف در این مدت زمان انتخاب شده اند متوسط زمانی که صرف جواب دادن به این امتحان کرده اند  $28/5$  دقیقه و واریانس زمانها  $9/3$  دقیقه باشد یک فاصله اطمینان 99% برای متوسط واقعی زمانی که یک دانشجویی سال اول صرف این امتحان می کند بسازید:

$$n = 64$$

$$\bar{x} = 28.5 \quad \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n}$$

$$s^2 = 9.3 \quad 28.5 - t_{0.005} \sqrt{9.3}/8 < \mu < 28.5 + t_{0.005} \sqrt{9.3}/8$$

$$\alpha = 0.01$$

مثال 4. طول مجسمه های اسکلت فسیل شده نوعی از پرندگان که نسل آنها نابود شده است دارای میانگین  $5/68$  cm و انحراف معیار  $0/29$  cm است. با فرض اینکه چنین اندازه هایی بطور نرمال توزیع شده اند. یک فاصله اطمینان 95% برای طول میانگین این نوع پرندگان پیدا کنید.

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n}$$

$$5.68 - t_{0.025} 0.29/\sqrt{10} < \mu < 5.68 + t_{0.025} (0/29)/\sqrt{10}$$

$$5.68 - (2.262) \frac{0.29}{3.016} < \mu < 5/68 + (2.262) \frac{0.29}{3.16}$$

$$5.4724 < \mu < 5.8875$$

### 3-4- فاصله اطمینان برای انحراف معیار یک توزیع نرمال که $\mu$ آن مجهول است

فرض کنید متغیر تصادفی  $x$  داری توزیع نرمال با میانگین مجهول  $\mu$  و انحراف معیار مجهول  $\sigma$  است. یک نمونه تصادفی  $n$  تایی را در نظر بگیرید. فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\sigma^2$  بصورت ذیل بدست می آید.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \chi_{(n-1)}^2$$

$$p\left\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \leq \chi_{(n-1)}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right\} = 1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\sigma^2$  برابر است با:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

و برای  $\sigma$  برابر است با:

$$s \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} \leq \sigma \leq s \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه  $100(1-\alpha)\%$  عبارت است از:

$$p\left\{\chi_{1-\alpha, n-1}^2 \leq \chi_{(n-1)}^2\right\} = 1-\alpha \quad \left\{\chi_{(n-1)}^2 \leq \chi_{\alpha, n-1}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi_{1-\alpha, n-1}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right\} = 1-\alpha \quad p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha, n-1}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}\right\} = 1-\alpha \quad p\left\{\sigma^2 \geq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}\right\} = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2} \quad \sigma^2 \geq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}$$

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}} \quad \sigma \geq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}}$$

مثال 5. قطر کامل شده کابل مسلح برق، دارای توزیع نرمال است. یک نمونه 20 تایی، دارای میانگین 0,79 و انحراف معیار 0,01 می‌دهد. یک فاصله اطمینان 95% برای  $\sigma$  پیدا کنید.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}$$

$$\frac{19(0.0001)}{32.85} < \sigma^2 < \frac{19(0.0001)}{8.9}$$



3-5- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار در هر دو جامعه معلوم باشند  
 فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_x$  و انحراف معیار معلوم  $\sigma_x$  و  $Y$   
 یک متغیر تصادفی مستقل از  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_y$  و انحراف معیار معلوم  $\sigma_y$  باشد.  
 فرض کنید  $\bar{x}$  معرف میانگین یک نمونه تصادفی  $n_x$  تایی از  $X$  و  $\bar{y}$  معرف میانگین یک نمونه  
 تصادفی  $n_y$  تایی از  $Y$  باشد. فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu_x - \mu_y$  عبارتست از:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = z$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \leq Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{x} - \bar{y} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \bar{x} - \bar{y} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right\} = 1 - \alpha$$

لذا فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  به صورت زیر است:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$ :

یک فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$  بالا به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$  پائین به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

مثال 6. به منظور آزمایش تفاوت تاثیر دو روش کشت گندم، تجربه ای اجرا می شود. ده قطعه زمین شخم کم عمق و پانزده قطعه شخم عمیق زده می شوند. میانگین استحصال گروه اول در هر جریب 40/8 تن و میانگین گروه دوم 44/7 است. فرض کنید انحراف معیار شخم کم عمق معادل 0/6 تن و انحراف معیار شخم عمیق 0/8 باشد. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاوت استحصال ارائه کنید.

$$\bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

$$40.8 - 44.7 \pm Z_{\%5} \sqrt{\frac{0.36}{10} + \frac{0.64}{15}}$$

مثال 7. از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می دهد که زمان تعمیر V بار از کارافتادگی های دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه و انحراف معیار دستگاه اول 19/4 دقیقه بوده است و زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه و انحراف معیار دستگاه دوم 18/8 دقیقه بوده است. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیر از کارافتادگی های دو دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

تذکر: می توان به کمک قضیه حد مرکزی، این نتیجه را برای نمونه های تصادفی از جامعه های غیرنرمال با واریانس های معلوم  $\delta_1^2$  و  $\delta_2^2$  نیز به کاربرد مشروط بر اینکه  $n_1, n_2 \geq 30$  باشند. نکته: برای ساختن یک فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu_1 - \mu_2$  موقعی که  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  نامعلوم باشند ولی  $n_1, n_2 > 30$  باشند به جای  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  مقادیر انحراف معیارهای نمونه ای  $S_1$  و  $S_2$  را قرار می دهیم و مانند قبل عمل می کنیم.

3-6- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه هر دو انحراف معیار مجهول

ولی مساوی و  $n_y \leq 30$  باشند: فرض کنید  $x$  یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_y$  و انحراف معیار مجهول  $\sigma$  باشد. فرض کنید  $\bar{x}$  میانگین یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_x$  مشاهده از  $x$  و  $\bar{y}$  میانگین یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_y$  مشاهده از  $y$  باشد. فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu_x - \mu_y$  به صورت:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} = t_{n_x + n_y - 2}$$

$n_x, n_y \leq 30$  نیز کوچک هستند.

$$P\left(-t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \leq t_{n_x + n_y - 2} \leq t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \leq \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \leq t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\mu_x - \mu_y \leq \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} = 1 - \alpha$$

لذا فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  عبارتست از:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$ :

یک فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$  بالا به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

و یک فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  پائین به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha; n_x+n_y-2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

ارائه می‌شود.

مثال 8. مطالعه از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می‌دهد که زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی‌های دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه با انحراف معیار 19/4 دقیقه بوده است و زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه با انحراف معیار 18/8 دقیقه بوده است. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیر از کارافتادگی‌های دو دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

$$\begin{aligned} n_1 &= 60 & n_2 &= 60 \\ \bar{x}_1 &= 80.7 & \bar{x}_2 &= 88.1 \\ S_1 &= 19.4 & S_2 &= 18.8 \end{aligned}$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$(80.7 - 88.1) - Z_{0.05} \sqrt{\frac{(19.4)^2}{60} + \frac{(18.8)^2}{60}} < \mu_1 - \mu_2 < (80.7 - 88.1) + Z_{0.05} \sqrt{\frac{(19.4)^2}{60} + \frac{(18.8)^2}{60}}$$

مثال 9. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین ارتفاع 13/8 با انحراف معیار 1/2 و پانزده درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. با فرض اینکه نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال با واریانسهای برابر انتخاب شده اند یک فاصله اطمینان 95% برای تفاضل‌های ارتفاع دو نوع درخت مرکب پیدا کنید.

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2; n_x+n_y-2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}} =$$

$$13.8 - 12.9 \pm t_{0.025; 26} \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{15}} \sqrt{\frac{11 \times (1.2)^2 + 14(1.5)^2}{26}} = 0.9 \pm 2.056(0.3873)(1.35)$$

$$-0.198 < \mu_1 - \mu_2 < 1.998$$

**7-3 - فاصله اطمینان برای  $\mu_1 - \mu_2$  نمونه‌های کوچک در حالتی که  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  و مجهول هستند**

حال فرض کنید که مساله پیدا کردن یک فاصله اطمینان جهت  $\mu_1 - \mu_2$  برای نمونه‌های کوچکی باشد که پراش جمعیت‌های آنها مساوی نبوده به علاوه این امکان هم وجود ندارد که نمونه‌ها را با اندازه‌های مساوی اختیار نمائیم.

آماره‌ای که در چنین حالت بکار گرفته می‌شود غالباً بصورت زیر است:

$$T' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

که تقریباً دارای توزیع  $t$  با  $v$  درجه آزادی خواهد بود که  $v$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1}\right] + \left[\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}\right]}$$

از آنجا که مقدار  $v$  فوق به ندرت عدد صحیح می‌شود لذا آنرا به نزدیکترین عدد صحیح گرد می‌کنیم.

با استفاده از آماره  $T'$  می‌توان نوشت:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T' < t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

لذا فاصله اطمینان  $100(1 - \alpha)\%$  برای  $\mu_1 - \mu_2$  بصورت زیر است:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

که در آن  $\bar{x}_1$  و  $\bar{x}_2$  و  $S_1^2$  و  $S_2^2$  به ترتیب میانگین و پراش نمونه‌های کوچک به اندازه‌های  $n_1$  و  $n_2$  هستند که از جمعیت‌های تقریباً نرمال اختیار می‌شوند.

محاسبه خطا در برآورد  $\mu$  بوسیله  $\bar{x}$  (محاسبه خطای ماکزیمم برآورد)

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad \text{اگر در فرمول:}$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} < \mu - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad \text{از طرفین نامساوی، } \bar{x} \text{ را کم کنیم داریم:}$$

$$|\mu - \bar{x}| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad \text{و یا}$$

فرمول فوق نشان می‌دهد که اگر از  $\bar{x}$  به عنوان برآورد  $\mu$  استفاده شود با  $100(1-\alpha)\%$  اطمینان

می‌توان گفت که اختلاف مقدار واقعی  $\mu$  و مقدار برآوردگر از مقدار  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$  کمتر است. و قضیه

زیر را می‌توان بیان نمود.

قضیه: اگر از  $\bar{x}$  به عنوان برآورد  $\mu$  استفاده شود با  $100(1-\alpha)\%$  اطمینان می‌توان گفت که

حداکثر خطا برابر است با:

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$$

تذکر: با توجه به مقدار  $e$  داریم  $L=2e$ . به عبارت دیگر طول فاصله اطمینان با  $e$  نسبت مستقیم

دارد.

## 3-8- محاسبه اندازه نمونه

اگر از  $\bar{x}$  به عنوان برآورد  $\mu$  استفاده شود با  $(1-\alpha)100\%$  اطمینان می‌توان گفت خطا کمتر از مقدار  $e$  است اگر حجم نمونه را از فرمول زیر بدست آوریم:

$$n = \left( \frac{\sigma}{e} Z_{\alpha/2} \right)^2$$

تذکر: از فرمول فوق می‌توان استفاده کرد که  $\sigma$  معلوم باشد. اگر  $\sigma$  معلوم نباشد ابتدا نمونه‌ای با حجم  $n \geq 30$  انتخاب و مقدار  $S$  را محاسبه می‌کنیم و در فرمول فوق به جای  $\sigma$  از  $S$  استفاده می‌کنیم.

