مبتکران

آنالیز حقیقی و مختلط

نوشتهٔ
والتر رودین

ویرایش سوم

ترجمهٔ
دکتر علی اکبر عالم‌زاده

آنالیز حقیقی و مختلط

ویرایش سوم

نوشتهٔ

والتر رودین

ترجمهٔ

دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

پیشگفتار مترجم

زندگی پر از لحظات تلخ و شیرین است. عمر دیگر به‌ماه و سال نیست بلکه به‌همین لحظات است. جهان امروز چنان منقلب شده که تلخیها را تلختر و حلاوتها را کمتر ساخته است. دنیای امروز از بسیاری جهات با جوامع قبل متفاوت است. علم و تکنولوژی همه جا را گرفته و عقاید سنتی ما را به‌زیر سؤال برده است. ما فعالیتهای فیزیکی را یکسره به‌ماشین سپرده‌ایم و با فکر خود همه چیز را هدایت می‌کنیم. جهان دیگر جهان فکر است و نیاز به‌تقویت فکر از همهٔ اعصار بیشتر شده است. این فکر درواقع چیزی جز ریاضی نیست. ریاضیدان جهان فریبنده‌ای ساخته است که انعکاس نمادین یا مدل اطراف ما و تفکر راجع به‌آن است. این کتاب بخشی است از این مدل که ظرافت اعجاب‌آورش گویای پیچیدگی بیش از حد جهان اطراف می‌باشد.

امروزه حلاوت در کامیابی فکر و تلخی در ناکامی آن است. غم با آرامش فکر تسکین می‌یابد و یا از بین می‌رود. اگر غمی دارید به‌پیروزیهای فکر و اختراعات بزرگ پناه ببرید و اگر خیلی جانکاه است به‌ترجمهٔ فارسی کتاب «آنالیز حقیقی و مختلط رودین» فکر کنید.

علی‌اکبر عالم‌زاده
گروه آموزشی ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

راجع به‌مؤلف کتاب

والتر رودین مؤلف سه کتاب درسی به‌نامهای ***اصول آنالیز ریاضی***، ***آنالیز حقیقی و مختلط***، و ***آنالیز تابعی*** است که ترجمهٔ آنها به ۱۳ زبان گویای استفادهٔ وسیعشان می‌باشد. وی اولین کتاب را دو سال پس از دریافت درجهٔ دکتری از دانشگاه دوک (*Duke*) و در زمانی که در ام. آی. تی. مدرس سی. ال. ای. مور (*C. L. E. Moore*) بود نوشت. بعدها در دانشگاه روچستر (*Rochester*) تدریس کرد و از سال ۱۹۵۹ تا به‌حال استاد تحقیقاتی ویلاز (*Vilas Research Professor*) در دانشگاه ویسکونسین ـ مادیسون (*Wisconsin-Madison*) می‌باشد.

والتر رودین در دانشگاه ییل (*Yale*)، دانشگاه کالیفرنیا (*California*) در لاجولا (*Lajolla*)، و در دانشگاه هاوایی (*Hawaii*) فرصت مطالعاتی داشته است.

تحقیقات وی عمدتاً در آنالیز توافقی و متغیرهای مختلط است. او سه رسالهٔ تحقیقی در این مباحث نگاشته است که عبارتند از ***آنالیز فوریه در گروهها***، ***نظریهٔ توابع در چندقرصها***، و ***نظریهٔ توابع در گوی یکه در*** C^n.

«پیشگفتار مؤلف»

این کتاب ویژهٔ سال اول کارشناسی ارشد است که در آن روشها و قضایای اصلی آنالیز به‌نحوی ارائه شده‌اند که بر روابط بین شاخه‌های مختلف آن قویاً تأکید دارند. بدین‌ترتیب مباحث «آنالیز حقیقی» و «آنالیز مختلط» که معمولاً جدا تصور می‌شوند متحد می‌گردند. چند ایدهٔ اصلی نیز از آنالیز تابعی گنجانده شده است.

ذیلاً چند مثال از طرز بیان و استفاده از این روابط ذکر می‌شود. قضیهٔ نمایش ریس و قضیهٔ هان ـ باناخ اجازهٔ «حدس» فرمول انتگرال پواسون را به‌ما می‌دهد. این قضایا در برهان قضیهٔ رونگه با هم متحد می‌شوند، و در تلفیق با قضیهٔ بلاشکه راجع به‌صفرهای توابع هلوریخت کراندار برهانی از قضیهٔ مونتس ـ زاتس را به‌دست می‌دهند که راجع به‌تقریب بر یک بازهٔ بسته می‌باشد. از فضای هیلبرت بودن L^2 در برهان قضیهٔ رادون ـ نیکودیم استفاده می‌شود که به‌قضیه‌ای راجع به‌مشتقگیری از انتگرالهای نامعین منجر می‌گردد، و این خود وجود حدود شعاعی تابعهای توافقی کراندار را به‌ثبوت می‌رساند. قضایای پلانشرل و کُشی تلفیق شده و قضیه‌ای از پالی و وینر به‌دست می‌دهند که در قضیهٔ دنجوی ـ کارلمن راجع به‌توابع بی‌نهایت بار مشتقپذیر بر خط حقیقی به‌کار می‌رود. قضیهٔ مدول ماکزیمم اطلاعاتی از تبدیلات خطی بر فضاهای L^p به‌دست خواهد داد.

