Problems In Mathematical Analysis 1,2

Authors:
Hassan Jolany
A.Sadighi (Assistant Professor In Islamic Azad University of Tabriz)

فصل 1
شمارایی و ناشمارایی

سوال1) ثابت کنید مجموعه اعداد حقیقی (R) ناشماراست. (از روش کانتور استفاده نشود).

اثبات: فرض کنیدR شمارا باشد. مثلاً $R=\{x_1,x_2,...\}$ فرض کنیم.

$$I_2=\left(x_2-\frac{1}{8},x_2+\frac{1}{8}\right),\quad I_1=\left(x_1-\frac{1}{4},x_1+\frac{1}{4}\right)$$

بطور کلی برای هر $n\in I$ ، فرض می کنیم I_n بازه $I_n=\left(x_n-2^{-n-1},x_n+2^{-n-1}\right)$.

طول بازه I_n برابر 2^{-n} است پس، مجموع طول همه I_n ها برابر است با:

$$2^{-1}+2^{-2}+2^{-n}+...=+1$$

اما هر $x_n\in I_n$ ، پس $R=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ ، و خط نمایش اعدادحقیقی (که طول اش بی نهایت است) با اجتماع بازه هایی که مجموع طولشان 1 است پوشیده شود. این یک تناقض است.

سوال2) نشان دهید مجموعه مکعب مستطیل هایی که ابعادشان اعداد گویا هستند مجموعه ای شمارا و نامتناهی است.

اثبات: فرض کنید A مجموعه همه مکعب مستطیل هایی مانند M باشد که ابعادشان گویا هستند. در این صورت نگاشت $f:A\to Q\times Q\times Q$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\forall M\in A\qquad f(M)=(a,b,c)$$

که در آن c,b,a به ترتیب به طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل M است. واضح است که f نگاشتی دو سویی است. و لذا خواهیم داشت: $A\sim Q\times Q\times Q$. اما همانگونه که می دانیم مجموعه $Q\times Q\times Q$ مجموعه شمارای نامتناهی است لذا A شمارای نامتناهی خواهد بود.

سوال3) نشان دهید $R^n\sim(0,1)\quad\forall n\in N$ (مفهوم ~ یعنی تناظر یک به یک)

اثبات: اثبات را به استقراء انجام می دهیم.

اولاً به ازای $n=1$ داریم$R\sim(0,1)$ و حکم درست است.

ثانیاً به موجب فرض استقراء قرار می دهیم $R^n\sim(0,1)$ در این صورت باید نشان دهیم$R^{n+1}\sim(0,1)$. بدین جهت توابع f وg را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f:(0,1)\to(0,1)x(0,1)$$

$$f(x)=\left(x,\frac{1}{5}\right)\qquad\forall x\varepsilon(0,1)$$

$$g:(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$$

$$g\left((0/a_1a_2...,0/b_1b_2...)\right)=0/a_1b_1\ a_2b_2...$$

آشکارا پیدا است که توابع f و g تعریف شده در بالا هر دو یک به یک اند و لذا به موجب قضیه شرو در برنشتاین می توان نوشت $(0,1)\times(0,1)\sim(0,1)$. اکنون قرارمی دهیم:

$$R^{n+1}=R^n\times R\sim(0,1)\times(0,1)\sim(0,1)\Rightarrow R^{n+1}\sim(0,1)\quad\forall n\in N$$

(قضیه شرودربرنشتاین: هرگاه B زیرمجموعه ای از A بوده و در صورتی که $f : A \to B$ نگاشتی یک به یک باشد آنگاه A و B در تناظر یک به یک اند).

فصل 2 مسائل بخش نامساوی ها

بخش نامساوی ها

سوال1) $a_n,...a_2,a_1$ عددهایی حقیقی اند $n \geq 2$ و $a_n > a_{n-1} > ... > a_1 > e$.
$b_n,...b_2,b_1$ همان a_i ها منتها به رديفي ديگرند. ثابت کنید:

$$a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}} > b_1^{b_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b_n}}}}}$$

اثبات: اگر $n = 2$، درستی حکم مساله معلوم است زیرا

$$\frac{a_2}{Lna_2} > \frac{a_1}{Lna_1}$$

فرض کنید $n > 2$. توجه کنید که به ازایk ای $b_k > b_{k+1}$. فرض کنید

$$m = b_{k+2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b_n}}}}$$

چون

$$\frac{b_{k+1}^m}{Ln\,b_{k+1}} < \frac{b_k^m}{Ln\,b_k}$$

چون $b_k^{b_{k+1}^m} < b_{k+1}^{b_k^m}$

بنابراین $b_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b_{k+1}^{b_k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b_n}}}}}}}}} > b_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b_k^{b_{k+1}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b_n}}}}}}}}}$

اگر این نحوه استدلال را چندین بار تکرار کنیم معلوم می شود که حکم مساله درست است.

سوال2) فرض کنید عددهای حقیقی $a_n,...,a_2,a_1$ داده شده اند. و

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 - x_i^2}\right)$$

در این صورت $A_{max} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

اثبات: فرض کنید$a_i > 0, -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \dfrac{\pi}{2}, x_i = a_i.\sin\theta_i, (i = 1,2,...,n)$ در این صورت

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sin\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\theta_i\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sin 2\theta_i + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \sin(\theta_i + \theta_j)\right)$$

از اینجا معلوم می شود که بیشترین مقدار A وقتی به دست می‌آید که همه θ_i ها برابر $\frac{\pi}{4}$ باشند یعنی

$$A_{max} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

سوال3) اگر $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ثابت کنید $sin\,2\theta > (tg\,\theta)^{cos\,2\theta}$

براي اثبات از نابرابري ميانگين حسابي- ميانگين هندسي وزندار استفاده مي‌كنيم (اگر $a_1, a_2, ..., a_n, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ عددهايي حقيقي و غيرمنفي باشند آنگاه

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} w_i} \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i}$$

$$\sqrt{2} = \left(\sin^2\theta.\frac{1}{\sin^2\theta} + \cos^2\theta\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{1/2} \geq \left(\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^{\sin^2\theta}.\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\cos^2\theta}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta)^{\sin^2\theta}(\cos\theta)^{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta}(tg\theta)^{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(tg\theta)^{-\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow 2 \geq \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}(tg\theta)^{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta \geq (tg\theta)^{\cos 2\theta}$$

سوال4) اگر $\circ < \theta < \frac{\pi}{4}$ ثابت كنيد: $(sin\,\theta)^{sin\,\theta} < (cos\,\theta)^{cos\,\theta}$

اثبات: چون $0 < tg\,\theta < 1$ از نابرابري ميانگين حسابي – ميانگين هندسي وزندار نتيجه مي شود:

$$(1+tg^2\theta)^{1-tg\theta}(tg^2\theta)^{tg\theta} < (1-tg\theta)(1+tg^2\theta)+tg\theta\, tg^2\theta$$

$$\frac{(sin^2\theta)^{tg\theta}}{cos^2\theta} < 1+tg^2\theta - tg\theta < 1$$

در نتيجه $(sin^2\theta)^{tg\theta} < cos^2\theta$ بنابراين $(sin\,\theta)^{sin\,\theta} < (cos\,\theta)^{cos\,\theta}$

سوال5) x عددي غيرمنفي است و $x<1$ ثابت كنيد عددهايي مثبت مانند C_1, C_2 وجود دارند به طوري كه

$$\frac{C_1}{\sqrt{1-x}} \leq \prod_{k\geq 0}\left(1+x^4\right) \leq \frac{C_2}{\sqrt{1-x}}$$

اثبات: فرض كنيد $f(x) = \prod_{k\geq 0}\left(1+x^{4^k}\right)$ چون $|x|<1$ پس

$$\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^n\right)\ldots=\frac{1}{1-x}$$

بنابراين $f\left(x\right)f\left(x^2\right)=\left(1-x\right)^{-1}$ در نتيجه $\left(f\left(x^2\right)\right)^2\le\left(1-x\right)^{-1}\le\left(f\left(x\right)\right)^2$ و يا

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le f\left(x\right)\le\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$$

سوال6) $a_n,\ldots,a_2,a_1$ عددهاي حقيقي مثبت اند ثابت كنيد

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+a_i\right)\le\sum_{k=\circ}^{n}\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^k}{k!}$$

اثبات : از نابرابري ميانگين حسابي – هندسي نتيجه مي شود:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+a_k\right)\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+a_k}{n}\right)^n=\left(1+\frac{a_1+a_2+\ldots,a_n}{n}\right)^n$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^k}{k!}$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^k}{k!}$$

سوال7) وال ثابت كنيد براي عددهاي مثبت و دلخواه $a_n,\ldots,a_2,a_1$ اين نابرابري برقرار است

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\le e\sum_{k=1}^{n}a_k$$

اثبات: قرار مي دهيم

$$b_k=\frac{\left(k+1\right)^k}{k^{k-1}}=k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\ \left(k=1,2,\ldots,n\right)$$

با توجه به نابرابري $b_k\le ke$ و $b_1\ldots b_k=\left(k+1\right)^k$

و همچنين قضيه مربوط به واسطه ها داريم:

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}=\frac{1}{k+1}\sqrt{\left(a_1b_1\right)\ldots\left(a_kb_k\right)}\le\frac{1}{k\left(k+1\right)}\left(a_1b_1+\ldots+a_kb_k\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j$$

سپس

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2...a_k} \le \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j\right]$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left[a_jb_j\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]$$
$$=\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(a_jb_j\right)\le\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{j}\le e\sum_{j=1}^{n}a_j$$

سوال8) اگر c,b,a عددهايي حقيقي و بزرگتر باشند به ازاي هر r $r>0$ ثابت كنيد

$$S=\left(\log_a^{bc}\right)^r+\left(\log_b^{ca}\right)^r+\left(\log_c^{ab}\right)^r\ge 3\times 2^r$$

اثبات: پيش از هر چيز توجه كنيد $\log_x^y=\dfrac{Ln\,y}{Ln\,x}$ (اگر فرض كنيم $\log_x^y=k$ آنگاه $y=x^k=e^{k\ln x}$ در

نتيجه $Ln\,y=k\,Lnx$ بنابراين

$$log_a^{bc}=\frac{Ln\,bc}{Ln\,a}=\frac{Ln\,b+Ln\,c}{Ln\,a}=\frac{Ln\,b}{Ln\,a}+\frac{Ln\,c}{Ln\,a}$$

اينك بنابر نابرابري ميانگين حسابي – ميانگين هندسي

$$\frac{Lnb}{Lna}+\frac{Lnc}{Lna}\ge 2\left[\frac{Ln\,b.Ln\,c}{(Lna)^2}\right]^{1/2}$$

و در نتيجه $\log_a^{bc}\ge\dfrac{2\left(Ln\,b\,Ln\,c\right)^{1/2}}{Ln\,a}$

كه از آن نتيجه مي‌شود

$$\left(log_a^{bc}\right)^r\ge\frac{2^r\left(Ln\,b.Ln\,c\right)^{r/2}}{\left(Ln\,a\right)^r}$$

به همين ترتيب $\left(log_c^{ab}\right)^r\ge\dfrac{2^r\left(Lna.Ln\,b\right)^{r/2}}{\left(Ln\,c\right)^r}$ و $\left(\log_b^{ca}\right)^r\ge\dfrac{2^r\left(Ln\,c.Ln\,a\right)^{r/2}}{\left(Lnb\right)^r}$

بنابراين

$$S\ge\frac{2^r\left(Lnb.Lnc\right)^{r/2}}{\left(Ln\,a\right)^r}+\frac{2^r\left(Ln\,c.Lna\right)^{r/2}}{\left(Lnb\right)^r}+\frac{2^r\left(Lna.Lnb\right)^{r/2}}{\left(Lnc\right)^r}$$

بالاخره با استفاده از ميانگين حسابي هندسي در طرف راست به دست آوريم

$$\frac{S}{3}\ge\left[\frac{2^r\left(Ln\,b.Ln\,c\right)^{r/2}}{\left(Ln\,a\right)^r}.\frac{2^r\left(Ln\,c.Lna\right)^{r/2}}{\left(Ln\,b\right)^r}\frac{2^r\left(Lna\,Lnb\right)^{r/2}}{\left(Lnc\right)^r}\right]^{\frac{1}{3}}$$

در نتيجه

$$S\ge 3\left[\frac{2^{3r}\left(Lna\,Lnb\,Lnc\right)^r}{\left(Lna.Lnb.Ln\,c\right)^r}\right]^{\frac{1}{3}}$$

يعني $S\ge 3\times 2^r$ و حكم ثابت مي شود

این برهان را مي توانيی در مورد n عدد كه همگي از 1 بزرگترند تعميم دهيد

$$s=\sum_{i=1}^{n}\left(\log_a a_1 a_2 ... a_{i-1} a_{i+1} ... a_n\right)^r \geq n\left(n-1\right)^r$$

سوال9) به كمك استقرا رياضي ثابت كنيد براي هر $n>1$

$$n\,log\,n-n<log\,n!<\left(n+\frac{1}{2}\right)log\,n-n+1 \qquad (1)$$

اثبات: قرار مي دهيم $u(n)=n\log n-n,\ V(n)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$

ابتدا نامساوي $u(n)<\log n!$ را ثابت مي كنيم اين نامساوي براي $n=1$ برقرار است فرض كنيد كه اين نامساوي براي $n=k$ برقرار باشد يعني $u(k)<\log k!$ آنگاه

$$u(k)+log\,(k+1)<log\,k!+log(k+1)=log\,(k+1)!$$

اگر نشان دهيم

$$(k+1)log(k+1)-(k+1)<k\,log\,k-k+log(k+1) \qquad (2)$$

آنگاه ثابت كرده‌ايم كه $u(k+1)<\log(k+1)!$ و اين همان نامساوي مورد نظر است فرض كنيد (2) براي يك مقدار k برقرار نباشد يعني

$$(k+1)log(k+1)-(k+1)\geq k\,log\,k-k+log(k+1)$$

در اين صورت $k\log\left[\frac{k+1}{k}\right]\geq 1$ و در نتيجه $\log\left[\frac{k+1}{k}\right]k\geq 1$ بنابراين

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\geq e$$

كه اين خود تناقض است بنابراين (2) برقرار بوده و نامساوي براي $k+1$ درست است

حال نامساوي زير را در نظر بگيريد

$$\log n!<\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1=V\left(n\right) \qquad (5)$$

رابطه (5) براي $n=2$ درست است اگر اين رابطه براي $n=k$ برقرار باشد يعني

$$\log k!<V(k)$$

آنگاه داريم كه

$$\log k!+\log(k+1)<\left(k+\frac{1}{2}\right)\log k-k+1+\log\left(k+1\right)$$

اگر نشان دهيم كه

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\log k-k+1+\log\left(k+1\right)<\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(k+1\right)-\left(k+1\right)+1 \qquad (6)$$

آنگاه ديده مي شود كه (5) براي $n=k+1$ برقرار است نامساوي (6) را چنين مي توان نوشت:

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)log\,\frac{k}{k+1}+1<0$$

و يا

(7) $log\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{2}{2k+1}<0$ قرار مي دهيم $(x>\circ);\ f(x)=\log\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{2x+1}$

به راحتي ثابت مي شود كه براي $x>\circ$ تابع f صعودي و اگر $x\to\infty$ نگاه $f(x)\to 0$ پس $f(x)<0$ براي $x>0$
و حكم از اينجا ثابت مي شود

سوال10) به ازاي كدام عدد حقيقي c نامساوي $\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\le e^{cx^2}$ به ازاي هر عدد حقيقي x برقرار مي شود

حل: اگر نامساوي به ازاي هر x برقرار باشد آنگاه

$$\begin{aligned}0&\le e^{cx^2}-\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n.x^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}\end{aligned}$$

براي آنكه ببينيد چرا $c\ge\frac{1}{2}$ دو طرف را بر x^2 تقسيم كنيد و قرار دهيد $x=0$

از طرف ديگر اگر $c\ge\frac{1}{2}$ آنگاه

$$\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}\le e^{cx^2}$$

و از اينجا نتيجه مي شود كه نامساوي مورد نظر به ازاي هر x برقرار است اگر و فقط اگر $c\ge\frac{1}{2}$ باشد

فصل 3

بخش اعداد گويا و گنگ

سوال 1) فرض كنيد $\frac{a}{b}$ (در كمترين عبارت) نمايش يك عدد گويا در فاصله باز (1و0) باشد ثابت كنيد

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|>\frac{1}{4b^2}$$

اثبات: واضح است كه $2a^2-b^2$ يك عدد صحيح است و چون $b\neq 0$ و $\frac{a}{b}\in(\circ,1)$ پس $2a^2-b^2\neq 0$ اما $2a^2-b^2$ يك عدد صحيح است لذا $\left|2a^2-b^2\right|\ge 1$ در نتيجه

$$\left|\left(\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{a}{b}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|=\frac{\left|2a^2-b^2\right|}{2b^2}\ge\frac{1}{2b^2}$$

اما $\frac{a}{b}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هر دو در $(0,1)$ قرار دارند لذا $2 < \frac{a}{b}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ در نتیجه $\left|\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| > \frac{1}{4b^2}$

سوال2) فاصله باز به طول $\frac{1}{n}$ را روي محور عددهاي حقيقي در نظر مي گيريم (n عددي است درست و مثبت) ثابت كنيد تعداد كسرهاي تحويل ناپذير $\frac{p}{q}(1 \le q \le n)$ در اين فاصله حداكثر برابر است با $\frac{n+1}{2}$

حل: همه نقطه هاي گويا در بازه $\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{n}\right)$ را به دو زير مجموعه تقسيم مي كنيم $\left\{\frac{u_i}{v_i}\right\}$ و $i=1,2,\ldots,r$ كه در آن مخرج V_i در فاصله 1 و $\frac{n}{2}$ واقع است و $\left\{\frac{x_i}{y_i}\right\}$ و $i=1,2,\ldots,S$ كه در آن مخرج y_i در بازه $\frac{n}{2} < y_i \le n$ قرار دارد.

و همه اين كسرها تحويل ناپذيراند. براي هر V_i، عدد درستي مانند c_i وجود دارد. به نحوي كه داشته باشيم $\frac{n}{2} \le c_i v_i \le n$.

تعريف مي كنيم $y_{s+i}=c_i v_i$ و $x_{s+i}=c_i u_i$. هيچ دو عضوي از مجموعه $\{y_i | 1 \le i \le r+s\}$ وجود ندارد. كه با هم برابر باشند. زيرا از برابري $y_j = y_k$ نتيجه

مي شود $\left|\frac{x_i}{y_i}-\frac{x_k}{y_k}\right| \ge \frac{1}{y_i} \ge \frac{1}{n}$ و اين، با اين فرض كه طول بازه برابر $\frac{1}{n}$ است، تناقض دارد. بنابراين تعداد نقطه هاي متمايز گويا، برابر است با $r+s \le n-\left[\frac{n}{2}\right] \le \frac{n+1}{2}$

سوال3) ثابت كنيد. متناظر با هر عدد گنگ α، عدد صحيح يكتايي چون m وجود دارد به طوري كه $-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}$

حل: به عنوان تمرين به دانشجو واگذار مي شود.

سوال4) α عددي حقيقي است و $\cos\pi\alpha=\frac{1}{3}$ ثابت كنيد α عددي گنگ است.

اثبات: فرض كنيد $\alpha=\frac{r}{s}$ كه در آن r و s عددهايي درست اند و $s>0$ در اين صورت عددهاي متمايز از هم در ميان عددهاي $\cos(n\pi\alpha),\ n\in z$ حداكثر $2s$ است. چون $\cos\pi\alpha=\frac{1}{3}$، از دستور $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ و به استقرا مي توان نتيجه گرفت كه $\cos(2^m\pi\alpha)=\frac{t}{3^{2^{m-1}}}$ كه در آن t عددي درست است و مضرب 3 نيست. بنابراين تعداد عددهاي متمايز در ميان عددهاي $\cos(2^m\pi\alpha)$، كه $m=1,2,\ldots$ ، نامتناهي است؛ پس α عددي گنگ است.

سوال5) فرض $f(x)=x^n$ كه در آن n عددي طبيعي و ثابت است. و x در مجموعه همه عددهاي طبيعي $1,2,3,\ldots$ تغيير مي كند، با قرار دادن رقمهاي $f(1), f(2), \ldots$ به دنبال هم، عددهاي اعشاري y_n را مي سازيم.

$$y_n = 0.\left(\overline{f(1)}\right)\left(\overline{f(2)}\right)\left(\overline{f(3)}\right)\ldots\ldots$$

بعنوان مثال $y_1 = 0.249162\ldots$

ثابت كنيد y_n ها همواره گنگ اند.

اثبات: توانهاي 10 موجب مي شود كه هر y_n شامل رشته هاي به اندازه دلخواه طويلي از *0* ها باشد.

$$f\left(10^k\right)=10^{kn}=100,...,0$$

ولي هيچ عدد گوياي اعشاري شامل رشته هاي به اندازه دلخواه طويلي از *0* ها نيست. مگر اينكه عدد اعشاري مختوم باشد. پس اگر y_n گويا باشد. الزاماً مختوم است ولي هر بار كه

مقدار x^n اي را به رشته اضافه مي كنيم رقم غيرصفري در ابتدايش وجود دارد و در نتيجه y_n مختوم نيست.

سوال6) به ازاي هر عدد گوياي ناصفر r ، $cosr$ عددي اصم است.

اثبات: چون $\cos(-r)=\cos r$ ، كافي است كه حكم را در حالتي كه $r>0$ ثابت مي كنيم. پس فرض مي كنيم r عدد گوياي مثبت باشد. و $\dfrac{a}{b}$ نمايش استانده آن $(a>0,b>0)$ ، و $\cos r$ گويا باشد (برهان خلف) و $\dfrac{c}{d}$ يك نمايش استانده آن. ذيلاً به استخراج تناقضي از فرض خلف مي پردازيم. به ازاي عدد فرد اول دلخواه p (كه بعدا آن را به شرايطي مقيد خواهيم كرد)، بسجمله اي $f(x)$ را چنين تعريف مي كنيم

$$f(x)=\frac{b^{3p-1}}{(p-1)!}(r-x)^{2p}\left\{r^2-(r-x)^2\right\}^{p-1} \qquad (1)$$

واضح است كه

$$f(x)=x^{p-1}\,\frac{b^{3p-1}(r-x)^{2p}(x-2r)^{p-1}}{(p-1)!} \qquad (2)$$

(اختيار كردن ضريب b^{3p-1} بدين صورت است كه صورت كسر اخير بسجمله اي صحيح الضرايب باشد.)

I . نتيجه اول فرض خلف. بنابر (1) به ازاي

$$0<f(x)<\frac{b^{3p-1}}{(p-1)!}r^{2p}\left(r^2\right)^{p-1}=\frac{r^{4p-2}b^{3p-1}}{(p-1)!} \qquad 0<x<r$$

پس ، اگر $J=d\int_0^r f(x)\sin x\,dx$ آنگاه $|J|\le d\int_0^r f(x)dx\le dr\dfrac{r^{4p-2}b^{3p-1}}{(p-1)!}=\dfrac{c_1c_2^{p-1}}{(p-1)!}$

كه در آن $c_1=dr^3b^2$ و $c_2=r^4b^3$ و چون اعداد c_1 و c_2 مثبت و مستقل از p اند، و همچنين به آساني ثابت مي شود كه حد كسر اخير وقتي كه عدد اول p به سمت ∞ ميل مي كند صفر است. پس عددي فرد اول مانند p' هست كه به ازاي هر عدد اول p كه $p>p'$ ، $\dfrac{c_1c_2^{p-1}}{(p-1)!}<1$. يكي از اين اعداد اول بزرگتر از p' را، كه از a و d نيز بزرگتر باشد. اختيار مي كنيم. اين عدد فرد اول، كه آن را p مي ناميم، از اين به بعد ثابت، و p در تعريف $f(x)$ همين p خواهد بود. پس بنابر آنچه گذشت، $|j|<1$ و يا $-1<j<1$ (3).

II . نتيجه دوم فرض خلف. بسجمله اي $f(x)$ را چنين تعريف مي كنيم $F(x)=\sum_{j=0}^{2p-1}(-1)^j f^{(2j)}(x)$ (4)، واضح است كه $D\{F'(x)\sin x-F(x)\cos x\}=\{F''(x)+F(x)\}\sin x$ اما، از (4) به آساني معلوم مي شود كه $F''(x)=-F(x)+f(x)$ پس، $D\{F'(x)\sin x-F(x)\cos x\}=f(x)\sin x$

بالنتيجه، $\int_0^r f(x)\sin x dx=F'(x)\sin x-F(x)\cos x\Big|_{x=0}^{r}$ ، پس

$$\int_0^r f(x)\sin x dx = F'(r)\sin r - F(r)\cos r + F(0)$$

الف) پس بنابر (1)، $f(x)$ بسجمله‌اي است برحسب $(r-x)^2$ پس ، بنابر (4) و لم (اگر $f(x)$ بسجمله اي برحسب $(r-x)^2$ باشد به ازاي هر عدد طبيعي فرد j ، $f^{(j)}(r)=0$. در فصل مشتق ثابت مي شود)، $F'(r)=0$.

ب) بنابر (2)، بصورت و با شرايط بسجمله اي $h(x)$ با شرايط $n=p-1$ لم (فرض كنيم كه n عددي طبيعي باشد، و $g(x)$ بسجمله اي صحيح الضرايب $h(x)=\dfrac{x^n g(x)}{n!}$ در اين صورت، $h^{(j)}(0)$ (مقدار مشتق j ام $h(x)$ به ازاي $x=0$) به ازاي هر عدد صحيح نامنفي j عددي است صحيح، و جز احياناً بازاي $j=n$ ، بر $n+1$ قابل قسمت است. بالاخص اگر $g(0)=0$ آنگاه $n+1 \mid h^{(n)}(0)$ است.

و لهذا، $f^{(2j)}(0)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفیj عددی صحیح و قابل قسمت بر P است، و جز احیاناً به ازای $2j=p-1$. برای تعیین $f^{(p-1)}(0)$ ، ملاحظه می‌کنیم که، بنابر (2)، جمله کمترین درجه $f(x)$ عبارتست از یک جمله ای

$$\frac{b^{2p-1}}{(p-1)!}(-r)^{2p}(-2r)^{p-1}x^{p-1} = \left(\frac{2^{p-1}a^{3p-1}}{(p-1)!}x^{p-1}\right)$$

و درجه سایر جملات $f(x)$ از $p-1$ بیشتر است. پس، $f^{(p-1)}(0)$ مساوی با مقدار مشتق $p-1$ ام یک جمله ای مذکور در فوق است. بازاء $x=0$، و آن برابر با $2^{p-1}a^{3p-1}$ می باشد. بالنتیجه $f^{(p-1)}(0)=a^{2p}(2a)^{p-1}$. پس، چون $p>a$ و $p \nmid f^{(p-1)}(0),\ 2 \nmid p$. بنابر آنچه گذشت، و به موجب (4)، عدد $L=F(0)$ عددی صحیح و غیرقابل قسمت بر P است.

پ) بالاخره، به $F(r)$ می پردازیم. بنابر (1)

$$f(r-x)=x^{p-1}.\frac{x^{p+1}(r^2-x^2)^{p-1}b^{3p-1}}{(p-1)!}$$

پس، بسجمله‌ای $h(x)=f(r-x)$ در شرایط لم پرانتز دوم با $n=p-1$ صدق می کند. لهذا، به ازای هر عدد صحیح نامنفیj ، $h^{(j)}(0)$ بر P قابل قسمت است. اما، $h^{(j)}(x)=(-1)^{(j)}f^{(j)}(r-x)$ و لهذا $h^{(j)}(0)=(-1)^j f^{(j)}(r)$ بالنتیجه $P \mid f^{(j)}(r)$. پس بنابر بر (4)، $F(r)=L'P$ ، که L' عددی است صحیح.

خلاصه، با توجه به (5)، $J=-PL'c+dL$ که $P \nmid L$. چون $p>d$ ، $P \nmid dL$. پس J عدد صحیحی ناصفر است. نتیجه اخیر با (3) در تناقض است و حکم برقرار است.

سوال7) اگر $r \neq 0$ عددی گویا باشد آنگاه $sinr$ و $sin^2 r$ گنگ اند.

اثبات: اگر $r \neq 0$ و $sin r$ یا $sin^2 r$ گویا باشند از تساوی $cos 2r = 1-2 sin^2 r$ لازم می آید که $\cos 2r$ گویا باشد و این با مساله 6 در تناقض است.

سوال8) ثابت کنید اگر r عددی گویا و مخالف صفر باشد آنگاه $Arc\sin r$ و $Arc\cos r$ گنگ اند.

اثبات: زیرا اگر مثلاً $Arc\cos r = s \in Q$ آنگاه $r=\cos s$ ؛ و این، در صورتی که $s \neq 0$ با قضیه قبل متناقض است.

سوال9) ثابت کنید π عددی گنگ است.

اثبات: 1- عدد گویا است پس بنابر مساله 8 ، $Arc\cos(-1)$ عددی گنگ خواهد بود و چون $Arc\cos(-1)=\pi$ پس π عددی گنگ خواهد بود.

سوال10) p و q را دو عدد طبیعی دلخواه می گیریم. ثابت کنید چند جمله‌ای $p(x)$ با ضرایب درست وجود دارد به نحوی که به ازای همه مقدارهای بازه‌ای مثل $I\subseteq R$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\left|P(x)-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$$

اثبات: برای *q=1* فرض کنید $p(x)=p$. $q>1$ و بازه به طول $\frac{1}{q}$ را به صورت $\left(\frac{1}{2q},\frac{3}{2p}\right)$ در نظر می گیریم. چون

داریم: $\frac{3}{2q}<1$. بنابراین عددی مثل $m\in N$ وجود دارد که برای آن،

داشته باشیم: $a=1-\left(\frac{1}{2q}\right)^m;\left(\frac{3}{2q}\right)^m<\frac{1}{q}$ می گیریم، در این صورت، برای هر $x\in I$ داریم:

$0<1-qx^m<a<1$. عدد n را آنقدر بزرگ انتخاب می کنیم که، برای آن، داشته باشیم $a^n<\frac{1}{pq}$ و فرض می کنیم:

$$p(x)=\frac{p}{q}\left[1-\left(1-q^m\right)^n\right]$$

چند جمله‌ای $p(x)$ ضریب‌هایی درست دارد، زیرا $p(x)=\frac{p}{q}\left[1-\left(1-qx^m\right)\right]Q(x)=px^mQ(x)$ و

ضریب‌های چند جمله‌ای $Q(x)$ عددهایی درست اند. به ازای $x\in I$ داریم:

$\left|p(x)-\frac{p}{q}\right|=\frac{p}{q}\left|\left(1-q^m\right)^n\right|\leq\frac{p}{q}a^n<\frac{1}{q^2}$ و اثبات تمام می شود.

سوال11) مجموعه غیرتهی $M\subseteq Q$ ، با دو شرط زیر سازگار است:

1) اگر $a\in M\quad,b\in M$ ، آنگاه $ab\in M,a+b\in M$

2) اگر $r\varepsilon Q$ ، آنگاه دقیقاً یکی از سه گزاره زیر درست است $r\in M$ ، $-r\in M$ و $r=0$. ثابت کنید M ، بر مجموعه همه عددهای مثبت گویا منطبق است.

اثبات: از شرط (2) نتیجه می شود که یا $1\in M$ یا $-1\in M$. ولی 1- عضو M نیست زیرا، اگر 1- عضو M باشد، بنابر شرط (1) $(-1)(-1)=1\in M$ که آن وقت با شرط (2) متناقض است.

بنابراین $1\in M$. از شرط (2) نتیجه می‌شود:

$$1+1\in M,2+1\in M,3+1\in M,...$$

یعنی $N\subset M$. اکنون، اگر $\left(-\frac{1}{m}\right)\in M$ که در آن $m\in N$ ، آن وقت با توجه به شرط (1)، $\left(-\frac{1}{m}.m\right)=(-1)\in M$ که درست نیست.

بنابراین $\left(-\frac{1}{m}\right)\notin M$ و $\frac{1}{m}\in M$ (برای هر $m\in N$) در اینجا، از شرط (1) معلوم می‌شود.

$(m.n \in N)$ $n\times\frac{1}{m}=\frac{n}{m}\in M$ در این صورت $\left(-\frac{n}{m}\right)\notin M$ ، برای $n,m\in N$ به جز این ها از شرط 2) بر می آید که $0\notin M$ ، حکم ثابت شد.

سوال12) ثابت کنید به ازای هر مقدار $a,b\in R$ و $\varepsilon>0$ ، عددهای $m\in z$ و $n\in N,K$ وجود دارند که در نابرابری های زیر صدق کنند $|na-k|<\varepsilon$,$|nb-m|<\varepsilon$

اثبات: عدد درست $N>\frac{1}{\varepsilon}$ را انتخاب می کنیم و هرزوج عدد $x,y\in[0,1]$ را ، متناظر با زوج عدد u,v قرار می دهیم که با دستورهای زیر تعریف شده باشند:

$$u=[Nx],V=[Ny]$$

در این صورت، اگر دو زوج (x_1,y_1) و (x_2,y_2) متناظر با یک زوج (u,v) باشند، آن وقت

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{N}\left(u+\{Nx_1\}-\frac{1}{N}(u+\{Nx_2\})\right)\right|=\frac{1}{N}|\{Nx_1\}-\{Nx_2\}|<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

به همین ترتیب $|y_1-y_2|<\varepsilon$ ، چون $v\in\{0,...,N-1\}$ و u بنابراین تعداد همه زوج های (u,v) ، برابر است با N^2 . مجموعه (N^2+1) زوج مقدارهای $x=\{La\},y=\{Lb\}$ $(L=0,1,4,...N^2)$

را در نظر می گیریم . بنابر اصل دیریکله، دست کم دو زوج از این مجموعه مثلاً به ازای $(i>j,L=j,L=i)$ ، متناظر با یک زوج (u,v) خواهند بود. بنابراین، اگر فرض کنیم

$$n=i-j \qquad ,k=[ia]-[ja] \qquad ,m=[ib]-[jb]$$

آن وقت، به نابرابری های مورد نظر می رسیم.

$$|na-k|=|(ia-[ia])-(ja-[ja])|=|\{ia\}-\{ja\}|<\varepsilon$$

$$|nb-m|=|(ib-[ib])-(jb-[jb])|=|\{ib\}-\{jb\}|<\varepsilon$$

سوال13) فرض کنید α,β عددهایی حقیقی اند و γ عددی و غیر صفر و ε عددی حقیقی و مثبت است در این صورت عددهایی درست مانند a,b,n وجود دارند، به طوری که نابرابریهای

$$|n\alpha-a-b\gamma|<\varepsilon n \qquad , \qquad |n\beta-a+b\gamma|<\varepsilon n$$

همزمان درست اند. این موضوع را ثابت کنید

اثبات: عددهایی طبیعی مانند p_1,q_1,p_r انتخاب کنید که

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{2\gamma}-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{\varepsilon}{2|\gamma|} \qquad , \qquad \left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{p_2}{q_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

فرض کنید $a=p_2q_1$ و $b=p_1q_2$ و $n=q_1q_2$ در اینصورت $\frac{a}{n}=\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{b}{n}=\frac{p_1}{q_1}$ و در ضمن

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{b\gamma}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad , \qquad \left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned}\left|\alpha-\frac{a}{n}-\frac{b\gamma}{n}\right| &= \left|\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{a}{n}-\frac{b\gamma}{n}\right| \\ &< \left|\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{b\gamma}{n}\right|+\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a}{n}\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

در نتیجه $|\alpha n-a-b\gamma|<\varepsilon n$ ، همچنین

$$\begin{aligned}\left|\beta-\frac{a}{n}+\frac{b\gamma}{n}\right| &= \left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{a}{n}+\frac{b\gamma}{n}\right| \\ &\le \left|\frac{-(\alpha-\beta)}{2}+\frac{b\gamma}{n}\right|+\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a}{n}\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

در نتیجه $|\beta n-a-b\gamma|<\varepsilon n$

اکنون توجه کنید که اگر $r=\sqrt{m}$ که درآن m عددی طبیعی است که مربع کامل نیست ، معلوم می شود که حکم مساله هم درست است و اثبات تمام است.

سوال14) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله های $\{[n\alpha]\}$, $\{[n\beta]\}$ مجموعه اعداد طبیعی را افراز کنند یعنی $\{[n\beta]\}\cup\{[n\alpha]\}=N \quad , \quad \phi=\{[n\beta]\}\cap\{[n\alpha]\}$

آن است که α,β گنگ باشند و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ (که البته فرض شده است $\alpha>1 \quad , \quad \beta>1$)

اثبات: شرط گنگ بودن α,β ساده است (آن را ثابت کنید) حال ثابت می کنیم شرط $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ شرط لازم و کافی است

بزرگترین m,n که $m\alpha<k+1 \quad , n\beta<k+1$ به ترتیب $\left[\frac{k+1}{\alpha}\right] \quad , \quad \left[\frac{k+1}{\beta}\right]$ هستند پس تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی k در $\{[n\alpha]\}\cup\{[n\beta]\}$ برابر است با

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+\left[\frac{k+1}{\beta}\right]$$

پس $\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta}-2 \ < M < \frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta}$

فرض کنیم $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=r$ پس $(k+1)r-2 < M \ < (k+1)r$

الف) اگر $r<1$ آنگاه به ازای k به اندازه کافی بزرگ $(k+1)r<k$ پس $M<k$ یعنی اعداد کوچکتر یا مساوی k در دو دنباله از k کمتر است ، پس دست کم یک عدد در آنها ظاهر نشده است که خلاف فرض است

ب) اگر $r>1$ آنگاه به ازای k به اندازه کافی بزرگ $(k+1)r-2>k$ پس $M>k$ پس دست کم یک عدد کوچکتر یا مساوی k دوبار ظاهر شده چون جملات هر دنباله متمایز هستند (چرا؟) پس یک جمله در دو دنباله مشترک است که تناقض است از (الف) و (ب) نتیجه می شود که $r=1$

حال ثابت می کنیم اگر $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ آنگاه $\{[n\beta]\},\{[n\alpha]\}$ ، N را افراز می کنند.

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+\left[k+1-\frac{k+1}{\alpha}\right]=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+k-\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]=k$$

چون به ازای هر k درست است به راحتی با استقراء روی k حکم ثابت می شود.

سوال15) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی $0<\varepsilon<r,0<r<1$ وجود دارد که برای هر n عدد حقیقی $a_1,a_2,...,a_n$, $t>0$ وجود داشته باشد که $\{ta_1\},\{ta_2\},...,\{ta_n\}\in(\varepsilon,r)$ $(\{x\}=x-[x])$

اثبات به استقراء به ازای $n=1$ حکم بدیهی است برای $n\geq 2$, a_n را بزرگترین a_i ها می گیریم. طبق فرض برای هر $r'>0$ $\varepsilon'>0$ وجود دارد که برای هر $a_1,a_2,...a_{n-1}>0$, $t'>\circ$ یافت شود که $\{t'a_1\},...,\{t'a_{n-1}\}\in(\varepsilon,r)$

فرض کنید N عددی صحیح باشد که بعداً مشخص می کنیم. طبق اصل لانه کبوتری جزء اعشاری یکی از اعداد $Nt'a_n,...,2t'a_{n-1},t'a_n$ در بازه $\left(-\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)$ می افتد، این عدد را $st'a_n$ بگیرید، و فرض کنید $t=st'+c$ که $c=\frac{(r-N)}{a_n}$ می باشد.

پس $ta_n\in\left(r-\frac{2}{N},r\right)$ حال N را طوری انتخاب می کنیم که $r-\frac{2}{N}>0$ بوده و به این ترتیب $\{ta_n\}\in\left(r-\frac{2}{N},r\right)$ شود. توجه کنید که با این انتخاب N ، $t,c>\circ$ می شوند.برای

بقیه ta_i داریم $k_i+e'<t'a_i<k_i+r'$ که k_i عددی صحیح است

$$sk_i + \varepsilon' < (st' + c)a_i$$
$$sk_i + s\varepsilon' < st'a_i < sk_i + sr'$$
$$< sk_i + sr' + \frac{a_i\left(r - \frac{1}{N}\right)}{a_n}$$
$$\le sk_i + Nr' + r - \frac{1}{N}$$

حال r' را طوری تعیین می کنیم که $Nr' - \frac{1}{N} < 0$ شود ، به این ترتیب $\{ta_i\} \in (\varepsilon', r)$ حال قرار می دهیم $\varepsilon = min\left\{r - \frac{2}{N}, \varepsilon'\right\}$ و خواهیم داشت،

$$0 < \varepsilon < \{ta_1\},\{ta_2\},...\{ta_n\} < r$$

به این ترتیب استقراء کامل می شود و حکم اثبات گردیده است.

فصل 4

چگال بودن مجموعه ها در مجموعه اعداد حقیقی

تعریف: فرض کنیم که I بازه ای غیر خالی از مجموعه اعداد حقیقی باشد، و E مجموعکي از I. مجموعه E را در I چگال می نامیم در صورتی که، به ازاء هر دو عضو I مانند γ_2,γ_1 که $\gamma_1 < \gamma_2$ ، عضوی مانند γ از E باشد که $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$

سوال16) شرط لازم و کافی برای آنکه E در بازه I که $(I \subseteq R)$ چگال باشد آن است که، به ازای هر $\gamma_1 < \gamma_2$ ، از I ، مجموعی $A = \{\gamma | \gamma \in E\ s.t \gamma_1 < \gamma < \gamma_2\}$ نامتناهی است.

برهان. کفایت شرط. به موجب تعریف چگالی بدیهی است، برای اثبات لزوم، فرض کنیم که E در I چگالی باشد ولی حکم برقرار نباشد. بنا به فرض خلف، اعضایی مانند γ_2,γ_1 از I هست که $A, \gamma_1 < \gamma_2$ مجموعه ای متناهی است. بنابه فرض چگالی E در I, $A \neq \phi$ و لهذا A، عضو اقل و عضو اکثر دارد. آنها را، به ترتیب η_2,η_1 می نامیم . بنا بر تعریف $\gamma_1 < \eta_1 \le \eta_2 < \gamma_2$ چون $\gamma_1 < \eta_1, r_1, \eta_1 \in I$ بنابر فرض چگالی، عضوی مانند γ از E هست که $\gamma_1 < \gamma < \eta_1$ پس $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ و لهذا $\gamma \in A$ و این با تعریف η_1 متناقض است.

سوال17) فرض کنید که α,β دو عدد حقیقی باشند و $\alpha < \beta$ و I بازه ی باز (α,β) باشد، E مجموعکی از I، دراین صورت ، شرط لازم و کافی برای آنکه E در I چگال باشد آن است که به ازای هر η از I و هر عدد حقیقی ε که $0< \varepsilon < \min\{\eta-\alpha,\beta-\eta\}$، (1) عضوی مانند γ از E باشد که $|\gamma-\eta| < \varepsilon$

توضیح. چون $\alpha < \eta < \beta$ ، اعداد $\beta-\eta,\eta-\alpha$ مثبت اند . اگر ε در نامساوی (1) صدق کند آنگاه $0 < \varepsilon < \eta-\alpha$, $0 < \varepsilon < \beta-\eta$ و لهذا $\alpha < \eta-\varepsilon < \eta < \eta+\varepsilon < \beta$ (2)

پس ، نامساوی (1) این منظور را تامین می کند که بازه ی باز $(\eta-\varepsilon,\eta+\varepsilon)$ جزء بازه ی I است و η بدان تعلق دارد.

برهان : لزوم : فرض کنیم که E در I چگال باشد، $\eta \in I$، و عدد مثبت ε در نامساوی (1) صدق می کند در این صورت نامساوی های (2) برقرار خواهند بود. پس ، بنابر تعریف

چگالی، (بنابر مساله 15) عضوی مانند γ در E هست که $\eta-\varepsilon < \gamma < \eta+\varepsilon$ و از آنجا $|\gamma-\eta| < \varepsilon$

کفایت : با مفروضات کفایت ، فرض کنیم که γ_2,γ_1 دو عضو دلخواه I باشند و $\gamma_1 < \gamma_2$. بنابر خواص بازه ها ، عضوی مانند η از I هست که $\gamma_1 < \eta < \gamma_2$ (مثلاً η را، توان $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$ گرفت) اکنون فرض کنیم $\varepsilon = min\{\eta-\gamma_1,\gamma_2-\eta\}$ به آسانی معلوم میشود که ε در نامساوی (1) صدق می کند پس ، بنابر مفروضات کفایت عضوی از E مانند γ هست که $|\gamma-\eta| < \varepsilon$. از آنجا

$$\gamma > \eta-\varepsilon \geq \eta-(\eta-\gamma_1) = \gamma_1$$
$$\gamma < \eta+\varepsilon \leq \eta+(\gamma_2-\eta) = \gamma_2$$

خلاصه $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ پس ، حکم به موجب تعریف چگالی محقق می شود.

سوال18) ثابت کنید هر زیر گروه جمعی R یا دوری است یا در R چگالی است.

اثبات: فرض کنید G یک زیر گروه جمعی R باشد . می گیریم $\alpha = inf\, G^+, G^+ = \{a \in G : a > 0\}$ دو حالت پیش می آید: حالت 1) اگر $\alpha > 0$ آنگاه ثابت می کنیم G دوری است. ابتدا نشان می دهیم $\alpha \in G$ فرض می کنیم چنین نباشد. چون $\alpha > 0$، پس عدد طبیعی n_0 ای موجود است که $\frac{1}{n_0} < \alpha$ و به ازای $\varepsilon = \frac{1}{2n_0}$ بنا به تعریف اینفیموم ، یک $a \in G^+$ وجود دارد که $\alpha < a < \alpha + \frac{1}{2n_0}$. حال چون $0 < t = a-\alpha$ و α اینفیموم G^+ است، پس یک $b \in G^+$ وجود دارد که $\alpha < b < \alpha + t$، یا $0 < b-\alpha < t = a-\alpha$ به این ترتیب $a-b = (a-\alpha)+(\alpha-b) > t-t = 0$ یعنی $a-b \in G^+$ از طرفی

$$a-b = |a-b| \leq |a-\alpha| + |b-\alpha| < \frac{1}{2n_0} + t < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{n_0} < \alpha$$

در نتیجه $a-b<\alpha$ با $a-b\in G^{+}$, $\alpha=\inf G^{+}$ تناقض دارد. بنابراین $\alpha\in G$. اکنون ثابت می کنیم Gدوری است و با α تولید می شود. فرض می کنیم $b\in G$. بدیهی است که

یک $n\in z$ یافت می شود که $n\alpha\le b<(n+1)\alpha$ و بنابراین $0\le b-n\alpha<\alpha$. حال اگر $b\ne n\alpha$ ، آنگاه $b-n\alpha$در G^{+} است و از اینفیموم G^{+} کمتر می باشد، که غیر ممکن است. پس $b=n\alpha$ ، و این نشان میدهد که Gدوری است و با α تولید میشود.

حالت 2) اگر $\alpha=0$ ، آنگاه فرض می کنیم x,y دو عدد حقیقی باشند و بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود.

می توانیم بگیریم $0<x<y$ قرار می دهیم $x'=\sup\{a\in G^{+}: a\le x\}$. چون $\alpha=\inf G^{+}=0, y-x'\ge y-x>0$ ، پس یک $b\in G^{+}$ وجود دارد که $0<b<y-x'$ همچنین ، با توجه تعریف x' یک $a\in G^{+}$یافت می شود که $x'-b<a\le x'$ ، بنابراین

$$b+a<(y-x')+a\le y-x'+x'=y$$

در نتیجه $x'<a+b<y$ ، و لذا $x<a+b<y$. از آنجا که $a+b\in G^{+}$. ثابت کرده ایم که بین هر دو عدد حقیقی یکی از اعضای G وجود دارد، یعنی G در R چگال است.

* سوال19) اگر λ عددی گنگ و A یک زیر گروه جمعی Z باشد آنگاه به ازای هر عدد طبیعي k یک عدد گویای $\frac{m}{n}$ موجود است که $m,n\in A$

$$\left|\frac{m}{n}-\lambda\right|<\frac{1}{nk},$$

اثبات: فرض کنیم $G=\{m-n\lambda : m,n\in A\}$. بدیهی است که G یک زیر گروه جمعی R است. اگر G دوری باشد و با یک عضو $m_0-n_0\lambda$ تولید شود، آنگاه چون $\lambda\in G$ پس یک $p\in Z$ یافت می‌شود که $\lambda=p(m_0-n_0\lambda)$. و این نشان می‌دهد که λ ، برخلاف فرض، گویا است. بنابراین G دوری نیست و ،مطابق مسئله قبل باید در R چگال باشد. به این ترتیب، به ویژه صفر یک نقطه حدی G است. و مطابق تعریف. به ازای هر kی متعلق به اعداد N ، یک عضو G مانند $m-n\lambda$ وجود دارد که $\left|\frac{m}{n}-\lambda\right|<\frac{1}{nk}$ یا $|m-n\lambda|<\frac{1}{k}$.

سوال20) اگر $\alpha\in R$ ، λ یک عدد گنگ و A یک زیرگروه جمعی Z باشد، آنگاه دنباله‌های $\{m_k\}$ و $\{n_k\}$ ای در A وجود دارند که $\lim_{k\to\infty}(m_k+n_k\lambda)=\alpha$ ؟

اثبات: مانند حل مساله قبل $G=\{m+n\lambda : m,n\in A\}$ در R چگال است. بنابراین به ازای هر $\alpha\in R$ دنباله‌ای از اعضای G وجود دارد که به α همگراست، یعنی مثل m_k و $k=1,2,3,...,n_k$ از Aوجود دارند که $\lim_{k\to\infty}(m_k+n_k\lambda)=\alpha$.

سوال21) اگر $A \subseteq N$ و یک دنباله اکیداً صعودی $\{a_n\}$ در A موجود باشد که $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ آنگاه مجموعه $S = \left\{ \frac{a}{b} : a,b \in A \right\}$ در $[0,\infty)$ چگالی است.

اثبات: فرض کنید $k \in N,\ x \in (0,1]$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $xa_k > a_1$ به ازای هر $n > k$، می‌توانیم m را طوری در نظر بگیریم که $a_{m-1} < xa_n \le a_m$. پس $a_n \ge a_m$ و

$$0 \le \frac{a_m - xa_n}{a_n} < \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} \le \frac{a_m - a_{m-1}}{a_m} = 1 - \frac{a_{m-1}}{a_m}$$

چون دنباله $\{a_n\}$ صعودی است، $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ، و بنا به نابرابری $\{a_m\}, xa_n \le a_m$ نیز به سمت ∞ میل خواهد کرد. پس با توجه به فرض مساله، حد $1 - \frac{a_{m-1}}{a_m}$ صفر می‌شود و به این ترتیب $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_m}{a_n} - x\right) = 0$. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \frac{a_m}{a_n} = x$.

اگر $x > 1$ آنگاه $y = \frac{1}{x} \in (0,1)$ و بنا به اثبات مسئله 20 دنباله $\left\{ \frac{a_m}{a_n} \right\}$ ای در S موجود است که به y همگرا شود و در نتیجه دنباله $\left\{ \frac{a_n}{a_m} \right\}$ در S به x همگرا می‌باشد. یعنی S در $[0,\infty)$ چگال است.

* توجه شود که عکس مساله بالا درست نیست.

سوال22) هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و بیکران در $[0,\infty)$ باشد که $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ ، آنگاه $\left\{ \frac{a_m}{a_n} : m,n \in N \right\}$ در $[0,\infty)$ چگال است.

اثبات: مانند اثبات مساله قبل عمل می‌کنیم.

سوال 23) اگر P مجموعه اعداد اول باشد، آنگاه ثابت کنید $\left\{ \frac{p}{q} : p,q \in P \right\}$ در $[0,\infty)$ چگال است.

اثبات: اگر فرض کنیم $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ شمارشی از مجموعه اعداد اول باشد که به ازای هر $n \in N$ ، $P_n < P_{n+1}$. آنگاه بنا به قضیه اعداد اول که نشان می‌دهد P_n با $n \log n$ هم ارز است. و مطابق مساله 22 مجموعه $\left\{ \frac{P_m}{P_n} : m,n \in N \right\}$ در $[0,\infty)$ چگال است.

سوال 24) نشان دهید که مجموعه‌های زیر در $[0,\infty)$ چگال هستند.

(الف) $A = \left\{ \frac{S_n}{S_m} : m,n \in N \right\}$ که در آن به ازای $S_n = 1+2+...+n$

(ب) $B = \left\{ log_n^m : 1 < n,m \in N \right\}$

اثبات: به سادگی از مساله 22 و 23 مساله حل می‌شود.

سوال25) $\left\{ \{n\alpha\} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{\ \}$ یعنی جزء کسری عدد و α عددی گنگ است) در $[0,1]$ چگال است یعنی بین هر دو عدد $a,b \in [0,1]$, $n \in N, a < b$ وجود دارد که $a < \{n\alpha\} < b$.

اثبات: دایره‌ای به محیط 1 در نظر می‌گیریم و یک نقطه آنرا مبداء اختیار می‌کنیم و آنرا تقسیم بندی می‌کنیم و سپس نقاط $A_1, A_2, ...$ که فاصله آنها از مبدا $\alpha, 2\alpha, ...$ هستند در نظر بگیرید. هیچ دو نقطه ای به هم منطبق نمی‌شوند زیرا در این صورت α گویا می‌شود (چرا؟)

پس برای هر بازه I هر قدر کوچک دو نقطه A_p, A_{p+q} وجود دارد که فاصله آنها از هم از طول بازه I کمتر است. زیرا اگر فاصله هر دو نقطه از طور بازه I بیشتر باشد تنها تعداد متناهی نقطه روی دایره می‌توان پیدا کرد. ولی از آنجا که فاصله نقاط A_{p+q} و A_{p+2q} از هم از طول بازه I کمتر است و به همین ترتیب A_{p+2q} و A_{p+3q} و همچنین $A_{p+3q}, A_{p+4q}, ...$ این مطلب از آنجا نتیجه می‌شود که

$$(p+q)\alpha - p\alpha = (p+2q)\alpha - (p+q)\alpha = (p+3q)\alpha - (p+2q)\alpha = ...$$

پس $\{A_{p+qi}\}_{i=1}^{\infty}$ دست کم یک نقطه درون بازه I دارد؛ زیرا در غیر این صورت فاصله دو نقطه متوالی این دنباله از طول بازه I بیشتر می‌شود و این تناقض است و از اینجا حکم ثابت می‌شود.

فضاهای متریک

فصل 5

بخش 5: تعریف فضای متریک

سوال 1) هرگاه تابع $f : X \to R$ مفروض باشد در این صورت نگاشت

$$\begin{aligned} &d : X \times X \to R^+ \cup \{0\} \\ &d(x,y) = |f(x) - f(y)| \quad \forall x,y \in X \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم شرط یا شرایطی را بیابید که d یک متریک برمجموعه X باشد.

حل: واضح است که $d(x,y) \geq 0$ و d در شرط نامساوی مثلث برای فضاهای متریک صادق است و همچنین $d(x,y) = d(y,x)$ حال شرط$(d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\left(d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\right) \equiv \left(\left|f(x)-f(y)\right|=0 \Leftrightarrow x=y\right)$$
$$\equiv \left(f(x)-f(y)=0 \Leftrightarrow x=y\right)$$
$$\equiv \left(f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y\right)$$

و لذا شرط اینکه d یک متریک بر X باشد آن است که f تابعی یک به یک باشد.

سوال 2) **ثابت کنید هرگاه (X,d) یک فضای متریک دلخواه باشد. آنگاه مجموعه X را می‌توان از یک متریک کراندار برخوردار نمود.**

اثبات: نگاشت $d_1 : X \times X \to R^+ \cup \{0\}$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} \qquad \forall x,y \in X$$

$$1) \qquad d_1(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$2) d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=d_1(y,x) \quad \forall x,y \in X$$

$$3) d_1(x,z)+d_1(z,y)=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \geq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)+d(x,y)}$$

$$=\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}=\frac{1}{1+\frac{1}{d(x,z)+d(z,y)}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{d(x,y)}}=$$

$$\frac{d(x,y)}{1+(x,y)}=d_1(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

و لذا نامساوی مثلثی $d_1(x,y) \leq d_1(x,z)+d_1(z,y)$ به ازای هر $x,y,z \in X$ برقرار است. از آنجا نگاشت d_1 یک متریک بر مجموعه X است. و همچنین چون

$$d(x,y) \geq 0 \Rightarrow \quad d(x,y) < 1+d(x,y)$$
$$\forall x,y \in X,\ 0 \leq d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1$$

سوال 3) فرض کنیم X مجموعه کلیه توابع حقیقی پیوسته روی فاصله $[a,b]$ باشد فاصله بین $y(t),x(t)$ را با تساوی زیر تعریف می‌کنیم $p(x,y)=\max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)-y(t)|$ ثابت کنید p یک متر است.

اثبات: واضح است که چون $|x(t)-y(t)| \geq 0$ پس $p(x,y) \geq 0$ و همچنین روابط تقارنی و شرط $\left(p(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\right)$ واضح است.

رابطه نامساوی مثلث را ثابت می‌کنیم:

$$|x(t)-y(t)| = |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)| \le |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$
$$\le max|x(t)-z(t)|+max|z(t)-y(t)|$$
$$z \in [a,b] \qquad t \in [a,b]$$
$$= p(x,z)+p(z,y)$$

سوال 4) فرض کنید X فضای تمام دنباله‌های با مقدار های مختلط باشد. تابع d را با

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$$

تعریف می‌کنیم ثابت کنید d یک متریک بر روی فضایی بالا است.

حل: چون $d: ExE \to R^+$ پس $d(x,y)$ باید در R باشد پس باید ثابت کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ همگرا است به یک عددی در R ، چون

$$0 \le |x_n-y_n| < 1+|x_n-y_n|$$
$$\Rightarrow 0 \le \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ همگراست پس سری بالا همگراست. خاصیت اصل تقارن و رابطه$\left(d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\right)$ واضح اند.

خاصیت اصل نامساوی مثلثی را برای d ثابت می‌کنیم طبق اثبات مساله 2 می‌دانیم:

$$\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} \le \frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}$$

$$\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} \le \frac{1}{2^n}\frac{|x_n-z_n|}{|x_n-z_n|+1}+\frac{1}{2^n}\frac{|z_n-y_n|}{|z_n-y_n|+1} \quad n=1,2,3,... \qquad (1)$$

حال از طرفین (1) $\sum_{n=1}^{\infty}$ می‌گیریم. پس می‌بینیم که نامساوی مثلث به راحتی ثابت می‌شود.

