حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

گردآورنده:

www.fanavari-it.ir

فصل چهارم

تمرینات فصل ۴

۱- در قسمت‌های زیر تعیین کنید که آیا رابطه R یک رابطه با ترتیب جزئی در A می‌باشد و یا خیر؟

الف) $A = Z$, $a = ۲b \Leftrightarrow aRb$

ب) $A = Z$, $b^۲ | a \Leftrightarrow aRb$

ج) $A = Z$, $a = b^k \Leftrightarrow aRb$ برای یک $k \in Z^+$

پاسخ :

الف) در R رابطه بازتابی برقرار نیست . بنابراین R یک ترتیب جزئی نمی‌باشد.

ب)رابطه بازتابی در R برقرار نمی‌باشد(مثلاً $۲ \backslash ۲^۲$)پس R یک ترتیب جزئی نمی‌باشد.

ج) ثابت می‌کنیم R یک ترتیب جزئی است .

۱) بازتابی : اگر $a \in A$ آنگاه با فرض $k = ۱$ داریم $a = a$. پس $a R a$

۲) ضدتقارن : فرض کنیم $a,b \in A$, aRb , bRa در این صورت $k',k \in Z^+$ وجود دارد به طوری که

$$a = b^k \ , \ b = a^{k'}$$
$$\Rightarrow a = (a^{k'})^k = a^{kk'}$$
$$\Rightarrow kk' = ۱$$

از اینکه $k', k \in Z^+$ نتیجه می‌شود که $k = k' = ۱$. پس $a = b$.

۳) تعدی : فرض کنیم $a,b,c \in A$, aRb , bRc . در این صورت $k',k \in Z^+$ وجود دارند به گونه‌ای که

$$a = b^k \ , \ b = c^{k'} \Rightarrow a = (c^{k'})^k = c^{k'k} \Rightarrow aRc$$

درنتیجه R یک رابطه ترتیب جزئی روی A است.

www.fanavari-it.ir

۲- آیا رابطه تعریف شده در زیر یک ترتیب کامل است؟

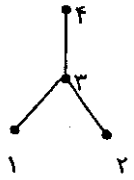
$A = R \times R$ و $(a,b)R(a',b') \Leftrightarrow a \le a'$ و $b \le b'$ که در آن $\le$ رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی است.

پاسخ :

روشن است $(۱,۲) \in A$ ، $(۲,۱)$ ، درحالیکه این دو عنصر قابل مقایسه نمی‌باشند.

پس ، رابطه تعریف شده کامل نمی‌باشد.

۳- رابطه R تعریف شده به وسیله نمودار هاس زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.



پاسخ :

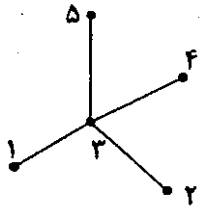
داریم :

$$R = \{(۱,۳),(۲,۳),(۳,۴),(۱,۴),(۲,۴)\}$$

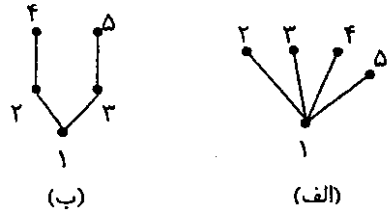
۴- نمودار هاس رابطه تعریف شده به وسیله ماتریس رابطه زیر را رسم کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

پاسخ :



۵- ماتریس رابطه تعریف شده به وسیله نمودار هاس زیر را به دست آورید:



(ب) (الف)

www.fanavari-it.ir

پاسخ :

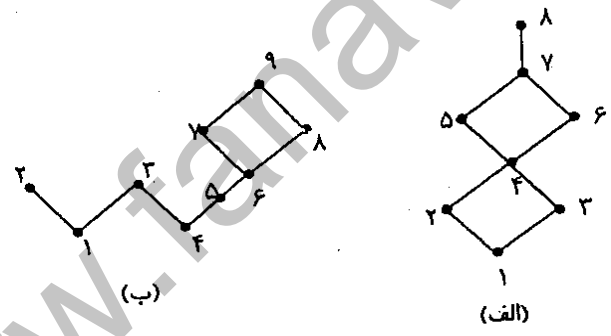
الف) در نمودار هاس همه حلقه‌ها حذف می‌شوند . بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب)در نمودار هاس هم حلقه‌ها حذف می‌شوند و خطوطی که از تعدی بودن بدست می‌آیند نیز نمایش داده نمی‌شوند بنابراین ماتریس رابطه داده شده به صورت زیر خواهد بود :

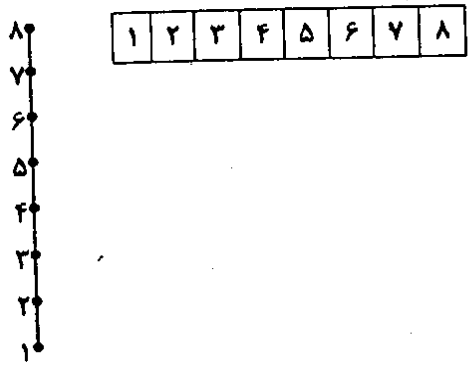
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۶- نمودار هاس ترتیب توپولوژیکی روابط زیر را به دست آورید.



پاسخ :

الف) یک ترتیب توپولوژیکی برای نمودار (الف) به صورت زیر است :

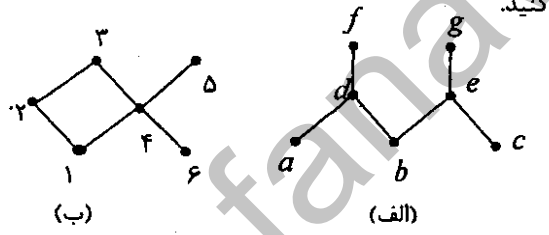


www.tamavari-it.ir

ب) یک ترتیب توپولوژیکی برای نمودار (ب) به صورت زیر است :

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

۷- برای مجموعه‌های با ترتیب جزئی تعریف شده توسط نمودارهای هاس زیر ، تمامی ماکزیمال‌ها و مینیمال‌ها را تعیین کنید.



