حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

گرداورنده:

www.fanavari-it.ir

فصل پنجم

تمرینات فصل ۵

در تمرینهای ۱ الی ۸، ۴ جمله اول دنباله‌های ارائه شده را به دست آورید.

-۱

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + n \quad , n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

☜ پاسخ :

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2(1) + 2 = 4$$
$$a_3 = 2(4) + 3 = 11$$
$$a_4 = 2(11) + 4 = 26$$

-۲

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2n \quad , n \geq 2 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

☜ پاسخ :

$$b_1 = 2$$
$$b_2 = 2 + 2(2) = 6$$
$$b_3 = 6 + 2(3) = 12$$
$$b_4 = 12 + 2(4) = 20$$

-۳

$$\begin{cases} c_n = n(c_{n-1})^2 & , n \geq 1 \\ c_0 = 2 \end{cases}$$

پاسخ :

$c_0 = 2$

$c_1 = 1(2)^2 = 4$

$c_2 = 2(4)^2 = 32$

$c_3 = 3(32)^2 = 2048$

-۴

$$\begin{cases} b_n = n(b_{n-1})^2 & , n \geq 1 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

پاسخ :

$b_0 = 1$

$b_1 = 1(1)^2 = 1$

$b_2 = 2(1)^2 = 2$

$b_3 = 3(2)^2 = 12$

-۵

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} & , n \geq 2 \\ a_0 = 1 \ , \ a_1 = 1 \end{cases}$$

پاسخ :

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2(1) = 3$

$a_3 = 3 + 2(1) = 5$

-۶

$$\begin{cases} b_n = b_{n-۱} + ۲b_{n-۲} \quad , n \geq ۲ \\ b_۰ = -۱ \ \ , \ b_۱ = ۱ \end{cases}$$

☜ پاسخ :

$b_۰ = -۱$

$b_۱ = ۱$

$b_۲ = ۱ + ۲(-۱) = -۱$

$b_۳ = -۱ + ۲(۱) = ۱$

-۷

$$\begin{cases} a_n = na_{n-۱} - a_{n-۲} \quad , n \geq ۳ \\ a_۱ = ۱ \ \ , \ a_۲ = ۱ \end{cases}$$

☜ پاسخ :

$a_۱ = ۱$

$a_۲ = ۱$

$a_۳ = ۳(۱) - ۱ = ۲$

$a_۴ = ۴(۲) - ۱ = ۷$

-۸

$$\begin{cases} a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + ۱ \quad , n \geq ۳ \\ a_۱ = ۱ \ \ , \ a_۲ = ۲ \end{cases}$$

☜ پاسخ :

$a_۱ = ۱$

$a_۲ = ۲$

$a_۳ = ۲ + ۱ + ۱ = ۴$

$a_۴ = ۴ + ۲ + ۱ = ۷$

◊در تمرین‌های ۹ الی ۱۱ ، نشان دهید که دنباله تعریف شده در قسمت (الف) در رابطه بازگشتی ارائه شده در قسمت (ب) صدق می‌کند.

۹- الف) $0, 1, 3, 7, \ldots, 2^n - 1$ ، $n \geq 0$

ب) $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geq 1$

پاسخ :

در دنباله تعریف شده داریم : $a_n = 2^n - 1$ ، از طرفی

$$2^n - 1 = 2 \times 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} - 1) + 1$$
$$= 2(2^{n-1} - 1) + 1$$

پس

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

۱۰- الف) $2, 3, 4, 5, \ldots, 2 + n$ ، $n \geq 0$

ب) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$

پاسخ :

در دنباله تعریف شده داریم : $a_n = 2 + n$ ، از طرفی

$$2(2 + n - 1) - (2 + n - 2) = 4 + 2n - 2 - n = 2 + n$$

پس

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

۱۱- الف) (اعداد کاتالان) $n \geq 0$ ، $1, 1, 2, 5, 14, \ldots, \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$

ب) $b_n = \frac{4n - 2}{n + 1} b_{n-1}$ ، $n \geq 2$

پاسخ :

در دنباله تعریف شده داریم : $b_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ ، از طرفی

$$\frac{4n - 2}{n + 1} b_{n-1} = \frac{4n - 2}{n + 1}\left(\frac{1}{(n - 1) + 1} C_{2(n-1)}^{n-1}\right)$$
$$= \frac{4n - 2}{n + 1}\left(\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}\right)$$

$$=\frac{4n-2}{n+1}\left(\frac{1}{n}\times\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\right)$$
$$=\frac{4n-2}{n+1}\left(\frac{(2n)(2n-1)n}{(2n)(2n-1)n}\times\frac{(2n-2)!}{n(n-1)!(n-1)!}\right)$$
$$=\frac{4n-2}{n+1}\left(\frac{n}{(2n)(2n-1)}\times\frac{(2n)!}{n!n!}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{4n^2-2n}{4n^2-2n}\times\frac{(2n)!}{n!n!}$$
$$=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$$

پس

$$b_n=\frac{4n-2}{n+1}b_{n-1}$$

۱۲- فرض کنید که در برج هانوی به جای سه ستون ، از چهار ستون استفاده کرده باشیم . مشابه مثال ۵-۴ ، در هر مرحله یک حلقه را می‌توان از یک ستون به ستون دیگر ، به شرط آنکه بر روی حلقه کوچک‌تر قرار نگیرد ، منتقل کرد. فرض کنید که s_n، حداقل تعداد جابه‌جایی‌های لازم برای انتقال n حلقه از ستون چپ به ستون راست باشد.

الف) s_1 ، s_2 ، s_3 را به دست آورید.

ب) نشان دهید که به ازای هر $n \geq 3$ ، $s_n \leq 2s_{n-2}+3$.

پاسخ :

الف) برای انتقال ۱ حلقه روشن است تنها یک حرکت لازم است . پس $s_1 = 1$

برای انتقال ۲ حلقه ، ابتدا حلقه اول را به ستون B ، سپس حلقه زیر را به D منتقل می‌کنیم و در نهایت حلقه B را به D منتقل می‌کنیم . پس $s_2 = 3$

برای انتقال ۳ حلقه ، حلقه بالایی را به ستون B ، حلقه وسط را به ستون C و حلقه زیر را به ستون D منتقل کرده سپس حلقه C را به D و پس از آن حلقه B را به D منتقل می‌کنیم . پس $s_3 = 5$

ب) فرض کنیم چهار ستون A و B و C و D داریم . برای انتقال n حلقه از حلقه A به حلقه D . ابتدا فرض کنیم $(n-2)$ حلقه را از A به B با s_{n-2} حرکت انتقال داده‌ایم. ۲ حلقه باقیمانده در ستون A را با سه حرکت به ستون D منتقل می‌کنیم در

نهایت $(n-2)$حلقه موجود در B را به روی دو حلقه موجود درD با s_{n-2} حرکت انتقال می‌دهیم . بنابراین

$$s_n = s_{n-2} + 3 + s_{n-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_n = 2s_{n-2} + 3 \\ s_1 = 1 \ , \ s_2 = 3 \end{cases}$$

۱۳- نشان دهید که عناصر رشته فیبوناچی در روابط زیر صادق هستند:

الف) $F_n^2 - F_{n-1}^2 = F_n F_{n+1} - F_{n+1} F_{n-1}$ ، $n \geq 1$

ب) $F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_{n-1}^2 = 2F_n F_{n-1}$ ، $n \geq 1$

ج) $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1} + F_n + 2$ ، $n \geq 1$

د) $F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n$ ، $n \geq 0$

پاسخ :

الف) داریم :

$$F_n^2 - F_{n-1}^2 = (F_n - F_{n-1})(F_n + F_{n-1}) = (F_n - F_{n-1})(F_{n+1})$$
$$= F_n F_{n+1} - F_{n+1} F_{n-1}$$

ب) داریم :

$$F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2$$
$$\Rightarrow F_{n+1}^2 = F_n^2 + 2F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2$$
$$\Rightarrow F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_{n-1}^2 = 2F_n F_{n-1}$$

ج) رابطه اخیر صحیح نمی‌باشد . زیرا ، با فرض $n = 3$ باید داشته باشیم :

$$F_4^2 - F_3^2 = F_2 + F_3 + 2$$
$$\Rightarrow 25 - 9 = 2 + 3 + 2 \Rightarrow 16 = 7$$

که این یک تناقض است .

۱۴- مطلوب است $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$ (فرض کنید که حد موجود است) که در آن F_n رشته فیبوناچی است.

پاسخ :

فرض کنیم $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=L$ ، بنابراین $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=L$ ، در این صورت

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{F_{n-1}}{F_n})$$
$$=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}=1+\frac{1}{L}$$

پس $L=1+\frac{1}{L}$ ، لذا

$$L^2-L-1=0 \Rightarrow L=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

اما ، همواره داریم $\frac{F_{n+1}}{F_n}\geq 1$ ، پس $L\geq 1$ ، درنتیجه $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است .

(تذکر: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$)

۱۵- یک جفت خرگوش (نر و ماده) در ابتدای سال متولد شده‌اند. شرایط زیر را در نظر بگیرید.

۱. جفت خرگوش‌ها در ماه اول تولدشان تولیدمثل نمی‌کنند ، اما در انتهای هر ماه دیگری غیر از ماه اول ، چهار جفت (نر و ماده) خرگوش به دنیا می‌آورند.

۲. هیچ خرگوشی نمی‌میرد.

الف) فرض کنید که r_n برابر با تعداد جفت خرگوش‌های موجود در انتهای ماه n ام ، $n\geq 1$ باشد. بدیهی است که $r_0=1$ یک رابطه بازگشتی برای r_0 ، r_1 ، r_2 ، ... پیدا کنید.

ب) r_0 ، r_1 ، r_2 ، r_3 ، r_4 و r_5 را به دست آورید.

ج) تعداد خرگوش‌های موجود در انتهای سال را به دست آورید.

پاسخ :

الف) تعداد خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه n - ام برابر است با $4r_{n-2}$ (به توضیحات مثال ۵-۵ مراجعه کنید .) زیرا در انتهای ماه n - ام جفت خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه $(n-1)$ام هنوز تولیدمثل نکرده‌اند . بنابراین ، تنها جفت خرگوش‌های موجود در انتهای ماه $(n-2)$ام هستند که تولیدمثل می‌کنند . چون هر

جفت خرگوش چهار جفت خرگوش به دنیا می‌آورد بنابراین تعداد خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه n - ام برابر $4r_{n-2}$ می‌باشد .

درنتیجه ، تعداد کل خرگوش‌ها در انتهای ماه n- ام ، برابر است با تعداد کل خرگوش‌ها در انتهای ماه $(n-1)$ام به اضافه تعداد خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه n - ام .پس

$$\begin{cases} r_n = 4r_{n-2} + r_{n-1} & r \geq 2 \\ r_0 = 1 \;,\; r_1 = 1 \end{cases}$$

ب) با توجه به رابطه بدست آمده در (الف) داریم :

$r_0 = 1$

$r_1 = 1$

$r_2 = 5$

$r_3 = 9$

$r_4 = 29$

$r_5 = 65$

$r_6 = 181$

ج) برای بدست آوردن تعداد خرگوش‌ها در انتهای سال می‌توان اعداد بالا را تا r_{12} لیست کرد . که در این صورت r_{12} جواب مساله است . همچنین می‌توان رابطه بازگشتی داده شده را حل کرد .

