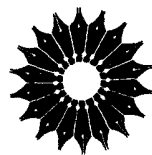


توپولوژی

کلاؤس ینیش

ترجمہ ارسلان شادمان



توپولوژی

کلاؤس ینیش

ترجمهٔ ارسلان شادمان



Topology
Klaus Jänich
Springer-Verlag, 1984

توپولوژی
تألیف کلاؤس ینیش
ترجمهٔ دکتر ارسلان شادمان
و پراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعپها
نسخه پرداز: سیدسیاوش شایگانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۶
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی (آزاده ابری)
چاپ و صحافی: محمد
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

Jänich, Klaus	ینیش، کلاؤس
توپولوژی / تألیف کلاؤس ینیش؛ ترجمهٔ ارسلان شادمان - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.	
شش، ۲۵۲ ص.: مصور، جدول، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۸۳۸، ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۱۰۵).	
ISBN 964-01-0838-3	
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرستنویسی پیش از انتشار)	
Topologie = Topology	عنوان اصلی:
	واژنامه.
	کتابنامه: ص. ۲۲۵-۲۲۶.
	۱. توپولوژی. الف. شادمان، ارسلان، ۱۳۱۷ - مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی.
	ج. عنوان.
۵۱۴	QA ۶۱۱ ی ۲ ۹
	۱۳۷۶
۱۲۹۳ - ۷۶ م	کتابخانهٔ ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار مؤلف بر چاپ انگلیسی کتاب
۳	مقدمه
۳	۱. توپولوژی نقطه - مجموعه چه می‌خواهد بگوید؟
۵	۲. منشأ و آغاز
۹	۱ مفاهیم بنیادی
۹	۱. مفهوم فضای توپولوژیک
۱۲	۲. فضاهاى مترى
۱۵	۳. زیرفضاها، اجتماعهای جدا از هم و حاصلضربها
۱۸	۴. پایه‌ها و زیرپایه‌ها
۱۹	۵. نگاشتهای پیوسته
۲۱	۶. همبندی

۷. اصل موضوع جداسازی هائوسدورف

۲۴

۸. فشردگی

۲۶

۲ فضاهای برداری توپولوژیک

۳۴

۱. مفهوم فضای برداری توپولوژیک

۳۵

۲. فضاهای برداری متناهی - بعد

۳۶

۳. فضاهای هیلبرت

۳۶

۴. فضاهای باناخ

۳۷

۵. فضاهای فرشه

۳۸

۶. فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب

۴۰

۷. چند مثال

۴۱

۳ توپولوژی خارج قسمت

۴۳

۱. مفهوم فضای خارج قسمت

۴۳

۲. فضاهای خارج قسمت و نگاشتها

۴۵

۳. ویژگیهای فضاهای خارج قسمت

۴۶

۴. چند مثال: فضاهای همگن

۴۷

۵. چند مثال: فضاهای مداری

۵۰

۶. چند مثال: فروریزی یک زیرفضا به یک نقطه

۵۴

۷. چند مثال: چسباندن فضاهای توپولوژیک به یکدیگر

۵۸

۴ تکمیل فضاهای متری

۶۷

۱. تکمیل یک فضای متری

۶۷

۲. تکمیل یک نگاشت

۷۲

۳. تکمیل فضاهای ژرمردار

۷۴

۵ مانسته جایی (هوموتوپی)

۷۸

۱. نگاشتهای مانسته جا (هوموتوپ)

۷۸

۸۱	۲. هم‌ارزی مانسته‌جایی
۸۳	۳. مثالها
۸۶	۴. رسته‌ها
۹۰	۵. تابع‌گونه‌ها
۹۳	۶. توپولوژی جبری چیست؟
۹۷	۷. مانسته‌جایی - به چه درد می‌خورد؟
۱۰۲	۶ دو اصل موضوع شمارایی
۱۰۲	۱. اصلهای موضوع اول و دوم شمارایی
۱۰۴	۲. حاصلضربهای نامتناهی
۱۰۷	۳. نقش اصلهای موضوع شمارایی
	۷ مجتمعهای ضعیف - توپولوژی متناهی - بستر
	(یا مجتمعهای CW)
۱۱۵	۱. مجتمعهای سادگی
۱۱۵	۲. تجزیه‌های حجره‌یی
۱۲۲	۳. مفهوم یک مجتمع ضعیف - توپولوژی متناهی - بستر
۱۲۵	۴. زیرمجتمعه‌ها
۱۲۸	۵. حجره چسبانی
۱۳۰	۶. چرا مجتمعهای $\mathcal{C}W$ انعطاف‌پذیرترند؟
۱۳۲	۷. آری، اما...؟
۱۳۴	
	۸ ساختن توابع پیوسته روی فضا‌های توپولوژیک
۱۳۸	۱. لم اوریسون
۱۳۸	۲. برهان لم اوریسون
۱۴۴	۳. لم توسیع تیتسه
۱۴۷	۴. افزایشهای واحد و مقطعهای کلاف برداری
۱۵۰	

۵. پیرافشردگی

۱۵۸

۹ فضاهای پوششی

۱۶۳

۱. فضاهای توپولوژیک بالای X

۱۶۳

۲. مفهوم فضای پوششی

۱۶۷

۳. بالابری راه

۱۷۰

۴. آشنایی با رده‌بندی فضاهای پوششی

۱۷۶

۵. گروه بنیادی و رفتار بالابری

۱۸۰

۶. رده‌بندی فضاهای پوششی

۱۸۴

۷. تبدیلات پوششی و پوشش عام

۱۹۱

۸. نقش فضاهای پوششی در ریاضیات

۱۹۹

۱۰ قضیه تیخونوف

۲۰۴

۱. یک قضیه نامحتمل؟

۲۰۴

۲. فایده آن چیست؟

۲۰۷

۳. برهان

۲۱۳

فصل آخر نظریه مجموعه‌ها

۲۱۸

مراجع

۲۲۶

فهرست نمادها

۲۲۷

نمایه

۲۳۰

پیشگفتار مؤلف بر چاپ انگلیسی کتاب

این مجلد شامل تقریباً مقداری از توپولوژی نقطه مجموعه است که دانستن آن برای یک دانشجو ضروری است و لو اینکه منظورش تخصص در این زمینه نباشد. مطالب آن، بخش کوچکی از تمامی موضوع است که اگر به شکل فشرده نوشته می‌شد، احتمالاً به صورت جزوه کوچکی در می‌آمد. اما، باید بدانید که هدف ما صرفه‌جویی در گفتار و کاستن حجم کتاب نبوده است، بلکه ارائه تصویری زنده از مفاهیم و اندیشه‌های موجود با استمداد از شهود خواننده، چه در استنباط مستقیم و چه در ادراک دقیق و عمیق این مفاهیم بوده است.

می‌خواهم از همه کسانی که با اظهار نظر سودمند خویش، درباره چاپ آلمانی کتاب، و دستویس اولیه آن، مرا یاری نموده‌اند، به‌ویژه، ازی. بینگنر^۱، گی هیرش^۲، و ب. ساگرالوف^۳ سپاسگزاری کنم. از تئودور بروکر^۴، به‌خاطر اهدای فصل آخر «نظریه مجموعه‌ها»، و افزودن آن به کتابم، و سرانجام از سیلویولی^۵، مترجم کتاب از آلمانی به انگلیسی، متشکرم. معمولاً، مؤلفی که اثرش به زبان خارجی ترجمه شده است، صلاحیت داوری درباره اعتبار آن ترجمه را ندارد. اما، دست‌کم می‌توان به او اجازه داد که بگوید: آن را می‌پسندم.

رگنزبورگ^۶، مه ۱۹۸۳

کلاوس ینیش^۷

1. J. Bingener

2. Guy Hirsch

3. B. Sagraloff

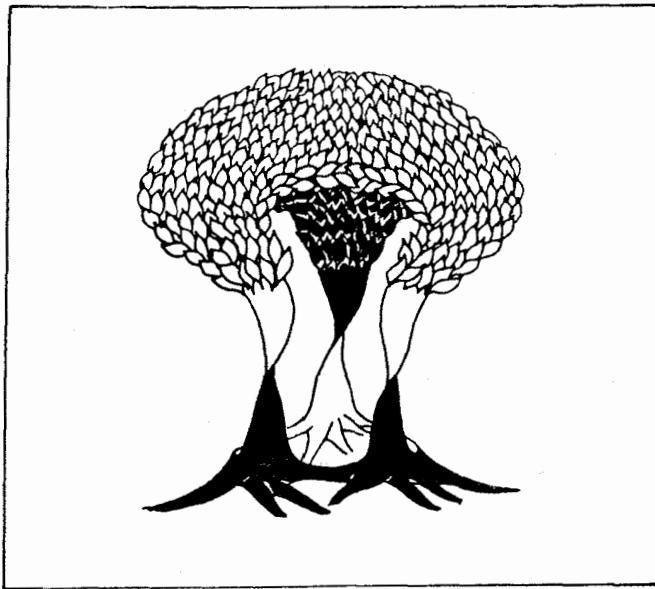
4. Theodor Bröker

5. Silvio Levy

6. Regensburg

7. Klaus Jänich

مقدمه

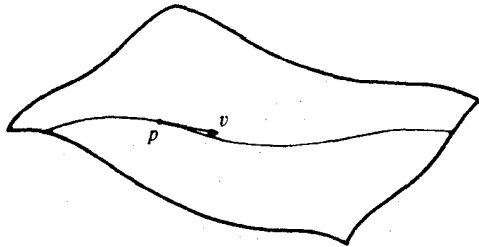


۱. توپولوژی نقطه - مجموعه چه می خواهد بگوید؟

یکی از مشخصات دانش نوین را، گاهی سطح تخصصی شدن خیلی زیاد - و روزافزون - آن می شمارند. همه ما عبارت «فقط مشتی متخصص ...» را شنیده ایم. اما، یک حکم کلی درباره پدیده پیچیده ای مانند «دانش نوین»، همواره اقبال آن را دارد که جزئی از حقیقت را در برگیرد، ولی در مورد جمله کلیشه ای

بالا درباره تخصصی شدن، این مقدار حقیقت تاحدی اندک است. شاید بهتر باشد که این نشانه دانش جدید را، تداخل زیاد و روزافزون نظامهایی بدانیم که قبلاً به عنوان زمینه‌هایی جدا از هم منظور می‌شدند. مثلاً آنچه را که امروزه باید یک متخصص نظریه اعداد و یک متخصص هندسه دیفرانسیل مشترکاً بدانند، حتی اگر نسبی هم بگیریم، خیلی بیش از آن است که لازمه پنجاه یا صد سال پیش بوده است. این تداخل رشته‌ها، ثمره این واقعیت است که رشد علمی، شباهتهای نهفته‌ای را پیوسته یکی پس از دیگری آشکار می‌سازد که استفاده بعدی از آنها، رشد فکری عظیمی را پدید می‌آورد و موجب می‌شود که نظریه مبتنی بر آنها خیلی زود به همه زمینه‌های درگیر راه یابد و آنها را به هم پیوند دهد. توپولوژی نقطه - مجموعه، دقیقاً یک چنین نظریه به اصطلاح پایه - شباهتی است که هر چه را که به طور کلی بتوان درباره مفاهیم مربوط به «نزدیکی»، «همسایگی»، و «همگرایی» گفت، در بر می‌گیرد ولو اینکه اغلب با مسامحه و عاری از دقت باشد.

قضایای یک نظریه، می‌توانند ابزارهای نظریه دیگری باشند. مثلاً هنگامی که یک متخصص هندسه دیفرانسیل (به عنوان کار هر روزه‌اش) از این واقعیت استفاده می‌کند که، از هر نقطه و برای هر امتداد، یک



و تنها یک ژودزیک می‌گذرد، او دارد از قضیه وجود و یکتایی برای دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، استفاده می‌کند. اما، از سوی دیگر، موارد استعمال روزمره توپولوژی نقطه - مجموعه در زمینه‌های دیگر، نه بر قضایای خیلی ریشه‌دار آن، بلکه بر نیروی وحدت‌بخش و ساده‌ساز دستگاه مفاهیم توپولوژی، و مجموعه اصطلاحاتی استوار است که در این رشته ماهرانه انتخاب شده است. برداشت من این است که این توان، از این سرچشمه بسیار خاص که: توپولوژی نقطه مجموعه، تعداد فراوانی از مسائل کاملاً انتزاعی و اساساً غیر حسی درباره فضا را در دسترس تصورات ما قرار می‌دهد، نشأت می‌گیرد. موارد بسیاری در توپولوژی نقطه - مجموعه را می‌توان به روشی کاملاً مناسب در فضای فیزیکی معمولی مجسم کرد، حتی هنگامی که آنها عملاً در فضای فیزیکی رخ ندهند. تصور ما درباره فضا، که بدین ترتیب برای استدلال ریاضی درباره اشیاء مجرد بسیج می‌شود، نیروی ذهنی بسیار تکامل یافته‌ای است که از تفکر انتزاعی و منطقی مامستقل است. و این نیرو که قدرت بخش استعدادهای دیگر ریاضی ماست، دلیل بنیادی کارایی و سادگی روشهای توپولوژیک به شمار می‌آید.

۲. منشأ و آغاز

پیدایش مفاهیم بنیادی ریاضی، تقریباً همیشه، فرایندی دراز مدت و پیچیده بوده است. به طور قطع می‌توان بر یک مورد خاص و یک لحظه معین تاریخ، انگشت گذاشت و چنین گفت: آن طوری که امروزه دریافته‌اند، این مفهوم در این زمان، برای بار نخست، به شکل روشن و قاطع تعریف شده، و از این زمان به بعد «وجود دارد» - اما، تا آن موقع، این مفهوم، مراحل مقدماتی چندی را پشت سر گذاشته بوده، و حالات ویژه و مهم آن شناخته شده، و صورت‌های گوناگونی از آن بررسی و احیاناً به دور انداخته شده بوده است، و...؛ و غالباً دشوار و گاهی غیرممکن است به درستی تعیین کرد که کدام ریاضیدان سهم قاطعی در پیشبرد آن داشته و باید به عنوان بنیانگذار این مفهوم به شمار آید.

با این مقدمات، می‌توان گفت که دستگاه مفاهیم توپولوژی نقطه - مجموعه، از زمان انتشار «مبانی نظریه مجموعه‌ها»^۱ی فلیکس هاوسدورف^۲، (لایپتسیک، ۱۹۱۴)، «وجود دارد». در فصل هفتم کتاب فوق، «مجموعه‌های نقاط در فضاها کلی»، بنیادین‌ترین مفاهیم توپولوژی نقطه - مجموعه، تعریف شده‌اند. پیش از او، موریس فرشه^۳ در مقاله‌ای تحت عنوان «نکاتی از حساب تابعی»^۴، که در مجلد ۲۲ مجله ایتالیایی (گزارش محفل ریاضی پالمو)^۵، منتشر نموده، با وارد کردن مفاهیم فضاها متری و نیز سعی در به دست دادن تعریف فضاها توپولوژیک (با بیان مفهوم همگرایی به روش اصل موضوعی)، به این نکته نزدیک شده بوده است. فرشه، نخست به فضاها تابعی توجه داشته، و شاید بتوان او را بنیانگذار شاخهٔ آنالیز تابعی در توپولوژی نقطه - مجموعه به حساب آورد.

اما، ریشه‌های این موضوع، بدون شک عمیقتر از اینهاست. توپولوژی نقطه - مجموعه نیز، مانند بسیاری از شاخه‌های دیگر ریاضیات، بتدریج از تغییرات انقلابی مفهوم هندسه در طول قرن نوزدهم سر برآورد. در ابتدای این قرن، دیدگاه حاکم، همان دیدگاه کلاسیک بود که بر مبنای آن هندسه به صورت نظریه فضای فیزیکی پیرامون ما مطرح می‌شد و اصول موضوعهٔ آن به عنوان واقعیه‌های اولیهٔ بنفسه بدیهی، نگر بسته می‌شدند. در پایان قرن، ریاضیدانان خود را از تنگنای این برداشت‌هایی بخشیدند، و به خوبی روشن شد که از این پس، هندسه باید در پی هدفهای بسیار وسیعتری باشد، و (مانند بویوتی^۶، لباچفسکی^۷، ریمان^۸، پوانکاره^۹، و غیره - من در موقعیتی نیستم که بخواهم جریان این تکامل را در اینجا ترسیم کنم...) هندسه‌دانان باید به فضاها مجرد، از قبیل خمینه‌های n بعدی^{۱۰}، فضاها تصویری، رویه‌های ریمان، فضاها تابعی و غیره، بپردازند. اما، اکنون لازم است که سهم برجستهٔ یکی دیگر از ابداعات قرن نوزدهم در پیدایش توپولوژی نقطه - مجموعه، یعنی کار کانتور را به فهرست این

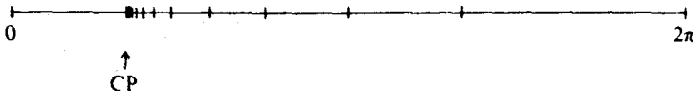
1. Grundzüge der Mengenlehre 2. Felix Hausdorff 3. Maurice Fréchet
 4. Sur quelques points du calcul fonctionnel 5. Rend. Circ. Mat. Palermo
 6. Bolyai 7. Lobachevski 8. Riemann 9. Poincaré
 10. n - dimensional manifolds

نمونه‌های غنی و متنوع بیفزاییم، مساهمتی که در کار با فضاهاى مجرد کاملاً جای خود را باز کرده و از اهمیت زیاد برخوردار است. هاسدورف کتابش را با این مضمون به کانتور اهدا می‌کند: «تقدیم به خالق نظریه مجموعه‌ها، گئورگ کانتور^۱، با تحسین توأم با سپاس».

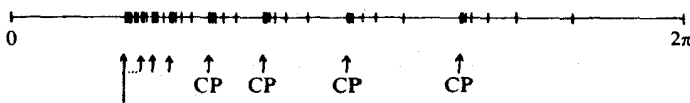
«یک فضای توپولوژیک، زوجی است متشکل از یک مجموعه و مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌هایش به گونه‌ای که ...». بنابراین، آشکارا دیده می‌شود که بدون ورود مجموعه‌های مجرد به دنیای ریاضیات، که گسترش آن را مدیون کانتور هستیم، مفهوم فضای توپولوژیک را هیچ‌گاه نمی‌توانستیم با این کلیت دریابیم. اما، خیلی پیش از آنکه کانتور نظریه مجموعه‌های ترامتاهی^۲ خود را عرضه کند، در تکوین نقطه - مجموعه، راه کاملاً متفاوتی را پیموده بوده، که مايلم راجع به آن نکاتی را بیفزایم.

در ۱۸۷۰، کانتور نشان داده بود که اگر دوسری فوریه^۳، نقطه به نقطه، به یک تابع حدی همگرا باشند، ضرایب فوریه آنها یکی خواهد بود. در ۱۸۷۱، وی این قضیه را بهبود بخشید، بدین ترتیب که ثابت کرد که وقتی همگرایی و برابری حدود، در همه نقاط جز در یک مجموعه متناهی استثنایی $A \subset [0, 2\pi]$ برقرار باشد، باز هم برابری ضرایب فوریه صادق است. در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۲، کانتور به مسأله تعیین همه مجموعه‌های استثنایی نامتناهی که این یکتایی (یعنی برابری ضرایب سریها) برای آنها برقرار است، پرداخت.

البته، یک زیرمجموعه نامتناهی از $[0, 2\pi]$ ، باید دست‌کم یک نقطه انباشتگی^۴ داشته باشد: در این



شکل، یک نمونه به اصطلاح خیلی «طبیعی» از یک زیرمجموعه نامتناهی از $[0, 2\pi]$ دیده می‌شود. یک مجموعه «دور از ذهن‌تر»، می‌تواند چنان مجموعه‌ای باشد که نقاط انباشتگی‌اش خود یک نقطه انباشتگی داشته باشند:



نقطه انباشتگی نقاط انباشتگی

در این مورد، کانتور ثابت کرد که اگر دنباله زیرمجموعه‌های $[0, 2\pi]$ به روش استقرایی توسط:

$$A^0 = A$$

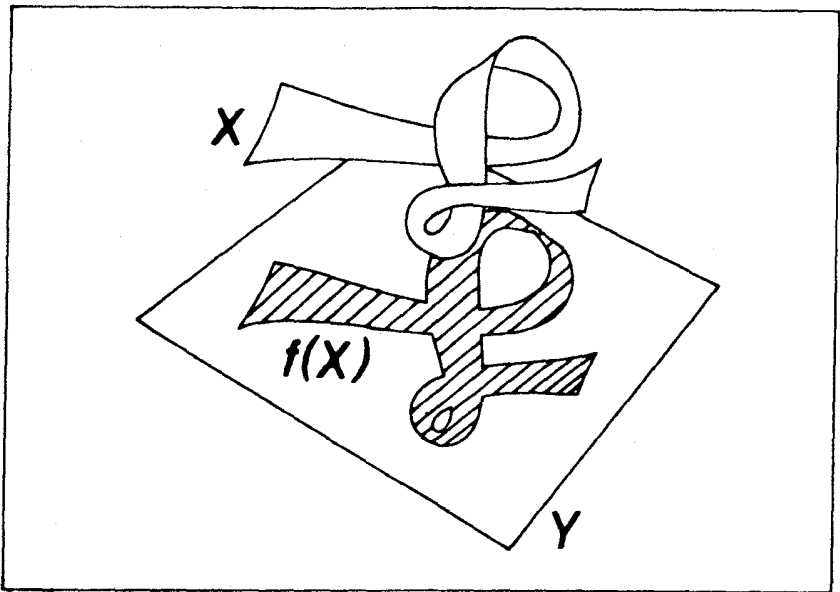
$$A^{n+1} = \{x \in [0, 2\pi] \mid \text{است } A^n \text{ یک نقطه انباشتگی}\}$$

تعریف شود، و هرگاه این دنباله پس از چند جمله قطع شود، یعنی سرانجام، به ازای عدد طبیعی مناسبی چون k ، تساوی $A^k = \emptyset$ برقرار باشد، آنگاه ویژگی یکتایی برای چنین مجموعه استثنایی A ، برقرار است. به ویژه، اگر f تابع غیر ثابتی باشد که در خارج چنین مجموعه ای صفر شود، نمی توان آن را با سری فوریه نمایش داد. این نتیجه، به ماکمک می کند تا به رفتار شگفت انگیز سری فوریه، و نشأت گرفتن انگیزه کانتور، از آنالیز کلاسیک و بالمآل از فیزیک در ابداع نظریه مجموعه ها، پی بریم. اما، به برکت این دریافت، کانتور به کشف نوع جدیدی از زیرمجموعه های $A \subset \mathbb{R}$ راه یافت، که می توان آن را به کلی مرموز تلقی کرد، خصوصاً هنگامی که مدّت زیادی طول می کشد تا دنباله A ، A^1 ، A^2 ، ... قطع شود. از این پس، زیرمجموعه های \mathbb{R} ، مانند موجوداتی که باید به خودی خود موضوع مطالعه قرار گیرند، پا به عرصه وجود می نهند. از آن مهمتر این که، این مجموعه ها باید، به بیان امروزی، از دیدگاه توپولوژی بررسی شوند. کانتور در این مسیر به کارهایش ادامه داد و پس از مدتی، هنگامی که مجموعه های نقاط \mathbb{R} و \mathbb{R}^n را به شکل کلی مطالعه می کرد، دیدگاه توپولوژی نقطه - مجموعه را وارد کرد، که اکنون هاوسدورف می توانست بنای خود را بر پایه آن بسازد.

*

من نمی خواهم این احساس را به وجود آورم که کانتور، فرشه و هاوسدورف، تنها ریاضیدانانی بودند که، درگسترش و روشن کردن مفاهیم بنیادی توپولوژی نقطه - مجموعه، سهمیم بوده اند. بحث مفصلتر و شرح جزئیات بیشتر در این موضوع، بیرون از ظرفیت این کتاب است. من تنها می خواستم یکی دو چشمه ساده ولی روشن از آغاز پیدایش نظریه مورد بحث این کتاب را، به گونه ای سطحی و به اختصار، ذکر کرده باشم.

مفاهیم بنیادی



۱. مفهوم فضای توپولوژیک

تعریف. هر فضای توپولوژیک عبارت است از یک زوج (X, \mathcal{O}) متشکل از یک مجموعه X و یک

مجموعه \mathcal{O} از زیرمجموعه‌های X (به نام «مجموعه‌های باز»)^۱، به گونه‌ای که اصول موضوع زیر برقرارند:

اصل ۱. هر اجتماعی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای است باز.

اصل ۲. اشتراک هر دو مجموعه باز، مجموعه‌ای است باز.

اصل ۳. مجموعه‌های \emptyset و X بازند.

در تعریف فوق، \mathcal{O} توپولوژی^۲ فضای توپولوژیک (X, \mathcal{O}) نیز نامیده می‌شود. معمولاً، در قرارداد فوق، نماد توپولوژی را حذف نموده و فقط از یک فضای توپولوژیک X سخن به میان می‌آورند، همان کاری را که از این پس ما خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(۱) زیرمجموعه $A \subset X$ را بسته^۳ می‌گوییم هرگاه $X \setminus A$ باز باشد.

(۲) زیرمجموعه $U \subset X$ را یک همسایگی^۴ نقطه $x \in X$ می‌گوییم، هرگاه یک مجموعه باز V موجود باشد به گونه‌ای که $x \in V \subset U$.

(۳) فرض کنیم $B \subset X$ زیرمجموعه دلخواهی باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه درونی^۵ یا بیرونی^۶ مجموعه B می‌نامیم هرگاه، به ترتیب B یا $X \setminus B$ یک همسایگی نقطه x باشند؛ و آن را نقطه مرزی^۷ مجموعه B می‌خوانیم هرگاه نه B و نه $X \setminus B$ هیچ‌کدام یک همسایگی x نباشند.

(۴) مجموعه \hat{B} متشکل از همه نقاط درونی مجموعه B را درون^۸ B می‌نامیم.

(۵) مجموعه \bar{B} متشکل از همه نقاط X را که نقطه‌های بیرونی B نیستند، بستار^۹ B می‌نامیم.

این مفاهیم، مفاهیم اساسی توپولوژی نقطه - مجموعه هستند. خواننده‌ای که برای نخستین بار با آنها برخورد می‌کند، باید برای آشنایی و تسلط بر آنها، اندکی تمرین کند. یک بار که در توپینگن^{۱۰} هنوز دانشجو بودم، یکی از کسانانی بودم که بایستی اوراق دانشجویان را تصحیح می‌کردم و به آنها نمره می‌دادم. مسائل مربوط به تمرینهایی بودند که پس از درس استاد راجع به همین مفاهیم بنیادی، بی‌درنگ به دانشجویان واگذار شده بود. در خود درس، ثابت شده بود که یک مجموعه باز است اگر، و تنها اگر، همه نقاط آن درونی باشند. یکی از تمرینها چیزی بدین مضمون بود: نشان دهید که مجموعه نقاط درونی یک مجموعه، همواره مجموعه‌ای است باز. یکی از دانشجویان مراجعه کرد و از ما پرسید که چرا استدلال او را نپذیرفته‌ایم. استدلال او چنین بود: «مجموعه نقاط درونی، فقط شامل نقاط درونی است (یک

1. open sets 2. topology 3. closed 4. neighborhood
5. interior point 6. exterior point 7. boundary point 8. interior
9. closure 10. Tübingen

تکرار معلوم بی چون و چرا؛ بنابراین، مسأله بدیهی است». یکی دو مصحح دیگر هم حضور داشتند. همه، با حرارت تمام، سعی کردیم این دانشجورا قانع کنیم که، وقتی از نقاط درونی صحبت می‌کنید، باید تصریح کنید که آنها نقاط درونی کدام مجموعه‌اند: اما فایده نداشت. وقتی دریافت که ما چه می‌خواهیم بگوییم، درحالی‌که به آرامی می‌گفت که ما مته به خشخاش گذارده‌ایم، دست از سر ما برداشت. چه جوابی داشتیم به او بدهیم؟

بنابراین، چنانچه در میان خوانندگان کتابم، افرادی هستند که در این رشته کاملاً تازه واردند، به آنها توصیه می‌کنم هم اکنون تحقیق کنند که: درون یک مجموعه B ، اجتماع همهٔ مجموعه‌های بازی است که مشمول B هستند، و بستار B اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل B است. به عنوان غذای فکری برای یک بعد از ظهر آرام، بگذارید ملاحظات زیر را نیز بیفزایم.

هر یک از سه مفهومی که با استفاده از مجموعه‌های باز تعریف کردیم، یعنی «مجموعه‌های بسته»، «همسایگیها» و «بستار» می‌تواند باز بودن یک مجموعه را مشخص کند. در واقع، یک مجموعه $B \subset X$ باز است اگر، و تنها اگر $X \setminus B$ بسته باشد، و یا اگر، و تنها اگر، B همسایگی هر یک از نقاط خود باشد، و یا اگر، و تنها اگر، $X \setminus B$ برابر با بستار خودش باشد. بنابراین، دستگاه اصول موضوعهٔ معرف یک فضای توپولوژیک، باید بر حسب هر یک از مفاهیم فوق نیز، قابل بیان باشد، مثلاً:

تعریف دیگری از فضاهای توپولوژیک (اصول مجموعه‌های بسته). یک فضای توپولوژیک عبارت است از یک زوج (X, \mathcal{A}) (مشکل از یک مجموعه X و یک مجموعه \mathcal{A} از زیر مجموعه‌های X (به نام «مجموعه‌های بسته»)) به گونه‌ای که اصول زیر برقرارند:

- A۱. هر اشتراک مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای است بسته.
- A۲. اجتماع هر دو مجموعهٔ بسته، مجموعه‌ای است بسته.
- A۳. مجموعه‌های X و \emptyset بسته‌اند.

این تعریف جدید با تعریف پیشین هم ارز است، زیرا (X, \mathcal{O}) یک فضای توپولوژیک به معنی تعریف پیشین است، اگر و تنها اگر، (X, \mathcal{A}) یک فضای توپولوژیک به معنی تعریف جدید باشد، به شرط آنکه قرار دهیم $\mathcal{A} = \{X \setminus V \mid V \in \mathcal{O}\}$. چنانچه تعریف دوم را نخست مطرح می‌کردیم، بسته بودن به عنوان مفهوم اولیه مطرح می‌شد و باز بودن از این تعریف که $X \setminus V$ باز است اگر و فقط اگر $V \subset X$ بسته باشد، نتیجه می‌شد. اما، تعریف مفاهیم (۲) تا (۵)، تغییر نمی‌کرد و دستگاه مفاهیمی که در پی آن می‌آمد، همان می‌شد که در آغاز آورده بودیم. چنین متداول شده است که توپولوژی را با مجموعه‌های باز آغاز می‌کنند، اما مفهوم همسایگی محسوستر به نظر می‌رسد و بر همین مبنا بود که

هاوسدورف این مفاهیم را در آغاز تعریف کرده بود.

تعریفی دیگر (اصول همسایگی). یک فضای توپولوژیک عبارت است از یک زوج (X, \mathfrak{A}) متشکل از یک مجموعه X و یک خانواده $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_x\}_{x \in X}$ که مجموعه های \mathfrak{A}_x زیرمجموعه های X (به نام «همسایگیهای x ») هستند، به گونه ای که:

N۱. هر همسایگی x شامل x است، و X همسایگی هر یک از نقاط خودش است.

N۲. اگر $V \subset X$ شامل یک همسایگی نقطه x باشد، خود V یک همسایگی x است.

N۳. اشتراک هر دو همسایگی نقطه x ، یک همسایگی نقطه x است.

N۴. هر همسایگی نقطه x شامل یک همسایگی نقطه x است که یک همسایگی هر یک از نقاط

خودش نیز هست.

دیده می شود که بیان توپولوژی برحسب این اصول، اندکی پیچیده تر از بیان آن توسط مجموعه های باز است. اما، مشخص کردن توپولوژی به کمک عمل بستار، از ظرافت خاصی برخوردار است، و اصول آن اصول بستار نام دارد:

تعریفی دیگر (اصولهای موضوع بستار کوراتوفسکی^۱). یک فضای توپولوژیک عبارت است از زوجی مانند $(X, -)$ متشکل از یک مجموعه X ، و یک نگاشت $\mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$: $-$ از مجموعه همه زیرمجموعه های X به خودش، به گونه ای که:

$$\bar{\emptyset} = \emptyset. C1$$

$$A \subset \bar{A}, A \subset X \text{ هر } C2$$

$$\overline{\bar{A}} = \bar{A}, A \subset X \text{ برای } C3$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, B \in X \text{ و } A \in X \text{ هر } C4$$

بیان معنی دقیق هم ارزی این تعاریف، و سپس اثبات این هم ارزی، همان طور که گفتیم، به عنوان تمرین، به خواننده تازه وارد در توپولوژی واگذار می شود. ما به تعریف اول، تکیه خواهیم کرد.

۲. فضاهای متری

چنان که می دانیم، در توپولوژی معمولی، یک زیرمجموعه \mathbb{R}^n را باز می نامیم هرگاه هر نقطه آن مرکز

گویی مشمول همان مجموعه باشد. این تعریف را می‌توانیم به‌گونه‌ای طبیعی تعمیم دهیم هرگاه به‌جای \mathbb{R}^n یک مجموعه X که در آن مفهوم فاصله^۱ تعریف شده باشد، قرار دهیم. به‌ویژه، چنین فضایی، همیشه یک فضای توپولوژیک پدید می‌آورد. تعریف زیر را یادآوری کنیم:

تعریف (فضای متری). یک فضای متری^۲ عبارت است از یک زوج (X, d) ملاشکل از یک مجموعه X و یک تابع حقیقی $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (به‌نام «متریک»^۳) به‌گونه‌ای که:

$$M1) \text{ برای هر } x \in X \text{ و هر } y \in X, d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = y.$$

$$M2) \text{ برای هر } x \in X \text{ و هر } y \in X, d(x, y) = d(y, x).$$

$$M3) \text{ (ناابرابری مثلثی } ^4). \text{ برای هر } x, y, z \in X,$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

تعریف (توپولوژی یک فضای متری). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. یک زیر مجموعه $V \subset X$ را باز گوئیم هرگاه به‌ازای هر نقطه $x \in X$ عددی مانند $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که گوی^۵ به مرکز x شعاع ε ، یعنی

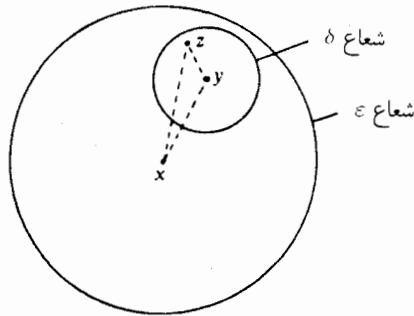
$$K_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

نیز مشمول V باشد. مجموعه $\mathcal{O}(d)$ متشکل از همهٔ مجموعه‌های باز X را توپولوژی فضای متری (X, d) می‌نامند.

بنابراین $(X, \mathcal{O}(d))$ واقعاً یک فضای توپولوژیک است: بار دیگر، برای خوانندهٔ مبتدی فرضی ما، این فرصت مغتنم پیش آمده است، که به تمرین بپردازد. اما در این مورد، حتی خوانندهٔ با تجربه‌تر هم شاید به پشتی صندلی خود تکیه دهد و چند ثانیه‌ای متفکرانه به نقطه‌ای مبهم خیره شود که به راستی نقش نابرابری مثلثی در این میان چیست؟

خوب، چه می‌گویید؟ باشد، فرض کنید بپذیریم که هیچ نقشی نداشته باشد. اما، به محض آنکه بخواهیم با این فضاهای توپولوژیک $(X, \mathcal{O}(d))$ کار کنیم، فایدهٔ آن آشکار می‌شود. مثلاً، نابرابری مثلثی اجازه می‌دهد تا مشابه این نتیجهٔ آشنا را در فضای \mathbb{R}^n به‌دست آوریم، که می‌گوید: به‌ازای هر نقطه y که $d(x, y) < \varepsilon$ ، یک گوی کوچک به شعاع δ شامل y وجود دارد، که کاملاً مشمول گوی به مرکز x و شعاع ε باشد.

1. distance 2. metric space 3. metric 4. triangle inequality
5. ball

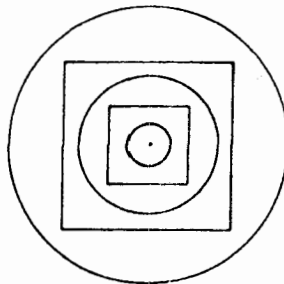


بنابراین، یک «گوی باز» $\{y | d(x, y) < \epsilon\}$ واقعاً باز است، و از آنجا معلوم می‌شود که یک زیرمجموعه $U \subset X$ یک همسایگی x است اگر و تنها اگر شامل گویی به مرکز x باشد.

در برخی شرایط، ممکن است متریک‌هایی بس متفاوت، توپولوژی واحدی را القا کنند. اگر d و d' متریک‌هایی بر مجموعه X باشند و اگر هر گوی باز حول x در متریک d شامل یک گوی باز حول x در متریک d' باشد، بی‌درنگ می‌بینیم که هر مجموعه باز در d ، یک مجموعه باز در d' است، یعنی $O(d) \subset O(d')$. بعلاوه، اگر عکس این مطلب نیز درست باشد، هر دو توپولوژی یکی هستند، یعنی $O(d) = O(d')$. یک مثال، حالتی است که $X = \mathbb{R}^2$ ، و

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} :$$



در اینجا، یک ترفند ساده، اما آموزنده هست، که حتماً بجاست در آغاز مورد توجه قرار گیرد، ترفندی که، مانند یک طلسم واقعی، در مقابل برخی از فرضیات غلط که ممکن است در ارتباط دو جانبه بین متریک و توپولوژی مطرح شود، عمل می‌کند: اگر (X, d) یک فضای متریک باشد، فضای (X, d') نیز که با ضابطه

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{(1 + d(x, y))}$$

تعریف می‌شود، یک فضای متریک خواهد بود؛ و به علاوه، بی‌درنگ ثابت می‌شود که $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ ، اما، از آنجا که همه فاصله‌ها در متریک d' کمتر از ۱ هستند، از آنجا نتیجه می‌شود که به ویژه اگر تصادفاً متریکی کراندار باشد، این کراندار بودن به هیچ وجه نمی‌تواند یک ویژگی ناشی از توپولوژی آن باشد.

تعریف (فضاهای متریک‌پذیر). یک فضای توپولوژیک (X, \mathcal{O}) را متریک‌پذیر گویند هرگاه یک متریک d وجود داشته باشد به گونه‌ای که $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}$.

چگونه می‌توان تعیین کرد که یک فضای توپولوژیک متریک‌پذیر هست یا نیست؟ پاسخ این پرسش، با «قضایای متریک‌سازی»، که قضایایی در مبحث توپولوژی نقطه - مجموعه هستند، داده می‌شود. آیا می‌توان گفت که همه فضاهای توپولوژیک، جز تعداد اندکی از آنها، متریک‌پذیرند؟ یا بعکس، متریک‌پذیری، یک حالت ویژه و نادر است؟ جواب، نه این است و نه آن. اما، شاید حدس اول به واقعیت نزدیکتر باشد، بدین معنی که فضاهای متریک‌پذیر فراوانی وجود دارند. در این کتاب، به قضایای متریک‌سازی نخواهیم پرداخت. اما، با مطالب فصلهای ۱ و ۶ و ۸ این کتاب، خواننده برای پیگیری بیشتر این مسأله، کاملاً آماده خواهد شد.

۳. زیرفضاها، اجتماعهای جدا از هم و حاصلضربها

چه بسا به فضاهای توپولوژیک جدیدی بر می‌خوریم که از فضاهای قدیمی ساخته شده‌اند. ما در اینجا، سه نمونه از ساده‌ترین و مهمترین این ساختمانها را مطرح می‌کنیم.

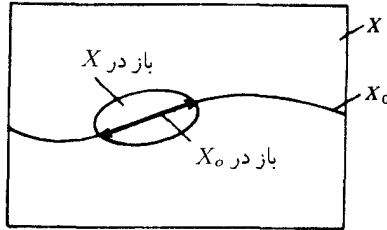
تعریف (زیرفضا). اگر (X, \mathcal{O}) یک فضای توپولوژیک و $X_0 \subset X$ یک زیرمجموعه X باشد، توپولوژی $\mathcal{O}|X_0$ روی X_0 را که با ضابطه

$$\mathcal{O}|X_0 := \{U \cap X_0 \mid U \in \mathcal{O}\}$$

تعریف می‌شود، توپولوژی القایی^۱ یا توپولوژی زیر فضایی می‌نامند و فضای توپولوژیک $(X_0, \mathcal{O}|X_0)$ را یک زیرفضای^۲ (X, \mathcal{O}) می‌خوانند.

در ذیل، جمله کوتاهتر «باز در X_0 » را به جای جمله طولانی «باز نسبت به توپولوژی X_0 »، به کار

می‌بریم، و بنابراین، یک زیرمجموعه $B \subset X_0$ ، در X_0 را باز گوئیم اگر و تنها اگر، اشتراک X_0 با یک مجموعه باز در X باشد:



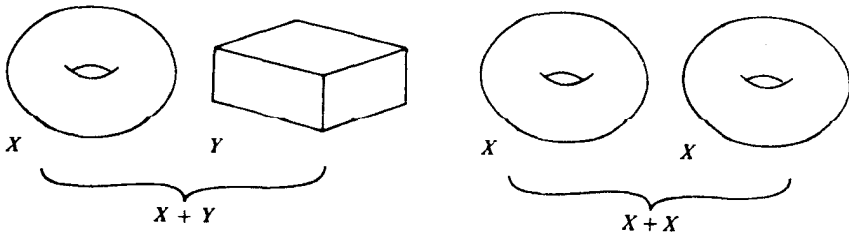
بنابراین، چنین مجموعه‌هایی را نباید با مجموعه‌های «باز و در X_0 » اشتباه کرد، زیرا مجموعه‌های باز در X_0 ، الزامی ندارند که، به طور مطلق، یعنی در توپولوژی X ، باز باشند.

تعریف (اجتماع جدا از هم مجموعه‌ها). اگر X و Y دو مجموعه باشند، اجتماع جدا از هم^۱ یا حاصلجمع^۲ آنها به کمک یک ترفند صوری، مثلاً به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$X + Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$$

اما، بی‌درنگ کار با X و Y را به صورت زیرمجموعه‌هایی از $X + Y$ ، طبق روال معمول آغاز می‌کنیم.^۳

از جنبه شهودی، این عمل چیزی جز پهلوی هم قراردادن یک نسخه از X و یک نسخه از Y نیست، و واضح است که نمی‌توان آن را به شکل $X \cup Y$ نوشت، زیرا اصلاً هیچ معلوم نیست که Y و X جدا از هم بوده باشند. مثلاً، چنانچه $X = Y$ ، خواهیم داشت $X \cup X = X$ که فقط یک نسخه از X است.



1. disjoint union 2. sum

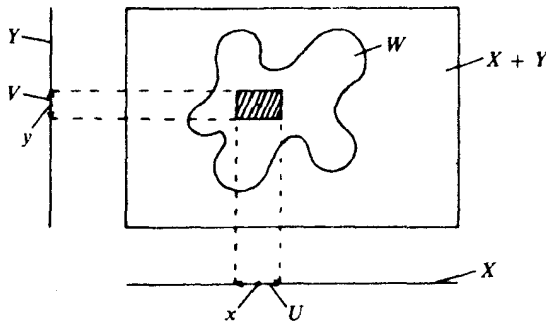
۳. منظور آن است که به $x \in X$ عضو $(x, 0)$ از $X + Y$ ، و به $y \in Y$ عضو $(y, 1)$ از $X + Y$ را وابسته می‌کنیم. - م.

تعریف (اجتماع جدا از هم فضاهای توپولوژیک). اگر (X, \mathcal{O}) و $(Y, \tilde{\mathcal{O}})$ فضاهای توپولوژیک باشند، روی حاصلجمع $X + Y$ توپولوژی جدید

$$\{U + V \mid U \in \mathcal{O}, V \in \tilde{\mathcal{O}}\}$$

را در نظر می‌گیریم، و مجموعه $X + Y$ با این توپولوژی را اجتماع جدا از هم توپولوژیک^۱ فضاهای X و Y می‌نامیم.^۲

تعریف (توپولوژی حاصلضربی). فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. یک زیرمجموعه $W \subset X \times Y$ را در توپولوژی حاصلضربی باز^۳ گوئیم هرگاه به ازای هر $(x, y) \in W$ یک همسایگی U مانند x در X و یک همسایگی V در Y مانند y وجود داشته باشند، به قسمی که $U \times V \subset W$. مجموعه $X \times Y$ مجهز به توپولوژی فوق را، حاصلضرب (دکارتی) فضاهای X و Y می‌نامیم.



تصویر ذهنی حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها، و یا فضاهای توپولوژیک، معمولاً به وسیلهٔ یک مستطیل [] داده می‌شود، و تا جایی که با موارد خیلی پیچیده سروکار نداشته باشیم، این تصویر کاملاً مناسب است. حاصلضربهایی به شکل

$$U \times V \subset X \times Y$$

را که در آن $U \subset X$ و $V \subset Y$ مجموعه‌های بازند، مستطیلهای باز^۴ می‌نامیم. روشن است که مستطیلهای باز، در توپولوژی حاصلضربی بازند. اما، مجموعه‌های باز، تنها منحصر به آنها نمی‌شوند: این مجموعه‌ها به خودی خود یک توپولوژی نمی‌سازند، زیرا اجتماع دو مستطیل در حالت کلی یک

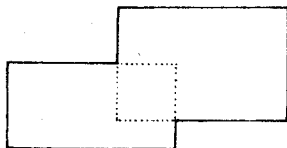
1. topological disjoint union

۲. حاصلجمع توپولوژیک *topological sum* نیز نامیده می‌شود. - م.

3. open in the product topology

4. open boxes

مستطیل نیست:



این ملاحظه پیش پا افتاده، از آنجا به ذهن من خطور کرده است که بارها شاهد ابراز عقیده گمراه کننده و مخالف آن بوده ام، که گویا جاذبه غریبی دارد. بله، فعلاً که چنین است.

۴. پایه‌ها و زیر پایه‌ها

تعریف (پایه). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک مجموعه \mathcal{B} از مجموعه‌های باز را یک پایه^۱ برای توپولوژی فضا می نامیم هرگاه هر مجموعه باز اجتماعی از مجموعه‌های عضو \mathcal{B} باشد.

به عنوان مثال، مستطیلهای باز یک پایه برای توپولوژی حاصل ضربی تشکیل می دهند، و گویهای باز \mathbb{R}^n یک پایه برای توپولوژی معمولی \mathbb{R}^n . اما به خاطر بسپارید که مجموعه گویه‌ایی با شعاع گویا و مختصات مرکز گویا (که مجموعه‌ای شماراست!) نیز یک پایه برای توپولوژی \mathbb{R}^n است.

تعریف (زیر پایه). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک مجموعه \mathcal{S} از مجموعه‌های باز را یک زیر پایه^۲ برای توپولوژی فضا می نامیم هرگاه هر مجموعه باز اجتماعی از اشتراکهای متناهی مجموعه‌های عضو \mathcal{S} باشد.

البته، واژه «متناهی» در اینجا بدان معنی نیست که اشتراک مورد نظر باید مجموعه‌ای متناهی باشد، بلکه منظور اشتراک تعداد تنهایی از مجموعه هاست. در اینجا اشتراک صفر تا مجموعه (یعنی اشتراک خانواده‌ای تهی از مجموعه‌ها)^۳ نیز منظور شده است، که با یک قرارداد معقول، برابر با کل فضا تعریف می شود (زیرا، بدین طریق، دستورهای

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \cap \bigcap_{\mu \in M} S_\mu = \bigcap_{\nu \in \Lambda \cup M} S_\nu$$

معتبر می مانند)، به شیوه مشابه، اجتماع یک خانواده تهی از مجموعه‌ها نیز، به نحوی مناسب برابر با مجموعه تهی تعریف می شود.

1. basis 2. subbasis

۳. منظور از مجموعه‌ها فقط زیرمجموعه‌های فضای مفروض X است، وگرنه منطقاً دچار تناقض می شویم. - م.

با این قراردادها، می‌بینیم که اگر X مجموعه‌ای دلخواه و \mathcal{G} مجموعه دلخواهی از اجزای X باشد، دقیقاً یک و تنها یک توپولوژی روی X مانند $O(\mathcal{G})$ هست، که \mathcal{G} یک زیر پایه برای $O(\mathcal{G})$ (توپولوژی «پدیدآمده»^۱ به وسیله \mathcal{G}) است. این $O(\mathcal{G})$ دقیقاً متشکل از اجتماعهای اشتراکهای متناهی مجموعه‌های عضو \mathcal{G} است.

بنابراین، یک توپولوژی را می‌توان با مشخص کردن یک زیر پایه تعریف کرد. اما ببینیم به چه دلیل می‌خواهند چنین کنند؟ خوب، علت آن است که غالباً می‌خواهند یک توپولوژی بسازند که در شرایط معینی صدق کند. یکی از این شرایط، معمولاً به ریز بافتی^۲ توپولوژی برمی‌گردد. اگر O و O' توپولوژی‌هایی بر X باشند، و $O \subset O'$ ، می‌گویند O' ریز بافت‌تر از O است، و O درشت بافت‌تر^۳ از O' . اغلب، به دلایلی، در پی یافتن توپولوژیی هستیم که، تا جایی که ممکن است ریز بافت‌تر، یا درشت بافت‌تر باشد. مسلماً، یک توپولوژی روی X وجود دارد که از همه درشت بافت‌تر است، که اصطلاحاً توپولوژی بی‌مایه^۴ نامیده می‌شود، و تنها شامل مجموعه‌های X و \emptyset است. هم‌چنین، یک توپولوژی روی X وجود دارد که از همه ریز بافت‌تر است و در آن همه زیرمجموعه‌های X بازند، و توپولوژی گسسته^۵ نامیده می‌شود. اما این کافی نیست، زیرا می‌خواهیم شرایط دیگری نیز برای توپولوژی قائل شویم. در مواردی خاص، توپولوژی مطلوب باید از سویی تا آنجا که ممکن است درشت بافت باشد، و از سوی دیگر، دست‌کم شامل مجموعه‌های عضو \mathcal{G} باشد. همیشه چنین توپولوژیی وجود دارد، و آن هم دقیقاً $O(\mathcal{G})$ می‌ماست.

۵. نگاشتهای پیوسته

تعریف (نگاشتهای پیوسته). فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. یک نگاشت $f: X \rightarrow Y$ را پیوسته^۶ می‌نامیم، هرگاه نگاره وارون^۷ مجموعه‌های باز در آن همواره باز باشند.

یادداشت. نگاشت همانی $id_X: X \rightarrow X$ پیوسته است، هم‌چنین، اگر نگاشتهای $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند، نگاشت $g \circ f: X \rightarrow Z$ نیز پیوسته خواهد بود. با تعریف اخیر، مهمترین مطلبی را که می‌خواستیم گفتیم. اگر این مفهوم برای شما تازگی دارد، توصیه می‌کنم دو تمرین زیر را، که فایده عملی دارند، انجام دهید. نخستین تمرین این است که تلاش کنید نگاشتهای پیوسته را به کمک تعریفهای دیگر فضاهای توپولوژیک، که در بخش ۱ آوردیم، مشخص کنید، یعنی، نشان دهید که یک نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر، نگاره وارون هر مجموعه بسته در آن، یک مجموعه بسته باشد؛ هم‌چنین، اگر و تنها اگر، نگاره وارون هر همسایگی در آن،

1. generated 2. fineness 3. coarser 4. trivial 5. discrete
6. continuous 7. inverse image

یک همسایگی باشد (دقیقتاً بگوییم، اگر U یک همسایگی $f(x)$ باشد، $f^{-1}(U)$ هم یک همسایگی x باشد)؛ و یا، اگر و تنها اگر، برای هر زیرمجموعه $B \subset X$ ، حکم $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ برقرار باشد. بعلاوه، چنانچه پیوستگی را برحسب همسایگیها مشخص کنیم، در حالت خاص فضاهای متریک، سخن به تعریف قدیمی «به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ بی هست که ...» کشیده می شود.

دومین تمرینی که سفارش می کنم، تمرین دربارهٔ زیرفضاها، اجتماعهای جدا از هم، و حاصلضربهاست، که متضمن اثبات سه نکتهٔ زیر است:

نکتهٔ ۱. اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته و $X_0 \subset X$ یک زیرفضا باشد، آنگاه تحدید $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ نیز پیوسته است.

نکتهٔ ۲. نگاشت $f : X + Y \rightarrow Z$ پیوسته است، اگر و تنها اگر $f|_X$ و $f|_Y$ هر دو پیوسته باشند.

نکتهٔ ۳. نگاشت $(f_1, f_2) : Z \rightarrow X \times Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشتهای $f_1 : Z \rightarrow X$ و $f_2 : Z \rightarrow Y$ هر دو پیوسته باشند.

ضمناً این را هم بگوییم که ویژگیهای مذکور در نکته های ۲ و ۳، توپولوژی اجتماع مستقیم، و توپولوژی حاصلضرب را کاملاً مشخص می کنند.

تعریف (همسانریختی). یک نگاشت دوسویی (پوشا و یک به یک) $f : X \rightarrow Y$ را یک همسانریختی^۱ گویند هرگاه نگاشتهای f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند. یعنی وقتی که $U \subset X$ باز باشد، اگر و تنها اگر $f(U) \subset Y$ باز باشد.

فرض کنید یک ویژگی توپولوژیک (یعنی یک ویژگی قابل بیان برحسب مجموعه های باز) روی X یا روی یک زیرمجموعه $A \subset X$ برقرار باشد. در این صورت، اگر f ویژگی همسانریختی داشته باشد، عین همین ویژگی را باید Y یا زیرمجموعهٔ متناظر با آن، یعنی $f(A)$ ، نیز دارا باشد. چند نمونه:

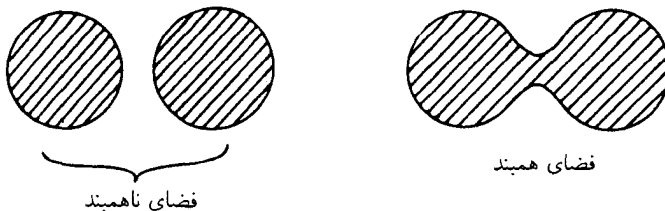
$$A \subset X \text{ بسته است} \iff f(A) \subset Y \text{ بسته است};$$

$U \subset X$ یک همسایگی x است $\iff f(U) \subset Y$ یک همسایگی $f(x)$ است؛ \mathfrak{B} یک پایه برای توپولوژی فضای X است $\iff \{f(B) | B \in \mathfrak{B}\}$ یک پایه برای توپولوژی فضای Y است؛
 وقس علیهذا. بنابراین، نقش همسانریختی در توپولوژی، همانند نقش یکرخیتهای خطی^۲ در جبر

خطی، و یا نقش نگاشتهای دوستمامریخت^۱ در نظریهٔ توابع تحلیلی مختلط، و یا نقش یکرخیتهای گروهی^۲ در نظریهٔ گروهها، و یا نقش طولپایها^۳ در هندسهٔ ریمانی است. به این دلیل، نمادگذاری $f: X \xrightarrow{\cong} Y$ را برای همسانریختی نیز به کار می‌بریم، و همچنین، نماد $X \cong Y$ را برای دو فضای همسانریخت^۴ (یعنی دوفضایی که یک همسانریختی از یکی به دیگری موجود باشد) به کار می‌بریم. تاکنون، تعداد بسیار اندکی از ویژگیهای فضاها را نام بردیم. از میان ویژگیهای فراوان موجود، در این فصل که به «مفاهیم بنیادی» اختصاص دارد، سه ویژگی را که اهمیت بسزایی دارند، و از لحاظ خصوصیت خیلی با هم متفاوت‌اند، برگزیده‌ام، این سه ویژگی عبارت‌اند از: همبندی^۵، هاوسدورفی^۶ و فشردگی^۷، که در باب آنها، در سه بخش آینده گفتگو خواهیم کرد.

۶. همبندی

تعریف (همبندی). یک فضای توپولوژیک را همبند^۸ خوانیم هرگاه اجتماع دوزیر فضای ناتهی باز و جدا از هم نباشد. به عبارت دیگر، کل فضا و مجموعهٔ تهی تنها زیرمجموعه‌هایی باشند که در آن واحد هم باز باشند و هم بسته.



مثال. یک بازهٔ^۹ (باز، نیم باز، بسته) $I \subset \mathbb{R}$ همواره مجموعه‌ای است همبند. این مثال، هر چند ساده است، فایدهٔ خاصی دارد، زیرا همبندی فضاهای پیچیده در بسیاری از موارد، نهایتاً نتیجه‌ای از همبندی بازه است. از این رو، برهان همبندی بازه را به اختصار تکرار می‌کنیم: فرض کنید $I = A \cup B$ و $A \cap B = \emptyset$ و A و B مجموعه‌هایی باز و ناتهی در توپولوژی زیرفضای $\mathbb{R} \subset I$ باشند. نقاط $a \in A$ و $b \in B$ را در نظر می‌گیریم (می‌توانیم فرض کنیم که $a < b$). فرض می‌کنیم s برابر با $\inf\{x \in B \mid a < x\}$ باشد. بنابراین، با توجه به تعریف \inf ، هر همسایگی s شامل نقاطی از B خواهد بود. اما، هر همسایگی s باید شامل نقاطی از A نیز باشد، زیرا، اگر s برابر a نباشد، الزاماً $a < s$ و در نتیجه $(a, s) \subset A$. پس، s نه می‌تواند نقطه‌ای از A باشد و نه نقطه‌ای از B . اما، این یک تناقض است، زیرا $s \in A \cup B$ و A و B هر دو مجموعه‌هایی بازند. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

1. biholomorphic maps 2. group isomorphisms 3. isometries
 4. homeomorphic 5. connectedness 6. Hausdorffness 7. compactness
 8. connected 9. interval

مثال. زیر فضای $X = [0, 1] \cup (2, 3)$ در \mathbb{R} همبند نیست. زیرا، می‌توان آن را به دو مجموعه باز ناتهی $A = [0, 1]$ و $B = (2, 3)$ تجزیه کرد. (ایراد: روشن است که $X = A \cup B$ و A و B جدا از هم‌اند. اما آیا «باز» هم هستند؟ مگر نه این است که A بالآخره یک بازه بسته است!! شاید واقعاً درد آور باشد که یک بازه بسته را باز بنامیم. اما، بابا، فراموش نکنید که ما داریم از توپولوژی X صحبت می‌کنیم و نه از توپولوژی \mathbb{R} ! ...).

مفهوم همبندی به چه درد می‌خورد؟ خوب، یکی آنکه، روشی خام برای تمیز فضاهای توپولوژیک از یکدیگر به دست می‌دهد: چنانچه یکی از دو فضا همبند باشد و دیگری نباشد، در این صورت این دو فضا نمی‌توانند همسانریخت باشند. گذشته از آن، حکم زیر نیز درست است: اگر X فضایی همبند، و Y یک مجموعه و $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت موضعاً ثابت باشد (یعنی برای هر نقطه $x \in X$ یک همسایگی مانند U_x وجود داشته باشد به گونه‌ای که تحدید f به U_x ، $f|_{U_x}$ ، ثابت باشد) آنگاه f بر تمام حوزه‌اش، X ، ثابت است. زیرا، اگر y نقطه‌ای در نگاره f باشد، مجموعه‌های $A = \{x | f(x) = y\}$ و $B = \{x | f(x) \neq y\}$ ، هر دو بازند و در نتیجه، به دلیل همبندی X ، داریم $X = A$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. معمولاً، نتیجه فوق را در حالتی که $\{y\} = Y$ یا $\{ \text{نادرست، درست} \} = Y$ ، به شکل زیر به کار می‌بریم: فرض کنیم X همبند و P یک ویژگی باشد که نقاط X می‌توانند داشته یا نداشته باشند، و فرض کنیم که می‌خواهیم ثابت کنیم همه نقاط X دارای ویژگی P هستند. در این صورت، کافی است سه حکم زیر را ثابت کنیم:

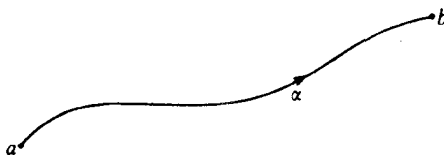
(۱) دست‌کم یک نقطه با ویژگی P وجود دارد؛

(۲) اگر x دارای ویژگی P باشد، همه نقاط در یک همسایگی بس کوچک x نیز این ویژگی را دارند؛

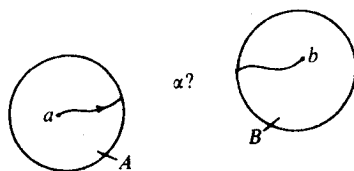
(۳) اگر x دارای ویژگی P نباشد، همه نقاط در یک همسایگی بس کوچک x نیز ویژگی P را ندارند.

مفهوم قویتر زیر غالباً مورد نیاز است:

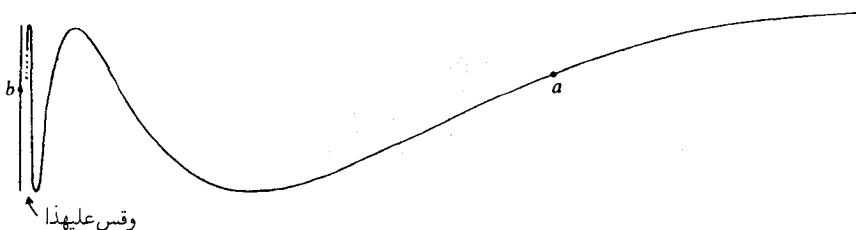
تعریف (همبند - راهی). فضای توپولوژیک X را همبند - راه 1 گوئیم هرگاه هر دو نقطه $a, b \in X$ با یک راه 2 به هم مربوط شوند، یعنی یک نگاشت پیوسته مانند $X \rightarrow [0, 1] : \alpha$ موجود باشد به گونه‌ای که $\alpha(0) = a$ و $\alpha(1) = b$:



بی‌درنگ دیده می‌شود که یک فضای همبند - راه X یک فضای همبند است: اگر A و B مجموعه‌های ناتهی باز و جدا از هم باشند و $X = A \cup B$ ، آنگاه، به عدلت همبندی $[0, 1]$ ، نمی‌توان راهی از $a \in A$ به $b \in B$ پیدا کرد (در غیر این صورت، می‌بایست $[0, 1] = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$ را به شکل نوشت، والی آخر).



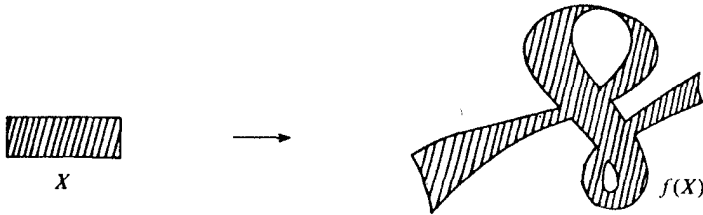
عکس این مطلب درست نیست، زیرا: یک فضا ممکن است همبند باشد، اما در عین حال راه عبوری از یک نقطه به نقطه دیگر نداشته باشد. زیر فضای \mathbb{R}^n با تعریف: $\{(x, \sin \ln x) | x > 0\} \cup (0 \times [-1, 1])$ نمونه‌ای از این نوع فضاهاست:



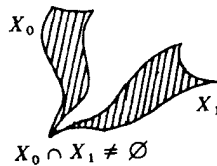
در خاتمه، اجازه بدهید درباره رفتار همبندی تحت اعمال گوناگون، سه نکته را به گفته‌های پیش بفرماییم. ویژگیهای توپولوژیک، از قبیل همبندی، وقتی شناخت عمیقتری نسبت به آنها پیدا کنیم، حساسیت شدیدی در ما پدید می‌آورند: برخی مساعد و مفید جلوه می‌کنند، زیرا بارها نشان داده‌اند که چگونه می‌توانند استدلالها را آسان کنند، و یا حتی از همان ابتدا استدلال را ممکن سازند؛ بعضی برعکس، به دلیل کاملاً مخالف آن، ما را می‌ترسانند. تا اندازه زیادی درست است که بگوییم، یک ویژگی «خوب» به شمار آمده است، ممکن است اتفاقاً مشکلی ایجاد کند، و بسیاری از ویژگیهای خوبی هستند و گاهی خوب نیستند. اما، من می‌توانم به شما اطمینان دهم که همبندی، هاسدورفی، و فشردگی، ویژگیهایی به تمام معنی «خوب» هستند. بنابراین، طبیعی است بخواهیم بدانیم که در فرایند معمولی ساختن فضاهای توپولوژیک، این گونه ویژگیهای خوب از فضاهای اصلی به فضاهای نهایی حاصل، منتقل می‌شوند یا نه، از این قرار:

نکته ۱. نگاره‌های پیوسته فضاهای همبند (همبند - راه)، فضاهایی همبند (همبند - راه) هستند.

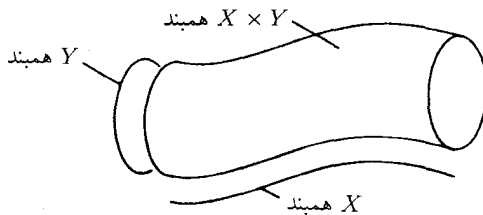
به گفته دیگر، اگر X همبند (همبند - راه) و $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، $f(X)$ به عنوان زیر فضای Y نیز همبند (همبند - راه) است. زیرا، یک تجزیه $f(X)$ به شکل $A \cup B$ ، مستلزم تجزیه مشابهی برای $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ است، و هکذا.



نکته ۲. اجتماعهای نا جدا از هم فضاهای همبند (همبند - راه) فضاهایی همبند (همبند - راه) هستند. یعنی اگر X_0 و X_1 زیر فضاهایی همبند (همبند - راه) از فضای X باشند و علاوه بر $X = X_0 \cup X_1$ و $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$ ، آنگاه X نیز همبند (همبند - راه) است.



نکته ۳. حاصل ضرب دکارتی $X \times Y$ از فضاهای توپولوژیک ناهمبند X و Y ، همبند (همبند - راه) است، اگر و تنها اگر هر دو سازه آن همبند (همبند - راه) باشند.



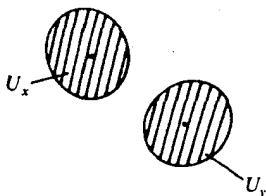
پرسش خنده دار: درباره اجتماع جدا از هم X و Y چه فکر می کنید؟

۷. اصل موضوع جداسازی هاوسدورف

تعریف (اصل موضوع جداسازی هاوسدورف). یک فضای توپولوژیک را فضای هاوسدورف^۲ گویند هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن، همسایگیهایی جدا از هم وجود داشته باشند.

1. non-disjoint

2. Hausdorff space



مثلاً هر فضای متری یک فضای هاوسدورف است، زیرا اگر d متریک فضا باشد و $d(x, y) = \varepsilon > 0$ مجموعه های

$$U_x := \{z | d(x, z) < \varepsilon/2\} \text{ و } U_y := \{z | d(y, z) < \varepsilon/2\}$$

نمونه هایی از همسایگیهای جدا از هم اند.

ویژگی «نا هاوسدورفی»، به کلی مخالف شهود، و حتی در نگاه اول نامعقول، و برخلاف شهود ما در مورد مفهوم همسایگی به نظر می رسد. به همین دلیل، هاوسدورف، اصل جداسازی فوق را در تعریف اولیه خود از «فضاهای توپولوژیک» گنجانید (۱۹۱۴). اما، بعدها، معلوم شد که توپولوژیهای ناهاوسدورفی نیز ممکن است خیلی مفید واقع شوند، مثلاً «توپولوژی زاریسکی^۱» در هندسه جبری یکی از آنهاست. در هر حال، می توان در توپولوژی گامهای نسبتاً زیادی برداشت، بی آنکه حقیقتاً احساس نیاز به فضاهای ناهاوسدورفی پیدا کرد، هر چند بهتر است که مبتدیان اینجا آنجا دنبال هاوسدورف بودن فضا نگردند. کسانی که می خواهند دست کم یکبار چنین موجود مرموزی را ببینند، یک مجموعه X با بیش از یک عضو اختیار و روی آن توپولوژی بیمایه $\{X, \emptyset\}$ را بنا کنند. یکی از فواید اصل جداسازی، استفاده در یکتایی همگرایی است:

تعریف (دنباله همگرا^۲). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک، و $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله ای در X باشد. یک نقطه $a \in X$ را حد این دنباله نامند هرگاه برای هر همسایگی نقطه a ، مانند U ، یک n_0 وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر $x_n \in U, n \geq n_0$.

یادداشت. در یک فضای هاوسدورف، هر دنباله می تواند حداکثر یک حد داشته باشد.

از سوی دیگر، در یک فضای توپولوژیک بیمایه، هر دنباله به هر نقطه همگراست.

در باره رفتار نسبت به اعمال، توجه شما را به نکته زیر، که به سادگی ثابت می شود، جلب می کنیم: یادداشت. هر زیر فضای یک فضای هاوسدورف، خود یک فضای هاوسدورف است، و دو فضای

توپولوژیک ناتهی X و Y هاسدورف اند، اگر و تنها اگر، اجتماع جدا از هم آنها، $X + Y$ ، هاسدورف باشد، همچنین اند، اگر و تنها اگر، حاصلضرب آنها، $X \times Y$ هاسدورف باشد. اصل جداسازی هاسدورف را T_2 نیز نامیده اند. چنین به نظر می آید که باید T_1 هم مطرح باشد، مگر نه؟ خوب درباره $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ چه می گویند؟ حالا ما از T_2 و T_3 صحبت نمی کنیم! ولی اصل هاسدورف، به مراتب از همه اینها مهمتر است، و بیش از بقیه لازم است به حافظه سپرده شود. آیا ضرورتی دارد که برای شما بگویم T_1 به جای چه به کار برده می شود؟ ولی، نه. می توانیم تا فرصت مناسب منتظر بمانیم.

۸. فشردگی

اما، فشردگی! چه ویژگی شگفت انگیزی! صفت شگفت انگیز برای توپولوژی، خصوصاً در توپولوژی ديفرانسیل و توپولوژی جبری مصداق دارد. زیرا، علی الاصول، در این زمینه ها، هنگامی که با فضاهای فشرده، خمینه های فشرده، مجتمع های ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار فشرده، یا CW، گروه های فشرده و جز آنها سروکار داریم، هیچ گونه مشکلی پیش نمی آید و همه چیز روال معمولی خود را دارد. اما در عالم همه چیز نمی تواند فشرده باشد، ولی حتی برای مسائل «نافشرده» نیز غالباً بهتر است که در مرحله اول، به حالت فشرده پرداخته شود: باید نخست بر «زمینه های فشرده» که دستیابی بر آنها ساده تر است مسلط شد و سپس با تغییر تکنیک های مناسب راه خود را برای حالت نافشرده باز کرد. استثناهایی که ممکن است پیش آید، مؤید این قاعده هستند: تصادفاً، نافشردگی نیز مزایایی دارد، زیرا «جای بیشتری برای برخی ساختمانها در اختیار ما می گذارد... اما حالا:

تعریف (فشردگی). یک فضای توپولوژیک را فشرده^۱ گویند هرگاه هر پوشش باز آن یک زیر-پوشش متناهی داشته باشد. معنی این جمله این است که X فشرده است هرگاه در ویژگی زیر صدق کند: اگر $\mathfrak{A} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوشش باز دلخواهی از X ، یعنی $U_\lambda \subset X$ باز باشد و $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$ ، آنگاه تعدادی متناهی از اعضای Λ مانند $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ موجودند به گونه ای که $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} = X$.

یادداشت. بسیاری از مؤلفین، چنین فضاهایی را «شبه فشرده^۲» می نامند و واژه «فشرده» را برای فضاهای «شبه فشرده و هاسدورف» اختصاص می دهند. در فضاهای فشرده، تعمیم از «موضعی^۳» به «سراسری^۴» برای ویژگی هایی از نوع زیر، شدنی است:

فرض کنیم X فضایی فشرده باشد و P یک ویژگی، که زیرمجموعه‌های باز X ممکن است آن را دارا باشند یا نباشند، و نیز اگر U و V ویژگی P را دارند، $U \cup V$ نیز ویژگی P را داشته باشد، (مثالها ذیلاً خواهند آمد). در این صورت، اگر X این ویژگی را به طور موضعی^۱ دارا باشد، یعنی اگر هر نقطه دارای یک همسایگی با ویژگی P باشد، آنگاه خود X ویژگی P را داراست. در واقع، چنین همسایگیهایی یک پوشش باز $\{U_x\}_{x \in X}$ از X را تشکیل می‌دهند؛ اما با انتخاب مناسب تعدادی متناهی x_i ، خواهیم داشت

$$X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$$

و بنابر فرض، این ویژگی با استقراء به اجتماعهای متناهی منتقل می‌شود، همان چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم.

مثال ۱. فرض کنیم X فشرده و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی موضعاً کراندار (مثلاً، پیوسته) باشد. در این صورت، f کراندار است.

مثال ۲. فرض کنیم X فشرده و $(f_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله همگرای یکنواخت موضعی^۲ از توابع روی X باشد. در این صورت، این دنباله، روی کل فضای X همگرای یکنواخت است.

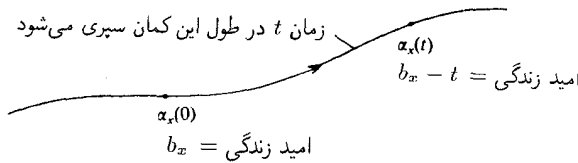
مثال ۳. فرض کنیم X فشرده و $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{A}}$ یک پوشش موضعاً متناهی^۳ باشد (یعنی هر نقطه دارای یک همسایگی باشد که A_λ را فقط به ازای تعدادی متناهی از λ قطع کند). در این صورت، خود پوشش، یک پوشش متناهی است.

مثال ۴. فرض کنیم X فضایی فشرده و $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای موضعاً متناهی باشد (تعریفی برای آن درست کنید). در این صورت، A متناهی است. و یا، بعکس، چنانچه $A \subset X$ نامتناهی باشد، آنگاه یک نقطه $x \in X$ هست به گونه‌ای که همه همسایگیهای آن شامل تعدادی نامتناهی از نقاط A است.

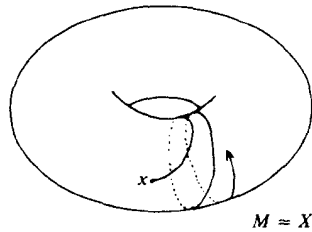
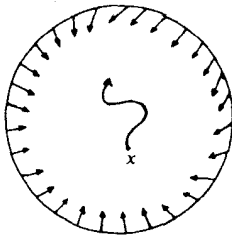
مثال ۵. فرض کنیم v یک میدان برداری^۴ دیفرانسیلپذیر بر یک خمینه^۵ M ، مثلاً بر یک مجموعه باز در \mathbb{R}^n ، باشد. یکی از خمهای انتگرال ماکسیمال^۵ این میدان مانند $M \rightarrow (a_x, b_x) : \alpha_x$ با شرط $\alpha(o) = x$ را در نظر می‌گیریم و b_x را با یک نامگذاری بجا، (بقیه) امید زندگی^۶ و $a_x - o$ را سن در میدان برداری v می‌نامیم. از نظریه موضعی معادلات دیفرانسیل معمولی، چنین برمی‌آید که، از لحاظ موضعی، کرانه‌های پایینی مثبتی برای امید زندگی و سن وجود دارد. بنابراین، - و در اینجاست که فشردگی دخالت می‌کند - برای هر مجموعه فشرده^۶ $X \subset M$ نیز یک چنین کرانه‌های پایینی وجود

1. locally 2. locally uniformly convergent 3. locally finite
4. vector field 5. maximal integral curve 6. life expectancy

خواهد داشت. حال اگر نقطه‌ای در طول خم جواب خودش حرکت کند، سنس افزایش می‌یابد و امید زندگی‌ش روبه کاهش می‌نهد.



اگر امید زندگی متناهی باشد، یعنی $b_x < \infty$ ، در این صورت، این امید رفته رفته هر قدر بخواهیم کوچک می‌شود، و لم معروف و سودمند زیر به دست می‌آید: اگر نقطه‌ای از یک زیر فضای فشرده $X \subset M$ امید زندگی متناهی داشته باشد، اجباراً باید، پیش از آنکه فضای X را برای همیشه ترک کند، تمام آن را مصرف کند. ببینیم اگر یک نقطه نتواند مجموعه X را ترک کند، چه پیش خواهد آمد؟ خواه چنین پدیده‌ای از آن رو پیش آید که در مرز X بردارهایی، متوجه درون، سنگ‌گرفته باشند و یا خواه بدین علت که کل جهان مورد بحث، M ، فشرده باشد و $X = M$ ؟



در چنین شرایطی، هر نقطه از X باید تا ابد حرکت کند. به‌ویژه، یک میدان برداری بر یک خمینه فشرده بدون مرز، همواره انتگرالپذیر سراسری^۱ است.

اکنون به موضوع بحث خود بازگردیم! پیامد این امکان‌گذار از موضعی به سراسری، البته چنان وسیع است که نمی‌تواند در چند صفحه کاملاً مورد بحث قرار گیرد. اما، با اشارات فوق، خواستیم نه تنها مفید بودن مفهوم فشرده‌گی را بیان کنیم، بلکه اندکی هم آن را روشن‌تر کنیم.

نمونه‌های فضاهای فشرده کدام‌اند؟ بازه بسته $[0, 1]$ ، با این‌که جلوه چندانی ندارد، ولی نمونه مهمی است، زیرا، نمونه‌های دیگری از آن نتیجه می‌شوند. می‌دانیم که برای هر پوشش باز $[0, 1]$ ، یک «عدد لبگ» وجود دارد، یعنی $0 < \delta$ بی‌بی هست که هر زیر بازه به طول δ ، در یکی از مجموعه‌های این پوشش قرار دارد. (اثبات از راه برهان خلف: چنانچه چنین عددی وجود نمی‌داشت، می‌توانستیم یک

1. globally integrable

دنباله $(I_n)_{n \geq 1}$ از زیربازه‌های $I_n \subset [0, 1]$ به درازای $\frac{1}{n}$ چنان برگزینیم که هیچ‌یک در هیچ‌کدام از مجموعه‌های این پوشش نباشد. دنباله نقاط وسط این زیربازه‌های I_n ، دارای زیر دنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای مانند $x \in [0, 1]$ خواهد بود. اما، با توجه به آن‌که x در یکی از مجموعه‌های پوشش است، وقتی که n بسیار بزرگ باشد، به تناقض می‌رسیم. اکنون که وجود عدد لیبگ ثابت شد، از آنجا که می‌توان $[0, 1]$ را با تعدادی متناهی بازه به درازای δ پوشاند، می‌توان آن را با تعدادی متناهی از پوششهای باز مفروض نیز پوشاند.

گزاره ۱. نگاره‌های پیوسته فضاهاى فشرده، فشرده‌اند. به عبارت دیگر، اگر X فضایی فشرده و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، $f(X)$ زیرفضای فشرده Y است.

برهان. فرض کنیم $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوشش بازی برای $f(X)$ باشد. در این صورت، $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوششی باز برای X خواهد بود، در نتیجه، باگزینش مناسب اندیسه‌ها، خواهیم داشت

$$X = f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\lambda_r})$$

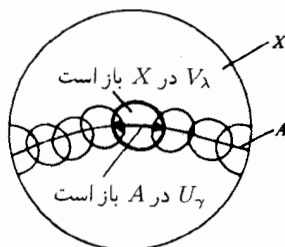
و از آنجا

$$f(X) = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r},$$

همان چیزی که می‌خواستیم. \square

گزاره ۲. زیرفضاهای بسته فضاهاى فشرده، فشرده‌اند.

برهان. گیریم X فشرده، $A \subset X$ بسته و $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک پوشش باز A باشد. بنا بر تعریف توپولوژی زیرفضایی، یک خانواده $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از مجموعه‌های باز X وجود دارد به گونه‌ای که $U_\lambda = A \cap V_\lambda$. اکنون گوئیم که چون A بسته است، پس خانواده $\{X \setminus A, \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\}$ پوششی باز برای X است.

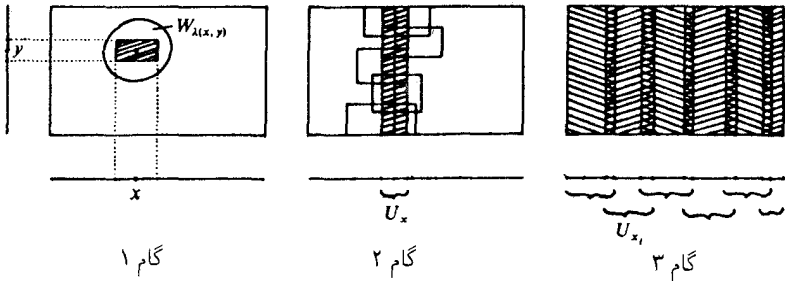


در نتیجه، می‌توان $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ را چنان برگزید که $(X \setminus A) \cup U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} = X$ ، یعنی

$$\square. U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} = A$$

گزاره ۳. دو فضای ناتهی X و Y فشرده اند، اگر و تنها اگر، اجتماع جدا از هم آنها فشرده باشد، همچنین اند، اگر و تنها اگر، حاصلضرب آنها فشرده باشد.

برهان. (تنها به اثبات فشردگی حاصلضرب فضاهای فشرده خواهیم پرداخت، که جالبترین و در عین حال مشکلترین حکم قضیه است. عکس آن، نتیجه‌ای از گزاره ۱ است، و حکم مربوط به اجتماع جدا از هم، بدیهی است). فرض کنیم X و Y فضاهایی فشرده و $\{W_\lambda\}_{\lambda \in A}$ پوشش بازی برای $X \times Y$ باشد.



گام یکم. می‌توانیم برای هر (x, y) یک $\lambda(x, y)$ برگزینیم به گونه‌ای که $(x, y) \in W_{\lambda(x,y)}$ و با توجه به این که $W_{\lambda(x,y)}$ باز است، بگوییم که این مجموعه باز شامل مستطیل بازی به شکل $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)}$

گام دوم. برای یک x ثابت، خانواده $\{V_{(x,y)}\}_{y \in Y}$ پوشش بازی برای Y است، و در نتیجه $y_1(x), \dots, y_{r_x}(x)$ چنان وجود دارند که

$$V_{(x,y_1(x))} \cup \dots \cup V_{(x,y_{r_x}(x))} = Y$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$U_{(x,y_1(x))} \cap \dots \cap U_{(x,y_{r_x}(x))} =: U_x$$

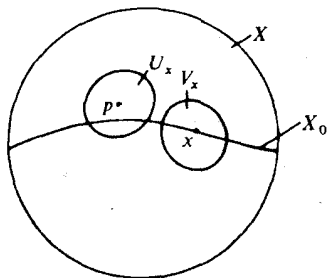
گام سوم. چون X فشرده است، می‌توان x_1, \dots, x_n را چنان برگزید که $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} = X$ و در نتیجه $X \times Y$ با (عده‌ای متناهی!) از $W_{\lambda(x_i, y_j(x_i))}$ ها، $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq r_i$ پوشیده

می‌شود. همان چیزی که می‌خواستیم. □

از روی فشردگی بازه بسته و گزاره‌های سه‌گانه فوق، می‌توانیم فشردگی فضاهای متعدد دیگری را ثابت کنیم. مثلاً، همهٔ زیرفضاهای بسته مکعب n بعدی، و از آنجا همهٔ زیرمجموعه‌های بسته و کراندار \mathbb{R}^n ، فشرده‌اند. این حکم، نیمی از قضیهٔ معروف هاینه - بول^۱ است که می‌گوید: یک زیرمجموعهٔ \mathbb{R}^n فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد. ببینیم چرا هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ باید بسته و کراندار باشد؟ ببینید، ما قبلاً دیده‌ایم که توابع پیوسته بر مجموعه‌های فشرده، توابعی کراندارند، و این امر به‌ویژه برای تابع نرم نیز صادق است، و از اینجا نتیجه می‌گیریم که X_0 کراندار است. و اما، بسته بودن X_0 از لم ساده ولی سودمند زیر نتیجه می‌شود:

لم. اگر X یک فضای هاوسدورف و $X_0 \subset X$ یک زیر فضای فشرده باشد، آنگاه X_0 در X بسته است.