پاسخ :

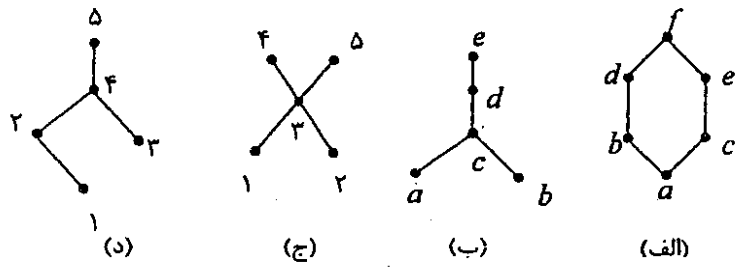
الف) عناصر ماکزیمال : g, f

عناصر مینیمال : c, b, a

ب) عناصر ماکزیمال : ۵ , ۳

عناصر مینیمال : ۱ , ۶

۸- بزرگترین عضو و کوچکترین عضو مجموعه‌های با ترتیب جزئی زیر را در صورت وجود پیدا کنید.



www.fanavari-it.ir

پاسخ :

الف) بزرگترین عضو : f

کوچکترین عضو : a

ب) بزرگترین عضو : e

کوچکترین عضو : وجود ندارد.

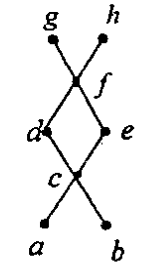
ج) بزرگترین عضو : وجود ندارد.

کوچکترین عضو : وجود ندارد .

د) بزرگترین عضو : ۵

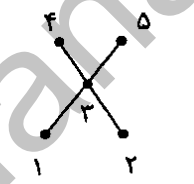
کوچکترین عضو : وجود ندارد. (توجه کنید که رابطه $۳ \leq ۱$ برقرار نیست ، لذا ۱ را نمی‌توان به عنوان کوچکترین عضو در نظر گرفت.)

۹- کرانه‌های بالا و پایین ، LUB و GLB را ، در صورت وجود ، برای مجموعه B در نمودارهای هاس زیر پیدا کنید.



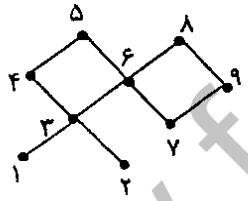
$B = \{c, d, e\}$

(الف)



$B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$

(ب)



$B = \{۳,۴,۶\}$

(ج)

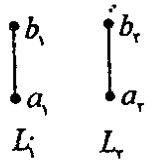
پاسخ :

الف) $LUB = f \quad , \quad GLB = C$

ب) GLB , LUB هیچکدام وجود ندارند.

ج) $LUB = ۵ \quad , \quad GLB = ۳$

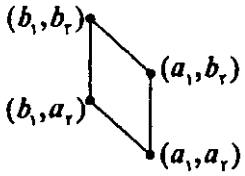
۱۰- نمودار هاس مشبکه $L_۱ \times L_۲$ را رسم کنید که در آن $L_۱$ و $L_۲$ مشبکه‌های تعریف شده توسط نمودارهای هاس زیر هستند.



$L_۱$ $L_۲$

www.fanavari-ft.ir

پاسخ :



۱۱- نمودارهای هاس تمامی مشبکه‌های غیریکریخت با یک ، دو ، سه ، چهار و پنج عنصر را رسم کنید.

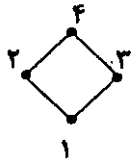
پاسخ :

مشبکه یک عنصری فقط به یک صورت زیر است :

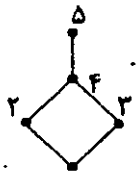
مشبکه دو عنصری فقط به یک صورت زیر است :

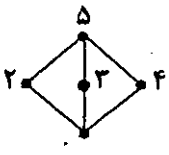
مشبکه سه عنصری نیز تنها به صورت زیر است :

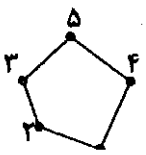
مشبکه‌های چهار عنصری زیر غیریکریخت هستند :



مشبکه‌های پنج عنصری زیر نیز غیریکریخت می‌باشند :

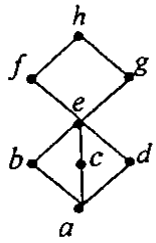




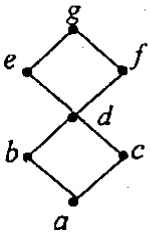


www.fanavari-it.ir

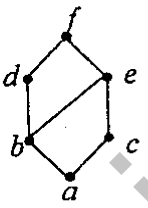
۱۲- کدام یک از مجموعه های با ترتیب جزئی زیر معرف یک جبر بول است؟



(ج)



(ب)



(الف)

$D_{۵۴}$ $D_{۱۶۵}$

(د) (هـ)

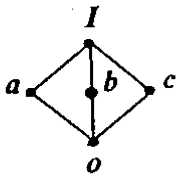
پاسخ :

می‌دانیم B_n دارای 2^n عنصر است. بنابراین مجموعه‌ای با B_n یکریخت باشد باید 2^n عنصر داشته باشد البته این یک شرط لازم است و کافی نیست بنابراین داریم :

الف) مجموعه داده شده ، دارای ۶ عنصر است بنابراین با توجه به توضیح بالا ، مجموعه مورد بحث نمی‌تواند با B_nای یکریخت باشد . بنابراین ، جبر بول نیست . به عنوان مثال ، عنصر e دارای متمم نیست .