چون اغلب نتایج در اینجا نسبتاً کلاسیک‌اند (تازه بود نشان در نحوهٔ ترتیب آنهاست و بعضی از برهانها نیز جدید می‌باشند)، منبع اصلی هر مورد ذکر نشده است. مرجعها در آخر کتاب در بخش نکات و یادداشتها جمع شده‌اند. اینها همیشه به‌منابع اصلی اشاره نداشته و بلکه اغلب به‌کارهای جدیدتری ارجاع می‌دهند که مراجع دیگر را می‌توان در آنها یافت. در هیچ مورد عدم ذکر مرجع نشانهٔ تعلق مطلب به‌اینجانب نیست.

پیشنیاز این کتاب درس مناسبی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته است (اعمال در نظریهٔ مجموعه‌ها، فضاهای متری، پیوستگی یکنواخت، و همگرایی یکنواخت). هفت فصل اول کتاب قبلی‌ام «اصول آنالیز ریاضی» آمادگی کافی را خواهد داد.

تجربه در چاپ اول نشان می‌دهد که دانشجویان سال اول کارشناسی ارشد می‌توانند در دو ترم ۱۵ فصل اول را به‌انضمام چند مطلب از یکی یا دو فصل از ۵ فصل باقیمانده بخوانند. پنج فصل اخیر از سایر فصلها مستقل‌اند. ۱۵ فصل اول جز فصل ۹ (که می‌توان خواندنش را به‌تعویق انداخت) باید به‌همین‌ترتیب ارائه شوند.

مهمترین اختلاف بین ویرایش سوم و ویرایشهای قبل یک فصل کاملاً جدید راجع به‌مشتقگیری است. در اینجا نکات اصلی مربوط به‌مشتقگیری از وجود نقاط لبگ به‌دست می‌آیند که آن خود نتیجهٔ سادهٔ نامساوی «از نوع ضعیف» است که به‌وسیلهٔ توابع ماکزیمال از اندازه‌ها بر فضاهای اقلیدسی برقرار می‌شود. این روش قضایای نیرومندی را با کمترین زحمت به‌دست می‌دهد. حتی مهمتر آن است که شاگرد را با توابع ماکزیمال آشنا می‌سازد زیرا این تابعها در مباحث مختلفی از آنالیز موارد استعمال روزافزونی یافته‌اند.

یکی از اینها بررسی رفتار مرزی انتگرالهای پواسون است. یک مورد مربوطه راجع به‌فضاهای H^p می‌باشد. بدین‌ترتیب بخشهای وسیعی از فصلهای ۱۱ و ۱۷ بازنویسی شده‌اند و امیدوارم که عملاً ساده نیز شده باشند.

چند تغییر کوچکتر نیز برای اصلاح بعضی از جزئیات صورت گرفته است: مثلاً قسمتهایی از فصل ۴ ساده شده‌اند؛ مفاهیم همپیوستگی و همگرایی ضعیف با تفصیل بیشتر بیان گشته‌اند؛ و رفتار مرزی نگاشتهای همدیس به‌وسیلهٔ قضیهٔ لیندلف راجع به‌مقدار مجانبی توابع هلوریخت کراندار در یک قرص مطالعه شده‌اند.

در ۲۰ سال اخیر شاگردان و همکاران متعددی راجع به‌مطالب این کتاب پیشنهادات و انتقاداتی داشته‌اند. من خالصانه از همهٔ آنها تشکر کرده و کوشیده‌ام تا بعضی از انتقادات را به‌کار گیرم. در رابطه با این چاپ، از ریچارد روچبرگ (*Richard Rochberg*) به‌خاطر پیشنهاداتش در آخرین دقایق سپاسگزارم و به‌ویژه از رابرت بورکل (*Robert Burckel*) به‌خاطر مطالعهٔ دقیق تمام دستنویس کمال تشکر را دارم.

والتررودین
(Walter Rudin)

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
درآمد تابع نمایی	۱۳
فصل ۱ انتگرالگیری مجرد	۱۷
نمادها و اصطلاحات نظریهٔ مجموعه‌ها	۱۸
مفهوم اندازه‌پذیری	۲۰
توابع ساده	۲۸
خواص مقدماتی اندازه‌ها	۲۹
حساب در $[0, \infty]$	۳۲
انتگرالگیری از توابع مثبت	۳۳
انتگرالگیری از توابع مختلط	۳۸
نقش مجموعه‌های از اندازهٔ صفر	۴۱
تمرینات	۴۶
فصل ۲ اندازه‌های بورل مثبت	۴۸
فضاهای برداری	۴۸
مقدمات توپولوژیک	۵۰
قضیهٔ نمایش ریس	۵۶
خواص انتظام اندازه‌های بورل	۶۴
اندازهٔ لبگ	۶۶
خواص پیوستگی توابع اندازه‌پذیر	۷۳
تمرینات	۷۵
فصل ۳ فضاهای L^P	۸۱
توابع محدب و نامساویها	۸۱
فضاهای L^P	۸۵
تقریب به‌وسیلهٔ توابع پیوسته	۹۰
تمرینات	۹۲