با لیست کردن اعداد دنباله داریم :

$a_7 = 441$

$a_8 = 1165$

$a_9 = 2929$

$a_{10} = 7589$

$a_{11} = 19305$

$a_{12} = 49661$

۱۶- الف) فهرستی از اعداد دودویی صفر ، یک ، دو ، سه و چهار رقمی که شامل ۱۱۱ نیستند را ارائه دهید.

ب) برای $n \geq 0$، فرض کنید که d_n برابر با تعداد اعداد دودویی n رقمی باشند که شامل ۱۱۱ نیستند. d_0 ، d_1 ، d_2 و d_4 را به دست آورید.

ج) یک رابطه بازگشتی برای دنبالهٔ d_0 ، d_1 ، d_2 ،... ارائه دهید.

د) با استفاده از نتایج حاصل از قسمت‌های (ب) و (ج) d_5 را به دست آورید.

پاسخ :

الف)

صفر رقمی : ϕ

یک رقمی : ۰ ، ۱

دو رقمی : ۰۰ ، ۰۱ ، ۱۰ ، ۱۱

سه رقمی : ۰۰۰ ، ۰۰۱ ، ۰۱۰ ، ۰۱۱ ، ۱۰۰ ، ۱۰۱ ، ۱۱۰

چهار رقمی : ۰۰۰۰ ، ۰۰۰۱ ، ۰۰۱۰ ، ۰۰۱۱ ، ۰۱۰۰ ، ۰۱۰۱ ، ۰۱۱۰ ، ۱۰۰۰ ، ۱۰۰۱ ، ۱۰۱۰ ، ۱۰۱۱ ، ۱۱۰۰ ، ۱۱۰۱

ب) $d_0 = 0 \ , \ d_1 = 2 \ , \ d_2 = 4 \ , \ d_3 = 7 \ , \ d_4 = 13$

ج) فرض کنیم به نوعی تعداد همه اعداد دودویی که شامل ۱۱۱ نیستند را می‌دانیم . یک عدد n رقمی دودویی را در نظر می‌گیریم . اگر اولین رقم این عدد صفر باشد ، آنگاه بقیه ارقام می‌توانند هر دنباله‌ای از صفر و یک باشد مشروط بر اینکه شامل ۱۱۱ نباشند . برای این حالت d_{n-1} عدد وجود دارد .

حال تعداد اعداد $(n-1)$ رقمی دودویی که دو رقم اولشان ۱۱ است و شامل ۱۱۱ نمی‌باشند را می‌شماریم . با توجه به فرض مساله چون دو رقم اول عدد $(n-1)$ رقمی ۱۱ است ، پس رقم سوم این عدد باید صفر باشد و بقیه اعداد می‌توانند هر دنباله‌ای از صفر و یک باشند ، مشروط بر اینکه شامل ۱۱۱ نباشند . این اعداد به‌صورت زیر هستند :

$$\overbrace{110\underbrace{\ldots}_{n-4}}^{n-1}$$

بنابراین تعداد d_{n-4} تا از این اعداد داریم .

حال به مساله اصلی برمی‌گردیم . فرض کنیم اولین عدد ، عدد n رقمی مفروض ۱ است . در این صورت دورقمی بعدی نباید ۱۱ باشد . بنابراین برای این حالت $d_{n-1} - d_{n-4}$ عدد خواهیم داشت .

درنتیجه :

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-1} - d_{n-4}$$

یا

$$\begin{cases} d_n = 2d_{n-1} - d_{n-4} \\ d_1 = 2 \ , \ d_2 = 4 \ , \ d_3 = 7 \ , \ d_4 = 13 \end{cases}$$

د) داریم :

$S_۴ = ۲(۲۲) + ۲(۸) = ۶۰$

۱۸- پلکانی با n پله مفروض است . برای بالا رفتن از این پلکان ، در هر مرحله یا یک پله بالا می‌رویم ، یا دو پله و یا تلفیقی از این دو . برای $n \geq ۱$ ، فرض کنید که a_n برابر تعداد حالتهایی باشد که می‌توان از این پلکان به طریقه گفته شده بالا رفت . یک رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورید.

پاسخ :

برای رفتن به پله اول فقط یک حالت وجود دارد . پس $a_۱ = ۱$. برای رفتن به پله دوم دو حالت وجود دارد . به طوری که می‌توان دو پله را یکجا رفت یا اینکه پله‌ها را یکی یکی بالا رفت . بنابراین $a_۲ = ۲$. حال فرض کنیم به پله nام رسیده‌ایم . برای رسیدن به این پله ، دو راه بیشتر نداریم . یا اینکه از پله $(n-۲)$ام با پیمودن دو پله در یکجا به پله nام رسیده‌ایم و یا از پله $(n-۱)$ام با پیمودن یک پله ، به پله nام رسیده‌ایم . پس دنباله بازگشتی به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \\ a_۱ = ۱ \ , \ a_۲ = ۲ \end{cases}$$

۱۹- فرض کنید که P_n تعدا افرازهایی یک مجموعه n عنصری باشد نشان دهید که :

$$P_n = \sum_{k=۰}^{n-۱} C_{n-۱}^k P_{n-k-۱} \quad , \quad n \geq ۱$$

پاسخ :

گیریم $X = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ یک مجموعه n عنصری باشد . فرض می‌کنیم به نوعی تعداد همه افرازهای مجموعه‌ها تا n عضوی را می‌دانیم . عنصر x_n از X را در نظر می‌گیریم . برای مجموعه همه افرازهای X حالت‌های زیر پیش می‌آید :

۱) $\{x_n\}$ به عنوان یک مجموعه تک عضوی در افرازها ظاهر می‌شود . در این صورت تعداد افرازها ، برابر با تعداد افرازهای مجموعه $n-۱$ عضوی خواهد بود که برابر است با $P_{n-۱}$. از آنجایی‌که $C_{n-۱}^۰ = ۱$ تعداد همه افرازها در این حالت $C_{n-۱}^۰ P_{n-۱} = P_{n-۱}$ است .

۲) x_n در یک مجموعه مانند $\{x_i, x_n\}$ در همه افرازها ظاهر می‌شود . در این حالت $C_{n-۱}^۱$ راه برای انتخاب x_i از میان $n-۱$ عنصر $\{x_۱, \dots, x_{n-۱}\}$ وجود دارد . از طرفی تعداد افرازهایی که شامل $\{x_i, x_n\}$ است برابر است با : $P_{n-۲}$.

بنابراین تعداد کل افرازها برای این حالت برابر است با :

$$C_{n-1}^{1}P_{n-2}$$

⋮

x_n - $k+1$ در یک مجموعه $k+1$ عنصری از عناصر X ظاهر می‌شود . برای انتخاب k عنصر از مجموعه $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ که با x_n مجموعه $k+1$ عنصری را تشکیل می‌دهند C_{n-1}^{k} راه وجود دارد . از $n-k-1$ عنصر باقیمانده به تعداد P_{n-k-1} افراز دارند . بنابراین تعداد کل حالت‌ها در این مرحله نیز برابر است با :

$$C_{n-1}^{k}P_{n-k-1}$$

⋮

بنابراین تعداد تمام افرازها برای یک مجموعه n عنصری برابر است با :

$$P_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}P_{n-k-1}$$

۲۰- حاصل ضرب $x_1x_2x_3$ را می‌توان به دو صورت $(x_1x_2)x_3$ و یا $x_1(x_2x_3)$ انجـــام داد . (پرانتزبندی کرد). به طریق مشابه حاصل ضرب $x_1x_2x_3x_4$ را به صور گوناگون می‌توان انجام داد که دو نمونه آن عبارت‌اند از : $(x_1x_2)(x_3x_4)$ و $x_1((x_2x_3)x_4)$ فرض کنید که P_n تعداد حالتهایی است که حاصل ضرب $x_1x_2\ldots x_n$ را می‌توان انجام داد. نشان دهید که $P_1=1$ و

$$P_n=\sum_{k=1}^{n-1}P_k\,P_{n-k}\quad,\quad n\geq 2 \text{ برای}$$

پاسخ :

حاصل‌ضرب $x_1x_2\ldots x_n$ را درنظر بگیرید . از پارانتزبندی‌های بیجا خودداری می‌کنیم. به‌عنوان مثال (x_1x_2) را با $((x_1x_2))$ یکی می‌گیریم . فرض کنیم همه پارانتزبندی‌ها تا $n-1$ را می‌دانیم . برای پارانتزبندی $x_1x_2\ldots x_n$ حالت‌های زیر پیش می‌آید :

۱) x_1 در یک گروه و $x_2\ldots x_n$ در گروه بعد پارانتزبندی شود. مثلاً

$x_1(x_2x_3)(x_4\ldots x_n)$

برای این نوع P_1P_{n-1} حالت وجود دارد .

۲) x_1x_2 در یک گروه و $x_3\ldots x_n$ در گروه بعد پارانتزبندی شود . مثلاً

$(x_1x_2)(x_3\ldots x_n)$

برای این حالت P_2P_{n-2} حالت وجود دارد .

⋮

k) $x_1 \ldots x_k$ در یک گروه و $x_{k+1} \ldots x_n$ در گروه بعد پارانتزبندی شود . مثلاً

$$\underbrace{x_1(x_2x_3)x_4 \ldots x_k}_{\text{گروه اول}} \ \underbrace{x_{k+1}(x_{k+2}x_{k+3})x_{k+4} \ldots x_n}_{\text{گروه دوم}}$$

برای این حالت نیز P_kP_{n-k} حالت وجود دارد . زیرا P_k ، حالت برای پارانتز بندی گروه اول و P_{n-k} حالت برای پارانتز بندی گروه دوم وجود دارد . بنابراین در مجموع P_kP_{n-k} حالت برای این نوع پارانتز بندی وجود دارد .

در نهایت با جمعبندی انواع حالت‌ها ، تعداد کل حالت‌ها به صورت زیر به دست می‌آید :

$$P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} P_kP_{n-k}$$

۲۱- جواب عمومی هر کدام از روابط بازگشتی زیر را به دست آورید.

الف) $\begin{cases} 4a_n - 5a_{n-1} = 0 , & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = 0 , & n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 2a_n - 3a_{n-1} = 0 , & n \geq 1 \\ a_4 = 81 \end{cases}$

د) $\begin{cases} 3a_{n+1} - 4a_n = 0 , & n \geq 0 \\ a_1 = 5 \end{cases}$

پاسخ :

الف) معادله مشخصه برای رابطه داده شده $4r - 5 = 0$ است . پس $r = \frac{5}{4}$. بنابراین جواب عمومی به صورت $a_n = c(\frac{5}{4})^n$ است . با قرار دادن رابطه اخیر در شرایط مرزی نتیجه می‌شود که :

$$a_0 = c = 1$$

پس جواب عمومی رابطه داده شده به صورت زیر است :

$$a_n = (\frac{4}{5})^n$$

ب) معادله مشخصه عبارت مزبور به صورت $r - \frac{3}{2} = 0$ است . پس $r = \frac{3}{2}$. بنابراین جواب عمومی به صورت $a_n = c(\frac{3}{2})^n$ است . با قرار دادن رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده نتیجه می‌شود که :

$$a_0 = c = 2$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = ۲(\frac{۳}{۲})^n$$

ج) معادله مشخصه عبارت داده شده به صورت $۲r - ۳ = ۰$ است . پس $r = \frac{۳}{۲}$ و جواب عمومی رابطه داده شده به صورت $a_n = c(\frac{۳}{۲})^n$ است . با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی نتیجه می‌شود که :

$$a_۴ = c(\frac{۳}{۲})^۴ \Rightarrow c = \frac{۸۱}{(\frac{۳}{۲})^۴} = ۱۶$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = ۱۶(\frac{۳}{۲})^n$$

د) معادله مشخصه برای عبارت مزبور $۳r - ۴ = ۰$ است . پس $r = \frac{۴}{۳}$ و جواب عمومی به صورت $a_n = c(\frac{۴}{۳})^n$ می‌باشد . با قرار دادن رابطه اخیر در شرایط مرزی به دست می‌آوریم :

$$a_۱ = \frac{۴}{۳}c = ۵ \Rightarrow c = \frac{۱۵}{۴}$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = \frac{۱۵}{۴}(\frac{۴}{۳})^n$$

۲۲- اگر

$$\begin{cases} a_n^۲ = ۷a_{n-۱}^۲ \quad , \quad n \geq ۱ \\ a_۰ = ۳ \end{cases}$$

$a_{۱۰}$ را به دست آورید .

