فهرست مطالب

فهرست مطالب

فهرست مطالب

موضوع | **صفحه**

فهرست مطالب

فهرست مطالب

فصل اول: آنالیز ترکیبی

اصل شمارش یا قانون ضرب :

اگر m آزمایش انجام گیرد به طوری که اولین آزمایش n_1 نتیجه داشته باشد و برای هر نتیجه از آزمایش اول، n_2 نتیجه برای آزمایش دوم و برای هر نتیجه از آزمایش دوم و اول، n_3 نتیجه برای آزمایش سوم و … وجود داشته باشد، آنگاه تعداد کل نتایج ممکن m آزمایش برابر است با : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$

بعبارت دیگر اگر عملی را بتوان به m راه مختلف انجام داد و اگر برای هر یک از این راه ها، بتوان عمل دومی را به n راه مختلف انجام داد، آنگاه دو عمل تواما می توانند به $m \times n$ راه مختلف انجام شوند.

مثال 1 : در دو بار پرتاب یک سکه (یا پرتاب دو سکه) چهار حالت زیر برای نتایج آزمایش اول و دوم بدست می آید :

(شیر و شیر) - (شیر و خط) - (خط و شیر) - (خط و خط)

مثال 2 : اگر آزمونی دارای 12 سئوال صحیح و غلط (دو گزینه‌ای) باشد، به چند طریق یک دانش‌آموز می‌تواند در ورقه خود برای هر سئوال یک پاسخ را علامت بزند؟

جواب :

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{12}$$

مثال 3 : جامعه‌ای کوچک متشکل از 10 زن که هر کدام سه فرزند دارند را در نظر بگیرید. می خواهیم مادر نمونه و فرزند نمونه انتخاب کنیم. به چند حالت این کار امکان پذیر است؟ (انتخاب شنوندگان باید مادر فرزند باشند)

جواب :

$$\underset{\text{زن}}{10} \times \underset{\text{فرزند}}{3} = 30$$

مثال 4 : چند پلاک اتومبیل 7 شماره‌ای که سه شماره اول حروف لاتین و چهار شماره بعدی اعداد صفر تا نُه می توان نوشت؟

جواب :

3 (حروف لاتین) — 4 (اعداد صفر تا نُه)

$$26^3 \times 10^4$$

مثال 5 : چند عدد سه رقمی متمایز بوسیله اعداد صفر تا 5 می‌توان تشکیل داد:

الف- اگر هر عدد فقط بتواند یک بار تکرار شود؟

ب ـ چند عدد سه رقمی فوق زوج می‌باشند؟

ج ـ چند عدد سه رقمی فوق بزرگتر از 330 هستند؟

جواب :

الف-

$5 \times 5 \times 4 = 100$

ب-

عدد 0 عدد 2 و 4

$5 \times 4 \times 1$ $4 \times 4 \times 2$

$20 + 32 = 52$

ج-

عدد 3 عدد 4 و 5 عدد 4 و 5

$1 \times 2 \times 4$ $2 \times 5 \times 4$

$8 + 40 = 48$

مثال 6 : در یک انبار، 10 جفت کفش قرار دارد. اگر 8 لنگه کفش بتصادف انتخاب شود به چند حالت ممکن است هیچ جفت کفش یافت نشود؟

جواب :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$
$$20 \times 18 \times 16 \times 14 \times 12 \times 10 \times 8 \times 6$$

جایگشت :

بطور کلی هر ترتیب خاصی از اشیا را یک جایگشت گویند. تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر است با $n\,!$. بعبارت دیگر n شیء متمایز را می توان به $n\,!$ حالت آرایش داد.

مثال : در یک صف اتوبوس مرکب از 7 نفر، 2 نفر با هم قهرند و نمی خواهند کنار هم قرار گیرند. به چند حالت این 7 نفر می توانند کنار هم قرار گیرند ؟

جواب :

تعداد حالات قرار گرفتن 7 نفر کنار هم = $7\,! = 5040$

تعداد حالاتی که 2 نفر می توانند کنار هم باشند = $2\,! \times 6\,! = 1440$

تعداد حالاتی که 2 نفر نمی توانند کنار هم باشند = $7\,! - 2\,! \times 6\,! = 3600$

جایگشت های اشیاء روی دایره :

تعداد جایگشت های n شیء متمایز که روی یک دایره مرتب شده اند برابر است با $(n-1)\,!$

جایگشت های اشیاء شبیه به هم :

تعداد جایگشت های n شیء که r_1 تای آن شبیه به هم، r_2 تای آن شبیه به هم و .... و r_k تای آن شبیه به هم اند برابر است با:

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \ldots\ldots \times r_k!}$$

که در آن : $r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_k = r$

مثال 1 : با کلمه " اسپانیا " چند جایگشت می توان نوشت ؟

جواب :

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

مثال 2 : به چند طریق می توان 7 نفر را در یک اتاق 3 تخته و 2 اتاق 2 تخته یک هتل جای داد ؟

جواب :

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

مثال 3 : به چند طریق می توان 10 نفر را به دو تیم 5 نفره A و B تقسیم کرد ؟

جواب :

$$\frac{10!}{5!5!}=60$$

تمرین : در یک لیگ مسابقات یک حذفی، 7 تیم شرکت دارند. به چند طریق این 7 تیم شرکت کننده می توانند در دورهای اول و دوم با هم بازی کنند؟ (توجه کنید که در دور اول یک تیم استراحت دارد.)

ترتیب :

تعداد جایگشت‌های r شیء انتخاب شده از یک مجموعه n شیء متمایز به صورت زیر می‌باشد:

$$P_n^r=\frac{n\,!}{(n-r)!}$$

اثبات:

n	n - 1	n - 2	...			n - r + 1

$$n \times (n-1) \times (n-2) \quad \dots \quad \times \quad (n-r+1)$$

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\,\dots\,(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 1 : یک کلاس شامل 6 دانشجوی پسر و 4 دانشجوی دختر است. پس از برگزاری امتحان از آنها، نمرات آنها مشخص می‌شود با فرض اینکه هیچ دو دانشجویی نمره یکسان دریافت نکرده‌اند،

الف- چند حالت ممکن برای مرتب کردن نمرات وجود دارد؟

ب- اگر مرتب کردن دانشجوهای پسر و دانشجوهای دختر به صورت مستقل صورت بگیرد چند حالت وجود دارد؟

جواب :

الف) $10\,!$ ب) $4\,!\times 6\,!$

مثال 2 : یک کارخانه می خواهد 5 انبار جدید در محل های جدید بسازد. 10 محل مورد نظر قرار دارد. کل انتخابهای ممکن چقدر است ؟

جواب :

انبار 5	انبار 4	انبار 3	انبار 2	انبار 1
6	7	8	9	10

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

مثال 3 : یک تیم بسکتبال به چند طریق می تواند سه بازی مقابل سه تیم برگزار کند در شرایطی که این تیمها 5 زمان آمادگی جهت برگزاری بازی داشته باشند؟

جواب :

تیم 1	تیم 2	تیم 3

$$5 \times 4 \times 3$$

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

تعداد حالات تقسیم n شیء به r گروه :

تعداد حالات تقسیم n شیء متمایز به r گروه متمایز بدون قید در تعداد اشیاء مجاز در هر گروه برابر است با : r^n .

مثال : به چند طریق می توان 5 توپ متمایز را در 2 کیسه متمایز ریخت ؟

جواب :

$$2^5 = 32$$

ترکیب :

می خواهیم تعداد r تایی‌هایی را حساب کنیم که در آنها تکرار جایز نبوده و ترتیب هم مدنظر نیست. بنابراین تعداد راههایی که از n شیء متمایز می توان r شیء را بدون رعایت ترتیب آنها انتخاب کرد برابر است با:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال 1 : از یک گروه متشکل از 5 زن و 7 مرد :

الف- چند شورای مختلف 5 عضوی متشکل از دو زن و سه مرد انتخاب کرد؟

ب- اگر دو نفر از مردها با هم خصومت داشته باشند و نخواهند در شورا با هم انتخاب شوند، آنگاه چند شورا می‌توان انتخاب کرد؟

جواب :

الف- $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 350$

ب- $\binom{2}{0}\binom{5}{3}\binom{5}{2} + \binom{2}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{2} = 300$

مثال 2 : می‌دانیم یک انباشته تولیدی 100 تایی ٪5 ضایعات دارد. یک نمونه تصادفی 10 تایی انتخاب شده است، چند ترکیب مختلف می‌توان انتخاب کرد که هیچ قطعه ضایعی نباشد؟

جواب :

$$\binom{95}{10}\times\binom{5}{0}$$

مثال 3 : یک مجموعه 10 عددی تلویزیون دارای سه عدد معیوب می‌باشد. یک هتل 4 عدد از این تلویزیونها را خریداری نموده است. به چند حالت ممکن است از بین تلویزیون های خریداری شده حداقل 2 تلویزیون معیوب پیدا شود؟

جواب :

2 تا معیوب　　3 تا معیوب

$$\binom{3}{2}\times\binom{7}{2} + \binom{3}{3}\binom{7}{1} = 70$$

ترکیب چندتایی :

فرض کنید یک مجموعه n تایی خودش شامل n_1 عضو از نوع 1 ، n_2 عضو از نوع 2 ، n_3 عضو از نوع 3 و ...... و n_k عضو از نوع k ام است و ما می خواهیم r شیء از این مجموعه را طوری انتخاب کنیم که r_1 عضو از نوع 1 ، r_2 عضو از نوع 2 ، r_3 عضو از نوع 3 و ...... و r_k عضو از نوع k ام باشد و در ضمن ترتیب نیز اهمیتی نداشته باشد در اینصورت تعداد کل حالات ممکنه از رابطه زیر بدست می آید :

$$C_{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k}^{r_1,r_2,r_3,\dots,r_{k1}} = \binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}\dots\dots\binom{n_k}{r_k}$$

مثال 1 : مدیر یک کارخانه کوچک می خواهد تعداد راه های تخصیص افراد به شیفت اول کار را تعیین کند. در این کارخانه 15 نفر بعنوان کارگر تولیدی، 8 نفر بعنوان تعمیر کار و 4 نفر بعنوان سرپرست کار می کنند. اگر این شیفت به 6 کارگر تولیدی، 2 تعمیر کار و یک سرپرست احتیاج داشته باشد، به چند طریق می توان افراد را تخصیص داد؟

جواب :

$$\binom{15}{6}\times\binom{8}{2}\times\binom{4}{1} = 560560$$

مثال 2 : یک دانشکده 8 مسابقه فوتبال در یک فصل برگزار می‌کند. به چند طریق تیمهای آن می‌توانند با 4 برد 3 باخت و 1 مساوی فصل را به پایان برساند؟

جواب :

$$\binom{8}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{4}=280 \quad \text{یا} \quad \binom{8}{4}\binom{4}{3}\binom{1}{1}=280$$

تعداد جوابهای صحیح معادلات :

تعداد $\binom{n-1}{r-1}$ بردار متمایز r عنصری $(X_1,X_2,....,X_r)$ با عناصر صحیح مثبت X_i و با شرط $X_1+X_2+....+X_r=n$ وجود دارد. بعبارت دیگر تعداد جوابهای صحیح مثبت معادله $X_1+X_2+....+X_r=n$ برابر است با : $\binom{n-1}{r-1}$

تعداد $\binom{n+r-1}{r-1}$ بردار متمایز r عنصری $(X_1,X_2,....,X_r)$ با عناصر صحیح غیر منفی X_i و با شرط $X_1+X_2+....+X_r=n$ وجود دارد. بعبارت دیگر تعداد جوابهای صحیح غیر منفی معادله $X_1+X_2+....+X_r=n$ برابر است با : $\binom{n+r-1}{r-1}$

مثال 1 : چند جواب متمایز غیر منفی برای معادله $X_1+X_2=3$ وجود دارد ؟

جواب :

$$\binom{3+2-1}{2-1}=4$$

$(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$

مثال 2 : اگر بخواهیم 8 تخته سیاه را بین 4 مدرسه تقسیم کنیم، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد یک تخته سیاه داده شود در اینصورت به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

جواب :

$$\binom{8+4-1}{4-1}=165$$

$$\binom{8-1}{4-1}=35$$

مثال 3 : سرمایه گذاری مایل است 20 میلیون تومان را در 4 زمینه متفاوت سرمایه گذاری کند و در هر زمینه باید مضربی از میلیون تومان سرمایه گذاری شود.

الف- اگر وی بخواهد همه 20 میلیون تومان را سرمایه گذاری کند چند روش مختلف وجود دارد؟

ب- چنانچه لازم نباشد همه سرمایه را مصرف کند چند روش وجود دارد؟

جواب :

الف-

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$$

$$\binom{20+4-1}{4-1} = 1771$$

ب-

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$$

$$\binom{20+5-1}{5-1} = 10626$$

تمرین : 5 سیب نامتمایز(یکسان) را به چند طریق می توان بین 3 بچه تقسیم کرد؟

فصل دوم: مقدمه ای بر احتمال

آزمایش آماری :

یک آزمایش فرآیندی است که از طریق آن مشاهده‌ای بدست می آید. بعنوان مثال پرتاب یک تاس.

رویداد یا پیشامد :

به هر یک از نتایج مختلف یک آزمایش یک رویداد یا پیشامد گفته می‌شود.

فضای نمونه :

عبارتست از مجموعه‌ای از تمامی رویدادهای ممکن یک آزمایش. بطور مثال در پرتاب دو سکه :

S = { (پ و پ) ، (ر و پ) ، (ر و ر) ، (پ و ر) }

احتمال :

تابعی است عددی که روی فضای نمونه تعریف می‌شود و دامنه‌اش زیرمجموعه فضای نمونه‌ای و برد آن عددی بین صفر و یک است.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

$$0\le P(E)\le 1$$

مثال 1 : یک انباشته تولیدی شامل 100 محصول می شود که می دانیم 20 تا از آنها معیوب است. یک نمونه تصادفی 4 تایی بدون جایگذاری انتخاب می شود. احتمال اینکه در این نمونه بیشتر از 2 محصول معیوب نباشد چقدر است ؟

جواب :

P (بیشتر از 2 محصول معیوب نباشد) = P (2 محصول معیوب باشد) + P (1 محصول معیوب باشد) +

P (هیچ محصول معیوب نباشد)

$$=\frac{\binom{20}{2}\times\binom{80}{2}}{\binom{100}{4}}+\frac{\binom{20}{1}\times\binom{80}{3}}{\binom{100}{4}}+\frac{\binom{20}{0}\times\binom{80}{4}}{\binom{100}{4}}$$

مثال 2 : یک تاس به شکلی است که احتمال زوج آمدن آن 2 برابر احتمال فرد آمدنش است. اگر پیشامد E شامل اعداد کمتر از 4 باشد احتمال آن را حساب کنید.

جواب :

$$\begin{cases} P(\text{زوج}) = 2P(\text{فرد}) \\ 3P(\text{زوج}) + 3P(\text{فرد}) = 1 \end{cases}$$ همیشه برقرار است

$$P(\text{زوج}) = \frac{2}{9} \quad \text{و} \quad P(\text{فرد}) = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{کمتر از } 4) = P(3) + P(2) + P(1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

مثال 3: گروهی شامل 5 پسر و 10 دختر به تصادف در یک صف قرار می‌گیرند.

الف- احتمال اینکه شخصی که در مکان چهارم قرار می‌گیرد پسر باشد چقدر است؟

ب- احتمال اینکه یک پسر مشخص در موقعیت سوم قرار بگیرد چقدر است؟

جواب :

$$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{14\times13\times12\times5\times11\times10\times\ldots\times1}{15\,!} = 0.33$$

$$P = \frac{14\times13\times1\times12\times11\times\ldots\times1}{15\,!} = \frac{1}{15}$$

مثال 4: تعداد دانشجویان یک کلاس برابر k $(k < 365)$ نفر می باشد:

الف- احتمال آنکه روز تولد حداقل دو دانشجو با هم یکی باشد چقدر است؟

ب- کوچکترین مقدار k را چنان تعیین کنید که این احتمال بیشتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

جواب :

الف-

A = رویداد روز تولد حداقل دو دانشجو با هم یکی باشد

A' = رویداد روز تولد هیچکدام از دانشجویان در یک روز نباشد

$$P(A) = 1 - P(A') =$$

$$1 - \frac{(365)(364)(363)\ldots.(365-k+1)}{(365)^k}$$

ب-

با محاسبه عبارت فوق به جدول ذیل می رسیم :

k	5	10	20	23	30	40	50
$P(A')$	0.027	0.117	0.411	0.507	0.708	0.897	0.994

مثال 5 : سه عدد بطور تصادفی از کوچکترین 10 عدد صحیح مثبت متفاوت انتخاب می شوند. احتمال اینکه حاصلضرب آنها یک عدد زوج باشد چقدر است ؟

جواب :

A = رویداد حاصلضرب سه عدد، یک عدد زوج باشد

A' = رویداد حاصلضرب سه عدد، یک عدد فرد باشد (یا هر سه عدد فرد باشند)

$$P(A) = 1 - P(A') =$$

$$= 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{12}$$

مثال 6 : یک تیم فوتبال دارای 20 بازیکن حمله و 20 بازیکن دفاع است. بازیکنان باید در گروه های دو تایی برای تعیین هم اتاقی خود تقسیم شوند. اگر زوج ها بطور تصادفی انتخاب شوند، احتمال اینکه در هیچ زوجی بازیکن دفاع – حمله نباشد چقدر است ؟

جواب :

برای اینکه در هیچ زوجی بازیکن دفاع – حمله نباشد می بایست حمله ها با هم و دفاع ها با هم، هم اتاق شوند :

تعداد حالات گروه بندی دفاع ها با هم $= \frac{20!}{2^{10}10!}$

تعداد حالات گروه بندی حمله ها با هم $= \frac{20!}{2^{10}10!}$

تعداد حالات گروه بندی 40 نفر $= \frac{40!}{2^{20}20!}$

$$\text{احتمال اینکه در هیچ زوجی بازیکن دفاع – حمله نباشد} = \frac{\left[\dfrac{20!}{2^{10}10!}\right]^2}{\left[\dfrac{40!}{2^{20}20!}\right]}$$

تمرین 1 : 7 نفر را انتخاب می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه :

الف- هر 7 نفر در یک روز هفته بدنیا آمده باشند.

ب- در روزهای مختلف هفته بدنیا آمده باشند.

تمرین 2 : 12 مهره متمایز را بطور تصادفی در 3 جعبه پخش می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه جعبه اول 3 مهره داشته باشد.

تمرین 3 : احتمال آنکه مجموع دو عدد تصادفی که هر یک از آنها بین صفر و یک می باشد از یک بیشتر نبوده و حاصلضرب آنها از $\frac{2}{9}$ کوچکتر باشد چیست ؟

تمرین 4 : یک فروشگاه کوچک لبنیات دارای 10 کارتن شیر است که دو تا از آنها ترشیده است. اگر کسی بخواهد ششمین کارتنی را که در آن روز به تصادف به فروش می رسد را بخرد، احتمال اینکه این کارتن شیر ترشیده باشد چیست ؟

تمرین 5 : کشویی حاوی 8 جفت جوراب است. اگر 6 جوراب به تصادف و بدون جایگذاری برداریم احتمال اینکه دست کم یک جفت جوراب جور بین آنها موجود باشد چقدر است ؟

تمرین 6 : قفسه ای شامل 8 جفت کفش است. اگر 4 کفش بتصادف انتخاب شود احتمال اینکه :

الف- جفت نباشند چقدر است ؟

ب- دقیقا یک جفت در بین آنها باشد چقدر است ؟

قوانین مربوط به احتمال :

$$P(\phi)=0$$
$$P(S)=1$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A')=1-P(A) \qquad A'=\overline{A}=A^c$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

مثال 1 : در بین تولید 1000 مدار تولیدی توسط شرکتی، یک مدار بطور تصادفی انتخاب شده است. در این کارخانه، نواقص تولید به سه نوع A و B و C تقسیم شده است. نواقص نوع A در 2 درصد از موارد، نواقص نوع B در 1 درصد موارد و نوع C در 1/5 درصد از موارد اتفاق می افتند. بعلاوه می دانیم 0/5 درصد از قطعات دارای هر دو نقص A و B ، 0/6 درصد از قطعات دارای هر دو نقص A و C ، 0/4 درصد از قطعات دارای هر دو نقص B و C و 0/2 درصد از قطعات دارای هر سه نوع نقص هستند. احتمال اینکه مدار انتخابی، حداقل یکی از سه نوع نقص را دارا باشد چقدر است ؟

جواب :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=0.02+0.01+0.015-0.005-0.006-0.004+0.002=0.032$$

تمرین : مدیر تولید یک شرکت می خواهد محصول نهایی، که بصورت انباشته های 50 تایی تهیه می شود را بازرسی کند. او در نظر دارد در صورتی که انباشته دارای حداقل 10 درصد ضایعات باشد، کل آنرا دوباره کاری کند. بدین منظور یک نمونه تصادفی 10 تایی بدون جایگذاری انتخاب کرده و درصورت مشاهده یک قطعه خراب یا بیشتر، انباشته را جهت دوباره کاری ارجاع می دهد. آیا این تصمیم منطقی بنظر می رسد؟

رویدادهای ناسازگار (جدا از هم):

دو رویداد A و B را ناسازگار گویند اگر و فقط اگر :

$$A\cap B=\phi$$
$$P(A\cap B)=0$$

احتمال شرطی :

احتمال شرطی رویداد A در صورتیکه رویداد B اتفاق افتاده باشد برابر است با :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال 1 : در پرتاب یک تاس رویداد B به صورت بدست آوردن یک عدد مربع کامل تعریف شده است. تاس طوری طراحی شده است که احتمال زوج آمدن دو برابر احتمال فرد آمدن است.

الف ـ احتمال آنکه رویداد B اتفاق بیفتد چقدر است؟

ب ـ اگر بدانیم نتیجه تاس بزرگتر از 3 بوده، آنگاه احتمال رویداد B چقدر است؟

جواب :

الف-

$$\mathrm{P}\ (\text{زوج}) = \frac{2}{9}$$

$$\mathrm{P}\ (\text{فرد}) = \frac{1}{9}$$

$$\mathrm{P}\ (1 \text{ یا } 4) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$$

ب-

$$P\ (B \mid > 3) = \frac{P(B \cap > 3)}{P\ (> 3)} = \frac{P(4)}{P(4)+P(5)+P(6)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}} = \frac{2}{5}$$

مثال 2 : فرض کنید از یک انباشته 10 تایی که 7 قطعه سالم و 3 قطعه خراب دارد یک نمونه 2 تایی بطور تصادفی انتخاب شده است. پیشامد A را بصورت اینکه اولین قطعه انتخابی سالم باشد و پیشامد B را بصورت اینکه دومین قطعه انتخابی سالم باشد در نظر می گیریم.

الف - اگر قطعات را بدون جایگذاری انتخاب انتخاب کنیم مطلوبست $P(B|\, A)$

ب - اگر قطعات را با جایگذاری انتخاب انتخاب کنیم مطلوبست $P(B|\, A)$

جواب :

الف-

$$P(B|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{6}{9}}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{9}$$

ب-

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{7}{10}$$

مثال 3 : یک جعبه شامل 20 فیوز است که 5 تای آن خراب است. اگر 3 تا فیوز از جعبه به طور تصادفی و بدون جایگذاری انتخاب و خارج شود، احتمال آنکه هر دو خراب باشد چقدر است؟

جواب :

رویداد A : اولی خراب رویداد B : دومی خراب

$$P(A\bigcap B)=P(B).P(A|B)=P(A).P(B|A)=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{1}{19}$$

مثال 4 : دانشجویی مردد است که درس کامپیوتر یا تئوری احتمالات را اخذ نماید. اگر او کامپیوتر را اخذ کند به احتمال $\frac{1}{2}$ قبول خواهد شد ولی اگر درس تئوری احتمالات را بگیرد این احتمال به $\frac{1}{3}$ می رسد. او تصمیم خود را بر اساس پرتاب سکه انجام خواهد داد. چقدر احتمال دارد که او نمره قبولی در درس تئوری احتمالات بگیرد؟

جواب :

رویداد A : گرفتن درس تئوری احتمالات رویداد B : گرفتن نمره قبولی

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

تمرین 1 : 10 جفت کفش مختلف در یک کیسه وجود دارد. 6 لنگه کفش را بطور تصادفی بیرون می کشیم.

الف- احتمال اینکه حداقل یک جفت آنها با هم جور باشد چقدر است ؟

ب- اگر بدانیم یک جفت آنها با هم جور است، احتمال اینکه هر سه جفت با هم جور باشد چقدر است؟

تمرین 2 : جعبه یک دارای 3 مهره قرمز، 6 مهره آبی و یک مهره سفید است. جعبه دو دارای 6 مهره قرمز و 4 مهره آبی است. اگر سه مهره از جعبه یک بطور تصادفی و بدون جایگزینی انتخاب کنیم، احتمال اینکه یک مهره از هر رنگ برداشته باشیم به شرطی که یکی از سه مهره قرمز باشد چقدر است ؟

تمرین 3 : جعبه ای حاوی 10 توپ است که 4 تا قرمز، 5 تا سفید و یکی آبی است. اگر 3 توپ به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه از هر رنگ یک توپ داشته باشیم به شرط اینکه بدانیم بین این 3 توپ دقیقا یکی قرمز است.

پیشامدهای مستقل یا استقلال رویدادها:

دو رویداد A و B مستقل از هم اند اگر و فقط اگر :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

در غیر اینصورت دو رویداد A و B را به هم وابسته گویند.

اگر دو رویداد A و B مستقل از هم باشند آنگاه :

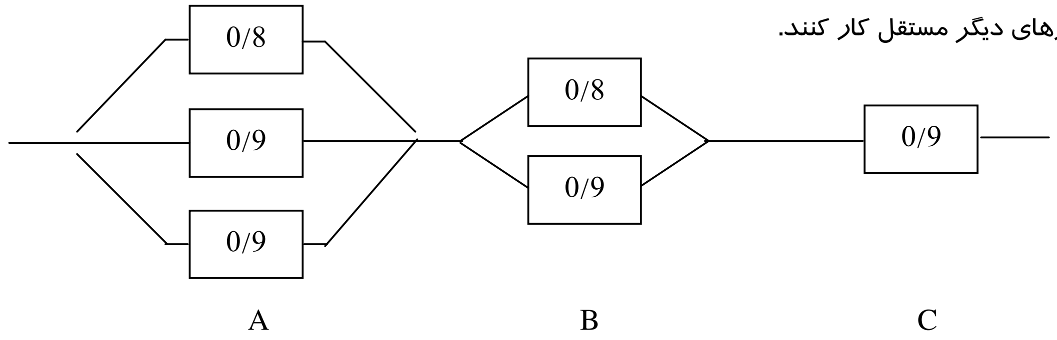
$$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

مثال : علی و احمد با احتمال $\frac{1}{2}$ تیر را به هدف می زنند. اگر علی شروع به تیر اندازی کند، احتمال اینکه قبل از احمد به هدف بزند چقدر است؟ (علی و احمد متناوبا تیر اندازی می کنند)

جواب :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ldots\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

تمرین 1 : نمودار یک سیستم الکترونیکی که در زیر آمده است، نشان دهنده احتمال این است که هر جز سیستم به درستی عمل کند. در صورتی که عملکرد سیستم منوط به عملکرد مونتاژ A و حداقل یکی از اجزاءِ مونتاژ B و C باشد، احتمال اینکه کل سیستم کار کند چقدر است؟ فرض کنید که اجزای هر مونتاژ نسبت به هم و هر مونتاژ نسبت به مونتاژهای دیگر مستقل کار کنند.



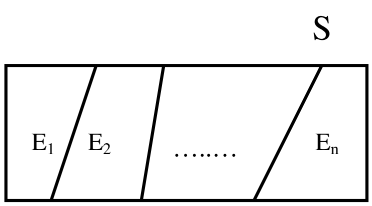
تمرین 2 : کل سیستم ترمز یک اتومبیل را می توان به 3 زیر سیستم مستقل بشرح ذیل تقسیم کرد :

1- سیستم الکترونیکی		2- سیستم هیدرولیکی		3- عمل کننده مکانیکی.

در شرایط خاصی، قابلیت اطمینان (پایایی) این سیستم ها بترتیب 0/995 و 0/993 و 0/994 است. قابلیت اطمینان سیستم را تخمین بزنید.

افراز (رویدادهای روی هم فرسا یا فراگیر):

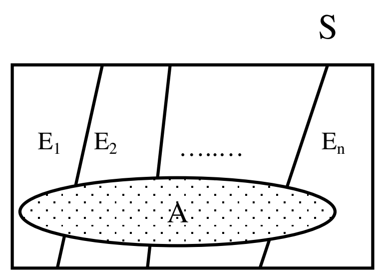
اگر E_1 و E_2 و ...... و E_n رویدادهای ناسازگار(جدا از هم) در فضای S باشد به طوری که اجتماع E_i ها مساوی مجموعه مرجع S شود ($\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$)، گوییم که این رویدادها فضای S را افراز کرده‌اند.



به رویدادهای E_1 و E_2 و ...... و E_n رویدادهای روی هم فرسا یا فراگیرند.

قانون (قضیه) بیز :

اگر E_1 و E_2 و ...... و E_n پیشامدهای روی هم فرسا باشند و A پیشامد دلخواهی باشد در این صورت:



$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i).P(E_i)$$

$$P(E_1|A) = \frac{P(A|E_1)\ .\ P(E_1)}{P(A)}$$

اثبات :

$$A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ ......\ (A \cap E_n)$$

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

$$P(A) = P(A| E_1)P(E_1) + P(A| E_2)P(E_2) + ... + P(A| E_n)P(E_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i).P(E_i)$$

مثال 1 : محصولات کارخانه ای در دو کارگاه تولید می شود. در کارگاه اول، 90 درصد کالاها و در کارگاه دوم فقط 40 درصد آنها با استاندارد تطبیق می کند. چنانچه یک واحد کالا با استاندارد تطبیق کند، با چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟ فرض کنید میزان تولید کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است.

جواب :

A : پیشامد کالا با استاندارد تطبیق کند

E_1: پیشامد کالا از کارگاه یک انتخاب شده باشد

E_2 : پیشامد کالا از کارگاه دو انتخاب شده باشد

$P(A|E_1)=0.9$ و $P(A|E_2)=0.4$

$$P(E_1|A)=\frac{0.9\times0.75}{0.9\times0.75+0.4\times0.25}=\frac{27}{31}$$

مثال 2 : یک شرکت بیمه اعتقاد دارد که افراد جامعه را می توان به دو دسته تقسیم کرد، آنهایی که حادثه جو هستند و آنهایی که حادثه جو نیستند. آمار نشان می‌دهد که احتمال اینکه یک فرد حادثه‌جو در یک سال تصادف داشته باشد 0/4 و برای دیگران 0/2 است. اگر فرض کنیم که 30٪ افراد جامعه حادثه‌جو هستند.

الف- احتمال اینکه فردی از جامعه که به طور تصادفی انتخاب شده است در طول سال تصادف داشته باشد چقدر است؟

ب- اگر یک تصادف اتفاق افتاده باشد چقدر احتمال دارد فرد حادثه‌جو باشد؟

جواب :

الف-

A : پیشامد فرد تصادف کند

E_1: پیشامد فرد حادثه‌جو باشد

E_2 : پیشامد فرد غیرحادثه‌جو باشد

$P(E_1)=0.3$

$P(E_2)=0.7$

$P(A)=0.4\times0.3+0.2\times0.7=0.26$

ب-

احتمال تصادف حادثه‌جو: $P(A|E_1)=0.4$

احتمال تصادف غیرحادثه‌جو: $P(A|E_2)=0.2$

$$P(E_1|A)=\frac{0.4\times0.3}{0.26}=\frac{12}{26}$$

مثال 3 : در جعبه شماره I ، 3 توپ قرمز و 7 توپ آبی و در جعبه شماره II، 6 توپ قرمز و 4 توپ آبی است. یک جعبه را به تصادف انتخاب و از آن یک توپ استخراج می‌کنیم. اگر بدانیم که توپ استخراجی قرمز است، چقدر احتمال دارد این توپ از جعبه شماره II انتخاب شده باشد؟

جواب :

$$P(II \mid R)=\frac{P(R\mid II)\,.\,P(II)}{P(R\mid I).P(I)+P(R\mid II).P(II)}=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

مثال 4 : یک کیسه شامل 4 گلوله سفید و 3 گلوله سیاه است و کیسه دوم شامل 3 گلوله سفید و 5 گلوله سیاه است. یک گلوله از کیسه اول برداشته و به کیسه دوم می‌ریزیم و از کیسه دوم یک گلوله بر می‌داریم.