ب) مجموعه داده شده دارای ۷ عنصر است . بنابراین جبر بول نمی‌باشد به عنوان مثال عنصر d دارای متمم نیست.

ج) مجموعه داده شده دارای $2^3 = 8$عنصر است . بنابراین ، شرط لازم برای اینکه با B_3 یکریخت باشد را دار است. اما مشاهده می‌شود که مجموعه مورد بحث دارای یک زیر مشبکه است که با مشبکه



یکریخت است. (زیر مشبکه شامل e,d,c,b,a را در نظر بگیرید) درنتیجه بنا به قضیه ۴-۱۳ مشبکه مورد بحث پخش‌ناپذیر است. پس شرط ۱۰' جبر بول برای مجموعه مورد بحث برقرار نیست لذا نمی‌تواند جبر بول باشد .

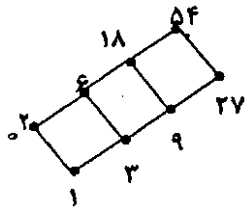
تذکر:

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge (e) = b$$
$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$$
$$\Rightarrow b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

www.fanavari-it.ir

د) داریم ۱۱×۵×۳= ۱۶۵ ، در تمرین ۲۶ از همین فصل ثابت خواهیم کرد برای چنین اعدادی D_n جبر بول است .

ه) نمودار هاس $D_{۵۴}$ به صورت زیر است :



در یک جبر بول هر عنصر باید دارای متمم منحصر بفرد باشد . در نمودار هاس $D_{۵۴}$ به عنوان مثال عنصر ۳ دارای متمم نیست . بنابراین $D_{۵۴}$ یک جبر بول نیست .

۱۳- نشان دهید که در یک جبر بول به ازای هر a,b,c ، روابط زیر برقرار است:

الف) $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b$

ب) $(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = b \wedge c$

ج) $((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' = (a' \vee b) \wedge c'$

پاسخ :

با توجه به جدول صفحه ۱۵۸ کتاب درسی داریم :

$$\begin{aligned} b \wedge (a \vee (a \wedge (b \vee b'))) &= b \wedge (a \vee (a' \wedge I)) \\ &= b \wedge (a \vee a') \\ &= b \wedge I \\ &= b \end{aligned}$$

ب)

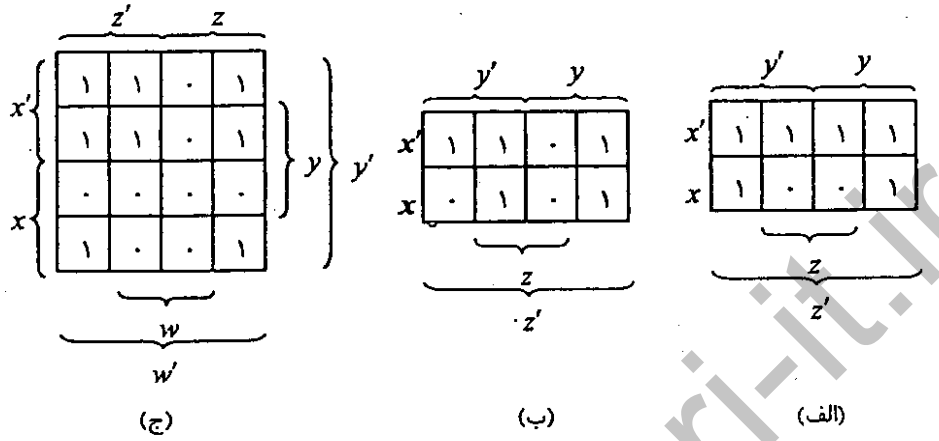
$$\begin{aligned} (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) &= (a \wedge (b \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \wedge c)) \\ &= (b \wedge c) \vee ((b \wedge c) \wedge a) \\ &= b \wedge c \qquad \text{(قانون جذبی)} \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} ((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' &= ((a \wedge b') \vee c)' = (a \wedge b')' \wedge c' \\ &= (a' \vee b) \wedge c' \end{aligned}$$

www.fanavari-it.ir

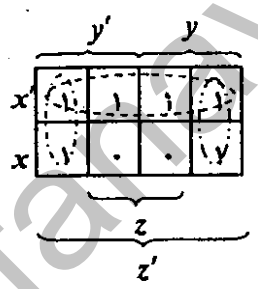
۱۴- عبارات بولی تعریف شده در زیر را ساده کرده و سپس نمودارهای منطقی آنها را رسم کنید.



(ج) (ب) (الف)

پاسخ :

الف) داریم :



عبارت بولی به صورت زیر به دست می‌آید :

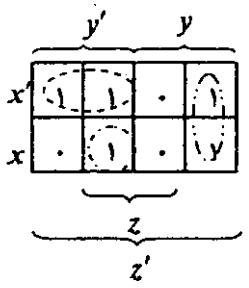
$$x' \vee (x \wedge z') = (x' \vee x) \wedge (x' \vee z')$$
$$= I \wedge (x' \vee z') = x' \vee z'$$

نمودار منطقی آن نیز به صورت زیر است :

x	y	z	$f(x,y,z)$
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰

www.farnvari-it.ir

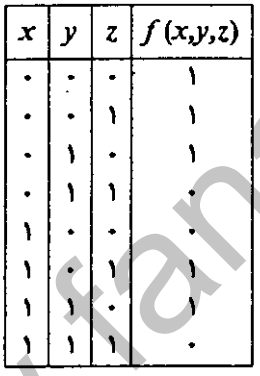
ب)



عبارت بولی به صورت زیر به دست می‌آید :