پاسخ :

داریم :

$$a_n^۲ = ۷a_{n-۱}^۲ = ۷(۷a_{n-۲}^۲) = ۷^۲ a_{n-۲}^۲ = ۷^۲(۷a_{n-۳}^۲) = ۷^۳ a_{n-۳}^۲ = \ldots = ۷^n a_۰^۲$$

با جاگذاری $a_0 = 3$ بدست می‌آوریم :

$$a_n^2 = 3^2 \times 7^n$$

یا

$$a_n = 3(7)^{\frac{n}{2}}$$

پس

$$a_{10} = 3(7)^{\frac{10}{2}} \approx 1968$$

۲۳- جواب رابطه بازگشتی

$$\begin{cases} a_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

را به دست آورید.

پاسخ :

با استفاده از جاگذاری ، جواب رابطه داده شده را به دست می‌آوریم . داریم :

$$\begin{aligned} &a_n = 2a_{n-1} - 2na_{n-1} = 2(1-n)a_{n-1} \\ &a_2 = -2a_1 \\ &a_3 = -4a_2 = 4 \times 2 \times a_1 = 2(2 \times 1 \times a_1) = 2 \times 2! \\ &a_4 = -6a_3 = -6 \times 4 \times 2 \times a_1 = -2(3 \times 2 \times 1)a_1 = -2 \times 3! \\ &\vdots \\ &a_n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1 \times a_1 = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

۲۴- x_1 ، x_2 ، ... ، x_{20} ، فهرستی از اعداد حقیقی و متمایز است که باید توسط روش مرتب‌سازی حبابی ، به صورت صعودی مرتب شوند.

الف) بعد از انجام چند مقایسه ، اولین ده عدد کوچک‌تر به صورت صعودی مرتب خواهند شد؟

ب) چند مقایسه برای مرتب‌سازی ، همه این اعداد لازم است ؟

پاسخ :

الف) با توجه به مثال ۵-۱۲ برای اولین عدد(۱-۲۰) مقایسه ، برای دومین عدد (۲-۲۰) و ... برای دهمین عدد (۱۰-۲۰)مقایسه لازم است . بنابراین تعداد مقایسه برای مرتب کردن اولین ده عدد برابر است با :

$$(20-1) + (20-2) + \dots + (20-10) = 10 \times 20 - \frac{10(11)}{2} = 145$$

ب) با توجه به مثال ۵-۱۲ تعداد کل مقایسه برای مرتب‌سازی اعداد برابر است با :

$$a_{20} = \frac{20(20-1)}{2} = 190$$

۲۵- روابط بازگشتی زیر را حل کنید (جوابهای عمومی نباید شامل اعداد موهومی باشند.)

الف) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, & n \geq 2 \\ a_0 = 1, & a_1 = 3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, & n \geq 0 \\ a_0 = 2, & a_1 = -8 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, & n \geq 1 \\ a_0 = 7, & a_1 = 3 \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_{n+2} + a_n = 0, & n \geq 0 \\ a_0 = 0, & a_1 = 3 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} a_{n+2} + 4a_n = 0, & n \geq 0 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$

و) $\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, & n \geq 2 \\ a_0 = 5, & a_1 = 12 \end{cases}$

ز) $\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, & n \geq 2 \\ a_0 = 1, & a_1 = 3 \end{cases}$

ح) $\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, & n \geq 2 \\ a_0 = 3, & a_1 = 15 \end{cases}$

ط) $\begin{cases} 9a_{n+2} + 12a_{n+1} + 4a_n = 0, & n \geq 0 \\ a_0 = 1, & a_1 = 4 \end{cases}$

ی) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}, & n \geq 3 \\ a_0 = 1, \; a_1 = 3, & a_2 = 7 \end{cases}$

پاسخ :

الف) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $r^2 - 5r - 6r = 0$ است . پس $r = 6$ و $r = -1$ بنابراین جواب عمومی به صورت $a_n = c_1(-1)^n + c_2(6)^n$ است . با جاگذاری جواب عمومی در شرایط مرزی داده شده بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = -c_1 + 6c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{7}, \; c_2 = \frac{4}{7}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = \frac{3}{7}(-1)^n + \frac{4}{7}(6)^n$$

ب) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $2r^2 - 11r + 5 = 0$ است . پس $r = \frac{1}{2}$ و $r = 5$.بنابراین جمله عمومی به صورت $a_n = c_1(5)^n + c_2(\frac{1}{2})^n$ است .

با جاگذاری جواب اخیر در شرایط مرزی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 2 \\ a_1 = 5c_1 + \frac{1}{2}c_2 = -8 \end{cases} \qquad c_1 = -2, \; c_2 = 4$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = -2(5)^n + 4(\frac{1}{2})^n$$

ج) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $3r^2 - 2r - 1 = 0$ است . پس $r = -\frac{1}{3}$ و $r_1 = 1$ پس جواب عمومی به صورت $a_n = c_1(1)^n + c_2(-\frac{1}{3})^n$ خواهد بود.با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 7 \\ c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 4 \ , \ c_2 = 3$$

بنابراین جواب عمومی رابطه داده شده به صورت زیر است :

$$a_n = 4 + 3(-\frac{1}{3})^n$$

د) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $r^2 + 1 = 0$ است . پس $r_1 = i$, $r_2 = -i$ یعنی $r_1 = i\sin\frac{\pi}{2}$, $r_2 = i\sin\frac{-\pi}{2}$. بنابراین جواب عمومی دنباله به صورت

$$\begin{aligned} a_n &= c_1(i\sin\frac{\pi}{2})^n + c_2(i\sin\frac{-\pi}{2})^n \\ &= c_1 i\sin\frac{n\pi}{2} - c_2 i\sin\frac{n\pi}{2} \\ &= k_1\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می‌آوریم :

$$a_1 = k_1 = 3$$

پس جمله عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = 3\sin\frac{n\pi}{2}$$

هـ) رابطه داده شده را با جاگذاری حل می‌کنیم . داریم :

$$a_2 = -4a_0 = -4$$
$$a_3 = -4a_1 = -4$$
$$a_4 = -4a_2 = -4(-4) = (-1)^2 4^2$$
$$a_5 = -4a_3 = -4(-4) = (-1)^2 4^2$$
$$a_6 = -4a_4 = -4((-1)^2 4^2) = (-1)^3 4^3$$
$$a_7 = -4a_5 = -4((-1)^2 4^2) = (-1)^3 4^3$$
$$\vdots$$
$$a_{2k} = (-1)^k 4^k$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k 4^k$$
$$\vdots$$
$$a_n = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} 4^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

و) معادله مشخصه رابطه مزبور به صورت $r^2 - 6r + 9 = 0$ است . پس $r_1 = r_2 = 3$ بنابراین جواب عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$a_n = (c_1 + nc_2)3^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 = 5 \\ a_1 = 3(c_1 + c_2) = 12 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 5 \ , \ c_2 = -1$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_n = (5 - n)3^n$$

ز) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $r^2 + 2r + 2 = 0$ است . پس

$$r_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ , \ r_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = (\sqrt{2})^n\left[(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n + (\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})^n\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n\left[k_1\cos\frac{n\pi}{4} + k_2\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می‌آوریم :

$$a_{0} = k_{1} = 1$$
$$a_{1} = \sqrt{2}\left(k_{1}\frac{\sqrt{2}}{2} + k_{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \quad \Rightarrow k_{1} = 1\ ,\ k_{2} = 2$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_{n} = (\sqrt{2})^{n}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + 2\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

ح) چند جمله مشخصه دنباله به صورت $r^{2} - 7r + 10 = 0$ است.پس $r_{1} = 5$ و $r_{2} = 2$ ،
لذا جمله عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$a_{n} = c_{1}(2)^{n} + c_{2}(5)^{n}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_{0} = c_{1} + c_{2} = 3 \\ a_{1} = 2c_{1} + 5c_{2} = 15 \end{cases} \Rightarrow c_{1} = 0\ ,\ c_{2} = 3$$

پس جواب عمومی دنباله به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_{n} = 3(5)^{n}$$

ط) چند جمله مشخصه دنباله به صورت $9r^{2} + 12r + 4 = 0$ است . پس $r_{1} = r_{2} = -\frac{2}{3}$
، بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$a_{n} = (c_{1} + nc_{2})\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_{0} = c_{1} = 1 \\ a_{1} = -\frac{2}{3}c_{1} - \frac{2}{3}c_{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow c_{1} = 1\ ,\ c_{2} = -7$$

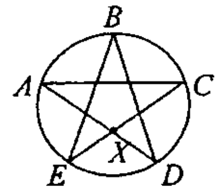
بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_{n} = (1 - 7n)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$$

ی) چند جمله مشخصه دنباله به صورت $r^{3} - r - 1 = 0$ است . معادله فوق دارای یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط است . بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر خواهد بود :

$$a_{n} = c_{1}r^{n} + c_{2}(a + ib)^{n} + c_{3}(a - ib)^{n}$$

ج) نشان دهید که $\frac{AC}{AX} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$



پاسخ :

الف) این مطلب را در تمرین ۱۴ ثابت کرده‌ایم .

۲۹- فرض کنید که a_n ، $n \geq ۰$ ، تعداد رشته‌های تشکیل شده از ۱و۲ باشد که مجموع عناصر آن مساوی n است . برای مثال $a_۳ = ۳$ ، زیرا مجموع عناصر هر کدام از سه رشته زیر مساوی ۳ است :

الف) ۱ , ۱ , ۱   ب) ۱ , ۲   ج) ۲ , ۱

یک رابطه بازگشتی برای a_n ارائه داده و آن را حل کنید.

پاسخ :

مجموعه تمام رشته‌هایی که از ۱و۲ تشکیل شده‌اند و مجموع آنها برابر n است را در نظر بگیرید . اولین عنصر از این دنباله را در نظر بگیرید . دو حالت پیش می‌آید :

۱) عنصر مورد نظر برابر ۱ باشد . در این صورت حاصل جمع بقیه عناصر که از ۱و۲ تشکیل شده‌اند باید برابر $n-۱$ باشد . در این حالت با $a_{n-۱}$ حالت روبرو می‌شویم .