محاسبه خطای ماکزیمم برآورد در صورتیکه  $\sigma$  مجهول باشد و  $n < 30$  باشد:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$-t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{x} < t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$|\mu - \bar{x}| < t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$$

$$n = \left( \frac{S}{e} t_{\alpha/2} \right)^2$$

مثال 10. یک مهندس علاقمند به استفاده از نمونه تصادفی به اندازه  $n=150$  برای برآورد متوسط شایستگی مکانیکی کارگران خط مونتاژ در یک صنعت بزرگ می‌باشد. اگر بر اساس تجربه، مهندس بتواند برای داده‌ها  $\sigma=6.2$  را فرض کند، او با احتمال 99% درباره اندازه ماکزیمم خطایش چه ادعایی بکند.

$$\alpha = 0.01$$

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} = \frac{6.2}{\sqrt{150}} \times 2.575 = 1.3$$

مثال 11. یک کارگر محقق می‌خواهد متوسط زمانی که یک مکانیک صرف بازدید چرخهای یک ماشین می‌کند تعیین کند، همین‌طور بتواند با اطمینان 95% ادعا کند که متوسط نمونه‌اش به

اندازه 0/5 دقیقه انحراف دارد. اگر از تجربه گذشته اش  $\sigma=1.6$  فرض کنید. اندازه نمونه را چقدر باید انتخاب کند؟

$$n = \left( \frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{e} \right)^2 = \left( \frac{1.6 \times 1.96}{0.5} \right)^2 = 39.6 \approx 40$$

مثال 12. در 6 بار تعیین نقطه ذوب قلع، میانگین  $232/26^\circ\text{C}$  با انحراف معیار 0/14 به دست آمده است. اگر این میانگین را به عنوان نقطه ذوب واقعی قلع به کار برود درباره خطای ماکزیمم با اطمینان 98% چه ادعایی می توان کرد؟

$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} = \frac{0.14}{\sqrt{6}} t_{0.01} = 0.19$$

می توان با اطمینان 98% ادعا کرد که طرح برای نقطه ذوب قلع حداکثر 0/19 درجه منحرف است.



### 9-3- فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$

در این حالت نمونه‌ها مستقل از یکدیگر نبوده و پراش‌های دو جمعیت لزوماً مساوی نیستند. این در صورتی درست خواهد بود که ملاحظات در دو نمونه بصورت زوجی صورت پذیرد بطوریکه دو ملاحظه نیز به یکدیگر مربوط باشند.

به عنوان مثال، اگر آزمایشی را بر روی روش جدیدی در مورد رژیم گرفتن روی  $n$  فرد انجام دهید، وزن‌های قبل و بعد تکمیل تست، نمونه‌های ما را تشکیل می‌دهند. ملاحظات در دو نمونه که بر روی یک فرد انجام می‌پذیرد به یکدیگر مرتبط بوده و از این رو یک جفت را ایجاد می‌کند. برای تعیین اینکه رژیم گرفتن موثر است یا خیر ما باید اختلاف‌های  $d_i$  از ملاحظات دوتایی را بدست آوریم. این اختلاف‌ها مقادیری از متغیرهای تصادفی نمونه  $d_1, d_2, \dots, d_n$  از جمعیتی هستند که ما فرض می‌کنیم دارای توزیع نرمال با حد متوسط  $\mu_D$  و پراش مجهول  $\sigma_D^2$  باشند. ما  $\sigma_D^2$  را با  $S_d^2$  یعنی پراش اختلاف‌هایی که نمونه‌ها را می‌سازند تخمین می‌زنیم. در نتیجه  $S_d^2$  مقداری از آماره  $S_d^2$  است که از نمونه‌ای به نمونه دیگر نوسان می‌کند. تخمین نقطه‌ای  $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$  به توسط  $\bar{d}$  داده می‌شود.

فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu_D$  بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right)$$

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_d / \sqrt{n}} \quad \text{که در آن آماره:}$$

دارای توزیع  $t$  با  $n-1$  درجه آزادی است.

لذا فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\mu_D$  بصورت زیر است:

$$\bar{d} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

که در آن  $\bar{d}$  و  $S_d$  میانگین و انحراف معیار اختلاف  $n$  جفت اندازه‌گیری است.

مثال 13. تعداد 20 دانشجوی سال اول را به 10 جفت تقسیم می‌کنیم. هر عضوی از این جفت تقریباً دارای یک بهره هوشی هستند. از هر زوجی یکی بطور تصادفی انتخاب شده و به این گروه یک درس ریاضی به فرم ارائه کنفرانس آموخته شد. به اعضاء باقیمانده این جفتها عین همان درس بصورت تدریس معمولی توسط یک استادیار داده شد. در پایان ترم به هر دو گروه یک امتحان داده و نتایج زیر حاصل گشت. فاصله اطمینان 98% را برای اختلاف واقعی دو روش تدریس بدست آورید.

| جفت | تدریس بصورت کنفرانس | روش معمولی | $D_i$ |
|-----|---------------------|------------|-------|
| 1   | 76                  | 81         | -5    |
| 2   | 60                  | 52         | 8     |
| 3   | 85                  | 87         | -2    |
| 4   | 58                  | 70         | -12   |
| 5   | 91                  | 86         | 5     |
| 6   | 75                  | 77         | -2    |
| 7   | 82                  | 90         | -8    |
| 8   | 64                  | 63         | 1     |
| 9   | 79                  | 85         | -6    |
| 10  | 88                  | 83         | 5     |

تخمین نقطه ای  $\mu_D$  به توسط  $\bar{d} = 1.6$  داده می‌شود. پراش  $S_d^2$  اختلاف نمونه بصورت زیر است:

$$S_d^2 = \frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)} = 40.7$$

$$S_d = 6.38$$

$$t_{\%1,9} = 2.821$$

$$-7.29 < \mu_D < 4.09$$

**10-3- فاصله اطمینان برای نسبت انحراف معیارهای دو توزیع نرمال**

فرض کنید که  $x$  یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_x$  و انحراف معیار  $\delta_x$  و  $y$  یک متغیر تصادفی مستقل از  $x$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_y$  باشد. فرض کنید  $S_x^2$  واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_x$  مشاهده از  $x$  و  $S_y^2$  واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از  $n_y$  مشاهده از  $y$  باشد، فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$  به صورت:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = F_{n_x-1, n_y-1}$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \leq F_{n_x-1, n_y-1} \leq F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \leq F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{S_x^2}{S_y^2 F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{S_x^2}{S_y^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\left[ \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}, \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}} \right]$$

پس فاصله اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  عبارتست از:

فاصله اطمینان یکطرفه  $100(1-\alpha)\%$ :

یک فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$  بالا به صورت:

$$\left[ \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha; n_x-1, n_y-1}} \right]$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه  $100(1-\alpha)\%$  پائین به صورت:

$$\left[ \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}} \right]$$

ارائه می شود.

تذکر: فواصل فوق برای  $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  به ترتیب بصورت زیر است:

$$\left[ \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}}, \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}} \right]$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}}$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}}}$$

مثال 14. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین ارتفاع

13/9 با انحراف معیار 1/2 و 15 درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین

ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. یک فاصله اطمینان 98% برای نسبت واریانس های دو جامعه

بسازید.

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}$$

$$\frac{(1.2)^2}{(1.5)^2} \cdot \frac{1}{F_{0.01; 11, 14}} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{(1.2)^2}{(1.5)^2} \cdot \frac{1}{F_{0.99; 11, 14}} \rightarrow 0.165 < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < 2.752$$

- 1-4. مقدمه ..... 1
- 2-4. فرضیه آماری ..... 1
- 3-4. انواع آزمون فرضیه ..... 2
- 4-4. طریقه ساختن فرضیه صفر و مقابل ..... 2
- 5-4. طریقه تعیین مقدار پارامتر جامعه در فرضیه صفر ..... 3
- 6-4. فرآیند آزمون فرضیه ..... 3
- 1-6-4. تعریف ناحیه پذیرش و ناحیه بحرانی (د) ..... 4
- 2-6-4. خطای نوع اول (I) و نوع دوم (II) ..... 4
- 3-6-4. طریقه تعیین ناحیه بحرانی ..... 6
- 4-6-4. ارتباط بین فاصله اطمینان و آزمون فرض ..... 6
- 5-6-4. مراحل آزمون فرض ..... 7
- 7-4. آزمون فرضیه برابری میانگین یک جامعه با یک مقدار معین ..... 8
- 1-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض معلوم بودن واریانس جامعه ..... 8
- 2-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض مجهول بودن واریانس جامعه ..... 10
- 3-7-4. آزمون فرضیه برابری واریانس جامعه نرمال ..... 11
- 4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو جامعه ..... 12
- 1-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو توزیع نرمال زمانی که هر دو انحراف معیار معلوم باشند ..... 12
- 2-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و مساوی ..... 13
- 3-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و نامساوی ..... 14
- 5-7-4. آزمون برابری واریانس های دو جامعه ..... 16
- 6-7-4. آزمون مشاهدات زوجی ..... 17
- 7-7-4. آزمون نسبت ..... 19
- 1-7-7-4. آزمون نسبت برای اندازه نمونه کوچک ..... 20
- 2-7-7-4. آزمون نسبت برای اندازه نمونه بزرگ ..... 21
- 8-7-4. آزمون تفاضل نسبتها در دو جامعه ..... 22
- 1-8-7-4. آزمون تفاضل نسبتها در دو جامعه برای اندازه نمونه کوچک ..... 22
- 2-8-7-4. آزمون تفاضل نسبتها در دو جامعه برای اندازه نمونه بزرگ ..... 23
- 9-7-4. آزمون های مربوط به تفاضل های بین K نسبت ..... 25
- 10-7-4. آزمون استقلال ..... 27
- 11-7-4. آزمون درستی انطباق ..... 30

#### 1-4. مقدمه

در بسیاری از مسائل روزانه باید در رد یا قبول یک عبارت در مورد برخی پارامترهای جامعه تصمیم‌گیری بعمل آید. برای مثال، آیا میانگین طول عمر یک واحد الکترونیکی برابر 200 ساعت است؟ آیا میانگین محصول یک نوع بذر اصلاح شده از نوع اصلاح نشده بیشتر است؟ آیا دقت یک نوع ماشین تراش از نوع دیگر کمتر است؟ آیا نسبت خرابی یک محصول برابر مقدار مشخصی است؟ آیا میانگین شویندگی یک ماده شوینده در ازای استفاده از مواد اولیه مختلف یکسان است؟ آیا توزیع عمر یک قطعه در دستگاه تراش از توزیع نمایی تبعیت می‌کند؟ آیا نوع گروه خونی و نژاد به هم بستگی دارند؟

#### 2-4. فرضیه آماری

فرض یا بیان یا حدسی در باره توزیع جامعه یا پارامترهای جامعه را فرض آماری گویند. اگر این فرض آماری توزیع را کاملاً مشخص کند آنرا فرض ساده در غیر اینصورت آنرا فرض مرکب گویند. برای مثال، توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75 و انحراف معیار 15 است، یک فرضیه ساده و توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75، است، یک فرضیه مرکب است.

فرضیه صفر و مقابل: فرضیه‌های اصلی، محقق معمولاً دقیق و صحیح نیستند. برای مثال در فرضیه "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب بیشتر است"، میزان فزونی محصول نوع الف از ب مشخص نیست و در عمل نمی‌توان حدی برای آن تعیین کرد و همه این موارد را رد یا تایید کرد.