عنوان | صفحه

فصل ۴ نظریهٔ مقدماتی فضای هیلبرت ۹۸

حاصل‌ضربهای داخلی و تابعیهای خطی ۹۸

مجموعه‌های متعامد یکه ۱۰۵

سریهای مثلثاتی ۱۱۲

تمرینات ۱۱۷

فصل ۵ چند نمونه از روشهای فضای باناخ ۱۲۰

فضاهای باناخ ۱۲۰

نتایج قضیهٔ بئر ۱۲۲

سریهای فوریهٔ توابع پیوسته ۱۲۶

ضرایب فوریهٔ توابع L^1 .... ۱۲۹

قضیهٔ هان ـ باناخ ۱۳۱

نگاهی مجرد به‌انتگرال پواسون ۱۳۵

تمرینات ۱۳۹

فصل ۶ اندازه‌های مختلط ۱۴۵

تغییر کل ۱۴۵

پیوستگی مطلق ۱۴۹

نتایج قضیهٔ رادون ـ نیکودیم ۱۵۵

تابعیهای خطی کراندار بر L^P ۱۵۷

قضیهٔ نمایش ریس ۱۶۰

تمرینات ۱۶۳

فصل ۷ مشتقگیری ۱۶۷

مشتق اندازه‌ها ۱۶۷

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱۷۶

تبدیلات مشتقپذیر ۱۸۳

تمرینات ۱۸۹

عنوان صفحه

فصل ۸ انتگرالگیری بر فضاهای حاصل‌ضربی ۱۹۵

اندازه‌پذیری بر حاصل‌ضربهای دکارتی ۱۹۵
اندازه‌های حاصل‌ضربی ۱۹۸
قضیهٔ فوبینی ۲۰۰
تتمیم اندازه‌های حاصل‌ضربی ۲۰۳
پیچشها ۲۰۶
توابع توزیع ۲۰۷
تمرینات ۲۱۰

فصل ۹ تبدیلات فوریه ۲۱۵

خواص صوری ۲۱۵
قضیهٔ انعکاس ۲۱۸
قضیهٔ پلانشرل ۲۲۲
جبر باناخ L^1 .... ۲۲۸
تمرینات ۲۳۱

فصل ۱۰ خواص مقدماتی توابع هلوریخت ۲۳۵

مشتقگیری مختلط ۲۳۵
انتگرالگیری روی مسیرها ۲۴۰
قضیهٔ کشی موضعی ۲۴۴
نمایش به‌سری توانی ۲۴۸
قضیهٔ نگاشت باز ۲۵۴
قضیهٔ کشی سراسری ۲۵۷
حساب مانده‌ها ۲۶۴
تمرینات ۲۶۸

فصل ۱۱ تابعهای توافقی ۲۷۳

معادلات کشی ـ ریمان ۲۷۳
انتگرال پواسون ۲۷۵

عنوان صفحه

خاصیت مقدار میانگین ۲۷۹
رفتار مرزی انتگرالهای پواسون ۲۸۱
قضایای نمایشی ۲۸۸
تمرینات ۲۹۳

فصل ۱۲ اصل مدول ماکزیمم ۲۹۸

آشنایی ۲۹۸
لم شوارتز ۲۹۹
روش فراگمن ـ لیندلف ۳۰۱
قضیهٔ درونیابی ۳۰۶
عکس قضیهٔ مدول ماکزیمم ۳۰۸
تمرینات ۳۱۰

فصل ۱۳ تقریب به‌وسیلهٔ توابع گویا ۳۱۳

آماده‌سازی ۳۱۳
قضیهٔ رونگه ۳۱۷
قضیهٔ میتاگ ـ لفلر ۳۲۰
نواحی همبند ساده ۳۲۱
تمرینات ۳۲۴

فصل ۱۴ نگاشت همدیس ۳۲۶

حفظ زوایا ۳۲۶
تبدیلات خطی کسری ۳۲۷
خانواده‌های نرمال ۳۳۰
قضیهٔ نگاشت ریمان ۳۳۱
ردهٔ $\mathscr{L}$ ۳۳۴
پیوستگی در مرز ۳۳۸
نگاشت همدیس از یک حلقه ۳۴۱
تمرینات ۳۴۲

عنوان | صفحه

فصل ۱۵ صفرهای توابع هلوریخت ۳۵۰

حاصل‌ضربهای نامتناهی ۳۵۰
قضیهٔ تجزیهٔ وایراشتراس ۳۵۳
مسئلهٔ درونیابی ۳۵۷
فرمول ینسن ۳۵۹
حاصل‌ضربهای بلاشکه ۳۶۳
قضیهٔ مونتس ـ زاتس ۳۶۶
تمرینات ۳۶۹

فصل ۱۶ تداوم تحلیلی ۳۷۴

نقاط منتظم و نقاط منفرد ۳۷۴
تداوم در امتداد منحنیها ۳۷۸
قضیهٔ تک میدانی ۳۸۲
ساختن یک تابع مدولی ۳۸۳
قضیهٔ پیکارد ۳۸۸
تمرینات ۳۸۹

فصل ۱۷ فضاهای H^p ۳۹۳

تابعهای زیرتوافقی ۳۹۳
فضاهای H^p و N ۳۹۵
قضیهٔ اف و ام. ریس ۴۰۰
فضاهای تجزیه ۴۰۰
عملگر انتقال ۴۰۵
توابع مزدوج ۴۱۰
تمرینات ۴۱۲

