فصل اول

مفهوم اندازه‌پذیری

۱.۱ اندازهٔ لبگ روی خط حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. گردایهٔ $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعهٔ X را یک σ−**جبر** در X گوییم هرگاه:

(a) $X \in \mathfrak{M}$

(b) اگر $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$

(c) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ گردایهٔ شمارایی از عناصر $\mathfrak{M}$ باشد آنگاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

(اگر بجای گردایهٔ شمارا در شرط (c) فقط گردایهٔ متناهی مدّنظر باشد، در اینصورت $\mathfrak{M}$ را **جبر** در X گوییم.)

تذکر: (۱)

$$\varnothing = X - X = X^c \in \mathfrak{M}$$

(۲) اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \in \mathfrak{M}$$

(۳) اگر $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ آنگاه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right]^c \in \mathfrak{M}$$

واضح است که هر σ−جبری یک جبر است و نه برعکس.

تمرین: جبری بسازید که σ−جبر نباشد.

مثال‌ها:

(a) $2^X = \mathcal{P}(X)$ (بزرگترین σ−جبر در X).

(b) $\mathfrak{M} = \{X, \varnothing\}$ (کوچکترین σ−جبر در X).

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. در اینصورت کوچکترین σ−جبر (منحصر بفرد) حاوی $\mathcal{F}$ وجود دارد.

برهان.

$$\Omega = \{\mathfrak{M} :\ \text{یک } \sigma - \text{جبر در } X \text{ و حاوی } \mathcal{F} \text{ است } \mathfrak{M}\}$$

$$\mathfrak{M}^* = \bigcap_{m \in \Omega} \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$$

به وضوح هر σ− جبر حاوی $\mathcal{F}$ حاوی $\mathfrak{M}^*$ است. کافی است نشان دهیم $\mathfrak{M}^*$ یک σ− جبر است. فرض کنیم $A_n \in \mathfrak{M}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. اگر $\mathfrak{M} \in \Omega$ دلخواه باشد، آنگاه $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. لذا $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ و بنابراین $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{m \in \Omega} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$. دو شرط دیگر σ− جبر بودن به طریق مشابه ثابت می‌شود. $\square$

σ− جبر بورل (مجموعه‌های بورل)

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. کوچکترین σ− جبر حاوی مجموعه‌های باز را σ− جبر بورل در X می‌نامند و آن را به $\mathfrak{B}_X$ یا به اختصار $\mathfrak{B}$ نمایش می‌دهند. (σ− جبر بورل، کوچکترین σ− جبر حاوی مجموعه‌های بسته است.)

تمرین: نشان دهید که عدد اصلی (کاردینالیتی) مجموعه‌های بورل در $\mathbb{R}$، c است.

تمرین: آیا $\sigma-$ جبر نامتناهی ولی شمارا وجود دارد؟

قرار می‌دهیم

$$\mathcal{F}_\sigma = \Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n : \text{ هر } F_n \text{ بسته است} \Big\}$$

$$G_\delta = \Big\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n : \text{ هر } O_n \text{ باز است} \Big\}$$

به عنوان مثال در $\mathbb{R}$

$$[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[a, b-\frac{1}{n}\Big] \in \mathcal{F}_\sigma$$

$$[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(a-\frac{1}{n}, b\Big) \in G_\delta$$

همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathcal{F}_{\sigma\delta} = \mathcal{F}_\sigma \text{ گردایه اشتراکهای شمارا از مجموعه‌های }$$

به همین ترتیب می‌توان مجموعه‌های $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$، $G_{\delta\sigma}$ $G_{\delta\sigma\delta}$ و ... را تعریف نمود که همگی مجموعه‌های بورل هستند.

فرض کنیم I بازهٔ دلخواهی در $\mathbb{R}$ با نقطه ابتدایی a و نقطه انتهایی b باشد. قرار می‌دهیم $\ell(I) = b-a$ و آنرا طول I می‌گوییم. بنابراین

$$\ell(a,b) = b-a \quad , \quad \ell[a,b] = b-a \quad , \quad \ell[a,b) = b-a \quad , \quad \ell(a,b] = b-a$$

$$\ell(1,\infty) = \infty - 1 = \infty \quad , \quad \ell(-\infty,1) = 1-(-\infty) = \infty \quad , \quad \ell(-\infty,\infty) = \infty-(-\infty) = \infty$$

ℓ تابعی به صورت زیراست

$$\ell : \{I : \text{ یک بازه در } \mathbb{R} \; I\} \longrightarrow [0,\infty]$$

سؤال: آیا تابع مجموعه‌ای m بر $\mathfrak{M} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ با مقادیر حقیقی توسعه یافته وجود دارد که $m : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ و در شرایط زیر صدق کند:

(i) $\mathfrak{M} = 2^{\mathbb{R}}$.

(ii) اگر I یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد آنگاه $m(I) = \ell(I)$.

(iii) اگر $\{E_n\}_n$ گردایهٔ شمارایی از عناصر دوبدو مجزای $\mathfrak{M}$ باشد آنگاه

$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_n mE_n$$

(iv) اگر $E \in \mathfrak{M}$ آنگاه

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad m(E+y) = mE$$

که در اینجا $E+y = \{x+y : \ x \in E\}$ می‌باشد.

بنا به اصل پیوستار جواب منفی است و باید یکی از شرایط را تضعیف نمود. بهترین راه آن است که (i) را تضعیف نماییم.

اندازهٔ خارجی

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ دلخواه باشد، تعریف می‌کنیم:

$$m^*(A) = \inf \sum_n \ell(I_n)$$

که inf روی کلیهٔ گردایه‌های شمارای $\{I_n\}$ از بازه‌های باز گرفته می‌شود که A را دربر دارند، یعنی $A \subseteq \bigcup_n I_n$.

نتایج:

۱ــ اگر $A \subseteq B$ آنگاه $m^*A \leq m^*B$. زیرا،

$$\Big\{\sum_n \ell(I_n) : \ B \subseteq \bigcup_n I_n\Big\} \subseteq \Big\{\sum_n \ell(I_n) : \ A \subseteq \bigcup_n I_n\Big\}$$

۲ــ $m^*\varnothing = 0$، زیرا به ازاء هر $\varepsilon > 0$،

$$\varnothing \subseteq \big(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\big) \qquad \Longrightarrow \qquad m^*\varnothing \leq \ell\big(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\big) = \varepsilon$$

۳ــ $m^*\{a\} = 0$. زیرا به ازاء هر $\varepsilon > 0$، $\{a\} \subseteq (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$: لذا

$$m^*\{a\} \leq \ell\big(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\big) = \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq m^*\{a\} \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon = 0$$

قضیه ۴.۱.۱ اندازهٔ خارجی هر بازه برابر با طول آن است.

برهان. ابتدا حکم را برای بازهٔ بسته (فشرده) دلخواه $[a,b]$ ثابت می‌کنیم. برای $\varepsilon > 0$ دلخواه $\{(a-\varepsilon, b+\varepsilon)\}$ یک پوشش شمارا از بازه‌های باز برای $[a,b]$ است، پس بنا به تعریف m^* داریم:

$$m^*[a,b] \leq \ell(a-\varepsilon, b+\varepsilon) = b-a+2\varepsilon$$

اکنون اگر $\varepsilon \to 0^+$ میل کند، آنگاه $m^*[a,b] \leq b-a$.

حال باید ثابت کنیم که $m^*[a,b] \geq b-a$. این معادل است با این که به ازای هر پوشش شمارا از بازه‌های باز برای $[a,b]$، مانند $\{I_n\}$ داشته باشیم:

$$\sum_n \ell(I_n) \geq b-a \qquad (۱)$$

چون بنا به قضیهٔ هاینه— بورل هر پوشش باز برای $[a,b]$ شامل یک زیرپوشش متناهی است و مجموع طول بازه‌های یک زیرپوشش از مجموع طول بازه‌های پوشش تجاوز نمی‌کند، لذا کافی است (۱) را برای پوشش متناهی $\{I_n\}$ از بازه‌های باز ثابت کنیم. چون $[a,b] \subseteq \bigcup_n I_n$، پس I_n ای وجود دارد که شامل a است، آن را به (a_1, b_1) نشان می‌دهیم.

اگر $b_1 > b$، عمل را خاتمه می‌دهیم. اگر $b_1 \leq b$، آنگاه $a < b_1 \leq b$ و در نتیجه $b_1 \in [a,b]$. بنابراین I_nای موجود هست که b_1 را در بر دارد و این I_n را با (a_2, b_2) نمایش می‌دهیم. اگر $b_2 > b$، عمل را خاتمه می‌دهیم. اگر $b_2 \leq b$، آنگاه I_nای موجود هست که b_2 را در بر دارد که آنرا به (a_3, b_3) نمایش می‌دهیم.

با ادامه این روش، چون پوشش متناهی است و (a_i, b_i) ها متمایزند، این عمل بعد از تعداد متناهی بار خاتمه پیدا می‌کند. بنابراین دنبالهٔ متناهی (a_1, b_1) تا (a_k, b_k) از I_nها یافت می‌شوند به طوری که

$$a_i < b_{i-1} < b_i \qquad (2 \leq i \leq k) \qquad (\star)$$

$b < b_k$ و $a_1 < a$. چون این بازه‌های باز از I_n انتخاب شده‌اند پس:

$$\begin{aligned}
\sum_n \ell(I_n) &\geq \sum_{i=1}^{k} \ell(a_i, b_i) \\
&= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a_1) \\
&= b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2}) - \cdots - (a_2 - b_1) - a_1 \\
&\geq b_k - a_1 > b - a
\end{aligned}$$

زیرا با توجه به رابطهٔ($\star$)، $(a_k - b_{k-1})$ها منفی هستند. لذا رابطهٔ (۱) برقرار است. بنابراین:

$$m^*[a,b] = b - a = \ell[a,b]$$

اکنون فرض کنیم که I بازهٔ متناهی دلخواه باشد. به ازاء $\varepsilon > 0$ دلخواه، بازهٔ بسته $J \subseteq I$ هست که

$$\ell(I) - \varepsilon < \ell(J)$$

لذا

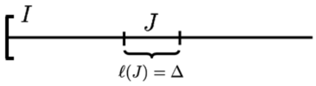
$$\ell(I) - \varepsilon < \ell(J) = m^*J \leq m^*I \leq m^*\bar{I} = \ell(\bar{I}) = \ell(I)$$

و

$$\ell(I) - \varepsilon < m^*I \leq \ell(I) \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، لذا $m^*I = \ell(I)$.

بالاخره فرض کنیم I یک بازهٔ نامتناهی باشد. به ازای هر عدد حقیقی ومثبت Δ، بازهٔ بسته J به طول Δ هست که $J \subseteq I$.



پس

$$m^*I \geq m^*J = \ell(J) = \Delta \qquad (\Delta > 0)$$

چون $\Delta > 0$ دلخواه است $m^*I = \infty = \ell(I)$. $\square$

قضیه ۵.۱.۱ اگر $\{A_n\}$ گردایهٔ شمارایی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ باشد آنگاه:

$$m^*\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leq \sum_n m^*A_n$$

برهان. اگر nای باشد که $m^*A_n = \infty$ حکم بدیهی است.

فرض کنیم به ازای هر n، $m^*A_n < \infty$. به ازای هر n، بنا به خاصیت مشخصه اینفیمم، گردایه شمارای $\{I_{n,i}\}_i$

از بازه‌های باز است که $A_n \subseteq \bigcup\limits_i I_{n,i}$ و $\sum\limits_i \ell(I_{n,i}) < m^*A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$. پس

$$\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_{n,i} I_{n,i}$$

لذا

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_n A_n) &\leq \sum_{n,i} \ell(I_{n,i}) = \sum_n \Big[\sum_i \ell(I_{n,i})\Big] \\ &\leq \sum_n (m^*A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_n m^*A_n + \varepsilon \sum_n \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_n m^*A_n + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_n m^*A_n + \varepsilon \end{aligned}$$

و چون ε دلخواه است لذا:

$$m^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n m^*A_n$$

□

نتایج:

۱ــ اگر A شمارا باشد، $m^*A = 0$. زیرا

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\} = \bigcup_n \{a_n\} \quad \Longrightarrow \quad m^*A \leq \sum_n m^*\{a_n\} = 0$$

۲ــ بازهٔ $[0,1]$ ناشماراست. زیرا اگر $[0,1]$ شمارا باشد باید اندازهٔ خارجی آن مساوی صفر باشد در حالی که $m^*[0,1] = \ell[0,1] = 1 \neq 0$.

تمرین: اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند، نشان دهید

۱ــ مجموعهٔ باز $O \supseteq A$ وجود دارد که $m^*O \leq m^*A + \varepsilon$.

۲ــ مجموعهٔ G_δی G هست که $A \subseteq G$ و $m^*G = m^*A$.

اندازهٔ لبگ بر خط حقیقی

تعریف ۶.۱.۱ زیرمجموعهٔ E از خط حقیقی را لبگ– اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ A داشته باشیم

$$m^*A = m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c) \qquad\qquad (E^c = \tilde{E} = \mathbb{R} - E)$$

همواره داریم

$$A = (A\cap E)\cup(A\cap E^c) \quad \overset{\text{خاصیت زیرجمعی}}{\Longrightarrow} \quad m^*A \le m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$$

بنابراین مجموعهٔ E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$m^*A \ge m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$$

نتایج:

۱– مجموعه‌های $\mathbb{R}$ و $\varnothing$ لبگ اندازه‌پذیرند. زیرا:

$$m^*(\underbrace{A\cap\mathbb{R}}_{A}) + \underbrace{m^*(A\cap\mathbb{R}^c)}_{0} = m^*A$$

پس $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است.

۲– چون تعریف نسبت به E و E^c متقارن است لذا اگر E اندازه‌پذیر باشد E^c نیز اندازه‌پذیر است.

۳– فرض کنیم $\mathfrak{M}$ به صورت زیر تعریف شده باشد. ثابت می کنیم که $\mathfrak{M}$ یک σ– جبر است.

$$\mathfrak{M} = \{E:\ \text{اندازه پذیر است } E\}$$

دو خاصیت اول به وضوح ثابت می شوند، زیرا $\mathbb{R}\in\mathfrak{M}$ و اگر $E\in\mathfrak{M}$ آنگاه $E^c\in\mathfrak{M}$. کافی است خاصیت سوم را اثبات نماییم.

لم ۷.۱.۱ اگر E_1 و E_2 اندازه‌پذیر باشند آنگاه $E_1\cup E_2$ اندازه‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم A یک مجموعهٔ دلخواه باشد. داریم:

$$\begin{aligned} m^*[A\cap(E_1\cup E_2)] + m^*[A\cap(E_1\cup E_2)^c] &= m^*[(A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^c\cap E_2)] + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \\ &\le m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \\ &= m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c) = m^*A \end{aligned}$$

□

نتیجه: گردایهٔ کلیهٔ مجموعه‌های لبگ — اندازه‌پذیر یک جبر است.

لم ۸.۱.۱ اگر $E_1, \ldots, E_n$ مجموعه‌های لبگ — اندازه‌پذیر دوبدو مجزا باشند، آنگاه به ازای هر مجموعهٔ A داریم:

$$m^*\Big[A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\big)\Big] = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

برهان. به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$ حکم بدیهی است. فرض کنیم $n \geq 2$ و حکم برای $n-1$ برقرار باشد. برای n ثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned} m^*\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\big)\Big) &= m^*\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\big) \cap E_n\Big) + m^*\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\big) \cap E_n^c\Big) \\ &= m^*(A \cap E_n) + m^*\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\big)\Big) \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) \end{aligned}$$

□

لم ۹.۱.۱ اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از عناصر $\mathfrak{A}$ باشد، دنبالهٔ $\{B_n\}$ از عناصر دوبدو مجزای $\mathfrak{A}$ هست که $\bigcup\limits_n A_n = \bigcup\limits_n B_n$.

برهان. قرار می‌دهیم:

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n - \big(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}\big) = A_n \cap A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c$$

با این تعریف به ازای هر n، $B_n \in \mathfrak{A}$، $B_n \subseteq A_n$. پس به وضوح $\bigcup\limits_n B_n \subseteq \bigcup\limits_n A_n$. اگر $m < n$ آنگاه:

$$B_m \cap B_n \subseteq A_m \cap A_n \cap A_1^c \cap \ldots \cap A_m^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c = \varnothing$$

که نشان می‌دهد B_nها دوبدو مجزا هستند. اگر $x \in \bigcup_n A_n$ آنگاه با قرار دادن $N = \min\{n : \ x \in A_n\}$ داریم:

$$x \in A_N - (A_1 \cup \ldots \cup A_{N-1}) = B_N \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n B_n$$

که این حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۱ گردایه مجموعه‌های لبگ ـ اندازه‌پذیر یک σ ـ جبر است. بعلاوه اگر $m^*A = 0$، A اندازه‌پذیر است.

برهان. در واقع کافی است ثابت کنیم که اجتماع شمارا و نامتناهی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است. فرض کنیم E اجتماع شمارا از مجموعه‌های لبگ ـ اندازه‌پذیر باشد. با توجه به لم قبل، $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ که E_nها مجموعه‌های لبگ ـ اندازه‌پذیر و دوبدو مجزا هستند. A را مجموعهٔ دلخواه در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. به وضوح $F_n \subseteq E$ در نتیجه $E^c \subseteq F_n^c$. داریم:

$$\begin{aligned} m^*A &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq m^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)\Big) + m^*(A \cap E^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

چون n دلخواه است، داریم

$$m^*A \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) \geq m^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\Big) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

زیرا m^* زیرجمعی است. لذا E لبگ ـ اندازه‌پذیر است. اکنون فرض کنیم $m^*A = 0$. A را مجموعهٔ دلخواه در نظر می‌گیریم. از آنجا که

$$A \cap E \subseteq E \qquad \Longrightarrow \qquad m^*(A \cap E) \leq m^*E = 0$$

$$A \cap E^c \subseteq A \qquad \Longrightarrow \qquad m^*(A \cap E^c) \leq m^*A$$

لذا

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*A$$

در نتیجه A اندازه‌پذیر است. $\square$

لم ۱۱.۱.۱ بازهٔ (a,∞) اندازه‌پذیر لبگ است.

برهان. فرض کنیم A یک مجموعهٔ دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $A_1 = A \cap (A,\infty)$ و $A_2 = A \cap (a,\infty)^c = A \cap (-\infty, a]$. ثابت می‌کنیم

$$m^*A_1 + m^*A_2 \le m^*A \qquad (۱)$$

اگر $m^*A = \infty$، (۱) بدیهی است. پس فرض کنیم $m^*A < \infty$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. پوششی از بازه‌های باز I_n موجود است که $A \subseteq \bigcup\limits_n I_n$ و

$$\sum_n \ell(I_n) < m^*A + \varepsilon$$

تعریف می‌کنیم:

$$I'_n = I_n \cap (a,\infty)$$

$$I''_n = I_n \cap (-\infty, a]$$

واضح است که $I_n = I'_n \cup I''_n$ و $\ell(I_n) = \ell(I'_n) + \ell(I''_n)$. داریم

$$A_1 = A \cap (a,\infty) \subseteq \bigcup \left[I_n \cap (a,\infty)\right] = \bigcup_n I'_n \qquad , \qquad A_2 \subseteq \bigcup_n I''_n$$

لذا

$$m^*A_1 \le m^*\big(\bigcup_n I'_n\big) \le \sum_n m^*I'_n = \sum_n \ell(I'_n) \qquad , \qquad m^*A_2 \le \sum_n \ell(I''_n)$$

در نتیجه

$$m^*A_1 + m^*A_2 \le \sum_n \big(\ell(I'_n) + \ell(I''_n)\big) = \sum_n \ell(I_n) < m^*A + \varepsilon$$

پس به ازای هر $\varepsilon > 0$، $m^*A_1 + m^*A_2 < m^*A + \varepsilon$. و اگر $\varepsilon \to 0$، (۱) بدست می‌آید. □

قضیه ۱۲.۱.۱ هر مجموعهٔ بورل اندازه‌پذیر است. بالاخص هر مجموعهٔ باز یا بسته اندازه‌پذیر است.

برهان. با توجه به تعریف σ−جبر بورل کافی است ثابت کنیم هر مجموعهٔ باز اندازه‌پذیر است. چون

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(-\infty, a - \frac{1}{n}\big]$$

و

$$(-\infty, a-\frac{1}{n}] = (a-\frac{1}{n}, \infty)^c$$

اندازه‌پذیر است، لذا $(-\infty, a)$ اندازه‌پذیر است. از آنجا که

$$(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$$

لذا هر بازهٔ (a,b) اندازه‌پذیر است. چون هر مجموعهٔ باز اجتماع شمارا از بازه‌های باز (دو بدو مجزا) است در نتیجه هر مجموعهٔ باز لبگ — اندازه‌پذیر است و از اینجا حکم نتیجه می‌شود. □

تعریف ۱۳.۱.۱

$$m = m^*|_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$$

m را اندازهٔ لبگ می گوییم.

قضیه ۱۴.۱.۱ اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های لبگ — اندازه‌پذیر باشد، آنگاه

$$m\Big(\bigcup_n E_n\Big) \leq \sum_n mE_n \qquad (۱)$$

بعلاوه اگر E_n ها دوبدو مجزا باشند،

$$m\Big(\bigcup_n E_n\Big) = \sum_n mE_n \qquad (۲)$$

برهان. (۱) همان زیرجمعی بودن m^* است.

(۲): بنا به لم (۸.۱.۱)، به ازاء هر مجموعهٔ A داریم:

$$m^*\Big[A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)\Big] = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

بالاخص برای $A = \mathbb{R}$ داریم

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} mE_i$$

در نتیجه

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \geq m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} mE_i$$

لذا برای هر n،

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} mE_i$$

حال اگر $n \to \infty$، بدست می آوریم

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$$

برای طرف دوم از (۱) استفاده کرده و حکم ثابت می‌شود. $\square$

تمرین: فرض کنیم E یک مجموعهٔ دلخواه باشد. احکام زیر معادلند:

(i) E اندازه‌پذیر است.

(ii) به ازاء هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، مجموعهٔ باز O وجود دارد که $E \subseteq O$ و $m^*(O \backslash E) < \varepsilon$.

(iii) به ازاء هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، مجموعهٔ بسته F وجود دارد که $F \subseteq E$ و $m^*(E \backslash F) < \varepsilon$.

(iv) مجموعهٔ G_δ ی G هست که $E \subseteq G$ و $m^*(G \backslash E) = 0$.

(v) مجموعهٔ F_σ ی F هست که $F \subseteq E$ و $m^*(E \backslash F) = 0$.

اگر $m^*E < \infty$، احکام فوق معادلند با

(vi) به ازاء هر $\varepsilon > 0$، اجتماع متناهی U از بازه‌های باز هست که

$$m^*(U \Delta E) < \varepsilon \qquad \Big(U\Delta E = (U \backslash E) \cup (E \backslash U)\Big)$$

علائم و قراردادها:

فرض کنیم I یک مجموعهٔ اندیس باشد.

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \;=\; \{x : x \in A_\alpha \;,\; \alpha \in I \text{ به ازای یک}\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x: x\in A_\alpha \ , \alpha\in I \text{ به ازای هر}\}$$
$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\} \quad (\mathbb{R}\text{ تعمیم یافته})$$

تعریف ۱.۱.۱۵ گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی در X گوییم هرگاه:

(a) $\varnothing, X\in\tau$.

(b) اگر $V_1,\ldots,V_n\in\tau$ آنگاه $V_1\cap\ldots\cap V_n\in\tau$.

(c) اگر $\{V_\alpha\}_\alpha$ خانوادهٔ دلخواهی از عناصر τ باشد، آنگاه $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha\in\tau$.