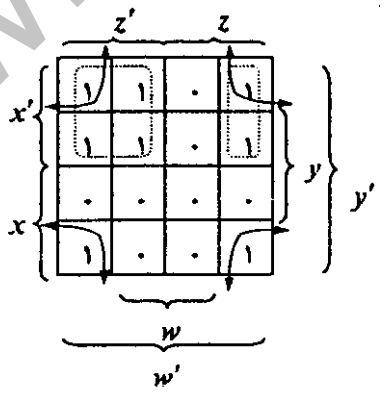
$$(x' \wedge y') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (y \wedge z')$$

نمودار منطقی نیز به صورت زیر است :



x	y	z	$f(x,y,z)$
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰

ج)



عبارت بولی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x' \wedge z') \vee (x' \wedge z \wedge w') \vee (y' \wedge w')$$

www.fanavari-it.ir

نمودار منطقی عبارت فوق نیز به صورت زیر خواهد بود :

x	y	z	w	$f(x,y,z,w)$
۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰

۱۶- نمودار هاس رابطه R را رسم کنید .

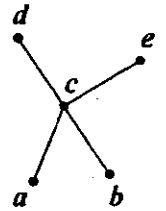
$$A=\{a,b,c,d,e\}$$
$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,d),(c,e),(a,d),(d,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(e,e)\}$$

پاسخ :

برای راحتی کار ابتدا صورت ماتریسی رابطه R را می‌نویسیم .

$$M_R=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نمودار هاس رابطهٔ داده شده به صورت زیر است .



www.fanavari-it.ir

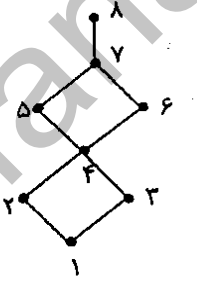
۱۷- نمودار هاس رابطه R را رسم کنید.

$$M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ :

نمودار هاس رابطه داده شده به صورت زیر است :

۱۸- نمودار هاس ترتیب توپولوژیکی مجموعهٔ با ترتیب جزئی زیر را رسم کنید.



پاسخ :

یک ترتیب توپولوژیکی برای ترتیب جزئی داده شده به صورت زیر است :

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

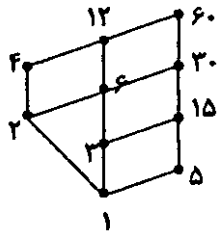
www.fanavari-it.ir

۱۹- نمودار هاس مجموعهٔ با ترتیب جزئی زیر را رسم کنید.

$$(A,R) = (\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۱۲,۱۵,۳۰,۶۰\}, |)$$

پاسخ :

نمودار هاس مجموعه مرتب داده شده به صورت زیر است :



۲۰- در مثالهای زیر:

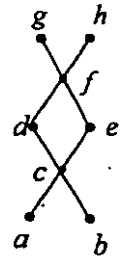
الف) تمامی کرانه‌های بالایی ب) تمامی کرانه‌های پایینی

ج) LUB د) GLB

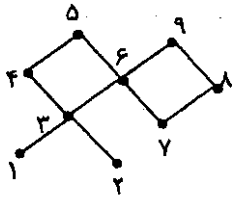
را برای مجموعهٔ B ، در صورت وجود ، پیدا کنید.

۱. $B = \{۴,۶,۱۲\}$ و $(\{۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴,۴۸\}, |)$

۲. $B = \{c,d,e\}$ و



۳. $B = \{۳,۴,۶\}$ و

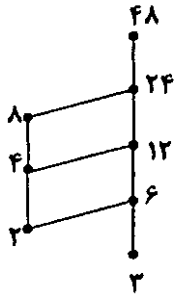


پاسخ :

۱) برای سادگی ابتدا نمودار هاس مجموعه مرتب داده شده را رسم می‌کنیم .

www.fanavari-it.ir

نمودار هاس مجموعه مرتب داده شده به صورت زیر است :



بنابراین برای مجموعه $B=\{۴, ۶, ۱۲\}$ داریم :

الف) کرانه‌های بالایی : $\{۴۸ , ۲۴\}$ ب) کرانه‌های پایینی : $\{۲\}$

ج) LUB : ۲۴ د) GLB : ۲

۲) داریم :

الف) کرانه‌های بالایی : $\{f , g , h\}$ ب) کرانه‌های پایینی : $\{a , b , c\}$

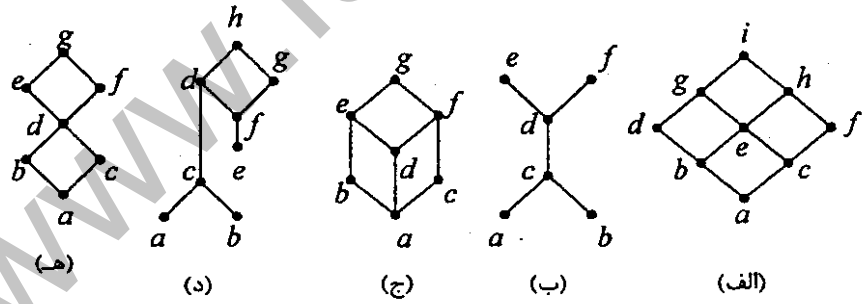
ج) LUB : f د) GLB : c

۳)

الف) کرانه بالایی : $\{۵\}$ ب) کرانه‌پایینی : $\{۳ , ۲ , ۱\}$

ج) LUB : ۵ د) GLB : ۳

۲۱- کدام یک از نمودارهای هاس زیر معرف یک مشبکه است؟



پاسخ :

الف) مشبکه است .

ب) مشبکه نیست . زیرا مثلاً $e \vee f$ وجود ندارد .

ج) مشبکه است .

د)مشبکه نیست . زیرا مثلاً $a \wedge b$ وجود ندارد .

