توپولوژی بدون اشک[۱]

سیدنی ا. موریس

مترجم: آصف نظری گنجه‌لو
دانشگاه بالارات-استرالیا

ترجمه ۶ فصل اول کتاب بر اساس نسخه ۱۴ اکتبر ۲۰۰۷[۲]

مشاور ترجمه: دکتر میرکمال میرنیا
دانشگاه تبریز-ایران

این کتاب به صورت مستمر در حال گسترش و به‌روز شدن است؛ پیش‌بینی می‌شود که این کتاب در نهایت شامل ۱۵ فصل شود. لطفا در صورت مشاهده هرگونه خطا یا وجود پیشنهاد بهبود، با نویسنده به آدرس الکترونیکی s.morris@ballarat.edu.au تماس حاصل نمایید.

تشکر و قدردانی

هنگامی که اولین بار کتاب «توپولوژی بدون اشک» را دیدم از سادگی و جذابیت نحوه ارایه مطالب لذت بردم و با خواندن نظرات خوانندگان اعتقاد راسخ پیدا کردم که این کتاب منبع بسیار عالی برای یادگیری توپولوژی بصورت مطالعه انفرادی و کلاسی است. از همان ابتدا فکر ترجمه کتاب به فارسی از ذهنم خطور کرد و الان بسیار خرسندم که در حال ترجمه این اثر بدیع هستم و بر این اساس باید از پروفسور سیدنی موریس بخاطر دادن این فرصت و حمایت‌های دانشکده فناوری اطلاعات و علوم ریاضی دانشگاه بالارات تشکر کنم.

این ترجمه بدون کمک و راهنمایی‌های آقای دکتر میرنیا امکانپذیر نبود. دقت، حوصله و پشتکار ایشان ستودنی است و زبان من قاصر از ایفای تشکر.

ترجمه فارسی این کتاب با استفاده از نرم‌افزار رایگان فارسی‌تک حروف‌چینی شده است. نرم‌افزار مذکور نسخه فارسی نرم‌افزار لَتِک است و چون هنوز نسخه نهایی فارسی‌تک طراحی نشده است مشکلات خاص خود را دارد. جا دارد از زحمات دوستان، بخصوص آقای وحید قاسمی در وب‌لاگ www.farsitex.blogfa.com و آقای شایان پویا در وب‌لاگ http://texfusion.blogfa.com بدلیل رفع برخی از مشکلات تشکر کنم.

از آنجاییکه همواره امکان بهبود وجود دارد، یقینا این ترجمه خالی از اشکال و ایراد نیست. خواهشمند است در صورت مشاهده هر گونه خطا یا وجود پیشنهاد بهبود ترجمه، با مترجم به نشانی الکترونیکی a.nazari@ballarat.edu.au تماس حاصل نمایید.

کتاب اصلی در حال تکمیل و بروز شدن می‌باشد و ترجمه بر اساس نسخه ۱۴ اکتبر ۲۰۰۷ از آن انجام شده است. ترجمه کتاب بصورت فایل الکترونیکی و در فرمت PDF در اختیار علاقمندان قرار می‌گیرد. هیچ بخشی از ترجمه این کتاب بدون اجازه کتبی مولف و مترجم قابل بازنویسی، ترجمه و نشر نمی‌باشد.

آصف نظری گنجه‌لو
دانشگاه بالارات
۳ مارچ ۲۰۰۸

فهرست مطالب

۰ مقدمه ۵

۱ فضاهای توپولوژیک ۱۳

۲ توپولوژی اقلیدسی ۳۱

۳ نقاط حدی ۵۱

۴ همریختی‌ها ۶۳

۵ نگاشت‌های پیوسته ۷۹

۶ فضاهای متری ۹۱

کتاب نامه ۱۲۵

نمایه ۱۲۶

فصل ۰

مقدمه

توپولوژی یک مبحث مهم و جالب در ریاضی است، که علاوه بر پرداختن به مفاهیم و قضیه‌های جدید، موارد قدیمی‌تر مثل توابع پیوسته را نیز شامل می‌شود. هرچند این تعریف جامعی از توپولوژی نیست، و اکتفا به آن تمام حقیقت توپولوژی را آشکار نمی‌کند و سبب نادیده گرفتن اهمیت آن می‌شود چراکه توپولوژی آنچنان اساسی است که تاثیر آن تقریبا در تمامی شاخه‌های دیگر ریاضیات ملموس است. به این دلیل، مطالعه آن به همه افرادی که دوست دارند ریاضیدان شوند توصیه می‌شود؛ اگر چه زمینه مورد علاقه آنها جبر، آنالیز، نظریهٔ دسته‌بندی، آشفتگی، مکانیک پیوستار، دینامیک، هندسه، ریاضیات صنعتی، ریاضی برای زیست شناسی، ریاضی برای علوم مالی، قالب‌سازی ریاضی، ریاضی برای فیزیک، ریاضی برای ارتباطات، نظریه اعداد، ریاضیات محاسباتی، تحقیق در عملیات یا آمار باشد یا خواهد بود. (کتاب‌نامه جامع در انتهای کتاب برای نشان دادن این ارتباط بین توپولوژی و سایر شاخه‌ها ضمیمه شده است.) مفاهیم توپولوژیک مثل فشردگی، همبندی و چگال بودن آنچنان برای ریاضیات امروز مهم است که مجموعه‌ها و توابع برای ریاضیات قرن گذشته حایز اهمیت بوده‌اند.

توپولوژی دارای چند زیرشاخه نظیر توپولوژی عمومی (گاهی توپولوژی نقطه‌ـمجموعه نیز نامیده می‌شود)، توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل و جبر توپولوژیک است ـ که زیر شاخه اول یعنی توپولوژی عمومی پیش‌نیاز مطالعه سایر زیرشاخه‌ها است. هدف من در این کتاب ارائه کامل اساس توپولوژی عمومی است. افرادی که مشتاقانه ۱۰ فصل اول کتاب را دنبال کنند و حداقل نصف مساله‌ها را حل کنند، یقینا چنین پایه‌ای را کسب خواهند کرد.

برای خوانندگانی که تا بحال شاخه‌های اصول موضوعه‌ای ریاضیات مثل جبر مجرد را مطالعه نکرده‌اند، یادگیری نوشتن اثبات‌ها کار سختی خواهد بود. برای کمک به حل این مشکل **کادرهایی** را مکررا در فصل‌های آغازین کتاب قرار داده‌ام که اگرچه بخشی از اثبات نیست اما بیانگر چهارچوب فکری هستند که به اثبات منتهی می‌شود.

کادرها به صورت زیر مشخص شده اند:

به منظور نوشتن اثبات، این روند فکری بررسی شده است، که بهتر است «مکاشفه» یا «مرحله تجربی» نامیده شود.
در هر صورت، خواننده متوجه خواهد شد که اگرچه مکاشفه یا تجربه مهم است ولی هیچ چیز جای اثبات را نمی‌گیرد.

کتاب تعداد زیادی مساله برای حل کردن ارائه داده که تنها با کار کردن روی تعداد قابل قبولی از آنها می‌توانید بر این درس تسلط پیدا کنید. جواب مساله‌ها در کتاب گنجانده نشده است و تصمیم به انجام این کار نیز وجود ندارد. به نظر من مثال و اثبات به اندازه کافی در خود متن وجود دارد که لزومی به ارائه جواب مساله‌ها نباشد ـ در حقیقت انجام این کار خوشایند نیز نمی‌باشد. اغلب مفاهیم جدید در مساله‌ها گنجانده شده است؛ البته مفاهیمی که مهمتر هستند دوباره در متن کتاب معرفی خواهند شد. در ضمن، مساله‌های سخت با علامت * مشخص شده‌اند.

خوانندگانِ علاقمندی که بخواهند در مورد مشکلاتشان و پاسخ تمرین‌ها باهم ارتباط برقرار کنند، یا پیشنهادهایی در مورد کتاب و مطالعه بیشتر ارایه دهند، می‌توانند به گروهی که بدین منظور تحت عنوان "Topology Without Tears Readers" در "Facebook" ایجاد شده است، مراجعه کنند. برای عضویت در گروه، درخواست خود را به نویسنده کتاب (s.morris@ballarat.ed.au) ارسال نمایید.

در آخر، لازم است اشاره کنم که پیشرفت‌های ریاضی در بستر تاریخی آن بهتر فهمیده می‌شود. در حال حاضر به یادداشت‌های در باب شخصیت‌های توپولوژی در ضمیمه‌ی ۲ خود را قانع کرده‌ام که این یادداشت‌ها بطور وسیع از آرشیو تاریخ ریاضی مک تیوتور [۲] استخراج شده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود به آرشیو تاریخ ریاضی مک تیوتور [۲] مراجعه کنند و مقالات کامل همچنین مقالات مربوط به شخصیت‌های کلیدی دیگر را مطالعه کنند. البته اطلاعات تاریخی خوب صرفا با مطالعه یک منبع بدست نمی‌آید.

از نقطه نظر تاریخی، بسیاری از مطالب توپولوژی که در این کتاب شرح داده می‌شود در نیمه‌ی اول قرن بیستم کشف شده‌اند و می‌توان گفت که مرکز گرانش این دوره از یافته‌ها، کشور لهستان است (البته مرزها تا حد زیادی تغییر یافته است). منصفانه است بگوییم که جنگ جهانی اول برای همیشه مرکز گرانش را تغییر داد. برای فهمیدن این نقد رازگونه به پیوست ۲ مراجعه کنید.

۱.۰ تشکر و قدردانی

بخش‌هایی از نسخه‌های اولیه طی ۳۰ سال گذشته در دانشگاه‌های لاتروب، نیوانگلند، ولونگانگ، کوئینزلند، ساوث استرالیا، سیتی کالج نیویورک و بالارات مورد استفاده قرار گرفته است. لازم است از تمام دانشجویانی که نسخه‌های قبلی را مورد بحث قرار داده و اشتباه‌ها را متذکر شده‌اند تشکر کنم. از دبورا کینگ و آلیسون پلنت به خاطر تشخیص تعداد زیادی از خطاها و نقاط ضعف در نحوه ارائه مطالب کتاب تشکر می‌کنم. همچنین از برخی همکاران شامل کارولین مک‌فیل، رالف کوپرمان، کارل هینیریش هافمن، رودنی نیلسن، پیتر پلیزانتس، جفری پرینس، بوان تامپسون و ایوان بارکر که نسخه‌های مختلف را خوانده و پیشنهادهایی برای بهبود داشته‌اند

تشکر می‌کنم. ضمنا از جک گری بخاطر جزوه‌های درسی نظریه مجموعه‌ها و محاسبات ترامتناهی، که در سال ۱۹۷۰ در دانشگاه نیوساوث ولز تهیه کرده بود، که تاثیر بسزایی در پیوست مربوط به نظریه مجموعه‌های نامتناهی داشت تشکر ویژه دارم.

در قسمت‌های مختلف این کتاب، بخصوص در پیوست ۲، یادداشت های تاریخی برگرفته شده از دو منبع عالی بورباکی [۱] و آرشیو تاریخ ریاضی مک تیوتور [۲] آمده است.

۲.۰ خوانندگان ـ کشور و تخصص

این کتاب توسط متخصصان بیمه، شیمی، علوم کامپیوتر، اقتصادسنجی، اقتصاد، هوانوردی، مکانیک، الکترونیک، نرم‌افزار، مهندسان علوم فضا و ارتباطات از راه دور، دانشجویان امور مالی، ریاضیات محض و کاربردی، تجارت آزاد، فلسفه، فیزیک، روانشناسی، طراحان نرم‌افزار و آمار در الجزایر، آرژانتین، استرالیا، اتریش، بنگلادش، بولیوی، بلاروس، بلژیک، بلیز، برزیل، بلغارستان، کامبوج، کامرون، کانادا، شیلی، چین، کلمبیا، کاستاریکا، کرواسی، جمهوری چک، دانمارک، مصر، استونی، اتیوپی، فیجی، فنلاند، فرانسه، غزه، آلمان، غنا، یونان، مجارستان، ایسلند، هند، اندونزی، ایران، عراق، ایتالیا، جامائیکا، ژاپن، کنیا، کره، کویت، لیتوانی، لوکزامبورگ، مالزی، مالت، موریتانی، مکزیک، نیکاراگوا، نیجریه، نروژ، پاکستان، پاراگوا، پرو، لهستان، پرتغال، قطر، رومانی، روسیه، صربستان و مونته نگرو، سیرالئون، سنگاپور، اسلونی، آفریقای جنوبی، اسپانیا، سودان، سوئد، سوئیس، تایوان، تایلند، هلند، فیلیپین، ترینیداد و توباگو، تونس، ترکیه، انگلستان، اوکراین، امارات متحده عربی، ایالات متحد آمریکا، اروگوئه، ازبکستان، ونزوئلا و ویتنام مورد استفاده قرار گرفته است.

این کتاب در http://www.econphd.net/notes.htm ـ پایگاه اطلاعاتی طراحی شده برای مطالب درسی در سطح کارشناسی به بالا در همه‌ی رشته‌ها (بخصوص برای دانشجویان اقتصاد) و در اطلس توپولوژی با آدرس http://at.yorku.ca/topology/educ.htm بعنوان مرجع ارائه شده است.

۳.۰ نظرات خوانندگان

ت. لسلی[1]، ایالات متحده آمریکا: کاری دلپسند که به زیبایی نوشته شده است؛

ای. فرر[2]، استرالیا: جزوات شما بسیار عالی است؛

ای. یوان[3]، آلمان: این کتاب برای شروع کنندگان توپولوژی واقعا عالی است؛

س. کومار[4]، هند: بدلیل ارائه ساده موضوع مجذوب شدم چرا که بدون اطلاعات خاص از ریاضی، مطالب کتاب به راحتی قابل تعقیب است؛

پاوین سیریپراپانوکول[5]، تایلند: من خودم را برای دوره دکترا آماده می‌کنم. کتاب شما کمک بسیار خوبی برای فهمیدن مطالب پیچیده توپولوژی در اقتصاد است.

---

[1] T. Lessley

[2] E. Ferrer

[3] E. Yuan

[4] S. Kumar

[5] Pawin Siriprapanukul

هانس ریجنر[1]، سوئد: کتاب بسیار خوبی است؛
ج. گری[2]، ایالات متحده آمریکا: کتاب بسیار خوبی است؛
دیپاک بانیک[3]، هند: کتاب زیبایی است؛
ب. پراگاف ج.[4]، ایالات متحده آمریکا: این کتاب، توپولوژی را به خوبی برای دانشجویان کارشناسی توضیح می‌دهد؛
تاپاس کومار بوس[5]، هند: مجموعه بسیار خوبی از اطلاعات است؛
استر سزرنای[6]، مجارستان: من دانشجوی کارشناسی ریاضی اقتصادی هستم... مطمئنا قبلا خیلی‌ها به شما گفته‌اند، با این وجود دوست دارم دوباره تکرار کنم که این کتاب بسیار عالی است.
کریستوفر رو[7]، استرالیا: در ابتدا از شما به خاطر نوشتن کتاب تشکر می‌کنم. اگر چه مطالب کتاب برای شما مقدماتی است ولی مطالعه آن برای من تجربه‌ای عالی بود؛
جینین دورمینی[8]، ایالات متحده آمریکا: در حال حاضر درس توپولوژی را می‌گذرانم و با مشکلات عظیمی در کلاس درس مواجه هستم. کتاب شما را بصورت مستقیم از شبکه رایانه‌ای خواندم که بسیار مفید بود؛
تارک فئودا[9]، ایالات متحده آمریکا: در حال مطالعه ریاضیات عمومی پیشرفته در انستیتوی صنعتی استیونز برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد علوم در شاخه مهندسی اقتصادی هستم. این اولین باری است که با موضوع توپولوژی مواجه می‌شوم. چندین کتاب خریدم ولی کتاب شما تنها کتابی است که مطالب را به شیوه جالبی ارائه کرده است. به این دلیل دوست دارم کتاب شما را داشته باشم تا در قطار یا انستیتو بخوانم.
پروفسور لوییس ج. آلیاس[10]، گروه ریاضی دانشگاه مورسیا، اسپانیا، اخیرا متوجه کتاب گرانقدر شما شدم. این ترم درس توپولوژی عمومی را تدریس خواهم کرد (البته تدریس فردا صبح شروع می‌شود). سال پیش همین درس را با استفاده از کتاب مانکرز (توپولوژی، نسخه دوم) و با در نظر گرفتن فصل‌های ۲، ۳، بخشی از فصل‌های ۴، ۵ و بخشی از فصل ۹ تدریس کردم. کتاب شما را خواندم و واقعا لذت بردم. کتاب شما واقعا دوست داشتنی است مخصوصا روشی که مطالب جدید را معرفی می‌کنید همچنین راهنمایی‌ها و ملاحظاتی که به خوانندگان می‌دهید.
گابریل اِ. م. بیلا[11]، رییس بخش تحقیقات انیستستو زیست‌نگاری مولکولی و فیزیولوژی، شورای ملی تحقیقات، ایتالیا: من نئروفیزیولوژیست هستم و سعی دارم تشریح نئرودینامیک از فرایند حسگری را با استفاده از توپولوژی بدست آورم. به این خاطر کتاب ارزشمند شما را شروع کردم.
گابریل لوکولی[12]، ایتالیا: اگرچه یک دانشجوی تازه کار هستم، ولی نحوه ارائه مطالب بخصوص تعداد زیاد مثال‌ها، برایم جالب بود؛
ک. اور[13]، ایالات متحده آمریکا: این کتاب بسیار عالی است؛

---

[1] Hannes Reijner
[2] G. Gray
[3] Dipak Banik
[4] B. Pragoff Jr
[5] Tapas Kumar Bose
[6] Eszter Csernai
[7] Christofer Roe
[8] Jeanine Dorminey
[9] Tarek Fouda
[10] Luis J. Alias
[11] Gabriele E.M. Biella
[12] Gabriele Luculli
[13] K. Orr

پروفسور احمد اولد[1]، کلمبیا: می‌خواهم به شما به خاطر نحوه ارائه، سادگی و روشنی مطالب تبریک بگویم؛
پل آنستد[2]، ایالات متحده آمریکا: کتاب شما را به این دلیل دوست دارم که مثال‌های بسیار خوبی دارد و فرض نمی‌کند که خواننده متخصص ریاضی است؛
آلبرتو گارسا رابوسو[3]، اسپانیا: کتاب شما را به شدت دوست دارم؛
جوزپ کورجی[4]، مدیر تحقیقات فیزیک نظری، موسسه ملی فیزیک نظری، پیسا: کتابی خوب و درخشان در توپولوژی ؛
م. رینالدی[5]، ایالات متحده آمریکا: این بهترین و واضح‌ترین کتاب توپولوژی است که تا بحال دیده‌ام... وقتی کتاب شما را مطالعه کردم مفاهیم بهمدیگر مرتبط شدند. مثال‌هایتان عالی است؛
ژئولت پوبلت[6]، پروفسور اقتصاد، دانشگاه کاتولیک شیلی: اخیرا مطالعه کتاب شما را تمام کردم و آن را واقعا دوست دارم. کتاب بسیار واضح و مثال‌ها بسیار روشنگر هستند؛
الکساندر لیدن[7]، سوئد: از مطالعه کتاب شما بر روی صفحه نمایش رایانه لذت بردم و دوست دارم نسخه چاپی آن را داشته باشم؛
فرانکوا نویل[8]، ایالات متحده آمریکا: من دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی فضا در دانشگاه ماین (ایالات متحده آمریکا) هستم، استاد ما مشتاقانه کتاب شما را برای درس توپولوژی معرفی کرد؛
هسین_هان شن[9]، ایالات متحده آمریکا: من دانشجوی دکترای امور مالی در دانشگاه ایالتی نیویورک در بوفالو هستم. مطالب مربوط به توپولوژی در پایگاه اطلاعاتی شما جامع و قابل فهم است و برای درس آشنایی با توپولوژی برای دانشجویی که متخصص ریاضی نیست، بسیار مطلوب است؛
دگین کای[10]، ایالات متحده آمریکا: کتاب شما فوق‌العاده است؛
اریک یوان[11]، دارمستات، آلمان: من دانشجوی ریاضی در دانشگاه صنعتی دارمستات، در حال یادگیری توپولوژی هستم. استاد ما پروفسور ک. ه. هافمن، کتاب توپولوژی بدون اشک شما را به شدت توصیه کرده‌اند؛
مارتین وو[12]، دانشگاه اکسفورد: من دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی در اکسفورد هستم. از آنجایی که سعی دارم به مفاهیم مجرد ریاضی عادت کنم، از این رو عنوان کتاب توپولوژی بدون اشک، جذابیت طبیعی دارد؛
احمد اردم[13] ، ترکیه: من از خواندن کتاب خیلی لذت بردم؛
ولفگانگ موئنس[14]، بلژیک: من دانشجوی کارشناسی دانشگاه کاتولیک لوون هستم. ناخودآگاه متوجه شدم که در عرض چند ساعت قسمت زیادی از بخش اول را خوانده‌ام. قبل از ادامه باید شما را بخاطر سادگی در نوشتن و ساختار عالی کتاب ستایش کنم(مطمئنا مورد توجه قرار خواهد گرفت)؛

[1] Ahmed Ould
[2] Paul Unstead
[3] Alberto Garca Raboso
[4] Guiseppe Curci
[5] M. Rinaldo
[6] Joaquin Poblete
[7] Alexander Liden
[8] Francois Neville
[9] Hsin-Han Shen
[10] Degin Cai
[11] Eric Yuan
[12] Martin Vu
[13] Ahmet Erdem
[14] Wolfgange Moens

دونکان چن[1]، ایالات متحده آمریکا: حتما به کرات نامه‌های الکترونیکی مشابه این دریافت کرده‌اید، با این وجود همچنان دوست دارم تشکر خود را در رابطه با کتاب ابراز کنم. من یک طراح نرم افزار حرفه‌ای هستم و از مطالعه ریاضی لذت می برم؛
ماگایسواری سلاکوماران[2]، سنگاپور: من در آینده نزدیک برای دکترای اقتصاد به آمریکا خواهم رفت. کتاب شما در توپولوژی بسیار خوب است؛
تام هانت[3]، ایالات متحده آمریکا: بابت قرار دادن کتاب در اینترنت متشکرم؛
فاستو ساپوریتو[4]، ایتالیا: من در حال خواندن کتاب شما هستم که بهترین کتاب در مورد توپولوژی است که تا بحال دیده‌ام؛
تاکایوکی اوساگومی[5]، ایالات متحده آمریکا: خواندن کتاب شما را بصورت مستقیم از شبکه رایانه‌ای شروع کرده‌ام. به نظر من مطالب بسیار خوبی برای یادگیری توپولوژی و مفاهیم عمومی ریاضی دارد؛
رومن نول[6]، آلمان: به خاطر اجازه برای مطالعه کتاب از شما ممنونم. کتاب توپولوژی بدون اشک خیلی به من کمک کرد و دوباره مرا با ریاضی آشتی داد، چراکه بدلیل تدریس‌های نامنظم و مطالب غیرضروری به طور موقت علاقه خودم را از دست داده بودم؛
یوال یاتسکین[7]، ایالات متحده آمریکا: نگاهی به کتاب داشتم، به نظرم کتاب فوق‌العاده‌ای است؛
ن.س. ماوروگیانیس[8]، یونان: کتاب خیلی خوبی است؛
سمیح تومن[9]، ترکیه: می‌دانم که دکترای اقتصاد به معلومات ریاضی نیاز دارد. کتاب شما هنگام مطالعه موضوعات ضروری بسیار مفید بود؛
پیونگ هو کیم[10]، ایالات متحده آمریکا: من در حال حاضر دانشجوی دکترا هستم که در حال یادگیری جغرافیای اقتصادی می‌باشم. کتاب شما برای مفاهیم اساسی توپولوژی بسیار خوب است؛
خاویر هرناندز[11]، ترکیه: صمیمانه تشکر می‌کنم از افرادی نظیر شما که تمام تلاششان را بکار گرفته‌اند و دانششان را بدون فکر کردن به منافعی که می‌توانند بدست آورند، با دیگران سهیم می‌شوند؛ نه مانند افرادی که شمع را در زیر میز پنهان می‌کنند و برای تشخیص نور پول می‌گیرند.
ج. چاند[12]، استرالیا: بخاطر نوشتن کتاب توپولوژی بدون اشک ممنونم. کتاب شما بسیار عالی است.
ریچارد واند ولد[13]، ایالات متحده آمریکا: دو سال پیش با شما برای پیاده کردن یک نسخه از کتاب توپولوژی بدون اشک تماس گرفتم. در آن زمان درس توپولوژی را برای ترکیبی از دانشجویان کارشناسی و بالاتر تدریس می‌کردم. نشانی اینترنتی کتاب را برای دسترسی مستقیم بر روی شبکه رایانه‌ای به آنها دادم. اگر چه ترتیب و توسعه مطالب برای تدریس با ترتیب کتاب شما فرق داشت، یکی از دانشجویان خوب کلاس توصیه کرد که از کتاب شما تبعیت کنم و این کتاب تنها مرجع تدریس باشد. فکر می‌کنم پیشنهاد جالبی بود. بالاخره، تاریخ

---

[1] Duncan Chen
[2] Maghaisvarei Sellakumaran
[3] Tom Hunt
[4] Fausto Saporito
[5] Takayuki Osogami
[6] Roman Knoll
[7] Yuval Yatskan
[8] N.S. Mavrogiannis
[9] Semih Tumen
[10] Pyung Ho Kim
[11] Javier Hernandez
[12] J. Chand
[13] Richard Vande Velde

دوباره تکرار می‌شود، و بعد از دو سال می‌خواهم همان درس را برای دانشجویان مشابه تدریس کنم. بنابراین، می خواهم نسخه کامل کتاب را پیاده کنم.

پروفسور شا ژین وی[1]، علوم کامپیوتر و هنرهای زیبا، دانشگاه کونکوردیا، کانادا: تبریکات مرا بخاطر نوشتن کتابی خوانا در توپولوژی بپذیرید. می‌خواهم از کتاب شما برای تدریس «ریاضیات در زندگی» به دانشجویان علاقمند و هنرمندان استفاده کنم. همیشه مایه خوشوقتی است هنگامی که آثار خوبی مثل کتاب شما پیدا می‌شود که طیف وسیعی از افراد بدون دردسر زیاد قادر به خواندن آن هستند.

استادیار دکتر رهانا باری[2]، بنگلادش: من مدرس درس توپولوژی برای دانشجویان کارشناسی ارشد در دانشکده ریاضی دانشگاه داکا هستم. می‌توانم یک نسخه از کتاب فوق‌العاده توپولوژی بدون درد را داشته باشم؟

رائول نیلاکانتان[3]، دانشجوی دکترا، دانشکده اقتصاد دانشگاه کالیفرنیای جنوبی، آمریکا، من دانشجوی دکترای دانشکده اقتصاد دانشگاه کالیفرنیای جنوبی، لاس‌وگاس هستم. می‌خواهم در زمینه تعادل عمومی با بازارهای ناقص کار کنم. این زمینه به دانش خوب از مفاهیم توپولوژیک نیاز دارد. یکی از همکارانم (آقای رامو گوپالان) از دانشگاه کانزاس، کتاب شما را به من معرفی کرد. بعد از مطالعه بخشی از کتاب، به این نتیجه رسیدم که این کتابی است که می‌خواهم با آن توپولوژی را یاد بگیرم.

لانگ نگوین[4]، ایالات متحده آمریکا: تابحال کتابی چنین واضح از مطلبی چنان سخت ندیده‌ام.

رناتو ارلانا[5]، شیلی: بخاطر این کتاب عالی به شما تبریک می‌گویم. چند فصل اول کتاب را خواندم و خیلی لذت بردم. قبلا فکر می‌کردم یادگیری توپولوژی برای من غیرممکن است ولی باید اعلام کنم که اکنون به طور مثبت در این باره فکر می‌کنم.

سیسای رگاسانبتا[6]، معاون رییس دانشکده بازرگانی و اقتصاد دانشگاه آدیس آبابا، اتیوپی: تصمیم دارم دکترای اقتصاد را شروع کنم و در حال حاضر در دانشکده بازرگانی و اقتصاد دانشگاه آدیس آبابا، اتیوپی، آفریقای شرقی تدریس می‌کنم. آیا می‌توانم تسخه قابل چاپ کتاب شما را داشته باشم؟

نیکانور م. توان[7]، کالج ایالتی علوم و تکنولوژی داواو اورینتال، فیلیپین: تبریک! می‌خواهم صمیمانه از به اشتراک گذاشتن منابع آموزشی تشکر کنم. شما لطف بزرگی به من و دانشجویانم در فهم مفاهیم توپولوژیک کردید. تشکر و خسته نباشید.

ارنیتا ر. کالایاگ[8]، فیلیپین: من خانم ارنیتا ر. کالایاگ از فیلیپین، دانشجوی دکترای ریاضی در دانشگاه دلا سالا هستم. تعریف‌های خوبی از کتاب توپولوژی شما شنیدم و بعنوان دانشجو نمی‌توانم از درخواست یک نسخه از کتاب و لذت بردن از آن اجتناب کنم. امیدوارم بعد از تایید درخواست من، شروع به مطالعه توپولوژی کنم که بسیار برای ما اساسی است.

نیکولا ماتجیک[9]، صربستان: کتاب شما بسیار منحصربفرد و باارزش است و طیف وسیعی از خوانندگان را دربر می‌گیرد. این یک هدیه عالی از طرف شماست که در همه جای جهان مورد تقدیر قرار گرفته است. فکر می‌کنم هر کس که بخواهد اطلاعات مناسبی در توپولوژی پیدا کند می‌تواند از کتاب شما مستفید شود.

---

[1] Sha Xin Wei

[2] Rehana Bari

[3] Rahul Nilakantan

[4] Long Nguyen

[5] Renato Orellana

[6] sisay Regasa Senbeta

[7] Nicanor M. Tuan

[8] Ernita R. Calayag

[9] Nikola Matejic

ایرج داودآبادی[1]، ایران: (ابتدا بخاطر کلمات نامناسب مرا ببخشید) من یک مهندس مکانیک هستم که به شدت به ریاضیات بخصوص آنالیز علاقمند هستم. من بدون معلم به مطالعه ریاضی می‌پردازم. بعضی مطالب (مثلا توپولوژی و آنالیز مجرد) برای من سخت است چون تجربه زیادی در ریاضی محض ندارم. با استفاده از کتاب شما توانستم مطالب مجرد زیادی را یاد بگیرم. کتاب شما با بقیه کتاب‌ها فرق دارد.
م. ا. ر. خان[2]، کراچی: تشکر به خاطر ذکر نام یک دانشجوی جهان سومی.

[1] Iraj Davoodabadi
[2] M.A.R. Khan

فصل ۱

فضاهای توپولوژیک

مقدمه

ممکن است تنیس، فوتبال، بیسبال و هاکی بسیار مهیج باشند ولی برای بازی کردن باید (برخی از) قواعد بازی را یاد بگیرید. ریاضیات از این اصل مستثنی نیست. بنابراین با یادگیری قواعد توپولوژی شروع می‌کنیم.

این فصل با تعریف توپولوژی شروع می‌شود و سپس به چند مثال می‌پردازد: فضاهای توپولوژیک متناهی، فضاهای گسسته، فضاهای ناگسسته، و فضاهای با توپولوژی محدود_بسته.

توپولوژی شبیه سایر شاخه‌های ریاضی محض همانند نظریه گروه، اصل موضوعه‌ای است. ما با یک دسته از این اصول موضوعه شروع می‌کنیم و سپس از آنها در اثبات قضیه‌ها و گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. بالا بردن مهارت در نوشتن اثبات‌ها بسیار حایز اهمیت است.

چرا اثبات‌ها اینقدر مهم هستند؟ فرض کنید وظیفه ما ساختن یک خانه باشد. طبیعتا باید از پی خانه شروع کنیم. در مطالعه توپولوژی، اصول موضوعه و تعاریف پی ساختمان هستند – هر چیز دیگر بر اساس آنها ساخته می‌شود. هر قضیه یا گزاره سطح جدیدی از دانش را ارائه می‌دهد و باید به سطوح قبلی متصل شود. اتصال سطوح جدید به سطوح قبلی از طریق اثبات صورت می‌گیرد. به این دلیل قضیه‌ها و گزاره‌ها بلندی‌های جدیدی هستند که ما فتح می‌کنیم در حالیکه اثبات‌ها مثل رابط‌هایی هستند که آنها را به سطوح پایینی وصل می‌کنند. بدون اثبات‌ها ساختار دوام نخواهد داشت.

حال به نظر شما اثبات ریاضی چیست؟

اثبات ریاضی [1] یک بحث دقیق است که با اطلاعات داده شده شروع می‌شود با استدلال منطقی ادامه پیدا می‌کند و به چیزی که از شما خواسته شده است که ثابت کنید، منتهی می‌شود.

شما باید اثبات را با نوشتن اطلاعات داده شده شروع کنید و سپس باید بتوانید نتیجه‌ای را که می‌خواهید به آن برسید، بدست آورید. اگر اطلاعات داده شده به شما، یا آن چیزی که باید ثابت کنید دارای اصطلاحات تخصصی باشد، باید تعریف این اصطلاحات تخصصی را بنویسید.

در نوشتن اثبات باید از جملات کامل استفاده کنید. هر یک از این جملات باید نتیجهٔ (i) چیزی که قبلا بیان شده یا (ii) یک قضیه، گزاره یا لم که قبلا ثابت شده است، باشد.

در این کتاب، اثبات‌های زیادی را خواهید دید ولی توجه داشته باشید که ریاضیات ورزشی برای تماشا نیست. باید خودتان در بازی شرکت کنید. تنها راه برای یادگیری نوشتن اثبات این است که سعی کنید آنها را

[1] Mathematical proof

خودتان بنویسید.

۱.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه $\mathcal{T}$ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی[1] بر روی X می‌نامند اگر

(i) $\mathcal{T}$ شامل مجموعه تهی $(\emptyset)$ و X باشد،

(ii) $\mathcal{T}$ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های موجود در آن باشد، و

(iii) اشتراک هر دو عضو $\mathcal{T}$ به $\mathcal{T}$ تعلق داشته باشد.

زوج $(X,\mathcal{T})$ را یک فضای توپولوژیک[2] می‌نامند.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ و

$$\mathcal{T}_۱ = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

در این صورت $\mathcal{T}_۱$ یک توپولوژی بر روی X است چون شرط‌های *(i)*، *(ii)* و *(iii)* از تعریف ۱.۱.۱ برقرارند. ■

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\mathcal{T}_۲ = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}.$$

در این صورت $\mathcal{T}_۲$ یک توپولوژی بر روی X $\boxed{\text{نیست}}$ چون اجتماع

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

از دو عضو $\mathcal{T}_۲$ متعلق به $\mathcal{T}_۲$ نیست؛ یعنی، $\mathcal{T}_۲$ در شرط *(ii)* از تعریف ۱.۱.۱ صدق نمی‌کند. ■

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ و

$$\mathcal{T}_۳ = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

در این صورت $\mathcal{T}_۳$ یک توپولوژی بر روی X $\boxed{\text{نیست}}$ چون اشتراک دو عضو $\mathcal{T}_۳$

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$$

متعلق به $\mathcal{T}_۳$ نیست؛ یعنی، $\mathcal{T}_۳$ در شرط *(iii)* از تعریف ۱.۱.۱ صدق نمی‌کند. ■

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی (یعنی مجموعه اعداد صحیح مثبت) و $\mathcal{T}_۴$ شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و تمام زیرمجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $\mathcal{T}_۴$ یک توپولوژی بر روی $\mathbb{N}$ $\boxed{\text{نیست}}$ چون اجتماع نامتناهی

$$\{۲\} \cup \{۳\} \cup \ldots \{n\} \cup \ldots = \{۲, ۳, \ldots, n, \ldots\}$$

از اعضای $\mathcal{T}_۴$ متعلق به $\mathcal{T}_۴$ نیست؛ یعنی، $\mathcal{T}_۴$ در شرط *(ii)* از تعریف ۱.۱.۱ صدق نمی‌کند. ■

---

[1] Topology

[2] Topological space

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{T}$ گردایه تمام زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت $\mathcal{T}$ را توپولوژی گسسته[۱] بر روی X می‌نامند. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را یک فضای گسسته[۲] می‌نامند.

توجه داریم که $\mathcal{T}$ در تعریف ۶.۱.۱ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند و بنابراین واقعا یک توپولوژی است.

مشاهده می‌کنید که X در تعریف ۶.۱.۱ می تواند $\boxed{\text{هر}}$ مجموعه ناتهی باشد. بنابراین تعداد نامتناهی فضای گسسته ـبرای هر مجموعه‌ی X یک فضاـ وجود دارد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. در این صورت $\mathcal{T}$ را توپولوژی ناگسسته[۳] و $(X,\mathcal{T})$ را فضای ناگسسته[۴] می‌نامند.

یکبار دیگر باید بررسی کنیم که $\mathcal{T}$ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند و لذا در واقع یک توپولوژی است.

دوباره مشاهده می‌کنید که X در تعریف ۷.۱.۱ می‌تواند $\boxed{\text{هر}}$ مجموعه ناتهی باشد. بنابراین تعداد نامتناهی فضای ناگسسته ـبرای هر X یک فضاـ وجود دارد.

در مقدمه این فصل، اهمیت اثبات‌ها و موارد مشمول در آنها را بحث کردیم. تجربه اول ما در اثبات‌ها مثال ۸.۱.۱ و گزاره ۹.۱.۱ خواهد بود. شما باید این اثبات‌ها را به دقت بخوانید.

[1] Discrete topology

[2] Discrete space

[3] Indiscrete topology

[4] Indiscrete space

مثال ۸.۱.۱ اگر $X=\{a,b,c\}$ و $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی X با ویژگی $\{a\}\in\mathcal{T}$، $\{b\}\in\mathcal{T}$ و $\{c\}\in\mathcal{T}$ باشد، ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

برهان.

> می‌دانیم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی شامل $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{c\}$ است.
> می خواهیم ثابت کنیم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است؛ یعنی اینکه، باید (طبق تعریف ۶.۱.۱) ثابت کنیم که $\mathcal{T}$ شامل $\boxed{\text{همه}}$ زیرمجموعه‌های X است. بخاطر داشته باشید که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است و در شرایط (i)، (ii) و (iii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.
> بنابراین اثبات خود را با نوشتن زیرمجموعه‌های X شروع می‌کنیم.

مجموعه X دارای ۳ عضو است و بنابراین دارای $۲^۳$ زیرمجموعه‌ی متمایز است که عبارتند از $S_1=\emptyset,$ $S_2=\{a\},$ $S_3=\{b\},$ $S_4=\{c\},$ $S_5=\{a,b\},$ $S_6=\{a,c\},$ $S_7=\{b,c\},$ $S_8=\{a,b,c\}=X$.

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر یک از این زیرمجموعه‌ها مشمول در $\mathcal{T}$ است. از آنجاییکه $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است، از تعریف ۱.۱.۱ (i) نتیجه می‌شود که X و $\emptyset$ در $\mathcal{T}$ هستند؛ یعنی، $S_1\in\mathcal{T}$ و $S_8\in\mathcal{T}$.

بنابر فرض داریم که $\{a\}\in\mathcal{T}$، $\{b\}\in\mathcal{T}$ و $\{c\}\in\mathcal{T}$؛ یعنی، $S_2\in\mathcal{T}$، $S_3\in\mathcal{T}$ و $S_4\in\mathcal{T}$.

برای تکمیل اثبات لازم است نشان دهیم $S_5\in\mathcal{T}$، $S_6\in\mathcal{T}$ و $S_7\in\mathcal{T}$. داریم $S_5=\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\}$. چون $\{a\}$ و $\{b\}$ در $\mathcal{T}$ هستند، از تعریف ۱.۱.۱ (ii) نتیجه می‌شود اجتماع آنها نیز در $\mathcal{T}$ باشد؛ یعنی، $S_5=\{a,b\}\in\mathcal{T}$.

به همین طریق نتیجه می‌شود، $S_6=\{a,c\}\in\mathcal{T}$ و $S_7=\{b,c\}\in\mathcal{T}$. ■

در مقدمه این بخش اشاره کردیم که ریاضیات ورزشی برای تماشا کردن نیست. بلکه شما باید یک شرکت کننده فعال باشید. البته اشتراک شما شامل انجام برخی از تمرین‌ها نیز می‌باشد. اما انتظار بیشتری از شما می‌رود. شما باید در مورد مطالبی که به شما ارائه می‌شود $\boxed{\text{فکر}}$ کنید.

یکی از وظایف شما مشاهده نتایج اثبات شده و پرسیدن سوالات مرتبط است. برای مثال، نشان دادیم که اگر همه مجموعه‌های تک‌عضوی $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{c\}$ در $\mathcal{T}$ باشد و $X=\{a,b,c\}$، آنگاه $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته است. شما باید از خودتان بپرسید آیا این نتیجه برای مثال کلی‌تر نیز درست است؟ یعنی اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد بصورتی که $\mathcal{T}$ شامل همه مجموعه‌های تک‌عضوی باشد، آیا $\mathcal{T}$ لزوما یک توپولوژی گسسته است؟ جواب مثبت است و در گزاره ۹.۱.۱ ثابت شده است.

گزاره ۹.۱.۱ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد بطوری که به ازای هر $x \in X$، مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ در $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

برهان.

این نتیجه تعمیم مثال ۸.۱.۱ است. بنابراین ممکن است انتظار داشته باشید که اثباتی مشابه آن داشته باشد. ولی، ما نمی‌توانیم فهرست همه زیرمجموعه‌های X را ذکر کنیم چرا که ممکن است X نامتناهی باشد. در هر صورت، باید ثابت کنیم که **همه** زیرمجموعه‌های X در $\mathcal{T}$ است.

اکنون ممکن است شما وسوسه شوید که نتیجه را برای حالت‌های خاص مثلا اینکه X شامل ۴، ۵ یا حتی ۱۰۰ عضو باشد، ثابت کنید. ولی این روش محکوم به شکست است. اگر ملاحظات مربوط به اثبات‌های ریاضی در ابتدای این فصل را بخاطر آورید که معلوم شد که اثبات ریاضی یک بحث دقیق است. ما نمی‌توانیم با در نظر گرفتن تعدادی مثال خاص (حتی تعداد زیاد آن) یک استدلال محکم و خلل‌ناپذیر بسازیم. یک بحث دقیق باید **همه** حالت‌های خاص را دربر بگیرد. بنابراین ما حالت کلی یک مجموعه ناتهی و دلخواه X را در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم که هر زیر مجموعه X در $\mathcal{T}$ است.

با نگاهی به مثال ۸.۱.۱ متوجه می‌شویم که نکته کلیدی اثبات این است که هر زیرمجموعه X اجتماع زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X است و ما میدانیم که همه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی در $\mathcal{T}$ وجود دارد. این برای حالت کلی هم درست است.

اثبات را با ثبت این واقعیت که هر مجموعه‌ای اجتماع تمام زیرمجموعه‌های تک‌عضوی خود است شروع می‌کنیم. فرض کنید S یک زیرمجموعه X باشد. پس داریم

$$S = \bigcup_{x\in S} \{x\}.$$

از آنجاییکه می‌دانیم هر $\{x\}$ در $\mathcal{T}$ است، از تعریف ۱.۱.۱ (ii) و تساوی بالا برمی‌آید که $S \in \mathcal{T}$. چون S یک زیرمجموعه دلخواه X بود، پس نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است. ∎

اینکه هر مجموعه S اجتماع زیرمجموعه‌های تک‌عضوی آن است نتیجه‌ای است که گاهی در قسمت‌های مختلف کتاب از آن استفاده می‌کنیم. توجه کنید که این نتیجه حتی برای حالت $S = \emptyset$ نیز درست است و براین اساس مفهوم اجتماع تهی[1] بوجود می‌آید که نتیجه آن $\emptyset$ است.

[1]Empty union

تمرین‌های ۱.۱

۱. مجموعه $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید. تعیین کنید کدامیک از گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی بر روی X است:

(الف) $\mathcal{T}_1=\{X,\emptyset,\{a\},\{a,f\},\{b,f\},\{a,b,f\}\}$،

(ب) $\mathcal{T}_2=\{X,\emptyset,\{a,b,f\},\{a,b,d\},\{a,b,d,f\}\}$،

(ج) $\mathcal{T}_3=\{X,\emptyset,\{f\},\{e,f\},\{a,f\}\}$.

۲. مجموعه $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید. کدامیک از گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی بر روی X است؟ (جواب‌های خود را توجیه کنید.)

(الف) $\mathcal{T}_1=\{X,\emptyset,\{c\},\{b,d,e\},\{b,c,d,e\},\{b\}\}$،

(ب) $\mathcal{T}_2=\{X,\emptyset,\{a\},\{b,d,e\},\{a,b,d\},\{a,b,d,e\}\}$،

(ج) $\mathcal{T}_3=\{X,\emptyset,\{b\},\{a,b,c\},\{d,e,f\},\{b,d,e,f\}\}$.