1- فرض کنید X فضای تمام دنباله‌های با مقدار های مختلط باشد. تابع d را با

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} \quad -2$$

تعریف می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ همگراست ثابت کنید d یک متر است.

اثبات: روش حل مثل حل مساله (4) می‌باشد.

سوال 6) فرض کنید X فضای همه دنباله‌های با مقدارهای حقیقی یا مختلط باشد. به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^P$ به ازای $P>1$ همگرا باشد و داشته باشیم $d(x,y)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^P\right\}^{1/p}$ یک متر است (z_n دنباله‌ای دلخواه در X است).

ابتدا نامساوی مینکوفسکی را یادآوری می‌کنیم $\left(\sum_{r=1}^{k}(a_r+b_r)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{r=1}^{n}a_r^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{r=1}^{n}b_r^p\right)^{\frac{1}{p}}$

ابتدا باید نشان دهیم که به ازای هر زوج x,y از نقاط مجموعه X, $d(x,y)$ یک عدد حقیقی متناهی است.

(زیرا $d: X\times X \to R^+$ ، پس $\forall x,y\in X;\ d(x,y)\in R^+$)

بنابر نامساوی مینکوفسکی

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n|+|y_n|)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

و چون طبق $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$, $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p$ همگرا هستند. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p$ همگراست پس $p(x,y)$ یک عدد حقیقی متناهی است.

حال خواص تقارنی و رابطه $(d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y)$ اثباتشان واضح است. کافی است خاصیت نامساوی مثلث را ثابت کنیم

$$d(y,z)\le d(x,y)+d(x,z)$$

در رابطه (1) به جای x_n ، x_n-y_n ، و به جای y_n ، x_n-z_n می گذاریم.

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|(x_n-y_n)-(x_n-z_n)\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-y_n\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-z_n\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_n-z_n\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-y_n\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-z_n\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

بنابراین : $p(y,z) \le p(x,y) + p(x,z)$

سوال 7) اگر n عدد صحیح مثبت باشد و $i=1,2,\dots,n,\ (X_i,d_i)$ فضاهای متریک دلخواهی باشند و $X = X_1 \times X_2 \times \dots X_n$ ثابت کنید $d(x,y)$ که در زیر تعریف شده است یک متراست.

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

اثبات: ثابت می کنیم d یک متراست. تنها نامساوی مثلثی را ثابت می کنیم دو اصل تقارن و $\left(d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\right)$ و شرط $d(x,y) \ge 0$ واضح اند.

ابتدا نامساوی کوشی – شوارتز را یادآوری می کنیم اگر b_i, a_i $\quad i=1,2,\dots,n\ ;$ اعداد حقیقی مثبت باشند آنگاه

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

فرض کنیم $x,y,z \in X\ ,\ x=(x_1,x_2,\dots x_n)\ ,\ y=(y_1,y_2,\dots y_n)\ ,\ z=(z_1,z_2,\dots z_n)$

$$d_i(x_i,y_i) \le d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i) \qquad \forall\ i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

پس از مربع کردن همه نامساوی های (1) و جمع کردن طرف های متناظر داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\left(d_i(x_i,y_i)\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(d_i(x_i,z_i)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(d_i(z_i,y_i)\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i)\, d_i(z_i,y_i) \qquad (2)$$

ازطرفی مطابق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i).d_i(z_i,y_i) \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_i(x_i,z_i)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(z_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= d(x,z).d(z,y) \qquad (3)$$

از (2)و(3) نتیجه خواهد شد.

$$\begin{aligned}(d(x,y))^2 &\le (d(x,z))^2+(d(z,y))^2+2d(x,z)d(z,y)\\ &=(d(x,z)+d(z,y))^2\\ d(x,y)&\le d(x,z)+d(z,y)\end{aligned}$$

سوال8) اگر n عددی صحیح و مثبت باشد و (X_i,d_i)، $i=1,2,...n$ ، فضاهای متریک دلخواهی باشند و $X=X_1\times X_2\times X_3\times ...X_n$ و d به صورت زیر تعریف شود ثابت کنید d یک متر است.

$$d(x,y)=max\{d_i(x_i,y_i)\ :\ \ i=1,2,3,...n\}$$

اثبات : تنها اصل نامساوی مثلث را ثابت می کنیم بقیه اصول واضح اند.

واضح است که طبق تعریف d, $d_i(z_i,y_i)\le d(z,y),\ d_i(x_i,z_i)\le d(x,z)$

(4) $d_i(x_i,y_i)\le d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\le d(x,z)+d(z,y)$ داریم و $i=1,2,...,n$ با گرفتن ماکسیمم از طرفین نامساوی (4) داریم.

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

و حکم ثابت می شود.

سوال 9) اگر n عددی صحیح و مثبت باشدو (x_i,d_i), $i=1,2,...,n$ ، فضاهای متریک دلخواهی باشند

$d(x,y)=\max\left\{\dfrac{d_i(x_i,y_i)}{i}\ \middle|\ i=1,2,...,n\right\}$ و $X=X_1\times X_2\times X_3\times ...\times X_n$, d به صورت بالا تعریف شود ثابت کنید d یک متر است.

اثبات: اگر X $x,y,z\in$,$x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$, $z=(z_1,...,z_n)$ آنگاه

$d_i(x_i,y_i)\le d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$ زیرا d_i یک متریک برای X_i است $\forall i=1,2,...,n$ حال طرفین مساوی فوق را بر i تقسیم می کنیم

$$\begin{aligned}\frac{d(x_i,y_i)}{i}&\le\frac{d_i(x_i,z_i)}{i}+\frac{d_i(z_i,y_i)}{i}\quad(1)\\ &\le d(x,z)+d(y,z)\end{aligned}$$

پس $d(x,z)+d(y,z)$ یک کران بالای تمام $\dfrac{d_i(x_i,y_i)}{i}$ هاست . پس با گرفتن max از طرفین رابطه (1) خواهیم داشت

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$$

سوال 10) اگر n عددی صحیح و مثبت باشد و (X_i,d_i) ، $i=1,2,...,n$ ، فضاهای متریک دلخواهی باشند $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ و تابع d را روی $X\times X$ به صورت $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)$ که $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$ تعریف می کنیم ثابت کنید d یک متراست.

اثبات: واضح است که $d(x,y)\geq 0$ زیرا $d_i(x_i,y_i)\geq 0$ (طبق فرض d_i متراند) پس $\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)$ مثبت است.

اثبات تقارنی : چون d_i ها متراند پس $d_i(y_i,x_i)=d_i(x_i,y_i)$ پس

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^{n}d_i(y_i,x_i)=d(y,x)$$

اثبات اصول نامساوی مثلث: کافی است ثابت کنیم $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ چون d_i ها متراند پس اصل نامساوی مثلث در آنها برقرار است پس

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i) \quad (1)$$

با جمع کردن رابطه (1) خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)\leq\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{n}d_i(z_i,y_i)$$
$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

سوال 11) فرض کنید p عددی حقیقی و $p\geq 1$ و n عددی صحیح مثبت و (X_i,d_i) ، $i=1,2,...,n$ ، فضاهای متریک دلخواهی باشند و $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ در این صورت ثابت کنید تابع d_p روی $X\times X$ به صورت $d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i,y_i))^p\right)^{\frac{1}{p}}$ يك متر مي باشد

اثبات: فقط نامساوی مثلثی را برای متر d_p ثابت می کنیم و بقیه اصول دیگر واضح اند.

فرض کنیم $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$, $z=(z_1,...,z_n)$ سه عضو X باشند چون هر یک از d_i ها یک متریک برای X_i ی متناظر است پس

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i) \qquad (1)$$

و طبق نامساوی مینکوفسکی داریم

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(x_i,z_i\right)+d_i\left(z_i,y_i\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(x_i,z_i\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(z_i,y_i\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

حال با در نظر گرفتن (1) و (2) و تعریف d_p خواهیم داشت:

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(x_i,y_i\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(x_i,z_i\right)+d_i\left(z_i,y_i\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

و طبق (2) $\quad \le d_p(x,z)+d_p(z,y)$

پس $d_p(x,y)\le d_p(x,y)+d_p(y,z)$ ، حکم ثابت می شود.

نتیجه : اگر $X_1=X_2=\ldots=X_n$ آنگاه تابع d_p روی $R^n\times R^n$ تعریف می کنیم

$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ که مطابق ادعای مساله 11 ، یک متریک روی R^n است.

سوال 12) اگر X , $\left(X_i,d_i\right)$ برای $i=1,2,\ldots,n$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ اعداد حقیقی و مثبت باشد و برای هر دو عضو X مانند $x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, $y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$ تعریف کنیم $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i\left(x_i,y_i\right)$

ثابت کنید d_1 یک متراست.

حل : برای هر i ، تابع $\alpha_i d_i$ یک تابع متریک برای X_i است . قرار می دهیم $\overline{d_i}=\alpha_i d_i$

برای هر $i=1,2,3,\ldots,n$ ، مطابق مساله 10 خواهیم داشت $\quad d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\overline{d_i}(x_i,y_i)$

که در آن $x=\left(x_1,\ldots,y_n\right)$, $y=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ یک متریک برای X است و حکم ثابت است.

سوال 13اگر $X\neq\phi$ آنگاه تعریف می کنیم$\{f\ \left|f\ :X\ \to C\right.$ یا R و f کرانداراست$\}$ برای f و g در $S(X)$ تعریف می کنیم

$$d(f,g)=\sup_{x\in X}\left|f(x)-g(x)\right|$$

نشان دهید $d : S(X)\times S(X)\to R$ یک متراست

حل: چون $|f(x)-g(x)|\geq 0$ برای $\forall x\in X$ ،

شرط روبرو را بررسی می کنیم $\left(d(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g\right)$

اگر $f=g$ باشد حکم واضح است و اگر $d(f,g)=0$ آنگاه $\sup\limits_{x\in X}|f(x)-g(x)|=0$

پس $f(x)=g(x)$

حال نامساوی مثلثی را بررسی می کنیم

$$\begin{aligned} d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in X\} &\leq \sup\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|, x\in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)-h(x)| : x\in X\}+\sup\{|h(x)-g(x) : x\in X|\} \\ &= d(f,h)+d(h,g) \end{aligned}$$

و حکم ثابت می شود.

سوال 14) فرض کنید X مجموعه همه دنباله های حقیقی باشد. وهمچنین $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y=(y_i)_{i=1}^{\infty}$ تعریف می کنیم

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_{n,\dots}) \qquad p(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\min\{|x_i-y_i|,1\}$$

$$y=(y_1,y_2,\dots,y_n,\dots)$$

ثابت کنید (X,P) یک فضای متریک است.

اثبات: ابتدا نشان می دهیم به ازای هر $x,y\in X$, $p(x,y)\in R$.

می دانیم $min\{|x_i-y_i|,1\}\leq 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}min\{|x_i-y_i|,1\}\leq \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{i}$

پس $p(x,y)\in R$ ، حال نشان می دهیم $p(x,y)\geq 0$

$$\forall i=1,2,\dots \qquad \frac{1}{i^2}\geq 0 \qquad , \qquad |x_i-y_i|\geq 0\ ,\ 1\geq 0 \Rightarrow min\{|x_i-y_i|,1\}\geq 0$$

پس $\sum\frac{1}{i^2}min\{|x_i-y_i|,1\}\geq 0$ پس $p(x,y)\geq 0$

شرط 2: فرض کنید $p(x,y)=0$ باشد در این صورت به وضوح $|x_i-y_i|$ برابر صفر است پس $x_i=y_i$ درنتیجه $x=y$ و همچنین اگر $x=y$ آنگاه $x_i=y_i$ پس $|x_i-y_i|=0$ در نتیجه $\min\{|x_i-y_i|,1\}=0$ پس $p(x,y)=0$

شرط 3: نامساوی مثلثی را بررسی می کنیم

$i=1,2,\dots,n,\dots$ $\qquad |x_i-z_i|\le|x_i-y_i|+|y_i-z_i|$ می دانیم

(1) $\qquad min\{|x_i-z_i|,1\}\le min\{|x_i-y_i|,1\}+min\{|y_i-z_i|,1\}$ پس

با ضرب $\frac{1}{i^2}$ به طرفین نامساوی (1) و گرفتن $\sum_{i=1}^{\infty}$ خواهیم داشت

$$p(x,z)\le p(x,y)+p(y,z)$$

سوال 15) فرض کنید $X=R^2$, $d:X\times X\to R$ که

$$d(x,y)=\begin{cases}|x_2-y_2| & if \quad x_1=y_1\\ |x_1-y_1|+|x_2|+|y_2| & if \quad x_1\ne y_1\end{cases}$$

که $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ نشان دهید که d یک متر بر R^2 است.

اثبات : به سادگی و با استفاده از ویژگی نامساوی مثلث می توانید مساله را حل کنید.

سوال 16) E مجموعه همه توابع دیفرانسیل پذیر است که مشتق آنها بر بازه بسته و کراندار $a\le t\le b$ پیوسته است ثابت کنید که $p(x,y)=|x(a)-y(a)|+sup\{|x'(t)-y'(t)|:t\in[a,b]\}$

اثبات: برای اثبات از مساله های قبل کمک بگیرید.

سوال 17) M مجموعه ای دلخواه است ، و p تابعی است با مقدار حقیقی نامنفی به طوری که به ازای همه اعداد x,y,z از M ، $p(x,y)=0$ اگر و تنها اگر $x=y$, $p(x,y)\le max\{p(x,z),p(y,z)\}$ نشان دهید که p یک متر است.

حل: اثبات ساده است ، کافی است از تعریف متر استفاده کنید.

سوال 18) M مجموعه همه توابع تحلیلی از متغیر مختلط z است که روی قرص واحد $|z|<1$ ، منظم است به طوری که $\sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta<\infty$ ثابت کنید که

$$p(f,g)=\sup_{0\le r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)-g\left(re^{i\theta}\right)\right|^{2}d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

متر روی M است.

حل: اثبات این مساله ترکیب چند مساله قبل می باشد که با استفاده از مساله های قبل می توانید به این مساله پاسخ دهید.

سوال 19) فرض کنیم E مجموعه تمام دنباله ها مانند $\{x_n\}$ در F $(f=c, f=R)$ باشد به طوری که برای یک $N\in N$ (که عموماً به $\{x_n\}$ بستگی دارد) داشته باشیم $\forall n\ge N \Rightarrow x_n=0$ اگر $\{x_n\},\{y_n\}$ دو عضو E باشند و $\alpha\in F$ ، تعریف می کنیم

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\} \qquad , \quad \alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\}$$

ثابت کنید $\|\{x_n\}\|=\sup|x_n|$ ، $\|\ \|$ یک نرم روی E به $R^{+}\cup\{0\}$ است.

سوال20) فرض کنیم p یک عدد ثابت و اول باشد $(p>0)$ ، با تعریف $d:Z\times Z\to R$ به صورت $d(m,m)=0$ و $d(m.n)=\frac{1}{r}$ که در آن $m-n=p^{r-1}k$ (r,k اعداد صحیح و k بر p بخش پذیر نیست) نشان دهید که d یک متر بر Z است.

سوال 21) با اختیار مجموعه A شامل تمام توابع پیوسته $f:[a,b]\to R$ این بار فرض می کنیم $d(f,g)=\int_a^b|f(x-g(x))|dx$ نشان دهید که d یک متر است.

اثبات: چون $|f(x)-g(x)|\ge 0$ در نتیجه $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\ge 0$ پس $d(f,g)\ge 0$ حال ثابت می کنیم اگر $d(f,g)=0$ آنگاه $f=g$ (عکس این حالت واضح است)

(می دانیم اگر $f(x)\ge 0$ و $\int_a^b f(x)dx=0$ آنگاه $f(x)=0$) حال چون $0=\int_a^b|f(x)-g(x)|$ پس $|f(x)-g(x)|=0$ در نتیجه $f(x)=g(x)$

واضح است که چون $|f-g|=|g-f|$ پس $\int_a^b|g-f|dx=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ در نتیجه $d(g,f)=d(f,g)$

بنابر نامساوی مثلثی $|f-h|\le|f-g|+|g-h|$ و با گرفتن انتگرال از a تا b نامساوی $d(f,h)\le d(f,g)+d(g,h)$ هم حل خواهد شد.

تعریف: نقطه چسبیده؛ نقطه $P \in X$ را نقطه چسبیده E می‌نامیم. هرگاه $P \in E$ یا $P \in E'$. مجموعه کلیه نقاط چسبیده E را با نماد $\overline{E}$ نشان داده و آنرا (بستار E) می‌نامیم $\overline{E} = E \cup E'$

$$\equiv P \in \overline{E} \leftrightarrow \forall r \qquad N_r(P) \cap E \neq \phi$$

سوال ثابت کنید $E \subseteq \overline{E}$

اثبات: $\overline{E} = E \cup E' \Rightarrow E \subseteq E \cup E' = \overline{E} \Rightarrow E \subseteq \overline{E}$

سوال 22) هرگاه S' مجموعه مشتق (مجموعه نقاط حدی) و $\overline{S}$ بست S(یا بستارS) در R^n باشد ثابت کنید:

(الف) هرگاه $S \subseteq T$ **، انگاه** $S' \subseteq T'$

(ب) $(S \cup T)' = S' \cup T'$

(پ) اگر $S \subseteq T$ **آنگاه** $\overline{S} \subseteq \overline{T}$

(ت) هرگاه S,T دو زیرمجموعه R^n باشد ثابت کنید $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$

توجه کنید تمامی قسمت های این تمرین در هر فضای متری و برای هر زیر مجموعه اش برقرار خواهد بود.

اثبات: الف)فرض می کنیم $y \in S'$. بنابراین به ازای هر $r > 0$ ای $B_r(x) \cap (S - (x)) \neq \phi$. چون $S \subseteq T$ به ازای هر $r > 0$ ای $B_r(x) \cap (T - \{x\}) \neq \phi$ پس $x \in T'$

ب) $S,T \subseteq S \cup T$ پس طبق الف $T' \subseteq (S \cup T)'$ و همچنین $S' \subseteq (S \cup T)'$ پس $(S' \cup T') \subseteq (S \cup T)'$ حال ثابت می کنیم $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$

$$\begin{aligned}
\forall x \in (S \cup T)' &\Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap \left[(S \cup T) - \{x\}\right] \neq \phi \\
&\Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap \left[(S - \{x\}) \cup (T - \{x\})\right] \neq \phi \\
&\Rightarrow \forall r > 0 \left(B_r(x) \cap \left[S - \{x\}\right]\right) \cup \left[B_r(x) \cap (T - \{x\})\right] \neq \phi \\
&\Rightarrow \forall r > 0 \qquad x \in S' \qquad x \in T' \\
&\Rightarrow \forall r > 0 \qquad x \in (S' \cup T')
\end{aligned}$$

یا

(پ) از الف) استفاده می کنیم $S \subseteq T \Rightarrow S' \subseteq T' \Rightarrow S \cup S' \subseteq T \cup T' \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$

(ت) $S \cap T \subseteq S,T \Rightarrow \overline{S \cap T} \subseteq \overline{S}, \overline{S \cap T} \subseteq \overline{T} \Rightarrow \overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$

سوال: یک مثال ارائه دهید که $\overline{S \cap T}$ زیر مجموعه محض $\overline{S} \cap \overline{T}$ باشد.

(جواب) اگر T,S جدا از هم باشند آنگاه $S \bigcap T = \phi$ پس $\overline{S} \bigcap \overline{T} \supset \phi = \overline{\phi}$ به عنوان مثال اگر S,T برابر اعداد گویا و اصم باشند آنگاه $S \bigcap T = \phi$ ولی $\overline{S} = \overline{T} = R$.

نکات: در حالت کلی بست اجتماع هر خانواده متناهی از زیر مجموعه های M برابر اجتماع بست های آنهاست. برای یک خانواده نامتناهی این حالت که بست اجتماع برابر اجتماع بست های آنهاست الزماً برقرار نیست. اگر A_α یک خانواده نامتناهی از زیر مجموعه های M ، با مجموعه اندیس گذار S باشد تمام آنچه درحالت کلی می‌توانیم ادعا کنیم این است که $\underset{\alpha \in S}{U} \overline{A}\alpha \subseteq \overline{\underset{\alpha \in S}{U} A}\alpha$.

در حالت کلی بست اشتراک هر خانواده – متناهی یا نامتناهی از یک فضای متری محتوی (یا زیر مجموعه) در اشتراک بست های آنهاست.

سوال 23) ثابت کنید $\overline{S \bigcup T} = \overline{S} \bigcup \overline{T}$

جواب: طبق (ب) سوال 22 داریم: $(S \bigcup T)' = S' \bigcup T'$

$$\begin{aligned}(S \bigcup T) U (S \bigcup T)' &= (S' \bigcup T') \bigcup (S \bigcup T) \\ &= (S' \bigcup S) \bigcup (T' \bigcup T) \\ \overline{S \bigcup T} &= \overline{S} \bigcup \overline{T}\end{aligned}$$

تعریف: نقطه $P \in E$ را نقطه منزوی یا تنهای E نامیده می‌شود. اگر نقطه حدی E نباشد

مثال: $E = [0,3)$ نقطه منزوی ندارد.

مثال: $E = (0,3] \bigcup \{4\}$ نقطه منزوی E تنها 4 می‌باشد.

تعریف: زیر مجموعه E از X را بسته می‌نامیم. هرگاه تمام نقاط حدی اش را در برداشته باشد.

تمرین : ثابت کنید اگر E بسته باشد $\overline{E}$ برابر E است و بالعکس.

اثبات: $(if \quad A \subset B \Leftrightarrow A \bigcup B = B)$

$E' \subseteq E \Leftrightarrow \overline{E} = E \bigcup E' = E \leftrightarrow E$ بسته است.

مثال: کدام مجموعه بسته است

(الف) E بسته نیست $\quad E = (0,3] \rightarrow E' = [0,3] \rightarrow E' \not\subset E$

(ب) E بسته است. $\quad E = [0,3] \rightarrow E' = E \rightarrow E' \subseteq E$

E بسته است. $\quad E = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 \leq r\right\} \Rightarrow E' = E \Rightarrow E' \subseteq E$

E بسته نیست. $E = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 < r\} \Rightarrow E' = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le r\} \rightarrow E' \not\subset E$

تعریف: نقطه $P \in E$ را یک نقطه درونی E می‌نامیم . هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که کاملاً در E قرار گیرد.
مجموعه کلیه نقاط درونی E را با نماد E° نشان می‌دهیم و آنرا درون E می‌نامیم. پس به اصطلاح ریاضی داریم:

$$P \in E^\circ \leftrightarrow \exists r \quad N_r(p) \subseteq E \leftrightarrow E^\circ \subseteq E$$

مثال: $E = (0,3]$ نقطه 3 نقطه درونی نیست.

تعریف مجموعه باز: مجموعه E را باز نامیم هر گاه هر نقطه آن درونی باشد یعنی

E باز $\leftrightarrow E \subseteq E^\circ$

E باز $\leftrightarrow E = E^\circ$

سوال 25) ثابت کنید یک بازه باز در R مجموعه ای باز و یک بازه بسته مجموعه ای بسته است.

اثبات : بنابر تعریف $(a,b),(a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,+\infty)$ **بازه های باز و** $[a,\infty),[-\infty,b],[a,b]$ **بازه های بسته هستند.** هرگاه $x \in (a,b)$ ، آنگاه $a < x < b$ قرار دهید $r = min\{b-x, x-a\}$ بدیهی است که $(x-r, x+r) \subseteq (a,b), r > 0$

زیرا اگر $x-r < y < x+r$ آنگاه $x-(x-a) \le x-r < y < x+r < x+(b-x)$ یعنی $a < y < b$.
بنابراین $(x-r, x+r) \subseteq (a,b)$ است و لذا (a,b) مجموعه ای باز است زیرا هر نقطه (a,b) شامل یک همسایگی است که آن همسایگی زیر مجموعه (a,b). اگر

$x \in (a,+\infty)$ قرار دهید $r = x-a$ اگر $x \in (-\infty,b)$ قرار دهید $r = b-x$ و اگر $(-\infty,+\infty)$ $x \in$ ، $r > 0$ دلخواه را اختیار کنید واضح است که در هر یک از حالتهای فوق بازه $(x-r, x+r)$ زیر مجموعه ای از آن بازه باز است. لذا هر بازه باز مجموعه ای باز است.

برای قسمت دوم ابتدا به موضوعی می پردازیم که بعداً آنرا ثابت خواهیم کرد. A باز است اگر وفقط اگر A^c بسته باشد. همچنین داریم $[a,b]^c = (-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ لذا $[a,b]^c$ مجموعه ای باز است پس $[a,b]$ بسته است توجه شود علت اینکه $(-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ باز است این است که طبق قضیه ای به ازای هر گردایه $\{G_a\}$ از مجموعه‌های باز $U_\alpha G_\alpha$ باز است.
نشات گرفته شده است.

سوال 26) ثابت کنید هر مجموعه باز ناتهی مانند S در R هم شامل اعداد گویا و هم شامل اعداد گنگ است.

اثبات :

فرض کنیم $x \in S$. چون S مجموعه‌ای باز است، به ازای $r>0$ ای داریم $(x-r, x+r) \subseteq S$ و طبق چگال بودنQ در R و اینکه بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گنگ است نتیجه حاصل می‌شود.

یک مساله مهم: ثابت کنید در R تنها مجموعه های هم باز وهم بسته مجموعه تهی و خود R هستند. آیا گزاره های مشابه این برای R^2 نیز صادق است.

اثبات: به علم متعلم.

سوال 27) ثابت کنید هر مجموعه بسته در R اشتراک دسته‌ای شمارش پذیر از مجموعه‌های باز است.

اثبات: فرض می‌کنیم A زیر مجموعه ای بسته از R باشد. در این صورت A^c مجموعه ای باز است. بنابراین به ازای هر $a \in A^c$، $r_a > 0$ ای هست به طوری که $(a-r_a, a+r_a) \subseteq A^c$ طبق

خاصیت چگال بودن اعداد گویا در اعداد حقیقی داریم: اعداد گویای مانند b_a و r_a' موجودند به طوری که $a < b_a < a + \frac{r_a}{3}$ و $\frac{r_a}{3} < r_a' < \frac{r_a}{2}$ ادعا می‌کنیم:

1) $$a \in [b_a - r'_a, b_a + r'_a]$$

2) $$[b_a - r'_a, b_a + r'_a] \subseteq (b_a - r'_a, b_a + r'_a)$$

3) $$A^c = \underset{a \in A^c}{U} [b_a - r'_a, b_a + r'_a]$$

4) $$A = \bigcap_{a \in A^c} [b_a - r'_a, b_a + r'_a]^c$$

بنابراین، با توجه به اینکه هر $[b_a - r'_a, b_a + r'_a]^c$ ای در R باز است. r'_a, b_a گویا هستند می توان نتیجه گرفت A به صورت اشتراک دسته ای شمارش پذیر از مجموعه های باز R است.

اثبات ادعاها:

1) چون $a < b_a$ پس $a < b_a + r'_a$. همچنین $b_a < a + \frac{r_a}{3}$ بنابراین $b_a - \frac{r_a}{3} < a$ از طرفی $\frac{r_a}{3} < r'_a$

لذا $b_a - r'_a < b_a - \frac{r_a}{3} < a$ بنابراین

$$a \in (b_a - r'_a, b_a + r'_a) \subseteq [b_a - r'_a, b_a + r'_a]$$

2. $a < b_a \ ,\ r'_a < r_a$ پس $a - r_a < b_a - r'_a$ در ضمن

$$b_a + r'_a < \left(a + \frac{r_a}{3}\right) + r'_a < \left(a + \frac{r_a}{3}\right) + \frac{r_a}{3} < a + r_a$$

لذا $\left[b_a - r'_a , b_a + r'_a\right] \subseteq \left(a - r_a , a + r_a\right)$

. با توجه به (1) ، به ازای هر $a \in A^c$ $a \in \left[b_a - r'_a , b_a + r'_a\right]$ پس $\underset{a \in A^c}{U}\left[b_a - r'_a , b_a + r'_a\right] \subseteq A^c$ و با توجه به (2) و اینکه $\left(a - r_a , a + r_a\right) \subseteq A^c$ نتیجه می گیریم $\underset{a \in A^c}{U}\left[b_a - r'_a , b_a + r'_a\right] \subseteq A^c$ پس

$$* \ A^c = \underset{a \in A^c}{U}\left[b_a - r_a' , b_a + r'_a\right]$$

4. با توجه به اینکه اگر از طرفین رابطه * متمم بگیریم نتیجه حاصل می شود .

سوال 28) ثابت کنید $\underset{A \in F}{U} A^0 \subseteq \left(\underset{A \in F}{U A}\right)^0$

اثبات : هر گاه $x \in \underset{A \in F}{U} A^0$ به ازای A_1 ای در F داریم $x \in A_1^0$ بنابراین ، $r > 0$ ای هست به طوری که $N_r\left(x\right) \subseteq A_1 \ , N_r\left(x\right) \subseteq \underset{A \in F}{U} A$. پس $x \in \left(\underset{A \in F}{U A}\right)^0$

سوال 29) دسته F را طوری بسازید که متناهی بوده و به ازای آن، در (آ) تساوی برقرار نباش .

جواب: هرگاه $A_2 = R - Q , A_1 = Q$ باز هم تساوی برقرار نیست. زیرا $R = \left(A_1 U A_2\right)^0$ و $A_1^0 U A_2^0 = \phi$

سوال 30) هرگاه $A , A^0 = B^0 = \phi$ در M بسته است آنگاه نشان دهید $\left(A \bigcup B\right)^0 = \phi$.

اثبات: براي اثبات از لم $\left(A^{\text{o}} = \left(\overline{A^c}\right)^c\right)$ استفاده مي كنيم.

اثبات لم: $x \in A^0$ اگر و فقط اگر به ازای $r > 0$ ای ، $N_r\left(x\right) \subseteq A$ ، اگر و فقط اگر به ازای $r > 0$ ای $N_r\left(x\right) \bigcap A^c = \phi$ ، اگر و فقط اگر $x \notin \overline{A}^c$ ، اگر و فقط اگر $x \in \left(\overline{A}^c\right)^c$

حال از لم بالا برای اثبات مساله استفاده می کنیم

$\left(A \bigcup B\right)^0 = \left(\overline{\left(A \bigcup B\right)^c}\right)^c = \left(\overline{A^c \bigcap B^c}\right)^c$ حال برای ادامه اثبات یک لم را هم باید ثابت کنیم.

لم : اگر S باز باشد و S , T زیر مجموعه های R^n باشند ثابت کنید $S \bigcap \overline{T} \subseteq \overline{S \bigcap T}$

حال فر می کنیم S باز باشد و $x \notin \overline{S \bigcap T}$ نشان می‌دهیم $x \notin S \bigcap \overline{T}$ (توجه شود که اگر بخواهیم ثابت کنیم، $A \subseteq B$ کافی است گزاره ($x \notin B \Rightarrow x \notin A$ را ثابت کنیم)

اگر $x \in S$ به ازای $r_1 > 0$ ای $B_{r_1}(x) \subseteq B$. در ضمن $x \notin \overline{S \cap T}$. پس $r_1 > 0$ ای هست به طوری که $\phi = B_{r_2}(x) \cap (S \cap T)$. قرار می‌دهیم $r = min\{r_1, r_2\}$ بنابراین $B_r(x) \cap T = \phi$ زیرا اگر $r = r_1$ آنگاه چون $B_{r_1}(x) \subseteq S$ پس $B_{r_1}(x) \cap S = B_{r_1}(x)$ اگر $r = r_2$ انگاه چون $r_2 < r_1$ پس $B_{r_2}(x) \subseteq B_{r_1}(x) \subseteq S$ پس $B_{r_2}(x) \subseteq S$ پس $B_{r_2}(x) \cap S = B_{r_2}(x)$.

پس در هر حالت $B_r(x) \cap T = \phi$ لذا $x \notin \overline{T}$ پس $x \notin S \cap \overline{T}$. حال می‌رویم به سراغ مساله چون A^c باز است $A^c \cap \overline{B}^c \subseteq \overline{A^c \cap B^c}$ بنابراین $\left(\overline{A^c \cap B^c}\right)^c \subseteq \left(A^c \cap \overline{B}^c\right)^c$.

لذا $\left(\overline{A^c \cap B^c}\right)^c \subseteq A \cup \left(\overline{B}^c\right)^c$ پس

$$(A \cup B)^0 \subseteq A \cup \left(\overline{B}^c\right)^c \qquad (A \cup B)^0 \subseteq A \cup \left(\overline{B}^c\right)^c = A \cup A^0$$

و چون $B^0 = \phi$ پس $(A \cup B)^0 \subseteq A$ لذا داریم $\left((A \cup B)^0\right)^0 \subseteq A^0$ زیرا اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A^\circ \subseteq B^\circ$ یعنی $(A \cup B)^0 \subseteq A^0$ (زیرا اگر A یک مجموعه باشد آنگاه $A^0 = \left(A^0\right)^0$. بنابراین $(A \cup B)^0 = \phi$ حال عبارت داخل پرانتز خط بالا را ثابت می‌کنیم:

می دانیم $\left(A^0\right)^0 = \left\{x \in A^0 \middle| \exists r > 0, N_r(x) \subseteq A^0\right\}$ بنابراین بدیهی است که $\left(A^0\right)^0 \subseteq A^0$.

اینک ثابت می کنیم $A^0 \subseteq \left(A^0\right)^0$: اثبات: فرض کنیم $x \in A^0$ بنابراین به ازای $r>0$ ، $N_r(x) \subseteq A$ نشان می‌دهیم $N_r(x) \subseteq A^0$ لذا $x \in \left(A^0\right)^0$

هرگاه $y \in N_r(x)$ ، قرار می‌دهیم $r' = r - d(x,y)$ بدیهی است که $r' > 0$

$N_{r'}(y) \subseteq N_r(x) \subseteq A$ پس $y \in A^0$ یعنی، $N_r(x) \subseteq A^0$

سوال 31) ثابت کنید $\left(A^c\right)^0 = \left(\overline{A}\right)^c$

جواب. $x \in \left(A^c\right)^0$ اگر و فقط اگر به ازای $r > 0$ ای $N_r(x) \subseteq A^c$ اگر و فقط اگر به ازای $r > 0, N_r(x) \cap A = \phi$ ، اگر و فقط اگر $x \notin \overline{A}$. اگر و فقط اگر $x \in \left(\overline{A}\right)^c$

سوال 32) ثابت کنید $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^0 = \bigcap_{i=1}^{n} A_{i}^{0}$ که در آن هر $A_i \subseteq M$

ب: اگر F دسته‌ای نامتناهی اززیرمجموعه‌های M باشد $\left(\bigcap_{A \in F} A\right)^0 \subseteq \bigcap_{A \in F} A^0$

ح: مثال بزنید که به ازای آن، در (ب) تساوی برقرار نباشد.

آ. هرگاه $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^0$ ، آنگاه به ازای هر $r_i > 0, i = 1,2,3,...,n$ ای هست به طوری که

$$N_{r_i}(x) \subseteq A_i \qquad (1 \le i \le n)$$

قرار می‌دهیم $r = min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$. بدیهی است که $r>0$ و $N_r(x) \subseteq A_i$ به ازای هر $i = 1,2,...,n$. لذا $N_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ پس $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^0$.

به عکس فرض می‌کنیم $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^0$ بنابراین $r>0$ ای هست به طوری که $N_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ پس به ازای هر $i = 1,2,...,n$ ، $N_r(x) \subseteq A_i$. لذا $x \in A_i^0$ ، $(i = 1,2,...,n)$ ، $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^0$

ب:فرض می کنیم $x \in \left(\bigcap_{A \in F} A\right)^0$.بنابراین، $r > 0$ ای هست بطوری که $N_r(x) \subseteq \bigcap_{A \in F} A$. بنابراین به ازای هر $A \in F$ ، $N_r(x) \subseteq A$ پس $\begin{cases} x \in A^0 \\ \forall A \in F \end{cases}$ پس $x \in \bigcap_{A \in F} A^0$

ج: قرار دهید به ازای $n = 1,2,...$ ، $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ بدیهی است که $1 \in A_n^0$, $2 \in A_n^0$ ، به ازای هر $n \in N$. بنابراین $2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^0$, $1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^0$. همچنین بدیهی است که $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [1,2]$.

سوال 33)ثابت کنید هر گوی n بعدی در R^n کوژ است.

اثبات: به ازای هر y,x که $x,y \in N_r(a) \subseteq R^n$ و هر عدد حقیقی $0 < \theta < 1$ باید نشان دهیم که $Z = \theta x + (1-\theta) y \in N_r(a)$ از آنجا که $N_r(a) = \{x \in R^n \mid d(x,a) < r\}$ پس کافی است نشان دهیم

$$* \ d(z,a) < r$$

$$d(z,a)=\|z-a\|=\|\theta x+(1-\theta)y-a\|=\|\theta x+(1-\theta)y-a+a\theta-a\theta\|$$
$$\|\theta(x-a)+(1-\theta)(y-a)\|$$
$$\le\theta\|x-a\|+(1-\theta)\|y-a\|$$
$$\le r\,\theta+(1-\theta)r=r$$

سوال 34) ثابت کنید حجره k بعدی محدب است.

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\ ,\quad y=(y_1,y_2,...,y_n)$$
$$0<\lambda<1\qquad Z=\lambda x+(1-\lambda)y=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,...,\lambda x_k+(1-\lambda)y_k)$$

تعاریف در فضای متری X برای زیر مجموعه $E\subseteq X$.

تعریف نقطه حدی: نقطه $P\in X$ را نقطه حدی $(limit\ \ point)$ مجموعه E نامند. هر گاه هر همسایگی P شامل یک نقطه مانند q که $q\in E$ و $q\neq P$ باشد. که مجموعه نقاط حدی را با E' نمایش می‌دهند. به اصطلاح ریاضی داریم:

$$P\in E'\leftrightarrow\forall r>0\quad N_r(P)\bigcap E\neq\phi$$

*

واضح است که $E'\subseteq X$

مثال: در R^2 با متریک اقلیدس $E=\{(x,y)|x^2+y^2<r\}$، E' را پیدا کنید.

$$E'=\{(x,y)|x^2+y^2\le r\}$$

مثال: در R با متریک اقلیدس $E=(a,b)$ که $a<b$ $\ E'=[a,b]$

نکته: هر عدد حقیقی نقطه انباشتگی مجموعه عددهای گویاست (توجه نام دیگر نقطه حدی: نقطه انباشتگی است).

سوال 35)ثابت کنیدصفر یک نقطه حدی مجموعه عددهایی به شکل $\frac{1}{n}$ $(n=1,2,...)$ است.

اثبات برای هر $\varepsilon>0$, $0\in N_\varepsilon(0)$ و با توجه به خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $\exists n\in N$ بطوری که $n>\frac{1}{\varepsilon}$ لذا $\frac{1}{n}<\varepsilon$ پس $-\varepsilon<0<\frac{1}{n}<\varepsilon$ یعنی $\frac{1}{n}\in N_\varepsilon(0)$؛ بنابراین هر همسایگی صفر شامل نقطه ای از $S=\left\{\frac{1}{n}|n\in N\right\}$ است. لذا صفر یک نقطه حدی S است.

حال ثابت می‌کنیم عدد صفر تنها نقطه حدی مجموعه S است. چهار حالت روی می‌دهد که هر یک را مورد بررسی قرار می-دهیم.

حالت اول: اگر x عددی منفی باشد یعنی $(x<0)$ پس $(-\infty,0)$ یک همسایگی x بوده که شامل نقطه ای از S نیست. بنابراین $(-\infty,0)\bigcap S=\phi$ پس x نقطه حدی S نیست.

حالت دوم: اگر $x>1$ پس $(1,\infty)$ یک همسایگی x بوده که شامل هیچ نقطه‌ای از S نیست. یعنی $(1,\infty)\bigcap S=\phi$ لذا x نقطه حدی S نخواهد بود.

حالت سوم: اگر $x=1$ ، $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ همسایگی از x بوده که شامل هیچ نقطه ای از S بجز خود x نیست.

یعنی $\left(\left(\frac{1}{2},\infty\right)-\{1\}\right)\bigcap S=\phi$ لذا x نقطه حدی S نیست.

حالت چهارم: $0<x<1$ آنگاه $\frac{1}{x}>0$ ، پس عدد حقیقی یکتایی مانند n وجود دارد به طوری که

$$n\leq\frac{1}{x}<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}$$

پس همسایگی $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1}\right)$ از x فقط شامل نقطه $\frac{1}{n}$ از s می باشد یعنی تعداد متناهی نقطه از S را داراست و چون طبق قضیه ای که بعداً خواهیم خواند نتیجه می گیریم که x نقطه حدی S نیست. و تنها صفر نقطه حدی S است. و اثبات تمام است.

سوال36) همه نقطه های حدی مجموعه های زیر در R' را مشخص نمائید.

آ) همه اعداد صحیح

ب) بازه $]a,b[$

ج) همه اعدادگویا

د) همه عددهای به شکل $2^{-n}+5^{-n}$ $(m,n=1,2,...)$ $A=\left\{2^{-n}+5^{-m}|m,n=1,2,...\right\}$

ه) همه عددهای به شکل $(-1)^n+\frac{1}{m}$ $(m,n=1,2,...)$ $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{m}|m,n=1,2,...\right\}$

و) همه عددهای به شکل $\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{m}\right)$ $(m,n=1,2,...)$ $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}|m,n=1,2,...\right\}$

ز) همه عددهای به شکل $\frac{(-1)^n}{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$ $n=1,2,...$ $A=\left\{\frac{(-1)^n}{\left[1+\frac{1}{n}\right]}|m,n=1,2,...\right\}$

جواب: الف) از آنجا که به ازای هر $x\in R$ ، $\delta>0$ وجود دارد که $\phi=N_\delta(x)\bigcap\left(z-\{x\}\right)$ پس $z'=\phi$

ب) نشان می دهیم $\overline{(a,b]} = [a,b]$. بدین منظور نشان می دهیم ، به ازای هر $x \in [a,b]$ ، $\varepsilon > 0$

$$N^*_\varepsilon(x) \cap [a,b] \neq \phi$$

اگر $x \in (a,b]$ ، $\exists x_0 \in R, \forall \varepsilon > 0$ وجود دارد که $x - \varepsilon < x_0 < x$ ، $a < x_0$ (از طریق برهان خلف می توانید این را ثابت کنید) لذا $x_0 \in N^*_\varepsilon(x) \cap (a,b]$

اگر $x = a$ $\varepsilon > 0$ باز هم $x_0 \in R$ وجود دارد که $x_0 \le b$, $x < x_0 < x + \varepsilon$ لذا $N^*_\varepsilon(x) \cap (a,b] \neq \phi$

اگر $x < a$ قرار می دهیم $\varepsilon = a - x$ ، همچنین اگر $b < x$ ، قرار می دهیم $\varepsilon = x - b$ در این صورت $N^*_\varepsilon(x) \cap (a,b] = \phi$

د) ادعا می کنیم $A' = \left\{\frac{1}{2^k}\right\} \cup \left\{\frac{1}{5^k}\right\} \cup \{0\}$. بنابراین ابتدا نشان می دهیم $0 \in A'$ و به ازای هر k ی طبیعی $\frac{1}{5^k}, \frac{1}{2^k}$ اعضای A' هستند . سپس نشان می دهیم هر x حقیقی که به یکی از شکل های $0, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{5^k}$ $(k = 1,2,...)$ نباشدعضو A' نیست.

هرگاه $x = 0$ باشد و $r > 0$ دلخواه باشد طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، n,m ای طبیعی یافت می شوند به طوری که $\frac{1}{5^m} < \frac{r}{2}$, $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ بنابراین $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} < r$. لذا $N^*_r(0) \cap A \neq \phi$ یعنی $0 \in A'$

هرگاه $x = \frac{1}{2^k}$ (k عددی طبیعی و دلخواه است) و $r > 0$ عددی حقیقی باشد، m ای طبیعی هست به طوری که $\frac{1}{5^m} < r$ بنابراین $-r < \frac{1}{5^m} < r$ در نتیجه $\frac{1}{2^k} - r < \frac{1}{5^m} + \frac{1}{2^k} < r + \frac{1}{2^k}$

بنابراین : $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{5^m} \in \left(\left(\frac{1}{2^k} - r, \frac{1}{2^k} + r\right) - \left\{\frac{1}{2^k}\right\}\right) \cap A$

لذا $\frac{1}{2^k} \in A'$ به ازای $(k = 1,2,...)$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد که به ازای هر $k \in N$, $\frac{1}{5^k} \in A'$

اکنون فرض می کنیم $x \notin \left\{\frac{1}{2^k}\right\} \cup \left\{\frac{1}{5^k}\right\} \cup \{0\}$ به ازای $(k = 1,2,...)$ ، هرگاه $x < 0$ ، قرار می دهیم $r = -x$. هرگاه $x > \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ قرار میدهیم $r = x - \frac{7}{10}$. هر گاه $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ قرار می دهیم

$r=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}=\frac{4}{25}$. هر گاه $0<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ x دقیقاً بین دو عضو از A است (دو عضوی که در دو طرف x واقعند و کمترین فاصله را با x دارند فرض کنیم آن دو عضو y,z باشند آنگاه قرار می دهیم $r=min\{|x-z|,|x-y|\}$ واضح است که در هر مورد فوق $(x-r,x+r)\bigcap(A-\{x\})=\phi$ توجه شود که $A\bigcap(B-C)=(A-C)\bigcap B$

ه) ادعا می کنیم $A'=\{1,-1\}$. هر گاه $n=1$ آنگاه به ازای هر $r>0$، m ای طبیعی هست که $\frac{1}{m}<r$. بنابراین

$$(-1)+\frac{1}{m}\in(-1-r,-1+r)\bigcap(A-\{-1\})$$ زیرا

$$-r<\frac{1}{m}<r\rightarrow-1-r<\frac{1}{m}+(-1)<-1+r$$

به همین ترتیب با انتخاب $n=2$, $1\in A'$.

حال اگر $x\notin\{-1,+1\}$ می توان $r>0$ ای یافت به طوری که $(x-r,x+r)\bigcap(A-\{x\})=\phi$

و) ادعا می کنیم $A'=\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in N\right\}\bigcup\{0\}$ به ازای $r>0,x=0$ دلخواه، طبق خاصیت ارشمیدس اعداد حقیقی مانند m,n هست به طوری که $\frac{1}{m}<\frac{r}{2}$, $\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ پس $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<r$.

بنابراین $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\in(-r,r)\bigcap(A-\{0\})$. لذا $0\in A'$

به ازای هر $n\in N$ و $r>0$ دلخواه ، m ای طبیعی هست که $\frac{1}{m}<r$ لذا $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<r+\frac{1}{n}$ لذا چون $-r<\frac{1}{m}<r$ پس $\frac{1}{n}-r<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<r+\frac{1}{n}$ پس $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\in\left(\frac{1}{n}-r,\frac{1}{n}+r\right)\bigcap\left(A-\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)$ لذا $\frac{1}{n}\in A'$. واضح است که هر گاه $x\neq 0,$ $\left(\forall n\in N \quad x\neq\frac{1}{n}\right)$ آنگاه $(x-r,x+r)\bigcap(A-\{x\})=\phi$ (r را در حالت های مختلف برسی کنید)

ز) واضح است که $A=\left\{-\frac{1}{2},1,-1\right\}$ و چون A متناهی است پس $A'=\phi$

سوال37) ثابت کنید هر زیر مجموعه متناهی یک فضای متری بسته است؟

اثبات: فرض کنیم (X,d) یک فضای متری بوده و $A=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ یک زیر مجموعه متناهی از X باشد ثابت می کنیم $A^c=(X-A)$ بازاست.

هرگاه $x \in A^C$ ، آنگاه $d(x,x_i)>0$ ، به ازای $i=1,2,...,n$. قرار می دهیم $r = \min_{1 \le i \le n} d(x,x_i)$

بدیهی است که به ازای $i=1,2,...,n$ ، $x_i \notin N_r(x)$. لذا $N_r(x) \cap A = \phi$ ، یعنی $N_r(x) \cap A = \phi$ یعنی $N_r(x) \subseteq A^C$. بنابراین ، به ازای هر $x \in A^c$ ، x یک نقطه درونی است پس A^C مجموعه ای باز است. و لذا ، A مجموعه ای بسته است.

سوال: در فضای متری (M,d) ، گوی بسته به شعاع $r>0$ حول نقطه a در M عبارت است از مجموعه $\overline{B_r(a)} = \{x | d(x,a)<r\}$. ثابت کنید $\overline{B_r(a)}$ مجموعه ای است بسته.

حل : کافی است نشان دهیم $M - \overline{B_r(a)}$ باز است بدین منظور به ازای هر $x \in M - \overline{B_r(a)}$ داریم $d(x,a)>r$ لذا $d(x,a)-r>0$. حال گیریم $r' = \frac{d(x,a)-r}{2}$ و $B_{r'}(a)$ گویی باز در M باشد

پس $B_{r'}(x) \subseteq M - \overline{B(x)}$ زیرا اگر چنین نباشد x' ای وجود دارد دارد که

$x \in B_{r'}(a) \cap \overline{B_r(a)}$ و لذا $d(x',a)<r' , d(x',a)<r$ در نتیجه

$$\begin{aligned} d(x,a) &\le d(x,x') + d(x',a) \\ &< r' + r = \frac{d(x,a)-r}{2} + r = \frac{r+d(x,a)}{2} \end{aligned}$$

پس $d(x,a)<r$ که به تناقض می انجامد**.

سوال 38) در فضای متری (M,d) ، ثابت کنید که مجموعه ϕ و تمام فضای M هم باز و هم بسته اند.

جواب: چون مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد بنابر انتفاء مقدم ، مجموعه تهی باز است از طرفی به ازای هر $x \in M$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \subseteq M$ ، لذا M مجموعه ای باز است. چون متمم هر مجموعه باز، بسته است، پس ϕ, M مجموعه های بسته نیز می باشد**

سوال 39) ثابت کنید که گویهای n بعدی باز و بازه های باز n بعدی مجموعه هایی باز در R^n می باشند.

جواب: گیریم $r>0$, $x \in R^n$ $B_r(x) = \{y \in R^n | \|x-y\| < r\}$ باید نشان دهیم هر نقطه $B_r(x)$ یک نقطه درونی است به ازای هر $y \in B_r(x)$ ، داریم $\|x-y\|<r$ ، پس $r' = r - \|x-y\|$ حال به ازای هر $z \in B_{r'}(y)$ داریم $\|z-y\| < r' = r - \|x-y\|$

$$\begin{aligned} \|x-z\| &= \|x-y+y-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\| \\ &< \|x-y\| + r - \|x-y\| = r \end{aligned}$$

و لذا $z \in B_r(x)$ و درنتیجه $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$ یعنی y یک نقطه درونی $B_r(x)$ بوده و $B_r(x)$ مجموعه باز در R^n می باشد.

تعریف: حاصلضرب دکارتی n بازه باز یک بعدی $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \ldots]a_n, b_n[$

را یک بازه باز n بعدی می نامیم. با فرض $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ بازه باز n بعدی بالا را بصورت $]a, b[$ نشان میدهیم.

- سوال ثابت کنید بازه باز n بعدی مجموعه ای باز در R است.

مساله 40) تابع p را روی $R^2 \times R^2$ با رابطه زیر تعریف می کنیم

$$p(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

فرض کنیم $a = (a_1, a_2)$ یک نقطه R^2 باشد. $N_r(a)$ را پیدا کنید

جواب: $N_r(a) = \left\{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in R^2, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r\right\}$

پس $N_r(a)$ درون دایره ای است به مرکز a و شعاع r.

مساله 41) مساله بالا را در مورد تابع $p(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ حل کنید.

$$\begin{aligned}
N_r(a) &= \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in R^2, max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r\} \\
&= \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in R^2, |x_1 - a_1| < r, |x_2 - a_2| < r\} \\
&= \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in R^2, a_1 - r < x_1 < a_1 + r, a_2 - r < x_2 < a_2 + r\} \\
&= (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)
\end{aligned}$$

مساله 42) مساله بالا را در مورد تابع $d(x, y) = max\left\{|x_1 - y_1|, \frac{|x_2 - y_2|}{K}\right\}$

حل: مطابق حل مساله قبل : $N_r(a) = (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - kr, a_2 + kr)$

مساله 43) تابع d و p را روی $R^n \times R^n$ با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

$$P(x, y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \frac{|x_2 - y_2|}{2}, \frac{|x_3 - y_3|}{3}, \ldots, \frac{|x_n - y_n|}{n}\right\}$$

$N_r^d(a)$ و $N_r^p(a)$ را پیدا کنید $\left(a=\left(a_1,...,a_n\right)\right)$

بنابر حل مساله 41 و 42 خواهیم داشت:

$$N_r^p(a)=\left(a_1-r,a_1+r\right)\times\left(a_2-r,a_2+r\right)\times...\times\left(a_n-r,a_n+r\right)$$

و همچنین بنابرحل مساله 43:

$$N_r^d(a)=\left(a_1-r,a_1+r\right)\times\left(a_2-2r,a_2+2r\right)\times...\times\left(a_n-nr,a_n+nr\right)$$

مساله 44) فرض می‌کنیم α یک متر برای X باشد و $d'' , d'=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ را روی $X\times X$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم: $a\in X, d''(x,y)=min\{d(x,y),1\}$ و r عددی حقیقی مثبت باشد، $N_r^{d''}(a),N_r^{d'}(a)$ را پیدا کنید.

$$N_r^d(a)=\{x:x\in X, d'(x,a)<\varepsilon\}=\left\{x:x\in X, \frac{d(x,a)}{1+d(x,a)}<r\right\}$$

دو حالت می‌گیریم: اگر $r\geq 1$، آنگاه برای هر $x\in X$ داریم: $\dfrac{d(x,a)}{1+d(x,a)}<1\leq r$، و در نتیجه $x\in N_r^{d'}(a)$ و بنابراین $N_r^{d'}(a)=X$

حالت دو: اگر $0<r<1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{d(x,a)}{1+d(x,a)}<r &\Leftrightarrow d(x,a)<r+rd(x,a)\\ &\Leftrightarrow (1-r)d(x,a)<r\\ &\Leftrightarrow d(x,a)<\frac{r}{1-r}\end{aligned}$$

در نتیجه
$$N_r^{d'}(a)=\begin{cases}X & r\geq 1\\ N_{\frac{r}{1-r}}(a) & \varepsilon<1\end{cases}$$

همچنین برای d'' داریم:

$$N_r^{d''}(a)=\left\{x:x\in X, \min\{1,d(x,a)\}<r\right\}=\begin{cases}X & r>1\\ N_r^d(a) & r\leq 1\end{cases}$$

علت این است برای قسمت این هم مثل بالا دو حالت $r\leq 1,r>1$ می‌گیریم اگر $r>1$ باشد. آنگاه برای هر $x\in X$، $min\{1,d(x,a)\}\leq 1<r$ اگر $0<r\leq 1$ آنگاه

$$min\{1,d(x,a)\}<r \Leftrightarrow d(x,a)<r \Leftrightarrow x\in N_r^d(a)$$

گوی ها و مجموعه‌های باز و بسته

درفضای متریک (E,d)، نقطه $x\in E$ و عدد $r>0$ مفروض اند. در این صورت گوی باز به مرکز x و شعاع r عبارت است از $B(x,r)=\{y\in E:\ d(x,y)<r\}$ اگر به جای $<$ قرار دهیم $\leq$ مجموعه حاصل را گوی بسته می‌نامیم همچنین تعریف مي كنيم $S(x,r)=\{y\in E,d(x,y)=r\}$

تعریف: فضای متریک (E,d) و زیر مجموعه $A\subseteq E$ مفروض اند. می‌گوییم A مجموعه‌ای باز است هر گاه $A=\phi$ یا اگر $A\neq\phi$، انگاه $\forall x\in A,\exists r>0:\ B(x,r)\subseteq A$

مساله 45) ثابت کنید با فرض گوی باز $B(x;\varepsilon)$ در یک فضای متري، به ازای هر نقطه $y\in B(x,\varepsilon)$ عدد حقیقی $\delta>0$ ای وجود دارد به طوری که $B_\delta(y)\subseteq B_\varepsilon(x)$

اثبات: فرض کنیم $\delta=\varepsilon-d(x,y)$، که اکیداً مثبت است، زیرا $y\in B(x,\varepsilon)$، ثابت می‌کنیم که $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$. اگر $z\in B(y,\delta)$ آنگاه $d(y,z)<\delta$ و

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)<d(x,y)+\delta=\varepsilon$$

بنابراین $z\in B(x,\varepsilon)$ و حکم ثابت می‌شود.

مساله 46) فضای متریک (E,d) مفروض است اگر x و y دو نقطه متمایز در E باشند ثابت کنید دو همسایگی U و V به ترتیب برای x و y وجود دارند به طوری که $U\bigcap V=\phi$

اثبات: با توجه به $r=d(x,y)>0$ (زیرا $x\neq y$) کافی است قرار دهیم $U=B\left(x;\frac{r}{3}\right)$ و $V=B\left(y;\frac{r}{3}\right)$ و مساله ثابت می‌شود.

مساله 47) ثابت کنید A باز است اگر و فقط اگر A اجتماعی از گوی های باز باشد.

اثبات: مجموعه تهی یک مجموعه باز است و آن برابر اجتماع یک خانواده تهی از گوی‌های باز برعکس، اجتماع یک خانواده تهی از کره‌ها تهی است و لذا باز است.

اگر O یک مجموعه باز غیرتهی باشد هر نقطه O مرکز گوی بازی محتوی از O است و O اجتماع خانواده همه چنین گوی‌های باز می‌باشد، توجه داشته باشید هر نقطه O مرکز گوی بازی محتوی در O است و O اجتماع خانواده همچنین گوی‌های باز می‌باشد (توجه کنید می‌دانیم اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است و چون $B(x,r)$ باز است پس حکم ثابت خواهد شد.).

تعریف: فضای متریک (E,d) و زیر مجموعه $A\subseteq E$ $(A\neq\phi)$ مفروض‌اند . در این صورت قطر A عبارت است از $\delta(A)=Sup\{d(x,y):x,y\in A\}$

تعریف: فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه ناتهی فضای متریک (E,d) باشد، فاصله A و B عبارت است از $d(A,B)=inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}$ اگر A مجموعه یک عنصری x باشد نماد $d(x,B)$ را بکار می‌بریم.

سوال 48) اگر A و B دو زیر مجموعه ناتهی در فضای متریک (E,d) باشند ثابت کنید

$$\delta(A\cup B)\le\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$$

حل: دو نقطه $a\in A$ و $b\in B$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. به ازای هر $x\in A$ و هر $y\in B$ داریم:

$$d(x,y)\le d(x,a)+d(a,b)+d(b,y)\le\delta(A)+\delta(B)+d(a,b)$$

و از این رو (پس از SUP گیری) می‌بینیم که $\delta(A\cup B)\le\delta(A)+\delta(B)+d(a,b)$

اکنون اگر از دو طرف inf بگیریم، نابرابری مطلوب بدست خواهد آمد.