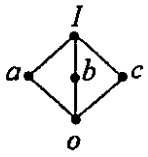
www.fanavari-it.ir

هـ) مشبکه است .

۲۲- یک مشبکه « مدور» گفته می‌شود هرگاه برای تمامی a,b و c ها ، $a \le c$ منجر به $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ شود.

الف) نشان دهید که یک مشبکهٔ پخش‌پذیر ، مدور است.

ب) نشان دهید که مشبکهٔ زیر که پخش‌ناپذیر است ، مدور است.



پاسخ :

الف) فرض کنیم L یک مشبکه پخش‌پذیر باشد و $a,b,c \in L$.

اگر $a \le c$ آنگاه $a \vee c = c$, $a \wedge c = a$. بنابراین با توجه به پخش‌پذیری L و روابط اخیر خواهیم داشت :

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

بنابراین L مدور است .

ب) کافیست برای مشبکه داده شده ، تمام حالتها را بررسی کنیم . برای تمامی عناصر x,y,z که به مشبکه داده شده متعلق باشند رابطه $x \le z$ به سه حالت تقسیم می‌شود :

حالت اول : $x = o$, $z = I$, $y = a$ یا b یا c

$$(x \vee y) \wedge z = (o \vee y) \wedge I = y \wedge I = y$$
$$x \vee (y \wedge z) = o \vee (y \wedge I) = o \vee y = y$$

پس در این حالت

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

حالت دوم : $x = o$ ، $y = I$, $z = a$ یا b یا c

$$(x \vee y) \wedge z = (o \vee I) \wedge z = I \wedge z = z$$
$$x \vee (y \wedge z) = o \vee (I \wedge z) = o \vee z = z$$

در این حالت نیز

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

حالت سوم : $y = o$, $z = I$, $x = a$ یا b یا c

$$(x \vee y) \wedge z = (x \vee o) \wedge I = x \wedge I = x$$
$$x \vee (y \wedge z) = x \vee (o \wedge I) = x \vee o = x$$

www.fanavari-it.ir

پس در این حالت نیز

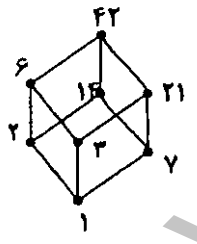
$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

بنابراین مشبکه داده شده مدور است .

۲۳- مکمل هر یک از عناصر $D_{۴۲}$ را به دست آورید.

پاسخ :

عناصر $D_{۴۲}$ به صورت زیر هستند:



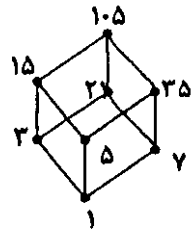
مکمل هر یک از عناصر $D_{۴۲}$ به صورت زیر هستند :

$$\begin{cases}(۱)' = ۴۲ \\ (۴۲)' = ۱\end{cases} , \quad \begin{cases}(۲)' = ۲۱ \\ (۲۱)' = ۲\end{cases} , \quad \begin{cases}(۳)' = ۱۴ \\ (۱۴)' = ۳\end{cases} , \quad \begin{cases}(۶)' = ۷ \\ (۷)' = ۶\end{cases}$$

۲۴- مکمل هر یک از عناصر $D_{۱۰۵}$ را به دست آورید.

پاسخ :

عناصر $D_{۱۰۵}$ به صورت زیر هستند :

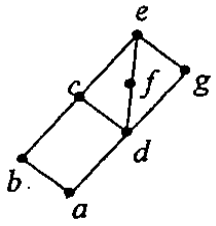


مکمل هر یک از عناصر $D_{۱۰۵}$ نیز در زیر آمده است :

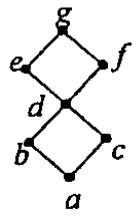
$$\begin{cases}(۱)' = ۱۰۵ \\ (۱۰۵)' = ۱\end{cases} , \quad \begin{cases}(۳)' = ۳۵ \\ (۳۵)' = ۳\end{cases} , \quad \begin{cases}(۵)' = ۲۱ \\ (۲۱)' = ۵\end{cases} , \quad \begin{cases}(۷)' = ۱۵ \\ (۱۵)' = ۷\end{cases}$$

www.fanavari-it.ir

۲۵- در هر کدام از مشبکه‌های زیر ، نشان دهید که کدام یک بخش‌پذیر و کدام یک متمم دار هستند.



(الف)



(ب)

پاسخ :

با توجه به قضیه ۴-۱۳ مشبکه (الف) پخش‌ناپذیر و (زیر مشبکه $\{c,d,e,f,g\}$ را در نظر بگیرید)مشبکه (ب) پخش‌پذیر است .

همچنین در (الف) داریم : $O=a$, $I=e$ ، روشن است عنصر c دارای متمم نمی‌باشد .

در مشبکه (ب) داریم : $O=a$, $I=g$ ، روشن است عنصر e دارای متمم نیست .

بنابراین هیچکدام از مشبکه‌های داده شده متمم دار نیستند .

۲۶- نشان دهید که اگر $n = p_1 p_2 \dots p_k$ باشد که در آن p_i ها اعداد اول و متمایز از هم هستند ، آنگاه D_n یک جبر بول است.

پاسخ :

بازای هر $1 \le i \le j \le k$ روشن است $p_i\, p_{i+1} \dots p_j = d$ یک مقسوم‌علیه n است.

همچنین روشن است تمام مقسوم‌علیه‌های n بجز ۱ به صورت فوق هستند .