۳. اگر $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته بر روی X باشد، کدامیک از عبارت‌های زیر درست است؟

(الف) $X\in\mathcal{T}$ ؛ (ب) $\{X\}\in\mathcal{T}$ ؛ (ج) $\{\emptyset\}\in\mathcal{T}$ ؛ (د) $\emptyset\in\mathcal{T}$ ؛
(ه) $\emptyset\in X$ ؛ (و) $\{\emptyset\}\in X$ ؛ (ز) $\{a\}\in\mathcal{T}$ ؛ (ح) $a\in\mathcal{T}$ ؛
(ط) $\emptyset\subseteq X$ ؛ (ی) $\{a\}\in X$ ؛ (ک) $\{\emptyset\}\subseteq X$ ؛ (ل) $a\in X$ ؛
(م) $X\subseteq\mathcal{T}$ ؛ (ن) $\{a\}\subseteq\mathcal{T}$ ؛ (س) $\{X\}\subseteq\mathcal{T}$ ؛ (ع) $a\subseteq\mathcal{T}$ ؛

[راهنمایی. دقیقا ۶ مورد از موارد بالا درست است.]

۴. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{T}$ نیز عضوی از $\mathcal{T}$ است. [راهنمایی. برای بدست آوردن نتیجه از «استقرای ریاضی» استفاده کنید.]

۵. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید که هرکدام از گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ یک توپولوژی است.

(i) $\mathcal{T}_1$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-n,n)$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است،

(ii) $\mathcal{T}_2$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-n,n]$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است،

(iii) $\mathcal{T}_3$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-n,\infty)$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است.

۶. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد. ثابت کنید که هرکدام از گردایه های زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک توپولوژی است.

(i) $\mathcal{T}_1$ شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و هر مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است. (این توپولوژی را **توپولوژی قطعه آغازین**[1] می‌نامند.)

(ii) $\mathcal{T}_2$ شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و هر مجموعه $\{n, n+1, \ldots\}$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است. (این توپولوژی را **توپولوژی قطعه پایانی**[2] می‌نامند.)

۷. تمام توپولوژی‌های ممکن بر روی مجموعه‌های زیر را بنویسید:

(الف) $X = \{a, b\}$،

(ب) $Y = \{a, b, c\}$.

۸. مجموعه نامتناهی X و توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی آن را در نظر بگیرید. اگر هر زیرمجموعه نامتناهی X در $\mathcal{T}$ باشد، ثابت کنید که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

*.۹ فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. دقیقا سه مورد از ده گردایه زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ توپولوژی است. آنها را مشخص و پاسخ خود را توجیه کنید.

(i) $\mathcal{T}_1$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه (a, b)، به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، $a < b$ است،

(ii) $\mathcal{T}_2$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(iii) $\mathcal{T}_3$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، به ازای هر عدد گویای مثبت r است،

(iv) $\mathcal{T}_4$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-r, r]$، به ازای هر عدد گویای مثبت r است،

(v) $\mathcal{T}_5$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، به ازای هر عدد گنگ مثبت r است،

(vi) $\mathcal{T}_6$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-r, r]$، به ازای هر عدد گنگ مثبت r است،

(vii) $\mathcal{T}_7$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-r, r)$، به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(viii) $\mathcal{T}_8$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r]$، به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(ix) $\mathcal{T}_9$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، و هر بازه $[-r, r]$ به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(x) $\mathcal{T}_{10}$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-n, n]$، و هر بازه $(-r, r)$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n و هر عدد حقیقی مثبت r است.

۲.۱ مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته و مجموعه‌های بازبسته

بجای اشاره مکرر به «عضوی از $\mathcal{T}$ »، راحت‌تر است که اسمی برای این مجموعه‌ها در نظر بگیریم. بر این اساس، آنها را «مجموعه‌های باز» می‌نامیم. همچنین متمم مجموعه‌های باز را «مجموعه‌های بسته» می‌نامیم. این نامگذاری مطلوب نیست، ولی از «بازه‌های باز» و «بازه‌های بسته» روی خط اعداد حقیقی استخراج شده است. در این مورد در فصل دو بیشتر صحبت خواهیم کرد.

[1]Initial segment topology

[2]Final segment topology

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. اعضای $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز[1] می‌نامند.

گزاره ۲.۲.۱ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه

(i) X و $\emptyset$ مجموعه‌های باز هستند،

(ii) اجتماع هر تعداد (متناهی یانامتناهی) از مجموعه‌های باز یک مجموعه باز است و

(iii) اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز یک مجموعه باز است.

برهان. موارد (i) و (ii) نتیجه بدیهی تعریف‌های ۱.۲.۱ و ۱.۱.۱ است. (iii) از تعریف ۱.۲.۱ و تمرین شماره ۴ از بخش ۱.۱ نتیجه می‌شود. ∎

در هنگام خواندن گزاره ۲.۲.۱، یک سوال باید به ذهن شما خطور کند: در حالیکه اجتماع هر تعداد متناهی و نامتناهی از مجموعه‌های باز، باز است تنها اشتراک $\boxed{\text{متناهی}}$ از مجموعه‌های باز، باز است. آیا اشتراک نامتناهی از مجموعه‌های باز همیشه باز است؟ مثال بعد نشان می‌دهد که جواب منفی است.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح مثبت و $\mathcal{T}$ شامل $\emptyset$ و هر زیرمجموعه S از $\mathbb{N}$ باشد که مکمل S در $\mathbb{N}$ (یعنی $\mathbb{N}\setminus S$) یک مجموعه متناهی است. به راحتی قابل اثبات است که $\mathcal{T}$ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند و بنابراین یک توپولوژی بر روی $\mathbb{N}$ است. (در بخش بعد بیشتر در مورد این توپولوژی تحت عنوان توپولوژی محدود-بسته صحبت خواهیم کرد.) برای هر عدد طبیعی n، مجموعه S_n را بصورت زیر تعریف کنید:

$$S_n = \{۱\} \cup \{n+۱\} \cup \{n+۲\} \cup \{n+۳\} \cup \ldots = \{۱\} \cup \bigcup_{m=n+۱}^{\infty} \{m\}.$$

بطور واضح چون مکمل هر S_n متناهی است پس یک مجموعه باز در توپولوژی $\mathcal{T}$ خواهد بود. بهرحال،

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} S_n = \{۱\}. \qquad (۱)$$

چون مکمل مجموعه $\{۱\}$ مجموعه متناهی یا $\mathbb{N}$ نیست، مجموعه باز نخواهد بود. بنابراین (۱) نشان می‌دهد که اشتراک مجموعه‌های باز S_n یک مجموعه باز نیست. ∎

ممکن است که بپرسید: چگونه مثال ۳.۲.۱ را پیدا کرده‌اید؟ پاسخ این سوال زیاد جالب نیست! نتیجه سعی و خطا است.

اگر به عنوان مثال یک توپولوژی گسسته را در نظر می‌گرفتیم، ممکن بود به این نتیجه برسیم که اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های باز، یک مجموعه باز است. عین همین نتیجه برای توپولوژی‌های ناگسسته هم درست است. بنابراین، کاری که باید انجام بدهیم حدس زدن هوشمندانه است.

بخاطر بیاورید که برای اثبات اینکه اشتراک مجموعه‌های باز لزوما باز نیست، کافی است تنها یک مثال نقض پیدا کنید!

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. به زیرمجموعه S از X یک مجموعه بسته[2] در $(X,\mathcal{T})$ گفته می‌شود اگر مکمل آن در X یعنی $X\setminus S$، یک مجموعه باز در $(X,\mathcal{T})$ باشد.

---

[1] Open sets

[2] Closed set

در مثال ۲.۱.۱ مجموعه‌های بسته عبارتند از

$$\emptyset, X, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,e,f\}, \{b,e,f\} \text{ و } \{a\}.$$

اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته باشد، بدیهی است که هر زیرمجموعه X یک مجموعه بسته است. در حالیکه در یک فضای ناگسستهٔ $(X,\mathcal{T})$ فقط مجموعه‌های X و $\emptyset$ بسته هستند.

گزاره ۵.۲.۱ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه

(i) X و $\emptyset$ مجموعه‌های بسته هستند،

(ii) اشتراک هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های بسته یک مجموعه بسته است و

(iii) اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته یک مجموعه بسته است.

برهان. (i) مستقیماً نتیجه گزاره ۲.۲.۱(i) و تعریف ۴.۲.۱ است چون مکمل X مجموعه $\emptyset$ است و برعکس.

برای اثبات (iii)، فرض کنید مجموعه‌های $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعه‌های بسته باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ یک مجموعه بسته است. بر اساس تعریف ۴.۲.۱ کافی است نشان دهیم $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$ یک مجموعه باز است.

چون مجموعه‌های $S_1, S_2, \ldots, S_n$ بسته هستند پس مکمل آنها $X\setminus S_1, X\setminus S_2, \ldots, X\setminus S_n$ مجموعه‌های باز هستند و لذا داریم

$$X\setminus(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = (X\setminus S_1) \cap (X\setminus S_2) \cap \ldots \cap (X\setminus S_n). \qquad (1)$$

با در نظر گرفتن اینکه طرف راست (۱) اشتراک تعداد متناهی از مجموعه‌های باز است پس طرف چپ هم یک مجموعه باز خواهد بود. بنابراین $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ یک مجموعه بسته است.

اثبات (ii) شبیه اثبات (iii) است. [بهرحال، باید هشدار مثال ۹.۳.۱ را در نظر بگیرید.] ■

هشدار. اغلب نام‌های «باز» و «بسته» باعث اشتباه افراد تازه وارد به دنیای توپولوژی می‌شود. علیرغم اسامی، بعضی مجموعه‌های باز، بسته نیز هستند. بعلاوه، بعضی از مجموعه‌ها نه باز هستند و نه بسته! در حقیقت، اگر مثال ۲.۱.۱ را در نظر بگیریم، خواهیم دید

(i) مجموعه $\{a\}$ هم باز است و هم بسته؛

(ii) مجموعه $\{b,c\}$ نه باز است و نه بسته؛

(iii) مجموعه $\{c,d\}$ باز است ولی بسته نیست؛

(iv) مجموعه $\{a,b,e,f\}$ بسته است ولی باز نیست.

در یک فضای گسسته هر مجموعه هم باز است و هم بسته، در حالیکه در فضای ناگسسته $(X,\mathcal{T})$ همه زیرمجموعه‌های X بجز X و $\emptyset$ نه باز هستند و نه بسته. ■

برای بخاطر سپردن اینکه مجموعه‌ها می‌توانند همزمان باز و بسته باشند، تعریف زیر ارائه می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱ زیرمجموعه S از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ مجموعه باز-بسته[1] گفته می‌شود اگر در این فضا، همزمان باز و بسته باشد.[2]

---

[1] Clopen

[2] می‌پذیریم که واژه «باز-بسته» یک واژه زیبا نیست، اما استفاده از آن فراگیر شده است.

در هر فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ مجموعه‌های X و $\emptyset$ باز_بسته هستند.
در فضای گسسته همه زیرمجموعه‌های X باز_بسته هستند.
در فضای ناگسسته فقط مجموعه‌های X و $\emptyset$ بازبسته هستند.

تمرین‌های ۲.۱

۱. تمام زیرمجموعه‌های ممکن مجموعه X در مثال ۲.۱.۱ را بنویسید. برای هر کدام تعیین کنید که کدامیک از حالات (i) باز_بسته؛ (ii) نه باز نه بسته؛ (iii) باز است ولی بسته نیست؛ (iv) بسته است ولی باز نیست، درست است.

۲. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد با این خاصیت که هر زیرمجموعه آن یک مجموعه بسته است. ثابت کنید که $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته است.

۳. مشاهده کنید که اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته یا ناگسسته باشد، هر مجموعه باز یک مجموعه باز_بسته است. برای مجموعه $X=\{a,b,c,d\}$ یک توپولوژی پیدا کنید که نه گسسته باشد و نه ناگسسته، ولی این خاصیت را داشته باشد که هر مجموعه باز یک مجموعه باز_بسته باشد.

۴. فرض کنید مجموعه X نامتناهی باشد. اگر $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی X باشد بطوریکه هر زیرمجموعه نامتناهی X بسته باشد، ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

۵. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی و $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی آن باشد بطوری که تنها زیرمجموعهٔ نامتناهی X خود X است. آیا $(X,\mathcal{T})$ لزوماً یک فضای ناگسسته است؟

۶. (i) فرض کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی مجموعه X باشد بطوریکه $\mathcal{T}$ شامل دقیقاً ۴ مجموعه است؛ $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,A,B\}$ که A و B زیرمجموعه‌های ناتهی واقعی[1] و مجزا از X هستند. [A یک زیرمجموعه واقعی از X است اگر $A\subseteq X$ و $A\neq X$. این مفهوم با نماد $A\subset X$ نشان داده می‌شود.] ثابت کنید A و B باید دقیقاً در یکی از شرایط زیر صدق می کنند:

$$(a)\quad B=X\subset A;\quad (b)\quad A\subset B;\quad (c)\quad B\subset A.$$

[راهنمایی: ابتدا نشان دهید که A و B باید حداقل در یکی از شرایط a، b و c صدق کنند و سپس نشان دهید نمی‌توانند در بیش از یکی از آنها صدق کنند.]

(ii) با استفاده از (i) تمام توپولوژی‌های ممکن روی $X=\{۱,۲,۳,۴\}$ را بنویسید که دقیقاً دارای ۴ عضو باشند.

۳.۱ توپولوژی بسته_متناهی

یک توپولوژی بر روی یک مجموعه معمولا با تعیین مجموعه‌های باز تعریف می‌شود. البته گاهی برای شرح توپولوژی طبیعی‌تر این است که بگوییم کدام مجموعه‌ها بسته هستند. تعریف بعدی مثالی از این نوع را ارائه می‌دهد.

---
[1] proper

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X را توپولوژی بسته-متناهی[1] یا توپولوژی هم‌متناهی[2] می‌نامند اگر زیرمجموعه‌های بسته X شامل X و تمام زیرمجموعه‌های متناهی X باشد؛ یعنی، مجموعه‌های باز عبارتند از $\emptyset$ و تمام زیرمجموعه‌های X که مکمل آنها متناهی است.

لازم است یکبار دیگر، توپولوژی بودن $\mathcal{T}$ در تعریف ۱.۳.۱ بررسی شود؛ یعنی، $\mathcal{T}$ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

توجه کنید که تعریف ۱.۳.۱ بیان نمی‌کند که هر توپولوژی با دارا بودن خاصیت بسته بودن X و زیرمجموعه‌های متناهی X، توپولوژی بسته-متناهی است. این زیرمجموعه‌ها باید $\boxed{\text{تنها}}$ مجموعه‌های بسته باشند. [البته، در توپولوژی گسسته روی هر مجموعه X ، خود X و تمام زیرمجموعه‌های متناهی X بسته هستند، اما سایر زیرمجموعه‌های X هم بسته است.]

در توپولوژی بسته-متناهی همه مجموعه‌های متناهی بسته هستند. مثال بعدی نشان می‌دهد که لزومی ندارد زیرمجموعه‌های نامتناهی باز باشند.

مثال ۲.۳.۱ اگر $\mathbb{N}$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه مجموعه‌های $\{۱\}$، $\{۵, ۶, ۷\}$، $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ متناهی و لذا در توپولوژی بسته-متناهی بسته هستند. بنابراین مکمل آنها

$$\{۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}, \{۱, ۲, ۳, ۴, ۸, ۹, ۱۰, \ldots\}, \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۱, \ldots\}$$

در توپولوژی بسته-متناهی مجموعه‌های باز هستند. از طرف دیگر، مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج بسته نیست چون متناهی نیست، و بنابراین مکمل آن -مجموعه اعداد صحیح مثبت فرد- در توپولوژی بسته-متناهی باز نیست.

بنابراین تمام مجموعه‌های متناهی بسته هستند، ولی همه مجموعه‌های نامتناهی باز نیستند. ■

[1] Finite-closed topology

[2] Cofinite topology

مثال ۳.۳.۱ فرض کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی متناهی-بسته بر روی مجموعه X باشد. اگر X دارای حداقل سه زیرمجموعه متمایز باز-بسته باشد، ثابت کنید که X متناهی است.

برهان.

می‌دانیم که $\mathcal{T}$ توپولوژی بسته-متناهی است و سه زیرمجموعه باز-بسته متمایز داریم.

می‌خواهیم ثابت کنیم که X یک مجموعه متناهی است.

بخاطر بیاورید که توپولوژی بسته-متناهی بدین معنی است که گردایه مجموعه‌های بسته شامل X و تمام زیرمجموعه‌های متناهی X است. همچنین، مجموعه باز-بسته مجموعه‌ای است که هم باز باشد و هم بسته.

می‌دانیم که در هر فضای توپولوژیک حداقل دو مجموعه باز-بسته X و $\emptyset$ وجود دارد. (توضیح ارائه شده بعد از تعریف ۶.۲.۱ را ملاحظه کنید.) ولی فرض شده است که در فضای $(X,\mathcal{T})$ حداقل سه زیرمجموعه باز-بسته وجود دارد. از این فرض نتیجه می‌شود که باید یک مجموعه بازبسته غیر از X و $\emptyset$ وجود داشته باشد. بنابراین نگاه دقیقی به این مجموعه باز بسته سوم خواهیم داشت.

از آنجاییکه توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ مذکور دارای سه زیرمجموعه باز-بسته متمایز است، پس یک زیرمجموعه باز-بسته S از X وجود دارد به طوری که $S \neq X$ و $S \neq \emptyset$. چون مجموعه S در توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ باز است، از تعریف ۴.۲.۱ نتیجه می‌شود که مکمل آن $X \setminus S$ یک مجموعه بسته است.

بنابراین S و $X \setminus S$ مجموعه‌های بسته‌ای در توپولوژی بسته-متناهی $\mathcal{T}$ هستند. در نتیجه چون S و $X \setminus S$ برابر X نیستند پس مجموعه‌های متناهی خواهند بود. اما، $X = S \cup (X \setminus S)$؛ یعنی، X اجتماع دو مجموعه متناهی است. در نتیجه X متناهی است. ■

در حال حاضر، سه نوع (اگرچه تعداد زیادی وجود دارد) توپولوژی متمایز می‌شناسیم که می‌توانیم آنها را روی مجموعه‌های نامتناهی تعریف کنیم. این سه نوعِ توپولوژی عبارتند از توپولوژی گسسته، توپولوژی ناگسسته و توپولوژی محدود-بسته. بنابراین همیشه باید در مشخص کردن یک توپولوژی بر روی یک مجموعه دقیق باشیم.

به عنوان مثال، مجموعهٔ $\{n : n \geq 10\}$ در توپولوژی بسته-متناهی بر روی مجموعه اعداد طبیعی باز است ولی در توپولوژی ناگسسته باز نیست. مجموعه اعداد طبیعی فرد در توپولوژی گسسته بر روی مجموعه اعداد طبیعی باز است اما در توپولوژی بسته-متناهی باز نیست.

در اینجا چند تعریف ارائه می‌گردد که ممکن است قبلاً دیده باشید.

تعریف ۴.۳.۱ تابع f از مجموعه X به توی مجموعه Y را در نظر بگیرید.

(i) به تابع f یک به یک[1] گفته می‌شود اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$، از $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه شود که $x_1 = x_2$؛

(ii) به تابع f پوشا[2] گفته می‌شود اگر به ازای هر $y \in Y$ یک عضو $x \in X$ وجود داشته باشد که $f(x) = y$؛

(iii) به تابع f دوسویه[3] گفته می‌شود اگر یک به یک و پوشا باشد.

[1] One-to-one (injective)

[2] Onto (surjective)

[3] Bijective

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید f تابعی از مجموعه X به توی مجموعه Y باشد. گفته می‌شود تابع f وارون‌پذیر[1] است اگر تابعی مثل g از Y به توی X موجود باشد بطوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(f(x)) = x$ و به ازای هر $y \in Y$، $f(g(y)) = y$. تابع g وارون[2] تابع f نامیده می‌شود.

اثبات گزارهٔ زیر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۶.۳.۱ تابع f از مجموعه X به توی مجموعه Y را در نظر بگیرید.

(i) تابع f وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر دوسویه باشد.

(ii) فرض کنید $g_۱$ و $g_۲$ توابعی از Y به توی X باشد. اگر $g_۱$ و $g_۲$ هر دو وارون تابع f باشند، آنگاه $g_۱ = g_۲$؛ یعنی، به ازای هر $y \in Y$ داریم $g_۱(y) = g_۲(y)$.

(iii) فرض کنید g یک تابع از Y به توی X باشد. تابع g وارون تابع f است اگر و فقط اگر f وارون تابع g باشد.

هشدار. اغلب این اشتباه پیش می‌آید که دانشجویان فکر می کنند تابعی یک به یک است که اگر آن تابع یک نقطه را به یک نقطه بنگارد.
تمام توابع یک نقطه را به یک نقطه می‌نگارند. در حقیقت این بخشی از تعریف تابع است.
تابع یک به یک تابعی است که نقاط مختلف را به نقاط مختلف می‌نگارد. ■
حال به یک نماد مهم می‌پردازیم که ممکن است قبلاً آن را ندیده باشید.

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید f تابعی از مجموعه X به توی مجموعه Y باشد. اگر S زیرمجموعه‌ای از Y باشد، مجموعه $f^{-۱}(S)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$f^{-۱}(S) = \{x : x \in X \text{ و } f(x) \in S\}.$$

زیرمجموعه $f^{-۱}(S)$ از X تصویر وارون[3] S نامیده می‌شود.

توجه داشته باشید وارون تابع $f : X \to Y$ موجود است اگر و فقط اگر f دوسویه باشد. اما تصویر وارون هر زیرمجموعه از Y موجود است حتی اگر f یک به یک یا پوشا نباشد. این موضوع در مثال بعد روشن می‌شود.

مثال ۸.۳.۱ فرض کنید f تابعی از مجموعه اعداد صحیح به خودش با ضابطه[4] $f(z) = |z|$، $z \in Z$ باشد.
تابع f یک به یک نیست، زیرا $f(۱) = f(-۱)$.
همچنین پوشا نیست، زیرا یک عدد صحیح مانند z وجود ندارد که $f(z) = -۱$. بنابراین مطمئناً f دوسویه نیست. پس، براساس گزاره ۶.۳.۱ (i)، f وارون‌پذیر نیست. با این حال، تصویر وارون همواره موجود است. به عنوان مثال،

$$f^{-۱}(\{۱, ۲, ۳\}) = \{-۱, -۲, -۳, ۱, ۲, ۳\}$$

$$f^{-۱}(\{-۵, ۳, ۵, ۷, ۹\}) = \{-۳, -۵, -۷, -۹, ۳, ۵, ۷, ۹\}. ■$$

---

[1] Invertible

[2] Inverse function

[3] Inverse image

این بخش را با مثال جالبی به پایان می‌بریم.

مثال ۹.۳.۱ فرض کنید $(Y, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و X یک مجموعه ناتهی باشد. بعلاوه، تابع f را از مجموعه X به توی مجموعه Y در نظر بگیرید. اگر $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$، ثابت کنید $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی بر روی X است.

برهان.

هدف ما این است که نشان دهیم گردایهٔ مجموعه‌ها، $\mathcal{T}_1$ ، یک توپولوژی بر روی X است؛ یعنی، باید نشان دهیم $\mathcal{T}_1$ در شرط‌های (i)، (ii) و (iii) تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

چون $X = f^{-1}(Y)$ و $Y \in \mathcal{T}$ پس $X \in \mathcal{T}_1$.
چون $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ و $\emptyset \in \mathcal{T}$ پس $\emptyset \in \mathcal{T}_1$.
بنابراین $\mathcal{T}_1$ در شرط (i) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

برای بررسی شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱، فرض کنید $\{A_j : j \in J\}$ گردایهٔ اعضای $\mathcal{T}_1$ با در نظر گرفتن مجموعه اندیس J باشد. باید نشان دهیم که $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$. چون $A_j \in \mathcal{T}_1$، از تعریف $\mathcal{T}_1$ نتیجه می‌شود که برای $B_j \in \mathcal{T}$ داریم $A_j = f^{-1}(B_j)$. همچنین $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$. [تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۱ را ببینید.]

حال، چون به ازای هر $j \in J$ داریم $B_j \in \mathcal{T}$ ، و بدلیل توپولوژی بودن $\mathcal{T}$ بر روی Y خواهیم داشت $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$. با استفاده از تعریف $\mathcal{T}_1$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) \in \mathcal{T}_1$ ؛ یعنی $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$.

بنابراین، $\mathcal{T}_1$ در شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

[هشدار. خاطرنشان می‌شود که همهٔ مجموعه‌ها شمارا نیستند. (برای اطلاعات بیشتر در مورد مجموعه‌های شمارا ضمیمهٔ ۱ را ببینید.) بنابراین در اثبات فوق، با فرض اینکه مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ در $\mathcal{T}_1$ هستند و نشان دادن اینکه اجتماع آنها $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ در $\mathcal{T}_1$ است، کافی نیست. در حقیقت، این استدلال فقطنشان می‌دهد که اجتماع تعداد شمارا از مجموعه‌های موجود در $\mathcal{T}_1$ نیز مشمول در آن است، ولی نشان نمی‌دهد که $\mathcal{T}_1$ در شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند. توجه کنید که برای اثبات شرط (ii) باید نشان دهیم که همهٔ اجتماع‌ها اعم از شمارا و ناشمارا از مجموعه‌های $\mathcal{T}_1$ مشمول در آن است.]

در مرحلهٔ آخر، فرض کنید A_1 و A_2 مشمول در $\mathcal{T}_1$ باشند. باید نشان دهیم که $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$.

چون $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1$، پس برای اعضایی مانند $B_1, B_2 \in \mathcal{T}_1$ خواهیم داشت: $A_1 = f^{-1}(B_1)$ و $A_2 = f^{-1}(B_2)$.

$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. [تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۱ را ببینید.]

چون $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$، داریم $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$. بنابراین $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$ که نشان می‌دهد $\mathcal{T}_1$ در شرط (iii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

لذا در واقع $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی بر روی X است. ■

تمرین‌های ۳.۱

۱. فرض کنید f یک تابع از X به توی Y باشد. در مثال ۹.۳.۱ بیان کردیم که برای هر زیرمجموعه B_j از Y و هر مجموعه اندیس J داریم

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad (1)$$

و

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \qquad (2)$$

(الف) ثابت کنید که (۱) درست است.

[راهنمایی. اثبات خود را با در نظر گرفتن یک عضو دلخواه مانند x از مجموعه سمت چپ و نشان دادن اینکه در مجموعه سمت راست است شروع کنید. سپس عکس این را انجام دهید.]

(ب) ثابت کنید (۲) درست است.

(ج) مجموعه‌های معین A_1، A_2، X ، Y و تابع $f : X \to Y$ را پیدا کنید به صورتی که $A_1 \subseteq X$ و $A_2 \subseteq X$ ولی $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

۲. آیا توپولوژی ارائه شده در (ii) تمرین شماره ۶ از بخش ۱.۱ توپولوژی بسته‌ـمتناهی است؟ (پاسخ خود را توجیه کنید.)

۳. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را T_1ـ*فضا* می‌گویند اگر هر مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ یک مجموعه بسته در $(X,\mathcal{T})$ باشد. نشان دهید که تنها دو مورد از نه فضای توپولوژیک به شرح زیر یک T_1ـفضا هستند. (پاسخ خود را توجیه کنید.)

(i) یک فضای گسسته؛

(ii) یک فضای ناگسسته با حداقل دو نقطه؛

(iii) یک مجموعه نامتناهی با یک توپولوژی محدودـبسته؛

(iv) مثال ۲.۱.۱؛

(v) تمرین شماره ۵ (i) از بخش ۱.۱؛

(vi) تمرین شماره ۵ (ii) از بخش ۱.۱؛

(vii) تمرین شماره ۵ (iii) از بخش ۱.۱؛

(viii) تمرین شماره ۶ (i) از بخش ۱.۱؛

(ix) تمرین شماره ۶ (ii) از بخش ۱.۱.

۴. فرض کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بسته‌ـمتناهی بر روی مجموعه X باشد. اگر $\mathcal{T}$ همزمان توپولوژی گسسته باشد ثابت کنید که مجموعه X نامتناهی است.

۵. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را T_0ـفضا می‌گویند اگر به ازای هر دو عضو متمایز a و b در X، مجموعه بازی شامل a ولی نه b، یا مجموعه بازی شامل b ولی نه a وجود داشته باشد.

(i) ثابت کنید که هر T_1ـفضا یک T_0ـفضا است.

(ii) کدامیک از (i)ـ(vi) در تمرین ۳ بالا T_0ـفضا هستند؟(جواب خود را توجیه کنید.)

(iii) یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $X = \{0, 1\}$ را پیدا کنید که $(X, \mathcal{T})$ یک T_0ـفضا باشد ولی T_1ـفضا نباشد. [فضای توپولوژیکی که پیدا می‌کنید **فضای سیرپینسکی**[1] نامیده می‌شود.]

(iv) ثابت کنید که هر یک از فضاهای توپولوژیک ارائه شده در تمرین شماره ۶ از بخش ۱.۱، یک T_0ـفضا است. (توجه کنید که در تمرین ۳ بالا دیدیم که هیچکدام از آنها T_1ـفضا نیستند.)

۶. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد. یک توپولوژی را **توپولوژی شمارا-بسته**[2] می‌گویند هرگاه مجموعه‌های بسته آن عبارت باشند از X و تمام زیرمجموعه‌های شمارای X. ثابت کنید که در حقیقت این یک توپولوژی است.

۷. فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی بر روی X باشند. گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(i) اگر توپولوژی $\mathcal{T}_3$ به صورت $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ تعریف شود، آنگاه $\mathcal{T}_3$ لزوماً یک توپولوژی بر روی X نیست. (جواب خود را با یک مثال معین توجیه کنید.)

(ii) اگر $\mathcal{T}_4$ بصورت $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ تعریف شود، آنگاه $\mathcal{T}_4$ یک توپولوژی بر روی X است. ($\mathcal{T}_4$ را **اشتراک** توپولوژی‌های $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ می‌نامند.)

(iii) اگر $(X, \mathcal{T}_1)$ و $(X, \mathcal{T}_2)$ T_1ـفضا باشند، آنگاه $(X, \mathcal{T}_4)$ نیز یک T_1ـفضا است.

(iv) اگر $(X, \mathcal{T}_1)$ و $(X, \mathcal{T}_2)$ T_0ـفضا باشند، آنگاه $(X, \mathcal{T}_4)$ لزوما یک T_oـفضا نیست. (پاسخ خود را با یافتن یک مثال معین توجیه کنید.)

(v) اگر $\mathcal{T}_1$، $\mathcal{T}_2$، ...، $\mathcal{T}_n$ توپولوژی بر روی X باشند، آنگاه $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ یک توپولوژی بر روی X است.

(vi) اگر برای مجموعه اندیس I، $\mathcal{T}_i$، $i \in I$ یک توپولوژی بر روی X باشد، آنگاه ثابت کنید که $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ یک توپولوژی بر روی X است.

۴.۱ خلاصه

در این فصل مفهوم اساسی فضای توپولوژیک معرفی شد. بصورت مثال فضاهای متناهی مختلفی مثل فضاهای گسسته، فضاهای ناگسسته و فضاهای با توپولوژی بسته-متناهی را دیدیم. با در نظر گرفتن کاربرد آنها، هیچکدام از این فضاها اهمیت خاصی ندارند. بهرحال، در تمرین شماره ۸ از بخش ۳.۴ اشاره شده است که هر فضای توپولوژیک نامتناهی «شامل» یک فضای توپولوژیک نامتناهی از این پنج گروه است: توپولوژی ناگسسته، توپولوژی گسسته، توپولوژی محدود-بسته، توپولوژی قسمت ابتدایی یا توپولوژی قسمت پایانی از تمرین شماره ۶ از بخش ۱.۱ است. در فصل بعد، توپولوژی بسیار مهم اقلیدسی معرفی خواهد شد.

تاکنون با اصطلاح‌های «مجموعه‌های باز» و «مجموعه‌های بسته» آشنا شدیم و گفتیم که ممکن است این اسامی گمراه کننده باشند. مجموعه‌ها می‌توانند هم باز و هم بسته، نه باز نه بسته، باز ولی نه بسته، یا بسته ولی

[1] Sierpinski space

[2] Countable-closed topology

نه باز باشند. مهم است که به خاطر بسپارید نمی‌توانید با اثبات اینکه یک مجموعه بسته نیست ثابت کنید آن مجموعه باز است.

در کنار ارایه‌ی تعریف‌های توپولوژی، فضای توپولوژیک، مجموعه باز، و مجموعه بسته، مهمترین موضوعی که پوشش داده شد نحوهٔ نوشتن اثبات‌ها بود.

در آغاز این فصل به اهمیت یادگیری نوشتن اثبات‌ها اشاره شد. در مثال ۸.۱.۱، گزارهٔ ۹.۱.۱ و مثال ۳.۳.۱ دیدیم که چگونه در طول اثبات فکر کنیم. بهتر است مهارت خود را در نوشتن اثبات‌ها بالا ببرید. مساله‌های خوب برای این منظور عبارتند از: تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۱، تمرین شماره ۲ و ۴ از بخش ۲.۱ و تمرین شماره ۱ و ۴ از بخش ۳.۱.

برای بعضی از دانشجویان، مفهوم توپولوژی به عنوان «مجموعه‌ای از مجموعه‌ها» گیج کننده است. برای امتحان درک خود تمرین شماره ۳ از بخش ۱.۱ را انجام دهید.

برخی تمرین‌ها شامل مفهوم‌های T_0-فضا و T_1-فضا بودند که بعداً به طور رسمی تعریف خواهند شد. به اینها خواص جدایی[1] می‌گویند.

سرانجام اهمیت تصویرهای وارون تاکید شدند. این تصویرها را در مثال ۹.۳.۱ و تمرین شماره ۱ بخش ۳.۱ مورد بحث قرار گرفتند. تعریف نگاشت پیوسته بر تصویرهای وارون استوار است.

[1] Separation properties

فصل ۲

توپولوژی اقلیدسی

مقدمه

معمولا در یک فیلم یا رمان چند شخصیت اصلی وجود دارد که موضوع اصلی حول آنها می‌چرخد. در داستان توپولوژی، توپولوژی اقلیدسی روی مجموعه اعداد حقیقی چنین شخصیت محوری را دارد. در حقیقت این موضوع چنان مثال خوبی است که بارها برای الهام گرفتن و بررسی بیشتر بدان مراجعه خواهیم کرد.

فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. درفصل ۱ سه نوع مختلف توپولوژی عبارت از توپولوژی گسسته، توپولوژی ناگسسته و توپولوژی بسته-متناهی ارایه شد که می‌توان روی هر مجموعه تعریف کرد. بنابراین می‌توان این توپولوژی‌ها را روی $\mathbb{R}$ نیز تعریف کرد. شش توپولوژی دیگر در تمرین های شماره ۵ و ۹ از بخش ۱.۱ تعریف شدند. در این فصل، یک توپولوژی مهم‌تر و جالب‌تر بنام توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ تعریف خواهد شد.

تجزیه و تحلیل توپولوژی اقلیدسی ما را به مفهوم «پایهٔ یک توپولوژی» می‌کشاند. در جبر خطی یاد گرفتیم که هر فضای برداری پایه‌ای دارد و هر بردار در آن به صورت یک ترکیب خطی از اعضای این پایه است. به همین طریق، در هر فضای توپولوژیک می‌توان هر مجموعه باز را به صورت یک اجتماع از اعضای پایه بیان کرد. در حقیقت، یک مجموعه باز است اگر و فقط اگر بتوان آن را بصورت یک اجتماع از اعضای پایه نوشت.

۱.۲ توپولوژی اقلیدسی بر روی اعداد حقیقی

تعریف ۱.۱.۲ زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ در توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ [1] باز است اگر در شرط زیر صدق کند:
(*) به ازای هر $x \in S$، اعضایی مانند a, b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود داشته باشند بطوری که $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

نمادگذاری. هرگاه به فضای توپولوژیک $\mathbb{R}$ بدون مشخص کردن توپولوژی ارجاع دهیم، منظور ما $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی است.

---
[1] Euclidean topology

ملاحظه ۲.۱.۲ (i) «توپولوژی اقلیدسی» $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است.

برهان.

> هدف این است که نشان دهیم $\mathcal{T}$ در شرایط (i)، (ii) و (iii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.
> تنها اطلاعات ما این است که مجموعه‌ای در $\mathcal{T}$ است اگر و فقط اگر دارای خاصیت $(*)$ باشد.

در ابتدا باید نشان دهیم $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$. اگر قرار دهیم $a = x - ۱$ و $b = x + ۱$، آنگاه $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$؛ یعنی، $\mathbb{R}$ دارای خاصیت $(*)$ است پس $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. ثانیا، $\emptyset \in \mathcal{T}$ چون بنابر فرض، $\emptyset$ دارای خاصیت $(*)$ است.

اینک فرض کنید $\{A_j : \ j \in J\}$ به ازای یک مجموعه اندیس‌گذار J، یک خانواده از اعضای $\mathcal{T}$ باشد. باید نشان دهیم که $\bigcup_{j\in J} A_j \in\mathcal{T}$؛ یعنی، باید نشان دهیم که $\bigcup_{j\in J} A_j$ دارای خاصیت $(*)$ است. فرض کنید $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. پس به ازای برخی $k \in J$ داریم $x \in A_k$. چون $A_k \in \mathcal{T}$، اعدادی مانند a و b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $x \in (a, b) \subseteq A_k$. چون $A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$، $k \in J$، و بنابراین $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$. پس $\bigcup_{j\in J} A_j$ در خاصیت $(*)$ صدق می کند و بنابراین عضو $\mathcal{T}$ است.

سرانجام، فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ در $\mathcal{T}$ باشند. باید ثابت کنیم که $A_۱ \cap A_۲ \in \mathcal{T}$. بنابراین فرض کنید $y \in A_۱ \cap A_۲$. پس $y \in A_۱$. چون $A_۱ \in \mathcal{T}$، پس اعدادی مانند a و b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که $y \in (a, b) \subseteq A_۱$. همین طور $y \in A_۲ \in \mathcal{T}$، پس اعدادی مانند c و d، $c < d$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که $y \in (c, d) \subseteq A_۱$. فرض کنید $e = \max\{a, c\}$ و $f = \min\{b, d\}$. بسادگی نتیجه می‌شود که $e < y < f$، و لذا $y \in (e, f)$. چون $(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_۱$ و $(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_۲$، نتیجه می‌گیریم که $y \in (e, f) \subseteq A_۱ \cap A_۲$. بنابراین $A_۱ \cap A_۲$ در خاصیت $(*)$ صدق می‌کند و در نتیجه در $\mathcal{T}$ قرار دارد.

بدین ترتیب، در واقع $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}$ است. ■

اینک به شرح مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته در توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ می‌پردازیم. بخصوص، خواهیم دید که بازه‌های باز در این توپولوژی واقعا مجموعه‌های باز، و بازه‌های بسته، مجموعه‌های بسته هستند.

(ii) فرض کنید $r, s \in \mathbb{R}$ که $r < s$. در توپولوژی اقلیدسی $\mathcal{T}$ روی $\mathbb{R}$، بازه باز (r, s) واقعا عضو $\mathcal{T}$ و بنابراین مجموعه باز است.

برهان.

> بازه (r, s) داده شده است.
> باید نشان دهیم که (r, s) در توپولوژی اقلیدسی یک مجموعه باز است؛ یعنی، باید نشان دهیم (r, s) در خاصیت $(*)$ از تعریف ۱.۱.۲ صدق می‌کند.
> بنابراین با فرض $x \in (r, s)$ شروع می‌کنیم. می‌خواهیم اعداد a و b، $a < b$ را در $\mathbb{R}$ پیدا کنیم که $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$.

فرض کنید $x \in (r, s)$. قرار دهید $a = r$ و $b = s$. پس به روشنی داریم

$$x \in (a, b) \subseteq (r, s).$$

در نتیجه (r, s) یک مجموعه باز در توپولوژی اقلیدسی است. ■

(iii) به ازای هر عدد حقیقی r بازه‌های باز (r,∞) و $(-\infty,r)$ ، مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ هستند.

برهان.

نخست نشان می‌دهیم که (r,∞) یک مجموعه باز است؛ یعنی، این مجموعه دارای خاصیت $(*)$ است.

برای نشان دادن درستی این حکم، فرض کنید $x\in(r,\infty)$ و $a,b\in\mathbb{R}$ را چنان پیدا کنید که

$$x\in(a,b)\subseteq(r,\infty).$$

فرض کنید $x\in(r,\infty)$. قرار دهید $a=r$ و $b=x+۱$. در اینصورت، $x\in(a,b)\subseteq(r,\infty)$ که در نتیجه $(r,\infty)\in\mathcal{T}$. با استدلال مشابه نشان داده می‌شود که $(-\infty,r)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است. ■

(iv) توجه داشتن به این نکته مهم است که در عین حال که هر بازه باز یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است ولی عکس آن درست نیست. همه مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ بازه نیستند. بعنوان مثال، مجموعه $(۱,۳)\cup(۵,۶)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است ولی یک بازه باز نیست. حتی مجموعه $\cup_{n=۱}^{\infty}(۲n,۲n+۱)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است. ■

(v) به ازای هر c و d، $c<d$، در $\mathbb{R}$ ، بازه بسته $[c,d]$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ نیست.

برهان.

باید نشان دهیم که $[c,d]$ در خاصیت $(*)$ صدق نمی‌کند.

برای این منظور، کافی است یک مقدار مانند x پیدا کنیم که اعدادی مانند a و b با خاصیت $(*)$ وجود نداشته باشد.

بروشنی c و d دو نقطه بسیار ویژه در بازه $[c,d]$ هستند. بنابراین فرض می‌کنیم $x=c$ و نشان می‌دهیم a و b با خاصیت مذکور وجود ندارد.

برای اثبات از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم a و b با خاصیت مذکور وجود دارد و نشان می‌دهیم که این فرض به یک تناقض منتهی خواهد شد، یعنی، چیزی که دروغ است. در نتیجه فرض دروغ بوده است! بنابراین چنین a و b وجود ندارد. بدین خاطر، $[c,d]$ دارای خاصیت $(*)$ نیست و در نتیجه یک مجموعه باز نیست.

مشاهده کنید که $c\in[c,d]$. فرض کنید a و b، $a<b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $c\in(a,b)\subseteq[c,d]$. پس از $c\in(a,b)$ نتیجه می‌شود $a<c<b$ و لذا $a<\frac{c+a}{۲}<c<b$. پس $\frac{c+a}{۲}\in(a,b)$ و $\frac{c+a}{۲}\notin[c,d]$. در نتیجه، $(a,b)\not\subseteq[c,d]$، که یک تناقض است. پس چنین a و b که $c\in(a,b)\subseteq[c,d]$ وجود ندارد. بنابراین $[c,d]$ در خاصیت $(*)$ صدق نمی‌کند و در نتیجه $[c,d]\notin\mathcal{T}$. ■

(vi) برای هر a و b، $a<b$، در $\mathbb{R}$، بازه بسته $[a,b]$ یک مجموعه بسته در توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ است.

برهان. برای اینکه ببینیم این مجموعه بسته است فقط باید مشاهده کرد که مکمل آن، $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$، که اجتماع دو مجموعه باز است، یک مجموعه باز است. ■

(vii) هر مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

برهان. مکمل $\{a\}$ اجتماع دو مجموعه باز $(-\infty, a)$ و (a, ∞) است که یک مجموعه باز است. بنابراین $\{a\}$ در $\mathbb{R}$ یک مجموعه بسته است. [با در نظر گرفتن تمرین شماره ۳ از بخش ۳.۱ ، $\mathbb{R}$ یک T_1ـفضا است.] ■

(viii) توجه داشته باشید که با قرار دادن $a \leq b$ بجای $a < b$ می‌توانستیم (vii) را در (vi) بگنجانیم. مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ حالت تباهیده بازه $[a, b]$ است. ■

(ix) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ [1] یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ است.

برهان. مکمل $\mathbb{Z}$ عبارت است از اجتماع $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1)$ از زیرمجموعه‌های باز $(n, n+1)$ از $\mathbb{R}$ و در نتیجه یک مجموعه باز است. بنابراین $\mathbb{Z}$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ است. ■

(x) مجموعه اعداد گویا[2]، نه یک زیرمجموعه باز در $\mathbb{R}$ است و نه یک زیرمجموعه بسته.

برهان.

