حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

گردآورنده:

www.fanavari-it.ir

فصل سوّم

تمرینات فصل ۳

۱- فرض کنید $A=B=R$ ، $f:A\to B$ و $g:B\to C$ که در آن $f(a)=a+1$ و $g(b)=b^2+1$ تعیین کنید :

الف) fof ب) gog ج) fog د) gof

پاسخ :

الف)

$$(fof)(a)=f(f(a))=f(a+1)=(a+1)+1=a+2$$

ب)

$$(gog)(b)=g(g(b)=g(b^2+1)=(b^2+1)^2+1$$

ج)

$$(fog)(b)=f(g(b))=f(b^2+1)=(b^2+1)+1=b^2+2$$

د)

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(a+1)=(a+1)^2+1$$

۲- فرض کنید که $A=B=\{x \mid x\in R\ ,\ x\neq 0,1\}$ ، توابع زیر را در نظر بگیرید:

$f_1(x)=x \qquad f_2(x)=1-x \qquad f_3(x)=1/x$

$f_4(x)=1/1-x \qquad f_5(x)=x/x-1 \qquad f_6(x)=(x-1)/x$

نشان دهید که ترکیب هر زوج از توابع مزبور ، یکی از توابع شش‌گانه فوق است.

پاسخ :

داریم :

$$(f_1of_2)(x)=f_1(f_2(x))=f_1(1-x)=1-x \quad \Rightarrow f_1of_2=f_2$$

$$(f_1of_3)(x)=f_1(f_3(x))=f_1(\frac{1}{x})=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow f_1of_3=f_3$$

به همین ترتیب

$$f_1of_4=f_4 \quad , \quad f_1of_5=f_5 \quad , \quad f_1of_6=f_6$$

$f_2 o f_1 = f_2$

$$(f_2 o f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(\frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \Rightarrow f_2 o f_3 = f_4$$

بقیه موارد بسادگی مانند روابط بالا نشان داده می‌شوند.

۳- فرض کنید که $f : A \to B$ که در آن :

الف) $S = \{1,2,3\}$ ، $T = \{a,b\}$ ، $A = B = S \times T$

$f(n,b) = (n,a)$ ، $n = 1,2,3$ و $f(n,a) = (n,b)$ ، $n = 1,2,3$

ب) $A = B = R$ و $f(a) = |a|$

برای هر قسمت تعیین کنید که آیا تابع f پوشا است؟ آیا f یک به یک است؟

پاسخ :

الف) ثابت می‌کنیم f پوشا و یک به یک است :

$$\begin{cases} (n,b) \in B \Rightarrow (n,a) \in A \ , \ f(n,a) = (n,b) \quad n = 1,2,3 \\ (n,a) \in B \Rightarrow (n,b) \in B \ , \ f(n,b) = (n,a) \quad n = 1,2,3 \end{cases}$$

پس f پوشاست.

$$\begin{cases} f(n_1,a) = f(n_2,a) \Rightarrow (n_1,b) = (n_2,b) \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow (n_1,a) = (n_2,a) \\ f(n_1,b) = f(n_2,b) \Rightarrow (n_1,a) = (n_2,a) \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow (n_1,b) = (n_2,b) \end{cases}$$

پس f یک به یک نیز می‌باشد .

ب) ثابت می‌کنیم f نه پوشا و نه یک‌به‌یک است . می‌دانیم $-2 \in R$ در حالیکه چون $f(a) = |a| \geq 0$ پس هیچ مقدار $a \in R$ نمی‌توان پیدا کرد به طوریکه $f(a) = -2$ پس f پوشا نیست . از طرفی می‌دانیم $f(1) = 1$ و $f(-1) = 1$ پس $f(-1) = f(1)$ ، در حالیکه $-1 \neq 1$. یعنی f یک‌به‌یک نیز نمی‌باشد.

۴- در هر یک از مثالهای زیر ، f یک تابع از A به B است. f^{-1} را به دست آورید.

الف) $A = B = R$ $\quad f(a) = a^3 + 1$

ب) $A = B = R$ $\quad f(a) = \frac{2a-1}{3}$

ج) $A = B = \{1,2,3,4,5\}$ و $f = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,5),(5,1)\}$

پاسخ :

الف) فرض کنیم $b = a^3 + 1$ در این صورت

$$a^3 = b - 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{b-1}$$

پس

$$f^{-1}(b) = \sqrt[3]{b-1}$$

ب) فرض کنیم $b = \dfrac{۲a-۱}{۳}$ پس

$$۲a-۱=۳b \Rightarrow ۲a=۳b+۱ \Rightarrow a=\frac{۳b+۱}{۲}$$

درنتیجه : $f^{-۱}(b)=\dfrac{۳b+۱}{۲}$

ج) داریم:

$$f^{-۱}=\{(۳,۱),(۲,۲),(۴,۳),(۵,۴),(۱,۵)\}$$

۵- نشان دهید که اگر هشت عدد صحیح مثبت انتخاب کنیم ، باقیمانده‌های تقسیم دو تا از آنها بر عدد ۷ مساوی خواهد بود.

