حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

گردآورنده:

www.fanavari-it.ir

فصل دوّم

تمرینات فصل دوم

۱- فرض کنید که A مجموعهٔ اعداد گویای غیر صفر باشد. برای $a,b \in A$ رابطهٔ R در A را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$aRb \Leftrightarrow a/b \in Z$$

رابطهٔ R کدام یک از خواص زیر را داراست و چرا؟

(الف) بازتابی (ب) متقارن (ج) ضدمتقارن (د) متعدی

پاسخ:

الف) رابطه داده شده بازتابی است. زیرا

$$\forall a \in A : \frac{a}{a} = ۱ \in Z \Rightarrow aRa$$

ب) رابطه داده شده متقارن نیست. چرا که

$$\frac{۲}{۱} = ۲ \in Z \ , \ \frac{۱}{۲} \notin Z$$

پس $۲R۱$ ولی $۱\not R۲$

ج) رابطه R ضدمتقارن است. زیرا اگر aRb , bRa. آنگاه از اینکه aRb عدد صحیح m وجود دارد به طوریکه $\frac{a}{b} = m \in Z$ از طرفی bRa پس $\frac{b}{a} \in Z$ اما $\frac{b}{a} = \frac{۱}{m} \in Z$، و این تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $m=۱$ یعنی $\frac{a}{b} = ۱$، پس $a=b$

د) رابطه R متعدی است. چرا که اگر aRb , bRc آنگاه اعداد صحیح n,m وجود دارند بطوریکه $\frac{a}{b} = m$, $\frac{b}{c} = n$ پس

$$a = mb \ , \ c = \frac{b}{n} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{mb}{\frac{b}{n}} = mn \in Z$$

پس aRc

۲- فرض کنید که $A = R\times R$ که در آن R مجموعهٔ اعداد حقیقی است . اگر $p=(x,y)$ نقطه‌ای از A باشد ، برای دو نقطهٔ b,a از A ، رابطهٔ R در A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$aRb \Leftrightarrow$ b,a به یک فاصله از p باشند

نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی در A است . کلاس‌های هم‌ارزی آن را به دست آورید.

پاسخ :

بازتابی : اگر $a \in A$ روشن است که aRa.

تقارن : اگر $a,b \in A$, aRb آنگاه فاصله b,a از p به یک فاصله است به طور معادل فاصله a,b از p به یک فاصله است لذا bRa .

تعدی : اگر $a,b,c \in A$, aRb , bRc در این صورت فاصله b,a از p برابر و مساوی با عددی مانند r می‌باشد . از طرفی از اینکه bRc فاصله c,b نیز از p برابر است . اما ، فاصله b از p برابر r می‌باشد . در نتیجه فاصله c از p نیز r خواهد بود ، لذا از اینکه فاصله a از p نیز برابر r است پس aRc .

۳- نشان دهید که اگر S,R دو رابطهٔ هم‌ارزی باشند ، آنگاه $R\cup S$ الزاماً یک رابطهٔ هم‌ارزی نیست .

پاسخ :

فرض کنیم $A=\{a,b,c\}$. رابطه‌های R و S را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$$
$$S=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$$

در این صورت R و S دو رابطه هم‌ارزی روی A هستند . اما داریم :

$$R\cup S=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$$

داریم $(b,a)\in R\cup S$, $(a,c)\in R\cup S$. اما $(b,c)\notin R\cup S$ پس $R\cup S$ لزوماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.

۴- فرض کنید که S,R در مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به صورت زیر تعریف شده باشند

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۳),(۴,۲)\}$$
$$S=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۲),(۱,۳)\}$$

SoR را به دست آورید .

پاسخ :

$$SoR=\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۲),(۴,۱)\}$$

۵- فرض کنید که $R=\{(x,y)\mid x=yz\ ,\ z>1\ ;\ x,y,z\in Z^+\}$

(الف) $R\bigcap R^{-1}$ را حساب کنید.

(ب) آیا R یک رابطهٔ بازتابی است ؟ آیا R متقارن است ؟ چرا ؟

(ج) نشان دهید که $RoR\subseteq R$.

(د) بستار متعدی R را به دست آورید.

پاسخ :

الف) داریم :

$$R^{-1}=\{(y,x)\mid x=yz\ ,\ z>1;x,y,z\in Z^+\}$$

درنتیجه $R\bigcap R^{-1}=\phi$

اگر $(x,y)\in R\bigcap R^{-1}$ **آنگاه**

$$(x,y)\in R\ \Rightarrow\exists z>1\ :x=yz$$
$$(x,y)\in R^{-1}\Rightarrow\exists z'>1:y=xz'$$
$$\Rightarrow x=yz\Rightarrow x=(xz')z=xz'z\Rightarrow z'z=1$$

اما $z>1,\ z'>1$ **پس** $z'z>1$ **و این یک تناقض است . پس** $R^{\circ}\bigcap R^{-1}=\phi$

ب) روشن است R **بازتابی نیست . زیرا بازای هر** $x\in Z^+$ **نمی‌توان** $z>1$ **را چنان یافت که** $x=zxz$.

از طرفی با توجه به الف $R\bigcap R^{-1}=\phi$ **پس** R **متقارن نیز نمی‌باشد .**

ج) فرض کنیم $(x,y)\in RoR$ **در این صورت** S **ای هست به طوریکه**

$$(s,y)\in R\ ,(x,s)\in R$$

درنتیجه $z_1,z_2>1$ **وجود دارند به گونه‌ای که**

$$x=sz_1\ ,s=yz_2\Rightarrow x=(yz_2)z_1\Rightarrow x=y(z_2z_1)$$

از اینکه $z_1>1\ ,\ z_2>1$ **نتیجه می‌شود** $z_1z_2>1$ **، پس** $(x,y)\in R$ **لذا**

$$RoR\subseteq R$$

د) از اینکه $RoR\subseteq R$ **، نتیجه می‌شود که** $RoRoR\subseteq RoR\subseteq R$ **و... پس** $R^2\bigcup R=R$ **و** $R^3\bigcup R^2\bigcup R=R$ **و ...**

لذا

$$R^{\infty}=R\bigcup R^2\bigcup R^3\bigcup...=R$$

تذکر : البته به طور مستقیم نیز می‌توان ثابت کرد R متعدی است . زیرا اگر (y,z) و (x,y) هر دو عضو R باشند آنگاه

$$\exists s_1 > 1 : x = ys_1 \quad , \quad \exists s_2 > 1 : y = zs_2$$

$$\Rightarrow x = ys_1 = (zs_2)s_1 = z(s_2 s_1) \Rightarrow (x,z) \in R$$

عناصر R به صورت زیر می‌باشند :

$$R = \{(2,1),(3,1),(4,1),\ldots,(4,2),(6,2),(8,2),\ldots,(6,3),(9,3),(12,3),\ldots\}$$

۶- نشان دهید که اگر R یک رابطه از A به B، S و T دو رابطه از B به C باشند آنگاه :

الف) $(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$

ب) $(S \cap T)oR = (SoR) \cap (ToR)$

پاسخ :

الف)

داریم :

$$\begin{aligned}
(x,z) \in (S \cup T)oR &\Leftrightarrow \exists y : (x,y) \in R \ , \ (y,z) \in (S \cup T) \\
&\Leftrightarrow \exists y : (x,y) \in R \wedge [(y,z) \in S \vee (y,z) \in T] \\
&\Leftrightarrow \exists y : [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \vee [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in T] \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in SoR \vee (x,z) \in ToR \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in (SoR) \cup (ToR)
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$$

ب)

داریم :

$$\begin{aligned}
(x,z) \in (S \cap T)oR &\Leftrightarrow \exists y : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in (S \cap T) \\
&\Leftrightarrow \exists y : (x,y) \in R \wedge [(y,z) \in S \wedge (y,z) \in T] \\
&\Leftrightarrow \exists y : [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \wedge [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in T] \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in SoR \wedge (x,z) \in ToR \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in (SoR) \cap (ToR)
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$(S \cap T)oR = (SoR) \cap (ToR)$$

۷- فرض کنید که R_1 و R_2 دو رابطه در A باشند . کدام یک از عبارات زیر درست است و چرا؟

(الف) اگر R_1 و R_2 بازتابی باشند آنگاه R_1oR_2 نیز بازتابی است.

