حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

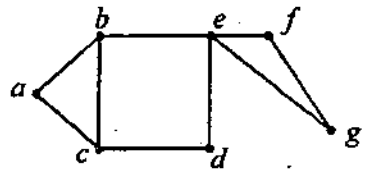
گردآورنده :

www.fanavari-it.ir

فصل ششم

تمرینات فصل ۶

۱- برای گراف شکل زیر ، همهٔ مسیرهای از b به f را پیدا کنید .



پاسخ :

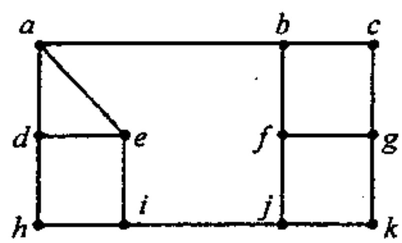
مسیرهای از b به f عبارتند از :

b-e-f
b-e-g-f
b-c-d-e-f
b-c-d-e-g-f
b-a-c-d-e-f
b-a-c-d-e-g-f

مسیرهای دیگری هم وجود دارد که یکی از آنها به صورت زیر است :

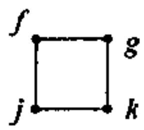
b-e-d-c-b-e-f

۲- شکل زیر ، گراف بی‌سویی را نشان می‌دهد که نشانگر یک انبار است . رئوس این گراف ، نشانگر گاوصندوق‌ها و یال‌های آن ، نشانگر راهروهای موجود بین گاوصندوق‌ها هستند . برای حفاظت این انبار ، چند نگهبان به شرح زیر در محل گاوصندوق‌ها قرار می‌دهیم . در محل هر گاوصندوق ، یا یک نگهبان قرار دارد و یا فاصلهٔ آن از گاوصندوقی که در محل آن نگهبانی قرار داده شده ، حداکثر ، ۲ راهرو است . کمترین تعداد نگهبانان لازم برای این کار چند نفر است ؟



پاسخ :

یک رأس با بیشترین درجه انتخاب کرده ، یک نگهبان در آنجا مستقر می‌کنیم ، حال تمام رأسهایی از گراف را که فاصله‌شان از محل نگهبان یک یا دو راهرو است حذف می‌کنیم . برای این کار رأس a را که درجه آن۳ است در نظر گرفته یک نگهبان در این رأس مستقر می‌کنیم . اکنون رأسهای i,h,d,e,c,b,a را که فاصله‌شان از رأس a یک یا دو راهرو است حذف می‌کنیم . بنابراین گراف زیر باقی می‌ماند .



برای این گراف نیز همان کار را تکرار می‌کنیم . چون درجه تمام رأسها یکسان است بنابراین یک رأس به دلخواه انتخاب کرده و یک نگهبان در آنجا مستقر می‌کنیم . درنتیجه حداقل نگهبان لازم برای حفاظت از انبار با شرایط مطلوب حداقل ۲ نگهبان می‌باشد .

۳- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو ، همبند و بدون حلقه ، و $\{a,b\}$ یک یال از G است . نشان دهید که $\{a,b\}$ قسمتی از یک دور است ، اگر و تنها اگر ، حذف یال $\{a,b\}$ باعث غیرهمبند بودن گراف نشود .

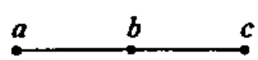
پاسخ :

بدون پاسخ !

۴- مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که حذف هر یالی از آن ، موجب غیرهمبند بودن آن شود .

پاسخ :

گراف زیر را در نظر بگیرید :



۵- فرض کنید که G گرافی باشد که شرط تمرین ۴ را دارد ،

الف) آیا G باید بدون حلقه باشد ؟

ب) آیا G می‌تواند گراف چندگانه باشد ؟

ج) اگر G، n رأس داشته باشد، تعداد یال‌های آن چند تاست؟

پاسخ :

الف) بله، حذف یک حلقه نمی‌تواند یک گراف همبند را به یک گراف غیرهمبند تبدیل کند.

ب) خیر. اگر مثلاً بین b,a دو یال موجود باشد. آنگاه با حذف یکی از یالهای بین b,a گراف همبندی خود را حفظ می‌کند.

ج) گراف مورد بحث با n رأس باید n-۱ یال داشته باشد. این حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم. بازای n=۲ حکم درست است. فرض کنیم بازای هر $n > m >$ ۲ حکم درست باشد. آنرا بازای n ثابت می‌کنیم. یک یال از گراف G حذف می‌کنیم. در این صورت دو زیرگراف G' با k' رأس و G'' با k'' رأس به دست می‌آید که $k' + k'' = n$. بنا به فرض G' دارای $k'-1$ یال و G'' دارای $k''-1$ یال می‌باشد. بنابراین گراف غیرهمبند بدست آمده دارای

$$(k'-1)+(k''-1) = k'+k''-2 = n-2$$

یال می‌باشد. با افزودن یالی که حذف کرده‌ایم گراف مورد بحث دارای n-۱ یال خواهد بود. بنابراین حکم درست است.

۶- الف) اگر $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو و بدون حلقه با $|V| = \nu$ و $|E| = e$ باشد، نشان دهید که $2e \le \nu^2 - \nu$

ب) این رابطه، برای گراف‌های سودار، به چه صورت بیان می‌شود؟

پاسخ :

الف) فرض کنیم گراف G دارای ν رأس $a_1, a_2, ..., a_\nu$ باشد. اگر گراف ساده و بدون حلقه باشد آنگاه از a_1 حداکثر ν-۱ یال می‌توان به رأسهای $a_2, ..., a_\nu$ رسم نمود. از رأس a_2 حداکثر ν-۲ یال به یالهای $a_3, ..., a_\nu$ رسم نمود و ... . بدین ترتیب تعداد کل یالهایی که می‌توان رسم کرد عبارتند از :

$$e \le (\nu-1)+(\nu-2)+...+3+2+1 = \frac{\nu(\nu-1)}{2} = \frac{\nu^2-\nu}{2}$$

$$\Rightarrow 2e \le \nu^2 - \nu$$

ب) اگر گراف G دارای ν رأس $a_1, a_2, ..., a_\nu$ بوده و گراف ساده و بدون حلقه باشد آنگاه از هر رأس می‌توان حداکثر ν-۱ کمان به رأسهای دیگر رسم نمود. بنابراین تعداد کل یالهایی که می‌توان رسم کرد برابر است با :

$$e \le \nu(\nu-1) = \nu^2 - \nu$$

۷- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو است . رابطهٔ R در V را به صورت زیر تعریف می‌کنیم : aRb اگر و تنها اگر $a=b$، و یا ، مسیری از a به b موجود است . نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است . کلاس‌های هم‌ارزی تعریف شده به وسیلهٔ R را توضیح دهید .

پاسخ :

نشان می‌دهیم R یک رابطه هم‌ارزی است .

۱) بازتابی . چون $a=a$ پس $a\ R\ a$

۲) تقارن . اگر $a\ R\ b$ آنگاه مسیری از a به b وجود دارد. روشن است اگر محل یالها را وارون کنیم یک مسیر از b به a به دست می‌آید . بنابراین $b\ R\ a$

۳) تعدی . فرض کنیم $a\ R\ b$, $b\ R\ c$ آنگاه مسیری مانند

$$a-v_1-v_2-\dots-v_k-b$$

از a به b و مسیری مانند

$$b-w_1-w_2-\dots-w_r-c$$

از b به c موجود است . در این صورت :

$$a-v_1-\dots-v_k-b-w_1-\dots-w_r-c$$

یک مسیر از a به c است . بنابراین $a\ R\ c$

پس R یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد .

هر کلاس هم‌ارزی R شامل تمام رأس‌هایی از G است که بین هر دو رأس آن مسیری موجود باشد . بنابراین کلاسهای هم‌ارزی R همان مولفه‌های R می‌باشد .

۸- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو و بدون حلقه با $|V|=v$ و $|E|=e$ است . کمترین مقدار لازم برای e ، بر حسب v، چقدر باشد تا گراف G همبند شود ؟

پاسخ :

با توجه به قسمت ج از سوال ۵ داریم :

$$e \geq v-1$$

۹- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو و همبند است . اگر $x, y \in V$ ، نشان دهید که مسیری از x به y وجود دارد به گونه‌ای که شامل همهٔ رئوس G است .

پاسخ :

چون G همبند است بنابراین بین x , y یک مسیر وجود دارد .

فرض کنیم این مسیر به صورت

$$x-a_1-\dots-a_k-y$$

باشد . اگر مسیر فوق شامل تمام رأس‌های G باشد مساله تمام است . در غیر اینصورت فرض کنیم a رأسی از G باشد که در مسیر فوق قرار ندارد . در این صورت ، از اینکه G همبند است بین a , x مسیری مانند

$$a - w_1 - \dots - w_r - x$$

وجود دارد . بنابراین مسیر زیر ، یک مسیر بین x , y است که شامل a نیز می‌باشد .

$$x - w_r - \dots - w_1 - a - w_1 - \dots - w_r - x - a_1 - \dots - a_k - y$$

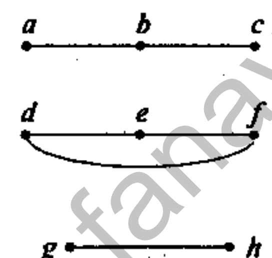
این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که یک مسیر بین x , y که شامل تمام رأسهای G است بدست آید .

۱۰- $k(G)$ را برای گراف $G=(V,E)$ ، تعریف شده در زیر ، به دست آورید :

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h\} \quad , E = \{\{a,b\},\{b,c\},\{d,e\},\{e,f\},\{f,d\},\{g,h\}\}$$

پاسخ :

گراف G به صورت زیر است :

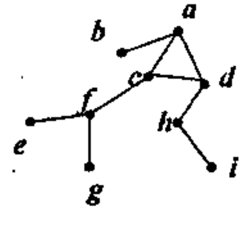


بنابراین $K(G)=۳$

۱۱- فرض کنید که $G=(V,E)$ گراف بی‌سوی ارائه شده در شکل زیر باشد .

الف) چند زیرگراف از G می‌توان یافت به گونه‌ای که شامل چهار رأس و یک دور باشد ؟

ب) چند زیرگراف همبند از G وجود دارد به گونه‌ای که شامل همهٔ رئوس G باشد ؟



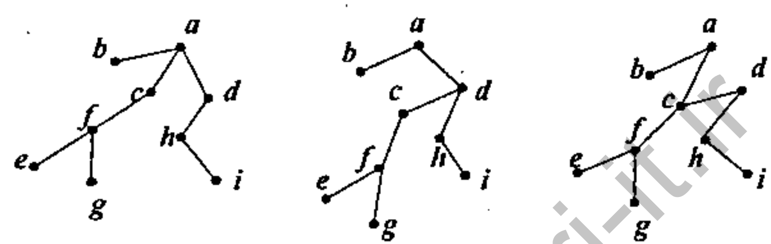
پاسخ :

الف) تنها دوری که در گراف G موجود است از رأس‌های d,c,a به دست می‌آید که شامل ۳ رأس است . حال اگر یک رأس ، مجاور با یکی از رأسهای دور فوق را به دور

مورد بحث اضافه کنیم مطلوب به دست می‌آید . بنابراین ۳ زیرگراف می‌توان بدست آورد که شامل چهار رأس و یک دور باشد که عبارتند از :

$\{ b,a,c,d \} \quad , \quad \{ f,a,c,d \} \quad , \quad \{ h,a,c,d \}$

ب)سه زیرگراف همبند G وجود دارد که شامل همه رئوس G است . که عبارتند از :



۱۲- الف) گراف‌های $G=(V,E)$ و $G_1 = (V_1, E_1)$ را با $v \in V$, $v_1 \in V_1$ به گونه‌ای پیدا کنید تا ، $K(G\text{-}v)=K(G)$ ، ولی ، $K(G_1 - v_1) > K(G_1)$.

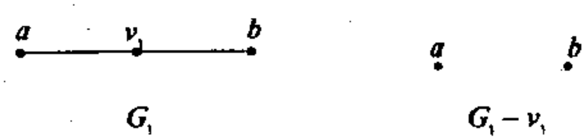
پاسخ :

الف)گراف G را به صورت زیر در نظر بگیرید .

داریم :

$$K(G) = K(G - v) = ۱$$

و G_1 را به صورت زیر در نظر بگیرید :

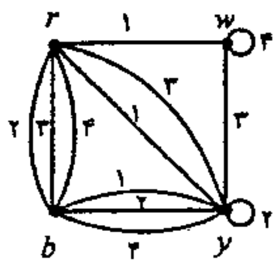


داریم :

$$K(G_1 - v_1) = ۲ \quad , \quad K(G_1) = ۱ \Rightarrow K(G_1 - v_1) > K(G_1)$$

در تمرین‌های ۱۳ الی ۱۵ ، مسئلهٔ حماقت لحظه‌ای ارائه شده به وسیلهٔ گراف‌های چندگانه را حل کنید .

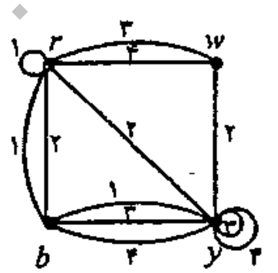
-۱۳



پاسخ :

یک جواب برای مساله به صورت زیر به دست می‌آید :

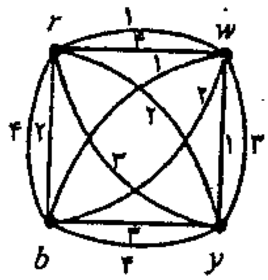
-۱۴



پاسخ :

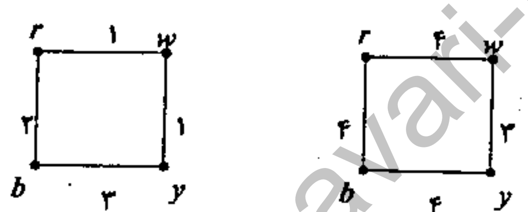
رأس w دارای درجه ۳ می‌باشد . بنابراین نمی‌توان دو زیرگراف پیدا کرد به گونه‌ای که در هر زیرگراف درجه رأس w برابر ۲ باشد و زیرگراف‌ها یال مشترکی نداشته باشند . بنابراین مساله اخیر جواب ندارد .