فصل ۱۸ نظریهٔ مقدماتی جبرهای باناخ ۴۱۶

آشنایی ۴۱۶
عنصرهای معکوسپذیر ۴۱۷

عنوان | صفحه

ایده‌آلها و همریختیها ۴۲۲
کاربردها ۴۲۶
تمرینات ۴۳۰

فصل ۱۹ تبدیلات فوریهٔ هلوریخت ۴۳۳

آشنایی ۴۳۳
دو قضیه از پالی و وینر ۴۳۵
رده‌های شبه ـ تحلیلی ۴۳۹
قضیهٔ دنجوی ـ کارلمن ۴۴۲
تمرینات ۴۴۶

فصل ۲۰ تقریب یکنواخت به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها ۴۴۹

آشنایی ۴۴۹
چند لم ۴۵۰
قضیهٔ مرگلیان ۴۵۳
تمرینات ۴۵۷

ضمیمه: قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف ۴۵۹

نکات و یادداشتها ۴۶۲

کتابنامه ۴۷۵

فهرست علایم و اختصارات ۴۷۹

واژه‌نامه فارسی به‌انگلیسی ۴۸۱

واژه‌نامه انگلیسی به‌فارسی ۴۹۰

فهرست راهنما ۵۰۲

درآمد

تابع نمایی

این تابع مهمترین تابع در ریاضیات است و به‌ازای هر عدد مختلط z با فرمول

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

تعریف می‌شود. سری (۱) به‌ازای هر z به‌طور مطلق و بر هر زیرمجموعهٔ کراندار صفحهٔ مختلط به‌طور یکنواخت همگراست. لذا exp یک تابع پیوسته می‌باشد. همگرایی مطلق (۱) نشان می‌دهد که محاسبهٔ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

درست است. از این روابط فرمول مهم جمع به‌دست می‌آید:

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \tag{2}$$

که به‌ازای جمیع اعداد مختلط a و b برقرار می‌باشد.

ما عدد e را مساوی $\exp(1)$ تعریف کرده و $\exp(z)$ را معمولاً با عبارت کوتاهتر و متداول e^z عوض می‌کنیم. توجه کنید که، بنابر (۱)، $e^0 = \exp(0) = 1$.

قضیه

(آ) به‌ازای هر عدد مختلط z داریم $e^z \neq ٠$.

(ب) exp مساوی مشتق خودش است: $\exp'(z) = \exp(z)$.

(پ) تحدید exp به‌محور حقیقی یک تابع مثبت صعودی بوده و وقتی $x \to \infty$، $e^x \to \infty$ و وقتی $x \to -\infty$، $e^x \to ٠$.

(ت) عدد مثبتی مانند π هست به‌طوری که $e^{\pi i/٢} = i$ و چنان است که $e^z = ١$ اگر و فقط اگر $z/(٢\pi i)$ عددی صحیح باشد.

(ث) exp یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $٢\pi i$ است.

(ج) نگاشت $t \to e^{it}$ محور حقیقی را به‌روی دایرهٔ یکه می‌نگارد.

(چ) هرگاه w عدد مختلطی بوده و $w \neq ٠$، آنگاه به‌ازای z ی داریم $w = e^z$.

برهان: بنابر رابطهٔ (٢)، $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^{٠} = ١$. این قسمت (آ) را ایجاب می‌کند. همچنین

$$\exp'(z) = \lim_{h \to ٠} \frac{\exp(z+h)-\exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{h \to ٠} \frac{\exp(h)-١}{h} = \exp(z) \cdot$$

اولین تساوی تعریف مشتق است، دومین تساوی از (٢) نتیجه می‌شود، و سومین تساوی از (١) حاصل می‌گردد، و بدین‌ترتیب قسمت (ب) ثابت می‌شود.

exp بر محور حقیقی مثبت صعودی بوده، و اینکه وقتی $x \to \infty$، $e^x \to \infty$ از رابطهٔ (١) واضح است. احکام دیگر (پ) نتایجی از $e^x \cdot e^{-x} = ١$ می‌باشند.

به‌ازای هر عدد حقیقی t، رابطهٔ (١) نشان می‌دهد که e^{-it} مزدوج مختلط e^{it} است. لذا

$$|e^{it}|^٢ = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^{٠} = ١$$

یا

$$|e^{it}| = ١ \quad (\text{حقیقی } t) \cdot \tag{٣}$$

به‌عبارت دیگر، اگر t حقیقی باشد، e^{it} بر دایرهٔ یکه واقع است. ما $\cos t$ و $\sin t$ را قسمتهای حقیقی و موهومی e^{it} تعریف می‌کنیم:

$$\cos t = \mathrm{Re}\,[e^{it}] \ ، \ \sin t = \mathrm{I_m}\,[e^{it}] \ (\text{حقیقی } t) \cdot \tag{۴}$$

اگر از طرفین اتحاد اویلر (*Euler*)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \tag{۵}$$

که هم‌ارز رابطهٔ (۴) است، مشتق گرفته و (ب) را به کار بریم، به‌دست می‌آوریم

$$\cos' t + i\sin' t = ie^{it} = -\sin t + i\cos t\,;$$

در نتیجه

$$\sin' = \cos \quad ، \quad \cos' = -\sin \cdot \qquad (۶)$$

سری توانی (۱) نمایش زیر را به‌ما می‌دهد:

$$\cos t = ۱ - \frac{t^۲}{۲!} + \frac{t^۴}{۴!} - \frac{t^۶}{۶!} + \cdots \cdot \qquad (۷)$$