در این حالت X را یک فضای توپولوژیکی و عناصر τ را مجموعه‌های باز می‌گویند. بطور دقیق‌تر، اگر τ یک توپولوژی در X باشد، زوج مرتب (X,τ) یک فضای توپولوژیکی است. همچنین اگر X,Y دو فضای توپولوژیکی باشند، نگاشت $f: X\to Y$ را پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، مجموعهٔ $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶ گردایهٔ $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یک $\sigma-$جبر در X گوییم هرگاه:

(a) $X\in\mathfrak{M}$.

(b) اگر $A\in\mathfrak{M}$ آنگاه $A^c = X\backslash A\in\mathfrak{M}$.

(c) اگر $A_1,A_2\ldots\in\mathfrak{M}$ آنگاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathfrak{M}$.

در این حالت X را یک فضای اندازه‌پذیر و عناصر $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌گویند. بطور دقیق‌تر، اگر $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد، زوج مرتب $(X,\mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر است. همچنین اگر X یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیکی باشند، نگاشت $f: X\to Y$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، مجموعهٔ $f^{-1}(V)$ در X اندازه‌پذیر باشد.

مثال: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند. $\sigma-$جبری که همیشه می‌توان برای فضای توپولوژیکی X در نظر گرفت، $\sigma-$ جبر مجموعه‌های بورل در X است. در این حالت $(X,\mathfrak{B}_X)$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

گوییم نگاشت $f : X \to Y$ اندازه‌پذیر بورل یا یک تابع بورل است هرگاه به ازاء هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V) \in \mathfrak{B}_X$. بالاخص اگر f پیوسته باشد آنگاه f یک تابع بورل است.

یادآوری: تابع $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متریک بر X گوییم هرگاه:

(a) به ازای هر $x, y \in X$، $0 \leq \rho(x,y) < \infty$.

(b) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$.

(c) به ازای هر $x, y \in X$، $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

(d) به ازای هر $x, y, z \in X$، $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

تعریف ۱.۱.۱۷ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند و $x_0 \in X$. تابع $f : X \to Y$ در نقطهٔ x_0 پیوسته است هرگاه به ازای هر همسایگی V از $f(x_0)$، همسایگی U از x_0 موجود باشد که $f(U) \subseteq V$.

قضیه ۱.۱.۱۸ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند. تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در هر نقطه از X پیوسته باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f : X \to Y$ پیوسته، $x \in X$ و V یک همسایگی $f(x)$ در Y باشد. $f^{-1}(V)$ باز و شامل x است، لذا یک همسایگی از x می‌باشد و $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. پس f در x پیوسته است. برعکس، فرض کنیم f در هر نقطه از X پیوسته و V در Y باز باشد. داریم:

$$x \in f^{-1}(V) \implies f(x) \in V \quad \overset{f \text{ در } x \text{ پیوسته}}{\Longrightarrow} \exists U \ (\text{همسایگی } x);\ f(U) \subseteq V \implies U \subseteq f^{-1}(V)$$

لذا x یک نقطهٔ درونی $f^{-1}(V)$ بوده و در نتیجه $f^{-1}(V)$ باز است. $\square$

نتیجه: فرض کنیم $(X, \mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. در اینصورت

(i) $\varnothing = X^c \in \mathfrak{M}$.

(ii) اگر $A_1, A_2 \ldots \in \mathfrak{M}$ آنگاه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c \in \mathfrak{M}$$

(iii) اگر $A_1, A_2 \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \in \mathfrak{M} \qquad \text{(اجتماع شمارا)}$$

در حقیقت اجتماع و مقطع هر تعداد متناهی از عناصر $\mathfrak{M}$ متعلق به $\mathfrak{M}$ است.

(iv) اگر $A, B \in \mathfrak{M}$ آنگاه

$$A - B = A \cap B^c \in \mathfrak{M}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathfrak{M}$$

قضیه ۱۹.۱.۱ فرض کنیم Y و Z دو فضای توپولوژیکی و تابع $g : Y \to Z$ پیوسته باشد.

(a) اگر X یک فضای توپولوژیکی و $f : X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f : X \to Z$ پیوسته است.

(b) اگر X یک فضای اندازه‌پذیر و $f : X \to Y$ اندازه‌پذیر باشد آنگاه $g \circ f : X \to Z$ اندازه‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم V در Z باز باشد. چون g پیوسته است، $g^{-1}(V)$ در Y باز است. بنابراین

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(V)}_{\text{باز}}\big) = \begin{cases} \text{باز} & \text{اگر } f \text{ پیوسته باشد} \\ \text{اندازه‌پذیر} & \text{اگر } f \text{ اندازه‌پذیر باشد} \end{cases}$$

به طور خلاصه، تابع پیوسته از تابع اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است. □

قضیه ۲۰.۱.۱ فرض کنیم u و v توابع حقیقی اندازه‌پذیر بر فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathfrak{M})$ باشند. اگر $\phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ پیوسته باشد آنگاه $h(x) = \phi(u(x), v(x))$ اندازه‌پذیر است.

برهان. از آنجا که تابع پیوسته از اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است لذا کافی است ثابت کنیم $f : X \to \mathbb{R}^2$ که در آن $f(x) = (u(x), v(x))$ $(x \in X)$ اندازه‌پذیر است. فرض کنیم I_1 و I_2 بازه‌های باز در $\mathbb{R}^1$ باشند و $R = I_1 \times I_2$. داریم

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2) \in \mathfrak{M}$$

اما هر مجموعهٔ باز V در صفحه، اجتماع تعداد شمارا از چنین مستطیل‌هایی می‌باشد. قرار می‌دهیم $V = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$. بنابراین

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i) \in \mathfrak{M}$$

در نتیجه تابع f اندازه‌پذیر است. $\square$

تبصره: فرض کنیم $(X, \mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیکی باشد و $f : X \to Z \subseteq Y$. تابع $f : X \to Z$ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $f : X \to Y$ اندازه‌پذیر باشد.

برهان. $(\Rightarrow)$ W را یک مجموعهٔ باز در Z قرار می‌دهیم. مجموعهٔ باز V در Y موجود است که $W = V \cap Z$. داریم

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$$

در نتیجه $f : X \to Z$ اندازه‌پذیر است.

$(\Leftarrow)$ اگر V در Y باز باشد آنگاه

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(V \cap Z) \in \mathfrak{M}$$

زیرا $V \cap Z$ در Z باز است. $\square$

نتایج:

فرض کنیم $(X, \mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد.

(a): اگر $f = u + iv$ و توابع u و v، توابع حقیقی اندازه‌پذیر در X باشند آنگاه f تابع مختلط اندازه‌پذیر بر X است. زیرا با توجه به مطالب قبل

$$\begin{cases} f = u + iv = (u, v) \\ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ \phi(z) = z \ (\text{پیوسته}) \end{cases} \implies \quad f = \phi(u, v) \ \ \text{اندازه‌پذیر}$$

(b): اگر $f = u + iv$ اندازه‌پذیر مختلط باشد آنگاه u و v و $|f|$ اندازه‌پذیر حقیقی‌اند.

$$X \xrightarrow[\text{اندازه‌پذیر}]{f} \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{پیوسته}]{|.|} \mathbb{R}$$

$|f| = |.| \circ f$ اندازه‌پذیر

$$X \xrightarrow[\text{اندازه‌پذیر}]{f} \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{پیوسته}]{\mathrm{Re}} \mathbb{R}$$

$u = \mathrm{Re} \circ f$ اندازه‌پذیر

$v = \mathrm{Im} \circ f$ اندازه‌پذیر

(c): اگر f و g توابع مختلط اندازه‌پذیر بر X باشند آنگاه $f + g$ و fg اندازه‌پذیرند. برای اثبات در حالت حقیقی، فرض کنیم $f, g : X \to \mathbb{R}$ و $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ که $\phi(s,t) = s \pm t$ باشند. $f \pm g = \phi(f,g)$ که بنا به نتیجهٔ (a) اندازه‌پذیر است. همچنین اگر $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ که $\psi(s,t) = st$ را در نظر بگیریم، آنگاه $fg = \psi(f,g)$ اندازه‌پذیر است.

اکنون حالت مختلط $f = f_1 + if_2$ و $g = g_1 + ig_2$ را در نظر می‌گیریم. لذا

$$f + g = (f_1 + g_1) + i(f_2 + g_2)$$

$$fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1)$$

چون قسمتهای حقیقی و موهومی اندازه‌پذیرند لذا $f + g$ و fg اندازه‌پذیر هستند.

(d): فرض کنیم $E \subseteq X$. تعریف می‌کنیم

$$\chi_{_E}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

$\chi_{_E}(x)$ را تابع مشخصهٔ E می‌نامند. ثابت می‌کنیم E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\chi_{_E}(x)$ اندازه‌پذیر باشد.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $V \subseteq \mathbb{R}$ باز باشد. داریم

$$\chi_E^{-1}(V) = \begin{cases} X & 0,1 \in V \\ E & 1 \in V\ ,0 \notin E \\ E^c & 0 \in V\ ,1 \notin V \\ \varnothing & 0,1 \notin V \end{cases}$$

($\Rightarrow$) $\quad \chi_E^{-1}\left(N_{\frac{1}{2}}(1)\right) = E \in \mathfrak{M}$

(e): اگر $f : X \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد آنگاه تابع اندازه‌پذیر $\alpha : X \to \mathbb{C}$ وجود دارد که به ازای هر $x \in X$،

$|\alpha(x)| = 1$ و $f = \alpha|f|$.

برای اثبات مجموعهٔ E را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$E = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E = f^{-1}(\{0\}) &= f^{-1}\big(\mathbb{C}\backslash(\mathbb{C}\backslash\{0\})\big) \\ &= f^{-1}(\mathbb{C}) - f^{-1}\big(\mathbb{C}\backslash\{0\}\big) = X - f^{-1}\big(\mathbb{C}\backslash\{0\}\big) \in \mathfrak{M} \end{aligned}$$

لذا مجموعهٔ E اندازه‌پذیر است. اکنون تابع پیوستهٔ $\varphi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$X \xrightarrow{f+\chi_E} \mathbb{C}\backslash\{0\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \qquad , \qquad \alpha(x) = \varphi\big(f(x) + \chi_E(x)\big) \quad (x \in X)$$

α تابع پیوسته‌ای از یک تابع اندازه‌پذیر است و لذا اندازه‌پذیر است.

$$\begin{cases} x \in E \implies & \alpha(x) = \varphi(1) = \frac{1}{|1|} = 1 \\ x \notin E \implies & \alpha(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \ , \ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

در نتیجه همواره $|\alpha(x)| = 1$. بعلاوه،

$$\begin{cases} x \in E \implies \overbrace{f(x)}^{0} = \alpha(x)\overbrace{|f(x)|}^{0} \\ x \notin E \implies f(x) = \alpha(x)|f(x)| \end{cases}$$

پس در هر حالت $f = \alpha|f|$.

قضیه ۲۱.۱.۱ فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X و Y فضای توپولوژیکی و $f : X \to Y$ باشند.

(a): $\Omega = \{E \subseteq Y : \ \ f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$

یک $\sigma-$جبر در Y است.

(b): اگر f اندازه‌پذیر و E در Y بورل باشد آنگاه $f^{-1}(E)$ اندازه‌پذیر است.

(c): اگر $Y = [-\infty, \infty]$ و به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}(a, \infty]$ اندازه پذیر باشد آنگاه $f : X \to [-\infty, \infty]$ اندازه‌پذیر است.

(d): اگر f اندازه‌پذیر، Z یک فضای توپولوژیکی و $g : Y \to Z$ بورل باشد آنگاه $h = g \circ f : X \to Z$ اندازه‌پذیر است.

چون هر تابع پیوسته بورل است، لذا قسمت (d) تعمیم قضیهٔ (۱۹.۱.۱) می‌باشد.

برهان. (a): از آنجا که $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{M}$ لذا $Y \in \Omega$. حال فرض کنیم $E \in \Omega$. بنابراین

$$f^{-1}(Y - E) = X - f^{-1}(E) \in \mathfrak{M} \quad \Longrightarrow \quad Y - E \in \Omega$$

اگر $E_1, E_2, \ldots \in \Omega$ آنگاه

$$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(E_i)}_{\in \mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$$

(b): بنا به قسمت (a)، Ω یک $\sigma-$جبر در Y است. اگر V را باز دلخواه در Y در نظر بگیریم، با توجه به اندازه‌پذیری f، $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$ و در نتیجه $V \in \Omega$. پس Ω، $\sigma-$جبر حاوی کلیهٔ مجموعه‌های باز Y است. پس Ω حاوی کلیهٔ مجموعه‌های بورل Y است.

(c): با توجه به قسمت (a)، از آنجا که Ω، $\sigma-$جبری در Y است لذا طبق فرض به ازای هر $a \in \mathbb{R}^1$، $(a, \infty] \in \Omega$. پس همواره

$$[-\infty, a] = (a, \infty]^c \in \Omega$$

$$[-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, a - \frac{1}{n}] \in \Omega$$

لذا

$$(a, b) = [-\infty, b) \cap (a, +\infty] \in \Omega$$

پس همواره $(a, b), (a, +\infty], [-\infty, a) \in \Omega$. حال چون هر مجموعهٔ باز در $[-\infty, \infty]$ اجتماع تعداد شمارا از این مجموعه‌ها است، پس به ازای هر مجموعهٔ باز V در $[-\infty, \infty]$، $V \in \Omega$ و لذا $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$ و این یعنی f اندازه‌پذیر است.

(d): اگر V مجموعهٔ بازی در Z باشد، آنگاه بنا به (b)،

$$h = g \circ f : X \xrightarrow[\text{اندازه‌پذیر}]{f} Y \xrightarrow[\text{بورل}]{g} Z$$

$$h^{-1}(V) = f^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(V)}_{\text{بورل}}\big) \in \mathfrak{M}$$

پس h اندازه‌پذیر است. $\square$

حدود بالایی و پایینی

فرض کنیم $\{a_n\} \subseteq [-\infty, +\infty]$. به ازای $n = 1, 2, \dots$ تعریف می‌کنیم:

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \quad , \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

$$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \quad , \quad c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots$$

عدد توسیع یافتهٔ $\beta = \inf\limits_n b_n$ را حد بالای دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم و آنرا به $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \inf_n b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

مشابهاً

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \sup_n c_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

همچنین

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n(-a_n) = \inf_n \sup_{k\geq n}(-a_k) = \inf_n \big(-\inf_{k\geq n} a_k\big) = -\sup_n \inf_{k\geq n} a_k = -\lim_{n\to\infty} \inf_n a_n$$

قضیه ۲۲.۱.۱ زیردنباله‌ای مانند $\{a_{n_i}\}$ از $\{a_n\}$ هست که:

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \lim_{n\to\infty} \sup_n a_n$$

بعلاوه، $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ بزرگترین حد زیردنباله‌ای است.

برهان. قرار می‌دهیم $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$. سه حالت تشخیص می‌دهیم:

(I): $\beta \in \mathbb{R}^1$. داریم

$$\begin{aligned}\inf_N \sup_{n\geq N} a_n = \beta < \beta + \frac{1}{i} \quad &\Longrightarrow \quad \exists N_i;\ \sup_{n\geq N_i} a_n < \beta + \frac{1}{i}\\ &\Longrightarrow \quad a_n < \beta + \frac{1}{i} \qquad (n \geq N_i)\end{aligned}$$

$$\beta - 1 < \beta = \inf_N \sup_{n \geq N} a_k \implies \beta - 1 < \sup_{n \geq N_1} a_n \implies \exists n_1 \geq N_1; \ \beta - 1 < a_{n_1}$$

پس $\beta - 1 < a_{n_1} < \beta + 1$. به استقراء، با در دست داشتن n_i که $\beta - \frac{1}{i} < a_{n_i} < \beta + \frac{1}{i}$، چون

$$\beta - \frac{1}{i+1} < \beta = \inf_N \sup_{n \geq N} a_n \leq \sup_{n \geq \max\{N_{i+1}, n_i+1\}} a_n \implies$$
$$\implies \exists n_{i+1} \geq \max\{N_{i+1}, n_i + 1\}, \ \beta - \frac{1}{i+1} < a_{n_i+1}$$

پس

$$\beta - \frac{1}{i+1} < a_{n_{i+1}} < \beta + \frac{1}{i+1}$$

و لذا $\lim_{i \to \infty} a_{n_i} = \beta$.

(II): $\beta = -\infty$. از آنجا که

$$-\infty = \inf_N \sup_{n \geq N} a_n < \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^1)$$

لذا به ازاء هر $\lambda \in \mathbb{R}^1$، N ای موجود است که $\sup_{n \geq N} a_n < \lambda$. در نتیجه

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^1 \ , \ \exists N \ \ (n \geq N \implies a_n < \lambda)$$

پس $\lim_{n \to \infty} \inf a_n = \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

(III): $\beta = +\infty$. چون

$$1 < +\infty = \inf_N \sup_{n \geq N} a_n \leq \sup_{n \geq 1} a_n$$

n_1 ای موجود است بطوریکه $1 < a_{n_1}$. فرض کنیم n_i چنان باشد که $i < a_{n_i}$. چون

$$i + 1 < +\infty = \inf_N \sup_{n \geq N} a_n \leq \sup_{n \geq n_i + 1} a_n$$

$n_{i+1} \geq n_i + 1 (> n_i)$ موجود می‌باشد بطوریکه $i + 1 < a_{n_{i+1}}$. پس زیردنبالهٔ $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ از $\{a_n\}$ هست که به ازاء هر i، $a_{n_i} > i$. بنابراین

$$\lim_{i \to \infty} a_{n_i} = +\infty = \lim_{i \to \infty} \inf a_n$$

در مرحله بعد ثابت می‌کنیم که β بزرگترین حد زیردنباله‌ای است. فرض کنیم $\gamma = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$. داریم

$$\forall N \ , \exists k_N \ \ (k \geq k_N \ \Rightarrow \ n_k \geq N \ \implies \ a_{n_k} \leq \sup_{n \geq N} a_n)$$

بنابراین

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \sup_{n\geq N} a_n \qquad (\forall N)$$

اکنون با گرفتن اینفیمم از سمت راست، نتیجه می‌شود که

$$\gamma \leq \inf_N \sup_{n\geq N} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_n a_n = \beta$$

□

تمرین: نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ موجود است اگر و تنها اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$، که در این حالت مقدار مشترک فوق حد دنباله است.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم $f_n : X \to [-\infty, \infty]$.

$$\big(\lim_{n\to\infty} \sup f_n\big)(x) := \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x)$$

$$\big(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\big)(x) := \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$$

و حد نقطه‌وار f_n را (در صورت وجود) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

قضیه ۲۴.۱.۱ اگر $f_n : (X, \mathfrak{M}) \to [-\infty, \infty]$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد آنگاه $g = \sup f_n$ و $h = \lim\sup f_n$ اندازه‌پذیرند.

برهان. به ازای هر عدد حقیقی α،

$$g^{-1}(\alpha, \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\alpha, \infty] \in \mathfrak{M}$$

همچنین اگر f اندازه‌پذیر باشد آنگاه $(-f)$ نیز اندازه‌پذیر است؛ زیرا $(-f^{-1})(V) = f^{-1}(-V)$. حال با توجه به اندازه‌پذیری g نتیجه می‌شود که

$$\inf f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$$

اندازه‌پذیر است. بنابراین

$$h = \inf_N \sup_{n \geq N} f_n$$

اندازه‌پذیر است. $\square$

نتایج:

فرض کنیم $(X, \mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد.

(a): اگر $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$ موجود و هر f_n اندازه‌پذیر باشد آنگاه f اندازه‌پذیر است، زیرا:

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \sup f_n$$

(b): اگر f, g اندازه‌پذیر باشند آنگاه $\min\{f,g\}$ و $\max\{f,g\}$ اندازه‌پذیرند. بالاخص قسمت مثبت و منفی f، یعنی $f^+ = \max\{f, 0\}$ و $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$ نیز اندازه‌پذیرند. چون

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \quad \Longrightarrow \quad \max\{a,0\} = \frac{a}{2} + \frac{|a|}{2} = \frac{a+|a|}{2}$$

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} \quad \Longrightarrow \quad \min\{a,0\} = \frac{a}{2} - \frac{|a|}{2} = \frac{a-|a|}{2}$$

داریم $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ و $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. بعلاوه، تجزیه استاندارد f و $|f|$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$|f| = f^+ + f^- \qquad , \qquad f = f^+ - f^-$$

لم ۲۵.۱.۱ فرض کنیم $f : X \to [-\infty, \infty]$. اگر $g, h \geq 0$ و $f = g - h$ آنگاه $f^+ \leq g$ و $f^- \leq h$.

برهان.

$$\begin{cases} f = g - h \;\leq\; g \\ \qquad\quad\; 0 \;\leq\; g \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f^+ = \max\{f, 0\} \leq g$$

و

$$\begin{cases} f = g - h \geq -h \;\Longrightarrow\; -f \;\leq\; h \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0 \;\leq\; h \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f^- = \max\{-f, 0\} \leq h$$

$\square$

توابع ساده

تابع مختلط s بر X را یک تابع ساده گوییم هرگاه برد s، مجموعه‌ای متناهی باشد. اگر مقادیر تابع سادهٔ s در $[0,\infty)$ باشد، s را یک تابع سادهٔ نامنفی می‌گوییم. اگر $\mathrm{R}(s)=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ را مجموعهٔ مقادیر دوبدو متمایز s در نظر بگیریم آنگاه

$$A_i=\{x\in X:\quad s(x)=\alpha_i\}\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

دوبدو مجزا هستند و $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. نمایش استاندارد s نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$$

فرض کنیم $(X,\mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $s:X\to\mathbb{C}$ تابعی ساده و α_i ها مقادیر متمایز s باشند. s اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر هر A_i اندازه‌پذیر باشد. (زیرا $A_i=s^{-1}(\{\alpha_i\})$ تصویر معکوس یک مجموعهٔ بورل است.)