برهان. باید نشان دهیم که $X \setminus X_0$ باز است، پس باید ثابت کنیم که هر نقطهٔ p از $X \setminus X_0$ دارای یک همسایگی U است که X_0 را قطع نمی‌کند. به‌ازای هر $x \in X_0$ ، همسایگی U_x برای p و همسایگی V_x برای x را چنان بر می‌گزینیم که جدا از هم باشند. هر چند ممکن است که



U_x مجموعهٔ X_0 را قطع کند، اما دست‌کم اطمینان داریم که $V_x \cap X_0$ را قطع نمی‌کند، و اگر تعدادی متناهی نقطهٔ $x_1, \dots, x_n \in X_0$ را چنان برگزینیم که

$$(V_{x_1} \cap X_0) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap X_0) = X_0$$

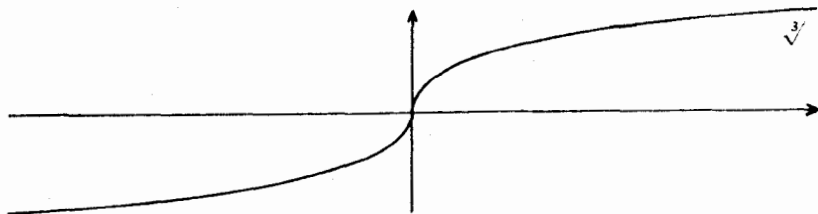
(گزینهٔ این نقاط، به‌دلیل فشردگی، همواره شدنی است)، می‌بینیم که

$$U := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$$

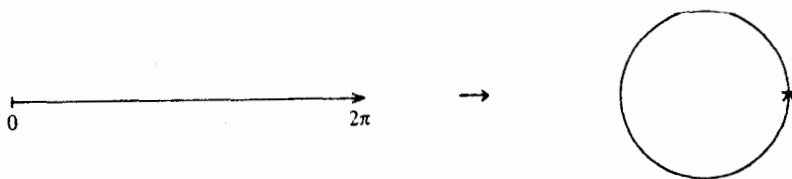
یک همسایگی نقطه p با ویژگی مطلوب است، یعنی X_0 را قطع نمی‌کند. همان چیزی که می‌خواستیم. \square

*

به‌عنوان آخرین قضیه این بخش، البته نه از لحاظ اهمیت، می‌خواهم قضیه کوچک مستلزم دقتی را درباره همسانریختها بیان کنم، اما نخست چندکلمه‌ای برای روشن کردن اهمیت قضیه: با نخستین مفاهیم مربوط به یکرختی در جبر خطی آشنا شده و دیده‌ایم که برای اثبات این که یک نگاشت خطی $f: V \rightarrow W$ یک یکرختی است، کافی است دوسویی بودن f را ثابت کنیم، زیرا در این صورت، نگاشت $f^{-1}: W \rightarrow V$ خودبه‌خود خطی خواهد بود. عین همین مطلب، مثلاً در مورد گروهها و هم‌ریختی گروهها، نیز صادق است. تاکنون، عادت کرده بودیم بپذیریم که ویژگیهای نگاشتهای دوسویی به وارون آنها نیز منتقل می‌شوند، ولی با کمال تأسف می‌بینیم که ویژگیهای خوب دیگری برای نگاشتهای دوسویی وجود دارند که به نگاشت وارون منتقل نمی‌شوند: مثلاً تابع $x \mapsto x^2$ یک نگاشت دوسویی ديفرانسیلپذیر از \mathbb{R} به \mathbb{R} است، اما نگاشت وارون آن در مبدأ مختصات ديفرانسیلپذیر نیست:



متأسفانه، در مورد پیوستگی نیز وضعیت بهتر از این نیست: به‌عنوان مثال، نگاشت همانی از یک مجموعه X با توپولوژی گسسته، به خود همان مجموعه X با توپولوژی بیمایه، یکی از این موارد است. یا اصلاً لازم نیست به چنین مثالهای دست بالایی متوسل شویم: کافی است فقط، بازه نیمباز $[0, 2\pi)$ را، با استفاده از تابع $t \mapsto e^{it}$ ، یک بار به دور دایره با شعاع واحد بپیچیم و ملاحظه کنیم که به این ترتیب، یک تابع پیوسته دوسویی داریم که نمی‌تواند یک همسانریختی باشد، زیرا دایره فشرده است، درحالی که



بازه نیمباز، فشرده نیست. اما، حتی هنگامی که f^{-1} پیوسته است، اثبات پیوستگی آن ممکن است

خیلی پرزحمت باشد. خصوصاً هنگامی که پیوستگی خود f از دستور صریحی به شکل $y = f(x)$ به دست آمده باشد، ولی راهی برای به دست آمدن دستور متناظر آن $x = f^{-1}(y)$ به نظر نرسد. به همین دلیل، بهتر است شرطی به دست دهیم که نوعاً شرطی کلی و بررسی آن غالباً ساده باشد و در عین حال تضمین کند که وارون یک نگاشت دوسویی پیوسته، همواره پیوسته است:

قضیه. یک نگاشت دوسویی پیوسته $f : X \rightarrow Y$ از یک فضای فشرده X به یک فضای هاوسدورف Y همواره یک همسانریختی است.

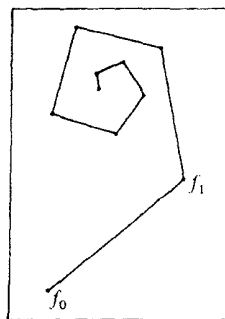
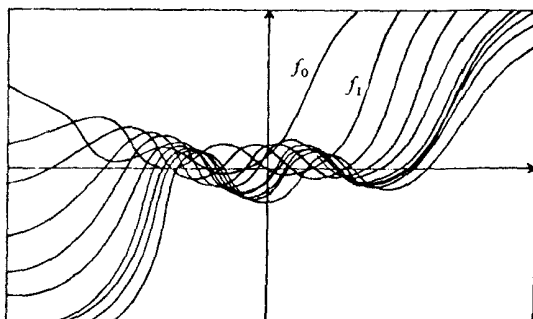
برهان. باید نشان دهیم که نگاره‌های مجموعه‌های باز، بازند. و یا هم‌ارز با آن، نگاره‌های مجموعه‌های بسته، بسته‌اند. پس، فرض می‌کنیم $A \subset X$ بسته باشد. لذا A فشرده است، زیرا یک زیر فضای بسته از یک فضای فشرده است. از اینجا معلوم می‌شود که $f(A)$ فشرده است (زیرا نگاره پیوسته یک فضای فشرده است)، و در نتیجه، $f(A)$ (به عنوان زیر فضای فشرده فضای هاوسدورف Y) بسته است. همان چیزی که می‌خواستیم. \square

فضاهای برداری توپولوژیک

شمار فراوانی از عناصر دخیل در ریاضیات، توسط یک رشته نامتناهی از اعداد حقیقی یا مختلط کاملاً معین می‌شوند: به عنوان مثال، یک سری تیلر با دنباله ضرایبش معین می‌شود. . . . بنابراین می‌توان عددهای این دنباله را، که تعیین‌کننده هر یک از عناصر به عنوان مختصات آن عناصر هستند، مختصات یک نقطه در یک فضای بینهایت بعدی (E_{∞}) که عده ابعاد آن بینهایت شمارا است، تلقی نمود. این برداشت، مزایای چندی در عمل به دنبال دارد. نخستین امتیاز همواره وقتی ظاهر می‌شود که بیان هندسی را به کار می‌بریم، در این صورت مشابهنهایی پدید می‌آید که شهود را آسان می‌سازد. . . .

موریس فرشه^۱

نکاتی از حساب تابعی (۱۹۰۶)



۱. مفهوم فضای برداری توپولوژیک

فصل کوتاه حاضر هدفی برتر از آن ندارد که رده‌ای از فضاهای توپولوژیک را که حقیقتاً در دامنه کار بردهای توپولوژی (در این مورد، آنالیز تابعی) پدید می‌آید معرفی نماید. این فضاها که اهمیت بسزایی دارند، فضاهای برداری توپولوژیک نامیده می‌شوند. بنابراین، بجاست که این مثالها را در آغاز کتاب قرار دهیم، چرا که نقش مهمی در تکوین مفهوم فضاهای توپولوژیک برعهده داشته‌اند (فرشه ۱۹۰۶).

تعریف (فضای برداری توپولوژیک). فرض کنیم \mathbb{K} هیأت اعداد حقیقی \mathbb{R} یا هیأت اعداد مختلط \mathbb{C} باشد. یک فضای برداری E روی \mathbb{K} همراه با یک ساختار فضای توپولوژیک را فضای برداری توپولوژیک^۱ می‌نامیم هرگاه ساختارهای توپولوژیک و برداری آن به معنای زیر با هم سازگار باشند:

اصل موضوع ۱. عمل تفریق $E \rightarrow E \times E$ پیوسته باشد؛

اصل موضوع ۲. عمل ضرب در اسکالرها $E \rightarrow \mathbb{K} \times E$ پیوسته باشد.

توجه. برخی از مؤلفین اصل موضوع زیر را نیز می‌افزایند:

اصل موضوع ۳. فضای توپولوژیک E هاوسدورف باشد (مثلاً دانفرد و شوارتس^۲ در مرجع [۷]، این اصل را می‌پذیرند، اما بورباکی^۳ در مرجع [۱] آن را نمی‌پذیرد).

به جای پیوستگی عمل تفریق در اصل ۱، می‌توانستیم پیوستگی عمل جمع را قرار دهیم، زیرا از اصل ۲ نتیجه می‌شود که نگاشت $E \rightarrow E, x \mapsto -x$ پیوسته است، و از آنجا نگاشت $E \times E \rightarrow E \times E$ ، $(x, y) \mapsto (x, -y)$ نیز پیوسته خواهد بود. اما گنجاندن «عمل تفریق» به جای «عمل جمع» در اصل ۱، دلیلی دارد که مطلقاً بر پایه زیبایی استوار نیست و هم‌اکنون به شرح آن می‌پردازیم.

همان‌گونه که در این فصل مفاهیم «فضای برداری» و «فضای توپولوژیک» با هم ارتباط پیدا کردند، بسیاری از مفاهیم جالب و مفید دیگر از ارتباط بین توپولوژی و ساختار جبری پدید می‌آیند. به‌ویژه، چنانچه G یک گروه و در عین حال یک فضای توپولوژیک باشد، آن را یک گروه توپولوژیک^۴ می‌نامند هرگاه ساختار گروه و توپولوژی با هم سازگار باشند. اما منظور از این سازگاری چیست؟ منظور آن است که عمل ترکیب

$$G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto ab$$

و نگاشت وارون $G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1}$ ، می‌توان این دو شرط را در یک شرط ادغام کرد، و اصل موضوع گروههای توپولوژیک را به دست داد: نگاشت $G \times G \rightarrow G$

1. topological vector space

2. Dunford-Schwartz

3. Bourbaki

4. topological group

$(a, b) \mapsto ab^{-1}$ نگاشتی پیوسته است.

بنابراین، اصل ۱ دقیقاً بیان می‌کند که گروه جمعی $(E, +)$ با توپولوژی E ، یک گروه توپولوژیک تشکیل می‌دهد.

در چهار بخش آتی، متداولترین رده‌های فضای برداری توپولوژیک را، با رعایت ترتیب از جزئی به کلی، می‌آوریم:

۲. فضاهای برداری متناهی - بعد

فضای \mathbb{K}^n ، با توپولوژی معمولی، یک فضای برداری توپولوژیک است، و هر یکریختی $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ نیز یک همسانریختی است. پس، هر فضای برداری n بعدی V ، دقیقاً یک توپولوژی می‌پذیرد که برای آن لااقل یک (و در نتیجه هر) یکریختی $V \cong \mathbb{K}^n$ یک همسانریختی است، و با این توپولوژی، V به یک فضای برداری توپولوژیک بدل می‌شود. همه این مطالب پیش پا افتاده‌اند و بدون شک توپولوژی «معمولی» که بدین‌گونه معین می‌شود، بدیهیترین توپولوژی است که می‌توان برای V یافت. اما در واقع، این توپولوژی چندان هم «بدیهی» نیست، زیرا قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه. توپولوژی معمولی روی یک فضای برداری متناهی بعد V یگانه توپولوژیی است که آن را به یک فضای برداری توپولوژیک هائوسدورف بدل می‌سازد.
(برهان این قضیه را نمی‌آوریم. خواننده می‌تواند مراجعه کند به بورباکی [۱]، قضیهٔ ۲، ص ۱۸).

این قضیه نشان می‌دهد که فضاهای برداری توپولوژیک متناهی بعد، به‌عنوان موضوعی مستقل برای مطالعه جالب نیستند، و مفهوم فضاهای برداری توپولوژیک، به‌دلیل حالت نامتناهی بعدی، وارد ریاضیات شده‌اند. اما، حتی برای فضاهای نامتناهی بعد نیز، یک نتیجهٔ مهم از قضیهٔ بالا به‌دست می‌آید: چنانچه V یک زیرفضای برداری متناهی بعد در یک فضای برداری توپولوژیک هائوسدورف دلخواه E باشد، توپولوژی V که از E بر آن القا شده دقیقاً همان توپولوژی معمولی است، حتی اگر E طبیعیترین نمونه در رشتهٔ خود باشد.

۳. فضاهای هیلبرت

یادآوری کنیم که فضای با حاصلضرب داخلی^۱، یک فضای برداری حقیقی (همچنین مختلط) E است همراه با یک صورت دوخطی متقارن (به‌ترتیب اِرمیتی^۲) مثبت و معین (\cdot, \cdot) . در این صورت،

برای $v \in E$ ، عدد $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ نرم v نامیده می‌شود.

یادداشت. اگر $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضایی با حاصلضرب داخلی باشد، آنگاه برابری $d(v, w) := \|v - w\|$ معرف متریکی است که توپولوژی وابسته به آن، E را به یک فضای برداری توپولوژیک مبدل می‌سازد.

تعریف (فضای هیلبرت). فضای با حاصلضرب داخلی را فضای هیلبرت^۲ گوئیم هرگاه نسبت به متریک خود کامل باشد، یعنی هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

پس از فضاهای متناهی بعد، فضاهای هیلبرت یقیناً ساده‌ترین فضاهای برداری توپولوژیک‌اند، و می‌توان آنها را به شیوه زیر کاملاً رده‌بندی کرد: یک خانواده $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از بردارهای یکه دوه‌دو متعامد در یک فضای هیلبرت H را یک پایه هیلبرتی^۳ برای H گویند هرگاه یگانه بردار قائم بر همه e_λ ها فقط بردار صفر باشد. می‌توان ثابت کرد که هر فضای هیلبرت چنین پایه‌ای دارد، و هر دو پایه از یک فضای هیلبرت، یک عدد اصلی مشترک دارند، و سرانجام هر دو فضای هیلبرت با پایه‌های هم‌توان، طولیاً یکریخت^۴ اند.

۴. فضاهای باناخ

تعریف (فضاهای نرم‌مدار). فرض کنیم E فضایی برداری است روی \mathbb{K} . یک نگاشت

$$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$$

برای هر $x \in E$ ، $\|x\| \geq 0$ ؛ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

$\|ax\| = |a| \|x\|$ ، $a \in \mathbb{K}$ و هر $x \in E$.

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ، $x, y \in E$ (نابرابری مثلثی).

یک زوج $(E, \|\cdot\|)$ متشکل از یک فضای برداری و یک نرم را یک فضای نرم‌دار^۵ می‌نامند.

یادداشت. اگر $(E, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد، برابری

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

معرف متریکی است که توپولوژی وابسته به آن E را به یک فضای برداری توپولوژیک مبدل می‌سازد.

تعریف (فضای باناخ). یک فضای نرم‌دار را فضای باناخ^۱ گویند هرگاه کامل باشد، یعنی هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

فضاهای هیلبرت و باناخ، به‌ویژه مثالهایی از فضاهای برداری توپولوژیک هستند، اما ساختاری اضافی دارند: روشن است که حاصلضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و یا نرم $\| \cdot \|$ را نمی‌توان از روی توپولوژی این فضاها به دست آورد. حتی در حالت بعد متناهی $n \geq 2$ ، یک فضای برداری n بعدی V نرمهای گوناگونی می‌پذیرد، که برخلاف حاصلضربهای داخلی، هیچ‌کدام از تأثیر خودریختیهای خطی فضا بر دیگری به دست نمی‌آید. البته، همه این نرمها معرف توپولوژی واحدی روی V هستند (که همان توپولوژی «معمولی» فضای n بعدی است). اما، در فضاهای نامتناهی بعد باناخ، چنانچه توجه خود را حتی فقط به ساختار فضای برداری توپولوژیک این فضاها معطوف کنیم (همان‌طور که در آنالیز تابعی متداول است)، می‌بینیم که این فضاها چنان رده وسیعی تشکیل می‌دهند که، نه تنها دسته‌بندی آنها مشکل است، بلکه شاید واقعاً نتوان توصیف جامعی از همه این رده‌ها به دست داد.

۵. فضاهای فرشه

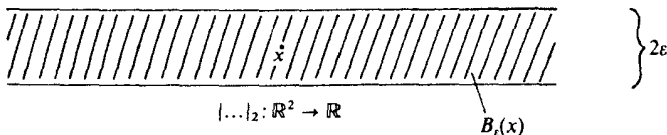
تعریف (نیم‌نرم). فرض کنیم E فضایی است برداری روی \mathbb{R} . یک نگاشت $|\cdot| : E \rightarrow \mathbb{R}$ را یک نیم‌نرم^۲ می‌نامیم هرگاه در اصول زیر صدق کند:

$$N1. \quad |x| \geq 0, \quad x \in E \quad \text{برای هر}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N2. \quad |ax| = |a| |x| \\ N3. \quad \text{نابرابری مثلثی،} \end{array} \right. \quad \text{مانند نرمها.}$$

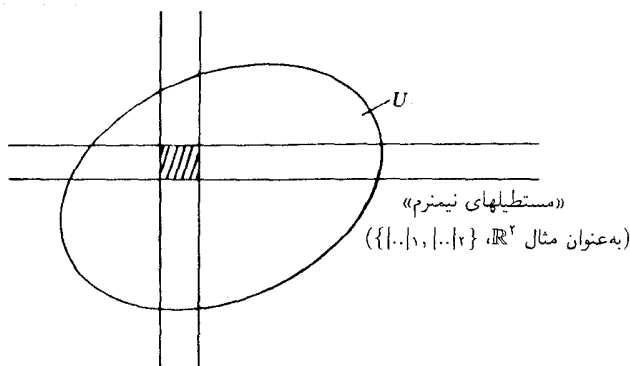
مثلاً، روی \mathbb{R}^n ، نگاشت $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto |x_i|, |\cdot|_i$ یک نیم‌نرم است.

برای نرمها و همچنین برای نیم‌نرمها، می‌توان از «گوییهای باز»^۳ سخن گفت. ما آنها را با $B_\varepsilon(x) := \{y \in E \mid |x - y| < \varepsilon\}$ نمایش می‌دهیم. اما، در حالت کلی، دیگر در آنها موضوع «گرد بودن» اصلاً مطرح نیست.



1. Banach space 2. seminorm 3. open balls

تعریف. فرض کنیم E فضایی است برداری و $\{|\cdot|_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک خانواده از نیم‌نرمها روی E . یک زیرمجموعه $U \subset E$ را در توپولوژیی که خانواده نیم‌نرمها پدید می‌آورند، بازگویند هرگاه هر نقطه U عضو مشترک متناهی از نیم‌نرمهای گویهای بازی باشد که در U قرار دارند؛ به عبارت دیگر، برای هر $x \in U$ ، اعضایی چون $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ و عددی چون $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که $B_\varepsilon^{(\lambda_1)}(x) \cap \dots \cap B_\varepsilon^{(\lambda_r)}(x) \subset U$.



با زبان و اصطلاحاتی که در فصل ۱، بخش ۴، دیدیم این گویهای باز نیم‌نرمهای $|\cdot|_\lambda$ ، $\lambda \in \Lambda$ ، یک زیر پایه برای توپولوژی فضا تشکیل می‌دهند، و یا توپولوژی فضا را پدید می‌آورند. یادداشت. با توپولوژیی که خانواده نیم‌نرمهای $\{|\cdot|_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ به دست می‌دهند E یک فضای برداری توپولوژیک می‌شود، که یک فضای هاوسدورف نیز خواهد بود اگر، و تنها اگر، 0 یگانه برداری باشد که همه نیم‌نرمهای $|\cdot|_\lambda$ به ازای آن صفر می‌شوند.

تعریف (فضای مقدّم فرشه). یک فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف که توپولوژی آن به کمک خانواده‌ای متناهی از نیم‌نرمها تعریف شده باشد، یک فضای مقدّم فرشه^۱ نامیده می‌شود.

فضای فرشه، فضای مقدّم فرشه‌ای است که «کامل» باشد. مطمئناً کمال مفهومی است متری، ولی باید بگویم که یک بیان توپولوژیک واضحی نیز برای این مفهوم در قالب فضاهای برداری توپولوژیک وجود دارد.

تعریف (فضاهای برداری توپولوژیک کامل). یک دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ در فضای برداری توپولوژیک

را دنباله‌کوشی^۱ گوئیم هرگاه برای هر همسایگی o مانند U ، یک n_o وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n, m \geq n_o$ رابطه $x_n - x_m \in U$ برقرار باشد. چنانچه هر دنباله‌کوشی دنباله‌ای همگرا باشد، فضا را (دنباله‌یی کامل^۲) نامند.

البته، در فضاهای نرم‌دار، این مفهوم کمال با مفهوم پیشین کمال، که از روی متریک وابسته به نرم فضا تعریف می‌شد، هم‌ارز است.

تعریف (فضای فرشه). منظور از فضای فرشه^۳، فضای مقدّم فرشه‌ای است که کامل باشد.

باید توجه نمود که فضاهای مقدّم فرشه، همگی متریک‌پذیرند: چنانچه توپولوژی فضا توسط دنباله‌ای از نیم‌رمه‌های $\{0 < | \cdot |_{n, n \geq 1} |$ داده شده باشد، برابری

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x - y|_n}{1 + |x - y|_n}$$

معرف متریکی است که توپولوژی وابسته به آن همان توپولوژی فضاست و دنباله‌های کوشی آن نیز همان دنباله‌های کوشی فضا هستند.

۶. فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب

سرانجام، فضاهای موضعاً محدب را تعریف می‌کنیم. این فضاها کلیترین رده‌ی فضاهای برداری توپولوژیک هستند که برای آنها نظریه‌ای پراز قضایایی جالب و قشنگ وجود دارد.

تعریف. یک فضای برداری توپولوژیک را موضعاً محدب^۴ گویند هرگاه هر همسایگی o شامل یک همسایگی محدب o باشد.

اکنون به بیان حقیقی می‌پردازیم که نشان می‌دهند تا چه حد این فضاها کلیتر از رده‌های نامبرده پیشین هستند (از اثبات آن صرف‌نظر می‌شود، رجوع کنید به [۱۳] بخش ۱۸): یک فضای برداری توپولوژیک، موضعاً محدب است اگر و تنها اگر، توپولوژی آن بتواند توسط خانواده‌ای از نیم‌رمه‌ها تعریف شود؛ یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب، یک فضای مقدّم فرشه است، اگر و تنها اگر متریک‌پذیر باشد.

1. Cauchy sequence

2. (sequentially) complete

3. Fréchet Space

4. locally convex

۷. چند مثال

مثال ۱. مجموعه توابع حقیقی f روی بازه $[-\pi, \pi]$ را که انتگرالپذیر لبگ^۱ هستند و در شرط

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

صدق می‌کنند، در نظر می‌گیریم. دو تابع از این مجموعه را هم‌ارز خوانند هرگاه خارج از یک مجموعه با اندازه صفر، بر هم منطبق باشند. رده‌های هم‌ارزی آن‌را، با تسامح، توابع مربع انتگرالپذیر^۲ می‌نامند. گیریم H مجموعه این توابع باشد. یک ساختار متعارف فضای برداری حقیقی روی H وجود دارد و می‌توان آن‌را به کمک حاصلضرب داخلی:

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

به ساختار یک فضای هیلبرت تبدیل نمود. توابع مثلثاتی

$$e_k := \cos kx, \quad e_{-k} := \sin kx$$

به‌ازای $k \geq 1$ همراه با تابع $e_0 := \frac{\sqrt{x}}{\pi}$ ، یک پایه هیلبرتی $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ برای H می‌سازند. نمایش هر عضو $f \in H$ به صورت $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f, e_n) e_n$ دقیقاً سری فوریه^۳ f است.

مثال ۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $C(X)$ فضای برداری توابع پیوسته و کراندار روی X باشد، و

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

در این صورت، $(C(X), \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ است.

مثال ۳. فرض کنیم $X \subset \mathbb{C}$ حوزه‌ای^۴ در صفحه مختلط باشد، فضای برداری توابع تاماریخت^۵ روی X را با $\mathcal{O}(X)$ نمایش می‌دهیم، و این فضا را به توپولوژی وابسته به خانواده

$$\{\|\cdot\|_K\}_{K \subset X} \text{ فشرده، } K$$

از نیم‌رهمای $\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)|$ مجهز می‌کنیم (این توپولوژی را اصطلاحاً توپولوژی «همگرایی فشرده»^۵ می‌گویند). در این صورت، $\mathcal{O}(X)$ یک فضای فشرده است (فقط کافی است دسته‌ای شما را از K_n ها که تمامی X را «تحلیل می‌برند» اختیار کنیم؛ ویژگی کمال، از قضیه همگرایی

1. Lebesgue-integrable

2. square-integrable functions

۳. domain منظور مجموعه باز و همبند است -م.

4. holomorphic

5. compact convergence

وایرستراس نتیجه می‌شود (...).

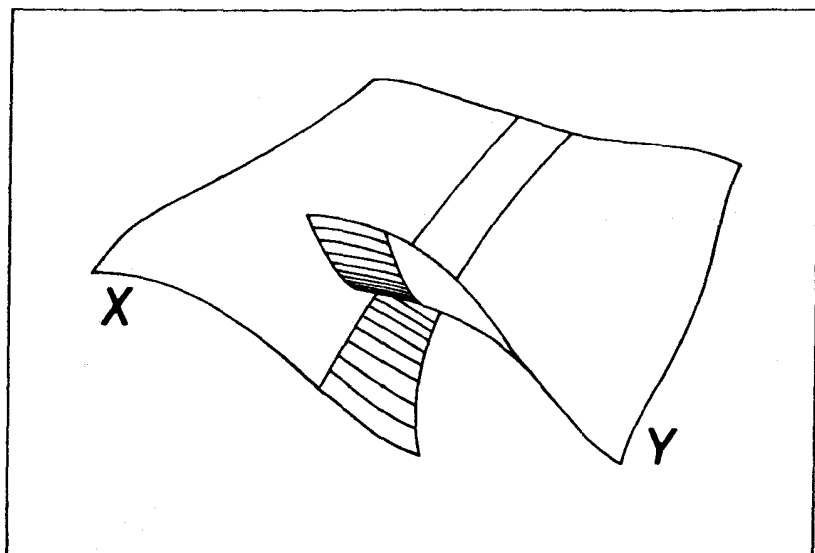
سه مثال فوق، از جمله مثالهایی از «فضاهای تابعی»^۱ زیادی هستند که به نحوی مؤثر در آنالیز ظاهر می‌شوند. مانند فضا‌های برداری، آنها را ابداع نکرده‌ایم، بلکه خود به خود حضور دارند و نمی‌توان آنها را نادیده گرفت. این واقعیت نیز که عملگرهای خطی ديفرانسیل و انتگرال، رفتاری به شکل نگاشتهای خطی $E_1 \rightarrow E_2 : L$ بین فضا‌های تابعی دارند، مستقیماً از ماهیت اشیاء ناشی می‌شود. اما اگر در این موارد، به جبر خطی اکتفا کنیم، به بی‌مایگهائی کشیده می‌شویم. پس، برای درک ویژگیهای این عملگرها، لازم است به بررسی رفتار آنها از نظر پیوستگی نسبت به توپولوژیهای گوناگون بپردازیم، و از شناخت خود دربارهٔ ساختار فضا‌های برداری توپولوژیک مجرد بهره‌گیریم. هر چند توپولوژی نقطه مجموعه، که همهٔ بحث فعلی ما در بهادادن به آن است، نمی‌تواند معرف لبهٔ نیز پژوهش در زمینهٔ معادلات ديفرانسیل با مشتقات جزئی باشد. با این حال، ابراری اجتناب‌ناپذیر برای آن است، تا آنجا که باید مسلم انگاشته شود.

هنوز مثالهایی از فضا‌های برداری توپولوژیک موضعاً محدب ولی متریک‌ناپذیر را، که در نتیجه فضا‌های مقدّم فرشه هم نیستند، ارائه نموده‌ام. البته، این فضاها نیز به‌طور کاملاً طبیعی در آنالیز تابعی ظاهر می‌شوند. مثلاً، گاهی نیاز داریم که «توپولوژی ضعیف»^۲، یعنی، درشت‌بافت‌ترین توپولوژیی را که برای آن همهٔ نگاشتهای خطی پیوستهٔ قدیمی $E \rightarrow \mathbb{R}$ (یعنی «تابع‌های خطی»^۳) پیوسته می‌مانند، یا به بیان دیگر، توپولوژیی را که به‌کمک مجموعهٔ

$$\{f^{-1}(U) \mid U \subset \mathbb{R} \text{ باز است}\}$$

پدید می‌آید روی یک فضای برداری توپولوژیک بررسی کنیم. با این توپولوژی، E باز هم فضایی است برداری توپولوژیک، اما بسیار پیچیده‌تر از آنچه قبلاً بود. حتی اگر با فضایی به‌سادگی یک فضای هیلبرت نامتناهی - بعد شروع کنیم، آنچه با توپولوژی ضعیف به دست می‌آید، یک فضای موضعاً محدب، هائوسدورف، اما متریک‌ناپذیر خواهد بود (رجوع کنید به [۴]، ص ۷۶).

توپولوژی خارج قسمت



۱. مفهوم فضای خارج قسمت

نمادگذاری. اگر X یک مجموعه و \sim یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد، مجموعه رده‌های هم‌ارزی را با X/\sim ، و رده هم‌ارزی یک عضو $x \in X$ را با $[x]$ ، و نگاشت تصویر متعارف^۱

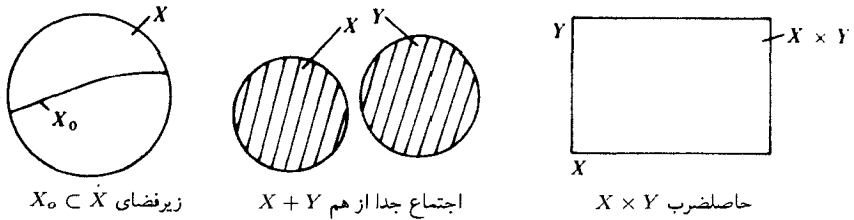
1. canonical projection

$\sim X \rightarrow X$ را با π نمایش می‌دهیم، یعنی $\pi(x) := [x]$ و $\pi : X \rightarrow X/\sim$.

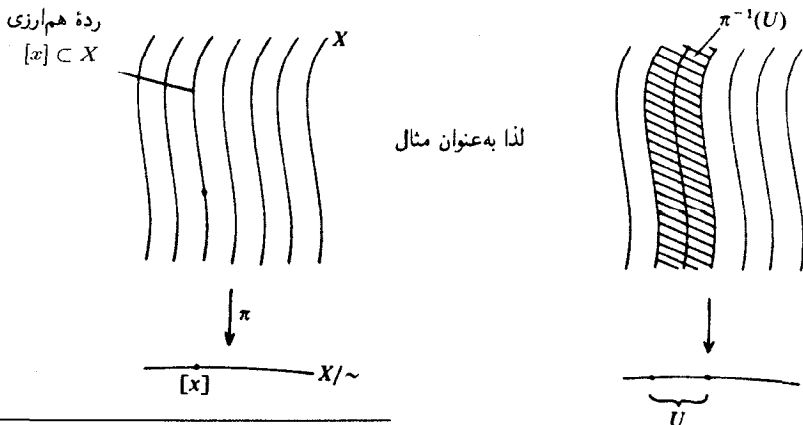
تعریف (فضای خارج قسمت^۱). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و \sim یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد. یک مجموعه $U \subset X/\sim$ را در توپولوژی خارج قسمت باز می‌گوییم هرگاه $\pi^{-1}(U)$ در X باز باشد. مجموعه X/\sim همراه با توپولوژیی که بدین‌گونه تعریف کردیم، خارج قسمت X بر \sim نامیده می‌شود.

یادداشت. روشن است که توپولوژی خارج قسمت ریزبافت‌ترین توپولوژی روی X/\sim است به قسمی که π یک نگاشت پیوسته باشد.

درست همان‌گونه که از مفاهیم زیرفضا، اجتماع جدا از هم، و حاصلضرب، تجسم ذهنی روشنی در دست داریم، و می‌توانیم پایه‌های شهود خود را در ابتدای کار بر پایه آنها بگذاریم، مایلیم برای تجسم ذهنی فضاهای خارج قسمت نیز پیشنهادی عرضه کنم.



برای درک یک رابطه هم‌ارزی، بهترین کار تجسم رده‌های هم‌ارزی است؛ هر چند این رده‌های هم‌ارزی، نقاط فضای خارج قسمت‌اند، این امر کافی نیست، زیرا احساس ما خواهان یک تصویر هندسی از فضای خارج قسمت است که در آن، نقاط فضا واقعاً «نقطه‌هایی» به معنی هندسی آنها باشند:

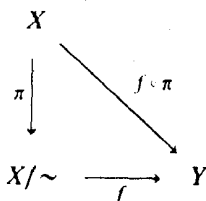


لذا به‌عنوان مثال

در دو بخش آینده هر آنچه را که در «نظریه» فضاهای خارج قسمت مورد نیاز ماست می‌گنجانیم، و پس از آن آزادیم که به بخش واقعاً جالب این مبحث، یعنی مثالهایی که واقعاً در ریاضیات پیدا می‌شوند و ابداعات دور از ذهنی نیستند، بپردازیم.

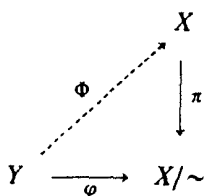
۲. فضاهای خارج قسمت و نگاشتها

نکته ۱ (نگاشتهایی از فضاهای خارج قسمت). فرض کنیم Y فضای توپولوژیک دیگری باشد. بدیهی است که نگاشتی چون $f: X/\sim \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر نگاشت مرکب $f \circ \pi$ پیوسته باشد:

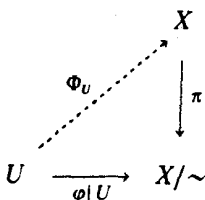


نکته ۲ (نگاشت به فضاهای خارج قسمت). معیار جهانی مشابهی برای پیوستگی نگاشتی به شکل $\varphi: Y \rightarrow X/\sim$ وجود ندارد. اما ملاحظه جزئی زیر غالباً سودمند واقع می‌شود: اگر یک نگاشت پیوسته $\Phi: Y \rightarrow X$ با شرط $\varphi = \pi \circ \Phi$

$$\varphi = \pi \circ \Phi,$$



وجود داشته باشد، یا حتی اگر این پدیده فقط موضعی باشد، یعنی اگر برای هر $y \in Y$ ، یک همسایگی U و یک نگاشت پیوسته $\Phi_U: U \rightarrow X$ با شرط $\pi \circ \Phi_U = \varphi|_U$ بتوان یافت، آنگاه φ البته



پیوسته است.

۳. ویژگیهای فضاهاى خارج قسمت

کدام یک از ویژگیهای فضای X به فضای خارج قسمت X/\sim منتقل می‌شود؟ همبندی و فشردگی خوشفترترین ویژگیها هستند:

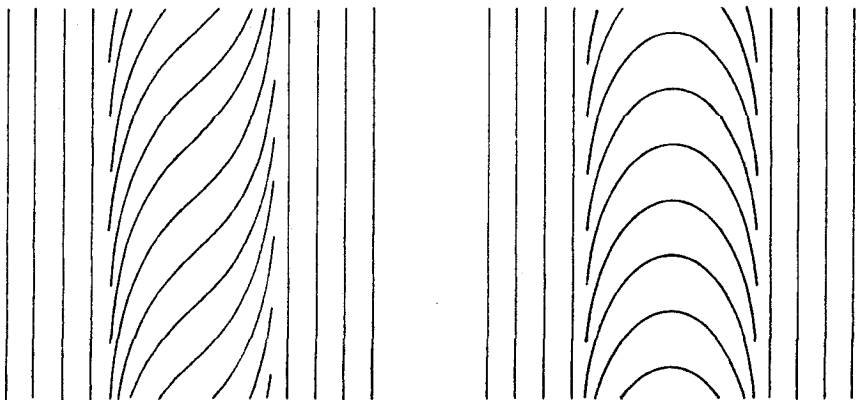
نکته ۱. اگر X فضایی همبند (همبند - راه)، و یا فشرده باشد، X/\sim نیز همبند (همبند - راه) یا فشرده است (زیرا این فضا، نگاره پیوسته X است).

در مورد سومین ویژگی فضاها، که در فصل ۱ مورد بحث قرار دادیم، وضع به کلی متفاوت است: فضای خارج قسمت یک فضای هاوسدورف، در حالت کلی، دیگر یک فضای هاوسدورف نیست. یک دلیل ساده این امر آن است که ممکن است رده‌های هم‌ارزی، همگی بسته نباشند:

نکته ۲. یک شرط لازم برای آنکه فضای خارج قسمت X/\sim یک فضای هاوسدورف باشد، آن است که همه رده‌های هم‌ارزی در X بسته باشند؛ زیرا، اگر $y \notin [x]$ یک نقطه مرزی $[x]$ باشد، آنگاه در فضای X/\sim ، نمی‌توان $[x]$ و $[y]$ را با همسایگی‌هایی جدا از هم، از هم جدا کرد.

یک راه دیگر، شاید ظریفتر، برای بیان این منظور چنین است: بسته بودن رده‌های هم‌ارزی در X ، با بسته بودن نقاط در X/\sim هم‌ارز است، و می‌دانیم که در یک فضای هاوسدورف همه نقاط، مجموعه‌های بسته‌اند.

بسیار خوب، فرض کنیم که رده‌های هم‌ارزی بسته‌اند: این شرط کاملاً معقول است و بدون آن هیچ چیز درست از آب در نمی‌آید. اما، با تحقق این شرط، چه پیش می‌آید؟ به دو مثال گمراه‌کننده مشابه زیر توجه کنیم.



در هر دوى آنها $X = \mathbb{R}^2$ با توپولوژى معمولى است، و رده‌هاى هم‌ارزى زير خمينه‌هاى بسته يك بعدى هستند كه به نحو ساده‌اى مرتب شده‌اند، و تجزيه \mathbb{R}^2 به رده‌هاى هم‌ارزى، حتى براثر انتقال در امتداد محور y ها ناوردا است. بعلاوه، اين دو مثال، آن قدر شبیه‌اند كه نمى‌توان اختلاف ميان رده‌هاى هم‌ارزى آنها را به كمك ويژگيهاى نظرى نقطه - مجموعه‌اى دو رابطه هم‌ارزى، به زبان ساده‌اى توصيف نمود، مگر آنكه بگوئيم دريكى از آنها فضاى خارج قسمت يك فضاى هاوسدورف است، اما در ديگرى نيست!

آنچه كه مستقيماً از اين مثالها فرا مى‌گيريم اين است كه ويژگيهاى جداسازى خارج قسمتها، تا اندازه زيادى بستگى به ترتيب خاص رده‌هاى هم‌ارزى دارند و بايد مرهون وجود قضايائى باشيم كه ضامن هاوسدورف بودن رده‌هاى وسيعى از مثالها هستند.

۴. چند مثال: فضاهاى همگن

نخست به يادآورى چند نمادگذارى جبرى مى‌پردازيم: اگر G يك گروه باشد و $H \subset G$ يك زيرگروه، آنگاه G/H معرف مجموعه هم - مجموعه‌هاى چپ، $\{gH | g \in G\}$ ، است، كه رده‌هاى هم‌ارزى براى رابطه هم‌ارزى $a \sim b : \iff b^{-1}a \in H$ ، روى G ، هستند. بعلاوه، اگر H يك زيرگروه نرمال (بهنجار) باشد (يعنى براى هر H $g \in H$ ، $gHg^{-1} = H$)، آنگاه G/H داراى يك ساختار متعارف گروهى خواهد بود كه از G گرفته است.

تعريف (گروه توپولوژيك). يك گروه G را كه يك فضاى توپولوژيك نيز باشد، يك گروه توپولوژيك^۱ مى‌نامند هرگاه نگاهت

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab^{-1}$$

پيوسته باشد.

به عنوان مثال، گروههاى $GL(n, \mathbb{C})$ و $GL(n, \mathbb{R})$ متشكل از ماتريسهاى وارونپذير $n \times n$ به طريق متعارف گروههاى توپولوژيك‌اند، و همچنين اند گروههاى ابلى $(E, +)$ ، كه زيربنائى فضاهاى بردارى توپولوژيك هستند. به همين منوال، هر زيرگروه از يك گروه توپولوژيك، مجهز به توپولوژى زيرفضايى، آشكارا يك گروه توپولوژيك است.

تعریف (فضای همگن). اگر $H \subset G$ زیر گروهی از یک گروه توپولوژیک G باشد، فضای خارج قسمت G/H یک فضای همگن^۱ نامیده می شود.

بنابراین، تعریف کلی فضای خارج قسمت X/\sim ، که در بخش ۱ آوردیم، در اینجا برای حالت خاص $X = G$ و رابطه هم ارزی $a \sim b \iff b^{-1}a \in H$ به کار رفته است.

چرا فضاهای همگن مورد توجه ما هستند؟ به این پرسش لعنتی که در بسیاری از جاها مطرح می شود نمی توان در سطح این کتاب کاملاً جواب داد. ولی من سعی خواهم کرد توضیحاتی درباره آن بدهم. هنگامی که در طبیعت به گروههای توپولوژیک برخورد می کنیم، معمولاً آنها را به شکل مجرد، به عنوان یک مجموعه G همراه با یک قانون ترکیب و یک توپولوژی، به ما نمی دهند، بلکه ذاتاً به صورت یک گروه تبدیلات، یعنی یک گروه از نگاشتهای دوسویی از یک مجموعه X به روی خود X مطرح می کنند، که قانون ترکیب در آن، چیزی جز قانون ترکیب نگاشتها نیست. اما لازم نیست که فقط X یک مجموعه و G هم گروه کلیه نگاشتهای دوسویی X باشد. بلکه مجموعه X معمولاً مجهز به یک ساختار اضافی: قبل از همه یک توپولوژی، اما بسته به موقعیت، شاید هم ساختاری دیفرانسیبلپذیر یا تحلیلی یا جبری یا متری یا خطی و یا هر نوع ساختار دیگر است. در این صورت، اعضای گروه G ، نگاشتهایی دوسویی، $g: X \rightarrow X$ ، خواهند بود که با این ساختار سازگارند. معمولاً در رابطه با همین است که معلوم می شود کدام توپولوژی برای G مناسب است. به عنوان مثالی ساده، می گیریم $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$: در این صورت، مجموعه X فضای \mathbb{R}^n خواهد بود با ساختار خطی خودش.

آنچه گفتیم، فقط ملاحظاتی در باب گروههای توپولوژیک بود و هنوز از فضاهای همگن صحبتی نکرده ایم. اکنون برخی اشیاء ریاضی نظیر A در X یا بر X یا به گونه ای مربوط به X و ساختار آن را در نظر می گیریم: به عنوان مثال، یک زیر مجموعه $A \subset X$ ، یا یک تابع $A: X \rightarrow \mathbb{C}$ ، و یا در واقع هر چیزی که برایش معنی داشته باشد که بگوییم A به وسیله عضو $g \in G$ ، به چیز مشابهی چون gA تبدیل می شود و gA نیز به کمک $h \in G$ به $h(gA)$ تبدیل می شود. برای یک زیر مجموعه $A \subset X$ ، gA فقط نگاره A است، در حالتی که برای یک تابع $A: X \rightarrow \mathbb{C}$ ، gA تابع $A \circ g^{-1}: X \rightarrow \mathbb{C}$ خواهد بود و به همین ترتیب در سایر موارد. اکنون دیده می شود که مجموعه $H = \{g \in G \mid gA = A\}$ ، متشکل از عضوهایی که A را به خود A تبدیل می کنند، یک زیر گروه G است، و می توان فضای همگن G/H را به گونه ای طبیعی به عنوان فضای کلیه موضعهایی در نظر گرفت که A می تواند تحت تبدیلات وابسته به اعضای مختلف G اختیار کند. به عنوان یک مثال ساده از این فرایند گیریم $G = o(n+k)$ و $X = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ و A زیر فضای $\mathbb{R}^k \times o$ باشد. ماتریسهای متعامدی که $\mathbb{R}^k \times o$ را به خودش

بدل مى‌کنند، دقیقاً به شکل زیر هستند:

$\left. \begin{array}{l} k \\ \\ n \end{array} \right\}$	h_1	0
	0	h_2

که در آن $h_1 \in o(k)$ و $h_2 \in o(n)$ ؛ در این حالت، داریم $H = o(k) \times o(n) \subset o(n+k)$ و فضای همگن $o(n+k)/o(k) \times o(n)$ به «خمینه گراسمانی»^۱ زیرفضاهای k بعدی در \mathbb{R}^{n+k} موسوم است. مثلاً، در حالت $k=1$ ، فضای همگن $o(n+1)/o(1) \times o(n)$ ، فضای تصویری حقیقی معروف $\mathbb{R}P^n$ متشکل از خطوط مستقیم گذرنده بر مبدأ در \mathbb{R}^{n+1} است.

اکنون به حالت کلی باز می‌گردیم. چه بسا اتفاق می‌افتد که یک چنین «فضای موضعی» است که اساساً مورد علاقه ماست، و پیدا کردن گروههای G و H ، به گونه‌ای که بتوان این فضا را به شکل فضای همگن G/H نشان داد، نخستین گام ما در مطالعه آن خواهد بود.

با این مقدمه، نخستین دیدگاهی را که فضاهای همگن را به نظر ما جالب جلوه می‌دهند، تا حدی مبهم توضیح دادیم. یک دیدگاه دوم (که فضاهای همگن را به عنوان «مدارات» مطرح می‌کند)، موضوع بخش آینده خواهد بود. اکنون می‌خواهیم به دیدگاه سومى که کاملاً عمیق است اشاره کنیم. به طور خیلی کلی، یکی از اصول بنیادی در بررسی اشیاء هندسی پیچیده، تجزیه آنها به اجزاء ساده‌تر و مطالعه قوانینی است که براساس آنها بتوان کل شیء را از روی اجزای آن دوباره ساخت. یک شق آن، تجزیه فضا به «تار»^۲ هایی مشابه همدیگر است. اما قواعدی که براساس آنها، این تارهای مشابه می‌توانند مجدداً به صورت «کلافهای تار»^۳ گرد آیند، به وسیله یک گروه توپولوژیک، یعنی «گروه ساختاری»^۴، معین می‌شود، و در رابطه با این گروههای ساختاری، فضاهای همگن دوباره وارد صحنه می‌شوند. مثلاً، خمینه‌های گراسمانی $O(n+k)/O(k) \times O(n)$ در رده‌بندی کلافهای برداری^۵ نقش عمده‌ای بازی می‌کنند، و اطلاعاتی که از این فضاهای همگن (یعنی خمینه‌های گراسمانی) به دست می‌دهند، به عنوان یک واسطه، در تجزیه و تحلیل کلافهای برداری به کار می‌روند، و کلافهای برداری نیز به نوبه خود ... ولی ادامه بحث، ما را از زمینه اصلی دور خواهد کرد. فقط اجازه بدهید یک نکته دیگر را هم اضافه کنیم: فضاهای همگن، چنانچه در بالا اشاره شد، علاوه بر آنکه ابزار مفیدی در انجام هدفهای

1. Grassmannian manifold 2. fibers 3. fiber bundles
4. structure group 5. vector bundles

مستقیم اند، به خودی خود نیز به عنوان اشیاء هندسی شایان توجه اند، از این لحاظ که هم بسیار متنوع اند و هم، به عنوان گروههای خارج قسمت روشهای نظریه گروههای توپولوژیک (و حتی گروههایی با ساختار غنی تر) را می پذیرند. «فضاهای متقارن»^۱ در هندسهٔ ریمانی نمونه های آن هستند.

*

مطالب فوق مارا از حوزهٔ توپولوژی نقطه - مجموعه دور کردند: هدف ساده من که متقاعد ساختن شما به پیدایش واقعی فضاهای همگن در ریاضیات بود، شاید برآورده شده باشد، و می توانیم اندک اندک به زمینهٔ اصلی خود بازگردیم.

در خاتمه، بار دیگر به مسألهٔ هاوسدورف بودن فضاهای خارج قسمت باز می گردیم. با اینکه ممکن است هاوسدورف بودن این فضاها در حالت کلی بعید به نظر آید، ولی برای فضاهای همگن، محک بسیار روشن زیر برقرار است:

لم. یک فضای همگن G/H هاوسدورف است اگر و تنها اگر H در G بسته باشد. (برای اثبات، که چندان دشوار نیست، مراجعه شود به فصل ۳، ص ۱۲، بورباکی [۲]).

اگر E یک فضای برداری توپولوژیک و E_0 یک زیر فضای آن باشد، خارج قسمت E/E_0 ، با توپولوژی خارج قسمت، نیز یک فضای برداری توپولوژیک است. از آنجا که \bar{E}_0 ، یعنی بستار E_0 ، نیز یک زیر فضای برداری E است، لم فوق ایجاب می کند که فضای E/\bar{E}_0 همواره یک فضای هاوسدورف باشد، به ویژه، فضای $E/\{\bar{0}\}$ که فضای هاوسدورف وابسته به E نامیده می شود. مثلاً چنانچه توپولوژی E با یک نیم نرم $\|\cdot\|$ تعریف شده باشد، خواهیم داشت: $\{x \in E \mid \|x\| = 0\} = \{\bar{0}\}$ و $\|\cdot\|$ معرّف یک نرم روی فضای $E/\{\bar{0}\}$ است.

۵. چند مثال: فضاهای مداری

تعریف. گیریم G یک گروه توپولوژیک باشد و X یک فضای توپولوژیک. منظور از یک عمل پیوستهٔ G روی X نگاشتی پیوسته است مانند

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$$

به قسمی که دواصل زیر برقرار باشد:

اصل ۱. برای هر $x \in X$ ، $1x = x$.

اصل ۲. برای هر $x \in X$ و هر $g_1, g_2 \in X$ ، $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.

پس، هر g معرف یک نگاشت $gx \mapsto x$ از X در خود X است، و دواصل فوق بیان می‌کنند که این تناظر یک هم‌ریختی گروه G در گروه نگاشتهای دوسویی X روی خودش است. نگارهٔ این هم‌ریختی، به دلیل پیوستگی نگاشت $X \rightarrow G \times X$ ، عملاً در گروه همسان‌ریختیهای X در خود X قرار دارد.

تعریف (G - فضا). منظور از یک G - فضا^۱، زوجی است متشکل از یک فضای توپولوژیک X و یک G - عمل پیوسته روی X .

G - خمینه‌های ديفرانسیلپذیر^۲ نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند: در این صورت، G نه تنها یک گروه توپولوژیک، بلکه در واقع یک گروه لی^۳ است (یعنی G خمینه‌ای است ديفرانسیلپذیر و نگاشت

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab^{-1}$$

ديفرانسیلپذیر است)، همچنین X نه تنها یک فضای توپولوژیک، بلکه در واقع خمینه‌ای است ديفرانسیلپذیر، و عمل $X \rightarrow G \times X$ نه تنها پیوسته، بلکه ديفرانسیلپذیر خواهد بود.

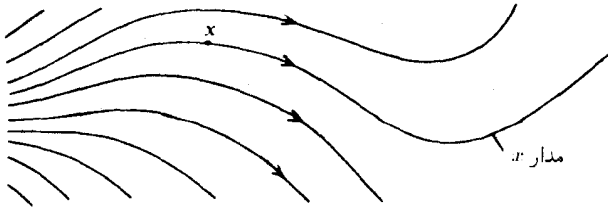
G - فضاها و به ویژه G - خمینه‌ها موضوع نظریه گسترده‌ای هستند به نام نظریه گروههای تبدیلات^۴. مسلماً در اینجا قادر نیستیم به بررسی عمیق این نظریه بپردازیم، اما یک جنبهٔ کوچکی از آن، در رابطه با این فصل، به ما مربوط می‌شود. این جنبه آن است که توپولوژی خارج قسمت از نخستین مفاهیمی است که در G - فضاها نقشی به عهده می‌گیرد. هم‌اکنون، این مطلب را شرح می‌دهیم.

تعریف (مدار). اگر X یک G - فضا و $x \in X$ نقطه‌ای از آن باشد، مجموعه $Gx := \{gx | g \in G\}$ را مدار^۵، یا مسیر^۶ x ، می‌نامند.

بنابراین، مدار عبارت است از مجموعهٔ نقاطی که x می‌تواند بر اثر عمل اعضای مختلف گروه به آن نقاط برده شود. بویژه، چنانچه G گروه جمعی اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +)$ باشد، آنگاه یک G - عمل عیناً مثل یک شارش^۷ (یا فلو) (در نظریهٔ معادلات ديفرانسیل معمولی و انتگرال میدانهای برداری) است. مدارها عبارت‌اند از نگارهٔ خمهای انتگرال و یا مسیره‌های شارش، و از همین جا، واژه «مسیر»، به قیاس،

1. G-space 2. Differentiable G-manifolds 3. Lie group
4. theory of transformation groups 5. orbit 6. trajectory 7. flow

برای هر گروه دلخواه نیز تعمیم یافته است.



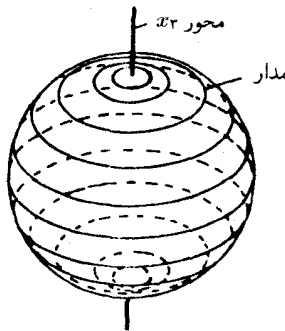
مدارها رده‌های هم‌ارزی برای رابطه هم‌ارزی \sim هستند که چنین تعریف می‌شود:
 مدارها در نظر بگیریم. $x \sim y \iff \exists g \in G, y = gx$. پس می‌توانیم توپولوژی خارج قسمت را روی مجموعه مدارها در نظر بگیریم.

تعریف (فضای مداری). اگر X یک G - فضا باشد، مجموعه مدارها همراه با توپولوژی خارج قسمت، فضای مداری^۱ نام دارد و با نماد X/G نشان داده می‌شود.

برای روشن کردن مطلب فضای مداری را برای یک مثال ساده «محاسبه» می‌کنیم: منظور این است که یک همسانزختی بین این فضای مداری و یک فضای توپولوژیک شناخته شده پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $G = SO(2)$ ، گروه دورانه‌های \mathbb{R}^2 حول مبدأ باشد، و X کره یکه $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. اگر G - عمل روی X را دوران حول محور x_3 ، یعنی

$$g(x_1, x_2, x_3) := (g(x_1, x_2), x_3)$$

بگیریم، در این صورت مدارها عبارت خواهند بود از دو قطب و دایره‌های موازی، معرّف عرضهای جغرافیایی.



1. orbit space

گزاره. $S^2/G \cong [-1, 1]$

برهان. نگاشت پیوسته $\pi_3: S^2 \rightarrow [-1, 1]$ را که توسط تصویر روی محور x_3 تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. از آنجا که π_3 روی هر مدار ثابت است، معرف نگاشتی خواهد بود به صورت

$$f_3: S^2/G \rightarrow [-1, 1]$$

به قسمی که نمودار زیر تعویض‌پذیر است:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi_3 & \\ S^2/G & \xrightarrow{f_3} & [-1, 1] \end{array}$$

به علاوه، نگاشت f_3 آشکارا یک نگاشت دوسویی است. پس، بنابر بخش ۲، f_3 پیوسته نیز هست. اما S^2/G فشرده است، زیرا نگاره پیوسته مجموعه فشرده S^2 است و $[-1, 1]$ هاوسدورف. پس، بنابر قضیه پایان فصل ۱، f_3 یک همسانریختی است. همان چیزی که می‌خواستیم. \square

سرانجام، نگاهی به خود مدارها می‌اندازیم و یک توپولوژی خارج قسمت هم روی آنها پیدا می‌کنیم.

تعریف (پایدارساز). فرض کنیم X یک G -فضا باشد و $x \in X$ مجموعه

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

را پایدارساز^۱ یا گروه تکرندی^۲ نقطه x می‌نامیم.

تبصره. تناظر $gG_x \mapsto gx$ معرف یک نگاشت دوسویی پیوسته از فضای همگن G/G_x بروی مدار Gx است.

برهان. نخست ملاحظه کنیم که $gG_x \mapsto gx$ واقعاً به پیدایش یک نگاشت خوشتعریف $G/G_x \rightarrow Gx$ منجر می‌شود، زیرا برابری $hG_x = gG_x$ مستلزم برابری $h = ga$ به‌ازای مقداری از $a \in G_x$ است، و در نتیجه $hx = gax = gx$. آشکارا دیده می‌شود که این نگاشت، نگاشتی است پوشا، و یک به یک نیز هست زیرا برابری $hx = gx$ مستلزم $h^{-1}gx = x$ است، در نتیجه $h^{-1}g \in G_x$ و $hG_x = gG_x$. پیوستگی آن از بخش ۲ نتیجه می‌شود، زیرا نگاشت مرکب $G \rightarrow G/G_x \rightarrow Gx$

پیوسته است. چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

آنچه گفته شد، ارتباط تنگاتنگ میان مدارها و فضاهاى همگن را می‌رساند. حال اگر حالت ویژه‌ای را که G فشرده و X هاوسدورف است، در نظر بگیریم، آنگاه G/G_x فشرده خواهد بود زیرا نگارهٔ پیوسته G است. بنابراین، Gx به‌عنوان زیرفضایی از یک فضای هاوسدورف، فضایی است هاوسدورف و به‌موجب قضیهٔ آخر فصل ۱، ملاحظه می‌شود که $Gx \rightarrow G/G_x$ یک همسانریختی است: بنابراین مدارها واقعاً فضاهاى همگن «هستند».

۶. چند مثال: فروریزی یک زیرفضا به یک نقطه

تاکنون مثالهایی از توپولوژی خارج قسمت را بررسی کرده‌ایم که به سنت متداول ریاضیات، با دادن توپولوژی معلومی به شیبی که قبلاً به نحوی معلوم بوده، «خودبه‌خود» پیدا می‌شدند. در بخشهای ۶ و ۷، با عمل خارج قسمت بیشتر به صورت فنّ ظریفی برخورد می‌کنیم که طبق هدفها و مقاصدی معین برای ساختن فضاهاى توپولوژیک جدیدی با ویژگیهای مطلوب، به‌کار برده می‌شود.

تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و A زیرفضایی ناتهی از آن باشد. منظور از X/A فضای خارج قسمت X/\sim_A است، که در آن \sim_A رابطهٔ هم‌ارزی است که توسط ضابطهٔ زیر تعریف شده است:

$$x \sim_A y \iff x = y \text{ یا } (x \text{ و } y \text{ هر دو عضو } A \text{ هستند})$$

بنابراین، رده‌های هم‌ارزی عبارت‌اند از مجموعهٔ A و مجموعه‌های تک نقطه‌ای که در A نیستند. پس، در فضای خارج قسمت X/A ، A به‌عنوان یک نقطه منظور می‌شود، درحالی‌که مجموعهٔ متمم $X \setminus A$ بدون تغییر، یعنی همان‌گونه که در X بوده، باقی می‌ماند. اتفاقاً از اینجا معلوم می‌شود که چرا، در حالت خاص $A = \emptyset$ ، توافق شده است که فضای X/\emptyset به شکل $\{ \text{یک نقطه} \} + X = X/\emptyset$ نشان داده شود. فرایند رفتن از X به X/A ، فروریزی A به یک نقطه نامیده می‌شود. البته، به‌طور مشابه، می‌توان به فروریزی چندین زیرفضا به چند نقطه اشاره کرد. اکنون نمادگذاری مناسبی را برای این فرایند می‌آوریم:

تعریف. اگر X یک فضای توپولوژیک و $A_1, \dots, A_r \subset X$ زیر مجموعه‌هایی ناتهی و جدا از هم باشند، منظور از $X/A_1, \dots, A_r$ فضای خارج قسمت حاصل از رابطهٔ هم‌ارزی زیر است:

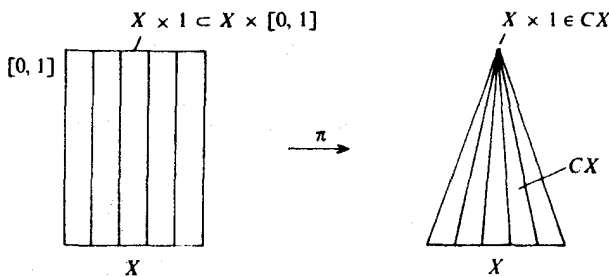
$$(i) \text{ای چنان هست که } x \text{ و } y \text{ هر دو عضو } A_i \text{ باشند) یا } x \sim y \iff x = y$$

تبصره. همان‌گونه که قبلاً در بخش ۳ خاطر نشان شد، فضای $X/A_1, \dots, A_r$ فقط وقتی می‌تواند فضای هاوسدورف باشد، که A_i ها همگی بسته باشند. در فضاهای «مناسب»، این شرط، شرط کافی نیز هست. مثلاً می‌توان به سادگی اثبات کرد که اگر X متریک‌پذیر و A_i ها بسته باشند، رده هم‌ارزی با بیش از یک نقطه داشته باشیم، وگرنه به مثال نقضی که در بخش ۳ دیده بودیم، برمی‌خوریم.

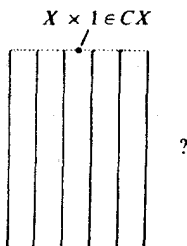
مثال ۱. (مخروط روی یک مجموعه^۱). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

$$CX := X \times [0, 1] / X \times 1$$

را مخروط روی X می‌نامیم.

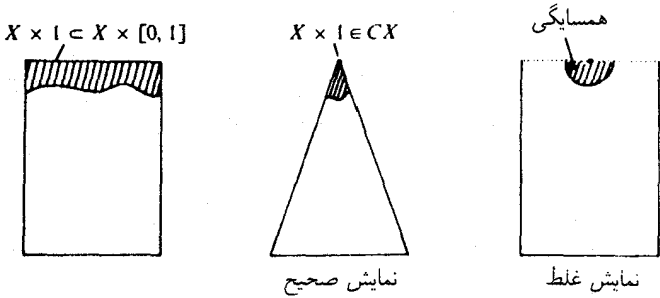


در اینجا باز باید این شکل را فقط به عنوان یک نگاره ذهنی در نظر گرفت، اما آیا این انتخاب، به عنوان یک نگاره ذهنی، انتخاب مناسبی است؟ با توجه به آنکه هنگام ساختن فضای X/A ، فضای متمم $X \setminus A$ دست‌نخورده باقی می‌ماند، آیا نمی‌بایست مخروط را به شکل:



نمایش دهیم؟ جواب منفی است: شکل اخیر تصور نادرستی از توپولوژی مخروط پدید می‌آورد، زیرا، بنابر تعریف توپولوژی خارج قسمت، باید نگاره وارون هر همسایگی رأس مخروط، یک همسایگی

$X \times 1$ ، یعنی «دریچه»^۱ استوانه باشد، و این هم فقط در شکل نخست حاصل می شود، نه در شکل دوم.

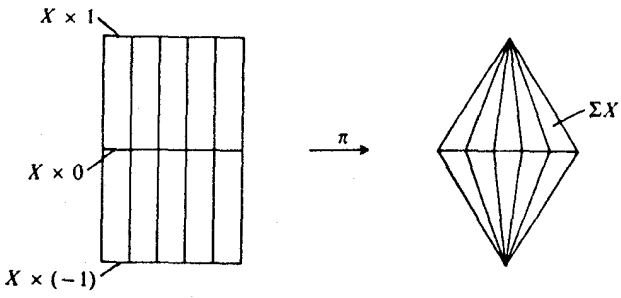


و اما، این واقعیت نیز که تغییری در متمم دریچه استوانه پدید نمی آید، در شکل نخست به طور کامل رعایت شده است، زیرا این شکل به خوبی نشان می دهد که تصویر متعارف π یک همسانریختی از $X \times [0, 1] \setminus X \times 1$ بر روی $CX \setminus \{X \times 1\}$ به دست می دهد.

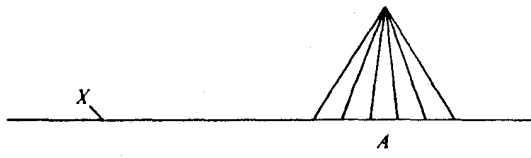
مثال ۲. (فضای تعلیقی). به ازای هر فضای توپولوژیک X ، فضای ΣX با ضابطه

$$\Sigma X := X \times [-1, 1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$$

را فضای تعلیقی^۲ X یا مخروط دوگانه^۳ روی X می نامند.

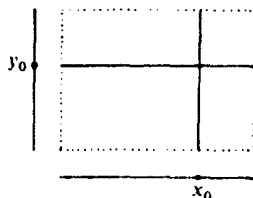


مثال ۳. گاهی، بنا به دلایلی، روی فقط بخشی از فضای X یک مخروط بنا می کنیم، اما کل فضای X را به عنوان «زمینه» این ساختمان محفوظ نگه می داریم. دقیقتر بگوییم، چنانچه $A \subset X$ ، منظور ما از فضای خارج قسمت $C_A X$ قسمت $(X \times 0 \cup A \times [0, 1]) / A \times 1$ است.



- 1. lid
- 2. suspension
- 3. double cone over X

مثال ۴. (حاصلضرب گوهی و حاصلضرب زحلی). فضاها ی توپولوژیک X و Y و نقاط ثابت $x_0 \in X$ و $y_0 \in Y$ را در نظر می‌گیریم. منظور از حاصلضرب گوهی $X \times Y$ در X ، که آن را با نماد $X \vee Y$ نمایش می‌دهیم، زیرفضای $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ از فضای حاصلضرب $X \times Y$ است.



منظور از حاصلضرب زحلی $X \wedge Y$ که با نماد $X \wedge Y$ نمایش داده می‌شود، فضای خارج قسمت $X \times Y / X \vee Y$ است.

مثال ۵. (فضای توم^۲) فرض کنیم E یک کلاف برداری متریک ریمانی، DE و SE به ترتیب کلاف قرصی^۴ و کلاف کروی^۵ وابسته به E باشند که چنین تعریف می‌شوند:

$$DE := \{x \in E \mid \|v\| \leq 1\}$$

$$SE := \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$$

در این صورت، فضای خارج قسمت DE/SE را فضای توم وابسته به کلاف E می‌نامند. همه این ساختمانها در توپولوژی جبری ظاهر می‌شوند. اما حالا نمی‌توانم بگویم به چه منظوری به کار برده می‌شوند، و می‌پذیرم با مطالبی که تاکنون دیده‌ایم، نمی‌توانم حتی آخرین مثال را درک کرد. اما من آن را فقط برای «روز مبادا» در اینجا گنجاندم. با این وجود بگذارید به ساده‌ترین حالت این مثال، یعنی حالتی که کلاف E فقط یک «تار» دارد: $E = \mathbb{R}^n$ ، نظر دقیقتری بیندازیم. در این حالت، DE گوی بسته D^n ، و SE کره S^{n-1} است. بینیم از فروریزی همه مرزگویی به یک نقطه، چه فضایی به دست می‌آید؟ بله؛ یک فضای همسانریخت با کره n بعدی S^n . برای اثبات، یک نگاشت پیوسته $f: D^n \rightarrow S^n$ چنان اختیار می‌کنیم که S^{n-1} یعنی مرز D^n را به قطب جنوب، p ، ببرد و گوی باز $D^n \setminus S^{n-1}$ را به شکل دوسویی روی $S^n \setminus p$ بنگارد (یک مثال از این‌گونه نگاشت f ، نگاشتی است که شعاعهای گوی باز را به طریق عادی روی نیمدایره‌های عظیمه^۶ (یعنی «نصف‌النهار^۷ های») گذرنده بر قطب شمال و جنوب می‌نگارد).

1. wedge product

2. smash product

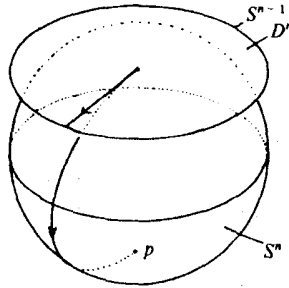
۳. Thom space، رنه توم René Thom ریاضیدان معاصر فرانسوی.

4. disc bundle

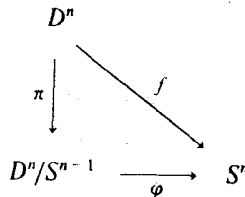
5. sphere bundle

6. great semicircles

7. meridians



سپس، به کمک f ، یک نگاشت دوسویی $\varphi : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ به دست می آوریم که در شرط $f = \varphi \circ \pi$ صدق کند:



بنابراین در بخش ۲ دیده شد، می دانیم φ پیوسته است، و بنابراین در واقع یک همسانریختی است، زیرا نگاشتی است دوسویی از فضای فشرده D^n/S^{n-1} بر روی فضای هاوسدورف S^n .

۷. چند مثال: چسباندن فضاهای توپولوژیک به یکدیگر

تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند و X_0 یک زیرفضای X باشد و $\varphi : X_0 \rightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته. رابطه هم‌ارزی \sim را که توسط $\varphi(x) \sim x$ برای هر $x \in X_0$ پدید می آید روی فضای $X + Y$ در نظر می گیریم و فضای خارج قسمت $(X + Y)/\sim$ را با نماد $X \cup_{\varphi} Y$ نمایش می دهیم. همچنین گفته می شود که $X \cup_{\varphi} Y$ از منضم کردن^۱ یا چسباندن^۲ X به Y از راه نگاشت چسباننده^۳ φ ، و یا از یکی گرفتن^۴ نقاط $x \in X_0$ با نگاره آنها تحت φ ، یعنی $\varphi(x) \in Y$ به دست آمده است.

به عنوان احتیاط، در اینجا نیز توضیح خود را تکرار می کنیم: رده های هم‌ارزی یا یک نقطه دارند (هر نقطه از $X + Y$ که نه به X_0 متعلق باشد و نه به $(\varphi(X_0))$ ، و یا به شکل $\varphi^{-1}(y) + \{y\} \subset X + Y$ هستند. مثال ۱. فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ پیوسته. در این صورت،

1. attaching 2. gluing 3. attaching map 4. identifying

می‌گویند فضای $D^n \cup_\varphi X$ از «چسباندن یک حجره» به X به وسیله نگاشت چسباننده φ به دست آمده است.

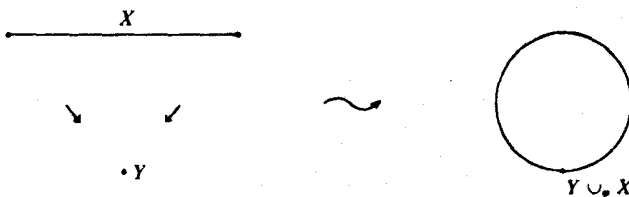


(در فصل هفتم، مجتمعهای CW ، یا «ضعیف - توپولوژی منتهای - بستار»، مجدداً از چسباندن حجره‌ها سخن خواهیم گفت).

بینیم رابطه بین «بلوکهای ساختمانی» X و Y با فضای $X \cup_\varphi Y$ چیست؟ از آنجا که هیچ دو نقطه متمایز Y با هم یکی گرفته نمی‌شوند، همواره Y به‌گونه‌ای متعارف، جزء $X \cup_\varphi Y$ است، و یا دقیقتر بگوییم، نگاشت متعارف $X \cup_\varphi Y \rightarrow X + Y \subset Y$ یک به یک است، و در نتیجه از نوشتن $X \cup_\varphi Y \subset Y$ هیچ‌گونه سوء تفاهمی حاصل نمی‌شود. و به علاوه دلیلی هم برای این نوع نوشتن هست، زیرا با بیان $X \cup_\varphi Y \subset Y$ ، توپولوژی زیرفضایی که Y از $X \cup_\varphi Y$ می‌گیرد، با توپولوژی اولیه خود فضای Y یکی خواهد بود، که اثبات این مطلب ساده است (باید از پیوستگی φ استفاده کنید). پس، به خاطر بسیاریم:

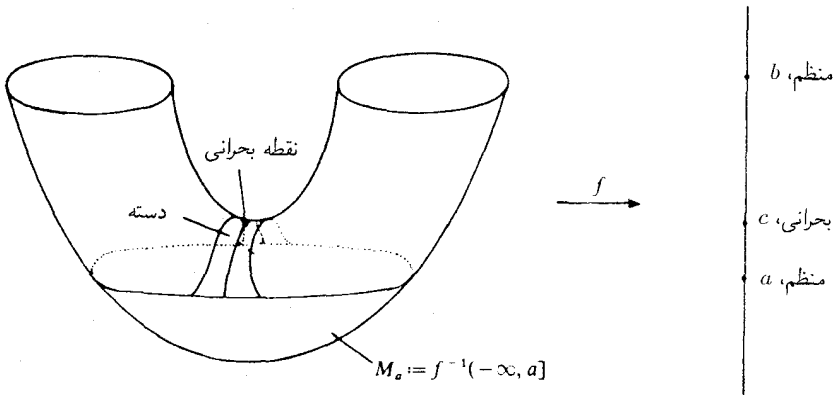
نکته. Y به‌طور متعارف زیرفضای $X \cup_\varphi Y$ است.

البته، حکم فوق در مورد جزء چسبیده یعنی X ، دیگر صادق نیست: هر چند مجموعه متمم $X \setminus X_0$ زیرفضای $X \cup_\varphi Y$ است، اما ممکن است خود X بر اثر نگاشت پیوسته متعارف $X \cup_\varphi Y \rightarrow X + Y \subset X$ ، تغییرات فاحشی پیدا کند. مثلاً اگر Y منحصر به یک نقطه تنها باشد، فضای $X \cup_\varphi X$ {نقطه} دقیقاً همان فضای X/X_0 است که در بخش ۶ تعریف شد.



ولی اگر φ یک همسانریختی از X_0 بروی زیرفضائی چون $Y_0 \subset X_0$ باشد، و $\psi: Y_0 \rightarrow X_0$ را وارون این همسانریختی بنامیم، آشکارا خواهیم داشت $X \cup_{\psi} Y = X \cup_{\varphi} Y$ ، و بنا بر نکته فوق، فضاهای X و Y هریک به شیوه‌ای متعارف، مشمول در $X \cup_{\varphi} Y$ خواهند بود. مثالهای زیر از این نوع‌اند:

مثال ۲. چسباندن یک «دسته» $D^k \times D^{n-k}$ به یک خمینهٔ مرزدار n بعدی، به کمک یک نشانند $\varphi: S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$ ، همان‌گونه که در نظریهٔ مورس^۳ صورت گرفته است. (به عنوان مثال، رجوع شود به مرجع [۱۴]):



چنانچه قرار دهیم $M_y := f^{-1}(-\infty, y]$ ، در این صورت، عبور از یک «نقطهٔ بحرانی»^۴ اساساً با چسباندن یک دسته هم‌ارز است:

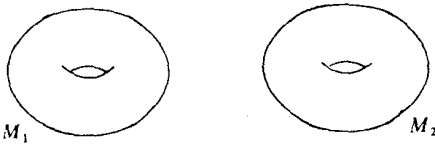
$$M_b \cong M_a \cup_{\varphi} (D^k \times D^{n-k})$$

مثال ۳. در توپولوژی دیفرانسیل، «حاصل جمع همبند» دو خمینهٔ M_1 و M_2 را که با نماد $M_1 \# M_2$ نمایش می‌دهند، به شکل زیر تعریف می‌کنند:

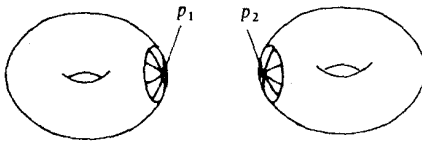
$$M_1 \# M_2 := (M_2 \setminus p_2) \cup_{\varphi} (M_1 \setminus p_1)$$

یعنی نخست، با برداشتن یک نقطهٔ دلخواه از هریک، سوراخی در هر کدام ایجاد می‌کنند، سپس خمینه‌های حاصل را توسط یک نگاشت مناسب φ به هم می‌چسباندند (رجوع شود به مرجع [۳]، ص ۱۰۲).

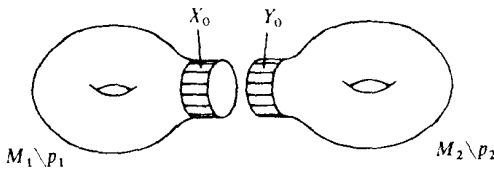
1. handle 2. with boundary 3. Morse 4. critical point



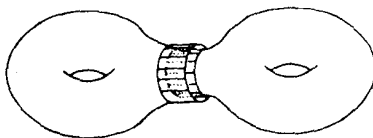
دو خمینه مفروض



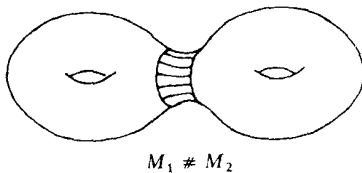
آماده کردن



سوراخ کردن



تجسم نگاشت $\varphi : X_0 \rightarrow Y_0$



پس از چسباندن

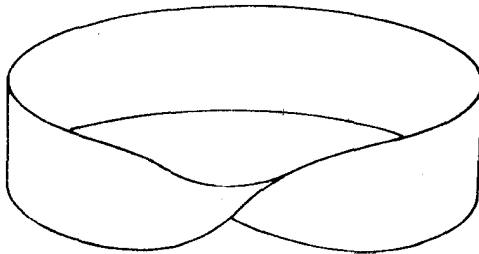
$$M_1 \# M_2$$

تاکنون، در همه مثالهای فوق، دو فضای X و Y را به هم می‌چسبانیم، یعنی خارج قسمت $\sim X + Y$ را تشکیل می‌دادیم. همچنین، می‌توان یک فضای X را به راههای گوناگون به خودش چسباند. بدین طریق که به کمک یک نگاشت برخی از نقاط فضای X را با برخی دیگر از نقاط X ، با هم «یکی گرفت»، که عیناً مثل این است که یک رابطه هم‌ارزی گرفته‌ایم و سپس به فضای خارج قسمت

$\sim X/$ رسیده‌ایم. دو مثال معروف، نوار موبیوس^۱ و بطری کلاین^۲، از این قبیل‌اند. چون قصد داریم ذیلاً این دو مثال را شرح دهیم، نمادگذاری زیر را وارد می‌کنیم:

نمادگذاری. فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\alpha : X \rightarrow X$ یک همسانریختی باشد. منظور از $X \times [0, 1]/\alpha$ ، فضای خارج قسمت $X \times [0, 1]$ بر آن رابطه هم‌ارزی است که با $(x, 0) \sim (\alpha(x), 1)$ تعریف می‌شود، که به ویژه معنی آن این است که همه نقطه‌های دیگر (x, t) ، $0 < t < 1$ ، فقط با خودشان هم‌ارزند.

مثال ۴. (نوار موبیوس). اگر $X = [-1, 1]$ و $\alpha(x) := -x$ ، آنگاه $X \times [0, 1]/\alpha$ با نوار موبیوس همسانریخت است.

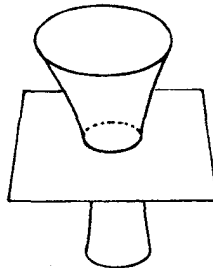


مثال ۵. (بطری کلاین). گیریم $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ نگاشت تقارن نسبت به محور x ها باشد، یعنی $\bar{z} := \alpha(z)$ ، که S^1 دایره‌ایکه در صفحه مختلط یعنی $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ منظور شده است. در این صورت،

$$S^1 \times [0, 1]/\alpha$$

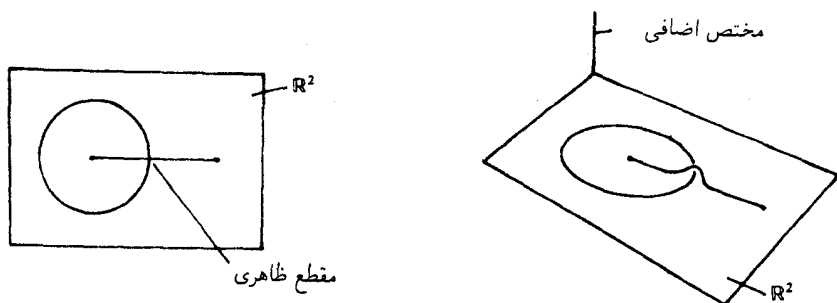
با «بطری کلاین» همسانریخت است.

تجسم بطری کلاین ذاتاً آسان نیست، زیرا هیچ زیرفضایی از فضای سه‌بعدی \mathbb{R}^3 با آن همسانریخت نیست. برای آنکه ببینیم «به چه می‌ماند»، باید به ترفند «مقطع ظاهری»^۳ متوسل شویم. برای تجسم این ترفند، به شکل زیر توجه کنید:



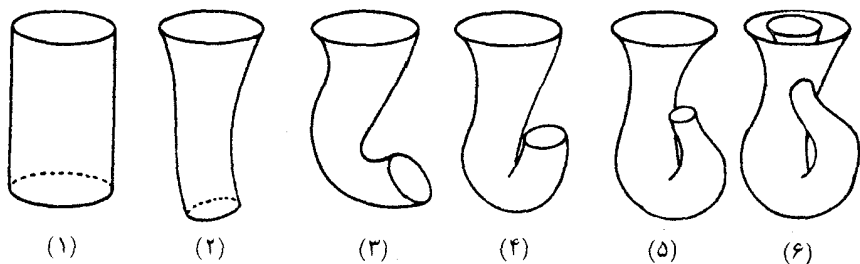
معمولاً آن را چنین تعبیر می‌کنیم: زیر مجموعه‌ای است از \mathbb{R}^2 ، حاصل از اجتماع یک مستطیل و یک قیف، که در یک دایره همدیگر را قطع می‌کنند. اما، چنانچه از ما خواسته شود که فقط این مقطع را که ظاهر شده است در نظر بگیریم، در آن صورت شکل فوق معنای کاملاً متفاوتی پیدا می‌کند. دیگر به هیچ وجه آن زیر مجموعه \mathbb{R}^2 نیست، بلکه مسلماً تلاشی است ناقص برای نمایش فضای حاصلجمع توپولوژیک و لذا جدا از هم مستطیل و قیف. پس، در این فضا، این دایره دوبار منظور می‌شود: یک بار در مستطیل و یک بار در قیف. برخلاف آنچه که در آغاز، شکل فوق به ذهن ما القا کرده است، دیگر نمی‌توان به گونه‌ای پیوسته از قیف به مستطیل رسید.

اگر می‌خواهید به شیوه ملموستری به این پدیده بیندیشید، فضای مسأله را زیر فضایی از \mathbb{R}^3 تصور کنید و این شکل را تصویر آن فضا روی $\mathbb{R}^2 \times 0$ می‌توان فرض کرد که مستطیل مورد بحث کلاً در فضای $\mathbb{R}^2 \times 0$ قرار دارد و برای قیف هم، مختص چهارم نامرتبی آن اساساً صفر است، جز در پیرامون مقطع ظاهری که مثبت خواهد بود. چنین موقعیتی را می‌توان، به قیاس دو-بعدی، در شکل زیر روشن نمود:

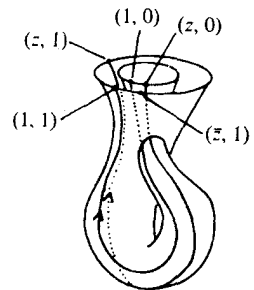
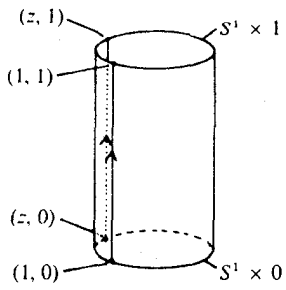


ولی هنگامی که برای درک بعضی از ویژگیهای فضای مفروضی می‌خواهید از شکلی حاصل از مقاطع ظاهری استفاده کنید، متوجه خواهید شد که اصلاً نیازی به این بعد چهارم کمکی ندارید، بلکه فقط کافی است که آمادگی داشته باشید دو جزء مقطع ظاهری را ذهناً از هم جدا کنید.