فرض کنیم $t = ۲$. در این صورت قدرمطلق جملات سری (۷) (جز جملهٔ اول) نزول کرده و این جملات متناوباً تغییر علامت می‌دهند. لذا $\cos ۲$ از مجموع سه جملهٔ اول (۷) (به‌ازای $t = ۲$) کمتر است. پس $\cos ۲ < -\frac{۱}{۳}$. چون $\cos ۰ = ۱$ و $\cos$ یک تابع حقیقی پیوسته بر محور حقیقی است، نتیجه می‌گیریم که کوچکترین عدد مثبت $t_۰$ با خاصیت $\cos t_۰ = ۰$ وجود دارد. تعریف می‌کنیم

$$\pi = ۲t_۰ \cdot \qquad (۸)$$

از روابط (۳) و (۵) معلوم می‌شود که $\sin t_۰ = \pm ۱$. چون بر بازهٔ باز $(۰, t_۰)$

$$\sin'(t) = \cos t > ۰$$

و $\sin ۰ = ۰$، داریم $\sin t_۰ > ۰$. پس $\sin t_۰ = ۱$ و لذا

$$e^{\pi i/۲} = i \cdot \qquad (۹)$$

بنابراین $e^{\pi i} = i^۲ = -۱$ ، $e^{۲\pi i} = (-۱)^۲ = ۱$، و در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح n، $e^{۲\pi i n} = ۱$. همچنین قسمت (ث) بی‌درنگ به‌دست می‌آید:

$$e^{z + ۲\pi i} = e^z \cdot e^{۲\pi i} = e^z \qquad (۱۰)$$

هرگاه $z = x + iy$ و x و y حقیقی باشند، آنگاه $e^z = e^x e^{iy}$. پس $|e^z| = e^x$. اگر $e^z = ۱$، باید داشته باشیم $e^x = ۱$؛ درنتیجه $x = ۰$. برای اثبات اینکه $y/۲\pi$ باید یک عدد صحیح باشد، کافی است طبق (۱۰) نشان دهیم که اگر $۰ < y < ۲\pi$ ، $e^{iy} \neq ۱$.

فرض کنیم $۰ < y < ۲\pi$ و

$$e^{iy/۴} = u + iv \quad (\text{حقیقی } v \text{ و } u) \cdot \qquad (۱۱)$$

چون $۰ < y/۴ < \pi/۲$ ، داریم $u > ۰$ و $v > ۰$. همچنین

$$e^{iy} = (u + iv)^۴ = u^۴ - ۶u^۲v^۲ + v^۴ + ۴iuv\,(u^۲ - v^۲) \cdot \qquad (۱۲)$$

طرف راست (۱۲) فقط وقتی حقیقی است که $u^۲ = v^۲$؛ چون $u^۲+v^۲ = ۱$، این فقط وقتی رخ می‌دهد که $u^۲ = v^۲ = \frac{۱}{۲}$، و در این صورت (۱۲) نشان می‌دهد که

$$e^{iy} = -۱ \neq ۱ \cdot$$

این امر برهان (ت) را کامل خواهد کرد.

ما از قبل می‌دانیم که $t \to e^{it}$ محور حقیقی را **به‌توی** دایرهٔ یکه می‌نگارد. برای اثبات (ج)، w را طوری می‌گیریم که $|w| = ۱$. نشان می‌دهیم که به‌ازای tای حقیقی $w = e^{it}$. می‌نویسیم $w = u+iv$ که در آن u و v حقیقی‌اند و ابتدا فرض می‌کنیم $u \geq ۰$ و $v \geq ۰$. چون $u \leq ۱$، تعریف π نشان می‌دهد که tای هست که $۰ \leq t \leq \pi / ۲$ و $\cos t = u$. پس $\sin^۲ t = ۱-u^۲ = v^۲$، و چون به‌ازای $۰ \leq t \leq \pi / ۲$ ، $\sin t \geq ۰$، داریم $\sin t = v$. لذا $w = e^{it}$.

اگر $u < ۰$ و $v \geq ۰$، شرایط قبلی توسط $-iw$ برقرارند. لذا، به‌ازای tای حقیقی، $-iw = e^{it}$ ، و $w = e^{i(t+\pi/۲)}$. بالأخره، اگر $v < ۰$، دو حالت قبل نشان می‌دهند که به‌ازای tای حقیقی، $-w = e^{it}$ ؛ درنتیجه $w = e^{i(t+\pi)}$. این امر برهان (ج) را تمام خواهد کرد.

اگر $w \neq ۰$، قرار می‌دهیم $\alpha = w / |w|$. پس $w = |w| \alpha$. بنابر (پ)، عددی حقیقی مانند x هست که $|w| = e^x$. چون $|\alpha| = ۱$ ، قسمت (ج) نشان می‌دهد که به‌ازای yی حقیقی، $\alpha = e^{iy}$. لذا $w = e^{x+iy}$. این امر قسمت (چ) را ثابت کرده و قضیه را به‌آخر می‌رساند.