پاسخ :

بنا بر الگوریتم تقسیم بازای هر عدد صحیح m می‌دانیم $m=۷q+r \quad ۰ \le r < ۷$
بنابراین باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۷ ، یکی از اعداد مجموعه زیر است :

$\{۰,۱,۲,\ldots,۶\}$

عناصر مجموعه فوق را لانه و تعداد ۸ عدد صحیح مثبت را کبوتر در نظر می‌گیریم بنا بر اصل تعمیم لانه کبوتر یکی از لانه‌ها حداقل باید شامل $۲=\left\lceil \frac{۸}{۷} \right\rceil$ کبوتر باشد. پس ، باقیمانده تقسیم دوتا از ۸ عدد صحیح مثبت بر عدد ۷ مساوی خواهد بود.

۶- نشان دهید که اگر هفت رنگ برای رنگ کردن ۵۰ دوچرخه به کار برده شود، در این صورت ، دست‌کم هشت دوچرخه همرنگ خواهند بود.

پاسخ :

دوچرخه‌ها را کبوتر و رنگها را لانه در نظر می‌گیریم . بنا به اصل تعمیم لانه کبوتر دست‌کم $۸=\left\lceil \frac{۵۰}{۷} \right\rceil$ دوچرخه همرنگ خواهند بود.

۷- نشان دهید که برای سه تابع دلخواه f ، h,g داریم :

$$ho(gof)=(hog)of$$

پاسخ :

برای هر $a \in Dom\,(f)$ داریم :

$$\begin{aligned}(ho(gof))(a) &= h((gof)(a)) = h(g(f(a)))\\ &= (hog)(f(a))\\ &= ((hog)of)(a)\end{aligned}$$

پس همواره داریم :

$$ho(gof) = (hog)of$$

۸- با یک مثال نشان دهید که برای دو تابع f,g در حالت کلی داریم : $fog \neq gof$

پاسخ :

فرض کنیم $f : R \to R$ ، $f(x) = x^۲$ و $g : R^+ \to R$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، در ایـن صورت :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲ = x$$
$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲) = \sqrt{x^۲} = |x|$$

روشن است $fog \neq gof$

۹- توابع f,g,h بر روی اعداد صحیح مثبت به صورت زیر تعریف شده‌اند :

$$f(n) = n + ۱ \quad , \quad g(n) = ۲n \quad , \quad h(n) = \begin{cases} ۰ & \text{برای } n \text{ های فرد} \\ ۱ & \text{برای } n \text{ های زوج} \end{cases}$$

توابع fof ، gof ، hof ، $(fog)oh$ را به دست آورید.

پاسخ :

$$(fof)(n) = f(f(n)) = f(n+۱) = (n+۱) + ۱ = n + ۲$$

$$(gof)(n) = g(f(n)) = g(n+۱) = ۲(n+۱) = ۲n + ۲$$

$$(hof)(n) = h(f(n)) = h(n+۱) = \begin{cases} ۰ & n+۱ : \text{فرد} \\ ۱ & n+۱ : \text{زوج} \end{cases} = \begin{cases} ۰ & n : \text{زوج} \\ ۱ & n : \text{فرد} \end{cases}$$

$$((fog)oh)(n) = (fog)(h(n))$$

$$= \begin{cases} (fog)(۰) & : \text{برای } n \text{ های فرد} \\ (fog)(۱) & : \text{برای } n \text{ های زوج} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(g(۰)) & : \text{برای } n \text{ های فرد} \\ f(g(۱)) & : \text{برای } n \text{ های زوج} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(0) & : \text{برای } n \text{ های فرد} \\ f(2) & : \text{برای } n \text{ های زوج} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 & : \text{برای } n \text{ های فرد} \\ 3 & : \text{برای } n \text{ های زوج} \end{cases}$$

۱۰- نشان دهید که دست‌کم یک عدد از هر m عدد صحیح متوالی بر m بخش‌پذیر است.