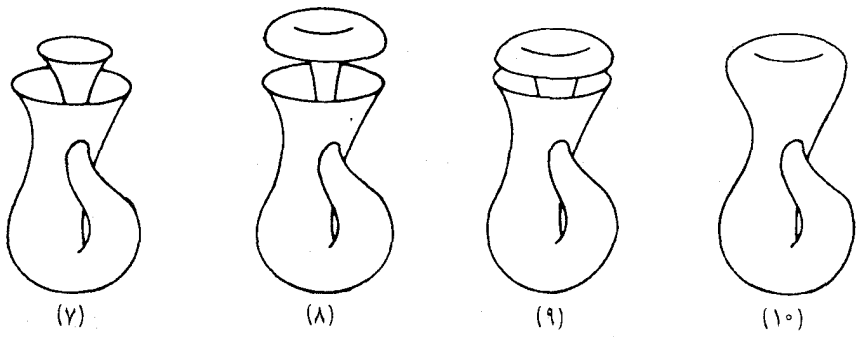
در این باب، می‌توانیم یک استوانه $S^1 \times [0, 1]$ مجهز به یک خود-بُری ظاهری به شکل (۶) را که به تدریج از شکل (۱) به دست آمده چنین مجسم کنیم:



در رشته (۱) تا (۶)، حرکت در این جهت است که نشان دهد کدام نقطه (۱) متناظر با کدام نقطه (۶) است. «ته» شکل (۱) در گذر از (۱) به (۶) صرف نظر از انتقال و باریک شدن انتها، «تا» می شود و دقیقاً یک بار از محور واصل به نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ عبور می کند. بنابراین، در (۶)، زوجهایی که قرار است با هم یکی گرفته شوند، یعنی $(z, 0)$ و $(\bar{z}, 1)$ ، دقیقاً در مقابل همدیگر قرار می گیرند، و



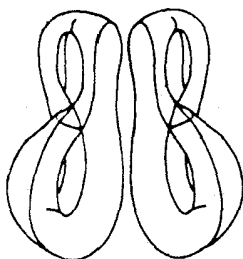
کافی است دایره مرزی داخلی را اندکی بزرگ کنیم تا بر دایره بزرگتر منطبق شود و بدین ترتیب، تجسمی فضایی از رابطه هم‌ارزی یکی‌گیری، که منجر به تعریف بطری کلاین می شود، حاصل آید. جز این نکته که نمی خواهیم محل بخیه به صورت لبه تیزی درآید (دلیلی ندارد که متمایز از بقیه «مدارها» مجسم شود). در نتیجه، به روش زیر عمل می کنیم:



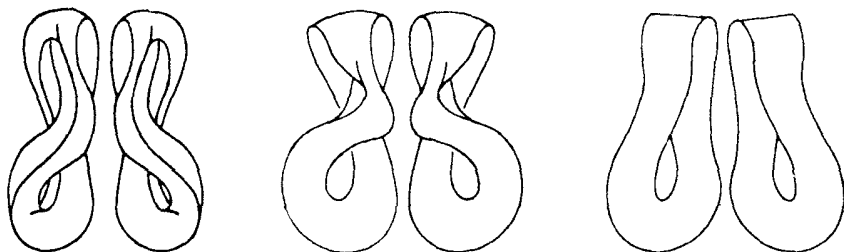
پس، آنچه در (۱۰) به دست آورده ایم، بطری کلاین است، که با یک خود-بری ظاهری، کاملاً نمایانده شده است.

چند مثال: چسباندن فضا‌های توپولوژیک به یکدیگر ۶۵

حال، اگر این اسباب پیچیده را برای دیدن چگونگی درون آن به دو نیمه کنیم، و سپس هر یک از دو



نیمهٔ مقطع ظاهری را با دقت از هم باز کنیم، پس از اندکی صافکاری و هموارسازی، دو نوار موبیوس به دست می‌آوریم



باز، از نو، اگر فرایند عکس را دنبال کنیم: می‌بینیم که با چسباندن دو نوار موبیوس M در طول مرزهایشان، به بطری کلاین دست می‌یابیم:

$$M \cup_{\text{Id}_M} M \cong K$$

خوب! ... آیا می‌شود این نحوهٔ بیان ما را استدلال نامید؟ به هیچ وجه. یک برهان، می‌بایستی چیزی شبیه این باشد: نخست نگاشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$([-1, 1] \times [0, 1]) + ([-1, 1] \times [0, 1]) \rightarrow S \times [0, 1]$$

بدین طریق که برای جمعیدهٔ اول، می‌نویسیم

$$(\theta, t) \mapsto (e^{\pi i \theta / \gamma}, t)$$

و برای جمعیدهٔ دوم

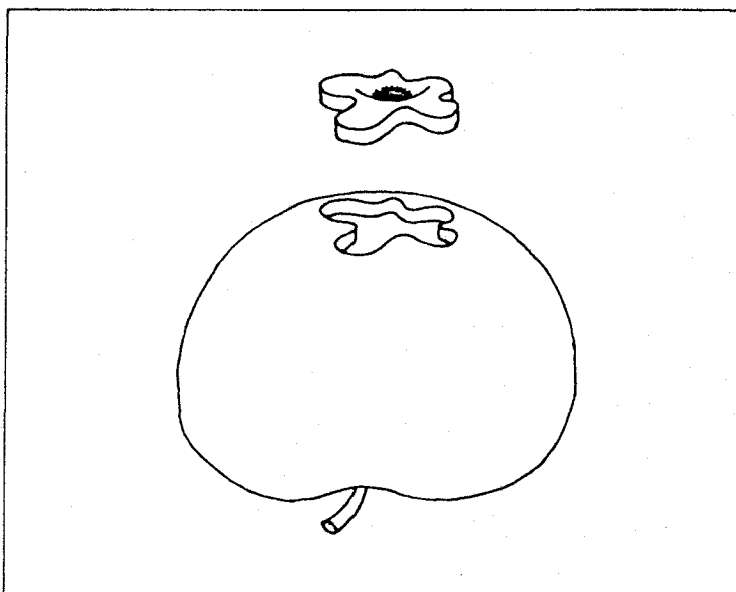
$$(\theta, t) \mapsto (-e^{-\pi i \theta / \gamma}, t)$$

سپس، ثابت می‌کنیم که این بیان به پیدایش یک نگاشت دوسویی خوشتعریف: $M \cup_{\text{Id}_M} M \rightarrow K$ منجر می‌شود. بعد، با استفاده از نکته ۱، بخش ۲، پیوستگی این نگاشت دوسویی را ثابت می‌کنیم و سرانجام، قضیه آخر فصل اول را که می‌گوید یک نگاشت دوسویی پیوسته از یک فضای فشرده به یک فضای هاسدورف، همواره یک همسانریختی است، به‌کار می‌بریم.

*

غالباً در مخالفت با استدلال شهودی فضایی، چنین گفته می‌شود که این نوع استدلال در واقع یک استدلال نیست، بلکه فقط رسانیدن مقصود به کمک «حرکات سر و دست» است. پس، آیا باید هرگونه استدلال شهودی را کنار بگذاریم؟ مسلماً نه. تا زمانی که این استدلال از پشتوانه استانده طلایی برهانهای قوی برخوردار است، اجازه نامه ارزشمند استفاده از حرکات سر و دست، کمک گرانبهایی به ارتباط مستقیم و تبادل سریع افکار است. پس زنده باد حرکات سر و دست!

تکمیل فضاهای متری



۱. تکمیل یک فضای متری

مطالب این فصل در واقع مربوط به متریک فضاهای متری است، و نه فقط توپولوژی که متریک به این فضاها می‌دهد؛ ولی عادت بر این جاری، و بجا نیز هست، که فضاهای متری در رده‌بندی توپولوژی

نقطه - مجموعه مورد مطالعه قرار گیرد، ولی ما در مورد این تفاوت، تعصبی نشان نمی‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که یک دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ از نقاط یک فضای متری (X, d) را دنباله کوشی^۱ گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، n_0 می‌موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $m, n \geq n_0$ نامساوی $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ برقرار باشد. فضای متری (X, d) را کامل^۲ گویند اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

مثلاً، خط حقیقی \mathbb{R} ، با متریک معمولی $d(x, y) := |x - y|$ - چنانچه هر دانشجوی ریاضی در اوایل تحصیل خود متوجه (اصل کمال در اعداد حقیقی) خواهد شد - فضایی است کامل؛ از این رو، \mathbb{R}^n نیز، با متریک معمولی خود، کامل است؛ فضاهای هیلبرت و باناخ، طبق تعریف، کامل اند؛ هر فضای متری فشرده، یک فضای متری کامل است، و بالاخره هرگاه به این نکته ساده توجه کنیم که هر زیر فضای یک فضای متری کامل، یعنی هر زیر مجموعه $A \subset X$ با متریک $d|_A \times A$ ، کامل است اگر و فقط اگر A در X بسته باشد، آنگاه می‌توانیم شمار بسیار زیادی مثالهای دیگر به دست آوریم. پس از این یادآوری مختصر، منظور ما از تکمیل^۳ یک فضای متری، فرایند افزودن کمترین نقاط ممکن به یک فضای ناکامل (X, d) برای به دست آوردن یک فضای کامل (\hat{X}, \hat{d}) است.

تعریف (فضای تکمیلی). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. فضای متری (\hat{X}, \hat{d}) را فضای تکمیلی (X, d) گویند هرگاه $X \subset \hat{X}$ و $d = \hat{d}|_{X \times X}$ ، و به علاوه:

(۱) فضای (\hat{X}, \hat{d}) کامل باشد،

(۲) X در \hat{X} چگال^۴ باشد، به عبارت دیگر $\bar{X} = \hat{X}$ ، بستار X در \hat{X} ، با خود \hat{X} برابر باشد.

شرط دوم دقیقاً می‌گوید که \hat{X} یک فضای کامل مینیمال است به گونه‌ای که X زیر فضای \hat{X} است؛ از آنجاکه X چگال است، هر نقطه «جدید» $\hat{x} \in \hat{X} \setminus X$ حد یک دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ از نقاط X است، و چنانچه \hat{x} را حذف کنیم، دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ به یک دنباله کوشی ناهمگرا در \hat{X} بدل می‌شود و کمال از بین می‌رود. آیا هر فضای متری را می‌توان تکمیل کرد، و اگر چنین است، چند راه برای آن وجود دارد؟ در این گونه موارد، یک روش سنتی پسندیده آن است که نخست به مسأله یکتایی پرداخته شود. در مورد مسأله مورد بحث ما، اثبات یکتایی، به موجب گزاره زیر خیلی ساده است.

گزاره (یکتایی فضای تکمیلی). اگر (\hat{X}, \hat{d}) و (\tilde{X}, \tilde{d}) فضاهای تکمیلی فضای متری (X, d) باشند، دقیقاً یک طولیایی $\tilde{X} \xrightarrow{\cong} \hat{X}$ هست که تحدیدش به X نگاشت همانی است.

برهان. اگر دنباله‌ای کوشی از نقاط X باشد، نگاره $x = \lim x_n$ بر اثر چنین طولیایی، البته باید حد دنباله (x_n) در \tilde{X} باشد که، بنا بر فرض، وجود دارد. پس، حداکثر یک چنین طولیایی بیشتر موجود نیست. برعکس، اگر (x_n) و (y_n) دو دنباله کوشی در X و \hat{x}, \hat{y} (به ترتیب \tilde{x}, \tilde{y}) حدود آنها در \hat{X} (به ترتیب در \tilde{X}) باشند، آنگاه داریم

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim d(x_n, y_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

پس، یک نگاشت $\hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ که توسط $\hat{x} \mapsto \tilde{x}$ داده می‌شود، اولاً خوشتعریف است، و درثانی ویژگی مطلوب را داراست، یعنی یک طولیایی است که شرط $x \mapsto x$ را برای هر $x \in X$ برآورده می‌کند، همان چیزی که می‌خواستیم. \square

باتوجه به مطالب فوق می‌توان گفت که («باتقریب یک طولیایی متعارف») حداکثر یک فضای تکمیلی برای (X, d) وجود دارد، و به همین دلیل، در بیشتر موارد، چگونگی تکمیل اصلاً اهمیتی ندارد، به شرط آنکه نخست شدنی بودن آن بر ما معلوم باشد. هنگامی که X زیرفضایی متری از یک فضای متری کامل Y باشد، یافتن یک فضای تکمیلی برای X به طور طبیعی بسیار آسان است: کافی است بستار X در Y را اختیار کنیم. در مثالهای زیر، $Y = \mathbb{R}^2$ و X در هر مورد زیرفضایی است همسانریخت با \mathbb{R} :

مثال ۱. $X = \mathbb{R}$ ، کامل است.

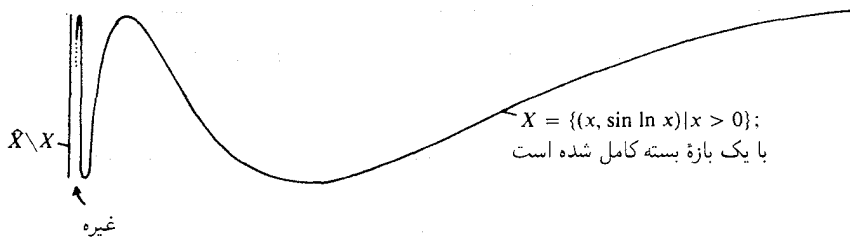
مثال ۲. X یک نیمخط باز است، که با افزودن یک نقطه تکمیل می‌شود.



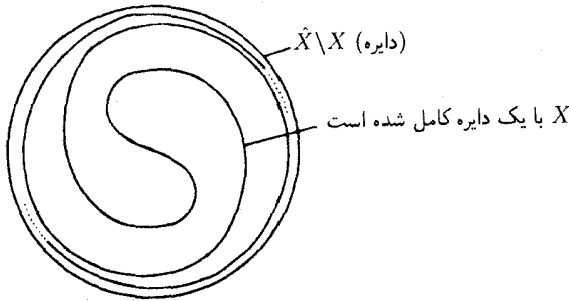
مثال ۳. X بازه‌ای است باز که با افزودن دو نقطه تکمیل می‌شود.



مثال ۴. $X = \{(x, \sin \ln x) | x > 0\}$ که با افزودن یک بازه بسته تکمیل می‌شود.

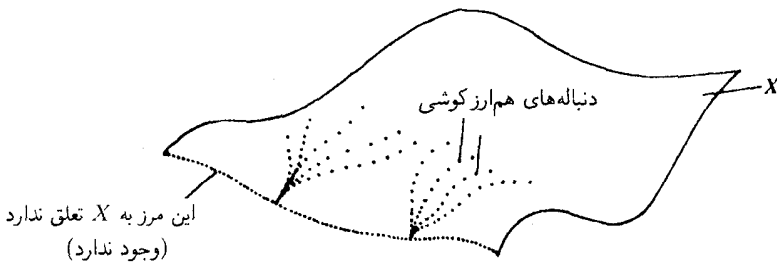


مثال ۵.



X خمی است در داخل یک قرص، که با دایره مرزی تکمیل می‌شود. این مثالها را از آن رو آورده‌ایم تا مستقیماً نشان دهیم که فضاهای همسانریخت ممکن است فضاهای تکمیلی به‌غایت ناهمسانریختی داشته باشند.

حال به مسأله ساختن فضای تکمیلی یک فضای متری دلخواه (X, d) می‌پردازیم. روشن است که باید نقاط تازه‌ای ایجاد کنیم که مقادیر حدی دنباله‌های ناهمگرای کوشی باشند (همان نقاطی که قبلاً نقاط «آرمانی»^۱ نامیده می‌شدند، و در واقع، به بیان دقیق، این نامگذاری مستلزم عدم وجود این نقاط بود). به علاوه، دو دنباله ناهمگرای کوشی $(a_n)_{n \geq 1}$ و $(b_n)_{n \geq 1}$ «نقطه حدی آرمانی»^۲ مشترکی چون \exists دارند اگر و تنها اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$ زیرا فقط و فقط در این صورت است که باید دنباله‌های نامبرده حد مشترکی در یک فضای تکمیلی X داشته باشند.



اما این نقاط \exists را از کجا پیدا کنیم؟ در این‌گونه موارد، از امکانات «بهشت برین» کانتور (به‌زعم هیلبرت)، یعنی نظریه مجموعه‌ها، استفاده می‌کنیم: خیلی ساده، یک رده هم‌ارزی از دنباله‌های ناهمگرای کوشی را در نظر می‌گیریم و خود همین رده هم‌ارزی را به‌عنوان نقطه حدی آرمانی آن دنباله‌ها اختیار می‌کنیم!

لم (وجود فضای تکمیلی). فرض می‌کنیم (X, d) یک فضای متری و \mathcal{A} مجموعه

دنباله‌های ناهمگرای کوشی در X باشد. دو دنباله کوشی (a_n) و (b_n) را هم‌ارز خوانیم هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$. مجموعه \hat{X} را به‌عنوان اجتماع جدا از هم $\sim \mathcal{N}/ + X$ و فاصله \hat{d} را روی \hat{X} بادستورهای زیر، برای هر $x, y \in X$ و همه رده‌های هم‌ارزی $a = [(a_n)]$ و $b = [(b_n)]$ در $\sim \mathcal{N}/$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\hat{d}(x, y) := d(x, y),$$

$$\hat{d}(x, a) = \hat{d}(a, x) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, x)$$

$$\hat{d}(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n)$$

در این صورت، یک نگاشت خوشتعریف $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ به‌دست می‌آید به‌گونه‌ای که (\hat{X}, \hat{d}) یک فضای تکمیلی فضای (X, d) است.

برهان. ... استدلال از آن نوع استدلالهایی است که هیچ‌کس نمی‌تواند با شرح و تفصیل بیشتر آن را روشنتر سازد. به‌ترتیب ثابت می‌شود که \hat{d} خوشتعریف است، \hat{d} در اصول موضوعه متریک صدق می‌کند، X در \hat{X} چگال است، و سرانجام (\hat{X}, \hat{d}) کامل است. برسیب احتیاط بگذارید خاطر نشان کنم که اعضای یک دنباله کوشی (\hat{x}_n) لازم نیست همگی در X باشند. دنباله‌هایی چون $(x_{nk})_{n \geq 1}$ را در X چنان انتخاب می‌کنیم که به‌یکی از دو صورت زیر باشند: یا $\hat{x}_n = [(x_{nk})_{k \geq 1}]$ ، و یا اگر $\hat{x}_n \in X$ ، آنگاه برای هر $x_{nk} = \hat{x}_n$ ، $k, i_1 < k_2 < \dots$ دنباله $(x_{nk_{i_1}})_{n \geq 1}$ یک دنباله کوشی است و (\hat{x}_n) به‌سوی حد خود همگرا خواهد شد. ... همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

همه ما، هم خواننده و هم مؤلف، به این فوت‌وفن کار با رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های ناهمگرای کوشی، به‌عنوان یک وسیله انتقال صوری، ارزش می‌گذاریم، و در عین حال، هیچ‌یک از ما دست از شهود خود بر نمی‌داریم و تأمل در این باره را که این‌گونه دسته‌های شگفت‌انگیز دنباله‌های کوشی، واقعاً نقاط حدی آرمانی هستند، آغاز می‌کنیم. اما ببینید که دستهای نااهل، خصوصاً در مدارس، می‌تواند چه بلاهایی بر سر نظریه مجموعه‌ها بیاورد! ... بگذریم، مهم نیست.

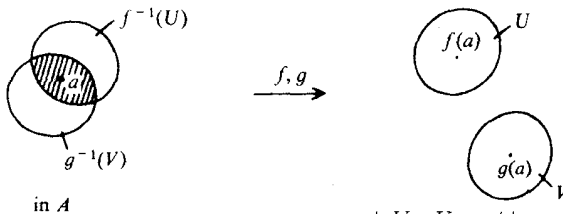
در خاتمه، اشاره جانبی مختصری به مسئله بیان و ارائه مطالب می‌کنیم. می‌توانستیم، شاید به‌طور ظریفتر، فضای تکمیلی را به‌شیوه زیر تعریف کنیم: فرض می‌کنیم \mathcal{C} مجموعه همه دنباله‌های (همگرا و ناهمگرا)ی کوشی در X باشد. قرار می‌دهیم $\hat{X} = \mathcal{C}/ \sim$ و $\hat{d}([(a_n)], [(b_n)]) = \lim d(a_n, b_n)$ در این صورت، (\hat{X}, \hat{d}) یک فضای متریک کامل است، و اگر به X از طریق $[(x)_{n \geq 1}] \mapsto x$ ، به‌صورت یک زیرمجموعه \hat{X} «نگاه کنیم» (\hat{X}, \hat{d}) یک فضای تکمیلی (X, d) خواهد بود. (برهان: ...).

زیرا، در موارد مشابه، غالباً این نحوه بیان ترجیح داده می‌شود. آیا می‌شود کسی هیأت اعداد مختلط را به شکل $\mathbb{C} := \mathbb{R} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ ، مجهز به فلان و بهمان قوانین ترکیب معرفی کند؟ البته نه؛ طبعاً $\mathbb{R}^2 := \mathbb{C}$ را یک مجموعه می‌گیرند و بقیه ماجرا؛ سپس اعلام می‌کنند که بعداً \mathbb{R} باید از طریق $(x, 0) \mapsto x$ به عنوان یک زیرمجموعه \mathbb{C} «منظور شود». معهداً باید اعتراف کنم که هر بار مطلب فوق را به دانشجویان مبتدی اعلام می‌کنم، احساس ناخرسندی به من دست می‌دهد...

۲. تکمیل یک نگاشت

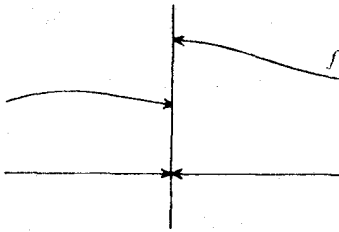
فرض کنیم (X, d) یک فضای مترى باشد و $f : X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته. در چه شرایط و چگونه می‌توان f را به یک نگاشت پیوسته $f : \bar{X} \rightarrow Y$ توسعه داد؟ نخست یک تذکر مقدماتی لازم است. حداکثر یک راه برای این توسعه وجود دارد:

گزاره. فرض می‌کنیم A یک فضای توپولوژیک و $X \subset A$ زیرمجموعه‌ای چگال باشد، یعنی $\bar{X} = A$ و فرض می‌کنیم $f, g : A \rightarrow B$ دو نگاشت پیوسته از A به یک فضای هاوسدورف B باشند که روی X برهم منطبق‌اند. در این صورت $f = g$. برهان. اگر f و g در نقطه‌ای چون $a \in A$ متمایز باشند، آنگاه در تمامی یک همسایگی نقطه a مانند $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ متمایز خواهند بود، پس $a \notin \bar{X}$ ، و این هم متناقض با فرض گزاره است، همان چیزی که می‌خواستیم. \square

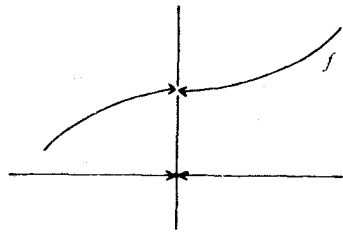


در B : همسایگی‌های جدا از هم U و V را برای $f(a)$ و $g(a)$ انتخاب کرده‌ایم...

از گزاره فوق به‌ویژه نتیجه می‌شود که یک نگاشت پیوسته از یک فضای مترى X به یک فضای هاوسدورف، حداکثر به یک شیوه به فضای تکمیلی \bar{X} توسعه داده می‌شود. اما گاهی به هیچ‌وجه توسعه ممکن نیست، و در واقع، چنانچه در مثالهای زیر دیده می‌شود، دو گونه مانع متفاوت بر سر راه وجود دارد:



مثال ۱: $X = \mathbb{R} \setminus \{o\}, \hat{X} = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



مثال ۲: $X = \mathbb{R} \setminus \{o\}, \hat{X} = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

در مثال ۱، f در نقطه o دارای یک «جهش» است و در نتیجه نمی تواند توسیع پیوسته داشته باشد. در مثال ۲، f دارای جهش نیست، اما تنها مقداری که می تواند برای یک توسیع پیوسته ضروری باشد، از حوزه عکس مقادیر «برداشته» شده است. اکنون فرض می کنیم که Y نیز یک فضای متریک باشد و این دو مشکل را با افزودن فرضهای مناسبی مرتفع می کنیم. برای آنکه تضمین کنیم که حوزه عکس مقادیر تابع هیچگونه «حفره‌ای» ندارد، روش ساده ما این است که فضای تکمیلی آن را در نظر می گیریم: و برای اجتناب از جهشهای f در نقاط آرمانی، آن را یکنواخت - پیوسته فرض می کنیم.

یادآوری کنیم که اگر (X, d) و (Y, d') فضاهای متریک باشند، یک نگاشت $f : X \rightarrow Y$ را یکنواخت - پیوسته نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ای مثبت $\delta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که، برای هر $a, b \in X$ با شرط $d(a, b) < \delta$ ، نابرابری $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon$ برقرار باشد.

لم (تکمیل نگاشتها). فرض می کنیم (X, d) و (Y, d') فضاهای متریک باشند و $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت یکنواخت - پیوسته باشد. در این صورت، چنانچه (\hat{X}, \hat{d}) و (\hat{Y}, \hat{d}') به ترتیب فضاهای تکمیلی (X, d) و (Y, d') باشند، آنگاه یک و تنها یک توسیع \hat{f} به یک نگاشت پیوسته $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ وجود دارد. برهان. به علت پیوستگی یکنواخت، دنباله های کوشی به دنباله های کوشی بدل می شوند، و هم ارزی این دنباله ها نیز محفوظ می ماند. پس، اگر \hat{f} را باضابطه $\hat{f}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ تعریف کنیم، f به گونه ای خوشتعریف به یک نگاشت $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ توسیع داده می شود، که در دستور فوق $(x_n)_{n \geq 1}$ معرف یک دنباله نامرگرای کوشی در X است و حد های دو طرف برابری فوق، به ترتیب در \hat{X} و \hat{Y} گرفته شده اند. به سادگی می توان تحقیق کرد که \hat{f} پیوسته و حتی یکنواخت - پیوسته است. ... همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. \square

مخصوصاً، به طور گذرا باید توجه داشت که طولپایها همواره یکنواخت - پیوسته اند ($\delta = \varepsilon$)، و در نتیجه، اگر $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ یک طولپایی باشد، نگاشت تکمیلی آن $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ نیز آشکارا یک طولپایی خواهد بود.

۳. تکمیل فضاهای نرم‌دار

تعجب‌آور نیست اگر مفهوم «کمال» در مورد فضاهای تابعی آنالیز آن قدر مهم باشد، زیرا توابع جالب توجه، «جوابهای» هر مسأله‌ای که باشند، غالباً به‌کمک حدگیری از دنباله‌های تابعی به‌دست می‌آیند. همان‌گونه که قبلاً در فصل ۲، بخش ۵، خاطر نشان ساختیم، می‌توان از «دنباله‌های کوشی» و در نتیجه از کمال^۱ و عدم کمال^۲ در فضاهای برداری توپولوژیک دلخواه صحبت کرد. چنانچه خواسته باشیم چارچوبی اصولی برای این مفاهیم در فضاهای توپولوژیک بناکنیم، به مفهوم «فضاهای یکنواخت»^۳ کشیده می‌شویم: ساختاری که بین ساختار فضاهای متر و ساختار فضاهای توپولوژیک واقع است (هر فضای متر با لاخص یک فضای یکنواخت است و هر فضای یکنواخت حالت خاصی از یک فضای توپولوژیک)، و می‌توانیم به‌همان طریقی که با فضاهای متر عمل می‌کردیم، به تکمیل فضاهای یکنواخت بپردازیم. هر فضای برداری توپولوژیک، به طریقی متعارف یک فضای یکنواخت هم هست. اما، در این بخش، ما خود را به فضاهای برداری توپولوژیک نرم‌دار محدود می‌کنیم.

مطلب را با دو - سه نکته که جنبه کلی دارند و به‌سادگی قابل اثبات اند آغاز می‌کنیم: فضای تکمیلی یک فضای نرم‌دار $(E, \| \cdot \|)$ به طریقی متعارف یک فضای باناخ $(\hat{E}, \| \cdot \|)$ است: ساختار فضای برداری روی \hat{E} را می‌توان به‌نحوی ظریف به‌صورت خارج قسمت فضای برداری همه دنباله‌های کوشی در E بر زیر فضای برداری همه دنباله‌های همگرا به 0 ، تعریف کرد. تابع نرم $E \rightarrow \mathbb{R} : \| \cdot \|$ یکنواخت - پیوسته است ($\varepsilon = \delta$) و در نتیجه می‌تواند به‌طور پیوسته به $\mathbb{R} : \hat{E} \rightarrow \| \cdot \|$ ، که خود نیز یک نرم است (بررسی کنید!)، توسیع داده شود، و تساوی $\| x - y \| = \hat{d}(x, y)$ برقرار است. فضای تکمیلی یک فضای حاصلضرب داخلی حقیقی یا مختلط، به‌شيوه‌ای متعارف، یک فضای هیلبرت است.

نگاشتهای خطی پیوسته $f : E \rightarrow V$ بین فضاهای برداری نرم‌دار، خودبه‌خود یکنواخت - پیوسته‌اند و توسیعیهای آنها $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow \hat{V}$ ، چنان‌که در بالا شرح دادیم، باز نگاشتهای خطی هستند.

برای آنکه به هدف نزدیکتر شویم، معنی «فضاهای L^p » را یادآوری (یا تعریف) می‌کنیم: منظور از $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ، به‌ازای یک مقدار ثابت $p \geq 1$ ، فضای برداری همه توابع اندازه‌پذیر لبگ^۴ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ است که برای آن $\int |f|^p$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد. در این صورت، ضابطه

$$\| f \|_p := \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx}$$

1. completeness

2. incompleteness

3. uniform spaces

4. Lebesgue-measurable

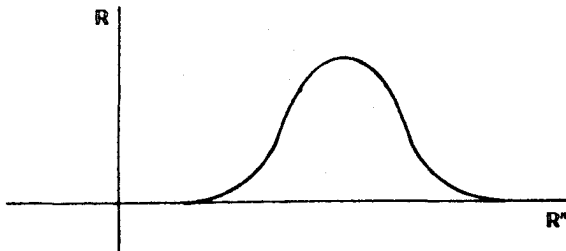
یک نیم‌نرم را روی فضای $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ به دست می‌دهد. همان‌گونه که در نظریهٔ انتگرال‌گیری دیده‌ایم، بستار نقطهٔ ۰، یعنی $\{0\} = \overline{\{f \in \mathcal{L}^p \mid \|f\|_p = 0\}}$ ، دقیقاً مجموعهٔ همهٔ توابعی است که خارج از یک مجموعهٔ صفر-اندازهٔ ۱ برابر صفرند. منظور از $L^p(\mathbb{R}^n)$ فضای نرم‌دار خارج قسمت مربوط به آن است که به صورت $L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \{0\}$ تعریف می‌شود (به آخر فصل ۳، بخش ۴، مراجعه شود). و اما، یکی از قضایای مهم نظریهٔ انتگرال‌گیری این است که $L^p(\mathbb{R}^n)$ یک فضای کامل، و در نتیجه یک فضای باناخ است.

به‌گونه‌ای مشابه، چنانچه (X, \mathfrak{M}) یک فضای اندازه‌پذیر مجهز به یک اندازهٔ σ -جمع‌پذیر $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ باشد و غیره، فضای L^p یعنی $L^p(X, \mu)$ نیز تعریف می‌شود. حالت $p = 2$ بالاخص مستلزم دقت است، زیرا $L^2(X, \mu)$ نه تنها یک فضای باناخ، بلکه با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu$$

یک فضای هیلبرت خواهد شد.

در بررسی ژرفتر، می‌بینیم که یک فضای L^p شیئی است ریاضی و نسبتاً پیچیده، و آنهایی که انتگرالهای لبگ را مطالعه نکرده‌اند، به‌گمان آنکه می‌توانند با انتگرالهای ریمان احتیاج خود را رفع کنند، در برخورد با این فضاها دچار ترس بجایی می‌شوند. اما فضاهای $L^p(\mathbb{R}^n)$ عناصر بسیاری آزاری را نیز در بردارند. به‌ویژه، فضای برداری $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ ، متشکل از توابع بینهایت بار دیفرانسیلیپذیر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ با «محمل فشرده»^۲ به‌طور متعارف یک زیرفضای برداری $L^p(\mathbb{R}^n)$ است. (منظور از تابع با محمل فشرده تابعی است که خارج از یک مجموعهٔ فشرده صفر می‌شود)



روی این زیرفضا، p -نرم

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx}$$

و حاصلضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} fg dx$ حتی با هرگونه برداشت ابتدایی از هر یک از مفاهیم

انتگرال، به سادگی قابل درک است. بنابراین، مایه امیدواری است که بدانیم در نظریه انتگرالگیری چگال بودن $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ در فضای $L^p(\mathbb{R}^n)$ ثابت می شود، و این به آن معنی است که $L^p(\mathbb{R}^n)$ یک فضای تکمیلی فضای

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$$

است، و از آنجا که، با تقریب یک هم ریختی طولیایی متعارف، هر فضا فقط یک فضای تکمیلی دارد می توان $L^p(\mathbb{R}^n)$ را به عنوان فضای تکمیلی $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$ (و یا به عنوان فضای تکمیلی $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ در حالت $p = 2$)، تعریف کرد!

قصدمدارم در ذهن خواننده این توهم را به وجود آورم که با این ترفند ساده تکمیل می توان واقعاً انتگرال لبگ را از سر راه برداشت، زیرا هر چند توانستیم فضاهای L^p را به صورت فضای تکمیلی فوق تعریف کنیم، اما از اینکه تا چه اندازه «نقاط حدی آرمانی» جدید می توانند به عنوان تابع نگر بسته شوند، هیچ گونه اطلاعی نداریم، و روش تحلیلی ملموس دیگری نیز برای تعبیر آنها نداریم. اما دست نگهدارید! این واقعیت که فضاهای $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ و فضاهای مشابه، همراه با نرمهائی کاملاً مناسب، در رابطه با مسأله مورد نظر، می توانند خیلی سریع (بدون توجه به لزوم مطالعه نقاط آرمانی) کامل شوند، آزادی عمل فوق العاده ارزشمندی پدید می آورد. پیش از خاتمه این فصل، مثالی می آورم تا آنچه را که می خواهیم بیان کنم روشن سازد.

برای نشان دادن عملگرهای دیفرانسیل جزئی^۱، عادت بر این جاری است که از قرارداد اندیسهای چندگانه استفاده می کنند: اگر $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $\alpha_i > 0$ اعداد صحیح، و $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ، آنگاه نماد D^α به معنی $\partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ است؛ پس، این نماد، شکل عمومی یک مشتق جزئی از هر مرتبه $|\alpha|$ است. حال اگر $a_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را تابعی (به فرض، هموار) از \mathbb{R}^n به \mathbb{R} فرض کنیم، در این صورت، $p = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ یک عملگر دیفرانسیل جزئی خطی روی \mathbb{R}^n است، و یک معادله به شکل $Pf = g$ که $Pf = g$ تابعی است مفروض روی \mathbb{R}^n و f تابعی است که باید تعیین شود، یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی^۲ (ناهمگن)^۳ نامیده می شود.

عمداً نگفتم که «عملگر» P بر چه چیزی «عمل می کند». در هر حال: P معرف نگاشتی است خطی مانند $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: P به همان مفهومی که در جبر خطی مطرح است. اما جبر خطی به تنهایی دیگر کاری برای ما انجام نمی دهد؛ خیلی بهتر است که P را به عنوان یک عملگر خطی پیوسته، مثلاً در یک فضای هیلبرت در نظر بگیریم، زیرا در این صورت، هنگام مطالعه P ، می توانیم از نظریه تابعی - تحلیلی^۴ این گونه عملگرها استفاده کنیم.

1. partial differential operators 2. linear partial differential equation
3. non-homogeneous 4. function-analytical theory

البته ممکن است $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ را چنان تکمیل کنیم که فضای هیلبرت $L^p(\mathbb{R}^n)$ به دست آید، اما بدبختانه هیچ راهی برای آنکه P بتواند روی آن عمل کند موجود نیست، زیرا $C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$: P خود برای نرم $\|\cdot\|_2$ پیوسته نیست، و به طریق اولی نمی‌تواند توسیع پیوسته‌ای به شکل $\hat{P} : L^2 \rightarrow L^2$ داشته باشد. و اما راه‌های متفاوت دیگری برای تعریف حاصلضرب داخلی روی C_0^∞ وجود دارند که باید با توجه به هدف نهایی انتخاب شوند (که مسلماً گفتن آن ساده‌تر از انجام دادن آن است). شاید بدیهی‌ترین آنها، ضربهای داخلی روی $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ با دستور زیر برای هر عدد صحیح $r \geq 0$ باشند:

$$\langle f, g \rangle_r := \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\mathbb{R}^n} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle dx$$

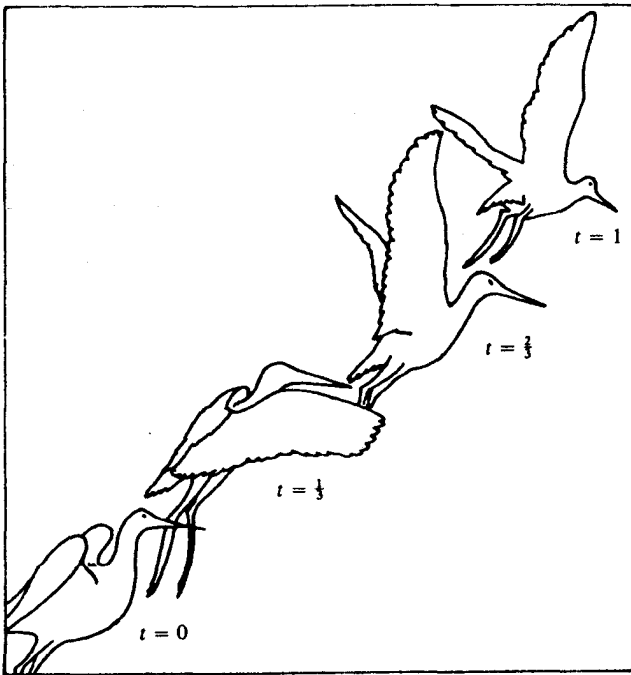
فضاهای هیلبرت $H^r(\mathbb{R}^n)$ ، که از تکمیل $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ به دست می‌آیند، ساده‌ترین مثالهای اشیایی هستند که «فضاهای سوبولف»^۱ نامیده می‌شوند و به عنوان ابزار بس پالوده‌ای در نظریه عملگرهای دیفرانسیل جزئی به کار می‌روند. بدون اشکال دیده می‌شود که با شرایط مناسبی روی ضرایب، عملگر $P = \sum_{|\alpha| < k} a_\alpha D^\alpha$ معرف یک عملگر خطی

$$P^r : H^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{r-k}(\mathbb{R}^n)$$

است که در واقع پیوسته است.

این مثال نشان می‌دهد که توپولوژی نقطه - مجموعه چه نوع کاربردی در آنالیز دارد. بدیهی است که فقط با وارد کردن فضاهای سوبولف، بررسی عملگرهای دیفرانسیل جزئی به حد کمال خود نمی‌رسد و توپولوژی نمی‌تواند مسائل تحلیلی را با شایستگی حل کند، اما محیطی قابل پیشرفت برای آنالیز فراهم می‌سازد.

مانسته‌جایی (هوموتوپی)



۱. نگاشتهای مانسته‌جا (هوموتوپ)

در بخشهای ۱ تا ۳، مفاهیم پایه «نگاشتهای مانسته‌جا»، «مانسته‌جایی» و «هم‌ارزی مانسته‌جایی»

را تعریف و به شکل شهودی تشریح می‌کنیم و در بخشهای ۴ تا ۷، کاربردهای این مفاهیم را مورد بحث قرار می‌دهیم.

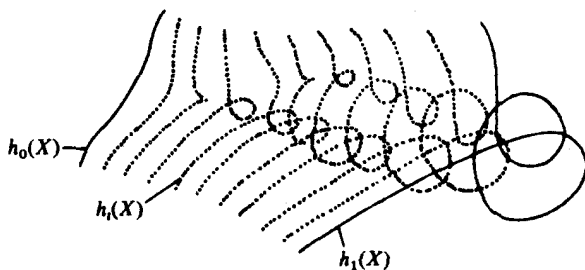
تعریف (مانسته جایی، مانسته جا). دو نگاشت پیوسته $f, g : X \rightarrow Y$ بین فضای توپولوژیک را مانسته جا^۱ نامند، و با نماد $f \simeq g$ نمایش می‌دهند، هرگاه بین آنها یک مانسته جایی^۲ h موجود باشد، یعنی یک نگاشت پیوسته $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر $x \in X$ $h(x, 0) = f(x)$ و $h(x, 1) = g(x)$.

نمادگذاری. همچنین در این حالت می‌نویسیم $f \underset{h_t}{\simeq} g$. منظور از نماد $h_t : X \rightarrow Y$ ، به ازای مقادیر ثابت t ، نگاشت پیوسته‌ای است که با ضابطه

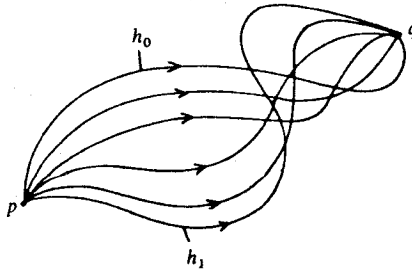
$$h_t(x) := h(x, t)$$

تعریف می‌شود. پس، با این نمادگذاری داریم $h_1 = g$ و $h_0 = f$.

مانسته جاییها را هم می‌توان مانند نگاشتها تا حدودی از راه ترسیمی مجسم کرد: بازه $[0, 1]$ را به عنوان یک بازه زمانی در نظر می‌گیریم؛ در لحظه $t = 0$ نگاشت h_t به شکل f است، اما به تدریج در طول زمان تغییر پیدا می‌کند تا اینکه در لحظه $t = 1$ به شکل g درمی‌آید. کلیه این تغییرات باید به طور پیوسته نسبت به هر دو متغیر صورت گیرد، و بنابراین می‌توان گفت که مانسته جایی h به معنی یک دگرذیسی یا «تغییر شکل^۳ پیوسته f به g است».



غالباً، علاوه بر پیوستگی، شرایط اضافی دیگری نیز برای مانسته جاییها قائل می‌شوند. مثلاً، در نظریه توابع، مفهوم مانسته جایی را برای راههایی با ابتدا و انتهای ثابت در نظر می‌گیرند، که $X = [0, 1]$ و $Y \subset \mathbb{C}$ مجموعه‌ای باز و $p, q \in Y$ نقاطی ثابت‌اند. شرایط اضافی حاکم بر مانسته جایی در این حالت آن است که: برای هر t ، $h_t(0) = p$ و $h_t(1) = q$.

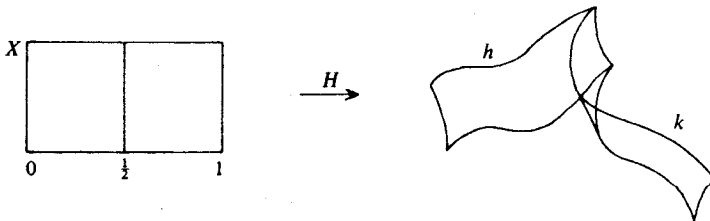


در توپولوژی ديفرانسیل، غالباً مانسته جاییهای بین نگاشتهایی از یک خمینه به خمینه دیگر را در نظر می گیرند با این شرط که هر h_t یا نشاندن^۱ (یعنی h یک جاییایی یا «ایزوتوبی»^۲) یا هموارریختی^۳ (یعنی h یک هموارجایی یا «دیفئوتوبی»^۴) باشد. پس، موقعیتهای متعددی پیش می آید که در آنها، علاوه بر آنکه h یک مانسته جایی است، باید در فلان یا بهمان شرط اضافی نیز صدق کند. اما در اینجا می خواهیم فقط به بحث در مورد مفهوم پایه بردازیم، که در آن h باید فقط پیوسته باشد.

همان گونه که از نماد \simeq برمی آید، «مانسته جایی» یک رابطه هم ارزی است. ویژگی بازتابی بدیهی است، زیرا با قرار دادن f برای $h_t := f$ ، f و f یک مانسته جایی بین f و f تعریف می شود، پس $f \simeq f$. برای اثبات تقارن، چنانچه $f \simeq g$ و مانسته جایی بین آنها h_t باشد، که $0 \leq t \leq 1$ ، در آن صورت به کمک h_{1-t} دیده می شود که $g \simeq f$. برای اثبات تراییی، فرض کنیم که $f \simeq g \simeq l$ ، در این صورت داریم $f \simeq_H l$ ، که در آن:

$$H_t = \begin{cases} h_{2t} & \text{بنابراین} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \text{بنابراین} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(پیوستگی H را ثابت کنید!)



نمادگذاری. اگر X و Y فضاهاى توپولوژیک باشند، منظور از $[X, Y]$ مجموعه رده های هم ارزی

1. embedding

2. isotopy

۳. هموارریختی (برای کوتاهی بیان) به جای همسازریختی هموار که برابر نهاده

diffeomorphism=smooth homomorphism است به کار برده شده است.

4. diffeotopy

«رده‌های مانسته‌جایی»^۱) نگاشتهای پیوسته از X به Y است.

هرگاه لازم آید مفاهیمی را پشت سر هم تعریف کنیم، می‌توانیم در تعریف مفهوم $(n+1)$ ام، ارتباط آن را با n مفهوم قبلی به وسیله n لم مشخص کنیم. مثلاً:

نکته (ترکیب نگاشتهای مانسته‌جا). به‌ازای دو زوج از نگاشتهای مانسته‌جا به‌شکل $X \xrightarrow{f \simeq g} Y \xrightarrow{\bar{f} \simeq \bar{g}} Z$ ، نگاشتهای مرکب $f \circ g$ و $\bar{g} \circ f$ نیز مانسته‌جا هستند (از طریق h_t و \bar{h}_t غیره استفاده شود).

نکته (حاصلضرب نگاشتهای مانسته‌جا). برای دو زوج از نگاشتهای مانسته‌جا به‌شکل $X_i \rightarrow Y_i$ ، $f_i \simeq g_i$ ، $i = 1, 2$ ، نگاشتهای $f_1 \times f_2$ و $g_1 \times g_2$ از $X_1 \times X_2$ به $Y_1 \times Y_2$ نیز مانسته‌جا هستند (از طریق $h_t^{(1)} \times h_t^{(2)}$ و غیره استفاده شود).

اما برای مفاهیم ساده‌ای همچون مانسته‌جایی، آوردن فهرست کاملی از قضایا فعلاً ملال‌آور و زیاد است، در نتیجه، ترجیح می‌دهیم که صبر کنیم و ببینیم در عمل به چه چیزهایی نیاز خواهیم داشت.

۲. هم‌ارزی مانسته‌جایی

تعریف (هم‌ارزی مانسته‌جایی). یک نگاشت پیوسته $f : X \rightarrow Y$ را هم‌ارزی مانسته‌جایی^۲ بین X و Y نامند هرگاه یک «وارون مانسته‌جایی»^۳ داشته باشد، به‌این معنی که نگاشت پیوسته‌ای چون $g : Y \rightarrow X$ با شرایط $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ و $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ موجود باشد.

در چنین حالتی، می‌گوییم که f و g هم‌ارزیهای مانسته‌جایی وارون یکدیگرند، و فضاهای X و Y را هم‌ارز مانسته‌جایی^۴ می‌نامند. واضح است که حاصل ترکیب هم‌ارزیهای مانسته‌جایی نیز، هم‌ارزیهای مانسته‌جایی هستند، و به‌ازای هر فضای X ، نگاشت همانی Id_X یک هم‌ارزی مانسته‌جایی است: پس، در واقع یک رابطه‌ی هم‌ارزی داریم: همواره $X \simeq X$ ، و از $X \simeq Y \simeq Z$ نتیجه می‌شود که (به‌هر حال) $X \simeq Z$ و $Y \simeq X$.

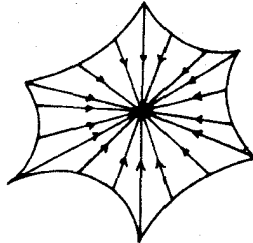
به یک حالت ساده اما مهم توجه کنیم:

تعریف (فضای انقباضپذیر). یک فضای توپولوژیک را انقباضپذیر^۵ گویند هرگاه با یک فضای

1. homotopy classes 2. homotopy equivalence 3. homotopy inverse
4. homotopy equivalent 5. contractible

یک نقطه‌ای هم‌ارز^۱ باشد.

در این حالت، تعریف ما به این شرط بدل می‌شود که یک مانسته جایی $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ به نام «انقباض»^۲ بین نگاشت همانی و یک نگاشت ثابت $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$ موجود است. مثلاً فضای \mathbb{R}^n انقباضپذیر است، زیرا $h_t(x) := (1-t)x$ معرف یک انقباض فضا به مبدأ است. همچنین، هر زیر فضای ستاره‌ای شکل^۳ \mathbb{R}^n نیز انقباضپذیر است.



تعریف (درون‌برو و تغییر شکل درون‌بر). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$ یک زیر فضای آن. A را یک درون‌بری^۴ X می‌نامیم هرگاه یک درون‌بری^۵ $\rho : X \rightarrow A$ ، یعنی یک نگاشت پیوسته^۶ ρ که در شرط $\rho|_A = \text{Id}_A$ صدق می‌کند، موجود باشد. حال، اگر ρ به عنوان یک نگاشت از X به X ، با نگاشت همانی مانسته‌جا باشد، آنگاه ρ را یک درون‌بری تغییر شکل^۷ نامند، و متناظر با آن، خود A را یک درون‌بری تغییر شکل^۷ گویند. سرانجام، چنانچه مانسته جایی بین ρ و Id_X را بتوان به‌گونه‌ای انتخاب کرد که همه نقاط A در جریان این درون‌بری ثابت بمانند، یعنی برای هر $a \in A$ و هر $t \in [0, 1]$ تساوی $h_t(a) = a$ برقرار باشد در این صورت ρ را یک درون‌بری تغییر شکل قوی^۸ می‌نامند و A را یک درون‌بری تغییر شکل قوی^۸ X گویند.

بدیهی است که یک درون‌بری تغییر شکل $\rho : X \rightarrow A$ و نگاشت احتوای نظیر آن $i_A : A \subset X$ هم‌ارزیهایی مانسته جایی وارون یکدیگرند. زیرا در مفهوم «درون‌بر» نهفته است که $\rho \circ i_A = \text{Id}_A$ و از مفهوم «تغییر شکل» نتیجه می‌شود که $i_A \circ \rho \simeq \text{Id}_X$.

کلیه آنچه در مورد درون‌بری گفته شد، در برخورد اول خشک و بی‌روح به نظر می‌رسد، اما اکنون می‌خواهم چیزی بگویم که اشتیاق شما را به درون‌برهای تغییر شکل قوی برانگیزد. هنگامی که در عمل با مانسته جاییها سروکار داریم، وسعت دید برای تشخیص هم‌ارزی مانسته جایی فضاها از اهمیت

۱. منظور هم‌ارز مانسته جایی است. - م.

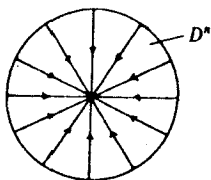
- | | | | |
|-------------------------------|------------------------|------------|---------------|
| 2. contraction | 3. star shaped | 4. retract | 5. retraction |
| 6. deformation retraction | 7. deformation retract | | |
| 8. strong deformation retract | | | |

ویژه‌ای برخوردار است. تا آنجا که ممکن است، تلاش می‌کنیم از جستجوی پرحمت نگاشتهایی چون $f : X \rightarrow Y$ و $g : X \rightarrow Y$ و یک مانسته‌جایی $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ و یک مانسته‌جایی دیگر $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ ، و نوشتن جزئیات مربوط به آنها خودداری کنیم. برعکس، مایلیم به آن درجه از وسعت دید برسیم که، بدون توجه به جزئیات، با یک نگاه بتوانیم بگوییم: این دو فضا هم‌ارز مانسته‌جایی هستند، و همه هم قبول کنند و بگویند: بدیهی است که هم‌ارز مانسته‌جایی هستند.

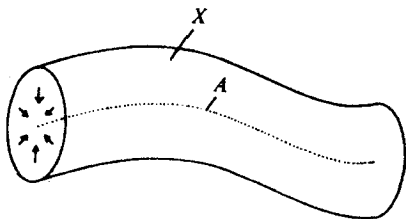
اما این تشخیص سریع فضاهای هم‌ارز مانسته‌جایی، در بسیاری از موارد، عملاً بر ساختن یک هم‌ارزی مانسته‌جایی $X \simeq Y$ ، به صورت ترکیبی متناهی از هم‌ارزیهای مانسته‌جایی مانند $X \simeq X_1 \simeq \dots \simeq X_n \simeq Y$ مبتنی است، به‌گونه‌ای که در هر مرحله (که تعداد مراحل معمولاً اندک و گاهی منحصر به یک یا دو مرحله است)، دو فضای مورد بحث یا همسان‌ریخت هستند، یا یکی از دو فضای درون بر تغییر شکل قوی دیگری است. در هر حال، بینیم سادگی تشخیص درون‌برهای تغییر شکل قوی در چیست؟ در جواب، بینیم یک چنین تغییر شکل چه‌کار می‌کند: هر نقطه X را در طول یک راه پیوسته، در فاصله زمانی بین 0 و 1 ، به فضای A می‌برد، و آنچه لازم است به ذهن خود بسپاریم این است که اگر نقاطی در A آغاز شوند، تغییر مکان نمی‌دهند. پس اگر بتوان X و A را اصلاً به صورت نموداری مجسم کرد، تغییر شکل h ، در صورت وجود، احتمالاً به سادگی پیدا می‌شود. اکنون برای کمک به دقت دید خود به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

۳. مثالها

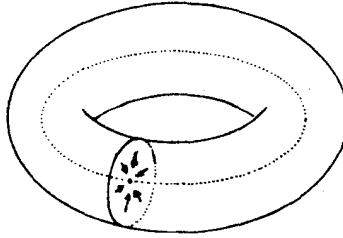
مثال ۱. بدیهی است که مبدأ درون بر تغییر شکل قوی \mathbb{R}^n یا گوی D^n است.



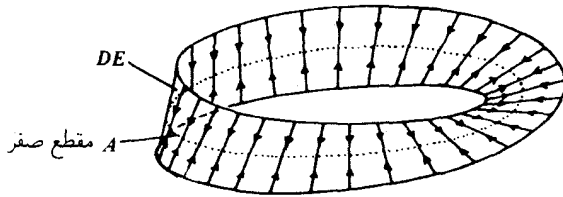
از اینجا چنین برمی‌آید که اگر A یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد، $A \times 0$ یک درون بر تغییر شکل قوی فضای $A \times \mathbb{R}^n$ یا $A \times D^n$ است



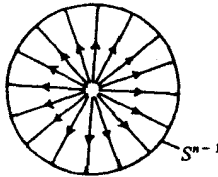
به ویژه، مثلاً، چنبره توپر $S^1 \times D^2$ هم ارز مانسته جایی با دایره S^1 است:



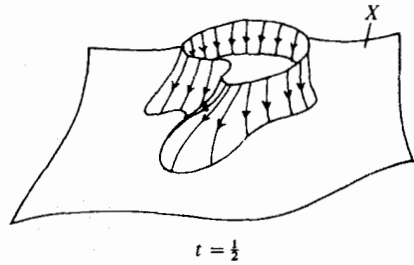
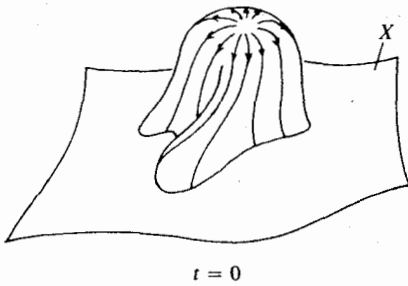
کلیتر بگوئیم، اگر E یک کلاف برداری بر یک فضای توپولوژیک A باشد، مقطع صفر، Z یک درون بر تغییر شکل قوی E است، همچنین اگر E مجهز به یک متریک ریمانی باشد، آنگاه مقطع صفر یک درون بر تغییر شکل قوی کلاف DE است، یعنی $A \simeq E \simeq DE$.



مثال ۲. کره $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ یک درون بر تغییر شکل قوی گوی منهای یک نقطه $D^n \setminus \{o\}$ است:



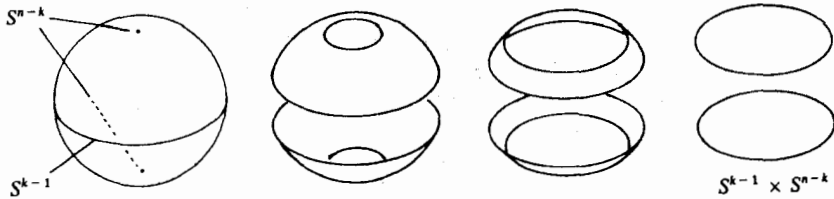
اگر حجره‌ای را به یک فضای X بچسبانیم و مرکز را از حجره برداریم، یک فضای $X \cup_\varphi (D^n \setminus \{o\})$ به دست می‌آوریم که با X هم ارز مانسته جایی است، زیرا $X \subset X \cup_\varphi (D^n \setminus \{o\})$ یک درون بر تغییر شکل قوی است:



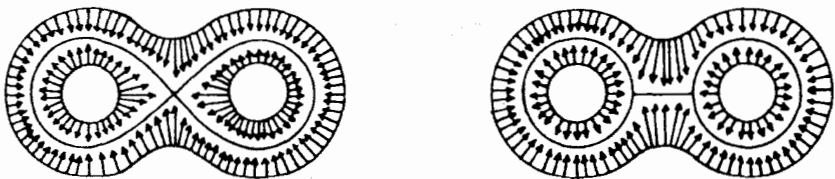
مثال ۳. فرض کنیم $0 < k < n$. به فضای \mathbb{R}^{n+1} ، به صورت $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k+1}$ می‌نگریم، و در فضای $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ، زیر فضای

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(S^{k-1} \times S^{n-k}) = \{(x, y) \mid \|x\|^2 = \|y\|^2 = \frac{1}{2}\}$$

را، که به شکل «حاصلضرب کره‌ها» ست، در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\frac{\sqrt{2}}{2}(S^{k-1} \times S^{n-k})$ یک درون بر تغییر شکل قوی $S^n \setminus (S^{k-1} \times 0 \cup 0 \times S^{n-k})$ است.



مثال ۴. یک شکل «هشت لاتین» و شکلی متشکل از دو دایرهٔ متخارج که به وسیلهٔ پاره خطی به هم وصل شده باشند، هم‌ارز مانسته جایی‌اند، زیرا هر دوی آنها درون بر تغییر شکل قوی برای فضایی هستند که به شکل «هشت لاتین ضخیم» است.

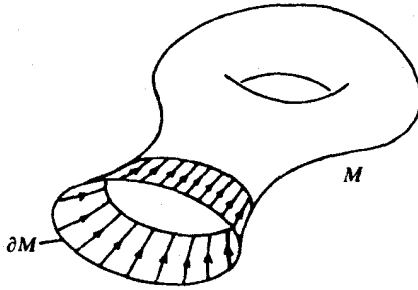


مثال ۵. فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیلیذیر مرزدار^۱ باشد. اگر مرز آن، ∂M ، ناتهی باشد، واضح است که $M \setminus \partial M$ نمی‌تواند یک درون بر M باشد، زیرا در M چگال است. اما، با استفاده از یک «همسایگی گردنبندی»^۲ می‌توان دید که M و $M \setminus \partial M$ هر دو دارای یک درون بر تغییر شکل

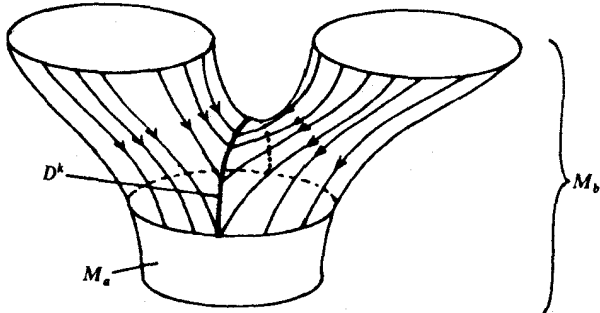
1. differentiable manifold with boundary

2. collar neighborhood

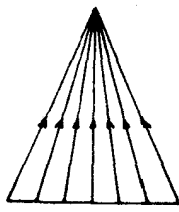
مشترک اند. بنابراین، هم ارز مانسته جایی هستند.



مثال ۶. باز یک مثال دیگر از توپولوژی دیفرانسیل، بالاخص از نظریه مورس^۱، می آوریم. با نمادگذاری فصل ۳، بخش ۷ مثال ۲، فضای $D^k \cup M_a$ یک درون بر تغییر شکل قوی فضای M_b است، با همان نمادگذاری فصل ۳، بخش ۷، مثال ۲ (مراجعه شود به [۱۴]).



مثال ۷.



برای هر فضای توپولوژیک X ، مخروط CX انقباض پذیر است: راس مخروط یک درون بر تغییر شکل قوی مخروط است.

۴. رسته ها

برای آنکه بتوانیم حقیقت و غایت مفهوم مانسته جایی را بیان کنیم، باید نخست بگوییم منظور از «توپولوژی

جبری^۱ چیست. بهترین راه برای این کار آن است که از زبان مناسب آن، که کاربردهای فراوانی در ریاضیات دارد، بهره‌گیریم. این زبان، زبان رشته‌ها و تابعگونهاست.

تعریف (رشته‌ها). یک رشته^۲ \mathcal{C} از داده‌های زیر تشکیل شده است:

(الف) یک رده^۳ $\text{Ob}(\mathcal{C})$ از اشیاء ریاضی، به نام اشیاء رشته^۲.

(ب) یک مجموعه^۴ $\text{Mor}(X, Y)$ به ازای هر دوشیء (X, Y) ، به گونه‌ای که اگر زوجهای (X, Y) و (X', Y') متمایز باشند، مجموعه‌های $\text{Mor}(X, Y)$ و $\text{Mor}(X', Y')$ جدا از هم باشند. اعضای مجموعه^۴ $\text{Mor}(X, Y)$ ریختیهای^۴ X به Y نامیده می‌شوند. نمادگذاری: به جای $f \in \text{Mor}(X, Y)$ از نماد $f : X \rightarrow Y$ نیز استفاده می‌کنیم، بدون آنکه الزاماً X و Y مجموعه باشند و f یک نگاشت باشد.

(پ) یک قانون ترکیب $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$ به ازای هر سه گانه (X, Y, Z) از اشیاء (این قانون ترکیب را به شکل $f \circ g$ می‌نویسیم، که با نمادگذاری $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ که از مجموعه‌ها و نگاشتها گرفته‌ایم، متناظر است). داده‌های (الف)، (ب) و (پ) تشکیل یک رشته می‌دهند مشروط بر آنکه در اصول موضوع زیر صدق کنند:

اصل موضوع ۱ (شرکتپذیری). اگر f و g و h ریختیهایی به شکل $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} U$ باشند، آنگاه $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

اصل موضوع ۲ (همانی). به ازای هر شیء X عضوی از $\text{Mor}(X, X)$ با نماد 1_X ، موجود است که ویژگی زیر را دارد: برای هر ریختی $f : Y \rightarrow X$ ، و هر ریختی $g : X \rightarrow Z$ برابر یهای $g \circ 1_X = g$ و $1_X \circ f = f$ برقرارند.

پیش از آنکه به مفاهیم دیگری بپردازیم، فهرستی از مثالهای رشته‌ها می‌آورم. مادامی که ریختیها نگاشت هستند و دربارهٔ قانون ترکیب آنها هیچ‌گونه توضیح اضافی نمی‌آید، همواره به خاطر خواهیم سپرد که منظور از ترکیب، همان ترکیب معمولی نگاشتهاست.

مثال ۱. رشتهٔ مجموعه‌ها، \mathcal{M} :

(الف) اشیاء: مجموعه‌ها؛

(ب) ریختیها: نگاشتها.

مثال ۲. رشتهٔ توبولوژیک، \mathcal{Top} :

1. algebraic topology

2. category

3. objects of the category

4. morphisms

(الف) اشیاء: فضاهای توپولوژیک؛

(ب) ریختها: نگاشتهای پیوسته.

ضمناً، مثال زیر نیز، هر چند چندان جالب نیست، ولی به هر حال یک رسته است:

مثال ۲.

(الف) فضاهای توپولوژیک؛

(ب) نگاشتهای دلخواه بین فضاهای توپولوژیک،

مثال ۳. رسته گروهها؛^۱

(الف) گروهها؛

(ب) همریختهای بین گروهها.

مثال ۴. رسته فضاهای برداری روی هیأت \mathbb{K} :^۲

(الف) فضاهای برداری روی هیأت \mathbb{K} ؛

(ب) نگاشتهای \mathbb{K} - خطی.

مثال ۵. رسته فضاهای برداری توپولوژیک روی \mathbb{K} :^۳

(الف) فضاهای برداری توپولوژیک روی \mathbb{K} ؛

(ب) نگاشتهای خطی پیوسته.

مثال ۶. رسته توپولوژیک دیفرانسیل *Diff top*:^۴

(الف) خمینه‌های دیفرانسیلپذیر؛

(ب) نگاشتهای دیفرانسیلپذیر.

مثال ۷. رسته $\text{Vect}(X)$ متشکل از کلافهای برداری بر یک فضای توپولوژیک مفروض X :

(الف) کلافهای برداری بر X ؛

(ب) همریختهای کلافی^۵، یعنی نگاشتهای پیوسته و تار به تار خطی^۶ بر نگاشت همانی در X :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\
 & X &
 \end{array}$$

مثال ۸. رسته کلافهای برداری n بعدی بر فضاهای توپولوژیک دلخواه:

(الف) کلافهای برداری n بعدی؛

1. category of groups

2. category of vector spaces over \mathbb{K}

3. category of topological vector spaces over \mathbb{K}

4. differential topological category

5. bundle homomorphisms

6. fiberwise linear

(ب) «نگاشتهای کلافی»، یعنی نگاشتهای پیوسته و تار به تار یکریخت در نگاشتهای پیوسته از یک فضای پایه به فضای پایهٔ دیگر:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

از این مثالها می‌توانیم خیلی زیاد بیابیم، زیرا عملاً هر یک از انواع ساختارهای ریاضی، دارای نگاشتهای حافظ ساختار یا سازگار با ساختار است، و اصول موضوع رسته‌ها نیز نیاز فراوانی به چیزهای دیگر ندارند. دهها مثال در جبر، آنالیز، توپولوژی و در مباحث دیگر وجود دارند.

مثالهای فوق یک وجه مشترک دارند و آن اینکه اشیاء آنها مجموعه‌هایی هستند با ساختار اضافی و ریختهایشان نگاشتهایی هستند با ترکیب معمولی نگاشتها (به همین دلیل، نگران شرکتپذیری آنها نیستیم). اما مفهوم رسته، فراتر از این است. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را، که شاید اندکی عجیب به نظر آید، می‌آوریم:

مثال ۹. فرض کنید G یک گروه باشد.

(الف) فقط یک شیء که آن را e می‌نامیم؛

(ب) $\text{Mor}(e, e) := G$ ؛

(پ) ترکیب، عمل ضرب گروه G است.

یک مثال واقعاً مهم از رسته‌هایی که ریختهای آن نگاشت نیستند مثال زیر است:

مثال ۱۰. رستهٔ مانسته‌جایی، $\mathcal{H} \text{ top}$

(الف) اشیاء، همانند رستهٔ Top ، فضاهای توپولوژیک‌اند، اما:

(ب) ریختها رده‌های مانسته‌جایی نگاشتهای پیوسته‌اند، یعنی

$$\text{Mor}(X, Y) := [X, Y];$$

و

(پ) ترکیب رده‌ها به کمک نماینده‌ای از هر رده تعریف می‌شود:

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

پس از آوردن تعریف و مثالها، به دو سه تذکر تکمیلی می پردازیم. از اصل موضوع همانی بی درنگ نتیجه می شود که برای هر شیء X ، دقیقاً یک «همانی»^۱ یا «واحد»^۲ 1_X وجود دارد. زیرا اگر $1'_X \in \text{Mor}(X, X)$ نیز همان ویژگی را داشته باشد، آنگاه $1_X = 1'_X \circ 1_X = 1'_X$. به همین ترتیب، هر ریختی $f: X \rightarrow Y$ ، حداکثر یک ریختی وارون $g: Y \rightarrow X$ (یعنی با ویژگیهای $f \circ g = 1_X$ و $g \circ f = 1_Y$) دارد. زیرا، اگر g' نیز همین ویژگیها را داشته باشد، آنگاه $g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_Y = g'$ و در نتیجه، بنا بر اصل شرکت پذیری، $g' \circ f = g'$.

ریختیهایی که دارای وارون هستند یکرختیهایی^۳ آن رسته نامیده می شوند. دوشیبی که بین آنها یک یکرختی وجود داشته باشد، یکرخت نامیده می شوند. پس، در رسته^۴ توپولوژی، دو فضا یکرخت اند اگر همسان ریخت باشند، اما در رسته^۵ مانسته جایی، یکرختی فقط به معنای آن است که فضاها هم ارز مانسته جایی هستند.

پیش از خاتمه^۶ این بخش، آخرین تذکر درباره^۷ واژه ای است که در تعریف به کار بردیم و ممکن است قبلاً شما را به طور موقت سردرگم کرده باشد. منظوم واژه «رده»^۸ اشیاء است که به صورت $\text{Ob}(\mathcal{C})$ آورده شده است. دلایل محکمی در دست داریم که فقط از «رده اشیاء» صحبت کنیم و نه از «مجموعه^۹ اشیاء \mathcal{C} ». شما از قبل می دانستید که برداشت حسی نظریه^{۱۰} مجموعه ها، با جملاتی نظیر «مجموعه^{۱۱} همه^{۱۲} مجموعه ها»، به چه نوع تناقضاتی ممکن است بینجامد. درست است که در مورد یک رسته^{۱۳} مفروض \mathcal{C} ، می خواهیم مفهوم هر شیء با دقت کافی تعریف شود (همان طوری که مثلاً در تعریف فضاهای توپولوژیک صورت گرفت). اما انتظار نداریم بتوانیم کلیه^{۱۴} اشیاء \mathcal{C} را، که قبلاً بوده اند، هستند، یا خواهند بود، در یک مجموعه^{۱۵} خوشتعریف بگنجانیم و بخواهیم از اعمال معمولی نظریه^{۱۶} مجموعه ها پیروی کنند. البته رسته هایی وجود دارند که اشیاء آنها واقعاً تشکیل یک مجموعه می دهند، چنین رسته هایی را اصطلاحاً «رسته های کوچک»^{۱۷} می نامیم.

درک صوری و دقیق معنای واژه های «مجموعه» و «رده»، مستلزم استفاده از نظریه^{۱۸} اصل موضوعی مجموعه هاست. در اینجا، به تذکر این نکته اکتفا می کنیم که از رده های اشیاء، جز مفهوم اشیاء مورد بحث نباید برداشت دیگری داشته باشید.

۵. تابعگونها

تعریف (تابعگون هموردا). فرض کنیم \mathcal{C} و \mathcal{D} دو رسته باشند. منظور از یک تابعگون هموردا^{۱۹} $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ یک تناظر («داده های تابعگونی»^{۲۰}) است که به هر شیء X از رسته^{۲۱} \mathcal{C} یک شیء \mathcal{D}

1. identity 2. one 3. isomorphisms 4. class 5. small categories
6. covariant functor 7. functor data

$\mathcal{F}(X)$ از رسته \mathcal{D} و به هر ریختی $X \xrightarrow{\varphi} Y$ از رسته \mathcal{C} یک ریختی

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(Y)$$

از رسته \mathcal{D} را وابسته می‌کند، و این داده‌ها در «اصول موضوع تابعگونی» زیر صدق می‌کنند: \mathcal{F} ساختار رسته‌ها را حفظ می‌کند، یعنی:

$$\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$$

(۲) همواره $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \circ \mathcal{F}(\psi)$. (دلیل آن روشن است).

تعریف (تابعگون پادوردا) ^۱. شبیه تابعگون همورداست، با این تفاوت که در اینجا \mathcal{F} جهت ریختها را معکوس می‌کند: به هر ریختی $X \xrightarrow{\varphi} Y$ ، ریختی

$$\mathcal{F}(X) \xleftarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(Y)$$

وابسته می‌شود، (که عبارت فوق به جای $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Mor}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ نوشته شده است). اصل موضوع همانی با اصل موضوع همانی تابعگونهای هموردا فرقی ندارد، اما اصل موضوع ترکیب باید به شکل

$$\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\varphi)$$

نوشته شود، زیرا

$$X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\varphi} Z$$

به

$$\mathcal{F}(X) \xleftarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(Y) \xleftarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(Z)$$

تبدیل شده است.

تذکر. باید دانست که اختلاف بین تابعگونهای هموردا و تابعگرنهای پادوردا فقط جنبه صوری دارد، زیرا هر رسته دارای یک «رسته دوگان»^۲ است که اشیاء آن همان اشیاء رسته مفروض است و توسط برابریهای

$$\text{Mor}^{\text{dual}}(X, Y) := \text{Mor}(Y, X)$$

و

$$\varphi \circ^{\text{dual}} \psi := \psi \circ \varphi$$

تعریف می‌شود. حال، با این نمادگذاری، یک تابعگونی پادوردا از \mathcal{C} به \mathcal{D} ، چیزی چیزی یک تابعگونی هموردا از \mathcal{C} به $\mathcal{D}^{\text{dual}}$ نیست. اما، با توجه به مثالهای مربوطه، عملیتر و طبیعیت این است که از تابعگونیهای پادوردا صحبت کنیم و پای رسته‌های دوگان را به میان نکشیم.

به عنوان مثالهایی بیمایه، تابعگونیهای همانی $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} : \text{Id}_{\mathcal{C}}$ را که هموردا بودن آن روشن است و تابعگونیهای ثابت $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ را که به هر شیء یک شیء ثابت Y_0 و به هر ریختی، ریختی همانی Y_0 را وابسته می‌کند در نظر می‌گیریم. تابعگونیهای ثابت را می‌توانیم هموردا یا پادوردا تلقی کنیم. هر چند این تناظرها چندان جالب نیستند، اما گاهی اوقات شایسته نیست که آنها را تابعگونی نامیم. تا حدی جالبتر از این دو نوع، «تابعگونیهای نادیده‌گیر»^۱ هستند. یک مثال آن، تابعگونی هموردای $\mathcal{M} \rightarrow \text{Top}$ است، که به هر فضای توپولوژیک X مجموعه X ، و به هر نگاشت پیوسته $f : X \rightarrow Y$ ، نگاشت $f : X \rightarrow Y$ را وابسته می‌کند. غالباً به دلایلی، چنین تابعگونیهایی از یک رسته با ساختار بیشتر به یک رسته با ساختار کمتر را در نظر می‌گیریم، و تنها کار این تابعگونها، «نادیده گرفتن» ساختار غنیتر رسته حوزه است.

نخستین مثالهای تابعگونها را، که محتوای ریاضی واقعی دارند، باید در جبر خطی جستجو کرد. مثلاً، فرض کنیم \mathbb{K} یک هیأت و \mathcal{V} رسته فضاهای برداری روی \mathbb{K} و نگاشتهای خطی باشد. در این صورت، مفهوم «فضای دوگان»^۲ یک فضای برداری به طریق متعارف، یک تابعگونی پادوردا به شکل $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^* :$ به ما می‌دهد: به هر شیء V ، فضای دوگان V^* وابسته می‌شود، که بنا بر تعریف،

$$V^* := \{ \varphi : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ خطی است} \}$$

و به هر نگاشت خطی $f : V \rightarrow W$ ، نگاشت دوگان $f^* : W^* \rightarrow V^*$ وابسته می‌شود، که بنا بر تعریف، $f^* : \alpha \mapsto \alpha \circ f$. از این رو $\text{Id}_{V^*} = \text{Id}_V^*$ و $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ ، و در نتیجه، * یک تابعگونی (پادوردا) است.

تابعگونیهایی که علاوه بر محتوا، از توان ریاضی نیز برخوردار باشند، مسلماً دشوارتر به دست می‌آیند، اما بیشتر از تابعگونی اخیر هستند. هدف این بخش فقط معرفی این مفهوم است، و اکنون مطلب را با مثال

ساده‌ای در ارتباط با مانسته جایی، به پایان می‌رسانیم. یادآوری می‌کنیم که منظور از $[X, Y]$ مجموعه رده‌های مانسته جایی نگاشتهای پیوسته $X \rightarrow Y$ است. پس

مثال. فرض کنیم B یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت، $[0, \dots, B]$ به طور متعارف، معرف یک تابعگون پادوردا از رسته مانسته جایی به رسته مجموعه‌ها و نگاشتها، به شرح زیر است: به هر فضای توپولوژیک X ، مجموعه $[X, B]$ را وابسته می‌کنیم و به هر ریختی $f \in [X, Y]$ از رسته مانسته جایی، نگاشت

$$[f, B] : [Y, B] \rightarrow [X, B]$$

را با تعریف

$$[f, B] : [\varphi] \mapsto [\varphi \circ f]$$

وابسته می‌کنیم.

۶. توپولوژی جبری چیست؟

به طور خیلی خلاصه، موضوع توپولوژی جبری، حل مسائل توپولوژی با روشهای جبری است. اما اصلاً معنای ملموس این عبارت چیست؟ هم اکنون آن را با جزئیات بیشتر شرح می‌دهیم.

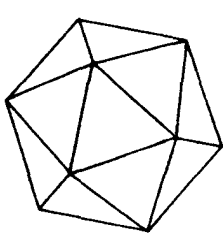
آنچه که امروز توپولوژی جبری نامیده می‌شود، از دیدگاه قدیمتر، در عین حال ساده‌تر و روشنتر، پیدا کردن، محاسبه و استفاده از ناورداها^۱ بوده است. تناظری چون χ که به هر X در یک رده مفروضی از اشیاء هندسی، عددی مانند $\chi(X)$ را وابسته می‌کند، یک ناوردا نامیده می‌شود هرگاه شرط $X \cong Y$ ، همواره مستلزم تساوی $\chi(X) = \chi(Y)$ باشد. اما اینکه این تعریف متعرض چه نوع اشیاء و یکریختیهای « \cong » باشد، به حالت خاص مورد بحث بستگی دارد. مثلاً هنگامی که از «ناورداهای توپولوژیک»^۲ صحبت می‌کنیم، نماد \cong را به معنی همسانریختی می‌گیریم، در حالی که اگر از «ناورداهای هموارریختی»^۳ بحث کنیم نماد \cong را به معنی هموارریختی به‌کار می‌بریم و هکذا.

بدون شک، قدیمترین مثال مهم از این‌گونه ناورداها، عدد یا مشخصه اولر^۴ برای چند وجهیهای متناهی است. فرض کنیم P یک چند وجهی^۵ در \mathbb{R}^n متشکل از تعداد a_0 رأس، a_1 یال، a_2 وجه دوبعدی باشد (ما در اینجا وارد تعریف دقیق این مفاهیم نمی‌شویم). در این شرایط، عدد

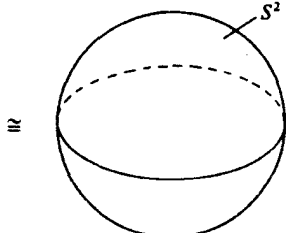
$$\chi(P) := \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$$

1. invariants 2. topological invariants 3. diffeomorphism invariants
4. Euler characteristic 5. polyhedron

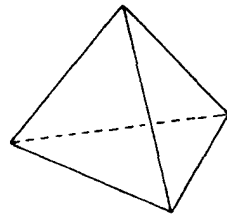
عدد اوپلر^۱ چند وجهی P نامیده می‌شود و قضیه مهم نوردایی زیر برقرار است: عدد اوپلر، یک نوردای توپولوژیک است. این قضیه، برای همه فضاها^۲ی توپولوژیک X ، که با چند وجهیهای متناهی همسانریخت هستند، بی‌درنگ یک نوردای توپولوژیک به دست می‌دهد: بنا بر قضیه نوردایی، $\chi(X)$ به عنوان عدد اوپلر یک چند وجهی همسانریخت با X ، خوشتعریف است.



در مورد رویه بیست وجهی P_1
 $a_0 + a_1 + a_2 =$
 $12 - 30 + 20 = 2$

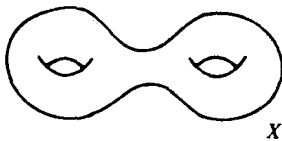


$\chi(S^2) = 2$

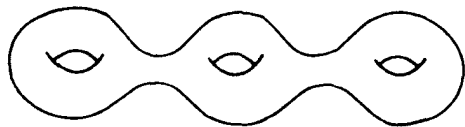


در مورد رویه چهاروجهی P_2
 $a_0 + a_1 + a_2 =$
 $4 - 6 + 4 = 2$

این نورداهای چگونه می‌توان در حل مسائل هندسی به کار برد؟ در اینجا مثالی می‌آوریم. رویه‌های X و Y زیر را در نظر می‌گیریم:



X



Y

آیا X و Y همسانریخت‌اند؟ این رویه‌ها، هر دو، فشرده و همبند و البته هاوسدورف نیز هستند: بنابراین فوراً نمی‌توان اختلاف آنها را تشخیص داد، و این واقعیت هم که قادر نیستیم یک همسانریختی بین آنها برقرار کنیم چیزی را ثابت نمی‌کند. اما حکم $X \not\cong Y$ به طریقی می‌تواند از $3 \neq 2$ نتیجه شود. مگر چنین نیست؟ در واقع همین‌طور است، زیرا نتیجه محاسبه مشخصه‌های اوپلر آنها چنین است که $\chi(X) = -2$ و $\chi(Y) = -4$ پس X و Y نمی‌توانند همسانریخت باشند، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از جمله نورداهای توپولوژیک دیگری که در اوایل سده بیستم، پیش از پیدایش دیدگاه جدید، شناخته شده بودند، می‌توان مثلاً «اعداد بتی»^۲ b_i و «ضرایب پیچش»^۳ را نام برد. اعداد بتی با ضابطه $\chi = \sum (-1)^i b_i$ به مشخصه اوپلر مربوط می‌شوند. اما دو فضا ممکن است مشخصه اوپلر برابر ولی اعداد بتی متفاوت داشته باشند. پس، با این تعبیر، می‌توان گفت که اعداد بتی نورداهای «برتر»ی هستند و اطلاعات بیشتری می‌توان از آنها بدست آورد.

از دیدگاه جدید، موضوع توپولوژی جبری، یافتن، محاسبه و کاربرد تابعگونیهایی از رسته‌های «هندسی» (مانند $Lif\text{-}Hopf, Top$ ، ...)، به رسته‌های «جبری» (مانند رسته گروها، رسته حلقه‌ها و غیره) است.

یک مثال اساسی، که راه را برای گسترش دیدگاه جدید هموار کرده است، مثال «مانستگی»^۱ است: به ازای هر $k \geq 0$ ، تابعگون (هموردای) مانستگی k بعدی H_k ، از رسته توپولوژی، به رسته گروهای آبلی. ریاضیدانان به تدریج مهارت بیشتری در ابداع تابعگونهای مناسب به دست آورده‌اند، و امروزه، تعداد فراوانی تابعگون در توپولوژی جبری مورد استفاده است، که بعضی هموردا و برخی پادوردا هستند. خصوصاً به مفهوم کم و بیش مبهم رسته «هندسی» باید در زمینه بسیار گسترده‌تری پرداخته شود. مثلاً در آنالیز، اشیاء «هندسی» و رسته‌های هندسی (مانند فضاهای مختلط^۲، خمینه‌های مختلط^۳، رویه‌های ریمانی^۵ و غیره) مطالعه می‌شوند که می‌توانند از دیدگاه توپولوژی مورد بررسی قرار گیرند (در واقع قرار گرفته‌اند)، و با استفاده از تابعگون «نادیده‌گیر»، این مطالعات به رسته توپولوژیک و تابعگونیهایی که روی آنها تعریف شده‌اند، منتقل شوند:

$$\text{رسته گروهای آبلی} \xrightarrow{\text{مثلاً } H_k} \text{رسته توپولوژیک} \xrightarrow{\text{تابعگون نادیده‌گیر}} \text{رسته فضاهای مختلط}$$

اما، کاملاً مستقل از اینها نیز، در آنالیز مختلط با استفاده از روشهای تحلیلی مستقیماً تابعگونیهایی از رسته‌های «مختلط تحلیلی» به رسته جبری ساخته می‌شوند. این تابعگونها که به طور تحلیلی تعریف شده‌اند اغلب «برتر» از تابعگونهای توپولوژیک هستند، زیرا ساختار مختلط را «نادیده» نمی‌گیرند.