لم ۲۶.۱.۱ فرض کنیم $(X,\mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f:X\to[0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد. در اینصورت دنبالهٔ $\{s_n\}$ از توابع ساده و اندازه‌پذیر موجود است که:

:(a) $$0\le s_1\le s_2\le\ldots\le f$$

:(b) $$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)\quad(\forall x\in X)$$

برهان. فرض کنیم n عدد دلخواه ثابت باشد. به ازاء هر عدد $0\le t<\infty$، عدد صحیح نامنفی و منحصربفرد $k=k_n(t)$ موجود است بطوریکه $\frac{k}{2^n}\le t<\frac{k+1}{2^n}$. تابع سادهٔ $\varphi_n:[0,\infty]\to[0,\infty)$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\frac{k}{2^n} & \frac{k}{2^n}\le t<\frac{k+1}{2^n}\\ n & t\ge n\end{cases}\qquad\qquad k=0,1,\ldots,n2^n-1$$

در نتیجه

$$\varphi_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\chi_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})}+n\chi_{[n,\infty]}$$

$[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ و $[n,\infty]$ مجموعه‌های بورل در $[0,\infty]$ هستند (توپولوژی $[0,\infty]$، توپولوژی زیرفضایی $[0,\infty]$ است و عناصر پایهٔ آن (a,b)، $[0,a)$ و $(b,\infty]$ است). پس φ_n یک تابع بورل است. همچنین $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=t$. زیرا ابتدا فرض کنیم $0\leq t<\infty$ و N ای موجود باشد که $t<N$.اگر $n\geq N$ آنگاه $t<n$، و لذا

$$\varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}\leq t<\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\varphi_n(t)+\frac{1}{2^n} \qquad (\exists k\in\{0,1,\dots,n2^n-1\})$$

در نتیجه

$$t-\frac{1}{2^n}<\varphi_n(t)\leq t \quad (n\geq N) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=t$$

اگر $t=\infty$ آنگاه همواره $\varphi_n(\infty)=n$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\infty)=\lim_{n\to\infty}n=\infty=t$$

ثابت می‌کنیم که همواره $\varphi_n\leq\varphi_{n+1}$. با توجه به ضابطهٔ φ_n دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(i): $0\leq t<n(<n+1)$. عدد $k\in\{0,1,\dots,n2^n-1\}$ هست که $\frac{k}{2^n}\leq t<\frac{k+1}{2^n}$. پس $\varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}$. اما $\frac{2k}{2^{n+1}}\leq t<\frac{2k+2}{2^{n+1}}$. پس $t\in[\frac{2k}{2^{n+1}},\frac{2k+1}{2^{n+1}})$ یا $t\in[\frac{2k+1}{2^{n+1}},\frac{2k+2}{2^{n+1}})$. لذا

$$t\in[\frac{2k}{2^{n+1}},\frac{2k+1}{2^{n+1}}) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_{n+1}(t)=\frac{2k}{2^{n+1}}=\frac{k}{2^n}=\varphi_n(t)$$
$$t\in[\frac{2k+1}{2^{n+1}},\frac{2k+2}{2^{n+1}}) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_{n+1}(t)=\frac{2k+1}{2^{n+1}}>\frac{k}{2^n}=\varphi_n(t)$$

(ii): $n\leq t\leq\infty$.

$$\varphi_n(t)=n=\varphi_{n+1}(n)\leq\varphi_{n+1}(t)$$

بنابراین $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. اکنون قرار می‌دهیم

$$s_n=\varphi_n\circ f:X\xrightarrow{f}[0,\infty]\xrightarrow{\varphi_n}[0,\infty)$$

φ_n تابع بورل و f اندازه‌پذیر است، لذا s_n اندازه‌پذیر است. همچنین $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی می‌باشد، زیرا

$$s_n=\varphi_n\circ f\leq\varphi_{n+1}\circ f=s_{n+1}$$

چون برد s_n مجموعه‌ای متناهی از اعداد حقیقی نامنفی است پس s_n ها، ساده و نامنفی هستند. بعلاوه:

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(f(x))=f(x) \qquad (\forall x\in X)$$

$\square$

تعریف ۲۷.۱.۱

(a): فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد. تابع $\mu:\mathfrak{M}\to[0,\infty]$ را یک اندازهٔ مثبت گوییم هرگاه μ شمارا جمعی باشد، یعنی اگر $A_1,A_2,\ldots\in\mathfrak{M}$ و $A_n\cap A_m=\varnothing$ $(n\neq m)$ آنگاه

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n$$

و بعلاوه $A\in\mathfrak{M}$ ای باشد که $\mu A<\infty$.

(b): یک فضای اندازه یعنی یک فضای اندازه‌پذیر $(X,\mathfrak{M})$ به انضمام اندازهٔ مثبتی مانند μ بر $\mathfrak{M}$. در این حالت، فضای اندازه را به $(X,\mathfrak{M},\mu)$ نمایش می‌دهیم.

(c): فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد. تابع $\mu:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ را یک اندازهٔ مختلط گوییم هرگاه μ شمارا جمعی باشد.

مثال: اندازهٔ لبگ

$$\mathfrak{M}=\big\{E\subseteq\mathbb{R}:\ m^*A=m^*(E\cap A)+m^*(E^c\cap A)\quad(\forall A\subseteq\mathbb{R})\big\}$$

$$m=m^*\big|_{\mathfrak{M}}:\mathfrak{M}\longrightarrow[0,\infty]$$

m بر $\mathfrak{M}$ شمارا جمعی است، لذا m یک اندازهٔ مثبت بر $\mathfrak{M}$ است.

تمرین: اگر $\mu:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ یک اندازهٔ مختلط باشد، نشان دهید μ محدود است؛ یعنی $M<\infty$ ای موجود است که به ازای $E\in\mathfrak{M}$، $|\mu(E)|\leq M$.

قضیه ۲۸.۱.۱ فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر $\sigma-$جبر $\mathfrak{M}$ در X باشد. در اینصورت:

(a): $\mu\varnothing=0$.

(b): اگر $A\subseteq B$ و $A,B\in\mathfrak{M}$ آنگاه $\mu A\leq\mu B$.

(c): اگر $A_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{M}$ و A_i ها دوبدو مجزا باشند آنگاه:

$$\mu(A_1\cup\ldots\cup A_n)=\mu A_1+\ldots+\mu A_n$$

(d): اگر $A_1, A_2 \ldots \in \mathfrak{M}$، $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ و $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ آنگاه $\mu A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu A$.

(e): اگر $A_1, A_2 \ldots \in \mathfrak{M}$، $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$، $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\mu A_1 < \infty$ آنگاه $\mu A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu A$.

برهان. (a): $A \in \mathfrak{M}$ ای هست که $\mu A < \infty$.

$$A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots \quad \Longrightarrow \quad \mu A = \mu A + \mu\varnothing + \ldots = \mu A + \sum_{n=1}^{\infty} \mu\varnothing$$

چون $\mu A < \infty$، لذا با حذف μA از دو طرف نتیجه می‌شود $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\varnothing = 0$ و لذا $\mu\varnothing = 0$.

(b): قرار می‌دهیم $B = A \cup (B - A)$. داریم $A, B - A \in \mathfrak{M}$، $B = (B - A) \cup A$ و $A \cap (B - A) = \varnothing$. لذا

$$\mu B = \mu A + \mu(B - A) \geq \mu A$$

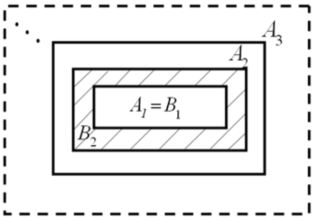
(c): قرار می‌دهیم $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing$. داریم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i = \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

(d): دنبالهٔ B_i ها را به صورت زیر می‌سازیم:

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n > 1)$$



به ازای هر n، $B_n \in \mathfrak{M}$. همچنین اگر $m < n$ آنگاه $B_n \cap B_m \subseteq A_{n-1}^c \cap A_m$، لذا

$$B_n \cap B_m \subseteq A_{n-1}^c \cap A_{n-1} = \varnothing$$

(اگر $m < n$ آنگاه $m \leq n - 1$ و در نتیجه $A_m \subseteq A_{n-1}$) یعنی B_n ها دوبدو مجزا هستند. داریم $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ و $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. پس بنابر بنابر شمارا جمعی بودن μ، $\mu A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu B_i$ و $\mu A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu B_i$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu B_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i = \mu A$$

(c): قرار می‌دهیم $C_n = A_1 - A_n$. داریم $C_n \in \mathfrak{M}$ و $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$. همچنین

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) = A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - A \qquad (۱)$$

امّا بنابر قسمت (d)،

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu C_n$$

همچنین $A_1 = (A_1 - A_n) \cup A_n = C_n \cup A_n$. در نتیجه داریم

$$\mu A_1 = \mu C_n + \mu A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu C_n = \mu A_1 - \mu A_n$$

به همین ترتیب با توجه به (۱)

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \mu(A_1 - A) = \mu A_1 - \mu A$$

لذا

$$\begin{aligned}\mu A_1 - \mu A = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu C_n = \lim_{n\to\infty} (\mu A_1 - \mu A_n) \\ &= \mu A_1 - \lim_{n\to\infty} \mu A_n\end{aligned}$$

حال چون $\mu A_1 < \infty$، در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \mu A$. □

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

واضح است که $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k$. لذا

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = \mu(\lim_{n\to\infty} \inf A_n)$$

همچنین اگر $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty$، آنگاه با توجه به $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \supseteq \ldots$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \mu(\lim_{n\to\infty} \sup A_n)$$

مثال‌ها:

(a): فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه، $\mathfrak{M} = 2^X$ و $E \subseteq X$. تعریف می‌کنیم

$$\mu E = \begin{cases} \text{تعداد عناصر } E & : \quad \text{اگر } E \text{ متناهی باشد} \\ \infty & : \quad \text{اگر } E \text{ نامتناهی باشد} \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم μ یک اندازه بر 2^X است و آن را اندازهٔ شمارش بر X می‌گوییم. فرض کنیم $E_1, E_2, \ldots$ عناصر دوبدو مجزا از $\mathfrak{M}$ باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم:

(I): $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \infty$. لذا

$$\infty = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

در نتیجه $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu E_i = \infty = \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)$.

(II): $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) < \infty$. بنابراین هر E_i متناهی و بغیر از تعداد متناهی آنها، بقیه تهی هستند. فرض کنیم $E_{n+1} = E_{n+2} = \ldots = \varnothing$. در نتیجه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu E_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

(b): فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه، $x_0 \in X$ و $E \subseteq X$.

$$\mu E = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases} \qquad , \qquad \mu : 2^X \to [0, \infty]$$

ثابت می‌کنیم μ یک اندازه بر 2^X است. فرض کنیم $E_1, E_2, \ldots$ زیرمجموعه‌های دوبدو مجزا از X باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم:

(I): $x_0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. در نتیجه به ازای هر i، $x_o \notin E_i$. بنابراین

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

(II): $x_0 \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. بنابراین با توجه به مجزا بودن E_i ها، یک و فقط یک i_o هست که $x \in E_{i_0}$. پس

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 = \mu E_{i_0} = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

اندازهٔ μ را جرم واحد متمرکز در x_0 می‌گویند (و یا اندازهٔ دیراک در x_0 نامیده و آنرا به δ_{x_0} نمایش می‌دهند).

(c): فرض کنیم μ اندازهٔ شمارش بر $\mathbb{N}$ باشد و $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. داریم $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$،

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ و به ازای هر n، $\mu A_n = \infty$. لذا

$$\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \lim_{n\to\infty} (\infty) = \infty \neq 0 = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

این نشان می‌دهد که شرط $\mu A_1 < \infty$ در قسمت (e) قضیهٔ (۲۸.۱.۱) زاید نبوده و الزامی است.

حساب در $[0,\infty]$

$[0,\infty]$ با ترتیب طبیعی یک مجموعهٔ مرتب و یک فضای توپولوژیکی می‌باشد که در آن

$$a+\infty = \infty = \infty + a \qquad \forall a \in [0,\infty]$$
$$a.\infty = \begin{cases} \infty & 0 < a \leq \infty \\ 0 & a = 0 \end{cases} \qquad \forall a \in [0,\infty]$$

همچنین در $[0,\infty]$، روابط زیر برقرارند:

$$ab = ba \quad , \quad a(bc) = (ab)c \quad , \quad a(b+c) = ab + ac$$

بعلاوه

$$ab = ac \ , \quad 0 < a < \infty \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

و حذف a در $a+b=a+c$ فقط وقتی میسر است که $0 \leq a < \infty$.

فرض کنیم $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq \infty$، $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq \infty$. اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ آنگاه $a_n b_n \to ab$.

زیرا اگر $a=0$ آنگاه هر $a_n = 0$ (چون دنباله صعودی است اگر حد آن صفر شود همهٔ جملات صفر می‌شوند).

پس

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = ab$$

اگر $a,b>0$، آنگاه $a,b \neq \infty$ یا مثلاً $a=\infty$. در حالت اول چون $a,b\in\mathbb{R}$ لذا حد فوق برقرار است. گیریم $a=\infty$.

$$b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists \lambda > 0, \ \exists N_1 \ \ (n \geq N_1 \ \Longrightarrow \ b_n > \lambda)$$

فرض کنیم M یک عدد دلخواه باشد. چون $a=\infty$، لذا N_2 ای موجود است بطوریکه

$$n \geq N_2 \ \Longrightarrow \ a_n > \frac{M}{\lambda}$$

حال اگر $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ آنگاه $\frac{M}{\lambda}.\lambda = M$ ، $a_nb_n >$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \infty = ab$.

اکنون فرض کنیم $f, g : X \to [0, \infty]$ توابع اندازه‌پذیر باشند. دنباله‌های $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots < \infty$ و $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots < \infty$ از توابع ساده، نامنفی و اندازه‌پذیر هستند که $s_n \to f$ و $t_n \to g$. پس $s_n + t_n \to f + g$ و $s_nt_n \to fg$. حال چون $s_n + t_n, s_nt_n : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر هستند، لذا

$$f + g = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) \quad , \quad fg = \lim_{n\to\infty} s_nt_n$$

اندازه‌پذیر هستند.

انتگرالگیری از توابع نامنفی و اندازه‌پذیر

همواره فرض می‌کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در مجموعهٔ X بوده و μ یک اندازهٔ مثبت بر $\mathfrak{M}$ باشد.

تعریف ۱.۱.۳۰ اگر $s : X \to [0, \infty)$ یک تابع سادهٔ اندازه‌پذیر به شکل استاندارد

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

باشد که در آن $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ مقادیر متمایز s، $A_i = \{x \in X : \ s(x) = \alpha_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$ و $E \in \mathfrak{M}$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$\int_E s d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \tag{۱}$$

قرارداد $0.\infty = 0$ در اینجا اعمال شده است؛ ممکن است برای یک i، $\alpha_i = 0$ ولی $\mu(A_i \cap E) = \infty$.

در حالت کلی اگر $f : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد، قرار می‌دهیم

$$\int_E f d\mu = \sup_{0\leq s\leq f} \int_E s d\mu \tag{۲}$$

که در آن s یک تابع ساده و اندازه‌پذیر دلخواه است. داریم $\int\limits_E f d\mu \in [0, \infty]$ که آن را انتگرال لبگ f بر E نسبت به اندازهٔ μ می‌گوییم.

تبصره: فرض کنیم $0 \leq s \leq t$ توابع ساده با نمایش‌های استاندارد زیر باشند:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad , \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

ثابت می‌کنیم که به ازای مجموعهٔ دلخواه E، $\int_E sd\mu \leq \int_E td\mu$.

ابتدا مشاهده می‌کنیم که

$$A_i \cap E = A_i \cap E \cap X = (A_i \cap E) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} B_j) = \bigcup_{j=1}^{m} (\underbrace{A_i \cap E \cap B_j}_{\text{دوبدو مجزا}})$$

لذا

$$\begin{aligned} \int_E sd\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap E \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap E \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap E \cap B_j) = \int_E td\mu \end{aligned}$$

زیرا اگر $x \in A_i \cap E \cap B_j \neq \varnothing$، آنگاه $\alpha_i = s(x) \leq t(x) = \beta_j$.

تبصرهٔ فوق نشان می‌دهد که اگر f یک تابع ساده باشد آنگاه (۱) و (۲) یک مقدار به انتگرال f نسبت می‌دهند و لذا (۲) با (۱) سازگار است.

نتایج:

اگر کلیهٔ توابع و مجموعه‌ها اندازه‌پذیر باشند آنگاه:

(a) اگر $0 \leq f \leq g$ آنگاه $\int_E fd\mu \leq \int_E gd\mu$.

(b) اگر $A \subseteq B$ و $f \geq 0$ آنگاه $\int_A fd\mu \leq \int_B fd\mu$.

(c) اگر $0 \leq c < \infty$ و $f \geq 0$ آنگاه $\int_E cfd\mu = c\int_E fd\mu$.

(d) اگر به ازای هر $x \in E$، $f(x) = 0$ آنگاه $\int_E fd\mu = 0$ اگرچه $\mu E = \infty$.

(e) اگر $\mu E = 0$ آنگاه $\int_E fd\mu = 0$ اگرچه $(\forall x \in E)\ f(x) = \infty$.

(f) اگر $f \geq 0$ آنگاه $\int_E fd\mu = \int_X f\chi_E d\mu$.

برهان. (a): فرض کنیم $0 \leq s \leq f$. لذا $s \leq g$ و در نتیجه $\int_E s d\mu \leq \int_E g d\mu$. اکنون با گرفتن سوپریموم از طرف چپ داریم:

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s d\mu \leq \int_E g d\mu$$

(b): قرار می‌دهیم

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{_{E_i}} \quad , \quad E_i = \{x : \; s(x) = \alpha_i\}$$

لذا

$$\int_A s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap A) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap B) = \int_B s d\mu$$

حال اگر s ساده و $0 \leq s \leq f$ باشد با توجه به قسمت فوق داریم:

$$\int_A s d\mu \leq \int_B s d\mu \leq \int_B f d\mu \quad \Longrightarrow \quad \int_A f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A s d\mu \leq \int_B f d\mu$$

(f): نمایش استاندارد تابع ساده و اندازه‌پذیر s را بصورت $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{_{A_i}}$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$s\chi_{_E} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{_{A_i}} . \chi_{_E} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{_{A_i \cap E}}$$

چون

$$R(s\chi_{_E}) \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0\}$$

لذا $s\chi_{_E}$ تابع ساده است. بنابراین نمایش استاندارد $s\chi_{_E}$ با حذف جملهٔ مربوط به مقدار صفر به صورت زیر است:

$$s\chi_{_E} = \sum_{\substack{A_i \cap E \neq \varnothing \\ \alpha_i \neq 0}} \alpha_i \chi_{_{A_i \cap E}}$$

بنابراین

$$\int_X s\chi_{_E} d\mu = \sum_{\substack{A_i \cap E \neq \varnothing \\ \alpha_i \neq 0}} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int_E s d\mu$$

در حالت کلی، فرض کنیم $f : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد و s تابع ساده که $0 \leq s \leq f$ باشد. پس $s\chi_{_E} \leq f\chi_{_E}$. لذا

$$\int_E s d\mu = \int_X s\chi_{_E} d\mu \leq \sup_{0 \leq t \leq f\chi_{_E}} \int_X t d\mu = \int_X f\chi_{_E} d\mu$$

که با سوپریموم گرفتن از طرف چپ نتیجه می‌شود:

$$\int_E f d\mu = \sup_{0\leq s\leq f} \int_E s d\mu \leq \int_X f\chi_{_E} d\mu$$

برای اثبات نامساوی عکس، تابع ساده و دلخواه s را که $0 \leq s \leq f\chi_{_E}$ را در نظر می‌گیریم. چون $f\chi_{_E} \leq f$ در نتیجه $0 \leq s \leq f$. بنابراین

$$\int_E s d\mu \leq \int_E f d\mu$$

حال چون $s\chi_{_E} = s$، لذا

$$\int_X s d\mu = \int_X s.\chi_{_E} d\mu = \int_E s d\mu \leq \int_E f d\mu$$

که با گرفتن سوپریموم از سمت چپ خواهیم داشت

$$\int_X f.\chi_{_E} d\mu = \sup_{0\leq s\leq f.\chi_{_E}} \int_X s d\mu \leq \int_E f d\mu$$

$\square$

لم ۳۱.۱.۱ اگر s, t توابع ساده، نامنفی و اندازه‌پذیر باشند آنگاه

:(a) $\varphi(E) = \int_E s d\mu \quad (E \in \mathfrak{M})$ یک اندازه بر $(X, \mathfrak{M})$ است.

:(b) $\int\limits_X (s+t) d\mu = \int\limits_X s d\mu + \int\limits_X t d\mu$

برهان. :(a)

$$\varphi(\varnothing) = \int_\varnothing s d\mu = 0 \neq \infty$$

قرار می‌دهیم $E = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} E_r$ که $E_r \subseteq \mathfrak{M}$ ها دوبدو مجزا هستند. داریم

$$\begin{aligned}
\varphi(E) &= \int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(\bigcup_{r=1}^{\infty} (A_i \cap E_r)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_i \mu(A_i \cap E_r) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{E_r} s d\mu = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r)
\end{aligned}$$

(b):نمایش‌های استاندارد s و t را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{_{A_i}} \qquad , \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{_{B_j}}$$

قرار می‌دهیم $E_{ij} = A_i \cap B_j$. در نتیجه

$$\int_{E_{ij}} (s+t)d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu E_{ij}$$

از طرفی

$$\int_{E_{ij}} sd\mu = \alpha_i \mu E_{ij} \qquad , \qquad \int_{E_{ij}} td\mu = \beta_j \mu E_{ij}$$

بنابراین

$$\int_{E_{ij}} (s+t)d\mu = \int_{E_{ij}} sd\mu + \int_{E_{ij}} td\mu$$

حال چون $\bigcup\limits_{i,j} E_{i,j} = X$ که در آن E_{ij} ها دوبدو مجزا هستند، با در نظر گرفتن قسمت (a)، نتیجه می‌شود

$$\int_X (s+t)d\mu = \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} (s+t)d\mu = \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} sd\mu + \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} td\mu = \int_X sd\mu + \int_X td\mu$$

$\square$

قضیه ۳۲.۱.۱ (قضیهٔ همگرایی صعودی (m.c.t)) فرض کنیم $f_n : X \to [0,\infty]$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ باشد. حال اگر

(a) به ازاء هر $x \in X$، $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le \infty$.

(b) برای هر $x \in X$، $f_n(x) \to f(x)$.

آنگاه f اندازه‌پذیر و $\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu$.

برهان. چون f_n ها اندازه‌پذیر هستند پس $f = \lim f_n (= \limsup f_n)$ اندازه‌پذیر است. بعلاوه

$$0 \le f_n \le f_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \int f_n \le \int f_{n+1}$$

بنابراین دنبالهٔ $\int\limits_X f_n$ صعودی است و لذا همگرا می‌باشد. فرض کنید $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$. داریم

$$f_n \le f \qquad \Longrightarrow \qquad \int_X f_n \le \int_X f$$

پس

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \tag{1}$$

برای اثبات نامساوی عکس، فرض کنیم $0 \leq s \leq f$ یک تابع ساده و اندازه‌پذیر دلخواه و $0 < c < 1$ یک عدد دلخواه باشد. قرار می‌دهیم:

$$E_n = \{x \in X : \quad f_n(x) \geq cs(x)\}$$

چون f_n ها صعودی هستند، داریم $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$. E_n ها اندازه‌پذیرند (زیرا $E_n = (f_n - cs)^{-1}[0, \infty]$). داریم $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. زیرا گیریم $x \in X$. اگر $s(x) = 0$ آنگاه $x \in E_1$. اگر $s(x) > 0$ آنگاه چون $0 < c < 1$ داریم $cs(x) < s(x) \leq f(x)$ و لذا $cs(x) < f(x)$. بنابراین n ای هست که $cs(x) < f_n(x)$ و لذا $x \in E_n$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} s$$

طبق لم (۳۱.۱.۱)، $\varphi(A) = \int\limits_A s d\mu$ یک اندازه است. بنابراین

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s d\mu$$

لذا

$$\alpha \geq c \int_X s d\mu \qquad (0 < c < 1 \ , \ 0 \leq s \leq f)$$

اگر $c \to 1$ داریم:

$$\alpha \geq \int_X s d\mu \qquad (0 \leq s \leq f)$$

پس

$$\alpha \geq \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s d\mu = \int_X f d\mu \tag{۲}$$

از (۱) و (۲) حکم به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۳۳.۱.۱ اگر $f_n : X \to (0, \infty]$ اندازه‌پذیر و $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ آنگاه

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

برهان. دنباله‌های $\{s'_i\}$ و $\{s''_i\}$ از توابع ساده و اندازه‌پذیر موجودند که

$$0 \leq s'_i \nearrow f_1 \qquad , \qquad 0 \leq s''_i \nearrow f_2$$

قرار می‌دهیم $s_i = s_i' + s_i''$. داریم $0 \le s_i \nearrow (f_1 + f_2)$. بنا به (m.c.t)

$$\begin{aligned}\int_X (f_1+f_2)d\mu &= \lim_{i\to\infty}\int_X s_i d\mu = \lim_{i\to\infty}\int_X (s_i' + s_i'')d\mu \\ &= \lim_{i\to\infty}\int_X s_i' d\mu + \lim_{i\to\infty}\int_X s_i'' d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $g_N = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$. بنا به استقراء داریم

$$\int_X g_N = \sum_{n=1}^{N}\int_X f_n$$

چون $0 \le g_N \nearrow f$. پس بنا به (m.c.t)

$$\int_X f = \lim_{N\to\infty}\int_X g_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_X f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n$$

$\square$

مثال: فرض کنیم $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ که μ اندازهٔ شمارش است، $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$. مطلوب است $\int\limits_{\mathbb{N}} f d\mu$.