(ب) اگر R_1 و R_2 متقارن باشند آنگاه R_1oR_2 نیز متقارن است.

(ج) اگر R_1 و R_2 ضدمتقارن باشند آنگاه R_1oR_2 نیز ضدمتقارن است.

(د) اگر R_1 و R_2 متعدی باشند آنگاه R_1oR_2 نیز متعدی است.

پاسخ :

الف) درست . اگر R_1, R_2 بازتابی باشند . آنگاه بازای هر $x \in A$:

$$(x,x) \in R_1 \ , (x,x) \in R_2 \Rightarrow (x,x) \in R_1oR_2$$

پس R_1oR_2 بازتابی است .

ب) نادرست . فرض کنیم

$$A = \{a,b,c\} \quad , \quad R_1 = \{(a,b),(b,a)\} \quad , \quad R_2 = \{(a,c),(c,a)\}$$

در این صورت R_1, R_2 متقارن هستند. در حالیکه R_1oR_2 متقارن نیست . زیرا :

$$R_1oR_2 = \{(b,c)\}$$

ج) نادرست . فرض کنید

$$A = \{a,b,c\} \ , \ R_1 = \{(a,b),(c,a)\} \ , R_2 = \{(a,a),(b,c)\}$$

در این صورت R_1, R_2 ضدمتقارن هستند . در حالیکه R_1oR_2 ضدمتقارن نیست . زیرا

$$R_1oR_2 = \{(a,b),(b,a)\}$$

روشن است $a(R_1oR_2)b \quad , \quad b(R_1oR_2)a$ ، درحالیکه $a \neq b$

د) نادرست . فرض کنید

$$A = \{a,b,c,d,e\} \ , \ R_1 = \{(a,d),(b,e)\} \ , \ R_2 = \{(c,a),(d,b)\}$$

در این صورت R_1, R_2 هر دو متعدی هستند . درحالیکه R_1oR_2 چنین نمی‌باشد . زیرا

$$R_1oR_2 = \{(c,d),(d,e)\}$$

داریم

$$(d,e) \in R_1oR_2 \ , (c,d) \in R_1oR_2$$

درحالیکه $(c,e) \notin R_1oR_2$.

۸- فرض کنید که R و S دو رابطه در Z باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند :

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b (\text{mod } ۹)$$
$$aSb \Leftrightarrow a \equiv b (\text{mod } ۶)$$

$(R \cup S)^{\infty}$ و $A/(R \cup S)^{\infty}$ را به دست آورید .

پاسخ :

اگر رابطه‌های $R_۱, R_۲, ..., R_k$ به صورت زیر تعریف شده باشند :

$$aR_۱b \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } n_۱)$$
$$aR_۲b \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } n_۲)$$
$$\vdots$$
$$aR_kb \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } n_k)$$

آنگاه $S = (R_۱ \cup R_۲ \cup ... \cup R_k)^{\infty}$ که در آن S به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$aSb \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } d)$$

در اینجا d بزرگترین مقسوم علیه مشترک $n_۱, n_۲, ..., n_k$ می‌باشد .

از اینکه ۳=(۶ , ۹) . پس

$$a(R \cup S)^{\infty} b \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } ۳)$$

همچنین خواهیم داشت :

$$A/(R \cup S)^{\infty} = \{\{...,-۶,-۳,۰,۳,۶,...\},\{...,-۵,-۲,۱,۴,۷,...\},\{...,-۴,-۱,۲,۵,۸,...\}\}$$

۹- فرض کنید که R و S دو رابطه در A باشند . نشان دهید که بازای همهٔ مقادیر $n \geq ۱$ داریم:

$$(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$$

پاسخ :

فرض کنید $a(R \cap S)^n b$ این بدین معنی است که مسیری به طول n از a به b در $R \cap S$ وجود دارد . بنابراین هر n یال این مسیر ، هم در R و هم در S واقع هستند. پس aR^nb , aS^nb درنتیجه $a(R^n \cap S^n)b$ پس

$$(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$$

۱۰- فرض کنید که $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و R و S دو رابطهٔ هم‌ارزی تعریف شده در A به وسیلهٔ ماتریس‌های روابط زیر باشند .

$$M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad M_S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(الف) بزرگترین رابطهٔ هم‌ارزی مشمول در R و S کدام است ؟

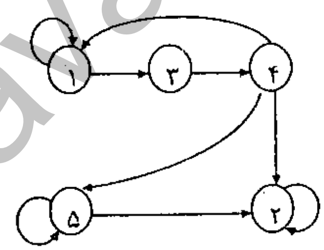
(ب) کوچکترین رابطهٔ هم‌ارزی شامل R و S چیست ؟

پاسخ :

چون R و S خود روابط هم‌ارزی می‌باشند . لذا بزرگترین رابطه هم‌ارزی مشمول در R خود R و کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R نیز خود R می‌باشد . در مورد S نیز همین‌طور است .

همچنین ، از اینکه $M_s \subseteq M_R$ و R و S روابط هم‌ارزی می‌باشند ، لذا بزرگترین رابطه هم‌ارزی که هم مشمول در R و هم مشمول در S باشد ، S و کوچکترین رابطه هم‌ارزی که هم شامل R و هم شامل S باشد ، R است .

۱۱- با استفاده از الگوریتم وارشال بستار متعدی روابط زیر را به دست آورید .



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ :

الف) قرار می‌دهیم

$$W_0 = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا W_1 را پیدا می‌کنیم . بنابراین $k = 1$ ، W_0 دارای مقدار ۱ در مکان اول و چهارم ستون اول نیز دارای مقدار ۱ در مکان اول و چهارم سطر اول است بنابراین W_1 همان W_0 است به اضافه یک مقدار جدید ۱ در مکان (۴,۴):

(در مکانهای (۱,۱) ، (۱,۴) ، (۴,۱) ، (۴,۴) باید عدد ۱ قرار دهیم که چون (۱,۱) ، (۱,۴) و (۴,۱) مقدار ۱ را دارند پس مقدار ۱ فقط به مکان (۴,۴) اضافه می‌شود.)

$(p_1 = 1 \,,\, p_2 = 4 \,;\, q_1 = 1 \,,\, q_2 = 4)$:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W_2 نیز با $(k=2)$ با استفاده از W_1 به صورت زیر به دست می‌آید :

$(p_1 = 2 \,,\, p_2 = 5 \,;\, q_1 = 2)$:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای W_3 $(k = 3)$ نیز داریم :

$$W_3 = W_2$$

برای W_4, W_5 نیز بدست می‌آوریم :

$(p_1 = 1 \,,\, p_2 = 3 \,,\, p_3 = 4 \,;\, q_1 = 1 \,,\, q_2 = 4)$:

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(p_1 = 3 \,,\, p_2 = 5 \,;\, q_1 = 2 \,,\, q_2 = 5)$:

$$W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $W_5 = M_{R^\infty}$

ب) ابتدا رابطه S را به صورت ماتریسی نمایش می‌دهیم :

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم $W_۰ = M_s$. سایر W ها در زیر آمده است :

$: (p_۱ = ۱ \ , \ p_۲ = ۴ \ ; \ q_۱ = ۱ \ , \ q_۲ = ۳)$

$$W_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$: (p_۱ = ۲ \ , \ p_۲ = ۴ , p_۳ = ۵ \ ; \ q_۱ = ۲)$

$$W_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$:(p_۱ = ۲ \ , \ p_۲ = ۴ \ ; q_۱ = ۱ \ , q_۲ = ۴)$

$$W_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$:(p_۱ = ۱ \ , \ p_۲ = ۳ \ , \ p_۳ = ۴ \ ; \ q_۱ = ۱ \ , q_۲ = ۲ \ , q_۳ = ۳ \ , \ q_۴ = ۴ \ , q_۵ = ۵)$

$$W_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$: (p_۱ = ۱ , p_۲ = ۳ \ , \ p_۳ = ۴ \ , \ p_۴ = ۵ \ ; \ q_۱ = ۲ \ , q_۲ = ۵)$

$$W_۵ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا $W_۵ = M_{s^{\infty}}$

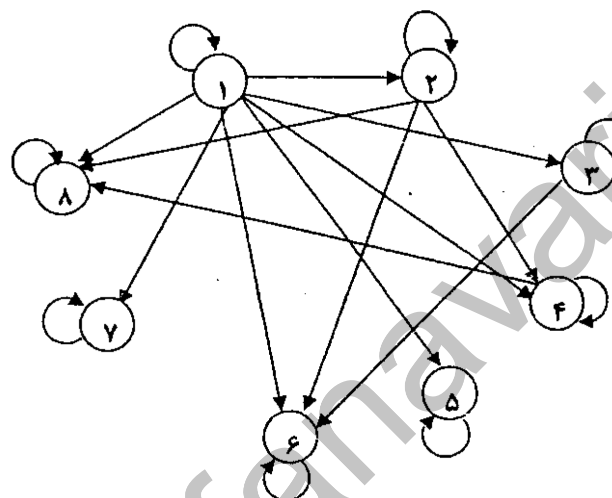
۱۲- فرض کنید که $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$. اگر R رابطهٔ بخش‌پذیری تعریف شده در A باشد، در این صورت گراف سودار R را رسم کنید.