تابع $f : D_n \to B_k$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

$$f(1) = \underbrace{00\dots0}_{k\text{ مرتبه}}$$

$$f(d) = b_1 b_2 \dots b_k$$

که در آن

$$b_i = \begin{cases} 1 & p_i \mid d \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad i = 1,2,\dots,k$$

www.tanavari-it.ir

به عنوان مثال :

$$f(p_1) = \underbrace{10\ldots0}_{k-1 \text{ مرتبه}} \quad , \quad f(p_2p_3) = 011\underbrace{0\ldots0}_{k-2 \text{ مرتبه}}$$

$$f(p_1p_2\ldots p_k) = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ مرتبه}}$$

با تعریف فوق روشن است f یکریختی است . بنابراین D_n یک جبر بول است .

۲۷- نشان دهید که اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد که $p^2|n$ ، آنگاه D_n یک جبر بول نیست (p یک عدد اول است).

پاسخ :

فرض کنیم $n = p_1^2 p_2 \ldots p_k$ که در آن p_i ها اعداد اول متمایز هستند .

به استقرا ثابت می‌کنیم $2^k < |D_n| < 2^{k+1}$

۱. مبنای استقرا : اگر $n = p_1^2$ آنگاه مقسوم علیه‌های n عبارتند از

$1, p_1, p_1^2$

پس در این حالت $2^1 < |D_n| < 2^2$

۲. فرض استقرا : فرض کنید که برای k دلخواه به طوریکه $n = p_1^2 p_2 \ldots p_k$ و p_i ها اعداد اول متمایز باشند داشته باشیم :

$$2^k < |D_n| < 2^{k+1}$$

۳. مرحله استقرا . فرض کنید $n = p_1^2 p_2 \ldots p_k p_{k+1}$ ، عدد $m = p_1^2 p_2 \ldots p_k$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $d_1, d_2, \ldots, d_r$ مقسوم‌علیه‌های m باشند . در این صورت مقسوم‌علیه‌های n به صورت زیر خواهد بود :

$$d_1, d_2, \ldots, d_r \ , \ d_1p_{k+1} \ , \ d_2p_{k+1} \ , \ \ldots, d_rp_{k+1}$$

پس $|D_n| = 2|D_m|$ اما ، بنا به فرض استقرا داریم :

$$2^k < |D_m| < 2^{k+1}$$

پس $2^k < |D_n| < 2^{k+2}$

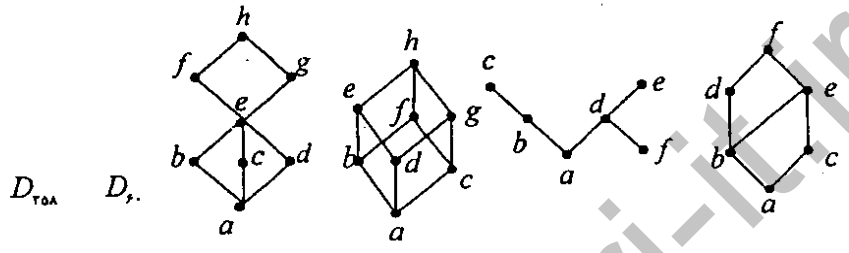
بنابراین تعداد عناصر D_n به صورت توانی از ۲ نمی‌باشد . اما می‌دانیم به ازای هر n ، $|B_n| = 2^n$ ، و اگر مجموعه‌ای با B_n یکریخت باشد باید تعداد عناصر آن مجموعه نیز به صورت 2^n باشد. از اینکه عناصر D_n به صورت توان ۲ نمی‌باشد ، پس D_n نمی‌تواند با هیچکدام از B_nها یکریخت باشد درنتیجه D_n جبر بول نیست .

در حالت کلی اگر $p^2|n$ ، آنگاه مانند روش بالا می‌توان ثابت کرد که D_n جبر بول نیست .

www.fanavari-it.ir

تذکر : اگر تعداد عناصر مجموعه‌ای مانند A ، به صورت $|A| = ۲^n$ باشد نمی‌توان نتیجه گرفت A جبر بول است . اما اگر $|A| \neq ۲^n$ آنگاه می‌توان حکم کرد که A جبر بول نیست.

۲۸- کدام یک از نمودارهای هاس زیر معرف یک جبر بول است؟



(الف) (ب) (ج) (د) (هـ) (و)

$D_{۲۵۸}$ $D_{۶۰}$

پاسخ :

(الف) نمـودار داده شده با نمودار $D_{۳۰}$ که در صفحـه۱۴۴ کتاب درسی آمده است یکریخت می‌باشد . اما $۲^۴ | ۲۰$ ، لذا با توجه به تمرین ۲۷ نمودار هاس (الف) جبر بول نمی‌باشد.

ب) نمودار داده شده دارای ۶ عنصر می‌باشد ، لذا نمی‌تواند با B_n (بازای یک n) یکریخت باشد . زیرا هر B_n دارای ۲^n عنصر است .

ج) نمودار داده شده با نمودار هاس $D_{۳۰}$ که در صفحه ۱۴۴ کتاب درسی آمده است ، یکریخت می‌باشد . از طرفی $۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$ ، لذا ، با توجه به تمرین ۲۶ ، $D_{۳۰}$ با $B_۳$ یکریخت می‌باشد .

د) با توجه به قضیه ۴-۱۳ ، نمودار داده شده پخشی نیست.(زیرا مشبکه $\{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید .) بنابراین نمودار داده شده جبر بول نمی‌باشد .

هـ) داریم $۲^۲ | ۶۰$ ، لذا ، با توجه به تمرین ۲۷ ، $D_{۶۰}$ جبر بول نمی‌باشد .

و) داریم $۲ \times ۱۷۹ = ۳۵۸$ ، بنابراین با توجه به تمرین ۲۶ ، $D_{۲۵۸}$ جبر بول است.