سوال 49) هرگاه (X,d) یک فضای متریک باشد و داشته باشیم $\varnothing\ne B\subseteq X,\phi\ne A\subseteq X$ در صورتی که $A\cap B\ne\phi$ آنگاه نشان دهید $d(A,B)=0$

اثبات: چون $A\cap B\ne\phi$ پس عضوی چون x وجود دارد به گونه‌ای که $x\in A\cap B$ اکنون می‌توان نوشت $d(A,B)=inf\{d(a,b)|a\in A,b\in B\}$

اما چون $d(x,x)=0$ پس آشکارا از تعریف $d(A,B)$ پیدا است که $0=d(A,B)$

سوال 50) هرگاه d متریک معمولی بر اعداد حقیقی R باشد آنگاه نشان دهید $d(Q,Q^c)=0$.

اثبات: (برهان خلف) فرض می‌کنیم $0\ne d(Q,Q^c)$. لذا فرض می‌کنیم $d(Q,Q^c)\ne 0$، از آنجا می‌توان نوشت $d(Q,Q^c)=k>0$ و لذا خواهیم داشت:

$$\exists q\in Q,\ r\in Q^c\qquad s.t\qquad d(q,r)=k$$

اما می‌دانیم $r'=\dfrac{q+r}{2}\in Q^c$ و از آنجا می‌توان نوشت $d(q,r')=\dfrac{k}{2}<k$ و این تناقض آشکار است بنابراین بایستی داشته باشیم $0=d(Q,Q^c)$.

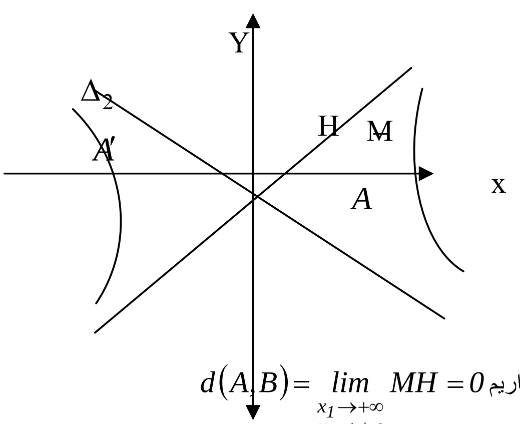
سوال 51) هرگاه مجموعه R^2 را همراه با متریک معمولی در نظر می‌گیریم. در صورتی که A مجموعه نقاط واقع بر یک هذلولی و B مجموعه نقاط واقع بر مجانبهای این هذلولی باشند نشان دهید $d(A,B)=0$

اثبات: هذلولی افقی به معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را در نظر می‌گیریم همانگونه که می‌دانیم معادلات مجانبهای این هذلولی عبارتنداز $\Delta_2 \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ و $\Delta_1=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ اکنون مطابق

شکل نقطه $M\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. ($x_1 \geq 0$ و $y_1>0$ را فرض کنید) و فاصله آنرا از مجانب Δ_1 می‌یابیم. لذا می‌توان نوشت:

$$MH=\frac{\left|\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{|bx_1+ay_1|}{|bx_1+ay_1|}=\frac{\left|b^2x_1^2-a^2y_1^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{1}{|bx_1+ay_1|}$$

$$=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{1}{|bx_1+ay_1|}$$



اکنون اگر عناصر x_1 و y_1 به سمت $+\infty$ میل دهیم آنگاه داریم $d(A,B)=\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ y_1\to+\infty}} MH=0$

و لذا خواهیم داشت: $d(A,B)=0$

تعریف: فرض کنید (M,p) یک فضای متریک باشد. زیر مجموعه A مانند M کراندار کلی نامیده می شود. اگر ، به ازای هر عدد مثبت ε ، تعدادی متناهی زیر مجموعه $A_1,A_2,...,A_n$ مانند M به طوری که $\delta(A_k)<\varepsilon$ ، $A\subseteq\bigcup_{k=0}^{n} A_k,(k=1,2,...,n)$

سوال 52) ثابت کنید اگر زیر مجموعه A از فضای متریک (M,d) کراندار کلی باشد، آنگاه A کراندار است.

اثبات: اگر A کراندار کلی باشد، آنگاه زیر مجموعه های ناتهی M مانند $A_n,...,A_2,A_1$ وجود دارند به گونه ای که $(k=1,2,...,n) \quad \delta(A_k)<1 \quad , \quad A\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}A_k$. برای

هر $k=1,2,...,n$ ، فرض کنیم a_k نقطه ای در A_k باشد. سپس فرض کنیم که $D=p(a_1,a_2)+p(a_2,a_3)+...+p(a_{n-1},a_n)$ اکنون، برای هر دو نقطه $j,i;\ x,y\in A$ ایی

هست که $x \in A_i \quad , \quad y \in A_j$ (زیرا A_k ها مجموعه A را می پوشانند) می توان فرض کرد که $i \leq j$. آنگاه :

$$p(x,y) \leq p(x,a_i) + \lfloor p(a_i,a_{i+1}) + \ldots + p(a_{j-1},a_j) \rfloor + p(a_j,y)$$

چون $\delta(A_i) < 1$ خواهیم داشت $p(x,a_i) < 1$ به همین ترتیب $p(a_j,y) < 1$. از این رو

$$p(x,y) < 1 + D + 1 = D + 2 \qquad (x,y \in A)$$

بنابراین A کراندار است.

تعریف: فرض کنیم A زیر مجموعه فضای متریک M باشد. B، زیر مجموعه A را در A ، $\varepsilon -$ چگال $(\varepsilon > 0)$ خوانیم اگر برای هر $x \in A$ ، یک $y \in B$ باشد به طوری که $p(x,y) < \varepsilon$

(یعنی B در A ، $\varepsilon -$چگالی است اگر هر نقطه A درفاصله ای کمتر از ε از نقطه ای از B قرار داشته باشد.

مساله 53) زیر مجموعه A از فضای متریک (M,d)کراندار کلی است اگر و تنها اگر ، برای هر $A,\varepsilon > 0$ شامل یک مجموعه متناهی $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ که در A ، $\varepsilon -$چگالی است باشد.

اثبات: عدد مثبت و دلخواه εرا در نظر می گیریم. اگر A کراندار کلی باشد آنگاه $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$که در آن $\delta(A_i) < \varepsilon$ می توانیم فرض کنیم که $A_i \neq \phi$. اگر $a_i \in A_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$ آنگاه $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ در A ، $\varepsilon -$ چگال است . از این رو ، اگر A کراندار کلی باشد، آنگاه A دارای یک زیر مجموعه $\varepsilon -$ چگال متناهی است.

برعکس، اگر $\{x_1,\ldots,x_n\}$ در $\varepsilon, A -$ چگال باشد، آنگاه مجموعه های $B\left[x_1,\frac{\varepsilon}{3}\right]\ldots,B\left[x_n,\frac{\varepsilon}{3}\right]$ قطرشان از ε کمتر است و A را می پوشانند. از این حکم مسئله نتیجه می شود.

سوال 54) اگر (X,d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X \;\; , \;\; \phi \neq A \subseteq R$ آنگاه $\delta(A) = sup\, A - inf\, A$ (فرض کنید A در R کراندار است.)

اثبات: A در R کراندار باشد : اگر $x,y \in A$، آنگاه $\pm(x-y) \leq sup\, A - inf\, A$ و در نتیجه $\delta(A) \leq sup\, A - inf\, A$ حال اگر $0 < \varepsilon$ داده شده باشد، آنگاه یک x و یک y هست به طوری که $sup\, A - \varepsilon < x \quad , \quad inf\, A + \varepsilon > y$، پس $sup\, A - inf\, A < \varepsilon + x + \varepsilon - y$ و در نتیجه برای هر $sup\, A - inf\, A < 2\varepsilon + \delta(A), \varepsilon > 0$ بنابراین $sup\, A - inf\, A \leq \delta(A)$ پس حکم ثابت می شود.

سوال 55) نشان دهید $d(A,B)$ همواره عددی است حقیقی و غیر منفی و $d(A,B) = d(B,A)$

اثبات: طبق تعریف $d(A,B)$ داریم : $d(A,B) = inf\, \{d(x,y) | x \in A, y \in B\}$

و $d(x,y)$ برای هر $x \in A$, $y \in B$ داریم . $d(x,y)$ پس $0 \le inf\{d(x,y) | x \in A, y \in B\}$

درنتیجه $d(A,B) \ge 0$. و چون d یک متر است پس $d(y,x) = d(x,y)$ در نتیجه

$$d(A,B) = inf\{d(x,y) | x \in A, y \in B\} = inf\{d(y,x) | x \in A, y \in B\} = d(B,A)$$

سوال56) اگر A یک زیر مجموعه X باشد ، نشان دهید که

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

اثبات: ساده است : از نامساوی مثلث استفاده کنید.

سوال 57) A,B زیر مجموعه های غیر خالی یک فضای متری هستند . ثابت کنید که اگر $A \cap B$ غیر خالی باشد آنگاه

$$\delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B)$$

اثبات: برای اثبات از مساله (1) و (2) استفاده می کنیم می دانیم $A \cap B \ne \phi$ پس $d(A,B) = 0$ و بنابر (1)

$$\begin{aligned} \delta(A \cup B) &\le \delta(A) + \delta(B) + d(A,B) \\ &= \delta(A) + \delta(B) \\ &\Rightarrow\ \delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B) \end{aligned}$$

سوال 58) A,B زیر مجموعه های غیر خالی در یک فضای متری هستند ثابت کنید که اگر $A \subset B$ آنگاه

$$\delta(A) \le \delta(B)$$

اثبات: می دانیم اگر $A \subseteq B$ آنگاه $sup\, A \le sup\, B.$

می دانیم چون $A \subseteq B$

$$\{d(x,y) | x,y \in A\} \subseteq \{d(x,y) | x,y \in B\} \qquad (1)$$

حال با گرفتن sup از طرفین (1) ، رابطه $\delta(A) \le \delta(B)$ حاصل خواهد شد.

سوال 59) اگر $d(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$ ، ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه A کراندار باشد. این است که $\delta(A) < +\infty$

اثبات: به عهده متعلم

فضای n بعدی اقلیدسی

تعریف : منظور از نرم روی فضای برداری V تابعی است مانند $\|\ \| : V \longrightarrow R'$ به طوری که

$$\forall x \in V \qquad \|x\| \geq 0 \qquad (i$$

$$\forall x \in V \qquad (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0) \qquad (ii$$

$$\forall x \in V \ , \ \forall a \in F \ : \ \|ax\| = |a|\|x\| \qquad (iii$$

$$\forall x, y \in V \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (iv$$ (نامساوی مثلث)

تعریف: یک نیم نرم روی E یک تابع $\delta : E \to R$ است به طوری که برای هر $x \in E$ ، $\delta(x) \geq 0$ و برای هر $\delta(cx) = |c|\delta(x) \ , \ \delta(x + y) \leq \delta(x) + \delta(y), x, y \in E, c \in R$ (E یک فضای برداری است)

مساله 60) فرض کنید . δ_1, δ_2 نیم نرم می باشند. نشان دهید $\delta_1 + \delta_2$ یک نیم نرم است

اثبات: بررسی شرط اول : به ازای هر $\delta_2(x) \geq 0, \delta_1(x) \geq 0, x \in E$ و چون

$$(\delta_1 + \delta_2)(x) = \delta_1(x) + \delta_2(x) \geq 0$$

پس $(\delta_1 + \delta_2)(x) \geq 0$ حال شرط دوم را بررسی می کنیم برای هر $x, y \in E$ داریم :

$$\begin{aligned}(\delta_1 + \delta_2)(x + y) = \delta_1(x + y) + \delta_2(x + y) &\leq \delta_1(x) + \delta_1(y) + \delta_2(x) + \delta_2(y) \\ &= \delta_1(x) + \delta_2(x) + \delta_1(y) + \delta_2(y) \\ &= (\delta_1 + \delta_2)(x) + (\delta_1 + \delta_2)(y)\end{aligned}$$

بررسی شرط سوم :

$$\begin{aligned}(\delta_1 + \delta_2)(cx) = \delta_1(cx) + \delta_2(cx) &= |c|\delta_1(x) + |c|\delta_2(x) \\ &= |c|(\delta_1(x) + \delta_2(x)) \\ &= |c|((\delta_1 + \delta_2)(x))\end{aligned}$$

مساله 61) فرض کنید E یک فضای برداری باشد و $\delta_1, \delta_2 : E \to R$ دو نیم نرم باشند و $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ نشان دهید تابع $\lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2$ نیز یک نیم نرم است.

اثبات: ابتدا نشان می دهیم اگر δ_1 یک نیم نرم باشد $\lambda_1\delta_1$ نیز یک نیم نرم است.

چون δ_1 یک نیم نرم است پس برای هر $\lambda_1 \geq 0, \delta_1(x) \geq 0, x \in E$ در نتیجه $\lambda_1\delta_1(x) \geq 0$

حال شرط 2 را مورد بررسی قرار می دهیم .

$$\begin{aligned}(\lambda_1\delta_1)(x+y) &= \lambda_1(\delta_1(x+y)) \\ &\le \lambda_1(\delta_1(x)+\delta_2(y)) \\ &\le \lambda_1\delta_1(x)+\lambda_1\delta_1(y) = (\lambda_1\delta_1)(x)+(\lambda_1\delta_1)(y)\end{aligned}$$

حال شرط 3 را مورد بررسی قرار می دهیم .

$$\begin{aligned}(\lambda_1\delta_1)(cx) = \lambda_1(\delta_1(cx)) = \lambda_1(|c|\delta_1(x)) &= |c|(\lambda_1\delta_1(x)) \\ &= |c|((\lambda_1\delta_1)(x))\end{aligned}$$

به همین ترتیب $\lambda_2\delta_2$ نیز یک نیم نرم است . در نتیجه، $\lambda_1\delta_1+\lambda_2\delta_2$ نیز یک نیم نرم است.

مساله 62) ثابت کنید اگر $\delta_1,\dots,\delta_n$ نیم نرم و $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ نامنفی باشند. آنگاه $\lambda_1\delta_1+\lambda_2\delta_2,\dots+\lambda_1\delta_n$ نیز یک نیم نرم است.

اثبات به استقراء اگر $\lambda_1\delta_1+\dots+\lambda_m\delta_m$ با $0\le m<n$ یک نیم نرم باشد. در این صورت از آنجایی که $\lambda_{m+1}\delta_{m+1}$ یک نیم نرم است نتیجه می گیریم که $\lambda_1\delta_1+\dots+\lambda_m\delta_m+\lambda_{m+1}\delta_{m+1}$ یک نیم نرم است.

مساله 63) هرگاه $k\ge 2$ و $x\in R^k$ ، ثابت کنید y ی در R^k هست به طوری که $y\neq 0$ ولی $x.\,y=0$

اثبات: قرار می‌دهیم $x=(x_1,x_2,\dots,x_k)$, $y=(y_1,\dots,y_k)$ بنابر تعریف $x.y$ خواهیم داشت:

$$x.y=\sum_{i=1}^{k}x_i.y_i$$

دوحالت می‌گیریم $x=0,x\neq 0$

اگر $x=0$ حکم واضح است.

پس فرض کنید $x\neq 0$ ؛ چون $0\neq x=(x_1,\dots,x_n)$ پس j ای موجود است به طوری که $x_j\neq 0$

$$(1\le j\le n)$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=0 &\Leftrightarrow x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_iy_i+\dots+x_ny_n=0 \\ &\Leftrightarrow y_i=\frac{x_1y_1+\dots+x_{i-1}y_{i-1}+x_{i+1}y_{i+1}+\dots+x_ky_k}{-x_i}\end{aligned}$$

حال، قرار می‌دهیم

$$y_i = \frac{x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_k}{-x_i}, \quad y_1 = y_2 = \dots = y_{i-1} = y_{i+1} = \dots = y_k = 1$$

و چون $y = (1,1,\dots,y_i,1,\dots,1)$ پس $y \neq 0$ و نتیجه می‌گیریم که $x.y = 0$ پس y ای مخالف صفر که به شکل

$y = \left(1,\dots,\frac{x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_k}{-x_i},1,\dots,1\right)$ تعریف کردیم که $x.y = 0$ شد پس حکم ثابت می‌شود.

مساله 64) فرض کنید $P \geq 0$ یک عدد صحیح باشد بعلاوه فرض کنید $E = C^P([0,1])$ یک فضا از توابع P بار مشتق پذیر و پیوسته روی $[0,1]$ باشد σ_p را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma_p(f) = \underset{x}{SUP}\left| f^{(p)}(x) \right|$$

ثابت کنید σ_p یک نیم نرم است.

واضح است که چون $0 \leq \left| f^{(p)}(x) \right|$ پس $\underset{x}{SUP}\left| f^{(p)}(x) \right| \geq 0$ در نتیجه $0 \leq \sigma_p(f)$ حال شرط دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\sigma_p(f_1 + f_2) &= \underset{x}{SUP}\left|(f_1 + f_2)^{(p)}(x)\right| = \underset{x}{SUP}\left| f_1^{(p)}(x) + f_2^{(p)}(x)\right| \\ &\leq \underset{x}{SUP}\left| f_1^{(p)}(x)\right| + \underset{x}{SUP}\left| f_2^{(p)}(x)\right| \\ &\underset{=}{\sigma_p}(f_1) + \sigma_p(f_2)\end{aligned}$$

شرط سوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\sigma_p(cf) = \underset{x}{SUP}\left| cf^{(p)} \right| = |c|\sigma_p(f)$$

مساله 65) فرض کنید $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ که $a_i \in R$ تعریف می‌کنیم $\|A\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ نشان دهید که این یک نرم است.

اثبات: بدیهی است که $\|A\| \geq 0$ و اگر $\|A\| = 0$ پس $\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 0$ در نتیجه $|a_i| = 0$ پس $a_i = 0$ و خواهیم داشت $A = 0$ ، برای بررسی ویژگی دوم

$$\|cA\| = \sum_{i=1}^{n} |ca_i| = \sum_{i=1}^{n} |c||a_i| = |c|\sum_{i=1}^{n} |a_i| = |c|\|A\|$$

برای نامساوی مثلثی داریم:

$$\|A+B\|=\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|\le\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}|b_i|=\|A\|+\|B\|$$

سوال 66) در فضای متریک (N,d) که $d(m,n)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$ ، مجموعه $B_{\frac{1}{5}}(2)$ (یعنی گوی باز به مرکز 2 و شعاع $\frac{1}{5}$) را پیدا کنید؟

اگر

$$x\in N; x\in B_{\frac{1}{5}}(2)\Leftrightarrow d(x,2)<\frac{1}{5}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{3}{10}<\frac{1}{x}<\frac{7}{10}\Leftrightarrow\frac{10}{7}<x<\frac{10}{3}\Leftrightarrow x=3\ or\ x=2$$

در نتیجه : $B_{\frac{1}{5}}(2)=\{2,3\}$

سوال67) در حالت کلی همسایگی $B_{\frac{1}{n}}(k)$ را در مورد مساله بالا پیدا کنید.

مساله 68)اگر دنباله $\{x_n\}\subset X$ از عناصر دوبه دو متمایز تشکیل شده باشد و $\{x_n\}$ همگرا به نقطه $a\in X$ باشد، آنگاه ثابت کنید a نقطه حدی این دنباله نیز هست:

اثبات: اگر $S(a,r)$ یک همسایگی دلخواه a باشد چون $P(x_n,a)\to \circ$ پس عدد طبیعی مانند n_0 موجود است به طوری که برای $n\ge n_0$ داشته باشیم $x_n\in S(a,r)$ و در نتیجه کلیه عناصر متمایز x_{n_0} و $x_{n_0+1},\dots$ از دنباله $\{x_n\}$ در گوی $S(a,r)$ واقع می‌شوند بنابراین a یک نقطه حدی دنباله فوق خواهد بود.

برعکس، اگر a یک نقطه حدی مجموعه $M\subset X$ باشد، دنباله ای مانند $\{x_n\}$ با عناصری دوبه دو متمایز یافت می‌شود به طوری که $x_n\to a,\{x_n\}\subset M$

در واقع، اگر فرض کنیم $S(a,r)$ یک همسایگی باز دلخواه a باشد آنگاه یک $x_1\in M$ موجود است به طوری که $x_1\in S(a,r),x_1\ne a$. فرض کنیم $0<r_1<p(a,x_1)$. گوی باز $S(a,r_1)$ دوباره یک همسایگی باز نقطه a است. پس طبق تعریف نقطه حدی نقطه ای مانند $x_2\in M$ موجود است به طوری که $x_2\ne a,x_2\in S(a,r_1)$. گیریم $0<r_2<p(a,x_2)$ دوباره گوی باز $S(a,r_2)$ شامل نقطه ای مانند $x_3\ne a,x_3\in M$ است و ... حال اگر دنباله $\{r_n\}$ را طوری انتخاب کنیم که $r_n\to 0$. در این صورت دنباله $\{x_n\}\subseteq M$ به سمت a میل خواهد کرد. بعلاوه $x_n\ne a$ و عناصر دنباله $\{x_n\}$ دوبه دو متمایزاند.

از اثبات فوق نتیجه می‌شود که اگر $a\in X$ یک نقطه حدی مجموعه $M\subset X$ باشد، آنگاه هر همسایگی باز نقطه a شامل تعداد نامتناهی ازنقاط M است. بنابراین در هر فضای متریک یک مجموعه متناهی از نقاط دارای نقطه حدی نیست.

مساله 68) فرض کنیم $A=\{x(t)\in C[0,1];0<x(t)<1\}$ و $X=C[0,1]$ در این صورت مجموعه A در فضای $C[0,1]$ باز است.

اثبات:

به عهده متعلم

مساله 69) نشان دهیدمجموعه $B=\{x(t)\in C[0,1]\,|\,x(0)=0\}$ در فضای $C[0,1]$ بسته است. اثبات: اگر $x_0(t)\in B'$ ، در این صورت، دنباله‌ای مانند $\{x_n(t)\}\subset B$ موجود است، به

طوری که $x_n(t)$ روی فاصله $[0,1]$ به طور یکنواخت به $x_0(t)$ همگراست چون $x_n(0)=0$ پس $x_0(0)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n(0)=0$ ، پس $x_0(0)=0$ در نتیجه $x_0(0)\in B$.

تعریف: دو متریک d و d' بر X معادل اند در صورتی که هر مجموعه باز در فضای متری (X,d) یک مجموعه باز در فضای متری (X,d') باشد و بالعکس

مساله 70) فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد:

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad \forall x,y\in X$$

نشان دهید d',d معادل اند.

اثبات: قبلاً نشان دادیم که d' یک متر بر X است. فرض کنیم G مجموعه بازی از (X,d) باشد به ازای هر $y\in G$, $d'(y,x)<r_1$ اگر و تنها اگر $d(y,x)<r$ زیرا

$$d'(y,x)<r_1 \Leftrightarrow \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}<\frac{r}{1+r}\Leftrightarrow d(y,x)<r$$

بنابراین

$$S'_{r_1}(x)=\{y\in X:d'(y,x)<r_1\}=S_r(x)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$$

پس $S_r(x)\leq G$ اگر و تنها اگر $S'_n(x)\subseteq G$.

مساله 71) فرض کنیم F گردایه ای از بازه های باز باشد به طری که اشتراک هر دو عضو از آن ناتهی باشد. در این صورت ثابت کنید اجتماع همه آنها یک بازه باز است.

برهان: فرض کنید $a<c<b, I_0=\bigcup_{I\in F} I$ در این صورت I و J ی از F هست که $b\in J, a\in I$. با فرض $I=(a_1,b_1)$ و $J=(a_2,b_2)$، داریم $a_1<a<c<b<b_2$ اگر $b_1\le a_2$؛ آنگاه $I\cap J=\phi$ واین امکان پذیر نیست، پس $b_1>a_2$. در این صورت $c<b_1$ یا $c\ge b_1$

. در حالت $c>b_1$ و $c\in I$، و در حالت دیگر $c\in J$. در نتیجه در هر صورت $c\in I_0$. بنابراین I_0 یک بازه است. لذا یک بازه باز است . زیرا اجتماع بازه‌های باز است.

تعریف: نقطه ای مانند $x\in X$ را یک نقطه مرزی $A\subseteq X$ گویند در صورت که x نقطه درونی و نقطه بیرونی A نباشد. هرگاه نقطه مرزی A عضو A نیز باشد آنرا نقطه مرزی خودی A گویند.

مرز یک مجموعه: مجموعه نقاط مرزی و مرزی خودی A را به ترتیب با $F_r(A)$ و $bd(A)$ نشان می‌دهند. واضح است که $bd(A)\subseteq F_r(A)$.

مساله 72) هرگاه Aو B زیر مجموعه‌هایی از فضای متری (X,d) باشند، آنگاه ثابت کنید.

$$F_r(A)=\overline{A}\cap\overline{A}^c=\overline{A}-int\ A$$

می‌دانیم $A=int\ A\cup extA\cup F_r(A)$ در نتیجه

$$\begin{aligned}F_r(A)&=(int\ A\cup extA)^c=(int\ A)^c\cap(ext\ A)^c\\&=\overline{A}^c\cap\overline{A}\end{aligned}$$

یعنی $F_r(A)=\overline{A}-\left(\overline{A}^c\right)^c=\overline{A}-int\ A$

(توجه کنید که $ext\ A=int\ A^c$ تعریف می‌شود و بیانگر مجموعه کلیه نقاط بیرونی A می‌باشد.

و همچنین$\left(ext\ A=\left(\overline{A}\right)^c\right)$. منظور از $int\ A$ همان A^0 می‌باشد.

مساله 73) نشان دهید $F_r(A)=\phi$ اگر و تنها اگر A هم باز و هم بسته باشد.

اثبات: فرض کنید $F_r(A)=\phi$ در این صورت $\overline{A}-int\ A=\phi$، یعنی $\overline{A}\subseteq int\ A$. پس می‌توان نوشت: $A\subseteq\overline{A}\subseteq int\ A\subseteq A$. بنابراین A هم باز و هم بسته است.

مساله74) نشان دهید A بسته است اگر و تنها اگر $F_r(A)\subseteq A$.

اثبات: هرگاه A بسته باشد، آنگاه $F_r(A)=\overline{A}\cap\overline{A}^c=A\cap\overline{A}^c\subseteq A^0$.

برعکس: اگر A بسته نباشد$F_r(A)\subseteq A$، در این صورت عضوی مانند x از $\overline{A}$ هست که در A نیست یعنی $x\in\overline{A}-A$ ، اما داریم:

$$\overline{A}-A=\overline{A}\cap A^c\subseteq\overline{A}\cap\overline{A}^c=F_r(A)\Rightarrow x\in F_r(A)$$

این یک تناقض است. زیرا $x\in A$. بنابراین A بسته است.

مساله 75) نشان دهید $F_r(A\cap B)\subseteq F_r(A)\cup F_r(B)$ و تساوی در چه صورتی برقرار است؟

اثبات:

$$\begin{aligned}F_r(A\cap B)&=\left(\overline{A\cap B}\right)\cap\overline{(A\cap B)^c}\\&\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}\cap\left(\overline{A^c\cup B^c}\right)\\&=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\left(\overline{A}^c\cup\overline{B}^c\right)\\&=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{A}^c\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{B}^c\right)\\&=\left(F_r(A)\cap\overline{B}\right)\cup\left(F_r(B)\cap\overline{A}\right)\\&\subseteq F_r(A)\cup F_r(B)\end{aligned}$$

مساله 76) ثابت کنید $F_r(int\, A)\subseteq F_r(A)$

اثبات:

$$\begin{aligned}F_r(A\cup B)&=F_r(A\cup B)^c=F_r\left(A^c\cap B^c\right)\\&\subseteq F_r\left(A^c\right)\cup F_r\left(B^c\right)\\&=F_r(A)\cup F_r(B)\end{aligned}$$

در اثبات از این نکته استفاده شده است که $F_r\left(A^c\right)=F_r(A)$ زیرا چو $\left(A^c\right)^c=A$ در نتیجه

$$F_r(A)=\overline{A}\cap\overline{A}^c=\left(\overline{A}^c\right)\cap\left(\overline{A}^c\right)^c=F_r\left(A^c\right)$$

تعریف: فضای متری تام : یک فضای متری مانند (X,d) را تام می‌گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن فضا، همگرا باشد.

مساله 77) نشان دهید فضای $C[0,1]$ متشکل از توابع حقیقی و پیوسته بر $[0,1]$ با متریک

$$d(f,g)=\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)-g(x)\right|$$

یک فضای متری تام است.

اثبات: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $C[0,1]$ باشد. $\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم. عددی مانند n_0 موجود است به طوری که

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon, \qquad \forall n,m \ge n_0$$

یعنی $max\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon, \forall n,m \ge n_0$

بنابراین $\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon \qquad \forall n,m \ge n_0 ; \forall x \in [0,1]$

بنابر قضیه همگرایی یکنواخت کوشی، دنباله $\{f_n\}$ ازتوابع به طور یکنواخت بر $[0,1]$ همگراست. فرض کنید حد f_n , f باشد. چون f_n ها پیوسته اند و همگرایی، یکنواخت است. پس f تابعی پیوسته بر $[0,1]$ است. یعنی $\{f_n\}$ به نقطه‌ای از $C[0,1]$ یعنی تابع f ،همگراست.

سوال 78) فرض کنید X ، مجموعه توابع حقیقی و پیوسته بر $[0,1]$ باشد و $\forall f, g \in X \qquad d(f,g) = \int_0^1 \left| f(t) - g(t) \right| dt$ ثابت کنید (X, d) تام نیست.

برهان: فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ در X بصورت زیر تعریف شده است.

$$x_n(t) = \begin{cases} n & 0 \le t \le \dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \dfrac{1}{n^3} \le t \le 1 \end{cases}$$

به ازای $n > m$ داریم

$$d(x_n,x_m)=\int_0^1 |x_n(t)-x_m(t)|dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{n^2}}|n-m|+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{t}}-m\right|dt+\int_{\frac{1}{m^2}}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right|$$
$$=\frac{n-m}{n^2}+\left(2\sqrt{t}-mt\right)\Big|_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{m}{n^2}+\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{m}\right)-\left(\frac{2}{n}-\frac{m}{n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\to 0 \qquad (n,m\to\infty)$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است حال نشان میدهیم این دنباله کوشی در X همگرا نیست. فرض کنید $\{x_n\}$ همگرا به $x\in X$ باشد در اینصورت

$$d(x_m,x)=\int_0^1|x_n(t)-x(t)|dt=\int_0^{\frac{1}{n^2}}|n-x(t)|dt+\int_{\frac{1}{n^2}}^1\left|\frac{1}{\sqrt{t}}-x(t)\right|dt$$

چون انتگرال های طرف دوم نامنفی اند پس $d(x_n,x)\to 0$ ایجاب می کند که هر دو انتگرال به سمت صفر میل کنند و چون $x\in X$ پس x باید پیوسته باشد.

$$x(t)=\begin{cases} t^{\frac{-1}{2}} & 0<t\le 1\\ n & t=0\end{cases}$$

که در $t=0$ پیوسته نیست. و این یک تناقض است در نتیجه $\{x_n\}$ نمی تواند در X همگرا باشد. یعنی (X,d) تام نیست.

سوال 79) نشان دهید $\overline{A}=\{x\in E \quad : \quad d(x,A)=0\}$

اثبات:
$$x\in A\Leftrightarrow \forall r>0, B(x,r)\cap A\neq\phi \Leftrightarrow \forall r>0 \quad \exists y\in A \ : \ d(x,y)<r$$
$$\Leftrightarrow \forall r>0 \quad , d(x,A)<r\Leftrightarrow d(x,A)=0$$

سوال 80) دو فضای متریک $(A,d),(A',d')$ مفروض اند روی $S=A\times A'$ متریک
$$D((x,x'),(y,y'))=\max\{d(x,y),d'(x',y')\}$$
را در نظر می گیریم و فرض می کنیم $r>0$ و ثابت کنید که S گوی باز به مرکز (x,x') و شعاع r برابر است با $B(x,r)\times B(x',r)$

اثبات:
$$D((x,x'),(y,y'))<r\Leftrightarrow d(x,y)<r, d'(x',y')<r$$
$$\Leftrightarrow y\in B(x,r), y'\in B(x',r)$$
$$\Leftrightarrow (y,y')\in B(x,r)\times B(x',r)$$

و مساله ثابت می شود.

***فصل 6 ***

سوال 1) برای هر دو دنباله $\{a_n\},\{b_n\}$ ثابت کنید

$$\lim\ \sup\ (a_n+b_n)\le \lim\ \sup a_n+\lim\ \sup b_n$$

حل:

$$\limsup a_n=a^*\Rightarrow \quad \exists N_1 \quad s.t \quad \forall n\ge N_1\ :\ a_n\le a^*+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (I)$$

$$\lim\ \sup b_n=b^*\Rightarrow \quad \exists N_2 \quad s.t \quad \forall n\ge N_2\ :\ b_n\le b^*+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (II)$$

با در نظر گرفتن $N=\max\{N_1,N_2\}$ برای مقادیر $n\ge N$ خواهیم داشت

$$a_n+b_n\le a^*+b^*+\varepsilon$$

چون $0<\varepsilon$ دلخواه است پس $a_n+b_n\le a^*+b^*$ از طرفین $\lim\ \sup$ می گیریم، در نتیجه $\limsup(a_n+b_n)\le a^*+b^*$.

با جایگذاری مقادیر b^*,a^* خواهیم داشت $\limsup(a_n+b_n)\le\limsup a_n+\lim b_n$

سوال 2) برای هر دو دنباله $\{a_n\},\{b_n\}$ثابت کنید

$$\lim\ \sup(a_n.b_n)\le\limsup(a_n)\lim\ \sup(b_n)$$

حل:

$$\limsup a_n=a^*,\ \lim\ \sup b_n=b^*\Rightarrow\exists N_1\quad :a_n\le a^*+\frac{\varepsilon}{2}\qquad St\qquad \forall n\ge N_1$$

$$,\ \exists N_2\quad s.t\quad \forall n\ge N_2\ :\ b_n\le b^*+\frac{\varepsilon}{2}$$

با در نظر گرفتن $N=\max\{N_1,N_2\}$ برای مقادیر $n\ge N$ خواهیم داشت

$$a_nb_n\le\left(a^*+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(b^*+\frac{\varepsilon}{2}\right)=a^*b^*+\frac{\varepsilon}{2}a^*+\frac{\varepsilon}{2}b^*\ (1)$$

و چون رابطه (1) به ازای هر $\varepsilon>0$ برقراراست پس $a_nb_n\le a^*b^*$ با گرفتن $\limsup$ از طرفین رابطه خواهیم داشت :

$$\limsup a_nb_n\le\limsup a_n.\limsup b_n$$

سوال 3)اگر $\{x_n\},\{y_n\}$ دنباله هالی حقیقی باشند ثابت کنید هر یک از نابرابری های زیر که هر دو طرفش معنی دار باشد درست است

$$\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n) \le^{\liminf x_n + \limsup y_n}_{\limsup x_n + \liminf y_n}$$
$$\le \limsup(x_n + y_n) \le \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$$

اثبات: مشابه حل مساله قبلی می باشد و فقط باید از این نکته استفاده کرد که $\liminf x_n \le \limsup x_n$

نکته:

توجه کنید که اگر در سوال 3) به جای عمل $+$ ، از عمل ضرب استفاده کنیم باز هم احکام مشابهی برای حاصل ضرب داریم:

سوال 4) فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای از اعداد مثبت باشد و قرارداد میکنیم $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ در این صورت ثابت کنید

$$1) \quad \liminf \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\limsup x_n} \qquad\qquad 2) \ \limsup \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\liminf x_n}$$

اثبات1)

$$1 = x_n . \frac{1}{x_n} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \liminf\left(x_n . \frac{1}{x_n}\right) \le (\limsup x_n)\left(\liminf \frac{1}{x_n}\right) \\ 1 = \limsup\left(x_n . \frac{1}{x_n}\right) \ge (\limsup x_n).(\liminf \frac{1}{x_n}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \liminf \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{\limsup x_n} \le \liminf \frac{1}{x_n}$$

اثبات 2: مشابه اثبات 1) است.

سوال 5) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و به ازای هر دنباله حقیقی کراندار مانند $\{y_n\}$ داریم

$$\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n + \limsup y_n$$

ثابتت کنید که $\{x_n\}$ همگراست

اثبات: می دانیم $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$. پس با توجه به این نکته مساله را حل می کنیم . کافی است $y_n = -x_n$ قرار دهیم . در نتیجه

$$0 = \limsup x_n + \limsup(-x_n) = \limsup x_n - \liminf(x_n) \Rightarrow \liminf(x_n) = \limsup(x_n) \Rightarrow$$ پس

$\{x_n\}$ همگراست.

سوال 6) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای کراندار از اعداد حقیقی است و به ازای هر دنباله حقیقی کراندارمانند $\{y_n\}$ داریم

$$\liminf(x_n + y_n) = \liminf x_n + \liminf y_n$$

ثابت کنید $\{x_n\}$ همگراست.

اثبات:

مانند مساله 5 کافی است قرار دهیم $y_n = -x_n$ و از رابطه $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ استفاده کنیم.

سوال 7)فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای کراندار از اعداد مثبت باشد و به ازای هر دنباله کراندار از اعدادمثبت مانند $\{y_n\}$ داریم $\limsup x_n y_n = (\limsup x_n)(\limsup y_n)$ ثابت کنید که $\{y_n\}$ همگراست.

اثبات:

کافی است قراردهیم $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ در این صورت بنابر مساله 4 داریم

$$1 = (\limsup x_n)\left(\limsup \frac{1}{x_n}\right) = (\limsup x_n)\left(\frac{1}{\liminf x_n}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \liminf x_n = \limsup x_n \Rightarrow$$

دنباله $\{x_n\}$ همگراست.

سوال 8) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای کراندار از اعداد مثبت باشد و برای هر دنباله کراندار از اعداد مثبت مانند $\{y_n\}$ داشته باشیم $\liminf x_n y_n = (\liminf x_n)(\liminf y_n)$ ثابت کنید $\{x_n\}$ همگراست.

اثبات:

مانندحل سوال 7 می باشد و کافی است قرار دهیم $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ و از مساله 4 قسمت 1) استفاده کنیم.

سوال 9)فرض کنید S مجموعه حدهای زیر دنباله ای یک دنباله مانند $\{s_n\}$ باشد . فرض کنید t_n یک دنباله در $S \cap R$ باشد و $t = \lim t_n$ ، در این صورت t به s تعلق دارد.

اثبات:

برهان: چون $t_1 \in S$ پس زیر دنباله ای از s_n طبق فرض به t_1 همگراست پس nای موجود است به طوری که $\left|s_{n_1} - t_1\right| < 1$. فرض کنید $n_k, ..., n_2, n_1$ به گونه ای گزینش شده باشند که

$$n_1 < n_2 < ... < n_k \qquad (1)$$

و

$$\left|S_{n_j} - t_j\right| < \frac{1}{j},\ j = 1,2,...,k \quad (2)$$

چون زیر دنباله ای از $\{S_n\}$ به t_{k+1} همگراست، عددی مانند n_{k+1} با $n_{k+1} > n_k$ موجود است به طوری که $\left|S_{n_{k+1}} - t_{k+1}\right| < \dfrac{1}{(k+1)}$ در نتیجه $k+1$ ، (1) و (2) برقرار است.

برای بقیه برهان لازم است چندین حالت را مورد بررسی قرار دهیم. ابتدا فرض کنید $t \in R$ یعنی t برابر $+\infty$ یا $-\infty$ نباشد.

چون برای هر k که $k \in N$ ،

$$\left|S_{n_k} - t\right| \le \left|S_{n_k} - t_k\right| + \left|t_k - t\right| < \frac{1}{k} + \left|t_k - t\right| \qquad (3)$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ چون $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t$ پس N ای موجود است که $k > N$ مستلزم آن است که $k > \max\left\{N, \dfrac{2}{\varepsilon}\right\}$ ،

آنگاه $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\left|t_k - t\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ و لذا بنابر (3) $\left|s_{n_k} - t\right| < \varepsilon$

بنابراین t به s تعلق دارد.

اینک ، فرض کنید $t=+\infty$. از (2) داریم $s_{n_k} > t_k - \frac{1}{k}$ و چون $\lim_{n\to\infty} t_k = +\infty$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} s_{n_k} = +\infty$. در مورد حالت $t=-\infty$ به نحو مشابهی عمل می کنیم.

سوال 10) فرض کنید $-1 < a_0 < 1$ و به صورت بازگشتی $a_n = \left(\frac{1+a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. فرض کنید $A_n = 4^n(1-a_n)$.

وقتی که n به بی نهایت میل کند، برای A_n چه روی می دهد.

اثبات:

ملاحظه کنیم . می دانیم زاویه منحصر به فردی چون θ ، $0<\theta<\pi$ وجود دارد به طوری که $a_0 = \cos\theta$ به ازای این θ داریم.

$$a_1 == \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2 = \left(\frac{1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{4}\right), \ldots, a_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

به همین ترتیب

حال می توانیم محاسبه کنیم .

$$A_n = 4^n\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$$

$$= \frac{4^n\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{4^n \sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \left(\frac{\theta^2}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{\frac{\theta}{2^n}}\right)^2$$

با بزرگ شدن n ، $\frac{\theta^2}{\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}$ به $\frac{\theta^2}{2}$ میل می کند و $\frac{\left(\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ به 1 می گراید . بنابراین وقتی که n به بی نهایت میل می کند ، A_n به $\frac{\theta^2}{2}$ می گراید.

سوال 11) ثابت کنید مجموعه همه عددهای گویای مثبت را می توان در یک دنباله نامتناهی $\{b_n\}$ طوری مرتب کرد که دنباله $\left\{(b_n)^{\frac{1}{n}}\right\}$ همگراست.

اثبات: دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
2 & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
4 & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

شکل (1)

به این ترتیب همه کسرهایی را که به ساده ترین صورت تحویل نشده اند ، حذف می کنیم بنابراین دنباله به صورت $1,\frac{1}{2},2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,5,\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots$ آغاز می شود. اگر b_n جمله n ام این دنباله باشد می خواهیم که $\left\{b_n^{\frac{1}{n}}\right\}$ به 1 همگراست . همانطور که در شکل (1) می بینید، هر عضو سطر n ام ، کوچکتر یا مساوی با n است و هر عضو ستون n ام، بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{n}$ است .

همچنین اگر b_n در سطر i ام و ستون j ام باشد ، آنگاه $i \le n$,$j \le n$

بنابراین به ازای هر n، $\frac{1}{n} \le \frac{1}{j} \le b_n \le j \le n$

در نتیجه
$$a_n \equiv \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le b_n^{\frac{1}{n}} \le n^{\frac{1}{n}} \equiv c_n$$

اینک بنابر اصل فشار ، $\left\{b_n^{\frac{1}{n}}\right\}$ به 1 همگراست.

مساله 12) فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_k$ عددهایی حقیقی و مثبت باشندو

$$b_n = \left(a_1^{\,n} + a_2^{\,n} + \ldots + a_k^{\,n}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad , \quad n = 1,2,\ldots$$

ثابت کنید $\{b_n\}$ دنباله ای همگراست و $(k>1)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \max\{a_1,\ldots,a_k\}$

اثبات:

به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، فرض کنید $b = \max\{a_1,\ldots,a_k\}$

$$b^n \le a_1^{\,n} + a_2^{\,n} + \ldots + a_k^{\,n} \le kb^n$$

$$b \le b_n \le \left(kb^n\right)^{\frac{1}{n}} = k^{\frac{1}{n}} b \qquad n = 1,2,\ldots$$

و چون $\lim_{n\to\infty} k^{\frac{1}{n}} = 1$ پس $\lim_{n\to\infty} k^{\frac{1}{n}} b = b$ پس بنا به قضیه فشار مساله حل می شود.

مساله 13) فرض کنید $\{a_n\},\{b_n\}$ دنباله هایی یکنوا و جمله های $\{b_n\}$ مثبت باشند. ثابت کنید اگر $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ یکنوا باشد ، دنباله زیر نیز یکنوااست.

$$\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\right\}$$

اثبات:

اگر $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ صعودی باشد، $\frac{a_i}{b_i} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ پس به ازای هر عدد طبیعی مانند n ،

$$a_1 b_{n+1} \le b_1 a_{n+1},\ldots, a_n b_{n+1} \le b_n a_{n+1}$$

بنابراین

$$b_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \le a_{n+1}(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

پس

$$\frac{a_1+\ldots+a_{n+1}}{b_1+b_2+\ldots+b_{n+1}} - \frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \frac{a_{n+1}(b_1+\ldots+b_n) - b_{n+1}(a_1+\ldots+a_n)}{(b_1+b_2+\ldots+b_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)}$$

و بنابراین دنباله $\left\{\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\right\}$ صعودی است و با استدلال مشابهی می توان نشان داد اگر $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نزولی باشد، دنباله داده شده هم نزولی است.

مساله 14) فرض کنید $\{a_n\},\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند و $s_n = \max\{a_n, b_n\}$ $\quad t_n = \min\{a_n, b_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ ثابت کنید دنباله های $\{s_n\},\{t_n\}$ همگرا هستند و حد آنها را بیابید.

اثبات:

به ازای هر عددطبیعی n ، داریم

$$s_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}$$

$$t_n = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2}$$

پس اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a+b+(a-b)}{2} = \max\{a,b\}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{a+b-|a-b|}{2} = \min\{a,b\}$$

مساله 15)فرض کنید a,b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و $n=1,2,...,b_n=a_n\left[\frac{1}{b_n}\right]$ ثابت کنید $\{b_n\}$ دنباله ای همگراست و حد آن را بیابید.

اثبات:

بنابر اصل ارشمیدس اعداد حقیقی ، عددی طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که $Nb>1$ و در نتیجه

$\frac{1}{Nb}<1$ ، اگر $n\geq N$ آنگاه $\frac{1}{nb}\leq\frac{1}{Nb}<1$

و بنابراین $\left[\frac{1}{nb}\right]=0$ پس به ازای هر عدد مثبت مانند ε ، اگر $n\geq N$ ، آنگاه

$$|b_n-0|=|b_n|=|a_n|\left|\left[\frac{1}{nb}\right]\right|=0<\varepsilon$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

مساله 16)عددهای a_1,b_1 داده شده اند و $a_1,b_1\in(0,1)$ دنباله های $(b_n)_{n=1}^{\infty},(a_n)_{n=1}^{\infty}$ این طور تعریف شده اند:

$$a_{n+1}=a_1(1-a_n-b_n)+a_n \qquad n\geq1$$

$$b_{n+1}=b_1(1-a_n-b_n)+b_n \qquad n\geq1$$

$\lim_{n\to\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}b_n$ را در صورت وجود پیدا کنید.

اثبات: فر ض کنید $d=1-a_1-b_1$ از استقرای ساده می توان نتیجه گرفت که

$$a_n=a_1\frac{1-d^n}{1-d} \qquad n\geq1$$

چون $|d|<1$ پس

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_1}{a_1+b_1}$$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد :

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{b_1}{a_1+b_1}$$

مساله 17)فرض کنید α عددی حقیقی باشد و $a_n=\frac{[\alpha]+[2\alpha]+...+[n\alpha]}{n^2}$ ثابت کنید $\{a_n\}$ دنباله ای همگراست و حد آنرا پیدا کنید.

راه حل: به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، $k\alpha-1<[k\alpha]\leq k\alpha$

پس به ازای هر عدد طبیعی مانند n ،

$$\sum_{k=1}^{n}(k\alpha-1)<\sum_{k=1}^{n}[k\alpha]\leq\sum_{k=1}^{n}k\alpha$$

یا

$$\frac{\alpha(n+1)n}{2}-n<[\alpha]+[2\alpha]+...+[n\alpha]\leq\frac{\alpha(n+1)(n)}{2}$$

پس
$$\frac{\alpha(n+1)}{2n}-\frac{1}{n}<a_n<\frac{\alpha(n+1)}{2n}$$

اما
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\alpha}{2}\Leftarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(n+1)}{2n}=\frac{\alpha}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

مساله 18) فرض کنید $a_n,\dots,a_1,a_0$ عددهایی حقیقی باشند و $a_0+a_1+\dots+a_k=0$ دنباله $\{b_n\}$ را در نظر بگیرید به طوری که

$$b_n=a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_k\sqrt{n+k}\qquad n=1,2,\dots$$

اثبات : چون $a_0=-a_1-a_2-\dots-a_k$ پس به ازای هر عدد طبیعی مانند n ،

$$b_n=\left(a_1\sqrt{n+1}-a_1\sqrt{n}\right)+\left(a_2\sqrt{n+2}-a_2\sqrt{n}\right)$$
$$+\dots+\left(a_k\sqrt{n+k}-a_k\sqrt{k}\right)$$

اما اگر $1\le i\le k$، $\sqrt{n+i}-\sqrt{n}=\frac{i}{\sqrt{n+i}+\sqrt{n}}$ پس به ازای $1\le i\le k$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}a_i\left(\sqrt{n+i}-\sqrt{n}\right)=a_i\lim_{n\to\infty}\frac{i}{\sqrt{n+i}+\sqrt{n}}=0$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

مساله 19) دنباله $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید به طوی که

$$a_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\qquad n=1,2,\dots$$

ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

اثبات: می دانیم $a_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}$ پس چون $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ برابر صفر است پس $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ به مساله 51 رجوع کنید.

مساله 20) دنباله نامتناهي $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ، که همه جمله‌هاي آن، عددهايي مثبت‌اند، چنان است که براي هر $k\in N$ داريم. (1) $(a_{k+1}+k)a_k=1$ ، ثابت کنید همه عددهاي این دنباله، عددهایي گنگ اند.

اثبات: فرض مي‌کنيم، يکي از جمله‌هاي دنباله، عددي گويا و به صورت $a_k=\frac{p}{q}$ باشد، که در آن، $1,q,p$ عددهايي طبيعي گرفته‌ايم. با توجه برابري (1)، مي‌توان مقدار جملهٔ بعدي را بدست آورد.

$$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}-k=\frac{q}{p}-k=\frac{q-pk}{p}$$

مجموع عددهاي صورت و مخرج، در a_k برابر $p+q$ و در a_{k+1} برابر $p+q-pk$ است، يعني اين مجموع در a_{k+1} کمتر از k است و بنابراين، بعد از چند گام به جايي مي‌رسيم که يکي از دو جمله صورت يا مخرج، عددي منفي مي‌شود. و فرض را که بايد همه جمله ها مثبت باشند، نقض مي‌کند. اين تناقض ثابت مي‌کند که در اين دنباله، جمله گويا وجود ندارد.

مساله 21) دنباله عددهاي مثبت $a_1,a_2,\dots$ مفروض است و مي‌دانيم $a_n^2\le a_n-a_{n+1}$ $(n\in N)$ ثابت کنید،

. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ابتدا ثابت مي‌كنيم $0 \le a_n < \frac{1}{n}$ و از آنجا حكم نتيجه مي‌گيريم.

براي $n=1$ داريم $a_1^2 \le a_1 - a_2 < a_1 \Rightarrow a_1 < 1$

علاوه بر آن $a_2 \le a_1 - a_1^2 = \frac{1}{4} - \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

يعني $a_n < \frac{1}{n}$ به ازاي $n=2$. اكنون، فرض مي كنيم حكم براي عدد $n \ge 2$ درست باشد. ثابت مي‌كنيم، در اين صورت، براي n+1 هم درست است. چون $f(x) = x - x^2$ در بازهٔ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ صعودي است و در ضمن $a_n < \frac{1}{n}$ بنابراين

$$a_{n+1} \le f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1}$$

پس براي هر $0 \le a_n < \frac{1}{n}, n \in N$ پس با گرفتن حد از طرفين اين نامساوي بنابر اصل فشار خواهيم داشت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مساله 22) دنبالهٔ عددهاي $a_0, a_1, \ldots, a_n$ به اين صورت داده شده است:

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2 \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

ثابت كنيد $\lim a_n = 1$

اثبات: ابتدا ثابت مي كنيم $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$. برابري $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2$، هم ارز است با برابري

$$\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}}$$

چون $\frac{1}{2} = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$، بنابراين خواهيم داشت $(k = 1,2,\ldots,n)$ $\quad \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n},$

اگر آنها را با هم جمع كنيم، به دست مي‌اوريم $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1$

يعني $a_n < 1$. بنابراين، اين نابرابري ها برقرار است

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1}$$

كه از مجموع آنها، به دست مي‌آيد:

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1} \text{ بنابراين } \frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

يعني $a_n > \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n}$ پس $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ و با گرفتن حد از طرفين $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ مي‌شود.

مساله 23) ثابت كنيد $3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \ldots}}}}}$

اثبات: فرض كنيد $f_n(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+n-1)\sqrt{1 + (x+n)}}}}$

معلوم است كه اگر m>n ، $f_m(x) > f_n(x)$. از طرف ديگر

$$x+1=\sqrt{1+x(x+2)}$$
$$=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+2)}}$$
$$=\vdots$$
$$=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\ldots+(x+n-1)(x+n+1)}}}>f_n(x)$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ حد وجود دارد. فرض کنيد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. در اين صورت $f(x)\le x+1$ و

$$f(x)>\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\ldots}}}}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}>x$$

بنابراین $x<f(x)\le x+1$. فرض کنيد $g(x)=x+1-f(x)$. در اين صورت $0\le g(x)<1$ به سادگي مي‌توان ثابت کرد که

$$(f(x))^2=1+x\,f(x+1)$$

به اين ترتيب

$$(x+1+f(x))g(x)=xg(x+1)$$

$$\frac{g(x)}{x}\le\frac{g(x+1)}{x+1}\le\ldots\le\frac{g(x+n)}{x+n}<\frac{1}{x+n}\to 0$$

يعني $f(x)=x+1$ و در نتيجه $f(2)=3$

مساله 24) در دنبالهٔ عددهاي مثبت $a_n, a_1, a_2, \ldots$ هر جملهٔ $a_r\,(n\in N)$ يا برابر $\frac{1}{2}a_{n-1}$ و يا برابر $\sqrt{a_{n-1}}$ است. آيا ممکن است اين دنباله حدي در بازهٔ $(0,1)$ داشته باشد.

اثبات: فرض کنيد $\lim_{n\to\infty} a_n=A,\ A\in(0,1)$ در اين صورت عدد طبيعي N پيدا مي‌شود که براي هر انديس $n\ge N$ داشته باشيم:

$$\frac{2A}{3}<a_n<\frac{4A}{3}$$

اگر براي هر $n>N$، برابري $a_n=\sqrt{a_{n-1}}$ برقرار باشد، آن دقت، ضمن عبور به حد به ازاي $n\to\infty$ به دست مي‌آيد:

$$A=\lim a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{n-1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}=\sqrt{A}$$

بنابراين $A\in\{0,1\}$ که شرط $A\in(0,1)$ را نقض مي‌کند. اگر هم، به ازاي انديس از n>N برابري $a_n=\sqrt{a_{n-1}}$ برقرار نباشد آن وقت $a_n=\frac{1}{2}\,a_{n-1}<\frac{1}{2}\times\frac{4A}{3}=\frac{2A}{3}$

و نابرابري $A<\frac{2A}{3}$، شرط انتخاب عدد N را نقض مي‌کند. بنابراين دنبالهٔ $\{a_n\}$ نمي‌تواند حدي در بازهٔ $(0,1)$ داشته باشد.

مساله 25) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌اي از اعداد حقيقي مثبت است که به عدد مثبت a همگراست. در اين صورت به ازاي هر عدد حقيقي x داريم: $a_n^x\to a^x$.

اثبات: فرض کنيم $0<\varepsilon<a^x$ قرار مي‌دهيم $C=(a^x+\varepsilon)^{\frac{1}{x}}$ و $b=(a^x-\varepsilon)^{\frac{1}{x}}$. با توجه به $a^x-\varepsilon<a^x<a^x+\varepsilon$ روشن است که $b<a<c$. چون $a_n\to a$ پس

$$\exists N \in N \ S,T \ \forall n \geq N \Rightarrow b < a_n < c \Rightarrow b^x < a_n^x < c^x$$
$$\Rightarrow a^x - \varepsilon < a_n^x < a^x + \varepsilon \Rightarrow \left| a_n^x - a^n \right| < \varepsilon$$

و اين دقيقاً يعني $a_n^x \to a^x$

سوال 26) فرض كنيد $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ يك دنباله باشد به طوري كه $x_n - x_{n-2} \to 0$ وقتي كه $n \to \infty$ ثابت كنيد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

اثبات: چون $x_n - x_{n-2} \to 0$ پس n_0 اي موجود است به طوري كه براي هر ε و n هايي كه $n \geq n_0$ داريم

$$\left| x_n - x_{n-2} \right| < \varepsilon$$

$$x_n - x_{n-1} = (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (x_{n-2} - x_{n-4}) - \dots \pm \left(\left(x_{n_0+1} - x_{n_0-1} \right) - \left(x_{n_0} - x_{n_0-1} \right) \right)$$

در نتيجه

$$\left| x_n - x_{n-1} \right| \leq (n - n_0)\varepsilon + \left| x_{n_0} - x_{n_0-1} \right|$$

بنابراين $\left| x_n - x_{n-1} \right|$ به سمت صفر ميل مي‌كند.

مساله 27) ثابت كنيد $\sqrt{2}$ حد دنباله اي از اعداد به شكل $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m}$ $\left((m,n \in N^*) \right)$ است.

اثبات: فرض كنيد $n = m + \left[3\sqrt{2} m^{\frac{2}{3}} \right]$ در اين صورت با استفاده از قضيه مقدار ميانگين داريم: تابع $x^{\frac{1}{3}}$ را روي بازه $[m,n]$ در نظر بگيريد. در اين صورت عددي مانند c بين m,n وجود دارند كه

$$n^{\frac{1}{3}} - m^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3c^{\frac{2}{3}}}(n - m) = \sqrt{2}\left(\frac{m}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\left[3\sqrt{2} m^{\frac{2}{3}} \right]}{3\sqrt{2} m^{\frac{2}{3}}} \right)$$

كه عبارت آخر سمت راست در تساوي بالا، وقتي $m \to \infty$ به سمت 1 ميل مي‌كند. و چون $\frac{m}{n} < \frac{m}{c} < 1$ و وقتي $m \to \infty$،

پس $\frac{m}{n} \to 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{3}} - m^{\frac{1}{3}} \right) = \sqrt{2}$$

مساله 28) ثابت كنيد $\sqrt[s]{k}$ حد دنباله اي از اعداد به شكل $\sqrt[k+1]{n} - \sqrt[k+1]{m}$ مي‌باشد.

