« پیشگفتار مؤلف »

نام « آنالیز حقیقی » تا حدودی یک خطای تاریخی است. در بدو امر برای نظریهٔ توابع یک متغیرهٔ حقیقی به کار می‌رفت. به تدریج موضوعات متعددی از عالم مجرد وکلی‌تری را در برگرفت که سنگ بنای آنالیز نوین را تشکیل می‌دهند. موضوع کتاب حاضر همین نظریه‌های کلی و کاربردهای آنها است و در وهلهٔ اول، به عنوان کتابی برای درس آنالیز دورهٔ کارشناسی ارشد در نظر گرفته شده است. فصول ۱ تا ۷ به موارد زیر اختصاص یافته‌اند: مطالب بنیادی نظریهٔ اندازه و انتگرال، توپولوژی نقطه مجموعه ای و آنالیز تابعی که بخش عمدهٔ برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ کارشناسی ارشد است، به اضافهٔ اندکی موضوعات مرتبط اما نا متعارف‌که تصور می‌کنم هر پژوهشگری باید با آنها آشنا باشد. چهار فصل آخر شامل مباحث گوناگونی است که حکایت از برخی قسمت‌های دیگر آنالیز دارند و استفاده از مطالب قبلی را شرح می دهند. تصور می‌کنم این مطالب همگی جالب و مهم هستند اما انتخاب هر یک از آنها به جای دیگری اساساً یک موضوع شخصی است و به علاقهٔ شخص بستگی دارد. دانستن مطالب زیر برای خوانندگان این‌کتاب ضروری است:

۱) نظریهٔ کلاسیک توابع یک متغیرهٔ حقیقی بر هر چیزی مقدم است: حد و پیوستگی، مشتق و انتگرال (ریمان)، سری های نامتناهی، همگرایی یکنواخت، و مفهوم یک فضای متری.

۲) حساب اعداد مختلط و خواص اساسی تابع نمایی

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y).$$

۳) قدری مقدمات نظریهٔ مجموعه‌ها.

۴) مقداری جبر خطی ـ عملاً چیزی بیش از تعریف فضای برداری، نگا شت‌های خطی و دترمینان‌ها لازم نیست.

همهٔ مطالب مورد نیاز ذکر شده در (۱) و (۲) را می توان درکتاب آنالیز ریا ضی رودین، یا روش‌های آنالیز جونز و بارتل یا آنالیز حقیقی و ریشه‌های آن از اس. جی. کرانتز یافت. در فصل صفر، خلاصه‌ای از احکام مطرح در نظریهٔ مجموعه‌ها و فضاهای متری آمده است. خواننده برای شروع این‌کتاب باید بندهای ۰.۱ و ۰.۵ را مطالعه کند تا با نمادگذاری و اصطلاحات آشنا شود؛ بنابر این از فصل صفر می توان به عنوان ملزومات یادکرد.

هر فصل به بخشی تحت عنوان به « یادداشت ها و مراجع » ختم می‌شود. این بخش‌ها تذکرات گوناگون، تأیید مآخذ علامات و احکام ذکر نشده در متن، مراجع برای مطالعهٔ بیشتر و یادداشت‌های تاریخی را در بر می‌گیرند. موارد اخیر نسبتاً اجمالی هستند، با این وجود، گویای فراهم بودن مآخذ مفصل‌تر هستند؛ این موارد عمدتاً چشم اندازی از چگونگی شکل‌گیری موضوعات از مبادی کلاسیک آنها پیش رو می‌گذارند. دریافته‌ام که خواندن برخی از مقالات قدیمی خوشایند و آموزنده است. امیدوارم انگیزه‌ای برای خواندن مقالات قدیمی در شما ایجادکرده باشم.

بخش قابل ملاحظه‌ای از این کتاب به تمرین‌ها اختصاص یافته است. بیشتر تمرین‌ها در قالب گزاره‌هایی آمده‌اند که باید اثبات شوند، و از بدیهی تا دشوار چیده شده‌اند. برای آن دسته از تمرین‌هایی که پیچیده‌تر هستند راهنمایی و مراحل میانی آورده‌ام. تمام خوانندگان باید آنها را به دقت بخوانند، گرچه فقط خوانندگان سخت‌کوش به خواندن همهٔ آنها مبادرت خواهند ورزید. این تمرین‌ها معضلات گوناگونی را از پیش رو برمی‌دارند: تفصیل و تکمیل برهان‌ها، طرح مثال‌ها و مثال‌های نقض، کاربرد قضایا، و گسترش بیشتر ایده‌ها از جملهٔ این موارد هستند. احتمالاً، مدرسین برخی از تمرین‌ها را در کلاس حل خواهند کرد؛ برای « انعطاف هرچه بیشتر و مخلص‌کلام» به این اصل تأسی جسته‌ام که « در صورتِ تردید در هر چیز، آن را به عنوان یک تمرین واگذار کنم »، به ویژه این امر در مورد مثال‌ها مشهود است. تمرین‌ها را در انتهای هر بخش آورده‌ام، اما داخل هر فصل به طور متوالی شماره‌گذاری شده‌اند. در مراجعه به تمرین‌ها، « تمرین n » به معنی nاُمین تمرین در فصل جاری است، در غیر این صورت، بخش مورد نظر مشخص شده است.

مباحث این کتاب به گونه‌ای پیوند خورده‌اند که در ارائهٔ آنها آزادی وجود دارد. فصول۴ و ۵ ربطی به فصل‌های ۱ تا ۳ ندارند به جز در پاره‌ای از مثال‌ها و تمرین‌ها. از سوی دیگر، چنانچه کسی بخواهد سریعاً به نظریهٔ L^p برسد، می‌تواند از بند های۳.۳ تا ۵.۱ صرفِ نظر کرده و سپس به فصل (۶) برسد. فصول۱۰ و ۱۱ از فصل‌های ۸ و ۹ مستقل هستند به‌جز اینکه ایده‌های بند ۶. ۸ در فصل۱۰ به کار رفته‌اند.

ویژگی‌های این ویرایش عبارتند از:

- مبحث انتگرال لبگ n ــ بعدی مطرح گردیده و گسترده شده است (بندهای۲.۶ و۲.۷).
- قضیهٔ تیخونف (بند۴.۷) به کمک استدلال زیبایی‌که اخیراً توسط پائول چرنوف کشف شده است اثبات گردیده است.
- فصل آنالیز فوریه به دو فصل ۸ و ۹ تفکیک شده است. موضوع سری‌ها و انتگرال‌های فوریه (بندهای۸.۳ تا ۸.۵) مطرح گردیده و ویرایش جدید قضیهٔ جردن ـ دیریکله برای همگرایی سری‌های
فوریه را نیز دربردارد. موضوع توزیع ها (بند های۹.۱ و۹.۲) از هر نظر بازنویسی شده است.
- بخشی در مورد خود تشابهی و بُعدهای هاسدورف (بند۱۱.۳) به جای محاسبهٔ منسوخ بعدهای هاسدورف مجموعه های کانتورکه در بند۱۰.۲ از ویرایش قدیم آمده بود افزوده شده است.

نویسندهٔ یک کتاب، آن هم در مورد موضوعات پخته‌ای نظیر آنالیز حقیقی لزوماً باید مرهون پیشینیانش باشد. وقتی این کتاب را می‌نوشتم کتاب‌های زیادی در اختیار داشتم؛ تعداد آنها فراتر از این است که فهرستی از آنها بیاورم، اما اکثر آنها درکتابخانه‌ها یافت می‌شوند. صمیمانه از اساتید بزرگوارم سپا سگزاری می‌کنم:
از شادروان لین لومیس به‌خاطر سخنرانی‌هایشان که اولین بار این موضوع را از ایشان آموختم، و از الیاس اشتاین، کسی که در شکل گیری دیدگاهم بسیار موثر بود. بالاخره از اشخاصی‌که مرا در نو شتن این کتاب یاری کردند بسیار متشکرم بالاخص استیون کرانتز، کِنت رز، و ویلیام فاریس که نظرات آنها و نیز غلط گیری چاپی ویرایش نخست مرا در تدوین کتاب حاضر یاری کرد.

جرالد. بی. فولند

سیاتل، واشنگتن

فهرست

فصل چهارم توپولوژی نقطه مجموعه

فصل پنجم مقدمات آنالیز تابعی

فصل ششم فضاهای L^p

فصل صفر
سرآغاز

هدف از این فصل مقدماتی، تثبیت نمادگذاری و اصطلاحات به کار رفته در خلال کتاب و ارائه احکام متعددی از نظریهٔ مجموعه‌ها و آنالیز است که بعداً لازم خواهند شد. نامگذاری‌های این فصل مدبرانه و شسته رفته هستند، زیرا این فصل علاوه بر یک شرح منظم، به عنوان یک مرجع به‌کار برده می‌شود.

۰.۱ زبان نظریه مجموعه‌ها

فرض بر این است که خواننده با مباحث بنیادی نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا است؛ شرح زیرین در اصل به منظور تثبیت اصطلاحات است.

دستگاه‌های اعداد. نمادگذاری مورد استفاده در این کتاب برای دستگاه‌های بنیادی اعداد به صورت زیر است:

$\mathbb{N} =$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت (شامل صفر نیست)
$\mathbb{Z} =$ مجموعهٔ اعداد صحیح
$\mathbb{Q} =$ مجموعهٔ اعداد گویا
$\mathbb{R} =$ مجموعهٔ اعداد حقیقی
$\mathbb{C} =$ مجموعهٔ اعداد مختلط

منطق. استفاده از علائم ویژهٔ منطق ریاضی را کنار گذاشته و ترجیح می دهیم که از نمادهای متعارف انگلیسی استفاده کنیم. یکی از نکات مقدماتی منطق که اغلب توسط دانشجویان کم اهمیت شمرده می‌شود این است که: اگر A و B دو حکم ریاضی و $-A$ و $-B$ نقیض‌های آنها باشند، آنگاه عبارت « A ایجاب می کند B را » به طور منطقی با عکس نقیض آن یعنی « $-B$ ایجاب می کند $-A$ را » هم ارز است. بنابر این می توان با فرض درستی $-B$ و نتیجه گرفتن $-A$، گزارهٔ «اگر A، آنگاه B » را اثبات کرد و بارها چنین خواهیم کرد. این با برهان خلف یکی نیست. برهان خلف شامل فرض A و $-B$ و استخراج یک تناقض است.

مجموعه‌ها. همواره برای پرهیز از شبههٔ «مجموعهٔ مجموعه‌ها» واژگان «خانواده» و «گردایه» مترادف «مجموعه» به کار خواهند رفت. مجموعهٔ تهی با نماد $\varnothing$ و خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای چون X با $\mathcal{P}(X)$ نشان داده می‌شود، یعنی،

$$\mathcal{P}(X) = \{E : E \subset X\}.$$

همه جا علامت $\subset$ به معنی ضعیف تلقی می‌شود، یعنی، عبارت «$E \subset X$» امکان $E = X$ را سلب نمی‌کند.

چنانچه $\mathcal{E}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، می‌توانیم اجتماع و اشتراک اعضایش را تشکیل دهیم:

$$\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E = \{x : x \in E, E \in \mathcal{E} \text{ به ازای عضوی چون}\},$$

$$\bigcap_{E\in\mathcal{E}} E = \{x : x \in E, E \in \mathcal{E} \text{ به ازای هر}\}.$$

معمولاً در نظرگرفتن خانواده‌های اندیسدار از مجموعه‌ها کار با مجموعه‌ها را تسهیل می‌کند:

$$\mathcal{E} = \{E_\alpha : \alpha \in A\} = \{E_\alpha\}_{\alpha\in A},$$

که در این حالت اجتماع و اشتراک با

$$\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha \text{ و } \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$$

نشان داده می‌شوند. چنانچه $\alpha \neq \beta$ ایجاب کند که $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$، مجموعه‌های E_α مجزا نامیده می‌شوند. جملات «گردایهٔ مجزایی از مجموعه‌ها» و «گردایه‌ای از مجموعه‌های مجزا» همانند «اجتماعی مجزا از مجموعه‌ها» و «اجتماعی از مجموعه‌های مجزا» هم معنی هستند.

هنگام در نظرگرفتن خانواده‌های مجموعه‌های اندیسگذاری شده با $\mathbb{N}$، نمادگذاری چنین خواهد بود:

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ یا } \{E_n\}_1^{\infty}$$

و نمادهای مشابهی برای اجتماع‌ها و اشتراک‌ها به‌کار برده می‌شوند. در این باره، گاهی اوقات مفاهیم حداعلی و حداسفل به‌کار می‌آیند:

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \text{ و } \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

خواننده می‌تواند درستی تساوی‌های زیر را بررسی کند:

$$\limsup E_n = \{x : x \in E_n \text{ به ازای تعدادی نامتناهی از } n \text{ ها}\},$$

$$\liminf E_n = \{x : x \in E_n \text{ به ازای همهٔ } n \text{ ها به جز تعداد متناهی از آنها}\}.$$

هرگاه E و F مجموعه‌هایی دل‌خواه باشند، تفاضل آنها را با $E \setminus F$ نشان می‌دهیم:

$$E \setminus F = \{x : x \in E, x \notin F\}$$

تفاضل متقارن آنها را با $E\Delta F$ نشان می‌دهیم:

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

وقتی به وضوح معلوم شود که همهٔ مجموعه‌های مورد نظر زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعهٔ ثابت مانند X هستند، متمم E^c از E (در X) را تعریف می‌کنیم:

$$E^c = X \setminus E.$$

در چنین وضعیتی، قوانین دمرگان را داریم:

$$(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha^c, \quad (\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha^c.$$

اگر X و Y دو مجموعه باشند، **حاصلضرب دکارتی** $X\times Y$ مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب (x,y) است به طوری که $x\in X$ و $y\in Y$. یک **رابطه** از X به Y یک زیرمجموعه از $X\times Y$ است. (اگر $X=Y$، از یک رابطه روی X سخن می‌گوییم.) اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، گاهی اوقات xRy را به معنی $(x,y)\in R$ خواهیم نوشت.

مهمترین نوع روابط عبارتند از:

- **روابط هم ارزی.** یک رابطهٔ هم ارزی روی X رابطه‌ای چون R روی X است به‌طوری که

به ازای هر $x\in X$، xRx

xRy اگر و تنها اگر yRx

xRz هرگاه به ازای عضوی چون y، xRy و yRz.

ردهٔ هم‌ارزی عضوی چون x، $\{y\in X : xRy\}$ است. X اجتماع مجزای همین رده‌های هم‌ارزی است.

- **ترتیب‌ها.** بند ۲.۰ را ببینید.
- **نگاشت‌ها.** نگاشتی چون $f: X\to Y$ رابطه‌ای مانند R از X به Y است با این خاصیت که به ازای هر $x\in X$ عضو یکتایی چون $y\in Y$ وجود داشته باشد به‌طوری که xRy که در این حالت می‌نویسیم $y=f(x)$. گاهی اوقات نگاشت‌ها را **نگاره‌ها** یا **توابع** نیز می‌نامیم. بیشتر نام اخیر را برای حالتی به کار می‌بریم که Y مجموعهٔ $\mathbb{C}$ یا زیرمجموعه‌ای از آن باشد.

اگر $f: X\to Y$ و $g: Y\to Z$ دو نگاشت باشند، ترکیب آنها را با $g\circ f$ نشان می‌دهیم:

$$g\circ f: X\to Z, \quad g\circ f(x) = g(f(x)).$$

اگر $D\subset X$ و $E\subset Y$، **تصویر** D و **تصویرمعکوس** E تحت نگاشتی چون $f: X\to Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(D) = \{f(x) : x\in D\}, \quad f^{-1}(E) = \{x : f(x)\in E\}.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که نگاشت $f^{-1}: \mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)$ که با فرمول دوم تعریف شد با اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌ها جابه‌جا می‌شود، یعنی:

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha),$$
$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c.$$

(نگاشت تصویر مستقیم $f: \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ با اجتماع‌ها جابه‌جا می‌شود، اما در حالت کلی با اشتراک‌ها و متمم‌ها جابه‌جا نمی‌شود.)

اگر $f: X\to Y$ یک نگاشت باشد، X **دامنهٔ** f و $f(X)$ **برد** f نامیده می‌شود. f **یک به یک** خوانده می‌شود هرگاه $f(x_1)=f(x_2)$ فقط وقتی برقرار باشد که $x_1=x_2$ و **پوشا** نامیده می شود هرگاه $f(X)=Y$ و **دوسویی** است هرگاه

هم یک به یک و هم پوشا باشد. اگر f یک به یک باشد، آنگاه وارونی مانند $f^{-1} : Y \to X$ دارد به طوری که $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ به ترتیب نگاشت‌های همانی روی X و Y هستند. اگر $A \subset X$، تحدید f به A را با $f|_A$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$(f|_A) : A \to Y, \ \ (f|_A)(x) = f(x) \ \ (x \in A).$$

یک دنباله در مجموعه‌ای چون X، نگاشتی از $\mathbb{N}$ به توی X است. عبارت **دنبالهٔ متناهی** را نیز به معنی نگاشتی از $\{1,\ldots,n\}$ به توی X به‌کار می‌بریم که در آن $n \in \mathbb{N}$. چنانچه $f : \mathbb{N} \to X$ یک دنباله باشد و $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ طوری باشدکه اگر $n < m$، آنگاه $g(n) < g(m)$، ترکیب $f \circ g$ یک **زیردنباله** از f نامیده می‌شود. اغلب نادیده انگاشتن تمایز بین دنباله‌ها و بردهایشان که زیرمجموعه‌هایی اندیسگذاری شده با $\mathbb{N}$ از X هستندکار را راحت می کند و چنین چیزی مرسوم است. بنابر این اگر $x_n = f(n)$، از دنبالهٔ $\{x_n\}_1^\infty$ سخن می گوییم؛ چه آن را به معنی نگاشتی از $\mathbb{N}$ به X درنظر بگیزیم چه زیرمجموعه‌ای از X، از متن مشخص خواهد شد.

قبلاً حاصلضرب دکارتی دو مجموعه را تعریف کردیم. به طور مشابه حاصلضرب دکارتی n مجموعه را می‌توان برحسب n تایی‌های مرتب تعریف کرد. اما این تعریف درمورد خانواده‌های نامتناهی از مجموعه‌ها ناموزون می‌شود، لذا به جای آن تعریف زیر به کار می‌رود:

اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای اندیس‌دار از مجموعه‌ها باشد، **حاصلضرب دکارتی** آنها، یعنی $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌هایی چون $f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ است به طوری که به ازای هر $\alpha \in A$، $f(\alpha) \subset X_\alpha$. (باید توجه شود و سپس سریعاً فراموش شود که وقتی $A = \{1,2\}$ تعریف قبلی $X_1 \times X_2$ از دیدگاه نظریهٔ مجموعه ها با تعریف جدید $\prod_1^2 X_j$ تفاوت دارد. درواقع، مقولهٔ اخیر به نگاشت‌ها وابسته است که این نگاشت‌ها براساس تعریف قبل معرفی می‌شوند). اگر $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ و $\alpha \in A$، αاُمین **تصویر** یا **نگاشت مؤلفه‌ای** $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ را با $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$ تعریف می کنیم. به کرات به جای f و $f(\alpha)$ می‌نویسیم x و x_α. به x_α **مؤلفهٔ** αاُم x می‌گوییم.

اگر مجموعه‌های X_α همگی برابر مجموعهٔ ثابتی چون Y باشند، $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ را با Y^A نشان می‌دهیم:

$$Y^A = \text{مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های تعریف شده از } A \text{ به } Y$$

اگر $A = \{1,\ldots,n\}$، Y^A با Y^n نشان داده می‌شود و می‌توان آن را با مجموعهٔ همهٔ n- تایی‌های مرتب از اعضای Y یکی گرفت.

۰.۲ ترتیب‌ها

یک **ترتیب جزئی** روی مجموعه‌ای ناتهی مانند X رابطه‌ای مانند R روی X با خواص زیر است:

- اگر xRy و yRz، آنگاه xRz؛
- اگر xRy و yRx، آنگاه $x = y$؛
- به ازای هر x، xRx.

اگر R در خاصیت زیر نیز صدق کند، آنگاه R یک **ترتیب خطی** (یا **کلی**) نامیده می‌شود:

- اگر $x, y \in X$، آنگاه xRy یا yRx.

به‌عنوان مثال، اگر E یک مجموعه باشد، آنگاه $\mathcal{P}(E)$ با شمول جزئاً مرتب می‌شود و $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی خود به‌طور خطی مرتب است. مثال اخیر را به عنوان الگو درنظرگرفته و همواره ترتیب‌های جزئی را با $\leq$ نشان می‌دهیم و وقتی می‌نویسیم $x < y$ به این معناست که $x \leq y$ اما $x \neq y$. ملاحظه می‌کنیم که هر ترتیب جزئی روی X، به طور طبیعی یک ترتیب جزئی روی هر زیر مجموعهٔ ناتهی از X القا می‌کند. دو مجموعهٔ مرتب جزئی X و Y **ایزومورف ترتیبی** نامیده می‌شوند هرگاه یک دو سویی مانند $f : X \to Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_1 \leq x_2$ اگر و تنها اگر $f(x_1) \leq f(x_2)$.

اگر X با $\leq$ مرتب جزئی شده باشد، یک **عضو ماکسیمال** (متناظراً **مینیمال**) از X عضوی چون $x \in X$ است به‌طوری که تنها عضو $y \in X$ که در $x \leq y$ (متناظراً در $x \geq y$) صدق می‌کند خود x باشد. ممکن است اعضای ماکسیمال و مینیمال وجود داشته باشند و ممکن است وجود نداشته باشند و لزوماً یکتا نیستند مگر اینکه ترتیب خطی باشد. اگر $E \subset X$، یک **کران بالا** (متناظراً **پایین**) برای E عضوی چون x است به قسمی که به ازای هر $y \in E$، $y \leq x$ (متناظراً $x \leq y$.) یک کران بالا برای E لزوماً عضوی از E نیست و یک عضو ماکسیمال از E لزوماً یک کران بالا برای E نیست مگر اینکه E به طور خطی مرتب شده باشد. (خواننده بایستی مثال‌هایی را در ذهن خود بپرورد.)

اگر X به‌طور خطی با $\leq$ مرتب شده باشد و هر زیرمجموعهٔ ناتهی X یک عضوی مینیمال (نه لزوماً یکتا داشته باشد، آنگاه گفته می شود که X با $\leq$ جزئاً مرتب شده است، و به دلیل نارسایی نگارشی زبان $\leq$ یک **خوشترتیبی** روی X نامیده می‌شود. به عنوان مثال، $\mathbb{N}$ با ترتیب طبیعیش خوشترتیب است.

اکنون یک اصل بنیادی از نظریهٔ مجموعه‌ها را مطرح‌کرده و برخی نتایج آن را استخراج می‌کنیم.

۰.۱ اصل ماکسیمال‌هاسدورف. هرمجموعهٔ مرتب زیرمجموعهٔ مرتب خطی ماکسیمالی دارد.

معنی دقیق اصل مذکور این است که اگر X با $\leq$ جزئاً مرتب شده باشد، آنگاه مجموعه‌ای چون $E \subset X$ وجود داردکه با $\leq$ به طور خطی مرتب می شود به طوری که هیچ زیرمجموعه‌ای از X که به طور سره شامل E است با $\leq$ به‌طور خطی مرتب نمی‌شود.

۰.۲ لم زورن. اگر X مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و هر زیرمجموعهٔ مرتب خطی X دارای یک کران بالا باشد، آنگاه X یک عضو ماکسیمال دارد.

به وضوح اصل ماکسیمال هاسدورف لم زورن را نتیجه می‌دهد: هرکران بالا برای یک زیرمجموعهٔ مرتب خطی ماکسیمال X یک عضو ماکسیمال X است. ملاحظهٔ این مطلب نیز مشکل نیست که لم زورن اصل ماکسیمال هاسدورف را ایجاب می‌کند. (لم زورن را برای گردایهٔ زیرمجموعه‌های مرتب خطی X که با شمول جزئاً مرتب شده است به‌کار برید.)

۰.۳ اصل خوشترتیبی. هر مجموعهٔ ناتهی مانند X را می‌توان خوشترتیب کرد.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathcal{W}$ گردایهٔ زیرمجموعه‌های خوشترتیب X باشد و یک ترتیب جزئی به صورت زیر روی $\mathcal{W}$ تعریف می‌کنیم. اگر $\leq_1$ و $\leq_2$ خوشترتیب‌هایی روی زیر مجموعه‌های E_1, E_2 باشند، آنگاه $\leq_1$ در ترتیب جزئی از $\leq_2$ بیشتر است

هرگاه (الف) $\le_1$، $\le_2$ را توسیع دهد، یعنی $E_1 \subset E_2$ و $\le_1$ و $\le_2$ روی E_1 سازگار باشند و (ب) اگر $x \in E_2 \setminus E_1$، آنگاه به ازای هر $y \in E_1$، $y \le_2 x$. خواننده می‌تواند بررسی کند که مفروضات لم زورن محقق شده‌اند و لذا W یک عضو ماکسیمال دارد. این باید یک خوشترتیبی روی خود X باشد، زیرا اگر $\le$ یک خوشترتیبی روی زیر مجموعه‌ای سره مانند E از X باشد و $x_0 \in X \setminus E$، آنگاه $\le$ را با قید $x \le x_0$ برای هر $x \in E$ می‌توان به یک خوشترتیبی روی $E \cup \{x_0\}$ توسیع داد. ■

۰ . ۴ اصل انتخاب. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ناتهی است.

برهان. فرض می کنیم $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. یک خوشترتیبی روی X در نظرگرفته و به ازای $\alpha \in A$، $f(\alpha)$ را عضو مینیمال X_α می‌انگاریم. در این صورت $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. ■

۰ . ۵ نتیجه. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای مجزا از مجموعه های ناتهی باشد، مجموعه‌ای مانند $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ وجود دارد به‌قسمی‌که به ازای هر $\alpha \in A$، $Y \cap X_\alpha$ دقیقاً شامل یک عضو است.

برهان. $Y = f(A)$ را در نظرمی‌گیریم که در آن $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. ■

اصل انتخاب را از اصل ماکسیمال هاسدورف نتیجه‌گرفتیم؛ در واقع، می‌توان نشان دادکه این دو از نظر منطقی هم ارز هستند.

۰ . ۳ عدد اصلی

اگر X و Y مجموعه‌هایی ناتهی باشند، نمادهای

$$\operatorname{card}(X) \le \operatorname{card}(Y), \qquad \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y), \qquad \operatorname{card}(X) \ge \operatorname{card}(Y)$$

را این گونه معنی می کنیم که تابعی چون $f : X \to Y$ وجود داردکه به ترتیب (از چپ به راست) یک به یک، دوسویی، یا پوشا است. همچنین

$$\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(Y), \qquad \operatorname{card}(X) > \operatorname{card}(Y)$$

را به معنی وجود یک تابع یک به یک از X به Y که دو سویی نیست یا تابعی پوشا که دوسویی نیست تعریف می کنیم. روش‌های متعدد انجام چنین کاری وجود دارد، اما اینها به اهدافمان ارتباطی ندارند (به‌جز وقتی X متناهی است ـ توضیحات زیر را ببینید.) این روابط را می‌توان با قید زیر به مجموعهٔ تهی نیز تعمیم داد: به ازای هر $X \neq \varnothing$،

$$\operatorname{card}(\varnothing) < \operatorname{card}(X), \qquad \operatorname{card}(X) > \operatorname{card}(\varnothing).$$

در باقیماندهٔ این بخش برای پرهیز از استدلال در مورد $\varnothing$ به طور ضمنی فرض می‌کنیم که همهٔ مجموعه‌های مطرح شده ناتهی هستند. نخستین هدف، اثبات این مطلب است که روابط تعریف شده‌ی فوق با خواصی که از نمادگذاری برداشت می‌شود همخوانی دارند.

۰.۶ گزاره. $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$ اگر و تنها اگر $\operatorname{card}(Y) \geq \operatorname{card}(X)$.

برهان. اگر $f : X \to Y$ یک به یک باشد، $x_\circ \in X$ را برگزیده و $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ x_\circ, & y \notin f(X). \end{cases}$$

در این صورت g پوشا است. به‌عکس، اگر $g : Y \to X$ پوشا باشد، مجموعه‌های $g^{-1}(\{x\})$ $(x \in X)$ غیر تهی و مجزا هستند و لذا هر $f \in \prod_{x\in X} g^{-1}(\{x\})$ نگاشتی یک به یک از X به Y است. ■

۰.۷ گزاره. برای هر X, Y، یا $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$ یا $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$.

برهان. مجموعهٔ $\mathcal{J}$ متشکل از همهٔ نگاشت‌های یک به یک از زیرمجموعه‌های X به Y را در نظر می‌گیریم. به آسانی قابل استفاده بودن لم زورن در اینجا ملاحظه می‌شود، لذا $\mathcal{J}$ عضو ماکسیمالی مانند f دارد که دامنه و بردش مجموعه‌هایی مثل A و B هستند. اگر $x_\circ \in X \setminus A$ و $y_\circ \in Y \setminus B$، آنگاه با قرار دادن $f(x_\circ) = y_\circ$، f را می‌توان به یک نگاشت یک به یک از $A \cup \{x_\circ\}$ به $Y \cup \{y_\circ\}$ توسیع داد و این ماکسیمال بودن f را نقض می‌کند. بنابر این یا $A = X$ که در این حالت $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$، یا $B = Y$ که در این صورت f^{-1} یک نگاشت یک به یک از Y به X است و در نتیجه $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$. ■

۰.۸ قضیهٔ شرودر-برنشتاین. اگر $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$ و $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$، آنگاه
$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y).$$

برهان. فرض کنیم $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ دو نگاشت یک به یک باشند. نقطه‌ای چون $x \in X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر $x \in g(Y)$، $g^{-1}(x) \in Y$ را تشکیل می‌دهیم و اگر $g^{-1}(x) \in f(X)$، $f^{-1}(g^{-1}(x))$ را تشکیل می‌دهیم و الی آخر. یا این روال به طور نامعین ادامه می‌یابد، یا به عضوی از $X \setminus g(Y)$ ختم می‌شود (شاید به خود x ختم شود)، یا به عضوی از $Y \setminus f(X)$ ختم می‌شود. در این سه حالت می‌گوییم x در X_∞، X_X، یا X_Y است؛ بنابر این X اجتماع مجزای X_∞، X_X و X_Y است. به همین روش، Y اجتماع مجزای Y_∞، Y_X و Y_Y است. به وضوح f

مجموعهٔ X_∞ را بروی Y_∞ و X_X را بروی Y_X می‌نگارد، در حالی‌که g مجموعهٔ Y_Y را بروی X_Y می‌نگارد. بنابر این، اگر $h : X \to Y$ را به صورت

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_\infty \cup X_X, \\ g^{-1}(x) & x \in X_Y \end{cases}$$

تعریف کنیم، آنگاه h یک دوسویی است. ■

۰.۹ گزاره. به ازای هر مجموعه مانند X، $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(X))$.

برهان. از یک سو، نگاشت $f(x) = \{x\}$ از X به $\mathcal{P}(X)$ یک به یک است. از سوی دیگر، اگر $g : X \to \mathcal{P}(X)$ یک نگاشت باشد، قرار می دهیم $Y = \{x \in X : x \notin g(x)\}$. در این صورت $Y \notin g(X)$، زیرا اگر به ازای عضوی چون $x_\circ \in X$، $Y = g(x_\circ)$، آنگاه هر تلاش برای پاسخ به سؤال «آیا $x_\circ \in Y$؟» سریعاً با شکست مواجه می‌شود. بنابر این g نمی‌تواند پوشا باشد. ■

مجموعه‌ای چون X را **شمارش‌پذیر** (**حداکثر شمارش‌پذیر**) نامیم هرگاه $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N})$. به‌ویژه، همهٔ مجموعه‌های متناهی، شمارش‌پذیر هستند و به همین خاطر بهتر است «$\operatorname{card}(X)$» را به عنوان تعداد اعضای واقع در X تعبیر کنیم:

$$\operatorname{card}(X) = n \text{ اگر و تنها اگر } \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(\{1,\dots,n\})$$

اگر X شمارش‌پذیر اما نامتناهی باشد، می‌گوییم X **شمارش‌پذیر نامتناهی** است.

۱۰.۰ گزاره.

الف) اگر X و Y شمارش‌پذیر باشند، $X \times Y$ نیز شمارش‌پذیر است؛

ب) اگر A شمارش‌پذیر و به ازای هر $\alpha \in A$، X_α شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ شمارش‌پذیر است؛

ج) اگر X شمارش‌پذیر نامتناهی باشد، آنگاه $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$.

برهان. برای اثبات (الف) کافی است ثابت کنیم $\mathbb{N}^2$ شمارش‌پذیر است. اما می‌توان با فهرست‌کردن اعضا، یک دو سویی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}^2$ به صورت زیر تعریف کرد:

به ازای n که به طور متوالی $2, 3, 4, \dots$ اختیار می‌کند، اعضای $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ را فهرست می‌کنیم به طوری‌که $j + k = n$ و j درحال صعود است؛ یعنی،

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), \dots$$

امـا بـرای (ب)، بـه ازای هـر $\alpha \in A$، نگاشـتی پوشـا ماننـد $f_\alpha : \mathbb{N} \to X_\alpha$ وجـود داشـته و در نتیجـه نگاشـت $f : \mathbb{N} \times A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ که با $f(n,\alpha) = f_\alpha(n)$ تعریف می‌شود پوشا است. بنابراین، حکم از (الف) نتیجه می‌شود. بالاخره، برای (ج) کافی است X را زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم. فرض‌می‌کنیم $f(1)$ کـوچکترین عـضو X باشد و به طور استقرایی $f(n)$ را کوچکترین عضو $E \setminus \{f(1),\dots,f(n-1)\}$ تعریف می‌کنیم. در این صـورت بـه آسـانی دیده می‌شود که f یک دو سویی از $\mathbb{N}$ بروی X است. ■

۱۱. • نتیجه. $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ شمارش‌پذیر هستند.

برهان. $\mathbb{Z}$ اجتماع شمارش‌پذیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$ و $\{0\}$ است و می‌تـوان یـک نگاشـت پوشـا ماننـد $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$f(m,n) = \begin{cases} \dfrac{m}{n} & n \neq 0, \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

بدین ترتیب برهان کامل می‌شود. ■

گوییم مجموعه‌ای چون X دارای **عدد اصلی پیوستاری** است هرگاه $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. حرف c را به عنوان مخفّفی برای $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ به‌کار خواهیم برد:
$\mathrm{card}(X) = c$ اگر و تنها اگر $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

۱۲. • گزاره. $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$.

برهان. اگر $A \subset \mathbb{N}$، آنگاه $f(A) \in \mathbb{R}$ را چنین تعریف‌می‌کنیم:

$$f(A) = \begin{cases} \sum_{n\in A} 2^{-n} & \text{نامتناهی } \mathbb{N} \setminus A \\ 1 + \sum_{n\in A} 2^{-n} & \text{متناهی } \mathbb{N} \setminus A \end{cases}$$

(در هر دو حالت $f(A)$ عددی است که بسط اعشاری آن در مبنای ۲، $0/a_1a_2\dots$ یا $1/a_1a_2\dots$ است که در آن $a_n = 1$ هرگاه $n \in A$ و در غیر این صورت $a_n = 0$) در ایـن صـورت $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ یـک بـه یـک است. از سـوی دیگـر، $g : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $g(A) = \log(\sum_{n\in A} 2^{-n})$ هرگاه A از پایین کراندار باشـد و در غیـر ایـن صورت $g(A) = 0$. در این صورت g پوشا است زیرا هر عدد حقیقی مثبت دارای یک بسط اعشاری در مبنـای ۲ اسـت. چـون $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z})) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$، حکم از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین نتیجه می‌شود. ■

۰.۱۳ نتیجه. اگر $\operatorname{card}(X) \geq c$، آنگاه X شمارش‌ناپذیر است.

برهان. گزارهٔ ۰.۹ را به کار برید. ■

عکس این نتیجه، **فرضیهٔ پیوستار** نامیده می‌شودکه اعتبار آن یکی از مسائل تصمیم‌ناپذیر مشهور نظریهٔ مجموعه‌ها است؛ بند ۰.۷ را ببینید.

۰.۱۴ گزاره.
الف) اگر $\operatorname{card}(X) \leq c$ و $\operatorname{card}(Y) \leq c$، آنگاه $\operatorname{card}(X \times Y) \leq c$.
ب) اگر $\operatorname{card}(A) \leq c$ و به ازای هر $\alpha \in A$، $\operatorname{card}(X_\alpha) \leq c$، آنگاه $\operatorname{card}(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \leq c$.

برهان. برای (الف) کافی است $X = Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ را در نظر بگیریم. $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را با $\phi(n) = 2n$ و $\psi(n) = 2n - 1$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به آسانی معلوم می‌شودکه نگاشت $f : \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ که با $f(A, B) = \phi(A) \cup \psi(B)$ تعریف می‌شود دوسویی است. همانند برهان گزارهٔ ۰.۱۰ (ب) از (الف) نتیجه می‌شود. ■

۰.۳ مطالب اضافه در مورد مجموعه‌های خوشترتیب

مطالب این بخش اختیاری است، این مطالب فقط در تعداد کمی از تمرین‌ها و برخی تذکرات اواخر فصل‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فرض کنیم X یک مجموعهٔ خوشترتیب باشد. اگر $A \subset X$ ناتهی باشد، A عضو مینیمالی دارد که کران پایین ماکسیمال یا **اینفیمم** آن است؛ این عضو را با $\inf A$ نشان می‌دهیم. اگر A از بالا کراندار باشد، یک کران بالای مینیمال یا **سوپرمم** نیز داردکه با $\sup(A)$ نشان داده می‌شود. اگر $x \in X$، **قطعه اولیهٔ** x را چنین تعریف می‌کنیم:
$$I_x = \{y \in X : y < x\}.$$
اعضای I_x **مقدم‌های** x نامیده می‌شوند.

اصل استقرای ریاضی با خوشترتیبی $\mathbb{N}$ هم‌ارز است. این اصل را به صورت زیر می‌توان به مجموعه‌های خوشترتیب دل‌خواه توسیع داد:

۰.۱۵ اصل استقرای ترامتناهی. فرض کنیم X یک مجموعهٔ خوشترتیب باشد. اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشدکه از $I_x \subset A$ نتیجه شود که $x \in A$، آنگاه $A = X$.

برهان. اگر $A \neq X$، قرار می‌دهیم $x = \inf(X \setminus A)$. در این صورت $I_x \subset A$ اما $x \notin A$. ■

۰.۱۶ گزاره. اگر X خوشترتیب باشد و $A \subset X$، آنگاه $\bigcup_{x\in A} I_x$ یا یک قطعهٔ اولیه است یا خودِ X.

برهان. فرض کنیم $J = \bigcup_{x\in A} I_x$. اگر $J \neq X$، قرار می‌دهیم $b = \inf(X \setminus J)$. اگر عضوی چون $y \in J$ با خاصیت $y > b$ وجود داشته باشد بایستی به ازای عضوی چون $x \in A$ داشته باشیم $y \in I_x$ و در نتیجه $b \in I_x$ و این با نحوهٔ ساخت تناقض دارد. بنابر این $J \subset I_b$ و واضح است که $I_b \subset J$. ■

۰.۱۷ گزاره. اگر X و Y خوشترتیب باشند، آنگاه یا X با Y ایزومورف ترتیبی است یا با قطعهٔ اولیه‌ای در Y ایزومورف ترتیبی است یا Y با قطعهٔ اولیه‌ای در X ایزومورف ترتیبی است.

برهان. F را مجموعهٔ آن دسته از ایزومورفیسم‌های ترتیبی می‌گیریم که دامنهٔ هر یک از آنها قطعه‌های اولیه‌ای در X یا خودِ X است و برد هر کدام قطعهٔ اولیه‌ای در Y یا خودِ Y است. F ناتهی است زیرا یکتا

$$f : \{\inf X\} \to \{\inf Y\}$$

به F تعلق دارد و F با شمول جزئاً مرتب است (عضوهایش به صورت زیرمجموعه‌هایی از $X \times Y$ می‌باشد.) با به کارگیری لم زورن معلوم می‌شود که F دارای عضو ماکسیمالی چون f با دامنه‌ای مثل A و بردی مانند B است. اگر $A = I_x$ و $B = I_y$، آنگاه $A \bigcup \{x\}$ و $B \bigcup \{y\}$ نیز قطعه‌های اولیه‌ای از X و Y هستند و با قراردادن $f(x) = y$ می‌توان f را توسیع داد که این با ماکسیمال بودن f تناقض دارد. بنابر این یا $A = X$ یا $B = Y$ (یا هر دو) و حکم حاصل می‌شود. ■

۰.۱۸ گزاره. مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر خوشترتیبی مانند Ω وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$، I_x شمارش‌پذیر است. اگر Ω' مجموعه‌ای با همان خواص Ω باشد، آنگاه Ω و Ω' ایزومورف ترتیبی هستند.

برهان. بنابر اصل خوشترتیبی مجموعه‌های خوشترتیب شمارش‌ناپذیر وجود دارند؛ فرض می‌کنیم X یکی از آنها باشد. یا X خواص مطلوب را دارا است یا عضو مینیمالی چون x_0 وجود دارد به طوری که I_{x_0} شمارش‌ناپذیر است که در این حالت می‌توان $\Omega = I_{x_0}$ را در نظر گرفت. اگر Ω' یکی دیگر از چنین مجموعه‌هایی باشد، Ω' نمی‌تواند با یک قطعهٔ اولیهٔ از Ω ایزومورف ترتیبی باشد و بالعکس، زیرا Ω و Ω' شمارش‌ناپذیر هستند در حالی که قطعه‌های اولیهٔ آنها شمارش‌پذیر می‌باشند، لذا بنابر گزارهٔ ۰.۱۷، Ω و Ω' ایزومورف ترتیبی هستند. ■

مجموعهٔ Ω در گزارهٔ ۰.۱۸ که اساساً یکتا مجموعهٔ خوشترتیب است، **مجموعهٔ اردینال‌های شمارش‌پذیر** نامیده می‌شود. این مجموعه خاصیت قابل ذکر زیر را داراست:

۰.۱۹ گزاره. هر زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر از Ω یک کران بالا دارد.

برهان. اگر $A \subseteq \Omega$ شمارش‌پذیر باشد، $\bigcup_{x\in A} I_x$ شمارش‌پذیر است و در نتیجه تمامِ Ω نیست. بنابر گزارهٔ ۰.۱۶، $y \in \Omega$ چنان وجود داردکه $\bigcup_{x\in A} I_x = I_y$ و در نتیجه y کران بالایی برای A است. ■

مجموعهٔ $\mathbb{N}$ مرکب از اعداد صحیح مثبت را می‌توان به صورت زیر با زیرمجموعه‌ای از Ω یکی گرفت قرار می‌دهیم $f(1) = \inf(\Omega)$، و با روال استقرایی قرار می‌دهیم $f(n) = \inf(\Omega \setminus \{f(1),\dots,f(n-1)\})$. خواننده باید تحقیق کندکه f یک ایزومورفیسم ترتیبی از $\mathbb{N}$ به I_ω است که در آن ω عضو مینیمال Ω است به قسمی که I_ω نامتناهی است. گاهی اوقات بهتر است عضو دیگری مثل ω_1 را به Ω افزوده و مجموعه‌ای مانند $\Omega^* = \Omega \bigcup \{\omega_1\}$ تشکیل دهیم و با قید $x < \omega_1$ برای همهٔ xهای متعلق به Ω، ترتیب روی Ω را به Ω^* توسیع دهیم. ω_1 **اولین اردینال شمارش‌ناپذیر** نامیده می‌شود (نماد رایج برای ω_1، Ω است زیرا به‌طورکلی ω_1 خود، مجموعهٔ اردینال‌های شمارش‌پذیرگرفته می‌شود.)

۰.۵ دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافته

اکثر اوقات افزودن دو نقطهٔ اضافی $-\infty$ و $\infty(=+\infty)$ به $\mathbb{R}$ برای تشکیل دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافتهٔ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\}$ و توسیع ترتیب روی $\mathbb{R}$ با قید $-\infty < x < \infty$ به ازای همهٔ $x \in \mathbb{R}$ مفید است. در این صورت خاصیت‌کمال $\mathbb{R}$ به صورت زیر در می‌آید: هر زیرمجموعه مانند A از $\overline{\mathbb{R}}$ کوچکترین کران بالا یا **سوپرمم** و یک بزرگترین‌کران پایین یا **اینفیمم** داردکه با $\sup A$ و $\inf A$ نشان داده می‌شوند. اگر $A = \{a_1,\dots,a_n\}$، خواهیم نوشت:

$$\max(a_1,\dots,a_n) = \sup A \ , \ \min(a_1,\dots,a_n) = \inf A .$$

از خاصیت‌کمال $\mathbb{R}$ معلوم می‌شودکه هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در $\overline{\mathbb{R}}$ دارای یک **حداعلی** و یک **حد اسفل** است:

$$\limsup x_n = \inf_{k\geq 1}(\sup_{n\geq k} x_n), \qquad \liminf x_n = \sup_{k\geq 1}(\inf_{n\geq k} x_n).$$

دنبالهٔ $\{x_n\}$ (در $\mathbb{R}$) همگرا است اگر و تنها اگر این دو عدد مساوی (و متناهی) باشند،که در این حالت حد آن مقدار مشترک آنها است. برای توابع $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ نیز می‌توان $\limsup$ و $\liminf$ تعریف‌کرد، برای مثال:

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\delta>0}(\sup_{0<|x-a|<\delta} f(x)).$$

اعمال حسابی روی $\mathbb{R}$ را می‌توان به طور جزئی به $\overline{\mathbb{R}}$ تعمیم داد:

$$x \pm \infty = \pm\infty \quad (x \in \mathbb{R}) \quad , \quad \infty + \infty = \infty \, , \, -\infty - \infty = -\infty,$$
$$x\cdot(\pm\infty) = \pm\infty (x > 0), \qquad x\cdot(\pm\infty) = \mp\infty \quad (x < 0).$$

علاقه‌ای به تعریف $\infty - \infty$ نداریم، اما برقرارداد زیر پایبندیم در غیر این صورت تصریح خواهد شد:

$$0\cdot(\pm\infty) = 0 .$$

(عبارت $0\cdot\infty$ هم‌اکنون ظاهر شد و سپس در نظریهٔ اندازه به‌کار برده می‌شود و به دلایل متعددی تعبیر محض آن تقریباً همیشه صفر است.)

در $\overline{\mathbb{R}}$ نمادگذاری زیر را برای بازه‌ها به‌کار می‌بریم: اگر $-\infty \le a < b \le \infty$، آنگاه

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}, \qquad [a,b] = \{x : a \le x \le b\},$$
$$(a,b] = \{x : a < x \le b\}, \qquad [a,b) = \{x : a \le x < b\}.$$

گاهی از اوقات به مجموع‌های شمارش‌ناپذیر از اعداد نامنفی برخواهیم خورد. اگر X مجموعه‌ای دل‌خواه و $f : X \to [0,\infty]$ یک نگاشت باشد، $\sum_{x\in X} f(x)$ را سوپرمم مجموع‌های جزئی متناهی آن تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sup\{\sum_{x\in F} f(x) : \text{متناهی است } F, F\subset X\}.$$

(بعداً این مجموع را به عنوان انتگرال f نسبت به اندازهٔ شمارشی روی X معرفی خواهیم کرد.)

۰.۲۰ گزاره. نگاشتی چون $f : X \to [0,\infty]$ مفروض است، فرض‌کنیم $A = \{x : f(x) > 0\}$. اگر A شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه $\sum_{x\in X} f(x) = \infty$. اگر A شمارش‌پذیر نامتناهی باشد، آنگاه

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_1^\infty f(g(n))$$

که در آن $g : \mathbb{N} \to A$ یک دو سویی دل‌خواه است و مجموع طرف راست یک سری نامتناهی معمولی است.

برهان. داریم $A = \bigcup_1^\infty A_n$ که در آن $A_n = \{x : f(x) > \frac{1}{n}\}$. اگر A شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه یکی از A_nها باید شمارش‌ناپذیر باشد، و برای زیرمجموعه‌ای متناهی مانند F از A_n، $\sum_{x\in F} f(x) > \frac{1}{n}\mathrm{card}(F)$؛ از اینجا معلوم می‌شود که $\sum_{x\in X} f(x) = \infty$. اگر A شمارش‌پذیر نامتناهی باشد، $g : \mathbb{N} \to A$ یک دوسویی باشد و $B_N = g(\{1,\ldots,N\})$، آنگاه هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند F از A در یکی از B_Nها مشمول است. بنابر این

$$\sum_{x\in F} f(x) \le \sum_1^N f(g(n)) \le \sum_{x\in X} f(x)$$

با سوپرمم‌گرفتن روی N به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{x\in F} f(x) \le \sum_1^\infty f(g(n)) \le \sum_{x\in X} f(x),$$

و سپس با سوپرمم گرفتن روی F، حکم مطلوب را به دست می‌آوریم. ■

برخی اصطلاحات دربارهٔ توابع با مقادیر حقیقی(توسیع یافته): می‌دانیم رابطه‌ای بین اعدادکه برای توابع به کار برده می‌شود به طورنقطه‌ای برقرار است. بنابر این $f \le g$ به این معنا است که به ازای هر x، $f(x) \le g(x)$ و $\max(f,g)$ تابعی است که مقدارش در x برابر $\max(f(x),g(x))$ است. اگر $X \subset \overline{\mathbb{R}}$، نگاشت $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ **صعودی** نامیده می‌شود هرگاه $f(x) \le f(y)$ برای $x \le y$ برقرار باشد و **اکیداً صعودی** نامیده می‌شود هرگاه وقتی $x < y$، $f(x) < f(y)$. تابعی که صعودی یا نزولی باشد **یکنوا** نامیده می شود. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع صعودی باشد، آنگاه f در هر نقطه حد چپ و حد راست دارد:

$$f(a+) = \lim_{x\searrow a} f(x) = \inf_{x>a} f(x) \quad , \quad f(-a) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = \sup_{x<a} f(x).$$

به علاوه، مقادیر حدی $f(\infty) = \sup_{a\in\mathbb{R}} f(x)$ و $f(-\infty) = \inf_{a\in\mathbb{R}} f(x)$ وجود دارند (ممکن است مساوی $\pm\infty$ باشند). f پیوستهٔ راست نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f(a) = f(a+)$ و پیوستهٔ چپ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هری $a \in \mathbb{R}$، $f(a) = f(a-)$.

برای نقطه‌ای چون x در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$، $|x|$ نشان‌دهندهٔ قدر مطلق معمولی یا قدر مطلق x یعنی $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ است. برای نقطه‌ای چون x در $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$، $|x|$ نشاندهنده نرم‌اقلیدسی است:

$$|x| = \left[\sum_1^n |x_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

یادآوری می‌کنیم‌که مجموعه‌ای چون $U \subset \mathbb{R}$ باز است هرگاه به ازای هر $x \in U$، U شامل بازه‌ای با مرکز x باشد.

۰.۲۱ گزاره. هر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}$ اجتماع مجزای شمارش‌پذیری از بازه‌های باز است.

برهان. اگر U باز باشد، به ازای هر $x \in U$ گردایهٔ $\mathcal{J}_x$ متشکل از همهٔ بازه‌های باز I را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $x \in I \subset U$. به آسانی دیده می‌شودکه اجتماع هر خانواده از بازه‌های باز شامل نقطه‌ای در اشتراک، باز هم یک بازهٔ باز است و در نتیجه $J_x = \bigcup_{I\in\mathcal{J}_x} I$ یک بازهٔ باز است؛ این بزرگترین عضو $\mathcal{J}_x$ است. اگر $x, y \in U$، آنگاه یا $J_x = J_y$ یا $J_x \cap J_y = \varnothing$ زیرا در غیر این صورت $J_x \cup J_y$ بازهٔ بازی در $\mathcal{J}_x$ است‌که از J_x بزرگتر است. بنابر این اگر $\mathcal{J} = \{J_x : x \in U\}$، آنگاه اعضای (متمایز) $\mathcal{J}$ مجزا هستند و $U = \bigcup_{J\in\mathcal{J}} J$. به ازای هر $J \in \mathcal{J}$، عددگویایی چون $f(J) \in J$ انتخاب می‌کنیم: نگاشت $f : \mathcal{J} \to \mathbb{Q}$ که به این ترتیب تعریف می‌شود یک به یک است، زیرا اگر $J \neq J'$، آنگاه $J \cap J' = \varnothing$؛ بنابر این $\mathcal{J}$ شمارش‌پذیر است. ■

۰.۶ فضاهای متری

یک متر روی مجموعه‌ای چون X تابعی مانند $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ است به‌طوری‌که:

- $\rho(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$؛
- به ازای هر x, y از X، $\rho(x,y) = \rho(y,x)$؛
- به ازای هر x, y, z از X، $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

(ذاتاً $\rho(x,y)$ به عنوان فاصله از x تا y تعبیر می‌شود.) مجموعهٔ مجهز به یک متر یک **فضای متری** نامیده می‌شود.

چند مثال:

الف) فاصله اقلیدسی $\rho(x,y) = |x-y|$ یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است.

ب) $\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ و $\rho_\infty(f,g) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - g(x)|$ مترهایی روی فضای توابع پیوسته بر $[0,1]$ هستند.

ج) اگر ρ یک متر روی X باشد و $A \subset X$، آنگاه $\rho|_{(A\times A)}$ یک متر روی A است.

د) اگر (X_1, ρ_1) و (X_2, ρ_2) دو فضای متری باشند، متر حاصلضربی ρ روی $X_1 \times X_2$ با تساوی زیر تعریف می‌شود:

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max(\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)).$$

گاهی اوقات مترهای دیگری روی $X_1 \times X_2$ به‌کار برده می‌شود، برای مثال:

$$\rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2) \text{ یا } [\rho_1(x_1,y_1)^2 + \rho_2(x_2,y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

البته به مفهومی که در آخر همین بخش تعریف خواهیم کرد این مترها با متر حاصلضربی هم‌ارز هستند. فرض کنید (X,ρ) یک فضای متری باشد. اگر $x \in X$ و $r > 0$، **گوی** (باز) به شعاع r حول x عبارت است از:

$$B(r,x) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}.$$

مجموعه‌ای چون $E \subset X$ **باز** است هرگاه به ازای هر $x \in E$ عددی مانند $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که $B(r,x) \subset E$ و **بسته** است هرگاه متمم آن باز باشد. برای مثال، هرگوی باز مانند $B(r,x)$ باز است زیرا اگر $y \in B(r,x)$ و $\rho(x,y) < s$، آنگاه $B(r-s,y) \subset B(r,x)$. همچنین $\varnothing$ و X هم باز و هم بسته هستند. به وضوح اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های باز، باز است و در نتیجه اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته است. علاوه بر اینها، اشتراک (متناظراً اجتماع) هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های باز (متناظراً بسته) باز (متناظراً بسته) است. در واقع، اگر $U_1,\dots,U_n$ باز باشند و $x \in \bigcap_1^n U_j$، آنگاه به ازای هر j عددی مانند $r_j > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $B(r_j,x) \subset U_j$ و در نتیجه $B(r,x) \subset \bigcap_1^n U_j$، که در آن $r = \min(r_1,\dots,r_n)$ لذا $\bigcap_1^n U_j$ باز است.

اگر $E \subset X$، اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز مانند $U \subset E$ بزرگترین مجموعهٔ بازی است که در E مشمول است؛ این مجموعه **درون** E نامیده شده و با E° نشان داده می‌شود. به طور مشابه، اشتراک همهٔ مجموعه‌های بسته مثل $F \supset E$ کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که شامل E است؛ آن را **بستار** E نامیده و با $\overline{E}$ نشان می‌دهند. E در X **چگال** نامیده می‌شود هرگاه $\overline{E} = X$ و **هیچ جا چگال** نامیده می‌شود هرگاه $\overline{E}$ درونِ تهی داشته باشد. X **جدایی پذیر** نامیده می‌شود هرگاه زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری داشته باشد. (برای مثال، $\mathbb{Q}^n$ زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری در $\mathbb{R}^n$ است.) دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ در X به $x \in X$ **همگرا** است (و به طور نمادین چنین نوشته می‌شود: $x_n \to x$ یا $\lim x_n = x$) هرگاه $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$.

۲۲. • گزاره. اگر X یک فضای متری باشد، $E \subset X$، و $x \in X$، آنگاه‌گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) $x \in \overline{E}$؛

ب) به ازای هر $r > 0$، $B(r,x) \cap E \neq \varnothing$؛

ج) دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در E وجود داردکه به x همگرا است.

برهان. اگر $B(r,x) \cap E \neq \varnothing$، آنگاه $B(r,x)^c$ مجموعهٔ بسته‌ای است که شامل E بوده و شامل x نیست، لذا $x \notin \overline{E}$. به عکس، اگر $x \notin \overline{E}$، چون $(\overline{E})^c$ بازاست $r > 0$ چنان وجود داردکه $B(r,x) \subset (\overline{E})^c \subset E^c$. بنابر این (الف) با (ب) هم‌ارز است. چنانچه (ب) برقرار باشد، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ عضوی مانند $x_n \in B(n^{-1},x) \cap E$ وجود دارد، لذا $x_n \to x$. از طرف دیگر، اگر $B(r,x) \cap E = \varnothing$، آنگاه به ازای هر $y \in E$، $\rho(y,x) \geq r$، لذا هیچ دنباله‌ای از E نمی‌تواند به x همگرا باشد. بنابر این (ب) با (ج) هم‌ارز است. ■

اگر (X_1,ρ_1) و (X_2,ρ_2) دو فضای متری باشند، نگاشتی چون $f : X_1 \to X_2$ در $x \in X$ **پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\rho_1(x,y) < \delta$، آنگاه $\rho_2(f(y),f(x)) < \varepsilon$، به عبارت دیگر $f^{-1}(B(\varepsilon,f(x))) \supset B(\delta,x)$. نگاشت f **پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه در هر $x \in X_1$ پیوسته باشد و **پیوستهٔ یکنواخت** نامیده می‌شود هرگاه علاوه بر اینها، در تعریف پیوستگی بتوان δ را مستقل از x انتخاب کرد. ■

۲۳. ۰ گزاره. $f : X_1 \to X_2$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعهٔ باز مانند $U \subset X_2$، $f^{-1}(U)$ در X_1 باز باشد.

برهان. اگر شرط اخیر برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ و $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ $f^{-1}(B(\varepsilon,f(x)))$ باز و شامل x است، پس شامل یک گوی حول x است؛ این به معنی پیوستگی f در x است. به عکس، فرض کنیم f پیوسته و U در X_2 باز است. به ازای هر $y \in U$ عددی مانند $\varepsilon_y > 0$ چنان وجود دارد که $B(\varepsilon_y,y) \subset U$، و به ازای هر $x \in f^{-1}(\{y\})$ عددی مانند $\delta_x > 0$ چنان وجود دارد که

$$B(\delta_x,x) \subset f^{-1}(B(\varepsilon_y,y)) \subset f^{-1}(U).$$

بنابر این $f^{-1}(U) = \bigcup_{x\in f^{-1}(U)} B(\delta_x,x)$ باز است. ■

دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ در یک فضای متری مانند (X,ρ) **کُشی** نامیده می‌شود هرگاه وقتی $n,m \to \infty$، $\rho(x_n,x_m) \to 0$. زیرمجموعه‌ای چون E از X **کامل** نامیده می‌شود هرگاه هر دنبالهٔ کشی در E همگرا بوده و حدش در E واقع باشد. به عنوان مثال، $\mathbb{R}^n$ (با متر اقلیدسی) کامل است درحالی که $\mathbb{Q}^n$ چنین نیست.

۲۴. ۰ گزاره. هر زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای متریِ کامل، کامل است و هر زیرمجموعهٔ کامل از یک فضای متری دل‌خواه، بسته است.

برهان. اگر X کامل، $E \subset X$ بسته و $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در E باشد، آنگاه $\{x_n\}$ حدی مانند x در X دارد. بنابر گزارهٔ ۲۲ . ۰ دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در E یافت می‌شود که به x همگرا است. $\{x_n\}$ کشی است، پس حدش در E قرار دارد؛ بنابر این $E = \overline{E}$. ■

در یک فضای متری مانند (X,ρ) می‌توانیم فاصله از یک نقطه تا یک مجموعه و فاصلهٔ بین دو مجموعه را تعریف کنیم. یعنی، اگر $x \in X$ و $E,F \subset X$، آنگاه

$$\rho(x,E) = \inf\{\rho(x,y) : y \in E\}$$

$$\rho(E,F) = \inf\{\rho(x,y) : x \in E, y \in F\} = \inf\{\rho(x,F) : x \in \overline{E}\}.$$

ملاحظه کنید که بنابر گزارهٔ ۲۲.۰، $\rho(x,E) = ۰$ اگر و تنها اگر $x \in \overline{E}$. **قطر** $E \subset X$ را نیز چنین تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{diam} E = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in E\}.$$

E **کراندار** نامیده می‌شود هرگاه $\operatorname{diam} E < \infty$.

اگر $E \subset X$ و $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که $E \subset \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$، آنگاه $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک **پوشش** E نامیده می‌شود و گفته می‌شود که E با V_αها **پوشانده می‌شود**. E **کراندار کلی** نامیده می‌شود هرگاه، به ازای هر $\varepsilon > ۰$، E را بتوان با تعدادی متناهی از گوی‌های به شعاع ε پوشاند. هر مجموعهٔ کراندار کلی، کراندار است زیرا اگر $x, y \in \bigcup_۱^n B(\varepsilon, z_j)$، مثلاً $x \in B(\varepsilon, z_۱)$ و $y \in B(\varepsilon, z_۲)$، آنگاه

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z_۱) + \rho(z_۱,z_۲) + \rho(z_۲,y) \le ۲\varepsilon + \max\{\rho(z_j,z_k) : ۱ \le j,k \le n\}.$$

(درحالت کلی عکس مطلب فوق نادرست است.) اگر E کراندار کلی باشد $\overline{E}$ نیز کراندار کلی است، زیرا به آسانی دیده می‌شود که اگر $E \subset \bigcup_۱^n B(\varepsilon, z_j)$، آنگاه $\overline{E} \subset \bigcup_۱^n B(۲\varepsilon, z_j)$.

۲۵.۰ قضیه. اگر E زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, ρ) باشد، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) E کامل و کراندار کلی است؛

ب) (**خاصیت بولزانو-وایرشتراس**) هر دنباله در E زیردنباله‌ای دارد که به نقطه‌ای از E همگراست؛

ج) (**خاصیت هاینه ـ برل**) اگر $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ پوششی از E به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز باشد؛ مجموعه‌ای متناهی مانند $F \subset A$ وجود دارد به طوری‌که $\{V_\alpha\}_{\alpha\in F}$ مجموعهٔ E را می‌پوشاند.

برهان. نشان خواهیم داد که (الف) و (ب) هم ارزند، (الف) و (ب) توأماً (ج) را ایجاب می کنند و در نهایت (ج) قسمت (ب) را نتیجه می‌دهد.

(الف) قسمت (ب) را نتیجه می‌دهد: فرض می کنیم (الف) برقرار باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد. E را می‌توان با تعدادی متناهی گوی با شعاع $۲^{-۱}$ پوشاند و حداقل یکی از آن‌ها باید شامل تعدادی نامتناهی از x_nها باشد، مثلاً به ازای $n \in N_۱$، $x_n \in B_۱$. $E \cap B_۱$ را می‌توان با تعدادی متناهی گوی با شعاع $۲^{-۲}$ پوشاند و حداقل یکی از آنها باید به ازای تعدادی نامتناهی $n \in N_۱$ شامل x_n باشد: مثلاً به ازای $n \in N_۲$، $x_n \in B_۲$. با ادامهٔ روند استقرایی، دنباله‌ای از گوی‌های B_j با شعاع ۲^{-j} و دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های N_j از $\mathbb{N}$ به دست می‌آوریم به طوری که به ازای $n \in N_j$، $x_n \in B_j$. $n_۱ \in N_۱$، $n_۲ \in N_۲$ و ... را چنان می گیریم که $n_۱ < n_۲ < \cdots$. در این صورت $\{x_{n_j}\}$ یک دنبالهٔ کشی است زیرا اگر $k > j$، $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < ۲^{۱-j}$ و چون E کامل است این دنباله حدی در E دارد.

(ب) قسمت (الف) را ایجاب می کند: نشان می‌دهیم که اگر شرطی در (الف) نادرست باشد، (ب) نیز نادرست است. اگر E کامل نباشد، دنباله‌ای کشی مانند $\{x_n\}$ در E وجود دارد که حدی در E ندارد. هیچکدام از زیردنباله‌های $\{x_n\}$ نمی‌توانند در E همگرا باشد، زیرا در غیراین صورت کل دنباله به همان حد همگرا خواهد بود. ازطرف دیگر، اگر E کراندار کلی نباشد،

فرض می‌کنیم $0 < \varepsilon$ چنان باشد که E را نتوان با تعدادی متناهی از گوی‌های با شعاع ε پوشاند. $x_n \in E$ را به طور استقرایی به صورت زیر انتخاب می کنیم. با $x_1 \in E$ شروع کرده و با انتخاب $x_1, \ldots, x_n$، عضو x_{n+1} را از $E \setminus \bigcup_1^n B(\varepsilon, x_j)$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت به ازای هر n, m، $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon$، لذا $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا ندارد.

(الف) و (ب) قسمت (ج) را نتیجه می‌دهند: کافی است نشان دهیم که اگر (ب) برقرار باشد و $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پوششی از E به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز باشد، آنگاه $0 < \varepsilon$ چنان وجود دارد که هر گوی به شعاع ε که E را قطع کند در یکی از V_αها مشمول است، زیرا بنابر (الف) E را می‌توان با تعدادی متناهی از چنین گوی‌هایی پوشاند. به برهان خلف، فرض می‌کنیم که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ گویی به شعاع 2^{-n} مانند B_n وجود دارد به طوری که $B_n \cap E \neq \varnothing$ و B_n در هیچکدام از V_αها مشمول نیست. عضوی مانند $x_n \in B_n \cap E$ انتخاب می‌کنیم؛ با عبور به یک زیردنباله می‌توانیم فرض کنیم که $\{x_n\}$ به عضوی چون x از E همگرا است. به ازای اندیسی چون α داریم $x \in V_\alpha$ و چون V_α باز است عددی مانند $0 < \varepsilon$ وجود دارد به طوری که $B(\varepsilon, x) \subset V_\alpha$. اما اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ بوده و در نتیجه $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{3}$ و $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}$، آنگاه $B_n \subset B(\varepsilon, x) \subset V_\alpha$ که فرض نهاده‌شده بر B_n را نقض می‌کند.

(ج) قسمت (ب) را ایجاب می کند: چنانچه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد که هیچ زیردنبالهٔ همگرا نداشته باشد، به ازای هر $x \in E$ یک گوی با مرکز x مانند B_x وجود دارد که فقط به ازای تعدادی متناهی از nها شامل x_n است (در غیر این صورت برخی از زیردنباله‌ها به x همگرا خواهند بود.) در نتیجه $\{B_x\}_{x \in E}$ پوششی از E به وسیلهٔ مجموعه‌های باز است که هیچ زیرپوششی متناهی ندارد. ■

هر مجموعه‌ای چون E که دارای خواص (الف)، (ب) و (ج) از قضیهٔ ۲۵ . ۰ است **فشرده** نامیده می‌شود. بنابر گزارهٔ ۲۴ . ۰، هر مجموعهٔ فشرده، بسته و کراندار است؛ عکس آن در حالت کلی نادرست است اما در مورد $\mathbb{R}^n$ درست است.

۲۶ . ۰ گزاره. هر زیرمجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbb{R}^n$ فشرده است.

برهان. چون زیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathbb{R}^n$ کامل هستند، کافی است نشان دهیم که زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbb{R}^n$ کراندار کلی هستند. از آنجا که هر مجموعهٔ کراندار در مکعبی مانند

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)\} \leq R$$

مشمول است، کافی است نشان دهیم که Q کراندار کلی است. $0 < \varepsilon$ را مفروض گرفته و عدد صحیحی چون $k > \frac{R\sqrt{n}}{\varepsilon}$ برگزیده و با تقسیم بازهٔ $[-R, R]$ به k قطعه مساوی، Q را به صورت اجتماع k^n زیرمکعب همنهشت نمایش می‌دهیم. طول یال این زیرمکعب‌ها $\frac{2R}{k}$ است و در نتیجه قطرشان $\sqrt{n}(\frac{2R}{k}) < \varepsilon$ است، لذا این زیرمکعب‌ها در گوی‌های به شعاع ε حول مرکزشان مشمول هستند. ■

دو متر ρ_1 و ρ_2 روی مجموعه‌ای چون X هم‌ارز نامیده می‌شوند هرگاه به ازای اعدادی مانند $C, C' > 0$،

$$C\rho_1 \leq \rho_2 \leq C'\rho_1.$$

به آسانی معلوم می‌شودکه مترهای هم‌ارز، مجموعه‌های باز، بسته و فشردهٔ یکسان، دنباله‌های همگرا و کشی یکسان و نگاشت‌های پیوسته و پیوستهٔ یکنواخت یکسانی تعریف می‌کنند. نتیجتاً، اکثر حکم‌های دربارهٔ فضاهای متری نه به متر خاص انتخاب شده بلکه فقط به ردهٔ هم‌ارزی آن بستگی دارد.

۷.۰ تذکرات و مراجع

بندهای ۱.۰ تا ۴.۰: بهترین شرح و بیان نظریهٔ مجموعه‌ها برای مبتدیان هالموس[۶۳] است و اسمالیان و فیتینگ [۱۳۵]کتاب خوبی برای سطح پیشرفته تر است. کلی[۸۳] نیز شامل بخش خلاصه‌ای از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه است. همهٔ این کتاب ها مثل هویت و استرامبرگ[۷۶] از روی اصل انتخاب استنباطی برای اصل ماکسیمال هاسدورف آورده‌اند.

عموماً اصل انتخاب (یا یکی از گزاره‌های معادل با آن) به عنوان یکی از بدیهیات بنیادی در نظریهٔ مجموعه‌ها پذیرفته می‌شود. بعضی از ریاضی دان‌های شهودگرا یا ساختارگرا آن را رد کرده و دلیلشان را این گونه بیان می‌دارند که وجود یک شیئ ریاضی تا زمانی که آن را نتوان به روش صریح و قابل قبولی ساخت اثبات نگردیده است، حال آنکه تمام مقصود از اصل انتخاب اثبات قضایای وجود به هنگامی است که روش‌های ساختنی ناکام هستند (یا برای حصول اطمینان بسیار پردردسر هستند.) کسانی که از چنین اشیایی به شدت رنج می‌برند در اقلیت قرار دارند و شامل من نمی‌شود؛ در این کتاب، اصل انتخاب کم اما آزادانه به‌کار رفته است.

فرضیهٔ پیوستار چنین است: «اگر $\operatorname{card}(X) < c$، آنگاه X شمارش پذیر است.»

(تا آنجا که از نحوهٔ ساختن Ω، یعنی، مجموعهٔ اردینال‌های شمارش‌پذیر برمی‌آید برای هر مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر مانند X، $\operatorname{card}(\Omega) < \operatorname{card}(X)$. یک حکم معادل برای فرضیهٔ پیوستار عبارت است از: $\operatorname{card}(\Omega) = c$.) به لطف گودل و کُهن، معلوم شده است که فرضیهٔ پیوستار و نفی آن هر دو با اصول موضوع متعارف نظریهٔ مجموعه‌ای که شامل اصل انتخاب باشد سازگاری دارند به شرطی که این اصول موضوع خودشان با هم سازگار باشند. (شرحی از قضایای سازگار و مستقل برای اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار در اسمالیان و فیتینگ.[۱۳۵] یافت می شود.) برخی از ریاضی دان ها به پذیرش اصل انتخاب به عنوان یک اسباب راحتی رضایت می‌دهند، اما گودل[۵۶] و کُهن [صفحهٔ ۱۵۱ از ۲۶] هر دو بر این باورند که فرضیهٔ پیوستار باید نادرست باشد، اما در نوشته‌هاج آنها هیچ دلیل قانع کننده‌ای مبنی بر درستی یا نادرستی فرضیهٔ پیوستار یافت نمی‌شود.
نظر من در رابطه با تجدید نظر در ایجاد یک اصل بنیادی در نظریهٔ مجموعه‌ها و فائق آمدن بر آن، این است که اگر پاسخ به پرسشی به فرضیهٔ پیوستار وابسته شد، آن را رها کرده و سئوال دیگری مطرح کنیم.

بند ۶.۰: بحث مفصل‌تری از فضاهای متری را در لومیس و استرامبرگ [۹۵] و دیبری و شوارتز [۳۲] می توان یافت.

فصل اول
اندازه‌ها

در این فصل، با بیان مباحث اساسی نظریهٔ اندازه، روالی‌کلی برای ساختن مثال‌هایی نابدیهی تدوین می‌کنیم و از این روال برای ساختن اندازه روی خط حقیقی استفاده می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه

یکی از مسائل بارز در هندسه، تعیین مساحت یا حجم ناحیه‌ای در صفحه یا فضای ۳ـ بعدی است. شگردهای حساب انتگرال برای ناحیه‌های محدود به منحنی‌ها یا رویه‌های خوشرفتار پاسخ رضایتبخشی می‌دهند اما در مورد مجموعه‌های پیچیده‌تر، چنین شگردهایی مناسب نیستند حتی اگر ناحیهٔ مورد نظر ۱ـ بعدی باشد.

به طور آرمانی می‌خواهیم به ازای هر عدد طبیعی n، تابعی چون μ داشته باشیم که به هر $E \subset \mathbb{R}$ عددی چون $\mu(E) \in [\circ,\infty]$ موسوم به اندازهٔ nـ بعدی E نسبت دهد به‌طوری‌که هنگام محاسبه، $\mu(E)$ به وسیلهٔ فرمول‌های انتگرال معمولی داده شود. مسلماً چنین تابعی باید خواص زیر را داشته باشد:

الف) اگر $E_{۱}, E_{۲}, \ldots$ دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌های مجزا باشد، آنگاه

$$\mu(E_{۱} \cup E_{۲} \cup \cdots) = \mu(E_{۱}) + \mu(E_{۲}) + \cdots.$$

ب) اگر E با F همنهشت باشد (یعنی، اگر E را بتوان با انتقال، دوران و انعکاس به F تبدیل کرد)، آنگاه $\mu(E) = \mu(F)$.

ج) $\mu(Q) = ۱$ که در آن Q مکعب واحد زیر است:

$$Q = \{X \in \mathbb{R}^n : \circ \leq x_j < ۱, j = ۱,\ldots,n\}.$$

متأسفانه این شرایط از دو طرف ناجور هستند. اینک عدم تحقق همزمان شرایط فوق را برای $n = ۱$ بررسی می‌کنیم (استدلال را به آسانی می‌توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد).

ابتدا یک رابطهٔ هم‌ارزی مانند $\sim$ روی $[\circ,۱)$ تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

فرض می‌کنیم N زیرمجموعه‌ای از $[0,1)$ باشد که از هر ردهٔ هم‌ارزی درست یک عضو دارد. (برای یافتن چنین مجموعه‌ای باید اصل انتخاب را به‌کار بریم). اکنون فرض می‌کنیم $R = \mathbb{Q} \bigcap [0,1)$ و به ازای هر r از R قرار می‌دهیم:

$$N_r = \{x + r : x \in N \bigcap [0, 1 - r)\} \bigcup \{x + r - 1 : x \in N \bigcap [1 - r, 1)\}.$$

به‌عبارتی برای به‌دست آوردن N_r، N را به مقدار r واحد به راست حرکت می‌دهیم و سپس قسمتی را که بیرون از $[0,1)$ می‌افتد به مقدار ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. در این صورت $N_r \subset [0,1)$ و هر $x \in [0,1)$ درست به یکی از N_rها تعلق دارد. اما اگر y عضوی از N باشد که به ردهٔ هم‌ارزی شامل x تعلق داشته باشد، آنگاه $x \in N_r$ که در آن

$$r = \begin{cases} x - y & x \geq y\,; \\ x - y + 1 & x < y\,. \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $x \in N_r \bigcap N_s$، آنگاه $x - r$ (یا $x - r + 1$) و $x - s$ (یا $x - s + 1$) اعضای متمایزی از N هستند که به یک ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارند و این ممکن نیست. اکنون فرض می‌کنیم $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ در شرایط (الف)، (ب) و (ج) صدق کند. بنابر (الف) و (ب)، به ازای هر $r \in R$ داریم:

$$\mu(N) = \mu(N \bigcap [0, 1 - r)) + \mu(N \bigcap [1 - r, 1)) = \mu(N_r).$$

همچنین، چون R شمارش‌پذیر و $[0,1)$ اجتماع مجزای N_r ها است، باز هم بنابر (الف) خواهیم داشت:

$$\mu([0,1)) = \sum_{r \in R} \mu(N_r).$$

اما بنابر (ج)، $\mu([0,1)) = 1$ و چون $\mu(N_r) = \mu(N)$، مجموع سمت راست یا صفر است (هرگاه $\mu(N) = 0$) یا ∞ (هرگاه $\mu(N) > 0$). بنابر این تابع μ با شرایط مذکور نمی‌تواند وجود داشته باشد.

علیرغم این موضوع دلسردکننده، می‌توان شرط (الف) را چنان تضعیف کرد که جمعی بودن μ فقط برای دنباله‌های متناهی برقرار باشد. همان‌گونه که خواهیم دید این ایده، ایدهٔ خیلی خوبی نیست: جمعی شمارش‌پذیر بودن چیزی است که همهٔ محدویت‌ها را رفع می‌کند و احکام پی در پی نظریه به‌طور سلیس کار می‌کنند. به‌علاوه، در ابعاد $n \geq 3$ حتی همین شکل ضعیف شدهٔ (الف) با شرایط (ب) و (ج) سازگاری ندارد. البته در سال ۱۹۲۴ باناخ و تارسکی حکم شگفت‌انگیز زیر را ثابت کردند: فرض کنیم U و V مجموعه‌های باز دل‌خواهی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $n \geq 3$. در این صورت عددی طبیعی مانند k و زیرمجموعه‌هایی چون $E_1, \ldots, E_k$ و $F_1, \ldots, F_k$ از $\mathbb{R}^n$ وجود دارند به‌طوری که

- E_jها مجزا هستند و اجتماعشان U است؛
- F_jها مجزا هستند و اجتماعشان V است؛
- به ازای $j = 1, \ldots, k$، E_j با F_j همنهشت است.

بنابر این می‌توان یک گوی به اندازهٔ یک نخود را به تعدادی متناهی قطعه شکست و با جابجایی آنها گویی به اندازهٔ کرهٔ زمین ساخت! لازم به ذکر است که E_jها و F_jها مجموعه‌هایی بسیار عجیب و غریب هستند. به درستی نمی‌توان آنها را تجسم کرد و ساختن آنها به اصل انتخاب وابسته است. اما وجود چنین مجموعه‌هایی از ساختن هر تابع مانند $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ که

به ازای مجموعه‌های باز کراندار مقادیر مثبت و متناهی داشته و به ازای دنباله‌های متناهی مانند آنچه در (ب) ذکر شد، در شرط (الف) صدق کند جلوگیری می‌کند. این مثال‌ها نشان می‌دهند که $\mathbb{R}^n$ شامل زیرمجموعه‌هایی است که چنان در هم پیچیده‌اند که ممکن نیست یک مفهوم معقول هندسی برای اندازهٔ آنها تعریف کنیم و چاره‌ای جز این نیست که از تلاش برای تعریف μ روی همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ دست برداریم. به ساختن μ روی دسته‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ بسنده خواهیم کرد که احتمالاً در تمرین‌ها با آنها مواجه می‌شویم به جز یک مورد که برای ساختن مثال نقض است.

این کار برای $n = ۱$ در بند ۱.۵ و برای $n > ۱$ در بند ۲.۶ انجام خواهد شد. بسط نظریه به حالت کلی‌تر کار مشکلی نیست و به زحمتش می‌ارزد. شرایط (الف) و (ب) مستقیماً به هندسهٔ اُقلیدسی مربوط می‌شوند اما تابع مجموعه‌های صادق در شرط (الف) موسوم به اندازه، در بسیاری از مباحث دیگر ظاهر می‌شوند. برای مثال، در یک مسئلهٔ فیزیکی شامل توزیع جرم، می‌توان از $\mu(E)$ برای نمایش جرم کلی در ناحیهٔ E استفاده کرد. به عنوان مثالی دیگر، در نظریهٔ احتمال، مجموعه‌ای چون X در نظر گرفته می‌شود که امکان رخ دادن یک پیشامد را بیان می‌دارد و برای $E \subset X$، $\mu(E)$ احتمالی است که برآمد در E واقع باشد. بنابر این با مطالعهٔ نظریهٔ اندازه روی مجموعه‌های خام شروع می‌کنیم.

۱.۲ σ - جبرها

در این بخش در مورد خانواده‌هایی از مجموعه‌ها بحث می‌کنیم که به عنوان دامنه‌های اندازه‌ها به‌کار می‌روند. فرض‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی X، گردایه‌ای ناتهی چون $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X است که تحت اجتماع‌های متناهی و متممگیری بسته است؛ به عبارت دیگر، اگر $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$، آنگاه $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$ و اگر $E \in \mathcal{A}$، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$. یک σ- جبر، جبری است که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته است. (برخی از مؤلفین واژهٔ میدان یا σ- میدان را به جای جبر و σ- جبر به‌کار می‌برند). ملاحظه می‌کنیم که چون $\bigcap_j E_j = \left(\bigcup_j E_j^c\right)^c$، جبرها (متناظراً σ- جبرها) تحت اشتراک‌های متناهی (متناظراً شمارش‌پذیر) بسته‌اند. به علاوه، اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باشد، آنگاه $\varnothing, X \in \mathcal{A}$ زیرا اگر $E \in \mathcal{A}$، آنگاه $\varnothing = E \cap E^c$ و $X = E \cup E^c$. به آسانی می‌توان دید که جبری چون $\mathcal{A}$ یک σ- جبر است هرگاه تحت اجتماع‌های مجزای شمارش‌پذیر بسته باشد. برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ و قرار می‌دهیم

$$F_k = E_k \setminus \left[\bigcup_1^{k-1} E_j\right] = E_k \cap \left[\bigcup_1^{k-1} E_j\right]^c.$$

در این صورت F_kها به $\mathcal{A}$ تعلق دارند و مجزا هستند و $\bigcup_1^\infty E_j = \bigcup_1^\infty F_k$.

طرح جایگزینی دنباله‌ای از مجموعه‌ها با دنباله‌ای مجزا، یادآوری ارزشمندی است. از این مطلب در زیر بارها استفاده خواهیم کرد.

چند مثال: چنانچه X مجموعه‌ای دل‌خواه باشد، $\{\varnothing, X\}$ و $\mathcal{P}(X)$ جبرهایی روی X هستند. اگر X شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه،

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : \text{شمارش‌پذیر است یا } E^c \text{ شمارش‌پذیر است } E\}$$

یک σ- جبر موسوم به **σ- جبر شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر** از مجموعه‌ها است. (نکته اصلی این است که اگر $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$، آنگاه $\bigcup_1^\infty E_j$ شمارش‌پذیر است به شرطی که همهٔ E_jها شمارش‌پذیر باشند و در غیر این صورت متمم آن شمارش‌پذیر است.)

بدیهی است که اشتراک هر خانواده از σ- جبرهای روی X باز هم یک σ- جبر است. از اینجا معلوم می‌شود که اگر $\mathcal{E}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(X)$ باشد، آنگاه کوچکترین σ- جبر یکتای $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ وجود دارد که شامل $\mathcal{E}$ است، $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ اشتراک همهٔ σ- جبرهای شامل $\mathcal{E}$ است و آن را σ- جبر تولید شده با $\mathcal{E}$ می‌نامیم (همیشه دست‌کم یکی از این σ- جبرها وجود دارد. در واقع $\mathcal{P}(X)$ یکی از آنها است) . ملاحظات زیر اغلب مفید هستند:

۱.۱ لم. اگر $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$، آنگاه $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

برهان. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ یک σ- جبرشامل $\mathcal{E}$ است؛ بنابراین شامل $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ است. ∎

چنانچه X یک فضای متری یا به طورکلی یک فضای توپولوژیک باشد (فصل ۴ را ببینید)، σ- جبر تولید شده به‌وسیلهٔ خانوادهٔ مجموعه‌های باز واقع در X، **σ- جبر بُرل** روی X نامیده می‌شود و آن را با $\mathcal{B}_X$ نشان می‌دهیم. اعضای σ- جبر برل را **مجموعه‌های برل** می‌نامیم. بنابر این $\mathcal{B}_X$ شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره است. برای درجه‌بندی این مجموعه‌ها نامگذاری استانداردی وجود دارد. هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز یک مجموعهٔ G_δ و هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته، یک مجموعهٔ F_σ نامیده می‌شود؛ هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های G_δ را یک مجموعهٔ $G_{\delta\sigma}$ نامیم و هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های F_σ را یک مجموعهٔ $F_{\sigma\delta}$ می‌نامیم و الی آخر. (δ, σ از واژه‌های آلمانی *Summe* و *Durchschnitt* به معانی اجتماع و اشتراک برگرفته شده‌اند).

در عمل σ- جبر برل روی $\mathbb{R}$ یک نقش اساسی دارد. برای اطلاع بیشتر توجه می‌کنیم که این σ- جبر را می‌توان به روش‌های دیگری نیز تولیدکرد.

۱.۲ گزاره. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ توسط هرکدام از مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:

الف) بازه‌های باز: $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\}$،

ب) بازه‌های بسته: $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\}$،

ج) بازه‌های نیم‌باز: $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a < b\}$ یا $\mathcal{E}_4 = \{[a,b) : a < b\}$،

د) نیم‌خطهای باز: $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ یا $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$،

ه) نیم‌خطهای بسته: $\mathcal{E}_7 = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ یا $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}$.

برهان. به ازای $j \neq 3,4$، اعضای $\mathcal{E}_j$ باز یا بسته هستند و اعضای $\mathcal{E}_3$ و $\mathcal{E}_4$ همگی مجموعه‌های G_δ هستند ـ برای مثال، $(a,b] = \bigcap_1^\infty (a,b+n^{-1})$. همهٔ اینها مجموعه‌های برل هستند، پس بنابر لم ۱.۱، $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ به ازای همهٔ j ها برقرار است. از سوی دیگر هر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}$ اجتماع شمارش‌پذیری از بازه‌های باز است، پس باز هم بنابر لم ۱.۱، $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. اکنون با نشان دادن اینکه همهٔ بازه‌های باز در $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$ واقع‌اند و با به کار بردن لم ۱.۱ می‌بینیم که به ازای $j \geq 2$، $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. برای مثال

$$(a,b) = \bigcup_{n_0}^\infty [a+n^{-1}, b-n^{-1}] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2).$$

که در آن n_0 طوری انتخاب شده است که $b - n_0^{-1} \geq a + n_0^{-1}$ و لذا برای هر $n \geq n_0$، $b - n^{-1} \geq a + n^{-1}$. وجود چنین n_0ای از خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی نتیجه می‌شود. بررسی حالت‌های دیگر به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲). ■

فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک گردایهٔ اندیس‌گذاری شده از مجموعه‌های ناتهی باشد، $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ و $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ نگاشت‌های مؤلفه‌ای باشند. چنانچه به ازای هر α، $\mathcal{M}_\alpha$ یک σـ جبر روی X_α باشد، σـ جبر حاصلضربی روی X همان σـ جبر تولید شده به وسیلهٔ گردایهٔ زیر است:

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\}.$$

این σـ جبر را با $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ نشان می‌دهیم. (چنانچه $A = \{1,2,\ldots,n\}$، چنین نیز می‌نویسیم $\bigotimes_1^n \mathcal{M}_j$ یا $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$). معنی این تعریف در بند ۲.۱ روشن خواهد شد؛ به‌خاطر اهمیتی که دارد، در حالتی که تعداد عامل‌ها شمارش‌پذیر است، یک ویژگی میانی یا شاید بسیار شهودی σـ جبر را ارائه می‌دهیم.

۱.۳ گزاره. اگر A شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$، σـ جبر تولید شده به‌وسیلهٔ

$$\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}$$

است.

برهان. اگر $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$، آنگاه $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta\in A} E_\beta$ که در آن به ازای $\beta \neq \alpha$، داریم $E_\beta = X_\beta$؛ از سوی دیگر، $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$. بنابر این حکم از لم ۱.۱ حاصل می‌شود. ■

۱.۴ گزاره. فرض کنید که $\mathcal{M}_\alpha$ توسط $\mathcal{E}_\alpha$ تولید شود که $\alpha \in A$. در این صورت $\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ توسط گردایهٔ زیر تولید می‌شود:

$$\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$$

اگر A شمارش‌پذیر باشد و برای همهٔ αها $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$، آنگاه $\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ توسط

$$\mathcal{F}_2 = \{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\}$$

تولید می‌شود.

برهان. به وضوح $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subset \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$. از سوی دیگر به آسانی دیده می‌شود که به ازای هر α، گردایهٔ $\{E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$ یک σـ جبر روی X_α است که شامل $\mathcal{E}_\alpha$ و در نتیجه شامل $\mathcal{M}_\alpha$ است. به بیان دیگر، به ازای هر $\alpha \in A$، $E \in \mathcal{M}_\alpha$ و $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$ و از این رو $\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. حکم دوم مانند برهان گزارهٔ ۱.۳ از اولی نتیجه می‌شود. ■

۱.۵ گزاره. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ چند فضای متری باشند و $X = \prod_1^n X_j$ مجهز به متر حاصلضربی باشد. در این صورت $\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. اگر X_jها جدایی‌پذیر باشند، آنگاه $\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.

برهان. بنابر گزاره ۱.۴، $\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$ توسط مجموعه‌های $\pi_j^{-1}(U_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ تولید می‌شود، که درآن U_j در X_j باز است. چون این مجموعه‌ها در X باز هستند، لم ۱.۱ ایجاب می‌کند که $\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. اکنون فرض کنید C_j مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری در X_j باشد و $\mathcal{E}_j$ گردایهٔ همهٔ گوی‌هایی در X_j باشد که شعاع هایشان گویا هستند و مراکزشان در C_j قرار دارند ـ در واقع، U_j اجتماع شمارش‌پذیری از آنها است زیرا خود $\mathcal{E}_j$ شمارش‌پذیر است. به علاوه، مجموعهٔ نقاطی از X که jاُمین مؤلفهٔ آنها در C_j $(1 \leq j \leq n)$ است زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری از X است و گوی‌های با شعاع r در X درست حاصلضرب گوی‌های با شعاع r در X_jها هستند. نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{B}_{X_j}$ توسط $\mathcal{E}_j$ تولید می‌شود، لذا $\mathcal{B}_X$ توسط $\{\prod_1^n E_j : E_j \in \mathcal{E}_j\}$ تولید می‌شود. از این رو بنابر گزارهٔ ۱.۴، $\mathcal{B}_X = \otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$. ■

۱.۶ نتیجه. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

این بخش را با نتیجه‌ای که بعداً لازم می‌شود به پایان می‌رسانیم. گردایهٔ $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های X را یک خانوادهٔ مقدماتی گوییم در صورتی که:

- $\varnothing \in \mathcal{E}$؛
- اگر $E, F \in \mathcal{E}$، آنگاه $E \bigcap F \in \mathcal{E}$؛
- اگر $E \in \mathcal{E}$، آنگاه E^c اجتماع متناهی مجزایی از اعضای $\mathcal{E}$ باشد.

۱.۷ گزاره. اگر $\mathcal{E}$ یک خانوادهٔ مقدماتی باشد، گردایهٔ $\mathcal{A}$ متشکل از اجتماع‌های مجزای متناهی از اعضای $\mathcal{E}$ یک جبر است.

برهان. اگر $A, B \in \mathcal{E}$ و $B^c = \bigcup_1^J C_j$ ($C_j \in \mathcal{E}$ مجزا)، آنگاه

$$A \bigcup B = (A \setminus B) \bigcup B, A \setminus B = \bigcup_1^J (A \bigcap C_j),$$

که در آن این اجتماع‌ها مجزا هستند، پس $A \setminus B \in \mathcal{A}$ و $A \bigcup B \in \mathcal{A}$. اکنون به استقرا نتیجه می‌شود که اگر $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$، آنگاه $\bigcup_1^n A_j \in \mathcal{E}$؛ در واقع بنابر فرض استقرا می‌توان $A_1, \ldots, A_{n-1}$ را مجزا گرفت و فرض کرد که $\bigcup_1^n A_j = A_n \bigcup [\bigcup_1^{n-1} (A_j \setminus A_n)]$ که اجتماعی مجزا است. برای دیدن اینکه $\mathcal{A}$ تحت متمم‌گیری بسته است، فرض می‌کنیم $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ و $A_m^c = \bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j$ که $B_m^1, \ldots, B_m^{J_m}$ اعضایی مجزا از $\mathcal{E}$ هستند. در این صورت:

$$\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right)^c = \bigcap_{m=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j\right) = \bigcup \{B_1^{j_1} \bigcap \ldots \bigcap B_n^{j_n} : 1 \le j_m \le J_m, 1 \le m \le n\},$$

که در $\mathcal{A}$ است. ■

تمرین‌ها

۱) خانواده‌ای ناتهی مانند $R \subset \mathcal{P}(X)$ از زیرمجموعه های X یک حلقه نامیده می‌شود هرگاه تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد (یعنی، اگر $E_1, \ldots, E_n \in R$، آنگاه $\bigcup_1^n E_j \in R$ و اگر $E, F \in R$، آنگاه $E \setminus F \in R$). حلقه‌ای که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته باشد یک σـ حلقه نامیده می‌شود.

الف) حلقه‌ها (متناظراً، σـ حلقه‌ها) تحت اشتراک‌های متناهی (متناظراً شمارش‌پذیر) بسته‌اند.

ب) اگر R یک حلقه (متناظراً، σـ حلقه) باشد، آنگاه R یک جبر (متناظراً، σـ جبر) است اگر و فقط اگر $X \in R$.

ج) اگر R یک σـ حلقه باشد، آنگاه $\{E \subset X : E \in R$ یا $E^c \in R\}$ یک σـ جبر است.

د) اگر R یک σـ حلقه باشد، آنگاه $\{E \subset X : E \bigcap F \in R$ به ازای هر $F \in R\}$ یک σـ جبر است.

۲) برهان گزارهٔ ۱.۲ را کامل کنید.

۳) فرض کنید $\mathcal{M}$ یک σ- جبر نامتناهی است.

الف) $\mathcal{M}$ شامل دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌های مجزا است.

ب) $\mathrm{card}(\mathcal{M}) \geq c$.

۴) جبری چون $\mathcal{A}$ یک σ- جبر است اگر و فقط اگر تحت اجتماع‌های صعودی شمارش‌پذیر بسته باشد (یعنی اگر $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ و $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$، آنگاه $\bigcup_1^\infty E_j \in \mathcal{A}$).

۵) اگر $\mathcal{M}$، σ- جبر تولید شده با $\mathcal{E}$ باشد، آنگاه $\mathcal{M}$ اجتماع σ- جبرهای تولید شده با $\mathcal{F}$ هایی است که $\mathcal{F}$ روی تمام زیرمجموعه‌های شمارش‌پذیر $\mathcal{E}$ تغییر می‌کند. (راهنمایی: نشان دهیدکه شیئ اخیر یک σ- جبر است).

۱.۳ اندازه‌ها

فرض کنیم X مجموعه‌ای مجهز به یک σ- جبر مانند $\mathcal{M}$ باشد. یک **اندازه روی** $\mathcal{M}$ (یا **روی** $(X, \mathcal{M})$، یا به طور خلاصه روی X در صورتی که $\mathcal{M}$ معلوم باشد) تابعی چون $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ است به قسمی‌که

الف) $\mu(\varnothing) = 0$؛

ب) اگر $\{E_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه

$$\mu(\textstyle\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j).$$

خاصیت (ب) **جمعی شمارش‌پذیر** نامیده می‌شود که جمعی متناهی بودن را ایجاب می‌کند:

(ب۱) اگر $E_1, \ldots, E_n$ مجموعه‌هایی مجزا در $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه

$$\mu(\textstyle\bigcup_1^n E_j) = \sum_1^n \mu(E_j),$$

زیرا برای $j > n$ می‌توان E_j را $\varnothing$ گرفت. تابعی چون μ که در (الف) و (ب۱) صدق می‌کند اما لزوماً در (ب) صدق نمی‌کند، **اندازهٔ متناهیاً جمع‌پذیر** نامیده می‌شود. چنانچه X یک مجموعه و $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ یک σ- جبر باشد، $(X, \mathcal{M})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** نامیده می‌شود و مجموعه‌های واقع در $\mathcal{M}$، **مجموعه‌های اندازه‌پذیر** نامیده می‌شوند. اگر μ یک اندازه روی $(X, \mathcal{M})$ باشد، آنگاه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک **فضای اندازه** نامیده می‌شود. فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. یک نمادگذاری استاندار در مورد «اندازهٔ» μ وجود دارد. چنانچه $\mu(X) < \infty$ (و در نتیجه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$، $\mu(E) < \infty$ زیـ $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$) اندازهٔ μ **متناهی** نامیده می‌شود. اگر $X = \bigcup_1^\infty E_j$ که در آن $E_j \in \mathcal{M}$ و $\mu(E_j) < \infty$ به ازای همهٔ j ها برقرار باشد، μ را **σ- متناهی** نامیم. به طور کلی اگر $E = \bigcup_1^\infty E_j$ که در آن $E_j \in \mathcal{M}$ و به ازای هر j، $\mu(E_j) < \infty$، مجموعهٔ E **نسبت به** μ، **σ- متناهی** خوانده می‌شود. (درست این است که بگوییم E

اندازهٔ σـ متناهی است) چنانچه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ که $\mu(E) = \infty$ مجموعه‌ای چون $F \in \mathcal{M}$ موجود باشد که $F \subset E$ و $\circ < \mu(F) < \infty$، μ **نیمه متناهی** نامیده می‌شود.
هر اندازهٔ σـ متناهی نیمه متناهی است(تمرین ۱۳)، اما عکس آن درست نیست.

اکثر اندازه‌هایی که در مسائل ظاهر می‌شوند σـ متناهی‌اند که خوش‌رفتار هستند در حالی که اندازه‌هایی‌که σـ متناهی نیستند منجر به رفتار نارسایی می‌شوند. خواص اندازه‌هایی که σـ متناهی نیستند بـه تـدریج در تمـرین‌هـا مـورد کنکـاش قـرار خواهندگرفت. اکنون چند مثال از اندازه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مثال‌ها از طبیعت نسبتاً بدیهی برخوردارنـد، اولـین مورد از اهمیت خاصی برخوردار است. ساختن مثال‌های جالبتر، کاری است که آن را به دو بخش بعدی موکول می‌کنیم.

• فرض‌کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ و $A \in \mathcal{M}$ و f تابعی از X به‌توی $[\circ, \infty]$ باشد. در این صورت با فرمـول $\mu(E) = \sum_{x\in E} f(x)$ تـابع f انـدازه‌ای چـون μ روی $\mathcal{M}$ مـشخص مـی‌کنـد. (بـرای تعریـف چنـین مجمـوع شمارش‌ناپذیر احتمالی، بند ۵ . ۰ را ببینید). خواننده می‌تواند بررسی‌کند که μ نیمه متنـاهی اسـت اگـر و فقـط اگـر بـه ازای هـر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) < \infty$ و μ یک اندازهٔ σـ متناهی است اگر و فقط اگر μ نیمه متناهی و $\{x : f(x) > \circ\}$ شمارش‌پذیر باشد. دو حالت خاص از مضمون ویژه‌ای برخوردارند: چنانچه به ازای هر x، $f(x) = ۱$، μ **اندازهٔ شمارشی** نامیده می‌شود و اگر به ازای عضوی چون $x_\circ \in X$، f با $f(x_\circ) = ۱$ و $f(x) = \circ$ برای $x \neq x_\circ$ تعریف شود، μ **جرم نقطه‌ای یا اندازهٔ دیراک** در $x_\circ$ نامیده می‌شود.
(برای تحدیدهای این اندازه‌ها به σـ جبرهای کوچکتر روی X نیز همین نام‌ها به‌کار می‌روند).
• فرض‌کنید X مجموعه‌ای شمارش ناپذیر باشد و $\mathcal{M}$، σـ جبری باشد که از مجموعه‌هایی تشکیل می‌شـود کـه یـا خـود شمارش‌پذیرند یا متممشان شمارش‌پذیر است. به آسانی دیده می‌شود که تابع μ که بـا $\mu(E) = \circ$ هرگـاه E شـمارش‌پـذیر باشد و $\mu(E) = ۱$ هرگاه E^c شمارش‌پذیر باشد یک اندازه است.
• فرض‌کنید X مجموعـه‌ای نامتنـاهی باشـد و $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. تعریـف‌کنیـد $\mu(E) = \circ$ هرگـاه E متنـاهی باشـد و $\mu(E) = \infty$ هرگاه E نامتناهی باشد. در این صورت μ یک اندازهٔ جمعی متناهی است اما یک اندازه نیست.
خواص اساسی اندازه‌ها در قضیهٔ زیر گنجانده شده است.

۱ . ۸ **قضیه.** فرض‌کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.
الف) (یکنوایی) اگر $E, F \in \mathcal{M}$ و $E \subset F$، آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$.
ب) (زیرجمعی‌بودن) اگر $\{E_j\}_۱^\infty \subset \mathcal{M}$، آنگاه $\mu(\bigcup_۱^\infty E_j) \leq \sum_۱^\infty \mu(E_j)$.
ج) (پیوستگی ازپائین) اگر $\{E_j\}_۱^\infty \subset \mathcal{M}$ و $E_۱ \subset E_۲ \subset \cdots$، آنگاه
$$\mu(\bigcup_۱^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

د) **(پیوستگی از بالا)** اگر $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$، $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ و $\mu(E_1) < \infty$، آنگاه

$$\mu(\bigcap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

برهان. **(الف)** اگر $E \subset F$، آنگاه

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E).$$

(ب) فرض کنیم $F_1 = E_1$ و $F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_1^{k-1} E_j\right)$ برای $k > 1$. در این صورت F_kها مجزا هستند و $\bigcup_1^n F_j = \bigcup_1^n E_j$ به ازای همهٔ nها برقرار است. بنابر این طبق (الف) خواهیم داشت:

$$\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \mu(\bigcup_1^\infty F_j) = \sum_1^\infty \mu(F_j) \leq \sum_1^\infty \mu(E_j).$$

(ج) با قرار دادن $E_0 = \varnothing$، داریم

$$\mu(\bigcup_1^\infty E_j) == \sum_1^\infty \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(د) فرض کنید $F_j = E_1 \setminus E_j$؛ در این صورت $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$، $\bigcup_1^\infty F_j = E_1 \setminus (\bigcap_1^\infty E_j)$ و

$$\mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j).$$

در نتیجه بنابر (ج) خواهیم داشت:

$$\mu(E_1) = \mu(\bigcap_1^\infty E_j) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu(\bigcap_1^\infty E_j) + \lim_{j\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_j)].$$

چون $\mu(E_1) < \infty$، پس می‌توانیم آن را از دو طرف کم کرده و به نتیجه مطلوب برسیم. ■

تذکرمی‌دهیم که شرط $\mu(E_1) < \infty$ در قسمت (د) را می‌توان با $\mu(E_n) < \infty$ به ازای $n > 1$ای، جایگزین کرد، زیرا نخستین $n - 1$ تا از E_jها را می‌توان از دنباله حذف کرد بدون آنکه بر اشتراک تأثیرگذارد. اما فرض متناهی بودن اندازهٔ یکی از E_jها امری ضروری است زیرا ممکن است که $\mu(E_j) = \infty$ به ازای هر j برقرار باشد اما $\mu(\bigcap_1^\infty E_j) < \infty$ (برای مثال، فرض می‌کنیم μ اندازه شمارشی روی $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ باشد و قرارمی دهیم $E_j = \{n : n \geq j\}$؛ در این صورت $\bigcap_1^\infty E_j = \varnothing$).

چنانچه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، مجموعه‌ای چون $E \in \mathcal{M}$ به‌طوری‌که $\mu(E) = 0$ یک **مجموعهٔ پوچ** نامیده می‌شود. بنابر زیرجمعی بودن، هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های پوچ یک مجموعهٔ پوچ است، و این واقعیتی است که بارها از آن استفاده خواهیم کرد.

چنانچه گزاره‌ای در مورد نقاط $x \in X$ به‌جز xهای واقع در یک مجموعهٔ پوچ درست باشد، می‌گوییم که این گزاره **تقریباً همه‌جا** (به‌طور خلاصه ت.ه) درست است یا به ازای تقریباً هر x درست است. (اگر دقت بیشتری لازم باشد، خواهیم گفت که مجموعه μ- پوچ یا μ- تقریباً همه جا پوچ است).

اگر $\mu(E) = \circ$ و $F \subset E$، آنگاه بنابر یکنوایی داریم $\mu(F) = \circ$ مشروط بر اینکه $F \in \mathcal{M}$، اما در کل لازم نیست که $F \in \mathcal{M}$ برقرار باشد. اندازه‌ای که دامنه‌اش همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعه‌های پوچ را شامل شود کامل نامیده می‌شود. اغلب می‌توان با نکات تکنیکی معضل کامل نبودن را مرتفع ساخت و همواره با توسعهٔ دامنهٔ μ به صورت زیر می‌توان این کار را انجام داد.

۱.۹ **قضیه.** فرض‌کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = \circ\},$$

$$\overline{\mathcal{M}} = \{E \bigcup F : E \in \mathcal{M}, F \subset N \text{ به ازای } N \in \mathcal{N} \text{ ای}\}.$$

در این صورت $\overline{\mathcal{M}}$ یک σـ جبر است و توسیع یکتایی چون $\overline{\mu}$ از μ به اندازه‌ای کامل روی $\overline{\mathcal{M}}$ وجود دارد.

برهان. چون $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته‌اند پس $\overline{\mathcal{M}}$ نیز چنین است. اگر $E \bigcup F \in \overline{\mathcal{M}}$ که در آن $E \in \mathcal{M}$ و $F \subset N \in \mathcal{N}$، می‌توانیم فرض‌کنیم‌که $E \bigcap N = \varnothing$ (در غیر این صورت N و F را با $F \setminus E$ و $N \setminus E$ عوض می‌کنیم). در این صورت $E \bigcup F = (E \bigcup N) \bigcap (N^c \bigcup F)$، لذا $(E \bigcup F)^c = (E \bigcup N)^c \bigcup (N \setminus F)$. اما $(E \bigcup N)^c \in \mathcal{M}$ و $N \setminus F \subset N$، پس $(E \bigcup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. از این رو $\overline{\mathcal{M}}$ یک σـ جبر است.

چنانچه $E \bigcup F \in \overline{\mathcal{M}}$ مانند فوق باشد، قرار می‌دهیم $\overline{\mu}(E \bigcup F) = \mu(E)$. این نگاشت خوشتعریف است، زیرا اگر $E_1 \bigcup F_1 = E_2 \bigcup F_2$ و $F_j \subset N_j \in \mathcal{N}$، آنگاه $E_1 \subset E_2 \bigcup N_2$ و لذا

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2).$$

مشابهاً $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$. به آسانی معلوم می‌شودکه $\overline{\mu}$ اندازه‌ای کامل روی $\overline{\mathcal{M}}$ است و $\overline{\mu}$ تنها اندازه‌ای روی $\overline{\mathcal{M}}$ است‌که μ را توسیع می‌دهد؛ جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۶). ■

اندازهٔ $\overline{\mu}$ در قضیهٔ ۱.۹ **کامل شدهٔ** μ و $\overline{\mathcal{M}}$ **کامل شدهٔ** $\mathcal{M}$ **نسبت به** μ نامیده می‌شود.

تمرین‌ها

۶) برهان قضیهٔ ۱.۹ را کامل کنید.

۷) اگر $\mu_1, \ldots, \mu_n$ اندازه‌هایی روی $(X, \mathcal{M})$ باشند و $a_1, \ldots, a_n \in [\circ, \infty)$، آنگاه $\sum_1^n a_j \mu_j$ اندازه‌ای روی $(X, \mathcal{M})$ است.

۸) اگر $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$، آنگاه

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) .$$

همچنین
$$\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$
مشروط بر اینکه $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) < \infty$.

۹) اگر $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد و $E,F \in \mathcal{M}$، آنگاه
$$\mu(E)+\mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

۱۰) فضای اندازه‌ای چون $(X,\mathcal{M},\mu)$ و $E \in \mathcal{M}$ مفروض‌اند، به ازای هر $A \in \mathcal{M}$ تعریف می‌کنیم:
$$\mu_E(A) = \mu(A \cap E).$$
در این صورت μ_E یک اندازه است.

۱۱) یک اندازهٔ جمعی متناهی مانند μ یک اندازه است اگر و فقط اگر مانند قسمت (ج) از قضیهٔ ۱.۸ از پایین پیوسته باشد. چنانچه $\mu(X) < \infty$، μ یک اندازه است اگر و فقط اگر مانند (د) از قضیهٔ ۱.۸ از بالا پیوسته باشد.

۱۲) فرض کنیم $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد.

الف) اگر $E,F \in \mathcal{M}$ و $\mu(E\Delta F) = 0$، آنگاه $\mu(E) = \mu(F)$.

ب) می‌گوییم $E \sim F$ هرگاه $\mu(E\Delta F) = 0$؛ در این صورت $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathcal{M}$ است.

ج) به ازای $E,F \in \mathcal{M}$ تعریف می‌کنیم $\rho(E,F) = \mu(E\Delta F)$. در این صورت
$$\rho(E,G) \leq \rho(E,F) + \rho(F,G),$$
از این رو ρ یک متر روی فضای $\mathcal{M}/\sim$ متشکل از رده‌های هم‌ارزی تعریف می‌کند.

۱۳) هر اندازهٔ σـ متناهی، نیمه متناهی است.

۱۴) اگر μ یک اندازهٔ نیمه متناهی باشد $\mu(E) = \infty$، به ازای هر $C > 0$، $F \subset E$ای وجود دارد که
$$C < \mu(F) < \infty.$$

۱۵) اندازه‌ای چون μ روی $(X,\mathcal{M})$ مفروض است، μ_0 روی $\mathcal{M}$ را با
$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$

تعریف می‌کنیم.

الف) μ_0 یک اندازهٔ نیمه متناهی است. آن را **بخش نیمه متناهی** μ می نامیم.

ب) اگر μ نیمه متناهی باشد، آنگاه $\mu_0 = \mu$. (از تمرین ۱۴ استفاده کنید).

ج) اندازه‌ای چون ν روی $\mathcal{M}$ (درکل،غیریکتا) وجود دارد که فقط مقادیر ۰ و ∞ را می‌گیرد به‌طوری‌که $\mu = \mu_0 + \nu$.

۱۶) فرض‌کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. مجموعه‌ای چون $E \subset X$ **اندازه‌پذیر موضعی** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $A \in \mathcal{M}$ با شرط $\mu(A) < \infty$ داشته باشیم $E \cap F \in \mathcal{M}$. فرض کنید $\widetilde{\mathcal{M}}$ گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر موضعی باشد. به وضوح $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$، اگر $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$، آنگاه μ **اشباع** نامیده می‌شود.

الف) اگر μ، σـ متناهی باشد، آنگاه μ اشباع است.

ب) $\widetilde{\mathcal{M}}$ یک σـ جبر است.

ج) $\tilde{\mu}$ را روی $\widetilde{\mathcal{M}}$ چنین تعریف کنید: $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ هرگاه $E \in \mathcal{M}$ و در غیر این صورت $\tilde{\mu}(E) = \infty$. در این صورت $\tilde{\mu}$ یک اندازهٔ اشباع روی $\widetilde{\mathcal{M}}$ موسوم به **اشباع شدهٔ** μ است.

د) اگر μ کامل باشد $\tilde{\mu}$ نیز چنین است.

ه) فرض‌کنید μ نیمه متناهی باشد. به ازای $E \in \widetilde{\mathcal{M}}$، تعریف کنید:

$$\underline{\mu}(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}, A \subset E\}.$$

در این صورت $\underline{\mu}$ یک اندازهٔ اشباع روی $\widetilde{\mathcal{M}}$ است که μ را توسیع می‌دهد.

و) فرض‌کنید X_1, X_2 دو مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر مجزا باشند، $X = X_1 \cup X_2$ و $\mathcal{M}$، σـ جبر مجموعه‌های شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر واقع در X باشند. فرض‌کنید μ_0 اندازهٔ شمارشی روی $\mathcal{P}(X_1)$ باشد و μ را روی $\mathcal{M}$ با $\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1)$ تعریف کنید. در این صورت μ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است، $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(X)$ و با نمادگذاری قسمت‌های (ج) و (ه)، $\tilde{\mu} \neq \underline{\mu}$.

۱.۴ اندازه‌های خارجی

در این بخش ابزارهای مورد نیاز برای ساختن اندازه‌ها را توسعه می‌دهیم. برای به کار انداختن مؤثر ایده‌ها، روند به کار رفته در حسابان برای تعریف مساحت ناحیهٔ کرانداری چون E در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ را به‌خاطر می‌آوریم. شبکه‌ای از مستطیل‌ها را در صفحه رسم کرده و مساحت E را از پائین با مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی در شبکه که زیرمجموعه‌هایی از E هستند و از بالا با مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی در شبکه که E را قطع می‌کنند تقریب می‌زنیم. حد این تقریب‌ها وقتی شبکه ظریف و

ظریفتر می‌شود «مساحت داخلی» و «مساحت خارجی» E را به دست می‌دهد و اگر این دو مساحت برابر باشند، مقدار مشترکشان «مساحت» E است. (در این مورد برای جزئیات بیشتر در بند ۲.۶ بحث خواهیم کرد).
نظر اصلی در اینجا مساحت خارجی است، زیرا اگر R یک مستطیل بزرگ شامل E باشد، مساحت داخلی E درست مساحت R منهای مساحت خارجی $R \setminus E$ است. تعمیم مفهوم مساحت خارجی به صورت زیر است. یک اندازهٔ خارجی روی مجموعه‌ای ناتهی مانند X تابعی مانند $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- $\mu^*(\varnothing) = 0$،
- اگر $A \subset B$، آنگاه $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$،
- $\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j) \le \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$.

رایج‌ترین روش برای به دست آوردن اندازه‌های خارجی، شروع کردن با خانواده‌ای چون $\mathcal{E}$ از «مجموعه‌های مقدماتی» است که مفهومی از اندازه روی آنها تعریف شود (از قبیل مستطیل‌های واقع در صفحه) و سپس تقریب زدن مجموعه‌های دل‌خواه «از بیرون» با اجتماع شمارش‌پذیری از اعضای $\mathcal{E}$ است.

۱.۱۰ گزاره. فرض کنید $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ و $\rho : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ به‌گونه‌ای باشد که $\varnothing \in \mathcal{E}$، $X \in \mathcal{E}$ و $\rho(\varnothing) = 0$. به ازای هر $A \subset X$ تعریف کنید:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E}, A \subset \bigcup_1^\infty E_j\}.$$

در این صورت μ^* یک اندازه خارجی است.

برهان. به ازای هر $A \subset X$ دنباله‌ای چون $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{E}$ وجود دارد به طوری‌که $A \subset \bigcup_1^\infty E_j$ (به ازای هر j فرض می‌کنیم $E_j = X$)، پس تعریف μ^* با معنی است. به وضوح $\mu^*(\varnothing) = 0$ (به ازای هر j فرض می‌کنیم $E_j = \varnothing$)، و به ازای هر $A \subset B$ داریم $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ زیرا در تعریف $\mu^*(A)$ مجموعه‌ای که روی آن اینفیمم گرفته می‌شود شامل مجموعهٔ متناظر در تعریف $\mu^*(B)$ است. برای اثبات زیرجمعی شمارش‌پذیر بودن، فرض می‌کنیم $\{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{P}(X)$ و $\varepsilon > 0$. برای هر j دنباله‌ای چون $\{E_j^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{E}$ وجود دارد به‌طوری‌که $A_j \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_j^k$ و

$$\sum_{k=1}^\infty \rho(E_j^k) \le \mu^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

اما در این صورت اگر $A = \bigcup_1^\infty A_j$، داریم $A \subset \bigcup_{j,k=1}^\infty E_j^k$ و

$$\sum_{j,k}^\infty \rho(E_j^k) \le \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon$$

که از آنجا

$$\mu^*(A) \le \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

چون ε دل‌خواه است به حکم می‌رسیم. ■

مرحلهٔ اساسی که منجر به رسیدن از اندازه‌های خارجی به اندازه‌ها می‌شود به صورت زیر است: چنانچه μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، مجموعه‌ای چون $A \subset X$، μ^* - اندازه‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $E \subset X$ داشته باشیم:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

البته، نامساوی

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

برای هر A و E برقرار است، لذا برای اثبات μ^*-اندازه پذیری A، کافی است عکس نامساوی را ثابت کنیم. اگر $\mu^*(E) = \infty$ چیزی برای اثبات نمی ماند، پس می بینیم که A، μ^* - اندازه پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $E \subset X$ که $\mu^*(E) < \infty$ داشته باشیم:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

با رجوع به بحث آغازین همین بخش می‌توان نکاتی را در مورد مفهوم μ^*- اندازه‌پذیری به دست آورد. چنانچه E یک مجموعهٔ« خوش رفتار» باشد به قسمی که $A \subset E$، معادلهٔ

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

می‌گوید که اندازهٔ خارجی A، یعنی $\mu^*(A)$ با« اندازهٔ داخلی» A، یعنی $\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$ برابر است. گذر از مجموعه‌های « خوش‌رفتار» شامل A به زیرمجموعه‌های دل‌خواه X کار بزرگی است، اما بنابر قضیهٔ زیر، این کار قابل انجام است.

۱.۱۱ قضیهٔ کاراتئودری. اگر μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، گردایهٔ $\mathcal{M}$ مرکب از مجموعه‌های μ^*- اندازه‌پذیر یک σ- جبر است، و تحدید μ^* به $\mathcal{M}$ یک اندازهٔ کامل است.