خوب ببینیم همه این تابعگونها، چه سودی دارند؟ برای جواب، نخست مایلیم اشاره کنم که اصول موضوعه تابعگونها، مستلزم «ناوردایی» به معنای زیر است: اگر H یک تابعگون هموردا و $f: X \rightarrow Y$ یک یکرختی باشد، آنگاه $H(f): H(X) \rightarrow H(Y)$ (و در حالت پادوردا، $H(Y) \rightarrow H(X)$) نیز یکرختی است. زیرا اگر g یکرختی وارون f باشد، روشن است که $H(g)$ وارون $H(f)$ خواهد بود. به ویژه از $X \cong Y$ ، همیشه نتیجه می‌شود که $H(X) \cong H(Y)$: این گونه «قضایای ناوردایی» مستقلاً همراه هر تابعگون، پدیدار می‌شوند، و می‌توان رده‌های یکرختی این اشیاء جبری را درست همان گونه که در ناوردهای عددی عمل می‌شد، به عنوان ابزاری برای تشخیص اشیاء هندسی به کار برد. در واقع می‌توان ناوردهای کلاسیک را نیز مانند ناوردهای این اشیاء جبری به دست آورد: مثلاً، $\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{rk} H_i(X)$ و $b_i(X) = \text{rk} H_i(X)$ یعنی $\chi(X)$ با رتبه i امین گروه مانستگی، یعنی $\text{rk} H_i(X)$ و $b_i(X)$ برابر است و غیره. همین کافی است نشان دهد که تابعگونهای جدید، بدتر از ناوردهای کلاسیک نیستند. برعکس،

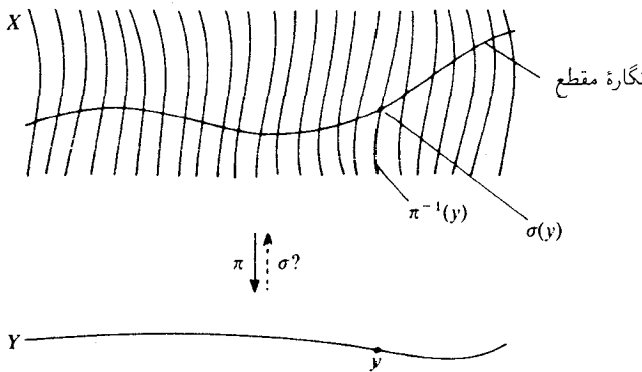
1. homology 2. k - dimensional homology functor
 3. complex spaces 4. complex manifolds 5. Riemann surfaces
 ۶. rk معرف واژه rank ، یعنی رتبه است.

چنانچه اکنون شرح خواهیم داد، دیدگاه جدید توپولوژی جبری، نسبت به دیدگاه قدیمی، واقعاً از مزایایی برخوردار است.

من به این واقعیت نمی‌پردازم که اشیاء جبری $H(X)$ در حالت کلی شامل اطلاعاتی بیش از ناورداها هستند، و موجب تمایز اشیاء هندسی می‌شوند که ناورداها برای آنها فقط در حکم یک « ∞ » بیروح هستند، و یا اینکه اصولاً قابل تعریف نیستند. لذا مستقیماً به اصل مسأله می‌پردازم: تابع‌گونها گذشته از اینکه درباره اشیاء هندسی اطلاعاتی به ما می‌دهند، درباره ریخته‌های هندسی، درباره نگاشتها، نیز اطلاعاتی در اختیار ما می‌گذارند! مثال زیر منظور ما را روشن می‌کند.

بعضی اوقات یک مسأله هندسی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

نگاشتی پیوسته و پوشا مانند $\pi : X \rightarrow Y$ داریم که مثلاً می‌دانیم یک به یک نیست (در نتیجه مسلماً وارون ندارد)، می‌خواهیم ببینیم که یک مقطع^۱ دارد یا نه، یعنی آیا یک نگاشت پیوسته $\sigma : Y \rightarrow X$ وجود دارد به گونه‌ای که تساوی $\pi \circ \sigma = \text{Id}_Y$ برقرار باشد؟



در بسیاری از رشته‌های دیگر نیز، غالباً به مسأله‌ای مشابه برمی‌خوریم. هدف اصلی این مسأله، به‌طور کلی، در این خلاصه می‌شود که ببینیم یک ریختی $\pi : X \rightarrow Y$ یک «وارون راست» دارد یا نه، یعنی آیا ریختی چون $\sigma : Y \rightarrow X$ با شرط $\pi \circ \sigma = \text{Id}_Y$ وجود دارد یا نه؟ مثلاً، فرض می‌کنیم یک نگاشت پیوسته و پوشا چون π از S^3 به S^2 داریم. آیا π می‌تواند مقطعی داشته باشد؟ می‌توانید ببینید که محاسبه ناورداهای S^2 و S^3 فایده‌ای ندارد، زیرا موضوع مساوی یا متمایز بودن ناورداها مطرح نیست. اما اگر از یک تابع‌گون مناسبی استفاده کنیم، مسأله تغییر می‌کند: چنانچه یک σ وجود داشته باشد به گونه‌ای که حاصل ترکیب

$$S^2 \xrightarrow{\sigma} S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

همانی باشد، در آن صورت، بنابر اصول موضوعهٔ تابعگون، حاصل ترکیب

$$H(S^2) \xrightarrow{H(\sigma)} H(S^3) \xrightarrow{H(\pi)} H(S^2)$$

اجباراً همانی خواهد بود. حال اگر، به عنوان مثال، از مانستگی ۲- بعدی استفاده کنیم، خواهیم داشت $H_2(S^3) = 0$ و $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ، و در نتیجه باید حاصل ترکیب

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{H(\sigma)} 0 \xrightarrow{H(\pi)} \mathbb{Z}$$

برابر همانی روی \mathbb{Z} باشد، که این هم آشکارا ناممکن است. بدین ترتیب، هیچ نگاشتی از S^3 به S^2 نمی‌تواند مقطعی ببذیرد.

این تنها یک مثال ساده از کاربرد، اما نوعاً مثالی از برتری دیدگاه تابعگونی در همهٔ مسائل مربوط به نگاشتها بود. حتی اگر توجه ما فقط معطوف به خود اشیاء هندسی می‌بود، دیدگاه قدیمی توپولوژی جبری نمی‌توانست چندان گسترش وسیعی پیدا کند، زیرا مطالعهٔ فضاها و نگاشتها، آن قدر به هم مربوط‌اند که هرگونه گسترش یک طرفه‌یی که فقط روی فضاها متمرکز شود و نگاشتها را نادیده بگیرد، به بن‌بست منتهی می‌شود.

۷. مانسته‌جایی—به چه درد می‌خورد؟

پس از این همه مقدمه چینی، اکنون می‌توانم جواب معقولی به پرسش فوق بدهم. در حقیقت، دو دلیل عمده برای مفید بودن مفهوم مانسته‌جایی می‌آورم که با همدیگر ارتباط درونی دارند. دلیل نخست آن، ناوردا بودن مانسته‌جایی^۱ اکثر تابعگونه‌های توپولوژی جبری است. توضیحاً، یک تابعگون H بر رستهٔ فضا‌های توپولوژیک، ناوردا ی مانسته‌جایی نامیده می‌شود، هرگاه رابطهٔ $f \simeq g$ همواره مستلزم رابطهٔ $H(f) \cong H(g)$ باشد. بنابراین، می‌توان چنین انگاشت که این‌گونه تابعگونه‌ها بر رستهٔ مانسته‌جایی تعریف شده‌اند و کاربرد آنها در رسته Top ناشی از ترکیب با تابعگون متعارف است، یعنی به شکل $Top \rightarrow \mathcal{H}top \rightarrow \mathcal{A}$ است. البته از اصول موضوع تابعگون، نتیجه می‌شود که یک تابعگون ناوردا ی مانسته‌جایی، اشیاء یکر یخت را به فضاهای هم‌ارز مانسته‌جایی مربوط می‌کند: رابطهٔ $X \simeq Y$ مستلزم رابطهٔ $H(X) \cong H(Y)$ است. علاوه بر رستهٔ فضا‌های توپولوژیک، رسته‌های دیگری نیز می‌توانند، نخست با تغییر مناسب مفهوم مانسته‌جایی، مفهوم تابعگونه‌های ناوردا ی مانسته‌جایی را ببذیرند، و همان‌طور که قبلاً گفتم، بسیاری از تابعگونه‌های توپولوژی جبری (ولی نه همهٔ آنها)، ویژگی ناوردا یی مانسته‌جایی را دارند.

به هر حال، این مطلب غیر قابل قبول نیست، زیرا معنی ناوردا یی مانسته‌جایی این است که به‌ازای

هر مانسته جایی h ، ریختیهایی $H(h_t)$ مستقل از t هستند، که در نتیجه، با توجه به همبندی بازه $[0, 1]$ ، اصلاً بدین معنی است که $H(h_t)$ نسبت به t ، موضعاً ثابت^۱ است. با این تغییر، می توان گفت که: «برای تغییر شکلهای بسیار کوچک یک نگاشت، ریختی جبری متناظر با این نگاشت، تغییر نمی کند»، ناوردا بودن مانسته جایی در خود طبیعت تناظرهایی قرار دارد که رفتار پیوسته را به رفتار معمولی جنبه های جبری مبدل می سازند.

پذیرفتیم، اما ببینیم چرا این مطلب آن قدر مهم است؟ می توان چنین پاسخ داد: زیرا محاسبه پذیری تابعونها تا حدّ زیادی بر پایه این واقعیت قرار دارد! بهترین تابعونها هم، اگر قابل محاسبه نباشند، به هیچ درد نمی خورند. به کار بردن مستقیم تعاریف، بیش از اندازه پیچیده خواهد بود، درحالی که استفاده از ناوردایی مانسته جایی و گذر به فضاهای هم ارز مانسته جا، غالباً کار را ساده تر می کند.

آنچه واقعاً انجام می شود این است که فقط در مورد دو-سه فضای استانده به غایت ساده (مثلاً فضای تک نقطه ای، فضای S^1 و فضاهای شبیه آنها)، به اتکای تعریف، محاسبات مستقیم را انجام می دهیم و سپس «قانونهایی» را به کار می بریم، که ناوردایی مانسته جایی یکی از مهمترین آنهاست (و دیگر قوانین، مثلاً عبارت اند از اصل مایر-ویتوریس^۲، دنباله های دقیق طولانی^۳، دنباله های طیفی^۴، ...).

دومین دلیل اصلی فایده مفهوم مانسته جایی، امکان «تبدیل» برخی مسائل هندسی به مسائل مانسته جایی است. هنگامی که یک تابعگون توپولوژی جبری را برای یک وضعیت هندسی، یعنی برای کلیه فضاها و نگاشتهای دخیل در آن، به کار می بریم، معمولاً به یک «نمایش»^۵ جبری فوق العاده ساده، و به همین علت، روشنتر این وضعیت هندسی می رسمیم. بنابراین، مسائل هندسی به مسائل جبری (ساده تر) ترجمه می شوند و از راه پاسخ دادن به مسائل اخیر، می توانیم اطلاعاتی، دست کم جزئی، درباره مسائل هندسی مورد بحث به دست آوریم. مثلاً، برای این که $f : X \rightarrow Y$ یک وارون راست داشته باشد، مسلماً لازم است که $H(f) : H(X) \rightarrow H(Y)$ نیز وارون راست داشته باشد، اما عکس این حکم صادق نخواهد بود، یعنی شرط فوق در حالت کلی کافی نیست. این تابعگون همه جنبه های اساسی این مسأله هندسی را منعکس نمی کند، بلکه فقط یک جنبه آن را نشان می دهد. و اما، رسته مانسته جایی، به اصطلاح، در نیمه راه بین قطب سرکش توپولوژی و قطب ساده سازیهای بیش از اندازه جبری، قرار دارد. از سویی، بسیار «ظریف» عمل می کند و همان گونه که ناوردایی مانسته جایی بسیاری از تابعونها گواه آن است، به رسته توپولوژیک نزدیک است. از این رو، گاهی شرایط مانسته جایی واقعاً کافی هستند و می توان مسأله اولیه توپولوژی را از حل نمایش آن در رسته مانسته جایی حل کرد. از سوی دیگر، همین رسته مانسته جایی باز

1. locally constant 2. Mayer - Vietories principle 3. long exact sequences
4. spectral sequences 5. representation

ناهموار و به اندازه کافی جبری است، و لذا محاسبات را کاملاً خارج از دسترس قرار نمی‌دهد. با بیان غیرفنی، می‌توان گفت که تعداد رده‌های مانسته‌جایی خیلی کمتر از تعداد نگاشتهاست، به طوری که می‌توان تا اندازه‌ای به یک دید کلی نسبت به $[X, Y]$ دست یافت. به عنوان مثال، خمهای بسته فراوان و بسیار پیچیده‌ای به شکل $\mathbb{C} \setminus \{o\} \rightarrow S^1$ وجود دارند، اما $[S^1, \mathbb{C} \setminus \{o\}] = \mathbb{Z}$ («عدد دور»^۱).

«گروه‌های مانسته‌جایی»^۲ یک فضای توپولوژیک، یکی از عواملی هستند که به رسته مانسته‌جایی از لحاظ جبری سرو صورت می‌بخشند. اکنون می‌خواهم اندکی از موضوع اصلی بحث خود منحرف شوم و به تعریف آنها پردازم. برای این کار، به اندکی نمادگذاری نیازمندم: منظور از یک فضای نقطه پایه‌یی^۳، یک زوج (X, x_o) متشکل از یک فضای توپولوژیک X و یک نقطه آن، $x_o \in X$ است. چه بود نگاشتهای پیوسته نقطه- پایه نگهدار^۴ $(X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ ، و هکذا مانسته‌جاییهای نقطه- پایه نگهدار بین چنین نگاشتهایی، برای ما روشن است. مجموعه این‌گونه رده‌های مانسته‌جایی را با $[(X, x_o), (Y, y_o)]$ نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم N نقطه ثابتی در کرة n بعدی S^n باشد، $n \geq 1$ ، مثلاً N را قطب شمال می‌گیریم. در این صورت،

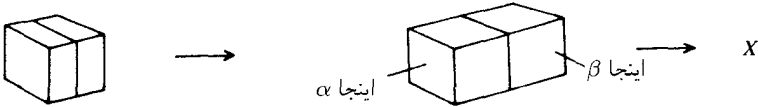
$$\pi_n(X, x_o) := [(S^n, N), (X, x_o)]$$

ساختار متعارف یک گروه (گروه آبله، برای $n \geq 2$) را دارد که n امین گروه مانسته‌جایی (X, x_o) نامیده می‌شود. هم‌اکنون به شرح این گروه می‌پردازم.

ساده‌ترین راه توضیح قانون گروهی آن است که کرة n بعدی را به صورت خارج قسمت $I^n / \partial I^n$ در نظر بگیریم، که از مکعب $[0, 1]^n$ با I^n با فروریختن مرز آن یعنی:

$$\partial I^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid \text{است } x_i \text{ ها } 0 \text{ یا } 1 \text{ است}\}$$

به دست می‌آید (رجوع کنید به صفحات ۵۴-۵۵ و ۱۱۹). اکنون، یک بار برای همیشه، یک همسان‌ریختی $I^n / \partial I^n = S^n$ را، که نقطه ∂I^n را به قطب شمال می‌برد، در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب، نگاشتهای پیوسته $(X, x_o) \rightarrow (S^n, N)$ دقیقاً نگاشتهای پیوسته $I^n \rightarrow X$ هستند که همه مرز ∂I^n را به x_o می‌برند. اکنون اگر α و β دو نگاشت از این قبیل باشند، یک نگاشت $[0, 2] \times [0, 1]^{n-1} \rightarrow X$ به شیوه معلوم زیر تعریف می‌کنیم: α را بر نیمه سمت چپ و β را بر نیمه سمت راست می‌گیریم، و سپس این نگاشت را با نگاشتی دیگر به شکل $[0, 2] \times I^{n-1} \rightarrow I^n$ ، که مختص نخست را دو برابر منبسط می‌کند، ترکیب می‌کنیم:

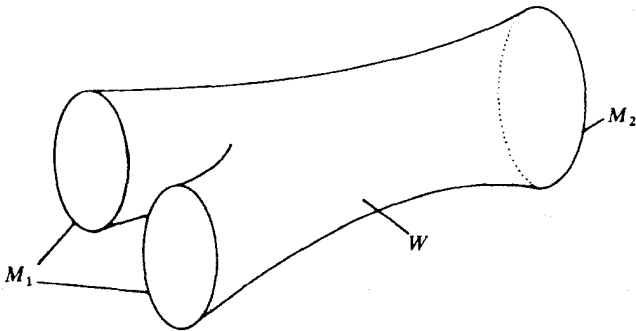


حاصل ترکیب، عضو دیگری از $\pi_n(X, x_0)$ را نمایش می دهد که به عنوان حاصل ترکیب اعضای $[\alpha], [\beta] \in \pi_n(X, x_0)$ تعریف و با نماد $[\alpha][\beta]$ نمایانده می شود (مثلاً رجوع کنید به مرجع [۱۱]، ص ۵).

*

اکنون دوباره مطلب را از سر می گیریم. این موضع مانسته جایی، یعنی واقع شدن در وسط راه بین توپولوژی و جبر، امکان می دهد که مسائل مهم هندسی را بگیریم، و ابتدا آنها را در قالب مسائل مانسته جایی بیان و سپس با استفاده از حساب نظریه مانسته جایی، کلاً یا جزئاً حل کنیم. مسلماً این گونه کارها را باید با راهها و ابزارهایی فراتر از سطح این کتاب انجام داد. شاید برای یک ناظر تیزبین و خرده گیر، صحبت از آنها در اینجا خوشایند نباشد. اما این خرده گیری نمی تواند مرا از ذکر، دست کم، یک مثال جالب برای ارضای حس کنجکاوی تحریک شده شما باز دارد.

دو خمینه دیفرانسیلی پذیر Ω بعدی فشرده و بی مرز M_1 و M_2 را «مرزپوش»^۲ گویند هرگاه یک خمینه فشرده $(n + 1)$ بعدی مرزدار W بتوان یافت که مرز آن، اجتماع جدا از هم M_1 و M_2 باشد:



«مرزپوشی» یک رابطه هم ارزی است، ورده های هم ارزی، که «رده های مرزپوشی»^۴ نامیده می شوند، یک گروه آبلی \mathcal{M}_n تشکیل می دهند که قانون ترکیب آن به کمک اجتماع جدا از هم تعریف می شود. مسأله: این گروهها را معین کنید.

حل این مسأله، بارده بندی خمینه های Ω بعدی با تقریب مرزپوشی^۵، هم ارز است. هر چند مرزپوشی در مقایسه با هموارریختی، رابطه کاملاً ضعیفی است، اما در توپولوژی دیفرانسیل، دلایل عدیده ای برای

1. without boundary 2. bordant 3. with boundary
4. bordism classes 5. up to bordism

استقبال از رده‌بندیهای ضعیفتر وجود دارد. زیرا تا به امروز، در خمینه‌های بعد بالا، شناخت اندکی از رده‌بندی با تقریب هموارریختی^۱ داریم، و در حول و حوش زمان پیدایش موضوع مورد بحث ما، یعنی اوایل دهه ۱۹۵۰ - ۱۹۶۰، هیچ چیز شناخته نشده بود. به‌علاوه، مرزپوشی آن‌قدرها هم که در نگاه نخست به نظر می‌آید، ضعیف نیست؛ برخی ویژگیهای مهم خمینه‌ها را حفظ می‌کند، و به هر حال، نشان داده شده است که رده‌بندی با تقریب مرزپوشی، خیلی ثمربخش و مفید بوده است.

با توجه به توضیحاتی که فوقاً اشاره شد، این مسأله (تعیین گروههای مرزپوشی، \mathfrak{M}_n ، م.) چندان سهل‌الوصول به نظر نمی‌رسد! رنه‌توم آن‌را در ۱۹۵۴ با استفاده از روشهای نظریهٔ مانسته‌جایی حل کرد. من نتیجهٔ توم را در اینجا نمی‌آورم ← (مرجع [۱۸])، اما باید توجه کرد که \mathfrak{M}_n ها گروههای آبلی متناهی‌اند، که برای n های متفاوت گروههایی کاملاً متفاوت‌اند، و همهٔ آنها را نمی‌توان تنها به اتکای شهود هندسی، حدس زد. اما ذکر چند کلمه در بارهٔ بیان این مسأله به زبان مانسته‌جایی را بی‌مناسبت نمی‌بینم. در فصل سوم، بخش ۴، از خمینهٔ گراسمان $O(n) \times O(k)/O(n+k)$ صحبت کردیم و گفتیم که نقاط این خمینه، زیر فضاهای برداری k بعدی در R^{n+k} هستند. برای این خمینه، یک کلاف برداری k بعدی متعارف (به نام «کلاف گراسمان»^۲) وجود دارد، که تار آن در نقطهٔ $\xi \in \mathbb{R}^{n+k}$ دقیقاً خود فضای k بعدی ξ است (و یا دقیقتر بگوییم $\{\xi\} \times \xi$ است، زیرا تارها باید دو به دو جدا از هم باشند). فضای این کلاف برداری را با $M_n O(k)$ نمایش می‌دهیم (فصل سوم، بخش ۶، مثال ۵، دیده شود)، و آن‌را فضای توم می‌نامیم. توم توانست ثابت کند که: برای k های بزرگ، گروه مانسته‌جایی $(\pi_{n+k}(M_n O(k)))$ ، با گروه \mathfrak{M}_n یکرخت است. بنابراین، محاسبهٔ این گروههای مانسته‌جایی، همان مسألهٔ مانسته‌جایی است که می‌توان مسألهٔ مرزپوشی را به آن بدل نمود. توم توانست این مسألهٔ مانسته‌جایی را حل کند، و برای این کار، از روشهای جدید ژان پییرسر^۳ بهره گرفت. روشهای ژان پییرسر، اندک زمانی پیش از راه‌حل توم، به دنبال یک دورهٔ طولانی رکود در نظریهٔ مانسته‌جایی، ابداع شده است و به منزلهٔ یک راه‌گشا در نظریهٔ مانسته‌جایی به‌شمار می‌آید.

خیلی دلم می‌خواست که در اینجا به روش «ساختمان پونتریاگین - توم»^۴ اشاره کنم، روشی که توم برای تبدیل مسألهٔ مرزپوشی به مسألهٔ مانسته‌جایی به‌کار گرفت، و دلم می‌خواست به شما بگویم که چگونه این روش ساختمان به یک روش قبلی پونتریاگین (۱۹۳۸) و حتی به روش بازهم قدیمترِ هوف^۵ (۱۹۲۶)، که در بسط توپولوژی نوین فوق‌العاده جالب توجه و آموزنده است، مربوط می‌شود. اما، یک بار هم که شده است، در برابر این وسوسه، مقاومت می‌کنم...

1. up to diffeomorphism

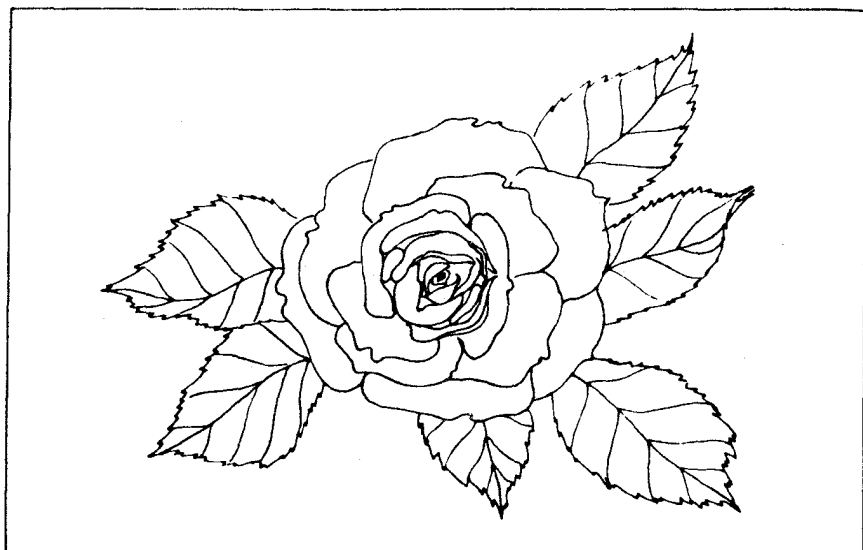
2. Grassmann bundle

3. J. P. Serre

4. Pontrjagin-Thom construction

5. Hopf

دو اصل موضوع شمارایی

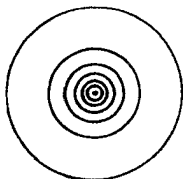


۱. اصلهای موضوع اول و دوم شمارایی

این فصل کوتاه، مستقیماً به مفاهیم پایه مربوط می‌شود. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه \mathcal{B} از مجموعه‌های باز در X ، یک پایه برای توپولوژی X نامیده می‌شود هرگاه هر مجموعه باز، اجتماعی از مجموعه‌های عضو \mathcal{B} باشد. اکنون «پایه همسایگی» را نیز به این مفهوم می‌افزاییم.

تعریف (پایه همسایگی). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x_0 \in X$. یک مجموعه چون \mathcal{A} از همسایگیهای x_0 را، یک پایه همسایگی x_0 می نامیم هرگاه هر همسایگی x_0 شامل یک همسایگی عضو \mathcal{A} باشد.

مثال. مجموعه همه همسایگیهای x آشکارا یک پایه (غیر جالب) همسایگی است. حال فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$. مجموعه گویهای $K_{1/n}(x_0)$ به مرکز x_0 و شعاع $\frac{1}{n}$ ، $n = 1, 2, \dots$ تشکیل یک پایه (شمارای!) همسایگی x_0 را می دهد.



تعریف (اصولهای موضوع شمارایی). می گوئیم یک فضای توپولوژیک در اصل موضوع شمارایی یکم 1 صدق می کند، و خود فضا را شمارای یکم می نامیم، هرگاه هر نقطه آن، یک پایه همسایگی شمارا داشته باشد. گوئیم فضای X در اصل موضوع شمارایی دوم 2 صدق می کند، هرگاه یک پایه شمارا برای توپولوژی داشته باشد.

واضح است که اصل دوم اصل قویتری است: مجموعه های شامل نقطه x_0 در یک پایه شمارا، آشکارا یک پایه همسایگی شمارا برای x_0 تشکیل می دهند: هر دو اصل، ویژگی اثری دارند، یعنی به زیرمجموعه ها منتقل می شوند. فضای \mathbb{R}^n ، در نتیجه کلیه زیرفضاهای آن، در هر دو اصل صدق می کنند (گوییهای که شعاع و مختصات مرکزشان گویا هستند، یک پایه شمارا برای توپولوژی فضا تشکیل می دهند). فضاهای متریکپذیر، دست کم در اصل یکم شمارایی صدق می کنند. اگر d یک متریک باشد، d -گوییهای $K_{1/n}(x_0)$ یک پایه همسایگی شمارا برای x_0 تشکیل می دهند.

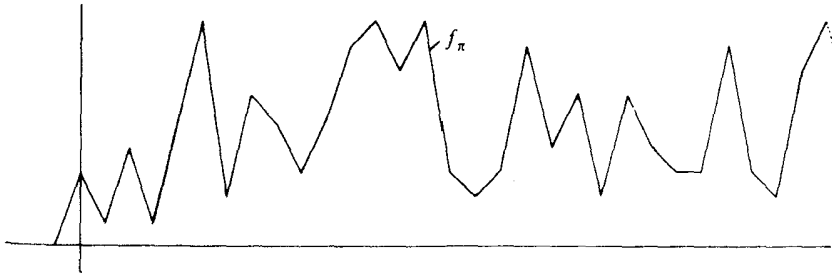
برای آنکه تفاوت بین این دو اصل را نیز ببینیم، مثالهایی از فضاهای شمارای یکم می آوریم که شمارای دوم نیستند. فضاهای ناشمارای گسسته، که آشکارا در این رسته قرار می گیرند، به خودی خود فضاهای جالبی نیستند، اما در جستجوی مثالهای بهتر، بهتر است که به نکته زیر توجه کنیم:

نکته. اگر یک فضای توپولوژیک شامل یک زیرمجموعه ناشمارای گسسته باشد، نمی تواند شمارای

1. neighborhood basis
2. first countability axiom
3. second countability axion

دوم باشد.

مثال ۱. فرض کنیم $C(\mathbb{R})$ فضای باناخ توابع پیوسته کراندار بر \mathbb{R} با نرم سوپرمام باشد. در این صورت، $C(\mathbb{R})$ ، فضای شمارای یکم هست (زیرا یک فضای مترای است)، اما شمارای دوم نیست. برهان. برای هر عدد حقیقی x که به صورت اعشاری نوشته شده است، یک تابع پیوسته کراندار f_x را چنین تعریف می‌کنیم: مقدار این تابع، برای $n \in \mathbb{Z}$ برابر است با n امین رقم اعشاری پس از ممیز. در این صورت، به ازای $x \neq y$ ، همواره خواهیم داشت $\|f_x - f_y\| \geq 1$ ، و معنی آن این است که مجموعه $\{f_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ یک زیرفضای گسسته ناشمارای $C(\mathbb{R})$ است، و از این رو، $C(\mathbb{R})$ نمی‌تواند شمارای دوم باشد. \square



مثال ۲. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت «تفکیکناپذیر»^۱، یعنی فضای هیلبرتی باشد که پایه هیلبرتی شمارا ندارد: بنابراین، مجموعه اندیس هر پایه هیلبرتی $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ، مجموعه‌ای است ناشمارا. پس، با توجه به آنکه به ازای $\lambda \neq \mu$ ، داریم $\|e_\lambda - e_\mu\| = \sqrt{2}$ ، مانند مثال قبل نتیجه می‌گیریم که H در اصل دوم شمارایی صدق نمی‌کند، اما چون یک فضای مترای است در اصل یکم صدق می‌کند.

۲. حاصلضربهای نامتناهی

بدون شک، میل داریم یک فضای توپولوژیک را هم که در هیچ‌یک از اصول شمارایی صدق نکند، ببینیم. فرصت را غنیمت شمرده، از این مسأله استفاده می‌کنم تا برای اولین بار، راجع به حاصلضرب تعداد دلخواهی فضای توپولوژیک صحبت‌کنم، موضوعی که در فصل دهم نیز مورد بحث قرار خواهیم داد.

منظور از حاصلضرب^۲ یک خانواده $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ از مجموعه‌ها، که با نماد $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ نمایش داده می‌شود، مجموعه همه خانواده‌های $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از اعضای X_λ است به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ ، یعنی:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \{\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \mid x_\lambda \in X_\lambda\}.$$

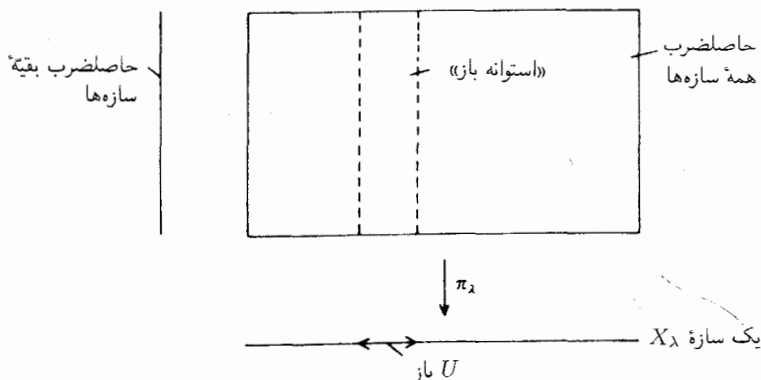
برای یک اندیس ثابت $\mu \in \Lambda$ ، تصویر^۱:

$$\pi_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu$$

بر سازه μ با ضابطه $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ تعریف می‌شود، و x_μ را مؤلفه^۲، μ ام نقطه^۳ $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ نیز می‌نامند. برای مجموعه اندیس $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ ، البته بهتر است که به جای نماد $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \{1, 2, \dots, n\}}$ ، از نماد (x_1, \dots, x_n) استفاده کنیم. در این صورت، نمادگذاریهای فوق، نظیر نمادگذاریهای متداول برای حاصلضربهای دکارتی متناهی، به شکل $X_1 \times \dots \times X_n$ درمی‌آید.

تعریف (توپولوژی حاصلضربی). فرض می‌کنیم $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. منظور از توپولوژی حاصلضربی^۴ درشت بافت‌ترین توپولوژی است که همه^۵ تصویرها بر یک یک سازه‌ها نسبت به این توپولوژی، پیوسته باشند. مجموعه $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ همراه با این توپولوژی را فضای حاصلضربی^۶ می‌نامند.

نگاره‌های وارون مجموعه‌های باز هر سازه، تحت تصویر متناظر آن سازه، «استوانه‌های باز»^۵ نامیده می‌شوند.



اشتراک متناهی استوانه‌های باز را، «حجره‌های باز»^۶ می‌نامند. بدین ترتیب، استوانه‌های باز تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی حاصلضربی می‌دهند، به شکل

$$\{\pi_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda, U \subset X_\lambda, U \text{ باز است}\}$$

- | | | | |
|-------------------|---------------|---------------------|------------------|
| 1. projection | 2. component | 3. product topology | 4. product space |
| 5. open cylinders | 6. open boxes | | |

و حجره‌های باز تشکیل یک پایه برای آن می‌دهند، به شکل

$$\{\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{\lambda_r}^{-1}(U_r) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda, U_{\lambda_i} \subset X_{\lambda_i}, \}$$

همچنین می‌توان گفت که یک زیرمجموعه حاصلضرب، مجموعه‌ای است باز برای توپولوژی حاصلضربی، هرگاه هر نقطه آن عضو حجره‌بازی مشمول در این مجموعه باشد.

چنانچه همهٔ سازه‌ها برابر باشند، مثلاً هرگاه $X_\lambda = X$ به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ ، به جای نماد $\prod_{\lambda \in \Lambda} X$ از نماد X^Λ ، نیز استفاده می‌کنیم. بنابراین، اعضای X^Λ اصلاً نگاشته‌ای (دلخواه) $\Lambda \rightarrow X$ خواهند بود.

حال، به بحث دربارهٔ اصول موضوعهٔ شمارایی باز می‌گردیم.

مثال ۱. اگر Λ ناشمارا باشد و هر یک از X_λ ‌ها بی‌میه نباشد (یعنی مجموعه‌بازی غیر از \emptyset و X_λ داشته باشد)، در این صورت فضای $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ شمارای یکم، و در نتیجه شمارای دوم هم نیست. برهان. به ازای هر λ ، یک مجموعه‌بازی U_λ در X_λ چنان انتخاب می‌کنیم که \emptyset یا X_λ نباشد و یک نقطه $x_\lambda \in U_\lambda$ در نظر می‌گیریم. اگر فرض کنیم که نقطه $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک پایهٔ همسایگی شمارا دارد، لازم می‌آید که یک پایهٔ همسایگی شمارا متشکل از حجره‌های باز داشته باشد. اما فقط تعدادی شمارا از λ ‌ها در تعدادی شمارا از جعبه‌های باز «دخالت می‌کنند». یک λ چنان در نظر می‌گیریم که در هیچ یک از حجره‌های مورد بحث دخالت نکنند. بنابراین هیچ یک از این حجره‌ها در مجموعه $\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ ، که یک پایهٔ همسایگی نقطهٔ مفروض است، قرار ندارد. این یک تناقض است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

مثال ۲. یک فضای هیلبرت بینهایت بعدی با توپولوژی ضعیف، شمارای یکم نیست (توضیحاً، توپولوژی ضعیف^۱ یعنی درشت بافت‌ترین توپولوژیی که همهٔ تابعکهای خطی^۲ یعنی نگاشته‌ای

$$\langle v, \cdot \rangle: H \rightarrow \mathbb{K}, v \in H,$$

باز هم^۳ پیوسته‌اند).

برهان، شبیه برهان مثال قبل است، خواه H تفکیک‌پذیر باشد یا نباشد، زیرا هر چند H یک پایهٔ هیلبرتی شمارا داشته باشد، نمی‌تواند پایهٔ شمارایی برای فضای برداری داشته باشد. رجوع شود به ص ۳۷۹ مقالهٔ نوین، مرجع [۱۵].

1. weak topology

2. linear functionals

۳. هم برای توپولوژی خود فضا و هم برای توپولوژی ضعیف فضا. - م.

۳. نقش اصلهای موضوع شمارایی

اصل موضوع شمارایی یکم با همگرایی دنباله‌ها سروکار دارد.

نمادگذاری. به جای آنکه بگوییم « n_0 می‌هست به گونه‌ای که برای هر $x_n \in U, n \geq n_0$ » خواهیم گفت «دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ سرانجام در U می‌ماند». علت آن تا حدی کوتاه‌تر بودن عبارت آن و نیز بالاتر از همه، الهام بخش بودن آن است.

اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته و $\lim x_n = a$ در X باشد، تساوی $\lim f(x_n) = f(a)$ در Y برقرار است. این مطلبی است معلوم و کاملاً پیش پا افتاده، زیرا اگر U یک همسایگی $f(a)$ باشد، $f^{-1}(U)$ یک همسایگی a خواهد بود و در نتیجه، دنباله (x_n) سرانجام در $f^{-1}(U)$ می‌ماند و $f(x_n) \in U$ در U . به علاوه، اگر X یک زیر فضای \mathbb{R}^n باشد، عکس آن نیز برقرار است: نگاشت $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر دنباله همگرا (در $X \subset \mathbb{R}^n$) به دنباله‌ای برده شود که به نگاره حد دنباله اولی همگرا باشد. این صفت اختصاصی پیوستگی (که می‌توان آن را پیوستگی دنباله‌یی^۱ نامید)، در مورد سایر فضاها برقرار نیست: همگرایی نگاره دنباله‌ها تحت یک نگاشت به نقطه مناسب، چنانچه در مثال زیر نشان خواهیم داد، در حالت کلی برای تضمین پیوستگی آن نگاشت کافی نیست.

مثال. فرض کنیم X مجموعه نگاشتهای پیوسته $[-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ مجهز به توپولوژی حاصلضربی باشد یعنی توپولوژی آن از

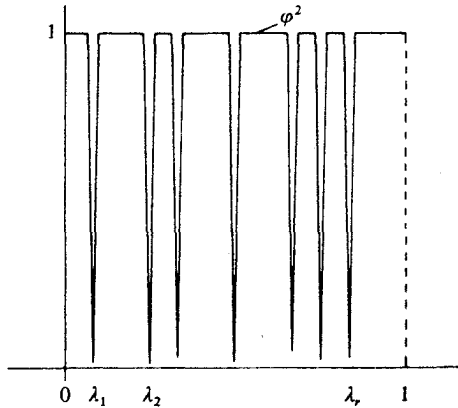
$$X \subset [-1, 1]^{[0,1]} = \prod_{\lambda \in [0,1]} [-1, 1]$$

به ارث گرفته شده باشد. پس، به عنوان یک مجموعه، با گوی یکه فضای باناخ $C[0, 1]$ فرقی ندارد، اما توپولوژی مورد بحث آن به کلی متفاوت است. ببینیم همگرایی یک سری در این فضا به چه معنی است؟ یک دنباله در $\prod_{\lambda \in A} X_\lambda$ همگرا به a است اگر و تنها اگر سرانجام در هر حجرة باز حول a بماند، و یا باز هم اگر و تنها اگر سرانجام در هر استوانه باز حول a بماند، که این خود هم‌ارز است با آنکه بگوییم این دنباله، مؤلفه به مؤلفه همگرا به a است. بنابراین، همگرایی در مثال فضای تابعی ما، چیزی جز مفهوم آشنای همگرایی نقطه‌یی نیست: برابری $\lim \varphi_n = \varphi$ به معنی آن است که برای هر $\lim \varphi_n(\lambda) = \varphi(\lambda), \lambda \in [0, 1]$

هر تابع پیوسته بر بازه $[0, 1]$ ، به طریق اولی مربع آن انتگرالپذیر یا به اصطلاح مربعی - انتگرالپذیر^۲ است، در نتیجه، یک نگاشت متعارف از X به فضای هیلبرت $L^2[0, 1]$ ، $L^2[0, 1] \rightarrow X$ ، متشکل از توابع مربعی - انتگرالپذیر روی $[0, 1]$ ، با ضابطه $\varphi \mapsto \varphi^2$ ، خواهیم داشت. اما این نگاشت، دنباله‌یی پیوسته است (مثلاً با استفاده از قضیه همگرایی لبگ^۳)، اما پیوسته نیست. زیرا، اگر پیوسته بود، لازم

1. sequential continuity 2. square integrable
3. Lebesgue convergence theorem

می‌آمد که برای هر $\varepsilon > 0$ یک حجره باز K حول مبدأ در فضای $[0, 1]$ بتوان یافت به گونه‌ای که برای هر $\varphi \in K \cap X$ داشته باشیم $\int_0^1 \varphi^2 dx < \varepsilon$. اما شرط «تعلق به K » شرطی است برای مقدار φ ، در تعدادی متناهی از نقاط $[0, 1]$ ، و چنین شرطی نمی‌تواند مانع آن باشد که $\int_0^1 \varphi^2 dx$ به دلخواه به عدد ۱ نزدیک شود:



گزاره ۱. اگر X شمارای یکم و Y فضای توپولوژیک دلخواهی باشد، آنگاه نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر پیوسته دنباله‌یی باشد.

برهان. فرض کنیم f پیوسته دنباله‌یی باشد و $a \in X$ ، U یک همسایگی $f(a)$ باشد. باید نشان دهیم که: یک همسایگی V برای a هست که $f(V) \subset U$. فرض کنیم هیچ V بی، خصوصاً اشتراک متناهی $V_1 \cap \dots \cap V_n$ از V_i ‌های عضو یک پایه همسایگی شمارای نقطه a ، در این شرط صدق نکند. نقطه $x_n \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(x_n) \notin U$. در این صورت، دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ به a همگرا خواهد بود، زیرا در هر همسایگی a یک V_i قرار دارد و برای هر $i \geq n$ ، خواهیم داشت $x_n \in V_i$. اما، البته دنباله نگاره نمی‌تواند همگرا به $f(a)$ باشد، زیرا اصلاً به U نفوذ نمی‌کند، و این هم با پیوستگی دنباله‌یی f متناقض است، چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم. \square

شاید مهمتر از مفهوم پیوستگی دنباله‌یی، مفهوم فشردگی دنباله‌یی باشد، و در این مورد نیز، اصل شمارایی یکم نقش تعیین‌کننده‌ای بازی می‌کند.

تعریف (فشردگی دنباله‌یی). یک فضای توپولوژیک X را فشردگی دنباله‌یی^۱ گویند اگر هر دنباله در

X یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.

غالباً مطلوب این است که فشردگی و فشردگی دنباله‌یی، یکی شوند، خواه به آن دلیل که گاهی زیر دنباله‌های همگرا مورد نیازند، و خواه در جهت عکس: اطلاعات ما از دنباله‌ها خیلی بیشتر از اطلاعات ما از پوششهای باز است، مواردی که خصوصاً در فضاهای تابعی اغلب پیش می‌آید. اما این دو مفهوم فشردگی و فشردگی دنباله‌یی یکی نیستند، و حتی نمی‌توان گفت که یکی از آنها مستلزم دیگری است. به جای آنکه مثالی برای نکته‌ اخیر بیاورم، یک منبع اطلاعات به شرح زیر تهیه می‌کنم: فرض کنیم \mathcal{A} و \mathcal{B} دو ویژگی توپولوژیک باشند و بخواهیم معلوم کنیم که استلزام $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ برقرار است یا نه. حال فرض کنیم شما حس می‌کنید که تحقیق آن بیش از حد مشکل، یا اعتماد به تحقیق دشوار، و یا صاف و پوست‌کنده بگویم انجامش برای شما خسته‌کننده است. واضح است که در این صورت، اولین کتاب توپولوژی را که در دسترس شماست برمی‌دارید و به فهرست راهنمای آن مراجعه می‌کنید تا ویژگیهای \mathcal{A} و \mathcal{B} را بیابید، و اگر حکم $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ واقعاً صادق باشد، احتمال زیاد هست که آن را به شکل یک لم در کتاب بیابید. اما اگر حکم $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ صادق نباشد، شانس شما، لا اقل در حالت کلی، کمتر است. خوشبختانه کتاب خوبی برای این‌گونه موارد هست که خیلی عالی است. نام این کتاب، مثالهای نقض در توپولوژی، تألیف ل. آ. ستین و ی. آ. زیباخ، مرجع [۱۷] است. در این کتاب، ۱۴۳ تا از عجیب و غریبترین فضاهای توپولوژیک، یکایک تشریح شده‌اند. در پایان کتاب، یک «جدول مرجع» گنج‌نامه شده است، که جدول بزرگی است و شما می‌توانید با یک نگاه تشخیص دهید که مثال مورد بحث کدام یک از ۶۱ ویژگی توپولوژیک مطرح شده را دارد!^۱

تنها کاری که شما باید انجام دهید، بررسی و جستجوی ویژگیهای \mathcal{A} و \mathcal{B} در ستونهای جدول است. از جمله (برای آنکه به زمینه مورد بحث بازگردیم)، در آن جدول، مثالهایی از فضاهایی خواهید یافت که فشرده‌اند ولی فشرده دنباله‌یی نیستند،^۲ و بعکس^۳ به هر حال، گزاره زیر را داریم:

گزاره ۲. هر فضای فشرده شماری یکم، فشرده دنباله‌یی نیز هست.

برهان. فرض کنیم $(x_n)_{n \geq 1}$ دنباله‌ای در X باشد. نخست، تنها با استفاده از فشردگی X ، ملاحظه می‌کنیم که باید یک نقطه $a \in X$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که این دنباله، در هر همسایگی

۱. تصویر بخش ابتدایی جدول مرجع کلی، مندرج در صفحه ۱۹۴ کتاب «مثالهای نقض در توپولوژی» مرجع [۱۷]، در ص ۸۳ کتاب پیش آمده است، که ترجمه آن در صفحه ۱۱۰ همین کتاب نقل می‌شود. البته استفاده از جدول، ویژه خوانندگان آن کتاب است، زیرا در جدول فقط شماره مثال ذکر شده است و شرح مثال در متن همان کتاب آمده است. وانگهی، در این صفحه فقط ۳۰ ویژگی نام برده شده و ۳۱ ویژگی دیگر در صفحه دوم جدول به چشم می‌خورد. سپس، برای مثالهای ردیفهای بعد، جدول ادامه می‌یابد.

۲. مثال ۱۰۵ در جدول.م. ۳. مثال ۴۲ در جدول.م.

جدول مرجع کلی^۱

نام انگلیسی ویژگیها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	شماره ردیف مثال در متن	نام فارسی ویژگیها
T_0	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	T_{00}	ت صفر
T_1	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	T_1	ت یک
T_2	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	T_2	ت دو
$T_{\frac{1}{2}}$	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	$T_{\frac{1}{2}}$	ت دو نیم
T_3	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	T_3	ت سه
$T_{\frac{3}{2}}$	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	$T_{\frac{3}{2}}$	ت سه و نیم
T_4	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	T_4	ت چهار
T_5	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	T_5	ت پنج
URYSOHN	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱		اورسون
SEMIREGULAR	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱		نیمه منظم
REGULAR	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱		منظم
COMPLETELY REGULAR	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱		کاملاً منظم
NORMAL	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱		نرمال
COMPLETELY NORMAL	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱		کاملاً نرمال
PERFECTLY NORMAL	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱		تماماً نرمال
COMPACT	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱		فشرده
σ -COMPACT	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱		σ - فشرده
LINDELÖF	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱		لیندلف
COUNTABLY COMPACT	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱		فشرده شمارا
SEQUENTIALLY COMPACT	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱		دنباله‌ای فشرده
WEAK COUNTABLY COMPACT	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱		فشرده شمارای ضعیف
PSEUDOCOMPACT	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱		شبه فشرده
LOCALLY COMPACT	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱		موضعی فشرده
STRONG LOCALLY COMPACT	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱		موضعی فشرده قوی
σ -LOCALLY COMPACT	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱		σ - موضعی فشرده
SEPARABLE	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱		تفکیک‌پذیر
SECOND COUNTABLE	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱		شمارای دوم
FIRST COUNTABLE	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱		شمارای یکم
COUNTABLE CHAIN CONDITION	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱		شرط زنجیری شمارا
PARACOMPACT	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱		پیرافشرده

۱) ردیف ۵ مربوط به متن زیر کتاب است: هر تابع از یک مجموعه X با توپولوژی گسسته، پیوسته است. لذا صادق بودن ویژگی در آن (ارزش ۱) یا نبودن (ارزش ۰) مورد ندارد. کلاً ۱۴ ردیف مشمول این قاعده‌اند و لذا فقط ۱۲۹ مثال در جدول ارزشیابی شده‌اند.

نام فارسی ویژگیها	نام انگلیسی ویژگیها
فرا فشرده	METACOMPACT
پیرافشرده شمارا	COUNTABLY PARACOMPACT
فرا فشرده شمارا	COUNTABLY METACOMPACT
تماماً نرمال	FULLY NORMAL
تماماً T_4 - چهار	FULLY T_4
همبند	CONNECTED
همبند - راه	PATH CONNECTED
همبند-کمان	ARC CONNECTED
ابر همبند	HYPER CONNECTED
فرا همبند	ULTRA CONNECTED
موضعیاً همبند	LOCALLY CONNECTED
موضعیاً همبند - راه	LOCALLY PATH CONNECTED
موضعیاً همبند - کمان	LOCALLY ARC CONNECTED
همبند دوگانه	BICONNECTED
نقاط پاشیده از هم دارد	HAS DISPERSION POINTS
کلاً ناهمبند - راه	TOTALLY PATH DISCONNECTED
کلاً ناهمبند	TOTALLY DISCONNECTED
کلاً جدا	TOTAOLLY SEPARATED
فرینه ناهمبند	EXTREMALLY DISCONNECTED
صفر - بعدی	ZERO DIMENSIONAL
پراکنده	SCATTERED
گسسته	DISCRETE
متریکپذیر	METRIZABLE
با پایه σ موضعیاً منتهای	σ -LOCALLY FINITE BASE
کامل از حیث توپولوژی	TOPOLOGICALLY COMPLETE
از رسته دوم	SECOND CATEGORY
شمارا	COUNTABLE
توان کمتر از پیوستار C	CARD LESS THAN C
توان برابر پیوستار C	CARD= C
با توان نامتجاوز از 2^C	CARD NOT EXCEEDING 2^C
قویاً همبند	STRONGLY CONNECTED

a ، بینهایت بار نفوذ کند. وگرنه، باید هر نقطه x یک همسایگی U_x داشته باشد به گونه‌ای که این دنباله را فقط در تعدادی متناهی از دفعات قطع کند. اما، از آنجا که $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ ، سرانجام پیشروی دنباله در جایی متوقف می‌شود. اما اگر a یک پایه همسایگی شمارا مانند $\{V_i\}_{i \geq 1}$ داشته باشد، آشکارا می‌توان یک زیر دنباله مانند $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ چنان انتخاب کرد که $x_{n_k} \in V_1 \cap \dots \cap V_k$ و دیده می‌شود که این زیر دنباله، همگرا به a است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

پیوست جهت استفاده بیشتر خوانندگان، سایر ویژگیهای مندرج در جدول ص ۱۹۵ مرجع [۱۷] را نیز در صفحه ۱۱۱ آورده‌ایم، ولی از ذکر ارزشهای ۱ و ۰ مثالها خودداری می‌کنیم، زیرا برای خوانندگان خالی از فایده خواهد بود. - م.

گزاره ۳. برای فضاهای متری، مفاهیم «فشرده» و «فشرده دنباله‌یی» مترادف‌اند.

برهان. فرض کنیم X یک فضای متری فشرده دنباله‌یی باشد و $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوششی باز برای آن، که زیر پوشش متناهی ندارد. می‌خواهیم به یک تناقض برسیم. برای هر $x \in X$ ، یک $\lambda(x)$ چنان انتخاب می‌کنیم که علاوه بر آنکه x عضو $U_{\lambda(x)}$ است، عملاً به معنی زیر در آن عمیقاً نشانیده شده باشد: یک گوی باز بزرگ به مرکز x و مشمول در $U_{\lambda(x)}$ بتوان در نظر گرفت به قسمی که شعاع آن r یکی از دو خصوصیت زیر را داشته باشد، یا بزرگتر از ۱ باشد و یا گوی به شعاع $2r$ حول x در هیچ یک از مجموعه‌های عضو این پوشش قرار نگیرد. روشن است که می‌توان چنین $\lambda(x)$ ای برگزید.

اکنون یک دنباله $(x_n)_{n \geq 1}$ را به استقراء چنان انتخاب می‌کنیم که

$$x_{n+1} \notin U_{\lambda(x_1)} \cup \dots \cup U_{\lambda(x_n)}$$

ملاحظه می‌شود که فاصله یک عضو دلخواه این دنباله، x_i ، از هر یک از اعضای تالی آن، یا از ۱ بیشتر است و یا آن قدر بزرگ است که گوی باز به شعاع دو برابر این فاصله و مرکز x_i ، در هیچ یک از مجموعه‌های عضو پوشش مفروض نمی‌گنجد. فرض کنیم a حد یک زیر دنباله این دنباله باشد و $1 > r > 0$ ، به قسمی که $K_r(a) \subset U_{\lambda(a)}$. در این صورت، باید این زیر دنباله سرانجام در $K_{r/5}(a)$ بماند، و این هم ایجاب می‌کند که نقاط دنباله، بیش از آنکه روش ساختن آن اجازه می‌داد، به هم نزدیک شوند و دور هم گرد آیند، و این تناقض است، همان چیزی که می‌خواستیم. \square

*

راجع به اصل موضوع اول شمارایی به همین بسنده می‌کنیم. ببینیم در چه مواردی با اصل موضوع دوم سروکار پیدا می‌کنیم؟ در جایی بسیار مهم، در تعریف «خمینه‌ها»^۱، به شکل زیر: خمینه توپولوژیک

n بعدی، یک فضای هاسدورف شماری دوم موضوعاً همسانریخت با \mathbb{R}^n است. در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، مثل توپولوژی دیفرانسیل، هندسهٔ ریمانی، گروه‌های لی، رویه‌های ریمان، و غیره، اشیاء مورد مطالعه، خمینه‌های توپولوژیک با ساختارهای اضافی هستند. و باز در برخی زمینه‌ها مثل فضاهای مختلط^۱ ساختارهایی بررسی می‌شوند که به نحوی شبیه خمینه‌ها هستند، و باز هم می‌خواهند که این فضاها شماری دوم باشند. (ص ۱۸ مرجع [۱۰] دیده شود). بنابراین، می‌توان گفت که این اصل موضوع دوم یکی از اصلهای موضوع بنیادی در بخش اعظم هندسهٔ جدید و توپولوژی است.

از تعریف تنهای خمینه، بلافاصله دیده نمی‌شود که از این اصل موضوع ما چه انتظاری داریم. اما اهمیت فنی آن را همین الآن روشن خواهیم کرد. در واقع، این اصل امکان می‌دهد که برای هر پوشش شمارا $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (و خصوصاً برای هر خانواده از همسایگی‌های باز به شکل $\{U_x\}_{x \in X}$)، یک زیرپوشش شمارا بتوانیم پیدا کنیم، و این خود نیز در بسیاری از ساختمانهای استقرایی و برهانهایی که با شناخت موضعی (مانند همسانریختی موضعی با \mathbb{R}^n) آغاز می‌شوند مفید است، و امکان می‌دهد از $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ به $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \cup U_{x_{n+1}}$ برسیم. اما باید دانست که اصل موضوع دوم شماری فقط یک ابزار فنی نیست: چنانچه این اصل را کنار می‌گذاشتیم، قضایایی در توپولوژی دیفرانسیل، از قبیل قضیهٔ متریکپذیری خمینه‌ها، قضیهٔ نشاندن ویتنی^۲، قضیهٔ سارد^۳ و غیره، دیگر مناسم نبودند و اعتبار خود را از دست می‌دادند.

البته، فضاهایی را که در اصل دوم شماری صدق نمی‌کنند ولی در سایر موارد شبیه خمینه‌ها هستند، نمی‌توان صرفاً به دلیل فوق کنار گذاشت. کسی چه می‌داند، شاید این‌گونه فضاها خیلی جالب باشند! ... اما به نظر نمی‌رسد که چنین باشد، هیچ دلیل قطعی برای مطالعهٔ این‌گونه «خمینه‌ها» در دست نیست.

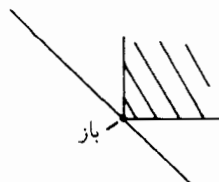
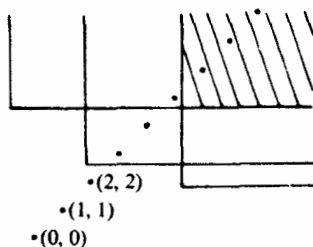
در خاتمهٔ این فصل، به موضوع تفکیکپذیری اشاره می‌کنم، که گاهی در توپولوژی مطرح می‌شود، و می‌توان آن را یک نوع «اصل موضوع سوم شماری» به شمار آورد.

تعریف یک فضای توپولوژیک را تفکیکپذیر^۴ گویند هرگاه شامل یک مجموعهٔ چگال شمارا باشد.

این ویژگی، با اصول اول و دوم شماری، ماهیتی متفاوت دارد، بدین معنی که زیرمجموعه‌ها این ویژگی را به ارث نمی‌برند. به عنوان مثال، مجموعهٔ \mathbb{R}^2 با توپولوژی حاصل از ربع صفحه‌های $(x, y) + \mathbb{R}_+^2$ را در نظر می‌گیریم. این فضا تفکیکپذیر است، زیرا مثلاً مجموعهٔ $\{(n, n) | n \in \mathbb{N}\}$ در این فضا

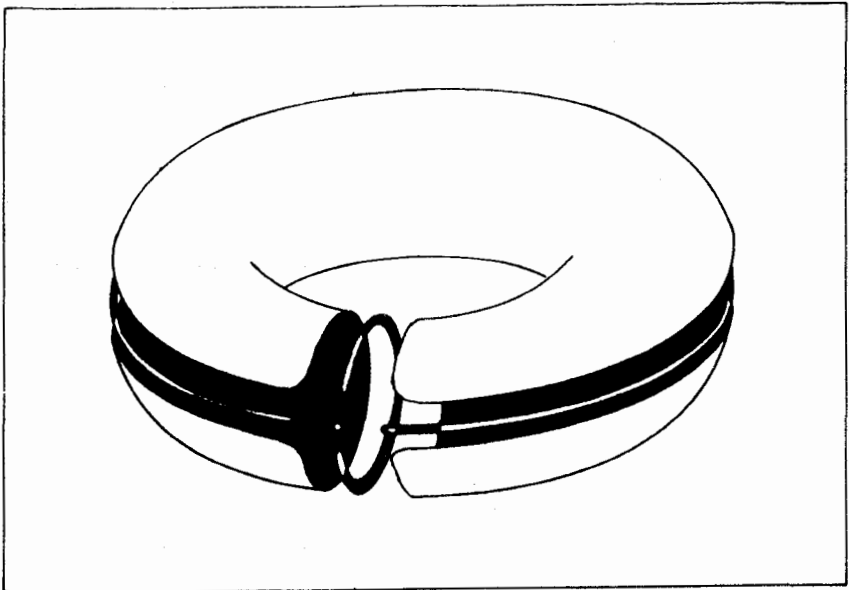
1. complex spaces 2. Whitney embedding theorem 3. Sard theorem
4. separable

چگال است. اما، از سوی دیگر، «قطر فرعی» $x + y = 0$ یک زیر فضای گسسته و ناشمارا، و لذا تفکیکناپذیر است.



حالا شما خواهید گفت، بفرما، این مثال که یک مثال آسیب شناختی است. تصدیق می‌کنم! اما در فضاهای «مناسب»، مثلاً در فضاهای متریک، می‌توان از مفهوم تفکیکپذیری صرف نظر کرد، زیرا فضاهای متریک تفکیکپذیرند اگر و تنها اگر شمارای دوم باشند. در هر حال، شمارایی دوم مستلزم تفکیکپذیری است و برای فضاهای هیلبرت، تعریف فوق معادل با تعریفی است که قبلاً در مورد تفکیکپذیری آورده بودیم: وجود یک پایه هیلبرتی شمارا.

مجتمعهای ضعیف- توپولوژی متناهی- بستر (یا مجتمعهای CW)



۱. مجتمعهای سادگی

پیش از پرداختن به خود مجتمعهای ضعیف- توپولوژی متناهی- بستر، مایلیم مطالبی دربارهٔ تلایه‌دارهای آنها، یعنی مجتمعهای سادگی^۱ بیاورم. زبان توپولوژی نقطه- مجموعه به ما امکان

1. simplicial complexes

می دهد تا مسائل متعددی را که در آغاز به نظر ما خیلی پراکنده می رسند، به اختصار و هماهنگ با یکدیگر مطرح کنیم و آنها را تحت یک بیان شهودی مشترک ارائه دهیم. اما، راستش را خواهید باید بگوییم که، توپولوژی نقطه - مجموعه، در حل بعدی این گونه مسائل، سهم چندانی ندارد. روشهای حل تا حد زیادی، از توپولوژی جبری گرفته می شوند. این، نکته ای بود که از قبل خیلی زود به آن پی برده شده بود، و از همان ابتدای کار (یعنی تقریباً از اوایل سده بیستم)، یکی از تلاشهای عمده در توپولوژی، بسط دستگاه توپولوژی جبری بود. متون کلاسیک، نظیر کتاب درسی توپولوژی زایفرت - ترلفال^۱ و یا کتاب توپولوژی آلکساندروف - هویف جلد اول^۲، عمدتاً شامل توپولوژی جبری هستند و بخشبندی توپولوژی به توپولوژی «نقطه - مجموعه» و توپولوژی «جبری»، به عنوان شاخه هایی از توپولوژی، بعدها، پس از جنگ جهانی دوم، بر اثر ازدیاد حجم مطالب، صورت پذیرفته است. در واقع می توان گفت که توپولوژی جبری با سادکها شروع می شود:

تعریف (سادک). منظور از یک سادک k - بعدی^۳، یا k - سادک^۴ در \mathbb{R}^n ، غلاف محدب^۵ $k + 1$ نقطه v_0, \dots, v_k ، در وضعیت کلی است.

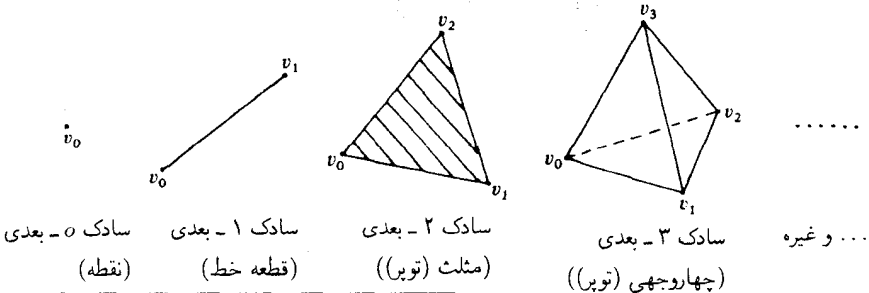
در این تعریف، غلاف محدب نقاط v_0, \dots, v_k ، مجموعه

$$\left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

است و منظور از «وضعیت کلی» آن است که دستگاه

$$(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0)$$

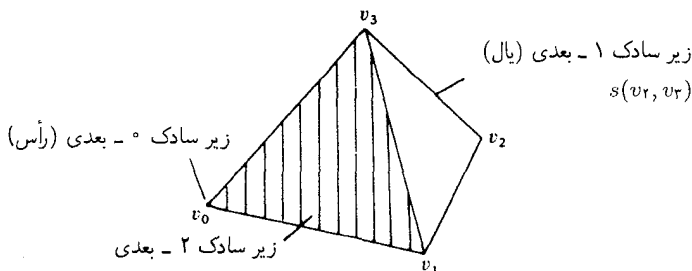
نابسته خطی^۶ است.



سادک ۰ - بعدی (نقطه) سادک ۱ - بعدی (قطعه خط) سادک ۲ - بعدی (مثلث (توری)) سادک ۳ - بعدی (چهاروجهی (توری)) ... و غیره

1. Seifert-Threlfall, *Lehrbuch der Topologie* (1934)
2. Alexandroff-Hopf, *Topologie I* (1935)
3. k -dimensional simplex
4. k -simplex
5. convex hull
6. linearly independent

نامگذاری. غلاف محدب یک زیر مجموعه از $\{v_0, \dots, v_k\}$ را یک زیر سادک^۱ و یا یک وجه^۲ $s(v_0, \dots, v_k)$ می نامند:



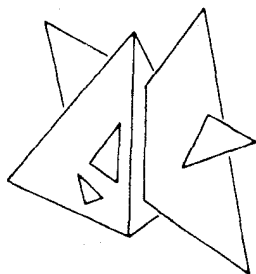
تعریف (مجتمع سادگی یا چند وجهی). یک مجموعه K از سادکهای \mathbb{R}^n را یک مجتمع سادگی یا یک چند وجهی^۳ گویند هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

(i) وقتی K شامل یک سادک باشد، شامل همهٔ وجه‌های آن نیز باشد؛

(ii) اشتراک دو سادک عضو K یا تهی و یا یک وجه مشترک باشد؛

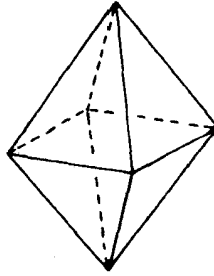
(iii) (در حالتی که K نامتناهی است)، K موضعاً متناهی باشد، بدین معنی که هر نقطهٔ \mathbb{R}^n ، یک همسایگی داشته باشد که فقط تعدادی متناهی از سادکهای K را قطع کند.

بنابراین، سادکها نمی توانند بی قاعده و اتفاقی در هم فرو روند،

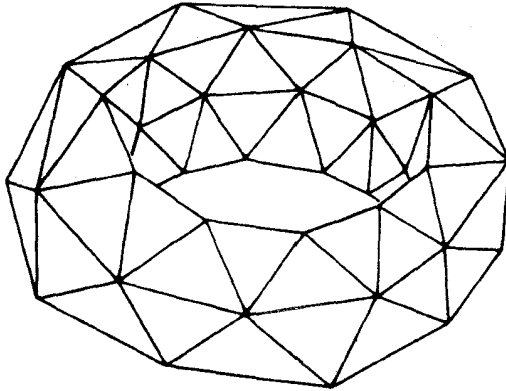


بلکه باید به دقت با هم جفت و جور شوند. اینک چند مثال:

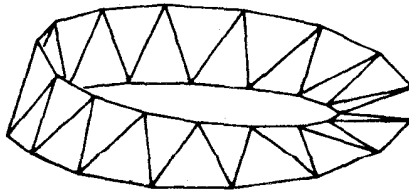
(۱) رویهٔ هشت وجهی^۴: این چند وجهی از هشت سادک ۲ بعدی (و وجه آنها) تشکیل شده است. این مجتمع را می توان یک «صورت خاص سادگی» از کرهٔ دو بعدی دانست.



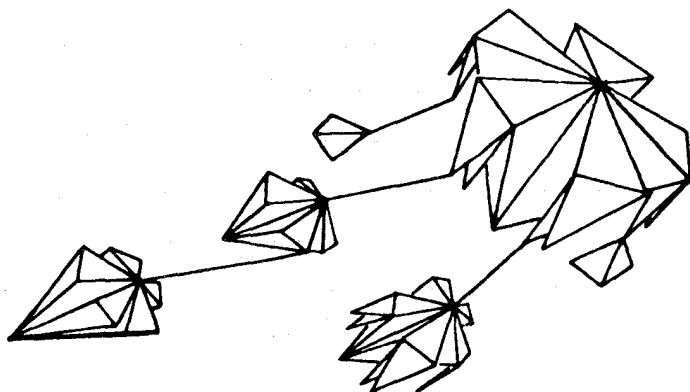
(۲) یک «چنبره سادگی»^۱:



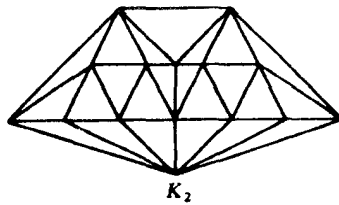
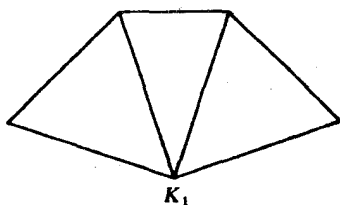
(۳) یک «نوار سادگی موبیوس»^۲



(۴) یک موجود سادگی، که از سه نوع سادگی مثالهای قبل نیست، بلکه سادگیهای تشکیل دهنده آن می توانند به گونه ای کلیتر همدیگر را قطع کنند.



تعریف. زیر فضای $|K| := \cup_{s \in K} S$ از فضای \mathbb{R}^n را فضای توپولوژیک زیربنایی مجتمع K می‌نامیم.



$$|K_1| = |K_2|, \text{ اما } K_1 \neq K_2$$

هر چند اختلاف بین K و $|K|$ آشکار است؛ ولی شما به ما حق می‌دهید که در مورد این اختلاف خیلی ملاحظاتی نباشیم که در همهٔ احوال، چه در نمادگذاری و چه در واژه‌ها، روی اختلاف آنها تأکید کنیم: از این رو، گاهی، با تسامح، از مجتمع سادگی $K \subset \mathbb{R}^n$ صحبت می‌کنیم (در حالی که $|K|$ مورد نظر است)، و لحظه‌ای بعد از سادکهای آن سخن می‌رانیم (که در این حال، منظور K است). البته، موارد فراوانی وجود دارند که تمایز دقیق بین دو مفهوم جنبهٔ اساسی دارد. از جمله، موارد این فصل که از همین‌گونه‌اند.

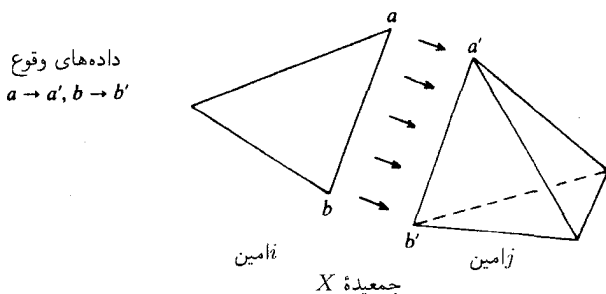
*

همین قدر توضیح برای مفهوم مجتمعهای سادگی کافی است. اما فایدهٔ آن چیست؟ از دیدگاه توپولوژی، مجتمعهای سادگی، به عنوان زیر فضاهای \mathbb{R}^n ، فقط رده‌ای از فضاهای توپولوژیک را تشکیل

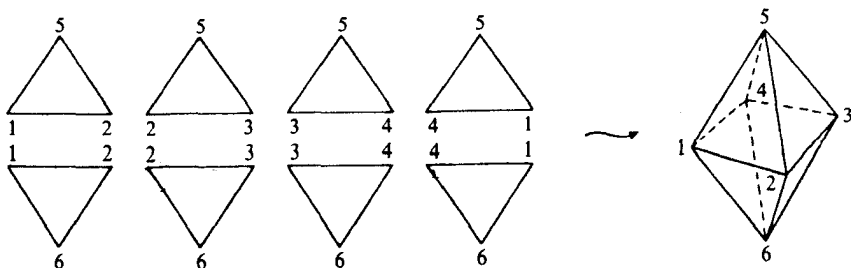
می دهند که ظاهراً حالت بسیار خاصی بیش نیستند. اما یک صفت ویژه در آنها هست: چنانچه در مورد یک مجتمع مفروض، بدانیم که تعداد سادکهای اساسی آن (یعنی آنهایی که وجوه سادکهای بزرگتری در K نیستند)، در هر بعد («اعداد سادکی»^۱) چقدر است، و هم چنین بدانیم در چه رأسها (در نتیجه در چه پهلو^۲هایی) این سادکها («سادکهای وقوع»^۳) مشترک هستند، در این صورت، فضای $|K|$ با تقریب همسانریختی معین می شود. ببینیم چگونه از این داده ها، یک فضای همسانریخت با $|K|$ می سازیم؟ برای این کار، به ازای هر بعد، یک سادک استاندارد، مثل $\Delta_k := s(e_1, \dots, e_{k+1})$ با بردارهای یکه در \mathbb{R}^{k+1} به عنوان رؤوس، در نظر می گیریم، سپس حاصلجمعهای نسخه های جدا از هم سادکهای استاندارد را، به تعدادی که اعداد سادکی تعیین می کنند، تشکیل می دهیم:

$$X = (\Delta_0 + \dots + \Delta_0) + \dots + (\Delta_n + \dots + \Delta_n)$$

و سرانجام، پهلوهای متناظر را با استفاده از داده های وقوع، با هم یکی می گیریم.

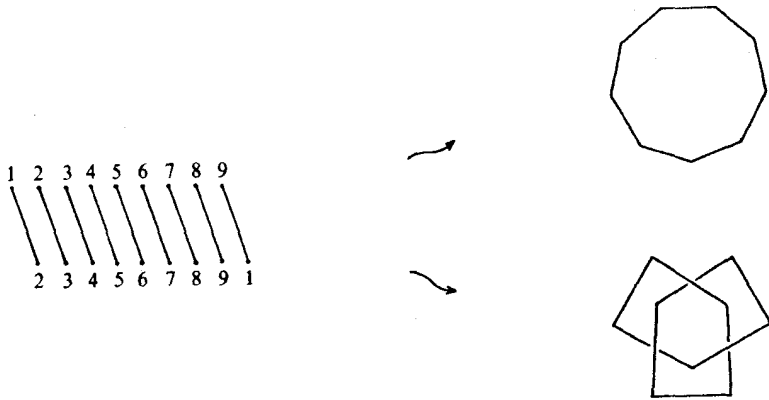


اکنون یک نگاشت دوسویی پیوسته از فضای خارج قسمت X/\sim (که فشرده است) به فضای هاوسدورف $|K|$ داریم، که الزاماً یک همسانریختی است. مثال. ساختن یک هشت وجهی از هشت سادک ۲ بعدی:



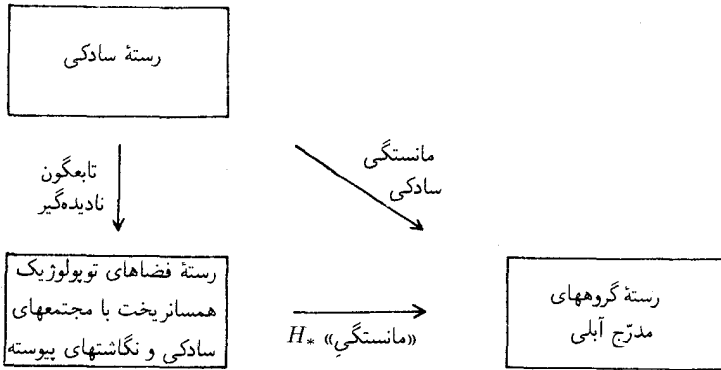
روشن است که اعداد و وقوعهای سادکی، اطلاعاتی بیشتر از نوع همسانریختی فضای $|K|$ به ما

می‌دهند؛ با تقریب یک همسانریختی که ساده‌سازی را به‌طور آفین به ساده‌سازی تبدیل می‌کند، فضای $|K|$ را می‌شناسیم. اما بیش از این، هیچ چیز به ما نمی‌گویند، و همان‌طور که در مثال زیر دیده می‌شود، خصوصاً فقط به‌انکای اعداد و وقوعهای ساده‌سازی، نمی‌توان موقعیت $|K|$ را در فضا، حتی «از لحاظ ماهیت»، تثبیت کرد:



حال به‌مطلب اصلی خود باز می‌گردیم. اگر به‌جای یک فضای توپولوژیک، یک فضای مجتمع ساده‌سازی همسانریخت با آن فضا بگذاریم، اعداد و وقوعهای ساده‌سازی این مجتمع، هنوز ناوردهای توپولوژیک برای آن فضا نیستند، اما با اطمینان می‌توانیم بگوییم که همه ناوردهای توپولوژیک را می‌توان به‌کمک این داده‌ها محاسبه کرد. زیرا این داده‌ها برای بازسازی فضای اصلی با تقریب همسانریختی کفایت می‌کنند. همین نکته، می‌توان گفت، نقطه آغاز توپولوژی جبری بوده، و در طول چندین دهه، همه تلاشها در مسیری که این مطلب نشان می‌دهد، هدایت شده‌اند. آنچه دست آخر از این تلاشها سر برآورده، به‌زبان امروزی، نخستین تابعگون مهم توپولوژی جبری، یعنی تابعگون مانستگی ساده‌سازی^۱ بوده است. از لحاظ ساختمان، این تابعگون، تابعگونی است هموردا مانند $H_* = (H_0, H_1, \dots)$ ، از رسته مجتمعاتی ساده‌سازی و نگاشتهای ساده‌سازی^۲ (نگاشتهایی که ساده‌سازیهای k - بعدی را به‌طور آفین به ساده‌سازیهای k' - بعدی، $k' \leq k$ ، می‌برند)، یا «رسته ساده‌سازی»^۳، به رسته گروههای مدرج آبلی^۴. عامل تعیین کننده در این میان، قضایای ناوردایی هستند که ایجاب می‌کنند که H_* معرف تابعگونی باشد (که این نیز با H_* نموده می‌شود) از رسته فضاهای توپولوژیک، همسانریخت با مجتمعاتی ساده‌سازی و نگاشتهای پیوسته به رسته گروههای مدرج آبلی:

1. simplicial homology 2. simplicial maps 3. simplicial category
4. category of graded abelian groups



باید دانست که، هر چند مانستگی سادگی مدتها پیش از قضایای ناوردایی وجود داشته است، اما نباید گمان کرد که «ناوردایی» عارضه‌ای است که بر اثر «حُسن تصادف»، مانستگی سادگی را ابزاری مفید برای توپولوژی ساخته است. روشن است که آفرینندگان مانستگی سادگی، شهودی هندسی برای این موضوع داشته‌اند، و از همان آغاز کار، ناوردایی توپولوژیک را مدنظر داشته‌اند.

آری، در آغاز چنین بوده است. امروزه، تابعگونه‌های بیشتری افزوده شده‌اند و حتی خود مانستگی نیز پیشرفت بیشتری نموده است و با عبارات دقیقتری نیز بیان می‌شود. («محاسبه مانستگی به کمک زنجیره‌های سادگی مانند محاسبه انتگرالهای $\int_a^b f(x) dx$ به کمک تقریب زدن مجموعه‌های ریمانی است»، نقل از ص ۱۱۹، کتاب درسهایی در توپولوژی جبری، تألیف آ. دولد، چاپ ۱۹۷۲، مرجع [۵]). اما ساختن یک فضا با بلوکهای ساختمانی ساده، امروزه هم مانند گذشته، بسیار مفید است، با این تفاوت که معمولاً، به جای استفاده از مجتمعات سادگی، امروزه از مجتمعات ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار استفاده می‌کنند، که خود آنها نیز یک نوع «نسل دوم چند وجهیها» تلقی می‌شوند و بسیار انعطاف پذیرتر و عملیترند. این موضوع که مجتمعات ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار چه هستند، و ویژگیهای اساسی آنها چیست، و از چه نظر بر مجتمعات سادگی مزیت دارند، و به چه دلیل فقط پس از مجتمعات سادگی توانسته‌اند ابداع شوند، موضوعی است که در بخشهای آتی به آنها خواهیم پرداخت.

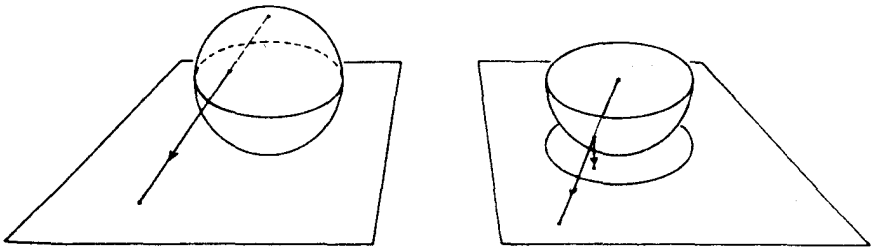
۲. تجزیه‌های جبریه

یادآوری می‌کنیم که افزایش^۱ یک مجموعه X مجموعه‌ای است از زیر مجموعه‌های ناتهی X ، دو به دو جدا از هم، که اجتماعشان برابر تمامی X است. بنابراین، هر عضو X در یکی و تنها در یکی از چنین زیر مجموعه‌ها قرار دارد. یک فضای توپولوژیک را یک n - حجره^۲ نامیم هرگاه با \mathbb{R}^n همسانریخت

باشد. یک تجزیه حجره‌یی^۱ برای فضای توپولوژیک X ، یک افراز X است به زیر فضاهایی که هر کدام یک حجره هستند.

یک فضا با یک تجزیه حجره‌یی (X, \mathcal{C}) را یک مجتمع CW یا مجتمع ضعیف - توپولوژی متناهی - بستمی نامیم هرگاه در اصول موضوعه‌ای چند صدق کند. این اصول را دربند آتی رسماً نام خواهیم برد. اما اول بگذارید با حجره‌ها و تجزیه‌های حجره‌یی آشنا شویم.

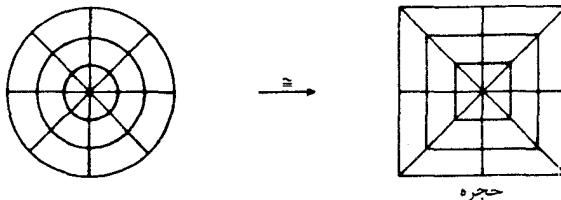
از آنجا که \mathbb{R}^0 فقط یک نقطه دارد، o - حجره‌ها دقیقاً فضاهای یک نقطه‌یی هستند. گوی باز D و کره سوده^۲ $S^n \setminus \{pt\}$ (کره منهای یک نقطه)، همان طور که همه می‌دانیم، همسانریخت با \mathbb{R}^n و در نتیجه n - حجره هستند و (همسانریختی $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} S^n \setminus \{pt\}$ از راه تصویرگنجنگاشتی^۳ برقرار می‌شود، و همسانریختیهای $\mathbb{R}^n \xleftarrow{\cong} S^n \xrightarrow{\cong} D^n$ از راه تصویر مرکزی و قائم).



به کمک یک تابع پیوسته مثبت $r : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ به عنوان «عامل کشش»، یک همسانریختی از \mathbb{R}^n بروی خودش حاصل می‌شود که ضابطه‌های آن $o \mapsto o$ و

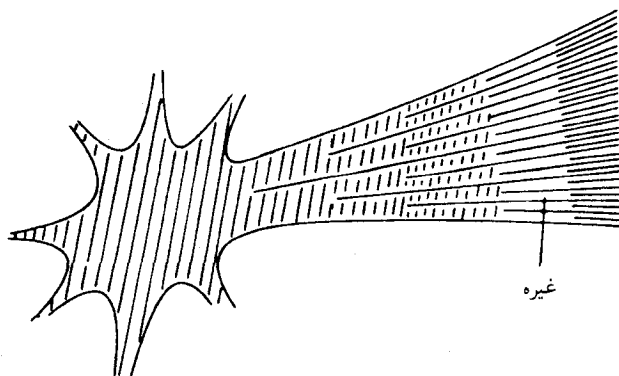
$$x \mapsto r \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot x$$

هستند. به ویژه، این همسانریختی، چنانکه در شکل دیده می‌شود، D^n را بروی یک n - حجره می‌برد:



این شیوه، شیوه ساده‌ای است که حجره‌های فراوانی برای ما فراهم می‌سازد. در واقع، حتی می‌توان گفت که هر زیر مجموعه باز ستاره‌یی شکل در \mathbb{R}^n ، یک n - حجره است؛ بهترین راه برای مشاهده این امر، آن است که شارش^۴ یک میدان برداری شعاعی مناسب را در نظر بگیریم.

1. cell decomposition 2. punctured sphere 3. stereographic projection
4. flow



این یادآوری فقط یک یادآوری حاشیه‌یی بود، و در حال حاضر نبایستی توجه شما را به چنین چیزهای شگفت‌انگیزی معطوف کنم، زیرا هر چند یک حجره همواره یک حجره است، اما نحوه قرار گرفتن حجره این مثال در \mathbb{R}^2 ، قطعاً نمونه‌ی نوعی نحوه خاص و مطلوب قرار گرفتن حجره‌ها در مجتمعات CW نیست.