۲۹- نشان دهید که در یک جبر بول برای هر a ، b و c داریم :

الف) $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b$

ب) $((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' = (a' \vee b) \wedge c'$

www.fanavari-it.ir

پاسخ :

با توجه به خواص جبر بول داریم :

الف)

$$\begin{aligned} b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) &= b \wedge (a \vee (a' \wedge I)) \\ &= b \wedge (a \vee a') \\ &= b \wedge I \\ &= b \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} ((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' &= (a \wedge b') \vee c)' \\ &= (a \wedge b')' \wedge c' \\ &= (a' \vee b) \wedge c' \end{aligned}$$

۳۰- الف) جدول درستی عبارت بولی $p(x, y, z) = (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$ را تشکیل دهید.

ب) نمودار منطقی عبارت مزبور را رسم کنید.

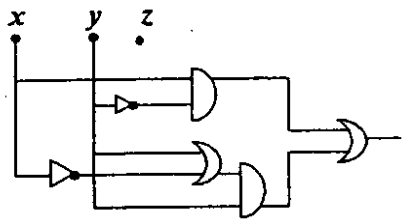
پاسخ :

الف)

x	y	z	$(x$	$\wedge$	$y')$	$\vee$	$(y$	$\wedge$	$(x'$	$\vee$	$y))$
۰	۰	۰	۰	۰	۱		۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۱		۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰		۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰		۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱		۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۱		۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰		۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰		۱	۱	۰	۱	۱
				۱		۴		۳		۲	

www.fanavari-it.ir

ب) نمودار منطقی عبارت داده شده به صورت زیر است :



۳۱- نقشه کارنو را برای هر کدام از توابع زیر رسم کرده و *dnf* هر کدام از آنها را بدست آورید.

x	y	$f(x,y,z)$
۰	۰	۱
۰	۱	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱

(الف)

x	y	z	$f(x,y,z)$
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰

(ب)

x	y	z	w	$f(x,y,z,w)$
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱

(ج)

پاسخ :

الف) نقشه کارنو عبارت بولی داده شده به صورت زیر است :

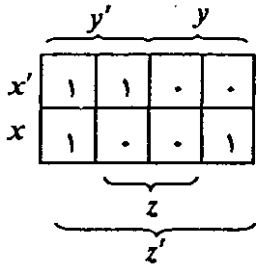
	y'	y
x'	۱	۰
x	۰	۱

dnf عبارت فوق نیز به صورت زیر است :

$$(x' \wedge y') \vee (x \wedge y)$$

www.fanavari-it.ir

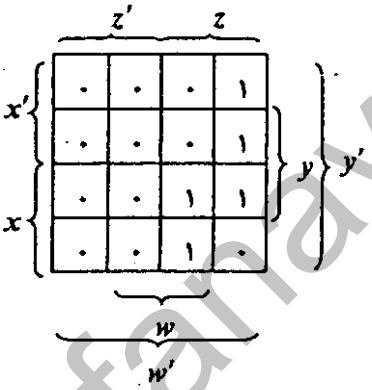
ب) نقشه کارنو تابع بولی داده شده به صورت زیر است :



dnf عبارت فوق نیز به صورت زیر است :

$$(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z')$$

ج) نقشهٔ کارنو تابع بولی داده شده به صورت زیر است :



dnf عبارت فوق نیز به صورت زیر است :

$$(x' \wedge y' \wedge z \wedge w') \vee (x' \wedge y \wedge z \wedge w') \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge w)$$
$$\vee (x \wedge y \wedge z \wedge w') \vee (x \wedge y \wedge z \wedge w)$$

۳۲- گزاره‌هایی که جدول درستی آنها در زیر ارائه شده است را به صورت *dnf* بنویسید.

p	q	r	$Q(p,q,r)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

(ب)

p	q	r	$Q(p,q,r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

www.farvari-it.ir

پاسخ :

الف) داریم :

$$S(P)=\{(T,T,T),(T,F,T),(F,T,T)\}$$

بنابراین *dnf* عبارت داده شده به صورت زیر است :

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q'\wedge r)\vee(p'\wedge q\wedge r)$$

ب) داریم :

$$S(Q)=\{(F,T,T),(F,T,F)\}$$

بنابراین *dnf* عبارت داده شده به صورت زیر است :

$$(p'\wedge q\wedge r)\vee(p'\wedge q\wedge r')$$

۳۳- مجموعه‌های نشان داده شده در نمودارهای ون زیر را به صورت اجتماعی از اشتراک مجموعه‌های A,B,C بنویسید.

(ب) (الف)

پاسخ :

الف) ناحیه هاشور زده برابر است با $B\cap C$ ، از طرفی می‌دانیم $A\cup A'=U$ ، که در آن U مجموعه مرجع است . پس :

$$\text{ناحیه هاشورزده}=B\cap C=(B\cap C)\cap(A\cup A')$$
$$=(B\cap C\cap A)\cup(B\cap C\cap A')$$

ب) داریم :

$$\text{ناحیه هاشور زده}=(A\cap B\cap C')\cup(A\cap B'\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)$$

www.fanavari-it.ir

تذکر : ناحیه‌های فوق را می‌توان با استفاده از جدول درستی نیز پیدا کرد . ناحیه هاشور زده را T و بقیه ناحیه‌ها را F در نظر می‌گیریم . برای حالت الف، داریم :

A	B	C	$P(A,B,C)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

به عنوان مثال ، حالت $A=T$, $B=T$, $C=T$ ، به منزله $A\cap B\cap C$ است . اگر $A\cap B\cap C$ هاشور زده باشد ، آنگاه $P=T$ ، در غیر اینصورت $P=F$ است . به همین ترتیب حالت $A=T$ ، $B=T$, $C=F$ به منزله $A\cap B\cap C'$ می‌باشد و الی آخر . حال داریم :