برهان. نخست ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{M}$ تحت متمم‌گیری بسته است زیرا تعریف μ^* اندازه‌پذیری A نسبت به A, A^c متقارن است. اکنون اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $E \subset X$، آنگاه

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

اما $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$، لذا بنابر زیرجمعی بودن

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)),$$

و از این رو

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

نتیجه می‌گیریم که $A \cup B \in \mathcal{M}$، پس $\mathcal{M}$ یک جبر است. به علاوه، اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $A \cap B = \varnothing$، آنگاه

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c)$$
$$= \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

لذا μ^* روی $\mathcal{M}$ جمعی متناهی است.

برای نشان دادن اینکه $\mathcal{M}$ یک σـ جبر است، کافی است نشان دهیم که $\mathcal{M}$ تحت اجتماع‌های مجزای شمارا بسته است. اگر $\{A_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در $\mathcal{M}$ باشد، قرار می‌دهیم $B_n = \bigcup_1^n A_j$ و $B = \bigcup_1^\infty A_j$. در این صورت به ازای هر $E \subset X$ داریم:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c)$$
$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),$$

لذا یک استقرای ساده نشان می‌دهد که $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j)$. بنابر این

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c),$$

و با فرض $n \to \infty$ به‌دست می‌آوریم:

$$\mu^*(E) \geq \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c)$$
$$\geq \mu^*\left(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)\right) + \mu^*(E \cap B^c)$$
$$= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E).$$

بنابر این، در آخرین استنتاج همهٔ نامساوی ها تساوی هستند. نتیجه می‌گیریم که $B \in \mathcal{M}$ و با گرفتن «$E = B$»، $\mu^*(B) = \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$، لذا μ^* روی $\mathcal{M}$ جمعی شمارش‌پذیر است. بالاخره، چنانچه به ازای هر $E \subset X$ داشته باشیم $\mu^*(A) = 0$، آنگاه

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

و لذا $A \in \mathcal{M}$. بنابر این $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ یک اندازه کامل است. ■

نخستین کاربردهای قضیهٔ کاراتئودوری در زمینهٔ توسیع اندازه‌ها از جبرها به σـ جبرها خواهد بود. به طور دقیق تر، چنانچه $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر باشد، تابعی چون $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ را یک **پیش‌اندازه** خواهیم نامید در صورتی که

- $\mu_0(\varnothing) = 0$،
- اگر $\{A_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در $\mathcal{A}$ باشدکه $\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{A}$، آنگاه $\mu_0(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j)$.

به‌ویژه، هر پیش‌اندازه جمعی متناهی است زیرا می‌توان برای j های بزرگ A_j را $\varnothing$ گرفت. پیش اندازه‌های متناهی و σـ متناهی درست مانند اندازه‌ها تعریف می‌شوند. چنانچه μ_0 پیش‌اندازه‌ای روی $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ باشد از گزارهٔ ۱.۱۰ معلوم می‌شود که μ_0 یک اندازهٔ خارجی روی X القاء می‌کند که عبارت است از:

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_1^\infty \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_1^\infty A_j\}. \qquad (۱.۱۲)$$

۱.۱۳ گزاره. اگر μ_0 یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ باشد و μ^* با (۱.۱۲) تعریف شود، آنگاه

الف) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$؛

ب) هر مجموعه در $\mathcal{A}$، μ^*ـ اندازه‌پذیر است.

برهان. (الف) فرض کنید $E \in \mathcal{A}$. چنانچه $E \subset \bigcup_1^\infty A_j$ که $A_j \in \mathcal{A}$ قرار می‌دهیم:

$$B_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_1^{n-1} A_j).$$

در این صورت B_n ها اعضای مجزایی از $\mathcal{A}$ هستند که اجتماعشان E است، لذا

$$\mu_0(E) = \sum_1^\infty \mu(B_j) \le \sum_1^\infty \mu_0(A_j).$$

نتیجه می‌گیریم که $\mu_0(E) \le \mu^*(E)$ و نامساوی عکس واضح است زیرا $E \subset \bigcup_1^\infty A_j$ که در آن $A_1 = E$ و به ازای $j > 1$، $A_j = \varnothing$.

(ب) چنانچه $A \in \mathcal{A}$, $E \subset X$ و $\varepsilon > 0$ دنباله‌ای چون $\{B_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که $E \subset \bigcup_1^\infty B_j$ و $\sum_1^\infty \mu(B_j) \le \mu^*(E) + \varepsilon$. چون μ_0 روی $\mathcal{A}$ جمعی است پس

$$\mu^*(E) + \varepsilon \ge \sum_1^\infty \mu_0(B_j \cap A_j) + \sum_1^\infty \mu_0(B_j \cap A^c) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

چون ε دل‌خواه است، A مجموعه‌ای μ^*ـ اندازه‌پذیر است. ■

۱.۱۴ قضیه. فرض کنید $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر، μ_0 یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{M}$، σـ جبر تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ باشد. اندازه‌ای چون μ روی $\mathcal{M}$ موجود است که تحدیدش به $\mathcal{A}$، μ_0 می‌باشد یعنی، $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ که در آن μ^* به وسیلهٔ (۱.۱۲) تعریف می‌شود. اگر ν اندازهٔ دیگری روی $\mathcal{M}$ باشد که μ_0 را توسیع دهد، آنگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$، $\nu(E) \le \mu(E)$ که مساوی است وقتی $\mu(E) < \infty$. اگر μ_0، σـ متناهی باشد، آنگاه μ توسیع یکتایی از μ_0 به یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است.

برهان. حکم نخست از قضیهٔ کاراتئودری و گزارهٔ ۱.۱۳ حاصل می‌شود زیرا σـ جبر مجموعه‌های μ^*ـ اندازه‌پذیر شامل $\mathcal{A}$ و در نتیجه شامل $\mathcal{M}$ است. در مورد حکم دوم، اگر $E \in \mathcal{M}$ و $E \subset \bigcup_1^\infty A_j$ که در آن $A_j \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\nu(E) \le \sum_1^\infty \nu(A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j),$$

که از آنجا $\nu(E) \le \mu(E)$ به دست می‌آید. همچنین اگر قرار دهیم $A = \bigcup_1^\infty A_j$، آنگاه

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_1^n A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_1^n A_j) = \mu(A).$$

چنانچه $\mu(E) < \infty$، می‌توانیم A_jها را طوری انتخاب کنیم که $\mu(A) < \mu(E) + \varepsilon$ و بنابر این $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$ و

$$\mu(E) \le \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \le \nu(E) + \mu(A \setminus E)\nu(E) + \varepsilon.$$

چون ε دل‌خواه است، $\mu(E) = \nu(E)$. بالاخره، فرض کنید $X = \bigcup_1^\infty A_j$ و $\mu_0(A_j) < \infty$ که در آن می‌توانیم A_jها را مجزا فرض کنیم. در این صورت به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ داریم

$$\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(E \cap A_j) = \sum_1^\infty \nu(E \cap A_j) = \nu(E).$$

پس $\nu = \mu$. ■

برهان این قضیه چیزی بیشتر از حکم به دست می‌دهد. در حقیقت، μ_0 را می‌توان به یک اندازه روی جبر $\mathcal{M}^*$ متشکل از مجموعه‌های μ^*- اندازه‌پذیر توسیع داد.

رابطهٔ بین $\mathcal{M}^*$ و $\mathcal{M}$ در تمرین۲۲ مورد کنکاش قرار می‌گیرد (همراه با قسمت (ب) از تمرین ۲۰ که حکم می‌کند که اندازه‌های خارجی القاء شدهٔ μ_0 و μ یکی هستند).

تمرین‌ها

۱۷) اگر μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد و $\{A_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های μ^*- اندازه‌پذیر مجزا باشد، آنگاه به ازای هر $E \subset X$،

$$\mu^*(E \cap (\bigcup_1^\infty A_j)) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j).$$

۱۸) فرض کنید $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر، $\mathcal{A}_\sigma$ گردایهٔ اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های واقع در $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ گردایهٔ اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های واقع در $\mathcal{A}_\sigma$ باشد. فرض کنید μ_0 یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ و μ^* اندازه خارجی القایی باشد.

الف) به ازای هر $E \subset X$ و $\varepsilon > 0$ عضوی چون $A \in \mathcal{A}_\sigma$ وجود دارد که $E \subset \mathcal{A}$ و $\mu^*(A) \le \mu^*(E) + \varepsilon$.

ب) اگر $\mu^*(E) < \infty$، آنگاه E، μ^*- اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر عضوی چون $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ موجود باشد که $E \subset B$ و $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

ج) اگر μ_0، σ- متناهی باشد، قید $\mu^*(E) < \infty$ در (ب) زاید است.

۱۹) فرض کنید μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد که از پیش‌اندازه‌ای متناهی مانند μ_0 القاء شده باشد. اگر $E \subset X$، اندازهٔ داخلی E را $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$ تعریف کنید.
در این صورت E، μ^*ـ اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. (از تمرین ۱۸ استفاده کنید).

۲۰) فرض کنید μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، $\mathcal{M}^*$، σ- جبر مجموعه‌های μ^*ـ اندازه‌پذیر، $\overline{\mu} = \mu^* |_{\mathcal{M}^*}$ و μ^+ اندازه خارجی القاء شده توسط $\overline{\mu}$ همچون (۱.۱۲) (با جایگزینی $\mathcal{M}^*$ به‌جای μ_0 و $\mathcal{A}$) باشد.
الف) اگر $E \subset X$، داریم $\mu^*(E) \leq \mu^+(E)$ و تساوی است اگر و فقط اگر عضوی چون $A \in M^*$ موجود باشد که $A \supset E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.
ب) اگر μ^* از پیش‌اندازه القاء شده باشد، آنگاه $\mu^+ = \mu^*$. (تمرین ۱۸ الف را به کاربرید).
ج) اگر $X = \{0,1\}$، یک اندازهٔ خارجی مانند μ^* روی X وجود دارد به قسمی که

$$\mu^* \neq \mu^+.$$

۲۱) فرض کنید μ^* یک اندازهٔ خارجی باشد که از یک پیش‌اندازه القا شده است و $\overline{\mu}$ تحدید μ^* به مجموعه‌های μ^*ـ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت $\overline{\mu}$ اشباع است (تمرین ۱۸ را به‌کار بزید).

۲۲) فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه، μ^* اندازهٔ خارجی القاء شده توسط μ مطابق با (۱.۱۲)، $\mathcal{M}^*$، σـ جبر متشکل از مجموعه‌های μ^*ـ اندازه‌پذیر، و $\overline{\mu} = \mu^* |_{\mathcal{M}^*}$.
الف) اگر μ، σـ متناهی باشد، آنگاه $\overline{\mu}$ کامل شدهٔ μ است (از تمرین ۱۸ استفاده کنید).
ب) درکل، $\overline{\mu}$ اشباع کامل شدهٔ μ است. (تمرین های ۱۶ و ۲۱ را ببینید).

۲۳) فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایهٔ اجتماع های متناهی از مجموعه‌های به شکل $(a,b] \cap \mathbb{Q}$ باشد که در آن

$$-\infty \leq a < b \leq \infty.$$

الف) $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{Q}$ است. (ازگزارهٔ ۱.۷ استفاده کنید).
ب) σـ جبر تولید شده به وسیلهٔ $\mathcal{A}$ عبارت است از $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
ج) μ_0 را روی $\mathcal{A}$ با $\mu_0(\varnothing) = 0$ و $\mu_0(A) = \infty$ به ازای $A \neq \varnothing$ تعریف کنید. در این صورت μ_0 یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ است و بیش از یک اندازه روی $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ وجود دارد که تحدیدشان به $\mathcal{A}$، μ_0 است.

۲۴) فرض کنید μ یک اندازهٔ متناهی روی $(X, \mathcal{M})$ و μ^* اندازهٔ خارجی القایی توسط μ باشد. فرض کنید که $E \subset X$ در $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ صدق می‌کند (اما نه در $E \in \mathcal{M}$).
الف) اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $A \cap E = B \cap E$، آنگاه $\mu(A) = \mu(B)$.

ب) فرض کنید $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$، و تابع ν روی $\mathcal{M}_E$ را با $\nu(A \cap E) = \mu(A)$ تعریف کنید (که بنابر (الف) با معنی است). در این صورت $\mathcal{M}_E$ یک σ- جبر روی E است و ν یک اندازه روی $\mathcal{M}_E$ می‌باشد.

۱.۵ اندازه‌های برل روی خط حقیقی

اکنون در آستانهٔ ساختن یک نظریهٔ توصیفی در مورد زیرمجموعه‌های اندازه‌ای $\mathbb{R}$ هستیم که بر ایده‌ای استوار است که اندازهٔ یک بازه، طول آن باشد. با یک کلیت ساختن (اما فقط کمی پیچیده‌تر) شروع می‌کنیم که خانواده‌ای بزرگ از اندازه‌ها روی $\mathbb{R}$ را به دست می‌دهد که دامنهٔ آنها σ- جبر برل $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ است؛ چنین اندازه‌هایی **اندازه‌های برل روی $\mathbb{R}$** نامیده می‌شوند.

برای اجرای ایده‌ها، فرض‌کنیدکه μ یک اندازهٔ برل متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد و $F(x) = \mu((-\infty, x])$. (اغلب F تابع **توزیع μ** نامیده می‌شود). در این صورت بنابر قسمت (الف) از قضیهٔ ۱۸، تابع F صعودی است و بنابر (د) از قضیهٔ ۱۸ از راست پیوسته است زیرا وقتی $x_n > x$ داریم:

$$(-\infty, x] = \bigcap_1^\infty (-\infty, x_n].$$

(بحث صعودی بودن توابع در بند ۵ . ۰ را به‌خاطر آورید.) به‌علاوه، اگر $b > a$، آنگاه

$$(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$$

و لذا

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a).$$

هدفمان برگرداندن این موضوع و ساختن اندازه‌ای چون μ با شروع از یک تابع صعودی از راست پیوسته مانند F است. حالت خاص $F(x) = x$ اندازهٔ «طول» معمولی را به دست خواهد داد.

بلوک‌های ساختمانی نظریهٔ ما بازه‌های از چپ باز و از راست بسته در $\mathbb{R}$ خواهند بود، یعنی، مجموعه‌هایی به شکل $(a,b]$ یا (a,∞) یا $\varnothing$ که در آن $-\infty \leq a < b < \infty$.

در این بخش از چنین بازه‌هایی تحت عنوان نیم بازه‌ها یاد خواهیم کرد (نیم برای نیم باز است).

به وضوح، اشتراک دو نیم بازه، یک نیم بازه است، و متمم یک نیم بازه یک نیم بازه یا اجتماعی مجزا از دو نیم بازه است. بنابر گزارهٔ ۱.۷ گردایهٔ $\mathcal{A}$ متشکل از اجتماع‌های مجزای متناهی از نیم بازه‌ها، یک جبر است، و بنابر گزارهٔ ۱.۲، σ- جبر تولید شده با $\mathcal{A}$ درست $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است.

۱.۱۵ **گزاره.** فرض‌کنیم $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ صعودی و از راست پیوسته باشد. اگر $(a_j, b_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$، نیم بازه‌هایی مجزا باشند، قرار می‌دهیم:

$$\mu_0\left(\bigcup_1^n (a_j, b_j]\right) = \sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)],$$

و فرض می‌کنیم $\mu_0(\varnothing) = 0$. در این صورت μ_0 یک پیش اندازه روی جبر $\mathcal{A}$ است.

برهان. نخست باید خوشتعریفی $\mu_\circ$ را بررسی کنیم، زیرا اعضای $\mathcal{A}$ را می‌توان به بیش از یک روش به صورت اجتماع‌های مجزا از نیم بازه‌ها نمایش داد. اگر اعضای $\{(a_j, b_j]\}_1^n$ مجزا باشند و $\bigcup_1^n (a_j, b_j] = (a, b]$، آنگاه در صورت لزوم پس از اندیس‌گذاری مجدد j باید داشته باشیم $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_n = b$، لذا

$$\sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a).$$

به‌طور کلی‌تر، اگر $\{I_i\}_1^n$ و $\{J_j\}_1^m$ دنباله‌هایی متناهی از نیم بازه‌هایی مجزا باشند به‌گونه‌ای که $\bigcup_1^n I_i = \bigcup_1^m J_j$، همین استدلال نشان می‌دهدکه

$$\sum_i \mu_\circ(I_i) = \sum_{i,j} \mu_\circ(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_\circ(J_j).$$

از این رو $\mu_\circ$ خوشتعریف است، و با توجه به نحوهٔ ساخت، جمعی متناهی است.

نشان دادن این مطلب باقی مانده است‌که اگر $\{I_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از نیم بازه‌های مجزایی باشد که $\bigcup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$، آنگاه $\mu_\circ(\bigcup_1^\infty I_j) = \sum_1^\infty \mu_\circ(I_j)$. چون $\bigcup_1^\infty I_j$ اجتماعی متناهی از نیم بازه‌ها است، دنبالهٔ $\{I_j\}_1^\infty$ را می‌توان به تعدادی متناهی زیردنباله افراز کرد به قسمی که اجتماع بازه‌های واقع در هر زیردنباله یک نیم بازهٔ تنها باشد. با جداگانه درنظرگرفتن هر دنباله و استفاده از جمعی متناهی بودن $\mu_\circ$ می‌توانیم فرض‌کنیم $\bigcup_1^\infty I_j$ یک نیم بازه مانند $I = (a, b]$ است. در این حالت داریم:

$$\mu_\circ(I) = \mu_\circ(\bigcup_1^n I_j) + \mu_\circ(I \setminus \bigcup_1^n I_j) \geq \mu_\circ(\bigcup_1^n I_j) = \sum_1^n \mu_\circ(I_j).$$

با فرض $n \to \infty$ به‌دست می‌آوریم $\mu_\circ(I) \geq \sum_1^\infty \mu_\circ(I_j)$. برای اثبات شمول عکس، نخست فرض می‌کنیم که a و b متناهی‌اند و $\varepsilon > \circ$ ثابت است. چون F پیوستهٔ راست است، $\delta > \circ$ای هست که $F(a + \delta) - F(a) < \varepsilon$، و چنانچه $I_j = (a_j, b_j]$، به ازای هر j، $\delta_j > \circ$ای هست که $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < 2^{-j}\varepsilon$. بازه‌های باز $(a_j, b_j + \delta_j)$ مجموعهٔ فشردهٔ $[a + \delta, b]$ را می‌پوشانند، پس زیرپوششی متناهی وجود دارد. با کنارگذاشتن هر $(a_j, b_j + \delta_j)$ای که در یکی از بزرگترها مشمول است و با اندیس‌گذاری مجدد j می‌توان فرض‌کرد که:

- $(a_1, b_1 + \delta_1), \ldots, (a_N, b_N + \delta_N)$ مجموعهٔ $[a + \delta, b]$ را می‌پوشانند،
- به ازای $j = 1, \ldots, N - 1$، $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$.

اما در این صورت

$$\begin{aligned}\mu_\circ(I) &< F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \\ &\le F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\ &= F(b+\delta_N) - F(a_N) + \sum_1^{N-1}[F(a_{j+1}) - F(a_j)] + \varepsilon \\ &\le F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_1^{N-1}[F(b_j+\delta_j) - F(a_j)] + \varepsilon \\ &< \sum_1^{N}[F(b_j) + \varepsilon 2^{-j} - F(a_j)] + \varepsilon \\ &< \sum_1^{\infty}\mu_\circ(I_j) + 2\varepsilon \cdot\end{aligned}$$

چون ε دل‌خواه است وقتی a و b متناهی باشند به حکم رسیده‌ایم. اگر $a = -\infty$، به ازای هر $M < \infty$ بازه‌های از $(a_j, b_j + \delta_j)$ مجموعهٔ $[-M, b]$ را می‌پوشانند، لذا همان استدلال فوق به دست می‌دهد:

$$F(b) - F(-M) \le \sum_1^\infty \mu_\circ(I_j) + 2\varepsilon$$

در حالی‌که اگر $b = \infty$، به طریق مشابه به ازای هر $M < \infty$ به دست می‌آوریم:

$$F(M) - F(a) \le \sum_1^\infty \mu_\circ(I_j) + 2\varepsilon$$

بنابراین حکم خواسته شده با فرض $\varepsilon \to 0$ و $M \to \infty$ به دست می‌آید. ■

۱.۱۶ **قضیه.** چنانچه $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع صعودی از راست پیوسته‌ای باشد، اندازهٔ برل یکتایی چون μ_F روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی‌که به ازای هر b, a داریم:

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a).$$

هرگاه G تابع دیگری از این سنخ باشد، داریم $\mu_F = \mu_G$ اگر و فقط اگر $F - G$ ثابت باشد. به‌عکس، اگر μ اندازهٔ برلی روی $\mathbb{R}$ باشدکه روی همهٔ مجموعه‌های برلِ کراندار، متناهی است و تعریف‌کنیم

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\mu((x,0]) & x < 0, \end{cases}$$

آنگاه F صعودی و از راست پیوسته است و $\mu = \mu_F$.

برهان. بنابر گزارهٔ ۱.۱۵ هر F یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ القاء می‌کند. واضح است‌که F و G پیش‌اندازهٔ یکسانی القاء می‌کنند اگر و فقط اگر $F - G$ ثابت باشد و روشن است که این پیش‌اندازه‌ها σـ متناهی‌اند (زیرا $\mathbb{R} = \bigcup_{-\infty}^{\infty}(j, j+1]$). بنابر این دو حکم نخست از قضیهٔ ۱.۱۴ نتیجه می‌شود. برای حکم آخر، یکنوایی μ یکنوایی F را ایجاب می‌کند، و پیوستگی μ

از بالا و پائین، پیوستگی راست F را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ ایجاب می‌کند. بدیهی است که روی $\mathcal{A}$ داریم $\mu = \mu_F$ و از این رو بنابر یکتایی ذکر شده در قضیهٔ ۱.۱۴، روی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ داریم $\mu = \mu_F$. ■

چند تذکر مرتب: اولاً، این نظریه را می‌توان به طور یکسان با به‌کارگیری بازه‌های به شکل $[a,b)$ و توابع از چپ پیوسته‌ای چون F ایجاد کرد. دوماً، اگر μ یک اندازهٔ برلِ متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\mu = \mu_F$ که در آن $F(x) = \mu((-\infty,x])$ تابع توزیع تجمعی μ است؛ این تابع با Fای که در قضیهٔ ۱.۱۶ با مقدار ثابت $\mu((-\infty,0])$ معرفی شد تفاوت دارد. سوماً، نظریهٔ بند ۱.۴ برای هر تابع صعودی و از راست پیوسته مانند F، نه فقط اندازهٔ برل μ_F بلکه اندازهٔ کاملی مانند $\overline{\mu}_F$ که دامنه‌اش شامل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است به دست می‌دهد. در واقع، $\overline{\mu}_F$ دقیقاً کامل شدهٔ μ_F است (قسمت (الف) از تمرین ۲۲ یا قضیهٔ ۱.۱۹ را ببینید) و می‌توان نشان داد که دامنهٔ $\overline{\mu}_F$ همواره اکیداً بزرگتر از $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است. معمولاً این اندازهٔ کامل را نیز با μ_F نشان می‌دهیم؛ این اندازهٔ کامل را **اندازهٔ لبگ ـ اشتیلیس** مربوط به F می‌نامیم.

اندازه‌های لبگ ـ اشتیلیس از برخی خواص قانونمند برخوردارند که اکنون به آنها می‌پردازیم. در این بحث اندازهٔ لبگ ـ اشتیلیسی چون μ روی $\mathbb{R}$ که به تابع صعودی از راست پیوسته‌ای چون F مربوط است را ثابت می‌گیریم و دامنهٔ μ را با $\mathcal{M}_\mu$ نشان می‌دهیم. بنابر این به ازای هر $E \in \mathcal{M}_\mu$،

$$\mu(E) = \inf\{\sum_{1}^{\infty}[F(b_j) - F(a_j)] : E \subset \bigcup_{1}^{\infty}(a_j,b_j]\}$$
$$= \inf\{\sum_{1}^{\infty}\mu((a_j,b_j]) : E \subset \bigcup_{1}^{\infty}(a_j,b_j]\}\cdot$$

نخست خواهیم دید که در فرمول دوم برای $\mu(E)$ نیم بازه‌ها با نیم‌بازه‌های باز قابل تعویضند.

۱.۱۷ لم. به ازای هر $E \in \mathcal{M}_\mu$،

$$\mu(E) = \inf\{\sum_{1}^{\infty}\mu((a_j,b_j)) : E \subset \bigcup_{1}^{\infty}(a_j,b_j)\}.$$

برهان. عبارت سمت راست را $\nu(E)$ می‌نامیم. فرض کنید $E \subset \bigcup_1^\infty (a_j,b_j)$. هر (a_j,b_j) اجتماع مجزای شمارایی از نیم بازه‌هایی چون I_j^k $(k = 1,2,\ldots)$ است؛ به‌طور صریح $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}]$ که در آن $\{c_j\}$ دنباله‌ای است که $c_j^1 = a_j$ و وقتی $k \to \infty$، c_j^k به b_j نزول می‌کند. بنابراین $E \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$ و لذا

$$\sum_{1}^{\infty}\mu((a_j,b_j)) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\mu(I_j^k) \geq \mu(E),$$

و در نتیجه $\nu(E) \geq \mu(E)$. از سوی دیگر، برای $\varepsilon > 0$ مفروض، دنباله‌ای چون $\{(a_j,b_j]\}_1^\infty$ وجود دارد که $E \subset \bigcup_1^\infty (A_j,B_j]$ و $\sum_1^\infty \mu((A_j,B_j]) \leq \mu(E) + \varepsilon$ و به ازای هر j، $\delta_j > 0$ای هست به‌طوری که $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < 2^{-j}\varepsilon$. در نتیجه $E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j + \delta_j)$ و

$$\sum_{1}^{\infty}\mu((a_j,b_j+\delta_j)) \leq \sum_{1}^{\infty}\mu((a_j,b_j]) + \varepsilon \leq \mu(E) + 2\varepsilon.$$

پس $\nu(E) \leq \mu(E)$. ■

۱.۱۸ قضیه. اگر $E \in \mathcal{M}_\mu$، آنگاه

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E \text{ , باز است } U\}$$
$$= \sup\{\mu(K) : K \subset E, \text{ فشرده است } K\}.$$

برهان. بنابر لم ۱.۱۷، به ازای هر $\varepsilon > 0$ بازه‌ای چون (a_j, b_j) وجود دارد به طوری‌که $E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j)$ و

$$\sum_1^\infty \mu((a_j, b_j)) \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

اگر $U = \bigcup_1^\infty (a_j, b_j)$، آنگاه U باز است؛ $U \supset E$ و $\mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon$. از سوی دیگر، هرگاه $U \supset E$، $\mu(U) \geq \mu(E)$. پس نخستین تساوی به‌دست آمده است. برای دومی، نخست فرض‌کنید که E کراندار است. اگر E بسته باشد، آنگاه E فشرده است و تساوی مورد نظر واضح است. در غیر این صورت برای $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توانیم مجموعهٔ بازی چون $U \supset \overline{E} \setminus E$ انتخاب کنیم به قسمی که $\mu(U) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$. فرض می‌کنیم $K = \overline{E} \setminus U$. در این صورت K فشرده است، $K \subset E$ و

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) = \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \setminus E)]$$
$$\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \varepsilon.$$

چنانچه E غیر کراندار باشد، قرار می‌دهیم: $E_j = E \cap (j, j+1]$. بنابر استدلال فوق، برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K_j \subset E_j$ وجود دارد که $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \frac{2^{-|j|}\varepsilon}{3}$. فرض می‌کنیم $H_n = \bigcup_{-n}^n K_j$. در این صورت H_n فشرده است، $H_n \subset E$ و $\mu(H_n) \geq \mu(\bigcup_{-n}^n E_j) - \varepsilon$. چون $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{-n}^n E_j)$، حکم حاصل می‌گردد. ■

۱.۱۹ قضیه. اگر $E \subset \mathbb{R}$، آنگاه عبارات زیر هم‌ارزند:

الف) $E \in \mathcal{M}_\mu$،

ب) $E = V \setminus N_1$ که در آن V یک مجموعهٔ G_δ است و $\mu(N_1) = 0$.

ج) $E = H \cup N_2$ که در آن H یک مجموعهٔ F_σ است و $\mu(N_2) = 0$.

برهان. واضح است که هر کدام از قسمت‌ها (ب) و (ج) قسمت (الف) را ایجاب می‌کنند زیرا μ روی $\mathcal{M}_\mu$ کامل است. فرض‌می‌کنیم $E \in \mathcal{M}_\mu$ و $\mu(E) < \infty$. بنابر قضیهٔ ۱۸ ، برای هر $j \in \mathbb{N}$ می‌توان مجموعهٔ بازی چون $U_j \supset E$ و مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K_j \subset E$ یافت به‌طوری‌که

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

فرض‌کنید $V = \bigcap_1^\infty U_j$ و $H = \bigcup_1^\infty K_j$. در این صورت $H \subset E \subset V$ و

$$\mu(V) = \mu(H) = \mu(E) < \infty,$$

لذا $\mu(V \setminus E) = \mu(E \setminus H) = 0$. بنابر این وقتی $\mu(E) < \infty$ حکم اثبات شده است، تعمیم به حالت‌کلی برای خواننده باقی می‌ماند. (تمرین ۲۵). ■

مضمون قضیهٔ ۱.۱۹ این است‌که همهٔ مجموعه‌های برل (یا به طورکلی‌تر، همهٔ مجموعه‌های واقع در $\mathcal{M}_\mu$) به یک شکل ساده و منطقی به پیمانه مجموعه‌های از اندازهٔ صفر هستند. این به‌طور محسوسی با ابزارهای لازم برای مقایسهٔ مجموعه‌های برل با مجموعه‌های باز قابل قیاس است به شرطی که مجموعه‌های پوچ مستثنی نشوند؛ گزارهٔ ۱.۲۳ را ببینید. نوع دیگری از دیدگاه که مجموعه‌های اندازه‌پذیر کلی را بتوان با مجموعه‌های« ساده» تقریب زد در گزارهٔ زیر گنجانده شده است، که برهانش برای خواننده باقی مانده است (تمرین۲۶).

۱.۲۰ **گزاره.** اگر $E \in \mathcal{M}_\mu$ و $\mu(E) < \infty$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای چون A وجود دارد که اجتماعی متناهی از بازه‌های باز است به طورکه $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$.

اکنون مهمترین اندازه روی $\mathbb{R}$ ، یعنی« اندازه لبگ» را مورد بررسی قرار می‌دهیم: این اندازه، اندازه کاملی چون μ_F مربوط به تابع $F(x) = x$ است، که برای آن، اندازهٔ یک بازه به طور ساده طولش است. آن را با m نشان خواهیم داد. دامنهٔ mردهٔ مجموعه‌های **اندازه‌پذیر لبگ** نامیده می‌شود، و آنرا با L نشان خواهیم داد. همچنین از تحدید mبه $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ تحت عنوان اندازهٔ لبگ یاد خواهیم کرد.

مهمترین خواص اندازه لبگ پایایی آن تحت انتقال‌ها و رفتار سادهٔ آن تحت تجانس‌ها است. اگر $E \subset \mathbb{R}$ و $r, s \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم:

$$E + s = \{x + s : x \in E\}, \qquad rE = \{rx : x \in E\}.$$

۱.۲۱ **قضیه.** اگر $E \in L$، آنگاه $E + s \in L$ و $rE \in L$ به ازای هر $r, s \in \mathbb{R}$ برقرار است، به علاوه $m(E + s) = m(E)$ و $m(rE) = |r| m(E)$.

برهان. چون گردایهٔ بازه‌های باز تحت انتقال‌ها و تجانس‌ها پایا است، همین مطلب در مورد $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ درست است. به ازای $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$، قرار دهید $m_s(E) = m(E+s)$ و $m^r(E) = m(rE)$. در این صورت به وضوح m_s و m^r با m و $|r|m$ روی اجتماع های متناهی از بازه‌ها برابرند، در نتیجه بنابر قضیهٔ ۱.۱۴ روی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ با هم برابرند. به ویژه، اگر $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و $m(E) = 0$، آنگاه $m(E+s) = m(rE) = 0$، و از اینجا معلوم می‌شودکه ردهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ با اندازهٔ صفر تحت انتقال‌ها و تجانس‌ها حفظ می‌شود. نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{L}$ (یعنی اعضایی‌که اجتماعی از یک مجموعهٔ برل و یک مجموعهٔ پوچ لبگ هستند) تحت انتقال‌ها و تجانس‌ها حفظ می‌شود و $m(E+s) = m(E)$ و $m(rE) = |r|m(E)$ به ازای هر $E \in \mathcal{L}$ برقرار است. ■

نظریهٔ اندازه و خواص توپولوژیک زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ رابطهٔ تنگاتنگی دارند که شامل برخی از شگفتی‌ها است. حقایق زیر را مد نظر قرار دهید. هر مجموعهٔ تک عضوی در $\mathbb{R}$ دارای اندازهٔ لبگ صفر است، و از این رو هر مجموعهٔ شمارش‌پذیر از اندازهٔ صفر می‌باشد. به ویژه $m(\mathbb{Q}) = 0$. فرض کنید $\{r_j\}_1^\infty$ شمارشی از اعداد گویای واقع در $[0,1]$ است، و $\varepsilon > 0$ مفروض است، فرض کنید I_j بازهٔ بازی است که مرکزش در r_j بوده و طولش $2^{-j}\varepsilon$ می‌باشد. در این صورت مجموعهٔ $U = (0,1) \cap \bigcup_1^\infty I_j$ باز است و در $[0,1]$ چگال می‌باشد، اما $m(U) \leq \sum_1^\infty 2^{-j}\varepsilon = \varepsilon$؛ متمم U یعنی $K = [0,1] \setminus U$ باز است و هیچ جا چگال می‌باشد، اما $m(K) \geq 1 - \varepsilon$. بنابر این مجموعه‌ای که باز و چگال و در نتیجه از نظر توپولوژیکی «بزرگ است» می‌تواند از نظر اندازه کوچک باشد و مجموعه‌ای که هیچ‌جا چگال و در نتیجه از نظر توپولوژیکی «کوچک» است می‌تواند از نظر اندازه بزرگ باشد. (هر چند یک مجموعهٔ باز ناتهی نمی‌تواند دارای اندازهٔ صفر باشد).

مجموعه‌های پوچ لبگ نه تنها شامل همهٔ مجموعه‌های شمارش‌پذیر است بلکه شامل بسیاری از مجموعه‌هایی است که کاردینال پیوستاری دارند. اکنون مثال استاندارد یعنی مجموعهٔ کانتور را می‌آوریم که برای اهداف دیگر نیز جالب است.

هر $x \in [0,1]$ یک نمایش اعشاری در مبنای ۳ مانند $x = \sum_1^\infty 3^{-j} a_j$ دارد که در آن، $a_j = 0, 1$ یا ۲. این نمایش یکتاست مگر اینکه به ازای اعداد صحیحی چون k, p، x به شکل $3^{-k}p$ باشد که در این حالت x دارای دو نمایش است: یکی با $a_j = 0$ برای $j > k$ و یکی با $a_j = 2$ برای $j > k$. فرض کنید p به‌وسیلهٔ ۳ عاد نشود، یکی از این نمایش‌ها $a_k = 1$ و دیگر ۲ یا $a_k = 0$ خواهد داشت. چنانچه توافق کنیم که همیشه از نمایش دوم استفاده کنیم، می‌بینیم که

$$a_1 = 1 \text{ اگر و فقط اگر } \tfrac{1}{3} < x < \tfrac{2}{3}$$

$$a_1 \neq 1 \text{ و } a_2 = 1 \text{ اگر و فقط اگر } \tfrac{1}{9} < x < \tfrac{2}{9} \text{ یا } \tfrac{7}{9} < x < \tfrac{8}{9}$$

و الی آخر. همچنین ملاحظهٔ اینکه اگر $x = \sum 3^{-j} a_j$ و $y = \sum 3^{-j} b_j$، آنگاه $x < y$ اگر و فقط اگر nای موجود باشد که $a_n < b_n$ و $a_j = b_j$ به ازای $j < n$ مفید خواهد بود.

مجموعهٔ کانتور C مجموعهٔ تمام xهایی در $[۰,۱]$ است که دارای نمایشی چون $x = \sum ۳^{-j} a_j$ در مبنای ۳ هستند که در آن به ازای هر j، $a_j \neq ۱$. پس C با حذف یک سوم میانی $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ و سپس حذف $(\frac{۱}{۹},\frac{۲}{۹})$ و $(\frac{۷}{۹},\frac{۸}{۹})$ از دو بازهٔ باقیمانده و ... به دست می‌آید. خواص اساسی C در زیر خلاصه شده است:

۱.۲۲ گزاره. فرض‌کنید C مجموعهٔ کانتور باشد.

الف) C فشرده، هیچ جا چگال و ناهمبندکلی است (یعنی، تنها زیر مجموعه‌های همبند C نقاط تنها هستند). به‌علاوه C نقطهٔ تنها ندارد.

ب) $m(C) = ۰$.

ج) $\mathrm{card}(C) = \mathfrak{c}$.

برهان. اثبات (الف) را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین۲۷). و اما (ب)، C از $[۰,۱]$ با حذف یک بازه به طول $\frac{۱}{۳}$، دو بازه به طول $\frac{۱}{۹}$ و غیره به دست می‌آید. بنابر این

$$m(C) = ۱ - \sum_{۰}^{\infty} \frac{۲^j}{۳^{j+۱}} = ۱ - \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}} = ۰$$

بالاخره، فرض‌کنید $x \in C$، در این صورت $x = \sum_{۰}^{\infty} a_j ۳^{-j}$ که درآن به ازای هر j، ۲ یا ۰ $= a_j$. قرار می‌دهیم $b_j = \frac{a_j}{۲}$ که درآن $f(x) = \sum_{۱}^{\infty} b_j ۲^{-j}$. سری تعریف کننده $f(x)$ بسط یک عدد واقع در $[۰,۱]$ در مبنای ۲ است، و هر عدد در $[۰,۱]$ را می‌توان به این روش به دست آورد. بنابر این f مجموعهٔ C را بروی $[۰,۱]$ می‌نگارد و (ج) نتیجه می‌شود. ■

اکنون تابع f مذکور در برهان قبل را با دقت بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبلاً دیده شد که اگر $x,y \in C$ و $x < y$، آنگاه $f(x) < f(y)$ مگر اینکه x و y نقاط انتهایی یکی از بازه‌های حذف شده از $[۰,۱]$ برای به دست آوردن C باشند. در این حالت به ازای اعداد صحیحی چون p,k، $f(x) = ۲^{-k}p$ و $f(x), f(y)$ دو نمایش این عدد در مبنای۲ است. بنابراین با ثابت قلمدادکردن f روی هر زیر بازهٔ حذف شده از C می‌توان f را از $[۰,۱]$ بروی خودش توسیع داد. این توسیع f هنوز صعودی است، و چون بردش کل $[۰,۱]$ است نمی‌تواند هیچ ناپیوستگی جهشی داشته باشد. f را **تابع کانتور** یا **تابع لبگ-کانتور** می‌نامیم. ساختن مجموعهٔ کانتور با شروع از $[۰,۱]$ حذف پی درپی یک سوم‌های میانی باز بازه‌ها، دارای یک تعمیم بدیهی است. اگر I یک بازه‌کراندار باشد و $\alpha \in (۰,۱)$، بازهٔ بازی را که نقطهٔ وسط آن همان نقطهٔ وسط I است و طولش α برابر طول I است را «αاُمین باز میانی» I می‌نامیم. اگر $\{\alpha_j\}_۱^\infty$ دنباله‌ای از اعداد واقع در $(۰,۱)$ باشد، آنگاه می‌توانیم دنباله‌ای نزولی مانند $\{K_j\}$ از مجموعه‌های بسته به‌صورت زیر تعریف‌کنیم: $K_۰ = [۰,۱]$ و K_j با حذف α_jاُمین باز میانی از هر یک از بازهایی‌که $K_{j-۱}$ را می‌سازند به دست آمده باشد، مجموعهٔ حدی حاصل یعنی $K = \bigcap_۱^\infty K_j$ را یک **مجموعهٔ کانتور تعمیم یافته** می‌نامیم. مجموعه‌های کانتور تعمیم یافته همگی با مجموعهٔ کانتور معمولی در خواص (الف) و (ب) از گزارهٔ

مشترک‌اند. در مورد اندازه لبگ، به وضوح $m(K_j) = (1-\alpha_j)m(K_{j-1})$، پس $m(K)$ حاصلضرب نامتناهی ۱.۲۲ $\prod_1^\infty(1-\alpha_j) = \lim_{n\to\infty}\prod_1^n(1-\alpha_j)$ است. چنانچه همهٔ α_jها با عضو ثابتی چون $\alpha \in (0,1)$ برابر باشند (برای مثال $\alpha = \frac{1}{3}$ در مورد مجموعهٔ کانتور معمولی)، داریم $m(K) = 0$. اما اگر با سرعت کافی $\alpha_j \to 0$ وقتی $j \to \infty$، $m(K)$ مثبت خواهد بود و به ازای هر $\beta \in (0,1)$ می‌توان α_j را چنان انتخاب کرد که $m(K)$ مساوی β باشد؛ تمرین ۳۲ را ببینید. این روش دیگری برای ساختن مجموعه‌های هیچ‌جا چگال با اندازهٔ مثبت است. چنین نیست که هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ یک مجموعهٔ برل باشد. می‌توان به کمک تابع کانتور مثال‌هایی در $\mathcal{L} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ آورد؛ تمرین ۹ در فصل ۲ را ببینید. می‌توان دیدکه چون هر زیر مجموعه از مجموعهٔ کانتور، اندازه‌پذیر لبگ است، داریم $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > c$، در حالی که $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = c$. حکم اخیر از گزاره ۱.۲۳ زیر حاصل می‌شود.

تمرین ها

۲۵) برهان قضیهٔ ۱.۱۹ را کامل کنید.

۲۶) گزارهٔ ۱.۲۰ را ثابت کنید. (قضیهٔ ۱.۱۸ را به‌کار برید.)

۲۷) قسمت (الف) از گزارهٔ ۱.۲۲ را ثابت کنید. (نشان دهیدکه اگر $x,y \in C$ و $x < y$، آنگاه $z \notin C$ای وجود دارد به‌طوری‌که $x < z < y$.)

۲۸) فرض کنید F صعودی و از راست پیوسته باشد و μ_F اندازهٔ مربوطه باشد. در این صورت

$$\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-),$$
$$\mu_F([a,b)) = F(b-) - F(a-),$$
$$\mu_F([a,b]) = F(b) - F(a-),$$
$$\mu_F((a,b)) = F(b-) - F(a).$$

۲۹) فرض کنید E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ باشد.

الف) اگر $E \subset N$ که در آن N مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر توصیف شده در بند ۱.۱ است، آنگاه $m(E) = 0$.

ب) اگر $m(E) > 0$، آنگاه E شامل یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر است. (کافی است فرض کنید $E \subset [0,1]$. مطابق با نمادگذاری بند ۱.۱، $E = \bigcup_{r\in R} E \cap N_r$.)

۳۰) اگر $E \in L$ و $m(E) > ۰$، آنگاه به ازای هر $\alpha < ۱$، بازهٔ بازی چون I وجود دارد به طوری که
$$m(E \cap I) > \alpha m(I).$$

۳۱) اگر $E \in L$ و $m(E) > ۰$، آنگاه مجموعهٔ $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ شامل یک بازهٔ با مرکز ۰ است.
(اگر I مثل تمرین ۳۰ با $\alpha > \frac{۳}{۴}$ باشد، آنگاه $E - E$ شامل $\left(-\frac{۱}{۲}m(I), \frac{۱}{۲}m(I)\right)$ است.

۳۲) فرض‌کنیم $\{\alpha_j\}_۱^\infty \subset (۰,۱)$.

الف) $\prod_۱^\infty (۱ - \alpha_j) > ۰$ اگر و فقط اگر $\sum_۱^\infty \alpha_j < \infty$. ($\sum_۱^\infty \log(۱ - \alpha_j)$ را با $\sum \alpha_j$ مقایسه کنید).

ب) $\beta \in (۰,۱)$ مفروض است، دنباله‌ای چون $\{\alpha_j\}$ ارائه دهیدکه $\prod_۱^\infty (۱ - \alpha_j) = \beta$.

۳۳) مجموعهٔ برلی چون $A \subset [۰,۱]$ وجود دارد به طوری‌که $۰ < m(A \cap I) < m(I)$ به ازای هر زیربازه مانند I از $[۰,۱]$ برقرار است. (راهنمایی: هر زیر بازه از $[۰,۱]$ شامل مجموعه‌هایی از نوع کانتور با اندازه مثبت است).

۱.۶ یادداشت ها و مراجع

تاریخ نظریه اندازه و تاریخ انتگرالگیری که شرح آن در بند ۲.۷ خواهد آمد، خیلی به هم نزدیک هستند.
بند ۱.۱ : نخستین بار پارادوکس باناخ ـ تارسکی در [۱۱] آمد، اما تفاوت زیر به هاسدورف برمی‌گردد [۶۸]:
کره واحد در $\mathbb{R}^۳$، یعنی $\{x \in \mathbb{R}^۳ : |x| = ۱\}$ اجتماعی از چهار مجموعه جدا از هم مانند $E_۱, \ldots, E_۴$ است به‌قسمی‌که (الف): $E_۱$ شمارش‌پذیر است، (ب): مجموعه‌های $E_۲$، $E_۳$، $E_۴$ و $E_۳ \cup E_۴$ همگی تصویر یکی دیگر تحت دوران‌ها هستند.

یک بیان مقدماتی از پارادوکس با ناخ ـ تارسکی و حکم هاسدورف را می‌توان در استرامبرگ یافت.
بند ۲.۱: مشخص کردن σـ جبر $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ تولید شده با خانواده‌ای چون $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ساختنی نیست و باید بپرسیم که چگونه می‌توان $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ را به طور صریح از $\mathcal{E}$ به دست آورد. پاسخ نسبتاً پیچیده است. می‌توان به صورت زیر شروع کرد: فرض‌کنیم $\mathcal{E}_۱ = \mathcal{E} \cup \{E^c : E \in \mathcal{E}\}$ و به ازای $j > ۱$، $\mathcal{E}_j$ را گردایهٔ همهٔ مجموعه‌هایی تعریف‌کنید که اجتماع هایی شمارش‌پذیر از مجموعه‌های واقع در $\mathcal{E}_j$ یا متمم های چنین مجموعه‌هایی هستند. فرض‌کنید $\mathcal{E}_\omega = \bigcup_۱^\infty \mathcal{E}_j$ آیا $\mathcal{E}_\omega = \bigcup_۱^\infty \mathcal{E}_j$؟ در حالت‌کلی چنین نیست. $\mathcal{E}_\omega$ تحت متمم‌گیری بسته است، اما اگر (به ازای هر j)، $E_j \in \mathcal{E}_j \setminus \mathcal{E}_{j-۱}$، آنگاه هیچ دلیلی برای اینکه $\bigcup_۱^\infty E_j$ در $\mathcal{E}_\omega$ باشد وجود ندارد. پس همه چیز را باید از نو شروع کنیم. به‌طور دقیق‌تر، باید به ازای هر اردینال شمارش‌پذیر مانند α طبق استقرای تراتسفینی (فرآمتناهی) $\mathcal{E}_\alpha$ گردایهٔ مجموعه‌هایی است که اجتماع های شمارش‌پذیری از مجموعه‌های واقع در $\mathcal{E}_\beta$ یا متمم‌های چنین مجموعه‌های است؛ در غیر این صورت $\mathcal{E}_\beta$. در نتیجه:

۱.۲۳ گزاره: $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcup_{\alpha\in\Omega}\mathcal{E}_\alpha$، که در آن Ω مجموعهٔ تمام اردینال های شمارش‌پذیر است.

برهان. استقرای ترانسفینی نشان می‌دهدکه به ازای هر $\alpha \in \Omega$، $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$، و از این رو $\bigcup_{\alpha<\beta}\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$. نامساوی عکس از این حقیقت ناشی می‌شودکه هر دنباله در Ω دارای یک سوپرمم در Ω است(گزارهٔ ۰.۱): اگر $E_j \in \mathcal{E}_{\alpha_j}$ به ازای $j \in \mathbb{N}$ ای برقرار باشد و $\alpha = \sup\{\alpha_j\}$، آنگاه به ازای هر j، $E_j \in \mathcal{E}_\alpha$ و از این رو $\bigcup_1^\infty E_j \in \mathcal{E}_\beta$ که در آن β تالی α است. ■

با تلفیق این مطلب و گزاره ۰.۱۴، می‌بینیم‌که اگر $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \le \operatorname{card}(\mathcal{E}) \le c$، آنگاه $\operatorname{card}(\mathcal{M}(\mathcal{E})) = c$ (به تمرین ۳ مراجعه‌کنید).

بند۱.۳: برخی از مؤلفین اصرار دارند که اگر دامنه‌های اندازه‌ها σـ حلقه‌ها باشد بهتر از σـ جبرها است.(تمرین ۱ را ببینید). دلیلش این است که در بحث در مورد فضاهای« بسیار بزرگ»، می‌توان از امراضی معینی‌که با مد نظرقرار ندادن مجموعه‌های « با اندازه بزرگ» ایجاد می‌شود اجتناب‌کرد. اما، این نقطه نظر نیز از نظر تکنیکی ضرر و زیان‌هایی دارد، و طرفدار زیادی ندارد.

بند۱.۴: قضیهٔ کاراتئودری در مقاله‌اش آمده است[۲۲]. در نوشته‌ها قضیهٔ ۱.۱۴ را به هان، کاراتئودری و ای. هوپف نسبت داده‌اند اما قبلاً آن را به فرشه نسبت می‌دادند[۵۴]. برهان قضیهٔ کاراتئودری به طور مستقل توسط هان [۶۰] وکولوموگورف [۸۵] کشف شده بود.

برای مطالعه عمیق تر مسئلهٔ ساختن اندازه‌ها از داده‌های بسیار ابتدایی،کونیگ [۸۶] را ببینید.

بند ۱.۵: در ابتدا لبگ اندازهٔ خارجی $m^*(E)$ از یک مجموعه مانند $E \subset \mathbb{R}$ را بر حسب پوشش‌های شمارش‌پذیر به وسیلهٔ بازه‌ها تعریف‌کرد همان‌طورکه ما انجام دادیم. سپس وی مجموعهٔ کرانداری چون E را اندازه‌پذیر تعریف‌کرد در صورتی که:

$$m^*(E) + m^*((a,b) \setminus E) = b - a$$

که در آن (a,b) بازه‌ای شامل E است و یک مجموعهٔ غیرکراندار را اندازه‌پذیر تعریف‌کرد در صورتی که اشتراک آن با هر بازهٔ کراندار، اندازه‌پذیر باشد. رده‌بندی کاراتئودری از اندازه‌پذیری که از نظر تکنیکی برای کار کردن آسان است بعداً می‌آید. برای معادل بودن دو تعریف، تمرین ۱۹ را ببینید.

با نگاهی به پیچیدگی راه‌هایی‌که در آنها بتوان یک نیم بازه را به اجتماعی از زیربازه‌های نیم باز تجزیه کرد خود را قانع می‌کنیم که برهان پرهیاهوی مثال زدنی گزارهٔ ۱.۱۵ لازم و اجتناب ناپذیر است. در هر چنین تجزیه‌ای، گردایهٔ نقاط انتهایی

راست زیربازه‌ها، وقتی از چپ به راست مرتب شوند، یک مجموعهٔ خوشترتیب است، اما این مجموعه می‌تواند با هر قطعهٔ اولیه از مجموعهٔ اردینال‌های شمارش‌پذیر ایزومورف ترتیبی باشد.

می‌توان اندازهٔ لبگ را به یک اندازهٔ تحت انتقال پایا روی σـ جبرهایی توسیع داد که به طور سره $\mathcal{L}$ را دربر دارند؛ کاکوتانی و اُکستبی[۸۱]را ببینید. البته، چنین σـ جبرهایی هرگز نمی‌توانند شامل مجموعهٔ اندازه ناپذیر ذکر شده در بند ۱ باشند. اما، اندازهٔ لبگ را می توان به اندازهٔ جمعی متناهی تحت انتقال پایایی روی $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ توسیع داد، و مشابهٔ ۲ـ بعدی آن را می‌توان به یک اندازهٔ جمعی متناهی روی $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ توسیع داد که تحت انتقال‌ها و دوران‌ها پایا است؛ باناخ[۸] را ببینید. پارادوکس باناخ ـ تارسکی مانع از آن می‌شود که این حکم به ابعاد بالاتر تعمیم یابد.

در ارتباط با وجود مجموعه های اندازه ناپذیر، سولووی [۱۳۸] قضیهٔ قابل ذکری اثبات کرده است مبنی بر این که: امکان ندارد بدون استفاده از اصل انتخاب، وجود مجموعه‌های غیر اندازه‌پذیر لبگ را اثبات کنیم. (صورت دقیق قضیه حاوی برخی از نکات تکنیکی نظریهٔ مجموعهٔ اصل موضوعی است که در این کتاب به آن نخواهیم پرداخت.) از دید آنالیز کارها، در اصل قضیهٔ سولووی برای تایید دوبارهٔ کفایت نظریهٔ لبگ برای همهٔ اهداف معقول است.

برای حل کوتاهی از تمرین ۳۳ رودین [۱۲۴] را ببینید.

فصل دوم
انتگرال گیری

در نظریهٔ کلاسیک انتگرال گیری روی $\mathbb{R}$، $\int_a^b f(x)$ به عنوان حدی از مجموع‌های ریمان تعریف می‌شود، که این مجموع‌ها انتگرال‌های توابعی هستند که f را تقریب می‌زنند و روی زیر بازه‌های $[a,b]$ ثابت هستند. به‌طور مشابه، روی هر فضای اندازه، مفهوم صریحی از انتگرال برای توابعی که « به مفهومی مناسب» موضعاً ثابت هستند وجود دارد و آن را می‌توان به یک انتگرال برای توابع کلی‌تر تعمیم داد. در این فصل، با مورد توجه قرار دادن انتگرال‌لبگ روی $\mathbb{R}$ تعمیم آن به $\mathbb{R}^n$، نظریهٔ انتگرالگیری روی فضاهای اندازهٔ مجرد را ایجاد می‌کنیم.

۲.۱ توابع اندازه‌پذیر

مطالعهٔ نظریهٔ انتگرالگیری را با بحث در نگاشت‌هایی آغاز می‌کنیم که مورفیسم‌های واقع در کاتگوری فضاهای اندازه می‌باشد. یادآور می‌شویم که هر تابع مانند $f : X \to Y$ بین دو مجموعه، نگاشتی چون $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ با تعریف $f^{-1}(E)=\{x\in X : f(x) \in E\}$ القاء می‌کند که این نگاشت اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌ها را حفظ می‌کند. بنابر این اگر $\mathcal{N}$ یک σـ جبر روی Y باشد، $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ یک σـ جبر روی X است. چنانچه $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ دو فضای اندازه‌پذیر باشد، تابعی چون $f : X \to Y$ را $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ـ اندازه‌پذیر (یا وقتی $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ معلوم‌اند فقط اندازه‌پذیر) نامیم در صورتی که به ازای هر $E\in\mathcal{N}$، $f^{-1}(E)\in \mathcal{M}$. واضح است که ترکیب نگاشت‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است؛ یعنی اگر $f : X \to Y$ یک تابع $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ـ اندازه‌پذیر و $g : Y \to Z$ یک تابع $(\mathcal{N},\mathcal{O})$ـ اندازه‌پذیر باشد،آنگاه $g\circ f$، یک تابع $(\mathcal{M},\mathcal{O})$ـ اندازه‌پذیر است.

۲.۱ گزاره. اگر $\mathcal{N}$ توسط $\mathcal{E}$ تولید شود، آنگاه $f : X \to Y$ یک تابع $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ـ اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر $E \in \mathcal{E}$ داشته باشیم $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

برهان. بررسی « فقط اگر » بدیهی است. برای عکس آن، ملاحظه می‌کنیم که $\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$، σـ جبری است که شامل $\mathcal{E}$ است؛ در نتیجه شامل $\mathcal{N}$ می‌باشد. ■

۲.۲ نتیجه. اگر X و Y دو فضای متری (یا توپولوژیک) باشند، آنگاه هر تابع پیوسته مانند $f : X \to Y$، $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ـ اندازه‌پذیر است.

برهان. f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هربازه مانند $U \subset Y$ مجموعهٔ $f^{-1}(U)$ در X باز باشد. ■

چنانچه $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع حقیقی یا مختلط f روی X را $\mathcal{M}$ـ **اندازه‌پذیر** یا فقط **اندازه‌پذیر** خواهیم نامید در صورتی که $(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ـ اندازه‌پذیر یا $(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbf{C}})$ـ اندازه‌پذیر باشد. همواره $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ و $\mathcal{B}_{\mathbf{C}}$ را به عنوان σـ جبر روی فضای برد می‌گیریم مگر اینکه خلافش ذکر شود. به ویژه، $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **اندازه‌پذیر لبگ** (متناظراً **برل**) است هرگاه $(\mathcal{L},\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ـ اندازه‌پذیر (متناظراً $(\mathcal{B}_{\mathbf{R}},\mathcal{B}_{\mathbf{C}})$ـ اندازه‌پذیر) باشد؛ برای $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشابهاً عمل می‌کنیم.

هشدار. اگر $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که $f \circ g$ اندازه‌پذیر لبگ است، حتی اگر g پیوسته باشد. (هرگاه $E \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$، داریم $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$، اما به‌جز وقتی $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ تضمینی وجود ندارد که $g^{-1}(f^{-1}(E))$ در $\mathcal{L}$ باشد. تمرین ۹ را ببینید.) اما اگر f اندازه‌پذیر برل باشد، آنگاه $f \circ g$ اندازه‌پذیر برل یا لبگ است بسته به اینکه g چنین باشد.

۲.۳ گزاره. اگر $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد و $f : X \to \mathbb{R}$، آنگاه عبارات زیر با هم معادلند:

الف) f یک تابع $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیر است.

ب) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{M}$.

ج) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{M}$.

د) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{M}$.

ه) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a]) \in \mathcal{M}$.

برهان. این مطلب از گزاره‌های ۱.۲ و ۲.۱ حاصل شود. ■

✓ (گاهی اوقات می‌خواهیم اندازه‌پذیری روی زیرمجموعه‌های X را درنظر بگیریم. اگر $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر، f تابعی روی X باشد و $E\in\mathcal{M}$، می‌گوییم f **بر** E **اندازه‌پذیر** است هرگاه به ازای هر مجموعهٔ برل مانند B داشته باشیم:

$$f^{-1}(B)\bigcap E\in\mathcal{M}.$$

(به طور معادل، $f|_E$، $\mathcal{M}_E$ـ اندازه‌پذیر باشد که در آن $\mathcal{M}_E=\{F\bigcap E:F\in\mathcal{M}\}$.) مجموعه‌ای چون X مفروض است، اگر $\{(Y_\alpha,\mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از فضاهای اندازه‌پذیر باشد و به ازای هر α، $f_\alpha:X\to Y_\alpha$ یک نگاشت باشد، آنگاه کوچکترین σـ جبر یکتایی روی X وجود دارد که نسبت به آن f_αها همگی اندازه‌پذیرند، یعنی، σـ جبر تولید شده با مجموعه‌های $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ که در آن $E_\alpha\in\mathcal{N}_\alpha$ و $\alpha\in A$. این σـ جبر را σـ جبر تولید شده به وسیلهٔ $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ می‌نامیم. به‌ویژه اگر $X=\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$، می‌بینیم که σـ جبری حاصلضربی روی X که در ۱.۲ تعریف شد، σـ جبر تولید شده با نگاشت‌های مؤلفه‌ای $\pi_\alpha:X\to Y_\alpha$ است.)

۲.۴ گزاره. فرض کنید $(X,\mathcal{M})$ و $(Y_\alpha,\mathcal{N}_\alpha)$ $(\alpha\in A)$ فضاهایی اندازه‌پذیر باشند، $Y=\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$، $\mathcal{N}=\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{N}_\alpha$ و $\pi_\alpha:Y\to Y_\alpha$ نگاشت‌های مؤلفه‌ای باشند. در این صورت $f:X\to Y$، $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ـ اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر α، نگاشت $f_\alpha=\pi_\alpha\circ f$، $(\mathcal{M},\mathcal{N}_\alpha)$ ـ اندازه‌پذیر باشد.

برهان. اگر f اندازه‌پذیر باشد، هر f_α نیز چنین است زیرا ترکیب نگاشت‌های اندازه‌پذیر است. به عکس، اگر هر f_α اندازه‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $E_\alpha\in\mathcal{N}_\alpha$، $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha))=f_\alpha^{-1}(E_\alpha)\in\mathcal{M}$ و با توجه به قضیهٔ ۲.۱، از اینجا معلوم می‌شود که f اندازه‌پذیر است. ■

۲.۵ نتیجه. تابعی چون $f:X\to\mathbb{C}$، $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $\operatorname{Re}f$ و $\operatorname{Im}f$ هر دو $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیر باشند.

برهان. چون بنابر گزارهٔ ۱.۵، $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ حکم حاصل می‌شود. ■

(گاهی اوقات مناسب است که توابع با مقدار واقع در دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافتهٔ $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$ در نظر بگیریم. مجموعه‌های برل در $\overline{\mathbb{R}}$ را با

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}=\{E\subset\overline{\mathbb{R}}:E\bigcap\mathbb{R}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

تعریف می‌کنیم. (این تعریف با تعریفِ عادی σـ جبر برل مطابقت دارد، یعنی با σـ جبری که با تبدیل $\overline{\mathbb{R}}$ به یک فضای متری با متر $\rho(x,y)=|A(x)-A(y)|$ به دست می‌آید، که در آن $A(x)=\arctan x$.) مانند گزارهٔ ۲.۳ به آسانی معلوم

می‌شود که $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ با نیم‌خط‌های $(a,\infty]$ یا $[-\infty,a)$, $(a \in \mathbb{R})$ تولید می‌شود، و $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ را $\mathcal{M}$- اندازه‌پذیر تعریف می‌کنیم در صورتی‌که $(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$- اندازه‌پذیر باشد. تمرین ۱ را ببینید.

حال ثابت می‌کنیم که اندازه‌پذیری تحت عملگرهای حدی و جبری آشنا حفظ می‌شود.

۲.۶ گزاره. اگر $f,g : X \to \mathbb{C}$ هردو $\mathcal{M}$ ـ اندزه‌پذیر باشند، آنگاه $f+g$ و fg نیز چنین هستند.

برهان. توابع $F : X \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}$، $\phi : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ و $\psi : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(x) = (f(x),g(x)),$$
$$\phi(z,w) = z + w,$$
$$\psi(z,w) = zw.$$

چون بنابر گزارهٔ ۱.۵ $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$، لذا طبق گزارهٔ ۲.۴، F یک تابع $(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})$ ـ اندازه‌پذیراست، اما بنابر نتیجهٔ ۲.۲، ϕ و ψ، $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ اندازه‌پذیر هستند. بنابر این $f+g = \phi\circ F$ و $fg = \psi\circ F$ هر دو $\mathcal{M}$- اندازه‌پذیرند. ■

گزارهٔ ۲.۶ برای توابع با مقادیر واقع در $\overline{\mathbb{R}}$ نیز معتبر است به شرطی که به فکر عبارات مبهم $\infty - \infty$ و $0\cdot\infty$ باشیم. (اما به یاد آورید که برای راحتی همواره $0\cdot\infty$ را 0 تعریف می‌کنیم.) تمرین ۲ را ببینید.

۲.۷ گزاره. اگر $\{f_j\}$ دنباله ای از توابع اندازه‌پذیربا مقادیر واقع در $\overline{\mathbb{R}}$ باشد روی $(X,\mathcal{M})$ باشد، آنگاه توابع زیر همگی اندازه‌پذیرند:

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \qquad g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x),$$
$$g_2(x) = \inf_j f_j(x), \qquad g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x),$$

همگی اندازه‌پذیرند. اگر $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد، آنگاه f اندازه‌پذیرنداست.

برهان. داریم:

$$g_1^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a,\infty]), \qquad g_2^{-1}([-\infty,a)) = \bigcup_1^\infty f_j^{-1}([-\infty,a)),$$

لذا طبق گزارهٔ ۲.۳ توابع $g_۱$ و $g_۲$ اندازه پذیرند. به‌طور کلی‌تر، اگر $h_k(x) = \sup_{j>k} f_j(x)$، آنگاه h_k برای هر k اندازه‌پذیر است، لذا $g_۳ = \inf_k h_k$ اندازه‌پذیراست، و به همین منوال $g_۴$ اندازه‌پذیر است. بالاخره، اگر f وجود داشته باشد، آنگاه $f = g_۳ = g_۴$، در نتیجه f اندازه‌پذیر است. ■

۲.۸ نتیجه. اگر $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ اندازه‌پذیرند.

۲.۹ نتیجه. اگر $\{f_j\}$ دنباله ای از توابع اندازه‌پذیربا مقادیر مختلط باشد و $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ برای هر x وجود داشته باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

برهان. نتیجهٔ ۲.۵ را به‌کار برید. ■

به عنوان آخرین آشنایی، دو تجزیهٔ مفید از توابع را ارائه می‌دهیم. اول اینکه، اگر $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$، قسمت‌های مثبت و منفی f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^+(x) = \max(f(x), ۰), f^-(x) = \max(-f(x), ۰).$$

در این صورت $f = f^+ - f^-$. چنانچه f اندازه‌پذیر باشد، بنابر نتیجهٔ ۸. هر دوی f^+ و f^- اندازه‌پذیرند. دوم اینکه، اگر $f : X \to \mathbb{C}$، تجزیه قطبی آن را داریم:

$$f = (\operatorname{sgn} f)|f|$$

که در آن $\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq ۰ \\ ۰ & z = ۰ \end{cases}$. بازهم اگر f اندازه‌پذیر باشد، $|f|$ و $\operatorname{sgn} f$ اندازه‌پذیرند. در واقع $z \to |z|$ روی $\mathbb{C}$ پیوسته است و $z \to \operatorname{sgn} z$ به‌جز در مبدأ پیوسته است. اگر $U \subset \mathbb{C}$ باز باشد، $\operatorname{sgn}^{-۱}(U)$ یا باز است به شکل $V \bigcup \{۰\}$ است که در آن V باز است، پس sgn برل اندازه‌پذیر است. بنابراین $|f| = |\cdot| \circ f$ و $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} \circ f$ اندازه‌پذیرند.

اکنون در مورد توابعی بحث می‌کنیم که سنگ بناهای نظریهٔ انتگرالگیری هستند. فرض‌کنید $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر $E \subset X$، تابع **مشخص** χ_E از E (که گاهی تابع **شاخص** E نامیده شده و با ۱_E نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E, \\ ۰ & x \notin E. \end{cases}$$

به آسانی بررسی می‌شود که χ_E اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $E \in \mathcal{M}$.

یک تابع ساده روی X عبارت است از یک ترکیب خطی متناهی با ضرایب مختلط از توابع مشخصهٔ مجموعه‌های واقع در $\mathcal{M}$. (فرض می‌کنیم که توابع ساده مقادیر $\pm\infty$ را هم می توانند اختیار کنند). به طور معادل، $f : X \to \mathbb{C}$ ساده است اگر و فقط اگر f اندازه‌پذیر باشد و برد f زیر مجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{C}$ باشد. در واقع، داریم:

$$f = \sum_{1}^{n} z_j \chi_{E_j}$$

که در آن $E_j = f^{-1}(\{z_j\})$ و برد f مجموعهٔ $\{z_1, \dots, z_n\}$ می‌باشد. این نمایش را نمایش **استاندارد** f می‌نامیم. این نمایش، f را به صورت یک ترکیب خطی با ضرایب متمایز از توابع مشخصهٔ مجموعه‌های مجزایی بیان می‌کند که اجتماعشان X است. **تذکر**: یکی از ضرایب z_j می‌تواند ۰ باشد، جملهٔ $z_j\chi_{E_j}$ هنوز می‌تواند به عنوان بخشی از نمایش استاندارد تلقی شود، چون وقتی f با توابع دیگر تعامل می‌کند مجموعهٔ E_j می‌تواند نقش داشته باشد.

واضح است که اگر f و g دو تابع ساده باشند $f + g$ و fg نیز چنین‌اند. اکنون نشان می‌دهیم که هر تابع اندازه‌پذیر دلخواه را می‌توان به خوبی با توابع ساده تقریب زد.

۲.۱۰ قضیه. فرض کنید $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد.

الف) چنانچه $f : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد، دنباله‌ای چون $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری‌که $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \dots \le f$ و $\phi_n \to f$ به‌طور نقطه‌ای و $\phi_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار است.

ب) چنانچه $f : X \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد، دنباله ای چون $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری‌که $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \dots \le |f|$ و $\phi_n \to f$ به‌طور نقطه‌ای، و $\phi_n \to f$ به طور یکنواخت بر هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار است.

برهان. (الف) به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ و $0 \le k \le 2^{2n} - 1$ قرار می‌دهیم:

$$E_n^k = f^{-1}\left(\left(2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\right]\right), \qquad F_n = f^{-1}\left(\left(2^n, \infty\right]\right).$$

و تعریف می کنیم:

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} 2^{-n} k \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

(این فرمول در نوشتن گیج کننده است اما از نظر هندسی به آسانی قابل فهم است؛ شکل ۲.۱ را ببینید). به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر n، $\phi_n \le \phi_{n+1}$ و $0 \le f - \phi_n \le 2^{-n}$ بر مجموعه‌ای که $f \le 2^n$. بنابر این، حکم حاصل می‌شود.

(ب) چنانچه $f = g + ih$، قسمت (الف) را می‌توانیم برای بخش‌های مثبت و منفی g و h به‌کار برده و دنباله‌هایی مانند ψ_n^+، ψ_n^-، ζ_n^+ و ζ_n^- از توابع ساده نامنفی به دست آوریم که به g^+، g^-، h^+ و h^- صعود کنند. فرض می‌کنیم $\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\zeta_n^+ - \zeta_n^-)$؛ در این صورت بررسی اینکه ϕ_n خواص مطلوب را دارد تمرین ساده‌ای است. ■

چنانچه μ یک اندازه روی $(X, \mathcal{M})$ باشد، می‌توان توقع داشت که در بحث توابع اندازه‌پذیر مجموعه‌های μـ پوچ را مستثنی کنیم. با این کار در صورت کامل بودن μ همه چیز آسان‌تر می‌شود.

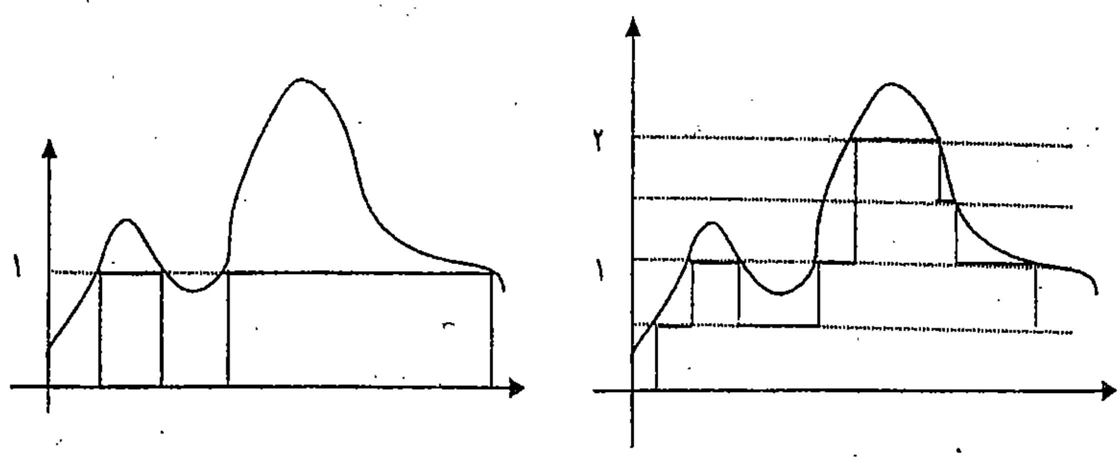
۲.۱۱ گزاره. استنتاج‌های زیر معتبرند اگر و فقط اگر اندازهٔ μ کامل باشد:

الف) اگر f اندازه‌پذیر باشد و $f = g$ (μـ ت. ه.)، آنگاه g اندازه‌پذیر است.

ب) اگر f_n به ازای $n \in \mathbb{N}$ اندازه‌پذیر باشد و $f_n \to f$ (μـ ت. ه.)، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

برهان برای خواننده باقی می‌ماند (تمرین ۱۰).

از سوی دیگر نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد که با فراموشی کامل بودن اندازه بعید است که مرتکب اشتباه بزرگی شویم.



شکل ۲.۱ توابع ϕ_0 (چپ) و ϕ_1 (راست) در برهان قسمت (الف) از قضیهٔ ۲.۱۰.

۲.۱۲ گزاره. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ کامل شده آن باشد. چنانچه f یک تابع $\overline{\mathcal{M}}$ـ اندازه‌پذیر روی X باشد، تابع $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیری مانند g وجود دارد به طوری که $f = g$ ($\overline{\mu}$ـ ت. ه).

برهان. اگر $f = \chi_E$ که در آن $E \in \overline{\mathcal{M}}$ بنابر تعریف حکم واضح است؛ در نتیجه اگر f یک تابع سادهٔ $\overline{\mathcal{M}}$ـ اندازه‌پذیر باشد حکم واضح خواهد بود. برای حالت کلی دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع سادهٔ $\overline{\mathcal{M}}$ـ اندازه‌پذیر انتخاب می‌کنیم، که مطابق با

قضیهٔ ۲.۱۰ به طور نقطه‌ای به f بگراید و به ازای هر n فرض می‌کنیم ψ_n یک تابع سادهٔ $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیر باشد که $\psi_n = \phi_n$ به‌جز روی یک مجموعه مانند $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ با $\overline{\mu}(E_n) = 0$ برقرار باشد. $N \in \mathcal{M}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\mu(N) = 0$ و $N \supset \bigcup_1^\infty E_n$، و قرار می‌دهیم $g = \lim \chi_{X \setminus N} \psi_n$. در این صورت بنابر نتیجهٔ ۲.۹، تابع g، $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیر است و $g = f$ بر N^c. ■

تمرین‌ها

در تمرین های ۱ تا ۷، $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

۱) اگر $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ و $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$، آنگاه f اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}$، $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}$ و f روی Y اندازه‌پذیر باشد.

۲) فرض کنید $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ اندازه‌پذیر باشند.

الف) fg اندازه‌پذیر است (که در آن $0 \cdot (\pm\infty) = 0$).

ب) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ را ثابت در نظر گرفته و h را چنین تعریف کنید: $h(x) = a$ هرگاه $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ و در غیر این صورت $h(x) = f(x) + g(x)$. در این صورت h اندازه‌پذیر است.

۳) اگر $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع اندازه‌پذیر روی X باشد، آنگاه $\{x : \lim f_n(x)$ وجود دارد$\}$ یک مجموعه اندازه‌پذیر است.

۴) اگر $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ و به ازای هر $r \in \mathbb{Q}$ داشته باشیم $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

۵) اگر $X = A \cup B$ که در آن $A, B \in \mathcal{M}$، آنگاه تابعی چون f بر X اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر f هم بر A و هم بر B اندازه‌پذیر باشد.

۶) سوپرمم خانواده‌ای شمارش‌ناپذیر از توابع $\overline{\mathbb{R}}$ـ مقدار روی X نمی‌تواند اندازه‌پذیر نباشد. (مگر اینکه σـ جبر $\mathcal{M}$ بسیار خاص باشد.)

۷) فرض کنید به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ای چون $E_\alpha \in \mathcal{M}$ داده شده است به طوری که اگر $\alpha < \beta$، $E_\alpha \subset E_\beta$، آنگاه $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha = \varnothing$ و $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha = X$. در این صورت تابع اندازه‌پذیری چون $f : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر α، $f(x) \leq \alpha$ بر E_α و $f(x) \geq \alpha$ بر E_α^c. (تمرین ۴ را به کار برید).

۸) اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یکنوا باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر برل است.

۹) فرض کنید $f : [0,1] \to [0,1]$ تابع کانتور (بند ۵.۱) باشد، و $g(x) = f(x) + x$.

الف) g یک دو سویی از $[0,1]$ به $[0,2]$ است و $h = g^{-1}$ از $[0,2]$ به $[0,1]$ پیوسته است.

ب) اگر C مجموعهٔ کانتور باشد، آنگاه $m(g(C)) = 1$.

ج) بنابر تمرین ۲۹ از فصل ۱، $g(C)$ شامل مجموعه‌ای چون A است که اندازه‌پذیر لبگ نیست. قرار دهید $B = g^{-1}(A)$. در این صورت B اندازه‌پذیر لبگ است اما اندازه‌پذیر برل نیست.

د) یک تابع اندازه‌پذیر لبگ مانند F و تابع پیوسته‌ای چون G بر $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $F \circ G$ اندازه‌پذیر لبگ نیست.

۱۰) گزارهٔ ۲.۱۱ را ثابت کنید.

۱۱) فرض کنید f تابعی روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x, \cdot)$ اندازه‌پذیر برل است و به ازای هر $y \in \mathbb{R}^k$، $f(\cdot, y)$ پیوسته است. به ازای $n \in \mathbb{R}$ تابع f_n را به صورت زیر تعریف کنید. به ازای $i \in \mathbb{Z}$ فرض‌کنید $a_i = \frac{i}{n}$ و به ازای $a_i \leq x \leq a_{i+1}$ قرار دهید:

$$f_n(x,y) = \frac{f(a_{i+1}, y)(x - a_i) - f(a_i, y)(x - a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}.$$

در این صورت f_n بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ اندازه‌پذیر برل است و $f_n \to f$ به‌طور نقطه‌ای؛ از این رو f بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ اندازه‌پذیر برل است. به استقرا نتیجه بگیرید که هر تابع روی $\mathbb{R}^n$ که به طور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهایش پیوسته باشد اندازه‌پذیر برل است.

۲.۲ انتگرالگیری روی توابع نامنفی

در این بخش یک فضای اندازه مانند $(X, \mathcal{M}, \mu)$ را ثابت در نظر گرفته و L^+ را فضای همهٔ توابع اندازه‌پذیر از X بتوی $[0, \infty]$ تعریف می‌کنیم. چنانچه ϕ تابعی ساده در L^+ با نمایش استاندارد $\phi = \sum_1^n a_j \chi_{E_j}$ باشد انتگرال ϕ نسبت

به μ را با $\int \phi d\mu = \sum_{1}^{n} a_j \mu(E_j)$ تعریف می‌کنیم (مثل همیشه برای مصلحت $0 \cdot \infty = 0$). توجه داریم که $\int \phi d\mu$ ممکن است ∞ باشد. چنانچه بیم ابهام نرود به‌جای $\int \phi d\mu$، $\int \phi$ نیز خواهیم نوشت. همچنین گاهی از اوقات بهتر است آرگمان ϕ را صریحاً قید کنیم، بالاخص وقتی $\phi(x)$ توسط ضابطه‌ای بر حسب x داده شود یا وقتی متغیرهای دیگر دخیل باشند؛ در این حالت از نماد $\int \phi(x) d\mu(x)$ استفاده خواهیم کرد. (برخی از مؤلفان ترجیح می‌دهند به جای نماد مذکور بنویسند $\int \phi(x) \mu(dx)$.) بالاخره اگر $A \in \mathcal{M}$، آنگاه $\phi \chi_A$ نیز ساده است (مختصر شدهٔ $\phi \chi_A = \sum a_j \chi_{A \cap E_j}$) و $\int_A \phi d\mu$ (یا $\int_A \phi$ یا $\int \phi(x) d\mu(x)$) را $\int \phi \chi_A d\mu$ تعریف می‌کنیم.

همین مصلحت‌های نمادی در مورد انتگرال توابع کلی‌تر نیز به‌کار خواهند رفت تا انتگرال‌ها روی زیرمجموعه‌ها هم تعریف شوند. به‌طور خلاصه:

$$\int_A \phi d\mu = \int_A \phi = \int_A \phi(x) d\mu(x) = \int \phi \chi_A d\mu, \qquad \int = \int_X .$$

۲.۱۳ گزاره. فرض کنیم ϕ و ψ توابعی ساده در L^+ باشند.

الف) اگر $c \geq 0$، $\int c\phi = c \int \phi$.

ب) $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$.

ج) اگر $\phi \leq \psi$، آنگاه $\int \phi \leq \int \psi$.

د) نگاشت $A \mapsto \int_A \phi d\mu$ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است.

برهان. (الف) بدیهی است. برای (ب) فرض می‌کنیم $\sum_1^n a_j \chi_{E_j}$ و $\sum_1^m b_k \chi_{F_k}$ نمایش‌های استاندارد ϕ و ψ باشند. در این صورت $E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$ و $F_k = \bigcup_1^n (E_j \cap F_k)$ زیرا $\bigcup_1^n E_j = \bigcup_1^m F_k = X$ و این اجتماع‌ها مجزا هستند. از این رو جمعی متناهی بودن μ ایجاب می‌کند که

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k),$$

و همین استدلال نشان می‌دهد که مجموع سمت راست با $\int (\phi + \psi)$ برابر است. به علاوه اگر $\phi \leq \psi$، آنگاه وقتی $E_j \cap F_k \neq \varnothing$، $a_j \leq b_k$، لذا

$$\int \phi = \sum_{j,k} a_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \int \psi,$$

و این مطلب قسمت (ج) را ثابت می‌کند. بالاخره، اگر $\{A_k\}$ دنباله‌ای مجزا در $\mathcal{M}$ باشد و $A = \bigcup_1^\infty A_k$، آنگاه

$$\int_A \phi = \sum_j a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} a_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \phi\,,$$

که این هم (د) را اثبات می‌کند. ■

حال با تعریف زیر انتگرال را به هر تابع مانند $f \in L^+$ گسترش می‌دهیم:

$$\int f d\mu = \sup\{\int \phi d\mu : \circ \leq \phi \leq f, \text{ساده است } \phi\}.$$

بنابر گزارهٔ ۲.۱۳، وقتی f ساده باشد دو تعریف $\int f$ بر هم منطبق می‌شوند زیرا خانوادهٔ توابع ساده‌ای که روی آن سوپرمم گرفته می‌شود شامل خود f است. به علاوه از تعریف واضح است که اگر $g \leq f$، آنگاه $\int g \leq \int f$ و به ازای هر $c \in [\circ, \infty]$ داریم:

$$\int cf = c\int f\,.$$

مرحله بعدی اثبات یکی از قضایای اساسی همگرایی است.

۲.۱۴ قضیه همگرایی یکنوا. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در L^+ باشد به طوری‌که به ازای هر j، $f_j \leq f_{j+1}$ و $f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_n f_n)$، آنگاه $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

برهان. $\{\int f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد است، پس حد آن وجود دارد (ممکن است مساوی ∞ باشد). به علاوه، به ازای هر n، $\int f_n \leq \int f$، لذا $\lim \int f_n \leq \int f$. برای اثبات نامساوی عکس، $\alpha \in (\circ, 1)$ را ثابت گرفته، فرض می‌کنیم ϕ تابع ساده‌ای باشد که $\circ \leq \phi \leq f$ و $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$. در این صورت $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است که اجتماعشان X می‌باشد، پس داریم $\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \phi$. بنابر قسمت (د) از گزارهٔ ۲.۱۳ و قسمت (ج) از قضیهٔ ۱.۸، $\lim \int_{E_n} \phi = \int \phi$ و از این رو $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \alpha \int \phi$. چون این مطلب در مورد هر $\alpha < 1$ درست است برای $\alpha = 1$ نیز درست باقی می‌ماند، و با گرفتن سوپرمم روی همهٔ توابع سادهٔ $\phi \leq f$، به دست می‌آوریم $\lim \int f_n \geq \int f$. ■

قضیهٔ همگرایی یکنوا در بسیاری از مباحث، یک ابزار اساسی است، اما اهمیت فوری آن برای ما به صورت زیر است. $\int f$ مستلزم سوپرمم‌گیری روی خانواده‌ای بزرگ (معمولاً شمارش‌ناپذیر) از توابع ساده است، لذا ممکن است محاسبهٔ مستقیم $\int f$ از روی تعریف مشکل باشد. اما قضیهٔ همگرایی یکنوا به ما اطمینان می‌دهد که برای محاسبهٔ $\int f$ کافی است $\lim \int \phi_n$ را محاسبه کنیم که در آن $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده است که به f صعود می‌کنند، و قضیهٔ ۲.۱۰ تضمین می‌کند که چنین دنباله‌ای وجود دارد. به عنوان اولین کاربرد، خاصیت جمعی انتگرال را ثابت می‌کنیم.

۲.۱۵ قضیه. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی در L^+ باشد و $f = \sum_n f_n$، آنگاه $\int f = \sum_n \int f_n$.

برهان. نخست دو تابع مانند f_1 و f_2 را درنظر می گیریم. بنابر قضیهٔ ۲.۱ دنباله‌هایی مانند $\{\phi_j\}$ و $\{\psi_j\}$ از توابع سادهٔ نامنفی می‌توان یافت که به طور صعودی به f_1 و f_2 بگرایند. در این صورت $\{\phi_j + \psi_j\}$ به طور صعودی به $f_1 + f_2$ می‌گراید، لذا بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا و قضیهٔ ۲.۱۳ خواهیم داشت:

$$\int (f_1 + f_2) = \lim \int (\phi_j + \psi_j) = \lim \int \phi_j + \lim \int \psi_j = \int f_1 + \int f_2 .$$

بنابر این، با استقرا برای هر عدد طبیعی متناهی N خواهیم داشت:

$$\int \sum_1^N f_n = \sum_1^N \int f_n .$$

با فرض $N \to \infty$ و با به‌کارگیری مجدد قضیهٔ همگرایی یکنوا، به دست می‌آوریم:

$$\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n . \blacksquare$$

۲.۱۶ گزاره. اگر $f \in L^+$، آنگاه $\int f = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ت. ه.

برهان. اگر f ساده باشد این مطلب واضح است: اگر $f = \sum_1^n a_j \chi_{E_j}$ که در آن $a_j \geq 0$، آنگاه $\int f = 0$ اگر و فقط به ازای هر j یا $a_j = 0$ یا $\mu(E_j) = 0$. درکل، اگر $f = 0$ ت. ه و ϕ تابعی ساده باشد به‌طوری‌که $0 \leq \phi \leq f$، آنگاه $\phi = 0$ ت. ه.، بنابر این $\int f = \sup_{\phi \leq f} \int \phi = 0$. از طرف دیگر، $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_1^\infty E_n$ که در آن $E_n = \{x : f(x) > n^{-1}\}$، لذا اگر $f = 0$ ت. ه درست نباشد، آنگاه باید به ازای nای داشته باشیم $\mu(E_n) > 0$. اما در این صورت $f > n^{-1} \chi_{E_n}$، لذا $\int f \geq n^{-1} \mu(E_n) > 0$. $\blacksquare$

۲.۱۷ نتیجه. اگر $\{f_n\} \subset L^+$، $f \in L^+$ و $f_n(x)$ تقریباً برای هر x به $f(x)$ صعود کند، آنگاه

$$\int f = \lim \int f_n .$$

برهان. اگر برای هر $x \in E$، $f_n(x)$ به‌طور صعودی به $f(x)$ بگراید که در آن $\mu(E^c) = 0$، آنگاه $f - f\chi_E = 0$ ت. ه و $f_n - f_n \chi_E = 0$ ت. ه.، لذا بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا خواهیم داشت:

$$\int f = \int f\chi_E = \lim \int f_n\chi_E = \lim \int f_n \,. \blacksquare$$

فرض تقریباً همه جا صعودی بودن دنبالهٔ $\{f_n\}$ در قضیهٔ همگرایی یکنوا اساسی است. برای مثال، اگر X همان $\mathbb{R}$ و μ اندازهٔ لبگ باشد، داریم $\chi_{(n,n+1)} \to ۰$ و $n\chi_{(۰,\frac{1}{n})} \to ۰$ به طور نقطه ای، اما برای هر n،

$$\int \chi_{(n,n+1)} = \int n\chi_{(۰,\frac{1}{n})} = ۱.$$

همان‌طور که با رسم نمودار دیده می‌شود، مشکل این مثال آن است که وقتی $n \to \infty$ مساحت زیر نمودار « سر از بینهایت در می‌آورد »، لذا مساحت واقع در حد کمتر از آن چیزی است که تصور می‌کردیم. این مثال حکایت از آن دارد که در برخی از حالات، انتگرالِ حد با حدِ انتگرال یکی نیست، اما در مورد آن هنوز یک نامساوی وجود دارد که معتبر باقی می‌ماند. این نامساوی را از حکم کلی زیر نتیجه می گیریم.

۲.۱۸ لم فاتو. اگر $\{f_n\}$ دنباله ای در L^+ باشد، آنگاه $\int(\liminf f_n) \le \liminf \int f_n$.

برهان. برای هر $k \ge ۱$ اگر $j \ge k$ داریم $\inf_{n\ge k} f_n \le f_j$، لذا اگر $j \ge k$، آنگاه $\int \inf_{n\ge k} f_n \le \int f_j$ و از این رو

$$\int \inf_{n\ge k} f_n \le \inf_{n\ge k} \int f_j \,.$$

حال فرض می‌کنیم $k \to \infty$ و قضیهٔ همگرایی یکنوا را به‌کار می بریم:

$$\int(\liminf f_n) = \lim_{k\to\infty} \int(\inf_{n\ge k} f_n) \le \liminf \int f_n \,. \blacksquare$$

۲.۱۹ نتیجه. اگر $\{f_n\} \subset L^+$، $f \in L^+$ و $f_n \to f$ ت. ه، آنگاه $\int f \le \liminf \int f_n$.

برهان. چنانچه همه‌جا $f_n \to f$، حکم مستقیماً از لم فاتو حاصل می‌گردد، اما بنابر گزارهٔ ۲.۱۶ با دستکاری f_n و f روی یک مجموعهٔ پوچ بدون آنکه تأثیری در انتگرال‌ها گذارد می‌توان شرط فوق را برآورده کرد. $\blacksquare$

۲.۲۰ گزاره. اگر $f \in L^+$ و $\int f < \infty$، آنگاه $\{x : f(x) = \infty\}$ یک مجموعهٔ پوچ است و $\{x : f(x) > ۰\}$ یک مجموعهٔ σـ متناهی می باشد.

برهان به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۱۲).

تمرین‌ها

۱۲) گزارهٔ ۲.۲۰ را ثابت کنید. (گزاره ۲۰.۰ را ببینید که در آن یک حالت خاص ثابت شده است.)

۱۳) فرض کنید $\{f_n\} \subset L^+$، $f_n \to f$ به‌طور نقطه‌ای و $\int f = \lim \int f_n < \infty$. در این صورت برای هر $E \in \mathcal{M}$، $\int_E f = \lim \int_E f_n$. اما اگر $\int f = \lim \int f_n = \infty$ این حکم لزوماً درست نیست.

۱۴) چنانچه $f \in L^+$، برای هر $E \in \mathcal{M}$ فرض‌کنید $\lambda(E) = \int_E f d\mu$. در این صورت λ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است و برای هر $g \in L^+$ داریم $\int g d\lambda = \int f g d\mu$. (نخست فرض‌کنید که g است.)

$-f_n \uparrow -f$

۱۵) اگر $\{f_n\} \in L^+$، f_n نقطه به نقطه به f نزول کند و $\int f_1 < \infty$، آنگاه $\int f = \lim \int f_n$.

۱۶) اگر $f \in L^+$ و $\int f < \infty$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عضوی چون $E \in \mathcal{M}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(E) < \infty$ و $\int_E f > (\int f) - \varepsilon$.

۱۷) لم فاتو را مفروض گرفته و قضیهٔ همگرایی یکنوا را از آن نتیجه بگیرید.

۲.۳ انتگرالگیری توابع مختلط

در ادامهٔ بحث، روی فضای ثابتی چون $(X, \mathcal{M}, \mu)$ کار می‌کنیم. انتگرالی که در بخش قبل تعریف شد را می توان به توابع اندازه‌پذیر با مقادیر حقیقی f به روشنی تعمیم داد؛ یعنی اگر f^+, f^- بخش‌های مثبت و منفی f باشند و حداقل یکی از $\int f^+$ و $\int f^-$ متناهی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int f = \int f^+ - \int f^- .$$

بیشتر به حالتی علاقمند خواهیم بود که $\int f^+$ و $\int f^-$ هر دو متناهی باشند؛ در این صورت می‌گوییم f **انتگرال‌پذیر** است. چون $|f| = f^+ + f^-$، واضح است که f انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $\int |f| < \infty$.

۲.۲۱ گزاره. مجموعهٔ توابع حقیقی انتگرال پذیر روی X یک فضای برداری حقیقی است، و انتگرال یک تابعک خطی روی آن است.

برهان. حکم نخست از این حقیقت حاصل می‌شود که $|af+bg| \le |a||f|+|b||g|$، و به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $\int af = a\int f$. برای اثبات جمعی بودن، فرض می‌کنیم که f, g انتگرال‌پذیرند و قرار می‌دهیم $h = f+g$. در این صورت $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ لذا

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

بنابر ۲.۱۵،

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+,$$

و با جایگذاری حکم مطلوب به دست می‌آید:

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g. \blacksquare$$

حال اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط باشد، f را **انتگرال‌پذیر** گوییم هرگاه $\int|f| < \infty$. به طورکلی، اگر $E \in \mathcal{M}$، f روی E انتگرال‌پذیر است هرگاه $\int_E |f| < \infty$. چون $|f| \le |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f| \le 2|f|$ تابع f انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathrm{Re}\, f$ و $\mathrm{Im}\, f$ هر دو انتگرال‌پذیر باشند، و در این حالت تعریف می‌کنیم:

$$\int f = \int \mathrm{Re}\, f + i\int \mathrm{Im}\, f.$$

به آسانی معلوم می‌شود که فضای توابع مختلط انتگرال‌پذیر یک فضای برداری مختلط است و انتگرال روی آن یک تابعک خطی مختلط است. این فضا را موقتاً با $L^1(\mu)$ (یا بسته به متن $L^1(X,\mu)$ یا $L^1(X)$ یا به طور خلاصه با L^1) نشان می‌دهیم.[1]

[1] اندیس بالایی ۱ نماد استانداردی است، اما تا فصل ۶ هیچ مفهومی نخواهد داشت.

۲.۲۲ گزاره. اگر $f \in L^1$، آنگاه $\left|\int f\right| \le \int |f|$.

برهان. اگر $\int f = 0$ حکم بدیهی است و اگر f حقیقی باشد تقریباً بدیهی است، زیرا

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \le \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

اگر f مختلط باشد و $\int f \ne 0$، فرض می‌کنیم $\alpha = \overline{\mathrm{sgn}(\int f)}$. در این صورت $\left|\int f\right| = \alpha\int f = \int \alpha f$. به‌ویژه $\int \alpha f$ حقیقی است، لذا

$$\left|\int f\right| = \mathrm{Re}\int \alpha f = \int \mathrm{Re}(\alpha f) \le \int |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le \int |\alpha f| = \int |f|. \blacksquare$$

۲.۲۳ گزاره

الف) اگر $f \in L^1$، آنگاه $\{x : f(x) \neq 0\}$ یک مجموعهٔ σـ متناهی است.

ب) اگر $f,g \in L^1$، آنگاه برای هر $E \in \mathcal{M}$، $\int_E f = \int_E g$ اگر و فقط اگر $\int |f-g| = 0$ اگر و فقط اگر $f = g$ ت. ه.

برهان. (الف) و هم ارزی دوم در (ب) از گزاره‌های ۲.۲۰ و ۲.۱۶ حاصل می‌شوند. اگر $\int |f-g| = 0$، آنگاه بنابر گزارهٔ ۲.۲۲ برای $E \in \mathcal{M}$،

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| \leq \int \chi_E |f-g| \leq \int |f-g| = 0,$$

لذا $\int_E f = \int_E g$. از سوی دیگر، اگر $u = \mathrm{Re}(f-g)$، $v = \mathrm{Im}(f-g)$ و $f = g$ ت. ه درست نباشد، آنگاه حداقل یکی از u^+، u^-، v^+ و v^- باید روی مجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت ناصفر باشد. اگر مثلاً $E = \{x : u^+(x) > 0\}$ اندازهٔ مثبت داشته باشد، آنگاه $\mathrm{Re}(\int_E f - \int_E g) = \int_E u^+ > 0$ زیرا $u^- = 0$ بر E؛ حالات دیگر نیز همین طور هستند ■.

این گزاره نشان می‌دهد که اگر توابع را روی مجموعه‌های پوچ تغییر دهیم بر انتگرال ذکر شده در گزاره تأثیری نمی‌گذارد. در واقع می‌توان از توابعی چون f انتگرال گرفت که فقط روی مجموعهٔ اندازه‌پذیری چون E تعریف شده است که متمم آن پوچ است، به سادگی این کار با صفر (یا هر چیز دیگر) تعریف کردن f بر E^c انجام می‌شود. در این روش، به منظور انتگرالگیری، توابع با مقادیر واقع در $\overline{\mathbb{R}}$ را می توان با مقادیر حقیقی تلقی کرد. با به‌خاطر سپردن این موضوع، تعریف مناسب‌تری برای $L^1(\mu)$ می‌یابیم. $L^1(\mu)$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی توابع انتگرال‌پذیری است که تقریباً همه‌جا بر X تعریف شده‌اند، و در آن f و g هم ارزند اگر و فقط اگر $f = g$ ت. ه. هنوز هم فضای جدید $L^1(\mu)$ (تحت جمع تقریباً همه‌جایی نقطه‌ای و ضرب اسکالر نقطه‌ای) یک فضای برداری مختلط است. هرچند از این پس $L^1(\mu)$ را به شکل فضایی از رده‌های هم‌ارزی خواهیم دید، هنوز نماد «$f \in L^1(\mu)$» را به این معنی به‌کار خواهیم برد که f یک تابع انتگرال‌پذیر تقریباً همه‌جا تعریف شده می‌باشد. این سوء استفاده از نماد عرفاً پذیرفته شده است و حقیقاً مسبب هر اشتباهی است.

تعریف جدید $L^1(\mu)$ دو مزیت عمده دارد. اول اینکه، اگر $\overline{\mu}$ کامل باشد، گزارهٔ ۲.۱۲ یک تناظر یک به یک طبیعی بین $L^1(\mu)$ و $L^1(\overline{\mu})$ به‌دست می‌دهد، لذا می‌توانیم این فضاها را یکی بگیریم (و یکی خواهیم گرفت). دوم اینکه، L^1 با متر $\rho(f,g) = \int |f-g|$ یک فضای متری است. (نامساوی مثلثی به آسانی بررسی می‌شود و به وضوح $\rho(f,g) = \rho(g,f)$؛ اما برای اثبات «$\rho(f,g) = 0$ فقط اگر $f = g$» باید توابعی را که تقریباً همه‌جا با هم برابرند مطابق قسمت (ب) از گزارهٔ ۲.۲۳، یکی گرفت) . از همگرایی نسبت به این متر تحت عنوان همگرایی در L^1 یاد خواهیم کرد؛ بنابر این $f_n \to f$ در L^1 اگر و فقط اگر $\int |f_n - f| \to 0$.

اکنون آخرین قضیهٔ همگرایی اساسی از سه قضیه را می‌آوریم (دو قضیهٔ دیگر قضیهٔ همگرایی یکنوا و لم‌فاتو می‌باشند) و از آن چند نتیجهٔ مفید استخراج می‌کنیم. در بحث مربوط به انتگرال‌گیری روی $\mathbb{R}$ با اندازهٔ لبگ همانند بحث ماقبل لم‌فاتو، ایدهٔ ورای قضیه آن است که اگر $f_n \to f$ ت. ه و نمودار $|f_n|$ به ناحیه‌ای از صفحه با مساحت متناهی محصور بوده و در نتیجه مساحت پایینی آن نتواند به بینهایت برود، آنگاه $\int f_n \to \int f$.

۲.۲۴ قضیهٔ همگرایی مغلوب. فرض‌کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در L^1 باشد به طوری‌که (الف) $f_n \to f$ ت. ه، و (ب) عضوی منفی مانند $g \in L^1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(a)\ f_n \to f$ ت. ه، به ازای هر n برقرار باشد. در این صورت

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n .$$

برهان. بنابر گزاره‌های ۲.۱۱ و ۲.۱۲ تابع f (شاید پس از تعریف مجدد روی یک مجموعهٔ پوچ) اندازه‌پذیر است و چون ت. ه داریم $f \in L^1$ با درنظر گرفتن بخش‌های حقیقی و موهومی، کافی است فرض‌کنیم که f_n و f حقیقی هستند، که در این حالت داریم $g + f_n \geq 0$ ت. ه و $g - f_n \geq 0$ ت. ه. بنابر لم فاتو داریم:

$$\int g + \int f \leq \liminf \int (g + f_n) = \int g + \liminf \int f_n$$
$$\int g - \int f \leq \liminf \int (g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n \ .$$

بنابر این $\liminf \int f_n \geq \limsup \int f_n$ و حکم حاصل می‌شود. ■

۲.۲۵ قضیه. فرض‌کنیم $\{f_j\}$ دنباله‌ای در L^1 باشد به طوری‌که $\sum_1^\infty \int |f_n| < \infty$. در این صورت $\sum_1^\infty f_j$ تقریباً همه جا به تابعی در L^1 همگرا است و $\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$.

برهان. بنابر قضیهٔ ۲.۱۵، $\int \sum_1^\infty |f_j| = \sum_1^\infty |f_j| < \infty$، لذا تابع $g = \sum_1^\infty |f_j|$ در L^1 است. به ویژه، بنابر گزارهٔ ۲.۲۰، $\sum_1^\infty |f_j(x)|$ تقریباً برای همهٔ xها متناهی است و برای چنین xهایی سری $\sum_1^\infty f_j(x)$ همگرا است. به علاوه، به ازای همهٔ nها داریم $|\sum_1^n f_j| \leq g$. پس می‌توان قضیهٔ همگرایی مغلوب را در مورد مجموعه‌های جزئی به کار برده و به تساوی $\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$ دست یافت. ■

۲.۲۶ قضیه. چنانچه $f \in L^1(\mu)$ و $\varepsilon > 0$، تابع سادهٔ انتگرال‌پذیری مانند $\phi = \sum a_j \chi_{E_j}$ وجود دارد به طوری‌که $\int |f - \phi| d\mu < \varepsilon$. (یعنی، توابع سادهٔ انتگرال‌پذیر، نسبت به متر L^1 در L^1 چگال هستند.) چنانچه μ اندازهٔ لبگ - اشتیلیس روی $\mathbb{R}$ باشد، مجموعه‌های E_j واقع در تعریف ϕ را می‌توان اجتماعی متناهی از بازه‌های باز گرفت، به علاوه تابع پیوسته‌ای چون g وجود دارد که بیرون یک بازهٔ کراندار صفر است به‌طوری‌که $\int |f - \phi| d\mu < \varepsilon$.

برهان. فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}$ مثل قسمت (ب) از قضیهٔ ۲.۱۰ باشد؛ در این صورت بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب، به ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ داریم $\int |\phi_n - f| < \varepsilon$ زیرا $|\phi_n - f| \le 2|f|$. اگر $\phi_n = \sum a_j \chi_{E_j}$، که در آن E_jها مجزا هستند و a_jها ناصفراند، مشاهده می‌کنیم که

$$\mu(E_j) = |a_j|^{-1}\int_{E_j}|\phi_j| \le |a_j|^{-1}\int |f| < \infty.$$

به‌علاوه، اگر E و F مجموعه‌های اندازه‌پذیری باشند، آنگاه داریم $\mu(E\Delta F) = \int|\chi_E - \chi_F|$. از این رو، اگر μ اندازهٔ لبگ ـ اشتیلیس روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه بنابر گزارهٔ ۱.۲۰ می‌توانیم χ_{E_j} را با دقت دل‌خواه بر حسب متر L^1 به‌وسیلهٔ مجموع‌هایی متناهی از توابع χ_{I_k} تقریب بزنیم که در آن I_kها بازه‌هایی باز هستند. بالاخره، اگر $I_k = (a,b)$، می‌توانیم برحسب متر L^1 تابع χ_{I_k} را به وسیلهٔ توابع پیوسته‌ای که خارج از (a,b) صفر هستند تقریب بزنیم. (به عنوان مثال، برای عدد مفروض $\varepsilon > 0$، g را تابع پیوسته‌ای می‌گیریم که روی $(-\infty,a]$ و $[b,\infty)$ مساوی با ۰ و روی $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ مساوی ۱ و روی $[a,a+\varepsilon]$ و $[b-\varepsilon,b]$ خطی است.) با تلفیق این حقایق، احکام مطلوب را به دست می‌آوریم. ■

قضیهٔ بعدی محکی برای اعتبار تعویض ترتیب انجام یک حد یا یک مشتق با انتگرال به‌دست می‌دهد که قدری محدودتر از آنهایی است که در اکثر کتاب‌های حسابان پیشرفته یافت می‌شود.

۲.۲۷ قضیه. فرض‌کنیم $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ و به ازای هر $t \in [a,b]$ تابع $f : (\cdot,t) \to \mathbb{C}$ انتگرال‌پذیر باشد. قرار می دهیم:

$$F(t) = \int_X f(x,t)\,d\mu(x).$$

الف) فرض‌کنیم عضوی چون $g \in L^1(\mu)$ وجود دارد به‌طوری‌که $|f(x,t)| \le g(x)$ به ازای هر t و x برقرار است. اگر به ازای هر x، $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$، آنگاه $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$؛ به‌ویژه، اگر به ازای هر x، $f(x,\cdot)$ پیوسته باشد، آنگاه F پیوسته است.

ب) فرض‌کنیم $\frac{\partial f}{\partial t}$ موجود و عضوی چون $g \in L^1(\mu)$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر t و x داشته باشیم:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x).$$

در این صورت F مشتقپذیر است و $F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x)$.

برهان. برای (الف)، قضیهٔ همگرایی مغلوب را در مورد $f_n(x) = f(x,t_n)$ به‌کار برید که در آن $\{t_n\}$ دنباله‌ای دل‌خواه در $[a,b]$ است که به $t_\circ$ همگرا است. برای (ب) ملاحظه می‌کنیم که $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_\circ) = \lim h_n(x)$ که در آن

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_\circ)}{t_n - t_\circ},$$

باز هم $\{t_n\}$ دنباله‌ای دل‌خواه است که به $t_\circ$ همگرا است. نتیجه می گیریم که $\frac{\partial f}{\partial t}$ اندازه‌پذیر است و بنابر قضیهٔ مقدار میانی،

$$|h_n(x)| \le \sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x),$$

پس می‌توانیم قضیهٔ همگرایی مغلوب را بار دیگر فراخوانده و به دست آوریم:

$$F'(t_\circ) = \lim \frac{F(t_n) - F(t_\circ)}{t_n - t_\circ} = \lim \int h_n(x)\,d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_\circ)\,d\mu(x). \blacksquare$$

اندیشهٔ به‌کارگیری دنباله‌های همگرا به $t_\circ$ در برهان قبل، از لحاظ فنی لازم است زیرا قضیهٔ همگرایی مغلوب فقط با دنباله‌هایی از توابع کار می‌کند، اما در چنین مواردی معمولاً فقط خواهیم گفت «فرض‌کنیم $t \to t_\circ$» به این مفهوم که همگرایی دنباله‌ای زیر آرگمان است.

توجه به این نکته مهم است که در قضیهٔ ۲.۲۷ بازهٔ $[a,b]$ که روی آن برآورد f یا $\frac{\partial f}{\partial t}$ برقرار است باید زیربازهٔ سره‌ای از یک بازه مانند I (شاید خود $\mathbb{R}$) باشد که روی آن $f(x,\circ)$ تعریف شود. چنانچه مفروضات (الف) یا (ب) (شاید با تابع غالب g که به a و b وابسته است) به ازای هر $[a,b]$ برقرار باشند، پیوستگی یا مشتق‌پذیر تابع انتگرال F بر سراسری I به دست می‌آید چرا که این خواص طبیعتاً موضعی هستند.

در حالت خاص که اندازهٔ μ اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ است، انتگرالی که معرفی کردیم **انتگرال‌لبگ** نامیده می‌شود. با این تفاسیر، مطالعهٔ رابطهٔ بین انتگرل‌های ریمان و لبگ بر $\mathbb{R}$ لازم می‌آید. توصیف داربوک از انتگرال ریمان برحسب مجموع‌های بالایی و پایینی را به‌کار خواهیم برد که هم اکنون آن را یادآوری می‌کنیم.

فرض‌کنیم $[a,b]$ یک بازهٔ فشرده باشد. یک **افراز** از $[a,b]$ را به معنی دنباله‌ای متناهی مانند $P = \{t_j\}_\circ^n$ خواهیم گرفت به طوری‌که $a = t_\circ < t_1 < \cdots < t_n = b$. فرض می‌کنیم f تابع حقیقی کراندار دل‌خواهی روی $[a,b]$ است. برای هر افرازی مانند P تعریف می‌کنیم:

$$S_P f = \sum_1^n M_j(t_j - t_{j-1}), \qquad s_P f = \sum_1^n m_j(t_j - t_{j-1}),$$

که در آن M_j و m_j سوپرمم و اینفیمم f روی $[t_{j-1}, t_j]$ است. سپس تعریف می‌کنیم

$$\overline{I}_a^b(f) = \inf_P S_P(f), \qquad \underline{I}_a^b(f) = \sup_P s_P(f).$$

که در آن اینفیمم و سوپرمم روی همهٔ افرازهای P گرفته می‌شود. اگر $\overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$، مقدار مشترک آنها انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ است و f را **انتگرال‌پذیر ریمان** می‌نامیم.

۲.۲۸ قضیه. فرض‌کنیم f تابع حقیقی کرانداری بر $[a,b]$ باشد.

الف) اگر f انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر لبگ است (از این رو f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است زیرا کراندار است) و $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} fdm$.

ب) f انتگرال‌پذیر ریمان است اگر و فقط اگر $\{x\in[a,b] : \text{ناپیوسته است } x \text{ در } f\}$ دارای اندازه لبگ صفر می‌باشد.

برهان. فرض کنیم f انتگرال‌پذیر ریمان باشد. به ازای هر افراز مانند P (با نمادهای فوق)، قرار می‌دهیم:

$$G_P = \sum_1^n M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]} \quad , \qquad g_P = \sum_1^n m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]},$$

لذا $S_P f = \int G_P dm$ و $s_P f = \int g_P dm$. دنباله‌ای چون $\{P_k\}$ از افرازهای وجود دارد که هنج آنها (یعنی، $\max(t_j - t_{j-1})$) به صفر میل می‌کند و هرکدام از آنها شامل قبلی است. (پس g_{P_k} نسبت به k نزولی است در حالی که G_{P_k} صعودی است)، این دنباله به قسمی است که $S_{P_k} f$ و $s_{P_k} f$ به $\int_a^b f(x)dx$ می‌گرایند. فرض می‌کنیم $G = \lim G_{P_k}$ و $g = \lim g_{P_k}$. در این صورت $G \le f \le g$ و بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب،

$$\int Gdm = \int gdm = \int_a^b f(x)dx$$

در نتیجه $\int (G-g)dm = 0$. پس بنابر گزارهٔ ۲.۱۶، $G = g$ ت. ه. و لذا $G = f$ ت. ه. چون G اندازه‌پذیر است (حد دنباله‌ای از توابع ساده است) و m کامل است پس f اندازه‌پذیر است و

$$\int_{[a,b]} fdm = \int Gdm = \int_a^b f(x)dx .$$

این مطلب (الف) را به اثبات می‌رساند و برهان(ب) در تمرین۲۳ گنجانده شده است. ■

بنابر این انتگرال ریمان (محض) در انتگرال لبگ گنجیده است. برخی انتگرال‌های ریمان نامتعارف ناسره (مطلقاً همگرا) را می‌توان مستقیماً به صورت انتگرال‌های لبگ تعبیرکرد؛ اما سایر انتگرال‌های نامتعارف نیاز به یک فرآیند حدی دارند. برای مثال، اگر به ازای هر $b > 0$، f بر $[0,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و بر $[0,\infty)$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد، آنگاه (بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب) $\int_{[0,\infty)} fdm = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$، اما حد سمت راست می‌تواند موجود باشد حتی اگر f انتگرال‌پذیر نباشد (**مثال:** $f = \sum_1^\infty n^{-1}(-1)^n \chi_{(n,n+1]}$). معمولاً از این پس نماد $\int_a^b f(x)dx$ را برای انتگرال‌های لبگ به‌کار

خواهیم برد. چند یادآوری در باب مقایسهٔ ساختار انتگرال‌های ریمان و لبگ می‌توان مفید باشد. فرض‌کنیم f تابع اندازه‌پذیر کرانداری بر $[a,b]$ باشد، و برای راحتی فرض می‌کنیم $f \geq 0$. برای محاسبهٔ انتگرال ریمان f، دنباله‌ای از توابع ساده انتخاب می‌شود که به f صعود کند. به ویژه، اگر دنباله‌ای انتخاب شود که در برهان قسمت (الف) از قضیهٔ ۲.۱ ساخته شد (شکل ۲.۱ را ببینید)، درعمل برد f را به زیر بازه‌های $(I_j)^{-1}f$ ای چون I_j افراز کرده و f با ثابتی بر هر یک از مجموعه‌های $f^{-1}(I_j)$ تقریب زده می‌شود. شروع این روند به یک نظریهٔ اندازهٔ بسیار قوی نیازمند است زیرا ممکن است مجموعه‌های $f^{-1}(I_j)$ پیچیده باشند حتی اگر f پیوسته است؛ اما بهتر است بر سر تابع خاص مورد نظر f و در نتیجه انعطاف‌پذیر و مستعدتر نسبت به‌کلیت، توافق کنیم. (در نظریهٔ لبگ فرض اندازه‌پذیری f نیاز به درنظرگرفتن هر دو تقریب بالایی و پایینی را مرتفع می‌سازد؛ اما دیدگاه اخیر را می‌توان در وضع مجرد نیز به کار انداخت (تمرین۲۴ را ببینید).

نظریهٔ لبگ دو مزیت بر نظریهٔ ریمان دارد. نخست، قضایای همگرایی قدرتمند بسیار زیاد، از قبیل قضایای همگرایی مغلوب یکنوا، فراهم می‌شوند. این نه تنها نتایجی را که قبلاً قابل به دست آوردن بودند را به دست می‌دهد بلکه حجم اثبات قضایای کلاسیک را کاهش می‌دهد. دوم اینکه، ردهٔ گسترده‌تری از توابع را می‌توان انتگرال‌گیری کرد. برای مثال، اگر R مجموعه اعداد گویای واقع در $[0,1]$ باشد، χ_R همه‌جای $[0,1]$ ناپیوسته است و $\int \chi_R dm = 0$ (واقعاً، به مفهومی این مثال، یک مثال بدیهی است زیرا χ_R تقریباً همه‌جا با تابع ثابت ۰ برابر است، برای دیدن مثال‌های جالب‌تر به تمرین ۲۵ را مراجعه کنید). البته، حقیقت این است که همهٔ توابعی‌که در آنالیز کلاسیک به آنها برمی‌خوریم (موضعاً) انتگرل‌پذیر ریمان هستند، پس این کلیت اضافه شده عملاً برای محاسبهٔ انتگرال‌های خاص به‌کار می رود. اما این نتیجهٔ قاطعی است که فضاهای متری مختلف مرکب از توابعی که مترهای آنها برحسب انتگرال‌ها تعریف می‌شود به هنگامی که توابع انتگرل‌پذیر لبگ و نه صرفاً انتگرل‌پذیر ریمان در نظر گرفته می‌شوند کامل هستند. این موضوع را بعداً، خصوصاً در فصل۶ به طور کامل مورد بررسی قرار خواهیم داد. (قبلاً کامل بودن $L^1(\mu)$ را در قالب قضیهٔ ۲.۲۵ ثابت کردیم. (برای ارتقاء سطح، قضیهٔ ۵.۱ را ببینید).

این بخش را با معرفی **تابع گامای** Γ به پایان می‌رسانیم، بعداً این تابع در چند مورد نقش بازی می‌کند. اگر $z \in \mathbb{C}$ و $\operatorname{Re} z > 0$، آنگاه $f_z : (0,\infty)$ را با $f_z(t) = t^{z-1}e^{-t}$ تعریف می‌کنیم (در اینجا $t^{z-1} = \exp[(z-1)\log t]$). چون $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z-1}$ داریم $|f_z(t)| \leq t^{\operatorname{Re} z-1}$، و نیز به ازای $t \geq 1$؛ $|f_z(t)| \leq C_z e^{-t/2}$ (به آسانی می‌توان مقدار دقیق C_z با ماکسیمم‌سازی $t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t/2}$ یافت، اما این کار در اینجا هیچ اهمیتی ندارد.) چون $\int_0^1 t^\alpha dt < \infty$ برای هر $\alpha > -1$ برقرار است و $\int_1^\infty te^{-t/2} < \infty$، می‌بینیم که برای $\operatorname{Re} z > 0$، $f_z \in L^1((0,\infty))$ و تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0)$$

از آنجا که بنابر انتگرال‌گیری جزء به جزء،

$$\int_\varepsilon^N t^z e^{-t}dt = -t^z e^{-t}\Big|_\varepsilon^N + z\int_\varepsilon^N t^{z-1}e^{-t}dt,$$

با فرض $\varepsilon \to 0$ و $N \to \infty$ می‌بینیم که به ازای $\operatorname{Re} z > 0$، تابع Γ در معادلهٔ تابعی

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

صدق می‌کند. بنابراین می‌توان با استفاده از این معادله Γ را (تقریباً) به کل صفحه مختلط توسیع داد. یعنی، برای $-1 < \operatorname{Re} z < 0$ می‌توانیم $\Gamma(z)$ را $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ تعریف‌کنیم، به طور استقرایی، با داشتن تعریف $\Gamma(z)$ برای $\operatorname{Re} z > -n$، $\Gamma(z)$ را برای $\operatorname{Re} z > -n-1$ با $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ تعریف می‌کنیم. حاصل کار تابعی است که بر کل $\mathbb{C}$ به‌جز برای تکین‌های واقع در اعداد صحیح نامنفی تعریف شده است نقاط تکین به الگوریتم توصیف شدهٔ تقسیم بر صفر می‌رسد.