مهمتر از همه، این پرسش است که آیا یک n - حجره می‌تواند در عین حال یک m - حجره، به ازای $m \neq n$ باشد؟ باید فوراً بگویم که جواب منفی است. برای $n \neq m$ ، $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$. این مطلب را نخست ل. ا. ی. براوتر^۱ در ۱۹۱۱ ثابت کرد، و برهان آن ساده نیست. فقط دو حالت آن بدیهی هستند: \mathbb{R}^0 و \mathbb{R}^1 با هیچ یک از فضاهای با بعد بیشتر \mathbb{R}^n همسان‌ریخت نیستند (\mathbb{R}^1 یگانه فضای \mathbb{R}^n ای است که می‌تواند با برداشتن یک نقطه تنها ناهمبند شود). با وجود این، اگر مجاز باشیم اندکی توپولوژی جبری به‌کار ببریم، اثبات قضیه براوتر ساده می‌شود: اگر $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ ، آنگاه

$$\mathbb{R}^n \setminus \{o\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{o\}$$

از این رو

$$S^{m-1} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{o\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{o\} \simeq S^{n-1}$$

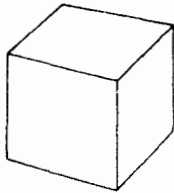
و بنابراین ناوردایی مانسته جایی مانستگی، خواهیم داشت

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \cong H_{n-1}(S^{m-1})$$

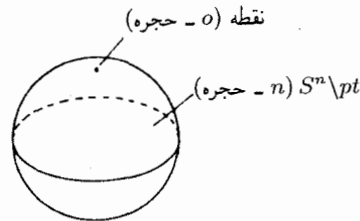
اما می‌دانیم $H_k(S^i) \cong \mathbb{Z}$ برای $i = k > 0$ و $H_k(S^i) = 0$ برای $i \neq k > 0$. لذا $n = m$ همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. وانگهی، این برهان واقعاً یک برهان «درست» است، زیرا در

استخراج ابزارهای مانستگی، هیچگاه از قضیهٔ براوئر استفاده نشده است. لذا، می‌توانیم از بُعد یک حجره صحبت کنیم.

آنچه که راجع به حجره‌ها به‌عنوان موجوداتی منفرد گفتیم، کافی است. اکنون به جستجوی مثالهایی از تجزیهٔ حجره‌یی می‌پردازیم. هر مجتمع سادگی K ، به‌گونه‌ای متعارف، معرف یک تجزیهٔ حجره‌یی $|K|$ به‌شرح زیر است: اجتماع کلیهٔ وجوه سرهٔ یک سادک s را مرز آن می‌نامند و با نماد ∂s نشان می‌دهند و $s \setminus \partial s$ را «سادک باز» وابسته به s می‌نامند. سادکهای باز، حجره هستند و اجتماع کلیهٔ سادکهای باز یک مجتمع سادگی K ، یک تجزیهٔ حجره‌یی برای $|K|$ درست می‌کنند. دو مثال دیگر در شکلهای زیر دیده می‌شود:



X رویهٔ مکعب است، که به‌طور متعارف به هشت حجرهٔ 0 - بُعدی، دوازده حجرهٔ 1 - بُعدی، و شش حجرهٔ 2 - بُعدی تجزیه شده است.



$X = S^n$ ، که به دو حجره تجزیه شده است

مثالهای فوق مثالهای خیلی خوشرفتارند. چنانچه اصول موضوعه مانع نبودند، می‌توانستیم یک فضا را با انتخاب، مثلاً حجره‌هایی دوبه‌دو جدا از هم واقع در آن، (مثلاً در «ستاره» صفحهٔ پیش) تجزیه کنیم، و بقیهٔ نقاط هم به‌عنوان 0 - حجره‌های این تجزیه، تعریف می‌شدند. اما با تجزیه‌هایی از این قبیل هیچ‌گونه کار معقولی را نمی‌توان شروع کرد، و به‌همین دلیل اکنون به «اصول موضوعهٔ مجتمعهای CW یا مجتمعهای ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار» باز می‌گردیم.

۳. مفهوم مجتمع ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار

تعریف (مجتمع ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار). یک زوج (X, \mathcal{E}) متشکل از یک فضای هاوسدورف X و یک تجزیهٔ حجره‌یی \mathcal{E} از X ، یک مجتمع ضعیف - توپولوژی متناهی - بستار^۱ (یا مجتمع CW) نامیده می‌شود هرگاه در سه اصل موضوع زیر صدق کند:

اصل موضوع ۱ «نگاشتهای مشخصه»^۲. برای هر n - حجرهٔ $e \in \mathcal{E}$ ، یک نگاشت پیوسته $\Phi_e : D^n \rightarrow X$ وجود دارد که گوی باز D^n را به‌طور همسانریخت روی حجرهٔ e ، و S^{n-1} را بتوی

اجتماع حجره‌های با بعد حداکثر برابر $1 - n$ می‌نگارد.

اصل موضوع ۲ («تناهی بستار»^۱). بستار هر حجره $e \in \mathcal{E}$ ، یعنی \bar{e} ، فقط تعدادی متناهی از سایر حجره‌ها را قطع می‌کند.

اصل موضوع ۳ («توپولوژی ضعیف»^۲). یک زیر مجموعه $A \subset X$ بسته است، اگر و تنها اگر، برای هر $e \in \mathcal{E}$ ، $A \cap \bar{e}$ بسته باشد.

این مفهوم در ۱۹۴۹ توسط ج. ه. ک. وایتهد^۳ آورده شد و نام cw از اصول ۲ و ۳ اخذ شده است، که C حرف اول «closure finiteness» و W حرف اول «weak topology» است. این دو اصل، شرایطی را تعیین می‌کنند که تحت آنها بینهایت حجره می‌توانند در مجتمع باشند (در مورد تجزیه‌هایی با تعداد متناهی حجره، این دو اصل خودبه‌خود همواره صدق می‌کنند).

برای سادگی بیان، از این به بعد به جای اصطلاح «ضعیف - توپولوژی، متناهی - بستار»، نماد اختصاری «ضَمْتَبْ» را به‌کار می‌بریم.

تعریف. اگر X فضایی تجزیه شده به حجره‌ها باشد، X^n معرف اجتماع حجره‌هایی است با بُعد نایبتر از n که آن را n -کالبد^۴ X می‌نامند.

اصل ۱ (در مورد وجود نگاشتهای مشخصه) تقریباً می‌گوید که باید n - حجره‌ها «چسبیده» به $(1 - n)$ - کالبد تلقی شوند. بعداً، در بخش ۵، این حکم را دقیقتر بیان خواهیم کرد. پیش از این که مثالهایی برای روشن ساختن سه اصل فوق بیاورم، مایلم دو نتیجه بلافاصله اصل ۱ را، که باید بی‌درنگ پس از تعریف در شهود شما راجع به مجتمعی ضَمْتَبْ جای بگیرد ذکر کنم. به عنوان نمونه، هر مجتمع ضَمْتَبْ ناتهی، باید دست‌کم یک 0 - حجره داشته باشد، زیرا اگر $n > 0$ کوچکترین بُعد یک حجره باشد، آنگاه $S^{n-1} (\neq \emptyset)$ نمی‌تواند در $X^{n-1} \neq \emptyset$ گرفته شود. همچنین بلافاصله نتیجه می‌شود که هر مجتمع ضَمْتَبْ متناهی، فشرده است، زیرا اجتماع متناهی از زیر فضاهای فشرده $\Phi_e(D^n)$ ، $e \in \mathcal{E}$ است. حتی واقعاً درست است که بگوییم بستار هر حجره، فشرده است. دقیقتر بگوییم:

گزاره. اگر یک تجزیه حجره‌یی یک فضای هاوسدورف X در اصل موضوع ۱ صدق کند، آنگاه برای هر n - حجره e ، داریم $\bar{e} = \Phi_e(D^n)$ و به‌ویژه، بستار \bar{e} فشرده است و «مرز حجره‌یی» آن $\bar{e} \setminus e = \Phi_e(S^{n-1})$ در $(n - 1)$ - کالبد قرار دارد.

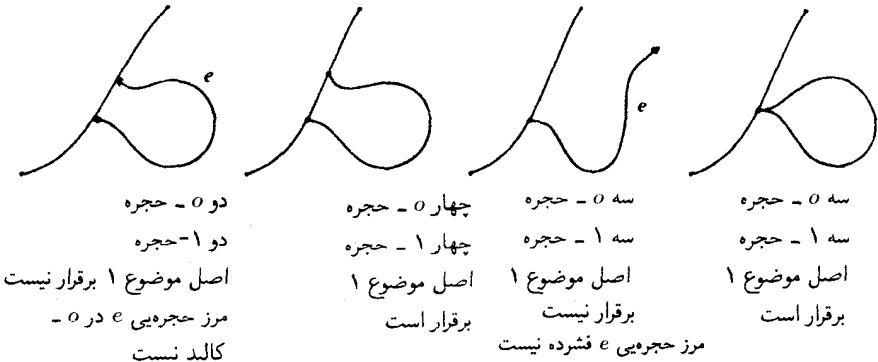
برهان. در حالت کلی، برای نگاشتهای پیوسته داریم $f(\bar{B}) \subset \overline{f(B)}$ بنابراین،

$\bar{e} = \overline{\Phi_e(D^n)} \supset \Phi_e(D^n) \supset e$. چون یک زیر فضای فشرده از یک فضای هاوسدورف است، $\Phi_e(D^n)$ باید بسته باشد، لذا برابر \bar{e} خواهد بود، زیرا بین e و \bar{e} قرار دارد. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

اکنون، با توجه به اصول موضوعه، نگاهی به چند مثال از تجزیه حجری فضای هاوسدورف می‌اندازیم:

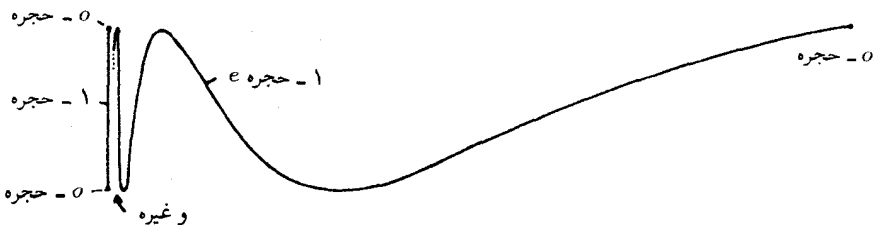
نخست برخی از تجزیه‌های منتهای که اصول موضوعه ۲ و ۳ خودبه‌خود در آنها برقرارند.

مثال ۱.



مثال ۲. در تجزیه شکل زیر به سه حجره 0 - بعدی و دو حجره 1 - بعدی، اصل ۱ صادق نیست،

زیرا مرز حجری e در 0 - کالبد نیست. اتفاقاً، این مثال را نمی‌توان با تجزیه دیگری «تثبیت کرد»: این فضا تجربه‌پذیر ضمیمی نیست.

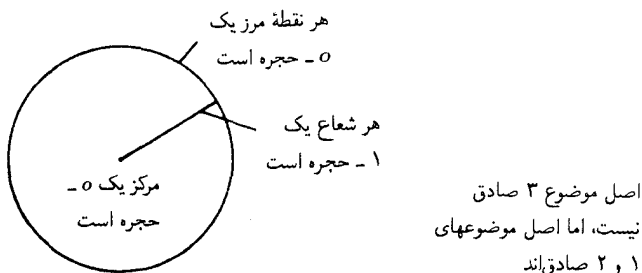


مثال ۳. تجزیه مکعب و کره که در آخر بند پیش ملاحظه شد، تجزیه‌های ضمیم هستند.

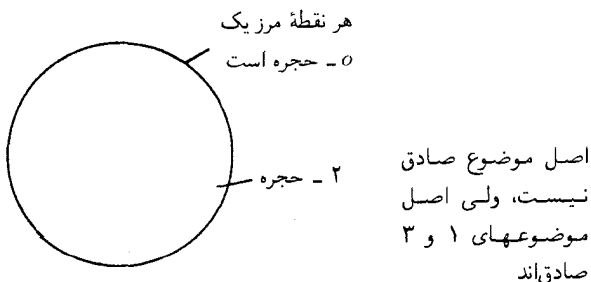
اکنون دو مثال می‌آوریم که نشان می‌دهند اصلهای ۲ و ۳ مستقل از یکدیگرند.

مثال ۴. هر نقطه مرز، یک 0 - حجره است، مرکز یک 0 - حجره است، و هر شعاع یک 1 - حجره

است. اصل ۳ صادق نیست اما اصول ۱ و ۲ صادق‌اند.



مثال ۵. هر نقطه دایره مرز یک 0 - حجره، و قرص باز یک 2 - حجره است، اصل 2 صادق نیست، اما اصول 1 و 3 صادقاند.



مثال ۶. تجزیه یک مجتمع سادگی به سادگیهای باز، یک تجزیه ضمیمه است.

۴. زیرمجتمعات

تعریف و لم (زیرمجتمعات). فرض کنیم (X, \mathcal{E}) یک مجتمع ضمیمه، $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ مجموعه‌ای از حجره‌های آن و $e \in \mathcal{E}'$ می‌نامیم هرگاه یکی از سه شرط هم‌ارز زیر برقرار باشد:

(الف) (X', \mathcal{E}') نیز یک مجتمع ضمیمه باشد؛

(ب) X' در X بسته باشد؛

(پ) برای هر $e \in \mathcal{E}'$ ، $\bar{e} \subset X'$.

برهان هم‌ارزی این سه شرط. (ب) \Rightarrow (پ) پیش‌پاافتاده است.

(ب) \Rightarrow (پ). باید نشان دهیم که برای هر $e \in \mathcal{E}'$ ، $\bar{e} \cap X' = \bar{e}$ بسته است. از آنجاکه X بستار متناهی

است، داریم $\bar{e} \cap X' = \bar{e} \cap (e' \cup \dots \cup e'_r)$ که بنا بر (ب)، مساوی است با $\bar{e} \cap (e' \cup \dots \cup e'_r)$.

و در نتیجه بسته است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(پ) \Rightarrow (الف). هر نگاشت مشخصه Φ_e نسبت به (X', \mathcal{E}') به ازای $e \in \mathcal{E}'$ ، نسبت به (X, \mathcal{E})

نیز نگاشت مشخصه خواهد بود، لذا تذکر بیش از گزاره بخش ۳ ایجاب می‌کند $\Phi_e(D^n)$ ، یعنی بستار e در X ، (که البته منظور ما در (پ) است)، در زیر فضای X' نیز بستار e باشد، و در نتیجه در همین زیر فضا قرار خواهد داشت، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(الف) \Rightarrow (ب و پ). بنابر (پ)، به ازای $e \in \mathcal{E}'$ هر نگاشت مشخصه نسبت به X ، نسبت به X' نیز نگاشت مشخصه است. از طرف دیگر، X' آشکارا متناهی - بستار است. لذا (X', \mathcal{E}') در اصول موضوعه ۱ و ۲ صدق می‌کند. هنوز باید نشان دهیم که اگر $A \subset X'$ ، و به ازای هر $e \in \mathcal{E}'$ ، $e \in A \cap \bar{e}$ در X' بسته باشد، آنگاه A در X' بسته است. اما (ب) ایجاب می‌کند که «بسته بودن در X » با «بسته بودن در X' » یکی باشد. پس، فقط کافی است ثابت کنیم که $A \cap \bar{e}$ برای $e \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$ نیز بسته است. بنابر تناهی بستار X ، داریم $A \cap \bar{e} = A \cap (e'_1 \cup \dots \cup e'_r) \cap \bar{e} = A \cap \bar{e}$ ، که می‌توان e'_i ها را در \mathcal{E} گرفت، زیرا حجره‌های عضو $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$ نمی‌توانند در اشتراک با $A \subset X'$ سهم باشند. پس، به دست می‌آوریم:

$$A \cap \bar{e} = A \cap (\bar{e}'_1 \cup \dots \cup \bar{e}'_r) \cap \bar{e}$$

اما، بنابر فرض $A \cap (\bar{e}'_1 \cup \dots \cup \bar{e}'_r)$ بسته است، و در نتیجه $A \cap \bar{e}$ نیز بسته است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

بجاست بگویم که هر آنچه در مورد زیرمجتمعا لازم داریم بدانیم، بلافاصله از این لم، که به حافظه سپردن آن آسان است نتیجه می‌شود. ذیلاً، به عنوان نمونه، تعدادی از این نتایج را می‌آوریم:

چند نتیجه

(۱) اشتراکهای دلخواه زیرمجتمعا (با استفاده از (ب)) و اجتماعهای دلخواه آنها (با استفاده از (پ))، زیرمجمع هستند.

(۲) کالدها زیرمجمع‌اند (با استفاده از (پ) و گزاره بخش ۳).

(۳) هر اجتماع n - حجره‌ها در \mathcal{E} ، با X^{n-1} تشکیل یک زیرمجمع می‌دهند (به همان دلیل که در (۲) گفته شد).

(۴) هر حجره در یک زیرمجمع متناهی قرار دارد (با استقراء روی بعد حجره: با استفاده از تناهی بستار و گزاره بخش ۳).

یک نتیجه پنجم نیز هست که آن را جداگانه به صورت فرع در ذیل می‌آوریم زیرا به توجه بیشتری نیازمند است:

فرع. هر زیرمجموعه فشرده یک مجتمع صُئِب، در یک زیرمجمع متناهی قرار دارد. به ویژه،

یک مجتمع ضمیمه فشرده است اگر و تنها اگر متناهی باشد.

برهان. با استفاده از نتیجه‌های (۱) و (۲) کافی است ثابت کنیم که زیر مجموعه فشرده $A \subset X$ فقط تعدادی متناهی از حجره‌ها را قطع می‌کند. برای این کار، در هر حجره‌ای که A را قطع می‌کند، یک نقطه انتخاب می‌کنیم، و مجموعه این نقاط را P نامیده ثابت می‌کنیم که P بسته است. زیرا از تنهایی بستار لازم می‌آید که $P \cap \bar{P}$ متناهی باشد و ما در یک فضای هاوسدورف باشیم. اما این استدلال برای هر زیر مجموعه P نیز درست است! پس P دارای توپولوژی گسسته است، اما به عنوان زیر مجموعه‌ای بسته از یک فضای فشرده A ، باید خودش نیز فشرده، و در نتیجه متناهی باشد. چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

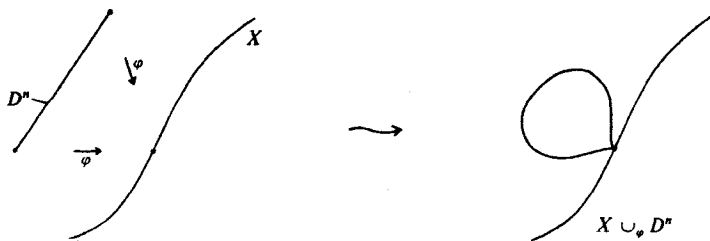
۵. حجره چسبانی

در آنچه گذشت، از مجتمعات ضمیمه به عنوان اشیاء موجودی که باید خواص آنها را بررسی کنیم، سخن رانیدیم، اکنون می‌خواهیم مهمترین روش ساختن مجتمعات ضمیمه را نشان دهیم. تجسم آن، با توجه به آنکه این روش اساساً همان حجره چسبانی است که قبلاً در فصل ۳، بخش ۷، مثال ۱، مورد بحث قرار دادیم، آسان است. این روش نه تنها از جنبه عملی، بلکه از لحاظ بنیادی هم حائز اهمیت است، زیرا هر مجتمع ضمیمه، با تقریب همسان‌ریختیهایی که حافظ حجره‌اند، به همین شیوه نمایش داده می‌شود، و لذا بدین طریق، به یک نوع درک کلی از مجتمعات ضمیمه ممکن دست می‌یابیم. برهان را نمی‌آورم، اما برهان آن مشکل نیست و به هیچ نکته‌ای که در این کتاب با آن سروکار نداشته باشیم بستگی ندارد (رجوع کنید به فصل ۳ بخشهای ۱ تا ۳ و ۷).

اگر X یک مجتمع ضمیمه باشد و $X^{n-1} \rightarrow S^{n-1} : \varphi$ یک نگاشت پیوسته به $(n-1)$ -کالبد مجتمع، آنگاه $D^n \cup_{\varphi} X$ نیز، به گونه‌ای متعارف، یک مجتمع ضمیمه با یک حجره اضافی است. نگاشت متعارف

$$D^n \subset X + D^n \rightarrow X \cup_{\varphi} D^n$$

یک نگاشت مشخصه است. مرز حجره‌ی حجره جدید، $\varphi(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ است. باید به خاطر سپرد که این مرز حجره‌ی الزاماً نگاره همسان‌ریخت کره نیست، بلکه فقط یک نگاره پیوسته است.

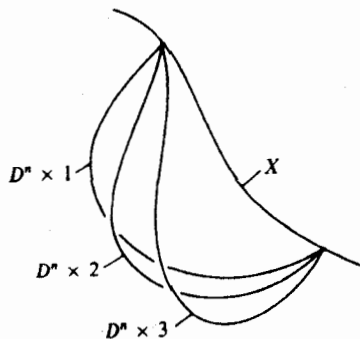


به همین قیاس، می توان همه n - حجره های یک خانواده از n - حجره ها را به طور همزمان چسبانید: گیریم $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده ای از نگاشتهای پیوسته $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$: φ_λ باشد و همه آنها را با هم در یک نگاشت پیوسته تنهای

$$\varphi : S^{n-1} \times \Lambda \rightarrow X^{n-1}$$

$$(v, \lambda) \mapsto \varphi_\lambda(v)$$

گردد مبنیم که در اینجا توپولوژی Λ را گسسته گرفته ایم. در این صورت $(D^n \times \Lambda) \cup_\varphi X$ نیز، به طریق متعارف، یک مجتمع ضئب خواهد بود، که از X با «چسباندن یک خانواده از n - حجره ها» ساخته شده است. باید توجه کرد که به هیچ وجه لازم نیست که مرز حجره های جدید جدا از هم باشند:



اکنون می توانیم هر مجتمع ضئب را با چسباندن پی در پی خانواده هایی از حجره ها، به دست آوریم: برای این کار، از کالبد مرتبه 0 یعنی X^0 شروع می کنیم. این فضا فقط یک فضای گسسته است و اگر بخواهیم می توانیم چنین فکر کنیم که از چسباندن یک خانواده از 0 - حجره ها به فضای تهی، حاصل شده است. ببینیم چگونه X^n را از X^{n-1} به دست می آوریم؟ فرض کنیم \mathcal{E}^n مجموعه n - حجره ها باشد. به ازای هر n - حجره e ، یک نگاشت مشخصه Φ_e در نظر می گیریم و قرار می دهیم $\Phi_e := \Phi_e|_{S^{n-1}}$. حال اگر از $(\varphi_e)_{e \in \mathcal{E}^n}$ به عنوان خانواده نگاشتهای چسباننده استفاده کنیم، پس از چسباندن، به یک مجتمع ضئب $(D^n \times \mathcal{E}^n) \cup_\varphi X^{n-1}$ می رسیم، که به طور متعارف یک همسانریختی حافظ حجره بتوی X^n است.

بدین ترتیب، همه کالبدها را با استقراء به دست می آوریم، و به ویژه خود X را اگر X متناهی - بعد باشد (یعنی هیچ حجره ای بالاتر از بعد معین نداشته باشد). از طرف دیگر، اگر X نامتناهی - بعد باشد آن را از کالبدهای

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots$$

به صورت اجتماع $\bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ ، مجهز به «توپولوژی ضعیف»، که با اصل موضوع ۳ تشریح شد، به دست می‌آوریم.

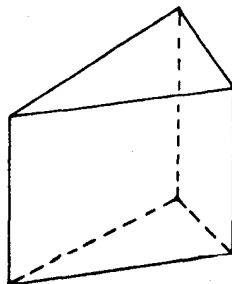
۶. چرا مجتمعات ضعیف انعطاف‌پذیرترند؟

اکنون به ذکر دیدگاه‌هایی می‌پردازیم که به موجب آنها، مجتمعات ضعیف، «خوش‌فشارتر» یا «مناسبت‌تر» از مجتمعات سادگی هستند. بیاییم با حاصلضربهای دکارتی شروع کنیم. روشن است که حاصلضرب دو حجره، یک حجره دیگر است و چنانچه (X, \mathcal{E}) و (Y, \mathcal{F}) تجزیه‌های حجره‌یی به ترتیب برای X و Y باشند، آنگاه $\{e \times e' \mid e \in \mathcal{E}, e' \in \mathcal{F}\}$ یک تجزیهٔ حجره‌یی برای $X \times Y$ خواهد بود، و به آسانی ثابت می‌شود که حکم زیر در مورد چنین تجزیه‌هایی صادق است:

نکته. اگر X و Y مجتمعات ضعیف متناهی باشند، $X \times Y$ نیز یک مجتمع ضعیف است.

توجه. (اثبات مطلب زیر را در اینجا نمی‌آوریم، ولی می‌توانید مثلاً به کتاب دلد^۱ مرجع [۵] ص ۹۹ مراجعه کنید). در مورد مجتمعات نامتناهی - بعد، اتفاقاً ممکن است $X \times Y$ توپولوژی ضعیف نداشته باشد (اما اصول موضوعهٔ ۱ و ۲ همواره صادق باشند). ولی تحت فرضهای اضافی خیلی سادهٔ جزئی، مثلاً هنگامی که یکی از سازه‌های حاصلضرب موضوعاً فشرده است، $X \times Y$ باز یک مجتمع ضعیف باشد.

لیکن، حاصلضرب دو سادگی مثبت - بعد، دیگر یک سادگی نیست:



به طوری که اگر بخواهیم حاصلضرب دو مجتمع سادگی را به یک مجتمع سادگی تبدیل کنیم، مجبوریم هر یک از سادگیهای حاصلضرب را باز هم به اجزایی تقسیم کنیم.

*

در فصل ۳ بخش ۶، مثالهای متعددی از «فروریزی» یک زیر فضا به یک نقطه را بررسی کردیم. دقیقاً در توپولوژی جبری است که این عمل غالباً ظاهر می‌شود.^۱ در مورد مجموعه‌های ضئب، حکم زیر به سادگی اثبات می‌شود.

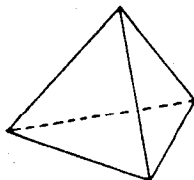
نکته. اگر X یک مجتمع ضئب و $A \subset X$ یک زیر مجتمع باشد، آنگاه تجزیه جبره‌یی X/A به 0 - حجره A و حجره‌های $X \setminus A$ نیز یک تجزیه ضئب است. به بیان ساده‌تر: X/A به طریق متعارف یک مجتمع ضئب است (مرجع: دولد [۵]، ص ۹۸).

برعکس، در مورد مجموعه‌های سادگی، چنین عمل خارج قسمت متعارفی وجود ندارد. خارج قسمت یک مجتمع سادگی X بر یک زیر مجتمع A ، X/A ، را معمولاً نمی‌توان به یک مجتمع سادگی بدل کرد مگر آنکه تقسیم به اجزاء مجدد و یک «نشاندن» تازه، احياناً در یک فضای اقلیدسی با بعد خیلی بیشتر، صورت گیرد. باز هم به عنوان یک مثال ساده، فکر کنید که خارج قسمت یک سادک منفرد بر مرزش، با کره همسانریخت است.

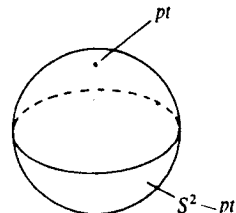
به همین قیاس، هیچ «سادک‌چسبانی» متناظر با حجره چسبانی در مجموعه‌های ضئب وجود ندارد. پیش از این نیز، هنگامی که دو سادک ۱ - بعدی را از طریق مرزهایشان به هم می‌چسبانیم، مجبور بودیم کارهایی انجام دهیم و انتخابهایی به عمل آوریم تا مجتمعی سادگی همسانریخت با آنچه به دست می‌آمد (در این مثال S^1) به دست آوریم.

*

برای تجزیه ضئب یک فضای X ، معمولاً حجره‌هایی خیلی کمتر و «طبیعیتر» مورد نیازند، تا آنچه که برای یک مجتمع سادگی همسانریخت با X لازم است. برای سهولت، به چند فضای ساده توجه می‌کنیم: مثال ۱. کره S^2 ، به عنوان یک مجتمع ضئب و یک مجتمع سادگی:



S^3 به عنوان مجتمع سادگی؛ دست‌کم ۱۴ سادک

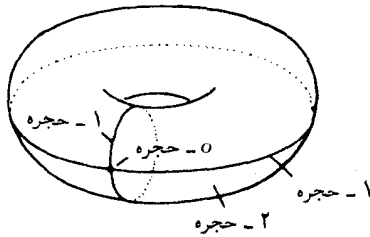


S^2 به صورت مجتمع ضئب: با دو حجره عمل می‌کند

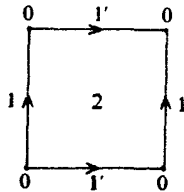
مثال ۲. چنبره $S^1 \times S^1$. از آنجا که S^1 می‌تواند تجزیه ضئب به دو حجره باشد، می‌توانیم

۱. بیش از سایر شاخه‌های توپولوژی - م.

$S^1 \times S^1$ را به چهار حجره تجزیه کنیم:



و یا آنکه آن را به شکل فضای خارج قسمت مطرح سازیم:



برعکس، چنانچه بخواهیم یک مجتمع سادگی همسانریخت با یک چنبره بسازیم، به تعدادی سادک نیاز داریم. همان طور که استادگی هیرش^۱، تصادفاً ضمن نوشیدن یک فنجان چای، حدس شتابزده مرا تصحیح کرد، تعداد درست آن ۴۲ است.

مثال ۳. فضای تصویری n بعدی را به یک طریق کاملاً طبیعی می توان در تجزیه ضئب به $n + 1$ حجره تجزیه نمود:

$$\mathbb{R}P^n = e_0 \cup \dots \cup e_n,$$

$$\mathbb{C}P^n = e_0 \cup e_2 \cup \dots \cup e_{2n},$$

که حجره ها فضاهای آفین

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^0 \cup (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^0) \cup \dots \cup (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1})$$

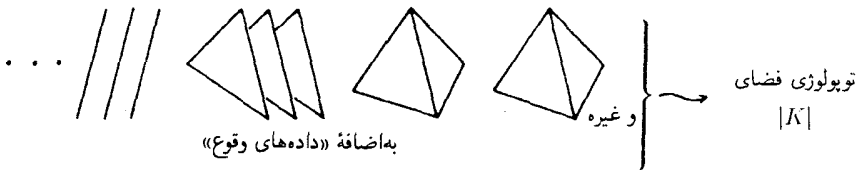
هستند. تجزیه سادگی به صورت طبیعی و ساده برای آن وجود ندارد.

۷. آری، اما...؟

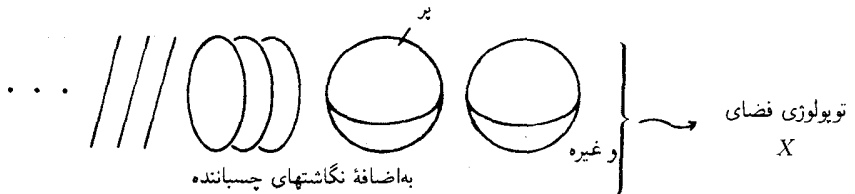
همه این ساختمانها زیبا و قشنگ هستند، اما مجتمعات سادگی برای آن ساخته نشده اند که خود هدف باشند، بل برای آن که کاری انجام دهند: اشیاء هندسی را به صورت جبری نشان دهند، تابعگون مانستگی و ناوردهای توپولوژیک مربوط به آنها را حساب کنند، و ... حال ببینیم تجزیه های ضئبی چه کار

می‌کنند و آن‌طور که شاید و باید، ساده هستند؟ این سؤالی است کاملاً بجا.

مقایسه کنیم و ببینیم هنگامی که در هر دو حالت فضایی را از بلوکهای ساختمانی می‌سازیم، چه کاری انجام می‌دهیم. در مجموعه‌های سادگی:

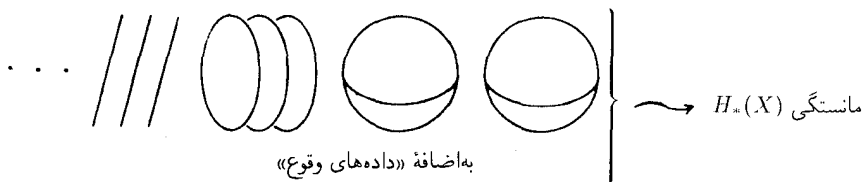


در مجموعه‌های ضمیمی:



بلافاصله می‌بینیم که اختلاف فاحشی در کاربرد احتمالی این دو مفهوم وجود دارد: در حالی که برای مجموعه‌های سادگی داده‌های وقوع اشیایی هستند جبری، و در نتیجه یک نوع «نمایش جبری» مقدماتی برای $|K|$ به دست می‌دهند، نگاشت‌های چسبانده فقط نگاشت‌هایی هستند پیوسته به شکل $X^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ، و از این رو اشیاء هندسی پیچیده‌ای هستند، و خود نیاز به نمایش جبری دارند. بنابراین، بلافاصله دیده نمی‌شود که از جایگزینی حجره‌ها و نگاشت‌های چسبانده برای یک فضا چه منظوری داریم. و همین خود دلیل بر این است که چرا، حتی اگر فرض کنیم که مجموعه‌های ضمیم و مجموعه‌های سادگی تقریباً هم‌زمان ابداع شده‌اند، مجموعه‌های سادگی می‌بایستی بر مجموعه‌های ضمیم ترجیح داده شوند.

حال به مشکل‌ترین قسمت موضوع می‌پردازیم: بررسی مجموعه‌های سادگی منجر به بسط نظریهٔ مانستگی می‌شود، و نظریهٔ مانستگی نیز خود در نمایش جبری نگاشت‌های چسبانده می‌تواند به کار رود. ویژگیهای مانستگی نگاشت‌های چسبانده (که بر سبیل اشاره می‌گویم و رد می‌شوم، و گرنه پرداختن به جزئیات مانستگی رشته‌ای است که سردراز دارد)، می‌توانند به کمک برخی «اعداد وقوع» بیان شوند. این اعداد، همهٔ اطلاعات راجع به نگاشت‌های چسبانده را در برن دارند و به علاوه به ما امکان نمی‌دهند که توپولوژی این مجتمع را به تمام و کمال بازسازی کنیم. اما برای تعیین مانستگی این مجتمع کفایت می‌کنند،



و نکته مهم این است که این روش از روش محاسبه مستقیم مانستگی سادگی، فوق العاده کاراتر و سریعتر است.

در این مورد، بحث را کافی می‌شمریم و اکنون بدون اثبات و توضیح اضافی، نتیجه‌ای را که می‌توان خیلی ساده به حافظه سپرد، بیان می‌کنیم: مشخصهٔ اویلر یک مجتمع ضمیم منتهای برابر است با حاصلجمع متناوب تعداد حجره‌ها در هر بعد. مثلاً در مواردی که تاکنون نام برده‌ایم، داریم:

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$$

$$\chi(S^1 \times S^1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\chi(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$$

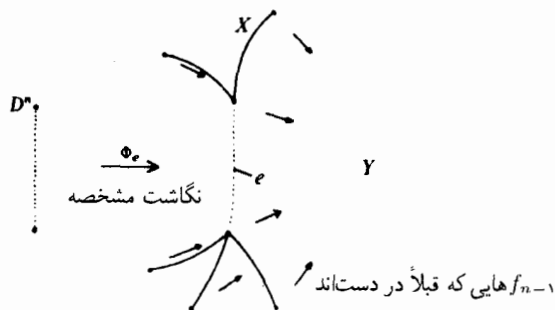
در خاتمه، اجازه دهید اهمیت مجتمعاتی ضمیم را در زمینه‌های دیگر نیز خاطر نشان سازم: به عنوان مثال، غالباً یک مسألهٔ هندسی به پیدا کردن یک نگاشت پیوسته $f: X \rightarrow Y$ با ویژگیهایی مشخص بدل می‌شود و غالباً، یک تجزیهٔ ضمیم X چیزی است که برای روشن کردن مطالب در ذهن لازم است. زیرا، با چنین تجزیه‌ای، سعی خواهد شد که نگاشت مطلوب را از راه استقراء روی کالبد بنا کنیم. نخستین نگاشت $f_0: X^0 \rightarrow Y$ غالباً بدون دردسر به دست می‌آید، و اگر قبلاً f_{n-1} را داشته باشیم

$$f_{n-1}: X^{n-1} \rightarrow Y$$

از روی آن یک نگاشت پیوسته

$$f_{n-1} \circ \Phi_e|S^{n-1}: S^{n-1} \rightarrow Y$$

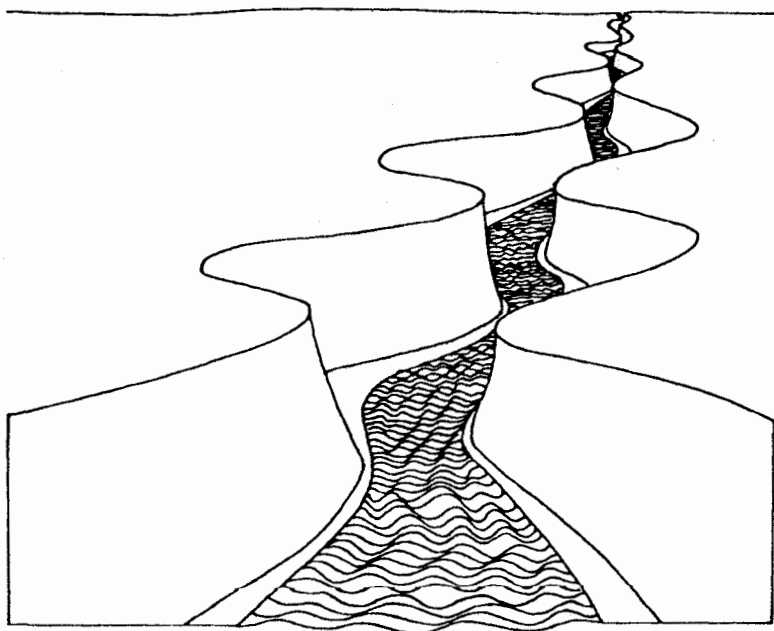
را برای هر n - حجرهٔ e خواهیم داشت:



و از اصول موضوعهٔ مجتمعهای ضمتب، به‌سادگی نتیجه می‌شود که f_{n-1} را می‌توان به‌یک نگاشت پیوستهٔ $f_n : X^n \rightarrow Y$ توسیع داد، اگر و تنها اگر هر یک از نگاشتهای $S^{n-1} \circ \Phi_e$ را بتوان به‌یک نگاشت پیوستهٔ $D^n \rightarrow Y$ توسیع داد. معنی این هم آن است که عضو $[\alpha_e] \in \pi_{n-1}(Y)$ باید صفر باشد، که این هم قطعاً صادق است هنگامی که این گروه مانسته جایی گروه بی‌مایه باشد... و قس علیهذا.

«فرضهای ساده‌کننده» کار ریاضیدانان را آسانتر می‌کنند، اما در چه مواقعی باید این فرضها را پیش کشید؟ در توپولوژی جبری، غالباً باید توافقهایی صورت گیرد: فضاها باید به‌قدر کافی خاص باشند تا مجال دهند برخی روشها کارگرافتند و بعضی قضایا کاربرد یابند، اما در عین حال باید به‌قدر کافی کلی باشند تا مثالها و کاربردهای مهمی را دربرگیرند. مورد توجه قرار دادن مجتمعهای ضمتب (یا فضاهاى مانسته جایی هم‌ارز با آنها)، غالباً توافق خوبی از این قبیل است، و این هم خود دلیل دیگری برای آگاهی یافتن از مفهوم مجتمعهای ضمتب است.

ساختن توابع پیوسته روی فضاهاى توپولوژیک



۱. لم اور یسون

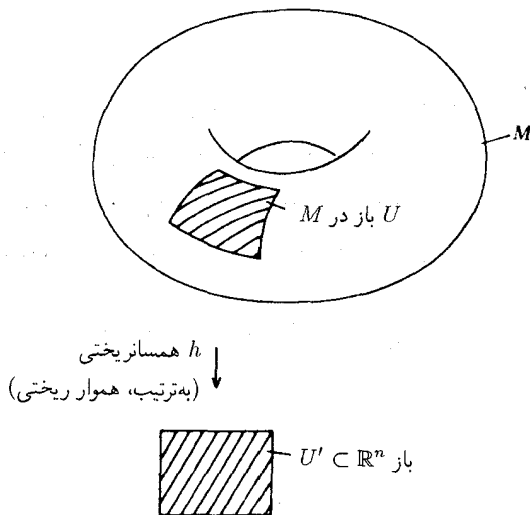
وقتی می خواهیم توابعی را با ویژگیهای مخصوصی روی فضای \mathbb{R}^n یا یکی از زیرفضاهای آن بسازیم، آنالیز ریاضی گروه گسترده‌ای از ابزارهای این کار را در دسترس ما قرار می‌دهد. نخستین چیزهایی که

به ذهن ما خطور می‌کنند، شاید چند جمله‌یها و توابع گویا باشند، و تنها با همینها می‌توان خیلی از توابع دیگر را هم ساخت. پس از اینها، نوبت به «توابع مقدماتی»، نظیر توابع نمایی، لگاریتم، توابع مثلثاتی می‌رسد. سپس سریهای توانی، و به‌طور کلیتر، دنباله‌های همگرایی یکنواخت از توابع پیوسته‌یی که قبلاً در دسترس بودند، پیش کشیده می‌شوند. همچنین می‌توان با خیال راحت گفت که توابعی با ویژگیهای مطلوب را ممکن است به‌عنوان جوابهای معادلات دیفرانسیل، و یا به‌همین قیاس به‌عنوان دیگر و دیگر، به‌دست آورد.

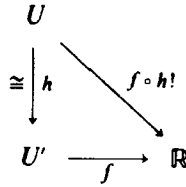
استفاده از همهٔ این امکانات روی خمینه‌ها اندکی مشکلتر به‌نظر می‌رسد، اما رابطهٔ بین خمینه‌ها و آنالیز چنان نزدیک است که هنوز هم می‌توان اساساً از همان امکانات وسیع برای ساختن توابع پیوسته روی خمینه‌ها بهره‌گرفت. زیرا از یک سو می‌توان بسیاری از روشهای آنالیز (مثل معادلات دیفرانسیل) را به‌خمینه‌های دیفرانسیلیپذیر نیز منتقل نمود؛ از سوی دیگر، می‌توان خمینه‌ها را در \mathbb{R}^N نیز نشانید:

$$(M^n \cong M' \subset \mathbb{R}^N, \text{ برای } N \text{ بس بزرگ}),$$

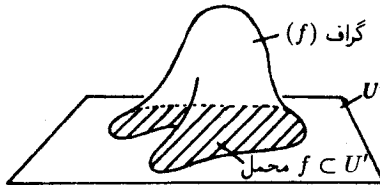
و در آنجا با آنها به‌عنوان زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R}^N کار کرد. بالاخره، شقّ سومی نیز هست، که غالباً عملیتر از همه است: به‌کمک نقشه‌ها رابطهٔ مستقیمی بین این خمینه و \mathbb{R}^N برقرار می‌کنیم.



و سپس می‌توانیم هر تابع پیوستهٔ f روی U را به‌تابع پیوسته‌ای روی U' «بالا بریم».



مسئله است که یک تابع روی U یک تابع روی تمام M نیست، اما مثلاً چنانچه محل f (یعنی بستار $\text{supp } f := \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$)، که قرار است بالا برده شود، فشرده باشد،

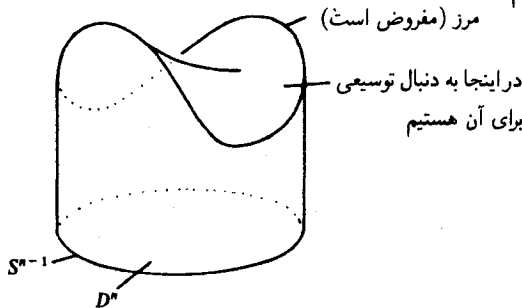


آنگاه تابع مرکب $f \circ h$ را می‌توان به سادگی به یک تابع پیوسته F ، با صفر گرفتن مقدار آن در خارج از U ، روی تمام M توسعه داد:

$$F(p) = \begin{cases} f \circ h(p) & \text{اگر } p \in U \\ 0 & \text{اگر نه،} \end{cases}$$

توابعی از این قبیل نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند، خواه به این دلیل که خود هدف مطلوب را برآورند، و یا وسیله‌ای کمکی برای حصول آن باشند («افزاهای واحد»، بخش ۴).

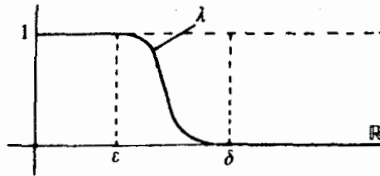
مجتمعات ضمیمه نیز ارتباطی مشابه، البته نه چندان نزدیک، با آنالیز دارند. در این مورد، با استقراء روی کالدها و رعایت ویژگیهای مطلوب، با مسأله توسعه یک تابع موجود روی S^{n-1} به همه قرص D^n ، مواجه می‌شویم.



و بالآخره به فضاهاى متریک پذیر، که ساختارشان به طور قابل ملاحظه‌ای ناچیزتر است، اشاره می‌کنیم: اما حتی در اینجا، هنگام نیاز به یک تابع واقع بر X ، باز می‌توانیم از یک متریک

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

بهره بگیریم. به عنوان مثال، فرض کنید مسأله ما پیدا کردن یک تابع پیوسته $f : X \rightarrow [0, 1]$ برای یک همسایگی مفروض نقطه $p \in X$ باشد که در خارج این همسایگی متحد با 0 است و در داخل یک همسایگی کوچکتر، متحد با 1 . در این صورت، یک $0 < \varepsilon < \delta$ بس کوچک انتخاب می‌کنیم، یک تابع کمکی $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ، مشابه شکل زیر

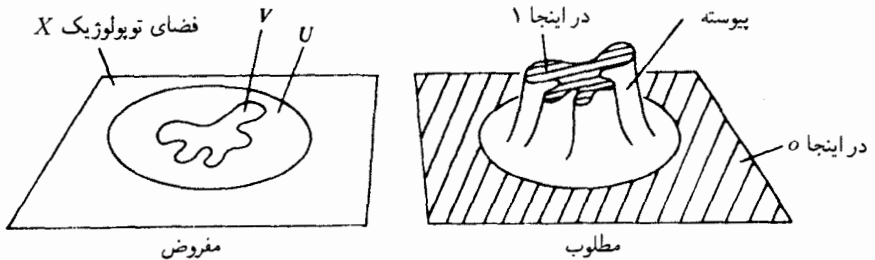


در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $f(x) := \lambda(d(x, p))$.

این مقدمه را از آن جهت آوردیم که شما اطمینان حاصل کنید که مسأله ساختن توابع پیوسته بر فضاهاى توپولوژیک عمومی، واقعاً یک مسأله است. تصور کنید که مجموعه‌هاى مفروضی چون $V \subset U \subset X$ دارید و می‌خواهید تابعی مانند

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

بیابید که روی V متحد با 1 و در خارج U متحد با 0 باشد.



در کجا می‌خواهیم دنبال چنین تابع پیوسته‌گذار از یک به صفر بگردیم، اگر فضای توپولوژیک X نه

رابطه قابل شناسایی با اعداد حقیقی داشته باشد - نه نقشه‌هایی، نه حجره‌هایی و نه متریکی؟ بنابراین، مسأله این است:

مسألهٔ اساسی دربارهٔ ساختن توابع بر فضاهای توپولوژیک (مسألهٔ لم اوریسون^{۱)}. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ بسته و جدا از هم در یک فضای توپولوژیک X باشند. یک تابع پیوسته $f: X \rightarrow [0, 1]$ چنان بیابید که $f|_A \equiv 1$ و $f|_B \equiv 0$.

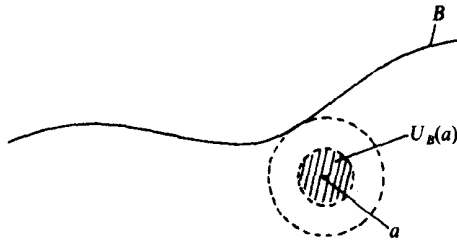
باید توجه داشت که برای هر تابع پیوسته $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ مجموعه‌های $f^{-1}(1)$ و $f^{-1}(0)$ در هر حال مجموعه‌هایی بسته‌اند، به طوری که مسألهٔ فوق برای A و B دلخواه، قابل حل است اگر و تنها اگر برای \bar{A} و \bar{B} قابل حل باشد. به همین دلیل، باید فقط حالتی را که A و B بسته‌اند در نظر بگیریم.

یک شرط لازم برای وجود جواب مسأله را می‌توان بی‌درنگ چنین بیان کرد: باید A و B را بتوان با همسایگیهای بازی از هم جدا کرد، زیرا در صورت وجود یک چنین تابع f ، مجموعه‌های $(\frac{1}{4}, 1]$ و $(0, \frac{1}{4})$ ، به‌عنوان مثال، همسایگیهای باز جدا از همی برای A و B خواهند بود. (در اینجا و در مطالب آتی، عبارت متداول «همسایگی باز» U برای یک زیرمجموعهٔ $A \subset X$ را به‌کار می‌بریم، که مراد از آن یک مجموعهٔ باز U شامل A است).

وجود همسایگیهای باز جداگر برای A و B کافی نیست، اما قضیهٔ زیر را داریم، که می‌توان گفت قضیهٔ اساسی برای ساختن توابع بر فضاهای توپولوژیک است:

لم اوریسون. فرض کنیم برای فضای توپولوژیک X هر زوج از مجموعه‌های بستهٔ جدا از هم را بتوان با همسایگیهای باز جدا از همی از یکدیگر جدا کرد: در این صورت، برای هر زوج از مجموعه‌های بستهٔ جدا از هم، یک تابع پیوستهٔ $f: X \rightarrow [0, 1]$ وجود دارد که بر یکی از دو مجموعه مقدار ۱ می‌گیرد و بر مجموعهٔ دیگر مقدار ۰.

برهان در بخش ۲ خواهد آمد. اما، پیش از پرداختن به آن، نگاهی به برخی از رده‌های فضاهای توپولوژیک با این ویژگی جداگری، می‌اندازیم. نخست ملاحظه می‌کنیم که همهٔ فضاهای متریک بالبداهه در این شرط صدق می‌کنند: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. چنانچه B یک مجموعهٔ بستهٔ ناتهی باشد، هر نقطهٔ $a \notin B$ همواره «فاصلهٔ» مثبتی از B دارد، یعنی $\inf_{x \in B} d(a, x) > 0$ زیرا یک گوی کاملاً به مرکز a باید وجود داشته باشد که خارج B است. گوی باز به مرکز a شعاعی برابر نصف فاصلهٔ a از B را با $U_B(a)$ نمایش می‌دهیم.



حال چنانچه A و B دو مجموعه بسته جدا از هم باشند، با قراردادن

$$U := \bigcup_{a \in A} U_B(a) \text{ و } V := \bigcup_{b \in B} U_A(b)$$

می توان همسایگیهای باز جداگري برای آنها به دست آورد.

در مجموعههای ضمتب نیز، همواره می توان مجموعه های بسته را با همسایگیهای باز از یکدیگر جدا کرد: با استفاده از استقراء روی کالبدها، موضوع را برمی گردانیم به مسأله ای در D^n که به سادگی قابل حل است. برای سومین مثال، به گزاره زیر توجه می کنیم.

گزاره. در هر فضای فشرده هائوسدورف، دو مجموعه بسته جدا از هم را می توان با همسایگیهای باز از یکدیگر جدا کرد.

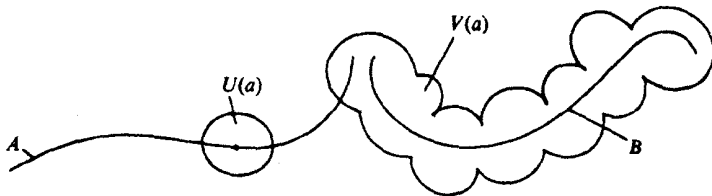
برهان. هر دو نقطه $a \in A$ و $b \in B$ را می توان، به استناد هائوسدورف بودن فضا، به وسیله همسایگیهای باز $U(a, b)$ و $V(a, b)$ از یکدیگر جدا کرد. برای a ی ثابت، نقاط $b_1, \dots, b_r \in B$ را چنان می یابیم که $B \subset V(a, b_1) \cup \dots \cup V(a, b_r)$ ، و این هم ممکن است زیرا B زیرفضای بسته ای است از یک فضای فشرده، و در نتیجه فشرده است. پس

$$U(a) := U(a, b_1) \cap \dots \cap U(a, b_r)$$

و

$$V(a) := V(a, b_1) \cup \dots \cup V(a, b_r)$$

همسایگیهای جداگري برای a و B به دست می دهند:



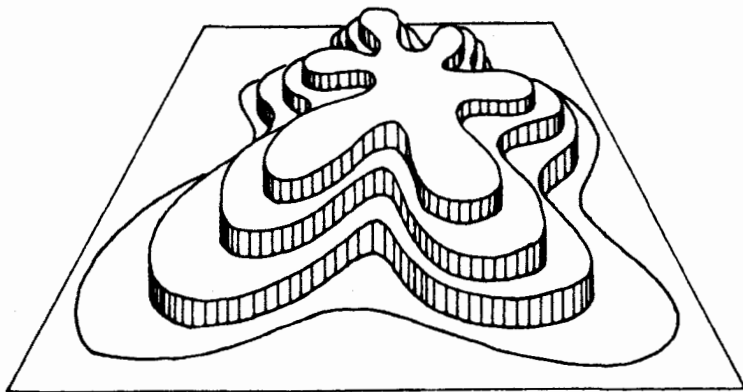
و به طریق مشابه، $U := U(a_1) \cup \dots \cup U(a_s)$ و $V := V(a_1) \cap \dots \cap V(a_s)$ مجموعه‌های A و B را جدا می‌کنند. \square

بنابراین، لم اوریسون در مورد فضاهای فشرده هاسدورف نیز قابل اعمال است، و اما درباره این فضاها نمی‌توان گفت که «از ابتدای امر» یا «بنابر تعریف» به اعداد حقیقی مربوط بوده‌اند. پس باید تصدیق کنید که لم اوریسون واقعاً قضیه در خور توجهی است.

اما شاید پس از مطالعه برهان، بخواهید در این عقیده تجدید نظر کنید. اثبات کاملاً ساده است و ممکن است این احساس را در شما پدید آورد که «خود من هم می‌توانستم همین‌طور فکر کنم». اما، نمی‌دانم آیا این اندکی خود فریبی نخواهد بود؟ پس، پیش از خواندن برهان، سعی کنید توان خود را بیازمایید...

۲. برهان لم اوریسون

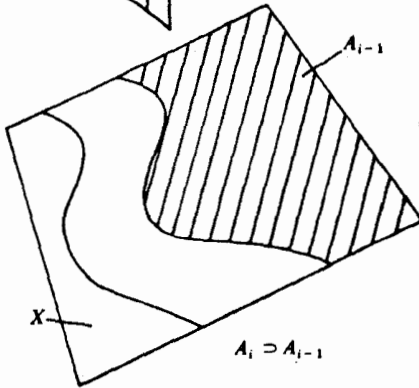
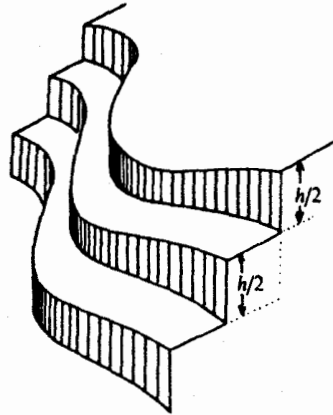
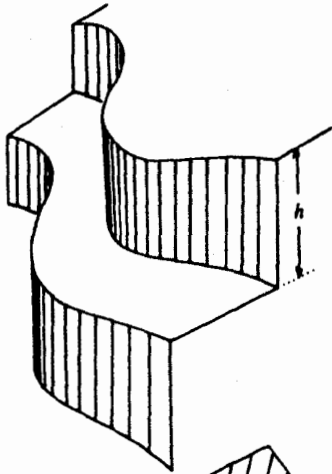
فکر اصلی برهان، پیدا کردن تابع مطلوب به عنوان حد توابع پله‌یی است که تدریجاً از A به B تنزل می‌کنند، و در عین حال باریکتر و ریزتر می‌شوند:



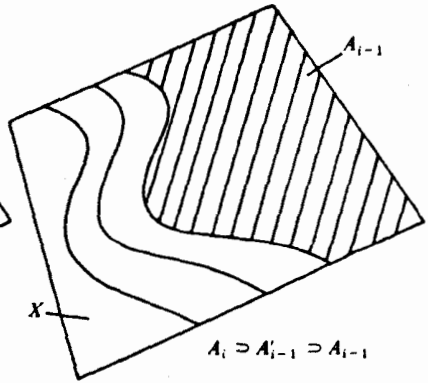
قبول چنین تابع پله‌یی، مانند قبول کردن زنجیری است از مجموعه‌های «مابین» A و $X \setminus B$:

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset X \setminus B$$

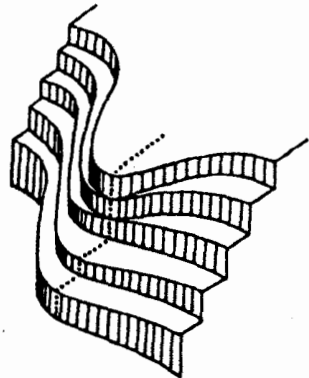
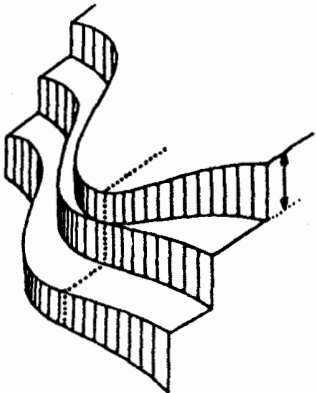
سپس تابع پله‌یی «متناظر» آن را چنین تعریف می‌کنیم که بر A_0 برابر است با ۱، بر A_1/A_0 برابر است با $1 - \frac{1}{n}$ ، و بر A_2/A_1 برابر است با $1 - \frac{2}{n}$ و... و خارج از A_n ، و به ویژه بر B ، برابر است با ۰. البته، یک چنین تابعی پیوسته نیست. برای آنکه جهش‌های آن را به تدریج کوچکتر و کوچکتر کنیم، به قسمی که در حدّ به یک تابع پیوسته برسیم، به این شکل عمل می‌کنیم که هر پله را با «لوحه‌هایی» اضافی چنان پُر می‌کنیم که هر بار ارتفاع جهشها نصف شود:



$$A_i = A_{i-1}$$



فکر اصلی همین است. اما، اگر بخواهیم این شیوه کار موفقیت آمیز باشد، باید اطمینان یابیم که مرز A_{i-1} هیچ‌گاه با مرز A_i برخورد نمی‌کند. زیرا در نقطه‌ای که این مرزها به هم برمی‌خورند، مقدار جهش اجباراً بیش از «مقدار ظاهری» h خواهد بود، و مهم‌تر از همه، به هر تعداد که لوحه جدید اضافه کنیم، این مقدار جهش مرتباً از h بزرگتر می‌شود:



لذا باید تضمین کنیم که بستار A_{i-1} همواره در درون A_i می ماند، یعنی همواره $\bar{A}_{i-1} \subset A_i$. در شروع استقراء، زنجیر مجموعه های ما فقط شامل دو مجموعه است، $A := A_0 \subset A_1 := X \setminus B$ ، و بدیهی است که این شرط برقرار است. حفظ و رعایت شرط فوق در حین تطریف استقرایی این رشته، دقیقاً همان جایی است که اصل موضوع جداسازی وارد برهان می شود:

نکته. اگر X چنان باشد که هر دو زیرمجموعه بسته جدا از هم را بتوان با همسایگیهای بازی از یکدیگر جدا کرد، آنگاه برای هر دو زیرمجموعه M و N با شرط $\bar{M} \subset N$ ، یک مجموعه سوم L «مابین» آنها هست به قسمی که $\bar{M} \subset L \subset \bar{L} \subset N$ ؛ برای این کار، کافی است که M و $X \setminus N$ را با همسایگیهای بازی چون U و V جدا کنیم و قرار دهیم $L := U$.

*

پس فکر اصلی برهان این است. استفاده از $\bar{A}_{i-1} \subset A_i$ ، اقدام احتیاطی آشکاری است. آیا لازم است اقدامهای احتیاطی دیگری صورت گیرد؟ اگر چنین بود، مسلماً هنگام تلاش برای ارائه فکر اصلی بلافاصله، اشاره ای به آن می کردیم - اما در واقع، مانع دیگری بر سر راه نیست و، بی آنکه نیاز به ترفندی باشد، می توان برهان را بدون دردسر ادامه داد. بگذارید کاملاً قانع شویم:

برهان لم اوریسون. فرض کنیم A و B زیرمجموعه های بسته جدا از همی در X باشند. یک زنجیر صعودی چون $\mathfrak{A} = (A_0, \dots, A_r)$ از زیرمجموعه های X به شکل

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_r \subset X \setminus B$$

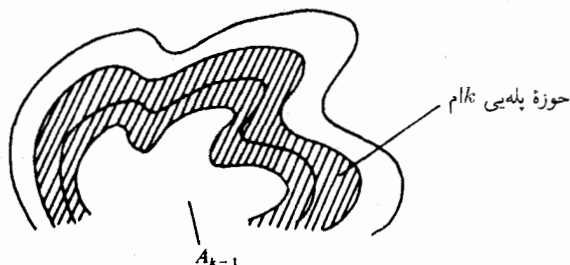
را پذیرفتنی^۱ گوئیم هرگاه به ازای هر i ، $\bar{A}_{i-1} \subset A_i$ تابع $X \rightarrow [0, 1]$ را که مقدار ثابت ۱ را روی A اختیار می کند، و مقدار ثابت $1 - k/r$ را روی $A_k \setminus A_{k-1}$ ، و مقدار ثابت ۰ را خارج از A_r ، تابع پله ای یکنواخت^۲ وابسته به زنجیر \mathfrak{A} می نامیم. مجموعه های باز $A_{k+1} \setminus \bar{A}_{k-1}$ ، $k = 0, 1, \dots, r$ ، را که در آنها $A_{r+1} = X$ و $A_{-1} = \emptyset$ ، به دلیل معنی هندسی آنها حوزه های پله ای^۳ \mathfrak{A} می نامیم. باید توجه کرد که حوزه های پله ای یک زنجیر پذیرفتنی، همه فضا را می پوشانند، زیرا

$$\bar{A}_k \setminus \bar{A}_{k-1} \subset A_{k+1} \setminus \bar{A}_{k-1}$$

همچنین، ملاحظه شود که تابع پله ای یکنواخت در هر یک از حوزه های پله ای بیش از $\frac{1}{r}$ نوسان ندارد. بالأخره، منظور از یک تطریف^۴ یک زنجیر پذیرفتنی (A_0, \dots, A_r) زنجیری است پذیرفتنی

1. admissible
2. uniform step function
3. step domains
4. refinement

$$(A_0, A'_1, A_1, \dots, A'_r, A_r)$$



همان گونه که در نکته فوق نشان داده شد، ویژگی جداسازی فضا، که جزء فرض قضیه است، تضمین می کند که هر زنجیر پذیرفتنی را می توان نظریف کرد.

حال فرض می کنیم که \mathfrak{A}_0 زنجیر پذیرفتنی $(A, X \setminus B)$ باشد و \mathfrak{A}_{n+1} نظریف \mathfrak{A}_n برای هر n . تابع پلهیی یکنواخت زنجیر \mathfrak{A}_n را f_n می نامیم. روشن است که حکم زیر برقرار است: دنباله تابعی $(f_n)_{n > 1}$ ، یکنوا صعودی نقطهیی، و کراندار به مقدار ۱ است. به ویژه همگرای نقطهیی است، و تابع حد $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow [0, 1]$ ویژگی مطلوب $f|A = 1$ و $f|B = 0$ را دارد، زیرا هر یک از f_n ها همین ویژگی را دارد. آنچه برای اثبات می ماند، پیوستگی f است. برای این کار، ملاحظه می کنیم که همواره $\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq |f(x) - f_n(x)|$ و نوسان f_n بر هر حوزه پلهیی بیش از $\frac{1}{\sqrt{n}}$ نیست. پس، نوسان خود f نیز بر هر حوزه پلهیی بیش از $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ نخواهد بود و همین امر، پیوستگی را ایجاب می کند: اگر $\varepsilon > 0$ و $n \in \mathbb{N}$ چنان انتخاب می کنیم که $\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \varepsilon$ ، و کل حوزه پلهیی \mathfrak{A}_n را که شامل x (در واقع همسایگی باز نقطه x) است در نظر می گیریم. این حوزه، تحت f بتوی بازه $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ نگاشته می شود و در نتیجه f پیوسته است. \square

۳. لم توسیع تیتسه

شاید در نگاه اول، لم اوریسون به نظر خیلی خاص جلوه کند، اما کارایی این لم خیلی بیش از به دست دادن تابعی با مقادیر ۰ و ۱ در بعضی جاهاست. خصوصاً دارای نتیجه و تعمیم مهم زیر است:

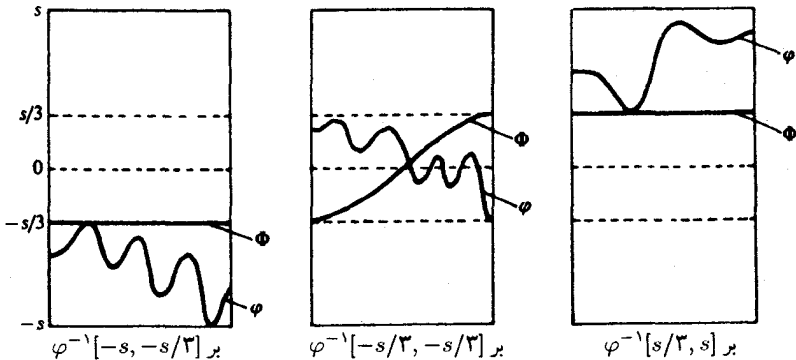
لم توسیع تیتسه. فرض کنیم که در یک فضای توپولوژیک X ، هر دو زیرمجموعه بسته جدا از هم، بتوانند توسط همسایگیهای بازی از یکدیگر جدا شوند. در این صورت، هر تابع پیوسته $f : A \rightarrow [a, b]$ روی یک زیرمجموعه بسته A تعریف شده باشد، می تواند به یک تابع پیوسته $F : X \rightarrow [a, b]$

توسیع داده شود.

برهان. عجالتاً، و فقط برای این برهان، اصطلاح زیر را وارد می‌کنیم: اگر $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته کراندار باشد و $s := \sup_{a \in A} |\varphi(a)|$ ، آنگاه یک تابع پیوسته $\Phi : X \rightarrow [-s/3, s/3]$ را یک «توسیع تقریبی ثلث نزدیک»^۱ برای φ نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ ، نابرابری $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leq 2s/3$ برقرار باشد. پس، یک چنین تابع Φ جواب واقعی مسأله توسیع برای φ نیست، بلکه فقط تقریب خامی برای آن است. وجود یک چنین توسعه‌های ثلث نزدیک را می‌توان مستقیماً با کاربرد لم اوریسون به‌طور «یکضرب» ثابت کرد: دو مجموعه $\varphi^{-1}([s/3, s])$ و $\varphi^{-1}([-s, -s/3])$ مجموعه‌های بسته جدا از همی هستند در A ، و همچنین در X ، زیرا خود A در X بسته است. بنابراین، یک نگاشت پیوسته $X \rightarrow [0, 1]$ وجود دارد که روی این دو مجموعه مقادیر ۱ و ۰ اختیار می‌کند، و به کمک این نگاشت یک نگاشت پیوسته

$$\Phi : X \rightarrow [-s/3, s/3]$$

به دست می‌آوریم که روی همان دو مجموعه، مقادیر $s/3$ و $-s/3$ اختیار می‌کند. بدیهی است که یک چنین تابع Φ یک توسعه ثلث نزدیک برای φ است.



اکنون به ساختن F می‌پردازیم. بی‌آنکه در کلیت خللی حاصل شود، می‌توان فرض کرد که $[a, b] = [-1, 1]$. نخست یک توسعه تقریبی ثلث نزدیک برای f انتخاب می‌کنیم و آن را F_1 می‌نامیم، سپس یک توسعه تقریبی ثلث نزدیک برای تابع «خط»^۲ $f - F_1|_A$ می‌سازیم و آن را F_2 می‌نامیم. پس حاصل جمع $F_1 + F_2$ توسعه تقریبی بهتری است. روش را به استقرا ادامه می‌دهیم: فرض می‌کنیم F_{n+1} یک توسعه تقریبی ثلث نزدیک برای

$$f - (F_1 + \dots + F_n)|_A$$

1. $\frac{1}{3}$ -close approximate extension

2. error

باشد. در این صورت، روشن است که داریم:

$$\text{برای هر } a \in A, |f(a) - (F_1(a) + \dots + F_n(a))| \leq \left(\frac{1}{r}\right)^n$$

$$\text{برای هر } x \in X, |F_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r}\right)^n$$

بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ همگرایی یکنواخت به یک توسیع پیوسته $F : X \rightarrow [-1, 1]$ از f است. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. \square

لم توسیع تیتسه را نیز می توان برای حالتی فراتر از صورت اصلی آن، که هم اکنون ثابت کردیم، به کار برد.

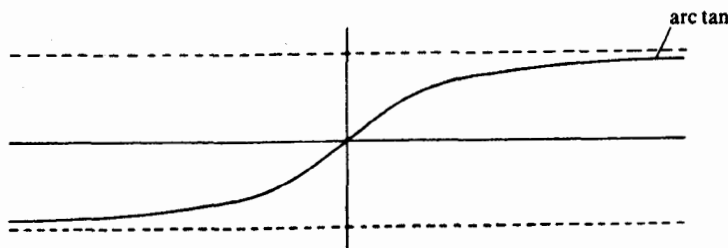
فرع ۱. اگر در لم توسیع تیتسه، به جای بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} ، متوازی السطوح

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

در \mathbb{R}^n به عنوان حوزه مقادیر اختیار شود، لم با لبداهه معتبر می ماند (صورت اصلی لم را برای هر تابع مؤلفه به کار برید). در نتیجه، برای همه حوزه های مقادیر همسان ریخت با متوازی السطوح، مثل گوی بسته D^n ، نیز لم معتبر خواهد بود: تابع $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ با قید $|f(a)| \leq r$ را می توان به طور پیوسته به تابع $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ با قید $|F(x)| \leq r$ توسیع داد.

فرع ۲. لم توسیع تیتسه برای حالتی هم که به جای $[a, b]$ حوزه مقادیر را \mathbb{R} (و بنابراین \mathbb{R}^n نیز) بگیریم، صادق است.

برهان. (اقتباس از ص ۱۷، مرجع [۷]). نخست تابع $\varphi := \arctan f : A \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ را به تابع $\Phi : X \rightarrow [-\pi/4, \pi/4]$ توسیع می دهیم. البته حالاً نمی توان فوراً $\tan \Phi$ را به دست آورد، زیرا



ممکن است که Φ مقادیر $\pm \pi/2$ را اختیار کند. اما در کجا؟ مسلماً فقط روی یک مجموعه بسته B جدا از A . پس اگر با استفاده از لم اوریسون تابع پیوسته $\lambda : X \rightarrow [0, 1]$ را چنان بگیریم که $\lambda|_A = 1$ و $\lambda|_B = 0$ ، آنگاه حاصل ضرب $\lambda\Phi : X \rightarrow (-\pi/4, \pi/4)$ یک توسیع پیوسته $\arctan f$ خواهد بود که مقادیر $\pm \pi/4$ را اختیار نمی کند و $\tan \lambda\Phi = F$ یک توسیع پیوسته f خواهد بود. \square

۴. افرازهای واحد و مقطعهای کلاف برداری

تعریف (افراز واحد). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک خانواده $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ از توابع پیوسته $[0, 1] \rightarrow X : \tau_\lambda$ را یک افراز واحد^۱ می‌نامیم هرگاه: (۱) «موضعیاً متناهی» باشد، به این معنی که هر نقطه $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که در آن همه τ_λ ها، جز برای تعدادی متناهی از λ ها، صفر شوند؛ و (۲) برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda(x) = 1$$

افراز واحد را وابسته^۲ به یک پوشش باز مفروض \mathfrak{A} از X گوئیم هرگاه برای هر λ ، محمل تابع τ_λ ، یعنی

$$\text{supp } \tau_\lambda := \overline{\{x \in X \mid \tau_\lambda(x) \neq 0\}}$$

کاملاً مشمول در یکی از مجموعه‌های این پوشش باشد.

افرازهای واحد در بقیه این فصل مورد مطالعه ما قرار می‌گیرند. چگونگی به دست آوردن افرازهای واحد، در بخشهای آتی مورد بحث قرار خواهد گرفت. فعلاً می‌خواهیم روشن کنیم که چنانچه افرازها در دست باشند، با آنها چه کاری می‌توان کرد. برای این منظور، نخست به ساختن مقاطع در کلافهای برداری می‌پردازیم. زیرا این کاریک اصلی را، که نمونه بارزی از کاربرد افراز واحد در تعدادی از مثالهای خاص است، روشن می‌سازد. مقدمتاً، اجازه دهید نگاهی اجمالی به کلافهای برداری و مقاطع آنها بیندازیم.

سیری کوتاه در کلافهای برداری و مقاطع آنها

تعریف (کلاف برداری). یک کلاف برداری حقیقی n بعدی^۳ بر یک فضای توپولوژیک X از سه جزء تشکیل شده است:

- (i) یک فضای توپولوژیک E (به نام «فضای کل^۴»);
- (ii) یک نگاشت پوشای پیوسته^۵ («تصویر^۵») $\pi : E \rightarrow X$;
- (iii) یک ساختار فضای برداری حقیقی بر هر «تار^۶» $E_x := \pi^{-1}(x)$.

برای آنکه این اجزاء، یک کلاف برداری n بعدی روی X تشکیل دهند، تنها باید در یک اصل موضوع صدق کنند:

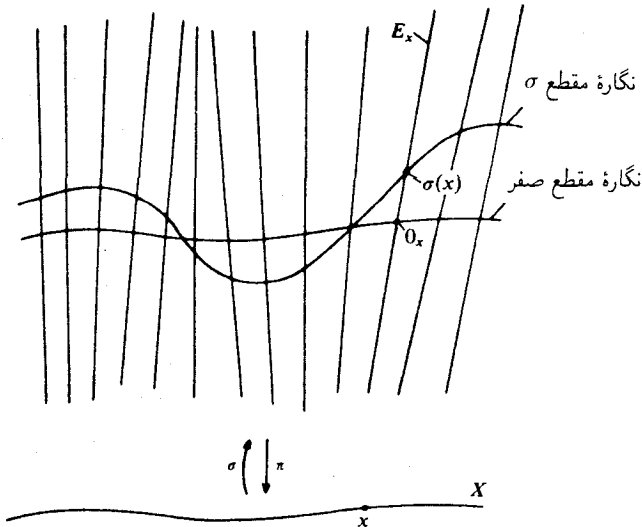
1. partition of unity
2. subordinate
3. n-dimensional real vector bundle
4. total space
5. projection
6. fiber

اصل موضوع (بیمایگی موضعی^۱). به ازای هر نقطه از X یک «نقشه کلافی»، یا به طور کوتاهتر یک «نقشه»، مانند (h, U) ، یعنی یک همسایگی باز U و یک همسانریختی

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{h} U \times \mathbb{R}^n$$

وجود دارد به قسمی که تحدید آن به E_x برای هر $x \in U$ ، یک یکریختی خطی به روی $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ است.

تعریف (مقاطع کلافهای برداری). یک نگاشت پیوسته $\sigma : X \rightarrow E$ که هر نقطه را به عضوی در تار خودش مربوط کند (یعنی به قسمی باشد که $\pi \circ \sigma = \text{Id}_X$)، یک مقطع E نامیده می شود. به ویژه، برای هر کلاف برداری، نگاشت $\sigma : X \rightarrow E$ که هر x را به مبدأ E_x می برد، یک مقطع («مقطع صفر»)^۳ است.

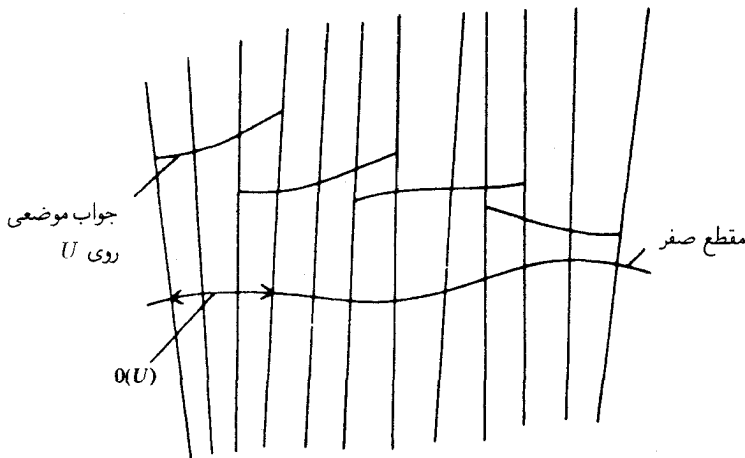


اگر از من سؤال شود که به نظر شما «مهمترین» مثالهای کلاف برداری چه هستند؟ بلادرنگ جواب خواهم داد: کلافهای مماسی^۴ $TM \xrightarrow{\pi} M$ بر خمینه های دیفرانسیلی پذیر n بعدی M . مقاطع کلافهای مماسی، دقیقاً میدانهای برداری مماس^۵ بر M هستند. همچنین، اشیاء عدیده دیگری در آنالیز و هندسه، از قبیل صورتهای دیفرانسیل متناوب^۶ متریکهای ریمانی، و انواع «میدانهای تانسوری هموردا و پادوراد»^۷ مطابق نامگذاریها و اصطلاحات علمی کمابیش مهجور، مقاطع کلافهایی هستند که از کلاف مماسی، مشتق شده اند.

1. local triviality 2. section 3. zero section 4. tangent bundles
 5. tangent vector fields 6. alternating differential forms
 7. co-and contravariant tensor fields

اما کلافهای برداری و مقاطع آنها نه تنها بر خمینه‌ها، بلکه بر فضاهاى توپولوژیک کلیتر نیز باید مطالعه شوند. زیرا، کلافهای برداری روی X به تابعگون K («نظریه K ») از رستهٔ توپولوژیک به رستهٔ حلقه‌ها منجر می‌شود که مطالعهٔ آن امروزه ضروری است (هر چند، چگونگی پیدایش آن را، در اینجا نمی‌توان نشان داد). به این دلیل، که دلیل کوچکی نیست، من حتی وارد صحبت دربارهٔ نقش نظریهٔ K هم نمی‌شوم، و فقط به ذکر یک مرجع می‌پردازم: نظریهٔ K ، تألیف مایکل عطیه^۲. ضمناً باید اشاره کنم که، در این کتاب، قضیهٔ توسیع تیتسه و افزایهای واحد، از آغاز به عنوان ابزارهای این نظریه به کار برده شده‌اند (بخش ۴.۱). در اینجا، (طبق وعده)، به سیر بسیار کوتاه خود در کلافهای برداری و مقاطع آنها پایان می‌دهم.

اکنون فرض کنیم $\pi: E \rightarrow X$ یک کلاف برداری روی X باشد، و بخواهیم یک مقطع $f: X \rightarrow E$ با ویژگیهای معینی بسازیم. البته، اگر هیچ ویژگی مورد نیاز نباشد، می‌توانیم مقطع صفر را در نظر بگیریم. همچنین، فرض کنیم که این مسأله، مثلاً با استفاده از نقشه‌ها، موضعاً حلپذیر باشد. در این صورت، می‌توان یک پوشش باز \mathcal{U} برای X یافت به گونه‌ای که برای هر مجموعهٔ U در این پوشش، یک «جواب موضعی» برای مسأله، یعنی یک مقطع $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ با ویژگیهای مطلوب، موجود باشد.



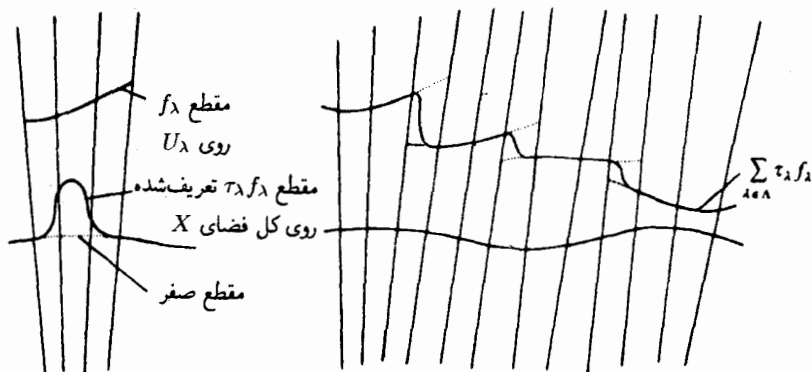
حال نوبت به افزای واحد می‌رسد. یک افزای واحد $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ وابسته به \mathcal{U} ، در صورت امکان (رجوع شود به بخش ۵) انتخاب می‌کنیم، و سپس برای هر λ ، یک مجموعهٔ U_λ در \mathcal{U} شامل محل τ_λ ، و یک جواب موضعی

$$f_\lambda: U_\lambda \rightarrow \pi^{-1}(U_\lambda)$$

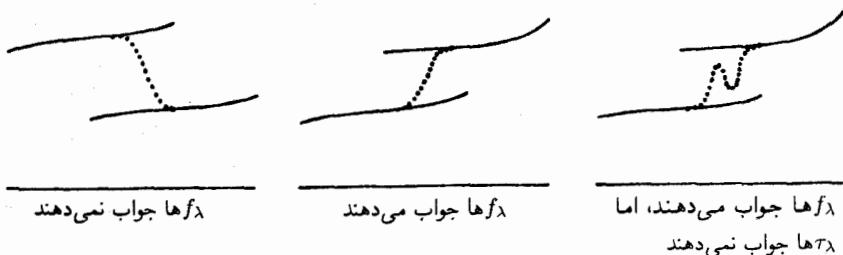
در نظر می‌گیریم: اکنون روشن است که چگونه می‌توان $\tau_\lambda f_\lambda$ را، که در آغاز فقط روی U_λ تعریف شده بود، به عنوان یک مقطع پیوسته روی تمام X در نظر گرفت: برای این کار، آن را با مقدار ۰ به خارج از U_λ از U_λ توسیع می‌دهیم و سپس با استفاده از متناهی موضعی بودن افزایش واحد، به کمک دستور

$$f := \sum_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda f_\lambda$$

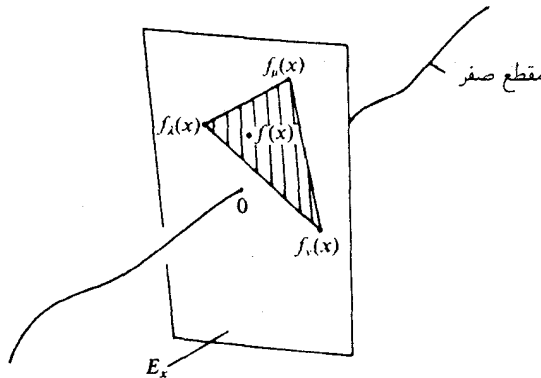
یک مقطع پیوسته سراسری $f : X \rightarrow E$ که به اصطلاح، جوابهای موضعی را به بهترین وجه ممکن درونیابی می‌کند، به دست می‌آوریم: اگر در نقطه $x \in X$ همه f_λ هایی که در آنجا تعریف شده‌اند مقدار مشترک $f_\lambda(x)$ را اختیار کنند، f نیز همین مقدار مشترک را اختیار خواهد کرد، زیرا $\sum_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda \equiv 1$. اما، اگر مقادیر f_λ ها در نقطه x متفاوت باشند، f میانگین این مقادیر را با «وزنهای» $\tau_\lambda(x)$ ، $\lambda \in \Lambda$ ، به دست می‌دهد. اکنون مسأله این است که ببینیم تحت چه شرایطی، با این شیوه عمل، ویژگیهای مطلوب جوابهای موضعی f_λ به مقطع سراسری f منتقل می‌شوند؟



در برخی از کاربردها، می‌توان این کار را فقط با انتخاب ماهرانه f_λ ها و τ_λ ها انجام داد. مثال فوق العاده ساده‌شده زیر را در نظر بگیرید تا ببینید چرا چنین است: ویژگی مورد نظر: «یکنوای صعودی» بودن، $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ، $X = \mathbb{R}$



در اینجا به بحث دربارهٔ چنین مواردی نمی‌پردازیم، بلکه موارد متعدد دیگری را که در آنها ویژگی مطلوب خودبه‌خود از f_λ ها به f منتقل می‌شود، در نظر می‌گیریم. ویژگی‌هایی از این قبیل را «ویژگیهای محدب»^۱ نامند. وجه نامگذاری آن این است که $\tau_\lambda(x) \in [0, 1]$ و $\sum \tau_\lambda = 1$ به این معنی است که برای هر x ، نگارهٔ $f(x)$ در غلاف محدب^۲ تعدادی متناهی از $f_\lambda(x)$ ها قرار دارد:



نکته. فرض کنیم $\pi : E \rightarrow X$ کلافی برداری روی یک فضای توپولوژیک X است که به هر پوشش باز این فضا یک افراز واحد وابسته است. به علاوه، فرض می‌کنیم که $\Omega \subset E$ مجموعه‌ای تار-محدب^۳ باشد، یعنی هر $\Omega_x := \Omega \cap E_x$ مجموعه‌ای محدب باشد، و بالأخره فرض می‌کنیم که مقاطعی موضعی از E وجود داشته باشند که در Ω نشسته‌اند، یعنی هر نقطهٔ X یک همسایگی باز U و یک مقطع موضعی $U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ دارد که نگاره‌اش در Ω واقع است. در این صورت، یک مقطع سراسری^۴ $f : X \rightarrow E$ وجود دارد که نگاره‌اش در Ω واقع است.