مشاهده می‌شود فرضیه اصلی را نمی‌توان به صورت مستقیم آزمون کرد. اما از نظر منطقی می‌توان فرضیه‌های با اجزای مشخصی تعریف کرد و رد و یا پذیرش فرضیه اصلی را منوط به قبول و یا رد چنین فرضیه‌هایی نمود. در مورد مثال بالا فرضیه مزبور به صورت "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب برابر است" تعریف می‌شود. چنین فرضیه‌هایی را فرض صفر  $H_0$  می‌نامند زیرا منجر به خنثی کردن Nullify فرضیه‌های اصلی می‌شوند. با این وصف فرضیه اصلی را فرضیه مقابل Alternate Hypothesis نامیده می‌شود.

مرسوم است که بسیاری از محققین، فرضیه‌هایی را که به باور آنها نادرست است فرض صفر در نظر می‌گیرند به امید اینکه، روش‌های آماری به رد آنها بینجامد. برای مثال اگر بخواهیم نشان دهیم که میانگین طول عمر باطری کارخانه الف از کارخانه ب بیشتر است، فرضیه صفر به این صورت فرمول بندی می‌شود که تفاوتی بین طول عمر باطری دو کارخانه نیست.

فرضیه صفر با  $H_0$  و فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار می‌گیرد را با  $H_1$  نشان داده می‌شود.

### 3-4. انواع آزمون فرضیه

1- آزمون فرضیه دو طرفه: آزمون فرضیه دو طرفه گفته می‌شود، اگر فرض مقابل دو طرفه به صورت نامساوی باشد. به عبارت دیگر آزمون فرضیه به صورت ذیل فرموله شده باشد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

2- آزمون فرضیه یک طرفه: آزمون فرضیه یک طرفه است اگر فرض مقابل آن به یکی از دو صورت ذیل فرموله شده باشد.

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \quad \text{الف:}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \quad \text{ب-}$$

### 4-4. طریقه ساختن فرضیه صفر و مقابل

برای نشان دادن چگونگی ساختن فرضیه صفر و مقابل به مثال های ذیل توجه نمایید.  
مثال 1. تصور کنید که ارتش، پوتین های مورد نیاز خود را از یک تولیدکننده خاص، تامین می کند که میانگین عمر پوتین های تولیدی وی 12 ماه است. یک تولیدکننده جدید، ادعا می کند که پوتین هایی با میانگین عمر بیش از 12 ماه با همان قیمت ارائه می دهد. برای اثبات این مدعی، آزمایشی ترتیب داده می شود. با استفاده از نمادهای آزمون فرض، فرضیه صفر و مقابل را می توان به یکی از دو صورت ذیل فرموله کرد.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases} \quad (2)$$

در حالت اول،  $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases}$ ، پذیرش فرضیه صفر، به معنای ادامه همکاری با تولید کننده قدیمی،

و رد آن به معنی شروع همکاری با شرکت جدید است. اگر میانگین عمر پوتین های شرکت جدید 12 ماه یا کمتر باشد، احتمال ادامه همکاری با تولیدکننده قدیمی نزدیک به یک است. از سوی دیگر، اگر میانگین عمر پوتین ها مقدار جزئی از 12 ماه بیشتر باشد هنوز احتمال حفظ تولیدکننده قدیمی کاملاً زیاد است. اگر میانگین عمر پوتین ها بطور قابل توجهی از 12 ماه بیشتر باشد، احتمال شروع همکاری با تولیدکننده جدید افزایش می یابد.

این فرموله بندی زمانی مطرح می شود که ارتش از تولیدکننده داخلی بسیار راضی است. شرکت قدیمی کالای مطمئن و با کیفیت و همچنین به موقع ارسال می کند و خرید از شرکت جدید باعث بروز مشکلات اداری خواهد شد. در این حالت، شرکت جدید موظف است تا نشان دهد پوتین هایش دارای میانگین عمری بسیار بزرگتر از 12 ماه هستند.

در حالت دوم،  $\begin{cases} H_0 : \mu \geq 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases}$  پذیرش فرضیه صفر، به معنای خرید از شرکت جدید است و رد آن به معنای حفظ تولیدکننده قدیمی است. اگر میانگین عمر پوتین‌های شرکت جدید 12 ماه یا بیشتر باشد احتمال شروع همکاری با تولیدکننده جدید نزدیک به یک است. همچنین، اگر میانگین عمر پوتین‌ها به‌طور قابل توجهی از 12 ماه کمتر باشد احتمال حفظ تولیدکننده قدیمی افزایش می‌یابد. حالت دوم در زمانی مطرح می‌شود که ارتش از تولیدکننده فعلی ناخشنود است. در این حالت، نه تنها، اگر میانگین عمر پوتین‌های شرکت جدید بیشتر از 12 ماه باشد، بلکه حتی اگر میانگین عمر به مقدار جزئی کمتر از 12 ماه باشد، تولیدکننده قدیمی کنار گذاشته می‌شود. در این صورت، تولیدکننده جدید کافی است، نشان دهد میانگین عمر پوتین‌هایش بطور قابل توجهی از 12 ماه کمتر نیست.

مثال 2. یک تولیدکننده لامپ روشنایی ادعا کرده که میانگین عمر کالای او از 1000 ساعت بیشتر است. در صورت سختگیری نسبت به ادعای مزبور فرضیه صفر و مقابل را فرموله نمایید. از آنجا که در مورد این ادعا برخورد سختگیرانه‌ای اتخاذ شده، و باور بر این است که میانگین عمر کالا کمتر از 1000 ساعت است، نحوه فرمولاسیون فرضیه صفر و مقابل به صورت ذیل است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1000 \\ H_1 : \mu > 1000 \end{cases}$$

#### 5-4. **طریقه تعیین مقدار پارامتر جامعه در فرضیه صفر**

- 1- تجربیات و دانایی‌های گذشته و یا آزمایشی که در گذشته انجام شده و هدف از آزمون این است که آیا شرایط آزمایش تغییر کرده است.
- 2- بررسی درستی و نادرستی یک فرضیه علمی
- 3- طراحی و مشخصات فنی و مهندسی و یا الزامات قراردادی

#### 6-4. **فرآیند آزمون فرضیه**

پس از فرموله بندی فرضیه صفر و مقابل، باید روشی سیستماتیک مبتنی بر آمار، اتخاذ نمود تا بر اساس آن درستی و نادرستی فرضیه صفر و به تبع فرضیه مقابل معلوم شود. برای این هدف، می‌توان مجموعه اعضای جامعه را مطالعه کرد که این کار به سبب نامحدود بودن جامعه و تنگنای زمان و هزینه در عمل ناممکن است. در این صورت ناگزیر از نمونه‌گیری و تعمیم نتایج حاصل از نمونه به جامعه است. در واقع رد و یا قبول فرضیه صفر منوط به اطلاعات حاصل از نمونه است.

روش کار به این صورت است که با استفاده از داده‌های حاصل از نمونه یک شاخص نمونه‌ای و یا آماره آزمون به عنوان تخمینی از پارامتر جامعه محاسبه می‌شود، آنگاه مقدار آماره با مقدار پارامتر جامعه براساس یک معیار تحت عنوان ناحیه رد مقایسه می‌شود. ناحیه رد در یک آزمون فرضیه، در واقع به معنای تفاوت آشکار مقدار آماره با مقدار عددی پارامتر است. در صورتی که مقدار آماره در ناحیه رد قرار گیرد فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می‌شود.

فرض کنید می‌خواهیم فرضیه صفر  $H_0 : \theta = \theta_0$  را در مقابل  $H_0 : \theta \neq \theta_0$  آزمون کنیم. در این



صورت، اگر برآورد نقطه ای  $\hat{\theta}$  برای  $\theta$ ، به  $\theta_0$  نزدیک باشد (در داخل ناحیه قبول قرار گیرد)، فرضیه صفر پذیرفته و در صورتی که  $\hat{\theta}$  بسیار بزرگتر و یا بسیار کوچکتر از  $\theta_0$  باشد (در داخل ناحیه رد قرار گیرد)، فرضیه صفر رد می شود.

به طریق مشابه، در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر  $H_0: \theta = \theta_0$  را در مقابل  $H_0: \theta < \theta_0$  آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای  $\hat{\theta}$  بسیار کوچکتر از  $\theta_0$  باشد، فرضیه صفر رد می شود. همچنین در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر  $H_0: \theta = \theta_0$  را در مقابل  $H_0: \theta > \theta_0$  آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای  $\hat{\theta}$  بسیار بزرگتر از  $\theta_0$  باشد، فرضیه صفر رد می شود. در مورد هریک از حالت‌های بالا، در مورد عبارات بسیار بزرگتر و بسیار کوچکتر مفاهیم ناحیه قبول و ناحیه رد تعریف می شود.

#### 4-6-1. تعریف ناحیه پذیرش و ناحیه بحرانی (رد)

ناحیه‌ای که در آن فرض صفر پذیرفته می‌شود ناحیه پذیرش و ناحیه‌ای که در آن فرض صفر رد می‌شود ناحیه بحرانی یا ناحیه رد و مرز بین این دو ناحیه را عدد بحرانی گفته می‌شود. برای تبیین ریاضی ناحیه رد و قبول، از مفاهیم خطاهای آزمون فرض به طریقه ذیل استفاده می شود.

#### 4-6-2. خطای نوع اول (I) و نوع دوم (II)

خطای نوع اول: رد فرض  $H_0$  در صورتی که در واقع درست باشد، خطای نوع اول گفته می شود و آنرا با  $\alpha$  نشان می دهند. و بیان ریاضی خطای نوع اول به صورت ذیل است.

$$\alpha = p(H_0 \text{ درست باشد} | \text{رد فرض } H_0)$$

خطای نوع دوم: قبول فرض  $H_0$  در صورتی که در واقع نادرست باشد خطای نوع دوم گفته می شود و با  $\beta$  نشان داده می شود. بیان ریاضی خطای نوع دوم به صورت ذیل است

$$\beta = p(H_0 \text{ نادرست باشد} | \text{قبول فرض } H_0)$$

مثال 3. فرض کنید یک نوع کپسول سرماخوردگی A چند سال است که در کشور تولید می شود و ثابت شده است که پس از 5 روز 70 درصد مؤثر است. کارخانه ای مدعی است که کپسولی مشابه A به نام B تولید کرده است که اثر آن پس از 5 روز بیشتر از 70 درصد است. می-خواهیم بررسی کنیم که با توجه به هزینه ای که برای ساخت کپسول B باید صرف شود آیا استفاده مقرون به صرفه است؟ برای این منظور یک نمونه 20 تایی از افراد را انتخاب و کپسول B را به آنها داده ایم. اگر در این آزمایش پس از 5 روز تأثیر دارو بر روی کمتر از 16 نفر مؤثر واقع شده باشد ادعای کارخانه B رد می شود. مطلوبست محاسبه مقادیر خطای نوع اول و دوم.

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.7 \\ H_1 : p > 0.7 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\text{Reject } H_0 | H_0 \text{ is True}) = p(x \geq 16 | P = 0.7) = \sum_{x=16}^{20} b(x; 20, 0.7) = 0.2375$$

$$\beta = p(\text{Accept } H_0 | H_0 \text{ is False}) = p(x < 16 | p > 0.7)$$

ملاحظه می‌شود که  $\beta$  قابل محاسبه نیست، زیرا فرض مقابل به طور کامل مشخص نشده اما اگر فرض مقابل را تغییر داده و به صورت  $H_0: p = 0.8$  در نظر بگیریم:

$$\beta = p(x < 16 \mid p = 0.8) = \sum_{x=0}^{15} b(x; 20, 0.8) = 0.3704$$

واضح است که تصمیم‌گیری خوب وقتی انجام می‌پذیرد که هر دو نوع خطا کم باشند. به عبارت دیگر نه فرضی را بی دلیل رد و نه فرضی را بی دلیل قبول کنیم. در واقع در شرایط ایده‌آل،  $\alpha$  و  $\beta$  بطور همزمان کوچک هستند.