حل. داریم $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\chi_{_{\{n\}}}$، و لذا

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{N}} f(n)\chi_{_{\{n\}}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\int_{\mathbb{N}}\chi_{_{\{n\}}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

نتیجه: اگر $a_{ij} \ge 0$ $(i,j = 1,2,\ldots)$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

برهان. فرض کنیم $f_i : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ و $f_i(j) = a_{ij}$ $(j = 1,2\ldots)$. با توجه به مثال قبل داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_i(j) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{N}} f_i d\mu = \int_{\mathbb{N}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\Big)d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\Big)(j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\end{aligned}$$

$\square$

لم ۳۴.۱.۱ (لم فاتو) اگر $f_n : X \to [0,\infty]$ $(n = 1,2,\ldots)$ اندازه‌پذیر باشند آنگاه

$$\int_X \big(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\big) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu$$

برهان. قرار می‌دهیم $g_n : X \to [0,\infty]$ و $g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)$. g_n ها اندازه‌پذیرند و $0 \le g_1 \le g_2 \le \ldots$.
بعلاوه

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$$

از طرفی به ازاء هر n، $0 \le g_n \le f_n$، و لذا $\int g_n \le \int f_n$. بنابراین بنا به (m.c.t) داریم

$$\int_X \big(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\big) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \inf \int g_n \le \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n$$

و حکم ثابت است. $\square$

نتیجه: اگر $f_n : X \to [0,\infty]$ اندازه‌پذیر و $f_n \to f$ آنگاه

$$\int_X f \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n$$

مثال: اگر $0 \le a_{mn} \le \infty$ $(m,n = 1,2\ldots)$، آنگاه

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \inf a_{mn}\Big) \le \lim_{n\to\infty} \inf \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\Big) \tag{۱}$$

بالاخص، اگر $\lim_{n\to\infty} \big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\big)$ و به ازاء هر m، $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ موجود باشند آنگاه

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} a_{mn}\Big) \le \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\Big) \tag{۲}$$

برای اثبات (۱)، فرض کنیم $f_n : (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) \to [0,\infty]$ که در آن μ اندازهٔ شمارش است، بصورت $f_n(m) = a_{mn}$ باشد. با توجه به لم فاتو داریم

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \inf a_{mn}\Big) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \inf f_n(m)\Big) = \int_N \Big(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\Big) d\mu \\ &\le \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \inf \Big(\sum_{m=1}^{\infty} f_n(m)\Big) = \lim_{n\to\infty} \inf \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\Big)\end{aligned}$$

قضیه ۳۵.۱.۱ اگر $f : X \to [0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد آنگاه

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \qquad (E \in \mathfrak{M}) \tag{۱}$$

یک اندازه است. بعلاوه اگر $g : X \to [0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد آنگاه

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu \tag{۲}$$

برهان. فرض کنیم $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M}$، $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ و $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. داریم

$$\chi_E = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} \quad \Longrightarrow \quad f\chi_E = \sum_{i=1}^{\infty} f\chi_{E_i}$$

اکنون با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(E_i)$$

پس φ شمارا جمعی است. بعلاوه

$$\varphi(\varnothing) = \int_{\varnothing} f d\mu = 0 \neq \infty$$

لذا φ یک اندازهٔ (مثبت) است و قسمت اول ثابت می‌شود. برای اثبات قسمت دوم، ابتدا حالت $g = \chi_E$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\int_X \chi_E d\varphi = \varphi(E) = \int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$$

در حالتی که $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \int_X g d\varphi &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \chi_{E_i} d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X f\chi_{E_i} d\mu \\ &= \int_X \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}\Big) f d\mu = \int_X g f d\mu \end{aligned}$$

در حالت کلی، فرض کنیم s_n دنباله‌ای از توابع ساده و اندازه‌پذیر باشد که $0 \le s_n \nearrow g$. بنابه حالت قبل:

$$\int_X s_n d\varphi = \int_X s_n f d\mu$$

چون $0 \le s_n f \nearrow g f$، بنابه (m.c.t):

$$\int_X g d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n f d\mu = \int_X g f d\mu$$

□

قرارداد: رابطهٔ (۱) را به اختصار به $d\varphi = fd\mu$ نشان می‌دهیم.

انتگرالگیری از توابع مختلط

تعریف ۳۶.۱.۱ گیریم $(X,\mathfrak{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد.

$$L^1(\mu) := \left\{f : X \overset{\text{اندازه‌پذیر}}{\longrightarrow} \mathbb{C} : \quad \int_X |f|d\mu < \infty\right\}$$

$L^1(\mu)$ را فضای توابع اندازه‌پذیر یا توابع جمع‌پذیر (لبگ) می‌گویند. اگر $f = u + iv \in L^1(\mu)$ که در آن $u = \mathrm{Re}f$ و $v = \mathrm{Im}f$، قرار می‌دهیم:

$$\int_X fd\mu = \int_X u^+d\mu - \int_X u^-d\mu + i\int_X v^+d\mu - i\int_X v^-d\mu$$
$$0 \le u^+ \le |u| \le |f| \qquad \Longrightarrow \qquad \int_X u^+d\mu \le \int_X |f|d\mu < \infty$$

به همین ترتیب تمامی انتگرال‌های سمت راست متناهی‌اند و لذا $\int\limits_X fd\mu$ عددی مختلط است.

$$u = u^+ - u^- \quad \Longrightarrow \quad \int_X u = \int_X u^+ - \int_X u^- \quad \Longrightarrow \quad \int_X fd\mu = \int_X ud\mu + i\int_X vd\mu$$

اگر $f : X \to [-\infty,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_X fd\mu = \int_X f^+d\mu - \int_X f^-d\mu$$

به شرطی که یکی از انتگرال‌های سمت راست متناهی باشد.

قضیه ۳۷.۱.۱ اگر $f,g \in L^1(\mu)$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ آنگاه $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ و

$$\int_X (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha\int_X fd\mu + \beta\int_X gd\mu \tag{۱}$$

برهان. $\alpha f + \beta g$ تابعی مختلط و اندازه‌پذیر است. بعلاوه

$$0 \le |\alpha f + \beta g| \le |\alpha||f| + |\beta||g|$$

پس

$$\int_X |\alpha f+\beta g|d\mu \leq \int_X \Big(|\alpha||f|+|\beta||g|\Big)d\mu = |\alpha|\int |f|d\mu + |\beta|\int |g|d\mu < \infty$$

لذا $\alpha f+\beta g\in L^1(\mu)$. برای اثبات (۱)، کافی است نشان دهیم:

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \tag{۲}$$

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu \tag{۳}$$

برای اثبات (۲) کافی است که (۲) را برای f و g حقیقی ثابت کنیم. قرار می‌دهیم $h=f+g$. داریم

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \quad \Longrightarrow \quad h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

اکنون با انتگرالگیری از طرفین تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

و با توجه به متناهی بودن انتگرالها

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = (\int f^+ - \int f^-) + (\int g^+ - \int g^-) = \int f + \int g$$

برای اثبات رابطهٔ (۳)، فرض کنیم $f=u+iv$. حالت‌های مختلف زیر را در نظر می‌گیریم:

(I): $\alpha\geq 0$. داریم $\alpha f=\alpha u+i\alpha v$، و در نتیجه

$$\int \alpha f = \int (\alpha u)^+ - \int (\alpha u)^- + i\int (\alpha v)^+ - i\int (\alpha v)^-$$

امّا

$$(\alpha u)^+ = \frac{|\alpha u|+\alpha u}{2} = \alpha\frac{|u|+u}{2} = \alpha u^+$$

$$(\alpha u)^- = \frac{|\alpha u|-\alpha u}{2} = \alpha\frac{|u|-u}{2} = \alpha u^-$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int \alpha f &= \int \alpha u^+ - \int \alpha u^- + i\int \alpha v^+ - i\int \alpha v^- \\ &= \alpha\Big(\int u^+ - \int u^- + i\int v^+ - i\int v^-\Big) = \alpha\int f\end{aligned}$$

(II): $\alpha=-1$. در نتیجه $(-1)f=-u+i(-v)$. لذا

$$\int_X (-1)f=\int(-u)^+-\int(-u)^-+i\int(-v)^+-i\int(-v)^-$$

اما

$$\begin{aligned}(-u)^+&=\frac{|-u|-u}{2}=\frac{|u|-u}{2}=u^-\\(-u)^-&=\frac{|-u|+u}{2}=\frac{|u|+u}{2}=u^+\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int(-1)f&=\int u^--\int u^++i\int v^--i\int v^+\\&=-\Big(\int u^+-\int u^-+i\int v^+-i\int v^-\Big)=(-1)\int f\end{aligned}$$

(III): $\alpha<0$. پس

$$\int\alpha f=\int(-1)\underbrace{(-\alpha)}_{>0}f=(-1)\int(-\alpha)f=(-1)(-\alpha)\int f=\alpha\int f$$

(IV): $\alpha=i$. در نتیجه $if=-v+iu$. لذا

$$\begin{aligned}\int if&=\int(-v)^+-\int(-v)^-+i\int u^+-i\int u^-\\&=\int v^--\int v^++i\int u^+-i\int u^-\\&=i\Big(\int u^+-\int u^-+i\int v^+-i\int v^-\Big)=i\int f\end{aligned}$$

(V): حالت کلی $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int\alpha f&=\int(\alpha_1f+i\alpha_2f)=\int\alpha_1f+\int i\alpha_2f=\alpha_1\int f+i\int\alpha_2f\\&=\alpha_1\int f+i\alpha_2\int f=(\alpha_1+i\alpha_2)\int f=\alpha\int f\end{aligned}$$

□

قضیه ۳۸.۱.۱ اگر $f\in L^1(\mu)$ آنگاه

$$\Big|\int_X fd\mu\Big|\le\int_X|f|d\mu$$

برهان. قرار می‌دهیم $z = \int\limits_X f d\mu$. داریم

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \ ; \quad |\alpha| = 1 \ \ , \ \ \alpha z = |z|$$

فرض کنیم $\alpha f = u + iv$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \underbrace{\Big| \int_X f d\mu \Big|}_{\text{حقیقی}} &= |z| = \alpha z = \alpha \int_X f d\mu = \int_X (\alpha f) d\mu \\ &= \int_X u + i \underbrace{\int_X v}_{0} = \int_X u \leq \int |\alpha f| = \int |f| d\mu \end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۳۹.۱.۱ (قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ (d.c.t)) فرض کنیم $f_n : X \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ توابعی اندازه‌پذیر و به ازای هر x، $f_n(x) \to f(x)$. حال اگر $0 \leq g \in L^1(\mu)$ باشد که $|f_n(x)| \leq g(x)$ برای هر x و هر n، آنگاه $f \in L^1(\mu)$ و داریم

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

برهان. $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ اندازه‌پذیر است. چون $|f_n(x)| \leq g(x)$ لذا $|f| \leq g$ و $\int |f| \leq \int g d\mu < \infty$. در نتیجه $f \in L^1(\mu)$. اکنون داریم

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \quad \Longrightarrow \quad 2g - |f_n - f| \geq 0$$

پس بنابر لم فاتو، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &= \int \liminf \big(2g - |f_n - f|\big) d\mu \leq \liminf \int_X \big(2g - |f_n - f|\big) d\mu \\ &= \liminf \Big[\int_X 2g d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \Big] = \int_X 2g d\mu + \liminf \Big(- \int |f_n - f| d\mu \Big) \\ &= \int_X 2g d\mu - \limsup \int |f_n - f| d\mu \end{aligned}$$

چون $g \in L^1(\mu)$ پس $0 \le \int 2g d\mu < \infty$. بنابراین $-\limsup \int |f_n - f| d\mu \ge 0$، و لذا

$$0 \le \liminf \int |f_n - f| \le \limsup \int |f_n - f| \le 0$$

پس $\lim \int |f_n - f| = 0$. اکنون

$$\Big| \int f - \int f_n \Big| = \Big| \int (f_n - f) \Big| \le \int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

مفهوم تقریباً همه جا $(a.e.)$

فرض کنیم $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه، P خاصیتی از نقاط X و $E \in \mathfrak{M}$ باشد. عبارت P تقریباً همه جا بر E برقرار است یعنی

$$\exists N \in \mathfrak{M};\ \ N \subseteq E\ ,\ \mu(N) = 0 \quad , \quad \forall x \in E - N :\ \ P(x) \text{ برقرار است}$$

در این حالت به اختصار می‌نویسیم

$$P :\ a.e.\ [\mu]\ \ E \text{ بر}$$

تبصره: فرض کنیم $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. P، $a.e.$ بر X معادل است با این که

$$\mu\{x :\ P(x) \text{ برقرار نیست}\} = 0$$

به شرطی که مجموعهٔ فوق اندازه‌پذیر باشد. زیرا اگر P، $a.e.$ بر X آنگاه

$$\exists N;\ \mu N = 0\ \ ,\ P(x)\ (x \in X - N) \implies \{x :\ P(x) \text{ برقرار نیست}\} \subseteq N$$

پس $\mu\{x : P(x) \text{ برقرار نیست}\} = 0$.

برای اثبات عکس، کافیست قرار دهیم $N = \{x :\ P(x) \text{ برقرار نیست}\}$.

مثال: اگر توابع $f, g : X \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر و $f = g\ (a.e.)$ بر X، یعنی

$$\mu\{x :\ f(x) \neq g(x)\} = 0$$

می‌نویسیم $f \sim g$. رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ کلیهٔ توابع مختلط اندازه‌پذیر است. مثلاً، ثابت می‌کنیم

$$f \sim g\ ,\ g \sim h \implies f \sim h$$

برای این منظور فرض کنیم

$$N_1 = \{x : \ f(x) \neq g(x)\}$$

$$N_2 = \{x : \ g(x) \neq h(x)\}$$

داریم $\mu N_1 = 0$ و $\mu N_2 = 0$. قرار می‌دهیم $N = N_1 \cup N_2$. داریم $\mu N = 0$ و هرگاه $x \in X - N$ آنگاه $x \neq N_1$ و $x \neq N_2$، و لذا

$$f(x) = g(x) = h(x)$$

یعنی $f \sim h$.

اکنون فرض کنیم $f, g : X \to \mathbb{C}$ توابع اندازه‌پذیر، f بر X انتگرال‌پذیر و $f \sim g$. قرار می‌دهیم $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. داریم $\mu N = 0$. با توجه به اینکه انتگرال روی مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر، صفر است، داریم

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu &= \int_{X-N} |f| d\mu + \underbrace{\int_N |f| d\mu}_{0} \\ &= \int_{X-N} |g| d\mu = \int_{X-N} |g| d\mu + \underbrace{\int_N |g| d\mu}_{0} = \int_X |g| d\mu \end{aligned}$$

و لذا g بر X انتگرال‌پذیر است.

نشان می‌دهیم:

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_{_E} d\mu$$

قرار می‌دهیم $f = u + iv$. داریم $f\chi_{_E} = u\chi_{_E} + iv\chi_{_E}$. اما

$$|f\chi_{_E}| \leq |f| \quad \implies \quad \int_X |f\chi_{_E}| d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty$$

بنابراین

$$\int_X f\chi_{_E} d\mu = \int_X (u\chi_{_E})^+ d\mu - \int_X (u\chi_{_E})^- + i\int_X (v\chi_{_E})^+ - i\int_X (v\chi_{_E})^-$$

از طرفی

$$(u\chi_E)^+ = \frac{|u\chi_E| + u\chi_E}{2} = \frac{|u| + u}{2}\chi_E = u^+\chi_E$$

و به همین ترتیب $(u\chi_E)^- = u^-\chi_E$، $(v\chi_E)^+ = v^+\chi_E$ و $(v\chi_E)^- = v^-\chi_E$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_X f\chi_E &= \int_X u^+\chi_E - \int_X u^-\chi_E + i\int_X v^+\chi_E - i\int_X v^-\chi_E \\ &= \int_E u^+ - \int_E u^- + i\int_E v^+ - i\int_E v^- = \int_E f d\mu\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\int_E f &= \int_X f\chi_E = \int_X (f\chi_{E-N} + f\chi_{E\cap N}) \\ &= \int_X f\chi_{E-N} + \int_X f\chi_{E\cap N} = \int_X f\chi_{E-N} + \int_{E\cap N} f \\ &= \int_X f\chi_{E-N} = \int_X g\chi_{E-N} = \int_E g\end{aligned}$$

در نتیجه مجموعه‌های با اندازهٔ صفر نه در وجود انتگرال و نه در مقدار انتگرال نقشی ندارند و به همین دلیل آنها را قابل صرفنظر می‌گوییم.

تتمیم اندازه

سؤال: فرض کنیم $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. اگر $E \subseteq N \in \mathfrak{M}$ و $\mu N = 0$، آیا E اندازه‌پذیر است؟

مثال: اگر $\mu = m$ آنگاه $m^*E \leq m^*N = mN = 0$ و لذا E اندازه‌پذیر است.

مثال: $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$ که $\mathfrak{B}$، $\sigma-$ جبر کلیهٔ مجموعه‌های بورل در X است را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ کانتور K بورل است (چون مجموعهٔ بسته است) و $mK = 0$، زیرا

$$\begin{aligned}&[0,1]\backslash K = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup \dots \\ &m\Big([0,1]\backslash K\Big) = \frac{1}{3} + 2(\frac{1}{3})^2 + 2^2(\frac{1}{3})^3 + \dots = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2}.\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 1\end{aligned}$$

در نتیجه

$$m[0,1] = m\Big([0,1]\backslash K\Big) + mK \quad \Longrightarrow \quad mK = 0$$

اما $|K| = c$ و لذا $|2^K| = 2^c$. حال چون $|\mathfrak{B}| = c < 2^c$ و هر زیرمجموعهٔ K، لبگ– اندازه‌پذیر است، لذا زیرمجموعه‌ای از K هست که بورل نیست. بنابراین در این حالت جواب سؤال منفی است.

تعریف ۴۰.۱.۱ اگر در یک فضای اندازه هر زیرمجموعه از مجموعه‌های با اندازهٔ صفر اندازه‌پذیر باشد، آن فضا را تام می گوییم.

قضیه ۴۱.۱.۱ فرض کنیم $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه و $\mathfrak{M}^*$ گردایهٔ کلیهٔ $E \subseteq X$ باشد که $A, B \in \mathfrak{M}$ یافت شوند بطوری که

$$A \subseteq E \subseteq B \ \ , \ \ \mu(B - A) = 0$$

در این حالت قرار می‌دهیم $\mu E = \mu A$. در اینصورت $\mathfrak{M}^*$ یک $\sigma-$جبر است و μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}^*$ است. فضای $(X, \mathfrak{M}^*, \mu)$ را تتمیم فضای $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ می گوییم.

برهان. ابتدا خوشتعریفی μ را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}^*$ و $A, B, A_1, B_1 \in \mathfrak{M}$ باشند بطوریکه:

$$A \subseteq E \subseteq B \quad ; \quad \mu(B - A) = 0$$

$$A_1 \subseteq E \subseteq B_1 \ \ ; \ \ \mu(B_1 - A_1) = 0$$

داریم $A - A_1 \subseteq E - A_1 \subseteq B_1 - A_1$، و لذا

$$\mu(A - A_1) \leq \mu(B_1 - A_1) = 0$$

درنتیجه $\mu(A - A_1) = 0$. اما $\mu A = \mu(A - A_1) + \mu(A \cap A_1)$، درنتیجه $\mu A = \mu(A \cap A_1)$. بطور مشابه $\mu(A_1) = \mu(A \cap A_1)$. بنابراین $\mu(A) = \mu(A_1)$. لذا μ خوشتعریف است. اکنون ثابت می‌کنیم که μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}^*$ است.

$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^*$. زیرا اگر $E \in \mathfrak{M}$ آنگاه $E \subseteq E \subseteq E$ و $\mu(E - E) = \mu\varnothing = 0$. لذا $E \in \mathfrak{M}^*$. بالاخص داریم $X \in \mathfrak{M}^*$.

حال فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}^*$. داریم

$$\exists A, B \in \mathfrak{M}; \ \ A \subseteq E \subseteq B \ \ , \ \ \mu(B - A) = 0$$

در نتیجه

$$B^c \subseteq E^c \subseteq A^c \ \ , \ \ A^c - B^c = B \cap A^c = B - A \implies \mu(A^c - B^c) = \mu(B - A) = 0$$

پس $E^c \in \mathfrak{M}^*$. اکنون فرض کنیم $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M}^*$.

$$\exists A_n, B_n \in \mathfrak{M}; \ \ A_n \subseteq E_n \subseteq B_n \ \ , \ \ \mu(B_n - A_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

لذا $\bigcup_n A_n, \bigcup_n B_n \in \mathfrak{M}$، $\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n E_n \subseteq \cup_n B_n$ و

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - A_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n - A_n) = 0$$

پس $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}^*$. اگر در حالت اخیر E_n ها دوبدو مجزا باشند، A_n ها هم چنین هستند. پس

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$$

پس μ بر $\mathfrak{M}^*$ شمارا جمعی و لذا یک اندازه بر $\mathfrak{M}^*$ است. □

تمرین: نشان دهید تتمیم $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$ عبارت است از $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, m)$.

توسیع مفهوم اندازه‌پذیری

فرض کنیم $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه، $E \in \mathfrak{M}$، $\mu E^c = 0$ و $f : E \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد (یعنی به ازاء هر باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$). تعریف می‌کنیم $f_1 : X \to \mathbb{C}$ بطوریکه

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ \alpha = \text{ثابت} & x \in E^c \end{cases}$$

پس

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(V) = \{x : f_1(x) \in V\} &= \{x \in E : f_1(x) \in V\} \cup \{x \in E^c : f_1(x) \in V\} \\ &= \underbrace{\{x \in E : f(x) \in V\}}_{\text{اندازه‌پذیر}} \cup \{x \in E^c : f_1(x) \in V\} \end{aligned}$$

اما از آنجا که

$$\{x \in E^c : f_1(x) \in V\} = \begin{cases} E^c & \alpha \in V \\ \varnothing & \alpha \notin V \end{cases}$$

همواره اندازه‌پذیر است، پس f_1 اندازه‌پذیر است.

در حالتی که μ یک اندازهٔ تام است می‌توان f_1 را در هر نقطه از E^c به دلخواه تعریف کرد، زیرا در این حالت از آنجا که $\{x \in E^c : f_1(x) \in V\}$ زیرمجموعه‌ای از E^c و $\mu(E^c) = 0$ می‌باشد، بطور اتوماتیک اندازه‌پذیر می‌باشد. f_1 را معمولاً به همان f نمایش می‌دهند.

قضیه ۴۲.۱.۱ فرض کنیم $f_n : X \to \mathbb{C}$ تقریباً همه جا بر X تعریف شده و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| d\mu < \infty$. در اینصورت سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) := f(x)$ تقریباً همه جا بر X همگراست، $f \in L^1(\mu)$ و داریم :

$$\int_X f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n$$

برهان. فرض کنیم S_n حوزهٔ تعریف f_n باشد. داریم $\mu S_n^c = 0$. قرار می‌دهیم $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. کلیهٔ f_n ها روی S تعریف شده‌اند و

$$\mu(S^c) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu S_n^c = 0$$

قرار می‌دهیم:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \qquad (x \in S)$$

داریم

$$\int_S \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n(x)| < \infty$$

پس اگر $E = \{x \in S : \varphi(x) < \infty\}$ آنگاه $\mu(S-E) = 0$، زیرا

$$\infty > \int_S \varphi = \int_{S-E} \varphi + \int_E \varphi \ge \int_{S-E} \varphi = \mu(S-E).\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(S-E) = 0$$

$\sum f_n$ بر E همگرای (مطلق) است. قرار می‌دهیم $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ و $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(x \in E)$. حال چون بر E،

$$|g_n| \le \sum_{1}^{k} |f_n| \le \varphi \in L^1(\mu)$$

و $g_n \to f$، بنابه قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ $f \in L^1(\mu)$ بر E و $\int\limits_E f \to \int\limits_E g_n$. قرار می‌دهیم $f(x) = 0$ $(x \in E^c)$. داریم $f \in L^1(\mu)$ بر X. چون $\mu E^c = 0$، پس

$$\int_X f = \int_E f = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n \int_E f_k = \sum_1^\infty \int_E f_k = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n$$

□

قضیه ۴۳.۱.۱ فرض کنیم $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

(a): اگر $f : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر، $E \in \mathfrak{M}$ و $\int\limits_E f d\mu = 0$ آنگاه $f = 0$ $a.e.$ بر E.