اثبات: مثل حل مساله بالا قرار مي‌دهيم $n = m + \left[(k+1)\sqrt[s]{k} m^{\frac{k}{k+1}} \right]$ و مساله حل مي‌شود.

مساله 29) فرض كنيد دو دنباله $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ و $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ دو دنباله باشند كه در شرايط زير صدق مي كنند.

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots \quad \begin{matrix} b_n > 0 \\ \text{واگراست} \end{matrix} \qquad n = 0,1,2,..$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = S$$

آنگاه ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{b_0 + b_1 + \dots + b_n} = S$

اثبات: مي دانيم اگر y_n يکنوا و $y_n \to \infty$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ قرار مي‌دهيم:

$$y_n = b_0 + \dots + b_n \,, x_n = a_0 + \dots + a_n$$

در اين صورت چون $x_n - x_{n-1} = a_n$ و $y_n - y_{n-1} = b_n$ پس $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ و حکم ثابت مي‌شود.

مساله 30) مطلوب است محاسبه $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{\log n^n}$

حل: فرض کنيم $x_n = \log n!$ و $y_n = \log n^n$ و به ازاي n>1 خواهيم داشت:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{\log n}{n \log n - (n-1)\log(n-1)}$$

$$= \frac{\log n}{\log n^n - \log(n-1)^{n-1}} = \frac{\log n}{\log \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}$$

$$= \frac{\log n}{\log n^n + \log \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}}$$

$$= \frac{\log n}{\log n - \log \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{\log n} . \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1 \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{\log n^n} = 1$$

مساله 31) فرض کنيد α عددي حقيقي باشد و $0 < \alpha < 1$. همچنين فرض کنيد $\{a_n\}$ دنباله اي از اعداد مثبت باشد

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < a \qquad n = 1,2,3,...$$

ثابت کنيد $\{a_n\}$ همگراست و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

به ازاي هر عدد طبيعي مانند n ، $n \geq 2$

$$a_n < \alpha\, a_{n-1} < \alpha^2 a_{n-2} < \dots < \alpha^{n-1} a_1$$

و چون $0 < \alpha < 1$ پس $\lim_{n\to\infty} \alpha^{n-1} = 0$. چون به ازاي هر عدد طبيعي مانند $n \geq 2$

$$|a_n| = a_n < \alpha^{n-1} a_1 = \left|\alpha^{n-1} a_1\right|$$

پس $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \lim_{n\to\infty}|a_n| = \circ \Leftarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| \le \lim_{n\to\infty}|a_1\alpha^{n-1}|$

مساله 32) فرض كنيد α عددي حقيقي باشد و $\alpha > 1$. همچنين فرض كنيد $\{a_n\}$ دنباله اي از اعداد مثبت باشد و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha \qquad n = 1,2,...$$

ثابت كنيد a_n واگراست و $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

حل: به ازاي هر عدد طبيعي مانند n و $n \ge 2$

$$a_n > \alpha\, a_{n-1} > \alpha^2 a_{n-1} > ... > \alpha^{n-1} a_1 > 0$$

و چون $\lim_{n\to\infty} a^{n-1} = +\infty$ پس $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

مساله 33) Z عددي گويا و مثبت است و z<1 . فرض كنيد S عددي طبيعي است و $S \ge 2$ در اين صورت حداكثر يك عدد طبيعي مانند a وجود دارد كه $0 < (za-1)a^{S-1} < 1$

اثبات: فرض كنيد عددهاي طبيعي a,b در نابرابري بالا صدق كنند. مي‌توانيم فرض كنيم a<b و $z = \frac{m}{n}$ كه در آن m,n عددهايي طبيعي اند. در اين صورت

$$\frac{n}{a} < m \le m(b-a) < \frac{n}{a^{S-1}}$$

كه درست نيست. بنابراين مساله درست است.

مساله 34) فرض كنيم $\{a_n\}$ دنباله اي همگرا باشد و عدد حقيقي b به تعداد دفعاتي نامتناهي در اين دنباله ظاهر شده باشد. ثابت كنيد $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

اثبات: فرض كنيد $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. در اين صورت اگر ε عددي مثبت باشد، عددي طبيعي مانند N وجود دارد كه اگر $n > N$ آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$. اما عددي طبيعي مانند m وجود دارد كه m>n و $a_m = b$ ، زيرا در غير اينصورت b حداكثر N بار در دنبالة $\{a_m\}$ ظاهر مي‌شود . بنابراين $|a_m - L| = |b - L| < \varepsilon$

و چون نابرابري بالا براي هر $\varepsilon > 0$ برقرار است پس $b = L \Leftarrow |b-L| = 0$

مساله 35) فرض كنيد $\{a_n\},\{b_n\}$ دو دنباله باشند و دنباله $\{a_n + b_n\}$ همگرا به A و دنباله $\{a_n - b_n\}$ همگرا به B باشد. ثابت كنيد دنبالة $\{a_n b_n\}$ همگراست و حد آن را بيابيد.

اثبات: توجه كنيد كه به ازاي هر عدد طبيعي مانند n،

$$a_n b_n = \frac{(a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)^2 = A^2, \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)^2 = B^2$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2}{4} = \frac{A^2 - B^2}{4}$$

سوال 36) مجموع سري زير را پيدا كنيد

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}$$

حل: سري دوگانه برابر است با $S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{m3^n}\left(\frac{1}{n3^m}-\frac{1}{m3^n}\right)$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{3^m2^n}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n\left(n3^m+m3^n\right)}$$

سري دومي برابر S است که فقط n,m جابجا شده اند.

در نتيجه $2S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{3^m3^n}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}\right)^2$

$$S=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}\right)^2$$

از رابطة زير استفاده مي‌کنيم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}mx^m=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty}x^m\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

در نتيجه:

$$2S=\left(\frac{3}{4}\right)^2\Rightarrow S=\frac{9}{32}$$

سوال 37) نشان دهيد که براي هر عدد صحيح مثبت m ، نشان دهيد که

$$\sum_{n_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_0=1}^{\infty}\frac{1}{n_0\left(n_0+1\right)\ldots\left(n_0+n_1+\ldots+n_m\right)}$$
$$=\left(-1\right)^{m-1}\left(\int_0^1\frac{e^t-1}{t}dt+\sum_{j=1}^{m-1}\left(1-e\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\left(-1\right)^i}{i!}\right)\right)$$

سوال38) اگر $P\in R^+$، $\{a_n\},\lambda\in R,$ يك دنباله در R باشد و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{p-1}}=\lambda$

و همچنين $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ $\left(\forall n\in N\right)$ نشان دهيد.

($\lambda<\infty$ يك عدد حقيقي است) $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n^p}=\frac{1}{P}\lambda$

اثبات: مي دانيم اگر $y_n\to\infty,y_{n+1}>y_n$ و $\{x_n\}$ يك دنباله باشد آنگاه با موجوديت حد راست رابطه زير برقرار است:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

قرار مي دهيم $x_n=a_1+\ldots+a_n$

$$y_n = n^P \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p - (n-1)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{p\,n^{p-1} - \dots}$$
$$= \frac{1}{p} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{pn^{p-1}}$$
$$= \frac{1}{P} \lambda$$

تمرین 39) اگر $\{a_n\}$ يك دنباله در R باشد و داشته باشد $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a_n = \lambda$

و $S_n = a_1 + \dots + a_n$ ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{Ln\,n} = \lambda$

اثبات: برعهده متعلم

مساله 40: نشان دهید که $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)} = \frac{e}{2}$

حل:
$$\frac{1}{n!}\frac{1}{\left(n^4+n^2+1\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{(n+1)!\left[(n+1)n+1\right]} - \frac{n-1}{n!\left[n(n-1)+1\right]} + \frac{1}{(n+1)!}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\right] = \frac{e}{2}$$

مساله 41) فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنباله در R^+ و $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار باشد و

$$S_n = \frac{p_n x_1 + p_{n-1}.x_2 + \dots + p_1 x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

نشان دهید S_n یک دنباله کراندار است.

اثبات: چون $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار است پس

$$\forall n;\ \exists M\ \ s.t\quad |x_n| \le M$$
$$|S_n| \le \frac{p_n|x_1| + p_{n-1}|x_2| + \dots + p_1|x_n|}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \le \frac{p_n M + p_{n-1} M + \dots + p_1 M}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$
$$= M$$

پس $\{S_n\}$ یک دنباله کراندار است.

مساله 42) نشان دهید اگر $\{x_n\}$ کراندار باشد آنگاه $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ نیز یک دنباله کراندار است.

اثبات: کافی است در مساله بالا قرار دهیم $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$

مساله 43) ثابت کنید که هر دنباله حقیقی مانند $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ که ماکسیمم نداشته باشد. دارای حداقل یک زیر دنباله اکیداً صعودی است. (گزاره مشابهی هم برای مینیمم داریم).

اثبات: قرار می دهیم $k_1 = 1$ چون x_1 ماکزیمم دنباله نیست، اندیس مانند $k_2 > k_1$ وجود دارد به طوری که $x_{k_2} > x_{k_1}$ چون x_{k_2} جمله ماکسیمم دنباله نیست، اندیسی مانند $k_3 > k_2$ وجود دارد به طوری که $x_{k_3} > x_{k_2}$ با ادامه این فرایند، زیر دنباله ای اکیداً صعودی مانند $\left(x_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ به دست می‌آید.

مساله 44)فرض کنید $f, g: R \to R$ پیوسته باشند و

$$A = \{x \mid x \in R,\ f(x) \geq g(x)\}$$

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای از اعضای A باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ثابت کنید $a \in A$.

راه حل: واضح است که برای هر عدد طبیعی مانند n ، $f(a_n) - g(a_n) \geq 0$ اما چون f و g در a پیوسته اند $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ و $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$. پس بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(a_n) - g(a_n)\right) = f(a) - g(a) \geq 0 \Rightarrow a \in A$$

مساله 45) ثابت کنید اگر رشته $\{a_{n+1} - a_n\}$ متقارب به عدد α باشد رشته $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ نیز متقارب به α است.

اثبات: می دانیم اگر $y_{n+1} \geq y_n$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ موجود باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

قرار می دهیم $x_n = a_n$ و $y_n = n$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

مساله 46)اگر a عدد ثابت مثبتی باشد $\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$

اثبات: قرار می دهیم $b_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n^n}}$ ؛ حال $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ را حساب می کنیم که

$$a_n = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a+n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{a+n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

چون حد $\frac{a_{a+1}}{a_n}$ موجود است پس $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e}$

مساله 47) ثابت کنید تساوی های زیر برقرارند:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad (a > 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0 \quad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \; (4)$$

اثبات: بنابر قضیه شتواتس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{2^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0 \qquad (1)$$

(2) با فرض $a=1+\lambda$ و $\lambda>0$

داریم $a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\ldots>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$

و چون به ازای n>2 روشن است که $n-1>\frac{n}{2}$، در آن صورت بالاخره داریم:

$$a^n>\frac{(a-1)^2}{4}n^2\Rightarrow\frac{a^n}{n}>\frac{(a-1)^2}{4}n$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=+\infty$ و چون این نتیجه به ازای هر a>1 درست است، با اختیار k>1 می توانیم بنویسیم (دست کم برای مقدارهای به اندازه کافی بزرگ n):

$$\frac{a^n}{n^k}=\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]>\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}$$

و از آنجا $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=+\infty$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ توجه شود که این نتیجه برای k>1 حاصل شد طبعاً برای k<1 هم درست است.

(3) قرار می دهیم $x_n=\frac{2^n}{n!}$ در این صورت $x_{n+1}=x_n.\frac{2}{n+1}$ در نتیجه به ازای n>1 دنباله x_n نزولی است. در عین حال، از پایین و مثلاً صفر کراندار است. در نتیجه حد x_n موجود است. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n.\frac{2}{n+1}\Rightarrow a=a.0\Rightarrow a=0$$

(4) برای $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ هم مثلاً (3) عمل می کنیم و واضح است که به ازای $n>a-1$ سری $x_n=\frac{a^n}{n!}$ نزولی و اگر فرض کنیم a>0 سری از پایین به صفر کراندار است. در نتیجه چون $x_{n+1}=x_n.\frac{c}{n+1}$ پس

$$\lim x_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n.\frac{c}{n+1}\Rightarrow a=a.0\Rightarrow a=0$$

حال اگر a<0 باشد در این صورت با قرار دادن $a^n=(-1)^n b^n$ خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{b^n}{n!}=0$ زیرا b>0

پس $\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}=0$ و چون $(-1)^n$ کراندار است پس $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{b^n}{n!}=0$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

مساله 48) ثابت کنید دنباله $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\ldots)$ همگراست به این ترتیب فرمول $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$ را داریم که در آن $C=0.577216000$ موسوم به ثابت اویلر است و (زمانی که $n\to\infty$ آنگاه $\varepsilon_n\to 0$).

اثبات: بر عهده متعلم

مساله 49:فرض کنید $(a,b>0)$ ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^2=\sqrt{ab}$

اثبات: قرار می دهیم $x_n=n\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right]$ در این صورت $x_n=\frac{1}{2}\left[n\left(\sqrt[n]{a-1}\right)+n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)\right]$ در این صورت

چون $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ برابر Lna می باشد پس

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}[Lna+\ln b]=\frac{1}{2}Lnab=Ln\sqrt{ab}$$

و در واقع حد مطلوب برابر است با $\sqrt{ab}=e^{Ln\sqrt{ab}}$

مساله 50)ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n=e^{\lambda x}$

حل: اگر مقدار داخل پرانتز را برابر $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)$ بگیریم، داریم:

$$x_n=n.\left(\cos\frac{x}{n}-1+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)=\lambda\,x.\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}-x.\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$$

حال می دانیم اگر $x_n\to x$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=e^x$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n$ برابر $e^{\lambda x}$ می باشد.

مساله 51)ثابت کنید که اگر دنباله $x_n(n=1,2,\ldots)$ همگرا باشد در این صورت دنباله میانگین های حسابی $S_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ نیز همگرا و $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n$ با مثالی نشان دهید عکس این حکم درست نیست.

حل: با استفاده از قضیه شتولتس داریم: $,a_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $y_n = n$ در این صورت $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n}$ و چون $a_{n+1} - a_n = x_n, y_{n+1} - y_n = 1$

پس $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n}$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ برابر $\lim_{n\to\infty} x_n$ می‌باشد.

مساله 52) ثابت کنید اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ برابر $+\infty$ می‌باشد.

اثبات: با استفاده از قضیه شتولتس داریم: اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$ باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n}$ برابر $+\infty$ می باشد که در اینجا به ازای n>N ، $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, y_{n+1} > y_n$ می باشد. حال اگر قرار دهیم $a_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ و $y_n = n$ در این صورت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty$ می‌شود و اثبات تمام است.

مساله 53) ثابت کنید اگر دنباله $x_n, (n = 1,2,\ldots)$ همگرا و $x_n > 0$ باشد در اینصورت $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$.

اثبات: قرار می دهیم $y = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ در این صورت $Lny = \frac{1}{n} Lnx_1 x_2 \ldots x_n$ پس $Lny = \frac{Lnx_1 + Lnx_1 + \ldots + Lnx_n}{n}$ حال چون $\lim_{n\to\infty} \frac{Lnx_1 + Lnx_2 + \ldots + Lnx_n}{n}$ برابر $\lim_{n\to\infty} Lnx_n$ می‌باشد پس $\lim_{n\to\infty} Lny = \lim_{n\to\infty} Lnx_n$ در نتیجه $Ln \lim_{n\to\infty} y = Ln \lim_{n\to\infty} x_n$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} x_n$.

مساله 54) فرض کنیم y_n صعودی و $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ موجود باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

حل: ابتدا فرض می کنیم که این حد برابر عدد متناهی L باشد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L$$

در این صورت به ازای هر عدد دلخوا $\varepsilon > 0$ ، می توان عدد N را طوری پیدا کرد که برای n>N داشته باشیم:

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{یا} \quad L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

یعنی وقتی n>N باشد، همه کسرهای

$$\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \ldots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

بین این حدها قرار دارند (چون می‌دانیم اگر $\frac{a}{b}<\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},...,\frac{a_n}{b_n}<\frac{c}{d}$ آنگاه $\frac{a}{b}<\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}<\frac{c}{d}$ برقرار است) پس $\frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N}$ هم بین همان حدها قرار دارند. پس $L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N}<L+\frac{\varepsilon}{2}$ پس $\left|\frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ حالا اتحاد زیر را می‌نویسیم:

$$\left(\frac{x_n}{y_n}-L\right)=\frac{x_N-Ly_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-L\right)$$

بنابراین
$$\left|\frac{x_n}{y_n}-1\right|\le\left|\frac{x_N-Ly_N}{y_N}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-L\right|$$

جمله دوم سمت راست، به ازای n>N کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ باقی می ماند و عامل اول نیز، با توجه به $y_n\to+\infty$ ، کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ است (مثلا برای $n>N'$) اگر $M=\max\{N,N'\}$ بگیریم، روشن است که به ازای $n>M$ ، $\left|\frac{x_n}{y_n}-L\right|<\varepsilon$ یعنی حد $\frac{x_n}{y_n}$ برابر است با L.

حال اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty$ در این حالت، قضیه ای را که ثابت کردیم می‌توان در مورد نسبت عکس $\frac{y_n}{x_n}$ به کار برد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=0$$

و آنجا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$$

مساله 55) ثابت کنید اگر $x_n>0\ (n=1,2,3,...)$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ برقرار است (فرض کنید حد سمت راست موجود است)

اثبات: از قضیه شتولتس استفاده می‌کنیم می دانیم $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-a_{n-1}}{1}$ برقرار است اگر $\lim_{n\to\infty}a_n-a_{n-1}$ موجود باشد. در نتیجه:کافی است قرار دهیم $a_n=Ln\,x_n$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\,x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}Lnx_n-Lnx_{n-1}=\lim Ln\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$ و چون همیشه $\lim_{n\to\infty}b_{n-1}=b_n$ برقرار است پس $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ در نتیجه اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ موجود باشد آنگاه $\lim\sqrt[n]{x_n}$ موجود و $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

مساله 56) ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$:

حل: طبق سوال (55) داریم: اگر قرار دهیم $x_n = \frac{n^n}{n!}$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

مساله 57) مطلوب است محاسبه (الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$ (ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{Ln\,n}{n}$

حل: (الف) ابتدا $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{2n-1}$ راحساب می کنیم: بنابر قضیه شتولتس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{2n-1-(2n-3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right) = +\infty$$

حال ثابت می کنیم $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2}$ برابر $+\infty$ است. بنابر قضیه شتولتس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = \frac{a^n - a^{n-1}}{n^2-(n-1)^2} = \frac{a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)}{2n-1} = +\infty$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$

(ب) ثابت می کنیم $\lim_{n\to\infty} \frac{Ln\,n}{n} = 0$: از قضیه شتولتس استفاده می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ln\,n}{n} = \lim_{n\to\infty} Lnn - Ln(n-1) = \lim_{n\to\infty} Ln\frac{n}{n-1} = Ln\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}$$

$$= Ln1 = 0$$

پس $\lim_{n\to\infty} \frac{Ln}{n} = 0$

مساله 58) ثابت کنید اگر P یک عدد طبیعی باشد در این صورت

(الف) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1^P + 2^P + \ldots + n^P}{n^{P+1}} = \frac{1}{P+1}$

(ب) $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^P + \ldots + n^P}{n^P} - \frac{n}{P+1}\right) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^P+3^P+\ldots+(2n-1)^P}{n^{P+1}}=\frac{2^P}{P+1}$$ (پ)

حل:

(الف) با استفاده از قضیه شتولتس و با فرض $x_n = 1^P + 2^P + \ldots + n^P$ و $y_n = n^{P+1}$ در این صورت $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^P}{n^{P+1}-(n-1)^{P+1}}$

ولی $(n-1)^p = n^p - (p-1)n^k + \ldots$ در نتیجه $(n-1)^P - n^p = (k+1)n^P + \ldots$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^P}{(P+1)n^p+\ldots}=\frac{1}{P+1}$$

(ب)

$$t_n = n\left(S_n - \frac{1}{P+1}\right)=\frac{1^P+2^P+\ldots+n^P}{n^P}-\frac{n}{P+1}$$

$$t_n = \frac{(p+1)(1^p+2^p+\ldots+n^p)-n^{p+1}}{n^p(p+1)}$$

حال اگر صورت کسر را x_n و مخرج کسر را y_n بگیریم با استفاده از قضیه شتولتس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)n^p-\left[n^{p+1}-(n-1)^{p+1}\right]}{(p+1)\left[n^p-(n-1)^p\right]}$$

و چون $(p+1)n^p - \left[n^{p+1}-(n-1)^{p+1}\right]=\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+\ldots$ و $n^p-(n-1)^p = kn^{p-1}+\ldots$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+\ldots}{(p+1)pn^{p-1}+\ldots}=\frac{1}{2}$$

(پ) بنابر قضیه شتولتس قرار می دهیم:

$$x_n = 1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p$$

$$y_n = n^{p+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^p n^p+\ldots}{(p+1)n^p+\ldots}=\frac{2^p}{p+1}$$

مساله 59) ثابت کنید که دنباله های $x_n, y_n (n=1,2,\ldots)$ مشخص شده با دستورهای

$$(a>b)\quad x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

دارای حد مشترکی می باشند:

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

حل: چون واسطه حسابی بزرگتر از واسطه هندسی است و همچنین هر دو واسطه بین عددهای اصلی قرار دارند در نتیجه

$$b > y_2 > x_2 > a$$

حال اگر واسطه های حسابی و هندسی را برای دو عدد x_2, y_2 تشکیل دهیم در این صورت

$$y_2 > y_3 > x_3 > x_2$$

و همین طور تا آخر. اگر عددهای x_n, y_n معلوم باشند آنگاه x_{n+1} و y_{n+1} از روی دستورهای

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

معین می‌شوند و مانند قبل $y_n > y_{n+1} > x_{n+1} > x_n$ و حدهای x_n و y_n موجودند. زیرا y_n نزولی و x_n صعودی است و درعین حال داریم $a > y_n > x_n > b$. پس دنباله های x_n و y_n کراندارند. در نتیجه x_n و y_n دارای حد می باشند. حال فرض کنید:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = S,\ \lim_{n\to\infty} y_n = t \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n}{2} \Rightarrow t = \frac{S+t}{2} \Rightarrow S = t$$

مساله 60) دنباله عددی $x_n \left(n = 1,2,...\right)$ با دستورهای زیر مشخص شده است:

$$x_1 = a, x_2 = b,\ \ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

مطلوب است محاسبه حد $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

حل: فرض کنید $L_n = \min\left(x_{n-1}, x_{n-2}\right), U_n = \max\left(x_{n-1}, x_{n-2}\right)$ چون $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \le u_n$ پس $U_{n+1} = \max\left(x_n, x_{n-1}\right) \le u_n$ به همین ترتیب می توان ثابت کرد: $L_{n+1} \ge L_n$ معلوم است که $u_n \ge L_n$. بنابراین $\left(u_n\right)_{n=1}^{\infty}$ و $\left(Ln\right)_{n=1}^{\infty}$ دنباله هایی یکنوا و کراندارند و در نتیجه حد این دنباله ها وجود دارد. فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u, \lim\limits_{n\to\infty} Ln = L$ $\left(u \ge L\right)$ ثابت می کنیم $u = L$. فرض کنید ε عددی حقیقی و مثبت است. عددی طبیعی مانند N وجود دارد که اگر $n \ge N$ ، $u_n < u + \varepsilon$. توجه کنید که چون یکی از عددهای x_{n-1} و x_{n-2} برابر با L_n است پس $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \le \frac{L_n + u_n}{2}$ و بنابراین $x_n \le \frac{L+u+\varepsilon}{2}, n \ge N$ به این ترتیب $u_{N+2} = \max\left(x_{N+1}, x_N\right) < \frac{L+u+\varepsilon}{2}$ و $u < \frac{L+u+\varepsilon}{2}$ پس $u - L < \varepsilon$ چون ε عددی دلخواه بوده، نتیجه می گیریم که $u - L \le 0$ و در نتیجه $u = L$. اکنون معلوم است که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ وجود دارد و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = U = L$ این حد را حساب می کنیم. اگر تساوی های $x_1 + x_2 = 2x_3$ و $x_2 + x_3 = 2x_4$ را با هم جمع می کنیم معلوم می شود که $x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4$ از استقرایی ساده معلوم می شود که اگر k عددی طبیعی باشد. $x_1 + 2x_2 = x_{2k+1} + 2x_{2k+2}$

بنابراین $x_1 + 2x_2 = \left(1+2\right)u$ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u = \frac{a}{3} + \frac{2b}{3}$

مساله 61) فرض کنید $\left\{b_n\right\}$ و $\left\{a_n\right\}$ دو دنباله از اعداد نامنفی باشد به گونه ای که $\left(b_n\right)^n \to b,\ \left(a_n\right)^n \to a$. اگر p و q دو عدد نامنفی بوده و $p + q = 1$ مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty}\left(pa_n + qb_n\right)^n$

اثبات: می دانیم که (1) $\qquad y_n \to a \Leftrightarrow n\left(\sqrt[n]{y_n} - 1\right) \to \log a$

حال به جای y_n ، دنباله x_n^n را قرار می‌دهیم. در این صورت از (1) داریم: $\left(x_n \ge 0\right)$.

$$x_n^n \to a \Leftrightarrow n\left(x_n - 1\right) \to \log a$$

که در اینجا a مثبت است. حال قرار می‌دهیم $x_n = pa_n + q\,b_n$ ، آنگاه

$$n(x_n-1)=n\left(pa_n+q\,b_n-1\right)=pn\left(a_n-1\right)+q\,n\left(b_n-1\right)$$
$$=p\log a+q\log b=\log\left(a^p b^q\right)$$

پس $\log x_n^n = a^p b^q$

مساله 62) فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد و $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_k$ در این صورت نشان دهید S_n کراندار است زیرا داریم:

$$\left|S_n\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}a_k}{n}\right|\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}{a_k}^2$$

توجه شود که از نامساوی هلدر استفاده شده است:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_k b_k\right|\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \ p>0$$

سوال 63) اگر $\left\{a_n\right\}$ با جملات مثبت باشد و Σa_n همگرا باشد ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگراست.

اثبات: چون Σa_n همگراست پس بنا به شرط لازم همگرایی داریم $a_n \to 0$ در نتیجه از مرتبه‌ای به بعد داریم $0\le a_n\le 1$. لذا $a_n^2 \le a_n$ و بنا به آموزن مقایسه Σa_n^2 هم همگراست.

سوال 64) فرض کنیم $a_n>0$ و $b_n>0$ و Σb_n همگرا باشد و ازمرتبه ای به بعد داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ در این صورت Σa_n همگراست.

حل داریم: $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\frac{a_n}{b_n}$ در نتیجه دنباله $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نزولی است در نتیجه $M>0$ موجود است که $\frac{a_n}{b_n}<M$ در نتیجه $a_n<M\,b_n$ لذا $\Sigma\,a_n$ هم همگراست.

سوال 65) فرض کنیم $a_n\ge 0$ در این صورت ثابت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1},\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همرفتاراند.

حل: اولاً داریم $0\le\frac{a_n}{1+a_n}\le a_n$ پس بنابر آزمون مقایسه اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ هم همگراست.

بالعکس: فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ همگرا باشد در این صورت داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1}=0$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ لذا از مرتبه ای به بعد دایم $a_n<1$ در نتیجه $\frac{1}{1+a_n}>\frac{1}{2}$ لذا $0\le\frac{a_n}{2}<\frac{a_n}{1+a_n}$ و بنابر آزمون مقایسه $\sum a_n$ هم همگراست.

مساله 66) اگر دنباله $\{a_n\}$ طوری باشد که برای هر دنباله $\{b_n\}$ که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگرا باشد، ثابت کنید $\sup|a_n| < \infty$.

اثبات: فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ کراندار نباشد (فرض خلف) . بنابراین

$$\forall k \in N \quad \exists n : |a_n| > k^2$$

لذا به راحتی زیر دنباله ای چون $\{a_{n_k}\}$ به دست می‌آید که $(\forall k)\quad |a_{n_k}| > k^2$ در نتیجه $\frac{|a_{n_k}|}{k^2} > 1$ پس $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{k^2} \neq 0$ و در نتیجه $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2}$ واگراست.

از طرفی قرار می‌دهیم $A = \{n_k : \quad k \in N\}$ و دنباله $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & m = n_k \\ 0 & m \notin A \end{cases}$$

اکنون $\sum_{m=1}^{\infty} x_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ همگرا و $\sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n_k}}{k^2}$ واگراست. این با فرض مساله در تناقض است. بنابراین دنباله $\{a_n\}$ کراندار است، یعنی $\sup|a_n| < \infty$.

مساله 67) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری از اعداد اکیداً مثبت باشد و برای هر n طبیعی b_n به شکل $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ تعریف شود. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همواره واگراست.

اثبات: چون $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ از اعداد اکیداً مثبت است، پس برای هر n طبیعی $a_n > 0$. بنابراین $a_1 < a_1 + a_2 + \ldots + a_n, 0 < a_1 < a_1 + a_2$ بنابراین

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = b_2 > \frac{a_1}{2}, \ldots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = b_n > \frac{a_1}{n}$$

در نتیجه $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq a_1\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست.

مساله 68) فرض کنیم، ضریب های t_{nm} $(1 \leq m \leq n)$ از ماتریس (مثلثی) نامتناهی

$$
\begin{array}{l}
t_{11} \\
t_{21} \quad t_{22} \\
t_{31} \quad t_{32} \quad t_{33} \\
\vdots \\
t_{n1} \quad t_{n2} \quad t_{n3} \ldots t_{nn} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

با دو شرط زیر سازگار باشند.

(1) عنصرهای واقع در هر ستون دلخواه به سمت صفر میل کنند؛ یعنی به ازای $t_{nm} \to 0, n \to \infty$ (m ، تثبیت شده است).

(2) مجموع قدرمطلق عنصرهای واقع در هر سطر دلخواه، همه با یک عدد ثابت، کراندار باشند

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \ldots + |t_{nn}| \le k \qquad (k = const)$$

آن وقت ثابت کنید اگر حد، $x_n \to 0$ ، آنگاه $Z_n = t_{n1}x_1 + \ldots + t_{nn}x_n$ به سمت صفر میل می‌کند.

اثبات: از روی $\varepsilon > 0$ ، چنان m پیدا می‌شود که ، به ازای $n > m$ داشته باشیم:

$|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2k}$. به ازای این n ها، با استفاده از (2) داریم $|Z_n| < |t_{n1}x_1 + \ldots + t_{nn}x_n| + \dfrac{\varepsilon}{2}$

چون در اینجا، m مقدار ثابتی است، با توجه به (1)، چنان $N \ge m$ وجود دارد که، به ازای n>N ، جمله اول سمت راست هم از $\dfrac{\varepsilon}{2}$ کوچکتر باشد. که در نتیجه، خواهیم داشت $|Z_n| < \varepsilon$ واثبات تمام است.

مساله 69در مساله قبل فرض کنیم، ضریب های t_{nm} ، علاوه بر شرط های (1)، (2)، با شرط زیر سازگار باشند.

$$T_n = t_{n1} + t_{n2} + \ldots + t_{nn} \to 1 \quad (3)$$

آن وقت، اگر حد $x_n \to a$ (a – متناهی) آنگاه همچنین $Z_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \ldots + t_{nn}x_n \to a$

اثبات: عبارت Z_n را، می‌توان چنین نوشت:

$$Z_n = t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \ldots + t_{nn}(x_n - a) + T_n.a$$

که با استفاده از مساله (1) درباره حد $x_n - a \to 0$ و یا اتکای بر (2) مستقیماً به نتیجه مطلوب می رسیم.

كاربردهاي مساله قبلي

مساله 70ثابت کنید اگر $x_n \to a$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$

اثبات: بنابر مساله قبل کافی است قرار دهیم $t_{n1} = t_{n2} = \ldots = t_{nn} = \dfrac{1}{n}$

برقرار بدون شرط (1) و (2) و (3) در مساله قبل روشن است.

مساله 71ثابت کنید اگر دنباله $x_n, (n = 1,2,3,\ldots)$ همگرا و $x_n > 0$ باشد در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

اثبات: برای اثبات از مساله قبل استفاده می کنیم، قرار می دهیم $y=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ در اینصورت $Ln\,y=\frac{1}{n}Ln\,x_1x_2\ldots x_n$ پس $Ln\,y=\frac{Lnx_1+Lnx_2+\ldots+Lnx_n}{n}$ برابر $\lim\limits_{n\to\infty}Ln\,x_n$ می باشد. پس $\lim\limits_{n\to\infty}Lny=\lim\limits_{n\to\infty}Lnx_n$ در نتیجه $Ln\lim\limits_{n\to\infty}y=Ln\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}y=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ و اثبات تمام است.

مساله 72) ثابت کنید اگر $x_n\to a$ در آن $x_n=\frac{1x_0+C_n^1x_1+\ldots+C_n^nx_n}{2^n}\to a$

اثبات: برای اثبات از مساله (69) و (70) استفاده می کنیم که

$$t_{nn}=\frac{C_n^m}{2^n}$$

چون $\frac{n^m}{2^n}\to 0, C_n^m<n^m$ پس شرط (1) برقرار است برقراری شرط (2) و شرط (3) مستقیماً از اینجا ناشی می شود که داریم: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_n^m=2^n$ در نتیجه اثبات تمام است.

مساله 73) فرض کنیم x_n,y_n داشته باشیم ، به نحوی که حد دوم به طور یکنوا به سمت $+\infty$ میل کند. فرض کنیم که حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_n}\to a$ ($n=1,2,\ldots;x_0=y_0=0$)

اثبات: برای اثبات از مساله هاي 69و 70 استفاده می کنیم $t_{nm}=\frac{y_m-y_{m-1}}{y_n}$ برای آن به کار می بریم. بررسی شرطهای (1) و (2) و (3) به سادگی قابل تحقیق است. بنابراین نتیجه می گیریم که حد

$$\frac{x_n}{y_n}=\sum_{m=1}^{n}t_{nm}\frac{x_m-x_{m-1}}{y_m-y_{m-1}}\to a$$

و اثبات تمام است.

مساله 74) ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Ln\,n}{n}=0$.

اثبات: برای اثبات از قضیه شتولتس استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\,n}{n}=\lim_{n\to\infty}Ln\,n-Ln(n-1)=\lim_{n\to\infty}Ln\frac{n}{n-1}=Ln\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}$$
$$=Ln1=0$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n}=0$

معیار یرماکوف: فرض کنید تابع $f(x)$ پیوسته، مثبت و برای x>1 به طور یکنوا نزولی باشد. آن وقت، اگر برای همه مقدارهای به قدر کافی بزرگ x (مثلاً $x\geq x_0$) نابرابری زیر برقرار باشد.

$$\frac{f(e^x).e^x}{f(x)}\leq q<1$$

رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگرا و اگر هم (برای $x \geq x_0$) داشته باشیم:

$$\frac{f(e^x).e^x}{f(x)} \geq 1$$

در این صورت رشته فوق متباعد یا واگراست.

فصل7 مسائل بخش **حد و پیوستگی**

فصل 7: حد و پیوستگی

سوال 1) فرض کنید $f: R \to R$ تابعی متناوب باشد و $\lim_{x \to \infty} f(x)$ وجود داشته باشد. ثابت کنید f تابعی ثابت است.

اثبات: فرض کنید $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ فرض کنید ε عددی مثبت باشد. عددی مثبت مانند M وجود دارد که اگر x>M ، آنگاه $|f(x)-L| < \varepsilon$. توجه کنید که اگر $x \leq M$ و T دوره تناوب f باشد، آنگاه عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $nT + x > M$ پس $|f(x)-L| = |f(nT+x)-L| < \varepsilon$. بنابراین، به ازای هر عدد مثبت مانند ε، $x \in R$ $|f(x)-L| < \varepsilon$

در نتیجه $|f(x)-L| = 0$ یا $f(x) = L$.

سوال 2)فرض کنید $f: [a,b] \to R$ تابعی یک به یک و پیوسته باشد. ثابت کنید f یکنوای اکیداست.

اثبات: دو حالت وجود دارد.

حالت اول: $f(a) < f(b)$. فرض کنید $a < c < b$ چون f یک به یک است. پس $f(a) \neq f(c)$ پس یا $f(c) < f(a)$ یا $f(c) > f(a)$. اگر $f(c) < f(a) < f(b)$ آنگاه عددی مانند t در بازه (c,b) وجود دارد که $f(t) = f(a)$ و این با یک به یک بودن f تناقض دارد. اگر $f(a) < f(c)$ با استدلال مشابهی می توان ثابت کرد که $f(c) < f(b)$ از نتیجه f صعودی اکیداست.

حالت 2: $f(a) < f(b)$ مشابه حالت اول است. می توانید ثابت کنید که f نزولی است.

سوال 3)فرض کنید $f: [a,b] \to R$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x \in [a,b]$ ، عددی مانند y در $[a,b]$ وجود داشته باشد که $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. ثابت کنید عددی مانند t در $[a,b]$ وجود دارد که $f(t) = 0$.

اثبات: اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد $|f|$ هم روی $[a,b]$ پیوسته است. فرض کنید m مینیمم مطلق $|f|$ روی $[a,b]$ باشد و $|f(t)| = m$ در این صورت عددی مانند y در $[a,b]$ وجود دارد که

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2} m$$

توجه کنید که $m \geq 0$. اگر m=0 آنگاه حکم به وضوح برقرار است. اگر m>0 باشد چون m مینیمم مطلق $|f|$ روی $[a,b]$ است و $|f(y)| \leq \frac{1}{2} m < m$ به تناقض رسیده‌ایم.

سوال 4) فرض کنبد f روی (a,b) پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$ وجود داشته باشد ثابت کنید تابعی پیوسته مانند $g: R \to R$ وجود دارد که

$$f(x) = g(x) \qquad x \in (a,b)$$

اثبات: فرض کنید $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = L_2$ تابع:

$$g(x) = \begin{cases} L_1 & x \le a \\ f(x) & a < x < b \\ L_2 & x \ge b \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. روشن است که $g(x) = f(x),\ x \in (a,b)$

در ضمن g روی بازه‌های $(-\infty, a), (a,b), (b,+\infty)$ آشکار پیوسته است در x=a

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = g(a)$$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = g(a)$$

بنابراین، g در a پیوسته است. به همین ترتیب معلوم می شود g در b هم پیوسته است. بنابراین g روی R پیوسته است.

سوال 5) فرض کنید $f: [0,1] \to R$ تابعی پیوسته باشد و $f(0) = f(1)$. ثابت کنید به ازای عددی مانند x_0 در $[0,1]$ ،

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$$

حل: فرض کنید $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\qquad g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

در این صورت

$$g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)$$
$$= 0$$

پس $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) \le 0$. اگر $g(0) = 0$ یا $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ حکم مسئله ثابت شده است. در غیر این صورت چون $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$ علامت هاي مختلفي دارند، عددي مانند $x_\circ$ در $\left(\circ, \frac{1}{2}\right)$ وجود دارد که $g(x_\circ) = \circ$ در این صورت $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

سوال 6) فرض کنید $f: (a,+\infty) \to R$ و $\lim_{x\to\infty} x f(x)$ وجود داشته باشد ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

اثبات: فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x f(x) = L$ عددی مثبت مانند M وجود دارد که اگر $x > M$ آنگاه

$$|x f(x) - L| < 1 \Rightarrow |x f(x)| \le |x f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$$

و در نتیجه $\left|f(x)\right| \le \frac{|L|+1}{x}$ چون $\lim_{x\to\infty} \frac{|L|+1}{x} = 0$ نتیجه می شود $\lim_{x\to\infty}\left|f(x)\right| = 0$ پس $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

سوال 7)فرض کنید x عددی مثبت و m عددی طبیعی باشد. ثابت کنید x ریشه m ام دارد.

راه حل: تابع پیوسته $f(x) = x^m$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$f(0) = 0, \qquad f(x+1) = (x+1)^m$$

و چون $0 < x < (x+1)^m$ بنابر قضیه مقدار میانی، عددی مانند b در بازه $\left(0,(x+1)^m\right)$ وجود دارد که

$$f(b) = b^m = x$$

سوال 8)فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عددهایی حقیقی باشند و $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & x < x_k \\ 1 & x \ge x_k \end{cases} \qquad 1 \le k \le n$$

و $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. نقاط ناپیوستگی f را پیدا کنید.

اثبات: می توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge x_n \\ \frac{n-1}{n} & x_{n-1} \le x < x_n \\ \frac{n-2}{n} & x_{n-2} \le x < x_{n-1} \\ & . \\ & . \\ & . \\ \frac{1}{n} & x_1 \le x < x_2 \\ 0 & x < x_1 \end{cases}$$

پس f در هر یک از بازه های $(-\infty, x_1)$ و (x_1, x_2) ،....، $(x_n, +\infty)$ تابعی ثابت و بنابراین پیوسته است اما در نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناپیوسته است.

سوال 9)فرض کنید $f : R \to R$ تابعی پیوسته متناوب باشد ثابت کنید f کراندار است.

حل: فرض کنید T دوره تناوب f باشد. f روی $[0, T]$ پیوسته و بنابراین کراندار است پس f روی R کراندار است.

سوال 10)فرض کنید a,b عددهایی حقیقی باشد ثابت کنید تابعی مانند $f(x)$ موجو د است به طوری که f در a و b پیوسته است و در هیچ نقطه دیگر پیوسته نیست.

اثبات: تابع $f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-b) & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ را در نظر می گیریم. ثابت می کنیم f در a پیوسته است. توجه کنید که a چه گویا باشد چه گنگ، $f(a) = 0$ از طرف دیگر

$$0 \le |f(x)| \le |x-a||x-b|$$

و بنابراین $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a)$. با استدلال مشابهی می توان ثابت کرد f در b پیوسته است. اکنون ثابت می کنیم اگر $x_0 \ne a$ و $x_0 \ne b$ و f در x_0 پیوسته نیست. فرض کنید f در x_0 پیوسته و x_0 گویا باشد، دنباله ای از اعداد گویا مانند $\{r_n\}$ همگرا به x_0 وجود دارد. پس

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty}(r_n-a)(r_n-b) = (x_0-a)(x_0-b) \ne 0$$

همچنین دنباله ای از اعداد گنگ مانند $\{S_n\}$ همگرا به x_0 وجود دارد. پس $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(S_n) = 0$

این تناقض نشان می‌دهد که f در x_0 پیوسته نیست. با استدلال مشابهی می توان ثابت کرد که اگر x_0 گنگ باشد باز هم f در x_0 پیوسته نیست.

سوال 11) تعمیم مساله قبل: فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عددهای حقیقی باشند. ثابت کنید تابعی مانند $f(x)$ موجود است به طوری که f در a_i ها پیوسته است . اما در هیچ نقطه دیگری غیر از a_i پیوسته نیست.

حل: راهنمایی: برای اثبات کافی است قرار دهیم

$$f(x) = \begin{cases} (x-a_1)\ldots(x-a_n) & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

سوال 12) نقاط ناپیوستگی $f:(o,1) \to R$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^p q & (p,q)=1, x=\dfrac{p}{q}, x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

را پیدا کنید.

اثبات: ثابت می کنیم f در هیچ جا پیوسته نیست. فرض کنید $x \in (0,1)$ فرض کنید $f, x \in Q$ در x پیوسته باشد. دنباله ای از اعداد گنگ مانند $\{r_n\}$ همگرا به x وجود دارد. پس

این تناقض است $\qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = 0 \quad \Rightarrow x \notin Q \Rightarrow$

فرض کنید $x \notin Q$. دنباله ای از اعداد گویا و مثبت مانند $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ همگرا به x وجود دارد. ثابت می کنیم عددی مانند k وجود ندارد که $q_n \le k$ و $n \ge 1$. فرض کنید چنین عددی وجود داشته باشد. چون $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ به x همگراست. عددی طبیعی مانند N وجود دارد که $n \ge N$ $\quad p_n \le (1+x)q_n$ پس عددی طبیعی مانند k' موجود است. به طوری که $p_n \le k', n \ge 1$ در این صورت تعداد جمله های $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ متناهی است و بنابراین $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ نمی تواند همگرا باشد. و این تناقض است پس k هر عدد طبیعی باشد عدد طبیعی مانند n وجود دارد بطوری که $q_n > k$ فرض کنید f در x پیوسته باشد. در این صورت $\lim_{n\to\infty}(-1)^{p_n} q_n = 0$. یعنی عدد طبیعی مانند N وجود دارد که اگر n>N آنگاه $\left|(-1)^{p_n} q_n\right| < 1$ یعنی $q_n < 1, n > N$ در این صورت

$$q_n < \max\{1, q_1, q_2, \dots, q_N\} \qquad n \geq 1$$

و این بنابر آنچه قبلاً ثابت کردیم تناقض دارد. و در نتیجه حکم ثابت می شود.

سوال 13) ثابت کنید که اگر n عدد $x_n, \dots, x_2, x_1$ به طور دلخواه از بازه بسته واحد $[0,1]$؛ انتخاب شوند. همواره می توانیم عددی مانند x در این بازه طوری بیابیم که میانگین فاصله های بی علامت آن تا x_i دقیقاً مساوی $\frac{1}{2}$ است.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x - x_i| = \frac{1}{2}$$

اثبات: با انتخاب روشی کاملاً سرراست تابع $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x - x_i|$ را در نظر می گیریم. اگر x=0

$$f(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|-x_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (\text{زیرا } x_i \geq 0)$$

اگر

$$f(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|1 - x_i| \qquad , x = 1$$

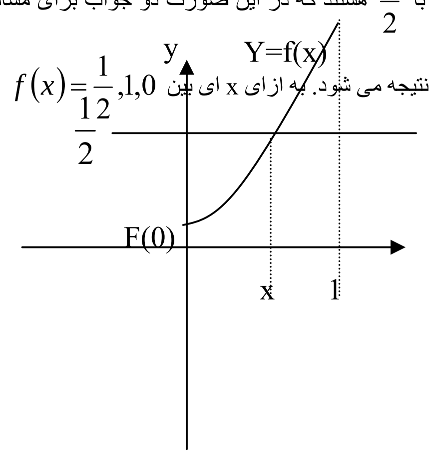
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i) \qquad (\text{زیرا } x_i \in [0,1])$$

$$= \frac{1}{n}\left(n - \sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$= 1 - f(0)$$

و این رابطه مهم را به دست می آوریم $f(0) + f(1) = 1$

بنابراین رابطه، یا $f(1)$ و $f(0)$ هر دو برابر با $\frac{1}{2}$ هستند که در این صورت دو جواب برای مساله یافته ایم و یا $\frac{1}{2}$ بین آنها قرار دارد که دراین حالت از پیوستگی تابع نتیجه می شود. به ازای x ای بین 1,0 ، $f(x) = \frac{1}{2}$



سوال 14) فرض کنید f تابعی پیوسته و در شرایط

$\forall x: \ f(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ صدق می کند ثابت کنید

$$\exists y \qquad S,T \quad \forall x; f(x) \leq f(y)$$

اثبات: چون $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ پس از تعریف حد نتیجه می شود که

$$\exists b \quad S,T \quad |x| > b \Rightarrow f(x) < f(0) = \varepsilon \qquad \text{(I)}$$

حال بازه $[-b,b]$ را در نظر می گیریم چون f روی $[-b,b]$ پیوسته است پس f به ماکزیمم خود روی این بازه میرسد.

$$\exists y \in [-b,b] \quad S,T \quad f(y) \geq f(x);\ \forall x \in [-b,b] \qquad \text{(II)}$$

از (I) و (II) نتیجه می شومد که $\forall x \in (-\infty,\infty); \exists y \quad S,T \quad f(x) \leq f(y)$

سوال 15) اگر f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ با برد Q باشد انگاه f تابعی ثابت بر $[a,b]$ است.

اثبات : فرض کنیم $f(x_1) \neq f(x_2)$ بنابراین مثلاً $f(x_1) < f(x_2)$ در این صورت با توجه به قضیه مقدار میاني داریم که $\exists r \in Q^c \quad S.T\ f(x_1) < r < f(x_2) \Rightarrow \exists x \in (x_1,x_2)\ S.T \quad f(x) = r$

اما این تناقض است چون برد f گویا است.

سوال 16) اگر f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ با برد Q^c باشد. آنگاه f تابعی ثابت بر $[a,b]$ است.

اثبات: اثبات مشابه حل مساله 15 است.

سوال 17) فضای متریک (E,d) و تابع پیوسته $f: E \rightarrow E$ مفروض اند، ثابت کنید مجموعه نقاط ثابت f یک مجموعه بسته تشکیل می دهند.

اثبات: قرار می دهیم $A = \{x \in E;\ \ f(x) = x\}$ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای دلخواه در a باشد. به طوری که $x_n \rightarrow a$ از پیوستگی f نتیجه می شود که $f(x_n) \rightarrow f(a)$ بنابراین

$$f(x_n) = x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow a \in A$$
$$\Rightarrow A' \subseteq A \Rightarrow$$

A مجموعه ای بسته است.

سوال 18) g, f , $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ تابع هایی پیوسته اند و اگر برای $x \in [0,1]$

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

ثابت کنید به ازای x_0 ای در $[0,1]$ ، $f(x_0) = g(x_0)$.

اثبات: به شیوه برهان خلف عمل می کنیم. اگر x_0 ای وجود نداشته باشد که $f(x_0) = g(x_0)$, $f-g$ همیشه مثبت یا منفی است. بنابراین می توانیم فرض کنیم که به ازای عددی مثبت مانند a ، $f > g + a$ در این صورت

$$fof > gof + a = fog + a > gog + 2a$$

به استقراء معلوم می شود که $n \geq 1 \qquad f^n > g^n + na$

چون g^n, f^n تابعهایی از $[0,1]$ به $[0,1]$ اند و $a > 0$ پس تناقض رسیده ایم و حکم مساله درست است.

سوال 19) تابع f , $f: (0,1) \rightarrow R$ این ویژگی ها را دارد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$

اثبات: فرض کنید ε عددی مثبت باشد. در این صورت عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر

$$0 < |x| < \delta \qquad\qquad \left| f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \varepsilon |x|$$

در این صورت اگر $0<|x|<\delta$ و n عددی طبیعی باشد.

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\le\sum_{j=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{x}{2^j}\right)-f\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\right|<\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varepsilon|x|}{2^{j+1}}<\varepsilon|x|$$

بنابراین اگر $0<|x|<\delta$ آنگاه از (1) داریم:

$$|f(x)|<\varepsilon|x|+\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$$

چون $\lim_{u\to 0}f(u)=0$ پس قرار می دهیم $u=\frac{x}{2^n}$ در این صورت برای $\varepsilon|x|=\varepsilon_1$ ، δ_1 ای موجود است به طوری که

$0<|x|<\delta_1$ آنگاه $|f(x)|<\varepsilon|x|+\varepsilon|x|\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|<2\varepsilon$

حال با قرار دادن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

سوال 20) تابع پیوسته $f:[0,1]\to R$ با شرط $f(0)=f(1)$ و عدد طبیعی $n\ge 2$ مفروض اند . ثابت کنید که عددی مانند $x\in[0,1]$ وجود دارد و به طوری که $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

حل: تابع پیوسته $g:[0,1]\to R$ را با ضابطه $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ در نظر می گیریم. به آسانی می بینیم که

$$g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+g\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$$

اگر یکی از جمعوندهای بالا صفر باشد حل مساله تمام است. اگر هیچ یک از جمعوندها صفر نباشد حداقل یکی از آنها مثبت و حداقل یکی از آنها منفی است. پس عددی مانند $x\in[0,1]$ به طوری که $g(x)=0$ یا $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

سوال 21) فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، تابع g را بر $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases}f(a) & x=a\\ \max\{f(t):t\in[a,x]\} & a<x\le b\end{cases}\qquad(1)$$

در این صورت نشان دهید که g تابعی پیوسته است.

اثبات: به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می شود.

سوال 22) ثابت کنید هرگاه $g(x)=0$ به ازای $g(x)=1, x<0$ به ازای $x\ge 0$ آنگاه ثابت کنید تابعی مانند $f:R\to R$ موجود نیست که $f'(x)=g(x)$ به ازای هر $x\in R$

اثبات: به طریقه برهان خلف عمل می کنیم. اگر چنین f ای موجود باشد، چون f' موجود است پس f بر $[-1,1]$ پیوسته است و

$$f'(1)=g(1)=1;\ f'(-1)=g(-1)=0$$

در این صورت بنابر قضیه مقدار میانی برای مشتق ها f' باید تمامی مقادیر بین 0,1 را دریافت کند. در صورتی که چنین نیست. لذا حکم ثابت می شود.

سوال 23) فضای متریک فشرده E و تابع پیوسته $f:E\to E$ مفروض اند. ثابت کنید زیر مجموعه ای ناتهی مانند $A\subseteq E$ وجود دارد به طوری که $f(A)=A$

اثبات: دنباله $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه های E را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$A_0=E,\ A_{n+1}=f(A_n)\qquad n=0,1,2,..$$

به سادگی می توان ثابت کرد که $\{A_n\}$ نزولی است و A_n ها فشرده اند. قرار می دهیم $A=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$. واضح است که $A\neq\phi$ و همچنین

$$A=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\Rightarrow f(A)=f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\right)\subseteq\bigcap_{n=0}^{\infty}f(A_n)=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_{n+1}=A$$

حال کافی است ثابت کنیم $A\subseteq f(A)$. فرض کنید $x\in A$ نقطه ای دلخواه باشد در این صورت به ازای هر $n\geq 0$ عنصری مانند $x_n\in A_n$ وجود دارد به طوری که $x=f(x_n)$ زیرا

$$x\in A\to x\in A_{n+1}\to x\in f(A_n)\Rightarrow\exists x_nS,T\qquad x=f(x_n)$$

چون E فشرده است و (میدانیم هر دنباله در E یک زیر دنباله همگرا دارد) دراین صورت به ازای هر $n\geq 0$ داریم $y\in A_n$ و از این رو $y\in A$ و از طرف دیگر با توجه به پیوستگی f می بینیم که

$$y_n\to y\Rightarrow f(y_n)\to f(y)\Rightarrow x=f(y)$$

این نشان میدهد که $x\in f(A)$. در نتیجه $A\subseteq f(A)$ و حکم ثابت می شود.

سوال 24) فرض کنیم f روی R محدب باشد و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ثابت کنید، تابع f ثابت است.

اثبات: به عهده متعلم

سوال 25)نشان دهید تابع پیوسته مانند $f:R^2\to R$ که هیچ دو نقطه متمایزی را به یک نقطه منتقل نمی کند وجود ندارد.

اثبات: با استفاده از برهان خلف به اثبات مساله می پردازیم. لذا فرض می کنیم نگاشت پیوسته $f:R^2\to R$ با این شرط که هیچ دو نقطه متمایزی را به یک نقطه در مجموعه R منتقل نمی کند وجود داشته باشد.

دراین صورت سه نقطه متمایز C,B,A را در مجموعه R^2 چنان در نظر می گیریم که بر یک استقامت نباشند. آشکارا پیدا است کهBC و BA U AC همبندند. آنگاه بنابر قضیه (هرگاه فضای متریک (X,d) همبند بوده و نگاشت $f:X\to R$ تابعی پیوسته باشد در صورتی که a,b دو نقطه دلخواه در فضای (X,d) باشد. آنگاه نگاشت f تمام مقادیر بین $f(a),f(b)$ را اختیار می کند. یعنی

$$\forall c\in R,\ S.T\qquad f(a)<c<f(b),\exists x\in X\quad S.T\quad f(x)=c$$

می توان ادعا نمود که $f(BA\cup AC),f(BC)$ همه مقادیر بین $f(B)$ و $f(C)$,و اختيار مي كند اين بدان معني است به ازاي هر عدد حقيقي α بين دو مقدار $f(c),f(B)$ نقاطی چون x,y به ترتیب متعلق به پاره خطهای $AC\cup BA,BC$ وجود دارد که $f(x)=\alpha=f(y)$ و این تناقض آشکار با فرض مساله است. لذا تابعی با مفروضات مساله نمی تواند وجود داشته باشد.

سوال 26)هرگاه فضای متریک (X,d) همبند بوده و نگاشت $f:X\to R$ تابعی پیوسته و غیرثابت باشد آنگاه نشان دهید مجموعه X ناشمارا است.

اثبات: فرض کنید تابع پیوسته و غیرثابت $f:X\to R$ دو مقدار حقیقی α,β به طوری که $\alpha<\beta$ را می پذیرد. در این صورت f تمام مقادیر واقع در بازه $[\alpha,\beta]$ را می پذیرد. ولی $[\alpha,\beta]$ ناشماراست. پس X ناشمارا خواهد بود.

سوال 27) فرض کنید $f:[a,b]\to R$ و نقطه $a<c<b$ به گونه ای هستند که $f(a)<f(b)<f(c)$ ثابت کنید به ازای بی نهایت جفت مرتب مانند $a<x_1<x_2<b,(x_1,x_2)$، داریم $f(x_1)=f(x_2)$.

اثبات: به ازای هر $f(a)<f(b)<\lambda<f(c),\lambda\in f(c)$ بنابر قضیه مقدار میانی می بینیم که

$$\exists x_1,x_2,\qquad a<x_1<c,\quad c<x_2<b;\ \ f(x_1)=\lambda, f(x_2)=\lambda$$

سوال 28) همه تابع های پیوسته مانند f، $f:R^+\to R$ را پیدا کنید به طوری که اگر $x\in R^+$

$$f(x^2)=\frac{f(x)}{x}$$

اثبات: فرض کنیم f ویژگیهای مورد نظر ما را دارد. در این صورت

$$f(x)=\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

از استقرایی ساده می توان نتیجه گرفت که اگر n عددی طبیعی باشد.

$$f(x)=\frac{f\left(\sqrt[2^n]{x}\right)}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}}=\frac{f\left(\sqrt[2^n]{x}\right)}{x^{1-\frac{1}{2^n}}}$$

بنابراین وقتی $n\to\infty$ از پیوستگی f نتیجه می شد که

$$f(x)=\frac{f(1)}{x}$$

پس همه تابع هایی به صورت $f(x)=\dfrac{c}{x}$ که $c\in R$ ویژه مساله می باشد.

سوال 29) همه تابعهای یک به یک و پوشا مانند f، $f:[0,1]\to[0,1]$، را پیدا کنید به طوری که به ازای هر $x\in[0,1]$،

$$f(2x-f(x))=x \qquad (1)$$

اثبات:

(توجه شود که در صورت مساله می توان یک به یک بودن را حذف کرد. علت را در اثبات بیابید.)