۱۵-



☜ **پاسخ :**

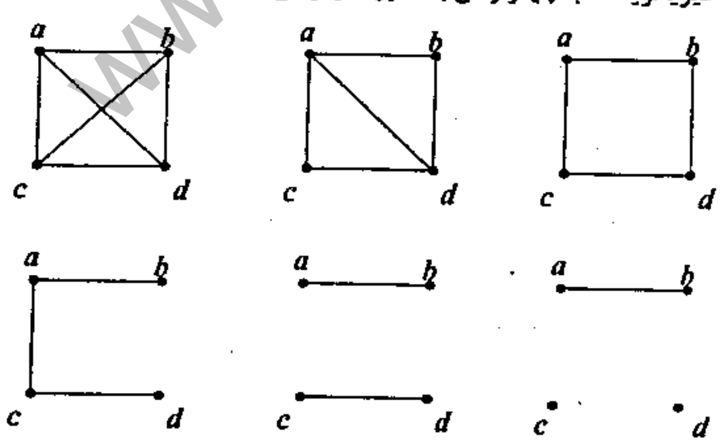
یک جواب برای مساله داده شده به صورت زیر به دست می‌آید :

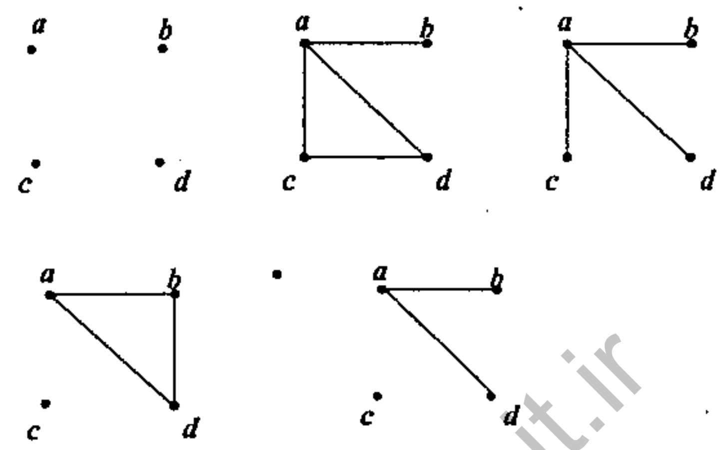


۱۶- تمامی گراف‌های بی‌سو ، بدون حلقه و غیریکنواخت با چهار رأس را پیدا کنید . چند تا از این گراف‌ها همیند هستند ؟

☜ **پاسخ :**

گراف‌های غیریکریخت با چهار رأس به صورت زیر می‌باشند:

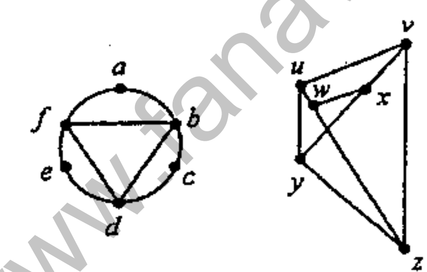




روشن است ۵ تا از این گراف‌ها غیرهمبند می‌باشند.

در تمرین‌های ۱۷ الی ۱۹ تعیین کنید که آیا گراف‌های ارائه شده یکریخت هستند و یا خیر ؟

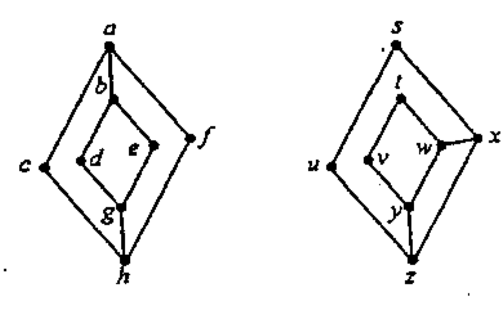
-۱۷



پاسخ :

در گراف سمت راست تمام رئوس با درجه ۳ می‌باشند درحالیکه در گراف سمت چپ چنین نمی‌باشد بنابراین دو گراف یکریخت نمی‌باشند .

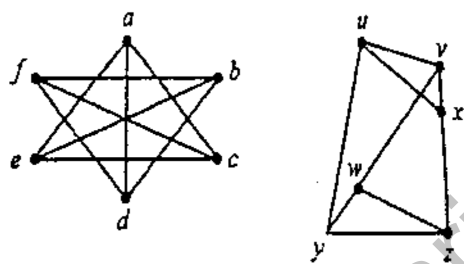
-۱۸



پاسخ :

در گراف سمت چپ ، هر رأس با درجه ۳ ، با دو رأس از درجه ۲ و یک رأس از درجه ۳ مجاور است درحالیکه در گراف سمت چپ چنین نمی‌باشد . بنابراین دو گراف داده شده یکریخت نمی‌باشند .

-۱۹



پاسخ :

تناظر زیر را در نظر بگیرید :

$a \leftrightarrow u \qquad b \leftrightarrow w \qquad c \leftrightarrow x \qquad d \leftrightarrow y$

$e \leftrightarrow v \qquad f \leftrightarrow z$

با بررسی یالهای متناظر روشن است که دو گراف داده شده یکریخت می‌باشند.

۲۰- فرض کنید که $G = (V, E)$ یک گراف سادهٔ بی‌سو (بدون حلقه) با v رأس و e یال است ، چند یال در G وجود دارد ؟

پاسخ :

یک گراف ساده گرافی است که هیچ حلقه و یال چندگانه نداشته باشد . با توجه به تمرین ۶ ، یک گراف ساده حداکثر $\frac{v(v-1)}{2}$ یال دارد اما ، می‌تواند یالهای کمتری نیز داشته باشد .

۲۱- فرض کنید که $f : G_1 \to G_2$ یک تابع یکریختی است . اگر یک مسیر به طول ۳ از رأس a به رأس b (در گراف G_1) وجود داشته باشد ، نشان دهید که در G_2 نیز یک مسیر به طول ۳ از $f(a)$ به $f(b)$ وجود خواهد داشت .

پاسخ :

فرض کنیم در گراف G_1 مسیری به طول ۳ از رأس a به رأس b موجود باشد. مسیر فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$a - x_1 - x_2 - b$$

f یکریختی است بنابراین متناظر با رأس‌های b, x_2, x_2, x_1, a راسهای $f(x_1), f(a)$ $f(b), f(x_2), f(x_2)$, در G_2 موجود می‌باشند . مجدداً با استفاده از یکریختی f با توجه به اینکه بین x_1, a یالی وجود دارد نتیجه می‌شود که بین $f(x_1), f(a)$ نیز در G_2 یالی موجود است. به همین ترتیب بین $f(x_1), f(x_2)$ و نیز بین $f(b), f(x_2)$ نیز یالی موجود است .

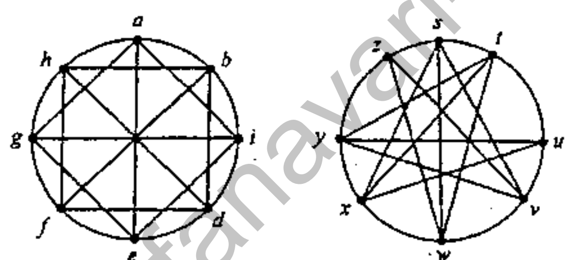
بنابراین مسیر زیر در G_2 وجود دارد :

$$f(a) - f(x_1) - f(x_2) - f(b)$$

درنتیجه در G_2 ، بین $f(b), f(a)$ مسیری به طول ۳ وجود دارد.

۲۲- الف) اگر G_1 و G_2 ، دو گراف بی‌سو (بدون حلقه) باشند ، نشان دهید که G_1 و G_2 یکریخت هستند ، اگر و تنها اگر ، $\overline{G_1}$ و $\overline{G_2}$ یکریخت باشند .

ب) آیا گراف‌های ارائه شده در زیر ، یکریخت هستند ؟



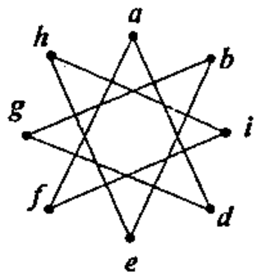
پاسخ :

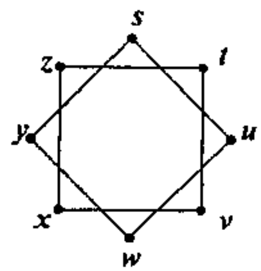
الف)فرض کنیم G_2, G_1 یکریخت باشند . در این صورت با توجه به تعریف ، یک تناظر یک‌به‌یک بین رئوس G_2, G_1 و نیز یالهای G_2, G_1 وجود دارد . اگر $f : G_1 \to G_2$ یکریختی باشد آنگاه $(I - f) : \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ نیز یکریختی خواهد بود .

از اینکه بین تمام یالهای G_2, G_1 تناظر یک‌به‌یک وجود دارند بنابراین بین یالهایی که در G_2, G_1 نیستند نیز یک تناظر یک‌به‌یک وجود خواهد داشت. پس بین یالهای $\overline{G_2}, \overline{G_1}$ یک تناظر یک به یک وجود دارد . از طرفی رأسهای $\overline{G_2}, \overline{G_1}$ رئوس حادث به ترتیب با یالهای $\overline{G_2}, \overline{G_1}$ هستند از اینکه یالهای $\overline{G_2}, \overline{G_1}$ در تناظر یک‌به‌یک هستند . لذا ، رأسهای $\overline{G_2}, \overline{G_1}$ نیز در تناظر یک‌به‌یک خواهند بود . درنتیجه $\overline{G_1}$ با $\overline{G_2}$ یکریخت است .

حال فرض کنیم $\overline{G_1}$ با $\overline{G_2}$ یکریخت باشد .در این صورت مانند بالا می‌توان ثابت کرد که G_1 نیز با G_2 یکریخت است .

ب)مکمل گرافهای داده شده نسبت به k_8 صورت زیر هستند .





گراف سمت راست غیرهمبند و گراف سمت چپ همبند می‌باشد . بنابراین دو گراف بالایی همبند نمی‌باشند . لذا با توجه به (الف) گرافهای داده شده یکریخت نمی‌باشند.

۲۳- الف) فرض کنید که G یک گراف بی‌سو با n رأس است . اگر G یکریخت با مکمل خودش یعنی $\overline{G}$ باشد ، در این صورت G چند یال دارد (چنین گرافی را خود مکمل گوییم) .

ب) مثالی از گراف‌های خود مکمل با ۴ رأس و ۵ رأس ارائه دهید .

ج) اگر G گرافی خود مکمل با $n(n>1)$ رأس باشد ، نشان دهید که عدد صحیحی مثل $k>0$ وجود دارد به گونه‌ای که $n=4k$ و یا $n=4k+1$.

پاسخ :

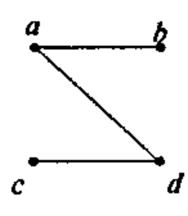
چون G با $\overline{G}$ یکریخت است . پس تعداد یالهای G با $\overline{G}$ برابر است . اما با توجه به تعریف $\overline{G}$ داریم :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \text{تعداد یالهای } k_n = \text{تعداد یالهای } \overline{G} + \text{تعداد یالهای } G$$

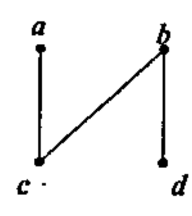
بنابراین :

$$\text{تعداد یالهای } G = \text{تعداد یالهای } \overline{G} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

ب) شکل زیر یک گراف خود مکمل با ۴ رأس را نشان می‌دهد .

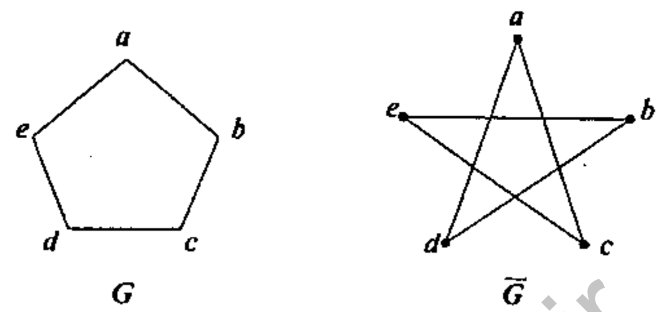


$\overline{G}$



$\overline{G}$

همچنین ، گراف زیر ، یک گراف خود مکمل با ۵ رأس است .



برای مشاهده یکریختی این دو گراف ، $f: G \to \overline{G}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$f(a) = a \quad , \quad f(b) = e \quad , \quad f(c) = b \quad , \quad f(d) = c \quad , \quad f(e) = d$

ج) با توجه به الف ، اگر G گرافی خود مکمل با n رأس باشد ، آنگاه داریم :

$$\text{تعداد یالهای } G = \frac{n(n-1)}{4} = \text{عددی صحیح}$$

پس یا n مضرب ۴ است و یا n-۱ مضرب ۴ است . پس

$$n = 4k \quad \text{یا} \quad n = 4k+1$$

۲۴- فرض کنید که G یک دور با n رأس است . نشان دهید که G خود مکمل است ، اگر و تنها اگر ، n=۵ باشد .

پاسخ :

فرض کنیم G یک دور با n رأس باشد . بنابراین هر رأس G از درجه ۲ می‌باشد . اگر G خود مکمل باشد آنگاه G با مکمل خودش یکریخت خواهد بود . بنابراین درجه رئوس $\overline{G}$ نیز ۲ خواهد بود . درنتیجه درجه هر رأس k_n برابر خواهد بود با ۴ = ۲+۲ اما می‌دانیم درجه هر رأس k_n برابر است با n-۱ ، درنتیجه $n = 5$

برعکس ، فرض کنیم $n = 5$, G یک دور با ۵ رأس باشد . در این صورت با بررسی حالتهای مختلف G واضح است که G خود مکمل می‌باشد .