مثال: در مثال فوق اگر نقطه بحرانی از 16 به 15 تغییر دهیم. مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را تعیین کنید.

$$\alpha = p(x \geq 15 \mid p = 0.7) = \sum_{x=15}^{20} b(x; 20, 0.7) = 0.4164$$

$$\beta = p(x < 15 \mid p = 0.8) = \sum_{x=0}^{14} b(x; 20, 0.8) = 0.1958$$

ملاحظه می‌شود که با تعدیل نقطه بحرانی  $\alpha$  زیاد و  $\beta$  کم می‌شود. به عبارت دیگر  $\alpha$  و  $\beta$  به یکدیگر وابسته بوده و کاهش یکی باعث افزایش دیگری می‌شود. پس با تغییر نقطه بحرانی می‌توان یکی از خطاها را کم و دیگری را زیاد نمود.

مثال 4. در مثال قبل اگر یک نمونه 100 تایی انتخاب و نقطه بحرانی را عدد 74 اختیار کنیم، مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را محاسبه کنید.

$$\alpha = p(x \geq 74 \mid p = 0.7) = p\left(z > \frac{73.5 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right) = p(z > 0.76) = 0.2236$$

$$\beta = p(x < 74 \mid p = 0.8) = p\left(z > \frac{74.5 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right) = p(z < -1.375) = 0.085$$

بنابراین با افزایش حجم نمونه هر دو خطا بطور همزمان کاهش می‌یابد.

نتیجه: خطای نوع اول و دوم به یکدیگر وابسته بوده و افزایش یکی باعث کاهش دیگری می‌شود. با افزایش حجم نمونه می‌توان هر دو خطا را بطور همزمان کاهش داد. (هرچه  $n$  زیاد شود  $\alpha$  کم می‌شود و در صورتیکه  $\alpha$  ثابت باشد  $\beta$  کم می‌شود)

مثال 5. فرض کنید گزارش رسیده که میانگین قد دانشجویان یک دانشگاه 170 cm و انحراف معیار آن 9cm است. برای آزمایش درستی آن یک نمونه تصادفی 36 تایی انتخاب و ناحیه پذیرش را بین 167/5 و 172/5 در نظر می‌گیریم. مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را حساب کنید.

$$\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu \neq 170 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\bar{x} > 172.5 \mid \mu = 170) + p(\bar{x} < 167.5 \mid \mu = 170) = p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9 / \sqrt{36}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9 / \sqrt{36}}\right) = 0.97$$

برای اینکه آزمون خوبی داشته باشیم باید خطای نوع دوم را نیز محاسبه کنیم. اما در حالی که فرض مقابل بصورت  $H_0: \mu \neq 170$  باشد، محاسبه  $\beta$  امکان‌پذیر نیست. ولی با انتخاب مقادیر مختلف برای  $\mu$  می‌توان  $\beta$  را محاسبه نمود تا تضمین کافی در مورد رد فرض صفر بدست آید.

$$H_1: \mu = 175$$

برای مثال

$$\beta = p(167.5 < \bar{x} < 172.5 | \mu = 175) = .097$$

بنابراین در 9/7% از تمام نمونه های تصادفی که با حجم  $n=36$  انتخاب می شوند فرض  $H_0$  رد می-شوند.

مثال 6. در مثال قبل اگر حجم نمونه را 64 انتخاب کنیم مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را حساب کنید.

$$\alpha = p(\bar{x} > 172.5 | \mu = 170) + p(\bar{x} < 167.5 | \mu = 170)$$

$$= p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9 / \sqrt{64}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9 / \sqrt{64}}\right) = 0.0264$$

$$\beta = p(167.5 < \bar{x} < 172.5 | \mu = 175) = p\left(\frac{167.5 - 175}{9 / \sqrt{64}} < z < \frac{172.5 - 175}{9 / \sqrt{64}}\right)$$

$$= p(-6.66 < z < -2.22) = 0.0132$$

#### 3-6-4. طریقه تعیین ناحیه بحرانی

با توجه به تعاریف خطای نوع اول و دوم برای تعیین اندازه ناحیه رد (بحرانی)، از ارتکاب به خطای نوع اول یعنی  $\alpha$  استفاده می شود. در واقع، در توزیع نمونه ای  $\hat{\theta}$ ، احتمال مشاهده مقادیر در ناحیه بحرانی برابر  $\alpha$  است. از آنجایی که معمولاً  $\alpha$  عدد کوچکی انتخاب می شود مفهوم "تفاوت آشکار  $\hat{\theta}$  و  $\theta_0$ " معنا می شود. به این معنی که مقادیری که در ناحیه بحرانی مشاهده می شوند بسیار بزرگتر و یا بسیار کوچکتر از پارامتر جامعه هستند.

در نتیجه، اگر آماره ای که بر اساس آن تصمیم گیری می شود، دارای توزیع پیوسته باشد می توان ابتدا خطای نوع اول را اختیار کرد و به کمک آن ناحیه بحرانی را تعیین نمود. به اندازه ناحیه بحرانی سطح معنادار بودن (Significance Level) گفته می شود.

مثال 7. فرض کنید می خواهیم این فرض صفر را که میانگین یک جامعه نرمال با واریانس  $\sigma^2$ ، برابر  $\mu_0$  است،  $H_0: \mu = \mu_0$ ، در برابر فرض مقابل  $H_1: \mu > \mu_0$ ، آزمون کنیم. مقدار  $k$  را طوری تعیین کنید که  $\bar{x} > k$  یک ناحیه بحرانی به اندازه  $\alpha = 0,05$  برای نمونه تصادفی به اندازه  $n$  باشد.

$$z_{0.05} = 1.645; Z_{0.05} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \Rightarrow 1.645 = \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \Rightarrow k = \mu_0 + \frac{1.645}{\sigma / \sqrt{n}}$$

در این صورت ناحیه بحرانی به اندازه  $\alpha = 0,05$  عبارت است از  $\bar{x} > \mu_0 + 1.645\sigma / \sqrt{n}$  و یا به

$$\text{عبارت ساده تر } Z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > Z_{0.05} \text{ است. در این صورت به } Z^* \text{ آماره آزمون گویند.}$$

با بدست آوردن ناحیه فوق، پس از نمونه گیری اگر میانگین نمونه و یا آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می شود.

#### 4-6-4. ارتباط بین فاصله اطمینان و آزمون فرض

اگر  $[L U]$  یک فاصله اطمینان در سطح  $\% (1-\alpha)$  باشد، در آزمون فرضیه  $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

فرضیه صفر رد می شود اگر و فقط اگر  $\theta_0$  به این فاصله متعلق نباشد.

#### 5-6-4. مراحل آزمون فرض

- فرموله کردن فرضیه صفر و مقابل
- تعیین اندازه ناحیه بحرانی و یا سطح معنادار بودن
- انتخاب آماره آزمون و محاسبه آن
- تعیین مقدار بحرانی از روی جدول و با توجه به سطح معناداری
- مقایسه آماره آزمون و مقدار بحرانی. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت رد قبول می شود. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت اصطلاحاً گفته می شود که فرضیه صفر در سطح معناداری  $\alpha$ ، معنادار نیست.

#### 7-4. آزمون فرضیه برابری میانگین یک جامعه با یک مقدار معین

7-4-1. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض معلوم بودن واریانس جامعه فرض کنید بخواهیم با معلوم بودن واریانس یک جامعه نرمال،  $\sigma^2$ ، فرض برابری میانگین جامعه نرمال را،  $\mu$ ، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$ ، از جامعه مزبور گرفته و سپس آماره

$$Z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

که متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \text{if } Z^* > Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{if } Z^* < -Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{if } Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 8. بر اساس الزامات قراردادی با یک فروشنده، میانگین مقاومت پارگی تارهای یک نوع پارچه باید، از  $\mu = 180 \text{ psi}$  کمتر نباشد. بر اساس تجارب گذشته، انحراف معیار مقاومت پارگی تارها،  $4 \text{ psi}$  است. مجموعه ای مرکب از یک انباشته از این پارچه از فروشنده دریافت می‌شود و از سه قطعه نمونه برداری می‌شود. این نمونه‌ها که تقریباً توزیع نرمال دارند آزمایش شده و نتایج ذیل به دست آمده است: قطعه اول:  $182 \text{ psi}$ ، قطعه دوم:  $172 \text{ psi}$ ، قطعه سوم:  $177 \text{ psi}$  در سطح  $\alpha = 0,05$ ، نتیجه آزمون فرضیه ذیل چه خواهد بود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 180 \\ H_1 : \mu < 180 \end{cases}$$

$$\bar{x} = 177 \quad Z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{177 - 180}{4 / \sqrt{3}} = -1.3; \text{ if } Z^* < -Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\text{Since } Z^* = -1.3 \not< -Z_{0,05} = -1.645 \text{ then Accept } H_0$$

بنابراین فرضیه صفر قبول می‌شود.

مثال 9. در بررسی آماری که در گذشته انجام شده است، قد افراد دارای متوسط  $68/5$  اینچ با انحراف معیار  $2/7$  اینچ گزارش شده است. برای تایید یا رد این ادعا، اگر یک نمونه  $50$  تایی از افراد دارای متوسط قد  $69/7$  اینچ باشد، در سطح معنا دار بودن  $\alpha = 0,02$  آیا دلیلی برای تغییر در متوسط قد وجود دارد؟

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 68.5 \\ H_1 : \mu \neq 68.5 \end{cases} \quad Z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{69.7 - 68.5}{2.7 / \sqrt{50}} = 3.143$$

$$\text{if } Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \text{ then Reject } H_0$$

$$\text{Since } Z^* = 3.143 > |Z_{0,01}| = 2.32 \text{ then Reject } H_0$$

بنابراین،  $H_0$  رد می شود.