۲) عنصر مورد نظر ۲ باشد . در این صورت حاصل جمع بقیه عناصر که از ۱و۲ تشکیل شده‌اند باید برابر $n-۲$ باشد . در این حالت نیز با $a_{n-۲}$ حالت سروکار داریم . بنابراین

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \qquad n \geq ۳$$

$$a_۱ = ۱ \quad , \quad a_۲ = ۲$$

برای حل دنباله ، روشن است چند جمله‌ای مشخصه دنباله به صورت $r^۲ - r - ۱ = ۰$ می‌باشد . پس $r = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ، درنتیجه جواب عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$a_n = c_۱\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n + c_۲\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_1 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \\ a_2 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 \cong 0/7236 \quad , \quad c_2 \cong 0/2764$$

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_n = 0/7236(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + 0/2764(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

۳۰- فرض کنید که a_n ، $n \geq 1$ ، تعداد حالت‌هایی باشد که عدد n را بتوان به صورت مجموع اعداد صحیح و مثبت مرتب شده ، که مقدار هر کدام از جمعوندها حداقل مساوی ۲ است ، نوشت . برای مثال $a_5 = 3$ ، زیرا ، عدد ۵ را می‌توان به صورت مجموع‌های مرتب شدهٔ ۵ ، ۲+۳ و ۳+۲ نوشت . یک رابطهٔ بازگشتی برای a_n پیدا کرده و آن را حل کنید .

پاسخ :

مجموعه تمام دنباله‌هایی که عناصرشان حداقل ۲ و مجموع‌شان n می‌باشد را در نظر می‌گیریم . برای اولین عنصر این دنباله حالتهای زیر می‌تواند اتفاق بیفتد .

- اولین عنصر۲ باشد . در این صورت حاصل جمع بقیه عناصر باید $n-2$ باشد به شرطی که فرض مساله رعایت شود . در این صورت a_{n-2} حالت داریم .
- اولین عنصر۳ باشد . در این حالت حاصل جمع بقیه عناصر باید $n-3$ باشد مشروط بر اینکه فرض مساله رعایت شود . در این صورت a_{n-3} حالت داریم .

$\vdots$

- اولین عنصر $n-2$ عدد باشد. در این صورت بنا به فرض مساله عدد بعدی باید۲ باشد.
- اولین عنصر n باشد .

تذکر : اولین عنصر نمی‌تواند $n-1$ باشد . زیرا در این صورت عنصر بعدی باید عدد ۱ باشد که متناقض با فرض مساله است .

درنتیجه با توجه به حالتهای فوق خواهیم داشت :

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + 1$$

بنابراین رابطه بازگشتی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_n = \sum_{i=1}^{n-2} a_i \qquad n \geq 4 \\ a_2 = 1 \quad , \quad a_3 = 1 \end{cases}$$

۳۱- فرض کنید که D_n، $n \geq 1$، دترمینان تعریف شده در زیر باشد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

یک رابطهٔ بازگشتی برای D_n پیدا کرده و آن را حل کنید .

پاسخ :

با بسط حول سطر اول داریم :

این دترمینال ایراد دارد!

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

دترمینال دوم را حول ستون اول بسط می‌دهیم در این صورت رابطه زیر به دست می‌آید :

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

همچنین داریم :

$$D_1 = |2| = 2 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

پس رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید :

$$\begin{cases} D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} \\ D_1 = 2 \quad , \quad D_2 = 3 \end{cases}$$

چند جمله مشخصه این رابطه به صورت $r^2 - 2r + 1 = 0$ است . پس $r_1 = r_2 = 1$ لذا جواب عمومی رابطه ، به صورت زیر می‌باشد .

$$D_n = (c_1 + nc_2)(1)^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} D_1 = c_1 + c_2 = 2 \\ D_2 = c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1 \, , \, c_2 = 1$$

بنابراین ، جواب عمومی رابطه مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید :

$$D_n = 1 + n$$

۳۲- رابطه بازگشتی

$$\begin{cases} a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 4a_n^2 = 0 \, , \quad n \geq 0 \\ a_0 = 4, a_1 = 13 \end{cases}$$

را حل کنید .

پاسخ :

فرض کنیم $d_n = a_n^2$ ، در این صورت ، رابطه مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} d_{n+2} - 5d_{n+1} + 4d_n = 0 \\ d_0 = 16 \quad , \quad d_1 = 169 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 5r + 4 = 0$ ، عبارتند از $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ ، بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$d_n = c_1(1)^n + c_2(4)^n$$

با جاگذاری جمله در شرایط مرزی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} d_0 = c_1 + c_2 = 16 \\ d_1 = c_1 + 4c_2 = 169 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -35 \quad , \quad c_2 = 51$$

$$d_n = -35 + 15(4)^n$$

درنتیجه با جاگذاری $a_n^2 = d_n$ جمله عمومی رابطه اصلی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n^2 = -35 + 51(4)^n$$

۳۳- اگر $a_n = c_1 + c_2 7^n$ ، $n \geq 0$ ، جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$ ، $n \geq 0$ ، باشد ضرایب b و c را پیدا کنید .

پاسخ :

با جاگذاری a_n در جمله عمومی داده شده بدست می‌آوریم :

$$(c_1 + c_2 7^{n+2}) + b(c_1 + c_2 7^{n+1}) + c(c_1 + c_2 7^n) = 0$$

$$\Rightarrow c_1(1 + b + c) + 7^n c_2(49 + 7b + c) = 0$$

یک جواب برای c,b از حل دستگاه زیر به دست می‌آید :

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 49 + 7b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -8 \ , c = 7$$

۳۴- نشان دهید که هر دو عدد متوالی از رشتهٔ فیبوناچی نسبت به هم اول‌اند .

پاسخ :

حکم را به استقرای قوی ثابت می‌کنیم .

۱. مبنای استقرا . روشن است

$$(F_0 \ , F_1) = 1$$

۲. فرض استقرای قوی . فرض کنیم بازای هر $1 \le i \le k$ داشته باشیم :

$$(F_k \ , F_{k-1}) = 1$$

۳. مرحله استقرا. برای $n=k+1$ به روش برهان خلف، ثابت می‌کنیم که $(F_{k+1} , F_k) = 1$

فرض کنیم $d > 1$ ، $d \mid F_k$ ، $d \mid F_{k+1}$ در این صورت با توجه به اینکه

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

داریم $F_{k-1} = F_{k+1} + F_k$ ، از اینکه $d \mid F_k$ ، $d \mid F_{k+1}$ ، پس $d \mid F_{k-1}$.

درنتیجه $(F_k \ , F_{k-1}) \ge d > 1$. و این متناقض با فرض استقرای قوی است. پس $(F_{k+1}, F_k) = 1$ و حکم اثبات می‌شود .

۳۵- الگوریتمی ارائه دهید تا مشخص کند که آیا عدد مفروض $n \ge 0$ ، یک عدد فیبوناچی است و یا نه ؟

پاسخ :

یک روش ساده آنست که اعداد دنباله را تا اولین عدد بزرگتر یا مساوی عدد مفروض محاسبه کنیم . حال می‌توان حکم کرد که عدد مورد نظر عنصری از دنباله فیبوناچی است یا نه .

۳۶- روابط بازگشتی زیر را حل کنید :

الف) $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 2n + 3 \ , & n \ge 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n \ , & n \ge 0 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 5 \ , & n \ge 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 2n^2 \ , & n \ge 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

پاسخ :

الف) داریم :

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = a_0 + 3 = 3 + 1$$
$$a_2 = a_1 + 2\times 1 + 3 = 2\times 1 + 2\times 3 + 1$$
$$a_3 = a_2 + 2\times 2 + 3 = 2\times(2+1) + 3\times 3 + 1$$
$$a_4 = a_3 + 2\times 3 + 3 = 2\times(3+2+1) + 4\times 3 + 1$$
$$\vdots$$
$$\begin{aligned} a_n &= 2[(n-1) + \dots + 3 + 2 + 1] + 3n + 1 \\ &= n(n-1) + 3n + 1 \\ &= n(n-1+3) + 1 = n(n+2) + 1 \end{aligned}$$

ب) داریم :

$$a_0 = 3$$
$$a_1 = a_0 = 3$$
$$a_2 = a_1 + 3\times 1^2 - 1 = 3\times 1^2 - 1 + 3$$
$$a_3 = a_2 + 3\times 2^2 - 2 = 3(1^2 + 2^2) - (1+2) + 3$$
$$a_4 = a_3 + 3\times 3^2 - 3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2) - (1+2+3) + 3$$
$$\vdots$$
$$\begin{aligned} a_n &= 3[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] - [1 + 2 + \dots + (n-1)] + 3 \\ &= 3\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} + 3 \\ &= \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + 3 \\ &= \frac{2n(n-1)^2}{2} + 3 = n(n-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

ج) داریم :

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2a_0 + 5 = 2 + 5$$
$$a_2 = 2a_1 + 5 = 2^2 + 2 \times 5 + 5$$
$$a_3 = 2a_2 + 5 = 2^3 + 2^2 \times 5 + 2 \times 5 + 5$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^n + 5(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1) \qquad n \geq 1$$

د) داریم :

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2a_0 + 2^0 = 2 + 1$$
$$a_2 = 2a_1 + 2 = 2^2 + 2 + 2 = 2^2 + 2 \times 2$$
$$a_3 = 2a_2 + 2^2 = 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 2^3 + 3 \times 2^2$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^n + n \times 2^{n-1}$$

۳۷- با استفاده از یک رابطهٔ بازگشتی ، مجموع $\sum_{i=1}^{n} i^2$ را حساب کنید .

پاسخ :

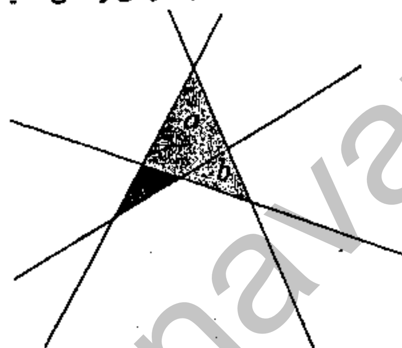
با فرض اینکه $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$ داریم :

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n^2$$
$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + n^2$$

۳۸- n خط در صفحه به گونه‌ای ترسیم شده‌اند که اولاً دو به دو متقاطع هستند و درثانی سه به سه در سه نقطهٔ متمایز همدیگر را قطع می‌کنند (شکل زیر ، مسئله را برای $n=4$ خط ، نشان می‌دهد) .

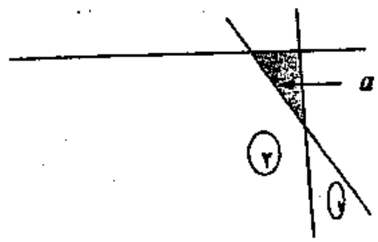
الف) با فرض آنکه a_n ، $n \geq 0$ تعداد نواحی ایجاد شده توسط این خط باشد ، یک رابطهٔ بازگشتی برای a_n پیدا کرده و آن را حل کنید .

ب) اگر b_n تعداد نواحی متناهی ایجاد شده توسط این خطوط باشد (مثل نواحی a ، b ، c در شکل زیر) ، یک رابطهٔ بازگشتی برای b_n پیدا کرده و آن را حل کنید.