فرض کنید تابع f ویژگی های مورد نظر ما را دارد. اگر $x\in[0,1]$ فرض کنید $d(x)=x-f(x)$ فرض کنید $x_0\in[0,1]$ به طوری که $d(x_0)=a$ در این صورت

$a+x_0=2x_0-f(x)$ پس $a+x_\circ$ در بازه $[\circ,1]$ قرار دارد. بنابراین $d(x_\circ+a)=a=d(x_\circ)$

فرض کنید A مجموعه همه x هایی باشد که $d(x)=a$. از آنچه گفتیم نتیجه می شود که اگر $x\in A$، $x+a\in A$. در نتیجه اگر $n\in N$ عدد طبیعی دلخواهی باشد $x+na\in A$، چون A زیر مجموعه ای از $[0,1]$ است پس $a=0$ در نتیجه فقط یک تابع مانند $f(x)=x$ وجود دارد که در ویژگی مورد نظر (1) صدق می کند

سوال 30) فرض کنید $f : R \to R$ تابعی پیوسته و غیر ثابت باشد و به ازای تابعی مانند F، اگر

$$f(x+y) = F\left(f(x), f(y)\right) \qquad x, y \in R$$

ثابت کنید f اکیداً یکنوا است.

اثبات:

به برهان خلف: فرض کنید f اکیداً یکنوا نیست. در اینصورت از پیوستگی f نتیجه می شود که عددهایی حقیقی مانند s_2, s_1 وجود دارند که $s_1 < s_2$ و

$$f(s_1) = f(s_2)$$

اگر ε عددی مثبت باشد از پیوستگی f نتیجه می شود که عددهایی حقیقی مانند t_2, t_1 در بازه $[s_1, s_2]$ وجود دارند که $t_1 < t_2$, $t_2 - t_1 < \varepsilon$, $f(t_1) = f(t_2)$ به این ترتیب اگر t عددی حقیقی باشد.

$$f\left(t + (t_2 - t_1)\right) = f\left((t - t_1) + t_2\right) = F\left(f(t - t_1), f(t_2)\right) = F\left(f(t - t_1), f(t_1)\right) = f(t)$$

بنابراین f دوره ای است ، چون $t_2 - t_1 < \varepsilon$ و مقدار ε اختیاری بود. پس هر مقدار به دلخواه کوچک دوره تناوب تابع پیوسته f است. و این یعنی f ثابت است.

سوال 31) آیا تابعی مانند f ، $f : (0, \infty) \to R$ ، وجود دارد که درتعداد نامتناهی نقطه پیوسته باشد و به ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x ، فقط ، وقتی $f(x) = 0$ که $f(2x) \neq 0$

اثبات:

بله به ازای هر عدد درست مانند k فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 2^{2k} < x \leq 2^{2k+1} \\ 1 & 2^{2k-1} < x \leq 2^{2k} \end{cases}$$

در این صورت تابع f ویژگی های مورد نظر ما را دارد.

سوال 32) شرط لازم و کافی درمورد مقدار عدد k پیدا کنید ، به طوری که تابعی پیوسته مانند $f : R \to R, f$ وجود داشته باشد که اگر $f\left(f(x)\right) = kx^9$

حل :

اگر $k \geq 0$ فرض کنید $f(x) = k^{\frac{1}{4}} x^3$ در این صورت $f\left(f(x)\right) = kx^9$ در این صورت $f\left(f(x)\right) = k\, x^9$.

فرض کنید $k \neq$ ० تابع $f : R \to R, f$ پیوسته است و اگر $x \in R$, $f\ (f\ (x\ )) = kx^{9}$ در این صورت f يك به يك و پوشاست.

بنابراین چون f پیوسته است، اکیداً یکنوا است. اکنون توجه کنید چون f پیوسته است پس f اکیداً یکنوا است.

حال اگر f چه اکیداً صعودی باشد و چه اکیداً نزولی $f\left(f(x)\right)$ همیشه اکیداً صعودی است پس اگر $k \leq 0$ باشد آنگاه با صعودی بودن $f\left(f(x)\right)$ به تناقض می رسیم در نتیجه f صعودی است.

سوال 33) همه تابعهایی مانند $f : R - \{1\} \to R$ ، را پیدا کنید که د رصفر پیوسته اند و اگر $x \in R - \{1\}$

$$f(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

اثبات:
به عهده متعلم واگذار می شود.

سوال 34) $(X,d),(Y,d')$ دو فضای متریک و $f:X\to Y$ یک نگاشت است. ثابت کنید شرط کافی برای اینکه نگاشت f در نقطه $a\in X$ پیوسته باشد، آن است که به ازای هر تابع g ، $g:Y\to R$ پیوسته در $gof, f(a)$ در a پیوسته باشد.

اثبات: تابع $g:Y\to R$ با ضابطه $g(y)=d'(y,f(a))$ در نظر می گیریم. طبق فرض gof در a پیوسته است. یعنی به ازای هر $\varepsilon>0$ ، δ ی مثبت هست به طوری که اگر $d(x,a)<\delta, x\in X$ آنگاه

$$|gof(x)-gof(a)|=d'(f(x),f(a))<\varepsilon$$

این نشان می دهد که f در a پیوسته است.

سوال 35) فرض کنیم $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته صعودی باشد و $f(a)=a$ ثابت کنید اگر

$$f=\{x\mid a\le x\le b \qquad f(x)\ge x\}$$ و

آنگاه $f(E)=E$

حل: ابتدا نشان می دهیم که $f(E)\subseteq E$ در این صورت

$$\forall y\in f(E)\Rightarrow \exists x\in E \quad S,T\ y=f(x)\Rightarrow f(f(x))\ge f(x)\Rightarrow f(y)\ge y$$
$$\Rightarrow y\in E$$

حال ثابت می کنیم $E\subseteq f(E)$. فرض کنیم $x\in E$ در این صورت داریم که

$$f([a,x])=[f(a),f(x)]=[a,f(x)]$$

و چون f پیوسته است و $x\in E$ پس $x\in[a,f(x)]$ در نتیجه از قضیه مقدار میانی نتیجه می شود t ای وجود دارد به طوری که $f(t)=x$. ادعا می کنیم $f(t)\ge t$. یعنی $t\in E$ و لذا $x\in f(E)$

زیرا اگر $f(t)<t$ ، داریم $x<t$ چون f صعودی است. $f(x)<f(t)=x$ واین یعنی $x\notin E$ که خلاف فرض است.

سوال 36) فرض کنید $f:R\to R$ تابعی پیوسته و یک به یک باشد نشان دهید f تابعی اکیداً یکنواست.

اثبات: فرض کنید f اکیداً یکنوا نباشد دراین صورت سه عدد حقیقی $x_1<x_2<x_3$ موجودند.

$$f(x_1)<f(x_2) \quad , \quad f(x_3)<f(x_2)$$
یا
$$f(x_2)<f(x_3) \quad , \quad f(x_2)<f(x_1)$$

در این صورت در حالت اول اگر $f(x_1)<f(x_3)$ انگاه داریم

$$f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$$

بنابرقضیه مقدار میانی $x_1<x_0<x_2$ موجود است که $f(x_0)=f(x_3)$ که تناقض با یک به یک بودن f است. و در همین حالت اگر $f(x_3)<f(x_1)$ باز هم به تناقض می رسیم. در حالت دوم هم با دو حالت گرفتن $f(x_1)>f(x_3),\ f(x_1)<f(x_3)$ به تناقض می رسیم پس f اکیداً یکنوا است.

سوال 37) اگر $E\subseteq R^m$ مجموعه ای کراندار و تابع $f:E\to R^n$ به طور یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه ثابت کنید $f(E)$ نیز کراندار است.

اثبات: اثبات را به شیوه برهان خلف انجام می دهیم. فرض کنیم $f(E)$ کراندار نباشد.

$$\forall n\in N, \exists x_n \in E : \left\| f(x_n)\right\| > n$$

می دانیم $\{x_n\}$ کراندار است و هر دنباله کراندار دارای حداقل یک زیر دنباله کشی مانند $\left(x_{k_n}\right)$ است. بنابر مساله قبل $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ نیز یک دنباله کشی است. و از این رو چون هر دنباله کشی در R^n کراندار است پس $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ نیز کراندار است. و این هم با نابرابری $\left\|f\left(x_{k_n}\right)\right\|$ تناقض دارد.

سوال 38) فرض کنیم $f : R \to R$ یک تابع پیوسته متناوب با دوره تناوب $T > 0$ باشد. در این صورت f بطور یکنواخت پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ باتوجه به پیوستگی f در $[0,T]$ و با توجه به فشرده بودن $[0,T]$ می بینیم که f در بازه $[0,T]$ پیوسته یکنواخت است. پس عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall x_1, x_2 \in [0,T] \qquad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

حال فرض کنید u,V دو عدد حقیقی دلخواه باشد. به طوری که $|u-V| < \delta$ با بررسی حالت های

$$kT \le u,V \le (k+1)T,\ \ kT \le u \le (k+1)T < V$$

که در آن $k \in Z$، به آسانی می بینیم که $|f(u) - f(V)| < \varepsilon$

سوال 39) فضای متریک E و زیر مجموعه ناتهی $A \subseteq E$ مفروض اند. ثابت کنید تابع $f : E \to R$ با ضابطه $f(x) = d(x,A)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات: $|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$

می بینیم که f یک تابع lip است پس f بطور یکنواخت پیوسته است.

سوال 40)

ثابت کنید اگرتابع $f : E \to F$ به طور یکنواخت پیوسته و (x_n) یک دنباله کوشی در E باشد. آنگاه $(f(x_n))$ نیز یک دنباله کوشی در F است.

اثبات: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ در این صورت

$$\exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad (1)$$

چون (x_n) یک دنباله کشی است در این صورت

$$\exists N \quad S,T \quad \forall n,m \ge N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta$$

و بنابر (2) با توجه به (1) خواهیم داشت:

$$\exists N \quad S,T \quad \forall n,m \ge N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

سوال 41) با ارائه مثالی نشان دهید که پیوستگی یکنواخت f در سوال قبلی شرط اساسی است.

اثبات: کافی است $f : (0,1] \to R$ را با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ قرار دهیم دراین صورت دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کشی است. اما دنباله $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ کشی نیست.

سوال 42) فرض کنید $f:R\to R$ یک تابع پیوسته باشد که $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ نشان دهید که f بطور یکنواخت پیوسته است.

اثبات: فر ض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. چون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ پس عدد مثبت M موجود است. که برای هر x اگر $|x|>M$ آنگاه $\left|f(x)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ بنابراین اگر x و y دو عدد حقیقی چنان باشند بطوری که $x,y\notin[-M,M]$ آنگاه داریم:

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|f(x)-L\right|+\left|f(y)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

اما چون f پیوسته است روی R ، پس تحدید f بر بازه $[-M,M]$ پیوسته، در نتیجه پیوسته یکنواخت خواهد بود. بنابراین $\delta_1>0$ موجود است که برای هر $x,y\in[-M,M]$ ، اگر $|x-y|<\delta$ آنگاه

$$\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$$

حال با قرار دادن $\delta=\min\{\delta_1,1\}$ مساله حل خواهد شد.

سوال 43)فرض کنید f بر $[0,1]$ پیوسته و $f(I)\subseteq Q, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ثابت کنید f بر $[0,1]$ ثابت است.

اثبات: اثبات را به شیوه برهان خلف طرح می کنیم. فرض کنیم f بر $[0,1]$ ثابت نباشد در این صورت$x_0\in[0,1]$ ای هست به طوری که $f(x_0)\neq\frac{1}{2}$. بنابر قضیه مقدار میانی، برد f باید تمامی مقادیر بین $f(x_0)$ و $\frac{1}{2}$ را شامل شود. در صورتی که برد f شامل هیچ عدد گنگی نیست. لذا به ازای هر $x\in[0,1]$ $f(x)=\frac{1}{2},$

سوال 44)فرض کنید $f:R^n\to R^n$ پیوسته و کراندار باشد فرض می کنیم

$A=\{x+f(x):x\in C\}$ (C یک مجموعه همبند و کراندار)

ثابت کنید $\overline{A}$ فشرده است.

اثبات: قرار می دهیم$g(x)=x+f(x)$ چون C,f کرانداراند و در نتیجه

$$\exists M \quad s,t \quad \forall x\in R^k, y\in C \quad \left\|f(x)\right\|\le\frac{M}{2}, \quad \|y\|\le\frac{M}{2}$$

در این صورت برای هر $x\in C$ داریم:

$$\left\|g(x)\right\|=\left\|f(x)+x\right\|\le\left\|f(x)\right\|+\|x\|\le\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M$$

پس $A=g(C)$ یک مجموعه کراندار است. و چون$\delta(\overline{A})=\delta(A)$ در نتیجه $\overline{A}$ نیز کراندار است. بنابراین $\overline{A}$ زیر مجموعه بسته و کراندار از R^k است. بنابراین طبق قضیه هاینه- بورل، $\overline{A}$ فشرده است.

سوال 45)فرض کنیم $S\subseteq R$ یک مجموعه هم بند و $f:R\to R$ پیوسته باشد. در این صورت فرض کنید$k=\{x+f(x)\mid x\in S\}$ نشان دهید k همبند است.

اثبات: قرار می دهیم$h(x)=x+f(x)$. چون $k=h(S)$ و S هم بند است و h پیوسته است. پس k همبند است.

سوال 46) فرض کنید Q مجموعه اعداد گویا با متر اقلیدسی R باشد. و a,b دو عدد اصم باشند. که $k=(a,b)\bigcap Q$ و a<b در این صورت نشان دهید که k زیر مجموعه بسته و کراندار ی از Q است که فشرده نیست.

اثبات: واضح است که k کراندار است. زیرا با فرض $M=\max\{|a|,|b|\}$ داریم $|x|\le M$ و $\forall x\in k$ حال نشان می دهیم k بسته است. کافی است نشان دهیم $Q-k$ باز است.

نشان هر نقطه دلخواه $x\in Q-k$ دارای یک همسایگی از Q می باشد که زیر مجموعه Q-k است. و شامل x است. چون $x\in Q-k$ پس $x<a$ یا $x>b$. حال اگر $x<a$ دراین صورت $(2x-a,a)\bigcap Q$ یک گوی باز Q می باشد که در $Q-k$ قرار دارد. اما k در R بسته نیست. پس k در R فشرده نیست. پس k در Q فشرده نخواهد بود؟ و حکم ثابت می‌شود.

(علت؟) زیرا از قضیه: (فرض کنید(X,d) یک فضای متری و $Y\subseteq X$ باشد در این صورت $K\subseteq(Y,d_1)$ که $d_1=d\,|\,Y$ فشرده است. اگر و تنها اگر $K\subseteq(X,d)$ فشرده باشد). استفاده شده است.

مساله 47)مثالی از یک تابع پیوسته $f:R\to R$ و یک مجموعه باز $B\subseteq R$ بیان کنید که $f(B)$ باز نباشد.

حل: قرار می دهیم $f(x)=\sin x$ در این صورت f تابعی پیوسته بر R است. با اینکه $(0,2\pi)$ مجموعه ای باز می باشد. ولی تصویر آن$[-1,1]$ در R باز نیست.

سوال 48) فرض کنید f و g تابع هایی پیوسته بر $[a,b]$ باشند به طوری که $f(a)>g(a)$ و $f(b)\le g(b)$ ثابت کنید که به ازای حداقل x_0 ای در $[a,b]$ و $f(x_0)=g(x_0)$.

اثبات: تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ را در نظر می گیریم. واضح است که $h(a)h(b)<0$ زیرا $f(a)-g(a)>0$ و $f(b)-g(b)<0$ پس $h(a)h(b)<0$ در نتیجه $h(x_0)=0$ S,T $\exists x_0$

پس $f(x_0)=g(x_0)$ S,T $\exists x_0$

سوال 49) f و g تابعهایی حقیقی مقدار روی زیر مجموعه هایی از R اند، به طوری که :

1- دامنه g بازه ای مانند I است.
2- g روي I پیوسته است.
3- دامنه f شامل برد g است.

اگر fog روی I پیوسته باشد، آنگاه ثابت کنید f روی برد g پیوسته است.

اثبات: فرض کنید f در نقطه ای از برد g مانند $g(z)$ پیوسته نباشد در این صورت عدد مثبت مانند ε ودنباله ای یکنوا مانند $(g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ از عددهای متمایز وجود داردکه $g(x_n)\to g(z)$ اما $|f(g(x_n))-f(g(z))|\ge\varepsilon$ فرض کنید J بازه بسته ای است که دو سرش x_1 و z است. بنابر قضیه مقدار میانی. به ازای هر n ، نقطه ای در J مانند $x_n^{'}$ وجود دارد $g(x_n')=g(x_n)$. دنباله $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ کراندار است پس زیر دنباله ای همگرا دارد. این زیر دنباله را $(x_{n_k}^{'})_{n=1}^{\infty}$ بنامید و فرض کنید به z' همگراست. در این صورت

$$g(x_{n_k}^{'})\to g(z'),\qquad g(x_{n_k}^{'})=g(x_{n_k})\to g(z)$$

بنابراین $g(z')=g(z)$ اکنون توجه کنید که $|f(g(x_{n_k}^{'})-f(g(z'))|$

$$=\left|f\ (g\ (x_{n_k})-f\ (g\ (z\ ))\right|\ge\varepsilon$$

اما $x_{n_k}^{'}\to z'$ پس به تناقض رسیده ایم. زیرا fog پیوسته است. بنابراین حکم درست است.

سوال 50) ثابت کنید $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ روی $\left[a,\infty\right)$ برای $a>0$ پیوسته یکنواخت است.

حل:

طبق قضیه (تابع پیوسته $f:\left[a,\infty\right)\rightarrow R$ مفروض است. در این صورت اگر $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}f\left(x\right)$ وجود داشته باشد (متناهی باشد) آنگاه f پیوسته یکنواخت است. حکم مشابهی برای $R=\left(-\infty,\infty\right),\left(-\infty,a\right]$ داریم.) پس چون $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\frac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f\left(x\right)=$ موجود است و متناهی است پس حکم برقرار است.

سوال 51) آیا یک تابع پیوسته کراندار روی مجموعه اعداد حقیقی لزوماً پیوسته یکنواخت است.

اثبات: تابع $f\left(x\right)=\sin x^2$ را در نظر می گیریم: اگر دنباله های $x_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ و $y_n=\sqrt{2n\pi}$ را در نظر بگیریم، می بینیم که $\left|x_n-y_n\right|\rightarrow 0$ در حالی که $\left|f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right|=1\rightarrow 0$ پس f به طور یکنواخت پیوسته نیست.

سوال 52) فرض کنید f در $\left(\alpha,\beta\right)$ تعریف شده، و در $\left[a,b\right]\subseteq\left(\alpha,\beta\right)$ بی کران باشد ثابت کنید که به ازای بعضی از نقاط مانند x_0 که $x_0\in\left[a,b\right]$ و $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}f\left(x\right)$ وجود ندارد.

اثبات: فرض کنید چنین نباشد یعنی برای هر نقطه مانند x_0 و $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}f\left(x\right)$ موجود باشد پس همسایگی از x_0 موجود است که f در آن همسایگی کراندار است. و چون $x_\circ\in\left[a,b\right]$ به تناقض می رسیم.

سوال 53) فرض کنید A زیر مجموعه فشرده و ناتهی و F زیر مجموعه بسته ای از فضای متری $\left(X,d\right)$ باشد به طوری که $A\cap F=\phi$ در این صورت $d\left(A,F\right)>0$.

حل:

فرض کنید $d\left(A,F\right)=0$. چون تابع $xd\left(x,F\right)$ بر A پیوسته است به دلیل فشردگی A ، در نقطه ای مانند $x_0\in A$ مینیمم خود را می گیرد. بنابراین

$$d\left(x_0,F\right)=d\left(A,F\right)=0$$

و این ایجاب می کند که $x_0\in\overline{F}=F$ ، که یک تناقض است.

فصل8 مسائل بخش **مشتق پذیری**

فصل8: مشتق پذیری

سوال 1) ثابت کنید به ازای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$

حل: ابتدا نابرابری $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$ را ثابت می کنیم دوتابع $f,g:[0,\frac{\pi}{2}[\to R$ را با ضابطه‌های $f(x)=x-\frac{x^3}{6}$, $g(x)=\sin x$ در نظر می گیریم واضح است که $f(0)=g(0)=0$ و همچنین $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}$, $g'(x)=\cos x$ چون مقایسه f', g' دشوار است. و در عین حا $f'(0)=g'(0)=1$ با گرفتن مشتق یک بار دیگر داریم $f''(x)=-x$, $g''(x)=-\sin x$ داریم $f''(0)=g''(0)=0$. با گرفتن یک بار دیگر مشتق از f'', g'' خواهیم داشت:

$f'''(x)=-1$, $g'''(x)=-\cos x$ و با توجه به اینکه به ازای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$g'''(x)\geq f'''(x) \text{ ، پس } \sin x > x-\frac{x^3}{6}, \quad \forall x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

سوال 2) ثابت کنید که به ازای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم $\frac{tg\ x}{x}>\frac{x}{\sin x}$

حل: این نابرابری هم ارز است با $tgx\sin x - x^2>0$ دو تابع $f,g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to R$ را با ضابطه های $f(x)=0$, $g(x)=tgx\sin x-x^2$ در نظر می گیریم. ملاحظه می کنیم که

$$g(0)=0, g'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x-2x$$

$$g'(0)=0, \quad g''(x)=\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\left(\frac{1}{\cos x}+\cos x-2\right)$$

در نتیجه به ازای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$g''(x)=\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\left(\sqrt{\sec x}-\sqrt{\cos x}\right)^2>0=f''(x)$$

پس به ازای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ نابرابری $g(x)>0$ درست است.

سوال 3) ثابت کنید به ازای $0<x<1$ داریم $x<Arc\sin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

حل: برای اثبات نابرابری $Arc\sin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ کافی است ثابت کنیم $\sqrt{1-x^2}Arc\sin x<x$ با گرفتن $f(x)=\sqrt{1-x^2}Arc\sin x$, $f,g:[0,1[\to R, g(x)=x$

می بینیم که $f(0)=g(0)=0$ و به ازای هر $0<x<1$ داریم

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}Arc\sin x+1<1=g'(x)$$

در نتیجه به ازای هر $0<x<1$ می توانیم بنویسیم $f(x)<g(x)$

سوال 4) ثابت کنید $e^{\pi} < \pi^{e}$

حل: تابع $f :]0,+\infty[\to R$ را با ضابطه $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ در نظر می گیریم. می بینیم که $f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ در نتیجه، f در روی بازه $[e,+\infty[$ اکیداً نزولی است و از این رو

$$e<\pi \Rightarrow f(e)>f(\pi) \Rightarrow \frac{\log \pi}{\pi}<\frac{1}{e}$$
$$\Rightarrow \log \pi^{e} < \pi$$
$$\Rightarrow e^{\pi} < \pi^{e}$$

سوال 5) فرض کنید $f : R \to R$ در x_0 مشتق پذیر باشد، $g(x)=|f(x)|,\ f(x_0)\neq 0$. ثابت کنید g در x_0 مشتق پذیر است و $g'(x_0)$ را پیدا کنید.

اگر $x_0 \neq 0$

حل:

$$\lim\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h}=\lim\frac{|x_0+h|^2-|x_0\ |^2}{h(|x_0+h|+|x_0|)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h(|x_0+h|+|x_0|)}=\frac{x_0}{|x_0|}$$

همچنین اگر $h(x)=|x|$ ، آنگاه $g(x)=(hof)(x)$

همچنین چون f در x_0 مشتق پذیر است و h هم در $f(x_0)$ مشتق پذیر است، بنابر قاعده زنجیری g در x_0 مشتق پذیر است و

$$g'(x_0)=h'(f(x_0))f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}f'(x_0)$$

سوال 6) فرض کنید $f : R \to R$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد و $f(x_0)=0$. ثابت کنید تابع $|f|$ در نقطه x_0 مشتق پذیر است. اگر و فقط اگر $f'(x_0)=0$.

جواب:

اگر $|f|$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، حد زیر وجود دارد.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}$$

و چون $\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}$ در هر همسایگی محذوف x_0 هم مقداری مثبت و هم مقداری منفی دارد.

پس $\lim_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=0$

در نتیجه $\lim_{x\to x_0}\left|\dfrac{|f(x)|}{x-x_\circ}\right|=\lim_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}$

بنابراین $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=0$

از طرف دیگر اگر $0=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}$

انگاه: $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=0$

پس: $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{|f(x)|}{x-x_0}\right|=0$

در نتیجه $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{|f(x)|}{x-x_0}\right|=0$

در نتیجه $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{|f(x)|}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=0$ و این مشتق پذیر $|f|$ را ثابت می کند.

سوال 7) فرض کنید $f:R\to R$ مشتق پذیر بوده و $f'(x)\neq 1$ ثابت کنید f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

حل: فرض کنید $x_1<x_2$ دو نقطه ثابت برای f باشند. در این صورت f بر بازه $[x_1,x_2]$ دارای شرایط قضیه مقدار میانگین است بنابراین $c\in(x_1,x_2)$ موجوداست که

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1$$

و این با فرض مساله تناقض دارد پس حکم ثابت می شود.

سوال 8) فرض کنید $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر و برای $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)\neq 1$. نشان دهید که f دارای یک ثابت منحصر به فرد است.

حل: ابتدا قسمت وجودی مساله را حل می کنیم . اگر $f(a)=a$ و $f(b)=b$ که مسئله حل است. پس فرض کنید $f(b)<b,\ f(a)>a$. با قرار دادن $g(x)=f(x)-x$. در این صورت g تابعی پیوسته است و

$$g(b)=f(b)-b<0,\quad g(a)=f(a)-a>0$$

بنابر قضیه مقدار میانی

$$\exists c\quad S.t\quad g(c)=0 \quad \text{یا} \quad f(c)=c$$

بنابر مسئله قبل یکتایی c ثابت می‌شود.

سوال 9) فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر و $|f'(x)|\leq k<1$. نشان دهید که نقطه یکتایی $c\in[a,b]$ موجود است به طوری که $f(c)=c$.

حل : بنابر دو مسئله قبل، سوال به سادگی ثابت می‌شود.

سوال 10) فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار روی R باشد به طوری که

(الف) $f'(x)$ برای هر $x\in R$ وجود دارد:

(ب) x ی وجود ندارد که در رابطه $f(x)=f'(x)=0$ صدق کند؛

نشان دهید مجموعه $\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$ متناهی است.

حل: فرض کنید $A=\{x\in[0,1]: f(x)=0\}$ متناهی باشد چون $[0,1]$ فشرده است و $A\subseteq S$ و A نامتناهی است پس A دارای یک نقطه حدی $x_0\in[0,1]$ است. بنابراین دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در این مجموعه موجود است که $x_n\to x_0$ و چون f پیوسته است پس $f(x_n)\to f(x_0)$ و چون $f(x_n)=0$ پس $f(x_0)=0$. از طرفی چون f در x_0 مشتق پذیر نیز می باشد. پس

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

در نتیجه $f(x_0)=f'(x_0)=0$ یعنی f و f' دارای یک صفر مشترک است که تناقض با فرض مساله است.

سوال 11) فرض کنید $f:[a,+\infty)\to R$ پیوسته و $(a,+\infty)$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ موجود و برابر با $f(a)$ باشد. نشان دهید عددی مانند c>a موجود است به طوری که $f'(c)=0$.

حل :

اگر f هرگونه صفر نشود، بنابراین f اکیداً یکنواست. اگر f اکیداً صعودی باشد آنگاه $f(a)<f(a+1)<f(a+2)<\dots$ و این با فرض $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$ تناقض دارد. استدلال مشابهی برای حالت اکیداً نزولی داریم. پس f' باید حداقل یک عنصر داشته باشد.

سوال 12) بازه I و تابع $f:I\to R$ که روی I^0 مشتق پذیر است مفروض اند. دراین صورت f یک تابع lip است . اگر و فقط اگر f' کراندار باشد (f پیوسته است $f:I\to R$)

حل: فرض کنیم f' روی I^0 کراندار باشد و به ازای عدد $M>0$ داشته باشیم $|f'(x)|\le M$ در این صورت به ازای هر دو نقطه دلخواه x<y متعلق به I نقطه ای مانند $x<z<y$ وجود دارد به طوری که $f(y)-f(x)=(y-x)f'(z)$ و از این رو

$$|f(x)-f(y)|=|x-y||f'(z)|\le M|x-y|$$

برعکس فرض کنیم f یک تابع lip باشد و به ازای عددی مانند M>0 داشته باشیم

$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y| \qquad (x,y\in I)$$

در این صورت به ازای هر $x\in I^0$ می بینیم

$$y\ne x\Rightarrow \lim_{y\to x}\le\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\le M$$

$$=|f'(x)|\le M$$

پس f' روی I^0 کراندار است.

سوال 13)ثابت کنید که به ازای هر دو عدد مثبت x,y داریم

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1+y}\right|\le|x-y|$$

حل: تابع $f:]0,\infty[\to R$ را با ضابطه $f(x)=\frac{1}{1+x}$ در نظر می گیریم. دراین صورت

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

و از این رو $\left|f'(x)\right| \le 1$ بنابر مساله قبل

$$\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|x-y\right|$$

سوال 14) اگر y یک ثابت غیر صفر و n یک عدد طبیعی زوج باشد ثابت کنید که رابطه

$$x^n+y^n=(x+y)^n \qquad (1)$$

فقط به ازای $x=0$ برقرار است.

اثبات به برهان خلف: فرض کنیم x_0 ای موجود باشد که $x_0 \ne 0$ و رابطه (1) به ازای یک x_0 برقرار باشد. در این صورت قرار می دهیم

$$f(x)=x^n+y^n-(x+y)^n$$

با توجه به $f(0)=f(x_0)=0$ از قضیه رول نتیجه می شود که به ازای عددی مانند c بین 0 و x_0 داریم: $f'(c)=0 \Rightarrow c=c+y \Rightarrow y=0$

پس به تناقض می رسیم و این خلاف فرض است.

مسئله 15) توابع پیوسته $f,g:[a,b]\to R$ روی $]a,b[$ مشتق پذیراند و به ازای هر $a<x<b$ داریم $g'(x)\ne 0$ ثابت کنید

$$\exists c \quad s,t \quad a<c<b:\frac{f(c)-f(a)}{g(b)-g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

حل: تابع $h:[a,b]\to R$ را با ضابطه $h(x)=g(b)f(x)-f(a)g(x)-f(x)g(x)$ در نظر می گیریم به آسانی دیده می شود که h در شرایط قضیه رول صدق می کند. پس به ازای عددی مانند $a<c<b$ داریم $h'(c)=0$ پس از محاسبه $h'(c)$ رابطه مورد نظر بدست می آید.

سوال 16) تابع پیوسته $f:[0,1]\to R$ روی $(0,1)$ مشتق پذیر است و $f(1)=1,\ f(0)=0$ اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید که نقاطی مانند $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$ وجود دارند به طوری که $\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)=n$.

حل: بازه $[0,1]$ را با استفاده از نقاط $0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1$ به n بازه بسته (هر یک به طول $\frac{1}{n}$) تقسیم می کنیم. با استفاده از قضیه مقدار میانگین به ازای هر $1\le k\le n$ نقطه ای مانند $\frac{k-1}{n}<x_k<\frac{k}{n}$ وجود دارد به طوری که

$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f'(x_k)$ در این صورت

$$1=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'(x_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}f'(x_k)=n$$

سوال 17)دو تابع مشتق پذیر $f,g:R\to R$ به گونه ای هستند که تابع $f'g-fg'$ هرگز صفر نمی شود. اگر $f(x_1)=f(x_2)=0$ ثابت کنید g در حداقل یک نقطه بین x_1,x_2 صفر می شود.

حل: (برهان خلف) فرض کنید g بین هیچ نقطه ای از x_1,x_2 صفر نشود، آنگاه تابع $\frac{f}{g}:[x_1,x_2]\to R$ در شرایط قضیه رول صدق می کند و از این رو $\left(\frac{f}{g}\right)'$ باید در نقطه ای مانند c بین x_1,x_2 صفر شود. در نتیجه $f'(c)g(c)-f(c)g'(c)=0$ واین خلاف فرض است.

سوال 18)اگر $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0$ باشد، برای بعضی مقادیر x در $[0,1]$ نشان دهید

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$$

حل: تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم ($f(x)$ پیوسته است).

$$f(x)=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$$

برای فاصله$[0,1]$ می توان نوشت:

$$f(0)=0\qquad f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0$$
$$\Rightarrow f(0)=f(1)=0$$

از طرفی تابع $f(x)$ در $[0,1]$ پیوسته و در $(0,1)$ مشتق پذیر است.

لذا طبق قضیه رول حداقل یک مقدار مانند x_0 در فاصله فوق موجود است به طوری که $f'(x_0)=0$ باشد.

$$f'(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

$f'(x_0)=a_0+a_1x_0+\ldots+a_nx_0^n=0$ لذا x_0 یک ریشه معادله اصلی و در فاصله $[0,1]$ می باشد.

سوال 19)نشاندهید که به ازای هر $x\in R$ معادله $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$ جواب ندارد.

حل: کافی است نشان دهیم

$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}>0$ برای هر $x\in R$ برقرار است. وقتی که x عددی مثبت یا صفر است. ادعا مساله درست است. فرض کنیم x عددی منفی و k عددی صحیح و نامنفی باشد به طوری که

$\left|\frac{x^k}{k!}\right|\ge\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|\ge\ldots,1\le|x|\le\frac{|x^2|}{2}\le\ldots\le\left|\frac{x^k}{k!}\right|$. هرگاه $2n<k$ حکم مساله درست است. در حالی که $n>2k$ داریم

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}>1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=e^x>0$$

سوال20) فرض کنید $f:R\to R$ تابعی متناوب و در هر نقطه مشتق پذیر باشد. ثابت کنید تابع f هم متناوب است.

راه حل: فرض کنید دوره تناوبf برابر با T باشد. توجه کنید که

$$f'(x+T)=\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=$$
$$=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=f'(x)$$

بنابراین f' هم تابعی متناوب با دوره تناوب T است.

سوال 21) فرض کنید $Q_n=n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right), n=1,2,...$ ثابت کنید $\{Q_n\}$ دنباله ای همگراست و حد آنرا پیدا کنید.

حل: فرض کنیم $f:R\to R$ تابعی مشتق پذیر باشد،

$$Q_n=n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right),\ n=1,2,...$$

میدانیم $\{Q_n\}$ دنباله ای همگراست و حد آن برابر $f'(x_0)$ می باشد پس با قرار دادن $f(x)=\sin x$ و $x_0=\frac{\pi}{2}$ در این صورت

$$Q_n=n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)=n\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

پس $\lim_{n\to\infty}Q_n=f'(x_0)=0$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty}Q_n=0$

مساله 22) اگر $0<a<b$ باشد نشان دهید

$$(1)\qquad \left(\frac{b}{a}\right)^a<e^{b-a}<\left(\frac{b}{a}\right)^b$$

و از نامساوی فوق نتیجه می گیریم:

$$(2)\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad (n>0)$$

حال چون e^x تابعی است صعودی، بنابراین کافی است رابطه زیر را ثابت کنیم

رابطه (1) $$Ln\left(\frac{b}{a}\right)^a<b-a<Ln\left(\frac{b}{a}\right)^b$$

داریم $$Ln\left(\frac{b}{a}\right)^a=a(Lnb-Lna),\qquad Ln\left(\frac{b}{a}\right)^b=b(Lnb-Lna)$$

سپس از قضیه مقدار میانگین در مشتقات استفاده می کنیم:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\quad f(x)=Lnx$$
$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f'(c)=\frac{1}{c},0<a<c<b$$

$$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b),\ Lnb - Lna = \frac{b-a}{c}$$

$$b - a = c(Lnb - Lna)$$

طرفین رابطه $a < c < b$ را در عبارت $Lnb - Lna$ ضرب می کنیم داریم:

$$a(Lnb - Lna) < c(Lnb - Lna) < b(Lnb - Lna)$$

$$a(Lnb - Lna) < b - a < b(Lnb - Lna)$$

$$a\left(Ln\frac{b}{a}\right) < b - a < b\left(Ln\frac{b}{a}\right)$$

$$Ln\left(\frac{b}{a}\right)^{a} < b - a < Ln\left(\frac{b}{a}\right)^{b} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{a} < e^{b-a} < \left(\frac{b}{a}\right)^{b}$$

در رابطه (1) قرار می دهیم $a = n, b = n+1$ در این صورت نامساوی (2) بدست می آید.

مساله 23) تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر است و مشتق دوم دارد و پاره خط و اصل بین نقاط $(a, f(a)), (b, f(b))$ نمودار f رادر نقطه سومی چون $c \in (a,b)$ قطع می کند ثابت کنید به ازای حداقل یک نقطه مانند t در (a,b) داریم $f''(t) = 0$

حل: تابع f روی یک بازه های $[a,c], [c,b]$ پیوسته و روی هر یک از بازه های $(a,c), (c,b)$ مشتق پذیر است.

$$\exists c_1 \in (a,c): \qquad \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c_1)$$

$$\exists c_2 \in (c,b): \qquad \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(c_2)$$

طبق قضیه مقدار میانگین می توان نوشت:

واضح است که سمت چپ عبارات فوق با هم برابرند.(با توجه به فرض)

....

درنتیجه داریم $f'(c_1) = f'(c_2)$ و تابع f' در $[c_1, c_2]$ پیوسته و در (c_1, c_2) مشتق پذیر است.

......

و طبق قضیه اول در مورد تابع f' می توان نوشت

و چون $(c_1, c_2) \subset (a,b)$ مي باشد داریم:

$$\exists t \in (a,b): f''(t) = 0$$

مساله 24)ثابت کنید تابعی پیوسته و پوشا مانند $f:[a,b]\to(c,d)$ وجود ندارد.

اثبات:

فرض کنید f چنین تابعی باشد. چون f روی $[a,b]$ پیوسته است ، بنابراین عددهای x_1,x_2 در بازه $[a,b]$ وجود دارند که

$$f(x_1)=\min f \qquad , \qquad f(x_2)=\max f$$

پس هیچ عددی خارج بازه $[f(x_1),f(x_2)]$ در برد f نیست. از طرف دیکر، بنابر قضیه مقدار میانی ، هر عددی دربازه $[f(x_1),f(x_2)]$ در برد f است. پس برد f بازه ای بسته است و این با پوشا بودن f تناقض دارد.

مساله 25)فرض کنید a,b دو عدد حقیقی ، $f, a<b$ تابعی حقیقی و پیوسته بر $[a,b]$ باشد. فرض کنید f در این فاصله صفر نمی شود. بر فاصله (a,b) مشتق پذیر است ثابت کنید عضوی مانند c در (a,b) هست به طوری که

$$\frac{f(a)}{f(b)}=e^{(a-b)}\frac{f'(c)}{f(c)}$$

اثبات:

تابع $g=\log|f|$ بر فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و بر (a,b) مشتق پذیر است.

در نتیجه بنابر قضیه مقدار میانگین

$$g(a)-g(b)=(a-b)g'(c)$$

و از آنجا $\log\left|\frac{f(a)}{f(b)}\right|=(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}$

چون تابع f پیوسته است بر $[a,b]$ صفر نمی شود. دارای علامت ثابتی است، پس $\left|\frac{f(a)}{f(b)}\right|=\frac{f(a)}{f(b)}$ درنتیجه

$$\frac{f(a)}{f(b)}=e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

مساله 26)فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته و α,β دو عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید لااقل یک عدد حقیقی c در فاصله$[a,b]$ وجود دارد به قسمتی که

$$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(c)$$

اثبات: فرض کنید $m=\min f$ و $M=\max f$ در فاصله $[a,b]$ باشد. در این صورت

$$m\le f(a)\le M$$
$$m\le f(b)\le M$$

و چون α و β دو عدد مثبت اند می توان نوشت:

$$\alpha m \le \alpha\ f(a) \le \alpha M$$
$$\beta\, m \le \beta\ f(b) \le \beta\, M$$

در نتیجه

$$(\alpha+\beta)m \le \alpha\ f(a) + \beta\ f(b) \le (\alpha+\beta)M$$

یعنی
$$m \le \frac{\alpha\ f(a)+\beta\ f(b)}{\alpha+\beta} \le M$$

بنابراین لااقل نقطه ای مانند $c \in [a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\alpha\ f(a)+\beta\ f(b)}{\alpha+\beta} = f(c)$$

و حکم برقرار است.

سوال 27) فرض کنید
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4^n} & x = \dfrac{1}{2^n}, \quad n \in N \\ 0 & x \neq \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$

ثابت کنید f در نقطه ٥ مشتق پذیر است.

حل:توجه کنید که اگر $x \neq 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & x = \dfrac{1}{2^n}, \quad n \in N \\ 0 & x \neq \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ باشد، در این صورت عدد طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که

$$\frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

بنابراین اگر $0 < |x| < \dfrac{1}{2^N}$ ، آنگاه

$$\frac{f(x)}{x} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

و در نتیجه

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

یعنی f در نقطه 0 مشتق پذیر است.

مساله 28)فرض کنید $f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & x = \frac{1}{2^n} \quad , \quad n \in N \\ 0 & x \neq \frac{1}{2^n} \end{cases}$ ثابت کنید f درنقطه 0 مشتق پذیر نیست.

اثبات:

توجه کنید که اگر $x \neq 0$ ،

$$\frac{f\left(x\right)}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2^n} \ , \ n \in N \\ 0 & x \neq \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

فرض کنید f درنقطه 0 مشتق پذیر باشد. در این صورت، عددی مانند l، وجوددارد که

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = l$$

بنابراین عددی مانند δ وجود دارد که $0 < |x| < \delta$ ، آنگاه

$$\left| \frac{f(x)}{x} - L \right| < \frac{1}{4}$$

عدد طبیعی مانند N وجود دارد که $\frac{1}{2^N} < \delta$. پس

$$\left|\frac{f\left(\frac{1}{2^N}\right)}{\frac{1}{2^N}}-L\right|=\left|\frac{1}{2}-L\right|<\frac{1}{4}$$

و همچنین. x ای وجود دارد به طوری که به ازای هیچ عدد طبیعی مانند k به شکل $\frac{1}{2^k}$ نیست و $0<|x_0|<\delta$ پس

$$\left|\frac{f(x_0)}{x_0}-L\right|=|0-L|<\frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}=\left|\frac{1}{2}-L+L\right|\leq\left|\frac{1}{2}-L\right|+|L|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

این تناقض نشان می دهد f در نقطه 0 مشتق پذیر نیست.

سوال 29) فرض کنید $f:(a,b)\to$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد و $\{b_n\},\{a_n\}$ دو دنباله باشند که

$$a<a_n<x_0<b_n<b \qquad n=1,2,\ldots$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=x_0$$

ثابت کنید $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_a)}{b_n-a_n}=f'(x_0)$

حل: فرض کنید $n=1,2,\ldots$ $\quad t_n=\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n}$ در این صورت به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $0<t_n<1$

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)=t_n\left(\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0)\right)+(1-t_n)\left(\frac{f(a_n)-f'(x_0)}{a_n-x_0}-f(x_0)\right)$$

توجه کنیم که می توانیم بنویسیم

$\lim_{n\to\infty} h_n = 0\ ,\quad b_n = x_0 + h_n$.

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}=\lim_{b_n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0)$$

و به طور مشابه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}=f'(x_0)$$

چون دنباله های $\{1-t_n\},\{t_n\}$ کراندارند،

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0)$$

سوال 30)اگر $f:(0,1)\to[1,2]$ تابعی مشتق پذیر باشد و به رو(پوشا) باشد در اینصورت نشان دهید f' حداقل دو ریشه در $(0,1)$ دارد.

حل:

چون f پوشاست پس $a,b\in(0,1)$ موجود است به طوری که

$$\begin{aligned}&f(b)=2\qquad , \qquad f(a)=1\\&2=\sup\{f(x):\ x\in(0,1)\}\\&1=\inf\{f(x):\ x\in(0,1)\}\end{aligned}$$

از طرفی $(0,1)$ باز است پس نقاط a,b اکسترمم موضعی f بر $(0,1)$ است اما f مشتق پذیر است، لذا

سوال 31) f روی $(0,\infty)$ مشتق پذیرو $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)$ برابر با L آنگاه ثابت کنید

$\lim_{x\to\infty} f'(x),\lim_{x\to\infty} f(x)$ به ترتیب برابر L و 0 است.

حل :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=L$$

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N>0:\left|f(x)+f'(x)-L\right|<\varepsilon\qquad\forall x>N$$

$$L-\varepsilon<f(x)+f'(x)<L+\varepsilon\qquad\qquad\forall x>N$$

$$e^x(L-\varepsilon)<\left(f(x)+f'(x)\right)e^x<(L+\varepsilon)e^x\qquad\forall x>N$$

$$\left(e^x(L-\varepsilon)\right)'<\left(f(x).e^x\right)'<\left((L+\varepsilon)e^x\right)'$$

$$e^x(L-\varepsilon)<f(x)e^x<(L+\varepsilon)e^x\Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon\quad\forall x>N$$

پس $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=L$ در نتیجه $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$

سوال32)تابع f بر R مشتق پذیر است و $|f'(x)|\le 1, f(-1)=-1, f(1)=1$ آنگاه نشان دهید $f(0)=0$

حل:

بنابر قضیه مقدار میانی، c_2,c_1 در بازه های $(-1,0),(0,1)$ چنان موجود است که

$$f(1)-f(0)=(1-0)f'(c_2)\quad,\quad f(0)-f(-1)=(0-(-1))f'(c_1)$$

$$1-f(0)=f'(c_2)\qquad,\qquad f(0)+1=f'(c_1)\Rightarrow f'(c_1)+f'(c_2)=2$$

با توجه به اینکه $|f'|\le 1$ پس $f'(c_1)=f'(c_2)=1$

در نتیجه $f(0)=0$

سوال 33) فرض کنید تابع $f:[0,1]\to R$ روی بازه $[0,1]$ پیوسته و روی بازه $(0,1)$ مشتق پذیر باشد و $f(0)=0$ ، فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید عددی مانند c در بازه $(0,1)$ وجود دارد که

$$f'(c)=\frac{nc^{n-1}f(c)}{1-c^n}$$

حل:

فرض کنید $x \in [0,1]$ $\qquad g(x) = (x^n - 1) f(x)$ ، g در شرایط قضیه رول صدق می کند بنابراین عددی مانند c در بازه $(0,1)$ وجود دارد که

$$0 = g'(c) = nc^{n-1} f(c) + (c^n - 1) f'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{nc^{n-1} f(c)}{1 - c^n}$$

سوال 34) فرض کنید تابع f روی بازه $[-1,1]$ پیوسته و روی بازه $(-1,1)$ مشتق پذیر باشد. اگر $f(1) = 0$ $\qquad f(x) > 0$ $\qquad (x \in (-1,1))$ ، و m,n عددهایی طبیعی باشند، ثابت کنید عددی مانند c در بازه $(-1,1)$ وجود دارد که

$$mf(c) f'(-c) = nf(-c) f'(c)$$

حل: فرض کنید $\forall x \in [-1,1]; g(x) = (f(-x))^m (f(x))^n$ تابع g در شرایط قضیه رول صدق می کند بنابراین عددی مانند c در بازه $(-1,1)$ وجود دارد که

$$-m(f(-c))^{m-1} f'(-c)(f(c))^n + n(f(-c))^m (f(c))^{n-1} f'(c) = 0$$

با تقسیم این برابری به $(f(-c))^{m-1}(f(c))^{n-1}$ نتیجه مطلوب به دست می آید.

سوال 35) فرض کنید a,b,c عددهایی حقیقی باشند و $a \le b \le c$. همچنین فرض کنید $f : [a,c] \to R$ تابعی پیوسته و روی (a,c) مشتق پذیر باشد. ثابت کنید اگر f' تابعی صعودی باشد آنگاه

$$(b-a) f(c) + (c-b) f(a) \ge (c-a) f(b).$$

حل: بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند s در بازه (b,c) وجود دارد که

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(s)$$

همچنین عددی مانند t در بازه (a,b) وجود دارد که

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(t)$$

چون t<s و f' صعودی است پس $f'(t) \le f'(s)$ در نتیجه

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(c)}{b-a} \Rightarrow (b-a)f(c)+(c-b)f(a) \ge (c-a)f(b)$$

و حکم ثابت می شود.

سوال 36)فرض کنید تابع $f:R \to R$ مشتق پذیر و f' صعودی اکید باشد. همچنین فرض کنید b,a عددهایی حقیقی باشند و $f(b)+f'(b)>a$ ثابت کنید $f(b+1)>a$

حل: قضیه مقدار میانگین را در مورد بازه $[b,b+1]$ به کار می بریم در نتیجه داریم:

$$\exists c \quad s,t \qquad f'(c)=\frac{f(b+1)-f(b)}{b+1-b}=f(b+1)-f(b)$$

$$f(b+1)=f'(c)+f(b)$$

و چون f' صعودی است پس $f'(c)>f'(b)$ در نتیجه

$$f(b+1)=f'(c)+f(b)>f'(b)+f(b)>a$$
$$\Rightarrow f(b+1)>a$$

سوال 37)فرض کنید $f:R \to R$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ ثابت کنید

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=0$$

حل: فرض کنید x عددی حقیقی باشد . بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند c در بازه $(x,x+1)$ وجود دارد که $f(x+1)-f(x)=f'(c)$ اکنون توجه کنید که اگر ε عددی حقیقی و مثبت باشد، عددی مثبت مانند N وجود دارد که

$$|f'(x)|<\varepsilon \qquad\qquad x>N$$

بنابراین $|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon$ و $\forall x>N$ در نتیجه $\lim_{x\to\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=0$

سوال 38)فرض کنید $f:R \to R$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x)f'(x)=0 \qquad\qquad \forall x\in R$$

ثابت کنید f تابعی ثابت است.

راه حل: فرض کنید

$$g(x)=\left(f(x)\right)^2 \qquad\qquad x\in R$$

در این صورت g روی R مشتق پذیر است و

$$g'(x)=2f'(x)f(x)=0 \Rightarrow g=const \Rightarrow f=const$$

سوال 40) فرض کنید تابعهایی f و g روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشند و $f(b)=g(b)$ و $f(a)=g(a)$ ثابت کنید نقطه ای مانند x_0 در بازه (a,b) وجود دارد که

$$f'(x_0)=g'(x_0)$$

حل: توجه کنید که تابع f-g روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر است.

$$(f-g)(a)=f(a)-g(a)=0,\ (f-g)(b)=f(b)-g(b)=0$$

پس بنابر قضیه رول نقطه ای مانند x_0 در بازه (a,b) وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}(f-g)'(x_0)=0 &\Rightarrow f'(x_0)-g'(x_0)=0\\ &\Rightarrow f'(x_0)=g'(x_0)\end{aligned}$$

سوال 41) تابع مشتق پذیر $f:[a,b]\to R$ به گونه ای است که $f'(a)<f'(b)$. اگر $f'(a)<\lambda<f'(b)$ آنگاه ثابت کنید عددی مانند $a<c<b$ وجود دارد که $f'(c)=\lambda$ (اگر $f'(b)<f'(a)$ حکم را ثابت کنید).

اثبات: تابع $\phi:[a,b]\to R$ را با ضابطه $\phi(x)=f(x)-\lambda x$ در نظر می گیریم. ϕ مشتق پذیر است و $\phi'(x)=f'(x)-\lambda$. با توجه به $\phi'(b)=f'(b)-\lambda>0,\ \phi'(a)=f'(a)-\lambda<0$.

$$\begin{aligned}&\exists\ a<t_1<t_2<b\\ &\phi(t_1)<\phi(a),\qquad \phi(t_2)<\phi(b)\end{aligned}$$

پس تابع ϕ مینیمم مطلق خود را در نقطه ای مانند $a<c<b$ اختیار می کند. و ازاین رو $\phi'(c)=0$ در نتیجه $f'(c)-\lambda=0$ یا $f'(c)=\lambda$

سوال 42) فرض کنید $f:[a,b]\to R$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشد و $f'(x)\neq 0$ و $\forall x\in(a,b)$ ثابت کنید f یک به یک است.

راه حل: اگر f یک به یک نباشد، عددهایی حقیقی مانند x,y در بازه $[a,b]$ وجود دارند که

$$f(x)=f(y)\qquad\qquad x\neq y\qquad\qquad x<y$$

بنابر قضیه مقدار میانگین، نقطه ای مانند c در بازه (x,y) وجود دارد که

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0$$

که با فرض مساله در تناقض است پس f یک به یک است.

سوال 43) فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) دو بار مشتق پذیر باشد. و

$f(a)=f(b)=0$ و $f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$ ثابت کنید f صفری در بازه (a,b) ندارد.

اثبات: فرض کنید f صفری در بازه (a,b) داشته باشد. یعنی فرض کنید نقطه ای مانند c وجود داشته باشد که $a<c<b$ $f(c)=0$. بنابر قضیه رول نقطه ای مانند c_1 در بازه (a,c) وجود دارد که $f'(c_1)=0$ ؛ همچنین نقطه ای مانند c_2 در بازه (c,b) وجود دارد. که $f'(c_2)=0$ توجه کنید که f' روی بازه $[c_1,c_2]$ پیوسته و روی بازه (c_1,c_2) مشتق پذیر است. پس باز هم بنابر قضیه رول نقطه ای مانند c_3 در بازه (c_1,c_2) وجود دارد که $f''(c_3)=0$ و این تناقض نشان می دهد که فرض اولیه ما نادرست است و f صفری در (a,b) ندارد.

سوال 44) نشان دهید نقطه ای مانند c در بازه (a,b) موجود است به طوری که

$$f''(c)\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(b)-f(a)\right]$$

($f''(x)$ موجود است و $f'(a)=f'(b)=0$)

حل: چون $f'(a)=f'(b)=0$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(x_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(x_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

که x_1 است بین a و $\frac{a+b}{2}$ و همچنین x_2 بین $\frac{a+b}{2},b$ است.

اما

$$|f(b)-f(a)|\leq\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|$$
$$=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2!}\right)\left(|f''(x_1)|+|\ |f''(x_2)\right)$$

فرض کنید $|f''(c)|$ برابر $\max\{|f''(x_1)|,|f''(x_2)|\}$ باشد به طوری که به ازای این انتخاب c ما خواهیم داشت:

$|f''(c)| \geq \frac{1}{2}[|f''(x_1)|+|f''(x_2)|]$ که حکم نتیجه می شود.

سوال 45) فرض کنید تابع f ، $f: R \to R$ دو بار مشتق پذیر است. واگر $|f(x)| \leq 1$ و $x \in R$ و $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$ ثابت کنید عددی حقیقی مانند x_0 وجود دارد که

$$f(x_0)+f''(x_0)=0$$

حل: از قضیه مقدار میانگین نتیجه می شود که به ازای a,b ای که $-2<a<0<b<2$

$$|f'(a)| = \frac{|f(0)-f(-2)|}{2} \leq \frac{|f(0)|+|f(-2)|}{2} \leq 1$$

و به همین ترتیب $|f'(b)| \leq 1$ فرض کنید $g(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$ در این صورت

$$g(a) \leq 1+1=2, \qquad g(b) \leq 2$$

چون $g(0)=4$ بیشترین مقدار $g(x)$ به ازای نقطه ای مانند x_0 در بازه (a,b) بدست می آید و بنابراین

$$0=g'(x_0)=2f'(x_0)(f(x_0)+f''(x_0))=0$$

اما $f'(x_0)\neq 0$ زیرا در غیر اینصورت $(f(x_0))^2=g(x_0)\geq 4$. و در نتیجه $|f(x_0)|>1$ بنابراین با فرض $\forall x \in R; |f(x)| \leq 1$ تناقض دارد پس باید $f(x_0)+f''(x_0)=0$ و حکم ثابت می شود.

سوال 46) f تابعی حقیقی روی بازه $[a,b]$ و n+1 بار مشتق پذیر است و فرض کنید

$$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0 \qquad 0 \leq k \leq n$$

ثابت کنید عددی مانند c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری

$$f^{(n+1)}(c)=f(c)$$

اثبات: دو حالت می گیریم

1) فرض کنید n=0 دراین صورت با قرار دادن $g(x)=e^{-x}f(x)$. در این صورت

$$g(a)=g(b)=0$$

به این ترتیب از قضیه رول نتیجه می شود که به ازای c ای در (a,b) داریم

$$0=g'(c)=-e^{-c}f(c)+e^{-c}f'(c)\Rightarrow f'(c)=f(c)$$

فرض کنید $n>0$ و $h(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)$ در این صورت $h(a)=h(b)=0$ و

$$h(x)-h'(x)=f(x)-f^{(n+1)}(x)$$

$$\Rightarrow \exists c \quad s,t \;\; h(x)-h'(x)=0\Rightarrow f(c)-f^{(n+1)}(c)=0$$

پس $f^{(n+1)}(c)=f(c)$

و حکم ثابت می شود.

سوال 47) تابع هایf,g هر دو روی بازه ای مانند I مشتق پذیرند . ثابت کنید در میان دو ریشه حقیقی $f(x)$ (روی I) ریشه ای حقیقی از $f'(x)+f(x)g'(x)$ قرار دارد.

اثبات: فرض کنید $h(x)=f(x)e^{g(x)}$. مقدار $h(x)$ به ازای ریشه های حقیقی f صفر است.

$h'(x)=(f'(x)+f(x)g'(x))e^{g(x)}$. بنابر قضیه رول $h'(x)$ و در نتیجه $f'(x)+f(x)g'(x)$ بین هر دو ریشه حقیقی f روی I ریشه ای حقیقی دارد.

سوال 48) ثابت کنید عدد حقیقی و یکتا مانند c وجود دارد به طوری که اگر $f:[0,1]\to R, f$ تابعی مشتق پذیر باشد، $f(1)=1, f(0)=0$ آن وقت معادله $f'(x)=cx$ جوابی در بازه $(0,1)$ دارد.

حل: فر ض کنید $g(x)=x^2$. در این صورت تنها عدد حقیقی مانند c که به ازای آن معادله $g'(x)=cx$ در بازه $(0,1)$ جوابی دارد، 2 است، اکنون فرض کنید f تابعی مشتق پذیر روی $[0,1]$ است و $f(1)=1, f(0)=0$. فرض کنید $h=f-g$. در این صورت h روی $[0,1]$ مشتق پذیر است و $h(0)=h(1)=0$ در نتیجه بنابر قضیه رول معادله $h'(x)=0$ ریشه ای در بازه $(0,1)$ دارد. چون

$h'(x)=f'(x)-2x$ پس $f'(x)=2x$ ریشه ای در بازه $(0,1)$ دارد.