پاسخ :

داریم :

$$R=\left\{\begin{matrix}(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶)(۱,۷),(۱,۸),((۲,۲),(۲,۴),(۲,۶)\\ ,(۲,۸),(۳,۳)(۳,۶)(۴,۴),(۴,۸),(۵,۵),(۶,۶),(۷,۷),(۸,۸)\end{matrix}\right\}$$

گراف سودار R به صورت زیر است .



۱۳- فرض کنید که A مجموعهٔ اعداد گویای غیرصفر باشد . برای $a,b\in A$ ، رابطهٔ R در A را به طریق زیر تعریف می‌کنیم :

$aRb \Leftrightarrow$ a/b عدد صحیحی باشد

نشان دهید که R بازتابی و متعدی است ، ولی ، نه متقارن است و نه ضدمتقارن .

پاسخ :

در تمرین ۱ نشان دادیم که رابطه بالا بازتابی ، متعدی و ضدمتقارن است . اما متقارن نمی‌باشد .

۱۴- گروهی متشکل از ۱۷ سارق ، کیسه‌ای از شمش‌های طلا را به سرقت می‌برند . در موقع تقسیم شمش‌ها به طور مساوی بین سارقین ، سه شمش طلا باقی می‌ماند . به دنبال نزاع بر سر اینکه چه کسی صاحب شمش‌های باقیمانده شود ، یکی از سارقین کشته می‌شود . شمش‌ها ، بار دیگر بین افراد باقی مانده تقسیم می‌شوند و این بار ۱۰ شمش باقی می‌ماند . این بار نیز یکی از سارقین بر سر تقسیم شمش‌های باقیمانده کشته می‌شود . شمش‌ها دوباره بین

سارقین تقسیم می‌شود (احتمالاً به طور مساوی ، زیرا این بار سارقی کشته نمی‌شود !) . کمترین تعداد شمش‌های به سرقت رفته چقدر است ؟

پاسخ :

فرض کنیم تعداد شمش‌ها برابر x باشد . فرض می‌کنیم وقتی برای اولین بار سارق‌ها اقدام به تقسیم شمش‌ها می‌کنند به هر کدام k_1 شمش می‌رسد و ۳ شمش باقی می‌ماند در این صورت خواهیم داشت :

$$17k_1 + 3 = x$$

پس از کشته شدن یک سارق ، ۱۶ نفر باقی می‌ماند . این بار فرض کنیم به هر کدام k_2 شمش می‌رسد . با توجه به اینکه ۱۰ شمش نیز باقی می‌ماند خواهیم داشت :

$$16k_2 + 10 = x$$

و در نهایت پس از کشته شدن یکی دیگر از سارق‌ها ، ۱۵ سارق باقی می‌ماند . فرض می‌کنیم این بار موقع تقسیم شمش‌ها به هر نفر k_3 شمش برسد . درنتیجه

$$15k_3 = x .$$

از سه رابطه بدست آمده خواهیم داشت :

$$\begin{matrix} 17k_1 + 3 = 16k_2 + 10 \\ 16k_2 + 10 = 15k_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{16k_2 + 7}{17} \\ k_2 = \dfrac{15k_3 - 10}{16} \end{cases}$$

چون مساله ، یک مساله تقسیم شمش بدون بریدن شمش‌هاست ، لذا روشن است که k_1, k_2, k_3 اعداد طبیعی می‌باشد . پس ما برای حل مساله به دنبال کوچکترین k_3ای هستیم که عبارت زیر ، یک عدد صحیح گردد :

$$k_1 = \frac{16k_2 + 7}{17} = \frac{15k_3 - 3}{17} \quad , \; k_2 = \frac{15k_3 - 10}{16}$$

کوچکترین عددی که مطلوبست $k_3 = 262$ می‌باشد . بنابراین

$$x = 15k_3 = 3930$$

۱۵- فرض کنید که $A = B = R$ ، R و S روابطی در A باشند که ماتریس‌های روابط آن‌ها چنین تعریف شده‌اند :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعیین کنید :

(الف) M_{SoR} (ب) M_{RoS} (ج) M_{RoR} (د) M_{SoS}

پاسخ :

الف)

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$M_{RoS} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$M_{RoR} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

د)

$$M_{SoS} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۶- با استفاده از الگوریتم وارشال ، بستار متعدی رابطهٔ زیر را به دست آورید :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☜ پاسخ :

قرار می‌دهیم $W_۰ = M_R$. مراحل مختلف الگوریتم وارشال در زیر آمده است .

$k = ۱$ ، $(p_1 = ۱ , p_2 = ۴ \; ; \; q_1 = ۱ , q_2 = ۴)$:

$$W_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$k = ۲$ ، $(p_1 = ۲ , p_2 = ۳ \; ; \; q_1 = ۲ , q_2 = ۳)$:

$$W_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$k = ۳$ ، $(p_1 = ۲ , p_2 = ۳ \; ; \; q_1 = ۲ , q_2 = ۳)$:

$$W_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$k = ۴$ ، $(p_1 = ۱ , p_2 = ۴ \; ; \; q_1 = ۱ , q_2 = ۴)$:

$$W_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

روشن است $M_R = W_۴$ ، درنتیجه R یک رابطه متعدی است.

۱۷- با فرض اینکه C,B,A ماتریس‌های بولی هستند ، در این صورت روابط زیر را اثبات کنید :

الف) $A \vee A = A$

ب) $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

ج) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

☜ پاسخ :

الف)

$$(A \vee A)_{ij} = ۱ \Leftrightarrow (A)_{ij} = ۱ \text{ یا } (A)_{ij} = ۱ \Leftrightarrow (A)_{ij} = ۱$$

درنتیجه $A \vee A = A$. که در اینجا منظور از $(A)_{ij}$ مولفه (i,j)ام ماتریس A و $(A \vee A)_{ij}$ مولفه (i,j)ام ماتریس $A \vee A$ است.

ب) با توجه به تعریف ضرب بولی ماتریسها داریم :

$$[A\odot(B\odot C)]_{ij}=1 \Leftrightarrow \exists k:(A)_{ik}=1\ ,\ (B\odot C)_{kj}=1$$
$$\Leftrightarrow \exists k\ ,\ \exists r:(A)_{ik}=1\ ,\ (B)_{kr}=1\ ,\ (C)_{rj}=1$$
$$\Leftrightarrow \exists r:(A\odot B)_{ir}=1\ ,\ (C)_{rj}=1$$
$$\Leftrightarrow [(A\odot B)\odot C]_{ij}=1$$

درنتیجه $A\odot(B\odot C)=(A\odot B)\odot C$

تذکر : در اینجا اندیس به منزله مولفه متناظر از ماتریس می‌باشد . مثلاً $(A)_{ik}$ نشان دهنده مولفه (i,k) ام ماتریس A است .