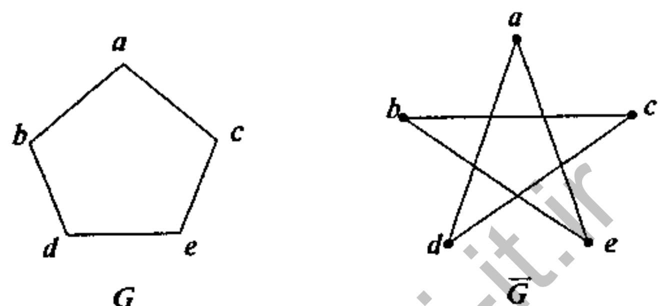
تذکر : با توجه به اینکه $n = 5$ بررسی حالتهای مختلف G ساده است . یک مورد از این نوع را در قسمت ب از تمرین ۲۳ آورده‌ایم .

۲۵- الف) یک گراف ، مثل G ارائه دهید که هم G و هم $\overline{G}$ ، همبند باشند .

ب) اگر G گرافی با n رأس ، $n \geq 2$ ، و غیرهمبند باشد ، نشان دهید که $\overline{G}$ همبند است .

پاسخ :

الف) G و $\overline{G}$ را که در زیر آمده است در نظر بگیرید :



G $\qquad\qquad$ $\overline{G}$

ب) فرض کنیم $\overline{G}$ یک گراف با n رأس $(n \geq 2)$ و غیرهمبند باشد . گیریم G دارای k مولفه $(k \geq 2)$ باشد . دو عنصر دلخواه از G مانند b,a را در نظر می‌گیریم . ثابت می‌کنیم در $\overline{G}$ ، بین b,a مسیری وجود دارد . دو حالت برای b,a پیش می‌آید .

حالت اول : b,a متعلق به دو مولفه مختلف G باشند .

فرض کنیم a به مولفه G_1 و b به مولفهٔ G_2 متعلق هستند. از مولفه G_1 یک رأس دلخواه مانند x و از G_2 یک رأس دلخواه مانند y در نظر می‌گیریم . در گراف G بین y,a و نیز بین x,b مسیری وجود ندارد . همچنین بین y,x نیز در G مسیری وجود ندارد. (زیرا x,a متعلق به G_1 و y,b متعلق به G_2 هستند و G_1 و G_2 دو مولفه مختلف از G می‌باشند .) بنابراین در $\overline{G}$ بین y,a و نیز x,y و نیز b,x مسیرهایی وجود دارد . این مسیرها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$a - v_1 - \dots - v_r - y$$
$$y - w_1 - \dots - w_s - x$$
$$x - u_1 - \dots - u_p - b$$

بنابراین مسیر زیر ، یک مسیر بین b,a است .

$$a - v_1 - \dots - v_r - y - w_1 - \dots - w_s - x - u_1 - \dots - u_p - b$$

حالت دوم : b,a به یک مولفه متعلق باشند .

فرض کنیم b,a به یک مولفه G مانند G_1 متعلق باشند . در این صورت یک مولفه دیگر از G مانند G_2 را در نظر می‌گیریم . یک عنصر دلخواه از G_2 مانند x را بگیرید . چون G_1 و G_2 دو مولفه متفاوت از G هستند ، پس بین x,a و نیز بین x,b مسیری

در G وجود ندارد . لذا ، در $\overline{G}$ مسیری بین a,x و مسیری بین x,b وجود دارد . این مسیرها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$a - v_1 - \dots - v_m - x$$
$$x - w_1 - \dots - w_n - y$$

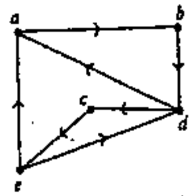
بنابراین ، مسیر زیر یک مسیر بین a,b است :

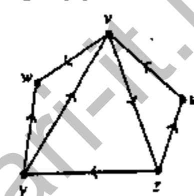
$$a - v_1 - \dots - v_m - x - w_1 - \dots - w_n - y$$

پس ، در هر حالت در $\overline{G}$ بین a,b مسیری وجود دارد . لذا $\overline{G}$ همبند است .

۲۶- الف) تمامی گراف‌های سودار (بدون حلقه) و غیریکریخت با سه رأس را پیدا کنید .

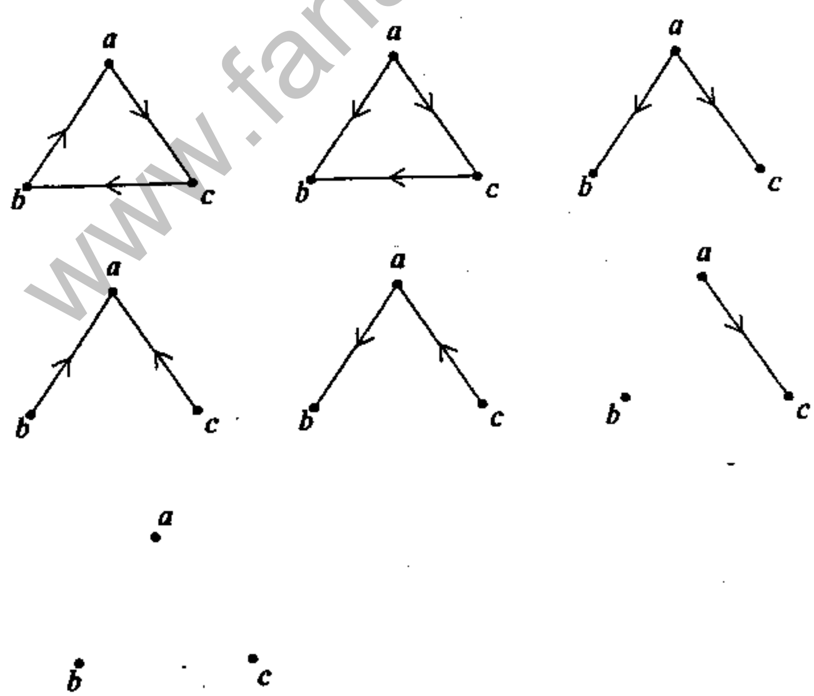
ب) آیا گراف‌های ارائه شده در زیر یکریخت هستند ؟





پاسخ :

الف) گراف‌های زیر غیریکریخت هستند .



ب)در هر دو گراف تنها یک رأس از درجه چهار داریم . بنابراین رأسv با رأسd متناظر می‌شود .

برای اینکه مفهوم حادث بودن حفظ شود با مقایسه رأسهای با درجه۳ و درجه۴ متوجه می‌شویم که متناظر با یالهای$(e,d),(d,a)$ دو یال(v,z), (y,v) وجود دارد. بنابراین تناظر زیر را باید داشته باشیم :

$$d \leftrightarrow v \ , \ a \leftrightarrow z \ , \ e \leftrightarrow y$$

اما با مقایسه رأس‌های با درجه۲ ، روشن است رأس w نمی‌تواند با هیچکدام از رأسهای گراف دیگر متناظر شود . بنابراین دو گراف مورد بحث یکریخت نیستند .

۲۷- الف) چند تا از زیرگرافها k_6 ، دارای سه رأس هستند (دو زیرگراف یکریخت، ولی با مجموعهٔ رئوس متفاوت را ، متفاوت در نظر بگیرید .)

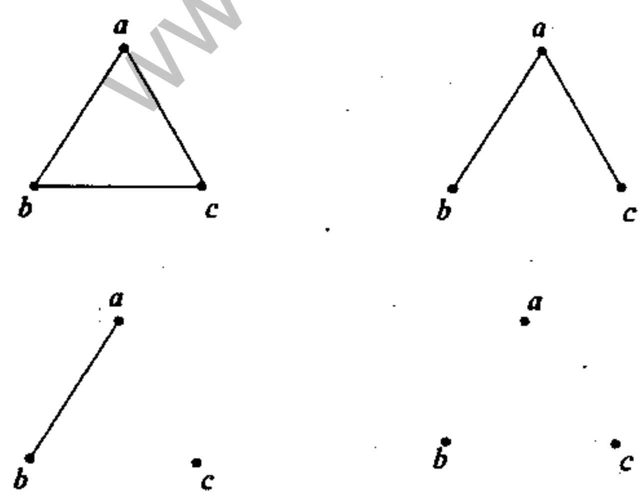
ب) چند تا از زیرگراف‌های k_6 چهار رأس دارند؟

ج) k_6 چند زیرگراف دارد ؟

د) برای $n \geq 3$ ، k_n چند زیرگراف دارد؟

پاسخ :

الف) k_6 یک گراف کامل است بنابراین هر نوع گرافی که با استفاده از سه رأس k_6 ساخته شود یک زیرگراف k_6 خواهد بود . ابتدا می‌دانیم به تعداد $\binom{6}{3}$ می‌توان از میان ۶ رأس k_6 ، ۳ رأس انتخاب کرد . از طرفی با ۳ رأس می‌توان ۴ گراف زیر را ساخت .



بنابراین تعداد کل زیرگراف‌های k_6 که دارای ۳ رأس هستند برابر است با :

$$4\binom{6}{3} = 4\frac{6!}{3!3!} = 80 \quad \left(=(\frac{3(3-1)}{2}+1)\binom{6}{3}\right)$$

ب) مانند (الف) ابتدا به تعداد $\binom{6}{4}$ می‌توان از میان ۶ رأس ، ۴ رأس انتخاب نمود . از طرفی تعداد گرافهایی که با ۴ رأس ساخته می‌شوند برابر است با :

$$\frac{4(4-1)}{2}+1$$

بنابراین تعداد زیرگرافهای k_6 که چهار رأس دارند برابر است با :

$$\left(\frac{4(4-1)}{2}+1\right)\binom{6}{4}$$

تذکر : k_4 یک گراف با چهار رأس است . بقیه گرافها با چهار رأس از حذف ۱و۲و۳و۴ یال از یالهای k_4 بدست می‌آیند . بنابراین تعداد گرافهای با چهار رأس عبارتند از :

$$\frac{4(4-1)}{2}+1$$

به همین ترتیب تعداد گرافهای با k رأس برابر است با :

$$\frac{k(k-1)}{2}+1$$

ج) زیرگرافهای k_6 می‌توانند با ۱ رأس ، ۲ رأس ، ... و ۶ رأس باشند . لذا با توجه به قسمت (ب) تعداد زیرگرافهای k_6 برابر است با :

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k(k-1)}{2}+1\right)\binom{6}{k}$$

د) با توجه به قسمت (ب) و (ج) ، تعداد زیرگرافهای k_n برابر است با :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k-1)}{2}+1\right)\binom{n}{k}$$

۲۸- برای گراف‌های G ارائه شده ، در زیر ، $|V|$ را حساب کنید .

الف) G ۹ یال دارد که درجهٔ همهٔ رئوس آن مساوی ۳ است .

ب) G یک گراف منتظم با ۱۵ یال است .

ج) G دارای ۱۰ یال ، دو رأس از درجهٔ ۴ و بقیهٔ رئوس از درجهٔ ۳ است .

پاسخ :

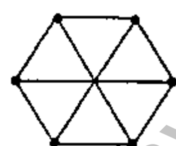
الف)با توجه به لم ۶-۱ داریم :

$$\sum_{v\in V}\mathbf{deg}(v) = ۲|E(G)|$$
$$\Rightarrow \sum_{v\in V}\mathbf{deg}(v) = ۲\times ۹ = ۱۸$$

اما بنا به فرض ۳ = $deg(v)$ ، بنابراین

$$\sum_{v\in V} ۳ = ۱۸ \Rightarrow ۳|V| = ۱۸ \Rightarrow |V| = ۶$$

می‌توان گراف G را به صورت زیر در نظر گرفت .



ب)با توجه به لم ۶-۱ داریم :

$$\sum_{v\in V}\mathbf{deg}(v) = ۲|E(G)|$$
$$\Rightarrow \sum_{v\in V}\mathbf{deg}(v) = ۲\times ۱۵ = ۳۰$$

اما ، در یک گراف منتظم داریم :

$$\mathbf{deg}(v) = |V| - ۱$$

بنابراین:

$$\sum_{v\in V}(|V|-۱) = ۳۰ \Rightarrow |V|(|V|-۱) = ۳۰$$
$$\Rightarrow |V|^۲ - |V| - ۳۰ = ۰$$
$$\Rightarrow (|V|-۶)(|V|+۵) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |V|-۶ = ۰ \\ |V|+۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow |V| = ۶ \;,\; |V| = -۵$$

که ۶ = $|V|$ قابل قبول است .

ج)

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = ۲\times ۱۰$$
$$\Rightarrow ۲\times ۴ + (|V|-۲)\times ۳ = ۲۰$$
$$\Rightarrow |V| = ۶$$

۲۹- اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند با $|V|=|E|$, $\deg(v)\geq ۳$ برای همهٔ رئوس $v\in V$ باشد ، در این صورت بیشترین مقدار $|V|$ چقدر است ؟

پاسخ :

فرض کنیم $\deg(v)=k\geq ۳$ در این صورت بنا به لم ۶-۱ داریم :

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = ۲|E(G)|$$
$$\Rightarrow \sum_{v\in V} k = ۲V \Rightarrow KV = ۲V \Rightarrow K = ۲$$

که با فرض $k\geq ۳$ متناقض است . بنابراین ، چنین مسالهای غیرممکن است .

۳۰- $G=(V,E)$ ، یک گراف بی‌سو (بدون حلقه) است که در آن برای هر $v\in V$ ، $\deg(v)\geq k\geq ۱$ نشان دهید که G مسیری به طول k دارد .