داریم $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1$، لذا با nــ بار استفاده از معادلهٔ تابعی معلوم می‌شود که $\Gamma(n+1) = n!$. (برهان دیگری از این حکم در تمرین ۲۹ گنجانده شده است). تعدادی از کاربردهای تابع گاما شامل این حقیقت است که تابع گاما توسیعی از تابع فاکتوریل به اعداد ناصحیح فراهم می‌کند.

تمرین‌ها

۱۸) اگر فرض $f_n \in L^+$ در لم فاتو با این فرض جایگزین شود که «f_n اندازه‌پذیر است و $f_n \geq -g$ که در آن $g \in L^+ \cap L^1$» بازهم لم فاتو معتبر باقی می‌ماند. مشابه لم فاتو برای توابع نامثبت چیست؟

۱۹) فرض کنید $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$ و $f_n \to f$ به طور یکنواخت.

الف) اگر $\mu(X) < \infty$، آنگاه $f \in L^1(\mu)$ و $\int f_n \to \int f$.

ب) اگر $\mu(X) = \infty$، حکم (الف) ممکن است نادرست باشد. (مثال‌هایی روی $\mathbb{R}$ با اندازهٔ لبگ بیابید).

۲۰) (یک قضیهٔ همگرایی مغلوب تعمیم یافته) اگر $f_n, g_n, f, g \in L^1$، $f_n \to f$، $g_n \to g$ ت.ه.، $|f_n| \leq g_n$ و $\int g_n \to \int g$، آنگاه $\int f_n \to \int f$. (برهان قضیه همگرایی مغلوب را بازنویسی کنید).

۲۱) فرض‌کنید $f_n, f \in L^1$ و $f_n \to f$ ت.ه. در این صورت $\int |f_n - f| \to 0$ اگر و فقط اگر $\int |f_n| \to \int |f|$. (تمرین ۲۰ را به‌کار برید).

۲۲) فرض‌کنید μ اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ باشد. لم فاتو و قضایای همگرایی مغلوب و یکنوا را به صورت عباراتی در مورد سری‌های نامتناهی شرح دهید.

۲۳) تابع کرانداری چون $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مفروض است، فرض کنید:

$$H(n) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|y-x|\le\delta} f(y), \qquad h(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{|y-x|\le\delta} f(y).$$

با اثبات لم‌های زیر، قسمت (ب) از قضیهٔ ۲.۲۸ را ثابت کنید.

الف) $H(x) = h(x)$ اگر و فقط اگر f در x پیوسته باشد.

ب) با نمادگذاری برهان قسمت (الف) از قضیهٔ ۲.۲۸، $H = G$ ت. ه. و $h = g$ ت. ه.

بنابر این H و h اندازه‌پذیر لبگ هستند و $\int_{[a,b]} Hdm = \overline{I}_a^b(f)$ و $\int_{[a,b]} hdm = \underline{I}_a^b(f)$.

۲۴) فرض کنید $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازهٔ با خاصیت $\mu(X) < \infty$ باشد و $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ کامل شده آن باشد. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ کراندار است. در این صورت f، $\overline{\mathcal{M}}$ـ اندازه‌پذیر است (و در نتیجه در $L^1(\overline{\mu})$ واقع است) اگر و فقط اگر دنباله‌هایی چون $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ از توابع سادهٔ μـ اندازه‌پذیر وجود داشته باشد به طوری که $\phi_n \le f \le \psi_n$ و $\int(\psi_n - \phi_n)d\mu < n^{-1}$. در این حالت $\int f d\overline{\mu} = \lim \int \psi_n d\mu = \int \phi_n d\mu$.

۲۵) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{-1}{2}}, & 0 < x < 1 \\ 0 & x \notin (0,1). \end{cases}$ به علاوه، فرض کنید $\{r_n\}_1^\infty$ شمارشی از اعداد گویا باشد قرار دهید:

$$g(x) = \sum_1^\infty 2^{-n} f(x - r_n).$$

الف) $g \in L^1(m)$ و به‌ویژه $g < \infty$ ت. ه.

ب) g در هر نقطه ناپیوسته است و روی هر بازهٔ غیرکراندار است و پس از هر اصلاح روی مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر، غیرکراندار باقی می‌ماند.

ج) $g^2 < \infty$ ت. ه، اما g^2 روی هیچ بازه‌ای انتگرال پذیر نیست.

۲۶) اگر $f \in L^1(m)$ و $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$، آنگاه F بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲۷) فرض کنید $f_n^{-\infty}(n) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ که در آن $0 < a < b$.

الف) $\sum_1^\infty \int_0^\infty |f_n(x)| dx = \infty$.

ب) $\sum_1^\infty \int_0^\infty f_n(x)dx = 0$.

ج) $\sum_1^\infty f_n \in L^1([0,\infty),m)$ و $\int_0^\infty \sum_1^\infty f_n(x)dx = \log(\frac{b}{a})$.

۲۸) حدهای زیر را محاسبه کرده و درستی محاسبات را توجیه کنید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}(1+(\frac{x}{n}))^{-n}\sin(\frac{x}{n})dx$.

ب) $\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}(1+nx^{2})(1+x^{2})^{-n}dx$.

ج) $\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}n\sin(\frac{x}{n})[x(1+x^{2})]^{-1}dx$

د) $\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{\infty}n(1+n^{2}x^{2})^{-1}dx$. (جواب به این مطلب بستگی دارد به اینکه آیا $a>0$، $a=0$ یا $a<0$. این مطلب چگونه با قضیه‌های همگرایی مختلف سازگار است؟).

۲۹) با مشتقگیری از معادلهٔ $\int_{0}^{\infty}e^{-tx}dx=\frac{1}{t}$ نشان دهید که $\int_{0}^{\infty}x^{n}e^{-x}dx=n!$. مشابهاً با مشتقگیری از معادلهٔ تساوی $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tx^{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{t}}$ نشان دهید که $\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}e^{-x^{2}}dx=(2n)!\frac{\sqrt{\pi}}{4^{n}n!}$. (گزارهٔ ۲.۵۳ را ببینید).

۳۰) نشان دهید که $\lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k}x^{n}(1-k^{-1}x)dx=n!$.

۳۱) با تفکیک انتگران به یک سری نامتناهی و توجیه جمله به جملهٔ انتگرال، فرمول‌های زیر را بـه دسـت آوریـد. تمـرین ۲۹ می‌تواند مفید واقع شود. (توجه: در (د) و (ه) انتگرال‌گیری جمله به جمله کارساز است و سری حاصل تنها برای $a>1$ همگـرا است، اما فرمول‌های ارائه شده در حقیقت برای $a>0$ نیز معتبر هستند).

الف) به ازای $a>0$، $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^{2}}\cos ax\,dx=\sqrt{\eta}e^{\frac{-a^{2}}{4}}$.

ب) به ازای $a>-1$، $\int_{0}^{1}x^{a}(1-x)^{-1}\log x\,dx=\sum_{1}^{\infty}(a+k)^{-2}$.

ج) به ازای $a>1$، $\int_{0}^{\infty}x^{a-1}(e^{x}-1)^{-1}dx=\Gamma(a)\zeta(a)$ که در آن $\zeta(a)=\sum_{1}^{\infty}n^{-a}$.

د) به ازای $a>1$، $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}x^{-1}\sin x\,dx=\arctan(a^{-1})$.

ه) بـه ازای $a>1$، $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}J_{0}(x)dx=(a^{2}+1)^{\frac{-1}{2}}$ کـه در آن $J_{0}(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{4^{n}(n!)^{2}}$ تـابع بـسل مرتبهٔ صفر است.

۲.۴ نوعی از همگرایی

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط روی مجموعه‌ای چون X باشد «وقتی $n \to \infty$، $f_n \to f$» را می‌توان به معانی مختلفی گرفت، برای مثال، می‌توان آن را به معنی همگرایی نقطه به نقطه یا یکنوا گرفت. اگر X یک فضای اندازه باشد، از همگرایی ت. ه یا همگرایی در L^1 نیز می‌توان سخن گفت. البته همگرایی یکنوا همگرایی نقطه به نقطه را ایجاب می‌کند که این هم به نوبه خود همگرایی ت. ه را ایجاب می‌کند (عکس آن در حالت کلی درست نیست)، اما این قبیل همگرایی، همگرایی L^1 را ایجاب نمی‌کنند یا برعکس. به‌خاطر سپردن مثال‌های زیر روی $\mathbb{R}$ (با اندازه لبگ) مفید خواهد بود:

الف) $f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)}$.

ب) $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

ج) $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$.

د) $f_1 = \chi_{[0,1]}$، $f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$، $f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$، $f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$، $f_5 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$،

$f_6 = \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}$، $f_7 = \chi_{[\frac{3}{4},1]}$ و درکل، $f_n = \chi_{[\frac{j}{2^k},\frac{(j+1)}{2^k})}$ که در آن $n = 2^k + j$ و $0 \le j < 2^k$. در (الف)، (ب) و (ج)، $f_n \to 0$ به ترتیب به طور یکنواخت، نقطه به نقطه و ت. ه، اما $f_n \not\to 0 \in L^1$ (در واقع به ازای همهٔ nها $\int |f_n| = \int f_n = 1$). در (د)، $f_n \to 0$ در L^1، زیرا $\int |f_n| = 2^{-k}$ برای $2^k \le n < 2^{k+1}$ برقرار است، اما $f_n(x)$ به ازای هر $x \in [0,1]$ همگرا نیست زیرا تعدادی نامتناهی n وجود دارد که برای آنها $f_n(x) = 0$ و تعدادی نامتناهی از nها وجود دارد که برای آنها $f_n(x) = 1$. از سوی دیگر اگر $f_n \to f$ ت. ه و به ازای همهٔ nها، $|f_n| \le g \in L^1$، آنگاه $f_n \to f$ در L^1. (این مطلب از قضیهٔ همگرایی مغلوب واضح است زیرا $|f_n - f| \le 2g$). همچنین در زیر خواهیم دید که اگر $f_n \to f$ در L^1، آنگاه زیردنباله‌ای از $\{f_n\}_1^\infty$ وجود دارد که تقریباً همه‌جا به f همگرا است.

نوع دیگری از همگرایی که غالباً مورد استفاده است همگرایی در اندازه می‌باشد. دنباله‌ای چون $\{f_n\}$ از توابع مختلط اندازه‌پذیر روی $(X,\mathcal{M},\mu)$ را **در اندازه کشی** گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $m,n \to \infty$،

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0,$$

و می‌گوییم $\{f_n\}$ **در اندازه همگرا به** f است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \to \infty$،

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0.$$

برای مثال، دنباله‌های (الف)، (ج) و (د) که در فوق ذکر شدند در اندازه به صفر همگرا هستند، اما (ب) در اندازه کشی نیست.

۲.۲۹ گزاره. اگر $f_n \to f$ در L^1، آنگاه در اندازه $f_n \to f$.

برهان. فرض می‌کنیم $E_{n,\varepsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}$. در این صورت

$$\int|f_n - f| \geq \int_{E_{n,\varepsilon}}|f_n - f| \geq \varepsilon\mu(E_{n,\varepsilon})$$

لذا $\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon^{-1}\int|f_n - f| \to 0$. ■

همان طورکه مثال های (الف) و (ج) نشان می‌دهند عکس گزارهٔ ۲.۲۹ نادرست است.

۲.۳۰ قضیه. فرض‌کنیم $\{f_n\}$ در اندازه کشی باشد. در این صورت تابعی چون f وجود دارد به طوری‌که در اندازه، $f_n \to f$ و زیردنباله‌ای چون $\{f_{n_j}\}$ وجود داردکه تقریباً همه‌جا به f همگرا است. به‌علاوه اگر در اندازه $f_n \to g$، آنگاه $g = f$ ت. ه.

برهان. می‌توان زیردنباله‌ای مانند $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ از $\{f_n\}$ انتخاب کرد به‌طوری‌که اگر

$$E_j = \{x : \left|g_j(x) - g_{j+1}(x)\right| \geq 2^{-j}\}$$

آنگاه $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$. اگر $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$، آنگاه

$$\mu(F_k) \leq \sum_k^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}$$

و چنانچه $x \notin F_k$، به ازای $i \geq j \geq k$ داریم:

$$\left|g_j(x) - g_i(x)\right| \leq \sum_{l=j}^{i-1}\left|g_{l+1}(x) - g_l(x)\right| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j} \qquad (2.31)$$

از این رو $\{g_j\}$ نقطه به نقطه بر F_k^c کشی است. فرض می‌کنیم $F = \bigcap_1^{\infty} F_k = \limsup E_j$.

دراین صورت $\mu(F) = 0$، و اگر قرار دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_j(x) & x \notin F \\ 0 & x \in F \end{cases}$$

آنگاه f اندازه‌پذیر است (تمرین‌های ۳ و ۵) و $g_j \to f$ ت. ه. همچنین(۲.۳۱) نشان می‌دهد که به ازای $x \notin F_k$ و $j \geq k$، $\left|g_j(x) - f(x)\right| \leq 2^{1-j}$. چون وقتی $k \to \infty$، $\mu(F_k) \to 0$، نتیجه می‌گیریم که در اندازه $g_j \to f$. اما در این صورت در اندازه $f_n \to f$، زیرا

$$\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\} \subset \{x : \left|f(x) - g_j(x)\right| \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \cup \{x : \left|g_j(x) - f(x)\right| \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon\},$$

و وقتی n و j بزرگ باشند مجموعه‌های سمت راست هر دو اندازهٔ کوچکی دارند. به طور مشابه، اگر در اندازه $f_n \to g$، آنگاه به ازای هر n داریم:

$$\{x : \left|f(x) - g(x)\right| \geq \varepsilon\} \subset \{x : \left|f(x) - f_n(x)\right| \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \cup \{x : \left|f_n(x) - g(x)\right| \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon\},$$

و در نتیجه، به ازای هر ε، $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = \circ$. با فرض اینکه ε در قالب دنباله‌ای از مقادیر به صفر میل کند، نتیجه می‌گیریم که $f = g$ ت. ه. ■

۲.۳۲ نتیجه. چنانچه $f_n \to f$ در L^1، دنباله‌ای چون $\{f_{n_j}\}$ وجود دارد به طوری‌که $f_{n_j} \to f$ ت. ه.

برهان. گزارهٔ ۲.۲۹ و قضیهٔ ۲.۳۰ را تلفیق کنید. ■

همان‌طور که مثال (ب) نشان می‌دهد، از $f_n \to f$ ت. ه.، نتیجه نمی‌شود که در اندازه $f_n \to f$. اما این نتیجه‌گیری روی یک فضای اندازهٔ متناهی که در آن برخی موارد نسبتاً قویتر در دست است برقرار می‌باشد.

۲.۳۳ قضیه ایگورف. فرض‌کنیم $\mu(X) < \infty$ و $f_1, f_2, \ldots$ و f توابع مختلط اندازه‌پذیری روی X باشند به طوری‌که $f_n \to f$ ت. ه. در این صورت به ازای هر $\varepsilon > \circ$ زیرمجموعه‌ای چون $E \subset X$ وجود دارد به طوری‌که $\mu(E) < \varepsilon$ و $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر E^c.

برهان. بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض‌کنیم که $f_n \to f$ همه‌جا بر X. به ازای $k, n \in \mathbb{N}$ قرار می دهیم:

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}.$$

در این صورت برای هر k که ثابت فرض شود وقتی n صعود می‌کند $E_n(k)$ نزول می‌کند، و $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \varnothing$، لذا از $\mu(X) < \infty$ نتیجه می‌گیریم که وقتی $n \to \infty$، $\mu(E_n(k)) \to \circ$. $\varepsilon > \circ$ و $k \in \mathbb{N}$ را مفروض‌گرفته و n_k را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $\mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon 2^{-k}$ و قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. در این صورت $\mu(E) < \varepsilon$ و به ازای هر $n \geq n_k$ و $x \notin E$ داریم $|f_n(x) - f(x)| < k^{-1}$. بنابر این $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر E^c. ■

گاهی اوقات همگرایی بررسی شده در حکم قضیهٔ ایگوروف را همگرایی تقریباً یکنواخت می‌نامند. دیدن اینکه همگرایی تقریباً یکنواخت، همگرایی تقریباً همه‌جا و همگرایی در اندازه را ایجاب می‌کند مشکل نیست (تمرین ۳۹).

۳۲) فرض کنید $\mu(X) < \infty$. اگر f و g توابع‌اندازه‌پذیر مختلطی روی X باشند، تعریف‌کنید:

$$\rho(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}.$$

در این صورت ρ یک متر بر فضای توابع اندازه‌پذیر است و به شرطی که هر دو تابع تقریباً همه‌جا مساوی را یکی بگیریم، همچنین نسبت به این متر $f_n \to f$ اگر و فقط اگر در اندازه $f_n \to f$.

۳۳) اگر $0 \geq f_n$ و در اندازه $f_n \to f$، آنگاه $\int f \leq \liminf \int f_n$.

۳۴) فرض کنید $f_n \to f$ و $|f_n| \leq g \in L^1$.

الف) $\int f = \lim \int f_n$.

ب) $f_n \to f$ در L^1.

۳۵) $f_n \to f$ در اندازه اگر و تنها اگر به ازای هر $0 < \varepsilon$، عضوی چون $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای $n \geq N$ داشته باشیم $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$.

۳۶) اگر به ازای $n \in \mathbb{N}$، $\mu(E_n) < \infty$ و $\chi_{E_n} \to f$ در L^1، آنگاه f (تقریباً همه‌جا) با تابع مشخصهٔ یک مجموعه اندازه‌پذیر برابر است.

۳۷) فرض کنید که f_nها و f توابع مختلط اندازه‌پذیری باشند و $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

الف) اگر ϕ پیوسته باشد و $f_n \to f$ ت. ه، آنگاه $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ ت. ه.

ب) اگر ϕ پیوستهٔ یکنواخت باشد و $f_n \to f$ به طور یکنواخت، تقریباً یا در اندازه، آنگاه $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ به‌ترتیب به طور یکنواخت، تقریباً یکنواخت یا در اندازه. .

ج) وقتی فرض پیوستگی ϕ برداشته شود مثال‌های نقضی وجود دارند.

۳۸) فرض کنید $f_n \to f$ در اندازه و $g_n \to g$ در اندازه.

الف) $f_n + g_n \to f + g$ در اندازه.

ب) اگر $\mu(X) < \infty$، آنگاه $f_n g_n \to fg$ در اندازه، اما اگر $\mu(X) = \infty$ حکم فوق لزوماً درست نیست.

۳۹) اگر $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت، آنگاه $f_n \to f$ ت. ه و در اندازه.

۴۰) در مفروضات قضیهٔ ایگوروف فرض « $\mu(X) < \infty$ » را می‌توان با فرض « به ازای همهٔ nها $|f_n| \leq g$ که در آن $g \in L^1(\mu)$ » جایگزین کرد.

(۴۱) اگر μ، σ- متناهی باشد و $f_n \to f$ ت. ه، آنگاه مجموعه‌های اندازه‌پذیری چون $E_1, E_2, \ldots \subset X$ وجود دارند به طوری‌که $\mu((\bigcup_1^\infty E_j)^c) = 0$ و $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر هر E_j.

(۴۲) فرض‌کنید μ اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $f_n \to f$ در اندازه اگر و تنها اگر $f_n \to f$ به طور یکنواخت.

(۴۳) فرض‌کنیدکه $\mu(X) < \infty$ و $f : X \times [0,1] \to \mathbb{C}$ تابعی باشد به‌طوری‌که به ازای هر $y \in [0,1]$، $f(\cdot,y)$ اندازه‌پذیر و به ازای هر $x \in X$، $f(x,\cdot)$ پیوسته باشد.

الف) اگر $0 < \epsilon, \delta < 1$، آنگاه $E_{\epsilon,\delta} = \{x : |f(x,y) - f(x,0)| \leq \epsilon, \forall y < \delta\}$ اندازه‌پذیر است.

ب) به ازای هر $\epsilon > 0$ مجموعه‌ای چون $E \subset X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(E) < \epsilon$ و وقتی $y \to 0$، $f(\cdot,y) \to f(\cdot,0)$ به‌طور یکنواخت بر E^c.

(۴۴) (قضیهٔ لوسین) اگر $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $\epsilon > 0$، آنگاه مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $E \subset [a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(E^c)$ و $f|_E$ پیوسته است. (قضیهٔ ایگوروف و قضیهٔ ۲.۲۶ را به‌کار برید.)

۲.۵ اندازه‌های حاصلضربی

فرض‌کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ دو فضای اندازه باشند. قبلاً در مورد σ- جبر حاصلضربی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ روی $X \times Y$ بحث کردیم؛ اکنون یک اندازه روی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ می‌سازیم. یعنی، به مفهومی روشن، حاصلضرب μ و ν را می‌سازیم.

برای آغاز کار، یک مستطیل (اندازه‌پذیر) را مجموعه‌ای به شکل $A \times B$ تعریف می‌کنیم که در آن $A \in \mathcal{M}$ و $B \in \mathcal{N}$. به وضوح

$$(A \times B) \bigcap (E \times F) = (A \bigcap E) \times (B \bigcap F), \qquad (A \times B)^c = (X \times B^c) \bigcup (A^c \times B).$$

از این رو، طبق گزارهٔ ۱.۷، گردایهٔ $\mathcal{A}$ مرکب از اجتماع های متناهی از مستطیل ها، یک σ- جبر است، و مسلماً این σ- جبری که $\mathcal{A}$ تولید می‌کند $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ است. فرض می‌کنیم $A \times B$ مستطیلی باشد که اجتماع (شمارش‌پذیر یا متناهی) مجزایی از مستطیل‌هایی چون $A_j \times B_j$ است. در این صورت به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$،

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A \times B}(x,y) = \sum \chi_{A_j \times B_j}(x,y)$$
$$= \sum \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y) \cdot$$

چنانچه نسبت به x انتگرال گرفته و قضیهٔ ۲.۱۵ را به‌کار بریم، به دست می‌آوریم:

$$\mu(A)\chi_B(y) = \int \chi_A(x)\chi_B(y)d\mu(x) = \sum \int \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)d\mu(x)$$
$$= \sum \mu(A_j)\chi_{B_j}(y).$$

به همین روش، انتگرال‌گیری نسبت به y به‌دست می‌دهد:

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j).$$

نتیجه می‌گیریم که اگر $E \in \mathcal{A}$ اجتماعی مجزا از مستطیل‌هایی چون $A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n$ باشد و قرار دهیم:

$$\pi(E) = \sum_1^n \mu(A_j)\nu(E_j)$$

آنگاه (با قرار داد همیشگی $0 \cdot \infty = 0$)، π بر $\mathcal{A}$ خوشتعریف است (زیرا دو نمایش E به صورت اجتماع متناهی مجزایی از مستطیل‌ها یک تظریف مشترک دارند) و π پیش اندازه‌ای روی $\mathcal{A}$ است. بنابر این، مطابق با قضیهٔ ۱.۱۴، π یک اندازهٔ خارجی روی $X \times Y$ تولید می‌کند که تحدید آن به $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ اندازه‌ای است که π را توسیع می‌دهد. این اندازه را **ضرب** μ و ν نامیده و آن را با $\mu \times \nu$ نشان می‌دهیم. به علاوه، اگر μ و ν هر دو σـ متناهی باشند ـ مثلاً، $X = \bigcup_1^\infty A_j$ و $Y = \bigcup_1^\infty B_k$ که در آن $\mu(A_j) < \infty$ و $\nu(B_k) < \infty$، آنگاه $X \times Y = \bigcup_{j,k} A_j \times B_k$ و $\mu \times \nu(A_j \times B_k) < \infty$؛ لذا $\mu \times \nu$ نیز σـ متناهی است. در این حالت، بنابر قضیهٔ ۱.۱۴، $\mu \times \nu$ یکتا اندازه‌ای روی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ است که برای هر مستطیل مانند $A \times B$، $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. همین ساختار در مورد تعدادی متناهی از عوامل کار می‌کند. یعنی، فرض می‌کنیم به ازای $j = 1, \ldots, n$، $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ تعدادی فضای اندازه باشند. اگر یک مستطیل را مجموعه‌ای به شکل $A_1 \times \cdots \times A_n$ با $A_j \in \mathcal{M}_j$ تعریف کنیم، آنگاه گردایهٔ $\mathcal{A}$ مرکب از اجتماع های مجزا از مستطیل ها یک σـ جبر است، و ضرب نظیر ضرب فوق اندازه‌ای چون $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ روی $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ است به طوری‌که

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n(A_1 \times \cdots A_n) = \prod_1^n \mu(A_j).$$

به‌علاوه، اگر μ_jها σـ متناهی باشند، توسیع $\mathcal{A}$ به $\otimes_1^n \mathcal{M}_j$ که به‌طور یکتا تعیین می‌شود، در خواص واضح شرکت پذیری صدق می‌کند. برای مثال، اگر $X_1 \times X_2 \times X_3$ را با $(X_1 \times X_2) \times X_3$ یکی بگیریم، داریم:
$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$ (اولی با مجموعه‌هایی به شکل $A_1 \times A_2 \times A_3$ تولید می‌شود که $A_j \in \mathcal{M}_j$ و دومی با مجموعه‌هایی به شکل $B \times A_3$ تولید می‌شود که در آن $A_3 \in \mathcal{M}_3$، $B \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$) و $\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ (زیرا روی مجموعه‌های به شکل $A_1 \times A_2 \times A_3$ با هم برابر بوده و در نتیجه در کل بنا بر یکتایی برابر هستند). جزئیات برای خواننده باقی می‌مانند (تمرین ۴۵). تمام احکام زیر قابل تعمیم به حاصلضرب هایی با n عامل هستند، اما به‌خاطر سادگی حالت $n = 2$ را در نظر خواهیم گرفت. به حالت دو فضای اندازهٔ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ برمی‌گردیم. اگر $E \subset X \times Y$، به ازای $x \in X$ و $y \in Y$، xـ بخش E_x و yـ بخش E^y از E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}.$$

همچنین، اگر f تابعی بر $X \times Y$ باشد، xـ بخش f_x و yـ بخش f^y از f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x,y).$$

پس، برای مثال، $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ و $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

۲.۳۴ گزاره.

الف) اگر $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$، آنگاه به ازای هر $x \in X$، $E_x \in \mathcal{N}$ و به ازای هر $y \in Y$، $E^y \in \mathcal{M}$.

ب) اگر f، $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ـ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$، f_x، $\mathcal{N}$ـ اندازه‌پذیر است و به ازای $y \in Y$، f^y، $\mathcal{M}$ـ اندازه‌پذیر است.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathcal{R}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی چون E از $X \times Y$ باشد به‌طوری‌که برای همهٔ xها $E_x \in \mathcal{N}$ و به ازای همهٔ yها $E^y \in \mathcal{M}$. در این صورت به وضوح $\mathcal{R}$ شامل همهٔ مستطیل‌ها است (یعنی، $(A \times B)_x = B$ هرگاه $x \in A$ و $(A \times B)_x = \varnothing$ هرگاه $x \notin A$). چون $(\bigcup_1^\infty E_j)_x = \bigcup_1^\infty (E_j)_x$ و $(E^c)_x = (E_x)^c$ و مشابهی برای yـ بخش‌ها برقرار است پس $\mathcal{R}$ یک σـ جبر است. بنابر این $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ که (الف) را ثابت می‌کند. (ب) از (الف) نتیجه می‌شود زیرا

$$(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y, \quad (f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x. \blacksquare$$

قبل از آنکه خیلی پیش برویم به یک لم تکنیکی نیاز داریم. یک **کلاس یکنوا** روی فضایی چون X را زیرمجموعه‌ای چون $\mathcal{C}$ از $\mathcal{P}(X)$ تعریف می‌کنیم که تحت اجتماع‌های صعودی شمارش‌پذیر و اشتراک‌های نزولی شمارش‌پذیر بسته است (یعنی، اگر $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ و $E_j \in \mathcal{C}$، آنگاه $\bigcup E_j \in \mathcal{C}$ و $\bigcap E_j \in \mathcal{C}$). به وضوح هر σـ جبر یک کلاس یکنوا است. همچنین، اشتراک هر خانواده از کلاس‌های یکنوا یک کلاس یکنوا است، پس برای هر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ کوچکترین کلاس یکنوا یکتای شامل $\mathcal{E}$ موسوم به کلاس یکنوای **تولید شده با** $\mathcal{E}$ موجود است.

۲.۳۵ لم کلاس یکنوا. اگر $\mathcal{A}$ جبری از زیر مجموعه‌های X باشد، آنگاه کلاس یکنوای $\mathcal{C}$ که به وسیلهٔ $\mathcal{A}$ تولید می‌شود بر σـ جبر $\mathcal{M}$ تولید شده با $\mathcal{A}$ منطبق است.

برهان. چون $\mathcal{M}$ یک کلاس یکنوا است پس $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$؛ و اگر نشان دهیم که $\mathcal{C}$ یک σـ جبر است، خواهیم داشت $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$. بدین منظور، به ازای $E \in \mathcal{C}$ تعریف می‌کنیم:

چند یادآوری پی در پی:

- معمولاً کروشه‌ها را در انتگرال‌های مکرر واقع در (۲.۳۸) حذف خواهیم کرد، لذا:
$$\int\int[f(x,y)d\mu(x)]d\nu(y) = \int\int f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int\int fd\mu d\nu\,.$$
- فرض σـ متناهی بودن لازم است؛ تمرین ۴۶ را ببینید.
- از دوجهت فرض $f \in L^+(X \times Y)$ یا $f \in L^1(\mu \times \nu)$ لازم است. نخست، ممکن است به ازای همهٔ xها و yها f_x و f_y اندازه‌پذیر باشند و انتگرال‌های مکرر $\int\int fd\mu d\nu$ و $\int\int fd\nu d\mu$ موجود باشند حتی اگر f یک تابع $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ـ اندازه‌پذیر نباشد. اما در این صورت لزومی ندارد که انتگرال‌های مکرر برابر باشند؛ تمرین ۴۷ را ببینید. دوم اینکه، اگر f نامنفی نباشد، ممکن است به ازای همهٔ xها و yها f_x و f^y انتگرال‌پذیر باشند و انتگرال‌های مکرر $\int\int fd\mu d\nu$ و $\int\int fd\nu d\mu$ وجود داشته باشند حتی اگر $\int |f| d(\mu \times \nu) = \infty$ اما باز هم لزومی ندارد که انتگرال‌های مکرر برابر باشند؛ تمرین ۴۸ را ببینید.
- قضایای تونلی و فوبینی غالباً پشت سر هم به‌کار برده می‌شوند. بسیاری از اوقات مجبوریم ترتیب انتگرال‌گیری در یک انتگرال دوگانه مانند $\int\int fd\mu d\nu$ را عوض کنیم. برای این کار، نخست با به‌کارگیری قضیهٔ تونلی برای برآورد انتگرال $\int |f| d(\mu \times \nu)$ بررسی می‌کنیم که $\int |f| d(\mu \times \nu) < \infty$؛ سپس از قضیهٔ فوبینی برای استخراج $\int\int fd\mu d\nu = \int\int fd\nu d\mu$ استفاده می‌کنیم. برای مثال، تمرین‌های واقع در بند۲.۶ را ببینید.

حتی اگر μ و ν کامل باشند، $\mu \times \nu$ تقریباً هیچ‌گاه کامل نیست. در واقع، فرض می‌کنیم که مجموعه‌ای ناتهی مانند $A \in \mathcal{M}$ وجود دارد که $\mu(A) = 0$ و $\mathcal{N} \neq \mathcal{P}(Y)$ (و این حالتی است که برای مثال، فرض کنید μ و ν اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ است.) اگر $E \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{N}$، آنگاه بنابر گزارهٔ ۲.۳۴، $A \times E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ اما $A \times E \subset A \times Y$ و $\mu \times \nu(A \times Y) = 0$.

البته اگر خواسته باشیم با اندازه‌های کامل کار کنیم می‌توانیم کامل شدهٔ $\mu \times \nu$ را درنظر بگیریم. با این قرارداد رابطهٔ بین اندازه‌پذیری یک تابع روی $X \times Y$ و اندازه‌پذیری xـ بخش‌ها و y ـ بخش‌های آن چندان هم ساده نیست. اما قضیهٔ فوبینی- تونلی وقتی به طور مناسب اصلاح شود هنوز معتبر است:

۲.۳۹ قضیه فوبینی- تونلی برای اندازه‌های کامل. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ دو فضای اندازهٔ σـ متناهی کامل باشند و $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ کامل شدهٔ $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ باشد. اگر f، $\mathcal{L}$ـ اندازه‌پذیر باشد و: یا (الف) $f \geq 0$ یا (ب) $f \in L^1(\lambda)$، آنگاه تقریباً به ازای همهٔ xها، f_x، $\mathcal{N}$ـ اندازه‌پذیر است و تقریباً به ازای همهٔ yها f^y، $\mathcal{M}$ـ

اندازه‌پذیر است، و در حالت (ب) f_x و f^y به ازای همهٔ xها و yها انتگرال‌پذیر نیز هستند. به‌علاوه، $x \mapsto \int f_x d\nu$ و $y \mapsto \int f^y d\mu$ اندازه‌پذیرند و درحالت (ب) نیز انتگرال‌پذیرند و

$$\int f d\lambda = \int\int f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int\int f(x,y)d\nu(y)d\mu(x).$$

این قضیه، نتیجهٔ نسبتاً آسانی از قضیهٔ ۲.۳۷ است؛ برهان آن در تمرین ۴۹ گنجانده شده است.

تمرین‌ها

۴۵) اگر به ازای $j = ۱,۲,۳$ ، $(X_j, \mathcal{M}_j)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\otimes_۱^۳ \mathcal{M}_j = (\mathcal{M}_۱ \otimes \mathcal{M}_۲) \otimes \mathcal{M}_۳$. به علاوه، اگر μ_j یک اندازهٔ σـ متناهی روی $(X_j, \mathcal{M}_j)$ باشد، آنگاه $\mu_۱ \times \mu_۲ \times \mu_۳ = (\mu_۱ \times \mu_۲) \times \mu_۳$.

۴۶) فرض‌کنید $X = Y = [۰,۱]$، $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[۰,۱]}$، μ اندازهٔ لبگ و ν اندازهٔ شمارشی باشد. اگر قطر $X \times Y$ مجموعهٔ $D = \{(x,x) : x \in [۰,۱]\}$ باشد، آنگاه $\int\int \chi_D d\mu d\nu$ ، $\int\int \chi_D d\nu d\mu$ و $\int \chi_D d(\mu \times \nu)$ همگی با هم مساوی هستند. (برای محاسبهٔ $\int \chi_D d(\mu \times \nu) = \mu \times \nu(D)$ به تعریف $\mu \times \nu$ برگردید.)

۴۷) فرض‌کنید $X = Y$ یک مجموعهٔ مرتب خطی شمارش‌ناپذیر باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$ مجموعهٔ $\{y \in X : y < x\}$ شمارش‌پذیر باشد. (مثال: مجموعهٔ اردینال‌های شمارش‌پذیر.) فرض‌کنید $\mathcal{M} = \mathcal{N}$، σـ جبر مجموعه‌های شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر باشد، $\mu = \nu$ و μ این چنین تعریف شود: $\mu(A) = ۰$ هرگاه A شمارش‌پذیر باشد و $\mu(A) = ۱$ هرگاه متمم A شمارش‌پذیر باشد. فرض‌کنید $E = \{(x,y) \in X \times X : y < x\}$. در این صورت به ازای همهٔ xها و همهٔ yها E_x و E^y اندازه‌پذیرند و $\int\int \chi_E d\nu d\mu$ و $\int\int \chi_E d\mu d\nu$ موجودند اما برابر نیستند. (اگر فرضیهٔ پیوستار را بپذیریم می‌توانیم $X = [۰,۱]$ را (با ترتیبی غیر متعارف) درنظر بگیریم و درنتیجه مجموعه‌ای چون $E \subset [۰,۱]^۲$ به‌دست آوریم به قسمی که به ازای همهٔ xها و yها E_x شمارش‌پذیر و E_y متمم شمارش‌پذیر باشد (به ویژه برل‌ها)، اما E اندازه‌پذیر لبگ نباشد.)

۴۸) فرض‌کنید $X = Y = \mathbb{N}$ ، $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و «$\mu = \nu =$ اندازهٔ شمارشی». تعریف کنید:

$$f(m,n) = \begin{cases} ۱ & m = n \\ -۱ & m = n+۱ \\ ۰ & m \neq n, n+۱ \end{cases} .$$

$V_j \subset U_j$ به‌دست می‌آوریم که اضلاعشان اجتماع‌های متناهی از بازه‌ها هستند به‌طوری‌که $m(V_j) \geq m(U_j) - 2^{-j}\varepsilon$. اگر N به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه داریم:

$$m(E \setminus \bigcup_1^N V_j) \leq m(\bigcup_1^N U_j \setminus V_j) + m(\bigcup_{N+1}^{\infty} U_j) < 2\varepsilon$$

و

$$m(\bigcup_1^N V_j \setminus E) \leq m(\bigcup_1^{\infty} U_j \setminus E) < \varepsilon$$

پس $m(E \Delta \bigcup_1^N V_j) < 3\varepsilon$. چون $\bigcup_1^N V_j$ را می‌توان به صورت اجتماع متناهی مجزایی از مستطیل‌هایی نوشت که اضلاعشان بازه‌ها هستند، (ج) را اثبات کرده‌ایم. ■

۲.۴۱ قضیه. اگر $f \in L^1(m)$ و $\varepsilon > 0$، تابع ساده‌ای مانند $\phi = \sum_1^N a_j \chi_{R_j}$ که در آن هر R_j حاصلضربی از بازه‌ها است وجود دارد، به طوری‌که $\int |f - \phi| < \varepsilon$ و تابع پیوسته‌ای چون g وجود دارد که خارج یک مجموعهٔ کراندار صفر است به قسمی‌که $\int |f - g| < \varepsilon$.

برهان. مانند برهان قضیهٔ ۲.۲۶، f را با توابع ساده تقریب می‌زنیم، سپس برای تقریب زدن (تابع) اخیر با توابع ϕ به شکل مطلوب، از قسمت آخر قضیهٔ ۲.۴۰ استفاده می‌کنیم. بالاخره با به‌کارگیری تعمیمی بدیهی از استدلال واقع در برهان قضیهٔ ۲.۲۶، چنین ϕهایی را با توابع پیوسته تقریب می‌زنیم. ■

۲.۴۲ قضیه. اندازهٔ لبگ تحت انتقال پایا است. به طور دقیق تر، به ازای $a \in \mathbb{R}^n$، $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $\tau_a(x) = x + a$ تعریف می‌کنیم.

الف) اگر $E \in \mathcal{L}^n$، آنگاه $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ و $m(\tau_a(E)) = m(E)$.

ب) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه $f \circ \tau_a$ نیز چنین است. به‌علاوه، اگر $f \geq 0$ یا $f \in L^1(m)$، آنگاه $\int (f \circ \tau_a) dm = \int f dm$.

برهان. چون τ_a و وارونش، یعنی τ_{-a} پیوسته‌اند، ردهٔ مجموعه‌های برل را حفظ می‌کنند. اگر E یک مستطیل باشد، فرمول $m(\tau_a(E)) = m(E)$ به آسانی از حکم ۱ـ بعدی (قضیهٔ ۱.۲۱) حاصل می‌شود و در نتیجه برای مجموعه‌های برلِ ذکر شده حاصل می‌شود زیرا m با اثرش روی مستطیل‌ها مشخص می‌شود (یکتایی در قضیهٔ ۱.۱۴). به‌ویژه، گردایهٔ مجموعه‌های برل E به‌طوری‌که $m(E) = 0$ تحت τ_a پایا است. اکنون بلافاصله حکم (الف) حاصل می‌شود.

چنانچه f اندازه‌پذیر لبگ و B یک مجموعهٔ برل در $\mathbb{C}$ باشد، داریم $f^{-1}(B) = E \cup N$ که در آن E یک مجموعهٔ برل است و $m(N) = 0$. اما $\tau_a^{-1}(E)$ برل است و $m(\tau_a^{-1}(N)) = 0$، لذا $(f \circ \tau_a)^{-1}(B) \in \mathcal{L}^n$ و $f \circ \tau_a$ اندازه‌پذیر لبگ است. وقتی $f = \chi_E$، تساوی $\int (f \circ \tau_a) d\mu = \int f d\mu$ به $m(\tau_{-a}(E)) = m(E)$ تبدیل می‌شود. در نتیجه بنابر خطی بودن، مطلب فوق در مورد توابع ساده درست است و از این رو بنابر تعریف انتگرال برای توابع اندازه‌پذیر نامنفی درست می‌باشد. در نتیجه در نظر گرفتن قسمت‌های مثبت و منفی بخش‌های حقیقی و موهوی حکم را برای $f \in L^1(m)$ به‌دست می‌دهد. ■

اکنون اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$ را با نظریهٔ بسیار سادهٔ اندازهٔ n- بعدی مقایسه می‌کنیم که معمولاً در کتاب‌های پیشرفتهٔ حسابان یافت می‌شود. در این بحث، هر مکعب در $\mathbb{R}^n$ یک حاصلضرب دکارتی از n بازهٔ بسته‌ای است که طول‌های آنها همگی برابرند.

برای $k \in \mathbb{Z}$، فرض می‌کنیم Q_k گردایهٔ مکعب‌هایی باشد که طول ضلعشان 2^{-k} است و رأس‌هایشان در شبکهٔ $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$ قرار دارند (یعنی، $\prod_1^k [a_j, b_j] \in Q_k$ اگر و تنها اگر $2^k a_j$ و $2^k b_j$ اعدادی صحیح باشند و $b_j - a_j = 2^{-k}$ ($1 \le j \le n$)). توجه کنید که هر دو مکعب در Q_k درون‌های مجزا دارند و مکعب‌های واقع در Q_{k+1} از روی مکعب‌های Q_k با دونیم کردن اضلاع به‌دست می‌آیند.

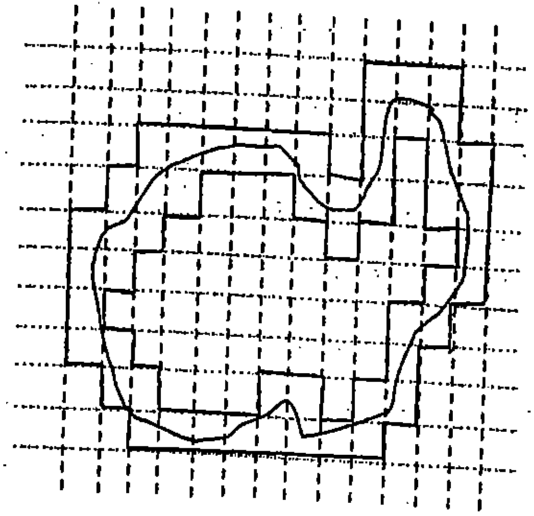
اگر $E \subset \mathbb{R}^n$، آنگاه تقریب‌های داخلی و خارجی برای E توسط شبکهٔ مکعب‌های واقع در Q_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{A}(E,k) = \bigcup\{Q \in Q_k : Q \subset E\}, \quad \overline{A}(E,k) = \bigcup\{Q \in Q_k : Q \cap E \neq \varnothing\}.$$

(شکل ۲.۲ را ببینید) . اندازهٔ $\underline{A}(E,k)$ (به معنای سادهٔ هندسی یا به معنی لبگ) درست 2^{-nk} برابر تعداد مکعب‌های واقع در Q_k است که در $\underline{A}(E,k)$ قرار دارند و آن را با $m(\underline{A}(E,k))$ نشان می‌دهیم؛ به‌طور مشابه برای $m(\overline{A}(E,k))$ عمل می‌کنیم. همچنین، مجموعه‌های $\underline{A}(E,k)$ با k صعود می‌کنند درحالی که مجموعه‌های $\overline{A}(E,k)$ نزول می‌کنند، زیرا هر مکعب واقع در Q_k اجتماعی از مکعب‌های واقع در Q_{k+1} است. بنابر این حدود

$$\underline{\kappa}(E) = \lim_{k\to\infty} m(\underline{A}(E,k)), \quad \overline{\kappa}(E) = \lim_{k\to\infty} m(\overline{A}(E,k))$$

وجود دارند. این حدها **گنجایش داخلی و خارجی** E نامیده می‌شوند، و اگر مساوی باشند مقدار مشترک آنها $\kappa(E)$ **گنجایش جردن** E است.



شکل ۲.۲

دو تفسیر: نخست اینکه، گنجایش جردن معمولاً با استفاده از مستطیل‌های کلی تعریف می‌شود که اضلاعشان بازه‌هایی غیر از مکعب های دو دویی ما هستند، اما نتیجه یکسان است. دوم اینکه، هر چند که همهٔ تعاریف فوق برای مجموعهٔ دلخواهی چون $E \subset \mathbb{R}^n$ بنا نهاده شد، نظریهٔ گنجایش جردن فقط وقتی با معنی است که E کراندار باشد، زیرا در غیر این صورت $\overline{\kappa}(E)$ همواره مساویِ ∞ است.

فرض کنیم

$$\underline{A}(E) = \bigcup_{1}^{\infty} \underline{A}(E,k), \qquad \overline{A}(E) = \bigcap_{1}^{\infty} \overline{A}(E,k).$$

در این صورت $\underline{A}(E) \subset E \subset \overline{A}(E)$، $\underline{A}(E)$ و $\overline{A}(E)$ مجموعه‌های برل هستند و $\underline{\kappa}(E) = m(\underline{A}(E))$ و $\overline{\kappa}(E) = m(\overline{A}(E))$. بنابر این گنجایش جردن E وجود دارد اگر و فقط اگر $m(\overline{A}(E) \setminus \underline{A}(E)) = 0$ و این هم ایجاب می‌کند که E اندازه‌پذیر لبگ باشد و $m(E) = \kappa(E)$.

برای بیشتر روشن شدن رابطهٔ بین اندازهٔ لبگ و فرآیند تقریب زدنی که منجر به گنجایش جردن شد، لم زیر را اثبات می‌کنیم. (قسمت دوم لم بعداً مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۲.۴۳ لم. اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، آنگاه $U = \underline{A}(U)$. به‌علاوه، U اجتماع شمارش‌پذیری از مکعب‌هایی است که درون‌های آنها مجزا هستند.

برهان. اگر $x \in U$ قرار می‌دهیم $\delta = \inf\{|y-x| : y \notin U\}$. چون U باز است δ مثبت است. اگر Q مکعبی در Q_k باشد که شامل x است، آنگاه هر $y \in Q$ در فاصله‌ای حداکثر $2^{-k}\sqrt{n}$ از x است (بدترین حالت این است که به ازای

همهٔ j ها، $\text{۲}^{-k} = |x_j - y_j|$) پس خواهیم داشت $Q \subset U$ مشروط بر اینکه k به اندازهٔ کافی بزرگ بوده و در نتیجه $\text{۲}^{-k}\sqrt{n} < \delta$. اما در این صورت $x \in \underline{A}(U,k) \subset \underline{A}(U)$. این نشان می‌دهد که $\underline{A}(U) = U$ و حکم دوم با نوشتن

$$\underline{A}(U) = \underline{A}(U,\text{۰}) \cup \bigcup_{\text{۱}}^{\infty}[\underline{A}(U,k) \setminus \underline{A}(U,k-\text{۱})]$$

به دست می‌آید. $\underline{A}(U,\text{۰})$ اجتماعی (شمارش‌پذیر) از مکعب‌های واقع در $Q_\text{۰}$ است، و به ازای $k \geq \text{۱}$، بستار $\underline{A}(U,k) \setminus \underline{A}(U,k-\text{۱})$ اجتماعی (شمارش پذیر) از مکعب‌های واقع در Q_k است. این مکعب‌ها همگی درون‌های مجزایی دارند و حکم حاصل می‌شود. ■

بلافاصله لم ۲.۴۳ ایجاب می‌کند که اندازهٔ لبگ هر مجموعهٔ باز با گنجایش داخلی آن برابر است. از سوی دیگر، فرض می‌کنیم $F \subset \mathbb{R}^n$ فشرده است. مکعب بزرگی مثل $Q_\text{۰} = \{x : \max|x_j| \leq \text{۲}^M\}$ می‌توان یافت که درونش یعنی $\text{int}(Q_\text{۰})$ شامل F باشد. اگر $Q \in Q_k$ و $Q \subset Q_\text{۰}$، آنگاه $Q \cap F \neq \varnothing$ یا $Q \subset (Q_\text{۰} \setminus F)$، لذا

$$m(\overline{A}(F,k)) + m(\underline{A}(Q_\text{۰} \setminus F,k)) = m(Q_\text{۰}).$$

با فرض $k \to \infty$، می‌بینیم که $\overline{\kappa}(F) + \underline{\kappa}(Q_\text{۰} \setminus F) = m(Q_\text{۰})$. اما $Q_\text{۰} \setminus F$ اجتماع مجموعه‌های باز $\text{int}(Q_\text{۰}) \setminus F$ و مرز $Q_\text{۰}$ است که دارای گنجایش صفر است، پس

$$\underline{\kappa}(Q_\text{۰} \setminus F) = \underline{\kappa}(\text{int}(Q_\text{۰}) \setminus F) = m(Q_\text{۰} \setminus F).$$

نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ لبگ هر مجموعهٔ فشرده با گنجایش خارجی آن برابر است.

با تلفیق این نتایج و قسمت (الف) از قضیهٔ ۲.۴ چگونگی مقایسهٔ اندازهٔ لبگ با گنجایش جردن را می‌توان به دقت دید. گنجایش جردن E با تقریب زدن E از داخل و بیرون به وسیلهٔ اجتماع‌های متناهی از مکعب‌ها تعریف می‌شود. از طرف دیگر، اندازهٔ لبگ E با یک فرآیند تقریب زدن دو مرحله‌ای داده می‌شود: نخست E را از بیرون به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز و از داخل با مجموعه‌های فشرده تقریب می‌زنیم و سپس مجموعه‌های باز را از داخل و مجموعه‌های فشرده را از خارج به وسیلهٔ اجتماع‌های متناهی از مکعب‌ها تقریب می‌زنیم. مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ، درست آنهایی هستند که برایشان این تقریبات داخلی ـ خارجی و خارجی ـ داخلی در حدّ جواب یکسان داشته باشند. (به تمرین ۱۹ از بند ۱.۴ مراجعه کنید).

اکنون رفتار انتگرال لبگ تحت تبدیلات خطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک نگاشت خطی مانند $\mathrm{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را با ماتریس $(\mathrm{T}_{ij}) = (e_i \cdot \mathrm{T}e_j)$ یکی می‌گیریم که در آن $\{e_j\}$ پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^n$ است. دترمینان این ماتریس را با $\det T$ نشان می‌دهیم و یادآوری می‌کنیم که $\det(\mathrm{T} \circ \mathrm{S}) = (\det \mathrm{T})(\det \mathrm{S})$. به‌علاوه، نماد استاندارد $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (گروه « خطی عام ») را برای تبدیلات خطی وارون‌پذیر $\mathbb{R}^n$ به‌کار می‌بریم. این حقیقت از جبر خطی مقدماتی را لازم داریم که هر $\mathrm{T} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را می‌توان به صورت حاصلضربی از تعدادی متناهی تبدیل خطی از سه نوع « مقدماتی» نوشت. نوع اول یکی از مؤلفه‌ها را در ثابت ناصفری چون c ضرب کرده و بقیه را ثابت نگه می‌دارد؛ نوع دوم، مضربی از یک مؤلفه را به یک

مؤلفه را به یک مؤلفهٔ دیگر می‌افزاید و همهٔ مؤلفه‌ها به‌جز مؤلفهٔ مذکور را ثابت نگه می‌دارد؛ نوع سوم، دو مؤلفه را جابه‌جا می‌کند و بقیه را ثابت نگه می‌دارد. به طور نمادی:

$$T_1(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,cx_j,\ldots,x_n) \quad (c \neq 0),$$
$$T_2(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_j + cx_k,\ldots,x_n), \quad (k \neq j),$$
$$T_3(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_k,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_j,\ldots,x_n).$$

اینکه هر تبدیل وارون‌پذیر حاصلضربی از این سه نوع تبدیل است به آسانی از این حقیقت به‌دست می‌آید که هر ماتریس غیر منفرد را می‌توان با عملیات سطری به ماتریس همانی تبدیل کرد.

۲.۴۴ قضیه. فرض‌کنیم $T \in GL(n,\mathbb{R})$.

الف) اگر f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ روی $\mathbb{R}^n$ باشد، $f \circ T$ نیز چنین است. اگر $f \geq 0$ یا $f \in L^1(m)$، آنگاه

$$\int f(x)dx = |\det T| \int f \circ T(x)dx. \qquad (2.45)$$

ب) اگر $E \in \mathcal{L}^n$، آنگاه $T(E) \in \mathcal{L}^n$ و $m(T(E)) = |\det T| m(E)$.

برهان. نخست فرض می‌کنیم f اندازه‌پذیر برل است و در نتیجه $f \circ T$ اندازه‌پذیر برل است زیرا T پیوسته است. چنانچه ۲.۴۵ برای تبدیل های T و S درست باشد برای $T \circ S$ نیز درست است، زیرا

$$\int f(x)dx = |\det T| \int f \circ T(x)dx = |\det T||\det S| \int (f \circ T) \circ S(x)dx$$
$$= |\det(T \circ S)| \int f \circ (T \circ S)(x)dx$$

بنابر این کافی است ۲.۴۵ را برای T های از نوع T_1، T_2 و T_3 ثابت‌کنیم که در فوق توصیف شدند. اما این هم پی‌آمد ساده‌ای از قضیهٔ تونلی ـ فوبینی است. برای T_3 ترتیب انتگرال گیری نسبت به x_j و x_k را عوض می‌کنیم، و در مورد T_1 و T_2 نخست نسبت به x_j انتگرال می‌گیریم و فرمول nـ بعدی زیر را به‌کار می‌بریم که از قضیهٔ ۱.۲۱ نتیجه می‌شود: G

$$\int f(t)dt = |c| \int f(ct), \qquad \int f(t+a)dt = \int f(t)dt.$$

از آنجا که $\det T_1 = c$ و $\det T_2 = 1$ و $\det T_3 = -1$ به آسانی بررسی می‌شوند، (۲.۴۵) اثبات می‌شود. به‌علاوه، اگر E یک مجموعهٔ برل باشد، $T(E)$ نیز برل است (زیرا T^{-1} پیوسته است) و با گرفتن $f = \chi_{T(E)}$ به‌دست می‌آوریم

$$m(T(E)) = |\det T| m(E).$$

به‌ویژه، ردهٔ مجموعه‌های پوچ برل تحت T و T^{-1} پایا است و از این رو $\mathcal{L}^n$ نیز چنین است. اکنون مانند برهان قضیهٔ ۲.۴۲، حکم برای مجموعه‌ها و توابع اندازه‌پذیر لبگ حاصل می‌شود. ■

۲.۴۶ نتیجه. اندازهٔ لبگ تحت دوران‌ها پایا است.

برهان. دوران‌ها نگاشت‌هایی خطی هستند که در $TT^* = I$ صدق می‌کنند که در آن T^* ترانهادهٔ T است. چون $\det T = \det T^*$، این ایجاب می‌کند که $|\det(T)| = 1$. ∎

بعداً قضیهٔ ۲.۴۴ را به نگاشت‌های مشتق‌پذیر تعمیم خواهیم داد. این نتیجه در هیچ جای دیگر این کتاب مورد استفاده قرار نخواهد گرفت و می‌توان آن را پس از یکبار خواندن کنار گذاشت. تعمیم آن به روش‌های قدری متفاوت را در بند ۱۱.۲ ثابت خواهیم کرد.

فرض کنیم $G = (g_1, \ldots, g_n)$ نگاشتی از مجموعهٔ بازی چون $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ بتوی $\mathbb{R}^n$ باشد که مولفه‌های g_j در آن از کلاس C^1 هستند، یعنی، مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آنها پیوسته‌اند. آن نگاشت خطی که با ماتریس $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})(x)$ از مشتقات جزئی در x تعریف می‌شود را با $D_x G$ نشان می‌دهیم. (ملاحظه می‌شود که اگر G خطی باشد، آنگاه به ازای همهٔ xها $D_x G = G$). G یک C^1- **دیفومورفیسم** نامیده می‌شود هرگاه G یک به یک باشد و به ازای هر $x \in \Omega$، $D_x(G)$ وارون‌پذیر باشد. در این حالت، قضیهٔ تابع معکوس حکم می‌کند که $G^{-1} : G(\Omega) \to \Omega$ نیز یک C^1- دیفومورفیسم باشد و به ازای هر $x \in G(\Omega)$،

$$D_x(G^{-1}) = [D_{G^{-1}(x)} G]^{-1}.$$

۲.۴۷ قضیه. فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^n$ و $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ یک C^1- دیفومورفیسم باشد.

الف) اگر f یک تابع اندازه پذیر لبگ روی $G(\Omega)$ باشد، آنگاه $f \circ G$ روی Ω اندازه پذیر لبگ است. اگر $f \geq 0$ یا $f \in L^1(G(\Omega), m)$، آنگاه

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_\Omega f \circ G(x) |\det D_x G| dx.$$

ب) اگر $E \subset \Omega$ و $E \in \mathcal{L}^n$، آنگاه $G(E) \in \mathcal{L}^n$ و

$$m(G(E)) = \int_E |\det D_x G| dx.$$

برهان. کافی است مجموعه‌ها و توابع اندازه‌پذیر برل را در نظر بگیریم. چون G و G^{-1} هر دو پیوسته‌اند، در این حالت مشکلات اندازه پذیری وجود ندارد و همانند برهان قضیهٔ ۲.۴۲ حالت کلی حاصل می‌شود.

یک نماد گذاری کوتاه: برای $x \in \mathbb{R}^n$ و $T = (T_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$، قرار می‌دهیم:

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \qquad \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |T_{ij}|.$$

در این صورت داریم $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ و $\{x : \|x-a\| \leq h\}$ مکعبی است که طول ضلعش $2h$ است و مرکزش در a قرار دارد.

فرض می‌کنیم Q مکعبی در Ω باشد، مثلاً $Q = \{x : \|x-a\| \leq h\}$. بنابر قضیهٔ مقدار میانی برای yای روی خط واصل x و a داریم:

$$g_j(x) - g_j(a) = \sum_k (x_k - a_k)(\frac{\partial g_j}{\partial x_k})(y),$$

لذا به ازای $x \in Q$، $\|G(x) - G(a)\| \leq h(\sup_{y\in Q}\|D_y(G)\|)$. به عبارت دیگر $G(Q)$ در مکعبی با طول ضلعی معادل با $\sup_{y\in Q}\|D_y(G)\|$ برابر طول ضلع Q مشمول است، پس بنابر قضیهٔ ۲.۴۴ خواهیم داشت:

$$m(G(Q)) \leq (\sup_{y\in Q}\|D_y(G)\|)^n m(Q)\ .$$

اگر $T \in Gl(n, \mathbb{R})$، این فرمول با جایگزینی $T^{-1}oG$ به جای G و با به کارگیری قضیهٔ ۲.۴۴ به دست می‌آوریم:

$$m(G(Q)) = |\det T| m(T^{-1}(G(Q)))$$
$$|\det T|(\sup_{y\in Q}\|T^{-1}D_y(G)\|)^n m(Q) \quad . \qquad (۲.۴۸)$$

چون D_yG در y پیوسته است، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توانیم $\delta > 0$ای انتخاب کنیم به‌طوری که اگر $y, z \in Q$ و $\|y - z\| \leq \delta$، آنگاه

$$\|D_z(G)^{-1}D_yG\|^n \leq 1 + \varepsilon.$$

حال می‌آییم Q را به زیرمکعب‌هایی چون $Q_1, \cdots, Q_N$ افراز می‌کنیم که درون‌هایشان مجزا هستند، طول اضلاعشان حداکثر δ است و مراکزشان $x_1, \cdots, x_N$ می‌باشند. با استفاده از (۲.۴۸) و با جایگزینی Q_j به‌جای Q و $T = D_{x_j}G$ به دست می‌آوریم:

$$m(G(Q)) \leq \sum_1^n m(G(Q_j))$$
$$\leq \sum_1^n \left|\det D_{x_j}G\right| (\sup_{y\in Q_j}\|(D_{x_j}G)^{-1}D_yG\|)^n m(Q_j)$$
$$\leq (1+\varepsilon)\sum_1^n \left|\det D_{x_j}G\right| m(Q_j).$$

همین آخرین مجموع، انتگرال $\sum_1^N \left|\det D_{x_j}G\right| \chi_{Q_j}(x)$ است که وقتی $\delta \to 0$ روی Q به طور یکنواخت به $|\det D_xG|$ میل می‌کند زیرا D_xG پیوسته است. بنابر این، با فرض $\varepsilon \to 0$ و $\delta \to 0$ معلوم می‌شود که

$$m(G(Q)) \leq \int_Q |\det D_xG| dx\ .$$

ادعا می‌کنیم که این برآورد با جایگزین کردن هر مجموعهٔ برل در Ω به‌جای Q برقرار است. مسلماً، اگر $U \subset \Omega$ باز باشد، بنابر لم ۲.۴۳ می‌توانیم بنویسیم $U = \bigcup_1^\infty Q_j$ که در آن Q_jها مکعب‌هایی با درون‌های مجزا هستند. چون مرزهای مکعب

$$m(G(U)) \leq \sum_1^\infty m(G(Q_j)) \leq \sum_1^\infty \int_{Q_j} |\det D_x G|dx = \int_U |\det D_x G|dx.$$

حال، قرار می‌دهیم $W_K = \Omega \cap \{x : |x| < K,\ |\det D_x G| < K\}$. اگر E زیرمجموعهٔ برلی از W_K باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۲.۴۰ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های باز $U_j \subset W_{K+1}$ وجود دارد به‌طوری‌که $E \subseteq \bigcap_1^\infty U_j$ و $m(\bigcap_1^\infty U_j \setminus E) = 0$. از این رو بنابر برآورد قبل و قضیهٔ همگرایی مغلوب،

$$m(G(E)) \leq m(G(\bigcap_1^\infty U_j)) = \lim m(G(U_j))$$

$$\leq \lim \int_{U_j} |\det D_x G|dx = \int_E |\det D_x G|dx \cdot$$

بالاخره، چون m، σـ متناهی است، از این مطلب نتیجه می‌گیریم که $m(G(E)) \leq \int_E |\det D_x G|dx$ به ازای هر مجموعهٔ برل مانند $E \subset \Omega$ برقرار است. چنانچه $f = \sum a_j \chi_{A_j}$ یک تابع سادهٔ نامنفی روی $G(\Omega)$ باشد، داریم:

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \sum a_j m(A_j) \leq \sum a_j \int_{G^{-1}(A_j)} |\det D_x G|dx = \int_\Omega f o G(x) |\det D_x G|dx.$$

در نتیجه قضایای ۲.۱۰ و همگرایی یکنوا ایجاب می‌کنند که

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx \leq \int_\Omega f \circ G(x) |\det D_x G|dx$$

به ازای هر تابع اندازه پذیر نامنفی مانند f برقرار باشد اما همین استدلال را با جایگزینی G^{-1} به جای G و $f o G$ به‌جای f به‌کار برده و به‌دست می‌آوریم:

$$\int_\Omega f \circ G(x)\,|\det D_x G|\,dx \leq \int_{G(\Omega)} f \circ G \circ G^{-1}(x) \left|\det D_{G^{-1}(x)} G\right| \left|\det D_x G^{-1}\right| dx = \int_{G(\Omega)} f(x)dx.$$

این مطلب، (الف) را برای $f \geq 0$ به اثبات می‌رساند و حالت $f \in L^1$ مستقیماً نتیجه می‌شود. چون (ب) حالت خاصی از (الف) است که در آن $f = \chi_{G(E)}$ ، برهان کامل شده است. ■

تمرین‌ها

۵۱) خلأهای موجود در برهان قضیهٔ ۲.۴۱ را پر کنید.

۵۲) چنانچه T وارون‌پذیر نباشد چقدر از قضیهٔ ۲.۴۴ معتبر باقی می‌ماند؟

۵۳) فرض کنید $E = [0,1] \times [0,1]$. وجود و برابری انتگرال‌های $\int_E f dm^2$، $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ و $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx$ را برای f های زیر بررسی کنید:

الف) $f(x,y) = (x^{۲} - y^{۲})(x^{۲} + y^{۲})^{-۲}$؛

ب) $f(x,y) = (۱ - xy)^{-a}$ ($a > ۰$)؛

ج) $f(x,y) = \begin{cases} (x - \frac{۱}{۲})^{-۳} & ۰ < y < \left|x - \frac{۱}{۲}\right| \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$؛

۵۶) اگر f روی $(۰,a)$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد و $g(x) = \int_x^a t^{-۱} f(t)dt$، آنگاه g روی $(۰,a)$ انتگرال‌پذیر است و $\int_۰^a g(x)dx = \int_۰^a f(x)dx$.

۵۷) با انتگرال‌گیری از $e^{-sxy} \sin x$ نسبت به x و y نشان دهید که برای $s > ۰$،

$$\int_۰^\infty e^{-sx} x^{-۱} \sin x dx = \arctan(s^{-۱}).$$

(یادآوری می‌کنیم که $\tan(\frac{\pi}{۲} - \theta) = (\tan\theta)^{-۱}$. به قسمت (د) از تمرین ۳۱ مراجعه کنید).

۵۸) با انتگرال‌گیری از $e^{-sx} \sin ۲xy$ نسبت به x و y نشان دهید که برای $s > ۰$،

$$\int e^{-sx} x^{-۱} \sin^{۲} x dx = \frac{۱}{۴}\log(۱ + ۴s^{-۲}).$$

۵۹) فرض کنید $f(x) = x^{-۱} \sin x$.

الف) نشان دهید که $\int_۰^\infty |f(x)dx| = \infty$؛

ب) با انتگرال‌گیری از $e^{-sxy} \sin x$ نسبت به x و y نشان دهید که $\lim_{b\to\infty} \int_۰^b f(x)dx = \frac{\pi}{۲}$. (با توجه به به قسمت (الف)، برای گذراندن حد از انتگرال، دقت لازم دارد).

۶۰) نشان دهید که برای هر $x, y > ۰$، $\Gamma(x)(y)/\Gamma(x+y) = \int_۰^۱ t^{x-۱}(۱-t)^{y-۱} dt$. (به یاد داشته باشید که Γ در بند ۲.۳ تعریف شده است. $\Gamma(x)\Gamma(y)$ را به‌صورت یک انتگرال دوگانه نوشته و آرگمان نما را به‌عنوان متغیر جدید انتگرال‌گیری به‌کار برید.)

۶۱) اگر f روی $[۰,\infty)$ پیوسته باشد، برای $\alpha > ۰$ و $x \geq ۰$ فرض کنید

$$I_\alpha f(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_۰^x (x-t)^{\alpha - ۱} f(t)dt.$$

$I_\alpha f$ انتگرال کسری f نامیده می‌شود.

الف) برای $\alpha, \beta > ۰$، $I_{\alpha+\beta} f = I_\alpha(I_\beta f)$. (از تمرین ۶۰ استفاده کنید.)

ب) اگر $n \in \mathbb{N}$، $I_n f$ یک مشتق nام f است.

۲.۷ انتگرال‌گیری در مختصات قطبی

مهمترین دستگاه‌های مختصات غیر خطی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ مختصات قطبی ($y = r\sin\theta,\ x = r\cos\theta$) و مختصات کروی

$$(x = r\sin\phi\cos\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\phi)$$

هستند. در صورت به‌کار بردن قضیهٔ ۲.۴۷ در مورد این مختصات‌ها فرمول‌های آشنای (با تسامح نوشته شدهٔ) $dxdy = rdrd\theta$ و $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ به‌دست می‌آیند. دستگاه‌های مختصات مشابهی در ابعاد بالاتر وجود دارند، اما وقتی بُعد افزایش می‌یابد این دستگاه‌ها به طور سرسام آوری پیچیده می‌شوند. (تمرین ۶۵ را ببینید).

اما به دلایل متعددی کافی است بدانیم اندازهٔ لبگ عملاً حاصلضرب اندازهٔ $r^{n-1}dr$ روی $(0,\infty)$ و « اندازهٔ مسطح » معین روی کرهٔ واحد است ($d\theta$ برای $n = 2$ و $\sin\phi d\theta d\phi$ برای $n = 3$).

ساختن این اندازهٔ مسطح به کمک حکم آشنایی از هندسهٔ مسطح صورت می‌گیرد. یعنی، اگر S_θ قطاعی از یک قرص با شعاع r با زاویهٔ مرکزی θ باشد (یعنی، ناحیه‌ای در قرص که بین دو ضلع زاویه واقع است)، مساحت $m(S_\theta)$ با θ متناسب است؛ در واقع $m(S_\theta) = \frac{1}{2}r^2\theta$. این معادله را می‌توان بر حسب θ حل کرده و در نتیجه برای تعریف اندازهٔ زاویهٔ θ بر حسب $m(S_\theta)$ به‌کار برد. همین ایده در ابعاد بالاتر نیز کارساز است: اندازهٔ مسطح یک زیرمجموعه از کرهٔ واحد را بر حسب اندازهٔ لبگ قطاع متناظر گوی واحد تعریف خواهیم کرد. کرهٔ واحد $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ را با S^{n-1} نشان خواهیم داد.

اگر $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ، مختصات قطبی x عبارتند از:

$$r = |x| \in (0,\infty),\quad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}.$$

نگاشت $\Phi(x) = (r, x')$ دوسویی پیوسته ای از $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ به $(0,\infty) \times S^{n-1}$ است که وارون (پیوستهٔ) آن $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$ می‌باشد. اندازهٔ برلی را که توسط Φ از اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$ به $(0,\infty) \times S^{n-1}$ القاء می‌شود با m_* نشان داده می‌شود، یعنی

$$m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E)).$$

به علاوه، اندازهٔ $\rho = \rho_n$ را روی $(0,\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(E) = \int_E r^{n-1}dr.$$

۲.۴۹ قضیه. اندازهٔ برل یکتایی چون $\sigma = \sigma_{n-1}$ روی S^{n-1} وجود دارد به طوری که $m_* = \rho \times \sigma$. اگر f روی $\mathbb{R}^n$ اندازه پذیر برل باشد و $f \geq 0$ یا $f \in L^1(m)$، آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}d\sigma(x')dr. \qquad (۲.۵۰)$$

برهان. وقتی f تابع مشخص یک مجموعه باشد، معادلهٔ (۲.۵۰) صرفاً یک بازگویی معادلهٔ $m_* = \rho \times \sigma$ است، و به دلیل تقریب زدن‌ها و خطی بودن متداول، این معادله برای همهٔ fها حاصل می‌شود. بنابر این، تنها ساختن σ لازم است. اگر E یک مجموعهٔ برل در S^{n-1} باشد، به ازای $a > 0$ قرار دهید:

$$E_a = \Phi^{-1}((0,a] \times E) = \{rx' : 0 < r \leq a, x' \in E\} .$$

چنانچه (۲.۵۰) برای $f = \chi_{E_1}$ برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$m(E_1) = \int_0^1 \int_E r^{n-1} d\sigma(x') dr = \sigma(E) \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\sigma(E)}{n} .$$

بنابر این تعریف می‌کنیم $\sigma(E) = n \cdot m(E_1)$. چون $E \mapsto E_1$ مجموعه‌های برل را به مجموعه‌های برل می‌برد و اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌ها را تبدیل می‌کند، واضح است که σ یک اندازهٔ برل روی S^{n-1} است. همچنین چون E_a تصویر E_1 تحت نگاشت $x \mapsto ax$ می‌باشد، از قضیهٔ ۲.۴۴ نتیجه می‌گیریم که $m(E_a) = a^n m(E_1)$، و لذا اگر $0 < a < b$، خواهیم داشت:

$$m_*((a,b] \times E) = m(E_b \setminus E_a) = \frac{b^n - a^n}{n} \sigma(E) = \sigma(E) \int_a^b r^{n-1} dr = \rho \times \sigma((a,b] \times E).$$

$E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}$ را ثابت گرفته و فرض کنید $\mathcal{A}_E$ گردایهٔ اجتماع‌های مجزای متناهی از مجموعه‌های به شکل $(a,b] \times E$ باشد. بنابر گزارهٔ ۱.۷، $\mathcal{A}_E$ یک جبر روی $(0,\infty) \times E$ است که σـ جبر $\mathcal{M}_E = \{A \times E : A \in \mathcal{B}_{(0,\infty)}\}$ را تولید می‌کند. با توجه به محاسبات قبل داریم $m_* = \rho \times \sigma$ بر $\mathcal{A}_E$ و از این رو، طبق حکم یکتایی در قضیهٔ ۱.۱۴، $m_* = \rho \times \sigma$ بر $\mathcal{M}_E$. اما $\bigcup \{\mathcal{M}_E : E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}\}$ درست مجموعهٔ مستطیل های برل واقع در $(0,\infty) \times S^{n-1}$ است. لذا به‌کارگیری مجدد قضیهٔ یکتایی نشان می‌دهد که روی همهٔ مجموعه های برل $m_* = \rho \times \sigma$. ■

البته، با در نظر گرفتن کامل شدهٔ اندازهٔ σ، (۲.۵۰) را می توان به توابع اندازه پذیر لبگ تعمیم داد. جزئیات به خواننده واگذار می‌شوند.

۲.۵۱ نتیجه. اگر f تابع اندازه‌پذیری بر $\mathbb{R}^n$ و نا منفی یا انتگرال‌پذیر باشد به‌قسمی‌که به ازای تابعی چون g بر $(0,\infty)$ داشته باشیم $f(x) = g(|x|)$، آنگاه

$$\int f(x) dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr .$$

۲.۵۲ نتیجه. فرض‌کنید c و C نشان‌دهندهٔ دو ثابت مثبت باشند و $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < c\}$. فرض‌کنید f یک تابع اندازه پذیر روی $\mathbb{R}^n$ باشد.

الف) اگر به ازای $a < n$ ای، $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ بر B، آنگاه $f \in L^1(B)$. اما اگر $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ بر B، آنگاه $f \notin L^1(B)$.

ب) اگر به ازای $a > n$ای، $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ بر B^c، آنگاه $f \in L^1(B^c)$. اما اگر $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ بر B^c، آنگاه $f \notin L^1(B^c)$.

برهان. نتیجهٔ ۲.۵۱ را در مورد $|x|^{-a}\chi_B$ و $|x|^{-a}\chi_{B^c}$ به‌کار برید. ■

مختصراً $\sigma(S^{n-1})$ را محاسبه خواهیم کرد. البته، می‌دانیم که $\sigma(S^1) = 2\pi$؛ این درست تعریف 2π به عنوان نسبت محیط دایره به شعاع آن است.
با مجهز شدن به این حقیقت، می‌توانیم یکی از انتگرال‌های بسیار مهم را محاسبه کنیم.

۲.۵۳ گزاره. اگر $a > 0$، آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a|x|^2)dx = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}}.$$

برهان. انتگرال سمت چپ را با I_n نشان می‌دهیم. برای $n = 2$ از نتیجهٔ ۲.۵۱ معلوم می‌شود که

$$I_2 = 2\pi\int_0^\infty re^{-ar^2}dr = -(\frac{\pi}{a})e^{-ar^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

چون $\exp(-a|x|^2) = \prod_1^n \exp(-ax_j^2)$، قضیهٔ تونلی ایجاب می‌کند که $I_n = (I_1)^n$. به ویژه $I_1 = (I_2)^{\frac{1}{2}}$، لذا $I_n = (I_2)^{\frac{n}{2}} = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}}$.

به محض اینکه این حکم را دانستیم، شگرد به کار رفته در برهانش را می‌توانیم برای محاسبهٔ $\sigma(S^{n-1})$ به ازای همهٔ nها بر حسب تابع گاما به‌کار ببریم.

۲.۵۴ گزاره. $\sigma(S^{n-1}) = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

برهان. بنابر نتیجهٔ ۲.۵۱، گزارهٔ ۲.۵۳ و جایگزینی $S = r^2$،

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx = \sigma(S^{n-1})\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr$$
$$= \frac{\sigma(S^{n-1})}{2}\int_0^\infty S^{(\frac{n}{2})-1}e^{-s}dS = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2}\Gamma(\frac{n}{2}).$$

۲.۵۵ نتیجه. اگر $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$، آنگاه $m(B^n) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$.

برهان. بنابر تعریف σ، $m(B^n) = n^{-1}\sigma(S^{n-1})$، و بنابر معادلهٔ تابعی برای گاما داریم:
$$\tfrac{1}{2}n\Gamma(\tfrac{1}{2}n) = \Gamma(\tfrac{1}{2}n+1).\blacksquare$$

در بند ۲.۳ مشاهده کردیم که $\Gamma(n) = (n-1)!$. اکنون می‌توانیم تابع گاما را در نیم ـ بازه‌ها نیز برآورد کنیم:

۲.۵۶ گزاره. $\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots(\tfrac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

برهان. بنابر معادلهٔ تابعی داریم:
$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}),$$
و بنابرگزارهٔ ۲.۵۳ و با جایگزینی $S = r^2$ داریم:
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty s^{\frac{-1}{2}}e^{-s}ds = 2\int_0^\infty e^{-r^2}dr = \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2}dr = \sqrt{\pi}.$$
یک نتیجه سرگرم کنندهٔ گزارهٔ ۲.۵۶ و فرمول $\Gamma(n) = (n-1)!$ این است که اندازهٔ سطحی کره واحد و اندازه لبگ گوی واحد در $\mathbb{R}^n$ همواره مضارب گویایی از توان‌های صحیح π هستند و وقتی n به ۲ افزایش می‌یابد توان π به ۱ افزایش می‌یابد.

تمرین‌ها

۶۲) اندازهٔ σ روی S^{n-1} تحت دوران پایا است.

۶۳) تکنیک به‌کار رفته برای برهان گزارهٔ ۲.۵۴ را می‌توان در مورد انتگرال هر چندجمله‌ای روی S^{n-1} به کار برد. در واقع، فرض کنید $f(x) = \Pi_1^n x_j^{\alpha_j}$ $(\alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ یک چندجمله‌ای تکین باشد. در این صورت $\int fd\sigma = 0$ اگر و فقط اگر هر α_j فرد باشد و چنانچه همهٔ α_jها زوج باشند،
$$\int fd\sigma = \frac{2\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1+\ldots+\beta_n)}$$
که در آن $\beta_j = \frac{\alpha_j+1}{2}$.

۶۴) به ازای چه مقادیر حقیقی از a و b، $|x|^a |\log|x||^b$ روی $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{2}\}$ انتگرال‌پذیر است؟ روی $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$ چطور؟

۶۵) $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $G(r, \phi_1, \ldots \phi_{n-2}, \theta) = (x_1, \ldots, x_n)$ تعریف کنیدکه در آن

$$x_1 = r\cos\phi_1, \quad x_2 = r\sin\phi_1\cos\phi_2, \quad x_3 = r\sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3, \ldots,$$
$$x_{n-1} = r\sin\phi_1\ldots\sin\phi_{n-2}\cos\theta, \qquad x_n = r\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-2}\sin\theta.$$

الف) G، $\mathbb{R}^n$ را بروی $\mathbb{R}^n$ می‌نگارند، و n.

ب) $\det D_{(r,\phi_1,\ldots,\phi_{n-2},\theta)} G = r^{n-1}\sin^{n-2}\phi_1 \sin^{n-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2}$.

ج) فرض کنید $\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$.دراین صورت $G|_{\Omega}$ یک دیفومورفیسم است و
$$m(\mathbb{R}^n \setminus G(\Omega)) = 0.$$

د) فرض کنید $F(\phi_1, \ldots, \phi_{n-2}, \theta) = G(1, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}, \theta)$ و $\Omega' = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$. در این صورت $(F \mid \Omega')^{-1}$ بر S^{n-1} به‌جز بر یک مجموعه $\sigma-$ پوچ یک دستگاه مختصات تعریف می‌کند، و در این مختصات اندازهٔ σ به‌وسیلهٔ فرمول زیر داده می‌شود:

$$d\sigma(\phi_1, \cdots, \phi_{n-2}, \theta) = \sin^{n-2}\phi_1 \sin^{n-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} d\theta.$$

۲.۸ ملاحظات و مراجع

تا حدی می‌توان گفت که تاریخ نظریهٔ اندازه و انتگرال مدرن با انتشار رسالهٔ دکترای لبگ [۹۱] در ۱۹۰۲ آغاز شده است، هرچند لبگ آن را بر اساس کارهای قدیمی ریاضیدانان دیگر بنا نهاده بود و برخی از حکم‌های وی مستقیماً توسط ویتالی و دبلیو. اچ. یانگ به‌دست آمده بود.

نظریهٔ انتگرال لبگ در مقیاس وسیع توسط تعدادی از ریاضیدان‌ها در دههٔ بعد از وی مورد بررسی قرار گرفت که طی این دوره اکثر نتایج این فصل نخست استخراج شده بود. به‌ویژه خود لبگ قضیهٔ همگرایی مغلوب را اثبات کرده و قضیهٔ همگرایی یکنوا را در حالتی‌که حد تابع f انتگرال‌پذیر بود از آن نتیجه گرفته بود؛ وقتی $\int f = \infty$ قضیهٔ اخیر به بی. لویی نسبت داده شده است. لبگ [۹۲] اندازه‌های کلی‌تری روی $\mathbb{R}^n$ (که آنها را توابع مجموعه‌ای جمعی نامید) در ارتباط با مسئله تعمیم نمادگذاری انتگرال‌های نامتعارف به توابع چندمتغیره، مورد مطالعه قرار داد. سپس رادون [۱۱۱] نظریهٔ انتگرال نسبت به آنچه که هم اکنون ما اندازه‌های برل منظم روی $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم را مورد بررسی قرار داد، که در حالت خاص $n = 1$ انتگرال‌های لبگ ـ اشتیلیس را به‌دست می‌دهد.

بالاخره در ۱۹۱۵ فرشه [۵۳] نشان داد که تعدادی از ایده‌های رادون در وضع کلی مجموعه‌هایی که به σـ جبرها مجهزند کار می‌کند. بدین ترتیب اندازهٔ مجرد و نظریهٔ انتگرال شکل گرفت. تحقیقات تا حدود سال ۱۹۵۰ ادامه یافت، کمابیش شکلی از نظریه که امروز در دست ما است پیش بینی شده بود. نخستین رسالهٔ مدرن و منظم هالموس [۶۲] می‌باشد. برای اطلاع از تاریخچهٔ انتگرال، هاوکینز [۷۰] را ببینید. مراجع مربوط به تحقیقات اخیر را می‌توان در ساک [۱۲۸] و هان و روزشال [۶۱] یافت.

دیدگاه شروع با اندازه‌ها و استخراج انتگرال‌ها از آنها را پذیرفته‌ایم. اما روش‌های نیز برای رسیدن به تعریف انتگرال وجود دارد، روالی که نخستین بار توسط دانیل [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت قطع نظر از جزئیات، با یک « انتگرال مقدماتی» شروع شنند: یک تابعک خطی مانند I که بر فضای مناسبی از توابع تعریف شده است و در برخی شرایط در پیوستگی نُرم صدق می‌کند و مثبت می‌باشد به این معنا که $I(f) \geq 0$ هرگاه $f \geq 0$. (برای مثال، انتگرال ریمان بر فضای توابع پیوسته روی $[a,b]$.) نظریهٔ دانیل توسیعی از I به یک تابعک مانند $\overline{I}$ مهیا می‌کند که بر رده بزرگتری از توابع تعریف شده است. در این حالت تحت مفروضاتی خاص، گردایهٔ $\mathcal{M}$ مرکب از مجموعه‌های E به‌قسمی‌که χ_E در دامنهٔ $\overline{I}$ باشد یک σـ جبر است، تابع $\mu(E) = \overline{I}(\chi_E)$ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است و $\overline{I}$ نسبت به μ انتگرال‌پذیر است. برای شرح مختصری از نظریهٔ دانیل، رودین [۱۲۱] را ببینید.

نظریهٔ لبگ آخرین حرف دربارهٔ انتگرال روی $\mathbb{R}$ نیست. تا حدودی مسئلهٔ اثبات قضیهٔ اساسی حسابان تا سرحد امکان (که دربارهاش در بند ۳.۶ مطالب بیشتری خواهیم گفت) موجب شده است که تعدادی نظریهٔ انتگرال بنا شود که نه تنها انتگرال لبگ بلکه انتگرال‌های « همگرای مشروط » معینی را نیز شامل شود، یعنی، برای توابع اندازه‌پذیر معینی چون $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک معنی به $\int f(x)dx$ اختصاص می‌دهند به‌طوری‌که $\int f^+ = \int f^- = \infty$، اما برای چه مقادیر مثبت و منفی معقولی از $\int f(x)dx$ به‌دست می‌دهد. (یک مثال متعارف $f(x) = x^{-1}\sin x$؛ تمرین ۵۹ را ببینید.) اولین گام‌ها برای تعریف چنین انتگرالی به دنجوی و پرون نسبت داده شده است که انتگرال‌های نسبتاً پیچیده‌ای بودند. اما در سال ۱۹۵۰ هنستوک و کورزویل مستقلاً تعدیل شده‌ای از انتگرال ریمان کلاسیک را کشف کردند که همان نتایج را به‌دست می‌داد. انتگرال هنستوک ـ کورزویل روی یک بازهٔ کراندار مانند $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود: یک **افراز برچسب‌دار** از $[a,b]$ دنباله‌ای متناهی مانند $\{x_j\}_0^N$ است به‌طوری‌که $a < x_0 < \cdots < x_N < b$ (یعنی، افرازی به همان معنی گفته شده در بند ۲.۳) همراه با دنبالهٔ دیگری مانند $\{t_j\}_1^N$ به‌طوری‌که $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

یک **مقیاس** روی $[a,b]$ تابعی (دل‌خواه!) چون $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ است. هرگاه P یک افراز برچسب‌دار و δ یک مقیاس باشد، P را یک افراز برچسب‌دار و δ یک مقیاس باشد، P را δـ **ظریف** نامیم هرگاه برای هر j، $x_j - x_{j-1} < \delta(t_j)$.

فشردگی $[a,b]$ به آسانی ایجاب می‌کند که برای δ یک افراز برچسب‌دار برای $[a,b]$ وجود داشته باشد.

حال فرض می‌کنیم f تابعی حقیقی روی $[a,b]$ باشد. اگر P یک افراز برچسب‌دار $[a,b]$ باشد، آنگاه مجموع ریمان متناظر با آن برای f عبارت است از $\sum_P f = \sum f(t_j)(x_j - x_{j-1})$. تابع f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر هنستوک ـ کورزویل نامیده می‌شود هرگاه عددی چون $c \in \mathbb{R}$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

برای هر $\varepsilon > 0$ مقیاسی چون δ_ε وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر P هر افراز δ_εـ ظریف از $[a,b]$ بود، آنگاه $\left|\sum_P f - c\right| < \varepsilon$. در این حالت عدد c یکتا است و انتگرال هنستوک ـ کورزویل f نامیده می‌شود.

در مقام قیاس، انتگرال ریمان معمولی f را می‌توان درست به همین روش تعریف کرد با این تفاوت که مجبوریم فقط از مقیاس‌های ثابت استفاده کنیم. بعداً معلوم شد که انتگرال هنستوک ـ کورزویل با انتگرال دنجوی و پرون همخوانی دارد. به ویژه، در مورد توابع نامنفی با انتگرال لبگ هم همخوانی دارد، اما دامنه‌اش حاوی تعدادی از توابعی است که هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی می‌گیرند و در $L^1([a,b])$ نیستند. تعریف انتگرال هنستوک ـ کورزویل را به‌آسانی می‌توان به بازه‌های بی‌کران تعمیم داد. این نوع انتگرال یک نسخهٔ nـ بعدی هم دارد: به سادگی یک nـ بازه را حاصل‌ضربی از n بازهٔ یک بعدی و یک افراز برچسب‌دار از یک nـ بازه مانند I را گردایه‌ای متناهی مانند $\{I_j\}$ مرکب از nـ بازه‌ها با درون‌های مجزا که اجتماعشان I است به همراه انتخابی چون $t_j \in I_j$ برای هر j تعریف می‌کنیم؛ در این صورت تعریف انتگرال به صورت فوق عمل می‌کند.

حالتی را می‌توان ذکر کرد که انتگرال هنستوک ـ کورزویل نظریهٔ انتگرال‌گیری روی $\mathbb{R}^n$ می‌شود و برای دانشجویان کل‌گویی است، نه تنها به دلیل آنکه کلیت به آن افزوده شده بلکه (بیشتر) به این خاطر که تعریفش نسبتاً ساده است و برای رسیدن به حالت استاندارد نیازی به نظریهٔ اندازه ندارد. از سوی دیگر، این طور نیست که به آسانی به فضاهایی غیر از $\mathbb{R}^n$ تعمیم یابد. به رغم آنکه می‌توان آن را در جای مجرد دیگری توسعه داد، خیلی از سادگی خوشایند اینجا را از دست می‌دهد. به‌علاوه، علی‌رغم اینکه قبلاً نمی‌توانستیم انتگرال‌های همگرای مشروط را با یک روال حدگیری ساده از روی انتگرال‌های همگرای مطلق به‌دست آوریم اکنون در مسائل معینی این کار شدنی است اما فواید آن به‌قدر کافی تمام و کمال نیست که بدون مطالعهٔ حالت خاص به حالت کلی و قاطع بپردازیم.

در هرصورت، در این کتاب به انتگرال لبگ و نظریهٔ کلی اندازه و انتگرال که بخشی از آن است بسنده خواهیم کرد. خوانندگانی که می‌خواهند مطالب بیشتری در مورد انتگرال هنستوک ـ کورزویل بیاموزند می‌توانند مقدمه‌ای کوتاه را در بارتل [۱۳] و مطالب مفصل‌تری را در اِم سی لئود [۹۹] و پی فِفِر [۱۰۹] بیابند. برای تشریح انتگرال‌های دنجوی، پرون و هنستوک ـ کورزویل روی $[a,b]$ بهتر است گوردِن [۵۷] را ببینید. برای اطلاع از چگونگی شکل‌گیری نظریه در حالت بسیار مجرد بهتر است هنستوک [۷۲] را ببینید.

بند ۱ . ۲: یک **ایزومورفیسم برل** بین دو فضای اندازه‌پذیر $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ یک دوسویی مانند $f : X \to Y$ است به‌طوری‌که f^{-1} یک دوسویی از $\mathcal{N}$ به $\mathcal{M}$ است. بر خلاف مفهوم همیومورفیسم فضاهای توپولوژیک (فصل ۴) و مفاهیم ایزومورفیسم در رسته‌های گوناگون دیگر، مفهوم ایزومورفیسم برل ثمرات محدودی دارد زیرا ایزومورفیسم برل بودن دو فضا بسیار آسان رخ می‌دهد. صحت چنین چیزی حکایت از قضیه‌ای دارد که به کوراتوفسکی منسوب است:

> فرض کنیم $(X,\mathcal{M})$ با زیرمجموعهٔ برلی چون E از یک فضای متری جدایی‌پذیر کاملی چون Y (که مجهز به σـ جبر $\{f \in \mathcal{B}_Y : F \subset E\}$ است) ایزومورفیسم برل باشد. در این صورت یا X شمارش‌پذیر است و $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ یا X با $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ایزومورفیسم برل است.

برهانی از این قضیه و نیز اطلاعات بیشتری در مورد مجموعه‌های برل را می‌توان در اسریواستا [۱۳۹] یافت.

سلسله مراتبی از توابع اندازه‌پذیر برل روی یک فضای متری که تقریباً با سلسله مراتب مجموعه‌های برل (باز، بسته، F_σ و G_δ و غیره) متناظر است. به عبارت دیگر، فرض کنید B_0 فضای همهٔ توابع پیوسته باشد و برای هر اردینال شمارش‌پذیر مانند α، B_α را به‌طور استقرایی چنین تعریف کنید: اگر α مقدم بلافاصلی مثل β داشته باشد، B_α مجموعهٔ همهٔ حدود دنباله‌های همگرای نقطه‌ای در B_β است؛ در غیر این صورت $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. گفته می‌شود که توابع B_α از کلاس بئر α هستند. برای مثال، اگر f تابع همه‌جا مشتق‌پذیری روی $\mathbb{R}$ باشد، f' از کلاس بئر است.

تمرین ۱۱ حکمی از نخستین مقالهٔ منتشر شده توسط لبگ است. برای بحث در مورد آن، رودین [۱۲۳] را ببینید.

بند ۲ . ۳ : چشم‌پوشی از تفاوت بین توابع اندازه‌پذیر خاص و کلاس‌های هم‌ارزی توابع تعریف شده به صورت تساوی تقریباً همه‌جایی، اغلب موجب تسهیل کارها می‌شود و به‌ندرت مخرب است. مهمترین جایی که باید مراقب بود جایی است که تأثیر متقابل توابع اندازه‌پذیر و پیوسته (مثلاً روی $\mathbb{R}^n$) دخیل است زیرا تابعی که تقریباً همه‌جا با یک تابع پیوسته برابر است، درحالت کلی پیوسته نخواهد بود. شرح دقیقی از این نکته را در [۱۶۵] ببینید.

بند ۲ . ۴ : شرح جالبی از قضیهٔ ایگورف که متضمن برخی شرایط لازم و کافی برای همگرایی تقریباً یکنواخت است در بارتل [۱۲] یافت می‌شود. برای دسترسی به برهانی ساده از قضیهٔ لوزین (تمرین ۴۴) که مستقل از قضیهٔ ایگورف باشد، فلد من [۴۳] را ببینید. در بند ۲ . ۷ حالت کلی‌تری از این قضیه را ثابت خواهیم کرد.

بند ۲ . ۵ : قضایای اولیهٔ فوبینی و تونلی به اندازهٔ لبگ در صفحه مربوط می‌شوند. نظریهٔ اندازه‌های حاصلضربی مجرد به‌طور مستقل توسط چندین نفر در سال ۱۹۳۰ بنا نهاده شد؛ نحوهٔ ساختی از $\mu \times \nu$ که در این کتاب ارائه شد از آن هان [۶۰] است. یک اندازهٔ حاصلضربی نیز روی حاصلضرب خانواده‌ای نامتناهی مانند $\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ مرکب از فضاهای اندازه قابل تعریف است مشروط بر اینکه $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$ برای همه به جز تعدادی متناهی از αها برقرار باشد؛ ساکی [۱۲۷]، هالموس [بند ۳۸ از ۶۳] یا استرامبرگ [بند ۲۲ از ۷۶] را ببینید. نسخه‌ای از این حکم را در بند ۷ . ۴ خواهیم آورد (قضیهٔ ۷ . ۲۸).

با استفاده از اصل انتخاب و بدون به‌کارگیری فرضیهٔ پیوستار، سرپینسکی [۱۳۴] وجود زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ را ثابت کرد که اندازه‌پذیر لبگ نیست و مقطعش با هر خط راست حداکثر دو نقطه دارد. این موضوع بایستی با مرین [۴۷] (که آن را هم به سرپینسکی نسبت داده‌اند) مقایسه شود.

تعمیم زیرین از مفهوم اندازهٔ حاصلضربی بعضی جاها مفید واقع می‌شود: چنانچه فضای اندازه‌پذیری چون $(X, \mathcal{M})$، یک فضای σ- متناهی مانند $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ و خانواده‌ای چون $\{\mu_y : y \in Y\}$ از اندازه‌های متناهی روی X داده شود به‌طوری‌که تابع $y \mapsto \mu_y(E)$ برای هر $E \in \mathcal{M}$ روی Y اندازه‌پذیر باشد؛ می‌توان اندازه‌ای چون λ روی $X \times Y$ تعریف کرد به‌طوری‌که

$$\int f d\lambda = \iint f(x,y) d\mu_y(x) d\nu(y)$$

برای هر $f \in L^+(X \times Y)$ برقرار باشد. جانسون [۷۹] را ببینید.

بند ۲ . ۶ : برهانی که برای قضیهٔ ۲ . ۴۷ آورده‌ایم از جی. شوارتز [۱۳۱] است. این قضیه را با قدری مفروضات ضعیف‌تر روی G نیز می‌توان ثابت کرد؛ رودین [۱۲۵، قضیهٔ ۷ . ۲۶] را ببینید.

[illegible]

فصل سوم
اندازه‌های علامت دار و مشتق‌گیری

موضوع اصلی این فصل مفهوم مشتق اندازه‌ای مانند ν نسبت به اندازهٔ دیگری چون μ روی یک σـ جبر است. نخست این کار را در سطح مجرد انجام می‌دهیم، سپس در حالتی‌که μ اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$ است، نتیجه بسیار ظریفی به‌دست می‌آوریم. هنگامی‌که نتیجه به حالت $n = ۱$ منحصر می‌شود، به همراه نظریهٔ متغیر حقیقی کلاسیک نوعی از قضیهٔ اساسی حسابان برای انتگرال‌های لبگ تولید می‌شود. در بررسی این مسئله، تعمیم مفهوم اندازه مفید است مثلاً «اندازه‌ها می‌توانند مقادیر منفی یا حتی مقادیر مختلط بپذیرند». برای این کار سه دلیل وجود دارد. اولاً، درکاربردها، چنین «اندازه‌های علامت‌داری» می‌توانند مبین چیزهایی از قبیل بار الکتریکی باشند که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. دوماً، ورود به نظریهٔ مشتق به‌طور خیلی طبیعی و کلی‌تر انجام می‌شود. بالاخره اندازه‌های مختلط دارای یک مضمون تحلیلی- تابعی است که در فصل ۷ تشریح خواهد شد.

۳.۱ اندازه‌های علامت‌دار

فرض‌کنید $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازهٔ علامت‌دار روی $(X,\mathcal{M})$ تابعی چون $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty,\infty]$ است به قسمی‌که

- $\nu(\varnothing) = ۰$؛
- ν حداکثر یکی از مقادیر $\pm\infty$ را می‌پذیرد؛
- اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه

$$\nu\left(\bigcup_۱^\infty E_j\right) = \sum_۱^\infty \nu(E_j)$$

که در آن مجموع اخیر همگرای مطلق است هرگاه $\nu\left(\bigcup_۱^\infty E_j\right)$ متناهی باشد.

بنابر این هر اندازه یک اندازهٔ علامت‌دار است؛ گاهی برای تاکید از اندازه‌ها تحت عنوان **اندازه‌های مثبت** یاد خواهیم کرد. دو مثال از اندازه‌های علامت‌دار سریعاً به ذهن می‌رسد. نخست، اگر μ_1 و μ_2 دو اندازه روی $\mathcal{M}$ بوده و حداقل یکی از آنها متناهی باشد، آنگاه $\nu = \mu_1 - \mu_2$ یک اندازهٔ علامت‌دار است دوم، اگر μ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ باشد و $f : X \to [-\infty, \infty]$ تابعی باشد به‌قسمی‌که حداقل یکی از انتگرال‌های $\int f^+ d\mu$ و $\int f^- d\mu$ متناهی باشد (در این حالت f را **μـ انتگرال‌پذیر توسیع یافته** می‌نامیم)، آنگاه تابع مجموعهٔ ν که با $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف می‌شود یک اندازهٔ علامت‌دار است. در واقع، به‌طور خلاصه خواهیم دید که حقیقتاً همین مثال‌ها وجود دارند: هر اندازهٔ علامت‌دار را می‌توان به یکی از دو صورت فوق بیان کرد.

۳.۱ گزاره. فرض کنیم ν یک اندازهٔ علامت‌دار روی $(X, \mathcal{M})$ باشد. اگر $\{E_j\}$ یک دنباله در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$. اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای نزولی در $\mathcal{M}$ باشد و $\nu(E_1)$ متناهی باشد، آنگاه

$$\nu(\bigcap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$$

اساساً برهان همان برهان اندازه‌های مثبت است (قضیهٔ ۱.۸) و به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۱).

اگر ν یک اندازهٔ علامتدار روی $(X, \mathcal{M})$، مجموعه‌ای چون $E \in \mathcal{M}$ را مثبت (متناظراً، منفی، پوچ) نسبت به ν نامیم در صورتی‌که $\nu(F) \geq 0$ (متناظراً $\nu(F) \leq 0$، $\nu(F) = 0$) به ازای هر $F \in \mathcal{M}$ که $F \subset E$ باشد.

(بنابر این در مثال $\nu(E) = \int_E f d\mu$ که در فوق توصیف شد، E مثبت، منفی، پوچ است دقیقاً وقتی که $f \geq 0$، μـ ت. هـ. بر E)

۳.۲ لم. هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از یک مجموعهٔ مثبت، مثبت است و اجتماع هر خانوادهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های مثبت، مثبت می‌باشد.

برهان. حکم نخست از تعریف مثبت بودن واضح است. چنانچه $P_1, P_2, \ldots$ مجموعه‌هایی مثبت باشند، فرض کنید $Q_n = P_n \setminus \bigcup_1^{n-1} P_j$. در این صورت $Q_n \subset P_n$، پس Q_n مثبت است. از این رو اگر $E \subset \bigcup_1^\infty P_j$، آنگاه

$$\nu(E) = \sum_1^\infty \nu(E \cap Q_j) \geq 0$$

که همان مطلوب است. ■

۳.۳ قضیهٔ تجزیهٔ هان. چنانچه ν یک اندازهٔ علامت‌دار روی $(X, \mathcal{M})$ باشد، مجموعهٔ مثبتی چون P و مجموعه‌ای منفی مانند N نسبت به ν وجود دارد به‌قسمی‌که $P \cup N = X$ و $P \cap N = \varnothing$. اگر P', N' زوج دیگری با خاصیت مذکور باشد، آنگاه $P \Delta P' (= N \Delta N')$ نسبت به ν پوچ است.

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که ν مقدار $+\infty$ را نمی‌گیرد. (در غیر این صورت $-\nu$ را درنظر می‌گیریم.) فرض کنید m سوپرمم $\nu(E)$ باشد وقتی که E همهٔ مجموعه‌های مثبت را می‌پیماید؛ از این رو دنباله‌ای چون $\{P_j\}$ از مجموعه‌های مثبت هست که $\nu(P_j) \to m$ فرض کنید $P = \bigcup_1^\infty P_j$. بنابر لم ۳.۲ و گزارهٔ ۳.۱، P مثبت است و $\nu(P) = m$؛ به‌ویژه $m < \infty$. ادعا می‌کنیم که $N = X \setminus P$ منفی است. بدین منظور فرض می‌کنیم که N منفی نباشد و یک تناقض به‌دست می‌آوریم. اولاً، توجه کنید که N نمی‌تواند هیچ مجموعهٔ مثبت غیر پوچی را شامل شود. در واقع، اگر $E \subset N$ مثبت باشد و $\nu(E) > 0$، آنگاه $E \bigcup P$ مثبت است و $\nu(E \bigcup P) = \nu(E) + \nu(P) > m$ و این امکان‌پذیر نیست.

ثانیاً، اگر $A \subset N$ و $\nu(A) > 0$، آنگاه زیرمجموعه‌ای چون $B \subset A$ وجود دارد که $\nu(B) > \nu(A)$، در واقع، چون A نمی‌تواند مثبت باشد، $C \subset A$ای هست که $\nu(C) < 0$؛ لذا اگر $B = A \setminus C$، آنگاه داریم

$$\nu(B) = \nu(A) - \nu(C) > \nu(A).$$

اگر N منفی نباشد، آنگاه می‌توانیم به صورت زیر، دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\{A_j\}$ از N و دنباله‌ای مانند $\{n_j\}$ از اعداد صحیح مثبت مشخص کنیم: n_1 را کوچکترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که برای مجموعه‌ای چون $B \subset N$ داشته باشیم $\nu(B) > n_1^{-1}$ و A_1 را یکی از این مجموعه‌ها می‌گیریم. با روال استقرایی، n_j کوچکترین عدد صحیحی است که برای مجموعه‌ای چون $B \subset A_{j-1}$ داشته باشیم $\nu(B) > \nu(A_{j-1}) + n_j^{-1}$ و A_j یکی از این مجموعه‌ها است. قرار می‌دهیم $A = \bigcap_1^\infty A_j$ در این صورت $\infty > \nu(A) > \lim \nu(A_j) > \sum_1^\infty n_j^{-1}$، لذا $n_j \to \infty$ وقتی $j \to \infty$. اما باز هم $B \subset A$ای وجود دارد که به ازای عدد صحیحی چون n، $\nu(B) > \nu(A) + n^{-1}$. چنانچه j به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، داریم $n < n_j$ و $B \subset A_j$ که نحوهٔ ساخت n_j و A_j را نقض می‌کند. بنابر این، فرض اینکه N منفی نیست باطل است. بالاخره، اگر P', N' زوج دیگری باشد که در حکم قضیه صدق کند، داریم $P \setminus P' \subset P$ و $P \setminus P' \subset N'$، لذا $P \setminus P'$ هم مثبت و هم منفی است و در نتیجه پوچ می‌باشد؛ به‌طور مشابه $P' \setminus P$ نیز چنین است. ■

تجزیهٔ $X = P \bigcup N$ که در آن P یک مجموعهٔ مثبت و N یک مجموعهٔ منفی است **تجزیهٔ هان** برای ν نامیده می‌شود. معمولاً این تجزیه یکتا نیست (مجموعه‌های ν- پوچ می‌توانند از P به N یا N به P منتقل شوند)، اما تجزیهٔ هان منجر به نمایشی از ν به صورت تفاضل دو اندازهٔ مثبت می‌شود.

برای بیان این حکم به مفهوم جدیدی نیاز داریم: گوییم دو اندازهٔ علامت‌دار μ و ν بر $(X, \mathcal{M})$ **دو به دو منفرد** هستند یا ν نسبت به μ **منفرد** است یا برعکس، در صورتی که $E, F \in \mathcal{M}$ای وجود داشته باشند به قسمی که $E \bigcap F = \varnothing$، $E \bigcup F = X$، E نسبت به μ پوچ باشد و F نسبت به ν پوچ باشد. به بیان نادقیق، دو به دو منفرد بودن μ و ν به این معنا است که X به دو مجموعهٔ مجزای μ- پوچ و ν- پوچ افراز می‌شود. این رابطه را با علامت عمود بودن بیان می‌کنیم:

$$\mu \perp \nu.$$

۳.۴ قضیهٔ تجزیهٔ جردن. اگر ν یک اندازهٔ علامت‌دار باشد، اندازه‌های مثبت یکتایی چون ν^+ و ν^- وجود دارند به‌طوری که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$.

برهان. فرض کنید $X = P \bigcup N$ یک تجزیهٔ هان برای ν است و تعریف کنید:

$$\nu^+(E) = \nu(E \bigcap P), \nu^-(E) = -\nu(E \bigcap N).$$

در این صورت واضح است که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$. چنانچه $\nu = \mu^+ - \mu^-$ و $\mu^+ \perp \mu^-$، فرض می‌کنیم E و $F \in \mathcal{M}$ چنان باشند که $E \bigcap F = \varnothing$، $E \bigcup F = X$ و $\mu^+(F) = \mu^-(E) = \circ$. در این صورت $X = E \bigcup F$ تجزیهٔ هان دیگری برای ν است، لذا $P \triangle E$، νـ پوچ است. از این رو، به ازای هر $A \in \mathcal{M}$،

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$$

و به‌طور مشابه $\mu^- = \nu^-$. ■

اندازه‌های ν^+ و ν^- **تغییرات مثبت و منفی** ν نامیده می‌شوند و $\nu = \nu^+ - \nu^-$، بنابر تشابهٔ با نمایش یک تابع با تغییر کراندار بر $\mathbb{R}$ به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی، **تجزیهٔ جردن** ν نامیده می‌شود. (۳.۵ را ببینید). به‌علاوه **تغییر کل** ν را اندازهٔ $|\nu|$ تعریف می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

به آسانی معلوم می‌شود که $E \in \mathcal{M}$ یک مجموعهٔ νـ پوچ است اگر و فقط اگر $|\nu|(E) = \circ$ و $\nu \perp \mu$ اگر و فقط اگر $|\nu| \perp \mu$ اگر و تنها اگر $\nu^+ \perp \mu$ و $\nu^- \perp \mu$ (تمرین ۲).

ملاحظه می‌کنیم که اگر ν مقدار ∞ را نگیرد، آنگاه $\nu^+(X) = \nu(P) < \infty$، پس ν^+ یک اندازهٔ مثبت است و ν از بالا به $\nu^+(X)$ کراندار است؛ به‌طور مشابه اگر ν مقدار $-\infty$ را نگیرد چنین حکمی را داریم. به ویژه، اگر برد ν در $\mathbb{R}$ مشمول باشد، آنگاه ν کراندار است. همچنین مشاهده می‌کنیم که ν به شکل $\nu(E) = \int_E f d\mu$ است که در آن $\mu = |\nu|$، $f = \chi_P - \chi_N$ و $X = P \bigcup N$ یک تجزیهٔ هان برای ν می‌باشد.

انتگرال‌گیری نسبت به یک اندازهٔ علامت‌دار مانند ν به روش بدیهی تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \bigcap L^1(\nu^-),$$

$$\int f d\mu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \qquad (f \in L^1(\nu))$$

یک اصلاح مختصر: اندازهٔ علامت‌داری چون ν متناهی (متناظراً σـ متناهی) نامیده می‌شود هرگاه $|\nu|$ متناهی (متناظراً σـ متناهی) باشد.

فصل سوم
اندازه‌های علامت دار و مشتق گیری

موضوع اصلی این فصل مفهوم مشتق اندازه‌ای مانند ν نسبت به اندازهٔ دیگری چون μ روی یک σـ جبر است. نخست این کار را در سطح مجرد انجام می‌دهیم، سپس در حالتی‌که μ اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$ است، نتیجه بسیار ظریفی به‌دست می‌آوریم. هنگامی‌که نتیجه به حالت $n = 1$ منحصر می‌شود، به همراه نظریهٔ متغیر حقیقی کلاسیک نوعی از قضیهٔ اساسی حسابان برای انتگرال‌های لبگ تولید می‌شود. در بررسی این مسئله، تعمیم مفهوم اندازه مفید است مثلاً « اندازه‌ها می‌توانند مقادیر منفی یا حتی مقادیر مختلط بپذیرند». برای این کار سه دلیل وجود دارد. اولاً، درکاربردها، چنین « اندازه‌های علامت‌داری» می‌توانند مبین چیزهایی از قبیل بار الکتریکی باشند که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. دوماً، ورود به نظریهٔ مشتق به‌طور خیلی طبیعی و کلی‌تر انجام می‌شود. بالاخره اندازه‌های مختلط دارای یک مضمون تحلیلی- تابعی است که در فصل ۷ تشریح خواهد شد.

۳.۱ اندازه‌های علامت‌دار

فرض‌کنید $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازهٔ علامت‌دار روی $(X,\mathcal{M})$ تابعی چون $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty,\infty]$ است به قسمی‌که

- $\nu(\varnothing) = 0$؛
- ν حداکثر یکی از مقادیر $\pm\infty$ را می‌پذیرد؛
- اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه

$$\nu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$$

که در آن مجموع اخیر همگرای مطلق است هرگاه $\nu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right)$ متناهی باشد.

۱۶) فرض‌کنید μ و ν اندازه‌هایی σـ متناهی روی $(X,\mathcal{M})$ باشند که $\nu \ll \mu$، سپس قرار دهید $\lambda = \mu + \nu$. اگر $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$، آنگاه $0 \leq f < 1$ ت. ه و $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}$.

۱۷) فرض‌کنیم $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای σـ متناهی، $\mathcal{N}$ یک زیر σـ جبر از $\mathcal{M}$ باشد و $\nu = \mu|_{\mathcal{N}}$. فرض کنید ν نیز σـ متناهی است. (این فرض الزامی است: برای مثال μ را اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ و $\mathcal{N}$ را σـ جبر شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر از مجموعه‌ها بگیرید.) اگر $f \in L^1(\mu)$، آنگاه عضوی چون $g \in L^1(\nu)$ وجود دارد (لذا g، $\mathcal{N}$ـ اندازه پذیر است) به‌طوری‌که برای هر $E \in \mathcal{N}$، $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$؛ اگر g' تابع دیگری از این سنخ باشد، آنگاه $g = g'$ νـ ت. ه. (در نظریهٔ احتمال، g **امید شرطی** f روی $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.)

۳.۳ اندازه‌های مختلط

یک **اندازهٔ مختلط** روی فضای اندازه پذیری مانند $(X,\mathcal{M})$ نگاشتی چون $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ است به طوری که:

- $\nu(\varnothing) = 0$؛
- اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$، که در آن سری مذکور مطلقاً همگرا است.

بالاخص، مقادیر نامتناهی پذیرفتنی نیستند، لذا یک اندازهٔ مثبت فقط وقتی یک اندازهٔ مختلط است که متناهی باشد.

مثال: اگر μ اندازهٔ مثبتی باشد و $f \in L^1(\mu)$، آنگاه $fd\mu$ یک اندازهٔ مختلط است.

چنانچه ν یک اندازهٔ مختلط باشد، ν_r، ν_i به ترتیب به معانی بخش حقیقی و بخش موهومی ν هستند. بنابراین ν_r، ν_i اندازه های علامت داری هستند که مقادیر $\pm\infty$ را نمی گیرند؛ از این رو این دو اندازه متناهی هستند، و لذا برد ν زیر مجموعه بسته ای از $\mathbb{C}$ است.

نمادهایی که برای اندازه‌های علامت‌دار به‌کار بردیم به آسانی به اندازه‌های مختلط تعمیم می‌یابند. برای مثال، $L^1(\nu)$ را $L^1(\nu_r) \cap L^1(\nu_i)$ تعریف می‌کنیم و برای $f \in L^1(\nu)$ قرار می دهیم: $\int f d\nu = \int f d\nu_r + i \int f d\nu_i$. چنانچه ν و μ اندازه‌های مختلطی باشند، می‌گوییم $\nu \perp \mu$ هرگاه برای $a,b = r,i$، $\nu_a \perp \mu_b$ و اگر λ یک اندازهٔ مثبت باشد، می‌گوییم $\nu \ll \lambda$ هرگاه $\nu_r \ll \lambda$ و $\nu_i \ll \lambda$. قضایای بند ۳.۲ نیز تعمیم می‌یابند؛ فقط این قضایا به‌طور جداگانه برای بخش‌های حقیقی و موهومی به‌کار می‌روند. بالاخص:

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که ν مقدار $+\infty$ را نمی‌گیرد. (در غیر این صورت $-\nu$ را درنظر می‌گیریم.) فرض کنید m سوپرمم $\nu(E)$ باشد وقتی که E همهٔ مجموعه‌های مثبت را می‌پیماید؛ از این رو دنباله‌ای چون $\{P_j\}$ از مجموعه‌های مثبت هست که $\nu(P_j) \to m$ فرض کنید $P = \bigcup_1^\infty P_j$. بنابر لم ۳.۲ و گزارهٔ ۳.۱، P مثبت است و $\nu(P) = m$؛ به‌ویژه $m < \infty$. ادعا می‌کنیم که $N = X \setminus P$ منفی است. بدین منظور فرض می‌کنیم که N منفی نباشد و یک تناقض به‌دست می‌آوریم. اولاً، توجه کنید که N نمی‌تواند هیچ مجموعهٔ مثبت غیر پوچی را شامل شود. در واقع، اگر $E \subset N$ مثبت باشد و $\nu(E) > 0$، آنگاه $E \bigcup P$ مثبت است و $\nu(E \bigcup P) = \nu(E) + \nu(P) > m$ و این امکان‌پذیر نیست.

ثانیاً، اگر $A \subset N$ و $\nu(A) > 0$، آنگاه زیرمجموعه‌ای چون $B \subset A$ وجود دارد که $\nu(B) > \nu(A)$، در واقع، چون A نمی‌تواند مثبت باشد، $C \subset A$ای هست که $\nu(C) < 0$؛ لذا اگر $B = A \setminus C$، آنگاه داریم

$$\nu(B) = \nu(A) - \nu(C) > \nu(A).$$

اگر N منفی نباشد، آنگاه می‌توانیم به صورت زیر، دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\{A_j\}$ از N و دنباله‌ای مانند $\{n_j\}$ از اعداد صحیح مثبت مشخص کنیم: n_1 را کوچکترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که برای مجموعه‌ای چون $B \subset N$ داشته باشیم $\nu(B) > n_1^{-1}$ و A_1 را یکی از این مجموعه‌ها می‌گیریم. با روال استقرایی، n_j کوچکترین عدد صحیحی است که برای مجموعه‌ای چون $B \subset A_{j-1}$ داشته باشیم $\nu(B) > \nu(A_{j-1}) + n_j^{-1}$ و A_j یکی از این مجموعه‌ها است. قرار می‌دهیم $A = \bigcap_1^\infty A_j$. در این صورت $\infty > \nu(A) > \lim \nu(A_j) > \sum_1^\infty n_j^{-1}$، لذا $n_j \to \infty$ وقتی $j \to \infty$. اما باز هم $A \subset B$ای وجود دارد که به ازای عدد صحیحی چون n، $\nu(B) > \nu(A) + n^{-1}$. چنانچه j به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، داریم $n < n_j$ و $B \subset A_j$ که نحوهٔ ساخت n_j و A_j را نقض می‌کند. بنابر این، فرض اینکه N منفی نیست باطل است. بالاخره، اگر P', N' زوج دیگری باشد که در حکم قضیه صدق کند، داریم $P \setminus P' \subset P$ و $P \setminus P' \subset N'$، لذا $P \setminus P'$ هم مثبت و هم منفی است و در نتیجه پوچ می‌باشد؛ به‌طور مشابه $P \setminus P'$ نیز چنین است. ■

تجزیهٔ $X = P \bigcup N$ که در آن P یک مجموعهٔ مثبت و N یک مجموعهٔ منفی است **تجزیهٔ هان** برای ν نامیده می‌شود. معمولاً این تجزیه یکتا نیست (مجموعه‌های ν- پوچ می‌توانند از P به N یا N به P منتقل شوند)، اما تجزیهٔ هان منجر به نمایشی از ν به صورت تفاضل دو اندازهٔ مثبت می‌شود.