ج)

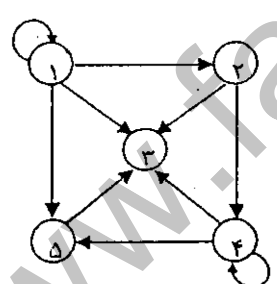
$$[A\vee(B\wedge C)]_{ij}=1\Leftrightarrow \left((A)_{ij}=1\right)\vee\left((B)_{ij}=1\wedge(C)_{ij}=1\right)$$

بنا به خواص پخش‌پذیر گزاره‌ها $\Leftrightarrow \left((A)_{ij}=1\vee(B)_{ij}=1\right)\wedge\left((A)_{ij}=1\vee(C)_{ij}=1\right)$

$$\Leftrightarrow \left((A\vee B)_{ij}=1\right)\wedge\left((A\vee C)_{ij}=1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left((A\vee B)\wedge(A\vee C)\right)_{ij}=1$$

درنتیجه : $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

۱۸- فرض کنید که $A=\{1,2,3,4,5\}$ و R یک رابطه در A باشد که گراف سودار آن به شکل روبه‌رو است . رابطهٔ R کدام یک از خواص زیر را دارد ؟



(الف) بازتابی

(ب) ضدبازتابی

(ج) تقارن

(د) ضدمتقارن

(ز) تعدی

پاسخ :

الف) $2 \not R 2$ ، پس R بازتابی نیست .

ب) $1 R 1$ ، پس R ضدبازتابی نیست .

ج) $1 R 2$ در حالیکه $2 \not R 1$ ، پس R متقارن نیست.

د) R ضدمتقارن است . زیرا بازای هیچ دو عنصر متمایز از A مانند a,b ، رابطه‌های aRb , bRa همزمان برقرار نیست .

ز) $1 R 2$, $2 R 4$ در حالیکه $1 \not R 4$ ، پس R متعدی نیست.

۱۹- فرض کنید که $A = Z^+$ ، و رابطهٔ R در A به صورت تعریف شده است :

$$aRb \Leftrightarrow GCD(a,b) = ۱$$

رابطهٔ R کدام یک از خواص زیر را دارد ؟ (مقصود از GCD بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد است.)

(الف) بازتابی (ب) ضدبازتابی (ج) تقارن (د) ضدمتقارن (ز) تعدی

پاسخ :

الف) R بازتابی نیست زیرا مثلاً ۲ $\not R$ ۲ (۲= (۲,۲)GCD)

ب) R ضدبازتابی نیست . زیرا ۱ R ۱

ج) R متقارن است . زیرا از نظریه اعداد می‌دانیم اگر b,a نسبت به هم اول باشند آنگاه a,b هم نسبت به هم اول خواهند بود. درنتیجه

$$\big(aRb \Leftrightarrow GCD(a,b) = ۱\big) \Leftrightarrow \big(GCD(b,a) = ۱ \Leftrightarrow bRa\big)$$

پس

$$aRb \Rightarrow bRa$$

د) R ضدمتقارن نیست . زیرا مثلاً ۳R۵ و ۵R۳ درحالیکه ۵ ≠ ۳

ز) R متعدی نیست . زیرا مثلاً ۲R۷ و ۱۲ R ۷ درحالیکه ۱۲ $\not R$ ۲

۲۰- رابطه R در A را «مدور» می‌گوییم که اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ ، آنگاه $(c,a) \in R$. نشان دهید که رابطه R بازتابی و مدور است ، اگر و تنها اگر ، R یک رابطه هم‌ارزی باشد.

پاسخ :

فرض کنیم R بازتابی و مدور باشد ، ثابت می‌کنیم R هم‌ارزی است.

بازتابی : بنا به فرض برقرار است .

تقارن : از اینکه R بازتابی است پس $(a,a) \in R$ ، حال اگر $(a,b) \in R$ آنگاه از اینکه R مدور است خواهیم داشت $(b,a) \in R$. پس R متقارن نیز است .

تعدی : اگر $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ آنگاه از اینکه R مدور است خواهیم داشت $(c,a) \in R$ و از اینکه R متقارن است بدست می‌آوریم $(a,c) \in R$. پس R متعدی نیز می‌باشد.

برعکس اگر فرض کنیم R هم‌ارزی است آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که R بازتابی و مدور نیز می‌باشد.

۲۱- فرض کنید که R و S دو رابطه هم‌ارزی و ماتریس‌های این روابط به شرح زیر باشند. کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R و S را به دست آورید.

$$M_R=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۰&۰\\۱&۱&۱&۰&۰\\۱&۱&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۱&۱\\۰&۰&۰&۱&۱\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۱&۱&۰\\۰&۱&۱&۱&۰\\۰&۱&۱&۱&۰\\۰&۰&۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

پاسخ :

بنا به قضیه ۲-۱۵ کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل S,R، رابطه $(R\cup S)^{\infty}$ است.

ابتدا $M_{R\cup S}$ را پیدا می‌کنیم

$$M_{R\cup S}=M_R\vee M_S=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۰&۰\\۱&۱&۱&۱&۰\\۱&۱&۱&۱&۰\\۰&۱&۱&۱&۱\\۰&۰&۰&۱&۱\end{bmatrix}$$

رابطه فوق متقارن و بازتابی است . کافیست با استفاده از الگوریتم وارشال بستار متعدی آن را نیز بیابیم . با فرض $W_۰=M_{R\cup S}$ داریم :

$k=۱$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۲\ ,\ p_۳=۳\ ;\ q_۱=۱\ ,\ q_۲=۲\ ,\ q_۳=۳)$:

$W_۱=W_۰$

$k=۲$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۲\ ,\ p_۳=۳\ ,\ p_۴=۴\ ;\ q_۱=۱\ ,\ q_۲=۲\ ,\ q_۳=۳\ ,\ q_۴=۴)$:

$$W_۲=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱&۰\\۱&۱&۱&۱&۰\\۱&۱&۱&۱&۰\\۱&۱&۱&۱&۱\\۰&۰&۰&۱&۱\end{bmatrix}$$

$k=۳$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۲\ ,\ p_۳=۳\ ,\ p_۴=۴\ ;\ q_۱=۱\ ,\ q_۲=۲\ ,\ q_۳=۳\ ,\ q_۴=۴)$:

$W_۳=W_۲$

$k=۴$ ، $(p_۱=۱, p_۲=۲, p_۳=۳, p_۴=۴, p_۵=۵\ ;\ q_۱=۱, q_۲=۲, q_۳=۳, q_۴=۴, q_۵=۵)$:

$$W_۴=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱&۱\\۱&۱&۱&۱&۱\\۱&۱&۱&۱&۱\\۱&۱&۱&۱&۱\\۱&۱&۱&۱&۱\end{bmatrix}$$

$W_۴$ رابطه‌ای را نشان می‌دهد که در آن تمام راسهای گراف با همدیگر رابطه دارند . پس یک رابطه کامل بوده ، لذا هم‌ارزی می‌باشد.

۲۲- فرض کنید که $A = \{۱,۲,۳\}$ ، و R رابطه‌ای در A باشد که به صورت زیر تعریف شده است :

$$R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳),(۳,۱)(۳,۲)\}$$

بستار متعدی R یعنی R^∞ را با استفاده از فرمول زیر به دست آورید :

$$M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^۲} \vee M_{R^۳}$$

پاسخ :

داریم :

$$M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$M_{R^۲} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$M_{R^۳} = M_{R^۲} \odot M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^۲} \vee M_{R^۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۳- در مسئله قبل بستار متعدی R یعنی R^∞ را با استفاده از الگوریتم وارشال به دست آورید.

پاسخ :

با فرض $W_۰ = M_R$ داریم :

$k = ۱$ ، $(p_۱ = ۱ , p_۲ = ۲ , p_۳ = ۳ ; q_۱ = ۱ , q_۲ = ۳)$:

$$W_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$k = ۲$ ، $(p_۱ = ۱ , p_۲ = ۳ ; q_۱ = ۱ , q_۲ = ۳)$:

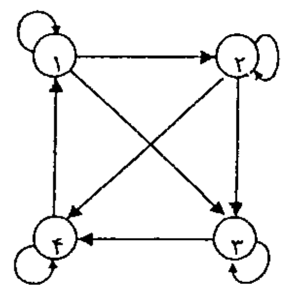
$$W_۲ = W_۱$$

$k = ۳$ ، $(p_۱ = ۱ , p_۲ = ۲ , p_۳ = ۳ ; q_۱ = ۱ , q_۲ = ۲ , q_۳ = ۳)$:

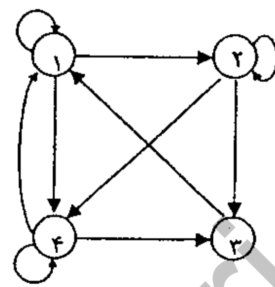
$$M_{R^\infty} = W_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۴- فرض کنید که R و S روابطی باشند که به وسیلهٔ گراف‌های سودار زیر تعریف شده‌اند.
مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\overline{R}$ ب) $\overline{R \cap S}$ ج) $R \cap S$ د) S^{-1}



R



S

پاسخ :

کلیه روابط را به وسیله ماتریس متناظرشان نشان می‌دهیم.