الف- احتمال اینکه این گلوله سیاه باشد چقدر است؟

ب- اگر گلوله دوم سیاه باشد، احتمال اینکه گلوله اول نیز سیاه بوده باشد چقدر است؟

جواب :

$$P(B_2)=P(B_2|W_1).P(W_1)+P(B_2|B_1).P(B_1)$$

$$\frac{5}{9}\times\frac{4}{7}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{38}{63}$$

$$P(B_1|B_2)=\frac{P(B_2\mid B_1).P(B_1)}{P(B_2)}=\frac{\frac{6}{9}\times\frac{3}{7}}{\frac{38}{63}}=\frac{18}{38}$$

مثال 5 : در جواب دادن به تستهای m گزینه ای، یک دانشجو با احتمال P جواب را می داند و با احتمال 1-P جواب را حدس می زند. احتمال آنکه دانشجو بعلت دانستن جواب، به تست پاسخ درست داده باشد چقدر است؟

جواب :

A : پیشامد دانشجو واقعا جواب را می دانسته

E : پیشامد دانشجو به سوال جواب درست داده

$$P(A\mid E)=\frac{P(E\mid A)\,.\,P(A)}{P(E\mid A)\,.\,P(A)+P(E\mid A')\,.\,P(A')}=\frac{1\times P}{1\times P+\frac{1}{m}\times(1-P)}=\frac{mP}{1+(m-1)P}$$

تمرین 1 : دو کیسه را در نظر بگیرید. در اولی دو توپ سفید و هفت توپ سیاه و در دومی پنج توپ سفید و شش توپ سیاه موجود است. یک سکه سالم پرتاب شده و بر مبنای آنکه شیر یا خط بیاید کیسه اول یا دوم جهت بیرون کشیدن یک توپ انتخاب می گردد. احتمال شرطی اینکه سکه شیر آمده باشد به شرطی که گلوله بیرون کشیده شده سفید بوده باشد چقدر است؟

تمرین 2 : پرتابهای مستقل یک جفت تاس را در نظر بگیرید. در هر پرتاب ما مجموع عدد 2 تاس را بدست می آوریم. احتمال اینکه مجموع 5 قبل از 7 رخ دهد چیست؟

تمرین 3 : ظرفی دارای 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه است. یک مهره بتصادف از ظرف انتخاب می کنیم و آنرا همراه با 3 مهره از همان رنگ به ظرف بر می گردانیم و سپس مهره دیگری بتصادف از ظرف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال اینکه مهره اول انتخاب شده سیاه باشد بشرط اینکه مهره دوم انتخاب شده سفید باشد.

تمرین 4 : از ظرفی شامل 10 توپ سفید و 16 توپ سیاه ، 2 توپ بطور تصادفی و بدون جایگذاری خارج می شود و بدون دیدن رنگشان به دور ریخته می شوند. احتمال اینکه سومین توپ که بصورت تصادفی خارج شده سیاه باشد چقدر است؟

تمرین 5 : سه ظرف را در نظر بگیرد که در اولی یک مهره سفید و 2 مهره سیاه ، در دومی 2 مهره سفید و 1 مهره سیاه و در سومی یک مهره سفید و یک مهره سیاه قرار دارد. از ظرف اول یک مهره بتصادف انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم و سپس از ظرف دوم مهره ای را بتصادف انتخاب کرده و در ظرف سوم قرار می دهیم و در نهایت از ظرف سوم یک مهره انتخاب می کنیم. احتمال سفید بودن مهره انتخاب شده از ظرف سوم چقدر است ؟

تمرین 6 : یک سازنده خودرو، گیربکس های خود را از سه کارخانه تهیه می کند که می توان فرض کرد که دارای خصوصیات واحدی می باشند. با اینحال، این سازنده چندین سال است که گیربکس ها را آزمایش کرده و نتایج زیر بدست آمده است :

کارخانه عرضه کننده	نسبت عرضه شده توسط کارخانه	نسبت ضایعات
1	0/15	0/02
2	0/8	0/01
3	0/05	0/03

سازنده به خاطر هزینه های آزمایش، این کار را متوقف کرده است و منطقا می توان فرض کرد که نسبت ضایعات و ترکیب موجودی در آینده مشابه دوره های قبلی باشد. مدیر این شرکت بصورت تصادفی یک گیربکس را انتخاب کرده و با آزمایش آن توسط بخش کنترل کیفیت مشخص شده است که خراب است. مطلوبست احتمال اینکه این گیربکس از کارخانه 3 باشد.

تمرین 7 : در یک کارخانه، 4 ماشین اتوماتیک پیچ تراشی وجود دارد. در بررسی سوابق گذشته کنترل کیفیت، داده های جدول زیر بدست آمده است :

ماشین	درصد تولیدتوسط هر ماشین	درصد ضایعات
1	15	4
2	30	3
3	20	5
4	35	2

ماشینهای 2 و 4 جدیدتر بوده و تولید بیشتری توسط آنها انجام شده است. فرض کنید ترکیب موجودی انبار منعکس کننده درصد تولیدهای فوق باشد.

الف- اگر یک پیچ بطور تصادفی از انبار انتخاب شود، احتمال اینکه معیوب باشد چقدر است ؟

ب- اگر یک پیچ انتخاب شود و مشاهده کنیم معیوب است، احتمال اینکه توسط ماشین 3 تولید شده باشد چقدر است ؟

فصل سوم: متغیر تصادفی

متغیر تصادفی :

تابعی است حقیقی که بر روی فضای نمونه تعریف می‌شود و به هر اتفاق ممکن در فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

به طور کلی می‌توان با استفاده از متغیر تصادفی نتایج حاصل از یک آزمایش را با یک عدد نشان داد.

مثال 1 : در پرتاب یک تاس متغیر تصادفی X نتایج حاصل از پرتاب تاس تعریف شده و تابع احتمال متغیر تصادفی به این صورت تعریف می گردد:

نتایج حاصل از پرتاب تاس = X

$$P(X=i)=\frac{1}{6} \quad ; \quad i=1,2,3,\ldots,6$$

انواع متغیر تصادفی :

متغیرهای تصادفی به دو دسته تقسیم می شوند:

1) گسسته   2) پیوسته

متغیر تصادفی گسسته :

اگر مقادیری که متغیر تصادفی x می‌گیرد شامل تعداد محدود یا نامحدود ولی شمارش‌پذیر از نقاط باشد، آنگاه متغیر تصادفی x یک متغیر تصادفی گسسته نام دارد.

تابع احتمال یک متغیر گسسته :

$P_X(x)$ یا $f_X(x)$ را تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند اگر برای هر یک از مقادیر ممکنه X مثل x_i داشته باشیم:

1) $0 \le f_X(x_i) \le 1$

2) $\sum_x f_X(x_i)=1$

مثال 1 : فرض کنید در نظر داریم یک کمیته 2 نفره از میان 3 مرد و 3 زن به طور تصادفی انتخاب کنیم. اگر متغیر تصادفی x تعداد مردهای کمیته را نشان دهد مطلوبست تابع احتمال متغیر تصادفی x ؟

جواب :   تعداد مردها = X $x=0\ ,1\ ,2$

$$P(x=i)=\frac{\binom{3}{i}\binom{3}{2-i}}{\binom{6}{2}}$$

$$P(x=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5} \quad , \quad P(x=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{3}{5} \quad , \quad P(x=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5}$$

مثال 2 : فـرض کنید تابع احتمال متغیر X به صورت $x=0,1,2,\ldots$, $f_X(x)=\frac{C\lambda^x}{x!}$ باشد، مطلوب است محـاسبه پارامتر C و $f_X(2)$ و P(x>۲) .

جواب :

$$\sum_{i=\circ}^{n} f_X(x_i)=1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{x=\circ}^{\infty}\frac{C\lambda^x}{x!}=1 \quad \Rightarrow$$

$$C\sum_{x=\circ}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=1 \quad \Rightarrow \quad C\,e^{\lambda}=1 \;\Rightarrow\; C=e^{-\lambda}$$

$$P(x=2)=\frac{e^{-\lambda}\;\lambda^2}{2\,!}$$

$$P(x>2)=1-P(x\le 2)=1-P\;(x\le 2)=1-[P(x=2)+P(x=1)+P(x=\circ)]$$

$$1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\frac{e^{-\lambda}\;\lambda^2}{2\,!}$$

مثال 3 : سه توپ می بایست بطور تصادفی و بدون جایگذاری از یک کیسه محتوی 20 توپ که از 1 تا 20 شماره گذاری گردیده اند، بیرون کشیده شود. احتمال اینکه یکی از گلوله های کشیده شده مساوی یا بزرگتر از 17 باشد چقدر است ؟

جواب :

X = بزرگترین عددی که انتخاب می شود. ($x=3\,,4\,,5\,,\ldots.\,,20$)

$$P(x=i)=\frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}$$

$$P(x\ge 17)=P(x=17)+P(x=18)+P(x=19)+P\;(x=20)=$$

$$\frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}}=0.508$$

تمرین 1 : متغیر تصادفی X مقادیر 1 ، 2 و 3 را به ترتیب با احتمال های $\frac{1+3K}{3}$ ، $\frac{1+2K}{3}$ و $\frac{0.5+5K}{3}$ اختیار می کند. مقدار مناسبی برای K تعیین کنید.

تمرین 2 : فـرض کنید تابع احتمال متغیر X به صورت $0<r<1 \quad , \quad x=0,1,2,... \quad , \quad f_X(x)=kr^x$ باشد، مطلوب است محـاسبه پارامتر k.

تابع توزیع تجمعی (c.d.f) متغیر گسسته : (cumulative distribution function)

تابع $F_X(x)$ یک تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی گسسته X است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1) $F_X(x)$ یک تابع غیرنزولی باشد.

2) $\lim_{x\to\infty} F_x(x)=1$

3) $\lim_{x\to-\infty} F_x(x)=0$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته X از رابطه زیر بدست می آید :

$$F_X(x_i)=P(X\le x_i)=\sum_{x\le x_i} P_X(x_i)$$

نحوه محاسبه احتمال از روی $F_x(x)$:

مقادیر مختلف احتمال یک متغیر تصادفی را می توان از روی تابع توزیع تجمعی با استفاده از روابط زیر بدست آورد :

$$P(x\le b)=F_X(b)$$
$$P(a<x\le b)=F_X(b)-F_X(a)$$
$$P(x<b)=\lim_{n\to\infty} F_X(b-\frac{1}{n})$$

مثال 1 : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد؛ مطلوبست محاسبه احتمالات زیر:

1) $P(2<x\le 4)$

2) $P(x<3)$

3) $P(x=1)$

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{2}{3} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{12} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

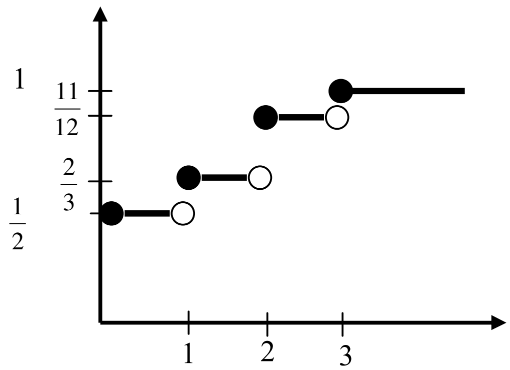
جواب :

$$1)\ P(2<x\le 4)=F_X(4)-F_X(2)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

$$2)\ P(x<3)=\lim_{n\to\infty} F_X(3-\frac{1}{n})=\frac{11}{12}$$

مقدار $3-\frac{1}{n}$ به مقدار اپسیلون از 3 کوچکتر است

$$3)\ P(x=1)=P(x\le 1)-P(x<1)=F_X(1)-\lim_{n\to\infty} F(1-\frac{1}{n})=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$



مثال 2 : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد؛ مطلوبست محاسبه احتمالات زیر:

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{2}{3} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{12} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

1) $P(2<x\le 4)$

2) $P(x<3)$

3) $P(x=1)$

4) $P(x>\frac{1}{2})$

جواب :

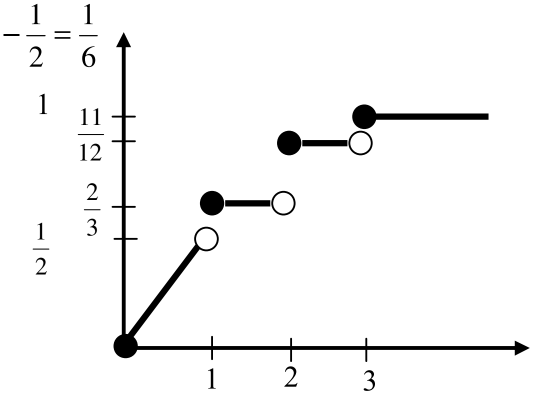
$$1)\ P(2<x\le 4)=F_X(4)-F_X(2)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

$$2)\ P(x<3)=\lim_{n\to\infty} F_X(3-\frac{1}{n})=\frac{11}{12}$$

مقدار $3-\frac{1}{n}$ به مقدار اپسیلون از 3 کوچکتر است

$$3)\ P(x=1)=P(x\le 1)-P(x<1)=F_X(1)-\lim_{n\to\infty} F(1-\frac{1}{n})=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$4)\ P(x>\frac{1}{2})=1-P(x\le\frac{1}{2})=1-F_X(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



تمرین 1 : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد؛ پس از رسم تابع توزیع تجمعی مطلوبست محاسبه احتمالات زیر:

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\le x<2 \\ \frac{x}{3} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

1) $P(0<x<1)$

2) $P(0<x\le 1)$

3) $P(x=1)$

4) $P(1\le x\le 2)$

تمرین 2 : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد؛ پس از رسم تابع توزیع تجمعی مطلوبست محاسبه احتمالات زیر:

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{x+1}{4} & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

1) $P(\frac{1}{4}<x<1)$

2) $P(x=\frac{1}{4})$

3) $P(x=1)$

4) $P(\frac{1}{2}\le x<2)$

تمرین 3 : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد؛ پس از رسم تابع توزیع تجمعی مطلوبست محاسبه احتمالات زیر:

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2}+\frac{x-1}{4} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{12} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

1) $P(x=1)$

2) $P(x=2)$

3) $P(x=3)$

4) $P(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$

انواع توزیع‌های گسسته :

1- توزیع یکنواخت :

هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم X دارای توزیع یکنواخت است:

$$f_x(x)=\frac{1}{N}\ ; \qquad x=1,2,\ldots,N$$

مثال : اگردر پرتاب یک تاس، متغیر تصادفی x نشان دهنده عدد ظاهر شده باشد، در اینصورت x دارای توزیع یکنواخت با تابع احتمال $f_x(x)=\frac{1}{6}$ می‌باشد.

2- توزیع برنولی :

هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم X دارای توزیع برنولی با پارامتر P است:

$$f_X(x)=\begin{cases} P & ; \quad x=1 \quad \text{موفقیت} \\ 1-P & ; \quad x=\circ \quad \text{شکست} \end{cases}$$

و یا :

$$f_X(x)=P^x(1-P)^{1-x} \quad ; \quad x=\circ,1$$

بعبارت دیگر فضای نمونه دو حالت دارد : {شکست و موفقیت} = S

3- توزیع دو جمله‌ای یا بینم :

هرگاه آزمایش برنولی n بار تکرار شود، آنگاه متغیر تصادفی دو جمله‌ای بدست می‌آید. هرگاه متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و P است:

$$f_X(x)=\binom{n}{x}P^x\ (1-P)^{n-x} \quad , \quad x=\circ,1,2,...,n$$

در این توزیع ما علاقه‌مند به محاسبه X موفقیت در n آزمایش می‌باشیم به طوری که احتمال موفقیت در هر آزمایش P و احتمال شکست 1-P باشد.

فرضیات مربوط به توزیع دو جمله‌ای :

1- برای هر آزمایش فقط دو حالت {شکست و موفقیت} وجود دارد.

2- احتمال موفقیت و شکست در تمام آزمایشات ثابت است.

3- n آزمایش وجود دارد که n یک مقدار مشخص است.

4- n آزمایش مستقل از هم می باشند.

مثال 1 : می‌دانیم که محصولات یک سازنده پیچ با احتمال 0/01 معیوب است. این سازنده، پیچ‌ها را در بسته‌های 10 تایی با ضمانت برگشت دادن پول به طوری که بیش از یک پیچ از 10 پیچ معیوب باشد به فروش می رساند. چه درصدی از بسته‌های فروش رفته را مشتری به سازنده برگشت می‌دهد؟

P = احتمال سالم بودن = 0/99   1-P = احتمال معیوب بودن = 0/01   x = تعداد پیچ های معیوب در جعبه 10 تایی

جواب :

راه اول :

$$\text{P (بسته برگشت شود)} = P(x>1) = P(x=2)+P(x=3)+\ldots+P(x=10)$$

$$P(x>1)=\binom{10}{2}(0.01)^2(0.99)^8+\binom{10}{3}(0.01)^3(0.99)^7+\ldots+\binom{10}{10}(0.01)^{10}(0.99)^0$$

راه دوم :

$$P(x>1)=1-P(x\le 1)=1-[P(x=1)+P(x=0)]=$$
$$1-\binom{10}{1}(0.01)^1(0.99)^9-\binom{10}{0}(0.01)^0(0.99)^{10}=0.004$$

0/4 درصد از بسته های فروش رفته را مشتری به سازنده برگشت می دهد.

مثال 2 : احتمال اینکه یک بیمار، از بیماری خونی شفا یابد 0/4 است. اگر 15 نفر را بشناسیم که به این بیماری مبتلا شده باشند:

الف) احتمال اینکه حداقل 10 نفر زنده بمانند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه بین 3 تا 8 نفر زنده بمانند چقدر است؟

ج) احتمال اینکه دقیقاً 5 نفر زنده بمانند چقدر است؟

جواب :

الف) $P(x\ge 10)=P(x=10)+P(x=11)+\ldots+P(x=15)$

$$=\binom{15}{10}(0.4)^{10}(0.6)^5+\binom{15}{11}(0.4)^{11}(0.6)^4+\ldots+\binom{15}{15}(0.4)^{15}(0.6)^0$$

ب) $P(3\le x\le 8)=P(x=3)+P(x=4)+\ldots+P(x=8)$

$$=\binom{15}{3}(0.4)^3(0.6)^{12}+\binom{15}{4}(0.4)^4(0.6)^{11}+\ldots+\binom{15}{8}(0.4)^8(0.6)^7$$

ج) $P(x=5)=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}=0.186$

مثال 3 : یک بازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

شخصی بر روی یکی از اعداد 1 تا 6 شرط‌بندی می‌کند سپس 3 تاس منصف را پرتاب می کند. اگر عددی که شخص شرط‌بندی کرده است i بار تکرار شود، شخص i واحد پولی برنده می‌شود. از طرفی، اگر عدد شرط‌بندی شده در هیچ از سه پرتاب ظاهر نشود، شخص یک واحد پولی می‌بازد. احتمال های برد و باخت را محاسبه کنید.

جواب :

X= تعداد واحدهایی که فرد می‌برد یا می‌بازد	$x=-1\,,\,1\,,\,2\,,\,3$

Y= تعداد دفعاتی که عدد شرط‌بندی شده ظاهر شده	$y=0,1,2,3$

$$P\,(\text{یک واحد ببازد})=P(x=-1)=P(y=0)=\binom{3}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^3=(\frac{5}{6})^3=\frac{125}{216}$$

$$P\,(\text{یک واحد ببرد})=P(x=1)=P(y=1)=\binom{3}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^2=\frac{75}{216}$$

$$P\,(\text{دو واحد ببرد})=P(x=2)=P(y=2)=\binom{3}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^1=\frac{15}{216}$$

$$P\,(\text{سه واحد ببرد})=P(x=3)=P(y=3)=\binom{3}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^0=\frac{1}{216}$$

مثال 4 : فرض کنید هر موتور هواپیمای در حال پرواز با احتمال (1-P) مستقل از موتورهای دیگر خراب می گردد. همچنین فرض کنید که برای آنکه یک هواپیما پرواز موفق داشته باشد می بایست که حداقل 50 درصد از موتورهایش درست کار کنند. برای چه میزانی از P یک هواپیمای 4 موتوره بر یک هواپیمای دو موتوره ترجیح دارد؟

جواب :

احتمال داشتن پرواز موفق در یک هواپیمای 4 موتوره :

$$\begin{aligned}P(x\geq 2)&=\binom{4}{2}P^2(1-P)^2+\binom{4}{3}P^3(1-P)+\binom{4}{4}P^4(1-P)^0=\\&=6P^2(1-P)^2+4P^3(1-P)+P^4\end{aligned}$$

احتمال داشتن پرواز موفق در یک هواپیمای 2 موتوره :

$$\begin{aligned}P(x\geq 1)&=\binom{2}{1}P(1-P)+\binom{2}{2}P^2(1-P)^0=\\&=2P(1-P)+P^2\end{aligned}$$

اگر بخواهیم هواپیمای 4 موتوره بر هواپیمای 2 موتوره ترجیح داده شود باید احتمال پرواز سالم آن بیشتر از هواپیمای دو موتوره باشد، یعنی :

$$6P^2(1-P)^2+4P^3(1-P)+P^4 \geq 2P(1-P)+P^2 \Rightarrow$$
$$(P-1)^2(3P-2)\geq 0 \Rightarrow P\geq \frac{2}{3}$$

تمرین 1 : فرض کنید در یک هواپیمای پیشرفته 3 کامپیوتر مشابه وجود دارد که فقط یکی از آنها برای هدایت هواپیما مورد نیاز است و دو تای دیگر بعنوان یدکی به کار می رود. در طول یک ساعت هدایت هواپیما احتمال اینکه کامپیوتر فعال خراب شود برابر 0/0005 می باشد. با فرض اینکه هر ساعت از هدایت هواپیما مستقل از ساعت دیگر است، احتمال اینکه در طول 5 ساعت پرواز، هر 3 کامپیوتر خراب شود را حساب کنید.

تمرین 2 : فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر و دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای $X\sim b(3,\frac{2}{3})$ و $Y\sim b(4,\frac{1}{2})$ باشند. مطلوبست $P(X=Y)$

تمرین 3 : یک فرایند تولید ترانزیستور بطور متوسط 2 درصد محصولات فاقد استاندارد (ضایعات) تولید می کند. در هر ساعت یک نمونه تصادفی 50 تایی از فرایند انتخاب و تعداد محصولات فاقد استاندارد شمارش می گردد. اگر تعداد محصولات فاقد استاندارد مشاهده شده یک یا بیشتر باشد آنگاه فرایند تولید باید متوقف شود تا منبع یا منابع ایجاد اشکال شناسایی و رفع گردند. احتمال اینکه فرایند بر اساس نمونه گیری متوقف شود را بدست آورده و بطور کلی این روش تصمیم گیری را چگونه ارزیابی می کنید ؟

4- توزیع پواسون :

هرگاه متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است:

$$f_x(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \qquad x=0,1,2,\ldots$$

$\lambda=$ متوسط رویدادها (یا موفقیت ها) در یک فاصله زمانی یا مکانی

نمونه‌هایی از توزیع پواسون:

- تعداد تصادفات روزانه در یک بزرگراه،
- تعداد حوادث سالیانه در یک کارخانه،
- تعداد غلط‌های چاپی در یک صفحه از کتاب،

- تعداد مشتریان وارد شده به یک فروشگاه در روز

مثال 1 : در یک چهار راه به طور متوسط سه تصادف در هفته رخ می‌دهد. مطلوبست محاسبه احتمال:

الف) در یک هفته دقیقاً 5 تصادف رخ دهد؟

ب) در یک هفته حداقل 4 تصادف رخ دهد؟

جواب :

λ = 3 تصادف در هفته و X = تعداد تصادفات در هفته

$$P(x=5)=\frac{e^{-3}\ 3^5}{5\,!}=0.1$$

$$P(x\geq 4)=1-P(x\leq 3)=1-\frac{e^{-3}\ 3^3}{3\,!}-\frac{e^{-3}\ 3^2}{2!}-\frac{e^{-3}\ 3^1}{1\,!}-\frac{e^{-3}\ 3^\circ}{\circ!}=0.353$$

مثال 2 : میانگین تعداد اتومبیل هایی که روزانه وارد یک پارکینگ می شوند 18 اتومبیل است. اگر این پارکینگ ظرفیت 35 اتومبیل را داشته باشد مطلوبست احتمال اینکه در یک روز معین ظرفیت پارکینگ تکمیل شود؟

جواب :

λ = 18 اتومبیل در روز و X = تعداد اتومبیل هایی که روزانه وارد پارکینگ می شوند

$$P(x=35)=\frac{e^{-18}\ 18^{35}}{35\,!}=0.0001$$

تمرین 1 : تعمیر کاران یک شرکت مطابق توزیع پواسون با پارامتر 2 جهت دریافت قطعه یدکی خاصی مراجعه می کنند. معمولا سه عدد از این قطعه در دست نگهداشته می شود. اگر بیشتر از سه سفارش دریافت شود، این تعمیر کاران باید فاصله زیادی تا انبار مرکزی طی کنند.

الف- احتمال اینکه در یک روز خاص این فاصله طی شود چقدر است ؟

ب- اگر بخواهیم در 90 درصد مواقع جوابگوی تقاضاها باشیم چند عدد از قطعه لازم است نگهداشته شود ؟

تمرین 2 : شیشه های نوشابه را با ریختن شیشه مذاب در قالب شکل می دهند. شیشه مذاب در کوره هایی که با آجر نسوز ساخته شده اند آماده می گردد. با گذشت زمان آجرهای کوره فرسوده و قطعات ریز آن با شیشه مذاب مخلوط می گردند و این سبب ایجاد نقص در شیشه های تولید شده می شود. اگر فرض کنیم چنین نقصی بطور

متوسط با میزان 0/00001 در هر شیشه مشاهده می شود، آنگاه احتمال مشاهده حداقل یک نقص در یک شیشه که بطور تصادفی انتخاب می شود چیست ؟

تمرین 3 : بخش حسابداری شرکتی سعی دارد اشتباهات مختلفی را (نظیر اشتباهات چاپی، تایپی و ...) که در صورت حسابهای مشتریان ایجاد می شود را کنترل نماید. فرض کنید اینگونه اشتباهات بر اساس یک توزیع پواسون با پارامتر 0/01 رخ می دهد. احتمال مشاهده یک اشتباه در صورتحساب یک مشتری که بطور تصادفی انتخاب شده است را محاسبه کنید.

تمرین 4 : اگر متوسط تعداد درخواستها از یک شرکت بیمه 5 باشد، نسبت روزهایی که کمتر از 3 درخواست می شود چقدر است؟ احتمال اینکه دقیقا 4 درخواست در 3 روز از 5 روز آینده وجود داشته باشد چقدر است؟

5- فرآیند پواسون :

در صورتی که مقطع زمانی یا مکانی تغییر کند، تابع توزیع پواسون به صورت زیر تبدیل می‌شود که به این تابع توزیع، فرایند پواسون گویند :

$$P(N(t)=n)=\frac{e^{-\lambda t}\ (\lambda t)^n}{n!} \qquad , \qquad n=0,1,2,.....$$

بعبارت دیگر آنچه که چنین فرایندهایی را مشخص می کند وابستگی زمانی آنها است.

مثال 1 : فرض کنید که زمین لرزه بر اساس یک فرایند پوآسون با نرخ 2 زمین لرزه در طول یک هفته اتفاق می افتد در اینصورت احتمال اینکه حداقل 3 زمین لرزه در دو هفته آینده داشته باشیم را محاسبه کنید.

جواب :

λ = 2 زمین لرزه در هفته

$$P(N(2)=n)=\frac{e^{-4}\ (4)^n}{n!} \qquad , \qquad n=0,1,2,.....$$

$$P(N(2)\geq 3)=1-P(N(2)=2)-P(N(2)=1)-P(N(2)=0)$$
$$=1-\frac{e^{-4}\ \ 4^2}{2\,!}-\frac{e^{-4}\ \ 4^1}{1\,!}-\frac{e^{-4}\ \ 4^0}{0\,!}=0.762$$

مثال 2 : فرض کنید که متوسط تعداد مکالمات تلفنی به یک شرکت 30 تلفن در ساعت باشد. احتمال اینکه :

الف- برای سه دقیقه مکالمه تلفنی نداشته باشیم.

ب- برای پنج دقیقه بیش از 5 مکالمه تلفنی داشته باشیم.

جواب :

λ = 30 تلفن در ساعت یا 0/5 تلفن در دقیقه

$$P(N(3)=n)=\frac{e^{-0.5\times 3}\ (0.5\times 3)^n}{n!} \quad , \quad n=0,1,2,.....$$

$$P(N(3)=0)=\frac{e^{-0.5\times 3}\ (0.5\times 3)^0}{0!}=0.223$$

$$P(N(5)>5)=1-P(N(5)\le 5)=1-\sum_{i=0}^{5}\frac{e^{-0.5\times 5}\ (0.5\times 5)^i}{i!}=0.042$$

تمرین 1 : یک دستگاه بافندگی تقریبا در هر 10 ساعت خراب می شود. قرار است لباس خاصی با این دستگاه تولید شود که 25 ساعت وقت می گیرد. اگر با سه خرابی یا بیشتر این محصول از کیفیت مطلوب خارج شود، احتمال اینکه لباس با کیفیت مناسب تولید شود چقدر است ؟

تمرین 2 : اگر احتمال قرار داشتن در یک سانحه رانندگی در هر سال 0/01 باشد، احتمال اینکه دو سانحه یا بیشتر در هر 10 سال رانندگی پیش بیاید چقدر است؟

خاصیت تولید مجدد توزیع پواسون :

اگر x_1 و x_2 و . . . . و x_n متغیرهای تصادفی مستقل، هر یک دارای توزیع پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 و . . . و λ_n باشند، آنگاه مجموع متغیرهای تصادفی x_1 و x_2 و . . . . و x_n یک توزیع پواسون با پارامترهای $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$ خواهد داشت.

$$X_i \sim P(\lambda_i) \quad \Rightarrow \quad Y=\sum_{i=1}^{n}X_i \ \sim\ P(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$$

مثال : در یک مغازه نانوایی ورود مشتری‌های زن برطبق فرآیند پواسون با نرخ 10 نفر در ساعت و مشتری‌های مرد با نرخ 15 نفر در ساعت و مستقل از زن‌ها می‌باشد. مطلوبست احتمال اینکه در نیم ساعت حدود 20 نفر وارد نانوایی شوند؟

جواب :

$$P\ (\text{در نیم ساعت 20 نفر})=P(N(t=\frac{1}{2})=20)=\frac{e^{-25\times\frac{1}{2}}\ (25\times\frac{1}{2})^{20}}{20\ !}=0.013$$

تقریب توزیع دو جمله‌ای با استفاده از توزیع پواسون :

هرگاه در توزیع دو جمله‌ای $b\,(n,P)$، n عدد خیلی بزرگی باشد $(n\to\infty)$ و P عدد خیلی کوچکی باشد $(P\to 0)$ در این صورت توزیع دو جمله‌ای به سمت توزیع پواسون میل می‌کند.