پاسخ :

از یک رأس G مانند $a_۱$ شروع می‌کنیم . چون $\deg(a_۱)=k\geq ۱$ بنابراین $a_۱$ با یک رأس مانند $a_۲$ مجاور است . لذا ، از $a_۱$ به $a_۲$ رفته یال مربوطه را حذف می‌نمایم . اگر $k=۱$ آنگاه حکم تمام است . در غیر اینصورت با توجه به اینکه $k-۱\geq ۱$ یال $a_۲$ باقیمانده است لذا $a_۲$ با یک رأس مانند $a_۳$ مجاور است . بنابراین از $a_۲$ به $a_۳$ رفته یال مربوطه را حذف می‌کنیم . اگر $k=۲$ حکم تمام است . در غیر اینصورت الگوریتم بالا را تا جایی ادامه می‌دهیم که یک مسیر با طول k بدست آید .

۳۱- الف) نشان دهید که چرا گرافی خطی همبند (بدون حلقه) با ۸ رأس ، با درجهٔ رئوس ۷،۵،۴،۳،۲،۱،۱،۱ وجود ندارد .

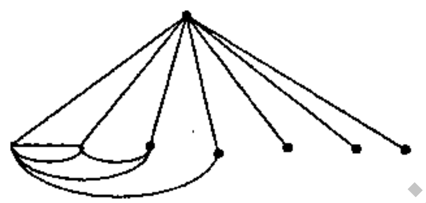
ب) مثالی از یک گراف چندگانهٔ همبند (بدون حلقه) با ۸ رأس ، با درجهٔ رئوس ۷،۵،۴،۳،۲،۱،۱،۱ ارائه دهید .

پاسخ :

الف) گراف مورد نظر یک رأس با درجه ۷ دارد . بنابراین این رأس باید به تمام رأس‌های دیگر یالی داشته باشد . با رسم این یالها ، رأس با درجه ۷ و سه رأس با درجه ۱ نمی‌توانند یالی دریافت کنند . لذا فقط ۴ رأس باقیمانده می‌توانند یال دریافت

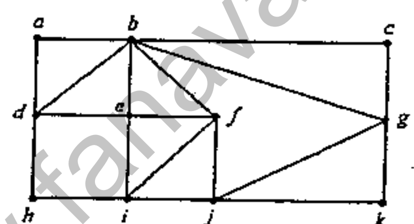
کنند. از میان۴ رأس فوق یک رأس با درجه ۵ است . این رأس یک یال از رأس درجه۷ دریافت کرده است . بنابراین باید ۴ یال به رأسهای دیگر داشته باشد، در حالیکه تنها۳ رأس برای دریافت یال باقیمانده است . پس گرافی خطی با مشخصات خواسته شده وجود ندارد .

ب)



۳۲- الف) یک مدار اولری برای گراف زیر ارائه دهید .

ب) اگر یال $\{d,e\}$ را از این گراف حذف کنیم ، مسیر اولری برای گراف باقیمانده ارائه دهید.



پاسخ :

الف) مدار زیر را در نظر بگیرید :

$a, b, c, g, b, f, j, g, k, j, i, f, e, i, h, d, e, b, d, a$

ب) مسیر اولری زیر را در نظر بگیرید :

$d, b, a, d, h, i, e, f, i, j, f, b, c, g, k, j, g, b$

۳۳- مقدار و یا مقادیری از n را پیدا کنید که برای آن (آن‌ها) ، گراف K_n مدار اولری داشته باشد . به ازای چه مقادیری از n ، K_n دارای مسیر اولری است ولی مدار اولری ندارد ؟

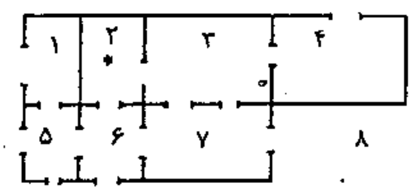
پاسخ :

بنا به قضیه ۶-۱ ، گراف G دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر رأسی از درجه فرد نداشته باشد . می‌دانیم ، در k_n درجه هر رأس برابر است باn-۱ بنابراین k_n ، دارای مدار اولری است . اگر و فقط اگر n-۱ زوج باشد . یعنیn فرد ($n \geq ۳$) باشد .

همچنین بنا به لم ۶-۳ ، گراف k_n زمانی دارای مسیر اولری است که حداکثر۲ رأس از درجه فرد باشد. اما ، تمام رأسهای k_n یا زوج هستند و یا فرد . لذا مانند قبل k_n

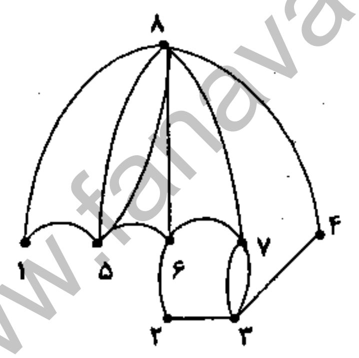
زمانی دارای مسیر اولری است که n فرد باشد. ($n \geq ۳$) همچنین برای n=۲ نیز روشن است $k_۲$ دارای مسیر اولری است .

۳۴- با شروع از نقطهٔ علامت‌گذاری شده به وسیلهٔ ستاره در شکل زیر ، می‌خواهیم از هفت اتاق و راهروی پیرامونی آنها به گونه‌ای عبور کنیم که از هر در ، تنها و تنها یک بار گذشته باشیم . آیا این عمل امکان‌پذیر است؟



پاسخ :

محل‌ها و راهروی پیرامونی را به عنوان رأس و درها را به عنوان یال گراف در نظر می‌گیریم . در این صورت گراف زیر را خواهیم داشت :



تمام رئوس از درجه زوج هستند . بنابراین ، بنا به قضیه ۶-۱ ، گراف فوق یک مدار اولری دارد. با توجه به اینکه یالهای گراف ، جانشین درهای محل مورد بحث هستند لذا عمل مورد نظر امکان‌پذیر است .

۳۵- فرض کنید که G یک گراف بی‌سو (بدون حلقه) با $n \geq ۳$ رأس است . اگر G ، تنها یک رأس از درجهٔ زوج داشته باشد ، $\overline{G}$ چند رأس از درجهٔ زوج دارد .

پاسخ :

برای یک درجه دلخواه از G مانند a ، با توجه به تعریف $\overline{G}$ داریم :

$n-۱$ = (درجه a در k_n) = (درجه a در $\overline{G}$) + (درجه a در G)

حال اگر درجه a در G فرد باشد آنگاه $\deg(a) = ۲k + ۱$ لذا

$$\text{درجه } a \text{ در } \overline{G} = (n-۱)-(۲k+۱) = n-۲k-۲$$

$$= n - ۲(k+۱) = n - ۲k'$$

اگر n زوج باشد آنگاه $n - ۲k'$ نیز زوج خواهد بود و اگر n فرد باشد. آنگاه $n - ۲k'$ نیز فرد خواهد بود.

حال اگر درجه a در گراف G زوج باشد. آنگاه $\deg(a)=۲m$. لذا

$$\text{درجه } a \text{ در } \overline{G} = (n-۱)-۲m = n-۲m-۱ = n-(۲m+۱)$$

مانند بحث بالا، اگر n فرد باشد آنگاه درجه a در $\overline{G}$ زوج و اگر n زوج باشد درجه a در $\overline{G}$ فرد خواهد بود. مطالب بالا را به صورت زیر می‌توان جمع‌بندی نمود.

درجه a در G فرد باشد

اگر n زوج باشد $\Leftarrow$ درجه a در $\overline{G}$ زوج است.

اگر n فرد باشد $\Leftarrow$ درجه a در $\overline{G}$ فرد است.

درجه a در G زوج باشد.

اگر n زوج باشد $\Leftarrow$ درجه a در $\overline{G}$ فرد است.

اگر n فرد باشد $\Leftarrow$ درجه a در $\overline{G}$ زوج است.

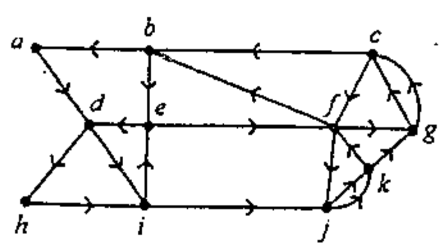
۳۶- نشان دهید که برای هر گراف یا گراف چندگانهٔ سودار $G=(V,E)$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\sum_{v\in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v\in V} \deg^{-}(v)$$

پاسخ:

در هر گراف، هر یال از گراف به یک رأس حادث و از یک رأس حادث است. بنابراین هر یال، یک واحد به $\deg^{+}_{v\in V}(v)$ و یک واحد به $\deg^{-}_{v\in V}(v)$ می‌افزاید. درنتیجه رابطه داده شده برقرار است.

۳۷- برای گراف سودار زیر، یک مدار اولری ارائه دهید.



پاسخ:

مدار زیر را در نظر بگیرید:

$a, d, h, i, j, k, g, c, b, e, d, i, e, f, j, k, f, g, c, f, b, a$

۳۸- نشان دهید که هر گراف سوداری که مدار اولری داشته باشد ، قویاً همبند است . آیا عکس موضوع هم صحت دارد ؟

پاسخ :

فرض کنیم گراف سودار دارای مدار اولری باشد. این مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$v_1 - v_2 - \dots - v_{n-1} - v_n - v_1$

دو رأس دلخواه مانند v_r , v_s را در نظر می‌گیریم. این رأسها در مدار فوق ظاهر شده‌اند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنیم v_r , v_s به صورت زیر در مدار ظاهر شده‌اند :

$v_1 - \dots - v_{r-1} - v_r - v_{r+1} - \dots - v_{s-1} - v_s - v_{s+1} - \dots - v_n - v_1$

در این صورت

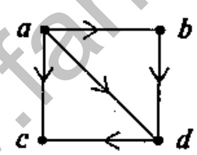
$v_r - v_{r+1} - \dots - v_{s-1} - v_s$

یک مسیر از v_r به v_s و

$v_s - v_{s+1} - \dots - v_n - v_1 - v_2 - \dots - v_{r-1} - v_r$

یک مسیر از v_r به v_s است . بنابراین گراف مورد بحث قویاً همبند می‌باشد .

برای رد عکس موضوع به مثال نقضی زیر توجه کنید :



این گراف قویاً همبند است . اما ، درجه ورودی و خروجی هر رأس برابر نیست .

$\deg^-(a) \neq \deg^+(a) \quad , \deg^-(d) \neq \deg^+(d)$

لذا ،بنا به قضیه ۶-۲ ، گراف بالا دارای مدار اولری نمی‌باشد .

۳۹- نشان دهید که اگر با حذف جهت یال‌ها در گراف سودار G ، گراف کامل K_n حاصل شود ، آنگاه رابطهٔ زیر برای گراف G برقرار است :

$$\sum_{v\in V}[\deg^+(v)]^2 = \sum_{v\in V}[\deg^-(v)]^2$$

پاسخ :

از اینکه در هر گراف کامل k_n ، درجه هر رأس برابر $n-1$ است . بنابراین برای هر رأس G خواهیم داشت :

$\deg^+(v) + \deg^-(v) = n-1$

$\Rightarrow \deg^+(v) = (n-1) - \deg^-(v)$

$$\Rightarrow \left[\deg^{+}(v)\right]^{2} = \left[(n-1) - \deg^{-}(v)\right]^{2}$$

$$\Rightarrow \left[\deg^{+}(v)\right]^{2} = (n-1)^{2} - 2\deg^{-}(v)(n-1) + \left[\deg^{-}(v)\right]^{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{v\in V}\left[\deg^{+}(v)\right]^{2} = \sum_{v\in V}(n-1)^{2} - 2(n-1)\sum_{v\in V}\deg^{-}(v) + \sum_{v\in V}\left[\deg^{-}(v)\right]^{2} \qquad (1)$$

با توجه به اینکه در k_n ، هر رأس دارای درجه $n-1$ می‌باشد بنابراین :

$$\sum_{v\in K_n}\deg(v) = n(n-1) \qquad (2)$$

همچنین برای هر رأس v ، بین گراف سودار G و k_n (که از حذف جهت یالهای G بدست آمده است) رابطه زیر برقرار است :

$$\deg^{+}_{k_n}(v) + \deg^{-}_{k_n}(v) = \deg_G(v) \qquad (3)$$

لذا ، از ۲و۳ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{v\in V}\deg^{+}(v) + \sum_{v\in V}\deg^{-}(v) = n(n-1)$$

با استفاده از تمرین ۳۶ از رابطه اخیر بدست می‌آوریم :

$$\sum_{v\in V}\deg^{-}(v) + \sum_{v\in V}\deg^{-}(v) = n(n-1)$$

$$\Rightarrow 2\sum_{v\in V}\deg^{-}(v) = n(n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{v\in V}\deg^{-}(v) = \frac{n(n-1)}{2}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در (۱) بدست می‌آوریم :

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}\left[\deg^{+}(v)\right]^{2} &= \sum_{v\in V}(n-1)^{2} - 2(n-1)\sum_{v\in V}\deg^{-}(v) + \sum_{v\in V}\left[\deg^{-}(v)\right]^{2}\\ &= n(n-1)^{2} - 2(n-1)\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{v\in V}\left[\deg^{-}(v)\right]^{2}\\ &= n(n-1)^{2} - n(n-1)^{2} + \sum_{v\in V}\left[\deg^{-}(v)\right]^{2}\\ &= \sum_{v\in V}\left[\deg^{-}(v)\right]^{2}\end{aligned}$$

۴۰- فرض کنید که $V=(0000,0001,0010,\ldots,1110,1111)$

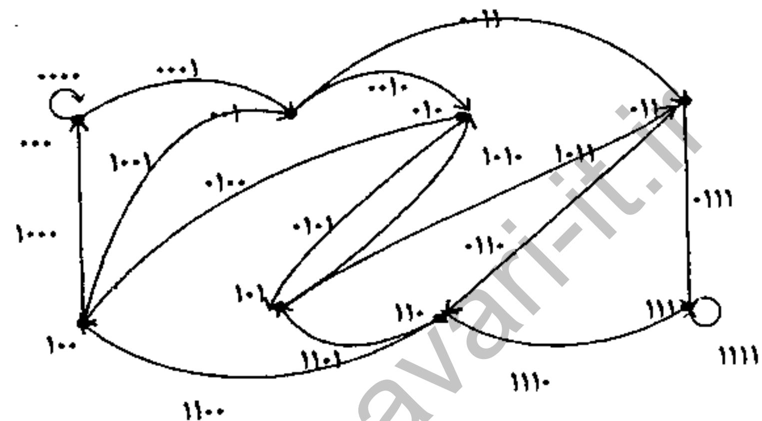
الف) گراف سودار $G=(V,E)$ را به شرح زیر رسم کنید . برای هر رشته چهار بیتی $b_1b_2b_3b_4$ یالی از عنصر $b_1b_2b_3$ به عنصر $b_2b_3b_4$ در V رسم کنید .