نشان می‌دهیم که $\mathbb{Q}$ دارای خاصیت $(*)$ نیست و بنابراین یک مجموعه باز نیست.
برای این منظور کافی است نشان دهیم که $\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه باز (a, b)، $a < b$، نیست.

فرض کنید $\mathbb{Q} \supseteq (a, b)$ که در آن a و b، $a < b$، در $\mathbb{R}$ هستند. چون بین هر دو عدد حقیقی متمایز یک عدد گنگ وجود دارد (آیا می‌توانید ثابت کنید؟) بنابراین عددی مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که $c \notin \mathbb{Q}$، که با $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$ متناقض است. پس $\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه باز (a, b) نیست و بنابراین یک مجموعه باز نیست.
برای اثبات اینکه $\mathbb{Q}$ بسته نیست کافی است نشان دهیم که $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ یک مجموعه باز نیست. با در نظر گرفتن اینکه بین هر دو عدد حقیقی متمایز یک عدد گویا وجود دارد متوجه می‌شویم $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه باز (a, b)، $a < b$ ، نیست. پس $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ نیست و بنابراین $\mathbb{Q}$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ نیست. ■

(xi) در فصل ۳ ثابت خواهیم کرد که تنها زیرمجموعه‌های باز-بسته $\mathbb{R}$، زیرمجموعه‌های بدیهی $\mathbb{R}$ و $\emptyset$ هستند. ■

تمرین‌های ۱.۲

۱. ثابت کنید برای $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$، هیچکدام از بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ نیستند. همچنین نشان دهید که هیچکدام از آنها زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ نیستند.

۲. ثابت کنید که مجموعه‌های $[a, \infty)$ و $(-\infty, a]$ زیرمجموعه‌های بسته $\mathbb{R}$ هستند.

۳. با مثال نشان دهید که اجتماع تعداد نامتناهی از زیرمجموعه‌های بسته $\mathbb{R}$ لزوماً یک مجموعه بسته نیست.

[1] Integer numbers

[2] Rational numbers

۴. هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(i) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ نیست.

(ii) مجموعه اعداد اول S یک زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ است ولی یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ نیست.

(iii) مجموعه اعداد گنگ P [1] نه یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ است و نه یک زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$.

۵. اگر F یک زیرمجموعه ناتهی و متناهی $\mathbb{R}$ باشد، نشان دهید که F در $\mathbb{R}$ بسته است ولی F در $\mathbb{R}$ باز نیست.

۶. اگر F یک زیرمجموعه ناتهی و شمارا از $\mathbb{R}$ باشد، ثابت کنید F یک مجموعه باز نیست.

۷. (i) فرض کنید $S = \{۰, ۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵, \dots, ۱/n, \dots\}$. ثابت کنید که S در توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ بسته است.

(ii) آیا مجموعه $T = \{۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵, \dots, ۱/n, \dots\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است؟

(iii) آیا مجموعه $\{\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}, \dots, n\sqrt{۲}, \dots\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است؟

۸. (i) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک زیرمجموعه S از X را یک F_σـ**مجموعه**[2] می‌گویند اگر بصورت اجتماع یک تعداد شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. ثابت کنید که تمام بازه‌های باز (a,b) و همه بازه‌های بسته $[a,b]$، F_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ هستند.

(ii) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه T از X را یک G_σـ**مجموعه**[3] نامیده می‌شود اگر بصورت اشتراک یک تعداد شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. ثابت کنید که تمام بازه‌های باز (a,b) و همه بازه های بسته $[a,b]$، G_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ هستند.

(iii) ثابت کنید که مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، یک F_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ است. (در تمرین شماره ۳ از بخش ۵.۶ ثابت خواهیم کرد که $\mathbb{Q}$ یک G_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ نیست.)

(iv) نشان دهید که مکمل یک F_σـمجموعه، یک G_σـمجموعه است و مکمل یک G_σـمجموعه یک F_σـمجموعه است.

[1] Irrational numbers
[2] F_σ-set
[3] G_σ-set

۲.۲ پایه برای یک توپولوژی

ملاحظه ۲.۱.۲ به ما اجازه می‌دهد که توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ را به سبک بسیار مناسب‌تر بیان کنیم. برای این منظور، مفهوم یک پایه برای یک توپولوژی را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۲ یک زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ باز است اگر و فقط اگر بصورت اجتماع بازه‌های باز باشد.

برهان.

از ما خواسته شده است که ثابت کنیم S باز است اگر و تنها اگر بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز باشد؛ یعنی، باید نشان دهیم که

(i) اگر S بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز باشد، آنگاه یک مجموعه باز است، و

(ii) اگر S یک مجموعه باز باشد، آنگاه بصورت اجتماعی از بازه‌های باز است.

فرض کنید S یک اجتماع از بازه‌های باز باشد؛ یعنی، بازه‌های باز (a_j, b_j) که j به یک مجموعه اندیس J متعلق است وجود دارد که $S = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$. بنابر ملاحظه ۲.۱.۲ (ii)، هر بازه باز (a_j, b_j) یک مجموعه باز است. از اینرو، S یک اجتماع از مجموعه‌های باز و بنابراین یک مجموعه باز است.

برعکس، فرض کنید S یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ باشد. پس به ازای هر $x \in S$، یک بازه باز $I_x = (a, b)$ موجود است بطوری که $x \in I_x \subseteq S$. حال ادعا می‌کنیم که $S = \bigcup_{x\in S} I_x$.

حال باید ثابت کنیم که دو مجموعه S و $\bigcup_{x\in S} I_x$ باهم برابر هستند. با اثبات

(i) اگر $y \in S$، آنگاه $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$، و

(ii) اگر $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$، آنگاه $z \in S$.

نشان می‌دهیم که این مجموعه‌ها برابرند.

[توجه کنید که (i) با $S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$ معادل است در صورتی که (ii) با $\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$ معادل است.]

در ابتدا فرض کنید $y \in S$. پس $y \in I_y$. بنابراین $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$ که همان حکم مورد نظر است. سپس، فرض کنید $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$. در اینصورت به ازای عددی مانند $t \in S$ داریم $z \in I_t$. چون هر $I_x \subseteq S$، ملاحظه می‌کنیم که $I_t \subseteq S$ و بنابراین $z \in S$. پس $S = \bigcup_{x\in S} I_x$، و بر این اساس S بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز است که همان حکم مورد نظر است. ■

گزاره بالا بیان می‌کند که برای توصیف توپولوژی $\mathbb{R}$ کافی است بگوییم تمام بازه‌های (a, b) مجموعه‌های باز هستند و هر مجموعه باز دیگر بصورت اجتماعی از این مجموعه‌های باز هستند. این مطلب ما را به تعریف زیر هدایت می کند.

تعریف ۲.۲.۲ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های باز از X را یک پایه[1] برای توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌نامند اگر هر مجموعه باز بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

بنابراین $\mathcal{B}$ توپولوژی $\mathcal{T}$ را با مفهوم زیر «تولید می‌کند»: اگر به ما گفته شود چه مجموعه‌هایی عضو $\mathcal{B}$ هستند با استفاده از آن بتوانیم اعضای $\mathcal{T}$ را معین کنیم- آنها فقط مجموعه‌هایی هستند که اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ می‌باشند.

---

[1] Basis

مثال ۳.۲.۲ فرض کنید $\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. بنابر گزاره ۱.۲.۲، $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ است. ■

مثال ۴.۲.۲ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته و $\mathcal{B}$ خانواده همه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X باشد؛ یعنی، $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. در اینصورت بنابر گزاره ۹.۱.۱، $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است. ■

مثال ۵.۲.۲ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ و

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

بنابراین $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ یک پایه برای $\mathcal{T}_1$ است؛ زیرا $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$ و هر عضو $\mathcal{T}_1$ به صورت اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ قابل ارائه است. (مشاهده کنید که $\emptyset$ اجتماع تهی از اعضای $\mathcal{B}$ است.)

توجه کنید که خود $\mathcal{T}_1$ یک پایه برای خودش است. ■

ملاحظه ۶.۲.۲ توجه کنید که اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد آنگاه $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است. بنابراین، بعنوان مثال، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X برای توپولوژی گسسته بر روی X یک پایه است.

بنابراین، می‌بینیم که ممکن است برای یک توپولوژی پایه‌های مختلف بسیاری وجود داشته باشد. در حقیقت اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ روی یک مجموعه X باشد و $\mathcal{B}_1$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که داشته باشیم $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$، آنگاه $\mathcal{B}_1$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است. [ثابت کنید.] ■

همانطور که در بالا اشاره شد مفهوم «پایه برای یک توپولوژی» به ما اجازه می‌دهد توپولوژی‌ها را تعریف کنیم. البته، مثال زیر نشان می‌دهد که در این مورد باید دقت کنیم.

مثال ۷.۲.۲ فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. پس $\mathcal{B}$ برای هیچ توپولوژی تعریف شده بر روی X یک پایه نیست. زیرا فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد. پس، $\mathcal{T}$ شامل همه اجتماع‌های مجموعه‌های موجود در $\mathcal{B}$ است؛ یعنی،

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

(یکبار دیگر از این حقیقت استفاده کردیم که $\emptyset$ اجتماع تهی از اعضای $\mathcal{B}$ است و بنابراین $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

البته، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی نیست زیرا $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ عضو $\mathcal{T}$ نیست و بنابراین $\mathcal{T}$ دارای خاصیت *(iii)* از تعریف ۱.۱.۱ نیست. این یک تناقض است، و لذا فرض ما دروغ است.

پس $\mathcal{B}$ برای هیچ توپولوژی بر روی X یک پایه نیست. ■

حال می‌توانیم بپرسیم اگر $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، $\mathcal{B}$ تحت چه شرایطی یک پایه برای یک توپولوژی است؟ گزاره ۸.۲.۲ به این سوال پاسخ می‌دهد.

گزاره ۸.۲.۲ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. پس $\mathcal{B}$ برای یک توپولوژی بر روی X یک پایه است اگر و فقط اگر $\mathcal{B}$ دارای خاصیت‌های زیر باشد:

(الف) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$، و

(ب) به ازای هر $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$، مجموعه $B_۱ \cap B_۲$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

برهان. اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد آنگاه $\mathcal{T}$ باید دارای خواص (i)، (ii) و (iii) از تعریف ۱.۱.۱ باشد. بخصوص، X باید مجموعه باز باشد و اشتراک هر دو مجموعه باز باید یک مجموعه باز باشد. چون مجموعه های باز فقط بصورت اجتماع‌های اعضای $\mathcal{B}$ است، پس (الف) و (ب) برقرارند.

برعکس، فرض کنید $\mathcal{B}$ خواص (الف) و (ب) را دارد و $\mathcal{T}$ گردایه همه زیرمجموعه‌های X باشد که بصورت اجتماع‌های اعضای $\mathcal{B}$ است. نشان می‌دهیم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی X است. (اگر این درست باشد آنگاه بوضوح $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است و گزاره درست است.)

از (الف) نتیجه می‌شود $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ ولذا $X \in \mathcal{T}$. توجه کنید که $\emptyset$ یک اجتماع تهی از اعضای $\mathcal{B}$ است و لذا $\emptyset \in \mathcal{T}$. بنابراین می‌بینیم که $\mathcal{T}$ دارای خاصیت (i) از تعریف ۱.۱.۱ است.

حال فرض کنید $\{T_j\}$ خانواده‌ای از اعضای $\mathcal{T}$ باشد. پس هر T_j بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. پس اجتماع همه T_j ها نیز اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ است و بنابراین در $\mathcal{T}$ قرار دارند. از اینرو $\mathcal{T}$ در شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می کند.

در پایان، فرض کنید C و D در $\mathcal{T}$ باشند. باید ثابت کنیم $C \cap D \in \mathcal{T}$. اما، برای یک مجموعه اندیس‌گذار K و مجموعه‌های $B_k \in \mathcal{B}$ داریم $C = \bigcup_{k\in K} B_k$. هم‌چنین برای یک مجموعه‌اندیس‌گذار J و $B_j \in \mathcal{B}$ داریم $D = \bigcup_{j\in J} B_j$. بنابراین

$$C \cup D = (\bigcup_{k\in K} B_k) \bigcap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{k\in K, j\in J} (B_k \cap B_j).$$

شما باید بررسی کنید که هر دو عبارت برای $C \cap D$ واقعا معادلند.
در حالت متناهی احکامی مشابه زیر را خواهیم داشت

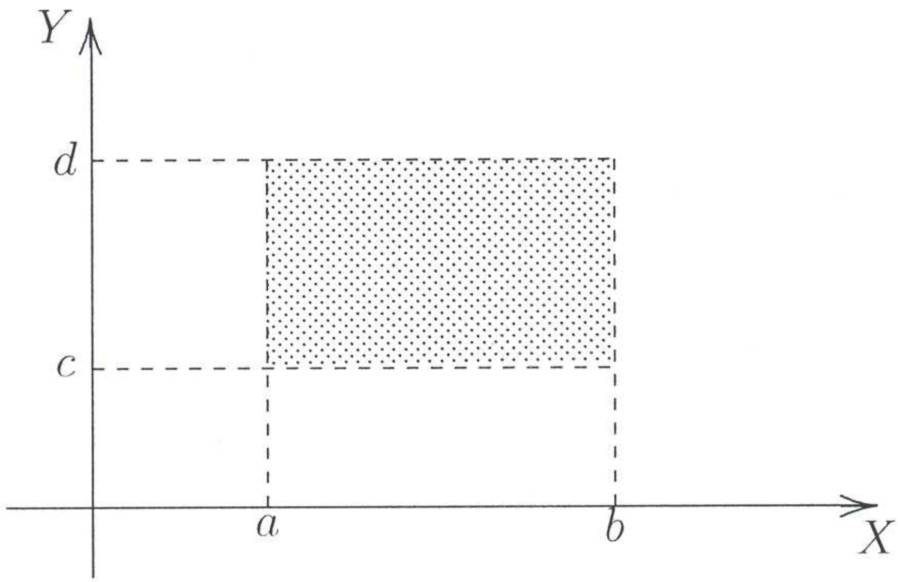
$$(B_۱ \cup B_۲) \cap (B_۳ \cup B_۴) = (B_۱ \cap B_۳) \cup (B_۱ \cap B_۴) \cup (B_۲ \cap B_۳) \cup (B_۲ \cap B_۴).$$

بنابر فرض (ب)، هر $B_k \cap B_j$ بصورت یک اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است و در نتیجه $C \cap D$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. پس $C \cap D \in \mathcal{T}$. پس $\mathcal{T}$ دارای خاصیت (iii) از تعریف ۱.۱.۱ است. بنابراین $\mathcal{T}$ واقعا یک توپولوژی است و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای این توپولوژی است که همان حکم می‌باشد. ■

گزاره ۸.۲.۲ یک نتیجه بسیار مفید است. این گزاره به ما اجازه می‌دهد که توپولوژی‌ها را فقط با نوشتن یک پایه مشخص یا تعریف کنیم. اغلب این روش بهتر از توصیف همه مجموعه‌های باز است.

حال با استفاده از این گزاره یک توپولوژی را بر روی صفحه تعریف می‌کنیم که به «توپولوژی اقلیدسی» معروف است.

مثال ۹.۲.۲ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه $\{\langle x,y\rangle : \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^{۲}, a < x < b, c < y < d\}$ «مستطیل‌های باز» در صفحه باشد که هر ضلع آن موازی محور X یا محور Y است.



پس $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی بر روی صفحه است. این توپولوژی را، توپولوژی اقلیدسی می‌نامند.

هرگاه از نماد $\mathbb{R}^{۲}$ استفاده می‌کنیم منظور ما صفحه است، و اگر به $\mathbb{R}^{۲}$ بعنوان یک فضای توپولوژیکی نام می‌بریم بدون اینکه به صراحت بگوییم چه توپولوژی است، منظور ما صفحه با توپولوژی اقلیدسی است.

برای مشاهده اینکه $\mathcal{B}$ واقعا یک پایه برای یک توپولوژی است، ملاحظه می‌کنید که (i) صفحه عبارت است از اجتماع تمام مستطیل‌های باز، و (ii) اشتراک هر دو مستطیل، یک مستطیل است. [منظور از «مستطیل» شکلی است که اضلاع آن با محورهای مختصات موازی است.] پس شرایط گزاره ۸.۲.۲ برقرار است و در نتیجه $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی است. ■

ملاحظه ۱۰.۲.۲ با تعمیم مثال ۹.۲.۲ می‌بینیم که چگونه برای هر $n > ۲$ یک توپولوژی را بر روی

$$\mathbb{R}^n = \{\langle x_۱, x_۲, \ldots x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R}, i = ۱, \ldots, n\}$$

تعریف کنیم. مجموعه $\mathcal{B}$ را برابر گردایه تمام زیرمجموعه‌ها به شکل

$$\{\langle x_۱, x_۲, \ldots x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = ۱, \ldots, n\}$$

از $\mathbb{R}^n$ با اضلاع موازی محورها می‌گیریم. این گردایه $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$ است. ■

تمرین‌های ۲.۲

۱. در این تمرین ثابت می‌کنید که قرص $\{\langle x,y\rangle : x^{۲}+y^{۲}<۱\}$ یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^{۲}$ است و سپس ثابت می‌کنید که هر قرص باز در صفحه یک مجموعه باز است.

(i) فرض کنید $\langle a,b\rangle$ نقطه‌ای در قرص $D=\{\langle x,y\rangle : x^{۲}+y^{۲}<۱\}$ باشد. قرار دهید $r=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$. فرض کنید $R_{\langle a,b\rangle}$ یک مستطیل باز با رئوس $\langle a\pm\frac{۱-r}{۸}, b\pm\frac{۱-r}{۸}\rangle$ باشد. ثابت کنید $R_{\langle a,b\rangle}\subset D$.

(ii) با استفاده از (i) نشان دهید

$$D=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D} R_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) از (ii) نتیجه بگیرید که D یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^{۲}$ است.

(iv) نشان دهید که هر قرص بصورت $\{\langle x,y\rangle : (x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}<c^{۲}, a,b,c\in\mathbb{R}\}$ در $\mathbb{R}^{۲}$ باز است.

۲. در این تمرین نشان خواهید داد که گردایه تمام قرص‌های باز در $\mathbb{R}^{۲}$ یک پایه برای یک توپولوژی در $\mathbb{R}^{۲}$ است. [بعداً خواهیم دید که این توپولوژی، توپولوژی اقلیدسی است.]

(i) فرض کنید $D_{۱}$ و $D_{۲}$ دو قرص دلخواه در $\mathbb{R}^{۲}$ با شرط $D_{۱}\cap D_{۲}\neq\emptyset$ باشد. اگر $\langle a,b\rangle$ نقطه‌ای در $D_{۱}\cap D_{۲}$ باشد، نشان دهید که یک قرص مانند $D_{\langle a,b\rangle}$ به مرکز $\langle a,b\rangle$ وجود دارد که $D_{\langle a,b\rangle}\subset D_{۱}\cap D_{۲}$. [راهنمایی: برای این مساله یک شکل رسم کنید و از روش تمرین ۱ (i) استفاده کنید.]

(ii) نشان دهید که

$$D_{۱}\cap D_{۲}=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D_{۱}\cap D_{۲}} D_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) با استفاده از (ii) و گزاره ۸.۲.۲ ثابت کنید که گردایه تمام قرص‌های باز در $\mathbb{R}^{۲}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی در $\mathbb{R}^{۲}$ است.

۳. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه تمام بازه‌های باز (a,b) در $\mathbb{R}$ با شرط $a<b$ باشد که a و b گویا هستند. ثابت کنید $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است. [این را با گزاره ۱.۲.۲ و مثال ۳.۲.۲مقایسه کنید که در آن a و b لزوما گویا نبودند.]

[راهنمایی: از گزاره ۸.۲.۲ استفاده نکنید چون استفاده از آن فقط نشان می‌دهد که $\mathcal{B}$ یک پایه برای برخی توپولوژی، نه لزوما یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی است.]

۴. گفته می‌شود فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن[1] صدق می‌کند اگر یک پایه $\mathcal{B}$ برای $\mathcal{T}$ وجود داشته باشد که فقط شامل تعداد شمارا عضو باشد.

(i) با استفاده از تمرین ۳ نشان دهید که $\mathbb{R}$ در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

(ii) ثابت کنید که توپولوژی گسسته بر روی یک مجموعه ناشمارا در اصل دوم شمارا بودن صدق نمی‌کند.
[راهنمایی: کافی نیست ثابت کنید یک پایه ویژه ناشماراست. باید ثابت کنید $\boxed{\text{هر}}$ پایه برای این توپولوژی ناشماراست.]

(iii) ثابت کنید که $\mathbb{R}^n$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n، در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

(iv) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ مجموعه تمام اعداد صحیح با توپولوژی متناهی-بسته باشد. آیا فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند؟

۵. گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(i) فرض کنید c و $m \neq ۰$ اعداد حقیقی باشد. در اینصورت خط $L = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^۲ : y = mx + c\}$ یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}^۲$ است.

(ii) فرض کنید $S^۱ = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ = ۱\}$ دایره واحد باشد. پس $S^۱$ یک زیرمجموعه بسته در $\mathbb{R}^۲$ است.

(iii) فرض کنید

$$S^n = \{\langle x_۱, x_۲, \ldots, x_n, x_{n+۱}\rangle \in \mathbb{R}^{n+۱} : x_۱^۲ +, x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ + x_{n+۱}^۲ = ۱\},$$

n-کره واحد باشد. بنابراین S^n یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}^{n+۱}$ است.

(iv) فرض کنید

$$B^n = \{\langle x_۱, x_۲, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_۱^۲ +, x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲ \leq ۱\},$$

n-قرص واحد باشد. پس B^n یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}^n$ است.

(v) خم $C = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^۲ : xy = ۱\}$ یک زیرمجموعه بسته در $\mathbb{R}^۲$ است.

۶. فرض کنید $\mathcal{B}_۱$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_۱$ بر روی X و $\mathcal{B}_۲$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_۲$ بر روی Y باشد. مجموعه $X \times Y$ شامل زوج‌های مرتب $\langle x,y\rangle$ است که $x \in X$ و $y \in Y$. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه زیرمجموعه‌های $X \times Y$ شامل همه مجموعه‌های $B_۱ \times B_۲$ باشد که $B_۱ \in \mathcal{B}_۱$ و $B_۲ \in \mathcal{B}_۲$. ثابت کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر روی $X \times Y$ است. توپولوژی که به این صورت تعریف می‌شود توپولوژی حاصلضرب[2] بر روی $X \times Y$ گفته می‌شود.
[راهنمایی: مثال ۹.۲.۲ را ببینید.]

۷. با استفاده از تمرین ۳ و تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۲ ثابت کنید که هر زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}$ یک F_σ-مجموعه و یک G_δ-مجموعه است.

---

[1] Second axiom of countability

[2] Product topology

۳.۲ پایهٔ یک توپولوژی مشخص

گزاره ۸.۲.۲ بیان کرد که تحت چه شرایطی گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای یک توپولوژی بر روی X است. البته گاهی یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی X معلوم است و می‌خواهیم بدانیم آیا $\mathcal{B}$ برای این توپولوژی ویژه $\mathcal{T}$ یک پایه است. برای بررسی اینکه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است می‌توانیم فقط تعریف ۲.۲.۲ را بکار ببریم و نشان دهیم هر عضو $\mathcal{T}$ بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. با این حال، گزاره ۲.۳.۲ روش دیگری را برای ما فراهم می‌آورد.

ابتدا مثالی را ذکر می‌کنیم که نشان می‌دهد که بین این گفتار که یک گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای برخی توپولوژی است و بگوییم که آن برای یک توپولوژی معلوم یک پایه است اختلاف وجود دارد. [1]

مثال ۱.۳.۲ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه همه بازه‌های نیم‌باز $(a, b]$، $a < b$ باشد که در آن $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$، پس $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}$ است، چون $\mathbb{R}$ اجتماع همه اعضای $\mathcal{B}$ است و اشتراک هر دو بازه نیم‌باز یک بازه نیم‌باز است.

البته، توپولوژی $\mathcal{T}_1$ که پایه آن $\mathcal{B}$ است، توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ نیست. با مشاهده این که $(a, b]$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ با توپولوژی $\mathcal{T}_1$ است، در صورتی که $(a, b]$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی نیست، می‌توان این موضوع را درک کرد. (تمرین شماره ۱ از بخش ۱.۲ را ببینید.) بنابراین یک توپولوژی وجود دارد که $\mathcal{B}$ یک پایه برای آن است ولی یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ نیست. ■

[1] از بیان اول استنباط می‌شود که یک توپولوژی وجود دارد که $\mathcal{B}$ یک پایه برای آن است اما بیان دوم روشن می‌سازد که $\mathcal{B}$ برای یک توپولوژی معلوم (مفروض) یک پایه است. مترجم

گزاره ۲.۳.۲ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه x متعلق به هر مجموعه باز U، یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد که $x \in B \subseteq U$.

برهان.

باید ثابت کنیم که

(i) اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ باشد و $x \in U \in \mathcal{T}$، آنگاه یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود دارد که $x \in B \subseteq U$، و

(ii) اگر برای هر $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U$ یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in B \subseteq U$، آنگاه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است.

فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ باشد و $x \in U \in \mathcal{T}$. چون $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است، پس مجموعه باز U بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است؛ یعنی، برای هر j از مجموعه اندیس J که $B_j \in \mathcal{B}$ داریم $U = \bigcup_{j\in J} B_j$. ولی از $x \in U$ نتیجه می‌شود که عددی مانند $j \in J$ وجود دارد بطوری که $x \in B_j$. بنابراین $x \in B_j \subseteq U$.

برعکس، فرض کنید که برای هر $U \in \mathcal{T}$ و هر $x \in U$، یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود دارد که $x \in B \subseteq U$. باید نشان دهیم که هر مجموعه باز بصورت یک اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است. بنابراین فرض کنید V یک مجموعه باز دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in V$ یک مجموعه مانند $B_x \in \mathcal{B}$ وجود دارد بطوری که $x \in B_x \subseteq V$. واضح است که $V = \bigcup_{x\in V} B_x$ (بررسی کنید چرا؟). بنابراین V بصورت یک اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است. ■

گزاره ۳.۳.۲ فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی مجموعه X باشد. پس زیرمجموعه U از X باز است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in U$ عضوی مانند $B \in \mathcal{B}$ موجود باشد که $x \in B \subseteq U$.

برهان. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای از X باشد و به ازای هر $x \in U$، مجموعه‌ای مانند $B_x \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد که $x \in B_x \subseteq U$. بوضوح $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. پس U یک اجتماع از مجموعه‌های باز و بنابراین باز است. عکس این گزاره از گزاره ۲.۳.۲ نتیجه می‌شود. ■

مشاهده می‌کنید که خاصیت پایه‌ای بیان شده در گزاره ۳.۳.۲ دقیقا معادل آن خاصیتی است که در تعریف توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ استفاده کردیم. در آنجا ذکر شد که زیرمجموعه U از $\mathbb{R}$ باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$، اعداد a و b، $a < b$، از $\mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in (a,b) \subseteq U$.

هشدار اطمینان حاصل کنید که تفاوت گزاره ۸.۲.۲ و گزاره ۲.۳.۲ را متوجه شده‌اید. گزاره ۸.۲.۲ شرایطی را ارائه می‌دهد که تحت آن خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X پایه‌ای برای یک توپولوژی دلخواه بر روی X است. ولی، گزاره ۲.۳.۲ شرایطی را مهیا می‌کند که تحت آن خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ ، پایه‌ای برای یک توپولوژی معین $\mathcal{T}$ باشد.

دیدیم که یک توپولوژی می‌تواند پایه‌های مختلفی داشته باشد. گزاره بعد به ما می‌گوید که چه موقع دو پایه‌ی $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ بر روی یک مجموعه X می‌توانند توپولوژی یکسانی را مشخص می‌کنند.

گزاره ۴.۳.۲ فرض کنید $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ پایه‌هایی به ترتیب برای توپولوژی‌های $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ بر روی مجموعه غیرتهی X باشد. در این صورت $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ اگر و فقط اگر

(i) به ازای هر $B \in \mathcal{B}_1$ و هر $x \in B$، یک مجموعه مانند $B' \in \mathcal{B}_2$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in B' \subseteq B$، و

(ii) به ازای هر $B \in \mathcal{B}_2$ و هر $x \in B$، یک مجموعه مانند $B' \in \mathcal{B}_1$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in B' \subseteq B$.

برهان.

باید ثابت کنیم که $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ پایه‌های یک توپولوژی هستند اگر و تنها اگر (i) و (ii) درست باشند.

ابتدا فرض می‌کنیم که $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ پایه‌های یک توپولوژی باشند؛ یعنی، $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ ، و نشان می‌دهیم که شرایط (i) و (ii) برقرار هستند.

در ادامه، فرض می‌کنیم شرایط (i) و (ii) برقرار باشند و ثابت می‌کنیم $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

ابتدا فرض کنید $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. پس شرایط (i) و (ii) نتیجه مستقیم گزاره ۲.۳.۲ هستند.

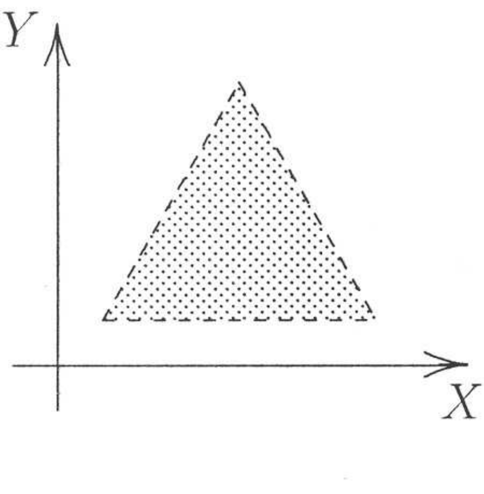
برعکس، فرض کنید $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ در شرایط (i) و (ii) صدق می‌کنند. بنابر گزاره ۲.۳.۲ از (i) نتیجه می‌شود که هر $B \in \mathcal{B}_1$ در $(X, \mathcal{T}_2)$ باز است؛ یعنی، $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. چون هر عضو $\mathcal{T}_1$ یک اجتماع از اعضای $\mathcal{T}_2$ است پس نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. بهمین طریق، از (ii) نتیجه می‌شود $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. در نتیجه $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ که همان حکم است. ■

مثال ۵.۳.۲ نشان دهید که مجموعه $\mathcal{B}$ از تمام «مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باز» که قاعده‌ی آنها موازی محور Xـ ها است، پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^۲$ است. (منظور از «مثلث باز» مثلثی است که اضلاع آن را در بر ندارد.)

شرح مختصر اثبات (در اینجا، فقط به صورت تصویری بحث می‌شود. شما باید اثبات را بطور کامل بنویسید.)

برهان.

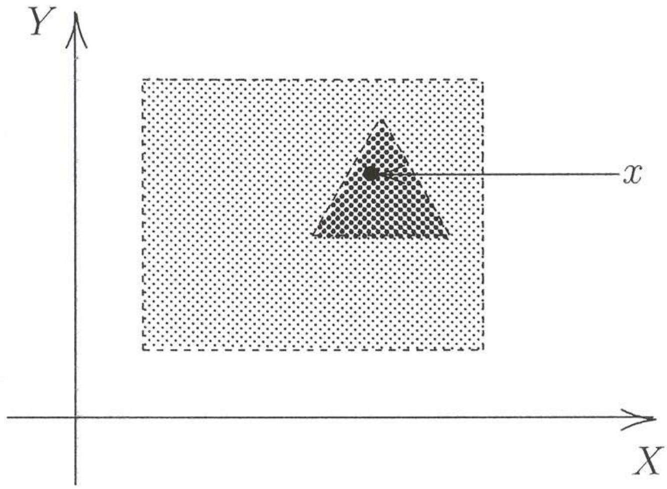
باید نشان دهیم که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی است.
باید از گزاره ۴.۳.۲ استفاده کنیم ولی قبل از آن باید نشان دهیم که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}^۲$ است.
برای نشان دادن این مطلب، باید ثابت کنیم که $\mathcal{B}$ در شرایط گزاره ۸.۲.۲ صدق می‌کند.



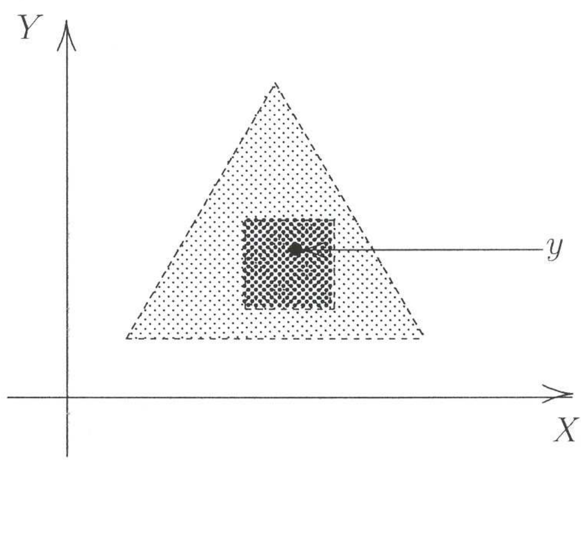
اولین چیزی که مشاهده می‌کنیم این است که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی است چراکه در شرایط گزاره ۸.۲.۲ صدق می‌کند. (برای این که ببینیم $\mathcal{B}$ در گزاره ۸.۲.۲ صدق می‌کند، مشاهده می‌کنید $\mathbb{R}^۲$ برابر است با اجتماع تمامی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باز که قاعده آنها با محور x ها موازی هستند، و نیز اشتراک دو مثلث این چنینی یک چنین مثلث دیگر است.)

در مرحله‌ی بعد باید نشان دهیم که شرایط (i) و (ii) از گزاره‌ی ۴.۳.۲ برقرارند.

ابتدا شرط (i) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید R مستطیل باز با اضلاع موازی محورهای مختصات و x نقطه‌ای دلخواه در $\mathbb{R}$ باشد. باید نشان دهیم که یک مثلث متساوی‌الاضلاع باز T با قاعده‌ی موازی محور xـ ها وجود دارد که $x \in T \subseteq R$. این مطلب به سادگی از روی شکل دیده می‌شود.



بالاخره، باید شرط (ii) از گزاره ۴.۳.۲ را بررسی کنیم. فرض کنید T' مثلث متساوی الاضلاع باز با قاعده‌ی موازی محور xـها و y نقطه‌ای در آن باشد. پس مستطیل باز R' موجود است بطوری که $y \in R' \subseteq T'$. این مطلب نیز به سادگی از روی شکل دیده می‌شود.



بنابراین شرایط گزاره‌ی ۴.۳.۲ برقرار است و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^2$ است. ■

در مثال ۹.۲.۲ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی تعریف کردیم که گردایه‌ی تمام «مستطیل‌های باز» (با اضلاع موازی محورهای مختصات) بود. مثال ۵.۳.۲ نشان می‌دهد که به جای «مستطیل‌های باز» می‌توانیم از «مثلث‌های باز» (با قاعده‌ی موازی محور Xـها) بدون تغییر توپولوژی استفاده کنیم. در تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۲ خواهیم دید که حتی شرایط داخل پرانتزها هم بدون تغییر توپولوژی قابل حذف است. همچنین «قرص‌های باز» می‌توانند جایگزین «مستطیل های باز» شوند. [1]

---

[1] در حقیقت، اغلب کتابها، توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^2$ را با استفاده از قرص‌های باز تعریف می‌کنند.

تمرین‌های ۳.۲

۱. تعیین کنید که کدامیک از گردایه‌های زیر پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^۲$ است:

(i) گردایه‌ی همه مربع‌های «باز» با اضلاع موازی محورهای مختصات؛

(ii) گردایه‌ی همه قرص‌های «باز»؛

(iii) گردایه‌ی همه مربع‌های «باز»؛

(iv) گردایه‌ی همه مستطیل‌های «باز»؛

(v) گردایه‌ی همه مثلث‌های «باز».

۲. (i) فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی روی مجموعه ناتهی X باشد. اگر $\mathcal{B}_۱$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد بطوری که $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_۱ \subseteq \mathcal{T}$ ، ثابت کنید که $\mathcal{B}_۱$ نیز پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است.

(ii) از (i) نتیجه بگیرید که تعداد ناشمارا پایه‌ی مختلف برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۳. مجموعه $\mathcal{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ را در نظر بگیرید. همانطور که در مثال ۱.۳.۲ دیده شد، $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}$ است و $\mathcal{T}$ توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ نیست. با وجود این ، نشان دهید که هر بازه‌ی (a,b) در $(X,\mathcal{T})$ باز است.

*.۴ فرض کنید $C[۰,۱]$ مجموعه تمام تابع‌های حقیقی پیوسته بر روی $[۰,۱]$ باشد.

(i) نشان دهید که گردایه M، که در آن $M = \{M(f,\varepsilon) : f \in C[۰,۱],$ یک عدد حقیقی مثبت است $\varepsilon\}$ و $M(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[۰,۱], \int_۰^۱ |f-g| < \varepsilon\}$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}_۱$ روی $C[۰,۱]$ است.

(ii) نشان دهید گردایه‌ی U، که در آن $U = \{U(f,\varepsilon) : f \in C[۰,۱],$ یک عدد حقیقی مثبت است $\varepsilon\}$ و $U(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[۰,۱], \sup_{x\in[۰,۱]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon\}$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}_۲$ بر روی $C[۰,۱]$ است.

(iii) ثابت کنید $\mathcal{T}_۱ \neq \mathcal{T}_۲$.

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک گردایه‌ی ناتهی S از زیرمجموعه‌های باز X را یک زیرپایه[1] برای $\mathcal{T}$ می‌نامند اگر گردایه‌ی همه‌ی اشتراک‌های متناهی از اعضای S، پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ بسازد.

(i) ثابت کنید که گردایه‌ی تمام بازه‌های باز (a,∞) یا $(-\infty,a)$ یک زیرپایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ می‌سازد.

(ii) ثابت کنید که $S = \{\{a\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$ یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}_۱$ از مثال ۲.۱.۱ است.

۶. فرض کنید S یک زیرپایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}$ باشد. (تمرین ۵ را ببینید.) اگر همه‌ی بازه‌های بسته‌ی $[a,b]$، $a<b$، در S باشد، ثابت کنید که $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته است.

۷. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و S گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌های $X\setminus\{x\}$ ، $x \in X$ باشد. ثابت کنید S یک زیرپایه برای توپولوژی متناهی-بسته بر روی X است.

---

[1] Subbasis

۸. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی و $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته بر روی آن باشد. یک زیرپایه‌ی S برای $\mathcal{T}$ پیدا کنید که شامل هیچ مجموعه تک‌عضوی نباشد.

۹. فرض کنید S گردایه‌ی تمام خط‌های مستقیم در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر S یک زیرپایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}^2$ باشد، توپولوژی $\mathcal{T}$ چیست؟

۱۰. فرض کنید S گردایه‌ی تمام خط‌های راست موازی محور xـها در صفحه باشد. اگر S یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ روی $\mathbb{R}^2$ باشد، مجموعه‌های باز را در فضای $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ توصیف کنید.

۱۱. فرض کنید S گردایه‌ی تمام دایره‌ها در صفحه باشد. اگر S زیرپایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}^2$ باشد، مجموعه‌های باز در فضای $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ را توصیف کنید.

۱۲. فرض کنید S گردایه‌ی تمام دایره‌ها در صفحه باشد که مرکز آنها بر روی محور xـها است. اگر S زیرپایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}^2$ باشد، مجموعه‌های باز در فضای $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ را توصیف کنید.

۴.۲ خلاصه

در این فصل فضای توپولوژیک بسیار مهم ـ $\mathbb{R}$، مجموعه تمام اعداد حقیقی با توپولوژی اقلیدسی را تعریف کردیم و زمانی را برای تجزیه و تحلیل آن صرف کردیم. در این توپولوژی مشاهده کردیم که بازه‌های باز واقعا مجموعه‌های باز (و بازه‌های بسته مجموعه‌های بسته) هستند. به هر حال، همه مجموعه‌های باز بصورت بازه باز نیستند. با وجود این، هر مجموعه باز در $\mathbb{R}$ بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز است. این موضوع ما را بر آن داشت که مفهوم «پایه برای یک توپولوژی» را معرفی و ثابت کنیم که گردایه تمامی بازه‌های باز یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است.

با استفاده از این مفهوم «پایه‌ی یک توپولوژی» را معرفی کردیم و ثابت کردیم که گردایه‌ی تمام بازه‌های باز پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است.

در مقدمه فصل ۱، یک اثبات ریاضی را بصورت یک بحث خلل‌ناپذیر توصیف کردیم و اهمیت نوشتن اثبات‌ها را متذکر شدیم. در این فصل، اثبات با برهان خلف را در ملاحظه‌ی ۲.۱.۲ (v) و در مثال ۷.۲.۲ معرفی کردیم. روش اثبات شرایط «لازم و کافی» که به شکل «اگر و تنها اگر» ظاهر می‌شود در گزاره ۱.۲.۲ شرح داده شد و نمونه‌های بیشتر در گزاره‌های ۸.۲.۲، ۲.۳.۲، ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ ارائه گردید.

برای توپولوژی‌ها، موضوع پایه‌ها به نوبه خود حایز اهمیتند. برای مثال دیدیم که گردایه‌ی همه مجموعه‌های تک‌عضوی پایه‌ای برای توپولوژی گسسته است. در گزاره ۸.۲.۲ برای اینکه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X پایه‌ای برای یک توپولوژی دلخواه بر روی X باشند شرایط لازم و کافی ارائه شد. این مطلب با گزاره‌ی ۲.۳.۲ که شرایط لازم و کافی برای پایه بودن گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X برای توپولوژی معین بر روی X را ارائه می‌داد مقایسه شد. تذکر داده شد که دو گردایه‌ی متفاوت $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ می‌توانند پایه‌های یک توپولوژی باشند. شرط لازم و کافی برای این موضوع در گزاره ۴.۳.۲ داده شد.

توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$ برای هر عدد صحیح مثبت n تعریف شد. دیدیم که خانواده‌ی تمام قرص‌های باز، همچنین خانواده‌ی مربع‌های باز یا مستطیل‌های باز، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^2$ است .

سه مفهوم جالب در تمرین‌ها معرفی شد. تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۲ نمادها و مفاهیم F_σـمجموعه و G_σـمجموعه را پوشش داد که در نظریه‌ی اندازه‌ها مهم هستند. تمرین شماره ۴ از بخش ۳.۲ فضای توابع حقیقی پیوسته را معرفی کرد. چنین فضاهایی را فضاهای تابع می‌نامند که یکی از موضوع‌های اصلی در مطالعه

آنالیز تابعی هستند. آنالیز تابعی آمیزه‌ای از آنالیز (کلاسیک) و توپولوژی است و تا مدت‌ها آنالیز مدرن نامیده می‌شد، بعنوان مثال سایمونز [۳] را ببینید. در نهایت در تمرین‌های شماره ۱۲ـ۵ از بخش ۳.۲ مفهوم زیرپایه معرفی شد.

فصل ۳

نقاط حدی

مقدمه

بر روی خط اعداد حقیقی مفهوم «نزدیکی» را داریم. برای مثال هر نقطه در دنباله‌ی $\ldots,۰/۰۰۰۰۱,۰/۰۰۰۱,۰/۰۰۱,۰/۰۱,۰/۱$ ار نقطه‌ی قبل به ۰ نزدیک‌تر است. در حقیقت، با یک دیدگاه، ۰ نقطه‌ی حدی این دنباله است. بنابراین بازه $[۰,۱)$ بسته نیست، چون این بازه شامل نقطه حدی ۰ نیست. در یک فضای توپولوژیک کلی «تابع فاصله» وجود ندارد، بنابراین باید کار دیگری انجام دهیم. در این فصل مفهوم نقطه حدی بدون استفاده از «فاصله» تعریف خواهد شد. حتی با تعریف جدید از نقطه حدی، ۰ همچنان نقطه حدی $[۰,۱)$ خواهد بود. معرفی مفهوم نقطه حدی به ما در درک بهتر مفهوم مجموعه‌های بسته کمک خواهد کرد.

مفهوم توپولوژیکی بسیار مهم دیگر که در این فصل معرفی خواهد شد مفهوم همبندی است. فضای توپولوژیکی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در حالیکه مجموعه های $[۰,۱]\cup[۲,۳]$ و $[۴,۶]$ می‌توانند بصورت مجموعه‌های با طول ۲ توصیف شوند، واضح است که نوع این دو مجموعه متفاوت است... مجموعه اول شامل دو بخش جدا از هم می‌باشد اما مجموعه دوم یکپارچه است. تفاوت بین این دو مجموعه «توپولوژیکی» است و با استفاده از مفهوم همبندی توضیح داده خواهد شد.