الف) داریم :

$$M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\overline{R}} = \overline{M}_R = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب)

$$M_S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} , \ M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\overline{R\cap S}} = \overline{M}_{R\cap S} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

ج)

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

د)

$$M_{S^{-1}} = (M_S)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۵- برای مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$ رابطه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آیا رابطه R متعدی است ؟ چرا؟

پاسخ :

نه خیر . داریم $2\,R\,3$ و $3\,R\,4$ درحالیکه $2 \not{R}\, 4$

یک روش برای تست اینکه R متعدی است یا نه اینست که بستار متعـدی R، یعنـی R^∞ را پیدا کنیم . اگر $R = R^\infty$ آنگاه R متعدی است در غیـر اینصـورت R متعـدی نمی‌باشد . در تمرین فوق داریم :

$$M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

روشن است $R^\infty \neq R$ ، پس R متعدی نمی‌باشد.

◈در تمرینهـای ۲۶ الـی ۲۷ ، فـرض کنیـد کـه $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{1,2,3,4\}$. R و S دو رابطه از A به B هستند که به وسیله ماتریس‌های رابطه تعریف شده‌اند . حساب کنید :

(الف) $\overline{S}$ (ب) $\overline{R \cap S}$ (ج) $R \cup S$ (د) R^{-1}

-۲۶

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-۲۷

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۲۶ :

الف)

$$M_{\bar{S}} = \overline{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\overline{R\cap S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

د)

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۲۷ :

الف)

$$M_{\bar{S}} = \overline{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ب)

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\overline{R\cap S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

د)

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۸- فرض کنید که $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ،

$$R=\{(۱,۲),(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

و

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱)(۳,۲),(۳,۳),(۴,۶),(۴,۴),(۶,۴),(۶,۶),(۵,۵)\}$$

دو رابطه هم‌ارزی در A باشند . کلاس‌های هم‌ارزی $R\cap S$ را به دست آورید.

پاسخ :

داریم :

$$R\cap S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$$

لذا

$$[۱]=[۲]=\{۱,۲\}$$
$$[۳]=\{۳\}\ ,[۴]=\{۴\}\ ,[۵]=\{۵\}\ ,[۶]=\{۶\}$$

۲۹- فرض کنید که $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ ،

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۲)\}$$

و

$$S=\{(۳,۱),(۴,۴),(۲,۳),(۲,۴),(۱,۱),(۱,۴)\}$$

حساب کنید

الف) RoR ب) SoR ج) RoS د) SoS

پاسخ :

داریم :

$$M_R=\begin{bmatrix}۱&۱&۰&۰\\۰&۰&۱&۱\\۰&۰&۰&۱\\۱&۱&۰&۰\end{bmatrix}\ ,M_S=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱\\۰&۰&۱&۱\\۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

الف)

$$M_{RoR}=M_R\odot M_R=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\۱&۱&۰&۱\\۱&۱&۰&۰\\۱&۱&۱&۱\end{bmatrix}$$

پس

$$RoR=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴)\}$$

ب)

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس

$$SoR = \{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۴),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۳),(۴,۴)\}$$

ج)

$$M_{RoS} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس

$$RoS = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲)\}$$

د)

$$M_{SoS} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس

$$SoS = \{(۱,۱),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۴),(۳,۱),(۳,۴),(۴,۴)\}$$

۳۰- اگر R و S دو رابطه هم‌ارزی در A باشند، آیا SoR نیز یک رابطه هم‌ارزی در A است؟ چرا؟

پاسخ :

خیر، زیرا اگر فرض کنیم

$A = \{۱,۲,۳\}$

$S = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۲,۱)\}$ و $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۲,۳),(۳,۲)\}$

در این صورت R و S روابط هم‌ارزی می‌باشد. درحالیکه

$SoR = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲)\}$

SoR رابطه هم‌ارزی نمی‌باشد، زیرا ۲ SoR ۱ و ۳ SoR ۲، درحالیکه ۳ $S\not{o}R$ ۱

◈ در تمرین‌های ۳۱ الی ۳۲ فرض کنید که $A=\{1,2,3,4,5\}$ ، M_R و M_S ماتریس‌های رابطهٔ به ترتیب برای روابط S,R در A باشند . حساب کنید :

الف) M_{RoR} ب) M_{SoR} ج) M_{RoS} د) M_{SoS}

-۳۱

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1\\1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۱ :

الف)

$$M_{RoR}=M_R\odot M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

ب)

$$M_{SoR}=M_R\odot M_S=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

ج)

$$M_{RoS}=M_S\odot M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

د)

$$M_{SoS}=M_S\odot M_S=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

-۳۲

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۲ :

الف)

$$M_{RoR} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$M_{RoS} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

د)

$$M_{SoS} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳۳- نشان دهید که اگر R بازتابی و متعدی باشد در این صورت بـرای همـهٔ n هـای صـحیح و مثبت داریم :

$$R^n = R$$

پاسخ :

حکم فوق را به استقرای قوی ثابت می‌کنیم .

۱ . مبنای استقرا . بازای $n = 1$ واضح است که $R^1 = R$

۲ . فرض استقرای قوی . فرض کنیم حکم برای هر i ، که $1 \leq i \leq k$ برقرار باشد. یعنی بازای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم.

$$R^i = R$$

۳ . مرحله استقرا . برای $n = k + 1$ با توجه به فرض استقرای قوی داریم :

$$R^{k+1} = R^k \odot R = R \odot R = R^2$$

حال کافی است ثابت کنیم $R^2 = R$.

فرض کنیم $(M_{R^2})_{ij} = 1$. یعنی مسیری به طول ۲ از مولفه a_i به مولفه a_j در رابطـه R وجود دارد . بنابراین مولفه‌ای مانند a_l موجود است به طوریکه

$$a_i R a_l \quad , \quad a_l R a_j$$

اما ، R متعدی است. پس $a_i R a_j$ درنتیجه $(M_R)_{ij} = 1$

برعکس اگر $(M_R)_{ij} = 1$ آنگاه $a_i R a_j$ ، از اینکه R بازتابی است نیز داریم $a_i R a_i$.

بنابراین مسیری به طول ۲ به صورت زیر از a_i به a_j وجود دارد.

$$a_i R a_i \quad , \quad a_i R a_j$$

بنابراین : $a_i R^2 a_j$. یعنی $(M_{R^2})_{ij} = 1$. درنتیجه $R^2 = R$ و اثبات تمام است.

۳۴- فرض کنید که R یک رابطه در A و $S = R^2$. نشان دهید کـه اگـر $a, b \in A$ ، در ایـن صورت ، $aS^\infty b$ ، اگر و تنها اگر ، مسیری با تعداد یال‌های زوج در R از a به b موجود باشد .

پاسخ :

داریم :

$$S^\infty = S \cup S^2 \cup S^3 \cup \ldots$$

در این صورت

$$\begin{aligned} aS^{\infty}b &\Leftrightarrow \exists m \;:\; aS^{m}b \\ &\Leftrightarrow \exists m \;:\; a(R^{۲})^{m}b \\ &\Leftrightarrow \exists m \;:\; aR^{۲m}b \end{aligned}$$

یعنی مسیری با تعداد یالهای زوج در R از a به b وجود دارد اگر و تنها اگر $aS^{\infty}b$.

◈ در تمرین‌های ۳۵ الی ۳۷ فرض کنید که $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. برای رابطهٔ R تعریف شده ، به وسیلهٔ ماتریس M_R ، بستار متعدی را با استفاده از الگوریتم وارشال محاسبه کنید.