ب) یک مدار اولری سودار برای G ارائه دهید .

ج) یک آرایش مدور از هشت ۰ و هشت ۱ ، در روی دایره‌ای (در جهت چرخش عقربه‌های ساعت) به گونه‌ای ارائه دهید تا در آرایهٔ حاصل از ۱۶ بیت مزبور ، رشتهٔ زیرآرایه‌های متوالی ۴ بیتی ، نمایشگر اعداد صفر الی ۱۵ در مبنای دو باشند.

پاسخ :

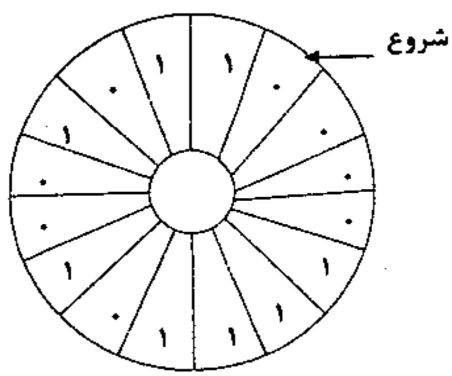
الف)



ب) از رأس ۰۰۰ ، شروع می‌کنیم . یک مدار اولری را با استفاده از یالهای گراف در زیر آورده‌ایم :

و ۱۰۱۱ و ۰۱۰۱ و ۰۰۱۰ و ۱۰۰۱ و ۰۱۰۰ و۱۰۱۰ و ۱۱۰۱ و ۱۱۱۰ و ۱۱۱۱ و ۰۱۱۱ و۰۰۱۱ و ۰۰۰۱ و ۰۰۰۰
۱۰۰۰ و ۱۱۰۰و ۰۱۱۰

ج) آرایش مدور خواسته شده با استفاده از مدار بالا ، به صورت زیر است :



۴۲- نشان دهید که در یک گراف خطی بی‌سو و بدون حلقهٔ $G=(V,E)$ ، با $|V| \geq 2$ دو راس مثل w,u وجود دارند به گونه‌ای که $deg(u)=deg(w)$.

پاسخ :

اگر G هیچ رأس از درجه صفر نداشته باشد آنگاه درجه رئوس G می‌تواند یکی از اعداد $1, 2, \ldots, n-1$ باشد . رئوس G را به عنوان کبوتر و اعداد $1, 2, \ldots, n-1$ را به عنوان لانه در نظر می‌گیریم .چون تعداد رئوس (n) بیشتر از تعداد لانه‌ها است لذا ، بنا به اصل لانه کبوتر حداقل ۲ رأس وجود دارد که درجه آنها مساوی است .

حال اگر G یک راس از درجه صفر داشته باشد ، آنگاه درجه هر رأس از $n-1$ رأس باقیمانده ، یکی از اعداد $1, 2, \ldots, n-2$ می‌تواند باشد. لذا مجدداً بنا به اصل لانه کبوتر حداقل۲ رأس با درجه مساوی وجود دارد. اما اگر G دو رأس از درجه صفر داشته باشد آنگاه این دو رأس همان مطلوب است .

۴۳- علی و همسرش اکرم ، سه زوج دیگر را به میهمانی دعوت کرده‌اند. در این میهمانی ، تعدادی سلام رد وبدل شده است . اما می‌دانیم که ،

۱)کسی به خودش سلام نکرده است .

۲) کسی به همسرش سلام نکرده است .

۳) هر شخص ، به شخص دیگر ، حداکثر یک بار سلام کرده است .

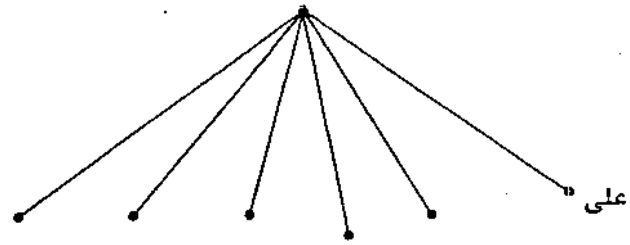
قبل از رفتن میهمانان ، علی از هر کدام از آنها می‌پرسد که چند بار سلام کرده‌اند . از هر کدام از هفت نفر ، جواب‌های متمایز می‌شنود . حال بگویید خود علی چند بار سلام کرده است ؟ همسر وی چند بار سلام کرده است ؟

پاسخ :

افراد حاضر در مجلس را به عنوان رأسهای گراف در نظر می گیریم . بین دو رأس یالی رسم می‌کنیم اگر و فقط اگر بین دو نفر متناظر سلامی رد و بدل شده باشد . با توجه به فرضهای مسأله ، یک گراف خطی بی سو و بدون حلقه خواهیم داشت که درجه هر رأس آن حداکثر ۶ می باشد .

با توجه به اینکه هفت نفر ، جوابهای متمایز داده‌اند بنابراین هفت رأس گراف بدون در نظر گرفتن علی ، دارای درجه رئوس $0, 1, 2, \ldots, 6$ خواهند بود. رأس با درجه صفر را کنار می‌گذاریم که ممکن است همسر علی باشد . لذا زیرگرافی با شش رأس بدست می‌آوریم که درجه یکی از رئوس آن ۶ ، دیگری $1, \ldots, 5$ می‌باشد . که علی هیچکدام از رئوس فوق نیست . (ممکن است درجه رأس علی با یکی از درجه‌های فوق برابر باشد.)

حال علی را به زیرگراف اضافه کرده گرافی را با خصوصیات فوق رسم می‌کنیم.



حال برای ایجاد یک رأس از درجه ۵ ، ناچاریم یکی از رأسهای با درجه ۱ را انتخاب کرده با حفظ خطی بودن گراف ۴ یال به رأس‌های دیگر رسم کنیم . که در این صورت هیچ رأسی از درجه ۱ باقی نمی ماند . اما ، این نشدنی است زیرا بنا به فرض لازم است حداقل یک رأس از درجه ۱ داشته باشیم . بنابراین ، مسأله مورد بحث نشدنی است .

۴۴- نشان دهید که اگر هر یالی را از گراف K_5 حذف کنیم ، گراف حاصل هامنی خواهد بود . آیا این موضوع برای $K_{3,3}$ نیز صادق است ؟

پاسخ :

فرض کنیم یک یال از گراف K_5 حذف کرده‌ایم . در ایـن صـورت گـراف حاضـر را G می‌نامیم روشن است G با K_5 یکریخت نیست . همچنینG نمی‌تواند با k_5 همریخـت باشد ، زیرا G و K_5 هر دو پنج رأس دارند و اگر الگوریتم زیر بخش‌ها مقـدماتی روی یکی از گرافهای فوق اجرا شود. گراف حاصل دیگر پنج رأس نخواهد داشت و نمی‌توان دیگری را از آن بدست آورد .

از طرفیG با $K_{3,3}$ نیز همریخت نمی باشد . چرا کـه G دارای ۵ رأس و $k_{3,3}$ دارای۶ رأس می باشد . بنابراین روش زیر بخش‌های مقدماتی را تنها یکبار می توانیم روی G اجرا کنیم . از اینکه G دارای ۳ رأس از درجه ۵ و دو رأس از درجـه ۴ اسـت لـذا بـا یکبار اجرای الگوریتم زیر بخش مقدماتی روی G ، نمی توان گراف $K_{3,3}$ را که دارای ۶ رأس و هر کدام از درجه۳ می‌باشـد را بـه دسـت آورد . درنتیجـه بنـا بـه قضیه کوراتاوسکی ، گراف G هامنی است .

۴۵- الف) چند رأس و چند یال در گراف‌های دو بخشی کامل $K_{2,7}$، $K_{7,11}$، $K_{m,n}$ وجود دارد ؟

ب) اگرگراف $K_{m,12}$ دارای۷۲ یال است ، آنگاه m چقدر است ؟

ج) با توجه به تعداد یال‌ها در گراف‌های K_{m+n}،$K_{m,n}$و$\overline{K}_{m,n}$،رابطهٔ ترکیباتی زیر را ثابت کنید :

$$C^2_{m+n} - mn = C^2_m + C^2_n$$

پاسخ :

الف) گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ دارای دو بخش است که رئوس یک بخش آنرا با $V_1,...,V_m$ و رئوس بخش دیگر را با $W_1,...,W_n$ نمایش می‌دهیم . با توجه به اینکه از هر رأس V_i $(1 \le i \le m)$ که تمام رأسهای W_j $(1 \le j \le m)$ یالی وجود دارد بنابراین تعداد کل یالها برابر است با :

$$e = mn$$

همچنین روشن است که

$$V = m + n$$

درنتیجه برای $K_{4,7}$ داریم :

$$e = 28 \quad , \quad V = 11$$

همچنین برای $K_{7,11}$ نیز داریم:

$$e = 77 \quad , \quad V = 18$$

ب) با توجه به الف باید داشته باشیم :

$$e = 72 = 12m \quad \Rightarrow m = 6$$

ج) گراف دو بخشی $K_{m,n}$ را در نظر می گیریم . فرض کنیم $V_1,...,V_m$ رأس‌های بخش اول و $W_1,...,W_n$ رأسهای بخش دوم گراف باشد . می‌دانیم در $K_{m,n}$ از هر رأس بخش اول به تمام رأسهـای بخش دوم یالی وجود دارد و بالعکس . همچنین بین رأسهـــای هر بخش هیچ یالـــی وجود ندارد . بنـــابراین در $\overline{K}_{m,n}$ بین V_i و W_j $(1 \le i \le m \;,\; 1 \le j \le n)$ هیچ یالی وجود ندارد. از طرفی با توجه به ساختار $K_{m,n}$ ، در $\overline{K}_{m,n}$ به ازای هر r,s که در آن $(1 \le r \le m \;,\; 1 \le s \le n)$ بین V_r و V_s یالی وجود دارد. به همین ترتیب بازای هر k,l ، که در آن $1 \le L \le n$ و $1 \le k \le n$ بین W_k , W_l یالی وجود دارد ، درنتیجه $\overline{K}_{m,n}$ یک گراف غیرهمبند با دو مؤلفه K_m , K_n می باشد .

از طرفی داریم :

$$\text{تعداد یالها در } K_{m,n} + \text{تعداد یالها در } \overline{K}_{m,n} = \text{تعداد یالها در } K_{m+n}$$

$$\Rightarrow mn + (\text{تعداد یالها در } K_m + \text{تعداد یالها در } K_n) = \text{تعداد یالها در } K_{m+n}$$

$$\Rightarrow mn + (C_m^2 + C_n^2) = C_{m+n}^2$$

$$\Rightarrow C_{m+n}^2 - mn = C_m^2 + C_n^2$$

۴۶- آیا یک گراف دو بخشی می‌تواند شامل دوری به طول فرد باشد ؟ توضیح دهید چرا ؟

پاسخ :

نه خیر . فرض کنیم $V_1,...,V_m$ رأس‌های بخش اول و $W_1,...,W_m$ رأس‌های بخش دوم گراف باشد . با توجه به ساختار گراف دو بخشی ، هر دور در این گراف به یکی از صورت‌های زیر است .

$$V_{i_1}-W_{j_1}-V_{i_2}-W_{j_2}-...-V_{i_s}-W_{i_s}-V_{i_1}$$

$$W_{k_1}-V_{l_1}-W_{k_2}-V_{l_2}-...-V_{l_r}-W_{k_1}$$

که در حالت اول ، طول دور برابر $2s$ و درحالت دوم طول دور برابر $2r$ است . لذا ، گراف دوبخشی نمی‌تواند شامل دوری به طول فرد باشد .

۴۷- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف همبند و بدون حلقه با تعداد رئوس $|V|=\nu$ باشد. نشان دهید که اگر $|E|>(\frac{\nu}{2})^2$ ، آنگاه G نمی‌تواند دوبخشی باشد .

پاسخ :

فرض کنیم بخش اول گراف شامل n رأس باشد . در این صورت با توجه به اینکه $|V|=\nu$ ، بخش دوم گراف شامل $\nu-n$ رأس خواهد بود . گراف دوبخشی بیشترین یال را زمانی دارد که کامل باشد . که در این صورت با توجه به تمرین ۴۵ این گراف دارای $e=n(\nu-n)$ یال خواهد بود . با استفاده از مشتق‌گیری معلوم می‌شود که عبارت فوق زمانی ماکزیمم می‌شود که داشته باشیم $n=\frac{\nu}{2}$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$e=(\frac{\nu}{2})^2$$

به عبارتی یک گراف دو بخشی با $|V|=\nu$ حداکثر می‌تواند $(\frac{\nu}{2})^2$ یال داشته باشد. لذا ، اگر $e>(\frac{\nu}{2})^2$ آنگاه گراف نمی‌تواند دو بخشی باشد .

۴۸- الف) تمام گراف‌های دوبخشی کامل و غیریکریخت $G=(V,E)$ با تعداد رئوس $|V|=6$ را پیدا کنید.