۱.۳ نقاط حدی و بست

اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد معمولا اعضای X را نقطه[1] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. نقطه $x\in X$ نقطه حدی[2] (یا نقطه انباشتگی[3] یا نقطه خوشه‌ای[4]) A نامیده می‌شود اگر هر مجموعه باز U شامل x، یک نقطه دیگر از A بغیر از x را در بر داشته باشد.

[1] Point

[2] Limit point

[3] Accumulation point

[4] Cluster point

مثال ۲.۱.۳ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ با فرض مجموعه $X=\{a,b,c,d,e\}$ و توپولوژی $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ را در نظر بگیرید. اگر $A=\{a,b,c\}$، پس b، d و e نقاط حدی مجموعه A هستند.

برهان.

نقطه a یک نقطه حدی A است اگر و تنها اگر هر مجموعه باز شامل a، شامل نقطه دیگری از A نیز باشد.
بنابراین برای نشان دادن اینکه a نقطه حدی مجموعه A $\boxed{\text{نیست}}$، کافی است یک مجموعه باز شامل a پیدا کنیم که شامل نقطه دیگری از A نباشد.

مجموعه $\{a\}$ یک مجموعه باز است و شامل نقطه دیگری از A نیست. بنابراین a نقطه حدی A نیست.
مجموعه $\{c,d\}$ یک مجموعه باز شامل c است ولی شامل نقطه دیگری از A نیست. بنابراین c نقطه حدی A نیست.

برای اینکه نشان دهیم b نقطه حدی A است، باید نشان دهیم که هر مجموعه باز شامل b شامل نقطه دیگری از A بغیر از b است.
اینکار را با نوشتن $\boxed{\text{همه}}$ مجموعه‌های باز شامل b و بررسی اینکه هرکدام از آنها شامل نقطه دیگری از A بغیر از b است، انجام خواهیم داد.

X و $\{b,c,d,e\}$ تنها مجموعه های باز شامل b هستند که هر دوی آنها شامل اعضای دیگری از A مثلا c هستند. بنابراین b نقطه حدی A است.
نقطه d نقطه حدی A است اگرچه عضو A نیست. چون هر مجموعه باز شامل d، شامل نقطه‌ای از A است. به همین صورت، e نقطه حدی A است اگرچه عضوی از A نیست. ■

مثال ۳.۱.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. پس A هیچ نقطه حدی ندارد. چون به ازای هر عضو $x\in X$، $\{x\}$ مجموعه بازی است که شامل نقطه دیگری از A بغیر از x نیست. ■

مثال ۴.۱.۳ زیرمجموعه $A=[a,b)$ از $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. بسادگی می‌توان بررسی کرد که هر عضو $[a,b)$ نقطه حدی A است. نقطه b نیز نقطه حدی A است. ■

مثال ۵.۱.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای ناگسسته و A زیرمجموعه‌ای از X با حداقل دو عضو باشد. بسادگی دیده می‌شود که هر عضو X نقطه حدی A است. (چرا تاکید کردیم که A حداقل دو نقطه داشته باشد؟) ■

برای تشخیص اینکه یک مجموعه بسته است یا نه، گزاره بعد یک روش مفید را ارایه می‌دهد.

گزاره ۶.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. بنابراین A در $(X,\mathcal{T})$ بسته است اگر و تنها اگر A شامل تمام نقاط حدی خود باشد.

برهان.

باید ثابت کنیم که A در $(X,\mathcal{T})$ بسته است اگر و تنها اگر A شامل تمام نقاط حدی خود باشد؛ یعنی، باید نشان دهیم

(i) اگر A یک مجموعه بسته باشد، آنگاه شامل تمام نقاط حدی خود است، و

(ii) اگر A شامل تمام نقاط حدی خود باشد، آنگاه بسته است.

فرض کنید A در $(X,\mathcal{T})$ بسته باشد. فرض کنید p یک نقطه حدی A باشد که عضو مجموعه $X\setminus A$ است. پس $X\setminus A$ مجموعه‌ی بازی است که شامل نقطه حدی p از A است. پس $X\setminus A$ شامل عضوی از A است. بروشنی این مطلب دروغ است و لذا برای فرض خود یک تناقض داریم. بنابراین هر نقطه حدی A باید متعلق به A باشد.

برعکس، فرض کنید A شامل تمام نقاط حدی خود است. برای هر $z \in X\setminus A$، از فرض نتیجه می‌شود که یک مجموعه باز U_z، $(z \in U_z)$ وجود دارد که $U_z \cap A = \emptyset$؛ یعنی، $U_z \subseteq X\setminus A$. بنابراین $X\setminus A = \bigcup_{z\in X\setminus A} U_z$. (چرا؟) پس $X\setminus A$ اجتماعی از مجموعه‌های باز و در نتیجه مجموعه‌ای باز است. بنابراین مکمل آن، A بسته است. ■

مثال ۷.۱.۳ به عنوان کاربردهای گزاره ۶.۱.۳، احکام زیر را داریم:

(i) مجموعه $[a,b)$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست، زیرا b نقطه حدی است و $b \notin [a,b)$؛

(ii) مجموعه $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ بسته است، چون تمام نقاط حدی $[a,b]$ (یعنی تمام نقاط $[a,b]$) در $[a,b]$ قرار دارد؛

(iii) (a,b) زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ نیست، زیرا شامل نقطه حدی a نیست؛

(iv) $[a,\infty)$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ است. ■

گزاره ۸.۱.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و A' مجموعه تمامی نقاط حدی A باشد. پس $A \cup A'$ یک مجموعه بسته است.

برهان. از گزاره ۶.۱.۳ نتیجه می‌شود که کافی است نشان دهیم $A\cup A'$ شامل همه نقاط حدی خود است، یا بطور معادل هیچ عضوی از $X\setminus(A\cup A')$ یک نقطه حدی $A \cup A'$ نیست.

فرض کنید $p \in X\setminus(A\cup A')$. چون $p \notin A'$، مجموعه باز U شامل p با شرط $U\cap A = \emptyset$ یا $U \cap A = \{p\}$ وجود دارد. اما $p \notin A$، پس $U\cap A = \emptyset$. همچنین ادعا می‌کنیم که $U \cap A' = \emptyset$. زیرا اگر $x \in U$، آنگاه چون U یک مجموعه باز است و $U \cap A = \emptyset$، پس $x \notin A$. بنابراین $U\cap A' = \emptyset$. یعنی، $U \cap (A\cup A') = \emptyset$، و از $p \in U$ نتیجه می‌شود که p نقطه حدی $A\cup A'$ نیست و بدین ترتیب $A \cup A'$ مجموعه بسته است. ■

تعریف ۹.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. مجموعه $A\cup A'$ که شامل اعضای A و تمام نقاط حدی آن است بست A [1] نامیده می‌شود و با $\overline{A}$ نشان داده می‌شود.

[1] Closure

ملاحظه ۱۰.۱.۳ از گزاره ۸.۱.۳ روشن است که $\overline{A}$ یک مجموعه بسته است. همچنین از گزاره ۶.۱.۳ و تمرین شماره ۵ از بخش ۱.۳ (i) واضح است که هر مجموعه بسته A باید شامل مجموعه A' نیز باشد. بنابراین $A \cup A' = \overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل A است. از این مطلب نتیجه می‌شود که $\overline{A}$ اشتراک همه مجموعه‌های بسته شامل A است. ■

مثال ۱۱.۱.۳ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

نشان دهید $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$، $\overline{\{a, c\}} = X$ و $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

برهان.

برای یافتن بست یک مجموعه، ابتدا تمام مجموعه‌های بسته شامل آن مجموعه را پیدا می‌کنیم و سپس کوچکترین آن را انتخاب می‌کنیم. بنابراین می‌خواهیم <u>همه</u> مجموعه‌های بسته را بنویسیم. اینکار را بسادگی با پیدا کردن مکمل مجموعه‌های باز انجام می‌دهیم.

مجموعه‌های بسته در این توپولوژی عبارتند از $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ و $\{a\}$. بنابراین کوچکترین مجموعه بسته شامل $\{b\}$ مجموعه $\{b, e\}$ است؛ یعنی، $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. به همین طریق $\overline{\{a, c\}} = X$ و $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. ■

مثال ۱۲.۱.۳ فرض کنید $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه $\mathbb{R}$ شامل تمامی اعداد گویا باشد. ثابت کنید $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

برهان. $\boxed{\text{فرض کنید}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. در این صورت عددی مانند x وجود دارد که $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. چون $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است، پس اعداد a و b با شرط $a < b$ وجود دارد که $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. اما در هر بازه (a, b) یک عدد گویای q وجود دارد؛ یعنی، $q \in (a, b)$. بنابراین $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ که در نتیجه $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. این یک تناقض است چون $q \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ■

تعریف ۱۳.۱.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد. گوییم A در X **چگال**[1] یا **همه‌جا در** X **چگال**[2] است اگر $\overline{A} = X$.

حال می توانیم مثال ۱۲.۱.۳ را به این صورت بیان کنیم: $\mathbb{Q}$ **یک زیرمجموعه چگال** $\mathbb{R}$ **است.**
توجه کنید که در مثال ۱۱.۱.۳ دیدیم که $\{a, c\}$ در X چگال است.

مثال ۱۴.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ یک فضای گسسته باشد، پس هر زیرمجموعه X بسته است (چون مکمل آن باز است). بنابراین تنها زیرمجموعه چگال X خود X است چون هر زیرمجموعه X بست خودش است. ■

---

[1] Dense

[2] Everywhere dense

گزاره ۱۵.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد، A در X چگال است اگر و تنها اگر اشتراک A با هر زیرمجموعه باز و ناتهی X ناتهی باشد. (یعنی، اگر $U \in \mathcal{T}$ و $U \neq \emptyset$ آنگاه $A \cap U \neq \emptyset$.)

برهان. ابتدا فرض کنید اشتراک هر زیرمجموعه باز و ناتهی با A غیربدیهی باشد. اگر $A = X$، بوضوح A در X چگال است. اگر $A \neq X$، عضو $x \in X \backslash A$ را در نظر بگیرید. اگر $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U$، آنگاه $U \cap A = \emptyset$. بنابراین x یک نقطه حدی A است. بنابراین $A' \supseteq X \backslash A$ و لذا بنابر تعریف ۹.۱.۳ داریم $\overline{A} = A' \cup A = X$؛ یعنی، A در X چگال است.

برعکس، فرض کنید A در X چگال و U یک زیرمجموعه باز دلخواه X باشد. $\boxed{\text{فرض کنید}}$ $U \cap A = \emptyset$. پس اگر $x \in U$، آنگاه $x \notin A$ و x نقطه حدی A نیست، چون U یک مجموعه باز شامل x است که هیچ عضوی از A در آن نیست. این یک تناقض است چون A یک مجموعه چگال در X است، هر عضو $X \backslash A$ یک نقطه حدی A می‌باشد. پس فرض خلف باطل است و $U \cap A \neq \emptyset$. ■

تمرین‌های ۱.۳

۱. (a) در مثال ۲.۱.۱، تمامی نقاط حدی مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(i) $\{a\}$،

(ii) $\{b, c\}$،

(iii) $\{a, c, d\}$،

(iv) $\{b, d, e, f\}$.

(b) در نتیجه، بست هر یکی از مجموعه‌های فوق را پیدا کنید.

(c) حال با استفاده از روش مثال ۱۱.۱.۳ بست هر یکی از مجموعه‌های فوق را پیدا کنید.

۲. فرض کنید $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ مجموعه اعداد صحیح با توپولوژی بسته-متناهی باشد. نقاط حدی مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(i) $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$،

(ii) مجموعه E شامل تمام اعداد صحیح زوج.

۳. تمام نقاط حدی بازه باز (a, b) در $\mathbb{R}$، $a < b$، را پیدا کنید.

۴. (a) بست هر یکی از مجموعه‌های زیر را در $\mathbb{R}$ پیدا کنید:

(i) $\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \dots, \frac{۱}{n}, \dots\}$،

(ii) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$،

(iii) مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{P}$.

(b) فرض کنید S یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$. ثابت کنید $a \in \overline{S}$ اگر و تنها اگر به ازای هر عدد صحیح مثبت n، عددی مانند $x_n \in S$ وجود دارد که $|x_n - a| < \frac{۱}{n}$.

۵. فرض کنید S و T زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشند که $S \subseteq T$.

(i) اگر p یک نقطه حدی S باشد ثابت کنید p یک نقطه حدی T هم است.

(ii) از (i) نتیجه بگیرید که $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

(iii) حال نشان دهید اگر S در X چگال باشد، آنگاه T در X چگال است.

(iv) با استفاده از (iii) نشان دهید که $\mathbb{R}$ یک تعداد ناشمارا زیرمجموعه‌ی متمایز چگال دارد.

*(v) دوباره با استفاده از (iii) ثابت کنید $\mathbb{R}$ دارای یک تعداد ناشمارا از زیرمجموعه‌های شمارای متمایز چگال و ۲^c زیرمجموعه ناشمارای متمایز چگال است.

۲.۳ همسایگی‌ها

تعریف ۱.۲.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و N زیر مجموعه‌ای از X و p نقطه‌ای در N باشد. در اینصورت N را یک همسایگی[1] از نقطه p می‌گویند اگر یک مجموعه‌ی باز U وجود داشته باشد که $p \in U \subseteq N$.

مثال ۲.۲.۳ بازه‌ی بسته‌ی $[۰,۱]$ در $\mathbb{R}$ یک همسایگی نقطه‌ی $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا $\frac{۱}{۲} \in (\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}) \subseteq [۰,۱]$. ■

مثال ۳.۲.۳ بازه‌ی $(۰,۱]$ در $\mathbb{R}$ یک همسایگی نقطه‌ی $\frac{۱}{۴}$ است، زیرا $\frac{۱}{۴} \in (۰, \frac{۱}{۲}) \subseteq (۰,۱]$. اما $(۰,۱]$ یک همسایگی نقطه‌ی ۱ نیست. (ثابت کنید.) ■

مثال ۴.۲.۳ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $U \in \mathcal{T}$، آنگاه از تعریف ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که U یک همسایگی برای تمام نقاط $p \in U$ است. بنابراین، مثلا هر بازه‌ی باز (a,b) در $\mathbb{R}$ یک همسایگی هر نقطه در آن است. ■

مثال ۵.۲.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و N یک همسایگی نقطه p باشد. اگر S زیرمجموعه‌ی دلخواهی از X باشد بطوری که $N \subseteq S$، آنگاه S نیز یک همسایگی نقطه p خواهد بود. ■

گزاره‌ی بعدی به راحتی قابل اثبات است لذا اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۶.۲.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. نقطه‌ی $x \in X$ یک نقطه‌ی حدی A است اگر و تنها اگر هر همسایگی x شامل نقطه‌ای از A غیر از x باشد. ■

از آنجاییکه یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل تمام نقاط حدی خود باشد، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۷.۲.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. مجموعه A بسته است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X \setminus A$ یک همسایگی مانند N از x موجود باشد بطوری که $N \subseteq X \setminus A$. ■

نتیجه ۸.۲.۳ فرض کنید U یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. پس $U \in \mathcal{T}$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک همسایگی مانند N از x موجود باشد بطوری که $N \subseteq U$. ■

[1] Neighbourhood

نتیجه‌ی زیر بسادگی از نتیجه‌ی ۸.۲.۳ قابل استنتاج است.

نتیجه ۹.۲.۳ فرض کنید U یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. پس $U \in \mathcal{T}$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک مجموعه مانند $V \in \mathcal{T}$ وجود داشته باشد که $x \in V \subseteq U$. ■

نتیجه‌ی ۹.۲.۳ روش مفیدی برای بررسی باز بودن یک مجموعه ارایه می‌دهد. بر اساس این نتیجه، مجموعه‌ای باز است اگر و فقط اگر آن مجموعه شامل یک مجموعه باز حول هر نقطه‌اش باشد.

تمرین‌های ۲.۳

۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید A در X چگال است اگر و فقط اگر اشتراک هر همسایگی از هر نقطه در $X\setminus A$ با A غیربدیهی باشد.

۲. (i) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ باشند. به دقت ثابت کنید

$$\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(ii) مثالی ارایه دهید که

$$\overline{A\cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

۳. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی متناهی-بسته بر روی X است اگر و فقط اگر (i) $(X,\mathcal{T})$ یک T_1-فضا باشد، و (ii) هر زیرمجموعه نامتناهی X در X چگال باشد.

۴. یک فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را **جدا پذیر**[1] گویند اگر دارای زیرمجموعه شمارای چگال باشد. تعیین کنید کدامیک از فضاهای زیر جدا پذیر است:

(i) مجموعه $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی؛

(ii) یک مجموعه شمارا با توپولوژی گسسته؛

(iii) یک مجموعه شمارا با توپولوژی بسته-متناهی؛

(iv) $(X,\mathcal{T})$ که X یک مجموعه متناهی است؛

(v) $(X,\mathcal{T})$ که $\mathcal{T}$ یک مجموعه متناهی است؛

(vi) یک مجموعه ناشمارا با توپولوژی گسسته؛

(vii) یک مجموعه ناشمارا با توپولوژی بسته-متناهی؛

(viii) یک فضای $(X,\mathcal{T})$ که در شرط دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

[1] Separable

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد. بزرگترین مجموعه باز مشمول در A را درون[1] A می‌نامند و با $Int(A)$ نشان می‌دهند. [درون A، اجتماع تمام مجموعه‌های باز X است که تماما در داخل A هستند.]

(i) ثابت کنید که در $\mathbb{R}$، $Int([۰,۱]) = (۰,۱)$.

(ii) ثابت کنید که در $\mathbb{R}$، $Int((۳,۴)) = (۳,۴)$.

(iii) نشان دهید که اگر A در $(X,\mathcal{T})$ باز باشد آنگاه $Int(A) = A$.

(iv) بررسی کنید که در $\mathbb{R}$، $Int(\{۳\}) = \emptyset$.

(v) در فضای توپولوژی ناگسسته $(X,\mathcal{T})$ نشان دهید که برای تمام زیرمجموعه‌های واقعی A از X داریم $Int(A) = \emptyset$.

(vi) نشان دهید که برای زیرمجموعه‌های شمارای A از $\mathbb{R}$ داریم $Int(A) = \emptyset$.

۶. نشان دهید که اگر A زیرمجموعه فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد، آنگاه $Int(A) = X \setminus \overline{(X\setminus A)}$. (تمرین ۵ در فوق مربوط به تعریف Int را ببینید.)

۷. با استفاده از تمرین ۶ در فوق، ثابت کنید A در $(X,\mathcal{T})$ چگال است اگر و فقط اگر $Int(X\setminus A) = \emptyset$.

۸. با استفاده از تعریف Int در تمرین ۵ در بالا، تعیین کنید که برای زیرمجموعه‌های دلخواه $A_۱$ و $A_۲$ از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ ، کدامیک از موارد زیر درست است؟

(i) $Int(A_۱ \cap A_۲) = Int(A_۱) \cap Int(A_۲)$،

(ii) $Int(A_۱ \cup A_۲) = Int(A_۱) \cup Int(A_۲)$،

(iii) $\overline{A_۱ \cup A_۲} = \overline{A_۱} \cup \overline{A_۲}$.

(اگر پاسخ شما برای هر مورد گزینه‌ی «درست» باشد باید آن را ثابت کنید. اگر پاسخ شما گزینه‌ی «نادرست» باشد باید یک مثال نقض ارایه دهید.)

*۹. فرض کنید S یک زیرمجموعه چگال از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید که برای هر زیرمجموعه باز U از X، داریم $\overline{S\cap U} = \overline{U}$.

۱۰. فرض کنید S و T زیرمجموعه‌های چگال از یک فضای $(X,\mathcal{T})$ باشند. اگر T نیز باز باشد، از تمرین ۹ نتیجه بگیرید که $S\cap T$ در X چگال است.

۱۱. فرض کنید $\mathcal{B} = \{[a,b) : a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{Q}, a<b\}$. هر یک از حکم‌های زیر را ثابت کنید.

(i) $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_۱$ بر روی $\mathbb{R}$ است. (فضای $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_۱)$ را خط سورگنفری[2] می‌نامند.)

(ii) اگر $\mathcal{T}$ فضای اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\mathcal{T}_۱ \supset \mathcal{T}$.

(iii) برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $a<b$، $[a,b)$ یک مجموعه باز-بسته در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_۱)$ است.

(iv) خط سورگنفری یک فضای جدا شونده است.

*(v) خط سورگنفری در اصل دوم شمارا بودن صدق نمی‌کند.

[1] Interior

[2] Sorgenfrey line

۳.۳ همبندی

ملاحظه ۱.۳.۳ در اینجا برخی از تعریف‌ها و حقایقی که شما باید بدانید آورده شده است. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر عضو b در S وجود داشته باشد که به ازای تمام اعضای $x \in S$ داشته باشیم $x \leq b$، آنگاه b بزرگترین عضو[1] S نامیده می‌شود. به طور مشابه، اگر S شامل عضو a باشد بطوری که به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $a \leq x$ ، آنگاه a را کوچکترین عضو[2] S می‌نامند. مجموعه S از اعداد حقیقی از بالا کراندار[3] گفته می‌شود اگر یک عدد حقیقی مانند c وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $x \leq c$ و c را کران بالا[4] می‌نامند. به همین ترتیب از پایین کراندار[5] و کران پایین[6] تعریف می‌شوند. مجموعه‌ای که از بالا و پایین کراندار باشد، مجموعه کراندار[7] نامیده می‌شود. ■

اصل کوچکترین کران بالا:[8] فرض کنید S یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. اگر S از بالا کراندار باشد، آنگاه کوچکترین کران بالا خواهد داشت. ■

کوچکترین کران بالا را سوپریمم[9] نیز می‌نامند و با $\sup(S)$ نشان می‌دهند که امکان دارد عضو S باشد یا نباشد. در حقیقت، سوپریمم S عضوی از S است اگر و اگر فقط اگر S شامل بزرگترین عضو باشد. به عنوان مثال، سوپریمم بازه باز $S = (۱, ۲)$ برابر ۲ است ولی $۲ \notin (۱, ۲)$، در حالیکه سوپریمم $[۳, ۴]$ عضو ۴ است که مشمول در آن است و ۴ بزرگترین عضو $[۳, ۴]$ است. هر مجموعه S از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد یک بزرگترین کران پایین[10] دارد که اینفیمم[11] نامیده می‌شود و با $inf(S)$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۳ فرض کنید S یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشد که از بالا کراندار است و p سوپریمم S باشد. اگر S زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $p \in S$.

برهان. $\boxed{\text{فرض کنید}}$ $p \in \mathbb{R}\backslash S$. چون $\mathbb{R}\backslash S$ باز است پس اعداد حقیقی مانند a و b، $a < b$، وجود دارد که $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}\backslash S$. چون p $\boxed{\text{کوچکترین}}$ کران بالای S است و $a < p$، واضح است که عضو $x \in S$ وجود دارد که $a < x$. همچنین $x < p < b$، و بنابراین $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}\backslash S$. اما این یک تناقض است چون $x \in S$. پس فرض خلف باطل است و $p \in S$. ■

---

[1] Greatest element
[2] Smallest element
[3] Bounded above
[4] Upper bound
[5] Bounded below
[6] Lower bound
[7] Bounded
[8] Least upper bound axiom
[9] Supremum
[10] Greatest lower bound
[11] Infimum

گزاره ۳.۳.۳ فرض کنید T یک زیرمجموعه باز-بسته $\mathbb{R}$ باشد. پس $T = \mathbb{R}$ یا $T = \emptyset$.

برهان. فرض کنید $T \neq \mathbb{R}$ و $T \neq \emptyset$. بنابراین عضوی مانند $x \in T$ و عضوی مانند $z \in \mathbb{R}\backslash T$ وجود خواهد داشت. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $x < z$. قرار دهید $S = T \cap [x, z]$. چون S اشتراک دو مجموعه بسته است، پس یک مجموعه بسته خواهد بود. همچنین S از بالا کراندار است چون z بوضوح یک کران بالاست. فرض کنید p سوپریمم S باشد. بر اساس لم ۲.۳.۳ داریم $p \in S$. چون $p \in [x, z]$، پس $p \leq z$. اما $z \in \mathbb{R}\backslash T$ و $p \neq z$، بنابراین $p < z$.

حال، T نیز یک مجموعه باز است و $p \in T$. پس اعدادی مانند $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$، وجود دارد که $p \in (a, b) \subseteq T$. عدد t را بصورت $p < t < \min(b, z)$ در نظر بگیرید، که $\min(b, z)$ نشان دهنده عضو کوچکتر بین b و z است. پس $t \in T$ و $t \in [p, z]$. در نتیجه $t \in T \cap [x, z] = S$. این یک تناقض است چون $t > p$ و p سوپریمم S است. بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه $T = \mathbb{R}$ یا $T = \emptyset$. ■

تعریف ۴.۳.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. این فضا را *همبند*[1] می‌نامند اگر X و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه های باز-بسته X باشد.

با بیان دوباره گزاره ۳.۳.۳ خواهیم داشت:

گزاره ۵.۳.۳ فضای توپولوژیک $\mathbb{R}$ همبند است. ■

مثال ۶.۳.۳ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته دلخواه با بیش از یک عضو باشد، آنگاه $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست چراکه هر مجموعه تک‌عضوی باز-بسته است. ■

مثال ۷.۳.۳ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای ناگسسته دلخواه باشد آنگاه یک فضای همبند است زیرا X و $\emptyset$ تنها مجموعه‌های باز-بسته X است. ■

مثال ۸.۳.۳ اگر $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$، آنگاه $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست چون $\{b, c, d, e\}$ یک زیرمجموعه باز-بسته است. ■

ملاحظه ۹.۳.۳ به موجب تعریف ۴.۳.۳ نتیجه می‌شود که فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست (یعنی، *ناهمبند*[2] است) اگر و فقط اگر مجموعه‌های باز و ناتهی مانند A و B وجود داشته باشد که $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = X$.[3] (تمرین شماره ۳ از بخش ۳.۳ را ببینید.)

این بخش را با بیان این حقیقت تمام می کنیم که $\mathbb{R}^2$ (و $\mathbb{R}^n$ برای $n \geq 1$) یک فضای همبند است. با این حال، اثبات این را در فصل ۵ خواهیم دید.

همبندی یک ویژگی بسیار مهمی است که درباره آن زیاد صحبت خواهیم کرد.

[1] Connected

[2] Disconnected

[3] اکثر کتاب‌ها از این خاصیت برای تعریف همبندی استفاده می‌کنند.

تمرین‌های ۳.۳

۱. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد و $T = \{x : -x \in S\}$.

(a) ثابت کنید که عدد حقیقی a اینفیمم مجموعه S است اگر و تنها اگر $-a$ سوپریمم مجموعه T باشد.

(b) با استفاده از (a) و اصل موضوعه کوچکترین کران بالا ثابت کنید که هر مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد کوچکترین کران بالا دارد.

۲. برای هر یک از مجموعه‌های زیر از اعداد حقیقی بزرگترین عضو و کوچکترین کران بالا را در صورت وجود پیدا کنید.

(i) $S = \mathbb{R}$.

(ii) $S = \mathbb{Z} =$ مجموعه اعداد صحیح.

(iii) $S = [۹, ۱۰)$

(iv) S مجموعه تمام اعداد حقیقی به صورت $۱ - \frac{۳}{n^۲}$، که n عدد صحیح مثبت است.

(v) $S = (-\infty, ۳]$.

۳. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید که $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست اگر و تنها اگر شامل زیرمجموعه‌های حقیقی، باز و مجزای A و B باشد بطوری که $A \cup B = X$.

۴. آیا فضای $(X,\mathcal{T})$ از مثال ۲.۱.۱ همبند است؟

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک مجموعه نامتناهی با توپولوژی بسته-متناهی باشد. آیا $(X,\mathcal{T})$ همبند است؟

۶. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک مجموعه نامتناهی با توپولوژی شمارا-بسته باشد. آیا $(X,\mathcal{T})$ همبند است؟

۷. کدامیک از فضاهای توپولوژیک تمرین شماره ۹ از بخش ۱.۱ همبند است؟

۴.۳ خلاصه

در این فصل مفهوم نقطه حدی معرفی شد و نشان داده شد که یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل تمام نقاط حدی خود باشد. گزاره ۸.۱.۳ بیان می‌کند که هر مجموعه A دارای کوچکترین مجموعه بسته $\overline{A}$ است که آن را در بر دارد.

گفته می‌شود زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ در X چگال است اگر $\overline{A} = X$. دیدیم که $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، و مجموعه $\mathbb{P}$ از تمام اعداد گنگ نیز در $\mathbb{R}$ چگال است. مفهوم همسایگی یک نقطه و فضای توپولوژیک همبند معرفی شد. نتیجه بسیار مهمی را ثابت کردیم یعنی $\mathbb{R}$ همبند است. بعدا در مورد همبندی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

در تمرین‌ها، مفهوم درون یک مجموعه تعریف شد که به نوعی مکمل مفهوم بست یک مجموعه است.

فصل ۴

همریختی‌ها

مقدمه

در هر شاخه از ریاضی تشخیص ساختارهای معادل بسیار مهم است. بعنوان مثال، از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها، دو مجموعه معادل (هم‌ارز) است اگر تابع دوسویه‌ای وجود داشته باشد که یکی از این مجموعه‌ها را به دیگری بنگارد. دو گروه معادل (یکریخت) است اگر یک همسانی یک به یک و پوشا از یکی به دیگری وجود داشته باشد. دو فضای توپولوژیک معادل (همریخت) است اگر یک همریختی یک به یک بین آنها وجود داشته باشد.

۱.۴ زیرفضاها

تعریف ۱.۱.۴ فرض کنید Y زیرمجموعه ناتهی از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد.
گردایه‌ی $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ از زیرمجموعه‌های Y، یک توپولوژی بر روی Y است و آن را **توپولوژی زیرفضا** [1] (یا **توپولوژی نسبی** [2] یا **القا شده** [3] یا **توپولوژی القا شده بر روی** Y **توسط** $\mathcal{T}$) می‌نامند. فضای توپولوژیک $(Y, \mathcal{T}_Y)$ را زیرفضای $(X,\mathcal{T})$ می‌گویند.

البته باید بررسی کنید که $\mathcal{T}_Y$ واقعا یک توپولوژی بر روی Y است.

مثال ۲.۱.۴ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$، $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ و $Y = \{b, c, e\}$. در این صورت $\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}$ یک توپولوژی زیرفضا بر روی Y است. ■

مثال ۳.۱.۴ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$، $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\{b, c, d, e\}\}$ و $Y = \{a, d, e\}$.
در این صورت $\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$ یک توپولوژی زیرفضا بر روی Y است. ■

---

[1] Subspace Topology

[2] Relative Topology

[3] Induced Topology

مثال ۴.۱.۴ فرض کنید $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X و Y زیرمجموعه X باشد. نشان دادن این که گردایه‌ی $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ یک پایه برای توپولوژی زیرفضای $\mathcal{T}_Y$ روی Y است مشکل نمی‌باشد. [تمرین: بررسی کنید]

با توجه به مطلب بالا، زیرمجموعه $(۱,۲)$ از $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. گردایه‌ی

$$\{(a,b) \cap (۱,۲) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

یک پایه برای توپولوژی القا شده بر روی $(۱,۲)$ است؛ یعنی،

$$\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, ۱ \leq a < b \leq ۲\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی القا شده بر روی $(۱,۲)$ است. ■

مثال ۵.۱.۴ مجموعه $[۱,۲]$ از $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. یک پایه برای توپولوژی زیرفضای $\mathcal{T}$ روی $[۱,۲]$ عبارت است از گردایه‌ی

$$\{(a,b) \cap [۱,۲] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\};$$

یعنی،

$$\{(a,b) : ۱ \leq a < b \leq ۲\} \cup \{[۱,b) : ۱ < b \leq ۲\} \cup \{(a,۲] : ۱ \leq a < ۲\} \cup \{[۱,۲]\}$$

یک پایه برای $\mathcal{T}$ است.

در اینجا می‌توانید مطالب عجیبی را ببینید؛ مثلا، بطور مشخص $[۱,۱\frac{۱}{۲})$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ نیست، اما $[۱,۲] \cap (۰,۱\frac{۱}{۲}) = [۱,۱\frac{۱}{۲})$، که نشان می دهد $[۱,۱\frac{۱}{۲})$ یک مجموعه باز در زیرفضای $[۱,۲]$ است.

بنابراین، وقتی می‌خواهیم در مورد باز بودن یک مجموعه اظهار نظر کنیم باید دقیقا مشخص کنیم که مجموعه مذکور در کدام فضا یا توپولوژی قرار دارد. ■

مثال ۶.۱.۴ فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعه تمام اعداد صحیح زیرمجموعه $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید توپولوژی القا شده بر روی $\mathbb{Z}$ توسط توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ یک توپولوژی گسسته است.

برهان.

برای اثبات اینکه توپولوژی القا شده‌ی $\mathcal{T}_\mathbb{Z}$ بر روی $\mathbb{Z}$ گسسته است، با در نظر گرفتن گزاره ۹.۱.۱ کافی است نشان دهیم که هر مجموعه تک‌عضوی در $\mathbb{Z}$، یک مجموعه باز در $\mathcal{T}_\mathbb{Z}$ است؛ یعنی، اگر $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه $\{n\} \in \mathcal{T}_\mathbb{Z}$.

$n \in \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. بنابراین $\{n\} = (n-۱, n+۱) \cap \mathbb{Z}$. اما $(n-۱, n+۱)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است و بنابراین $\{n\}$ در توپولوژی القا شده بر روی $\mathbb{Z}$ باز است. بنابراین هر زیرمجموعه تک‌عضوی در $\mathbb{Z}$ در توپولوژی القا شده بر روی $\mathbb{Z}$ باز است. در نتیجه، توپولوژی القا شده گسسته است. ■

نماد. هنگامی که به مجموعه‌های

$\mathbb{Q}$ = مجموعه تمام اعداد گویا،

$\mathbb{Z}$ = مجموعه تمام اعداد صحیح،

$\mathbb{N}$ = مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت،

$\mathbb{P}$ = مجموعه تمام اعداد گنگ،

(a,b) ، $[a,b]$ ، $[a,b)$ ، $(-\infty,a)$ ، $(-\infty,a]$ ، (a,∞) ، یا $[a,\infty)$

به عنوان فضاهای توپولوژیک بدون ذکر صریح توپولوژی مورد نظر اشاره می‌شود، منظور توپولوژی القا شده به عنوان زیرفضای $\mathbb{R}$ است. (گاهی توپولوژی القا شده بر روی این مجموعه‌ها را **توپولوژی معمولی**[1] خواهیم نامید.)

تمرین‌های ۱.۴

۱. فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$. اعضای توپولوژی القاشده‌ی $\mathcal{T}_Y$ روی $Y=\{a,c,e\}$ و $\mathcal{T}_Z$ روی $Z=\{b,c,d,e\}$ را بنویسید.

۲. توپولوژی القا شده بر روی اعداد صحیح مثبت $\mathbb{N}$ توسط توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ را شرح دهید.

۳. برای هر یک از توپولوژی‌های معمولی روی مجموعه‌های زیر یک پایه پیدا کنید.

(i) $[a,b)$ که $a<b$؛

(ii) $(a,b]$ که $a<b$؛

(iii) $(-\infty,a]$؛

(iv) $(-\infty,a)$؛

(v) (a,∞)؛

(vi) $[a,\infty)$.

[راهنمایی: مثال ۴.۱.۴ و ۵.۱.۴ را ببینید.]

۴. فرض کنید $A\subseteq B\subseteq X$ و X دارای توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد. فرض کنید $\mathcal{T}_B$ توپولوژی زیرفضا بر روی B باشد. بعلاوه، فرض کنید $\mathcal{T}_1$ توپولوژی القا شده بر روی A توسط $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}_2$ توپولوژی القا شده بر روی A توسط $\mathcal{T}_B$ باشد. ثابت کنید $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$. (بنابراین **زیرفضای یک زیرفضا خود یک زیرفضا است**.)

۵. فرض کنید $(Y,\mathcal{T}_Y)$ یک زیرفضا از فضای $(X,\mathcal{T})$ باشد. نشان دهید زیرمجموعه Z از Y در $(Y,\mathcal{T}_Y)$ بسته است اگر و تنها اگر $Z=A\cap Y$ که A یک زیرمجموعه بسته در $(X,\mathcal{T})$ است.

۶. نشان دهید هر زیرفضا از یک فضای گسسته، یک فضای گسسته است.

۷. نشان دهید هر زیرفضا از یک فضای ناگسسته، یک فضای ناگسسته است.

[1] Usual Topology

۸. نشان دهید زیرفضای $[0,1] \cup [3,4]$ از $\mathbb{R}$ حداقل ۴ زیرمجموعه باز_بسته دارد. این زیرفضا دقیقا چند زیرمجموعه باز_بسته دارد؟

۹. آیا درست است بگوییم زیرفضای هر فضای همبند، یک فضای همبند است؟

۱۰. فرض کنید $(Y, \mathcal{T}_Y)$ یک زیرفضای $(X,\mathcal{T})$ باشد. نشان دهید $\mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{T}$ اگر و تنها اگر $Y \in \mathcal{T}$.
[راهنمایی: بخاطر بیاورید که $Y \in \mathcal{T}_Y$.]

۱۱. فرض کنید A و B دو زیرفضای همبند از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. اگر $A \cap B \neq \emptyset$، ثابت کنید زیرفضای $A \cup B$ همبند است.

۱۲. فرض کنید $(Y, \mathcal{T}_1)$ یک زیرفضا از T_1_فضای $(X,\mathcal{T})$ باشد. نشان دهید که $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز T_1_فضا است.

۱۳. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ هاسدورف[1] (یا یک T_2_فضا[2]) نامیده می‌شود اگر برای هر دونقطه مجزای a, b در X مجموعه‌های بازی مانند U و V موجود باشند بصورتی که $a \in U$، $b \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

(i) نشان دهید $\mathbb{R}$ هاسدورف است.

(ii) ثابت کنید هر فضای گسسته هاسدورف است.

(iii) نشان دهید هر T_2_فضا یک T_1_فضا نیز است.

(iv) نشان دهید $\mathbb{Z}$ با توپولوژی بسته_متناهی یک T_1_فضا است ولی T_2_فضا نیست.

(v) ثابت کنید هر زیرفضای T_2_فضا یک T_2_فضا است.

۱۴. فرض کنید $(Y, \mathcal{T}_1)$ یک زیرفضا از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. اگر $(X,\mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن صدق کند، نشان دهید $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

۱۵. a و b را با شرط $a < b$ در $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. ثابت کنید $[a, b]$ همبند است.
[راهنمایی: در گزاره ۳.۳.۳ و اثبات آن، بجای $\mathbb{R}$ از $[a, b]$ استفاده کنید.]

۱۶. فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه تمام اعداد گویا با توپولوژی معمولی و $\mathbb{P}$ مجموعه تمام اعداد گنگ با توپولوژی معمولی باشد.

(i) ثابت کنید $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ فضاهای گسسته نیستند.

(ii) آیا $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{P}$ همبند است؟

(iii) آیا $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{P}$ هاسدورف است؟

(iv) آیا $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{P}$ دارای توپولوژی بسته_متناهی است؟

---

[1] Hausdorff Space

[2] T_2-space

۱۷. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ **فضای منظم**[1] نامیده می‌شود اگر برای هر زیرمجموعه بسته A از X و هر نقطه $x \in X\backslash A$، مجموعه‌های بازی مانند U و V موجود باشند بصورتی که $x \in U$، $A \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$. اگر $(X,\mathcal{T})$ منظم و T_1ـفضا باشد، آنگاه **T_3ـفضا**[2] نامیده می‌شود. عبارت های زیر را ثابت کنید:

(i) هر زیرفضا از یک فضای منظم، منظم است.

(ii) فضاهای $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{P}$ و $\mathbb{R}^2$ منظم هستند.

(iii) اگر $(X,\mathcal{T})$ یک T_1ـفضای منظم باشد، آنگاه T_2ـفضا است.

(iv) خط سورگنفری فضای منظم است.

*(v) فرض کنید X مجموعه اعداد حقیقی باشد و $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. مجموعه $C \subseteq \mathbb{R}$ را بسته تعریف کنید اگر $C = A \cup T$، که A یک مجموعه بسته در توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ و T یک زیرمجموعه از S باشد. مکمل این مجموعه‌های بسته، توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}$ را تشکیل می‌دهند که هاسدورف است ولی منظم نیست.

---

[1] Regular Space

[2] T_3-space

۲.۴ همریختی‌ها

حال به مفهوم فضاهای توپولوژیک معادل برمی‌گردیم. در ابتدا به مثال زیر توجه کنید:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$
$$\mathcal{T}_۱ = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

بطور شهودی واضح است که $(X, \mathcal{T})$ معادل $(Y, \mathcal{T}_۱)$ است. تابع $f : X \to Y$ باضابطه $f(a) = g$، $f(b) = h$، $f(c) = i$، $f(d) = j$، و $f(e) = k$ معادل بودن این دو فضا را نشان می‌دهد. حال می‌خواهیم این مفهوم را بصورت رسمی بیان کنیم.

تعریف ۱.۲.۴ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_۱)$ فضاهای توپولوژیک باشند. این دو فضا را همریخت[1] می‌نامند اگر تابع $f : X \to Y$ با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد:

(i) f یک به یک باشد (یعنی، از $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه شود که $x_۱ = x_۲$)،

(ii) f پوشا باشد (یعنی، به ازای هر $y \in Y$ یک عضو مانند $x \in X$ وجود داشته باشد که $f(x) = y$)،

(iii) به ازای هر $U \in \mathcal{T}_۱$ داشته باشیم $f^{-۱}(U) \in \mathcal{T}$ و

(iv) برای هر $V \in \mathcal{T}$ داشته باشیم $f(V) \in \mathcal{T}_۱$.

بعلاوه، نگاشت f را یک همریختی[2] بین $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_۱)$ می‌نامند و می‌نویسند $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_۱)$.

نشان خواهیم داد که رابطه «$\cong$» یک رابطه هم‌ارزی است و با استفاده از این ثابت خواهیم کرد که تمام بازه‌های باز (a, b) با یکدیگر همریخت هستند. مثال ۲.۲.۴ گام اول است چرا که نشان می‌دهد «$\cong$» یک رابطه تراگذر است.

[1] Homemorphic

[2] Homemorphism

مثال ۲.۲.۴ فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$، $(Y,\mathcal{T}_1)$ و $(Z,\mathcal{T}_2)$ را در نظر بگیرید. اگر $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ و $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$، ثابت کنید $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$.

برهان.

> می‌دانیم $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ ؛ یعنی، یک همریختی مانند $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ وجود دارد.
> همچنین می‌دانیم $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$؛ یعنی، یک همریختی مانند $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ وجود دارد.
> می‌خواهیم ثابت کنیم $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ ؛ یعنی، باید همریختی مانند $h : (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ را پیدا کنیم. ثابت خواهیم کرد که نگاشت مرکب $g \circ f : X \to Z$ همریختی مورد نظر است.

چون $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ و $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$، پس همریختی‌هایی مانند $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ و $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ وجود دارند. نگاشت مرکب $g \circ f : X \to Z$ را در نظر بگیرید. [به ازای هر $x \in X$، $g \circ f(x) = g(f(x))$]. به راحتی می توان ثابت کرد که $g \circ f$ یک به یک و پوشا است. حال فرض کنید $U \in \mathcal{T}_2$. آنگاه، چون g یک همریختی است پس $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ و چون f نیز یک همریختی است پس داریم $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$. اما داریم، $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. بنابراین $g \circ f$ ویژگی (iii) از تعریف ۱.۲.۴ را دارد. در ادامه، اگر $V \in \mathcal{T}$ آنگاه $f(V) \in \mathcal{T}_1$ و بنابراین $g(f(V)) \in \mathcal{T}_2$؛ یعنی، $g \circ f(V) \in \mathcal{T}_2$ و بر این اساس $g \circ f$ ویژگی (iv) از تعریف ۱.۲.۴ را دارد. پس، $g \circ f$ یک همریختی است. ■

ملاحظه ۳.۲.۴ مثال ۲.۲.۴ نشان می‌دهد که «$\cong$» یک رابطه دوتایی تراگذر است. به راحتی ثابت می‌شود که این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است؛ یعنی،

(i) $(X,\mathcal{T}) \cong (X,\mathcal{T})$ (انعکاسی [1])؛

(ii) از $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ می‌شود که $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (X,\mathcal{T})$ (تقارنی [2])؛ [مشاهده می کنید که اگر $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ یک همریختی باشد، آنگاه وارون آن $f^{-1} : (Y,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T})$ نیز یک همریختی است.]