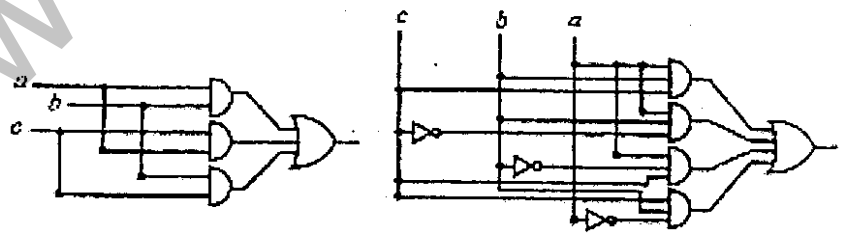
$S(P)=\{(T,T,T),(F,T,T)\}$

بنابراین ناحیه هاشور زده معادل است با :

$(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)$

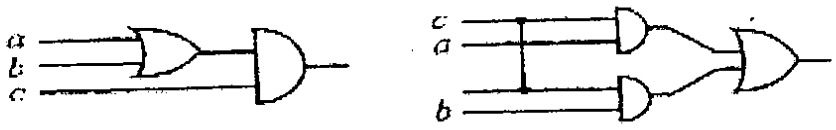
حالت (ب) نیز مانند (الف) می‌تواند به کمک جدول درستی حل شود .

۳۴- نشان دهید که مدارهای زیر معادل هستند .



(الف)

www.fanavari-it.ir



(ب)

پاسخ :

الف) مدار سمت راست نشان‌دهنده عبارت زیر است :

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c)$$

و مدار سمت چپ نشان دهنده عبارت زیر است :

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

کافیست نشان دهیم دو عبارت بالا ، معادل هستند . همواره داریم :

$$(a \wedge b) = ((a \wedge b) \wedge (c' \wedge c)) = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$(a \wedge c) = ((a \wedge c) \wedge (b' \vee b)) = (a \wedge c \wedge b') \vee (a \wedge c \wedge b)$$
$$= (a \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$(b \wedge c) = ((b \wedge c) \wedge (a' \vee a)) = (b \wedge c \wedge a') \vee (b \wedge c \wedge a)$$
$$= (a' \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

بنابراین ،

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$
$$= [(a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c)] \vee [(a \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)] \vee [(a' \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)]$$
$$= (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c)$$

بنابراین ، دو عبارت مورد بحث معادل هستند . در نتیجه مدارهای داده شده در (الف) معادل می‌باشند .

ب) مدار سمت راست نشان دهنده عبارت زیر است :

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

همچنین مدار سمت چپ نشان دهنده عبارت زیر است :

$$(a \vee b) \wedge c$$

www.farnavari-it.ir

از طرفی داریم :

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

پس ، مدارهای داده شده معادل می‌باشند .

۳۵- هر کدام از عبارات بولی زیر را ساده کنید.

الف)

$$(w \wedge x' \wedge z') \vee (w \wedge y') \vee (w' \wedge y) \vee (w' \wedge z) \vee (w' \wedge x)$$

ب)

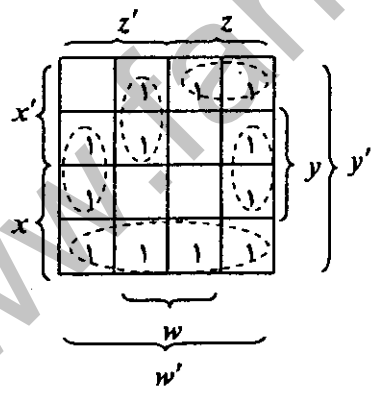
$$(x \wedge y \wedge z \wedge w) \vee (x' \wedge y \wedge z \wedge w') \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge w) \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge w) \vee (w' \wedge z')$$

ج)

$$(x \vee y)' \vee z \vee (x \wedge ((y \wedge z) \vee (y' \wedge z'))$$

پاسخ :

الف) نقشه کارنوی عبارت داده شده را رسم می‌کنیم :

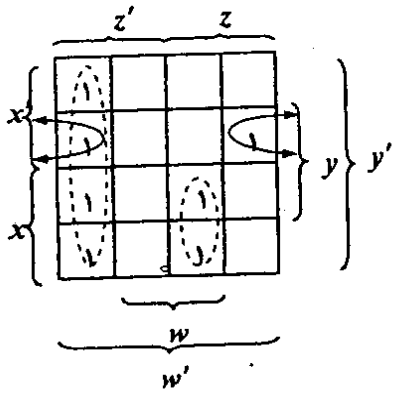


بنابراین ، عبارت داده شده به صورت زیر ساده می‌شود :

$$(x \wedge y') \vee (w' \wedge y) \vee (z \wedge y') \wedge (z' \wedge x' \wedge w)$$

www.fanavari-it.ir

ب) نقشه کارنوی عبارت داده شده به صورت زیر است :



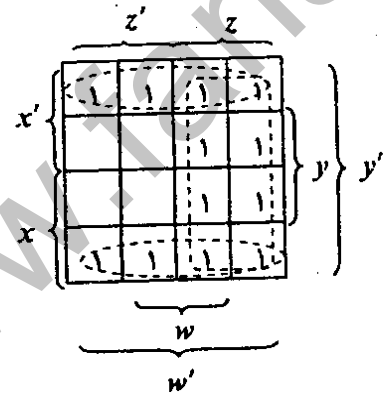
بنابراین ، عبارت داده شده به صورت زیر ساده می‌شود :

$$(w' \wedge z') \vee (x \wedge z \wedge w) \vee (x' \wedge y \wedge w')$$

ج) ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x \vee y)' \vee z \vee (x \wedge ((y \wedge z) \vee (y' \wedge z')))$$
$$= (x' \wedge y') \vee z \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z')$$

بنابراین ، نقشهٔ کارنوی عبارت داده شده به صورت زیر است :



بنابراین ، عبارت داده شده به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$z \vee y'$$

www.tanavari-it.ir