مثال 10. یک شرکت باربری نسبت به ادعای تولیدکننده یک نوع لاستیک خودرو، مبنی بر اینکه طول عمر متوسط آنها حداقل برابر با 28000 مایل است، بدگمان است. برای بررسی این ادعا، شرکت 40 حلقه از این لاستیک ها را در ماشین ها استفاده می کند. طول عمر متوسط 40 حلقه مزبور، 27463 مایل با انحراف معیار 1348 مایل بوده است. اگر خطای نوع اول 1% باشد، شرکت چه تصمیمی می تواند اتخاذ کند؟

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 28000 \\ H_1 : \mu < 28000 \end{cases}$$

$$n = 40 > 30 \Rightarrow \sigma \approx S$$

$$\alpha \leq 1\%$$

$$Z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{27463 - 28000}{1348 / \sqrt{40}} = -2.52; \text{ if } Z^* < -Z_{0.01} = -2.32 \text{ then reject } H_0$$

$$\text{Since } Z^* = -2.52 < -Z_{0.01} = -2.32 \text{ then reject } H_0$$

2-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض مجهول بودن واریانس جامعه در نظر بگیرید، با فرض مجهول بودن واریانس جامعه،  $\sigma^2$ ، می‌خواهیم فرض برابری میانگین جامعه نرمال را،  $\mu$ ، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$ ، از جامعه مزبور گرفته و سپس آماره

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

که متغیر تصادفی  $t$  با  $n-1$  درجه آزادی است، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \text{if } t^* > t_{\alpha, n-1} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{if } t^* < -t_{\alpha, n-1} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{if } t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 11. در روش متداول استحصال بنزین از نفت، میانگین استحصال 26 واحد است. اخیراً روش تازه‌ای ابداع شده است که در ذیل آن ادعا می‌شود که بازده روش ابداعی از 26 واحد بیشتر است. الف) فرض صفر و فرض یک را بنویسید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 26 \\ H_1 : \mu > 26 \end{cases}$$

ب) اگر نمونه تصادفی 9 تایی بگیریم و نتایج  $S=2$  و  $\bar{x}=28$  به دست آمده باشد، با فرض خطای نوع اول در سطح 1%، در مورد روش جدید چه می‌توان گفت؟

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{28 - 26}{2 / \sqrt{9}} = 3; \quad \text{Critical Region: } t^* > t_{0.01, 8}$$

Since  $t^* = 3 > t_{0.01, 8} = 2.896$  then Reject  $H_0$

## 3-7-4. آزمون فرضیه برابری واریانس جامعه نرمال

در نظر بگیرید، بخواهیم فرض برابری واریانس جامعه نرمال را،  $\sigma^2$ ، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$ ، از جامعه مزبور گرفته و سپس آماره

$$\chi^{2*} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

که متغیر تصادفی مربع کای با  $n-1$  درجه آزادی است، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{if } \chi^{2*} > \chi_{\alpha, n-1}^2 \text{ then Reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{if } \chi^{2*} < \chi_{1-\alpha, n-1}^2 \text{ then Reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{if } \chi^{2*} > \chi_{\alpha, n-1}^2 \text{ or } \chi^{2*} < \chi_{1-\alpha, n-1}^2 \text{ then Reject } H_0$$

مثال 12. در یک نمونه تصادفی، زمانی که 30 زن برای جواب دادن به سوالات امتحان صرف کردند، دارای واریانس  $6/4$  دقیقه بوده است. با فرض اینکه جامعه منظور نرمال باشد، فرضیه ذیل را در سطح معنادار بودن  $\alpha=0/05$  آزمون کنید.

$$H_0 : \sigma^2 \geq 64$$

$$H_1 : \sigma^2 < 64$$

$$n=30, S^2=6/4, \alpha=0/05$$

$$\chi^{2*} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{29 \times (6.4)}{8^2} = 18.56; \text{ Critical Region: } \chi^2 \leq \chi_{n-1, 1-\alpha}^2 = \chi_{29, 0.95}^2 = 17.7$$

$$\text{Since } \chi^{2*} = 18.56 \not\leq \chi_{29, 0.95}^2 = 17.7 \text{ then Accept } H_0$$



## 4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو جامعه

1-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو توزیع نرمال زمانی که هر دو انحراف معیار معلوم باشند.

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری تفاضل میانگین دو جامعه نرمال با میانگین  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و واریانس  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  را، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال به صورت  $x_1, \dots, x_{n_1}$  و  $x_1, \dots, x_{n_2}$  گرفته می شود. سپس آماره

$$Z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

که متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، محاسبه می شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases} \quad \text{if } Z^* > Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases} \quad \text{if } Z^* < -Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d \end{cases} \quad \text{if } Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 13. در تحقیقات مربوط به انواع سوخت موشک که با هدف تقلیل زمان تأخیر بین لحظه آغاز شلیک و لحظه انفجار صورت می گیرد، تصور بر این است که جانشین کردن سوخت فعلی با سوخت جدید می تواند تأثیر مثبتی داشته باشد. انحراف معیار نظیر سوخت فعلی و سوخت جدید مساوی 0/04 است. قرار است در خلال یک تجربه،  $n$  موشک را با سوخت متداول و  $n$  موشک را با سوخت جدید شلیک کنیم. اگر در اثر استفاده از سوخت جدید زمان تأخیر به میزان 0/07 کاهش یابد، استفاده از سوخت جدید قابل توصیه خواهد بود. اگر بر اساس نمونه های  $n = 32$  تایی مقادیر 0/261 ثانیه و 0/251 ثانیه برای متوسط زمان تأخیر به ترتیب سوخت فعلی و سوخت جدید به دست آید، در سطح خطای نوع اول 5 درصد آیا سوخت جدید را توصیه می کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0.07 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0.07 \end{cases}$$

$$Z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(0.261 - 0.251) - 0.07}{\sqrt{\left(\frac{0.04^2}{32} + \frac{0.04^2}{32}\right)}} = -6; \text{Critical Region: } Z^* < -Z_{0.05} = -1.645$$

Since  $Z^* = -6 < -1.645$  then Reject  $H_0$

بنابراین فرض صفر رد می شود.

#### 2-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و مساوی

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری تفاضل میانگین دو جامعه نرمال با میانگین  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و واریانس مجهول و مساوی  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ) را، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال به صورت  $x_1, \dots, x_{n_1}$  و  $x_1, \dots, x_{n_2}$  گرفته می شود. سپس آماره

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

که متغیر تصادفی  $t$  با  $n_1 + n_2 - 2$  درجه آزادی است، محاسبه می شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases} \quad \text{if } t^* > t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases} \quad \text{if } t^* < -t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d \end{cases} \quad \text{if } t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 8.14. موشک کوتاه برد از یک نوع دارای میانگین خطای اصابت  $\bar{x}_1 = 98$  فوت و انحراف معیار  $s_1 = 18$  فوت و 10 موشک کوتاه برد از نوع دیگر دارای میانگین خطای اصابت  $\bar{x}_2 = 76$  فوت با انحراف معیار  $s_2 = 15$  فوت باشد. فرض صفر  $\mu_1 - \mu_2 = 15$  را در برابر فرض مقابل  $\mu_1 - \mu_2 > 15$  آزمون کنید. اندازه ناحیه بحرانی را  $\alpha = 0.05$  بگیرید. و فرض کنید که جامعه ها نرمال و دارای واریانس های یکسان اند.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 15 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 15 \end{cases}$$

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} = \frac{(97 - 76) - (15)}{\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} \sqrt{\frac{7 \times 18^2 + 9 \times 15^2}{16}}} = 0.9$$

Critical Region:  $t^* > t_{0.05, 10+8-2} = 1.746$

Since  $t^* = 0.9 \not> 1.746$  Then Accept  $H_0$

بنابراین نمی توان  $H_0$  را رد کرد.

### 3-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و نامساوی

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری تفاضل میانگین دو جامعه نرمال با میانگین  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و واریانس مجهول و نامساوی  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  ( $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ) را، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال به صورت  $x_1, \dots, x_{n_1}$  و  $x_1, \dots, x_{n_2}$  گرفته می شود. سپس آماره

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

که متغیر تصادفی  $t$  با  $\nu$  درجه آزادی است، محاسبه می شود. در رابطه بالا درجه آزادی متغیر تصادفی  $t$  از رابطه ذیل محاسبه می شود.

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 + 1}} - 2$$

اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases} \quad \text{if } t^* > t_{\alpha, \nu} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases} \quad \text{if } t^* < -t_{\alpha, \nu} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d \end{cases} \quad \text{if } t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2}, \nu} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 15. یک تولید کننده دو نوع ریزمدار طراحی کرده و می خواهد بداند که آیا این دو نوع ریزمدار جریان یکسانی تولید می کنند یا نه؟ برای این کار، 15 ریز مدار از نوع اول و 10 ریزمدار از نوع دوم انتخاب کرده نتایج ذیل را بدست آورده است.

$$\bar{x}_1 = 24.2; S_1^2 = 10$$

$$\bar{x}_2 = 23.9; S_2^2 = 20$$

در سطح معنادار بودن 10% فرض برابری جریان در دو نوع ریز مدار را در مقابل نابرابر بودنشان آزمون کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$t^* = \frac{24.2 - 23.9}{\sqrt{\frac{10}{15} + \frac{20}{10}}} = 0.184; \text{Critical Region: } |t^*| > t_v$$

$$v = \frac{\left(\frac{10}{15} + \frac{20}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{10}{15}\right)^2}{15+1} + \frac{\left(\frac{20}{10}\right)^2}{10+1}} - 2 = 16$$

Since  $|t^*| = 0.184 \not> t_{0.05,16} = 1.746$  then Accept  $H_0$

## 5-7-4. آزمون برابری واریانس های دو جامعه

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری واریانس دو جامعه نرمال را، در سطح معنادار بودن  $\alpha$  آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال به صورت  $x_1, \dots, x_{n_1}$  و  $x_1, \dots, x_{n_2}$  گرفته می شود. سپس آماره

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

که متغیر تصادفی  $F$  با  $n_1 - 1$  درجه آزادی در صورت و  $n_2 - 1$  درجه آزادی در مخرج است، محاسبه می شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \end{cases} \quad \text{if } F^* > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1} \text{ then Reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases} \quad \text{if } F^* < F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1} \text{ then Reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases} \quad \text{if } F^* > F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \text{ or } F^* < F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \text{ then Reject } H_0$$

مثال 16. بر اساس داده های ذیل که مربوط به زمان نمایش فیلم های تهیه شده توسط دو شرکت است، فرضیه  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  را در برابر  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  در سطح  $\alpha = 0.1$  آزمون کنید.

|        | زمان برحسب دقیقه |     |    |     |    |        |
|--------|------------------|-----|----|-----|----|--------|
| شرکت 1 | 102              | 86  | 98 | 109 | 92 |        |
| شرکت 2 | 81               | 165 | 97 | 134 | 92 | 87 114 |

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{78.8}{913.333} = 0.0863$$

$$\text{Critical Region : } F^* > F_{\frac{\alpha}{2}, 4, 6} = 4.53 \text{ and } F^* < F_{1-\frac{\alpha}{2}, 4, 6} = 0.163$$

$$\text{Since } F^* = 0.0863 < F_{1-\frac{\alpha}{2}, 4, 6} = 0.163 \text{ then Reject } H_0$$

بنابراین  $H_0$  رد می شود.

## 6-7-4. آزمون مشاهدات زوجی

در آزمون مشاهدات زوجی اثر یک اقدام اصلاحی بر یک جامعه سنجیده می‌شود. بنابراین جامعه اول مربوط به قبل از اقدام مزبور و جامعه دوم مربوط به بعد از اقدام مزبور است از هم مستقل نبوده و به هم وابسته‌اند. فرض کنید  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  مجموعه‌ای متشکل از  $n$  زوج متغیر تصادفی زوجی باشد. تفاوت بین هر زوج مشاهده عبارت است از  $D_1 = x_1 - y_1, \dots, D_n = x_n - y_n$  که متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین مشترک و مجهول  $\mu_D$  و انحراف معیار مشترک و مجهول  $\sigma_D$  است. انحراف معیار  $\sigma_D$ ، به  $\sigma_x^2$  و  $\sigma_y^2$  بستگی دارد. اگر  $x$  و  $y$  مستقل باشند در اینصورت  $\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$  است.