-۳۵

$$W_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & ٠ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ۱ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ۱ \end{bmatrix}$$

-۳۶

$$W_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ٠ & ٠ \\ ۱ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ۱ & ٠ \end{bmatrix}$$

-۳۷

$$W_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & ٠ & ۱ \\ ٠ & ۱ & ۱ & ٠ \\ ٠ & ۱ & ۱ & ٠ \\ ۱ & ٠ & ٠ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های مراحل مختلف الگوریتم وارشال را با M_I نمایش می‌دهیم .

☜ پاسخ ۳۵ :

با فرض $M_٠=W_۱$ داریم :

$k=۱$ ، $:(p_۱=۱\;,\;p_۲=۲\;;\;q_۱=۱\;,\;q_۲=۴)$

$$M_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & ٠ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ٠ & ۱ \\ ٠ & ٠ & ۱ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ۱ \end{bmatrix}$$

$k=۲$ ، $:(p_۱=۲\;;\;q_۱=۱\;,\;q_۲=۲\;,\;q_۳=۴)$

$$M_۲=M_۱$$

$k=۳$ ، $(p_۱=۳\ ;\ q_۱=۳)$:

$$M_۳=M_۲$$

$k=۴$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۲\ ,\ P_۳=۴\ ;\ q_۱=۴)$:

$$M_۴=M_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۶:

با فرض $M_۰=W_۲$ داریم:

$k=۱$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۲\ ;\ q_۱=۱\ ,\ q_۲=۲)$:

$$M_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$k=۲$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۲;\ q_۱=۱\ ,\ q_۲=۲)$:

$$M_۲=M_۱$$

$k=۳$ ، ($p_۱=۴$; q مقداری ندارد):

$$M_۳=M_۲$$

$k=۴$ ، (p مقداری ندارد ; $q_۱=۳$):

$$M_۴=M_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۷:

با فرض $M_۰=W_۲$ داریم:

$k=۱$ ، $(p_۱=۱\ ,\ p_۲=۴\ ;\ q_۱=۱\ ,\ q_۲=۴)$:

$$M_۱=M_۰$$

$k=۲$ ، $(p_۱=۲\ ,\ p_۲=۳\ ;\ q_۱=۲\ ,\ q_۲=۳)$:

$$M_۲=M_۱$$

$k=۳$ ، $(p_۱=۲\ ,\ p_۲=۳\ ;\ q_۱=۲\ ,\ q_۲=۳)$:

$$M_۳=M_۲$$

$k=۴$ ، $(p_۱=۱ \ , \ p_۲=۴ \ ; \ q_۱=۱ \ , \ q_۲=۴)$:

$$M_۴=M_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳۸- فرض کنید که R و S دو رابطه در $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشند که بوسیله $R=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۴)\}$ و $S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴)\}$ تعریف شده‌اند. مطلوب است :

الف) SoR ب) RoS ج) $R^۲$ د) $R^۳$ هـ) $S^۲$ و) $S^۳$

پاسخ :

داریم :

$$M_R=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad M_S=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

الف)

$$M_{SoR}=M_R \odot M_S=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$SoR=\{(۱,۳),(۱,۴)\}$$

ب)

$$M_{RoS}=M_S \odot M_R=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$RoS=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۴)\}$$

ج)

$$M_{R^۲}=M_{RoR}=M_R \odot M_R=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$R^۲=\{(۱,۴),(۲,۴),(۴,۴)\}$$

د)

$$M_{R^3} = M_{R^2 o R} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$R^3 = \{(1,4),(2,4),(4,4)\}$$

هـ)

$$M_{S^2} = M_{SoS} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$S^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

و)

$$M_{S^3} = M_{S^2 o S} = M_{S^2} \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$S^3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

۳۹- فرض کنید که $A = \{1,2,3,4\}$ و $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ یک رابطه در A باشد . روابط S و T $(T \neq S)$ در A را به گونه‌ای پیدا کنید که

$$SoR = ToR = \{(1,1),(1,2),(1,4)\}$$

پاسخ :

$S = \{(1,1),(1,4),(2,2)\}$ و $T = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,4)\}$

۴۰- فرض کنیدکه $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴)\}$ یک رابطـه در A باشد . گراف سودار روابط زیر را رسم کنید :

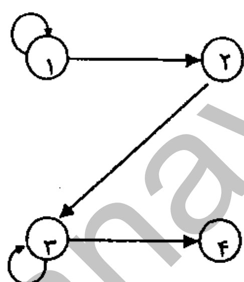
الف) R ب) $R^۲$ ج) $R^۳$ د) $R^۴$

پاسخ :

الف)

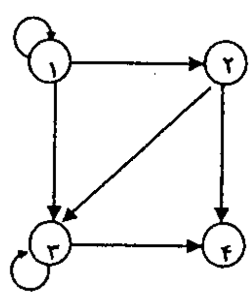
داریم :

$$M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$



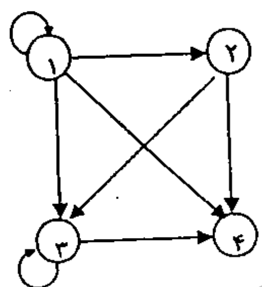
ب)

$$M_{R^۲} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$



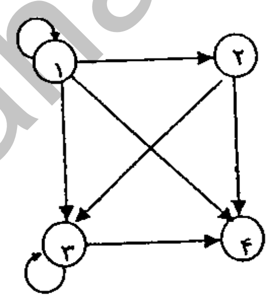
ج)

$$M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



د)

$$M_{R^4} = M_{R^3} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



۴۱- فرض کنید که R یک رابطهٔ بازتابی و متعدی در مجموعهٔ A باشد. نشان دهید که رابطهٔ S تعریف شده به وسیلهٔ: « xSy، اگر و تنها اگر xRy، yRx » یک رابطهٔ هم‌ارزی در A است.

پاسخ :

بازتابی : چون R بازتابی است پس بازای هر $x \in A$

$$xRx \quad \text{و} \quad xRx \Rightarrow xSx$$

پس S بازتابی است .

تقارن : فرض کنیم $x\,S\,y$ در اینصورت $x\,R\,y$ و $y\,R\,x$ به عبارتی $y\,R\,x$ و $x\,R\,y$ پس $y\,S\,x$، یعنی S متقارن نیز است .

تعدی : فرض کنیم $x\,S\,y$ و $y\,S\,z$ در اینصورت :

$$\begin{cases} y\,R\,x \text{ و } x\,R\,y \\ z\,R\,y \text{ و } y\,R\,z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\,R\,y \text{ و } y\,R\,z \\ z\,R\,y \text{ و } y\,R\,x \end{cases}$$

از اینکه R متعدی است از دستگاه اخیر بدست می‌آوریم :

$$z\,R\,x \text{ و } x\,R\,z$$

پس $x\,S\,z$ ، لذا S متعدی نیز می‌باشد . پس S، یک رابطه هم‌ارزی است.

۴۲- فرض کنید که R یک رابطهٔ تعریف شده در مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت باشد ، به گونه‌ای که $(a,b) \in R$ اگر a/b به صورت ۲^m بیان شود (m یک عدد صحیح دلخواه است).

(الف) نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است .

(ب) کلاس‌های هم‌ارزی R را به دست آورید .

پاسخ :

الف) بازتابی : بازای هر $a \in Z^+$ داریم :

$$\frac{a}{a} = ۱ = ۲^{\circ} \Rightarrow a\,R\,a$$

تقارن : اگر $a\ R\ b$ ، آنگاه عدد صحیحی مانند m وجود دارد به طوریکه

$$\frac{a}{b} = ۲^m \Rightarrow \frac{b}{a} = ۲^{-m} \Rightarrow b\,R\,a$$

تعدی : اگر $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$ آنگاه اعداد صحیح n,m وجود دارند به طوریکه

$$\frac{a}{b} = ۲^m \quad , \frac{b}{c} = ۲^n \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{۲^m}{۲^{-n}} = ۲^{m-n} \Rightarrow a\,R\,c$$

پس ، R یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد .

ب)

$$[۱] = \{۱,۲,۴,۸,...\} = \{۲^n \mid n \in N \cup \{۰\}\}$$
$$[۳] = \{۳,۶,۱۲,...\} = \{۳ \times ۲^n \mid n \in N \cup \{۰\}\}$$
$$[۵] = \{۵,۱۰,۲۰,...\} = \{۵ \times ۲^n \mid n \in N \cup \{۰\}\}$$
$$\vdots$$

بالاخره ، بازای هر عدد اول P، کلاس هم‌ارزی ،$[P]$ ، به صورت زیر است :

$$[P] = \{P \times ۲^n \mid n \in N \cup \{۰\}\}$$

۴۳- فرض کنید که R یک رابطهٔ متقارن و متعدی در مجموعهٔ A باشد. نشان دهید که اگر برای هر $a \in A$، عنصری مثل $b \in A$ موجود باشد به گونه‌ای که $(a,b) \in R$ در این صورت، R یک رابطهٔ هم‌ارزی است. نشان دهید که اگر به جای خاصیت متقارن، خاصیت بازتابی را جایگزین کنیم، نتیجه نادرست خواهد شد.

پاسخ :

کافی است نشان دهیم R با خاصیت داده شده بازتابی نیز می‌باشد. برای هر $a \in A$ بنا به فرض عنصری مانند $b \in A$ موجود است که $a\ R\ b$ چون R متقارن است پس $b\ R\ a$ و از اینکه R متعدی است: $a\ R\ a$. پس R یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

ثابت می‌کنیم اگر به جای خاصیت متقارن، خاصیت بازتابی را جایگزین کنیم، نتیجه نادرست خواهد بود. فرض کنیم A مجموعه اعداد طبیعی و R به صورت زیر تعریف شده است.

$aRb \Leftrightarrow a|b$ (b، a را عاد میکند.)

در این صورت R بازتابی و متعدی است و برای هر $a \in A$، عنصری مثل $b \in A$ (مثلاً $b=۲a$) موجود است که $a|b$، پس $a\ R\ b$. در حالیکه R متقارن نیست. زیرا مثلاً ۲ R ۴ ولی ۴ $\cancel{R}$ ۲. پس R، یک رابطه هم‌ارزی نیست.

۴۴- فرض کنید که R یک رابطهٔ بازتابی در A باشد. نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی در A است، اگر و تنها اگر، $(a,b) \in R$ و $(a,c) \in R$ نتیجهٔ $(b,c) \in R$ به دست آید.

پاسخ :

ثابت می‌کنیم با فرض داده شده R علاوه بر بازتابی بودن، متقارن و متعدی نیز می‌باشد.

تقارن: اگر $(a,b) \in R$ از اینکه R بازتابی است داریم $(a,a) \in R$، پس $(a,b) \in R$ و $(a,a) \in R$ لذا $(b,a) \in R$.

تعدی: اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ از اینکه R متقارن است بدست می‌آوریم $(b,a) \in R$. پس $(b,a) \in R$ و $(b,c) \in R$ بنابراین $(a,c) \in R$

بر عکس اگر R یک رابطه هم‌ارزی باشد آنگاه

$$(a,b) \in R \text{ و } (a,c) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \text{ و } (a,c) \in R$$
$$\Rightarrow (b,c) \in R$$

و اثبات تمام است.

۴۵- نشان دهید که روابط زیر که در $R\times R$ تعریف شده‌اند، (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است) روابط هم‌ارزی هستند. تعبیر هندسی کلاس‌های هم‌ارزی این روابط چیست؟

(الف) $(a,b)R(c,d)$ اگر و تنها اگر $a^2+b^2=c^2+d^2$.

(ب) $(a,b)S(c,d)$ اگر و تنها اگر $ab=cd$.

(ج) $(a,b)T(c,d)$ اگر و تنها اگر $a+b=c+d$.

پاسخ :

الف) داریم :

بازتابی :

$$(a,b)\in R\times R \Rightarrow a^2+b^2=a^2+b^2 \Rightarrow (a,b)\,R\,(a,b)$$

تقارن :

$$\begin{aligned}(a,b)R(c,d) &\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2\\ &\Rightarrow c^2+d^2=a^2+b^2\\ &\Rightarrow (c,d)R(a,b)\end{aligned}$$

تعدی :

$$\left.\begin{aligned}(a,b)R(c,d) &\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2\\ (c,d)R(e,f) &\Rightarrow c^2+d^2=e^2+f^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2+b^2=e^2+f^2 \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

پس، R یک رابطه هم‌ارزی است.

برای ارائه شهودی از کلاس‌های هم‌ارزی R، بازای یک زوج دلخواه مانند (a,b)، فرض کنید $a^2+b^2=r^2$، در این صورت $(a,b)\ R\ (c,d)$ اگر و تنها اگر

$$a^2+b^2=c^2+d^2 \Leftrightarrow c^2+d^2=r^2$$

یعنی، (c,d) در کلاس هم‌ارزی، $[(a,b)]$، قرار دارد اگر و تنها اگر (c,d) روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r قرار داشته باشد. بنابراین، کلاس‌های هم‌ارزی r، دایره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات می‌باشند.

ب) داریم :

بازتابی :

$$(a,b)\in R\times R \Rightarrow ab=ab \Rightarrow (a,b)S(a,b)$$

تقارن :

$$(a,b)S(c,d) \Rightarrow ab=cd \Rightarrow cd=ab \Rightarrow (c,d)S(a,b)$$

تعدی :

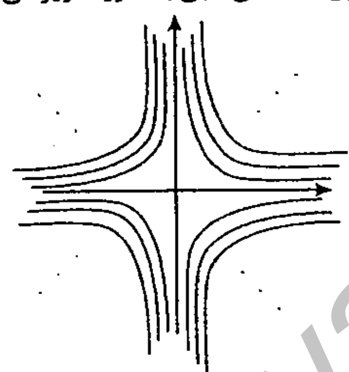
$$\left.\begin{aligned}(a,b)S(c,d) &\Rightarrow ab=cd\\ (c,d)S(e,f) &\Rightarrow cd=ef\end{aligned}\right\} \Rightarrow ab=ef \Rightarrow (a,b)S(e,f)$$

بنابراین، S یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

برای بدست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی S، زوج دلخواه (a,b) را در نظر بگیرید و قرار دهید $ab=r$، در این صورت $(a,b)\ S\ (c,d)$ اگر و تنها اگر

$$ab = cd \Leftrightarrow cd = r$$

بنابراین، کلاس‌های هم‌ارزی S منحنی‌هایی به صورت زیر می‌باشند.



ج)

بازتابی:

$$(a,b) \in R \times R \Rightarrow a + b = a + b \Rightarrow (a,b)\ T\ (a,b)$$

تقارن:

$$(a,b)\ T\ (c,d) \Rightarrow a + b = c + d \Rightarrow c + d = a + b \Rightarrow (c,d)\ T\ (a,b)$$

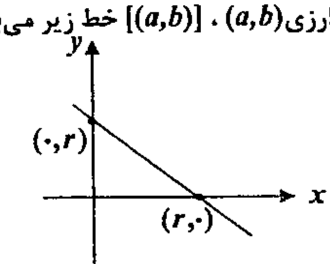
تعدی:

$$\begin{matrix} (a,b)T(c,d) \Rightarrow a + b = c + d \\ (c,d)T(e,f) \Rightarrow c + d = e + f \end{matrix} \Rightarrow a + b = e + f \Rightarrow (a,b)T(e,f)$$

برای بدست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی T، زوج دلخواه (a,b) را در نظر بگیرید و قرار دهید $a + b = r$. در این صورت $(a,b)T\ (x,y)$ اگر و تنها اگر

$$a + b = x + y \Leftrightarrow x + y = r$$

بنابراین کلاس هم‌ارزی (a,b)، $[(a,b)]$ خط زیر می‌باشد.



بنابراین، کلاس‌های هم‌ارزی T خطوط راست می‌باشد.

۴۶- فرض کنید که R رابطه‌ای در مجموعهٔ Z (اعداد صحیح) باشد که به صورت زیر تعریف شده است : $(a,b) \in R$، اگر و تنها اگر ، $a^2 - b^2$ مضربی از عدد ۲ باشد . کلاس‌های هم‌ارزی R را به دست آورید .