برای بیان این حکم به مفهوم جدیدی نیاز داریم: گوییم دو اندازهٔ علامت‌دار μ و ν بر $(X, \mathcal{M})$ **دو به دو منفرد** هستند یا ν نسبت به μ **منفرد** است یا برعکس، در صورتی که $E, F \in \mathcal{M}$ای وجود داشته باشند به قسمی که $E \bigcap F = \varnothing$، $E \bigcup F = X$، E نسبت به μ پوچ باشد و F نسبت به ν پوچ باشد. به بیان نادقیق، دو به دو منفرد بودن μ و ν به این معنا است که X به دو مجموعهٔ مجزای μ- پوچ و ν- پوچ افراز می‌شود. این رابطه را با علامت عموم بودن بیان می‌کنیم:

$$\mu \perp \nu.$$

۳.۴ قضیهٔ تجزیهٔ جردن. اگر ν یک اندازهٔ علامت‌دار باشد، اندازه‌های مثبت یکتایی چون ν^+ و ν^- وجود دارند به‌طوری‌که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$.

برهان. فرض کنید $X = P \bigcup N$ یک تجزیهٔ هان برای ν است و تعریف کنید:

$$\nu^+(E) = \nu(E \bigcap P), \nu^-(E) = -\nu(E \bigcap N).$$

در این صورت واضح است که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$. چنانچه $\nu = \mu^+ - \mu^-$ و $\mu^+ \perp \mu^-$ فرض می‌کنیم E و $F \in \mathcal{M}$ چنان باشند که $E \bigcap F = \varnothing$، $E \bigcup F = X$ و $\mu^+(F) = \mu^-(E) = 0$. در این صورت $X = E \bigcup F$ تجزیهٔ هان دیگری برای ν است، لذا $P \triangle E$، νـ پوچ است. از این رو، به ازای هر $A \in \mathcal{M}$،

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$$

و به‌طور مشابه $\nu^- = \mu^-$. ■

اندازه‌های ν^+ و ν^- **تغییرات مثبت و منفی** ν نامیده می‌شوند و $\nu = \nu^+ - \nu^-$، بنابر تشابهٔ با نمایش یک تابع با تغییر کراندار بر $\mathbb{R}$ به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی، **تجزیهٔ جردن** ν نامیده می‌شود. (۳.۵ را ببینید). به‌علاوه **تغییر کل** ν را اندازهٔ $|\nu|$ تعریف می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

به آسانی معلوم می‌شود که $E \in \mathcal{M}$ یک مجموعهٔ νـ پوچ است اگر و فقط اگر $|\nu|(E) = 0$ و $\nu \perp \mu$ اگر و فقط اگر $|\nu| \perp \mu$ اگر و تنها اگر $\nu^+ \perp \mu$ و $\nu^- \perp \mu$ (تمرین ۲).

ملاحظه می‌کنیم که اگر ν مقدار ∞ را نگیرد، آنگاه $\nu^+(X) = \nu(P) < \infty$، پس ν^+ یک اندازهٔ مثبت است و ν از بالا به $\nu^+(X)$ کراندار است؛ به‌طور مشابه اگر ν مقدار $-\infty$ را نگیرد چنین حکمی را داریم. به ویژه، اگر برد ν در $\mathbb{R}$ مشمول باشد، آنگاه ν کراندار است. همچنین مشاهده می‌کنیم که ν به شکل $\nu(E) = \int_E f d\mu$ است که در آن $\mu = |\nu|$، $f = \chi_P - \chi_N$ و $X = P \bigcup N$ یک تجزیهٔ هان برای ν می‌باشد.

انتگرال‌گیری نسبت به یک اندازهٔ علامت‌دار مانند ν به روش بدیهی تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \bigcap L^1(\nu^-),$$

$$\int f d\mu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \qquad (f \in L^1(\nu))$$

یک اصلاح مختصر: اندازهٔ علامت‌داری چون ν متناهی (متناظراً σ ـ متناهی) نامیده می‌شود هرگاه $|\nu|$ متناهی (متناظراً σـ متناهی) باشد.

تمرین‌ها

۱) گزارهٔ ۳.۱ را ثابت کنید.

۲) چنانچه ν یک اندازهٔ علامت‌دار باشد، E یک مجموعهٔ ν پوچ است اگر و فقط اگر $|\nu|(E)=0$ همچنین اگر ν و μ دو اندازهٔ علامت‌دار باشند، $\nu \perp \mu$ اگر و فقط اگر $|\nu| \perp \mu$ اگر و فقط اگر $\nu^+ \perp \mu$ و $\nu^- \perp \mu$.

۳) فرض کنید ν یک اندازهٔ علامتدار روی $(X,\mathcal{M})$ است.

الف) $L^1(\nu)=L^1(|\nu|)$.

ب) اگر $f\in L^1(\nu)$، آنگاه $\left|\int f d\mu\right| \le \int |f| d|\nu|$.

ج) چنانچه $E\in\mathcal{M}$، $|\nu|(E)=\sup\left\{\left|\int_E f d\nu\right| : |f|\le 1\right\}$.

٤) اگر ν یک اندازهٔ علامتدار باشد و λ و μ اندازه‌هایی مثبت باشند به قسمی‌که $\nu=\lambda-\mu$، آنگاه $\lambda \ge \nu^+$ و $\mu \ge \nu^-$.

٥) اگر ν_1 و ν_2 دو اندازهٔ علامت‌دار باشند که هر دوی آنها $+\infty$ یا $-\infty$ نشوند، آنگاه $|\nu_1+\nu_2| \le |\nu_1| + |\nu_2|$ (از تمرین ۴ استفاده کنید).

٦) فرض‌کنید $\nu(E)=\int_E f d\mu$ که در آن μ یک اندازهٔ مثبت و f یک تابع μـ انتگرال‌پذیر توسیع یافته است. تجزیهٔ هان ν، تغییرات مثبت، منفی و کلی ν را برحسب f و μ بیان کنید.

۷) فرض‌کنید ν یک اندازهٔ علامت‌دار روی $(X,\mathcal{M})$ باشد و $E\in\mathcal{M}$.

الف) $\nu^+(E)=\sup\{\nu(F) : E\in\mathcal{M}, F\subset E\}$ و $\nu^-(E)=-\inf\{\nu(F) : F\in\mathcal{M}, F\subset E\}$.

ب) $|\nu|(E)=\sup\left\{\sum_1^n |\nu(E_j)| : n\in\mathbb{N}\right.$ و $E_1,\dots,E_n$ جدا ازهم هستند $\left., \bigcup_1^n E_j = E\right\}$.

۳.۲ قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم

فرض کنید که ν یک اندازهٔ علامتدار و μ یک اندازهٔ مثبت روی $(X,\mathcal{M})$ است. گوییم ν نسبت به μ پیوستهٔ مطلق است و می‌نویسیم $\nu \ll \mu$ هرگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ که $\mu(E) = 0$، داشته باشیم $\nu(E) = 0$. به آسانی معلوم می‌شود که $\nu \ll \mu$ اگر و فقط اگر $|\nu| \ll \mu$ اگر و فقط اگر $\nu^+ \ll \mu$ و $\nu^- \ll \mu$ (تمرین ۸).
به مفهومی، پیوستگی مطلق نقطهٔ مقابل دو به دو منفرد بودن است. به طور دقیق‌تر، اگر $\nu \perp \mu$ و $\nu \ll \mu$، آنگاه $\nu = 0$، زیرا اگر E و F دو مجموعهٔ مجزا باشند به قسمی‌که $E \bigcup F = X$ و $\mu(E) = |\nu|(E) = 0$، آنگاه فرض $\nu \ll \mu$ ایجاب می‌کندکه $|\nu|(E) = 0$، که از آن نتیجه می‌شود $|\nu| = 0$ و لذا $\nu = 0$. می‌توان مفهوم پیوستگی مطلق را به حالتی‌که μ یک اندازهٔ علامت‌دار است توسعه داد (یعنی، $\nu \ll \mu$ اگر و فقط $\nu \ll |\mu|$)، اما به این تعریف بسیار کلی نیازی نخواهیم داشت. واژهٔ «پیوستگی مطلق» از نظریهٔ متغیر حقیقی برگرفته شده است؛ ۳.۵ را ببینید.
برای اندازه‌های علامتدار متناهی، پیوستگی مطلق با شرط دیگری معادل است که به وضوح شکلی از پیوستگی می‌باشد.

۳.۵ قضیه. فرض کنید ν یک اندازهٔ علامتدار متناهی و μ یک اندازهٔ مثبت روی $(X,\mathcal{M})$ است. دراین صورت $\nu \ll \mu$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $\mu(E) < \delta$، آنگاه $|\nu(E)| < \varepsilon$.

برهان. چون $\nu \ll \mu$ اگر و فقط اگر $|\nu| \ll \mu$ و $|\nu(E)| \le |\nu|(E)$، کافی است فرض کنیم که $\nu = |\nu|$ مثبت است. به وضوح شرط εـδ ایجاب می‌کند که $\nu \ll \mu$. از سوی دیگر، اگر شرط εـδ برقرار نباشد، عددی مانند $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، می توانیم عضوی مانند $E_n \in \mathcal{M}$ بیابیم که $\mu(E_n) < 2^{-n}$ و $\nu(E_n) \ge \varepsilon$. فرض کنید $F_k = \bigcup_k^\infty E_n$ و $F = \bigcap_1^\infty F_k$. دراین صورت $\mu(F_k) < \sum_k^\infty 2^{-n} = 2^{1-k}$، لذا $\mu(F) = 0$؛ اما به ازای همهٔ kها، $\nu(F_k) \ge \varepsilon$ و لذا به دلیل متناهی بودن ν، $\nu(F) = \lim \nu(F_k) \ge \varepsilon$. بنابراین $\nu \ll \mu$ نادرست است. ■

چنانچه μ یک اندازه و f یک تابع μـ انتگرال‌پذیر توسیع یافته باشد، تابع علامت‌دار ν که با $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف می‌شود به وضوح نسبت به μ پیوستهٔ مطلق است؛ این اندازه متناهی است اگر و فقط اگر $f \in L^1(\mu)$. به ازای هر تابع مختلط مانند $f \in L^1(\mu)$ می‌توان قضیهٔ قبل را در مورد $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ به کار گرفته و نتیجه مفید زیر را به دست آورد:

۳.۶ نتیجه. اگر $f \in L^1(\mu)$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $\mu(E) < \delta$ آنگاه $\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$. برای بیان رابطهٔ $\nu(E) = \int_E f d\mu$ از رابطهٔ زیر استفاده خواهیم کرد:

$$d\nu = fd\mu.$$

گاهی با کمی اغماض، از « اندازهٔ علامت‌دار $fd\mu$ » سخن به میان خواهیم آورد.

اکنون به قضیهٔ اصلی این بخش می‌رسیم که تصویر کامل از ساختار یک اندازهٔ علامت‌دار مرتبط با یک اندازهٔ مثبت مفروض، به‌دست می‌دهد. نخست یک لم تکنیکی می‌آوریم:

۳.۷ لم. فرض کنید ν و μ دو اندازهٔ متناهی روی $(X,\mathcal{M})$ باشند. $\nu \perp \mu$ یا $\varepsilon > 0$ای و $E \in \mathcal{M}$ای وجود دارند به‌طوری که $\mu(E) > 0$ و $\nu \geq \varepsilon\mu$ (یعنی، E یک مجموعهٔ مثبت برای $\nu - \varepsilon\mu$ است).

برهان. فرض‌کنیم $X = P_n \cup N_n$ یک تجزیهٔ هان برای $\nu - n^{-1}\mu$ باشد و $P = \bigcup_1^\infty P_n$ و

$$N = \bigcap_1^\infty N_n = P^c.$$

در این صورت برای هر n، N یک مجموعه منفی برای $\nu - n^{-1}\mu$ است، یعنی برای هر n، $0 \leq \nu(N) \leq n^{-1}\mu(N)$، لذا $\nu(N) = 0$. اگر $\mu(P) = 0$، آنگاه $\nu \perp \mu$. اگر $\mu(P) > 0$، آنگاه به ازای nای، $\mu(P_n) > 0$ و P_n یک مجموعهٔ مثبت برای $\nu - n^{-1}\mu$ است. ■

۳.۸ قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم. فرض‌کنید ν یک اندازهٔ علامتدار σـ متناهی و μ یک اندازهٔ σـ متناهی روی $(X,\mathcal{M})$ باشد. دو اندازهٔ علامتدار σـ متناهی یکتا مانند λ و ρ روی $(X,\mathcal{M})$ وجود دارند به‌طوری که

$$\lambda \perp \mu, \qquad \rho \ll \mu, \qquad \nu = \lambda + \rho.$$

به‌علاوه، یک تابع μـ انتگرال‌پذیر توسیع یافته مانند $f : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $d\rho = fd\mu$ و هر دو تابع از این قبیل μـ ت.هـ با هم برابرند.

برهان. حالت I: فرض‌کنید ν و μ دو اندازهٔ مثبت متناهی باشند. قرار دهید:

$$\mathcal{F} = \left\{f : X \to [0,\infty] : \int_E fd\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{M}\right\}.$$

$\mathcal{F}$ ناتهی است زیرا $0 \in \mathcal{F}$. همچنین، اگر $f, g \in \mathcal{F}$، آنگاه $h = \max(f,g) \in \mathcal{F}$، زیرا اگر

$$A = \{x : f(x) > g(x)\}$$

آنگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ داریم

$$\int_E hd\mu = \int_{E\cap A} fd\mu + \int_{E\setminus A} gd\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) = \nu(E).$$

قرار دهید $a = \sup\{\int fd\mu : f \in \mathcal{F}\}$ و توجه کنید که $a \leq \nu(X) < \infty$ و دنباله‌ای چون $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ را چنان انتخاب کنید که $\int f_n d\mu \to a$. فرض‌کنید $g_n = \max(f_1,\dots,f_n)$ و $f = \sup_n f_n$. در این صورت $g_n \in \mathcal{F}$،

g_n نقطه به نقطه و به طور صعودی به f می‌گراید و $\int g_n d\mu \geq \int f_n d\mu$. نتیجه می‌گیریم $\lim \int g_n d\mu = a$ و از این رو، طبق قضیهٔ همگرایی یکنوا $f \in \mathcal{F}$ و $\int f d\mu = a$ (به ویژه $f < \infty$ تقریباً همه جا). پس می‌توان فرض کرد که f همه جا حقیقی ـ مقدار است). ادعا می‌کنیم اندازهٔ $d\lambda = d\nu - f d\mu$ (که مثبت است زیرا $f \in \mathcal{F}$) نسبت به μ منفرد است. اگر چنین نباشد، بنابر لم ۳.۷ عضوی چون $E \in \mathcal{M}$ و $\varepsilon > 0$ای موجودند به‌طوری‌که $\mu(E) > 0$ و $\lambda \geq \varepsilon\mu$ بر E. اما در این صورت $\varepsilon\chi_E\, d\mu \leq d\lambda = d\nu - f d\mu$، یعنی $(f + \varepsilon\chi_E) d\mu \leq d\nu$، پس $f + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$ لذا

$$\int (f + \varepsilon\chi_E) d\mu = a + \varepsilon\mu(E) > a$$

و این با تعریف a در تناقض است.

بنابر این، وجود λ، f و $d\rho = f d\mu$ اثبات شده است. در مورد یکتایی گوییم، چنانچه $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$ داریم $d\lambda - d\lambda' = (f' - f) d\mu$. اما $\lambda - \lambda' \perp \mu$ (تمرین ۹)، درحالی‌که

$$(f' - f) d\mu \ll d\mu.$$

بنابر این $d\lambda - d\lambda' = (f' - f) d\mu = 0$، پس $\lambda = \lambda'$ و (بنابر گزارهٔ ۳.۲۳) $f = f'$ (μ ـ ت. ه). از این رو در حالتی که μ و ν اندازه‌هایی متناهی هستند به حکم رسیده‌ایم.

حالت II: فرض کنید μ و ν دو اندازهٔ σـ متناهی هستند. در این صورت X اجتماع شمارش‌پذیر مجزایی از مجموعه‌های μـ متناهی و اجتماع شمارش‌پذیر مجزایی از مجموعه‌های νـ متناهی است؛ با اشتراک گرفتن از این‌ها دنباله‌ای مجزا مانند $\{A_j\} \subset \mathcal{M}$ به‌دست می‌آوریم به قسمی‌که به ازای همهٔ jها $\mu(A_j)$ و $\nu(A_j)$ متناهی‌اند و $X = \bigcup_1^\infty A_j$. تعریف کنید $\mu_j(E) = \mu(E \cap A_j)$ و $\nu_j(E) = \nu(E \cap A_j)$. با استدلال فوق به ازای هر j داریم:

$$d\nu_j = d\lambda_j + f_j d\mu_j$$

که در آن $\lambda_j \perp \mu_j$. چون $\mu_j(A_j^c) = \nu_j(A_j^c) = 0$ داریم

$$\lambda_j(A_j^c) = \nu_j(A_j^c) - \int_{A_j^c} f_j d\mu_j = 0$$

پس می‌توان فرض کرد که $f_j = 0$ بر A_j^c. فرض کنید $\lambda = \sum_1^\infty \lambda_j$ و $f = \sum_1^\infty f_j$. در این صورت $d\nu = d\lambda + f d\mu$، $\lambda \perp \mu$ (تمرین ۹) و $d\lambda$ و $f d\mu$ هر دو $\sigma-$متناهی هستند که همان مطلوب است. یکتا مانند قبل نتیجه می‌شود.

حالت کلی: اگر ν یک اندازهٔ علامت‌دار باشد، استدلال قبل را در مورد ν^+ و ν^- به‌کار برده و حاصل‌ها را تفریق می‌کنیم. ■

تجزیهٔ $\nu = \lambda + \rho$ که در آن $\lambda \perp \mu$ و $\rho \ll \mu$، تجزیهٔ لبگ ν نسبت به μ نامیده می‌شود. درحالتی که $\nu \ll \mu$، قضیهٔ ۳.۸ می‌گوید که به ازای fای $d\nu = f d\mu$.

اغلب این نتیجه به قضیهٔ رادون ـ نیکودیوم معروف است، و f **مشتق رادون ـ نیکودیوم** ν نسبت به μ نامیده می‌شود.

این مشتق را با $\frac{d\nu}{d\mu}$ نشان می‌دهیم:

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

فرمول‌های پیش‌بینی شده برای نماد مشتق $\frac{d\nu}{d\mu}$ عموماً درست هستند. برای مثال، واضح است که

$$\frac{d(\nu_۱ + \nu_۲)}{d\mu} = (\frac{d\nu_۱}{d\mu}) + (\frac{d\nu_۲}{d\mu})$$

و قاعده زنجیری را داریم:

۳.۹ گزاره. فرض کنید که ν یک اندازهٔ علامت‌دار σـ متناهی و μ و λ دو اندازهٔ σـ متناهی روی $(X, \mathcal{M})$ به‌طوری‌که $\nu \ll \mu$ و $\mu \ll \lambda$.

الف) اگر $g \in L^۱(\nu)$، آنگاه $g(\frac{d\nu}{d\mu}) \in L^۱(\nu)$ و $\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$.

ب) داریم $\nu \ll \mu$ و

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \qquad (\lambda\text{ـ ت.ه}).$$

برهان. باجداگانه درنظر گرفتن ν^+ و ν^-، می‌توانیم فرض کنیم که $\nu \geq ۰$. بنابر تعریف $\frac{d\nu}{d\mu}$، هنگامی‌که $g = \chi_E$، تساوی $\int g d\nu = \int g(\frac{d\nu}{d\mu})d\mu$ درست است. بنابر این طبق خطی بودن انتگرال، این تساوی برای توابع ساده نیز درست است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا برای توابع اندازه‌پذیر درست است و بالاخره باز هم بنابر خطی بودن انتگرال، برای توابع واقع در $L^۱(\nu)$ نیز درست است.

با جایگزینی μ و λ به‌جای ν و μ و با قرار دادن $g = \chi_E(\frac{d\nu}{d\mu})$ برای هر $E \in \mathcal{M}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}d\lambda$$

که در آن بنابر گزارهٔ ۲۳.۲.۲، λـ ت.ه داریم

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}.\blacksquare$$

۳.۱۰ نتیجه. اگر $\lambda \ll \mu$ و $\mu \ll \lambda$، آنگاه ت.ه (نسبت به λ یا μ)

$$(\frac{d\lambda}{d\mu})(\frac{d\mu}{d\lambda}) = ۱.$$

مثال نقض: فرض کنید μ اندازهٔ لبگ و ν جرم نقطه‌ای در O روی $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ باشد. به وضوح $\nu \perp \mu$. معمولاً عدم وجود مشتق رادون ـ نیکودیوم $\frac{d\nu}{d\mu}$ تحت عنوان σـ تابع دیراک مشهور است.

این بخش را ملاحظه‌ای ساده اما مهم به پایان می‌رسانیم:

۳.۱۱ قضیه. اگر $\mu_۱, ..., \mu_n$ چند اندازه روی $(X, \mathcal{M})$ باشند، اندازه‌ای چون μ موجود است به قسمی‌که به ازای هر μ_j، $\mu_j \ll \mu$ (در واقع $\mu = \sum_۱^n \mu_j$).

برهان بدیهی است.

تمرین‌ها

۸) $\nu \ll \mu$ اگر و فقط اگر $|\nu| \ll \mu$ اگر و فقط اگر $\nu^+ \ll \mu$ و $\nu^- \ll \mu$.

۹) فرض کنید $\{\nu_j\}$ دنباله‌ای از اندازه‌های مثبت باشد. اگر به ازای همهٔ jها $\nu_j \perp \mu$، آنگاه $\sum_۱^\infty \nu_j \perp \mu$ و اگر به ازای هر j داشته باشیم $\nu_j \ll \mu$، آنگاه $\sum_۱^\infty \nu_j \ll \mu$.

۱۰) وقتی ν متناهی نیست ممکن است قضیهٔ ۳ . ۵ غلط باشد. ($d\nu(x) = \frac{dx}{x}$ و $d\mu(x) = dx$ روی $(۰,۱)$ را درنظر بگیرید یا: اندازهٔ شمارشی $= \nu$ و $\mu(E) = \sum_{n \in E} ۲^{-n}$ روی $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید).

۱۱) فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت است. گردایه‌ای چون $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq L^۱(\mu)$ **انتگرال‌پذیر یکنواخت** نامیم درصورتی که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $\mu(E) < \delta$ به ازای هر $\alpha \in A$ داشته باشیم

$$\left|\int_E f_\alpha d\mu\right| < \varepsilon$$

الف) هر زیرمجموعهٔ متناهی از $L^۱(\mu)$ انتگرال‌پذیر یکنواخت است.

ب) اگر $\{f_n\}$ دنباله ای در $L^۱(\mu)$ باشد که بامتر $L^۱$ به $f \in L^۱(\mu)$ همگرا باشد، آنگاه $\{f_n\}$ انتگرال‌پذیر یکنواخت است.

۱۲) به ازای $j = ۱,۲$ فرض کنید μ_j, ν_j دو اندازهٔ متناهی روی $(X_j, \mathcal{M}_j)$ باشند به قسمی که $\nu_j \ll \mu_j$. در این صورت $\nu_۱ \times \nu_۲ \ll \mu_۱ \times \mu_۲$ و

$$\frac{d(\nu_۱ \times \nu_۲)}{d(\mu_۱ \times \mu_۲)}(x_۱, x_۲) = \frac{d\nu_۱}{d\mu_۱}(x_۱)\frac{d\nu_۲}{d\mu_۲}(x_۲).$$

۱۳) فرض کنیم $X = [۰,۱]$، $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[۰,۱]}$، m اندازهٔ لبگ و μ اندازهٔ شمارشی روی $\mathcal{M}$ باشد.

الف) $m \ll \mu$ اما به ازای هر f، $dm \neq f d\mu$.

ب) μ دارای تجزیهٔ لبگ نسبت به m نیست.

۱۴) اگر ν اندازهٔ علامت‌دار دل‌خواهی باشد و μ یک اندازهٔ σـ متناهی روی $(X, \mathcal{M})$ به‌قسمی‌که $\nu \ll \mu$، آنگاه تابع μـ انتگرال‌پذیر توسیع یافته‌ای مانند $f : X \to [-\infty, \infty]$ وجود دارد به‌طوری‌که $d\nu = f d\mu$. راهنمایی‌ها:

الف) کافی است فرض شود که μ متناهی و ν مثبت است.

ب) با این مفروضات، عضوی مانند E از $\mathcal{M}$ وجود دارد که نسبت به ν، σـ متناهی است به طوری که برای همه مجموعه های F که نسبت به ν، σـ متناهی هستند، $\mu(E) \geq \mu(F)$.

ج) قضیه رادون نیکودیوم را روی E به کار برید. اگر $E \cap F = \varnothing$، آنگاه یا $\nu(F) = \mu(F) = ۰$ یا $\mu(F) > ۰$ و $|\nu(F)| = \infty$.

۱۵) اندازه ای چون μ روی $(X, \mathcal{M})$ **تجزیه‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه خانواده‌ای مانند $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ با خواص زیر وجود داشته باشد:

(i) برای هر $F \in \mathcal{F}$، $\mu(F) < \infty$؛ (ii) اعضای $\mathcal{F}$ مجزا هستندو اجتماعشان X است. (iii) اگر $\mu(E) < \infty$، آنگاه $\mu(E) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(E \cap F)$؛ (iv) اگر $E \subset X$ و برای هر $F \in \mathcal{F}$، $E \cap F \in \mathcal{M}$، آنگاه $E \in \mathcal{M}$.

الف) هر اندازهٔ σـ متناهی، تجزیه‌پذیر است.

ب) چنانچه μ تجزیه پذیر و ν اندازهٔ علامت‌دار دل‌خواهی روی $(X, \mathcal{M})$ باشد به‌طوری‌که $\nu \ll \mu$، تابع اندازه‌پذیری چون $f : X \to [-\infty, \infty]$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر E که نسبت به μ، σـ متناهی باشد، $\nu(E) = \int_E f d\mu$ و روی هر $F \in \mathcal{F}$ که نسبت به ν، σـ متناهی باشد، $|f| < \infty$.

(در صورت σـ متناهی نبودن ν از تمرین ۱۴ استفاده کنید.)

۱۶) فرض کنید μ و ν اندازه‌هایی σـ متناهی روی $(X,\mathcal{M})$ باشند که $\nu \ll \mu$، سپس قرار دهید $\lambda = \mu + \nu$. اگر $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$، آنگاه $0 \leq f < 1$ ت. ه و $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}$.

۱۷) فرض کنیم $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای σـ متناهی، $\mathcal{N}$ یک زیر σـ جبر از $\mathcal{M}$ باشد و $\nu = \mu|_{\mathcal{N}}$. فرض کنید ν نیز σـ متناهی است. (این فرض الزامی است: برای مثال μ را اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ و $\mathcal{N}$ را σـ جبر شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر از مجموعه‌ها بگیرید.) اگر $f \in L^1(\mu)$، آنگاه عضوی چون $g \in L^1(\nu)$ وجود دارد (لذا g، $\mathcal{N}$ـ اندازه‌پذیر است) به‌طوری‌که برای هر $E \in \mathcal{N}$، $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$؛ اگر g' تابع دیگری از این سنخ باشد، آنگاه $g = g'$ νـ ت. ه. (در نظریهٔ احتمال، g امید شرطی f روی $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.)

۳.۳ اندازه‌های مختلط

یک **اندازهٔ مختلط** روی فضای اندازه پذیری مانند $(X,\mathcal{M})$ نگاشتی چون $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ است به طوری که:

- $\nu(\varnothing) = 0$؛
- اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$، که در آن سری مذکور مطلقاً همگرا است.

بالاخص، مقادیر نامتناهی پذیرفتنی نیستند، لذا یک اندازهٔ مثبت فقط وقتی یک اندازهٔ مختلط است که متناهی باشد.

مثال: اگر μ اندازهٔ مثبتی باشد و $f \in L^1(\mu)$، آنگاه $fd\mu$ یک اندازهٔ مختلط است.

چنانچه ν یک اندازهٔ مختلط باشد، ν_r, ν_i به ترتیب به معانی بخش حقیقی و بخش موهومی ν هستند. بنابراین ν_r, ν_i اندازه های علامت داری هستند که مقادیر $\pm\infty$ را نمی گیرند؛ از این رو این دو اندازه متناهی هستند و لذا برد ν زیر مجموعه بسته ای از $\mathbb{C}$ است.

نمادهایی که برای اندازه‌های علامت‌دار به‌کار بردیم به آسانی به اندازه‌های مختلط تعمیم می‌یابند. برای مثال، $L^1(\nu)$ را $L^1(\nu_r) \cap L^1(\nu_i)$ تعریف می‌کنیم وبرای $f \in L^1(\nu)$ قرار می دهیم: $\int f d\nu = \int f d\nu_r + i \int f d\nu_i$. چنانچه ν و μ اندازه‌های مختلطی باشند، می‌گوییم $\nu \perp \mu$ هرگاه برای $a,b = r,i$، $\nu_a \perp \mu_b$ و اگر λ یک اندازهٔ مثبت باشد، می‌گوییم $\nu \ll \lambda$ هرگاه $\nu_r \ll \lambda$ و $\nu_i \ll \lambda$. قضایای بند ۲.۳ نیز تعمیم می‌یابند؛ فقط این قضایا به‌طور جداگانه برای بخش‌های حقیقی و موهومی به‌کار می‌روند. بالاخص:

۳.۱۲ قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم. اگر ν یک اندازهٔ مختلط و μ اندازهٔ σـ متناهی مثبتی روی $(X,\mathcal{M})$ باشد، آنگاه اندازهٔ مختلطی مانند λ و تابعی چون $f \in L^1(\mu)$ وجود دارد به طوری که $\lambda \perp \mu$ و $d\nu = d\lambda + fd\mu$. اگر افزون بر مفروضات فوق، $\lambda' \perp \mu$ و $d\nu = d\lambda' + f'd\mu$، آنگاه $\lambda = \lambda'$ و $f = f'$، μـ ت. ه.

مانند قبل، هرگاه $\nu \ll \mu$، تابع f ای که در قضیه ۳.۱۲ ذکر شد با نماد $\frac{d\nu}{d\mu}$ نشان داده می شود.

تغییر کل اندازهٔ مختلطی چون ν، اندازهٔ مثبت $|\nu|$ است و با این خاصیت مشخص می‌شود که اگر $d\nu = fd\mu$ که در آن μ یک اندازهٔ مثبت است، آنگاه $d|\nu| = |f|d\mu$. برای اطمینان از خوشتعریفی $|\nu|$، اولاً ملاحظه می کنیم که هر ν به ازای اندازه ای چون μ و تابعی مانند $f \in L^1(\mu)$ به شکل $fd\mu$ است؛ در واقع، می‌توانیم μ را $|\nu_r| + |\nu_i|$ بگیریم و برای به دست آوردن f از قضیهٔ ۳.۱۲ استفاده کنیم. ثانیاً، اگر $d\nu = f_1d\mu_1 = f_2d\mu_2$، فرض می‌کنیم $\rho = \mu_1 + \mu_2$. در این صورت بنابر قضیهٔ ۳.۹،

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = d\nu = f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho,$$

لذا $f_1(\frac{d\mu_1}{d\rho}) = f_2(\frac{d\mu_2}{d\rho})$، ρـ ت. ه. حال چون $\frac{d\mu_j}{d\rho}$ نامنفی است، داریم:

$$|f_1|\frac{d\mu_1}{d\rho} = \left|f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho}\right| = \left|f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho}\right| = |f_2|\frac{d\mu_2}{d\rho} \quad (\text{ت. ه}-\rho),$$

و از این رو

$$|f_1|d\mu_1 = |f_1|\frac{d\mu_1}{d\rho}d\rho = |f_2|\frac{d\mu_2}{d\rho}d\rho = |f_2|d\mu_2.$$

بنابراین، تعریف $|\nu|$ مستقل از انتخاب μ و f است. این تعریف با تعریف پیشین $|\nu|$ که در آن ν یک اندازهٔ علامت دار بود سازگاری دارد، زیرا در آن حالت $d\nu = (\chi_P - \chi_N)d|\nu|$ ، که در آن $X = P \cup N$ یک تجزیهٔ هان است و

$$|\chi_P - \chi_N| = 1.$$

۳.۱۳ گزاره. فرض‌کنیم ν اندازهٔ مختلطی روی $(X,\mathcal{M})$ باشد.

الف) برای هر $E \in \mathcal{M}$، $|\nu(E)| \le |\nu|(E)$.

ب) $\nu \ll |\nu|$ و $|\nu|$ـ ت. ه $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ دارای اندازهٔ ۱ است.

ج) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ و اگر $f \in L^1(\nu)$، آنگاه $\left|\int fd\nu\right| \le \int |f|d|\nu|$.

برهان. مانند تعریف $|\nu|$ فرض می‌کنیم $d\nu = fd\mu$. در این صورت

$$|\nu(E)| = \left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d\mu = |\nu|(E) .$$

این مطلب، (الف) را ثابت کرده و نشان می‌دهد که $\nu \ll |\nu|$. اگر $g = \frac{d\nu}{d|\nu|}$، آنگاه داریم

$$f d\mu = d\nu = g d|\nu| = g|f| d\mu$$

لذا μ ـ ت. ه $f = g|f|$ و در نتیجه $|\nu|$ ـ ت. ه $f = g|f|$. اما به وضوح $|\nu|$ ـ ت. ه $|f| > 0$، در حالی که $|\nu|$ ـ ت. ه، $|g| = 1$. اثبات (ج) به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۱۸). ■

۳.۱۴ گزاره. اگر ν_1 و ν_2 اندازه های مختلطی روی $(X, \mathcal{M})$ باشند، آنگاه $|\nu_1 + \nu_2| \le |\nu_1| + |\nu_2|$.

برهان. بنابر گزارهٔ ۳.۱۱ برای $j = 1, 2$، با μ ی یکسان داریم: $d\nu_j = f_j d\mu$. اما در این صورت

$$d|\nu_1 + \nu_2| = |f_1 + f_2| d\mu \le |f_1| d\mu + |f_2| d\mu = d|\nu_1| + d|\nu_2|. \blacksquare$$

تمرین‌ها.

۱۸) قسمت (ج) از گزارهٔ ۳.۱۳ را ثابت کنید.

۱۹) اگر ν و μ دو اندازهٔ مختلط و λ یک اندازهٔ مثبت باشد، آنگاه $\nu \perp \mu$ اگر و تنها اگر $|\nu| \perp |\mu|$ و $\nu \ll \lambda$ اگر و تنها اگر $|\nu| \ll \lambda$.

۲۰) اگر ν اندازهٔ مختلطی روی $(X, \mathcal{M})$ باشد و $\nu(X) = |\nu|(X)$، آنگاه $\nu = |\nu|$.

۲۱) فرض کنید ν اندازهٔ مختلطی روی $(X, \mathcal{M})$ باشد. اگر $E \in \mathcal{M}$، تعریف کنید:

$$\mu_1(E) = \sup\left\{\sum_1^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, \text{مجزا هستند } E_n, \dots, E_1 \ , E = \bigcup_1^n E_j\right\},$$

$$\mu_2(E) = \sup\left\{\sum_1^\infty |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, \text{مجزا هستند } \dots, E_2, E_1 \ , E = \bigcup_1^n E_j\right\},$$

$$\mu_3(E) = \sup\left\{\left|\int_E f d\nu\right| : |f| \le 1\right\}.$$

در این صورت $|\nu| = \mu_3 = \mu_2 = \mu_1$. (ابتدا نشان دهید که $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$. برای دیدن اینکه $\mu_3 = |\nu|$، فرض کنید $f = \frac{d\nu}{d|\nu|}$ و گزارهٔ ۳.۱۳ را به‌کار برید. برای دیدن اینکه $\mu_3 \le \mu_1$، f را با توابع ساده تقریب بزنید.)

۳.٤ مشتق‌گیری روی فضای اقلیدسی

قضیه رادون ـ نیکودیوم یک مفهوم ذهنی از «مشتق» یک اندازهٔ مختلط یا علامت‌دار نسبت به اندازه ای چون μ ایجاد می‌کند. در این بخش به‌طور عمیق‌تر حالت خاصی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن $(X,\mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ و $\mu = m$ اندازهٔ لبگ است. در اینجا می‌توان یک مشتق نقطه‌ای ν نسبت به m را به روش زیر تعریف کرد. فرض کنیم $B(r,x)$ گوی باز با شعاع r حول x در $\mathbb{R}^n$ باشد؛ در این صورت می‌توان حد زیر را در صورت وجود در نظر گرفت:

$$F(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu(B(r,x))}{m(B(r,x))}$$

(می‌توان گوی‌های $B(r,x)$ را با مجموعه های دیگری نیز عوض کرد که، به مفهومی مناسب، به شیوه‌ای منظم به x نزدیک شوند این دیدگاه را بعداً مورد کنکاش قرار خواهیم داد.) چنانچه $\nu \ll m$ و لذا $d\nu = fdm$، آنگاه به‌طور خلاصه $\frac{\nu(B(r,x))}{m(B(r,x))}$ مقدار میانگین f روی $B(r,x)$ است، لذا باید انتظار داشت که mـ ت. ه، $F = f$. این مطلب به شرطی درست از آب در می‌آید که $\nu(B(r,x))$ برای هر x و r متناهی باشد. از نقطه نظر تابع f، این موضوع را می‌توان به عنوان تعمیمی از قضیه اساسی حسابان قلمداد کرد: مشتق انتگرال نامعین f (یعنی، ν) f است.

در ادامهٔ این فصل، عباراتی از قبیل «انتگرال» و «تقریباً همه جا» به اندازهٔ لبگ برمی‌گردد مگر آنکه خلافش ذکر شود. بررسی‌های خود را با یک لم تکنیکی آغاز می‌کنیم که به خودیِ خود جالب توجه است.

۳.۱۵ لم. فرض کنیم $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از گوی‌های باز واقع در $\mathbb{R}^n$ باشد و $U = \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. هرگاه $c < m(U)$، گوی‌های مجزایی مانند $B_1,\dots,B_k \in \mathcal{C}$ وجود دارند به طوری که $\sum_1^k m(B_j) > 3^{-n}c$.

برهان. چنانچه $c < m(U)$، بنابر قضیهٔ ۲.۴۰، مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K \subset U$ با شرط $m(K) > c$ وجود دارد و تعدادی متناهی از گوی‌های واقع در $\mathcal{C}$ ـــ مثل $A_1,\dots,A_n$ ـــ K را می‌پوشانند. فرض کنیم B_1 بزرگترین A_j ها باشد. (یعنی، B_1 را با شعاع ماکسیمال انتخاب می‌کنیم)، فرض می‌کنیم B_2 بزرگترین A_j هایی باشد که از B_1 جدا هستند، B_3 و تا جایی ادامه می‌دهیم که A_j ها تمام شوند. طبق این نحوهٔ ساخت، اگر A_i یکی از B_j ها نباشد، j ای وجود دارد که $A_i \cap B_j \ne \varnothing$، و اگر j کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت باشد، شعاع A_i حد اکثر به بزرگی شعاع B_j است

بنابراین $A_i \subset B_j^*$ ، که در آن B_j^* گویی هم مرکز با B_j است که شعاعش سه برابر شعاع B_j است . اما در این صورت $K \subset \bigcup_1^k B_j^*$، لذا

$$c \leq m(K) \leq \sum_1^k m(B_j^*) = 3^n \sum_1^k m(B_j). \blacksquare$$

تابع اندازه پذیری چون $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ انتگرال‌پذیر موضعی (نسبت به اندازهٔ لبگ) نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعهٔ اندازه پذیر کراندار مانند $K \subset \mathbb{R}^n$، $\int_K |f(x)|dx < \infty$. فضای توابع انتگرال پذیر موضعی را با L_{loc}^1 نشان می‌دهیم. اگر $f \in L_{loc}^1$، $x \in \mathbb{R}^n$ و $r > 0$، آنگاه $A_r f(x)$ را مقدار میانگین روی تعریف می‌کنیم :

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B(r,x))} \int_{B(r,x)} f(y)dy \ .$$

۳.۱٦ لم. اگر $f \in L_{loc}^1$ ، آنگاه $A_r f(x)$ نسبت به r و x مشترکاً پیوسته است ($r > 0$ و $x \in \mathbb{R}^n$).

برهان. از حکمی در بند ۲.۷ می‌دانیم که $m(B(r,x)) = cr^n$ که در آن $c = m(B(1,0))$ و $m(S(r,x)) = 0$ که در آن $S(r,x) = \{y : |y-x| = r\}$. به‌علاوه ، وقتی $r \to r_0$ و $x \to x_0$، $\chi_{B(r,x)} \to \chi_{B(r_0,x_0)}$ به طور نقطه‌ای بر $\mathbb{R}^n \setminus S(r_0,x_0)$. بنابر این $\chi_{B(r,x)} \to \chi_{B(r_0,x_0)}$ ت.هـ.، و اگر $r < r_0 + \frac{1}{2}$ و $|x - x_0| < \frac{1}{2}$، آنگاه $\left|\chi_{B(r,x)}\right| \leq \left|\chi_{B(r_0+1,x_0)}\right|$. اینک از قضیهٔ همگرایی مغلوب معلوم می‌شود که $\int_{B(r,x)} f(y)dy$ نسبت به r و x پیوسته بوده و در نتیجه $A_r f(x) = c^{-1}r^{-n}\int_{B(r,x)} f(y)dy$ نسبت به r و x پیوسته است. $\blacksquare$

حال، اگر $f \in L_{loc}^1$، تابع ماکسیمال هاردی ـ لیتلوود Hf را با

$$Hf(x) = \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(r,x))} \int_{B(r,x)} |f(y)|dy$$

تعریف می‌کنیم. Hf اندازه پذیر است ، زیرا بنابر لم ۳.۱۶، برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعهٔ

$$(Hf)^{-1}((a,\infty)) = \bigcup_{r>0} (A_r|f|)^{-1}((a,\infty))$$

باز است.

۳.۱۷ قضیهٔ ماکسیمال. ثابتی مانند $C > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in L^1$ و هر $\alpha > 0$،

$$m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)|dx \ .$$

برهان. فرض می‌کنیم $E_\alpha = \{x : Hf(x) > \alpha\}$. برای هر $x \in E_\alpha$، $r_x > 0$ را می‌توان چنان انتخاب کرد که $A_{r_x}|f|(x) > \alpha$. گوی‌های $B(r_x, x)$ مجموعهٔ E_α را می‌پوشاند، لذا بنابر لم ۳.۱۵ اگر $C < m(E_\alpha)$، اعضایی چون $x_1, \ldots, x_k \in E_\alpha$ وجود دارند به‌طوری‌که گوی‌های $B_j = B(r_{x_j}, x_j)$ مجزا هستند و

$$\sum_1^k m(B_j) > 3^{-n} C.$$

اما در این صورت

$$c < 3^n \sum_1^k m(B_j) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_1^k \int_{B_j} |f(y)|\, dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy.$$

با فرض $c \to m(E_\alpha)$، حکم مطلوب را به دست می‌آوریم. ■

اینک با در دست داشتن این ابزار، سه گونه بُرنده‌تر قضیهٔ اساسی مشتق‌گیری را پشت سر هم می‌آوریم. در برهان ها از مفهوم حد اعلی برای توابع حقیقی یک متغیری، یعنی از

$$\limsup_{r \to R} \phi(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<|r-R|<\varepsilon} \phi(r) = \inf_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<|r-R|<\varepsilon} \phi(r) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0<|r-R|<\varepsilon} \phi(r),$$

و حکم زیر استفاده می‌کنیم که درستی آن به آسانی بررسی می‌شود.

$$\lim_{r \to R} \phi(r) \Leftrightarrow \limsup_{r \to R} |\phi(r) - c| = 0.$$

۳.۱۸ قضیه. اگر $f \in L^1_{loc}$، آنگاه تقریباً برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $\lim_{r \to 0} A_r f(x) = f(x)$.

برهان. کافی است نشان داده شود که برای $N \in \mathbb{N}$، تقریباً برای هر xای که $|x| \leq N$، $A_r f(x) \to f(x)$. اما برای $|x| \leq N$ و $r \leq 1$ مقادیر $A_r f(x)$ فقط به مقادیر $f(y)$ برای $|y| \leq N + 1$ بستگی دارند، لذا با جایگزینی $f\chi_{B(N+1,0)}$ به‌جای f، می‌توان فرض کرد که $f \in L^1$. بنابر قضیهٔ ۲.۴۱ با مفروض گرفتن $\varepsilon > 0$ می‌توان تابع انتگرال‌پذیر پیوسته‌ای مانند g بیابیم به طوری‌که $\int |g(y) - f(y)| dy < \varepsilon$. پیوستگی g ایجاب می‌کند که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $\delta > 0$، rای وجود داشته باشد به طوری که وقتی $|y - x| < r$، $|g(y) - g(x)| < \delta$ و از این رو

$$|A_r g(x) - g(x)| = \frac{1}{m(B(r,x))} \left| \int_{B(r,x)} [g(y) - g(x)] dy \right| < \delta.$$

بنابر این وقتی $r \to 0$، $A_r g(x) \to g(x)$ برای هر x برقرار است، لذا

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \to 0} |A_r f(x) - f(x)| \\
&= \limsup_{r \to 0} |A_r (f - g)(x) + (A_r g - g)(x) + (g - f)(x)| \\
&\leq H(f - g)(x) + 0 + |f - g|(x).
\end{aligned}$$

به همین دلیل، اگر

$$E_\alpha = \{x : \limsup_{r\to ۰}|A_r f(x) - f(x)| > \alpha\},\ \ F_\alpha = \{x : |f-g|(x) > \alpha\},$$

داریم

$$E_\alpha \subset F_{\frac{\alpha}{۲}} \bigcup \{x : H(f-g)(x) > \frac{\alpha}{۲}\}.$$

اما $\varepsilon > (\frac{\alpha}{۲})m(F_{\frac{\alpha}{۲}}) \leq \int_{F_{\frac{\alpha}{۲}}} | f(x) - g(x) | \, dx <$، لذا بنا بر قضیهٔ ماکسیمال،

$$m(E_\alpha) \leq \frac{۲\varepsilon}{\alpha} + \frac{۲C\varepsilon}{\alpha}.$$

چون ε دل‌خواه است، برای هر $\alpha > ۰$، $m(E_\alpha) = ۰$. اما برای هر $x \notin \bigcup_۱^\infty E_{\frac{۱}{n}}$ داریم:

$$\lim_{r\to ۰} A_r f(x) = f(x).$$

لذا به آنچه می‌خواستیم رسیده‌ایم. ■

این حکم را جور دیگری هم می‌شود به‌صورت زیر بیان کرد: اگر $f \in L^۱_{loc}$ ، آنگاه تقریباً برای هر x،

$$\lim_{r\to ۰}\frac{۱}{m(B(r,x))}\int_{B(r,x)}|f(y) - f(x)|dy = ۰ . \qquad (۳.۱۹)$$

در واقع ، حکم قویتری برقراراست: اگر در (۳.۱۹) انتگرال با قدر مطلقش جایگزین شود باز هم (۳.۱۹) درست باقی می‌ماند. یعنی ، **مجموعهٔ لبگ** L_f از f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$L_f = \left\{x : \lim_{r\to ۰}\frac{۱}{m(B(r,x))}\int_{B(r,x)}[f(y) - f(x)]dy = ۰\right\}.$$

۳.۲۰ قضیه. اگر $f \in L^۱_{loc}$، آنگاه $m((L_f)^c) = ۰$.

برهان. برای هر $c \in \mathbb{C}$ می‌توان قضیهٔ ۳.۱۸ را در مورد $g_c(x) = |f(x) - c|$ به‌کار برده و نتیجه گرفت که به جز روی مجموعهٔ پوچ لبگی چون E_c، داریم:

$$\lim_{r\to ۰}\frac{۱}{m(B(r,x))}\int_{B(r,x)}|f(y) - c|dy = |f(x) - c|.$$

فرض‌کنیم D مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری از $\mathbb{C}$ باشد و $E = \bigcup_{c\in D} E_c$. در این صورت $m(E) = ۰$، و اگر $x \notin E$، برای هر $\varepsilon > ۰$ می‌توانیم $c \in D$ را با شرط $|f(x) - c| < \varepsilon$ انتخاب کنیم، لذا

$$|f(y) - f(x)| < |f(y) - c| + \varepsilon$$

و از اینجا معلوم می‌شود که

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{m(B(r,x))}\int_{B(r,x)}|f(y)-f(x)|dy \le |f(x)-c|+\varepsilon < 2\varepsilon .$$

چون ε دل‌خواه است ، به آنچه می‌خواستیم رسیده‌ایم. ■

بالاخره، خانواده‌هایی از مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم که کلی‌تر از گوی ها هستند. گفته می‌شود که خانواده ای چون $\{E_r\}_{r>0}$ از زیرمجموعه‌های برل $\mathbb{R}^n$ با ظرافت به x چسبیده‌اند هرگاه:

- برای هر r، $E_r \subset B(r,x)$؛
- ثابتی مانند $\alpha > 0$ مستقل از r وجود داشته باشد به طوری که $m(E_r) > \alpha m(B(r,x))$. مجموعه‌های E_r شامل خود x نیستند. برای مثال، اگر U زیر مجموعهٔ برلی از $B(1,0)$ باشد به‌طوری‌که $m(U) > 0$ و $E_r = \{x+ry : y\in U\}$، آنگاه $\{E_r\}$ با ظرافت به x چسبیده است. این هم نوع آخر قضیهٔ مشتق گیری:

۳.۲۱ قضیهٔ مشتق‌گیری لبگ. فرض کنیم $f\in L^1_{loc}$. برای هر x در مجموعهٔ لبگ f ـ بالاخص، برای تقریباً هر x تساوی‌های زیر برای هر خانواده مانند $\{E_r\}_{r>0}$ که با ظرافت به x چسبیده باشد، برقرارند:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(E_r)}\int_{E_r}|f(y)-f(x)|dy = 0, \quad \lim_{r\to 0}\frac{1}{m(E_r)}\int_{E_r} f(y)dy = f(x).$$

برهان. برای $\alpha > 0$ای داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(E_r)}\int_{E_r}|f(y)-f(x)|dy &\le \lim_{r\to 0}\frac{1}{m(E_r)}\int_{B(r,x)}|f(y)-f(x)|dy\\ &\le \lim_{r\to 0}\frac{1}{\alpha m(B(r,x))}\int_{B(r,x)}|f(y)-f(x)|dy.\end{aligned}$$

بنابر این تساوی نخست از قضیهٔ ۳.۲۰ نتیجه می‌شود و بلافاصله دیده می‌شود که با نوشتن دومی به شکل (۳.۱۹)، دومی از اولی به‌دست می‌آید. ■

اینک به مطالعه ی اندازه ها بر می‌گردیم . اندازهٔ ی برلی چون ν روی $\mathbb{R}^n$ منظم نامیده می‌شود هرگاه
(i) برای هر مجموعهٔ فشرده مانند K، $\nu(K) < \infty$؛
(ii) برای هر $E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$، $\nu(E) = \inf\{\nu(U) : U$ باز است، $E\subset U\}$.

(عملاً شرط دوم توسط شرط اول بر آورده می‌شود. این مطلب برای $n=1$ از قضایای ۱.۱۶ و ۱.۱۸ نتیجه می‌شود و برای nهای دل‌خواه، آن را در بند ۷.۲ ثابت خواهیم کرد. فعلاً شرط دوم را به‌طور صریح فرض می‌کنیم.) بنابر شرط اول، ملاحظه می‌کنیم که هر اندازهٔ منظم، σـ متناهی است. اندازهٔ برل علامت‌دار یا مختلطی چون ν منظم نامیده خواهد شد هرگاه $|\nu|$ منظم باشد.

برای مثال، اگر $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$، آنگاه اندازهٔ fdm منظم است اگر وتنها اگر $f \in L^1_{loc}$. در واقع، واضح است که شرط $f \in L^1_{loc}$ با شرط اول هم‌ارز است. چنانچه این مطلب برقرار باشد، شرط دوم به‌طور مستقیم محقق می‌شود. فرض می‌کنیم E یک مجموعهٔ برل کراندار باشد. برای عدد مفروض $\varepsilon > ٠$، بنابر قضیهٔ ۲.۴۰ مجموعهٔ باز کرانداری مانند $U \supset E$ وجود دارد به طوری که $m(U) < m(E) + \delta$ و در نتیجه $m(U \setminus E) < \delta$. اما در این صورت با فرض $\varepsilon > ٠$، از نتیجهٔ ۳.۶ معلوم می‌شود که مجموعهٔ بازی چون $U \supset E$ وجود به‌طوری‌که $\int_{U\setminus E} fdm < \varepsilon$ و در نتیجه

$$\int_U fdm < \int_E fdm + \varepsilon .$$

در صورت غیر کراندار بودن E قرار می‌دهیم $E = \bigcup_1^\infty E_j$ که در آن E_j کراندار است. با یافتن مجموعهٔ بازی چون $U_j \supset E_j$ به‌طوری‌که $\int_{U_j \setminus E_j} fdm < \varepsilon . ۲^{-j}$ حکم به آسانی حاصل می‌شود. ■

۳.۲۲ قضیه. فرض کنیم ν اندازهٔ برل مختلط یا علامت دار منظمی روی $\mathbb{R}^n$ باشد و $d\nu = d\lambda + fdm$ نمایش لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم آن باشد. در این صورت نسبت به اندازهٔ m تقریباً برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، تساوی $\lim_{r\to ٠} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x)$ برای هر خانواده مانند $\{E_r\}_{r>٠}$ که به‌طور ظریف به x چسبیده باشد برقرار است.

برهان. به آسانی مشخص می‌شود که $d|\nu| = d|\lambda| + |f|dm$، لذا منظم بودن ν منظم بودن λ و fdm را ایجاب می‌کند (تمرین ۲۶). بالاخص $f \in L^1_{loc}$، لذا در پرتو قضیهٔ ۳.۲۱ کافی است نشان داده شود که اگر f منظم باشد و $\lambda \perp m$، آنگاه نسبت به اندازهٔ m، تقریباً برای هر x، وقتی $r \to ٠$ و E_r با ظرافت به x چسبیده باشد، $\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} \to ٠$. همچنین کافی است $E_r = B(r,x)$ گرفته شده و فرض شود که λ مثبت است، زیرا برای $\alpha > ٠$ای داریم:

$$\left|\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)}\right| \le \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \le \frac{|\lambda|(B(r,x))}{m(E_r)} \le \frac{|\lambda|(B(r,x))}{\alpha m(B(r,x))} .$$

حال، با فرض $\lambda \geq ٠$، A را مجموعهٔ برلی می‌انگاریم که $\lambda(A) = m(A^c) = ٠$ و فرض می‌کنیم:

$$F_k = \{x \in A : \limsup_{r\to ٠} \frac{\lambda(B(r,x))}{m(B(r,x))} > \frac{1}{k}\} .$$

نشان خواهیم داد که برای هر k، $m(F_k)$، و این مطلب برهان را کامل خواهد کرد.

استدلال شبیه به برهان قضیهٔ ماکسیمال است. بنابر منظم بودن λ، اگر $\varepsilon > ٠$ مفروض باشد، آنگاه مجموعهٔ بازی مانند $U_\varepsilon \supset A$ وجود دارد به طوری که $\lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$. هر $x \in F_k$ مرکز گویی مانند $B_x \subset U_\varepsilon$ است به‌طوری‌ک

$\lambda(B_x) > k^{-1}m(B_x)$. بنابر لم ۳.۱۵ ، اگر $V_\varepsilon = \bigcup_{x\in F_k} B_x$ و $c < m(V_\varepsilon)$، آنگاه نقاطی چون $x_1,\ldots,x_J$ چنان وجود دارند که $B_{x_1},\ldots,B_{x_J}$ مجزا هستند و

$$c < 3^n\sum_{1}^{J} m(B_{x_j}) \leq 3^n k\sum_{1}^{J}\lambda(B_{x_j}) \leq 3^n k\lambda(V_\varepsilon) \leq 3^n k\lambda(U_\varepsilon) \leq 3^n k\varepsilon .$$

نتیجه می‌گیریم که $m(V_\varepsilon) \leq 3^n k\varepsilon$ و چون $F_k \subset V_\varepsilon$ و ε دل‌خواه است، $m(F_k) = 0$. ■

تمرین‌ها

۲۲) اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ و $f \neq 0$ ، آنگاه اعدادی چون $C,R > 0$ وجود دارند به طوری که برای $|x| > R$ ، $Hf(x) \geq C|x|^{-n}$. بنابر این وقتی α کوچک باشد، $m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \geq \frac{C}{\alpha}$، لذا برآورد واقع در قضیهٔ ماکسیمال ذاتاً تند و تیز است.

۲۳) گونهٔ سودمندی از تابع ماکسیمال هاردی ـ لیتلوود عبارت است از:

$$H^*f(x) = \sup\{\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|dy \ x \in B, \text{یک گوی است } B\}.$$

نشان دهید که $Hf \leq H^*f \leq 2^n Hf$.

۲۴) اگر L^1_{loc} و f در x پیوسته باشند، آنگاه x در مجموعهٔ لبگ f است.

۲۵) چنانچه E مجموعهٔ برلی در $\mathbb{R}^n$ باشد ، **چگالی** $D_E(x)$ از E در x به صورت

$D_E(x) = \lim_{r\to 0}\frac{m(E\cap B(r,x))}{m(B(r,x))}$ تعریف می‌شود به شرطی که حد مذکور وجود داشته باشد.

الف) نشان دهید تقریباً برای هر $x \in E$، $D_E(x) = 1$ و تقریباً برای هر $x \in E^c$، $D_E(x) = 0$.

ب) مثال‌هایی از E و x بیابید به‌طوری‌که $D_E(x)$ عدد مفروضی چون $\alpha \in (0,1)$ باشد، یا $D_E(x)$ وجود نداشته باشد.

۲۶) اگر λ و μ اندازه‌های برل دو به دو منفرد مثبتی روی $\mathbb{R}^n$ باشند و $\lambda + \mu$ منظم باشد، آنگاه λ و μ نیز منظم هستند.

۳.۵ توابع با تغییر کراندار

قضایای بخش قبل مخصوصاً روی خط حقیقی به کار می‌روند، در این حالت به دلیل تناظر بین اندازه‌های برل منظم و توابع صعودی که اثباتش را در بند ۱.۵ آوردیم، این قضایا، احکامی در مورد مشتق گیری و انتگرال گیری توابع به دست می‌دهند. همانند بند ۱.۵، این نماد را می‌پذیریم که اگر F تابع پیوستهٔ راستی روی $\mathbb{R}$ باشد، μ_F اندازهٔ برلی است که با رابطهٔ $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ مشخص می‌شود. همچنین، در سراسر این بخش، عبارت « تقریباً همه جا » همیشه به اندازهٔ لبگ بر می‌گردد. در اولین حکم این بخش، از قضیهٔ مشتق گیری لبگ استفاده کرده و ثابت می‌کنیم که توابع صعودی تقریباً همه جا مشتق پذیرند.

۳.۲۳ قضیه. فرض‌کنیم $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ صعودی باشد و $G(x) = F(x+)$. در این صورت:
الف) مجموعهٔ نقاطی که F در آنها ناپیوسته است شمارش پذیر است.
ب) F و G تقریباً همه جا مشتق پذیرند و $F' = G'$ ت. ه.

برهان. چون F صعودی است بازه‌های $(F(x-), F(x+))$ $(x \in \mathbb{R})$ مجزا هستند و برای $|x| < N$ در بازهٔ $(F(-N), F(N))$ قرار دارند. بنابر این

$$\sum_{|x|<N} [F(x+) - F(x-)] \le F(N) - F(-N) < \infty$$

و این ایجاب می‌کند که $\{x \in (-N,N) : F(x+) \neq F(x-)\}$ شمارش پذیر باشد. چون این مطلب برای هر N درست است، (الف) اثبات می‌شود. حال، ملاحظه می‌کنیم که G صعودی و پیوستهٔ راست است، و $G = F$ همه جا به‌جز شاید در نقاط ناپیوستگی، برقرار است. به‌علاوه،

$$G(x+h) - G(x) = \begin{cases} \mu_G((x, x+h]), & h > 0, \\ -\mu_G((x-h, x]), & h < 0, \end{cases}$$

و وقتی $r = |h| \to 0$ خانواده‌های $\{(x-r, x)\}$ و $\{(x, x+h)\}$ با ظرافت به x می‌چسبند. به همین جهت، اعمال قضیهٔ ۳.۲۲ در مورد اندازهٔ μ_G (که بنابر قضیهٔ ۱.۱۸ منظم است) معلوم می‌کند که تقریباً برای همهٔ xها، $G'(x)$ وجود دارد. برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم که اگر $H = G - F$، آنگاه H' تقریباً همه جا وجود داشته و برابر با صفر است. فرض می‌کنیم $\{x_j\}$ شمارشی از نقاطی باشد که در آنها $H \neq 0$. در این صورت $H(x_j) > 0$، و همانند فوق برای هر N داریم $\sum_{\{j:|x_j|<N\}} H(x_j) < \infty$. فرض می‌کنیم δ_j نقطه جرم در x_j باشد و $\mu = \sum_j H(x_j)\delta_j$. در این صورت بنابر حکم قبلی، μ متناهی است و از این رو بنابر قضایای ۱.۱۶ و ۱.۱۸، μ منظم است؛ همچنین $\mu \perp m$ زیرا وقتی $E = \{x_j\}_1^\infty$، $m(E) = \mu(E^c) = 0$. اما در این صورت

$$\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right| \leq \frac{H(x+h)+H(x)}{|h|} \leq ۴\frac{\mu((x-۲|h|,x+۲|h|))}{۴|h|},$$

که بنابر قضیهٔ ۳.۲۲ عبارت اخیر وقتی $h \to ۰$ تقریباً برای هر x به صفر میل می‌کند. بنابر این $H' = ۰$ ت. ه و به آنچه می‌خواستیم می‌رسیم. ■

همان‌طور که اندازه‌های مثبت روی $\mathbb{R}$ به توابع صعودی مربوط می‌شدند، اندازه‌های مختلط روی $\mathbb{R}$ به توابعی مربوط می‌شوند که توابع با **تغییر کراندار** نامیده می‌شوند. تعریف مقولهٔ اخیر کمی فنی است، لذا مقتضی ایجاد زمینه‌ای است. از نظر شهودی، اگر $F(t)$ نمایندهٔ مکان ذره ای باشد که در امتداد خط حقیقی در لحظهٔ t حرکت می‌کند، آنگاه «تغییر کل» F روی بازهٔ $[a,b]$ فاصلهٔ کل طی شده از لحظهٔ a تا لحظهٔ b همانند چیزی که روی یک کیلومتر شمار دیده می‌شود می‌باشد. اگر F دارای مشتق پیوسته ای باشد، این عدد دقیقاً انتگرال «سرعت» یعنی $\int_a^b |F'(t)|dt$ است. تعریف تغییر کل بدون هیچ فرض هموار بودن روی F به نگرش متفاوتی نیاز دارد؛ یعنی، $[a,b]$ به زیربازه‌هایی چون $[t_{j-۱},t_j]$ افراز شده و F روی این زیربازه‌ها توسط توابعی خطی تقریب زده می‌شود که نمودارشان $(t_{j-۱},F(t_{j-۱}))$ را به $(t_j,F(t_j))$ وصل می‌کنند و سپس حد اعمال می‌شود.

در دقیق سازی این مطلب، با دیدگاه نسبتاً متفاوتی شروع می‌کنیم، قرار می‌دهیم $a=-\infty$ و تغییر کل را به عنوان تابعی از b قلمداد می‌کنیم. یعنی، اگر $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ و $x\in\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$T_F(x)=\sup\left\{\sum_۱^n\left|F(x_j)-F(x_{j-۱})\right| : n\in\mathbb{N}, -\infty < x_۰ < \cdots < x_n = x\right\}.$$

T_F **تابع تغییر کل** نامیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که اگر نقاط زیر تقسیم زیادی از x_jها اضافه شوند T_F بزرگتر می‌شود بنابراین، هرگاه $a<b$ ، فرض اینکه a همواره یکی از نقاط زیر تقسیم است تاثیری برتعریف $T_F(b)$ نمی‌گذارد از اینجا معلوم می‌شود که

$$T_F(b)-T_F(a)=\sup\left\{\sum_۱^n\left|F(x_j)-F(x_{j-۱})\right| : n\in\mathbb{N}, a=x_۰<\cdots<x_n=b\right\} \quad (۳.۲۴)$$

بنابر این T_F تابعی صعودی با مقادیر واقع در $[۰,\infty]$ است. اگر $T_F(\infty)=\lim_{x\to\infty}T_F(x)$ متناهی باشد، می‌گوییم روی **با تغییر کراندار** است، و فضای همهٔ چنین توابع F را با BV نشان می‌دهیم.

به طور کلی‌تر، سوپرمم طرف راست (۳.۲۴) **تغییر کل** تابع F روی $[a,b]$ نامیده می‌شود. این سوپرمم فقط به مقادیر F روی $[a,b]$ بستگی دارد، لذا می‌توان $BV([a,b])$ را مجموعه همهٔ توابعی روی $[a,b]$ تعریف کرد که تغییر کل آنها روی $[a,b]$ متناهی است. چنانچه $F\in BV$، برای هر a و b تحدید F به $[a,b]$ در $BV([a,b])$ واقع است؛ در واقع، تغییر کل آن چیزی جز $T_F(b)-T_F(a)$ نیست. به‌عکس اگر $F\in BV([a,b])$ و برای $x<a$ قرار دهیم

$F(x) = F(a)$ و برای $x > b$، $F(x) = F(b)$، آنگاه $F \in BV$. با این ترفند احکامی که برای BV اثبات خواهیم کرد را می‌توان برای $BV([a,b])$ نیز به کار برد.

۳.۲۵ مثال‌ها

الف) اگر $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کراندار و صعودی باشد، آنگاه $F \in BV$ (در واقع، $T_F(x) = F(x) - F(-\infty)$).

ب) اگر $F, G \in BV$ و $a, b \in \mathbb{R}$، آنگاه $aF + bG \in BV$.

ج) اگر F بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و F' کراندار باشد، آنگاه (بنابر قضیهٔ مقدار میانگین) برای هر $-\infty < a,b < \infty$، $F \in BV([a,b])$.

د) اگر $F(x) = \sin x$، آنگاه برای هر $-\infty < a,b < \infty$، $F \in BV([a,b])$، اما $F \notin BV$.

ه) اگر برای $x \neq 0$، $F(x) = x\sin(x^{-1})$ و $F(0) = 0$، آنگاه برای $a < 0 \le b$ یا $a \le 0 < b$، $F \notin BV([a,b])$.

بررسی درستی مثال‌های فوق به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲۷).

۳.۲۶ لم . اگر $F \in BV$ حقیقی مقدار باشد، آنگاه $T_F + F$ و $T_F - F$ صعودی هستند.

برهان. هرگاه $x < y$ و $\varepsilon > 0$، $x_0 < \cdots < x_n = x$ را چنان انتخاب می‌کنیم که:

$$\sum \left|F(x_j) - F(x_{j-1})\right| \ge T_F(x) - \varepsilon .$$

در این صورت $\sum_1^n \left|F(x_j) - F(x_{j-1})\right| + \left|F(y) - F(x)\right|$ یک مجموعه تقریب زننده برای $T_F(y)$ است و $F(y) = \left|F(y) - F(x)\right| + F(x)$، لذا

$$\begin{aligned} T_F(y) \pm F(y) &\ge \sum_1^n \left|F(x_j) - F(x_{j-1})\right| \\ &\quad + \left|F(y) - F(x)\right| \pm \left|F(y) - F(x)\right| \pm F(x) \\ &\ge T_F(x) - \varepsilon \pm F(x) \ . \end{aligned}$$

چون ε دل‌خواه است، $T_F(y) \pm F(y) \ge T_F(x) \pm F(x)$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم. ∎

۳.۲۷ قضیه.

الف) $F \in BV$ اگر و تنها اگر $\operatorname{Re} F \in BV$ و $\operatorname{Im} F \in BV$.

ب) اگر $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، آنگاه $F \in BV$ اگر و تنها اگر F تفاضل دو تابع صعودی باشد؛ برای $F \in BV$ این دو تابع را می‌توان $\frac{1}{2}(T_F + F)$ و $\frac{1}{2}(T_F - F)$ گرفت.

ج) اگر $F \in BV$، آنگاه $F(x+) = \lim_{y \searrow x} F(y)$ و $F(x-) = \lim_{y \nearrow x} F(y)$ برای هر x وجود دارند همین‌طور $F(\pm\infty) = \lim_{y \to \pm\infty} F(y)$.

د) اگر $F \in BV$، مجموعهٔ نقاطی که F در آنها ناپیوسته است شمارش پذیر می‌باشد.

ه) اگر $F \in BV$ و $G(x) = F(x+)$، انگاه F' و G' تقریباً همه جا موجود و برابرند.

برهان. (الف) بدیهی است. درمورد (ب)، استلزام «اگر» آسان است (مثال‌های (الف) و (ب) از ۳.۲۵ را ببینید). برای اثبات «فقط اگر»، ملاحظه می‌شود که بنابر لم ۳.۲۶، تساوی $F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$ تابع F را به صورت تفاضل دو تابع صعودی نمایش می‌دهد. همچنین، نامساوی‌های

$$T_F(y) \pm F(y) \geq T_F(x) \pm F(x) \qquad (y > x)$$

ایجاب می‌کنند که

$$|F(y) - F(x)| \leq T_F(y) - T_F(x) \leq T_F(\infty) - T_F(-\infty) < \infty,$$

لذا F و در نتیجه $T_F \pm F$ کراندار است. بالاخره، (ج)، (د) و (ه) از (الف)، (ب) و قضیهٔ ۳.۲۳ نتیجه می‌شوند. ■

نمایش $F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$ برای تابع حقیقی مقداری چون F **تجزیهٔ جردن** نامیده می‌شود و $\frac{1}{2}(T_F + F)$ و $\frac{1}{2}(T_F - F)$ **تغییرات مثبت و منفی** F نامیده می‌شوند. چون برای هر $x \in \mathbb{R}$، $x^+ = \max(x, 0) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ و $x^- = \max(-x, 0) = \frac{1}{2}(|x| - x)$، داریم:

$$\frac{1}{2}(T_F \pm F)(x) = \sup\left\{\sum_{1}^{n}[F(x_j) - F(x_{j-1})]^{\pm} : x_0 < \cdots < x_n = x\right\} \pm \frac{1}{2}F(-\infty).$$

قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیهٔ ۳.۲۷ منجر به ارتباط بین BV و فضای اندازه‌های برل مختلط روی $\mathbb{R}$ می‌شود. برای دقیق ساختن این مطلب، فضای NBV (N برای «نرمال شده») را معرفی می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$NBV = \{F \in BV : F(-\infty) = 0 \text{ و } F \text{ پیوستهٔ راست است}\}$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر $F \in BV$، آنگاه تابع G که با $G(x) = F(x+) - F(-\infty)$ تعریف می‌شود در NBV است و $G' = F'$ ت.هـ. (اینکه $G \in BV$ به آسانی از قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیهٔ ۳.۲۷ نتیجه می‌شود: اگر F حقیقی باشد و $F = F_1 - F_2$ که در آن F_1 و F_2 صعودی هستند، آنگاه

$$G(x) = F_1(x+) - [F_2(x-) + F(-\infty)]$$

که این هم تفاضلی از دو تابع صعودی است.)

۳.۲۸ لم. اگر $F \in BV$، آنگاه $T_F(-\infty) = 0$. اگر F پیوستهٔ راست هم باشد، آنگاه T_F نیز پیوسته راست است.

برهان. اگر $\varepsilon > 0$ و $x \in \mathbb{R}$، $x_n = x$ $x_0 < \cdots <$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \varepsilon \quad .$$

از (۳.۲۴) معلوم می‌شود که $T_F(x) - T_F(x_0) \geq T_F(x) - \varepsilon$ و در نتیجه برای $y \leq x_0$، $T_F(y) \leq \varepsilon$. بنابر این $T_F(-\infty) = 0$. حال فرض می‌کنیم که F پیوستهٔ راست است. $x \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و قرار می‌دهیم $\alpha = T_F(x+) - T_F(x)$ و $\delta > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که هرگاه $0 < h < \delta$،

$$T_F(x+h) - T_F(x+) < \varepsilon, \qquad |F(x+h) - F(x)| < \varepsilon.$$

بنابر (۳.۲۴)، برای هر چنین hای، $x_0 < \cdots < x_n = x + h$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4}[T_F(x+h) - T_F(x)] \geq \frac{3}{4}\alpha$$

و در نتیجه

$$\sum_2^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4}\alpha - |F(x_1) - F(x_0)| \geq \frac{3}{4}\alpha - \varepsilon.$$

مشابهاً، $x = t_0 < \cdots < t_m = x_1$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\sum_1^m |F(t_j) - F(t_{j-1})| \geq \frac{3}{4}\alpha$$

و از این رو

$$\begin{aligned}\alpha + \varepsilon &> T_F(x+h) - T_F(x) \\ &\geq \sum_1^n |F(t_j) - F(t_{j-1})| + \sum_2^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \\ &\geq \frac{3}{2}\alpha - \varepsilon.\end{aligned}$$

بنابر این $\alpha < 4\varepsilon$ و چون ε دل‌خواه است، $\alpha = 0$. ■

۳.۲۹ قضیه . اگر μ اندازهٔ برل مختلطی روی $\mathbb{R}$ باشد و $F(x) = \mu((-\infty,x])$، آنگاه $F \in NBV$. برعکس، اگر $F \in NBV$، اندازهٔ برل مختلط یکتایی چون μ_F وجود دارد به طوری که $F(x) = \mu_F((-\infty,x])$؛ به علاوه، $|\mu_F| = \mu_{T_F}$.

برهان. اگر μ یک اندازهٔ مختلط باشد، داریم $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ که در آن $\mu_j^\pm$ها اندازه‌هایی متناهی هستند. اگر $F_j^\pm(x) = \mu_j^\pm((-\infty,x])$، آنگاه $F_j^\pm$ صعودی و پیوستهٔ راست است، $F_j^\pm(-\infty) = 0$ و $F_j^\pm(\infty) = \mu_j^\pm(\mathbb{R}) < \infty$ بنابر این قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیهٔ ۳.۲۷، تابع

$$F = F_1^+ - F_1^- + i(F_2^+ - F_2^-)$$

در NBV واقع است . بر عکس ، بنابر قضیهٔ ۳.۲۷ و لم ۳.۲۸ ، هر $F \in NBV$ را می‌توان به همین شکل نوشت که در آن $F_j^\pm$ صعودی است و در NBV واقع است . مطابق با قضیه ، هر $F_j^\pm$ پدیدآورندهٔ اندازه‌ای چون $\mu_j^\pm$ می‌شود، لذا $F(x) = \mu_F((-\infty,x])$ که در آن $\mu_F = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$. اثبات این مطلب که $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ در تمرین ۲۸ خلاصه شده است. ■

اولین سئوال واضحی که مطرح می‌شود این است که: کدام توابع واقع در NBV به اندازه‌های μ متناظر می‌شوند به‌طوری‌که $\mu \perp m$ یا $\mu \ll m$؟

یکی از پاسخ‌ها به صورت زیر می‌باشد:

۳.۳۰ گزاره. اگر $F \in NBV$، آنگاه $F' \in L^1(m)$. به علاوه $\mu_F \perp m$ اگر و تنها اگر $F' = 0$ ت. هـ و $\mu_F \ll m$ اگر و تنها اگر $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$.

برهان. فقط ملاحظه می‌کنیم که $F'(x) = \lim_{r\to 0} \dfrac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)}$ در آن $E_r = (x,x+r]$ یا $E_r = (x-r,x]$ و قضیهٔ ۳.۲۲ را به‌کار می‌بریم. (بنابر قضیهٔ ۱.۱۸، اندازهٔ μ_F خود به خود منظم است). ■

شرط $\mu_F \ll m$ را می‌توان به صورت زیر بر حسب F نیز بیان کرد. تابعی چون $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **مطلقاً پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر مجموعهٔ متناهی از بازه‌های مجزا مانند $(a_1,b_1),\cdots,(a_N,b_N)$،

$$\sum_1^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon \,. \qquad (۳.۳۱)$$

به طور کلی‌تر، F بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته خوانده می‌شود هرگاه وقتی (a_j,b_j)ها همگی در $[a,b]$ قرار دارند شرط فوق برقرار باشد. به‌وضوح، اگر F پیوستهٔ مطلق باشد، آنگاه F پیوستهٔ یکنواخت است (در (۳.۳۱) N را ۱ بگیرید). از سوی دیگر، اگر F همه جا مشتق‌پذیر باشد و F' کراندار باشد، آنگاه F مطلقاً پیوسته است، زیرا بنابر قضیهٔ مقدار میانگین

$$|F(b_j) - F(a_j)| \leq (\max|F'|)(b_j - a_j).$$

۳.۳۲ گزاره. اگر $F \in NBV$، آنگاه F مطلقاً پیوسته است اگر و تنها اگر $\mu_F \ll m$.

برهان. اگر $\mu_F \ll m$، پیوستگی مطلق F با به‌کارگیری قضیهٔ ۳.۵ در مورد مجموعه‌های $E = \bigcup_1^N (a_j,b_j]$ به دست می‌آید. برای اثبات عکس مطلب، فرض می‌کنیم E یک مجموعهٔ برل باشد به‌طوری‌که $m(E) = 0$. اگر ε و δ همانهایی باشند که در تعریف پیوستگی مطلق به‌کار رفتند، آنگاه بنابر قضیهٔ ۱.۱۸ مجموعه‌های بازی مانند $E \subset \cdots \subset U_2 \subset U_1$ می‌توانیم بیابیم به‌طوری‌که $m(U_1) < \delta$ (و لذا برای هر j، $\mu(U_j) < \delta$) و $\mu_F(U_j) \to \mu_F(E)$. هر U_j اجتماع مجزایی از بازه‌های باز (a_j^k,b_j^k) است، و برای هر N،

$$\sum_{k=1}^N \left|\mu_F((a_j^k,b_j^k))\right| \leq \sum_{k=1}^N \left|F(b_j^k) - F(a_j^k)\right| < \varepsilon.$$

با فرض $N \to \infty$ به دست می‌آوریم: $|\mu_F(U_j)| < \varepsilon$ و در نتیجه $|\mu_F(E)| \leq \varepsilon$. چون ε دلخواه است، $\mu_F(E) = 0$ و این نشان می‌دهد که $\mu_F \ll m$. ■

۳.۳۳ نتیجه. اگر $f \in L^1_{loc}(m)$، آنگاه تابع $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ در NBV قرار دارد و مطلقاً پیوسته است و $f = F'$ ت. ه. برعکس، اگر $F \in NBV$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F' \in L^1(m)$ و $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$.

برهان. این احکام مستقیماً از گزاره‌های ۳.۳۰ و ۳.۳۲ نتیجه می‌شوند. ■

چنانچه توابع را روی بازه‌های کراندار در نظر بگیریم، این احکام قدری ظریف‌تر می‌شوند.

۳.۳۴ لم. اگر F بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F \in BV([a,b])$.

برهان. فرض می‌کنیم δ همان باشد که در تعریف پیوستگی مطلق F متناظر با $\varepsilon = 1$ به‌کار می‌رود و N بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\delta^{-1}(b-a) + 1$ باشد. چنانچه $a = x_0 < \cdots < x_n = b$، در صورت لزوم با وارد کردن نقاط زیر

۳.۲۹ قضیه . اگر μ اندازهٔ برل مختلطی روی $\mathbb{R}$ باشد و $F(x) = \mu((-\infty,x])$، آنگاه $F \in NBV$. برعکس، اگر $F \in NBV$، اندازهٔ برل مختلط یکتایی چون μ_F وجود دارد به طوری که $F(x) = \mu_F((-\infty,x])$؛ به علاوه، $|\mu_F| = \mu_{T_F}$.

برهان. اگر μ یک اندازهٔ مختلط باشد، داریم $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ که در آن $\mu_j^\pm$ها اندازه‌هائی متناهی هستند. اگر $F_j^\pm(x) = \mu_j^\pm((-\infty,x])$، آنگاه $F_j^\pm$ صعودی و پیوستهٔ راست است، $F_j^\pm(-\infty) = 0$ و $F_j^\pm(\infty) = \mu_j^\pm(\mathbb{R}) < \infty$ بنابر این قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیهٔ ۳.۲۷، تابع

$$F = F_1^+ - F_1^- + i(F_2^+ - F_2^-)$$

در NBV واقع است . بر عکس ، بنابر قضیهٔ ۳.۲۷ و لم ۳.۲۸ ، هر $F \in NBV$ را می‌توان به همین شکل نوشت که در آن $F_j^\pm$ صعودی است و در NBV واقع است . مطابق با قضیهٔ ، هر $F_j^\pm$ پدیدآورندهٔ اندازه‌ای چون $\mu_j^\pm$ می‌شود، لذا $F(x) = \mu_F((-\infty,x])$ که در آن $\mu_F = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$. اثبات این مطلب که $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ در تمرین ۲۸ خلاصه شده است. ■

اولین سئوال واضحی که مطرح می‌شود این است که: کدام توابع واقع در NBV به اندازه‌های μ متناظر می‌شوند به‌طوری‌که $\mu \perp m$ یا $\mu \ll m$؟

یکی از پاسخ‌ها به صورت زیر می‌باشد:

۳.۳۰ گزاره. اگر $F \in NBV$، آنگاه $F' \in L^1(m)$. به علاوه $\mu_F \perp m$ اگر و تنها اگر $F' = 0$ تـ.هـ و $\mu_F \ll m$ اگر و تنها اگر $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$.

برهان. فقط ملاحظه می‌کنیم که $F'(x) = \lim_{r\to 0} \dfrac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)}$ در آن $E_r = (x,x+r]$ یا $E_r = (x-r,x]$ و قضیهٔ ۳.۲۲ را به‌کار می‌بریم. (بنابر قضیهٔ ۱.۱۸، اندازهٔ μ_F خود به خود منظم است). ■

شرط $\mu_F \ll m$ را می‌توان به صورت زیر بر حسب F نیز بیان کرد. تابعی چون $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **مطلقاً پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر مجموعهٔ متناهی از بازه‌های مجزا مانند $(a_1,b_1),\cdots,(a_N,b_N)$،

$$\sum_1^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_1^N \left|F(b_j) - F(a_j)\right| < \varepsilon \,. \qquad (۳.۳۱)$$

به طور کلی‌تر، F بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته خوانده می‌شود هرگاه وقتی (a_j,b_j)ها همگی در $[a,b]$ قرار دارند شرط فوق برقرار باشد. به‌وضوح، اگر F پیوستهٔ مطلق باشد، آنگاه F پیوستهٔ یکنواخت است (در (۳.۳۱) N را ۱ بگیرید). از سوی دیگر، اگر F همه جا مشتق‌پذیر باشد و F' کراندار باشد، آنگاه F مطلقاً پیوسته است، زیرا بنابر قضیهٔ مقدار میانگین

$$|F(b_j) - F(a_j)| \le (\max|F'|)(b_j - a_j).$$

۳.۳۲ گزاره. اگر $F \in NBV$، آنگاه F مطلقاً پیوسته است. اگر و تنها اگر $\mu_F \ll m$.

برهان. اگر $\mu_F \ll m$، پیوستگی مطلق F با به‌کارگیری قضیهٔ ۳.۵ در مورد مجموعه‌های $E = \bigcup_1^N (a_j,b_j]$ به دست می‌آید. برای اثبات عکس مطلب، فرض می‌کنیم E یک مجموعهٔ برل باشد به‌طوری‌که $m(E) = 0$. اگر ε و δ همانهایی باشند که در تعریف پیوستگی مطلق به‌کار رفتند، آنگاه بنابر قضیهٔ ۱.۱۸ مجموعه‌های بازی مانند $E \subset \cdots \subset U_2 \subset U_1$ می‌توانیم بیابیم به‌طوری‌که $m(U_1) < \delta$ (و لذا برای هر j، $\mu(U_j) < \delta$) و $\mu_F(U_j) \to \mu_F(E)$. هر U_j اجتماع مجزایی از بازه‌های باز (a_j^k, b_j^k) است، و برای هر N،

$$\sum_{k=1}^{N} |\mu_F((a_j^k,b_j^k))| \le \sum_{k=1}^{N} |F(b_j^k) - F(a_j^k)| < \varepsilon.$$

با فرض $N \to \infty$ به دست می‌آوریم: $|\mu_F(U_j)| < \varepsilon$ و در نتیجه $|\mu_F(E)| \le \varepsilon$. چون ε دلخواه است، $\mu_F(E) = 0$ و این نشان می‌دهد که $\mu_F \ll m$. ■

۳.۳۳ نتیجه. اگر $f \in L^1_{loc}(m)$، آنگاه تابع $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ در NBV قرار دارد و مطلقاً پیوسته است و $f = F'$ ت. ه. برعکس، اگر $F \in NBV$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F' \in L^1(m)$ و $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$.

برهان. این احکام مستقیماً از گزاره‌های ۳.۳۰ و ۳.۳۲ نتیجه می‌شوند. ■

چنانچه توابع را روی بازه‌های کراندار در نظر بگیریم، این احکام قدری ظریف‌تر می‌شوند.

۳.۳۴ لم. اگر F بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F \in BV([a,b])$.

برهان. فرض می‌کنیم δ همان باشد که در تعریف پیوستگی مطلق F متناظر با $\varepsilon = 1$ به‌کار می‌رود و N بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\delta^{-1}(b-a) + 1$ باشد. چنانچه $a = x_0 < \cdots < x_n = b$، در صورت لزوم با وارد کردن نقاط زیر

تقسیم بیشتر، می‌توانیم بازه‌های (x_{j-1}, x_j) را به حداکثر N گروه از بازه‌های متوالی تقسیم کنیم به طوری که مجموع طول ها در هر گروه کمتر از δ باشد. مجموع $\sum|F(x_j) - F(x_{j-1})|$ روی هر یک از گروه ها حد اکثر ۱ است و از این رو تغییر کل F روی $[a,b]$ حد اکثر N است. ■

۳.۳۵ قضیهٔ اساسی حسابان برای انتگرال لبگ. اگر $-\infty < a < b < \infty$ و $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ ، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

الف) F بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته است.

ب) به ازای تابعی چون $f \in L^1([a,b],m)$ ، $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$.

ج) F تقریباً همه جا بر $[a,b]$ مشتق پذیر است، $F' \in L^1([a,b],m)$ و $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$.

برهان. برای اثبات اینکه (الف) قسمت (ج) را ایجاب می‌کند، با کم کردن ثابتی از F می‌توان فرض کرد که $F(a) = 0$. اگر برای $x < a$ قرار دهیم $F(x) = 0$ و برای $x > b$ ، $F(x) = b$، آنگاه بنابر لم ۳.۳۴ ، $F \in NBV$ ، لذا (ج) از نتیجهٔ ۳.۳۳ حاصل می‌گردد. بدیهی است که (ج) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. بالاخره، نتیجه شدن (الف) از (ب) با فرض $f(t) = 0$ برای $t \notin [a,b]$ و با به‌کار گیری نتیجهٔ ۳.۳۳ صورت می‌گیرد. ■

گاهی اوقات تجزیهٔ زیر برای اندازه‌های برل روی $\mathbb{R}^n$ مهم واقع می‌شود. اندازهٔ برل مختلطی چون μ گسسته نامیده می‌شود هرگاه مجموعهٔ شمارش پذیری مانند $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^n$ و اعداد مختلطی چون c_j وجود داشته باشند به طوری که $\sum|c_j| < \infty$ و وقتی δ_x نقطه جرم در x است، $\mu = \sum c_j \delta_{x_j}$. از سوی دیگر، μ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $\mu(\{x\}) = 0$. هر اندازهٔ مختلط مانند μ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت $\mu_d + \mu_c$ نوشت که در آن μ_d گسسته و μ_c پیوسته است. در واقع، فرض می‌کنیم $E = \{x : \mu(\{x\}) \neq 0\}$. برای هر زیر مجموعهٔ شمارش پذیر مانند F از E سری $\sum_{x\in F}\mu(\{x\})$ مطلقاً (به $\mu(F)$) همگرا است، لذا برای هر k ، $\{x \in E : |\mu(\{x\})| > k^{-1}\}$ متناهی است، و از اینجا معلوم می‌شود که خودِ E شمارش پذیر است. بنابر این $\mu_d(A) = \mu(A \cap E)$ گسسته و $\mu_c(A) = \mu(A \setminus E)$ پیوسته است.

به وضوح، اگر μ گسسته باشد، آنگاه $\mu \perp m$ ؛ و اگر $\mu \ll m$ ، آنگاه μ پیوسته است. بنابر این، طبق قضیهٔ ۳.۲۲ ، هر اندازهٔ برل مختلط (منظم) روی $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $\mu = \mu_d + \mu_{ac} + \mu_{sc}$ نوشت که در آن μ_d گسسته، μ_{ac} نسبت به m مطلقاً پیوسته و μ_{sc} یک اندازهٔ «پیوستهٔ تکین» است، یعنی، μ_{sc} پیوسته است اما $\mu_{sc} \perp m$. وجود اندازه‌های پیوستهٔ تکین ناصفر در $\mathbb{R}^n$ برای $n > 1$ به قدر کافی واضح است، اندازهٔ مسطح روی کرهٔ واحد که در بند ۲.۷ مورد بحث واقع شد مثالی از این گونه اندازه ها است. برای $n = 1$ وجود چنین اندازه‌هایی چندان هم

بدیهی نیست؛ مطابق با قضیهٔ ۳.۲۹ ، چنین اندازه‌هایی با توابع غیرثابت $F \in NBV$ متناظر می‌شوند به طوری که پیوسته است اما $F' = 0$ ت.هـ. تابع کانتور ساخته شده در بند ۱.۵ (که با قرار دادن $F(x) = 0$ برای $x < 0$ و $F(x) = 1$ برای $x > 1$ به کل $\mathbb{R}$ تعمیم می‌یابد) یکی از این توابع است. با کمال تعجب ، توابع پیوستهٔ اکیداً صعودی F وجود دارند به طوری که $F' = 0$ ت. هـ. ؛ تمرین ۴۰ را ببینید.

اگر $F \in NBV$، رسم است که انتگرال تابعی چون g نسبت به اندازهٔ μ_F را با $\int g dF$ یا $\int g(x) dF(x)$ نشان دهند؛ چنین انتگرال‌هایی انتگرال‌های لبگ ـ اشتیلیس نامیده می‌شوند. این بخش را با ارائه فرمول انتگرال گیری جزء به جزء برای انتگرال‌های لبگ ـ اشتیلیس به پایان می‌رسانیم؛ در تمرین‌های ۳۴ و ۳۵ گونه‌های دیگری از این حکم را می‌توان دید.

۳.۳۶ قضیه. اگر F و G در NBV باشند و حداقل یکی از آنها پیوسته باشد، آنگاه برای $-\infty < a < b < \infty$ ،

$$\int_{(a,b]} F dG + \int_{(a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

برهان. بنابر قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیهٔ ۳.۲۷ ، F و G ترکیبات خطی توابعی در NBV هستند، لذا محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که کافی است F و G صعودی فرض شوند. برای پرهیز از اشتباه ، فرض می‌کنیم G پیوسته است و قرار می‌دهیم $\Omega = \{(x,y) : a < x \le y \le b\}$. قضیهٔ فوبینی را به کار برده و $\mu_F \times \mu_G(\Omega)$ را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

$$\mu_F \times \mu_G(\Omega) = \int_{(a,b]} \int_{(a,y]} dF(x) dG(y) = \int_{(a,b]} [F(y) - F(a)] dG(y)$$
$$= \int_{(a,b]} F dG - F(a)[G(b) - G(a)],$$

و چون $G(x) = G(x-)$،

$$\mu_F \times \mu_G(\Omega) = \int_{(a,b]} \int_{[x,b]} dG(y) dF(x) = \int_{(a,b]} [G(b) - G(x)] dF(x)$$
$$= G(b)[F(b) - F(a)] - \int_{(a,b]} G dF.$$

با تفریق طرفین این دو تساوی، حکم مطلوب به‌دست می‌آید. ■

تمرین‌ها

۲۷) درستی احکام مثال‌های ۳.۲۵ را بررسی کنید.

۲۸) اگر $F \in NBV$، فرض کنید $G(x) = |\mu_F|((-\infty,x])$. طبق مراحل زیر نشان دهید که $G = T_F$ و پس از آن نتیجه بگیرید که $|\mu_F| = \mu_{T_F}$.

الف) از تعریف T_F نتیجه بگیرید که $T_F \leq G$.

ب) $|\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)$ وقتی E یک بازه است برقرار است و در نتیجه وقتی E یک مجموعهٔ بـرل باشـد برقـرار خواهد بود.

ج) $|\mu_F| \leq \mu_{T_F}$ و در نتیجه $G \leq T_F$. (تمرین ۲۱ را به‌کار برید.)

۲۹) اگر $F \in NBV$ حقیقی باشد، آنگاه $\mu_F^+ = \mu_P$ و $\mu_F^- = \mu_N$ که در آن P و N تغییرات مثبت و منفی F هستند. (تمرین ۲۸ را به‌کار برید.)

۳۰) تابعی صعودی روی $\mathbb{R}$ بسازید که مجموعهٔ ناپیوستگی‌هایش $\mathbb{Q}$ باشد.

۳۱) فـرض‌کنیـد بـرای $x \neq 0$ ، $F(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ و $G(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ و $F(0) = G(0) = 0$. نشان دهید که:

الف) F و G همه جا (حتی در $x = 0$) مشتق پذیرند.

ب) $F \in BV([-1,1])$ اما $G \notin BV([-1,1])$.

۳۲) اگر $F, F_1, F_2, \ldots \in NBV$ و $F_j \to F$ نقطه به نقطه ، آنگاه $T_F \leq \liminf T_{F_j}$.

۳۳) اگر F بر $\mathbb{R}$ صعودی باشد، آنگاه $F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(t)dt$.

۳۴) فرض کنیم $F, G \in NBV$ و $-\infty < a < b < \infty$.

الف) با تقلید از برهان قضیهٔ ۳۶ . ۳، نشان دهید که

$$\int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x-)}{2} dG(x) + \int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x-)}{2} dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

ب) اگر نقطه ای در $[a,b]$ نباشد که F و G هر دو در آن نقطه ناپیوسته باشند ، آنگاه

$$\int_{[a,b]} FdG + \int_{[a,b]} GdF = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

۳۵) اگر F و G بر $[a,b]$ مطلقاً پیوسته باشند، آنگاه FG نیز مطلقاً پیوسته است و

$$\int_a^b (FG' + GF')(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

۳۶) فرض کنیم G تابع صعودی پیوسته ای بر $[a,b]$ ، $G(a) = c$ و $G(b) = d$. نشان دهید که:
الف) اگر $E \subset [c,d]$ یک مجموعهٔ برل باشد، آنگاه $m(E) = \mu_G(G^{-1}(E))$. (نخست حالتی را در نظر بگیرید که E یک بازه است.)
ب) اگر f یک تابع اندازه پذیر برل باشد و بر $[c,d]$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(G(x)dG(x)$.
بالاخص، اگر G پیوستهٔ مطلق باشد، آنگاه $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(G(x)G'(x)dx$.
ج) اگر G به‌جای پیوسته بودن فقط پیوستهٔ راست باشد ، ممکن است حکم (ب) درست نباشد.

۳۷) فرض کنیم $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. ثابتی چون M وجود دارد به طوری که برای هر $x,y \in \mathbb{R}$، $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$ (یعنی، F پیوستهٔ لیپ شیتسی است) اگر و تنها اگر F پیوستهٔ مطلق باشد و $|F'| \leq M$ تـ. هـ.

۳۸) اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد، نمودار f به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$، یعنی، $\{t + if(t) : t \in [a,b]\}$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف، طول L از این نمودار ، سوپرمم طول‌های همهٔ چند ضلعی ها ی محاطی است. (یک « چند ضلعی محاطی » اجتماعی از پاره خطهایی است که $t_{j-1} + if(t_{j-1})$ را به $t_j + if(t_j)$ ($1 \leq j \leq n$) وصل می‌کند، که در آن $a = t_0 < \cdots < t_n = b$.)
الف) فرض‌کنید $F(t) = t + if(t)$ ؛ در این صورت L تغییر کل F روی $[a,b]$ است.
ب) اگر f مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $L = \int_a^b [1 + f'(t)]^{\frac{1}{2}} dt$.

۳۹) اگر $\{F_j\}$ دنباله ای از توابع صعودی نامنفی بر $[a,b]$ باشد به طوری که برای هر $x \in [a,b]$، $F(x) = \sum_1^\infty F_j(x) < \infty$، آنگاه تقریباً برای هر $x \in [a,b]$، $F'(x) = \sum_1^\infty F_j'(x)$.
(کافی است فرض کنید $F_j \in NBV$ و اندازه‌های μ_{F_j} را در نظر بگیرید.)

۴۰) فرض‌کنید F تابع کانتور باشد (بند ۱.۵ را ببینید)، و تابع $F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰, \\ ۱ & x > ۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\{[a_n, b_n]\}$ شمارشی از زیر بازه‌های بستهٔ $[۰,۱]$ با نقاط انتهایی گویا باشد و $F_n(x) = F(\frac{x - a_n}{b_n - a_n})$. در این صورت $G = \sum_۱^\infty ۲^{-n} F_n$ بر $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $G' = ۰$ ت. ه. (تمرین ۳۹ را به‌کار برید.)

۴۱) فرض‌کنید $A \subset [۰,۱]$ مجموعهٔ برلی باشد به‌طوری‌که برای هر زیر بازه مانند I از $[۰,۱]$،
$$۰ < m(A \cap I) < m(I).$$
(تمرین ۳۳ از فصل ۱ را ببینید).

الف) فرض‌کنید $F(x) = m([۰,۱] \cap A)$. در این صورت F بر $[۰,۱]$ مطلقاً پیوسته و اکیداً صعودی است، اما بر مجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت، $F' = ۰$.

ب) $G(x) = m([۰,x] \cap A) - m([۰,x] \setminus A)$. در این صورت G بر $[۰,۱]$ مطلقاً پیوسته است اما G روی هیچ زیربازه ای از $[۰,۱]$ یکنوا نیست.

۴۲) تابعی چون $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $s,t \in (a,b)$ و هر $\lambda \in (۰,۱)$ ،
$$F(\lambda s + (۱-\lambda)t) \leq \lambda F(s) + (۱-\lambda)F(t).$$
(از نظر هندسی ، این تعریف می‌گوید که نمودار F روی بازه ای که از s شروع و به t ختم می‌شود زیر خط واصل $(s, F(s))$ به $(t, F(t))$ قرار گیرد.)

الف) F محدب است اگر و تنها اگر برای هر $s,t,s',t' \in (a,b)$ با شرط $s \leq s' < t'$ و $s < t \leq t'$ داشته باشیم:
$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}.$$

ب) F محدب است اگر و تنها اگر F بر هر زیربازهٔ فشرده از (a,b) مطلقاً پیوسته باشد و F' (بر مجموعه ای که تعریف می‌شود) صعودی باشد.

ج) اگر F محدب باشد و $t_۰ \in (a,b)$، آنگاه عددی چون $\beta \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $t \in (a,b)$، $F(t) - F(t_۰) \geq \beta(t - t_۰)$.

د) (نامساوی ینسن) اگر $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازهٔ با $\mu(X) = ۱$ باشد، $g : X \to (a,b)$ در $L^۱(\mu)$ باشد و F بر (a,b) محدب باشد، آنگاه
$$F(\int g d\mu) \leq \int F \circ g d\mu .$$

(در (ج) فرض کنید $t = g(x)$ و $t_\circ = \int g d\mu$ و سپس انتگرال بگیرید.)

۳.۶ یادداشت‌ها و مراجع

بند ۳.۲: قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم توسط لبگ [۹۲] برای حالتی ثابت شد که μ اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$ بود. این قضیه تحت فرض $\nu \ll \mu$ توسط رادون در [۱۱۱] به اندازه‌های برل منظم دل‌خواه روی $\mathbb{R}^n$ تعمیم یافت و نیکودیوم بود که در [۱۰۷] آن را به اندازه‌های روی فضاهای مجرد تعمیم داد. برهانی که در این کتاب برای قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم آوردیم مشابه برهانی است که هالموس در [۶۲] آورده است اما کارآمدتر از آن است؛ آن را از اِل. لومیس یاد گرفته‌ام.

بند ۳.۳: شاخص

$$|\nu|(E) = \sup\{\sum_1^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, \text{مجزا هستند } E_n,\dots,E_1 \ , E = \bigcup_1^n E_j\}$$

برای تغییر کل اندازهٔ مختلطی چون ν (تمرین ۲۱ را ببینید) معمولاً به عنوان تعریف $|\nu|$ گرفته می‌شود. به نظر می‌رسد تعریف ما بسیار مفیدتر بوده و قطعاً کار کردن با آن آسان تر است.

بند ۳.۴: قضایای ۳.۲۱ و ۳.۲۲ به لبگ نسبت داده شده اند، اما استدلالی که ما به کار برده ایم اساساً همان استدلالی است که وینر در [۱۶۲] آورده است و تابع ماکسیمال Hf در بعد یک، نخستین بار توسط هاردی و لیتلوود [۶۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. برهانی که برای قضیهٔ ۳.۱۸ آورده ایم شرحی از یک تکنیک کلی است که در سال‌های اخیر بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. این تکنیک، یعنی کنترل رفتار حد گیری از خانواده‌ای از عملگرها به کمک میانگین برآوردها روی یک تابع ماکسیمال مناسب.

لم ۳.۱۵ ، یعنی نمونهٔ ساده شدهٔ لم پوششی وینر، از رودین [۱۲۵] گرفته شده است. قضیهٔ پوششی قدیمی‌تر و ظریف‌تری هم وجود دارد که به ویتالی منسوب است و در موارد مشابه به کار می‌رود:

اگر $E \subset \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{Q}$ خانواده‌ای از مکعب‌ها باشد به طوری که هر $x \in E$ در اعضایی از $\mathcal{Q}$ با قطر به دلخواه کوچک مشمول باشد، آنگاه دنباله ای مجزا (متناهی یا نامتناهی) مانند $\{Q_j\} \subset \mathcal{Q}$ وجود داشته باشد به طوری که $m(E \setminus \bigcup_j Q_j) = \circ$.

برهان ها را می‌توان در برخی کتاب ها یافت، برای مثال، کُهن [۲۷,۶.۲] ، فالکونر [بند ۱.۳ ,۳۹] و هویت و اِسترامبرگ [بند ۱۷ ,۷۶].

بند ۳.۵: احکام اصلی این بخش به لبگ و ویتالی نسبت داده می‌شوند؛ هاوکینس [۷۰] را به خاطر مراجع مفصل تر ببینید. تمرین ۳۶ شکلی از فرمول تغییر متغییر را برای انتگرال‌های لبگ به دست می‌دهد؛ شکل دیگری از آن را می‌توان در سرین و واربرگ [۱۳۳] یافت. تمرین ۳۹ قضیه ای از فوبینی است و مثال ذکر شده در تمرین ۴۰ به براون [۲۱] منسوب است.

انتگرال اشتیلیس $\int_a^b gdF$ در بدو امر تحت این فرض که F تابعی صعودی بر $[a,b]$ است بـه صـورت حـد مجمـوع‌هـای ریمان $\sum g(t_j)\{F(t_j) - F(t_{j-1})\}$ تعریف شد. نظریهٔ چنین انتگرال‌های « ریمان ـ اشتیلیس » بسیار شـبیه بـه نظریـهٔ انتگرال ریمان معمولی است، اما برای به راه انداختن آن در حالتی که F و g هر دو مجاز به ناپیوسته بودن باشند دقت وافری می‌طلبد.

ترهورس [۱۴۸] را ببینید که قضیه ای مشابه با قضیهٔ ۲.۲۸ برای انتگرال‌های اشـتیلیس آورده اسـت. مثـالِ تـابع کـانتور نـشان می‌دهد که یک تابع پیوستهٔ تقریباً همه جا مشتق پذیر لزوماً انتگرال مشتقش نیست. این یک قضیهٔ بی اندازه نابدیهی است که اگر F بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $F'(x)$ برای هر $x \in [a,b] \setminus A$ وجود داشته باشـد کـه در آن A شـمارش پـذیر اسـت و $F' \in L^1$ ، آنگاه F مطلقاً پیوسته است و در نتیجه می‌توان F را با انتگرالگیری از روی F' باز یافت. یـک برهـان در کهـن [بند ۲۷,۶۰۳] می‌توان یافت؛ برای حالت نسبتاً سادهٔ $A = \varnothing$، رودین [قضیهٔ ۱۲۵,۷۰۲۶] را ببینید.

اما این پایان کار نیست، زیرا تابع همه جا مشتق پذیری مانند F وجود دارد به‌طـوری‌کـه $F' \notin L^1$. شـاید سـاده‌تـرین مثـال $F(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ باشـد (تمـرین ۳۱ را ببینیـد). در اینجـا تنهـا مـشکل در $x = 0$ اسـت، بنـا بـر ایـن بـرای $a \le 0 \le b$ می‌توان $\int_a^b F'dt$ را به عنوان یک انتگرال ناسره، یعنی، حد انتگرال‌های لبگ روی $[a,b] \setminus [-\varepsilon,\varepsilon]$ در نظر گرفت که در آن $\varepsilon \to 0$. اما به دور از مشکل می‌توان مثال‌هایی ساخت که در آنها تکین‌های F' چنـان در هـم پیچیـده انـد که F' روی هیچ بازه ای انتگرال‌پذیر لبگ نیست. در این وضعیت انتگرال لبگ به سادگی کم می‌آورد. اما انتگـرال هنـستوک ـ کارزوایل (یا انتگرال‌های دنجوی یا پرون) که در ۲.۸ بحث شد بـه قـدری توانمنـد اسـت کـه از چنـین F'ای انتگرالگیـری می‌شود و با استفاده از این انتگرال قضیهٔ اساسی تعمیم یافتهٔ حسابان به‌دست می‌آید: اگر F همه جا بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشـد، آنگاه

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt\,.$$

فصل چهارم
توپولوژی

مفاهیم حد، همگرایی و پیوستگی قلب آنالیز هستند و داشتن چهارچوبی کلی برای مطالعهٔ آنها که کشفیات سنتی را به عنوان حالت‌های خاص دربرگیرد مفید است. یکی از این چهارچوب‌ها که ارجعیت آن عدم نیاز به بسیاری از ایده‌هائی خارج از آنهایی است که در آنالیز روی فضای اقلیدسی ظاهر می‌شوند، فضاهای متری است. اما فضاهای متری برای توصیف حتی بعضی از انواع همگرایی بسیار سنتی به‌قدر کافی کلی نیستند، برای مثال، همگرایی نقطه به نقطهٔ توابع روی $\mathbb{R}$. با گرفتن مجموعه‌های باز غیر از مجموعه‌های باز نسبت به یک متر به‌عنوان دادهٔ اولیه، می‌توان نظریه‌ای پایدارتر ساخت و این همان نظریه‌ای است که می‌خواهیم آن را در این فصل بیان کنیم.

۴.۱ فضاهای توپولوژیک

فرض‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک **توپولوژی** روی X خانواده‌ای مانند $\mathcal{T}$ از زیرمجموعه‌های X است که شامل X و $\varnothing$ است و تحت اجتماع‌های دل‌خواه و اشتراک‌های متناهی بسته است. (یعنی، اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ و اگر $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$، آنگاه $\bigcap_1^n U_j \in \mathcal{T}$). زوج $(X, \mathcal{T})$ یک **فضای توپولوژیک** نامیده می‌شود. اگر $\mathcal{T}$ معلوم باشد، به‌طور خلاصه به X فضای توپولوژیک خواهیم گفت.

چند مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

- اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، $\mathcal{P}(X)$ و $\{\varnothing, X\}$ توپولوژی‌های روی X هستند. این توپولوژی‌ها به ترتیب **توپولوژی گسسته** و **توپولوژی بدیهی** (**ناگسسته**) نامیده می‌شوند.
- اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، $\{U \subset X : U = \varnothing$ یا U^c متناهی است$\}$ یک توپولوژی موسوم به **توپولوژی متمم متناهی** روی X است.
- اگر X یک فضای متری باشد، گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های باز نسبت به متر، یک توپولوژی روی X است.

• اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subset X$، آنگاه $\mathcal{T}_Y = \{U \cap T : U \in \mathcal{T}\}$ یک توپولوژی روی Y موسوم به **توپولوژی نسبی** القاء شده با $\mathcal{T}$ است.

اینک اصطلاحات زیربنایی فضاهای توپولوژیک را می‌آوریم. قبلاً با بسیاری از این مفاهیم در درس فضاهای متری آشنا شدیم. تا اطلاع ثانوی، $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک ثابتی خواهد بود.

اعضای $\mathcal{T}$ مجموعه‌های **باز** و متمم‌هایشان مجموعه‌های **بسته** نامیده می‌شوند. چنانچه $Y \subset X$، زیرمجموعه‌های باز (بستهٔ) Y نسبت به توپولوژی نسبی، باز (بستهٔ) **نسبی** نامیده می‌شوند. به کمک قوانین دمرگان مشاهده می‌کنیم که خانوادهٔ مجموعه‌های بسته تحت اشتراک‌های دل‌خواه و اجتماع‌های متناهی بسته است. اگر $A \subset X$، اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز مشمول در A **درون** A نامیده می‌شود و اشتراک همهٔ مجموعه‌های بسته شامل A **بستار** A نامیده می‌شود. درون و بستار A را به ترتیب با A° و $\overline{A}$ نشان می‌دهیم. به وضوح A° بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در A است و $\overline{A}$ کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A است و داریم $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ و $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$. تفاضل $\overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ **مرز** A نامیده می‌شود و با ∂A نشان داده می‌شود. اگر $\overline{A} = X$، آنگاه A در X **چگال** نامیده می‌شود. از طرف دیگر، اگر $(\overline{A})^\circ = \varnothing$، آنگاه A **هیچ‌جاچگال** نامیده می‌شود. اگر $x \in X$ (یا $E \subset X$)، یک **همسایگی** x (یا E) مجموعه‌ای مانند $A \subset X$ است به‌طوری‌که $x \in A^\circ$ (یا $E \subset A^\circ$). بنابر این، مجموعه‌ای چون A باز است اگر و تنها اگر A یک همسایگی خودش باشد. (برخی از مؤلفین، قید می‌کنند که همسایگی‌ها مجموعه‌هایی باز باشند؛ ما چنین نکرده‌ایم.) نقطه‌ای چون x یک **نقطهٔ انباشتگی** A نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x، $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. (عبارات دیگری که گاهی اوقات برای همین مفهوم به‌کار می‌روند عبارتند از «**نقطهٔ بستاری**» و «**نقطهٔ حدی**». بعداً از «نقطهٔ بستاری» به معنی چیز دیگری استفاده خواهیم کرد.)

۴.۱ گزاره. برای $A \subset X$، فرض کنید $\operatorname{acc}(A)$ مجموعهٔ نقاط انباشتگی A باشد. در این صورت $\overline{A} = A \cup \operatorname{acc}(A)$ و A بسته است اگر و تنها اگر $\operatorname{acc}(A) \subset A$.

برهان. اگر $x \notin \overline{A}$، آنگاه $\overline{A}^c$ یک همسایگی x است که A را قطع نمی‌کند، لذا $x \notin \operatorname{acc}(A)$؛ بنابر این $A \cup \operatorname{acc}(A) \subset \overline{A}$. چنانچه $x \notin A \cup \operatorname{acc}(A)$، مجموعه‌ای باز مانند U شامل x وجود دارد به‌طوری‌که $U \cap A = \varnothing$، لذا $\overline{A} \subset U^c$ و $x \notin \overline{A}$. بنابر این $\overline{A} \subset A \cup \operatorname{acc}(A)$. بالاخره A بسته است اگر و تنها اگر $\overline{A} = A$ و این تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $\operatorname{acc}(A) \subset A$.

اگر $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ توپولوژی‌هایی روی X باشند به‌طوری‌که $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$، می‌گوییم $\mathcal{T}_1$ **ضعیف‌تر** (یا **درشت‌تر**) از $\mathcal{T}_2$ است یا $\mathcal{T}_2$ **قوی‌تر** (یا **ظریف‌تر**) از $\mathcal{T}_1$ است. به‌وضوح توپولوژی بدیهی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است، در حالی‌که توپولوژی گسسته قوی‌ترین توپولوژی است. اگر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$، یکتا توپولوژی ضعیف $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ روی X که شامل $\mathcal{E}$ است وجود دارد؛ این

توپولوژی اشتراک همهٔ توپولوژی‌هایی روی X است که شامل $\mathcal{E}$ هستند. این توپولوژی، توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{E}$ نامیده می‌شود و گاهی اوقات $\mathcal{E}$ یک زیرپایه برای $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ نامیده می‌شود.

اگر $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی X باشد، یک **پایهٔ موضعی** برای $\mathcal{T}$ در $x \in X$ خانواده‌ای مانند $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ است به‌طوری‌که

- به ازای هر $V \in \mathcal{N}$، $x \in V$؛
- اگر $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U$، آنگاه عضوی چون V از $\mathcal{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $V \subset U$.

یک **پایه** برای $\mathcal{T}$ خانواده‌ای مانند $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ است‌که شامل یک پایهٔ موضعی برای $\mathcal{T}$ در هر $x \in X$ باشد. برای مثال، اگر X یک فضای متری باشد، گردایهٔ گوی‌های باز با مرکز x یک پایهٔ موضعی برای توپولوژی متری در x است و گردایهٔ همهٔ گوی‌های باز در X یک پایه است.

۴.۲ گزاره. اگر $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی X باشد و $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$، آنگاه $\mathcal{E}$ یک پایه برای $\mathcal{T}$ است اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ ناتهی مانند $U \in \mathcal{T}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{E}$ باشد.

برهان. اگر $\mathcal{E}$ یک پایه باشد، $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U$، آنگاه $V_x \in \mathcal{E}$ با خاصیت $x \in V_x \subset U$ وجود دارد، لذا $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ به‌عکس، اگر هر مجموعهٔ ناتهی مانند $U \in \mathcal{T}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{E}$ باشد، آنگاه $\{V \in \mathcal{E} : x \in V\}$ به‌وضوح یک پایهٔ موضعی در x است، لذا $\mathcal{E}$ یک پایه است. ■

۴.۳ گزاره. اگر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$، برای آنکه $\mathcal{E}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X باشد لازم و کافی است دو شرط زیر صادق باشند:

الف) هر $x \in X$ در یک $V \in \mathcal{E}$ مشمول شود؛

ب) اگر $U, V \in \mathcal{E}$ و $x \in U \cap V$، آنگاه عضوی مانند W از $\mathcal{E}$ وجود داشته باشد که $x \in W \subset (U \cap V)$.

برهان. لزوم شرایط واضح است، زیرا اگر U و V باز باشند، آنگاه $U \cap V$ نیز باز است. برای اثبات کفایت شرایط، فرض می‌کنیم:

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : \text{به ازای هر } x \in U \text{ عضوی چون } V \text{ از } \mathcal{E} \text{ وجود داردکه } x \in V \subset U\}.$$

در این صورت، طبق شرط (الف)، به بداهت $\phi \in \mathcal{T}$ و به وضوح $\mathcal{T}$ تحت اجتماع‌ها بسته است. چنانچه $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ و $x \in U_1 \cup U_2$، $V_1, V_2 \in \mathcal{E}$ چنان وجود دارند که $x \in V_1 \subset U_1$ و $x \in V_2 \subset U_2$ و بنابر شرط (ب) عضو W از $\mathcal{E}$ چنان وجود دارد که $x \in W \subset (V_1 \cap V_2)$. بنابر این $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$، لذا به استقراء $\mathcal{T}$ تحت اشتراک‌های متناهی بسته است. بنابر این $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است و به‌وضوح $\mathcal{E}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است. ■

۴ . ۴ گزاره. اگر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$، آنگاه توپولوژی $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ که با $\mathcal{E}$ تولید می‌شود شامل $\varnothing$,X و همهٔ اجتماع‌های و اشتراک‌های متناهی از اعضای $\mathcal{E}$ است.

برهان. خانواده اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های واقع در $\mathcal{E}$، به همراه X در شرایط گزاره ۴.۳ صدق می‌کنند، لذا بنابرگزارهٔ ۴.۲ خانوادهٔ همهٔ اجتماع‌های چنین مجموعه‌هایی به همراه $\varnothing$ یک توپولوژی است. به وضوح این توپولوژی در $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ مشمول است، بنابراین با $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ برابر است. ■

توجه شود که چگونه سادگی این گزاره در برابر حکم متناظر برای σ- جبرها قرار می‌گیرد. (گزارهٔ ۱.۲۳). آنچه در اینجا کار را آسان‌تر می‌کند این است که فقط اشتراک‌های متناهی دخالت داده می‌شوند.

مفهوم فضای توپولوژیک به قدر کافی کلی است که عمده مثال‌های جالب را در بر می‌گیرد، اما ــ با همان اشارات ــ برای به‌دست آوردن قضایای جالب نیز کلی است.

برای بنا نهادن نظریه‌ای خردمندانه همواره بایستی به رده‌ای از فضاهای خاص محدود شویم. بقیهٔ این فصل به کندوکاوی از دو نوع محدویت که توأماً اعمال می‌شوند، اختصاص دارد که **اصول موضوع شمارش‌پذیری** و **جدایی‌پذیری** نامیده می‌شوند.

یک فضای توپولوژیک مانند $(X, \mathcal{T})$ در **اصل موضوع اول شمارش‌پذیری** صدق می‌کند یا **شمارش‌پذیر اول** است، هرگاه در هر نقطه از X یک پایهٔ موضعی شمارش‌پذیر وجود داشته باشد. (مشاهده این مطلب مفید است که اگر X شمارش‌پذیر اول باشد، آنگاه به ازای هر x از X یک پایهٔ موضعی مانند $\{U_j\}_1^\infty$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر j، $U_j \supset U_{j+1}$. در واقع اگر $\{V_j\}_1^\infty$ پایهٔ موضعی شمارش‌پذیری در x باشد، می‌توانیم U_j را $\bigcap_1^j V_j$ بگیریم.) فضای $(X, \mathcal{T})$ در **اصل موضوع دوم شمارش‌پذیری** صدق می‌کند، یا **شمارش‌پذیر دوم** است هرگاه $\mathcal{T}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر داشته باشد. همچنین، $(X, \mathcal{T})$ **جدایی‌پذیر** است، هرگاه X زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری داشته باشد. هر فضای متری شمارش‌پذیر اول است (گوی‌های با شعاع گویا حول x یک پایهٔ موضعی در x است) و یک فضای متری شمارش‌پذیر دوم است اگر و تنها اگر جدایی‌پذیر باشد (تمرین ۵). گزارهٔ زیر را می‌توان به‌طور جزئی تعمیم داد:

۴ . ۵ گزاره. هر فضای شمارش‌پذیر دوم، جدایی‌پذیر است.