پاسخ :

m عدد صحیح متوالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$a+1, a+2, \ldots, a+m$

بنا به الگوریتم تقسیم می‌دانیم

$$a+m = mq + r \qquad 0 \le r < m \qquad *$$

اگر $r = 0$ آنگاه حکم واضح است . فرض کنیم $r \neq 0$ ، در این صورت $0 < r < m$ پس $0 < m - r$ ، درنتیجه روشن است $a + m - r$ یکی از m عدد صحیح متوالی است که در نظر گرفته‌ایم . بنابراین با توجه به رابطه * داریم :

$$(a+m)+(-r) = (mq+r)+(-r)$$
$$\Rightarrow a+(m-r) = mq + r - r$$
$$\Rightarrow a+(m-r) = mq$$

پس $a+(m-r)$ بر m بخش‌پذیر بوده و اثبات تمام است.

۱۱- شخصی در یک مسابقه پیاده‌روی در مدت ۱۰ ساعت ، مسافت ۴۵ کیلومتر را پیموده است. اگر وی در ساعت اول حرکت ۶ کیلومتر و در ساعت آخر حرکت ۳ کیلومتر را پیموده باشد ، نشان دهید که در این مدت یک فاصله زمانی دو ساعته وجود دارد که او دست‌کم ۹ کیلومتر راه پیموده است.

پاسخ :

با توجه به فرض مساله ، شخص در ۸ ساعت میانی مسافت ۳۶ (۳۶= ۳ - ۶ - ۴۵) کیلومتر را پیموده است . ۸ ساعت میانی را به ۴ قسمت ۲ ساعته تقسیم کرده هر یک از قسمتها را به عنوان لانه در نظر می‌گیریم . اگر هر کیلومتر مسافت طی شده را به عنوان کبوتر در نظر بگیریم بنا به اصل لانه کبوتر حداقل یک فاصله ۲ ساعته وجود دارد که در آن شخص $\left\lceil \frac{36}{4} \right\rceil = 9$ کیلومتر پیموده است.

۱۲- مساحت یک دایره به ۳۶ قطاع تقسیم شده و اعداد ۱ الی ۳۶ به طور تصادفی در قطاع‌های مختلف قرار گرفته‌اند. نشان دهید سه قطاع متوالی وجود دارد که مجموع اعداد قرار داده شده در آنها، دست‌کم، ۵۶ است.

پاسخ :

این تمرین را می‌توان مانند تمرین ۳۷ از فصل اول حل کرد.

۱۳- n عدد صحیح و دلخواه x_1، x_2، ... و x_n مفروض است. نشان دهید که i و k ای ($k \geq 0$, $i \geq 1$) وجود دارند که $x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+k}$ بر عدد n بخش‌پذیر است.

پاسخ :

بنا به الگوریتم تقسیم ، برای هر x_i داریم :

$$x_i = nq_i + r_i \qquad 0 \leq r_i < n \qquad q_i \in Z \qquad (1)$$

اگر برای j- ای داشته باشیم $r_j = 0$ ، آنگاه حکم واضح است . زیرا با فرض $k = 0$ ، x_j بر n بخشپذیر خواهد بود.

حال فرض کنیم همه r_iها ناصفر هستند . دنباله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\begin{aligned} a_1 &= r_1 \\ a_2 &= r_1 + r_2 \\ &\vdots \\ a_n &= r_1 + r_2 + \ldots + r_n \end{aligned} \qquad (2)$$

مجدداً بنا به الگوریتم تقسیم می‌دانیم

$$a_i = nP_i + R_i \qquad 0 \leq R_i < n \qquad P_i \in Z \qquad (3)$$

اگر برای یک اندیس ، مانند j، داشته باشیم $R_i = 0$ آنگاه از روابط (۱) و (۲) و (۳) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_j &= (nq_1 + r_1) + (nq_2 + r_2) + \ldots + (nq_j + r_j) \\ &= (nq_1 + nq_2 + \ldots + nq_j) + (r_1 + r_2 + \ldots + r_j) \\ &= n(q_1 + q_2 + \ldots + q_j) + a_j \\ &= n(q_1 + q_2 + \ldots + q_j) + nP_j \\ &= n(q_1 + q_2 + \ldots + q_j + P_j) \end{aligned}$$

پس $x_1 + x_2 + \ldots + x_j$ بر n بخشپذیر است .