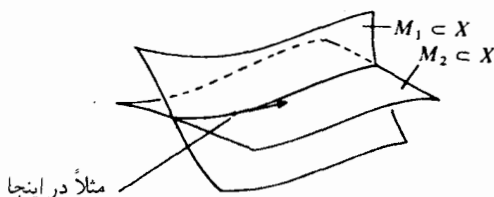
هر بار که این نوع استدلال را به‌کار می‌برند، معمولاً به‌گفتن جملاتی این چنین اکتفا می‌کنند که: «مقطعه‌ای موضعی با چنین و چنان ویژگی وجود دارند و چون این ویژگی محدب است، با استفاده از افرازهای واحد، مقطعی سراسری با همان ویژگی به‌دست می‌آوریم». این بیانی است کوتاه و عالی که ما را از درِ سرِ نمادهای مفصل نجات می‌دهد. اکنون مثالی چند از این‌گونه ویژگی‌های محدب را بررسی خواهیم کرد. همچنین باید توجه کنیم که چندین ویژگی محدب روی هم، باز یک ویژگی محدب تشکیل می‌دهند (اشتراک مجموعه‌های محدب، مجموعه‌یی است محدب).

مثال ۱. ویژگی انطباق روی یک مجموعهٔ $A \subset X$ ، با مقطع مفروضی چون $f_0 : A \rightarrow \pi^{-1}(A)$ ، یک ویژگی محدب است: برای $a \in A$ ، $\Omega_a = \{f_0(a)\}$ ، و برای

1. convex properties 2. convex hull 3. fiberwise convex
4. global section

Ω_x کل تار E است. بنابراین، اگر بدانیم که می توان f را، مثلاً با استفاده از لم توسیع تیتسه، توسیع داد، آنگاه می توانیم یک توسیع سراسری با استفاده از افزار واحد به دست آوریم.

مثال ۲. فرض کنیم X یک خمینهٔ دیفرانسیلیپذیر باشد و $E := TX$. برای میدانهای برداری بر X (یعنی مقاطع در TX)، ویژگی مماس بودن بر یک یا چند زیر خمینه، یک ویژگی محدب است.

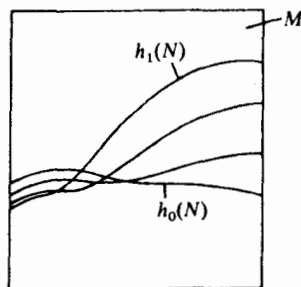


$$\Omega_x = T_x M_1 \cap T_x M_2$$

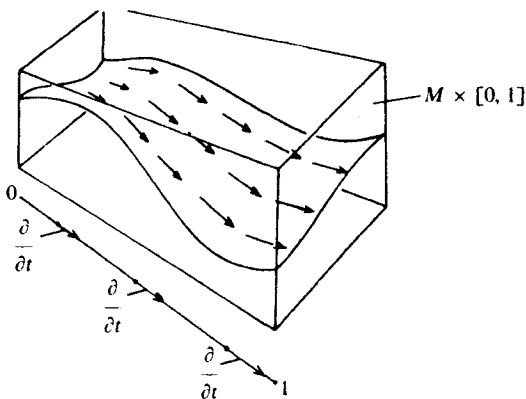
مثال ۳. در ارتباط با مثال (۱)، مشاهدهٔ زیر غالباً مفید واقع می شود: فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیلیپذیر باشد و $X := M \times [0, 1]$ و $E := TX$. برای یک میدان برداری بر X ، این ویژگی که مؤلفه اش در امتداد $[0, 1]$ برداریکهٔ استاندارد $\partial/\partial t$ باشد، یک ویژگی محدب است. شارش^۱ یک چنین میدان برداری، در هر لحظهٔ t ، $M \times 0$ را به روی $M \times t$ می برد. با این روش، در توپولوژی دیفرانسیل، «هموار جایها»^۲ یعنی مانسته جایهای دیفرانسیلیپذیر

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow M$$

ساخته می شوند که در آنها برای هر t ، $H_t : M \rightarrow M$ یک هموارریختی^۳ است و $H_0 = \text{Id}_M$. البته، منظور پیدا کردن یک هموار جایی دلخواهی نیست، بلکه یک هموار جایی است که هدف ویژه ای را برآورد، مثلاً، یک «جاییایی»^۴ مفروض $h : N \times [0, 1] \rightarrow M$ را به روی خودش برود (هر h_t یک نشانند است): $H_t \circ h_0 = h_t$.



این مسأله منجر به مسألهٔ پیدا کردن یک میدان برداری روی $M \times [0, 1]$ می شود که (مانند مثال (۳) ی فوق) «روی» $\frac{\partial}{\partial t}$ قرار گرفته و (مانند مثال (۱) فوق) توسط این جایبایی بر زیر خمینهٔ $t \times h_t(N) \times \{t\}$ $U_{t \in [0,1]}$ پیشاپیش مشخص شده است.

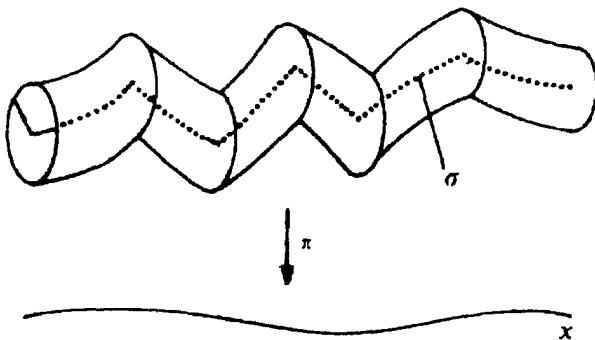


برای وقوف بر جزئیات، مثلاً به مرجع [۳] بخش ۹ رجوع شود.

روی هم رفته، کسی که در توپولوژی دیفرانسیل کار می کند، اگر از افرازهای واحد کمک نگیرد، به کلى مستأصل خواهد شد، زیرا بسیاری از هموار ریختیهایی که در توپولوژی دیفرانسیل به کار می روند، تقریباً همیشه با انتگرالگیری میدانهای برداری به دست می آیند، و میدانهای برداری تقریباً همیشه به کمک ساختمانهای موضعی (آنالیز) و افرازهای واحد (توپولوژی) تأمین می شوند.

مثال ۴. فرض کنیم E یک کلاف برداری بر یک فضای توپولوژیک X باشد. برای مقاطع در کلاف برداری $(E \otimes E)^*$ (یعنی صورتهای دو خطی روی تارهای E)، ویژگی متقارن و مثبت معین^۱ بودن، یک ویژگی محذب است. بدین طریق «متریکهای ریمانی» را روی کلافهای برداری، و به ویژه روی کلافهای مماسی TM («خمینه های ریمانی»)، به دست می آوریم.

مثال ۵. گیریم E کلافی برداری روی X با یک متریک ریمانی بر هر تار آن باشد. فرض کنیم $\sigma : X \rightarrow E$ و $\varepsilon > 0$ یک مقطع معین باشد. برای مقاطع E ، ویژگی ماندن در داخل « ε -لوله»^۲ حول σ ، یک ویژگی محذب است:

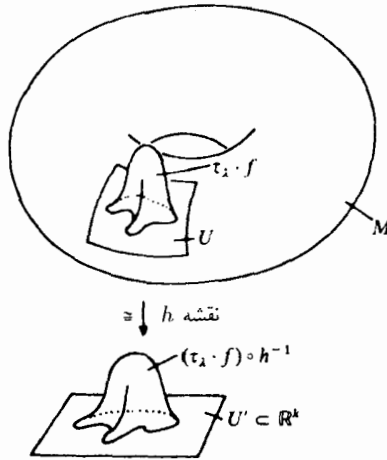


اینجا نیز پیدا کردن مقطعی که فقط در لوله بماند، مطرح نیست، زیرا σ خود یکی از آنهاست و در وهله اول به این مسأله جواب می‌دهد، بلکه نکته اصلی پیدا کردن مقطعی اضافی با ویژگیهای «بهتر» از σ است، که σ را با «کمتر از ε » تقریب می‌زنند.

*

هرچند مثالهای فوق، نمونه‌های خاصی از کاربردهای افراز واحدند، ولی تصویری که عرضه می‌کنند نیاز به تصحیح دارد و من باید اندکی آن را جرح و تعدیل کنم. مطلب اول این که نباید تصور کنید ما همیشه فقط به صرف این دلیل که نقشه‌ای در مقابل خود داریم، در «حالت موضعی» هستیم. البته در مواردی (مانند مثال (۴)) چنین است، اما در حالت کلی، «نظریه موضعی» فقط می‌گوید که هر نقطه یک همسایگی (احتمالاً بسیار کوچک) دارد که در آن یک جواب موضعی وجود دارد. در این صورت، حتی در حالت ساده‌ای که X خود یک زیرمجموعه \mathbb{R}^k است و E نیز چیزی جز $X \times \mathbb{R}^n$ نیست، افزارهای واحد ابزارهایی ضروری هستند. مثلاً، نظریه تکینگی، غالباً به چنین موقعیتی می‌انجامد.

مطلب دوم: ساختن اشیاء سراسری^۲ از روی داده‌های موضعی، بدون شک هدف عمده افرازهای واحد است. اما، ممکن است آنها را برای خرد کردن اشیاء سراسری موجود به‌کار ببریم، تا با به‌دست آوردن اشیاء موضعی، به محاسبات عملیتر و شدنی‌تری برسیم. مثلاً، اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرحیثه k -بعدی فشرده باشد، و $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ مثلاً یک تابع پیوسته، آنگاه انتگرال $\int_M f dV$ را می‌توان با انتخاب یک افراز واحد وابسته به یک اطلس منتهای تعریف و سپس بررسی کرد. با این کار، هر انتگرال خاص $\int_M \tau_{\lambda f} dV$ (با استفاده از نقشه‌ها) به انتگرال چندگانه معمولی در \mathbb{R}^n باز می‌گردد:



(دستوری که در این مورد به کار می رود چنین است:

$$\int_M \tau_\lambda f dV = \int_{\mathbb{R}^k} (\tau_\lambda f) h^{-1} \cdot \sqrt{g} dx_1 \cdots dx_n$$

که g در مینان صورت بنیادی متریک (g_{ij}) است). گام نهایی آن است که همه آنها را به کمک دستور

$$\int_M f dV = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_M \tau_\lambda f dV$$

جمع کنیم.

سومین و آخرین مطلب آنکه، افزایشهای واحد فقط به خاطر توابع و مقاطع در کلافهای برداری مطرح نمی شوند، بلکه هدفهای خیلی ظریفتر دیگری را نیز برآورده می کنند. به عنوان مثال، رجوع کنید به مقاله «افزایشهای واحد در نظریه تار بندی» مرجع [۶].

۵. پیرافشردگی

فقط با اندکی تأمل، بازمی خواهیم از یکی دیگر از مفاهیم توپولوژیک، یعنی مفهوم پیرافشردگی^۲ صحبت کنیم. آه که این مفاهیم چقدر زیادند! یک A را B گوئیم هرگاه برای هر C یک D بی موجود باشد که در E صدق کند. این مطالب در آغاز کاملاً ملال آور هستند و مادامی که به مفاد آنها پی نبرده ایم، تا وقتی حکمت وضع آنها را در نیافته ایم، این ملال همچنان ادامه خواهد داشت. تعریف کردن یک ویژگی غیر جالب، سپس تعریف ویژگی دوم که آن هم غیر جالب است، فقط برای آنکه بگوئیم ویژگی غیر جالب

1. A. Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*; Ann. of Math., 78 (1963), 223-255

2. paracompactness

اول مستلزم ویژگی غیر جالب دوم است، ولی نمونه غیر جالبی هست که در ویژگی غیر جالب دوم صدق می‌کند اما در اولی صدق نمی‌کند — آه خدای من! هیچ‌گاه معرفی یک مفهوم در ریاضیات تصادفی یا از روی هوس نبوده است: نخست، معنای آن مورد نظر بوده است، و سپس هدف وسیله را آفریده است. البته من هم مانند هر شخص دیگری می‌دانم که در آموزش دانشگاهی، دست به سر کردن دانشجویان با یک کلمه «بعداً»، کاملاً اجتناب‌ناپذیر است و غالباً پیش می‌آید. باید معرفت فنی و صوری به سطحی برسد، که بتوانیم راجع به معنای اشیاء به طور شایسته، یعنی بدون گذاردن انگیزه‌های ساده ولی نادرست به جای انگیزه‌های صحیح ولی پیچیده، صحبت کنیم. اما عبارت «به حد لزوم صوری بودن» در ریاضی به معنای خیلی صوری بودن است، و اشیاء را نباید بیش از این صوری نمود. اگر از کسی خواسته شود که بیش از حد لزوم در راه هدفهای مجهول، جذب مقدمات شود، سرانجام علاقه‌اش را به دانستن چه بود هدفها در مرحله اول، از دست می‌دهد. و من متأسفم که باید بگویم بسیاری از دانشجویان از دانشگاه‌های ما فارغ‌التحصیل می‌شوند بی‌آنکه کانون اصلی و گرمابخش مشعل فروزان ریاضیات را در جایی دیده باشند، و از آن بدتر: بی‌آنکه به وجود چنین کانون اصلی باور داشته باشند. — اما گویا دارم بیش از حد از موضوع بحث منحرف می‌شوم.

تعریف (پیرافشرده). یک فضای هاوسدورف X را پیرافشرده^۱ گویند هرگاه هر پوشش باز آن یک زیر پوشش موضعاً متناهی^۲ داشته باشد، به این معنی که برای هر پوشش باز X چون \mathfrak{A} ، یک پوشش باز $\mathfrak{B} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از X وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) \mathfrak{B} موضعاً متناهی باشد، یعنی هر $x \in X$ یک همسایگی داشته باشد که V_λ ها را فقط برای تعدادی متناهی از λ ها قطع کند؛ و

(۲) \mathfrak{B} یک نظریف \mathfrak{A} باشد، یعنی هر V_λ در یکی از مجموعه‌های عضو \mathfrak{A} قرار داشته باشد. این، به اصطلاح، همان «وضعیت ملال‌آور» این مفهوم است. با وجود این، بلافاصله توجه را جلب می‌کند، زیرا قضیه زیر را داریم:

قضیه. یک فضای هاوسدورف، پیرافشرده است اگر و تنها اگر این ویژگی ظریف را داشته باشد که هر پوشش باز آن پذیرای یک افزاز واحد وابسته به خود باشد.

اثبات در یک جهت بیمایه است: اگر $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک افزاز واحد وابسته به \mathfrak{A} باشد، آنگاه مجموعه V_λ ها با ضابطه

$$V_\lambda := \{x \in X \mid \tau_\lambda(x) \neq 0\}$$

یک تعریف موضعاً متناهی \mathbb{R} خواهد بود. برهان در جهت عکس، یعنی اثبات آنکه هر فضای پیرافشرده، (ویژگی افزاز واحد) را دارد، پایان بخش این بخش و این فصل خواهد بود. اما، پیش از پرداختن به اثبات، می‌خواهم به پرسشی که آشکارا مطرح است پاسخ دهم، و آن این است: این قضیه به چه درد می‌خورد؟ چرا این مفهوم را با خود حکم قضیه تعریف نمی‌کنیم؟ مگر نه این است که کل مطلب به دارا بودن افزازهای واحد خلاصه می‌شود؟ اما، دقیقاً به این دلیل که ویژگی افزاز واحد بسیار شگفت‌انگیز است، دلمان می‌خواهد که بتوانیم و هرچه بیشتر ممکن است، فضاهایی واجد این ویژگی را شناسایی کنیم و این هم به کمک قضیه بهتر از تعریف مستقیم صورت می‌گیرد. مثلاً، هر فضای فشرده هائوسدورف بالبداهه یک فضای پیرافشرده است، اما آیا بی‌درنگ دیده می‌شود که در ویژگی افزاز واحد نیز صدق می‌کند؟ نه، فقط با استفاده از قضیه فوق، این مطلب آشکار می‌شود. نکتهٔ زیر، که بدون اثبات عرضه می‌شود، نشان می‌دهد که پیرافشردگی یک ویژگی «عام» برای دستهٔ وسیعی از فضاهاست.

نکته. اگر فضای هائوسدورفی، موضعاً فشرده باشد، یعنی هر همسایگی آن شامل یک همسایگی فشرده باشد، و به علاوه اگر این فضا اجتماع تعداد شمارایی از زیرفضاهای فشرده باشد (که به موجب فشردگی موضعی، مثلاً برای فضاهای شمارای نوع دوم، صادق است)، آنگاه پیرافشرده است.

نتیجه. خمینه‌ها، به‌ویژه \mathbb{R}^n ، پیرافشرده‌اند.

نکته. حاصلضرب یک فضای پیرافشرده در یک فضای هائوسدورف فشرده، فضایی است پیرافشرده.

قضیه (استون^۱). هر فضای متریکپذیر پیرافشرده است.

به‌ویژه، همهٔ زیرفضاهای فضاهای متری، پیرافشرده‌اند، زیرا آنها نیز متریکپذیرند، و این فوق‌العاده جالب است زیرا، در حالت کلی، زیرفضاهای بسته پیرافشردگی را به ارث می‌برند (به همان دلیل که برای فضاهای فشرده گفته شد)، اما برای زیرفضاهای دلخواه، ویژگی پیرافشردگی موروثی نیست.

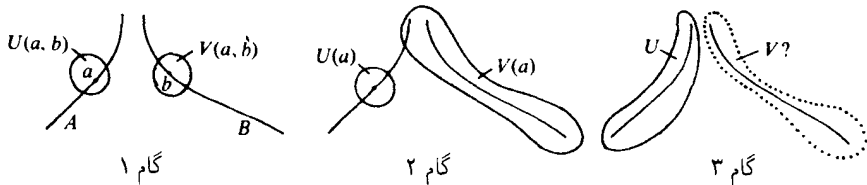
قضیه (میازاکی^۲). هر مجتمع ضَمَب پیرافشرده است.

برای اثبات قضیهٔ اخیر، به مرجع [۵] و برای قضیه‌های دیگر، مثلاً به مرجع [۱۶]، فصل ۱ بخش‌های ۵، ۸، ۷، رجوع کنید. استدلالها را می‌توان بدون اشکال خواند.

اکنون، مطابق وعده، بپردازیم به اثبات آنکه در یک فضای پیرافشرده، هر پوشش باز، یک افراز واحد وابسته به خود دارد. برهان از دو قسمت تشکیل می‌شود:

- قسمت (۱): لم. در هر فضای پیرافشرده، لم اوریسون را می‌توان به‌کار برد، یعنی هر دو زیرمجموعهٔ بستهٔ جدا از هم را می‌توان با همسایگیهای باز از یکدیگر جدا کرد.
- قسمت (۲) : ساختن افرازهای واحد به‌کمک لم اوریسون.

برهان قسمت (۱). فرض کنیم A و B زیرفضاهای بسته‌ای جدا از هم در فضای پیرافشردۀ X باشند: برای هر دو نقطهٔ $a \in A$ و $b \in B$ ، همسایگیهای باز جداگرمی چون $U(a, b)$ و $V(a, b)$ انتخاب می‌کنیم. حال a را ثابت نگاه داشته، سعی می‌کنیم که a و b را با همسایگیهای بازی چون $U(a)$ و $V(a)$



از یکدیگر جدا کنیم. برای این کار، یک نظریف موضعاً متناهی برای پوشش باز، متشکل در مجموعه‌های $\{V(a, b)\}_{b \in B}$ و $X \setminus B$ را در نظر می‌گیریم، و $V(a)$ را به‌عنوان اجتماع کلیهٔ مجموعه‌های این نظریف که مشمول در یکی از $V(a, b)$ ها، با قید $b \in B$ ، هستند، تعریف می‌کنیم. به‌موجب متناهی موضعی بودن، یک همسایگی باز a وجود دارد که فقط تعدادی متناهی از مجموعه‌های نظریف فوق را قطع می‌کند. چنانچه مجموعه‌های قطع شده در $V(a, b_1) \cup \dots \cup V(a, b_r)$ قرار داشته باشند، کافی است اشتراک این همسایگی a را با $U(a, b_1) \cap \dots \cap U(a, b_r)$ را در نظر بگیریم تا یک همسایگی $U(a)$ برای a جدا از $V(a)$ به‌دست آید.

بعد به‌جای آنکه a را ثابت نگه‌داریم، مانند بالا، یک نظریف موضعاً متناهی برای پوشش باز متشکل از مجموعه‌های $\{U(a)\}_{a \in A}$ و $X \setminus A$ انتخاب می‌کنیم و U را به‌عنوان اجتماع کلیهٔ مجموعه‌های این نظریف که در $U(a)$ ، $a \in A$ ، قرار دارند، تعریف می‌کنیم. اکنون فقط نیاز داریم که برای هر $b \in B$ ، یک همسایگی بازی بیابیم که U را قطع نکند: اجتماع آنها همان V مطلوب خواهد بود. در هر حال، b یک همسایگی باز دارد که فقط تعدادی متناهی از آن مجموعه‌های نظریف را، که اجتماعشان طبق

تعریف برابر U است، قطع می‌کند. فرض کنیم این تعداد متناهی مجموعه، در مجموعه

$$U(a_1) \cup \dots \cup U(a_s)$$

قرار داشته باشند. در این صورت، اشتراک این همسایگی نقطه b و

$$V(a_1) \cap \dots \cap V(a_s)$$

همان همسایگی مطلوب جدا از U است. همان چیزی که برای اثبات (۱) می‌خواستیم.

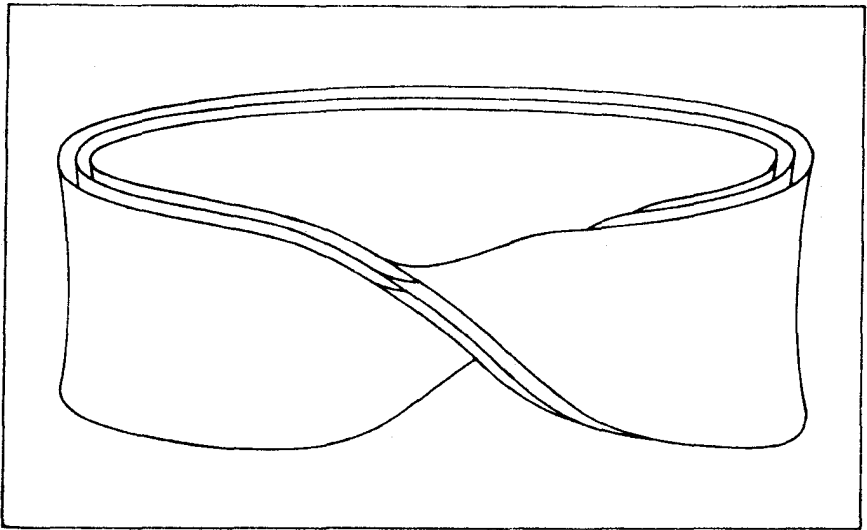
برهان قسمت (۲). فرض کنیم $\mathfrak{A} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوشش بازی برای X باشد، که با توجه به (۱)، بی‌آنکه خللی در کلیت پدید آید، می‌توانیم آن را موضعاً متناهی بگیریم. برای آنکه یک افزاز واحد وابسته به این پوشش را بیایم، نخست اندکی U_λ را «بهم می‌فشاریم»، یعنی یک پوشش باز $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پیدا می‌کنیم به گونه‌ای که $\bar{V}_\lambda \subset U_\lambda$. زیرا، فرض کنید که این کار ممکن باشد: در این صورت، با استفاده از لم اوریسون، یک $\sigma_\lambda : X \rightarrow [0, 1]$ انتخاب می‌کنیم به قسمی که $\sigma_\lambda|_{X \setminus U_\lambda} \equiv 0$ و $\sigma_\lambda|_{\bar{V}_\lambda} \equiv 1$ و به این ترتیب یک خانواده موضعاً متناهی $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ به دست می‌آوریم؛ حاصل جمع $\sigma := \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda$ همه جا پیوسته و مثبت است، و در نتیجه با قراردادن $\tau_\lambda := \sigma_\lambda / \sigma$ ، $\lambda \in \Lambda$ ، افزاز واحد مطلوب به دست می‌آید.

لذا، تنها چیزی که برای اثبات مانده این است که نشان دهیم این گونه «بهم فشردن» \mathfrak{A} ممکن است. به ازای هر $x \in X$ ، یک همسایگی باز Y_x انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که \bar{Y}_x تماماً در یکی از مجموعه‌های عضو \mathfrak{A} واقع باشد. بنابر قسمت (۱)، این کار شدنی است، زیرا $x \in U_\lambda$ و $X \setminus U_\lambda$ را به ازای $x \in X$ ، می‌توان با همسایگیهای بازی از یکدیگر جدا کرد. فرض کنیم که $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک تعریف موضعاً متناهی برای $\{Y_x\}_{x \in X}$ بوده و V_λ اجتماع کلیه W_α هایی باشد که بستارشان در U_λ قرار دارد. در این صورت، روشن است که $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ نیز یک پوشش باز است، و به علاوه $\bar{V}_\lambda \subset U_\lambda$ ، زیرا: می‌گیریم $x \in \bar{V}_\lambda$. پس، هر همسایگی x ، دست کم یکی از W_α ها را که بستارش در U_λ باشد قطع می‌کند. اما، به علت متناهی موضعی بودن $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ، یک همسایگی به قدر کافی کوچک فقط تعدادی متناهی از آنها، مثلاً $W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_r}$ را قطع می‌کند. در این صورت، الزاماً x در $\overline{W_{\alpha_1} \cup \dots \cup W_{\alpha_r}}$ خواهد بود، وگرنه، یک همسایگی برای x وجود خواهد داشت که هیچ‌یک از W_α هایی را که بستارش در U_λ است، قطع نمی‌کند. بنابراین

$$x \in \overline{W_{\alpha_1} \cup \dots \cup W_{\alpha_r}} = \bar{W}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \bar{W}_{\alpha_r} \subset U_\lambda$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

فضاهای پوششی



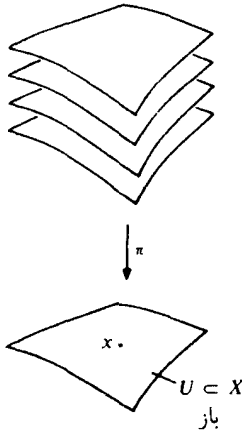
۱. فضاهای توپولوژیک بالای X

یک فضای پوششی^۱ برای X ، فضایی است مانند Y همراه با یک نگاشت پیوسته پوشای $\pi : Y \rightarrow X$ («نگاشت پوششی^۲»)، که به طور موضعی، حول هر نقطه «فضای پایه^۳» X اساساً مثل نگاشت متعارف از حاصلجمع جدا از هم نسخه‌های یک فضا به روی نسخه اصلی این فضاهاست:

1. covering space

2. covering map

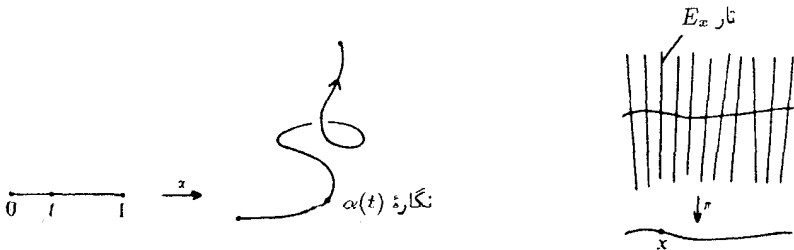
3. base space



$\pi^{-1}(U)$: حاصل جمع جدا از هم نسخه‌هایی از U ، یعنی (فضا گسسته) $U \times$

فعلاً همین قدر کافی است - تا اینکه شما بتوانید شهود خود را در جهت درست به کار اندازید. تعریف دقیق را در بخش ۲ خواهیم آورد.

در شهود معمولی وابسته به یک نگاشت $f : A \rightarrow B$ ، شیء اولی است که بر اثر نگاشت f چیزی روی آن «رخ می‌دهد»: هر نقطه $a \in A$ به یک نگاره $f(a) \in B$ «نگاشته می‌شود». اما همچنین می‌توانستیم حوزه عکس یعنی B را شیء نخست تصور و فکر کنیم که نگاشت $f : A \rightarrow B$ معرف یک خانواده $\{A_b\}_{b \in B}$ از «تارها» $A_b := f^{-1}(b)$ روی B است. این دو شیوه بیان یک نگاشت، یا نگرستن به آن، آشکارا کاملاً هم‌ارزند و انتخاب یکی یا دیگری فقط بستگی به آن دارد که در مرحله اول، این نگاشت را برای چه منظوری خواسته باشیم. مثلاً، به خمی به صورت $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ همه به شیوه اول نگاه می‌کنند (یعنی در هر لحظه t می‌دانند که نگاره در کجاست)؛ در حالی که، برای یک کلاف برداری $\pi : E \rightarrow X$ ، شیوه دوم احساس کلی مناسبتری را تداعی می‌کند (یعنی برای هر $x \in X$ ، می‌دانیم تار متناظر آن یعنی E_x چیست).



و اما در مورد فضاهای پوششی، باز در حوزه عکس است که چیزی «رخ می‌دهد» (که با چیزی پوشیده می‌شود)، و به همین دلیل می‌خواهم توجه شما را به این نحوه نگرستن جلب کنم. برای این کار، از اصطلاح زیر استفاده می‌کنم.

نامگذاری («بالای») $!$. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک فضای توپولوژیک بالای X یک زوج (Y, π) متشکل از یک فضای توپولوژیک Y و یک نگاشت پیوسته پوشای $\pi: Y \rightarrow X$ است. هرگاه ممکن باشد، π را از علامتگذاری حذف می‌کنیم، یعنی، اگر بیم ابهام نرود،

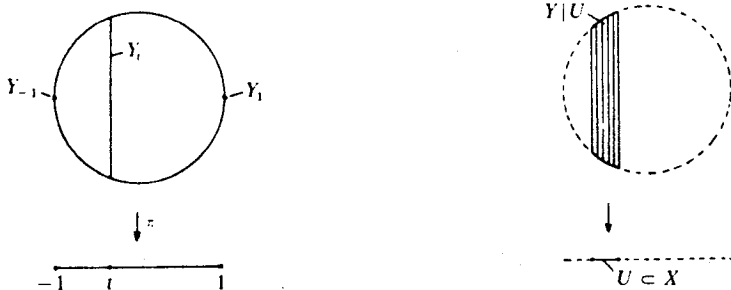
Y را به جای (Y, π)

Y_x را به جای $\pi^{-1}(x)$ («تار بالای x »)

$Y|U$ را به جای $(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)})$ («تحدید Y به $U \subset X$ ») خواهیم نوشت.

مثال. تصویر بر محور x ، قرص D^1 را به یک فضای توپولوژی بالای $[-1, 1]$ تبدیل می‌کند.

تارها، بازه‌ها یا نقاط (در ابتدا و انتها) هستند:



پس، در وهله اول، این کار اساساً راه دیگری برای ارجاع به نگاشتهای پیوسته پوشاست. ولی دیدگاه ما در مطالعه آنها در اینجا، هنگامی روشن خواهد شد که نشان دهیم چه وقت دو فضای توپولوژیک بالای X باید هم‌ارز تلقی شوند.

تعریف. دو فضای توپولوژیک Y و \tilde{Y} بالای X را همسانریخت بالای X ، یا برای اختصار «یکریخت» گوئیم (ومی‌نویسیم $Y \cong \tilde{Y}$)، هرگاه بین آنها یک همسانریختی $h: Y \rightarrow \tilde{Y}$ («بالای X ») موجود باشد، یعنی یک همسانریختی که نمودار زیر در مورد آن یک نمودار تعویضپذیر باشد:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{h} & \tilde{Y} \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi \\
 & X &
 \end{array}$$

باید توجه کرد که در این صورت، الزاماً h تار Y_x را به طور همسانریخت روی تار \tilde{Y}_x خواهد نگاشت.

اگر اصلهای موضوع محدودکننده دیگری نگذاریم، مفهوم فضای توپولوژیک بالای X باز هم خیلی کلی بوده و نمی تواند کاربردی جدی داشته باشد. یک رده خصوصیت از فضاهای توپولوژیک بالای X ، که هنوز هم بس بزرگ ولی فعلاً جالب توجه است، با افزودن شرط «بیمایگی موضعی»^۱ به دست می آید:

تعریف (تاربندهای بیمایه و بیمایه موضعی). یک فضای توپولوژیک Y بالای X را بیمایه^۲ نامند هرگاه یک فضای توپولوژیک F موجود باشد به قسمی که Y با

$$\begin{array}{c} X \times F \\ \downarrow \text{تصویر متعارف} \\ X \end{array}$$

یکریخت باشد. یک فضای توپولوژیک Y بالای X را بیمایه موضعی^۳، یا تاربندی بیمایه موضعی^۴ گویند اگر هر $x \in X$ یک همسایگی U داشته باشد به قسمی که Y بالای U ، یعنی $Y|U$ ، بیمایه باشد. اگر برای همسایگی U یی از x ، تحدید $Y|U$ بیمایه باشد، واضح است که در این صورت حتی رابطه $Y|U \cong U \times Y_x$ برقرار است. اگر برای یک تاربندی بیمایه موضعی همه تارهای Y_x با یک فضای ثابت F همسانریخت باشند، Y را یک تاربندی بیمایه موضعی یا «تار نمونه»^۵ می F نامند. این محدودیت، آن قدرها که به نظر می رسد، قوی نیست: در یک تاربندی بیمایه موضعی، همسانریختی نوعی تارهای Y_x ، آشکارا ثابت موضعی^۶ است، و در نتیجه، اگر فضای پایه X همبند باشد، ثابت سراسری^۷ خواهد بود.

در مورد تاربندهای بیمایه موضعی Y بالای X با تار F ، ارتباطی نزدیک، مثلاً، بین گروههای مانسته جایی تار F ، پایه X و فضای کل Y («دنباله کامل مانسته جایی»^۸)، وجود دارد و بدین طریق می توان اطلاعاتی از ویژگیهای مانسته جایی یکی از این سه فضا را به کمک ویژگیهای دو فضای دیگر به دست آورد. (در واقع، بیمایگی موضعی شرط قوی غیرلازمی برای کامل بودن دنباله مانسته جایی است؛ واژه کلیدی، «تاربندهای سیر»^۹ است).

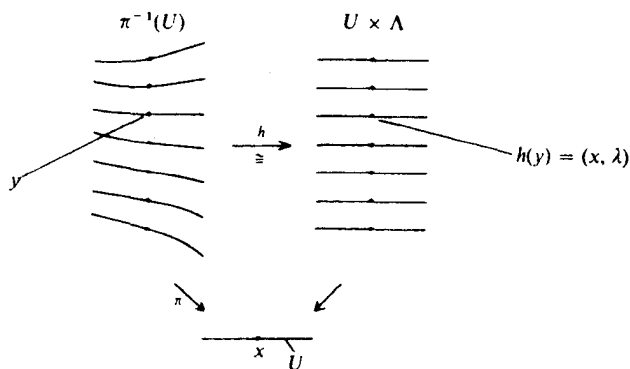
- | | | | |
|----------------------------|---------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. local triviality | 2. trivial | 3. locally trivial | 4. locally trivial fibration |
| 5. typical fiber | 6. locally constant | 7. globally constant | |
| 8. exact homotopy sequence | 9. Serre fibrations | | |

چند کلمه‌ای هم درباره اصطلاحات علمی: کلافهای تاری^۱، که اصلاً قصد نداریم آنها را در اینجا مورد بحث قرار دهیم، از جمله تاریبندیهای بیمایه^۲ موضعی «هستند»، اما یک کلاف تاری فقط یک تاریبندی بیمایه^۲ موضعی یا ویژگیهای مخصوص نیست، بلکه علاوه بر اصول موضوعه^۳ دیگر، این مفهوم شامل داده‌های اضافی دیگری نیز هست. مثلاً، در کلافهای برداری، می‌خواهیم که هر تاری دارای یک ساختار فضای برداری (یک ساختار اضافی) باشد، و باید بتوانیم بیمایه‌سازیهایی موضعی را روی تارها یکرخت خطی بگیریم (اصل موضوع اضافی).

۲. مفهوم فضای پوششی

تعریف (فضای پوششی). یک تاریبندی بیمایه^۲ موضعی را یک فضای پوششی گویند اگر همه تارهای آن گسسته باشند.

بنابراین، یک نگاشت پیوسته پوشای $\pi: Y \rightarrow X$ ، یک فضای پوششی است اگر برای هر $x \in X$ یک همسایگی باز چون U و یک فضای گسسته Λ موجود باشند به قسمی که $Y|U$ و $U \times \Lambda$ بالای U همسانریخت باشند.



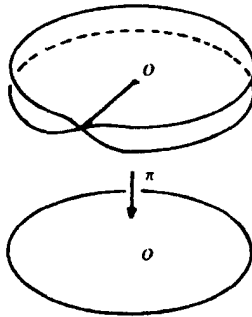
البته، می‌توان خود Λ را به عنوان تار برگزید، همان‌طور که در تاریبندیهای بیمایه^۲ موضعی همیشه چنین است.

عدد اصلی یک تاری بالای x ، یعنی $\#Y_x$ ، را چندگانگی^۲ پوشش در نقطه^۲ x نامند. روشن است که، چندگانگی ثابت موضعی است، و در نتیجه اگر X همبند باشد، ثابت سراسری نیز همبند خواهد بود. چنانچه چندگانگی مقداری ثابت و برابر n باشد، پوشش را پوشش n -برگی^۲ خوانند.

یک نگاشت پوششی $\pi: Y \rightarrow X$ همواره همسانریخت موضعی^۱ است، یعنی هر نقطه $y \in Y$ یک همسایگی باز V دارد به قسمی که $\pi(V)$ در X باز و π معرف یک همسانریختی $V \xrightarrow{\cong} \pi(V)$ است. البته به علت گسستگی Λ ، هر $U \times \{\lambda\}$ در $U \times \Lambda$ باز است، و تصویر متعارف $U \times \{\lambda\} \rightarrow U$ آشکارا یک همسانریختی است. لذا در موردی که نام برده شد، $V := h^{-1}(U \times \lambda)$ در $\pi^{-1}(U)$ و در نتیجه در Y باز خواهد بود، و بنابراین π مجموعه V را به طور همسانریخت روی U می نگارد.

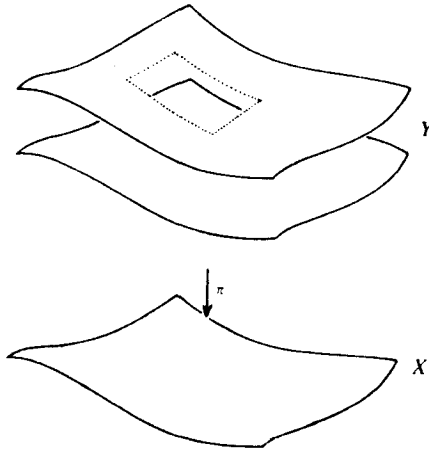
*

این مفهوم فضای پوششی یگانه مفهومی نیست که با این نام به کار می رود، بلکه ساده ترین آنهاست. به ویژه، در نظریه توابع، به دلایلی «پوشش»های کلیتری را در نظر می گیرند، که حالت خاص آنها «پوششهای شاخه ی^۲»، از قبیل $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ هستند:

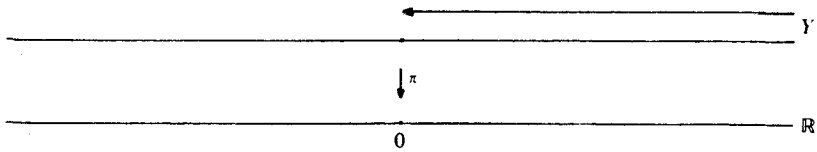


در اینجا به شرط بیمایگی موضعی نیازی نیست بلکه فقط پیوستگی، باز بودن (نگاره های مجموعه های باز، بازند) و گسستگی تارها مورد نیازند (مثلاً رجوع شود به مرجع [۹]، ص ۲۰ به بعد). نقاطی مانند y ، که در آنها چنین نگاشتی همسانریخت موضعی نباشد، نقاط شاخه ی^۳ نامیده می شوند. در مثال $z \mapsto z^2$ یگانه نقطه شاخه یی نقطه o است.

اما، حتی وقتی چنین پوشش «تعمیم یافته»ای (یعنی نگاشت پیوسته، باز، و گسسته ای) غیرشاخه یی (یعنی همه جا همسانریخت موضعی) و پوشا باشد، لزوماً یک فضای پوششی، به معنای تعریفی که آوردیم، نیست. به سهولت می توان مثالهایی از این دست را با برداشتن یک قطعه بسته مناسب از یک پوشش «خوب» به دست آورد:

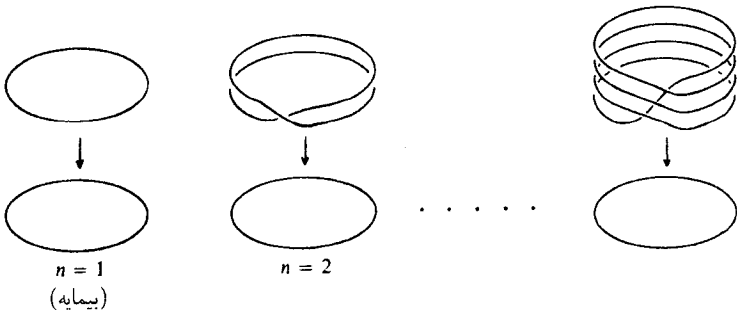


ساده‌ترین مثال، هنگامی به دست می‌آید که $Y = \mathbb{R} \times 0 \cup \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \times 1$ را همراه با تصویر متعارف $\mathbb{R} \rightarrow Y$ در نظر می‌گیریم: در نقطه 0 موضعاً بیمایه نیست، تعداد برگها در طرف چپ برابر ۱ و در طرف راست برابر ۲ است.

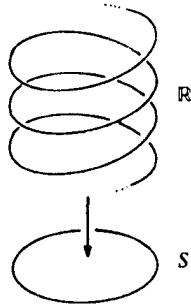


*

در خاتمه، چند مثال بسیار ساده اما غیر بیمایه (به معنی فنی کلمه) می‌آوریم: مثال ۱. برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، نگاشت $z \mapsto z^n$ یک پوشش n -برگی غیر بیمایه $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$ (و یا $S^1 \rightarrow S^1$) را به دست می‌دهد:



مثال ۲. نگاشت $\mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{ix}$ معرّف پوششی است با تعدادی نامتناهی - شمارا برگ.

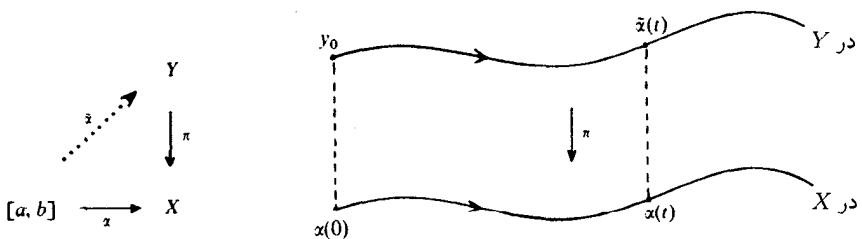


مثال ۳. تصویر متعارف $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ یک پوشش ۲-برگی است.

راجع به خود مفهوم پوشش همین قدر کافی است. کاربردهای فضاهای پوششی را در بخش ۸ خواهم آورد. قسمت عمده این فصل به رده‌بندی فضاهای پوششی تخصیص داده می‌شود. آری، حق هم همین است، زیرا می‌توان یک بررسی کامل از همه فضاهای پوششی یک فضای توپولوژیک مفروض X به عمل آورد، و این همان چیزی است که «نظریه فضاهای پوششی» می‌نامیم، - نظریه‌ای هرچند مختصر، ولی مفید است. اما در این نظریه، یک ابزار فنی همه‌جا حاضر وجود دارد، که همه چیز به کمک آن ساخته، اثبات و انجام می‌شود. این ابزار، بالابری راه است. این همان موضوعی است که اکنون می‌خواهیم از آن صحبت کنیم.

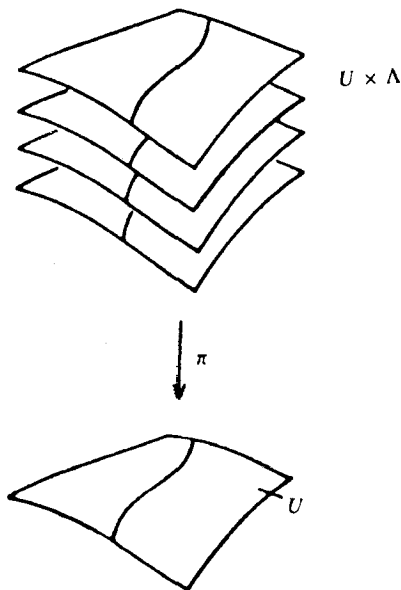
۳. بالابری راه

تعریف (بالابری راه). فرض کنیم $\pi : Y \rightarrow X$ یک نگاشت پوششی و $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته (یعنی یک «راه») باشد. یک راه $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow Y$ را یک بالابری α با شروع از y_0 گوئیم هرگاه $\tilde{\alpha}(a) = y_0$ و $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.



لم (وجود و یکتایی بالابریهای راه). اگر Y یک فضای پوششی X باشد، برای هر راه α در X و هر نقطه $y_0 \in Y$ بالای $\alpha(a)$ ، یک و تنها یک $\tilde{\alpha}$ هست که بالابری α با شروع از y_0 است. برهان. چنانچه $U \subset X$ یک مجموعه باز و $Y|U$ بیمایه باشد، به آسانی دیده می‌شود که همه

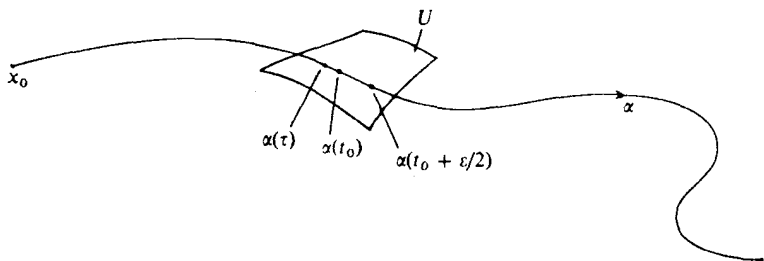
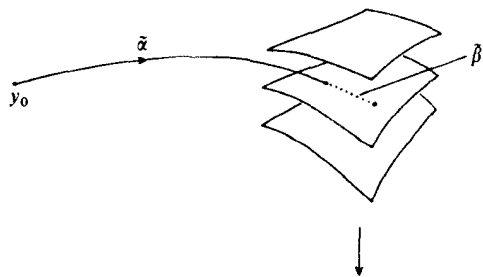
بالابریهای همه راههای β که کلاً در U باشند دقیقاً چه هستند: نسبت به $Y|U \cong U \times \Lambda$ ، این بالابریها دقیقاً راههایی مانند $\tilde{\beta}_\lambda$ در Y هستند که با ضابطه $\tilde{\beta}_\lambda(t) := (\beta(t), \lambda)$ تعریف می‌شوند.



اکنون (بی‌آنکه از کلیت کاسته شود) فرض می‌کنیم α از $[0, 1]$ به X مفروض و y_0 بالای $\alpha(0)$ باشد.

یکتایی. فرض می‌کنیم \tilde{a} و \hat{a} دو بالابری با شروع از y_0 باشند. همان‌طور که در مورد $Y|U$ استدلال شد، دوزیرمجموعه از $[0, 1]$ که \tilde{a} و \hat{a} در روی آنها به ترتیب برهم منطبق باشند یا نباشند هر دو بازند، اما مجموعه اولی چون شامل 0 است ناتهی است، در نتیجه، بنا بر همبندی $[0, 1]$ ، باید مساوی $[0, 1]$ باشد.

وجود. مجموعه اعضایی چون $\tau \in [0, 1]$ که برای آنها یک بالابری $\alpha|_{[0, \tau]}$ با شروع از y_0 وجود دارد، مجموعه‌ای ناتهی است، زیرا شامل 0 است. کوچکترین کران بالای این مجموعه را t_0 می‌نامیم. یک همسایگی باز $\alpha(t_0)$ مانند U و یک عدد $\varepsilon > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که Y بالای U بیمایه باشد و کل مجموعه $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, 1]$ را بتوی U بنگارد. فرض می‌کنیم $\tilde{\alpha} : [0, \tau] \rightarrow Y$ یک بالابری $\alpha|_{[0, \tau]}$ برای مقداری مثل $\tau \in [t_0 - \varepsilon/2, t_0] \cap [0, 1]$ باشد، و $\tilde{\beta}$ یک بالابری $\alpha|_{[\tau, t_0 + \varepsilon/2] \cap [0, 1]}$ باشد.



در این صورت، باقرار دادن

$$\hat{\alpha}(t) := \begin{cases} \tilde{\alpha}(t), & t \in [0, \tau] \text{ برای} \\ \tilde{\beta}(t), & t \in [\tau, t_0 + \epsilon/2] \cap [0, 1] \text{ برای} \end{cases}$$

یک بالابری $\alpha|_{[0, b]}$ با شروع از y_0 تعریف خواهد شد، و به علاوه، b برابر با ۱ است (اگر $t_0 = 1$) که در این حالت مسأله تمام است، و یا از t_0 بزرگتر است. اما، بنابر تعریف t_0 ، حالت دوم ممکن نیست، و لذا $\hat{\alpha}$ همان بالابری مطلوب α است. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. \square

این لم پاسخگوی دو تا از بدیهیترین پرسشهای مربوط به بالابری راههاست. مهمترین مطلب دیگری که لازم است راجع به بالابری راهها بدانیم، «وابستگی پیوسته به پارامترهای اضافی» است. فرض کنید به جای یک راه تنها تمامی یک «خانواده» از راهها، یعنی یک مانسته جایی مانند

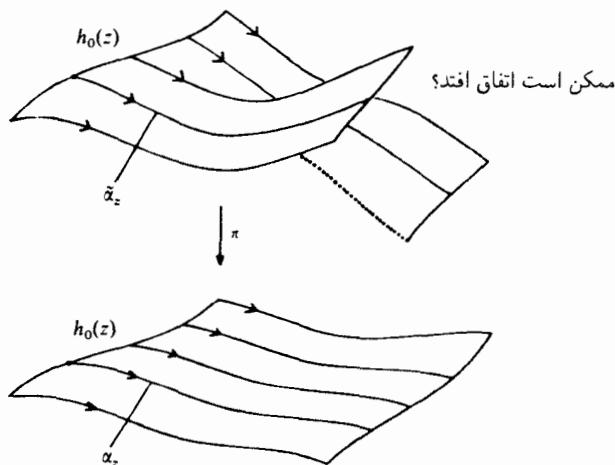
$$h : Z \times [0, 1] \rightarrow X$$

و متناظراً به جای یک نقطه شروع تنهای y_0 بالای $\alpha(0)$ ، تمامی یک «نگاشت پیوسته از نقطه شروع» بالای h_0 مانند $\tilde{h}_0 : Z \rightarrow X$ با شرط $\pi \circ \tilde{h}_0 = h_0$ را به ما داده اند. حال، اگر برای هر مقدار ثابت

$z \in Z$ راه نظیر آنرا بالا ببریم تا به راه مورد بحث با شروع از $\tilde{h}_o(z)$ برسیم، روی هم رفته یک نگاشت به شکل

$$\tilde{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$$

بالای h به دست می آوریم. مسأله این است که آیا ممکن است \tilde{h} پیوسته نباشد:



نه، نمی تواند! برای اثبات، از نو باید یک کار دقیقی انجام دهیم، اما در عوض ابزار بسیار مفیدی برای نظریه فضاها پوششی به دست می آوریم.

لم (بالابری مانسته جایها)^۱. فرض کنیم Y یک فضای پوششی X باشد، و Z یک فضای توپولوژیک دیگر، $h : Z \times [0, 1] \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته و

$$\tilde{h}_o : Z \rightarrow Y$$

یک «بالابری» پیوسته h_o باشد («بالابری مفروضی برای نگاشت نقطه شروع»):

$$\begin{array}{ccc} Z \times 0 & \xrightarrow{\tilde{h}_o} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow \pi \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

در این صورت، نگاشت

$$\begin{aligned}\tilde{h} : Z \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (z, t) &\rightarrow \tilde{\alpha}_z(t)\end{aligned}$$

که از بالای فرد فرد راههای $X \rightarrow [0, 1] : \alpha_z, t \rightarrow h(z, t)$ با شروع از نقطه $\tilde{h}_o(z)$ به دست می آید، یک نگاشت پیوسته است.

برهان. برای اختصار، ε -همسایگیهای نقطه t_o در $[0, 1]$ به شکل $(t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon) \cap [0, 1]$ را با $I_\varepsilon(t_o)$ نمایش می دهیم. یک جعبه $\Omega \times I_\varepsilon(t_o)$ در $Z \times [0, 1]$ را «کوچک» خوانیم، اگر h آن را در یک مجموعه $U \subset X$ بنگارد به قسمی که $Y|U$ بیامیه باشد. حال اگر \tilde{h} روی یک «خط قائم» $\Omega \times t_1$ از این جعبه، پیوسته باشد، در تمامی این جعبه پیوسته خواهد بود. در واقع، نسبت به یک بیامیه سازی

$$Y|U \cong U \times \Lambda$$

Λ -مختص نگاشت $\tilde{h}|_{\Omega \times I_\varepsilon}$ (که نکته مهم مورد بحث ماست، زیرا U مختص این نگاشت توسط h ، که در حال پیوسته است، داده شده است) مستقل از t است، زیرا هر یک از راههای بالا برده پیوسته است. از آنجا که \tilde{h} بر $\Omega \times t_1$ پیوسته است، باید بر همه $\Omega \times I_\varepsilon$ پیوسته باشد. در این مورد، خواهیم گفت که این جعبه نه تنها «کوچک» بلکه «خوب» نیز هست.

حال فرض کنیم که برای یک مقدار ثابت $z \in Z$ ، T مجموعه $[0, 1]$ باشد به قسمی که یک جعبه همسایگی کوچک و خوب $\Omega \times I_\varepsilon(t)$ موجود باشد، که اصلاً معنای این شرط پیوسته بودن \tilde{h}_t در یک همسایگی z است. در این صورت، T آشکارا در $[0, 1]$ باز است، و با توجه به پیوستگی نگاشت نقطه شروع \tilde{h}_o ، داریم $o \in T$. حال، تنها کافی است ثابت کنیم که T بسته نیز هست. زیرا در این صورت، به استناد همبندی، خواهیم داشت $T = [0, 1]$ ، و بالنتیجه، \tilde{h} همه جا پیوسته است. برای این کار فرض کنیم $t_o \in \bar{T}$. بنابراین پیوستگی h ، یک جعبه «کوچک» $\Omega \times I_\varepsilon(t_o)$ حول نقطه (z, t_o) وجود خواهد داشت، و چون $t_o \in \bar{T}$ ، یک $t_1 \in I_\varepsilon(t_o) \cap T$ وجود خواهد داشت. پس، \tilde{h}_{t_1} در یک همسایگی z مانند Ω_1 پیوسته خواهد بود، در نتیجه \tilde{h} در نیمه $(\Omega \cap \Omega_1) \times I_\varepsilon(t_o)$ پیوسته خواهد بود و از آنجا

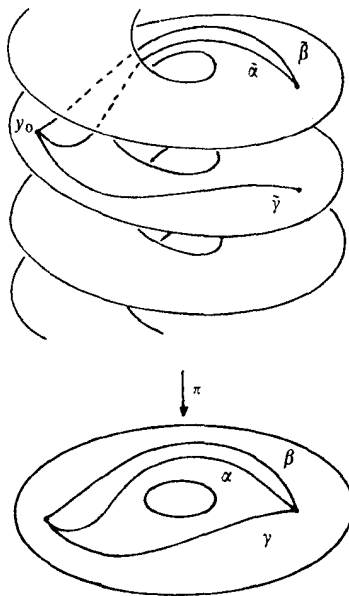
نتیجه می‌شود که $t_0 \in T$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

به‌عنوان نخستین فرع، به لم زیر توجه می‌کنیم.

لم تکراری^۱. فرض کنیم Y یک فضای پوششی برای X ، و α و β دو راه مانسته‌جا در X با ابتدا و انتهای ثابت باشند، یعنی یک مانسته‌جایی

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

بین $h_1 = \beta$ و $h_0 = \alpha$ با شرطهای $h_t(1) = \alpha(1)$ و $h_t(0) = \alpha(0)$ برای همه t ها، وجود داشته باشد. حال اگر $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ بالابریهای α و β با یک نقطه شروع y_0 باشند، آنگاه نقطه‌های پایانی آنها نیز یکی خواهد بود: $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.



برهان. وقتی هریک از h_t ها را به یک راه \tilde{h}_t ، که نقطه شروعش y_0 است بالا ببریم، «نگاشت نقطه انتها»، $t \rightarrow \tilde{h}_t(1)$ ، نگاشتی خواهد بود که t را بر تار بالای $\alpha(1)$ می‌نگارد. البته این نکته را مستقل از این لم می‌دانستیم، زیرا $\pi \circ \tilde{h}_t = h_t$. اما، به‌موجب این لم، این نگاشت پیوسته، و لذا ثابت است، زیرا این تار، تار است گسسته. □

۴. آشنایی بارده‌بندی فضاهای پوششی

یک فضای پوششی برای X در وهله نخست شیئی هندسی است که نمی‌توان آن را بی‌درنگ مطالعه کرد. چنانچه خواسته باشیم یک اطلاع کلی، یعنی یک رده‌بندی از همه فضاهای پوششی، داشته باشیم، ناچاریم در جستجوی «علائم مشخصه» ای برای پوششها باشیم، یعنی باید به هر پوشش، داده‌هایی وابسته کنیم، نوعی مشخصه یا نشانه‌ای که از لحاظ ریاضی، و در صورت امکان از لحاظ جبری، قابل دسترسی باشد، به‌گونه‌ای که دو فضای پوششی برای X یک مشخصه داشته باشند اگر و تنها اگر یکرخت باشند. بدین ترتیب، رده‌بندی فضاهای پوششی با تقریب یکرختی، بدل به بررسی این مشخصه‌ها می‌شود، که امیدواریم مسأله را ساده‌تر سازد.

سیاری از مسائل رده‌بندیها در ریاضیات را با استفاده از همین فکر مورد بحث قرار می‌دهند. نمونه ساده‌ای که همه شما دیده‌اید رده‌بندی صورتهای درجه دوم در فضاهای برداری حقیقی n بعدی است. یک مشخصه کاملاً واضح، یک «ناوردای یکرختی» برای صورتهای درجه دوم، رتبه^۱ آنهاست. اما رتبه به تنهایی نمی‌تواند رده یکرختی صورت درجه دوم را مشخص کند، بنابراین باید در جستجوی مشخصه‌های دیگری نیز بود؛ یکی از این مشخصه‌ها، به‌عنوان مثال، نشان^۲ صورت درجه دوم یعنی تفاضل $p - q$ بین ابعاد ماکسیمال زیرفضاهایی است که این صورت در آنها به ترتیب مثبت معین و منفی معین است. (بدیهی است که از روی رتبه $p + q$ و نشان $p - q$ ، می‌توان p و q را به دست آورد، و برعکس). بنابراین، قضیه رده‌بندی چنین بیان می‌شود («قانون اینرسی سیلوستر»^۳): دو صورت درجه دوم در V یکرخت‌اند اگر و تنها اگر رتبه و نشان آنها یکی باشند. باین قضیه، مسأله مطالعه رده‌های یکرختی صورتهای درجه دوم، بدل به مطالعه همه زوجهای مرتب ممکن اعداد (r, σ) می‌شود که به شکل رتبه و نشان یک صورت ظاهر می‌شوند، که این هم آشکارا مسأله بسیار ساده‌تری است: این زوجهای ممکن، همه زوجهایی هستند به شکل $(p + q, p - q)$ با شرط $0 \leq p, q$ و $p + q \leq n$. در رابطه با فضاهای پوششی مورد بحث ما، رفتار بالا برای راهها^۴، علامت مشخصه مطلوب را به دست می‌دهد. در اینجا، بحث خود را به فضاهای همبند - راه^۵، محدود می‌کنیم، و همچنین در هر فضا نقطه ثابتی را (به‌عنوان «پایه نقطه»^۶) در نظر می‌گیریم. البته، فرض می‌شود که نگاهشهای پوششی، پایه نقطه‌ها را حفظ می‌کنند، و برای نشان دادن این نکته می‌نویسیم:

$$\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

شرط همبند - راهی^۷، محدودیتی آن‌چنان اساسی برای هدفهای ما در نظریه فضاهای پوششی به

- | | | |
|--------------------------|-------------------|-------------------------------|
| 1. rank | 2. signature | 3. Sylvester's law of inertia |
| 4. path-lifting behavior | 5. path-connected | 6. basepoint |
| 7. path-connectedness | | |

حساب نمی آید، و استفاده از علامتگذاری فوق برای نقطه پایه ها نیز به هیچ وجه آسیبی به محتوای ریاضی این نظریه نمی رساند.

حال گوییم دوفضای پوششی (Y, y_0) و (Y', y'_0) برای فضای (X, x_0) هر دو یک رفتار بالابری دارند هرگاه برای هر دو راه α و β از نقطه x_0 به نقطه دیگری چون x_1 حکم زیر برقرار باشد: دو راه بالا برده شده $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ در Y به نقطه مشترکی ختم می شوند اگر و تنها اگر دو راه بالا برده شده $\tilde{\alpha}'$ و $\tilde{\beta}'$ در Y' با شروع از y'_0 ، نیز به نقطه مشترکی ختم شوند.



و اما، چنانچه قرار باشد نقش این رفتار بالابری برای فضاهای پوششی مشابه نقش رتبه و نشان برای صورتهای درجه دوم باشد، دو مسأله کاملاً متفاوت مطرح می شوند که باید به آنها پاسخ داد:

مسأله (الف) یک فضای پوششی تا چه حد از روی رفتار بالابریش مشخص می شود؟

مسأله (ب) چگونه می توان از لحاظ جبری به رفتار بالابری، «پی برد»؟

در دو بخش آتی، به این پرسشها پاسخ داده خواهد شد. اما ابتدا می خواهیم، شاید با احتیاط غیر ضروری، اصلی را که جواب براساس آن نهاده شده مطرح نمایم، لذا خود را درگیر جزئیات نمی کنم.

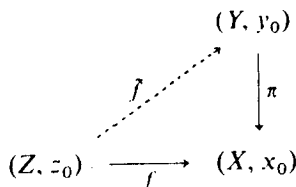
برای مسأله (الف). بدیهی است که فضاهای پوششی یکریخت، یک رفتار بالابری دارند؛ مسأله

این است که آیا عکس آن نیز صحیح است؟

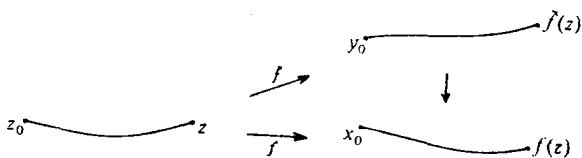
رفتار بالابری، تکلیف قابلیت بالابری^۱ نگاشتهای پیوسته

$$f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$$

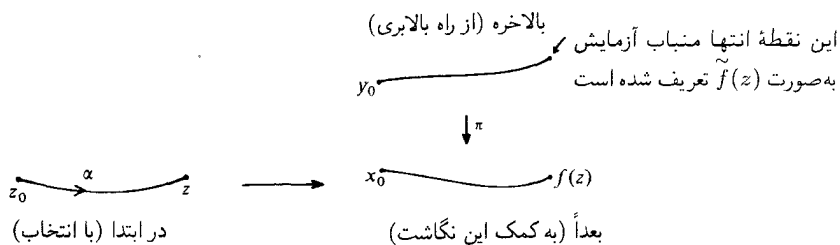
از فضاهای همبند - راه Z را به طریق زیر تعیین می کند: اولاً اگر یک بالابری \tilde{f} وجود داشته باشد، آنگاه، البته به ازای هر راه α از z_0 به x_0 ، راه $\tilde{f} \circ \alpha$ یک بالابری راه $\alpha \circ f$ با شروع از y_0 خواهد بود، و به این



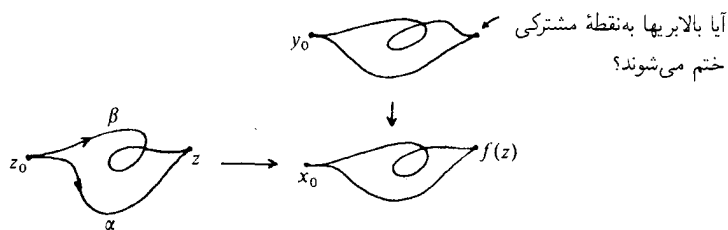
ترتیب، $\tilde{f}(z)$ نقطه انتهایی بالابری $\alpha \circ f$ است که از y_0 شروع می شود:



نکته بعدی این است که از یکتایی بالابریهای راهها نتیجه می شود که برای یک f مفروض، حداکثر یک بالابری \tilde{f} با شرط $\tilde{f}(z_0) = y_0$ وجود دارد. و اما، هم اکنون می بینیم که با در دست داشتن یکی از این f ها، چگونه می توان با استفاده از بالابری راهها، یک چنین \tilde{f} ی را ساخت: به ازای $z \in Z$ ، یک راه α از z_0 به $z \in Z$ انتخاب می کنیم و نگاره آن را به دست می آوریم، سپس آن را بالا می بریم و نقطه انتهای این بالابری را مساوی $\tilde{f}(z)$ می گیریم.

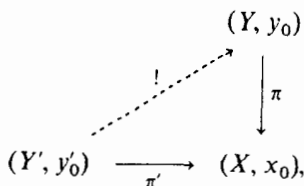


اکنون مسأله «خوشتعریفی» به میان می آید: آیا این $\tilde{f}(z)$ که بدین شیوه تعریف شده، مستقل از انتخاب α است؟

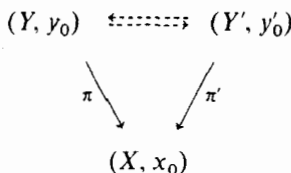


برای آنکه ویژگی فوق برقرار باشد، باید برای هر دو راه α و β که از z_0 آغاز و به نقطه مشترکی منتهی می شوند، بالابریهای $f \circ \alpha$ و $f \circ \beta$ که از y_0 شروع می شوند، الزاماً به نقطه مشترکی نیز ختم گردند. برقراری این شرط، که آشکارا شرط لازم برای وجود \tilde{f} است، در واقع، نتیجه رفتار این بالابری است و خواهیم دید (بخش ۵، ملاک قابلیت بالابری) که همین شرط تحت فرضهایی مناسب، شرط کافی برای وجود یک بالابری پیوسته \tilde{f} است. در حالت خاصی که دو نگاشت مفروض، نگاشتهای پوششی

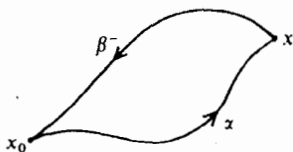
با یک رفتار بالابری باشند، روشن است که این «ملاک» برقرار است:



یک استفاده دیگر از این استدلال، یعنی مرتبط کردن دو فضای پوششی، یکرخیتهای بین این فضاها را که وارون یکدیگرند، به ما می‌دهد:



برای مسأله (ب). فرض کنیم α و β دو راه از x_0 به x باشند. بالابریهای آنها، $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ ، با شروع از y_0 بدیهي است که یک نقطه انتهایی مشترک دارند اگر و تنها اگر، بالابری راه بسته $\alpha\beta^{-1}$ با شروع از y_0 خود نیز یک راه بسته، و یا یک طوقه^۱، باشد. بدین ترتیب، برای پی‌بردن به رفتار بالابری، تنها چیزی که لازم داریم این است که بدانیم کدام یک از طوقه‌هایی را که از x_0 گذاشته‌اند، می‌توان به طوقه‌هایی که از y_0 می‌گذرند، بالا برد، و کدام یک را نمی‌توان.



$$x\beta^{-1} : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

به موجب لم تکرایی، این مطلب فقط بستگی به رده مانسته‌جایی (با ابتدا و انتهای ثابت منطبق بر x_0) دارد. اما مجموعه رده‌های مانسته‌جایی طوقه‌های گذرنده بر x_0 ، به شیوه متعارف، تشکیل یک گروه می‌دهند، که اصطلاحاً به گروه بنیادی^۲ $\pi_1(X, x_0)$ نامیده می‌شود، و زیرمجموعه رده‌های طوقه‌هایی که می‌توانند به طوقه‌های دیگری بالا برده شوند، تشکیل یک زیرگروه $G(Y, y_0)$ از $\pi_1(X, x_0)$ را می‌دهند. پس، شناخت رفتار بالابری، به معنی شناخت این زیرگروه است: این زیرگروه، همان «مشخصه»ی جبری است که به فضای پوششی وابسته می‌کنیم. از این رو، رده‌بندی فضاهای پوششی از سویی متضمن قضیه

یکتایی است، که در مسأله (الف) نام بردیم، و می‌گوید که: دو فضای پوششی یکرخت‌اند اگر تنها اگر یک رفتار بالابری، و در نتیجه یک گروه G داشته باشند؛ و از سوی دیگر، متضمن یک قضیه وجودی است، که باید به فکر تنظیم صورت آن باشیم، و مشخص خواهد کرد که با در دست داشتن یک زیرگروه $G \subset \pi_1(X, x_0)$ ، تحت چه شرایطی واقعاً یک فضای پوششی که در شرط $G(Y, y_0) = G$ صدق کند، موجود است. برنامه‌ای که در اینجا مطرح شد، مفصلاً در بخشهای ۵ و ۶ تشریح خواهد شد.

۵. گروه بنیادی و رفتار بالابری

تعریف (رسته فضاهای «پایه نقطه» دار). منظور از یک فضای پایه نقطه‌دار، یک زوج (X, x_0) متشکل از یک فضای توپولوژیک X و یک نقطه $x_0 \in X$ است. یک نگاشت پیوسته حافظ پایه نقطه، $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ، چنانچه از نامش پیداست، نگاشتی است پیوسته چون $f : X \rightarrow Y$ با شرط $f(x_0) = y_0$. به‌ویژه، منظور از یک نگاشت پوششی $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ، نگاشتی است پوششی چون $\pi : Y \rightarrow X$ با شرط $\pi(y_0) = x_0$.

تعریف (گروه بنیادی). فرض می‌کنیم (X, x_0) یک فضای پایه نقطه‌دار باشد، مجموعه راههایی در X را که از x_0 شروع و به x_0 ختم می‌شوند (مجموعه «طوقه‌ها در x_0 ») با نماد $\Omega(X, x_0)$ نمایش می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که نگاشت

$$\Omega \times \Omega \rightarrow \Omega, (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha\beta$$

نگاشت مرکب با ضابطه‌های:

$$\alpha\beta(t) := \alpha(2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ برای}$$

$$\alpha\beta(t) := \beta(2t - 1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ برای}$$

باشد. در این صورت، روی مجموعه رده‌های مانسته‌جایی

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq$$

(نماد \simeq معرف مانسته‌جایی بانقاط انتهایی^۲ ثابت x_0 است)، یک قانون ترکیب خوشتعریفی با ضابطه $[\alpha\beta] := [\alpha][\beta]$ وجود دارد که $\pi_1(X, x_0)$ را به یک گروه بدل می‌کند. این گروه را گروه بنیادی فضای

پایه نقطه دار (X, x_0) می نامند.

از اثبات مراحل مختلف و لازم برای توجیه احکام فوق (خوشتعریفی نگاشت ترکیب، شرکتپذیری وجود 1 و وارون) که خیلی ساده اند، می گذرم. خواننده ای که تاکنون با مانسته جایی راهها تماسی نداشته و اکنون می خواهد چگونگی کار آنها را بداند، می تواند به صفحات ۷۸ تا ۸۸ مرجع [۱۲] مراجعه کند. نمادگذاری. بدیهی است که ساختمان فوق، به طریق متعارف، عملاً یک تابعگون هموردای π_1 از رسته فضاهای پایه نقطه دار و نگاشتهای پیوسته حافظ پایه نقطه، به رسته گروهها و همریختها، یعنی

$$\pi_1 f : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), [\alpha] \rightarrow [f \circ \alpha]$$

به ما می دهد. ولی ما به جای $\pi_1 f$ ، نمادگذاری متداول f_* را به کار خواهیم برد.

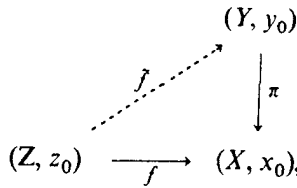
فرض لم تکراری (رفتار گروه بنیادی نسبت به نگاشتهای پوششی). اگر $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ نگاشتی پوششی باشد، همریختی گروه القایی $\pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ یک همریختی یک به یک بین گروههای بنیادی است.

برهان. فرض می کنیم $1 \in \pi_1(X, x_0) = \pi_*[\gamma]$. در این صورت، یک مانسته جایی h با مبدأ و منتهای ثابت x_0 بین $\pi \circ \gamma$ و نگاشت ثابت $\{x_0\} \rightarrow [0, 1]$ وجود دارد. حال h را به یک مانسته جایی \tilde{h} با مبدأ و منتهای ثابت y_0 بالا می بریم، و در این صورت داریم $\tilde{h}_0 = \tilde{h}_1$ یک بالابری راه ثابت، و در نتیجه ثابت است. پس $1 \in \pi_1(Y, y_0) = [\gamma]$. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. \square

تعریف (گروه مشخصه یک فضای پوششی)^۱. فرض کنیم $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ یک نگاشت پوششی باشد. در این صورت، نگاره همریختی یک به یک $\pi_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ را زیرگروه مشخصه^۲ این پوشش گویند و با نماد $G(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ نمایش می دهند.

وقتی می گویم یک طوقه در x_0 به یک طوقه در y_0 بالابردنی^۳ است، منظور این است که این طوقه تصویر طوقه ای در y_0 است. از این رو، گروه $G(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ همان زیرگروهی است که در بخش قبل اعلام کردیم، و گفتیم که حاوی کلیه اطلاعات راجع به رفتار بالابری این پوشش است.

حال اگر $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ پیوسته و $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ یک بالابری f ، یعنی $\pi \circ \tilde{f} = f$ باشد



بدیهی است که خواهیم داشت

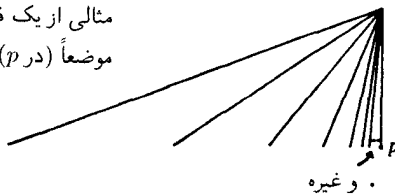
$$f_*\pi_1(Z, z_0) = \pi_* (\tilde{f}_* \pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_* \pi_1(Y, y_0) = G(Y, y_0)$$

و معنی آن این است که شرط $f_*\pi_1(Z, z_0) \subset G(Y, y_0)$ شرطی لازم برای قابلیت بالابری یک نگاشت مفروض $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ است. برای آنکه بتوانیم بیان کنیم که تا چه حد این شرط، شرط کافی نیز هست، باید باز هم نخست یک مفهوم دیگر همبندی را بیاوریم، و آن این است:

تعریف (همبند - راه موضعی). یک فضای توپولوژیک را همبند - راه موضعی^۱ گوئیم اگر هر همسایگی شامل یک همسایگی همبند - راه باشد.

توجه. خمینه‌ها، همبند راه موضعی هستند (روشن است)، و مجتمع‌های ضَمْبُ نیز چنین‌اند. قضیهٔ کلیر در این زمینه را می‌توانید در مرجع [۱۶]، فصل ۳، بخش ۶.۳ ملاحظه کنید.

مثالی از یک فضای همبند - راه که موضعاً (در p) همبند - راه نیست



نکته. در فضای همبند - راه، هر همسایگی V ی یک نقطهٔ p عملاً شامل یک زیرهمسایگی همبند - راه باز است، نمونهٔ آن مجموعهٔ همهٔ $x \in V$ هایی هستند که می‌توانند از یک راه در V ، با شروع از p ، به x برسند.

اکنون می‌توان ملاک زیر را بیان کرد.

ملاک قابلیت بالابری^۲. فرض می‌کنیم که $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ یک نگاشت پوششی باشد، Z یک فضای همبند - راه و همبند - راه موضعی، و $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ نگاشتی پیوسته

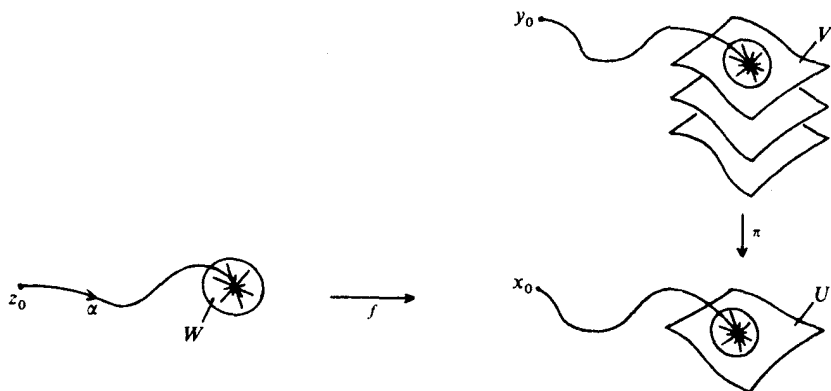
باشد. در این صورت، یک بالابری $f : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ برای f وجود دارد (که یکتانیز هست)، اگر و تنها اگر f_* گروه بنیادی $\pi_1(Z, z_0)$ را به زیرگروه مشخصه این پوشش یعنی $G(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ ببرد:

$$\begin{array}{c} \pi_1(Y, y_0) \\ \cong \downarrow \pi_* \\ \pi_1(Z, z_0) \rightarrow G(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

ضمناً، قبل از ذکر برهان ملاک، خاطر نشان می‌سازیم که در اینجا با مثال ساده‌ای از آنچه قبلاً در فصل ۵ بخش ۷، «دومین دلیل مهم برای فایده مفهوم مانسته جایی» نامیده بودیم (ص ۹۷) مواجهیم: این مسأله هندسی، حل شدنی است اگر و تنها اگر مسأله جبری نظیر آن، که از اعمال تابعگون گروه بنیادی π_1 در این مورد حاصل می‌شود، حل شدنی باشد. یک بالابری f برای f موجود است اگر و تنها اگر f_* به یک همریختی گروهی φ بالابردنی باشد:

$$\begin{array}{ccc} & (Y, y_0) & \pi_1(Y, y_0) \\ & \nearrow \exists f & \nearrow \exists \varphi \\ & \downarrow \pi & \downarrow \pi_* \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \pi_1(Z, z_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

برهان. روشن است که این شرط لازم است، و با توجه به همبند - راهی Z و یکتایی بالابریهای راهها، حداکثر یک \tilde{f} وجود دارد. حال فرض کنیم که f در این شرط صدق کند. برای $z \in Z$ همان طوری که در بخش ۴ شرح دادیم، $\tilde{f}(z)$ را چنین تعریف می‌کنیم: یک راه α از z_0 به z می‌گیریم، سپس $f \circ \alpha$ را بالا می‌بریم، تا به راهی به ابتدای y_0 برسیم، سپس $\tilde{f}(z)$ را به عنوان انتهای این راه در Y انتخاب می‌کنیم. این نقطه انتهایی، مستقل از انتخاب α است، زیرا اگر β راه دیگری از z_0 به z باشد، طوقه $(f \circ \alpha)^{-1}(f \circ \beta)$ معرّف یک عضو $G(Y, y_0)$ خواهد بود و در نتیجه می‌تواند به یک طوقه در Y بالا برده شود. لذا، بالابریهای $f \circ \alpha$ و $f \circ \beta$ به نقطه مشترکی ختم می‌شوند، که دقیقاً همان نقطه خوشتعریف $\tilde{f}(z)$ است. پس، بدیهی است که $f \circ \tilde{f} = f$ ، و تنها نکته‌ای که برای اثبات باقی می‌ماند، پیوسته بودن \tilde{f} است. در اینجا، پای همبند - راهی موضعی Z به میان می‌آید:



فرض کنیم $z_1 \in Z$ و V یک همسایگی باز $\tilde{f}(z_1)$ در Y باشد. بی آنکه از کلیت کاسته شود، می توان V را آن قدر کوچک فرض کرد که $\pi|_V$ یک همسانریختی به روی مجموعه $\pi(V) := U$ باشد. حال، یک همسایگی همبند - راه و کوچک W برای z_1 چنان انتخاب می کنیم که $f(W) \subset U$. برای آنکه z_0 را به نقاط $w \in W$ وصل کنیم، یک راه α از z_0 به z_1 را در نظر می گیریم و سپس با «تکه راههای» کوچکی که کاملاً در W قرار دارند، z_1 را به w وصل می کنیم، و این راهها را به α می افزاییم. اکنون، واضح است که $\tilde{f}|_W = (\pi|_V)^{-1} \circ f|_W$ ، و به ویژه $\tilde{f}(W) \subset V$ ، همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. \square

۶. رده بندی فضاهای پوششی

قضیه یکتایی. فرض کنیم Y و Y' فضاهای همبند - راه و همبند - راه موضعی باشند، و (Y, y_0) و (Y', y'_0) فضاهای پوششی پایه نقطه دار برای (X, x_0) . یک یکرختی حافظ پایه نقطه بین این فضاهای پوششی وجود دارد اگر و تنها اگر، زیرگروه مشخصه آنها یکی باشد، یعنی

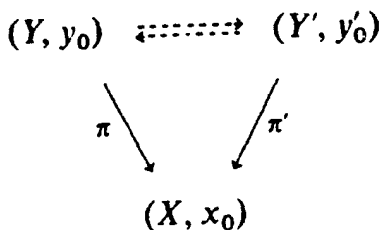
$$G(Y, y_0) = G(Y', y'_0) \subset \pi_1(X, x_0)$$

برهان. لزوم شرط واضح است: اگر $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$ چنین یکرختی باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} G(Y, y_0) &= \pi_* \pi_1(Y, y_0) = (\pi' \circ \varphi)_* \pi_1(Y, y_0) = \pi'_*(\varphi_* \pi_1(Y, y_0)) \\ &= \pi'_* \pi_1(Y', y'_0) = G(Y', y'_0) \end{aligned}$$

برعکس، اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه بنا بر ملاک قابلیت بالابری، می توان تصویر هر یک از پوششها

را به روی تصویر دیگری بالا برد:



و در این صورت، ترکیب این بالابریها، همان بالابریهای π و π' به خود آنها خواهد بود و در نتیجه، بنابر یکتایی بالابریها، به ترتیب، منطق بر نگاشتهای همانی Y و Y' خواهند شد. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

قضیه وجود؟ در قضیه یکتایی، فرض کرده بودیم که فضاهای پوششی، و در نتیجه فضای پایه X ، همبند - راه و همبند - راه موضعی هستند. لذا از حالا به بعد، مسأله وجود را به شکل زیر مطرح می‌کنیم: فرض می‌کنیم (X, x_0) یک فضای همبند - راه و همبند - راه موضعی باشد و $G \subset \pi^{-1}(X, x_0)$ یک زیرگروه دلخواه از گروه بنیادی آن. مسأله این است: آیا یک فضای پوششی همبند - راه (Y, y_0) برای (X, x_0) وجود دارد که در شرط $G(Y, y_0) = G$ صدق کند؟ (ویژگی همبند - راهی موضعی به هر صورت، از X به Y منتقل می‌شود). حکم فوق با چنین کلیتی صادق نیست. به چه دلیل؟ آیا فرضهای دیگری درباره فضای X یا درباره G باید افزود؟ و چه فرضهایی باید باشند؟

به جای آنکه مستقیماً خود قضیه را بیان کنم، باز ترجیح می‌دهم روش استقرایی را در ارائه آن پیش گیرم. این روش بسیار آموزنده، ولی متأسفانه بیش از حد وقتگیر است و نمی‌شود همیشه آن را به کار برد. در این روش، یعنی شبیه‌سازی موقعیت، که مشخصه زندگی یک ریاضیدان است، نه تنها به فکر اثبات یک قضیه باید بود، بلکه در وهله نخست باید خود قضیه را پیدا کرد.