برهان. اگر X شمارش‌پذیر دوم باشد، $\mathcal{E}$ را پایه‌ای شمارش‌پذیر برای توپولوژی انگاشته و به ازای هر $U \in \mathcal{E}$ نقطه‌ای مانند $x_U \in U$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت متمم بستار $\{x_U : U \in \mathcal{E}\}$ مجموعهٔ بازی است که شامل هر $U \in \mathcal{E}$ نیست؛ بنابر این مجموعهٔ مذکور تهی است و $\{x_U : U \in \mathcal{E}\}$ چگال است. ■

دنباله‌ای چون $\{x_j\}$ در یک فضای توپولوژیک مانند X به $x \in X$ **همگرا** است (با نماد: $x_j \to x$) هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x عددی طبیعی مانند J وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $j > J$، $x_j \in U$. فضاهای شمارش‌پذیر اول این خوبی را دارند که مقوله‌هایی مثل بستار و پیوستگی را می‌توان بر حسب همگرایی دنباله‌ها بیان کرد. همان‌طور که خواهیم دید این چیزی نیست که در فضاهای کلی‌تر برقرار باشد؛ برای مثال:

۴.۶ گزاره. اگر X شمارش‌پذیر اول باشد و $A \subset X$، آنگاه $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای مانند $\{x_j\}$ در A وجود داشته باشد که به x همگرا است.

برهان. فرض می‌کنیم $\{U_j\}$ پایهٔ موضعی شمارش‌پذیری در x باشد به‌طوری‌که به ازای هر j، $U_j \supset U_{j+1}$. اگر $x \in \overline{A}$، آنگاه به ازای هر j، $U_j \cap A \neq \varnothing$. عضوی مانند x_j از $U_j \cap A$ انتخاب می‌کنیم؛ چون به ازای $k > j$، $U_k \subset U_j$ و هر همسایگی x شامل یک U_j است، واضح است که $x_j \to x$. از طرف دیگر، اگر $x \notin \overline{A}$ و $\{x_j\}$ دنباله‌ای در A باشد، آنگاه $(\overline{A})^c$ یک همسایگی از x است که شامل هیچکدام از x_jها نیست، لذا $x_j \not\to x$. ■

نهایتاً، اصول موضوع جدایی‌پذیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اینها خواصی از یک فضای توپولوژیک هستند که با $T_0, \ldots, T_4$ شماره‌گذاری شده و وجود مجموعه‌های بازی را تضمین می‌کنند که نقاط یا مجموعه‌های بسته را از یکدیگر جدا می‌کنند. چنانچه X خاصیت T_j داشته باشد می‌گوییم X یک فضای T_j است یا اینکه توپولوژیِ روی X، T_j است.

T_0: اگر $x \neq y$، مجموعهٔ بازی شامل x وجود دارد به‌طوری‌که شامل y نیست یا مجموعهٔ بازی شامل y وجود دارد به‌طوری که شامل x نیست.

T_1: اگر $x \neq y$، مجموعهٔ بازی شامل y وجود دارد به‌طوری‌که شامل x نیست.

T_2: اگر $x \neq y$، دو مجموعهٔ باز مجزا مانند U و V وجود دارند به‌طوری‌که $x \in U$ و $y \in V$.

T_3: X یک فضای T_1 است و به ازای هر مجموعهٔ بسته مانند $A \subset X$ و هر $x \in A^c$ مجموعه‌های باز مجزایی چون U و V وجود دارند به‌طوری‌که $x \in U$ و $A \subset V$.

T_4: X یک فضای T_1 است و به ازای هر دو مجموعهٔ بسته مانند A و B در X مجموعه‌های باز مجزایی چون U و V وجود دارند به‌طوری‌که $A \subset U$ و $B \subset V$.

T_2، T_3 و T_4 اسامی دیگری نیز دارند. هر فضای T_2 یک فضای **هاسدورف** است، هر فضای T_3 یک فضای **منظم** و هر فضای T_4 یک فضای **نرمال** است. (برخی از مؤلفین T_1 بودن فضاهای منظم و نرمال را ضروری نمی‌دانند.) شرط جداسازی مفید مضاعفی نیز بین T_3 و T_4 وجود دارد که آن را در بند ۴.۲ مورد بررسی قرار خواهیم داد.

رده‌بندی T_1ها که در زیر بیان شده است مثمر ثمر است. خصوصاً این رده‌بندی نشان می‌دهد که فضاهای نرمال، منظم هستند و هر فضای منظم، هاسدورف است.

۴.۷ گزاره. X یک فضای هاسدورف است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ مجموعهٔ تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

برهان. اگر X یک فضای T_1 باشد و $x \in X$، آنگاه به ازای هر $y \neq x$ مجموعه‌ای باز مانند U_y شامل y وجود دارد که x را ندارد؛ بنابر این $\{x\}^c = \bigcup_{y \neq x} U_y$ باز است و لذا $\{x\}$ بسته است. به‌عکس، اگر $\{x\}$ بسته باشد، آنگاه $\{x\}^c$ مجموعهٔ بازی است که شامل هر $y \neq x$ است. ■

نهایت فضاهای توپولوژیکی که در عمل (و به ویژه در این کتاب) به‌کار می رود فضاهای هاسدورف هستند یا پس از اصلاحاتی ساده، هاسدورف می‌شوند (شاید حالت اخیر به فضاهایی از قبیل فضاهای توابع انتگرال‌پذیر روی یک فضای اندازه مرتبط گردد که وقتی دو تابع تقریباً همه‌جا برابر را یکی می‌گیریم، با متر L^1 یک فضای هاسدورف می‌شوند.) اما معمولاً دو دسته از فضاهای توپولوژیک غیرهاسدورف به قدر کافی اهمیت دارند که توجه خاصی به آنها داشته باشیم: یکی توپولوژی خارج قسمتی روی فضایی متشکل از رده‌های هم ارزی که در تمرین‌های ۲۸ و ۲۹ مورد بررسی قرار می‌گیرد و دیگری توپولوژی زاریسکی روی یک واریتهٔ جبری است. بدون توجه به تعریف یک واریتهٔ جبری، توپولوژی زاریسکی روی یک فضای برداری را توصیف خواهیم کرد. فرض می‌کنیم K یک میدان و $K(X_1,\dots,X_n)$ حلقهٔ چند جمله‌ای‌های n ـ متغیری روی K باشد. هر $P \in K(X_1,\dots,X_n)$ یک نگاشت چندجمله‌ای مانند $p: K^n \to K$ مشخص می‌کند که با جایگزینی اعضای K به‌جای مجهول‌های صوری $X_1,\dots,X_n$ تعریف می‌شود. تناظر $P \to p$ دقیقاً وقتی یک به یک است که K نامتناهی باشد. وقتی p روی همهٔ نگاشت‌های چندجمله‌ای تغییر کند، گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های $p^{-1}(\{0\})$ در K^n تحت اجتماع‌های متناهی بسته است زیرا $p^{-1}(\{0\}) \cup q^{-1}(\{0\}) = (pq)^{-1}(\{0\})$ و این گردایه شامل خود K^n است ($p = 0$ را درنظر می‌گیریم). بنابر این، مطابق با گزاره‌های ۴.۲ و ۴.۳، گردایهٔ مجموعه‌های به شکل $\bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(\{0\})$ (که به ازای هر α، p_α یک نگاشت چندجمله‌ای است) گردایهٔ مجموعه‌های بسته برای یک توپولوژی (موسوم به **توپولوژی زاریسکی**) روی K^n است. بنابر گزارهٔ ۴.۷ توپولوژی زاریسکی T_1 است زیرا اگر $a = (a_1,\dots,a_n) \in K^n$، آنگاه

$$\{a\} = \bigcap_1^n p_j^{-1}(\{0\})$$

که در آن

$$p_j(X_1,\dots,X_n) = X_j - a_j.$$

اگر K متناهی باشد، توپولوژی زاریسکی گسسته است، اما اگر K نامتناهی باشد، آنگاه توپولوژی زاریسکی هاسدورف نیست. مطلب فوق دقیقاً بیان دگرگونهٔ این حقیقت است که $K(X_1,\dots,X_n)$ یک دامنهٔ صحیح است، یعنی اگر P و Q چندجمله‌ای‌های ناصفری باشند، آنگاه PQ ناصفر است. (برای $n=1$، توپولوژی زاریسکی توپولوژی متمم متناهی است.)

مثال‌های دیگری در تمرین‌ها گنجانده شده است که تشریح کنندهٔ اصول موضوع جداسازی و شمارش‌پذیری هستند.

تمرین‌ها

۱) اگر $\operatorname{card}(X) \geq ۲$، آنگاه یک توپولوژی روی X وجود دارد که $T_۰$ است اما $T_۱$ نیست.

۲) اگر X یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، توپولوژی متمم متناهی روی X یک فضای $T_۱$ است اما $T_۲$ نیست و شمارش‌پذیر اول است اگر و تنها اگر X شمارش‌پذیر باشد.

۳) هر فضای متری نرمال است. (اگر A و B مجموعه‌هایی بسته در فضای متری (X,ρ) باشد، مجموعه‌های متشکل از نقاط x را درنظر بگیرید که در آن $\rho(x,A) < \rho(x,B)$ یا $\rho(x,A) > \rho(x,B)$.)

٤) فرض‌کنید $X = \mathbb{R}$ و $\mathcal{T}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشد که به شکل $U \bigcup (V \bigcap Q)$ هستند که در آن U و V به معنی عادی باز هستند (در این صورت $\mathcal{T}$ یک توپولوژی هاسدورف است اما منظم نیست. (با توجه به تمرین ۳، این نشان می‌دهد که یک توپولوژی قوی‌تر از یک توپولوژی نرمال لزوماً نرمال یا حتی منظم نیست.)

۵) هر فضای متری جدایی‌پذیر، شمارش‌پذیر دوم است.

٦) فرض‌کنید $\mathcal{E} = \{(a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$.

الف) $\mathcal{E}$ یک پایه برای یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ روی $\mathbb{R}$ است که نسبت به آن توپولوژی، اعضای $\mathcal{E}$ هم باز و هم بسته‌اند.

ب) $\mathcal{T}$ شمارش‌پذیر اول است اما شمارش‌پذیر دوم نیست. (اگر $x \in \mathbb{R}$، آنگاه هر پایهٔ موضعی در x شامل مجموعه‌ای است که سوپرممش x است.)

ج) نسبت به $\mathcal{T}$، $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. (بنابر این، عکس گزارهٔ ۴.۵ نادرست است.)

۷) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، نقطه‌ای چون $x \in X$ یک **نقطهٔ بستاری** دنبالهٔ $\{x_j\}$ است هرگاه برای هر همسایگی مانند U از x، به ازای تعدادی نامتناهی از j ها، $x_j \in U$. نشان دهید که x یک نقطهٔ بستاری $\{x_j\}$ است اگر و تنها اگر زیردنباله‌ای از $\{x_j\}$ به x همگرا باشد.

۸) اگر X مجموعه‌ای نامتناهی با توپولوژی متمم متناهی باشد و $\{x_j\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز واقع در X باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$، $x_j \to x$.

۹) اگر X یک مجموعهٔ مرتب خطی باشد، آنگاه توپولوژی $\mathcal{T}$ که به وسیلهٔ مجموعه‌های $\{x : x < a\}$ و $\{x : x > a\}$ $(a \in A)$ تولید می‌شود توپولوژی ترتیبی نامیده می‌شود.

الف) اگر $a, b \in X$ و $a < b$، آنگاه $U, V \in \mathcal{T}$ چنان وجود دارند که $a \in U$، $b \in V$ و به ازای هر $x \in U$ و هر $y \in V$، $x < y$. توپولوژی ترتیبی ضعیف‌ترین توپولوژی با این خاصیت است.

ب) اگر $Y \subset X$، توپولوژی ترتیبی هرگز از توپولوژی نسبی روی Y که توسط توپولوژی ترتیبی روی X القاء می‌شود قوی‌تر نیست اما ممکن است ضعیف‌تر باشد.

ج) توپولوژی ترتیبی روی $\mathbb{R}$ توپولوژی معمولی است.

۱۰) فضای توپولوژیکی چون X ناهمبند نامیده می‌شود هرگاه دو مجموعهٔ باز و ناتهی مانند U و V وجود داشته باشند به‌طوری‌که $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = X$؛ در غیر این‌صورت X همبند است. وقتی از زیرمجموعه‌های همبند یا ناهمبند X صحبت می‌کنیم منظورمان همبندی یا ناهمبندی نسبت به توپولوژی نسبی روی آن‌ها است.

الف) X همبند است اگر و تنها اگر $\varnothing$ و X تنها زیرمجموعه‌هایی از X باشند که هم باز و هم بسته‌اند.

ب) اگر $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد به‌طوری‌که $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \varnothing$، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ همبند است.

ج) اگر $A \subset X$ همبند باشد، آنگاه $\overline{A}$ همبند است.

د) هر نقطه مانند x از X در زیرمجموعهٔ همبند ماکسیمال یکتایی از X مشمول است و این زیرمجموعه بسته است (این زیرمجموعه مؤلفهٔ همبند x نامیده می‌شود).

۱۱) اگر $E_1, \ldots, E_n$ زیرمجموعه‌هایی از یک فضای توپولوژیک باشند، آنگاه بستار $\bigcup_1^n E_j$ مجموعهٔ $\bigcup_1^n \overline{E_j}$ است.

۱۲) فرض‌کنید X یک مجموعه باشد. یک عملگر بستاری کورانفسکی روی X نگاشتی مانند $A \to A^*$ از $\mathcal{P}(X)$ به خودش است که در شرایط زیر صدق می کند:

i) $\varnothing^* = \varnothing$؛

ii) به ازای هر A، $A \subset A^*$؛

iii) به ازای هر A، $(A^*)^* = A^*$ و

iv) به ازای هر A و B، $(A\bigcup B)^* = A^* \bigcup B^*$.

الف) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه نگاشت $A \mapsto \overline{A}$ یک عملگر بستاری کوراتوفسکی است (تمرین ۱۱ را به‌کار ببرید.)

ب) به‌عکس، چنانچه یک عملگر بستاری کوراتوفسکی مفروض باشد، قرارمی‌دهیم $\mathcal{F} = \{A \subset X : A = A^*\}$ و $\mathcal{T} = \{U \subset X : U^c \in \mathcal{F}\}$، در این صورت $\mathcal{F}$ یک توپولوژی است، و به ازای هرمجموعه مانند $A \subset X$، A^* بستار A نسبت به $\mathcal{F}$ است.

۱۳) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، U در X باز و A در X چگال باشد، آنگاه $\overline{U} = \overline{U \bigcap A}$.

۴.۲ نگاشت‌های پیوسته

فضاهای توپولوژیک نشیمنگاه طبیعی برای مفهوم پیوستگی هستند که می‌توان آن را به صورت زیر یا سراسری توصیف کرد یا موضعی. فرض‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک و f یک نگاشت از X به Y باشد. در این صورت f پیوسته نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر مجموعهٔ باز مانند $V \subset Y$، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد (چون $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$، شرط معادل دیگر این است که به ازای هر مجموعهٔ بسته مانند $A \subset Y$، $f^{-1}(A)$ در X بسته باشد.) اگر $x \in X$، f در X **پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر همسایگی مانند V از $f(x)$ یک همسایگی مانند U از x وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(U) \subset V$ یا به‌طور معادل، هرگاه به ازای هر همسایگی مانند V از $f(x)$، $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x باشد. به‌وضوح، اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پیوسته باشند (یا f در x و g در $f(x)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f$ (در x) پیوسته است. مجموعهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به Y را با $C(X,Y)$ نشان می‌دهیم.)

۴.۸ گزاره. نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در هر $x \in X$ پیوسته باشد.

برهان. اگر f پیوسته و V یک همسایگی از $f(x)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(V^\circ)$ یک مجموعهٔ باز شامل x است. پس f در x پیوسته است. برعکس، اگر $V \subset Y$ باز باشد، آنگاه V یک همسایگی هر نقطه اش است، لذا $f^{-1}(V)$ یک همسایگی هر نقطه‌اش است بنابر این $f^{-1}(V)$ باز است، لذا f پیوسته است. ■

۴.۹ گزاره. اگر توپولوژیِ روی Y با خانواده‌ای از مجموعه‌ها مانند $\mathcal{E}$ تولید شود، آنگاه $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $V \in \mathcal{E}$، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

برهان. این مطلب از گزارهٔ ۴.۴ و اینکه تابع مجموعهٔ f^{-1} با اجتماع‌ها و اشتراک‌ها جابه‌جا می‌شود حاصل می‌گردد. ■

چنانچه $f : X \to Y$ دوسویی باشد f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند، f یک **همیومورفیسم** نامیده می‌شود و گفته می‌شود که X و Y **همیومورف** هستند، در این حالت تابع مجموعهٔ f^{-1} یک دوسویی از مجموعه‌های باز واقع در Y به مجموعه‌های باز واقع در X است، لذا می توان X و Y را تا جایی‌که خواص توپولوژیکی آنها مدنظر است یکسان گرفت. اگر $f : X \to Y$ یک به یک باشد ولی پوشا نباشد و وقتی روی $f(X) \subset Y$ توپولوژی نسبی گذاشته شد $f : X \to f(X)$ یک همیومورفیسم باشد، آنگاه f یک **نشاننده** نامیده می‌شود.

اگر X مجموعه‌ای دل‌خواه و $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از نگاشت‌های از X بتوی یک فضاهای توپولوژیک Y_α باشد، ضعیف‌ترین توپولوژی یکتایی چون $\mathcal{T}$ روی X وجود دارد که f_αها را پیوسته می‌سازد، این توپولوژی، **توپولوژی ضعیف** تولید شده به‌وسیلهٔ $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ نامیده می‌شود، یعنی، $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ مجموعه‌هایی است که به شکل $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ هستند که در آن $\alpha \in A$ و U در Y_α باز است.

مهمترین مثال از این ساختار، حاصلضرب دکارتی فضاهای توپولوژیک است. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، **توپولوژی حاصلضربی** روی $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ توپولوژی ضعیف تولید شده به‌وسیلهٔ نگاشت‌های مؤلفه‌ای $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ است. وقتی یک حاصلضرب دکارتی از فضاهای توپولوژیک را مد نظر قرار می‌دهیم همواره آن را مجهز به توپولوژی حاصلضربی می‌دانیم مگر آنکه خلاف این مطلب را ذکر کنیم. بنابر گزاره ۴.۴، یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی توسط مجموعه‌های زیر فراهم می‌شود:

$\bigcap_1^n \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و به ازای $1 \le j \le n$، U_{α_j} در X_{α_j} باز است. این مجموعه‌ها را می‌توان به صورت $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ نوشت که در آن $U_\alpha = X_\alpha$ هرگاه $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. بالاخص، توجه کنید که اگر A نامتناهی باشد، حاصلضرب $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ از مجموعه‌های باز، در $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ باز است اگر و تنها اگر به ازای همهٔ αها به‌جز تعدادی متناهی از آن‌ها $U_\alpha = X_\alpha$.

۴.۱۰ گزاره. اگر به ازای هر α از A، X_α هاسدورف باشد، آنگاه $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ هاسدورف است.

برهان. چنانچه x و y نقاط متمایزی از X باشند، باید به ازای یک α، $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$. فرض می‌کنیم U و V همسایگی‌های مجزایی از $\pi_\alpha(x)$ و $\pi_\alpha(y)$ در X_α هستند. در این صورت $\pi_\alpha^{-1}(U)$ و $\pi_\alpha^{-1}(V)$ همسایگی‌های مجزایی از x و y در X هستند. ■

۴.۱۱ گزاره. اگر X_αها ($\alpha \in A$) و Y فضاهایی توپولوژیک باشند و $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$، آنگاه $f : Y \to X$ پیوسته است اگر تنها اگر به ازای هر α، $\pi \circ f$ پیوسته باشد.

برهان. اگر به ازای هر α، $\pi \circ f$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر مجموعهٔ باز مانند U_α در X_α، $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ در Y باز است. بنا بر گزارهٔ ۴.۹، f پیوسته است. عکس مطلب واضح است. ■

(هرگاه فضاهای X_α همگی با فضای ثابتی چون X برابر باشند $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ درست مجموعهٔ X^A متشکل ازنگاشت‌های از A به X است و توپولوژی حاصلضربی دقیقاً توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه است. به طور دقیق تر:

۴.۱۲ گزاره. اگر X یک فضای توپولوژیک، A یک مجموعهٔ ناتهی و $\{f_n\}$ دنباله ای در X^A باشد، آنگاه نسبت به توپولوژی حاصلضربی $f_n \to f$ اگر و تنها اگر $f_n \to f$ نقطه به نقطه.

برهان. مجموعه‌های

$$N(U_1,\dots,U_k)=\bigcap_{1}^{k}\pi_{\alpha_j}^{-1}(U_j)=\{g\in X^A : g(\alpha_j)\in U_j \text{ ، } 1\le j\le k \text{ به ازای هر }\}$$

که در آن $k\in\mathbb{N}$ و به ازای هر j، U_j یک همسایگی از $f(\alpha_j)$ در X است یک پایهٔ همسایه‌ای در f برای توپولوژی حاصلضربی تشکیل می‌دهند. اگر $f_n \to f$ نقطه به نقطه، آنگاه به ازای $n\ge N_j$، $f_n(\alpha_j)\in U_j$ و در نتیجه برای $n\ge \max(N_1,\dots,N_k)$، $f_n\in N(U_1,\dots,U_k)$؛ بنابر این نسبت به توپولوژی حاصلضربی $f_n\to f$. به‌عکس، اگر نسبت به توپولوژی حاصلضربی $f_n\to f$، $\alpha\in A$ و U یک همسایگی $f(\alpha)$ باشد، آنگاه به ازای nهای بزرگ $f_n\in N(U)=\pi_\alpha^{-1}(U)$؛ بنابر این $f_n(\alpha)\in U$ و لذا $f_n(\alpha)\to f(\alpha)$. ■

به توابع با مقادیر حقیقی یا مختلط روی فضاهای توپولوژیک توجه خاصی خواهیم داشت. اگر X مجموعه‌ای دل‌خواه باشد، فضای همهٔ توابع کراندار با مقادیر حقیقی (متناظراً مختلط) روی X را با $B(X,\mathbb{R})$ (متناظراً $B(X,\mathbb{C})$) نشان می‌دهیم. چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد فضاهای $C(X,\mathbb{R})$ و $C(X,\mathbb{C})$ از توابع پیوسته روی X تشکیل می‌شوند و تعریف می‌کنیم:

$$BC(X,F)=B(X,F)\cap C(X,F) \qquad ,(F=\mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}).$$

در بحث توابع با مختلط معمولاً $\mathbb{C}$ را حذف کرده و به‌طور خلاصه خواهیم نوشت $B(X)$، $C(X)$ و $BC(X)$. چون جمع و ضرب توابع از T_1 به $\mathbb{C}$ پیوسته‌اند، $C(X)$ و $BC(X)$ فضاهای برداری مختلطی هستند.

اگر $f\in B(X)$، آنگاه **نرم یکنواخت** f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_u=\sup\{|f(x)| : x\in X\}.$$

به آسانی دیده می‌شود که $\rho(f,g)=\|f-g\|_u$ یک متر روی $B(X)$ است و همگرایی نسبت به این متر به طور خلاصه همگرایی یکنواخت روی X است. به‌وضوح $B(X)$ نسبت به متر یکنواخت کامل است، اگر $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت کشی باشد،

در F درون F کامل

آنگاه به ازای هر x دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ کشی است و اگر قرار دهیم $f(x)=\lim_n f_n(x)$، آنگاه به آسانی دیده می‌شود که $\|f_n-f\|_u \to 0$.

۴ . ۱۳ گزاره. هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد $BC(X)$ نسبت به متر یکنواخت زیرفضایی بسته از $B(X)$ است، بالاخص $BC(X)$ کامل است.

برهان. فرض می‌کنیم $\{f_n\}\subset BC(X)$ و $\|f_n-f\|_u\to 0$. برای عدد مفروض $\varepsilon>0$، عدد طبیعی N را چنان بزرگ انتخاب می‌کنیم که برای $n>N$، $\|f_n-f\|_u<\frac{\varepsilon}{3}$. برای عدد طبیعی مفروض $n>N$ و $x\in X$ به دلیل پیوستگی f در x یک همسایگی مانند U از x وجود دارد به‌طوری‌که برای $y\in U$، $|f_n(y)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. اما در این صورت

$$|f(y)-f(x)|\leq|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon .$$

لذا f در x پیوسته است. بنابر گزاره ۸ . ۴ تابع f پیوسته است. ■

ممکن است در مورد فضای توپولوژیک مفروضی چون X، $C(X)$ فقط شامل توابع ثابت باشد به وضوح در حالتی که X توپولوژی بدیهی دارد درست است اما حتی این موضوع وقتی که X منظم است می‌تواند رخ دهد. اما همان‌طور که قضایای اساسی زیر نشان می‌دهند فضاهای نرمال همیشه گونه‌های زیادی از توابع پیوسته دارند.

۴ . ۱۴ لم. فرض‌کنیم A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزایی از فضای نرمال X باشند و

$$\Delta=\{2^{-n}k : n\geq 1, 0<k<2^n\}$$

مجموعهٔ اعداد گویای واقع در بازهٔ $(0,1)$ در مبنای ۲ باشد. خانواده‌ای مانند $\{U_r : r\in\Delta\}$ از مجموعه‌های باز در X وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $r\in\Delta$، $A\subset U_r\subset B^c$ و برای $r<s$، $\overline{U_r}\subset U_s$.

برهان. از نرمال بودن X معلوم می‌شود مجموعه‌های باز مجزایی چون V و W وجود دارند به‌طوری‌که $A\subset V$ و $B\subset W$. فرض‌کنیم $U_{\frac{1}{2}}=V$. در این صورت به دلیل بسته بودن W^c داریم:

$$A\subset U_{\frac{1}{2}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subset W^c\subset B^c$$

اکنون به استقراء روی n، U_r را برای $r=2^{-n}k$ انتخاب می‌کنیم. فرض‌می‌کنیم که وقتی $0<k<2^n$ و $n\leq N-1$ مجموعهٔ U_r برای $r=2^{-n}k$ انتخاب شده باشد. برای یافتن U_r به ازای $r=2^{-N}(2j+1)$ ($0\leq j<2^{N-1}$) مشاهده

می‌کنیم که $\overline{U}_{j2^{1-N}}$ و $(U_{(j+1)2^{1-N}})^c$ مجموعه‌های بسته مجزایی هستند (که در آن $A = \overline{U_0}$ و $B = U_1^c$)، لذا مانند فوق می‌توان مجموعهٔ بازی چون U_r انتخاب کرد که

$$A \subset \overline{U}_{j2^{1-N}} \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_{(j+1)2^{1-N}} \subset B^c.$$

به وضوح این U_r خواص مطلوب را دارند. ■

۴ . ۱۵ لم اوریسون. فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد. اگر A و B مجموعه‌های بسته مجزایی در X باشند، آنگاه $f \in C(X,[0,1])$ چنان وجود دارد که $f = 0$ بر A و $f = 1$ بر B.

برهان. فرض کنیم U_r همان باشد که در لم ۴ . ۱۴ برای $r \in \Delta$ تعریف شد و $U_1 = X$. به ازای $x \in X$ تعریف می‌کنیم $f(x) = \inf\{r : x \in U_r\}$. چون برای $0 < r < 1$، $A \subset U_r \subset B^c$، به‌وضوح برای $x \in A$ داریم $f(x) = 0$ و برای $x \in B$، $f(x) = 1$ و به ازای هر x از X، $0 \leq f(x) \leq 1$. نشان دادن پیوستگی f باقیمانده است. بدین منظور، ملاحظه می‌کنیم که $f(x) < \alpha$ اگر و تنها اگر به ازای یک $r < \alpha$، $x \in U_r$ اگر و تنها اگر $x \in \bigcup_{r<\alpha} U_r$، لذا $f^{-1}((-\infty,\alpha)) = \bigcup_{r<\alpha} U_r$ باز است. همچنین $f(x) > \alpha$ اگر و تنها اگر به ازای یک $r > \alpha$، $x \notin U_r$ اگر و تنها اگر به ازای $s \geq \alpha$ای، $x \notin \overline{U}_s$ (زیرا به ازای $s < r$، $\overline{U}_s \subset U_r$) اگر و تنها اگر $x \in \bigcup_{s>\alpha} (\overline{U}_s)^c$، لذا $f^{-1}((a,\infty)) = \bigcup_{s>\alpha} (\overline{U}_s)^c$ باز است. چون پاره‌خط‌های نیم‌باز توپولوژی روی $\mathbb{R}$ را تولید می‌کنند، بنابر گزاره ۴ . ۹ تابع f پیوسته است. ■

برهان لم اوریسون ممکن است در ابتدا غیر شفاف به نظر برسد، اما متعاقب آن دید هندسی ساده‌ای وجود دارد. اگر X به عنوان صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ و U_r به عنوان نواحی محدود به منحنی‌ها تلقی شود، آنگاه منحنی‌های ∂U_r یک «نگاشت توپولوژیک» از توابع f تشکیل می‌دهند.

۴ . ۱۶ قضیهٔ توسیع تیتسه. فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد. اگر A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد و $f \in C(A,[a,b])$، آنگاه تابعی چون $F \in C(X,[a,b])$ وجود دارد به طوری که $F|_A = f$.

برهان. با جایگزینی $\dfrac{f-a}{b-a}$ به‌جای f می‌توان فرض کرد که $[a,b] = [0,1]$ ادعا می‌کنیم که دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ از توابع پیوسته روی X وجود دارد به‌طوری که $0 \leq g_n \leq \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$ بر X و $0 \leq f - \sum_1^n g_j \leq (\frac{2}{3})^n$ بر A. در وهلهٔ اول، فرض می‌کنیم $B = f^{-1}([0,\frac{1}{3}])$ و $C = f^{-1}([\frac{2}{3},1])$. اینها زیرمجموعه‌های بسته‌ای از A هستند و چون خود A بسته است، این مجموعه‌ها

در X بسته‌اند. بنابر لم اوریسون تابع پیوسته‌ای مانند $g_1 : X \to [0, \frac{1}{3}]$ وجود دارد که $g_1 = 0$ بر B و $g_1 = 1/3$ بر C؛ از اینجا معلوم می‌شود که $0 \leq f - g_1 \leq \frac{2}{3}$ بر A. با داشتن $g_1, \dots, g_{n-1}$ و با همان استدلال قبل می‌توانیم تابعی چون $g_n : X \to [0, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$ بیابیم به‌طوری‌که $g_n = 0$ بر مجموعه‌ای که روی آن $f - \sum_1^{n-1} g_j \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ و $g_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ بر مجموعه‌ای که روی آن $f - \sum_1^{n-1} g_j \geq (\frac{2}{3})^n$. فرض می‌کنیم $F = \sum_1^\infty g_n$. چون $\|g_n\|_u \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$، مجموع‌های جزئی این سری همگرای یکنواخت است، لذا بنابر گزارهٔ ۴.۱۳ تابع F پیوسته است. به‌علاوه، روی A برای همهٔ nها داریم $0 \leq f - F \leq (\frac{2}{3})^n$، از اینجا نتیجه می‌شود که $F = f$ بر A. ■

۴.۱۷ نتیجه. اگر X نرمال باشد، $A \subset X$ بسته باشد و $f \in C(A)$، آنگاه تابعی چون $F \in C(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $F|_A = f$.

برهان. با جداگانه در نظرگرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی، کافی است f را تابعی حقیقی بینگاریم. فرض می‌کنیم $g = \frac{f}{1+|f|}$. در این صورت $g \in C(A, (-1,1))$، لذا عضوی چون $G \in C(X, [-1,1])$ وجود دارد که $G|_A = g$. فرض می‌کنیم $B = G^{-1}(\{-1,1\})$. بنابر لم اوریسون تابعی چون $h \in C(X, [0,1])$ با شرط $h = 1$ بر A و $h = 0$ بر B وجود دارد. در نتیجه $hG = G$ بر A و همه‌جا $|hG| < 1$، لذا $F = \frac{hG}{1-|hG|}$ نتیجه مطلوب را به‌دست می‌دهد. ■

فضای توپولوژیکی چون X **کاملاً منظم** نامیده می‌شود هرگاه X، T_1 باشد و به ازای هر مجموعهٔ بسته مانند $A \subset X$ و هر $x \notin A$ تابعی چون $f \in C(X, [0,1])$ وجود داشته باشد به طوری‌که $f(x) = 1$ و $f = 0$ بر A. فضاهای کاملاً منظم فضاهای **تیخونف** یا فضاهای $T_{3\frac{1}{2}}$ نیز نامیده می‌شوند. اصطلاح اخیر برای توجیه این مطلب است که هر فضای کاملاً منظم T_3 است (اگر A، x و f همانند فوق باشند، آنگاه $f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ و $f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ همسایگی‌های مجزایی از x و A هستند) و لم اوریسون نشان می‌دهد که هر فضای T_4 کاملاً منظم است.

تمرین‌ها

۱۴) اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، آنگاه $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \subset X$، $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ اگر و تنها اگر به ازای هر $B \subset Y$، $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

۱۵) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، $A \subset X$ بسته باشد و $g \in C(A)$ طوری باشد که $g = 0$ بر ∂A، آنگاه توسیع g به X که به ازای هر $x \in A^c$ با $g(x) = 0$ تعریف می‌شود پیوسته است.

۱۶) فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، Y یک فضای هاسدورف باشد و f, g نگاشت‌های پیوسته‌ای از X به Y باشند.

الف) $\{x : f(x) = g(x)\}$ بسته است.

ب) اگر روی زیرمجموعهٔ چگالی از X، $f = g$، آنگاه روی کل X، $f = g$.

۱۷) اگر X یک مجموعه، $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از توابع حقیقی روی X و $\mathcal{T}$ توپولوژی ضعیف تولید شده به وسیلهٔ $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $\mathcal{T}$ هاسدورف است اگر و تنها اگر به ازای هر x, y از X که $x \neq y$ عضوی چون $f \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد که $f(x) \neq f(y)$.

۱۸) اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند و $y_0 \in Y$، آنگاه X با $X \times \{y_0\}$ همیومورف است که در آن فضای اخیر به عنوان زیرمجموعه‌ای از $X \times Y$ توپولوژی نسبی دارد.

۱۹) اگر $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، آنگاه $X = \prod_\alpha X_\alpha$ (نسبت به توپولوژی حاصلضربی) با تقریب همیومورفی به‌طور یکتا به وسیلهٔ خاصیت زیر مشخص می‌شود: نگاشت‌های پیوسته‌ای مانند $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ وجود دارند به طوری‌که اگر Y فضای توپولوژیک دیگری باشد و به ازای هر α، $f_\alpha \in C(Y, X_\alpha)$، آنگاه نگاشت یکتایی چون F از $C(Y, X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_\alpha = \pi_\alpha \circ F$. (بنابر این X حاصلضرب رسته‌ای X_αها در رستهٔ فضاهای توپولوژیک است.)

۲۰) اگر A یک فضای شمارش‌پذیر باشد و به ازای هر $\alpha \in A$، X_α یک فضای شمارش‌پذیر اول (متناظراً دوم) باشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ شمارش‌پذیر اول (متناظراً دوم) است.

۲۱) اگر X مجموعه‌ای نامتناهی با توپولوژی متمم متناهی باشد، آنگاه هر $f \in C(X)$ ثابت است.

۲۲) فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، (Y,ρ) یک فضای متری کامل و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در Y^X باشد به طوری‌که وقتی $m,n \to \infty$، $\sup_{x\in X}\rho(f_n(x),f_m(x)) \to \circ$. تابع یکتایی مانند $f \in Y^X$ وجود دارد به طوری‌که وقتی $n \to \infty$، $\sup_{x\in X}\rho(f_n(x),f(x)) \to \circ$. چنانچه هر f_n پیوسته باشد f نیز پیوسته است.

۲۳) برای حالتی‌که $X = \mathbb{R}$ برهانی مقدماتی برای قضیهٔ توسیع تیتزه ارائه دهید.

۲۴) فضای هاسدورفی چون X نرمال است اگر و تنها اگر X در حکم لم اوریسون صدق کند اگر و تنها اگر X در حکم قضیهٔ توسیع تیتزه صدق‌کند.

۲۵) اگر $(X,\mathcal{T})$ کاملاً منظم باشد، آنگاه $\mathcal{T}$ توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $C(X)$ است.

۲۶) فرض‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند.

الف) اگر X همبند باشد و $f \in C(X,Y)$، آنگاه $f(X)$ همبند است (تمرین ۱۰ را ببینید).

ب) X همبند راهی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x_\circ$ و x_1 از X تابعی چون $f \in C([\circ,1],X)$ وجود داشته باشد به طوری‌که $f(\circ) = x_\circ$ و $f(1) = x_1$. هر فضای همبند راهی، همبند است.

ج) $X = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : t = \sin(s^{-1})\} \cup \{(\circ,\circ)\}$ با توپولوژی نسبی القایی از $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت X همبند است اما همبند راهی نیست.

۲۷) اگر به ازای هر $\alpha \in A$، X_α همبند باشد (تمرین ۱۰ را ببینید)، آنگاه $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ همبند است. ($x \in X$ را ثابت گرفته و فرض‌کنید Y مؤلفهٔ همبندِ x در X باشد. نشان دهید که Y شامل

$\{y \in X : \pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(x)$ به ازای تمام αها به‌جز تعدادی متناهی از آنها$\}$

است و مجموعهٔ اخیر در X چگال است. تمرین‌های ۱۰ و ۱۸ را به‌کار برید.)

۲۸) فرض‌کنید X یک فضای توپولوژیک مجهز به یک رابطهٔ هم‌ارزی باشد، $\tilde{X}$ مجموعهٔ رده‌های هم ارزی، $\pi : X \to \tilde{X}$ نگاشتی باشد که هر $x \in X$ را به ردهٔ هم‌ارزی شامل آن می‌برد و

$$\mathcal{T} = \{U \subset \tilde{X} : \text{باز است } X \text{ در } \pi^{-1}(U)\}$$

الف) $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی X است. (این توپولوژی، توپولوژی خارج قسمتی نامیده می‌شود.)

ب) اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه $f : \tilde{X} \to X$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f \circ \pi$ پیوسته باشد.

ج) $\tilde{X}$ یک فضای T_1 است اگر و تنها اگر هر رده هم‌ارزی بسته باشد.

۲۹) اگر X یک فضای توپولوژیک و G گروهی از همیومورفیسم‌های از X به خودش باشد، آنگاه G یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X القاء می‌کند، یعنی $x \sim y$ اگر و تنها اگر به ازای عضوی چون $g \in G$، $y = g(x)$. فرض می‌کنیم $X = \mathbb{R}^۲$؛ فضای خارج قسمتی $\tilde{X}$ و توپولوژی خارج قسمتی روی آن (مثل تمرین ۲۸) را برای هر یک از گروه‌های زیر که از نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر تشکیل شده‌اند توصیف کنید. به ویژه، نشان دهید که در (الف) فضای خارج قسمتی با $[۰,\infty)$ همیومورف است؛ در (ب) $T_۱$ است اما هاسدورف نیست؛ در (ج) $T_۰$ است اما $T_۱$ نیست و در (د) $T_۰$ نیست. (در واقع، در (د) $\tilde{X}$ شمارش‌ناپذیر است اما فقط شش مجموعهٔ باز وجود دارد و نقاطی چون $p \in \tilde{X}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\overline{\{P\}} = \tilde{X}$.)

الف) $\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\}$؛

ب) $\left\{\begin{pmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$؛

ج) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : a > ۰,\, b \in \mathbb{R}\right\}$؛

د) $\left\{\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{۰\}\right\}$.

۴.۳ تورها

همان‌طور که در فوق اشاره شد، همگرایی دنباله‌ای در فضاهای توپولوژیک کلی نقش اصلی را مانند آنچه در فضاهای متری دیدیم بازی نمی‌کنند. دلیل این مدعا را می‌توان با مثال زیر توضیح داد. فضای $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ متشکل از توابع با مقادیر مختلط روی $\mathbb{R}$ را با توپولوژی حاصلضربی (یعنی، توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه) و زیرفضای $C(\mathbb{R})$ از آن را در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر، بنابر نتیجهٔ ۲.۹، اگر $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R})$ و $f_n \to f$ نقطه به نقطه، آنگاه f اندازه‌پذیر برل است، لذا مجموعهٔ حدود دنباله‌های همگرا در $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ زیرمجموعه‌ای سره از $C(\mathbb{R})$ است. با این وجود، $C(\mathbb{R})$ در $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ چگال است. در واقع، اگر $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$، آنگاه مجموعه‌های

$$\{g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ ، به ازای } j = ۱,\ldots,n\}$$
$$(n \in \mathbb{N},\ x_۱,\ldots,x_n \in \mathbb{R},\ \varepsilon > ۰)$$

یک پایهٔ همسایه‌ای در f تشکیل می‌دهند و به وضوح هر یک از این مجموعه‌ها شامل توابع پیوسته هستند. البته، تعمیمی از مفهوم دنباله وجود دارد که در فضاهای توپولوژیک دل‌خواه کار می‌کند؛ ایده کلیدی، استفاده از مجموعه‌های اندیسگذار کلی‌تر از $\mathbb{N}$ است. تعاریف دقیق‌تر به صورت زیر هستند.

یک مجموعهٔ جهت‌دار مجموعه‌ای چون A مجهز به یک رابطهٔ دوتایی مانند $\precsim$ است به طوری که

- به ازای هر $\alpha \in A$، $\alpha \precsim \alpha$؛
- اگر $\alpha \precsim \beta$ و $\beta \precsim \gamma$، آنگاه $\alpha \precsim \gamma$؛
- به ازای هر α و β از A عضوی چون γ از A وجود دارد به طوری که $\alpha \precsim \gamma$ و $\beta \precsim \gamma$.

به‌جای $\alpha \precsim \beta$ از نماد $\beta \succsim \alpha$ نیز استفاده خواهیم کرد. یک تور در مجموعه‌ای چون X نگاشتی چون $\alpha \mapsto x_\alpha$ از یک مجموعهٔ جهت‌دار مانند A بتوی X است. معمولاً اگر A معلوم باشد، چنین نگاشتی را با $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ یا فقط با $\langle x_\alpha \rangle$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم $\langle x_\alpha \rangle$ با A اندیسگذاری شده است.

چند مثال از مجموعه‌های جهت‌دار عبارتند از:

الف) مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbb{N}$ با شرط $j \precsim k$ اگر و تنها اگر $j \leq k$.

ب) مجموعهٔ $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) با $x \precsim y$ شرط اگر و تنها اگر $|x-a| \geq |y-a|$.

ج) مجموعهٔ همهٔ افزارهایی چون $\{x_j\}_0^n$ از بازهٔ $[a,b]$ (یعنی، $a = x_0 < \cdots < x_n = b$) با شرط $\{x_j\}_0^n \precsim \{y_k\}_0^m$ اگر و تنها اگر $\max(x_j - x_{j-1}) \geq \max(y_k - y_{k-1})$

د) مجموعهٔ $\mathcal{N}$ متشکل از همهٔ همسایگی‌های نقطه‌ای چون x در فضای توپولوژیکی مانند X با شرط $U \precsim V$ اگر و تنها اگر $U \supset V$. (می‌گوییم $\mathcal{N}$ با شمول عکس جهت‌دار شده است.)

ه) حاصلضرب دکارتی $A \times B$ از دو مجموعهٔ جهت‌دار، با شرط $(\alpha,\beta) \precsim (\alpha',\beta')$ اگر و تنها اگر $\alpha \precsim \alpha'$ و $\beta \precsim \beta'$. (همواره این روشی است که $A \times B$ را به یک مجموعهٔ جهت‌دار تبدیل می‌کنند.)

مثال‌های (الف) تا (ج) در آنالیز مقدماتی مطرح می‌شوند: یک تور اندیسگذاری شده با $\mathbb{N}$ درست یک دنباله است و تورهای اندیسگذاری شده با مجموعه‌های ذکر شده در (ب) و (ج) در تعریف حدود متغیرهای حقیقی و انتگرال‌های ریمان ظاهر می‌شوند. مثال (د) در توپولوژی از اهمیت خاصی برخوردار است. چند کاربرد ساختنی در (ه) را خواهیم دید.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و E زیرمجموعه‌ای از X باشد. توری چون $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ نهایتاً در E است هرگاه عضوی چون $\alpha_0 \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای $\alpha \succsim \alpha_0$، $x_\alpha \in E$ و $\langle x_\alpha \rangle$ مکرراً در E است هرگاه به ازای هر $\alpha \in A$ عضوی چون β از A وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_\beta \in E$. نقطه‌ای چون x حد $\langle x_\alpha \rangle$ است (یا $\langle x_\alpha \rangle$ به x همگرا است، یا $x_\alpha \to x$) هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x، $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در U باشد و x یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x، $\langle x_\alpha \rangle$ مکرراً در U باشد.

سه گزارهٔ بعد نشان می‌دهند که تورها مناسبت خوبی با دنباله‌ها دارند.

۴.۱۸ گزاره. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، $E \subset X$ و $x \in X$، آنگاه x یک نقطهٔ انباشتگی E است اگر و تنها اگر توری در $E \setminus \{x\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به x همگرا باشد، و $x \in \overline{E}$ اگر و تنها اگر توری در E وجود داشته باشد که به x همگرا باشد.

برهان. چنانچه x یک نقطهٔ انباشتگی E باشد، فرض می‌کنیم $\mathcal{N}$ مجموعهٔ همسایگی‌های x باشد که با شمول عکس جهت‌دار شده است. به ازای هر $U \in \mathcal{N}$، نقطه‌ای چون $x_U \in (U \setminus \{x\}) \bigcap E$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $x_U \to x$. به‌عکس، اگر $x_\alpha \in E \setminus \{x\}$ و $x_\alpha \to x$، آنگاه هر همسایگی محذوف x حاوی یکی از x_αها است، پس x یک نقطهٔ انباشتگی E است. به همین منوال، اگر $x_\alpha \to x$ که در آن $x_\alpha \in E$، آنگاه $x \in \overline{E}$ و عکس گزاره از گزارهٔ ۴.۱۰ نتیجه می‌شود. ■

۴.۱۹ گزاره. اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f : X \to Y$، آنگاه f در $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر تور همگرا به x مانند $\langle x_\alpha \rangle$، تور $\langle f(x_\alpha) \rangle$ به $f(x)$ همگرا باشد.

برهان. اگر f در x پیوسته باشد و V یک همسایگی از $f(x)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x است. بنابر این، اگر $x_\alpha \to x$، آنگاه $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در $f^{-1}(V)$ است، لذا $\langle f(x_\alpha) \rangle$ نهایتاً در V است و در نتیجه $f(x_\alpha) \to f(x)$. از طرف دیگر، اگر f در x پیوسته نباشد، آنگاه یک همسایگی مانند V از $f(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x نیست، یعنی $x \notin (f^{-1}(V))^\circ$، یا به‌طور معادل $x \in \overline{f^{-1}(V^c)}$. بنابر گزارهٔ ۴.۱۸، یک تور مانند $\langle x_\alpha \rangle$ در $f^{-1}(V^c)$ وجود دارد به‌طوری‌که به x همگرا است. اما در این صورت $f(x_\alpha) \notin V$ و به همین سبب $f(x_\alpha) \not\to f(x)$. ■

یک زیرتور از توری چون $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ توری مانند $\langle y_\beta \rangle_{\beta \in B}$ به همراه نگاشتی چون $\beta \mapsto \alpha_\beta$ از B به A است به‌طوری‌که:

- به ازای هر $\alpha_\circ \in A$ عضوی چون $\beta_\circ$ از B وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $\beta \gtrsim \beta_\circ$، آنگاه $\alpha_\beta \gtrsim \alpha_\circ$؛
- $y_\beta = x_{\alpha_\beta}$.

واضح است که اگر $\langle x_\alpha \rangle$ به نقطه‌ای چون x همگرا باشد، آنگاه هر زیر تور مانند x_{α_β} نیز به x همگرا است.

هشدار: نام «زیرتور» به خاطر این به‌کار رفته است که زیرتورها نقش همان توابعی را ایفا می‌کنند که زیردنباله‌ها ایفا می‌کردند، اما نبایستی اینها عیناً یکی باشند زیرا نگاشت $\beta \mapsto \alpha_\beta$ لزوماً یک به یک نیست. به‌ویژه، مجموعهٔ اندیسگذار B می‌تواند عدد اصلی خیلی بزرگتری از مجموعهٔ اندیسگذار A داشته باشد و یک زیرتور از یک دنباله لزوماً یک زیردنباله نیست.

۴.۲۰ گزاره. اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ یک تور در فضای توپولوژیکی مانند X باشد، آنگاه $x \in X$ یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است اگر و تنها اگر $\langle x_\alpha \rangle$ زیرتوری داشته باشد که به x همگرا است.

برهان. اگر $\langle y_\beta \rangle = \langle x_{\alpha_\beta} \rangle$ زیرتوری همگرا به x و U یک همسایگی از x باشد، $\beta_1 \in B$ را چنان انتخاب می‌کنیم که به ازای $\beta \succeq \beta_1$، $y_\beta \in U$. همچنین، برای عضو مفروض $\alpha \in A$، $\beta_2 \in B$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای $\beta \succeq \beta_2$، $\alpha_\beta \succeq \alpha$. در این صورت عضوی چون $\beta \in B$ وجود دارد که $\beta \succeq \beta_1$، $\beta \succeq \beta_2$ و داریم $\alpha_\beta \succeq \alpha$ و $x_{\alpha_\beta} = y_\beta$. بنابر این $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در U است، لذا x یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است. بر عکس، اگر x یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ باشد، فرض می‌کنیم $\mathcal{N}$ مجموعهٔ همسایگی‌های x باشد و $\mathcal{N} \times A$ را با تصریح $(U,\alpha) \preceq (U',\alpha')$ اگر و تنها اگر $U \supset U'$ و $\alpha \preceq \alpha'$ به یک مجموعهٔ جهت‌دار تبدیل می‌کنیم. به ازای هر $(U,\gamma) \in \mathcal{N} \times A$ می‌توانیم $\alpha_{(U,\gamma)} \in A$ را چنان انتخاب‌کنیم که $\alpha_{(U,\gamma)} \succeq \gamma$ و $x_{\alpha_{(U,\gamma)}} \in U$. در این صورت اگر $(U',\gamma') \succeq (U,\gamma)$، داریم $\alpha_{(U',\gamma')} \succeq \gamma' \succeq \gamma$ و $x_{\alpha_{(U',\gamma')}} \in U' \subset U$، که از آن معلوم می‌شود که $\langle x_{\alpha_{(U,\gamma)}} \rangle$ زیرتوری از $\langle x_\alpha \rangle$ است که به x همگرا است. ■

تمرین‌ها

۳۰) اگر A یک مجموعهٔ جهت‌دار باشد، زیرمجموعه‌ای چون B از A در A **هم‌پایان** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\alpha \in A$ عضوی چون β از B وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\beta \succeq \alpha$. نشان دهید‌که:

الف) اگر B در A هم‌پایان و $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ یک تور باشد، آنگاه نگاشت $B \to A$، $\langle x_\beta \rangle_{\beta\in B}$ را به یک زیرتور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ تبدیل می‌کند.

ب) اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ یک تور در یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه $\langle x_\alpha \rangle$ به x همگرا است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعهٔ هم پایان مانند B از A، زیرمجموعهٔ هم پایانی مانند C از B وجود دارد به‌طوری‌که $\langle x_\gamma \rangle_{\gamma\in C}$ به x همگرا است.

۳۱) فرض‌کنیم $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله باشد. نشان دهید که

الف) اگر $k \mapsto n_k$ یک نگاشت از $\mathbb{N}$ بتوی خودش باشد، آنگاه $\langle x_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ زیرتوری از $\langle x_n \rangle$ است اگر و تنها اگر وقتی $k \to \infty$، $n_k \to \infty$ و یک زیردنبالهٔ (مطابق تعریف بند ۱.۰) است اگر و تنها اگر n_k اکیداً صعودی باشد.

ب) بین زیردنباله‌های و زیرتورهایی که در تمرین ۳۰ به‌وسیلهٔ مجموعه‌های هم پایان تعریف شد یک تناظر یک به یک طبیعی وجود دارد.

۳۲) فضای توپولوژیکی چون X هاسدورف است اگر و تنها اگر هر تور در X حد اکثر به یک نقطه همگرا باشد. (اگر X هاسدروف نباشد، فرض کنید x و y نقاط متمایزی با همسایگی‌های غیر مجزا باشند و مجموعهٔ جهت‌دار $\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathcal{N}_x$ و $\mathcal{N}_y$ خانواده‌های همسایگی‌های x و y هستند.)

۳۳) فرض کنید $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ توری در یک فضای توپولوژیک باشد و برای هر $\alpha \in A$ قرار دهید: $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$. در این صورت x یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است اگر و تنها اگر $x \in \bigcap_{\alpha \in A} \overline{E}_\alpha$.

۳۴) اگر X دارای توپولوژی ضعیف تولید شده با خانواده‌ای چون $\mathcal{F}$ از توابع باشد، آنگاه $\langle x_\alpha \rangle$ به x همگرا است اگر و تنها اگر برای هر $f \in \mathcal{F}$، $\langle f(x_\alpha) \rangle$ به $f(x)$ همگرا باشد. (بالاخص، اگر $X = \Pi_{i \in I} X_i$، آنگاه $x_n \to x$ اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$.)

۳۵) فرض کنید X یک مجموعه و $\mathcal{A}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از X باشد که با شمول جهت‌دار شده است. $f : X \to \mathbb{R}$ را تابع دل‌خواهی بینگارید و برای هر $A \in \mathcal{A}$ فرض کنید $z_A = \sum_{x \in A} f(x)$. در این صورت تور $\langle z_A \rangle$ در $\mathbb{R}$ همگرا است اگر و تنها اگر $\{x : f(x) \neq 0\}$ مجموعهٔ شمارش‌پذیری چون $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ باشد و $\sum_1^\infty |f(x_n)| < \infty$، که در این حالت $z_A \to \sum_1^\infty f(x_n)$. (به گزارهٔ ۲۰.۰ رجوع کنید.)

۳۶) فرض کنیم X مجموعهٔ توابع مختلط اندازه‌پذیر لبگ روی $[0,1]$ باشد. هیچ توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ روی X وجود ندارد به طوری که دنباله‌ای چون $\langle f_n \rangle$ نسبت به $\mathcal{T}$ به f همگرا باشد اگر و تنها اگر $f_n \to f$ ت.ه.
(نتیجه ۳.۳۲ و قسمت‌های (ب) از تمرین‌های ۳۰ و ۳۱ را به کار بندید.)

۴.۴ فضاهای فشرده

در بند ۶.۰ سه شاخص معادل با فشردگی برای فضاهای متری ارائه دادیم: خاصیت‌هاینه بـرل، خاصیت بولزانو- ویراشتراس و کامل بودن همراه با کرانداری کلی. فقط دو تا از این سه شاخص برای فضاهای توپولوژیک کلی با معنی است و اولی است که

بسیار مفید واقع می‌شود. با این حساب، فضای توپولوژیکی چون X را فشرده تعریف می‌کنیم هرگاه هر پوشش باز از X، زیرپوششی متناهی داشته باشد، یعنی، اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز باشد به‌طوری که $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$، آنگاه زیرمجموعه‌ای متناهی مانند B از A وجود داشته باشد به‌طوری که $X=\bigcup_{\alpha\in B}U_\alpha$.

زیرمجموعه‌ای چون Y از فضای توپولوژیکی چون X **فشرده** نامیده می‌شود هرگاه نسبت به توپولوژی نسبی فشرده باشد؛ بنابر این $Y\subset X$ فشرده است اگر و تنها اگر وقتی $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X با شرط $Y\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ بود، مجموعه‌ای متناهی مانند $B\subset A$ وجود داشته باشد به‌طوری که $Y\subset\bigcup_{\alpha\in B}U_\alpha$. علاوه بر این، Y **پیش فشرده** نامیده می‌شود هرگاه بستارش فشرده باشد. قوانین دمرگان به مشخص‌سازی زیرین از فشردگی بر حسب مجموعه‌های بسته منجر می‌شود. خانواده‌ای چون $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ از زیرمجموعه‌های X دارای **خاصیت مقطع متناهی** خوانده می‌شود هرگاه برای هر مجموعهٔ متناهی مانند $B\subset A$، $\bigcap_{\alpha\in B}F_\alpha\neq\varnothing$.

۴.۲۱ گزاره. فضای توپولوژیکی چون X فشرده است اگر و تنها اگر برای هر خانواده مانند $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ از مجموعه‌های بسته با خاصیت مقطع متناهی، $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha\neq\varnothing$.

برهان. فرض می‌کنیم $U_\alpha=(F_\alpha)^c$. در این صورت U_α باز است، $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha\neq\varnothing$ اگر و تنها اگر $\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\neq X$ و $\{F_\alpha\}$ خاصیت مقطع متناهی دارد اگر و تنها اگر هیچ زیرخانواده‌ای از $\{U_\alpha\}$ فضای X را نپوشاند و حکم حاصل می‌گردد. ■

اینک چندین حکم بنیادی در باب فضاهای فشرده فهرست می‌کنیم.

۴.۲۲ گزاره. هر زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

برهان. اگر X فشرده باشد، $F\subset X$ بسته باشد و $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز واقع در X باشد به‌طوری که $F\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$، آنگاه $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\cup\{F^c\}$ پوشش بازی برای X است. این پوشش، زیرپوششی متناهی دارد، بنابر این، در صورت لزوم، با کنار گذاشتن F^c از زیرپوشش اخیر، زیرگردایه‌ای متناهی از $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ به‌دست می‌آوریم که F را می‌پوشاند. ■

۴.۲۳ گزاره. هرگاه F زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای هاسدورفی چون X باشد و $x\notin F$، مجموعه‌های باز مجزایی مانند U و V وجود دارند به‌طوری که $x\in U$ و $F\subset V$.

برهان. برای هر $y \in F$، مجموعه‌های باز مجزایی چون U_y و V_y انتخاب می‌کنیم که $x \in U_y$ و $y \in V_y$. $\{V_y\}_{y\in F}$ پوشش بازی برای F است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{V_{y_j}\}_1^n$ دارد. در نتیجه $U = \bigcap_1^n U_{y_j}$ و $V = \bigcup_1^n V_{y_j}$ خواص لازم را دارند. ■

۴.۲۴ گزاره. هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای هاسدورف، بسته است.

برهان. مطابق با گزارهٔ ۴.۲۳، اگر F فشرده باشد، آنگاه F^c یک همسایگی از هر یک از نقاطش است و لذا باز است. ■

یاد آوری می‌کنیم که در یک فضای غیرهاسدورف، لزومی ندارد که مجموعه‌های فشرده، بسته باشند (برای مثال، هر زیرمجموعه از یک فضا با توپولوژی بدیهی، فشرده است) و لزومی هم ندارد که مقطع مجموعه‌های فشرده، فشرده باشد؛ تمرین ۳۷ را ببینید. البته بنابر گزاره‌های ۴.۲۲ و ۴.۲۴، در یک فضای هاسدورف، مقطع هر خانواده از مجموعه‌های فشرده، باز هم فشرده است. به علاوه، در یک فضای توپولوژیک دل‌خواه هر اجتماع متناهی از مجموع‌های فشرده همواره فشرده است.
(اگر $K_1, \ldots, K_n$ فشرده باشند و $\{U_\alpha\}$ پوشش بازی برای $\bigcup_1^n K_j$ باشد، زیرپوششی متناهی از هر K_j انتخاب کرده و آنها را ادغام می‌کنیم.)

۴.۲۵ گزاره. هر فضای هاسدورف فشرده، نرمال است.

برهان. فرض می‌کنیم X هاسدورف فشرده باشد و E و F زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزایی از X باشند. بنابر گزارهٔ ۴.۲۳، برای هر $x \in E$، مجموعه‌های بسته‌ای مانند U_x و V_x وجود دارند که $x \in U_x$ و $F \subset V_x$. طبق گزارهٔ ۴.۲۲، E فشرده است و $\{U_x\}_{x\in E}$ پوشش بازی برای E است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{U_{x_j}\}_1^n$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $U = \bigcup_1^n U_{x_j}$ و $V = \bigcap_1^n V_{x_j}$. در این صورت U و V مجموعه‌های باز مجزایی هستند به‌طوری‌که $E \subset U$ و $F \subset V$. ■

۴.۲۶ گزاره. اگر X فشرده و $f : X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ فشرده است.

برهان. فرض‌کنیم $\{V_\alpha\}$ پوشش بازی از $f(X)$ در Y باشد. در این صورت $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ پوشش بازی از X است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{f^{-1}(V_{\alpha_j})\}$ دارد و در نتیجه $\{V_{\alpha_j}\}$ پوشش بازی از $f(X)$ است. ■

۴.۲۷ نتیجه: اگر X فشرده باشد، آنگاه $C(X) = BC(X)$.

۴ . ۲۸ گزاره. اگر X فشرده و Y هاسدورف باشد، آنگاه هر دوسویی پیوسته مانند $f : X \to Y$ یک همیومورفیسم است.

برهان. اگر $E \subset X$ بسته باشد، آنگاه E فشرده است، بنابر این $f(E)$ فشرده می‌باشد، از این رو $f(E)$ بسته است، حال از گزاره‌های ۴.۲۲ ، ۴.۲۶ و ۲۴ . ۴، معلوم می‌شود که f^{-1} پیوسته است، لذا f یک همیومورفیسم است. ■

حال نشان می‌دهیم که نوعی از خاصیت بولزانو- وایرشتراس برای فضاهای توپولوژیک فشرده برقرار است. همین قدر بگوییم که فقط باید دنباله را با تورها جایگزین کنیم.

۴ . ۲۹ قضیه. هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف) X فشرده است.

ب) هر تور در X یک نقطهٔ بستاری دارد.

ج) هر تور در X زیرتوری همگرا دارد.

برهان. معادل بودن (ب) و (ج) از گزارهٔ ۲۰ . ۴ نشات می‌گیرد. چنانچه X فشرده باشد و $\langle x_\alpha \rangle$ توری در X باشد، فرض می‌کنیم $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \succeq \alpha\}$. چون برای هر $\alpha,\beta \in A$ عضوی چون $\gamma \in A$ وجود دارد که $\gamma \succeq \alpha$ و $\gamma \succeq \beta$، خانوادهٔ $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خاصیت مقطع متناهی دارد، لذا بنابر گزارهٔ ۴.۲۱، $\bigcap_{\alpha\in A} \overline{E}_\alpha \neq \varnothing$. اگر $x \in \bigcap_{\alpha\in A} \overline{E}_\alpha$ و U یک همسایگی از x باشد، آنگاه U هر یک از E_αها را قطع می‌کند و این بدانمعناست که $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در U است ، لذا x یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است. از سوی دیگر، اگر X فشرده نباشد، فرض می‌کنیم $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ پوشش بازی از X باشد که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. $\mathcal{A}$ را گردایهٔ زیرمجموعه‌ای متناهی B می‌انگاریم که با شمول جهت‌دارشده است و برای هر $A \in \mathcal{A}$ فرض می‌کنیم x_A نقطه‌ای در $\left(\bigcup_{\beta\in A} U_\beta\right)^c$ باشد. در این صورت $\langle x_A \rangle_{A\in\mathcal{A}}$ توری است که هیچ نقطهٔ بستاری ندارد. در واقع، اگر $x \in X$، $\beta \in B$ را با خاصیت $x \in U_\beta$ انتخاب می‌کنیم. اگر $A \in \mathcal{A}$ و $A \succeq \{\beta\}$، آنگاه $x_A \notin U_\beta$، لذا x یک نقطهٔ بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ نیست. ■

این بخش را با ذکر دو مفهوم مربوط به فشردگی به پایان می‌رسانیم. فضای توپولوژیکی چون X **فشردهٔ شمارش‌پذیر** نامیده می‌شود در صورتی که هر پوشش شمارش‌پذیر از X زیرپوششی متناهی داشته باشد، و **فشردهٔ دنباله‌ای** نامیده می‌شود در صورتی که هر دنباله در X زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد. البته، هر فضای فشرده، فشردهٔ شمارش‌پذیر است و در مورد فضاهای

متری، فشردگی و فشردگی دنباله‌ای هم ارز هستند. اما در حالت کلی، رابطه‌ای بین فشردگی و فشردگی دنباله‌ای وجود ندارد. برای احکام و مثال‌های بیشتر، تمرین‌های ۳۹ تا ۴۳ را ببینید.

تمرین‌ها

۳۷) فرض‌کنیم o' نشان‌دهندهٔ نقطه‌ای باشد که در $(-۱,۱)$ نیست و $X = (-۱,۱) \cup \{o'\}$. فرض‌کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده با مجموعه‌های $(-۱,a)$، $(a,۱)$، $[(-۱,b) \setminus \{۰\}] \cup \{o'\}$ و $[(c,۱) \setminus \{۰\}] \cup \{o'\}$ روی X باشد که در آن $-۱ < a < ۱$، $۰ < b < ۱$ و $-۱ < c < ۰$. (بایستی در X، $(-۱,۱)$ را طوری پنداشت که از نقطهٔ ۰ به دو قسمت تقسیم شده است).

الف) $f, g : (-۱,۱) \to X$ را برای همهٔ xها با $f(x) = x$ و برای $x \neq ۰$، $g(x) = ۰$ و $g(۰) = o'$ تعریف کنید. در این صورت f و g همیومورفیسم‌هایی بروی بردهایشان هستند.

ب) بی‌آنکه X هاسدورف باشد $T_۱$ است، گرچه هر نقطه از X یک همسایگی همیومورف با $(-۱,۱)$ دارد (و در نتیجه این همسایگی هاسدورف است).

ج) مجموعه‌های $[\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$ و $([\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}] \setminus \{۰\}) \cup \{o'\}$ بی آنکه در X بسته باشند فشرده‌اند ولی اشتراکشان فشرده نیست.

۳۸) فرض‌کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف فشرده و $\mathcal{T}'$ توپولوژی دیگری روی X باشد. اگر $\mathcal{T}'$ قوی‌تر از $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $(X, \mathcal{T}')$ هاسدورف است اما فشرده نیست. اگر $\mathcal{T}'$ اکیداً ضعیف‌تر از $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $(X, \mathcal{T}')$ فشرده است اما هاسدورف نیست.

۳۹) هر فضای فشردهٔ دنباله‌ای، فشردهٔ شمارش‌پذیر است.

۴۰) اگر X فشردهٔ شمارش‌پذیر باشد، آنگاه هر دنباله در X یک نقطهٔ بستاری دارد. اگر X شمارش‌پذیر اول هم باشد، آنگاه X فشردهٔ دنباله‌ای است.

۴۱) فضای $T_۱$ای چون X فشردهٔ شمارش‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از X یک نقطهٔ انباشتگی داشته باشد.

۴۲) مجموعهٔ اردینال‌های شمارش‌پذیر (بند ۴.۰ را ببینید) با توپولوژی ترتیبی (تمرین ۹) فشردهٔ شمارش‌پذیر و شمارش پذیر اول است اما فشرده نیست. (برای اثبات فشردگی دنباله ای، از گزارهٔ ۰.۱۹ استفاده کنید.)

۴۳) برای $x \in [0,1)$ فرض کنید $\sum_1^\infty a_n(x)2^{-n}$ ($a_n(x) = 0,1$) بسط اعشاری x در مبنای ۲ باشد. (اگر x عدد گویای دودویی باشد، بسط اعشاری طوری انتخاب می‌شود که برای nهای بزرگ $a_n(x) = 0$.) در این صورت $\langle a_n \rangle$ در $\{0,1\}^{[0,1)}$ هیچ زیردنبالهٔ همگرای نقطه‌ای ندارد. (راهنمایی: $\{0,1\}^{[0,1)}$ با توپولوژی حاصلضربی حاصل از توپولوژی گسسته روی $\{0,1\}$، فشردهٔ دنباله‌ای نیست. در بند ۴.۶ نشان خواهیم داد که این فضای توپولوژیک فشرده است.)

۴۴) اگر X فشردهٔ شمارش پذیر و $f : X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ فشردهٔ شمارش‌پذیر است.

۴۵) اگر X نرمال باشد، آنگاه X فشردهٔ شمارش‌پذیر است اگر و تنها اگر $C(X) = BC(X)$. (تمرین‌های ۴۰ و ۴۴ را به کار بندید. اگر $\langle x_n \rangle$ دنباله ای در X باشد که هیچ نقطهٔ بستاری نداشته باشد، آنگاه $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ بسته است و نتیجهٔ ۴.۱۷ به‌کار می‌رود.)

۴ . ۵ فضاهای هاسدورف موضعاً فشرده

یک فضای توپولوژیک **موضعاً فشرده** نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه دارای یک همسایگی فشرده باشد. با جدیت به فضاهای هاسدورف موضعاً فشرده خواهیم پرداخت که برای تلخیص آنها فضاهای LCH می‌نامیم.

۴.۳۰ گزاره. اگر X یک فضای LCH باشد، $U \subset X$ باز باشد و $x \in U$، آنگاه همسایگی فشرده‌ای مانند N از x وجود دارد به‌طوری‌که $N \subset U$.

برهان. می‌توانیم فرض‌کنیم $\overline{U}$ فشرده است؛ زیرا در غیر این صورت U را با $U \cap F^\circ$ عوض می‌کنیم که در آن F همسایگی فشرده‌ای از x است. بنابر گزارهٔ ۴.۲۳ مجموعه‌های باز (نسبی) V و W در $\overline{U}$ وجود دارند که $x \in V$ و $\partial U \subset W$. در نتیجه V در X باز است زیرا $V \subset U$ و $\overline{V}$ بسته است و به همین سبب زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $U \setminus W$ می‌باشد. بنابر این می‌توانیم N را مساوی با $\overline{V}$ بگیریم. ■

۴.۳۱ گزاره. اگر X یک فضای LCH باشد و $K \subset U \subset X$ که در آن K فشرده و U باز است، آنگاه مجموعهٔ باز پیش‌فشرده‌ای مانند V وجود دارد به‌طوری‌که $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

برهان. بنابر گزارهٔ ۴.۳۰، برای هر $x \in K$ می‌توانیم همسایگی فشرده‌ای مانند N_x از x برگزینیم به‌طوری‌که $N_x \subset U$. در این صورت $\{N_x^\circ\}_{x\in K}$ پوشش بازی برای K است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{N_{x_j}^\circ\}_1^n$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $V = \bigcup_1^n N_{x_j}^\circ$؛ در این صورت $K \subset V$ و $\overline{V} \subset \bigcup_1^n N_{x_j}$ فشرده است و در U مشمول است. ■

۴.۳۲ نسخهٔ موضعاً فشردهٔ لم اوریسون. اگر X یک فضای LCH باشد و $K \subset U \subset X$ که در آن K فشرده و U باز است، آنگاه تابعی چون $f \in C(X,[0,1])$ وجود دارد به‌طوری‌که $f = 1$ بر K و خارج از زیرمجموعهٔ فشرده ای از U، $f = 0$.

برهان. فرض‌کنیم V مثل گزارهٔ ۴.۳۱ باشد. در این صورت بنابر گزارهٔ ۴.۲۵، $\overline{V}$ نرمال است لذا بنابر لم اوریسون (۴.۱۵)، $f \in C(\overline{V},[0,1])$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $f = 1$ بر V و $f = 0$ بر ∂V. با قرار دادن $f = 0$ بر $\overline{V}^c$، f را به X توسیع می‌دهیم. فرض می‌کنیم که $E \subset [0,1]$ بسته است. اگر $0 \notin E$ داریم $f^{-1}(E) = (f|_{\overline{V}})^{-1}(E)$ و اگر $0 \in E$ داریم $f^{-1}(E) = (f|_{\overline{V}})^{-1}(E) \cup \overline{V}^c = (f|_{\overline{V}})^{-1}(E) \cup V^c$ زیرا $\partial V \subset (f|_{\overline{V}})^{-1}(E)$. در هر حال $f^{-1}(E)$ بسته است، لذا f پیوسته است. ■

۴.۳۳ نتیجه. هر فضای LCH کاملاً منظم است.

۴.۳۴ قضیهٔ توسیع تیتسه، نسخهٔ موضعاً فشرده. فرض‌کنیم X یک فضای LCH و $K \subset X$ فشرده باشد. اگر $f \in C(K)$، آنگاه $F \in C(X)$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $F|_K = f$. به‌علاوه F را می‌توان طوری گرفت که خارج از مجموعه‌ای فشرده، صفر باشد.

برهان این قضیه شبیه به برهان قضیهٔ ۴.۳۲ است؛ جزئیات به خوانندهٔ واگذار می‌شوند (تمرین ۴۶).

احکام قبل نشان می‌دهند که فضاهای LCH پشتوانه‌ای غنی از توابع پیوسته‌ای دارند که خارج از مجموعه‌های فشرده‌ای صفر هستند. چند اصطلاح معرفی می‌کنیم: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $f \in C(X)$ محمل f که آن را با $\text{supp}(f)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که خارج از آن، f صفر است، یعنی، بستار مجموعهٔ $\{x : f(x) \neq 0\}$. چنانچه $\text{supp}(f)$ فشرده باشد، می‌گوییم f مجمل فشرده است، و تعریف می‌کنیم:

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \text{فشرده است } \text{supp}(f)\}.$$

به علاوه، اگر $f \in C(X)$، می‌گوییم f **در بینهایت صفر است** هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد و تعریف می‌کنیم:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

مثلا $\exists K ; \forall x \notin K \ |f(x)| < \varepsilon$

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : \text{در بینهایت صفر است } f\}.$$

به وضوح $C_c(X) \subset C_0(X)$. به‌علاوه $C_0(X) \subset BC(X)$، زیرا برای $f \in C_0(X)$ تصویر مجموعهٔ $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده است و بر متمم آن $|f| < \varepsilon$.

۴.۳۵ گزاره. هرگاه X یک فضای LCH باشد، $C_0(X)$ بستار $C_c(X)$ نسبت به متر یکنواخت است.

برهان. چنانچه $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $C_c(X)$ باشد که به‌طور یکنواخت به $f \in C(X)$ همگرا باشد، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که $\|f_n - f\| < \varepsilon$. در نتیجه، اگر $x \notin \operatorname{supp}(f_n)$، $|f(x)| < \varepsilon$ لذا $f \in C_0(X)$. برعکس، اگر $f \in C_0(X)$، آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $K_n = \{x : |f(x)| \geq n^{-1}\}$. در این صورت K_n فشرده است لذا طبق قضیهٔ ۴.۳۲ عضوی چون $g_n \in C_c(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $0 \leq g_n \leq 1$ و $g_n = 1$ بر K_n. فرض می‌کنیم $f_n = g_n f$. در این صورت $f_n \in C_c(X)$ و $\|f_n - f\| \leq n^{-1}$، بنابر این $f_n \to f$ به طور یکنواخت. ■

اگر X یک فضای LCH غیرفشرده باشد، با افزودن یک نقطهٔ تنها «در بینهایت» می‌توان به گونه‌ای X را به یک فضای فشرده تبدیل کرد که توابع واقع در $C_0(X)$ درست توابع پیوسته‌ای باشند که وقتی x به نقطهٔ بینهایت نزدیک می‌شود $f(x) \to 0$. به‌طور دقیق‌تر، فرض می‌کنیم ∞ نشاندهندهٔ نقطه‌ای باشد که در X نیست و قرار می‌دهیم $X^* = X \cup \{\infty\}$ و $\mathcal{T}$ را گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از X^* می‌انگاریم که:

(i) U زیرمجموعهٔ بازی از X است یا

(ii) $\infty \in U$ و U^c زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X است.

۴.۳۶ گزاره. اگر X، X^* و $\mathcal{T}$ همانند فوق باشند، آنگاه $(X^*, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف فشرده است و نگاشت شمول $i : X \to X^*$ یک نشاننده می‌باشد. به‌علاوه، اگر $f \in C(X)$، آنگاه f به طور پیوسته به X^* توسیع می‌یابد اگر و تنها اگر $f = g + c$ که در آن $g \in C_0(X)$ و c یک ثابت است و در این حالت توسیع پیوسته با $f(\infty) = c$ داده می‌شود.

برهان سر راست است و به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۴۷).

فضای X^* **فشرده‌سازی تک نقطه‌ای یا فشرده‌سازی الکساندروف** X نامیده می‌شود.

چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد، فضای $\mathbb{C}^X$ مرکب از توابع مختلط روی X را می‌توان به روش‌های متعددی توپولوژی‌دار کرد. مسلماً، یکی از راه‌ها توپولوژی حاصلضربی، یعنی توپولوژی همگرایی نقطه‌ای است. دیگری **توپولوژی همگرایی یکنواخت** است که با مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:

$$\{g \in \mathbb{C}^X : \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| < n^{-1}\} \qquad (n \in \mathbb{N},\ f \in \mathbb{C}^X).$$

از برهان گزارهٔ ۴.۱۳ معلوم می‌شود که $C(X)$ نسبت به توپولوژی همگرایی یکنواخت، زیرفضای بسته‌ای از $\mathbb{C}^X$ است. توپولوژی مابین این دو توپولوژی، **توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده** است که با مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:

$$\{g \in \mathbb{C}^X : \sup_{x\in K}|g(x) - f(x)| < n^{-1}\} \qquad (n \in \mathbb{N},\ \ f \in \mathbb{C}^X \text{ فشرده است } K \subset X).$$

اینک این توپولوژی را در حالتی به بوتهٔ آزمایش خواهیم گذاشت که X یک فضای LCH است.

۴.۳۷ لم. اگر X یک فضای LCH باشد و $E \subset X$، آنگاه E فقط و فقط وقتی بسته است که برای هر مجموعهٔ فشرده مانند $K \subset X$، $E \cap K$ بسته باشد.

برهان. اگر E بسته باشد، آنگاه بنابر گزاره‌های ۴.۲۲ و ۴.۲۴، $E \cap K$ بسته است. چنانچه E بسته نباشد، عضوی چون $x \in \overline{E} \setminus E$ انتخاب کرده و فرض می‌کنیم K همسایگی فشرده‌ای از x باشد. در این صورت x یک نقطهٔ انباشتگی $E \cap K$ است اما در $E \cap K$ نیست، لذا بنابر گزارهٔ ۴.۱، $E \cap K$ بسته نیست. ■

۴.۳۸ گزاره. اگر X یک فضای LCH باشد، آنگاه $C(X)$ نسبت به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده، زیرفضای بسته‌ای از $\mathbb{C}^X$ است.

برهان. اگر f در بستار $C(X)$ باشد، آنگاه روی هر مجموعهٔ فشرده مانند $K \subset X$، تابع f حد یکنواختی از توابع پیوسته است، لذا $f|_K$ پیوسته است. بنابر این، هرگاه $E \subset \mathbb{C}$ بسته باشد، $f^{-1}(E) \cap K = (f|_K)^{-1}(E)$ برای هر مجموعهٔ فشرده مانند K بسته است لذا بنابر لم ۴.۳۷، $f^{-1}(E)$ بسته است. از اینجا معلوم می‌شود که f پیوسته است. ■

فضای توپولوژیکی چون X، σ ـ فشرده نامیده می‌شود هرگاه اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های فشرده باشد. برای درک مفهوم دو گزارهٔ آتی، تمرین ۵۴ را ببینید.

۴.۳۹ گزاره. هرگاه X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ σ ـ فشرده باشد، دنباله‌ای مانند $\{U_n\}$ از مجموعه‌های باز پیش‌فشرده وجود دارد به‌طوری‌که برای هر n، $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ و $X = \bigcup_1^\infty U_n$.

برهان. فرض می‌کنیم $X = \bigcup_1^\infty K_n$ که در آن هر K_n فشرده است. بنابر گزارهٔ ۴.۳۱، هر زیرمجموعهٔ فشرده از X همسایگی باز پیش‌فشرده‌ای دارد. بنابر این، می‌توانیم U_1 را یک همسایگی باز پیش فشرده از K_1 بگیریم و سپس به طور استقرایی عمل‌کرده و U_n را همسایگی باز پیش فشرده‌ای از $\overline{U}_{n-1} \cup K_n$ بگیریم. ■

۴.۴۰ گزاره. اگر X یک فضای σ- فشردهٔ LCH باشد و $\{U_n\}$ همان باشد که در گزارهٔ ۴.۳۹ ذکر شد، آنگاه برای هر $f \in \mathbb{C}^X$، مجموعه‌های

$$\{g \in \mathbb{C}^X : \sup_{x\in\overline{U_n}} |g(x) - f(x)| < m^{-1}\} \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

نسبت به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده، یک پایهٔ همسایه‌ای برای f تشکیل می‌دهند. بنابر این، این توپولوژی شمارش‌پذیر اول است و روی مجموعه‌های فشرده $f_j \to f$ به‌طور یکنواخت اگر و تنها اگر $f_j \to f$ به‌طور یکنواخت بر هر $\overline{U_n}$.

برهان. این احکام به آسانی از این ملاحظه نتیجه می‌شوند که اگر $K \subset X$ فشرده باشد، آنگاه $\{U_n\}_1^\infty$ پوشش بازی برای K است و از این رو به ازای nای، $K \subset \overline{U_n}$. جزئیات به خواننده واگذار می‌شوند(تمرین ۴۸). ■

این بخش را با ساختاری به پایان می‌رسانیم که در مواقعی مفید واقع می‌شود. چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد و $E \subset X$، یک **افراز واحد** روی E گردایه‌ای مانند $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ مرکب از توابع واقع در $C(X,[0,1])$ است به‌طوری‌که

- هر $x \in X$ یک همسایگی دارد به‌طوری‌که روی آن فقط تعدادی متناهی از h_αها غیر صفرند؛
- برای $x \in E$، $\sum_{\alpha\in A} h_\alpha(x) = 1$.

افراز واحدی چون $\{h_\alpha\}$ پیرو پوششی بازی چون $\mathcal{U}$ از E است هرگاه برای هر α عضوی مانند U از $\mathcal{U}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathrm{supp}(h_\alpha) \subset U$.

۴.۴۱ گزاره. فرض کنیم X یک فضای LCH باشد، K زیرمجموعه‌ای فشرده‌ای از X و $\{U_j\}_1^n$ پوشش بازی از K باشد. افراز واحدی روی K پیرو $\{U_j\}_1^n$ شامل توابع محمل فشرده وجود دارد.

برهان. بنابر گزارهٔ ۴.۳۰، هر $x \in K$ همسایگی فشرده‌ای چون N_x دارد به‌طوری‌که به ازای jای، $N_x \subset U_j$. چون $\{N_x^\circ\}$ پوشش بازی از K است، نقاطی چون $x_1, \ldots, x_m$ وجود دارند به‌طوری‌که $K \subset \bigcup_1^m K_{x_k}$. فرض می‌کنیم F_j

اجتماع همهٔ N_{x_k}هایی باشد که زیرمجموعه‌هایی از U_j هستند. در این صورت F_j زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از U_jاست، لذا بنابر لم اوریسون، اعضایی چون $g_1,\dots,g_n$ از $C_c(X,[0,1])$وجود دارند به‌طوری‌که $g_j = 1$ بر F_j و $\operatorname{supp}(g_j) \subset U_j$. چون F_jها K را می‌پوشانند، روی K داریم $\sum_1^n g_k \ge 1$، لذا بازهم بنابر لم اوریسون، عضوی چون $f \in C_c(X,[0,1])$ هست که $f = 1$ بر K و $\operatorname{supp}(f) \subset \{x : \sum_1^n g_k(x) > 0\}$. فرض می‌کنیم $g_{n+1} = 1 - f$، در این صورت همه‌جا $\sum_1^{n+1} g_k(x) > 0$ و برای $j = 1,\dots,n$ قرار می‌دهیم $h_j = \dfrac{g_j}{\sum_1^{n+1} g_k}$. در این صورت

$$\operatorname{supp}(h_j) = \operatorname{supp}(g_j) \subset U_j$$

و روی Kداریم $\sum h_j = 1$. ■

تعمیمی از حکم فوق در تمرین ۵۷ گنجانده شده است.

تمرین‌ها

۴۶) قضیهٔ ۴.۳۴ را ثابت‌کنید.

۴۷) گزارهٔ ۴.۳۶ را ثابت‌کنید. همچنین، نشان دهید که اگر X هاسدورف باشد اما موضعاً فشرده نباشد باز هم گزارهٔ ۴.۳۶ معتبر است مگر آنکه X^* هاسدورف نباشد.

۴۸) برهان گزارهٔ ۴.۴۰ را کامل‌کنید.

۴۹) فرض‌کنید X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد و $E \subset X$.

الف) اگر E باز باشد، آنگاه E نسبت به توپولوژی نسبی، موضعاً فشرده است.
ب) اگر E در X چگال بوده و نسبت به توپولوژی نسبی موضعاً فشرده باشد، آنگاه E باز است (تمرین ۱۳ را به‌کار برید.)
ج) E نسبت به توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است اگر و تنها اگر E در $\overline{E}$ باز نسبی باشد.

۵۰) فرض‌کنید U زیرمجموعهٔ بازی از فضای هاسدورف فشرده‌ای چون X باشد و U^* فشرده‌سازی یک نقطه‌ای آن باشد (قسمت (الف) از تمرین ۴۹ را ببینید). اگر $\phi : X \to U^*$ به صورت زیر تعریف شود، آنگاه ϕ پیوسته است:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & x \in U \\ \infty, & x \in U^c. \end{cases}$$

۵۱) چنانچه X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، $\phi \in C(X,Y)$ را سره گوییم در صورتی که برای هر مجموعهٔ فشرده مانند $K \subset Y$، $\phi^{-1}(K)$ در X فشرده باشد. فرض کنید X و Y دو فضای هاسدورف موضعاً فشرده، و X^* و Y^* فشرده‌سازی‌های یک نقطه‌ای آنها باشند. اگر $\phi \in C(X,Y)$، آنگاه ϕ سره است اگر و تنها اگر با قرار دادن $\phi(\infty_X) = \infty_Y$، ϕ به‌طور پیوسته به نگاشتی از X^* به Y^* توسیع یابد.

۵۲) فشرده سازی یک نقطه‌ای $\mathbb{R}^n$ با کرهٔ nـ بُعدی $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ همیومورف است.

۵۳) چنانچه فرضِ موضعاً فشردگی X در لم ۴.۳۷ با شمارش‌پذیر اول بودن تعویض شود باز هم این لم درست باقی می‌ماند.

۵۴) فرض کنید $\mathbb{Q}$ دارای توپولوژی نسبی القاء شده از $\mathbb{R}$ باشد.

الف) $\mathbb{Q}$ موضعاً فشرده نیست.

ب) $\mathbb{Q}$، σـ فشرده است (اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های تک نقطه‌ای است)، اما همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های تک‌عضوی (یعنی همگرایی نقطه‌ای)، همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ $\mathbb{Q}$ را ایجاب نمی‌کند.

۵۵) هر زیرمجموعهٔ باز از یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ شمارش‌پذیر دوم، σـ فشرده است.

۵۶) $\Phi : [0,\infty] \to [0,1]$ را با $\Phi(t) = \frac{t}{t+1}$ برای $t \in [0,\infty)$ و $\phi(\infty) = 1$ تعریف کنید.

الف) Φ اکیداً صعودی است و $\Phi(t+s) \le \Phi(t) + \Phi(s)$.

ب) اگر (Y,ρ) یک فضای متری باشد، آنگاه $\Phi \circ \rho$ متری کراندار روی Y تعریف می‌کند که همان توپولوژی حاصل از ρ را تعریف می‌کند.

ج) چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد، تابع $\rho(f,g) = \Phi(\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|)$ متری روی $\mathbb{C}^X$ است که توپولوژی مربوط به آن، توپولوژی همگرایی یکنواخت است.

د) اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ σـ فشرده باشد و $\{U_n\}_1^\infty$ همان دنباله‌ای باشد که در گزارهٔ ۴.۳۹ ذکر شد، آنگاه تابع

$$\rho(f,g) = \sum_1^\infty 2^{-n}\Phi\big(\sup_{x\in \overline{U}_n}|f(x)-g(x)|\big)$$

متری روی $\mathbb{C}^X$ است که توپولوژی مربوط به آن، توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده است.

۵۷) پوشش بازی چون $\mathcal{U}$ از یک فضای توپولوژیک مانند X، موضعاً متناهی نامیده می‌شود هرگاه هر $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که فقط تعدادی متناهی از $\mathcal{U}$ را قطع کند. چنانچه $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ پوشش‌های بازی از X باشند، می‌گوییم $\mathcal{V}$ **تظریفی** از $\mathcal{U}$ است در صورتی که برای هر $V \in \mathcal{V}$ عضوی چون U از $\mathcal{U}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V \subset U$. X **پیرافشرده** نامیده می‌شود هرگاه هر پوشش باز از X یک تظریف موضعاً متناهی داشته باشد.

الف) اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ σ- متناهی باشد، آنگاه X پیرافشرده است. در واقع، هر پوشش باز مانند $\mathcal{U}$ دارای تظریف‌هایی موضعاً متناهی مانند $\{V_\alpha\}$ و $\{W_\alpha\}$ است به‌طوری‌که برای هر α، $\overline{V}_\alpha$ فشرده است و $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha$. (فرض کنید $\{U_n\}_1^n$ همان دنباله‌ای باشد که در گزارهٔ ۴.۳۹ ذکر شد. برای هر n، $\{E \cap (U_{n+2} \setminus \overline{U}_{n-1}) : E \in \mathcal{U}\}$ پوشش بازی از $\overline{U}_{n+1} \setminus U_n$ است. برای به دست آوردن $\{V_\alpha\}$ زیرپوششی متناهی از پوشش اخیر انتخاب کنید. برای به دست آوردن $\{W_\alpha\}$ از شروع برهان گزارهٔ ۴.۴۱ تقلید کنید.)

ب) چنانچه X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ σ- فشرده باشد، برای هر پوشش باز مانند $\mathcal{U}$ از X افراز واحدی روی X پیرو $\mathcal{U}$ و شامل توابع محمل فشرده وجود دارد.

۴.۶ فضاهای فشرده‌سازی دو نقطه‌ای

چیزهای هندسی که روی آنها تحلیل انجام می‌شود (فضاهای اقلیدسی، مانیفولدها و غیره) تمایل به فشرده بودن یا فشردهٔ موضعی بودن دارند. اما در فضاهای نامتناهی البعد از قبیل فضاهای توابع، فشردگی پدیدهٔ بسیار نادری است و وقتی به چنگ آمد باید سفت به آن چسبید. در چنین مواقعی، تقریباً همهٔ احکام فشردگی از طریق دو قضیهٔ اصلی به‌دست می‌آیند، یکی قضیهٔ تیخونف و دیگری قضیهٔ آرزولا ـ اسکولی است که آنها را در این بخش می‌آوریم.

قضیهٔ تیخونف به حاصلضرب‌های دکارتی مربوط می‌شود. برای بیان آن نمادی را معرفی می‌کنیم. به یاد داشته باشید که عضوی چون x از $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$، به معنای دقیق کلمه، نگاشتی از A به توی $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ است؛ یعنی، $x(\alpha) \in X_\alpha$، αامین مؤلفهٔ x است که عموماً آن را با $\pi_\alpha(x)$ نشان می‌دهیم. چنانچه $B \subset A$، نگاشتی طبیعی مانند $\pi_B : X \to \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ وجود دارد؛ یعنی، $\pi_B(x)$ تحدید نگاشت x به B است. (بالاخص، $\pi_{\{\alpha\}}$ اساساً با π_α یکی است و فرقی بین آنها قائل نخواهیم شد.) اگر $p \in \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ و $q \in \prod_{\alpha\in C} X_\alpha$، خواهیم گفت که q توسیعی از p است در صورتی‌که q، p را به عنوان نگاشت توسیع دهد، یعنی، هرگاه $B \subset C$ و برای $\alpha \in B$، $p(\alpha) = q(\alpha)$.

۴.۴۲ قضیهٔ تیخونف. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانوادهای از فضاهای توپولوژیک فشرده باشد، آنگاه $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ (با توپولوژی حاصلضربی) فشرده است.

برهان. بنابر قضیهٔ ۴.۲۹ ، کافی است نشان دهیم که هر تور مانند $\langle x_i\rangle_{i\in I}$ در X یک نقطهٔ بستاری دارد. این کار را با امتحان نقاط بستاری تورهای $\langle \pi_B(x_i)\rangle$ در زیرحاصلضربهای X انجام خواهیم داد. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم :

$$\mathcal{P} = \bigcup_{B\subset A} \{p \in \Pi_{\alpha\in B} X_\alpha : \text{است } \langle \pi_B(x_i)\rangle \text{ یک نقطهٔ بستاری } p\}.$$

$\mathcal{P}$ ناتهی است، زیرا هر X_α فشرده بوده و لذا وقتی $B = \{\alpha\}$ تور $\langle \pi_B(x_i)\rangle$ نقاط بستاری دارد. به‌علاوه، $\mathcal{P}$ با توسیع جزئاً مرتب می‌شود؛ یعنی، $p \le q$ هرگاه q توسیعی از p باشد که همانند فوق تعریف می‌شود.

فرض‌کنیم $\{p_l : l \in L\}$ یک زیرمجموعهٔ مرتب خطی از $\mathcal{P}$ باشد، که در آن $p_l \in \Pi_{\alpha\in B_l} X_\alpha$. فرض می‌کنیم $B^* = \bigcup_{l\in L} B_l$ و p^* یکتا عضو $\Pi_{\alpha\in B^*} X_\alpha$ باشد که هر p_l را توسیع می‌دهد. ادعا می‌کنیم که $p^* \in \mathcal{P}$. مسلماً، از تعریف توپولوژی حاصلضربی معلوم است که هر همسایگی از p^* شامل مجموعه‌ای به شکل $\Pi_{\alpha\in B^*} U_\alpha$ است که در آن هر U_α در X_α باز است و برای همهٔ αها به‌جز تعدادی متناهی مثل $\alpha_1,\dots,\alpha_n$، $U_\alpha = X_\alpha$. هر یک از این α_jها به B_lای تعلق دارد، لذا بنابر خطی بودن ترتیب، همهٔ آنها به تک B_lای تعلق دارند. اما در این صورت $\Pi_{\alpha\in B_l} U_\alpha$ یک همسایگی از p_l است، لذا $\langle \pi_{B_l}(x_i)\rangle$ مکرراً در $\Pi_{\alpha\in B_l} U_\alpha$ است ؛ از این رو $\langle \pi_{B^*}(x_i)\rangle$ مکرراً در $\Pi_{\alpha\in B^*} U_\alpha$ است، لذا p^* یک نقطهٔ بستاری $\langle \pi_{B^*}(x_i)\rangle$ می‌باشد بنابر این p^* کران بالایی برای $\{p_l\}$ در $\mathcal{P}$ است.

در نتیجه، بنابر لم زورن، $\mathcal{P}$ عضو ماکسیمالی مانند $\overline{p} \in \Pi_{\alpha\in\overline{B}} X_\alpha$ دارد. ادعا می‌کنیم که $\overline{B} = A$. اگر چنین نباشد، $\gamma \in A \setminus \overline{B}$ای انتخاب می‌کنیم. بنابر گزارهٔ ۴.۲۰ زیرتوری مانند $\langle \pi_{\overline{B}}(x_{i(j)})\rangle_{j\in J}$ از $\langle \pi_{\overline{B}}(x_i)\rangle$ وجود دارد که به $\overline{p}$ می‌گراید و چون X_γ فشرده است زیرتوری مانند $\langle \pi_\gamma(x_{i(j(k))})\rangle_{k\in K}$ از $\langle \pi_\gamma(x_{i(j)})\rangle$ وجود دارد که به یک $p_\gamma \in X_\gamma$ همگرا است. فرض‌می‌کنیم q یکتا عضوی از $\prod_{\alpha\in\overline{B}\cup\{\gamma\}} X_\alpha$ باشد که هر دوی $\overline{p}$ و p_γ را توسیع می‌دهند؛ در این صورت تور $\langle \pi_{\overline{B}\cup\{\gamma\}}(x_{i(j(k))})\rangle_{k\in K}$ به q همگرا است و در نتیجه q یک نقطهٔ بستاری $\langle \pi_{\overline{B}\cup\{\gamma\}}(x_i)\rangle$ است و این ماکسیمال بودن $\overline{p}$ را نقض‌می‌کند. بنابر این $\overline{p}$ یک نقطهٔ بستاری $\langle x_i\rangle$ است و به آنچه می‌خواستیم رسیده‌ایم. ■

حال به قضیهٔ آرزلاـ آسکولی می‌پردازیم که با فشردگی در فضاهای مرکب از نگاشت‌های پیوسته ارتباط دارد. چندگونه از این حکم وجود دارند؛ قضایای زیر دو تا از کارآمدترین آنها هستند. تمرین ۶۱ را هم ببینید.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{F} \subset C(X)$، $\mathcal{F}$ در $x \in X$ همپیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی مانند U از x وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $y \in U$ و هر $f \in \mathcal{F}$، $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ و $\mathcal{F}$

همپیوسته نامیده می‌شود هرگاه در هر $x \in X$ همپیوسته باشد. همچنین، $\mathcal{F}$ کراندار نقطه‌ای خوانده می‌شود هرگاه برای هر x از X، $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ زیرمجموعهٔ کرانداری از $\mathbb{C}$ باشد.

۴۳ . ۴ قضیهٔ آرزلا_ آسکولی I. فرض‌کنیم X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. اگر $\mathcal{F}$ زیرمجموعهٔ کراندار نقطه‌ای همپیوسته‌ای از $C(X)$ باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ نسبت به متر یکنواخت، کراندار کلی است و بستار $\mathcal{F}$ در $C(X)$ فشرده است.

برهان. فرض‌می‌کنیم $\varepsilon > ۰$. چون $\mathcal{F}$ همپیوسته است، برای هر $x \in X$ همسایگی بازی چون U_x از x وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $y \in U_x$ و هر $f \in \mathcal{F}$، $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{۴}$. از آنجا که X فشرده است می‌توانیم $x_۱, \dots, x_n \in X$ را چنان انتخاب کنیم که $X = \bigcup_۱^n U_{x_j}$. در این صورت بنابر کرانداری یکنواخت، $\{f(x_j) : f \in \mathcal{F}, ۱ \leq j \leq n\}$ زیرمجموعهٔ کرانداری از $\mathbb{C}$ است، لذا زیرمجموعه‌ای متناهی مانند $\{z_۱, \dots, z_m\}$ از $\mathbb{C}$ وجود دارد که $\frac{۱}{۴}\varepsilon$_ چگال در آن است ــ یعنی، هر $f(x_j)$ در فاصله‌ای کمتر از $\frac{۱}{۴}\varepsilon$ از z_j واقع است. ــ فرض می‌کنیم $A = \{x_۱, \dots, x_n\}$ و $B = \{z_۱, \dots, z_m\}$؛ در این صورت B^A مرکب از توابع از A به B متناهی است. برای هر $\phi \in B^A$ فرض‌می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_\phi = \{f \in \mathcal{F} : |f(x_j) - \phi(x_j)| < \tfrac{۱}{۴}\varepsilon ,۱ \leq j \leq n \text{ برای}\}.$$

در این صورت واضح است که $\bigcup_{\phi \in B^A} \mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}$ و ادعا می‌کنیم که هر $\mathcal{F}_\phi$ قطری دارد که حداکثر ε است، لذا با انتخاب یک f از هر $\mathcal{F}_\phi$ ناتهی، می‌توانیم زیرمجموعهٔ ε_ چگالی از $\mathcal{F}$ به‌دست آوریم. برای اثبات ادعای فوق، فرض‌می‌کنیم $f, g \in \mathcal{F}_\phi$. چون روی A، $|f - \phi| < \frac{۱}{۴}\varepsilon$ و $|g - \phi| < \frac{۱}{۴}\varepsilon$ پس روی A داریم $|f - \phi| < \frac{۱}{۲}\varepsilon$. چنانچه $x \in X$، به‌ازای jای داریم $x \in U_{x_j}$ و در نتیجه

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| < \varepsilon.$$

این رابطه نشان‌می‌دهد که $\mathcal{F}$ کراندار کلی است. چون بستار یک مجموعهٔ کراندار کلی باز هم کراندار کلی است و $C(X)$ کامل است، قضیه اثبات می‌شود. ■

۴۴ . ۴ قضیهٔ آرزلا_ آسکولی II. فرض‌کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ σ_ فشرده باشد. اگر $\{f_n\}$ دنبالهٔ کراندار نقطه‌ای همپیوسته‌ای در $C(X)$ باشد، آنگاه $f \in C(X)$ای و زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ وجود دارد که به‌طور یکنواخت بر مجموعه‌های فشرده به f می‌گراید.

برهان. بنابر گزارهٔ ۳۹ . ۴ دنباله‌ای چون $\{U_k\}$ از مجموعه‌های باز پیش‌فشرده وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{U}_k \subset U_{k+1}$ و $X = \bigcup_1^\infty U_k$. بنابر قضیهٔ ۴۳ . ۴ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که روی $\overline{U}_1$ به‌طور یکنواخت کشی است؛ این زیردنباله‌ای را با $\{f_j^1\}_{j=1}^\infty$ نشان می‌دهیم. با روال استقرایی، برای $k \in \mathbb{N}$ می‌توانیم زیردنباله‌ای مانند $\{f_j^k\}_{j=1}^\infty$ از $\{f_j^{k-1}\}_{j=1}^\infty$ به‌دست آوریم که بر $\overline{U}_k$ به‌طور یکنواخت کشی باشد. فرض می‌کنیم $g_k = f_k^k$؛ در این صورت $\{g_k\}$ زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ است که (بدون احتساب $k-1$ جملهٔ نخست آن) زیردنباله‌ای از $\{f_j^k\}$ است و از این رو بر هر $\overline{U}_k$ به‌طور یکنواخت کشی است. فرض‌می‌کنیم $f = \lim g_k$. در این صورت $f \in C(X)$ و بنابر گزاره‌های ۳۸ . ۴ و ۴۰ . ۴ روی مجموعه‌های فشرده به‌طور یکنواخت $g_k \to f$. ■

تمرین‌ها

۵۸) اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد که تعدادی نامتناهی از آنها غیر فشرده‌اند، آنگاه هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ بسته از $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$ هیچ‌جا چگال است.

۵۹) حاصلضرب هر تعداد متناهی از فضاهای موضعاً فشرده باز هم موضعاً فشرده است.

۶۰) حاصلضرب تعداد شمارش‌پذیری از فضاهای فشردهٔ دنباله‌ای، فشردهٔ دنباله‌ای است.
(ازهمان «ترفند قطری» قضیهٔ ۴۴ . ۴ استفاده کنید.)

۶۱) قضیهٔ ۴۳ . ۴ برای نگاشت‌های تعریف شده از فضای هاسدورف فشرده‌ای چون X بتوی فضای متری کاملی چون Y نیز معتبر است مشروط بر اینکه فرض کرانداری نقطه‌ای با کرانداری کلی نقطه‌ای عوض شود. (این حکم را دقیق ساخته و سپس آن را اثبات کنید.)

۶۲) با استفاده از متر ذکر شده در قسمت (د) از تمرین ۵۶ ، قضیهٔ ۴۴ . ۴ را به شکلی شبیه به قضیهٔ ۴۳ . ۴ در آورید.

۶۳) فرض کنیم $K \in C([0,1]\times[0,1])$. برای $f \in C([0,1])$، فرض کنید $Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$. در این صورت $Tf \in C([0,1])$ و $\{Tf : \|f\|_u \le 1\}$ در $C([0,1])$ پیش‌فشرده است.

۶۴) فرض‌کنید (X,ρ) یک فضای متری باشد. تابعی چون $f \in C(X)$ **پیوستهٔ هولدر از نمای** α $(\alpha > 0)$ نامیده می‌شود هرگاه کمیت زیرمتناهی باشد:

$$N_\alpha(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)^\alpha}.$$

اگر X فشرده باشد، آنگاه $\{f \in C(X) : \|f\|_u \leq 1,\ \ N_\alpha(f) \leq 1\}$ در $C(X)$ فشرده است.

۶۵) فرض‌کنید U زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbb{C}$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع هلومورف روی U باشد. اگر $\{f_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به‌طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه زیردنباله‌ای وجود دارد که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به طور یکنواخت به تابع هلومورفی همگرا است. (برای به‌دست آوردن همپیوستگی فرمول انتگرالی کشی را به‌کار برید.)

۴.۷ قضیهٔ استون ـ وایرشتراس

در این بخش تعمیم بسیار گسترده‌ای از قضیهٔ مشهور وایرشتراس را اثبات می‌کنیم مبنی بر این که هر تابع پیوسته بر بازه فشرده‌ای چون $[a,b]$ حد یکنواخت چند جمله‌ایی روی $[a,b]$ است. در سراسر این بخش، X نشاندهندهٔ یک فضای هاسدورف فشرده خواهد بود و $C(X)$ را به متر یکنواخت مجهز می‌کنیم.

زیرمجموعه‌ای چون $\mathcal{A}$ از $C(X,\mathbb{R})$ یا $C(X)$ **جداکنندهٔ نقاط** خوانده می‌شود هرگاه برای هر $x,y \in X$ که $x \neq y$، $f \in \mathcal{A}$ ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x) \neq f(y)$. $\mathcal{A}$ یک **جبر** خوانده می‌شود هرگاه یک زیرفضای برداری حقیقی (متناظراً مختلط) از $C(X,\mathbb{R})$ (متناظراً $C(X)$) باشد به‌طوری‌که اگر $f,g \in \mathcal{A}$، آنگاه $fg \in \mathcal{A}$. چنانچه $\mathcal{A} \subset C(X,\mathbb{R})$، $\mathcal{A}$ یک **شبکه** نامیده می‌شود هرگاه $\min(f,g)$ و $\max(f,g)$ برای هر f و g از $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشند چون عملگرهای جبری و شبکه‌ای پیوسته‌اند، به آسانی دیده می‌شود که اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یا شبکه باشد، آنگاه بستارش، یعنی $\overline{\mathcal{A}}$ نسبت به متر یکنواخت نیز چنین است.

۴.۴۵ قضیهٔ استون ـ وایرشتراس، فرض‌کنیم X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. اگر $\mathcal{A}$ زیرجبر بسته‌ای از $C(X,\mathbb{R})$ باشد که نقاط را جدا کند، آنگاه یا $\mathcal{A} = C(X,\mathbb{R})$ یا به ازای $x_0 \in X$ ای، $\mathcal{A} = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$. حالت اول فقط و فقط وقتی برقرار می‌شود که $\mathcal{A}$ حاوی توابع ثابت باشد.

برهان نیاز به چند لم دارد. عملاً اولین لم قضیه را برای حالتی ثابت می‌کند که X حاوی دو نقطه است و دومی حالت خاصی از قضیهٔ کلاسیک وایرشتراس برای $[-۱,۱]$ است. پس از این دو لم به حالت کلی برمی‌گردیم.

۴ . ۴۶ لم. $\mathbb{R}^۲$ را به صورت جبری تحت جمع و ضرب مؤلفه‌ای در نظر بگیرید. در این صورت تنها زیرجبرهای $\mathbb{R}^۲$ خود $\mathbb{R}^۲$، $\{(۰,۰)\}$ و پیماهای خطی $(۱,۰)$، $(۰,۱)$ و $(۱,۱)$ می‌باشند.

برهان. زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^۲$ که در فوق فهرست شده‌اند زیرجبر هستند. اگر $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^۲$ زیرجبر غیرصفری باشد و $(a,b) \in \mathcal{A}$ $\neq (۰,۰)$، آنگاه $(a^۲,b^۲) \in \mathcal{A}$. اگر $a \neq ۰$، $b \neq ۰$ و $a \neq b$، آنگاه (a,b) و $(a^۲,b^۲)$ مستقل خطی هستند، لذا $\mathcal{A} = \mathbb{R}^۲$. حالت‌های ممکن دیگر ـ $b = ۰ \neq a$، $b \neq ۰ = a$ و $a = b \neq ۰$ برای هر $(a,b) \neq (۰,۰)$ از $\mathcal{A}$ ـ سه زیرجبر دیگر را به‌دست می‌دهند.

۴ . ۴۷ لم. برای هر $\varepsilon > ۰$ یک چندجمله‌ای مانند P روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $P(۰) = ۰$ و برای $x \in [-۱,۱]$، $||x| - P(x)| < \varepsilon$. ■

برهان. سری ماکلورن برای $(۱-t)^{۱/۲}$ را در نظر بگیرید:

$$(۱-t)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ + \sum_۱^\infty (\tfrac{-۱}{۲})(\tfrac{۱}{۲})\cdots(\tfrac{۲n-۳}{۲})\frac{t^n}{n!}$$
$$= ۱ - \sum_۱^\infty c_n t^n \qquad (c_n > ۰).$$

بنابر آزمون ریشه، این سری برای $|t| < ۱$ همگرا است؛ اثبات اینکه مجموع این سری واقعاً $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}$ است در تمرین ۶۶ گنجانده شده است. به‌علاوه، طبق قضیهٔ همگرایی یکنوا (به‌کار رفته در مورد اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$) داریم:

$$\sum_۱^\infty c_n = \lim_{t \nearrow ۱} \sum_۱^\infty c_n t^n = ۱ - \lim_{t \nearrow ۱}(۱-t)^{\frac{۱}{۲}} = ۱$$

از متناهی بودن سری $\sum_۱^\infty c_n$ معلوم می‌شود که سری $۱ - \sum_۱^\infty c_n t^n$ روی $[-۱,۱]$ مطلقاً همگرای یکنواخت است و مجموعش روی این بازه $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}$ می‌باشد. بنابر این، اگر $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد، با اختیار مجموع جزئی مناسبی از این سری، یک چندجمله‌ای مانند Q به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که برای $t \in [-۱,۱]$، $\left|(۱-t)^{\frac{۱}{۲}} - Q(t)\right| < \frac{۱}{۲}\varepsilon$. با قراردادن $t = ۱ - x^۲$ و $R(x) = Q(۱-x^۲)$ یک چندجمله‌ای مانند R به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که برای هر $x \in [-۱,۱]$، $||x| - R(x)| < \frac{۱}{۲}\varepsilon$. به‌ویژه $|R(۰)| < \frac{۱}{۲}\varepsilon$، لذا اگر قرار دهیم $P(x) = R(x) - R(۰)$، آنگاه P یک چندجمله‌ای است به‌طوری‌که $P(۰) = ۰$ و برای هر $x \in [-۱,۱]$، $||x| - P(x)| < \varepsilon$. ■

۴.۴۸ لم. اگر $\mathcal{A}$ زیرجبر بسته‌ای از $C(X,\mathbb{R})$ باشد، آنگاه وقتی $f \in \mathcal{A}$، $|f| \in \mathcal{A}$ و $\mathcal{A}$ یک شبکه است.

برهان. اگر $f \in \mathcal{A}$ و $f \neq ۰$، فرض می‌کنیم $h = \frac{f}{\|f\|_u}$. در این صورت h فضای X را بتوی $[-۱,۱]$ می‌نگارد، لذا اگر $\varepsilon > ۰$ و P همان چندجمله‌ای لم ۴.۴۷ باشد، آنگاه داریم $\||h| - P \circ h\|_u < \varepsilon$. چون $P(۰) = ۰$، P جملهٔ ثابتی ندارد، بنابر این $P \circ h \in \mathcal{A}$ زیرا $\mathcal{A}$ یک جبر است. چون $\mathcal{A}$ بسته است و ε دل‌خواه می‌باشد، داریم $|h| \in \mathcal{A}$ و از این رو $|f| = \|f\|_u |h| \in \mathcal{A}$. این مطلب حکم نخست را ثابت می‌کند و دومی به دلیل زیر حاصل می‌گردد:

$$\max(f,g) = \tfrac{۱}{۲}(f + g + |f - g|), \qquad \min(f,g) = \tfrac{۱}{۲}(f + g - |f - g|). \blacksquare$$

۴.۴۹ لم. فرض کنیم $\mathcal{A}$ شبکهٔ بسته‌ای در $C(X,\mathbb{R})$ باشد و $f \in C(X,\mathbb{R})$. اگر برای هر $x,y \in X$ عضوی چون $g_{xy} \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g_{xy}(x) = f(x)$ و $g_{xy}(y) = f(y)$، آنگاه $f \in \mathcal{A}$.

برهان. $\varepsilon > ۰$ را مفروض گرفته و برای هر $x,y \in X$ فرض می‌کنیم:

$$V_{xy} = \{z \in X : f(z) > g_{xy}(z) - \varepsilon\}, \qquad U_{xy} = \{z \in X : f(z) < g_{xy}(z) + \varepsilon\}.$$

این مجموعه‌ها باز و شامل x و y هستند. y را ثابت می‌گیریم؛ در این صورت $\{U_{xy} : x \in X\}$ فضای X را می‌پوشانند، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{U_{y_j}\}_۱^n$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $g_y = \max\{g_{x_۱y}, \ldots, g_{x_ny}\}$؛ در این صورت روی X، $f < g_y + \varepsilon$ و روی $V_y = \bigcap_۱^n V_{x_jy}$ که باز و شامل y است داریم $f > g_y - \varepsilon$. بنابر این $\{V_y\}_{y \in X}$ پوشش باز دیگری برای X است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{V_{x_j}\}_۱^m$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $g = \min\{g_{y_۱}, \ldots, g_{y_m}\}$؛ در این صورت $\|f - g\|_u < \varepsilon$. چون $\mathcal{A}$ یک شبکه است داریم $g \in \mathcal{A}$ و چون $\mathcal{A}$ بسته و ε دل‌خواه است، $f \in \mathcal{A}$. $\blacksquare$

برهان قضیهٔ ۴.۴۵: $x \neq y$ را مفروض می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{A}_{xy} = \{(f(x), f(y)) : f \in \mathcal{A}\}.$$

در این صورت همانند لم ۴.۴۶، $\mathcal{A}_{xy}$ زیرجبری از $\mathbb{R}^۲$ است زیرا $f \mapsto (f(x), f(y))$ یک هومورفیسم جبری است. اگر برای هر x,y، $\mathcal{A}_{xy} = \mathbb{R}^۲$، آنگاه لم‌های ۴.۴۸ و ۴.۴۹ ایجاب می‌کنند که $\mathcal{A} = C(X,\mathbb{R})$. در غیر این صورت x,yای وجود دارند به‌طوری‌که $\mathcal{A}_{xy}$ زیرجبر سره‌ای از است.

این زیرجبر نمی‌تواند $\{(۰,۰)\}$ یا پیمای خطی $(۱,۱)$ باشد زیرا $\mathcal{A}$ نقاط را جدا می‌کند، لذا بنابر لم ۴.۴۶، $\mathcal{A}_{xy}$ پیمای خطی $(۱,۰)$ یا $(۰,۱)$ است. در هر حال، $x_۰ \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{A}$، $f(x_۰) = ۰$. فقط یک $x_۰$

وجود دارد زیرا $\mathcal{A}$ نقاط را جدا می‌کند، لذا اگر x و y هیچکدام $x_\circ$ نباشند، داریم $\mathcal{A}_{xy} = \mathbb{R}^\text{۲}$. اینک لم‌های ۴.۴۸ و ۴.۴۹ ایجاب می‌کنند که $\mathcal{A} = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : f(x_\circ) = \circ\}$. بالاخره، اگر $\mathcal{A}$ شامل توابع ثابت باشد، آنگاه $x_\circ$ای وجود ندارد که برای هر $f \in \mathcal{A}$، $f(x_\circ) = \circ$. لذا $\mathcal{A}$ باید با $C(X,\mathbb{R})$ برابر باشد. ■

قضیهٔ استون- وایرشتراس را به‌گونه‌ای مطرح کردیم که اثباتش خیلی طبیعی باشد. اما در کاربردها بعضاً به زیرجبرهایی چون $\mathcal{B}$ از $C(X,\mathbb{R})$ برمی‌خوریم که بسته نیستند و قضیه را در مورد $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}}$ به‌کار می‌بریم. بیان مجدد حاصل از قضیه، به صورت زیر است:

۴.۵۰ نتیجه. فرض‌کنیم $\mathcal{B}$ زیرجبری از $C(X,\mathbb{R})$ باشد که نقاط را جدا می‌کند. اگر $x_\circ \in X$ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{B}$، $f(x_\circ) = \circ$ آنگاه $\mathcal{B}$ در $\{f \in C(X,\mathbb{R}) : f(x_\circ) = \circ\}$ چگال است. در غیر این صورت $\mathcal{B}$ در $C(X,\mathbb{R})$ چگال است.

قضیهٔ تقریب کلاسیک وایرشتراس حالت خاصی از نتیجهٔ فوق است که در آن X زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbb{R}^n$ است و $\mathcal{B}$ جبر چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{R}^n$ (تحدید شده به X) است؛ در اینجا $\mathcal{B}$ حاوی توابع ثابت است، لذا نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{B}$ در $C(X,\mathbb{R})$ چگال است.

قضیهٔ استون- وایرشتراس به صورتی که در بالا گفته شد، برای توابع مختلط درست نیست. برای مثال، جبر چندجمله‌ای‌ها با یک متغیر مختلط در اکثر زیرمجموعه‌های فشردهٔ K از $\mathbb{C}$، در $C(X)$ چگال نیست. (بالاخص، اگر $K^\circ \neq \varnothing$، آنگاه هر حد یکنواخت از چند جمله‌ای‌های روی K باید با K° هلومورف باشد.) اینک برهان ساده‌ای برای این مطلب خواهیم آورد که تابع $f(z) = \overline{z}$ نمی‌تواند به‌طور یکنواخت با چندجمله‌ای‌های روی دایرهٔ واحد $\{e^{it} : t \in [\circ, \text{۲}\pi]\}$ تقریب زده شود. اگر $P(z) = \sum_\circ^n a_j z^j$، آنگاه

$$\int_\circ^{\text{۲}\pi} \overline{f}(e^{it}) P(e^{it})dt = \sum_\circ^n a_j \int_\circ^{\text{۲}\pi} e^{i(j+1)t} dt = \circ.$$

بنابر این اگر $f(e^{it})$ و $P(e^{it})$ را به‌طور مخفف با f و P نشان دهیم، آنگاه با توجه به اینکه روی دایرهٔ واحد تساوی $|f| = \text{۱}$ برقرار است داریم:

$$\begin{aligned}\text{۲}\pi = \left|\int_\circ^{\text{۲}\pi} f\overline{f}dt\right| &\leq \left|\int_\circ^{\text{۲}\pi} (f-P)\overline{f}dt\right| + \left|\int_\circ^{\text{۲}\pi} \overline{f}Pdt\right| \\ &= \left|\int_\circ^{\text{۲}\pi} (f-P)\overline{f}dt\right| \leq \int_\circ^{\text{۲}\pi} |f-P|\,dt \leq \text{۲}\pi \|f-P\|_u .\end{aligned}$$

بنابراین، برای هر چندجمله‌ای مانند P، $\|f-P\|_u \geq \text{۱}$. ■

البته، نسخهٔ مختلطی از قضیهٔ استون ـ وایرشتراس نیز وجود دارد.