بطور تجربی می توان گفت هرگاه $n\geq 30$ و $P\leq 0.1$ باشد ، در صورتیکه $nP\leq 5$ باشد، آنگاه می توان بجای استفاده از توزیع دو جمله‌ای از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = n\,P$ استفاده کرد.

$$f_X(x)=\binom{n}{x}P^x(1-P)^{n-x}\ \to f_X(x)=\frac{e^{-nP}\,(n\,P)^x}{x!}$$

مثال : یک تولیدکننده پیچ می‌داند که به طور متوسط 5 درصد از تولیدات وی معیوب است. اگر وی در جعبه های 100 عددی پیچ ها را بفروشد و تضمین نماید که اگر بیش از 10 معیوب در جعبه بود آنها را پس بگیرد، در هر 1000 جعبه فروخته شده چند جعبه پس فرستاده می‌شود؟

جواب :

P = احتمال معیوب بودن = 0/05

$$P(x>10)=1-P(x\leq 10)=1-\binom{100}{10}(0.05)^{10}(0.95)^{90}-\binom{100}{9}(0.05)^{9}(0.95)^{91}-\dots$$

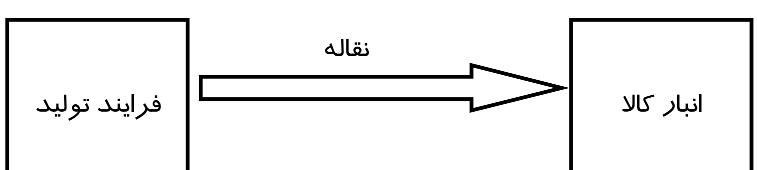
محاسبه این مقدار مشکل است بنابراین می بایست از تقریب توزیع پواسون استفاده کرد :

$$P(x>10)=1-P(x\leq 10)=1-\sum_{x=0}^{10}\frac{e^{-5}\ 5^x}{x\,!}=0.014$$

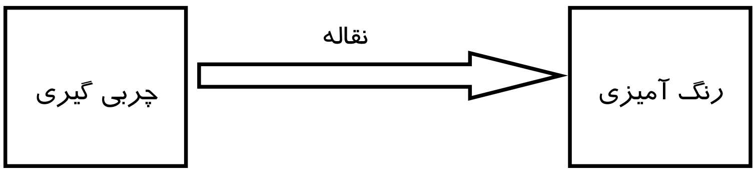
$$n=0.014\times 1000=14$$

در هر 1000 جعبه فروخته شده، 14 جعبه پس فرستاده می شود.

تمرین 1 : تصویر شماتیک یک فرایند تولیدی که روزانه هزاران قطعه تولید می کند بصورت زیر است. بطور متوسط یک درصد قطعات خراب است و این متوسط در طول زمان تغییر نمی کند. هر ساعت یک نمونه تصادفی 100 قطعه ای از نقاله انتخاب و چند مشخصه هر قطعه اندازه گیری می شود، با این حال، بازرس قطعات را فقط به صورت خوب و بد تقسیم می کند. فرض کنید بازرس دارای دستورالعملی است که اگر هر نمونه دارای بیش از دو قطعه خراب باشد فرایند را متوقف کند. مطلوبست احتمال اینکه بازرس فرایند را متوقف کند.



تمرین 2 : بین عملیات چربی گیری و رنگ آمیزی و از بین محصولات روی نقاله، یک نمونه تصادفی 200 تایی در هر دو ساعت یکبار گرفته می شود. تجارب قبلی نشان داده است که اگر هر محصول به خوبی چربی گیری نشود، عمل رنگ آمیزی موفقیت آمیز نخواهد بود. بعلاوه بطور متوسط 5 درصد از اقلام به خوبی چربی گیری نمی شوند. مدیر تولید وجود بیش از 10 محصول که به خوبی چربی گیری نمی شوند را از نمونه 200 تایی می پذیرد اما بیش از آن را غیر قابل قبول می داند و دستور توقف فرایند چربی گیری را صادر می کند. مطلوبست احتمال اینکه مدیر تولید فرایند را متوقف کند.



تمرین 3 : احتمال اینکه یک اتومبیل در تقاطع خاصی دچار تصادف شود 0/0001 است. فرض کنید هر روز 10000 اتومبیل از این تقاطع عبور می کنند. احتمال اینکه هیچ تصادفی اتفاق نیفتد چقدر است؟ احتمال اینکه دو تصادف یا بیشتر اتفاق افتد چطور؟

6- توزیع فوق هندسی :

هرگاه متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای N و m و n است:

$$f_X(x)=\frac{\binom{m}{x}\times\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,\min(n,m)$$

که در آن :

N = تعداد عضوهای جامعه (اشیاء)

m = تعداد عضوهای متمایز

n = تعداد نمونه

x = تعداد مورد نظر از اعضای متمایز

مثال 1 : معمولاً 10 درصد محصولات خراب یک خط تولید از دید مسئول کنترل کیفیت کارخانه دور می‌ماند. اگر خریداران این محصولات که در بسته‌های 20 تایی به بازار عرضه می‌شود از هر بسته 4 محصول را تصادفاً کنترل

نمایند و در صورت یافتن حداقل یک محصول خراب کل بسته را رد نمایند، معمولاً چند درصد کل بسته ها رد می‌شود؟

جواب :

N = 20 و (10٪ از 20 تا) m = 2 و n = 4

$$P(\text{رد}) = P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{18}{4}}{\binom{20}{4}} = 0.368$$

36/8 درصد از کل بسته ها رد می‌شود.

مثال 2 : یک خریدار وسایل الکترونیکی این وسایل را در بسته های 10 تایی می خرد. روش او چنین است که در هر جعبه، 3 محصول را بطور تصادفی بازرسی نموده و فقط در صورتی جعبه را بر می دارد که هر سه محصول سالم باشد. اگر 30 ٪ جعبه ها دارای 4 محصول خراب و 70 ٪ بقیه دارای 1 محصول خراب باشد، چه نسبتی از جعبه ها را خریدار رد می کند؟

جواب :

A = رویداد پذیرش یک بسته

B = بسته شامل چهار قطعه خراب باشد

C = بسته شامل یک قطعه خراب باشد

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|C)P(C) =$$

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} \times 0.3 + \frac{\binom{9}{3}\binom{1}{0}}{\binom{10}{3}} \times 0.7 = 0.54$$

بنابراین 46 درصد از بسته ها خریداری نمی شوند.

نکته: در توزیع دو جمله‌ای آزمایشات با جایگذاری صورت می‌گیرد. بنابراین همیشه احتمال موفقیت $\frac{m}{N}$ می‌باشد، لذا احتمال اینکه x موفقیت در نمونه n تایی وجود داشته باشد برابر است با:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{m}{N}\right)^{x}\left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n-x}$$

نکته مهم اینست که در تابع توزیع فوق هندسی جایگذاری نداریم.

مثال : از جعبه‌ای که شامل 5 مهره سیاه و 3 مهره سبز می‌باشد، 3 مهره برداشته می‌شود. در دو حالت نمونه‌گیری با جایگذاری و بدون جایگذاری مطلوبست:

الف) احتمال اینکه هر سه همرنگ باشند؟

ب) احتمال اینکه دو رنگ با هم ظاهر شوند؟

جواب :

نمونه‌گیری با جایگذاری = توزیع دو جمله‌ای

الف-

$$\binom{3}{3}(\frac{5}{8})^3(1-\frac{5}{8})^0+\binom{3}{3}(\frac{3}{8})^3(1-\frac{3}{8})^0=\frac{19}{64}$$

ب-

$$\binom{3}{2}(\frac{5}{8})^2(1-\frac{5}{8})^1+\binom{3}{2}(\frac{3}{8})^2(1-\frac{3}{8})^1=\frac{45}{64}$$

نمونه‌گیری بدون جایگذاری = توزیع فوق هندسی

الف-

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}+\binom{3}{3}\binom{5}{0}}{\binom{8}{3}}=\frac{11}{56}$$

ب-

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{45}{56}$$

تمرین 1 : یک خریدار انباشته های 25 تایی از یک وسیله بسیار دقیق دریافت می کند. اگر در انباشته ای 7 وسیله خراب باشد این خریدار می خواهد در 95 درصد موارد آنرا رد کند. فرض کنید او تصمیم می گیرد که وجود یک خراب در نمونه برای رد کردن انباشته کافی است. اندازه نمونه او چه مقدار باید باشد ؟

تمرین 2 : یک قطعه الکترونیکی در انباشته هایی به اندازه $N=25$ حمل می گردد. به منظور جلوگیری از خرید انباشته هایی که بیش از حد مجاز، قطعات فاقد استاندارد دارند، خریدار در نظر دارد از یک روش بازرسی استفاده نماید. روش بازرسی او بدین صورت عمل می کند که اگر یک نمونه تصادفی پنج تایی از این قطعات بدون جایگزینی انتخاب شود و همه آنها سالم باشند آنگاه انباشته خریداری می شود :

الف- اگر انباشته شامل سه قطعه فاقد استاندارد باشد احتمال اینکه انباشته خریداری شود چیست ؟

ب- با استفاده از تقریب بینم احتمال قسمت الف را محاسبه کنید.

ج- فرض کنید خریدار زمانی یک انباشته را رد می کند که یک یا بیش از یک قطعه فاقد استاندارد در یک نمونه تصادفی n تایی که از آن انتخاب شده است مشاهده نماید. اگر خریدار بخواهد با احتمال حداقل 95 درصد انباشته هایی را که پنج یا بیش از پنج قطعه فاقد استاندارد دارند را خریداری نکند آنگاه چه اندازه نمونه ای باید انتخاب کند؟

تعمیم توزیع فوق هندسی :

در توزیع فوق هندسی اگر m_1 عضو از نوع اول، m_2 عضو از نوع دوم، m_3 عضو از نوع سوم، ..... و m_k عضو از نوع k ام باشد، احتمال اینکه در نمونه n تایی x_1 تا از نوع اول، x_2 تا از نوع دوم، x_3 تا از نوع سوم، .... و x_k عضو از نوع k ام باشد برابر است با:

$$\frac{\binom{m_1}{x_1}\binom{m_2}{x_2}\binom{m_3}{x_3}\cdots\binom{m_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{k} m_i = N$ و $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

مثال : از ظرفی که شامل 4 مهره قرمز، 5 مهره آبی و 3 مهره سبز است یک نمونه 3 تایی انتخاب می‌شود. مطلوبست:

الف- احتمال اینکه از هر رنگ موجود باشد.

ب- احتمال اینکه دو مهره قرمز باشد.

ج- احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک مهره آبی باشد.

جواب :

الف-
$$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

ب-
$$\frac{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{55}$$

ج-
$$\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{3}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{22}$$

7- توزیع دو جمله‌ای (یا بینم) منفی یا پاسکال :

هرگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال زیر باشد، گوییم X دارای توزیع دو جمله‌ای منفی با پارامترهای k و P است:

$$f_X(x) = \binom{x-1}{k-1} P^k (1-P)^{x-k} \quad , \quad x = k \ , \ k+1 \ , \ k+2 \ , \ .....$$

در این توزیع، ما آزمایش برنولی را آنقدر ادامه می دهیم تا k امین موفقیت بدست آید. لذا در این توزیع، ما به دنبال پیدا کردن k امین موفقیت در x امین آزمایش می باشیم.

نکته مهم اینکه : ″k موفقیت در x آزمایش = توزیع دو جمله‌ای″ و ″k امین موفقیت در x امین آزمایش= توزیع دو جمله‌ای منفی″

مثال 1 : تاسی را به طور مرتب پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه دومین عدد 6 در 12 امین پرتاب ظاهر شود چقدر است؟

جواب :

$$P(x=12) = \binom{12-1}{2-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{10} = 0.049$$

مثال 2 : یک آدم سیگاری همواره دو کبریت یکی در جیب چپ و دیگری در جیب راست خود نگه می دارد. هر موقع که او نیاز به کبریت داشته باشد با احتمال مساوی یکی از کبریتها را از جیب خود در می آورد. لحظه ای را در نظر بگیرید که شخص سیگاری دست خود را در یکی از جیبها نموده و با جعبه خالی چوب کبریتها مواجه شود. اگر جعبه کبریتها در ابتدا دارای N چوب کبریت بوده باشد، احتمال آنکه دقیقا k چوب کبریت در جیب دیگر او باشد چقدر است؟ (k=0 , 1 , … , N)

جواب :

تعداد دفعاتی که دست در جیب 1 کرده است = $N+1$

تعداد دفعاتی که دست در جیب 2 کرده است = $N-K$

احتمال اینکه قوطی کبریت جیب راست او خالی و در قوطی کبریت جیب چپ او K کبریت باشد =

$$\binom{2N-K+1-1}{N+1-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-K}$$

از آنجا که همین احتمال برای جیب دیگر وی وجود دارد، لذا احتمال مورد نظر برابر است با :

$$2\binom{2N-K}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-K+1}$$

تمرین 1 : مدیر یک شرکت تصمیمات خود را بر اساس پرتاب پیکانهایی به یک هدف اتخاذ می کند. منطقه مرکزی این هدف به صورت آری تعریف شده است و نشان دهنده یک موفقیت است. احتمال پرتاب او به منطقه آری 0/6 است و این احتمال در تمام پرتاب ها ثابت می ماند. این مدیر به پرتاب خود ادامه می دهد تا به سه پرتاب موفقیت آمیز دست پیدا کند. قاعده تصمیم گیری مدیر بدین صورت است که اگر در پنجمین پرتاب یا قبل از آن سه بار به هدف بزند با نظر مثبت به هر مساله، تصمیم می گیرد. مطلوبست احتمال تصمیم مثبت او.

تمرین 2 : در یک بنگاه معاملات اتومبیل در هر ساعت یک مشتری بالقوه وجود دارد که در صورت فروش اتومبیل دلالی آن به فروشنده تعلق می گیرد. احتمال اینکه یک فروشنده بتواند معامله را ترتیب دهد 0/1 است. فروشنده ای چنین تصمیم گرفته است که کار کردن را تا فروش سه اتومبیل ادامه دهد. احتمال اینکه لازم باشد دقیقا هشت ساعت کار کند چقدر است؟ بیشتر از هشت ساعت کار کند چطور؟

تمرین 3 : یک مدیر پرسنلی در نظر دارد مصاحبه ای با متقاضیان تصدی دو شغل انجام دهد. احتمال اینکه مصاحبه شونده دارای شرایط لازم بوده و پیشنهادی را بپذیرد 0/8 است. احتمال اینکه لازم شود با درست 4 نفر مصاحبه شود چقدر است ؟ احتمال اینکه کمتر از 4 نفر لازم شود چطور؟

تمرین 4 : یک فرمانده نظامی می خواهد یک پل دشمن را خراب کند. هر دسته هواپیمایی که او می فرستد با احتمال 0/8 می تواند ضربه مستقیمی به پل وارد کنند. برای تخریب کامل پل چهار ضربه مستقیم لازم است. اگر او قبل از زمانی که پل از اهمیت تاکتیکی می افتد بتواند هفت تهاجم داشته باشد، احتمال اینکه پل خراب شود چقدر است؟

تمرین 5 : یک بازرس، جوش های موجود در یک خط لوله را بازرسی می کند. احتمال معیوب بودن یک جوش 0/01 است. بازرس، کار بازرسی جوش ها را آنقدر ادامه می دهد تا سه جوش معیوب بیابد. اگر جوش ها به فاصله 100 فوت از یکدیگر قرار داشته باشند آنگاه احتمال اینکه بازرس باید 5000 فوت راه برود چیست؟ احتمال اینکه او مجبور گردد بیش از 5000 فوت راه برود چیست؟

8- توزیع هندسی :

هرگاه متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع هندسی با پارامتر P است:

$$f_X(x) = P\ (1-P)^{x-1} \quad , \quad x = 1\ , 2\ ,\ 3, \ .....$$

در توزیع هندسی، ما علاقه‌مند به محاسبه ″ احتمال اولین موفقیت در x امین آزمایش ″ می باشیم.

توزیع هندسی همان توزیع دو جمله‌ای منفی است اما با k = 1 .

مثال 1 : اگر احتمال اینکه موتور یک هواپیما در طول یک ساعت کار کردنش خراب شود برابر 0/02 باشد، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه موتور هواپیما بیش از دو ساعت بدون خراب شدن کار کند.

جواب :

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - P(x=1) - P(x=2) = 1 - P - P(1-P) =$$
$$1 - 0.02 - 0.02 \times 0.98 = 0.9604$$

مثال 2 : یک کیسه محتوی N گلوله سفید و M گلوله سیاه است. گلوله ها بطور تصادفی یکی یکی بصورت جایگذاری (یعنی توپ برداشته شده قبل از انتخاب توپ بعدی در کیسه قرار داده شود) از کیسه خارج می گردد تا زمانی که یک گلوله سیاه حاصل شود. احتمال آنکه :

الف- دقیقا n بار خارج کردن گلوله از کیسه لازم باشد چقدر است؟

ب- حداقل k بار خارج کردن گلوله از کیسه لازم باشد چقدر است؟

جواب :

الف- متغیر تصادفی X توزیع هندسی با $P = \dfrac{M}{M+N}$ دارد.

$$P(X = x) = P(1-P)^{x-1}$$

$$P(x=n) = \frac{M}{M+N}\left(1 - \frac{M}{M+N}\right)^{n-1} = \frac{M.N^{n-1}}{(M+N)^n}$$

ب-

$$P(x\geq k)=\sum_{x=k}^{\infty}P(1-P)^{x-1}=P\sum_{x=k}^{\infty}(1-P)^{x-1}=P\frac{(1-P)^{k-1}}{1-(1-P)}=(1-P)^{K-1}=(1-\frac{M}{M+N})^{k-1}$$

تمرین 1 : پنج موشک کروز توسط یک شرکت هوا – فضایی ساخته شده است. احتمال پرتاب موفقیت آمیز هر یک از آنها 0/95 است. با فرض استقلال پرتابها، احتمال اینکه اولین شکست در پنجمین پرتاب اتفاق بیفتد چقدر است؟

تمرین 2 : یک بنگاه معاملات املاک تخمین زده است که احتمال فروش یک خانه 0/1 است. این بنگاه در این روز چهار ارباب رجوع خواهد داشت. اگر بنگاه در سه تماس اول خود موفق باشد، احتمال اینکه چهارمین تماس به شکست بخورد چقدر است؟

تمرین 3 : احتمال اینکه یک زیر دریایی در هر بار شلیک اژدرهای خود، یک کشتی دشمن را غرق کند 0/8 است. اگر شلیک ها مستقل باشند احتمال غرق شدن یک کشتی در سه شلیک اول را بدست آورید.

تمرین 4 : سه نفر پس از صرف ناهار در یک رستوران برای پرداخت صورت حساب هر کدام یک تاس پرتاب می نمایند و هر کدام که تعداد خال کمتری آورد پرداخت صورت حساب بر عهده او می باشد. در صورتیکه در پرتاب اول هر سه تاس خال مساوی آمد این عمل بار دیگر تکرار می شود تا بالاخره پرداخت کننده معلوم گردد. احتمال اینکه در تکرار دوم پرداخت کننده معلوم شود چقدر است ؟

تمرین 5 : در آزمون عمر مفید یک کلید برق آنقدر خاموش و روشن می شود تا از کار بیفتد. اگر احتمال از کار افتادن کلید در هر دفعه روشن و خاموش شدن برابر 0/001 باشد، احتمال آنکه کلید بعد از 1200 مرتبه روشن و خاموش شدن از کار بیفتد چقدر است؟

رابطه توزیع دو جمله‌ای منفی با توزیع هندسی و توزیع برنولی

اگر توزیع برنولی را آنقدر ادامه دهیم تا به اولین موفقیت برسیم، توزیع حاصل، توزیع هندسی است و اگر آنقدر ادامه دهیم تا به r امین موفقیت برسیم، توزیع حاصل، توزیع دو جمله‌ای منفی است.

خاصیت بدون حافظه بودن توزیع هندسی :

اگر x دارای توزیع هندسی باشد، آنگاه برای اعداد صحیح و مثبت a و b رابطه زیر برقرار است:

$$P(x>a+b\mid x>a)=P(x>b)$$

توزیع هندسی تنها توزیع احتمال گسسته با خاصیت بدون حافظه بودن است.

اثبات :

q =1-p

$$P(x > a+b \mid x > a) = \frac{P(x > a+b, x > a)}{P(x > a)} = \frac{P(x > a+b)}{P(x > a)} = \frac{q^{a+b}}{q^a} = q^b = P(x > b)$$

$$P(x > t) = 1 - P(x \le t) = 1 - \sum_{x=1}^{t} pq^{x-1} = 1 - p\frac{1-q^{t+1-1}}{1-q} = q^t$$

تفسیر خاصیت بدون حافظه بودن توزیع هندسی :

خاصیت بدون حافظه بودن بدین معنا است که اگر بعنوان مثال، X نشان دهنده تعداد آزمایشات برای رسیدن به اولین موفقیت باشد و بدانیم تا آزمایش مثلا صدم به موفقیت نرسیده باشیم، آنگاه احتمال آنکه مثلا در آزمایش صدو دهم به اولین موفقیت برسیم، برابر احتمال حالتی است که در آن آزمایشها از ابتدا شروع شوند و در آزمایش دهم به اولین موفقیت برسیم است.

متغیر تصادفی پیوسته :

متغیر تصادفی x را پیوسته گویند هرگاه فضایی نمونه‌ای آن از اعداد شمارش‌پذیری تشکیل نشده باشد. مثل قد، وزن، طول و ....

توزیع احتمال پیوسته :

تابع $f_X(x)$ یک تابع احتمال متغیر تصادفی پیوسته X است اگر شروط زیر برقرار باشد:

1) $0 \le f_X(x) \le 1$

2) $\int_x f_X(x)\,dx = 1$

3) $P(a<x<b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

نکته: در حالت پیوسته، احتمال‌های مربوط به نقاط منفرد همیشه صفر است.

$P(x=a)=0$

$P(a \le x \le b) = P(a < x < b)$

مثال 1 : اگر تابع احتمال متغیر X برابر با $f_X(x) = 2e^{-2x} \quad , \quad x>0$ باشد، احتمال $P(1<x<3)$ چقدر است؟

جواب :

$$P(1<x<3) = \int_1^3 2e^{-2x}\,dx = \left[-e^{-2x}\right]_1^3 = \left[-e^{-6} + e^{-2}\right] = 0.133$$

مثال 2 : مدت زمانی که یک کامپیوتر برحسب ساعت بدون خراب شدن کار می‌کند یک متغیرتصادفی با تابع احتمال $f_X(x) = \lambda e^{-0.01x} \quad ; \quad x > 0$ است. احتمال اینکه این کامپیوتر بدون خرابی، بین 50 تا 150 ساعت کار کند چقدر است؟

جواب :

ابتدا باید پارامتر مجهول λ را محاسبه کنیم :

$$\int_x f_X(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^\infty \lambda\, e^{-0.01x}\, dx = 1$$

$$-100\,\lambda\, [e^{-0.01x}]_0^\infty = 1 \Rightarrow 100\,\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0.01$$

$$P(50 < x < 150) = \int_{50}^{150} 0.01\, e^{-0.01x}\, dx = [-e^{-0.01x}]_{50}^{150} = -e^{-1.5} + e^{-0.5} = 0.384$$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته :

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X با تابع احتمال $f_X(x)$ عبارتست از:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{\min(x)}^{x} f_X(x)\, dx$$

برای بدست آوردن تابع احتمال $f_X(x)$ از روی $F_X(x)$ کافی است از $F_X(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم. بعبارت دیگر تابع احتمال متغیر تصادفی پیوسته x عبارتست از مشتق تابع توزیع تجمعی آن.

$$f_X(x) = \frac{d\, F_X(x)}{d\, x}$$

مثال 1 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $f_X(x) = 2e^{-2x} \quad , \quad x>0$ باشد، مطلوبست تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x.

جواب :

$$F_X(x) = \int_0^x 2\, e^{-2x}\, dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^x = -e^{-2x} + 1$$

مثال 2 : اگر تابع احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد، مطلوبست تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \\ \dfrac{3-x}{2}, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

جواب :

$$x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow F_X(x) = \int_0^x \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4}x^2$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow F_X(x) = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx + \int_1^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})$$

$$2 \le x < 3 \Rightarrow F_X(x) = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx + \int_2^x \frac{3-x}{2}\,dx = \frac{-x^2+6x+5}{4}$$

$$x \ge 3 \Rightarrow F_X(x) = 1$$

تمرین 1 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $-\infty < x < \infty$ ، $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ باشد، مطلوبست تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x.

تمرین 2 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $0 < x < 2$ ، $f_X(x) = 1 - |x-1|$ باشد، مطلوبست تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x.

نحوه محاسبه احتمال از روی $F_x(x)$:

مقادیر مختلف احتمال یک متغیر تصادفی را می توان از روی تابع توزیع تجمعی با استفاده از روابط زیر بدست آورد :

$$P(x \le b) = P(x < b) = F_X(b)$$
$$P(a<x\le b) = P(a<x<b) = P(a\le x\le b) = P(a\le x<b) = F_X(b) - F_X(a)$$

مثال : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد، مطلوبست: $P(x>8)$ و $P(x<5)$

$$F_X(x) = 1 - \frac{9}{x^2} \quad , \quad x > 3$$

جواب :

$$P(x<5) = F_X(5) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$P(x>8) = 1 - F_X(8) = \frac{9}{64}$$

تمرین 1 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع توزیع تجمعی $x > 0$ ، $F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}e^{-\left[\frac{x}{3}\right]}$ باشد، مطلوبست

$P(x>6)$ و $P(x<4)$ و $P(x=3)$

تمرین 2 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $f_X(x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1$ باشد، مقدار m را طوری بیابید که $F_X(m) = 0.5$ باشد. (m میانه توزیع X نامیده می شود)

انواع توزیع های پیوسته :

1- توزیع یکنواخت :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x در فاصله (a,b) یا $[a,b]$ دارای توزیع یکنواخت می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a < x < b$$

مثال 1 : فرض کنید اتوبوسها به فاصله هر 15 دقیقه که از ساعت 7 صبح شروع می‌شود وارد ایستگاه می‌شوند. اگر یک مسافر بین ساعت 7 تا 7:30 صبح به طور یکنواخت وارد این ایستگاه شود،

الف) احتمال اینکه کمتر از 5 دقیقه برای اتوبوس منتظر بماند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه حداقل 10 دقیقه منتظر بماند چقدر است؟

جواب :

اتوبوس‌ها یکی ساعت 7 بعدی ساعت 7:15 و بعدی ساعت 7:30 می‌آید.

متغیر تصادفی x = زمان ورود فرد به ایستگاه (دقیقه)

$$f_X(x) = \frac{1}{30} \quad ; \quad \circ < x < 30$$

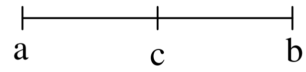
$$P\,(\text{کمتر از 5 دقیقه}) = P\,(10 < x < 15) + P\,(25 < x < 30)$$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\, dx = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P\,(\text{حداقل 10 دقیقه}) = P\,\,(\circ < x < 5) + P\,(15 < x < 20) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

مثال 2 : برای آزمایش سیستم ترمز، خودروها را با سرعت $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ۵۰ می‌رانند و آنگاه پدال ترمز را می‌فشارند و سپس مسافت طی شده از لحظه اعمال فشار تا ایست کامل خودرو را اندازه‌گیری می‌کنند. اگر این مسافت توزیع یکنواخت بین a و b داشته باشد، احتمال اینکه یکی از سه خودروی آزمایش شده از نقطه c که درست وسط نقاط a و b است بگذرد چقدر است؟

جواب :



$$C=\frac{a+b}{2}$$

$$P\ (x>c)=\int_{c}^{b}\frac{1}{b-a}\ dx=\frac{b-c}{b-a}=\frac{b-\frac{a+b}{2}}{b-a}=\frac{1}{2}$$

P (یکی از سه خودروی آزمایش شده از نقطه c بگذرد) $=\binom{3}{1}\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{2}=\frac{3}{8}$

مثال 3 : اگـر Y دارای توزیع یکنواخت در فاصله (5 و 0) باشد، احتمال اینکه معادله $۴X^{۲}+۴XY+Y+۲=۰$ دارای ریشه‌های حقیقی باشد چقدر است؟

جواب :

$$\Delta=16\,Y^{2}-4\times4\times(Y+2)=16\,Y^{2}-16Y-32\geq 0\quad\Rightarrow\quad Y^{2}-Y-2\geq 0$$

$$Y\geq 2\quad or\quad Y\leq -1$$

$Y\leq -1$ غیر قابل قبول است چون $0<Y<5$ است.

$$P(\Delta\geq 0)=P(y>2)=\int_{2}^{5}\frac{1}{5}\,dx=\frac{3}{5}$$

تمرین 1 : متغیر تصادفی X به طور یکنواخت روی فاصله (4 و 0) توزیع شده است. احتمال اینکه ریشه های معادله $Y^{2}+4XY+X+1=0$ حقیقی باشند چقدر است ؟

تمرین 2 : یک پاره خط را با گزینش یک نقطه تصادفی بر آن به دو قسمت تقسیم می کنیم. احتمال اینکه قسمت بزرگتر دست کم دو برابر قسمت کوچکتر باشد چقدر است؟

تمرین 3 : نقطه X روی پاره خط AB که نقطه وسطش C و طولش a است انتخاب شده است. اگر x فاصله X از A، متغیری تصادفی باشد که توزیع یکنواخت روی فاصله (a و 0) دارد، احتمال آنکه AX، BX و AC تشکیل مثلثی بدهند چقدر است؟

2- توزیع نرمال :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ می‌باشد:

$$f_{X}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^{2}}\qquad,\qquad -\infty<x<\infty$$

μ و σ باید اعداد معلوم باشند. σ انحراف معیار توزیع (پراکندگی داده‌ها) و μ میانگین توزیع (میانگین داده‌ها) می باشد.

$X \sim N(\mu, \delta^2)$

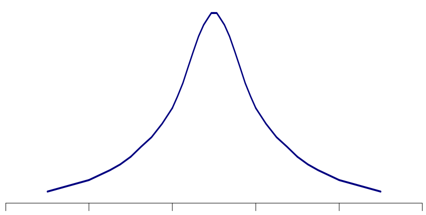
مثلاً در صنعت می گویند تلورانس پارامتر ابعادی طول 15 ± 0.01 است که در آن $\mu = 15$ و $\sigma = 0.02$ است.

انحراف معیار، جذر واریانس است. بعبارت دیگر σ^2 را واریانس گویند که برای n داده آماری از رابطه زیر بدست می آید :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

توزیع نرمال از بسیاری جهات سنگ بنای آمار محسوب می شود و از اهمیت زیادی در آمار برخوردار است.

شکل این توزیع به صورت زنگوله‌ای و متقارن حول میانگینش است.



حداکثر مقدار $f_X(x)$ در $x = \mu$ پیش می آید.

توزیع نرمال استاندارد :

اگر میانگین توزیع نرمال $\mu = ۰$ و واریانس آن $\sigma^2 = 1$ باشد، آنرا توزیع نرمال استاندارد گویند.

$$\phi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad , \qquad -\infty < z < \infty$$

برای محاسبه مقادیر احتمال در توزیع نرمال با استفاده از جدول توزیع نرمال استاندارد، ابتدا توزیع نرمال $X \sim N(\mu, \delta^2)$ را با تغییر متغیر $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، به توزیع نرمال استاندارد $Z \sim N(۰, 1)$ تبدیل می کنیم و سپس از روی جدول توزیع نرمال استاندارد، مقادیر احتمال را بدست می آوریم.

(1) $P(z < a) = \phi(a)$
(2) $P(z > a) = 1 - \phi(a)$
(3) $P(a < z < b) = \phi(b) - \phi(a)$
(4) $P(z < -a) = 1 - \phi(a)$
(5) $\phi(-a) = 1 - \phi(a)$

مقادیر ϕ از روی جدول توزیع نرمال استاندارد بدست می‌آید.