(b): اگر $f \in L^1(\mu)$ و به ازای هر $E \in \mathfrak{M}$، $\int\limits_E f d\mu = 0$ آنگاه $f = 0$ $a.e.$ بر X.

(c): اگر $f \in L^1(\mu)$ آنگاه $|\int\limits_X f d\mu| = \int\limits_X |f| d\mu$ اگر و فقط اگر به ازاء یک $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| = 1$ داشته باشیم $\alpha f = |f|$ تقریباً همه جا بر X.

برهان. (a): قرار می‌دهیم

$$A_n = \left\{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

در نتیجه

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \{x \in E : f(x) > 0\} \qquad (\star)$$

چون $A_n \subseteq E$،

$$\frac{1}{n}\mu A_n = \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu \le \int_{A_n} f d\mu \le \int_E f d\mu = 0$$

پس $\mu A_n = 0$. لذا بنا بر رابطهٔ $(\star)$، $\mu\{x \in E : f(x) > 0\} = 0$ یعنی $f(x) = 0$ تقریباً همه جا بر E.

(b): فرض کنیم $f = u + iv$ و $E = \{x \in X : u(x) \ge 0\}$. داریم

$$0 = \int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i\int_E v d\mu \quad \Rightarrow \quad \int_E u^+ d\mu = \int_E u d\mu = 0$$

اکنون بنابر قسمت (a)، $u^+ = 0$ $a.e.$ بر E. چون بر E^c، $u^+ = 0$ لذا $u^+ = 0$ $a.e.$ بر X. اکنون $-f = -u + i(-v)$ را در نظر می‌گیریم. داریم $\int\limits_E (-f) d\mu = 0$ برای هر $E \in \mathfrak{M}$. لذا بنابر حالت قبل $(-u)^+ = 0$ $a.e.$ بر X. ولی $(-u)^+ = u^-$. در نتیجه $u^- = 0$ $a.e.$ بر X.

برای $(-i)f = v - iu$ داریم $\int\limits_E (-i)fd\mu = 0$ برای هر $E \in \mathfrak{M}$. لذا بنابر دو حالت قبل $v^+ = v^- = 0$ $a.e.$ بر X. چون $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$ لذا $f = 0$ $a.e.$ بر X.

(c): اگر $\alpha f = |f|$ $a.e.$ بر X آنگاه

$$\int_X |f|d\mu = \alpha \int_X fd\mu \quad \xrightarrow{|\cdot| \text{ مي گيريم}} \quad \int_X |f|d\mu = |\int_X |f|d\mu| = |\int_X fd\mu|$$

برعکس، فرض کنیم

$$|\int_X fd\mu| = \int_X |f|d\mu \qquad (\star\star)$$

قرار می‌دهیم $z = \int\limits_X fd\mu$. پس بمانند اثبات قضیهٔ (۳۸.۱.۱)

$$\exists \alpha \in \mathbb{Z} ; \quad |\alpha| = 1 \, , \quad \alpha z = |z|$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |\int_X fd\mu| &= |z| = \alpha z = \alpha \int_X fd\mu = \int_X \alpha fd\mu \\ &= \int_X ud\mu \leq \int_X |f|d\mu \end{aligned}$$

که در آن $u = \text{Re}(\alpha f)$. پس بنابر $(\star\star)$، $\int\limits_X ud\mu = \int\limits_X |f|d\mu$، و لذا $\int\limits_X \underbrace{(|f| - u)}_{\geq 0} d\mu = 0$ که طبق قسمت (a)، $|f| = u$ $a.e.$ بر X. اکنون

$$|\alpha f| = |f| \quad , \quad |f| = u \quad (a.e.) \quad \Rightarrow \quad u = |\alpha f| \quad (a.e.) \quad \Rightarrow \quad \alpha f = u \quad (a.e.)$$

پس

$$\alpha f = u = |f| \quad a.e. \quad \Rightarrow \quad \alpha f = |f| \quad a.e.$$

$\square$

قضیه ۴۴.۱.۱ فرض کنیم $\mu(X) < \infty$، $f \in L^1(\mu)$ و S مجموعهٔ بسته‌ای در صفحه باشد. حال اگر

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu E} \int_E fd\mu \in S$$

برای هر $E \in \mathfrak{M}$ که $\mu E > 0$ آنگاه $f(x) \in S$ $a.e.$ بر X.

برهان. می‌دانیم کلیهٔ گوی‌های بسته به مراکز گویا و شعاع‌های گویا شمارا هستند.

$$U = S^c \ , \ \alpha \in U \quad \Longrightarrow \quad \exists r \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \quad s.t. \quad \overline{N_r(\alpha)} \subseteq U$$

عدد مختلط α_0 با مختصات گویا وجود دارد که $\alpha_0 \in N_{\frac{r}{2}}(\alpha)$. لذا $\alpha \in N_{\frac{r}{2}}(\alpha_0)$. بنابراین

$$\overline{N_{\frac{r}{2}}}(\alpha_0) \subseteq \overline{N_r}(\alpha) \subseteq U$$

زیرا اگر $\beta \in \overline{N_{\frac{r}{2}}}(\alpha_0)$ آنگاه $|\beta - \alpha_0| \leq \frac{r}{2}$. پس

$$|\beta - \alpha| \leq |\beta - \alpha_0| + |\alpha_0 - \alpha| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

یعنی $\beta \in \overline{N_r}(\alpha)$. در نتیجه $S^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ که در آن هر Δ_i یک گوی بسته است. حال چون

$$S^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \quad \Longrightarrow \quad \{x \in X : f(x) \notin S\} = f^{-1}(S^c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(\Delta_i)$$

کافی است ثابت کنیم که اگر Δ گوی بسته‌ای به مرکز α و شعاع r مشمول در S^c باشد و $E = f^{-1}(A)$، آنگاه $\mu E = 0$. فرض کنیم $\mu(E) > 0$ (فرض خلف). داریم

$$\begin{aligned} |A_E(f) - \alpha| &= \Big|\frac{1}{\mu E}\int_E f d\mu - \frac{1}{\mu E}\int_E \alpha d\mu\Big| \\ &\leq \frac{1}{\mu E}\int_E |f-\alpha| d\mu \leq \frac{1}{\mu E}\int_E r d\mu = r \end{aligned}$$

پس $A_E(f) \in \Delta \subseteq S^c$ که این با فرض متناقض است. پس $\mu E = 0$ و حکم ثابت است. □

قضیه ۴۵.۱.۱ فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X باشد بطوری که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu E_n < \infty$. در اینصورت تقریباً همهٔ $x \in X$ ها در تعدادی متناهی از E_n ها قرار دارد.
به عبارتی دیگر $\{x \in X :$ به تعداد نامتناهی از E_n ها متعلق است $x\}$ با اندازهٔ صفر است.

برهان. قرار می‌دهیم

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \qquad (x \in X)$$

و

$$A := \{x \in X : \text{به تعداد نامتناهی از} \ E_n \ \text{ها متعلق است} \ x\}$$

داریم

$$\int_X g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad g \in L^1(\mu)$$

در نتیجه

$$\mu\{x \in X :\ g(x) = \infty\} = 0$$

اما $A = \{x \in X :\ g(x) = \infty\}$. لذا $\mu A = 0$. □

فصل دوم

اندازه‌های بورل مثبت

۱.۲ فضاهای برداری

یک فضای برداری مختلط مجموعه‌ای مانند V است که اصطلاحاً عناصر آن را بردار گویند و در آن دو عمل جمع "$+$" و ضرب اسکالر "$.$" چنان تعریف شده است که $(V,+)$ یک گروه آبلی بوده وضرب اسکالر در شرایط زیر صدق می‌کند

$1x = x$

$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \qquad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

برای هر $x, y \in V$ و هر اسکالر α, β.

کلیهٔ فضاهای برداری در این درس روی میدان اعداد مختلط گرفته می‌شوند، مگر یک استثناء که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

اگر V و V_1 فضاهای برداری خطی و $\Lambda : V \to V_1$ بطوریکه برای هر $x, y \in V$ هر اسکالر α, β،

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda x + \beta\Lambda y$$

آنگاه Λ را یک تبدیل خطی از فضای برداری V به توی فضای برداری V_1 می‌گوییم. در حالت خاص، اگر $\Lambda : V \to \mathbb{C}$ خطی باشد، آنگاه Λ را یک تابعک خطی می‌گوییم.

مثال‌ها:

(a): اگر μ یک اندازهٔ دلخواه باشد، آنگاه $L^1(\mu)$ یک فضای برداری است و $\Lambda : L^1(\mu) \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$\Lambda f = \int_X f d\mu$$

یک تابعک خطی است.

(b): اگر μ یک اندازهٔ دلخواه و g تابعی محدود و اندازه‌پذیر باشد، چون

$$|g| \leq M \quad \Rightarrow \quad |fg| \leq M|f| \quad \Rightarrow \quad \int |fg| \leq M \int |f| < \infty \quad \Rightarrow \quad fg \in L^1(\mu)$$

لذا

$$\Lambda f = \int_X fg d\mu$$

خوشتعریف و یک تابعک خطی بر $L^1(\mu)$ است.

(c): فرض کنیم C مجموعهٔ تمام توابع مختلط پیوسته بر بازهٔ $[0,1]$ باشد. چون مجموع دو تابع پیوسته و هر مضرب اسکالر یک تابع پیوسته، پیوسته است، لذا C یک فضای برداری است. اگر

$$\Lambda f = \int_0^1 f(x)dx$$

آنگاه Λ یک تابعک خطی بر C است. همچنین اگر $f \geq 0$ آنگاه $\Lambda f \geq 0$. تابعک‌های خطی صادق در خاصیت اخیر را تابعک‌های خطی مثبت می‌گوییم.

(d): اگر μ یک اندازهٔ بورل مثبت متناهی و $C = C[0,1]$ باشد، آنگاه

$$\Lambda f = \int_0^1 f d\mu \qquad (f \in C)$$

یک تابعک خطی مثبت بر C است. زیرا با توجه به

$$\int_0^1 |f| d\mu \leq \sup |f| . \mu([0,1]) < \infty$$

Λ خوشتعریف بوده و بوضوح $\Lambda f \geq 0$، هرگاه $f \geq 0$.

۲.۲ مقدمات توپولوژیک

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. بستار E، یعنی کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ حاوی E، و درون E، یعنی بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در E، بترتیب بصورت زیر می‌باشند:

$$\bar{E} = \mathrm{cl}_X(E) = \bigcap_{\substack{E\subseteq C \\ \text{بسته}}} C$$

$$E^o = \mathrm{int}E = \bigcup_{\substack{O\subseteq E \\ \text{باز}}} O$$

$K \subseteq X$ را فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز برای K دارای زیرپوشش متناهی باشد، یعنی

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha} V_\alpha \ \ (X \text{ باز در } V_\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \ \ K \subseteq V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots V_{\alpha_n}$$

اگر X فشرده باشد آنگاه X را یک فضای فشرده گوییم. همچنین یک همسایگی از نقطهٔ p یعنی یک مجموعهٔ باز حاوی p.

فضای X را هاسدورف یا T_2 نامیم، هرگاه هر دو نقطهٔ متفاوت X دارای همسایگی‌های جدا از هم باشند.

X را موضعاً فشرده گوییم، هرگاه هر نقطه از X دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.

در $\mathbb{R}^n$، بنا به قضیهٔ هاینه بورل، مجموعهٔ E فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد. پس $\mathbb{R}^n$ یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف است.

قضیه ۱.۲.۲ اگر در فضای توپولوژیکی X، K فشرده، F بسته و $F \subseteq K$ باشد آنگاه F فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز برای F و $W = F^c$ باشد. داریم $K \subseteq X = W \cup \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$. چون K فشرده است، لذا

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \qquad K \subseteq W \cup V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots V_{\alpha_n}$$

چون $F \subseteq K$ پس $F \subseteq \underbrace{W}_{F^c} \cup V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots V_{\alpha_n}$. یعنی $F \subseteq V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots V_{\alpha_n}$، که نشان می‌دهد F فشرده است. $\square$

قضیه ۲.۲.۲ اگر X یک فضای توپولوژیکی هاسدورف، K فشرده و $p \notin K$، آنگاه مجموعه‌های باز U و W هستند که

$$p \in U \ , \ K \subseteq W \quad , \quad U \cap W = \varnothing$$

برهان. به ازای هر $q \in K$، همسایگی‌های U_q و V_q به ترتیب از p و q موجودند بطوریکه $U_q \cap V_q = \varnothing$. داریم $K \subseteq \bigcup\limits_{q \in K} V_q$. پس

$$\exists q_1, q_2, \ldots, q_n \in K; \quad K \subseteq V_{q_1} \cup V_{q_2} \cup \ldots \cup V_{q_n}$$

قرار می‌دهیم:

$$U = U_{q_1} \cap U_{q_2} \cap \ldots \cap U_{q_n} \quad , \quad W = V_{q_1} \cup V_{q_2} \cup \ldots \cup V_{q_n}$$

□

نتایج:

(a): در هر فضای هاسدورف مجموعه‌های فشرده بسته‌اند.

(b): در هر فضای هاسدورف اگر K فشرده و F بسته باشد آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

تمرین: مجموعهٔ فشرده‌ای مثال بزنید که بسته نباشد.

قضیه ۳.۲.۲ اگر $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های فشرده در فضای هاسدورف X باشد بطوریکه $\bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha = \varnothing$ آنگاه زیرگردایه‌ای متناهی از $\{K_\alpha\}$ دارای اشتراک تهی است (خاصیت مقطع متناهی).

برهان. اگر $I = \varnothing$، حکم بدیهی است. فرض کنیم $I \neq \varnothing$. عضو $K_1 \in \{K_\alpha : \alpha \in I\}$ را اختیار می‌کنیم. $V_\alpha = K_\alpha^c$ مجموعهٔ باز و $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ می‌باشد. چون K_1 فشرده است لذا $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ هستند که $K_1 \subseteq V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_m}$ و در نتیجه $K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_m} = \varnothing$. □

قضیه ۴.۲.۲ فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف، K مجموعه‌ای فشرده، U مجموعه‌ای باز و $K \subseteq U$ باشد. در اینصورت مجموعهٔ باز V هست که $\overline{V}$ فشرده است و $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

برهان. هر نقطه از K دارای یک همسایگی با بستار فشرده است. چون K فشرده است، تعداد متناهی از این همسایگی‌ها K را می‌پوشانند. بنابراین مجموعهٔ باز G (اجتماع این همسایگی‌ها) هست که $K \subseteq G$ و $\overline{G}$ فشرده است. اگر $U = X$ آنگاه قرار می‌دهیم $V = G$ و از اینجا حکم بدست می آید.

اگر $U \neq X$، قرار می‌دهیم $C = U^c$. بنا به (۲.۲.۲)،

$$\forall p \in C \ \ \exists W_p \text{ باز } \ ; \ K \subseteq W_p \ , \ p \notin \overline{W}_p$$

گردایهٔ $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p\}_{p \in C}$ از مجموعه‌های فشرده دارای مقطع تهی است؛ زیرا در غیر این صورت $\exists q \in C \cap \overline{G} \cap \bigcap\limits_{p \in C} \overline{W}_p \subseteq C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_q$ و این تناقض است. پس بنا به (۳.۲.۲)،

$$\exists p_1, \ldots, p_n \in C \ \ ; \qquad C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{p_n} = \varnothing \qquad (۱)$$

قرار می‌دهیم $V = G \cap W_{p_1} \cap \ldots \cap W_{p_n}$. V باز و شامل K است. بنابراین با توجه به $\overline{V} \subseteq \overline{G}$ و (۱)، $\overline{V}$ فشرده است و

$$\overline{V} \subseteq \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{p_n} \subseteq U$$

از اینجا حکم نتیجه می‌شود. □

توابع نیم‌پیوسته

تعریف ۵.۲.۲ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی و f تابعی حقیقی (یا حقیقی توسیع یافته) باشد. گوییم:

(a): f نیم‌پیوسته پایینی است اگر به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، مجموعهٔ $\{x \in X : \ f(x) > \alpha\}$ باز باشد.

(b): f نیم‌پیوسته بالایی است اگر به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، مجموعهٔ $\{x \in X : \ f(x) < \alpha\}$ باز باشد.

نتیجه: تابع f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ f نیم‌پیوسته بالایی و پایینی باشد؛ زیرا

$$f^{-1}\big((\alpha, \beta)\big) = \{x \in X : \ f(x) > \alpha\} \cap \{x \in X : \ f(x) < \beta\} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

مثال:

(a): توابع مشخصهٔ مجموعه‌های باز O نیم‌پیوسته پایینی‌اند؛ زیرا

$$\{x \in X:\ \chi_{_O}(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & \alpha < 0 \\ O & 0 \leq \alpha < 1 \\ \varnothing & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

(b): توابع مشخصهٔ مجموعه‌های بسته C نیم‌پیوسته بالایی‌اند؛ زیرا

$$\{x \in X:\ \chi_{_C}(x) < \alpha\} = \begin{cases} X & \alpha > 1 \\ X - C & 0 < \alpha \leq 1 \\ \varnothing & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

(c): سوپریموم خانواده $\{f_\alpha\}$ از توابع نیم‌پیوسته پایینی، نیم‌پیوسته پایینی است؛ زیرا

$$\{x:\ \sup_\alpha f_\alpha(x) > \lambda\} = \bigcup_\alpha \{x:\ f_\alpha(x) > \lambda\}$$

(d): اینفیموم خانواده $\{f_\alpha\}$ از توابع نیم‌پیوسته بالایی، نیم‌پیوسته بالایی است؛ زیرا

$$\{x:\ \inf_\alpha f_\alpha(x) < \lambda\} = \bigcup_\alpha \{x:\ f_\alpha(x) < \lambda\}$$

تعریف ٦.٢.٢ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $f : X \to \mathbb{C}$ باشد. محمل f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x:\ f(x) \neq 0\}}$$

همچنین

$$C_c(x) := \{f : X \overset{\text{پیوسته}}{\longrightarrow} \mathbb{C}:\ \ \operatorname{supp}(f)\ \text{فشرده}\}$$

نشان می‌دهیم که $C_c(x)$ یک فضای برداری است. در واقع، ترکیب خطی توابع پیوسته، پیوسته است. بعلاوه چون

$$\{x : \alpha f(x) + \beta g(x) \neq 0\} \subseteq \{x : f(x) \neq 0\} \cup \{x : g(x) \neq 0\}$$

با گرفتن بستار از طرفین داریم

$$\operatorname{supp}(\alpha f + \beta g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$$

این نشان می‌دهد که اگر محمل f و g فشرده باشد آنگاه محمل $\alpha f + \beta g$ نیز فشرده است.

نتیجه: فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیکی و $f : X \to X$ پیوسته باشد. حال اگر $K \subseteq X$ فشرده باشد $f(K)$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز در Y برای $f(K)$ باشد. $f(K) \subseteq \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. در نتیجه $K \subseteq \bigcup\limits_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$ و چون K فشرده است اندیس‌های $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ هستند که

$$K \subseteq f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}) \quad \Longrightarrow \quad f(K) \subseteq V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$$

در نتیجه $f(K)$ فشرده است. $\square$

نتیجه: اگر $f \in C_c(X)$ آنگاه $f(X)$ فشرده (و بالنتیجه محدود) است.

برهان. قرار می‌دهیم $K := \operatorname{supp}(f)$. K فشرده است. چون

$$f(X) = f(K) \cup f(X - K) = \begin{cases} f(K) \cup \{0\} & X - K \neq \varnothing \\ f(K) & X - K = \varnothing \end{cases}$$

پس $f(X)$ فشرده است. $\square$

تبصره: (نرم سوپریموم) اگر برای $f \in C_c(X)$ قرار دهیم

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

آنگاه از آنجا که

(i): $0 \leq \|f\|_\infty < \infty$.

(ii): $f = 0 \Longleftrightarrow \|f\|_\infty = 0$.

(iii): $\|\alpha f\| = |\alpha|.\|f\|_\infty$.

(iv): $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

لذا $\rho(f, g) = \|f - g\|_\infty$ یک متریک (و در واقع $\|.\|_\infty$ یک نرم) بر $C_c(x)$ است.

قرارداد: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی، $K \subseteq X$ فشرده و $U \subseteq X$ باز باشد. می‌نویسیم:

(a): $K \prec f$ هرگاه $f \in C_c(X)$، $0 \leq f \leq 1$ و به ازای هر $x \in K$، $f(X) = 1$.

(b): $V \prec f$ هرگاه $f \in C_c(X)$، $0 \leq f \leq 1$ و $\text{supp}(f) \subseteq V$.

(c): $K \prec f \prec V$ هرگاه (a) و (b) توأماً برقرار باشند.

لم ۷.۲.۲ (لم اریزون) فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف، K فشرده، V باز و $K \subseteq V$ باشد. در این صورت $f \in C_c(x)$ هست که $K \prec f \prec V$.

برهان. فرض کنیم $r_1 = 0$، $r_2 = 1$ و r_3، r_4، $\ldots$ شمارشی یک به یک از اعداد گویای واقع در $(0,1)$ باشد. طبق قضیهٔ (۴.۲.۲)،

$$\exists V_0 \text{ باز}, \overline{V}_0 \text{ فشرده} ; \quad K \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq V$$

همچنین

$$\exists V_1 \text{ باز} ; \quad K \subseteq V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq V_0$$

لذا

$$K \subseteq V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq V$$

فرض کنیم $n \geq 2$ و مجموعه‌های باز V_{r_1}، V_{r_2} و $\ldots$ V_{r_n} در دست باشند بطوری که

$$r_i < r_j \quad \Longrightarrow \quad \overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_i}$$

قرار می‌دهیم:

$$r_i = \max\{r_k : \; r_k < r_{n+1} \;, \quad 1 \leq k \leq n\}$$

$$r_j = \min\{r_k : \; r_{n+1} < r_k \;, \quad 1 \leq k \leq n\}$$

چون $r_i < r_{n+1} < r_j$، $\overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_i}$ و لذا

$$\exists \; V_{r_{n+1}} \text{ باز} \;\; s.t. \;\; \overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_i}$$

فرض کنیم $r_k < r_\ell$ و $1 \leq k, \ell \leq n+1$.

(I): اگر $k, \ell \neq n+1$، بنا به فرض استقراء $\overline{V}_{r_\ell} \subseteq V_{r_k}$.