سوال 49) فرض کنید $f:R\to R$ دوبار مشتق پذیر باشد و f'' روی (a,b) هیچ جا صفر نشود. ثابت کنید عددهایی مانند p,q,r در بازه (a,b) وجود دارند که

$$f'(p)f''(r)=f'(r)f''(q)$$

اثبات: بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند p در بازه (a,b) وجود دارد که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(p)$$

و عددی مانند q در بازه (a,b) وجود دارد که

$$\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}=f''(q)$$

پس

$$\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)-f'(a)}=\frac{f'(p)}{f''(q)}$$

بنابراین با قرار دادن $(g(x)=f'(x))$ عددی مانند r در (a,b) وجود دارد که

$$\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)-f'(a)}=\frac{f'(r)}{f''(r)}\Rightarrow f'(p)f''(r)=f'(r)f''(q)$$

سوال 50) فرض کنید $f(0)=0$ $\quad f''(x)\le 0 \quad \forall x\in(0,\infty)$

ثابت کنید $\quad f(x+y)\le f(x)+f(y), \quad x,y\in(0,\infty)$

اثبات: فرض کنیم $x\le y$ بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند c_1 در بازه $(0,x)$ وجود دارد که

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c_1)$$

همچنین عددی مانند c_2 در بازه $(y,x+y)$ وجود دارد که

$$\frac{f(x+y)-f(y)}{x}=f'(c_2)$$

و چون f' نزولی است، پس $f'(c_2)\le f'(c_1)$ بنابراین

$$f(c_2)\le f'(c_1)$$

بنابراین

$$\frac{f(x+y)-f(y)}{x}\le\frac{f(x)}{x}$$

در نتیجه

$$f(x+y)\le f(x)+f(y)$$

سوال 51) توابع $f, g : R \to R$ به گونه ای هستند که f دوبار مشتق پذیر است و به ازای هر $x \in R$ داریم

(1) $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$ اگر f در دو نقطه متمایز a,b صفر شود ثابت کنید که به ازای هر $a \le x \le b$ داریم $f(x) = 0$.

حل: فرض کنیم اتفاقاً در نقاطی از $]a,b[$ مثبت شود و $a < c < b$ یک نقطه ماکزیمم مطلق f روی $[a,b]$ باشد. در این صورت $f'(c_x), f(c) > 0$, $f''(c) \le 0$ اکنون رابطه (1) به ما نشان می دهد که

$$0 \ge f''(c) = f(c) > 0$$

که این تناقض است و حکم ثابت می شود. (به همین ترتیب f نمی تواند در بازه $]a,b[$ منفی باشد.

سوال 52) فرض کنید f در صفر دیفرانسیل پذیر باشد $f(0) = 0$ ثابت کنید تابع g ای که در صفر پیوسته است وجود دارد که $f(x) = xg(x)$.

حل: تابع g را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & x \ne 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(o) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$g(0) = f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} g(x)$$
$$\Rightarrow g(0) = \lim_{x \to 0} g(x)$$

سوال 53) اگر تابع f بر $[a,b]$ مشتق پذیر است و $\forall x \in (a,b): \ f(a) = f(b) = 0, f'(x) \ne 0$ آنگاه نشان دهید $f'(a^+), f'(b^-)$ مختلف العلامه اند.

اثبات به برهان خلف:

$$f'(a^+) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$
$$\Rightarrow (\exists \delta > 0 \quad s,t \quad a < x < a + \delta)$$
$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(a) > 0 \qquad : \exists \delta > 0 \quad s,t \quad a < x < a + \delta$$
$$\Rightarrow f(a) < f(x): \qquad a < x < a + \delta \qquad (1)$$

مشابه بالا برای $f'(b^-)>0$ عمل می کنیم . خواهیم داشت:

$$f'(b^-)>0 \Rightarrow \exists \delta>0, \; s,t \quad b-\delta<x<b, \quad f(x)<f(b) \qquad (2)$$

بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} \exists x_1>a \quad s,t \;\; f(a)=0<f(x_1) \\ \\ \exists x_2<b \quad s,t \;\; f(b)=0>f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_3 \in (x_2,x_1) \;\; s,t \;\; f(x_3)=0$$

پس فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود.

سوال 54) ثابت کنید

$$(a-b)tgb<Ln\frac{\cos b}{\cos a}<(a-b)tga$$
$$\left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$$

حل: از قضیه مقدار میانگین درمشتقات استفاده می کنیم:

$$f(x)=Ln\cos x \Rightarrow f'(x)=-tgx \quad f'(c)=-tgc; \; a<c<b$$
$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$
$$Ln\cos b-Ln\cos a=(b-a)(-tgc)=(a-b)tgb$$

داریم: $a<c<b$ لذا $tga<tgc<tgb$ و می توان نوشت:

$$(b-a)tga<(b-a)tgc<(b-a)tgb$$

$$(a-b)tga>(a-b)tgc>(a-b)tgb$$
$$(a-b)tga>\ln\cos b-Ln\cos a>(a-b)tgb$$
$$(a-b)tgb<Ln\frac{\cos b}{\cos a}<(a-b)tga$$

سوال 55)فرض کنید تابع پیوسته $f:[0,1]\to[0.1]$ در بازه $(0,1)$ مشتق پذیر باشد در ضمن $f(1)=1,\ f(0)=0$ ثابت کنید چنان عددهایی برای $a,b\in(0,1)$ وجود دارد. به نحوی که

$$a\neq b,\quad f'(a).f'(b)=1$$

حل: $f(x)$ را تابع مورد نظر مساله در نظر می گیریم و فرض می کنیم $g(x)=f(x)+x-1$ که در بازه $[0,1]$ معین است. $g(x)$ تابعی پیوسته است و در ضمن $g(0)=-1$ و $g(1)=1$. بنابراین عدد $c\in(0,1)$ به طوری که داشته باشیم $g(c)=0$ ، یعنی $f(c)=1-c$ بنابراین عدد $c\in(0,1)$ وجود دارد به نحوی که داشته باشیم $g(c)=0$ یعنی $f(c)=1-c$. بنابر قضیه مقدار میانگین عددهای $a\in(0,c)$, $b\in(c,1)$ وجود دارند که برای آنها داشته باشیم

$$f'(a)=\frac{f(c)-f(0)}{c},\ f'(b)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}$$

بنابراین

$$f'(a)f'(b)=\frac{1-c}{c}.\frac{c}{1-c}=1$$

سوال 56)فرض کنید f در $x=a$ مشتق پذیر و $f(a)\neq 0$ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$ را به دست آورید.

حل: کافی است مقدار $\lim\limits_{x\to o}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}$ را به دست آوریم. برای مقدار به اندازه کافی کوچک x $f(a), f(a+x)$ هم علامت اند واز این نتیجه می شود که

$$\log\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to o}\left[\log\left(\frac{|f(a+x)|}{|f(a)|}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\lim_{x\to o}\frac{\log|f(a+x)|-\log|f(a)|}{x}$$

آخرین عبارت طرف راست تعریف مشتق $\log|f(x)|$ در x=a است که با توجه به حسابان مقدارآن مساوی $\frac{f'(a)}{f(a)}$ است.

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{f'(a)/f(a)}$$

سوال 57) همه تابع های مشتق پذیر $f:R\to R$ را پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\equiv\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\qquad (x,y\in R\ \ ,\ \ x\neq y)$$

حل: چون، با توجه به شرط مساله برای هر مقدار $y\neq 0$ داریم:

$$f'(x)\equiv\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}$$

سمت راست این اتحاد، نسبت به x مشتق پذیر است،بنابراین

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{f'(x+y)-f'(x-y)}{2y}\\&\equiv\frac{1}{2y}\left[\frac{f(x+2y)-f(x)}{2y}-\frac{f(x-2y)-f(x)}{(-2y)}\right]\\&\equiv\frac{f(x+2y)+f(x-2y)-2f(x)}{4y^2}\end{aligned}$$

عبارت اخیر هم نسبت به x مشتق پذیر است . بنابراین

$$f'''(x)=\frac{f'(x+2y)+f'(x-2y)-2f'(x)}{4y^2}$$

$$\equiv\frac{1}{4y^2}\left[\frac{f(x+4y)-f(x)}{4y}+\frac{f(x-4y)-f(x)}{(-4y)}-\frac{f(x+4y)-f(x-4y)}{4y}\right]$$
$$\equiv 0$$

به این ترتیب برای تابع مفروض اتحاد $f'''(x)=0$ برقرار است؛ یعنی

$$f'''(x)=f''(0),\qquad f'(x)=f''(0)x+f'(0)$$
$$f(x)=f''(0)\frac{x^2}{2}+f'(0)x+f(0)$$

پس هر تابع به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ دارای همه ویژگی های مورد نظر می باشد.

سوال 58) فرض کنید $f:[0,1]\to R$ مشتق پذیر باشد، علاوه بر آن $f(0)=0$ و به ازای هر x در $(0,1)$ ، $f(x)>0$.
ثابت کنید عددی مانند c در $(0,1)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \qquad (1)$$

حل: تابع $g(x) = f^2(x) f(1-x)$ را در نظر می گیریم. واضح است که $g(0) = 0, g(1) = 0$ پس بنابر قضیه رول عددی مانند c موجود است به طوری که $g'(c) = 0$ با بدست آوردن $g'(x) = 0$ و قرار دادن $x = c$ رابطه (1) بدست می آید.

سوال 59) فرض کنید $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin nx$ که در آن a_1, a_2 و $....a_n$ عددهایی حقیقی اند و n عددی صحیح و مثبت است. هرگاه به ازای هر x حقیقی $|f(x)| \le |\sin x|$ ثابت کنید

$$|a_1 + 2a_1 + ... + na_n| \le 1$$

حل: می دانیم $f'(x) = a_1 \cos x + ... + na_n \cos nx$ که د رآن $f'(0) = a_1 + 2a_2 + ...na_n$

$$|f'(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$
$$\le \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$$

و این برهان را کامل می کند.

سوال 60)اگر تابع f بر $[a,b]$ مشتق پذیر باشد و $f(x) \neq 0, f(a) = f(b) = 0$ برای $\forall x \in (a,b)$ نشان دهید $f'(a)$ و $f'(b)$ مختلف العلامه اند.

حل: فرض کنید f در یک نقطه از (a,b) مثبت باشد (حالت منفی مشابه است) دراین صورت با توجه به قضیه مقدار میانی f بر (a,b) همواره مثبت است . بنابراین به ازای $x \in (a,b)$ داریم:

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \qquad\qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} > 0$$

در نتیجه $f'(a) \ge 0$, $f'(b) \le 0,$

سوال 61) فرض کنید h عدد ثابت مثبتی باشد. نشان دهید که تابعی مانند f نمی توان یافت که در سه شرط زیر صدق کند.

(1) به ازای هر $x \ge 0$ و $f'(x)$ وجود داشته باشد؛

$$f'(0)=0 \quad (2)$$

(3) و به ازای هر $x>0$ $\quad f'(x)\ge h$

اثبات: برهان خلف: فرض کنیم f ی باشد که در سه شرط صدق نماید. پس

$$\circ = f'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}$$

در نتیجه

$$\forall\varepsilon>\circ,\exists\delta>\circ\forall x\ge\circ,|x-\circ|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(\circ)}{x}\right|<\varepsilon$$

حال اگر $\varepsilon=\frac{h}{2}$ و δ_0 ای موجود است که

$$|x|<\delta_0,\qquad \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|<\frac{h}{2}$$

پس بنابر قضیه مقدار میانگین به ازای هر $x_0\in(0,x), x\in(0,\delta_0)$ به طوری که

$$f'(x_0)=|f'(x_0)|=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|<\frac{h}{2}$$

پس $h\le f'(x_1)<\frac{h}{2}$ واین تناقض است.

سوال 62) فرض کنید a,b دو عدد حقیقی باشند و $a<b$ و f تابعی باشد که در هر نقطه (a,b) مشتق پذیر است مگر احتمالاً در نقطه x_0

ثابت کنید اگر تابع f' درنقطه x_0 دارای حد باشد آنگاه تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است و

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$$

اثبات: اگر x نقطه ای از فاصله $[a,b]$ باشد به قسمی که $x<x_0$ با استفاده از قضیه مقدار میانگین بر فاصله $[x,x_0]$ نقطه ای مانند λ_x در فاصله (x,x_0) وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\lambda_x)$$

چون $x<\lambda_x<\lambda_0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0}\lambda_x=x_0$ پس $x\to x_\circ^-\Leftrightarrow\lambda_x\to x_\circ^-, x\to x_\circ^+\Leftrightarrow\lambda_x\to x_\circ^+$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-} f'(\lambda_x)$$
$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+} f'(\lambda_x)$$

و چون طبق فرض f' در نقطه x_0 دارای حد می باشد پس چون

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(\lambda_x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(\lambda_x)$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{x\to x_0^+} f'(\lambda_x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(\lambda_x) \qquad \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f'(\lambda_x)=\lim_{x\to x_0^+} f'(\lambda x)$$
$$\Rightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$$

پس f در x_0 مشتق پذیر است و $\lim_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$

سوال 63) فرض کنید f یک تابع حقیقی مشتق پذیر باشد و قلمرو آن مجموعه عددهای حقیقی مثبت است و f' به ازای هر $x>0$ وجود دارد اگر $\lim_{x\to\infty} f'(x), \lim_{x\to\infty} f(x)$ هر دو موجود باشند ثابت نید $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$

حل: برای x>0 قضیه مقدار میانگین را روی $[x,x+1]$ به کار می بریم.

$$\exists t\in(x,x+1) \quad s.t \quad f(x+1)-f(x)=f'(t) \qquad *$$

حال گوییم که وقتی $x\to\infty$ میل می کند اولاt نیز به سمت بی نهایت می می ند $(t\to\infty)$.

حال از رابطه * با توجه به اینکه f و f' وجود دارند، حد می گیریم خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\infty} f(x+1)-\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty} f(t)\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f'(t)=0$$
$$\lim_{t\to\infty} f'(t)=0\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

سوال 64) اگر f تابعی دو بار مشتق پذیر باشد$(f:R\to R)$ و $(f:R\to R)$ $\forall x\in R; f''(x)<0,$ آنگاه f از پایین کراندار نیست.

اثبات:

$$f(x)-f(0)=x\,f'(x_1) \qquad s.t \quad 0<x_1<x$$
$$f'(x_1)-f'(0)=f''(x_2)x_1 \qquad s.t \quad 0<x_2<x_1$$

حال داریم:

$$f(x)=xf'(x_1)+f(0)=xx_1f''(x_2)+xf'(0)+f(0)$$
$$\forall x: f(x)=y+xx_1f''(x_2)<y\Rightarrow f(x)<xf'(0)+f(0)$$

حال گوییم که به برهان خلف عمل می کنیم اگر $\forall x: f(x)>M$ دراین صورت طبق رابطه بالا

$$M<xf'(0)+f(0)$$

اما می توانیم x ای انتخاب کنیم که $xf'(0)+f(0)<M$ وتناقض به این طریق درست می شود.

سوال 65) فرض کنید f تابعی دوری با دوره تناوب π روی R باشد به عاوه فرض کنیم که f دارای مشتقات مرتبه اول و دوم روی R بوده و به ازای هر x متعلق R $|f''(x)|\leq 2$ نشان دهید

$$\forall x\in R: |f'(x)|\leq \pi$$

حل: طبق قضیه تیلور خواهیم داشت:

$$f(x+\pi)=f(x)+\frac{\pi}{1!}f'(x)+\frac{\pi^2}{2!}f''(\zeta)$$

و چون طبق فرض $f(x+\pi)=f(x)$ و لذا داریم ه

$$f'(x)=-\frac{\pi}{2}f''(\zeta)$$
$$|f'(x)|=\frac{\pi}{2}|f''(\zeta)|\leq \pi$$

بنابراین

$$\forall xR \qquad |f'(x)|\leq \pi$$

سوال 66) فرض کنید f تابع مفروض باشد که در بازه $[0,1]$ تعریف شده و مشتق متناهی داشته باشد.همچنین به ازای هر x از این بازه $|f'(x)|<1$ به ازای $n=1,2,\ldots$ تعریف کنید $a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$ و نشان دهید $\lim_{n\to\infty}a_n$ موجود است.

حل: دنباله $R\supseteq\left\{\frac{1}{n}\right\}$ را در نظر می گیریم. این دنباله همگراست پس $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ یک دنباله کشی است

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\qquad \forall m,n\geq N\Rightarrow\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

و چون $\frac{1}{m},\frac{1}{n}\in(0,1)$ بنابر قضیه مقدار میانگین $x_1\in(0,1)$ وجود دارد که

$$\left|\frac{f\left(\frac{1}{m}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}\right|=\left|f'(x_1)\right|<1$$

و چون $\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ بنابراین $\frac{1}{\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|}>\frac{1}{\varepsilon}$ پس

$$\left|\frac{f\left(\frac{1}{m}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{\varepsilon}\right|<\left|\frac{f\left(\frac{1}{m}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}\right|=\left|f'(x_1)\right|<1$$

لذا $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{m}\right)\right|<\varepsilon$ پس اگر $a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$ چون a_n یک دنباله کشی است و Rتام است پس a_n همگراست.

سوال 67) فرض کنید f یک تابع حقیقی به قلمرو فاصله بسته $[a,b]$ است. اگر f'' در فاصله بسته $[a,b]$ موجود و مثبت باشد آنگاه برای هر $m\in[a,b]$ یک نقطه $x_0\in[a,b]$ موجود است به طوری که

$$f'(m)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} \quad \text{یا} \quad f'(m)=\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0}$$

اثبات: ابتدا توجه می کنیم که از $f''>0$ نتیجه می شود که f' اکیداً صعودی است. از قضیه مقدار میانگین نقطه $c\in(a,b)$ به دست می آید که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

اگر $m=c$ که مساله حل است.

اگر $\zeta>c$ تابع $g:[a,m]\to R$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم.

$$g(x)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}-f'(m)$$

در این صورت g تابعی پیوسته است و داریم:

$$g(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f(m)=f(c)-f'(m)$$

$$g(m)=\frac{f(b)-f(m)}{b-m}-f'(m)=f'(\zeta)-f'(m)$$

که در آن $\zeta\in(m,b)$ با اعمال قضیه مقدار میانگین بر تابع f روی $[b,m]$ به دست آمده است.

اکنون از $c<m<\zeta$ و اکیداً صعودی بودن f' و روابط فوق نتیجه می شود که $g(m)>0, g(a)<0$. بنابراین نقطه $x_0\in(a,m)\subseteq[a,b]$ یافت می شود که $g(x_0)=0$ به عبارتی $\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}=f'(m)$ برای

حالت $\zeta<c$ تابع پیوسته $h:[m,h]\to R$ با ضابطه زیر را در نظر می گیریم:

$$h(x)=\frac{f(a)-f(x)}{a-x}-f'(m)$$

بدست می آید $h(m)<0, h(b)>0$ و لذا $y_0\in(\zeta,b)\subset[a,b]$ یافت می شود که $h(y_0)=0$ و یا

$$\frac{f(a)-f(y_0)}{a-y_0}=f'(m)$$

سوال 68) تابع حقیقی f با شرایط ذیل داده شده است.

(1) $f(1)=1$

(2) $f'(x)=\frac{1}{x^2+(f(x))^2}$ برای $x\geq 1$

ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود است کوچکتر از $1+\frac{\pi}{4}$ است.

اثبات: چون $f'(x)>0$ پس f' اکیداً صعودی است و از نتیجه زیر حکم ثابت می شود:

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(u)du<1+\int_1^x\frac{1}{u^2+[f(u)]^2}du$$
$$<1+\int_1^\infty\frac{1}{u^2+1}du=1+\frac{\pi}{4}$$

سوال 69) فرض کنیم که نگاشت $g:R\to R$ چنان است که برای هر $x\in R$ ، $g'(x)\neq 0$ نشان دهید که g یک تناظر یک به یک از R به $g(R)$ است.

حل: پوشا بودن $g:R\to g(R)$ بدیهی است . برای یک به یک بودن g فرض می کنیم که $g(x)=g(y)$ بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند c مابین x,y هست به طوری که

$$0=g(x)-g(y)=g'(c)(y-x)$$

و چون $g'(c)\neq 0$ پس y=x در نتیجه g یک به یک ا ست و حکم ثابت می شود.

فصل 9 : انتگرالهای ریمانی و ریمان اشتليحس

سوال 1) فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و روي بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ و $\forall x\in[a,b]\ f(x)\neq 0$ ثابت کنید

$\int_a^b f(x)dx>0$ ($f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ متناهی باشد)

راه حل: بنابر قضیه مقدار میانگین، عددی مانند c در بازه $[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

اگر $\int_a^b f(x)dx\leq 0$ آنگاه $f(c)(b-a)\leq 0$ و چون $f(c)\neq 0$ پس $f(c)<0$ و چون $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عددی مانند d بین c و $\frac{a+b}{2}$ وجود دارد که $f(d)=0$ و این خلاف فر است پس $\int_a^b f(x)dx>0$

سوال 2) فرض کنید تابع f روی بازه $(0,\infty)$ پیوسته باشد و

$$f(x)>0,x\in(0,\infty)$$

ثابت کنید تابع $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\ f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ $\quad x\in(0,\infty)$ صعودی اکید است.

حل: اگر $x\in(0,\infty)$ و آنگاه

$$g'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x t(f(t))dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$
$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

توجه کنید که $x\in(0,\infty)$ $f(x)>0,\left(\int_0^k f(t)dt\right)^2>0$ در ضمن اگر $t\in(0,\infty)$ آنگاه $(x-t)f(t)>0$ و در نتیجه $\int_0^x (x-t)f(t)dt>0$ پس g' روی بازه $(0,\infty)$ مثبت و در نتیجه g صعودی اکید است.

سوال 3) فرض کنید تابع f روی R مشتق پذیر و a عددی حقیقی و بزرگتر از 1 باشد . ثابت کنید

$$\int_1^a [x]f'(x)dx=[a]f(a)-(f(1)+f(2)+...+f[a])$$

$$\int_1^a [x]f'(x)dx=\int_1^2 1\times f'(x)dx+\int_2^3 2f'(x)dx+...+\int_{[a]}^a [a]f'(x)dx$$
$$=f(2)-f(1)+2(f(3)-f(2))+...+[a](f(a)-f[a])$$
$$=[a]f(a)-(f(1)+...+f([a]))$$

سوال 4) فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. ثابت کنید عددی مانند c در بازه $[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx$$

اثبات: به عهده متعلم

سوال 5) فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و

$$f(a)=0,\ f(b)=-1,\int_a^b f(x)dx=0$$

ثابت کنید که عددی مانند c در بازه (a,b) وجود دارد که $f'(c)=0$

حل: چون f پیوسته است عددی مثبت مانند δ وجود دارد که

$$f(x)<0 \qquad x\in[b-\delta,b]$$

اکنون توجه کنید که

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{b-\delta} f(x)dx+\int_{b-\delta}^b f(x)dx=0$$

و $\int_{b-\delta}^b f(x)dx$ منفی است پس $\int_a^{b-\delta} f(x)dx>0$ بنابراین عددی مانند x_1 در بازه$(a,b-\delta)$ وجود دارد که $f(x_1)>0$. بنابراین عددی مانند x_2 در بازه(x_1,b)

سوال 6) هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد . انگاه عددی مانند α از $[a,b]$ هست به طوری که

$$\int_a^b fd(x)=f(\alpha)(b-a)$$

برهان: فرض کنید m,M به ترتیب سوپرمم واینفیمم f بر $[a,b]$ باشد، در این صورت داریم

$$m(b-a)\le\int_a^b f\,dx\le M(b-a)$$

چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، پس در خاصیت میانی صدق می کند. یعنی α ای از $[a,b]$ هست که

$$\frac{\int_a^b fdx}{b-a}=f(c)\Rightarrow\int_a^b f\,dx=f(\alpha)(b-a)$$

سوال 7) اگر g,f دو تابع پیوسته روي فاصله $[a,b]$ و

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx,$$

ثابت کنید $f(c)=g(c)$ $\quad .s.T \quad \exists\, c$

حل : $\left(\int_a^b f(x)-g(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\circ\right)$

$$\exists c \qquad s.t \qquad \int_a^b (f(x)-g(x)dx=(f(c)-g(c))(b-a)$$

$$\Rightarrow (f(c))-g(c))(b-a)=\circ\Rightarrow f(c)=g(c)$$

سوال 8) فرض کنید f تابعي مثبت و پيوسته بر روي $[a,b]$ $c>\circ$. اگر براي $x\in[a,b]$ داشته باشيم

$$f(x)\le c\int_a^x f(t)dt$$

ثابت کنيد f بر روي $[a,b]$ برابر با صفر است.

حل : اگر f صفر نباشد، پس $M=\sup\limits_{a\le x\le b}(x)>\circ$ ، در نتیجه

$$f(x)\le c\int_a^x Mdt=cM\left(x-a\right)$$

از این رو

$$f(x)\le c\int_a^x cM\ \left(x-a\right)dt\ \ =c^2M\,\frac{(x-a)^2}{2}$$ به همین ترتیب

$$f\ \left(x\right)\le c^3M\qquad \int_a^x\frac{\left(t-a\right)^2}{2}dt=c^3M\ \ \frac{\left(x-a\right)^3}{2}$$

به استقرا نتیجه مي شود:

$$\circ\le f\ \left(x\right)\le c^n\ \ M\int_a^x\frac{\left(x-a\right)^2}{n!}\le Mc^n\,\frac{\left(b-a\right)^n}{n!}\to\circ$$

پس $f\left(x\right)=\circ$ كه يك تناقض است پس $f=\circ$

سوال 9) ثابت كنيد اگر تابع پيوسته f بر بازه $\left[a,b\right]$ نامنفي بوده و $\int_a^b f\left(x\right)dx=\circ$ به ازاي هر $x\in\left[a,b\right]$ داريم كه : $f\left(x\right)=\circ$

حل : فرض كنيم $f\left(x\right)\neq\circ$ $\ .st\ \ \exists x_\circ\in\left[a,b\right]$ چون f پيوسته است پس همسايگي مانند $I=\left(x_\circ-\delta,x_\circ+\delta\right)$ به قسمتي كه

$$\forall x\in I\qquad f\left(x\right)>\circ\qquad\left(f\ge\circ\right)\qquad(1)$$

پس داريم

$$\circ=\int_a^b f\ \left(x\right)dx=\int_a^{x_0-\delta}f\ \left(x\right)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f\ \left(x\right)dx+\int_{x_0+\delta}^b f\ \left(x\right)dx$$

$$=\int_{x_{0}-\delta}^{x_{0}+\delta}f\ \left(x\right)dx\Rightarrow\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f\ \left(x\right)dx=0$$

واضح است $\int_a^{x_0+\delta}f\ \left(x\right)dx=0,\int_{x_0+\delta}^b f\ \left(x\right)dx=0$ زيرا

$$0\le\int_{x_0+\delta}^b f\ \left(x\right)\le\int_a^b f\ \left(x\right)dx=0$$

پس $\int_{x_0+\delta}^b f\ \left(x\right)dx=0$ و همين طور $\int_a^{x_0-\delta}f\ \left(x\right)dx=\circ$ و اين تناقض است زيرا طبق (1)

$$\forall x\in I:f\ \left(x\right)>0\Rightarrow\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f\ \left(x\right)dx>0$$

پس فرض خلف باطل است و حكم ثابت مي شود

سوال 10) فرض كنيد تابع f وارون‌پذير باشد و f , f^{-1} تابع اوليه داشته باشد. اگر

$$\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+c$$

ثابت کنید

$$\int f^{-1}\left(x\right)dx = xf^{-1}\left(x\right)-F\left(f^{-}\left(x\right)\right)+c$$

$$= xf^{-1}\left(x\right)-\int \frac{xdx}{f'\left(f^{-1}\left(x\right)\right)}$$

فرض کنید $f^{-1}\left(x\right)=u$ در این صورت $x = f\left(u\right)$, $dx = f'\left(u\right)du$ پس

$$\int \frac{xdx}{f'\left(f^{-1}\left(x\right)\right)} = \int \frac{f\left(u\right)}{f'\left(u\right)}f'\left(u\right)du = F\left(u\right)$$

$$= F\left(f^{-1}\left(x\right)\right)$$

به این ترتیب

$$\int f^{-1}\left(x\right)dx = xf^{-1}\left(x\right)-F\left(f^{-1}\left(x\right)\right)+c$$

سوال 11) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر و f' روی بازه $\left[a,b\right]$ پیوسته باشد. فرض کنید

$$a_n = \int_a^b f\left(x\right)\sin nxdx \qquad n = 1, 2, ...$$

ثابت کنید $\left\{a_n\right\}$ دنباله‌ای همگراست، حد آن را پیدا کنید.

حل: توجه کنید که f' روی $\left[a,b\right]$ کراندار است. فرض کنید

$$\left|f'\left(x\right)\right| \le k \qquad x \in \left[a,b\right]$$

در این صورت با انتگرال‌گیری به روش جز به جز

$$a_n = \frac{-f\left(x\right)\cos nx}{na}\Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{f'\left(x\right)\cos nx}{n}dx$$

بنابراین

$$\left|a_n\right| \le \frac{\left|f\left(a\right)+f\left(n\right)\right|}{n}+\frac{k\left(b-a\right)}{n}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = \circ \quad \text{پس} \quad \lim_{n\to\infty} = \circ$$

سوال12)ثابت کنید اگر $f \in c\left[a,b\right]$ و به ازای هر $g \in c\left[a,b\right]$

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx = \circ$$

آنگاه $f = \circ$ بر روی $\left[a\ ,\ b\right]$

حل: چون مقدار انتگرال برای تمام توابع g ، صفر می‌باشد. فرض کنیم $g = f$ باشد درنتیجه

$$\int_a^b f^2dx = \circ \ \text{ و } \ f^2 \ \text{ پیوسته و نامنفي } \to f^2 = \circ \to f = \circ$$

سوال 13) فرض کنید $f \in c[a\ ,\ b]$ و $\int_a^b f(x)\,dx = \circ$ نشان دهید نقطه‌ای مانند $c \in [a\ ,\ b]$ به گونه‌ای وجود دارد که

$f(c) = \circ$

حل: بنابر قضیه مقدار میانگین

$$\exists c \in [a,b] \quad S.T \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

$$\rightarrow \circ = f(c)(a-b) \rightarrow f(c) = \circ$$

و اثبات به پایان می‌رسد.

سوال14) فرض کنید تابع f روی بازده $[\circ,1]$ انتگرال پذیر است. به ازای هر $b\ ,\ a$ باشرط، $\circ \le a < b \le 1$ عددی مانندی c در بازه (a,b) وجود داشته باشد که $f(c) = \circ$ ثابت کنید.

$$\int_\circ^1 f(x)\,dx = \circ$$

حل: تابع $|f|$ هم روی $[\circ\ ,\ 1]$ انتگرال پذیر است توجه کنید که به هر طریقی که بازه $[\circ\ ,\ 1]$ را به n زیر بازه افراز کنیم، مینیمم مطلق $|f|$ روی هر زیر بازه برابر با $\circ$ است پس برای هر افراز $[\circ\ ,\ 1]$ که $L(P\ ,\ f) = \circ$ $P = \{x_\circ, x_1, \ldots, x_n\}$ پس $\int_a^b |f(x)|\,dx = \circ$ پس چون $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ در نتیجه $\int_a^b f(x)\,dx = \circ$

سوال15) با مثالی نشان دهید که معادله $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ همواره برقرار نیست

حل: فرض کنید f بر $[\circ,1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{\pi}{x^2} & \circ \le x \le 1 \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

چون f' گراندار نیست پس در بازه $[\circ\ ,\ 1]$ دارای انتگرال ریمن نیست.

سوال16) هرگاه f یکنوا بوده و $f\ ,\ f'\ ,\ g$ هر سه بر $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشند، آنگاه عددی مانند α از $[a\ ,\ b]$ هست. به طوری که

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^\alpha g(x)\,dx + f(b)\int_\alpha^b g(x)\,dx$$

برهان : قرار می‌دهیم $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ واضح است که $G(a) = \circ$، به دلیل پیوستگی g، $G(x)$ مشتق پذیر است و $G'(x) = g(x)$، در نتیجه با استفاده از انتگرال گیری به طریق جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = \left[f(x)\,G(x)\right]_a^b - \int_a^b G(x)\,f'(x)dx$$

چون G پیوسته است پس انتگرال پذیر است و f بر $[a,b]$ یکنوا و پیوسته است، پس با توجه به قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها، عددی مانند α از $[a,b]$ هست به طوری که

$$\int_a^b f(x)\,g(x) = f(b)\,G(b) - G(\alpha)\int_a^b f'(x)dx$$

$$= f(b)G(b)-G(\alpha)\left[f(b)-f(a)\right]$$

$$= f(b)\left[G(b)-G(\alpha)\right]+f(a)G(\alpha)$$

$$= f(b)\int_{\alpha}^{b} g(x)\,dx + f(a)\int_{a}^{\alpha} g(x)\,dx$$

سوال17) ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\frac{\pi}{2}f(\circ)$$

حل: به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، داریم

$$\int_{\circ}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\int_{\circ}^{1/\sqrt{n}}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx+\int_{1/\sqrt{n}}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx$$

بنابر قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها

$$\int_{\circ}^{1/\sqrt{n}}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx= f(\propto)\int_{\circ}^{1/\sqrt{n}}\frac{ndx}{1+n^2x^2}dx= f(\propto)tg^{-1}\sqrt{n}$$

که در آن $\circ\le\alpha\le 1/\sqrt{n}$ ، در نتیجه

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1/\sqrt{n}}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}f(\propto)tg^{-1}\sqrt{n}= f(\circ)\times\frac{\pi}{r}$$

حال چون f بر $[\circ\,,1]$ پیوسته است پس گراندار است در نتیجه عددی مانند k هست که به ازای هر x

(2)

$$|f(x)|\le k \to\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx\right|\le k\int_{1/\sqrt{n}}^{1}\frac{n}{1+n^2x^2}dx$$

$$=k\left[tg^{-1}n - tg^{-1}\sqrt{n}\right]$$

چون حد عبارت سمت راست وقتی که، $n\to\infty$ ، برابر صفر است پس حکم از(1) و (2) نتیجه می‌شود.

سوال 18) فرض کنید f بر $[a\,,b]$ پیوسته و نا منفی باشد، و $c>\circ$ به طوری که به ازای هر x از $[a\,,b]$ رابطه $f(x)\le c\int_a^x f(t)\,dt$

ثابت کنید f بر $[a\,,b]$ صفر است

حل: اگر f صفر نباشد، پس $\displaystyle M=\sup_{a\le x\le b} f(x)>\circ$ ، در نتیجه

به همین ترتیب $f(x)\le c\int_a^x M\,dt=cM(x-\alpha)$

به استقرا نتیجه می شود

$$f(x)\le c^nM\frac{(x-a)}{n!}\le Mc^n\frac{(b-a)^n}{n!}\to\circ$$

پس $f(x)=\circ$ که یک تناقض است. پس $f=\circ$

سوال 19) فرض کنید f بر $[a\,,b]$ پیوسته اکیداً صعودی است و $f(a)=A\ ,\ f(b)=B$ ثابت کنید.

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_A^B f^{-1}(x)=Bb-Aa$$

حل: چون f اکیداً صعودی است پس $g=f^{-1}$ موجود است و بنابه قضیه انتگرال جزء به جزء

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b xdf(x)=f(b)b-f(a)a$$

ولی با تغییر متغیر $u=f(x)$ در انتگرال زیر خواهیم داشت

$$\int_a^b xdf(x)=\int_A^B g(u)\,du=\int_A^B f^{-1}(x)\,dx$$

در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

سوال 20) تابع f بر $[a\,,\,b]$ پیوسته است و $f^2(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

حل: از مشتق گیری داریم

$$2f(x)f'(x)=f(x)$$

یکی از جوابهای معادله $f'(x)=\frac{1}{2}$ ، $f(x)=\frac{x}{2}+c$ است. چون $f(a)=\circ$ پس $c=-\frac{a}{2}$ پس

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{a}{2}=\frac{x-a}{2}$$

سوال21) اگر $f(x)=\left(1+|x|\right)^{\frac{-1}{2}}$ برای هر $x\in R$ ، آنگاه ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و متمایز a , b داریم

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le 4\min\left\{f(a)\,,\,f(b)\right\}$$

حل: اگر $a\le b$, $a\ge\circ$ آنگاه

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b(1+x)^{-1/2}dx$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{b+1}-\sqrt{1+a}\right)}{(b+1)-(a+1)}\le\frac{4}{(1+b)^{\frac{1}{2}}}4\min\left\{f(a)\,,\,a(b)\right\}$$

در حالت $\circ\le b$ و یا $a<\circ$ حکم به طور مشابه ثابت می‌شود.

سوال22) فرض کنید f روی R پیوسته باشد. ثابت کنید

$$\int_\circ^{2a} f(x)\,dx=\int_\circ^a\left(f(x)+f(2a-x)\right)dx$$

حل: می‌دانیم $\int_\circ^{2a} f(x)\,dx=\int_\circ^a f(x)\,dx+\int_a^{2a} f(x)\,dx$

اکنون اگر فرض کنیم $x=2a-u$ آنگاه $dx=-du$ در نتیجه

$$\int_a^{2a}f(x)\,dx=-\int_a^{\circ}f(2a-u)\,du=\int_\circ^a f(2a-u)\,du=\int_\circ^a f(2a-x)\,dx$$

سوال23) اگر α بر $[a\,,\,b]$ صعودی باشد ثابت کنید.

$$\int_a^{-b}(f+g)\,d\alpha\le\int_a^{-b}fd\alpha+\int_a^{-b}gd\alpha$$

حل: فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. افزارهای P_1 , P_2 از $[a , b]$ هستند که،

$$U\left(p_1, f ,\alpha\right) < \int_a^{-b} fd\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \ , \ U\left(p_{2,} g ,\alpha\right) < \int_a^{-b} gd\alpha$$

اگر p را برابر $p_1 U \ p_2$ بگیریم، داریم

$$U\left(p, f \ \alpha\right) \le U\left(p_1, f \ \alpha\right) < \int_a^{-b} fd\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U\left(p, f \ \alpha\right) \le U\left(p_2, f \ \alpha\right) < \int_a^{-b} gd\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

از جمع دو رابطه داریم

$$U\left(p, f \ \alpha\right) + U\left(p, f \ \alpha\right) < \int_a^{-b} fd\alpha + \int_a^{\bar{b}} gd\,\alpha + \varepsilon$$

از طرفی داریم

$$\int_a^{-b} (f + g) d\,\alpha \le U\left(p \ ,f \ + g \ ,\alpha\right) \ \le \ U\left(p ,f \ \alpha\right) + U\left(p ,g \ \alpha\right)$$

در نتیجه

$$\int_a^{-b} \left(f + q\right) d\alpha < \int_a^{-b} fda + \int_a^{-b} gd\alpha + \varepsilon$$

و چون $\varepsilon > \circ$ دلخواه داریم

$$\int_a^{-b} \left(f + g\right) d\alpha \le \int_a^{-b} fd\alpha + \int_a^{-b} gd\alpha$$

سوال 24) اگر $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} I(x - \frac{1}{3^n})$ مطلوب است محاسبه $\int_\circ^1 xd\alpha(x)$

حل : از قضیه (فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله ای در R^+ باشد و $\sum a_n$ همگرا باشد و $\{c_n\}$ دنباله ای از اعضای دوبه دو متمایز $[a,b]$ باشد و $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ I(x - c_n)$ اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه داریم $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$

پس

$$\int_a^b fd\,\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f\ (c_n) = \int_\circ^1 xd\,\alpha\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n})\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{5}$$

سوال 25) فرض کنید f روی $[\circ,1]$ انتگرالپذیر است

$$f(x) = \circ \quad , \quad x \in [\circ,1] \cap Q$$

$$\int_\circ^1 f(x)dx = \circ \qquad \text{ثابت کنید}$$

حل : برای حل از مساله 14 استفاده به ازای هر a,b با شرط $\circ \le a < b \le 1$ عددي گويا مانند c در بازه (a,b) وجود دارد. بنابر فرض مساله $f(c) = \circ$ در نتیجه بنابر مساله 14 خواهیم داشت.

$$\int_\circ^1 f(x)dx = \circ$$

سوال 26) فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و

$$x \in [a,b] \qquad f(x) \geq \circ$$

ثابت کنید عددی مانند c در بازه $[a,b]$ وجود دارد که

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

اثبات: فرض کنیم m, M به ترتیب مینیمم و ماکزیمم مطلق f روی بازه $[a,b]$ باشند در این صورت،

$$\circ \leq m \leq f(x) \leq M$$

بنابراین

$$\circ \leq m^2 \leq f^2(x) \leq M^2$$

چون تابع f^2 پیوسته است، انتگرال‌پذیر هم است. بنابراین

$$m^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx \leq m^2$$

$$m \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M$$

در نتیجه بنابر قضیه مقدار میانی، عددی مانند C در بازه $[a,b]$ وجود دارد که

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

سوال 27) ثابت کنید

$$\int_1^x [t]dt = \frac{[x]([x]-1)}{2} + [x](x-[x])$$

اثبات: حالت اول: فرض کنید $x > \circ$ اگر n عددی طبیعی باشد و $[x] = n$، آنگاه

$$n \leq x < n+1$$

$$\int_\circ^x [t]dt = \int_\circ^1 [t]dt + \int_\circ^2 [t]dt + \ldots + \int_{n-1}^n [t]dt + \int_n^x [t]dt$$

$$= \circ + 1 + 2 + \ldots + n - 1 + n(x-n)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + n(x-n)$$

$$\frac{[x]([x]-1)}{2} + [x](x-[x])$$

اگر x منفی باشد و مثلاً $[x] = -n$، آنگاه

$$\int_\circ^x [t]dt = -\int_x^\circ [t]dt$$

$$= -\left(\int_x^{-n+1}[t]dt + \int_{-n+1}^{-n+2}[t]dt + \ldots + \int_{-1}^\circ [t]dt\right)$$

$$= -\left(-n(-n+1-x) + (-n+1) + \ldots + (-1)\right)$$

$$=\frac{-n(-n-1)}{2}+(-n)(x-n)$$
$$=\frac{[x]([x]-1)}{2}+[x](x-[x])$$
اگر $x=\circ$ معلوم است که حکم درست است.

سوال 28) ثابت کنید تابعی مانند f وجود ندارد به طوری که روی R مشتق‌پذیر باشد،
$$f(x)<2\ ,\ x\in R$$
$$f(x)\,f'(x)\geq \sin x \qquad x\in R$$
اثبات: فرض کنید $x>\circ$ ، آنگاه
$$\left(f(x)\right)^2-\left(f(\circ)\right)^2=\int_\circ^x 2f(t)f'(t)\,dt\geq\int_\circ^x 2\sin t\,dt=2-2\cos x$$
پس اگر $x>\circ$
$$\left(f(x)\right)^2\geq 2-2\cos x+\left(f(\circ)\right)^2\geq 2-2\cos x$$
به ویژه اینکه $\left(f(\pi)\right)^2\geq 4\Rightarrow\left|f(\pi)\right|\geq 2$ که با فرض مساله تناقض دارد.

سوال 29) فرض کنید $f:[a,b]\to R$ پیوسته و بر (a,b) مشتقات f'',f' موجود باشند اگر
$\circ=f(a)=f(b)\ ,\ M=\sup\left\{\left|f''(x)\right|a<x<b\right\}$ ثابت کنید
$$\int_a^b\left|f(x)\right|dx\leq\frac{M(b-a)^3}{12}$$
اثبات: از تابع کمکی زیر استفاده می‌کنیم
$$g(t)=(t-a)(t-a)\,f(x)-(x-a)(x-b)\,f(t)$$
چون $g(a)=g(b)=g(x)=\circ$ پس c_2,c_1 ای وجود دارد که $a<c_1<x\ ,\ x<c_2<b$
و $g'(c_1)=g'(c_2)=\circ$. پس c ی وجود دارد که $g''(c)=\circ$ ولی داریم:
$$g'(t)=(t-b)\,f(x)+(t-a)\,f(x)-(x-a)(x-b)\,f'(t)$$
$$g''(t)=2f(x)-(x-a)(x-b)\,f''(t)$$
پس
$$\left|f(x)\right|=\left|\frac{(x-a)(x-b)}{2}\,f''(c)\right|$$
$$\leq\frac{M\left|(x-a)(x-b)\right|}{2}$$
از اینجا با انتگرال‌گیری حکم بدست می آید.

سوال 30) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n^2}\quad(n\in N)\\ \circ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$
ثابت کنید $f\in R$ بر بازه بسته $[a,b]$

اثبات در بازه بسته $[a,b]$ تعداد اعداد طبیعی متناهی است پس f در تعداد متناهی نقطه در $[a,b]$ ناپیوسته است در نتیجه f انتگرال‌پذیر و بنابر ضابطه f ، $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

سوال31) فرض کنید مشتق f بر بازه $[a,b]$ نزولی باشد، و به ازای هر x در این بازده $f'(x) \ge m > 0$ ثابت کنید که

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\,dx\right| \le \frac{2}{m}$$

اثبات: از آنجا که برای هر x در $[a,b]$ داریم $f'(x) \ge m > 0$. لذا رابطه زیر برقرار است

$$\int_a^b \cos f(x)\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)}dx \Rightarrow \left|\int_a^b \cos f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)}\right|$$

$$\le \frac{1}{m}\left|\int_a^b f'(x)\cos f(x)\,dx\right| = \frac{1}{m}\left|\int_a^b \sin f(x)\right|$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b \cos f(x)\,dx\right| \le \frac{1}{m}\left|\sin f(b) - \sin f(a)\right| \le \frac{1+1}{m} = \frac{2}{m}$$

سوال32) هرگاه برای هر تابع یکنوا بر $[a,b]$ مانند f ، داشته باشیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\int_a^b f\,d\alpha = 0$ ، ثابت کنید α بر $[a,b]$ تابع ثابتی خواهد بود.

اثبات: می‌دانیم به ازای هر تابع یکنوا مانند f ، $\int_a^b f\,d\alpha = 0$ بنابراین، $\int_a^b d\alpha = 0$ از طرفی، به ازای هر $x \in [a,b]$ داریم

$$0 \le \int_a^x d\alpha \le \int_a^b d\alpha = 0$$

بنابراین، به ازای هر $x \in [a,b]$ ، $\int_a^x d\alpha = 0$ ولی $\int_a^x d\alpha = \alpha(x) - \alpha(a)$ ، پس

$$\alpha(x) - \alpha(a) = 0 \qquad (\forall x \in [a,b])$$

لذا به ازای هر $x \in [a,b]$ $\alpha(x) = \alpha(a)$

سوال 33) ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}dx \quad (s \ge 1)$

حل: می‌دانیم $\sum_{k=2}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,d[x]$ ، در نتیجه $\int_1^n \frac{d[x]}{x^s} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^s}$ با استفاده از قضیه انتگرال گیری به روش جزء به جزء

$$\int_1^n \frac{d[x]}{x^s} + \int_1^n [x]\,d\left(\frac{1}{x^s}\right) = \frac{[n]}{n^s} - \frac{[1]}{1^s} = \frac{1}{n^{s-1}} - 1$$

$$\int_1^n [x]\,d\left(\frac{1}{x^s}\right) = \int_1^n [x]\ \frac{-s}{x^{s+1}}dx$$

بنابراین

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} - 1 + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$$

بنابراین

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{n^{s-1}}-1+s\int_1^n\frac{[x]}{x^{s+1}}dx$$

و لذا

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{n^{s-1}}+s\int_1^n\frac{[x]}{x^{s+1}}dx \qquad (n\in N\ ,\ s\in R)$$

سوال 34) نشان دهید

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n-\int_1^n\frac{x-[x]}{x^2}dx+1$$

اثبات: می‌دانیم $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{n^{s-1}}+s\int_1^n\frac{[x]}{x^{s+1}}dx$ در نتیجه با برقرار دادن $s=1$ داریم

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=1+\int_1^n\frac{[x]}{x^2}dx=1+\int_1^n\frac{[x]-x+x}{x^2}dx$$

$$=1+\int_1^n\frac{dx}{x}-\int_1^n\frac{x-[x]}{x^2}dx$$

چون $\int_1^n\frac{dx}{x}=\log n$ در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n-\int_1^n\frac{x-[x]}{x^2}dx+1$$

سوال 35) مطلوب است محاسبه $I=\int_{\circ}^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$

حل: با استفاده از تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{2}-u$ نتیجه می‌شود

$$I=\int_{\circ}^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\int_{\circ}^{\pi/2}\frac{du}{1+(\cot u)^{\sqrt{2}}}=\int_{\circ}^{\pi/2}\frac{(\tan u)^{\sqrt{2}}du}{1+(\tan u)^{\sqrt{2}}}$$

در نتیجه

$$2I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx=\frac{\pi}{2}$$

پس $I=\frac{\pi}{4}$

سوال 36) فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و g تابعی کراندار بر $[a,b]$ باشد که به غیر از تعداد متناهی نقطه بر $[a,b]$ با f برابر باشد ثابت کنید $g\in R$

حل: برای اثبات از قضیه (فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ کراندار و D مجموعه نقاط ناپیوستگی f بر $[a,b]$ باشد. $f\in R$ بر $[a,b]$ اگر و فقط اگر D با اندازه صفر باشد) استفاده می‌کنیم.

اگر f انتگرال‌پذیر باشد. مجموعه نقاط ناپیوستگی f با اندازه صفر است حال اگر g با f فقط در تعداد متناهی نقطه متفاوت باشد در این صورت مجموعه نقاط ناپیوستگی g نیز با اندازه صفر است پس g نیز انتگرال‌پذیر است.

سوال 37) ثابت کنید انتگرال $\int_{\circ}^{4}\left(x^2+[x]\right)d\left([2x]\right)$ موجود نیست.

حل: میدانیم در $\int f d\alpha$ اگر $f\,,\alpha$ در یک نقطه مانند $x_{\circ}$ ناپیوسته باشند آنگاه انتگرال موجود نیست.

و چون در $\int_{\circ}^{4}\left(x^2+[x]\right)d\left([2x]\right)$ ، $[2x]$ و $x^2+[x]$ در $x_{\circ}=1$ ناپیوسته‌اند پس $\int_{\circ}^{4}\left(x^2+[x]\right)d\left([2x]\right)$ موجود نیست.

سوال 38) نشان دهید

$$1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sin k=\int_1^{2n}\cos x\left([x]-2\left[\frac{x}{2}\right]\right)dx$$

$$2)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln k=\int_1^{2n}\left(\frac{[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]}{x}\right)dx$$

$$3)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{1}{k^3}=\int_1^{2n}\frac{-3}{x^4}\left([x]-2\left[\frac{x}{2}\right]\right)dx$$

$$4)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{2n}\frac{-3}{x^4}\left([x]-2\left[\frac{x}{2}\right]\right)dx$$

بر اثبات مساله 38 ثابت می‌کنیم اگر f' بر $[1,2n]$ پیوسته باشد. آنگاه

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(x)=\int_1^{2n}f'(x)\left([x]-2\left[\frac{x}{2}\right]\right)dx$$

حل: تابع $\alpha:[1,2n]\to R$ را با ضابطه $\alpha[x]=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$ در نظر می گیریم واضح است که α تابعی پله‌ای است (چرا) و لذا

$$\int_1^{2n}f(x)d\alpha(x)=\sum_{k=2}^{2n}f(k)\left(\alpha\left(k^+\right)-\alpha\left(k^-\right)\right)=\sum_{k=2}^{2n}(-1)^{k+1}f(k)$$

اما بنابر انتگرال گیری به روش جزء به جزء خواهیم داشت

$$\int_1^{2n}f(x)d\left(f(x)\right)+\int_1^{2n}f(x)\rho\alpha(x)=f(2n)\alpha(2n)-f(1)\alpha(1)$$

چون $\alpha(1)=1\ ,\ \alpha(2n)=\circ$ ، پس

$$\sum_{k=2}^{2n}(-1)^{k+1}f(k)+\int_1^{2n}\alpha(x)df(x)=-f(1)$$

از این رو
$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(k)=\int_1^{2n}f'(x)\alpha(x)dx$$

حال برای حل مساله 38 کافی است

$$1)\ \ f(x)=\sin x$$

2) $f(x)=\ln x$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$

سوال 39) فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته بوده و α بر آن صعودی باشد آنگاه نشان دهید عددی مانند λ از $[a,b]$ هست به طوری که

$$\int_a^b f d\alpha = f(\lambda)\{\alpha(b)-\alpha(a)\}$$

اثبات: چون f پیوسته و α صعودی است پس اگر m,M به ترتیب اینفیمم و سوپریمم f بر $[a,b]$ باشد در این صورت با توجه به

$$m\{\alpha(b)-\alpha(a)\}\le \int_a^b fd\alpha \le \ M\{a(b)-\alpha(a)\} \qquad (1)$$

پس عددی مانند μ موجود است به طوری که $m\le\mu\le M$ و $\int_a^b fdx=\mu\left(\alpha(b)-\alpha(a)\right)$

و چون f بر $[a,b]$ پیوسته است پس عددی مانند λ از $[a,b]$ هست به طوری که $f(\lambda)=\mu$ در نتیجه

$$\int_\circ^b fdx = f(\lambda)\left(\alpha(b)-\alpha(a)\right)$$

سوال 40)اگر $\int_1^\infty \left(f(x)\right)^2 x^{-2}dx<\infty$ آنگاه نشان دهید $\int_1^\infty |f(x)|x^2dx<\infty$

اثبات: می‌دانیم اگر g,f بر $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه $\left(\int_a^b|fg|\right)^2\le\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ با انتخاب $g(x)=\dfrac{1}{x}$ و $a=1,\ b=M$ داریم

$$\left(\int_1^M\left|\frac{f(x)}{x}\right|\left|\frac{1}{x}\right|dx\right)^2\le\left(\int_1^M\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2dx\right)\left(\int_1^M\frac{1}{x^2}dx\right)$$

اما $\int_1^\infty\dfrac{1}{x^2}dx$ کراندار است در نتیجه بنابه فرض داریم $\int_1^\infty|f(x)|x^{-2}dx<\infty$

سوال 41)فرض کنیم g,f توابعی پیوسته و متناوب با دوره متناوب 1 باشند نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_\circ^1 f(x)g(nx)\,dx=\left(\int_\circ^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_\circ^1 g(x)\,dx\right)$$

اثبات: با تغییر متغیر $t\to s+\dfrac{k}{n}$ (برای هر $1\le k\le n$) خواهیم داشت

$$\int_\circ^1 f(t)g(nt)\,dt=\sum_{k=\circ}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)g(nt)\,dt$$

$$=\sum_{k=\circ}^{n-1}\int_\circ^{\frac{1}{n}} f\left(s+\frac{k}{n}\right)g(ns)\,ds$$

$$=\sum_{k=\circ}^{n-1}\frac{1}{n}\int_\circ^1 f\left(\frac{r}{n}+\frac{k}{n}\right)g(r)\,dr$$

f بر $[\circ,1]$ پیوسته یکنواخت است پس برای $\varepsilon>\circ$ مفروض، $\delta>\circ$ ای هست که

$$x, y \in [\circ , 1] \ , \ |x-y| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon$$

عدد طبیعی N را طوری در نظر بگیرید که $\frac{1}{N} < \delta$ (بنا به اصل ارشمیدس). پس برای هر $n \geq N$ داریم

$$\left| \left(\frac{r}{n} + \frac{k}{n} \right) - \left(\frac{k}{n} \right) \right| = \frac{r}{n}$$

در نتیجه $\left| f\left(\frac{r}{n} + \frac{k}{n} \right) - f\left(\frac{k}{n} \right) \right| < \varepsilon$ اکنون برای هر $n \geq N$ داریم

$$\left| \int_{\circ}^{1} f(t) g(nt) dt - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=\circ}^{n-1} f\left(\frac{k}{r} \right) \right) \int_{\circ}^{1} g(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{\circ}^{1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=\circ}^{n-1} \left| f\left(\frac{r}{n} + \frac{k}{n} \right) - f\left(\frac{k}{n} \right) \right| \right] |g(t)| dt$$

$$< \varepsilon \int_{\circ}^{1} |g(t)| dt \leq \varepsilon M$$

که در آن $M = \sup\limits_{t \in [\circ, 1]} |g(t)| \in R$. از طرفی چون f روی $[\circ,1]$ انتگرال‌پذیر ریمانی است، داریم

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=\circ}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} \right) = \int_{\circ}^{1} f(t) dt$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\circ}^{1} g(nt) f(t) dt = \left(\int_{\circ}^{1} f(t) dt \right) \left(\int_{\circ}^{1} g(t) dt \right)$$

سوال 42) فرض کنید $a_{\circ} \ , \ a_1 \ , \ a_2 \ , \ .... \ , \ a_n$ عددهایی حقیقی باشند و

$$(1) \quad a_{\circ} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ ... \ + a_n \cos nx > \circ \qquad x \in R$$

ثابت کنید $a_{\circ} > \circ$

اثبات: می‌دانیم بنابر (1)

$$A = \int_{\circ}^{\pi} \left(a_{\circ} + a_1 \cos x + ... + a_n \cos nx \right) dx > \circ$$

از طرف دیگر

$$A = \left(a_{\circ} x + a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + ... + \frac{a_n}{n} \sin nx \right) \Big|_{\circ}^{\pi} = \pi a_{\circ}$$

پس $a_{\circ} > \circ$

سوال 43) فرض کنید تابع f روی بازه $[\circ,1]$ پیوسته باشد و

$$\circ < m \leq f(x) \leq M \qquad x \in [\circ,1]$$

ثابت کنید

$$\left(\int_{\circ}^{1} \frac{1}{f(x)} dx \right) \left(\int_{\circ}^{1} f(x) dx \right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

اثبات: با توجه به اینکه $m \le f(x) \le M$ در نتیجه

$$\frac{\left(f(x)-m\right)\left(f(x)-M\right)}{f(x)} \le \circ \qquad \circ \le x \le 1$$

در نتیجه

$$\int_\circ^1 f(x)dx + mM\int_\circ^1 \frac{1}{f(x)}dx \le m+M$$

فرض کنید $U = mM\int_\circ^1 \frac{1}{f(x)}dx$ در این صورت

$$\int_\circ^1 f(x)dx + U \le m+M$$

$$u\int_\circ^1 f(x)\,dx \le (m+M)u - u^2 \le \frac{(m+M)^2}{4}\ , \qquad \left(ax - x^2 \le \frac{a^2}{4}\right)$$

پس

$$\left(\int_\circ^1 f(x)dx\right)\left(\int_\circ^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

سوال 44) فرض کنید تابعهای $g\ ,\ f$ روی R پیوسته باشند و

$$h(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

مشتق h را بدست آورید و ثابت کنید

$$\int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx = \int_b^a f(x)\left(\int_b^x g(t)\,dt\right)dx$$

اثبات: به سادگی ثابت می‌شود که

$$h'(x) = f(x)\int_x^b g(t)\,dt - g(x)\int_a^x f(t)\,dt$$

اگر از دو طرف نابرابری بالا روی بازه $[a,b]$ انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود.

$$\int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)dx - \int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx$$

یا $$h(b) - h(a) = \int_a^b f(x)\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)dx - \int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx$$

چون $f(a) = h(b) = \circ$

در نتیجه $$\int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(t)dt\right)dx = \int_b^a f(x)\left(\int_b^x g(t)\,dt\right)dx$$

سوال 45) فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و تابع F بر $[a,b]$ به صورت زیر تعریف شده است

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ثابت کنید که F بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است و $V_F(a,b)=\int_a^b |f(t)|dt$

اثبات: فرض کنید $p=|a,x_1,x_2,\dots x_{n-1},b|$ افراز دلخواهی از بازه بسته $[a,b]$ باشد آنگاه

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$$

$$|\nabla F_i|\le \int_{x_{i-1}}^{xi} |f(t)|dt$$

در نتیجه $\int_a^b |f(t)dt| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)dt|\right| \sum_{l=1}^{n} \le \sum_{i=1}^{n}|\Delta F_i|$ (1)

در نتیجه f بر $[a,b]$ با تغییرکراندار است.