ب) چند تا از گراف‌های دوبخشی کامل و غیریکریخت $G=(V,E)$ در رابطهٔ $|V|=n\geq 2$ صادق هستند ؟

پاسخ :

الف) گرافهای دوبخشی کامل غیریکریخت با $|V|=6$ عبارتند از :

$K_{1,5}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$

ب) با توجه به اینکه گرافهای $K_{p,q}$, $K_{q,p}$ یکریخت هستند . بنابراین گرافهای دوبخشی کامل و غیریکریخت با $|V|=n\geq 2$ به صورت زیر هستند :

$$K_{r,n-r} \quad :(r\leq \frac{n}{2}) \;\; \text{یا} \;\; (r\leq n-r)$$

۴۹- الف) فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5\}$ گراف بی‌سو و بدون حلقهٔ $G=(V,E)$ را به صورت زیر تشکیل دهید :

هر مجموعهٔ دو عنصری از X نمایشگر یک رأس در V است .

اگر $v_1,v_2\in V$ ، به ترتیب متناظر با زیر مجموعه‌های $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ از X هستند ، آنگاه ، $\{v_1,v_2\}$ یک یال از G است مشروط به اینکه ، $\{a,b\}\cap\{c,d\}=\phi$.

ب) G با چه گرافی یکریخت است ؟

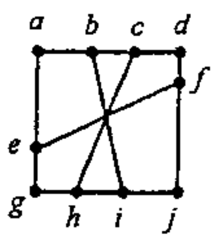
پاسخ :

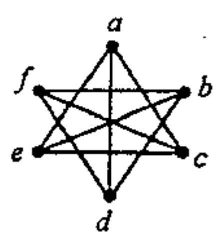
الف) داریم :

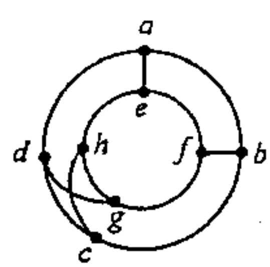
$$V=\left\{\begin{matrix}\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\}\\ ,\{2,5\},\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,4\},\{4,5\},\{5,5\}\end{matrix}\right\}$$

رأس‌های $\{1,1\},\{2,2\},\{3,3\},\{4,4\},\{5,5\}$ با درجه ۱۰ و بقیه رأسها با درجه ۶ خواهند بود .

۵۰- کدام یک از گراف‌های زیر هامنی است ؟ اگر گرافی هامنی است آن را به گونه‌ای رسم کنید که یالهای آن تلاقی نداشته باشد و اگر هامنی نیست زیرگرافی از آن ، همریخت با K_5 و یا $K_{3,3}$ ارائه دهید.

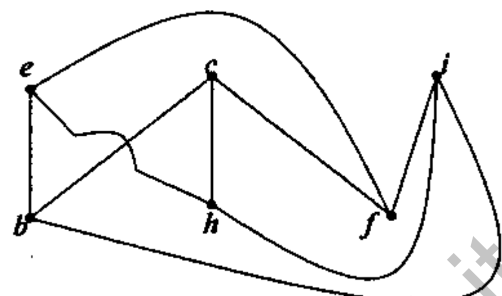




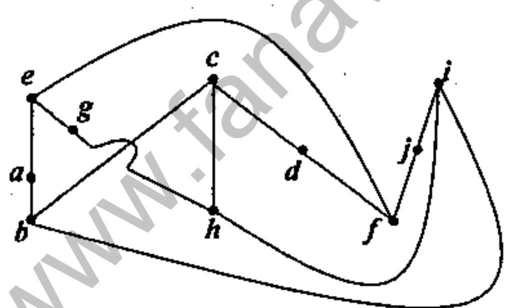


پاسخ :

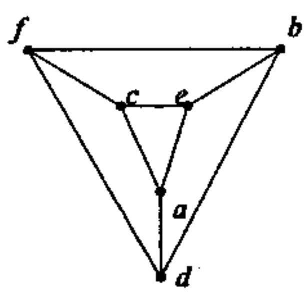
اولین گراف سمت چپ غیرهامنی است . زیرا با $K_{3,3}$ به صورت زیر همریخت است:



حال با افزودن به ترتیب g,a,d,j به روش زیربخش‌ها مقدماتی ، گراف مورد بحث را که همریخت با گراف $K_{3,3}$ بالاست بدست می‌آوریم :



گراف وسط هامنی است . زیرا آن را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد :



۵۱- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف همبند بی‌سو ، بدون حلقه و هامنی است که در آن ، درجهٔ هر رأس مساوی۴ است . اگر $|E| = ۱۶$ ، در این صورت چند ناحیه در گراف G وجود دارد ؟

پاسخ :

می‌دانیم :

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = ۲|E|$$
$$\Rightarrow \sum_{v\in V} ۴ = ۲\times ۱۶$$
$$\Rightarrow ۴|V| = ۳۲ \Rightarrow |V| = ۸$$

لذا ، با توجه به قضیه ۶-۶ داریم:

$$v - e + r = ۲$$
$$\Rightarrow ۸ - ۱۶ + r = ۲ \Rightarrow r = ۱۰$$

لذا ، گراف مورد بحث دارای ۱۰ ناحیه می‌باشد .

۵۲- اگر G یک گراف همبند بدون حلقه و هامنی باشد ، نشان دهید که رأسی مثل v در G وجود دارد بطوریکه $deg(v)<۶$.

پاسخ :

فرض کنیم چنین نباشد . (فرض خلف) بنابراین بازای هر رأس V در G خواهیم داشت:

$$\deg(v) \geq ۶$$

در این صورت:

$$۲e = \sum_{v\in V}\deg(v) \geq \sum_{v\in V} ۶ = ۶|V|$$
$$\Rightarrow ۲e \geq ۶v \Rightarrow e \geq ۳v$$

و این متناقض با لم ۶-۵ است . بنابراین فرض خلف باطل است . یعنی ، لااقل ، یک رأس مانند V از G وجود دارد به طوریکه درجه آن کمتر از ۶ باشد .

۵۳- الف) فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف همبند بدون حلقه با $|V| \geq ۱۱$ باشد . نشان دهید که یا G و یا مکمل آن $\overline{G}$ ،هامنی نیست .

ب) نتیجهٔ قسمت (الف) برای $|V| \geq ۹$ نیز صادق است ، ولی اثبات حالت‌های $|V| = ۱۰$ و $|V| = ۹$ مشکل است. یک مثال نقض برای حالت $|V| = ۸$ در قسمت (الف) ارائه دهید .

پاسخ :

الف) فرض کنیم G یک گراف همبند بدون حلقه با $|V| \geq 11$ باشد به طوریکه G و $\overline{G}$ هر دو هامنی هستند . (فرض خلف) در این صورت اگر e تعداد یالهای G و $\overline{e}$ تعداد یالهای $\overline{G}$ باشد ، با توجه به تعریف مکمل روشن است تعداد رأسهای $\overline{G}$ که آنرا با $\overline{\nu}$ نشان می‌دهیم در رابطه زیر صدق می کند :

$$\overline{\nu} \leq \nu = |V|$$

با توجه به فرض خلف ، رابطه اخیر و از لم ۶-۵ نتیجهٔ می‌شود که :

$$e \leq ۳\nu - ۶$$
$$\overline{e} \leq ۳\overline{\nu} - ۶ \leq ۳\nu - ۶$$
$$\Rightarrow e + \overline{e} \leq (۳\nu - ۶) + (۳\nu - ۶)$$
$$\Rightarrow e + \overline{e} \leq ۶\nu - ۱۲$$

از اینکه تعداد کل یالهای G به‌اضافه $\overline{G}$ برابر تعداد یالهای K_ν است $(\nu = |V|)$ لذا از رابطه بالا به دست می‌آوریم :

$$\frac{\nu(\nu - ۱)}{۲} \leq ۶\nu - ۱۲ \quad \Rightarrow \nu(\nu - ۱) \leq ۱۲\nu - ۲۴$$
$$\Rightarrow \nu^۲ - ۱۳\nu + ۲۴ \leq ۰$$

اما ، با توجه به جدول تعیین علامت مشخص می‌شود که بازای $\nu \geq 11$ داریم :

$$\nu^۲ - ۱۳\nu + ۲۴ > ۰$$

و این یک تناقض است . بنابراین فرض خلف باطل است . یعنی یا G و یا $\overline{G}$ هامنی نیست .

ب) ساختن مثال نقض برای حالت $|V| = ۸$ ساده است . به خاطر اینکه شکل شلوغ است اینجا آنرا نمی‌آوریم .

۵۴- مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که :

الف) هم دارای مدار اولری و هم دارای دور هامیلتونی است .

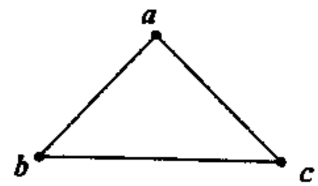
ب) دارای مدار اولری بوده ولی دور هامیلتونی نداشته باشد .

ج) مدار اولری نداشته ولی دور هامیلتونی داشته باشد .

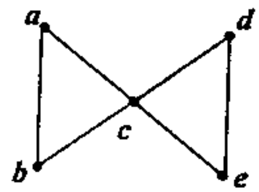
د) نه دارای مدار اولری و نه دارای دور هامیلتونی باشد .

☜ **پاسخ :**

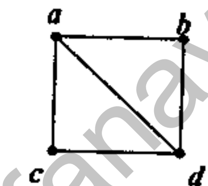
الف)



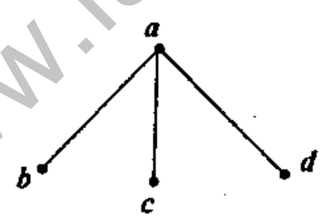
ب)



ج)



د)

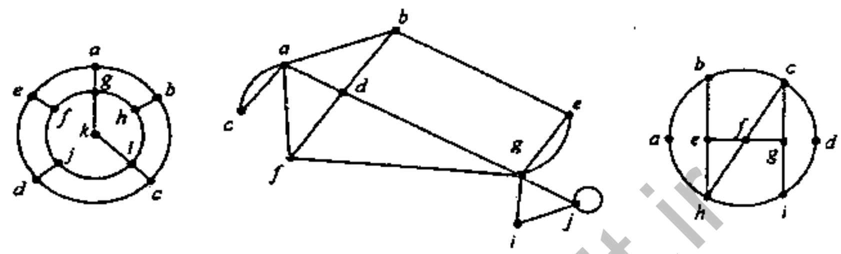


۵۵- چه نوع گراف‌هایی را می‌شناسید که هم دارای مسیر (مدار) اولری و هم دارای مسیر (دور) هامیلتونی هستند ؟

☜ **پاسخ :**

گراف‌های کامل، K_{2n+1} ، دارای این خصوصیت می باشند .

۵۶- کدام یک از گراف‌های زیر دارای دور هامیلتونی است ؟ گرافی که دور هامیلتونی ندارد ، آیا دارای مسیر هامیلتونی است؟



(ج) (ب) (الف)

پاسخ :

الف) یک دور هامیلتونی به صورت زیر است :

$b-a-h-e-f-g-i-d-c-b$

ب) گراف داده شده دارای دور هامیلتونی نیست . اما ، یک مسیر هامیلتونی به صورت زیر دارد .

$i-j-g-e-b-d-f-a-c$

ممکن است مسیرهای دیگری هم موجود باشند .

ج) یک دور هامیلتونی به صورت زیر داریم :

$e-a-b-h-g-k-i-c-d-j-f-e$

۵۷- الف) نشان دهید که گراف پترسن که دور هامیلتونی ندارد ، شامل مسیر هامیلتونی است.

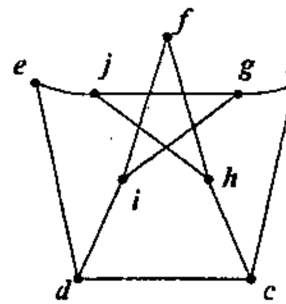
ب) نشان دهید که اگر یک رأس دلخواه (و یال‌های حادث با آن) را از گراف پترسن حذف کنیم ، گراف حاصل دارای دور هامیلتونی است .

پاسخ :

الف) مسیر هامیلتونی زیر را در نظر بگیرید :

$g-j-h-f-i-d-c-b-a-e$

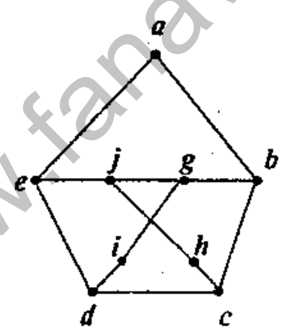
ب) اگر رأس حذف شده ، یک رأس بیرونی باشد . (مثلاً رأس a) در این صورت گراف پترسن پس از حذف رأس a و یالهای مربوط به آن به صورت زیر در می‌آید :



که یک دور هامیلتونی به صورت زیر خواهیم داشت :

$g-j-e-d-i-f-h-c-b-g$

اگر رأس حذف شده یک رأس درونی باشد . (مثلاً f) در این صورت گراف زیر را خواهیم داشت :



که این بار ، یک دور هامیلتونی به صورت زیر به دست می‌آید :

$g-i-d-e-a-b-c-h-j-g$

با توجه به شکل متقارن گراف پترسن ، هر رأس از این گراف با یال‌های حادث آن حذف شود ، گراف حاصل به یکی از دو صورت بالا درمی‌آید . که در حالت ، گراف حاصل دارای دور هامیلتونی می‌باشد .

۵۸- الف) برای $n \geq 3$ ، چند دور هامیلتونی متفاوت در گراف کامل K_n وجود دارد ؟

ب) چند دور هامیلتونی با یال‌های متمایز در K_{21} موجود است ؟

ج) مثال ۷-۹ را برای تعداد ۱۹ دانشجو حل کنید .

پاسخ :

الف) مراحل مختلف ایجاد یک دور هامیلتونی در زیر آمده است :

۱) انتخاب یک نقطه شروع : n راه برای این انتخاب وجود دارد .

۲) حرکت از نقطه شروع به رأس مجاور : $n-1$ رأس مجاور با نقطه شروع وجود دارد که می‌توان به هر کدام از آنها رفت .