پاسخ :

برای $a \in Z$ (دلخواه اما ثابت) کلاس هم‌ارزی a را بدست می‌آوریم .

$$b \in [a] \Rightarrow a^2 - b^2 = 2k \quad , \; k \in Z$$
$$\Rightarrow b^2 = a^2 - 2k \quad , \; k \in Z$$

پس

$$[a] = \left\{ b \in Z \middle| b^2 = a^2 - 2k \; , k \in Z \right\}$$

مثلاً بازای $a = 2$ کلاس هم‌ارزی a، $[a]$ به صورت زیر خواهد بود .

$$[2] = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

و برای $a = 1$ ، کلاس هم‌ارزی a، $[a]$ به صورت زیر خواهد بود :

$$[1] = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

از اینکه $Z = [2] \cup [1]$ ، پس R دو کلاس هم‌ارزی دارد که عبارتند از $[1]$, $[2]$.

۴۷- فرض کنید که $A = R \times R$ و $P(x_0, y_0)$ یک نقطهٔ مفروض در A باشد . برای $a, b \in A$، رابطهٔ R در A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

aRb ، اگر و تنها اگر ، فواصل b,a از نقطهٔ P یکی باشد .

نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی در A است . کلاس‌های هم‌ارزی R دارای چه تعبیر هندسی هستند ؟

پاسخ :

نشان دادن هم‌ارزی بودن R ساده است . برای بدست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی R ، نقطه دلخواه (x_1, x_2) را در نظر می‌گیریم . فرض کنیم فاصله (x_1, x_2) از P ، برابر r باشد . برای هر نقطه از A مانند (x,y) ، (x,y) در کلاس هم‌ارزی (x_1, x_2) است اگر و تنها اگر فاصله (x,y) از P برابر r باشد . بنابراین کلاس هم‌ارزی (x_1, x_2) مکان هندسی نقاطی است که فاصله‌شان از P برابر r باشد . اما می‌دانیم این عبارت تعریف دایره به مرکز P و شعاع r است . بنابراین کلاس‌های هم‌ارزی R ، دایره‌هایی به مرکز P هستند .

۴۸- در یک جزیرهٔ دور افتاده ، سه ملوان کشتی شکسته ، برای تهیهٔ خوراک ، مقداری نارگیل تهیه می‌کنند . آنها تصمیم می‌گیرند تا شب استراحت کرده و صبح ، نارگیل‌ها را بین خود تقسیم کنند . نیمه‌های شب یکی از این سه ملوان از خواب بیدار شده و از روی بدگمانی ،

تصمیم می‌گیرد که نارگیل‌ها را قسمت کند. او سعی می‌کند که آنها را به سه قسمت مساوی تقسیم کند ولی متوجه می‌شود که یک نارگیل اضافه می‌ماند. بدون در نظر گرفتن نارگیل اضافی، سهم خود را در جایی مخفی می‌کند و مجدداً به خواب می‌رود. اندکی، بعد یکی دیگر از ملوانان از خواب بیدار شده و وی نیز در هنگام تقسیم نارگیل‌های باقیمانده به سه قسمت مساوی، متوجه می‌شود که یکی از آنها اضافه می‌ماند. وی بدون در نظر گرفتن نارگیل اضافه، سهم خود را در گوشه‌ای پنهان کرده و مجدداً می‌خوابد. بالاخره، ملوان سوم، این فرآیند را تکرار و او نیز متوجه می‌شود که با کنار گذاشتن یکی از نارگیل‌های باقیمانده می‌تواند آنها را به سه سهم مساوی تقسیم کند. حال شما بگویید که کمترین تعداد نارگیل‌های اولیه چند تا بوده است؟

پاسخ :

فرض کنیم x تعداد کل نارگیل باشد. نفر اول نارگیل اضافی را کنار گذاشته مابقی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده سهم خود را برمی‌دارد. بنابراین نفر اول $\frac{x-1}{3}$ از نارگیل‌ها را برمی‌دارد. بنابراین تعداد نارگیل‌های باقیمانده برابر است با:

$$x-\frac{x-1}{3}=\frac{2x+1}{3}$$

نفر دوم نیز از میان $\frac{2x+1}{3}$ نارگیل باقیمانده یک نارگیل را کنار گذاشته بقیه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده سهم خود را برمی‌دارد. بنابراین نفر دوم نیز $\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}$ تا از نارگیل‌ها را برمی‌دارد. پس در نهایت تعداد نارگیل‌های باقیمانده برابر خواهد بود با:

$$\frac{2x+1}{3}-\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}=\frac{4x+5}{9}$$

حال نفر سوم از خواب بیدار شده مانند قبل نارگیل‌ها را تقسیم می‌کند. تعداد نارگیلی که نفر سوم برمی‌دارد. برابر است با:

$$\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}=\frac{4x-4}{27}$$

حال، کمترین مقدار x زمانی به دست می‌آید که کمترین تعداد ممکن نارگیل به نفر سوم برسد.

به عبارتی ، کمترین مقدار x زمانی به دست می‌آید که عبارت $\frac{۴x-۴}{۲۷}$ یک عدد طبیعی باشد .

$$\frac{۴x-۴}{۲۷}=۱ \Rightarrow x=\frac{۳۱}{۴}=۷/۷۵$$
$$\frac{۴x-۴}{۲۷}=۲ \Rightarrow x=\frac{۵۸}{۴}=۱۴/۵$$
$$\frac{۴x-۴}{۲۷}=۳ \Rightarrow x=\frac{۸۵}{۴}=۲۱/۲۵$$
$$\frac{۴x-۴}{۲۷}=۴ \Rightarrow x=\frac{۱۱۲}{۴}=۲۸$$

بنابراین کمترین عدد قابل قبول ، $x=۲۸$ می‌باشد.

۴۹- تمرین ۴۸ را با ۴ ملوان حل کنید.

پاسخ :

برای نشان دادن راه حل‌های دیگر مساله ، این بار مساله را با یک روش دیگر حل می‌کنیم .

با توجه به فرضهای مساله در هر مرحله داریم :

تعداد نارگیل در مرحله i ام $= ۴K_i+۱ \quad i=۱,۲,۳,۴ \quad , K_i>۰$

همچنین ، با توجه به اینکه نفر اول، در مرحله اول $K_۱$ تا از نارگیل‌ها را برمی‌دارد .
بنابراین ، تعداد نارگیل باقیمانده برای مرحله دوم برابر است با $۳K_۱+۱$ بنابراین

$$۳K_۱+۱=۴K_۲+۱$$

به همین ترتیب روابط زیر را داریم :

$$\begin{matrix} ۳K_۱+۱=۴K_۲+۱ \\ ۳K_۲+۱=۴K_۳+۱ \\ ۳K_۳+۱=۴K_۴+۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} K_۱=\frac{۴}{۳}K_۲ \\ K_۲=\frac{۴}{۳}K_۳ \\ K_۳=\frac{۴}{۳}K_۴ \end{cases}$$

با جایگذاری $K_۳$ از رابطه آخر در رابطه دوم خواهیم داشت :

$$K_۲=\frac{۱۶}{۹}K_۴$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه اول نیز بدست می‌آوریم :

$$K_۱ = \frac{۶۴}{۲۷} K_۴$$

کمترین مقدار ممکن برای $K_۴$ به طوریکه $K_۱$ یک عدد طبیعی باشد برابر است با $K_۴ = ۲۷$ که در این صورت از رابطه بدست آمده خواهیم داشت :

$$K_۱ = ۶۴ \quad , \quad K_۲ = ۴۸ \quad , \quad K_۳ = ۳۶ \quad , \quad K_۴ = ۲۷$$

که در این صورت تعداد کل نارگیل‌ها برابر خواهند بود با :

$$x = ۴K_۱ + ۱ = ۲۵۷$$

۵۰- تمرین ۴۸ را با ۵ ملوان حل کنید.

پاسخ :

با روشی مانند تمرین ۴۹ بدست می‌آوریم :

تعداد کل نارگیل‌ها $= ۵K_۱ + ۱ = ۵ \times ۶۲۵ + ۱ = ۳۱۲۶$

تذکر : به استقرا می‌توان ثابت کرد مساله داده شده با n ملوان دارای جواب زیر است :

تعداد حداقل نارگیل‌ها $= n^n + ۱$