ما با انتگرال $(۱+x^۲)^{-۱}$ روی خط حقیقی مواجه خواهیم شد. برای محاسبهٔ آن قرار می‌دهیم $\varphi(t) = \sin t/\cos t$ در $(-\pi / ۲ , \pi / ۲)$. بنابر (۶)، $\varphi' = ۱+\varphi^۲$. لذا φ یک نگاشت صعودی از $(-\pi / ۲ , \pi / ۲)$ به‌روی $(-\infty, \infty)$ است و داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{۱+x^۲} = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \frac{\varphi'(t)\, dt}{۱+\varphi^۲(t)} = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} dt = \pi \cdot$$

فصل یک
انتگرالگیری مجرد

تا پایان قرن نوزدهم بسیاری از ریاضیدانان دریافته بودند که انتگرال ریمان ($Riemann$) (که در حساب دیفرانسیل و انتگرال آن را دیده‌اید) باید با نوع دیگری انتگرال که کلیتر و قابل انعطاف‌تر بوده و برای فرایندهای حدی مناسبتر باشد تعویض شود. مهمترین تلاشهایی که در این راستا شد از آن ژردان ($Jordan$)، بورل ($Borel$)، دبلیو. اچ. یانگ ($W.H.young$)، و لبگ ($Lebesgue$) بوده است. بعدها معلوم شد که انتگرال لبگ از سایر انتگرالها موفق‌تر می‌باشد.

ایدهٔ اصلی به‌طور خلاصه چنین است: انتگرال ریمان تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ را می‌توان با مجموعه‌هایی به‌شکل

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, m(E_i)$$

تقریب کرد که در آنها E_1، $\cdots$، E_n بازه‌های بستهٔ از هم جدایی‌اند که اجتماعشان $[a, b]$ است، $m(E_i)$ طول E_i است، و به‌ازای $i = 1, \cdots, n$، $t_i \in E_i$. لبگ دریافت که یک نظریهٔ انتگرالگیری کاملاً رضایت‌بخش در صورتی حاصل است که مجموعه‌های E_i در مجموع فوق در ردهٔ وسیعتری از زیرمجموعه‌های خط به‌نام «مجموعه‌های اندازه‌پذیر» جا داشته و ردهٔ توابع مورد نظر به‌رده‌ای که وی «توابع اندازه‌پذیر» نامید وسعت یابند. خواص مجموعه‌ای مهم در این رابطه به‌قرار زیرند: اجتماع و اشتراک هر خانوادهٔ شمارشپذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر اندازه‌پذیر است؛ متمم هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر اندازه‌پذیر است؛ و، مهمتر از همه، مفهوم «طول» (که اینک «اندازه» نامیده می‌شود) را می‌توان چنان تعمیم داد که به‌ازای هر گردایهٔ شمارشپذیر

$\{E_i\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دو به‌دو از هم جدا،

$$m(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots) = m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) + \cdots.$$

این خاصیت m را خاصیت **جمعی شمارشپذیر** می‌نامند.

عبور از نظریهٔ انتگرالگیری ریمان به‌نظریهٔ لبگ یک فرایند تتمیم (به‌معنیی که بعدها دقیقتر می‌شود) است. اهمیت این کار در آنالیز مانند ساختن دستگاه اعداد حقیقی از اعداد گویا می‌باشد.

البته اندازهٔ m فوق‌الذکر با هندسهٔ خط حقیقی رابطهٔ نزدیکی دارد. در این فصل انتگرال لبگ را به‌صورت مجرد (اصل موضوعی) نسبت به **هر** اندازهٔ جمعی شمارشپذیر بر **هر** مجموعه عرضه می‌کنیم. (تعاریف دقیق بعدها می‌آیند.) این نظریهٔ مجرد به‌هیچوجه از حالت خاص خط حقیقی مشکلتر نیست. این نظریه نشان می‌دهد که بخش وسیعی از نظریهٔ انتگرالگیری از هندسه (یا توپولوژی) فضای زمینه مستقل است؛ و این البته به‌ما ابزاری با کاربرد بسیار وسیعتر خواهد بخشید. وجود ردهٔ وسیعی از اندازه‌ها، که اندازهٔ لبگ در میان آنهاست، در فصل ۲ ثابت خواهد شد.

نمادها و اصطلاحات نظریهٔ مجموعه‌ها

۱.۱. بعضی از مجموعه‌ها را می‌توان با ذکر اعضایشان توصیف کرد. مثلاً $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعه‌ای است که اعضایش x_1، $\cdots$، x_nاند؛ و $\{x\}$ مجموعه‌ای است که تنها عضوش x است. مجموعه‌ها اغلب با خواص توصیف می‌شوند. می‌نویسیم

$$\{x : P\}$$

و این مجموعهٔ تمام عناصر x با خاصیت P است. علامت $\varnothing$ نمایش مجموعهٔ تهی است. واژه‌های ***گردایه***، ***خانواده***، و **رده** مترادف **مجموعه** به‌کار می‌روند.

اگر x عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $x \in A$؛ در غیر این صورت می‌نویسیم $x \notin A$. اگر B زیرمجموعهٔ A باشد، یعنی $x \in B$ رابطهٔ $x \in A$ را ایجاب کند، می‌نویسیم $B \subset A$. هرگاه $B \subset A$ و $A \subset B$، آنگاه $A = B$. اگر $B \subset A$ و $A \neq B$، B **زیرمجموعهٔ حقیقی** A است. توجه کنید که به‌ازای هر مجموعهٔ A، $\varnothing \subset A$.