حال اگر برای هر اندیس ، R_i مخالف صفر باشد آنگاه برای هر $1 \leq i \leq n$ خواهیم داشت : $0 < R_i < n$ ، اعداد $\{1,2,\ldots,n-1\}$ را به عنوان لانه و R_iها را کبوتر در نظر

می‌گیریم بنا به اصل لانه کبوتر، حداقل دو تا از R_i ها مساوی خواهند بود. فرض کنیم $R_i = R_j$ بدون کاستن از کلیت مساله، فرض کنیم $i < j$، در این صورت:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i = n(q_1 + q_2 + \dots + q_i) + nP_i + R_i \qquad (4)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_j = n(q_1 + q_2 + \dots + q_i + \dots + q_j) + nP_j + R_j \qquad (5)$$

با تفاضل ۴ از ۵ بدست می‌آوریم:

$$x_{i+1} + \dots + x_j = n(q_{i+1} + \dots + q_j) + n(P_j - P_i)$$
$$= n(q_{i+1} + \dots + q_j + P_j - P_i)$$

پس $x_{i+1} + \dots + x_j$ بر n بخش‌پذیر است.

۱۴- از میان اعداد ۱ الی ۲۰۰، ۱۰۱ عدد تصادفی انتخاب شده‌اند. نشان دهید که از میان اعداد انتخاب شده، دو عدد می‌توان یافت که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

پاسخ:

مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A_1 = \{1,2,4,8,16,32,64,128\}$$
$$A_2 = \{3,6,12,24,48,96,192\}$$
$$A_3 = \{5,10,20,40,80,160\}$$
$$A_4 = \{7,14,28,56,112\}$$
$$\vdots$$
$$A_{100} = \{199\}$$

تعداد مجموعه‌های فوق ۱۰۰ تا است. حال اگر ۱۰۱ عدد از بین ۲۰۰ عدد انتخاب کنیم از اینکه ۵۰ عدد فرد بزرگتر از ۱۰۰ داریم پس از میان ۱۰۱ عدد انتخاب شده حداکثر ۵۰ تا از اعداد فرد و بزرگتر از ۱۰۰ خواهند بود. که به ۵۰ مجموعه آخر متعلق می‌شوند. از ۵۱ عدد مابقی بنا به اصل لانه کبوتر، حداقل ۲ عدد به یکی از لانه‌های A_1 تا A_{50} خواهد رفت که در این صورت، آن دو عدد بر هم دیگر بخشپذیر خواهند بود.

۱۶- نشان دهید که در میان $n+1$ عدد صحیح دلخواه، دست‌کم دو عدد وجود دارد که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است.

پاسخ:

بنا به الگوریتم تقسیم می‌دانیم

$$x = nq + r \qquad 0 \le r < n \qquad (r \in \{0,1,\dots,n-1\})$$

هر عدد را یک کبوتر و باقیمانده‌ها را لانه ها در نظر می گیریم . در این صورت $n + 1$ کبوتر و n لانه داریم. لذا بنا به اصل لانه کبوتر حداقل ۲ تا از اعداد ، باقیمانده یکسان خواهند داشت فرض کنیم x و y دو عدد مورد نظر باشند. در این صورت:

$$x = nq + r \qquad , y = np + r$$

$$\Rightarrow x - y = (nq + r) - (np + r) \Rightarrow x - y = n(q - p)$$

پس $x - y$ بر n بخش‌پذیر است .

۱۷- فرض کنید $f : A \rightarrow B$ و $g : B \rightarrow C$ دو تابع باشند. نشان دهید که اگر :

الف) gof یک به یک باشد آنگاه f نیز یک به یک است.

ب) gof پوشا باشد آنگاه g نیز پوشاست.

پاسخ :

الف) فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ ، در این صورت از اینکه g یک تابع است خواهیم داشت : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ، پس $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$. اما بنا به فرض gof یک‌به‌یک است . پس $x_1 = x_2$ ، درنتیجه f نیز یک به‌یک می‌باشد .

ب) فرض کنیم $z \in C$ ، در این صورت از اینکه gof پوشاست ، $x \in A$ وجود دارد به طوری که $(gof)(x) = z$ ، لذابا فرض $y = f(x)$ ، داریم :

$y \in B$ و

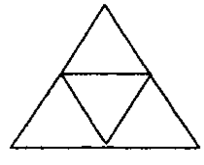
$$g(y) = g(f(x)) = z$$

پس g نیز پوشاست.

۱۸- یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع واحد مفروض است. نشان دهید که اگر ۵ نقطه به طور دلخواه روی اضلاع و یا داخل آن انتخاب شوند، دست‌کم ، فاصله دو تا از آنها نابیشتر از ۰/۵ است.

پاسخ :

مثلث متساوی الاضلاع به طول واحد را به صورت زیر بـه چهـار زیـر مثلـث تقسـیم می‌کنیم :



هر یک از زیر مثلثها متساوی الاضلاع بوده ، طول ضلعهایشان ۰/۵ واحد است.