نخستین مراحل یک قضیه، معمولاً از یک رشته خواستهایی ترکیب می‌شوند که، پس از آشنایی کافی با موضوع، به طور طبیعی ظاهر می‌شوند. هنگام تلاش در اثبات احکام مطلوب، مشکلاتی را که ظاهر می‌شوند تجزیه و تحلیل و سعی می‌کنیم آنها را، با استفاده از فرضهای جدیدی که می‌کوشیم تا آنجا که ممکن است جزئی باشند، از میان برداریم، سپس قضایا پدید می‌آیند. در مورد مسأله ما، مثلاً، می‌خواهیم همواره یک فضای پوششی موجود باشد که زیرگروه مشخصه‌اش زیرگروه مفروض G باشد. حال سعی می‌کنیم آن را ثابت کنیم!

برهان قضیه وجودی که هنوز پیدا نکرده‌ایم. نخست باید Y را به‌عنوان یک مجموعه پدید آوریم. اگر قبلاً یک نگاشت پوششی $(X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ ، آن‌طور که می‌خواستیم، می‌داشتیم، نقاط متعلق به Y_x را چگونه می‌توانستیم به کمک اشیائی که برحسب (X, x_o) و G قابل بیان بودند، مشخص کنیم؟ معلوم است، که به‌ازای هر راه α از x_o به x ، یک نقطه کاملاً مشخص از تار Y_x بالای x ، یعنی نقطه انتهایی بالابری α که از y_o شروع می‌شود، نظیر خواهد شد. همه نقاط Y_x از این طریق به دست می‌آیند، و دو راه α و β نقطه مشترکی را در Y_x معین می‌کنند اگر و تنها اگر $\alpha\beta^-$ یک عضو G را مشخص کند. حال اگر باز Y وجود نداشته باشد، برای پدید آوردن آن چه روشی باید اتخاذ کرد؟ چنان که در ذیل می‌آید:

تعریف. فرض کنیم که $\Omega(X, x_o, x)$ مجموعه همه راه‌ها از x_o به x باشد. در این مجموعه، یک رابطه هم‌ارزی بانام \sim را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow [\alpha\beta^-] \in G$$

سپس مجموعه‌های Y_x و Y را به‌صورت:

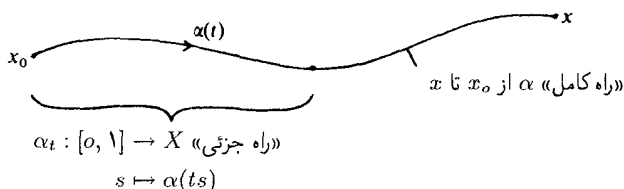
$$Y_x := \Omega(X, x_o, x) / \sim,$$

$$Y := \bigcup_{x \in X} Y_x$$

تعریف، و به‌علاوه فرض می‌کنیم y_o رده هم‌ارزی راه ثابتی در $\Omega(X, x_o, x_o)$ باشد، و $\pi : Y \rightarrow X$ با ضابطه $Y_x \rightarrow \{x\}$ معین شود. پس، به‌هر حال، π یک نگاشت پوشا بین مجموعه‌هاست و داریم $\pi(y_o) = x_o$.

بنابراین، «تنها» کاری که اکنون باید انجام دهیم این است که Y را به یک توپولوژی مجهز کنیم که از آن یک فضای همبند - راه بسازد و $(X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ را به یک نگاشت پوششی بدل نماید که در شرط $G(Y, y_o) = G$ صدق کند.

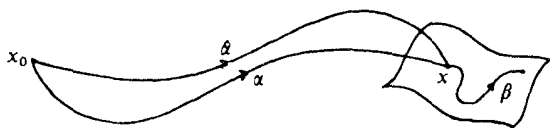
وقتی به شرایط هندسی آنچه که ساختیم فکر می‌کنیم، بی‌درنگ می‌بینیم که علاوه بر مجموعه Y و نگاشت $(X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ ، ابزار دیگری نیز قبلاً، در اختیار داشته‌ایم و آن بالابری راه است. برای $\alpha \in \Omega(X, x_o, x)$ رده‌های هم‌ارزی α را بانام $\sim[\alpha]$ نمایش می‌دهیم، تا باره مانسته جایی $[\alpha]$ اشتباه نشود. برای $t \in [0, 1]$ فرض می‌کنیم $\alpha_t \in \Omega(X, x_o, \alpha(t))$ بیانگر «راه جزیی» باشد که با ضابطه $s \mapsto \alpha(ts)$ تعریف می‌شود.



احساس زیربنایی ساختمان فوق، طبیعتاً ناظر بر یک توپولوژی است که بالا بری α برای آن، به کمک ضابطه $\tilde{\alpha}(t) := [\alpha_t]_{\sim}$ قبلاً داده شده است. اگر آن را دنبال کنیم، لاجرم خواهیم دید که باید کدام توپولوژی را روی Y تعریف نماییم. بدین منظور، نمادگذاری زیر را وارد می‌کنیم: به ازای یک راه α از x_0 به x و یک همسایگی باز همبند U برای x ، مجموعه رده‌های هم‌ارزی $[\alpha\beta]_{\sim}$ از راه‌های حاصل از ترکیب α با راه‌های β واقع در U را که از x شروع می‌شوند، با $V(U, \alpha) \subset Y$ نشان می‌دهیم:



به علت همبند - راهی موضعی X ، این U ها یک پایه همسایگی برای x تشکیل می‌دهند و در نتیجه، بدیهی است که $V(U, \alpha)$ ها یک پایه همسایگی نقطه $y \in Y$ برای توپولوژی که می‌خواهیم انتخاب کنیم تشکیل می‌دهند. اما، پیش از آنکه این مطلب را در یک تعریف رسمی بگنجانیم، ملاحظه می‌کنیم که $V(U, \alpha)$ فقط به $y = [\alpha]$ و U بستگی دارد و نه به انتخاب راه نماینده α در رده $[\alpha]$:



از $\hat{\alpha} \sim \alpha$ نتیجه می‌شود که $[\alpha\beta]_{\sim} = [\hat{\alpha}\beta]_{\sim}$ ، به استناد این نابستگی به α ، می‌توانیم به جای نماد $V(U, \alpha)$ از نماد $V(U, y) = [\hat{\alpha}\beta]_{\sim}$ استفاده کنیم، که از این پس، این کار را خواهیم کرد. توجه داشته باشید که $\pi(V(U, y)) = U$.

تعریف. زیرمجموعه $V \subset Y$ باز نامیده می‌شود هرگاه برای هر $y \in V$ ، یک همسایگی همبند - راه از نقطه (y) بتوان یافت به قسمی که $V(U, y) \subset V$.

لذا کاری که حالا ما باید انجام دهیم بررسی و در صورت لزوم، با استفاده از فرضهای اضافی تا حدی ممکن ضعیف، تضمین برقراری احکام زیر است:

(الف) \emptyset و Y بازند؛

(ب) اجتماعهای دلخواه مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بازند؛

(پ) اشتراکهای متناهی مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بازند؛

(ت) π پیوسته است؛

(ث) تارها گسسته‌اند؛

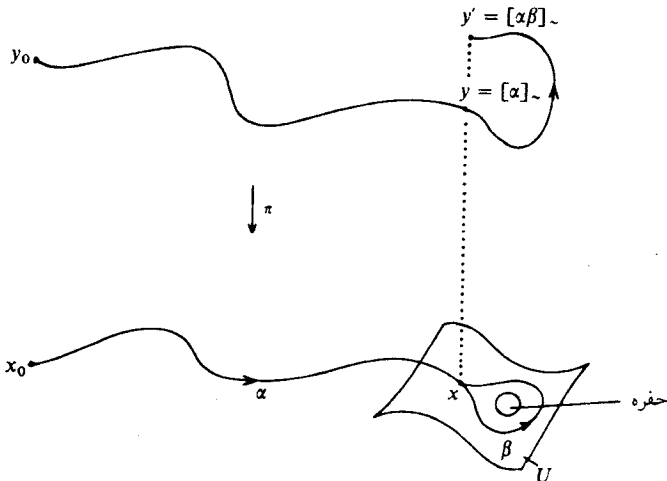
(ج) $\pi : Y \rightarrow X$ موضعاً بی‌مایه است؛

(چ) Y همبند - راه است؛

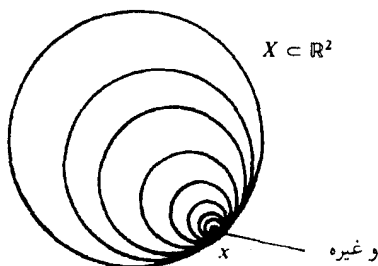
(ح) $G(Y, y_0) = G$

شرایط (الف) تا (ت) بالبداهه برقرارند: در واقع، این یک توپولوژی و π پیوسته است. ضمناً مایلیم در اینجا خاطر نشان سازم که در فهرست بالا هیچ چیز را «فروگذار نکرده‌ایم»: چنانچه یک فضای پوششی (Y', y'_0) با ویژگیهای مطلوب در ابتدا وجود داشته باشد، ساختمان ارائه شده ما نیز اجباراً ویژگیهای (ث) تا (ح) را خواهد داشت، زیرا به آسانی می‌توان یک همسانریختی بین (Y, y_0) و (Y', y'_0) بالای (X, x_0) برقرار کرد.

(ث) گسستگی تارها. گسستگی تارها هم‌ارز با این واقعیت است که برای هر $y \in Y_x$ یک همسایگی باز همبند - راه U برای x وجود دارد به قسمی که y تنها نقطه $Y_x \cap V(U, y)$ است. ببینیم این یکتایی به چه مفهومی است؟ چنانچه $y = [\alpha] \sim$ ، سایر نقاط $Y_x \cap V(U, y)$ دقیقاً به شکل $[\alpha\beta]$ هایی خواهند بود که در آنها β یک طوقه در U بر پایه x است. پس باید U یی پیدا کنیم که برای همه طوقه‌های β این شکل، داشته باشیم $[\alpha] \sim = [\alpha\beta] \sim$.



و در اینجا کشتی ما به گل می‌نشیند و دیگر قادر به پیشروی نیستیم، زیرا بدون افزودن فرضیهایی درباره X ، دلیلی ندارد که رده مانسته‌جایی $[\alpha(\alpha\beta)^-]$ به گروه G تعلق داشته باشد. مثلاً، اگر به حالت $x = x_0$ ، ثابت α ، و $G = \{1\}$ فکر کنیم، قاعدتاً در این حالت باید همه چیز درست از آب درآید: در این مورد شرط ما مستقیماً به معنای آن است که طوقه β در X مانسته‌جا با صفر^۱ است. اما لزومی ندارد که یک همسایگی U موجود باشد به‌گونه‌ای که همه طوقه‌های واقع در U بر پایه x ، در فضای پهناور X مانسته‌جا با صفر باشند:

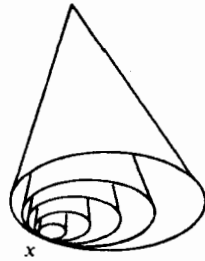


برای آنکه بتوانیم مجدداً به حرکت ادامه دهیم، اصلاً فرض می‌کنیم که X ویژگی مطلوب را دارد. - چاره دیگری هم نداریم، زیرا بدون این فرض، قضیه وجودی برای حالت $G = 1$ از اول غلط خواهد بود. پس:

تعریف. یک فضای توپولوژیک X را ساده - همبند نیمه موضعی^۲ گویند اگر هر $x \in X$ یک همسایگی U داشته باشد به‌گونه‌ای که هر راه واقع در U و مبتنی بر x ، در فضای X مانسته‌جا با صفر باشد.

در این تعریف، شرط را نیمه موضعی خوانده‌ایم زیرا هر چند طوقه‌ها «موضعی» هستند، یعنی در U قرار دارند، اما مانسته‌جاییهای آنها با راه ثابت، سراسری هستند، بدین معنی که باید این مانسته‌جاییها در X صورت گیرند. بدیهی است که این ویژگی از U به زیرهمسایگیهایش نیز منتقل می‌شود. «ساده - همبند موضعی»^۳ به طریق زیر تعریف می‌شود: هر همسایگی شامل یک زیرهمسایگی ساده - همبند است، یعنی شامل یک همسایگی V است به قسمی که همه طوقه‌های واقع در V ، در آن مانسته‌جا با صفرند. مخروطی که روی مثال فوق ساخته شود

1. null-homotopic 2. semi-locally simply connected
3. locally simply connected



ساده - همبند نیمه موضعی است، اما ساده - همبند موضعی نیست. ولی این خارج از موضوع است؛ مهمتر از آن، این است:

ملاحظه. خمینه‌ها (به وضوح) و همچنین مجتمعهای صَمْتَب همیشه ساده - همبند نیمه موضعی (و حتی موضعی) هستند. رجوع شود به بخش ۶.۳، فصل ۳، مرجع [۱۶].

فرض اضافی. در ادامه این بحث راجع به «برهان قضیه وجودی که هنوز پیدا نکرده‌ایم»، X را ساده - همبند نیمه موضعی فرض خواهیم کرد.

پس، برای U های بس کوچک، خواهیم داشت $Y_x \cap V(U, y) = \{y\}$ ، و از آنجا گسستگی تارها نتیجه می‌شود، و اثبات (ث)، که می‌خواستیم، به پایان می‌رسد.

(ج) بیمایگی موضعی. فرض می‌کنیم $x \in X$ و U یک همسایگی باز ساده - همبند نقطه x باشد به قسمی که هر طوقه در x در کل فضای X مانسته جا با صفر باشد. در این صورت، بی‌درنگ می‌توان تحقیق کرد که برای هر $z \in V(U, y)$ ، تساوی $V(U, y) = V(U, z)$ برقرار است. به ازای $y \in Y_x$ ، $V(U, y)$ ها مجموعه‌های باز دوبره دو جدا از هم‌اند و $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{y \in Y_x} V(U, y)$. بنابراین، تصویر π و تناظر $\{y\} \rightarrow V(U, y)$ که برای $y \in Y_x$ خوشتعریف است، توأمأ یک نگاشت دوسویی بی‌وسه $U \times Y_x \rightarrow \pi^{-1}(U)$ را تعریف می‌کنند، که باید باز بودن آن را بیازماییم (یعنی تحقیق کنیم که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز تبدیل می‌کند). برای این کار، کافی است تحقیق کنیم که خود تصویر، یک نگاشت باز است، که این نیز بسیار ساده است. مجموعه‌های $V(U, y)$ ، برای $y \in Y$ و مجموعه‌های باز همبند - راه $U \subset X$ ، یک پایه برای توپولوژی Y تشکیل می‌دهند. لذا فقط باید معلوم کنیم که $\pi(V(U, y))$ باز است. اما، این مجموعه برابر است با U . بنابراین، h باز است و $\pi : Y \rightarrow X$ در واقع بیمایه موضعی است، اثبات (ج) تمام است.

(ج) همبند - راهی Y . اگر $Y = [\alpha]_{\sim}$ ، آنگاه $t \mapsto [\alpha_t]_{\sim}$ معرّف یک راه از y_0 به y است، که در آن $\alpha_t(s) := \alpha(st)$. اثبات (ج) نیز تمام است.

(ح) $G(Y, y_0) = G$. یک طوقه α در x_0 معرّف عضوی از $G(Y, y_0)$ است، اگر و تنها اگر بتواند به یک طوقه در y_0 بالا برده شود. و اما (باتوجه به (ج))، خود این امر ممکن است اگر و تنها اگر

$[x_0] \sim = [y_0]$ ، یعنی $[x_0] \sim = [y_0]$ ، و لذا اگر و تنها اگر $[x_0] \sim = [y_0]$ ، اثبات (ح) هم تمام می شود، همان چیزی که می خواستیم.

بنابراین، با افزودن فقط یک فرض اضافی، راه را برای آنکه همه چیز برقرار شود، هموار و قضیه زیر را ثابت کرده ایم:

قضیه وجود. اگر X همبند - راه، همبند - راه موضعی، و همچنین ساده - همبند نیمه موضعی باشد، و اگر $G \subset \pi_1(X, x_0)$ یک زیرگروه دلخواه باشد، آنگاه یک فضای پوششی همبند - راه، و همبند - راه موضعی (Y, y_0) برای (X, x_0) موجود خواهد بود که در شرط $G(Y, y_0) = G$ صدق کند.

نکته. از لم تکراری به وضوح نتیجه می شود که فضای Y در قضیه فوق، ساده - همبند نیمه موضعی است.

۷. تبدیلات پوششی و پوشش عام

ملاک قابلیت بالابری و قضیه های وجود و یکتایی، مهمترین جزء نظریه فضاهاى پوششی را تشکیل می دهند. اکنون به ذکر برخی از نتایج مفید آن می پردازیم.

تعریف (تبدیل پوششی). منظور از یک تبدیل پوششی 1 ، یا تبدیل عرشه یی 2 ، برای یک نگاشت پوششی $\pi : Y \rightarrow X$ ، یک خودریختی از این پوشش است، یعنی یک همسانریختی $\varphi : Y \xrightarrow{\cong} Y$ بالای X :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & Y \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi \\
 & X &
 \end{array}$$

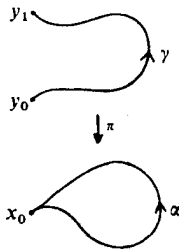
تعویض پذیر است

واضح است که تبدیلات پوششی تشکیل یک گروه می دهند، که ما آن را با \mathcal{D} نمایش می دهیم.

به عنوان یک نتیجه بلافاصله قضیه یکتایی، داریم:

تبصره. فرض کنیم Y یک فضای پوششی همبند - راه و همبند - راه موضعی برای فضای X باشد و $y_0, y_1 \in Y$ نقاطی بالای x_0 باشند. برای آنکه یک تبدیل پوششی $\varphi: Y \rightarrow Y$ با شرط $\varphi(y_0) = y_1$ (که البته φ یکتاست) وجود داشته باشد، لازم و کافی است که (Y, y_0) و (Y, y_1) دارای یک زیرگروه مشخصه در $\pi_1(X, x_0)$ باشند. بالأخص، گروه تبدیلات پوششی آزادانه روی Y عمل می کند: یعنی فقط عضو همانی این گروه، نقاط ثابت دارد.

اما معنی شرط $G(Y, y_0) = G(Y, y_1)$ چیست؟ برای بررسی این موضوع، نگاهی به ارتباط بین $G(Y, y_1)$ و $G(Y, y_0)$ در حالت کلی، برای دو نقطه y_0 و y_1 بالای x_0 ، می اندازیم. فرض کنیم γ راهی در Y از y_0 به y_1 باشد، و $\alpha := \pi \circ \gamma$ تصویر آن:



در این صورت، یک نمودار تعویض پذیر از یکریختیهای گروهی داریم،

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow[\cong]{[\gamma^{-1} \cdots \gamma]} & \pi_1(Y, y_1) \\ \cong \downarrow \pi_* & & \cong \downarrow \pi_* \\ G(Y, y_0) & \xrightarrow[\cong]{[\alpha]^{-1} \cdots [\alpha]} & G(Y, y_1) \end{array}$$

و لذا $G(Y, y_1) = [\alpha]^{-1} G(Y, y_0) [\alpha]$ ، که نتیجتاً معنای آن این است که تساوی $G(Y, y_0) = G(Y, y_1)$ برقرار است اگر و تنها اگر $[\alpha]$ در نرمالساز^۱ زیرگروه $G(Y, y_0)$ در گروه $\pi_1(X, x_0)$ واقع باشد

یادآوری (از جبر). اگر B زیرگروهی از یک گروه A باشد، مجموعه

$$N_B := \{a \in A \mid aBa^{-1} = B\}$$

1. normalizer

را نرمال‌ساز B در A می‌نامند. این نرمال‌ساز، خود یک زیرگروه A است، و روشن است که B در نرمال‌ساز خود، نرمال است: $A \triangleleft N_B \subset A$ ؛ نرمال‌ساز، به تعبیر ساده، بزرگترین گروه بین B و A است که B در آن نرمال است.

قضیه در بارهٔ گروه تبدیلات پوششی. فرض کنیم $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ پوششی برای یک فضای همبند - راه و همبند - راه موضعی باشد، و $G := G(Y, y_0)$ زیرگروه مشخصهٔ آن، یعنی نگارهٔ هم‌ریختی یک‌به‌یک $\pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ باشد که براثر تصویر القا شده است. در این صورت، به‌ازای هر $[\alpha] \in N_G$ از عضو نرمال‌ساز G در $\pi_1(X, x_0)$ ، دقیقاً یک تبدیل پوششی $\varphi_{[\alpha]}$ وجود دارد که y_0 را به منتهای $(1, \tilde{\alpha})$ ، در بالابری α با شروع از y_0 ، می‌نگارد. به‌علاوه، به‌این طریق، یک نگاشت $N_G \rightarrow \mathcal{D}$ به‌دست می‌آوریم که در واقع معرف یک یکرختی گروهی $\mathcal{D} \cong N_G/G$ است.

اثبات قضیه را به‌عنوان تمرینی مطبوع توصیه می‌کنم، تا بدین وسیله بتوانید با مفاهیم متعدد جدیدی که در این فصل آورده‌ایم، بهتر آشنا شوید. فراموش نکنید که در فهرست احکام منفردی که باید ثابت شوند، دستور $\varphi_{[\alpha\beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$ را بگنجانید. (دستور به همین شکلی که نوشته شده صحیح است، و نه در جهت عکس؛ با اینکه در $\alpha\beta$ نخست راه α و سپس راه β منظور می‌شود، در $\varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$ نخست تبدیل پوششی $\varphi_{[\beta]}$ اعمال می‌شود).

فِع و تعریف (پوششهای نرمال). در یک پوشش همبند - راه و همبند - راه موضعی $Y \rightarrow X$ ، گروه تبدیلات پوششی به‌صورت تریا^۱ روی تارها عمل می‌کند (یعنی، به‌ازای هر دو نقطهٔ یک تار، یک تبدیل پوششی هست که یکی از دو نقطه را به دیگری می‌برد؛ و یا، به بیان دیگر، تارها، مدارهای عمل \mathcal{D} بر Y هستند) اگر و تنها اگر، برای یک نقطهٔ $y_0 \in Y$ (و در نتیجه برای هر نقطهٔ $y_0 \in Y$)، گروه $G(Y, y_0)$ در گروه $\pi_1(X, x_0)$ نرمال باشد. این‌گونه پوششها را پوششهای نرمال^۲ می‌نامند.

فِع. برای پوششهای نرمال $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ ، ویژگیهای زیر برقرارند:

$$\mathcal{D} = \pi_1(X, x_0)/G(Y, y_0) \quad (i)$$

(ii) تعداد برگهای پوشش، با مرتبهٔ گروه \mathcal{D} برابر است (زیرا تارها مدارهای عمل آزاد \mathcal{D} هستند)، و لذا با مرتبهٔ π_1/G ، که در نظریهٔ گروهها، «شاخص»^۳ $G(Y, y_0)$ در $\pi_1(X, x_0)$ نامیده می‌شود، نیز برابر است.

(iii) نگاشت دوسویی از فضای مداری Y/\mathcal{D} به روی X ، که توسط تصویر $\pi: Y \rightarrow X$ تعریف می‌شود، در واقع یک همسانریختی است:

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow \text{تصویر متعارف} & \searrow \pi & \\ Y/\mathcal{D} & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

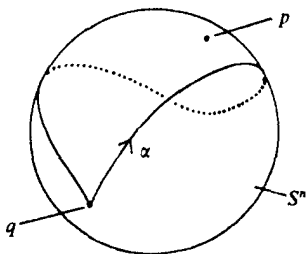
برهان (iii). پیوستگی این نگاشت، نتیجه‌ای است از فصل ۳، بخش ۲، نکته ۱. باز بودن آن نیز نتیجه این واقعیت است که نگاشت $\pi: Y \rightarrow X$ یک همسانریختی موضعی، و لذا باز است.

*

همه این احکام در حالت خاص $G(Y, y_0) = \{1\}$ ، برقرارند، که هم اکنون به بررسی آن می‌پردازیم. از آنجا که $\pi_1(Y, y_0) \cong G(Y, y_0)$ ، این حالت اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر گروه بنیادی Y بی‌مایه باشد. یادآوری می‌کنیم که چنین فضاهایی را ساده - همبند می‌نامند:

تعریف (ساده - همبند). یک فضای همبند راه Y را ساده - همبند^۱ نامند هرگاه برای یک (و لذا برای هر) $y_0 \in Y$ ، گروه بنیادی $\pi_1(Y, y_0)$ بی‌مایه باشد.

پس، معنی این شرط این است که هر طوقه در Y مانسته‌جا با صفر است. روشن است که فضاهای انقباضپذیر^۲، ساده - همبندند. اما، مثلاً برای $n \geq 2$ ، کره S^n نیز ساده - همبند است. با کمال تعجب، نمی‌توان گفت که این واقعیت کاملاً آشکار است. چرا چنین است؟ آیا این کافی نیست که یک طوقه دلخواه α را در نقطه q از کره S^n در نظر بگیریم و با انتخاب یک نقطه $p \in S^n$ خارج از نگاره α این واقعیت را به‌کارگیریم که $\{q\}$ یک درون بردگر دیسی قوی^۳ برای $S^n \setminus p$ است؟



1. simply connected

2. contractible

3. strong deformation retract

چرا، چرا؛ اما احتمالاً باید تاکنون مطالبی دربارهٔ «خمهای فضا پرکن»^۱ شنیده باشید (مقالهٔ ج. بتانو: «دربارهٔ خمی که تمامی سطح یک صفحه را پر می‌کند»^۲)، و به همین اعتبار، می‌توان طوقه‌های کره پرکنی یافت که برای آنها چنان نقطهٔ p ی اصلاً وجود نداشته باشد.

ولی، ارائهٔ یک برهان مستقیم، حقیقتاً مشکل نیست: کافی است بازهٔ $[0, 1]$ را در نقاط $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ به فواصل بسیار ریز چنان تقسیم کنیم که α در هیچ‌یک از بازه‌های فرعی این تقسیم جزئی «کره پرکن»^۳ نباشد. به‌موجب پیوستگی، این کار همیشه ممکن است. سپس، انقباضپذیری $S^n \setminus pt$ ایجاب می‌کند که یک مانسته‌جایی برای α وجود داشته باشد که a را در t_i ، منتهای بازه‌های فرعی، تثبیت کند، و به‌علاوه، α را به طوقه‌ای که هریک از بازه‌های فرعی را به‌یک دایرهٔ عظیمه می‌نگارد، ببرد. حال، این خم دیگر کره پرکن نیست، و استدلالی که قبلاً در نظر داشتیم معتبر خواهد بود.

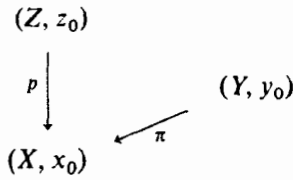
اگر Y یک فضای پوششی همبند-راه و همبند-راه موضعی برای فضای X باشد و X ساده-همبند باشد، آنگاه $Y \rightarrow X$ باید چندگانگی (تکرر) از مرتبهٔ یک داشته باشد، و در نتیجه باید یک همسانریختی باشد. این ملاحظه، غالباً بسیار مفید و بیانگر این است که یک فضای ساده-همبند نمی‌تواند پوششهای جالبی داشته باشد، که نتیجهٔ بلافصل قضیهٔ یکتایی است. اما حالا می‌خواهیم پوششهایی را در نظر بگیریم که در آنها فضای پوششی Y ، و نه فضای پایهٔ X ، ساده-همبند باشد.

تعریف (پوشش عام). یک فضای پوششی همبند-راه و همبند-راه موضعی $Y \rightarrow X$ را یک پوشش عام^۵ خوانیم هرگاه Y ساده-همبند باشد.

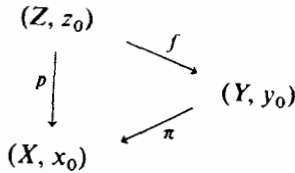
نتیجهٔ رده‌بندی فضاهای پوششی. اگر X همبند-راه، همبند-راه موضعی و ساده-همبند نیمه موضعی باشد، و $x_0 \in X$ ، آنگاه دقیقاً یک پوشش عام $(X, x_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ با تقریب یکریختی وجود دارد، و این یکریختی به طریق یکتا معین می‌شود. به این اعتبار، می‌توان از پوشش عام^۶ \tilde{X} برای X صحبت کرد.

ببینیم چه چیزی در مورد پوشش عام، «عام» است؟ تأملی مقدماتی در این زمینه ضروری است. بگیریم X یک فضای همبند-راه، همبند-راه موضعی و ساده-همبند نیمه موضعی باشد، و فرض کنیم دو فضای پوششی به‌شکل زیر داده باشند

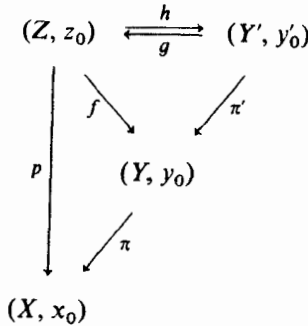
1. space-filling curves
 2. Peano, G. "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane", *Math. Annalen* 36 (1890), 157-160.
 3. sphere-filling 4. multiplicity 5. a universal cover 6. the universal cover



که زیرگروه‌های مشخصه یکی (H برای p و G برای π) در دیگری قرار داشته باشد: $H \subset G \subset \pi_1(X, x_0)$. در این صورت، بنابر ملاک قابلیت بالا بری، p را می‌توان «به π بالا برد»، یعنی دقیقاً نگاشت پیوسته $f: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ هست که نمودار زیر را تعویض‌پذیر می‌سازد:



این f همواره یک نگاشت پوششی خواهد بود. برای آنکه ببینیم چرا چنین است، نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

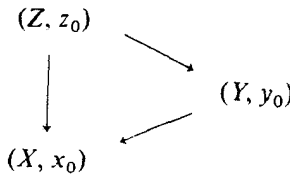


که در آن π' نگاشت پوششی است که زیرگروه مشخصه اش H' ، نگاره وارون H در $\pi_1(Y, y_0)$ است:

$$\begin{array}{ccc}
 H' \subset \pi_1(Y, y_0) & & \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H \subset G \subset \pi_1(X, x_0) & &
 \end{array}$$

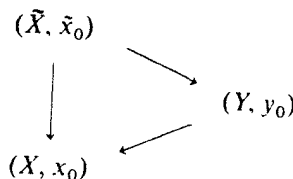
و به علاوه، h در نمودار فوق، بالابری f به π' ، و g بالابری $\pi \circ \pi'$ به p است. نشان خواهیم داد که h یک یکریختی از فضاهای بالای (Y, y_0) است (و در نتیجه، f یک نگاشت پوششی است، زیرا که π' پوششی است). داریم $\pi' \circ f = h \circ g$ ، و اکنون اثبات می‌کنیم که g وارون h است. در هر حال داریم $(g \circ h = \text{Id}_{(Z, z_0)})$ ، زیرا این نگاشت، بالابری p به خود p است: $p \circ g \circ h = \pi \circ \pi' \circ h = \pi \circ f = p$. برای آنکه تساوی $h \circ g = \text{Id}_{(Y, y_0)}$ را نیز ثابت کنیم، نشان می‌دهیم که $h \circ g$ یک بالابری به خود است. برای این کار، ثابت می‌کنیم که $\pi' \circ h \circ g = f \circ g = \pi'$ ، یعنی $f \circ g = \pi'$ ، اما این هم از این واقعیت نتیجه می‌شود که هر دو نگاشت، بالابریهایی برای $\pi \circ \pi'$ به π هستند: نگاشت $\pi' \circ h \circ g = f \circ g = \pi'$ در هر حال چنین است، و نگاشت $f \circ g$ نیز چنین است زیرا $\pi \circ \pi' \circ f \circ g = p \circ g = \pi \circ \pi'$. همان چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم. \square

خلاصه کنیم: اگر در دو فضای پوششی برای (X, x_0) ، زیرگروه مشخصه یکی در دیگری قرار داشته باشد، فضای پوششی که زیرگروه مشخصه کوچکتری دارد، به طور متعارف فضای دیگر را می‌پوشاند، و این هم به گونه‌ای است که سه نگاشت پوششی حاصل، یک نمودار تعویضپذیر پدید می‌آورند.



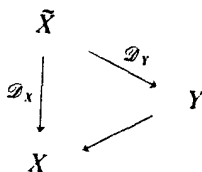
این همان تأمل مقدماتی ما بود. اما، چون زیرگروه مشخصه پوشش عام (\tilde{X}, \tilde{x}_0) بی‌مایه، یعنی برابر $\{1\}$ است، گزاره زیر نتیجه می‌شود:

گزاره. پوشش عام (\tilde{X}, \tilde{x}_0) ، هر فضای پوششی همبند - راه دیگر (Y, y_0) برای (X, x_0) را به طور متعارف می‌پوشاند، و این پوشاندن به گونه‌ای است که



تعویضپذیر است.

همین مطلب به خودی خود دلیل کافی است تا بدانیم که چرا پوشش عام را باید عام نامید، اما واقعیت دیگری نیز هست که این نکته را بیشتر تقویت می‌کند: پوشش عام، بالأخص نرمال نیز هست (واضح است)، و اگر \mathcal{D}_X معرّف گروه تبدیلات پوششی $\tilde{X} \rightarrow X$ باشد، همسانریختی متعارف $\tilde{X}/\mathcal{D}_X \cong X$ را، از روی خود تصویر به دست می‌آوریم. با انتخاب نقاط پایه $x_0 \rightarrow \tilde{x}_0$ ، یک یکریختی متعارف $\pi_1(X, x_0) \cong \mathcal{D}_X$ نیز، با همان جزئیاتی که در قضیه راجع به گروه تبدیلات پوششی شرح دادیم، خواهیم داشت. حال، این دو گروه تبدیلات پوششی، متناظر با موقعیت مذکور در گزاره فوق را، در نظر می‌گیریم:



در این صورت، داریم $\mathcal{D}_Y \subset \mathcal{D}_X$ ، و در مقایسه با $\pi_1(X, x_0) \cong \mathcal{D}_X$ مجموعه \mathcal{D}_Y چیزی جز زیرگروه مشخصه $G(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ نخواهد بود. حال با توجه به اینکه $\tilde{X} \rightarrow X$ نیز یک همسانریختی $\tilde{X}/\mathcal{D}_Y \cong Y$ را القا می‌کند، با در نظر گرفتن کلیه جوانب، قضیه زیر را داریم:

قضیه عمومیّت برای پوشش عام. فرض کنیم X یک فضای همبند - راه، همبند - راه موضعی و ساده - همبند نیمه موضعی باشد، و $x_0 \in X$ ؛ و فرض کنیم که $(X, x_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ پوشش عام باشد، و $\pi_1(X, x_0) \cong \mathcal{D}_X$ گروه تبدیلات پوششی برای $\tilde{X} \rightarrow X$ چنانچه $\Gamma \subset \mathcal{D}_X$ یک زیرگروه دلخواه باشد، نگاشت

$$\begin{array}{c}
 (\tilde{X}/\Gamma, [\tilde{x}_0]) \\
 \downarrow \\
 (X, x_0)
 \end{array}$$

نگاشت پوششی یک فضای پوششی همبند - راه خواهد بود، و همه فضاهای پوششی همبند - راه برای

(X, x_0) ، با تقریب یک یکرختی که به طور یکتا معین می شود، به همین طریق به دست می آید.

*

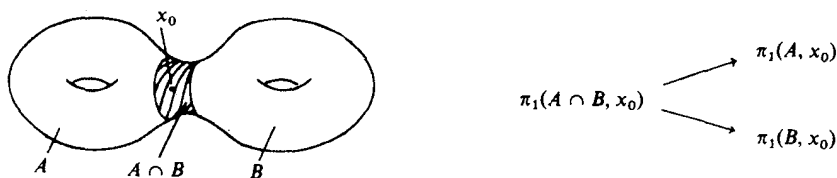
مایلم این قسمت را به چند تذکر بسیار کوتاه درباره چگونگی محاسبه گروههای بنیادی، که نهایت اهمیت را دارند، ختم کنم. یکی از وسایل محاسبه، خود نظریه فضاهای پوششی است: گاهی اوقات به سادگی می توان گروه تبدیلات پوششی برای پوشش عام X را معین کرد. مثلاً داریم $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ ، زیرا بدیهی است که انتقال به وسیله اعداد صحیح $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ گروه تبدیلات پوششی عام $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ را تشکیل می دهد؛ اما برای $n \geq 2$ ، داریم $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ، زیرا پوشش عام $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ چندگانگی دو دارد.

نکته بدیهی ولی مفید زیر نیز مهم است: گروه بنیادی یک حاصلضرب، به طریق متعارف، برابر است با حاصلضرب گروههای بنیادی:

$$\pi_1(X \times F, (x_0, f_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(F, f_0)$$

فضاهای پوششی و حاصلضربها، حالتی خاص تاریخیهای موضعاً بیمایه^۱ هستند، و اینها نیز، حالتی خاص تاریخیهای سر^۲ هستند، که برای آنها «دنباله کامل مانسته جایی»^۳ شامل اطلاعاتی درباره گروه بنیادی فضای پایه، تار، و کل فضای است (در این زمینه رجوع شود مثلاً به ص ۶۵، مرجع [۱۱]). ضمناً فراموش نکنیم که تابعگون π_1 به طور مسلم ناوردای مانسته جایی^۴ است.

بالآخره باید به قضیه مهم زیرت - وان کامین^۵ اشاره کنم، که به ما امکان می دهد تحت شرایطی گروه بنیادی فضایی به شکل $X = A \cup B$ را، از روی سه گروه و دو همریختی زیر:



به دست آوریم (مثلاً رجوع کنید به شماره ۸.۵، فصل سوم، مرجع [۱۶]).

۸. نقش فضاهای پوششی در ریاضیات

مفهوم فضاهای پوششی از نظریه توابع، به ویژه از بررسی توابع «چند مقداری»^۶ تمام ریخت^۷، که در

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 1. locally trivial fibrations | 2. Serre fibrations | 3. exact homotopy sequence |
| 4. homotopy invariant | 5. Seifert-van Kampen | 6. multi-valued |
| 7. holomorphic | | |

ادامه تحلیلی ظاهر می‌شوند، نشأت می‌گیرد. این مفهوم را ریمان هنگامی کشف کرد که هنوز وسیله کافی، طبق معیارهای امروزی، برای درک درست آن وجود نداشت.

فرض کنیم $G \subset \mathbb{C}$ یک حوزه باشد و f جوائه^۱ یک تابع تمام‌ریخت، که بتواند در طول راهی واقع در G ادامه یابد (مثلاً تابع \sqrt{z} در $\mathbb{C} \setminus 0$ یا تابع \log در $\mathbb{C} \setminus 0$ ، یا تابع $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ در $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ و هکذا). ادامه تحلیلی در این حال، معرّف یک «تابع چند مقداری» در G است، و این خود اساساً یک تابع (تک مقداری)^۲ تمام‌ریخت در یک فضای پوششی روی G است

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

(باتوجه به مطالب گذشته، می‌توان در واقع گفت) که «به طریق متعارف» از جوائه‌های ادامه یافته به دست می‌آید.

تصادفاً، پوششهایی که بدین طریق به دست می‌آیند، حقیقتاً پوششهایی به معنای مورد نظر ما هستند (← تعریف ص ۱۶۷). پیدا شدن نقاط شاخه‌یی فقط هنگامی شروع می‌شود که \tilde{G} ، با افزودن نقاطی از $G \setminus \mathbb{C}$ که f در آنها نمی‌تواند به طور تحلیلی ادامه یابد، تکمیل شود (مثلاً مانند نقطه 0 در مورد \sqrt{z})، و فضاهای پوششی «حفره»^۳ دار (مانند مثال ص ۱۶۸)، هنگامی مطرح می‌شوند که f بتواند به همه نقاط G ، ولی نه در طول هر راه، ادامه پیدا کند.

بدین ترتیب، توابع چند مقداری که در نظریه توابع به آنها برمی‌خوریم (و من نیازی نمی‌بینم که در شرح فایده‌ای که توابعی نظیر \sqrt{z} برای ریاضیدانان دارند، صرف وقت کنم) اکنون می‌توانند در قالب فضاهای پوششی به خوبی درک شوند، و از همه مهمتر: در دسترس روشهای معمولی نظریه توابع قرار داده شده‌اند. بررسی این‌گونه توابع، نه تنها انگیزه اصلی برای ابداع فضاهای پوششی بوده، بلکه حتی تا به امروز یکی از مهمترین کاربردهای آن نیز بوده است، که برخلاف انتظار، هیچ‌یک از روشهای جدیدتر هم نتوانسته است در این زمینه جانسین آن شود.

اما مطلب به همین جا ختم نمی‌شود. بگذارید نخست به این تذکره کلی بپردازیم که فضاهای پوششی غالباً «در طبیعت یافت می‌شوند»، یعنی ناخواسته، در حالی که مشغول بررسی مسائل کاملاً متفاوتی

۱. جوائه = germ، دو تابع f_1 و f_2 را در نقطه مفروض x از یک فضای توپولوژیک X ، موضعاً هم‌ارز خوانیم هرگاه یک همسایگی نقطه x چون U موجود باشد به قسمی که $f_1|_U = f_2|_U$. در این صورت می‌نویسیم $f_1 \sim f_2$. رده هم‌ارزی تابع f برای x را «جوائه تابع f در نقطه x » گوئیم. م.

هستیم با آنها مواجه می‌شویم، و در این مواقع، می‌توانیم اطلاعات به ظاهر از غیب رسیده را که فضاهای پوششی فراهم کرده‌اند، با خرسندی مورد استفاده قرار دهیم. مثلاً، فرض کنید که یک گروه متناهی G آزادانه روی یک فضای توپولوژیک Y عمل کند؛ در این صورت، نگاشت خارج قسمت $Y \rightarrow Y/G$ یک نگاشت پوششی است. و یا، مثال دیگر، فرض کنید که با خانواده‌ای از توابع دیفرانسیلی‌پذیر، با تکینگیهای فاقد انشعاب^۱، سروکار داریم؛ در این صورت، این تکینگیها پوششی برای فضای پایه تشکیل می‌دهند. و هكذا موارد دیگر و دیگر.

اما فضاهای پوششی را اغلب حساب شده و عمدتاً به‌عنوان ابزارهایی وارد می‌کنند. فضاهای پوششی گرایش به این دارند که از خود فضایی که آنها می‌پوشانند «ساده‌تر» باشند (مثال $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$) را می‌توان نمادی از این دست پنداشت)، بنابراین، اصل استفاده از فضاهای پوششی، کلاً چنین است: ابتدا X موضوع مورد علاقه ما برای مطالعه است، اما X بیش از حد پیچیده و مستقیماً دستیابی به آن دشوار است، لذا سراغ یک فضای پوششی Y روی X می‌رویم که روشنتر به نظر آید، و از نظریه فضاهای پوششی استفاده می‌کنیم تا بتوانیم از روی اطلاعاتی که از Y داریم، اطلاعاتی از X به دست آوریم. مثلاً، هر خمینه جهت‌ناپذیر^۲ M یک خمینه پوششی جهت‌پذیر دو-برگی^۳ $\tilde{M} \rightarrow M$ دارد (که «پوشش دوگانه جهت‌پذیر»^۴ آن نامیده می‌شود)، و این وسیله‌ای برای بررسی برخی احکام در حالت جهت‌ناپذیری است، که اثبات آنها، در وهله نخست فقط «به‌منظور» استفاده در خمینه‌های جهت‌پذیر صورت می‌گیرد. در تعدادی از کاربردها، این روند تسهیل، تنها هنگامی همه توان خود را نشان می‌دهد که می‌خواهیم به پوشش عام برسیم. ذیلاً، به سه مثال مهم از این فرایند اشاره می‌کنم.

(۱) رویه‌های ریمان. رویه‌های ریمان، خمینه‌های مختلط همبند یک بعدی هستند، که در نظریه توابع معروف‌اند. به‌عنوان فضاهای توپولوژیک، خمینه‌هایی دو بعدی، و لذا رویه هستند. فرض کنیم X یک رویه ریمان و $\tilde{X} \rightarrow X$: π پوشش عام آن باشد. بنابراین، در وهله نخست \tilde{X} فقط یک فضای توپولوژیک است و هنوز رویه ریمان نیست، اما ساختار مختلط X مستقیماً به فضاهای پوششی نیز منتقل می‌شود؛ به‌آسانی می‌توان نشان داد که روی \tilde{X} دقیقاً یک ساختار مختلط هست که برای آن π تمام‌ریخت است. بنابراین، \tilde{X} ناچار یک رویه ریمان ساده - همبند است، و البته درک رویه‌های ریمان ساده - همبند خیلی آسانتر از حالت رویه‌های ریمان است، زیرا: بنابر قضیه نگاشت ریمان برای رویه‌های ریمانی، \tilde{X} از نظر دوسو تمام‌ریختی^۵، یا با صفحه C ، یا با کره ریمان CP^1 و یا با قرص یک $U \subset C$ هم‌ارز است! خوب، حالا ببینیم چگونه از این شناخت برای به‌دست آوردن اطلاعاتی راجع به X استفاده می‌کنیم؟ ببینید، تبدیلات پوششی $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ نگاشتهای دوسو تمام‌ریخت‌اند (این

1. bifurcation 2. non-orientable 3. tow-fold
4. orientable double cover 5. biholomorphically

حکمی است بیمايه و نتیجه‌ای از هیچ قضیه خاصی نیست؛ گروه تبدیلات پوششی، \mathcal{D} ، آزادانه و «کاملاً ناپيوسته»^۱ عمل می‌کند، یعنی $\tilde{x} \in \tilde{X}$ دارای یک همسایگی U است به قسمی که مجموعه‌های (U, φ) ، به‌ارای $\varphi \in \mathcal{D}$ ، دوه‌دو جدا از هم‌اند؛ لذا، فضای مداری چنین عملی، \tilde{X}/\mathcal{D} ، یک ساختار مختلط دارد که از \tilde{X} به‌ارث می‌برد. این ساختاریگانه ساختاری است که نگاشت $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\mathcal{D}$ را تمام‌ریخت می‌سازد. بنابراین، همسان‌ریختی $\tilde{X}/\mathcal{D} \cong \tilde{X}$ که توسط نظریه فضاهای پوششی داده می‌شود، آشکارا دوسو تمام‌ریخت است. حال، بدون استفاده از چیزی پیچیده‌تر از نظریه فضاهای پوششی (که یک نظریه توپولوژیک است!) و قضیه نگاشت ریمان، می‌توانیم نتیجه زیر را به‌دست آوریم: با تقریب هم‌ارزی دوسو تمام‌ریخت، رویه‌های ریمان دقیقاً عبارت‌اند از خارج قسمتهای \tilde{X}/\mathcal{D} ، که $\tilde{X} = \mathbb{C}P^1$ یا $\tilde{X} = \mathbb{C}$ ، یا $\tilde{X} = U$ ، و \mathcal{D} زیرگروهی از گروه خودریختیهای دوسو تمام‌ریخت \tilde{X} است که آزادانه و کاملاً ناپيوسته عمل می‌کند.

گروه خودریختیهای $\mathbb{C}, \mathbb{C}P^1$ و U از مدها پیش‌مورد مطالعه قرار گرفته، و صریحاً مشخص شده‌اند. زیرگروههایی را که آزادانه و کاملاً ناپيوسته عمل می‌کنند، می‌توانیم علی‌الاصول جستجو و \tilde{X}/\mathcal{D} را بررسی کنیم، و هرچند که این مسأله در حالت $\tilde{X} = U$ به هیچ‌وجه مسأله ساده‌ای نیست، اما دست‌کم به مرحله‌ای رسیده‌ایم که نقطه شروع واقعی برای بررسیهای بعدی است، و برای حل مسأله اولیه‌ای که داده‌های آن کلاً در عبارت «فرض کنیم X یک رویه ریمان باشد»، خلاصه می‌شد، گام بزرگی به جلو برداشته‌ایم.

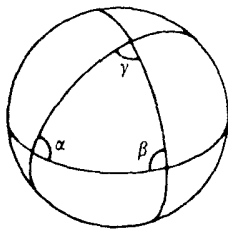
(۲) صورتهای فضا. یکی از مسایل کلاسیک هندسه دیفرانسیل، که تا به امروز هم کاملاً حل نشده است، رده‌بندی صورتهای فضا است. منظور از یک صورت فضا^۲، یا یک صورت کلیفرد-کلاین^۳، یک خمینه ریمانی همبند n بعدی کامل $(M, \langle \dots, \dots \rangle)$ با انحناى مقطعی ثابت^۴ K است. (ص ۶۹، مرجع [۲۱]). بدون کاستن از کلیت، می‌توان فقط حالت‌های $-1, 0, +1 = K$ را در نظر گرفت. یک فضای پوششی همبند برای یک صورت فضا، به طریق متعارف، خود نیز یک صورت فضا با همان انحنا است. مشابه قضیه نگاشت ریمان، در اینجا قضیه کیلینگ-هویف^۵ را داریم که می‌گوید: تنها صورتهای فضای همبند، با تقریب طولپایی، به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$\text{کره } S^n \text{ با انحناى } +1 = K;$$

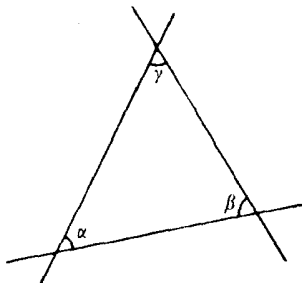
$$\text{فضای اقلیدسی } \mathbb{R}^n \text{ با انحناى } 0 = K;$$

$$\text{فضای هذلولوی } \mathbb{H}^n \text{ با انحناى } -1 = K$$

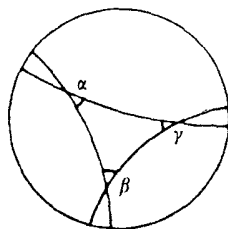
1. properly discontinuously 2. space forms 3. Clifford-Klein form
4. with constant-sectional curvature 5. Killing-Hopf theorem



$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

مثلهای زودزیک در کره S^2 ، در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^2 و در صفحه هذلولی (D^2) با «متریک هذلولی»

گروههای طولیایی^۱ این سه فضا کاملاً شناخته شده‌اند، و مشابه آنچه که در مورد رویه‌های ریمان گفته شد، نظریه فضاهای پوششی نشان می‌دهد که: خارج قسمتهای S^n ، \mathbb{R}^n و \mathbb{H}^n بر زیرگروههای گروه طولیایی که آزادانه و کاملاً ناپیوسته عمل می‌کنند تنها صورتهای فضا، با تقریب طولیایی، هستند که وجود دارند.

(۳) گروههای لی. یک گروه لی^۲ عبارت است از یک خمینهٔ دیفرانسیلیپذیر همراه با یک ساختار گروهی «دیفرانسیلیپذیر» (یعنی نگاشت $G \times G \rightarrow G$ ، $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ دیفرانسیلیپذیر است). گروههای لی، در زمینه‌های مختلف ریاضیات، نقش عمده‌ای دارند، و از این حیث، در فیزیک نظری نیز نقش عمده‌ای بازی می‌کنند. گروههای لی $O(n)$ ، $GL(n, \mathbb{R})$ ، $GL(n, \mathbb{C})$ ، $SO(n)$ ، $U(n)$ ، $SU(n)$ ، مثالهای عموماً شناخته شده‌ای هستند. نظریه فضاهای پوششی نشان می‌دهد که پوشش عام \tilde{G} برای یک گروه همبند لی، خود نیز، به طریق متعارف، یک گروه لی است، و G به شکل خارج قسمت \tilde{G}/H است، که در آن H ، یک زیرگروه گسستهٔ \tilde{G} است. اما، گروههای ساده - همبند لی، قابل رده‌بندی هستند، زیرا علی‌الاصول به وسیلهٔ «جبر لی»^۳ خود، معین می‌شوند.

*

نمی‌خواهم شما را با این احساس رها کنم که فکر کنید ترفند فضای پوششی، نکتهٔ اساسی در این مسائل رده‌بندی است: قضیهٔ نگاشت ریمان خود به تنهایی عمیقتر از کل نظریه فضاهای پوششی از اول تا آخر است. اما می‌توان گفت که مفهوم فضای پوششی، مانند بسیاری از مفاهیم پایه‌یی دیگر در توپولوژی، جزء مفاهیم اجتناب‌ناپذیر در تعدادی از زمینه‌های مهم علمی است، و بر هر ریاضیدانی واجب است که از آن آگاه باشد.

قضیه تیخونوف



۱. یک قضیه نامحتمل؟

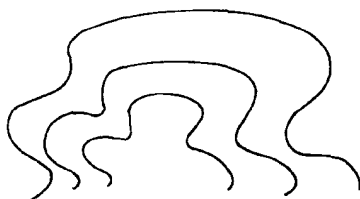
قبلاً در فصل ۱، هنگام بحث از مفاهیم بنیادی، مطمئن شدیم که حاصلضرب دو فضای توپولوژیک فشرده $X \times Y$ فضایی است فشرده، و به استقراء البته نتیجه می‌شود که حاصلضرب تعدادی متناهی از فضاهای فشرده، همواره فشرده است. در فصل ۶، بخش ۲، حاصلضرب تعداد دلخواه زیادی سازه رانیز

در نظر گرفتیم، و اکنون دوباره به این مطلب بازمی گردیم، زیرا که این فصل را به قضیه زیر اختصاص داده ایم:

قضیه (تیخونوف^۱ ۱۹۳۰). اگر $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک خانواده از فضاهای فشرده باشد، حاصلضرب $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ نیز فشرده است.

*

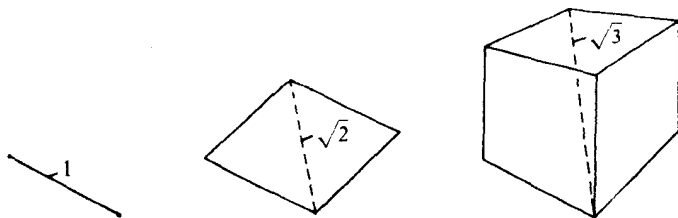
هر کس که برای نخستین بار قضیه تیخونوف را بشنود، ناچار اعتراف می کند که احساس ما از مفهوم فشردگی، بایستی برای حاصلضربهای نامتناهی، عکس آن را به ذهن القا کند. زیرا فشردگی، خود یک ویژگی متناهی بودن است (پوششهای باز متناهی را به یاد آورید)، و لذا جای تعجب نخواهد بود که این ویژگی به فضاهای حاصل از اجتماعهای متناهی یا حاصلضربهای متناهی فضاهای فشرده، منتقل شود. اما انتظار نداریم که، ساختی با تعداد بینهایت مصالح فشرده، باز هم ساختی فشرده باشد. ساده ترین مثالها نشان می دهند که بزرگ شدن پیاپی فضاهای فشرده، ممکن است سرانجام به فضاهای نافشرده بینجامد: مثلاً مجتمعهای صُثمُپِ بینهایت حجره‌یی، همواره نافشرده اند؛ خمینه‌های نافشرده را می توان با زیرمجموعه‌های فشرده «تحلیل برد»^۲.



$$\bigcup_{i \geq 1} K_i = M$$

$$K_{i-1} \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \dots$$

و یا، باید به فرایندی کاملاً بیش پا افتاده، که نوعاً نادر نیست، اشاره کنیم: الحاق یک نقطه تنها^۳ به یک فضای فشرده، باز هم یک فضای فشرده می دهد؛ اما با ادامه این کار بینهایت بار، یعنی با گرفتن اجتماع جدا از هم فضاهای فشرده مفروض و یک فضای گسسته نامتناهی، به یک فضای نافشرده می رسیم. از همین دیدگاه، چنانچه دنباله «مکعبها»ی:



$$[0, 1]^0 = [0, 1]^1 =$$

$$[0, 1]^2 =$$

$$[0, 1]^3 = \dots$$

1. Tychonoff

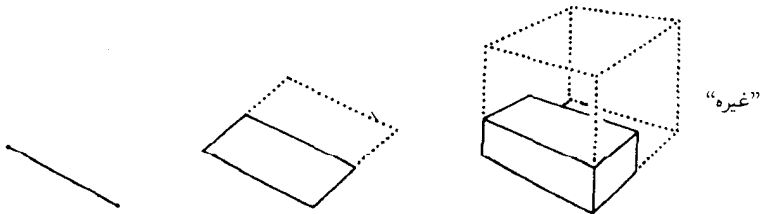
2. exhaust

3. isolated point

را در نظر بگیریم، به سختی می‌توانیم احساس کنیم که $\{0, 1\}^\infty$ باید فشرده باشد. همچنین، وقتی به شمولهای $\dots \subset \{0, 1\}^1 \subset \{0, 1\}^2 \subset \dots$ فکر کنیم، فشردگی $\{0, 1\}^\infty$ موجه به نظر نمی‌رسد: مگر نه این است که $\{0, 1\}^\infty$ واقعاً یک فضای گسسته نامتناهی و یا چیزی بسیار مشابه آن است؟

«در مقابل» با قضیه تیخونوف، می‌توان این واقعیت را شاهد آورد که گوی یک فضای برداری نرم‌دار، فقط در حالت بعد متناهی، فشرده است: که شاهدی دیگر در دفاع از این دیدگاه است که نامتناهی بودن بعد، مانع فشردگی است.

و اما، باز اگر می‌بینید که احساس ما در این زمینه دچار اشتباه می‌شود، به علت درک شهودی ما از فشردگی نیست، بلکه بیشتر از احساس ما نسبت به حاصلضربهاست. ما طبیعتاً درک شهودی خود از حاصلضرب را، نخست از حاصلضربهای دو یا سه سازه‌بی در فضای \mathbb{R}^2 اخذ کرده‌ایم، و لذا برای ما آن‌قدرها مشهود نیست که مفهوم «نزدیکی» در توپولوژی حاصلضرب‌بی حاصلضربهای نامتناهی، خصوصیتی است که فقط در مورد مختصاتی از نوع متناهی برقرار است: زیرا، در یک همسایگی U از یک نقطه $x_0 \in \prod_{\lambda \in A} X_\lambda$ ، هر قدر هم این همسایگی کوچک باشد، حکمی به شکل $u \in U$ ، مطلقاً چیزی دربارهٔ اکثر (یعنی همه جز تعدادی متناهی) مؤلفه‌های u ، u_λ ‌ها، نمی‌گوید، زیرا U باید شامل جعبه‌ای به شکل $\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$ باشد. به همین دلیل، تصویری که ما از مکعب بعدی داریم، و آن را از حالت متناهی بعد به دست می‌آوریم، تصور کاملاً مناسبی نیست. در دید ما که همواره تمایل داریم «نزدیک» را به معنی «نزدیک از لحاظ فاصله»^۱ تعبیر کنیم، شاید، به اصطلاح، مکعب هیلبرت این واقعیت را که: مؤلفه‌هایی از (x_1, x_2, \dots) که «بسیار دورند»، نسبتاً بی‌اهمیت‌اند، بهتر بتواند نشان دهد. مکعب هیلبرت^۲، جعبه‌ای است در یک فضای تفکیک‌پذیر هیلبرت که درازای یالهایش در امتداد محور e_n برابر $1/n$ است (قطر جعبه، کلاً برابر است با $\sqrt{\sum 1/n^2} = \pi/\sqrt{6}$). مکعب هیلبرت را می‌توان با در نظر گرفتن جعبه‌های مشابه در ابعاد پایتتر مجسم کرد:



و اما، مکعب هیلبرت در واقع با حاصلضرب شمارایی از بازه‌های $[0, 1]$ همسان‌ریخت است. (به سهولت می‌توان تحقیق کرد که نگاهش

$$(x_n)_{n \geq 1} \mapsto (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$$

یک همسانریختی از این حاصلضرب به مکعب هیلبرت است).

*

اکنون که به صحت قضیه تیخونوف پی بردیم، ممکن است، براساس تجارب گذشته‌ای که از نتایج صحیح مشابه اندوخته‌ایم، فکرکنیم که برهان قضیه نباید ابدأ دشوار باشد: «راهی را پیش بگیریم که همواره در اثبات قضایا به کار می‌رود: فرض کنیم $\mathcal{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پوشش بازی برای فضای $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ باشد. به ازای هر $x \in V_\alpha$ مجموعه V_α الزاماً شامل یک جعبه تمام $U_{\lambda_1} \times \dots \times U_{\lambda_r} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$ است. حال، فرض کنیم زیرپوشش متناهی وجود نداشته باشد. لذا ... والی آخر». ولی نه! هر چند بسیاری از برهانهای توپولوژی نقطه - مجموعه، خودبه‌خود، به راهنمایی احساس، تنظیم و با عبارات استادانه و شهود فضایی جلاداده می‌شوند - اما برهان قضیه تیخونوف از این قبیل نیست.

۲. فایده آن چیست؟

قضیه‌ای که به مقابله با شهود می‌پردازد، وجود خود را با همین ویژگی تنها، توجیه می‌کند. قبول. اما یک دیدگاه کلی، و شاید وزینتر، این است که هر نظامی تلاش می‌کند که مفاهیم پایه خود را منقح سازد. مفاهیم، دفعتاً پدید نمی‌آیند تا اعلام وجود کنند بلکه این وظیفه ریاضیدان است که از میان چندین مفهوم مشابه، مناسبترین را برگزیند. در این راستا، مثلاً، قضیه تیخونوف، دلیلی قطعی برای آن بوده است که تعریف مفهوم فشردگی به کمک پوششهای باز را، بر مفهوم فشردگی دنباله‌ای، که به حاصلضربهای نامتناهی منتقل نمی‌شود، ترجیح دهد.

حال ببینیم که در رابطه با کاربردهایی خارج از خود توپولوژی نقطه - مجموعه، موقعیت چگونه است؟ به جرأت می‌توانم بگویم که قضیه تیخونوف در توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل، کاربرد اساسی ندارد. ولی، در آنالیز تابعی در چندین جای مهم نقش عمده دارد، و درسطور آتی به سه نمونه از این موارد اشاره می‌کنم. هدف من فقط آن خواهد بود که چگونگی دخالت قضیه تیخونوف را در اقامه هر برهان نشان دهم. ذکر جزئیات این برهانها غیر عملی است، زیرا در اینجا فقط می‌توان زمینه مربوط به این براهین را مطرح ساخت.

(۱) فشردگی ضعیف گوی یکه در فضاهای بازتابی باناخ. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار روی $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ باشد. برای یک نگاشت خطی پیوسته $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ («صورت خطی»)، نرم را چنین تعریف می‌کنیم $\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ ، و با این نرم، فضای صورتهای

خطی^۱، یعنی، X' ، به یک فضای نرم‌دار که فضای دوگان^۲ X است تبدیل می‌شود. فضای دوگان همواره یک فضای باناخ است، حتی وقتی که خود فضای X کامل نباشد.

هر عضو $x \in X$ به‌گونه‌ای متعارف یک صورت خطی را بر فضای صورتهای خطی تعریف می‌کند، که ضابطه آن $f : X' \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto f(x)$ است و بدین ترتیب، یک نگاشت خطی یک‌به‌یک طولی‌ای از X به X'' به دست می‌آید، که به کمک آن همواره می‌توان X را زیرمجموعه‌ای از X'' ، $X \subset X''$ ، در نظر گرفت. فضای X را بازتابی^۳ گوئیم هرگاه علاوه بر آنچه گفته شد، تساوی $X = X''$ برقرار باشد. فضاهای هیلبرت مثالی از فضاهای بازتابی هستند.

منظور از توپولوژی ضعیف^۴ بر یک فضای نرم‌دار X ، درشتبافت‌ترین توپولوژی روی X است که برای آن نگاشتهای $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ برای هر $f \in X'$ پیوسته باشند. یک زیر پایه این توپولوژی چنین است:

$$\{f^{-1}(U) \mid f \in X', U \subset \mathbb{K}, U \text{ باز است}\}$$

بنابراین، بر هر فضای نرم‌دار دو توپولوژی موجود است: یکی توپولوژی ناشی از نرم فضا است وقتی که واژه توپولوژی به تنهایی آورده شود، و دیگری توپولوژی ضعیف است. بر فضای دوگان، X' ، یک توپولوژی سوم نیز منظور می‌شود که همواره «ضعیف‌تر» (یعنی درشتبافت‌تر) است، و آن را توپولوژی ضعیف - ستاره^۵ یا توپولوژی ضعیف - * می‌نامند، که درشتبافت‌ترین توپولوژی است که برای آن همه نگاشتهای $X' \rightarrow \mathbb{K}$ به ازای هر $x \in X$ پیوسته است. یک دنباله^۶ $(f_n)_{n \geq 1}$ در X' همگرای ضعیف - ستاره است اگر و تنها اگر همگرای نقطه به نقطه باشد، یعنی اگر برای هر $x \in X$ دنباله عددی $(f_n(x))_{n \geq 1}$ همگرا باشد.

فرض قضیه تیخونوف. برای توپولوژی ضعیف - ستاره، گوی یکه در X' مجموعه‌ای فشرده است.

خلاصه برهان. فرض کنیم D بازه $[-1, 1]$ (یا قرص $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$) در \mathbb{K} باشد، و $D_x := \{\|x\| \cdot z \mid z \in D\}$ در این صورت، بنابر قضیه تیخونوف می‌دانیم که $\prod_{x \in X} D_x$ در هر حال فشرده است، لذا هر زیر فضای بسته این حاصلضرب نیز فشرده است. خواهیم دید که گوی یکه $U := \{f \in X' \mid \|f\| \leq 1\}$ با توپولوژی ضعیف - *، با یک چنین زیرفضای بسته‌ای همسانریخت است. در واقع، نگاشت $U' \rightarrow \prod_{x \in X} D_x$ را با ضابطه $f \mapsto \{f(x)\}, x \in X$ بنا تعریف می‌کنیم. روشن است که این نگاشت یک‌به‌یک است؛ نگاشتهای مختصاتی $f \mapsto f(x)$ بنا بر تعریف توپولوژی ضعیف - ستاره، پیوسته‌اند، لذا کل نگاشت در این توپولوژی پیوسته است. فرض

۱. توجه شود که طبق تعریف، مؤلف «صورت خطی» را به معنی صورت خطی پیوسته به کار می‌بردیم.

کنیم \tilde{U} نگاره این نگاشت باشد. به ازای نقطه ثابت $x \in X$ و مجموعه باز $U \subset \mathbb{K}$ ، مجموعه $\{f \in U' \mid f(x) \in U\}$ ، که عضوی از زیر پایه است، به روی $\tilde{U} \cap \pi_x^{-1}(U)$ برده خواهد شد، پس نگاشت $U' \rightarrow \tilde{U}$ در حقیقت یک همسانریختی است. مرحله بعدی آن است که ثابت شود \tilde{U} در $\prod_{x \in X} D_x$ بسته است؛ اثبات آن، اندکی کار می برد، ولی به هیچ گونه ابزار پیشرفته تری نیاز ندارد. و به این ترتیب حکم مطلوب نتیجه می شود. □

در مورد فضاهای بازتابی، البته توپولوژی ضعیف روی X' با توپولوژی ضعیف - ستاره یکی است، و لذا گوی یک در X' ، و همچنین در $X'' = X'$ نیز، فشرده ضعیف خواهد بود. اگر X تفکیک پذیر^۱ هم باشد، کل فضا با توپولوژی ضعیف، شمارای یکم نخواهد بود، اما گوی یک شمارای یکم (و حتی متریک پذیر) خواهد بود (رجوع شود به ص ۷۵، مرجع [۴])، پس نه تنها فشرده، بلکه در واقع فشرده دنباله یی است: هر دنباله کراندار در نرم^۲ یک زیر دنباله همگرای ضعیف^۳ دارد. . . .

(۲) فشردگی طیف در جبر تعویض پذیر باناخ. منظور از یک جبر تعویض پذیر باناخ، یک فضای باناخ B همراه با یک قانون ضرب است که از آن C - جبر تعویض پذیر با یک^۴ می سازد و در شرط

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

صدق می کند. ساده ترین و شاید به اصطلاح «روشنترین» مثال، جبرهای توابع پیوسته کراندار بر فضاهای توپولوژیک X ، یعنی جبرهای $C(X)$ اند. اما مثالهای جالبتر، در جبرهای تابعی^۴ زیاد نیستند، بلکه در جبرهای عملگری^۵ هستند. در واقع، مطالعه عملگرها (مانند عملگرهای دیفرانسیلی و عملگرهای انتگرالی)، یکی از هدفهای عمده آنالیز تابعی است. و اما، چنانچه یک یا چند عملگر دوه دو تعویض پذیر در یک فضای باناخ داشته باشیم، این عملگرها یک زیر جبر تعویض پذیر B در جبر (تعویضناپذیر) باناخ کلیه عملگرهای فضا تشکیل می دهند، و نکته شایان تحسین آنکه یک شناخت دقیقتر از B به عنوان یک جبر باناخ، یعنی با تقریب یکرختی جبرهای باناخ، ممکن است اطلاعات مفیدی از این عملگرها در برداشته باشد. البته، با این شیوه بررسی، برخی از خصوصیات فردی عملگرها دیده نمی شوند؛ مثلاً معلوم نمی شود عملگرهای مورد نظر، عملگر مشتگیری هستند یا نیستند و بر چه چیزی اثر می کنند. اینها ویژگیهایی هستند که نمی توانند از نوع یکرختی جبرهای باناخ استنباط شوند، درست همانطور که استفاده از یک تابعگن توپولوژی جبری، خصوصیات فردی یک مسأله هندسی را از نظر می پوشاند. اما بسیاری از ویژگیهای این عملگرها در این جبر باناخ، قابل تشخیص باقی می ماند. بیش از همه،

1. separable 2. bounded sequence in the norm 3. weakly convergent
4. function algebras 5. operator algebras

ویژگیهای جبری از این قبیل که آیا این عملگر یک تصویر $(b^\vee = b)$ ، یا یک پوچتوان $(b^\vee = 0)$ ، یا وارونپذیر است؟ یا «جذر» دارد $(b = a^\vee)$ ؟ اما از این مهمتر، وجود نرم عملگر در جبر باناخ است و لذا می توان فرایندهای حدی، از قبیل سریهای توانی عملگرها و غیره را بررسی کرد.

اما چگونه می توانیم این خواست خود را که «بیتش» ژرف از ساختار جبر باناخ است، تحقق بخشیم؟ آری، آگاهی به حد اعلی از این ساختار را می توان از راه پیدا کردن یک فضای توپولوژیک X و یک یکرختی جبرهای باناخ $B \cong C(X)$ به دست آورد! چگونه، و تحت چه شرایطی، می توان این کار را انجام داد؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، باید ببینیم که چگونه، و چه وقت، می توان یک فضای مفروض X را از روی ساختار جبر باناخ آن $C(X)$ ، بازسازی کرد. پس، مسأله این است: چه می توان کرد که نقطه $x \in X$ به صورت یک شیء جبری (باناخ) جلوه کند؟ نقاط X عملاً، به دو صورت عرض اندام می کنند. نخست، هر x ، از طریق $f \mapsto f(x)$ معرف یک همریختی جبر $C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ است، که اگر فضای زیاد نامناسبی نباشد، نقطه x می تواند با این همریختی مشخص شود. برای این کار، کافی است که اگر $x \neq y$ دو نقطه مفروض از X باشند، بتوانیم تابع پیوسته کرانداری بر X پیدا کنیم که مقادیر مختلف در این دو نقطه اختیار کند. بنابراین، در یک جبر تعویضپذیر باناخ دلخواه، می توان همریختیهای جبرهای $\mathbb{C} \rightarrow B$ را شق دیگری از نقاط $x \in X$ تلقی کرد.

از سوی دیگر، هر $x \in X$ در $C(X)$ معرف یک ایدال، پوچساز a_x است که چنین تعریف می شود: $a_x := \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$. بدیهی است که این ایدال یک ایدال ماکسیمال است، زیرا اگر ایدالی شامل a_x و یک تابع دیگر f ، مقید به شرط $f(x) \neq 0$ باشد این ایدال باید شامل هر تابع دیگر، یعنی خود $C(X)$ باشد:

$$a_x + \mathbb{C}.f = C(X),$$

که واضح است. اینجا نیز، برای فضاهای مناسب، به ازای $x \neq y$ داریم $a_x \neq a_y$. بنابراین، یک نقطه شروع مناسب (ولو نامناسب) این است که برای یک جبر تعویضپذیر باناخ B ، به اصطلاح طیف B^\vee با تعریف:

$$\text{Spec} B := B \text{ ایدالهای ماکسیمال}$$

را در نظر بگیریم و آن را برای مجموعه زیربنایی فضای توپولوژیک مطلوب نامزد کنیم.

درواقع، هر دو نحوه شروع، دو بیان مختلف از یک چیز واحدند: به هر همریختی جبرهای $C \rightarrow B$ ، یک ایدال ماکسیمال، یعنی هسته آن، نظیر می شود. این تناظر بین همریختیهای جبرها و ایدالهای ماکسیمال،

یک تناظر دوسویی است، زیرا، بنابر قضیه‌ای که اثبات آن دشوار نیست (قضیه گلفاند - مازور^۱)، به هر ایدآل ماکسیمال a ، یک و دقیقاً یک همریختی جبرها $B/a \cong \mathbb{C}$ وابسته می‌شود. بنابراین، اعضای $\text{Spec} B$ را می‌توان هم ایدآلهای ماکسیمال تلقی کرد و هم همریختیهای جبر $\varphi: B \rightarrow \mathbb{C}$. درباره هدف ما که نمایش B به شکل یک جبر تابعی است، حالت خاص $B = C(X)$ قاطعانه به ما می‌گوید که چگونه تابعی را باید به اعضای $b \in B$ نظیر کنیم، و آن $f_b: \text{Spec} B \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(b)$ است.

همریختیهای جبر $\varphi: B \rightarrow C$ خودبه‌خود صورتهای خطی با نرم ۱ هستند، ولذا $\text{Spec} B$ به شیوه‌های متعارف زیرمجموعه‌ای از کره یک در فضای دوگان B' است. به‌ویژه، توابع f_b همواره کراندارند (به $\|b\|$).

روی مجموعه $\text{Spec} B$ هنوز هیچگونه توپولوژی برنگزیده‌ایم، اما اگر فقط بخواهیم که همه f_b ها پیوسته باشند، سعی می‌کنیم با اقتصادیترین راه ممکن عمل کنیم، و این هم دقیقاً به این معنی است که توپولوژیی که باید به $\text{Spec} B \subset B'$ بدهیم، توپولوژی القایی توسط توپولوژی ضعیف - ستاره است! در این صورت، واقعاً یک همریختی جبری متعارف

$$\rho: B \longrightarrow C(\text{Spec} B), b \mapsto f_b$$

به دست می‌آوریم. آیا این همریختی، یکرختی نیست؟ در این مورد، باید گفت که نه، هر جبر تعویضپذیر باناخ، با یک $C(X)$ یکرخت نیست. اما در $C(X)$ یک ساختار جبری دیگری نیز موجود است، که باید آن را هم در B دخالت داد، و آن مزدوج‌گیری مختلط^۲ است به شرح زیر: منظور از یک «برگشت»^۳ $B \rightarrow B^*$ در یک جبر تعویضپذیر باناخ، یک همریختی \mathbb{R} -جبر است با ویژگیهای زیر:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot 1)^* &= \bar{\lambda} \cdot 1 & \text{برای هر } \lambda \in \mathbb{C} \\ b^{**} &= b & \text{برای هر } b \in B \\ \|b^* b\| &= \|b\|^2 & \text{برای هر } b \in B \end{aligned}$$

یک جبر تعویضپذیر باناخ همراه با یک برگشت را یک B^* -جبر می‌نامند. برای این‌گونه جبرها، قضیه زیر را داریم

قضیه (گلفاند - نویمارک^۴). اگر $(B, *)$ یک B^* -جبر باشد، $\rho: B \rightarrow C(\text{Spec} B)$ یک یکرختی طولی B^* -جبر است.

1. Gelfand-Mazur theorem

2. complex conjugation

3. involution

4. Gelfand-Neumark

لذا، این جواب سؤال مطرح شده در ابتدای بحث، و یا لا اقل جوابی برای آن است. اینکه این پرسش از کجا آمده و پاسخ فعلی به کجا خواهد انجامید، موضوعی است که در آنالیز تابعی به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد و گفتنی در این زمینه زیاد است. اما، گمان می‌کنم که با اشارات اندکی که در اینجا آوردیم، منظور ما از اینکه می‌گوییم: طیف یک جبر تعویضپذیر باناخ یکی از مفاهیم «مهم» آنالیز تابعی است، درک می‌کنید. و اما، قضیه تیخونوف حکم جالبی دربارهٔ این طیف دارد. همان‌طور که قبلاً دیدیم، $Spec B$ ، زیرفضایی از کرهٔ یک B' با توپولوژی ضعیف - ستاره است، که به موجب قضیه تیخونوف یک فضای فشرده است. به آسانی می‌توان نشان داد که $Spec B$ در واقع یک زیرفضای بستهٔ این کره است، و لذا نتیجهٔ زیر، که با توجه به قضیهٔ کلفاند - نوبمارک، بخصوص جالب توجه است، به دست می‌آید:

نتیجهٔ قضیه تیخونوف. طیف یک جبر تعویضپذیر باناخ، فشرده است.

*

(۳) توسیع فشردهٔ استون - چخ! در فرایند رهگشای بخش قبل، تلاش ما آن بود که X را از روی $C(X)$ بازسازی کنیم، اما همان‌گونه که نتیجهٔ قضیه تیخونوف نشان می‌دهد، $Spec C(X)$ نمی‌تواند همواره مساری X باشد، زیرا X الزاماً فشرده نیست. روابط حاکم بر فضاهای X و $Spec C(X)$ کدام‌اند؟ بدون شرایطی اضافی، نگاشت متعارف $Spec C(X) \rightarrow X$ الزاماً نه یک به یک است و نه پوشا. ولی اگر تصادفاً یک به یک نباشد، این نتیجهٔ علت نسبتاً غیر جالبی است، و آن تقریباً این است که توپولوژی X به قدری درشتبافت است که توابع پیوستهٔ کراندار نمی‌توانند همهٔ نقاط X را جدا کنند (مثلاً، در توپولوژی بیمایه، هر تابع پیوسته، ثابت، و لذا $Spec C(X)$ یک نقطه است). لذا، برای آنکه این اثر را رد کنیم، یک ویژگی جداسازی را می‌پذیریم، و اما آن ویژگی جداسازی که در اینجا بهترین تأثیر را می‌گذارد، همان است که «کاملاً منظم»^۲ نامیده می‌شود: نقاط باید بسته باشند و به علاوه، به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ A و هر نقطهٔ $p \notin A$ ، باید یک تابع پیوستهٔ $f : X \rightarrow [0, 1]$ موجود باشد به قسمی که $f|_A = 1$ و $f(p) = 0$. این ویژگی مثلاً در هر فضای هاوسدورفی که لم اوریسون را بتوان در آن به کار برد، بیش می‌آید/ اما در این صورت، قضیهٔ زیر برقرار است: اگر X کاملاً منظم باشد، آنگاه نگاشت متعارف $Spec C(X) \rightarrow X$ ، یک نشانیدن^۳، یعنی یک همسانریختی بر روی نگارهٔ این نگاشت است، و این نگاره، زیر فضایی چگال است، یعنی بستار آن، کل فضای $Spec C(X)$ است (رجوع شود به ص ۸۷۰ مرجع [۸]).

به کمک نشانیدن فوق، می‌توان خود X را یک زیر مجموعهٔ چگال در فضای $Spec C(X)$ ، که بنا بر قضیه تیخونوف، فشرده است، در نظر گرفت: به ویژه، هر فضای کاملاً منظم، زیرفضایی از یک فضای فشرده است، که خود این هم کاملاً شگفت‌آور است. $Spec C(X)$ را اصطلاحاً

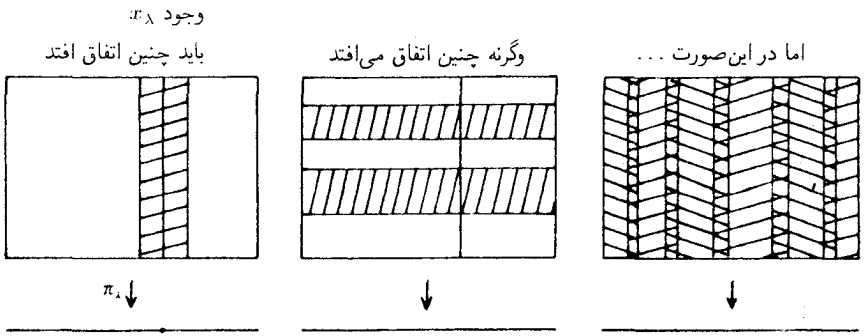
«توسیع فشرده استون - چخ» برای یک فضای کاملاً منظم X می نامند، و معمولاً آن را با نماد βX نمایش می دهند. به یک معنی، می توان آن را «بزرگترین» توسیع فشرده دانست: این توسیع فشرده، با این ویژگی که هر نگاشت پیوسته از X بتوی یک فضای هاوسدورف فشرده، می تواند به βX توسیع یابد، مشخص می شود. ... ادای حق مطلب درباره توسیع فشرده استون - چخ، کتابی دیگر (و نیز مؤلفی دیگر) لازم دارد، اما بدون آن نیز، امیدوارم با اشارات کوتاه فوق، حس احترام شما را نسبت به قضیه تیخونوف، که هم اکنون می خواهیم به برهان آن توجه کنیم، برانگیخته باشم.

۳. برهان

در همه برهانهای قضیه تیخونوف، از «لم زرن»^۱ استفاده می شود، که ما نخست از آن صحبت خواهیم کرد. سپس، فرصت را غنیمت شمرده، مفاهیم پالایه^۲ و فرا پالایه^۳ را وارد می کنیم، که در جاهای دیگر نیز مفیدند. پس از آنکه به این ابزارها مجهز شدیم، حکم زیر را ثابت می کنیم که: اگر یک فضای X یک زیر پایه^۴ \mathcal{B} با این ویژگی داشته باشد که، هر پوشش X توسط مجموعه های عضو \mathcal{B} دارای یک زیر پوشش متناهی باشد، آنگاه X فشرده است. پس، برای آنکه این حکم را برای حاصلضربی از فضاهای فشرده چون $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ به کار ببریم، کافی است ثابت کنیم که زیر پایه متعارف استوانه های

$$\{\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \subset X_\lambda\}$$

دارای ویژگی فوق است، و بدین ترتیب، قضیه تیخونوف اثبات می شود. اول، باید به برقراری این ویژگی برای زیر پایه متقاعد شویم: با استفاده از برهان خلف، گیریم \mathcal{B} یک پوشش فضای حاصلضرب، توسط استوانه های باز باشد. فرض می کنیم \mathcal{B} زیر پوشش متناهی ندارد. در این صورت، در هر یک از سازه های X_λ ، دست کم یک نقطه x_λ هست که «صفحه مختصاتی آن» $\pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$ با تعدادی متناهی از مجموعه های عضو \mathcal{B} پوشیده نمی شود، و دلیل آن هم این است: یک صفحه مختصاتی که با تعدادی متناهی از استوانه های عضو \mathcal{B} پوشیده شود، اجباراً در یکی از این استوانه ها جا خواهد گرفت، و گرنه تعدادی متناهی از استوانه ها کل فضای حاصلضرب را خواهد پوشانید، و این هم برخلاف فرض است، و اما، اگر هر صفحه مختصاتی روی X_λ در یک استوانه عضو \mathcal{B} جا بگیرد، از فشرده گی X_λ نتیجه می شود که تعدادی متناهی از استوانه ها، حاصلضرب را می پوشانند، و این هم برخلاف فرض است. لذا، برای هر λ ، همان طور که ادعا کردیم، یک x_λ ، با همان شرایط نامبرده، وجود دارد.