$A \cup B$ و $A \cap B$ به‌ترتیب اجتماع و اشتراک A و Bاند. اگر $\{A_\alpha\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد که در آن α در یک مجموعهٔ اندیسگذار مانند I تغییر می‌کند، منظور از

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{و} \quad \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

یعنی اجتماع و اشتراک $\{A_\alpha\}$:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x\in A_\alpha \text{ ، } \alpha\in I \text{ به‌ازای دست کم یک }\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x\in A_\alpha \text{ ، } \alpha\in I \text{ به‌ازای هر }\}$$

اگر I مجموعهٔ **تمام** اعداد صحیح مثبت باشد، نمادهای متداول خواهند بود

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{و} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cdot$$

هرگاه هیچ دو عضو $\{A_\alpha\}$ عنصر مشترک نداشته باشند، آنگاه $\{A_\alpha\}$ یک ***گردایهٔ از هم‌جدا*** از مجموعه‌ها می‌باشد.

می‌نویسیم $A-B=\{x : x\notin B \text{ و } x\in A\}$ و وقتی از قراین معلوم باشد که نسبت به‌کدام مجموعهٔ بزرگتر متمم می‌گیریم، متمم A را با A^c نشان می‌دهیم.

حاصل ضرب دکارتی $A_1\times\cdots\times A_n$ از مجموعه‌های A_1، $\cdots$، A_n مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب $(a_1,\cdots,a_n)$ است که به‌ازای $i=1,\cdots,n$، $a_i\in A_i$.

خط حقیقی (یا دستگاه اعداد حقیقی) عبارت است از R^1، و

$$R^k = R^1\times\cdots\times R^1 \quad (\text{عامل } k)\ \cdot$$

دستگاه اعداد حقیقی وسعت‌یافته عبارت است از R^1 با دو علامت ∞ و $-\infty$ و با ترتیب آشکار. اگر $-\infty\le a\le b\le\infty$، ***بازهٔ بستهٔ*** $[a,b]$ و ***بازهٔ باز*** (a,b) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[a,b]=\{x : a\le x\le b\} \quad \text{و} \quad (a,b)=\{x : a<x<b\}\ \cdot$$

همچنین می‌نویسیم

$$[a,b)=\{x : a\le x<b\} \quad \text{و} \quad (a,b]=\{x : a<x\le b\}\ \cdot$$

اگر $E\subset[-\infty,\infty]$ و $E\neq\varnothing$، کوچکترین کران بالایی (سوپرمم) و بزرگترین کران پایینی (اینفیمم) E در $[-\infty,\infty]$ وجود دارند و با $\sup E$ و $\inf E$ نموده می‌شوند. گاهی (ولی فقط وقتی $\sup E\in E$) به‌جای $\sup E$ می‌نویسیم $\max E$. علامت

$$f : X\to Y$$

یعنی f یک ***تابع*** (یا ***نگاشت*** یا ***تبدیل***) از مجموعهٔ X به‌توی مجموعهٔ Y است؛ یعنی f به‌هر عنصر $x\in X$ $f(x)\in Y$ را منتسب می‌کند. اگر $A\subset X$ و $B\subset Y$، ***نقش*** A و ***نقش معکوس*** (یا پیش نقش) B عبارتند از

$$f(A) = \{y : y = f(x) \quad \text{به‌ازای}\ x \in A\ \text{ی}\} \cdot$$

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\} \cdot$$

توجه کنید که $f^{-1}(B)$ حتی وقتی $B \neq \varnothing$ ممکن است تهی باشد.

قلمرو f عبارت است از X و **برد** f عبارت است از $f(X)$.

اگر $f(X) = Y$، گوییم f مجموعهٔ X را **به‌روی** Y می‌نگارد.

به‌ازای هر $y \in Y$ به‌جای $f^{-1}(\{y\})$ می‌نویسیم $f^{-1}(y)$. اگر $f^{-1}(y)$ به‌ازای هر $y \in Y$ حداکثر از یک نقطه تشکیل شده باشد، گوییم f **یک به‌یک** است. هرگاه f یک به‌یک باشد، آنگاه f^{-1} تابعی با قلمرو $f(X)$ و برد X می‌باشد.

اگر $f : X \to [-\infty, \infty]$ و $E \subset X$، معمولاً به‌جای $\sup f(E)$ می‌نویسند $\sup_{x \in E} f(x)$.

اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$، **تابع مرکب** $g\circ f : X \to Z$ با فرمول

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \ (x \in X)$$

تعریف می‌شود.

هرگاه برد f در خط حقیقی (یا در صفحهٔ مختلط) واقع باشد، گوییم f یک **تابع حقیقی** (یا یک **تابع مختلط**) است. به‌ازای تابع مختلط f، "$f \geq 0$" یعنی جمیع مقادیر $f(x)$ از f اعداد حقیقی نامنفی می‌باشند.