با این فرض، آزمون برابری تفاضل میانگین دو جامعه (قبل و بعد از اقدام اصلاحی) با یک مقدار خاص معادل آزمون فرض  $\mu_D = d$  است وقتی که انحراف معیار  $\sigma_D$  مجهول باشد، در این صورت آماره آزمون بصورت ذیل در می‌آید:

$$t^* = \frac{\bar{D} - d}{S_D / \sqrt{n}}$$

که متغیر تصادفی  $t$  با  $n-1$  درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  را رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \leq d \\ H_1 : \mu_D > d \end{cases} \quad \text{if } t^* > t_{\alpha, n-1} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \geq d \\ H_1 : \mu_D < d \end{cases} \quad \text{if } t^* < -t_{\alpha, n-1} \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d \\ H_1 : \mu_D \neq d \end{cases} \quad \text{if } t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \right| \text{ then reject } H_0$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}, S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$

که در آن داریم:

مثال 17. تجربه ای مبتنی بر مقایسه خوردگی لوله با دو نوع پوشش انجام شده است. به منظور بررسی میزان خوردگی نمونه برداری‌های زوجی انجام شده و طی آن یک نمونه از هر پوشش در هر زوج شرکت داده شود و هر زوج در یک نوع خاک، در عمق یکسان، با موقعیتی مشابه و برای مدتی یکسان دفن می‌شود. از دیدگاه علمی، کشف تفاوت 11% اینچی در میانگین عمق بزرگترین حفره بوجود آمده در هر پوشش با احتمال بزرگتر یا مساوی با 0/95 مهم شمرده می‌شود. براساس تجارب گذشته می‌دانیم که انحراف معیار عمیق بزرگترین حفره برای پوشش‌های مشابه مقدار تقریبی 0/008 اینچ را دارد. نتایج بدست آمده از 15 نمونه برداری به شرح ذیل است:

| پوشش A | پوشش B | تفاوت $D_i$ |
|--------|--------|-------------|
| 65     | 40     | 25          |
| 75     | 68     | 7           |
| 73     | 51     | 22          |
| 43     | 41     | 2           |

|    |    |     |
|----|----|-----|
| 53 | 41 | 12  |
| 58 | 47 | 11  |
| 47 | 32 | 15  |
| 52 | 24 | 28  |
| 38 | 43 | -5  |
| 61 | 53 | 8   |
| 56 | 52 | 4   |
| 56 | 57 | -1  |
| 34 | 44 | -10 |

در سطح معنادار بودن 5% آیا دو نوع پوشش از نظر میزان خوردگی یکسان هستند.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} = \frac{120}{15} = 8; S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}} = \sqrt{121.571}$$

$$t^* = \frac{5 - 0}{\sqrt{121.571 / \sqrt{15}}} = 2.81; \text{Critical Region: } |t^*| > t_{0.025, 14} = 2.145$$

Since  $|t^*| = 2.81 > t_{0.025, 14} = 2.145$  then Reject  $H_0$

بنابراین، بین دو نوع پوشش از نظر میزان خوردگی تفاوت قابل توجه ای وجود دارد.

**7-7-4. آزمون نسبت**

فرض کنید در یک جامعه دو جمله‌ای می‌خواهیم فرضیات ذیل را آزمون کنیم.

$$I: \begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_1 \end{cases} \quad II: \begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases} \quad III: \begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$$

که در آن  $P_0$  نسبت موفقیت در آزمایش برنولی است. آماره مناسب برای  $P$  که تصمیم‌گیری بر اساس آن انجام می‌شود  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  است. در محاسبه احتمال در توزیع دوجمله‌ای اگر  $n$  بزرگ باشد، عموماً از تقریب پواسون و در حالتی که  $p$  به صفر یا یک نزدیک نباشد از تقریب نرمال استفاده می‌شود. بنابراین برای تعیین ناحیه بحرانی دو حالت در نظر می‌گیریم.



## 1-7-7-4. آزمون نسبت برای اندازه نمونه کوچک

اگر اندازه نمونه،  $n$ ، کوچک باشد، برای تشکیل ناحیه بحرانی ابتدا نقطه بحرانی را برابر تعداد موفقیت‌ها در نمونه منتخب،  $x$ ، قرار داده و به کمک آن  $\alpha$  را محاسبه می‌کنیم. از آنجا که  $X$  توزیع دو جمله‌ای دارد و میانگین آن  $\mu = np_0$  است، بنابراین مقادیری از  $x$  که فاصله زیادی با  $\mu = np_0$  داشته باشد باعث رد فرض صفر خواهد شد. در نتیجه برای آزمون فرضیه به صورت

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

با استفاده از توزیع دو جمله‌ای  $b(x, n, p_0)$  مقدار احتمال  $\alpha_1 = p(x \leq x | H_0 \text{ is True})$  را که در آن  $x$  تعداد موفقیت‌ها در نمونه‌ای به اندازه  $n$  است، محاسبه کرده و در صورتیکه  $\alpha_1$  کمتر از  $\alpha$ ، سطح معنادار بودن، باشد، فرض صفر را رد می‌کنیم.

همچنین برای آزمون فرضیه به صورت  $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$  با استفاده از توزیع دو جمله‌ای  $b(x, n, p_0)$  مقدار احتمال  $\alpha_1 = p(x \geq x | H_0 \text{ is True})$  را محاسبه کرده و در صورتی که  $\alpha_1$  کمتر از  $\alpha$ ، سطح معنادار بودن، باشد، فرض صفر را رد می‌کنیم.

به همین ترتیب برای آزمون فرضیه دوطرفه  $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$  با استفاده از توزیع دو جمله‌ای  $b(x, n, p_0)$  مقدار احتمال ذیل را بدست می‌آوریم:

$$\alpha_1 = p(x \leq x | p = p_0) \quad \text{if } x < np_0$$

$$\alpha_1 = p(x > x | p = p_0) \quad \text{if } x > np_0$$

اگر  $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$  باشد، فرض صفر را رد می‌کنیم.

مثال 18. یک بازیکن بسکتبال ادعا می‌کند که 60% از توپ‌هایی که پرتاب می‌کند وارد سبد می‌شوند. در یک بازی، از 15 توپی که پرتاب کرده 10 توپ وارد سبد شده است. آیا می‌توان این ادعا را پذیرفت؟  $\alpha = 5\%$

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.6 \\ H_1 : p \neq 0.6 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\mu = np_0 = 15 * 0.6 = 9$$

$$x = 10 \Rightarrow x > np_0$$

$$\alpha_1 = p(x \geq 10 | p = 0.6) = 1 - p(x < 10) = 1 - \sum_{x=0}^9 bin(x, 15, 0.6) = 1 - 0.5968 = 0.4032$$

Since  $\alpha_1 = 0.4032 \not< \frac{\alpha}{2} = 0.025$  then Accept  $H_0$

## 2-7-7-4. آزمون نسبت برای اندازه نمونه بزرگ

اگر  $n$  بزرگ باشد (معمولاً برای اندازه نمونه بزرگتر از 30)، بنا بر قضیه حد مرکزی،  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  تقریباً توزیع نرمال با میانگین و واریانس  $\mu = np_0$ ،  $\sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$  دارد و در نتیجه تصمیم‌گیری بر اساس آماره ذیل خواهد بود:

$$z^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$$

که متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : P \leq P_0 \\ H_1 : P > P_0 \end{cases} \quad \text{if } Z^* > Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : P \geq P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases} \quad \text{if } Z^* < -Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \neq P_0 \end{cases} \quad \text{if } Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 19. سکه ای را 900 بار پرتاب می‌کنیم، 490 بار شیر می‌آید. آیا سکه نا اریب است؟  $\alpha=5\%$

$$\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Z^* = \frac{490 - 900 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{900 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = 2.667; \text{Critical Region: } |Z^*| > Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{.025} = 1.96$$

Since  $|Z^*| = 2.667 > Z_{.025} = 1.96$  then Reject  $H_0$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

مثال 20. یک شرکت تولیدی ادعا می‌کند که تنها 5 درصد تولیدات او ممکن است معیوب باشد. از 400 نمونه ای که از این شرکت خریداری شده 30 عدد معیوب بوده است. بر پایه این اطلاعات، آیا می‌توان ادعای شرکت را قبول کرد؟  $\alpha=5\%$

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.05 \\ H_1 : p > 0.05 \end{cases} \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{30}{400} = 0.075$$

$$z^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{(0.05 - 0.075)}{\sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{400}}} = 2.29; \text{Critical Region: } Z^* > Z_\alpha = Z_{.05} = 1.645$$

Since  $Z^* = 2.29 > Z_{.05} = 1.645$  then Reject  $H_0$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

#### 8-7-4. آزمون تفاضل نسبت‌ها در دو جامعه

در این حالت نیز دو حالت برای اندازه نمونه کوچک و بزرگ به شرح ذیل در نظر گرفته می‌شود.

#### 1-8-7-4. آزمون تفاضل نسبت‌ها در دو جامعه برای اندازه نمونه کوچک

فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  تعداد موفقیت مشاهده شده در دو نمونه تصادفی به اندازه  $n_1$  و  $n_2$  و  $x_1 + x_2 = y$  مقدار ثابتی باشد. آزمون فرضیه ذیل را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

با داشتن  $x_1 + x_2 = y$ ، مقادیر بزرگ  $x_1$  فرض مقابل را تایید می‌کند و مقادیر کوچک  $x_1$  فرض صفر را تایید می‌کند. بنابراین اگر  $x_1$  به اندازه کافی بزرگ باشد فرض صفر رد می‌شود.

از آنجا که نمونه متشکل از  $n_1 + n_2$  مشاهده شامل  $x_1 + x_2 = y$  موفقیت است، اگر فرض صفر درست باشد موفقیت‌ها با احتمال یکسانی در دو نمونه ظاهر می‌شوند. به معنای اینکه از  $n_1 + n_2$  مشاهده با احتمال یکسان  $n_1$  پاسخ در نمونه اول و  $n_2$  پاسخ در نمونه دوم ظاهر می‌شوند.

براین پایه، تعداد روش‌های انتخاب  $x_1$  برای نمونه اول و  $y - x_1$  موفقیت برای نمونه دوم عبارت است از :

$$P(x = x_1 | Y \text{ Success in } n_1 + n_2 \text{ Response}) = \frac{\binom{y}{x_1} * \binom{n_1 + n_2 - y}{n_1 - x_1}}{\binom{n_1 + n_2}{n_1}}$$

در صورتی که فرضیه صفر درست باشد، توزیع بالا، فوق هندسی است. برای رد یا قبول فرضیه صفر باید p-value را به صورت ذیل محاسبه نمود.

$$p\text{-value} = P(x > x_1 | p_1 = p_2)$$

اگر مقدار p-value از سطح معنادار بودن  $\alpha$  کوچکتر باشد فرضیه صفر رد و به جز آن قبول می‌شود.