پاسخ :

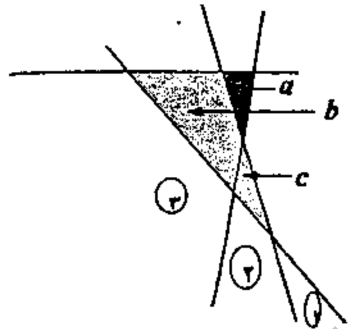
الف و ب خطوط را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که شمارش ناحیه‌ها ساده باشد و در عین حال فرض مساله حفظ شود . برای این منظور فرض کنید خطوط را در هر مرحله به صورت زیر رسم می‌کنیم :



(۱)

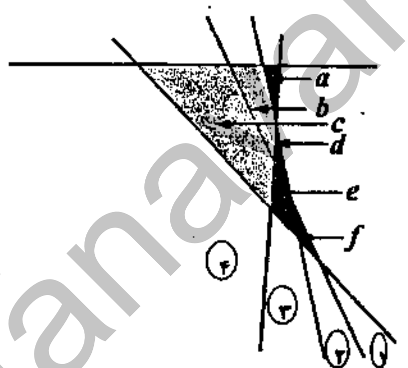
$n=3$

$n=4$



(۲)

$n=5$



(۳)

⋮ ⋮

با این روش ، روشن است فرض مساله حفظ می‌شود . اگر در مرحله n- ام ، b_n ناحیه داشته باشیم ، آنگاه در مرحله $(n+1)$- ام ، $n-1$ ناحیه به ناحیه‌های قبلی اضافه می‌شود . لذا $n \geq 3 \quad b_{n+1} = b_n + (n-1)$.

از طرفی روشن است در مرحله $n+1$- ام خطی که رسم می‌کنیم $n-1$ ناحیه ایجاد می‌کند . از آنجا که ترتیب رسم کردن خطها هیچ تاثیری در رسم ندارد . پس در مرحله $(n+1)$- ام هر خط باعث ایجاد $(n-1)$ ناحیه می‌شود . درنتیجه

$$a_{n+1} = n-1 \qquad n \geq 3$$

پس داریم :

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + (n-2) & n \geq 4 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = n-2 \qquad n \geq 3$$

۳۹- روابط بازگشتی زیر را حل کنید :

الف) $\begin{cases} a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=3^n\ ,\ n\geq 0 \\ a_0=0\ ,\ a_1=2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=7\ ,\ n\geq 0 \\ a_0=1\ ,\ a_1=2 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=n^2\ ,\ n\geq 0 \\ a_0=0\ ,\ a_1=2 \end{cases}$ د) $\begin{cases} a_{n+2}-a_n=\sin\frac{n\pi}{2}\ ,\ n\geq 0 \\ a_0=0\ ,\ a_1=1 \end{cases}$

پاسخ :

الف) ریشه‌های معادله $r^2+3r+2=0$ عبارتند از $r=-1$, $r=-2$، بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)}=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$ است. جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)}=A3^n$ است. برای بدست آوردن ضریب A، با جاگذاری $a_n^{(p)}$ در رابطه بازگشتی بدست می‌آوریم :

$$A3^{n+2}+3A3^{n+1}+2A3^n=3^n$$

$$\Rightarrow 9A+9A+2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{20}$$

بنابراین جمله عمومی رابطه داده شده به صورت زیر است :

$$a_n=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n+\frac{1}{20}3^n$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$\begin{cases} a_0=c_1+c_2+\frac{1}{20}=0 \\ a_1=-c_1-2c_2+\frac{3}{20}=2 \end{cases}\Rightarrow c_1=\frac{35}{20}\ \ ,\ c_2=\frac{-36}{20}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_n=\frac{35}{20}(-1)^n-\frac{36}{20}(-2)^n+\frac{1}{20}3^n$$

ب) ریشه معادله $r^2+4r+4=0$ برابر است با $r_1=r_2=-2$ ، بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)}=(c_1+nc_2)(-2)^n$ است. جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)}=A$ است. با جاگذاری در رابطه مورد بحث بدست می‌آوریم :

$$A+4A+4A=7\Rightarrow A=\frac{7}{9}$$

بنابراین جواب عمومی رابطه مورد بحث عبارتست از :

$$a_n = (c_1 + nc_2)(-2)^n + \frac{7}{9}$$

حال با توجه به شرایط مرزی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + \dfrac{7}{9} = 1 \\ a_1 = -2c_1 - 2c_2 + \dfrac{7}{9} = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{9}\ ,\ c_2 = -\frac{5}{6}$$

پس جواب عمومی به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_n = (\frac{2}{9} - \frac{5}{6}n)(-2)^n + \frac{7}{9}$$

ج) ریشه های معادلـه $r^2 + 4r + 4 = 0$ عبارتنـد از $r_1 = r_2 = -2$ بنـابراین جـواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)} = (c_1 + nc_2)(-2)^n$ است . جواب ویژه نیز بـه صـورت $a_n^{(p)} = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2)$ می‌باشد . با جاگذاری این عبارت در رابطه داده شـده ، داریم:

$$(A_0 + A_1(n+2) + A_2(n+2)^2) + 4(A_0 + A_1(n+1) + A_2(n+1)^2)$$
$$+ 4(A_0 + A_1 n + A_2 n^2) = n^2$$

$$(9A_2)n^2 + (9A_1 + 12A_2)n + (9A_0 + 6A_1 + 8A_2) = n^2$$

$$\begin{cases} 9A_2 = 1 \\ 9A_1 + 12A_2 = 0 \\ 9A_0 + 6A_1 + 8A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_0 = 0\ ,\ A_1 = \frac{-4}{27}\ ,\ A_2 = \frac{1}{9}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = (c_1 + nc_2)(-2)^n - \frac{4}{27}n + \frac{1}{9}n^2$$

حال با توجه به شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 = 0 \\ a_1 = -2c_1 - 2c_2 - \dfrac{4}{27} + \dfrac{1}{9} = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0\ ,\ c_2 = -\frac{55}{54}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر درمی‌آید :

$$a_n = -\frac{55}{54}n(-2)^n - \frac{4}{27}n + \frac{1}{9}n^2$$

د) ریشه‌های معادله $r^2-1=0$ به صورت $r_1=1$, $r_2=-1$ است . بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)}=c_1(1)^n+c_2(-1)^n$ خواهد بود . جواب ویژه نیز به صورت زیر است .

$$a_n^{(p)}=A\sin\frac{n\pi}{2}+B\cos\frac{n\pi}{2}$$

با جاگذاری در رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم :

$$(A\sin\frac{(n+2)\pi}{2}+B\cos\frac{(n+2)\pi}{2})-(A\sin\frac{n\pi}{2}+B\cos\frac{n\pi}{2})=\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (A\sin(\frac{n\pi}{2}+\pi)+B\cos(\frac{n\pi}{2}+\pi))-(A\sin\frac{n\pi}{2}+B\cos\frac{n\pi}{2})=\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (-A\sin\frac{n\pi}{2}-B\cos\frac{n\pi}{2})-(A\sin\frac{n\pi}{2}+B\cos\frac{n\pi}{2})=\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -2A\sin\frac{n\pi}{2}-2B\cos\frac{n\pi}{2}=\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\begin{cases}-2A=1\\-2B=0\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\ ,\ B=0$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n=c_1+c_2(-1)^n-\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

با جاگذاری در شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases}a_0=c_1+c_2=0\\a_1=c_1-c_2-\frac{1}{2}=1\end{cases}\Rightarrow c_1=\frac{3}{4}\quad ,\quad c_2=\frac{-3}{4}$$

$$a_n=\frac{3}{4}-\frac{3(-1)^n}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

۴۰- رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=3\times 2^n+7\times 3^n\ ,\ n\geq 0\\a_0=1\ ,\ a_1=4\end{cases}$$

پاسخ :

ریشه معادله $r^2-6r+9=0$ به صورت $r_1=r_2=3$ می‌باشد . بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(p)}=(c_1+nc_2)3^n$ است . با توجه به اینکه $n3^n$ یک جواب برای مساله همگن است .

جواب ویژه مساله به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n^{(p)} = A\times 2^n + n^2 B\times 3^n$$

(چون $n3^n$ یک جواب برای مساله همگن است پس $Bn^2 3^n$ را باید متناظر با 3^n در نظر میگیریم.)

با جاگذاری در رابطه بازگشتی بدست میآوریم :

$$(A\times 2^{n+2} + (n+2)^2 B\times 3^{n+2}) - 6(A\times 2^{n+1} + (n+1)^2 B\times 3^{n+1})$$
$$+ 9(A\times 2^n + n^2 B\times 3^n) = 3\times 2^n + 7\times 3^n$$

$$\Rightarrow 2^n(4A - 12A + 9A) + 3^n(9(n+2)^2 B - 18(n+1)^2 B + 9n^2 B)$$
$$= 3\times 2^n + 7\times 3^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ 9(n+2)^2 B - 18(n+1)^2 B + 9n^2 B = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ 18B = 7 \end{cases} \Rightarrow A = 3 \quad , B = \frac{7}{18}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمیآید :

$$a_n = (c_1 + nc_2)3^n + 3\times 2^n + \frac{7}{18}n^2 \times 3^n$$

حال با جاگذاری در شرایط مرزی ضرایب c_2, c_1 را نیز بدست میآوریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + 3 = 1 \\ a_1 = 3c_1 + 3c_2 + 3 + \frac{21}{18} = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow c_1 = -2 \quad , \quad c_2 = \frac{35}{18}$$

درنتیجه جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = (-2 + \frac{35}{18}n)3^n + 3\times 2^n + \frac{7}{18}n^2 \times 3^n$$

۴۱- رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n \ , \ n \geq 0 \\ a_0 = 0 \ , \ a_1 = \dfrac{35}{24} \ , \ a_2 = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

پاسخ :

معادله مشخصه $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ دارای ریشه تکراری $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ است .
بنابراین جواب قسمت همگن به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n^{(h)} = c_1 + nc_2 + n^2 c_3$$

برای بدست آوردن جواب ویژه با توجه به اینکه n, n^2 در جواب همگن وجود دارنـد .
لذا جواب ویژه به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n^{(p)} = A_1 n^3 + n^4 (A_2 + A_3 n)$$

که با جاگذاری در رابطه مورد بحث می‌توان ضرایب A_1, A_2, A_3 را بدست آورد .
درنتیجه ، جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + A_1 n^3 + n^4 (A_2 + A_3 n)$$

۴۲- $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + n - 7$ ، جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_2 a_n = b_3 n + b_4 \quad , \quad n \geq 0$$

است . ضرایب ثابت b_i ، $1 \leq i \leq 4$ ، را بدست آورید .

پاسخ :

با توجه به صورت مساله روشن است ۲و۳ ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 + b_1 r + b_2 = 0$ هستند . پس

$$b_1 = -5 \ , \ b_2 = 6$$

از طرفی برای مساله مورد بحث جواب ویژه به صورت زیر است :

$$a_n^{(p)} = A_1 + n(A_2 + nA_3)$$
$$= A_1 + A_2 n + A_3 n^2$$

تذکر : چون A_1 یک جواب ویژه است ، پس جواب ویژه متناظر با $b_3 n$ ، که برابر $A_2 + nA_3$ است را به خاطر داشتن اسکالر ثابت A_2 ، در n ضرب می‌کنیم تا این جواب از A_1 مجزا باشد .