۴.۵۱ قضیهٔ استون- وایرشتراس مختلط. فرض‌کنیم X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. اگر $\mathcal{A}$ زیرجبر مختلط بسته‌ای از $C(X)$ باشد که نقاط را جدا کند و تحت مزدوج مختلط بسته باشد، آنگاه یا $\mathcal{A} = C(X)$ یا به ازای $x_\circ \in X$ ای، $\mathcal{A} = \{f \in C(X) : f(x_\circ) = \circ\}$.

برهان. چون $\operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{۲}$ و $\operatorname{Im} f = \frac{f-\bar{f}}{۲i}$، مجموعهٔ $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ مرکب از بخش‌های حقیقی و موهومی توابع واقع در $\mathcal{A}$ زیرجبری از $C(X,\mathbb{R})$ است که قضیهٔ استون- وایرشتراس برای آن برقرار است. چون

$$\mathcal{A} = (f + ig : f, g \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\}$$

حکم مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نوعی از قضیهٔ استون- وایرشتراس هم برای فضاهای هاسدورف موضعاً فشردهٔ غیرفشرده وجود دارد. این حکم را برای توابع حقیقی می‌آوریم؛ همتای مشابه با قضیهٔ ۴.۵۱ برای توابع مختلط پی‌آمد مستقیمی از همین حکم است.

۴.۵۲ قضیه. فرض‌کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ غیرفشرده باشد. اگر $\mathcal{A}$ زیرجبر بسته‌ای از $C_\circ(X,\mathbb{R})(= C_\circ(X) \cap C(X,\mathbb{R}))$ باشد که نقاط را جدا کند، آنگاه یا $\mathcal{A} = C_\circ(X,\mathbb{R})$ یا به ازای $x_\circ \in X$ ای،

$$\mathcal{A} = \{f \in C_\circ(X,\mathbb{R}) : f(x_\circ) = \circ\}.$$

برهان در قالب تمرین ۷۴ گنجانده شده است.

تمرین‌ها

۶۶) فرض‌کنید $\sum_{۱}^{\infty} c_n t^n - ۱$ سری ماکلورن $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}$ باشد.

الف) سری فوق بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ $(-۱,۱)$ به‌طور یکنواخت و مطلقاً همگرا است همین‌طور سری $-\sum_{۱}^{\infty} n c_n t^{n-۱}$ که از مشتق‌گیری جمله به جمله حاصل شده است. بنابر این اگر $f(t) = ۱ - \sum_{۱}^{\infty} c_n t^n$، آنگاه $f'(t) = -\sum_{۱}^{\infty} n c_n t^{n-۱}$.

ب) با محاسبهٔ صریح نشان دهید که $f(t) = -۲(۱-t)f'(t)$. از اینجا معلوم می‌شود که $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}} f(t)$ ثابت است. چون $f(\circ) = ۱$، پس $f(t) = (۱-t)^{\frac{۱}{۲}}$.

۶۷) قضیهٔ ۴.۵۲ را ثابت‌کنید. (اگر $x_\circ \in X$ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $f(x_\circ) = \circ$، آنگاه Y را فشرده‌سازی یک نقطه‌ای $X \setminus \{x_\circ\}$ بگیرید؛ در غیر این صورت فرض‌کنید Y فشرده‌سازی یک نقطه‌ای X است. گزارهٔ ۴.۳۶ و قضیهٔ استون- وایرشتراس را روی Y به‌کار ببرید.)

۶۸) فرض‌کنید X و Y فضاهای هاسدورف فشرده‌ای باشند. نشان دهید که جبر تولید شده به وسیلهٔ توابع به شکل $f(x,y) = g(x)h(y)$ که در آن $g \in C(X)$ و $h \in C(Y)$ در $C(X,Y)$ چگال است.

۶۹) فرض‌کنید A مجموعه‌ای ناتهی باشد و $X = [\circ,1]^A$. ثابت کنید که جبر تولید شده به وسیلهٔ نگاشت‌های مؤلفه‌ای $\pi_\alpha : X \to [\circ,1]$ $(\alpha \in A)$ و تابع ثابت ۱ در $C(X)$ چگال است.

۷۰) فرض‌کنید X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. یک ایده‌آل در $C(X,\mathbb{R})$ جبری مانند $\mathcal{J}$ از $C(X,\mathbb{R})$ است به‌طوری‌که اگر $f \in \mathcal{J}$ و $g \in C(X,\mathbb{R})$ آنگاه $fg \in \mathcal{J}$.

الف) اگر $\mathcal{J}$ ایده‌آلی در $C(X,\mathbb{R})$ باشد، فرض‌کنید:

$$h(\mathcal{J}) = \{x \in X : f(x) = \circ \quad \forall f \in \mathcal{J}\}.$$

در این صورت $h(\mathcal{J})$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X موسوم به غلاف $\mathcal{J}$ است.

ب) اگر $E \subset X$، فرض‌کنید $k(E) = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \forall x \in E,\ f(x) = \circ\}$. در این صورت $k(E)$ ایده آل بسته‌ای در $C(X,\mathbb{R})$ موسوم به هسته E است.

ج) اگر $E \subset X$، آنگاه $h(k(E)) = \overline{E}$.

د) اگر $\mathcal{J}$ ایده‌آلی در $C(X,\mathbb{R})$ باشد، آنگاه $k(h(\mathcal{J})) = \overline{\mathcal{J}}$.
(راهنمایی: می‌توان $k(h(\mathcal{J}))$ را با زیرجبری از $C_\circ(U,\mathbb{R})$ یکی گرفت که در آن $U = X \setminus h(\mathcal{J})$.)

ه) زیرمجموعه‌های بستهٔ X با ایده‌آل‌های بستهٔ $C(X,\mathbb{R})$ در تناظر یک به یک قرار دارند.

۷۱) (این نسخه‌ای از تمرین ۷۰ است که در آن قضیهٔ استون- وایرشتراس به‌کار نمی‌رود.) فرض‌کنید X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد و M مجموعهٔ همهٔ هومورفیسم‌های جبری ناصفر از $C(X,\mathbb{R})$ به $\mathbb{R}$ است. هر $x \in X$ عضوی چون $\hat{x}$ از M را با $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کند.

الف) اگر $\phi \in M$، آنگاه $\{f \in C(X,\mathbb{R}) : \phi(f) = \circ\}$ ایده‌آل سرهٔ ماکسیمالی در $C(X,\mathbb{R})$ است.

ب) اگر $\mathcal{J}$ ایده‌آل سره‌ای در $C(X,\mathbb{R})$ باشد، $x_\circ \in X$ ای وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{J}$، $f(x_\circ) = \circ$. (فرض کنید چنین نباشد؛ $f \in \mathcal{J}$ ای بسازید که همه‌جا $f > \circ$ و نتیجه بگیرید که $1 \in \mathcal{J}$. این کار نیاز به قضایای عمیقی ندارد.)

ج) نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ یک دوسویی از X به M است.

د) اگر M به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای مجهز شود، آنگاه نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ یک همیومورفیسم از X به M است. (چون M صرفاً به‌طور جبری تعریف شده است، معلوم می‌شود که ساختار توپولوژیکی X کاملاً به وسیلهٔ ساختار جبری $C(X,\mathbb{R})$ مشخص می‌شود.)

۴.۸ نشاندن در مکعب

اینک تکنیکی برای نشاندن فضاهای توپولوژیک در حاصلضرب‌های بازه‌ها بیان می‌کنیم و برخی کاربردهایش را مورد بحث قرار می‌دهیم. (این احکام در هیچ جای این کتاب به‌کار برده نخواهند شد.) در سراسر این بخش بازهٔ واحد $[\circ,1]$ را با I نشان خواهیم داد و اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد، فضای حاصلضربی I^A را یک **مکعب** خواهیم نامید.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R})$، می‌گوییم $\mathcal{F}$ **نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند** هرگاه برای هر مجموعهٔ بسته مانند $E \subset X$ و هر $x \in E^c$ عضوی مانند $f \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x) \notin \overline{f(E)}$. چنانچه $\mathcal{F}$ نقاط و مجموعه‌ها را جدا کند، خانوادهٔ دیگری چون $\mathcal{G} \in C(X,I)$ با خواص نسبتاً قوی‌تر وجود دارد: برای هر مجموعهٔ بسته مانند $E \subset X$ و هر $x \in E^c$ عضوی چون $g \in \mathcal{G}$ وجود دارد که $g(x) = 1$ و $g = \circ$ بر E (در واقع، اگر $f \in \mathcal{F}$ در $f(x) \notin \overline{f(E)}$ صدق کند، g را چنین می‌گیریم: $g = \phi \circ f$ که در آن $\phi \in C(I,I)$، $\phi(f(x)) = 1$ و $\phi = \circ$ بر $\overline{f(E)}$. از اینجا معلوم می‌شود که یک فضای T_1 مانند X خانواده‌ای مانند $\mathcal{F}$ دارد که نقاط و مجموعه‌ها را فقط و فقط وقتی جدا می‌کند که X کاملاً منتظم باشد.

هر خانوادهٔ ناتهی مانند $\mathcal{G} \subset C(X,I)$، به‌طور طبیعی، نگاشتی چون $e : X \to I^{\mathcal{F}}$ با فرمول $\pi_f(e(x)) = f(x)$ القاء می‌کند که در آن $\pi_f : I^{\mathcal{F}} \to I$ نگاشت مؤلفه‌ای است. e نگاشت از X به توی مکعب $I^{\mathcal{F}}$ وابسته به $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود. (عملاً این ساختار را به فضاهای مقصدی غیر از I می‌توان تعمیم داد؛ تمرین ۱۹ را ببینید.)

۴.۵۳ گزاره. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، $\mathcal{F} \subset C(X,I)$ و $e : X \to I^{\mathcal{F}}$ نگاشت وابسته به $\mathcal{F}$ باشد. در این صورت

الف) e پیوسته است.

ب) اگر $\mathcal{F}$ نقاط را جدا کند، آنگاه e یک به یک است.

ج) اگر X، T_1 باشد و $\mathcal{F}$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند، آنگاه e یک نشاننده است.

برهان. (الف) از گزارهٔ ۴.۱۱ نتیجه می‌شود و (ب) واضح است. حال، ملاحظه می‌کنیم که اگر $\mathcal{F}$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند و X، T_1 باشد، آنگاه بنابر (ب) و گزارهٔ ۴.۷ نگاشت e یک به یک است. برای اثبات پیوستگی وارون، فرض می‌کنیم که U در X باز باشد. اگر $x \in U$، $f \in \mathcal{F}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(x) \notin \overline{f(U^c)}$ و فرض می‌کنیم :

$$V = \pi_f^{-1}[\overline{f(U^c)}]^c = \{p \in I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} : \pi_f(p) \notin \overline{f(U^c)}\}.$$

در این صورت V در $I^{\mathcal{F}}$ باز است و $e(x) \in V \cap e(X) \subset e(U)$. بنابر این در هر $x \in U$، $e(U)$ یک همسایگی از $e(x)$ در $e(X)$ است، لذا $e(U)$ در $e(X)$ باز است. از اینجا معلوم می‌شود که e^{-1} پیوسته است. ■

۴.۵۴ نتیجه. هر فضای هاسدورف فشرده با زیرمجموعهٔ بسته‌ای از یک مکعب همیومورف است.

برهان. بنابرگزاره ۴.۲۵ و لم اوریسون، می‌توانیم $\mathcal{F}$ را چنین بگیریم: $\mathcal{F} = C(X,I)$.

۴.۵۵ نتیجه. یک فضای توپولوژیک کاملاً منظم است اگر و تنها اگر با زیرمجموعه‌ای از یک فضای هاسدورف فشرده همیومورف باشد.

برهان. با فرض $\mathcal{F} = C(X,I)$، استلزام «فقط اگر» از گزارهٔ ۴.۵۳ به‌دست می‌آید؛ عکس مطلب به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۷۲). ■

یک **فشرده‌سازی** از فضای توپولوژیکی چون X زوجی چون (Y,ϕ) است که در آن Y یک فضای هاسدورف فشرده است و ϕ یک همیومورفسیم از X به زیرمجموعهٔ چگالی از Y می‌باشد. مکرراً X را با تصویرش $\phi(X) \subset Y$ یکی گرفته و مختصراً از «فشرده‌سازی سخن می‌گوییم.» برای مثال، $([-1,1],\tanh)$ یک فشرده‌سازی $\mathbb{R}$ است و فشرده‌سازی یک نقطه‌ای (X^*,i) از یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده مانند X یک فشرده‌سازی به معنی جاری است که در آن $i : X \to X^*$ نگاشت شمول است.

فرض‌کنیم X کاملاً منظم باشد. مطابق با گزارهٔ ۴.۵۳، اگر $\mathcal{F} \subset C(X,I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند، $e : X \to I^{\mathcal{F}}$ نشانندهٔ وابسته به $\mathcal{F}$ باشد و Y بستار $e(X)$ در $I^{\mathcal{F}}$ باشد، آنگاه (Y,e) یک فشرده‌سازی از X است. این فشرده‌سازی این خاصیت را دارد که اگر X را با تصویرش $e(X)$ یکی بگیریم، آنگاه هر $f \in \mathcal{F}$ توسیع پیوسته‌ای به Y دارد که یکتا است زیرا X در Y چگال است. در واقع، یکی گرفتن X با $e(X)$، f را به نگاشت $\pi_f|_{e(X)}$ مبدل می‌سازد، که به $\pi_f|_Y$ توسیع می‌یابد. به‌علاوه، اگر f و g توابع پیوستهٔ کرانداری روی X باشند که به‌طور پیوسته به Y توسیع یابند، آنگاه

به‌وضوح $f+g$ و fg نیز به‌طور پیوسته توسیع خواهند یافت و اگر $\{f_n\}$ دنبالهٔ همگرای یکنواختی از توابع روی X باشد که به‌طور پیوسته به Y توسیع یابند، توسیع‌هایشان به‌طور یکنواخت بر Y همگرا هستند زیرا X در Y چگال است، لذا $f = \lim f_n$ نیز به‌طور پیوسته به Y توسیع می‌یابد، ثابت کرده‌ایم که:

۴.۵۶ گزاره. فرض‌کنیم $\mathcal{F} \subset C(X,I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند. (Y,e) را فشرده‌سازی وابسته به $\mathcal{F}$ می‌انگاریم و فرض‌می‌کنیم $\mathcal{A}$ کوچکترین زیرجبر بسته‌ای از $BC(X)$ باشد که حاوی $\mathcal{F}$ است. در این صورت $f \in \mathcal{A}$ توسیع پیوسته‌ای به Y دارد.

این حکم معکوس دارد: تمرین ۷۳ را ببینید.

اگر X یک فضای کاملاً منظم باشد، فشرده‌سازی وابسته به $\mathcal{F} = C(X,I)$ **فشرده‌سازی استون ـ چخ** X نامیده می‌شود و با $(\beta X, e)$ یا وقتی X را با $e(X)$ یکی بگیریم خلاصه‌وار با βX نشان داده می‌شود. هر $f \in BC(X)$ به‌طور پیوسته به βX توسیع می‌یابد؛ در واقع حکم بسیار کلی‌تری برقرار است:

۴.۵۷ قضیه. اگر X یک فضای کاملاً منظم، Y فضای هاسدورف موضعاً فشرده‌ای باشد و $\phi \in C(X,Y)$، آنگاه ϕ توسیع پیوستهٔ یکتایی مانند $\tilde{\phi}$ به βX دارد ــ یعنی، نگاشت یکتایی چون $\tilde{\phi} \in C(\beta X, Y)$ وجود دارد به‌طوری که $\tilde{\phi} \circ e = \phi$.
ــ اگر (Y,ϕ) یک فشرده‌سازی از X باشد، آنگاه $\tilde{\phi}$ پوشا است؛ چنانچه هر $f \in BC(X)$ نیز به‌طور پیوسته به Y توسیع یابد (یعنی، به ازای عضوی چون $g \in C(Y)$، $f = g \circ \phi$)، آنگاه $\tilde{\phi}$ یک همیومورفیسم است.

برهان. فرض‌می‌کنیم $\mathcal{F} \in C(X,I)$ و $\mathcal{G} = C(Y,I)$ و $(\beta Y, i)$ فشرده‌سازی استون ـ چخ Y باشد (یعنی، $i : Y \to I^{\mathcal{G}}$ نشانندهٔ وابسته به $\mathcal{G}$ باشد و $\beta Y = i(Y)$؛ βY با Y همیومورف است زیرا Y فشرده است.) $\phi \in C(X,Y)$ را مفروض گرفته و $\Phi : I^{\mathcal{F}} \to I^{\mathcal{G}}$ را با $\pi_g(\Phi(p)) = \pi_{g\circ\phi}(p)$ تعریف می‌کنیم. بنابر گزارهٔ ۴.۱۱، نگاشت Φ پیوسته است و

$$\pi_g(\Phi(e(x))) = \pi_{g\circ\phi}(e(x)) = g(\phi(x)) = \pi_g(i(\phi(x))),$$

یعنی، $\Phi \circ e = i \circ \phi$. از اینجا معلوم می‌شود که $\Phi(e(X)) = i(\phi(X)) \subset \beta Y$ و از این رو $\Phi(\beta X) \subset \overline{\beta Y} = \beta Y$. مطالب گفته شده در دیاگرام جابه‌جایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\phi"] & \beta X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Phi|_{\beta X}"] & I^{\mathcal{F}} \arrow[d, "\Phi"] \\ Y \arrow[r, "i"] & \beta Y \arrow[r, hook] & I^{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

فرض‌می‌کنیم $\tilde{\phi} = i^{-1} \circ (\Phi|_{\beta X})$. در این صورت $\tilde{\phi} \circ e = i^{-1} \circ \Phi \circ e = \phi$ و یکتایی $\tilde{\phi}$ واضح است زیرا $e(X)$ در βX چگال است؛ بنابر این حکم نخست ثابت شده است. اگر (Y,ϕ) یک فشرده‌سازی از X باشد، آنگاه $\phi(X)$ در Y چگال است؛ اما در این صورت $\tilde{\phi}(\beta X)$ در Y چگال است و فشرده هم می‌باشد، لذا $Y = \tilde{\phi}(\beta X)$. بالاخره، اگر هر $f \in BC(X)$ به ازای عضوی مانند g از $C(Y)$ به شکل $g \circ \phi$ باشد، آنگاه Φ یک به یک است؛ در نتیجه $\tilde{\phi}$ یک به یک است و از این رو بنابر گزارهٔ ۴.۲۸ یک همیومورفیسم می‌باشد. ∎

از این قضیه معلوم می‌شود که βX « بزرگترین » فشرده‌سازی فضای کاملاً منظمی چون X است، به این معنی که هر فشرده‌سازی دیگر تصویر پیوسته‌ای از آن است. در آن سوی قضیه، اگر X موضعاً فشرده باشد، آنگاه بنابر لم اوریسون، $\mathcal{F} = C_c(X) \cap C(X,I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند. نگاهی به ساختمان فشرده‌سازی (Y,e) وابسته به همین $\mathcal{F}$ نشان می‌دهد که Y حاوی $e(X)$ و نقطهٔ تنهایی از $I^{\mathcal{F}}$ است که همهٔ مؤلفه‌هایش صفر هستند. در نتیجه به آسانی معلوم می‌شود که Y با فشرده‌سازی یک نقطه‌ای X که در بند ۴.۵ ساخته شد همیومورف است.

به‌عنوان آخرین کاربرد نشانندهٔ $e : X \to I^{\mathcal{F}}$، به سئوال زیر پاسخی جزئی می‌دهیم:
کِی یک فضای توپولوژیک متر‌پذیر است، یعنی، چه‌وقت توپولوژی یک فضای توپولوژیک با یک متر تعریف می‌شود؟ یک شرط لازم برای آنکه X متر‌پذیر باشد این است که نرمال باشد (تمرین ۳). از سوی دیگر:

۴.۵۸ قضیهٔ متری‌سازی اوریسون. هر فضای نرمال شمارش‌پذیر دوم، متر‌پذیر است.

چون هر زیرمجموعهٔ یک فضای متر‌پذیر، (با همان متر) متر‌پذیر است، قضیهٔ فوق پی‌آمد مستقیمی از گزارهٔ ۴.۵۳ و دو حقیقت زیر است که اثبات‌هایشان در قالب تمرین‌های ۷۶ و ۷۷ گنجانده شده است:

- اگر X نرمال و شمارش‌پذیر دوم باشد، آنگاه خانوادهٔ شمارش‌پذیری مانند $\mathcal{F} \subset C(X,I)$ وجود دارد که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند.
- اگر $\mathcal{F}$ شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $I^{\mathcal{F}}$ متر‌پذیر است.

تمرین‌ها

۷۲) هر زیرمجموعه از یک فضای کاملاً منظم، نسبت به توپولوژی نسبی، کاملاً منظم است.

۷۳) اگر X یک فضای کاملاً منظم باشد، زیرجبری چون $\mathcal{A}$ از $BC(X)$ کاملاً منظم نامیده می‌شود هرگاه: (i) بسته و حاوی توابع ثابت باشد و (ii) $\mathcal{A} \cap C(X,I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند.

الف) هرگاه (Y,e) یک فشرده‌سازی هاسدورف از X باشد، $\mathcal{A}_Y = \{f \circ e : f \in C(Y)\}$ زیرجبر کاملاً منظمی از $BC(X)$ است.

ب) چنانچه (Y,e) و (Y',e') فشرده‌سازی‌های هاسدورفی از X باشند به‌طوری که $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_{Y'}$، یک همیومورفیسم مانند $\phi : Y \to Y'$ وجود دارد به‌طوری که $\phi \circ e = e'$. (از برهان قضیهٔ ۴.۵۷ تقلید کنید که با حالت $Y = \beta X$ در ارتباط است.)

ج) اگر (Y,e) فشرده‌سازی X وابسته به $\mathcal{F} \subset C(X,I)$ باشد، آنگاه $\mathcal{A}_Y$ کوچکترین زیرجبری از $BC(X)$ است که شامل $\mathcal{F}$ است. (تمرین ۶۹ را به‌کار برید.)

د) فشرده‌سازی‌های هاسدورف X در تناظر یک به یک با زیرجبرهای کاملاً منظم $BC(X)$ قرار دارند.

۷۴) $\mathbb{N}$ (با توپولوژی گسسته) را به عنوان زیرمجموعه‌ای از فشرده‌سازی استون ـ چخ آن، یعنی $\beta\mathbb{N}$ در نظر بگیرید.

الف) اگر A و B زیرمجموعه‌های مجزایی از $\mathbb{N}$ باشند، بستارهایشان در $\beta\mathbb{N}$ مجزا هستند. (راهنمایی: $\chi_A \in C(\mathbb{N},I)$.)

ب) هیچ دنبالهٔ واقع در $\mathbb{N}$ در $\beta\mathbb{N}$ همگرا نیست مگر آنکه نهایتاً ثابت باشد (لذا $\beta\mathbb{N}$ قطعاً فشردهٔ دنباله‌ای نیست).

۷۵) فرض کنید X یک فضای کاملاً منظم باشد. مجموعهٔ M مرکب از همیومورفیسم‌های جبری از $BC(X,\mathbb{R})$ به $\mathbb{R}$ تجهیز شده با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای با βX همیومورف است. (تمرین ۷۱ را ببینید. از دیدگاه نظریهٔ جبر باناخ، این کارآمدی βX ذاتی است.)

۷۶) اگر X نرمال و شمارش‌پذیر دوم باشد، خانوادهٔ شمارش‌پذیری مانند $\mathcal{F} \subset C(X,I)$ وجود دارد که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند. (فرض کنید $\mathcal{B}$ پایهٔ شمارش‌پذیری برای توپولوژی باشد. مجموعهٔ زوج‌هایی چون $(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ را در نظر بگیرید که $\overline{U} \subset V$ و لم اوریسون را به‌کار برید.)

۷۷) فرض کنید $\{(X_n, \rho_n)\}_1^\infty$ خانوادهٔ شمارش‌پذیری از فضاهای متری باشد که مترهایشان مقادیر واقع در $[0,1]$ را اختیار می‌کنند. (محدودیت اخیر همواره می‌تواند ایجاد شود؛ قسمت (ب) از تمرین ۵۶ را بنگرید.) فرض کنید $X = \prod_1^\infty X_n$. اگر

$x,y \in X$، مثلاً $x=(x_1,x_2,\dots)$ و $y=(y_1,y_2,\dots)$، تعریف کنید: $\rho(x,y)=\sum_1^\infty 2^{-n}\rho_n(x_n,y_n)$. در این صورت ρ یک متر است که توپولوژی حاصلضربی روی X را تعریف می‌کند.

۴.۹ یادداشت‌ها و مراجع

منشأ مفهوم فضای توپولوژیک در سخنرانی ریمان [۱۱۳] دربارهٔ پایه‌های هندسه که در ۱۸۵۴ ایراد شد به روشنی آمده است، اما نیم قرن بعد از آن گذشت تا جهان ریاضی در آستانهٔ در نظر گرفتن فضاهای مجرد به شیوه‌ای قانونمند قرار گرفت. اولین گام برای ساختن قالبی مجرد برای مطالعهٔ حدها و پیوستگی در سال ۱۹۰۶ توسط فرشه برداشته شد، وی فضاهای متری و همینطور ردهٔ کلی‌تری از فضاهای شبه توپولوژیک را معرفی کرد که خواصشان بر حسب همگرایی دنباله‌ای تعریف شدند. چند سال بعد، هاسدورف [۶۸] نقشهٔ اصول موضوع برای همسایگی‌هایی از نقاط را داد که به فضای هاسدورف رسید، اهمیت دیدگاه وی به سرعت آشکار شد و پایهٔ سایر اکتشافات موضوع شد.

چندین کتاب خوب وجود دارد که خواننده می‌تواند برای موارد جامع توپولوژی مجموعه نقاط به آنها مراجعه کند، این مراجع عبارتند از: بور باکی [۲۰]، دوگانجی [۳۴]، اِنگل کینیگ [۳۸]، کِلی [۸۳] و ناگاتا [۱۰۲]. اِنگل کینیگ مراجع و یاداشت‌های تاریخی زیادی دارد .

بند ۴.۲ : لم اوریسون و قضیهٔ توسیع تیتسه هر دو ابتدا در اورسیون [۱۵۲] اثبات شدند. حالت‌های خاص قضیهٔ اخیر قبل از اینها توسط چند نویسنده به‌دست آمده بودند، (از آن جمله تیتسه ([۱۵۴] را ببینید). مثال‌هایی از فضاهای کاملاً منظم که نرمال نیستند و فضاهای منظمی که کاملاً منظم نیستند و همهٔ آن‌ها بسیار پیچیده هستند نخستین بار توسط تیخونف [۱۵۲] ساخته شدند. مطلب قابل توجه، وجود فضای منظمی است که هیچ تابع پیوستهٔ غیر ثابت ندارد و این حکم به هویت [۷۳] نسبت داده شده است. مثال‌هایی نیز در کتاب‌های ذکر شدهٔ فوق می‌توان یافت.

بند ۴.۳: گاهی از اوقات نظریهٔ تورها نظریهٔ مور- اسمیتِ همگرایی نامیده می‌شود [۱۰۱]. نظریهٔ همگرایی کلی دیگری که توسط اچ. کارتان ابداع شده و به‌وسیلهٔ بورباکی به چاپ رسید، بر مفهوم فیلترها استوار است. یک فیلتر در مجموعه‌ای چون X ، خانواده‌ای مانند $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ با خواص زیر است:

- اگر $f \in \mathcal{P}$ و $E \supset F$، آنگاه $E \in \mathcal{F}$.
- اگر $E \in \mathcal{F}$ و $F \in \mathcal{F}$، آنگاه $E \cap F \in \mathcal{F}$.
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد، فیلتری چون $\mathcal{F}$ در X همگرا به $x \in X$ است هرگاه هر همسایگی از x به $\mathcal{F}$ تعلق داشته باشد. فیلترها و تورها به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند. اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ توری در X باشد، فیلتر مشتق آن گردایهٔ همهٔ مجموعه‌هایی چون $E \subset X$ است به‌طوری که $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در E باشد. از سوی دیگر، اگر $\mathcal{F}$ یک فیلتر باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ تحت

شمول عکس، یک مجموعهٔ جهت‌دار است، و توری چون $\langle x_F \rangle_{F\in\mathcal{F}}$ که با $\mathcal{F}$ اندیسگذاری شده است مربوط به $\mathcal{F}$ خوانده می‌شود هرگاه برای هر $F \in \mathcal{F}$، $x_F \in F$. سپس به آسانی معلوم می‌شود که تور $\langle x_\alpha \rangle$ به x همگرا است اگر و تنها اگر فیلتر مشتق آن به x همگرا باشد و فیلتری چون $\mathcal{F}$ همگرا به x است اگر و تنها اگر همهٔ تورهای مربوط به آن به x همگرا باشند. برای کسب اطلاعات بیشتر، بورباکی [۲۰] و دوگانجی [۳۴] را ببینید.

بند ۴.۴ : به‌کار بردن واژهٔ « فشرده » کاملاً متعارف نیست. در برخی از کارهای قدیمی، واژهٔ « فشرده » و « فشردهٔ دوتایی » به ترتیب به معانی فشردهٔ شمارش‌پذیر و فشرده به‌کار رفته‌اند و برخی از مؤلفین « فشرده » و « شبه فشرده» را به ترتیب به معانی فشردهٔ هاسدورفی و فشرده به‌کار برده‌اند. مترادف‌هایی برای « پیش‌فشرده » که در نوشته‌ها به وفور یافت می‌شوند عبارتند از: « فشردهٔ مشروط » و « فشردهٔ نسبی »، آخری رواج دارد زیرا به فشردگی با توپولوژی نسبی اشاره دارد که تفاوت آن کاملاً محسوس است.

بند ۴.۶: در مقالهٔ تیخونوف [۱۵۱] فشردگی $[0,1]^A$ برای هر مجموعه مانند A را ثابت شده است، تلفیق این حکم با نتیجهٔ ۴.۵۴ که در همان مقاله است، به آسانی ایجاب می‌کنند که هر حاصلضرب از فضاهای هاسدورف فشرده، فشرده باشد. قضیهٔ تیخونوف کلی به چخ [۲۳] نسبت داده شده است.
برهانی که ما آورده‌ایم مشابه ولی بسیار قشنگ‌تر از قدیمی‌ها است و آن را به چرنف [۲۴] نسبت داده‌اند. اصل انتخاب، معمولاً در قالب لم زورن، جزء اساسی برهان‌های قضیهٔ تیخونوف است. حقیقت جالب توجهی که توسط کِلی [۸۲] کشف شد این است که قضیهٔ تیخونوف به نوبهٔ خود اصل انتخاب را ایجاب می‌کند. اینک برهان این مطلب را می‌آوریم:
فرض‌می‌کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. نقطه‌ای چون ω که به هیچ کدام از X_αها تعلق ندارد انتخاب می‌کنیم، قرار می‌دهیم $X_\alpha^* = X_\alpha \cup \{\omega\}$ و با قید اینکه $\varnothing$، X_α و $\{\omega\}$ مجموعه‌های باز باشند یک توپولوژی روی X_α^* تعریف می‌کنیم. از قرار معلوم X_α^* فشرده است، لذا قضیهٔ تیخونوف ایجاب می‌کند که $X^* = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha^*$ فشرده باشد. فرض‌می‌کنیم $F_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$. مجموعه‌های F_α بسته‌اند و بنابر اصل انتخاب برای گردایه‌های متناهی از مجموعه‌ها ــــ که به کمک سایر اصول متعارف نظریهٔ مجموعه‌ها قابل اثبات است ــ این مجموعه‌ها خاصیت مقطع متناهی دارند. در واقع، اگر مجموعه‌ای‌متناهی مانند $B \subset A$ مفروض باشد، برای $\beta \in B$، $x_\beta \in X_\beta$ را انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت $\bigcap_{\beta\in B} F_\beta$ شامل نقطه‌ای چون $x \in X$ است به‌طوری‌که برای $\beta \in B$، $\pi_\beta(x) = x_\beta$ و برای $\alpha \notin B$، $\pi_\alpha(x) = \omega$. بنابر گزارهٔ ۴.۲۱، $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ که دقیقاً $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ است ناتهی می‌باشد. با تفصیل این استدلال، می‌توان اصل انتخاب را از این حالت خاصِ قضیهٔ تیخونف استخراج کرد که: اگر X فشرده باشد، آنگاه برای هر A فضای X^A فشرده است؛ مقالهٔ وارد [۱۵۶] را ببینید. احکام اولیهٔ آرزلا و آسکولی برای توابع روی $\mathbb{R}$ تعبیه شده بودند؛ آرزلا [۶] را ببینید. گونه‌های دیگری از قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی مربوط به فشردگی زیرمجموعه‌های $C(X,Y)$ تحت مفروضات مختلف روی X و Y را می‌توان در کتاب‌های یادشدهٔ فوق و رویدن [۱۲۱] یافت.

بند ۴.۷ : قضیهٔ استون ـ وایرشتراس نخستین بار در لابلای مقالهٔ طویل و مشکل استون [۱۴۴] ظاهر شده است. بعداً استون [۱۴۵] صورت بسیار خلاصه شده‌ای از قضیه و برخی کاربردهایش را نوشت که هنوز هم خواندنی خوبی به شمار می‌رود.

بند ۴.۸ : تاریخ این مبحث با اوریسون [۱۵۳] شروع می‌شود، در [۱۵۳] قضیهٔ متری‌سازی اساساً به روشی اثبات شده است که ما آورده‌ایم. تکنیک نشاندن فضاها در مکعب در همین مقاله به‌طور ضمنی گفته شده است، اما نخستین بار به‌طور صریح در تیخونوف [۱۵۱] آمده است. فشرده‌سازی استون ـ چخ، به نوعی در مقالهٔ اخیر به‌طور ضمنی گفته شده است، اما نخستین بار به‌طور صریح در استون [۱۴۴] و چخ [۲۳] توصیف شد و مورد مطالعه قرار گرفت.

نشان دادن این مطلب مشکل نیست که هر فضای منظم و شمارش‌پذیر دوم، نرمال است (لم ۴.۱ از کلی [۸۲] را ببینید)؛ در نتیجه، فرض نرمال بودن در قضیهٔ متری‌سازی اوریسون را می‌توان با منظم بودن عوض کرد. شرط لازم و کافی برای مترپذیری یک فضای توپولوژیک دل‌خواه شناخته شده است، اما قابلیت بررسی مثل شرایط قضیهٔ اوریسون را ندارد. کتاب‌های ذکر شده در فوق را ببینید.

متأسفانه واژهٔ « فشرده‌سازی » به معنی نگاشت یک به یک پیوسته‌ای مانند $\phi : X \to Y$ از یک فضای توپولوژیک X بروی زیرمجموعهٔ چگالی از یک فضای فشرده مانند Y به‌کار رفته است بدون آنکه قید شود ϕ یک نشانندهٔ است. چنین « فشرده‌سازی » از زیرجبرهای $C(X)$ برگرفته شده است که نقاط را جدا می‌کنند اما به معنی ذکر شده در تمرین ۷۳ کاملاً منظم نیستند. مثالی به وسیلهٔ جبر توابع « متناوب تقریباً یکنواخت » روی $\mathbb{R}$ مهیا می‌شود. این جبر توسط توابع $f_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ تولید می‌شود؛ « فشرده‌سازی» مربوطهٔ $\mathbb{R}$ به فشرده‌سازی بوهر مشهور است؛ فولند [بند ۴.۷ و ۴۷] را ببینید.

فصل پنجم
مقدمات آنالیز تابعی

«آنالیز تابعی» نامی رایج برای مطالعهٔ فضاهای برداری با بعد نامتناهی روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ و نگاشت‌های خطی بین آنها است. آنچه موجب تمایز آنالیز تابعی با جبرخطی محض می‌شود اهمیت ملاحظات توپولوژیکی است. روی فضاهای برداری با بعد متناهی فقط یک توپولوژی معقول وجود دارد و نگاشت‌ها خود به خود نسبت به این توپولوژی پیوسته‌اند. اما در ابعاد نامتناهی موضوع چندان ساده نیست. (همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، چنانچه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بر $\mathbb{R}$ باشد، جملهٔ « $f_n \to f$ » معانی متعددی دارد.) چون هدفمان در این فصل صرفاً ارائه مقدمات مختصری در این باب است ــ به‌جز در بند ۵.۴ ــ در سایر موارد توجه خود را به توپولوژی‌هایی معطوف می‌کنیم که به وسیلهٔ نُرم‌ها روی فضاهای برداری تعریف می‌شوند.

۵.۱ فضاهای برداری نرم‌دار

فرض‌کنیم K یکی از دو میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ و X یک فضای برداری روی K باشد. عضو صفر X را با 0 نشان می‌دهیم تمایز آن با اسکالر $0 \in K$ از متن مشخص می‌شود. همواره یک زیرفضا به معنی یک زیرفضای برداری خواهد بود. چنانچه $x \in X$، زیرفضای یک بعدی پدید آمده توسط x را با Kx نشان می‌دهیم. همچنین، اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ زیرفضاهایی از X باشند، مجموعهٔ $\{x + y : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$ را با $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ نشان می‌دهیم.

یک **نیم‌نرم** روی X تابعی چون $x \to \|x\|$ از X به $[0,\infty)$ است به‌طوری‌که

- به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی)،
- به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in K$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

به وضوح خاصیت دوم ایجاب می‌کند که $\|0\| = 0$. نیم نرمی که در آن $\|x\| = 0$ فقط وقتی برقرار باشد که $x = 0$، یک **نرم** نامیده می‌شود و هر فضای برداری مجهز به یک نرم، یک **فضای برداری نرم‌دار** (یا **فضای خطی نرم‌دار**) نامیده می‌شود.

اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، تابع $\rho(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند، زیرا

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|,$$
$$\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y-x\|.$$

توپولوژی تعریف شده توسط این متر، **توپولوژی نرمی روی** X نامیده می‌شود. دو نرم مانند $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ روی X هم‌ارز نامیده می‌شوند هرگاه ثابت‌هایی چون $C_1, C_2 > 0$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad (x \in X).$$

نرم‌های هم‌ارز مترهای هم‌ارزی تعریف می‌کنند و از این رو توپولوژی‌های یکسان و دنباله‌های کشی یکسانی تعریف می‌کنند.

هر فضای برداری نرم‌دار مانند X که نسبت به متر نرمی کامل باشد یک **فضای باناخ** نامیده می‌شود. (هر فضای نرم‌داری را می‌توان در یک فضای باناخ به صورت یک زیرمجموعهٔ چگال نشاند. یکی از راه‌های انجام این کار تقلید از ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{Q}$ به کمک دنباله‌های کشی است؛ در بند ۵.۲ راه ساده‌تری ارائه خواهیم داد.) قضیهٔ زیر محک مفیدی برای کامل بودن یک فضای برداری نرم‌دار است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد، سری $\sum_1^\infty x_n$ **همگرا** نامیده می‌شود هرگاه وقتی $N \to \infty$، $\sum_1^N x_n \to x$ و **مطلقاً همگرا** نامیده می‌شود هرگاه $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$.

۵.۱ قضیه. فضای متری نرم‌داری چون X کامل است اگر و تنها اگر هر سری مطلقاً همگرا در X، همگرا باشد.

برهان. اگر X کامل باشد و $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$، قرار می‌دهیم $S_N = \sum_1^N x_n$. در این صورت به ازای $N > M$ داریم:

$$\|S_N - S_M\| \leq \sum_{M+1}^N \|x_n\|.$$

وقتی $M, N \to \infty$، $\sum_{M+1}^N \|x_n\| \to 0$. بنابر این دنبالهٔ $\{S_N\}$ کشی و در نتیجه همگرا است. به‌عکس، فرض می‌کنیم هر سری مطلقاً همگرا، همگرا باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد. می‌توان $n_1 < n_2 < \cdots$ را چنان انتخاب کرد که به ازای $m, n \geq n_j$، $\|x_n - x_m\| < 2^{-j}$. فرض می‌کنیم $y_1 = x_{n_1}$ و به ازای $j > 1$، $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$. در این صورت $\sum_1^k y_j = x_{n_k}$ و

$$\sum_1^\infty \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_1^\infty 2^{-j} = \|y_1\| + 1 < \infty.$$

بنابر این $\lim x_{n_k} = \sum_1^\infty y_j$ وجود دارد. اما چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ کشی است به آسانی دیده می‌شود که $\{x_n\}$ به همان حدی همگرا است که دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ به آن همگرا است. ■

قبلاً مثال‌هایی از فضاهای باناخ دیده‌ایم. اولاً، اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، $B(X)$ و $BC(X)$ با نرم یکنواخت $\|f\|_u = \sup_{x\in X}|f(x)|$ دو فضای باناخ هستند. ثانیاً، اگر $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد، $L^1(\mu)$ با نرم L^1، یعنی، با نرم $\|f\|_1 = \int|f|d\mu$ یک فضای باناخ است. (توجه کنید که اگر به $L^1(\mu)$ صرفاً به چشم مجموعه ای شامل توابع نگاه کنیم، آنگاه $\|\cdot\|_1$ فضای یک نیم نرم است، اما اگر توابعی را که تقریباً همه جا برابرند یکی بگیریم یک نرم می شود.) کامل بودن $L^1(\mu)$ از قضایای ۲.۲۵ و ۵.۱ نتیجه می‌شود. در واقع اگر $\sum_1^\infty\|f_n\|_1 < \infty$، آنگاه از قضیهٔ ۲.۲۵ می‌شود که $f = \sum_1^\infty f_n$ تقریباً همه‌جا وجود دارد و وقتی $N \to \infty$،

$$\int\Big|f - \sum_1^N f_n\Big|d\mu \le \sum_{N+1}^\infty \overbrace{\int|f_n|d\mu}^{\|f_n\|_1} \to 0.$$

در تمرین‌های ۸ الی ۱۱ و بخش‌های بعدی مثال‌های بیشتری یافت می‌شوند. اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند، $X \times Y$ به هنگام تجهیز به **نرم حاصلضربی** زیر به یک فضای برداری نرم‌دار تبدیل می‌شود:

$$\|(x,y)\| = \max(\|x\|,\|y\|).$$

(البته، در اینجا $\|x\|$ به نرم روی X اشاره دارد درحالی‌که $\|y\|$ نشان دهندهٔ نرم روی Y است) برخی اوقات نرم‌هایی هم‌ارز با همین نرم به‌طور جایگزین به‌کار برده می‌شوند، مثلاً $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ یا $\|(x,y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

یک ساختار مربوط به بحث فضاهای خارج قسمتی است. اگر $\mathcal{M}$ یک زیرفضای برداری فضای برداری X باشد، $\mathcal{M}$ یک رابطهٔ هم ارزی روی X به صورت زیر تعریف می کند: $x \sim y$ اگر و تنها اگر $x - y \in \mathcal{M}$. ردهٔ هم‌ارزی شامل $x \in X$ با $x + \mathcal{M}$ و مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی، یا **فضای خارج قسمتی** با $X/\mathcal{M}$ نشان داده می‌شود. $X/\mathcal{M}$ با اعمال برداری $(x + \mathcal{M}) + (y + \mathcal{M}) = (x + y) + \mathcal{M}$ و $\lambda(x + \mathcal{M}) = (\lambda x) + \mathcal{M}$ یک فضای برداری است. اگر X یک فضای برداری نرم‌دار و $\mathcal{M}$ بسته باشد، $X/\mathcal{M}$ از X یک نرم موسوم به **نرم خارج قسمتی** به ارث می‌برد، این نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x + \mathcal{M}\| = \inf_{y\in\mathcal{M}}\|x + y\|.$$

برای مباحث جزئی‌تر، تمرین ۱۲ را ببینید.

نگاشتی خطی مانند $T : X \to Y$ بین دو فضای برداری نرم‌دار ، **کراندار** نامیده می‌شود هرگاه ثابتی مانند $C \ge 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$،

$$\|Tx\| \le C\|x\|.$$

این کرانداری با مفهوم کرانداریِ توابع روی یک مجموعه تفاوت دارد. با تعریف کرانداری توابع، T وقتی کراندار است که به ازای هر x، $\|Tx\| \le C$. به وضوح هیچ نگاشت خطی غیر صفر نمی‌تواند در شرط اخیر صدق کند، زیرا به ازای همهٔ اسکالرهای λ، $T(\lambda x) = \lambda Tx$. تعریفِ جدید به این معنا است که T روی زیرمجموعه‌های کراندار X کراندار است.

الف) T پیوسته است.
ب) T در o پیوسته است.
ج) T کراندار است.

برهان. بدیهی است که (الف) گزارهٔ (ب) را ایجاب می‌کند. چنانچه T در $o \in X$ پیوسته باشد، یک همسایگی مانند U از o وجود دارد به‌طوری‌که $T(U) \subset \{y \in Y : \|y\| \leq ۱\}$ و U باید شامل گویی حول o مانند
$$B = \{x \in X : \|x\| \leq \delta\}$$
باشد؛ بنابر این وقتی $\|x\| \leq \delta$، $\|Tx\| < ۱$. چون T با ضرب اسکالر جابه‌جا می‌شود، معلوم می‌شود که هرگاه $\|x\| \leq a$، $\|Tx\| \leq a\delta^{-۱}$، یعنی، $\|Tx\| \leq \delta^{-۱}\|x\|$. این نشان می‌دهد که (ب) گزارهٔ (ج) را ایجاب می‌کند. بالاخره، اگر به ازای هر x، $\|Tx\| \leq C\|x\|$، آنگاه وقتی $\|x_۱ - x_۲\| \leq C^{-۱}\varepsilon$، $\|Tx_۱ - Tx_۲\| = \|T(x_۱ - x_۲)\| \leq \varepsilon$ و لذا T پیوسته است. ■

اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند، فضای همهٔ نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم. به آسانی دیده می‌شود که $L(X,Y)$ یک فضای برداری است و نگاشت $T \to \|T\|$ یک نرم موسوم به **نرم عملگر** روی $L(X,Y)$ است که در آن $\|T\|$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود (تمرین۲):
$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq o\right\} \quad (۱.۵)\\ &= \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ به ازای هر } x\}\end{aligned}$$
همیشه فرض می‌کنیم که $L(X,Y)$ به همین نرم مجهز است مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

۵ . ۴ گزاره. اگر Y کامل باشد، آنگاه $L(X,Y)$ نیز کامل است.

برهان. فرض‌کنیم $\{T_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $L(X,Y)$ باشد. اگر $x \in X$، آنگاه $\{T_nx\}$ یک دنبالهٔ کشی در Y است زیرا $\|T_nx - T_mx\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$. $T : X \to Y$ را با $Tx = \lim T_nx$ تعریف می‌کنیم. بررسی اینکه $T \in L(X,Y)$ و $\|T_n - T\| \to ۰$ به خواننده واگذار می‌شود (در واقع $\|T\| = \lim\|T_n\|$) (تمرین۳). ■

نامساوی زیر، خاصیت مفید دیگری از نرم عملگر است. اگر $T \in L(X,Y)$ و $S \in L(Y,Z)$، آنگاه
$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

کروزاجها
لذا $ST \in L(X,Z)$ و $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. به‌ویژه $L(X,X)$ یک جبر است. در حقیقت اگر X کامل باشد، $L(X,Y)$ یک **جبر باناخ** است : یعنی، فضای باناخی است که یک جبر نیز می‌باشد به‌طوری‌که نرم حاصلضرب، حداکثر حاصلضرب نرم‌ها شود. (مثال دیگری از جبر باناخ $BC(X)$ با ضرب نقطه به نقطه و نرم یکنواخت است که در آن X یک فضای توپولوژیک است).
اگر $T \in L(X,Y)$، آنگاه T **وارون‌پذیر** یا یک **ایزومورفیسم** نامیده می‌شود هرگاه T دوسویی و T^{-1} کراندار باشد (به عبارت دیگر، به ازای ثابتی چون $C > 0$، $\|Tx\| \geq C\|x\|$)، T یک **ایزومتری** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\|Tx\| = \|x\|$. هر ایزومتری یک به یک است اما لزوماً پوشا نیست؛ گرچه یک ایزومورفیسم بروی بردش است.

تمرین‌ها

۱) اگر X یک فضای برداری نرم‌دار روی $K\ (= \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ باشد، آنگاه جمع برداری و ضرب اسکالر به عنوان توابعی از $X \times X$ و $K \times X$ به X پیوسته‌اند. به‌علاوه، تابع نرم از X به $[0,\infty)$ پیوسته است؛ در واقع

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|.$$

۲) $L(X,Y)$ یک فضای برداری است و $\|\cdot\|$ که با (۵.۳) تعریف شد یک نرم روی $L(X,Y)$ است. به ویژه، سه عبارت سمت راست (۵.۳) همواره با هم برابرند.

۳) برهان گزارهٔ (۵.۴) را کامل کنید.

٤) اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشد، نگاشت $(T,x) \mapsto Tx$ از $L(X,Y) \times X$ به Y پیوسته است. (یعنی، اگر $T_n \to T$ و $x_n \to x$، آنگاه $T_n x_n \to Tx$).

۵) اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، بستار هر زیرفضای X یک زیرفضا است.

٦) فرض‌کنید X یک فضای برداری با بعدی متناهی باشد. $e_1, \dots, e_n$ را پایه ای برای X بینگارید و تعریف‌کنید $\|\sum_1^n a_j e_j\|_1 = \sum_1^n |a_j|$. نشان دهید که:

الف) $\|\cdot\|_1$ یک نرم روی X است.

ب) نگاشت $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_1^n a_j e_j$ از K^n با توپولوژی اقلیدسی معمولی به X با توپولوژی تعریف شده با $\|\cdot\|_1$ پیوسته است.

ج) $\{x \in X : \|\cdot\|_1 = 1\}$ نسبت به توپولوژی تعریف شده با $\|\cdot\|_1$ فشرده است.
د) همهٔ نرم‌ها روی X هم‌ارز هستند. (هر نرمی را با $\|\cdot\|_1$ مقایسه کنید.)

۷) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. نشان دهید که:
الف) اگر $T \in L(X,X)$ و $\|I - T\| < 1$ که در آن I عملگر همانی است، آنگاه T وارون‌پذیر است؛ در حقیقت، سری $\sum_0^\infty (I-T)^n$ در $L(X,X)$ به T^{-1} همگرا است.
ب) اگر $T \in L(X,X)$ وارون‌پذیر باشد و $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ ، آنگاه S وارون‌پذیر است. بنابر این مجموعهٔ عملگرهای وارون‌پذیر در $L(X,X)$ باز است.

۸) فرض کنید $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $M(X)$ فضای اندازه‌های مختلط روی $(X,\mathcal{M})$ باشد. در این صورت $\|\mu\| = |\mu|(X)$ یک نرم روی $M(X)$ است که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند. (قضیهٔ ۵.۱ را به‌کار بندید.)

۹) فرض کنید $C^k([0,1])$ فضای توابع روی $[0,1]$ باشد که مشتقات آنها با احتساب مشتقات یک طرفه در نقاط انتهایی تا مرتبهٔ kام روی $[0,1]$ پیوسته هستند. نشان دهید که:
الف) اگر $f \in C([0,1])$، آنگاه $f \in C^k([0,1])$ اگر و تنها اگر f، k بار بر $(0,1)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $j \leq k$، $\lim_{x \searrow 0} f^{(j)}(x)$ و $\lim_{x \nearrow 1} f^{(j)}(x)$ وجود داشته باشند. (قضیه مقدار میانگین کمک می‌کند).
ب) $\|f\| = \sum_0^k \|f^{(j)}\|_u$ یک نرم روی $C^k([0,1])$ است که $C^k([0,1])$ را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند. (استقرا روی k را به‌کار برید. نکتهٔ اصلی این است که اگر $\{f_n\} \subset C^1([0,1])$، $f_n \to f$ به طور یکنواخت و $f'_n \to g$ به‌طور یکنواخت، آنگاه $f \in C^1([0,1])$ و $f' = g$. ساده‌ترین راه اثبات این مطلب، این است که نشان دهیم $f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt$).

۱۰) فرض کنید $L_k^1([0,1])$ فضای همهٔ توابع $f \in C^{k-1}([0,1])$ باشد به طوری که $f^{(k-1)}$ بر $[0,1]$ مطلقاً پیوسته است. (و در نتیجه $f^{(k)}$ ت. ه وجود دارد و در $L^1([0,1])$ است). در این صورت $\|f\| = \sum_0^k \int_0^1 |f^{(j)}(x)|dx$ یک نرم روی $L_k^1([0,1])$ است که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند (تمرین ۹ و راهنمایی آن را ببینید.)

۱۱) فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $\Lambda_\alpha([0,1])$ فضای توابع پیوستهٔ هولدری با نمای α بر $[0,1]$ باشد. یعنی، $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ اگر و تنها اگر $\|f\|_{\Lambda_\alpha} < \infty$، که درآن

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = |f(0)| + \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

نشان دهید که:

الف) $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$ یک نرم است که $\Lambda_\alpha([0,1])$ را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند.

ب) فرض کنید $\lambda_\alpha([0,1])$ مجموعهٔ همهٔ اعضایی چون $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ باشد به طوری که به ازای هر $y \in [0,1]$ وقتی $x \to y$، $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \to 0$. اگر $\alpha < 1$، $\lambda_\alpha([0,1])$ یک زیرفضای بسته با بعد نامتناهی از $\Lambda_\alpha([0,1])$ است. اگر $\alpha = 1$، $\lambda_\alpha([0,1])$ فقط شامل توابع ثابت است.

۱۲) فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار و $\mathcal{M}$ زیرفضای سره‌ای از X باشد. نشان دهید که:

الف) $\|x+\mathcal{M}\| = \inf\{\|x+y\| : y \in \mathcal{M}\}$ یک نرم روی $X/\mathcal{M}$ است؛

ب) به ازای هر $\varepsilon > 0$ عضوی چون $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|x\| = 1$ و $\|x+\mathcal{M}\| \geq 1-\varepsilon$؛

ج) نگاشت تصویر $\pi(x) = x + \mathcal{M}$ از X به $X/\mathcal{M}$ دارای نرم ۱ است؛

د) اگر X کامل باشد، $X/\mathcal{M}$ نیز کامل است. (قضیهٔ ۵۰۱ را به‌کار برید).

ه) توپولوژی تعریف شده با نرم خارج قسمتی همان توپولوژی خارج قسمتی تعریف شده در تمرین ۲۸ از بند ۴.۲ است.

۱۳) فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نیم‌نرم روی فضای برداری X باشد، قرار دهید $\mathcal{M} = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. در این صورت $\mathcal{M}$ یک زیرفضا است و نگاشت $x + \mathcal{M} \mapsto \|x\|$ یک نرم روی $X/\mathcal{M}$ است.

۱٤) اگر X یک فضای برداری نرم‌دار و $\mathcal{M}$ زیرفضای غیر بسته‌ای از X باشد، آنگاه $\|x+\mathcal{M}\|$ که در تمرین ۱۲ تعریف شد، یک نیم‌نرم روی $X/\mathcal{M}$ است. اگر همانند تمرین ۱۳، $X/\mathcal{M}$ را به فضای پوچش تقسیم کنیم فضای خارج قسمتی حاصل به طور ایزومتریک با $X/\overline{\mathcal{M}}$ ایزومورف است. (به تمرین ۵ مراجعه کنید.)

۱۵) فرض کنید X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند و $T \in L(X,Y)$. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}.$$

نشان دهید که:

الف) $\mathcal{N}(T)$ زیرفضای بسته‌ای از X است؛

ب) عضو یکتایی چون $S \in L(X/\mathcal{N}(T),Y)$ وجود دارد به‌طوری‌که $T = S \circ \pi$ که در آن $\pi : X \to X/\mathcal{N}(T)$ نگاشت تصویر است (تمرین ۱۲ را ببینید). به‌علاوه $\|S\| = \|T\|$.

۱۶) هدف از این تمرین تشریح یک نظریهٔ انتگرال‌گیری برای توابع با مقادیر واقع در یک فضای باناخ جدایی‌پذیر است. فرض‌کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه، Y یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و L_Y فضای همهٔ نگاشت‌های $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_Y)$-اندازه‌پذیر از X به Y باشد و F_Y مجموعهٔ نگاشت‌هایی چون $f : X \to Y$ باشد که به شکل $f(x) = \sum_1^n \chi_{E_j}(x) y_j$ هستند که در آن $n \in \mathbb{N}$، $y_j \in Y$، $E_j \in \mathcal{M}$ و $\mu(E_j) < \infty$. چنانچه $f \in L_Y$، به دلیل پیوستگی $y \mapsto \|y\|$ (تمرین ۱)، نگاشتی $x \mapsto \|f(x)\|$ $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-اندازه‌پذیر است و تعریف می‌کنیم $\|f\|_1 = \int \|f(x)\| d\mu(x)$. بالاخره، فرض می‌کنیم $L_Y^1 = \{f \in L_Y : \|f\|_1 < \infty\}$. نشان دهید که:

الف) L_Y یک فضای برداری است، F_Y و L_Y^1 زیرفضاهایی از آن هستند، $F_Y \subset L_Y^1$، و $\|\cdot\|_1$ یک نیم نرم روی L_Y^1 است که اگر توابع تقریباً همه جا برابر را یکی بگیریم به یک نرم تبدیل می‌شود؛

ب) فرض‌کنیم $\{y_n\}^\infty$ مجموعهٔ چگالی شمارش‌پذیر در Y است. $\varepsilon > 0$ مفروض است. قرار می‌دهیم:

$$B_n^\varepsilon = \{y \in Y : \|y - y_n\| < \varepsilon \|y_n\|\}.$$

در این صورت $\bigcup_1^\infty B_n^\varepsilon \supset Y \setminus \{0\}$؛

ج) اگر $f \in L_Y^1$، دنباله‌ای مانند $\{h_n\} \subset F_Y$ وجود دارد که $h_n \to f$ ت.ه و $\|h_n - f\|_1 \to 0$. (با نامگذاری قسمت (ب)، فرض‌کنید $A_{nj} = B_n^{\frac{1}{j}} \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} B_m^{\frac{1}{j}}$ و $E_{nj} = f^{-1}(A_{nj})$ و $g_j = \sum_{n=1}^\infty y_n \chi_{E_{nj}}$ را در نظر بگیرید.)

د) نگاشت خطی یکتایی مانند $\int : L_Y^1 \to Y$ چنان وجود دارد که به ازای هر $y \in Y$ و هر $E \in \mathcal{M}$، $(\mu(E) < \infty)$ $\int y \chi_E = \mu(E) y$ و $\|\int f\| \le \|f\|_1$؛

ه) قضیهٔ همگرایی مغلوب: اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در L_Y^1 باشد به‌طوری‌که $f_n \to f$ ت.ه و عضوی چون $g \in L^1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر n و به ازای تقریباً همهٔ xها، $\|f_n(x)\| \le g(x)$، آنگاه $\int f_n \to \int f$؛

و) اگر Z یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد، $T \in L(Y, Z)$، و $f \in L_Y^1$، آنگاه $T \circ f \in L_Z^1$ و $\int T \circ f = T(\int f)$.

۵.۲ تابعک‌های خطی

فرض‌کنیم X یک فضای برداری روی K باشد که در آن $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$. هر نگاشت خطی از X به K یک تابعک خطی روی X نامیده می‌شود. اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، فضای $L(X, K)$ متشکل از تابعک‌های خطی کراندار روی X، فضای دوگان X نامیده شده و با X^* نشان داده می‌شود. طبق گزارهٔ ۵.۴، X^* با نرم عملگری یک فضای باناخ است.

اگر X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ نیز می‌باشد و می‌توانیم هم تابعک‌های خطی حقیقی $f : X \to \mathbb{R}$ و هم تابعک‌های خطی مختلط $f : X \to \mathbb{C}$ را درنظر بگیریم، رابطهٔ بین این دو به‌صورت زیر است:

۵.۱ گزاره. فرض‌کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. اگر f یک تابعک خطی مختلط روی X باشد و $u = \operatorname{Re} f$، آنگاه u یک تابعک خطی حقیقی است و به ازای هر $x \in X$، $f(x) = u(x) - iu(ix)$. به‌عکس، اگر u یک تابعک خطی حقیقی روی X باشد و $f : X \to \mathbb{R}$ به‌صورت $f(x) = u(x) - iu(ix)$ تعریف شود، آنگاه f خطی مختلط است. در این حالت، اگر X نرم‌دار باشد، داریم: $\|f\| = \|u\|$.

برهان. اگر f خطی مختلط باشد، و $u = \operatorname{Re} f$، آنگاه به وضوح u خطی حقیقی است و

$$\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re}[if(x)] = -u(ix)$$

لذا $f(x) = u(x) - iu(ix)$. از سوی دیگر، اگر u خطی حقیقی باشد و $f(x) = u(x) - iu(ix)$، آنگاه به وضوح f روی $\mathbb{R}$ خطی است و $f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x)$، لذا f روی $\mathbb{C}$ نیز خطی است. بالاخره، اگر X نرم‌دار باشد، چون $|u(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)|$ داریم $\|u\| \leq \|f\|$. ازطرف دیگر، اگر $f(x) \neq 0$، قرار می‌دهیم $\alpha = \overline{\operatorname{sgn} f(x)}$. در این صورت $|f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = u(\alpha x)$ (زیرا $f(\alpha x)$ حقیقی است)، لذا $|f(x)| \leq \|u\|\|\alpha x\| = \|u\|\|x\|$ و از اینجا معلوم می‌شود که $\|f\| \leq \|u\|$. ■

وجود تابعک‌های خطی کراندار غیرصفر روی یک فضای برداری نرم‌دار دل‌خواه واضح نیست. در واقع وجود مفرط چنین تابعک‌هایی یکی از قضایای بنیادی آنالیز تابعی است. هم‌اکنون این حکم را به شکلی کلی‌تر خواهیم آورد که دارای کاربردهای مهم دیگری است. اگر X یک فضای برداری حقیقی باشد، یک **تابعک زیرخطی** روی X نگاشتی چون $p : X \to \mathbb{R}$ است به‌طوری‌که به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \geq 0$،

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

به عنوان مثال، هر نیم‌نرم یک تابعک زیرخطی است.

۵.۶ قضیهٔ هان ـ باناخ. فرض‌کنیم X یک فضای برداری حقیقی، p یک نگاشت زیرخطی روی X، $\mathcal{M}$ زیرفضایی از X و f یک تابعک خطی روی $\mathcal{M}$ باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathcal{M}$، $f(x) \leq p(x)$ در این صورت یک تابعک خطی مانند F روی X وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $F(x) \leq p(x)$ و $F\big|_{\mathcal{M}} = f$.

برهان. با نشان دادن این مطلب اثبات را شروع می‌کنیم که اگر $x \in X \setminus \mathcal{M}$، آنگاه f را به یک تابعک خطی مانند g روی $\mathcal{M} + \mathbb{R}x$ می‌توان توسیع داد که برای هر y در $g(y) \leq p(y)$ صدق کند. اگر $y_1, y_2 \in \mathcal{M}$، داریم:

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - x) + p(x + y_2),$$

یا

$$f(y_1) - p(y_1 - x) \leq p(x + y_2) - f(y_2).$$

بنابراین

$$\sup\{f(y) - p(y - x) : y \in \mathcal{M}\} \leq \inf\{p(x + y) - f(y) : y \in \mathcal{M}\}.$$

فرض کنیم α عددی باشد که در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\sup\{f(y) - p(y - x) : y \in \mathcal{M}\} \leq \alpha \leq \inf\{p(x + y) - f(y) : y \in \mathcal{M}\},$$

و $g : \mathcal{M} + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ را با $g(y + \lambda x) = f(y) + \lambda\alpha$ تعریف کنید. در این صورت به وضوح g خطی است و $g|_{\mathcal{M}} = f$. لذا به ازای هر $y \in \mathcal{M}$، $g(y) \leq p(y)$. به‌علاوه، اگر $\lambda > 0$ و $y \in \mathcal{M}$، آنگاه

$$g(y + \lambda x) = \lambda[f(\frac{y}{\lambda}) + \alpha] \leq \lambda[f(\frac{y}{\lambda}) + p(x + (\frac{y}{\lambda})) - f(\frac{y}{\lambda})] = p(y + \lambda x),$$

درحالی‌که اگر $\lambda = -\mu < 0$، آنگاه

$$g(y + \lambda x) = \mu[f(\frac{y}{\mu}) - \alpha] \leq \mu[f(\frac{y}{\mu}) - f(\frac{y}{\mu}) + p((\frac{y}{\mu}) - x)] = p(y + \lambda x).$$

بنابر این به ازای هر $z \in \mathcal{M} + \mathbb{R}x$، $g(z) \leq p(z)$.

ظاهراً همین استدلال را می‌توان برای هر توسیع خطی F از f که روی دامنه‌اش در $F \leq p$ صدق می‌کند به‌کار برد و این نشان می‌دهد که دامنهٔ یک توسیع خطی ماکسیمال صادق در $F \leq p$ باید کل فضای X باشد. اما خانوادهٔ $\mathcal{F}$ متشکل از همهٔ توسیع‌های خطی F از f که در $F \leq p$ صدق می‌کنند با رابطهٔ شمول جزئاً مرتب می‌شود (نگاشت‌ها از فضاهای X به $\mathbb{R}$ به‌عنوان زیرمجموعه‌های از $X \times \mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شوند). چون اجتماع هر خانوادهٔ صعودی از زیرفضاهای X بازهم یک زیرفضا است، به آسانی دیده می‌شود که اجتماع هر زیرخانوادهٔ مرتب خطی $\mathcal{F}$ در $\mathcal{F}$ واقع است. بنابراین فراخوانی لم زورن برهان را کامل می‌کند.■

اگر p یک نیم نرم و $f : X \to \mathbb{R}$ خطی باشد، نامساوی $f \leq p$ با نامساوی $|f| \leq p$ هم‌ارز است، زیرا $|f(x)| = \pm f(x) = f(\pm x)$ و $p(x) = p(-x)$. با این توضیح، قضیهٔ هان ـ باناخ برای تابعک‌های خطی مختلط نیز به‌کار می‌رود:

۵.۷ قضیهٔ هان ـ باناخ مختلط. فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط، p یک نیم روی X، $\mathcal{M}$ زیرفضایی از X و f یک تابعک خطی مختلط روی $\mathcal{M}$ باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in \mathcal{M}$، $|f(x)| \leq p(x)$. در این صورت یک تابعک خطی مختلط مانند F روی X وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $|F(x)| \leq p(x)$ و $F|_{\mathcal{M}} = f$.

برهان. فرض می‌کنیم $u = \mathrm{Re} f$. بنابر قضیهٔ ۵.۶ یک توسیع خطی حقیقی مانند U از u به X وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $|U(x)| \leq p(x)$. همانند گزارهٔ ۵.۵ فرض می کنیم $F(x) = U(x) - iU(ix)$. دراین صورت F یک توسیع خطی مختلط f است و مانند آنچه در برهان گزارهٔ ۵.۵ دیدیم اگر $\alpha = \overline{\mathrm{sgn}\, F(x)}$، آنگاه

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x). \blacksquare$$

از اینجا تا بند ۵.۵ همهٔ حکم‌ها درمورد فضاهای برداری حقیقی یا مختلط به‌طور یکسان به کار می‌رود، اما برای تعاریف هم که شده فرض خواهیم کرد که میدان اسکالر $\mathbb{C}$ است. کاربردهای اساسی قضیهٔ هان ـ باناخ برای فضاهای برداری نرم‌دار در قضیهٔ زیر خلاصه می‌شود.

۵.۸ قضیه. فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این صورت:

الف) اگر $\mathcal{M}$ زیرفضای بسته‌ای از X باشد و $x \in X \setminus \mathcal{M}$، آنگاه عضوی چون $f \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x) \neq 0$، $f|_{\mathcal{M}} = 0$. در واقع، اگر $\delta = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$، آنگاه f را می توان طوری گرفت که در $\|f\| = 1$ و $f(x) = \delta$ صدق کند؛

ب) اگر $x \neq 0$، $x \in X$، آنگاه عضوی چون $f \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|f\| = 1$ و $f(x) = \|x\|$؛

ج) تابعک‌های خطی کراندار روی X، نقاط را جدا می‌کنند؛

د) اگر $x \in X$، $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ را با $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $x \mapsto \hat{x}$ یک ایزومتری خطی از X بتوی X^{**} است (X^{**} دوگان X^* است).

برهان. برای اثبات (الف)، f را روی $\mathcal{M} + \mathbb{C}x$ به‌صورت $f(y + \lambda x) = \lambda\delta$ تعریف می‌کنیم (که در آن $y \in \mathcal{M}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$). در این‌صورت $f(x) = \delta$، $f|_{\mathcal{M}} = 0$ و برای $\lambda \neq 0$،

$$|f(y + \lambda x)| |\lambda| \delta \leq |\lambda| \|\lambda^{-1} y + x\| = \|y + \lambda x\|.$$

بنابر این قضیهٔ هان ـ باناخ را با $p(x) = \|x\|$ و جایگزینی $\mathcal{M} + \mathbb{C}x$ به‌جای $\mathcal{M}$ می‌توان به‌کار برد. (ب) حالت خاص (الف) با $\mathcal{M} = \{0\}$ است و بلافاصله (ج) نتیجه می‌شود: چنانچه $x \neq y$، عضوی چون $f \in X^*$ وجود دارد که $f(x - y) \neq 0$، یعنی $f(x) \neq f(y)$. اما درمورد (د)، به وضوح $\hat{x}$ یک تابعک خطی روی X^* است و نگاشت

$x \mapsto \hat{x}$ خطی است. به‌علاوه، $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \le \|f\|\|x\|$، لذا $\|\hat{x}\| \le \|x\|$. از طرف دیگر، (ب) ایجاب می کند که $\|\hat{x}\| \ge \|x\|$. ■

با نمادگذاری قسمت (د) از قضیهٔ ۵.۸، فرض‌کنید $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$. چون X^{**} همواره کامل است پس بستار $\overline{\hat{X}}$ از $\hat{X}$ در X یک فضای باناخ است و نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ فضای X را به صورت زیرفضایی چگال در $\overline{\hat{X}}$ می‌نشاند. $\overline{\hat{X}}$ کامل شدهٔ X نامیده می‌شود. به‌ویژه، اگر خودِ X یک فضای باناخ باشد، آنگاه $\overline{\hat{X}} = X$.

اگر X با بعد متناهی باشد، آنگاه $\hat{X} = X^{**}$، زیرا بعدهای این فضاها برابر هستند. برای فضاهای باناخ با بعد نامتناهی ممکن است تساوی $\hat{X} = X^{**}$ رخ دهد و ممکن است رخ ندهد؛ اگر تساوی رخ دهد، X بازتابی نامیده می‌شود. مثال‌هایی از فضاهای باناخ که تاکنون مورد آزمایش قرار داده‌ایم بازتابی نیستند. به‌جز در حالت‌های بدیهی که فضاها با بعد متناهی بودند. این حکم را در برخی حالات ثابت خواهیم کرد و در بخش‌های بعد مثال‌هایی از فضاهای باناخ بازتابی ارائه خواهیم داد. معمولاً $\hat{x}$ را با x یکی گرفته و به این ترتیب X^{**} را به‌عنوان زیرفضایی از X خواهیم گرفت؛ در این صورت بازتابی بودن به معنی تساوی $X = X^{**}$ است.

تمرین‌ها

۱۷) یک تابعک خطی مانند f روی یک فضای برداری نرم‌دار مانند X کراندار است اگر و تنها اگر $f^{-1}(\{0\})$ بسته باشد. (قسمت (ب) از تمرین ۱۲ را به‌کار برید.)

۱۸) فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. نشان دهید که:

الف) اگر $\mathcal{M}$ زیرفضای بسته‌ای از X باشد و $x \in X \setminus \mathcal{M}$، آنگاه $\mathcal{M} + \mathbb{C}x$ بسته است. (قسمت (الف) از قضیهٔ ۵.۸ را به‌کار برید.)

ب) هر زیرفضای با بعد متناهی از X بسته است.

۱۹) فرض‌کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار با بعد نامتناهی باشد. نشان دهید که:

الف) دنباله‌ای مانند $\{x_j\}$ در X وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر j، $\|x_j\| = 1$ و برای $j \neq k$، $\|x_j - x_k\| \ge \frac{1}{2}$. (به‌کارگیری قسمت (ب) از تمرین ۱۲ و تمرین ۱۸، x_j را به‌طور استقرایی بسازید.)

ب) فشردهٔ موضعی نیست.

۲۰) اگر $\mathcal{M}$ زیرفضایی با بعد متناهی از یک فضای برداری مانند X باشد، آنگاه زیرفضای بسته‌ای مانند $\mathcal{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{o\}$ و $\mathcal{M} + \mathcal{N} = X$.

۲۱) اگر X و Y دو فضای نرم دار باشند، $\alpha : X^* \times Y^* \to (X \times Y)^*$ را با $\alpha(f,g)(x,y) = f(x) + f(y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت α ایزومورفیسمی است که اگر نرم $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ روی $X \times Y$، نرم عملگر متناظر روی $(X \times Y)^*$ و نرم $\|(f,g)\| = \|f\| + \|g\|$ روی $X^* \times Y^*$ را به‌کار بریم یک ایزومتری است.

۲۲) فرض‌کنیم X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و $T \in L(X,Y)$.

الف) $T^\dagger : Y^* \to X^*$ را با $T^\dagger f = f \circ T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $T^\dagger \in L(Y^*, X^*)$ و

$$\|T^\dagger\| = \|T\|.$$

$T^\dagger$ الحاق یا ترانهادهٔ T نامیده می‌شود.

ب) نحوهٔ ساخت (الف) را دو بار به‌کار برده و به دست می‌آوریم $T^{\dagger\dagger} \in L(X^{**}, Y^{**})$. اگر X و Y را با تصاویر طبیعی آنها، یعنی $\hat{X}$ و $\hat{Y}$ در X^{**} و Y^{**} یکی بگیریم، آنگاه $T^{\dagger\dagger}|_X = T$.

ج) $T^\dagger$ یک به یک اگر و تنها اگر برد T در Y چگال باشد.

د) اگر برد $T^\dagger$ در X^* چگال باشد، آنگاه T یک به یک است؛ اگر X بازتابی باشد عکس مطلب نیز درست است.

۲۳) فرض‌کنید X یک فضای باناخ باشد. $\mathcal{M}$ را زیرفضای بسته‌ای از X و $\mathcal{N}$ را زیرفضای بسته‌ای از X^* بگیرید و فرض کنید $\mathcal{M}^\circ = \{f \in X^* : f|_{\mathcal{M}} = o\}$ و

$$\mathcal{N}^\perp = \{x \in X : f(x) = o \text{ ،} f \in \mathcal{N} \text{ به‌ازای هر } \}.$$

(بنابر این، اگر X را با تصویرش در X^{**} یکی بگیریم، آنگاه $\mathcal{N}^\perp = \mathcal{N}^\circ \cap X$). نشان دهید که

الف) $\mathcal{M}^\circ$ و $\mathcal{N}^\perp$ به‌ترتیب زیرفضاهای بسته‌ای از X^* و X هستند.

ب) $(\mathcal{M}^\circ)^\perp = \mathcal{M}$ و $(\mathcal{N}^\perp)^\circ \supset \mathcal{N}$. چنانچه X بازتابی باشد، $(\mathcal{N}^\perp)^\circ = \mathcal{N}$.

ج) فرض‌کنید $\pi : X \to X/\mathcal{M}$ نگاشت تصویر طبیعی باشد و $\alpha : (X/\mathcal{M})^* \to X^*$ را با $\alpha(f) = f \circ \pi$ تعریف‌کنید. در این صورت α از $(X/\mathcal{M})^*$ بروی $\mathcal{M}^\circ$ یک ایزومورفیسم ایزومتری است که در آن نرم $X/\mathcal{M}$ نرم خارج قسمتی است.

د) $\beta : X^* \to \mathcal{M}^*$ را با $\beta(f) = f|_{\mathcal{M}}$ تعریف می‌کنیم؛ در این صورت β نگاشتی چون $\overline{\beta} : X^*/\mathcal{M}^\circ \to \mathcal{M}^*$ همانند تمرین ۱۵ القاء می‌کند و $\overline{\beta}$ یک ایزومورفیسم ایزومتری است.

۲۴) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد.
الف) فرض کنید $\hat{X}$ و $(X^*)^\wedge$ تصاویر طبیعی X و X^* در X^{**} و X^{***} باشند
و $\hat{X}^\circ = \{F \in X^{***} : F|_{\hat{X}} = 0\}$. در این صورت $\{0\} = (X^*)^\wedge \cap \hat{X}^\circ$ و $(X^*)^\wedge + \hat{X}^\circ = X^{***}$.
ب) X بازتابی است اگر و تنها اگر X^* بازتابی باشد.

۲۵) اگر X یک فضای باناخ و X^* جدایی‌پذیر باشد، آنگاه X جدایی‌پذیر است. (فرض کنید $\{f_n\}_1^\infty$ زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری از X^* باشد. به ازای هر n، $x_n \in X$ را طوری انتخاب کنید که $\|x_n\| = 1$ و $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$. در این صورت ترکیبات خطی $\{x_n\}_1^\infty$ در X چگالند.)
تبصره: جدایی‌پذیری X جدایی‌پذیری X^* را ایجاب نمی‌کند.

۲۶) فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی و P زیرمجموعه‌ای از X باشد به‌طوری که (i): اگر $x, y \in P$، آنگاه $x + y \in P$ و (ii): اگر $x \in P$ و $\lambda \geq 0$، آنگاه $\lambda x \in P$ و (iii): اگر $x \in P$ و $-x \in P$، آنگاه $x = 0$.
(مثال: اگر X فضایی از توابع با مقدار حقیقی باشد، P را می‌توان مجموعهٔ توابع نامنفی در X گرفت.)
الف) رابطهٔ $\leq$ که با « $x \leq y$ اگر و تنها اگر $y - x \in P$ » تعریف می‌شود یک ترتیب جزئی روی X است.
ب) (قضیهٔ توسیع کرین) فرض کنیم $\mathcal{M}$ زیرفضایی از X باشد به‌طوری که به ازای هر $x \in X$ عضوی چون $y \in \mathcal{M}$ وجود داشته باشد که $x \leq y$. اگر f یک تابعک خطی روی $\mathcal{M}$ باشد به‌طوری که برای هر $x \in \mathcal{M} \cap P$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$، آنگاه یک تابعک خطی مانند F روی X وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $x \in P$، $F(x) \geq 0$ و $F|_{\mathcal{M}} = f$. ($p(x) = \inf\{f(y) : y \in \mathcal{M}, \quad x \leq y\}$ را درنظر بگیرید.)

۵.۳ قضیهٔ کاتگوری بئر و کاربردهای آن

در این بخش قضیهٔ مهمی در مورد فضاهای متری کامل ذکر می‌کنیم و با استفاده از آن چند حکم بنیادی در باب نگاشت‌های خطی بین فضاهای باناخ به‌دست می‌آوریم.

۵.۹ قضیهٔ کاتگوری بئر. فرض کنیم X یک فضای متری کامل باشد.
الف) اگر $\{U_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های چگال باز در X باشد، آنگاه $\bigcap_1^\infty U_n$ در X باز است.
ب) X اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال نیست.

برهان. برای قسمت (الف)، باید نشان دهیم که اگر W یک مجموعهٔ باز ناتهی در X باشد، آنگاه W مجموعهٔ $\bigcap_1^\infty U_n$ را قطع می‌کند. چون $U_1 \cap W$ باز و ناتهی است، شامل یک‌گوی مانند $B(r_0, x_0)$ است و می‌توان فرض کرد که $0 < r_0 < 1$ و به ازای هر $n > 0$، $x_n \in X$ و $r_n \in (0, \infty)$ را به‌طور استقرایی زیر انتخاب می‌کنیم: با داشتن x_j و r_j برای $j < n$ مشاهده می کنیم که $U_n \cap B(r_{n-1}, x_{n-1})$ باز و تهی است، لذا می توان x_n و r_n را چنان انتخاب کرد که $0 < r_n < 2^{-n}$ و $\overline{B(r_n, x_n)} \subset U_n \cap B(r_{n-1}, x_{n-1})$. در این صورت اگر $m, n \geq N$، می‌بینیم که $x_n, x_m \in B(r_N, x_N)$ و چون $r_n \to 0$، دنبالهٔ $\{x_n\}$ کشی است. چون X کامل است، $x = \lim x_n$ وجود دارد. از آنجا که به ازای هر $n \geq N$، $x_n \in B(r_N, x_N)$ برای همهٔ Nها داریم:

$$x \in \overline{B(r_N, x_N)} \subset U_N \cap B(r_0, x_0) \subset U_N \cap W,$$

و برهان کامل می‌شود.

اما در مورد (ب) می‌بینیم اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال در X باشد، آنگاه $\{(\overline{E_n})^c\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های چگال باز است. چون $\bigcap (\overline{E}_n)^c \neq \varnothing$، داریم $\bigcup E_n \subset \bigcup \overline{E}_n \neq X$.■

یادآوری می‌کنیم که چون نتیجه‌گیری‌های قضیهٔ کاتگوری بئر صرفاً توپولوژیکی هستند، کافی است X با یک فضای متری کامل همیومورف باشد. برای مثال، قضیهٔ فوق برای $X = (0,1)$ معتبر است، گر چه X با متر معمولی کامل نیست اما با $\mathbb{R}$ همیومورف است.

نام این قضیه از اصطلاحات بئر برای مجموعه‌ها گرفته شده است: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، در توافق با بئر، مجموعه‌ای چون $E \subset X$ **از کاتگوری اول** است هرگاه E اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال باشد؛ در غیر این صورت E **از کاتگوری دوم** است. بنابر این قضیهٔ بئر حکم می‌کند که هر فضای متری کامل در خودش از کاتگوری دوم است. مترادف توصیفی‌تر و پیشرفته‌تر «کاتگوری اول» **نحیف** است. متمم یک مجموعهٔ نحیف **پس‌مانده** نامیده می‌شود.

قضیهٔ کاتگوری بئر اغلب برای اثبات احکام وجودی مورد استفاده قرار می‌گیرد: نشان داده می‌شود که اشیایی دارای خاصیتی معین وجود دارند، این کار با نشان دادن این مطلب انجام می‌شود که مجموعهٔ اشیایی که خاصیت مورد نظر (در یک فضای متری مناسب) را دارند نحیف است. برای مثال، با این روش، می‌توان وجود توابع پیوسته‌ای را ثابت کرد که هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیستند؛ تمرین ۴۲ را ببینید.

به کاربردهای قضیهٔ کاتگوری بئر در نظریهٔ نگاشت‌های خطی برمی‌گردیم. چند اصطلاح: اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، نگاشتی چون $f : X \to Y$ **باز** نامیده می‌شود هرگاه $f(U)$ در Y باز باشد که در آن U در X باز است. این شرط مستلزم آن است که اگر X و Y دو فضای متری باشند و B یک‌گوی با مرکز $x \in X$ باشد، آنگاه $f(B)$ شامل یک‌گوی به مرکز $f(x)$ باشد. موضوع را به حالتی خاص می‌کشانیم. اگر X و Y دو فضای خطی نرم دار باشند و f خطی باشد، آنگاه f با انتقال‌ها و تجانس‌ها با هم تعویض‌پذیرند؛ از اینجا معلوم می‌شود که f باز است اگر و تنها اگر هنگامی که B یک گوی به شعاع ۱ حول o در X است $f(B)$ شامل گویی به مرکز o در Y باشد.

۵.۱۰ قضیهٔ نگاشت باز. فرض‌کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر $T \in L(X,Y)$ پوشا باشد، آنگاه T باز است.

برهان. فرض‌کنیم B_r نشاندهندهٔ گویی (باز) به شعاع r حول o در X باشد. بنابر یادآوری‌ها، کافی است نشان دهیم که $T(B_1)$ شامل یک گوی حول o در Y است. چون $X = \bigcup_1^\infty B_n$ و T پوشا است، داریم $Y = \bigcup_1^\infty T(B_n)$. اما Y کامل است و نگاشت $y \mapsto ny$ یک همیومورفیسم از Y است که $T(B_1)$ را به $T(B_n)$ می‌نگارد، لذا قضیهٔ بئر ایجاب می‌کند که $T(B_1)$ نتواند هیچ جا چگال باشد. یعنی $y_0 \in Y$ و $r > 0$ چنان وجود دارند که گوی $B(4r, y_0)$ در $\overline{T(B_1)}$ مشمول است. $y_1 = Tx_1 \in T(B_1)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|y_1 - y_0\| < 2r$؛ در این صورت

$$B(2r, y_1) \subset B(4r, y_0) \subset \overline{T(B_1)}$$

لذا اگر $\|y\| < 2r$،

$$y = -Tx_1 + (y + y_1) \in \overline{T(-x_1 + B_1)} \subset \overline{T(B_2)}.$$

با تقسیم دو طرف بر ۲، نتیجه می‌گیریم که عددی چون $r > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $\|y\| < r$، آنگاه $y \in \overline{T(B_1)}$. اگر در عبارت اخیر بتوانیم $\overline{T(B_1)}$ را با $T(B_1)$ جایگزین کنیم برهان کامل خواهد بود (یحتمل با تقلیل همزمان r)؛ اکنون به این کار می‌پردازیم. از آنجا که T با تجانس‌ها تعویض‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم اگر $\|y\| < r \cdot 2^{-n}$، آنگاه $y \in \overline{T(B_{2^{-n}})}$. فرض می‌کنیم $\|y\| < \frac{r}{2}$؛ می‌توانیم $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}$ را چنان بیابیم که $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$ و با روند استقرایی $x_n \in B_{2^{-n}}$ را چنان می‌یابیم که $\left\|y - \sum_1^n Tx_j\right\| < r \cdot 2^{-n-1}$. چون X کامل است، بنابر قضیهٔ ۵.۱، سری $\sum_1^\infty x_n$ به عضوی مثل x همگرا است. اما در این صورت $\|x\| < \sum_1^\infty 2^{-n} = 1$ و $Tx = y$. به عبارت دیگر، $T(B_1)$ شامل همهٔ yهایی است که $\|y\| < \frac{r}{2}$، بنابر این به حکم رسیده‌ایم. ■

۵.۱۱ نتیجه. اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in L(X,Y)$ دوسویی باشد، آنگاه T یک ایزومورفیسم است؛ یعنی $T^{-1} \in L(Y,X)$.

برهان. چنانچه T دوسویی باشد، پیوستگی T^{-1} با باز بودن T هم‌ارز است. ■

برای حکم‌های آتی اصطلاحات بیشتری نیاز داریم. اگر X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و T نگاشتی خطی از X به Y باشد، نمودار T را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(T) = \{(x,y) \in X \times Y : y = Tx\}.$$

$\Gamma(T)$ زیرفضایی از $X \times Y$ است. (البته اگر صرفاً از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها به T و $\Gamma(T)$ بنگریم این دو را یکی خواهیم دید؛ تفاوت آن‌ها یک موضوع روانشناختی است) T را بسته گوییم هرگاه $\Gamma(T)$ زیر فضای بسته‌ای از $X \times Y$ باشد. به‌وضوح، اگر T پیوسته باشد آنگاه T بسته است و اگر $X \times Y$ کامل باشند عکس آن نیز درست است.

۵.۱۲ قضیهٔ نمودار بسته. اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی بسته باشد، آنگاه T کراندار است.

برهان. فرض‌کنیم π_1 و π_2 نگاشت‌های تصویری از $\Gamma(T)$ بروی X و Y باشند، یعنی $\pi_1(x,Tx) = x$ و $\pi_2(x,Tx) = Tx$. به‌وضوح $\pi_1 \in L(\Gamma(T),X)$ و $\pi_2 \in L(\Gamma(T),Y)$. چون X و Y کامل هستند پس $X \times Y$ نیز کامل است و در نتیجه $\Gamma(T)$ کامل است، زیرا T بسته است. نگاشت π_1 یک دوسویی از $\Gamma(T)$ به X است، لذا بنابر نتیجه ۵.۱۱ ، π_1^{-1} کراندار است. اما در این‌صورت $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ کراندار است. ■

پیوستگی یک نگاشت خطی مانند $T : X \to Y$ به این معنا است که اگر $x_n \to x$، آنگاه $Tx_n \to Tx$، حال آنکه بسته بودن به این معنا است که اگر $x_n \to x$ و $Tx_n \to y$، آنگاه $y = Tx$. بنابر این اهمیت قضیهٔ نگار بسته این است که در بررسی $Tx_n \to Tx$ وقتی $x_n \to x$، می‌توانیم فرض‌کنیم که Tx_n به چیزی همگرا است و فقط نشان دادن این مطلب لازم است که حدّ همان عضو سمت راست است. این موضوع خیلی از مشکلات را از پیش رو برمی‌دارد.

کامل بودن X و Y به‌طور ریشه‌ای در اثبات قضیهٔ نگاشت باز و نیز در اثبات قضیهٔ نگار بسته به‌کار رفته است. در واقع، اگر X یا Y غیرکامل باشند، نتیجه‌گیری‌های هر دو قضیه ممکن است نادرست باشد؛ تمرین‌های ۲۹ الی ۳۱ را ببینید.

آخرین حکم این بخش قضیه‌ای از قدرت جادویی تقریب است که در وضعیت‌های معینی اجازه می‌دهد برآورده‌های یکنواخت را از برآوردهای نقطه به نقطه نتیجه بگیریم.

۵.۱۳ اصل کرانداری یکنواخت. فرض‌کنیم X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و $\mathcal{A}$ زیرمجموعه‌ای از $L(X,Y)$ باشد.

الف) اگر به ازای هر x از زیرمجموعه‌ای غیر نحیف از X، $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$، آنگاه $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| < \infty$.

ب) اگر X یک فضای باناخ باشد و برای هر $x \in X$، $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$، آنگاه $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| < \infty$.

برهان. فرض می‌کنیم

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T\in\mathcal{A}} \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T\in\mathcal{A}} \{x \in X : \|Tx\| \leq n\}.$$

در این صورت E_n ها بسته هستند، لذا تحت فرض (الف)، یکی از E_n ها باید شامل یک گوی بسته نابدیهی مانند $\overline{B(r,x_0)}$ باشد. اما در این صورت $E_{2n} \supset \overline{B(r,0)}$ زیرا اگر $\|x\| \leq r$، آنگاه $x + x_0 \in E_n$ و در نتیجه

$$\|Tx\| \le \|T(x+x_\circ)\| + \|Tx_\circ\| \le ۲n\,.$$

به‌عبارت دیگر، اگر $T \in \mathcal{A}$ و r و $\|x\| \le r$، آنگاه $\|Tx\| \le ۲n$، لذا $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| \le \frac{۲n}{r}$. این نامساوی، قسمت (الف) را ثابت می‌کند و بنابر قضیهٔ کاتگوری بئر (ب) نتیجه می‌شود. ■

تمرین‌ها

۲۷) زیرمجموعهٔ نحیفی از $\mathbb{R}$ وجود دارد که متمم آن دارای اندازهٔ لبگ صفر است.

۲۸) اگر X به‌جای اینکه یک فضای متری کامل باشد یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده فرض شود باز هم قضیهٔ کاتگوری بئر درست باقی می‌ماند. (اثبات این مطلب مشابه با اثبات قضیهٔ کاتگوری بئر است؛ گزارهٔ ۴.۲۱ جایگزینی برای کامل بودن است.)

۲۹) فرض‌کنید $Y = L^۱(\mu)$ که در آن μ اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ است. به علاوه فرض‌کنید

$$X = \{f \in Y : \textstyle\sum_۱^\infty n|f(n)| < \infty\}$$

به نرم $L^۱$ مجهز است. نشان دهید که:

الف) X زیرفضای چگال سره‌ای از Y است؛ بنابر این X کامل نیست.

ب) $T : X \to Y$ را با $Tf(n) = nf(n)$ تعریف کنید. در این صورت T بسته است اما کراندار نیست.

ج) فرض‌کنید $S = T^{-۱}$. در این صورت $S : Y \to X$ کراندار و پوشا است اما باز نیست.

۳۰) فرض‌کنید $Y = C([\circ,۱])$ و $X = C^۱([\circ,۱])$ هر دو به نرم یکنواخت مجهز باشند. باناخ بودن در قضیه‌ی مورد نظر شرط ضروری است

الف) X کامل نیست.

ب) نگاشت $\left(\frac{d}{dx}\right) : X \to Y$ بسته است (تمرین ۹ را ببینید) اما کراندار نیست.

باناخ بودن در قضیه‌ی نگاشت باز ضروری است

۳۱) فرض‌کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $S : X \to Y$ یک نگاشت خطی غیرکراندار باشد. (برای وجود چنین نگاشت‌هایی، بند ۵.۶ را ببینید). فرض‌کنید $\Gamma(S)$ نگار S باشد که زیرفضایی از $X \times Y$ است.

الف) $\Gamma(S)$ کامل نیست.

ب) $T : X \to \Gamma(S)$ را با $Tx = (x, Sx)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت T بسته است اما کراندار نیست.

ج) $T^{-۱} : \Gamma(S) \to X$ کراندار و پوشا است اما باز نیست.

۳۲) فرض کنید $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم روی فضای برداری X باشند به‌طوری که $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$. اگر X نسبت به هردو نُرم کامل باشد، آنگاه نُرم‌ها هم‌ارزند.

۳۳) آهسته‌ترین آهنگ تحلیل رفتن جملات یک سری مطلقاً همگرا وجود ندارد؛ یعنی دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ از اعداد مثبت وجود ندارد به طوری که $\sum a_n |c_n| < \infty$ اگر و تنها اگر $\{c_n\}$ کراندار باشد. (مجموعهٔ دنباله‌های کراندار، فضای $B(\mathbb{N})$ متشکل از توابع کراندار روی $\mathbb{N}$ است و مجموعهٔ دنباله های مطلقاً جمع پذیر $L^1(\mu)$ است که در آن μ اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ است. اگر یکی از چنین $\{a_n\}$ هایی وجود داشته باشد، $T : B(\mathbb{N}) \to L^1(\mu)$ را درنظر می‌گیریم که با $Tf(n) = a_n f(n)$ تعریف می‌شود. مجموعهٔ f هایی که $f(n) = 0$ برای همه به‌جز تعدادی متناهی از آنها برقرار است در $L^1(\mu)$ چگال است اما در $B(\mathbb{N})$ چگال نیست.)

۳۴) با مراجعه به تمرین‌های ۹ و ۱۰، پیوستگی نگاشت شمول $L^1_k([0,1])$ بتوی $C^{k-1}([0,1])$ را:

الف) با استفاده از قضیهٔ نگار بسته نشان دهید.

ب) با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید. (این تمرین برای تشریح استفاده از قضیهٔ نمودار بسته به‌عنوان ابزاری برای سبب صرفه‌جویی در وقت و نوشتن آمده است.)

۳۵) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند، $T \in L(X,Y)$، $\mathcal{N}(T) = \{x : Tx = 0\}$ و $\mathcal{M}$ برد T باشد. در این صورت $X / \mathcal{N}(T)$ با $\mathcal{M}$ ایزومورف است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ بسته باشد. (تمرین ۱۵ را ببینید).

۳۶) فرض کنید X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و μ اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ باشد. به‌علاوه، فرض کنید $\{x_n\}_1^\infty$ زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری از گوی باز واحد در X باشد و $T : L^1(\mu) \to X$ را با $Tf = \sum_1^\infty f(n) x_n$ تعریف کنید.

الف) T کراندار است.

ب) T پوشا است.

ج) X با یک فضای خارج قسمتی از $L^1(\mu)$ ایزومورف است. (تمرین ۳۵ را به‌کار برید.)

۳۷) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد به‌طوری که به ازای هر $f \in Y^*$، $f \circ T \in X^*$، آنگاه T کراندار است.

۳۸) فرض‌کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $\{T_n\}$ دنباله‌ای در $L(X,Y)$ باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $\lim T_n x$ وجود داشته باشد. فرض‌کنید $Tx = \lim T_n x$؛ در این صورت $T \in L(X,Y)$.

۳۹) فرض‌کنیم X، Y و Z سه فضای باناخ باشند و $B : X \times Y \to Z$ یک نگاشت دو خطی جداگانه پیوسته باشد؛ یعنی به ازای هر $x \in X$، $B(x,\cdot) \in L(Y,Z)$ و به ازای $y \in Y$، $B(\cdot,y) \in L(X,Z)$. در این صورت B مشترکاً پیوسته است، یعنی از $X \times Y$ به Z پیوسته است. (مسئله را به اثبات این مطلب تقلیل دهید که به ازای عددی چون $C > 0$، $\|B(x,y)\| \le C\|x\|\|y\|$.)

٤٠) (اصل تراکم تکین‌ها) فرض‌کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $\{T_{jk} : j,k \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$. به‌علاوه، فرض‌کنید به ازای هر k عضوی مانند x($x \in X$) وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر k،

$$\sup\left\{\|T_{jk}x\| : j \in \mathbb{N}\right\} = \infty .$$

در این صورت xای (در واقع، مجموعهٔ پس‌مانده‌ای از xها) وجود دارد به‌طوری‌که برای هر k،

$$\sup\left\{\|T_{jk}x\| : j \in \mathbb{N}\right\} = \infty .$$

۴۱) فرض‌کنید X یک فضای برداری با بعد شمارش‌پذیر نامتناهی باشد (یعنی، هر عضو X یک ترکیب خطی متناهی از اعضای یک مجموعهٔ مستقل خطی شمارش‌پذیر نامتناهی است). هیچ نرمی روی X وجود ندارد که نسبت به آن X کامل باشد. (نرمی روی X مفروض گرفته و قسمت (ب) از تمرین ۱۸ و قضیهٔ کاتگوری بئر را به‌کار برید.)

٤۲) فرض‌کنید E_n مجموعهٔ همهٔ توابعی چون $f \in C([0,1])$ باشد که برای آن نقطه‌ای چون $x_0 \in [0,1]$، (وابسته به f) وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای $x \in [0,1]$،

$$|f(x) - f(x_0)| \le n|x - x_0| .$$

الف) E_n در $C([0,1])$ هیچ‌جا چگال است. (هر تابع حقیقی $f \in C([0,1])$ را با یک تابع خطی قطعه‌ای مانند g می‌توان به طور یکنواخت تقریب زد تعداد قطعات خطی g متناهی است و دارای شیبی مابین $2n \pm$ است. اگر $\|h - g\|_u$ به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه $h \notin E_n$).

ب) مجموعهٔ توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر در $C([0,1])$ یک مجموعهٔ پس مانده است.

۵.۴ فضاهای برداری توپولوژیک

درنظر گرفتن توپولوژی‌هایی فضاهای برداری به‌غیر از آنهایی که به‌وسیلهٔ نرم تعریف می‌شوند بسیار مفید است، تنها نیاز مبرم این است که توپولوژی نسبت به عملگرهای برداری خوشرفتار باشد. به‌طور دقیق تر، یک **فضای برداری توپولوژیک** فضایی برداری مانند X روی میدانی مانند $K(=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ است که مجهز به یک توپولوژی است به طوری که نگاشت‌های $(x,y)\to x+y$ و $(\lambda,x)\to\lambda x$ از $X\times X$ و $K\times X$ به X پیوسته اند. یک فضای برداری توپولوژیک **موضعاً محدب** نامیده می‌شود هرگاه پایه‌ای برای توپولوژی آن پایه‌ای وجود داشته باشد که فقط از مجموعه‌های محدب تشکیل شده باشد (یعنی، از مجموعه‌هایی چون A تشکیل شده باشد به‌طوری‌که اگر $x,y\in A$، آنگاه به ازای هر $0<t<1$، $tx+(1-t)y\in A$). اکثر فضاهای برداری توپولوژیک که در تمرین‌ها به آنها برخواهید خورد موضعاً محدب و هاسدورف هستند.

رایج‌ترین روش برای تعریفِ توپولوژی‌های موضعاً محدب روی فضاهای برداری، تعریف برحسب نیم‌نرم‌ها است. یعنی، اگر خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی X داشته باشیم، به همان روشی که از گوی‌های تعریف شده توسط توپولوژی حاصل از نرم روی یک فضای برداری به‌عنوان مجموعه‌های باز استفاده می‌کردیم می‌توانیم از «گوی‌ها»یی که این نیم‌نرم‌ها تعریف می‌کنند برای تولید یک توپولوژی استفاده کنیم. حکم دقیق به صورت زیر است:

۵.۱۴ قضیه. فرض‌کنیم $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی فضای برداری X باشد. اگر $x\in X$، $\alpha\in A$ و $\varepsilon>0$، قرار می‌دهیم

$$U_{x\alpha\varepsilon}=\{y\in X:p_\alpha(y-x)<\varepsilon\}\,,$$

و فرض می‌کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی تعریف شده به‌وسیلهٔ مجموعه‌های $U_{x\alpha\varepsilon}$ باشد.

الف) به ازای هر $x\in X$، اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های $U_{x\alpha\varepsilon}$ $(\varepsilon>0,\alpha\in A)$ یک پایهٔ همسایه‌ای در x تشکیل می‌دهند.

ب) اگر $\langle x_i\rangle_{i\in I}$ یک تور در X باشد، آنگاه $x_i\to x$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha\in A$، $p_\alpha(x_i-x)\to 0$.

ج) $(X,\mathcal{T})$ یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب است.

برهان. (الف) اگر $x\in\bigcap_1^k U_{x_j\alpha_j\varepsilon_j}$، قرار می‌دهیم $\delta_j=\varepsilon_j-p_{\alpha_j}(x-x_j)$. بنابر نامساوی مثلثی، داریم

$$x\in\bigcap_1^k U_{x_j\alpha_j\delta_j}\subset\bigcap_1^k U_{x_j\alpha_j\varepsilon_j}\,.$$

بنابر این حکم از گزارهٔ ۴.۴ نتیجه می‌شود.

ب) با توجه به (الف)، کافی است ملاحظه کنیم که $p_\alpha(x_i - x) \to 0$ اگر و تنها اگر $\langle x_i \rangle$ به ازای هر $\varepsilon > 0$ نهایتاً در
$P_\alpha(x_i - x) < \varepsilon$
$U_{x\alpha\varepsilon}$ باشد.

ج) پیوستگی اعمال برداری به آسانی از گزارهٔ ۴.۱۹ و قسمت (ب) نتیجه می‌شود. در واقع، اگر $x_i \to x$ و $y_i \to y$، آنگاه

$$p_\alpha((x_i + y_i) - (x + y)) \le p_\alpha(x_i - x) + p_\alpha(y_i - y) \to 0$$

و لذا $x_i + y_i \to x + y$. همچنین اگر $\lambda_i \to \lambda$، آنگاه حتماً $|\lambda_i| \le C = |\lambda| + 1$، لذا

$$p_\alpha(\lambda_i x_i - \lambda x) \le p_\alpha(\lambda_i(x_i - x)) + p_\alpha((\lambda_i - \lambda)x) \le C p_\alpha(x_i - x) + |\lambda_i - \lambda| p_\alpha(x),$$

پس نتیجه می‌شود که $\lambda_i x_i \to \lambda x$؛ به‌علاوه، مجموعه‌های $U_{x\alpha\varepsilon}$ محدب هستند زیرا اگر $y, z \in U_{x\alpha\varepsilon}$، آنگاه

$$p_\alpha(x - [ty + (1 - t)z]) \le p_\alpha(tx - ty) + p_\alpha((1 - t)x - (1 - t)z) < t\varepsilon + (1 - t)\varepsilon = \varepsilon.$$

بنابر این تحدب موضعی توپولوژی از (الف) حاصل می‌شود. ■

اینک مشابهی برای گزارهٔ ۵.۲ می‌آوریم.

۵.۱۵ گزاره. فرض‌کنیم X و Y دو فضای برداری به ترتیب با توپولوژی‌های تعریف شده به وسیلهٔ خانواده‌های $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ و $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$ از نیم‌نرم‌ها باشند و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت T پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $\beta \in B$ اعضایی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ و عددی مانند $C > 0$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$q_\beta(Tx) \le C \textstyle\sum_1^k p_{\alpha_j}(x).$$

برهان. اگر شرط اخیر برقرار باشد و $\langle x_i \rangle$ یک تور همگرا به $x \in X$ باشد، آنگاه طبق قسمت (ب) از قضیهٔ ۵.۱۴ به ازای هر α داریم $p_\alpha(x_i - x) \to 0$، در نتیجه به ازای هر β، $q_\beta(Tx_i - Tx) \to 0$، بنابر این $Tx_i \to Tx$. بنابر گزارهٔ ۴.۱۹، T پیوسته است. به عکس، اگر T پیوسته باشد، به ازای هر $\beta \in B$ یک همسایگی مانند U از 0 در X وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in U$، $q_\beta(Tx) < 1$. بنابر قسمت (الف) از قضیهٔ ۵.۱۴ می‌توان فرض کرد که $U = \bigcap_1^k U_{0\alpha_j\varepsilon_j}$. فرض می‌کنیم $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$؛ در این‌صورت، اگر به ازای همهٔ j ها، $p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon$، آنگاه $q_\beta(Tx) < 1$. اینک برای عضو مفروض x از X دو امکان وجود دارد. اگر به ازای یک j، $p_{\alpha_j}(x) > 0$، قرار می‌دهیم $y = \frac{\varepsilon x}{\sum_1^k p_{\alpha_j}(x)}$. در این صورت به ازای هر j، $p_{\alpha_j}(y) \le \varepsilon$، لذا

$$q_\beta(Tx) = \textstyle\sum_1^k \varepsilon^{-1} p_{\alpha_j}(x) q_\beta(Ty) \le \varepsilon^{-1} \sum_1^k p_{\alpha_j}(x).$$

از طرف دیگر، اگر به ازای هر j، $p_{\alpha_j}(x) = 0$، آنگاه به ازای هر j و هر $r > 0$، $p_{\alpha_j}(rx) = 0$، درنتیجه به ازای هر $r > 0$، $r q_\beta(Tx) = q_\beta(T(rx)) < 1$، بنابر این $q_\beta(Tx) = 0$. از این رو در این حالت نیز

$$q_\beta(Tx) \leq \varepsilon^{-1}\sum_1^k p_{\alpha_j}(x)$$

و برهان کامل می‌شود. ■

برهان گزارهٔ زیر به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۴۳).

۵.۱۶ گزاره. فرض کنیم X یک فضای برداری مجهز به توپولوژی تعریف شده با خانواده‌ای از نیم نرم‌ها مانند $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ باشد.

الف) X هاسدورف است اگر و تنها اگر برای هر $x \neq 0$ عضوی مانند $\alpha \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $p_\alpha(x) \neq 0$.

ب) اگر X هاسدورف و A شمارش‌پذیر باشد، آنگاه X متریک پذیر با یک متر حافظ انتقال است (یعنی، به ازای هر x، y و z از X، $\rho(x,y) = \rho(x+z,y+z)$).

اگر X دارای توپولوژی تعریف شده با نیم‌نرم‌های $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ باشد، آنگاه بنابر گزارهٔ ۵.۱۵، یک تابعک خطی مانند f روی X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای عددی مانند $C > 0$ و اعضایی مانند $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in A$، $|f(x)| \leq C\sum_1^k p_{\alpha_j}(x)$. از آنجا که یک مجموع متناهی از نیم‌نرم‌ها باز هم یک نیم نرم است، قضیهٔ هان ـ باناخ وجود تابعک های خطی پیوستهٔ زیادی روی X را تضمین می‌کند ـ اگر X هاسدورف باشد، کافی است نقاط جدا شوند. مثل قبل، مجموعهٔ همهٔ چنین تابعک‌های خطی با X^* نشان داده می‌شود. روش‌های مختلفی برای تبدیل X^* به یک فضای برداری توپولوژیک وجود دارند، اما به‌طور اصولی به این پرسش نخواهیم پرداخت. ساده‌ترین راه نهادن توپولوژی ضعیف‌تری است که همهٔ نگاشت‌های ارزیابی $f \mapsto f(x)$ $(x \in X)$ را پیوسته کند ایده‌ای است که پس از این بارها و بارها مورد کند وکاو قرار خواهد گرفت.

در یک فضای توپولوژیک مانند X مفهوم دنبالهٔ کشی یا تورِ کشی قابل بیان است. یعنی یک تور مانند $\langle x_i\rangle_{i\in I}$ در X **کشی** نامیده می‌شود هرگاه تور $\langle x_i - x_j\rangle_{(i,j)\in I\times I}$ به صفر همگرا باشد. (در اینجا $I \times I$ به روش معمولی جهت‌دار شده است: $(i,j) \leq (i',j')$ اگر و تنها اگر $i \leq i'$ و $j \leq j'$). طبیعتاً، X **کامل** نامیده می‌شود هرگاه هر تور کشی همگرا باشد. وقتی X شمارش‌پذیر اول باشد، کامل بودن X خیلی جالب است، در این حالت کامل بودن با این شرط هم ارز است که هر دنبالهٔ کشی همگرا است (تمرین ۴۴). حالت بسیار خاص این است که اگر X هاسدورف باشد، آنگاه بنابر قسمت (الف) از قضیهٔ ۵.۱۴، این توپولوژی شمارش‌پذیر است؛ در واقع، بنابر قسمت (ب) از گزارهٔ ۵.۱۶، توپولوژی مذکور با یک متر حافظ انتقال مانند ρ داده می‌شود و یک دنباله مطابق با تعریف کنونی کشی است اگر و تنها اگر نسبت به ρ کشی باشد. فضای برداری

توپولوژیک هاسدورف کاملی که توپولوژی آن به وسیلهٔ خانواده‌ای شمارش‌پذیر از نیم‌نرم‌ها تعریف شود یک **فضای فرشه** نامیده می‌شود.

اکنون مثال‌های جالبی از فضاهای برداری توپولوژیک را مدنظر قرار می‌دهیم که توپولوژی آنها با خانواده‌ای از نیم نرم‌ها به‌جز نرم‌های تکی تعریف می‌شوند. قبلاً در فصل‌های گذشته با یک زوج از آنها برخورد کرده‌ایم:

- فرض‌کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. در $\mathbb{C}^X$ توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه های فشرده با نیم نرم‌های $p_K(f) = \sup_{x\in K}|f(x)|$ وقتی K روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ X تغییر می‌کند تعریف می‌شود. اگر X، σـ فشرده باشد و $\{U_n\}$ همانند گزاره‌های ۴.۳۹ و ۴.۴۰ باشد، این توپولوژی به وسیلهٔ نیم‌نرم‌های $p_n(f) = \sup_{x\in\overline{U_n}} |f(x)|$ تعریف می‌شود. به‌آسانی دیده می‌شود که در این حالت $\mathbb{C}^X$ کامل است و لذا یک فضای فرشه می‌باشد؛ حال بنابر گزارهٔ ۴.۳۸، $C(X)$ نیز یک فضای فرشه است.
- فضای $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ که در بند ۳.۴ تعریف شد یک فضای فرشهٔ با توپولوژی تعریف شده به وسیلهٔ نیم‌نرم‌های زیر است:

$$p_k(f) = \int_{|x|\le k}|f(x)|\,dx$$

(کامل بودن این فضا به آسانی از کامل بودن L^1 نتیجه می‌شود.) تعمیم واضحی از این ساختار، فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدبی مانند، $L^1_{loc}(X,\mu)$ به‌دست می‌دهد که در آن X فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ دل‌خواه و μ اندازهٔ برلی روی X است که روی مجموعه‌های فشرده متناهی است.

ردهٔ دیگری از فضاهای برداری توپولوژیک به‌طور طبیعی با نظریهٔ معادلات دیفرانسیل در ارتباط هستند. بیشتر مطالعهٔ عملگر $\frac{d}{dx}$ یا عملگرهای پیچیده‌تر برگرفته از آن مدنظر است که روی فضاهای مختلفی از توابع اثر می‌کنند. متأسفانه به‌طور ذاتی تعریف نرم‌هایی روی بیشتر فضاهای توابع با بعد متناهی طوری‌که $\frac{d}{dx}$ یک عملگر کراندار باشد ممکن نیست. حکم دقیقی در این رابطه وجود دارد: هیچ نرمی روی $C^\infty([0,1])$ متشکل از توابع بینهایت بار مشتق‌پذیر روی $[0,1]$ وجود ندارد که نسبت به آن $\frac{d}{dx}$ کراندار باشد. در واقع اگر $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$، آنگاه $(\frac{d}{dx})f_\lambda = \lambda f_\lambda$ لذا به ازای هر λ، $\left\|\frac{d}{dx}\right\| \ge |\lambda|$ و فرقی نمی‌کند که چه نرمی روی $C^\infty([0,1])$ به‌کار رفته باشد.

از این مشکل، سه پند مفید آموخته می‌شود. اول اینکه، می‌توان مشتقگیری را به عنوان یک عملگر غیرکراندار از X به Y در نظر گرفت که در آن Y یک فضای باناخ مناسب و همانند تمرین ۳۰، X یک زیرفضای چگال Y است. دوم اینکه می توان مشتقگیری را به‌عنوان نگاشت خطی کرانداری از یک فضای باناخ مانند X به یک فضای متمایز مانند Y (از قبیل $X = C^k([0,1])$ و $Y = C^k([0,1])$ در تمرین ۹) در نظرگرفت. بالاخره می‌توان مشتق‌گیری را به عنوان عملگری پیوسته روی یک فضای موضعاً محدب مانند X در نظر گرفت که توپولوژی آن با یک نرم داده نمی‌شود. همهٔ این نقطه نظرات مورد استفادهٔ منحصر به خود را

دارند، اما آنکه در اینجا به کارمان می‌آید نکتهٔ آخر است. به آسانی خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی فضاهای توابع هموار ساخته می‌شود به‌طوری‌که عملگر مشتقگیری تقریباً با تعریف پیوسته می‌شود. به عنوان مثال، نیم‌نرم‌های $(k = 0,1,2,\ldots)$ $p_k(f) = \sup_{0\le x\le 1}\left|f^{(k)}(x)\right|$ فضای $C^\infty([0,1])$ را به یک فضای فرشه تبدیل می‌کنند (کامل بودن این فضا مانند تمرین ۹ ثابت می‌شود)، و بنابر گزارهٔ ۵.۱۵، $\dfrac{d}{dx}$ روی این فضا پیوسته است زیرا $p_k(f') = p_{k+1}(f)$. مثال‌های دیگری در تمرین ۴۵ و در فصل ۹ تعبیه شده‌اند.

یکی از سودمندترین روال‌ها برای ساختن توپولوژی روی فضاهای برداری قید پیوستگی نگاشت‌های خطی معینی است. یعنی، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری، Y یک فضای خطی نرم‌دار و $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از نگاشت‌های خطی از X به Y باشد. در این صورت توپولوژی ضعیف $\mathcal{T}$ که با $\{T_\alpha\}$ تولید می‌شود X را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب تبدیل می‌کند. در واقع $\mathcal{T}$ دقیقاً توپولوژی $\mathcal{T}'$ است که مطابق با قضیهٔ ۵.۱۴ با نیم نرم‌های $p_\alpha(x) = \|T_\alpha x\|$ ساخته می‌شد. ($\mathcal{T}$ توسط مجموعه های به شکل $\{x : \|T_\alpha x - y_0\| < \varepsilon\}$ با شرط $y_0 \in Y$ تولید می‌شود، حال آنکه $\mathcal{T}'$ به وسیلهٔ مجموعه‌های به شکل $\{x : \|T_\alpha x - T_\alpha x_0\| < \varepsilon\}$ با شرط $x_0 \in X$ تولید می‌شود. اگر T_αها پوشا باشند، به وضوح اینها یکی هستند؛ حالت کلی تحت عنوان تمرین ۴۶ باقی می‌ماند.) توپولوژی روی $C^\infty([0,1])$ که در پاراگراف قبل ذکر شد مثالی از همین نحوهٔ ساخت است که در آن $Y = C([0,1])$ و $T_k f = f^{(k)}$. اینک مثال‌های بیشتری ارائه می‌دهیم.

نخست، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. به‌طور خلاصه توپولوژی ضعیف تولید شده به وسیلهٔ X^* به **توپولوژی ضعیف** روی X مشهور است همگرایی نسبت به این توپولوژی به **همگرایی ضعیف** شهرت دارد. بنابر این، اگر $\langle x_\alpha\rangle$ یک تور در X باشد، آنگاه $x_\alpha \to x$ به‌طور ضعیف اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$، $f(x_\alpha) \to f(x)$. وقتی X با بعد نامتناهی است، توپولوژی ضعیف همیشه از توپولوژی نرمی ضعیف‌تر است؛ تمرین ۴۹ را ببینید.

اینک، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری نرم دار و X^* فضای دوگان آن باشد. همانند تعریف فوق، توپولوژی ضعیف روی X^* توپولوژی تعریف شده با X^{**} است؛ توپولوژی جالب‌تر توپولوژی تولید شده توسط X (به‌عنوان زیرفضایی از X^{**}) است که **W^* ـ توپولوژی** روی X^* نامیده می‌شود. X^* فضایی مرکب از توابع روی X است و به‌طور خلاصه W^* ـ توپولوژی، توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه است: $f_\alpha \to f$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f_\alpha(x) \to f(x)$. **W^*ـتوپولوژی** حتی از توپولوژی ضعیف روی X^* هم ضعیف‌تر است؛ وقتی X بازتابی باشد دو توپولوژی مذکور دقیقاً برهم منطبق می‌شوند.