(II): اگر $k = n+1$، $r_{n+1} = r_k < r_\ell$ و لذا با توجه به $r_j \leq r_\ell$، $\overline{V}_{r_\ell} \subseteq \overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_{n+1}}$. در نتیجه

$\overline{V}_{r_\ell} \subseteq V_{r_{n+1}} = V_{r_k}$

(III): اگر $\ell = n+1$، آنگاه

$$r_k < r_\ell = r_{n+1} \implies r_k \leq r_i \implies V_{r_i} \subseteq V_{r_k}$$

اکنون از آنجا که $\overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_i}$ لذا $\overline{V}_{r_\ell} = \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_i} \subseteq V_{rk}$. بنابراین در هر حالت اگر $1 \leq k, \ell \leq n+1$ و $r_k < r_\ell$ آنگاه $\overline{V}_{r_\ell} \subseteq \overline{V}_{r_k}$. با ادامهٔ این روش، دنبالهٔ $\{V_r\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$ از مجموعه‌های باز به دست می آید که

$$r < s \implies \overline{V}_s \subseteq V_r$$

و بعلاوه، $K \subseteq V_1$، $\overline{V}_0 \subseteq V$ و هر $\overline{V}_r$ فشرده است. قرار می‌دهیم:

$$f_r(x) = \begin{cases} r & x \in V_r \\ 0 & x \notin V_r \end{cases} \quad , \quad g_s(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{V}_s \\ s & x \notin \overline{V}_s \end{cases} \quad (x \in X,\ r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1])$$

f_r نیم‌پیوسته پایینی و g_s نیم‌پیوسته بالایی است. قرار می‌دهیم:

$$f = \sup_r f_r \quad , \quad g = \inf_s g_s$$

f نیم‌پیوسته پایینی است، g نیم‌پیوسته بالایی است. $0 \leq f \leq 1$. اگر $x \in K$ آنگاه

$$x \in V_1 \Rightarrow f_1(x) = 1 \Rightarrow 1 = f_1(x) \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

پس $k \prec f$. حال اگر $x \notin V_0$ آنگاه از آنجا که $V_r \subseteq \overline{V}_r \subseteq V_0$، لذا به ازای هر r، $x \notin V_r$ و $f_r(x) = 0$. پس $f(x) = 0$. در نتیجه $\{x : f(x) \neq 0\} \subseteq V_0$. بنابراین

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V}_0 \subseteq V$$

پس $\operatorname{supp}(f)$ فشرده و در V قرار دارد.

کافی است ثابت کنیم $f = g$. فرض کنیم $f_r(x) > g_s(x)$. درنتیجه $r > s$ و $x \in V_r, x \notin \overline{V}_s$. بنابراین $V_r \subseteq \overline{V}_r \subseteq V_s \subseteq \overline{V}_s$ که این تناقض است. پس به ازای هر r, s, x، $f_r(x) \leq g_s(x)$. پس

$$f(x) = \sup_r f_r(x) \leq \inf_s g_s(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq g(x)$$

اگر x ای باشد که $f(x) < g(x)$، اعداد گویای r و s هستند که $0 \leq f(x) < r < s < g(x) \leq 1$. پس

$$f(x) < r \implies x \notin V_r$$

$$g(x) > s \implies x \in \overline{V}_s$$

اما $r < s$، و لذا $\overline{V}_s \subseteq V_r$ که این تناقض است. بنابراین به ازای هر x، $f(x) = g(x)$. $\square$

قضیه ۸.۲.۲ (قضیه افراز واحد) فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف، $V_1, \ldots, V_n$ مجموعه‌های باز و K فشرده باشد. حال اگر $K \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$، در این صورت $h_i \prec V_i$ $(1 \leq i \leq n)$ هستند بطوری که اگر $x \in K$ آنگاه $h_1(x) + \ldots + h_n(x) = 1$.

$\{h_1, \ldots, h_n\}$ را یک افراز واحد بر K نسبت به پوشش باز $\{V_1, \ldots, V_n\}$ می گویند.

برهان. به ازای هر $x \in K$، i ای هست که $x \in V_i$. پس از $\{x\} \subseteq V_i$ و این که $\{x\}$ فشرده و V_i باز است،

$$\exists W_x, \quad \{x\} \subseteq W_x \subseteq \underbrace{\overline{W}_x}_{\text{فشرده}} \subseteq V_i$$

داریم $K \subseteq \bigcup\limits_{x \in K} W_x$. چون K فشرده است، $x_1, \ldots, x_m \in K$ موجودند بطوری که $K \subseteq W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_m}$.

تعریف می‌کنیم

$$H_i := \bigcup \left\{ \overline{W}_{x_i} : \;\; 1 \leq i \leq m \;\; , \overline{W}_{x_i} \subseteq V_i \right\}$$

هر H_i فشرده است و $H_i \subseteq V_i$. اکنون طبق لم اریزون، g_i ای موجود است بطوری که $H_i \prec g_i \prec V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
&h_1 = g_1 \\
&h_2 = (1 - g_1) g_2 \\
&\cdots \\
&h_n = (1 - g_1) \ldots (1 - g_{n-1}) g_n
\end{aligned}$$

به ازای هر i، داریم $h_i \prec V_i$. به استقراء می‌توان دید که

$$h_1 + \ldots + h_n = 1 - (1 - g_1) \ldots (1 - g_n)$$

زیرا اگر

$$h_1 + \ldots + h_i = 1 - (1 - g_1) \ldots (1 - g_i)$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
h_1 + \ldots + h_i + h_{i+1} &= 1 - (1 - g_1) \ldots (1 - g_i) + (1 - g_1) \ldots (1 - g_i) g_{i+1} \\
&= 1 - (1 - g_1) \ldots (1 - g_i)(1 - g_{i+1})
\end{aligned}$$

اگر $x \in K$ آنگاه i ای موجود است بطوری که $x \in H_i$ و چون $g_i \prec H_i$، در نتیجه $g_i(x) = 1$. بنابراین $h_1(x) + \ldots + h_n(x) = 1$، اگر $x \in K$. □

۳.۲ قضیه نمایش ریس

قضیه ۱.۳.۲ فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف و Λ یک تابعک خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد. در این صورت $\sigma-$جبر $\mathfrak{M}$ در X موجود است که شامل همهٔ مجموعه‌های بورل در X بوده و اندازهٔ مثبت و منحصر بفرد μ بر $\mathfrak{M}$ هست که Λ را بصورت زیر نمایش می‌دهد:

(a): به ازای هر $f \in C_c(X)$، $\Lambda f = \int_X f d\mu$.

بعلاوه

(b): به ازای هر مجموعهٔ فشرده $K \subseteq X$، $\mu(K) < \infty$.

(c): به ازای هر $E \in \mathfrak{M}$،

$$\mu E = \inf\{\mu(V) : \ E \subseteq V \ , \ \text{باز } V\}$$

(d): به ازای هر مجموعهٔ باز E و هر $E \in \mathfrak{M}$ که $\mu E < \infty$،

$$\mu E = \sup\{\mu(K) : \ K \subseteq E \ , \ \text{فشرده } K\}$$

(e): اگر $E \in \mathfrak{M}$، $A \subseteq E$ و $\mu E = 0$ آنگاه $A \in \mathfrak{M}$.

در سرتاسر برهان K نمایشگر زیر مجموعه‌ای فشرده از X و V نمایشگر زیر مجموعه‌ای باز در X است.

برهان. ابتدا منحصر بفردی μ را ثابت می‌کنیم. اگر μ در شرایط (c) و (d) صدق کند آنگاه μ بر $\mathfrak{M}$ با مقادیرش بر مجموعه‌های فشرده مشخص می‌شود. بنابراین کافی است ثابت کنیم به ازاء هر K، $\mu_1(K) = \mu_2(K)$، هرگاه μ_1 و μ_2 اندازه‌هایی باشند که قضیه برای آنها برقرار است. بنابراین K و $\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم. بنا به (b) و (c) مجموعهٔ باز $V \supseteq K$ هست که $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. اکنون بنا به لم اریزون

تابع f موجود است که $K \prec f \prec V$. پس

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

لذا $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. اگر نقش‌های μ_1 و μ_2 را با هم عوض نماییم خواهیم داشت $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$ و لذا $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ و μ منحصر بفرد است.

محاسبهٔ فوق نشان می‌دهد که (a)، (b) را ایجاب می‌کند.

ساختن μ و $\mathfrak{M}$

به ازاء هر مجموعهٔ باز V در X تعریف می‌کنیم:

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\} \qquad (١)$$

اگر $V_1 \subseteq V_2$، واضح است که $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. قرار می‌دهیم:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V \ , \ \text{باز } V\} \quad (E \subseteq X) \qquad (٢)$$

اگر E یک مجموعهٔ باز باشد آنگاه $\mu(E)$ مینیمم مجموعهٔ فوق است و لذا (٢) با (١) سازگار می‌باشد. قابل ذکر است که $\mu(E)$ برای تمام مجموعه‌های $E \subseteq X$ تعریف شده است ولی شمارا جمعی بودن μ فقط برای یک σ—جبر $\mathfrak{M}$ از X ثابت خواهد شد. فرض کنیم $\mathfrak{M}_F$ خانوادهٔ کلیهٔ مجموعه‌های $E \subseteq X$ باشد به طوری که $\mu(E) < \infty$ و

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \ , \ \text{فشرده } K\} \qquad (٣)$$

و بالاخره فرض می‌کنیم $\mathfrak{M}$ خانوادهٔ کلیهٔ مجموعه‌های $E \subseteq X$ باشد که به ازاء هر مجموعهٔ فشردهٔ K، $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$. اثبات این که μ و $\mathfrak{M}$ دارای خواص مورد نظر هستند به شرح زیر خواهد بود.

واضح است که μ یکنواخت است یعنی اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mu(A) \leq \mu(B)$، و بعلاوه $\mu(E) = 0$ نتیجه می‌دهد که $E \in \mathfrak{M}_F$ و $E \in \mathfrak{M}$. پس (e) برقرار بوده و (c) با توجه به تعریف برقرار است. از آنجا که اثبات نسبتاً طولانی است لذا آن را به چند مرحله تقسیم می‌کنیم.

قابل ذکر است که مثبت بودن تابعک خطی Λ نتیجه می‌دهد که Λ یکنواخت است. یعنی $f \leq g$ نتیجه می‌دهد که $\Lambda f \leq \Lambda g$، زیرا از آنجا که $g = (g-f) + f$ و $g - f \geq 0$ لذا $\Lambda g = \Lambda(g-f) + \Lambda f \geq \Lambda f$. یکنواخت بودن

Λ در مراحل II و X بکار برده می‌شود.

مرحلهٔ (I): اگر E_1، E_2، E_3، ... زیرمجموعه‌های دلخواهی از X باشند آنگاه

$$\mu(\bigcup_{1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{1}^{\infty} \mu E_i \tag{۴}$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که به ازاء هر دو مجوعهٔ باز V_1 و V_2،

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2) \tag{۵}$$

فرض کنیم $g \prec V_1 \cup V_2$. بنا به قضیهٔ (۸.۲.۲) توابع h_1 و h_2 هستند که $h_i \prec V_i$ و به ازاء هر x از محمل g، $h_1(x) + h_2(x) = 1$. بنابراین $h_i g \prec V_i$ و $g = h_1 g + h_2 g$، و لذا

$$\Lambda(g) = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2) \tag{٦}$$

چون (٦) برای هر $g \prec V_1 \cup V_2$ برقرار است (۵) برقرار می‌باشد. اگر $\exists E_i,\ \mu(E_i) = \infty$، آنگاه (۴) بالبداهه برقرار است. بنابراین فرض کنیم که به ازاء هر i، $\mu(E_i) < \infty$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. بنا به (۲) مجموعه‌های باز $E_i \subseteq V_i$ هستند که

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

قرار می‌دهیم $V = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} V_i$. فرض کنیم تابع $f \prec V$ دلخواه باشد. چون f دارای محمل فشرده است، به ازاء یک n خواهیم داشت $f \prec V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$. با استفاده از استقراء بر (۵) خواهیم داشت

$$\Lambda(f) \leq \mu(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2) + \ldots + \mu(V_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$$

چون این به ازاء هر تابع $f \prec V$ برقرار است و $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i \subseteq V$ خواهیم داشت

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$$

حال چون ε دلخواه است، (۴) برقرار می‌باشد.

مرحلهٔ (II): اگر K فشرده باشد، $K \in \mathfrak{M}_F$ و

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\} \tag{۷}$$

این (b) را نتیجه خواهد داد.

اثبات: اگر $K \prec f$ و $0 < \alpha < 1$، قرار می‌دهیم $V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$. در این صورت $K \subseteq V_\alpha$ و $\alpha g \leq f$ هرگاه $g \prec V_\alpha$. بنابراین

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1}\Lambda f$$

حال اگر $\alpha \to 1$ خواهیم داشت

$$\mu(K) \leq \Lambda f \tag{۸}$$

بنابراین $\mu(K) < \infty$. حال چون K در (۳) صدق می‌کند خواهیم داشت $K \in \mathfrak{M}_F$.

اگر $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ $V \supseteq K$ هست که $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$. بنا به لم اریزون f ای هست که $K \prec f \prec V$. بنابراین

$$\Lambda f \leq \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

که اگر با (۸) تلفیق شود، (۷) را نتیجه خواهد داد.

مرحلهٔ (III): هر مجموعهٔ باز در (۳) صدق می‌کند. بنابراین $\mathfrak{M}_F$ شامل کلیهٔ مجموعه‌های باز است که $\mu(V) < \infty$.

اثبات: فرض کنیم α یک عدد حقیقی دلخواه باشد که $\alpha < \mu(V)$. f ای هست که $f \prec V$ و $\alpha < \Lambda f$. اگر W یک مجموعهٔ باز شامل محمل K از f باشد آنگاه $f \prec W$، و لذا $\Lambda f \leq \mu(W)$.

پس $\Lambda f \leq \mu(K)$. این نشان می‌دهد که مجموعهٔ فشردهٔ $V \supseteq K$ هست که $\alpha < \mu(K)$، و لذا (۳) برای V برقرار است.

مرحلهٔ (IV): فرض کنیم $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ که در آن $E_1, E_2, E_3, \ldots$ عناصر دوبدو مجزایی از $\mathfrak{M}_F$ باشند. در این صورت داریم

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{۹}$$

اگر بعلاوه $\mu(E) < \infty$ آنگاه خواهیم داشت $E \in \mathfrak{M}_F$.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که به ازاء هر دو مجموعهٔ فشرده و مجزای K_1 و K_2،

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) \tag{۱۰}$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. بنا به لم اریزون $f \in C_c(X)$ هست که به ازاء هر $x \in K_1$، $f(x) = 1$ و به ازاء هر $x \in K_2$، $f(x) = 0$ و $0 \le f \le 1$ (بگیرید: $K_1 \prec f \prec X - K_2$) . بنا به مرحلهٔ (II) تابع g هست که

$$K_1 \cup K_2 \prec g \qquad , \qquad \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

واضح است که $K_1 \prec fg$ و $K_2 \prec (1-f)g$. چون Λ خطی است با توجه به (۸) داریم

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \le \Lambda(fg) + \Lambda\big((1-f)g\big) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

چون ε دلخواه است، (۱۰) اکنون از مرحلهٔ (I) به دست می آید.

اگر $\mu(E) = \infty$، (۹) از مرحلهٔ (I) به دست می آید. بنابراین فرض می‌کنیم $\mu(E) < \infty$. فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. چون $E_i \in \mathfrak{M}_F$، مجموعه‌های فشردهٔ $H_i \subseteq E_i$ هستند که

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{۱۱}$$

قرار می‌دهیم $K_n = H_1 \cup \ldots \cup H_n$. اکنون با استفاده از استقراء بر (۱۰)، داریم

$$\mu(E) \ge \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon \tag{۱۲}$$

چون (۱۲) به ازاء هر n و هر $\varepsilon > 0$ برقرار است خواهیم داشت

$$\mu(E) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

اکنون (۹) با توجه به مرحلهٔ (I) به دست می آید.

اما اگر $\mu(E) < \infty$ و $\varepsilon > 0$، (۹) نشان می‌دهد که به ازاء یک N

$$\mu(E) \le \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon \tag{۱۳}$$

پس بنا به (۱۲)،

$$\mu(E) \le \mu(K_N) + 2\varepsilon$$

و این نشان می‌دهد که E در (۳) صدق می‌کند پس $E \in \mathfrak{M}_F$.

مرحلهٔ (V): اگر $E \in \mathfrak{M}_F$ و $\varepsilon > 0$ آنگاه مجموعهٔ فشردهٔ K و مجموعهٔ باز V هستند که $K \subseteq E \subseteq V$ و

$\mu(V-K)<\varepsilon$.

اثبات: با توجه به تعریف، $K \subseteq E$ و $E \subseteq V$ هستند که

$$\mu(V)-\frac{\varepsilon}{2}<\mu(E)<\mu(K)+\frac{\varepsilon}{2}$$

چون $V-K$ باز است بنا به (III) داریم $V-K \in \mathfrak{M}_F$. بنابراین بنا به مرحلهٔ (IV)

$$\mu(K)+\mu(V-K)=\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon$$

مرحلهٔ (VI): اگر $A \in \mathfrak{M}_F$ و $B \in \mathfrak{M}_F$ آنگاه $A-B$، $A \cup B$ و $A \cap B$ متعلق به $\mathfrak{M}_F$ هستند.

اثبات: به ازاء $\varepsilon>0$ دلخواه، مرحلهٔ (V) نشان می‌دهد که مجموعه‌های K_i و V_i هستند که $K_1 \subseteq A \subseteq V_1$، $K_2 \subseteq B \subseteq V_2$، $\mu(V_1-K_1)<\varepsilon$ و $\mu(V_2-K_2)<\varepsilon$. چون

$$A-B \subseteq V_1-K_2 \subseteq (V_1-K_1) \cup (K_1-V_2) \cup (V_2-K_2)$$

بنا به مرحلهٔ (I)، خواهیم داشت

$$\mu(A-B) \leq \varepsilon+\mu(K_1-V_2)+\varepsilon \tag{۱۴}$$

چون K_1-V_2 زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $A-B$ است، (۱۴) نشان می‌دهد که $A-B$ در (۳) صدق کرده و لذا $A-B \in \mathfrak{M}_F$.

چون $A \cup B=(A-B) \cup B$ با بکار بردن مرحلهٔ (IV)، خواهیم داشت $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$. چون $A \cap B=\underbrace{A}_{\in \mathfrak{M}_F}-\underbrace{(A-B)}_{\in \mathfrak{M}_F}$، خواهیم داشت $A \cap B \in \mathfrak{M}_F$.

مرحلهٔ (VII): $\mathfrak{M}$ یک σ—جبر بر X و شامل کلیهٔ مجموعه‌های بورل است.

اثبات: فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده و دلخواهی در X باشد. اگر $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \cap K=K-(A \cap K)$، و لذا $A^c \cap K$ تفاضل عناصری از $\mathfrak{M}_F$ است. پس $A^c \cap K \in \mathfrak{M}_F$، و لذا $A \in \mathfrak{M}$ نتیجه می‌دهد که $A^c \in \mathfrak{M}$.

اکنون فرض می‌کنیم $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ که در آن هر $A_i \in \mathfrak{M}$. قرار می‌دهیم $B_1=A_1 \cap K$ و

$$B_n=(A_n \cap K)-(B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) \quad (n=2,3,\ldots) \tag{۱۵}$$

$\{B_n\}$ دنباله‌ای از عناصر دوبدو مجزای $\mathfrak{M}_F$ بوده و $A \cap K=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (VI). بنا به مرحلهٔ (IV)، $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$، و لذا $A \in \mathfrak{M}$. بالاخره اگر C بسته باشد آنگاه $C \cap K$ فشرده بوده و لذا

$C \cap K \in \mathfrak{M}_F$، پس $C \in \mathfrak{M}$. در حالت خاص داریم $X \in \mathfrak{M}$. بنابراین نشان دادیم که $\mathfrak{M}$ یک σ—جبر در X است که شامل کلیهٔ مجموعه‌های بستهٔ X می‌باشد. در نتیجه $\mathfrak{M}$ شامل کلیهٔ مجموعه‌های بورل در X می‌باشد.

مرحلهٔ (VIII): $\mathfrak{M}_F$ دقیقاً متشکل از کلیهٔ مجموعه‌های $E \in \mathfrak{M}$ است که $\mu(E) < \infty$. این (d) را ثابت می‌کند.

اثبات: اگر $E \in \mathfrak{M}_F$ مراحل (II) و (VI) ایجاب می‌کنند که $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$ به ازاء هر مجموعهٔ فشردهٔ K. پس $E \in \mathfrak{M}$. بالعکس، فرض می‌کنیم $E \in \mathfrak{M}$ و $\mu(E) < \infty$. فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. مجموعهٔ باز V هست که $E \subseteq V$ و $\mu(V) < \infty$. بنا به (III) و (V)، مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq V$ هست که $\mu(V - K) < \varepsilon$. چون $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$، مجموعهٔ فشردهٔ $H \subseteq E \cap K$ موجود است که

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon$$

از آنجا که $E \subseteq (E \cap K) \cup (V - K)$، خواهیم داشت

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V - K) < \mu(H) + 2\varepsilon$$

که این نتیجه می‌دهد $E \in \mathfrak{M}_F$.

مرحلهٔ (IX): μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است.

اثبات: شمارا جمعی بودن μ بر $\mathfrak{M}$ از مراحل (IV) و (VIII) به دست می‌آید.

مرحلهٔ (X): برای هر $f \in C_c(X)$، $\Lambda f = \int_X f d\mu$.

اثبات: واضح است که کافی است این مطلب را برای f های حقیقی ثابت کنیم. همچنین کافی است نشان دهیم

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu \qquad (١٦)$$

به ازاء هر تابع حقیقی $f \in C_c(X)$. زیرا اگر (١٦) برقرار باشد، خطی بودن Λ نشان خواهد داد

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_X (-f) d\mu = -\int_X f d\mu$$

فرض کنیم K محمل تابع حقیقی $f \in C_c(X)$ بوده و $[a, b]$ بازه‌ای شامل برد f باشد (برد f فشرده و بالنتیجه محدود است). فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. اعداد y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ را چنان اختیار می‌کنیم که

همواره $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ و

$$y_0 < a < y_1 < \ldots < y_n = b \tag{۱۷}$$

قرار می‌دهیم

$$E_i = \{x : y_{i-1} < f(x) \le y_i\} \cap K \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{۱۸}$$

چون f پیوسته است، f مجموعهٔ بورل اندازه‌پذیر بوده، و لذا E_i ها مجموعه‌های بورل دوبدو مجزا می‌باشند که اجتماع آنها K است. مجموعه‌های باز $V_i \supseteq E_i$ هستند که

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

و به ازاء هر $x \in V_i$، $f(x) < y_i + \varepsilon$. بنا به قضیهٔ (۸.۲.۲)، توابع $h_i \prec V_i$ هستند که $\sum h_i = 1$ بر K. بنابراین $f = \sum h_i f$ و مرحلهٔ (II) نشان می‌دهد که

$$\mu(K) \le \Lambda(\sum h_i) = \sum \Lambda h_i$$

چون $h_i f \le (y_i + \varepsilon) h_i$، و چون $y_i - \varepsilon < f(x)$ بر E_i، داریم

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \sum_{i=1}^{n} \Lambda(h_i f) \le \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\Lambda h_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \varepsilon)\Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^{n} \Lambda h_i \\
&\le \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \varepsilon)\Big[\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big] - |a|\mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \varepsilon) \\
&\le \int_X f\,d\mu + \varepsilon\big[2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon\big]
\end{aligned}$$

چون ε دلخواه است (۱۶) برقرار بوده و اثبات کامل است. $\square$

منظم بودن اندازه‌های بورل

یک اندازهٔ بورل اندازه‌ای است که بر σ—جبر بورل تعریف شده باشد.