بنابر این اگر $X \sim N(\mu, \delta^2)$ باشد داریم :

$$(1)\ \ P(x<a)=P(z<\frac{a-\mu}{\sigma})=\phi\,(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$(2)\ \ P(x>a)=P(z>\frac{a-\mu}{\sigma})=1-\phi\,(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$(3)\ P(a<x<b)=P(\frac{a-\mu}{\sigma}<z<\frac{b-\mu}{\sigma})=\phi\,(\frac{b-\mu}{\sigma})-\phi\,(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

در رابطه $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ ، متغیر Z ، انحراف X از میانگین μ را بر حسب واحد انحراف استاندارد (δ) اندازه می گیرد. بطور کلی

$$x=\mu+\sigma Z$$

مثال 1 : مقاومت شکست (بر حسب نیوتن) یک جسم ترکیبی بصورت توزیع نرمال $X \sim N\ (800\ ,\ 144)$ است. خریدار این محصول می خواهد مقاومت آن حداقل 772 نیوتن باشد. یک نمونه بصورت تصادفی انتخاب شده و آزمایش می شود. احتمال اینکه خریدار راضی شود چقدر است ؟

جواب :

$$P(x<772)=P\left(\frac{x-\mu}{\delta}<\frac{772-800}{12}\right)=P\ (z<-2.33)=\phi(-2.33)=$$
$$1-\phi(2.33)=0.01$$

$$P(x>772)=1-P(x<772)=0.99$$

بنابراین با احتمال 0/99 خریدار راضی می شود.

مثال 2 : قطر خارجی یک پیچ مطابق توزیع نرمال با میانگین 0/4008 سانتیمتر و انحراف استاندارد 0/0004 سانتیمتر می باشد. حدود (تلورانس) مشخصات فنی این قطر بصورت 0.4000 ± 0.0010 سانتیمتر طراحی شده است. مشخص است که این فرایند در میانگین اسمی خود کار نمی کند.

الف- مطلوبست نسبتی از محصولات که داخل تلرانس هستند.

ب- یک مهندس فرایند با مطالعه نتایج این محاسبات، تصمیم می گیرد تیغچه کهنه را عوض کرده و تنظیم ماشین را به صورتی تغییر دهد که میانگین جدید درست روی اندازه اسمی 0/4000 قرار بگیرد. در اینصورت احتمال قسمت الف را تعیین کنید.

جواب :

الف-

$$P\ (0.399 < x < 0.401) = P(\frac{0.399-0.4008}{0.0004} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{0.4010-0.4008}{0.0004}) = P(-4.5 < Z < 0.5) =$$
$$\phi(0.5)-\phi(-4.5) = 0.6915 - 0 = 0.6915$$

ب-

$$P\ (0.399 < x < 0.401) = P(\frac{0.399-0.4}{0.0004} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{0.4010-0.4}{0.0004}) = P(-2.5 < Z < 2.5) =$$
$$\phi(2.5)-\phi(-2.5) = 0.9938 - 0.0062 = 0.9876$$

مشاهده می شود با تنظیم جدید، 98/76 درصد از قطعات داخل تلرانس خواهند بود.

مثال 3 : اگر x دارای توزیع نرمال $X \sim N\ (\mu\ ,\ \delta^2)$ باشد، مطلوبست محاسبه احتمالهای ذیل :

الف - $P\ (x > \mu + \delta)$

ب- $P\ (x < \mu - \delta)$

ج - $P\ (\mu - \delta < x < \mu + \delta)$

د - $P\ (\mu - 2\delta < x < \mu + 2\delta)$

ه - $P\ (\mu - 3\delta < x < \mu + 3\delta)$

جواب :

$$P\ (x > \mu + \delta) = P(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{\mu+\delta-\mu}{\delta}) = P(Z > 1) = 1-\phi(1) = 0.1587$$

$$P\ (x < \mu - \delta) = P(\frac{x-\mu}{\delta} < \frac{\mu-\delta-\mu}{\delta}) = P(Z < -1) = 1-\phi(1) = 0.1587$$

$$P\ (\mu - \delta < x < \mu + \delta) = P(\frac{\mu-\delta-\mu}{\delta} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{\mu+\delta-\mu}{\delta}) = P(-1 < Z < 1) = 2\phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P\ (\mu - 2\delta < x < \mu + 2\delta) = P(\frac{\mu-2\delta-\mu}{\delta} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{\mu+2\delta-\mu}{\delta}) = P(-2 < Z < 2) = 2\phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P\ (\mu - 3\delta < x < \mu + 3\delta) = P(\frac{\mu-3\delta-\mu}{\delta} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{\mu+3\delta-\mu}{\delta}) = P(-3 < Z < 3) = 2\phi(3) - 1 = 0.9974$$

مثال 4 : فرض کنیم ضخامت رویه لاستیک های یک نوع اتومبیل که در یک کارخانه تولید می شود، یک متغیر تصادفی نرمال باشد که دارای میانگین 10 میلیمتر و انحراف معیار 0/1 میلیمتر هستند. برای اطمینان، وقتی آنرا روی اتومبیل نصب می کنیم که قطر آن بین 9/9 تا 10/2 میلیمتر قرار داشته باشد. چه نسبتی از تولیدات این کارخانه قابل مصرف می باشد؟

جواب :

$$P\ (9.9 < x < 10.2) = P(\frac{9.9-10}{0.1} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{10.2-10}{0.1}) = P(-1 < Z < 2) = \phi(2) - \phi(-1) = 0.8185$$

لذا حدود 82 درصد از تولیدات این کارخانه قابل مصرف می باشد.

مثال 5 : طول عمر کامپیوترهای تولیدی کارخانه ای دارای توزیع نرمال با میانگین 10 سال و انحراف معیار 3 سال است. اگر کارخانه بخواهد کامپیوترهای خود را به گونه ای ضمانت کند که فقط 5 درصد از کامپیوترهای فروخته شده را دربر گیرد، تقریبا برای چند سال باید آنها را گارانتی کند؟

جواب :

$$P\ (x < a) = 0.05$$

$$P(\frac{x-\mu}{\delta} < \frac{a-10}{3}) = 0.05$$

$$\frac{a-10}{3} = -1.64 \Rightarrow a \approx 5$$

تقریبا برای 5 سال باید آنها را گارانتی کند.

تمرین 1 : اگر x دارای توزیع نرمال $X \sim N\ (3\ ,3)$ باشد، مطلوبست محاسبه $P\ (|x-3| > 6)$.

تمرین 2 : اگر Y دارای توزیع نرمال $Y \sim N\ (1\ ,\ 4)$ باشد، مطلوبست احتمال آنکه معادله درجه دوم زیر دارای 2 رییشه حقیقی باشد.

$$X^2 - 2(Y+1)X + 2Y^2 + 2Y + \frac{1}{2} = 0$$

تمرین 3 : زمان لازم برای تعمیر یک ماشین اتوماتیک بارگیری در یک عملیات بسته بندی مواد غذایی X دقیقه است. مطالعات نشان داده است که تقریب $X \sim N\ (120\ ,\ 16)$ کاملا مناسب است. اگر فرایند بیش از 125 دقیقه بیکار باشد لازم است همه تجهیزات تمیز شوند و بعلاوه ضرری ناشی از همه محصول در جریان ساخت تحمیل گردد. مطلوبست احتمال وقوع این رویداد.

تمرین 4 : قدرت کششی کاغذ، یکی از مشخصات کیفی مهم در تولید پاکتهای مختلف می باشد. فرض کنید قدرت کششی یک نوع کاغذ دارای توزیع نرمال با میانگین $40\ \frac{lb}{in^2}$ و انحراف معیار $2\ \frac{lb}{in^2}$ است. خریدار این نوع پاکتها

درخواست حداقل قدرت کششی $\frac{lb}{in^2}$ 35 را نموده است. مطلوبست احتمال اینکه قدرت کششی این پاکتها با درخواست مورد نیاز مطابقت داشته باشد.

تمرین 5 : قطر میله استوانه ای که در یک یاتاقان استفاده می شود دارای توزیع نرمال با میانگین $0/2508\ in$ **و** انحراف معیار $0/0005\ in$ است. مشخصات مورد نظر برای قطر میله استوانه ای برابر با $0.2500 \pm 0.0015\ in$ در نظر گرفته شده است. در اینصورت :

الف- چند درصد از میله های استوانه ای تولید شده با مشخصات مورد نظر انطباق دارد؟

ب- فرض کنید امکان این وجود داشته باشد که بتوان میانگین فرایند تولید را طوری تنظیم نمود که میانگین فرایند دقیقا برابر با $0/2500$ گردد، در اینصورت احتمال قسمت الف را مجددا بدست آورید.

تمرین 6 : مدیر پرسنلی یک شرکت بزرگ برای تصدی شغل خاصی از متقاضیان یک امتحان بعمل آورده و لازم است در آن نمره 500 بیاورند. اگر نمرات این امتحان به صورت نرمال با میانگین 485 و انحراف استاندارد 30 توزیع شده باشد، چند درصد از متقاضیان در امتحان موفق خواهند شد ؟

تمرین 7 : سختی راکول آلیاژ خاصی دارای توزیع نرمال با میانگین 70 و انحراف استاندارد 4 می باشد.

الف- در شرایطی که یک قطعه با سختی بین 62 و 72 قابل قبول باشد، احتمال اینکه یک قطعه تصادفی دارای سختی قابل قبول باشد چقدر است ؟

ب- اگر محدوده قابل قبول سختی (C + 70 و C - 70) باشد، به ازای چه مقدارC ، 95 درصد قطعات قابل قبول خواهند بود؟

ج- اگر محدوده قابل قبول بصورت بند الف باشد و سختی 9 قطعه که بصورت تصادفی انتخاب شده اند مستقل از هم باشد، تعداد قابل انتظار قطعات قابل قبول از این 9 قطعه چقدر است ؟

تمرین 8 : قیمت مورد درخواست برای یک محصول به صورت نرمال با میانگین 50 هزار ریال و انحراف استاندارد 5 هزار ریال توزیع شده است. خریداران می خواهند مقداری را بپردازند که توزیع نرمالی با میانگین 45 هزار ریال و انحراف استاندارد $2/5$ هزار ریال دارد. احتمال اینکه یک معامله صورت بگیرد چقدر است ؟

تمرین 9 : قدرت کششی یک قطعه فلزی از توزیع نرمال با میانگین 40 پوند و انحراف معیار 8 پوند پیروی می کند. اگر تعداد 5000 قطعه تولید شود چه تعداد فاقد استاندارد حداقل قدرت کششی 34 پوند خواهد بود؟ چه تعداد بیش از 48 پوند قدرت کششی خواهند داشت؟

تمرین 10 : عمر یک باطری از توزیع نرمال با میانگین 900 روز و انحراف معیار 35 روز پیروی می کند. چند درصد از این باطری ها عمری بیشتر از 100 روز خواهند داشت؟

تمرین 11 : خروجی یک لامپ از توزیع نرمال با میانگین 5000 شمع و انحراف معیار 50 شمع پیروی می کند. حدود مشخصه فنی قابل قبول پایین را برای خروجی این لامپ طوری تعیین کنید که بیش از 0/5 درصد از این لامپ ها خارج از این حد واقع نگردند.

تمرین12: یک میله با قطر خارجی $OD \sim N\ (1.20, 0.0016)$ در یک یاتاقان با قطر داخلی $ID \sim N\ (1.25, 0.0009)$ قرار می گیرد. احتمال تداخل را پیدا کنید.

خاصیت تکثیر پذیری توزیع نرمال :

مجموع چند متغیر تصادفی مستقل نرمال، یک توزیع نرمال با میانگین برابر مجموع میانگین‌ها و واریانسی برابر مجموع واریانس‌ها می‌باشد. بعبارت دیگر اگر متغیر های تصادفی مستقل X_1 و X_2 و ..... و X_n دارای توزیع نرمال بصورت زیر باشد :

$$
\begin{aligned}
&X_1 \sim N\ (\mu_1\ ,\ \delta_1^2)\\
&X_2 \sim N\ (\mu_2\ ,\ \delta_2^2)\\
&\vdots\\
&X_n \sim N\ (\mu_n\ ,\ \delta_n^2)
\end{aligned}
$$

آنگاه :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\ (\sum_{i=1}^{n} \mu_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2)$$

نکته : اگر X دارای توزیع نرمال $X \sim N\ (\mu, \sigma^2)$ و $Y = aX + b$ که در آن a و b اعداد ثابتی هستند، آنگاه Y یک توزیع نرمال به صورت زیر دارد:

$$Y \sim N\ (a\mu + b\ ,\ a^2 \sigma^2)$$

مثال : در یک خط مونتاژ، سه قطعه ارتباطی، پشت سر هم به یکدیگر متصل می شوند. اگر متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 و X_3 نشان دهنده طول سه قطعه بوده و دارای توزیع نرمال بصورت زیر باشد :

$$X_1 \sim N\ (12\ ,\ 0.02)$$
$$X_2 \sim N\ (24,\ 0.03)$$
$$X_3 \sim N\ (18\ ,0.04)$$

از آنجاییکه این قطعات توسط ماشینها و کارگران مختلفی تولید می شود لذا منطقی است که فرض کنیم X_1 و X_2 و X_3 از هم مستقل هستند. اگر متغیر تصادفی Y نشان هنده طول مونتاژ باشد مطلوبست : $P(53.8 < y < 54.2)$

جواب :

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{3} \mu_i = 12 + 24 + 18 = 54$$
$$\delta_y^2 = \sum_{i=1}^{3} \delta_i^2 = 0.02 + 0.03 + 0.04 = 0.09$$

$$P\ (53.8 < y < 54.2) = P(\frac{953.8 - 54}{0.3} < \frac{x - \mu}{\delta} < \frac{54.2 - 54}{0.3}) = P(-\frac{2}{3} < Z < \frac{2}{3}) =$$
$$\phi(0.67) - \phi(-0.67) = 0.749 - 0.251 = 0.498$$

تمرین 1 : یک میله در یک یاتاقان مونتاژ می شود. اگر متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 نشان دهنده طول یاتاقان و میله بوده و دارای توزیع نرمال بصورت زیر باشد :

$$X_1 \sim N\ (1.500\ ,\ 0.0016)$$
$$X_2 \sim N\ (1.480,\ 0.0009)$$

و لقی این مونتاژ عبارت از $Y = X_1 - X_2$ باشد، در چند درصد از قطعات مونتاژ شده تداخل پیش آمده و مونتاژ را با اشکال روبرو می کند ؟

تمرین 2 : در یک خط مونتاژ سه قطعه کنار هم قرار می گیرند. طول هر قطعه دارای توزیع نرمال با میانگین 2 اینچ و انحراف استاندارد 0/2 اینچ است. طبق مشخصات فنی لازم است همه قطعات مونتاژ شده بین 5/7 و 6/3 اینچ طول داشته باشند. چند قطعه مونتاژ شده این شرایط را تامین می کنند؟

تمرین 3 : میانگین و واریانس ترکیب خطی زیر را پیدا کنید.

$$Y = X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4$$

که در آن :

$$X_1 \sim N\ (4\ ,\ 3)$$
$$X_2 \sim N\ (4,\ 4)$$
$$X_3 \sim N\ (2\ ,4)$$
$$X_3 \sim N\ (3\ ,2)$$

احتمال $15 \le Y \le 20$ چقدر است ؟

تمرین 4 : اگر متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 مستقل از هم و دارای توزیع نرمال بصورت زیر باشد :

$$X_1 \sim N\ (5\ ,\ 50)$$
$$X_2 \sim N\ (1,50)$$

مطلوبست $P(X_2 < X_1)$

تقریب توزیع دوجمله ای با استفاده از نرمال :

می توان تقریب نرمال را جهت محاسبه احتمال بینم وقتی که P به عدد صفر یا یک نزدیک نیست نیز بکار برد. این تقریب برای وقتی که n خیلی بزرگ است فوق العاده عالی و برای مواقعی که n کوچک و P به 0/5 نزدیک است نسبتا خوب است. یک راهنمای دیگر جهت استفاده از تقریب نرمال برای بینم، محاسبه nP و nq است که اگر هر دو بزرگتر از 5 باشد تقریب خوب خواهد بود.

اگر X دارای توزیع بینم با پارامترهای n و P باشد آنگاه $Z = \dfrac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.

برای اینکه تقریب نرمال بهتر عمل کند دستور زیر را در استفاده از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله ای مورد توجه قرار می دهیم :

الف - $P(x \ge a) \cong P(x > a - 0.5)$

ب - $P(x \le a) \cong P(x < a + 0.5)$

ج - $P(x > a) = 1 - P(x \le a) \cong 1 - P(x < a + 0.5)$

$P(x < a) = 1 - P(x \ge a) \cong 1 - P(x > a - 0.5)$

د- $P(x = a) \cong P(a - 0.5 < x < a + 0.5)$

مثال 1 : 20 درصد تولیدات یک کارخانه معیوب می باشد. تعداد 100 عدد از محصولات را بطور تصادفی بعنوان نمونه انتخاب و مورد کنترل و بازرسی کیفیت قرار می گیرند. مطلوب است احتمال اینکه :

الف- حداکثر 15 عدد معیوب در نمونه باشد.

ب- دقیقا 15 عدد معیوب در نمونه باشد.

جواب :

الف-

$$P(x \le 15) \cong P(x < 15.5) = P(Z < \frac{15.5 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}) = P(Z < -1.13) = 1 - \phi(1.13) = 1 - 0.8708 = 0.1292$$

ب-

$$P(x=15) \cong P(14.5 < x < 15.5) = P(\frac{14.5-20}{4} < Z < \frac{15.5-20}{4}) = P(-1.37 < Z < -1.13) =$$
$$\phi(-1.13) - \phi(-1.37) = 0.1292 - 0.0853 = 0.0439$$

مثال 2 : یک مهندس ایمنی احساس می کند که 30 درصد همه حوادث صنعتی در کارخانه به علت کوتاهی کارکنان در فراگیری آموزش ها است. اگر این حدس درست باشد، مطلوبست احتمال اینکه در بین 84 حادثه صنعتی که در این کارخانه رخ می دهد، حوادثی که به علت کوتاهی کارکنان در فراگیری آموزش ها رخ خواهد داده، بیشتر یا مساوی 20 و کمتر یا مساوی 30 باشد.

جواب :

$$P(20 \le x \le 30) \cong P(19.5 < x < 30.5) = P(\frac{19.5-84\times0.3}{\sqrt{84\times0.3\times0.7}} < Z < \frac{30.5-84\times0.3}{\sqrt{84\times0.3\times0.7}}) =$$
$$P(-1.36 < Z < 1.26) = \phi(1.26) + \phi(1.36) - 1 = 0.81$$

تمرین: یک قطعه الکترونیکی در انباشته هایی به اندازه N= 150 حمل می گردد. به منظور جلوگیری از خرید انباشته هایی که بیش از حد مجاز، قطعات فاقد استاندارد دارند، خریدار در نظر دارد از یک روش بازرسی استفاده نماید. روش بازرسی او بدین صورت عمل می کند که اگر یک نمونه تصادفی پنج تایی از این قطعات بدون جایگزینی انتخاب شود و همه آنها سالم باشند آنگاه انباشته خریداری می شود. اگر انباشته شامل سه قطعه فاقد استاندارد باشد، احتمال اینکه انباشته خریداری شود را با استفاده از تقریب نرمال بدست آورید ؟

3- توزیع نمایی :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع نمایی با پارامتر λ می‌باشد:

$$f_X(x) = \lambda\ e^{-\lambda x} \quad ; \quad x > 0$$

λ پارامتر توزیع بوده و برابر عکس میانگین توزیع نمایی می باشد.

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نمایی :

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_0^x \lambda\ e^{-\lambda x}\ dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

مثال 1 : فرض کنید طول زمان مکالمه تلفنی ما از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 0.1$ پیروی نماید. فرض کنید شخص بعدی منتظر استفاده از تلفن است.

الف - احتمال اینکه این شخص بیش از 10 دقیقه منتظر بماند چقدر است؟

ب - احتمال اینکه این شخص بین 10 تا 20 دقیقه منتظر بماند چقدر است؟

جواب :

$$f_X(x) = 0.1\, e^{-0.1x} \quad ; \quad x > \circ$$

$$P(x>10) = \int_{10}^{\infty} 0.1\, e^{-0.1x}\, dx = -[e^{-0.1x}]_{10}^{\infty} = e^{-1} = 0.368$$

$$P(10 < x < 20) = \int_{10}^{20} 0.1\, e^{-0.1x}\, dx = -[e^{-0.1x}]_{10}^{20} = e^{-1} - e^{-2} = 0.233$$

مثال 2 : زمان منتهی به خرابی لامپ یک تلویزیون توزیع نمایی با میانگین 3 سال دارد. یک شرکت این لامپ ها را در طول اولین سال استفاده بیمه می کند. روی چند درصد از بیمه نامه ها خسارت پرداخت خواهد کرد ؟

جواب :

$$f_X(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \quad ; \quad x > \circ$$

$$P(x>1) = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx = -[e^{-\frac{1}{3}x}]_{1}^{\infty} = e^{-\frac{1}{3}} = 0.72$$

$$P(x<1) = 1 - 0.72 = 0.28$$

روی 28 درصد از بیمه نامه ها خسارت خواهد پرداخت.

مثال 3 : مشخص شده است که یک وسیله الکترونیکی دارای عمر مفیدی مطابق با توزیع نمایی با نرخ خرابی λ خرابی در ساعت است. می خواهیم بفهمیم چه نسبتی از این دستگاه ها قبل از عمر میانگین یا عمر قابل انتظار خراب می شوند.

جواب :

$$P(x < \frac{1}{\lambda}) = \int_{0}^{\frac{1}{\lambda}} \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-1} = 0.632$$

حدود $63/5$ درصد از این دستگاه ها عمر کمتر از میانگین دارند.

مثال 4 : یک جعبه حاوی 24 عدد شکلات است. زمان بین تقاضا برای این شکلات مطابق توزیع نمایی با میانگین 10 دقیقه است. احتمال اینکه یک جعبه شکلات که در ساعت 8 صبح باز شده تا ظهر تمام شود چقدر است ؟

جواب :

$$P(x<4) = \int_{0}^{4\times 60} 0.1\, e^{-0.1x}\, dx = 1 - e^{-24}$$

تمرین : آیا هیچ چگالی نمایی وجود دارد که شرایط زیر را ارضاء کند؟ اگر چنین است، مقدار λ را بدست آورید.

$$P(x \le 2) = \frac{2}{3} P(x \le 3)$$

رابطه توزیع نمایی با توزیع پواسون :

توزیع نمایی رابطه نزدیکی با توزیع پواسون دارد . این رابطه بطور خلاصه عبارتست از :

" اگر تعداد رویدادها دارای توزیع پواسون باشد، در اینصورت زمان بین رویدادها دارای توزیع نمایی خواهد بود."

همانطور که مشاهده می شود یک متغیر بصورت گسسته (تعداد) و دیگری پیوسته (زمان) است. این رابطه به صورتهای زیر نیز بیان می شود:

1- اگر متغیر تصادفی X بیانگر تعداد رویدادها در یک فاصله زمانی یا مکانی و دارای توزیع پواسان با پارامتر λ باشد، آنگاه زمان لازم برای رسیدن به اولین رویداد یک توزیع نمایی با پارامتر λ می‌باشد.

مثال : تعداد اتومبیلهایی که وارد یک پارکینگ می‌شوند دارای توزیع پواسان با $\lambda = 20$ اتومبیل در ساعت است. اگر ساعت 6 صبح پارکینگ باز شود، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه :

الف- حداقل 5 دقیقه طول بکشد تا اولین اتومبیل وارد پارکینگ شود؟

ب) تا ساعت 6:10 اولین اتومبیل وارد پارکینگ شود؟

جواب :

λ = 20 اتومبیل در ساعت = $\frac{1}{3}$ اتومبیل در دقیقه

$$f_x(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}$$

الف) $P(x > 5) = \int_5^\infty \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{3}x} \right]_5^\infty = e^{-\frac{5}{3}} = 0.18$

ب) $P(x < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{3}} \right]_\circ^{10} = -e^{-\frac{10}{3}} + 1 = 0.28$

2- اگر تعداد رخدادها در یک فاصله زمانی یا مکانی دارای توزیع پواسان با پارامتر λ باشد، در آن صورت فاصله زمانی بین دو رخداد پشت سر هم دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است.

مثال : اگر تعداد اتومبیلهایی که برای گرفتن بنزین وارد یک پمپ بنزین می شوند، یک متغیر پواسان با پارامتر یک اتومبیل در دقیقه باشند، مطلوبست احتمال اینکه بین دو اتومبیل پشت سر همی که وارد پمپ بنزین می‌شوند بیش از دو دقیقه فاصله باشد.

جواب :

$\lambda = 1$

$$f_X(x) = e^{-x} \quad ; \quad x > \circ$$
$$P(x > 2) = \int_2^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-2} = 0.135$$

تمرین : یک قایق که در عرض یک رودخانه مسافرکشی می کند، هنگامی که 10 نفر سوار شوند حرکت می کند. تجربه نشان داده است که مسافران بطور مستقل و با میانگین نرخ 7 نفر در ساعت وارد می شوند. احتمال اینکه زمان بین ترددهای متوالی حداقل یک ساعت باشد را بدست آورید.

خواص توزیع نمایی :

1- خاصیت اصلی توزیع نمایی که کار تجزیه و تحلیل را ساده می کند آن است که این توزیع با زمان تحلیل نمی رود، بعبارت دیگر گذشته آن نقشی در آینده اش ندارد. یعنی متغیر تصادفی نمایی ″ بدون حافظه ″ است. این توزیع تنها توزیع پیوسته ای است که دارای خاصیت بدون حافظه است.

خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی :

اگر x دارای توزیع نمایی باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$P(x > s+t \mid x > t) = P(x > s)$$

توزیع هندسی تنها توزیع احتمال گسسته با خاصیت بدون حافظه بودن است.

اثبات :

$$P(x > s+t \mid x > t) = \frac{P(x > s+t, x > t)}{P(x > t)} = \frac{P(x > s+t)}{P(x > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(x > s)$$

تفسیر خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی :

خاصیت بدون حافظه بودن بدین معنا است که اگر بعنوان مثال، X عمر مفید یک وسیله یا قطعه باشد و بدانیم این وسیله یا قطعه t ساعت کار کرده است، آنگاه احتمال کار کردن این وسیله یا قطعه حداقل به مدت t + s ساعت، برابر احتمال کار کردن وسیله حداقل به مدت s ساعت است. یعنی اگر وسیله تا زمان t ، هنوز خراب نشده باشد، توزیع عمر باقیمانده وسیله همان توزیع عمر اولیه قطعه می باشد و وسیله در هر زمان t ، به یاد نمی آورد که به چه میزان کار کرده است. بعبارت دیگر احتمال خراب شدن این وسیله کهنه با احتمال خراب شدن یک وسیله نو معادل آن یکسان است.

هر دو طرف رابطه بالا، احتمال خراب شدن وسیله را حداقل تا لحظه s (نسبت به زمان فعلی) نشان می دهند. طرف سمت راست، مربوط به وسیله نو است، در حالی که عبارت سمت چپ به وسیله ای مربوط است که تا این لحظه عمری به اندازه t داشته است.

مثال 1 : فرض کنید طول عمر نوع خاصی از لامپ دارای توزیع نمایی با میانگین 500 ساعت باشد. اگر لامپ حداقل به مدت 300 ساعت مورد استفاده قرار گرفته باشد، احتمال اینکه حداقل برای 600 ساعت دیگر دوام داشته باشد چقدر است ؟

جواب :

$$P(x>900 \mid x>300)=\frac{P(x>900)}{P(x>300)}=P(x>600)=\int_{600}^{\infty}\frac{1}{500}e^{-\frac{1}{500}x}dx=e^{-\frac{6}{5}}$$

مثال 2 : زمان خراب شدن یک ترانزیستور دارای توزیع نمایی با میانگین 20000 ساعت می‌باشد. دستگاه تا کنون 20000 ساعت کار کرده است. احتمال اینکه ترانزیستور قبل از 30000 ساعت خراب شود چقدر است؟

جواب :

$$f_X(x)=\frac{1}{20000}e^{-\frac{1}{20000}x} \quad ; \qquad x>\circ$$

$$P(x<30000 \mid x>20000)=1-P(x>30000 \mid x>20000)=1-P(x>10000)$$

$$=1-\int_{10000}^{\infty}\frac{1}{20000}e^{-\frac{1}{20000}x}dx=0.39$$

مثال 3 : شخص A این طور تصور می کند که تعداد کیلومتری (بر حسب 1000) که یک ماشین قبل از خراب شدن کار می کند یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{1}{20}$ است. شخص B ماشینی دارد که معتقد است فقط 10000 کیلومتر کار کرده است. اگر شخص A این ماشین را بخرد چقدر احتمال دارد که حداقل 20000 کیلومتر دیگر برای شخص A کار کند؟ حال فرض کنید که طول عمر ماشین دارای توزیع نمایی نیست اما (بر حسب 1000 کیلومتر) دارای توزیع یکنواخت روی فاصله (40 و 0) است. در اینصورت احتمال مطلوب در قسمت الف چقدر است؟

جواب :

$$P(x>30 \mid x>10)=\frac{P(x>30)}{P(x>10)}=P(x>20)=\int_{20}^{\infty}\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}dx=e^{-1}=0.368$$

$$P(x>30 \mid x>10)=\frac{P(x>30)}{P(x>10)}=\frac{\frac{10}{40}}{\frac{30}{40}}=\frac{1}{3}$$

تمرین 1 : تصور کنید مدت زمانی که هر مشتری در بانک جهت انجام امور خود بسر می برد یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین 10 دقیقه است.

الف- احتمال اینکه یک مشتری بیش از 15 دقیقه در بانک معطل شود چقدر است؟

ب- احتمال اینکه یک مشتری بیش از 15 دقیقه در بانک معطل شود مشروط بر آنکه او 10 دقیقه است که در بانک بسر می برد چقدر است؟

تمرین 2 : یک جعبه محتوی 24 شیشه پر نوشابه در فروشگاهی موجود است. مدت زمان بین تقاضاهای متوالی برای نوشابه ها در این فروشگاه توزیع نمایی با میانگین 12 دقیقه دارد. فروشگاه از ساعت 7 صبح تا 10 شب یکسره باز است. اگر هیچ شیشه نوشابه ای تا ساعت 12 ظهر به فروش نرفته باشد، احتمال اینکه تا ساعت 10 شب نیز نوشابه ای به فروش نرود چقدر است ؟

2- اگر X_1 و X_2 و ...... و X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 و ...... و λ_n باشند، آنگاه $\min(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ نیز دارای توزیع نمایی با پارامتر $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ است.

اثبات :

$$P(\min(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots\ldots, X_n > x) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x}$$

مثال 1 : یک سیستم متوالی، سیستمی است که عملکرد آن مستلزم آن باشد که تمام اجزای آن کار کنند. برای سیستمی شامل n جزءِ که طول عمر اجزای آن متغیرهای تصادفی مستقل نمایی بترتیب با پارامترهای λ_1 و λ_2 و ...... و λ_n است، احتمال اینکه طول عمر آن از t بیشتر باشد چقدر است ؟

جواب :

چون عمر سیستم مساوی است با عمر مولفه ای که در بین اجزا کمترین عمر را دارد لذا با توجه به قضیه بالا داریم :

P(طول عمر سیستم از t بیشتر باشد) =

$$P(\min(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) > t) = P(X_1 > t, X_2 > t, \ldots\ldots, X_n > t) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t}$$

مثال 2 : آرایشگاهی را در نظر بگیرید که دارای 2 آرایشگر است. مدت زمان سرویس دهی هر کدام از آرایشگران متغیر تصادفی نمایی با میانگین 10 دقیقه می باشد. یک مشتری وارد آرایشگاه شده و مشاهده می کند که هر کدام از آرایشگران مشغول سرویس دهی به یک مشتری می باشند و مشتری دیگری نیز در صف نیست. اگر در لحظه ورود او 30 دقیقه از زمان ارایه خدمت توسط آرایشگر اول و 3 دقیقه از زمان ارایه خدمت توسط آرایشگر دوم گذشته باشد در اینصورت احتمال اینکه مشتری جدید حداکثر 3 دقیقه صبر کند (در صف بماند) چقدر است ؟

جواب :

X_1 = زمان خدمت دهی توسط آرایشگر اول

X_2 = زمان خدمت دهی توسط آرایشگر دوم

X = مدت زمان انتظار مشتری

$$X = \min(X_1, X_2)$$
$$\lambda_X = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$
$$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{2}{10} e^{-\frac{2}{10}x} dx = 1 - e^{-0.6}$$

تمرین : فرض کنید در یک پمپ بنزین بطور متوسط 13 کامیون، 20 سواری و 15 موتور سیکلت در هر ساعت وارد می شوند. صبح هنگام شروع کار در پمپ بنزین، احتمال آنکه مسئول پمپ بنزین حداقل 10 دقیقه بیکار باشد چقدر است ؟

4- توزیع گاما :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع گاما با پارامترهای λ و r می‌باشد:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} \quad , \quad x > 0$$

که در آن :

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$$

r عدد طبیعی می باشد.