بالاخره، فرض می‌کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. آن توپولوژی روی $L(X,Y)$ که به وسیلهٔ نگاشت‌های ارزیابی $T \mapsto Tx$ $(x \in X)$ تولید می شود **توپولوژی عملگری قوی** روی $L(X,Y)$ نامیده می شود و توپولوژی تولید شد توسط تابعک های خطی $T \mapsto f(Tx)$ $(f \in Y^*, x \in X)$ **توپولوژی عملگری ضعیف** روی $L(X,Y)$ خوانده می شود. باز هم این توپولوژی‌ها بر حسب همگرایی بهتر درک می شوند: $T_\alpha \to T$ به‌طور قوی اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی نرمی Y، به ازای هر $x \in X$، $T_\alpha x \to Tx$ در حالی‌که $T_\alpha \to T$ به‌طور ضعیف اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی ضعیف Y، به ازای

هر $x \in X$، $T_\alpha x \to Tx$. بنابر این توپولوژی عملگری قوی از توپولوژی عملگری ضعیف قوی‌تر است اما از توپولوژی نرمی روی $L(X,Y)$ ضعیف‌تر است.

حکم زیر در مورد همگرایی قوی تقریباً بدیهی اما بینهایت سودمند است:

۵.۱۷ گزاره. فرض کنیم $\{T_n\}_1^\infty \subset L(X,Y)$، $\sup_n \|T_n\| < \infty$ و $T \in L(X,Y)$. اگر به ازای هر x واقع در زیرمجموعهٔ چگالی مانند D از X، $\|T_n x - Tx\| \to 0$، آنگاه $T_n \to T$ به‌طور قوی.

برهان. فرض می‌کنیم $C = \sup\{\|T\|, \|T_1\|, \|T_2\|, \ldots\}$. $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و عضوی چون $x' \in D$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{3C}$ اگر n به قدر کافی بزرگ باشد که $\|T_n x' - Tx'\| < \frac{\varepsilon}{2}$، داریم:

$$\begin{aligned}\|T_n x - Tx\| &\le \underbrace{\|T_n x - T_n x'\|}_{\le \|T_n\|\|x-x'\|} + \underbrace{\|T_n x' - Tx'\|}_{\le \varepsilon/2} + \underbrace{\|Tx' - Tx\|}_{\le \|T\|\|x-x'\|} \\ &\le 2C\|x - x'\| + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon,\end{aligned}$$

لذا $T_n x \to Tx$ $x \in X$. ■

آخرین حکم این بخش یک قضیهٔ فشردگی است که یکی از علل اصلی سودمند بودن W^* ـ توپولوژی روی یک فضای دوگان است. ایدهٔ اثبات شبیه تکنیک‌های مطرح شده در بند ۴.۸ است.

۵.۱۸ قضیه الا اُغلو. اگر X فضای برداری نرم‌داری باشد، گوی واحد بستهٔ $B^* = \{f \in X^* : \|f\| \le 1\}$ در X^* نسبت به W^* ـ توپولوژی فشرده است.

بسته و کراندار لذا فشرده

برهان. به ازای هر $x \in X$ فرض می‌کنیم $D_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|x\|\}$ و قرار می دهیم $D = \prod_{x \in X} D_x$. در این صورت بنابر قضیهٔ تیخونف D فشرده است. اعضای D دقیقاً توابع با مقدار مختلط ϕ روی X هستند که به ازای هر $x \in X$، $|\phi(x)| \le \|x\|$، و B^* مشتمل بر اعضایی از D است که خطی هستند. به‌علاوه، توپولوژی‌های مربوطه‌ای که B^* از توپولوژی حاصلضربی روی D و W^* ـ توپولوژی روی X^* به ارث می برد هر دو بر توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه منطبق هستند، بنابر این کافی است ببینیم که B^* در D بسته است. اما این کار آسانی است: اگر $\langle f_\alpha \rangle$ یک تور در B^* باشد که به عضو f از D همگرا است، آنگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $a, b \in \mathbb{C}$ داریم:

$$f(ax + by) = \lim f_\alpha(ax + by) = \lim[af_\alpha(x) + bf_\alpha(y)] = af(x) + bf(y)$$

لذا $f \in B^*$. ■

هشدار: قضیهٔ آلا اُغلو ایجاب نمی‌کند که X^* با W^* ـ توپولوژی موضعاً فشرده باشد؛ قسمت (ب) از تمرین ۴۹ را ببینید.

تمرین‌ها

۴۳) گزارهٔ ۵.۱۶ را ثابت کنید. (برای قسمت (ب)، مانند قسمت (د) از تمرین ۵۶ از بند۵.۴ عمل کنید.)

۴۴) اگر X یک فضای برداری توپولوژیک شمارش‌پذیر اول و هر دنبالهٔ کشی در X همگرا باشد، آنگاه هر تورکشی در X همگرا است.

۴۵) فضای $C^\infty(\mathbb{R})$ مرکب از همهٔ توابع بینهایت بارمشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ دارای یک توپولوژی فضای فرشه است که نسبت به آن $f_n \to f$ اگر و تنها اگر روی مجموعه‌های فشرده به ازای هر $k \geq 0$، $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ به‌طور یکنواخت .

۴۶) اگر X یک فضای برداری، Y یک فضای خطی نرم‌دار، $\mathcal{T}$ توپولوژی ضعیف تولید شده با خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی مانند $\{T_\alpha : X \to Y\}$ روی X باشد و $\mathcal{T}'$ توپولوژی تولید شده با نیم‌نرم‌های $\{x \mapsto \|T_\alpha x\|\}$ ، آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

۴۷) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند.

الف) اگر $\{T_n\}_1^\infty \subset L(X,Y)$ و $T_n \to T$ به طور ضعیف (یا قوی)، آنگاه $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

ب) هر دنبالهٔ همگرای ضعیف در X و هر دنبالهٔ W^* ـ همگرا در X^* (نسبت به نرم)کراندار است.

۴۸) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد.

الف) گوی واحد نرم ـ بستهٔ $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ به طور ضعیف نیز بسته است. (قسمت (د) از قضیهٔ ۵.۸ را به کار برید.)

ب) اگر $E \subset X$ (نسبت به نرم) کراندار باشد، بستار ضعیف آن نیز کراندار است.

ج) اگر $F \subset X^*$ (نسبت به نرم) کراندار باشد، W^* ـ بستار آن نیز کراندار است.

د) هر دنبالهٔ W^* ـ کشی در X^* همگرا است. (تمرین ۳۸ را به‌کار برید.)

۴۹) فرض کنید X یک فضای باناخ با بعد نامتناهی باشد.

الف) هر مجموعهٔ باز ضعیف ناتهی در X و هر مجموعهٔ W^* ـ باز ناتهی در X^*، (نسبت به نرم) کراندار است.

ب) هر زیرمجموعهٔ کراندار از X تحت توپولوژی ضعیف، هیچ‌جا چگال است و هر زیرمجموعهٔ کراندار X^* نسبت به W^* - توپولوژی هیچ‌جا چگال است. (قسمت‌های (ب) و (ج) از تمرین ۴۸ را به‌کار برید.)

ج) X نسبت به توپولوژی ضعیف در خودش و X^* نسبت به W^* - توپولوژی در خودش نحیف است.

د) W^* - توپولوژی روی X^* به وسیلهٔ هیچ‌متر حافظ انتقالی تعریف نمی‌شود. (قسمت (د) از تمرین ۴۸ را به‌کار برید.)

۵۰) اگر X فضای خطی نرم‌دار جدایی‌پذیری باشد، آنگاه W^* - توپولوژی روی گوی واحد بسته در X^* شمارش‌پذیر دوم و در نتیجه مترپذیر است. (اما به قسمت (د) از تمرین ۴۹ مراجعه کنید.)

۵۱) یک زیرفضای برداری از فضای برداری نرم داری چون X نرم - بسته است اگر و تنها اگر به‌طور ضعیف بسته باشد. (اما یک زیرفضای نرم بستهٔ X^* لزوماً W^* - بسته نیست مگر اینکه X بازتابی باشد؛ قسمت (د) از تمرین ۵۲ را ببینید.)

۵۲) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $f_1,\ldots,f_n$ اعضایی مستقل خطی از X^* باشند.

الف) $T: X \to \mathbb{C}^n$ را با $Tx = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ تعریف کنید. اگر $\mathcal{N} = \{x : Tx = 0\}$ و $\mathcal{M}$ زیرفضای پدید آمده توسط $f_1,\ldots,f_n$ باشند، آنگاه به مفهوم تمرین ۲۳، $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\circ$ و در نتیجه $\mathcal{M}^*$ با $(X/\mathcal{N})^*$ ایزومورف است.

ب) اگر $F \in X^{**}$، آنگاه به ازای هر $0 < \varepsilon$ عضوی چون $x \in X$ وجود دارد به طوری که به ازای $j = 1,\ldots,n$، $F(f_j) = f_j(x)$ و $\|x\| \le (1+\varepsilon)\|F\|$. ($F|_{\mathcal{M}}$ را می‌توان با عضوی از $(X/\mathcal{N})^{**}$ و در نتیجه با عضوی از $X/\mathcal{N}$ یکی گرفت زیرا فضای اخیر با بعد متناهی است.)

ج) چنانچه X به‌عنوان زیرفضایی از X^{**} در نظرگرفته شود، توپولوژی نسبی روی X که از W^* - توپولوژی روی X^{**} القاء می‌شود توپولوژی ضعیف است.

د) X با W^* - توپولوژی روی X^{**} چگال است و گوی واحد بسته در X درگوی واحد بسته در X^{**} چگال است.

ه) X بازتابی است اگر و تنها اگر گوی واحد بسته‌اش فشردهٔ ضعیف باشد.

۵۳) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $\{T_n\}$ و $\{S_n\}$ دنباله‌هایی در $L(X,X)$ باشند به‌طوری‌که $T_n \to T$ به طوری قوی و $S_n \to S$ به‌طور قوی.

الف) اگر $\{x_n\} \subset X$ و $\|x_n - x\| \to 0$، آنگاه $\|T_n x_n - Tx\| \to 0$. (قسمت (الف) از تمرین ۴۷ را به‌کار برید.)

ب) $T_n S_n \to TS$ به‌طوری قوی.

۵.۵ فضاهای هیلبرت

مهترین فضاهای باناخ و از جمله آنهایی که می‌توان آنالیز بسیار دقیق را روی آن انجام داد فضاهای هیلبرت هستند که تعمیم مستقیمی از فضاهای اقلیدسی با بعد متناهی می‌باشند. قبل از تعریف آنها اندکی مباحث مقدماتی لازم داریم.
فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای برداری مختلط باشد. یک **ضرب داخلی** (یا **ضرب اسکالر**) روی $\mathcal{H}$ نگاشتی چون $\langle x,y\rangle \mapsto (x,y)$ از $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ به $\mathbb{C}$ است به‌طوری‌که:

الف) به ازای هر x، y و z از $\mathcal{H}$ و هر a و b از $\mathbb{C}$، $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$.

ب) به ازای هر x و y از $\mathcal{H}$، $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$.

ج) به ازای هر عضو ناصفر مانند x از $\mathcal{H}$، $\langle x,x\rangle \in (0,\infty)$.

ملاحظه می‌کنیم که (الف) و (ب) ایجاب می‌کنند که به ازای هر x، y و z از $\mathcal{H}$ و هر a و b از $\mathbb{C}$،

$$\langle x,ay+bz\rangle = \bar{a}\langle x,y\rangle + \bar{b}\langle x,z\rangle .$$

(می توان روی فضاهای برداری حقیقی نیز ضرب داخلی تعریف کرد: در این صورت $\langle x,y\rangle$ حقیقی است، a و b در (الف) حقیقی فرض می‌شوند و (ب) به صورت $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle$ در می‌آید.)

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک **فضای پیش‌هیلبرت** نامیده می‌شود. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای پیش هیلبرت باشد، به ازای $x\in\mathcal{H}$ تعریف می‌کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\,.$$

۵.۱۹ نامساوی شوارتز. به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$، $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که x و y وابستهٔ خطی باشند.

برهان. اگر $\langle x,y\rangle = 0$، حکم واضح است. اگر $\langle x,y\rangle \neq 0$ (و به ویژه $y\neq 0$)، قرار می دهیم $\alpha = \operatorname{sgn}\langle x,y\rangle$ و $z=\alpha y$، لذا $\langle x,y\rangle = \langle z,x\rangle = |\langle x,y\rangle|$ و $\|z\| = \|y\|$. در نتیجه به ازای هر $t\in\mathbb{R}$ داریم:

$$0 \le \langle x-tz, x-tz\rangle = \|x\|^2 - 2t|\langle x,y\rangle| + t^2\|y\|^2 .$$

عبارت طرف راست یک تابع درجهٔ دوم از متغیر t است که مینیمم مطلق آن در $t = \|y\|^{-2}|\langle x,y\rangle|$ رخ می‌دهد. t را مساوی این مقدار قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم:

$$0 \le \|x-tz\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^{-2}|\langle x,y\rangle|^2$$

که تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $x - tz = x - \alpha t y = 0$ که از این هم فوراً حکم مطلوب حاصل می‌شود.■

۵.۲۰ گزاره. تابع $x \mapsto \|x\|$ یک نرم روی $\mathcal{H}$ است.

برهان. از تعریف واضح است که $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ و $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. مانند آنچه در نامساوی مثلثی داشیم، داریم:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

پس بنابر نامساوی شوارتز،

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

و برهان کامل می‌شود.■

فضای پیش‌هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ کامل باشد یک **فضای هیلبرت** نامیده می‌شود. (فضاهای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی حقیقی را نیز می‌توان عنوان کرد. اما فضاهای هیلبرت معمولاً مختلط فرض می‌شوند مگر آنکه مختلط نبودن آن به‌صراحت مشخص شود.)

مثال: فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه و $L^2(\mu)$ مجموعهٔ همهٔ توابع اندازه‌پذیری چون $f : X \to \mathbb{C}$ باشد به‌طوری که $\int |f|^2 d\mu < \infty$ (که در آن، مثل همیشه دو تابع تقریباً همه‌جا برابر را یکی گرفته‌ایم). از اینکه نامساوی $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ برای هر $a, b \ge 0$ معتبر است دیده می‌شود که اگر $f, g \in L^2(\mu)$، آنگاه

$$|f\overline{g}| \le \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$$

لذا $f\,\overline{g} \in L^1(\mu)$. به آسانی معلوم می‌شود که فرمول

$$\langle f,g\rangle = \int f\overline{g}d\mu$$

یک ضرب داخلی روی $L^2(\mu)$ تعریف می‌کند. در حقیقت، به ازای هر اندازهٔ دل‌خواه مانند μ فضای $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت است. کامل بودن $L^2(\mu)$ را در قضیهٔ ۶.۶ ثابت خواهیم کرد؛ درحال حاضر این حکم را می‌پذیریم.

با در نظر گرفتن اندازهٔ شمارشی μ روی $(A, \mathcal{P}(A))$، که در آن A مجموعه‌ای ناتهی است حالت خاص مهمی از ساختار مذکور به‌دست می‌آید؛ در این حالت، معمولاً $L^2(\mu)$ با $l^2(A)$ نشان داده می‌شود. بنابراین $l^2(A)$ مجموعهٔ توابع $f : A \to \mathbb{C}$ است به‌طوری‌که $\sum_{\alpha\in A}|f(\alpha)|^2$ (با همان تعریف بند ۰.۵) متناهی باشد. بهتر است کامل بودن $l^2(A)$ به‌طور مستقیم اثبات شود. (تمرین ۵۴).

در ادامهٔ این فصل، $\mathcal{H}$ نشاندهندهٔ یک فضای هیلبرت خواهد بود.

۵.۲۱ گزاره. اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آنگاه $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$.

برهان. بنابر نامساوی شوارتز،

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &= |\langle x_n-x,y_n\rangle+\langle x,y_n-y\rangle| \\ &\leq \|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|\end{aligned}$$

که به صفر میل می‌کند زیرا $\|y_n\|\to\|y\|$. ■

۵.۲۲ قانون متوازی الاضلاع. به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$،

$$\|x+y\|^۲+\|x-y\|^۲=۲(\|x\|^۲+\|y\|^۲).$$

(« مجموع مربعات اقطار یک متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات چهار ضلع آن است.»)

برهان. طرفین دو فرمول $\|x\pm y\|^۲=\|x\|^۲\pm ۲\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^۲$ را با هم جمع می‌کنیم. ■

اگر $x,y\in X$ می‌گوییم x بر y **عمود** است و می‌نویسیم $x\perp y$ هرگاه $\langle x,y\rangle=۰$. اگر $E\subset\mathcal{H}$، تعریف می‌کنیم:

$$E^{\perp}=\{x\in\mathcal{H}:\langle x,y\rangle=۰، y\in E \text{ به ازای هر }\}.$$

بلافاصله از گزارهٔ ۵.۲۱ و خطی بودن ضرب داخلی نسبت به مولفهٔ اولش، نتیجه می‌شود که $E^{\perp}$ زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{H}$ است.

۵.۲۳ قضیهٔ فیثاغورس. اگر $x_۱,\dots,x_n\in\mathcal{H}$ و به ازای $j\neq k$، $x_j\perp x_k$، آنگاه

$$\left\|\sum_۱^n x_j\right\|^۲=\sum_۱^n\|x_j\|^۲.$$

برهان. $\left\|\sum x_j\right\|^۲=\langle\sum x_j,\sum x_j\rangle=\sum_{j,k}\langle x_j,x_k\rangle$. جملاتی که در آنها $j\neq k$ همگی صفر هستند، تنها $\sum\langle x_j,x_j\rangle=\sum\|x_j\|^۲$ باقی می‌ماند. ■

۵.۲۴ قضیه. اگر $\mathcal{M}$ زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\mathcal{H}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^{\perp}$ ؛ یعنی، هر $x\in\mathcal{H}$ را می‌توان به‌طور یکتا به شکل $x=y+z$ نوشت که در آن $y\in\mathcal{M}$ و $z\in\mathcal{M}^{\perp}$. به علاوه y و z یکتا اعضایی از $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^{\perp}$ هستند که فاصلهٔ آنها تا x مینیمم است.

برهان. $x \in \mathcal{H}$ را مفروض می‌گیریم، قرارمی‌دهیم $\delta = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathcal{M}\}$، فرض می‌کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{M}$ باشد به‌طوری‌که $\|x - y_n\| \to \delta$. بنابر قانون متوازی‌الاضلاع،

$$۲(\|y_n - x\|^۲ + \|y_m - x\|^۲) = \|y_n - y_m\|^۲ + \|y_n + y_m - ۲x\|^۲,$$

و چون $\frac{۱}{۲}(y_n + y_m) \in \mathcal{M}$،

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^۲ &= ۲\|y_n - x\|^۲ + ۲\|y_m - x\|^۲ - ۴\left\|\frac{۱}{۲}(y_n + y_m) - x\right\|^۲ \\ &\le ۲\|y_n - x\|^۲ + ۲\|y_m - x\|^۲ - ۴\delta^۲.\end{aligned}$$

وقتی $m, n \to \infty$ عبارت طرف راست نامساوی اخیر به صفر میل می‌کند، لذا $\{y_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است. فرض می‌کنیم $y = \lim y_n$ و $z = x - y$. در این صورت $y \in \mathcal{M}$ زیرا $\mathcal{M}$ بسته است و $\delta = \|x - y\|$. ادعا می‌کنیم که $z \in \mathcal{M}^\perp$. در واقع اگر $u \in \mathcal{M}$، پس از ضرب u در یک اسکالر غیرصفر می‌توانیم فرض‌کنیم $\langle z, u\rangle$ حقیقی است. در این صورت تابع

$$f(t) = \|z + tu\|^۲ = \|z\|^۲ + ۲t\langle z, u\rangle + t^۲\|u\|^۲$$

به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ مقداری حقیقی دارد و یک مینیمم (یعنی $\delta^۲$) در $t = ۰$ دارد زیرا $z + tu = x - (y - tu)$ و $y - tu \in \mathcal{M}$. بنابر این $۲\langle z, u\rangle = f'(۰) = ۰$، لذا $z \in \mathcal{M}^\perp$.

به‌علاوه اگر z' عضو دیگری از $\mathcal{M}^\perp$ باشد، بنابر قضیهٔ فیثاغورس (و به دلیل $x - z = y \in \mathcal{M}$) داریم:

$$\|x - z'\|^۲ = \|x - z\|^۲ + \|z - z'\|^۲ \ge \|x - z\|^۲,$$

و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $z = z'$. همین استدلال نشان می‌دهد که y یکتا عضو $\mathcal{M}$ نزدیک به xاست. بالاخره، اگر $x = y' + z'$ که در آن $y' \in \mathcal{M}$ و $z' \in \mathcal{M}^\perp$ ، آنگاه $y - y' = z' - z \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$، لذا $y - y'$ و $z - z'$ بر خودشان متعامدند و لذا صفر هستند. ■

اگر $y \in \mathcal{H}$، آنگاه از نامساوی شوارتز معلوم می‌شود که فرمول $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ یک تابعک خطی کراندار روی $\mathcal{H}$تعریف می‌کند به طوری که $\|f_y\| = \|y\|$. بنابر این، نگاشت $y \mapsto f_y$ یک ایزومتری خطی مزدوج از $\mathcal{H}$ بتوی $\mathcal{H}^*$است. پوشا بودن این نگاشت یک حکم اساسی است: یعنی $H^* \cong H$

۵.۲۵ قضیه. اگر $f \in \mathcal{H}^*$، عضو یکتایی مانند $y \in \mathcal{H}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = \langle x, y\rangle$.

برهان. یکتایی آسان است: اگر به ازای هر x، $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$، آنگاه با گرفتن $x = y - y'$ نتیجه می‌گیریم که $\|y - y'\|^۲ = ۰$ و از این رو $y = y'$. اگر f تابعک صفر باشد، آنگاه به‌وضوح $y = ۰$. در غیر این صورت، فرض می‌کنیم:

$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = \circ\}$. در این صورت $\mathcal{M}$ زیرفضای بستهٔ سره‌ای از $\mathcal{H}$ است، لذا بنابر قضیهٔ ۵.۲۴، $\mathcal{M}^\perp \neq \{o\}$. حال $z \in \mathcal{M}^\perp$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|z\| = 1$. اگر $u = f(x)z - f(z)x$، آنگاه $u \in \mathcal{M}$، لذا

$$\circ = \langle u, z\rangle = f(x)\|z\|^2 - f(z)\langle x, z\rangle = f(x) - \langle x, \overline{f(z)}z\rangle.$$

بنابر این $f(x) = \langle x, y\rangle$ که در آن $y = \overline{f(z)}z$. ■

بنابراین، فضاهای هیلبرت به مفهومی بسیار قوی بازتابی هستند. نه تنها $\mathcal{H}$ به‌طور طبیعی با $\mathcal{H}^{**}$ ایزومورف است بلکه به طور طبیعی (با یک نگاشت خطی ـ مزدوج) با $\mathcal{H}^*$ ایزومروف است.

زیرمجموعه‌ای چون $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ از $\mathcal{H}$ **متعامد یکه** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر α، $\|u_\alpha\| = 1$ و وقتی $\alpha \neq \beta$، $u_\alpha \perp u_\beta$. چنانچه $\{x_n\}_1^\infty$ یک دنبالهٔ مستقل خطی در $\mathcal{H}$ باشد، روال استقرایی استانداردی موسوم به **فرآیند گرام ـ اشمیت** برای تبدیل $\{x_n\}$ به یک دنبالهٔ متعامد یکه مانند $\{u_n\}$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر N، فضای پدید آمده توسط $\{x_n\}_1^N$ بر فضای پدید آمده توسط $\{u_n\}_1^N$ منطبق می‌شود.

یعنی، در مرحلهٔ اول قرار می‌دهیم $u_1 = x_1 / \|x_1\|$. با داشتن تعریف $u_1, \ldots, u_{N-1}$، قرار می‌دهیم:

$$v_N = x_N - \sum_1^{N-1}\langle x_N, x_n\rangle u_n$$

در این صورت v_N غیر صفر است زیرا x_N در فضای پدید آمده توسط $x_1, \ldots, x_{N-1}$ قرار ندارد و در نتیجه در فضای پدید آمده توسط $u_1, \ldots, u_{N-1}$ قرار ندارد و به ازای هر $m < N$،

$$\langle v_N, u_m\rangle = \langle x_N, u_m\rangle - \langle x_N, u_m\rangle = \circ.$$

بنابر این می‌توانیم u_N را مساوی $\dfrac{v_N}{\|v_N\|}$ بگیریم.

۵.۲۶ نامساوی بسل. اگر $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ مجموعهٔ متعامد یکه‌ای در $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه به ازای هر $x \in \mathcal{H}$،

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

به‌ویژه، $\{\alpha : \langle x, u_\alpha\rangle \neq \circ\}$ شمارش‌پذیر است.

برهان. کافی است نامساوی $\sum_{\alpha\in F}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ به ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند F از A برقرار است، اما

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\|x - \sum_{\alpha\in F}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha\right\|^2\\
&= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle x, \sum_{\alpha\in F}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha\right\rangle + \left\|\sum_{\alpha\in F}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha\right\|^2\\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{\alpha\in F}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2 + \sum_{\alpha\in F}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2\\
&= \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in F}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2,
\end{aligned}$$

که در آن قضیهٔ فیثاغورس در خط سوم به‌کار رفته است. ■

۵.۲۷ قضیه. هرگاه $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) (**خاصیت کمال**) اگر به ازای هر α، $\langle x, u_\alpha\rangle = 0$، آنگاه $x = 0$.

ب) (**اتحاد پارسوال**) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2$.

ج) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{\alpha\in A}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha$، که در آن سری طرف راست فقط تعداد شمارش‌پذیری جملهٔ غیر صفر دارد و نسبت به نرم $\mathcal{H}$ همگرا است. (به‌علاوه ترتیب جملات تأثیری در همگرایی ندارد.)

برهان. (الف) قسمت (ج) را ایجاب می‌کند: اگر $x \in \mathcal{H}$، فرض می‌کنیم α_1، α_2، ... شمارشی از α هایی باشد که برای آنها $\langle x, x_\alpha\rangle \neq 0$. بنابر نامساوی بسل، سری $\sum|\langle x, u_{\alpha_j}\rangle|^2$ همگرا است، لذا بنابر قضیهٔ فیثاغورس، وقتی $m, n \to \infty$،

$$\left\|\sum_n^m \langle x, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right\|^2 = \sum_n^m|\langle x, u_{\alpha_j}\rangle|^2 \to 0.$$

بنابر این سری $\sum\langle x, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}$ همگرا است زیرا $\mathcal{H}$ کامل است. اگر $y = x - \sum\langle x, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}$، آنگاه به‌وضوح به ازای هر α، $\langle y, u_\alpha\rangle = 0$ لذا طبق (الف)، $y = 0$.

(ج) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند: با نمادگذاری فوق، همچون برهان نامساوی بسل داریم:

$$\|x\|^2 - \sum_1^n|\langle x, u_{\alpha_j}\rangle|^2 = \left\|x - \sum_1^n\langle x, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right\|^2 \to 0,$$

و وقتی $n \to \infty$ طرف راست به سمت صفر میل می‌کند. بالاخره، به وضوح (ب) قسمت (الف) را ایجاب می‌کند.

مجموعهٔ متعامد یکه‌ای که خواص (الف) تا (ج) از قضیهٔ ۵.۲۷ را داشته باشد یک **پایهٔ متعامد یکه** برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود. برای مثال، فرض می‌کنیم $\mathcal{H} = l^2(A)$. به ازای هر $\alpha \in A$، $e_\alpha \in l^2(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1 & \beta = \alpha, \\ 0 & \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

(ج) 5.27 طبق

به وضوح مجموعهٔ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ متعامد یکه است و به ازای هر $f \in l^2(A)$ داریم: $\langle f,e_\alpha\rangle = f(\alpha)$ و از اینجا نتیجه می‌شود که $\{e_\alpha\}$ یک پایهٔ متعامد یکه است.

۵.۲۸ گزاره. هر فضای هیلبرت یک پایهٔ متعامد یکه دارد.

برهان. به کارگیری شسته و رفتهٔ لم زورن معلوم می کند که گردایهٔ مجموعه های متعامد یکه که با شمول مرتب شود دارای عضو ماکسیمالی است؛ و ماکسیمال بودن با خاصیت (الف) از قضیهٔ ۵.۲۷ هم‌ارز است. ■

۵.۲۹ گزاره. فضای هیلبرتی چون $\mathcal{H}$ جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر پایهٔ متعامد یکهٔ شمارش‌پذیری داشته باشد که در این حالت هر پایهٔ متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ شمارش‌پذیر است.

برهان. اگر $\{x_n\}$ مجموعهٔ چگال شمارش پذیری از $\mathcal{H}$ باشد، به طور بازگشتی با کنار گذاشتن هر x_n که در فضای پدید آمده توسط $x_1,\ldots,x_{n-1}$ قرار داشته باشد دنباله‌ای مستقل خطی مانند $\{y_n\}$ به‌دست می آوریم که فضای پدید آمده توسط آن در $\mathcal{H}$ چگال است. به‌کارگیری فرآیند گرام ـ اشمیت برای $\{y_n\}$ دنبالهٔ متعامد یکه‌ای مانند $\{u_n\}$ به‌دست می‌دهد که فضای پدید آمده توسط آن را در $\mathcal{H}$ چگال است و بنابر این $\{u_n\}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ است. به‌عکس، اگر $\{u_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ شمارش‌پذیر باشد، ترکیبات خطی متناهی u_nها با ضرایب واقع در زیرمجموعهٔ چگال شمارشی‌پذیری از $\mathbb{C}$، یک مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر در $\mathcal{H}$ تشکیل می‌دهند. به‌علاوه، اگر $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ پایهٔ متعامد یکهٔ دیگری باشد، آنگاه به ازای هر n مجموعهٔ $A_n = \{\alpha \in A : \langle u_n, v_\alpha\rangle \neq 0\}$ شمارش‌پذیر است. حال بنابر خاصیت کمال $\{u_n\}$، $A = \bigcup_1^\infty A_n$ و لذا A شمارش‌پذیر است. ■

اکثر فضاهای هیلبرتی که در تمرین‌ها آمده‌اند جدایی‌پذیرند. برخی مثال‌ها را در تمرین‌های ۶۰ تا ۶۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای هیلبرت با ضرب های داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ و $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ باشند، یک **نگاشت یکانی** از $\mathcal{H}_1$ به $\mathcal{H}_2$ نگاشت خطی وارون‌پذیری چون $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ است که ضرب داخلی را حفظ می‌کند، یعنی، به ازای هر x و y از $\mathcal{H}_1$،

$$\langle Ux,Uy\rangle_2 = \langle x,y\rangle_1.$$

با گرفتن $x = y$، می‌بینیم که هر نگاشت یکانی یک ایزومتری است: $\|Ux\|_2 = \|x\|_1$. به‌عکس، هر ایزومتری پوشا یکانی است (تمرین ۵۵). نگاشت‌های یکانی «ایزومورفیسم‌های» درستکاری در قبال فضاهای هیلبرت هستند؛ این نگاشت‌ها نه تنها ساختار خطی و توپولوژی را حفظ می‌کنند بلکه نرم و ضرب داخلی را نیز حفظ می‌کنند. از دید این ساختار مجرد، هر فضای هیلبرت شبیه به یک فضای l^2 به نظر می‌رسد:

۵.۳۰ گزاره. فرض کنیم $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت تناظر $x \mapsto \hat{x}$ که با $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$ تعریف می‌شود یک نگاشت یکانی از $\mathcal{H}$ به $l^2(A)$ است.

برهان. به‌وضوح نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ خطی است و بنابر اتحاد پارسوال، یعنی $\|x\|^2 = \sum |\hat{x}(\alpha)|^2$، نگاشت مذکور یک ایزومتری از $\mathcal{H}$ به $l^2(A)$ است. اگر $f \in l^2(A)$، آنگاه $\sum |f(\alpha)|^2 < \infty$، لذا از قضیهٔ فیثاغورس معلوم می‌شود که دنبالهٔ مجموع‌های جزئی سری $\sum f(\alpha)u_\alpha$ (که فقط تعداد شمارش‌پذیری از جملات آن ناصفر هستند) کشی است؛ بنابر این $x = \sum f(\alpha)u_\alpha$ در $\mathcal{H}$ وجود دارد و $\hat{x} = f$. حال بنابر قسمت (ب) از تمرین ۵۵، $x \mapsto \hat{x}$ یکانی است.■

تمرین‌ها

۵۴) به ازای هر مجموعهٔ ناتهی مانند A، $l^2(A)$ کامل است.

۵۵) فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد.

الف) (**اتحاد قطبی**) به ازای هر x و y از $\mathcal{H}$،

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

(کامل بودن در اینجا لازم نیست.)

ب) اگر $\mathcal{H}'$ فضای هیلبرت دیگری باشد، یک نگاشت خطی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}'$ یکانی است اگر و تنها اگر ایزومتری و پوشا باشد.

۵۶) اگر E زیرمجموعه‌ای از یک فضای هیلبرت مانند $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $(E^\perp)^\perp$ کوچکترین زیرفضای بستهٔ $\mathcal{H}$ است که شامل E است.

۵۷) فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

الف) عملگر خطی کراندار یکتایی چون $T^* \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ موسوم به الحاق T وجود دارد به طوری که به ازای هر x و y از $\mathcal{H}$، $\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$. (به تمرین ۲۲ مراجعه کنید. داریم: $T^* = V^{-1}T^\dagger V$ که در آن V ایزومورفیسم خطی ـ مزدوج از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}^*$ است که در قضیهٔ ۵.۲۵ ذکر شد و $(Vy)(x) = \langle x,y\rangle$.)

ب) $\|T^*\| = \|T\|$، $\|T^*T\| = \|T\|^2$، $(aS+bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$، $(ST)^* = T^*S^*$ و $T^{**} = T$.

ج) فرض کنید $\mathcal{R}$ و $\mathcal{N}$ نشانگر برد و فضای پوچ باشند؛ در این صورت $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$ و $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$.

د) T یکانی است اگر و تنها اگر T وارون‌پذیر باشد و $T^{-1} = T^*$.

۵۸) فرض‌کنید $\mathcal{M}$ زیرفضایی بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\mathrm{P}x$ عضوی از $\mathcal{M}$ باشد به‌طوری‌که همانند قضیهٔ ۵.۲۴، $x - \mathrm{P}x \in \mathcal{M}^{\perp}$.

الف) $\mathrm{P} \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ و با نمادگذاری تمرین ۵۷ داریم $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}$، $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$، $\mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathcal{M}$ و $\mathcal{N}(\mathrm{P}) = \mathcal{M}^{\perp}$.
P **تصویر قائم** بروی $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.

ب) برعکس، فرض‌کنیم $\mathrm{P} \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ در تساوی های $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}^* = \mathrm{P}$ صدق کند. در این صورت $\mathcal{R}(\mathrm{P})$ بسته است و P تصویر قائم بروی $\mathcal{R}(\mathrm{P})$ است.

ج) اگر $\{u_\alpha\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه $\mathrm{P}x = \sum (x, u_\alpha) u_\alpha$.

۵۹) هر مجموعهٔ محدب بسته مانند K در یک فضای هیلبرت عضو یکتایی با نرم مینیمال دارد. (اگر $o \in K$، حکم بدیهی است؛ در غیر این صورت برهان قضیهٔ ۵.۲۴ را بازنویسی کنید.)

۶۰) فرض‌کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. اگر $E \in \mathcal{M}$، $L^2(E,\mu)$ را با زیرفضایی از $L^2(X,\mu)$ یکی می‌گیریم که این زیرفضا شامل توابعی است که بیرون E صفر هستند. اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا در $\mathcal{M}$ با خاصیت $X = \bigcup_1^\infty E_n$ باشد، آنگاه $\{L^2(E_n,\mu)\}$ دنباله‌ای از زیرفضاهای دو به دو متعامد $L^2(X,\mu)$ است و هر $f \in L^2(X,\mu)$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $f = \sum_1^\infty f_n$ نوشت که در آن $f_n \in L^2(X,\mu)$ (سری مذکور نسبت به نرم همگرا است). اگر به ازای هر n، $L^2(E_n,\mu)$ جدایی‌پذیر باشد، $L^2(X,\mu)$ نیز جدایی‌پذیر است.

۶۱) فرض‌کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ دو فضای اندازهٔ σ-متناهی باشند به‌طوری‌که $L^2(\mu)$ و $L^2(\nu)$ جدایی‌پذیر باشند. اگر $\{f_m\}$ و $\{g_n\}$ پایه‌های متعامد یکه‌ای برای $L^2(\mu)$ و $L^2(\nu)$ باشند و $h_{mn}(x,y) = f_m(x) g_n(y)$، آنگاه $\{h_{mn}\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $L^2(\mu \times \nu)$ است.

۶۲) در این تمرین اندازهٔ تعریف کنندهٔ فضای L^2 اندازهٔ لبگ است.

الف) $C([0,1])$ در $L^2([0,1])$ چگال است. (برهان قضیهٔ ۲.۲۶ را بازنویسی کنید.)

ب) مجموعهٔ چند جمله‌ای‌ها در $L^2([0,1])$ چگال است.

ج) $L^2([0,1])$ جدایی‌پذیر است.

د) $L^2(\mathbb{R})$ جدایی‌پذیر است. (تمرین ۶۰ را به کار برید.)

ه) $L^1(\mathbb{R}^n)$ جدایی‌پذیر است. (تمرین ۶۱ را به‌کار برید.)

۶۳) فرض‌کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است.
الف) هر دنبالهٔ متعامد یکه در $\mathcal{H}$ به‌طور ضعیف به 0 همگرا است.
ب) کرهٔ واحد $S = \{x : \|x\| = 1\}$ به‌طور ضعیف در گوی واحد $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ چگال است. (در واقع، هر $x \in B$ حد ضعیف دنباله‌ای در S است.)

۶۴) فرض‌کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد نامتناهی باشد و $\{u_n\}_1^\infty$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $\mathcal{H}$ باشد.
الف) برای $k \in \mathbb{N}$، $L_k \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ را با $L_k(\sum_1^\infty a_n u_n) = \sum_k^\infty a_n u_{n-k}$ تعریف کنید. در این صورت نسبت به توپولوژی عملگری قوی $L_k \to 0$ اما نسبت به توپولوژی نرمی چنین نیست.
ب) برای $k \in \mathbb{N}$، $R_k \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ را با $R_k(\sum_1^\infty a_n u_n) = \sum_1^\infty a_n u_{n+k}$ تعریف کنید. در این صورت نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف $R_k \to 0$ اما نسبت به توپولوژی عملگری قوی چنین نیست.
ج) نسبت به توپولوژی عملگری قوی $R_k L_k \to 0$، اما به ازای هر k، $L_k R_k = I$. (قسمت (ب) از تمرین ۵۳ را به‌کار برید.)

۶۵) $l^2(A)$ به طور یکانی با $l^2(B)$ ایزومورف است اگر و تنها اگر $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

۶۶) فرض کنید $\mathcal{M}$ یک زیرفضای بسته از $L^2([0,1],m)$ باشد که در $C([0,1])$ مشمول است. نشان دهید که:
الف) عددی مانند $C > 0$ وجود دارد که به ازای هر $f \in \mathcal{M}$، $\|f\|_u \leq C\|f\|_{L^2}$. (قضیهٔ نگار بسته را به‌کار برید.)
ب) به ازای هر $x \in [0,1]$ عضوی چون $g_x \in \mathcal{M}$ وجود دارد به طوری‌که به ازای هر $f \in \mathcal{M}$، $f(x) = \langle f, g_x \rangle$ و $\|g_x\|_{L^2} \leq C$.
ج) بعد $\mathcal{M}$ حداکثر C^2 است. (راهنمایی: اگر $\{f_j\}$ دنبالهٔ متعامد یکه ای در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه به ازای هر $x \in [0,1]$، $\sum|f_j(x)|^2 \leq C^2$.)

۶۷) (**قضیهٔ همه سویی میانگین**). فرض‌کنید U یک عملگر یکانی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $\mathcal{M} = \{x : Ux = x\}$، P تصویر متعامد بروی $\mathcal{M}$ باشد (تمرین ۵۸) و $S_n = n^{-1}\sum_0^{n-1} U^j$. در این صورت نسبت به توپولوژی عملگری قوی $S_n \to P$. (اگر $x \in \mathcal{M}$، آنگاه $S_n x = x$؛ اگر به ازای عضوی چون y، $x = y - Uy$، آنگاه $S_n x \to 0$. بنابر قسمت (د) از تمرین ۵۷، $\mathcal{M} = \{x : U^* x = x\}$. قسمت (ج) از تمرین ۵۷ را در مورد $T = I - U$ به‌کار برید.)

۵.۶ یادداشت‌ها و مراجع

آنالیز تابعی مبحث وسیعی است که ما فقط زخمه‌ای به سطح آن زده ایم. برای خوانندگانی که قصد یادگیری بیشتر دارند، رایـد و سیمون [۱۱۲] و رودین [۱۲۶] نقطهٔ خوبی برای شروع کار است؛ بایستی با رساله‌های دانفورد و شـوارتز [۳۵] و یوسـیدا [۱۶۳] نیز آشنا شد.

آنالیز تابعی ریشه در تعدادی مسئلهٔ کلاسیک به‌ویژه در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال دارد. مطالعهٔ فضاهای تابعی بـا بعد نامتناهی خاص تقریباً در سال ۱۹۰۷ با کارهای اف . ریس، فرشه، اشمیت، هلی و دیگران شروع شد و مفهـوم یـک فـضای برداری نرم‌دار مجرد در سال ۱۹۲۰ به وسیلهٔ چند مؤلف در مقالات ظاهر شد. یافته‌های این دههٔ پربار به کتاب کلاسـیک بانـاخ [۹] منجر شده است که ظهور آنالیز تابعی را به‌عنوان یک شاخه ثبت کرده اسـت. شـرح تـاریخی جـامع را در دیودونـه [۳۳] و یاداشت‌های دانفورد و شوارتز می‌توان یافت.

بند ۱.۵: انتگرال توابع با مقادیر برداری که در تمرین ۱۶ مـورد بحـث قـرار گرفـت **انتگـرال بـوخنر** نامیـده مـی‌شـود. فـرض جدایی‌پذیری Y را می‌توان تقلیل داد، اما در این صورت توابع واقع در L^1_Y حتماً باید (پس از تعدیل روی مجموعه‌های پـوچ) برد جدایی‌پذیری داشته باشند. در کهن [۲۷] یا یوسیدا [۱۶۳] شرح مفصل‌تری می‌توان یافت.

راهبرد دیگر به انتگرال‌های با مقدار برداری به صورت زیر است: فرض می کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یـک فـضای انـدازه باشـد و Y فضای برداری توپولوژیکی باشـد کـه روی آن تابعـک هـای خطـی پیوسـته نقـاط را جـدا کننـد. تـابعی چـون $f : X \to Y$ **انتگرال‌پذیر ضعیف** نامیده می‌شود هرگاه الف: برای هر $\phi \in Y^*$، $\phi \circ f \in L^1(\mu)$، و ب: عضوی (لزوماً یکتا) مانـند y از Y وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\phi \in Y^*$، $\int \phi \circ f d\mu = \phi(y)$. در این حالت قرار مـی‌دهـیم $\int f d\mu = y$. اگر Y یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد، انتگرال به این مفهوم با انتگرال بوخنر مطابقت دارد. یوسیدا [۱۶۳] و رودیـن [۱۲۶] را ببینید.

بند۵.۳: قضایای نگاشت باز و نگار بسته به باناخ نسبت داده می‌شوند [۹]. برای شرح جالب رابطهٔ بین برهان‌های قـضیهٔ نگاشت باز و قضیهٔ توسیع تیتسه گراینر [۵۸] را ببینید.

اصل کرانداری یکنواخت، به همان صورتی که در این کتاب آمده است به باناخ و اشتنهاوس [۱۰] منسوب است؛ اما قـسمت دوم قضیه ــ اینکه اگر X یک فضای باناخ باشد و برای هر $x \in X$، $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$، آنگاه $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| < \infty$ ــ به کمک آنچه دیودونه « روش سرخوردن از پشته» نامید اثبات شـده بـود [۳۳]. ایـن اسـتدلال بـسیار زیبـا (و مقـدماتی)، در سال‌های اخیر مورد بی‌اعتنایی زیادی قرار گرفته است، اما شرح نوینی از آن را می‌توان در هنفلد [۷۷] یافت.

وقتی X کامل نباشد ساختن مثال‌هایی از نگاشت های خطی غیرکرانـداری مانـند $T : X \to Y$ از یـک فـضای بـرداری نرم‌دار به فضای برداری نرم‌دار دیگر آسان است (تمرین‌های ۲۹ و ۳۰ را ببینید)، اما وقتی X کامل باشد انجام چنین کاری بـدون استفاده از اصل انتخاب تقریباً غیر ممکن است: با یک نگاشت غیرکراندار مانند $T : X_0 \to Y$ شروع می‌کنیم که در آن X_0

کامل نیست و فرض می کنیم X کامل شدهٔ X_0 باشد. پایه‌ای چون $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ برای X_0 برمی‌گزینیم (بدین معنی که هر $x \in X_0$ یک ترکیب خطی متناهی از u_αها است) و آن را به پایه‌ای چون $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{B}}$ $(\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$ برای X توسیع می‌دهیم. (اینجاست که اصل انتخاب به‌کار می‌آید.) فرض می‌کنیم $\mathcal{M}$ پیمای خطی $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}}$ باشد، لذا هر $x \in X$ را می‌توان به‌طور یکتا به صورت $x = x_0 + x_1$ نوشت که در آن $x_1 \in X_0$ و $x_1 \in \mathcal{M}$. در این صورت با قرار دادن $T(x_0 + x_1) = Tx_0$ می‌توان T را به X توسیع داد.

بند ۵.۴: تروس [۱۵۰] شامل شرحی خواندنی در مورد نظریهٔ عمومی فضاهای برداری توپولوژیک با چند مثال ملموس است.

قضیهٔ الاُغلو که نخستین بار در الاُغلو[۳] ابراز و به طور مفصل در الاُغلو[۴] اثبات شده بود، جای تعدادی از احکام مرتبط با حالات خاص را گرفت. این قضیه مستقل از الاُغلو توسط بورباکی کشف شده بود[۱۹].

بند ۵.۵: فضایی که توسط خود هیلبرت پیش بینی شد $l^2(\mathbb{N})$ بود؛ مفهوم یک فضای هیلبرت مجرد توسط فون نویمن [۱۵۴] در خلال کار ایشان روی ریاضیات مکانیک کوانتوم ارائه شده بود.

سرمنشأ قضیهٔ ۵.۲۵ در سطح قضایای L^2 به اف. ریس نسبت داده شده است. این قضیه یکی از چندین قضیهٔ نمایش تابعک‌های خطی روی فضاهای مختلفی است که نامش را یدک می‌کشد، بقیهٔ قضایا ۶.۱ و ۷.۱ می‌باشند. برای پرهیز از سردرگمی، نام «قضیهٔ نمایش ریس» را برای دوتای اخیر که نسبتاً مرتبط هستند رزرو می‌کنیم. در کتاب‌های فیزیک کوانتوم، بنا بر عادت ضرب‌های اسکالر با $\langle x|y\rangle$ نشان داده می‌شوند و نسبت به متغیر دوم خطی و نسبت به مؤلفهٔ اول خطی ــ مختلط است.

فصل ششم
فضاهای L^p

فضاهای L^p رسته‌ای از فضاهای باناخ هستند که از توابع تشکیل شده‌اند و نرم آنها بر حسب انتگرال‌ها تعریف می‌شوند و فضاهای L^1 بحث شده در فصل ۲ را تعمیم می‌دهند. این فضاها مثال‌های جالبی از نظریهٔ کلی فصل ۵ فراهم آورده و نقشی اساسی در آنالیز نوین ایفا می‌کنند.

۶.۱ نظریه بنیادی فضاهای L^p

در این فصل روی فضای اندازهٔ ثابتی مانند $(X,\mathcal{M},\mu)$ کار خواهیم کرد. چنانچه f تابع اندازه‌پذیری روی X باشد و $0<p<\infty$، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p=[\int|f|^p\,d\mu]^{\frac{1}{p}}$$

(حالت $\|f\|_p=\infty$ منتفی نیست) و

$$L^p(X,\mathcal{M},\mu)=\{f:X\to\mathbb{C}:\|f\|_p<\infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیر است}\}.$$

$L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ را به $L^p(\mu)$ یا $L^p(X)$ یا حتی به L^p خلاصه می‌کنیم به‌شرطی‌که حالت اخیر ابهام ایجاد نکند.

همانند آنچه در L^1 داشتیم دو تابع را اعضای یکسانی از L^p تعریف می‌کنیم هرگاه این دو تابع تقریباً همه جا برابر باشند. اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد، $l^p(A)$ را $L^p(\mu)$ تعریف می‌کنیم که در آن μ اندازهٔ شمارشی روی $(A,\mathcal{P}(A))$ است و $l^p(\mathbb{N})$ را به‌طور خلاصه با l^p نشان می‌دهیم.

L^p یک فضای برداری است، زیرا اگر $f,g\in L^p$ آنگاه

$$|f+g|^p\le[2\max(|f|,|g|)]^p\le 2^p(|f|^p+|g|^p).$$

بنابر این $f+g\in L^p$. نمادگذاری فوق حکایت از این دارد که $\|\cdot\|_p$ یک نرم روی L^p است. در واقع واضح است که $\|f\|_p=0$ اگر و تنها اگر $f=0$ ت.ه. و $\|cf\|_p=|c|\|f\|_p$. تنها مسئله‌ای که مطرح می‌شود نامساوی مثلثی است. معلوم می‌شود که نامساوی مثلثی دقیقاً زمانی معتبر است که $p\ge 1$، لذا توجه خود را منحصراً به همین حالت معطوف خواهیم کرد.

اما قبل از هر اقدام دیگر، بگذارید ببینیم چرا نامساوی مثلثی برای $p<1$ درست نیست. فرض می‌کنیم $a>0$، $b>0$ و $0<p<1$. برای $t>0$ داریم $t^{p-1}>(a+t)^{p-1}$ و با انتگرالگیری از 0 تا b به‌دست می‌آوریم $a^p+b^p>(a+b)^p$. بنابر این، اگر E و F مجموعه‌هایی مجزا از اندازه‌های متناهی مثبت در X باشند و قرار دهیم $a=\mu(E)^{\frac{1}{p}}$ و $b=\mu(F)^{\frac{1}{p}}$، می‌بینیم که

$$\|\chi_E+\chi_F\|_p=(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}>a+b=\|\chi_E\|_p+\|\chi_F\|_p.$$

سنگ بنای نظریهٔ فضاهای L^p، نامساوی هولدر است، که هم اکنون آن را استخراج می‌کنیم.

۶.۱ لم. اگر $a\geq 0$، $b\geq 0$ و $0<\lambda<1$، آنگاه $a^\lambda b^{1-\lambda}\leq \lambda a+(1-\lambda)b$ و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=b$.

برهان. اگر $b=0$، حکم بدیهی است؛ در غیر این صورت، با تقسیم طرفین بر b و با قرار دادن $t=\frac{a}{b}$، مسئله به این تقلیل می‌یابد که نشان دهیم $t^\lambda\leq\lambda t+(1-\lambda)$ و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $t=1$. اما بنابر حسابان مقدماتی، $t^\lambda-\lambda t$ برای $t<1$ اکیداً صعودی و برای $t>1$ اکیداً نزولی است، لذا مقدار ماکسیمم آن، یعنی $1-\lambda$ در $t=1$ رخ می‌دهد. ■

۶.۲ نامساوی هولدر. فرض می‌کنیم $1<p<\infty$ و $p^{-1}+q^{-1}=1$ (یعنی $q=\frac{p}{p-1}$). اگر f و g توابع اندازه‌پذیری روی X باشند، آنگاه

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q. \qquad (۶.۳)$$

به‌ویژه، اگر $f\in L^p$ و $g\in L^q$، آنگاه $fg\in L^1$ و در این حالت تساوی در (۶.۳) فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که به ازای ثابت‌های ناصفری چون α و β، $\alpha|f|^p=\beta|g|^q$ ت.ه.

برهان. اگر $\|f\|_p=0$ یا $\|g\|_q=0$، حکم بدیهی است (زیرا در این حالت $f=0$ ت.ه یا $g=0$ ت.ه)، حکم در حالتی که $\|f\|_p=\infty$ یا $\|g\|_q=\infty$ نیز بدیهی است. به‌علاوه، ملاحظه می‌کنیم که اگر (۶.۳) برای توابع خاصی مانند f و g برقرار باشد، آنگاه برای هر مضرب اسکالر از f و g نیز برقرار است، زیرا اگر f و g را با af و bg جایگزین کنیم، هر دو طرف (۶.۳) با یک ضریب از $|ab|$ تغییر می‌یابد. بنابر این کافی است ثابت کنیم وقتی $\|f\|_p=\|g\|_q=1$ نامساوی (۶.۳) برقرار است و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $|f|^p=|g|^q$ ت.ه. به این منظور، لم ۶.۱ را با $a=|f(x)|^p$، $b=|g(x)|^q$ و $\lambda=p^{-1}$ به‌کار بسته و به‌دست می‌آوریم:

$$|f(x)g(x)|\leq p^{-1}|f(x)|^p+q^{-1}|g(x)|^q. \qquad (۶.۴)$$

انتگرال‌گیری از دو طرف به‌دست می‌دهد:

$$\|fg\|_1 \leq p^{-1}\int|f|^p + q^{-1}\int|g|^q = p^{-1}+q^{-1} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

در اینجا تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که تساوی در (۶.۴) ت. ه. برقرار باشد، و بنابر لم ۶.۱ این دقیقاً وقتی اتفاق می‌افتد که $|f|^p = |g|^q$ ت. ه. ■

شرط $p^{-1}+q^{-1}=1$ که در نامساوی هولدر ظاهر شد، در نظریهٔ فضاهای L^p خیلی دیده می‌شود. اگر $1<p<\infty$، عدد $q=\frac{p}{p-1}$ به‌طوری‌که $p^{-1}+q^{-1}=1$ **نمای مزدوج** با p نامیده می‌شود.

۶.۵ نامساوی مینکوفسکی. اگر $\boxed{1\leq p<\infty}$ و $f,g\in L^p$، آنگاه

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

برهان. اگر $p=1$ یا $f+g=0$ ت. ه.، حکم بدیهی است. در غیر این صورت، ملاحظه می‌کنیم که

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}$$

و نامساوی هولدر را به‌کار می‌بریم؛ فقط توجه می‌کنیم که وقتی q نمای مزدوج با p است داریم $(p-1)q=p$ و لذا

$$\int |f+g|^p \leq \|f\|_p \left\||f+g|^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\||f+g|^{p-1}\right\|_q$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\underbrace{\left(\int|f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{طرفین را بر این تقسیم کنیم}} .$$

بنابر این،

$$\|f+g\|_p = \left[\int|f+g|^p\right]^{1-\frac{1}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p . ■$$

این حکم نشان می‌دهد که برای $p\geq 1$، L^p یک فضای برداری نرمدار است. حتی حکمی قوی‌تر از اینها درست است:

۶.۶ قضیه. برای $1\leq p<\infty$، L^p یک فضای باناخ است.

برهان. قضیهٔ ۵.۱ را به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم $\{f_k\}\subset L^p$ و $\sum_1^\infty\|f_k\|_p = B<\infty$. قرار می‌دهیم $G_n=\sum_1^n|f_k|$ و $G=\sum_1^\infty|f_k|$. در این صورت برای هر n، $\|G_n\|_p \leq \sum_1^n\|f_k\|_p \leq B$، لذا بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا، $\int G^p = \lim\int {G_n}^p \leq B^p$. بنابر این $G\in L^p$ و مخصوصاً $G(x)<\infty$ ت. ه. و این هم ایجاب می‌کند که سری $\sum_1^\infty f_k$ ت.ه. همگرا است. با نمایش این سری با F، داریم $|F|\leq G$ و از این رو $F\in L^p$؛ به‌علاوه،

$$\left|F-\sum_{1}^{n} f_k\right|^p \leq (2G)^p \in L^1.$$

لذا بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب،

$$\left\|F-\sum_{1}^{n} f_k\right\|_p^p = \int \left|F-\sum_{1}^{n} f_k\right|^p \to 0.$$

بنابر این سری $\sum_{1}^{\infty} f_k$ با نرم L^p همگرا است. ■

۶.۷ گزاره. برای $1 \leq p < \infty$، مجموعهٔ توابع سادهٔ $f = \sum_{1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ که در آن برای هر j، $\mu(E_j) < \infty$، در L^p چگال است.

برهان. به‌وضوح چنین توابعی در L^p هستند. اگر $f \in L^p$، آنگاه مطابق با قضیهٔ ۲.۱۰، دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ از توابع ساده انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $f_n \to f$ ت.ه. و $|f_n| \leq |f|$. در این صورت $f_n \in L^p$ و $|f_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in L^1$، لذا بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب، $\|f_n - f\|_p \to 0$. به‌علاوه، هرگاه $f_n = \sum a_j \chi_{E_j}$، که در آن E_jها مجزا و a_jها غیر صفرند، باید داشته باشیم $\mu(E_j) < \infty$ زیرا $\sum |a_j|^p \mu(E_j) = \int |f_n|^p < \infty$. ■

برای تکمیل چهرهٔ فضاهای L^p، فضایی متناظر با مقدار حدی $p = \infty$ می‌سازیم اگر f تابع اندازه‌پذیری روی X باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

با این قرارداد که $\inf \varnothing = \infty$. ملاحظه می‌کنیم که اینفیمم عملاً حاصل می‌شود زیرا

$$\{x : |f(x)| > a\} = \bigcup_{1}^{\infty} \{x : |f(x)| > a + n^{-1}\},$$

و اگر مجموعه‌های طرف راست پوچ باشند، سمت چپ نیز پوچ است. $\|f\|_\infty$ **سوپرمم اساسی** $|f|$ نامیده شده و گاهی از اوقات به صورت

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$$

نوشته می‌شود. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty \text{ و } f \text{ اندازه‌پذیر است}\}$$

با این قرداد متداول که دو تابع تقریباً همه جا برابر اعضای یکسانی از L^∞ هستند. بنابر این $f \in L^\infty$ اگر و تنها اگر تابع اندازه‌پذیری مانند g وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f = g$ ت. ه؛ می‌توان g را چنین گرفت: $g = f\chi_E$ که در آن $E = \{x : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\}$.

دو نکته: اولاً، اگر X و $\mathcal{M}$ ثابت باشند، آنگاه $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ فقط تا جایی به μ وابسته است که μ مشخص کند که کدام مجموعه‌ها دارای اندازهٔ صفرند؛ اگر μ و ν مشترکاً پیوستهٔ مطلق باشند، آنگاه $L^\infty(\mu) = L^\infty(\nu)$. ثانیاً، هرگاه μ نیمه متناهی

نباشد، به دلیلی مقتضی است که تعریف متفاوتی برای L^∞ ارائه شود. این نکته در تمرین‌های ۲۳ تا ۲۵ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

احکامی که برای $1 \leq p < \infty$ اثبات کرده‌ایم به آسانی و به صورت زیر به حالت $p = \infty$ تعمیم می‌یابند:

۶.۸ قضیه.

الف) اگر f و g توابع اندازه‌پذیری روی X باشند، آنگاه $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. چنانچه $f \in L^1$ و $g \in L^\infty$، $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ اگر و تنها اگر روی مجموعه‌ای که در آن $f(x) \neq 0$ داشته باشیم $|g(x)| = \|g\|_\infty$ ت.ه.

ب) $\|\cdot\|_\infty$ یک نرم روی L^∞ است.

ج) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ اگر و تنها اگر عضوی چون E از $\mathcal{M}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu(E^c) = 0$ و $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر E.

د) L^∞ یک فضای باناخ است.

ه) مجموعهٔ توابع ساده در L^∞ چگال است.

برهان به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲).

★ با توجه به قسمت (الف) از قضیهٔ ۶.۸ و تساوی صوری $1 = 1^{-1} + \infty^{-1}$، طبیعی است که ۱ و ∞ را به عنوان نماهای مزدوج یکدیگر در نظر بگیریم و از این به بعد چنین چیزی را به‌کار می‌بریم. قسمت (ج) از قضیهٔ ۶.۸ نشان می‌دهد که $\|\cdot\|_\infty$ نزدیک و وابسته به نرم یکنواخت $\|\cdot\|_u$ است اما همیشه برابر نیستند. البته، اگر با اندازهٔ لبگ یا به‌طور کلی با هر اندازهٔ برلی سر و کار داشته باشیم که به همهٔ مجموعه‌های باز مقادیر مثبت نسبت دهد، آنگاه برای fهای پیوسته داریم $\|f\|_u = \|f\|_\infty$ زیرا $\{x : |f(x)| > a\}$ باز است. با این تفاسیر می‌توانیم نمادهای $\|f\|_\infty$ و $\|f\|_u$ را به‌جای یکدیگر به‌کار بریم و فضای توابع پیوستهٔ کراندار را به عنوان زیرفضایی (بسته!) از L^∞ در نظر بگیریم. به‌طور کلی، برای هر $p \neq q$ داریم $L^p \not\subset L^q$؛ برای مشاهدهٔ معضل مورد بحث، مثال‌های سادهٔ زیر روی $(0, \infty)$ با اندازهٔ لبگ آموزنده است. فرض کنیم $f_a(x) = x^{-a}$، که در آن $a > 0$. به کمک حسابان مقدماتی می‌توان نشان داد که $f_a \chi_{(0,1)} \in L^p$ اگر و تنها اگر $p < a^{-1}$ و $f_a \chi_{(1,\infty)} \in L^p$ اگر و تنها اگر $p > a^{-1}$. بنابر این دو دلیل برای این دیده می‌شود که تابعی چون f در L^p نباشد: یا $|f|^p$ نزدیک یک نقطه خیلی سریع نوسان می‌کند یا با سرعت کافی در بینهایت تحلیل نمی‌رود. در حالت اول، وقتی p نزول می‌کند رفتار $|f|^p$ بدتر می‌شود در حالی‌که در دومی بهتر می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $p < q$، توابع واقع در L^p می‌توانند موضعاً غیر عادی‌تر از توابع واقع در L^q باشند، حال آنکه توابع واقع در L^q می‌توانند به‌طور سراسری گسترده‌تر از توابع واقع در L^p باشند. همین ایده‌های بیان شدهٔ نسبتاً نادقیق، عملاً الگوی نسبتاً دقیقی برای وضعیت کلی هستند و هم اینک در مورد آن، چهار حکم دقیق می‌آوریم. دو مورد آخر نشان می‌دهند که تحت شرایطی روی فضای اندازه که یکی از انواع رفتارهای نابهنجار توصیف شدهٔ فوق را رفع کنند می‌توان جزئیت $L^p \subset L^q$ را به‌دست آورد؛ برای حکمی کلی‌تر، تمرین ۵ را ببینید.

۶ . ۹ گزاره. اگر $0 < p < q < r \le \infty$، آنگاه $L^q \subset L^p + L^r$؛ یعنی، هر $f \in L^q$ مجموع یک تابع در L^p و یک تابع در L^r است.

برهان. برای $f \in L^q$ فرض می‌کنیم $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ و قرار می‌دهیم $g = f\chi_E$ و $h = f\chi_{E^c}$. در این صورت $|g|^p = |f|^p \chi_E \le |f|^q \chi_E$، لذا $g \in L^p$ و $|h|^r = |f|^r \chi_{E^c} \le |f|^q \chi_{E^c}$. بنابر این $h \in L^r$. (واضح است که برای $r = \infty$، $\|h\|_\infty \le 1$.) ■

۶ . ۱۰ گزاره. اگر $0 < p < q < r \le \infty$، آنگاه $L^p \cap L^r \subset L^q$ و

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

که در آن $\lambda \in (0,1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}$، یعنی، $q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1-\lambda) r^{-1}$.

برهان. هرگاه $r = \infty$، داریم $|f|^q \le \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p$ و $\lambda = \frac{p}{q}$، لذا

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda}$$

چنانچه $r < \infty$، نماهای مزدوج را $\frac{p}{\lambda q}$ و $\frac{r}{(1-\lambda) q}$ گرفته و از قضیهٔ هولدر استفاده می‌کنیم:

$$\int |f|^q = \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda) q} \le \left\| |f|^{\lambda q} \right\|_{\frac{p}{\lambda q}} \left\| |f|^{(1-\lambda) q} \right\|_{\frac{r}{(1-\lambda) q}}$$

$$= \left[\int |f|^p\right]^{\frac{\lambda q}{p}} \left[\int |f|^r\right]^{\frac{(1-\lambda) q}{r}} = \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda) q}.$$

با ریشهٔ qام گرفتن به حکم می‌رسیم. ■

۶ . ۱۱ گزاره. اگر A مجموعه ای دل‌خواه باشد و $0 < p < q \le \infty$، آنگاه $l^p(A) \in l^q(A)$ و $\|f\|_q \le \|f\|_p$.

برهان. به وضوح $\|f\|_\infty^p = \sup_\alpha |f(\alpha)|^p \le \sum_\alpha |f(\alpha)|^p$، لذا $\|f\|_\infty \le \|f\|_p$. حالت $q < \infty$ از گزارهٔ ۶ . ۱۰ نتیجه می‌شود: اگر $\lambda = \frac{p}{q}$، آنگاه

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_\infty^{1-\lambda} \le \|f\|_p . \blacksquare$$

۶ . ۱۲ گزاره. اگر $\mu(X) < \infty$ و $0 < p < q \le \infty$، آنگاه $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ و $\|f\|_p \le \|f\|_q \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

$|f|^p \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X \|f\|_\infty \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

برهان. اگر $q=\infty$، حکم بدیهی است:

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \int 1 = \|f\|_\infty^p \, \mu(X).$$

چنانچه $q<\infty$، از نامساوی هولدر با نماهای مزدوج $\frac{q}{p}$ و $\frac{q}{q-p}$ استفاده می‌کنیم:

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \cdot 1 \leq \left\| |f|^p \right\|_{\frac{p}{q}} \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q^p \, \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}. \blacksquare$$

این بخش را با چند نکته دربارهٔ اهمیت فضاهای L^p به پایان می‌رسانیم. واضح است که سه تا از مهمترین این فضاها L^1، L^2 و L^∞ هستند. از قبل با L^1 آشنایی داریم؛ L^2 خاص است زیرا یک فضای هیلبرت است و توپولوژی L^∞ بسیار نزدیک و وابسته به توپولوژی همگرایی یکنواخت است. متأسفانه L^1 و L^∞ از چند لحاظ نارسایی دارند و ارتباط برقرار کردن بین آنها و L^pهای میانی ثمراتی دارد. نظریهٔ دوگان‌ها در بند ۲ . ۶ نمودی از این مطلب است؛ نشان دیگری از این نقص مذکور، این است که تعدادی عملگر مشترک در آنالیز فوریه و معادلات دیفرانسیل برای $1<p<\infty$ روی L^p کراندار هستند اما روی L^1 یا L_∞ کراندار نیستند. (چند مثال در بند ۴ . ۹ ذکر خواهد شد.)

تمرین‌ها

۱) چه موقعی در نامساوی مینکوفسکی تساوی برقرار می‌شود؟ (پاسخ برای $p=1$ و برای $1<p<\infty$ متمایز است. در مورد $p=\infty$ چطور؟)

۲) قضیهٔ ۸ . ۶ را ثابت کنید.

۳) اگر $1 \leq p < r \leq \infty$، آنگاه $L^p \cap L^r$ با نرم $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$ یک فضای باناخ است و هرگاه $p<q<r$، نگاشت احتوای $L^p \cap L^r \to L^q$ پیوسته است.

۴) اگر $1 \leq p < r \leq \infty$، آنگاه $L^p + L^r$ با نرم

$$\|f\| = \inf\{\|g\|_p + \|h\|_r : f = g+h\}$$

یک فضای باناخ است و هرگاه $p<q<r$، نگاشت احتوای $L^q \to L^p + L^r$ پیوسته است.

۵) فرض کنیم $0<p<q<\infty$. در این صورت $L^p \not\subset L^q$ اگر و تنها اگر X شامل مجموعه‌هایی با اندازهٔ به دل‌خواه کوچک باشد و $L^q \not\subset L^p$ اگر و تنها اگر X شامل مجموعه‌هایی با اندازهٔ متناهی به دل‌خواه بزرگ باشد. (در رابطه با لزوم شرط توجه

کنید که در حالت نخست دنباله‌ای مجزا مانند $\{E_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$ و در حالت دوم دنباله‌ای مجزا مانند $\{E_n\}$ وجود دارد که $1 \leq \mu(E_n) < \infty$. $f = \sum a_n \chi_{E_n}$ را با ثابت‌های مناسب a_n در نظر بگیرید.) در مورد حالت $q = \infty$ چطور؟

۶) فرض کنید $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. مثال‌هایی از توابع f روی $(0,\infty)$ (با اندازهٔ لبگ) بیابید به‌طوری‌که $f \in L^p$ اگر و تنها اگر:

الف) $p_0 < p < p_1$؛

ب) $p_0 \leq p \leq p_1$؛

ج) $p = p_0$. (توابع به شکل $f(x) = x^{-a}|\log x|^b$ را در نظر بگیرید.)

۷) اگر برای یک $p < \infty$، $f \in L^p \cap L^\infty$ و در نتیجه برای هر $q > p$، $f \in L^q$، آنگاه $\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|f\|_q$.

۸) فرض کنید $\mu(X) = 1$ و برای $p > 0$، $f \in L^p$ و در نتیجه برای هر $0 < q < p$، $f \in L^q$. نشان دهید که:

الف) $\log\|f\|_q \geq \int \log|f|$. (قسمت (د) از تمرین ۴۲ از بند ۵.۳ را با فرض $F(t) = e^t$ به کار برید.)

ب) $\frac{1}{q}\left(\int|f|^q - 1\right) \geq \log\|f\|_q$ و وقتی $q \to 0$، $\frac{1}{q}\left(\int|f|^q - 1\right) \to \int \log|f|$.

ج) $\lim_{q\to 0} \|f\|_q = \exp\left(\int \log|f|\right)$.

۹) فرض کنید $1 \leq p < \infty$. اگر $\|f_n - f\|_p \to 0$، آنگاه $f_n \to f$ در اندازه، و بنابر این $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه جا به f همگرا است. از طرف دیگر، اگر $f_n \to f$ در اندازه و برای هر n، $|f_n| \leq g \in L^p$، آنگاه $\|f_n - f\|_p \to 0$.

۱۰) فرض کنید $1 \leq p < \infty$. اگر $f_n, f \in L^p$ و $f_n \to f$ ت.ه.، آنگاه $\|f_n - f\|_p \to 0$ اگر و تنها اگر $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.
(تمرین ۲۰ از بند ۳.۲ را به‌کار برید.)

۱۱) چنانچه f تابع اندازه‌پذیری روی X باشد، برد اساسی R_f از f را مجموعهٔ همهٔ z هایی از $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ $\{x : |f(x) - z| < \varepsilon\}$ اندازهٔ مثبتی دارد.

الف) R_f بسته است.

ب) اگر $f \in L^\infty$، آنگاه R_f فشرده است و $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$.

۱۲) اگر $p \neq ۲$، نرم L^p از روی یک حاصلضرب داخلی روی L^p به‌دست نمی‌آید مگر در حالت بدیهی $\dim(L^p) \leq ۱$. (نشان دهید که قانون متوازی‌الاضلاع (در اینجا) نادرست است.)

۱۳) برای $۱ \leq p < \infty$، فضای $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ جدایی‌پذیر است. اما $L^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ جدایی‌پذیر نیست. (مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر مانند $\mathcal{F} \subset L^\infty$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f, g \in \mathcal{F}$ که $f \neq g$، $\|f-g\|_\infty \geq ۱$.)

۱۴) اگر $g \in L^\infty$، آنگاه عملگر T که با $Tf = fg$ تعریف می‌شود برای $۱ \leq p \leq \infty$ روی L^p کراندار است. نرم عملگری T حد اکثر $\|g\|_\infty$ است و اگر μ نیمه متناهی باشد تساوی رخ می‌دهد.

۱۵) (قضیهٔ همگرایی ویتالی) فرض‌کنیم $۱ \leq p < \infty$ و $\{f_n\}_۱^\infty \subset L^p$. برای کشی بودن $\{f_n\}$ نسبت به نرم L^p لازم و کافی است سه شرط زیر برقرار باشند:

الف) $\{f_n\}$ در اندازه کشی باشد؛

ب) دنبالهٔ $\{|f_n|^p\}$ به‌طور یکنواخت انتگرال‌پذیر باشد (تمرین ۱۱ از بند ۲ . ۳ را ببینید)؛ و

ج) برای هر $\varepsilon > ۰$ مجموعه‌ای چون $E \subset X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu(E) < \infty$ و برای هر n، $\int_{E^c} |f_n|^p < \varepsilon$. (برای اثبات کفایت: $\varepsilon > ۰$ را مفروض گرفته و E را همان مجموعهٔ ذکر شده در (ج) بینگارید و قرار دهید $A_{mn} = \{x \in E : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. در این صورت به سه دلیل متفاوت، وقتی m و n بزرگ می‌شوند انتگرال‌های $|f_n - f_m|^p$ روی $E \setminus A_{mn}$، A_{mn} و E^c بزرگ می‌شوند.)

۱۶) اگر $۰ < p < ۱$، آنگاه فرمول $\rho(f,g) = \int |f-g|^p$ یک متر روی L^p تعریف می‌کند که این متر L^p را به یک فضای برداری توپولوژیک کامل تبدیل می‌کند (برای $p < ۱$، هرگاه $\|f\|_p$ را با $\int |f|^p$ جایگزین کنیم باز هم برهان گزارهٔ ۶ . ۶ کارایی دارد زیرا در این برهان فقط از نامساوی مثلثی استفاده شده است نه تجانس بودن نرم.)

دوگان L^p

فرض کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند. نامساوی هولدر نشان می‌دهد که هر $g \in L^q$ یک تابعک خطی کراندار مانند ϕ_g روی L^p با ضابطهٔ

$$\phi_g(f) = \int fg$$

تعریف می‌کند و نرم عملگری ϕ_g حد اکثر $\|g\|_q$ است. (اگر $p=۲$ و $L^۲$ را به صورت فضای هیلبرت تصور کنیم، تعریفِ $\phi_g(f)=\int f\bar{g}$ مناسب‌تر است. همین قرار داد را می‌توان برای $p\neq ۲$ به‌کار برد بدون آنکه در احکام زیرین از نظر ماهیت روش تغییری ایجاد شود.) در واقع، نگاشت $g\to\phi_g$ تقریباً همیشه یک ایزومتری از L^q به‌توی $(L^p)^*$ است.

۱۳ . ۶ گزاره. فرض‌کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند و $۱\le q<\infty$. اگر $g\in L^q$، آنگاه

$$\|g\|_q=\|\phi_g\|=\sup\left\{\left|\int fg\right|:\|f\|_p=۱\right\}.$$

چنانچه μ نیمه متناهی باشد، حکم در حالت $q=\infty$ نیز برقرار است.

برهان. از نامساوی هولدر معلوم می‌شود که $\|\phi_g\|\le\|g\|_q$ و اگر $g=۰$ ت.ه.، تساوی بدیهی است. هرگاه $g\neq ۰$ و $q<\infty$ فرض می‌کنیم

$$f=\frac{|g|^{q-۱}\overline{\operatorname{sgn} g}}{\|g\|_q^{q-۱}}.$$

در این صورت

$$\|f\|_p^p=\frac{\int|g|^{(q-۱)p}}{\|g\|_q^{(q-۱)p}}=\frac{\int|g|^q}{\int|g|^q}=۱,$$

لذا

$$\|\phi_g\|\ge\int fg=\frac{\int|g|^q}{\|g\|_q^{q-۱}}=\|g\|_q.$$

(اگر $q=۱$، آنگاه $f=\overline{\operatorname{sgn} g}$، $\|f\|_\infty=۱$ و $\int fg=\|g\|_۱$.) هرگاه $q=\infty$، برای $\varepsilon>۰$ فرض‌می‌کنیم $A=\{x:|g(x)|>\|g\|_\infty-\varepsilon\}$. در این صورت $\mu(A)>۰$، لذا اگر μ نیمه متناهی باشد، $B\subset A$ چنان وجود دارد که $۰<\mu(B)<\infty$. فرض می‌کنیم $f=\mu(B)^{-۱}\chi_B\overline{\operatorname{sgn} g}$؛ در این صورت $\|f\|_۱=۱$، لذا

$$\|\phi_g\|\ge\int fg=\frac{۱}{\mu(B)}\int_B|g|\ge\|g\|_\infty-\varepsilon.$$

چون ε دل‌خواه است، $\|\phi_g\|=\|g\|_\infty$. ■

برعکس، اگر $f\to\int fg$ یک تابعک خطی کراندار روی L^p باشد، آنگاه در همهٔ حالات $g\in L^q$. در واقع، حکم قوی‌تری برقرار است :

۶.۱۴ قضیه. فرض‌کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند. به علاوه، g را تابع اندازه‌پذیری روی X می‌انگاریم به‌طوری‌که برای هر f در فضای Σ متشکل از توابع ساده‌ای که خارج از مجموعه‌ای با اندازهٔ متناهی صفر هستند کمیت

یعنی توابع پله‌ای؟

$$M_q(g) \doteq \sup\left\{\left|\int fg\right| : f \in \Sigma,\ \|f\|_p = 1\right\}$$

متناهی است، عضویت $fg \in L^1$ برقرار باشد. همچنین، فرض‌می‌کنیم $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ یک مجموعهٔ σـ متناهی باشد یا μ نیمه متناهی باشد. در این صورت $g \in L^q$ و $\|g\|_q = M_q(g)$.

برهان. ابتدا یاد آوری می‌کنیم که اگر f تابع اندازه‌پذیر کرانداری باشد که خارج از مجموعه‌ای با اندازهٔ متناهی مانند E صفر است و $\|f\|_p = 1$، آنگاه $\left|\int fg\right| \leq M_q(g)$. در واقع، بنابر گزارهٔ ۲.۱۰ دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که $|f_n| \leq |f|$ (بالاخص، f_nها خارج از E صفر هستند) و $f_n \to f$ ت.ه. حال چون $|f_n| \leq \|f\|_\infty \chi_E$ و $\chi_E g \in L^1$، بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب داریم: $\left|\int fg\right| = \lim\left|\int f_n g\right| \leq M_q(g)$.

اینک فرض می‌کنیم $q < \infty$. می‌توان S_g را σـ متناهی انگاشت، در صورت نیمه متناهی بودن μ این شرط خود به خود برقرار می‌شود؛ تمرین ۱۷ را ببینید. فرض می‌کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌هایی با اندازه‌های متناهی باشد به طوری که $S_g = \bigcup_1^\infty E_n$. $\{\phi_n\}$ را دنباله‌ای از توابع ساده می‌انگاریم به‌طوری‌که $\phi_n \to g$ نقطه به نقطه و $|\phi_n| \leq |g|$. سپس قرار می‌دهیم $g_n = \phi_n \chi_E$. در این صورت $g_n \to g$ نقطه به نقطه، $|g_n| \leq |g|$ و g_n خارج از E_n صفر است. حال قرار می‌دهیم:

$$f_n = \frac{|g_n|^{q-1}\,\overline{\operatorname{sgn} g}}{\|g_n\|_q^{q-1}}.$$

در این صورت همانند برهان ۶.۱۳ داریم $\|f_n\|_p = 1$ و بنابر لم فاتو

$$\|g\|_q \leq \liminf \|g_n\|_q = \liminf \int |f_n g_n| \leq \liminf \int |f_n g| = \liminf \int f_n g \leq M_q(g).$$

(برای به‌دست آوردن آخرین نامساوی از یادآوری آغاز برهان استفاده کرده‌ایم.) از طرف دیگر، از نامساوی هولدر معلوم می‌شود که $M_q(g) \leq \|g\|_q$، لذا برهان برای حالت $q < \infty$ کامل است. اینک فرض می‌کنیم $q = \infty$. $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و قرار می‌دهیم: $A = \{x : |g(x)| \geq M_\infty(g) + \varepsilon\}$. اگر $\mu(A)$ مثبت بود می‌توانستیم $B \subset A$ را طوری انتخاب کنیم که $0 < \mu(B) < \infty$ (این یا به خاطر نیمه متناهی بودن μ است یا به خاطر این است که $A \subset S_g$). در نتیجه با قرار دادن $f = \mu(B)^{-1}\chi_B \overline{\operatorname{sgn} g}$ بایستی داشته‌باشیم $\|f\|_1 = 1$ و $\int fg = \mu(B)^{-1}\int_B |g| \geq M_\infty(g) + \varepsilon$. اما بنابر یادآوری ابتدای برهان، چنین چیزی ممکن نیست. بنابر این $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$ و نامساوی عکس بدیهی است. ■

(آخرین و عمیق‌ترین توصیف $(L^p)^*$ این است که نگاشت $g \to \phi_g$ تقریباً در همهٔ حالات پوشا است)

۶ . ۱۵ گزاره. فرض‌کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند. هرگاه $1 < p < \infty$، برای هر $\phi \in (L^p)^*$ عضوی چون g از L^q وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in L^p$، $\phi(f) = \int fg$ و در نتیجه L^q به‌طور ایزومتریک با $(L^p)^*$ ایزومورف است. همین حکم برای $p = 1$ نیز برقرار است مشروط بر اینکه μ یک اندازهٔ σـ متناهی باشد.

برهان. نخست فرض می‌کنیم μ متناهی است و به همین سبب همهٔ توابع ساده در L^p هستند. اگر $\phi \in (L^p)^*$ و E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، فرض می‌کنیم $\nu(E) = \phi(\chi_E)$. برای هر دنبالهٔ مجزا مانند $\{E_j\}$، اگر $E = \bigcup_1^\infty E_j$، آنگاه $\chi_E = \sum_1^\infty \chi_{E_j}$ که در آن سری با نرم L^p همگرا است:

$$\left\|\chi_E - \sum_1^n \chi_{E_j}\right\|_p = \left\|\sum_{n+1}^\infty \chi_{E_j}\right\|_p = \mu\left(\bigcup_{n+1}^\infty E_j\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$ وقتی $n \to \infty$.

(در این راستا به فرض $p < \infty$ نیاز داریم.) حال چون ϕ خطی و پیوسته است،

$$\nu(E) = \sum_1^\infty \phi(\chi_{E_j}) = \sum_1^\infty \nu(E_j),$$

بنابر این ν یک اندازهٔ مختلط است. همچنین، اگر $\mu(E) = 0$، آنگاه χ_E به عنوان عضوی از L^p مساوی با صفر است لذا $\nu(E) = 0$؛ یعنی $\nu \ll \mu$. بنابر قضیهٔ رادون ــ نیکودیوم عضوی مانند g از $L^1(\mu)$ وجود دارد که برای هر E، $\phi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g d\mu$ و در نتیجه برای هر تابع ساده مانند f، $\phi(f) = \int fg d\mu$. به‌علاوه، $\left|\int fg\right| \le \|\phi\| \|f\|_p$. لذا بنابر قضیهٔ ۶ . ۱۴، $g \in L^q$. این را از قبل می‌دانستیم. از گزارهٔ ۶ . ۷ نتیجه می‌شود که برای هر $f \in L^p$، $\phi(f) = \int fg$. اکنون فرض می‌کنیم که μ یک اندازهٔ σــ متناهی باشد. $\{E_n\}$ را دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌هایی می‌گیریم که در آن $0 < \mu(E_n) < \infty$ و فرض می‌کنیم $X = \bigcup_1^\infty E_n$ و توافق می‌کنیم که $L^p(E_n)$ و $L^q(E_n)$ را با زیرفضاهایی از $L^p(X)$ و $L^q(X)$ یکی بگیریم که اعضایشان خارج از E_n صفر هستند. استدلال قبل نشان می‌دهد که برای هر n عضوی چون g_n از $L^q(E_n)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in L^p(E_n)$، $\phi(f) = \int fg_n$ و $\|g_n\|_q = \|\phi|_{L^p(E_n)}\| \le \|\phi\|$. با چشم پوشی از مجموعه‌های پوچ، g_n یکتا است، لذا برای $n < m$، روی E_n داریم $g_n = g_m$ ت. هـ و با قرار دادن $g = g_n$ روی E_n می‌توان g را تقریباً همه جا روی X تعریف کرد. بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا، داریم $\|g\|_q = \lim \|g_n\|_q \le \|\phi\|$، لذا $g \in L^p$. به علاوه اگر $f \in L^p$، آنگاه از قضیهٔ همگرایی مغلوب معلوم می‌شود که با نرم L^p، $f\chi_{E_n} \to f$ و در نتیجه $\phi(f) = \lim \phi(f\chi_{E_n}) = \lim \int_{E_n} fg = \int fg$.

بالاخره، فرض می‌کنیم μ دل‌خواه باشد و $p > 1$ و در نتیجه $q < \infty$. همانند فوق، روی هر مجموعهٔ σـ متناهی مانند $E \subset X$ عضو تقریباً همه جا یکتایی مانند g_E از $L^q(E)$ به‌طوری‌که برای هر f از $L^p(E)$، $\phi(f) = \int fg_E$ و $\|g_E\|_q \le \|\phi\|$. اگر F یک مجموعهٔ σــ متناهی باشد و $E \subset F$، آنگاه $g_F = g_E$ ت. هـ بر E؛ لذا $\|g_F\|_q \ge \|g_E\|_q$. فرض می‌کنیم M سوپرمم $\|g_E\|_q$ها باشد که در آن E روی تمام مجموعه‌های σـ متناهی تغییر می‌کند؛ توجه شود که $M \le \|\phi\|$. دنباله‌ای مانند $\{E_n\}$ چنان انتخاب می‌کنیم که $\|g_{E_n}\|_q \to M$ و قرار می‌دهیم $F = \bigcup_1^\infty E_n$. در این صورت F یک مجموعهٔ σـ متناهی

است و برای هر n، $\|g_F\|_q \geq \|g_{E_n}\|_q$ که از اینجا معلوم می‌شود که $M = \|g_F\|_q$. اکنون اگر A یک مجموعهٔ σـ متناهی شامل F باشد، داریم:

$$\int |g_F|^q + \int |g_{A\setminus F}|^q = \int |g_A|^q \leq M^q = \int |g_F|^q,$$

و بنابر این $g_{A\setminus F} = 0$ ت. ه و $g_A = g_F$ ت. ه. (در اینجا از $q < \infty$ استفاده کرده‌ایم.) اما اگر $f \in L^p$، آنگاه $A = F \bigcup \{x : f(x) \neq 0\}$ یک مجموعهٔ σـ متناهی است لذا $\phi(f) = \int fg_A = \int fg_F$. بنابر این می‌توان g را g_F گرفت و برهان کامل می‌شود. ■

۶ . ۱۶ نتیجه. اگر $1 < p < \infty$، آنگاه L^p بازتابی است.

★ این بخش را با چند نکتهٔ مرتبط با حالت‌های استثنایی $p = 1$ و $p = \infty$ خاتمه می‌دهیم. برای هر اندازه مانند μ، تناظر $g \mapsto \phi_g$ فضای L^∞ را به توی $(L^1)^*$ می‌نگارد، اما در حالت کلی، این نگاشت نه یک به یک است و نه پوشا. یک به یک بودن زمانی به هم می‌خورد که μ نیمه متناهی نباشد. در واقع، اگر $E \subset X$ مجموعه‌ای با اندازهٔ نامتناهی باشد که شامل هیچ زیر مجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت نیست و $f \in L^1$، آنگاه $\{x : f(x) \neq 0\}$ یک مجموعهٔ σـ متناهی است و در نتیجه با E در یک مجموعهٔ پوچ اشتراک دارد. معلوم می‌شود که $\phi_{\chi_E} = 0$ هرچند که در L^∞، $\chi_E \neq 0$. البته، این معضل با تعریف مجدد L^∞ قابل حل است؛ تمرین‌های ۲۳ و ۲۴ را ببینید. عدم پوشایی خیلی ظریف است و بهتر است با یک مثال توضیح داده شود. تمرین ۲۵ را ببینید.

فرض‌کنیم X مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر، μ اندازهٔ شمارشی روی $(X, \mathcal{P}(X))$، $\mathcal{M}$ مساوی با σـ جبر مجموعه‌های شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر و μ_0 تحدید μ به $\mathcal{M}$ باشد. هر $f \in L^1(\mu)$ خارج از مجموعهٔ شمارش‌پذیری صفر است و معلوم می‌شود که $L^1(\mu) = L^1(\mu_0)$. از طرف دیگر، $L^\infty(\mu)$ شامل همهٔ توابع کراندار روی X است در حالی‌که $L^\infty(\mu_0)$ شامل توابع کرانداری است که خارج از مجموعه‌ای شماش‌پذیر، ثابت هستند.

با آگاهی از این موضوع، به آسانی دیده می‌شود که دوگان $L^1(\mu_0)$ فضای $L^\infty(\mu)$ است و از فضای $L^\infty(\mu_0)$ کوچکتر نیست.

و اما حالت $p = \infty$: بنابر گزارهٔ ۶ . ۱۳، نگاشت $g \to \phi_g$ همواره یک ایزومتری یک به یک از L^1 به‌توی $(L^\infty)^*$ است، اما این نگاشت تقریباً هیچ‌گاه پوشا نیست. دربارهٔ این مطلب در بند ۶ . ۶ بیشتر توضیح خواهیم داد؛ هم اکنون مثال خاصی می‌آوریم. (در تمرین ۱۹ مثال دیگری می‌آید.) مثل

فرض‌می‌کنیم $X = [0,1]$ و μ اندازهٔ لبگ باشد. نگاشت $f \mapsto f(0)$ یک تابعک خطی کراندار روی $C(X)$ است که در آن $C(X)$ به صورت زیرفضایی از L^∞ در نظر گرفته شده است. بنابر قضیهٔ هان ـ باناخ عضوی مانند ϕ از $(L^\infty)^*$ یافت می‌شود به‌طوری‌که برای هر $f \in C(X)$، $\phi(f) = f(0)$. برای دیدن اینکه نمی‌توان ϕ را با انتگرال‌گیری کنار یک تابع در L^1 به دست آورد، توابع $f_n \in C(X)$ با ضابطهٔ $f_n(x) = \max(1 - nx, 0)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت برای

هر n، $f_n(0)=1$، $\phi(f_n)=f_n(0)=1$، اما برای هر $x>0$، $f_n(x)\to 0$. لذا بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب برای هر $g\in L^1$ داریم: $\int f_n g\to 0$.

$\forall g \quad \phi \neq \phi_g$

تمرین‌ها

۱۷) با نمادگذاری قضیهٔ ۱۴ . ۶، اگر $q<\infty$ و $M_q(g)<\infty$ و μ نیمه متناهی باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ مجموعهٔ $\{x:|g(x)|>\varepsilon\}$ اندازه‌ای متناهی دارد و از این رو S_g، σـ متناهی است.

۱۸) دوگان خود بودن L^2 از نظریهٔ فضاهای هیلبرت (قضیهٔ ۲۵ . ۵) نتیجه می‌شود، می‌توان به کمک این موضوع قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم را با استدلال زیر که به فون نویمن نسبت داده شده است را اثبات کرد. فرض کنید μ و ν اندازه‌های متناهی مثبتی روی $(X,\mathcal{M})$ باشند (حالت σـ متناهی به آسانی همانند بند ۲ . ۳ نتیجه می‌شود) و قرار می‌دهیم $\lambda=\mu+\nu$.

الف) نگاشت $f\mapsto\int f d\nu$ یک تابعک خطی کراندار روی $L^2(\lambda)$ است، لذا به ازای عضوی چون g از $L^2(\lambda)$، $\int f d\nu=\int f g d\lambda$. به‌طور معادل، برای $f\in L^2(\lambda)$، $\int f(1-g)d\nu=\int f g d\mu$.

ب) $0\leq g\leq 1$ (λـ ت.ه.) لذا می‌توان فرض کرد که همه جا $0\leq g\leq 1$.

ج) فرض کنید $A=\{x:g(x)<1\}$، $B=\{x:g(x)=1\}$ و قرار دهید:

$$\nu_a(E)=\nu(A\cap E),\qquad \nu_s(E)=\nu(B\cap E).$$

در این صورت $\nu_s\perp\mu$ و $\nu_a\ll\mu$؛ در واقع، $d\nu_a=g(1-g)^{-1}\chi_A d\mu$.

۱۹) $\phi_n\in(l^\infty)^*$ را با $\phi_n(f)=n^{-1}\sum_1^n f(j)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{\phi_n\}$ یک W^*ـ نقطهٔ بستاری مانند ϕ دارد و ϕ عضوی از $(l^\infty)^*$ است که از عضوی از l^1 به دست نمی‌آید. (بیت تابع

$l^1 \longrightarrow (l^\infty)^*$ برش‌ثبت

$f \longrightarrow \phi_f$

۲۰) فرض کنیم $\sup_n\|f_n\|_p<\infty$ و $f_n\to f$ ت.ه.

الف) اگر $1<p<\infty$، آنگاه $f_n\to f$ به طور ضعیف در L^p. (برای هر $g\in L^q$ که در آن p و q نماهای مزدوج هستند و برای $\varepsilon>0$: (i) عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $\mu(E)<\infty$، آنگاه $\int_E|g|^q<\varepsilon$، (ii) زیرمجموعه‌ای چون A از X وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(A)<\infty$ و $\int_{X\setminus A}|g|^q<\varepsilon$، و (iii) زیر مجموعه‌ای چون $B\subset A$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(A\setminus B)<\delta$ و $f_n\to f$ به‌طور یکنواخت بر B.)

ب) حکم (الف) برای $p=1$ در حالت کلی درست نیست. (مثال‌های نقضی در $L^1(\mathbb{R},m)$ و l^1 بیابید) اما اگر μ یک اندازهٔ σـ متناهی باشد و همگرایی ضعیف را با W^*ـ همگرایی جایگزین کنیم حکم (الف) برای $p=\infty$ درست است.

۲۱) هرگاه $1<p<\infty$، $f_n \to f$ به طور ضعیف در $l^p(A)$ اگر و تنها اگر $\sup_n \|f_n\|_p<\infty$ و $f_n \to f$ نقطه به نقطه.

۲۲) $X=[0,1]$ را همراه با اندازهٔ لبگ بگیرید.

الف) فرض کنید $f_n(x)=\cos 2\pi nx$. در این صورت $f_n \to 0$ به طور ضعیف در L^2 (تمرین ۶۳ از بند ۵ . ۵ را ببینید) کران‌دار و متناهی

اما $f_n \not\to 0$ ت. ه یا در اندازه.

ب) فرض کنید $f_n(x)=n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. در این صورت $f_n \to 0$ ت. ه و در اندازه، اما برای هر p، $f_n \not\to 0$ به طور ضعیف در L^p.

۲۳) فرض کنید $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد. مجموعه‌ای چون $E\in\mathcal{M}$ موضعاً پوچ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $F\in\mathcal{M}$ با شرط $\mu(F)<\infty$، $\mu(E\cap F)=0$. اگر $f:X\to\mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_* = \inf\{a: \text{موضعاً پوچ است } \{x:|f(x)|>a\}\},$$

و فرض می‌کنیم $\mathcal{L}^\infty=\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$ فضای همهٔ توابع اندازه‌پذیر چون f باشد به‌طوری‌که $\|f\|_*<\infty$. دو تابع $f,g\in\mathcal{L}^\infty$ را یکی می‌گیریم هرگاه $\{x:f(x)\neq g(x)\}$ موضعاً پوچ باشد.

الف) اگر E موضعاً پوچ باشد، آنگاه $\mu(E)$ یا صفر است یا بینهایت. اگر μ نیمه متناهی باشد، آنگاه هر مجموعهٔ موضعاً پوچ، پوچ است.

ب) $\|\cdot\|_*$ نرمی روی $\mathcal{L}^\infty$ است که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند. اگر μ نیمه متناهی باشد، آنگاه $\mathcal{L}^\infty=L^\infty$.

۲۴) اگر $g\in\mathcal{L}^\infty$، آنگاه $\|g\|_*=\sup\{|\int fg|:\|f\|_1=1\}$ (تمرین ۲۳ را ببینید). لذا نگاشت $g\mapsto\phi_g$ یک ایزومتری از $\mathcal{L}^\infty$ به‌توی $(L^1)^*$ است. به عکس، اگر-همچون قضیهٔ ۶ . ۱۴، $M_\infty(g)<\infty$، آنگاه $g\in\mathcal{L}^\infty$ و $\|g\|_*=M_\infty(g)$.

۲۵) فرض کنیم μ تجزیه‌ناپذیر باشد (تمرین ۱۵ از بند ۲ . ۳ را ببینید). در این صورت هر $\phi\in(L^1)^*$ به ازای عضوی چون $g\in\mathcal{L}^\infty$ به شکل $\phi(f)=\int fg$ است و از این رو $(L^1)^*\cong\mathcal{L}^\infty$ (تمرین های ۲۳ و ۲۴). (اگر $\mathcal{F}$ تجزیه‌ای از μ باشد و $f\in L^1$، آنگاه دنباله‌ای چون $\{E_j\}\subset\mathcal{F}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f=\sum_1^\infty f\chi_{E_j}$ و سری اخیر در L^1 همگرا است.)

۶.۳ برخی انتگرال های سودمند

برآوردها و انتگرال ها در قلب کاربردهای فضاهای L^p در آنالیز جای دارند. اساسی‌ترین آنها نامساوی‌های هولدر و مینکوفسکی هستند. در خلال این بخش چند نمونه از احکام مهم دیگر در این حیطهٔ ارائه می‌دهیم. اولین آنها تقریباً یک چیز بدیهی است، اما به قدر کافی مفید است که عنایت خاصی به آن داشته باشیم.

۶.۱۷ نامساوی چبیشف. اگر $f \in L^p\ (0 < p < \infty)$، آنگاه برای هر $\alpha > 0$،

$$\mu\left(\left\{x : |f(x)| > \alpha\right\}\right) \leq \left(\frac{\|f\|}{\alpha}\right)^p.$$

برهان. فرض می‌کنیم $E_\alpha = \left\{x : |f(x)| > \alpha\right\}$. در این صورت

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \geq \int_{E_\alpha} |f|^p \geq \alpha^p \int_{E_\alpha} 1 = \alpha^p \mu(E_\alpha). \blacksquare$$

حکم بعدی قضیه‌ای نسبتاً کلی دربارهٔ کرانداری عملگرهای انتگرال روی فضاهای L^p است.

۶.۱۸ قضیه. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ را دو فضای اندازهٔ σ- متناهی و K را یک تابع $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$- اندازه‌پذیر روی $X \times Y$ می‌انگاریم. فرض می‌کنیم $C > 0$ چنان وجود داشته باشد که تقریباً برای هر $y \in Y$، $\int |K(x,y)| d\mu(x) \leq C$ و تقریباً برای هر $x \in X$، $\int |K(x,y)| d\nu(y) \leq C$ و $1 \leq p < \infty$. اگر $f \in L^p(\nu)$، آنگاه انتگرال

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$$

تقریباً برای هر $x \in X$ مطلقاً همگرا است، تابع Tf که بدین ترتیب تعریف می‌شود در $L^p(\mu)$ و $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$.

برهان. فرض کنیم $1 < p < \infty$ و q نمای مزدوج با p باشد. با به‌کارگیری نامساوی هولدر در مورد حاصلضرب

$$|K(x,y) f(y)| = |K(x,y)|^{\frac{1}{q}} \left[|K(x,y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)|\right]$$

تقریباً برای هر $x \in X$ داریم

$$\begin{aligned}\int |K(x,y) f(y)| d\nu(y) &\leq \left[\int |K(x,y)| d\nu(y)\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x,y)| |f(y)^p| d\nu(y)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x,y)| |f(y)|^p \, d\nu(y)\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

بنابر این، طبق قضیهٔ تونلی

$$\int\Big[\int\big|K(x,y)f(y)\big|d\nu(y)\Big]^p d\mu(x)\leq C^{\frac{p}{q}}\int\int\big|K(x,y)\big|\big|f(y)\big|^p\,d\nu(y)d\mu(x),$$
$$\leq C^{\frac{p}{q}+1}\int\big|f(y)\big|^p d\nu(y).$$

چون انتگرال اخیر متناهی است، لذا قضیهٔ فوبینی ایجاب می‌کند که تقریباً برای هر x، $K(x,\cdot)f\in L^1(\nu)$، بنابر این Tf تقریباً همه جا خوشتعریف است، و

$$\int\big|Tf(x)\big|^p d\mu(x)\leq C^{\frac{p}{q}+1}\,\|f\|_p^p.$$

با ریشهٔ pام گرفتن حکم به دست می‌آید. اثبات برای حالت $p=1$ مشابه اما آسان تر است و فقط فرض $\int\big|K(x,y)\big|d\mu(x)\leq C$ لازم است؛ اثبات برای حالت $p=\infty$ بدیهی است و فقط فرض $\int\big|K(x,y)\big|d\nu(y)\leq C$ مورد نیاز است. جزئیات به خواننده واگذار می‌شود (تمرین۲۶). ■

نامساوی مینکوفسکی بیان می‌دارد که L^p- نرم یک مجموع حداکثر جمع L^p- نرم ها است. تعمیمی از این حکم وجود دارد که درآن مجموع‌ها با ا نتگرال ها جایگزین می‌شوند:

۶ . ۱۹ نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال ها. فرض‌کنیم $(X,\mathcal{M},\mu)$ و $(Y,\mathcal{N},\nu)$ دو فضای اندازهٔ σ- متناهی و f یک تابع $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$- اندازه پذیر روی $X\times Y$ باشد.

الف) اگر $f\geq 0$ و $1\leq p<\infty$، آنگاه

$$\Big[\int\Big(\int f(x,y)d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\Big]^{\frac{1}{p}}\leq\int\Big[\int f(x,y)^p\,d\mu(x)\Big]^{\frac{1}{p}}\,d\nu(y).$$

ب) اگر $1\leq p\leq\infty$، تقریباً برای هر y، $f(\cdot,y)\in L^p(\mu)$ و تابع $y\mapsto\|f(\cdot,y)\|_p$ در $L^1(\nu)$ باشد، آنگاه تقریباً برای هر x، $f(x,\cdot)\in L^1(\nu)$، تابع $x\mapsto\int f(x,y)d\nu(y)$ در $L^p(\mu)$ است، و

$$\Big\|\int f(\cdot,y)d\nu(y)\Big\|_p\leq\int\big\|f(\cdot,y)\big\|_p d\nu(y).$$

برهان. اگر $p=1$، (الف) همان قضیهٔ تونلی است. اگر $1<p<\infty$، فرض می‌کنیم q نمای مزدوج با p باشد و $g\in L^q(\mu)$. در این صورت بنابر قضیهٔ تونلی و نامساوی هولدر،

$$\int\Big[\int f(x,y)d\nu(y)\Big]\big|g(x)\big|d\mu(x)=\int\int f(x,y)\big|g(x)\big|d\mu(x)d\nu(y)$$
$$\leq\|g\|_q\int\Big[\int f(x,y)^p\,d\mu(x)\Big]^{\frac{1}{p}}d\nu(y).$$

بنابر حکم (الف) از قضیهٔ ۶ . ۱۴ نتیجه می‌شود. وقتی $p<\infty$، (ب) از (الف) (با جایگزینی $|f|$ به‌جای f) و قضیهٔ فوبینی نتیجه می‌شود؛ وقتی $p=\infty$، قسمت (ب) نتیجهٔ ساده‌ای از یکنوایی انتگرال است. ■

آخرین حکم این بخش قضیه‌های در مورد عملگرهای انتگرال روی $(0,\infty)$ با اندازهٔ لبگ است.

۶.۲۰ قضیه. فرض کنیم K یک تابع اندازه پذیر لبگ روی $(0,\infty)\times(0,\infty)$ باشد به‌طوری که برای هر $\lambda>0$، $K(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}K(x,y)$ و برای یک $p\in[1,\infty]$،

$$\int_0^\infty |K(x,1)|x^{\frac{-1}{p}}dx=C<\infty$$

و q را نمای مزدوج با p می‌انگاریم. برای $f\in L^p$ و $g\in L^q$ فرض می‌کنیم:
$Tf(y)=\int_0^\infty K(x,y)f(x)dx$ و $Sg(x)=\int_0^\infty K(x,y)g(y)dy$. در این صورت Tf و Sg تقریباً همه جا تعریف شده اند، و $\left\|Tf\right\|_p\leq C\|f\|_p$ و $\|Sg\|_q\leq C\|g\|_q$.

برهان. با قراردادن $z=\frac{x}{y}$ داریم

$$\int_0^\infty\left|K(x,y)f(x)\right|dx=\int_0^\infty\left|K(yz,y)f(yz)\right|ydz=\int_0^\infty\left|K(z,1)f_z(y)\right|dz$$

که در آن $f_z(y)=f(yz)$؛ به علاوه،

$$\|f_z\|_p=\left[\int_0^\infty|f(yz)^p dy\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\int_0^\infty|f(x)^p|z^{-1}dx\right]^{\frac{1}{p}}=z^{\frac{-1}{p}}\|f\|_p$$

بنابر این، طبق نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال‌ها، Tf تقریباً همه جا وجود دارد و

$$\|Tf\|_p\leq\int_0^\infty|K(z,1)|\|f_z\|_p\,dz=\|f\|_p\int_0^\infty|K(z,1)|z^{\frac{-1}{p}}dz=C\|f\|_p.$$

بالاخره، با قرار دادن $u=y^{-1}$ داریم

$$\int_0^\infty|K(1,y)|y^{\frac{-1}{q}}dy=\int_0^\infty|K(y^{-1},1)|y^{-1-\frac{1}{q}}dy$$
$$=\int_0^\infty|K(u,1)|u^{\frac{-1}{p}}du=C.$$

و همین استدلال نشان می‌دهد که Sg تقریباً همه جا تعریف می‌شود و $\|Sg\|_q\leq q\|g\|_q$. ■

۶.۲۱ نتیجه. فرض کنیم

$$Tf(y)=y^{-1}\int_0^y f(x)dx,\qquad Sg(x)=\int_x^\infty y^{-1}g(y)dy.$$

در این صورت برای $1<p\leq\infty$ و $1\leq q<\infty$،

$$\|Tf\|_p \le \tfrac{p}{p-1}\|f\|_p\,,\quad \|Sg\|_q \le \|g\|_q\,.$$

برهان. فرض کنیم $K(x,y)=y^{-1}\chi_E(x,y)$ که در آن $E=\{(x,y): x<y\}$. در این‌صورت

$$\int_0^\infty |K(x,1)|\,x^{\frac{-1}{p}}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{-1}{p}}\,dx=\frac{p}{p-1}=q$$

که در آن q نمای مزدوج با p است، بنابر این، قضیهٔ ۶.۲۰ حکم را به دست می‌دهد. ■

نتیجهٔ ۶.۲۱ حالت خاصی از نامساوی‌های هاردی است؛ حکم کلی در قالب تمرین ۲۹ جای گرفته است.

تمرین‌ها

۲۶) برهان قضیهٔ ۶.۱۸ را برای حالات $p=1$ و $p=\infty$ بنویسید.

۲۷) (نامساوی هیلبرت) عملگر $Tf(x)=\int_0^\infty (x+y)^{-1}f(y)dy$ برای $1<p<\infty$ در نامساوی $\|Tf\|_p \le C_p\|f\|_p$ صدق می‌کند که در آن $C_p=\int_0^\infty x^{\frac{-1}{p}}(x+1)^{-1}dx$. (چنانچه معلوماتی در رابطه با انتگرال‌های کانتور دارید؛ نشان دهید که $C_p=\pi\csc(\frac{\pi}{p})$).

۲۸) همانند تمرین ۶۱ از بند ۶.۲ فرض کنید I_α، αاُمین تابعک عملگر انتگرال باشد و

$$J_\alpha f(x)=x^{-\alpha}I_\alpha f(x).$$

الف) برای $1<p\le\infty$، J_α روی $L^p(0,\infty)$ کراندار است؛ به‌طور دقیق‌تر،

$$\|J_\alpha f\|_p \le \frac{\Gamma(1-p^{-1})}{\Gamma(\alpha+1-p^{-1})}\|f\|_p.$$

ب) $f\in L^1(0,\infty)$ای وجود دارد که $J_1 f\notin L^1(0,\infty)$.

۲۹) فرض کنیم $1\le p<\infty$، $r>0$، و h یک تابعک اندازه پذیر نامنفی روی $(0,\infty)$ باشد.
در این صورت:

$$\int_0^\infty x^{-r-1}\left[\int_0^x h(y)dy\right]^p dx \le \left(\tfrac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p-r-1}h(x)^p\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{r-1}\left[\int_x^\infty h(y)dy\right]^p dx \le \left(\tfrac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p+r-1}h(x)^p\,dx.$$

(قضیهٔ ۶.۲۰ را با $K(x,y)=x^{\beta-1}y^{-\beta}\chi_{(0,\infty)}(y-x)$، $f(x)=x^{\gamma}h(x)$ و $g(x)=x^{\delta}h(x)$ برای β، γ و δی مناسب به‌کار برید.)

۳۰) فرض کنیم K یک تابع اندازه پذیر نامنفی روی $(0,\infty)$ باشد به‌طوری‌که برای $0<s<1$،

$$\int_0^\infty K(x)x^{s-1}dx=\phi(s)<\infty.$$

الف) اگر $1<p<\infty$، $p^{-1}+q^{-1}=1$ و f و g توابعی اندازه پذیر و نامنفی روی $(0,\infty)$ باشند، آنگاه (با فرض $\int=\int_0^\infty$)،

$$\int\int K(xy)f(x)g(y)dxdy\le\phi(p^{-1})\left[\int x^{p-2}dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int g(x)^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

ب) عملگر $Tf(x)=\int_0^\infty K(xy)f(y)dy$ روی $L^2((0,\infty))$ کراندار است و نُرمش حداکثر $\phi(\frac{1}{2})$ است.

(حالت خاص جالب توجه: اگر $K(x)=e^{-x}$، آنگاه T تبدیل لاپلاس است و $\phi(s)=\Gamma(s)$.)

۳۱) (تعمیمی از نامساوی هولدر) فرض‌کنیم $1\le p_j\le\infty$ و $\sum_1^n p_j^{-1}=r^{-1}\le 1$. اگر برای $j=1,\ldots,n$، $f_j\in L^{p_j}$، آنگاه $\prod_1^n f_j\in L^r$ و $\left\|\prod_1^n f_j\right\|_r\le\prod_1^n\|f_j\|_{p_j}$. (نخست حالت $n=2$ را انجام دهید.)

۳۲) فرض‌کنیم $(X,\mathcal{M},\mu)$ و $(Y,\mathcal{N},\nu)$ دو فضای اندازهٔ σـ متناهی باشند و $K\in L^2(\mu\times\nu)$. اگر $f\in L^2$، آنگاه انتگرال $Tf(x)=\int K(x,y)f(y)d\nu(y)$ تقریباً برای هر x از X مطلقاً همگرا است؛ به‌علاوه، $Tf\in L^2(\mu)$ و $\|Tf\|_2\le\|K\|_2\|f\|_2$.

۳۳) برای $1<p<\infty$، فرض کنید $Tf(x)=x^{-\frac{1}{p}}\int_0^x f(t)dt$. اگر $p^{-1}+q^{-1}=1$، آنگاه T یک نگاشت خطی کراندار از $C_0((0,\infty))$ به $L^q((0,\infty))$ است.

۳۴) اگر برای $0<\varepsilon<1$ تابع f روی $[\varepsilon,1]$ مطلقاً پیوسته باشد و $\int_0^1 x|f'(x)|^p dx<\infty$، آنگاه $\lim_{x\to 0}f(x)$ وجود دارد (و متناهی است هرگاه $p>2$، $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|\log x|^{\frac{1}{2}}}=0$ هرگاه $p=2$ و $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x^{1-2/p}}=0$ هرگاه $p<2$).

۶.۴ توابع توزیع و L^pهای ضعیف.

هرگاه f تابع اندازه پذیری روی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ باشد، تابع توزیعش $\lambda_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

(این تعریف تا حدودی به تعریف « توابع توزیع » مورد بحث در بندهای ۵.۱ و ۱۰.۱ مربوط است اما با آن یکی نیست.)

خواص اساسی λ_f را در یک گزاره گردهم می‌آوریم:

۶.۲۲ گزاره.

الف) λ_f نزولی و از راست پیوسته است.

ب) اگر $|g| \le |f|$ ، آنگاه $\lambda_g \le \lambda_f$.

ج) اگر $|f_n|$ به $|f|$ صعود کند، آنگاه λ_{f_n} به λ_f صعود می‌کند.

د) اگر $f = g + h$، آنگاه $\lambda_f(\alpha) \le \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$.

برهان. فرض‌کنیم $E(\alpha, f) = \{x : |f(x)| > \alpha\}$. تابع λ_f نزولی است زیرا اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $E(\alpha,f) \supset E(\beta,f)$، همچنین λ_f از راست پیوسته است زیرا $E(\alpha,f)$ اجتماع صعودی $\{E(\alpha+n^{-1}, f)\}_1^\infty$ است. اگر $|g| \le |f|$، آنگاه $E(\alpha,g) \subset E(\alpha,f)$، لذا $\lambda_g \le \lambda_f$. اگر $|f_n|$ به $|f|$ صعود کند، آنگاه $E(\alpha,f)$ اجتماع صعودی $\{E(\alpha,f_n)\}$ است، لذا λ_{f_n} به λ_f صعود می‌کند. بالاخره، اگر $f = g + h$، آنگاه $E(\alpha,f) \subset E(\frac{1}{2}\alpha, g) \cup E(\frac{1}{2}\alpha, h)$ که این هم نامساوی $\lambda_f(\alpha) \le \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$ را ایجاب می‌کند. ■

فرض‌کنیم برای هر $\alpha > 0$، $\lambda_f(\alpha) < \infty$. با توجه به قسمت (الف) از گزارهٔ ۶.۲۲، λ_f یک اندازهٔ برل منفی مانند ν روی $(0,\infty)$ تعریف می‌کند به‌طوری‌که وقتی $0 < a < b$، $\nu((a,b]) = \lambda_f(b) - \lambda_f(a)$. (نحوهٔ ساخت اندازه‌های برل روی $\mathbb{R}$ در بند ۵.۱ به همان صورت روی $(0,\infty)$ نیز کار می‌کند.) بنابر این می‌توانیم انتگرال‌های لبگ ـ اشتیلیس $\int \phi \, d\lambda_f = \int \phi \, d\nu$ از توابع ϕ روی $(0,\infty)$ را درنظر بگیریم. حکم زیر نشان می‌دهد که انتگرال‌های تابع هایی از $|f|$ روی X را می‌توان با چنین انتگرال‌های لبگ ـ اشتیلسی جایگزین کرد.

۶.۲۳ گزاره. اگر برای هر $\alpha > 0$، $\lambda_f(\alpha) < \infty$ و ϕ یک تابع اندازه‌پذیر برل نامنفی روی $(0,\infty)$ باشد، آنگاه

$$\int_X \phi \circ |f| \, d\mu = -\int_0^\infty \phi(\alpha) \, d\lambda_f(\alpha).$$

$$\nu((a,b])=\lambda_f(b)-\lambda_f(a)=-\mu(\{x:a<|f(x)|\leq b\})=-\mu(|f|^{-1}((a,b])).$$

از یکتایی توسیع (قضیهٔ ۱۴ . ۱) معلوم می‌شود که برای هر مجموعهٔ برل مانند $E\subset(0,\infty)$،

$$\nu(E)=-\mu(|f|^{-1}(E)).$$

اما این بدانمعناست که وقتی ϕ تابع مشخصه یک مجموعهٔ برل باشد تساوی $\int_X \phi\circ|f|\,d\mu=-\int_0^\infty \phi(\alpha)d\lambda_f(\alpha)$ برقرار است و در نتیجه این تساوی برای توابع سادهٔ ϕ نیز برقرار می‌شود. حالت کلی به واسطهٔ قضیهٔ ۱۰ . ۲ و قضیهٔ همگرایی یکنوا حاصل شود. ■

حالتی از این حکم که برایمان خوشایند است $\phi(\alpha)=\alpha^p$ می‌باشد که تساوی زیر را به دست می‌دهد:

$$\int|f|^p d\mu=-\int_0^\infty \alpha^p d\lambda_f(\alpha).$$

با انتگرالگیری جزء به جزء از طرفین (قضیهٔ ۳۶ . ۳) برای به دست آوردن

$$\int|f|^p\,d\mu=p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha.$$

شکل مفیدتری از تساوی اخیر به دست می‌آید. اعتبار این محاسبه واضح نیست مگر اینکه بدانیم وقتی $\alpha\to 0$ یا $\alpha\to\infty$، $\alpha^p\lambda_f(\alpha)\to 0$؛ با وجود این، محاسبهٔ فوق درست است.

۶.۲۴ گزاره. اگر $0<p<\infty$، آنگاه

$$\int|f|^p\,d\mu=p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)dx.$$

برهان. اگر برای $\alpha>0$ای، $\lambda_f(\alpha)=\infty$، آنگاه هر دو انتگرال نامتناهی هستند. اگر چنین نباشد و f ساده باشد، آنگاه وقتی $\alpha\to 0$، λ_f کراندار است و برای αهای به‌قدر کافی بزرگ λ_f صفر می‌شود، لذا انتگرالگیری جزء به جزء توصیف شدهٔ فوق معتبر است. (در این حالت نیز درستی فرمول به‌آسانی و به طور مستقیم بررسی می‌شود.) برای حالت کلی، فرض می‌کنیم $\{g_n\}$ دنباله های از توابع ساده باشد که به $|f|$ صعود می‌کند؛ در این صورت حکم خواسته شده برای g_n درست است و درستی آن برای f از قسمت (ج) از گزارهٔ ۲۲ . ۶ و قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود. ■

شکلی از فضاهای L^p که اغلب زیاد پیش می‌آید نوع زیر است. هرگاه f یک تابع اندازه‌پذیر روی X باشد و $0<p<\infty$، تعریف می‌کنیم:

$$[f]_p=(\sup_{\alpha>0}\alpha^p\lambda_f(\alpha))^{1/p},$$

و L^pی ضعیف را مجموعهٔ همهٔ توابعی چون f تعریف می‌کنیم که برای آنها $[f]_p < \infty$. $[\cdot]_p$ یک نرم نیست؛ درستی تساوی $[cf]_p = |c|[f]_p$ به آسانی محقق می‌شود، اما نامساوی مثلثی درست نیست. اما L^pی ضعیف یک فضای برداری توپولوژیک است؛ تمرین ۳۵ را ببینید.