اما با توجه به اینکه $a_n = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n + n - 7$ جواب عمومی مساله است ، پس

$$a_n^{(p)} = A_1 + A_2 n + A_3 n^2 = n - 7$$
$$\Rightarrow A_1 = -7 \ , \ A_2 = 1 \ , \ A_3 = 0$$

از طرفی $a_n^{(p)}$ باید در رابطه بازگشتی صدق کند . یعنی :

$$\left[A_۱ + A_۲(n+۲) + A_۳(n+۲)^۲\right] - ۵\left[A_۱ + A_۲(n+۱) + A_۳(n+۱)^۲\right]$$
$$+ ۶\left[A_۱ + A_۲ n + A_۳ n^۲\right] = b_۲ n + b_۱$$

$$\Rightarrow \left[-۷ + (n+۲)\right] - ۵\left[-۷ + (n+۱)\right] + ۶\left[-۷ + n\right] = b_۲ n + b_۱$$
$$\Rightarrow (۱ - ۵ + ۶)n + \left[-۷ + ۲ + ۳۵ - ۵ - ۴۲\right] = b_۲ n + b_۱$$
$$\Rightarrow b_۲ = ۲ \quad , \; b_۱ = -۱۷$$

۴۳- روابط بازگشتی زیر را حل کنید :

الف)
$$\begin{cases} a_{n+۲}^۲ - ۵a_{n+۱}^۲ + ۶a_n^۲ = ۷n \;,\; n \geq ۰ \\ a_۰ = a_۱ = ۱ \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} a_n + na_{n-۱} = n! \;,\; n \geq ۱ \\ a_۰ = ۱ \end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases} a_n^۲ - ۲a_{n-۱} = ۰ \;,\; n \geq ۱ \\ a_۰ = ۲ \end{cases}$$

(راهنمایی : فرض کنید که $b_n = \log_۲ a_n$ ، $n \geq ۰$) .

پاسخ :

الف) با فرض $b_n = a_n^۲$ رابطه بازگشتی به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} b_{n+۲} - ۵b_{n+۱} + ۶b_n = ۷n \qquad n \geq ۰ \\ b_۰ = b_۱ = ۱ \end{cases} \qquad (*)$$

برای رابطه اخیر ، معادله مشخصه به صورت $r^۲ - ۵r + ۶ = ۰$ است . که ریشه‌های آن عبارتند از $r_۱ = ۲$, $r_۲ = ۳$ ، بنابراین جواب قسمت همگن به صورت

$$a_n^{(h)} = c_۱ \times ۲^n + c_۲ \times ۳^n$$

است . جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = A_۱ + A_۲ n$ می‌باشد . که با جاگذاری در رابطه (*) خواهیم داشت :

$$(A_۱ + A_۲(n+۲)) - ۵(A_۱ + A_۲(n+۱)) + ۶(A_۱ + A_۲ n) = ۷n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲A_۱ - ۳A_۲ = ۰ \\ ۲A_۲ = ۷ \end{cases} \quad \Rightarrow A_۱ = \frac{۲۱}{۴} \quad , \quad A_۲ = \frac{۷}{۲}$$

لذا، جواب (*) عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$b_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{21}{4} + \frac{7}{2}n$$

که با جاگذاری در شرایط مرزی مقادیر c_2, c_1 نیز به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} b_0 = c_1 + c_2 + \frac{21}{4} = 1 \\ b_1 = 2c_1 + 3c_2 + \frac{21}{4} + \frac{7}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -5 \quad , \quad c_2 = \frac{3}{4}$$

بنابراین

$$b_n = -5 \times 2^n + \frac{3}{4} \times 3^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}$$

درنتیجه :

$$a_n^2 = -5 \times 2^n + \frac{3}{4} \times 3^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}$$

ب) داریم :

$$\begin{aligned} & a_0 = 1 \\ & a_1 = 1 - 1 \times a_0 = 1 - 1 = 0 \\ & a_2 = 2! - 2 \times a_1 = 2! \\ & a_3 = 3! - 3 \times a_2 = 0 \\ & a_4 = 4! - 4 \times a_3 = 4! \\ & \vdots \\ & a_{2n} = (2n)! \quad , \quad a_{(2n+1)} = 0 \qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

ج) داریم :

$$\begin{aligned} & a_0 = 2 \\ & a_1^2 = 2a_0 = 2^2 \Rightarrow a_1 = 2 \\ & a_2^2 = 2a_1 = 2^2 \Rightarrow a_2 = 2 \\ & \vdots \\ & a_n = 2 \qquad\qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

۴۴- برای هر کدام از معادلات زیر ، تعداد جواب‌های صحیح را بدست آورید .

الف) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ ، $0 \le c_i \le 7$ ، $1 \le i \le 4$

ب) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ ، $0 \le c_i$ ، $1 \le i \le 4$ ، c_2 و c_3 زوج هستند .

ج) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 30$ ، $2 \le c_1 \le 4$ ، $3 \le c_i \le 8$ ، $2 \le i \le 5$.

د) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 20$ ، $0 \le c_i$ ، $1 \le i \le 5$ ، و c_2 و c_3 فرد هستند .

پاسخ :

الف) تعداد جوابهای صحیح معادله داده شده ، برابر است با ضریب x^{20} در رابطه زیر:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^7)^4 = \left[\frac{1-x^8}{1-x}\right]^4$$

بنابراین ضریب x^{20} در عبارت :

$$(1-x^8)^4(1-x)^{-4} = (1-c_4^1x^8+c_4^2x^{16}-c_4^3x^{24}+c_4^4x^{32})(c_{-4}^0+c_{-4}^1(-x)+c_{-4}^2(-x)^2+\ldots)$$

جواب مساله است . این ضریب مساوی

$$c_{-4}^{20}(-1)^{20} - c_{-4}^{12}\,c_4^1(-1)^{12} + c_{-4}^4\,c_4^2(-1)^4 = 161$$

است .

ب) تعداد جوابهای صحیح معادله داده شده برابر است با ضریب x^{20} در رابطه زیر

$$(1+x+\ldots+x^{20})^2(1+x^2+x^4+\ldots+x^{20})^2$$

این ضریب با ضریب x^{20} در رابطه زیر برابر است :

$$(1+x+x^2+\ldots)^2(1+x^2+x^4+\ldots)^2 = (\frac{1}{1-x})^2(\frac{1}{1-x^2})^2$$

از طرفی داریم :

$$(1-x)^{-2}(1-x^2)^{-2} = (c_{-2}^0+c_{-2}^1(-x)+c_{-2}^2(-x)^2+\ldots)(c_{-2}^0+c_{-2}^1(-x^2)+c_{-2}^2(-x^2)^2+\ldots)$$

بنابراین ضریب x^{20} در عبارت بالا مساوی است با :

$$c_{-2}^0c_{-2}^{10}(-1)^{10} + c_{-2}^2c_{-2}^9(-1)^9 + c_{-2}^4c_{-2}^8(-1)^8 + c_{-2}^6c_{-2}^7(-1)^7$$
$$+ c_{-2}^8c_{-2}^6(-1)^6 + c_{-2}^{10}c_{-2}^5(-1)^5 + c_{-2}^{12}c_{-2}^4(-1)^4 + c_{-2}^{14}c_{-2}^3(-1)^3$$
$$+ c_{-2}^{16}c_{-2}^2(-1)^2 + c_{-2}^{18}c_{-2}^1(-1)^1 + c_{-2}^{20} = 506$$

ج) تعداد جوابهای معادله داده شده برابر ضریب x^{30} در عبارت زیر است :

$$(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+x^5+x^6)^4 = x^{14}(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)^4$$

این ضریب ، مساوی با ضریب x^{16} در عبارت زیر است :

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)^4 = \left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^4$$

از طرفی

$$
\begin{aligned}
&(1-x^3)(1-x)^{-1}(1-x^4)^4(1-x)^{-4} = (1-x^3)(1-x^4)^4(1-x)^{-5}\\
&= (1-x^3)\left[c_4^0 - c_4^1 x^4 + c_4^2 (x^4)^2 - c_4^3 (x^4)^3 + c_4^4 (x^4)^4\right]\left[c_{-5}^0 + c_{-5}^1(-x) + \dots\right]\\
&= \left[c_4^0 - c_4^1 x^4 + \dots + c_4^4 x^{16}\right]\left[c_{-5}^0 + c_{-5}^1(-x)\dots\right]\\
&- x^3\left[c_4^0 - c_4^1 x^4 + \dots + c_4^4 x^{16}\right]\left[c_{-5}^0 + c_{-5}^1(-x) + \dots\right]
\end{aligned}
$$

بنابراین ضریب x^{20} برابر است با :

$$
\begin{aligned}
&\left[c_4^0 c_{-5}^{20}(-1)^{20} - c_4^1 c_{-5}^{16}(-1)^{16} + c_4^2 c_{-5}^{12}(-1)^{12} - c_4^3 c_{-5}^{8}(-1)^{8} + c_4^4 c_{-5}^{4}(-1)^{4}\right]\\
&- \left[c_4^0 c_{-5}^{17}(-1)^{17} - c_4^1 c_{-5}^{13}(-1)^{13} + c_4^2 c_{-5}^{9}(-1)^{9} - c_4^3 c_{-5}^{5}(-1)^{5} + c_4^4 c_{-5}^{1}(-1)^{1}\right]\\
&= 7582
\end{aligned}
$$

د) تعداد جوابهای معادله داده شده برابر است با ضریب x^{20} در رابطه زیر :

$$(x+x^2+\dots+x^{19})^2(1+x+x^2+\dots+x^{20})^3 = x^2(1+x+\dots+x^{18})^2(1+x+\dots+x^{20})^3$$

این ضریب برابر ضریب x^{18} در عبارت زیر است :

$$(1+x^2+x^4+\dots)^2(1+x+x^2+\dots)^3 = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^3$$

از طرفی داریم :

$$(1-x^2)^{-2}(1-x)^{-3} = (c_{-2}^0 + c_{-2}^1(-x^2) + c_{-2}^2(-x^2)^2 + \dots)(c_{-3}^0 + c_{-3}^1(-x) + \dots)$$

بنابراین ضریب x^{18} در عبارت بالا برابر است با :

$$
\begin{aligned}
&c_{-2}^0 c_{-3}^{18} - c_{-2}^1 c_{-3}^{16} + c_{-2}^2 c_{-3}^{14} - c_{-2}^3 c_{-3}^{12} + c_{-2}^4 c_{-3}^{10} - c_{-2}^5 c_{-3}^{8}\\
&+ c_{-2}^6 c_{-3}^{6} - c_{-2}^7 c_{-3}^{4} + c_{-2}^8 c_{-3}^{2} - c_{-2}^9 c_{-3}^{0} = 2200
\end{aligned}
$$

۴۵- می‌خواهیم ۳۵ توپ (از میان تعداد نامتناهی توپ) را بین ۵ کودک به‌گونهٔ توضیح داده شده در زیر توزیع بکنیم . تابع مولد هر کدام از حالت‌های مربوطه را بدست آورید.

الف) هیچ شرطی برای توزیع وجود ندارد .

ب) به هر کودک دست‌کم باید یک توپ برسد .

ج) به هر کودک باید دست‌کم دو توپ برسد .

د) به کودک بزرگ‌تر دست‌کم باید ۱۰ توپ برسد .

و) به هر دو کودک از همه کم‌سن‌تر باید ۱۰ توپ برسد .

پاسخ :

الف) در این حالت ، تابع مولد به صورت زیر خواهد بود :

$$(1+x^1+x^2+x^3+\dots+x^{35})^5$$

ب)در این حالت جمله $x^0 = 1$ ، که متناظر با آنست که به فردی تـوپی نرسـد حـذف می‌شود .

بنابراین تابع مولد به صورت زیر درمی‌آید :

$$(x+x^2+\dots+x^{25})^5$$

ج)تابع مولد به صورت زیر خواهد بود :

$$(x^2+x^3+\dots+x^{25})^5$$

د) با فرض اینکه فقط یک کودک از میان پنج کودک از همه بزرگتـر باشـد . در ایـن حالت . تابع مولد به صورت زیر درمی‌آید :

$$(1+x+x^2+\dots+x^{25})^4(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{25})$$

و)چند جمله‌ای متناظر با ۲ کودک از همه کم‌سن‌تر بـرای هـر یـک x^{10} مـی‌باشـد .