بطور مثال :

$$\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x}\, dx = 10\,!$$

توزیع نمایی حالت خاص توزیع گاما است با $r = 1$.

رابطه توزیع گاما با توزیع پواسون :

توزیع گاما رابطه نزدیکی با توزیع پواسون دارد . این رابطه بطور خلاصه عبارتست از :

" *اگر تعداد رویدادها دارای توزیع پواسون باشد، در اینصورت زمان* لازم جهت اتفاق افتادن r امین رویداد، *دارای توزیع نمایی خواهد بود.* "

همانطور که مشاهده می شود یک متغیر بصورت گسسته (تعداد) و دیگری پیوسته (زمان) است. این رابطه به صورتهای زیر نیز بیان می شود:

1- هرگاه رویدادها در طول زمان یا مکان دارای توزیع پواسان با نرخ λ باشند، آنگاه مدت زمان لازم جهت اتفاق افتادن r امین رویداد توزیع گاما با پارامترهای λ و r است.

2- اگر توزیع پواسان را آنقدر ادامه دهیم تا به اولین موفقیت برسیم، توزیع حاصل، توزیع نمایی است و اگر آنقدر ادامه دهیم تا به r امین موفقیت برسیم، توزیع حاصل، توزیع گاما است.

مثال : فرض کنید در هر ساعت به طور متوسط 30 اتومبیل وارد یک پارکینگ می‌شوند. احتمال اینکه حداقل 5 دقیقه طول بکشد تا دومین اتومبیل وارد پارکینگ بشود چقدر است؟

جواب :

λ = 30 اتومبیل در ساعت = $\frac{1}{2}$ اتومبیل در دقیقه و $r = 2$

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \frac{(\frac{1}{2}x)^{2-1}}{1\,!} = \frac{1}{4}\, x\, e^{-\frac{1}{2}x}$$

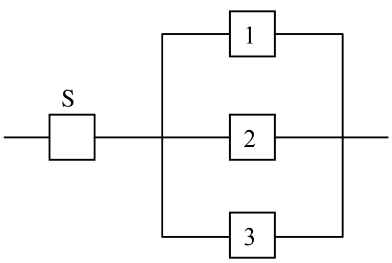
$$P(x>5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{4}\, x e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = \frac{7}{2}\, e^{-\frac{5}{2}} = 0.287$$

تمرین : در یک مرکز تلفن، فرض کنید که شماره گرفتن های مشترکین بر اساس یک فرایند پواسون با نرخ 5 شماره در دقیقه صورت می گیرد. در اینصورت احتمال اینکه حداکثر یک دقیقه برای دو شماره گرفتن صرف شود را محاسبه کنید.

رابطه توزیع گاما با توزیع نمایی :

اگر X_1 و X_2 و ...... و X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای یکسان λ باشند، آنگاه مجموع آنها دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است.

مثال : یک سیستم موازی، سیستمی است که کارکرد آن مستلزم کارکرد یکی از اجزای آن است. سیستم موازی را در نظر بگیرید که از سه قطعه تشکیل شده است. در ابتدای شروع کار سیستم، قطعه شماره یک در حال کار است و قطعات 2 و 3 بیکارند. به محض اینکه قطعه شماره یک از کار می افتد، سوئیچی که احتمال خراب شدن آن ناچیز است، عملیات سیستم را به قطعه شماره 2 منتقل می کند و در صورت خراب شدن قطعه شماره 2 ، این سوئیچ کار سیستم را به قطعه شماره 3 می سپارد. اگر عمر مفید قطعات آن مستقل از هم و دارای توزیع نمایی با پارامتر 0.01 ساعت باشد، احتمال اینکه سیستم فوق حداقل 250 ساعت کار کند را بدست آورید.



جواب :

عمر سیستم مساوی است با مجموع عمر اجزای آن

لذا عمر مفید سیستم مذکور دارای توزیع گاما با پارامترهای r = 3 و $\lambda = 0.01$ است.

P(طول عمر سیستم از 250 ساعت بیشتر باشد) =

$$P(X > 250) = 1 - P(X < 250) = 1 - \int_0^{250} 0.01\ e^{-0.01\,x} \frac{(0.01\ x)^2}{\Gamma(2)} = 0.11$$

تمرین : عمر یک سیستم الکترونیکی معادل مجموع عمر زیر سیستم های آن یعنی $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ است. این زیر سیستم ها از هم مستقل بوده و هرکدام دارای تابع احتمال نمایی با میانگین 4 ساعت هستند. احتمال اینکه سیستم حداقل 24 ساعت کار کند چقدر است ؟

5- تابع توزیع بتا :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع بتا با پارامترهای α و β می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}\ x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}\ ,\ 0 < x < 1$$

یا :

$$f_X(x) = \frac{(\alpha+\beta-1)!\, x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\ ,\ 0 < x < 1$$

مثال : در یک استان بخشهایی از بزرگراهی که در یکسال احتیاج به تعمیر دارد، یک متغیر تصادفی بتا با پارامترهای $\alpha = ۳$ و $\beta = ۲$ می‌باشد. احتمال اینکه حداکثر نیمی از بخشهای بزرگراه احتیاج به تعمیر داشته باشند چقدر است؟

جواب :

$$f_X(x) = \frac{4!}{2!\times 1!}\, x^2\,(1-x) = 12\, x^2\,(1-x) \quad , \quad \circ < x < 1$$

$$P(x<\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 12\,x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}$$

نــکته: در توزیع بتا اگر $\alpha = \beta = ۱$ باشد، توزیع حاصل یک توزیع یکنواخت در فاصله $\circ < x < ۱$ می‌باشد. بعبارت دیگر توزیع یکنواخت حالت خاص توزیع بتا با پارامترهای $\alpha = \beta = ۱$ است.

6- توزیع کوشی :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع کوشی می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

7- توزیع مربع کای :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع مربع کای با پارامتر υ می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{\upsilon}{2}}.\Gamma(\frac{\upsilon}{2})}\, x^{(\frac{\upsilon-2}{2})}\, e^{\frac{-x}{2}} \quad , \quad x > 0$$

υ پارامتر توزیع بوده و معرف درجه آزادی توزیع مربع کای است.

توزیع مربع کای با 2 درجه آزادی، یک توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ است.

8- توزیع t :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع t با پارامتر υ می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\upsilon}}\, \frac{\Gamma(\frac{\upsilon+1}{2})}{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})}\, (1+\frac{x^2}{\upsilon})^{-(\frac{\upsilon+1}{2})} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

υ پارامتر توزیع بوده و معرف درجه آزادی توزیع t است.

توزیع t حاصل از تقسیم توزیع نرمال استاندارد بر جذر توزیع مربع کای تقسیم بر درجه آزادی آن است :

$$t_{(\upsilon)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(\upsilon)}}{\upsilon}}}$$

توزیع t با یک درجه آزادی، یک توزیع کوشی است.

9- توزیع F :

اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد، گوییم x دارای توزیع F با پارامترهای υ_1 و υ_2 می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\upsilon_2}{2}\right)} \upsilon_1^{\frac{\upsilon_1}{2}} . \upsilon_2^{\frac{\upsilon_2}{2}} \frac{x^{\left(\frac{\upsilon_1}{2}-1\right)}}{(\upsilon_2+\upsilon_1 x)^{\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}}} \quad , \quad x>0$$

υ_1 و υ_2 پارامترهای توزیع بوده و معرف به درجه های آزادی توزیع F است.

توزیع F حاصل از تقسیم توزیع های مستقل مربع کای تقسیم بر درجه های آزادی آن ها است :

$$F_{\upsilon_1,\upsilon_2} = \frac{\frac{\chi_1^2}{\upsilon_1}}{\frac{\chi_2^2}{\upsilon_2}}$$

توزیع مجموع چند توزیع معروف گسسته و پیوسته :

- مجموع چند توزیع برنولی، توزیع دو جمله‌ای است.
- مجموع چند توزیع دو جمله‌ای با پارامتر (n , p)، یک توزیع دو جمله‌ای است.
- مجموع چند توزیع پواسان، یک توزیع پواسان است.
- مجموع چند توزیع هندسی، یک توزیع دو جمله‌ای منفی است.
- مجموع چند توزیع نمایی با پارامتر λ، یک توزیع گاما است. (n,λ) گاما $\sim \gamma$
- مجموع چند توزیع گاما، یک توزیع گاما است.
- مجموع چند توزیع نرمال، یک توزیع نرمال است.

توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی گسسته :

فرض کنید متغیر تصادفی گسسته X دارای توزیع احتمال $P(x)$ یا $f_X(x)$ است و ما می خواهیم تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = g(x)$ را بدست آوریم. (طبعا y نیز گسسته است) در اینجا آنچه که باید انجام دهیم، جایگذاری مناسب است.

مثال 1 : تعداد اتومبیلهایی که بین ساعت 4 و 5 صبح وارد پمپ بنزین می‌شوند متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر می‌باشد. اگر درآمد پمپ بنزین در ساعات فوق تابعی از تعداد اتومبیلهای وارد شده به صورت $g(x)=2x-1$ باشد، مطلوبست تابع احتمال $g(x)$.

x	4	5	6	7	8	9
$f_X(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

جواب :

X = تعداد اتومبیلهای وارد شده

$$P(y=7)=P(X=4)=\frac{1}{12}$$

$$P(y=9)=P(X=5)=\frac{1}{12}$$

$$P(y=11)=P(X=6)=\frac{1}{4}$$

$$P(y=13)=P(X=7)=\frac{1}{4}$$

$$P(y=15)=P(X=8)=\frac{1}{6}$$

$$P(y=17)=P(X=9)=\frac{1}{6}$$

$y=2x-1$	7	9	11	13	15	17
$f_Y(y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

مثال 2 : اگر X دارای توزیع هندسی با $P=\frac{1}{3}$ باشد، توزیع احتمال متغیر تصادفی $y=4-5x$ را بیابید.

جواب :

$$f_X(x)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{x-1} \quad , \quad x=1,2,3,4,.....$$

$$y=4-5x \Rightarrow x=\frac{1}{5}(4-y)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{\frac{4-y}{5}-1}=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{-\frac{1}{5}(y+1)} \quad , \quad y=-1,-6,-11,-16,....$$

تمرین : در آزمایش پرتاب سه سکه منصف، x معرف تعداد شیرها است. تابع احتمال $y = |x-2|$ را بدست آورید.

توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته :

در حالتهای ساده یک متغیر تصادفی می تواند تابعی از دیگری باشد مثلا در مسایل مربوط به خروجی Y، Y می تواند یک متغیر تصادفی باشد که تابعی از ورودی X است. در نتیجه می توان رابطه Y=g(X) را در مورد آنها در نظر گرفت.

روشهای زیر برای بدست آوردن تابع توزیع متغیر تصادفی Y (Y=g(X)) وقتی تابع چگالی احتمال X یعنی $f_X(x)$ معلوم است بکار می رود :

1- روش تابع توزیع تجمعی :

در این روش ابتدا تابع توزیع تجمعی Y با استفاده از محاسبات زیر بدست می‌آید:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(x) \le y) = P(x \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) = \int_{\min(x)}^{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx$$

و سپس $f_Y(y)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_y(y)}{d\,y}$$

و در نهایت حدود متغیر y با استفاده از حدود تغییرات x به دست می‌آید.

مثال 1 : اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع یکنواخت بین $(0,1)$ و $y = x^n$. مطلوبست تابع احتمال متغیر y ؟

جواب :

$$F_y(y) = P(x^n \le y) = P(x \le y^{\frac{1}{n}}) = \int_0^{y^{\frac{1}{n}}} dx = y^{\frac{1}{n}}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{n}\; y^{\frac{1}{n}-1} \quad , \qquad 0 < y < 1$$

مثال 2 : اگر تابع احتمال متغیر x به صورت $f_X(x) = 6x(1-x) \quad , \; 0 < x < 1$ باشد (بتا با پارامترهای $\alpha = \beta = 2$)

تابع احتمال $y = x^3$ را بدست آورید.

جواب :

$$y = x^3 \;\Rightarrow\; x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$F_y(y) = \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 6x(1-x)dx = 3\,y^{\frac{2}{3}} - 2y$$

$$f_Y(y) = 2(\,y^{-\frac{1}{3}} - 1) \quad , \qquad 0 < y < 1$$

تمرین : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $0 < x < 4$, $f_X(x) = \frac{x}{8}$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر Y در حالات زیر:

الف - $y = (x-2)^2$

ب- $y = \frac{1}{x}$

ج- $y = Ln(x)$

د- $y = e^x$

2- روش ژاکوبین :

فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع احتمال متغیر تصادفی Y به صورت $y = g(x)$ (که در آن $g(x)$ یک تابع دقیقا یکنوا (صعودی یا نزولی) و مشتق پذیر است) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_Y(y) = \left|\frac{d\, g^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g^{-1}(y))$$

مثال 1 : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $0 < x < 4$, $f_X(x) = \frac{x}{8}$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر Y در دو حالت زیر:

الف- $y = 2x + 8$

ب- $y = (x-2)^2$

جواب :

الف-

$$y = 2x + 8 \Rightarrow x = g^{-1}(y) = \frac{y-8}{2} \Rightarrow \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{y-8}{2}}{8} = \frac{y-8}{32} \quad , \quad 8 < y < 16$$

ب-

$$y=(x-2)^2 \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{y} \Rightarrow x=g^{-1}(y)=2\pm\sqrt{y}$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{2+\sqrt{y}}{8}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{2-\sqrt{y}}{8}=\frac{1}{4\sqrt{y}} \quad , \quad 0< y<4$$

مثال 2 : اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع بتا با پارامترهای α و $\beta=1$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر $y=-Ln(x)$

جواب :

$$y=-Ln(x) \Rightarrow x=g^{-1}(y)=e^{-y} \Rightarrow \frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}=-e^{-y}$$
$$f_X(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}=\alpha\,x^{\alpha-1}$$
$$f_Y(y)=e^{-y}\alpha\,(e^{-y})^{\alpha-1}=\alpha\,e^{-\alpha y} \qquad , \qquad y>0$$

که دارای توزیع نمایی با پارامتر α است.

مثال 3 : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x)=1 \;\; , \;\; 0<x<1$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر $y=-2Ln(x)$.

جواب :

$$y=-2Ln(x) \Rightarrow x=g^{-1}(y)=e^{-\frac{y}{2}} \Rightarrow \frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \qquad , \qquad y>0$$

تمرین 1 : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $-\infty<x<\infty \;\; , \;\; f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر $y=x^2$.

تمرین 2 : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $x>0 \;\; , \;\; f_X(x)=e^{-x}$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر تصادفی Y در دو حالت زیر:

الف- $y=\sqrt{x}$

ب- $y=Ln(x)$

تمرین 3 : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $-1 < x < 1$, $f_X(x) = \frac{1+x}{2}$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر $y = x^2$.

تمرین 4 : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $0 < x < 1$, $f_X(x) = 4x^3$ باشد، مطلوبست تابع احتمال متغیر $y = -2Ln(x)^4$.

تمرین 5 : یک بنگاه معاملات ملکی بر اساس سود معاملات زمین، یک هزینه ثابت 50 هزار ریال به اضافه درصد حق کمیسیون دریافت می کند. اگر این سود به طور یکنواخت بین صفر و 2000 هزار ریال توزیع شده باشد، توزیع احتمال هزینه بنگاه را بدست آورید.

تمرین 6 : اگر $x > 0$, $f_x(x) = \frac{kx^3}{(1+2x)^6}$ ، مطلوبست :

الف- تابع احتمال متغیر $y = \frac{2x}{1+2x}$

ب- توزیع احتمال y کدامیک از توزیع های معروف پیوسته است و پارامترهای آن کدام است؟

فصل چهارم: امید ریاضی (ارزش انتظاری) و واریانس متغیر تصادفی

امید ریاضی یک متغیر تصادفی گسسته :

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $P_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی یا ارزش انتظاری یا میانگین آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E(x)=\sum_x x.P_X(x)$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، مطلوبست امید ریاضی متغیر X .

جواب :

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{4}{10}, & x=1\\ \frac{1}{10}, & x=2\\ \frac{3}{10}, & x=3\\ \frac{2}{10}, & x=4\end{cases}$$

$$E(x)=\Sigma x.P_X(x)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{2}{10}=2.3$$

مثال 2 : در کارخانه‌ای جهت تولید محصولی جدید دو طرح A و B وجود دارد. بخش بازاریابی کارخانه با یقین می‌داند در صورتی که از طرح A برای تولید استفاده شود درآمد حاصل 3 میلیون تومان خواهد بود در حالی که در مورد طرح B با یقین قادر به پیش‌بینی درآمد نیست و فقط قادر است بگوید با احتمال 0/3 درآمد حاصله 7 میلیون تومان و با احتمال 0/7 درآمد حاصله 2 میلیون خواهد بود. به نظر شما چه طرحی باید انتخاب شود؟

جواب :

ارزش انتظاری درآمد در حالت A :

$$E(x)=3$$

ارزش انتظاری درآمد در حالت B :

$$E(x)=0.3\times7\,+\,0.7\times2=3.5$$

باید طرح B انتخاب شود.

مثال 3 : توانایی یک دانشجو به وسیله یک کوئیز دو سواله مورد بررسی قرار می‌گیرد. شیوه امتحان اینگونه است که او اگر سئوال اول را انتخاب کند، در این صورت تنها موقعی که به این سئوال پاسخ دهد می‌تواند سئوال دوم را جواب دهد. درغیر این صورت او اجازه پاسخ به سئوال دوم را ندارد. همین حالت برای موقعی که اول سئوال دوم را انتخاب می‌کند نیز وجود دارد.

اگر شخص به سئوال اول پاسخ دهد V_1 نمره و اگر به سئوال دوم جواب دهد V_2 نمره می‌گیرد. احتمال پاسخ دادن به سئوال اول P_1 و احتمال پاسخ دادن به سئوال دوم P_2 می‌باشد.

براساس مقادیر V_1, V_2, P_1, P_2 این شخص اول کدام سئوال را برای پاسخ انتخاب می کند.

جواب :

روش اول (اگر اول سوال یک را انتخاب کند)		روش دوم(اگر اول سوال دو را انتخاب کند)	
احتمال	نمره	احتمال	نمره
$1-P_1$	0	$1-P_2$	0
$P_1(1-P_2)$	V_1	$P_2(1-P_1)$	V_2
$P_1 . P_2$	V_1+V_2	$P_2 . P_1$	V_1+V_2

E (نمره تحت روش اول) $= 0\times(1-P_1)+V_1 P_1 (1-P_2)+(V_1+V_2) P_1 P_2 = V_1 P_1 + V_2 P_1 P_2$

E (نمره تحت روش دوم) $= V_2 P_2 (1-P_1)+(V_1+V_2)(P_1 P_2)= V_2 P_2 + V_1 P_1 P_2$

برای اینکه ابتدا روش یک را انتخاب کند باید :

$$V_1P_1 + V_2P_1 P_2 \geq V_2P_2 + V_1P_1 P_2 \Rightarrow V_1 P_1 (1-P_2) \geq V_2 P_2 (1-P_1)$$
$$\frac{V_1P_1}{1-P_1} \geq \frac{V_2 P_2}{1-P_2}$$

مثال 4 : یک محموله شامل 4 قطعه سالم و سه قطعه معیوب مفروض است. اگر از این محموله یک نمونه سه تایی بدون جایگذاری انتخاب شود، مطلوبست تعداد مورد انتظار قطعات سالم در نمونه؟

جواب :

روش اول : $E(x) = \Sigma\ x\ P_X(x) = 0\times P(x=0)+1\times P(x=1)+2\times P(x=2)+3\times P(x=3)$

$$P(x=0)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35} \quad , \quad P(x=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}$$

$$P\ (x=2)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35} \quad , \quad P(x=3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}$$

$$E(x)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=1.7$$

روش دوم :

با توجه به امید ریاضی توزیع فوق هندسی :

$$E(x)=\frac{n.m}{N}=\frac{3\times 4}{7}=\frac{12}{7}$$

مثال 5 : شخصی از ظرفی حاوی 5 مهره که روی 4 مهره آن عدد 1 و روی مهره پنجم عدد 24 نوشته شده است دو مهره را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کند. اگر قرار باشد که شخصی مبلغی برابر مجموع دو مهره دریافت کند امید ریاضی دریافت را حساب کنید.

جواب :

X = مقدار عایدی حاصل (x = 2 , 25)

P(x =2) = P(روی هر دو توپ عدد یک نوشته شده است) = $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$

P(x =25) = P(روی یک توپ عدد یک و روی دیگری عدد 24 نوشته شده است) = $\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$

$$E(x)=\sum x.P_X(x)=2\times 0.6+25\times 0.4=11.2$$

تمرین 1 : یک سکه را آنقدر پرتاب می کنیم تا یک شیر بیاید. اگر در اولین پرتاب بیاید 2 تومان، در دومین پرتاب 4 تومان، در K امین پرتاب 2^K تومان عاید می شود. در صورتیکه میزان برد از 10^5 تجاوز کند فقط 10^5 تومان دریافت می شود. مطلوبست میزان پولی که دریافت می شود.

تمرین 2 : شرکتی می خواهد برای رسیدن به فروش بیشتر با مشتریان بالقوه خود ملاقات کند. هر بار ارایه محصولات 1000 ریال هزینه می برد و جهت مسافرت به محل مشتری بعدی و ترتیب ملاقات جدید 4000 ریال صرف می شود.

الف- اگر احتمال یک فروش بعد از هر ملاقات 0/1 باشد، هزینه منتظره یک فروش چقدر است؟

ب- اگر سود منتظره هر فروش 15000 ریال باشد، آیا این سفرها باید انجام شود ؟

ج- اگر بودجه آگهی و تبلیغ فقط 1000000 ریال باشد، احتمال اینکه این مبلغ مصرف شود و هیچ سفارشی دریافت نشود چقدر است ؟

تمرین 3 : اگر 6 مهره متمایز از هم را به داخل 5 کیسه متمایز از هم به گونه ای بریزیم که هر مهره شانس مساوی برای رفتن به داخل هر کیسه را داشته باشد، ارزش انتظاری تعداد کیسه های مهره دار چقدر است؟

تمرین 4 : بازی شانسی را به این صورت در نظر بگیرید که بازیکن روی اعداد 1 تا 6 شرط بندی می کند آنگاه 3 تاس پرتاب می شود و اگر شماره انتخاب شده توسط بازیکن به تعداد i مرتبه ظاهر شود ($i=1,2,3$) آنگاه وی i واحد برنده می شود. از طرف دیگر اگر عدد انتخاب شده ظاهر نشود آنگاه بازیکن یک واحد بازنده می شود. آیا بازی عادلانه (منصفانه) است؟

امید ریاضی انواع متغیرهای تصادفی گسسته :

1) یکنواخت $E(x)=\frac{n+1}{2}$

2) برنولی $E(x)=P$

3) دو جمله‌ای $E(x)=nP$

4) پواسان $E(x)=\lambda$

5) فوق هندسی $E(x)=\frac{n.m}{N}$

6) دو جمله‌ای منفی $E(x)=\frac{k}{P}$

7) هندسی $E(x)=\dfrac{1}{P}$

تمرین 1 : آزمایش خاصی باید آنقدر تکرار شود تا یک نتیجه موفقیت آمیز از آن گرفته شود. این آزمایشها از هم مستقل و هزینه انجام هر یک 25000 ریال است. ولی اگر یک نتیجه ناموفق بدست آید 5000 ریال باید صرف راه اندازی آزمایش بعدی شود. اگر احتمال موفقیت در یک آزمایش 0/25 باشد در اینصورت مطلوبست :

الف- محاسبه هزینه مورد انتظار پروژه

ب- اگر آزمایش کننده بخواهد حداکثر 500000 ریال صرف این کار کند، مطلوبست احتمال اینکه هزینه آزمایش بیش از این مقدار باشد.

تمرین 2 : تعمیر کاران یک شرکت مطابق توزیع پواسون با پارامتر 2 جهت دریافت قطعه یدکی خاصی مراجعه می کنند. معمولا سه عدد از این قطعه در دست نگهداشته می شود. اگر بیشتر از سه سفارش دریافت شود، این تعمیر کاران باید فاصله زیادی تا انبار مرکزی طی کنند.

الف- تقاضای قابل انتظار روزانه این قطعه یدکی چقدر است ؟

ب- تعداد قابل انتظار افرادی که سرویس دریافت می کنند چقدر است ؟

ج- تعداد قابل انتظار افرادی که باید به انبار مرکزی مراجعه کنند چقدر است ؟

امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته :

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی یا ارزش انتظاری یا میانگین آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E(x)=\int_x x.f_X(x)\,dx$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال متغیر X به صورت زیر باشد مطلوبست امید ریاضی متغیر X .

$$f_X(x)=\frac{20000}{x^3}\quad ;\quad x>100$$

جواب :

$$E(x)=\int_{100}^{\infty} x\times\frac{20000}{x^3}\,dx=20000\int_{100}^{\infty} x^{-2}\,dx=20000\left[-x^{-1}\right]_{100}^{\infty}=200$$

مثال 2 : اگر تابع احتمال متغیر X به صورت زیر باشد مطلوبست امید ریاضی متغیر X .

$$f_X(x)=\frac{4}{\pi(1+x^2)} \quad ; \circ<x<1$$

جواب :

$$E(x)=\int_0^1 x\frac{4}{\pi(1+x^2)}dx=4\times\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)}\ dx=\frac{2}{\pi}\ln\ (1+x^2)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\ln\ 2=0.44$$

مثال 3 : اگر تابع احتمال متغیر X به صورت زیر باشد مطلوبست امید ریاضی متغیر X .

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{16}(x+3)^2 & , \quad -3<x<-1\\ \frac{1}{16}(6-2x^2) & , \quad -1<x<1\\ \frac{1}{16}(3-x) & , \quad 1<x<3\end{cases}$$

جواب :

$$E(x)=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{16}x(x+3)^2\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{16}x(6-2x^2)\ dx+\int_1^3\frac{1}{16}x(3-x)\ dx$$

تمرین 1 : یک سازنده مونیتور تلویزیونهای تجاری لامپ تصویر آنرا برای یکسال (8760 ساعت) ضمانت می کند. از این مونیتورها در ترمینالهای هواپیمایی و برای زمانبندی پروازها استفاده می شود و بطور مستمر روشن هستند. میانگین عمر لامپ ها 20000 ساعت بوده و مطابق توزیع نمایی می باشند. تولید، فروش و تحویل یک مونیتور که 400 هزار ریال فروخته می شود برای سازنده 300 هزار ریال هزینه می برد. بعلاوه هزینه تعویض یک لامپ سوخته، شامل مواد و کار ، 150 هزار ریال است . این سازنده تعهدی برای تعویض بعد از اولین تعویض ندارد. سود منتظره سازنده چقدر است ؟

تمرین 2 : فرض کنید مدت زمانی که یک دستگاه کار خواهد کرد مطابق توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=\frac{1}{10}$ باشد. بعلاوه فرض کنید اپراتور این دستگاه را باید برای مدت زمان از پیش تعیین شده و ثابت Y استخدام نمود. در این مدت دستمزد پرداختی به اپراتور 1000 ریال در هر دوره زمانی خواهد بود. سود خالص حاصل از کارکرد این ماشین بدون در نظر گرفتن هزینه کارگری 100 ریال در هر دوره زمانی است. مقداری از Y را پیدا کنید که سود کل را حداکثر کند.

تمرین 3 : یک سازنده تلویزیون رنگی، ضمانت یکساله می کند که در صورت سوختن لامپ تصویر تلویزیون، به رایگان آنها را تعویض کند. او تخمین می زند که عمر لامپ ها یک متغیر تصادفی با توزیع احتمال نمایی با میانگین 4 سال است.

الف- چند درصد از تلویزیونها باید سرویس شوند؟

ب- اگر سود هر فروش 200 هزار ریال و هزینه تعویض هر لامپ نیز 200 هزار ریال باشد، سود قابل انتظار این کار را بدست آورید.

تمرین 4 : در یک کارخانه اتومبیل سازی، موتور هر اتومبیل جدید برای یکسال ضمانت می شود. تخمین زده می شود میانگین عمر موتورها سه سال و زمان منتهی به خرابی آنها مطابق توزیع نمایی است. سود حاصل از هر اتومبیل جدید 1000 (هزار ریال) است. با توجه به هزینه قطعات و کارگر، تعمیر هر مورد خرابی 250 هزار ریال هزینه می برد.

الف- سود قابل انتظار هر اتومبیل چقدر است؟

ب- چند درصد از اتومبیل ها در طول 6 ماه استفاده دچار خرابی موتور می شوند؟

تمرین 5 : تخمین زده می شود زمان منتهی به خرابی یک لامپ تلویزیون مطابق توزیع نمایی با میانگین سه سال باشد. یک شرکت این لامپها را در طول اولین سال استفاده بیمه می کند. روی چند درصد از بیمه نامه ها خسارت خواهد پرداخت؟

تمرین 6 : حدود قابل قبول برای عمر یک قطعه الکترونیکی که در یک سیستم ردیاب استفاده می شود بین 5000 الی 10000 ساعت در نظر گرفته شده است. عمر این قطعه دارای توزیع نرمال با میانگین 7500 ساعت است. هزینه تولید هر یک از این قطعات 10 دلار است و هر قطعه که معیوب باشد باید با قطعه سالم جایگزین شود که هزینه انجام این کار برای شرکت 5 دلار خواهد بود. امکان استفاده از دو فرایند تولید دیگر نیز وجود دارد که هر کدام دارای میانگینی برابر با 7500 ساعت است. انحراف معیار فرایندهای یک و دو بترتیب 1000 و 500 ساعت است. هزینه تولید برای فرایند دو، دو برابر فرایند یک است. به ازای چه هزینه تولیدی فرایند یک یا دو انتخاب می شود؟

تمرین 7 : قطر یک بلبرینگ متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار یک می باشد. حدود فنی قابل قبول این قطر $6 \leq x \leq 8$ در نظر گرفته شده است. اگر بلبرینگ بین این حدود قرار گیرد ، 800 تومان سودآوری دارد. اگر $x < 6$ باشد، سود به مقدار 200 − تومان و اگر $x > 8$ باشد، سود به مقدار 400 − می رسد. مقداری از μ را پیدا کنید که سود قابل انتظار را حداکثر کند.

تمرین 8 : اگر تابع احتمال متغیر X به صورت زیر باشد مطلوبست امید ریاضی متغیر X .

$$f_X(x) = 1 - |1 - x| \;\; ; \;\; 0 < x < 2$$

امید ریاضی انواع متغیرهای تصادفی پیوسته :

1) یکنواخت $E(x) = \frac{a+b}{2}$

2) نرمال $E(x) = \mu$

3) نمایی $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

4) گاما $E(x) = \frac{r}{\lambda}$

5) بتا $E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$

6) کوشی میانگین ندارد.