۳)حرکت از رأس دوم به رأس مجاور بعدی : با توجه به اینکه به رأس قبلی نباید برگردیم لذا $n-2$ راه برای رفتن به رأس بعدی داریم .

⋮

۴) حرکت از رأس k-ام به رأس بعدی : با توجه به اینکه در مرحله k-ام به رأس‌های قبلی نمی‌توانیم برگردیم لذا $n-k$ برای رفتن به رأس بعدی داریم .

در مرحله آخر نیز تنها یک راه داریم و آن رفتن به رأس شروع است .

نکته آخر اینکه هر دور هامیلتونی در K_n دارای n رأس است . لذا اگر از هر رأس دوری مانند c شروع کنیم و c را طی کنیم هیچ تفاوتی نمی‌کند . پس، از میان دورهای بالا ، هر n دور مشابه هستند .

بنابراین تعداد کل دورهای هامیلتونی در K_n برابر است با :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

ب) یک دور هامیلتونی دلخواه از K_{21} در نظر گرفته ، همه یالهای آن را از گراف حذف می‌کنیم . با توجه به اینکه در K_{21} درجه هر رأس برابر ۲۰ است ، با حذف یالهای دور هامیلتونی در گراف حاضر درجه هر رأس برابر ۱۸ خواهد بود . مجدداً در گراف حاضر یک دور هامیلتونی در نظر گرفته سپس یالهای مرتبط با آن را حذف می کنیم . لذا گرافی با ۲۱ رأس به دست می‌آید که درجه هر کدام از رأسهای آن ۱۶ است . این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که همه یالهای K_{21} حذف شود . با توجه به روش فوق ، روشن است ۱۰ دورهامیلتونی برای K_{21} بدست می‌آید که یالهای متمایز دارند .

تذکر: هر گراف منتظم با n رأس $(n \geq 3)$ که درجه رئوس آن بزرگتر یا مساوی۲ باشد دور هامیلتونی دارد .

۵۹- الف) نشان دهید که برای $n \geq 2$ ، تعداد دورهای هامیلتونی متمایز در گراف $K_{n,n}$، مساوی $\frac{1}{2}(n-1)!n!$ است .

ب) چند مسیر هامیلتونی متفاوت در $K_{n,n}$ ، $n \geq 1$ وجود دارد ؟

پاسخ :

الف) مراحل مختلف ایجاد یک دور هامیلتونی در یک گراف $K_{n,n}$، در زیر آمده است:

۱) انتخاب نقطه شروع : $2n$ راه برای انتخاب این نقطه وجود دارد .

۲) حرکت از نقطه شروع به نقطه مجاور : با توجه به اینکه نقطه شروع در یک بخش و نقطه مجاور در بخش مقابل قرار دارد و هنوز هیچ رأسی از بخش مقابل انتخاب نشده است لذا n راه برای انتخاب رأس دوم وجود دارد .

۳) حرکت از نقطه دوم به نقطه سوم : در این مرحله هنوز دو نقطه انتخاب شده است که با توجه به ساختار گراف دوبخشی نقطه شروع در بخش اول و نقطه دوم در بخش دوم قرار دارد و نقطه سوم لزوماً باید از بخش اول انتخاب شود . اما، یک نقطه از بخش اول به عنوان نقطه شروع انتخاب شده است لذا برای نقطه سوم $n-1$ انتخاب باقی می‌ماند .

۴) حرکت از نقطه سوم به نقطه چهارم : نقطه سوم در بخش اول قرار دارد . پس نقطه چهارم باید از بخش دوم انتخاب شود . اما ، از بخش دوم یک نقطه به عنوان رأس دوم انتخاب شده است بنابراین برای نقطه چهارم $n-2$ راه وجود دارد .

⋮

با ادامه مراحل فوق تعداد دورها بدست می‌آید . البته باید توجه کرد که در $K_{n,n}$ هر دو دارای $2n$ رأس است . اگر از هر نقطه دوری مانند c شروع کنیم و c را طی کنیم هیچ تفاوتی نمی‌کند . بنابراین ، تعداد کل دورهای هامیلتونی در $K_{n,n}$ برابر است با :

$$\frac{2n\times n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)\dots(3)(3)(2)(2)(1)(1)}{2n}=(n-1)!n!$$

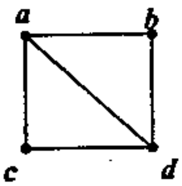
ب) تعداد مسیرهای هامیلتونی در $K_{n,n}$ مانند قسمت الف محاسبه می شود . اما ، باید دقت کرد که یک مسیر مانند S در $K_{n,n}$ دارای $2n$ رأس است و بر خلاف دور که در آنجا از هر نقطه دور شروع کنیم و همان دور را طی کنیم تفاوتی حاصل نمی شود . در مسیرها ، هر مسیر یک نقطه ابتدایی و یک نقطه انتهایی متفاوت از نقطه ابتدایی دارد که باید از نقطه ابتدایی شروع کرده به سمت نقطه انتهایی حرکت کنیم . لذا ، تعداد کل مسیرهای هامیلتونی در $K_{n,n}$ برابر است با :

$$2n\times n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)\dots(3)(3)(2)(2)(1)(1)=2n!\times n!$$

۶۰- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو بدون حلقه است. اگر G دارای هیچ دوری به طول فرد نباشد، آنگاه نشان دهید که G یک گراف دوبخشی است.

پاسخ :

مساله فوق در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال نقض به گراف زیر توجه کنید :



۶۱- الف) فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سوی دوبخشی با افراز $V=V_1 \cup V_2$ است. نشان دهید که اگر $|V_1| \neq |V_2|$، آنگاه G دور هامیلتونی ندارد.

ب) نشان دهید که اگر گراف G در قسمت (الف) دارای مسیر هامیلتونی باشد، در این صورت $|V_1|-|V_2|=\pm 1$.

ج) مثالی از یک گراف بی‌سو دوبخشی و همبند مثل $G=(V,E)$، که در آن $V=V_1 \cup V_2$، $|V_1|=|V_2|-1$، و G فاقد مسیر هامیلتونی است، ارائه دهید.

پاسخ :

الف) برای ایجاد یک دور هامیلتونی با توجه به تمرین ۵۹، ابتدا رأسی را از یکی از بخش‌های گراف انتخاب کرده، رأس بعدی را از بخش مقابل انتخاب می‌کنیم، پس از این انتخاب رأس بعدی را از بخش مقابل انتخاب می کنیم. این کار را متناوباً تا جایی ادامه می‌دهیم که یک دور هامیلتونی به دست آید. این کار به خاطر ساختار خاص گراف دوبخشی خودبخود اتفاق می‌افتد و به سلیقه شخص بستگی ندارد. لذا، روش فوق نشان می‌دهد که برای ایجاد یک دور هامیلتونی باید رأس‌های دو بخش متناظر باشند.

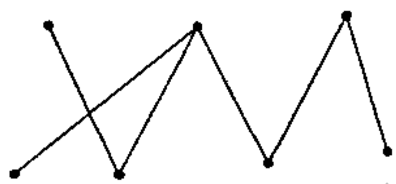
به عبارتی باید داشته باشیم $|V_1|=|V_2|$. لذا، اگر $|V_1| \neq |V_2|$ آنگاه نمی‌توان دور هامیلتونی بدست آورد.

ب) با توجه به روش ایجاد مسیر هامیلتونی در گراف دوبخشی، رأس شروع مسیر با رأس بعدی خود از بخش مقابل متناظر است. به همین ترتیب رأسهای هر بخش با رأسهای بخش مقابل متناظر هستند. تنها استثناء برای آخرین رأس مسیر هامیلتونی است که لزومی ندارد با رأسی متناظر شود. زیرا قرار نیست به رأسی وصل شود.

بنابراین بخش‌های گراف از لحاظ تعداد رأس می‌توانند حداکثر به تعداد یک رأس متفاوت باشند. درنتیجه:

$$|V_۱| - |V_۲| = \pm ۱$$

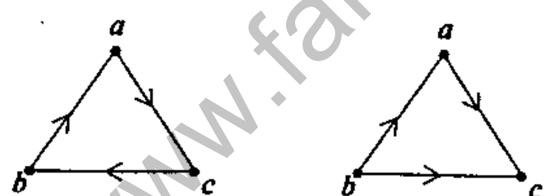
ج)



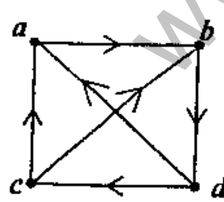
۶۲- الف) تمام چرخه‌های غیریکریخت به سه رأس را مشخص کنید.
ب) تمام چرخه‌های غیریکریخت با ۴ رأس را مشخص کنید. درجه‌های ورودی و خروجی تک‌تک رئوس این گراف‌ها را فهرست کنید.

پاسخ:

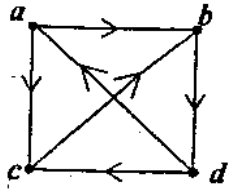
الف) داریم:



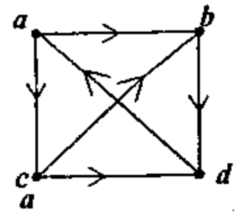
ب)



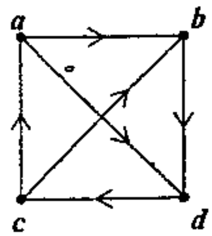
$$\deg^-(a) = \deg^-(b) = \deg^+(c) = \deg^+(d) = ۲$$
$$\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^-(c) = \deg^-(d) = ۱$$



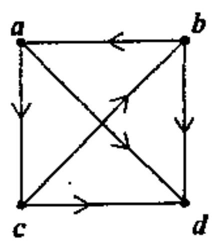
$$\deg^-(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = \deg^-(d) = ۱$$
$$\deg^+(a) = \deg^-(b) = \deg^-(c) = \deg^+(d) = ۲$$



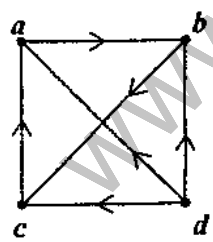
$$\deg^-(a) = \deg^+(b) = \deg^-(c) = \deg^+(d) = ۱$$
$$\deg^+(a) = \deg^-(b) = \deg^+(c) = \deg^-(d) = ۲$$



$$\deg^-(a) = \deg^+(b) = ۱$$
$$\deg^+(a) = \deg^-(b) = ۲$$
$$\deg^+(c) = \deg^-(d) = ۳$$
$$\deg^-(c) = \deg^+(d) = ۰$$



$$\deg^-(a) = \deg^-(b) = \deg^-(c) = ۱$$
$$\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = ۲$$
$$\deg^-(d) = ۳ \quad , \quad \deg^+(d) = ۰$$



$$\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = ۱$$
$$\deg^-(a) = \deg^-(b) = \deg^-(c) = ۲$$
$$\deg^-(d) = ۰ \quad , \quad \deg^+(d) = ۳$$

۶۳- علی و همسرش ، ۱۰ نفر را به میهمانی دعوت کرده‌اند . در این گروه ۱۲ نفری ، هر نفر ، ۶ نفر دیگر را می‌شناسد . نشان دهید که ۱۲ نفر ، به گونه‌ای دور یک میز گرد می‌توانند بنشینند که هر نفر ، با دو نفر نشسته در دو طرفش ، آشنا باشد .

پاسخ :

افراد گروه را به عنوان رأسهای یک گراف در نظر می‌گیریم . بین دو رأس یالی رسم می‌کنیم . هرگاه دو نفر متناظر با هم آشنا باشند، بنا به فرض مساله ، هر نفر ، ۶ نفر دیگر را می‌شناسد . لذا ، در گراف ما ، هر رأس با درجه۶ خواهد بود . این گراف ۱۲

رأس دارد . پس بنا به قضیه ۶-۵ ، دارای یک دور هامیلتونی است . (برای هر رأس دلخواه مانند v,w داریم: $\deg(v)+\deg(w)=۶+۶=۱۲$) پس کافی است افراد ، بر اساس دور هامیلتونی بدست آمده کنار هم بنشینند . که در این صورت هر نفر با دو نفر نشسته در دو طرف خود ، آشنا خواهد بود .

۶۴- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف ۶-منتظم بی‌سو و بدون حلقه است . نشان دهید که اگر $|V|=۱۱$ ، آنگاه G دارای یک دور هامیلتونی است .

پاسخ :

در گراف ۶- منتظم ، درجه هر رأس برابر ۶ می‌باشند . از آنجا که $|V|=۱۱$ ، بنابراین برای هر دو رأس دلخواه ،از G نمودار از مانند v,w داریم :

$$\deg(v)+\deg(w)=۶+۶>۱۱$$

لذا ، بنا به قضیه ۶-۵ ، G دارای یک دور هامیلتونی است .

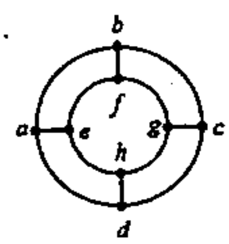
۶۵- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو است . یک زیرمجموعهٔ I از V را مستقل گوییم هرگاه ، هیچ دو رأسی در آن مجاور نباشد . یک مجموعهٔ مستقل I ، ماکزیمال گفته می‌شود هرگاه بازای هر رأس دلخواه $v\in V$ ، $I\bigcup\{v\}$ مستقل نباشد . عدد استقلال G که با $\beta(G)$ نمایش داده می‌شود ، تعداد رئوس بزرگ‌ترین مجموعهٔ مستقل ماکزیمال در G تعریف می‌شود .

الف) برای گراف‌های ارائه شده در زیر، دو مجموعهٔ مستقل ماکزیمال با اندازه‌های مختلف پیدا کنید.

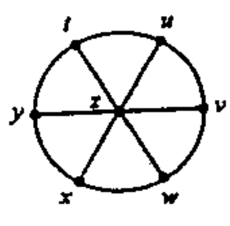
ب) $\beta(G)$ را برای هر کدام از گراف‌ها پیدا کنید .