بنابراین تابع مولد به صورت زیر خواهد بود :

$$x^{10}\times x^{10}\times(1+x+x^2+\dots+x^{25})^3 = x^{20}(1+x+\dots x^{25})^3$$

۴۶- تابع مولد هر کدام از رشته‌های زیر را بدست آورید . برای مثال ، برای رشتهٔ ۰ ، ۱ ، ۳ ، ۹ ، ۲۷ ، .... تابع مولد باید به صورت $\frac{x}{1-3x}$ بیان شود و نه به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{n+1}$.

الف) c_8^0 ، c_8^1 ، c_8^2 ، .... ، c_8^8 .

ب) c_8^1 ، $2c_8^2$ ، $3c_8^3$ ، ... ، $8c_8^8$.

ج) ۱ ، ۱- ، ۱ ، ۱ ، ۱- ، ۱ ، ۱ ، ۱- ، ۰ ، ...

د) ۰ ، ۰ ، ۰ ، ۰ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۰ ، ...

ر) ۱ ، ۰ ، ۰ ، ۱ ، ۰ ، ۰ ، ۱ ، ۰ ، ۰ ، ...

ز) ۰ ، ۰ ، ۰ ، ۰ ، ۶ ، ۶- ، ۶ ، ۶- ، ...

س) ۰ ، ۰ ، ۱ ، a ، a^2 ، a^3 ، ... ، $a \neq 0$

ش) ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ...

پاسخ :

الف) داریم :

$$(1+x)^8 = c_8^0 + c_8^1 x + \dots + c_8^8 x^8$$

بنابراین $(1+x)^8$ تابع مولد رشته داده شده است.

ب) اگر از رابطه (الف)مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$8(1+x)^7 = c_8^1 + 2c_8^2 x + \dots + 8c_8^8 x^7$$

بنابراین $8(1+x)^7$ تابع مولد رشته c_8^1 و $2c_8^2$, ..., $8c_8^8$ می‌باشد.

ج) داریم :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

بنابراین $\frac{1}{1+x}$ تابع مولد رشته داده شده است .

د) داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}$$

بنابراین $\frac{x^2}{1-x}$ تابع مولد رشته داده شده است .

ر) داریم :

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

پس ، $\frac{1}{1-x^2}$ تابع مولد رشته داده شده است .

ز) داریم

$$6x^3 - 6x^4 + 6x^5 - 6x^6 + \dots = -6(-x^3 + x^4 - x^5 + \dots)$$

$$= -6\sum_{n=3}^{\infty}(-x)^n$$

$$= \frac{-6(-x)^3}{1-(-x)} = \frac{6x^3}{1+x}$$

پس $\frac{6x^3}{1+x}$ تابع مولد رشته داده شده است .

س) داریم :

$$x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 + \dots = x^2 + (ax)^3 + (ax)^4 + \dots$$

$$= x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(ax)^n$$

$$= x^2 + \frac{(ax)^3}{1-ax}$$

$$= \frac{x^2(1-ax) + a^3x^3}{1-ax}$$

$$= \frac{(1+a^3)x^3 - ax^4}{1-ax}$$

درنتیجه ، تابع فوق ، تابع مولد رشته مورد بحث است .

ش) داریم :

$$1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\dots = 1+(2x)+(2x)^2+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

$$=\frac{1}{1-2x}$$

پس $\frac{1}{1-2x}$ ، تابع مولد رشته مورد بحث است .

۴۷- رشتهٔ تولید شده توسط هر کدام از توابع مولد زیر را مشخص کنید :

الف) $f(x)=(2x-3)^3$

ب) $f(x)=\frac{x^4}{1-x}$

ج) $f(x)=\frac{1}{1+3x}$

د) $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$

ر) $f(x)=\frac{1}{1-x}+3x^2-11$

ز) $f(x)=\frac{1}{1-2x}+\frac{5x}{1-x}$

پاسخ :

الف) داریم :

$$(2x-3)^3=8x^3-36x^2+54x-27=-27+54x-36x^2+8x^3+0+0+\dots$$

بنابراین $(2x-3)^3$ تابع مولد رشته ۲۷-،۵۴،۳۶-،۸،۰،۰،... است .

ب) داریم :

$$\frac{x^4}{1-x}=x^4\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+4}=x^4+x^5+x^6+\dots$$

بنابراین تابع داده شده ، تابع مولد رشته ۰،۰،۰،۰،۱،۱،۱،... است .

ج) داریم :

$$\frac{1}{1+3x}=\frac{1}{1-(-3x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n=1-3x+3^2x^2-3^3x^3+\dots$$

پس $\frac{1}{1+3x}$ تابع مولد رشته $1,-3,3^2,-3^3,\ldots$ است .

د) داریم :

$$\frac{x^3}{1-x^2}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+3}=x^3+x^5+x^7+\ldots$$

پس $\frac{x^3}{1-x^2}$ تابع مولد رشته $0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots$ است .

ر) داریم :

$$\frac{1}{1-x}+3x^7-11=3x^7-11+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=-10+x+x^2+x^3+\ldots+x^6+4x^7+x^8+x^9+\ldots$$

بنابراین تابع داده شده ، تابع مولد رشته زیر است :

$$-10,1,1,1,1,1,1,4,1,1,\ldots$$

ز) داریم :

$$\frac{1}{1-2x}+\frac{5x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n+5x\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}5x^{n+1}$$
$$=(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\ldots)+(5x+5x^2+5x^3+\ldots)$$
$$=(1+(2+5)x+(2^2+5)x+(2^3+5)x+\ldots)$$

بنابراین تابع داده شده ، مولد رشته زیر است :

$$1,2+5\ ,2^2+5\ ,2^3+5\ ,2^4+5\ ,\ldots$$

۴۸- الف) ضریب x^7 را در عبارت $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^{15}$ پیدا کنید .

ب) ضریب x^7 را در عبارت $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n$ ، $n\in Z^+$ ، پیدا کنید .

پاسخ :

الف) با توجه به مثال ۵-۳۵ ، ضریب x^7 در عبارت داده شده برابر است با :

$c^7_{15+7-1}=c^7_{21}$

ب) با توجه به مثال ۵-۳۵ ، ضریب x^7 در عبارت داده شده برابر است با :

$c^7_{n+7-1}=c^7_{n+6}$

۴۹- ضریب x^{50} را در عبارت $(x^7+x^8+x^9+\dots)^6$ پیدا کنید.

پاسخ :

داریم :

$$(x^7+x^8+\dots)^6=(x^7)^6(1+x+x^2+\dots)^6=x^{42}(1+x+\dots)^6$$

بنابراین ضریب x^{50} در عبارت داده شده برابر ضریب x^8 در عبارت زیر است :

$$(1+x+x^2+\dots)^6$$

اما ، در عبارت اخیر ضریب x^8 برابر است با :

$$c^8_{6+8-1}=c^8_{13}$$

۵۰- ضریب x^{20} را در عبارت $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5$ پیدا کنید.

پاسخ :

این ضریب با ضریب x^{10} در عبارت $(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$ برابر است.

۵۱- ضریب x^{15} را در عبارات زیر پیدا کنید.

الف) $\dfrac{x^3}{(1-2x)^{10}}$ ب) $\dfrac{x^3-2x}{(1-x)^3}$ ج) $\dfrac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$

پاسخ :

الف) داریم :

$$\frac{x^3}{(1-2x)^{10}}=x^3(1-2x)^{-10}$$

کافیست ضریب x^{12} را در عبارت $(1-2x)^{-10}$ پیدا کنیم.

$$(1-2x)^{-10}=c^1_{-10}+c^2_{-10}(-2x)^2+c^3_{-10}(-2x)^3+\dots$$

در عبارت فوق ، ضریب x^{12} برابر است با :

$$c^{12}_{-10}(-2)^{12}=2^{12}c^{12}_{21} \qquad (c^r_{-n}=(-1)^r c^r_{n+r-1})$$

ب) داریم :

$$\frac{x^3-2x}{(1-x)^3}=\frac{x^3}{(1-x)^3}-\frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$x^3(1-x)^{-3}-2x(1-x)^{-3}=x^3\left[c^0_{-3}+c^1_{-3}(-x)+\dots\right]-2x\left[c^0_{-3}+c^1_{-3}(-x)+\dots\right]$$

کافیست ضریب x^{12} در عبارت اول و ضریب x^{14} در عبارت دوم را پیدا کرده با هم جمع کنیم تا ضریب x^{15} در عبارت اصلی بدست آید.

ضریب x^{13} در عبارت اول برابر است با :

$$c_{-2}^{13}(-1)^{13} = c_{-2}^{13} = c_{14}^{13}$$

و ضریب x^{14} در عبارت دوم برابر است با :

$$-2(c_{-2}^{14}(-1)^{14}) = -2(c_{-2}^{14}) = -2c_{15}^{14}$$

بنابراین ، ضریب x^{15} در عبارت اصلی برابر است با :

$$c_{14}^{13} - 2c_{15}^{14}$$

ج) داریم :

$$\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = (1+x)^4(1-x)^{-4} = (c_4^0 + c_4^1 x + \dots + c_4^4 x^4)(c_{-4}^0 + c_{-4}^1(-x) + \dots)$$

لذا ، ضریب x^{15} برابر است با :

$$c_4^0 c_{-4}^{15}(-1)^{15} + c_4^1 c_{-4}^{14}(-1)^{14} + c_4^2 c_{-4}^{13}(-1)^{13} + c_4^3 c_{-4}^{12}(-1)^{12} + c_4^4 c_{-4}^{11}(-1)^{11}$$
$$= c_4^0 c_{18}^{15} + c_4^1 c_{17}^{14} + c_4^2 c_{16}^{13} + c_4^3 c_{15}^{12} + c_4^4 c_{14}^{11}$$

۵۲- طاسی را ۱۲ بار می‌اندازیم . احتمال اینکه مجموع اعداد نشان داده شده ، مساوی ۳۰ بشود ، چقدر است ؟

پاسخ :

فرض کنیم x_i عدد رو شده در مرحله i-ام باشد $(1 \le i \le 12)$. در این صورت تعداد دفعاتی که مجموع ۱۲ عدد رو شده برابر ۳۰ باشد برابر است با تعداد جوابهای معادله زیر

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 30 \qquad 1 \le x_i \le 6 \qquad 1 \le i \le 12$$

بنابراین ، ضریب x^{30} را در رابطه زیر پیدا می‌کنیم :

$$(x + x^2 + \dots + x^6)^{12} = x^{12}(1 + x + \dots + x^5)^{12}$$

پس ضریب x^{18} را در رابطه زیر پیدا می‌کنیم :

$$(1 + x + \dots + x^5)^{12} = \frac{(1-x^6)^{12}}{(1-x)^{12}}$$

از طرفی داریم :

$$(1-x^6)^{12}(1-x^5)^{-12} = \left[c_{12}^0 + c_{12}^1(-x^6) + \dots + c_{12}^{12}(-x^6)^{12}\right]\left[c_{-12}^0 + c_{-12}^1(-x) + \dots\right]$$

بنابراین ضریب x^{18} برابر است با :

$$c_{12}^0 c_{-12}^{18}(-1)^{18} - c_{12}^1 c_{-12}^{12}(-1)^{12} + c_{12}^2 c_{-12}^{6}(-1)^{6} - c_{12}^3 c_{-12}^0 = 19188950$$

حال ، احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده برابر ۳۰ باشد برابر است با :

$$\frac{\text{تعداد دفعاتی که مجموع اعداد روشده ۳۰ است}}{\text{تعداد کل دفعات}} = \frac{۱۹۱۸۸۹۵۰}{۶^{۱۲}} \cong ۰/۰۰۸۸$$