#### 2-8-7-4. آزمون تفاضل نسبت‌ها در دو جامعه برای اندازه نمونه بزرگ

در مواقعی که اندازه نمونه در دو نمونه بزرگ باشد، بنا به قضیه حد مرکزی،  $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$  و  $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$  تقریباً دارای توزیع نرمال بترتیب با میانگین و واریانس  $\mu_1 = n_1 p_1$  و  $\sigma_1^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1}$  و  $\mu_2 = n_2 p_2$  و  $\sigma_2^2 = \frac{p_2 q_2}{n_2}$  است. در این صورت:

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim Normal(\mu = n_1 p_1 + n_2 p_2; \sigma^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2})$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim Normal(0, 1)$$

با این اوصاف، برای آزمون فرضیه، از دو جامعه بترتیب دو نمونه مستقل به اندازه  $n_1$  و  $n_2$  انتخاب می‌کنیم و نسبت‌های موفقیت  $\hat{p}_1$  و  $\hat{p}_2$  را از دو رابطه ذیل حساب می‌کنیم:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

که در آن  $x_1$  و  $x_2$  تعداد موفقیت در دو نمونه است و  $n_1$  و  $n_2$  اعداد بزرگی هستند. با ادغام دو نمونه، برآورد نااریب  $p$  (نسبت مشترک دو جامعه تحت فرض  $H_0$ ) به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

در صورتی که فرض صفر که برابری نسبت در دو جامعه درست باشد ( $p_1 = p_2$ )، متغیر تصادفی  $Z$  آماره آزمون، بصورت ذیل در می‌آید.

$$z^* = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

که در آن  $\hat{q} = 1 - \hat{p}$  است. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد (بحرانی) قرار گیرد فرض  $H_0$  رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : P_1 \leq P_2 \\ H_1 : P_1 > P_2 \end{cases} \quad \text{if } Z^* > Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 \geq P_2 \\ H_1 : P_1 < P_2 \end{cases} \quad \text{if } Z^* < -Z_\alpha \text{ then reject } H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases} \quad \text{if } Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \text{ then reject } H_0$$

مثال 21. در شهر الف از هر 1000 نفر 450 نفر و در شهر ب از هر 800 نفر 40 نفر نوعی چای مخصوص خریداری می کنند. آیا می توان گفت مردم در هر دو شهر به یک اندازه به این نوع چای علاقمند هستند؟ (خطای نوع اول را ده درصد در نظر بگیرید).

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 = p \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{450}{1000} = 0.45 ; \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{400}{800} = 0.5$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{450 + 400}{1000 + 800} = 0.47 ; \hat{q} = 1 - 0.47 = 0.53$$

$$Z^* = \frac{0.45 - 0.5}{\sqrt{0.47 \times 0.53 \left( \frac{1}{1000} + \frac{1}{800} \right)}} = -2.08 ; \text{Critical Region: } |Z^*| > Z_{\frac{\alpha}{2} = 0.05}$$

Since  $|Z^*| = 2.08 > Z_{\frac{\alpha}{2} = 0.05} = 1.645$  then Reject  $H_0$

مثال 22. در یک بیمارستان از 956 نوزاد 52/5 درصد پسر بودند در حالیکه وقتی نوزادان 2 بیمارستان را در نظر گرفتیم از 1406 نوزاد 0/4960 درصد پسر بودند. آیا اختلاف معنی داری در مورد نسبت نوزادان پسر در دو بیمارستان وجود دارد؟

$$n_1 = 956$$

$$n_1 + n_2 = 1406 \Rightarrow n_2 = 450$$

$$\hat{p}_1 = 0.525$$

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow 0.496 = \frac{956 \times 0.525 + 450 \hat{p}_2}{1406} \Rightarrow \hat{p}_2 = 0.434$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$z^* = \frac{0.525 - 0.434}{\sqrt{0.496 \times 0.504 \left( \frac{1}{956} + \frac{1}{450} \right)}} = 3.37 ; \text{Critical Region: } |Z^*| > Z_{\frac{\alpha}{2} = 0.05}$$

Since  $|Z^*| = 3.37 > Z_{\frac{\alpha}{2} = 0.05} = 1.645$  then Reject  $H_0$

بنابراین فرضیه صفر رد می شود.

#### 9-7-4. آزمون های مربوط به تفاضل های بین k نسبت

هدف از این انجام آزمون این است که معلوم شود که آیا تفاضل هایی که بین نسبت های نمونه ای در جامعه، مشاهده می شوند معنادار یا معلول تصادف هستند. برای اشاره به یک روش کلی در حل این نوع مسائل، فرض کنید که  $X_1, \dots, X_k$  مقادیر مشاهده شده مجموعه ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشند که توزیع دو جمله ای با پارامتر  $(n_i, \theta_i)$  دارند. اگر  $n_i$  ها به اندازه کافی بزرگ باشند می توانیم توزیع متغیرهای تصادفی مستقل را با توزیع نرمال استاندارد به صورت ذیل تقریب بزنیم.

$$z_i = \frac{x_i - n_i \theta_i}{\sqrt{n_i \theta_i (1 - \theta_i)}}; i = 1, \dots, k$$

و با توجه به اینکه  $z^2 \sim \chi_{(1)}^2$  دارد، می توانیم.

$$\chi_{(k)}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - n_i \theta_i)^2}{n_i \theta_i (1 - \theta_i)}$$

را یک متغیر تصادفی که توزیع مربع کای با k درجه آزادی دارد تلقی کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \theta_0 \\ H_1 : \text{ حداقل یکی از } \theta \text{ ها برابر } \theta_0 \text{ نیست} \end{cases}$$

بنابراین برای آزمون فرض

از ناحیه بحرانی  $\chi^2 \geq \chi_{\alpha, k}^2$  استفاده می شود که در آن

$$\chi^{2*} = \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - n_i \theta_0)^2}{n_i \theta_0 (1 - \theta_0)}$$

وقتی در فرضیه صفر  $\theta_0$  معین نیست، به جای  $\theta$  برآورد ادغام شده را قرار می دهیم و ناحیه بحرانی بصورت  $\chi^2 \geq \chi_{\alpha, k-1}^2$  در می آید که در آن تغییر در ناحیه بحرانی از  $\chi_{\alpha, k}^2$  به  $\chi_{\alpha, k-1}^2$  ناشی از این واقعیت است که به جای پارامتر نامعلوم  $\theta_0$ ، برآورد آن قرار داده شده است.

برای انجام آزمون، با مرتب کردن داده ها بصورت جدول ذیل:

|         | موفقیت | شکست        |
|---------|--------|-------------|
| نمونه 1 | $x_1$  | $n_1 - x_1$ |
| ⋮       | ⋮      | ⋮           |
| نمونه k | $x_k$  | $n_k - x_k$ |

در جدول فوق، فراوانی مشاهده شده در هر خانه از جدول  $f_{ij}$  نامیده می شود، که در آن اندیس i نشانه سطر و اندیس j نشانه ستون در جدول است. براساس درستی فرضیه صفر، مقدار انتظاری (امید) فراوانی مشاهده شده در هر خانه از جدول به صورت  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \theta_0$  ذیل برآورد می شود.

$$e_{i1} = n_i \hat{\theta}, \quad i = 1, \dots, k$$

$$e_{i2} = n_i (1 - \hat{\theta}), \quad i = 1, \dots, k$$

در این صورت، مقدار آماره آزمون بصورت ذیل است:

$$\chi^{2*} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

و فرض صفر در صورتی که  $\chi^{2*} \geq \chi_{\alpha, k-1}^2$  باشد رد می شود.

مثال 23. بر مبنای داده‌های نمونه‌ای که در جدول ذیل نشان داده شده تعیین کنید که نسبت واقعی مشتریان که ماده پاک کننده را به ماده پاک کننده B ترجیح می دهند در هر سه شهر یکسان است یا نه؟ ( $\alpha=0/05$ )

| شهر C | شهر B | شهر A |
|-------|-------|-------|
| 197   | 260   | 232   |

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ H_1 : H_0 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \frac{232 + 260 + 197}{400 + 500 + 400} = 0.53$$

$$\text{Critical Region: } \chi^2 \geq \chi_{0.05, 2}^2 = 5.991$$

$$e_{11} = 400 \times 0.53 = 212 \quad e_{12} = 400 \times 0.47 = 188$$

$$e_{21} = 500 \times 0.53 = 265 \quad e_{22} = 500 \times 0.47 = 235$$

$$e_{31} = 400 \times 0.53 = 212 \quad e_{32} = 400 \times 0.47 = 180$$

$$\begin{aligned} \chi^{2*} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(232 - 212)^2}{212} + \frac{(260 - 265)^2}{265} + \frac{(197 - 212)^2}{212} + \frac{(168 - 188)^2}{188} + \frac{(240 - 235)^2}{235} \\ &+ \frac{(203 - 188)^2}{188} = 6.48 \end{aligned}$$

Since  $\chi^{2*} = 6.48 > 5.991$  then Reject  $H_0$

مثال 24. یک نمونه تصادفی از 30 نفر بزرگسال بر حسب جنس و تعداد ساعتی که در هفته تلویزیون تماشا می کنند به صورت جدول ذیل دسته بندی شده اند:

|              | مرد | زن |
|--------------|-----|----|
| بالای 25 سال | 5   | 9  |
| زیر 25 سال   | 9   | 7  |

با استفاده از سطح معنادار بودن 0/01 فرضیه استقلال بین جنس و مدت زمان تماشای تلویزیون را تست نمایید.

|              | مرد      | زن       |
|--------------|----------|----------|
| بالای 25 سال | 5 (6/53) | 9 (7/46) |
| زیر 25 سال   | 9 (7/46) | 7 (5/38) |

$$\chi_{(1)}^{2*} = \frac{(5 - 6.53 | -0.5)^2}{6.53} + \frac{(9 - 7.46 | -0.5)^2}{7.46} + \frac{(9 - 7.46 | -0.5)^2}{7.46} + \frac{(7 - 8.53 | -0.5)^2}{8.53} = 0.5768$$

Critical Region:  $\chi^2 \geq \chi_{0.01, 1}^2$ ; Since  $\chi_{(1)}^{2*} = 0.5768 \neq \chi_{0.01, 1}^2 = 6.635$  then Accept  $H_0$

بنابراین  $H_0$  رد نمی شود.

## 4-7-10. آزمون استقلال

در آزمون استقلال هدف بررسی استقلال بین دو متغیر تصادفی است. آزمون استقلال بر پایه جداول توافقی انجام می شود. در حالت کلی یک جدول توافقی  $r \times c$  سطر معرف سطوح مختلف از یک متغیر و  $c$  ستون معرف سطوح مختلف از متغیر دیگر هستند. در جدول ذیل نمونه یک جدول توافقی نشان داده شده است.

|       |          |     |          |          |
|-------|----------|-----|----------|----------|
|       | $A_1$    | ... | $A_c$    |          |
| $B_1$ | $f_{11}$ | ... | $f_{1c}$ | $f_{.1}$ |
| ...   | ...      |     | ...      | ...      |
| $B_r$ | $f_{r1}$ | ... | $f_{rc}$ | $f_{.r}$ |
|       | $f_{.1}$ | ... | $f_{.c}$ | $f$      |

که در آن فراوانی مشاهده شده در سطر  $i$  و ستون  $j$  است و  $f_{i.} = \sum_{j=1}^c f_{ij}$  و  $f_{.j} = \sum_{i=1}^r f_{ij}$  مجموع سطر و ستون و به عبارت دیگر فراوانی حاشیه‌ای و  $f$  مجموع کل است.

فرض صفر در این آزمون استقلال بین دو متغیر تصادفی است. یعنی اگر  $\theta_{ij}$  احتمال آن باشد که یک فقره به سطر  $i$  و ستون  $j$  متعلق باشد و  $\theta_{i.}$  احتمال آن باشد که یک فقره به سطر  $i$  متعلق باشد و  $\theta_{.j}$  احتمال آن باشد که یک فقره به ستون  $j$  متعلق باشد فرض صفر عبارت است از

$$\theta_{ij} = (\theta_{i.})(\theta_{.j})$$

احتمال‌های  $\theta_{i.}$  و  $\theta_{.j}$  را بترتیب با  $\hat{\theta}_{i.} = \frac{f_{i.}}{f}$  و  $\hat{\theta}_{.j} = \frac{f_{.j}}{f}$  تخمین می زنیم بنابراین فراوانی انتظاری هر خانه از جدول توافقی عبارت است از

$$e_{ij} = (\hat{\theta}_{i.})(\hat{\theta}_{.j})f = \frac{f_{i.} f_{.j}}{f} = \frac{(f_{i.})(f_{.j})}{f}$$

و بر این اساس آماره آزمون عبارتست از

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

که توزیع مربع کای با  $(r-1)(c-1)$  درجه آزادی دارد.