(iii) از $(X,\mathcal{T}) \cong (Y,\mathcal{T}_1)$ و $(Y,\mathcal{T}_1) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ نتیجه می‌شود که $(X,\mathcal{T}) \cong (Z,\mathcal{T}_2)$ (تراگذری [3]).

■

سه مثال بعدی نشان می‌دهند که همه بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ همریخت هستند. یقینا طول یک ویژگی توپولوژیکی نیست. بخصوص، یک بازه باز با طول متناهی مثل $(0,1)$ با یک بازه با طول نامتناهی، مثل $(-\infty, 1)$، همریخت است. در حقیقت همه بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ همریخت هستند.

---
[1] Reflexive
[2] Symmetric
[3] Transitive

مثال ۴.۲.۴ ثابت کنید هر دو بازه ناتهی و باز (a,b) و (c,d) همریخت هستند.

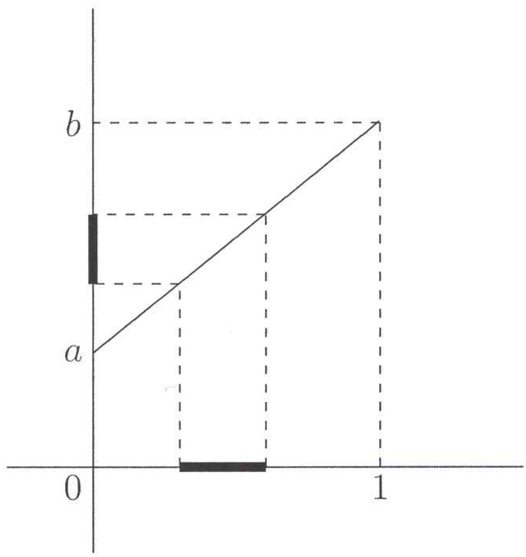
برهان.

با در نظر گرفتن ملاحظه ۳.۲.۴، کافی است نشان دهیم که (a,b) با $(۰,۱)$ و (c,d) با $(۰,۱)$ همریخت است. اما چون a و b دلخواه هستند (بجز $a<b$)، اگر (a,b) با $(۰,۱)$ همریخت باشد آنگاه (c,d) نیز با $(۰,۱)$ همریخت خواهد بود. برای اثبات کافی است همریختی $f:(۰,۱)\to(a,b)$ را پیدا کنیم.

دو عدد $a,b\in\mathbb{R}$، $a<b$، و تابع $f:(۰,۱)\to(a,b)$ با ضابطه

$$f(x)=a(۱-x)+bx$$

را در نظر بگیرید.



واضح است تابع $f:(۰,۱)\to(a,b)$ یک به یک و پوشاست. همچنین بسادگی از روی شکل قابل استنباط است که تصویر هر بازه باز در $(۰,۱)$ تحت f یک بازه باز در (a,b) است؛ یعنی،

$$f(\text{یک بازه باز در } (۰,۱))=\text{یک بازه باز در } (a,b).$$

اما چون هر بازه باز در $(۰,۱)$ بصورت اجتماع بازه‌های باز $(۰,۱)$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(\text{یک مجموعه‌ی باز در } (۰,۱)) &= f(\text{اجتماع بازه‌های باز در } (۰,۱)) \\ &= \text{اجتماع بازه‌های باز در } (a,b) \\ &= \text{یک مجموعه‌ی باز در } (a,b) \end{aligned}$$

بنابراین شرط (iv) از تعریف ۱.۲.۴ برقرار است. بطور مشابه می‌بینیم که $f^{-۱}((a,b)$ یک مجموعه باز در $)$ یک مجموعه باز در $(۰,۱)$ است و بر این اساس شرط (iii) از تعریف ۱.۲.۴ نیز برقرار است.

[تمرین: اثبات بالا را به دقت دوباره‌نویسی کنید.]

در نتیجه f یک همریختی است و به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $a<b$، داریم $(a,b)\cong(۰,۱)$.

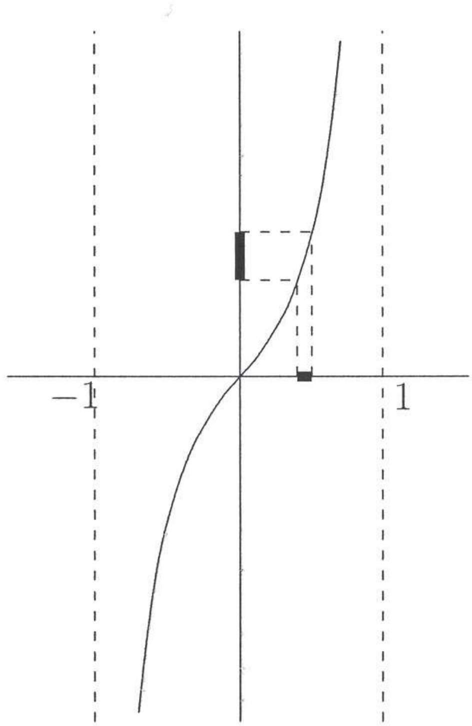
بنابراین ثابت می‌شود که $(a,b)\cong(c,d)$. ■

مثال ۵.۲.۴ ثابت کنید فضای $\mathbb{R}$ با بازه باز $(-۱, ۱)$ و در نظر گرفتن توپولوژی معمولی همریخت است.

شرح مختصر اثبات. تابع $f : (-۱, ۱) \to \mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \frac{x}{۱ - |x|}.$$

بسادگی ثابت می‌شود که f یک به یک و پوشاست و استدلال بر اساس نمودار شبیه مثال ۲.۲.۴ نشان می‌دهد که f یک همریختی است.



[تمرین: اثبات همریختی بودن f را با جزییات بنویسید.] ■

مثال ۶.۲.۴ ثابت کنید هر بازه باز (a, b)، $a < b$، با $\mathbb{R}$ همریخت است.

برهان. اثبات نتیجه مستقیم مثال‌های ۴.۲.۴ ، ۵.۲.۴ و ملاحظه ۳.۲.۴ است. ■

ملاحظه ۷.۲.۴ به همین طریق ثابت می‌شود که هر دو بازه $[a, b]$، $a < b$، و $[c, d]$، $c < d$، همریخت هستند.
■

تمرین‌های ۲.۴

۱. (i) اگر a، b، c و d اعداد حقیقی باشند که $a < b$ و $c < d$، ثابت کنید $[a, b] \cong [c, d]$.
(ii) اگر a و b اعداد حقیقی دلخواه باشند، ثابت کنید

$$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a, \infty) \cong [b, \infty).$$

(iii) اگر c، d، e و f اعداد حقیقی باشند که $c < d$ و $e < f$، ثابت کنید $[c, d) \cong [e, f) \cong (c, d] \cong (e, f]$.
(iv) نتیجه بگیرید که برای اعداد حقیقی a, b، $a < b$، داریم

$$[۰, ۱) \cong (-\infty, a] \cong [a, \infty) \cong (a, b].$$

۲. ثابت کنید $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$.

۳. فرض کنید m و c اعداد غیرصفر و $X = \{\langle x, y\rangle : \ y = mx + c\}$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^۲$ باشد. ثابت کنید X با $\mathbb{R}$ همریخت است.

۴. (i) فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ ناحیه‌های مستطیل شکل بسته در $\mathbb{R}^۲$ بصورت

$$X_۱ = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_۱ \ and \ \ |y| \leq b_۱\}$$

و

$$X_۲ = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq a_۲ \ \ and \ \ |y| \leq b_۲\}$$

باشند که در آن $a_۱$، $b_۱$ ، $a_۲$ و $b_۲$ اعداد حقیقی مثبت هستند. اگر بدانیم $X_۱$ و $X_۲$ توپولوژی‌های القا شده توسط $\mathbb{R}^۲$ هستند، نشان دهید $X_۱ \cong X_۲$.
(ii) اگر $D_۱$ و $D_۲$ قرص‌های بسته در $\mathbb{R}^۲$ بصورت

$$D_۱ = \{\langle x, y\rangle : x^۲ + y^۲ \leq c_۱\}$$

و

$$D_۲ = \{\langle x, y\rangle : x^۲ + y^۲ \leq c_۲\}$$

باشند که در آن $c_۱$ و $c_۲$ اعداد حقیقی مثبت هستند، ثابت کنید فضاهای توپولوژیک $D_۱$ و $D_۲$، که دارای زیرفضاهای توپولوژیک خودشان هستند، همریختند.
(iii) ثابت کنید $X_۱ \cong D_۱$.

۵. فرض کنید $X_۱ = (۰, ۱) \cup (۳, ۴)$ و $X_۱ = (۰, ۱) \cup (۱, ۲)$ زیرفضاهای $\mathbb{R}$ باشند. آیا $X_۱ \cong X_۲$؟ (پاسخ خود را توجیه کنید)

۶. (گروه همریختی‌ها[1]) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و G مجموعه تمام همریختی‌ها از X بتوی خودش باشد.
(i) ثابت کنید G تحت عمل ترکیب توابع یک گروه است.
(ii) اگر $X = [۰, ۱]$، ثابت کنید G نامتناهی است.
(iii) فرض کنید $X = [۰, ۱]$. آیا G یک گروه آبلی است؟

[1] Group of Homemorphisms

۷. اگر $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_1)$ فضاهای توپولوژیک همریخت باشند، ثابت کنید

(i) اگر $(X, \mathcal{T})$ یک T_0ـفضا باشد، آنگاه $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز یک T_0ـفضا است.

(ii) اگر $(X, \mathcal{T})$ یک T_1ـفضا باشد، آنگاه $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز یک T_1ـفضا است.

(iii) اگر $(X, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف باشد، آنگاه $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز یک فضای هاسدورف است.

(iv) اگر $(X, \mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن صدق کند، آنگاه $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

(v) اگر $(X, \mathcal{T})$ یک فضای جداشونده باشد، آنگاه $(Y, \mathcal{T}_1)$ نیز یک فضای جداشونده است.

۸.* فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک گسسته باشد. ثابت کنید $(X, \mathcal{T})$ با زیرفضایی از $\mathbb{R}$ همریخت است اگر و فقط اگر X شمارا باشد.

۳.۴ فضاهای ناهمریخت

برای اثبات همریخت بودن دو فضای توپولوژیک باید یک همریختی بین آن دو فضا را پیدا کنیم.

اما برای اثبات ناهمریخت بودن دو فضای توپولوژیک، اثبات اینکه هیچ همریختی بین آنها وجود ندارد، کار بسیار سختی است. مثال زیر یک روش را برای اثبات ناهمریخت بودن دو فضا نشان می‌دهد.

مثال ۱.۳.۴ ثابت کنید $[0, 2]$ با زیرفضای $[0, 1] \cup [2, 3]$ از $\mathbb{R}$ همریخت نیست.

برهان. فرض کنید $(X, \mathcal{T}) = [0, 2]$ با $(Y, \mathcal{T}_1) = [0, 1] \cup [2, 3]$ همریخت باشد. پس خواهیم داشت $[0, 1] = [0, 1] \cap Y$ که در نتیجه $[0, 1]$ در $(Y, \mathcal{T}_1)$ بسته است و نیز $[0, 1] = (-1, 1\frac{1}{2}) \cap Y$ لذا $[0, 1]$ در $(Y, \mathcal{T}_1)$ باز است، پس Y همبند نیست زیرا شامل یک زیرمجموعه غیرخالی و باز–بسته $[0, 1]$ است.

$\boxed{\text{فرض کنید}}$ $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. در اینصورت یک همریختی مانند $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ وجود دارد. بنابراین $f^{-1}([0, 1])$ یک زیرمجموعه باز–بسته در X است و بنابراین X همبند نیست. اما، $X = [0, 2]$ و همبند است. (تمرین شماره ۱۵ از بخش ۱.۴ را ببینید.) و این یک تناقض است و در نتیجه $(X, \mathcal{T}) \not\cong (Y, \mathcal{T}_1)$. ■

این مثال چه چیزی را نشان می‌دهد؟

گزاره ۲.۳.۴ هر فضای توپولوژیک همریخت با فضای همبند، همبند است.

برای اینکه نشان داده شود که دو فضای توپولوژیک همریخت نیستند، با توجه به گزاره ؟؟ باید سعی کنیم یک خاصیت «که توسط همریختی‌ها حفظ می‌شود» را بیابیم که که در یک فضا قرار دارد ولی در دیگری قرار ندارد.

در تمرین‌ها مواردی از ویژگی‌های حفظ شده تحت همریختی‌ها را دیدیم:

(i) T_0–فضا؛

(ii) T_1–فضا؛

(iii) T_2–فضا یا فضای هاسدورف؛

(iv) فضای منظم؛

(v) T_3–فضا؛

(vi) فضای صدق کننده در اصل دوم شمارش؛

(vii) فضاهای جداشونده. [تمرین شماره ۷ از بخش ۲.۴ را ببینید.]

موارد دیگری نیز وجود دارد:

(viii) فضای گسسته؛

(ix) فضای ناگسسته؛

(x) توپولوژی بسته–متناهی؛

(xi) توپولوژی شمارا–بسته؛

بنابراین دوازده خاصیت از جمله همبندی را می‌شناسیم که توسط همریختی‌ها حفظ می‌شوند. اگر اعداد اصلی X و Y متفاوت باشند (مثلا X شمارا و Y ناشمارا باشد) یا $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}_1$ دارای اعداد اصلی متفاوت باشند دو فضای $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\ \mathcal{T}_1)$ نمی‌توانند همریخت باشند.

با این حال، هنگام مواجه شدن با یک مساله ممکن است پیدا کردن ویژگی مورد نظر آسان نباشد. مثلا اگر بخواهیم ثابت کنیم $(0,1)$ با $[0,1]$ یا $\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}^2$ همریخت نیست. بعدا خواهیم دید که چگونه می‌توان این ناهمریختی‌ها را ثابت کرد.

قبل از پرداختن به این، اجازه دهید ابتدا به این سوال پاسخ دهیم که چه زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ همبند هستند.

تعریف ۳.۳.۴ زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ یک *پاره*[1] نامیده می‌شود اگر ویژگی زیر را داشته باشد: اگر اعدادی مانند $z \in S$، $x \in S$ و $y \in \mathbb{R}$ موجود باشد بطوری که $x < y < z$، آنگاه $y \in S$.

[1] Interval

ملاحظه ۴.۳.۴ توجه داشته باشید

(i) هر مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ یک بازه است.

(ii) هر بازه یکی از حالت‌های زیر را خواهد داشت: $\{a\}$، $[a,b]$، (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$، $(-\infty,a]$، (a,∞)، $[a,\infty)$ و $(-\infty,\infty)$.

(iii) از مثال ۶.۲.۴، ملاحظه ۷.۲.۴ و تمرین شماره ۱ از بخش ۲.۴ نتیجه می‌شود هر بازه با $(۰,۱)$، $[۰,۱]$، $(۰,۱]$ یا $\{۰\}$ همریخت است. در تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۴ گزاره قوی‌تری را خواهیم داشت.

گزاره ۵.۳.۴ زیرفضای S از $\mathbb{R}$ همبند است اگر و فقط اگر بصورت یک بازه باشد.

برهان. با جایگزینی بازه مورد نظر بجای $\mathbb{R}$ به روشی مشابه گزاره ۳.۳.۳ می‌توان ثابت کرد که تمام بازه‌ها همبند هستند.

برعکس، S را همبند در نظر بگیرید. $\boxed{\text{فرض کنید}}$ $x \in S$، $z \in S$، $x<y<z$ و $y \notin S$. بنابراین $(-\infty,y)\cap S=(-\infty,y]\cap S$ یک زیرمجموعه باز و بسته S خواهد بود. پس S شامل زیرمجموعه باز-بسته $(-\infty,y)\cap S$ است. برای نشان دادن ناهمبند بودن S، فقط باید ثابت کنیم که این مجموعه باز-بسته غیرخالی و محض است. غیرخالی بودن واضح است چون شامل x است و زیرمجموعه محض است چون $z\in S$ و $z\notin(-\infty,y)\cap S$. پس S همبند نیست و این یک تناقض است. بنابراین S یک بازه است. ■

حال می‌توانیم دلیل «همبند» نامیده شدن را درک کنیم. زیرفضاهای $\mathbb{R}$ مثل $[a,b]$، (a,b) و غیره ... همبند هستند، درحالیکه زیرفضایی مثل

$$X=[۰,۱]\cup[۲,۳]\cup[۵,۶]$$

که شامل یک اجتماع از تکه‌های «ناهمبند» است ناهمبند هستند.

اینک اجازه دهید برگردیم به این مساله که نشان دهیم $[۰,۱]\ncong(۰,۱)$. در ابتدا یک عقیده ظاهرا بدیهی را اعلام می‌کنیم.

ملاحظه ۶.۳.۴ فرض کنید $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_۱)$ یک همریختی باشد. فرض کنید $a\in X$ چنان است که $X\backslash\{a\}$ یک زیرفضا از X با توپولوژی القا شده $\mathcal{T}_۲$ باشد. هم چنین $Y\backslash\{f(a)\}$ یک زیرفضا از Y است و دارای توپولوژی القایی $\mathcal{T}_۳$ می‌باشد. در این صورت $(X\backslash\{a\},\mathcal{T}_۲)$ با $(Y\backslash\{f(a)\},\mathcal{T}_۳)$ همریخت است.

شرح مختصر اثبات. تابع $g:X\backslash\{a\}\to Y\backslash\{f(a)\}$ را به ازای تمام $x\in X\backslash\{a\}$ تعریف کنید. بسادگی می‌توان بررسی کرد که g یک همریختی است. (جزییات اثبات را بنویسید.) ■

بعنوان نتیجه مستقیم این ملاحظه خواهیم داشت:

نتیجه ۷.۳.۴ اگر a، b، c و d اعداد حقیقی باشند که $a < b$ و $c < d$، آنگاه

(i) $(a,b) \ncong [c,d)$،

(ii) $(a,b) \ncong [c,d]$ و

(iii) $[a,b) \ncong [c,d]$.

برهان. (i) $(X,\mathcal{T}) = [c,d)$ و $(Y, \mathcal{T}_1) = (a,b)$ را در نظر بگیرید. $\boxed{\text{فرض کنید}}$ $(X,\mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}_1)$. در این صورت به ازای برخی $y \in Y$ داریم $X\setminus\{c\} \cong Y\setminus\{y\}$. اما، $X\setminus\{c\} = (c,d)$ یک بازه است و همچنین همبند است بدون توجه به اینکه چه نقطه‌ای از (a,b) حذف شده است. بنابراین، با در نظر گرفتن گزاره ۲.۳.۴، به ازای هر $y \in Y$ داریم

$$X\setminus\{c\} \ncong Y\setminus\{y\}.$$

که یک تناقض است و در نتیجه $(a,b) \ncong [c,d)$.
(ii) $[c,d]\setminus\{c\}$ همبند است در حالیکه $(a,b)\setminus\{y\}$ به ازای هر $y \in (a,b)$ ناهمبند است. پس $(a,b) \ncong [c,d]$.
(iii) $\boxed{\text{فرض کنید}}$ $[a,b) \cong [c,d]$. پس به ازای برخی $y \in [a,b]$ داریم $[a,b)\setminus\{y\} \ncong [c,d]\setminus\{c\}$. بنابراین به ازای برخی $z \in [a,b)\setminus\{y\}$ داریم $([a,b)\setminus\{y\})\setminus\{z\} \cong ([c,d]\setminus\{c\})\setminus\{d\}$؛ یعنی، به ازای برخی اعداد مختلف y و z در $[a,b)$ داریم $[a,b)\setminus\{y,z\} \cong (c,d)$. اما (c,d) همبند است در حالیکه $[a,b)\setminus\{y,z\}$ به ازای برخی y و z متفاوت در $[a,b)$ ناهمبند است. پس فرض خلف باطل و در نتیجه خواهیم داشت $[a,b) \ncong [c,d]$. ■

تمرین‌های ۳.۴

۱. از بحث بالا نتیجه بگیرید که هر بازه تنها و تنها با یکی از فضاهای زیر همریخت است:

$$\{0\}; \quad (0,1); \quad [0,1]; \quad [0,1).$$

۲. از گزاره ۵.۳.۴ نتیجه بگیرید که هر زیرفضای شمارای $\mathbb{R}$ شامل بیش از یک نقطه ناهمبند است. (مخصوصاً $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ ناهمبند هستند.)

۳. فرض کنید X دایره واحد در $\mathbb{R}^2$ باشد؛ یعنی، $X = \{\langle x,y\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$ که دارای توپولوژی زیرفضا است.

(i) نشان دهید $X\setminus\{\langle 1,0\rangle\}$ با بازه باز $(0,1)$ همریخت است.

(ii) نتیجه بگیرید $X \ncong (0,1)$ و $X \ncong [0,1]$.

(iii) با در نظر گرفتن اینکه برای هر $a \in X$، زیرفضای $X\setminus\{a\}$ همبند است، نشان دهید $X \ncong [0,1)$.

(iv) نتیجه بگیرید که X با هیچ بازه‌ای همریخت نیست.

۴. فرض کنید Y زیرفضایی از $\mathbb{R}^۲$ بصورت زیر باشد:

$$Y = \{\langle x,y\rangle : x^۲ + y^۲ = ۱\} \cup \{\langle x,y\rangle : (x-۲)^۲ + y^۲ = ۱\}.$$

(i) آیا Y با فضای X در تمرین ۳ در بالا همریخت است؟

(ii) آیا Y با یک بازه همریخت است؟

۵. فرض کنید Z زیرفضایی از $\mathbb{R}^۲$ بصورت

$$Z = \{\langle x,y\rangle : x^۲ + y^۲ = ۱\} \cup \{\langle x,y\rangle : (x-\frac{۳}{۲})^۲ + y^۲ = ۱\}.$$

باشد. نشان دهید

(i) Z با هیچ بازه‌ای همریخت نیست، و

(ii) Z با X و Y (فضاهای ذکر شده در تمرین‌های ۳ و ۴ در بالا) همریخت نیست.

۶. ثابت کنید خط سورگنفری با هیچ یک از $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}^۲$ یا زیرفضاهای این دو فضا همریخت نیست.

۷. (i) ثابت کنید فضای توپولوژیک (i) تمرین شماره ۵ از بخش ۱.۱ با فضای معرفی شده در (ii) تمرین شماره ۹ از بخش ۱.۱ همریخت نیست.

(ii)* در تمرین شماره ۵ از بخش ۱.۱، آیا $(X,\mathcal{T}_۲) \cong (X,\mathcal{T}_۱)$؟

(iii)* در تمرین شماره ۹ از بخش ۱.۱، آیا $(X,\mathcal{T}_۹) \cong (X,\mathcal{T}_۲)$؟

۸. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد که در آن X یک مجموعه نامتناهی است. گزاره‌های زیر را ثابت کنید (این گزاره‌ها اولین بار توسط جان گینسبرگ [1] و بیل سندز [2] ثابت شده‌اند).

*(i) $(X,\mathcal{T})$ دارای زیرفضایی همریخت با $(\mathbb{N},\mathcal{T}_۱)$ است که در آن $\mathcal{T}_۱$ یک توپولوژی ناگسسته یا $(\mathbb{N},\mathcal{T}_۱)$ یک $T_۰$-فضا است.

**(ii) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک $T_۱$-فضا باشد. پس $(X,\mathcal{T})$ دارای یک زیرفضای همریخت با $(\mathbb{N},\mathcal{T}_۲)$ است که $\mathcal{T}_۲$ توپولوژی بسته-متناهی یا توپولوژی گسسته است.

(iii) از (ii) نتیجه بگیرید که هر فضای هاسدورف نامتناهی شامل یک زیرفضای گسسته نامتناهی است و بنابراین شامل یک زیرفضای همریخت با $\mathbb{N}$ با توپولوژی گسسته است.

**(iv) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک $T_۰$-فضا باشد که $T_۱$-فضا نیست. پس فضای $(X,\mathcal{T})$ شامل یک زیرفضای همریخت با $(\mathbb{N},\mathcal{T}_۳)$ است که $\mathcal{T}_۳$ شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و تمام مجموعه‌های $\{۱,۲,\ldots,n\}$، $n \in N$ است یا $\mathcal{T}_۳$ شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و تمام مجموعه‌های $\{n, n+۱, \ldots\}$، $n \in N$ است.

(v) از بالا نتیجه بگیرید که هر فضای توپولوژیک نامتناهی دارای یک زیرفضای همریخت بافضای $(\mathbb{N},\mathcal{T}_۴)$ است که $\mathcal{T}_۴$ توپولوژی ناگسسته، گسسته، توپولوژی بسته-متناهی، یا یکی از توپولوژی‌های ذکر شده در (iv) (که معروف به توپولوژی قطعه آغازین و توپولوژی قطعه پایانی هستند) است. بعلاوه، هیچکدام از این پنج توپولوژی تعریف شده بر روی $\mathbb{N}$ با همدیگر همریخت نیستند.

---

[1] John Ginsburg

[2] Bill Sands

۹. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ فضاهای توپولوژیک باشند. نگاشت $f:X\to Y$ را یک **همریختی موضعی**[1] می‌نامند اگر هر نقطه $x\in X$ دارای یک همسایگی مانند U باشد بطوریکه f همسایگی U را بطور همریخت به زیرفضای باز V از $(Y,\mathcal{T}_1)$ بنگارد؛ یعنی، اگر توپولوژی القا شده بر روی U توسط $\mathcal{T}$ توپولوژی $\mathcal{T}_2$ و توپولوژی القا شده بر روی $V=f(U)$ توسط $\mathcal{T}_1$ عبارت از $\mathcal{T}_3$ باشد، آنگاه f یک همریختی از $(U,\mathcal{T}_2)$ به توی $(V,\mathcal{T}_3)$ است. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را **همریخت موضعی**[2] با $(Y,\mathcal{T}_1)$ می‌گویند اگر یک همریختی موضعی از $(X,\mathcal{T})$ به $(Y,\mathcal{T}_1)$ موجود باشد.

(i) اگر $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ فضاهای توپولوژیک همریخت باشند، ثابت کنید $(X,\mathcal{T})$ با $(Y,\mathcal{T}_1)$ همریخت موضعی است.

(ii) اگر $(X,\mathcal{T})$ یک زیرفضای باز $(Y,\mathcal{T}_1)$ باشد، ثابت کنید $(X,\mathcal{T})$ با $(Y,\mathcal{T}_1)$ همریخت موضعی است.

$\ast$(iii) ثابت کنید اگر $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ یک همریختی موضعی باشد، آنگاه f هر زیرمجموعه باز $(X,\mathcal{T})$ را به زیرمجموعه باز $(Y,\mathcal{T}_1)$ می‌نگارد.

۴.۴ خلاصه

سه روش مهم برای ایجاد فضاهای توپولوژیک جدید از فضاهای قبلی وجود دارد که عبارتند از: ساختن زیرفضاها، حاصلضرب‌ها و فضاهای خارج‌قسمت. تمام این روش‌ها در فصل‌های مربوطه بررسی می‌شوند. در این فصل ساختن زیرفضاها مطالعه شد و بر این اساس توانستیم فضاهای مهم $\mathbb{Q}$، $[a,b]$، (a,b) و غیره ... را معرفی کنیم.

در این فصل، مفهوم مهم همریختی معرفی شد و دیدیم که $\cong$ یک رابطه هم‌ارزی[3] است. یک ویژگی را **توپولوژیکی**[4] می‌نامند اگر تحت همریختی‌ها حفظ شود؛ یعنی، اگر $(X,\mathcal{T})\cong(Y,\mathcal{T}_1)$ و $(X,\mathcal{T})$ دارای ویژگی مشخصی باشد آنگاه $(Y,\mathcal{T}_1)$ نیز باید آن ویژگی را داشته باشد. نشان داده شد که همبندی یک ویژگی توپولوژیکی است. بنابراین هر فضای همریخت با فضای همبند، همبند است. (چندین ویژگی توپولوژیکی دیگر نیز معرفی شد.) بصورت رسمی مفهوم بازه در $\mathbb{R}$ معرفی شد و نشان داده شد که بازه‌ها دقیقا زیرفضاهای همبند $\mathbb{R}$ هستند.

بررسی همریخت بودن دو فضای توپولوژیک داده شده‌ی $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ یک مساله جالب است. ثابت کردیم که هر بازه در $\mathbb{R}$ فقط و فقط با یکی از $[0,1]$، $(0,1)$، $[0,1)$ و $\{0\}$ همریخت است. در فصل بعد نشان خواهیم داد که $\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}^2$ همریخت نیست. مساله سخت‌تر این است که نشان دهیم $\mathbb{R}^2$ با $\mathbb{R}^3$ همریخت نیست. این مساله را بعدا با استفاده از قضیه منحنی جردن ثابت خواهیم کرد. تاکنون بهترین نتیجه این است که $\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^m$ اگر و فقط اگر $n=m$. این مساله در توپولوژی جبری بهتر بررسی شده است که در این کتاب بصورت سطحی به آن پرداخته شده است.

در تمرین شماره ۶ از بخش ۲.۴، مفهوم گروه همریختی‌ها معرفی شده است که خود موضوع مهم و جالبی است.

---

[1] Local Homemorphism

[2] Locally Homemorphic

[3] Equivqlence Relation

[4] Topological Property

فصل ۵

نگاشت‌های پیوسته

مقدمه

در اکثر شاخه‌های ریاضی محض مطالبی مطالعه می‌شود که آنها را در نظریه‌ی دسته‌بندی «شی»[1]ها و «پیکان»[2]ها می‌نامند. مثلا در جبر خطی، فضاهای برداری به عنوان اشیا هستند و تبدیل‌های خطی نقش پیکان‌ها را دارند. در حالیکه در نظریه‌ی گروه‌ها و نظریه‌ی مجموعه‌ها، شی‌ها به ترتیب گروه‌ها و مجموعه‌ها، و پیکان‌ها به ترتیب یکریختی‌ها و توابع خواهند بود. در توپولوژی، شی‌ها مورد نظر فضاهای توپولوژیک هستند و در این بخش پیکان‌ها را معرفی خواهیم کرد که نگاشت‌های پیوسته هستند.

۱.۵ نگاشت‌های پیوسته

البته قبلا با مفهوم تابع پیوسته از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}$ آشنا[3] شده‌ایم.

تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته[4] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر عدد حقیقی مثبت ε، یک عدد حقیقی مثبت مانند δ وجود داشته باشد بطوری که از $|x-a| < \delta$، نتیجه شود $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

تعمیم این تعریف به فضاهای توپولوژیک در حالت کلی کار چندان ساده‌ای نیست چراکه مفاهیم «قدرمطلق» و «تفاضل» در همه‌ی فضاها وجود ندارند. به این خاطر، بدنبال یک تعریف (معادل) از پیوستگی خواهیم بود که تعمیم آن زیاد سخت نباشد.

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر بازه‌ی $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ (که $\varepsilon > 0$)، عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد که به ازای هر $x \in (a - \delta, a + \delta)$ داشته باشیم $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

تعریف فوق تا حدودی وضعیت را بهبود می‌بخشد چون از مفهوم «قدرمطلق» استفاده نمی‌کند ولی همچنان شامل مفهوم «تفاضل» است. لم بعد نشان می‌دهد که چگونه می‌توان از تفاضل اجتناب کرد.

---

[1] Object

[2] Arrow

[3] در قسمت‌های ابتدایی این بخش، فرض بر این است که خواننده اطلاعاتی از آنالیز حقیقی را دارد بخصوص تعریف پیوستگی $\varepsilon - \delta$ را می‌داند. در غیر اینصورت، می‌تواند مستقیما از تعریف ۳.۱.۵ شروع کند.

[4] Continuous

لم ۱.۱.۵ فرض کنید f نگاشتی باشد که $\mathbb{R}$ را بتوی خودش می‌نگارد. تابع f پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر بازه‌ی باز U شامل $f(a)$، یک مجموعه باز مانند V شامل a موجود باشد که $f(V) \subseteq U$.

برهان. فرض کنید f پیوسته باشد. عدد $a \in \mathbb{R}$ و مجموعه باز U شامل $f(a)$ را در نظر بگیرید. چون U مجموعه باز است پس اعدادی مانند c و d وجود دارند بطوری که $f(a) \in (c, d) \subseteq U$. مقدار ε را برابر کوچکترین مقدار بین $d - f(a)$ و $f(a) - c$ بگیرید، در نتیجه خواهیم داشت

$$(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq U.$$

چون نگاشت f پیوسته است پس به ازای هر $x \in (a - \delta, a + \delta)$ عددی مانند $\delta > ۰$ وجود دارد بطوری که $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. اگر V مجموعه‌ی باز $(a - \delta, a + \delta)$ باشد، آنگاه $a \in V$ و $f(V) \subseteq U$.

برعکس، فرض کنید به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر بازه باز U شامل $f(a)$، مجموعه باز V شامل a وجود دارد بطوری که $f(V) \subseteq U$. باید نشان دهیم که f پیوسته است. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و ε عدد حقیقی مثبت دلخواه باشد. قرار دهید $U = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. پس U یک مجموعه باز شامل $f(a)$ است. در نتیجه، یک مجموعه باز مانند V شامل a موجود است که $f(V) \subseteq U$. چون V مجموعه باز شامل a است، اعداد حقیقی مانند c و d وجود دارند بطوری که $a \in (c, d) \subseteq U$. اینک δ را برابر مینیمم $d - a$ و $a - c$ بگیرید؛ که در اینصورت داریم $(a - \delta, a + \delta) \subseteq V$. پس به ازای هر $x \in (a - \delta, a + \delta)$ داریم $f(x) \in f(V) \subseteq U$. و لذا f پیوسته است. ■

می‌توانستیم پیوستگی را با استفاده از ویژگی توصیف شده در لم ۱.۱.۵ تعریف کنیم، بهرحال لم بعدی تعریف زیباتری را امکان‌پذیر می‌کند.

لم ۲.۱.۵ فرض کنید f یک نگاشت از فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ به توی فضای توپولوژیک $(Y, \mathcal{T}')$ باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(i) به ازای هر $U \in \mathcal{T}'$ داریم $f^{-۱}(U) \in \mathcal{T}$،

(ii) به ازای هر $a \in X$ و هر $U \in \mathcal{T}'$ که $f(a) \in U$، یک مجموعه مانند $V \in \mathcal{T}$ وجود دارد بطوریکه $a \in V$ و $f(V) \subseteq U$.

برهان. فرض کنید (i) درست باشد. بنابراین یک عضو مانند $a \in X$ و یک مجموعه مانند $U \in \mathcal{T}'$ با خاصیت $f(a) \in U$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $V = f^{-۱}(U)$. پس خواهیم داشت $a \in V$، $V \in \mathcal{T}$ و $f(V) \subset U$. در نتیجه شرط (ii) برقرار است.

برعکس، فرض کنید (ii) درست باشد. پس $U \in \mathcal{T}'$ را در نظر بگیرید. اگر $f^{-۱}(U) = \emptyset$، آنگاه بروشنی داریم $f^{-۱}(U) \in \mathcal{T}$. اگر $f^{-۱}(U) \neq \emptyset$، $a \in f^{-۱}(U)$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $f(a) \in U$. بنابراین یک مجموعه مانند $V \in \mathcal{T}$ وجود دارد بطوری که $a \in V$ و $f(V) \subseteq U$. پس برای هر $a \in f^{-۱}(U)$، یک مجموعه مانند $V \in \mathcal{T}$ وجود دارد که $a \in V \subseteq f^{-۱}(U)$. از این مطلب با در نظر گرفتن نتیجه ۹.۲.۳ نتیجه می‌شود که $f^{-۱}(U) \in \mathcal{T}$. بنابراین (i) برقرار است. ■

اگر لم‌های ۱.۱.۵ و ۲.۱.۵ را باهم در نظر بگیریم می‌بینیم که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}$، مجموعه $f^{-۱}(U)$ نیز باز باشد.

این حقیقت ما را به تعریف مفهوم تابع پیوسته بین دو فضای توپولوژیک بصورت زیر راهنمایی می‌کند:

تعریف ۳.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_۱)$ فضاهای توپولوژیک و f تابعی از X به توی Y باشد. در اینصورت $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_۱)$ یک نگاشت پیوسته[1] است اگر به ازای هر $U \in \mathcal{T}_۱$ داشته باشیم $f^{-۱}(U) \in \mathcal{T}$.

[1] Continuous Mapping

از ملاحظات فوق دیده می‌شود که اگر $(X,\mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}_۱) = \mathbb{R}$ ، آنگاه این تعریف پیوستگی با تعریف پیوستگی معمولی آن مطابقت دارد.

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که به چه زیبایی می‌توان تعریف فوق را در عمل بکار برد:

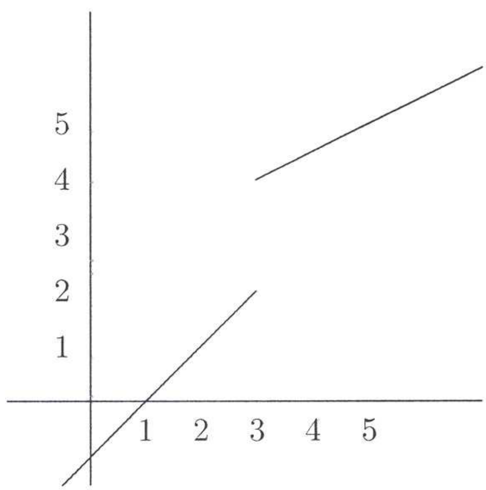
مثال ۴.۱.۵ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ (تابع همانی) را در نظر بگیرید. به ازای هر مجموعه باز U در $\mathbb{R}$ داریم $f^{-۱}(U) = U$ و بنابراین باز است. پس f پیوسته است. ■

مثال ۵.۱.۵ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = c$، $x \in \mathbb{R}$، که c یک عدد ثابت است را در نظر بگیرید. فرض کنید U یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ باشد. واضح است که اگر $c \in U$ آنگاه $f^{-۱}(U) = \mathbb{R}$ و اگر $c \notin U$ آنگاه $f^{-۱}(U) = \emptyset$. در هر دو حالت، $f^{-۱}(U)$ باز است. بنابراین f پیوسته است. ■

مثال ۶.۱.۵ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x - ۱, & x \leq ۳ \\ \frac{۱}{۲}(x + ۵), & x > ۳ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.



بخاطر بیاورید که یک نگاشت پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشت وارون هر مجموعه باز یک مجموعه باز باشد.
بنابراین برای نشان دادن اینکه f پیوسته نیست باید یک مجموعه باز مانند U را پیدا کنیم که $f^{-۱}(U)$ باز نباشد.

بر این اساس، چون $f^{-۱}((۱, ۳)) = (۲, ۳]$ یک مجموعه باز نیست، بنابراین f پیوسته نیست. ■

توجه کنید که لم ۲.۱.۵ را می‌توان بصورت زیر نیز بیان کرد. [۱]

[۱] شما باید لم ۲.۱.۵ و اثبات آن را خوانده باشید.

گزاره ۷.۱.۵ فرض کنید f یک نگاشت از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ به توی فضای $(Y,\mathcal{T}')$ باشد. نگاشت f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$ و هر $U \in \mathcal{T}'$ که $f(x) \in U$، یک مجموعه مانند V در $\mathcal{T}$ وجود داشته باشد که $x \in V$ و $f(V) \subseteq U$. ■

گزاره ۸.۱.۵ فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ ، $(Y,\mathcal{T}_1)$ و $(Z,\mathcal{T}_2)$ را در نظر بگیرید.
اگر $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ و $g : (Y,\mathcal{T}_1) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ نگاشت‌های پیوسته باشند آنگاه تابع مرکب $g \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ پیوسته است.

برهان.

> برای اثبات اینکه تابع مرکب $g \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_2)$ پیوسته است، باید نشان دهیم که اگر $U \in \mathcal{T}_2$ آنگاه $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.
> در نظر داشته باشید که $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

فرض کنید U یک مجموعه باز در $(Z,\mathcal{T}_2)$ باشد. چون نگاشت g پیوسته است پس $g^{-1}(U)$ یک مجموعه باز در $\mathcal{T}_1$ است. بنابراین $f^{-1}(g^{-1}(U))$ بدلیل پیوسته بودن نگاشت f یک مجموعه باز در $\mathcal{T}$ خواهد بود. اما داریم $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. پس $g \circ f$ پیوسته است. ■

گزاره ۹.۱.۵ فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ را در نظر بگیرید. نگاشت $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه بسته S از Y، مجموعه $f^{-1}(S)$ یک زیرمجموعه بسته از X باشد.

برهان. با توجه به مکمل $f^{-1}(S) = f^{-1}($مکمل $S)$، گزاره به راحتی ثابت می‌شود. ■

ملاحظه ۱۰.۱.۵ بین نگاشت‌های پیوسته و همریختی‌ها یک رابطه وجود دارد:
اگر $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ یک همریختی باشد آنگاه f یک نگاشت پیوسته است. البته هر نگاشت پیوسته یک همریختی نیست.

با این حال، گزاره بعدی که با استفاده از تعریف‌های «پیوستگی» و «همریختی» ثابت می‌شود، واقعیت را روشن می‌کند:

گزاره ۱۱.۱.۵ فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}')$ و تابع f از X به توی Y را در نظر بگیرید. تابع f یک همریختی است اگر و فقط اگر

(i) f پیوسته باشد،

(ii) f یک به یک و پوشا باشد؛ یعنی، تابع مکوس $f^{-1} : Y \to X$ موجود باشد،

و

(iii) f^{-1} پیوسته باشد. ■

گزاره بعدی که یک نتیجه جالب است، بیان می‌کند که تحدید یک نگاشت پیوسته، یک نگاشت پیوسته است. اثبات معمولی آن به خواننده واگذار می‌شود- تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۵ را ببینید.

گزاره ۱۲.۱.۵ فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$، نگاشت پیوسته $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_1)$، زیرمجموعه A از X و توپولوژی تولید شده $\mathcal{T}_2$ بر روی A را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید نگاشت $g : (A,\mathcal{T}_2) \to (Y,\mathcal{T}_1)$ یک تحدید f بر روی A باشد؛ یعنی، به ازای هر $x \in A$ داریم $f(x) = g(x)$. در این صورت g پیوسته است.

تمرین‌های ۱.۵

۱. (i) فرض کنید $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ تابع ثابت باشد. نشان دهید که f پیوسته است.
(ii) فرض کنید $f:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T})$ تابع همانی باشد. نشان دهید که f پیوسته است.

۲. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\leq 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

در نظر بگیرید.
(i) با استفاده از روشی که در مثال ۶.۱.۵ دیدید ثابت کنید f پیوسته نیست.
(ii) مجموعه $f^{-1}\{1\}$ را پیدا کنید و با استفاده از گزاره ۹.۱.۵ نتیجه بگیرید که f پیوسته نیست.

۳. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 1\\ x+2, & x>1\end{cases}$$

در نظر بگیرید. آیا f پیوسته است؟ (جواب خود را توجیه کنید.)

۴. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ با در نظر گرفتن $X=[0,1]\cup[2,4]$ یک زیرفضای $\mathbb{R}$ باشد. تابع $f:(X,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$ را بصورت

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 2, & x\in[2,4]\end{cases}$$

تعریف کنید. ثابت کنید که f پیوسته <u>است</u>. (آیا این برایتان جالب نیست؟)

۵. فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ و پایه $\mathcal{B}_1$ برای $\mathcal{T}_1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که نگاشت $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $U\in\mathcal{B}_1$ داشته باشیم $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$.

۶. فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ و نگاشت f از X به توی Y را در نظر بگیرید. اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته باشد، ثابت کنید که f پیوسته است.

۷. فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ و نگاشت f از X به توی Y را در نظر بگیرید. اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای ناگسسته باشد، ثابت کنید که f پیوسته است.

۸. فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ و نگاشت پیوسته $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A یک زیرمجموعه از X، $\mathcal{T}_2$ توپولوژی تولید شده روی A، $B=f(A)$، $\mathcal{T}_3$ توپولوژی تولید شده روی B و $g:(A,\mathcal{T}_2)\to(B,\mathcal{T}_3)$ تحدید f به A باشد. ثابت کنید f پیوسته است.

۹. فرض کنید f یک نگاشت از فضای $(X,\mathcal{T})$ به فضای $(Y,\mathcal{T}')$ باشد. ثابت کنید f پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in X$ و هر همسایگی N از $f(x)$، و یک همسایگی M از x وجود داشته باشد بطوری که $f(M)\subseteq N$.

۱۰. فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی بر روی مجموعه X باشد. می‌گویند توپولوژی $\mathcal{T}_1$ از توپولوژی $\mathcal{T}_2$ نرم‌تر [1] (یا $\mathcal{T}_2$ از $\mathcal{T}_1$ سفت‌تر) [2] است اگر $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. ثابت کنید
(i) توپولوژی اقلیدسی $\mathbb{R}$ از توپولوژی متناهی-بسته بر روی $\mathbb{R}$ نرم‌تر است.
(ii) تابع همانی $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ پیوسته است اگر و فقط اگر $\mathcal{T}_1$ از توپولوژی $\mathcal{T}_2$ نرم‌تر باشد.