رابطهٔ بین L^p و L^pی ضعیف به صورت زیر است:

از یک سو، L^p زیرمجموعه‌ای از L^pی ضعیف است و $[f]_p \le \|f\|_p$ (این درست بیان مجدد نامساوی چبیشف است.) از سوی دیگر، اگر در انتگرال $p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha$ که با $\|f\|_p^p$ برابر است به‌جای $\lambda_p(\alpha)$ کمیت $([f]p/\alpha)^p$ را قرار دهیم، مضرب ثابتی از $\int_0^\infty \alpha^{-1}d\alpha$ به‌دست می‌آوریم که هم در ۰ و هم در ∞ واگرا است ـ اما فقط و فقط در همین دو مورد واگرا است. تنها کمی تخمین قوی‌تر روی λ_f در نزدیکی ۰ و ∞ لازم است تا $f \in L^p$ به دست آید. (تمرین ۳۶ را نیز ببینید.)

مثال متعارفی از تابعی که در L^pی ضعیف واقع است اما در L^p نیست تابع $f(x) = x^{-1/p}$ بر $(0,\infty)$ (با اندازهٔ لبگ) است. غالباً بیان یک تابع به صورت مجموع یک بخش «کوچک» و یک بخش «بزرگ» کارگشا است. گزارهٔ زیر روشی برای انجام این کار است که فرمولی ساده برای توابع توزیع به‌دست می‌دهد.

۶.۲۵ گزاره. هرگاه f یک تابع اندازه‌پذیر باشد و $A > 0$، فرض می‌کنیم $E(A) = \{x : |f(x)| > A\}$ و قرار می‌دهیم:

$$h_A = f\chi_{X\setminus E(A)} + A(\operatorname{sgn} f)\chi_{E(A)}, \qquad g_A = f - h_A = (\operatorname{sgn} f)(|f| - A)\chi_{E(A)}.$$

در این صورت

$$\lambda_{g_A}(\alpha) = \lambda_f(\alpha + A), \quad \lambda_{h_A}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & \alpha < A, \\ 0 & \alpha \ge A. \end{cases}$$

برهان به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳۷)

تمرین‌ها

۳۵) برای همهٔ توابع اندازه‌پذیر f و g داریم $[cf]_p = |c|[f]_p$ و $[f+g]_p \le 2([f]_p^p + [g]_p^p)^{\frac{1}{p}}$؛ بنابر این L^pی ضعیف یک فضای برداری است. به‌علاوه، «گوی» $\{g : [g-f]_p < r\}$ ($r > 0$ و $f \in$ L^pی ضعیف) یک توپولوژی روی L^pی ضعیف تولید می‌کندکه L^pی ضعیف را به یک فضای برداری توپولوژیک تبدیل می‌کند.

۳۶) اگر f عضوی از L^pی ضعیف باشد و $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) < \infty$، آنگاه برای هر $q < p$، $f \in L^q$. ازسوی دیگر، اگر $f \in (L^p$ی ضعیف$) \bigcap L^\infty$، آنگاه برای هر $q > p$، $f \in L^q$.

۳۷) گزارهٔ ۶.۲۵ را ثابت کنید.

۳۸) $f \in L^p$ اگر و تنها اگر $\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{kp} \lambda_f(2^k) < \infty$.

۳۹) اگر $f \in L^p$، آنگاه $\lim_{\alpha\to 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^p \lambda_p(\alpha) = 0$. (ابتدا فرض کنید f ساده است.)

۴۰) هرگاه تابعی اندازه‌پذیر روی X باشد، **بازآرایی نزولی** آن تابع $f^* : (0,\infty) \to [0,\infty]$ است که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$f^*(t) = \inf\{\alpha : \lambda_f(\alpha) \le t\}$$

که در آن $\inf \varnothing = \infty$:

الف) f^* نزولی است. اگر $f^*(t) < \infty$، آنگاه $\lambda_f(f^*(t)) \le t$ و اگر $\lambda_f(\alpha) < \infty$، آنگاه $f^*(\lambda_f(\alpha)) \le \alpha$.

ب) $\lambda_{f^*} = \lambda_f$ که در آن λ_{f^*} نسبت به اندازهٔ لبگ روی $(0,\infty)$ تعریف می‌شود.

ج) اگر برای هر $\alpha > 0$، $\lim_{\alpha\to\infty} \lambda_f(\alpha) < \infty$ (و در نتیجه برای هر $t > 0$، $f^*(t) < \infty$) و ϕ یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $(0,\infty)$ باشد، آنگاه $\int_X \phi \circ |f| d\mu = \int_0^\infty \phi \circ f^*(t) dt$. به‌ویژه برای $0 < p < \infty$، $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

د) اگر $0 < p < \infty$، آنگاه $[f]_p = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$.

ه) نام «بازآرایی» برای f^* از حالتی آمده است که f یک تابع نامنفی روی $(0,\infty)$ است. برای دیدن اینکه چرا این نام مناسبی است یک تابع پله‌ای روی $(0,\infty)$ برگزینید که چهار یا پنج مقدار متمایز به خود می‌گیرد و سپس نمودارهای f و f^* را رسم کنید.

۶.۵ درون‌یابی فضاهای L^p

اگر $1 \le p < q < r \le \infty$، آنگاه $(L^p \cap L^r) \subset L^q \subset (L^p + L^r)$ و طبیعی است بپرسیم که آیا عملگری خطی مانند T روی $L^p + L^r$ که هم روی L^p و هم روی L^r کراندار است روی L^q نیز کراندار است؟ پاسخ مثبت است و این حکم را به

روش‌های مختلفی می‌توان تعمیم دارد. دو قضیهٔ بنیادی دخیل در این سؤال، قضایای ریس– تورین و درون‌یابی مینکوفسکی هستند که آنها را در این بخش ذکر می‌کنیم.
با قضیهٔ ریس ـ تورین شروع می‌کنیم که اثباتش برحکم زیرین از نظریهٔ توابع مختلط استوار است.

۶.۲۶ لم سه خط. فرض‌کنیم ϕ تابع پیوستهٔ کرانداری بر نوار $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ باشد که بر درون نوار تحلیلی است. اگر برای $\operatorname{Re} z = 0$، داشته باشیم $|\phi(z)| \le M_0$ و برای $\operatorname{Re} z = 1$، $|\phi(z)| \le M_1$، آنگاه برای $\operatorname{Re} z = t$ و $0 < t < 1$، $|\phi(z)| \le M_0^{1-t} M_1^t$.

برهان. برای $\varepsilon > 0$ فرض‌می‌کنیم $\phi_\varepsilon(z) = \phi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} \exp(\varepsilon z(z-1))$. در این‌صورت با جایگزینی ۱ به‌جای M_0 و M_1 نگاشت ϕ_ε در مفروضات لم صدق می‌کند و وقتی $|\operatorname{Im} z| \to \infty$، $|\phi_\varepsilon(z)| \to 0$. بنابر این روی مرز مستطیل $0 \le \operatorname{Re} z \le 1, -A < \operatorname{Im} z \le A$ داریم $|\phi_\varepsilon(z)| \le 1$ مشروط بر اینکه A بزرگ باشد و در نتیجه، اصل« حداکثر قدر مطلق است » ایجاب می‌کند که $|\phi_\varepsilon(z)| \le 1$ بر نوار $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$. با فرض $\varepsilon \to 0$ حکم مطلوب به‌دست می‌آید: برای $\operatorname{Re} z = t$،

$$|\phi(z)| M_0^{t-1} M_1^{-t} = \lim_{\varepsilon \to 0} |\phi_\varepsilon(z)| \le 1. \blacksquare$$

۶.۲۷ قضیهٔ درونیابی ریس– تورین. فرض‌کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ دو فضای اندازه باشند و

$$p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty].$$

هرگاه $q_0 = q_1 = \infty$، فرض می‌کنیم ν نیمه متناهی باشد. برای $0 < t < 1$، p_t و q_t را با تساوی‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

اگر T نگاشتی خطی از $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ بتوی $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ باشد به قسمی که برای هر $f \in L^{p_0}(\mu)$، $\|Tf\|_{q_0} \le M_0 \|f\|_{p_0}$ و برای هر $f \in L^{p_1}(\mu)$، $\|Tf\|_{q_1} \le M_1 \|f\|_{p_1}$، آنگاه برای هر $f \in L^{p_t}(\mu)$ (هر $0 < t < 1$)، $\|Tf\|_{q_t} \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$.

برهان. در وهلهٔ اول، ملاحظه می‌شود که حکم در حالت $p_0 = p_1$ از گزارهٔ ۶ . ۱۰ نتیجه می‌شود: اگر $p = p_0 = p_1$، آنگاه

$$\|Tf\|_{q_t} \le \|Tf\|_{q_0}^{1-t} \|Tf\|_{q_1}^t \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p$$

بنابر این می‌توانیم فرض‌کنیم که $p_0 \neq p_1$، بالاخص می‌توان فرض کردکه برای هر $0 < t < 1$، $p_t < \infty$.

فرض می‌کنیم Σ_X (متناظراً Σ_Y) فضای همهٔ توابع ساده‌ای روی X (متناظراً روی Y) باشد که خارج از مجموعه‌هایی با اندازهٔ متناهی صفر هستند. در این صورت برای هر p، $\Sigma_X \subset L^p(\mu)$ و بنابرگزارهٔ ۶.۷ برای هر $p<\infty$، Σ_X در $L^p(\mu)$ چگال است؛ حکم مشابهی در مورد Σ_Y برقراراست. بخش اصلی برهان مشتمل بر این است که نشان دهیم برای هر $f \in \Sigma_X$، $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_{p_t}$. اما بنابر قضیهٔ ۶.۱۴،

$$\|Tf\|_{q_t} = \sup\{\left|\int (Tf)gd\nu\right| : g \in \Sigma_Y, \|g\|_{q_t'} = 1\}.$$

که در آن q_t' نمای مزدوج با q_t است. (توجه کنید که $Tf \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$، لذا $\{y : Tf(y) \neq 0\}$ باید σ- متناهی باشد مگر اینکه $q_0 = q_1 = \infty$؛ بنابر این، مفروضات قضیهٔ ۶.۱۴ برآورد شده‌اند.) به‌علاوه می‌توانیم فرض‌کنیم‌که $f \neq 0$ و f را چنان جایگزین کنیم که $\|f\|_{p_t} = 1$. بنابر این در پی اثبات ادعای زیر هستیم:

- اگر $f \in \Sigma_X$ و $\|f\|_{p_t} = 1$، آنگاه برای هر $g \in \Sigma_Y$ که $\|g\|_{q_t'} = 1$،

$$\left|\int (Tf)gd\nu\right| \leq M_0^{1-t}M_1^t.$$

فرض‌کنیم $f = \sum_1^m c_j\chi_{E_j}$ و $g = \sum_1^n d_k\chi_{F_k}$ که در آن E_jها و F_kها در X و Y واقع شده و مجزا هستند، به‌علاوه c_jها و d_kها نامنفی هستند. c_jها و d_k را به شکل قطبی می‌نویسیم: $c_j = |c_j|e^{i\theta_j}$ و $d_k = |d_k|e^{i\psi_k}$. همچنین، فرض می‌کنیم:

$$\alpha(z) = (1-z)p_0^{-1} + zp_1^{-1}, \quad \beta(z) = (1-z)q_0^{-1} + zq_1^{-1};$$

بنابر این برای هر $0 < t < 1$، $\alpha(t) = p_t^{-1}$ و $\beta(t) = q_t^{-1}$. $t \in (0,1)$ را ثابت می‌گیریم؛ فرض‌کرده‌ایم‌که $p_t < \infty$ و در نتیجه $\alpha(t) > 0$، لذا می‌توانیم چنین تعریف‌کنیم:

$$f_z = \sum_1^m |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} e^{i\theta_j}\chi_{E_j}.$$

چنانچه $\beta(t) < 1$، تعریف‌می‌کنیم:

$$g_z = \sum_1^n |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} e^{i\psi_k}\chi_{F_k},$$

در حالی‌که اگر $\beta(t) = 1$، برای هر z چنین تعریف می‌کنیم: $g_z = g$. (از حالا به بعد فرض می‌کنیم $\beta(t) < 1$ و جرح و تعدیل $\beta(t) = 1$ را به خواننده واگذاری می‌کنیم.) بالاخره، قرار می‌دهیم:

$$\phi(z) = \int (Tf_z)g_z d\nu.$$

بنابر این،

$$\phi(z) = \sum_{j,k} A_{jk}|c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}}|d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}}.$$

که در آن

$$A_{jk} = e^{i(\theta_j+\psi_k)} \int (T\chi_{E_j})\chi_{F_k} d\nu$$

لذا ϕ یک تابع تحلیلی تام از z است که در نوار $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ کراندار است. چون $\int (Tf)g d\nu = \phi(t)$، بنابر لم سه خط، کافی است نشان دهیم که برای $\operatorname{Re} z = 0$، $|\phi(z)| \leq M_0$ و برای $\operatorname{Re} z = 1$، $|\phi(z)| \leq M_1$. اما چون برای هر $s \in \mathbb{R}$،

$$\alpha(is) = p_0^{-1} + is(p_1^{-1} - p_0^{-1}), \qquad 1-\beta(is) = (1-q_0^{-1}) - is(q_1^{-1} - q_0^{-1}),$$

داریم

$$|f_{is}| = |f|^{\operatorname{Re}[\frac{\alpha(is)}{\alpha(t)}]} = |f|^{\frac{p_t}{p_0}}, \qquad |g_{is}| = |g|^{\operatorname{Re}[\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(t)}]} = |g|^{\frac{q_t'}{q_0'}}.$$

بنابر این، طبق نامساوی هولدر،

$$|\phi(is)| \leq \|Tf_{is}\|_{q_0} \|g_{is}\|_{q_0'} \leq M_0 \|f_{is}\|_{p_0} \|g_{is}\|_{q_0'} = M_0 \|f\|_{p_t} \|g\|_{q_t'} = M_0.$$

محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که $|\phi(1+is)| \leq M_1$، لذا ادعا اثبات شده است. اینک نشان خواهیم داد که برای هر $f \in \Sigma_X$، $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$، لذا با توجه به گزاره ۶.۷، $T|_{\Sigma_X}$ توسیع یکتایی به $L^{p_t}(\mu)$ دارد که برای هر f از $L^{p_t}(\mu)$ در همان نامساوی صدق می‌کند. با مفروض‌گرفتن چنین f ای، دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ در Σ_X چنان می‌یابیم که $|f_n| \leq |f|$ و $f_n \to f$ نقطه به نقطه. همچنین، فرض می کنیم: $E = \{x : |f(x)| > 1\}$، $g = f\chi_E$، $g_n = f_n\chi_E$، $h = f - g$ و $h_n = f_n - g_n$. در این صورت هرگاه $p_0 < p_1$ (که با تجدید نامگذاری p ها می‌توان چنین فرض کرد)، داریم $g \in L^{p_0}(\mu)$ و بنابر قضیهٔ همگرایی مغلوب، $\|f_n - f\|_{p_t} \to 0$، $\|g_n - g\|_{p_0} \to 0$ و $\|h_n - h\|_{p_1} \to 0$. بنابر این $\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \to 0$ و $\|Th_n - Th\|_{q_1} \to 0$، لذا با گذر به زیردنباله‌ای مناسب می‌توانیم فرض کنیم که $Tg_n \to Tg$ ت.ه. و $Th_n \to Th$ ت.ه. (تمرین ۹). اما در این صورت $Tf_n \to Tf$ ت.ه. لذا بنابر لم فاتو،

$$\|Tf\|_{q_t} \leq \liminf \|Tf_n\|_{q_t} \leq \liminf M_0^{1-t} M_1^t \|f_n\|_{p_t} = M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t},$$

و برهان کامل می‌شود. ■

حکم قضیهٔ ریس - تورین را به شکلی نسبتاً قوی‌تر می‌توان بیان کرد. فرض کنیم $M(t)$ نُرم عملگر T به عنوان نگاشتی از $L^{p_t}(\mu)$ به $L^{q_t}(\nu)$ باشد. نشان خواهیم داد که $M(t) \leq M_0^{1-t} M_1^t$. ممکن است نامساوی اکید رخ دهد؛ البته، اگر $0 < s < t < u < 1$ و $t = (1-\tau)s - \tau u$، آنگاه می‌توان قضیه را مجدداً به‌کار برده و نشان داد که

$$M(t) \leq M(s)^{1-\tau} M(u)^{\tau}.$$

در یک کلام، نتیجه این است که $\log M(t)$ تابع محدبی از t است.

اینک به قضیهٔ مارکینکوایز می‌پردازیم که لازمه‌اش اصطلاحات بیشتری است. فرض می‌کنیم T نگاشتی از یک فضای برداری مانند $\mathcal{D}$ متشکل از توابعی اندازه‌پذیر روی $(X,\mathcal{M},\mu)$ به فضای همهٔ توابع اندازه‌پذیر روی $(Y,\mathcal{N},\nu)$ باشد.

- T **زیرخطی** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f,g\in\mathcal{D}$ و $c>0$، $|T(f+g)|\le|Tf|+|Tg|$ و $|T(cf)|=c|Tf|$.

- نگاشتی زیرخطی چون T از **نوع قوی** (p,q) $(1\le p,q\le\infty)$ است هرگاه $L^p(\mu)\subset\mathcal{D}$، T فضای $L^p(\mu)$ را به‌توی $L^q(\nu)$ بنگارد، و $C>0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $f\in L^p(\mu)$، $\|Tf\|_q\le C\|f\|_p$.

- نگاشتی زیرخطی مانند T از **نوع ضعیف** (p,q) $(1\le p\le\infty, 1\le q<\infty)$ نامیده می‌شود هرگاه $L^p(\mu)\subset\mathcal{D}$، T فضای $L^p(\mu)$ را به‌توی $L^q(\nu)$ی ضعیف بنگارد و $C>0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $f\in L^p(\mu)$، $[Tf]_q\le C\|f\|_p$. همچنین، T را از نوع ضعیف (p,∞) خواهیم خواند اگر و تنها اگر T از نوع قوی (p,∞) باشد.

۶.۲۸ قضیهٔ درون‌یابی مارکینکوایز. فرض کنیم $(X,\mathcal{M},\mu)$ و $(Y,\mathcal{N},\nu)$ دو فضای اندازه باشند؛ p_0، p_1، q_0 و q_1 اعضایی از $[1,\infty]$ باشند به‌طوری که $p_0\le q_0$، $p_1\le q_1$، و $q_0\ne q_1$ و

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},\quad (0<t<1).$$

اگر T یک نگاشت زیرخطی از $L^{p_0}(\mu)+L^{p_1}(\mu)$ به فضای توابع اندازه‌پذیر روی Y باشند که از نوع‌های ضعیف (p_0,q_0) و (p_1,q_1) است، آنگاه T از نوع قوی (p,q) است. به‌طور دقیق‌تر، اگر برای $j=0,1$، $[Tf]_{q_j}\le C_j\|f\|_{p_j}$، آنگاه $\|Tf\|_q\le B_p\|f\|_p$ که در آن B_p فقط به p_j و q_j بستگی دارد، مضافاً C_j به p بستگی دارد؛ و برای $j=0,1$، اگر $p_j<\infty$ (متناظراً اگر $p_j=\infty$)، آنگاه وقتی $p\to p_j$، $B_p|p-p_j|$ کراندار باقی می‌ماند.

برهان. حالت $p_0=p_1$ آسان است و به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۴۲). بنابر این بدون کاستن از کلّیت می‌توان فرض کرد $p_0<p_1$ و فعلاً فرض می‌کنیم $q_0<\infty$ و $q_1<\infty$ نیز برقرار باشند (که از آنجا $p_0<p_1<\infty$ نیز برقرار می‌شود). برای $f\in L^p(\mu)$ و $A>0$ فرض می‌کنیم g_A و h_A همانهایی باشند که در گزارهٔ ۶.۲۵ ذکر شدند. در این صورت بنابر گزاره‌های ۶.۲۴ و ۶.۲۵،

$$\int|g_A|^{p_0}\,d\mu=p_0\int_0^\infty\beta^{p_0-1}\lambda_{g_A}(\beta)d\beta=p_0\int_0^\infty\beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta+A)d\beta$$

$$= p_0\int_A^\infty (\beta-A)^{p_0-1}\lambda_f(\beta)d\beta \le p_0\int_A^\infty \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)d\beta, \quad (۶.۲۹)$$

$$\int |h_A|^{p_1}\, d\mu = p_1\int_0^\infty \beta^{p_1-1}\lambda_{h_A}(\beta)d\beta = p_1\int_0^A \beta^{p_1-1}\lambda_f(\beta)d\beta\ .$$

به همین منوال،

$$\int |Tf|^q\, d\nu = q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)d\alpha = 2^q q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(2\alpha)d\alpha\,. \quad (۶.۳۰)$$

چون T زیرخطی است، بنابر قسمت (د) از گزارهٔ ۲۲ . ۶ داریم:

$$\lambda_{Tf}(2\alpha) \le \lambda_{Tg_A}(\alpha)+\lambda_{Th_A}(\alpha)\,. \quad (۶.۳۱)$$

این نامساوی برای هر $\alpha>0$ و $A>0$ درست است، لذا می‌توانیم A را وابسته به α بگیریم. اکنون A ی خاصی انتخاب می‌کنیم. یعنی، از معادله‌هایی که p و q را تعریف می‌کنند معلوم می‌شود که

$$\frac{p_0(q_0-q)}{q_0(p_0-p)} = \frac{p^{-1}(q^{-1}-q_0^{-1})}{q^{-1}(p^{-1}-p_0^{-1})} = \frac{p_1(q_1-q)}{q_1(p_1-p)}; \qquad (۶.۳۲)$$

مقدار مشترک این کمیت‌ها را با σ نشان می‌دهیم و A را مساوی با α^δ می‌گیریم. در این صورت بنابر (۶.۲۹)، (۶.۳۰)، (۶.۳۱) و برآوردهای نوع‌ضعیف روی T،

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q &\le 2^q q\int_0^\infty \alpha^{q-1}[(C_0\|g_A\|_{p_0}/\alpha)^{q_0}+(C_1\|h_A\|_{p_1}/\alpha)^{q_1}]d\alpha \\
&\le 2^q q C_0^{q} p_0^{\frac{q_0}{p_0}}\int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1}\left[\int_{\alpha^\sigma}^\infty \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)d\beta\right]^{\frac{q_0}{p_0}} d\alpha \\
&+ 2^q q C_1^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}}\int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1}\left[\int_0^{\alpha^\sigma} \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)d\beta\right]^{\frac{q_1}{p_1}} d\alpha \qquad (۶.۳۳) \\
&= \sum_{j=0}^{1} 2^q q C_j^{p_j} p_j^{\frac{q_j}{p_j}}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha,\beta)d\beta\right]^{\frac{q_j}{p_j}} d\alpha.
\end{aligned}$$

که در آن با نشان دادن توابع مشخصهٔ مجموعه‌های $\{(\alpha,\beta):\beta>\alpha^\sigma\}$ و $\{(\alpha,\beta):\beta<\alpha^\sigma\}$ با χ_0 و χ_1،

$$\phi_j(\alpha,\beta) = \chi_j(\alpha,\beta)\alpha^{(q-q_j-1)\frac{p_j}{q_j}}\beta^{p_j-1}\lambda_f(\beta)\,.$$

چون $\frac{q_0}{p_1}\ge 1$ و $\frac{q_1}{p_1}\ge 1$، می‌توانیم نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال‌ها را به‌کار برده و به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha,\beta)d\beta\right]^{q_j/p_j} d\alpha \\
&\le \left[\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha,\beta)^{q_j/p_j} d\alpha\right]^{p_j/q_j} d\beta\right]^{q_j/p_j}. \qquad (۶.۳۴)
\end{aligned}$$

فرض می‌کنیم $\tau=\frac{1}{\sigma}$. اگر $q_1>q_0$، آنگاه $q-q_0$ و σ مثبت هستند و نامساوی $\beta>\alpha^\sigma$ با نامساوی $\alpha<\beta^\tau$ معادل است، لذا

$$\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \phi_0(\alpha,\beta)^{q_0/p_0}\,d\alpha\Big]^{p_0/q_0}d\beta$$
$$=\int_0^\infty\Big[\int_0^{\beta^\tau}\alpha^{q-q_0-1}d\alpha\Big]^{p_0/q_0}\beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)d\beta$$
$$=(q-q_0)^{\frac{-p_0}{q_0}}\int_0^\infty\beta^{p_0-1+p_0(q-q_0)/q_0\sigma}\lambda_f(\beta)d\beta$$
$$=(q-q_0)^{\frac{-p_0}{q_0}}\int_0^\infty\beta^{p-1}\lambda_f(\beta)d\beta$$
$$=|q-q_0|^{\frac{-p_0}{q_0}}\,p^{-1}\|f\|_p^p,$$

که در آن برای خلاصه‌کردن توان β از (۶.۳۲) استفاده کرده‌ایم. از طرف دیگر، اگر $q_0 > q_1$، آنگاه $q-q_0$ و σ منفی هستند و نامساوی $\beta > \alpha^\sigma$ با $\alpha > \beta^\tau$ معادل است، لذا همانند فوق،

$$\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \phi_0(\alpha,\beta)^{q_0/p_0}\,d\alpha\Big]^{p_0/q_0}d\beta=\int_0^\infty\Big[\int_{\beta^\tau}^\infty\alpha^{q-q_0-1}d\alpha\Big]^{p_0/q_0}\beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)d\beta$$
$$=(q_0-q)^{\frac{-p_0}{q_0}}\int_0^\infty\beta^{p-1}\lambda_f(\beta)d\beta$$
$$=|q-q_0|^{\frac{-p_0}{q_0}}\,p^{-1}\|f\|_p^p,$$

محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که

$$\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \phi_1(\alpha,\beta)^{q_1/p_1}\,d\alpha\Big]^{p_1/q_1}d\beta=|q-q_1|^{-p_1/q_1}\,p^{-1}\|f\|_p^p.$$

با تلفیق این نتایج با (۶.۳۳) و (۶.۳۴) می‌بینیم که

$$\sup\left\{\|Tf\|_q:\|f\|_p=1\right\}\le B_P=2q^{1/q}\left[\sum_{j=0}^{1}C_j^{q_j}(p_j/p)^{q_j/p_j}|q-q_j|^{-1}\right]^{1/q}.$$

اما چون برای $c>0$، $|T(cf)|=c|Tf|$، مساوی اخیر ایجاب می‌کند که برای هر $f\in L^p(\mu)$، $\|Tf\|_q\le B_p\|f\|_p$ و آنچه که تحقق می‌یابد. (بررسی خواص مورد ادعای B_p به صورت یک تمرین آسان به خواننده واگذار می‌شود.)

فقط نشان دادن این مطلب باقی می‌ماند که چه‌طور این استدلال را اصلاح کنیم تا با حالات استثنایی $q_0=\infty$ یا $q_1=\infty$ همخوانی داشته باشد. سه حالت تشخیص می‌دهیم:

حالت I) $p_1=q_1=\infty$ (لذا $p_0\le q_0<\infty$): به‌جای گرفتن $A=\alpha^\sigma$ در تجزیهٔ f، $A=\alpha/C_1$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\|Th_A\|_\infty\le C_1\|h_A\|_\infty\le\alpha$، لذا $\lambda_{Th_A}(\alpha)=0$ و با $\phi_1=0$ و جایگزینی α/C_1 به‌جای α^σ در تعریف ϕ_0، (۶.۳۳) را به‌دست می‌آوریم. در این صورت همان استدلال فوق، نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\|Tf\|_q \le 2\left[qC_0^{q_0}C_1^{q-q_0}(p_0/p)^{q_0/p_0}|q-q_0|^{-1}\right]^{1/q}\|f\|_p.$$

حالت II) $p_0 \le p_1 < \infty$ و $q_0 < q_1 = \infty$. باز هم ایدهٔ انتخاب A به‌گونه‌ای است که $\lambda_{Th_A}(\alpha)=0$ و انتخاب مناسب A عبارت است از $A=(\alpha/d)^\sigma$ که در آن $d = C_1[p_1\|f\|_p^p/p]^{\frac{1}{p_1}}$ و $\sigma = p_1/(p_1-p)$ (وقتی $q_1 \to \infty$ مقدار حدی σای که به‌وسیلهٔ (۶.۳۲) تعریف می‌شود.) در واقع، چون $p_1 > p$، داریم:

$$\begin{aligned}\|Th_A\|_\infty^{p_1} &\le C_1^{p_1}\|h_A\|_{p_1}^{p_1} = C_1^{p_1}p_1\int_0^A \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha\\ &\le C_1^{p_1}p_1A^{p_1-p}\int_0^A \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha = C_1^{p_1}\frac{p_1}{p}[\frac{\alpha}{d}]^{p_1}\|f\|_p^p = \alpha^{p_1}.\end{aligned}$$

در نتیجه، همانند حالت I، در می‌یابیم که در (۶.۳۳)، $\phi_1=0$ و وقتی $\|f\|_p=1$ انتگرال شامل ϕ_0 به یک B_p محدود می‌شود، که حکم خواسته شده را به‌دست می‌دهد.

حالت III) $p_0 < p_1 < \infty$ و $q_1 < q_0 = \infty$. استدلال در همین حالت اساساً همان استدلال حالت II است، به‌جز اینکه $A=(\alpha/d)^\sigma$ را با انتخاب d به‌گونه‌ای که $\lambda_{Tg_A}(\alpha)=0$، درنظر می‌گیریم. ■

ممکن است فرمول‌های طولانی در این برهان ترسناک به‌نظر برسند، اما ایده‌ها نسبتاً ساده هستند. برای بازکردن آنها تمرین نوشتن برهان برای دو حالت خاص (اما مهم) را پیشنهاد می‌کنیم: (i) $p_0=q_0=1$، $p_1=q_1=2$ و (ii) $p_0=q_0=1$ و $p_1=q_1=\infty$.

اینک دو قضیهٔ درون‌یابی را با هم مقایسه می‌کنیم. قضیهٔ مارکینکوایز مستلزم برخی محدودیت‌ها روی p_j و q_j است که در قضیهٔ ریس ـ تورین مطرح نیستند؛ اما این محدودیت‌ها در تمام موارد صادق هستند. از اینها که بگذاریم، مفروضات قضیهٔ مارکینوایز ضعیف‌تر هستند:
T زیرخطی است و لزوماً خطی نیست و فقط لازم است در نقاط انتهایی در تخمین نوع ضعیف صدق کند. حکم در هر دو حالت این است که T از $L^p(\mu)$ به $L^q(\nu)$ کراندار است، اما قضیهٔ ریس ـ تورین نرم عملگر T را بسیار بهتر تخمین می‌زند. بنابر این هیچکدام از این قضیه‌ها در برگیرندهٔ دیگری نیستند.
با دو کاربرد از قضیهٔ مارکینکوایز این بخش را به پایان می‌رسانیم. اولی به عملگر ماکسیمال هاردی ـ لیتلوود H که در بند ۳.۴ ذکر شد مربوط می‌شود:

$$Hf(x)=\sup\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy \quad (f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)).$$

به وضوح H زیرخطی است و برای هر $f \in L^\infty$ در نامساوی $\|Hf\|_\infty \le \|f\|_\infty$ صدق می‌کند. به‌علاوه، قضیهٔ ۳ . ۱۷ دقیقاً چنین بیان می‌دارد که H از نوع ضعیف $(1,1)$ است. نتیجه می‌گیریم که:

۶ . ۳۵ نتیجه. ثابتی مانند $C > 0$ وجود دارد به‌طوری که اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$، آنگاه
$$\|Hf\|_p \le C\frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$
کاربرد دوم قضیه‌ای است در مورد عملگرهای انتگرال مرتبط به قضیهٔ ۶ . ۱۸.

۶ . ۳۶ قضیه. فرض‌کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ دو فضای اندازهٔ σـ متناهی باشند و $1 < q < \infty$. به‌علاوه، فرض‌کنیم K تابع اندازه‌پذیری روی $X \times Y$ باشد به‌طوری که به‌ازای ثابتی چون $C > 0$ و برای تقریباً هر x از X داشته باشیم $[K(x,\cdot)]_q \le C$ و برای تقریباً هر y از Y، $[K(\cdot,y)]_q \le C$. اگر $1 \le p < \infty$ و $f \in L^p(\nu)$، آنگاه انتگرال
$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)d\nu(y)$$
برای تقریباً هر x از X مطلقاً همگرا است و عملگر T که بدین ترتیب تعریف می‌شود از نوع ضعیف $(1,q)$ است و برای هر p و r با شرط $1 < p < r < \infty$ و $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$ از نوع قوی (p,r) است.
به‌طور دقیق‌تر، ثابتی مستقل از K مانند B_p وجود دارد به‌طوری‌که
$$[Tf]_q \le B_1 C\|f\|_1, \quad \|Tf\|_r \le B_p C\|f\|_p \qquad (p > 1,\ r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 > 0).$$

برهان. فرض می‌کنیم p' و q' نمای مزدوج با p و q باشند؛ در این‌صورت
$$r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 = p^{-1} - (q')^{-1} = q^{-1} - (p')^{-1},$$
لذا $p < q'$ و $q < p'$. فرض می‌کنیم $0 \ne f \in L^p$ $(1 \le p < q')$؛ با ضرب f و K در ثابت‌ها، می‌توان فرض کرد که $\|f\|_p = C = 1$. برای عدد مثبت مفروضی چون A که از این به بعد ثابت خواهد بود تعریف می‌کنیم:
$$E = \{(x,y) : |K(x,y)| > A\}, \quad K_1 = (\operatorname{sgn} K)(|K| - A)\chi_E, \quad K_2 = K - K_1,$$
و فرض می‌کنیم T_1 و T_2 عملگرهای متناظر با K_1 و K_2 باشند. در این صورت بنابر گزاره‌های ۶ . ۲۴ و ۶ . ۲۵، چون $q > 1$ داریم:
$$\int |K_1(x,y)|d\nu(y) = \int_0^\infty \lambda_{K(x,\cdot)}(\alpha + A)d\alpha \le \int_A^\infty \alpha^{-q}d\alpha = \tfrac{A^{1-q}}{q-1},$$
و به‌طور مشابه
$$\int |K_1(x,y)|d\mu(x) \le \tfrac{A^{1-q}}{q-1}.$$

بنابر این، طبق قضیهٔ ۱۸ . ۶، انتگرال تعریف‌کنندهٔ $T_1f(x)$ برای تقریباً همهٔ xها همگرا است و

$$\|T_1f\|_p \leq \frac{A^{1-q}}{q-1}\|f\|_p = \frac{A^{1-q}}{q-1}. \qquad (6.37)$$

مشابهاً، چون $q < p'$،

$$\int |K_2(x,y)|^{p'}\, d\nu(y) = p'\int_0^A \alpha^{p'-1}\lambda_{K(x,\cdot)}(\alpha)d\alpha \leq p'\int_0^A \alpha^{p'-1-q}d\alpha = \frac{p'A^{p'-q}}{p'-q}.$$

بنابر این، طبق نامساوی هولدر، انتگرال تعریف کنندهٔ $T_2f(x)$ برای هر x همگرا است و

$$\|T_2f\|_\infty \leq \left[\frac{p'A^{p'-q}}{p'-q}\right]^{\frac{1}{p'}}\|f\|_p = \left[\frac{r}{q}\right]^{\frac{1}{p'}} A^{\frac{q}{r}}. \qquad (6.38)$$

از این رو ثابت کرده‌ایم که $Tf = T_1f + T_2f$ تقریباً همه‌جا خوش‌تعریف است.

اینک با مفروض‌گرفتن $\alpha > 0$، می‌خواهیم $\lambda_{Tf}(\alpha)$ را تخمین بزنیم. اما بنابر قسمت (د) از گزارهٔ ۳۸ . ۶ اگر A را به‌صورت $A = \left[\frac{\alpha}{2}\right]^{\frac{r}{q}}\left[\frac{q}{r}\right]^{\frac{r}{qp'}}$ انتخاب کنیم، آنگاه خواهیم داشت $\|T_2f\|_\infty \leq \frac{1}{2}\alpha$، لذا $\lambda_{T_2f}(\frac{1}{2}\alpha) = 0$ در نتیجه، با این انتخاب A، به کمک (۶.۳۷) و نامساوی چبیشف به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \lambda_{T_1f}(\tfrac{1}{2}\alpha) \leq \left[\frac{2\|T_1f\|_p}{\alpha}\right]^p \leq \left[\frac{2A^{1-q}}{(q-1)\alpha}\right]^p$$

$$= \frac{2^{p-(1-q)pr/q}}{(q-1)^p}\left[\frac{q}{r}\right]^{(1-q)pr/qp'}\alpha^{-p+(1-q)pr/q} = C_p\left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^r,$$

زیرا $\|f\|_p = 1$ و

$$\frac{(1-q)pr}{q} - p = p\left(\frac{-r}{q'}-1\right) = -p.\frac{r}{p} = -r.$$

اکنون استدلال مشابه ساده‌ای تخمین $\lambda_{Tf}(\alpha) \leq C_p(\|f\|_p/\alpha)^r$ را بدون هیچ محدودیتی روی $\|f\|_p$ به‌دست می‌دهد، بنابر این نشان داده‌ایم که T از نوع ضعیف (p,r) است و به‌ویژه (برای $p=1$) از نوع ضعیف $(1,q)$ است.

بالاخره، با فرض $p \in (1,q')$، $\tilde{p} \in (p,q')$ را انتخاب کرده و $\tilde{r}$ را با تساوی $\tilde{r}^{-1} = \tilde{p}^{-1} - (q')^{-1}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت T از نوع‌های ضعیف $(1,q)$ و $(\tilde{p},\tilde{r})$ است، لذا از قضیهٔ مارکینکوایز معلوم می‌شود که T از نوع قوی (p,r) است.

تمرین‌ها

(۴۱) فرض کنیم $1 < p \leq \infty$ و $p^{-1} + q^{-1} = 1$. اگر T عملگر کرانداری روی L^p باشد به‌طوری‌که برای هر f و g از $L^p \cap L^q$، $\int (Tf)g = \int f(Tg)$، آنگاه برای هر r در $[p,q]$ (هرگاه $p < q$) یا در $[q,p]$ (هرگاه $q < p$)، عملگر T به‌طور یکتا به یک عملگر کراندار روی L^r توسیع می‌یابد.

۴۲) قضیهٔ مارکینکوایز را در حالت $p_\circ = p_1$ ثابت کنید. (با قرار دادن $p = p_\circ = p_1$، داریم:

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \le \left(\frac{C_\circ \|f\|_p}{\alpha}\right)^{q_\circ}, \quad \lambda_{Tf}(\alpha) \le \left(\frac{C_1 \|f\|_p}{\alpha}\right)^{q_1}.$$

بسته به α، از هر کدام از تخمین‌ها که بهتر است استفاده کرده و $q\int_\circ^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)d\alpha$ را محدود سازید.)

۴۳) فرض‌کنیم H عملگر ماکسیمال هاردی- لیتلوود روی $\mathbb{R}$ باشد. $H\chi_{(\circ,1)}$ را به‌طور صریح حساب کنید. ثابت کنید که این تابع برای $p > 1$ در L^p است و در L^1 ی ضعیف است اما در L^1 نیست و وقتی $p \to 1$ نرم L^p ی آن همانند $(p-1)^{-1}$ به ∞ میل می‌کند، گرچه برای هر p، $\|\chi_{(\circ,1)}\|_p = 1$.

۴۴) فرض‌کنیم I_α عملگر انتگرال‌گیری کسری تمرین ۶۱ از بند ۲.۶ باشد. اگر $\circ < \alpha < 1$، $1 < p < \alpha^{-1}$ و $r^{-1} = p^{-1} - \alpha$، آنگاه نسبت به اندازهٔ لبگ روی $(\circ,\infty)$، I_α از نوع ضعیف $(1,(1-\alpha)^{-1})$ و از نوع قوی (p,r)است.

۴۵) اگر $\circ < \alpha < n$، عملگری مانند T_α بر مجموعهٔ توابع روی $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_\alpha f(x) = \int |x-y|^{-\alpha} f(y)dy .$$

در این صورت نسبت به اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$، T_α از نوع ضعیف $(1,(n-\alpha)^{-1})$و از نوع قوی (p,r)است که در آن $1 < p < n\alpha^{-1}$ و $r^{-1} = p^{-1} - \alpha n^{-1}$. (حالت $n = 3$ و $\alpha = 1$ در فیزیک از اهمیت خاصی برخوردار است: اگر f بیان‌کنندهٔ چگالی یک جرم یا توزیع بار باشد، آنگاه $(4\pi)^{-1}T_1 f$ -بیان‌کنندهٔ گرانش القایی یا پتانسیل الکترواستاتیکی است.)

یادداشت‌ها و مراجع

اهمیت فضای $L^2([a,b])$ بلافاصله پس از ابداع انتگرال لبگ به‌خاطر ارتباط آن با سری‌های فوریه و بسطهای متعامد دیگر خیلی سریع مشخص شد؛ یکی از نخستین دست‌آوردهای نظریهٔ لبگ، ایزومورف بودن $L^2([a,b])$ با l^2، یا هم‌ارز آن، یعنی کامل بودن $L^p([a,b])$ بود که در سال ۱۹۰۷ توسط فیشر[۴۴] و اف. ریس[۱۱۴] کشف شد. فضاهای $L^p([a,b])$ برای $1 < p < \infty$ توسط اف. ریس[۱۱۷] مورد کنکاش واقع شده بود، ولی همان‌طور که فشردگی زیردنباله‌ای ضعیف گوی بستهٔ

واحد در L^p را اثبات کرد، همهٔ احکام اصلی واقع در بندهای ۶.۱ و ۶.۲ را نیز اثبات کرد. تساوی $(L^1)^* = L^\infty$ اولین بار توسط اشتنهاوس اثبات شد[۱۴۳].

اینکه فضاهای L^p فضاهای $L^{\frac{1}{p}}$ نامیده نشده‌اند از جهاتی ناگوار است، زیرا ــ همان‌طور که در رابطهٔ مزدوجی $p^{-1}+q^{-1}=1$ و احکام بند ۶.۵ دیده شد ـ روابط بین فضاهای L^pی مختلف معمولاً شامل معادلات خطی بر حسب p^{-1} هستند. بحث از منظر عمیق‌تر فضاهای L^p و کاربردهایشان در خیطه‌های دیگر آنالیز را می‌توان در لایب لوز[۹۳] یافت.

بند ۶.۱: عموماً نامساوی هولدر در حالت $p=2$ با نام‌های کشی (کسی که آن را برای مجموع های متناهی ثابت کرد) و بورباکی و شوارتز (کسانی که مستقلاً آن را برای انتگرال‌ها ثابت کردند) در ارتباط است. برای p های کلی، این نامساوی مستقلاً توسط هولدر و راجر کشف شد. نامساوی اصلی مینکوفسکی برای مجموع‌های متناهی بود. (هاردی، لیتلوود و پولیا[۶۶] را ببینید.) اثبات قشنگی از نامساوی هولدار به کمک نظریهٔ تابع مختلط را می‌توان در روبل[۱۲۲] یافت.
روابط بین فضاهای $L^p + L^q$ که در تمرین ۴ تعریف شد در آلوارز[۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای موضوعی از تمرین ۵ که دربرگیرندهٔ برخی شرایط دیگر که تحت آنها شمول $L^p \subset L^q$ برقرار می‌شود رومرو[۱۲۰] را ببینید. برای بحث راجع به رابطهٔ کلی‌تر $L^p(\mu) \subset L^q(\nu)$ می‌توانید به میامی[۱۰۰] رجوع کنید.

بند ۶.۲: رهیافت متفاوت خوبی برای نظریهٔ دوگان L^p به ازای $1<p<\infty$ می‌توان در هویت و استرامبرگ[بند۱۵ از ۷۶] یافت. جی. شوارتز در[۱۳۰] یک رده‌بندی از $(L^1)^*$ یافته است که روی فضاهای اندازهٔ دل‌خواه نیز معتبر است.

برهان. قضیهٔ ۶.۱۵ برای $p=\infty$ بی‌نتیجه است زیرا تابع مجموعهٔ $\nu(E)=\phi(\chi_E)$ لزوماً جمعی شمارش‌پذیر نیست. البته ν یک اندازهٔ مختلط متناهیاً جمعی کراندار روی (X,M) است که نسبت به μ مطلقاً پیوسته است بدان‌معناست که اگر $\mu(E)=0$، آنگاه $\nu(E)=0$. برعکس، اگر یک اندازهٔ مختلط متناهیاً جمعی کراندار مانند ν روی $(X,\mathcal{M})$ مفروض باشد، می‌توان انتگرال یک تابع اندازه‌پذیر کراندار نسبت به ν روی $(X,\mathcal{M})$ تعریف کرد. (وقتی f ساده است به روشنی $\int f d\nu$ را تعریف کرده و سپس نشان داده می‌شود که $\left|\int f d\nu\right| \le C\|f\|_u$، لذا انتگرال به همهٔ حدود یکنواخت توابع ساده توسیع داده می‌شود.)
در این روش نمایشی از $(L^\infty)^*$ به‌صورت فضایی از اندازه‌های مختلط متناهاً جمعی به‌دست می‌آید. هویت و استرامبر [بند۲۰ از ۷۶] را دیده و برای شرح کلی‌تری از انتگرال‌های متناهیاً جمعی، دانفورد و شوارتز [فصل۳ از۳۵] را ببینید. (مثالی از یک $\phi \in (L^\infty)^* \setminus L^1$ که در انتهای بند ۶.۲ ذکر کردیم نشان می‌دهد که اندازه‌های متناهیاً جمعی ناگوار چگونه می‌توانند باشند: اگر $\nu(E)=\phi(\chi_E)$، آنگاه $\nu \ll m$، اما وقتی درکنار تابعی پیوسته انتگرال‌گیری شد، ν مانند جرم نقطه ای درصفر رفتار می‌کند.)

بند ۶.۳: قضیهٔ ۶.۱۸ احکام شور[۱۲۹] (برای حالت $p=2$) و دبلیو. اچ. یانگ[۱۶۴] (برای حالت $K(x,y)=k(x-y)$؛ بند ۸.۲ را ببینید) را تعمیم می‌دهد. قضیهٔ ۶.۲۰ نیز اساساً به شور[۱۲۹] منسوب است. خواننده‌ای که مشتاق نامساوی‌ها است و با این بخش مجاب نمی‌شود دنیایی از این نامساوی‌ها را می‌تواند در هاردی، لیتلـوود و پولیا[۶۶] بیابد.

بند ۶.۴: فضاهای L^p ی ضعیف نخستین بار به‌طور ضمنی در برآوردهای نوع ضعیف ظاهر شدند و مثال‌هایی از آن به سال ۱۹۲۰ برمی‌گردد؛ تذکرات زیرین بند ۶.۵ را هم ببینید. تجدید آرایش نزولی (تمرین ۴۰) توسط هاردی و لیتلوود در[۶۵] معرفی شدند، این دو انگیزش خوشایندی از قضیهٔ اصلی خود روی تجدید آرایش‌ها برحسب میانگین‌های کریکت دادند.

بند ۶.۵: قضیهٔ ریس- تورین نخستین‌بار توسط ام. ریس (برادر کوچکتر اف. ریس) تحت مفروضات $p_1\leq q_1$ و $p_2\leq q_2$ اثبات شد[۱۱۸]؛ برهان حالت کلی و فکر استفاده از لم سه خط به تورین[۱۴۹] نسبت داده شده است. ای. ام. اشتاین حالت عمومی خیلی قوی‌تر قضیهٔ ریس ـ تورین را ثابت کرده است.
این قضیه دربارهٔ خانواده‌ای چون $\{T_z : 0\leq \operatorname{Re} z\leq 1\}$ از عملگرهایی است که (به‌طور کلی) از نظر تحلیلی به z وابسته‌اند و در برخی شرایط نمو معتدل مثل $|\operatorname{Im} z|\to\infty$ صدق می‌کند که اگر برای $\operatorname{Re} z=j$ $(j=0,1)$ T_x از L^{p_j} به L^{q_j} کراندار باشد، آنگاه برای $\operatorname{Re} z=t$ $(0<t<1)$، T_x از L^{p_t} به L^{q_t} کراندار است که در آن p_t و q_t مثل قضیه ریس ـ تورین تعریف می‌شوند. حکم دقیق و برهان در بنت و شارپلی [بند ۴.۳ از ۱۵]، اشتاین و وایس [بند $V.4$ از ۱۴۲] یا زیگموند[$XII\cdot I$ از ۱۶۸] می‌توان یافت. برای بسط بیشتر این ایده‌ها کوایفمن[۲۸] را ببینید.
قضیهٔ درون‌یابی مارکینکوایز برای حالت $p_j=q_j$ $(j=0,1)$ توسط خود مارکینکوایز در[۹۷] رسماً اعلام شده بود؛ پس از مرگ نابهنگام وی در جنگ جهانی دوم، کار او توسط زیگمن تکمیل شد[۱۶۶]. قضیهٔ مذکور حتی تحت شرایط ضعیف‌تری روی T نیز قابل اثبات بود؛ پیچ و تاب زیادی که به استدلال داده‌ایم همان‌حکمی را به‌دست می‌دهد که تحت تک‌فرض $|T(f+g)|\leq C\left(|Tf|+|Tg|\right)$ برای یک ثابت C به‌دست می‌آمد. زیگمن [۱۶۶] و [$XII\cdot 4$, ۱۶۸] را ببینید. فضاهای L^p و L^p ی ضعیف بخشی از خانوادهٔ دو پارامتری مانند $\left\{L(p,q):1\leq p,\ q\leq\infty\right\}$ از فضاهای توابع موسوم به فضاهای لورنز به‌طوری‌که $L^p=L(P_0,p)$ و $L^p(p,\infty)$ ضعیف است را تشکیل می‌دهند، و قضیهٔ مارکینکوایز را به حکمی دربارهٔ درون‌یابی عملگرهای روی فضاهای $L(p,q)$ می‌توان توسیع داد. بنت و شارپلی[۱۵, ۴.۴] یا اشتلین و وایس[۱۴۲, ۵.۳] را ببینید.
مثال‌هایی دیگری از «خانواده‌هایی پیوسته» از فضاهای باناخ وجود دارند که قضیهٔ درون‌یابی را می‌توان برای آنها اثبات کرد ـ برای مثال فضاهای A_α که در تمرین ۱۱ از بند ۵.۱ ذکر شدند فضاهای سوبولف که در بند ۹.۳ معرفی شدند. دو شگرد کلی نیز برای

ساختن « فضاهای میانی» بین زوج‌هایی از فضاهای باناخ وجود دارد، و تحت عنوان « روش مختلط » و « روش حقیقی » مشهورند، که می‌توان اینها را به‌عنوان صورت‌های مجرد قضایای ریس ـ تورین و مارکینکوایز در نظر گرفت.
شرح و نقل این نظریه‌ها و کاربردهایشان را می‌توان در برگ و لوف استروم [۱۶] یافت، بنت و شارپلی [۱۵] را هم ببینید که روش حقیقی و کاربردهایش را بیان داشته است.
نتیجه ۶.۳۵ به هاردی و لیتلوود منسوب شده است [۶۵]. قضیهٔ ۶.۳۶ نخستین‌بار در فولند و اشتاین ظاهر شد [۵۱]، اما ایدهٔ اصلی برهان چندین سال قبل توسط اشتاین کشف شده بود (اشتاین [۱۴۰,۵.۱] را ببینید)، و حالت خاص ذکر شده در تمرین ۴۴ به هارد و لیتلوود برمی‌گردد [۶۴].

کتابنامه

1. R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).
2. W. J. Adams, The Life and Times of the Central Limit Theorem, Kaedmon, New York (1974).
3. Weak convergence of linear functionals, Bull. Amer Math. Soc. 44(1938), 196.
4. Weak topologies of normed linear spaces, Annals of Math. 41 (1940), 252-267.
5. S. A. Alvarez, L-arithmetic, Amer Math. Monthly 99 (1992), 656-662.
6. C. Arzelà, Sulle funzioni di linee, Mem. Accad. Sci. 1st. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. (5) 5 (1895), 55-74.
7. J. M. Ash (ed.), Studies in Harmonic Analysis, Mathematical Association of America, Washington, D.C. (1976).
8. S. Banach, Sur le problème de la mesure, Fund. Math. 4 (1923), 7-33; also in Banach's Oeuvres, Vol. I, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1967), 66-89.
9. S. Banach, Théorie des Operations Linéaires, Monografje Matematyczne, War saw, 1932; also in Banach's Oeuvres, Vol.11, Polish Scientific Publishers, Warsaw(1967), 13-302.
10. S. Banach and H. Steinhaus, Sur le principe de La condensation de singularités, Fund. Math. 9(1927), 50-61; also in Banach's Oeuvres, Vol. II, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1967), 365-374.
11. S. Banach and A. Tarski, Sur Ia decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. Math. 6 (1924), 244-277; also in Banach's Oeuvres, Vol. I, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1967), 118-148.
12. R. 0. Bartle, An extension of Egorov's theorem, Amer Math. Monthly 87(1980),628-633.
13. R. G. Bartle, Return to the Riemann integral, Amer Math. Monthly 103 (1996),625-632.
14. W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis, Annals of Math. 102 (1975), 159-182.
15. C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, Boston (1988).
16. J. Bergh and J. Löfstrom, Interpolation Spaces, Springer-Verlag, Berlin (1976).
17. P. Billingsley, Probability and Measure (2nd ed.), Wiley, New York (1986).
18. C. B. Blyth and P. K. Pathak, A note on easy proofs of Stirling's theorem, Amer Math. Monthly 93 (1986), 376-379.
19. N. Bourbaki, Sur les espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938),1701-1704.
20. N. Bourbaki, General Topology (2 vols.), Hermann, Paris, and Addison-Wesley, Reading, Mass. (1966).
21. A. Brown, An elementary example of a continuous singular function, Amer Math. Monthly 76 (1969), 295-297.
22. C. Carathéodory, Vorlesungen über Reelle Funktionen, Teubner, Leipzig (1918);2nd ed. (1927), reprinted by Chelsea, New York (1948).
23. E. tech, On bicompact spaces, Annals of Math. 38 (1937), 823-844.
24. P. R. Chernoff, A simple proof of Tychonoff's theorem via nets, Amer Math. Monthly 99 (1992), 932-934.
25. K. L. Chung, A Course in Probability Theory (2nd ed.), Academic Press, New York (1974).
26. P. J. Cohen, Set Theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin, New York (1966).
27. D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, Boston (1980).
28. R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher, and 0. Weiss, Complex inter polation for families of

Banach spaces, Harmonic Analysis in Euclidean Spaces (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 35), part 2, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1979), 269-282.

29. P. J. Daniell, A general form of integral, Annals of Math. 19 (1918), 279-294.
30. K. M. Davis and Y. C. Chang, Lectures on Bochner-Riesz Means, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1987).
31. K. deLeeuw, The Fubini theorem and convolution formula for regular measures, Math. Scand. 11 (1962), 117-122.
32. J. DePree and C. Swartz, Introduction to Real Analysis, Wiley, New York (1988).
33. J. Dieudonné, History of Functional Analysis, North-Holland, Amsterdam(1981).
34. J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston (1966); reprinted by Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa (1989).
35. N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators (3 vols.), Wiley-Interscience, New York (1958, 1963, and 1971).
36. H. Dym and H. P. McKean, Fourier Series and Integrals, Academic Press, New York (1972).
37. G. A. Edgar, Measure, Topology, and Fractal Geometry, Springer-Verlag, New York (1990).
38. R. Engelking, General Topology (rev. ed.), Heldermann Verlag, Berlin (1989).
39. K. J. Falconer, The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, Cam bridge, U.K. (1985).
40. K. J. Falconer, Fractal Geometry, Wiley, New York (1990).
41. H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, Berlin (1969).
42. C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, Annals of Math. 98 (1973), 551-571.
43. M. B. Feldman, A proof of Lusin's theorem, Amer Math. Monthly 88 (1981), 19 1-192.
44. E. Fischer, Sur le convergence en moyenne, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1022-1024.
45. G. B. Folland, Remainder estimates in Taylor's theorem, Amer Math. Monthly 97 (1990), 233-235.
46. G. B. Folland, FourierAnalysis and Its Applications, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, Cal. (1992)
47. G. B. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1995).
48. G. B. Folland, Introduction to Partial Differential Equations (2nd ed.), Princeton University Press, Princeton, N.J. (1995).
49. G. B. Folland, Fundamental solutions for the wave operator, Expos. Math. 15 (1997), 25-52.
50. G. B. Folland and A, Sitaram, The uncertainty principle: a mathematical survey, J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 207-238.
51. G. B. Folland and E. M. Stein, Estimates for the 0,, complex and analysis on the Heisenberg group, Commun. Pure Appl. Math. 27 (1974), 429—522.
52. M. Frdchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 1-74.
53. M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle dtendue a un ensemble abstrait, Bull. Soc. Math. France 43 (1915), 248-265.
54. M. Fréchet, Des familles et fonctions additivies d'ensembles abstraits, Fund. Math. 5 (1924), 206-251.
55. I. M. Gelfand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Academic Press, New York (1964).
56. K. Godel, What is Cantor's continuum problem?, Amer Math. Monthly 54(1947), 5 15-525; revised and expanded version in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.),

Philosophy of Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964), 258-273.
57. R. A. Gordon, The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, Amer ican Mathematical Society, Providence, R.I. (1994).
58. S. Grabiner, The Tietze extension theorem and the open mapping theorem, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 190-191.
59. A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuerlichen Gruppen, Annals of Math. 34 (1933), 147-169; also in Haar's Gesammelte Arbeiten, Akadémiai Kiadó, Budapest (1959), 600-622.
60. H. Hahn, Über die Multiplikation total-additiver Mengefunktionen, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1933), 429-452.
61. H. Hahn and A. Rosenthal, Set Functions, University of New Mexico Press, Albuquerque, N.M. (1948).
62. P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1950); reprinted by Springer-Verlag, New York (1974)
63. P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1960); reprinted by Springer-Verlag, New York (1974).
64. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals I, Math. Zeit. 27 (1928), 565-606; also in Hardy's Collected Papers, Vol. III, Oxford University Press, Oxford (1969), 564-607.
65. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math. 54 (1930), 81—116; also in Hardy's Collected Papers, Vol. II, Oxford University Press, Oxford (1967), 509-544.
66. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and 0. Pólya, Inequalities (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1952).
67. D. G. Hartig, The Riesz representation theorem revisited, Amer Math. Monthly90(1983), 277-280.
68. F. Hausdorif, Grundzuge der Mengenlehre, Verlag von Veit, Leipzig (1914); reprinted by Chelsea, New York (1949).
69. F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Math. Annalen 79(1919), 157-179.
70. T. Hawkins, Lebesgue 's Theory of Integration, University of Wisconsin Press, Madison, Wisc. (1970).
71. J. Hennefeld, A nontopological proof of the uniform boundedness theorem, Amer Math. Monthly 87 (1980), 217.
72. R. Henstock, The General Theory of Integration, Oxford University Press, Ox ford, U.K. (1991).
73. E. Hewitt, On two problems of Urysohn, Annals of Math 47 (1946), 503-509.
74. E. Hewitt and R. E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, Arch. Hist. Exact Sci. 21 (1979), 129-160.
75. E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1963).
76. E. Hewitt and K. Stromberg, Real andAbstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin (1965).
77. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1983).
78. J. E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana U. Math. J. 30 (1981), 713-747.
79. G. W. Johnson, An unsymmetric Fubini theorem, Amer Math. Monthly 91(1984), 131-133
80. S. Kakutani, Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Math. 42 (1941), 994-1024.

81. S. Kakutani and J. C. Oxtoby, Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space, Annals of Math. 52 (1950), 580-590.
82. J. L. Kelley, The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math. 37 (1950), 75-76.
83. J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1955); reprinted by Springer-Verlag, New York (1975).
84. F. B. Knight, Essentials of Brownian Motion and Diffusion, American Mathe matical Society, Providence, R.I. (1981).
85. A. N. Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer-Verlag, Berlin (1933); translated as Found of the Theory of Probability, Chelsea, New York (1950).
86. H. Konig, Measure and Integration, Springer-Verlag, Berlin (1997).
87. T. W. Körner, Fourier Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1988).
88. J. Kupka and K. Prikry, The measurability of uncountable unions, Amer Math. Monthly 91 (1984), 85-97.
89. A. V. Lair, A Rellich compactness theorem for sets of finite volume, Amer Math. Ienthly83 (1976), 350-351.
90. J. Lamperti, Probability (2nd ed.), Wiley, New York (1996).
91. H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, Annali Mat. PuraAppl. (3)7(1902), 231-359; also in Lebesgue's Oeuvres Scientifiques, Vol. I, L'Enseignement Mathd matique, Geneva (1972), 201-331.
92. H. Lebesgue, Sur l'integration des fonctions discontinues, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 27 (1910), 361-450; also in Lebesgue's Oeuvres Scient vol. II, L'Enseignement Mathématique, Geneva (1972), 185-274.
93. E. H. Lieb and M. Loss, Analysis, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1997).
94. L. H. Loomis, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1953).
95. L. H. Loomis and S. Sternberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968); reprinted by Jones and Bartlett, Boston (1990)
96. B.Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco (1983).
97. J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation d'opérateurs, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), 1272-1273.
98. A. Markov, On mean values and exterior densities [Mat. Sbornik 4(46) (1938), 165-191.
99. R. M. McLeod, The Generalized Riemann Integral, Mathematical Association of America, Washington, D.C. (1980).
100. A. G. Miamee, The inclusion LP(ji) C L Amer Math. Monthly 98 (1991), 342-345.
101. E. H. Moore and H. L. Smith, a general theory of limits, Amer J. Math. 44 (1922), 102-121.
102. J. Nagata, Modern General Topology (2nd rev. ed.), North-Holland, Amsterdam (1985).
103. E. Nelson, Regular probability measures on function spaces, Annals of Math. 69 (1959), 630-643.
104. E. Nelson, Feynman integrals and the Schrodinger equation, J. Math. Phys. 5 (1964), 332-343.
105. E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1967).
106. D. J. Newman, Fourier uniqueness via complex variables, Amer Math. Monthly 81 (1974), 379-380.
107. O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. Math.15 (1930), 131-179.
108. W. F. Pfeffer, Integrals and Measures, Marcel Dekker, New York (1977).
109. W. F. Pfeffer, The Riemann Approach to Integration, Cambridge University Press, London (1993).
110. M. Plancherel, Contribution a l'étude de la representation d'une fonction arbi traire par des integrales definies, Rend. Circ. Mat. Paler,no 30 (1910), 289-335.
111. J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiv Mengenfunktionen, S.-B. Math.-Natur Kl. Kais, Akad. Wiss. Wien 122.IIa (1913), 1295-1438; also in Radon's Collected Works, vol. I, Birkhäuser, Basel (1987), 45-188.

112. M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis (2nd ed.), Academic Press, New York (1980).
113. B. Riemann, Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in Riemann's Gesammelte Mathematische Werke, Teubner, Leipzig (1876), 254-269.
114. F. Riesz, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 615-619; also in Riesz's Oeuvres Completes, Vol. I, Akaémiai Kiadó, Budapest (1960), 378-381.
115. F. Riesz, Sur une espece de geometrie analytique des systèmes de functions sommables, C. R. Acad. Aci. Paris 144 (1907), 1409—1411; also in Riesz's Oeuvres Completes, Vol. I, Akaémiai Kiadó, Budapest (1960), 386—388.
116. F. Riesz, Sur les operations fonctionnelles linéaires, C. R. Acad Sci. Paris 149 (1909), 974-977; also in Riesz's Oeuvres Completes, Vol. I, Akaémiai Kiadó, Budapest (1960), 400-402.
117. F. Riesz, Untersuchungen uber Systeme integrierbarer Funktionen, Math. An nalen 69 (1910), 449-497; also in Riesz's Oeuvres Completes, Vol. I, Akaémiai Kiadó, Budapest (1960), 441-489.
118. M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math. 49 (1926) 465-497; also in Riesz's Collected Papers, Springer-Verlag, Berlin (1988), 377-409.
119. C. A. Rogers, Hausdorff Measures, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1970).
120. J. L. Romero, When is LP(contained in L Amer Math. Monthly 90 (1983), 203-206.
121. H. L. Royden, Real Analysis (3rd ed.), Macmillan, New York (1988).
122. L. A. Rubel, A complex-variables proof of Holder's inequality, Proc. Amer Math. Soc. 15 (1964), 999.
123. W. Rudin, Lebesgue's first theorem, in L. Nachbin (ed.), Mathematical Analysis and Applications (Advances in Math. Supplementary Studies, vol. 7B), Academic Press, New York (1981), 741-747.
124. W. Rudin, Well-distributed measurable sets, Amer Math. Monthly 90 (1983), 41-42.
125. W. Rudin, Real and Complex Analysis (3rd ed.), McGraw-Hill, New York (1987).
126. W. Rudin, Functional Analysis (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1991).
127. S. Saeki, A proof of the existence of infinite product probability measures, Amer Math. Monthly 103 (1992), 682-683.
128. S. Saks, Theory of the Integral (2nd ed.), Monografje Matematyczne, Warsaw (1937); reprinted by Hafner, New York (1938).
129. I. Schur, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinear form en mit Un endlich vielen Veränderlichen, J. Reine Angew Math. 140 (1911), 1-28; also in Schur's Gesammelte Abhandlungen, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1973), 464-491.
130. J. Schwartz, A note on the space L, Pmc. Amer Math. Soc. 2 (1951), 270-275.
131. J. Schwartz, The formula for change of variables in a multiple integral, Amer Math. Monthly 61 (1954), 81-85.
132. L. Schwartz, Théorie des Distributions (2nd ed.), Hermann, Paris (1966).
133. J. Serrin and D. E. Varberg, A general chain rule for derivatives and the change of variables formula for the Lebesgue integral, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 514-520.
134. W. Sierpinski, Sur un problème concemant Ms ensembles mésurables superfi ciellement, Fund. Math. I (1920), 112-115; also in Sierpiñski's Oeuvres Choisis, vol. II, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1975), 328-330.
135. R. M. Smullyan and M. Fitting, Set Theory and the Continuum Problem, Oxford University Press, Oxford, U.K. (1996).
136. S. L. Sobolev, A new method for solving the Cauchy problem for normal linear hyperbolic ec Russian

Mat. Sbornik 1(43) (193€), 39-72.
137. S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis [Mat. Sbornik4(46) (1938), 471-496.
138. R. M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Math. 92 (1970), 1-56.
139. S. M. Srivastava, A Course in Borel Sets, Springer-Verlag, New York (1998).
140. E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Pmperties of Functions, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).
141. E. M. Stein, Harmonic Analysis, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1993).
142. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1971).
143. H. Steinhaus, Additive und stetige Funktional operationen, Math. Zeit. 5 (1919), 186-221; also pp. 252-288 in Steinhaus's Selected Papers, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1985).144. M. Stoica, of the theory of oo\eact niw to ,ettetal topo1o Trw et. Soc. 5, T
145. M. H. Stone, The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Mag.21(1948), 167-184 and 237-254; reprinted in R. C. Buck (ed.), Studies in Modern Analysis, Mathematical Association of America, Washington, D.C. (1962), 30-87.
146. K. Stromberg, The Banach-Tarski paradox, Amer Math. Monthly 86 (1979),15 1161.
147. M. E. Taylor, Pseudod Operators, Princeton University Press, Prince ton, N.J. (1981).
148. H. J. ter Horst, Riemann-Stieltjes and Lebesgue-Stieltjes integrability, Amer Math. Monthly 91 (1984), 55 1-559.
149. G. O. Thorin, An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, Kungi. Fysiografiska Saellskapet i Lund Forhaendlinger 8 (1939), No. 14.
150. F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels, Academic Press, New York (1967).
151. A. Tychonoff, Uber die topologische Erweiterung von Ratimen, Math. Annalen102 (1929), 544-561.
152. P. Urysohn, Uber die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen, Math. Annalen 94 (1925), 262-295.
153. P. Urysohn, Zum Metrisationsproblem, Math. Annalen 94 (1925), 309-3 15.
154. J. von Neumann, Mathematische BegrUndung der Quantenmechanik, Gottinger Nachr (1927), 1-57; also in von Neumann's Collected Works, Vol. I, Pergamon Press, New York (1961), 151-207.
155. J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Mat. Sbornik 1(43) (1936),721-734; also in von Neumann's Collected W. Vol. IV, Pergamon Press, New York (1962), 91-104.
156. L. E. Ward, A weak Tychonoff theorem and the axiom of choice, Proc. Amer Math. Soc. 13 (1962), 757-758.
157. F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott Foresman, Glenview, Ill. (1971); reprinted by Springer-Verlag, New York (1983).
158. A. Weil, L'Intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications, Her- mann, Paris (1940).
159. N. Wiener, Differential-space, J. Math. and Phys. 2 (1923), 131-174; also in Wiener's Collected Works, Vol.1, MIT Press, Cambridge, Mass. (1976), 455-598.
160. N. Wiener, The average value of a functional, Proc. London Math. Soc. 22(1924),454-467; also in Wiener's Collected Works, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Mass.(1976), 499-5 12.990).96. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco (1983).
161. N. Wiener, The ergodic theorem, Duke Math. J. 5(1939), 1-18; also in Wiener's Collected Works, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Mass. (1976), 672-689.

162. C. S. Wong, A note on the central limit theorem, Amer Math. Monthly 84(1977), 472.
163. K. Yosida, Functional Analysis (6th ed.), Springer-Verlag, New York (1980).
164. W. H. Young, On the multiplication of successions of Fourier constants, Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912), 331-339.
165. A. C. Zaanen, Continuity of measurable functions, Amer Math. Monthly 93 (1986), 128-130.
166. A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of oper ators, J. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), 223-248.
167. A. Zygmund, Trigonometric Series (2 vols., reprinted in 1 vol.), Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1968).

واژه نامهٔ فارسی به انگلیسی

اتحاد پارسوال	Parseval's identity
اردینال	Ordinal
اردینال‌های شمارش‌پذیر	Countable ordinals
استقرای ترامتناهی	Transfinite induction
اشباع یک اندازه	Saturation of a measure
اصل خوشترتیبی	Well ordering principle
اصل کرانداری یکنواخت	Uniform boundedness principle
اصل ماکسیمال هاسدورف	Hausdorif maximal principle
اصل موضوع	Axiom
جدایی‌پذیری	of separation
انتخاب	of choice
شمارش‌پذیری	of countability
اضلاع یک مستطیل	Sides of a rectangle
افراز	Partition
برچسب‌دار	Tagged
واحد	of unity
یک بازه	of an interval
L^p ی ضعیف	L^p weak
افراز برچسب‌دار	Tagged partition
L^p ی ضعیف	Weak L^p
الحاق	Adjoint
امید شرطی	Conditional expectation
انتگرال	Integral
بوخنر	Bochner
دانیل	Daniell
ریمان	Riemann
کسری	fractional
کورزویل ـ هنستوک	Henstock-Kurzweil
لبگ	Lebesgue
لبگ ـ اشتیلیس	Lebesgue-Stieltjes
یک تابع حقیقی	of a real function
یک تابع ساده	of a simple function
یک تابع مختلط	of a complex function
یک تابع نامنفی	of a nonnegative function
انتگرال بوخنر	Bochner integral
انتگرال‌پذیری یکنواخت	Uniform integrability
انتگرال دانیل	Daniell integral
انتگرال ریمان	Riemann integral
انتگرال کسری	Fractional integral
انتگرال کورزویل ـ هنستوک	Henstock-Kurzweil integral
انتگرال لبگ	Lebesgue integral
انتگرال لبگ ـ اشتیلیس	Lebesgue-Stieltjes integral
اندازه	Measure
برل	Borel
پیوسته	Continuous
تجزیه‌پذیر	Decomposable
جمعی متناهی	finitely additive
خارجی	outer
داخلی	inner
دیراک	Dirac
دیریکله	dicrete
σ ـ متناهی	σ-finite
شمارشی	counting
علامت‌دار	signed
کامل	complete
لبگ	Lebesgue
لبگ ـ اشتیلیس	Lebesgue-Stieltjes
مثبت	positive
مختلط	complex
منظم	regular
منفرد	singular
نیمه‌متناهی	semifinite
اندازهٔ اشباع شده	Saturated measure
اندازهٔ برل	Borel measure
اندازهٔ تجزیه‌پذیر	Decomposable measure
اندازهٔ پیوسته	Continuous measure
اندازهٔ حاصلضربی	Product measure
اندازهٔ داخلی	Inner measure
اندازهٔ دیراک	Dirac measure
اندازهٔ σ ـ متناهی	σ-finite measure
اندازهٔ شمارشی	Counting measure
اندازهٔ علامت‌دار	Signed measure
اندازهٔ علامت‌دار σ ـ متناهی	σ-finite signed measure
اندازهٔ علامت‌دار متناهی	Finite signed measure
اندازهٔ کامل	Complete measure
اندازهٔ گسسته	Discrete measure
اندازهٔ لبگ	Lebesgue measure
اندازهٔ متناهی	Finite measure
اندازهٔ متناهیاً جمعی	Finitely additive measure

اندازهٔ مثبت	Positive measure
اندازهٔ مختلط	Complex measure
اندازهٔ منظم	Regular measure
اندازهٔ منفرد	Singular measure
اندازهٔ نیمه متناهی	Semifinite measure
اندازه‌های دو به دو منفرد	Mutually singular measures
اولین اردینال شمارش‌ناپذیر	First uncountable ordinal
ایده‌آل در یک جبر	Ideal in an algebra
ایزومتری	Isometry
ایزومورفیسم	Isomorphism
برل	Borel
ترتیبی	order
خطی	linear
یکانی	unitary
ایزومورفیسم برل	Borel isomorphism
ایزومورفیسم ترتیبی	Order isomorphism
اینفیمم	Infimum
با تغییر محدود	Bounded variation
بازآرایی نزولی	Decreasing rearrangement
با ظرافت چسبیدن	Shrink nicely
بخش مثبت یک تابع	Positive part of a function
بخش منفی یک تابع	Negative part of a function
بخش یک مجموعه یا یک تابع	Section of a set or function
برد	Range
برد اساسی	Essential range
بستار	Closure
پارادوکس باناخ ـ تارسکی	Banach-Tarski paradox
پایه برای یک توپولوژی	Base for a topology
پایهٔ متعامد	Orthonormal basis
پایهٔ همسایه‌ای	Neighborhood base
پیش‌اندازه	Premeasure
پیوستار	Continuum
پیوستگی	Continuity
اندازه‌ها	of measures
لیپ شیتز	Lipschitz
مطلق	absolute
هولدر	Holder
یکنواخت	uniform
پیوستگی لیپ شیتزی	Lipschitz continuity
پیوستگی مطلق	Absolute continuity
یک اندازه	of a measure
یک تابع	of a function
پیوستگی هولدر	Holder continuity
پوشش	Cover
پوشش متناهی موضعی	Locally finite cover
تابع	Function
تابع اندازه‌پذیر	Measurable function
تابع اندازه‌پذیر برل	Borel measurable function
تابع اندازه‌پذیر لبگ	Lebesgue measurable function
تابع انتگرال‌پذیر	Integrable function
توسیع یافته	Extended
ضعیف	Weakly
موضعی	Locally
تابع انتگرال‌پذیر توسیع یافته	Extended integrable function
تابع انتگرال‌پذیر ریمان	Riemann integrable function
تابع پیوستهٔ چپ	Left continuous function
تابع پیوستهٔ راست	Right continuous function
تابع توزیع	Distribution function
تابع ساده	Simple function
تابع صعودی	Increasing function
تابعک خطی	Linear functional
تابعک خطی زیرجمعی	Sublinear functional
تابع کانتور	Cantor function
تابع کانتور ـ لبگ	Cantor-Lebesgue function
تابع گاما	Gamma function
تابع ماکسیمال	Maximal function
تابع ماکسیمال هاردی ـ لیتلوود	Hardy-Little-wood maximal function
تابع محدب	Convex function
تابع محمل فشرده	Compactly supported function
تابع مشخصه	Characteristic function
تابع مشخصه	Indicator function
تابع موضعاً انتگرال‌پذیر	Locally integrable function
تابع نزولی	Decreasing function
تابع یکنوا	Monotone function
تجزیهٔ جردن	Jordan decomposition
یک اندازهٔ علامت‌دار	of a signed measure
یک تابع	of a function
تجزیهٔ قطبی	Polar decomposition
تجزیهٔ لبگ	Lebesgue decomposition
تجزیهٔ هان	Hahn decomposition

Vanish at infinity	تحلیل رفتن در بینهایت
Condensation of singularities	تراکم تکین‌ها
Transpose	ترانهاده
Partial ordering	ترتیب جزئی
Total ordering	ترتیب کلی
Linear ordering	ترتیب خطی
Composition	ترکیب
Total variation	تغییر کل
of a signed measure	یک اندازهٔ علامت‌دار
of a complex measure	یک اندازهٔ مختلط
of a function	یک تابع
Positive variation	تغییر مثبت
of a signed measure	یک اندازهٔ علامت‌دار
of a function	یک تابع
Image	تصویر
Projection	تصویر
Orthogonal	متعامد
Orthogonal projection	تصویر متعامد
Inverse image	تصویر معکوس
Refinement of a cover	تظریف یک پوشش
Negative variation	تغییر منفی
of a signed measure	یک اندازهٔ علامت‌دار
of a function	یک تابع
Symmetric difference	تفاضل متقارن
Difference of sets	تفاضل مجموعه‌ها
Almost every(where)	تقریباً همه جا
Topology	توپولوژی
trivial	بدیهی
generated by a family of sets	تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها
product	حاصلضربی
quotient	خارج قسمتی
weak*	W^*
on compact sets	روی مجموعه‌های فشرده
Zariski	زاریسکی
weak	ضعیف
weak operator	عملگری ضعیف
strong operator	عملگری قوی
indiscrete	ناگسسته
norm	نرمی
relative	نسبی

cofinite	هم‌پایان
of uniform convergence	همگرایی یکنواخت
Trivial topology	توپولوژی بدیهی
Order topology	توپولوژی ترتیبی
Product topology	توپولوژی حاصلضربی
Quotient topology	توپولوژی خارج قسمتی
Coarser topology	توپولوژی درشت
Zariski topology	توپولوژی زاریسکی
Weak topology	توپولوژی ضعیف
Weaker topology	توپولوژی ضعیف‌تر
Weak operator topology	توپولوژی عملگری ضعیف
Strong operator topology	توپولوژی عملگری قوی
Finer topology	توپولوژی فیلتر
Stronger topology	توپولوژی قوی
Discrete topology	توپولوژی گسسته
Indiscrete topology	توپولوژی ناگسسته
Norm topology	توپولوژی نرمی
Relative topology	توپولوژی نسبی
Cofinite topology	توپولوژی هم متناهی
Net	تور
Cauchy net	تورکشی
Cofinal net	تور هم‌پایان
A.e.	ت. ه.
Algebra	جبر
Banach	باناخ
of functions	توابع
of sets	مجموعه
Separation	جداسازی
of points	نقاط
of points and closed sets	نقاط و مجموعه‌های بسته
Banach algebra	جبر باناخ
Completely regular algebra	جبر کاملاً منظم
Point mass	جرم نقطه‌ای
Countable additivity	جمع‌پذیری شمارش‌پذیر
Scalar product	حاصلضرب اسکالر
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
Limit inferior	حد اسفل
Limit superior	حد اعلی
Limit of a net	حد یک تور
Ring of sets	حلقهٔ مجموعه‌ها

Reverse inclusion	شمول عکس
Inner product	ضرب داخلی
Maximal element	عضو ماکسیمال
Minimal element	عضو مینیمال
Closure operator	عملگر بستاری
Hull of an ideal	غلاف
Gram-Schmidt process	فرآیند گرام ـ اشمیت
Compactification	فشرده‌سازی
Stone-tech	استون ـ چخ
one-point	تک نقطه‌ای
Stone-Cech compactification	فشرده‌سازی استون ـ چخ
Alexandroff compactification	فشرده‌سازی الکساندروف
One-point compactification	فشرده‌سازی تک نقطه‌ای
Continuum hypothesis	فرضیهٔ پیوستار
LCH space	فضای LCH
L^p space	فضای L^p
Measure space	فضای اندازه
Measurable space	فضای اندازه‌پذیر
Reflexive space	فضای بازتابی
Banach space	فضای باناخ
Topological vector space	فضای برداری توپولوژیک
Complete topological vector space	فضای برداری توپولوژیک کامل
Normed vector space	فضای برداری نرم‌دار
Countably compact space	فضای به‌طور شمارش‌پذیر فشرده
Topological space	فضای توپولوژیک
Tychonoff space	فضای تیخونف
Paracompact space	فضای پیرافشرده
Pre-Hilbert space	فضای پیش‌هیلبرت
$T_0,\ldots,T_4$ space	فضای $T_0,\ldots,T_4$
Separable space	فضای جدایی‌پذیر
Quotient space	فضای خارج قسمتی
Normed linear space	فضای خطی نرم‌دار
Dual space	فضای دوگان
σ-compact space	فضای σ ـ فشرده
First countable space	فضای شمارش‌پذیر اول
Second countable space	فضای شمارش‌پذیر دوم
Fréchet space	فضای فرشه
Compact space	فضای فشرده
Sequentially compact space	فضای فشردهٔ دنباله‌ای
Completely regular space	فضای کاملاً منظم

Bolzano-Weierstrass property	خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس
Finite intersection property	خاصیت مقطع متناهی
Heine-Borel property	خاصیت هاینه ـ برل
Elementary family	خانوادهٔ مقدماتی
Pointwise bounded family	خانوادهٔ نقطه به نقطه کراندار
Well ordering	خوشترتیبی
Domain	دامنه
Weak* topology	W^* ـ توپولوژی
Interior	درون
Extended real number system	دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافته
Sequence	دنباله
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Relation	رابطه
Equivalence relation,	رابطهٔ هم‌ارزی
Baire classes	ردهٔ بئر
Equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
Dense subset	زیرمجموعهٔ چگال
of a set	از یک مجموعه
Subbase for a topology	زیرپایه برای یک توپولوژی
Subordination	پیرو
Subsequence	زیر دنباله
Subnet	زیرتور
Subadditivity	زیرجمعی
Subspace of a vector space	زیرفضای یک فضای برداری
Supremum	سوپرمم
Essential Supremum	سوپرمم اساسی
σ-algebra	σ ـ جبر
Borel	برل
generated by a family of functions	تولید شده با خانواده‌ای از توابع
generated by a family of sets	تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها
product	حاصلضربی
of countable or co-countable sets	شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر
Borel σ-algebra	σ ـ جبر برل
Product σ-algebra	σ ـ جبر حاصلضربی
σ-ring	σ ـ حلقه
σ-field	σ ـ میدان
Lattice of functions	شبکه‌ای از توابع
Countably	شمارش‌پذیر
sequentially	دنباله‌ای
locally	موضعی

فضای متری	Metric space
فضای متری کامل	Complete metric space
فضای منظم	Regular space
فضای موضعاً فشرده	Locally compact space
فضای موضعاً محدب	Locally convex space
فضای نرمال	Normal space
فضای هاسدورف	Hausdorif space
فضای هیلبرت	Hilbert space
فیلتر	Filter
قانون اعداد بزرگ	Law of large numbers
قانون متوازی‌الاضلاع	Parallelogram law
قسمت نیمه متناهی	Semifinite part
قضیه	Theorem
ارزلا ـ اسکولی	Arzelà-Ascoli
استون ـ وایرشتراس	Stone-Weierstrass
الاغلو	Alaoglu's
ایگوروف	Egoroff's
پوشش ویتالی	Vitali covering
تجزیهٔ جردن	Jordan decomposition
تجزیهٔ هان	Hahn decomposition
تقریب وایرشتراس	Weierstrass approximation
توسیع تیتسه	Tietze extension
توسیع کرین	Krein extension
تیخونف	Tychonoff's
درون‌یابی ریس ـ تورین	Riesz-Thorin interpolation
درون‌یابی مارکینکوایز	Marcinkiewicz interpolation
رادون ـ نیکودیوم	Radon-Nikodym
شرودر ـ برنشتاین	Schroder-Bernstein
فوبینی ـ تونلی	Fubini-Tonelli
فیثاغورس	Pythagorean
کاتگوری بئر	Baire category
کاراتئودوری	Carathéodory's
لبگ ـ رادون ـ نیکودیوم	Lebesgue-Radon-Nikodym
لوزین	Lusin's
ماکسیمال	maximal
متری‌سازی اوریسون	Urysohn metrization
مشتق‌گیری لبگ	Lebesgue differentiation
نگاشت باز	open mapping
نمودار بسته	closed graph
وارون فوریه	Fourier inversion

هان ـ باناخ	Hahn-Banach
همگرایی مغلوب	dominated convergence
همگرایی یکنوا	monotone convergence
همگرایی ویتالی	Vitali convergence
قضیهٔ ارزلا ـ اسکولی	Arzelà-Ascoli theorem
قضیهٔ الا اغلو	Alaoglu's theorem
قضیهٔ استون ـ وایرشتراس	Stone-Weierstrass theorem
قضیهٔ ایگورف	Egoroff's theorem
قضیهٔ بنیادی حسابان	Fundamental theorem of calculus
قضیهٔ تجزیهٔ جردن	Jordan decomposition theorem
قضیهٔ تجزیهٔ هان	Hahn decomposition theorem
قضیهٔ تقریب وایرشتراس	Weierstrass approximation theorem
قضیهٔ توسیع تیتسه	Tietze extension theorem
قضیهٔ توسیع کرین	Krein extension theorem
قضیهٔ تونلی	Tonelli's theorem
قضیهٔ تونلی ـ فوبینی	Fubini-Tonelli theorem
قضیهٔ تیخونف	Tychonoff's theorem
قضیهٔ پوشش ویتالی	Vitali covering theorem
قضیهٔ رادون ـ لبگ ـ نیکودیوم	Lebesgue-Radon-Nikodym theorem
قضیهٔ رادون ـ نیکودیوم	Radon-Nikodym theorem
قضیهٔ درون‌یابی ریس ـ تورین	Riesz-Thorin interpolation theorem
قضیهٔ درون‌یابی مارکینکوایز	Marcinkiewicz interpolation theorem
قضیهٔ شرودر برنشتاین	Schroder-Bernstein theorem
قضیهٔ فوبینی	Fubini's theorem
قضیهٔ فیثاغورس	Pythagorean theorem
قضیهٔ کاراتئودوری	Carathéodory's theorem
قضیهٔ کاتگوری بئر	Baire category theorem
قضیهٔ ماکسیمال	Maximal theorem
قضیهٔ متری‌سازی اوریسون	Urysohn metrization theorem
قضیهٔ مشتق‌گیری لبگ	Lebesgue differentiation theorem
قضیهٔ نگاشت باز	Open mapping theorem
قضیهٔ نمودار بسته	Closed graph theorem
قضیهٔ هان ـ باناخ	Hahn-Banach theorem
قضیهٔ همگرایی مغلوب	Dominated convergence theorem
قضیهٔ همگرایی ویتالی	Vitali convergence theorem
قضیهٔ همگرایی یکنوا	Monotone convergence theorem
قطر	Diameter
قطعهٔ اولیه	Initial segment
قوانین دمرگان	DeMorgan's laws
کاتگوری اول	First category

Null set	مجموعهٔ پوچ
locally	موضعی
Precompact set	مجموعهٔ پیش‌فشرده
Directed set	مجموعهٔ جهت‌دار
σ-finite set	مجموعهٔ σ- متناهی
Denumerable set	مجموعهٔ شمارا
Countable set	مجموعهٔ شمارش‌پذیر
Compact set	مجموعهٔ فشرده
Cantor Set	مجموعهٔ کانتور
Generalized Cantor set	مجموعهٔ کانتور تعمیم یافته
Bounded set	مجموعهٔ کراندار
Totally bounded set	مجموعهٔ کراندار کلی
Lebesgue set	مجموعهٔ لبگ
Orthogonal set	مجموعهٔ متعامد
Orthonormal set	مجموعهٔ متعامد
Complete orthonormal set	مجموعهٔ متعامد یکهٔ کامل
Positive set	مجموعهٔ مثبت
Locally measurable set	مجموعهٔ موضعاً اندازه‌پذیر
Locally null set	مجموعهٔ موضعاً پوچ
Disconnected set	مجموعهٔ ناهمبند
Meager set	مجموعهٔ نحیف
F_σ and $F_{\sigma\delta}$ sets	مجموعه‌های F_σ و $F_{\sigma\delta}$
G_δ and $G_{\delta\sigma}$ sets	مجموعه‌های G_δ و $G_{\delta\sigma}$
Disjoint sets	مجموعه‌های مجزا
Negative set	مجموعه‌های منفی
Connected set	مجموعهٔ همبند
Arcwise connected set	مجموعهٔ همبند راهی
Nowhere dense set	مجموعهٔ هیچ‌جا چگال
Support	محمل
of a function	یک تابع
Coordinate	مختص
Polar coordinates	مختصات قطبی
Boundary	مرز
Conjugate exponent	مزدوج نمایی
Rectangle	مستطیل
Derivative	مشتق
Radon-Nikodym	رادون ـ نیکودیوم
Radon-Nikodym derivative	مشتق رادون ـ نیکودیوم
Absolute convergence	مطلقاً همگرا
Heat equation	معادلهٔ حرارت

Second category	کاتگوری دوم
Upper bound	کران بالا
Lower bound	کران پایین
Completion of a measure	کامل شدهٔ یک اندازه
Convolution	کانولوشن
of a σ-algebra	σ ـ جبر
of a normed vector space	یک فضای برداری نرمدار
Cauchy	کشی
in measure	در اندازه
Sequence	دنباله
Monotone class	کلاس یکنوا
Discrete	گسسته
Content	گنجایش
Jordan content	گنجایش جردن
Ball	گوی
Lemma	لم
Urysohn's	اوریسون
Borel-Cantelli	برل ـ کانتلی
Zorn's	زورن
three lines	سه خط
Fatou's	فاتو
monotone class	کلاس یکنوا
Urysohn's lemma	لم اوریسون
Zorn's lemma	لم زورن
Three lines lemma	لم سه خط
Fatou's lemma	لم فاتو
Monotone class lemma	لم کلاس یکنوا
Metric	متر
Product metric	متر حاصلضربی
Equivalent metrics	مترهای هم‌ارز
Complement	متمم
Measurable set	مجموعهٔ اندازه‌پذیر
Lebesgue	لبگ
Locally	موضعی
with respect to an outer measure	نسبت به یک اندازهٔ خارجی
Lebesgue measurable set	مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ
Open set	مجموعهٔ باز
Borel set	مجموعهٔ برل
Closed set	مجموعهٔ بسته
Residual set	مجموعهٔ پس‌مانده

معکوس	Inverse
مقدم	Predecessor
مقیاس	Gauge
مکرراً	Frequently
مکعب	Cube
مؤلفهٔ همبند	Connected component
میدان مجموعه‌ها	Field of sets
نامساوی	Inequality
بسل	Bessel's
چبیشف	Chebyshev's
شوارتز	Schwarz
مثلثی	Triangle
مینکوفسکی	Minkowski's
هاردی	Hardy's
هوبرت	Hubert's
هولدر	Holder's
ینسن	Jensen's
نامساوی بسل	Bessel's inequality
نامساوی چبیشف	Chebyshev's inequality
نامساوی شوارتز	Schwarz inequality
نامساوی مثلثی	Triangle inequality
نامساوی مینکوفسکی	Minkowski's inequality
برای انتگرال‌ها	for integrals
نامساوی هاردی	Hardy's inequalities
نامساوی هولدر	Holder's inequality
نامساوی هیلبرت	Hilbert's inequality
نامساوی ینسن	Jensen's inequality
نرم	Norm
L^p	L^p
حاصلضربی	product
خارج قسمتی	quotient
عملگری	operator
یکنواخت	uniform
نرم L^p	L^p norm
نرم حاصلضربی	Product norm
نرم عملگری	Operator norm
نرم‌های هم‌ارز	Equivalent norms
نرم یکنواخت	Uniform norm
نشاندن	Embedding
نقطهٔ انباشتگی	Accumulation point
نقطهٔ بستاری	Cluster point
نگاشت	Map
نگاشت	Mapping
نگاشت اندازه‌پذیر	Measurable mapping
نگاشت باز	Open map
نگاشت پوشا	Surjective mapping
نگاشت خطی بسته	Closed linear map
نگاشت خطی کراندار	Bounded linear map
نگاشت خطی معکوس‌پذیر	Invertible linear map
نگاشت دوسویی	Bijective mapping
نگاشت زیرخطی	Sublinear map
نگاشت سره	Proper map
نگاشت مؤلفه‌ای	Coordinate map
نگاشت یکانی	Unitary map
نگاشت یک به یک	Injective mapping
نمایش استاندارد	Standard representation
یک تابع ساده	of a simple function
نمودار نگاشت خطی	Graph of a linear map
نوع ضعیف	Weak type
نوع قوی	Strong type
نهایتاً	Eventually
مشروط	Conditional
نیم‌بازه	H-interval
نیم نرم	Seminorm
هستهٔ یک مجموعهٔ بسته	Kernel of a closed set
هم‌پیوستگی	Equicontinuity
همسایگی	Neighborhood
همگرایی	Convergence
تقریباً یکنواخت	almost uniform
در L^1	in L^1
در اندازه	in measure
مطلق	absolute
یک تور	of a net
یک دنباله	of a sequence
یک سری	of a series
یک فیلتر	of a filter
همگرایی تقریباً یکنواخت	Almost uniform convergence
همگرایی ضعیف	Weak convergence
همهٔ سوی میانگین	Mean ergodic theorem
همیومورفیسم	Homeomorphism

یکنوایی اندازه‌ها Monotonicity of measures

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

A

Absolute continuity	پیوستگی مطلق
of a function	یک تابع
of a measure	یک اندازه
Absolute convergence	مطلقاً همگرا
Accumulation point	نقطهٔ انباشتگی
Adjoint	الحاق
A.e.	ت. ه.
Alaoglu's theorem	قضیهٔ الا أغلو
Alexandroff compactification	فشرده‌سازی الکساندروف
Algebra	جبر
Banach	باناخ
of functions	توابع
of sets	مجموعه
Almost every(where)	تقریباً همه جا
Almost uniform convergence	همگرایی تقریباً یکنواخت
Arcwise connected set	مجموعهٔ همبند راهی
Arzelà-Ascoli theorem	قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی
Axiom	اصل موضوع
of choice	انتخاب
of countability	شمارش‌پذیری
of separation	جدایی‌پذیری

B

Baire category theorem	قضیهٔ کاتگوری بئر
Baire classes	ردهٔ بئر
Ball	گوی
Banach algebra	جبر باناخ
Banach space	فضای باناخ
Banach-Tarski paradox	پارادوکس باناخ ـ تارسکی
Base for a topology	پایه برای یک توپولوژی
Bessel's inequality	نامساوی بسل
Bijective mapping	نگاشت دوسویی
Bochner integral	انتگرال بوخنر
Bolzano-Weierstrass property	خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس
Borel isomorphism	ایزومورفیسم برل
Borel measurable function	تابع اندازه‌پذیر برل
Borel measure	اندازهٔ برل
Borel set	مجموعهٔ برل
Borel σ-algebra	σ ـ جبر برل
Boundary	مرز
Bounded linear map	نگاشت خطی کراندار
Bounded set	مجموعهٔ کراندار
Bounded variation	با تغییر محدود

C

Cantor function	تابع کانتور
Cantor Set	مجموعهٔ کانتور
Cantor-Lebesgue function	تابع کانتور ـ لبگ
Carathéodory's theorem	قضیهٔ کاراتئودوری
Cartesian product	اصلضرب دکارتی
Cauchy net	تور کشی
Cauchy	کشی
Sequence	دنبالهٔ
in measure	در اندازه
Characteristic function	تابع مشخصه
Chebyshev's inequality	نامساوی چبیشف
Closed graph theorem	قضیهٔ نگار بسته
Closed linear map	نگاشت خطی بسته
Closed set	مجموعهٔ بسته
Closure	بستار
Closure operator	عملگر بستاری
Cluster point	نقطهٔ بستاری
Coarser topology	توپولوژی درشت
Cofinal net	تور هم‌پایان
Cofinite topology	توپولوژی متمم متناهی
Compact set	مجموعهٔ فشرده
Compact space	فضای فشرده
Countably	شمارش‌پذیر
locally	موضعی
sequentially	دنباله‌ای
Compactification	فشرده‌سازی
one-point	تک نقطه
Stone-tech	استون ـ چخ
Compactly supported function	تابع محمل فشرده
Complement	متمم
Complete measure	اندازهٔ کامل
Complete metric space	فضای متری کامل

Complete orthonormal set مجموعهٔ متعامد یکهٔ کامل
Complete topological vector space فضای برداری توپولوژیک کامل
Completely regular algebra جبر کاملاً منظم
Completely regular space فضای کاملاً منظم
Completion of a measure کامل شدهٔ یک اندازه
of a normed vector space یک فضای برداری نرم‌دار
of a σ-algebra σ - جبر
Complex measure اندازهٔ مختلط
Composition ترکیب
Condensation of singularities تراکم تکین‌ها
Conditional expectation امید شرطی
Conjugate exponent مزدوج نمایی
Connected component مؤلفهٔ همبند
Connected set مجموعهٔ همبند
Content گنجایش
Continuity پیوستگی
absolute مطلق
Holder هولدر
Lipschitz لیپ شیتز
of measures اندازه‌ها
uniform یکنواخت
Continuous measure اندازهٔ پیوسته
Continuum پیوستار
Continuum hypothesis فرضیهٔ پیوستار
Convergence همگرایی
absolute مطلق
almost uniform تقریباً یکنواخت
in L^1 در L^1
in measure در اندازه
of a filter یک فیلتر
of a net یک تور
of a sequence یک دنباله
of a series یک سری
Convex function تابع محدب
Convolution کانولوشن
Coordinate مختص - مؤلفه
Coordinate map نگاشت مؤلفه‌ای
Countable additivity جمع‌پذیری شمارش‌پذیر
Countable ordinals اردینال‌های شمارش‌پذیر
Countable set مجموعهٔ شمارش‌پذیر
Countably compact space فضای به‌طور شمارش‌پذیر فشرده
Counting measure اندازهٔ شمارشی
Cover پوشش
Cube مکعب

D

Daniell integral انتگرال دانیل
Decomposable measure اندازهٔ تجزیه‌پذیر
Decreasing function تابع نزولی
Decreasing rearrangement بازآرایی نزولی
DeMorgan's laws قوانین دمرگان
Dense subset زیرمجموعهٔ چگال
of a set از یک مجموعه
Denumerable set مجموعهٔ شمارا
Derivative مشتق
Radon-Nikodym رادون - نیکودیوم
Diameter قطر
Diffeomorphism دیفئومورفیسم
Difference of sets تفاضل مجموعه‌ها
Dirac measure اندازهٔ دیراک
Directed set مجموعهٔ جهت‌دار
Disconnected set مجموعهٔ ناهمبند
Discrete گسسته
Discrete measure اندازهٔ گسسته
Discrete topology توپولوژی گسسته
Disjoint sets مجموعه‌های مجزا
Distribution function تابع توزیع
Domain دامنه
Dominated convergence theorem قضیهٔ همگرایی مغلوب
Dual space فضای دوگان

E

Egoroff's theorem قضیهٔ ایگورف
Elementary family خانوادهٔ مقدماتی
Embedding نشاندن
Equicontinuity هم‌پیوستگی
Equivalence class ردهٔ هم‌ارزی
Equivalence relation, رابطهٔ هم‌ارزی
Equivalent metrics مترهای هم‌ارز
Equivalent norms نرم‌های هم‌ارز
Essential range برد اساسی
Essential Supremum سوپرمم اساسی
Eventually نهایتاً
Conditional مشروط
Extended integrable function تابع انتگرال‌پذیر توسیع یافته
Extended real number system دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافته

F

F_σ and $F_{\sigma\delta}$ sets مجموعه‌های F_σ و $F_{\sigma\delta}$
Fatou's lemma لم فاتو
Field of sets میدان مجموعه‌ها
Filter فیلتر
Finer topology توپولوژی فیلتر
Finite intersection property خاصیت مقطع متناهی
Finite measure اندازهٔ متناهی

Finite signed measure — اندازهٔ علامت‌دار متناهی
Finitely additive measure — اندازهٔ متناهیاً جمعی
First category — کاتگوری اول
First countable space — فضای شمارش‌پذیر اول
First uncountable ordinal — اولین اردینال شمارش‌ناپذیر
Fractional integral — انتگرال کسری
Frequently — مکرراً
Fréchet space — فضای فرشه
Fubini's theorem — قضیهٔ فوبینی
Fubini-Tonelli theorem — قضیهٔ تونلی ـ فوبینی
Function — تابع
Fundamental theorem of calculus — قضیهٔ بنیادی حسابان

G

G_δ and $G_{\delta\sigma}$ sets — مجموعه‌های G_δ و $G_{\delta\sigma}$
Gamma function — تابع گاما
Gauge — مقیاس
Generalized Cantor set — مجموعهٔ کانتور تعمیم یافته
Gram-Schmidt process — فرآیند گرام ـ اشمیت
Graph of a linear map — نمودار نگاشت خطی

H

H-interval — نیم‌بازه
Hahn decomposition — تجزیهٔ هان
Hahn decomposition theorem — قضیهٔ تجزیهٔ هان
Hahn-Banach theorem — قضیهٔ هان ـ باناخ
Hardy's inequalities — نامساوی هاردی
Hardy-Little wood maximal function — تابع ماکسیمال هاردی ـ لیتلوود
Hausdorif maximal principle — اصل ماکسیمال هاسدورف
Hausdorif space — فضای هاسدورف
Heat equation — معادلهٔ حرارت
Heine-Borel property — خاصیت هاینه ـ برل
Henstock-Kurzweil integral — انتگرال کورزویل ـ هنستوک
Hilbert space — فضای هیلبرت
Hilbert's inequality — نامساوی هیلبرت
Homeomorphism — همیومورفیسم
Hull of an ideal — غلاف یک ایده آل
Holder continuity — پیوستگی هولدر
Holder's inequality — نامساوی هولدر

I

Ideal in an algebra — ایده‌آل در یک جبر
Image — تصویر
Increasing function — تابع صعودی
Indicator function — تابع مشخصه
Indiscrete topology — توپولوژی ناگسسته
Inequality — نامساوی
 Bessel' — بسل
 Chebyshev's — چبیشف
 Hardy's — هاردی
 Hubert's — هوبرت
 Holder's — هولدر
 Jensen's — ینسن
 Minkowski's — مینکوفسکی
 Schwarz — شوارتز
 Triangle — مثلثی
Infimum — اینفیمم
Initial segment — قطعهٔ اولیه
Injective mapping — نگاشت انژکتیو
Inner measure — اندازهٔ داخلی
Inner product — ضرب داخلی
Integrable function — تابع انتگرال‌پذیر
 weakly — ضعیف
 extended — توسیع یافته
 locally — موضعی
Integral — انتگرال
 Bochner — بوخنر
 Daniell — دانیل
 fractional — کسری
 Henstock-Kurzweil — کورزویل ـ هنستوک
 Lebesgue — لبگ
 Lebesgue-Stieltjes — لبگ ـ اشتیلیس
 of a complex function — یک تابع مختلط
 of a nonnegative function — یک تابع نامنفی
 of a real function — یک تابع حقیقی
 of a simple function — یک تابع ساده
 Riemann — ریمان
Interior — درون
Inverse — معکوس
Inverse image — تصویر معکوس
Invertible linear map — نگاشت خطی معکوس‌پذیر
Isometry — ایزومتری
Isomorphism — ایزومورفیسم
 Borel — برل
 linear — خطی
 order — ترتیبی
 unitary — یکانی

J

Jensen's inequality — نامساوی ینسن
Jordan content — گنجایش جردن
Jordan decomposition — تجزیهٔ جردن
 of a function — یک تابع
 of a signed measure — یک اندازهٔ علامت‌دار
Jordan decomposition theorem — قضیهٔ تجزیهٔ جردن

K

Kernel of a closed set	هستهٔ یک مجموعهٔ بسته
Krein extension theorem	قضیهٔ توسیع کرین

L

L^p norm	نرم L^p
L^p space	فضای L^p
L^p weak	L^p ی ضعیف
Lattice of functions	شبکه‌ای از توابع
Law of large numbers	قانون اعداد بزرگ
LCH space	فضای LCH
Lebesgue decomposition	تجزیهٔ لبگ
Lebesgue differentiation theorem	قضیهٔ مشتق‌گیری لبگ
Lebesgue integral	انتگرال لبگ
Lebesgue measurable function	تابع اندازه پذیر لبگ
Lebesgue measurable set	مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ
Lebesgue measure	اندازهٔ لبگ
Lebesgue set	مجموعهٔ لبگ
Lebesgue-Radon-Nikodym theorem	قضیهٔ رادون ـ لبگ ـ نیکودیوم
Lebesgue-Stieltjes integral	انتگرال لبگ ـ اشتیلیس
Lebesgue-Stieltjes measure	اندازهٔ لبگ اشتیلیس
Left continuous function	تابع پیوستهٔ راست
Lemma	لم
Borel-Cantelli	برل ـ کانتلی
Fatou's	فاتو
monotone class	کلاس یکنوا
three lines	سه خط
Urysohn's	اوریسون
Zorn's	زورن
Limit inferior	حد اسفل
Limit of a net	حد یک تور
Limit superior	حد اعلی
Linear functional	تابعک خطی
Linear ordering	ترتیب خطی
Lipschitz continuity	پیوستگی لیپ شیتزی
Locally compact space	فضای موضعاً فشرده
Locally convex space	فضای موضعاً محدب
Locally finite cover	پوشش متناهی موضعی
Locally integrable function	تابع موضعاً انتگرال‌پذیر
Locally measurable set	مجموعهٔ موضعاً اندازه‌پذیر
Locally null set	مجموعهٔ موضعاً پوچ
Lower bound	کران پایین

M

Map	نگاشت
Mapping	نگاشت
Marcinkiewicz interpolation theorem	قضیهٔ درون‌یابی مارکینکوایز
Maximal element	عضو ماکسیمال
Maximal function	تابع ماکسیمال
Maximal theorem	قضیهٔ ماکسیمال
Meager set	مجموعهٔ نحیف
Mean ergodic theorem	قضیهٔ همه سویی میانگین
Measurable function	تابع اندازه‌پذیر
Measurable mapping	نگاشت اندازه‌پذیر
Measurable set	مجموعهٔ اندازه‌پذیر
Lebesgue	لبگ
Locally	موضعی
with respect to an outer measure	نسبت به یک اندازهٔ خارجی
Measurable space	فضای اندازه‌پذیر
Measure	اندازه
Borel	برل
complete	کامل
complex	مختلط
continuous	پیوسته
counting	شمارشی
decomposable	تجزیه‌پذیر
dicrete	دیریکله
Dirac	دیراک
finitely additive	جمعی متناهی
inner	داخلی
Lebesgue	لبگ
Lebesgue-Stieltjes	لبگ ـ اشتیلیس
outer	خارجی
positive	مثبت
regular	منظم
semifinite	نیمه‌متناهی
σ-finite	σ ـ متناهی
signed	علامت‌دار
singular	منفرد
Measure space	فضای اندازه
Metric	متر
Metric space	فضای متری
Minimal element	عضو مینیمال
Minkowski's inequality	نامساوی مینکوفسکی
for integrals	برای انتگرال‌ها
Monotone class	کلاس یکنوا
Monotone class lemma	لم کلاس یکنوا
Monotone convergence theorem	قضیهٔ همگرایی یکنوا
Monotone function	تابع یکنوا
Monotonicity of measures	یکنوایی اندازه‌ها
Mutually singular measures	اندازه‌های دو به دو منفرد

N

Negative part of a function	بخش منفی یک تابع

Negative set	مجموعه‌های منفی
Negative variation	تغییر منفی
of a function	یک تابع
of a signed measure	یک اندازهٔ علامت‌دار
Neighborhood	همسایگی
Neighborhood base	پایهٔ همسایه‌ای
Net	تور
Norm	نرم
L^p	L^p
operator	عملگری
product	حاصلضربی
quotient	خارج قسمتی
uniform	یکنواخت
Norm topology	توپولوژی نرمی
Normal space	فضای نرمال
Normed linear space	فضای خطی نرم‌دار
Normed vector space	فضای برداری نرم‌دار
Nowhere dense set	مجموعهٔ هیچ‌جا چگال
Null set	مجموعهٔ پوچ
locally	موضعی

O

One-point compactification	فشرده‌سازی تک نقطه‌ای
Open map	نگاشت باز
Open mapping theorem	قضیهٔ نگاشت باز
Open set	مجموعهٔ باز
Operator norm	نرم عملگری
Order isomorphism	ایزومورفیسم ترتیبی
Order topology	توپولوژی ترتیبی
Ordinal	اُردینال
Orthogonal projection	تصویر متعامد
Orthogonal set	مجموعهٔ متعامد
Orthonormal basis	پایهٔ متعامد
Orthonormal set	مجموعهٔ متعامد

P

Paracompact space	فضای پیرافشرده
Parallelogram law	قانون متوازی‌الاضلاع
Parseval's identity	اتحاد پارسوال
Partial ordering	ترتیب جزئی
Partition	افراز
of an interval	یک بازه
of unity	واحد
tagged	برچسب دار
Point mass	جرم نقطه‌ای
Pointwise bounded family	خانوادهٔ نقطه به نقطه کراندار
Polar coordinates	مختصات قطبی
Polar decomposition	تجزیهٔ قطبی
Positive measure	اندازهٔ مثبت
Positive part of a function	بخش مثبت یک تابع
Positive set	مجموعهٔ مثبت
Positive variation	تغییر مثبت
of a function	یک تابع
of a signed measure	یک اندازهٔ علامت‌دار
Pre-Hilbert space	فضای پیش‌هیلبرت
Precompact set	مجموعهٔ پیش‌فشرده
Predecessor	مقدم
Premeasure	پیش‌اندازه
Product measure	اندازهٔ حاصلضربی
Product metric	متر حاصلضربی
Product norm	نرم حاصلضربی
Product σ-algebra	σ- جبر حاصلضربی
Product topology	توپولوژی حاصلضربی
Projection	تصویر
Orthogonal	متعامد
Proper map	نگاشت سره
Pythagorean theorem	قضیهٔ فیثاغورس

Q

Quotient space	فضای خارج قسمتی
Quotient topology	توپولوژی خارج قسمتی

R

Radon-Nikodym derivative	مشتق رادون ـ نیکودیوم
Radon-Nikodym theorem	قضیهٔ رادون ـ نیکودیوم
Range	برد
Rectangle	مستطیل
Refinement of a cover	تظریف یک پوشش
Reflexive space	فضای بازتابی
Regular measure	اندازهٔ منظم
Regular space	فضای منظم
Relation	رابطه
Relative topology	توپولوژی نسبی
Residual set	مجموعهٔ پس‌مانده
Reverse inclusion	شمول عکس
Riemann integrable function	تابع انتگرال‌پذیر ریمان
Riemann integral	انتگرال ریمان
Riesz-Thorin interpolation theorem	قضیهٔ درون‌یابی ریس ـ تورین
Right continuous function	تابع پیوستهٔ راست
Ring of sets	حلقهٔ مجموعه‌ها

S

Saturated measure	اندازهٔ اشباع شده
Saturation of a measure	اشباع یک اندازه

Scalar product حاصلضرب اسکالر
Schroder-Bernstein theorem قضیهٔ شرودر برنشتاین
Schwarz inequality نامساوی شوارتز
Second category کاتگوری دوم
Second countable space فضای شمارش‌پذیر دوم
Section of a set or function بخش یک مجموعه یا یک تابع
Semifinite measure اندازهٔ نیمه متناهی
Semifinite part قسمت نیمه متناهی
Seminorm نیم نرم
Separable space فضای جدایی‌پذیر
Separation جداسازی
  of points نقاط
  of points and closed sets مجموعه‌های بسته
Sequence دنباله
Sequentially compact space فضای فشردهٔ دنباله‌ای
Shrink nicely به خوبی چسبیدن
Sides of a rectangle اضلاع یک مستطیل
σ-algebra σ- جبر
  Borel بُرل
  generated by a family of functions تولید شده با خانواده‌ای از توابع
  generated by a family of sets تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها
  of countable or co-countable sets شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر
  product حاصلضربی
σ-compact space فضای σ- فشرده
σ-field σ- میدان
σ-finite measure اندازهٔ σ- متناهی
σ-finite set مجموعهٔ σ- متناهی
σ-finite signed measure اندازهٔ علامت‌دار σ- متناهی
σ-ring σ- حلقه
Signed measure اندازهٔ علامت‌دار
Simple function تابع ساده
Singular measure اندازهٔ منفرد
Standard representation نمایش استاندارد
  of a simple function یک تابع ساده
Stone-Cech compactification فشرده‌سازی استون - چخ
Stone-Weierstrass theorem قضیهٔ استون - وایرشتراس
Strong operator topology توپولوژی عملگری قوی
Strong type نوع قوی
Stronger topology توپولوژی قوی
Subadditivity زیر جمعی
Subbase for a topology زیرپایه برای یک توپولوژی
Sublinear functional تابعک خطی زیرجمعی
Sublinear map نگاشت زیرخطی
Subnet زیرتور
Subordination پیرو
Subsequence زیر دنباله
Subspace of a vector space زیرفضای یک فضای برداری
Support محمل
  of a function یک تابع
Supremum سوپرمم
Surjective mapping نگاشت پوشا
Symmetric difference تفاضل متقارن

T

$T_1, \dots, T_4$ space فضای $T_1, \dots, T_4$
Tagged partition افراز برچسب دار
Theorem قضیه
  Alaoglu's الاغلو
  Arzelà-Ascoli آرزلا - اسکولی
  Baire category کاتگوری بئر
  Carathéodory's کاراتئودوری
  closed graph نمودار بسته
  dominated convergence همگرایی مغلوب
  Egoroff's ایگوروف
  Fourier inversion وارون فوریه
  Fubini-Tonelli فوبینی - تونلی
  Hahn decomposition تجزیهٔ هان
  Hahn-Banach هان - باناخ
  Jordan decomposition تجزیهٔ جردن
  Krein extension توسیع کرین
  Lebesgue differentiation مشتق‌گیری لبگ
  Lebesgue-Radon-Nikodym لبگ - رادون - نیکودیوم
  Lusin's لوزین
  Marcinkiewicz interpolation درون‌یابی مارکینکوایز
  maximal ماکسیمال
  monotone convergence همگرایی یکنوا
  open mapping نگاشت باز
  Pythagorean فیثاغورس
  Radon-Nikodym رادون - نیکودیوم
  Riesz-Thorin interpolation درون‌یابی ریس - تورین
  Schroder-Bernstein شرودر - برنشتاین
  Stone-Weierstrass استون - وایرشتراس
  Tietze extension توسیع تیتسه
  Tychonoff's تیخونف
  Urysohn metrization متری‌سازی اوریسون
  Vitali convergence همگرایی ویتالی
  Vitali covering پوشش ویتالی
  Weierstrass approximation تقریب وایرشتراس
Three lines lemma لم سه خط
Tietze extension theorem قضیهٔ توسیع تیتسه
Tonelli's theorem قضیهٔ تونلی
Topological space فضای توپولوژیک
Topological vector space فضای برداری توپولوژیک
Topology توپولوژی
  cofinite متمم متناهی
  generated by a family of sets تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها

indiscrete	ناگسسته
norm	نرمی
of uniform convergence	همگرایی یکنواخت
of uniform convergence on compact sets	همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده
product	حاصلضربی
quotient	خارج قسمتی
relative	نسبی
strong operator	عملگری قوی
trivial	بدیهی
weak operator	عملگری ضعیف
weak	ضعیف
weak*	W*
Zariski	زاریسکی
Total ordering	ترتیب کلی
Total variation	تغییر کل
of a complex measure	یک اندازهٔ مختلط
of a function	یک تابع
of a signed measure	یک اندازهٔ علامت‌دار
Totally bounded set	مجموعهٔ کراندار کلی
Transfinite induction	استقرای ترامتناهی
Transpose	ترانهاده
Triangle inequality	نامساوی مثلثی
Trivial topology	توپولوژی بدیهی
Tychonoff space	فضای تیخونف
Tychonoff's theorem	قضیهٔ تیخونف

U

Uniform boundedness principle	اصل کرانداری یکنواخت
Uniform integrability	انتگرال‌پذیری یکنواخت
Uniform norm	نرم یکنواخت
Unitary map	نگاشت یکانی
Upper bound	کران بالا
Urysohn metrization theorem	قضیهٔ متری‌سازی اوریسون
Urysohn's lemma	لم اوریسون

V

Vanish at infinity	تحلیل رفتن در بینهایت
Vitali convergence theorem	قضیهٔ همگرایی ویتالی
Vitali covering theorem	قضیهٔ پوشش ویتالی

W

Weak convergence	همگرایی ضعیف
Weak L^p	L^p ی ضعیف
Weak operator topology	توپولوژی عملگری ضعیف
Weak topology	توپولوژی ضعیف
Weak type	نوع ضعیف
Weak* topology	W* ـ توپولوژی
Weaker topology	توپولوژی ضعیف‌تر
Weierstrass approximation theorem	قضیهٔ تقریب وایرشتراس
Well ordering principle	اصل خوشترتیبی
Well ordering	خوشترتیبی

Z

Zariski topology	توپولوژی زاریسکی
Zorn's lemma	لم زورن

فهرست راهنما

Library of Congress Cataloging-in-Publication Darts:
Folland, Gerald B.
Real analysis : modern techniques and their applications / Gerald B.
Folland. –2nd ed.
p. cm. –(Pure and applied mathematics)
"A Wiley-Jnterscience publication."
Includes bibliographical references and index.
ISBN 0-471-31716-0 (cloth alk. paper)
t. Mathematical analysis. 2. Functions of real vatiabtes.
I. Title. II. Series: Pure and applied mathematics (John Wiley &
Sons : Unnumbered)
QA300.F67 1999
515—dc21 98-37260
Printed in the United States of America
10 9 8 7 6 5 4 3 2

Real Analysis

Modern Techniques and Their Applications

Second Edition

Gerald B. Folland

A Wiley-Iriterscience Publication
JOHN WILEY & SONS, INC
New York / Chichester / Weinheim / Brisbane / Singapore / Toronto