ج) $\beta(G)$را برای هرکدام از گراف‌های (۱) $K_{۱,۳}$ ، (۲) $K_{۲,۳}$ ، (۳) $K_{۳,۳}$ ، (۴) $K_{۲,۴}$ ، (۵) $K_{۲,۶}$ ، (۶) $K_{m,n}$ ، پیدا کنید.

د) اگر $G=(V,E)$ با $|V|=n$ و $|E|=m$ باشد ، در این صورت چند زیرمجموعهٔ ۲ عنصری از V مستقل هستند؟



(الف)



(ب)

پاسخ :

الف) برای شکل (الف) ، دو مجموعه زیر ماکزیمال هستند :

$\{a,h,c,f\} \quad , \quad \{b,e,d,g\}$

برای شکل (ب) دو مجموعه زیر ماکزیمال هستند :

$\{t,w,u\} \quad , \quad \{z\}$

ب) برای گراف (الف) داریم : $\beta(G) = ۴$

برای گراف (ب) داریم : $\beta(G) = ۳$

ج) با توجه به ساختار گراف $K_{m,n}$ داریم :

$$\beta(G) = \max\{m,n\}$$

درنتیجه :

$$\beta(K_{۱,۳}) = ۳ \quad , \quad \beta(K_{۲,۳}) = ۳ \quad , \quad \beta(K_{۳,۳}) = ۳$$
$$\beta(K_{۲,۴}) = ۴ \quad , \quad \beta(K_{۲,۶}) = ۶$$

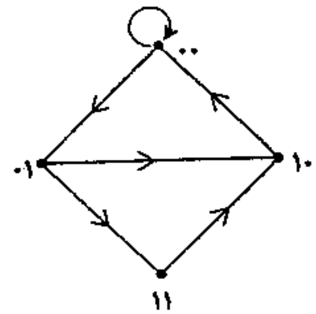
د) در گراف کامل هیچ زیرمجموعه ۲ عنصری مستقل نیستند . اما اگر یالی را از گراف کامل حذف کنیم آنگاه رأس‌های ابتدایی و انتهایی آن یال مستقل خواهد بود . همین کار را می‌توان ادامه دارد . لذا ، به ازای حذف هر یال از K_n ، یک مجموعه ۲ عضوی مستقل به دست می‌آید .

حال با توجه به اینکه اگر $n = |V|$ آنگاه K_n دارای $\frac{n(n-۱)}{۲}$ یال است . بنابراین به تعداد $\frac{n(n-۱)}{۲} - m$ یال حذف شده داریم . پس ، به همین تعداد مجموعه ۲ عنصری مستقل نیز خواهیم داشت .

۶۶- یک مدار الکترونیکی ، برای شناسایی رشته‌ای از صفر و یک‌ها ساخته شده است. این مدار، رشته‌هایی به شکل $۰۱۰^*۱۰$ را می‌تواند شناسایی کند که در آن ، ۰^* به مفهوم هر تعداد (از جمله هیچ تعداد) از صفرهاست . برای مثال ۰۱۱۰ و ۰۱۰۰۰۱۰ رشته‌های مورد قبول هستند . گراف سوداری تشکیل دهید که دارای یک رأس v_i (به نام رأس ابتدایی) ، یک رأس v_f (به نام رأس انتهایی) بوده و هر رأس آن دارای دو یال خروجی با برچسب‌های ۰ و ۱ به گونه‌ای باشد که هر مسیر از v_i به v_f ، رشته‌ای به صورت $۰۱۰^*۱۰$ تولید کند .

پاسخ :

گراف زیر را در نظر بگیرید :



رأس ابتدایی ۰۱ و رأس انتهایی ۱۰ می‌باشد . به عنوان مثال برای تولید رشته‌های ۰۱۱۰ و یا ۰۱۰۰۱۰ می‌توان مسیرهای زیر را در نظر گرفت :

۰۱۱۰ : ۰۱ → ۱۱ → ۱۰

۰۱۰۰۱۰ : ۰۱ → ۱۰ → ۰۰ → ۰۱ → ۱۰

۶۸- گرافی را خود مکمل گوییم هرگاه یکریخت با مکمل خودش باشد .

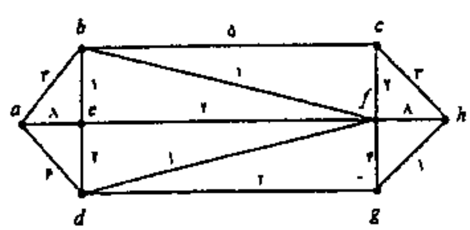
الف) گرافی خود مکمل با ۴ رأس ارائه دهید .

ب)گرافی خود مکمل با ۵ رأس ارائه دهید .

پاسخ :

تمرین فوق را در مساله ۲۳ حل کرده‌ایم .

۶۹- گراف شکل زیر ، یک کانال ارتباطی و نیز زمان ارتباط بین هشت مرکز ارتباطی را نشان می‌دهد. مراکز ارتباطی ، به وسیلهٔ رئوس ، کانال‌ها به وسیلهٔ یال‌ها ، و زمان ارتباط (به دقیقه) در هر کانال ، به وسیلهٔ وزن یال مربوطه مشخص شده‌اند . فرض کنید که در ساعت معینی (مثلاً ۳ بعد از ظهر) خبری از مرکز a به وسیلهٔ کانال‌های آن پخش می‌شود . مراکز دیگر نیز به نوبهٔ خود ، این خبر را ، به محض دریافت ، پخش خواهند کرد . برای مراکز ارتباطی h,g,f,e,d,c,b کوتاه‌ترین زمان دریافت خبر را به دست آورید .



☜ **پاسخ :**

با استفاده از الگوریتم دیکستوا ، کوتاهترین زمان دریافت خبر برای هر کدام از رأس‌ها عبارتست از :

b : ۳(a)

c : ۶(a,b,f)

d : ۵(a,b,f)

e : ۴(a,b)

f : ۴(a,b)

g : ۷(a,b,f,d)

h : ۸(a,b,f,d,g)

۷۰- الف)آیا $K_{۳۰}$ مدار اولری دارد ؟ آیا دارای دور هامیلتونی است ؟

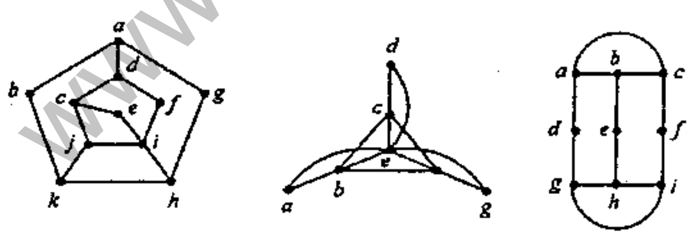
ب) قسمت (الف) را برای $K_۴$ تکرار کنید .

☜ **پاسخ :**

الف) در $K_{۳۰}$ ، تمام رئوس با درجه ۲۹ هستند . بنابراین با توجه به قضیه ۶-۱ و لم ۶-۴ ، K_n مدار اولری ندارد . اما ، دور هامیلتونی دارد .

ب) در $K_۴$ هر رأس با درجه ۳ می‌باشد . لذا با توجه به قضیه ۶-۱ و لم ۶-۴ ، $K_۴$ دور هامیلتونی دارد . اما مدار اولری ندارد .

۷۱- آیا گراف‌های زیر دور هامیلتونی دارند ؟



(ج) (ب) (الف)

☜ **پاسخ :**

الف) در مثال ۶-۷ دیدیم که گراف داده شده ، دور هامیلتونی ندارد .

ب) با توجه به خاصیت تقارن گراف داده شده با بررسی راه‌های مختلف روشن است گراف فوق دور هامیلتونی ندارد .

ج) با بررسی مشخص می‌شود که گراف داده شده دور هامیلتونی ندارد .

۷۲- با استفاده از الگوریتم وارشال ، نشان دهید که گراف سودار G ، تعریف شده به وسیلهٔ ماتریس رابطهٔ (ماتریس همسایگی) زیر ، همبند قوی است :

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ :

با استفاده از الگوریتم وارشال ، بستار متعدی $W_0 = M_G$ به صورت زیر خواهد بود :

$k = 1$ در ستون اول هیچ عدد ۱ ظاهر نشده است . بنابراین :

$$W_0 = W_1$$

$: k = 2$

$$p_1 = 1 \ , \ p_2 = 2 \ ; \ q_1 = 2 \ , \ q_2 = 3$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$: k = 3$

$$p_1 = 1 \ , \ p_2 = 2 \ , \ p_3 = 3 \ ; \ q_1 = 3 \ , \ q_2 = 4$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$: k = 4$

$$p_1 = 1 \ , \ p_2 = 2 \ , \ p_3 = 3 \ ; \ q_1 = 5$$

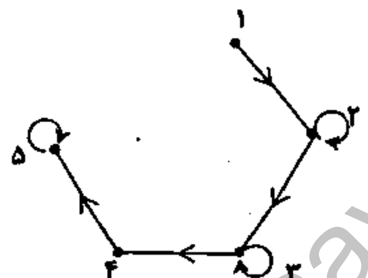
$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k = ۵$:

$$p_1 = ۱ \;,\; p_۲ = ۲ \;,\; p_۳ = ۳ \;,\; p_۴ = ۴ \;,\; p_۵ = ۵ \;;\; q_1 = ۵$$

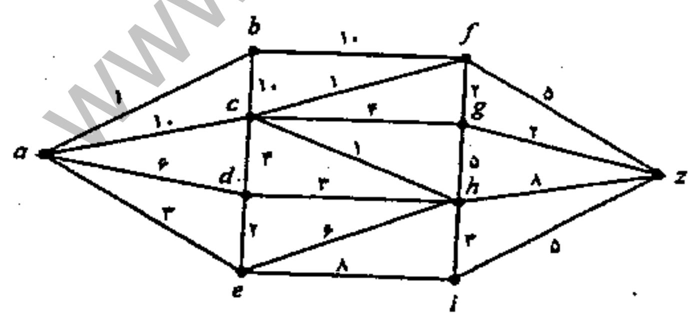
$$W_۵ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

از آنجا که تمام عناصر $W_۵$ عدد ۱ نمی‌باشد . این مطلب نشان می‌دهد که گراف مورد بحث همبند قوی نمی‌باشد . این مطلب از روی نمودار گراف نیز واضح است :



در تمرین‌های ۷۳ الی ۷۶ ، با استفاده از الگوریتم دیکسترا ، کوتاه‌ترین مسیر از a به z را تعیین کنید . مراحل مختلف را به صورت نمودار نمایش دهید.

-۷۳

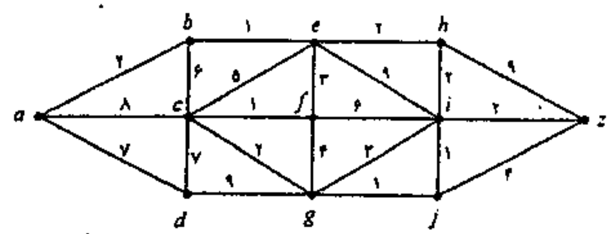


☜ پاسخ :

با استفاده از الگوریتم دیکستوا ، کوتاهترین مسیر به صورت زیر به دست می‌آید :

$۱۴(a,e,d,h,c,f,g,z)$

-۷۴

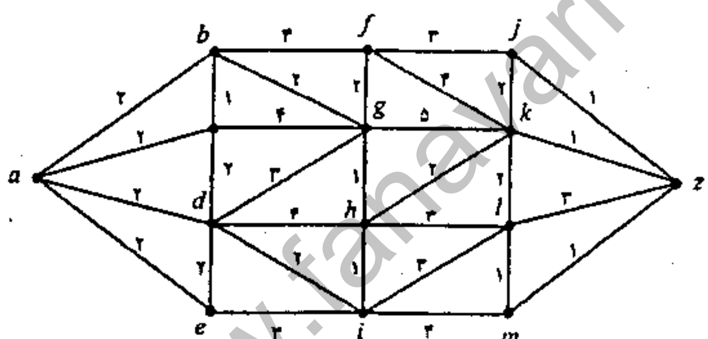


☜ پاسخ :

داریم :

۹(a,b,e,h,i,z)

-۷۵

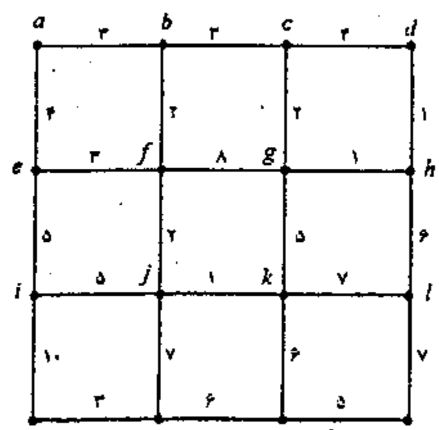


☜ پاسخ :

داریم:

۸(a,b,g,h,k,z)

-۷۶

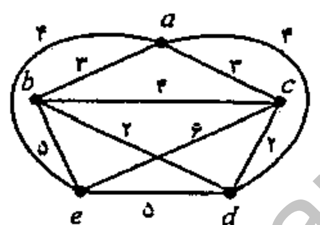


پاسخ :

۱۹(a,b,f,j,k,o,z)

در تمرین‌های ۷۷ و ۷۸ ، با استفاده از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه ، یک دور هامیلتونی نیمه بهینه برای گراف داده شده ، به دست آورید .

-۷۷

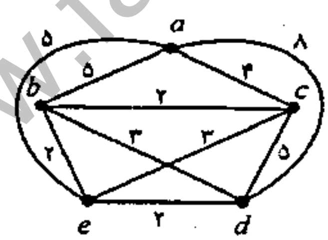


پاسخ :

با استفاده از الگوریتم نزدیکترین همسایه دور زیر را خواهیم داشت :

$a-c-d-b-e-a$

-۷۸



پاسخ :

داریم :

$a-c-b-e-d-a$