۱۱. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد بطوری که به ازای هر عدد گویای q داشته باشیم $f(q) = 0$. ثابت کنید که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = 0$.

۱۲. فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_1)$ و نگاشت پیوسته $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ را در نظر بگیرید. اگر f یک به یک باشد ثابت کنید
(i) از هاسدورف بودن $(Y, \mathcal{T}_1)$ نتیجه می‌شود که $(X,\mathcal{T})$ هاسدورف است.
(ii) اگر $(Y, \mathcal{T}_1)$ توپولوژی T_1-فضا باشد آنگاه $(X,\mathcal{T})$ یک T_1-فضا است.

۱۳. فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_1)$ و نگاشت $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید f پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعه A از X داشته باشیم $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
[راهنمایی: از گزاره ۹.۱.۵ استفاده کنید.]

۲.۵ قضیهٔ مقدار میانی

گزاره ۱.۲.۵ فضاهای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_1)$ و نگاشت پوشا و پیوسته $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ را در نظر بگیرید. اگر $(X,\mathcal{T})$ همبند باشد آنگاه $(Y, \mathcal{T}_1)$ همبند است.

برهان. فرض کنید $(Y, \mathcal{T}_1)$ همبند نباشد. پس این فضای توپولوژیک دارای یک زیرمجموعه بازبسته مانند U است که $U \neq \emptyset$ و $U \neq Y$. در این صورت $f^{-1}(U)$ یک مجموعه باز است چون f پیوسته است و همچنین با در نظر گرفتن گزاره ۹.۱.۵ $f^{-1}(U)$ یک مجموعه بسته است: یعنی، $f^{-1}(U)$ یک زیرمجموعه باز بسته X است. حال، چون $U \neq \emptyset$ و f پوشا است پس نتیجه می‌شود $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. همچنین $f^{-1}(U) \neq X$، زیرا در غیر این صورت، بدلیل پوشا بودن f، U با مجموعه Y برابر خواهد بود و در نتیجه $(X,\mathcal{T})$ نمی‌تواند همبند باشد که یک تناقض است. بنابراین $(Y, \mathcal{T}_1)$ همبند است. ■

ملاحظه ۲.۲.۵ (i) اگر شرط «پوشا بودن» حذف شود گزاره فوق می‌تواند درست نباشد. (برای این حالت یک مثال پیدا کنید.)
(ii) به زبان ساده گزاره ۱.۲.۵ می‌گوید که: تصویر پیوسته هر مجموعه همبند، همبند است.
(iii) گزاره ۱.۲.۵ بیان می‌کند که اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای همبند باشد و $(Y, \mathcal{T}')$ یک فضای همبند نباشد (ناهمبند [3]) در اینصورت هیچ نگاشت پیوسته‌یی از $(X,\mathcal{T})$ به $(Y, \mathcal{T}')$ وجود ندارد. برای مثال، در حالیکه تعداد نامتناهی نگاشت از $\mathbb{R}$ برروی $\mathbb{Q}$ (یا بر روی $\mathbb{Z}$) وجود دارد، هیچکدام از آنها پیوسته نیست. در حقیقت، در تمرین شماره ۱۰ از بخش ۲.۵ مشاهده خواهیم کرد که تنها نگاشت‌های پیوسته از $\mathbb{R}$ به توی $\mathbb{Q}$ (یا به توی $\mathbb{Z}$) نگاشت‌های ثابت هستند. ■

---
[1] Finer Topology
[2] Coarser Topology
[3] Disconnected

حال نسخه قوی‌تر مفهوم همبندی ارایه می‌شود که اغلب مفید است.

تعریف ۳.۲.۵ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را همبند مسیری [1] می‌نامند اگر به ازای هر جفت از نقطه‌های متمایز a و b از X یک نگاشت پیوسته مانند $f:[\circ,۱]\to(X,\mathcal{T})$ وجود داشته باشد بطوری که داشته باشیم $f(\circ)=a$ و $f(۱)=b$. نگاشت f را یک پیوند دهنده مسیر a به b [2] می‌نامند.

مثال ۴.۲.۵ فورا معلوم می‌شود که هر بازه یک مجموعه همبند مسیری است. ■

مثال ۵.۲.۵ به ازای هر $n\geq ۱$، $\mathbb{R}^n$ همبند مسیری است. ■

گزاره ۶.۲.۵ هر فضای همبند مسیری یک مجموعه همبند است.

برهان. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای همبند مسیری باشد و فرض کنید که همبند نباشد.
در اینصورت این فضا شامل یک زیرمجموعه واقعی ناتهی بازبسته مانند U است. بنابراین اعدادی مانند a و b وجود دارند که $a\in U$ و $b\in X\setminus U$. چون $(X,\mathcal{T})$ همبند مسیری است پس یک تابع پیوسته مانند $f:[\circ,۱]\to(X,\mathcal{T})$ وجود دارد که $f(\circ)=a$ و $f(۱)=b$.
با این وجود، $f^{-۱}(U)$ یک زیرمجموعه باز-بسته $[\circ,۱]$ است. چون $a\in U$، $\circ\in f^{-۱}(U)$ پس $f^{-۱}(U)\neq\emptyset$. همچنین چون $b\notin U$، $۱\notin f^{-۱}(U)$ پس نتیجه می‌شود که $f^{-۱}(U)\neq[\circ,۱]$. در نتیجه، $f^{-۱}(U)$ یک زیرمجموعه واقعی ناتهی و بازبسته $[\circ,۱]$ است که با همبند بودن $[\circ,۱]$ در تناقض است.
پس $(X,\mathcal{T})$ همبند است. ■

ملاحظه ۷.۲.۵ عکس گزاره ۶.۲.۵ درست نیست؛ یعنی، هر فضای همبند، همبند مسیری نیست. زیرفضای

$$X=\{\langle x,y\rangle : y=\sin(\frac{۱}{X}), \circ<x\leq ۱\}\cup\{\langle\circ,y\rangle : -۱\leq y\leq ۱\}.$$

از $\mathbb{R}^۲$ چنین زیرفضا می‌باشد.
[تمرین شماره ۶ از بخش ۲.۵ نشان می‌دهد که X همبند است. با نشان دادن اینکه هیچ مسیری وجود ندارد که نقطه $\langle\circ,\circ\rangle$ را مثلا به نقطه $\langle ۱/\pi,\circ\rangle$ پیوند دهد، نتیجه می‌شود که X یک مجموعه همبند مسیری نیست. سعی کنید خود را با ترسیم یک شکل متقاعد کنید.] ■

اینک می‌توانیم نشان دهیم که $\mathbb{R}\not\cong\mathbb{R}^۲$.

مثال ۸.۲.۵ به روشنی، $\mathbb{R}^۲/\{\langle\circ,\circ\rangle\}$ یک همبند مسیری است و بنابر گزاره ۶.۲.۵ همبند است. با این حال، $\mathbb{R}/\{a\}$، $a\in\mathbb{R}$ ناهمبند است. پس $\mathbb{R}\not\cong\mathbb{R}^۲$. ■

حال قضیه مقدار میانی وایرشتراس را ارایه می‌کنیم که کاربرد زیبایی از توپولوژی را در نظریه تابع‌های حقیقی نشان می‌دهد. همبندی اساسی‌ترین مفهوم توپولوژی استفاده شده برای اثبات است.

[1] Path-connected or Pathwise connected

[2] Path

قضیه ۹.۲.۵ (قضیه مقدار میانی وایرشتراس)[1] فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و $f(a)\neq f(b)$. پس به ازای هر عدد p بین $f(a)$ و $f(b)$ یک نقطه مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=p$.

برهان. چون $[a,b]$ همبند و تابع f پیوسته است، پس بنابر گزاره ۱.۲.۵، $f([a,b])$ همبند است. از گزاره ۵.۳.۴ نتیجه می‌شود که $f([a,b])$ یک بازه است. حال چون $f(a)$ و $f(b)$ عضو $f([a,b])$ است پس اگر p بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد خواهیم داشت $p\in f([a,b])$؛ یعنی، عددی مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد که $p=f(c)$. ■

نتیجه ۱۰.۲.۵ اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد بطوری که $f(a)>0$ و $f(b)<0$، آنگاه عددی مانند $x\in[a,b]$ وجود دارد که $f(x)=0$. ■

نتیجه ۱۱.۲.۵ فرض کنید f یک نگاشت پیوسته از $[0,1]$ به توی $[0,1]$ باشد. پس عددی مانند $z\in[0,1]$ وجود دارد که $f(z)=z$. (نقطه z را نقطه ثابت[2] می‌نامند.)

برهان. اگر $f(0)=0$ یا $f(1)=1$ نتیجه کاملا مشهود است. بنابراین کافی است حالت‌هایی را در نظر بگیریم که $f(0)>0$ و $f(1)<1$.

تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=x-f(x)$ را در نظر بگیرید. به روشنی تابع g پیوسته است و $g(0)=-f(0)<0$ و $g(1)=1-f(1>0)$. در نتیجه با در نظر گرفتن نتیجه ۱۰.۲.۵، عددی مانند $z\in[0,1]$ وجود دارد که $g(z)=0$؛ یعنی، $z-f(z)=0$ یا $f(z)=z$. ■

ملاحظه ۱۲.۲.۵ نتیجه ۱۱.۲.۵ حالت خاصی از یک قضیه بسیار مهم بنام قضیه نقطه ثابت بروور[3] است که بیان می‌کند اگر یک مکعب nـبعدی را بطور پیوسته به توی خودش بنگارید یک نقطه ثابت وجود خواهد داشت. [اثبات‌های زیادی برای این قضیه وجود دارد ولی بسیاری از آنها بر اساس روش‌هایی از توپولوژی جبری هستند. می‌توانید یک اثبات غیرپیچیده برای این قضیه را در صفحات ۲۳۹ـ۲۳۸ از کتاب «مقدمه‌یی بر نظریه مجموعه‌ها و توپولوژی» که توسط ک. کورتاوسکی (انتشارات پرگامون ۱۹۶۱) نوشته شده است پیدا کنید.]

تمرین‌های ۲.۵

۱. ثابت کنید که یک تصویر پیوسته از فضای همبند مسیری، همبند مسیری است.

۲. فرض کنید f یک نگاشت پیوسته از بازه $[a,b]$ بتوی خودش باشد که در آن $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$. ثابت کنید که یک نقطه ثابت وجود دارد.

---

[1] Weirestrass Intermediate Value Theorem

[2] Fixed Point

[3] Brouwer Fixed Point Theorem

۳. (i) مثالی ارایه دهید که نشان دهد اگر بجای $[\text{۰}, \text{۱}]$ قرار دهیم $(\text{۰}, \text{۱})$، نتیجه ۱۱.۲.۵ ممکن است نادرست نباشد.
(ii) می‌گویند یک فضای توپولوژیکی $(X,\mathcal{T})$ دارای خاصیت نقطه ثابت [1] است اگر هر نگاشت پیوسته از $(X,\mathcal{T})$ بتوی خودش دارای نقطه ثابت باشد. نشان دهید که تنها بازه‌های بسته دارای این خاصیت هستند.
(iii) فرض کنید X یک مجموعه با حداقل دو نقطه باشد. ثابت کنید که فضای گسسته $(X,\mathcal{T})$ و فضای ناگسسته $(X, \mathcal{T}')$ دارای خاصیت نقطه ثابت نیستند.
(iv) آیا یک فضا که دارای توپولوژی متناهی-بسته است دارای خاصیت نقطه ثابت است؟
(v) ثابت کنید که اگر فضای $(X,\mathcal{T})$ دارای خاصیت نقطه ثابت باشد و $(Y, \mathcal{T}_\text{۱})$ یک فضای همریخت با $(X,\mathcal{T})$ باشد، آنگاه $(Y, \mathcal{T}_\text{۱})$ دارای خاصیت نقطه ثابت است.

۴. فرض کنید $\{A_j : \ j \in J\}$ یک خانواده از زیرفضاهای همبند فضای $(X,\mathcal{T})$ باشد. اگر $\cap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ آنگاه نشان دهید که $\cup_{j\in J} A_j$ همبند است.

۵. فرض کنید A یک زیرفضای همبند از فضای توپولوژیکی $(X,\mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید که $\overline{A}$ نیز همبند است. در حقیقت، نشان دهید که اگر $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$، آنگاه B نیز همبند است.

۶. (i) نشان دهید که زیرفضای $Y = \{\langle x, y\rangle : \ y = \sin(\text{۱}/x), \ \ \text{۰} < x \leq \text{۱}\}$ از $\mathbb{R}^\text{۲}$ همبند است.
[راهنمایی: از گزاره ۱.۲.۵ استفاده کنید.]
(ii) تساوی $\overline{Y} = Y \cup \{\langle \text{۰}, y\rangle : \ -\text{۱} \leq y \leq \text{۱}\}$ را بررسی کنید.
(iii) با استفاده از تمرین ۵، نشان دهید که $\overline{Y}$ همبند است.

۷. فرض کنید E یک مجموعه نقاط از $\mathbb{R}^\text{۲}$ باشد که مختصات آنها گویا است. ثابت کنید که $\mathbb{R}^\text{۲}/E$ همبند مسیری است.

*۸. فرض کنید C یک زیرمجموعه شمارا در $\mathbb{R}^\text{۲}$ باشد. ثابت کنید که فضای $\mathbb{R}^\text{۲}/C$ همبند مسیری است.

۹. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و نقطه a در X دلخواه باشد. مولفه a در X [2]، $C_X(a)$، بصورت اجتماع تمام زیرمجموعه‌های همبند X شامل a تعریف می‌شود. نشان دهید که
(i) $C_X(a)$ همبند است. (از تمرین ۴ در بالا استفاده کنید.)
(ii) $C_X(a)$ بزرگترین مجموعه همبند شامل a است.
(iii) $C_X(a)$ در X همبند است. (از تمرین ۵ در بالا استفاده کنید.)

---
[1]Fixed Point Property
[2]Component

۱۰. یک فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را *تماما ناهمبند* [1] گویند اگر هر زیرمجموعه ناتهی همبند یک مجموعه تک عضوی باشد. گزاره‌های زیر را ثابت کنید.
(i) $(X,\mathcal{T})$ تماما ناهمبند است اگر و فقط اگر برای هر $a \in X$، داشته باشیم $C_X(a) = \{a\}$. (از مفهوم و نماد استفاده شده در تمرین ۹ استفاده کنید.)
(ii) مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$ با توپولوژی معمولی تماما ناهمبند است.
(iii) اگر f یک نگاشت پیوسته از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{Q}$ باشد، ثابت کنید که یک عدد مانند $c \in \mathbb{Q}$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = c$.
(iv) هر زیرفضا از یک فضای تماما ناهمبند، تماما ناهمبند است.
(v) هر زیرفضای شمارا از $\mathbb{R}^۲$ تماما ناهمبند است.
(vi) خط سورگنفری تماما ناهمبند است.

۱۱. (i) با استفاده از تمرین ۹، به روش طبیعی، «مولفه مسیری» یک نقطه در یک فضای توپولوژیک را تعریف کنید.
(ii) ثابت کنید که در هر فضای توپولوژیک، هر مولفه مسیری یک فضای همبند مسیری است.
(iii) اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک با این خاصیت باشد که هر نقطه X دارای همسایگی همبند مسیری است، ثابت کنید که هر مولفه مسیری یک مجموعه باز است. نتیجه بگیرید که هر مولفه مسیری یک مجموعه بسته نیز است.
(iv) با استفاده از (iii) نشان دهید که یک زیرمجموعه باز در $\mathbb{R}^۲$ همبند است اگر و فقط اگر همبند مسیری باشد.

*.۱۲ فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشند. اگر A و B هر دو باز یا هر دو بسته باشند، و $A \cup B$ و $A \cap B$ هر دو همبند باشند، ثابت کنید A و B همبند هستند.

۱۳ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را *صفر-بعدی* [2] می‌نامند اگر دارای پایه‌یی شامل مجموعه‌های باز-بسته باشد. گزاره‌های زیر را ثابت کنید.
(i) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ فضاهای صفر-بعدی هستند.
(ii) هر زیرفضای یک فضای صفر-بعدی، یک فضای صفر-بعدی است.
(iii) یک فضای هاسدورف صفر-بعدی تماما ناهمبند است. (تمرین ۱۰ در بالا را ببینید.)
(iv) هر فضای ناگسسته صفر-بعدی است.
(v) هر فضای گسسته صفر-بعدی است.
(vi) فضاهای ناگسسته شامل بیش از یک نقطه تماما ناهمبند است.
(vii) یک $T_۰$-فضای صفر-بعدی هاسدورف است.
(viii)* یک زیرفضا از $\mathbb{R}$ صفر-بعدی است اگر و فقط اگر تماما ناهمبند باشد.

۱۴. نشان دهید که هر همریختی محلی یک نگاشت پیوسته است. (تمرین شماره ۹ از بخش ۳.۴ را ببینید.)

---
[1] Totally Disconnected
[2] Zero-dimensional

۳.۵ خلاصه

در این فصل گفتیم که یک نگاشت بین فضاهای توپولوژیک «پیوسته» است اگر دارای این خاصیت باشد که تصویر معکوس هر مجموعه باز یک مجموعه باز باشد. این یک تعریف عالی است که به سادگی قابل درک است. این شبیه تعریفی است که در آنالیز حقیقی دیده‌ایم و در ابتدای این فصل به آن اشاره شد. تعریف موجود در آنالیز حقیقی را تعمیم دادیم، نه بخاطر تعمیم بلکه بخاطر دیدن چیزی که واقعا اتفاق می‌افتد.

قضیه مقدار میانی وایرشتراس بدیهی بنظر می آید، اما اکنون می‌دانیم که حقیقت این است که $\mathbb{R}$ همبند است و تصویر پیوسته هر فضای همبند، همبند است.

مفهوم قوی‌تری از همبندی تحت عنوان همبند مسیری معرفی شد. در بسیاری از حالت‌ها تنها اصرار کردن بر همبندی فضا کافی نیست و باید همبند مسیری باشد. این خاصیت در توپولوژی جبری نقش مهمی را بازی می کند.

در ادامه کتاب به قضیه نقطه ثابت بروور خواهیم پرداخت. این قضیه قوی در شاخه‌های مختلف ریاضی شامل توپولوژی، آنالیز تابعی و معادلات دیفرانسیل نقش بسیار مهمی دارد. آنها هنوز هم موضوع تحقیق هستند.

در تمرین‌های شماره ۹ و ۱۰ از بخش ۲.۵ با مفاهیم «مولفه» و «تماما ناهمبند» آشنا شدیم. این دو مفهوم برای درک همبندی مهم هستند.

فصل ۶

فضاهای متری

مقدمه

مهم‌ترین رده از فضاهای توپولوژیک رده فضاهای متری هستند. فضاهای متری منبع بسیار غنی از مثال‌ها در توپولوژی است. حتی فراتر، اکثر کاربردهای توپولوژی در آنالیز از طریق فضاهای متری است.

مفهوم فضاهای متری توسط موریس فرشه [1] در سال ۱۹۰۶ معرفی و توسط فلیکس هاسدورف [2] در ۱۹۱۴ نامگذاری و توسعه داده شد (هاسدورف [۴]).

۱.۶ فضاهای متری

تعریف ۱.۱.۶ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و d یک تابع حقیقی روی $X \times X$ باشد بطوری که برای $a, b \in X$ داشته باشیم

(i) $d(a,b) \geq 0$ و $d(a,b) = 0$ اگر و تنها اگر $a = b$؛

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$؛ و

(iii) به ازای هر a، b و c در X داشته باشیم $d(a,b) \leq d(a,b) + d(b,c)$، [نامساوی مثلثی].

d را یک متر [3] روی X، (X,d) را یک فضای متری [4] و $d(a,b)$ را فاصله [5] بین a و b می‌نامند.

---

[1] Maurice Frechet

[2] Felix Hausdorff

[3] Metric

[4] Metric Space

[5] Distance

مثال ۲.۱.۶ تابع $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$d(a,b)=|a-b|,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

یک متری روی $\mathbb{R}$ است چون

(i) برای تمام a و b در $\mathbb{R}$، $|a-b|\geq ۰$ و $|a-b|=۰$ اگر و فقط اگر $a=b$،

(ii) $|a-b|=|b-a|$ و

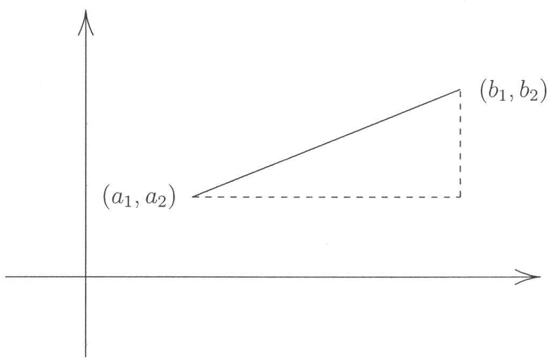
(iii) $|a-c|\leq|a-b|+|b-c|$. (این مطلب را از $|x+y|\leq|x|+|y|$ نتیجه بگیرید.)

d را متر اقلیدسی [1] بر روی $\mathbb{R}$ می‌نامند. ■

مثال ۳.۱.۶ تابع $d:\mathbb{R}^۲\times\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$d(\langle a_۱,a_۲\rangle,\langle b_۱,b_۲\rangle)=\sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲}$$

یک متر بر روی $\mathbb{R}^۲$ است که آن را متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^۲$ می‌نامند.



■

مثال ۴.۱.۶ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و d تابعی از $X\times X$ بتوی $\mathbb{R}$ با ضابطه

$$d(a,b)=\begin{cases}۰, & a=b\\ ۱, & a\neq b,\end{cases}$$

باشد. در اینصورت d یک تابع بر روی X است و متر گسسته [2] نامیده می‌شود. ■

بسیاری از مثال‌های مهم در فضاهای متری «فضاهای تابعی» هستند. برای این مثال‌ها مجموعه X که یک متر روی آن تعریف می‌شود مجموعه‌یی از توابع می‌باشد.

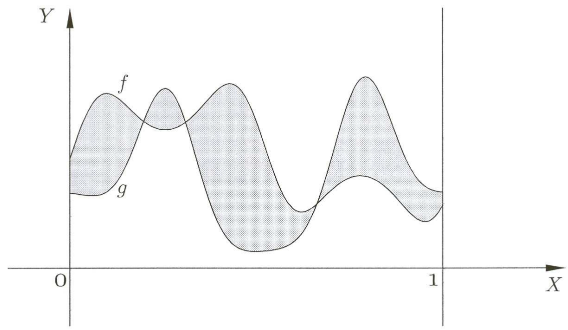
[1] Euclidean metric
[2] Discrete metric

مثال ۵.۱.۶ فرض کنید $C[\circ, ۱]$ عبارت باشد از مجموعه توابع پیوسته از $[\circ, ۱]$ بتوی $\mathbb{R}$. یک متر با ضابطه

$$d(f,g) = \int_{\circ}^{۱} |f(x) - g(x)|dx$$

را روی این مجموعه تعریف کنید که در آن f و g عضو $C[\circ, ۱]$ هستند.

با اندکی فکر کردن می‌توانید بگویید که $d(f,g)$ دقیقا برابر مساحت ناحیه محصور بین نمودار دو تابع و خطوط $x = \circ$ و $x = ۱$، نشان داده شده در شکل زیر است.

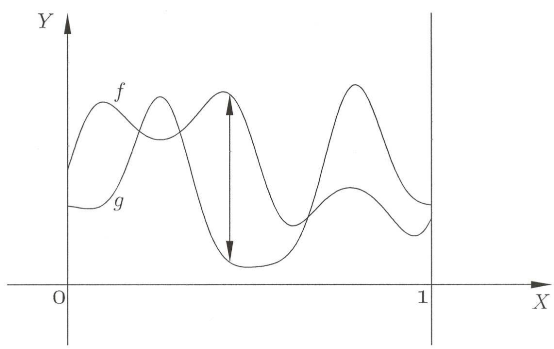


■

مثال ۶.۱.۶ دوباره فرض کنید $C[\circ, ۱]$ مجموعه تمام توابع پیوسته از $[\circ, ۱]$ بتوی $\mathbb{R}$ باشد. متر دیگری بصورت زیر روی $C[\circ, ۱]$ تعریف شده است:

$$d^*(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \quad x \in [\circ, ۱]\}.$$

روشن است که $d^*(f,g)$ شکاف منحنی دو تابع f و g می‌باشد.



■

مثال ۷.۱.۶ می‌توانیم متر دیگری را بر روی $\mathbb{R}^۲$ بصورت

$$d^*(\langle a_۱, a_۲\rangle, \langle b_۱, b_۲\rangle) = \max\{|a_۱ - b_۱|, |a_۲ - b_۲|\}$$

تعریف کنیم که $\max\{x, y\}$ برابر مقدار بزرگتر در بین x و y است. ■

مثال ۸.۱.۶ متر دیگر بر روی $\mathbb{R}^2$ بصورت زیر است:

$$d_1(\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

■

یک منبع غنی از مثال‌های فضاهای متری خانواده فضاهای برداری نرم‌دار است.

مثال ۹.۱.۶ فرض کنید V یک فضای برداری بر روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد. یک نرم $\|\ \|$ [1] روی V، یک نگاشت از V به $\mathbb{R}$ است بطوری که برای هر $a, b \in V$ و هر λ در این میدان داشته باشیم:

(i) $\|a\| \geq 0$ و $\|a\| = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$.

(ii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ و

(iii) $\|\lambda a\| \leq \lambda\|a\|$.

یک فضای برداری نرم‌دار [2] $(V, \|\ \|)$ به معنی فضای برداری V با نرم $\|\ \|$ است.

فرض کنید $(V, \|\ \|)$ یک فضای برداری نرم‌دار دلخواه باشد. در اینصورت یک متر متناظر d بر روی مجموعه V با ضابطه $d(a, b) = \|a - b\|$ وجود دارد که a و b در V هستند.

به آسانی می‌توان بررسی کرد که d واقعا یک متر است. بنابراین بطور طبیعی هر فضای برداری نرم‌دار یک فضای متری است .

بعنوان مثال، با در نظر گرفتن هر x_1، x_2 و x_3 در $\mathbb{R}$ و نرم

$$\|\langle x_1, x_2, x_3\rangle\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$\mathbb{R}^3$ یک فضای برداری نرم‌دار است. بنابراین با قرار دادن

$$d(\langle a_1, b_1, c_1\rangle, \langle a_2, b_2, c_2\rangle) = \|(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)\|$$

$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}$$

فضای $\mathbb{R}^3$ یک فضای متری خواهد بود.

در حقیقت به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $\mathbb{R}^n$ با در نظر گرفتن نرم

$$\|\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

یک فضای برداری نرم‌دار است. بنابراین با قرار دادن

$$d(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle, \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle) = \|(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)\|$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

فضای $\mathbb{R}^n$ یک فضای متری خواهد بود. ■

---

[1] Norm

[2] Normed Vector Space

در یک فضای نرم‌دار $(N, \|\ \|)$، گوی باز به مرکز a و شعاع r [1] بصورت زیر تعریف می‌شود

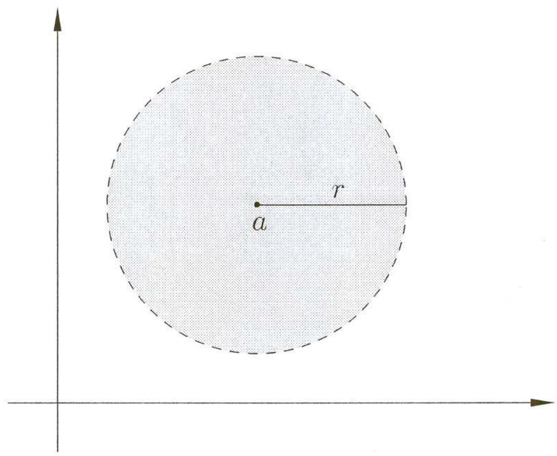
$$B_r(a) = \{x : \quad x \in N, \quad \|x - a\| < r\}.$$

تعریف گوی باز منجر به تعریف زیر برای فضاهای متری می‌شود:

تعریف ۱۰.۱.۶ فرض کنید (X, d) یک فضای متری و r یک عدد حقیقی مثبت باشد. گوی باز به مرکز $a \in X$ و شعاع r بصورت مجموعه $B_r(a) = \{x : \quad x \in X, \quad d(a, x) < r\}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۱.۱.۶ مجموعه $B_r(a)$ در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی برابر است با بازه باز $(a - r, a + r)$. ■

مثال ۱۲.۱.۶ در $\mathbb{R}^۲$ با متر اقلیدسی، مجموعه $B_r(a)$ برابر قرص باز به مرکز a و شعاع r است.



■

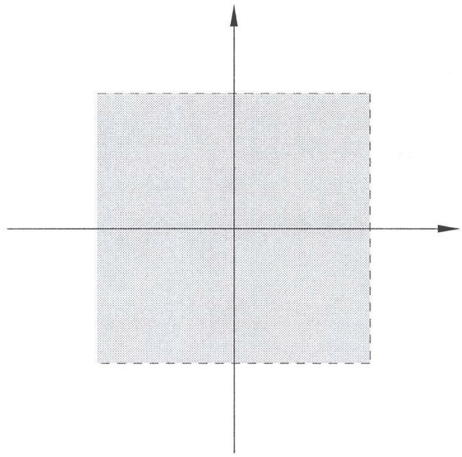
---

[1] Open Ball

مثال ۱۳.۱.۶ در $\mathbb{R}^۲$ با متر d^* با ضابطه

$$d^*(\langle a_۱, a_۲\rangle, \langle b_۱, b_۲\rangle) = \max\{|a_۱ - b_۱|, |a_۲ - b_۲|\}$$

گوی باز $B_۱(\langle ۰, ۰\rangle)$ به شکل زیر است

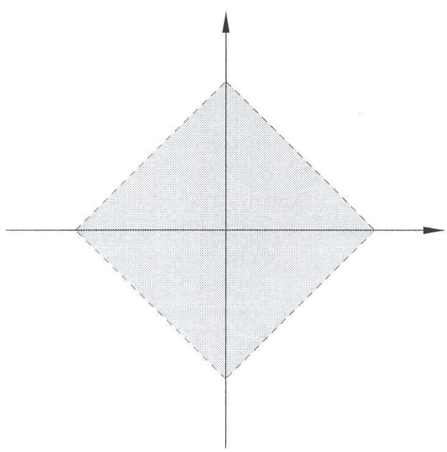


■

مثال ۱۴.۱.۶ در $\mathbb{R}^۲$ با متر $d_۱$ با ضابطه

$$d_۱(\langle a_۱, a_۲\rangle, \langle b_۱, b_۲\rangle) = |a_۱ - b_۱| + |a_۲ - b_۲|$$

گوی باز $B_۱(\langle ۰, ۰\rangle)$ به شکل زیر است



■

اثبات لم بعدی بسیار ساده است (بخصوص اگر یک شکل رسم کنید) و بنابراین به شما واگذار می‌شود.

لم ۱۵.۱.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و a و b نقاطی از X باشند. همچنین δ_1 و δ_2 را اعداد حقیقی مثبت در نظر بگیرید. اگر $c \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$، آنگاه یک عدد مثبت مانند $\delta > 0$ وجود دارد که $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$. ■

نتیجه بعدی را می‌توان از لم ۱۵.۱.۶ با روال جدید بدست آورد.

نتیجه ۱۶.۱.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و B_1 و B_2 گوی‌های باز در (X,d) باشد. پس $B_1 \cap B_2$ بصورت اجتماع گوی‌های باز در (X,d) است. ■

در آخر، می‌توانیم بین فضاهای متری و فضاهای توپولوژیک ارتباط برقرار کنیم.

گزاره ۱۷.۱.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. گردایه گوی‌های باز در (X,d) یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X است.

[توپولوژی $\mathcal{T}$ را **توپولوژی القا شده توسط متر** d [1] و $(X,\mathcal{T})$ را **فضای توپولوژیک القا شده** [2] یا **فضای توپولوژیک متناظر** یا **فضای توپولوژیک وابسته** می‌نامند.]

برهان. این گزاره را می‌توان با استفاده از گزاره ۸.۲.۲ و نتیجه ۱۶.۱.۶ اثبات کرد. ■

مثال ۱۸.۱.۶ اگر d یک متر اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ باشد آنگاه توپولوژی $\mathcal{T}$ القا شده توسط متر d مجموعه تمام گوی‌های باز است. اما $B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$. بلافاصله دیده می‌شود که $\mathcal{T}$ توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است. بنابراین **متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ یک توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ را القا می‌کند.** ■

مثال ۱۹.۱.۶ از تمرین شماره ۱ (ii) از بخش ۳.۲ و مثال ۱۲.۱.۶ نتیجه می‌شود که متر اقلیدسی روی مجموعه $\mathbb{R}^2$ توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ را القا می‌کند. ■

مثال ۲۰.۱.۶ از تمرین شماره ۱ (i) از بخش ۳.۲ و مثال ۱۳.۱.۶ نتیجه می‌شود که متر d^* نیز توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ را القا می‌کند. ■

اینکه متر d_1 از مثال ۱۴.۱.۶ نیز توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ را القا می‌کند بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۲۱.۱.۶ اگر d یک متر گسسته بر روی مجموعه X باشد آنگاه به ازای هر $x \in X$ داریم $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. بنابراین تمام مجموعه‌های تک‌عضوی در توپولوژی القا شده $\mathcal{T}$ توسط d روی X، مجموعه‌های باز هستند. در نتیجه، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است. ■

در مثال‌های ۱۹.۱.۶، ۲۰.۱.۶ و ۱۴.۱.۶ $\boxed{\text{سه متر مختلف}}$ را روی یک مجموعه دیدیم که توپولوژی یکسانی را القا می‌کنند.

تعریف ۲۲.۱.۶ چند متر روی مجموعه X **معادل** [3] هستند اگر توپولوژی‌های یکسانی را بر روی X القا کنند.

بنابراین مترهای d، d^* و d_1 از مثال‌های ۱۹.۱.۶، ۲۰.۱.۶ و ۱۴.۱.۶ روی $\mathbb{R}^2$ معادل هستند.

---

[1] Topology induced by a metric

[2] Induced Topology

[3] Equivalent

گزاره ۲۳.۱.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\mathcal{T}$ توپولوژی القا شده روی X توسط متر d باشد. پس زیرمجموعه U از X در (X,d) باز است اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in U$ یک عدد مثبت مانند ε وجود داشته باشد که $B_\varepsilon(a) \subseteq U$.

برهان. فرض کنید $U \in \mathcal{T}$. با در نظر گرفتن گزاره‌های ۱۷.۱.۶ و ۲.۳.۲، به ازای هر $a \in U$ نقطه $b \in X$ و عدد $\delta > ۰$ وجود دارد بطوری که

$$a \in B_\delta(a) \subseteq U.$$

عدد $\varepsilon = \delta - d(a,b)$ را در نظر بگیرید. براحتی می‌توان مشاهده کرد که

$$a \in B_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

برعکس، فرض کنید U یک زیرمجموعه از X با این خاصیت باشد که به ازای هر $a \in U$ عددی مانند $\varepsilon_a > ۰$ وجود دارد بطوری که $B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq U$. پس، با استفاده از گزاره‌های ۳.۳.۲ و ۱۷.۱.۶ مجموعه U یک مجموعه باز است. ■

دیدیم که هر متر روی یک مجموعه X یک توپولوژی را بر روی آن را القا می‌کند. البته اینک نشان خواهیم داد که اینطور نیست که هر توپولوژی روی یک مجموعه القا شده توسط یک متر القا شده باشد. ابتدا تعریفی را ارایه می‌دهیم که قبلا آن را در تمرینات دیده‌اید. (تمرین ۱۳ از بخش ۱.۴ را ببینید.)

تعریف ۲۴.۱.۶ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را فضای هاسدورف [1] (یا $T_۲$ـفضا) می‌نامند اگر به ازای هر دو نقطه متمایز a و b در X، مجموعه‌های بازی مانند U و V وجود داشته باشند بطوری که $a \in U$، $b \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

البته $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^۲$ و تمام توپولوژی‌های گسسته مثال‌هایی از فضاهای هاسدورف هستند، در حالیکه هر مجموعه با بیش از دو عضو و دارای توپولوژی ناگسسته یک فضای هاسدورف نیست. با اندکی تفکر می‌فهمیم که $\mathbb{Z}$ با توپولوژی متناهی-بسته نیز یک فضای هاسدورف نیست. (خودتان را با این حقیقت‌ها متقاعد کنید.)

گزاره ۲۵.۱.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\mathcal{T}$ توپولوژی القا شده بر روی X توسط d باشد. بنابراین $(X,\mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف است.

برهان. a و b را دو نقطه دلخواه در X با شرط $a \neq b$ در نظر بگیرید. پس $d(a,b) > ۰$. قرار دهید $\varepsilon = d(a,b)$. گوی‌های باز $B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(b)$ را در نظر بگیرید. این گوی‌ها مجموعه‌های بازی هستند که $a \in B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(a)$ و $b \in B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(b)$. بر این اساس برای اینکه نشان دهیم $\mathcal{T}$ هاسدورف است باید ثابت کنیم $B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(b) = \emptyset$.

فرض کنید $x \in B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(b)$. در این صورت داریم $d(x,a) < \frac{\varepsilon}{۲}$ و $d(x,b) < \frac{\varepsilon}{۲}$. بنابراین

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$$

$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon,$$

یعنی $d(a,b) < \varepsilon$ که این نادرست است. در نتیجه هیچ عضوی مانند x در $B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(b)$ وجود ندارد؛ یعنی $B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{۲}}(b) = \emptyset$، که همان حکم مسئله است. ■

---

[1] Hausdorff Space

ملاحظه ۲۶.۱.۶ با در نظر گرفتن گزاره ۲۵.۱.۶ به همراه نکات ارایه شده قبل از آن، متوجه می‌شویم که هر فضای ناگسسته با حداقل دو نقطه دارای یک توپولوژی است که با هیچ متری القا نمی‌شود. هم چنین $\mathbb{Z}$ با توپولوژی متناهی-بسته $\mathcal{T}$ چنان است که با هیچ متری نمی‌توان روی $\mathbb{Z}$ القا کرد. ■

تعریف ۲۷.۱.۶ فضای $(X,\mathcal{T})$ را متریذیر[1] می‌نامند اگر یک متر مانند d روی مجموعه X وجود داشته باشد با این خاصیت که $\mathcal{T}$ توپولوژی القا شده توسط d باشد.

بنابراین، برای مثال، مجموعه $\mathbb{Z}$ با توپولوژی متناهی-بسته یک فضای متریذیر نیست.
هشدار. نباید با در نظر گرفتن گزاره ۲۵.۱.۶ به این نتیجه برسید که هر فضای هاسدورف متریذیر است. بعدا خواهیم توانست مثال‌هایی را بسازیم (با استفاده از ضرب‌های نامتناهی) که فضاهای هاسدرف باشند ولی متریذیر نباشند. [قابلیت متریذیر بودن از فضاهای توپولوژیک یک موضوع فنی است. شرایط لازم و کافی برای متریذیر بودن را می‌توانید در قضیه ۹.۱، صفحه ۱۹۵، از کتاب دوگونجی [۵] ببینید.]

تمرین‌های ۶.۱

۱. ثابت کنید متر d_1 از مثال ۸.۱.۶ توپولوژی اقلیدسی را روی $\mathbb{R}^2$ القا می‌کند.

۲. فرض کنید d یک متر بر روی مجموعه غیرخالی X باشد.

(i) نشان دهید تابع e با ضابطه $e(a,b)=\min\{1,d(a,b)\}$ به ازای $a,b\in X$ نیز یک متر بر روی X است.

(ii) ثابت کنید که d و e مترهای معادل هستند.

(iii) فضای متری (X,d) را کراندار[2] و d را متر کراندار[3] می‌نامند اگر یک عدد حقیقی مثبت مانند M وجود داشته باشد که به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)<M$. با استفاده از (ii) نتیجه بگیرید که هر متر با یک متر کراندار معادل است.

۳. (i) فرض کنید d یک متر روی یک مجموعه تهی X باشد. نشان دهید که تابع e با ضابطه

$$e(a,b)=\frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$$

نیز یک مترروی X است که $a,b\in X$.
(ii) ثابت کنید d و e مترهای معادل هستند.

[1] Metrizable
[2] Bounded
[3] Bounded Metric

۴. فرض کنید $d_۱$ و $d_۲$ مترهایی به ترتیب بر روی X و Y باشند. ثابت کنید

(i) d با ضابطه

$$d(\langle x_۱, y_۱\rangle, \langle x_۲, y_۲\rangle) = \max\{d_۱(x_۱, x_۲), d(y_۱, y_۲)\}$$

یک متر روی $X \times Y$ است.

(ii) e با ضابطه

$$e(\langle x_۱, y_۱\rangle, \langle x_۲, y_۲\rangle) = d_۱(x_۱, x_۲) + d(y_۱, y_۲)$$

یک متر روی $X \times Y$ است.

(iii) d و e مترهای معادل هستند.

۵. فرض کنید (X, d) یک فضای متری و $\mathcal{T}$ توپولوژی متناظر بر روی X باشد. عضو $a \in X$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که نگاشت $f : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = d(a, x)$ پیوسته است.

۶. فرض کنید (X, d) یک فضای متری و $\mathcal{T}$ توپولوژی القا شده بر روی X توسط متر d باشد. همچنین فرض کنید Y زیرمجموعه‌ای از X و متر $d_۱$ تحدید متر d بر روی مجموعه Y باشد؛ یعنی، به ازای هر a و b در Y داریم: $d_۱(a, b) = d(a, b)$. اگر $\mathcal{T}_۱$ توپولوژی القا شده بر روی Y توسط $d_۱$ و $\mathcal{T}_۲$ زیرفضای توپولوژی روی Y (القا شده توسط $\mathcal{T}$ روی X) باشد، ثابت کنید $\mathcal{T}_۱ = \mathcal{T}_۲$. [این نشان می‌دهد که هر زیرفضای یک فضای متری‌پذیر، متری‌پذیر است.]

۷. (i) فرض کنید ℓ_1 مجموعه تمام دنباله اعداد حقیقی

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

باشد با این شرط که سری $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ همگرا است. اگر به ازای هر x و y در ℓ_1 قرار دهیم

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|,$$

ثابت کنید (ℓ_1, d_1) یک فضای متری است.

(ii) فرض کنید ℓ_2 مجموعه تمام دنباله اعداد حقیقی

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

باشد با این ویژگی که سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ همگرا است. اگر به ازای هر x و y در ℓ_2 قرار دهیم

$$d_2(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

ثابت کنید (ℓ_2, d_2) یک فضای متری است.

(iii) فرض کنید ℓ_∞ نشانگر مجموعه دنباله‌های حقیقی و کراندار $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ باشد. به ازای $x, y \in \ell_\infty$ قرار می دهیم:

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : \ n \in \mathbb{N}\},$$

ثابت کنید (ℓ_∞, d_∞) یک فضای متری است.

(iv) فرض کنید c_0 یک زیرمجموعه از ℓ_∞ باشد که شامل دنباله‌هایی است که به صفر همگراست و d_0 یک متر روی c_0 باشد که از تحدید متر d_∞ روی ℓ_∞ همانند تمرین ۶ بدست آمده باشد. ثابت کنید c_0 یک زیرمجموعه بسته (ℓ_∞, d_∞) است.

(v) ثابت کنید هر یک از فضاهای (ℓ_1, d_1)، (ℓ_2, d_2) و (c_0, d_0) جداپذیر هستند.

(vi)$\ast$ آیا (ℓ_∞, d_∞) یک فضای جداپذیر است؟

(vii) نشان دهید که هر یک از فضاهای متری فوق بطور طبیعی یک فضای برداری نرم‌دار است.

۸. فرض کنید f یک نگاشت پیوسته از فضای متریپذیر $(X, \mathcal{T})$ به توی فضای توپولوژیک $(Y, \mathcal{T}_1)$ باشد. آیا $(Y, \mathcal{T}_1)$ لزوما متریپذیر است؟ (جواب خود را توجیه کنید.)

۹. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را *فضای نرمال* [1] می‌نامند اگر برای هر زوج از مجموعه‌های بسته و مجزای A و B، مجموعه‌های بازی مانند U و V وجود داشته باشند بطوری که $A \subseteq U$، $B \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$. ثابت کنید

(i) هر فضای متریپذیر یک فضای نرمال است.

(ii) هر فضای T_1-فضا و نرمال یک فضای هاسدورف است. [فضای نرمال که هاسدورف هم باشد را T_4-فضا می‌نامند.]