فرض کنید X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف و μ یک اندازهٔ مثبت بر σ—جبر $\mathfrak{M}$ حاوی مجموعه‌های

بورل و $E \in \mathfrak{M}$ باشد. E را منظم خارجی گوییم اگر:

$$\mu E = \inf\{\mu V : E \subseteq V \text{ , } V \text{ باز}\}$$

E را منظم داخلی گوییم اگر:

$$\mu E = \sup\{\mu K : K \subseteq E \text{ , } K \text{ فشرده}\}$$

E را منظم گوییم اگر E منظم داخلی و خارجی باشد. μ را منظم گوییم هرگاه هر $E \in \mathfrak{M}$، منظم باشد.

تعریف ۲.۳.۲ مجموعهٔ E در فضای توپولوژیکی X را $\sigma-$ فشرده گوییم هرگاه E اجتماع شمارا از مجموعه‌های فشرده باشد. در $\mathbb{R}^k$ تمام مجموعه‌های باز $\sigma-$ فشرده‌اند (زیرا اجتماع تعداد شمارا از گوی‌های بسته‌اند). در یک فضای اندازه، E را $\sigma-$ متناهی گوییم هرگاه اجتماع شمارایی از مجموعه‌های با اندازهٔ متناهی باشد.

در قضیهٔ نمایش ریس، هر مجموعهٔ $\sigma-$ متناهی منظم داخلی است. زیرا اگر $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$، $\mu E_i < \infty$، $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ و $\alpha < \mu E$. چون $\mu E_n \to \mu E$ لذا n ای هست که $\alpha < \mu E_n$ و چون $\mu E_n < \infty$ پس K فشرده‌ای موجود است که $K \subseteq E_n$، $\alpha < \mu K$. اما $K \subseteq E_n \subseteq E$.

قضیه ۳.۳.۲ فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشردهٔ هاسدورف و $\sigma-$ فشرده باشد. اگر μ و $\mathfrak{M}$ مطابق قضیهٔ (۱.۳.۲) باشند آنگاه:

(a) به ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ و هر $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ بستهٔ F و مجموعهٔ باز V هست که $F \subseteq E \subseteq V$ و $\mu(V - F) < \varepsilon$.

(b) μ منظم است.

(c) به ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ مجموعهٔ F_σ ی A و مجموعهٔ G_δ ی B هست که $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B - A) = 0$.

برهان. (a): داریم $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots$ که K_n ها مجموعه‌هایی فشرده‌اند. در نتیجه:

$$E = E \cap X = E \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap K_n)$$

اما $\mu(E\cap K_n)\leq \mu K_n<\infty$. پس به ازای هر n، V_n بازی هست که $E\cap K_n\subseteq V_n$ و

$$\mu(V_n)<\mu(E\cap K_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (۱)$$

لذا از آنجا که

$$\mu(V_n)=\mu\big(V_n-(E\cap K_n)\big)+\mu(E\cap K_n)$$

داریم

$$\mu\big(V_n-(E\cap K_n)\big)=\mu(V_n)-\mu(E\cap K_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

قرار می‌دهیم $V:=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$. داریم $E\subseteq V$ و

$$V-E=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}(K\cap E_n)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(V_n-(K_n\cap E_n)\big)$$

بنابراین

$$\mu(V-E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\big(V_n-(K_n\cap E_n)\big)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}$$

از طرفی، E^c مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. لذا بنا به حالت فوق W بازی موجود است بطوری که $E^c\subseteq W$ و $\mu(W-E^c)<\frac{\varepsilon}{2}$. اگر قرار دهیم $F=W^c$، آنگاه F بسته، $F\subseteq E$ و

$$W-E^c=W\cap E=E-W^c=E-F$$

در نتیجه

$$\mu(E-F)=\mu(W-E^c)<\frac{\varepsilon}{2}$$

اکنون داریم

$$\mu(V-F)\leq\mu(V-E)+\mu(E-F)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(b): چون X، σ—فشرده و بالنتیجه σ− متناهی است لذا هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر σ− متناهی و در نتیجه منظم داخلی است.

(c): به ازای هر i، F_i بسته و V_i بازی موجود است بطوری که $F_i\subseteq E\subseteq V_i$ و $\mu(V_i-F_i)<\frac{1}{i}$. قرار می‌دهیم $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\in F_\sigma$ و $B=\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i\in G_\delta$. اکنون $A\subseteq E\subseteq B$ و

$$\mu(B-A)\leq\mu(V_i-F_i)<\frac{1}{i}\to 0\quad(i\to\infty)$$

$\square$

قضیه ۴.۳.۲ فرض کنیم λ یک اندازهٔ مثبت بورل بر فضای موضعاً فشرده و هاسدورف X باشد. حال اگر برای هر K فشرده، $\lambda(K) < \infty$ بوده و هر مجموعهٔ باز $\sigma-$ فشرده باشد آنگاه λ منظم است.

برهان. تعریف می‌کنیم $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$ که

$$\Lambda f = \int_X f d\lambda \quad (f \in C_c(X))$$

از آنجا که

$$\int_X |f| d\lambda = \int_{\mathrm{supp}(f)} |f| d\lambda \leq \|f\|_\infty . \lambda(\mathrm{supp}(f)) < \infty$$

لذا Λ خوشتعریف و یک تابعک خطی مثبت است. بنا به قضایای (۱.۳.۲) و (۳.۳.۲)، اندازهٔ منظم μ بر یک $\sigma-$جبر حاوی مجموعه‌های بورل هست که

$$\Lambda f = \int_X f d\mu \quad (f \in C_c(X))$$

پس

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\lambda \quad (f \in C_c(X))$$

کافی است ثابت کنیم $\lambda = \mu$ بر مجموعه‌های بورل. فرض کنیم V یک مجموعهٔ باز باشد. K_i های فشرده هستند که $V = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$. طبق لم اریزون f_i ای موجود است بطوری که $K_i \prec f_i \prec V$. قرار می‌دهیم $g_n := \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. داریم $\mathrm{supp} g_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{supp} f_i$، و لذا $g_n \in C_c(X)$. چون $0 \leq g_n \nearrow \chi_V$ بنا به (m.c.t)

$$\lambda(V) = \int_X \chi_V d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \mu(V)$$

گیریم $E \in \mathfrak{B}_X$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند. بنا به قضیهٔ (۳.۳.۲)، مجموعهٔ F بسته و V بازی موجود است بطوری که $V \supseteq E \supseteq F$ و $\mu(V - F) < \varepsilon$. چون $V - F = V \cap F^c$ باز است لذا

$$\lambda(V - F) = \mu(V - F) < \varepsilon$$

و در نتیجه

$$\lambda(V) = \lambda(V - F) + \lambda(F) \leq \varepsilon + \lambda(E)$$

به طریق مشابه

$$\mu(V) \leq \varepsilon + \mu(E)$$

بنابراین

$$\begin{cases} \lambda E \leq \lambda V = \mu V \leq \varepsilon + \mu E \\ \\ \mu E \leq \mu V = \lambda V \leq \varepsilon + \lambda E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda E \leq \varepsilon + \mu E \\ \\ \mu E \leq \varepsilon + \lambda E \end{cases}$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، پس $\lambda E \leq \mu E$ و $\mu E \leq \lambda E$. پس $\mu E = \lambda E$ و حکم ثابت است. □

۴.۲ اندازهٔ لبگ بر $\mathbb{R}^k$

تعریف ۱.۴.۲ فضای اقلیدسی $k-$ بعدی $\mathbb{R}^k$ به صورت زیر می‌باشد

$$\mathbb{R}^k := \{(\xi_1, \ldots, \xi_k); \quad \xi_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq k)\}$$

که در آن

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) + (\eta_1, \ldots, \eta_k) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_k + \eta_k)$$

$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_k) = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_k)$$

به راحتی دیده می‌شود که $\mathbb{R}^k$ یک فضای برداری حقیقی است. اگر $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ و $y = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$ قرار می‌دهیم

$$x.y \quad := \quad \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i$$

$$|x| := (x,x)^{\frac{1}{2}} \quad = \quad \Big(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

داریم $|x.y| \leq |x|.|y|$ که به نامساوی شوارتز معروف است. اگر $E \in \mathbb{R}^k$ و $x \in \mathbb{R}^k$، انتقال E بوسیلهٔ x عبارت است از

$$E + x = \{y + x : \quad y \in E\}$$

مجموعهٔ

$$W=\left\{x=(\xi_1,\dots,\xi_k):\ \ \alpha_i<\xi_i<\beta_i\ \ (1\leq i\leq k)\right\}$$

یا هر مجموعه را که از تغییر بعضی یا همهٔ $<$ ها به $\leq$ به دست آید یک $K-$ حجره نامیده و حجم آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{vol}(W)=\prod_{i=1}^{k}(\beta_i-\alpha_i)$$

تعریف ۲.۴.۲ اگر $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$، آنگاه $\delta-$جعبه به گوشهٔ a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(a,\delta)=\{x:\ \ \alpha_i\leq\xi_i<\alpha_i+\delta\ \ (1\leq i\leq k)\}$$

اگر قرار دهیم:

$$P_n=\left\{x=(\xi_1,\dots,\xi_k):\ \ \text{هر } \xi_i \text{ مضرب صحیحی از } \frac{1}{2^n} \text{ است}\right\}$$

$$\Omega_n=\ \ \text{کلیه‌گردایه } 2^{-n}\text{—جعبه‌ها به گوشه‌های واقع در } P_n$$

آنگاه چهار خاصیت زیر برقرار است:

(a): اگر n ثابت باشد هر $x\in\mathbb{R}^k$ دقیقاً در یک عضو Ω_n قرار دارد.

(b): اگر $Q'\in\Omega_n$ و $Q''\in\Omega_r$ و $r<n$ آنگاه $Q'\subseteq Q''$ یا $Q'\cap Q''=\varnothing$.

(c): اگر $Q\in\Omega_r$ آنگاه $\mathrm{vol}(Q)=2^{-rk}$ و اگر $n>r$ آنگاه P_n دقیقاً $2^{(n-r)k}$ نقطه در Q دارد.

(d): هر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^k$ اجتماع شمارای مجزایی از حجره‌های متعلق به $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\dots$ است.

بندهای (a)، (b) و (c) بدیهی هستند. برای اثبات (d)، فرض کنیم $V\subseteq\mathbb{R}^k$ باز باشد. اگر $x\in V$ آنگاه $\delta>0$ ای موجود است بطوری که $N_\delta(x)\subseteq V$. حال اگر $\frac{\sqrt{k}}{2^n}<\delta$ آنگاه $Q\in\Omega_n$ ای موجود است بطوری که $x\in Q\subseteq N_\delta(x)\subseteq V$. بنابراین V اجتماع کلیهٔ حجره‌های متعلق به $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\dots$ است که مشمول در V هستند. از این حجره‌ها، حجره‌هایی را انتخاب می‌کنیم که متعلق به Ω_1 هستند. اکنون تمام حجره‌های متعلق به $\Omega_2\cup\Omega_3\cup\dots$ را که مشمول در یکی از حجره‌های انتخابی هستند حذف می‌کنیم (تأثیری در اجتماع ندارد). حال از حجره‌های باقیمانده کلیهٔ حجره‌های متعلق به Ω_2 را انتخاب کرده و سپس کلیهٔ حجره‌های متعلق به

$\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \ldots$ را که مشمول در یکی از حجره‌های انتخابی هستند حذف می‌کنیم. با ادامهٔ این روش تعداد شمارا از حجره‌های دوبدو مجزای متعلق به $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$ به دست می آید که اجتماع آنها V می‌باشد.

قضیه ۳.۴.۲ اندازهٔ تام و مثبت m بر یک $\sigma-$جبر $\mathfrak{M}$ در $\mathbb{R}^k$ موجود است که خواص زیر برقرار است:

(a): به ازای هر $k-$جعبهٔ W داریم $m(W) = \mathrm{vol}(W)$.

(b): $\mathfrak{M}$ شامل کلیهٔ مجموعه‌های بورل $\mathbb{R}^k$ است؛ به عبارت دقیق‌تر، $E \in \mathfrak{M}$، اگر و فقط اگر مجموعهٔ F_σ ی A و مجموعهٔ G_δ ی B باشد که $A \subseteq E \subseteq B$ و $m(B-A) = 0$. همچنین m منظم است.

(c): m پایای انتقال است، یعنی

$$m(E + x) = m(E) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^k, \forall\, E \in \mathfrak{M})$$

(d): اگر μ یک اندازهٔ مثبت بورل و پایای انتقال بر $\mathbb{R}^k$ باشد بطوری که به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K، $\mu(K) < \infty$ آنگاه عدد ثابت c هست بطوری که $\mu(E) = cm(E)$ برای هر مجموعهٔ بورل $E \subseteq \mathbb{R}^k$.

(e): به هر تبدیل خطی T از $\mathbb{R}^k$ بتوی $\mathbb{R}^k$ عدد حقیقی $\Delta(T)$ متناظر می‌شود بطوری که

$$m\big(T(E)\big) = \Delta(T) m(E)$$

برای هر $E \in \mathfrak{M}$. در حالت خاص، اگر T یک دوران باشد، $m\big(T(E)\big) = m(E)$.

عناصر $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های لبگ– اندازه‌پذیر در $\mathbb{R}^k$ و m را اندازهٔ لبگ بر $\mathbb{R}^k$ می گویند. برای تاکید در صورت لزوم بجای m از نماد m_k استفاده می کنیم.

برهان. اگر f یک تابع مختلط بر $\mathbb{R}^k$ با محمل فشرده باشد، تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_n f = 2^{-nk} \sum_{x \in P_n} f(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{۱}$$

فرض کنیم $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ و f حقیقی باشد. فرض می‌کنیم W یک $k-$ جعبهٔ باز باشد که محمل f را در بر داشته و $\varepsilon > 0$ باشد. بنابه پیوستگی یکنواخت f، عدد طبیعی N و توابع g و h با محمل در W موجودند بطوری که:

(i): g و h بر هر جعبهٔ متعلق به Ω_N ثابت است.

(ii): $g \leq f \leq h$.

(iii): $h - g < \varepsilon$.

توضیح: فرض کنیم $K=\mathrm{supp}(f)$. بنابه پیوستگی یکنواخت f، عدد $\delta>0$ هست که $\delta<\mathrm{d}(K,W^c)>0$ بطوری که

$$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

فرض کنیم عدد طبیعی N چنان باشد که $\frac{1}{2^N}\sqrt{k}<\delta$. به ازاء هر $Q\in\Omega_N$ قرار می‌دهیم

$$g(x)=\inf_{x\in Q} f(x) \quad , \quad h(x)=\sup_{x\in Q} f(x) \qquad (x\in Q)$$

داریم

$$h(x)-g(x)=\sup_{y\in Q} f(y)-\inf_{y\in Q} f(y)=\sup_{y,z\in Q}|f(y)-f(z)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

و

$$\mathrm{supp}(g)\subseteq\bigcup_{Q\cap K\neq\varnothing}\overline{Q}\subseteq W$$

مشابهاً $\mathrm{supp}(h)\subseteq W$. اما به ازاء هر $n\geq N$،

$$\Lambda_N g=\Lambda_n g\leq\Lambda_n f\leq\Lambda_n h=\Lambda_N h \tag{۲}$$

اکنون چون

$$\begin{aligned}\Lambda_N h-\Lambda_N g &= 2^{-Nk}\sum_{x\in P_N}\big[h(x)-g(x)\big]=\sum_{x\in P_N\cap(\underset{Q\cap K\neq\varnothing}{\cup} Q)} 2^{-Nk}\big[h(x)-g(x)\big]\\ &\leq \varepsilon\sum_{x\in P_N\cap(\underset{Q\cap K\neq\varnothing}{\cup Q})} 2^{-NK}\leq\varepsilon\mathrm{vol}(W)\end{aligned}$$

لذا حدود بالایی و حدود پایینی $\{\Lambda_n f\}$ حداکثر $\varepsilon\mathrm{vol}(W)$ با هم فرق دارند. چون ε دلخواه است، نتیجه می‌شود که

$$\Lambda f:=\lim_{n\to\infty}\Lambda_n f \qquad (f\in C_c(\mathbb{R}^k))$$

ابتدا برای f های حقیقی و سپس برای f های مختلط موجود است:

$$f=f_1+if_2 \quad\Rightarrow\quad \Lambda_n f=\Lambda_n f_1+i\Lambda_n f_2 \quad\Rightarrow\quad \Lambda f=\Lambda f_1+i\Lambda f_2$$

واضح است که Λ یک تابعک خطی مثبت بر $C_c(\mathbb{R}^k)$ است (در حقیقت Λf دقیقاً انتگرال ریمن f بر $\mathbb{R}^k$ است).

اکنون فرض کنیم m و $\mathfrak{M}$ اندازه و $\sigma-$ جبر متناظر به این Λ در قضیهٔ نمایش ریس باشد. از آنجا که قضیهٔ

ریس، یک اندازهٔ تام را بدست داده و $\mathbb{R}^k$، $\sigma-$ فشرده است بنا به قضیهٔ (۳.۳.۲) قسمت (b) از این قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات (a) فرض کنیم W یک جعبهٔ باز باشد. همچنین E_r اجتماع کلیهٔ جعبه‌های متعلق به Ω_r باشد که بستار آنها مشمول در W باشد. فرض کنیم f_r چنان باشد که $E_r \prec f_r \prec W$. قرار می‌دهیم $g_r = \max\{f_1, \dots, f_r\}$. با توجه به ساختن Λ داریم

$$\mathrm{vol}(E_r) \leq \Lambda f_r \leq \Lambda g_r \leq \mathrm{vol}(W)$$

اما اگر $r \to \infty$، آنگاه $\mathrm{vol}(E_r) \to \mathrm{vol}(W)$ و بنا به قضیهٔ (m.c.t.)

$$\Lambda g_r = \int_{\mathbb{R}^k} g_r dm \to \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{_W} dm = m(W)$$

زیرا به ازاء هر $x \in \mathbb{R}^k$، $g_r(x) \to \chi_{_W}(x)$. بنابراین $m(W) = \mathrm{vol}(W)$ برای هر جعبهٔ باز W. چون هر $k-$ جعبه، مقطع یک دنبالهٔ نزولی از $k-$ جعبه‌های باز است (a) به دست می آید.

توضیح: مثلاً

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1 - \frac{1}{n}, b_1 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_k - \frac{1}{n}, b_k + \frac{1}{n})$$

پس

$$\begin{aligned} m\Big([a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]\Big) &= \lim_{n\to\infty} m\Big((a_1 - \frac{1}{n}, b_1 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_k - \frac{1}{n}, b_k + \frac{1}{n})\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i + \frac{1}{2n}) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \\ &= \mathrm{vol}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]) \end{aligned}$$

برای اثبات (c)، (d) و (e) از این مطلب استفاده می‌کنیم که اگر λ یک اندازهٔ بورل مثبت بر $\mathbb{R}^k$ باشد بطوری که $\lambda(E) = m(E)$ برای هر جعبهٔ E، آنگاه این مطلب برای کلیهٔ مجموعه‌های باز((d) ۲.۱۹)، و لذا از آنجا که λ و m منظم‌اند (قضیهٔ (۴.۳.۲)) برای کلیهٔ مجموعه‌های بورل E برقرار است.

برای اثبات (c)، نقطهٔ $x \in \mathbb{R}^k$ را ثابت نگه داشته و تعریف می‌کنیم $\lambda(E) = m(E + x)$. واضح است که λ یک اندازه است. بنا به (a)، $\lambda(E) = m(E)$ برای کلیهٔ جعبه‌ها، بنابراین $m(E + x) = m(E)$ برای کلیهٔ مجموعه‌های بورل E. حال بنا به (b)، به ازاء هر $E \in \mathfrak{M}$، $m(E + x) = m(E)$.

توضیح:

$$\overbrace{A}^{F_\sigma} \subseteq E \subseteq \overbrace{B}^{G_\delta} \quad , \quad m(B-A)=0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{A+x}^{F_\sigma} \subseteq E+x \subseteq \overbrace{B+x}^{G_\delta},$$

$$m\big((B+x)-(A+x)\big)=m(B-A)=0 \quad \Rightarrow \quad E+x \text{ اندازه پذیر لبگ}$$

$$m(E+x)=m(A+x)=mA=mE$$

اکنون فرض می‌کنیم μ در شرط (d) صدق کند. فرض کنیم Q_0، یک $k-$ جعبه باشد ($Q_0=[0,1)\times\ldots\times[0,1)$). قرار می‌دهیم $c=\mu(Q_0)$. چون Q_0 اجتماع 2^{nk}، $2^{-n}-$ جعبه می‌باشد که هر کدام انتقالی از دیگری هستند، داریم

$$2^{nk}\mu(Q)=\mu(Q_0)=cm(Q_0)=c.2^{nk}m(Q)$$

برای هر $2^{-n}-$ جعبهٔ Q. اکنون بنا به ((d) ۲.۱۹)، برای هر مجموعهٔ باز $E\subseteq\mathbb{R}^k$ داریم $\mu(E)=cm(E)$. این (d) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (e)، فرض کنیم $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ خطی باشد. اگر برد T یک زیرفضا با بعد کمتر از k باشد، آنگاه $mY=0$ و لذا نتیجه با $\Delta(T)=0$ برقرار می‌شود. در حالت دیگر T یک به یک و بروی $\mathbb{R}^k$ است و معکوس آن نیز خطی می‌باشد. بنابراین T یک همئومورفیسم از $\mathbb{R}^k$ بروی $\mathbb{R}^k$ است و لذا به ازاء هر مجموعهٔ بورل E، $T(E)$ بورل می‌باشد، زیرا:

$$\mathcal{A}=\{E\subseteq\mathbb{R}^k : T(E) \text{ بورل}\}$$

$\mathcal{A}$ یک $\sigma-$ جبر حاوی کلیهٔ مجموعه‌های باز $\mathbb{R}^k$ است، و لذا حاوی مجموعه‌های بورل $\mathbb{R}^k$ می‌باشد. اکنون می‌توان اندازهٔ مثبت و بورل μ را بر $\mathbb{R}^k$ بصورت زیر تعریف کرد

$$\mu(E)=m(T(E))$$

خطی بودن T به همراه پایای انتقال بودن m نتیجه می‌دهد

$$\mu(E+x)=m(T(E+x))=m(T(E)+Tx)=m(T(E))=\mu(E)$$

پس μ پایای انتقال بوده و لذا بنا به (d)، ثابت $c=\Delta T$ هست بطوری که

$$m(T(E))=\mu(E)=\Delta(T)mE$$

برای هر مجموعهٔ بورل E. اکنون بنا به (b) برای هر $E \in \mathfrak{M}$ نیز رابطهٔ اخیر برقرار است، زیرا اگر $E \in \mathfrak{M}$، آنگاه

$$\overbrace{A}^{F_\sigma} \subseteq E \subseteq \overbrace{B}^{G_\delta} \quad , \quad m(B-A)=0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{T(A)}^{F_\sigma} \subseteq T(E) \subseteq \overbrace{T(B)}^{G_\delta}$$

$$\Rightarrow \quad m\big(T(B)-T(A)\big) = m\big(T(B-A)\big) = \Delta(T)m(B-A) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(E) \in \mathfrak{M} \quad , \quad m\big(T(E)\big) = m\big(T(A) \cup T(E-A)\big) = m\big(T(A)\big) + m\big(T(E-A)\big) = m\big(T(A)\big)$$

$$= \Delta(T)mA = \Delta(T)mE$$

$$0 \le m\big(T(E-A)\big) \le m\big(T(B-A)\big) = \Delta(T)m(B-A) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\big(T(E-A)\big) = 0$$

برای به دست آوردن $\Delta(T)$ کافی است برای یک $E \in \mathfrak{M}$ که $0 < m(E) < \infty$ مقدار $m\big(T(E)\big)/m(E)$ را محاسبه کنیم. اگر T یک دوران باشد و E گوی یکه به مرکز 0 در $\mathbb{R}^k$ باشد آنگاه $T(E) = E$ و لذا $\Delta(T) = 1$.