7) مربع کای $E(x) = \upsilon$

8) t $E(x) = 0$

9) F $E(x) = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_2 - 2}$

تمرین 1 : اگر x_1 و x_2 و ..... و x_n متغیرهای تصادفی مستقل و یکنواخت در فاصله (1 و 0) باشند مطلوبست:

الف) $E[\max(x_1, \dots, x_n)]$

ب) $E[\min(x_1, \dots, x_n)]$

تمرین 2 : اگر شرکتی n فروشنده استخدام کند فروش کل آن بر حسب هزار تومان را می توان متغیری تصادفی در نظر گرفت که دارای توزیع گاما با $r = 80\sqrt{n}$ و $\lambda = \frac{1}{2}$ است. اگر هزینه فروش برای هر فروشنده 8000 تومان باشد، شرکت باید چند فروشنده را استخدام کند تا سود مورد انتظارش حداکثر شود؟

امید ریاضی توابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته و گسسته :

اگر $f_X(x)$ تابع احتمال یک متغیر تصادفی X باشد و $g(x)$ یک تابع از متغیر X باشد، امید ریاضی $g(x)$ در حالت گسسته و پیوسته از روابط زیر بدست می‌آیند:

پیوسته $E(g(x)) = \int_x g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

$$E(g(x)) = \sum_x g(x).f_X(x)$$ گسسته

مثال 1 : تعداد اتومبیلهایی که بین ساعت 4 و 5 صبح وارد پمپ بنزین می‌شوند متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر می‌باشد. اگر درآمد پمپ بنزین در ساعات فوق تابعی از تعداد اتومبیلهای وارد شده به صورت $g(x) = 2x - 1$ باشد، بطور متوسط چند تومان درآمد برای پمپ بنزین انتظار می رود؟

x	4	5	6	7	8	9
$f_X(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

جواب :

X = تعداد اتومبیلهای وارد شده

روش اول : بدست آوردن توزیع y   y=g(x)

y	7	9	11	13	15	17
$f_Y(y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(y) = \sum_y y.f_y(y) = 7\times\frac{1}{12} + \ldots + 17\times\frac{1}{6} = 12.67$$

روش دوم :

$$E(y) = \sum_x (2x-1)\ f_X(x) = 7\times\frac{1}{12} + \ldots + 17\times\frac{1}{6} = 12.67$$

مثال 2 : یک مساله ساده و معروف کنترل موجودی، مساله روزنامه فروش است. فرض کنید یک روزنامه فروش، هر روزنامه را به قیمت 15 ریال خریده و به قیمت 25 ریال می فروشد و بعلاوه نمی تواند روزنامه های فروش نرفته را برگرداند. تقاضای روزانه برای روزنامه های او دارای توزیع زیر و تقاضای هر روز مستقل از تقاضای روز قبل است :

تعداد مشتری (x)	23	24	25	26	27	28	29	30
احتمال P(x)	0/1	0/04	0/1	0/1	0/25	0/25	0/15	0/1

اگر موجودی روزنامه فروش زیاد باشد به خاطر روزنامه های فروش نرفته دچار مقداری ضرر می شود. اگر موجودی او کم باشد، به خاطر از دست دادن مشتری مقداری از سود او کم می شود. مطلوبست تعداد روزنامه هایی را که باید بخرد تا سود او حداکثر شود.

جواب :

اگر X را به عنوان تقاضای روزانه، S را به عنوان تعداد روزنامه های خریداری شده و L(X,S) را به عنوان ضرر روزنامه فروش به خاطر سطح خاصی از موجودی در نظر بگیریم، در اینصورت داریم :

$$\begin{aligned} L(X,S) &= 10(X-S) \quad \text{if} \quad X > S \\ &= 15(S-X) \quad \text{if} \quad X \le S \end{aligned}$$

برای یک سطح موجودی مثل S ، امید ریاضی ضرر عبارتست از :

$$E[L(X,S)] = \sum_{x=23}^{S} 15(S-X)P(x) + \sum_{x=S+1}^{30} 10(X-S)P(x)$$

اگر $E[L(X,S)]$ را برای مقادیر مختلف S به دست آوریم :

برای S=26 :

$$\begin{aligned} E[L(X,26)] &= 15[(26-23)(0.1)+(26-24)(0.4)+(26-25)(0.1)+(26-26)(0.1)]+ \\ &10[(27-26)(0.25)+(28-26)(0.25)+(29-26)(0.15)+(30-26)(0.1)] = 19.15 \end{aligned}$$ ریال

برای S=27 :

$$\begin{aligned} E[L(X,27)] &= 15[(27-23)(0.1)+(27-24)(0.4)+(27-25)(0.1)+(27-26)(0.1)+(27-27)(0.25)]+ \\ &10[(28-27)(0.15)+(29-27)(0.15)+(30-27)(0.1)] = 14.4 \end{aligned}$$

برای S=28 :

$$\begin{aligned} E[L(X,28)] &= 15[(28-23)(0.1)+(28-24)(0.4)+(28-25)(0.1)+(28-26)(0.1)+ \\ &(28-27)(0.25)+(28-28)(0.25)]+ \\ &10[(29-28)(0.15)+(30-28)(0.1)] = 17.9 \end{aligned}$$

بنابراین روزنامه فروش اگر بخواهد امید ریاضی ضرر را حداقل کند باید 27 روزنامه بخرد.

مثال 3 : اگر تابع احتمال متغیر تصادفی x به صورت $f_X(x)=1$ ؛ ۰<x<۱ باشد، مطلوبست $E(e^x)$.

جواب :

$$E(e^x) = \int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$$

تمرین 1 : فرض کنید شما مشاور کارخانه‌ای هستید که تقاضای روزانه برای یک محصول فاسد شدنی آن بصورت زیر است :

تقاضا (x)	3	4	5	6	7	8	9
احتمال $P_x(x)$	0/05	0/12	0/2	0/24	0/17	0/14	0/08

قیمت تمام شده هر کالا 35 دلار قیمت فروش آن 50 دلار می‌باشد. اگر این کالا تا پایان روز در انبار بماند فاسد شده و از بین می‌رود، مدیر کارخانه می‌خواهد تصمیم بگیرد که چند عدد کالا تولید کند تا امید ریاضی سودش ماکزیمم شود. شما بعنوان مشاور مدیر عامل مقدار تولید را جهت حداکثر نمودن سودش محاسبه کنید.

تمرین 2 : یک پسر بچه روزنامه فروش، هر روزنامه را به قیمت 200 ریال خریده و به قیمت 250 ریال می فروشد و بعلاوه نمی تواند روزنامه های فروش نرفته را برگرداند. اگر تقاضای روزانه برای روزنامه های او دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای n=10 و $P=\frac{1}{3}$ باشد و تقاضای هر روز مستقل از تقاضای روز قبل باشد، مطلوبست تعداد روزنامه هایی را که باید بخرد تا سود او حداکثر شود.

تمرین 3 : فرض کنید یک تولید کننده می خواهد برای تولید قطعه خاصی بین دو فرایند تولیدی یکی را انتخاب کند. فرایند A برای تولید یک قطعه C ریال بر واحد و فرایند B، KC ریال بر واحد هزینه می برد (K>1). زمان خرابی قطعات A و B هر دو نمایی با نرخ خرابی بترتیب $\frac{1}{200}$ خرابی در ساعت و $\frac{1}{300}$ خرابی در ساعت است. در صورتیکه قطعه ای کمتر از 400 ساعت عمر کند، سازنده باید جریمه ای معادل K ریال بپردازد. به ازای چه مقادیری از K، هزینه طرح A بیش از طرح B می شود؟

تمرین 3 : یک ربوت بترتیب، 10 قطعه را جهت ماشین کاری در یک سه نظام قرار می دهد. اگر روبوت نتواند به خوبی قطعه را جاگذاری کند، قطعه افتاده و محل سه نظام باز می ماند و بدین ترتیب در هر سیکل تولیدی کمتر از 10 قطعه تولید می شود. مطالعه عملکرد گذشته ربوت نشان می دهد که اگر متغیر تصادفی X = تعداد محل های خالی باشد داریم :

x	0	1	2
$P_X(x)$	0/6	0/3	0/1

اگر خسارت ناشی از محلهای خالی با $Y = 20X^2$ بدست آید مطلوبست امید ریاضی Y .

تمرین 4 : اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $x > 0$ ؛ $f_X(x) = e^{-x}$ باشد، مطلوبست $E([x])$.

تمرین 5 : آزمایش خاصی باید آنقدر تکرار شود تا یک نتیجه موفقیت آمیز از آن گرفته شود. اگر احتمال موفقیت در یک آزمایش 0/25 باشد و هزینه هر یک از آزمایشات 25000 ریال باشد. همچنین اگر یک نتیجه ناموفق بدست آید 5000 ریال باید صرف راه اندازی آزمایش بعدی شود، هزینه منتظره پروژه را حساب کنید.

خواص امید ریاضی :

$1)E(ax+b)=aE(x)+b$

$2)E(f(x)\pm g(x))=E(f(x))\pm E(g(x))$

$3)E(x_1\pm x_2\pm\ldots\pm x_n)=E(x_1)\pm E(x_2)\pm\ldots\pm E(x_n)$

4) اگر x , y مستقل باشند آنگاه :

$E(xy)=E(x).E(y)$

مثال : هر یک از دو متغیر تصادفی مستقل X و Y تنها می توانند مقادیر (1-) و (0) و (2) را بپذیرند بطوریکه :

$P(X=-1)=P(X=2)=\frac{1}{4}$ و $P(Y=-1)=P(Y=0)=\frac{1}{4}$

اگر متغیر تصادفی Z بصورت $Z=4X+5Y$ تعریف شود مطلوبست امید ریاضی Z.

جواب :

x	-1	0	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(x)=\sum_x xP(x)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

y	-1	0	2
$P(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$E(y)=\sum_y yP(y)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

$$E(z)=4E(x)+5E(y)$$

$$E(z)=4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{3}{4}=\frac{19}{4}$$

تعریف واریانس متغیر تصادفی :

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین $E(x)$ باشد آنگاه واریانس متغیر تصادفی X از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$Var(x)=E[(x-E(x)]^2$$

واریانس متغیر تصادفی گسسته :

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $P_X(x)$ باشد، آنگاه واریانس آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Var(x) = \sum_x (x - E(x))^2 \, \mathrm{P_X}(\mathrm{x})$$

مثال 1 : برای متغیر تصادفی x با تابع احتمال زیر مطلوبست واریانس و انحراف معیار .

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \quad x = \circ \\ \frac{1}{4} & , \quad x = 1 \\ \frac{3}{8} & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{4} & , \quad x = 3 \end{cases}$$

جواب :

$$E(x) = \Sigma\ x.f_X(x) = \frac{1}{4} + \frac{6}{8} + \frac{3}{4} = 1.75$$

$$Var(x) = \Sigma\ (x - 1.75)^2\ \ f_X(x) = (\circ - 1.75)^2 \times \frac{1}{8} + (1 - 1.75)^2 \times \frac{1}{4} + \ldots = 0.94$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(x)} = 0.97$$

واریانس متغیر تصادفی پیوسته :

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه واریانس آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Var(x) = \int_x (x - E(x))^2\ f_X(x)\ dx$$

مثال 1 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $\circ < x < 1$, $f_X(x) = 2x$ باشد مطلوبست واریانس و انحراف معیـار متغیر تصادفی x .

جواب :

$$E(x) = \int_0^1 2x^2\ \ dx = \frac{2}{3}\ x^3 \Big|_\circ^1 = \frac{2}{3}$$

$$Var\ (x) = \int_0^1 (x - \frac{2}{3})^2 \times 2x\ dx = \frac{1}{18}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

قضیه: واریانس متغیر تصادفی x از رابطه زیر بدست می آید:

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

مثال 1 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $\circ < x < 1$, $f_X(x) = 2x$ باشد مطلوبست واریانس متغیر تصادفی x.

جواب :

$$E(x)=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$E(x^2)=\int_0^1 2x^3\,dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$Var(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

واریانس انواع متغیرهای تصادفی گسسته :

1) یکنواخت $\frac{n^2-1}{12}$

2) برنولی $p(1-p)$

3) دو جمله‌ای $np(1-p)$

4) پواسون λ

5) فوق هندسی $\frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$

6) دو جمله‌ای منفی $k\,\frac{(1-p)}{p^2}$

7) هندسی $\frac{1-p}{p^2}$

تمرین : 10 درصد از قطعات یک محموله بزرگ از قطعات تولیدی، شامل یک زدگی، 5 درصد از آنها شامل بیش از یک زدگی و در بقیه آنها هیچ زدگی وجود ندارد. فرض کنید 10 عدد از قطعات این محموله بصورت تصادفی برای فروش انتخاب می شوند. اگر X_1 تعداد قطعات موجود در نمونه که یک زدگی دارند و X_2 تعداد قطعات موجود در نمونه که شامل بیش از یک زدگی هستند باشد و بدانیم که هزینه دوباره کاری عبارتست از $X_1 + 3X_2$ ، مطلوبست محاسبه میانگین و واریانس هزینه دوباره کاری.

واریانس انواع متغیرهای تصادفی پیوسته :

1) یکنواخت $\frac{(b-a)^2}{12}$

2) نرمال σ^2

3) نمایی $\frac{1}{\lambda^2}$

4) گاما $\frac{r}{\lambda^2}$

5) بتا $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

6) کوشی واریانس ندارد.

7) مربع کای 2υ

8) t $\frac{\upsilon}{\upsilon-2}, \upsilon>2$

9) F $\frac{\upsilon^2{}_2(2\upsilon_2+2\upsilon_1-4)}{\upsilon_1(\upsilon_2-2)^2(\upsilon_2-4)}, \upsilon_2>4$

تمرین : می دانیم زمان تحویل سفارش نوعی دیود از یک سازنده دارای توزیع گاما با میانگین 20 روز و انحراف معیار 10 روز است. احتمال دریافت یک سفارش در 15 روز بعد از سفارش دهی را بدست آورید.

خواص واریانس :

1) $\text{var}(ax+b)=a^2\,\text{var}(x)$

2) $\text{var}(ax)=a^2\,\text{var}(x)$

3) $\text{var}(x+b)=\text{var}(x)$

تمرین : یک پیمانکار می خواهد پیشنهادش را در مورد پروژه ای ارایه کند. روزهای لازم برای تکمیل این پروژه (X) دارای توزیع احتمال زیر است :

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & x=10\\ \frac{3}{10}, & x=11\\ \frac{4}{10}, & x=12\\ \frac{1}{10}, & x=13\\ \frac{1}{10}, & x=14\end{cases}$$

سود پیمانکار بر اساس رابطه $Y=2000(12-X)$ بدست می آید. مطلوبست امید ریاضی و واریانس متغیر Y .

تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی :

تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X که با نماد $M_x(t)$ نشان می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_x(t)=E(e^{tx})$$

که در حالت گسسته و پیوسته از روابط زیر بدست می‌آید:

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} f_X(x) \qquad \text{گسسته}$$

$$M_x(t) = \int_x e^{tx} f_X(x)dx \qquad \text{پیوسته}$$

شرط اینکه $M_x(t)$ یک تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی X باشد آن است که :

$$M_X(t=0) = 1$$

مثال 1 : کدامیک از گزینه های زیر نمی تواند تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی باشد؟

1) $\dfrac{\lambda}{1-\lambda t}$ 2) $\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ 3) $e^{\lambda(e^t-1)}$ 4) $e^{\frac{-t^2}{2}}$

جواب :

فقط برای گزینه اول $M_X(t=0) \neq 1$ است.

مثال 2 : تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و P را بدست آورید.

جواب :

$$f_X(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} \quad , \quad x = \circ, 1, 2, \dots, n$$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (Pe^t)^x (1-P)^{n-x} = (Pe^t + 1 - P)^n$$

مثال 3 : تابع مولد گشتاور توزیع پواسون با پارامتر λ را بدست آورید.

جواب :

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots.$$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x\geq 0} e^{tx} . \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x \geq 0} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

مثال 4 : تابع مولد گشتاور توزیع نمایی با پارامتر λ را بدست آورید.

جواب :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{t-\lambda} [e^{-(-t+\lambda)x}]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

مثال 5 : اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $-\infty < x < \infty \quad ; \quad f_x(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ باشد، تابع مولد گشتاور را به دست آورید.

جواب :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \times \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{tx}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{tx}e^{-x}dx = \frac{1}{1-t^2} \quad , \quad -1 < t < 1$$

تابع مولد گشتاور انواع متغیرهای تصادفی گسسته :

1) برنولی $M_x(t) = Pe^t + 1 - P$

2) دو جمله‌ای $M_x(t) = (Pe^t + 1 - P)^n$

3) پواسون $M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

4) دو جمله‌ای منفی $M_x(t) = [\frac{Pe^t}{1-(1-P)e^t}]^k$

5) هندسی $M_x(t) = \frac{Pe^t}{1-(1-P)e^t}$

تابع مولد گشتاور انواع متغیرهای تصادفی پیوسته :

1) یکنواخت $M_x(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

2) نرمال $M_x(t) = e^{[\mu t + \frac{\delta^2 t^2}{2}]}$

3) نمایی $M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

4) گاما $M_x(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r$

5) مربع کای $M_x(t) = (1-2t)^{-\frac{\upsilon}{2}}$

بدست آوردن گشتاورهای متغیر تصادفی X از روی تابع مولد گشتاور :

از روی تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X ، می‌توان تمامی گشتاورهای X از جمله : $E(x), E(x^2), E(x^3)$ و .... را بوسیله مشتق گیری پیاپی از $M_x(t)$ و محاسبه مقدار آن به ازای $t = 0$ ، به دست آورد:

$$E(x) = M'_x(t=0) = \frac{dM_x(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$E(x^2) = M''_x(t=0) = \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}$$

.

.

.

$$E(x^n) = M^{(n)}_x(t=0) = \frac{d^n M_x(t)}{dt^n}\Big|_{t=0}$$

مثال 1 : اگر تابع مولد گشتاور متغیر x به صورت $M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ باشد، مطلوب است محاسبه میانگین و واریانس متغیر x.

جواب :

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$E(x) = \frac{d}{dt} M_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(x^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال 2 : اگر تابع مولد گشتاور متغیر x به صورت $M_x(t) = (Pe^t + 1 - P)^n$ باشد، مطلوب است محاسبه میانگین و واریانس متغیر x.

جواب :

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$M_x(t) = (Pe^t + 1 - P)^n$$

$$E(x) = \frac{d}{dt} M_x(t)\Big|_{t=0} = nPe^t (Pe^t + 1 - P)^{n-1}\Big|_{t=0} = np$$

$$E(x^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_x(t)\Big|_{t=0} = n(n-1)(Pe^t)^2 (Pe^t + 1 - P)^{n-2} + nPe^t (Pe^t + 1 - P)^{n-1}\Big|_{t=0} =$$

$$n(n-1)P^2 + nP$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = n(n-1)P^2 + nP - n^2P^2 = nP(1-P)$$

مثال 3 : اگر تابع مولد گشتاور متغیر x به صورت $M_x(t) = e^{(t+4)^2 - 16}$ باشد، مطلوب است محاسبه $P(x < 5)$.

جواب :

$$M_x(t) = e^{(t+4)^2-16} \Rightarrow X \sim \mathrm{N}(\mu = 8 \ , \ \delta^2 = 2)$$

$$P(x<5) = P(x < \frac{5-8}{\sqrt{2}}) = P(x < -2.12) = 1-\varphi(2.12) = 0.017$$

خواص تابع مولد گشتاور:

1- تابع مولد گشتاور بصورت یگانه ای یک توزیع احتمال را مشخص می کند. بعبارت دیگر برای هر تابع احتمال، فقط و فقط یک تابع مولد گشتاور وجود دارد و برای هر تابع مولد گشتاور، فقط و فقط یک تابع احتمال وجود دارد.

قضیه : اگر تابع مولد گشتاور متغیرهای تصادفی X و Y بترتیب $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند و اگر برای کلیه مقادیر t داشته باشیم:

$M_X(t) = M_Y(t)$ ، آنگاه X و Y دارای یک توزیع احتمال می باشند.

مثال : فرض کنید برای کلیه مقادیر t تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گسسته X عبارتست از :

$$M_X(t) = \frac{1}{10}e^t + \frac{2}{10}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{3t} + \frac{4}{10}e^{4t}$$

تابع احتمال $f_X(x)$ را بدست آورید.

جواب :

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} f_X(x) = f(a)e^{at} + f(b)e^{bt} + f(c)e^{ct} + f(d)e^{dt} = \frac{1}{10}e^t + \frac{2}{10}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{3t} + \frac{4}{10}e^{4t}$$

$$a=1 \ , \ f(a) = \frac{1}{10} \qquad b=2 \ , \ f(b) = \frac{2}{10} \qquad c=3 \ , \ f(c) = \frac{3}{10} \qquad d=4 \ , \ f(d) = \frac{4}{10}$$

و بطور خلاصه :

$$f_X(x) = \frac{x}{10} \qquad , \qquad x = 1,2,3,4$$

2- تابع مولد گشتاور مجموع چند متغیر تصادفی مستقل برابر حاصلضرب توابع مولد گشتاور تک تک آنها است.

قضیه : اگر متغیر تصادفی مستقل x_1 ، x_2 و .... x_n ، بترتیب دارای تابع مولد گشتاور $M_{X_1}(t)$ و $M_{X_2}(t)$ و .... و $M_{X_n}(t)$ باشند و $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور Y عبارتست از :

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(t) \times .... \times M_{X_n}(t)$$

3- اگر تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X، $M_X(t)$ باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $Y = a + bX$ بصورت زیر است :

$$M_Y(t) = e^{at} M_X(bt)$$

بصورت دیگر :

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$$

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

فصل پنجم: قضایا و توزیعهای حدی احتمال

اهمیت نامساوی های مارکوف و چبیشف در این است که ما را قادر می سازند هرگاه فقط میانگین و یا میانگین و واریانس توزیعی معلوم باشند، کرانهایی را روی مقادیر احتمال داشته باشیم. البته اگر توزیع معلوم باشد، آنگاه احتمالهای مورد نظر دقیقا قابل محاسبه هستند و لزومی برای مراجعه به کرانها وجود ندارد.

نامساوی مارکوف:

این نامساوی حد بالای احتمال اینکه یک متغیر تصادفی با مقدار غیر منفی، مقداری بزرگتر از عدد مثبت و مشخص a داشته باشد را تعیین می‌کند. در این جا فقط میانگین متغیر تصادفی معلوم است و اطلاع دیگری از توزیع احتمال متغیر تصادفی در دست نیست.

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a} \;\; ; \;\; a > 0$$

$$P(x \leq a) \geq 1 - \frac{E(x)}{a} \;\; ; \;\; a > 0$$

مثال 1 : فرض کنید تعداد اقلام تولیدی یک کارخانه در طول یک هفته متغیر تصادفی با میانگین50 است. درباره احتمال اینکه در طول این هفته میزان محصولات تولیدی شرکت بیشتر از 75 باشد چه می‌توان گفت؟

جواب :

در این مساله اطلاعی از توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد تولید در دست نیست و فقط میانگین متغیر تصادفی معلوم است. اگر X نشان دهنده تعداد محصول تولیدی کارخانه در یک هفته باشد، لذا با استفاده از نامساوی مارکوف داریم:

$$P(x \geq 75) \leq \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

مثال 2 : بر اساس سوابق گذشته میزان پرتاب نیزه توسط یک ورزشکار متغیر تصادفی x است با میانگین 75 متر. در مورد احتمال اینکه این ورزشکار بیشتر از 85 متر نیزه را پرتاب کرده باشد چه می‌توان گفت؟

جواب :

$$P(x \geq 85) \leq \frac{E(x)}{85} = \frac{75}{85}$$

نامساوی چبیشف (کبیشو – کبیشف) :

نامساوی چبیشف حد بالای احتمال اینکه یک متغیر تصادفی از لحاظ قدر مطلق با میانگینش به اندازه حداقل عدد مثبت و مشخص a برابر انحراف معیار استاندارد اختلاف داشته باشد را تعیین می‌کند.

در این جا (در نامساوی چبیشف) هم میانگین متغیر تصادفی مشخص است و هم واریانس آن. اما هیچ اطلاع دیگری از توزیـع احتمـال متغیر تصادفی در دست نیست.

$$P(|x-E(x)|\geq a)\leq\frac{\delta^2}{a^2}\quad ;\quad a>0$$

$$P(|x-E(x)|\leq a)\geq 1-\frac{\delta^2}{a^2}\quad ;\quad a>0\Rightarrow P(E(x)-a\leq x\leq E(x)+a)\geq 1-\frac{\delta^2}{a^2}$$

این دو نامساوی بصورت زیر نیز نشان داده می شوند :

$$P(|x-E(x)|\geq a\delta)\leq\frac{1}{a^2}\quad ;\quad a>0$$

$$P(|x-E(x)|\leq a\delta)\geq 1-\frac{1}{a^2}\quad ;\quad a>0\Rightarrow P(E(x)-a\delta\leq x\leq E(x)+a\delta)\geq 1-\frac{1}{a^2}$$

مثال 1 : فرض کنید تعداد اقلام تولیدی یک کارخانه در طول یک هفتـه متغیـر تـصادفی بـا میـانگین50 و واریـانس 25 است. درباره احتمال اینکه در طول این هفته میزان محصولات تولیدی شرکت بین 40 و 60 باشد چه می‌توان گفت؟

جواب :

در این مساله اطلاعی از توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد تولید در دسـت نیـست و فقـط میـانگین و واریـانس متغیـر تصادفی معلوم است. اگر X نشان دهنده تعداد محصول تولیدی کارخانه در یک هفته باشد، لذا با استفاده از نامـساوی چبیشف داریم :

$$P(40<x<60)=P(|x-50|<10)\geq 1-\frac{25}{100}=\frac{3}{4}$$

مثال 2 : یک مدیر کنترل مواد کارخانه ای با تحلیل سوابق گذشته شـرکت، بـه ایـن تخمـین مـی رسـد کـه میـانگین و انحراف معیار زمان تحویل یک قطعه بترتیب 8 روز و 1/5 روز است. او از توزیع زمان تحویل اطلاعی نـدارد ولـی مـی تواند فرض کند که تخمین های او کاملا درست است. این مدیر می خواهد یک فاصله زمانی بدست آورد که با احتمال حداقل $\frac{8}{9}$ ، سفارش در این مدت دریافت شود.

جواب :

$$1-\frac{1}{a^2}=\frac{8}{9}\Rightarrow a=3$$

$$E(x)-a\delta\leq x\leq E(x)+a\delta\Rightarrow 8-3(1.5)\leq x\leq 8+3(1.5)\Rightarrow 3.5\leq x\leq 12.5$$

مثال 3 : تعداد مشتریانی که در یک روز وارد یک مغازه نانوایی می‌شوند، یک متغیر تصادفی است با میانگین 23 نفر و انحراف معیار 2/5 نفر. با چه احتمالی می‌توان ادعا کرد تعداد مشتریانی که فردا وارد مغازه می‌شوند بین 18 تا 28 نفر خواهند بود؟

جواب :

$$P(18 < x < 28) = P(18-23 < x-23 < 28-23) = P(-5 < x < 5) =$$

$$P(|x-23| < 5) > 1-\frac{(2.5)^2}{25} = \frac{3}{4}$$

نکته : چون نامساوی چبیشف برای همه توزیع های متغیر تصادفی X صادق است، نمی توان انتظار داشت که کران احتمال مورد نظر در بسیاری از موارد، خیلی به احتمال واقعی نزدیک باشد.

مثال 1 : فرض کنید متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $x > 0 \quad , \quad f_X(x) = 2e^{-2x}$ است، $P(|x-\mu| > 1)$ را :

الف- با استفاده از قضیه چبیشف حساب کنید.

ب- بدون استفاده از قضیه چبیشف، مقدار دقیق آنرا حساب کنید.

جواب :

الف- توزیع متغیر تصادفی x ، نمایی است با پارامتر $\lambda = 2$ لذا :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{var}(x) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$$

در نتیجه :

$$P(|x-\mu| > 1) = P(|x-\frac{1}{2}| > 1) < \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

ب-

$$P(|x-\mu| > 1) = P(|x-\frac{1}{2}| > 1) = P(x-\frac{1}{2} > 1) + P(x-\frac{1}{2} < -1) =$$

$$P(x > \frac{3}{2}) + P(x < -\frac{1}{2}) = \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} 2e^{-2x}dx + 0 = -e^{-2x}\Big|_{\frac{3}{2}}^{\infty} = e^{-3} = 0.05$$

مثال 2 : فرض کنید متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال یکنواخت در فاصله (10 و 0) است، $P(|x-5|>4)$ را :

الف- با استفاده از قضیه چیبشف حساب کنید.

ب- بدون استفاده از قضیه چیبشف، مقدار دقیق آنرا حساب کنید.

جواب :

الف- توزیع متغیر تصادفی x ، یکنواخت در فاصله (10 و 0) است لذا :

$$E(x)=5$$

$$\operatorname{var}(x)=\frac{25}{3}$$

در نتیجه :

$$P(|x-5|>4)\le\frac{25}{3(16)}\cong 0.53$$

ب-

$$P(|x-5|>4)=P(x-5>4)+P(x-5<-4)=$$

$$=P(x>9)+P(x<1)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0.2$$

تمرین : فرض کنید متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال نرمال با میانگین μ و واریانس δ^2 است، $P(|x-\mu|>2\delta)$ را :

الف- با استفاده از قضیه چیبشف حساب کنید.

ب- بدون استفاده از قضیه چیبشف، مقدار دقیق آنرا حساب کنید.

قضیه : اگر $Var(X)=0$ باشد، آنگاه $P[X=E(X)]=1$ است. بعبارت دیگر، متغیر تصادفی با واریانس صفر با احتمال یک، مقداری ثابت است.

قضیه حد مرکزی:

قضیه حد مرکزی در ارتباط با تعیین شرایطی است که تحت آن شرایط مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی دارای توزیع تقریبا نرمال باشد. به طور خلاصه این قضیه راجع به توزیع مجموع تعداد زیادی متغیر تصادفی مستقل بحث می‌کند. بدین صورت که مجموع تعداد زیادی متغیر تصادفی مستقل یک توزیع تقریباً نرمال دارد.

به عبارت دیگر اگر X_1 ، X_2 و .... X_n ، n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین مشترک μ و واریانس مشترک δ^2 باشند، آنگاه در صورتی که $n \to \infty$ (یا $n > 30$) ، مجموع آنها یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین $n\mu$ و واریانس $n\delta^2$ است یعنی :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\delta^2)$$

به عبارت دیگر توزیع متغیر تصادفی $\dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu}{\delta\sqrt{n}}$ نرمال استاندارد خواهد بود :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\delta\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

قضیه حد مرکزی به صورت زیر نیز بیان می‌شود :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\delta / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

مثال 1 : طول عمر لامپها بعد از نصب از توزیع نمایی با متوسط 10 روز پیروی می‌کند. به محض اینکه یک لامپ خاموش شود لامپ دیگری به جای آن نصب می‌شود. احتمال اینکه بیش از 50 لامپ در یک سال مورد نیاز باشد چقدر است؟

جواب :

$$\mu = 10$$

$$P(x_1 + x_2 + ... + x_{50} < 365) = P(\sum_{i=1}^{50} X_i < 365) =$$

$$P(\frac{\sum x_i - n\mu}{\delta\sqrt{n}} < \frac{365 - 500}{10\sqrt{50}}) = P(Z < -1.91) = 1 - \varphi(1.91) = 0.028$$

مثال 2 : تعداد دانشجویانی که در درس تئوری احتمالات ثبت نام می کنند متغیر تصادفی پواسون با میانگین 100 است. فرض کنید استاد درس تصمیم گرفته است که اگر تعداد دانشجویان این درس دست کم برابر 120 نفر باشد وی درس را در دو گروه ارایه کند و در غیر اینصورت درس در یک گروه تدریس شود. احتمال اینکه درس در دو گروه ارایه شود را محاسبه کنید.