[1] Normal Space

۱۰. فرض کنید (X,d) و $(Y,d_۱)$ فضاهای متری باشند. فضای (X,d) را با فضای $(Y,d_۱)$ یکریخت می‌نامند اگر یک نگاشت پوشای $f:(X,d)\to(Y,d_۱)$ وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ در X،

$$d(x_۱,x_۲)=d_۱(f(x_۱),f(x_۲)).$$

چنین نگاشتی را یکریختی [1] می‌نامند. ثابت کنید که هر یکریختی یک همریختی از فضاهای توپولوژیک متناظر است. (بنابراین فضاهای متری یکریخت همریخت هستند!)

۱۱. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ در اصل اول شمارا بودن [2] صدق می‌کند یا شمارای اول [3] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x\in X$، یک خانواده شمارا $\{U_i(x)\}$ از مجموعه‌های باز شامل x وجود داشته باشد با این شرط که هر مجموعه باز V شامل x دارای (حداقل) یکی از $U_i(x)$ ها بعنوان زیرمجموعه باشد. خانواده شمارای $\{U_i(x)\}$ را یک پایه شمارا [4] در x می‌نامند. موارد زیر را ثابت کنید:

(i) هر فضای متریپذیر در اصل اول شمارا بودن صدق می‌کند.

(ii) هر فضای توپولوژیک که در اصل دوم شمارا بودن صدق کند در اصل اول شمارا بودن نیز صدق می‌کند.

۱۲. فرض کنید X برابر مجموعه $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})\cup\{۱\}$ باشد. تابع $f:\mathbb{R}\to X$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\\ ۱, & x\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

بعلاوه توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X را بصورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{T}=\{U : U\subseteq X \text{ و } f^{-۱}(U) \text{ در توپولوژی } \mathbb{R} \text{ باز است}\}$$

حکم‌های زیر را ثابت کنید:

(i) f پیوسته است.

(ii) هر همسایگی ۱ در $(X,\mathcal{T})$ به صورت $(U\backslash N)\cup\{۱\}$ است که U یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است.

(iii) $(X,\mathcal{T})$ شمارای اول نیست.

[راهنمایی. فرض کنید $(U_۱\backslash\mathbb{N})\cup\{۱\}$ ، $(U_۲\backslash\mathbb{N})\cup\{۱\}$ ، ... ، $(U_n\backslash\mathbb{N})\cup\{۱\}$ ، ... یک پایه شمارا در ۱ باشد. نشان دهید که برای هر عدد صحیح مثبت n، می‌توانیم $x_n\in U_n\backslash\mathbb{N}$ را طوری انتخاب کنیم که $x_n>n$. بررسی کنید که مجموعه $U=\mathbb{R}\backslash\cup_{n=۱}^{\infty}\{x_n\}$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است. نتیجه بگیرید که $V=(U\backslash\mathbb{N})\cup\{۱\}$ یک همسایگی باز برای ۱ است که شامل هیچ یک از مجموعه‌های $(U_n\backslash\mathbb{N})\cup\{۱\}$ نیست که یک تناقض است. بنابراین $(X,\mathcal{T})$ شمارای اول نیست.]

(iv) $(X,\mathcal{T})$ فضای هاسدورف است.

(v) یک تصویر پیوسته هاسدورف از $\mathbb{R}$ لزوما شمارای اول نیست.

[1] Isometric
[2] First Axiom of Countability
[3] First Countable
[4] Countable bases

۱۳. زیرمجموعه S از فضای متری (X,d) را تماما کراندار [1] می‌نامند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ اعضایی مانند x_1، x_2، ... و x_n در X وجود داشته باشد بطوری که $S \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$؛ یعنی می‌توان S را با تعداد $\boxed{\text{متناهی}}$ گوی باز به شعاع ε پوشاند.

(i) نشان دهید هر فضای متری تماما کراندار یک فضای متری کراندار است. (تمرین ۲ در بالا را ببینید.)

(ii) ثابت کنید که $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی تماما کراندار نیست اما به ازای هر $a,b \in \mathbb{R}$ که $a < b$، بازه بسته $[a,b]$ تماما کراندار است.

(iii) فرض کنید (Y,d) یک زیرفضای فضای متری (X,d_1) با متر القایی باشد. اگر (X,d_1) تماما کراندار باشد، آنگاه (Y,d) تماما کراندار است؛ یعنی، هر زیرفضای یک فضای تماما کراندار، تماما کراندار است.

[راهنمایی. فرض کنید $X = \cup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. اگر $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap Y$، آنگاه با استفاده از نامساوی مثلثی نتیجه بگیرید $B_\varepsilon(x_i) \subseteq B_{2\varepsilon}(y_i)$.]

(iv) از (iii) و (ii) نتیجه بگیرید که فضای متری تماما کراندار $(0,1)$ با $\mathbb{R}$ که تماما کراندار نیست همریخت است. بنابراین «تماما کراندار» بودن یک خاصیت توپولوژیکی نیست.

(v) از (iii) و (ii) نتیجه بگیرید که به ازای $n > 1$، $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی تماما کراندار نیست.

(vi) با توجه به این که به ازای هر $a,b \in \mathbb{R}$، بازه بسته تماما کراندار است، نشان دهید که یک زیرفضای متری از $\mathbb{R}$ کراندار است اگر و تنها اگر تماما کراندار باشد.

(vii) نشان دهید که به ازای هر $n > 1$، یک زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ کزاندار است اگر و تنها اگر تماما کراندار باشد.

۱۴. نشان دهید که هر فضای متری تماما کراندار جدایی‌پذیر است. (تمرین ۱۳ در بالا و تمرین شماره ۴ از بخش ۳.۲ را ببینید.)

۱۵. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را نسبتا اقلیدسی [2] می‌نامند اگر یک عدد صحیح مثبت مانند n وجود داشته باشد که هر $x \in X$ دارای یک همسایگی باز همریخت با یک گوی باز به مرکز 0 در $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی باشد. یک فضای نسبتا اقلیدسی هاسدورف را خمینه توپولوژیک [3] می‌نامند.

(i) ثابت کنید هر بازه غیربدیهی (a,b) که $a,b \in \mathbb{R}$، نسبتا اقلیدسی است.

(ii) فرض کنید T یک زیرمجموعه از صفحه مختلط شامل اعداد مختلط با اندازه ۱ باشد. صفحه مختلط را با $\mathbb{R}^2$ شناسایی کنید و فرض کنید T دارای توپولوژی زیرفضا باشد. نشان دهید که فضای T نسبتا اقلیدسی است.

(iii) نشان دهید به ازای هر عدد صحیح و مثبت مانند n، هر فضای توپولوژیک بطور محلی همریخت با $\mathbb{R}^n$، نسبتا اقلیدسی است. (تمرین شماره ۹ از بخش ۴.۳ را ببینید.)

(iv)* برای فضای نسبتا اقلیدسی یک مثال پیدا کنید که خمینه توپولوژیک نباشد.

---

[1] Totally bounded

[2] Locally eucleadean

[3] Topological manifold

۲.۶ همگرایی دنباله‌ها

شما با مفهوم همگرایی دنباله‌های حقیقی آشنا هستید که به صورت زیر تعریف می‌شود. دنباله $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ از اعداد حقیقی به عدد حقیقی x همگرا است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد صحیح مانند n_0 وجود داشته باشد که به ازای هر $n \geq n_0$ داشته باشیم $|x_n - x| < \varepsilon$.

تعمیم این تعریف از $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی به هر فضای متری دیگر بطور بدیهی قابل انجام است .

تعریف ۱.۲.۶ فرض کنید (X, d) یک فضای متری و $x_1, \dots, x_n, \dots$ یک دنباله از نقاط X باشد. می گویند این دنباله به $x \in X$ همگرا [1] است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد صحیح مانند n_0 وجود داشته باشد که به ازای هر $n > n_0$ داشته باشیم $d(x, x_n) < \varepsilon$. این مفهوم با نماد $x_n \to x$ نشان داده می‌شود.
دنباله $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ از اعضای (X, d) را همگرا می‌نامند اگر یک عضو مانند $y \in X$ وجود داشته باشد که $y_n \to y$.

اثبات گزاره بعد بدلیل ساده بودن به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۲.۲.۶ فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ یک دنباله از نقاط فضای متری (X, d) باشد. بعلاوه، فرض کنید x و y نقاطی در (X, d) باشند که $x_n \to x$ و $x_n \to y$. پس $x = y$. ■

برای راحتی، می‌گوییم زیرمجموعه A از فضای متری (X, d) در این فضای متری بسته (متناظرا باز) است اگر آن در توپولوژی $\mathcal{T}$ القا شده بر روی X توسط متر d بسته (متناظرا باز) باشد.

گزاره بعد این حقیقت شگفت‌انگیز را بیان می‌کند که توپولوژی یک فضای متری را می‌توان تماما با استفاده از دنباله‌های همگرا توصیف کرد.

گزاره ۳.۲.۶ فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. زیرمجموعه A از X در (X, d) بسته است اگر و تنها اگر هر دنباله همگرا از نقاط A، به نقطه‌ای از A همگرا باشد. (به عبارت دیگر، A در (X, d) بسته است اگر و تنها اگر از $a_n \to x$، $x \in X$ و به ازای هر n، $a_n \in A$ نتیجه شود که $x \in A$.)

برهان. فرض کنید A در (X, d) بسته باشد و $a_n \to x$ را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر عدد صحیح و مثبت n داشته باشیم $a_n \in A$. فرض کنید $x \in X \backslash A$. در اینصورت، چون $X \backslash A$ یک مجموعه باز شامل x است، پس یک گوی باز مانند $B_\varepsilon(x)$ وجود دارد که $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq X \backslash A$. با توجه به اینکه $a_n \in A$، نتیجه می‌شود که به ازای هر n داریم $d(x, a_n) > \varepsilon$. بنابراین دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ به x همگرا نیست که این یک تناقض است و لذا $x \in A$ که همان حکم گزاره است.

برعکس، فرض کنید هر دنباله همگرا از نقاط A به نقطه‌ای از A همگرا باشد. فرض کنید $X \backslash A$ باز نباشد. در این صورت، یک نقطه مانند $y \in X \backslash A$ وجود دارد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ داریم $B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، فرض کنید که x_n نقطه‌ای در $B_{\frac{1}{n}}(y) \cap A$ باشد. ادعا می‌کنیم که $x_n \to y$. برای اثبات این ادعا عدد ε را یک عدد حقیقی مثبت و n_0 را یک عدد صحیح بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon}$ در نظر بگیرید. پس به ازای هر $n > n_0$ داریم

$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subseteq B_{\frac{1}{n_0}}(y) \subseteq B_\varepsilon(y).$$

پس $x_n \to y$ و بنا به فرض داریم $y \in A$ که یک تناقض است و بنابراین $X \backslash A$ یک مجموعه باز است و در نتیجه A در (X, d) بسته است. ■

[1] Convergent

با در نظر گرفتن اینکه توپولوژی هر فضای متری با استفاده از دنباله‌های همگرا قابل توصیف است، نباید شگفت‌زده شویم که تابع‌های پیوسته را نیز می‌توان با استفاده از آنها توصیف کرد.

گزاره ۴.۲.۶ فرض کنید (X,d) و $(Y,d_۱)$ فضاهای متری و f یک نگاشت از X بتوی Y باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}_۱$ توپولوژی‌های بدست آمده به ترتیب از d و $d_۱$ باشند. پس $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_۱)$ پیوسته است اگر و تنها اگر از $x_n\to x$ نتیجه شود که $f(x_n)\to f(x)$؛ یعنی، اگر $x_۱,x_۲,\dots,x_n,\dots$ یک دنباله از نقاط (X,d) به نقطه x همگرا باشد، آنگاه دنباله $f(x_۱),f(x_۲),\dots,f(x_n),\dots$ در $(Y,d_۱)$ به $f(x)$ همگرا است.

برهان. فرض کنید از $x_n\to x$ نتیجه شود که $f(x_n)\to f(x)$. برای بررسی اینکه f پیوسته است کافی است نشان دهیم که تصویر معکوس هر مجموعه بسته در $(Y,\mathcal{T}_۱)$ یک مجموعه بسته در $(X,\mathcal{T})$ است. پس فرض کنید A یک مجموعه بسته در $(Y,\mathcal{T}_۱)$ باشد. دنباله $x_۱,x_۲,\dots,x_n,\dots$ از نقاط $f^{-۱}(A)$ همگرا به نقطه $x\in X$ را در نظر بگیرید. چون $x_n\to x$ پس $f(x_n)\to f(x)$. اما بدلیل اینکه $f(x_n)\in A$ و A بسته است پس از گزاره ۳.۲.۶ نتیجه می‌شود $f(x)\in A$. پس $x\in f^{-۱}(A)$. بنابراین نشان دادیم که هر دنباله همگرا از نقاط $f^{-۱}(A)$ به نقطه‌ای از $f^{-۱}(A)$ همگراست. پس $f^{-۱}(A)$ بسته است و بنابراین f پیوسته است.

برعکس، فرض کنید f پیوسته باشد و $x_n\to x$. عدد ε را یک عدد حقیقی مثبت در نظر بگیرید. پس گوی باز $B_\varepsilon(f(x))$ یک مجموعه باز در $(Y,\mathcal{T}_۱)$ است. اگر f پیوسته باشد پس $f^{-۱}(B_\varepsilon(f(x)))$ در $(X,\mathcal{T})$ باز و شامل x است. در این صورت یک عدد مثبت مانند $\delta>۰$ وجود دارد بطوری که

$$x\in B_\delta(x)\subseteq f^{-۱}(B_\varepsilon(f(x)).$$

چون $x_n\to x$ پس یک عدد صحیح مثبت مانند $n_۰$ وجود دارد که به ازای هر $n>n_۰$ داریم $x_n\in B_\delta(x)$. پس به ازای هر $n>n_۰$،

$$f(x_n)\in f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

و در نتیجه $f(x_n)\to f(x)$. ■

نتیجه زیر براحتی از گزاره ۴.۲.۶ قابل استنتاج است.

نتیجه ۵.۲.۶ فرض کنید (X,d) و $(Y,d_۱)$ فضاهای متری و f یک نگاشت پیوسته از X بتوی Y و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}_۱$ توپولوژی‌های بدست آمده به ترتیب از d و $d_۱$ باشند. بنابراین $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_۱)$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $x_۰\in X$ و $\varepsilon>۰$، یک عدد مانند $\delta>۰$ وجود داشته باشد بطوری که $x\in X$ و $d(x,x_۰)<\delta\Rightarrow d_۱(f(x),f(x_۱))<\varepsilon$. ■

تمرین‌های ۶.۲

۱. فرض کنید $C[۰,۱]$ و d شبیه مثال ۵.۱.۶ باشند. دنباله‌ای از توابع $f_۱,f_۲,\dots,f_n,\dots$ در $(C[۰,۱],d)$ را با ضابطه

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n},\quad n=۱,۲,\dots,\quad x\in[۰,۱]$$

تعریف کنید. بررسی کنید $f_n\to f_۰$ که در آن به ازای هر $x\in[۰,۱]$ داریم $f_۰(x)=۰$.

۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $x_۱,x_۲,\dots,x_n,\dots$ دنباله‌ای باشد که $x_n\to x$ و $x_n\to y$. ثابت کنید $x=y$.

۳. (i) فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\mathcal{T}$ توپولوژی القایی بر روی X و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots$ دنباله‌ای از نقاط X باشد. ثابت کنید $x_n \to x$ اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز U شامل x، یک عدد صحیح و مثبت مانند $n_۰$ وجود داشته باشد که برای تمام $n \geq n_۰$ داشته باشیم $x_n \in U$.
(ii) فرض کنید X یک مجموعه و d و $d_۱$ دو متر معادل روی X باشد. از (i) نتیجه بگیرید اگر در (X,d) داشته باشیم $x_n \to x$ آنگاه در $(X,d_۱)$ خواهیم داشت $x_n \to x$.

۴. نتیجه ۵.۲.۶ را ثابت کنید.

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots$ دنباله‌ای از نقاط X باشد. گوییم $x_n \to x$ اگر به ازای هر مجموعه باز U شامل x، یک عدد صحیح و مثبت مانند $n_۰$ وجود داشته باشد که برای تمام $n \geq n_۰$ داشته باشیم $x_n \in U$. یک مثال از یک فضای توپولوژیک و یک دنباله را پیدا کنید بطوری که $x_n \to x$ و $x_n \to y$ ولی $x \neq y$.

۶. (i) فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد و $x_n \to x$ که $x_n \in X$ و $x \in X$. مجموعه A را یک زیرمجموعه از X در نظر بگیرید که شامل x و تمام نقاط x_n باشد. ثابت کنید A در (X,d) بسته است.
(ii) از (i) نتیجه بگیرید که مجموعه $\{۲ - \frac{۱}{n} : \ n = ۱, ۲, \ldots\} \cup \{۲\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است.
(iii) بررسی کنید که مجموعه $\{۲ - \frac{۱}{n} : \ n = ۱, ۲, \ldots\}$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست.

۷. (i) فرض کنید $d_۱, d_۲, \ldots, d_m$ مترهایی بر روی مجموعه X و $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ اعداد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید که d یک متر روی X است که در آن، به ازای هر $x, y \in X$،

$$d(x,y) = \sum_{i=۱}^{m} a_i d_i(x,y).$$

(ii) اگر $x \in X$ و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots$ دنباله‌ای از نقاط X باشد بطوری که در هر فضای متری (X,d_i) داشته باشیم $x_n \to x$ آنگاه ثابت کنید که در فضای متری (X,d) نیز داریم $x_n \to x$.

۸. فرض کنید X، Y، $d_۱$، $d_۲$ و d مثل تمرین شماره ۴ از بخش ۱.۶ باشد. اگر در $(X,d_۱)$ داشته باشیم $x_n \to x$ و در $(Y,d_۲)$ داشته باشیم $y_n \to y$، ثابت کنید که در $(X \times Y)$ خواهیم داشت

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle.$$

۹. فرض کنید A و B دو مجموعه ناتهی در فضای متری (X,d) باشند. تعریف

$$\rho(A,B) = \inf\{d(a,b) : \quad a \in A, \ b \in B\}.$$

را در نظر بگیرید. [$\rho(A,B)$ را فاصله بین دو مجموعه A و B می‌نامند.]
(i) اگر S یک زیرمجموعه ناتهی از (X,d) باشد، ثابت کنید $\overline{S} = \{x : \ x \in X \text{ و } \rho(\{x\},S) = ۰\}$.
(ii) اگر S یک زیرمجموعه ناتهی از (X,d) باشد، آنگاه تابع $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \rho(\{x\},S), \quad x \in X$$

پیوسته است.

۱۰. (i) به ازای هر عدد صحیح n، فرض کنید f_n یک تابع پیوسته از $[۰,۱]$ بتوی خود است و فرض کنید بطوری که به ازای هر n، $f_n(a) = a$، $a \in [۰,۱]$. بعلاوه فرض کنید f یک تابع پیوسته از $[۰,۱]$ بتوی خودش باشد. اگر در $(C[۰,۱], d^*)$ داشته باشیم $f_n \to f$ که d^* متر استفاده شده در مثال ۶.۱.۶ است باشد ثابت کنید که a نیز یک نقطه ثابت f است.
(ii) نشان دهید که اگر بجای متر d^* متر d استفاده شده در مثال ۵.۱.۶ را جایگزین کنیم ممکن است گزاره (i) نادرست باشد.

۳.۶ کامل بودن

تعریف ۱.۳.۶ یک دنباله از نقاط فضای متری (X,d) مانند $x_۱, \dots, x_n, \dots$ را یک دنباله کوشی [1] می‌گویند اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon (> ۰)$، یک عدد صحیح مثبت مانند $n_۰$ موجود باشد بطوری که به ازای هر دو عدد صحیح $m > n_۰$ و $n > n_۰$ داشته باشیم

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

گزاره ۲.۳.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $x_۱, x_۲, \dots, x_n, \dots$ دنباله‌ای از نقاط آن باشد. اگر نقطه‌ای مانند $a \in X$ وجود داشته باشد که این دنباله به آن همگرا باشد، یعنی، $x_n \to a$ ، آنگاه دنباله کوشی است.

برهان. فرض کنید ε یک عدد حقیقی مثبت باشد. قرار دهید $\delta = \varepsilon/۲$. چون $x_n \to a$، پس یک عدد صحیح مثبت مانند $n_۰$ وجود دارد که به ازای هر $n > n_۰$ داریم $d(x_n, a) < \delta$.
بنابراین فرض کنید $m > n_۰$ و $n > n_۰$. پس $d(x_n,a) < \delta$ و $d(x_m,a) < \delta$.
با استفاده از نامساوی مثلثی برای مترها داریم،

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, a) + d(x_n, a)$$

$$< \delta + \delta$$

$$= \varepsilon$$

که در نتیجه این دنباله واقعا کوشی است. ■

طبیعتا این گزاره باعث می‌شود در مورد عکس گزاره فوق فکر کنیم که آیا هر دنباله کوشی یک دنباله همگرا است. مثال بعد نشان می‌دهد که این مطلب درست نیست.

مثال ۳.۳.۶ بازه باز $(۰,۱)$ را با متر اقلیدسی d در نظر بگیرید. واضح است که دنباله $۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱, \dots$ یک دنباله کوشی است ولی به هیچ نقطه‌ای از $(۰,۱)$ همگرا نیست. ■

[1] Cauchy sequence

تعریف ۴.۳.۶ فضای متری (X,d) را کامل [1] می‌گویند اگر هر دنباله کوشی در آن به نقطه‌ای از (X,d) همگرا باشد.

فورا از مثال ۳.۳.۶ می‌فهمیم که بازه واحد $(۰,۱)$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل نیست. از طرف دیگر، اگر X یک مجموعه متناهی و d یک متر بر روی آن باشد، بوضوح (X,d) یک فضای متری کامل است.
خواهیم دید که $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است. برای اینکار ابتدا مقدماتی را لازم داریم.
بعنوان نماد، دنباله $x_۱, x_۲, \dots, x_n, \dots$ را با $\{x_n\}$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۵.۳.۶ اگر $\{x_n\}$ یک دنباله باشد، دنباله $x_{n_۱}, x_{n_۲}, \dots$ را یک زیردنباله [2] می‌گویند اگر $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \dots$ باشد.

تعریف ۶.۳.۶ فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد. این دنباله را دنباله افزایشی می‌نامند اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \leq x_{n+۱}$ و آن را دنباله کاهشی می‌نامند اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \geq x_{n+۱}$. یک دنباله را یکنوا [3] می‌نامند اگر افزایشی یا کاهشی باشد.

البته اغلب دنباله‌ها افزایشی یا کاهشی نیستند.

تعریف ۷.۳.۶ فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد. عدد $n_۰$ را نوک [4] می‌نامند اگر به ازای هر $n \geq n_۰$ داشته باشیم $x_n \leq x_{n_۰}$.

لم ۸.۳.۶ فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد. بنابراین $\{x_n\}$ دارای یک زیردنباله یکنوا است.

برهان. ابتدا فرض کنبد که دنباله $\{x_n\}$ دارای تعداد نامتناهی نوک باشد. بنابراین یک دنباله مانند $\{x_{n_k}\}$ را انتخاب کنید که هر n_k یک نوک است. بویژه از این انتخاب نتیجه می‌شود که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $x_{n_k} \geq x_{n_{k+۱}}$؛ یعنی $\{x_{n_k}\}$ یک زیردنباله از $\{x_n\}$ است و بنابراین یک زیردنباله یکنوا است.
سپس فرض کنید تنها به تعداد متناهی نوک وجود دارد. بنابراین عددی مانند N وجود دارد که هیچ نوکی مانند $n > N$ وجود ندارد. یک عدد دلخواه $n_۱ > N$ را انتخاب کنید. بنابراین $n_۱$ یک نوک نیست. بنابراین عددی مانند $n_۲ > n_۱$ وجود دارد که $x_{n_۲} > x_{n_۱}$. حال با فرض $n_۲ > N$ نتیجه می‌شود آن نیز یک نوک نیست. بنابراین عدد $n_۳ > n_۲$ با شرط $x_{n_۳} > x_{n_۲}$ موجود است. با ادامه این روش (یعنی استفاده از استقرای ریاضی)، زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ را پیدا کرده‌ایم که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $x_{n_k} < x_{n_{k+۱}}$؛ یعنی، $\{x_{n_k}\}$ یک زیردنباله افزایشی از $\{x_n\}$ است. بدین ترتیب اثبات لم کامل می‌شود. ■

[1] Complete
[2] Subsequence
[3] Monotonic
[4] Peak point

گزاره ۹.۳.۶ فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله یکنوا در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی باشد. پس $\{x_n\}$ به یک نقطه از $\mathbb{R}$ همگرا است اگر و فقط اگر $\{x_n\}$ کراندار باشد.

برهان. بخاطر بیاورید که «کراندار بودن» در ملاحظه ۱.۳.۳ تعریف شده است.

واضح است که اگر $\{x_n\}$ بیکران باشد همگرا نخواهد بود.

فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله افزایشی کراندار باشد. بنابر اصل موضوعه کوچکترین کران بالا، یک کوچکترین کران بالا مانند L برای مجموعه $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ وجود دارد. اگر ε یک عدد حقیقی مثبت باشد، در این صورت یک عدد صحیح مثبت مانند N وجود دارد بطوری که $d(x_N, L) < \varepsilon$؛ در حقیقت، $x_N > L - \varepsilon$.

اما چون $\{x_n\}$ یک دنباله افزایشی و L یک کران بالا است پس به ازای هر $n > N$ داریم

$$L - \varepsilon < x_n < L.$$

یعنی $x_n \to L$.

حالتی که $\{x_n\}$ یک دنباله کاهشی کراندار می‌شود که به همین ترتیب حکم برقرار است و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. ■

بعنوان نتیجه‌ی لم ۸.۳.۶ و گزاره ۹.۳.۶ خواهیم داشت:

قضیه ۱۰.۳.۶ (قضیه بولزانو–وایرشتراس [1]) هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک زیردنباله همگرا دارد.

حال می‌توانیم ثابت کنیم که $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است.

[1] Bolzano-Weierstrass Theorem

نتیجه ۱۱.۳.۶ فضای متری $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است.

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در $(\mathbb{R}, d)$ باشد.

با نشان دادن همگرا بودن این دنباله کوشی دلخواه در $\mathbb{R}$ در حقیقت نشان داده‌ایم که فضای متری مذکور کامل است. گام اول این خواهد بود که ثابت کنیم این دنباله کراندار است.

چون $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است پس یک عدد صحیح مثبت مانند N وجود دارد بطوری که به ازای هر $n > N$ و $m > N$ داریم $d(x_n, x_m) < ۱$؛ یعنی، $|x_n - x_m| < ۱$. قرار دهید $M = |x_۱| + |x_۲| + \ldots + |x_N| + ۱$. در اینصورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $|x_N| < M$؛ یعنی، دنباله $\{x_n\}$ کراندار است.

بنابر قضیه بولزانو-وایرشتراس ۱۰.۳.۶ این دنباله دارای یک زیردنباله همگرا است؛ یعنی، عددی مانند $a \in \mathbb{R}$ و یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد با این خاصیت که $x_{n_k} \to a$.

حال نشان خواهیم داد که نه تنها این زیردنباله به a همگرا است بلکه خود دنباله نیز به a همگرا است.

فرض کنید ε یک عدد حقیقی مثبت باشد. چون $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است پس یک عدد صحیح مثبت مانند $N_۰$ وجود دارد که به ازای هر $n \geq N_۰$ و $m \geq N_۰$ داریم

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

چون $x_{n_k} \to a$، پس یک عدد صحیح و مثبت مانند $N_۱$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $n_k \geq N_۱$ داریم

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین با انتخاب $N_۲ = \max\{N_۰, N_۱\}$ و ترکیب دو نامساوی بالا، به ازای هر $n > N_۲$ و هر $n_k > N_۲$ خواهیم داشت

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲}$$

$$= \varepsilon$$

در نتیجه $x_n \to a$ و اثبات نتیجه کامل می‌شود. ■

نتیجه ۱۲.۳.۶ به ازای هر عدد صحیح مثبت m، فضای متری $\mathbb{R}^m$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است.

برهان. تمرین ۴ از بخش ۳.۶ را ببینید. ■

گزاره ۱۳.۳.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری، Y یک زیرمجموعه ار X و $d_۱$ متر القا شده بر روی Y توسط d باشد.

(i) اگر (X,d) یک فضای متری کامل و Y زیرفضای بسته (X,d) باشد، آنگاه $(Y,d_۱)$ یک فضای متری کامل است.

(ii) اگر $(Y,d_۱)$ یک فضای متری کامل باشد آنگاه Y زیرفضای بسته (X,d) است.

برهان. تمرین ۵ از بخش ۳.۶ را ببینید. ■

ملاحظه ۱۴.۳.۶ مثال ۳.۳.۶ نشان داد که $(۰,۱)$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل نیست. با این حال، نتیجه ۱۱.۳.۶ نشان داد که $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است. همچنین می‌دانیم که فضاهای توپولوژیک $(۰,۱)$ و $\mathbb{R}$ همریخت هستند. بنابراین کامل بودن تحت همریختی‌ها حفظ نمی‌شود و در نتیجه یک خاصیت توپولوژیکی نیست.

تعریف ۱۵.۳.۶ یک فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را کاملا مترپذیر [1] می‌گویند هرگاه یک متر مانند d روی X موجود باشد بطوری که $\mathcal{T}$ توپولوژی روی X مشخص شده با d باشد و (X,d) یک فضای متری کامل باشد.

ملاحظه ۱۶.۳.۶ توجه کنید که در واقع کاملا مترپذیر بودن یک خاصیت توپولوژیکی است. بعلاوه، بسادگی می‌توان بررسی کرد که (تمرین شماره ۷ از بخش ۳.۶ را ببینید) هر فضای گسسته و هر بازه در $\mathbb{R}$ با توپولوژی القایی بطور کامل مترپذیر است. بنابراین به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $a<b$، فضاهای توپولوژیک $\mathbb{R}$، $[a,b]$، (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$، $(-\infty,a]$، (a,∞)، $[a,\infty)$، و $\{a\}$ با توپولوژی‌های خود بطور کامل مترپذیر هستند. تا حدودی تعجب‌آور اینکه بعدا خواهیم دید که حتی فضای $\mathbb{P}$ از اعداد گنگ با توپولوژی القایی کاملا مترپذیر است. همچنین چون $(۰,۱)$ یک زیرفضای کاملا مترپذیر از $\mathbb{R}$ است که یک زیرمجموعه بسته نیست، متوجه می‌شویم که اگر فضای متری کامل با کاملا مترپذیر جایگزین شود ممکن است قسمت (ii) از گزاره ؟؟ درست نباشد. ■

تعریف ۱۷.۳.۶ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را جداپذیر [2] می‌نامند اگر دارای یک تعداد شمارا زیرمجموعه چگال باشد.

در تمرین شماره ۴ از بخش ۲.۳ دیده شد که $\mathbb{R}$ و هر فضای توپولوژیک شمارا یک فضای جداپذیر است. مثال‌های دیگری در تمرین شماره ۷ از بخش ۱.۶ ارایه می‌شود.

تعریف ۱۸.۳.۶ فضای توپولوژیکی $(X,\mathcal{T})$ را فضای پالیش [3] می‌نامند اگر جداپذیر و تماما مترپذیر باشد.

واضح است که $\mathbb{R}$ یک فضای پالیش است. در تمرین شماره ۶ از بخش ۳.۶ خواهیم دید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $\mathbb{R}^n$ یک فضای پالیش است.

تعریف ۱۹.۳.۶ فضای توپولوژیکی $(X,\mathcal{T})$ را فضای سوسلین [4] می‌نامند اگر یک فضای هاسدورف و تصویر پیوسته یک فضای پالیش باشد. اگر A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(Y,\mathcal{T}_۱)$ باشد بطوری که با توپولوژی القایی $\mathcal{T}_۲$، فضای $(A,\mathcal{T}_۱)$ یک فضای سوسلین باشد آنگاه A را یک مجموعه تحلیلی [5] در $(Y,\mathcal{T}_۱)$ می‌نامند.

[1] Completely metrizable
[2] Separable
[3] Polish space
[4] Souslin space
[5] Analytic set

بوضوح هر فضای پالیش یک فضای سوسیلین است. تمرین‌های شماره ۱۱ و شماره ۱۲ از بخش ۱.۶ نشان می‌دهد که عکس این مطلب نادرست است چراکه فضای سوسلین لزوما مترپذیر نیست. با این حال، خواهیم دید که حتی فضای سوسلین مترپذیر لزوما یک فضای پالیش نیست. برای درک این مطلب توجه داشته باشید که هر فضای توپولوژیک شمارا یک فضای سوسلین است ؛ زیرا این فضا یک تصویر پیوسته از فضای گسسته $\mathbb{N}$ است یک مثال برای این فضا، فضای مترپذیر $\mathbb{Q}$ است که در مثال ۸.۵.۶ خواهیم دید یک فضای پالیش نیست.

می‌دانیم که دو فضای توپولوژیک معادل هستند اگر باهم همریخت باشند. طبیعی است که پرسیده شود تحت چه شرایطی دو فضای متری معادل (بعنوان فضای متری) هستند؟ مفهوم مربوطه در تمرین شماره ۱۰ از بخش ۱.۶ تحت عنوان یکریختی معرفی شده است.

تعریف ۲۰.۳.۶ فرض کنید (X,d) و $(Y,d_۱)$ فضاهای متری باشند. (X,d) را یکریخت با $(Y,d_۱)$ می‌نامند اگر یک نگاشت پوشا $f:X\to Y$ موجود باشد بطوری که به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ در X داشته باشیم $d(x_۱,x_۲)=d_۱(f(x_۱),f(x_۲))$. چنین نگاشتی را یک یکریختی می‌نامند.

فرض کنید d یک متر دلخواه روی $\mathbb{R}$ و a یک عدد حقیقی مثبت باشد. اگر متر $d_۱$ به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ بصورت $d_۱(x,y)=a.d(x,y)$ تعریف شود، براحتی می‌توان ثابت کرد که $(\mathbb{R},d_۱)$ یک فضای متری یکریخت با $(\mathbb{R},d)$ است.

همچنین می‌توان براحتی بررسی کرد که هر دو فضای متری یکریخت دارای فضاهای توپولوژیک مربوطه همریخت هستند و همچنین هر یکریختی یک همریختی از فضای توپولوژیک مربوطه نیز است.

تعریف ۲۱.۳.۶ فرض کنید (X,d) و $(Y,d_۱)$ فضاهای متری و f یک نگاشت از X بتوی Y باشد. همچنین فرض کنید $Z=f(X)$ و $d_۲$ متر القا شده بر روی Z توسط $d_۱$ باشد. اگر $f:(X,d)\to(Z,d_۲)$ یک یکریختی باشد آنگاه f را یک جانشانی یکریخت [1] از (X,d) به $(Y,d_۱)$ می‌نامند.

البته جانشانی طبیعی از $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک جانشانی یکریخت است. همچنین $\mathbb{N}$ با متر اقلیدسی یک جانشانی یکریخت طبیعی بتوی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی دارد.

تعریف ۲۲.۳.۶ فرض کنید (X,d) و $(Y,d_۱)$ فضاهای متری و f یک نگاشت از X بتوی Y باشد. اگر $(Y,d_۱)$ یک فضای متری کامل باشد، همچنین اگر $f:(X,d)\to(Y,d_۱)$ یک جانشانی یکریخت و $f(X)$ یک زیرمجموعه چگال Y در فضای توپولوژیک مربوط باشد، آنگاه $(Y,d_۱)$ تکمیل [2] (X,d) می‌نامند.

بطور واضح، $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی تکمیل $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا با متر اقلیدسی است. همچنین $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی تکمیل $\mathbb{P}$ مجموعه اعداد گنگ با متر اقلیدسی است.

دو سوال فورا به ذهن خطور می‌کند: (۱) آیا هر فضای متری دارای یک فضای تکمیل است؟ (۲) آیا تکمیل یک فضای متری از دیدگاهی منحصربفرد است؟ خواهیم دید که جواب هر دو سوال «مثبت» است.

[1] Isometric embedding

[2] Completion

گزاره ۲۳.۳.۶ هر فضای متری (X, d) دارای فضای تکمیل است.

طرح اثبات. با این بیان شروع می‌کنیم که دو دنباله کوشی $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ در (X, d) معادل هستند اگر در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $d(y_n, x_n) \to ۰$، . در حقیقت این یک رابطه هم‌ارزی است؛ یعنی انعکاسی، متقارن و تراگذری است. حال فرض کنید $\widetilde{X}$ مجموعه تمام دسته‌های هم‌ارزی از دنباله‌های کوشی هم‌ارز در (X, d) باشد. می‌خواهیم یک متر بر روی $\widetilde{X}$ تعریف کنیم.

فرض کنید $\widetilde{y}$ و $\widetilde{z}$ دو نقطه در $\widetilde{X}$ باشد. همچنین دنباله‌های کوشی $\widetilde{y} \ni \{y_n\}$ و $\widetilde{z} \ni \{z_n\}$ را در نظر بگیرید. دنباله $d(y_n, z_n)$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}$ است. (تنمرین شماره ۸ از بخش ۳.۶ را ببینید.) چون $\mathbb{R}$ یک فضای متری کامل است، این دنباله کوشی در $\mathbb{R}$ به یک عدد همگرا است که آن را با $d_۱(\widetilde{y}, \widetilde{z})$ نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان نشان داد که $d_۱(\widetilde{y}, \widetilde{z})$ به انتخاب $\widetilde{y} \ni \{y_n\}$ و $\widetilde{z} \ni \{z_n\}$ بستگی ندارد.

به هر $x \in X$، دنباله ثابت $x, x, \ldots, x, \ldots$ یک دنباله کوشی در (X, d) همگرا به x است. فرض کنید $\widetilde{x}$ نشان دهنده دسته هم‌ارزی دنباله‌های کوشی همگرا به $x \in X$ باشد. زیرمجموعه Y از $\widetilde{X}$ را بصورت $\{\widetilde{x} : x \in X\}$ تعریف کنید. اگر $d_۲$ یک متر روی Y القا شده توسط متر d روی $\widetilde{X}$ باشد، واضح است که نگاشت $f : (X, d) \to (Y, d_۲)$ با ضابطه $f(x) = \widetilde{x}$ یک یکریختی است.

حال نشان می‌دهیم که Y در $\widetilde{X}$ چگال است. برای این منظور نشان می دهیم که به ازای هر عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$ و $z \in \widetilde{X}$، یک عضو مانند $\widetilde{x} \in Y$ وجود دارد که $d_۱(z, \widetilde{x}) < \varepsilon$. توجه داشته باشید که z یک دسته هم‌ارزی از دنباله‌های کوشی است. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در دسته هم‌ارزی z باشد. در اینصورت یک عدد صحیح مثبت مانند $n_۰$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $n > n_۰$ داریم $d_۱(x_n, x_{n_۰}) < \varepsilon$. حال دنباله ثابت $x_{n_۰}, x_{n_۰}, \ldots, x_{n_۰}, \ldots$ را در نظر بگیرید. این دنباله در دسته هم‌ارزی $\widetilde{x_{n_۰}}$ قرار دارد که در Y است. بعلاوه، $d_۱(\widetilde{x_{n_۰}}, z) < \varepsilon$. بنابراین Y واقعا در $\widetilde{X}$ چگال است.

سرانجام، نشان می‌دهیم که $(\widetilde{X}, d_۱)$ یک فضای متری کامل است. فرض کنید $\{z_n\}$ یک دنباله کوشی در این فضا باشد. باید نشان دهیم که این دنباله در $\widetilde{X}$ همگرا است. چون Y چگال است، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، عضو $\widetilde{x_n} \in Y$ وجود دارد بطوری که $d_۱(\widetilde{x_n}, z_n) < ۱/n$. نشان می دهیم که $\{\widetilde{x_n}\}$ یک دنباله کوشی در Y است.

عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$ را در نظر بگیرید.یک عدد صحیح و مثبت مانند N وجود دارد بطوری که به ازای هر $n, m > N$ داریم $d_۱(z_n, z_m) < \varepsilon/۲$. حال عدد صحیح مثبت $n_۱$ را در نظر بگیرید بطوری که $۱\backslash n_۱ < \varepsilon/۴$. به ازای $n, m > n_۱ + N$ داریم

$$d_۱(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) < d_۱(\widetilde{x_n}, z_n) + d_۱(z_n, z_m) + d_۱(z_m, \widetilde{x_m}) < ۱/n + \varepsilon/۲ + ۱/m < \varepsilon.$$

بنابراین $\{\widetilde{x_n}\}$ یک دنباله کوشی در Y است. بدین ترتیب نتیجه می‌شود که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در (X, d) است. بنابراین به ازای عضوی مانند $z \in \widetilde{X}$ داریم $z \ni \{x_n\}$. اینک ابتدا به راحتی نشان می‌دهیم که $\widetilde{x_n} \to z$ و سپس نشان می‌دهیم که $z_n \to z$ که اثبات کامل می‌شود. ■

گزاره ۲۴.۳.۶ فرض کنید (A, d_1) و (B, d_2) فضای متری کامل باشد. همچنین فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از (A, d_1) با متر القا شده d_3 و Y زیرمجموعه‌ای از (B, d_2) با متر القا شده d_4 باشد. بعلاوه، در نظر بگیرید X در (A, d_1) و Y در (B, d_2) چگال باشد. اگر یک یکریختی $f : (X, d_3) \to (Y, d_4)$ موجود باشد آنگاه یکریختی $g : (A, d_1) \to (B, d_2)$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $x \in X$ داریم $g(x) = f(x)$.

طرح اثبات. عضو $a \in A$ را در نظر بگیرید. چون X در (A, d_1) چگال است، یک دنباله $x_n \to a$ وجود دارد که $x_n \in X$. پس دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون f یک یکریختی است پس $\{f(x_n)\}$ یک دنباله کوشی در (Y, d_4) و در نتیجه یک دنباله کوشی در (B, d_2) است. چون (B, d_2) یک فضای متری کامل است پس عضوی مانند $b \in B$ وجود دارد بطوری که $f(x_n) \to b$. پس تعریف می‌کنیم $g(a) = b$.

برای اینکه نشان دهیم g یک نگاشت خوشتعریف از A بتوی B است لازم است بررسی کنیم که اگر z_n یک دنباله دیگر در X باشد که به a همگرا باشد آنگاه $f(z_n) \to b$. می‌توان این را از این حقیقت نتیجه گرفت که اگر $d_1(x_n, z_n) \to 0$ آنگاه $d_2(f(x_n), f(z_n)) = d_4(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

سپس باید نشان دهیم که $g : A \to B$ یک به یک و پوشا است. اثبات این بدلیل ساده بودن آن به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

در آخر، فرض کنید $a_1, a_2 \in A$، $x_{1n} \to a_1$ و $x_{2n} \to a_2$ که هر a_{1n} و هر a_{2n} در X هستند. بنابراین

$$d_1(a_1, a_2) = \lim_{n\to\infty} d_3(a_{1n}, a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} d_4(f(a_{1n}), f(a_{2n})) = d_2(g(a_1), g(a_2))$$

و لذا حقیقتا g یک یکریختی و حکم برقرار است . ■

گزاره ۲۴.۳.۶ می‌گوید که از دیدگاه یکریختی، تکمیل یک فضای متری منحصربفرد است.

این فصل را با معرفی مفهوم دیگری به پایان می‌بریم. بیاد آورید که در مثال ۹.۱.۶ مفهوم فضای برداری نرم‌دار معرفی شد. حال رده بسیار مهمی از فضاهای برداری نرم‌دار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۵.۳.۶ فرض کنید $(N, \|\ \|)$ یک فضای برداری نرم‌دار و d متر متناظر روی مجموعه N باشد. در این صورت $(N, \|\ \|)$ را یک *فضای باناخ* [1] می‌نامند اگر (N, d) یک فضای متری کامل باشد.

از گزاره ۲۳.۳.۶ می‌دانیم که هر فضای برداری نرم‌دار دارای فضای تکمیل است. با این حال، سیمای ترجیحا خوشایند این گزاره این است که فضای تکمیل در حقیقت یک فضای برداری نرم‌دار است و بنابراین یک فضای باناخ است. (تمرین شماره ۱۲ از بخش ۳.۶ را ببینید.)

تمرین‌های ۳.۶

۱. بررسی کنید که دنباله $\{x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\}$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی است. [این دنباله در $\mathbb{Q}$ همگرا نیست. در حالیکه در $\mathbb{R}$ به عدد e همگرا است که یک عدد گنگ است. برای اثبات گنگ بودن e و در حقیقت متعالی بودن آن به جونز و همکاران [۶] مراجعه کنید.]

۲. ثابت کنید که هر زیردنباله یک دنباله کوشی، خود یک دنباله کوشی است.