اگر  $\chi^2 > \chi_{\alpha, (r-1)(c-1)}^2$  باشد، فرضیه  $H_0$  مبنی بر استقلال متغیرها در سطح  $\alpha$  رد می شود.



مثال 25. برای بررسی ارتباط بین دین و منطقه جغرافیایی آزمایشی به شرح ذیل انجام شده است. دو گروه از مردم بطور تصادفی انتخاب شده اند، یک گروه از ناحیه شمال و گروه دیگر از ناحیه جنوب و هر شخص متعلق به یکی از 3 گروه شیعه، سنی و سایر ادیان خواهد بود. فراوانی های ملاحظه شده در جدول ذیل آورده شده است.

| منطقه جغرافیایی | نوع مذهب |       |        |
|-----------------|----------|-------|--------|
|                 | مسلمان   | مسیحی | سایرین |
| شمال            | 182      | 215   | 203    |
| جنوب            | 154      | 136   | 110    |

در سطح  $\alpha=0/05$  آیا عقاید مذهبی و ناحیه ای که فرد زندگی می کند مستقل از یکدیگرند؟

$A_1$  = فرد انتخابی از قسمت شمال باشد.

$A_2$  = فرد انتخابی از قسمت جنوب باشد.

$B_1$  = فرد انتخابی از مذهب مسلمان باشد.

$B_2$  = فرد انتخابی از مذهب مسیحی باشد.

$B_3$  = فرد انتخابی از سایر مذاهب باشد.

استقلال رابطه منطقه جغرافیایی و نوع مذهب:  $H_0$   
 $H_1$ :  $H_0$  درست نیست

| منطقه جغرافیایی | نوع مذهب             |                      |                      | جمع  |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|------|
|                 | مسلمان               | مسیحی                | سایرین               |      |
| شمال            | 182 <sub>(202)</sub> | 215 <sub>(112)</sub> | 203 <sub>(187)</sub> | 600  |
| جنوب            | 154 <sub>(136)</sub> | 136 <sub>(140)</sub> | 110 <sub>(140)</sub> | 400  |
| جمع             | 336                  | 351                  | 313                  | 1000 |

براساس جدول بالا، احتمال آنکه یک فرد از قسمت شمال مسلمان باشد عبارت است از

$$p(A_1 \cap B_1) = p(A_1)p(B_1) = \frac{600}{1000} \times \frac{436}{1000}$$

و بر این پایه، در صورتیکه  $H_0$  درست باشد، تعداد افرادی که در 1000 نفر انتظار داریم شمالی و

$$n_{A_1, B_1} = \left(\frac{600}{1000}\right) \left(\frac{336}{1000}\right) (1000) = 202$$

به همین ترتیب احتمال و فراوانی انتظاری تعداد افرادی که از قسمت شمال انتخاب شده اند و مسیحی هستند عبارتست از:

$$p(A_1 \cap B_2) = p(A_1)p(B_2) = \frac{600}{1000} \times \frac{351}{1000}$$

$$n_{A_1, B_2} = \left(\frac{600}{1000}\right) \left(\frac{351}{1000}\right) (1000) = 211$$

به همین ترتیب برای بقیه محاسبه می شود.

$$\chi_{(2-1)(3-1)}^{2*} = \frac{(182-202)^2}{202} + \frac{(215-211)^2}{211} + \frac{(203-187)^2}{187} \\ + \frac{(154-134)^2}{134} + \frac{(136-140)^2}{140} + \frac{(110-126)^2}{126} = 8.556$$

*Critical Region:*  $\chi^{2*} > \chi_{\alpha, (r-1)(c-1)}^2$

*Since*  $\chi^{2*} = 8.556 > \chi_{0.05, 2}^2 = 5.991$  *then Reject*  $H_0$

#### 4-7-11. آزمون درستی انطباق

آزمون درستی انطباق برای آزمون اینکه آیا داده‌های یک نمونه از توزیع احتمالی خاصی تبعیت می‌کند به کار می‌رود. در آزمون درستی انطباق فرضیه صفر و مقابل به صورت ذیل فرموله می‌شود.

$H_0$ : داده‌ها، توزیع احتمالی خاصی دارد

$H_1$ : داده‌ها، از توزیع احتمالی خاص پیروی نمی‌کند

در آزمون درستی انطباق، براساس آماره ذیل:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

که در آن  $O_i$  مقادیر ملاحظه شده و  $e_i$  مقادیر انتظاری خانه  $i$ ام است و  $\chi^2$  متغیر تصادفی مربع کای است تصمیم‌گیری می‌شود. فرض  $H_0$  اگر  $\chi^2 > \chi_{\alpha, k-1}^2$  باشد، رد می‌شود. به عبارتی درجه آزادی مربع کای عبارت است از:

تعداد پارامترهای تخمین زده شده از روی داده‌ها - 1 - تعداد سلول‌ها = درجه آزادی توزیع مربع کای

مثال 26. یک تاس 120 مرتبه انداخته می شود و نتایج ذیل به دست آمده است. آیا این تاس سالم است؟  $\alpha=0/05$

|         |    |    |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|----|----|
| x       | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| f       | 20 | 22 | 17 | 18 | 19 | 24 |
| انتظاری | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |

$$\begin{cases} H_0 : P(x = i) = 1/6 \\ H_1 : P(x = i) \neq 1/6 \end{cases}$$

اگر تاس سالم باشد، انتظار خواهیم داشت که هر یک از اعداد 1 تا 6 را 20 بار نشان دهد.

$$\chi^2_{(15)} = \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20} = 1.7$$

$$\text{Critical Region: } \chi^2 > \chi^2_{\alpha, k-1}$$

$$\text{Since } \chi^2_{(15)} = 1.7 \not> \chi^2_{0.05, 6-1} = 11.07 \text{ then Accept } H_0$$

بنابراین  $H_0$  پذیرفته می شود و نتیجه می گیریم توزیع یکنواخت است و تاس سالم است.

نکته: در صورتی که فراوانی انتظاری سلولی از 5 کمتر باشد با سلولهای بالاتر خود ادغام می شود.

مثال 27. فرض کنید طول عمر 40 باطری از توزیع نرمال پیروی می کند. فراوانی مشاهده شده برای هر طبقه داده شده است طول عمر 40 باطری دارای حد متوسط  $\bar{x} = 3/4125$  و انحراف معیار  $S = 0/703$  است. در سطح  $\alpha = 0/05$  آیا طول عمر باطری ها از توزیع نرمال پیروی می کند یا خیر؟ از آنجا که بعضی از مقادیر مشاهده شده و انتظاری از 5 کمتر هستند در هم ادغام شده اند.

| حدود طبقه ها | $O_i$<br>فراوانی مشاهده شده | $e_i$<br>فراوانی انتظاری  |
|--------------|-----------------------------|---|
| 1/45-1/95    | 7                           | $\left\{ \begin{array}{l} 2 \quad 0/6 \\ 1 \quad 2/7 \\ 4 \quad 6/8 \end{array} \right\}$ |
| 1/95-2/45    |                             |   |
| 2/45-2/95    |                             |   |
| 2/95-3/45    | 15                          | 10/6  |
| 3/45-3/95    | 10                          | 10/3  |
| 3/95-4/45    | 8                           | $\left\{ \begin{array}{l} 5 \quad 6/1 \\ 3 \quad 2/2 \end{array} \right\}$                |
| 4/45-4/95    |                             |   |

$$P(1.45 < x < 1.95) = P\left(\frac{1.45 - 3.4125}{0.70} < Z < \frac{1.95 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.015; e_1 = 0.015 \times 40 = 0.6$$

$$P(1.95 < x < 2.45) = P\left(\frac{1.95 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{2.45 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.0675; e_1 = 0.0675 \times 40 = 2.7$$

$$P(2.45 < x < 2.95) = P\left(\frac{2.45 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{2.95 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.17; e_1 = 0.17 \times 40 = 6.8$$

$$P(2.95 < x < 3.45) = P\left(\frac{2.95 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{3.45 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.265; e_1 = 0.265 \times 40 = 10.6$$

$$P(3.45 < x < 3.95) = P\left(\frac{3.45 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{3.95 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.2575; e_1 = 0.2575 \times 40 = 10.3$$

$$P(3.95 < x < 4.45) = P\left(\frac{3.95 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{4.45 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.1525; e_1 = 0.1525 \times 40 = 6.1$$

$$P(4.45 < x < 4.95) = P\left(\frac{4.45 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{4.95 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.55; e_1 = 0.55 \times 40 = 2.2$$

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(7 - 10.1)^2}{10.1} + \frac{(15 - 10.6)^2}{10.6} + \frac{(10 - 10.3)^2}{10.2} + \frac{(8 - 8.3)^2}{10.3} = 2.1129$$

$$\text{Critical Region: } \chi^2 > \chi^2_{\alpha, k-1-t} = \chi^2_{0.05, 1}$$

$$\text{Since } \chi^2_{(1)} = 2.1129 \not> \chi^2_{0.05, 1} = 3.841 \text{ then Accept } H_0$$

بنابراین،  $H_0$  رد نمی شود.

مثال 28. در بررسی از 1000 خانواده که دارای 5 بچه هستند تعداد دخترها مطابق جدول ذیل احصاء شده است. در سطح معنادار بودن 5 درصد آیا این تولدها از توزیع دو جمله ای پیروی می کند؟

|         |    |     |     |     |     |    |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|----|
| دختر    | 0  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5  |
| فراوانی | 38 | 144 | 342 | 287 | 164 | 25 |

$$\mu = \frac{x_i}{n} = \frac{2470}{1000} = 0.247$$

$$P = \frac{\mu}{n} = \frac{2.47}{5} = 0.494$$

$$P(x = x) = \binom{5}{x} (0.494)^x (0.506)^{5-x}$$

$$P(x = 0) = \binom{5}{0} (0.494)^0 (0.506)^5 = 0.03317$$

$$n = (x = 0) = (0.03317)(1000) = 33.2$$

|                                    |      |       |       |       |       |      |
|------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|
| فراوانی مشاهده شده: O <sub>i</sub> | 38   | 144   | 342   | 287   | 164   | 25   |
| E <sub>i</sub> : فراوانی انتظاری   | 33/2 | 161/9 | 316/2 | 308/7 | 150/7 | 29/4 |

$$\chi^2_{(2)} = \frac{(38 - 32.2)^2}{32.2} + \frac{(144 - 161.9)^2}{161.9} + \frac{(342 - 316.2)^2}{316.2} + \frac{(287 - 308.7)^2}{308.7} + \frac{(164 - 150.7)^2}{150.7} + \frac{(25 - 201.4)^2}{29.4} = 8.48$$

$$\text{Critical Region: } \chi^2 > \chi^2_{\alpha, k-1-t} = \chi^2_{0.05, 5}$$

$$\text{Since } \chi^2_{(15)} = 8.48 \not> \chi^2_{0.05, 5} = 11.07 \text{ then Accept } H_0$$

بنابراین، H<sub>0</sub> قبول می شود.