۵۳- روابط بازگشتی زیر را با استفاده از توابع مولد حل کنید :

الف) $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = ۳^n \ , \ n \geq ۱ \\ a_۰ = ۱ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = n^۲ \ , \ n \geq ۰ \\ a_۰ = ۱ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} a_{n+۲} - ۲a_{n+1} + a_n = ۳^n \ , \ n \geq ۰ \\ a_۰ = ۱ \ , \ a_۱ = ۲ \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_{n+۲} - ۲a_{n+1} + a_n = n \ , \ n \geq ۰ \\ a_۰ = ۱ \ , \ a_۱ = ۲ \end{cases}$

پاسخ :

الف) فرض کنیم $A(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ در این صورت :

$$\begin{aligned} A(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n &= a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^n \\ &= ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_{n-1} + ۳^{n-1}) x^n \\ &= ۱ + x\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x\sum_{n=۱}^{\infty} (۳x)^{n-1} \\ &= ۱ + x\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=۰}^{\infty} (۳x)^n \\ &= ۱ + xA(x) + \frac{x}{۱-۳x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(x) - xA(x) = \frac{۱-۲x}{۱-۳x}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{۱-۲x}{(۱-x)(۱-۳x)} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-x} + \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-۳x}$$

بنابراین :

$$A(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n\right)x^n$$

درنتیجه

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n \qquad n\geq 0$$

ب)

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+(n-1)^2)x^n$$
$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2x^{n-1}$$
$$=1+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$$
$$=1+xA(x)+\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

که در اینجا ، جواب سری دوم با استفاده از مثال ۵-۲۹ قسمت (د) بدست آمده است.

بنابراین:

$$(1-x)A(x)=1+\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$
$$\Rightarrow A(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x(x+1)}{(1-x)^4}$$

ج) داریم :

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$$
$$=1+2x+\sum_{n=2}^{\infty}(3^{n-2}+2a_{n-1}-a_{n-2})x^n$$

$$= 1 + 2x + x^2\sum_{n=2}^{\infty}(3x)^{n-2} + 2x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}$$

$$= 1 + 2x + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^{n} + 2x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n} - a_0\right] - x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

$$= 1 + 2x + \frac{x^2}{1-3x} + 2x\left[A(x) - 1\right] - x^2A(x)$$

$$\Rightarrow A(x) - 2xA(x) + x^2A(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{1-3x}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)}{(x-1)^2(1-3x)}$$

د) داریم :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$$

$$= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-2) + 2a_{n-1} - a_{n-2}\right]x^n$$

$$= 1 + 2x + x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)x^{n-2} + 2x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}$$

$$= 1 + 2x + x^2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n + 2x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n - a_0\right] - x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$= 1 + 2x + x^2\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) + 2x\left[A(x) - 1\right] - x^2A(x)$$

$$\Rightarrow A(x) - 2xA(x) + x^2A(x) = 1 + \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x^3}{(1-x)^4}$$

۵۴- فرض کنید که برای n شیء متمایز، $a(n,r)$ تعداد حالت‌هایی باشد که از میان آن‌ها r شیء را بتوان بدون تکرار انتخاب کرد. بنابراین، زمانی که $r > n$ ، $a(n,r) = 0$. از رابطهٔ بازگشتی $a(n,r) = a(n-1,r-1) + a(n-1,r)$ ، $n \geq 1$ ، $r \geq 1$ ، استفاده کرده و نشان دهید که $f(x) = (1+x)^n$ ، تابع مولد $a(n,r)$ است $r \geq 0$.

پاسخ :

برای اثبات مساله ، ضریب x^r را در $(1+x)^n$ محاسبه می‌کنیم . فرض کنیم ضریب x^r را در $(1+x)^{n-1}$ می‌دانیم و این ضریب $a(n-1,r)$ باشد. برای محاسبه توان r-ام x در $(1+x)^n$ دو راه پیش رو داریم :

۱) توان r-ام x را از $(1+x)^{n-1}$ و عدد ۱ را از $(1+x)$ برداریم . که این راه ضریب $a(n-1,r)$ را به دست می‌دهد .

۲) توان $(r-1)$-ام x را از $(1+x)^{n-1}$ و x را از $(1+x)$ برداریم . که این راه $a(n-1,r-1)$ را به دست می‌دهد .

چون راه‌های بالا مجزا از هم هستند پس ضریب x^r در $(1+x)^n$ برابر خواهد بود با :

$a(n,r)=a(n-1,r-1)+a(n-1,r)$

برای $r>n$ نیز روشن است ضریب x^r در $(1+x)^n$ برابر صفر است . بنابراین $(1+x)^n$ ، تابع مولد $a(n,r)$ است .

۵۶- اگر $A=A^1=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ، مطلوب است :

الف) A^n

ب) A^{100}

پاسخ :

الف) فرض کنیم

$$A^n=\begin{bmatrix}a_{11}^n & a_{12}^n\\ 0 & a_{22}^n\end{bmatrix}$$

در این صورت :

$$A^n=\begin{bmatrix}a_{11}^{n-1} & a_{12}^{n-1}\\ 0 & a_{22}^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a_{11}^{n-1} & -a_{11}^{n-1}+2a_{12}^{n-1}\\ 0 & 2a_{22}^{n-1}\end{bmatrix}$$

بنابراین :

$$\begin{cases}a_{11}^n=3a_{11}^{n-1}\\ a_{22}^n=2a_{22}^{n-1}\\ a_{12}^n=-a_{11}^{n-1}+2a_{12}^{n-1}\end{cases}$$

از دو رابطه اول بدست می‌آوریم :

$a_{11}^n=3^n \quad , \quad a_{22}^n=2^n$

و رابطه سوم به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} a_{12}^{n} = -3^{n-1} + 2a_{12}^{n-1} & n \geq 2 \\ a_{12}^{1} = -1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن جواب عمومی این رابطه ، ابتدا توجه می‌کنیم که ریشه معادله مشخصه $r-2=0$ برابر ۲ است . بنابراین جواب قسمت همگن برابر است با :

$$a_{12}^{n} = c_1(2)^n$$

و جواب ویژه نیز به صورت

$$b_{12}^{n} = A3^{n-1}$$

می‌باشد . با جاگذاری در رابطه بازگشتی خواهیم داشت :

$$A3^{n-1} = -3^{n-1} + 2(A3^{n-2})$$

$$\Rightarrow 3A = -3 + 2A \Rightarrow A = -3$$

بنابراین جواب عمومی به صورت

$$a_{12}^{n} = c_1(2)^n - 3^n$$

می‌باشد که با جاگذاری در شرایط مرزی مقدار ثابت c_1 را نیز به دست می‌آوریم :

$$a_{12}^{1} = 2c_1 - 1 = -1 \Rightarrow c_1 = 1$$

پس

$$a_{12}^{n} = 2^n - 3^n$$

بنابراین

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

ب) با توجه به الف داریم :

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 3^{100} & 2^{100} - 3^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

۵۷- روابط بازگشتی زیر را حل کنید :

الف)
$$\begin{cases} a_n - 9a_{n-1} + 26a_{n-2} - 24a_{n-3} = 5^n \ , \ n \geq 3 \\ a_0 = 1 \ , \ a_1 = 18 \ , \ a_2 = 45 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0 \ , \ n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

ج) $\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} - 12a_{n-2} = 0 \,,\ n \geq 2 \\ a_0 = 4 \,,\ a_1 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_n + 5a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0 \,,\ n \geq 2 \\ a_0 = 0 \,,\ a_1 = 2\sqrt{5} \end{cases}$

ه) $\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \,,\ n \geq 2 \\ a_0 = \dfrac{5}{2} \,,\ a_1 = 8 \end{cases}$

و) $\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n \,,\ n \geq 0 \\ a_0 = 1 \,,\ a_1 = 2 \end{cases}$

ز) $\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n \,,\ n \geq 0 \\ a_0 = 1 \,,\ a_1 = 2 \end{cases}$

پاسخ :

الف) ریشه‌های معادله مشخصه $r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$ عبارتند از :

$r_1 = 2 \,,\ r_2 = 3 \,,\ r_3 = 4$

بنابراین جواب همگن به صورت زیر است :

$$a_n^{(h)} = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n + c_3 \times 4^n$$

جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = A5^n$ است . با جاگذاری در رابطه بازگشتی بدست می‌آوریم :

$$A5^n - 9A5^{n-1} + 26A5^{n-2} - 24A5^{n-3} = 5^n$$

$$\Rightarrow 6A = 5^3 \Rightarrow A = \frac{5^3}{6}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n + c_3 \times 4^n + \frac{1}{6}5^{n+3}$$

با جاگذاری در شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{5^3}{6} = 1 \\ a_1 = 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + \frac{5^4}{6} = 18 \\ a_2 = 4c_1 + 9c_2 + 16c_3 + \frac{5^5}{6} = 45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{166}{3} \quad , \quad c_2 = \frac{235}{2} \quad , \quad c_3 = -82$$

بنابراین ، جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = (-\frac{166}{3}) \times 2^n + (\frac{235}{2}) \times 3^n - 82 \times 4^n + \frac{1}{6} 5^{n+3} \qquad n \geq 0$$

ب) ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 3r - 4 = 0$ برابر است با $r_1 = 4$, $r_2 = -1$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = c_1(4)^n + c_2(-1)^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی داریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = 4c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{5} \quad , \quad c_2 = \frac{3}{5}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر درمی‌آید :

$$c_n = \frac{2}{5} \times 4^n + \frac{3}{5}(-1)^n$$

ج) ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 4r - 12 = 0$ عبارتند از $r_1 = 6$, $r_2 = -2$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = c_1 \times 6^n + c_2 \times (-2)^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی به دست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 4 \\ a_1 = 6c_1 - 2c_2 = \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{3} \quad , \quad c_2 = \frac{7}{3}$$

لذا ، جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = \frac{5}{3} \times 4^n + \frac{7}{3}(-2)^n$$

د) ریشه‌های معادله مشخصه $r^{۲}+۵r+۵=۰$ عبارتند از

$$r_{۲}=\frac{-۵-\sqrt{۵}}{۲}\quad,\ r_{۱}=\frac{-۵+\sqrt{۵}}{۲}$$

لذا

$$a_n=c_{۱}\left(\frac{-۵-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n+c_{۲}\left(\frac{-۵+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases}a_{۰}=c_{۱}+c_{۲}=۰\\ a_{۱}=c_{۱}\dfrac{-۵-\sqrt{۵}}{۲}+c_{۲}\dfrac{-۵+\sqrt{۵}}{۲}=۲\sqrt{۵}\end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{۱}=-۲\ \ ,\ c_{۲}=۲$$

$$\Rightarrow a_n=-۲\left(\frac{-۵-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n+۲\left(\frac{-۵+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

ه) ریشه معادله مشخصه $r^{۲}-۴r+۴=۰$ برابر $r=۲$ است . لذا

$$a_n=(c_{۱}+nc_{۲})۲^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی $c_{۲},c_{۱}$ را بدست می‌آوریم .

$$\begin{cases}a_{۰}=c_{۱}=\dfrac{۵}{۲}\\ a_{۱}=۲c_{۱}+۲c_{۲}=۸\end{cases}\qquad\Rightarrow c_{۱}=\frac{۵}{۲}\ \ ,\quad c_{۲}=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n=\left(\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۲}n\right)\times ۲^n$$