جواب :

جواب دقیق یعنی $\sum_{i=120}^{\infty}\frac{(100)^i}{i!}e^{-100}$ به آسانی قابل محاسبه نیست اما با توجه به اینکه یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین 100 معادل مجموع 100 متغیر تصادفی مستقل پواسون با میانگین 1 است، لذا :

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}$$

$$x_i \sim poisson(\lambda_i = 1) \Rightarrow \mathrm{var}(x_i) = 1$$

$$P(X \geq 120) = P(x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} \geq 120) = P(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 120) =$$

$$P(\frac{\sum x_i - n\mu}{\delta\sqrt{n}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}) = P(Z \geq 2) = 1-\varphi(2) = 0.0228$$

مثال 3 : اگر X_i ها ($i = 1,2,\ldots,10$) متغیرهای تصادفی مستقل، هر کدام با توزیع یکنواخت روی فاصله (1 و 0) باشند، $P(\sum_{i=1}^{10} X_i > 6)$ را با تقریب حساب کنید.

جواب :

توزیع متغیرهای تصادفی x_i، یکنواخت در فاصله (1 و 0) است لذا :

$$E(x_i) = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{var}(x_i) = \frac{1}{12}$$

در نتیجه با توجه به قضیه حد مرکزی داریم :

$$P(\sum_{i=1}^{10} X_i > 6) = P(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - n\mu}{\delta\sqrt{n}} > \frac{6-5}{\sqrt{10(\frac{1}{12})}}) = P(Z > 1.095) = 1-\varphi(1.095) = 0.16$$

تمرین 1 : قطعات کوچکی بصورت 250 تایی در جعبه، بسته بندی می شوند و بیست جعبه در یک پالت قرار می گیرند. وزن قطعات متغیر تصادفی مستقل با میانگین 0/5 پوند و انحراف معیار 0/1 پوند می باشد. می خواهیم احتمال اینکه وزن قطعات یک پالت بیشتر از 2510 پوند شود را حساب کنیم.

تمرین 2 : مهندسین راه و ساختمان معتقد اند که W ، میزان وزنی که قسمتی از یک پل بین دو پایه (بر حسب 1000 پوند) بدون آسیب می تواند تحمل کند دارای توزیع نرمال با میانگین 400 و انحراف معیار 40 است. فرض کنید وزن

هر ماشین (بر حسب 1000 پوند) یک متغیر تصادفی با میانگین 3 و انحراف معیار 0/3 است. چه تعداد ماشین باید روی پل بین دو پایه باشند تا احتمال آسیب به پل از 0/1 بیشتر شود؟

تمرین 3 : فرض کنید W_i وزن i امین مسافر از یک شرکت هواپیمایی باشد. تصور کنید که وزن ها مستقل از یکدیگر بوده و دارای تابع احتمال $0 < w < 80 \quad , \quad f_W(w) = 3\times 80^{-3} w^2$ باشد. مطلوبست $P(\sum_{i=1}^{100} w_i > 6025)$.

تمرین 4 : یکصد پیچ کوچک در یک قوطی بسته بندی شده است. هر پیچ با انحراف استاندارد 0/01 اونس به اندازه 1 اونس وزن دارد. احتمال اینکه وزن یک قوطی بیشتر از 102 اونس باشد را بدست آورید.

تمرین 5 : یک اتوبوس بین دو شهر حرکت می کند و در بین راه از 8 شهر دیگر نیز عبور می نماید. میانگین و انحراف استاندارد زمانهای سفر بصورت زیر است :

محدوده سفر	زمان میانگین (ساعت)	انحراف استاندارد (ساعت)
1-2	3	0/4
2-3	4	0/6
3-4	3	0/3
4-5	5	0/2
5-6	7	0/9
6-7	5	0/4
7-8	3	0/4

احتمال اینکه این اتوبوس مسافرت خود را در عرض 32 ساعت تمام کند چقدر است ؟

قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مستقل:

اگر X_1 ، X_2 و .... X_n ، n متغیر تصادفی مستقل و هر کدام دارای میانگین μ_i و واریانس δ_i^2 باشند، آنگاه در صورتی که $n \to \infty$ (یا $n > 30$) :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}} \sim N(0,1) \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}} \sim N(0,1)$$

مثال: در یک پروژه ساختمانی، شبکه ای از فعالیتهای عمده آن تهیه شده تا مبنایی برای برنامه ریزی و زمانبندی پروژه باشد. در مسیر بحرانی، 16 فعالیت وجود دارد که میانگین و واریانس آنها مطابق جدول زیر است. زمان فعالیتها را می توان مستقل از هم در نظر گرفت و زمان پروژه عبارتست از مجموع زمان فعالیتهای مسیر بحرانی. بعبارت دیگر $Y = X_1 + X_2 + ... + X_{16}$ که در آن Y زمان پروژه و X_i زمان i امین فعالیت است. اگرچه توزیع X_i ها نا معلوم است ولی توزیع ها نسبتا خوش رفتارند. پیمانکار ساختمانی می خواهد بداند:

الف- زمان قابل انتظار تکمیل پروژه چقدر است؟

ب- با احتمال 0/9 پروژه در چه مدتی تمام خواهد شد ؟

فعالیت	میانگین	واریانس
1	2/7	1
2	3/2	1/3
3	4/6	1
4	2/1	1/2
5	3/6	0/8
6	5/2	2/1
7	7/1	1/9
8	1/5	0/5

فعالیت	میانگین	واریانس
9	3/1	1/2
10	4/2	0/8
11	3/6	1/6
12	0/5	0/2
13	2/1	0/6
14	1/5	0/7
15	1/2	0/4
16	2/8	0/7

جواب :

الف- با محاسبه μ_y و δ_y^2 داریم :

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{16} \mu_i = 49$$

$$\delta_y^2 = \sum_{i=1}^{16} \delta_i^2 = 16$$

در نتیجه زمان قابل انتظار برای تکمیل پروژه 49 هفته است.

ب- با توجه به قضیه حد مرکزی داریم :

$$P(\sum_{i=1}^{16} X_i < a) = 0.9$$

$$P(\frac{\sum_{i=1}^{16} X_i - \sum_{i=1}^{16} \mu_i}{\sum_{i=1}^{16} \delta_i^2} < \frac{a-49}{4}) = 0.9$$

$$\frac{a-49}{4} = 1.282 \Rightarrow a = 54.128$$

بنابراین با احتمال 0/9 پروژه در 54/128 هفته تمام خواهد شد.

قانون اعداد بزرگ :

این قانون بیان می کند که دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان، با احتمال یک، به میانگین آن توزیع میل می کند.

بعبارت دیگر اگر X_1 ، X_2 و .... X_n ، n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین مشترک μ باشند، آنگاه با احتمال یک :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \mu$$

یا :

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \mu\} = 1$$

فصل ششم: متغیرهای تصادفی با توزیع احتمال توام

در بسیاری از موارد لازم است تا بطور همزمان با دو یا چند متغیر تصادفی سرو کار داشته باشیم. مثلا ممکن است نمونه هایی از ورق های فولادی ساخته شده را انتخاب و استحکام برشی و صافی سطح را اندازه گیری کنیم. بنابراین هم استحکام برشی و هم صافی سطح، متغیرهای تصادفی مورد نظر هستند. هدف این فصل این است که توزیع های احتمال توام برای دو یا چند متغیر تصادفی را فرموله نماید.

توزیع احتمال توام در حالت گسسته :

تابع $f_{X,Y}(x,y)$ تابع احتمال توام متغیرهای تصادفی گسسته X و Y است اگر :

1) برای هر $(x,y)\in R_{[x,y]}$ آنگاه $0\le f_{X,Y}(x,y)\le 1$

2) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y)=1$

3) $P[(x,y)\in A]=\sum\sum_A f_{X,Y}(x,y)$

مثال 1 : آزمایشی که شامل پرتاب همزمان یک جفت تاس می‌شود را در نظر بگیرید. اگر متغیر تصادفی X به صورت نتیجه تاس اول و متغیر تصادفی Y به صورت نتیجه تاس دوم تعریف شود، آنگاه :

الف- توزیع احتمال توام X و Y را به دست آورید.

ب- مطلوبست $P(2\le x\le 3\ ,\ 1\le y\le 2)$

جواب :

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{36}$$

$$P(2\le x\le 3\ ,\ 1\le y\le 2)=\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y)=$$

$$f(2,1)+f(2,2)+f(3,1)+f(3,2)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{4}{36}$$

مثال 2 : مقدار k را طوری تعیین کنید که تابع $y=1,2,3$ و $x=1,2,3$ و $f_{X,Y}(x,y)=kxy$ را بتوان بعنوان تابع احتمال توام بکار برد؟

جواب :

$$\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y)=1$$

$$f(1,1)+f(1,2)+f(1,3)+f(2,1)+f(2,2)+f(2,3)+f(3,1)+f(3,2)+f(3,3)=1$$

$$k + 2k + 3k + 2k + 4k + 6k + 3k + 6k + 9k = 1$$

$$k = \frac{1}{36}$$

مثال 3 : فرض کنید سه توپ بطور تصادفی از جعبه‌ای که شامل 3 توپ قرمز، 4 توپ سفید و 5 توپ آبی است انتخاب می‌شود. اگر متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب نشان دهنده تعداد توپهای قرمز و سفید در این جعبه باشند آنگاه تابع احتمال توام X و Y را به دست آورید.

جواب :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$$

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0

مثال 4 : اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمالی توام زیر باشند، مطلوب است محاسبه احتمالات زیر.

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	
3	$\frac{1}{120}$		

1) $P(x=0\ ,\ 1 \le y < 3)$

2) $P(x+y \le 1)$

3) $P(x > y)$

جواب :

$$P(x=0\ ,\ 1 \le y < 3) = f(0,1) + f(0,2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(x+y \le 1) = f(0,1) + f(1,0) + f(0,0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(x>y)=f(1,0)+f(2,0)+f(2,1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}=\frac{11}{40}$$

مثال 5 : فرض کنید در جامعه ای 15 درصد از خانواده ها بدون فرزند، 20 درصد دارای 1 فرزند، 35 درصد دارای 2 فرزند، 30 درصد دارای 3 فرزند هستند. همچنین فرض کنید در هر خانواده، هر فرزند شانس مساوی برای پسر یا دختر بودن دارد. اگر یک خانواده بتصادف از این جامعه انتخاب شود و متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب نشان دهنده تعداد پسرها و دخترهای آن خانواده باشد، آنگاه تابع احتمال توام X و Y را به دست آورید.

P(X=0,Y=0) = P(هیچ فرزند در خانواده نباشد) = 0/15

P(X=0,Y=1) = P(یک فرزند در خانواده باشد و آنهم دختر) = P(یک فرزند در خانواده باشد) ×

P(یک دختر | یک فرزند در خانواده باشد) = $0/2\times\frac{1}{2}=0/1$

P(X=0,Y=2) = P(دو فرزند در خانواده باشد و هر دو دختر) = P(دو فرزند در خانواده باشد) ×

P(دو دختر | دو فرزند در خانواده باشد) = $0/35\times(\frac{1}{2})^2=0/0875$

P(X=2,Y=1) = P(سه فرزند در خانواده باشد که یکی دختر و 2 تا پسر) = P(سه فرزند در خانواده باشد) ×

P(یکی دختر و 2 تا پسر | سه فرزند در خانواده باشد) = $0/3\times\binom{3}{1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2=0/1125$

X \ Y	0	1	2	3
0	0.15	0.1	0.0875	0.0375
1	0.1	0.175	0.1125	0
2	0.0875	0.1125	0	0
3	0.0375	0	0	0

تابع توزیع تجمعی توام متغیرهای گسسته :

برای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y با تابع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ ، تابع تجمعی توام آنها بصورت زیر تعریف می شود :

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x\ ,\ Y\le y)=\sum_{X\le x}\sum_{Y\le y}f_{X,Y}(x,y)$$

بعبارت دیگر :

$$F_{X,Y}(a,b)=P(X\le a\ ,\ Y\le b)=\sum_{X\le a}\ \sum_{Y\le b}f_{X,Y}(x,y)$$

مثال 1 : برای متغیرهای تصادفی X و Y با تابع احتمال توام زیر، تابع توزیع تجمعی را بدست آورید.

y \ x	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

جواب :

$$F_{X,Y}(2,2) = f(X \le 2\ ,\ Y \le 2) =$$
$$f(1,1)+f(1,2)+f(1,0)+f(2,1)+f(2,2)+f(2,0)+f(0,1)+f(0,2)+f(0,0)=1$$

(X,Y)	(0و0)	(0و1)	(0و2)	(1و0)	(1و1)	(1و2)	(2و0)	(2و1)	(2و2)
$F_{X,Y}(X,Y)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{25}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{27}{28}$	1

تابع توزیع حاشیه‌ای (کناری) متغیرهای گسسته:

توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y که توزیع احتمال توام آنها بصورت $f_{X,Y}(x,y)$ می باشد عبارتست از:

$$g_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

$$h_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته X را می توان از تابع تجمعی توام X و Y بصورت زیر بدست آورد :

$$F_X(a) = F_{X,Y}(a,\infty)$$

همچنین تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته Y را می توان از تابع تجمعی توام X و Y بصورت زیر بدست آورد :

$$F_Y(b) = F_{X,Y}(\infty,b)$$

$F_X(a)$ و $F_Y(b)$ را توابع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y می نامند.

مثال 1 : برای متغیرهای تصادفی X و Y با تابع احتمال توام زیر، تابع توزیع حاشیه‌ای X و Y را بدست آورید.

y \ x	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

جواب :

$$g_x(0)=\frac{3}{28}+\frac{6}{28}+\frac{1}{28}=\frac{10}{28}$$

x	0	1	2
$g_x(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$h_y(2)=\frac{1}{28}$$

Y	0	1	2
$h_Y(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

تمرین : یک ظرف شامل 4 مهره است که بر روی 2 مهره عدد 1 و بر روی دو مهره دیگر عدد 2 نوشته شده است. دو مهره به تصادف بدون جایگذاری از ظرف بیرون می کشیم. اگر X نشان دهنده عدد کوچکتر بر روی مهره‌ها و Y نشان دهنده عدد بزرگتر باشد مطلوبست تابع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ و تابع احتمال حاشیه‌ای متغیرهای X و Y؟

نحوه محاسبه گزاره های احتمالی X و Y از روی $F_{X,Y}(a,b)$:

$$\begin{aligned}P(x>a\ ,y>b)&=1-P(\{x>a\ ,y>b\}')\\&=1-P(\{x>a\}'\cup\{y>b\}')\\&=1-P(\{x\le a\}\cup\{y\le b\})\\&=1-[P\{x\le a\}+P\{y\le b\}-P\{x\le a\},\{y\le b\}]\\&=1-F_X(a)-F_Y(b)+F(a,b)\end{aligned}$$

$$P(a_1<x<a_2\ ,b_1<x<b_2)=F(a_1,b_1)+F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)$$

تابع احتمال توام متغیرهای پیوسته X و Y:

تابع احتمال $f_{X,Y}(x,y)$ را تابع احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y می گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$1)\ 0\le f(x,y)\le 1$$

$$2)\ \iint_{xy} f(x,y)dydx=1$$

$$3)\ P[(x,y)\in A]=\iint_A f_{X,Y}(x,y)dydx$$

تابع توزیع تجمعی متغیرهای پیوسته X و Y :

برای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y با تابع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$، تابع تجمعی توام آنها بصورت زیر تعریف می شود :

$$F_{x,y}=p(X\le x\ ,\ Y\le y)=\int_{\min(x)}^{x}\int_{\min(y)}^{y} f_{X,Y}(x,y)dydx$$

تابع توزیع حاشیه‌ای (کناری) متغیرهای پیوسته:

توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y که توزیع احتمال توام آنها بصورت $f_{X,Y}(x,y)$ می باشد عبارتست از:

$$g_X(x)=\int_y f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$h_Y(y)=\int_x f_{X,Y}(x,y)dx$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $x,y\ge 0$ و $f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)}$ باشد مطلوبست:

1) تابع حاشیه‌ای X و Y

2) $p(X\le 1\ ,\ Y\le 1)$

3) $p(x+y\le 1)$

جواب :

$$g_X(x)=\int_y f_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$$

$$h_Y(y)=\int_x f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

$$p(X\le 1\ ,\ Y\le 1)=\iint_{x,y} e^{-(x+y)}dydx=\left[\int_0^1 e^{-x}dx\right]\left[\int_0^1 e^{-y}dy\right]=\left(1-e^{-1}\right)^2$$

$$P(x+y\le 1)=\int_0^1\int_0^{1-y} e^{-(x+y)}dxdy=1-2e^{-1}$$

مثال2 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $0<x<y$, $f_{X,Y}(x,y)=e^{-y}$ باشد مطلوب است تابع حاشیه‌ای X و Y؟

جواب :

$$g_X(x)=\int_x^\infty e^{-y}dy=e^{-x}\quad ,\ x>0$$

$$h_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=y\ e^{-y}\quad ,\ y>0$$

مثال3 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $x,y>0$, $f_{X,Y}(x,y)=2e^{-x}e^{-2y}$ باشد مطلوب است $P(x<y)$.

جواب :

$$P(x<y)=\int_0^\infty\int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}dxdy=\int_0^\infty 2e^{-2y}[\int_0^y e^{-x}dx]dy$$

$$= \int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

تمرین 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y) = 2 \ , \ 0<x<1 \ , \ 0<y<1 \ , \ 0<x+y<1$ باشد مطلوب است $P(x<\frac{3}{4} \ , \ y<\frac{3}{4})$.

تمرین 2 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y) = 6x \ , \ 0<x<y<1$ باشد مطلوب است $P(x+y<1)$.

تمرین 3 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y) = k(6-x-y) \ , \ 0<x<2 \ , \ 2<y<4$ باشد مطلوب است :

الف- مقدار مناسب k

ب- $P(x<1 \ , \ y<3)$.

ج- $P(x<1.5)$.

د- چگالی های حاشیه ای X و Y

تمرین 4 : اگر تابع احتمال توام X و Y و W و Z به صورت زیر باشد :

$$f_{X,Y}(x,y,w,z) = 16xywz \ , \ 0<x,y,w,z<1$$

مطلوب است :

الف- $P(y<\frac{1}{2} \ , \ w<\frac{2}{3})$.

ب- $P(x<\frac{1}{2} \ , \ z<\frac{1}{4})$.

ج- چگالی حاشیه ای W

تمرین 5 : فرض کنید متغیرهای X و Y به ترتیب معرف نسبتی از یک روز که درخواستی برای یک کالا می رسد و نسبتی از یک روز که محموله دریافت می شود هستند. تابع احتمال توام آنها به صورت زیر است :

$$f_{X,Y}(x,y) = 1 \ , \ 0<x \ , \ y<1$$

الف- احتمال اینکه هم درخواست کالا و هم تحویل یک سفارش در نیمه اول روز اتفاق افتد چقدر است ؟

ب- احتمال اینکه درخواست کالا بعد از دریافت آن باشد چقدر است؟ قبل از دریافت آن چطور؟

ج- فرض کنید این کالا بسیار فاسد شدنی است و باید در فاصله ($\frac{1}{4}$) روز بعد از ورود آن درخواست شود. احتمال اینکه این کالا فاسد نشود چقدر است ؟

تمرین 6 : اگر تابع احتمال توام X و Y بصورت $f(x,y)=\frac{1}{y}\ ,0< x<y\ ,0< y<1$ باشد، مطلوبست:

$P\left(x+y>\frac{1}{2}\right)$

توزیع شرطی توام متغیرهای گسسته :

توزیع شرطی متغیرهای تصادفی توام گسسته X و Y از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(x=x\mid y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}\quad ,\quad P(Y=y)\neq 0$$

$$P(x\in A\mid y=y)=\sum_{A}P(x|y)$$

اگر متغیرهای X و Y مستقل باشند آنگاه :

$$P(x=x\mid y=y)=P(X=x)$$

تابع توزیع تجمعی شرطی متغیرهای گسسته :

تابع توزیع تجمعی شرطی متغیرهای گسسته X و Y از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F(X=x\mid Y=y)=\frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}=\frac{P(X\le x,Y\le y)}{P(Y\le y)}$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای گسسته X و Y به صورت زیر باشد مطلوب است : $P_{y|x}(4|2)$ ، $F_{x|y}(3\mid 2)$،

$P_{y|x}(Y\le 3\mid x=2)$

$Y \backslash X$	1	2	3	**4**
1	$\frac{1}{16}$			
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$		
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

جواب :

$$P_{y|x}(4\,|\,2)=\frac{P(y=4\,,\,x=2)}{P(x=2)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}}=\frac{1}{4}$$

$$F_{x|y}(3|2)=\frac{P(x\le 3\,,\,y\le 2)}{P(y\le 2)}=\frac{\frac{4}{16}}{\frac{4}{16}}=1$$

$$P_{y|x}(Y\le 3\,|\,x=2)=\frac{P(y\le 3\,,\,x=2)}{P(x=2)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}}=\frac{3}{4}$$

تمرین 1 : اگر تعداد مشتریانی که در ساعت اول وارد مغازه ای می شوند را با X و تعداد مشتریانی که در دومین ساعت وارد می شوند را با Y نشان دهیم و فرض کنیم که این دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر و دارای توزیع پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند، مطلوب است تابع توزیع X با آگاهی از اینکه $X+Y=n$.

تمرین 2 : در یک کارخانه یخچال سازی محصولات نهایی مورد آزمایش قرار می گیرند. دو دسته نواقص مورد توجه است :

- اشکالات ظاهری محصول
- نواقص مکانیکی

تعداد هر دسته از نواقص یک متغیر تصادفی است. نتایج آزمایش 50 یخچال در جدول زیر آمده است که X معرف وقوع نواقص ظاهری و Y معرف وقوع نواقص مکانیکی است.

الف- توزیع حاشیه ای X و Y را پیدا کنید.

ب- توزیع احتمال نواقص مکانیکی، به شرط اینکه نواقص ظاهری وجود نداشته باشد را بدست آورید.

ج- توزیع احتمال نواقص ظاهری، به شرط اینکه نواقص مکانیکی وجود نداشته باشد را بدست آورید.

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{11}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$
1	$\frac{8}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	
2	$\frac{4}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$		
3	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{50}$				
4	$\frac{1}{50}$					

توزیع شرطی توام متغیرهای پیوسته :

توزیع شرطی متغیرهای تصادفی توام پیوسته X و Y از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_{x|y}(x \mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$P(a<x<b \mid y=c)=\int_a^b f_{X|Y}(x \mid c)dx$$

تابع توزیع تجمعی شرطی متغیرهای پیوسته :

تابع توزیع تجمعی شرطی متغیرهای پیوسته X و Y از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_{x|y}(x \mid y)=\frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $0<x,y<1$; $f_{X,Y}(x,y)=\frac{12}{5}x(2-x-y)$ باشد مطلوب است:

الف) $f_{X|Y}(x \mid y)$

ب) $F_{y|x}(y \mid x)$

جواب :

الف-

$$f_{x|y}(x \mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_y(y)=\int_x f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^1 \frac{12}{5}x(2-x-y)dx=\frac{8}{5}-\frac{6}{5}yT \quad ، \quad 0<y<1$$

$$f(x|y)=\frac{\frac{12}{5}x(2-x-y)}{\frac{8}{5}-\frac{6}{5}y}$$

ب-

$$F_{y|x}(y|x)=\int_0^y f_{y|x}(y|x)dy$$

$$f_x(x)=\int_0^1 \frac{12}{5}x(2-x-y)dy=\frac{12}{5}x(\frac{3}{2}-x)$$

$$f_{y|x}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{12}{5}x(2-x-y)}{\frac{12}{5}x(\frac{3}{2}-x)}=\frac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x}$$

$$F_{y|x}(y|x)=\int_0^y f_{y|x}(y|x)dy=\int_0^y \frac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x}dy=\frac{1}{\frac{3}{2}-x}(2y-xy-\frac{1}{2}y^2)$$

مثال2 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $x,y>0$; $f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-(\frac{x}{y})}e^{-y}}{y}$ باشد مطلوب است :

الف) $f(x|y)$

ب) $f(x>1|y)$

جواب :

الف-

$$f_{X,Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y)=\int_x f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^\infty \frac{e^{-(\frac{x}{y})}e^{-y}}{y}dx=e^{-y}\int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y})}dx=e^{-y}$$

$$f(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{y}e^{-y}e^{-(\frac{x}{y})}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y})}$$

ب-

$$f(x>1|y)=\int_1^\infty f(x|y)dx=\int_1^\infty \frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y})}dx=-e^{-(\frac{x}{y})}|_1^\infty=e^{-(\frac{1}{y})}$$

مثال 3 : اگر تابع احتمال تـوام X , Y , Z بـه صـورت $0 < x, y, z < 1$, $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 8xyz$ باشـد مطلـوب است:

$$P(x < \frac{1}{2} \mid y < \frac{1}{2} , Z = \frac{1}{2})$$

جواب :

$$P(x < \frac{1}{2} \mid y < \frac{1}{2} , Z = \frac{1}{2}) = \frac{P(x < \frac{1}{2} \;,\; y < \frac{1}{2} \;,\; Z = \frac{1}{2})}{P(y < \frac{1}{2} \;,\; Z = \frac{1}{2})}$$

$$P(x < \frac{1}{2} \;,\; y < \frac{1}{2} \;,\; Z = \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} 4xy \; dxdy = \frac{1}{16}$$

$$P(y < \frac{1}{2} \;,\; Z = \frac{1}{2}) = \int_0^{1} \int_0^{\frac{1}{2}} 4xy \; dydx = \frac{1}{4}$$

$$P(x < \frac{1}{2} \mid y < \frac{1}{2} \;,\; Z = \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

مثال 4 : اگر تابع احتمال توام X , Y به صورت $0 < y < 2$, $0 < x < y$; $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}$ باشد مطلوب اسـت :

$$P(x < \frac{1}{2} \mid y = 1)$$

جواب :

$$P(x < \frac{1}{2} \mid y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x < \frac{1}{2} \;,\; y = 1)}{f_Y(y = 1)}$$

$$f_{X,Y}(x < \frac{1}{2} \;,\; y = 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{4}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{y} \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2} y \Rightarrow f_Y(y = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(x < \frac{1}{2} \mid y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x < \frac{1}{2} \;,\; y = 1)}{f_y(y = 1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

تمرین 1 : اگر تابع توزیع تجمعی متغیر X به صورت $x \ge 0 \quad ; \quad F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-(\frac{x}{3})} - \frac{1}{2}e^{-\left[\frac{x}{3}\right]}$ باشد مطلوب است : $P(x < 9 \mid x > 5)$

تمرین 2 : اگر x_2, x_1 دو نمونه تصادفی از توزیع $0 < x < 1 \quad ; \quad f_X(x) = 2x$ باشد مطلوب است :

$P(x_1 < x_2 \mid x_1 < 2x_2)$

تمرین 3 : اگر تابع احتمال توام Y, X به صورت $x > 0 \ , y > 0 \quad ; \quad f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}$ باشد مطلوب است :

$P(1 < x + y < 2)$ و $P(x < y \mid x < 2y)$

تمرین 4 : اگر تابع احتمال شرطی متغیرهای x_2, x_1 به صورت $0 < x_2 < 1 \ , \ 0 < x_1 < x_2 \quad ; \quad f(x_1|x_2) = \frac{c_1 x_1}{x_2^2}$ و $0 < x_2 < 1 \ , \ 0 < x_1 < x_2 \quad ; \quad f_{X_2}(x_2) = c_2 x_2^4$ باشد مطلوب است :

الف- c_2, c_1

ب- تابع احتمال توام x_1 ، x_2

ج- $P(\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2})$

د- $P(\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2} \mid x_2 = \frac{5}{8})$

تمرین 5 : اگر تابع احتمال توام Y, X به صورت $y > 0 \ , \ x > 0 \ , \ x + y < 1 \quad ; \quad f_{X,Y}(x, y) = 2$ باشد مطلوب است :

الف- $P(x + y > \frac{2}{3})$

ب- $P(x > 2y)$

امید ریاضی توابعی از دو متغیر تصادفی پیوسته و گسسته :

اگر تابع احتمال توام متغیرهای Y, X به صورت $f_{X,Y}(x, y)$ باشد و $g(x, y)$ یک تابع از متغیرهای Y, X باشد، امید ریاضی $g(x, y)$ در حالت گسسته و پیوسته از روابط زیر بدست می‌آیند:

پیوسته　$E(g(x, y)) = \int_x \int_y g(x, y) \cdot f_{X,y}(x, y)\, dy dx$

گسسته　$E(g(x, y)) = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot f_{X,y}(x, y)$

مثال : اگر Y, X متغیرهای تصادفی مستقل از هم و دارای تابع احتمال یکنواخت در فاصله $(0 \ , \ L)$ باشند مطلوب است

$$E(|X-Y|)$$

جواب :

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{L^2} \quad ; \quad 0<x,y<L$$

$$E(|x-y|)=\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L |x-y| \, dydx$$

اما :

$$\int_0^L |x-y| \, dy = \int_0^x (x-y)dy + \int_x^L (y-x)dy = \frac{L^2}{2}+x^2-xL$$

بنابر این :

$$E(|x-y|)=\frac{1}{L^2}\int_0^L (\frac{L^2}{2}+x^2-xL)dx=\frac{L}{3}$$

امید ریاضی مجموع متغیرهای تصادفی:

فرض کنید A_1 و A_2 و ...... و A_n نشان دهنده n پیشامد باشند و متغیرهای تصادفی نشانگر X_i $(i=1,2,....,n)$ را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{اگر } A_i \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{اگر } A_i \text{ رخ ندهد}\end{cases}$$

اگر X را بصورت زیر در نظر بگیریم :

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

آنگاه X نشان دهنده تعداد پیشامدهای A_i است که رخ داده اند لذا :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

مثال 1 : با استفاده از مطالب فوق مطلوب است امید ریاضی متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای n و p .

جواب :

اگر X_1 و X_2 و ...... و X_n نشان دهنده n متغیر برنولی باشند و متغیر تصادفی X نشان دهنده متغیر دوجمله ای باشد آنگاه :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

بطوریکه :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر i امین آزمایش ساده موفقیت باشد} \\ 0 & \text{اگر i امین آزمایش ساده شکست باشد} \end{cases}$$

$$E(X_i) = P$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = nP$$

مثال 2 : ده شکارچی منتظر دسته ای مرغابی هستند. وقتی که دسته ای از مرغابی ها بالای سرشان پـرواز مـی کننـد، شکارچیان همزمان شلیک می کنند، اما هرکدام به تصادف و مستقل از دیگران هدف خود را انتخاب می کند. اگـر هـر شکارچی هدف خود را مستقل از دیگری با احتمال P بزند متوسط تعداد مرغابی های فرار کرده را وقتی یک دسـته ده تایی از مرغابی ها به پرواز در می آیند، حساب کنید.

جواب :

فرض کنید :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر i امین مرغابی فرار کند} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_{10})$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1)$$

برای محاسبه $P(X_i = 1)$ توجه کنید که هر یک از شکارچیان بطور مستقل i امین مرغابی را با احتمال $\frac{P}{10}$ خواهد زد، پس :

$$P(X_i = 1) = (1 - \frac{P}{10})^{10}$$

بنابراین :

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_{10}) = 10(1 - \frac{P}{10})^{10}$$

امید ریاضی حاصلضرب متغیرهای تصادفی مستقل :

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه برای توابع $g(x)$ و $h(y)$ داریم :

$$E(g(x).h(y)) = E(g(x)).E(h(y))$$

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی :

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی Y, X با توزیع احتمال توام $f_{X,Y}(x, y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \delta_{XY} = E[(x - E(x))(y - E(y))]$$

همان گونه که امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی اطلاعاتی در رابطه با متغیر تصادفی ارایه می دهند، کوواریانس بین دو متغیر تصادفی نیز اطلاعاتی را در مورد رابطه بین دو متغیر تصادفی ارایه می دهد.

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی معیاری است برای اندازه‌گیری میزان ارتباط خطی موجود بین آنها. علامت کوواریانس (+ یا −) نشانگر این است که آیا رابطه خطی بین دو متغیر مثبت است یا منفی. هر قدر مقدار کوواریانس از لحاظ قدر مطلق بیشتر باشد میزان ارتباط خطی بیشتر خواهد بود.