حال قسمت دوم حکم را ثابت می کنیم. بنابر (1) $V_F(a,b)\le\int_a^b |f(t)|dt$ ، (2) در نتیجه کافی است ثابت کنیم

$\int_a^b |f(t)|dt\le V_F(a,b)$ چون F پیوسته است پس F در x_i ها پیوسته خواهد شد در نتیجه

$$\forall\varepsilon>\circ\ \exists\ \delta,\circ<|t-x_{i-1}|<\delta\Rightarrow|f(t)-f(x_{i-1})|<\varepsilon$$

از این رو $|f(t)|\le|f(x_{i-1})|+\varepsilon$

در نتیجه
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|dt \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_{i-1})|dt+\varepsilon\,\Delta x_i=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dt\right|+\varepsilon\,\Delta x_i$$

$$=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x_{i-1})-f(t)+f(t)\right]dt\right|+\varepsilon\,\Delta x_i$$

$$\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x_{i-1})\right|-f(t)\Big|dt+\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|dt+\varepsilon\,\Delta x_i$$

$$\le\ \varepsilon\,\Delta x_i+|\Delta F_i|+\varepsilon\,\Delta x_i=2\varepsilon\Delta x_i+|\Delta F_i|$$

در نتیجه

$$\int_a^b|f(t)|dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|dt\le\sum_{i=1}^{n}|\Delta F_i|+2\varepsilon(\alpha(b)-\alpha(\alpha)$$

و چون ε دلخواه می باشد در نتیجه $\int_a^b|f(t)|dt\le V_F(a,b)$ (3)

بنابراین طبق (2) و (3) $V_F(a,b)=\int_a^b|f(t)|dt$

سوال 46) نشان دهید که یک چند جمله‌ای مانند f بر هر بازه فشرده مانند $[a,b]$ با تغییر کراندار است. اگر صفرهای f' دانسته فرض شدند، روشی را توصیف کنید که به وسیله آن بتوان تغییر کل f را بر $[a,b]$ بدست آورد.

اثبات : فرض کنید

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1 x + a_\circ$ چند جمله‌ای مورد نظر ما باشد

$$|f'(x)| = |na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+....\ a_1|$$

$$\leq n|a_n||x|^{n-1}+(n-1)|a_{n-1}||x|^{n-2}+...+|a_2||x|+|a_1|$$

اگر قرار دهیم $\gamma = \max\{|x| \, x\in[a,b]\}$ در این صورت

$$|f'(x)| \leq n|a_n|\alpha^{n-1}+(n-1)|a_{n-1}|\alpha^{n-2}+...+|a_1|$$

در نتیجه f با تغییر کراندار خواهد بود. حال فرض کنید $\{c_1,c_2,...,c_k\}$ مجموعه ریشه‌های f' باشد قرار می‌دهیم $c_1<c_2<...<c_k$ در این صورت

$$V_f(a,b)=V_f(a,c_1)+V_f(c_1,c_2)+V_f(c_2,c_3)+...+V_f(c_k,b)$$

اما c_i اکسترمم f می باشند بنابراین در هر کدام از فاصله‌های $[a,c_1],[c_1,c_2]$, ..., $[c_k,b]$ تابع f یا در حال صعود و یا در حال نزول مي باشد. در نتیجه

$$V_f(a,c_1)=|f(c_1)-f(a)|,...,V_f(c_k,b)=|f(b)-f(c_k)|$$

$$\Rightarrow V_f(a,b)=|f(c_1)-f(a)|+\sum_{i=2}^{k}|f(c_i)-f(c_{i-1})|+|f(b)-f(c_k)|$$

سوال 47) ثابت کنید $f(x)=\begin{cases}\circ & x=\circ\\ x^2\sin\dfrac{1}{x} & \circ<x\leq a\end{cases}$ بر $[\circ,1]$ با تغییر کراندار است.

حل:

چون $\lim\limits_{x\to\circ}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\circ$ لذا f بر $[\circ,1]$ پیوسته است. اما

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\Rightarrow|f'(x)|\leq\left|2x\sin\frac{1}{x}\right|+\left|\cos\frac{1}{x}\right|$$

$$\Rightarrow|f'(x)|\leq 2|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 2a+1$$

لذا f بر $[\circ,1]$ با تغییر کراندار است در حالت کلی به همین شیوه می‌توانید ثابت کنید

$$f(x)=\begin{cases}\circ & x=\circ\\ x^\alpha\sin\dfrac{1}{x} & \circ<x\leq b\end{cases}\ ,\ \begin{cases}\circ & x=\circ\\ x^\alpha\cos\dfrac{1}{x} & \circ\leq x\leq b\end{cases}$$

به ازای $\alpha>1$ با تغییر کرانداراند.

سوال 48) تابع f بر $[\circ,1]$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم. نشان دهید f با تغییر کراندار نیست.

اثبات: فرض کنیم M عددی مثبت و دلخواه باشد. افراز P را به صورت

$$P=\left\{\circ, x_1, r_1, x_2, r_2, \ldots, r_{n-1}, x_{n,1}\right\}$$

که در آن $x_i \in Q$, $(1\le i\le n)\, r_i \in Q$ در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta f_k\right|=\left|f(x_1)-f(\circ)\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(r_{n-1})\right|+\left|f(1)-f(x_n)\right|=1+1+\ldots+1=2n$$

عدد طبیعی n را طوری اختیار می‌کنیم که $2n>M$ در این صورت f با تغییر کراندار نیست زیرا کافی بود نشان دهیم

$$\forall M\ ;\exists p\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta f_k\right|\ge M\right)$$

فصل10 مسائل بخش **همگرایی یکنواخت روی سری توابع**

سوال 1) با استفاده از تعریف همگرايي يكنواخت نشان دهيد دنباله $\{f_n\}$ كه

$$f_n(x)=x^n$$

در هر بازه به صورت $[\circ,k]$ كه $k<1$ به طور يكنواخت همگراست ولي در $[\circ,1]$ فقط نقطه به نقطه همگراست.

اثبات: حد نقطه به نقطه عبارت است از

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}\text{o}.\le x<1\\ 1 \quad x=1\end{cases}$$

بنابراين دنباله $\{f_n\}$ به تابع ناپيوسته اي بر $[\circ,1]$ نقطه به نقطه همگراست.

فرض كنيد $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ و $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد. به ازاي $\circ<x\le k<1$ ، داريم

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon$$

هرگاه $\frac{1}{\varepsilon}<(\frac{1}{x})^n$ يا $n>\log\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log\frac{1}{x}$ آنگاه رابطه فوق برقرار است. عدد $\frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{\log(\frac{1}{x})}$ با افزايش x ، افزايش مي يابد.

پس ماكزيمم آن در $[\circ,k]$ عبارت است از $\log\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log\frac{1}{k}$ پس اگر N عددي طبيعي بزرگتر از $\log\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log\frac{1}{k}$ باشد

آنگاه به ازاي هر $\circ<x\le k$ و هر $n\ge N$ ، $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ همچنين در $x=\circ$ ، $|f_n(x)-f(x)|=\circ<\varepsilon$ پس براي هر $\circ<\varepsilon$ ، N اي يافتيم كه به ازاي هر $\circ\le x\le k$ و هر $n\ge N$ ،

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

يعني دنباله $\{f_n\}$ در $[\circ,k]$ ، $\circ<k<1$ به طور يكنواخت همگراست

اما $\log\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log\frac{1}{x}$ وقتي $x \to 1$ به سمت بي نهايت ميل كند، بنابراين براي $\circ \le x \le 1$ ، نمي توان چنين N اي پيدا كرد.
كه $(n \ge N)$ و $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

سوال 2) نشان دهيد با استفاده از تعريف همگرايي يكنواخت دنباله $\{f_n\}$ كه در آن

$$f_n(x) = tg^{-1} nx, (x \ge \circ)$$

در هر بازه به صورت $[a,b]$ ، كه $a > \circ$ به طور يكنواخت همگراست. ولي در بازه اي به صورت $[\circ,b]$ به صورت نقطه به نقطه عبارت است از تابع

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

فرض كنيد $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد، به ازاي هر $x > \circ$ رابطة

$$|f_n(x) - f(x)| = |tg^{-1} nx - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$$

معادل است با $\cot g^{-1} nx < \varepsilon$ يا $nx > \cot g\varepsilon$ يا $n > \frac{\cot g\varepsilon}{x}$

چون با افزايش x ، $n > \frac{\cot g\varepsilon}{x}$ كاهش مي يابد. پس ماكزيمم آن در بازه $[a,b]$ ، $a > \circ$ $\frac{\cot g\varepsilon}{a}$ است. پس اگر N عددي طبيعي بزرگتر از $\frac{\cot g\varepsilon}{a}$ باشد آنگاه به ازاي هر $a \le x \le b$ و هر $n \ge N$ ، خواهيم داشت $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ، يعني $\{f_n\}$ در $[a,b]$ $a > \circ,$ به طور يكنواخت همگراست.

اما چون $\frac{\cot g\varepsilon}{a}$ است . وقتي $x \to \circ$ ، پس چنان N اي نمي تواند موجود باشد كه به ازاي هر x از $[\circ,b]$ و هر $n \ge N$ ، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. بنابراين در بازه $[\circ,b]$ همگرايي يكنواخت نيست. نقطه به نقطه همگراست

سوال 3) همگرايي يكنواخت دنباله $\{f_n\}$ را، كه در آن

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

بررسي كنيد.

حل : دنباله $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به $f = \circ$ همگراست.

فرض كنيد دنباله $\{f_n\}$ در بازه اي مانند $[a,b]$ ، همگرايي يكنواخت باشد. پس به ازاي هر $\varepsilon > \circ$ عدد طبيعي مانند N هست به طوري كه به ازاي هر $x \in [a,b]$

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-\circ\right|<\varepsilon \quad (n \geq N)$$

حال فرض كنيد $\varepsilon = \frac{1}{3}$ هرگاه عددي طبيعي، مانند m موجود باشد كه $m \geq N$, $\frac{1}{m} \in [a,b]$ آنگاه با انتخاب $n = m$ و $k = \frac{1}{m}$ به دست مي آوريم

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2} \not< \frac{1}{3} = \varepsilon$$

پس به يك تناقض مي رسيم. در نتيجه دنباله در بازه اي كه شامل $\frac{1}{m}$ يا $-\frac{1}{m}$ باشد. داراي همگرايي يكنواخت نيست. اما $\pm\frac{1}{m} \to \circ$ پس f_n در بازه اي كه شامل صفر باشد همگرايي يكنواخت نيست.

سوال 4) نشان دهيد دنباله $\{s_n\}$ كه $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$ در هر بازه به صورت $[\circ,k]$ ، نقطه به نقطه همگراست، ولي همگرايي يكنواخت نيست.

حل : هرگاه سري در بازه $[\circ,k]$ به طور يكنواخت همگرا باشد، آنگاه به ازاي هر $\varepsilon > \circ$ عددي طبيعي مانند N هست به طوري كه به ازاي هر $x \geq \circ$ و هر $n \geq N$،

$$|S_n(x) - S(x)| = nxe^{-nx^2} < \varepsilon \qquad (1)$$

حال فرض كنيد $N_\circ$ عددي طبيعي و بزرگتر از N باشد و $x = \frac{1}{\sqrt{N_\circ}}$ و $n = N_\circ$ رابطه (1) ايجاب مي كند كه

$$\sqrt{N}.e^{-1} < \varepsilon \Rightarrow N_\circ < e^2\varepsilon^2$$

و آن يك تناقض است.

در نتيجه در $[\circ,k]$ همگرايي، يكنواخت نيست.

سوال 5) ثابت كنيد دنباله $\{f_n\}$ ، كه در آن $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ در هر بازه بسته مانند I به طور يكنواخت همگراست.

حل : به ازاي هر x, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \circ$

$$M_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in I}\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|$$

$$\le\sup_{x\in R}\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|=\frac{1}{2\sqrt{n}}\to\circ$$

پس f در R به طور يكنواخت همگراست.[توجه : ماكزيمم $\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|$ برابر $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ است كه در نقطه $x=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ بدست مي آيد.

سوال 6) نشان دهيد سري $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+x^2n^q}$ بر هر بازه متناهي $[a,b]$ به طور يكنواخت همگراست كه q,p دريكي از دو شرط زير صدق مي كنند

الف) $p>1$ و $q\ge\circ$ ب) $p+q>2$, $\circ<p\le1$

حل: الف) فرض كنيد $p>1$ و $q\ge\circ$ در اين صورت

$$|f_n(x)|=\left|\frac{x}{n^p+x^2n^q}\right|\le\frac{\alpha}{n^p}$$

كه $\alpha\ge mox\{|a|,|b|\}$ چون به ازاي $p>1$ ، سري $\sum\frac{\alpha}{n^p}$ همگراست. پس بنابر آزمون $M-$ وايرشتراس سري در $[a,b]$ به طو ر يكنواخت همگراست.

ب)- فرض كنيد $p+q>2,\circ<p\le1$ در اين صورت $|f_n(x)|$ به ماكزيمم خود $\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}(p+q)}}$ در نقطه اي مانند $x^2n^q=n^p$ مير سد . پس

$$|f_n(x)|\le\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}(p+q)}}$$

و چون سري $\sum\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}(p+q)}}$ به ازاي $p+q>2$ همگراست پس بنابر آزمون $M-$ وايرشتراس سري در $[a,b]$ به طور يكنواخت همگراست.

سوال 7) ثابت كنيد : سريهاي $\sum\frac{\cos n\theta}{n^p}$ و $\sum\frac{\sin n\theta}{n^p}$ به ازاي $p>\circ$ در هر بازه به صورت $[\alpha,2\pi-\alpha]$ و $\circ<\alpha<\pi$ به طور يكنواخت همگرا هستند.

حل : هرگاه $p>1$ ، آزمون ديريلكه نتيجه مي دهد كه هر دو سري در هر بازه به صورت $[\alpha,2\pi-\alpha]$ ، $\circ<\alpha<2\pi$ به طور يكنواخت همگرا هستند با انتخاب $b_n(\theta)=\frac{1}{n^p}$ و $u_n(\theta)=\cos n\theta$ يا $u_n(\theta)=sin\theta$ داريم. $\frac{1}{n^p}$ مثبت و نزولي و به طور يكنواخت همگرا به صفر است و

$$\left|\sum_{r=1}^{n} r=u_r\right|=\left|\sum_{r=1}^{n}\quad \cos r\,\theta\right|=\left|\frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|$$

$$\le \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\qquad(\alpha\le\theta\le 2\pi-\alpha)$$

پس شرايط قضيه برقرار است در نتيجه سري $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^p}$ و به طريق مشابه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^p}$ بر $[a,2\pi-\alpha]$ ، $\circ<\alpha<\pi$ ، به طور يكنواخت همگراست.

سوال 8) نشان دهيد سري $\sum(\log(n+1))^{-x}\cos\ nx$ بر هر بازه به صورت $[\theta_1,\theta_2]$ كه $\circ<\theta_1\le x\le\theta_2 2\pi$ به طور يكنواخت همگراست.

اثبات : هر گاه $x\in[\theta_1,\theta_2]$ آنگاه $(\log(n+1))^{-x}$ مثبت و نزولي بر حسب n است. و چون

$$\circ<\{\log(n+1)\}^{-x}\ \le\ \{\log(n+1)\}^{-\theta 1}$$

پس $(\log(n+1))^{-x}$ به طور يكنواخت به صفر همگراست و چون

$$\left|\sum_{r=1}^{n}\quad\cos r\,x\right|\quad\le\quad\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\quad\le\quad\max\left|\frac{1}{\sin\frac{\theta_1}{2}},\frac{1}{\sin\frac{\theta_2}{2}}\right|$$

در نتيجه بنا بر آزمون ديريكله، بر $[\theta_1,\theta_2]$ به طور يكنواخت همگراست.

سوال 9) نشان دهيد سري

$x^2+\frac{x^4}{(1+x^4)}+\frac{x^4}{(1+x^4)^2}+\frac{x^4}{(1+x^4)^3}+\ldots$ بر $[\circ,1]$ به طور يكنواخت همگرا نيست.

اثبات: چون جملات سري بر $[\circ,1]$ پيوسته اند و سري بر $[\circ,1]$ به تابع نا پيوسته

$$f(x)=\begin{cases}1+x^4 & , \ x\neq \circ \\ \circ & , x=\circ\end{cases}$$

نقطه به نقطه همگراست. پس همگرايي يكنواخت نيست.

سوال 10) نشان دهيد سري $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ بر R به طور يكنواخت همگراست.

اثبات : فرض كنيد $b_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$ ، در نتيجه $b_n(x)$ مثبت و نزولي بر حسب n است. و بر R به طور يكنواخت به صفر همگراست و قرار مي دهيم $U_n(x)=(-1)^{n-1}$.

$$\left|\sum_{r=1}^{n}u_r(x)\right|\leq 1$$

يعني $\sum_{n=1}^{n}u_r(x)$ به طور يكنواخت كراندار است. پس بنابر آزمون ديريكله سري $\sum_{n=1}^{n}b_n(x)u_n(x)$ بر R به طور يكنواخت همگراست.

سوال 11) نشان دهيد سري $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(1+nx^2\right)}$ بر R به طور يكنواخت همگراست.

اثبات : قرار دهيد $f_n(x)=\frac{x}{n\left(1+n\,x^2\right)}$ در اين صورت ماكزيمم $f_n(x)$ برابر $\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ كه در نقطه $x^2=\frac{1}{n}$ به دست مي آيد. پس چون $\sum_{n=1}^{\infty}M_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{3/2}}$ همگراست پس بنابر آزمون M وايرشتراس سري $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$ همگراي يكنواخت است.

سوال 12) ثابت كنيد اگر $-1<x<1$ ،

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

حل : سري

$$\log(1-x)+\log(1+x)+\log\left(1+x^2\right)+\log\left(1+x^4\right)+\ldots \qquad (1)$$

را در نظر بگيريد. مجموع جزئي n ام آن عبارت است از

$$s_n=\log(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)=\log\left(1-x^{2^n}\right)$$

به ازاي $|u|<1$ وقتي $n\to\infty$ ، $s_n \to \circ$

بنابراين سري (1) به صفر همگراست.

سري حاصل از مشتق گيري جمله به جمله (1)، بدون در نظر گرفتن دو جمله اول ، عبارت است از

$$(2)\quad \frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\ldots+\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}+\ldots$$

به ازاي هر $|x|\le p<1$ ، $\left|\frac{2^n\ x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}\right| \le 2^n p^{2^n-1}$ ، چون سري $\sum_{n=1}^{\infty}2^n p^{2^n-1}$ همگراست. بنابر آزمون $-M$ وايرشتراس سري مشتق ها بر $|x|\le p<1$ به طور يكنواخت همگراست .

در نتيجه حاصل جمع سري (2) ، مشتق سري (1) بدون دو جمله اول مي باشد.

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\ldots=\frac{d}{dx}\left\{-\log(1-x)-\log(1+x)\right\}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}$$

از نتيجه

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

سوال 13) نشان دهيد دنباله $\{f_n\}$ ،كه

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \circ\le x\le \frac{1}{n}\\ -n^2x+2n & \frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}\\ \circ & \frac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

بر $[a,b]$ به طور يكنواخت همگرا نيست

حل : دنباله فوق بر $[\circ,1]$ نقطه به نقطه به $f(x)=\circ$ همگرا است . همچنين f_n ها و f بر $[\circ,1]$ پيوسته اند و

$$\int_{\circ}^{1} f_n(x) =\int_{\circ}^{\frac{1}{n}} n^2x dx+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}(-n^2x+2n)dx+\int_{\frac{2}{n}}^{1}\circ\, dx=1$$

در حالي كه $\int_{\circ}^{1} f dx=\circ$ ، پس $\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1} f_n)x)dx\neq\int_{\circ}^{1} f(x)dx$ بنابراين همگرايي نمي تواند يكنواخت باشد.

سوال 14) نشان دهيد دنباله $\{f_n\}$ كه در آن

$f_n(x)=\frac{\log(1+n^3x^2)}{n^2}$ بر بازه $[0,1]$ به طور یکنواخت همگراست

اثبات : براي اثبات از قضيه {فرض كنيد $\{f_n\}$ دنباله اي از توابع باشد كه به f همگرا باشد و هر كدام از f_n ها بر $[a,b]$ انتگرال پذير باشد. در اين صورت f بر $[a,b]$ انتگرال پذير است و دنباله $\left\{\int_a^x f_n dt\right\}$ بر $[a,b]$ به طور يكنواخت به $\int_a^x fdt$ همگراست. يعني

$$\int_a^x fdt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n dt,(a\le x\le b)$$

حال دنباله $\{Q_n(x)\}$ را، كه $Q_n(x)=\frac{2nx}{1+n^3x^2}=f'n(x)$ ، در نظر بگيريد به سادگي مي توان نشان داد كه $\{Q_n\}$ به طور يكنواخت به $Q=0$ همگراست و نيز $Q_n(x)$ ها بر $[0,1]$ پيوسته اند. بنابراين قضيه بالا دنباله انتگرالها يعني $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ به طور يكنواخت به $\int_0^x Qdt=0$ همگراست. پس حكم ثابت مي شود.

سوال 15) فرض كنيم $\{f_n\}$ دنباله اي از توابع پيوسته كه به تابعي چون f بر E به طور يكنواخت همگرا باشد. ثابت كنيد به ازاي هر دنباله از نقاط $x_n\in E$ كه $x_n\to x$ و $x\in E$ داريم :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x)$$

اثبات :

$$(1)\quad f_n\to f \equiv \forall\varepsilon>0\,\exists N\ s.t\ \ \forall n\ge N \Rightarrow \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon/2(x\in E)\qquad \text{يكنواخت}$$

چون بنا به فرض، f_n ها پيوسته ا ند. پس بنا به تعريف

$$(2)\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad s.T\quad |x_n-x|<\delta\ \Rightarrow \left|f_n(x_n)-f_n(x)\right|<\varepsilon/2$$

بنابر (1) و (2) داريم :

$$\forall\varepsilon>0\qquad \exists\delta>0\quad s\,t\left|f_n(x_n)-f(x)\right|=\left|f_n(x_n)-f_n(x)+f_n(x)-f(x)\right|$$
$$\le\left|f_n(x_n)-f_n(x)\right|+\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

سوال 16) اگر $g:[\circ,1]\to R$ پیوسته باشد و $g(1)=\circ$ و $f_n(x)=x^n g(x)$ ، نشان دهيد كه دنباله f_n به طور يكنواخت همگراست.

اثبات: براي اثبات از قضيه ديني استفاده مي كنيم مي دانيم $[\circ,1]$ فشرده است و

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n g(x)=\begin{cases} \circ & x=\circ \\ g(1)=\circ & x=\circ \\ \circ & \circ<x<1 \end{cases}$$

$$f_{n+1}(x)=x^{n+1}g(x)<x^n g(x)=f_n(x)\Rightarrow f_{n+1}(x)<f_n(x):x\in[\circ,1]$$

دنباله $\{f_n\}$ تابعي پيوسته است و $f=\circ$ نيز پيوسته است بنابراين بنابر قضيه ديني f_n به طور يكنواخت همگراست .

سوال 17) ثابت كنيد $\int_\circ^1 x^{-x}dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^m}$

اثبات : ابتدا x^{-x} را بسط مي دهيم مي دانيم $x^{-x}=e^{-x\ln x}$ پس

$$x^{-x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n \ln^n x}{n!}$$

كه براي $\circ<x\le 1$ همگراي يكنواخت است. زيرا ماكزيمم $|x\ln x|$ در $[\circ,1]$ برابر $\frac{1}{2}$ پس رشته مفروض ، با رشته زير محدود مي شود.

$$\sum_{n-\circ}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n!}$$

بدين ترتيب مي توان جمله به جمله انتگرال گرفت . اما مي دانيم

$$\int_\circ^1 x^n \ln^n x dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

بنابراين $\int_\circ^1 x^{-x}dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^m}$

سوال 18) فرض كنيد $\{r_n\}_{n\in N}$ دنباله تمام اعداد گويا در بازه $[\circ,1]$ باشد و

$$f_n(x)=\begin{cases} x & x\in\{r_1,r_2,\dots,r_n\} \\ x^2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ثابت كنيد $\{f_n\}$ در $[\circ,1]$ همگراي يكنواخت نيست.

اثبات:

مي دانيم $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases} x & x\in Q\cap[\circ,1] \\ x^2 & x\in[\circ,1]-Q \end{cases}$ و f_n ها در $[\circ,1]$ انتگرال پذيراند و f انتگرال پذير نيست. لذا f_n ها به f همگراي يكنواخت نمي باشد.

سوال 19) اگر $\{p_n\}_{n\in N}$ بر $[\circ,1]$ به صورت زير باشد : (p_n ها پيوسته اند)

$$P_{n+1}(t)=P_n(t)+\frac{1}{2}\left(t-P_n^2(t)\right) \qquad P_\circ=\circ$$

ثابت كنيد P_n به طور يكنواخت به $\sqrt{t}$ همگراست.

حل :مي دانيم براي هر t در $[\circ,1]$ $\{P_n(t)\}_{n\in N}$ صعودي است. از طرفي به استقراء روي n داريم $\sqrt{t}-P_n(t)\geq\circ$ در نتيجه $t\geq p_n^2(t)$ لذا $\{P_n(t)\}_{n\in N}$ صعودي و كراندار است در نتيجه همگراست .

فرض كنيم $P_n(t)\to l(t)$ داريم $l=l+\frac{1}{2}\left(t-t^2\right)$ در نتيجه $l=\sqrt{t}$ و با انتخاب $p(t)=\sqrt{t}$ نتيجه مي گيريم كه $P_n\xrightarrow[{[\circ,1]}]{u.c}P(t)$ (بنا بر قضيه ديني)

سوال 20) اگر f بر $[a,b]$ پيوسته باشد و براي هر n طبيعي داشته باشيم.

$$\int_a^b f(x)x^n dx=\circ \quad \text{آنگاه ثابت كنيد} \quad f=\circ \ \text{بر} \ [a,b]$$

اثبات: براي اثبات از قضيه استون – وايرشتراس استفاده مي كنيم . چون f پيوسته است.

پس دنباله از P_n ها موجود اند به طوريكه $P_n\xrightarrow[{[a,b]}]{u.c}f$ در نتيجه $P_n f\to f^2$ اما اگر قرار دهيم $P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_\circ$ در اين صورت بنا بر فرض مساله $\int_a^b f P_n=\circ$ پس $\int_a^b f^2=\circ$ و چون f^2 پيوسته و نامنفي است پس $f^2=\circ$ در نتيجه $f=\circ$ و حكم ثابت مي شود.

سوال 21) توابع f و g چنان هستند که براي هر $n \in N \cup \{\circ\}$ داريم $\int_\circ^1 x^n f(x)\,dx = \int_\circ^1 x^n g(x)\,dx$ و $f\,,g$ پيوسته اند. ثابت کنيد $f = g$ بر $[\circ,1]$

اثبات : براي اثبات از مسئله 20 کمك مي گيريم:

$$\int_\circ^1 x^2 f(x)\,dx - \int_\circ^1 x^n g(x)\,dx = \circ \;\Rightarrow \int_\circ^1 x^n(f(x) - g(x)) = \circ$$

با توجه به مسئله قبل

$$f(x) - g(x) = \circ \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) \quad [\circ,1] \text{ بر}$$

سوال 22) فرض کنيد f بر $[\circ,1]$ پيوسته باشد و $f_n(x) = \int_\circ^x f_{n-1}(t)\,dt$ و $f_\circ = f$

ثابت کنيد $f_n \xrightarrow[{[\circ,2]}]{u.c} \circ$

اثبات : فرض کنيد $M = \max|f(t)|$ روي $\circ \le t \le 2$

$$|f_1(x)| = \left|\int_\circ^x f_\circ(t)\,dt\right| = \left|\int_\circ^x f dt\right| \le \int_\circ^x |f|\,dt$$

$$\le \int_\circ^x M\,dt = Mx$$

و همين طور $|f_2(x)| \le \int_\circ^x Mt dt = \dfrac{Mx^2}{2}$ و ...

$$|f_n(x)| \le \frac{Mx^n}{n!} \;,\; x \in [\circ,2] \;\Rightarrow \|f_n\|_{[\circ,2]} \le \frac{M\,2^n}{n} \to \circ$$

در نتيجه $f_n \xrightarrow[\circ n[\circ,2]]{u.c} \circ$

سوال 23) فرض کنيد f بر $[\circ,1]$ پيوسته باشد ثابت کنيد $f(\circ) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\circ^1 f(x^n)\,dx$

اثبات : قرار مي دهيم $f_n(x) = f(x^n)$ در اين صورت داريم : $f_n \xrightarrow[on[o,1]]{u.c} \circ$ در نتيجه

$$\lim_{n\to\infty}\int_\circ^1 f_n(t)\,dt = \int_\circ^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_\circ^1 f(\circ) = f(\circ)$$

و حكم ثابت مي شود

سوال 24) فرض كنيد $fiR \to R$ پيوسته يكنواخت است و $f_n(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ ثابت كنيد f_n به طور يكنواخت به f همگراست.

حل: چون f پيوسته يكنواخت است بنابراين

$$\forall \varepsilon > \circ \quad \exists \delta > \circ \quad \forall x, y\left(|x-y|\right) < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$$

N را طور ي مي گيريم كه $\frac{2}{N} < \delta$ در اينصورت با فرض $m > n \geq N$ داريم

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| = \left|f\left(x+\frac{1}{m}\right)\right| - f\left(x+\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$$

زيرا

$$\left|\left(x+\frac{1}{m}\right) - \left(x+\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\frac{2}{N} < \delta$$

در نتيجه حكم ثابت مي شود.

سوال 26) اگر f_n دنباله اي از توابع كراندار باشد كه به طور يكنواخت همگراست. نشان دهيد اين دنباله به طور يكنواخت كراندار است.

اثبات : چون f_n به طور يكنواخت همگراست. بنابراين بنا بر شرط كوشي با قرار دادن $\varepsilon = 1$ و براي هر $n > N$ داريم

$\left|f_n(x) - f_N(x)\right| < 1$ در نتيجه $\left|f_n(x)\right| < \left|f_N(x)\right| + 1$

از سوي ديگر بنا به فرض به ازاي هر n , M_n اي وجود دارد به طوري كه به ازاي هر x , $M_n \leq \left|f_n(x)\right|$ در نتيجه

اگر قرار دهيم $M = \max\left|M_1, \ldots, M_N, M_{N+1}\right|$

$$\left|f_n(x)\right| \leq M$$

در نتيجه حكم ثابت مي شود.

سوال 27) فرض كنيد f_n دنباله اي از توابع پيوسته بر $[\circ,1]$ باشد كه به طور يكنواخت به تابع f همگراست نشان دهيد

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx=\int_{\circ}^{1} f(x)\,dx$$

اثبات : $$\int_{\circ}^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx-\int_{\circ}^{1} f(x)\,dx=\int_{\circ}^{1-\frac{1}{n}}\left(f_n(x)-f(x)\right)dx+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

پس :

$$\left|\int_{\circ}^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx-\int_{\circ}^{1} f(x)\,dx\right|\le\int_{\circ}^{1-\frac{1}{n}}\left|f_n(x)-f(x)\right|dx+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\left|f(x)\right|dx$$

$$\le\int_{\circ}^{1}\left|f_n(x)-f(x)\right|dx+\frac{M}{n}$$

که در آن $M=\sup\left|f(x)\right|$ چون $f_n\xrightarrow{u.c} f$ ، طرف دوم به صفر همگراست.

در نتیجه $$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx=\int_{\circ}^{1} f(x)\,dx$$

سوال 28) فرض کنيد $\{a_n\}$ دنباله اي نزولي از اعداد مثبت باشد و $na_n\to\circ$ وقتي که $n\to\infty$ ثابت کنيد $\sum_{n}^{\infty}a_n\sin nx$ به طور يکنواخت همگراست.

اثبات : ما مي دانيم بنا بر مساله اي اگر $\{a_n\}$ دنباله اي نزولي از اعداد مثبت باشد که $n\,a_n\to\circ\ (n\to\infty)$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست . بنابر اين چون

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\sin nx\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

بنابراين $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ همگراي يکنواخت خواهد بود

به همين روش مي توانيد ثابت کنيد $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ همگراي يکنواخت است.

سوال 29) اگر $h>\circ$ ، ثابت کنيد که رشته $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ بر بازه نيمه نامتناهي $1+h\le s<+\infty$ همگراي يکنواخت است نشان دهيد که معادله

$\zeta'(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ به ازاي هر $s>1$ برقرار است و ثابت كنيد

$$\forall k\geq 1 \quad \zeta^{(k)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^s}$$

حل: چون $1+h>1$ (زيرا $h>\circ$) پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+h}}$ همگراست.

حال فرض كنيد $s\geq 1+h$ در اين صورت

$$\forall n\geq 1; n^s\geq n^{1+h}\Rightarrow \mathrm{o}<\frac{1}{n^s}\leq\frac{1}{n^{1+h}}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+h}}$$

حال بنابر قضيه $M-$ وايرشتراس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ بر $[\mathrm{o},\infty)$ همگراي يكنواخت است.

مي دانيم $n^{-s}=e^{\log n^{-s}}$ در اين صورت

$$\left(n^{-s}\right)'=\frac{d}{ds}e^{-s\log n}=-\log .e^{-s\log n}=-\log n.n^{-s}=-\frac{\log n}{n^s}$$

در نتيجه $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-s}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\log n}{n^s}\ (\forall s>1)$

حال ثابت مي كنيم كه : $\forall k\geq 1\ :\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\log n)^{-k}}{n^s}$

اگر $k=1$ آنگاه $\zeta^{(1)}(s)=\zeta'(s)=\frac{-\log n}{n^s}$ حال فرض مي كنيم

$$\zeta^{(k)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^s}$$

ثابت مي كنيم

$$\zeta^{(k+1)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(\log n)^{k+1}}{n^s}$$

$$\zeta^{(k+1)}(s)=\left(\zeta^{(k)}(s)\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^s}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^s}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k(\log n)^k\left(h^{-s}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k(\log n)^k\left(\frac{-\log n}{n^s}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(\log n)^{k+1}}{n^s}$$

سوال 30) هرگاه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ بر مجموعه E به طور يكنواخت همگرا باشند و به علاوه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله هايي از توابع كراندار باشند. ثابت كنيد $\{f_{n,}g_n\}$ بر E به طور يكنواخت همگرا خواهد بود.

اثبات : فرض كنيد A كران بالاي $\{f_n\}$ باشد و B كران بالاي $\{g_n\}$ باشد در اين صورت

$$\forall\varepsilon<\circ:\exists N_1\quad s.T\quad\forall\ m,n\ge N_1\Rightarrow\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon/2B$$

$$\forall\varepsilon<\circ:\exists N_2\quad s.T\quad\forall\ m,n\ge N_2\Rightarrow\left|g_n(x)-g_m(x)\right|<\varepsilon/2A$$

حال $N=\max\{N_1,N_2\}$ در اين صورت

$$\left|f_n(x)g_n(x)-f_m(x)g_m\right|\ =\left|f_n(x)g_n(x)-f_n(x)g_m(x)+f_n(x)g_m(x)-f_m(x)g_m(x)\right|$$
$$\le\left|f_n(x)\right|\left|g_n(x)-g_m(x)\right|+\left|g_m(x)\right|\left|f_n(x)-f_m(x)\right|$$

$$\le\ B\times\frac{\varepsilon}{\mathbf{2B}}+A\times\frac{\varepsilon}{2A}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

و حكم ثابت مي شود

سوال 31) $\{f_n\} n\in N$ دنباله اي از تابع هاي $f_n:[\circ,1]\to R^+$ است. به طوري كه $f_\circ$ پيوسته است و $\forall x\in[\circ,1], \forall n\in N, \; f_{n+1}(x)=\int_\circ^x \frac{1}{1+f_n(t)}\,dt$ ثابت كنيد براي هر $x\in[\circ,1]$ ، دنباله $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ همگراست و حد آن را محاسبه كنيد .

اثبات: ابتدا مقدار حد را با (فرض وجود) محاسبه مي كنيم. تابع حد بايد تابعي تابعي پيوسته مانند f ، $f:[\circ,1]\to[\circ,\infty]$ باشد كه $f(x)=\int_\circ^x \frac{1}{1+f(t)}dt$ و f مشتق پذير است و $f(\circ)=\circ$ و $f'(x)(1+f(x))=1$ بنابراين $f(x)+\frac{f^2(x)}{2}=x$ پس $f(x)=\sqrt{1+2x}-1$

حال ثابت مي كنيم براي هر $x\in[\circ,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

اگر $x\in[0,1]$ آنگاه

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\int_\circ^x \left(\frac{1}{1+f_{n-1}(t)}-\frac{1}{1+f(t)}\right)dt\right|$$

$$\le\int_\circ^x \left|\frac{f_{n-1}(t)-f(t)}{(1+f_{n-1}(t))(1+f(t))}\right|dt \le \int_\circ^x |f_{n-1}(t)-f(t)|dt=x|f_{n-1}(t_1)-f(t_1)|$$

براي t_1 اي در $[\circ,x]$

به همين روش در $|f_{n-1}(t_1)-f(t_1)|\le t_1|f_{n-2}(t_2)-f(t_2)|$ بـراي t_2 اي $[\circ,t_1]$

با استقراء رياضي خواهيم داشت

$$|f_n(x)-f(x)| \le xt_1t_2\ldots t_{n-1}\,|f_\circ(t_n)-f(t_n)|$$

كه $\circ\le t_n\le t_{n-1}\le\ldots\le t_1\le x$

$$|f_n(x)-f(x)| \le x^n \sup_{t\in[\circ,1]}|f_\circ(t)-f(t)|$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

اگر $x = 1$ براي $\varepsilon > \circ$ فرض كنيد $a \in \left(\circ, \varepsilon/4\right)$ عددي دلخواه باشد بنابر نامساوي قبل داريم.

$$\left|f_n(1) - f(1)\right| \le \int_\circ^1 \left|f_{n-1}(t) - f(t)\right| dt = \int_1^{1-a} \left|f_{n-1}(t) - f(t)\right| dt + \int_{1-a}^1 \left|f_{n-1}(t) - f(t)\right| dt$$

$$\le \int_\circ^{1-a} \left|f_{n-1}(t) - f(t)\right| dt + 2a$$

زيرا $\left(\left|f(t)\right| \le 1 \quad , \quad \left|f_{n-1}(t)\right| \le 1\right)$

چون $\lim_{n\to\infty} \int_\circ^{1-a} \left|f_{n-1}(t) - f(t)\right| dt = \circ$ پس $N(\varepsilon) = N$ اي يافت مي شود به طوري كه براي هر $\left|f_{n-1}(1) - f(1) < \right| \varepsilon, n \ge N(\varepsilon)$ و بدين ترتيب حكم ثابت مي شود.

علت آنكه $\left|f_{n-1}(t)\right| < 1$ آن است كه

$\exists\, t_1 \in (\circ, x)$ بطوري كه $f_{n-1}(x) = \int_\circ^x \frac{1}{1+f_{n-2}(t)} dt = (x-\circ)\frac{1}{1+f_{n-2}(t_1)}$

حال چون $1 + f_{n-2}(t_1) \ge 1$ (زيرا طبق فرض $f_{n-2}(t_1) \ge \circ$ پس چون $\circ \le x \le 1$ و

$$\frac{1}{1+f_{n-2}(t_1)} \le 1 \Rightarrow \frac{x}{1+f_{n-2}(t_1)} \le x \le 1$$

پس $f_{n-1}(x) \le 1$

فصل 11 : مسائل متفرقه

سوال 1) مطلوب است محاسبه $\tan\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$

$$\tan\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = tg\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Arg\left(1+\frac{i}{n^2}\right)\right\}$$

$$= tg\left\{Arg\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(\pi(1+i)_{/\sqrt{2}}\right)^2}{n^2\pi^2}\right)\right)\right\}$$

$$= tg\left\{Arg\left(\frac{\sinh\left(\pi(1+i)_{/\sqrt{2}}\right)}{\pi(1+i)/\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \tan\left\{arcTg\left(\frac{Tg\left(\pi/\sqrt{2}\right)-Tgh\left(\pi/\sqrt{2}\right)}{\tan\left(\pi/\sqrt{2}\right)+\tan\left(\pi/\sqrt{2}\right)}\right)\right\}$$

$$= \frac{tg\left(\pi/\sqrt{2}\right)-tgh\left(\pi/\sqrt{2}\right)}{tg\left(\pi/\sqrt{2}\right)+tgh\left(\pi/\sqrt{2}\right)} = 6_/798$$

(که $i^2=-1$)

سوال2) همه توابع مشتق‌پذیر و پیوسته را که در شرط زیر صدق می‌کنند را پیدا کنید

$$\left(f(x)\right)^2 = \int_{\circ}^{x}\left(f(t)\right)^2+\left(f'(t)\right)^2 dt + 1990 \qquad (1)$$

حل: با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (1) خواهیم داشت

$$2f(x)\,f'(x) = \left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(f(x)-f'(x)\right)^2 = \circ \Rightarrow f'(x)=f(x)$$

$$\Rightarrow \log\left|f(x)\right| = x+c \qquad \left|f(x)\right| = e^c e^x$$

چون $f(\circ)=\pm\sqrt{1990}$

$$f(x) = \pm\sqrt{1990}e^x$$

سوال 3) ثابت کنید برای زیر بازه‌ای در $(\circ\,,1)$ خواهیم داشت

حل : $\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left\{\log x.\log(1-x)\right\} < \circ$

قرار می‌دهیم $f(x) = (\log x.\log(1-x)$

$$f'(x) = \frac{\log(1-x)}{x} - \frac{\log x}{1-x} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m}$$

برای وقتی که n زوج است $f^n(x)$ همیشه منفی است

چون همه جمله‌ها منفی هستند. n فرد است و اگر و تنها اگر $x < 1-x$ یا $x > \frac{1}{2}$.

سوال 4) برای هر $k=2,3,...$ ثابت کنید

$$\ln k=\sum_{i=1}^{\infty}\left[1+k\left(\left[\frac{i-1}{k}\right]-\left[\frac{i}{k}\right]\right)\right]\frac{1}{i}$$

اثبات: برای اثبات از لم (فرض کنید $-\infty<a<b<\infty$ ، و فرض کنید f مشتق پذیر روی $[a,b]$ باشد و $\left|f'(x)\right|\le x$

برای هر $x\in[a,b]$ برقرار باشد و فرض کنید

$$R_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)\,dx-R_n\right|\le\frac{(b-a)^2x}{b}$$

و همچنین با توجه به قضیه : (فرض کنید دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله حقیقی باشد ک همگرا به صفر است برای هر عدد طبیعی n ،

فرض کنید $s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ اگر یک زیر دنباله‌ای از s_n موجود باشد که همگرا می‌باشد در این صورت می‌نویسیم $s_{n_i}\to s$

که $i\to\infty$ و اگر $\sup_{i\ge1}(n_{i+1}-n_i)\le\infty$ آنگاه $s_n\to s$ که $n\to\infty$ و $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=s$. در لم (1) قرار می-

دهیم $f(x)=x^{-1}$ $b=Nk$, $a=N$, $n=N(k-1)$ و همچنین خواهیم داشت

$$R_n=f(N+1)+f(N+2)+...+f(NK)=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}...+\frac{1}{Nk}$$

$x\in[N\ ,Nk]$ $\qquad \left|f'(x)\right|=x^{-2}<N^{-2}$ $\qquad$ و $\qquad \left|\ln k-R_n\right|\le\frac{(NK-N)^2}{NK-N}\frac{1}{N^2}\to0$

$(N\to\infty)$

با توجه به لم (2) خواهیم داشت $K_n=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+...+\frac{1}{NK}=\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{N}\right)$

$$-K\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{2k}+...+\frac{1}{NK}\right)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{K-1}+\frac{1-K}{NK}+\frac{1}{K+1}+\frac{1}{K+2}+\frac{1}{2K-1}+\frac{1-K}{2K}+...+\frac{1-K}{NK}$$

$$=\sum_{i=1}^{NK}\left[1+K\left(\left[\frac{i-1}{K}\right]-\left[\frac{i}{K}\right]-\left[\frac{i}{K}\right]\right)\right]\frac{1}{i}$$

سوال 5) فرمول آپوستل): اگر $y=f(x)$ که $f(\circ)=\circ$ و $f'(\circ)\neq\circ$ ثابت کنید

$$f^{-1}(y)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{x}{f(x)}\right)^n\right]$$

اثبات: برای اثبات: رجوع کنید به مقاله *Tom.m.Apostol* در

سوال 6) فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که f', f'', f''' موجود باشد و f', f'', f''' برای هر $x \in R$ مثبت باشد. و فرض کنید $f'''(x) \le f(x)$ نشان دهید که $f'(x) < 2f(x)$ برای هر $x \in R$

اثبات: فرض کنید x ثابت باشد. بنابر قضیه تیلور برای $t > \circ$

$$f(x-t) = f(x) - f'(x)t + \frac{f''(x-s)}{2}t^2$$

که $\circ < s < t$, $f(x-t) > \circ\ ,\ f''(x-s) < f''(x)$ داریم

$$f(x) - f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 > \circ \qquad t > \circ$$ برای

برای $t = \frac{f'(x)}{f''(x)}$ داریم $\left(f'(x)\right)^2 < 2f(x)\,f''(x)$

به طور مشابه برای هر $t > \circ$ داریم

$$f'(x-t) = f'(x) - f''(x)t + \frac{f'''(x-s)}{2}t^2$$

که $\circ < s < t$ پس $f'(x-t) > \circ\ ,\ f'''(x-s) \le f(x-s) < f(x)$ برای هر $t > \circ$ برقرار است.

$$\left(f'(x)\right)^4 < 4\left(f(x)\right)^2\left(f''(x)\right)^2 < 8\left(f(x)\right)^3 f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) < 2f(x)$$

سوال 7) ثابت کنید برای $r \ge 2$ خواهیم داشت

$$(r-1)^2\zeta(r) = \sum_{m=1}^{\infty}(rm+1)\binom{r+m-1}{m+1}\left(\zeta(m+r)-1\right)$$

اثبات:

برای $|x| < 1$ داریم $$(1)\quad \sum_{i=\circ}^{\infty}\binom{r+i-2}{i}x^i = \frac{1}{(1-x)^{r-1}}$$

با مشتق گیری از طرفین (1) داریم $$\sum_{i=\circ}^{\infty}\binom{r+i-2}{i}x^{i-1} = \frac{r-1}{(1-x)^r}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(rm+1)\binom{r+m-1}{m+1}\left(\zeta(m+r)-1\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(rm+1)\binom{r+m-1}{m+1}\frac{1}{k^{m+r}}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r(r-1)}{(k-1)^r} - \frac{r-1}{(k-1)^{r-1}} - \frac{r-1}{k^r} + \frac{r-1}{k^{r-1}}\right) = (r-1)^2\zeta(r)$$

سوال 8) برای $x > 2$ ثابت کنید

$$Ln\frac{x}{x-1}\le\sum_{j=\circ}^{\infty}\frac{1}{x^{2^j}}\le Ln\frac{x-1}{x-2}$$

اثبات : $\frac{1-u^{2^n}}{1-x}=(1+u)(1+u^2)\dots\left(1+u^{2^{n-1}}\right)$

فرض کنید $x>2$ قرار دهید $u=\frac{1}{x}$ در این صورت

$$\ln\frac{1-\frac{1}{x^{2^n}}}{1-\frac{1}{x}}=\sum_{j=\circ}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{x^{2^j}}\right)=\sum_{j=\circ}^{n-1}\frac{1}{x^{2^j}}\ln\left(1+\frac{1}{x^{2^j}}\right)x^{2^j}<\sum_{j=\circ}^{n-1}\frac{1}{x^{2^j}}\ln e$$

$$=\sum_{j=\circ}^{n-1}\frac{1}{x^{2^j}}<\sum_{j=\circ}^{n-1}\frac{1}{x^{2^j}}\ln\left(1+\frac{1}{(x-1)^{2^j}}\right)^{x^{2^j}}$$

$$=\sum_{j=\circ}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{(x-1)^{2^j}}\right)=\ln\frac{1-\frac{1}{(x-1)^{2^n}}}{1-\frac{1}{x-1}}$$

که با فرض $n\to\infty$ حکم ثابت می‌شود.

سوال 9) به ازای هر عدد طبیعی مانند $_n$ ، $G(n)$ تعداد رقمهای 2^n در مبنای ده است

ثابت کنید

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{2^n}>\frac{1169}{1023}$$

اثبات می‌توان نوشت

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1+n\log 2]}{2^n}$$

بنابراین

$$s=1+\sum_{n=1}^{10}\frac{[n\log 2]}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+10)\log 2]}{2^{n+10}}$$

$$=\frac{1167}{1024}+\frac{1}{1024}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+10)\log 2]}{2n}$$

چون $[n\log 2+3]\ge[(n+\circ)\log 2]$ و وقتی $n=93$ این نابرابری اکید است پس

$$s>\frac{1167}{1024}+\frac{1}{1024}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[n\log 2+3]}{2^n}=\frac{1167}{1024}+\frac{1}{1024}(s+2)$$

بنابراین $s > \frac{1169}{1023}$

سوال10) $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی است و $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = c$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = b$ ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j+1}a_j = \frac{1}{2}(b+c)$$

اثبات: برای هر عدد طبیعی j فرض کنید $x_j = \frac{j}{1+j}a_j$ و $y_j = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$

در این صورت $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{1+j}a_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j = \frac{x_1 - x_{n+1}}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j$. چون x_j ها کرانداراند. پس

$\frac{x_1 - x_{n+1}}{2n} \to \circ$ از فرض‌های مساله داریم $y_{2j+1} \to \frac{b+c}{2}$, $y_{2j} \to \frac{b+c}{2}$ پس $y_j \to \frac{b+c}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j = \frac{b+c}{2}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j+1}a_j = \frac{b+c}{2}$$

سوال 11) تمام توابع $f : R \to R$ را بیابید که برای هر $x, y \in R$ ، در نابرابری‌های زیر صدق می‌کند

$$1)\quad f(x) \le x \qquad 2)\ f(x+y) \le f(x) + f(y)$$

اثبات: در (2) قرار می‌دهیم $y = \circ$, $x = \circ$ در این صورت

$$f(\circ + \circ) \le f(\circ) + f(\circ) \Rightarrow \circ \le f(\circ)$$

اگر در (1) قرار دهیم $x = \circ$ در اینصورت در می‌یابیم $f(\circ) \le \circ$ که در نتیجه تنها حالت ممکن $f(\circ) = \circ$ است. حال داریم

$$\forall x \in R \qquad f(x) + f(-x) \ge f(x + (-x)) = f(\circ) = \circ$$

$$\Rightarrow f(x) \ge -f(-x) \ge x \Rightarrow f(x) \ge x$$

و از (1) داریم $f(x) \le x$ و در نتیجه $\left(f(x) = x\right)$ تنها حالت ممکن برای هر x دلخواه است

سوال 12) f , g دو تابع پیوسته از R به R هستند و $\forall x \in R \quad f(g(x)) = g(f(x))$

ثابت کنید اگر معادله $f(x) = g(x)$ جواب نداشته باشد، معادله تابعي $fof\ (x) = gog\ (x)$ هم جواب ندارد.

حل: تابع $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

حال اگر برای یک مقدار حقیقی a داشته باشیم $h(a) > 0$ و برای مقدار حقیقی b داشته باشیم $h(b) < 0$ پس تنها یکی از حالات فوق وجود دارد یعنی یا همواره $g(x) > 0$ و یا همواره $h(x) < 0$ است

$$\forall x \in R \quad h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

و چون برای هر x حقیقی $f(x) > g(x)$ است پس نتیجه می‌گیریم که

$$fof(x) > g(f(x)) = f(g(x)) > gog(x)$$

و اگر $\forall x \in R \quad h(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$

حال چون برای هر x حقیقی $f(x) < g(x)$ است پس نتیجه می‌گیریم که

$$fof(x) < g(f(x)) = f(g(x)) < gog(x)$$

و در هر دو حالت تساوی $fof(x) = gog(x)$ برقرار نیست و در نتیجه x ای موجود نیست که رابطه $fof(x) = gog(x)$ برقرار باشد.

سوال 13) همه اعداد $d \in [0, 1]$ را پیدا کنید به طوری که برای هر تابع پیوسته f که در بازه $[0, 1]$ تعریف شده باشد و مقادیر $f(x)$ اعداد طبیعی باشند و $f(0) = f(1)$ و عدد x وجود داشته باشد که $f(x_0) = f(x_0 + d)$

اثبات: ثابت می‌کنیم $f(nt) = n^2 f(t)$ (برای هر n طبیعی)

اثبات را به روش استقراء ریاضی انجام می‌دهیم

حکم برای $n=1$ است $\Rightarrow f(t) = f(t) \Rightarrow f(1 \times t) = 1^2 \times f(t)$

حال فرض کنید حکم مساله برای تمام مقادیر کمتر یا مساوی n برقرار باشد

اگر $x = nt\ ,\ y = t$ قرار دهیم، داریم

$$f(nt+t) + f(nt-t) = 2\left(f(nt) + f(t)\right)$$

$$\Rightarrow f((n+1)t) + f((n-1)t) = 2f(nt) + 2f(t)$$

طبق فرض استقراء داریم $f(nt) = n^2 f(t)$

$$f((n-1)t) = (n-1)^2 f(t)$$

در نتیجه داریم

$$f((n+1)t) = 2n^2 f(t) + 2f(t) - (n-1)^2 f(t)$$

$$f((n+1)t) = \left(2n^2 + 2 - (n-1)^2\right) f(t)$$

$$f((n+1)t) = \left(2n^2 + 2 - n^2 - 1 + 2n\right) f(t)$$

$$f((n+1)t) = (n+1)^2 f(t)$$

بدین ترتیب حکم مساله برای $n+1$ درست است و استقراء کامل شد. حال به یافتن $f(x)$ می‌پردازیم. فرض می-کنیم $f(1)=a$ داریم

$$x\in Q \Rightarrow x=\frac{P}{q} \Rightarrow f(p)=p-\left(q\times\frac{p}{q}\right)=q^2 f\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$f(p) \Rightarrow p^2 f(1)=p^2 a \Rightarrow p^2 a-q^2 f\left(\frac{p}{q}\right) \Rightarrow \frac{p^2}{q^2}a=f\left(\frac{p}{p}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^2 a$$

پس برای اعداد گویا ثابت کردیم که $f(x)=x^2 a$

حال طبق پیوستگی تابع داریم

$$\forall x\in R; \qquad f(x)=ax^2$$

سوال 14) فرض کنید تابع f بر $[a\ ,\ b]$ ، $(\circ<a<b)$ تعریف شده و در رابطه

$$\forall x,y\in[a,b] \quad x\neq y \Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$$

صدق کند و داریم $f(a)=f(b)=\circ$ ثابت کنید

$$\forall x\ ,\ y\in[a,b] \qquad |f(x)-f(y)|<\frac{a+b}{2}$$

اثبات: اگر $x=y$ باشد. حکم واضح است فرض x دلخواه و $y=a$ یا $y=b$ داریم

$$\begin{cases}|f(x)-f(a)|<|x-a|=x-a<x\\ |f(x)-f(b)|<|x-b|=b-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|f(x)|<x & f(a)=f(b)=\circ\\ |f(x)|\leq b-x & (x=b\end{cases}$$ تساوی برای)

اگر $x,y\in(a,b)$ کافی است فرض کنید $|x-y|>\frac{a+b}{2}$ (در غیر این صورت حکم ثابت شود) داریم

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)|+|f(y)|<x+(b-y)=b-(y-x)$$

می‌توان فرض کرد $x<y$ پس $|f(x)-f(y)|<b-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}<\frac{a+b}{2}$

سوال 15) فرض کنید $f:[\circ\ ,\ 1]\to R$ مشتق دوم پیوسته باشد و $f(\circ)=\circ=f(1)$ و به ازای هر x در بازه $(\circ\ ,\ 1)$ نشان دهید که

$$\int_\circ^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>4$$

حل: فرض کنید X نقطه‌ای در $[\circ\ ,\ 1]$ باشد که در آن $f(x)$ ماکسیمم می‌شود و نیز $Y=f(X)$ در این صورت

$$\int_\circ^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{1}{|Y|}\int_\circ^1|f''(x)|dx$$

$$\geq \frac{1}{|Y|}\left|\int_{\circ}^{1} f''(x)\,dx\right| = \frac{f'(1)-f'(\circ)}{Y}$$

به نظر می‌رسد که در اینجا به مانع برخورده‌ایم زیرا بی‌تردید لازم نیست که $f'(1)-f'(\circ)\geq 4(Y)$ با وجود اینکه بنابر قضیه مقدار میانگین، نقاط a در $(\circ\ ,\ X)$ و b در $(X\ ,\ 1)$ موجودند به طوری که

$$f'(a)=\frac{f(X)-f(\circ)}{X-\circ}=\frac{f(X)}{X}=\frac{Y}{X}$$

$$f'(b)=\frac{f(1)-f(X)}{1-X}=\frac{-Y}{1-X}$$

در نتیجه $\int_{\circ}^{1}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx \geq \int_{a}^{b}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx \geq \frac{1}{|Y|}\int_{a}^{b}\left|f''(x)\right|dx$

$$\int_{\circ}^{1}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx > \frac{1}{|Y|}\left|f'(b)-f'(a)\right| = \frac{1}{|Y|}\left|\frac{-Y}{1-X}-\frac{Y}{X}\right| = \frac{1}{|Y|}\left|\frac{Y}{1-X}-\frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{1}{X(1-X)}\right|$$

وقتی مقدار ماکسیمم $x(1-x)$ در $(\circ\ ,\ 1)$ برابر با $\frac{1}{4}$ است (وقتی $x=\frac{1}{2}$)

$$\int_{\circ}^{1}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx \geq \frac{1}{|X(1-X)|} \geq 4$$

و بنابراین

$$\int_{\circ}^{1}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx > \frac{1}{|X(1-X)|} \geq 4$$

سوال 16) حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n}$ را بدست آورید.