حال قرار می دهیم $x := \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. در این صورت، x باید در یکی از استوانه های عضو \mathcal{A} ، مثل (U_μ) ، جای گیرد، و این مستلزم آن است که کل صفحه مختصاتی $\pi_\mu^{-1}(x_\mu)$ مشمول استوانه مورد نظر باشد، و این هم بر خلاف آن است که ساختیم. پس، فرض نادرست بوده است. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم.

۱. لم ژرن. چنان که می دانید، غالباً به دلایلی، اشیاء ریاضی «ماکسیمال» یا «مینیمال» را در نوع بخصوصی بررسی می کنند. مثلاً، در بخش گذشته، از ایدآلهای ماکسیمال در یک جبر تعویض پذیر باناخ صحبت کردیم؛ یک ساختار دیفرانسیلی پذیر بر یک خمینه، بنا بر تعریف، یک اطلس دیفرانسیلی پذیر ماکسیمال است؛ در نظریه گروه های لی، زیرگروه های فشردۀ ماکسیمال یک گروه لی همبند، مهم اند؛ مجموعه باز ماکسیمال مشمول در یک زیر فضای A از فضای توپولوژیکی مفروض، درون آن، A نامیده می شود، و مجموعه بستۀ مینیمال شامل A ، بستار آن، \bar{A} ، است؛ ریزبافت ترین و درشتبافت ترین توپولوژی با ویژگی های مفروض، اعضای ماکسیمال و مینیمال در مجموعه این توپولوژیها هستند؛ و... و...

در موارد فراوانی، حتی می توان گفت در بیشتر موارد، اشیاء مورد بحث به صورت زیرمجموعه های ویژه ای از یک مجموعه ثابت اند، و رابطه ترتیبی که ماکسیمال بودن یا مینیمال بودن به آن اشاره دارد، رابطه شمول مجموعه هاست. حال اگر این ویژگی به اجتماع های دلخواه منتقل شود، اجتماع کلیه مجموعه های واجد این ویژگی طبعاً مجموعه ماکسیمال واجد این ویژگی است، و هنگامی که این ویژگی، به اشتراک های دلخواه منتقل شود، اشتراک همه این مجموعه ها مجموعه مینیمال واجد این ویژگی است. این ساده ترین موردی است که وجود اشیاء ماکسیمال و مینیمال در آن تضمین می شود؛ ساختار دیفرانسیلی پذیر شامل یک اطلس دیفرانسیلی پذیر مفروض، و هم چنین درون و بستار یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیکی، نمونه هایی از این نوع اند.

اما غالب اوقات، نباید توقع بیش از اندازه داشت و از این ویژگی مورد نظر خواست که به

اجتماعها یا اشتراکهای دلخواه منتقل شود. با وجود این، در اکثر موارد، باز شرط واقعاً ضعیفتری برویژگی مورد نظر حکم فرماست، و آن هم این است که ویژگی مورد نظر به اجتماع یا اشتراک زنجیر^۱ هایی از مجموعه‌های واجد آن ویژگی، منتقل می‌شود. این نمونه بارز از وضعیتی است که لم زرن در آن به‌کار می‌رود و وجود مجموعه‌های ماکسیمال یا مینیمال با ویژگی مطلوب، تضمین می‌شود.

بلافاصله باید توجه کرد که لم زرن نیز در همه موارد کارگر نیست. مثلاً برای اثبات وجود زیرگروه‌های فشرده ماکسیمال در هر گروه همبند لی، باید نسبتاً به اعماق نظریه گروه‌های لی رفت. فقط یک استدلال صوری و صرفاً نظریه مجموعه‌یی، مثل لم زرن، نمی‌تواند به نتیجه برسد.

برهان لم زرن در فصل آتی خواهد آمد، اما در اینجا، صورت آن را به سرعت مرور می‌کنیم: چنان‌که می‌دانیم، یک رابطه \leq («کمتر از یا برابر با»)^۲ در یک مجموعه M را یک ترتیب جزئی^۳ نامند هرگاه بازتابی $(x \geq x)$ ، پادمتقارن $(x \leq y \text{ و } y \leq x \Rightarrow x = y)$ و تریا $(x \leq y \text{ و } y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ باشد. یک زیرمجموعه $K \subset M$ را یک زنجیر گویند هرگاه هر دو عضو آن باهم مربوط باشند، یعنی برای $x, y \in K$ ، یا $x \leq y$ یا $y \leq x$. هم‌چنین، K را کراندار^۴ گویند هرگاه عضوی مانند $m \in M$ موجود باشد به قسمی که، برای هر $x \in K$ ، $x \leq m$.

لم زرن. اگر هر زنجیر در یک مجموعه مرتب جزئی و ناتهی (M, \leq) ، کراندار باشد، M دست کم یک عضو ماکسیمال دارد، یعنی یک عضو a هست به قسمی که هیچ x وجود ندارد که $a \neq x$ و $a \leq x$.

۲. پالایه‌ها و فرا پالایه‌ها

تعریف (پالایه). منظور از یک پالایه \mathcal{F} در یک فضای توپولوژیک X (یا، به‌طور کلیتر، در یک مجموعه X)، مجموعه‌ای است از زیر مجموعه‌های X که در سه اصل موضوع زیر صدق کند:

$$F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \quad \text{اصل موضوع ۱.}$$

$$F \in \mathcal{F} \text{ و } F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F} \quad \text{اصل موضوع ۲.}$$

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \quad \text{اصل موضوع ۳.}$$

تعریف (همگرایی پالایه‌ها). یک پایه \mathcal{F} در یک فضای توپولوژیک X همگرا به a است، هرگاه هر همسایگی a متعلق به \mathcal{F} باشد.

مثال. فرض می‌کنیم $(x_n)_{n \geq 1}$ دنباله‌ای در X و \mathcal{F} پالایه همه مجموعه‌هایی باشد که این دنباله سرانجام در آنها می‌ماند. در این صورت، واضح است که این پالایه همگرا به a است، اگر و تنها اگر، خود دنباله همگرا به a باشد.

تعریف (فراپالایه) و نتیجه لم ژرن. پالایه‌های ماکسیمال را فراپالایه نامند. هر پالایه، مشمول در یک فراپالایه است.

واضح است که در اینجا، لم ژرن، برای مجموعه جزئاً مرتب همه پالایه‌های شامل پالایه مفروض، به‌کار رفته است. فراپالایه‌ها، ویژگی جالب زیر را دارند:

گزاره. اگر \mathcal{F} یک فراپالایه در X و $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد، آنگاه یکی، و دقیقاً یکی، از زیرمجموعه‌های A و $X \setminus A$ به \mathcal{F} متعلق است. برهان. بدیهی است که هر دو نمی‌توانند به \mathcal{F} متعلق باشند، زیرا اشتراک آنها تهی است. به‌علاوه، یکی از این دو مجموعه، باید هر مجموعه عضو \mathcal{F} را قطع کند، زیرا در غیر این صورت، یک مجموعه عضو پالایه خارج از A ، و یکی هم خارج از $X \setminus A$ در نظر می‌گیریم؛ اشتراک این دو مجموعه نیز تهی خواهد بود. پس، بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، فرض می‌کنیم که A همه اعضای \mathcal{F} را قطع کند. در این صورت، مجموعه همه فوق مجموعه‌های کلیه اشتراکهای $A \cap F$ ، $F \in \mathcal{F}$ ، تشکیل یک پالایه می‌دهند که شامل $\{A\} \cup \mathcal{F}$ است، و از ماکسیمال بودن \mathcal{F} نتیجه خواهد شد که $A \in \mathcal{F}$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

۳. کاربرد (برهان قضیه تیخونوف). با این مقدمات، فرض کنیم \mathcal{C} زیرپایه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد با این ویژگی که هر پوشش X توسط مجموعه‌های عضو \mathcal{C} ، یک زیرپوش متناهی را بپذیرد. مرحله ۱: هر فراپالایه در X همگراست.

برهان. فرض کنیم یک فراپالایه ناهمگرای \mathcal{F} وجود داشته باشد. در این صورت، برای هر $x \in X$ ، یک همسایگی $U_x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{F}$ می‌توانیم پیدا کنیم؛ زیرا، اگر همه مجموعه‌های عضو \mathcal{C} که شامل x هستند اعضای پالایه مورد نظر بودند، آنگاه همه اشتراکهای متناهی نیز در پالایه می‌بودند، و پالایه همگرا به x می‌شد. لذا، بنا بر فرض، پوشش $\{U_x\}_{x \in X}$ دارای یک زیرپوشش $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$

است. از آنجا که U_{α_i} ها عضو \mathcal{F} نیستند، بنابراین ویژگی جالب فوق، باید متممهای آنها در فرایالایه باشند. اما، اشتراک متممها تهی است، و به یک تناقض با اصول موضوعه پالایه می‌رسیم. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

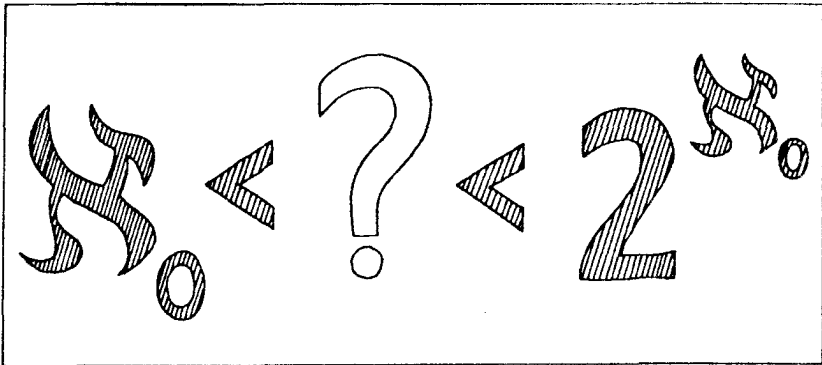
مرحله دوم (آخرین مرحله): X فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش باز دلخواه X باشد. فرض کنیم زیرپوشش متناهی وجود نداشته باشد، یعنی برای هر زیر خانواده متناهی از پوشش، یک مجموعه «کاستی» ناتهی می‌دهند. فرض کنیم \mathcal{F} فرایالایه شامل این پالایه باشد. به موجب مرحله ۱، می‌دانیم که \mathcal{F} به یک $a \in X$ همگراست. این a باید در یکی از مجموعه‌های عضو پوشش مفروض، چون U_α ، قرار گیرد. پس، به موجب همگرایی، $U_\alpha \in \mathcal{F}$. اما $X \setminus U_\alpha$ یک کاستی است و لذا $X \setminus U_\alpha \in \mathcal{F}$ ، و این هم با اصول موضوعه پالایه متناقض است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. \square

و بدین شکل، آخرین سنگ برهان قضیه تیخونوف را کار گذاشتیم.

فصل آخر

نظریه مجموعه‌ها



نوشتهٔ تئودور بروکر^۱

هدف این فصل بالا بردن دقت یا فدا کردن آن نیست. هدف آن، صرفاً تلخیص آن مقدار از تکنیک‌های نظری مجموعه‌هاست که گهگاه مورد استفادهٔ ریاضیدانان واقع می‌شود، و دانستن آنها برای دانشجویانی که نیمسال اول تحصیل خود را با موفقیت به پایان رسانده‌اند لازم است.

اگر Λ یک مجموعه باشد و به هر $\lambda \in \Lambda$ یک مجموعهٔ M_λ وابسته شده باشد، حاصلضرب مجموعه‌های M_λ را، که با $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ نمایش می‌دهیم، به صورت مجموعهٔ نگاشته‌های $\varphi : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ با شرط $\varphi(\lambda) \in M_\lambda$ ، تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، این حاصلضرب، برابر است با مجموعهٔ خانواده‌های

1. Theodor Bröcker

$$(m_\lambda | \lambda \in \Lambda, m_\lambda \in M_\lambda)$$

اصل موضوع انتخاب^۱. اگر برای هر $\lambda \in \Lambda$, $M_\lambda \neq \emptyset$ ، آنگاه $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \neq \emptyset$. پس معنی این اصل این است که اگر در هر M_λ عضوی موجود باشد، تابعی نیز وجود دارد که از هر یک از M_λ ها یک عضو انتخاب می‌کند. یک ترتیب جزئی بر یک مجموعه M ، رابطه‌ای است مانند \leq بین اعضای M که در اصول زیر صدق می‌کند (برای هر $x, y, z \in M$):

$$\begin{aligned} & (بازتابی) \quad x \leq x, \\ & (بادقتارنی) \quad x \leq y \quad \text{و} \quad y \leq x \Rightarrow x = y, \\ & (تراییبی) \quad x \leq y \quad \text{و} \quad y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{aligned}$$

همچنین، اگر $x \leq y$ و $x \neq y$ ، می‌نویسیم $x < y$. اگر $x \in M$ و $A \subset M$ ، و برای هر $a \in A$ رابطه $x \geq a$ برقرار باشد، می‌نویسیم $x \geq A$ و به شکل مشابه، $x > A$ ، $x < A$ و غیره. چند مثال. اگر M یک مجموعه و P مجموعه زیر مجموعه‌های آن باشد، آنگاه رابطه شمول، معرّف یک ترتیب جزئی بر P است. از این مثال، ترتیب جزئی در زیر گروه‌های یک گروه، در زیر فضاهای یک فضای برداری، و غیره استخراج می‌شود.

یک زنجیر^۲ یا یک مجموعه مرتب خطی^۳، مجموعه جزئاً مرتبی است که شرط زیر در آن صادق باشد: برای هر $x, y \in M$ ، یا داریم $x \leq y$ یا $y \leq x$. زنجیر را خوشترتیب^۴ گویند اگر هر زیر مجموعه ناتهی آن دارای کوچکترین عضو (نسبت به ترتیب آن) باشد. مثال: \mathbb{N} خوشترتیب است، اما \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} و \mathbb{R} خوشترتیب نیستند. اگر M و N خوشترتیب باشند، روشن است که $M \times N$ نیز با ترتیب الفبایی^۵ خوشترتیب است، منظور از ترتیب الفبایی این است: $(m, n) < (m_1, n_1)$ هرگاه $m < m_1$ ، یا $m = m_1$ ولی $n < n_1$. همچنین است $M + N$ (اجتماع جدا ازهم) با ترتیب $m < n$ برای $m \in M$ و $n \in N$ ، و رعایت ترتیب قبلی برای دو عضو M یا دو عضو N . در یک مجموعه خوشترتیب، اصل زیر صادق است:

اصل استقراء^۶. اگر $A(k)$ حکمی درباره یک عضو دلخواه $k \in K$ باشد، و اگر $A(l)$ برای هر $l < k$ ، مستلزم $A(k)$ باشد، آنگاه برای هر $k \in K$ ، حکم $A(k)$ صادق است. برهان. در غیر این صورت، اجباراً کوچکترین عنصر $k \in K$ موجود خواهد بود به قسمی که $A(k)$ دروغ باشد. پس در این صورت $A(l)$ برای هر $l < k$ صادق بوده، و لذا خود $A(k)$ نیز صادق خواهد بود و این تناقض است. \square

1. axiom of choice 2. chain 3. linearly ordered set 4. well-ordered
5. lexicographical order 6. induction principle

به همان طریق که در مورد اعداد طبیعی عمل می‌شود، می‌توان در یک مجموعه خوشترتیب، اشیاء را به روش بازگشتی^۱ تعریف کرد. مثلاً یک دستور بازگشتی برای یک تابع f بر M ، تثبیت‌کننده مقدار $f(n)$ ، برحسب مقادیر $f(k)$ برای $k < n$ است، یعنی:

$$f(n) = \varphi(f|\{k|k < n\})$$

به استقراء روی n ، ثابت می‌شود که دقیقاً یک تابع f بر زیرمجموعه‌های $\{k \in M | k \leq n\}$ موجود است که در دستور بازگشتی صدق می‌کند، و لذا بر خود مجموعه M نیز، یک تابع و فقط یکی وجود دارد که چنین است، زیرا یک تابع f بر M به کمک تحدیدهایش به شکل $f|\{k \leq n\}$ کاملاً مشخص می‌شود.

در این مورد، ممکن است این استدلال آورده شود که حکم « f از روی دستور بازگشتی برای جميع مقادیر n به طور یکتا معین می‌شود» به استقراء روی n نتیجه می‌شود. ولی این، حکمی به شکل «برای هر n شرط زیر برقرار است: ...» نیست، که بتواند مستقیماً به استقراء ثابت شود.

*

مهمترین ابزار در نظریه مجموعه‌ها، و حاصل از آن، لم زیر است:

لم زرن^۲ (که اساساً از آن زرمولو^۳ است). گیریم (M, \leq) یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. فرض کنیم که هر زنجیر $K \subset M$ کراندار است. در این صورت، M یک عضو ماکسیمال دارد، یعنی عضوی مانند $a \in M$ موجود است به قسمی که هیچ $x \in M$ در $x > a$ صدق نمی‌کند. برهان. فرض کنیم که این لم برقرار نیست. در این صورت، می‌توان به هر زنجیر $K \subset M$ یک عضو $m(K) \in M$ وابسته کرد به قسمی که $m(K) > K$. در اینجا از اصل موضوع انتخاب استفاده کرده‌ایم. یک زنجیر $K \subset M$ را ممتاز^۴ نامیم هرگاه K خوشترتیب باشد و، برای هر زیر مجموعه آغازی^۵ $K_x := \{k \in K | k < x\}$ ، داشته باشیم $x = m(K_x)$.

لم. اگر K و L زنجیرهایی ممتاز باشند، آنگاه $K = L$ و یا به ازای مقداری از x به ترتیب متعلق به K یا L ، داریم: $K_x = L$ و یا $L_x = K$. برهان لم. فرض کنیم که در هیچ یک از دو حالت نخست نیستیم. در این صورت، به استقراء روی K ، حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

$$x \in K \Rightarrow x \in L \text{ و } K_x = L_x$$

1. recursively
5. initial subset

2. Zorn's Lemma

3. Zermelo

4. distinguished

برهان حکم. اگر چنین نباشد، باید کوچکترین x ای که $x \in K$ و حکم برایش صادق نیست موجود باشد. پس، عجالتاً داریم $K_x \subset L$ (زیرا $K_x < x$)، و بنا بر فرض $K_x \neq L$ ؛ حال فرض کنیم که L با ویژگی $z \notin K_x$ مینیمال باشد. در این صورت، $z > K_x$ ، وگرنه برای برخی از y های عضو K ، می‌بایست داشته باشیم $z > y > x$ ، اما در آن صورت، چون حکم برای y صادق است، لذا $L_y = K_y$ ، پس $L_y \in z$. در نتیجه، $z \in K_x$ ، که با انتخاب z متناقض است. پس حالا داریم $z > K_x$ ، و روشن است که $K_x = L_x$. اما، در این صورت

$$x = m(K_x) = m(L_z) = z$$

بدین ترتیب، برهان حکم به پایان می‌رسد. از حکم فوق، نتیجه می‌شود که $K \subset L$ ، و چون به ازای مقدار مینیمال عضو L $z \in L$ با شرط $z \notin K$ داریم $K = L_z$ ، اثبات لم نیز به پایان می‌رسد. □

از اینجا به آسانی نتیجه می‌شود که اجتماع همهٔ زنجیرهای ممتاز، زنجیری است ممتاز. این زنجیر ممتاز را A می‌نامیم. پس $A > m(A)$ ، و $\{m(A)\} \cup A$ نیز ممتاز است، اما در این صورت، باید

$$A \cup \{m(A)\} \subset A$$

که یک تناقض است، زیرا $m(A) \notin A$. بدین ترتیب، برهان لم زرن به پایان می‌رسد. □

تعریف. دو مجموعهٔ M و N یک عدد اصلی^۱ دارند، $|M| = |N|$ ، هرگاه یک نگاشت دوسویی $\varphi : M \rightarrow N$ موجود باشد. همچنین می‌نویسیم $|M| \leq |N|$ هرگاه یک نگاشت یک‌به‌یک $\varphi : M \rightarrow N$ موجود باشد.

بدیهی است که اگر $|M| \leq |N|$ و $|N| \leq |M|$ ، آنگاه $|M| \leq |M|$.

قضیه (شرودر-برنشتاین)^۲.

$$|M| \leq N \& |N| \leq |M| \Rightarrow |M| = |N| \quad (i)$$

$$|M| \leq N \quad \text{یا} \quad |N| \leq |M| \quad (ii)$$

برهان. (i) فرض کنیم $\varphi : M \rightarrow N$ و $\psi : N \rightarrow M$ یک‌به‌یک باشند. می‌خواهیم یک نگاشت دوسویی $\gamma : M \rightarrow N$ پیدا کنیم. هر عضو $m \in M$ و هر عضو $n \in M$ ، با رعایت انتقال

مناسب اندیسیها، دقیقاً در یک دنباله به شکل

$$\cdots \xrightarrow{\psi} m_{-2} \xrightarrow{\varphi} n_{-2} \xrightarrow{\psi} m_{-1} \xrightarrow{\varphi} n_{-1} \xrightarrow{\psi} m_0 \xrightarrow{\varphi} n_0 \xrightarrow{\psi} m_1 \xrightarrow{\varphi} n_1 \xrightarrow{\psi} \cdots$$

که m_ν ها عضو M و n_ν ها عضو N اند، به ترتیب به صورت m_ν و n_ν ظاهر می‌شوند. حال γ را چنین تعریف می‌کنیم: اگر دنباله‌ای که m در آن ظاهر می‌شود، با یک $m_\nu \in M$ شروع شود (و خصوصاً عضو ابتدا داشته باشد)، $\gamma(m)$ را با تساوی $\gamma(m) = \varphi(m)$ تعریف می‌کنیم، و در غیر این صورت، با تساوی $\gamma(m) = \psi^{-1}(m)$. بدین ترتیب، γ همواره خوشتعریف و دوسویی است.

(ii) مجموعه سه‌گانه‌هایی چون $A \xrightarrow{\varphi} B$ را که در آن $A \subset M$ و $B \subset N$ و φ دوسویی است، در نظر می‌گیریم. رابطه $<$ را بین این سه‌گانه‌ها به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A \xrightarrow{\varphi} B) < (A_1 \xrightarrow{\varphi_1} B_1)$$

اگر $A \subset A_1$ ، $B \subset B_1$ و $\varphi_1|_A = \varphi$. بدین طریق، یک ترتیب جزئی روی مجموعه این سه‌گانه‌ها تعریف می‌شود، و هر زنجیر $(A_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} B_\lambda) | \lambda \in \Lambda$ کراندار خواهد شد به سه‌گانه $A \xrightarrow{\varphi} B$ ، که $A = \bigcup_\lambda A_\lambda \xrightarrow{\varphi} \bigcup_\lambda B_\lambda = B$ را ماکسیمال می‌گیریم. در این صورت، روشن است که $A = M$ یا $B = N$ ، در غیر این صورت می‌توان $m \in M$ و $n \in N$ پیدا کرد که $m \notin A$ و $n \notin B$ سپس $A \xrightarrow{\varphi} B$ را به کمک $m \mapsto n$ به $A \cup \{m\} \rightarrow B \cup \{n\}$ توسعه داد. \square

تعریف. مجموعه زیرمجموعه‌های M را مجموعه توانی^۱ می‌نامند و با $\mathfrak{P}(M)$ نشان می‌دهند. قضیه (کانتور). $|\mathfrak{P}(M)| > |M|$. همچنین می‌نویسیم $2^{|M|} := |\mathfrak{P}(M)|$. برهان. در غیر این صورت، یک نگاشت دوسویی

$$M \rightarrow \mathfrak{P}(M), x \mapsto M(x)$$

وجود خواهد داشت. یک زیرمجموعه $A \subset M$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin M(x)$$

باید به ازای $y \in M$ داشته باشیم $A = M(y)$ ، در نتیجه

$$y \in A \Leftrightarrow y \notin M(y) = A$$

این تناقض است. □

قضیه. هر مجموعه‌ای می‌تواند خوشترتیب شود.

برهان. به‌ازای یک مجموعه مفروض M ، مجموعه زوجهای (A, R) را، که در آن $A \subset M$ و R یک خوشترتیبی در مجموعه A است، در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $(A_1, R_1) \leq (A_2, R_2)$ اگر $A_1 \subset A_2$ ، و رابطه $a \leq b$ در A_1 نسبت به R_1 برقرار است اگر و تنها اگر رابطه $a \leq b$ در A_2 نسبت به R_2 برقرار باشد. بدین طریق، یک ترتیب جزئی در مجموعه زوجهای (A, R) تعریف می‌شود. هر زنجیر $\{(A_\lambda, R_\lambda)\}$ توسط $A = \bigcup_\lambda A_\lambda, R|_{A_\lambda} = R_\lambda$ کراندار می‌شود. یک عضو ماکسیمال (A, R) باید در شرط $A = M$ صدق کند. در غیر این صورت، یک $m \in M$ را، که $m \notin A$ ، در نظر می‌گیریم و $A \cup \{m\}$ را با خوشترتیبی در A و شرط $A < m$ ، خوشترتیب می‌سازیم. لذا، زوج $(A \cup \{m\}, \leq)$ از (A, R) بزرگتر خواهد شد. □

به‌همان طریقی که اعداد اصلی را از روی مجموعه‌ها و نگاشتهای یک‌به‌یک می‌سازیم، اعداد ترتیبی^۱ را نیز از روی مجموعه‌های خوشترتیب و نگاشتهای یک‌به‌یک یکنوا^۲ به‌دست می‌آوریم. دو مجموعه خوشترتیب یک عدد ترتیبی^۳ دارند هرگاه یک نگاشت دوسویی ترتیب - نگهدار^۴ بین آنها موجود باشد.

قضیه. فرض می‌کنیم M و N خوشترتیب باشند. در این صورت، دقیقاً یک نگاشت دوسویی یکنوا از یکی از مجموعه‌ها به روی دیگری یا به روی زیرمجموعه‌ای آغازی^۵ از دیگری وجود دارد. بالأخص اعداد ترتیبی، خطی - مرتب‌اند.

برهان. فرض کنیم نگاشت دوسویی یکنوایی به‌شکل $M \rightarrow N_x$ یا $M \rightarrow N$ موجود نباشد. در این صورت، $\varphi : N \rightarrow M_y$ را به استقراء تعریف می‌کنیم: اگر φ قبلاً روی N_x تعریف شده باشد برای $z \in M$ داشته باشیم $\varphi(N_x) = M_z$ ، آنگاه قرار می‌دهیم $\varphi(x) = z$ ؛ اگر $N_x \cup \{x\} \neq N$ ، آنگاه $N_x \cup \{x\}$ نیز یک قطعه آغازی^۶ در N است و $\varphi(N_x) \cup \{z\}$ یک قطعه آغازی در M . روشن است که $\varphi(N)$ به استقراء تعریف شده و $\varphi(N) = M_y$ ، که y در M مینیمال است، لذا $y \notin \varphi(N)$ ، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

به‌ویژه اگر M خوشترتیب باشد، اعداد اصلی کوچکتر از $|M|$ به‌وسیله زیرمجموعه‌های M ، و لذا

1. ordinals 2. monotonic 3. ordinal 4. order-preserving
5. initial subset 6. initial segment

به وسیله قطعات آغازی M_x از M ، نمایش داده می‌شوند (به موجب قضیه فوق)، و

$$|M_x| \leq |M_y| \Leftrightarrow x \leq y$$

پس:

نتیجه. دقیقاً یک نگاشت دوسویی یکنوا از مجموعه اعداد اصلی کوچکتر از $|M|$ به روی یک قطعه آغازی مجموعه خوشترتیب M وجود دارد. به ویژه، مجموعه اعداد اصلی نابزرگتر از $|M|$ ، به وسیله ترتیب خودشان خوشترتیب شده است، و $|M|$ توسط مجموعه اعداد ترتیبی نابزرگتر از عدد ترتیبی M نمایش داده می‌شود.

قضیه. برای یک مجموعه نامتناهی M ، داریم $|M \times M| = |M|$ و $|M + M| = |M|$ که در آن، $+$ معرف اجتماع جدا از هم است.

فرع. اگر $|M|$ نامتناهی باشد، و $N \neq \emptyset$ ، آنگاه

$$|M \times N| = |M + N| = \max\{|M|, |N|\}$$

برهان. از حکم نخست نتیجه می‌شود که

$$|M| = |M \times M| \geq |M \times \{1, 2\}| = |M + M| \geq |M|;$$

و بدین ترتیب، حکم دوم برای همان عدد اصلی برقرار خواهد شد.

برهان حکم نخست. مجموعه زوجهایی مانند (B, ψ) را در نظر می‌گیریم که در آنها $B \subset M$ نامتناهی است و $\psi: B \rightarrow B \times B$ دوسویی. اگر $|B| = |\mathbb{N}|$ ، یقیناً یک نگاشت دوسویی آن‌گونه که می‌خواهیم وجود دارد (شمارش یک به یک $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). طبق معمول، بین زوجهای (B, ψ) ، ترتیب $(B_1, \psi_1) \leq (B, \psi)$ را با ضابطه $B \subset B_1$ و $\psi = \psi_1|_B$ در نظر می‌گیریم. حال، لم زرن، یک زوج ماکسیمال (A, φ) ، $\varphi: A \times A \rightarrow A$ ، به دست می‌دهد. فرض کنیم $|A| < |M|$. در این صورت، $M = A + B$ و $|B| > |A|$ طبق فرض استقراء (استقراء روی عدد اصلی مجموعه). پس $M = A + A_1 + C$ که $|A_1| = |A|$ ، حال، گوئیم

$$(A + A_1) \times (A + A_1) = (A \times A) + (A \times A_1) + (A_1 \times A) + (A_1 \times A_1)$$

و بنابر فرض استقراء، یک نگاشت دوسویی مانند

$$A_1 \bar{\varphi}_1(A \times A_1) + (A_1 \times A) + (A_1 \times A_1)$$

موجود است. بدین شکل، φ_1 توسیعی از φ به دست می‌دهد، یعنی یک نگاشت دوسویی،

$$A + A_1 \rightarrow (A + A_1) \times (A + A_1)$$

که روی A بر φ منطبق است، و این متناقض با ماکسیمال بودن φ است. قضیه، بدین ترتیب ثابت می‌شود. \square

فرض کنیم $|M|$ نامتناهی باشد و K مجموعه اعداد اصلی κ باشد به قسمی که

$$|M| < \kappa < 2^{|M|}$$

از نتیجه قضیه پیش، برآورد زیر به دست می‌آید:

$$0 \leq |K| \leq 2^{|M|}$$

فرض پیوستار^۱ کانتور می‌گوید که $|K| = 0$. بنابر قضیه‌ای از کوهن^۲، این فرض مستقل از اصول موضوعه نظریه مجموعه‌هاست، و در داخل برآورد فوق، همه فرضهای ممکن، با اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها سازگار است. فرض پیوستار، ایجاب می‌کند که هیچ عدد اصلی بین \mathbb{N} و \mathbb{R} موجود نباشد؛ نام این فرض، از همینجا گرفته شده است.

مراجع

- [1] Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique*, Livre V: Espaces Vectoriels Topologiques, Chaps. I and II, 2nd ed., Paris: Hermann, 1966.
- [2] Bourbaki, N., *General Topology*, Vols. I and II, Paris: Hermann and Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966.
- [3] Bröcker, Th. and Jänich, K., *Introduction to Differential Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [4] Dieudonné, J. A., *Treatise on Analysis*, Vol. II, New York and London: Academic Press, 1970.
- [5] Lold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972.
- [6] Dold, A., Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. of Math.*, **78**, (1963), 223-255.

- [7] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators*, Part I: General Theory, New York: Interscience, 1957.
- [8] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators*, Part II: Spectral Theory, New York: Interscience, 1963.
- [9] Forster, O., *Lectures on Riemann Surfaces*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [10] Grauert, H. and Remmert, R., *Theory of Stein Spaces*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [11] Hilton, P. J., *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953.
- [12] Jänich, K., *Einführung in die Funktionentheorie*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [13] Köthe, G., *Topological Vector Spaces*, I, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1966.
- [14] Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1963.
- [15] Neumann, J. v., Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102** (1930), 370-427.
- [16] Schubert, H., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1968.
- [17] Steen, L. A. and Seebach, J. A., *Counterexamples in Topology*, 2nd ed., New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [18] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17-86.
- [19] Tychonoff, A., Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Annalen*, **102** (1930), 544-561.
- [20] Tychonoff, A., Ein Fixpunktsatz, *Math. Annalen*, **111** (1935), 767-780.
- [21] Wolf, J. A., *Spaces of Constant Curvature*, New York: McGraw-Hill, 1967.

فهرست نمادها

بازه بسته از a تا b	$[a, b]$
درون مجموعه B	\hat{B}
بستار B	\overline{B}
گوی به شعاع ε حول نقطه x از یک فضای متری	$K_\varepsilon(x)$
اجتماع جدا از هم، حاصلجمع توپولوژیک	+
«یکریخت» که اینجا در مورد همسانریختیها به کار می رود	\cong
بازه باز از 2 تا 3 (هنوز به علامتگذاری نفرت انگیز $2, 3$ عادت نکرده ام؛ البته روزی عادت خواهم کرد، آدمی به همه چیز عادت می کند). خطر اشتباه با زوج مرتب $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$ وجود دارد.	$(2, 3)$
نرم	$\ \cdot \ $
نیم نرم	$ \cdot $
فضای باناخ متشکل از توابع پیوسته کراندار بر X .	$C(X)$
رده هم‌ارزی	$[x]$
مجموعه یا فضای رده‌های هم‌ارزی برحسب رابطه هم‌ارزی \sim بر مجموعه X	X/\sim
فضای خارج قسمت G بر زیرگروه H	G/H
فضای مداری G - فضای X	X/G
فضای خارج قسمت حاصل از چسباندن $A \subset X$ به یک نقطه	X/A
مخروط روی X	CX

$X \times y_0 \cup x_0 \times Y \subset X \times Y$	حاصلضرب گروه‌یی	$X \vee Y$
$X \times Y / X \vee Y$	حاصلضرب رحلی	$X \wedge Y$
فضای خارج قسمت حاصل از $X + Y$ با یکی‌گرفتن x و $\varphi(x)$		$Y \cup_{\varphi} X$
«چسباندن X به Y به وسیلهٔ φ »		
حاصلجمع همبند		$M_1 \# M_2$
فضای خارج قسمت حاصل از $X \times [0, 1]$ با یکی‌گرفتن $(x, 0)$ و $(\alpha(x), 1)$.		$X \times [0, 1] / \alpha$
فضای تکمیلی یک فضای متری (X, d)		(\hat{X}, \hat{d})
فضای برداری توابع C^∞ با محمل فشرده		$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
مانسته جا		\simeq
هم‌ارزی مانسته جایی		\simeq
مجموعهٔ رده‌های مانسته‌جایی نگاشتهای از X بتوی Y		$[X, Y]$
گروه مانسته جایی n - ام (X, x_0)		$\pi_n(X, x_0)$
حاصلضرب خانوادهٔ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از مجموعه‌ها یا فضاهای توپولوژیک		$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
سادک، پوش محدب نقاط v_0, \dots, v_k در وضعیت عام در \mathbb{R}^n		$s(u_0, \dots, u_k)$
مجموعهٔ زیربنایی یک مجتمع سادگی		$ K $
n - کالبدی یک تجزیهٔ حجره‌یی برای X		X^n
کلاف مماسی		TM
تاریک فضای توپولوژیک $X \xrightarrow{\pi} Y$ بالای X ، در نقطهٔ x		Y_x
تحدید یک فضای توپولوژیک بالای X به $U \subset X$		$Y U$
یکریخت؛ در اینجا برای همسانریختیهای «بالای X » به‌کار می‌رود		\cong
وقتی بالای یک نگاشت نوشته شده باشد:		\sim
در فصل ۹ اکثراً برای «بالابریهای» مختلف به‌کار می‌رود.		
راهی که در جهت عکس پیموده شود، یعنی $\alpha^-(t) := \alpha(1-t)$		α^-
مجموعهٔ طوقه‌های فضای X در نقطهٔ x_0		$\Omega(X, x_0)$
در اینجا: مانسته جایی طوقه‌ها با نقاط انتهایی ثابت x_0		\simeq
در اینجا: رده‌های هم‌ارزی طوقه‌ها برای \simeq		$[]$
گروه اساسی		$\pi_1(X, x_0)$
همریختی ناشی از f میان گروههای اساسی		f_*
زیرگروه مشخصهٔ $\pi_1(X, x_0)$ برای فضای پوششی		$G(Y, y_0)$

$(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$	
فقط در صفحات ۱۸۶ و ۱۹۱) رده‌های هم‌ارزی رابطه‌ی تعریف شده	$[\sim]$
در صفحه‌ی ۱۸۶	
فقط در صفحات ۱۸۷ تا ۱۹۱) نمادگذاری ویژه‌ای است که در برهان	$V(U, y)$
قضیه‌ای لازم است	
گروه تبدیلات پوششی	\mathcal{D}
نرمال‌ساز زیرگروه B	N_B
پوشش عام برای (X, x_0)	(\tilde{X}, \tilde{x}_0)
فضای دوگان یک فضای نرم‌دار X	X'
طیف یک جبر جابه‌جایی باناخ	$\text{Spec } B$
توسیع فشرده‌ی استون - چخ برای X	βX
پالایه	\mathcal{F}
عدد اصلی مجموعه‌ی M	$ M $
عدد اصلی مجموعه‌ی توانی M	${}^2 M $
عدد اصلی مجموعه‌ی اعداد طبیعی \mathbb{N} ; آن را با \aleph_0 (الف صفر) نیز	$ \mathbb{N} $
نمایش می‌دهند.	

نمایه

این راهنمای موضوعی بر مبنای الفبای انگلیسی تنظیم شده است. معادلهای انگلیسی واژه‌ها همراه با توضیح آنها، نمایه را به شکل یک فرهنگ اختصاری توپولوژیک درآورده است. اعداد فارسی معرّف شماره صفحات متن ترجمه کتاب است.

accumulation point

نقطه انباشتگی ۶

(رجوع شود به cluster point)

attaching

چسباندن ۵۸

چسباندن یک فضای توپولوژیک X به یک فضای Y به کمک یک نگاشت $\varphi: X_0 \rightarrow Y$ ، یعنی تعیین فضای خارج قسمت \sim $Y \cup_\varphi X := X + Y / \sim$ در آن رابطه هم‌ارزی \sim را با $\varphi(x)$ یکی می‌گیرد.

attaching map

نگاشت چسباننده ۵۸

منظور نگاشت $\varphi: X_0 \rightarrow Y$ است که برای تشکیل $Y \cup_\varphi X$ از روی X و Y به کار می‌رود.

axiom of choice

اصل موضوع انتخاب ۲۱۹

ε -ball

اپسیلون (ε) - گوی ۱۳

در یک فضای متریک: منظور مجموعه $K_\varepsilon(x) := \{y | d(x, y) \leq \varepsilon\}$ است. پس در \mathbb{R}^n با متریک معمولی، داریم

$$K_\varepsilon(x) := \{y \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}$$

Banach space	فضای باناخ ۳۸
	یک فضای نرم‌دار کامل
basepoint	پایه نقطه ۱۸۰
	در برخی موارد، مناسبیت صوری دارد که به جای فضاهای توپولوژیک، زوجهای مرتبی به شکل (X, x_0) گرفته شود که در آن X یک فضای توپولوژیک و x_0 نقطه‌ای از آن است. در این حال، نقطه x_0 را پایه نقطه فضا (یا دقیقتر، پایه نقطه این زوج) می‌نامند.
basis	پایه ۱۸
	پایه یک توپولوژی: مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز، شامل تعداد کافی از آنها به قسمی که هر مجموعه باز بتواند به شکل اجتماعی از چنین مجموعه‌های پایه‌یی تولید شود. (مثلاً گویهای باز تشکیل یک پایه برای توپولوژی یک فضای متری می‌دهند).
bordant	مرز پوش ۱۰۰
	دو خمینه دیفرانسیلی پذیر فشرده را مرز پوش گویند هرگاه اجتماع جدا از هم آنها، مرز یک خمینه فشرده باشد.
bordism classes	رده‌های مرز پوشی ۱۰۰
	رده‌های هم‌ارزی تحت رابطه هم‌ارزی «مرز پوش».
boundary point	نقطه مرزی ۱۰
	نقطه مرزی B : نقطه‌ای که هر همسایگی آن، هم B و هم $X \setminus B$ را قطع می‌کند.
branched covering	پوشش شاخه‌یی ۱۶۸
	مفهومی کلیتر از آنچه در فصل نهم این کتاب راجع به پوشش گفته شده است
Brower, L. E. J., 1881-1966	براور، ل. ا. جی. ۱۲۴
Cantor, Georg, 1845-1918	کانتور گئورگ ۵، ۶، ۷، ۲۲۵
cardinality	عدد اصلی ۲۲۱
category	رسته ۸۷
	داده‌های آن عبارت‌اند از: اشیاء، ریختها، و قوانین ترکیب؛ اصلهای موضوع آن عبارت‌اند از وجود همانی و شرکتپذیری.
cell	حجره ۱۲۲، ۵۹
	هر فضای توپولوژیک همسان‌ریخت با \mathbb{R}^n یک n -حجره است.
cell decomposition	تجزیه حجره‌یی ۱۲۳

تجزیهٔ حجره‌یی یک فضای توپولوژیک X : افراز X به زیرفضاهایی که حجره‌اند.

chain زنجیر ۲۱۹

characteristic map نگاشت مشخصه ۱۲۵

نگاشت مشخصه برای یک n - حجرهٔ e در تجزیهٔ حجره‌یی یک فضای X :
نگاشت پیوسته‌ای است مانند $D^n \rightarrow X$ که گویهای باز را به‌طور همسانریخت
بر روی e و مرزگوی S^{n-1} را بتوی $(n-1)$ - کالبد، بنگارد.

زیرگروه مشخصهٔ یک فضای پوششی ۱۸۱

characteristic subgroup of a covering space

نگارهٔ گروه بنیادی «بالایی» در گروه بنیادی «پایینی».

classification of covering spaces رده‌بندی فضاهای پوششی ۱۸۴

مشکل است از قضیهٔ یکتایی و قضیهٔ وجود.

Clifford-Klein forms صورتهای کلیفرد - کلاین ۲۰۲

رجوع شود به space forms (صورتهای فضا).

closed بسته ۱۰

مجموعه‌ای که مکتلس باز است.

closure بستار ۱۰

درون یک مجموعه به‌انضمام مرز آن، بستار آن را تشکیل می‌دهند.

closure finiteness تناهی بستار ۱۲۶

یک تجزیهٔ حجره‌یی وقتی متناهی بستار است که بستار هر حجره فقط تعدادی
متناهی از حجره‌ها را قطع کند.

cluster point نقطهٔ انباشتگی ۶

نقطهٔ انباشتگی یک زیرفضای $A \subset \mathbb{R}$ ، نقطه‌ای است چون $p \in \mathbb{R}$ ، که الزاماً
عضو A نیست، ولی برای هر $\varepsilon > 0$ ، اشتراک

$$A \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \setminus \{p\}$$

ناتهی است. همچنین است، برای یک زیرفضای $A \subset X$ از یک فضای توپولوژیک
 X (p) یک نقطهٔ انباشتگی A است، یعنی برای هر همسایگی U p ، اشتراک
 $A \cap U \setminus \{p\}$ ناتهی است

coarse درشت بافت ۱۹ (رجوع شود به «ریز بافت»)

collapsing of a subspace فروریزی یک زیرفضا ۵۴

فروریزی یک زیرفضای $A \subset X$ به یک نقطه: گذر به فضای خارج قسمت X/A تحت رابطه هم‌ارزیی که همه نقاط A را یکی می‌گیرد؛ به عبارت دیگر گذر از X به X/A را فروریزی A به یک نقطه گویند.

جبر تعویضپذیر باناخ ۲۰۹ commutative Banach algebra

فشرده ۲۶ compact

فضایی را فشرده گویند که هر پوشش باز آن یک زیرپوشش متناهی بپذیرد. غالباً هاوسدورف بودن را نیز به این شرط اضافه می‌کنند.

فضای متری کامل ۶۸ complete metric space

فضائی است متری که در آن هر دنباله کوشی همگرا باشد.

فضای برداری توپولوژیک کامل ۳۹ complete topological vector space

فضای برداری توپولوژیک است که در آن هر دنباله کوشی همگراست، مفهوم دنباله کوشی به‌کمک همسایگیهای مبدأ تعریف می‌شود (زیرا متریک وجود ندارد!).

کاملاً منظم ۲۱۲ completely regular

فضای توپولوژیک که هر مجموعه یک نقطه‌یی در آن بسته باشد و برای هر زیرمجموعه بسته A و هر نقطه $p \notin A$ ، یک تابع پیوسته بتوی $[0, 1]$ بتوان یافت که در p مقدار ۰ و در A مقدار ۱ بگیرد.

فضای تکمیلی ۶۸ completion

فضای تکمیلی یک فضای متری: فضای متری کاملی است که فضای مفروض (به‌صورت یک فضای متری) در آن مشمول و چگال باشد.

مخروط ۵۵ cone

مخروط روی X چنین تعریف می‌شود:

$$CX := X \times [0, 1] / X \times \{1\}$$

همبند ۲۲، ۲۱ connected

یک فضای X که تنها مجموعه‌های باز و بسته آن، \emptyset و X باشند.

حاصلجمع همبند دو خمینه ۶۰ connected sum of two manifolds

نگاشت پیوسته ۱۹ continuous map

نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر نگارهٔ وارون مجموعه‌های باز، مجموعه‌های باز باشند.

- continuum hypothesis فرض پیوستار ۲۲۵
- contractible انقباضپذیر ۸۱
- فضایی که از لحاظ مانسته جایی با فضای یک نقطه‌یی هم‌ارز باشد
- contravariant پادورد ۹۱
- تابعگون F را پادوردا گویند هرگاه به هر ریختی $X \rightarrow Y$ یک ریختی «در جهت عکس» وابسته کند: $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$.
- convergence همگرایی ۲۵
- a را حد یک دنباله در یک فضای توپولوژیک گویند هرگاه برای هر همسایگی a چون U ، این دنباله سرانجام در U قرار گیرد.
- convex property ویژگی محدب ۱۵۴
- ویژگی محدب در مقاطع کلافهای برداری: قرار گرفتن در یک Ω است به قسمی که برای هر x, Ω_x محدب باشد.
- countability axioms اصلهای موضوع شمارایی ۱۰۳
- این اصول، به‌وجود یک پایه شمارای همسایگی برای هر نقطه (در اصل موضوع نخست) و یا وجود یک پایه شمارا برای توپولوژی (در اصل موضوع دوم) نیاز دارند.
- covariant همورد ۹۰
- تابعگون F را هموردا گویند هرگاه به هر ریختی $X \xrightarrow{f} Y$ ریختی دیگری را در «همان جهت» وابسته کند: $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$.
- covering space فضای پوششی ۱۶۷
- یک تاربندی بیمایه موضعی با تارهای گسسته.
- covering transformations تبدیلات پوششی ۱۹۱
- تبدیلات پوششی یک فضای پوششی $X \xrightarrow{\pi} Y$ همسان‌ریختیهایی مانند φ از Y به روی خود هستند به قسمی که $\pi \circ \varphi = \pi$.
- cube مکعب ۲۰۶، ۹۹
- $I^n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$
- CW- complex مجتمع CW یا مجتمع ضئب ۱۲۵
- فضایی همراه با یک تجزیه حجری که در اصول موضوعه زیر صدق کند: (۱) وجود نگاشتهای مشخصه، (۲) تناهی بستار (۳) توپولوژی ضعیف.
- CX مخروط ۵۵ $X \times [0, 1] / X \times 1$

- فضای باناخ توابع پیوسته کراندار بر X با نرم سوپر مم ۴۱، ۱۰۴ $C(X)$
- فضای برداری توابع رده C^∞ با محمل فشرده ۷۵ $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$
- متریکهای $\mathbb{R} \rightarrow X \times X$ عموماً در این کتاب با d نمایش داده شده‌اند ۱۳ d
- گروه تبدیلات پوششی ۱۹۱ \mathcal{D}
- تبدیل‌های عرشه‌یی ← تبدیلات پوششی ۱۹۱ deck transformations
- درون بر تغییر شکل ۸۲ deformation retract
- اگر یک درون بری $A \rightarrow X$ با Id_x مانسته‌جا باشد، A را یک درون بر تغییر شکل X نامند (آن را تغییر شکل «قوی» نامند اگر بتوان A را نقطه به نقطه تحت مانسته جایی تثبیت کرد).
- چگال ۶۸ dense
- A را در فضای توپولوژیک X چگال گویند هرگاه $\bar{A} = X$.
- عملگرهای دیفرانسیل ۷۶ differential operators
- به‌ویژه، عملگرهای مشتق جزئی خطی به شکل $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$.
- توپدیف ۸۸ $DiffTop$
- رسته توپولوژی دیفرانسیل: خمینه‌های دیفرانسیلیپذیر و نگاشتهای دیفرانسیلیپذیر
- توپولوژی گسسته ۱۹ discrete topology
- ریزبافت‌ترین توپولوژی ممکن؛ همه مجموعه‌ها بازند، به‌ویژه مجموعه‌های تک نقطه‌یی، همچنین می‌توان تصور کرد که نقاط به‌شکل «گسسته» مرتب شده‌اند، برخلاف حالتی که نقاط «به‌طور پیوسته» توزیع شده باشند.
- اجتماع جدا از هم ۱۶ disjoint union
- اجتماع دو مجموعه که قبلاً به‌طور صوری از هم جدا شده‌اند و معمولاً چنین تعریف می‌شود
- $$X + Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$$
- فاصله ۱۴۲ distance
- فاصله یک نقطه a از یک مجموعه B در یک فضای متری (X, d) : به‌صورت اینفیمم $\{d(a, x) | x \in B\}$ تعریف می‌شود.
- دوگان ۲۰۸ dual
- دوگان یک فضای نرم‌دار X : فضای X' متشکل از صورتهای خطی روی X با نرم: $\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$

- Euler characteristic, Euler number مشخصه اویلر، عدد اویلر ۹۳، ۹۴، ۱۳۶
 همان حاصلجمع تعداد یالها، رأسها و جز آن در یک مجتمع سادگی، و یا همان حاصلجمع اعداد بتی در یک فضای توپولوژیک.
- excursus on vector bundles سیری کوتاه در کلافهای برداری ۱۵۰
 قضیه وجود برای فضاهاى پوششى ۱۹۱
- existence theorem for covering spaces
 این قضیه می‌گوید که تحت چه شرایطی، برای یک زیرگروه مفروض $G \subset \pi_1(X, x_0)$ ، یک فضای پوششی وجود دارد به قسمی که زیرگروه مشخصه‌اش G باشد.
- exterior point نقطه بیرونی ۱۰
 نقطه بیرونی B : هر نقطه‌ای که $X \setminus B$ یک همسایگی برای آن باشد.
- filter پالایه ۲۱۳، ۲۱۵
 پالایه روی X : مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X که هر فوق‌مجموعه هر یک از عضوهای خود، و اشتراک هر دو عضو خود را در بردارد، و مجموعه تهی را در بر ندارد.
- filter convergence همگرایی پالایه ۲۱۵
 یک پالایه همگراست به a هرگاه هر همسایگی a عضو پالایه باشد.
- fine ریزبافت ۱۹
 اگر $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ توپولوژی‌هایی بر X باشند، \mathcal{O} را (که مجموعه‌های باز کمتری دارد) درشت بافت‌تر از \mathcal{O}' گویند و \mathcal{O}' را (که مجموعه‌های باز بیشتری دارد). ریز بافت‌تر از \mathcal{O} نامند.
- first countable شمارای یکم ۱۰۳
 رجوع شود به اصلهای موضوع شمارایی countability axioms
- forgetful functor تابعگون نادیده‌گیر ۹۲، ۹۵
- Fourier series سریهای فوریه ۶
 سریهای تابعی به شکل

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

به‌احترام ژوزف فوریه (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰)، که نخستین بار این‌گونه سریها را (در رابطه با معادلهٔ حرارت) به‌کار برد، این سریها را چنین نامگذاری کرده‌اند.

فرشه، موریس (۱۸۷۸ تا ۱۹۷۳) ۳۴، ۵ Fréchet, Maurice

فضای فرشه ۳۸، ۴۰ Fréchet space

یک فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف کامل که توپولوژی آن را بتوان با دنباله‌ای از نیم‌رمها تعریف کرد.

گروه بنیادی ۱۸۰ fundamental group

گروه بنیادی یک فضای پایه - نقطه‌دار که با $\pi_1(X, x_0)$ نمایش داده می‌شود: مجموعهٔ زیربنای آن مجموعهٔ رده‌های مانسته جایی طوقه‌ها در x_0 است، و قانون ترکیب آن از «توصیف متوالی طوقه‌ها، یکی پس از دیگری» به‌دست می‌آید.

تابعگون ۹۰ functor

تابعگون بین دو رسته، اشیاء را به اشیاء و ریختها را به ریختها مربوط می‌کند، ریختی همانی و قوانین ترکیب ریختها را حفظ می‌کند.

نمایش گلفاند - نویمارک برای جبرهای B^* - ۲۱۲

Gelfand-Neumark representation for B^* - algebras

پدید آمده ۱۸ generated

به‌ازای یک مجموعهٔ مفروض \mathcal{S} از زیرمجموعه‌های X ، دقیقاً یک توپولوژی $O(\mathcal{S})$ موجود است که \mathcal{S} زیرپایهٔ آن است (این توپولوژی را «پدید آمده» به‌وسیلهٔ \mathcal{S} نامند).

خارج قسمت یک گروه بر یک زیرگروه ۴۷ G/H

خمینهٔ گراسمانی ۴۹ Grassmannian manifold

مشکل از زیرفضاهای k -بعدی فضای \mathbb{R}^{n+k} ، یعنی $o(n+k)/o(n) \times o(k)$.

G - فضا ۵۱ G -space

یک فضای توپولوژیک X همراه با یک عمل پیوسته $X:G \rightarrow X \times X$. به‌طور مشابه، برای G - خمینه‌های دیفرانسیلپذیر تعریف می‌شود.

دسته ۶۰ handle

در ارتباط با نظریهٔ مورس، نامی برای $D^k \times D^{n-k}$.

کلاه ۶۸ $\hat{\quad}$, "hat"

معرف فضای تکمیلی فضای متری (X, d) است. (\hat{X}, \hat{d})

هاوسدورف فلیکس (۱۸۶۸ تا ۱۹۴۲) ۲۴، ۵ Hausdorff, Felix, 1868-1942

- Hausdorff separation axiom اصل موضوع جداسازی هاوسدورف ۲۴
هر دو نقطه متمایز همسایگیهای جدا از هم دارند.
- Hausdorff space فضای هاوسدورف ۲۴
فضای توپولوژیکی که در اصل موضوع جداسازی هاوسدورف صدق می‌کند.
- Hilbert basis پایه هیلبرتی ۳۷
یک دستگاه یکا متعامد کامل در یک فضای هیلبرت.
- Hilbert cube مکعب هیلبرت ۲۰۶
در یک فضای تفکیکپذیر هیلبرت، مثلاً فضای دنباله‌های مربع انتگرالپذیر، زیر فضای متشکل از دنباله‌های $(x_n)_{n \geq 1}$ با شرط $|x_n| \leq \frac{1}{n}$.
- Hilbert space فضای هیلبرت ۳۶
فضائی کامل با حاصلضرب داخلی.
- homeomorphic همسانریخت ۲۱
دو فضا را همسانریخت گویند اگر یک همسانریختی بین آنها موجود باشد.
- homeomorphism همسانریختی ۲۰
یک نگاشت دو سوئی $f : X \rightarrow Y$ به قسمی که هم f پیوسته باشد و هم f^{-1} .
- homogeneous space فضای همگن ۴۸
یک خارج قسمت از گروههای توپولوژیک چون G/H
- homology مانستگی ۱۳۵، ۱۲۲، ۹۷، ۹۵
در این کتاب از مانستگی (و تعدادی از اشیاء دیگر) فراتر از قلمرو توپولوژی نقطه - مجموعه چندین بار صحبت می‌شود، اما تعریف آن داده نشده است. رجوع شود به مرجع [۵] یا [۱۶].
- homotopic مانسته جا ۷۸، ۷۹
دو نگاشت $X \rightarrow Y$ را مانسته جا گویند هرگاه بتوانند به طور پیوسته به یکدیگر بدل شوند.
- homotopy مانسته جایی ۷۹
مانسته جایی بین نگاشتهای $f, g : X \rightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ است که در شرطهای $H_0 = f$ و $H_1 = g$ صدق می‌کند.
- homotopy category رسته مانسته جایی ۸۹

اشیاء آن: فضاهاى توپولوژیک، و ریختهاى آن: رده‌هاى مانسته جایی نگاشتهای پیوسته

homotopy classes رده‌هاى مانسته جایی ۸۱

رده‌هاى هم‌ارزی نگاشتهای $X \rightarrow Y$ تحت رابطه هم‌ارزی «مانسته جا».

homotopy equivalence هم‌ارزی مانسته‌جایی ۸۱

نگاشت پیوسته‌ای چون $f : X \rightarrow Y$ که برای آن یک «وارون مانسته جایی» $g : Y \rightarrow X$ وجود داشته باشد.

homotopy groups گروه‌هاى مانسته‌جایی ۹۹

گروه‌هاى $\pi_n(X, x_0)$ برای یک فضای پایه - نقطه‌دار با پایه - نقطه x_0 . این مفهوم مهم در ۱۹۳۵ توسط ویتولد هورویتس (Witold Hurewicz ۱۹۰۴ تا ۱۹۵۷) وارد شد.

homotopy inverse وارون مانسته‌جایی ۸۱

وارون مانسته‌جایی برای $f : X \rightarrow Y$ نگاشتی است چون $g : Y \rightarrow X$ به‌قسمی که $f \circ g$ و $g \circ f$ با نگاشت همانی مانسته‌جا باشند.

ideal limit points نقطه‌هاى حدی آرمانی ۷۰

نقاطی که باید به یک فضا افزوده شوند تا فضای تکمیلی آن به‌دست آید.

incidence data داده‌هاى وقوع ۱۲۰

incidence numbers اعداد وقوع ۱۳۵

این اعداد، از جنبه مانستگی نشان می‌دهند که چگونه حجره‌هاى یک مجتمع ضمتب به کالدهاى با بعد کمتر می‌چسبند. جزئیات این مفهوم در متن نیامده است.

induced topology توپولوژی القایی ۱۵

یک مجموعه $V \subset X_0$ در توپولوژی «القایی» روی $X_0 \subset X$ ، باز است هرگاه یک مجموعه باز U در فضای X وجود داشته باشد به‌قسمی که $V = X_0 \cap U$.

induction principle اصل استقراء ۲۱۹

interior درون ۱۰

درون یک مجموعه B : مجموعه نقاط درونی B است.

interior point نقطه درونی ۱۰

نقطه درونی B : هر نقطه‌ای که B یک همسایگی آن باشد.

invariant ناوردا ۹۳
 isomorphism یکرختی ۱۶۶
 یکرختی بین فضاهای توپولوژیک (Y, π) و $(\tilde{Y}, \tilde{\pi})$ بالای X : یک همسانریختی $\varphi: Y \rightarrow \tilde{Y}$ است که در شرط $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$ صدق کند (یعنی همسانریختی «بالای» X باشد).

isomorphisms یکرختیها ۹۰
 در یک رسته: ریختیهایی را گویند که وارونپذیر باشند. در رسته توپولوژیک، به عنوان مثال، یکرختیها همان همسانریختیها هستند.

isotropy group گروه تکروندی ۵۳
 به stabilizer (پایدارساز) مراجعه شود.

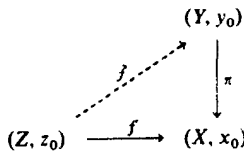
Klein bottle بطری کلاین ۶۲
 منسوب به فلیکس کلاین (۱۸۴۹ تا ۱۹۲۵)

Kuratowski closure axioms اصلهای موضوع بستار کوراتوفسکی ۱۲
 روش دیگری برای بررسی مفهوم فضاهای توپولوژیک - بیان مفهوم بستار به روش اصل موضوعی.

lexicographical ordering ترتیب الفبایی ۲۱۹

Lie groups گروههای لی ۲۰۳، ۱۱۳
 خمینه‌های دیفرانسیلپذیر همراه با ساختار گروه دیفرانسیلپذیر.

liftability criterion ملاک قابلیت بالابری ۱۸۲



در نمودار در پی یافتن \tilde{f} هستیم. این ملاک به گروه بنیادی اطلاق می‌شود.

locally convex موضعاً محدب ۴۰
 فضای برداری توپولوژیکی که هر همسایگی مبدأ آن شامل یک همسایگی محدب است.

locally homeomorphic همسانریخت موضعی ۱۶۸
 یک نگاشت $f: X \rightarrow Y$ که به ازای هر $x \in X$ همسایگیهای بازی چون U برای

x و همسایگیهای باز V برای $f(x)$ بتوان یافت به قسمی که $f|U$ یک همسانریختی U به روی V باشد.

همبند - راه موضعی ۱۸۲ locally path-connected

فضایی را گویند که هر همسایگی یک نقطه آن شامل یک همسایگی همبند - راه باشد.

تاریبندی بیمایه موضعی ۱۶۶ locally trivial fibration

یک فضای توپولوژیک در بالای X به قسمی که برای هر نقطه در X یک همسایگی چون U بتوان یافت به قسمی که Y روی U بیمایه باشد، یعنی به قسمی که $y|U$ با $U \times F \rightarrow U$ روی U همسانریخت باشد.

فضای L^p ۷۴ L^p -space

فضای تابعی با نرم $\|f\|_p := \sqrt[p]{\int |f|^p dx}$ که به احترام هانری لِبِگ (۱۸۷۵ تا ۱۹۴۱) چنین نامیده شده است.

رسته مجموعه‌ها و نگاشتها ۸۷ \mathcal{M}

حاصلجمع همبند ۶۰ $M_1 \# M_2$

خمینه ۱۳۹، ۱۱۲، ۲۷ manifold

«خمینه دیفرانسیلیزیر» مفهوم بنیادی در توپولوژی دیفرانسیل است. مثلاً رجوع شود به مرجع [۳].

فضای مترى ۱۳ metric space

زوج مرتبی چون (X, d) را گویند که نگاشت $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ مثبت، معین، و متقارن است و در نابرابری مثلثی صدق می‌کند. فضاهای $(X, \mathcal{O}(d))$ رده مهمی از مثالهای فضاهای توپولوژیک هستند.

فضای متریکپذیر ۱۵ metrizable space

فضای توپولوژیک (X, \mathcal{O}) که بتوان با $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$ یک متریک برای آن پیدا کرد.

نوار موبیوس ۶۲ Möbius strip

به نام اوگوست فردینانت موبیوس (۱۷۹۰ تا ۱۸۶۸) August Ferdinand Möbius نامگذاری شده است.

لم تکرایی ۱۷۵ monodromy lemma

در نظریه فضاهای پوششی: راههای مانسته‌جا را می‌توان به راههایی با نقطه پایانی مشترک بالا برد.

- Morse theory نظریه مورس ۶۰، ۸۶
- نظریه توپولوژیکی دیفرانسیل که به وسیله مارستن مورس (۱۸۹۲ تا ۱۹۷۷) نظریه Marston Morse پرورده شده و به موجب آن می توان ویژگیهای توپولوژیک خمینه‌ای را (که ممکن است بینهایت بعدی نیز باشد)، از روی نوع و تعداد نقاط بحرانی یک تابع بر آن خمینه نتیجه‌گیری کرد.
- Mor (X, Y) در یک رسته، مجموعه ریختیهای از X به Y ۸۷.
- neighborhood همسایگی ۱۰
- همسایگی یک نقطه x مجموعه‌ای است که نه تنها x بلکه تمامی مجموعه باز شامل x را دربر می‌گیرد.
- neighborhood axioms اصول موضوعه همسایگی ۱۲
- راه دیگر نگرش به مفهوم «فضاهای توپولوژیک»، از طریق بیان مفهوم همسایگی با روش اصل موضوعی.
- neighborhood basis پایه همسایگی ۱۰۳
- مجموعه‌ای از همسایگیهای x_0 که در آن «همسایگیهای بدخواه کوچک جا داشته باشند»، به عبارت دیگر: هر همسایگی x_0 شامل یکی از همسایگیهای پایه باشد.
- \mathfrak{N}_n گروههای مرزپوشی ۱۰۱
- norm نرم ۳۷
- نگاشت مثبت معین همگن $\mathbb{R} \rightarrow E: \|\cdot\|$ همراه با نامساوی مثلثی.
- normal covering space فضای پوششی نرمال ۱۹۳
- فضای پوششی است که زیرگروه مشخصه آن درگروه بنیادی فضای پایه یک زیرگروه نرمال باشد. از لحاظ هندسی بدین معنی است که گروه تبدیلات پوششی به‌طور تریا بر تارها عمل می‌کنند.
- normalizer نرمال‌ساز ۱۹۲
- نرمال‌ساز یک زیرگروه $B \subset A$ ، بزرگترین زیرگروه N_B ، مابین B و A ، که در آن B همچنان نرمال باشد.
- north pole قطب شمال ۵۷
- قطب شمال کره $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ نقطه N است که $N = (0, \dots, 0, 1)$.
- null-homotopic مانسته‌جا با صفر ۱۸۹
- طوقه‌ای (با دو سر ثابت) که با طوقه‌های ثابت مانسته جاست و درگروه بنیادی

حکم عضو خنثی را دارد.

number of leaves

تعداد برگها ۱۶۷

در یک فضای پوششی، تعداد برگها در یک نقطه x ، تعداد نقاط در تار بالای x است.

$\text{Ob}(\mathcal{C})$

رده اشياء رسته \mathcal{C} ۸۷

$\mathcal{O}(d)$

توپولوژی فضای متری (X, d) ۱۳

open

باز ۱۰

تعریف «فضای توپولوژیک» بر مبنای بیان این مفهوم به روش اصل موضوعی. همه مفاهیم توپولوژی دیگر، از مفهوم بنیادی «باز» مشتق می شوند.

open ball

گوی باز ۱۴

در یک فضای متری، مجموعه $\{y | d(x, y) < \varepsilon\}$ را «گوی باز» حول x نامند. به موجب نابرابری مثلثی، این مجموعه واقعاً در $\mathcal{O}(d)$ قرار دارد.

open boxes

حجره های باز ۱۰۵

در $X \times Y$: مجموعه هایی به شکل $U \times V$ که U در X باز است و V در Y . در حاصلضربهای نامتناهی: اشتراکهای متناهی «استوانه های باز» را حجره های باز نامند. حجره های باز، یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی تشکیل می دهند.

open cover

پوشش باز ۲۶

پوشش باز برای یک فضای توپولوژیک X : خانواده ای از مجموعه های باز مانند $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

orbit

مدار ۵۱

مدار یک نقطه در یک G - فضا: مجموعه Gx متشکل از نقاطی که عمل گروهی بتواند x را به آن نقاط ببرد.

orbit space

فضای مداری ۵۲

در یک G - فضای X ، مجموعه X/G متشکل از مدارها، و مجهز به توپولوژی خارج قسمت.

ordinals

اعداد ترتیبی ۲۲۳

$\mathcal{O}|X_0$

توپولوژی القایی بر $X_0 \subset X$ توسط (X, \mathcal{O}) ۱۵

paracompact

پیرافشرده ۱۵۹

فضای هاوسدورفی که هر پوشش باز آن یک نظریف موضعاً متناهی داشته باشد.

اهمیت این فضاها در آن است که این فضاها که هر پوشش باز آنها یک افراز فرعی واحد را می‌پذیرد دقیقاً فضاها را پیرا فشرده‌اند.

partially ordered set مجموعه جزئاً مرتب ۲.۱۹

partition افراز ۱۲۲

افراز یک مجموعه X : مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دوه‌دو جدا از هم که اجتماع آنها همه X باشد.

partition of unity افراز واحد ۱۵۰

نمایش تابع ثابت ۱ بر فضای توپولوژیک X به صورت حاصلجمع توابع $[0, 1] \rightarrow X$ که «موضعیاً متناهی» باشند. هنگامی مفیدند که جمعیده‌ها، محل «کوچک» داشته باشند.

path راه ۲۲

یک نگاشت پیوسته $X \rightarrow [0, 1]$

path-connected همبند - راه ۲۲

فضایی که هر دو نقطه آن را بتوان با یک راه به هم وصل کرد.

path lifting بالابری راه ۱۷۰

فنی در نظریه فضاها پوششی که در آن واحد همه جا حاضر است: اگر $Y \xrightarrow{\pi} X$ یک فضای پوششی و y_0 نقطه‌ای بالای نقطه آغاز یک راه مفروض α در X باشد، در این صورت، دقیقاً یک راه «بالابرده شده» $\tilde{\alpha}$ با شروع از y_0 وجود دارد (منظور از راه بالابرده شده این است که $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$).

Peano, Giuseppe (1858-1932) پتانو، جوزپه (۱۸۵۸ تا ۱۹۳۲) ۱۹۵

$\pi_n(X, x_0)$ n امین گروه زائد مانسته‌جایی (X, x_0) ۹۹

+ به اضافه ۱۷

$X + Y$ معرف اجتماع جدا از هم مجموعه‌ها یا فضاها را توپولوژیک است.

polyhedron چند وجهی ۱۱۷

رجوع شود به simplicial complexes (مجتمعه‌های سادگی)

pre-Fréchet space فضای مقدم فرشه ۳۹

یک فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف، که توپولوژی آن با دنباله‌ای از نیمترها داده شود. کامل بودن فضا الزامی نیست.

product of topological spaces حاصلضرب فضاها را توپولوژیک ۱۷، ۱۰۵

حاصلضرب $X \times Y$ یا $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ مجهز، به توپولوژی حاصلضربی («جعبه‌های باز» پایه آن هستند).

توپولوژی حاصلضربی ۱۷، ۱۰۵ product topology

مجموعه $\Omega \subset X \times Y$ برای توپولوژی حاصلضربی یک مجموعه باز است اگر برای هر نقطه Ω یک جعبه باز $U \times V$ حاوی این نقطه مشمول در Ω وجود داشته باشد (برای بی‌نهایت سازه نیز تعریف مشابه همین است. ...).

مجموعه توانی ۱۲، ۲۲۲ $\mathfrak{B}(X)$

مجموعه همه زیرمجموعه‌های X .

شبه فشرده ۲۶ quasi-compact

آنچه را ما در این کتاب فضاهای فشرده نامیده‌ایم، برخی از مؤلفین شبه فشرده می‌نامند، و واژه فشرده را برای «فشرده و هاوسدورف» به معنی ما نگهداشته‌اند.

فضای خارج قسمت ۴۳ quotient space

فضای خارج قسمت یک فضای توپولوژیک X بر یک رابطه هم‌ارزی \sim که با X/\sim نمایش داده می‌شود؛ مجموعه $\sim X/\sim$ متشکل از رده‌های هم‌ارزی، مجهز به «توپولوژی خارج قسمت» است.

توپولوژی خارج قسمت ۴۳ quotient topology

این توپولوژی روی مجموعه $\sim X/\sim$ ریزبافت‌ترین توپولوژی است که برای آن نگاشت $X/\sim \rightarrow X/\sim$ پیوسته باشد. به عبارت دیگر، $U \subset X/\sim$ باز است اگر و تنها اگر نگاره وارون آن در X باز باشد.

دستور بازگشتی ۲۲۰ recursion formula

تعریف بازگشتی ۲۲۰ recursive definition

فضای بازتابی باناخ ۲۰۸ reflexive Banach space

یک فضای باناخ X که نگاشت شمول متعارف $(X')' \subset X$ در «دوگان مضاعف» خود، عملاً یک نگاشت دوسویی $X = X''$ باشد.

درون‌بر، درون‌بری ۸۲ retract, retraction

$A \subset X$ را یک درون‌بر X نامند هرگاه یک درون‌بری از X به روی A یعنی یک نگاشت پیوسته $X \rightarrow A$ وجود داشته باشد که تحدیدش به A نگاشت همانی باشد.

ریمان، برنهارت (۱۸۲۶ تا ۱۸۶۶)، ۵، ۱۵۶، ۲۰۱ Riemann, Bernhard

- غلاف محدب $k + 1$ نقطه در \mathbb{R}^n را در وضعیت عام یک k -سادک نامند.
 رستهٔ سادگی ۱۲۱
 simplicial category
- مجتمعهای سادگی و نگاشتهای سادگی.
 مجتمع سادگی ۱۱۵
 simplicial complex
- مجموعه‌ای چون K از سادکها در \mathbb{R}^n (که در چند شرط نظم صدق کنند). نام
 مجتمع سادگی به اجتماع $|K|$ تا از سادکها نیز اطلاق می‌شود.
 مانستگی سادگی ۱۲۱
 simplicial homology
- (تعریف در متن نیامده است).
 نگاشت سادگی ۱۲۱
 simplicial map
- نگاشتی بین مجتمعهای سادگی که k -سادکها را به‌طور آفین به k -سادکها ببرد.
 ساده - همبند ۱۸۹، ۱۹۴
 simply connected
- فضای همبند - راه را ساده - همبند گویند اگر هر طوقهٔ آن مانسته با صفر باشد.
 یعنی اگر برای یک (و در نتیجه برای هر) پایه - نقطه، گروه بنیادی گروه بیمایه باشد.
 کالبد ۱۲۶
 skeleton
- در یک فضای X با تجزیهٔ حجره‌یی، منظور از n -کالبد X^n ، اجتماع همهٔ حجره‌های
 با بعد مساوی با n یا کمتر از n است.
 رستهٔ کوچک ۹۰
 small category
- رسته‌ای که اشیاء آن عضوهای یک مجموعه باشند.
 حاصلضرب رَحلی ۵۷
 smash product
- $$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$
- فضای سوبولف ۷۷
 Sobolev space
- چنبرهٔ توپیر ۸۴
 solid torus
- $$S^1 \times D^2$$
- صورت‌های فضایی ۲۰۲
 space forms
- مفهومی از هندسهٔ دیفرانسیل: خمینه‌های ریمانی همبند کامل با انحنا ی مقطعی
 ثابت ریمان؛ این مفهوم در متن کتاب باز نشده است. ریمان (در ۱۸۵۴) آنها را
 مدلی برای فضای فیزیکی حقیقی می‌پنداشت.
- خم فضا پرکن ۱۹۵
 space-filling curve
- نگاشت پیوسته و پوشای: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^n$

- spectrum طیف ۲۱۰
 طیف یک جبر تعویضپذیر باناخ: مجموعه همه ایدآلهای ماکسیمال آن است، که به توپولوژی ضعیف - ستاره مجهز باشد.
- stabilizer پایدارساز ۵۳
 پایدارساز یک نقطه x در یک G - فضا، و یا گروه یکرندی این نقطه: زیر گروهی از G که نقطه x را ثابت نگه می‌دارد.
- Stone-Čech compactification فشرده‌سازی (توسیع فشرده) - ستون - چخ ۲۱۲
 βX که از توسیع فشرده یک فضای کاملاً منظم X به دست می‌آید؛ به یک معنی، βX «بزرگترین» توسیع فشرده ممکن برای X است.
- subbasis زیر پایه ۱۸
 زیر پایه یک توپولوژی: مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز شامل تعداد کافی مجموعه برای «تولید» توپولوژی فضا؛ یعنی اشتراکهای متناهی مجموعه‌های یک زیر پایه، تشکیل یک پایه بدهند. (مثلاً استوانه‌های باز یک زیر پایه توپولوژی حاصلضربی را تشکیل می‌دهند).
- subcomplex زیر مجتمع ۱۲۸
 زیر مجتمع یک مجتمع ضَمَب: اجتماعی بسته از حجره‌ها.
- subordinate وابسته ۱۵۰
 یک‌افراز واحد را وابسته به یک پوشش گویند هر گاه محل هر یک از توابع این افراز، مشمول در یکی از مجموعه‌های پوشش باشد.
- subsimplex زیر سادک ۱۱۷
- subspace زیر فضا ۱۵
 یک زیر فضای X_0 در فضای X : زیر مجموعه $X_0 \subset X$ مجهز به یک توپولوژی مخصوص، به نام توپولوژی «زیر فضا».
- subspace topology توپولوژی زیر فضا ۱۵
 همان توپولوژی القایی است.
- sum حاصلجمع ۱۶
 حاصلجمع مجموعه‌ها و فضاها. رجوع شود به disjoint union (اجتماع جدا از هم).
- support محل ۱۴۰
 محل

محمل یک تابع f ، که با $\text{supp } f$ نموده می‌شود: بستار مجموعه نقاطی که تابع در آنها صفر نمی‌شود.

تعليق ۵۶ suspension

فضای تعلیقی یک فضای X که با ΣX نموده می‌شود، فضای حاصل از استوانه بالای X از راه فروریزی قاعده‌های آن، هرکدام به یک نقطه است.

مراجعه شود به simplex (سادک) ۱۱۶ $s(v_0, \dots, v_k)$

توم، رنه، از ۱۹۲۳ تا ۱۰۱، ۵۷ Thom, René

فضای توم ۵۷ Thom space

فضای توم مربوط به یک کلاف برداری E که به صورت DE/SE تعریف می‌شود.

لم توسعه تیتسه ۱۴۷ Tietze extension lemma

قضیه‌ای است راجع به توسعه پذیری توابعی که روی زیرمجموعه‌های بسته تعریف شده‌اند.

کلاف مماسی ۱۵۱ TM

کلاف مماسی یک خمینه M . بسط این مفهوم در متن کتاب نیامده است. رجوع شود به [۳].

رسته توبولوژیک ۸۷ Top

«رسته توبولوژیک»: فضاهای توبولوژیک و نگاشتهای پیوسته

گروه توبولوژیک ۴۷، ۳۵ topological group

G یک گروه و در عین حال یک فضای توبولوژیک است و به علاوه، نگاشت $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ پیوسته است.

فضای توبولوژیک ۹ topological space

زوج مرتب (X, \mathcal{O}) به قسمی که \emptyset و X و اجتماعهای دلخواه اشتراکهای متناهی مجموعه‌های عضو \mathcal{O} ، نیز عضو \mathcal{O} باشند.

فضای توبولوژیک بالای X ۱۶۵ topological space over X

زوج مرتب (Y, π) متشکل از یک فضای توبولوژیک Y و یک نگاشت پیوسته و پوشای $\pi: Y \rightarrow X$.

حاصلجمع توبولوژیک ۱۶ topological sum

رجوع شود به disjoint union (اجتماع جدا از هم).

فضای برداری توبولوژیک ۳۵ topological vector space

یک فضای برداری مجهز به یک توپولوژی سازگار با ساختار خطی آن.

topology توپولوژی ۱۰

معنای فنی آن: مجموعهٔ مجموعه‌های باز یک فضای توپولوژیک؛ معنای عمومی آن: نظریهٔ فضاهاى توپولوژیک.

topology of a metric space توپولوژی یک فضای مترى ۱۳

توپولوژی فضای مترى (X, d) که با $\mathcal{O}(d)$ نموده می‌شود چنین است:

$$\mathcal{O}(d) := \{U \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \quad K_\varepsilon(x) \subset U\}$$

transitive ترايا ۱۹۳

عمل یک گروه در یک مجموعه را ترايا گویند هرگاه فقط یک مدار وجود داشته باشد، یعنی برای هر $x, y \in Y$ همواره یک $g \in G$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $y = gx$

triangle inequality نابرابری مثلثی ۱۳

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

trivial topology توپولوژی بیمایه ۱۹

درشت‌بافت‌ترین توپولوژی، که فقط شامل \emptyset و X است.

Tychonoff, Andrej Nikolajevitch تیخونوف، آندری نیکولایویچ ۲۰۴

متولد ۱۹۰۶

Tychonoff product theorem قضیهٔ حاصلضرب تیخونوف ۲۰۵

حاصلضربهای دلخواه فضاهای فشرده فضاهایی هستند فشرده. آنچه را که ما فشرده نامیده‌ایم، تیخونوف «دوسوفشرده» (bicomact) نامیده است. او در صفحهٔ ۷۷۲ مرجع [۲۰] چنین می‌نویسد: «حاصلضرب فضاهای دوسوفشرده نیز دوسوفشرده است. راه اثبات دقیقاً همان راهی است که در مورد دوسوفشردگی حاصلضربهای بازها به‌کار رفته است»، و آن را در بخش ۲ مرجع [۱۹] ارائه کرده است.

«این قضیه محتملاً مهمترین قضیهٔ منفرد در توپولوژی عمومی است» (نقل

از توپولوژی عمومی، تألیف کلی J. L. Kelley، نشر Springer-Verlag).

ultrafilter فراپالایه ۲۱۵

یک پالایهٔ ماکسیمال

uniformly continuous یکنواخت - پیوسته ۷۳

نگاشتی بین فضاهای متری را یکنواخت - پیوسته گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که نقاط با دوری کمتر از δ را به نقاطی با دوری ε بنگارد.

قضیهٔ یکتایی برای فضاهای پوششی ۱۸۴

uniqueness theorem for covering spaces

این قضیه می‌گوید که تا چه حد، یک فضای پوششی به وسیلهٔ نگارهٔ گروه بنیادی «بالایی» در گروه بنیادی «پایینی» معین می‌شود (این نگاره را «زیرگروه مشخصه» نامند).

universal cover

پوشش عام ۱۹۵

پوشش عام یک فضا: فضای پوششی همبند ساده (که به طور یکتا معین می‌شود). برای علامتگذاری «عام» به قضیهٔ صفحهٔ ۱۹۱ مراجعه شود.

Urysohn, Pavel Samuilovitch

اوریسون، پاول ساموئیلوویچ ۱۴۲

۱۸۹۸-۱۹۲۴

Uryshon lemma

لم اوریسون ۱۴۲

قضیهٔ بنیادی در ساختن توابع بر فضاهای توپولوژیک.

vector bundle

کلاف برداری ۱۵۰

مشکل است از فضاهای پایه و کلی، به علاوهٔ تصویر و ساختار فضای برداری بر تارها. «اصل موضوع بیماریگی موضعی» باید برآورد شود. مثال: کلاف مماسی یک خمینه.

vector field

میدان برداری ۲۷، ۵۱، ۱۵۵

مثالهایی از انتگرالگیری میدانهای برداری بر خمینه‌های دیفرانسیلپذیر را آورده‌ایم تا خواننده با این گونه موضوعها آشنا شود. برای فراگرفتن آنها رجوع کنید مثلاً به [۳].

weak topology

توپولوژی ضعیف ۴۲، ۱۰۶، ۱۲۶، ۱۳۲، ۲۰۸

برای فضاهای برداری توپولوژیک: درشت‌بافت‌ترین توپولوژی که برای آن تابعهای خطی پیوسته، همچنان پیوسته باشند. برای فضاهایی با تجزیهٔ حجره‌یی: یک مجموعه را در توپولوژی ضعیف بسته گویند هرگاه اشتراک آن با بستار هر حجره، بسته باشد.

wedge product

حاصلضرب گروه‌یی ۵۷

حاصلضرب گروه‌یی در فضای نقطه‌پایه‌دار که آن را با $X \vee Y$ نمایش می‌دهیم، زیر فضای $X \times Y \cup x_0 \times Y$ از فضای $X \times Y$ است.

well_ordered	خوشرتیب ۲۱۹
Whitehead, J. H. C.	وایتهد، ج. ه. ک. ۱۲۶ ۱۹۰۴ تا ۱۹۶۰
winding number	عدد دور ۹۹
X/A	فضای X/A ۵۴
	فضای خارج قسمت حاصل از فروریزی زیرمجموعه $A \subset X$ به یک نقطه.
X/G	فضای مداری ۵۲
	فضای مداری یک G - فضای X .
X/\sim	فضای خارج قسمت ۴۳
	خارج قسمت یک فضای X بر یک رابطه هم‌ارزی \sim .
$[X, Y]$	مجموعه رده‌های مانسته‌جایی $[X, Y]$ ۸۰
	مجموعه رده‌های هم‌ارزی نگاشتهای از X به Y .
$Y \cup_{\varphi} X$	فضای $Y \cup_{\varphi} X$ ۵۹
	فضای حاصل از چسبانیدن X به Y به وسیله φ .
Zariski topology	توپولوژی زاریسکی ۲۵
	توپولوژی یک فضای تصویری که در آن یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر متمم آن یک چندگونای تصویری باشد.
Zorn's lemma	لم زرن ۲۲۰
	اگر هر زنجیر در یک مجموعه جزئاً مرتب M کراندار باشد، آنگاه M یک عضو ماکسیمال دارد.