$\square$

تبصره: اگر m اندازهٔ لبگ بر $\mathbb{R}^k$ باشد به جای $L^1(m)$ از نماد $L^(\mathbb{R}^k)$ استفاده می‌کنیم. اگر E زیرمجموعه‌ای لبگ– اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^k$ باشد آنگاه

$$\mathfrak{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathfrak{M}\} = \{A \subseteq E : A \in \mathfrak{M}\}$$

یک σ– جبر در E بوده و $m|_{\mathfrak{M}_E}$ یک اندازه بر $\mathfrak{M}_E$ است. عبارت $f \in L^1$ بر E یا $f \in L^1(E)$ بدین معنی است که f بر فضای اندازهٔ $(E, \mathfrak{M}_E, m|_{\mathfrak{M}_E})$ انتگرال‌پذیر است.

فرض کنیم $k = 1$ و I یکی از بازه‌های (a,b)، $(a,b]$، $[a,b)$ یا $[a,b]$ باشد. حال اگر $f \in L^1(I)$، $\int_I f dm$ را به صورت سمبولیک $\int_a^b f(x)dx$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که اندازهٔ لبگ هر مجموعهٔ تک عضوی صفر است، فرقی نمی‌کند که نسبت به کدامیک از این بازه‌ها انتگرال گرفته شده است.

فرض کنیم f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد. اگر $f(a) = f(b) = 0$، آنگاه با قرار دادن $f(x) = 0$ برای $x < a$ و $x > b$، تساوی $\Lambda f = \int_{\mathbb{R}} f dm = \int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهد که انتگرال ریمان و لبگ f بر $[a,b]$ با هم برابرند. در حالت کلی اگر برای $\varepsilon > 0$ داده شده $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ را چنان اختیار کنیم که $\delta.\|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ که در آن

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$، آنگاه با قرار دادن

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & a+\delta\le x\le b-\delta \\ \text{خطی که نقطه‌های } (a+\delta,f(a+\delta)),(a,0) \text{ را به هم وصل می‌کند} & a\le x\le a+\delta \\ \text{خطی که نقطه‌های } (b-\delta,f(b-\delta)),(b,0) \text{ را به هم وصل می‌کند} & b-\delta\le x\le b \end{cases}$$

خواهیم داشت

$$\left|R\int_a^b f(x)dx - L\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|R\int_a^b f(x)dx - R\int_a^b f_1(x)dx\right| + \left|R\int_a^b f_1(x)dx - L\int_a^b f_1(x)dx\right|$$
$$+\left|L\int_a^b f_1(x)dx - L\int_a^b f(x)dx\right| \le 2\|f\|_\infty.\delta<\varepsilon$$

حال چون $\varepsilon>0$ دلخواه است نتیجه می‌شود $R\int_a^b f(x)dx = L\int_a^b f(x)dx$. به طور کلی می‌توان نشان داد:

تمرین: اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر لبگ است و انتگرال‌های ریمان و لبگ با هم برابرند.

تا کنون دو سؤال مطرح است:

سؤال ۱. آیا هر مجموعهٔ لبگ — اندازه‌پذیر، بورل است؟

سؤال ۲. آیا هر زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$، لبگ — اندازه‌پذیر است؟

جواب هر دو سؤال منفی است، حتی در حالت $k=1$. جواب منفی به سؤال اول بوسیلهٔ کاردینالیتی داده می‌شود. گیریم c کاردینالیتی اعداد حقیقی باشد. $\mathbb{R}^k$ دارای پایهٔ شمارش‌پذیر (گوی‌های باز به شعاع گویا و مراکز در یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال از $\mathbb{R}^k$) بوده و $\mathfrak{B}_k$ (گردایهٔ کلیهٔ مجموعه‌های بورل $\mathbb{R}^k$)، σ— جبر تولید شده بوسیلهٔ این پایه است. بنابراین $\mathfrak{B}_k$ دارای کاردینالیتی c می‌باشد (چرا؟). از طرف دیگر مجموعهٔ کانتور $C\subseteq\mathbb{R}^k$ با کاردینالیتی c موجود است که $mC=0$. بنابراین تام بودن m نشان می‌دهد که هر کدام از 2^c زیرمجموعهٔ C اندازه‌پذیر لبگ است. چون $2^c>c$، بنابراین اکثر زیرمجموعه‌های C بورل نیستند.

قضیه ۴.۴.۲ فرض کنیم $A\subseteq\mathbb{R}^1$. اگر هر زیرمجموعهٔ A اندازه‌پذیر باشد آنگاه $mA=0$.

نتیجه: هر مجموعه با اندازهٔ مثبت دارای زیرمجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر لبگ است.

برهان. $\mathbb{Q}\trianglelefteq\mathbb{R}$. داریم

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}=\{x+\mathbb{Q}:\ \ x\in\mathbb{R}\}\quad \text{گردایه رده‌های هم‌ارزی}$$

فرض کنیم E مجموعه‌ای باشد که دقیقاً یک عضو از هر رده داشته باشد (اصل انتخاب) و لاغیر. ثابت می‌کنیم:

(a): اگر $r,s \in Q$ و $r \neq s$ آنگاه $(E+r) \cap (E+s) = \varnothing$.

(b): $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (E+r)$.

برای این منظور، فرض کنیم $x \in E+r = E+s$، $r,s \in Q$ و $r \neq s$ (فرض خلف). در نتیجه $y,z \in E$ موجودند بطوری که $x = y+r = z+s$. چون $r \neq s$ لذا $z \neq y$. اما $y-z = s-r \in \mathbb{Q}$، و در نتیجه y و z هر دو به یک ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارند، که این تناقض است.

حال فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$. داریم

$$\exists! y \in (x+\mathbb{Q}) \cap E \quad \Rightarrow \quad y \in E \;,\; y = x+r \quad (\exists r \in \mathbb{Q})$$
$$\Rightarrow \quad x = y-r \in E-r$$

فرض کنیم $t \in \mathbb{Q}$ دلخواه باشد. $A_t = A \cap (E+t)$ را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ فشرده و دلخواه K را $K \subseteq A_t$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$H = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (K+r)$$

H محدود است و $K+r \subseteq E+t+r$. پس اگر $r,s \in \mathbb{Q}$ و $r \neq s$، آنگاه $t+r \neq t+s$ و داریم

$$(K+r) \cap (K+s) \subseteq (E+t+r) \cap (E+t+s) = \varnothing$$

لذا

$$\infty > mH = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(K+r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} mK$$

پس $mK = 0$ و در نتیجه $mA_t = \sup_{K \subseteq A_t} mK = 0$ (K فشرده). اما

$$A = A \cap \mathbb{R} = A \cap \Big(\bigcup_{t \in \mathbb{Q}} (E+t) \Big) = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} A_t$$

بنابراین $mA \leq \sum_{t \in \mathbb{Q}} mA_t = 0$، که نتیجه می‌دهد $mA = 0$. این حکم را ثابت می‌کند. $\square$

۱.۴.۲ دترمینان

فرض کنیم $T:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ یک تبدیل خطی باشد. می‌دانیم عدد (منحصر بفرد) $\Delta T \geq 0$ موجود است به طوری که

$$mT(E) = (\Delta T)mE \qquad (E \in \mathfrak{M})$$

گیریم $\{e_1, \ldots, e_k\}$ پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^k$ و

$$Te_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} e_i \qquad (1 \leq j \leq k)$$

باشد. ماتریس $[T] = [\alpha_{ij}]$ را ماتریس معرف T نسبت به مبنای استاندارد می‌گوییم. بنا به تعریف

$$\det T := \det[T]$$

ثابت می‌کنیم که

$$\Delta T = |\det T| \tag{۱}$$

واضح است $\Delta T = m(TQ_0)$ که در آن $Q_0 = [0,1) \times \ldots \times [0,1)$، زیرا

$$m(TQ_0) = (\Delta T)mQ_0 = \Delta T$$

گیریم $T_1, T_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ خطی باشند. داریم

$$\Delta(T_1 \circ T_2) = m(T_1T_2Q_0) = \Delta(T_1)m(T_2Q_0) = (\Delta T_1)(\Delta T_2)$$

و

$$|\det T_1 \circ T_2| = |\det T_1||\det T_2|$$

بنابراین اگر (۱) برای T_1 و T_2 برقرار باشد برای T_1T_2 نیز برقرار است. اما هر تبدیل خطی ترکیبی از انواع زیر است:

(a): $\{Te_1, \ldots, Te_k\}$ جایگشتی از $\{e_1, \ldots, e_k\}$ است.

(b): $Te_1 = \alpha e_1$ و $Te_j = e_j$ $(j \geq 2)$.

(c): $Te_1 = e_1 + e_2$ و $Te_j = e_j$ $(j \geq 2)$.

بنابراین کافی است (۱) را فقط برای تبدیلات T به صورت فوق ثابت کنیم.

(a):

$$\Delta T = m(TQ_0) = mQ_0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |\det T| = |\pm 1| = 1 = \Delta T$$

(b):

$$|\det T| = |\alpha| \quad , \quad TQ_0 = \begin{cases} [0,\alpha) \times [0,1) \times \ldots \times [0,1) & \alpha > 0 \\ \{0\} \times [0,1) \times \ldots \times [0,1) & \alpha = 0 \\ (\alpha, 0] \times [0,1) \times \ldots \times [0,1) & \alpha < 0 \end{cases}$$

لذا $\Delta T = m(TQ_0) = |\alpha|$ و در نتیجه $|\det T| = |\alpha| = \Delta T$

(c): داریم

$$TQ_0 = \{(\xi_1, \ldots, \xi_k): \quad \xi_1 \leq \xi_2 < \xi_1 + 1 \quad , \quad 0 \leq \xi_i < 1 \quad (i \neq 2)\}$$

زیرا

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in TQ_0 \Longleftrightarrow \exists (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in Q_0 \quad , \quad (\xi_1, \ldots, \xi_k) = T(\eta_1, \ldots, \eta_k) \Longleftrightarrow$$

$$\exists (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in Q_0; \quad (\xi_1, \ldots, \xi_k) = \eta_1 Te_1 + \eta_2 Te_2 + \ldots + \eta_k Te_k$$

$$= \eta_1(e_1 + e_2) + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_k e_k = \eta_1 e_1 + (\eta_1 + \eta_2) e_2 + \ldots + \eta_k e_k \Longleftrightarrow$$

$$\exists (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in Q_0, \quad \xi_i = \eta_i \ (i \neq 2), \quad \xi_2 = \eta_1 + \eta_2 = \xi_1 + \eta_2 \Longleftrightarrow$$

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in [0,1) \times [\xi_1, \xi_1 + 1] \times \ldots \times [0,1)$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$S_1 = \{(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in TQ_0 : \quad \xi_2 < 1\} \quad , \quad S_2 = TQ_0 \backslash S_1$$

لذا $Q_0 = S_1 \cup (S_2 - e_2)$. بنابراین

$$\begin{aligned} \Delta T &= m(TQ_0) = m(S_1 \cup S_2) = mS_1 + mS_2 = mS_1 + m(S_2 - e_2) \\ &= m\big(S_1 \cup (S_2 - e_2)\big) = mQ_0 = 1 \end{aligned}$$

در نتیجه $\Delta T = 1 = |\det T|$.

ارتباط توابع اندازه‌پذیر با پیوستگی

سه ادعای لیتلوود در مورد اندازهٔ لبگ به شرح زیر است.

ادعای اول: هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر تقریباً یک مجموعهٔ باز است.

ادعای دوم: هر تابع اندازه‌پذیر تقریباً یک تابع پیوسته است.

ادعای سوم: هر همگرایی نقطه به نقطهٔ دنباله‌های توابع تقریباً همگرایی یکنواخت است.

با ادعای اول در ساخت اندازهٔ لبگ آشنا شدیم. به عنوان مثال هر مجموعهٔ لبگ— اندازه‌پذیر منظم خارجی است. در این بخش به بررسی ادعای دوم می‌پردازیم. ادعای سوم همان قضیهٔ ایگروف می‌باشد. بطور کلی، در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم μ یک اندازه بر فضای موضعاً فشرده و هاسدورف X با خواص قضیهٔ نمایش ریس باشد (μ بر یک $\sigma-$ جبر حاوی مجموعه‌های بورل تعریف شده است به طوری که شرایط (b)، (c) و (d) از قضیهٔ نمایش ریس برقرارند). بالاخص μ می‌تواند اندازهٔ لبگ بر $\mathbb{R}^k$ باشد.

قضیه ۵.۴.۲ (قضیهٔ لوزین) فرض کنیم $X \supseteq A$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با $\mu A < \infty$ باشد. حال اگر $f : X \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر و $(x \in A^c) \quad f(x) = 0$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ تابع $g \in C_c(X)$ هست که

$$\mu\{x :\ f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon \tag{۱}$$

بعلاوه می‌توان g را چنان اختیار کرد که

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \tag{۲}$$

برهان. **مرحلهٔ I.** فرض کنیم $0 \leq f < 1$ و A مجموعه‌ای فشرده باشد. توابع ساده، نامنفی و اندازه‌پذیر s_n مطابق با لم (۲٦.۱.۱) موجودند به طوری که $f \nearrow s_n$. قرار می‌دهیم $t_1 = s_1$ و $t_n = s_n - s_{n-1}$ $(n \geq 2)$. داریم $f = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$. مجموعهٔ $T_n \subseteq A$ موجود است به طوری که $2^n t_n = \chi_{T_n}$.

توضیح: چون $0 \leq f < 1$ برای $x \in X$ دلخواه $k \geq 0$ هست که $\frac{k}{2^{n-1}} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^{n-1}}$. بنابراین

$$t_n(x) = \begin{cases} 0 & \frac{2k}{2^n} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} & \frac{2k+1}{2^n} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^n} \end{cases}$$

لذا $t_n(x) = 0$ یا $t_n(x) = \frac{1}{2^n}$ و بنابراین $2^n t_n(x) = 0$ یا ۱. اکنون کافی است قرار دهیم

$$T_n = \{x :\ 2^n t_n(x) = 1\}$$

حال فرض کنیم مجموعهٔ باز V که $\overline{V}$ فشرده است، چنان باشد که $A \subseteq V(\subseteq \overline{V} \subseteq X)$. مجموعهٔ فشردهٔ K_n و باز V_n موجود می‌باشد که $K_n \subseteq T_n \subseteq V_n \subseteq V$ و $\mu(V_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. اکنون طبق لم اریزون h_n ای موجود است به طوری که $K_n \prec h_n \prec V_n$. قرار می‌دهیم

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x) \qquad (x \in X)$$

چون $|2^{-n}h_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ و $\sum \frac{1}{2^n} < \infty$، پس این سری بنا به $M-$ وایراشتراس همگرای یکنواخت است و لذا g تابعی پیوسته است.

$$\operatorname{supp}(g) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} h_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq V \subseteq \overline{V}$$

لذا $g \in C_c(X)$. اما

$$x \in K_n \subseteq T_n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2^n t_n(x) = 1 \\ h_n(x) = 1 \end{cases}$$

و

$$x \notin V_n(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2^n t_n(x) = 0 \\ h_n(x) = 0 \end{cases}$$

پس

$$2^{-n} h_n(x) = t_n(x) \qquad (x \notin V_n - K_n)$$

بنابراین اگر $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n - K_n)$ آنگاه $f(x) = g(x)$. اما

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n - K_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n - K_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

مرحلهٔ II. فرض کنیم f محدود و A فشرده باشد. داریم

$$f = f_1 + i f_2 = f_1^+ - f_1^- + i f_2^+ - i f_2^-$$

$M < \infty$ موجود است به طوری که $|f| < M$. پس

$$0 \leq \frac{f_1^+}{M}\ ,\ \frac{f_1^-}{M}\ ,\ \frac{f_2^+}{M}\ ,\ \frac{f_2^-}{M} \leq \Big|\frac{f}{M}\Big| < 1$$

لذا $g_1, g_2, g_3, g_4 \in C_c(X)$ موجود هستند به طوری که

$$\mu\Big\{x :\ \frac{f_1^+}{M}(x) \neq g_1(x)\Big\} < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\vdots$$

$$\mu\Big\{x:\ \frac{f_2^-}{M}(x)\neq g_4(x)\Big\}<\frac{\varepsilon}{4}$$

داریم $g:=M(g_1-g_2+ig_3-ig_4)\in C_c(X)$ و

$$\{x:f(x)\neq g(x)\}\subseteq\{x:f_1^+(x)\neq Mg_1(x)\}\cup\ldots\cup\{x:f_2^-(x)\neq Mg_4(x)\}$$

لذا

$$\mu\{x:f(x)\neq g(x)\}<\frac{\varepsilon}{4}+\ldots+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

مرحلهٔ III. f محدود و A دلخواه باشد. مجموعهٔ فشردهٔ K موجود است که $K\subseteq A$ و $\mu(A-K)<\frac{\varepsilon}{2}$. قرار می‌دهیم

$$f_1(x):=\begin{cases} f(x) & x\in K\\ 0 & x\notin K\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad f_1(x)=f(x)\quad(x\notin A-K)$$

K فشرده و f_1 محدود است . پس بنابر مرحلهٔ (II)، $g\in C_c(X)$ موجود است به طوری که $\mu\{x:f_1(x)\neq g(x)\}<\frac{\varepsilon}{2}$، و در نتیجه

$$\{x:f(x)\neq g(x)\}\subseteq(A-K)\cup\{x:f_1(x)\neq g(x)\}\ \Rightarrow\ \mu\{x:f(x)\neq g(x)\}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

مرحلهٔ IV **(مرحلهٔ کلی)**. تعریف می‌کنیم

$$B_n:=\{x:|f(x)|>n\}$$

اگر قرار دهیم $f_n=(1-\chi_{B_n})f$ آنگاه $|f_n(x)|\leq n<\infty$. چون $B_1\supseteq B_2\supseteq\ldots$، $\mu B_1\leq\mu(A)<\infty$ و $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\varnothing$، پس

$$\mu B_n\to\mu\varnothing=0\quad,\qquad\exists n;\ \ \mu B_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

بنابر مرحلهٔ (III)،

$$\exists g\in C_c(X);\quad\mu\{x:f_n(x)\neq g(x)\}<\frac{\varepsilon}{2}$$

لذا

$$\{x:f(x)\neq g(x)\}\subseteq B_n\cup\{x:f_n(x)\neq g(x)\}\ \Rightarrow\ \mu\{x:f(x)\neq g(x)\}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

برای اثبات قسمت دوم قضیه، قرار می‌دهیم:

$$0 \leq R = \sup_{x\in X} |f(x)| \leq \infty$$

تابع $\varphi : \mathbb{C} \to \{z : |z| \leq R\}$ با ضابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi(z) = \begin{cases} z & |z| \leq R \\ \frac{Rz}{|z|} & |z| > R \end{cases}$$

داریم

$$\mathbb{C} = \underbrace{\{z : |z| \leq R\}}_{B_1} \cup \underbrace{\{z : |z| \geq R\}}_{B_2}$$

φ بر B_1 و B_2 پیوسته و B_1 و B_2 بسته هستند. لذا بنابر لم چسب φ بر $\mathbb{C}$ پیوسته است. بنا به مرحلهٔ اول فرض می‌کنیم $g \in C_c(X)$ چنان باشد که $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$. قرار می‌دهیم $g_1 = \varphi \circ g$. g_1 پیوسته و $\mathrm{supp} g_1 \subseteq \mathrm{supp} g$. پس $g_1 \in C_c(X)$ و

$$\mu\{x : f(x) \neq g_1(x)\} \subseteq \{x : f(x) \neq g(x)\}$$

لذا $\mu\{x : f(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon$. داریم

$$x \in X \ \Rightarrow\ |g_1(x)| \leq R \ \Rightarrow\ \sup_{x\in X} |g_1(x)| \leq R = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

و (۲) برقرار است. □

نتیجه: با شرایط قضیهٔ لوزین، اگر $|f| \leq M < \infty$ آنگاه دنبالهٔ $\{g_n\}$ از عناصر $C_c(X)$ هست که $|g_n| \leq M$ و

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \quad a.e.$$

برهان.

$$\forall n \ \ \exists g_n \in C_c(X); \quad \mu \underbrace{\{x : f(x) \neq g_n(x)\}}_{E_n} < \frac{1}{2^n}$$

و $|g_n| \leq M$. اما

$$\sum_1^\infty \mu E_n < \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

پس تقریباً تمام x ها به تعداد متناهی از E_n ها متعلق‌اند. قرار می‌دهیم

$$B = \{x : \text{به بی‌نهایت از } E_n \text{ متعلق است } x\}$$

داریم $\mu B = 0$. اگر $x \notin B$ آنگاه N ای موجود است که $n > N$ نتیجه می‌دهد $x \notin E_n$، و لذا $g_n(x) = f(x) \quad (n > N)$. پس

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \qquad (x \notin B)$$

و حکم ثابت است. □

قضیه ۶.۴.۲ (قضیهٔ کاراتئودوری) فرض کنیم $f \in L^1(\mu)$ با مقادیر حقیقی و $\varepsilon > 0$ باشد. در این صورت توابع u و v هستند به طوری که u نیم‌پیوستهٔ بالایی و از بالا محدود است، v نیم‌پیوسته پایینی و از پایین محدود است، $u \leq f \leq v$ و

$$\int_X (v-u)d\mu < \varepsilon$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $f \geq 0$. می‌توان فرض کرد که f متحد با صفر نیست. توابع ساده و اندازه‌پذیر s_n موجودند به طوری که $0 \leq s_n \nearrow f$. تعریف می‌کنیم

$$t_n := s_n - s_{n-1} \quad , \quad s_0 = 0$$

داریم $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n$. هر t_n ساده، اندازه‌پذیر و نامفی است، لذا یک ترکیب خطی متناهی از توابع مشخصه با ضرایب نامنفی است. پس

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i} \tag{۱}$$

که در آن هر $c_i > 0$. از آنجا که

$$\infty > \int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu E_i$$

N ای هست که

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \mu E_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

چون به ازای هر i، $\mu E_i < \infty$ مجموعه‌های فشردهٔ K_i و باز V_i هستند که $K_i \subseteq E_i \subseteq V_i$ و $c_i \mu(V_i - K_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots)$. قرار می‌دهیم

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i} \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i}$$

u نیم‌پیوستهٔ بالایی و از بالا محدود است $(u \leq \sum_{i=1}^{N} c_i)$ و v نیم‌پیوستهٔ پایینی و از پایین محدود است $(0 \leq v)$.
همچنین داریم

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i} \leq \sum_{1}^{\infty} c_i \chi_{K_i} \leq \sum_{1}^{\infty} c_i \chi_{E_i} = f \leq \sum_{1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} = v$$

و

$$\begin{aligned} v - u &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{K_i} = \sum_{1}^{\infty} c_i \chi_{V_i - K_i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{K_i} \\ &\leq \sum_{1}^{\infty} c_i \chi_{V_i - K_i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_X (v-u) d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(V_i - K_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \mu E_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

در حالت کلی قرار می‌دهیم $f = f^+ - f^-$. داریم

$$\exists u_1, v_1; \qquad u_1 \leq f^+ \leq v_1$$

$$\exists u_2, v_2; \qquad u_2 \leq f^- \leq v_2$$

که در آن u_1 و u_2 نیم‌پیوستهٔ بالایی و از بالا محدود بوده و v_1 و v_2 نیم‌پیوسته پایینی و از پایین محدودند، و داریم

$$\int_X (v_1 - u_1) d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \int_X (v_2 - u_2) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین

$$u := \underbrace{u_1 - v_2}_{\text{نیم‌پیوسته بالایی}} \leq f = f^+ - f^- \leq \underbrace{v_1 - u_2}_{\text{نیم‌پیوسته پایینی}} := v$$

و

$$\int_X (v-u) d\mu = \int_X (v_1 - u_1) d\mu + \int_X (v_2 - u_2) d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□