حال اگر ۵ نقطه از داخل مثلث بزرگ انتخاب کنیم بنا به اصل لانه کبوتر، حداقل ۲ نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهد گرفت که در این صورت فاصله آن دو نقطه نابیشتر از ۰/۵ خواهد بود. (طول ضلع مثلث کوچک ۰/۵ واحد است.)

۱۹- به بیماری ۴۵ قرص داده شده است، او باید دقیقاً در مدت ۳۰ روز، هر روز با مصرف حداقل یک قرص، همه آنها را مصرف کند. نشان دهید که دوره تناوبی از روزهای متوالی می‌توان یافت که بیمار مزبور دقیقاً ۱۴ قرص مصرف کرده باشد.

پاسخ:

فرض کنید x_i، تعداد قرصهایی باشد که بیمار در روز i- ام $(1 \le i \le 30)$ خورده است. اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ را در نظر می‌گیریم. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x_{15} = x_{16} = \ldots = x_{30} = 1$ (در روزهای ۱۵ تا ۳۰، ۱۶ قرص مصرف کرده)

در این صورت اگر ۱۴ روز از روزهای ۱۵ تا ۳۰ را در نظر بگیریم، بنا به فرض بالا، بیمار در آن ۱۴ روز دقیقاً ۱۴ قرص مصرف کرده است.

حالت دوم: بیمار یکی از روزهای ۱۵ تا ۳۰، فقط دو قرص و در بقیه روزهای ۱۵ تا ۳۰ فقط یک قرص مصرف کرده باشد. (در روزهای ۱۵ تا ۳۰، ۱۷ قرص مصرف کرده است)

در این حالت نیز واضح است می‌توان دوره‌ای از روزهای ۱۵ تا ۳۰ یافت که بیمار در آن دوره دقیقاً ۱۴ قرص مصرف کرده باشد. مثلاً در روز ۲۳ دو قرص و در بقیه روزهای ۱۵ تا ۳۰، فقط یک قرص مصرف کرده باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$x_{15} + x_{16} + \ldots + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 14$$

یا به عنوان یک دوره دیگر داریم:

$$x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{30} = 14$$

حالت سوم: بیمار در روزهای ۱۵ تا ۳۰ بیش از ۱۷ قرص مصرف کرده است.

در این صورت بیمار در روزهای اول تا چهارده حداکثر ۲۷ قرص مصرف کرده است. اما به بنا به تمرین ۱۳، از میان اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ می‌توان $i \ge 1$, $k \ge 0$ را چنان یافت که $x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+k}$ بر ۱۴ بخش‌پذیر باشد.

از اینکه بیمار در چهارده روز اول حداکثر ۲۷ قرص مصرف کرده است، پس

$$0 < x_1 + x_2 + \ldots + x_{14} \le 27$$

$$\Rightarrow 0 < x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+k} \le x_1 + x_2 + \ldots + x_{14} \le 27$$

حال از اینکه $x_i + x_{i+1} + ... + x_{i+k}$ بر ۱۴ بخش‌پذیر است . از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که :

$$x_i + x_{i+1} + ... + x_{i+k} = ۱۴$$

و اثبات تمام است .

۲۰- از میان اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۹۹ چند عدد انتخاب کنیم تا دست‌کم یکی از آنها مضرب عدد ۳ باشد.

پاسخ :

از میان اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۹۹ ، ۶۰ عدد وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر نیستند.
لذا اگر ۶۱ عدد از میان اعداد ۱۰، ۱۱ ، ... ، ۹۹ انتخاب کنیم آنگاه حداقل یکی از آنها مضرب ۳ خواهد بود . زیرا مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم :

{۱۰,۱۱,۱۲} , {۱۳,۱۴,۱۵} , ... , {۹۷,۹۸,۹۹}

تعداد مجموعه‌های فوق ۳۰ تا است . اگر مجموعه‌های فوق را به عنوان لانه و ۶۱ عدد انتخابی را کبوتر در نظر بگیریم ، آنگاه بنا به اصل لانه کبوتر ، حداقل یک مجموعه وجود دارد که از آن

$$\left\lceil \frac{۶۱}{۳۰} \right\rceil = ۳$$

عضو انتخاب می‌شود . از مجموعه‌ای که سه عضو انتخاب شود با توجه به اینکه هر مجموعه فقط سه عضو دارد و در هر مجموعه یک عدد که مضرب ۳ است وجود دارد . لذا عدد مورد نظر انتخاب خواهد شد.