کوواریانس دو متغیر تصادفی گسسته:

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی گسسته Y, X با توزیع احتمال توام $f_{X,Y}(x, y)$ از رابطه زیر بدست می آید :

$$\delta_{xy} = \sum_x \sum_y (x - E(x))(y - E(y)) f_{X,Y}(x, y)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی پیوسته:

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی پیوسته Y, X با توزیع احتمال توام $f_{X,Y}(x, y)$ از رابطه زیر بدست می آید :

$$\delta_{xy} = \int_x \int_y (x - E(x))(y - E(y)) f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

رابطه محاسبه کوواریانس :

رابطه زیر راه آسانتری را جهت محاسبه کوواریانس بین دو متغیر تصادفی بیان می کند ، بدین صورت که کوواریانس بین دو متغیر تصادفی Y, X عبارتست از :

$$\delta_{xy} = E(xy) - E(x).E(y)$$

توجه کنید که این رابطه از بسط طرف راست رابطه $\delta_{XY} = E[(x - E(x))(y - E(y))]$ بدست آمده است.

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت جدول زیر باشد مطلوب است محاسبه کوواریانس X و Y؟

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{6}{28}$	-
2	$\frac{3}{28}$	-	-

جواب :

$$E(xy)=\sum_x\sum_y xyf_{X,Y}(x,y)=0\times0\times\frac{3}{28}+......+2\times2\times0=\frac{3}{14}$$

y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

$$E(y)=\sum_y yh(y)=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$$

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$E(x)=\sum_x\sum_y xf_{X,Y}(x,y)=\sum_x xg(x)=0\times\frac{10}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$$

$$\delta_{xy}=E(xy)-E(x).E(y)$$

$$\delta_{xy}=\frac{3}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=-\frac{9}{56}$$

مثال 2 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $0<x<1\ ,0<y<x$ ، $f_{X,Y}(x,y)=8xy$ باشد مطلوب است محاسبه کوواریانس X و Y؟

جواب :

$$E(xy)=\iint xyf_{X,Y}(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^x 8x^2y^2dydx=\frac{8}{18}$$

$$g(x)=\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^x 8xydy=4x^3 \quad , \quad 0<x<1$$

$$E(x)=\int xg(x)dx=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}$$

$$h(y)=\int f_{X,Y}(x,y)dx=\int_y^1 8xydx=4y(1-y^2) \quad , \quad 0<y<1$$

$$E(y)=\int yh(y)dy=\int_0^1 4y^2(1-y^2)dy=\frac{8}{15}$$

$$\delta_{xy} = E(xy) - E(x)E(y) = \frac{8}{18} - \frac{4}{5} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{225}$$

قضیه : اگر X و Y متغیرهای مستقل از هم باشند، آنگاه کوواریانس بین آنها صفر است اما عکس این حالت لزوماً صادق نیست. موارد زیادی می‌توانند وجود داشته باشند که کوواریانس بین دو متغیر صفر باشد اما متغیرها از همدیگر مستقل نباشند.

مثال 1 : اگر متغیر تصادفی X بصورت $P(X=0) = P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{3}$ و متغیر تصادفی Y بصورت $Y = \begin{cases} 1 & , \quad X \neq 0 \\ 0 & , \quad X = 0 \end{cases}$ تعریف شود مطلوبست کوواریانس بین دو متغیر.

جواب :

چون $XY = 0$ است، پس $E(XY) = 0$ است. همچنین $E(X) = 0$ است لذا داریم :

$$\delta_{xy} = E(xy) - E(x)E(y) = 0$$

اما روشن است که Y, X مستقل از هم نیستند.

مثال 2 : اگر x متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله (2و2-) باشد مطلوب است $\operatorname{cov}(x, x^2)$؟

جواب :

$$\operatorname{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$\operatorname{cov}(x, x^2) = E(x^3) - E(x)E(x^2)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -2 < x < 2 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

$$E(x^3) = \int_{-2}^{2} x^3 \frac{1}{4} dx = \frac{x^2}{16}\Big|_{-2}^{2} = 0$$

$$E(x^2) = \int_{-2}^{2} x^2 \frac{1}{4} dx = \frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^{2} = \frac{4}{3}$$

$$E(x) = \int_{-2}^{2} x \frac{1}{4} dx = \frac{x^2}{8}\Big|_{-2}^{2} = 0$$

$$\operatorname{cov}(x, x^2) = E(x^3) - E(x)E(x^2) = 0$$

ملاحظه می شود $\operatorname{cov}(x, x^2) = 0$ اما روشن است که x^2, x مستقل از هم نیستند.

تمرین 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت جدول زیر باشد مطلوب است محاسبه کوواریانس X و Y؟

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$

تمرین 2 : یک شرکت اتوبوسرانی شهری در موقع خرابی اتوبوس ها، ماشینی را جهت انتقال آنها به تعمیرگاه می فرستد. توزیع توام تعداد این درخواستها که در روزها دوشنبه و سه شنبه دریافت می شود بصورت جدول ذیل است. اگر X_1 معرف تعداد درخواست ها در دوشنبه و X_2 معرف تعداد درخواست ها در سه شنبه باشد، مطلوبست کوواریانس X_1 و X_2.

X_2 \ X_1	0	1	2	3	4
0	0/02	0/04	0/06	0/04	0/04
1	0/02	0/04	0/06	0/04	0/04
2	0/01	0/02	0/03	0/02	0/02
3	0/04	0/08	0/12	0/08	0/08
4	0/01	0/02	0/03	0/02	0/02

خواص مربوط به کوواریانس :

گزاره های زیر برخی از خواص کوواریانس را بیان می کند :

$1)\ \mathrm{cov}(x,y)=\mathrm{cov}(y,x)$

$2)\ \mathrm{cov}(ax,y)=a\,\mathrm{cov}(x,y)$

$3)\ \mathrm{cov}(x,x)=\mathrm{var}(x)$

$4)\ \mathrm{cov}(x+z,y)=\mathrm{cov}(x,y)+\mathrm{cov}(z,y)$

$5)\ \mathrm{cov}(\sum_i x_i,\sum_j y_j)=\sum_i\sum_j \mathrm{cov}(x_i,y_j)$

مثال : اگر x_1 ، x_2 ، x_3 متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد و دو به دو ناهمبسته و $U=x_1+x_2+x_3$ و $V=x_1$ باشند، آنگاه مطلوب است $\mathrm{cov}(U,V)$.

جواب :

$$\mathrm{cov}(x_1+x_2+x_3,x_1)=\mathrm{cov}(x_1,x_1)+\mathrm{cov}(x_2,x_1)+\mathrm{cov}(x_3,x_1)=\mathrm{var}(x_1)=1$$

تمرین 1 : اگر تابع احتمال توام x_1, x_2, x_3 به صورت زیر باشد، مطلوب است $\mathrm{cov}(x_1,x_3)$ ؟

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)e^{-x_3}\ ,\ 0<x_1x_2<1\ ,\ x_3>0$$

تمـــرین 2 : اگـــر تـــابع احتمـــال شـــرطی متغیرهـــای x_1 , x_2 بـــه صـــورت $x_1<x_2<x_1+1 \quad ; \quad f(x_2|x_1)=1$ و $f_{X_1}(x_1)=1 \quad ; \quad 0<x_1<1$ باشد مطلوب است :

الف - $\operatorname{cov}(x_1,x_2)$

ب- $P(x_1+x_2<1)$

ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی :

ضریب همبستگی دو متغیر X و Y از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho(x,y)=\frac{\delta_{xy}}{\delta_x.\delta_y}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x).\operatorname{var}(y)}}$$

$$-1\le\rho(x,y)\le1$$

ضریب همبستگی معیاری است جهت اندازه‌گیری ارتباط خطی بین دو متغیر تصادفی. ضریب همبستگی همواره بین 1- و 1 تغییر می‌کند. (که شامل خود 1+ و 1- نیز می‌باشد) بدین صورت که مقادیر 1+ و 1- نمایانگر همبستگی کامل و مقدار صفر نمایانگر عدم همبستگی بین دو متغیر می‌باشد.

اگر ضریب همبستگی علامت + داشته باشد نشانگر این موضوع است که هرچقدر X افزایش یابد، Y نیز افزایش می‌یابد و یا هرچقدر X کاهش یابد، Y نیز کاهش می‌یابد.

اگر ضریب همبستگی علامت − داشته باشد نشانگر این موضوع است که در صورت افزایش یکی از متغیرها انتظار می‌رود که متغیر دیگر کاهش یابد.

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت جدول زیر باشد مطلوب است محاسبه ضریب همبستگی X و Y؟

جواب :

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{6}{28}$	-
2	$\frac{3}{28}$	-	-

$$E(xy)=\sum_x\sum_y xy\ f_{X,Y}(x,y)=0\times0\times\frac{3}{28}+......+2\times2\times0=\frac{3}{14}$$

y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

$$E(y)=\sum_y yh(y)=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$$

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$E(x)=\sum_x xg(x)=0\times\frac{10}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$$

$$\delta_{xy}=E(xy)-E(x).E(y)$$

$$\delta_{xy}=\frac{3}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=-\frac{9}{56}$$

$$\operatorname{var}(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

$$E(x^2)=\sum_x x^2.g(x)=\frac{27}{28} \qquad \operatorname{var}(x)=\frac{27}{28}-(\frac{3}{4})^2=\frac{45}{112}$$

$$E(y^2)=\sum_y y^2.g(y)=\frac{16}{28} \qquad \operatorname{var}(y)=\frac{16}{28}-(\frac{1}{2})^2=\frac{9}{28}$$

$$\rho(x,y)=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x).\operatorname{var}(y)}}=\frac{-\frac{9}{56}}{\sqrt{\frac{45}{112}\times\frac{9}{28}}}=-0.447$$

مثال 2 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $0<y<x \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad f_{X,Y}(x,y)=8xy$ باشد مطلوب است محاسبه ضریب همبستگی X و Y؟

جواب :

$$E(xy)=\iint xy\, f_{X,Y}(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^x 8x^2y^2dydx=\frac{8}{18}$$

$$g(x)=\int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^x 8xydy=4x^3 \quad , \quad 0<x<1$$

$$E(x)=\int xg(x)dx=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}$$

$$h(y)=\int f_{X,Y}(x,y)dx=\int_y^1 8xydx=4y(1-y^2) \quad , \quad 0<y<1$$

$$E(y)=\int yh(y)dy=\int_0^1 4y^2(1-y^2)dy=\frac{8}{15}$$

$$\delta_{xy}=E(xy)-E(x)E(y)=\frac{8}{18}-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

$$\operatorname{var}(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

$$E(x^2)=\int x^2g(x)dx=\int_0^1 4x^5dx=\frac{2}{3} \qquad \operatorname{var}(x)=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75}$$

$$E(y^2)=\int y^2h(y)dy=\int_0^1 4y^3(1-y^2)dy=\frac{1}{3} \qquad \operatorname{var}(y)=\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2=\frac{11}{225}$$

$$\rho(x,y)=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x).\operatorname{var}(y)}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{2}{75}\times\frac{11}{225}}}=0.49$$

تمرین 1 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $0<y<1$, $-y<x<y$, $f_{X,Y}(x,y)=1$ باشد مطلوب است محاسبه ضریب همبستگی X و Y؟

تمرین 2 : اگر تابع احتمال توام X و Y به صورت $0<y<1$, $0<x<y$, $f_{X,Y}(x,y)=2$ باشد مطلوب است محاسبه:

الف- $f(x\mid y)$ و $f(y\mid x)$

ب- ضریب همبستگی X و Y؟

خواص مربوط به ضریب همبستگی:

1- اگر X و Y متغیرهای مستقل از هم باشند، آنگاه کوواریانس بین آنها صفر است و لذا $\rho(x,y)=0$ اما عکس این حالت لزوماً صادق نیست. موارد زیادی می‌توانند وجود داشته باشند که $\rho(x,y)=0$ باشد اما متغیرها از همدیگر مستقل نباشند. در این صورت می گوییم متغیرها ناهمبسته می باشند.

$2)\ \rho(x,x)=1$

$3)\ \rho(ax+b,cy+d)=\dfrac{ac}{|ac|}\rho(x,y)$

4- اگر $\rho(x,y)=1$ باشد، آنگاه $Y=a+bX$ و $b=\dfrac{\delta_y}{\delta_x}$ و هرگاه $\rho(x,y)=-1$ باشد، آنگاه $Y=a+bX$ و $b=-\dfrac{\delta_y}{\delta_x}<0$.

5- اگر $Y = a + bX$ باشد، آنگاه $\rho(x,y)$ با توجه به علامت b ، مقادیر 1+ و 1- را دارد.

واریانس مجموع چند متغیر تصادفی :

اگر X_1 و X_2 و ...... و X_n متغیرهای تصادفی باشند، آنگاه واریانس مجموع آنها از رابطه زیر بدست می آید :

$$Var(\sum_i X_i) = \sum_i Var(X_i) + 2\sum_i \sum_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

اگر X_1 و X_2 و ...... و X_n متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل باشند، آنگاه واریانس مجموع آنها از رابطه زیر بدست می آید :

$$Var(\sum_i X_i) = \sum_i Var(X_i)$$

مثال : با استفاده از مطالب فوق مطلوب است امید ریاضی متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای n و p .

جواب :

اگر X_1 و X_2 و ...... و X_n نشان دهنده n متغیر برنولی باشند و متغیر تصادفی X نشان دهنده متغیر دوجمله ای باشد آنگاه :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

بطوریکه :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ امین آزمایش ساده موفقیت باشد} \\ 0 & \text{اگر } i \text{ امین آزمایش ساده شکست باشد} \end{cases}$$

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = nVar(X_i)$$

$$Var(X_i) = P(1-P)$$

$$Var(X) = nP(1-P)$$

امید ریاضی شرطی :

امید ریاضی شرطی X به شرط Y=y به ازای تمام مقادیر y که برای آنها $f_Y(y) > 0$ است بصورت زیر تعریف می شود :

$$E(x \mid y) = \sum_x x.f_{X|Y}(x \mid y) \qquad \text{گسسته}$$

$$E(x \mid y) = \int_x x.f_{X|Y}(x \mid y)dx \qquad \text{پیوسته}$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت جدول زیر باشد مطلوب است محاسبه $E(y \mid x=1)$

X \ Y	0	1	2	3
0	0/05	0/1	0/1	0/05
1	0/05	0/25	0/15	0/05
2	0/1	0/05	0/05	0

جواب :

$$E(y \mid x=1)=\sum_y y.f(y \mid x=1)=\sum_y y.\frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(x=1)}=$$

$$0\times\frac{0.05}{0.5}+1\times\frac{0.25}{0.5}+2\times\frac{0.15}{0.5}+3\times\frac{0.05}{0.5}=1.4$$

مثال 2 : اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل دو جمله ای با پارامترهای یکسان n و P باشند، مطلوب است محاسبه

$E(X \mid X+Y=m)$

جواب :

$$P(X=k \mid X+Y=m)=\frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=m)}=\frac{P(X=k, Y=m-k)}{P(X+Y=m)}=$$

$$\frac{P(X=k).P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)}=\frac{\binom{n}{k}P^k\ (1-P)^{n-k}.\binom{n}{m-k}P^{m-k}\ (1-P)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m}P^m\ (1-P)^{2n-m}}=$$

$$\frac{\binom{n}{k}.\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

بنابراین توزیع $X \mid X+Y=m$ توزیع فوق هندسی است. لذا

$$E(X \mid X+Y=m)=\frac{m}{2}$$

مثال 3 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $x, y>0 \quad ; \quad f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-(\frac{x}{y})}e^{-y}}{y}$ باشد مطلوب است محاسبه $E(x \mid y)$.

جواب :

$$E(x\mid y)=\int_0^{\infty} x.f_{X|Y}(x\mid y)dx$$

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y})}e^{-y}dx=e^{-y}$$

$$f(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y})}e^{-y}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}e^{-(\frac{x}{y})}$$

$$E(x\mid y)=\int_0^{\infty}\frac{x}{y}e^{-(\frac{x}{y})}dx=y$$

تمرین1 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y)=4y(x-y)\ e^{-(x+y)}\ ;\ x>0\ ,0<y<x$ باشد مطلوب است محاسبه $E(x\mid y)$.

تمرین 2 : توزیع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت جدول زیر است.

Y \ X	51	52	53	54	55
51	0/06	0/05	0/05	0/01	0/01
52	0/07	0/05	0/01	0/01	0/01
53	0/05	0/1	0/1	0/05	0/05
54	0/05	0/02	0/01	0/01	0/03
55	0/05	0/06	0/05	0/01	0/03

اگر X معرف تعداد سفارش کالا در مرداد ماه برای یک کارخانه و Y معرف تعداد سفارش کالا در شهریور ماه باشد، مطلوبست :

الف- توزیع های حاشیه ای متغیرهای X و Y

ب- فروش قابل انتظار در شهریور، به شرط اینکه فروش مرداد ماه 51 ، 52 ، 53 ، 54 یا 55 باشد را بترتیب بدست آورید.

تمرین 3 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y)=6x^2\mathrm{y}\ ;\ 0<x<1\ ,0<\mathrm{y}<1$ باشد مطلوب است محاسبه $E(x\mid y)$ و $E(y\mid x)$.

تمرین 4 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $f_{X,Y}(x,y)=4x\mathrm{y}\ \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ ;\ x,\mathrm{y}>0$ باشد مطلوب است محاسبه :

الف- توزیع های حاشیه ای متغیرهای X و Y

ب- $P(x \mid y)$ و $P(y \mid x)$.

ج- $E(x \mid y)$ و $E(y \mid x)$.

امید ریاضی شرطی توابعی از متغیر تصادفی:

امید ریاضی شرطی تابعی از X به شرط Y= y به ازای تمام مقادیر y که برای آنها $f_Y(y) > 0$ است بصورت زیر تعریف می شود :

گسسته
$$E(g(x) \mid y) = \sum_x g(x) f_{X|Y}(x \mid y)$$

پیوسته
$$E(g(x) \mid y) = \int_x g(x).f_{X|Y}(x \mid y)dx$$

مثال 1 : اگر تابع احتمال توام z, y, x به صورت زیر باشد مطلوب است محاسبه $E(x^2 \mid y = 2)$.

$$P(1,1,1) = \frac{1}{8} \qquad P(1,1,2) = \frac{1}{8} \qquad P(1,2,1) = \frac{1}{16} \qquad P(1,2,2) = 0$$

$$P(2,1,1) = \frac{1}{4} \qquad P(2,1,2) = \frac{3}{16} \qquad P(2,2,1) = 0 \qquad P(2,2,2) = \frac{1}{4}$$

جواب :

$$E(x^2 \mid y = 2) = \sum_x x^2 P(x \mid y = 2) = (1)^2 P(x = 1 \mid y = 2) + (2)^2 P(x = 2 \mid y = 2) =$$
$$= (1)^2 \frac{P(x = 1 , y = 2)}{P(y = 2)} + (2)^2 \frac{P(x = 2 , y = 2)}{P(y = 2)}$$

از طرفی :

$$P(x = 1 , y = 2) = \sum_z P(x = 1 , y = 2 , z) = \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{16}$$

$$P(x = 2 , y = 2) = \sum_z P(x = 2 , y = 2 , z) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(y = 2) = \sum_x \sum_z P(x , y = 2 , z) = \frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

در نتیجه :

$$E(x^2 \mid y = 2) = (1)^2 \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} + (2)^2 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{17}{5}$$

تمرین : اگر تابع احتمال توام z, y, x به صورت $z=1,2$, $x, y=1,2,3$, $f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\frac{xyz}{108}$ باشد مطلوب است محاسبه $E(z^2 \mid x \ , \ y)$.

مثال2 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $2<y<4$, $0<x<2$, $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{8}(6-x-y)$ باشد مطلوب است محاسبه $E(y^2 \mid x)$, $E(xy \mid x)$.

جواب :

$$E(y^2 \mid x)=\int y^2 f(y \mid x)dy$$

$$f(y \mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy}=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{1}{4}(3-x)}$$

$$E(y^2 \mid x)=\int y^2 \frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{1}{4}(3-x)}dy=\frac{y^3}{24(3-x)}(24-4x-3y)$$

مثال 3 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $0<x<y<1$, $f_{X,Y}(x,y)=8xy$ باشد مطلوب است محاسبه $E(xy \mid x)$.

جواب :

راه اول :

$$E(xy \mid x)=\int xyf(y \mid x)dy$$

$$f(y \mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{8xy}{\int_x^1 8xydy}=\frac{2y}{1-x^2}$$

$$E(xy \mid x)=\int xyf(y \mid x)dy=\int_x^1 \frac{2xy^2}{1-x^2}dy=\frac{2x(1+x+x^2)}{3(1+x)}$$

راه دوم :

$$E(yx \mid x)=xE(y|x)$$

$$E(y \mid x)=\int yf(y \mid x)dy=\int_x^1 \frac{2y^2}{1-x^2}\ dy=\frac{2}{3}\times\frac{1+x+x^2}{1+x}$$

$$E(yx \mid x)=\frac{2}{3}x\frac{1+x+x^2}{1+x}$$

تمرین 1 : اگر تابع احتمال توام x_1 , x_2 , x_3 به صورت زیر باشد مطلوب است محاسبه $E(x_2^2x_3 \mid x_1=\frac{1}{2})$.

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)e^{-x_3} \quad , 0<x_1 \text{ و } x_2<1 \quad , \; x_3>0$$

تمرین 2 : اگر تابع احتمال توام متغیرهای X و Y به صورت $0<y<2 \quad , \quad x>0 \quad , \quad f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2}\mathrm{y}e^{-xy}$ باشد

مطلوب است محاسبه $E(e^{\frac{x}{2}} \mid y=1)$.

محاسبه امید ریاضی از طریق مشروط کردن :

$E(X \mid Y)$ تابعی از متغیر تصادفی Y است که مقدار آن در Y= y برابر $E(X \mid Y=y)$ بوده و خود یک متغیر تصادفی است. امید ریاضی این متغیر، همان $E(X)$ است.

$$E(X)=E[E(X \mid Y)]$$

با توجه به امید ریاضی شرطی توابعی از متغیر تصادفی، رابطه بالا در حالات گسسته و پیوسته بصورت زیر است :

$$E(X)=\sum_y E(X \mid Y=y).f_Y(Y=y) \qquad \text{گسسته}$$

$$E(X)=\int_y E(X \mid Y=y).f_Y(Y=y)dy \qquad \text{پیوسته}$$

این روابط ما را قادر می کنند تا محاسبه امید ریاضی را با مشروط کردن روی یک متغیر تصادفی مناسب ساده تر کنیم.

مثال 1 : یک کارگر در معدنی که 3 درب دارد محبوس شده است. درب اول او را به تونلی هدایت می کند که پس از 3 ساعت راهپیمائی نجات خواهد یافت. درب دوم او را به تونلی هدایت می کند که پس از 5 ساعت راهپیمائی دوباره به معدن باز می گرداند. درب سوم او را به تونلی هدایت می کند که او را پس از 7 ساعت راهپیمائی دوباره به معدن باز می گرداند. اگر فرض کنیم که کارگر به تصادف و با احتمال یکسان یکی از درب ها را انتخاب می کند، متوسط زمان لازم برای اینکه او نجات یابد چقدر است؟

جواب :

اگر متغیر X نشان دهنده زمان لازم تا نجات کارگر و متغیر Y نشان دهنده درب انتخابی توسط کارگر باشد داریم :

$$E(X)=E(X \mid Y=1).P(Y=1)+E(X \mid Y=2).P(Y=2)+E(X \mid Y=3).P(Y=3)=$$
$$\frac{1}{3}[E(X \mid Y=1)+E(X \mid Y=2)+E(X \mid Y=3)]$$

از طرفی :

$$E(X \mid Y=1)=3$$
$$E(X \mid Y=2)=5+E(X)$$
$$E(X \mid Y=3)=7+E(X)$$

در نتیجه :

$$E(X)=\frac{1}{3}[3+5+E(X)+7+E(X)] \Rightarrow E(X)=15$$

مثال 2 : محسن یا یک فصل از کتاب احتمالات و یا اینکه یک فصل از کتاب اقتصاد خود را خواهد خواند. اگر تعداد غلطهای چاپی در هر فصل از کتاب احتمالات او یک توزیع پواسون با میانگین 2 و غلطهای چاپی در هر فصل از کتاب اقتصاد او یک توزیع پواسون با میانگین 5 و اگر محسن با احتمال مساوی یکی از ایندو کتاب را برای مطالعه انتخاب نماید، تعداد متوسط غلطهای چاپی که محسن با آن روبرو خواهد شد چقدر است؟

جواب :

اگر متغیر X نشان دهنده تعداد غلطهای چاپی در هر فصل از کتاب و متغیر Y بصورت زیر باشد:

$$Y=\begin{cases}1 & \text{اگر کتاب اقتصاد را انتخاب کند} \\ 2 & \text{اگر کتاب احتمالات را انتخاب کند}\end{cases}$$

داریم :

$$E(X)=E(X \mid Y=1).P(Y=1)+E(X \mid Y=2).P(Y=2)=$$
$$5(\frac{1}{2})+2(\frac{1}{2})=\frac{7}{2}$$

توزیع توام توابعی از متغیرهای تصادفی پیوسته:

فرض کنید x_2, x_1 متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع احتمال توام $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ باشند. همچنین فرض کنید $y_1=g_1(x_1,x_2)$ و $y_2=g_2(x_1,x_2)$ توابعی از x_2, x_1 هستند. می‌خواهیم تابع احتمال توام $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ را به دست آوریم.

این تابع مطلوب از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\mid J(x_1,x_2)\mid^{-1}$$

که در آن $J(x_1,x_2)$ از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$J(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}$$

همچنین در تابع $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ می بایست x_2,x_1 را بر حسب y_2,y_1 نوشت یعنی $x_1 = g_1^{-1}(y_1,y_2)$ و $x_2 = g_2^{-1}(y_1,y_2)$.

مثال 1 : اگر x_2,x_1 متغیرهای مستقل نمایی با پارامتر λ باشند مطلوب است تابع احتمال توام متغیرهای $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = e^{x_1}$.

جواب :

اگر x_1,x_2 متغیرهای مستقل از هم باشند، تابع احتمال توام x_1,x_2 برابر است با حاصل ضرب توابع x_1,x_2.

$$f_{X_1}(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1} \quad , \quad x_1 > 0$$

$$f_{X_2}(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_2} \quad ; \quad x_2 > 0$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} = \lambda e^{-\lambda y_1}$$

$$x_1 = Ln\ y_2$$

$$x_2 = y_1 - Ln\ y_2$$

$$J(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{x_1} & 0 \end{vmatrix} = -e^{x_1} = -e^{LnY_2}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f(x_1,x_2)\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1} = \lambda^2 e^{-\lambda y_1}.e^{-LnY_2} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y_1}}{y_2} \quad , \quad y_1 > 0 \quad , \quad y_2 > 1$$

مثال 2 : اگر x_1 , x_2 دارای تابع احتمال توام $x_2 < 1 \quad , \quad x_1 > 0 \quad , \quad f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1$ بوده و $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$. مطلوب است تابع احتمال توام متغیرهای y_1 و y_2.

جواب :

$$x_1 = y_1 y_2$$

$$x_2 = y_1 - y_1 y_2$$

$$J(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\dfrac{x_2}{(x_1+x_2)^2}} & \dfrac{1}{\dfrac{-x_1}{(x_1+x_2)^2}} \end{vmatrix} = \frac{-1}{x_1 + x_2}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f(x_1,x_2)\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1} = (x_1 + x_2) f(x_1,x_2) = y_1 \quad , \quad y_1 > 0 \quad , \quad 0 < y_2 < 1$$

تمرین : اگر x_1 , x_2 دارای تابع احتمال توام $x_2 < 1 \quad , \quad x_1 > 0 \quad , \quad f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1$ بوده و $y_1 = x_1 - x_2$ و $y_2 = x_1 + x_2$ باشد آنگاه مطلوب است : $f_{Y_2}(y_2) \quad , \quad f_{Y_1}(y_1)$

توابعی از چند متغیر تصادفی گسسته :

مثال : فرض کنید X_1 معرف تعداد اقلام خراب تولیدی ماشین شماره 1 در یک ساعت و X_2 معرف تعداد اقلام خراب تولیدی ماشین شماره 2 در همان یک ساعت بوده و توزیع توام آنها بصورت زیر باشد. اگر $Y=2X_1+X_2$ باشد مطلوبست توزیع احتمال متغیر تصادفی Y .

X_2 \ X_1	0	1	2	3
0	0/02	0/03	0/04	0/01
1	0/06	0/09	0/12	0/03
2	0/01	0/15	0/02	0/05
3	0/02	0/03	0/04	0/01

جواب :

با توجه به اینکه X_1 و X_2 مقادیر 0 و 1 و 2 و3 را می گیرند لذا Y مقادیر 0 تا 9 را اتخاذ می نماید و مقادیر احتمال آن بصورت ذیل محاسبه می شود :

$$P(Y=0)=P(X_1=0,X_2=0)=0.02$$

$$P(Y=1)=P(X_1=0,X_2=1)=0.06$$

$$P(Y=2)=P(X_1=0,X_2=2)+P(X_1=1,X_2=0)=0.1+0.03=0.13$$

به همین ترتیب داریم :

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_Y(y)$	0/02	0/06	0/13	0/11	0/19	0/15	0/21	0/07	0/05	0/01

توابعی از چند متغیر تصادفی پیوسته :

فرض کنید x_2,x_1 متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع احتمال توام $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ باشند. همچنین فرض کنید $y=g(x_1,x_2)$ توابعی از x_2,x_1 هستند. می‌خواهیم تابع احتمال $f_Y(y)$ را به دست آوریم.

برای این منظور از روش تابع توزیع تجمعی استفاده می کنیم. در این روش ابتدا تابع توزیع تجمعی Y را بدست آورده و سپس $f_Y(y)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_Y(y)=\frac{d\ F_y(y)}{d\ y}$$

و در نهایت حدود متغیر y با استفاده از حدود تغییرات x به دست می‌آید.

مثال : اگر x_1 , x_2 دارای تابع احتمال توام $x_1, x_2 > 0$, $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 4e^{-2(x_1+x_2)}$ باشد در اینصورت تابع احتمال متغیر تصادفی $y = \frac{x_1}{x_2}$ را بدست آورید.

جواب :

$$F_y(y) = P(\frac{x_1}{x_2} \le y) = P(x_1 \le yx_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{yx_2} 4e^{-2(x_1+x_2)}\, dx_1\, dx_2 = -\frac{1}{1+y} + 1$$

$$f_y(y) = \frac{1}{(1+y)^2} \quad , \quad \circ < y < 1$$

تمرین 1 : اگر x_1 , x_2 دارای تابع احتمال توام $x_1, x_2 > 0$, $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-(x_1+x_2)}$ باشد در اینصورت:

الف- تابع احتمال متغیر تصادفی $y = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ را بدست آورید.

ب- تابع احتمال متغیر تصادفی $y = \frac{x_1 + x_2}{2}$ را بدست آورید.

تمرین 2 : اگر x_1 , x_2 , x_3 دارای تابع احتمال توام $x_1, x_2, x_3 > 0$, $f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = e^{-(x_1+x_2+x_3)}$ باشد در اینصورت:

الف- تابع احتمال متغیر تصادفی $y = x_1 + x_2 + x_3$ را بدست آورید.

ب- تابع احتمال متغیر تصادفی $y = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ را بدست آورید.

منابع و مراجع

1- **مبانی احتمال.** تالیف: شلدون راس - ترجمه: دکتر همدانی، دکتر پارسیان - دانشگاه اصفهان.

2- **نظریه احتمال و کاربرد آن.** تالیف: دکتر سید تقی اخوان نیاکی - دانشگاه صنعتی شریف

3- **مقدمه ای بر آمار و احتمال (برای مهندسان و محققان علوم).** تالیف: شلدون راس- ترجمه: مجید اسدی، ابوالقاسم بزرگ‌نیا - دانشگاه فردوسی مشهد

4- **احتمال و آمار در مهندسی و علم مدیریت.** تالیف : داگلاس س. مونتگمری - ترجمه: محمد صالح اولیاء – دانشگاه یزد