حل: می‌توانیم شکل حاصلضرب را با نوشتن آن به صورت معادل زیر، تغییر دهیم

$$\frac{1}{n^2}\prod_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n} = \exp\left[\log\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{1/n}\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(n^2+i^2\right)-\log n^4\right]$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(n^2+i^2\right)-\log n^4\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log n^2\left(\frac{n^2+i^2}{n^2}\right)-\log n^4\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\left\{\log n^2+\log(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2)\right\}-\log n^4\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log n^2+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)-\log n^4\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n}\log n^2+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)-\log n^4\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\ \log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}\right]=\int_{\circ}^{2}\log\left(1+x^2\right)dx\ =2\log 5-2\left[2-Arctg\,2\right]$$

سوال 17) فرض کنید $u_n>\circ$ و $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ همگرا به s باشد، نشان دهید برای n های به قدر کافی بزرگ،

$$\frac{u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_n}$$

و از آن نتیجه بگیرید که سری $\sum\frac{u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_n}$ همگرا است.

حل: چون سری $\sum u_n$ همگرا به s است به ازای هر $\varepsilon>\circ$ ،عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که

$$\left|s_n-s\right|<\varepsilon\ ,\ \forall n\geq m$$

که در آن $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ ، پس

$$s-\varepsilon<s_n<s+\varepsilon\qquad\forall n\geq m$$

در حالت خاص، $\varepsilon=\frac{1}{2}s>\circ$ به ازای هر $n\geq m$ ، $\frac{1}{2}s<s_n<\frac{3}{2}s$ یا $\frac{2}{s}>\frac{1}{s_n}>\frac{2}{3s}$ پس به ازای هر $n\geq m$ ،

همواره داریم $\frac{u_n}{s_n}<\frac{2u_n}{s}$

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{s_{n+2}}+\ldots+\frac{u_{n+p}}{s_{n+p}}<\frac{2}{s}\left(s_{n+p}-s_n\right)\qquad\forall n\geq m>p\geq 1$$

نامساوی فوق نشان می‌دهد که سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_n}$ در شرط کوشی صدق می‌کند پس همگرا است.

سوال 18) هرگاه $f'\ ,\ g'$ در $\left[a,b\right]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشند، آنگاه عددی مانند c هست به طوری که $a<c<b$

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\frac{f''(c)}{g''(c)}$$

اثبات: (راهنمایی): قضیه رول را برای تابع زیر را بکار ببرید

$$\phi(x)=f(x)+(b-x)f'(x)+A\{g(x)+(b-x)g'(x)\}$$

سوال 19) مطلوب است محاسبه $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

اثبات:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}=\lim_{x\to1^-}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}dx$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left\{\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arcTg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\right\}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

سوال 20) مطلوب است محاسبه اتحاد

$$\int_\circ^1 e^x\ln x dx=-\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)(m+1)!}\right\}$$

اثبات

$$\int_0^1\ln x\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right\}dx=\int_0^1\ln x dx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^1 x^m\ln x dx$$

$$=-\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!(m+1)}\right\}$$

سوال 21) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید $(b>\circ)$

$$A=\int_\circ^\infty\frac{\cos bx}{x^s}dx\ ,\ B=\int_\circ^\infty\frac{\sin bx}{x^s}dx$$

$$(\circ<s<1)\qquad\qquad(\circ<s<2)$$

اثبات می‌دانیم

$$\frac{1}{x^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_\circ^\infty\cos bx\int_\circ^\infty z^{s-1}e^{-zx}dz$$

با جابجا کردن انتگرال‌ها، نتیجه می‌شود

$$A=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_\circ^\infty z^{s-1}dz\int_\circ^\infty e^{-zx}\cos bxdx=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_\circ^\infty\frac{z^s dz}{z^2+b^2}$$

و یا با فرض $b^2t=z^2$ خواهیم داشت

$$A=\frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}\int_\circ^\infty\frac{z^{\frac{s-1}{2}}}{1+t}dt=\frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}B\left(\frac{s+1}{2}\ ,\ \frac{1-s}{2}\right)$$

$$=\frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{s+1}{2}\pi}=\frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}$$

محاسبه B مشابه بالا خواهد شد

$$B=\frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}$$

سوال 22) فرض کنید $k=\int_{0}^{\infty}e^{-(p+1)x}\,\mathrm{l_n}(x)\,dx$

که در آن $p>0$ ، $\mathrm{l_n}(x)$ به معنای چند جمله‌ای $\mathrm{l_n}$ ام چیبیشف- لاگر است

$$\mathrm{l_n}(x)=e^{x}\frac{d^{n}\left(x^{n}e^{-x}\right)}{dx^{n}}\qquad (n=0,1,2,...)$$

مطلوب است محاسبه k :

حل: اگر از دستور مذکور استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$k=\int_{0}^{\infty}e^{-px}.\frac{d^{n}\left(x^{n}e^{-x}\right)}{dx^{n}}dx=$$

$$=\left\{e^{-px}.\frac{\left(x^{n}e^{-x}\right)}{dx^{n-1}}-....+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}e^{-px}}{dx^{n-1}}.x^{n}.e^{-x}\right\}\Bigg|_{0}^{\infty}+$$

$$+(-1)^{n}\int_{0}^{\infty}x^{n}.e^{-x}.\frac{d^{n}e^{-px}}{dx^{n}}dx=p^{n}\int_{0}^{\infty}x^{n}e^{-(p+1)x}dx$$

$$k=\frac{p^{n}}{(p+1)^{n+1}}.n!$$

به همین ترتیب بدست می‌آید

$$\int_{0}^{\infty}e^{x}\,\mathrm{l_n}(x).l_{k}(x)\,dx=\begin{cases}0 & (k\neq n)\\ (n!)^{2} & (k=n)\end{cases}$$

سوال 23) ثابت کنید $\log$ را نمی‌توان به شکل $\frac{f(x)}{g(x)}$ نوشت به طوری که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ایهایی از x باشند. $\left(g(x)\neq 0\right)$

اثبات: (برهان خلف) فرض کنید $\log x=\frac{f(x)}{g(x)}$ و n عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\frac{f\left(x^{n}\right)}{g\left(x^{n}\right)}=\log x^{n}=n\log x=\frac{nf(x)}{g(x)}$$

پس به ازای هر n

$$f\left(x^{n}\right)g(x)=nf(x)g\left(x^{n}\right)$$

اگر $g(x)=a_p x^p+\dots+a_1x+a_\circ$, $g(x)=b_q x^q+\dots+b_1x+b_\circ$ ، آنگاه

$$f\left(x^n\right)g(x)=a_pb_qx^{np+q}+\dots+a_\circ b_\circ$$

و $$nf(x)g\left(x^n\right)=na_pb_qx^{p+nq}+\dots+na_\circ b_\circ$$

از مقایسه ضرایب پیشرو در این دو چند جمله‌ای نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n ، $a_pb_q=na_pb_q$ ناممکن است.

سوال 24) ثابت کنید چند جمله‌ایی مانند $p(x)$ وجود ندارد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$p(n)=\log 1+\log 2+\dots+\log n$$

اثبات: فرض کنید $\log n!=\sum_{r=\circ}^{n}a_rn^r$ $(n=1,2,3,\dots)$ که در آن $a_m\neq\circ$ در این صورت

$$\log(n+1)!=\sum_{r=\circ}^{m}a_r(n+1)^r$$

در نتیجه $\log(n+1)=\sum_{r=\circ}^{m}a_r(n+1)^r-\sum_{r=\circ}^{m}a_rn^r$ و درجه چند جمله‌ای سمت راست این برابری از $m-1$ بیشتر نیست بنابر مساله بالا $\log x$ را نمی‌توان به شکل چند جمله‌ای نوشت بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و نتیجه حاصل می‌شود.

سوال 25) نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را پیدا کنید

$$f(x)=\int_\circ^x\frac{\sin t}{t}dt$$

حل:

$$f'(x)=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow f'(x)=\circ\Rightarrow\sin x=\circ\Rightarrow x=k\pi$$

$$f''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ ,\ f''(k\pi)=\frac{k\pi(-1)^k-\circ}{(k\pi)^2}$$

$$k=2m\Rightarrow f''(2m\pi)=\frac{2m\pi(-1)^{2m}}{(2m\pi)^2}>\circ\Rightarrow x=2m\pi$$ طول مینیمم

$$k=2m+1\Rightarrow f''((2m+1)\pi)=\frac{(2m+1)\pi(-1)^{2m+1}}{(k\pi)^2}<\circ$$

طول ماکزیمم $x=(2m+1)\pi$

سوال 26) نشان دهید $\frac{1}{3}\leq\int_\circ^{\pi/2}\frac{\sin x}{2+\cos x}\leq\frac{1}{2}$

اثبات: با استفاده از قضیه میانگین وزن‌دار داریم

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx \qquad a \le c \le b$$

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos x} \ , \ g(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2} \ge \circ \ , \ \circ \le x \le \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{صعودی است } f(x)$$

$$\circ \le c \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\circ) \le f(c) \le f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2+\cos\circ} \le f(c) \le \frac{1}{2+\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{3} \le f(c) \le \frac{1}{2}$$

$$\int_\circ^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = f(c)\int_\circ^{\pi/2} \sin x dx = f(c)\left[-\cos x\right]_\circ^{\pi/2} = f(c)$$

$$\frac{1}{3} \le \int_\circ^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\cos x} \le \frac{1}{2}$$

سوال 27) نشان دهید

$$(\forall x \ge \circ) \qquad \int_\circ^x \frac{\sin t}{t+1}dt \ge \circ$$

حل: از دستور لایب نیتس استفاده می‌کنیم

$$f(x) = \int_\circ^x \frac{\sin t}{t+1}dt \quad , \quad f'(x) = \frac{\sin x}{x+1} = \circ \ , \ x = k\pi$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)\cos x - \sin x}{(x+1)^2} \quad , \quad f''(k\pi) = \frac{(k\pi+1)\cos k\pi - \sin k\pi}{(k\pi+1)^2}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k\pi+1} \ , \ f''(2k\pi) > \circ$$

پس مینیمم‌های نسبی در نقاط $x = 2k\pi$ هستند. کافی است ثابت کنیم $f(2k\pi) \ge \circ \ , \ k \ge \circ$ داریم

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt + f(b)\int_c^b g(t)dt$$

$$f(t) = \frac{1}{t+1} \quad g(t) = \sin t$$

$$f(2k\pi) = \int_\circ^{2k\pi} \frac{\sin t}{t+1} = \frac{1}{\circ+1}\int_\circ^c \sin t dt + \frac{1}{1+2k\pi}\int_c^{2k\pi} \sin dt$$

$$(1-\cos c) + \frac{1}{1+2k\pi}(-\cos 2k\pi + \cos c) = (1-c)\left(1-\frac{1}{1+2k\pi}\right) \ge \circ$$

سوال 28) اگر $f\left(x\right)=\int_{1}^{1+x^2}\frac{\sin tx}{t}dt$ باشد آنگاه $f'\left(x\right)$ را بدست آورید.

حل: داریم $1\le t\le 1+x^2$ سپس متغیر زیرا در نظر می‌گیریم

$$tx=z\Rightarrow xdt=dz\Rightarrow dt=\frac{dz}{x}$$

$$t=\frac{z}{x}\Rightarrow\begin{cases}t=1\Rightarrow z=x\\ t=1+x^2\Rightarrow z=x+x^3\end{cases}$$

$$f\left(x\right)=\int_{1}^{1+x^2}\frac{\sin tx}{t}dt=\int_{x}^{x+x^3}\frac{\sin z}{\frac{z}{x}}.\frac{dz}{x}=\int_{x}^{x+x^3}\frac{\sin z}{z}dz$$

حال با قاعده لایبنیتس مساله به سادگی حل می‌شود. توجه شود که در ابتدا نمی‌توانستیم از این قاعده استفاده کنیم

سوال 29) ثابت کنید که انتگرال‌های $\int_{\circ}^{\infty}\cos\left(f\left(x\right)\right)dx$, $\int_{\circ}^{\infty}\sin\left(f\left(x\right)\right)dx$ در صورتی که $f'\left(x\right)$ به طور یکنوا صعودی باشد و به ازای $x\to\infty$ ، به سمت ∞ میل کند، متقارب می‌شوند.

اثبات: به ازای مقدارهای به قدر کافی بزرگ x ، داریم $f'\left(x\right)>\circ$ و در نتیجه $f\left(x\right)$ صعودی یکنواست، فرض می‌کنیم که، با شروع از $x=a$ چنین باشد. به کمک دستور نموهای محدود، بدست می‌آوریم:

$$f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+f'\left(x+\theta\right)\ge f\left(a\right)+f'\left(x\right)$$

در نتیجه، به ازای $x\to\infty$ ، خود تابع $f\left(x\right)$ به سمت ∞ میل می‌کند. متغیر جدید $t=f\left(x\right)$ را وارد می‌کنیم، به نحوی که اگر تابع معکوس f را با g نشان دهیم

$$x=g\left(t\right)\ ,\ dx=g'\left(t\right)dt\left[\alpha=f\left(a\right)\ ,\ \beta=\infty\right]$$

ولی مشتق $g'\left(t\right)=\frac{1}{f'\left(t\right)}$ به طور یکنوا نزول می‌کند و به ازای $t\to\infty$ ، به سمت صفر میل می‌کند. به این جهت، انتگرال‌های تبدیل شده

$$\int_{f(a)}^{\infty}\sin t.g'\left(t\right)dt\ \ ,\ \ \int_{f(a)}^{\infty}\cos t.g'\left(t\right)dt$$

با توجه به معیار دیریکلیه متقارب می‌شوند و، همراه با آنها، انتگرالهای مفروض هم متقارب خواهد بود.

سوال 30) برای $1\le p<\infty$ و هر $a,b>\circ$ داریم

الف) $$\inf_{t>\circ}\left[\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}a+\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{\frac{1}{p}}b\right]=a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}$$

ب) $$\inf_{\circ<t<1}\left[t^{1-p}a^p+\left(1-t\right)^{1-p}b^p\right]=\left(a+b\right)^p$$

(الف) و (ب) را ثابت کنید

اثبات الف) فرض کنید برای $t>\circ$ ، تابع f ، با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$f(t)=\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}+\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{\frac{1}{p}}b$$

آنگاه مشتق f برابر خواهد بود با

$$f'(t)=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)t^{\frac{1}{p}-2}a+\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}b=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)t^{\frac{1}{p}-2}(a-tb)$$

و بنابراین f' برای مقادیر $t<t_\circ=\frac{a}{b}$ منفی و برای $t=t_\circ$ صفر و برای $t>t_\circ$ مثبت است

بنابراین، f مقدار مینیمم خود را در نقطه $t_\circ=\frac{a}{b}$ می‌گیرد. و این مینیمم برابر است با

$$f(t_\circ)=f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}-1}a+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}b=a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}$$

ب) فرض کنید، برای $\circ<t<1$ ، تابع g با ضابطه زیر تعریف می‌شود. $g(t)=t^{1-p}a^p+(1-t)^{1-p}b^p$ آنگاه مشتق g برابر خواهد بود با

$$g'(t)=(1-p)t^{-p}a^p-(1-p)(1-t)^{-p}b^p=\circ$$

فقط وقتی که $t=t_1=\frac{a}{(a+b)}$ ، چون

$$g''(t)=(1-p)(-p)t_1^{-p-1}a^p-(1-p)(1-t_1)^{-p-1}b^p>\circ$$

این نشان می‌دهد، g مینیمم موضعی خود را در $t=\frac{a}{(a+b)}$ می‌گیرد، که برابر است

$$g(t_1)=g\left(\frac{a}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}a^p+\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}b^b$$

$$=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}a^p+\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}b^p=(a+b)^p$$

این مینیمم موضعی تابع g برابر مینیمم مطلق آن خواهد بود. زیرا g روی $(\circ,1)$ پیوسته است و $\lim\limits_{t\to 1^+}(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}(t)=\infty$

سوال 31) اگر f تابعی پیوسته باشد، نشان دهید

$$\int_\circ^x f(u)(x-u)\,du=\int_\circ^x\left(\int_\circ^u f(t)\,dt\right)du$$

حل: از طریقه جزء به جزء مسئله را حل می‌کنیم

$$I=\int_{\circ}^{x}\left(\int_{\circ}^{u} f(t)\,dt\right)du \Rightarrow \begin{cases} u_1=\int_{\circ}^{u} f(t)\,dt \\ dv_1=du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1=f(u)\,du \\ v_1=u \end{cases}$$

$$I=\left(u\int_{\circ}^{u} f(t)\,dt\right)_{\circ}^{x}-\int_{\circ}^{x} uf(u)\,du$$

(متغیر مجازی است لذا انتگرال اول را هم بر حسب u می‌نویسیم)

$$I=x\int_{\circ}^{x} f(u)\,du-\int_{\circ}^{x} uf(u)\,du=\int_{\circ}^{x} xf(u)\,du-\int_{\circ}^{x} uf(u)\,du$$

$$\int_{\circ}^{x}(x-u)\,f(u)\,du$$

سوال 32) فرض کنید $f_{in}=f\left(a+i\delta_n\right)$ که $\delta_n=\dfrac{b-a}{n}$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+f_{1n}\delta_n\right)\left(1+f_{2n}\delta_n\right)\ldots\left(1+f_{nn}\delta_n\right)=e^{\int_a^b f(x)dx}$$

حل: طبق فرض باید $\exists M s.t \left|f(x)\right|<M$ از انديسي به بعد داشته باشيم

$$\exists n_{\circ}\ ,\ s.t\ \ n\ge n_{\circ}\ ,\ \ \delta_n.M\le\frac{1}{2}$$

اگر از سری ماکلوران استفاده کنیم که برای $|x|<\dfrac{1}{2}$ داریم: $\left|\log(1+x)-x\right|\le x^2$ پس

$\left|\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+f_{in}\delta_n\right)-\sum_{i=1}^{n} f_{in}\delta_n\right|\le\delta_n\sum_{i=1}^{n} f_{in}^2\delta_{in}$ بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+f_{in}\delta_n\right)=\int_a^b f(x)\,dx$ در

نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1+f_{in}\delta_n\right)=e^{\int_a^b f(x)dx}$$

به عنوان یک تمرین مقدار حد زیر را با استفاده از تمرین بالا پیدا کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2\right)\ldots\left(n^2+n\right)}{\left(n^2-1\right)\left(n^2-2\right)\ldots\left(n^2-n\right)}$$

مساله 33) $x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots,\ x_n$ را اعداد حقیقی می‌گیریم به طوری که $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=1$

عدد صحیح k ، $1\le k\le n$ داده شده است ثابت کنید ماکسیمم مقدار $\left|x_k\right|$ برابر $\sqrt{\dfrac{2k(n+1-k)}{n+1}}$

اثبات : ثابت می‌کنیم $\left|x_n\right|_{\max}=\sqrt{\dfrac{2k(n+1-k)}{n+1}}$ داریم $x_1^2+\left(x_1+x_2\right)^2+\ldots+\left(x_{n-1}+x_n\right)^2+x_n^2=2$

$$\sqrt{\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2+\ldots+(x_{k-1}+x_k)^2}{k}} \geq \frac{|x_1|+|x_1+x_2|+\ldots|x_{k-1}+x_k|}{k}$$ و

$$\geq \frac{\left|x_1-(x_1+x_2)+\ldots.+(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)\right|}{k}$$

$$\geq \frac{|x_k|}{k}$$

$$\Rightarrow x_1^2+(x_1+x_2)^2+\ldots+(x_{k-1}+x_k)^2 \geq \frac{x_k^2}{k}$$

به همین ترتیب داریم: $(x_k+x_{k+1})^2+\ldots.(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2 \geq \frac{x_k^2}{n-k+1}$ با ترکیب این دو نامساوی بدست می‌آید

$$2=x_1^2+(x_1+x_2)^2+\ldots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)x_k^2$$

با توجه به اینکه $|x_k| \leq |x_k|_{\max}$ تساوی وقتی برقرار است که

$$x_1=-(x_1+x_2)=x_2+x_3=\ldots.=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)$$

و $x_k+x_{k+1}=-(x_{k+1}+x_{k+2})=\ldots=(-1)^{n-k}x_n$ بنابراین $|x_k|_{\max}$ ماکسیمم مقدار است. اگر و تنها اگر

$$x_i=\begin{cases}(-1)^{k-i}\dfrac{x_k^i}{k} & i=1,2,\ldots.,k-1\\[2mm] (-1)^{i-k}\dfrac{x_k(n+1-i)}{n-k+1} & i=k,k+1,\ldots.,n\end{cases}$$

سوال 34) $(a_i)_{i=1}^n$ و $(b_i)_{i=1}^n$ دو دنباله از اعداد حقیقی‌اند و $b_1 \geq b_2 \geq \ldots b_n \geq 0$ ثابت کنید

$$b_1\min_{1\leq i\leq n}(a_1+a_2+\ldots a_i) \leq \sum_{i=1}^n a_ib_i < \max_{1\leq i\leq n} b_1(a_1+a_2+\ldots.+a_i)$$

حل: فرض کنید $s_i=a_1+a_2+\ldots.+a_i$ ، $1\leq i\leq n$ ، $M=\max\limits_{1\leq i\leq n} s_i$ ، $m=\min\limits_{1\leq i\leq n} s_i$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i = s_1b_1+(s_2-s_1)b_2+\ldots+(s_n-s_{n-1})b_n$$

اکنون چون داریم

$$M(b_1-b_2) \leq s_1(b_1-b_2) \leq M(b_1-b_2)$$

$$m(b_{n-1}-b_n) \leq s_{n-1}(b_{n-1}-b_n) \leq M(b_{n-1}-b_n)$$

$$mb_n \le s_n b_n \le Mb_n$$

به این ترتیب اگر نابرابری‌های بالا را باهم جمع کنیم نتیجه می‌گیریم که حکم برقرار است.

مساله : اگر $1 \le i \le m$ ، $n_i < ०$ و $-1 \le x_i \le 1$ آن وقت $\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)^{n_i} + \prod_{i=1}^{m}(1-x_i)^{n_i} \ge 2$

اثبات: اگر $a,b \ge \text{o}$ ، مي دانيم $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ پس

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_j)^{n_i} + \prod_{i=1}^{m}(1+x_i)^{n_i} \ge 2\prod_{i=1}^{m}(1-x_i^2)^{\frac{n_i}{2}} \ge 2$$

در نتیجه حکم برقرار است.

سوال 35) به ازای هر عدد صحیح مانند n ، $n \ge 3$ ثابت کنید مجموعه‌ای متشکل از n نقطه در صفحه وجود دارد. به طوری که

الف) فاصله بین هر دو نقطه از این نقاط عددی گنگ است و

ب) هر سه نقطه از این نقاط مثلثی ناتباهیده با مساحت گویا تشکیل می‌دهند.

اثبات: از آنجا که هر سه نقطه از نقاط باید مثلثی ناتباهیده پدیدآورند. بدیهی است که هیچ نقطه‌ای روی یک خط راست قرار ندارند. بنابراین، این احتمال وجود دارد که چنین نقاطی را

بتوان روی منحنی شناخته شده‌ای مانندایره یافت. با وجود این به نظر می‌رسد که نمایش معمول نقاط واقع بر دایره یعنی $(r\cos\theta \ , \ r\sin\theta)$ ، احتمالاً به عبارتهای پیچیده‌ای درباره فاصله‌ها و مساحتها می‌انجامد هنگام طراحی منحنی با پارامترهای ساده‌تر، سهمی مورد علاقه‌ام، یعنی $y^2 = x$ ، به ذهنم خطور کرد.

مشخص کردن نقاط $A(k^2,k)$ ، $B(t^2 \ , \ t)$ و $c(q^2 \ , \ q)$ روی این منحنی کار ساده‌ای بوده و خوش اقبالی موجب شد که همه چیز به طور شگفت‌آوری به سرعت و آسانی حل شد.

بدیهی است که $AB = \sqrt{(k^2-t^2)^2+(k-t)^2} = (k-t)\sqrt{(k+t)^2+1}$

و سمت راست این برابری به ازی عددهای طبیعی و نابرابر k , t مقدار گنگ است

$(t+k)^2$) مربع کامل است و در نتیجه عدد صحیح بعد از آن ، $(k+t)^2+1$ مربع کامل نیست) چون دترمینان

$D = \begin{vmatrix} k^2 & k & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ q^2 & q & 1 \end{vmatrix}$ اگر k,t,q عددهایی صحیح باشند، عددی صحیح است مساحت ΔABC که دقیقاً برابر با $\left|\frac{1}{2}D\right|$ است همواره گویاست.

بنابراین مجموعه قابل قبولی متشکل از n نقطه مجموعه زیر است .

$$\left\{(1^2,1),(2^2,2),(3^3,3),\dots(n^2,n)\ \right\}$$

مساله 36) فرض کنید $a_n,\dots,a_2,a_1$ عددهایی حقیقی باشند و دست کم یکی از آنها غیر صفر باشند. عددهای حقیقی $r_n,\dots,r_2,r_1$ چنان که به ازای هر دنباله از عددهای حقیقی مانند $x_n,\dots x_2,x_1$

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\dots r_n(x_n-a_n)$$

از $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$

کمتر یا با آن برابر است. $r_1, r_2, \ldots, r_n$ را پیدا کنید.

راه حل : x_1 را بزرگتر از a_1 انتخاب کنید و فرض کنید $x_i = a_i$ ، $2 \le i \le n$ در این صورت

$$r_1(x_1-a_1) \le \sqrt{x_1^2+\sum_{i=2}^{n} a_i^2}-\sqrt{\sum_{i-1}^{n} a_i^2}$$

$$=\frac{x_1^2-a_1^2}{\sqrt{x_1^2+\sum_{i=2}^{n} a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_i^2}}$$

اگر در طرف نابرابری بالا x_1-a_1 را حذف و فرض کنیم x_1 به a_1 میل کند، نتیجه می گیریم

$$r_1 \le \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

اگر x_1 را کوچکتر از a_1 انتخاب کنیم و روند قبلی را تکرار کنیم ، نتیجه می گیریم

$$r_1 \ge \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

بنابراین

$$r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

به همین ترتیب معلوم می شود

$$2 \le i \le n \qquad r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

تعریف : دو مجموعه شمارا را تقریبا از هم جدا گوئیم وقتی که تعداد عضوهای مشترک آن عدد محدود (و یا صفر) باشد.

سوال 37) ثابت کنید که مجموعه اعداد طبیعی را می توان به تعداد ناشمارائی مجموعه تقسیم کرد، بنحوی که هر دو تا از آنها «تقریبا از هم جدا» باشند.

اثبات: برای این کار $E(x)$ را بزرگترین عدد صحیحی می گیریم که از عدد حقیقی x بزرگتر نباشد و برای هر عدد حقیقی و مثبت x ، مجموعه $Z(x)$ را که (عضوهای آن

عددهای طبیعی خواهد بود) به این ترتیب در نظر می گیریم : برای $n=1,2,\ldots$, $2^n\left[2E(nx)+1\right]$

حالا ثابت می کنیم که برای $\circ < x < y$ مجموعه های $Z(x)$, $Z(y)$ تنها تعداد محدودی عضو مشترک دارند(که می توانند مساوی صفر نیز باشند) در حقیقت اگر به ازای دو عدد طبیعی p, q داشته باشیم : $2^p\left[2E(px)+1\right]=2^q\left[2E(qy)+1\right]$ به سادگی معلوم می شود که باید $p=q$ باشد و بنابراین داشته باشیم : $E(px)=E(qy)$ که با توجه به شرط $\circ < x < y$باید $py-px<1$ و یا $p<\dfrac{1}{y-x}$ به این ترتیب مجموعه هاي $z(x), z(y)$ کمتر از $\dfrac{1}{y-x}$ عضو مشترک دارند . یعنی تعداد عضوهای مشترک آنها محدود است . بنابراین ثابت کردیم که خانواده ناشمارائی از بی نهایت مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد که هر دو تای دلخواه از آنها تقریباً از هم جدا هستند، چون این مجموعه ها مختلف اند،از اینجا ثابت می شود که مجموعه عددهای طبیعی تعداد ناشمارائی زیر مجموعه های نامتناهی مختلف است.

سوال 38) به ازای هر عدد حقیقی مانند t ، فاصله t تا نزدیک ترین عدد صحیح به آن را با $\|t\|$ نشان می د هیم فرض کنید x عددی حقیقی باشد.

الف) ثابت کنید $\|x\|=\min\{x-[x],[x]+1-x\}$

ب- ثابت کنید $\|x\|=\dfrac{1}{2}-\left|\dfrac{1}{2}-x+[x]\right|$

ج- ثابت کنید $\|x+1\|=\|x\|$

ه- ثابت کنید $\circ \le \|x\| \le \dfrac{1}{2}$

اثبات الف- می دانیم که $[x]\le x<[x]+1$ در نتیجه $\circ \le x-[x]<1$ و $\circ < 1+[x]-x \le 1$

از طرفی دیگر $\left(x-[x]\right)+\left([x]+1-x\right)=1$

پس یا $\left(x-[x]\right)=[x]+1-x=\dfrac{1}{2}$ یا $x-[x]<\dfrac{1}{2}\ ,\ [x]+1-x>\dfrac{1}{2}$

یا $x-[x]>\dfrac{1}{2}\ ,\ [x]+1-x<\dfrac{1}{2}$

در هر صورت روشن است که فاصله x تا نزدیک ترین عدد صحیح عضو کوچکتر مجموعه $\{x-[x],[x]+1-x\}$ می باشد.

ب)- با استفاده از قسمت الف چنین استدلال می کنیم : اگر $x-[x]=\dfrac{1}{2}$ آنگاه $\|x\|=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\left|\dfrac{1}{2}-\left(x-[x]\right)\right|$ اگر $x-[x]<\dfrac{1}{2}$ ، آنگاه اگر $x-[x]>\dfrac{1}{2}$ ، آنگاه

$$\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-\left(x-[x]\right)\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-x+[x]$$
$$=[x]+1-x=\|x\|$$

ج)- بنابر قسمت ب)

$$\left\|[x]+\frac{1}{2}\right\|=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-([x]+\frac{1}{2})+\left[[x]+\frac{1}{2}\right]\right|$$

$$=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-[x]-\frac{1}{2}+[x]\right|=\frac{1}{2}$$

د) ـبنابر قسمت (ب)

$$\|x+1\|=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-x-1+[x+1]\right|=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-x-1+1+[x]\right|=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-x+[x]\right|=\|x\|$$

ه) فرض کنید $x=[x]+t$ که در آن $\circ \le t \le 1$ بنابر قسمت (ب)

$$\|x\|=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-[x]-t+[[x]+t]\right|$$

$$=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-[x]-t+[x]\right|=\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-t\right|$$

اگر $\circ \le t \le \frac{1}{2}$ ، $\left|\frac{1}{2}-t\right|=\frac{1}{2}-t$ و در نتیجه $\circ \le \|x\|=t<\frac{1}{2}$

اگر $\frac{1}{2}\le t<1$ ، $\left|\frac{1}{2}-t\right|=\frac{-1}{2}+t$ و $\circ \le \|x\|=1-t\le\frac{1}{2}$

در هر صورت $\circ \le \|x\|\le\frac{1}{2}$

سوال 39) ثابت کنید به ازای هر عدد گویای r می توانیم عددی مانند n_r را چنان محاسبه کنیم که

$$\left|r-\sqrt{2}\right|>1/10^{n_r}$$

اثبات : داریم

$$\left|r-\sqrt{2}\right|\ge\left\||r|-\sqrt{2}\right|=\frac{\left|r^2-2\right|}{|r|+\sqrt{2}}>\frac{\left|r^2-2\right|}{|r|+2}$$

بنابراین کافی است n_r چنان بزرگ انتخاب کنیم که $1/10^{n_r}<\frac{\left|r^2-2\right|}{(|r|+2)}$

سوال 40) فرض کنید $f:R\to R$ يك تابع مشتق پذير است و براي هر $n\in N$ **و هر** $x\in R$:

$f'(x)\le f'\left(x+\frac{1}{n}\right)$ ثابت کنید تابع f' پیوسته است

اثبات: براي هر $n\in N$ ، تابع $f_n:R\to R$ ، $f_n(x)=n\left(f\,(x+\frac{1}{n})-f\,(x)\right)$ را در نظر بگیرید هر

f_n مشتق پذير است و $f'_n(x)=n\left[f'\,(x+\frac{1}{n})-f'(x)\right]$ چون $f'_n(x)\ge\circ$ پس به ازاي هر n ، f_n

صعودي است. حال فرض كنيد $x_1, x_2 \in R$ و $x_1 < x_2$ ، براي هر n ، $f_n(x_1) \le f_n(x_2)$

پس $$\frac{f\left(x_1+\frac{1}{n}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{n}} \le \frac{f\left(x_2+\frac{1}{n}\right)-f(x_2)}{\frac{1}{n}}$$

وقتي $n \to \infty$ خواهيم داشت $f'(x_1) \le f'(x_2)$. پس f' صعودي است و داراي خاصيت مقدار مياني است، پس f' پيوسته است.

سوال 41) ثابت كنيد در هر فضاي متري مانند (X,d) به ازاي هر دو مجموعه بسته و جدا از هم ، دو مجموعه باز جدا از هم و شامل آنها موجود است.

حل : فرض كنيد B, A زير مجموعه هاي بسته از X باشند به طوري كه $A \cap B = \varnothing$ تابع $f: X \to R$ با ضابطه $x \in X: ,\ f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ خوش تعريف است. زيرا همواره $d(x,A)+d(x,B) \neq 0$:

زيرا اگر $x \in x$, $d(x,A)+d(x,B)=0$ در آن صورت بايد $d(x,A)=0$, $d(x,B)=0$ ، در نتيجه $x \in \bar{A} = A$, $x \in \bar{B} = B$ يعني $x \in A \cap B$ و اين امكان ندارد زيرا $A \cap B = \varnothing$ تابع f بر X پيوسته است زيرا توابع $x \to d(x,A), x \to d(x,B)$ بر X پيوسته اند و نيز داريم

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in A \\ 1 & , \ x \in B \end{cases}$$

قرار مي دهيم $G = \left\{ x \in X : f(x) < \frac{1}{2} \right\}$ در اين صورت $G = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right)$ يعني G تصوير معكوس بازه باز $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ تحت تابع پيوسته f است پس زير مجموعه بازي از X است.

به علاوه ، $x \in A$ ايجاب مي كند كه $f(x) = 0 < \frac{1}{2}$ يعني $x \in G$ پس $A \subseteq G$

به همان طريق $H = \left\{ x \in X : \ f(x) > \frac{1}{2} \right\}$ مجموعه بازي است كه شامل B است همچنين $G \cap H = \varnothing$

بنابراين حكم تمام است.

سوال 42) هرگاه تابع حقيقي و پيوسته بر X در خاصيت مقدار مياني صدق كند آنگاه ثابت كنيد (X,d) همبنداست .

اثبات : به عهده متعلم

فصل 12 مسائل متفرقه حل نشده

فصل 120: مسائل متفرقه حل نشده

سوال 1) ثابت کنید اگر $\circ < x < 2\pi$ آنگاه

$$\frac{\sin x}{a^2+1^2}+\frac{2\sin 2x}{a^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{a^2+2^3}+\ldots=\frac{\pi}{2}\;\frac{\sin h\,a\left(\pi-x\right)}{\sin h\,a\,\pi}$$

سوال 2) نشان دهید که

$$\sin\pi x+\frac{\sin 3\pi x}{3}+\frac{\sin 5\pi x}{5}+\ldots=\frac{1}{4}\pi\left[x\right]$$

سوال 3) نشان دهید

$$\frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(a-x\right)}{\Gamma\left(a\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{x+x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{x-a-n}$$

که $R_n=\dfrac{\left(\left(-1\right)^n a\left(a+1\right)\ldots\left(a+n+1\right)\right)}{n!}$

سوال 4) اگر $\alpha<\circ$ و $\alpha=-v+a$ که $v\in z, a>\circ$ نشان دهید که

$$\frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(a\right)}{\Gamma\left(x+a\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{R_n}{x+n}+G_n\left(x\right)\right\}$$

$$R_n=\frac{\left(-1\right)^n\left(a-1\right)\left(a-2\right)\ldots\left(a-n\right)G\left(-n\right)}{n!}$$

$$G\left(x\right)=\left(1+\frac{x}{a-1}\right)\left(1+\frac{x}{a-2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{a-v}\right)$$

$$G_n\left(x\right)=\frac{G\left(x\right)-G\left(-n\right)}{x+n}$$

سوال 5) نشان دهید

$$\prod_{r=1}^{\wedge}\Gamma\left(\frac{r}{3}\right)=\frac{640}{3^6}\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)^3$$

سوال 6) فرض کنید $x>\circ$ نشان دهید

$$\frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{2n!}{2^{2n}\,.n!n!}\,\frac{1}{x+n}$$

سوال 7) ثابت کنید اگر $\operatorname{Re}(z) > \circ$ آنگاه

$$\log\Gamma(z) = \int_{\circ}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)e^{-t} \right\} \frac{dt}{t}$$

سوال 8) ثابت کنید اگر $\operatorname{Re}(z) > \circ$ آنگاه

$$\log\Gamma(z) = \int_{\circ}^{\infty} \left\{ (z-1)e^{-t} + \frac{(1+t)^{-z} - (1+t)^{-1}}{\log(1+t)} \right\} \frac{dt}{t}$$

سوال 9) ثابت کنید اگر $m > \circ$ آنگاه $\int_{\circ}^{\infty} (logt)^m \frac{\sin t}{t} dt$ همگراست

سوال 10) نشان د هید

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin\theta_1}{x} \frac{\sin\theta_2 x}{x} . \frac{\sin\theta_3 x}{x} ... \frac{\sin\theta_n x}{x} . \cos a_1 x \; ... cos\; a_m\; x \; \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}\theta_1\theta_2...\theta_n$$

که $\theta_i \in R \quad (1 \le i \le n)\,,\ a > \circ$ و

$$a > |\theta_1| + |\theta_2| + ... + |\theta_n| + |a_1| + ... + |a_m|$$

سوال 11) ثابت کنید

$$\frac{1}{\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n} = \frac{1}{a_\circ} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n! a_\circ^{n+1}} G_n$$

که

$$G_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_\circ & \circ & \circ & .... & \circ \\ 4a_2 & 3a_1 & 2a_1 & \circ & ..... & \circ \\ 6a_3 & 5a_2 & 4a_1 & 3a_\circ & .... & \circ \\ \multicolumn{5}{l}{...} & \\ \multicolumn{5}{l}{(2n-2)a_{n-1} ....(n-1)a_\circ} & \\ \multicolumn{5}{l}{n a_n \quad (n-1)a_{n-1} ....a_1} & \end{vmatrix}$$

سوال 12) فرض کنید $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ (s>1)$ ثابت کنید

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - 2^s \int_{\circ}^{\infty} (1+y^2)^{\frac{-1}{2}s} \sin(s\, arc\tan y) \frac{dy}{e^{\pi y} + 1}$$

سوال 13) ثابت کنید $\log \zeta(s)=\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}$ که $p=2,3,5,\ldots$ یعني p همه اعداد اول مي باشد

سوال 14) فرض کنید $p_n(z)=\frac{1}{2^n .n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$

$$np_n(\cos\theta)=\sum_{r=1}^{n}\cos r\theta\, p_{n-r}(\cos\theta)$$

سوال 15) اگر $s<1$ و $|h|<1$ و

$$\left(1-2h\cos\theta+h^2\right)^{-s}=\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n \cos n\theta$$

نشان دهید

$$b_n=\frac{2\sin\pi s}{\pi}\int_{\circ}^{1}\frac{h^n x^{n+s-1}}{(1-x)^s\left(1-xh^2\right)^s}dx$$

سوال 16) نشان دهید $p_n(z)=\sum_{\circ}^{n}\frac{(n+P)!(-1)^p}{(n-p)!\,p!\,p!2^{p+1}}\left\{(1-z)^p+(-1)^n(1+z)^p\right\}$

سوال 17) نشان دهید $arc\sin z=\frac{\pi}{2}\sum_{\circ}^{\infty}\left\{\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right\}^2\left\{p_{2n+1}(z)-p_{2n-1}(z)\right\}$

سوال 18) نشان دهید $\sin^n\theta\;\; p_n(\sin\theta)=\sum_{r=\circ}^{n}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}\cos^r\theta\, p_r(\cos\theta)$

سوال 19) ثابت کنید $\prod_{s=1}^{\infty}\frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$

سوال 20) نشان دهید $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_{\circ}^{1}\frac{1-(1-t)^n}{t}dt$

سوال 21) نشان دهید

$$(s>1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^s}+\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)\right]$$

سوال 22) اگر $(m,n>\circ)\qquad a_{m,n}=\frac{m-n}{2^{m+n}}\frac{(m+n-1)!}{m!n!}$

و $a_{\circ,\circ}=\circ \quad , \quad a_{m,\circ}=2^{-m} \quad , \ a_{\circ,n}=-2^{-n}$

نشان دهید $\sum_{m=\circ}^{\infty}\left(\sum_{n=\circ}^{\infty}a_{m,n}\right)=-1 \quad , \quad \sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\sum_{m=\circ}^{\infty}a_{m,n}\right)=1$

سوال 23) در مورد همگرايي يا واگرايي $\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1.3....(2n-1)}{2.4.\ ...2n}.\frac{4n+3}{2n+2}\right\}^2$ بحث كنيد

سوال 24) در مورد همگرايي يا واگرايي $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-n\log\frac{2n+1}{2n-1}\right\}$ بحث كنيد

سوال 25) ثابت كنيد

$$\left\{1+\left(\frac{k}{x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{2\pi-x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{2\pi-x}\right)\right\}^2\left\{1+\left(\frac{k}{4\pi-x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{4\pi+x}\right)^2\right\}...=\frac{\cosh k-\cos x}{1-\cos x}$$

سوال 26) ثابت كنيد كه $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)=\frac{6}{\pi^2}$ كه n, p_n امين عدد اول مي باشد

سوال 27) فرض كنيد $a_n>\circ$ و a_n صعودي باشد. نشان دهيد $\sum_{n=1}^{\infty}arc\cos^2\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ همگراست اگر و تنها اگر

$\{a_n\}$ كراندار باشد.

سوال 28) فرض كنيم تابع f روي فاصله $[1,+\infty)$ مثبت و صعودي باشد و وقتي $x\to\infty$ ، $f(x)\to+\infty$ ثابت كنيد كه سريهاي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ f^{-1}(n)$$

بطور يكسان همگرا خواهند بود.

سوال 29) ثابت كنيد كه دو خاصيت زير از دنباله $\{a_n\}$ هم ارز هستند.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < \infty$

ب) اگر سري $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سري $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ هم همگراست.

سوال 30) فرض کنيم $\{b_n\}$ دنباله اي باشد که $b_n > 0$ ؛ $\forall n \in N$ ، ثابت کنيد.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1+b_{n+1}}{b_n}$ واگراست.

سوال 31) فرض کنيم $n \in N$ و $t \in [0, n]$ نامساوي زير

را ثابت کنيد ؟
$$0 \le e^{\frac{-t^2}{(2n)}} - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{\sqrt{en}}$$

سوال 32) فرض کنيم براي هر $n \in N$ و $a_n > 0$ سري $\sum a_n$ همگرا باشد. ثابت کنيد $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1, a_2 \ldots a_n}$ و

سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ واگراست .

سوال 33) فرض کنيم تابع f روي R تعريف شده باشد. اگر براي هر سري همگراي $\sum a_n$ ، سري $\sum f(a_n)$ همگرا باشد آنگاه در يك همسايگي صفر $f(x) = Cx$

سوال 34) فرض کنيد a_n دنباله اي نزولي و مثبت باشد و $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$. ثابت کنيد که

$\int_0^{\pi} |g(x)| dx < +\infty$ است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$

سوال 35) ثابت کنيد که : $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n^2]{1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots n^n}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{e}}}$

سوال 36) فرض كنيم $0<a<b$, K مجموعه همه توابع مانند f باشد كه روي فاصله $[a,b]$ غير منفي و ناصعودي بوده و $\int_a^b f(x)dx=1$, $a f(a)=b f(b)$

باشد ثابت كنيد كه ، براي هر تابع g, f در K نامساوي

$$\int_a^b \max\left(f(x),g(x)\right)dx\le\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

برقرار است . براي چه نوع توابعي تساوي حاصل مي شود؟

سوال 37) فرض كنيم $f(x)$ روي قطعه $[a,b]$ پيوسته ديفرانسيل پذير باشد و $f(a)=0$ نامساوي

$$M^2\le(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx$$

را ثابت كنيد كه در آن

$$M=\sup_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|$$

سوال 38) تساوي زير را ثابت كنيد

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx \qquad (a,b>0)$$

به فرض آنكه انتگرال سمت چپ با معنا باشد

سوال 39) مطلوب است محاسبه

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left|x-a_1\right|^{p_1}\left|x-a_2\right|^{p_2}\ldots\left|x-a_n\right|^{p_n}}$$

سوال 40)مثالي در نظر بگيريد كه $\int_a^{+\infty} f(x)dx<\infty$ ولي $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq 0$

راهنمايي : انتگرال $\int_0^{\infty}\sin\left(x^2\right)dx$ را در نظر بگيريد.

سوال 41) اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ انتگرال پذير باشند در آن صورت آيا حتماً تابع $f\left(g(x)\right)$ نيز انتگرال پذير است.

راهنمايي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0 \quad if\\ 1 & x\neq 0 \quad if\end{cases}$$

سوال 42) هرگاه $f(x)\in c^{(1)}[a,+\infty)$ و $\left|f'(x)\right|<c$ به ازاي $a<x<\infty$ و $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ همگرا باشد. ثابت كنيد كه $f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$

راهنمايي : انتگرال زير را در نظر بگيريد.

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$

سوال 43) اگر $f(x)$ روي بازه $[a,b]$ كراندار و محدب به طرف بالا باشد ثابت كنيد

كه $(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

سوال 44) ثابت كنيد كه هرگاه $|a_n| < \dfrac{\pi}{4}$ آنگاه $\prod\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{4} + a_n\right)$ وقتي همگراست كه سري $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراي مطلق باشد

سوال 45) ثابت كنيد $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ همگراست هر گاه $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ همگرا باشد.

سوال 46) ثابت كنيد هرگاه $f(x)$ روي $(\circ,\infty)$ انتگرال پذير باشد ثابت كنيد

$$\lim_{a\to\circ} \int_{n=1}^{\infty} e^{-ax} f(x)dx = \int_{\circ}^{\infty} f(x)dx$$

سوال 47) همگرايي سري $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{r(n)}{n^2}$ را كه در آن $r(n)$ تعداد ارقام عدد n است بررسي كنيد

سوال 48) نشان دهيد كه حاصلضرب $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ كه در آن

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}} & n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}} & n = 2k \end{cases}$$

همگراست با اينكه سري هاي $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ واگراست .

سوال 49) اتحاد زير را ثابت كنيد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n!\, n} = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{n!}$$

سوال 50) فرض كنيد كه سري $c_1+2c_2+3c_3+\dots+nc_n+\dots$ همگرا باشد آنگاه نشان دهيد سري

$c_n+2c_{n+1}+3c_{n+2}+4c_{n+3}\dots=t_n$ همگراست و همچنين $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \circ$

سوال 51) فرض كنيد $q_1, q_2, q_3, \dots q_n, \dots, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n,\dots}$ دو دنباله از اعدا مثبت باشد و براي هر كدام داشته باشيم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{np_n} = \alpha \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{q_1+q_2+\dots+q_n}{nq_n} = \beta$$

و همچنين $\alpha+\beta>\circ$ ثابت كنيد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_1q_1+2p_2q_2+\dots+np_nq_n}{n^2p_nq_n} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

سوال 52) ثابت كنيد $f(z)=1+\dfrac{z^2}{3}+\dfrac{z^4}{5}+\dfrac{z^6}{7}+\dots$ در معادله تابعي صدق مي كند

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)=\left(1+z^2\right) f(z)$$

سوال 53) تساوي زيرا را بدست آوريد.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+q^{2n-1}z\right)\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right)\left(1-q^{2n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q \quad + b \; {}^{n^2} z^n \quad ; |q|<1$$

سوال 54) ثابت كنيد كه تابع n بار مكرر سينوس

$\sin_1 x = \sin x \quad , \quad \sin_n x = \sin\left(\sin_{n-1} x\right)$ وقتي كه $n\to\infty$ همگرا به صفر است كه در اينجا $\sin x>\circ$ ، علاوه بر اين $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{3}}\, \sin_n x = 1$

سول 55) فرض كنيد $|q|<1$. تعريف كنيد

$$G(z)=\frac{1}{1-q}(1-z)+\frac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+\frac{q^3}{1-q^3}(1-z)(1-qz)\left(1-q^2z\right)+\dots$$

ثابت كنيد تابع $G(z)$ در تساوي زير صدق مي كند

$$1+G(z)-G(qz)=(1-qz)\left(1-q^2z\right)\left(1-q^3z\right)\dots$$

سوال 56) دو دنباله $p_\circ, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, $q_\circ, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_\circ + q_1 + \ldots + q_{n-1} + q_n} = \circ \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_\circ + p_1 + \ldots + p_{n-1} + p_n} = \circ$$

دنباله جديد زير را تعريف مي كنيم

$$r_n = p_\circ q_n + p_1 q_{n-1} + p_2 q_{n-2} + \ldots + p_n q_\circ \quad , \quad n = \circ, 1, 2, \ldots$$

ثابت كنيد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{r_\text{o} + r_1 + r_2 + \ldots + r_n} = \text{o}$

سوال 57) فرض كنيد $p_p, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ يك دنباله از اعداد مثبت باشد كه در شرط زير صدق مي كند.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_\circ + p_1 + \ldots + p_n} = \circ$$

ثابت كنيد اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ موجود باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_\circ p_n + s_1 p_{n-1} + \ldots + s_n p_\circ}{p_\circ + p_1 + \ldots + p_n} = s$$

سوال 58) قرار مي دهيم $n = \circ, 1, 2, \ldots$, $s_n = a_\circ + a_1 + \ldots + a_n$ اگر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_\circ + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = s$$

آنگاه ثابت كنيد

$$\lim_{t\to 1} \left(a_\circ + a_1 t + a_2 t_2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \right) = s$$

سوال 59) اگر سري $a_\circ + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = s$ همگرا باشد آنگاه

$\lim\limits_{t\to 1} \left(a_\text{o} + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots \right) = s$ را ثابت كنيد.

سوال 60) تابع بسل از مرتبه صفر را به صورت زير تعريف مي كنيم

$$j_\circ(x) = 1 - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots + \frac{(-1)^m}{m!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \ldots$$

ثابت كنيد

$$\int_0^\infty j_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

سوال 61) فرمول زیر را ثابت کنید

$$e^x - 1 = u_1 + u_1u_2 + u_1u_2u_3 + \dots \quad \text{که} \quad u_{n+1} = \log\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}$$

و $n = 1, 2, 3, \dots, u_1 = x \geq 0$

سوال 62) فرض کنید n يك عدد صحيح مثبت باشد آنگاه ثابت کنید

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}$$

سوال 63) ثابت کنید براي $0 < q < 1$ داریم

$$\frac{1-q}{1+q}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{8}}\dots = (1-q)^2$$

سوال 64) به ازاي کدام مقادیر مثبت α سري زير همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2 - e^{\alpha}\right)\left(2 - e^{\alpha/2}\right)\dots\left(2 - e^{\alpha/n}\right)$$

سوال 65) ثابت کنید $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$

سوال 66) اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ آنگاه ثابت کنید

$$\lim_{t\to\infty}\left(s_0 + \frac{s_1 t}{1!} + S_2\frac{t^2}{2!} + \dots + S_n\frac{t^n}{n!} + \dots\right)e^{-t} = s$$

سوال 67) فرض کنید مجموع $a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = s$ موجود باشد و تعریف کنید

$$g(t) = a_0 + a_1\frac{t}{1!} + a_2\frac{t^2}{2!} + \dots + a_n\frac{t^n}{n!} + \dots$$

آنگاه ثابت کنید $\int_{\circ}^{\infty} e^{-t}\, g(t)\, dt = S$

سوال 68) دو دنباله داده شده $b_\circ, b_1, b_2, \ldots$, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ در شرايط زير صدق مي کند؛ $\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n t^n$

براي هر مقدار t همگراست $b_n > \circ$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = S$ آنگاه ثابت کنيد

$a_\circ + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$ متناوب است و همچنين به ازاي هر t داريم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_\circ + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots}{b_\circ + b_1 t + b_2 t^3 + \ldots + b_n t^n + \ldots} = s$$

سوال 69) نشان دهيد که $\lim_{t\to 1} \sqrt{1-t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(t^n - 2t^{2n} \right)$ وجود دارد و منفي است

سوال 70) فرض کنيد $a_n > \circ$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = \circ$ و سري $a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots$ و اگرا باشد. قرار دهيد $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_n$, $[S_n]$ را به اين صورت تعريف کنيد « بزرگترين عدد صحيحي که S_n از آن بزرگتر يا مساوي است» نقاط حدي دنباله $S_1 - [s], S_2 - [S_2], \ldots, S_n - [s_n], \ldots$ را پيدا کنيد.

سوال 71) فرض کنيد اعضاي دنباله $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ در شرايط زير صدق کنند

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1$$

سپس ثابت کنيد $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = w$ که w متناهي است و ما داريم

$$wn - 1 < a_n < wn + 1$$

سوال 72) فرض کنيد اعضاي دنباله $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, \ldots$ در شرايط زير صدق کنند

$$a_{m+n} \le a_m + a_n \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

سپس ثابت کنيد که دنباله $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{n}, \ldots$ به کرانه پاييني اش متقارب است يا حتماً به $-\infty$ واگراست .

سوال 73) فرض کنيد $\sigma > \circ$ اگر سري $a_1 1^{-\sigma} + a_2 2^{-\sigma} + a_3 3^{-\sigma} + \ldots + a_n n^{-\sigma}$ همگرا باشد سپس ثابت کنيد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^{-\sigma}} = \circ$$

سوال 74) قرار دهید $f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$ و از نا مساوی

$|a_n|\le n \qquad , \qquad n=1,2,3,\ldots$ نتیجه بگیرید $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\le\dfrac{1+z}{1-z}$

سوال 75) فرض کنیدسري تواني $f(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+\ldots a_n\,x^2+\ldots$ براي $x=1$ همگرا باشد و فرض کنیم $\circ<\alpha<1$ باشد. سپس ثابت کنید سري تواني

$f(\alpha)+\dfrac{f'(\alpha)}{1!}h+\dfrac{f''(\alpha)}{2!}h^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n+\ldots$ براي $h=1-\alpha$ همگراست.

سوال 76) فرض کنید n,k نشانگر دو عدد صحیح باشد و q يك متغير باشد. ضريب دو جمله اي گوسي را به صورت زير تعريف مي کنيم

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{1-q^2}{1-q}.\frac{1-q^{n-1}}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k}$$

که $1\le k\le n$ و براي $k=\circ$ داريم $\begin{bmatrix} n \\ \circ \end{bmatrix}=1$ ، اگر k يك عدد صحيح نباشد يا در نامساوي $\circ\le k\le n$ صدق نکند ما $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ را برابر صفر قرار مي دهيم

در ابتدا فرض کنيم q مخالف ريشه هاي مخرج کسر باشد

نشان دهيد که $\lim\limits_{q\to1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

نشان دهيد $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$ همچنين توجه کنيد که $k=\circ$ را مي توانيد انتخاب کنيد و به مساوي $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ \circ \end{bmatrix}$ دست پيدا کنيد .

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k-1}x\right)=\sum_{k=\circ}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k$$

ثابت کنيد

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}q^{n-k+1}$$

سوال 77) ثابت کنيد

$$\left(1+\xi\right)\left(1+\xi^2\right)\left(1+\xi^3\right)\left(1+\xi^4\right)\ldots=\frac{1}{\left(1-\xi\right)\left(1-\xi^3\right)\left(1-\xi^5\right)}\ldots..$$

سوال 78) فرمول عمومي اي براي a_n پيدا كنيد

$$\left(1+q\xi\right)\left(1+q\xi^2\right)\left(1+q\xi^4\right)\left(1+q\xi^8\right)\ldots=a_\circ+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\ldots$$

سوال 79) اتحاد زير را ثابت كنيد

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-a^{n-1}\right)\ldots\left(1-a^{n-k+1}\right)}{1-a^k}=n \qquad n=1,2,\ldots$$

سوال 80) درستي اتحاد زير را نشان دهيد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{n-1}x^n\right)}{n!n}=e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

سوال 81) ثابت كنيد

$$\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^5}\ldots=\sum_{n=\circ}^{\infty} q^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)} \qquad |q|<1$$

سوال 82) ثابت كنيد $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n+n}{2}}$ كه $|q|<1$

سوال 83) اگر $\left(a_1-a_n\right)+\left(a_2-a_n\right)+\ldots+\left(a_{n-1}-a_n\right)$ وقتي كه $n\to\infty$ كراندار باشد آنگاه لازم نيست كه سري $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ متناوب باشد ولي اگر شرايط

$a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots \quad , \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\circ$ را به شرط بالا اضافه كنيم ثابت كنيد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

سوال 84) اگر $I=\left[a_1,b_1\right]\times\ldots\left[a_{n-1},n_{n-1}\right]\times\left[a_n,b_n\right]$ يك حجره بسته در R^n باشد، نشان دهيد كه

$$S\left(I\right)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

منظور از δ همان قطر است

مسائلی از آنالیز
1,2

مولفان
حسن جولانی
اکبر صدیقی(عضو هیات علمی دانشگاه آزاد تبریز)