۳. مثالی از یک دنباله در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی ارایه دهید که هیچ زیردنباله‌ای ندارد که دنباله کوشی باشد.

[1] Banach space

۴. با استفاده از نتیجه ۱۱.۳.۶ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت m، فضای متری $\mathbb{R}^m$ با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است.
[راهنمایی. فرض کنید $\{\langle x_{۱n}, x_{۲n}, \ldots, x_{mn}\rangle : n = ۱,۲,\ldots\}$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}^m$ باشد. ثابت کنید به ازای هر $i = ۱,۲,\ldots,m$ دنباله $\{x_{in} : n = ۱,۲,\ldots\}$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی است و در نتیجه به نقطه a_i همگرا است. سپس نشان دهید که دنباله $\{\langle x_{۱n}, x_{۲n}, \ldots, x_{mn}\rangle : n = ۱,۲,\ldots\}$ به نقطه $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_m\rangle$ همگرا است.]

۵. ثابت کنید هر زیرفضای بسته از یک فضای متری کامل، کامل است و از آنجا هر زیرفضای متری کامل از یک فضای متری بسته است.

۶. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $\mathbb{R}^n$ یک فضای پالیش است.

۷. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$. ثابت کنید هر فضای گسسته و هر کدام از فضاهای $[a, b]$، (a, b)، $[a, b)$، $(a, b]$، $(-\infty, a)$، $(-\infty, a]$، (a, ∞)، $[a, \infty)$ و $\{a\}$ با توپولوژی القایی یک فضای پالیش است.

۸. اگر (X, d) یک فضای متری و دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی باشند ثابت کنید $\{d(x_n, y_n)\}$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}$ است.

۹. جزییات حذف شده از اثبات گزاره ۲۳.۳.۶ را تکمیل کنید.

۱۰. جزییات حذف شده از اثبات گزاره ۲۴.۳.۶ را تکمیل کنید.

۱۱* نشان دهید که هر کدام از فضاهای $(\ell_۱, d_۱)$، $(\ell_۲, d_۲)$، $(c_۰, d_۰)$ و (ℓ_∞, d_∞) از تمرین شماره ۷ از بخش ۱.۶ یک فضای متری کامل است. در حقیقت، نشان دهید که هر کدام از این فضاها طبیعتا یک فضای باناخ است.

۱۲* فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. ثابت کنید که می‌توان یک ساختار فضای برداری نرم‌دار را روی $\widetilde{X}$، فضای متری کامل ساخته شده در گزاره ۲۳.۳.۶، قرار داد. بنابراین هر فضای برداری نرم‌دار دارای یک فضای تکمیل باناخ است.

۱۳ فرض کنید (X, d) یک فضای متری و S یک زیرمجموعه از X باشد. مجموعه S را گراندار می‌نامند اگر یک عدد صحیح مثبت مانند M موجود باشد بطوری که به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $d(x, y) < M$.

(i) نشان دهید که اگر S یک زیرمجموعه کراندار (X, d) باشد و $S = X$، آنگاه (X, d) یک فضای برداری کراندار است. (تمرین شماره ۲ از بخش ۱.۶ را ببینید.)

(ii) فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n, \ldots$ یک دنباله همگرا در فضای متری (X, d) باشد. اگر مجموعه S شامل نقاط (مجزای) این دنباله باشد نشان دهید که S کراندار است.

(iii) فرض کنید $b_۱, b_۲, \ldots, b_n, \ldots$ یک دنباله کوشی در فضای متری کامل (X, d) باشد. اگر T مجموعه نقاط این دنباله باشد، نشان دهید که T یک مجموعه کراندار است.

(vi) آیا گزاره (iii) در بالا با حذف کامل بودن هنوز درست است؟

۱۴ ثابت کنید که فضای متری (X, d) جداپذیر است اگر و تنها اگر فضای توپولوژیک متناظر $(X, \mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن صدق کند. (تمرین ۴ از بخش ۲.۲ را ببینید.)

۱۵ از تمرین ۱۴ در بالا نتیجه بگیرید که اگر (X, d) یک فضای متری جداپذیر و $d_۱$ متر القا شده روی زیرمجموعه Y از X توسط d باشد، آنگاه $(Y, d_۱)$ جداپذیر است؛ بعبارت دیگر هر زیرفضای یک فضای متری جداپذیر، خود جداپذیر است. (باید توجه شود که لزوما یک زیرفضای فضای توپولوژیک جداپذیر، جداپذیر نیست.)

۴.۶ نگاشت‌های انقباض

در فصل ۵ نگاه کوتاهی به قضیه نقطه ثابت داشتیم. در این بخش، نوع دیگری از قضیه نقطه ثابت را خواهیم دید. این بخش بیشتربه نظریه فضاهای متری می‌پردازد تا توپولوژی عمومی. در هر صورت، موضوع نگاشت‌های انقباض دارای کاربردهای مهمی است.

تعریف ۱.۴.۶ فرض کنید f یک نگاشت از مجموعه X بتوی خود باشد. نقطه x را **نقطه ثابت** f می‌نامند اگر $f(x) = x$.

تعریف ۲.۴.۶ فرض کنید (X, d) یک فضای متری و f یک نگاشت از X بتوی خود باشد. f را یک **نگاشت انقباض** [1] می‌نامند اگر عددی مانند $r \in (۰, ۱)$ موجود باشد بطوری که به ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ داشته باشیم

$$d(f(x_۱), f(x_۲)) \leq r.d(x_۱, x_۲).$$

گزاره ۳.۴.۶ فرض کنید f یک نگاشت انقباض از فضای متری (X, d) باشد. پس f یک نگاشت پیوسته است.

برهان. تمرین شماره ۱ از بخش ۴.۶ را ببینید. ■

[1] Contraction mapping

قضیه ۴.۴.۶ (**قضیه نگاشت انقباض یا قضیه نقطه ثابت باناخ**) فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و f یک نگاشت انقباض از (X,d) بتوی خود باشد. آنگاه f دارای دقیقا یک نقطه ثابت است.

برهان. نقطه دلخواه x را در X و دنباله

$$x, f(x), f^{۲}(x) = f(f(x)), f^{۳}(x) = f(f(f(x))), \ldots, f^n(x), \ldots$$

را در نظر بگیرید. نشان خواهیم داد که این دنباله کوشی است. قرار دهید $a = d(x, f(x))$. چون f یک نگاشت انقباض است، عددی مانند $r \in (۰, ۱)$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ داریم $d(f(x_۱), f(x_۲)) \leq r.d(x_۱, x_۲)$.

بوضوح $d(f(x), f^{۲}(x)) \leq r.d(x, f(x)) = r.a$، $d(f^{۲}(x), f^{۳}(x)) \leq r^{۲}.d(x, f(x)) = r \cdot a$ و با استقرا نتیجه می‌شود که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $d(f^k(x), f^{k+۱}(x)) \leq r^k.d(x, f(x)) = r^k.a$.

فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت باشند که $n > m$. در اینصورت

$$d(f^m(x), f^n(x)) = d(f^m(x), f^m(f^{n-m}(x)))$$

$$\leq r^m.d(x, f^{n-m}(x))$$

$$\leq r^m.[d(x, f(x)) + d(f(x), f^{۲}(x)) + \ldots + d(f^{n-m-۱}(x), fn - m(x))]$$

$$r^m.d(x, f(x))[۱ + r + r^{۲} + \ldots + r^{n-m-۱}]$$

$$\leq \frac{r^m.a}{۱ - r}.$$

چون $r < ۱$، واضح است که $f^n(x)$ یک دنباله کوشی است. همچنین بدلیل اینکه (X,d) کامل است، عضوی مانند $z \in X$ موجود است که $f^n(x) \to z$.

با استفاده از گزاره ۳.۴.۶ نتیجه می‌شود که f پیوسته است و

$$f(z) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+۱}(x) = z$$

بنابراین z واقعا یک نقطه ثابت از f است.

در نهایت، فرض کنید t یک نقطه ثابت دلخواه f باشد. بنابراین

$$d(t, z) = d(f(t), f(z)) \leq r.d(t, z).$$

چون $r < ۱$ داریم $d(t, z) = ۰$ و بنابراین $t = z$ و f تنها یک نقطه ثابت دارد. ■

ارزش آن را دارد اشاره شود که قضیه نگاشت انقباض نه تنها وجود نقطه ثابت را ارایه می‌دهد بلکه دستورالعمل یافتن آن را نیز مهیا می‌کند؛ بدین صورت که، x را یک نقطه دلخواه در X در نظر گرفته و حد دنباله $\{f^n(x)\}$ را پیدا کنید. این روش به ما این اجازه را می‌دهد که برای تقریب نقطه حدی با دقت دلخواه از برنامه‌نویسی رایانه‌ای استفاده کنیم.

تمرین‌های ۴.۶

۱. گزاره ۳.۴.۶ را ثابت کنید.

۲. با نشان دادن اینکه اگر f یک نگاشت از فضای متری کامل (X,d) بتوی خود و f^N به ازای برخی عدد صحیح مثبت N یک نگاشت انقباض باشد آنگاه f دقیقا یک نقطه ثابت دارد، قضیه نگاشت انقباض را تعمیم دهید.

۳. قضیه مقدار میانگین بیان می‌کند که: فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازه واحد بسته $[a,b]$ باشد که در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است. در اینصورت، نقطه‌ای مانند $c \in [a,b]$ موجود است بطوری که $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. (بخاطر آورید که f را در نقطه s مشتق‌پذیر می‌نامند اگر $\lim_{x\to s}\frac{f(x)-f(s)}{x-s}=f'(s)$ موجود باشد.)
با استفاده از قضیه مقدار میانگین گزاره زیر را ثابت کنید:
فرض کنید $f:[a,b]\to[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت f یک نگاشت انقباض است اگر و فقط اگر عددی مانند $r\in(۰,۱)$ موجود باشد بطوری که به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $|f'(x)|\leq r$.

۴. با استفاده از تمرین‌های ۲ و ۳ در بالا، نشان دهید که با اینکه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\cos x$ در شرایط قضیه نگاشت انقباض صدق نمی‌کند ولی دارای نقطه ثابت منحصر بفرد است.

۵.۶ فضاهای بئر

قضیه ۱.۵.۶ (قضیه رسته‌ای بئر) [1] فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل باشد. اگر $X_۱,X_۲,\dots,X_n,\dots$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های چگال باز از مجموعه X باشد آنگاه $\bigcap_{n=۱}^{\infty}X_n$ نیز در X چگال است.

برهان. کافی است نشان داده شود که اگر U یک زیرمجموعه باز از (X,d) باشد آنگاه $U\bigcap_{n=۱}^{\infty}X_n\neq\emptyset$.
چون $X_۱$ در X باز و چگال است پس $U\cap X_۱$ یک زیرمجموعه ناتهی و باز از (X,d) است. فرض کنید $U_۱$ یک قرص باز با شعاع حداکثر ۱ باشد بطوری که $\overline{U}_۱\subset U\cap X_۱$.
به ازای هر عدد صحیح و مثبت $n>۱$، بصورت استقرایی قرص باز U_n را با شعاع حداکثر $۱/n$ تعریف کنید بطوری که $\overline{U}_n\subset U_{n-۱}\cap X_n$.
به ازای هر عدد صحیح و مثبت n فرض کنید $\{x_n\}$ یک نقطه دلخواه در U_n باشد. روشن است که دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون (X,d) یک فضای متری کامل است، پس این دنباله به یک نقطه مانند $x\in X$ همگرا می‌شود.
مشاهده می‌کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت m، هر عضو از دنباله $\{x_n\}$ در مجموعه بسته $\overline{U}_m$ قرار دارد، و در نتیجه نقطه حدی نیز در $\overline{U}_m$ واقع است.
پس برای تمامی n، $n\in\mathbb{N}$ داریم $x\in\overline{U}_n$. و لذا $x\in\bigcap_{n=۱}^{\infty}\overline{U}_n$.
اما چون $U\cap\bigcap_{n=۱}^{\infty}X_n\supset\bigcap n=۱^{\infty}\overline{U}_n\ni x$، پس نتیجه می‌شود $U\cap\bigcap_{n=۱}^{\infty}X_n\neq\emptyset$، که برقراری حکم نتیجه می‌شود. ■
در تمرین شماره ۵ از بخش ۲.۳ مفهوم درون یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک معرفی شد.

[1] Baire Category Theorem

تعریف ۲.۵.۶ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A یک زیرمجموعه دلخواه از X باشد. بزرگترین مجموعه باز مشمول در A را درون A می‌نامند و با نماد $Int(A)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۵.۶ زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را هیچ‌جا چگال [1] می نامند اگر درون مجموعه $\overline{A}$ تهی باشد.

این تعریف‌ها به ما اجازه می‌دهد قضیه ۱.۵.۶ را دوباره بیان کنیم .

نتیجه ۴.۵.۶ (قضیه رسته‌ای بئر) فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل باشد. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد بطوری که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$، آنگاه به ازای حداقل یک $n \in \mathbb{N}$ مجموعه $\overline{X_n}$ دارای درون ناتهی است؛ یعنی، X_n هیچ‌جا چگال است.

برهان. تمرین شماره ۲ از بخش ۵.۶ . ■

تعریف ۵.۵.۶ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را فضای بئر [2] می‌نامند اگر به ازای هر دنباله $\{X_n\}$ از زیرمجموعه‌های چگال و باز X، مجموعه $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ نیز در X چگال باشد.

نتیجه ۶.۵.۶ هر فضای کامل مترپذیر کامل یک فضای بئر است. ■

ملاحظه ۷.۵.۶ توجه به این نکته که نتیجه ۶.۵.۶ یک نتیجه در توپولوژی است، نه یک نتیجه در نظریه فضاهای متری حایز اهمیت است.

همچنین توجه کنید که فضاهای بئری وجود دارند که تماما مترپذیر نیستند. (تمرین شماره ۴(iv) از بخش ۵.۶ را ببینید.) ■

مثال ۸.۵.۶ فضای توپولوژیک $\mathbb{Q}$ یک فضای بئر نیست و بنابراین تماما مترپذیر نیست. برای درک این مطلب، توجه کنید مجموعه اعداد گویا شمارا است و قرار دهید $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. هر کدام از مجموعه‌های $X_n = \mathbb{Q}\backslash\{x_n\}$ در $\mathbb{Q}$ باز و چگال است. با این حال، $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. بنابراین $\mathbb{Q}$ دارای خاصیت فضای بئر نیست. ■

ملاحظه ۹.۵.۶ باید توجه کنید که (بعد از بیان قضیه رسته‌ای بئر) اثبات تماما مترپذیر $\mathbb{Q}$ سخت‌تر از اثبات نتیجه کلی‌تر فضای بئر نبودن $\mathbb{Q}$ است.

این یک خصیصه شگفت‌انگیز و مهم نه تنها در توپولوژی بلکه ریاضیات به معنی اعم است که گاها اثبات نتیجه کلی‌تر ساده‌تر است.■

تعریف ۱۰.۵.۶ فرض کنید Y یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. اگر Y بصورت اجتماع شمارا از زیرمجموعه‌های هیچ‌جا چگال X باشد، در اینصورت Y را مجموعه‌ای رده اول [3] یا لاغر [4] در $(X,\mathcal{T})$ می‌نامند. اگر Y مجموعه رده اول نباشد آن را مجموعه رده دوم [5] در $(X,\mathcal{T})$ می‌نامند.

قضیه رسته‌ای بئر دارای کاربردهای زیادی در آنالیز است اما بررسی آنها خارج از مطالعه توپولوژی می‌باشد. با این حال، این فصل را با یک قضیه مهم در نظریه فضای باناخ، یعنی قضیه نگاشت باز به اتمام خواهیم رساند. این قضیه نتیجه قضیه رسته‌ای بئر است.

---

[1] Nowhere dence

[2] Baire space

[3] First Category

[4] Meager set

[5] Second Category

گزاره ۱۱.۵.۶ اگر Y یک زیرمجموعه رده اول از فضای بئر $(X,\mathcal{T})$ باشد آنگاه درون Y تهی است.

برهان. چون Y رده اول است پس $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، Y_n یک مجموعه هیچ‌جا چگال است.
فرض کنید مجموعه $U \in \mathcal{T}$ چنان باشد که $U \subseteq Y$. در اینصورت $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y}_n$.
بنابراین $X \setminus U \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{Y}_n)$، و هرکدام از مجموعه‌های $X \setminus \overline{Y}_n$ یک مجموعه باز و چگال در $(X,\mathcal{T})$ است. چون $(X,\mathcal{T})$ بئر است پس $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{Y}_n)$ در $(X,\mathcal{T})$ چگال است. بنابراین مجموعه بسته $X \setminus U$ در $(X,\mathcal{T})$ چگال است. از این مطلب نتیجه می‌شود که $X \setminus U = X$. و در نتیجه $U = \emptyset$. لذا اثبات کامل می‌شود. ■

نتیجه ۱۲.۵.۶ اگر Y یک زیرمجموعه رده اول از فضای بئر $(X,\mathcal{T})$ باشد آنگاه $X \setminus Y$ یک مجموعه رده دوم است.

برهان. در غیر این صورت، فضای بئر بصورت اجتماع شمارا از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال خواهد بود. ■

ملاحظه ۱۳.۵.۶ چون $\mathbb{Q}$ یک زیرمجموعه رده اول از $\mathbb{R}$ است پس بنا بر نتیجه ۱۲.۵.۶، مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{P}$ یک مجموعه رده دوم است. ■

تعریف ۱۴.۵.۶ فرض کنید S یک زیرمجموعه از فضای برداری حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. مجموعه S را *محدب*[1] می‌نامند اگر به ازای هر $x, y \in S$ و هر عدد حقیقی $0 < \lambda < 1$ نقطه $\lambda x + (1-\lambda) y$ عضو S باشد.

بوضوح هر زیرفضای یک فضای برداری محدب است. همچنین در هر فضای برداری نرم‌دار، هر قرص باز و هر قرص بسته محدب است.

---

[1] Convex set

قضیه ۱۵.۵.۶ (قضیه نگاشت باز) [1] فرض کنید $(B, \|\ \|)$ و $(B_۱, \|\ \|_۱)$ فضاهای باناخ و $L : B \to B_۱$ یک نگاشت خطی (از دیدگاه فضای برداری) پیوسته از B بتوی $B_۱$ باشد. پس L یک نگاشت باز است.

برهان. با استفاده از تمرین شماره ۱(iv) از بخش ۵.۶ کافی است نشان داده شود که عددی مانند $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که برای برخی $s > ۰$ داریم $L(B_N(۰)) \supset B_s(۰)$.

بوضوح $B = \bigcup_{n=۱}^{\infty} B_n(۰)$ و چون L پوشاست خواهیم داشت $B_۱ = L(B) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} L(B_n(۰))$.

چون $B_۱$ یک فضای باناخ است با استفاده از نتیجه ۴.۵.۶ از قضیه‌رسته‌ای بئر، عددی مانند $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که $\overline{L(B_N(۰))}$ دارای درون ناتهی است.

بنابراین عضوی مانند $z \in B_۱$ و $t > ۰$ وجود دارد بطوری که $B_t(z)\overline{L(B_N(۰))}$.

بنابر تمرین شماره ۳ از بخش ۵.۶ با فرض $z \in L(B_N(۰))$ چیزی از کلیت گزاره کاسته نمی‌شود.

اما، $B_t(z) = B_t(۰) + z$، و بنابراین

$$B_t(۰) \subseteq \overline{L(B_N(۰))} - z = \overline{L(B_N(۰)) - z} \subseteq \overline{L(B_N(۰)) - L(B_N(۰))} \subseteq \overline{L(B_{۲N}(۰))}.$$

که از خطی بودن L نتیجه می‌شود که $B_{t/۲}(۰) \subseteq \overline{L(B_N(۰))}$.

نشان خواهیم داد که از این نتیجه می‌شود $B_{t/۴}(۰) \subseteq L(B_N(۰))$.

فرض کنید $w \in B_{t/۴}(۰)$. پس عضوی مانند $x_۱ \in B_N(۰)$ وجود دارد بطوری که $\|w - L(x_۱)\|_۱ < t/۴$.

توجه کنید که بنابر خطی بودن نگاشت L، به ازای هر $k > ۰$ داریم

$$B_{t/۲}(۰) \subseteq \overline{L(B_N(۰))} \Rightarrow B_{t/(۲k)}(۰) \subseteq \overline{L(B_{N/۲k}(۰))}.$$

بنابراین عضوی مانند $x_۲ \in B_{N/۲}(۰)$ وجود دارد بطوری که

$$\|(w - L(x_۱)) - L(x_۲)\|_۱ = \|w - l(x_۱) - L(x_۲)\|_۱ < \frac{t}{۸}$$

با ادامه این روش و با استقرا یک دنباله مانند $\{x_m\}$ بدست می‌آید بطوری که $\|x_m\| < \frac{N}{۲^{m-۱}}$ و

$$\|w - L(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_m)\|_۱ = \|w - l(x_۱) - L(x_۲) - \ldots - L(x_m)\|_۱ < \frac{t}{۲^m}.$$

چون B کامل است پس دنباله $\sum_{m=۱}^{\infty} x_m$ به حد a همگرا است.

واضح است که $\|a\| < ۲N$ و با استفاده از پیوسته بودن L داریم $w = L(a) \in L(B_{۲N}(۰))$.

بنابراین $B_{t/۲}(۰) \subseteq L(B_{۲N}(۰))$ و در نتیجه $B_{t/۴}(۰) \subseteq L(B_N(۰))$ که اثبات را کامل می‌کند. ■

نتیجه بعدی، یک حالت خاص و بسیار مهم از قضیه نگاشت باز است.

نتیجه ۱۶.۵.۶ یک نگاشت خطی یک به یک و پیوسته از یک فضای باناخ بتوی یک فضای باناخ دیگر یک همریختی است. بخصوص، یک نگاشت خطی یک به یک و پیوسته از یک فضای باناخ بتوی خودش یک همریختی است. ■

[1] Open Mapping Theorem

تمرین‌های ۵.۶

۱. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}_1)$ دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_1)$ را **نگاشت باز** می‌نامند اگر به ازای هر زیرمجموعه باز A از $(X,\mathcal{T})$ ، مجموعه $f(A)$ در $(Y,\mathcal{T}_1)$ باز باشد.

(i) نشان دهید که f یک نگاشت باز است اگر و فقط اگر به ازای هر $U\in\mathcal{T}$ و هر $x\in U$، مجموعه $f(U)$ یک همسایگی از $f(x)$ باشد.

(ii) فرض کنید (X,d) و (Y,d_1) دو فضای متری و f یک نگاشت از X بتوی Y باشد. ثابت کنید که f یک نگاشت باز است اگر و فقط اگر به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\in X$ عددی مانند $r>0$ وجود دارد که $f(B_{1/n}(x))\supseteq B_r(f(x))$.

(iii) فرض کنید $(N,\|\ \|)$ و $(N_1,\|\ \|_1)$ دو فضای برداری نرم‌دار و f یک نگاشت خطی از N بتوی N_1 باشد. ثابت کنید که f یک نگاشت باز است اگر و فقط اگر به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، عددی مانند $r>0$ موجود باشد بطوری که $f(B_{1/n}(0))\supseteq B_r(0)$.

(iv) فرض کنید $(N,\|\ \|)$ و $(N_1,\|\ \|_1)$ دو فضای برداری نرم‌دار و f یک نگاشت خطی از N بتوی N_1 باشد. ثابت کنید که f یک نگاشت باز است اگر و فقط اگر عددی مانند $s>0$ موجود باشد بطوری که برای عددی مانند $r>0$ داشته باشیم $f(B_s(0))\supseteq B_r(0)$.

۲. با استفاده از قضیه رسته‌ای بئر، نتیجه ۴.۵.۶ را ثابت کنید.

۳. فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای باناخ B باشد. ثابت کنید گزاره‌های زیر معادل هستند:

(i) درون مجموعه $\overline{A}$ ناتهی است؛

(ii) عضوی مانند $z\in\overline{A}$ و عددی مانند $t>0$ وجود دارند بطوری که $B_t(z)\subseteq\overline{A}$؛

(iii) عضوی مانند $y\in A$ و عددی مانند $r>0$ وجود دارند بطوری که $B_r(y)\subseteq\overline{A}$.

۴. نقطه x را در فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ **نقطه منفرد** [1] می‌گویند اگر $\{x\}\in(X,\mathcal{T})$. ثابت کنید اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای شمارای T_1ـ فضا بدون نقطه منفرد باشد آنگاه یک فضای بئر نخواهد بود.

۵. (i) با استفاده از قضیه رسته‌ای بئر ارایه شده در نتیجه ۴.۵.۶ ثابت کنید $\mathbb{P}$ یک F_σـ مجموعه و $\mathbb{Q}$ یک G_δـ مجموعه در $\mathbb{R}$ نیست.

[راهنمایی. فرض کنید $\mathbb{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ بطوری که هر F_n یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}$ است. حال نتیجه ۴.۵.۶ را برای $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\cup\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ بکار ببرید.]

(ii) فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که $\mathbb{R}$ را بتوی خودش می‌نگارد. f را در نقطه $a\in\mathbb{R}$ **پیوسته** می‌نامند اگر به ازای هر مجموعه باز U شامل $f(a)$، مجموعه بازی مانند V موجود باشد بطوری که $f(V)\subseteq U$. ثابت کنید مجموعه نقاطی از $\mathbb{R}$ که f در آنها پیوسته است یک G_δـ مجموعه است.

(iii) از (i) و (ii) نتیجه بگیرید که هیچ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود ندارد که فقط در نقاط گویا پیوسته باشد.

[1] Isolated Poin

۶. (i) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و Y و S دو زیرمجموعه چگال X باشند. اگر S همچنین یک مجموعه باز در $(X,\mathcal{T})$ باشد ثابت کنید $S \cap Y$ در X و Y چگال است.
(ii) فرض کنید $\mathcal{T}_1$ توپولوژی القا شده بر روی Y توسط $\mathcal{T}$ بر روی X باشد. دنباله $\{X_n\}$ را از زیرمجموعه‌های باز و چگال Y در نظر بگیرید. با استفاده از (i) نشان دهید که $\{X_n \cap Y\}$ یک دنباله باز و چگال از زیرمجموعه‌های $(Y, \mathcal{T}_1)$ است.
(iii) از تعریف ۵.۵.۶ و (ii) در بالا نتیجه بگیرید که اگر $(Y, \mathcal{T}_1)$ یک فضای بئر باشد آنگاه $(X,\mathcal{T})$ نیز یک فضای بئر است. [بنابراین بست یک فضای بئر خود یک فضای بئر است.]
(iv) با استفاده از (iii) نشان دهید که زیرفضای $(Z, \mathcal{T}_2)$ از $\mathbb{R}^2$ با ضابطه

$$Z = \{\langle x,y\rangle :\ x,y\in\mathbb{R},\ y>0\} \cup \{\langle x,0\rangle :\ x\in\mathbb{Q}\}$$

یک فضای بئر است ولی تماما مترپذیر نیست چراکه زیرفضای بسته $\{\langle x,0\rangle \ :\ x\in\mathbb{Q}\}$ با $\mathbb{Q}$ همریخت است که کاملا مترپذیر نیست. این همچنین نشان می دهد که یک زیرفضای بسته از فضای بئر لزوما یک فضای بئر نیست.

۷. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}_1)$ دو فضای توپولوژیک و $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ یک نگاشت باز پیوسته باشد. اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای بئر باشد ثابت کنید $(X, \mathcal{T}_1)$ یک فضای بئر است. [بنابراین تصویر پیوسته و باز یک فضای بئر خود یک فضای بئر است.]

۸. فرض کنید $(Y, \mathcal{T}_1)$ یک زیرفضای باز از فضای بئر $(X,\mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید $(Y, \mathcal{T})$ یک فضای بئر است. [بنابراین یک زیرفضای باز از فضای بئر خود فضای بئر است.]

۹. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. تابع $f : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته از پایین [1] می‌نامند اگر به ازای هر $r\in\mathbb{R}$ مجموعه $f^{-1}((-\infty,r])$ در $(X,\mathcal{T})$ بسته باشد. تابع $f : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته از بالا [2] می‌نامند اگر به ازای هر $r\in\mathbb{R}$ مجموعه $f^{-1}((-\infty,r))$ در $(X,\mathcal{T})$ باز باشد.
(i) ثابت کنید f پیوسته است اگر و تنها اگر نیم‌پیوسته از پایین و نیم‌پیوسته از بالا باشد.
(ii) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای بئر، I مجموعه شماره‌گذار باشد و به ازای هر $x\in X$، مجموعه $\{f_i(x) :\ i\in I\}$ از بالا کراندار باشد که در آن هر نگاشت $f_i : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ نیم‌پیوسته از پایین است. با استفاده از قضیه رسته‌ای بئر ثابت کنید که زیرمجموعه بازی مانند O از $(X,\mathcal{T})$ وجود دارد بطوری که مجموعه $f_i(x) :\ x\in O,\ i\in I$ از بالا کراندار است.
[راهنمایی. فرض کنید $X = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}((-\infty,n])$.]

۱۰. فرض کنید B یک فضای باناخ باشد که بعد فضای برداری زمینه آن شمارا باشد. با استفاده از قضیه رسته‌ای بئر ثابت کنید که بعد فضای برداری آن در حقیقت متناهی است.

۱۱. فرض کنید $(N, \|\ \|)$ یک فضای برداری نرم‌دار و $(X,\mathcal{T})$ زیرفضای محدب $(N, \|\ \|)$ با توپولوژی القایی باشد. نشان دهید که $(X,\mathcal{T})$ همبند مسیری است و بنابراین همبند نیز است. نتیجه بگیرید که هر قرص باز در $(N, \|\ \|)$ همبند مسیری است چون خود $(N, \|\ \|)$ همبند مسیری است.

[1] Lower semicontinuous
[2] Upper semicontinuous

۶.۶ خلاصه

نظریه فضاهای متری بخودی خود یک موضوع بسیار مهم است. همچنین، فضاهای متری جایگاه ویژه‌ای در مطالعه توپولوژی دارند. در حقیقت بسیاری از کتاب‌های توپولوژی با فضاهای متری شروع می‌شوند و انگیزه مطالعه توپولوژی را از آن اتخاذ می‌کنند.

دیدیم که مترهای مختلف روی یک مجموعه، توپولوژی‌های یکسانی را بدست می‌دهند. چنین مترهایی را معادل می‌نامند. با فضاهای تابعی بخصوص $C[\circ, ۱]$، آشنا شدیم. در مسیر، با فضاهای برداری نرم‌دار آشنا شدیم که موضوع مرکزی در آنالیز تابعی است.

همه فضاهای توپولوژیک از فضاهای متر ساخته نمی‌شوند. این حقیقت را با مشاهده این که فضاهای توپولوژیک القا شده توسط فضاهای متری هاسدورف هستند درک کردیم.

دیدیم که توپولوژی یک فضای متری می‌تواند با استفاده از دنباله‌های همگرای آن توصیف شود و توابع پیوسته بین فضاهای متری نیز می‌تواند به همین روش توصیف شود.

در تمرین شماره ۹ از بخش ۲.۶ مفهوم جالب فاصله بین فضاهای متری معرفی شد.

مفاهیم دنباله کوشی، فضای متری کامل، فضای تماما مترپذیر، فضای پالیش و فضای سوسلین را دیدیم. کامل بودن یک موضوع مهم در نظریه فضاهای متری بخاطر نقش مهم آن در آنالیز است. فضاهای باناخ در حقیقت فضاهای برداری نرم‌دار هستند که در قسمت‌های مختلف آنالیز کاربرد دارند و دارای ساختار نظری بسیار قوی است. دیدیم که هر فضای متری دارای فضای تکمیل است، یعنی می‌تواند بصورت یکریخت در یک فضای متری کامل جانشانده شود. بعنوان مثال هر فضای برداری نرم‌دار دارای یک فضای تکمیل باناخ است.

نگاشت‌های انقباض با استفاده از مفهوم نقاط ثابت معرفی شد و اثبات قضیه نگاشت انقباض را دیدیم که به قضیه نقطه ثابت باناخ نیز معروف است. این قضیه بسیار مهم دارای کاربرد زیاد بعنوان مثال در اثبات وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل است.

قضیه مهم دیگر که در این فصل ثابت شد قضیه رسته‌ای بئر است. مفهوم توپولوژیکی فضاهای بئر معرفی شد و دیدیم که هر فضای متری کامل و مترپذیر یک فضای بئر است. در مسیر مفهوم مجموعه رده اول یا لاغر معرفی شد. و سپس قضیه نگاشت باز ثابت شد که بیان می‌کند که یک نگاشت پیوسته خطی از یک فضای باناخ بتوی یک فضای باناخ دیگر باید نگاشت باز باشد.

کتاب‌نامه

[1] Nicolas Bourbaki. General topology v.1 & v.2. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[2] The MacTutor History of Mathematics Archive, http:
www-gap.dcs.st-and.ac.uk/hitory/,2001–.

[3] George E. Simmons. Introduction to topology and modern analysis. McGraw Hill, New York, 1963.

[4] Felix Hausdorff. Set Theory (translated from the original German). Chelsea, New York, 1962.

[5] James Dugundji. Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[6] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. Abstract algebra and famous impossiblities. Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

نمایه

- $C[0,1]$، ۴۷
- F_σـمجموعه، ۳۵
- G_σـمجموعه، ۳۵
- T_0ـفضا، ۲۷
- T_1ـفضا، ۲۷
- T_2:
  - فضا، ۹۸
- T_2ـفضا، ۶۶، ۹۸
- T_3ـفضا، ۶۷
- T_4ـفضا، ۱۰۱
- Z، ۶۵
- $\mathbb{N}$، ۱۴، ۶۵
- $\mathbb{P}$، ۳۵، ۶۵
- $\mathbb{Q}$، ۳۴، ۶۵
- $\mathbb{R}$، ۱۸، ۱۹، ۳۱
- $\mathbb{R}^2$، ۳۹
- $\mathbb{R}^n$، ۳۹
- $\mathbb{Z}$، ۳۴
- ℓ_1، ۱۰۱
- ℓ_2، ۱۰۱
- ℓ_∞، ۱۰۱
- c_0، ۱۰۱
- f^{-1}، ۲۵
- اثبات:
  - اگر و تنها اگر، ۳۶
  - برهان خلف، ۳۳
  - ریاضی، ۱۳
- اثبات ریاضی، ۱۳
- اجتماع:
  - تهی، ۱۷
- اجتماع تهی، ۱۷
- اشتراک توپولوژی‌ها، ۲۸
- اصل:
  - اول شمارا بودن، ۱۰۲
  - کوچکترین کران بالا، ۵۹
- اصل اول شمارا بودن، ۱۰۲
- اصل دوم شمارا بودن، ۴۱
- اصل کوچکترین کران بالا، ۵۹
- انعکاسی، ۶۹
- اینفیمم، ۵۹
- باز:
  - مجموعه، ۲۰
- باز_بسته:
  - مجموعه، ۲۱
- بازه، ۷۴
- برهان خلف، ۳۳
- بزرگترین عضو، ۵۹
- بزرگترین کران پایین، ۵۹
- بست، ۵۳
- بسته:
  - مجموعه، ۲۰
- بعد:
  - صفر، ۸۸
- پوشا، ۲۴
- پیوسته، ۷۹
- پیکان، ۷۹
- پایه، ۳۶
- پایه شمارا، ۱۰۲
- توپولوژی، ۱۴:
  - اشتراک، ۲۸
  - اقلیدسی، ۳۱
  - اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$، ۳۹
  - القا شده توسط متر، ۹۷
  - القایی، ۶۳

بسته‌ـمتناهی، ۲۳
حاصلضرب، ۴۱
زیرفضا، ۶۳
سفت‌تر، ۸۴
شمارا‌ـبسته، ۲۸
قطعه آغازین، ۱۹
قطعه پایانی، ۱۹
گسسته، ۱۵
معمولی، ۶۵
ناگسسته، ۱۵
نرم‌تر، ۸۴
نسبی، ۶۳
هم‌متناهی، ۲۳
توپولوژی اقلیدسی، ۳۱
توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$، ۳۹
توپولوژی القایی، ۶۳
توپولوژی بسته‌ـمتناهی، ۲۳
توپولوژی حاصلضرب، ۴۱
توپولوژی زیرفضا، ۶۳
توپولوژی سفت‌تر، ۸۴
توپولوژی شمارا‌ـبسته، ۲۸
توپولوژی قطعه آغازین، ۱۹
توپولوژی قطعه پایانی، ۱۹
توپولوژی معمولی، ۶۵
توپولوژی نرم‌تر، ۸۴
توپولوژی نسبی، ۶۳
توپولوژی هم‌متناهی، ۲۳
تابع:
پوشا، ۲۴
پیوسته، ۷۹
دوسویه، ۲۴
وارون، ۲۵
یک به یک، ۲۴
تابع پیوسته، ۷۹
تصویر:
وارون، ۲۵
تقارنی، ۶۹
تکمیل، ۱۱۲
تماما:
ناهمبند، ۸۸
تماما کراندار، ۱۰۳
تماما ناهمبند، ۸۸
تهی:
اجتماع، ۱۷
جانشانی یکریخت، ۱۱۲
جدا پذیر، ۵۷
چگال، ۵۴:
همه‌جا، ۵۴
خواص:
جدایی، ۲۹
خواص جدایی، ۲۹
خاصیت:
توپولوژیکی، ۷۸
نقطه ثابت، ۸۷
خاصیت توپولوژیکی، ۷۸
خاصیت نقطه ثابت، ۸۷
خط:
سورگنفری، ۵۸
خط سورگنفری، ۵۸
خمینه توپولوژیک، ۱۰۳
درون، ۵۸
دنباله:
افزایشی، ۱۰۸
کوشی، ۱۰۷
کاهشی، ۱۰۸
همگرا، ۱۰۴
یکنوا، ۱۰۸
دنباله افزایشی، ۱۰۸
دنباله کوشی، ۱۰۷
دنباله کاهشی، ۱۰۸
دنباله همگرا، ۱۰۴
دوسویه، ۲۴
رابطه:
هم‌ارزی، ۷۸
رابطه دوتایی:
انعکاسی، ۶۹
تراگذری، ۶۹
تقارنی، ۶۹

رابطه دوتایی انعکاسی، ۶۹
رابطه دوتایی تراگذری، ۶۹
رابطه دوتایی تقارنی، ۶۹
رابطه هم‌ارزی، ۷۸
زیرپایه، ۴۷
زیردنباله، ۱۰۸
زیرفضا، ۶۳
زیرمجموعه:
چگال، ۵۴
واقعی، ۲۲
همه‌جا چگال، ۵۴
زیرمجموعه واقعی، ۲۲
سوپریمم، ۵۹
شمارا بودن:
اصل دوم، ۴۱
شمارای اول، ۱۰۲
شی، ۷۹
صفر-بعدی، ۸۸
عضو:
بزرگ‌ترین، ۵۹
کوچکترین، ۵۹
فاصله، ۹۱
فاصله بین دو مجموعه، ۱۰۶
فرض کنید:
اثبات با برهان خلف، ۳۳
فضا:
T_0، ۲۷
T_1، ۲۷
T_2، ۶۶
T_3، ۶۷
T_4، ۱۰۱
بردار نرم‌دار، ۹۴
توپولوژیک، ۱۴
توپولوژیک القا شده، ۹۷
جدا پذیر، ۵۷
سیرپینسکی، ۲۸
گسسته، ۱۵
منظم، ۶۷
متری، ۹۱
ناگسسته، ۱۵
ناهمبند، ۶۰
همبند، ۶۰
فضای:
باناخ، ۱۱۴
بئر، ۱۱۹
کاملا مترپذیر، ۱۱۱
مترپذیر، ۹۹
نرمال، ۱۰۱
هاسدورف، ۶۶، ۹۸
فضای مترپذیر، ۹۹
فضای باناخ، ۱۱۴
فضای برداری:
نرم‌دار، ۹۴
فضای برداری تماما کراندار، ۱۰۳
فضای برداری نرم‌دار، ۹۴
فضای بئر، ۱۱۹
فضای پالیش، ۱۱۱
فضای توپولوژیک، ۱۴
فضای توپولوژیک القا شده، ۹۷
فضای جداپذیر، ۱۱۱
فضای سوسلین، ۱۱۱
فضای سیرپینسکی، ۲۸
فضای منظم، ۶۷
فضای متری، ۹۱:
کامل، ۱۰۸
کراندار، ۹۹
فضای متری کامل، ۱۰۸
فضای متری کراندار، ۹۹
فضای نرمال، ۱۰۱
فضای هاسدورف، ۶۶، ۹۸
قضیه:
بولزانو-وایرشتراس، ۱۰۹
رسته‌ای بئر، ۱۱۸
مقدار میانی وایرشتراس، ۸۶
نقطه ثابت باناخ، ۱۱۷
نقطه ثابت بروور، ۸۶
نگاشت انقباض، ۱۱۷
نگاشت باز، ۱۲۱

قضیه بولزانو-وایرشتراس، ۱۰۹
قضیه رسته‌ای بئر، ۱۱۸
قضیه مقدار میانی وایرشتراس، ۸۶
قضیه نقطه ثابت باناخ، ۱۱۷
قضیه نقطه ثابت بروور، ۸۶
قضیه نگاشت انقباض، ۱۱۷
قضیه نگاشت باز، ۱۲۱
کوچکترین عضو، ۵۹
کاملا مترپذیر، ۱۱۱
کران:
  بالا، ۵۹
  بزرگترین کران پایین، ۵۹
  پایین، ۵۹
کران بالا، ۵۹
کران پایین، ۵۹
کراندار، ۵۹:
  از بالا، ۵۹
  از پایین، ۵۹
  فضای متری، ۹۹
  متر، ۹۹
گوی:
  باز، ۹۵
گوی باز، ۹۵
گروه همریختی‌ها، ۷۲
گسسته:
  توپولوژی، ۱۵
  فضا، ۱۵
  متر، ۹۲
موضعی:
  همریخت، ۷۸
  همریختی، ۷۸
مولفه، ۸۷
متر، ۹۱:
  اقلیدسی، ۹۲
  کراندار، ۹۹
  گسسته، ۹۲
  معادل، ۹۷
متر اقلیدسی، ۹۲
متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$، ۹۲
متر کراندار، ۹۹
متر گسسته، ۹۲
متر معادل، ۹۷
متری:
  فضا، ۹۱
مجموعه:
  F_σ، ۳۵
  G_σ، ۳۵
  اعداد حقیقی، ۱۸، ۱۹
  اعداد صحیح، ۳۴
  اعداد صحیح مثبت، ۱۴
  اعداد طبیعی، ۱۴
  اعداد گنگ، ۳۵
  اعداد گویا، ۳۴
  باز، ۲۰
  باز-بسته، ۲۱
  بسته، ۲۰
  تمام اعداد صحیح، ۶۵
  تمام اعداد صحیح مثبت، ۶۵
  تمام اعداد طبیعی، ۶۵
  تمام اعداد گنگ، ۶۵
  تمام اعداد گویا، ۶۵
  تمام تابع‌های حقیقی پیوسته، ۴۷
مجموعه تحلیلی، ۱۱۱
مسیر، ۸۵
معادل:
  متر، ۹۷
  نوک، ۱۰۸
ناگسسته:
  توپولوژی، ۱۵
  فضا، ۱۵
ناهمبند، ۶۰، ۸۴
  تماما، ۸۸
نرم، ۹۴
نرم‌دار:
  فضای برداری، ۹۴
نسبتا:
  اقلیدسی، ۱۰۳
نسبتا اقلیدسی، ۱۰۳

نقطه، ۵۱:
انباشتگی، ۵۱
ثابت، ۸۶
حدی، ۵۱
خوشه‌ای، ۵۱
همسایگی، ۵۶
نقطه انباشتگی، ۵۱
نقطه ثابت، ۸۶
نقطه حدی، ۵۱
نقطه خوشه‌ای، ۵۱
نقطه منفرد، ۱۲۲
نگاشت:
پوشا، ۲۴
پیوسته، ۸۰
دوسویه، ۲۴
وارون، ۲۵
یک به یک، ۲۴
نگاشت انقباض، ۱۱۶
نگاشت پیوسته، ۸۰
وارون:
تابع، ۲۵
تصویر، ۲۵
هیچ‌جا چگال، ۱۱۹
هم‌ارزی:
رابطه، ۷۸
همه‌جا چگال، ۵۴
همبند، ۶۰:
مسیری، ۸۵
همبند مسیری، ۸۵
همریخت، ۶۸:
موضعی، ۷۸
همریخت موضعی، ۷۸
همریختی، ۶۸:
موضعی، ۷۸
همریختی موضعی، ۷۸
همسایگی، ۵۶
همگرا، ۱۰۴
یک به یک، ۲۴
یکریختی، ۱۰۲

inf، ۵۹
Int، ۵۸
sup، ۵۹