مفهوم اندازه‌پذیری

ردهٔ توابع اندازه‌پذیر نقشی اساسی در نظریهٔ انتگرالگیری دارد. این رده با ردهٔ بسیار مهم دیگر توابع، یعنی توابع پیوسته، در چند خاصیت اصلی سهیم‌اند. توجه به‌این تشابهات سودمند می‌باشد. لذا بحث به‌گونه‌ای است که بر تشابهات بین مفاهیم ***فضای توپولوژیک***، ***مجموعهٔ باز***، و ***تابع پیوسته*** از یک سو و ***فضای اندازه‌پذیر***، ***مجموعهٔ اندازه‌پذیر***، و ***تابع اندازه‌پذیر*** از سوی دیگر تأکید بسیار خواهیم داشت. روابط بین این مفاهیم وقتی وضوح کامل می‌یابند که زمینه کاملاً مجرد باشد، و این امر (نه اشتیاق برای تعمیم صرف) است که انگیزهٔ شیوهٔ بحث ما خواهد بود.

۲.۱ تعریف

(آ) گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X را یک **توپولوژی** در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

(یک) $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$؛

(دو) هرگاه به‌ازای $i = 1, \cdots, n$، $V_i \in \tau$، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$؛

(سه) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایهٔ دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارشپذیر، یا شمارش‌ناپذیر) باشد، آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

(ب) هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک **فضای توپولوژیک** و اعضای τ را **مجموعه‌های باز** در X می‌نامند.
(پ) هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، آنگاه گوییم f **پیوسته** است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ مجموعهٔ بازی در X باشد.

۳.۱ تعریف

(آ) گردایهٔ $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X را یک σـ **جبر** در X نامیم اگر $\mathfrak{M}$ از خواص زیر بهره‌مند باشد:

(یک) $X \in \mathfrak{M}$؛

(دو) هرگاه $A \in \mathfrak{M}$، آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

(سه) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $A_n \in \mathfrak{M}$، آنگاه $A \in \mathfrak{M}$.

(ب) هرگاه $\mathfrak{M}$ یک σ ـ جبر در X باشد، آنگاه X را یک **فضای اندازه‌پذیر** و اعضای $\mathfrak{M}$ را **مجموعه‌های اندازه‌پذیر** در X می‌نامیم.

(پ) هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیک، و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، آنگاه گوییم f **اندازه‌پذیر** است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

شاید اطلاق «فضای اندازه‌پذیر» به‌جفت مرتب $(X, \mathfrak{M})$ تا X مناسبتر باشد. بالأخره X یک مجموعه است و با داشتن یک σ ـ جبر از زیرمجموعه‌هایش تغییری نمی‌کند. به‌همین نحو، یک فضای توپولوژیک جفت مرتبی است مانند (X, τ). ولی اگر بخواهیم این کارهای اصولی در سراسر ریاضیات صورت گیرد، اصطلاحات پرمشغله می‌شوند. ما این امر را با تفصیل بیشتر در بخش ۲۱.۱ مجدداً مطرح می‌کنیم.

۴.۱ نکاتی راجع به تعریف ۲.۱. متداولترین فضاهای توپولوژیک **فضاهای متری** اند. ما آشنایی با فضاهای متری را دانسته گرفته ولی، به‌خاطر کامل بودن بحث، تعاریف اصلی آنها را ذکر می‌کنیم.

یک **فضای متری** مجموعه‌ای است مانند X که در آن یک **تابع فاصله** (یا **متر**) مانند ρ با خواص زیر تعریف شده است:

(آ) به‌ازای هر x و y در X ، $0 \le \rho(x, y) < \infty$ ؛

(ب) $\rho(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

(پ) به‌ازای هر x و y در X ، $\rho(x, y) = \rho(y, x)$؛

(ت) به‌ازای هر x و y و z در X ، $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

خاصیت (ت) **نامساوی مثلثی** نام دارد.

اگر $x \in X$ و $r \geq 0$، **گوی باز** به‌مرکز x و شعاع r عبارت است از مجموعهٔ $\{y \in X: \rho(x,y) < r\}$.

هرگاه X یک فضای متری بوده و τ گردایهٔ تمام مجموعه‌های $E \subset X$ باشد که اجتماعهای دلخواه گویهای بازند، آنگاه τ یک توپولوژی در X است. اثبات این امر مشکل نیست. خاصیت اشتراک تابع این امر است که اگر $x \in B_1 \cap B_2$ که در آن B_1 و B_2 گویهایی بازند، x مرکز گوی‌بازی مانند $B \subset B_1 \cap B_2$ می‌باشد ما این مطلب را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

مثلاً در خط حقیقی R^1 یک مجموعه باز است اگر و فقط اگر اجتماع بازه‌های باز (a, b) باشد. در صفحهٔ R^2 مجموعه‌های باز عبارتند از اجتماع قرصهای مستدیر باز.

فضای توپولوژیک دیگری که کراراً به‌آن برمی‌خوریم خط حقیقی وسعت یافتهٔ $[-\infty, \infty]$ است. توپولوژی آن به‌این صورت تعریف می‌شود که مجموعه‌های (a, b)، $[-\infty, a)$، $(a, \infty]$، و هر اجتماع از این نوع بازه‌ها را باز می‌گیریم.

تعریف پیوستگی مذکور در بخش ۲.۱ قسمت (پ) یک تعریف کلی است. گاهی شایسته است که پیوستگی به‌طور موضعی تعریف شود. نگاشت f از X به‌توی Y را **در نقطهٔ** $x_0 \in X$ **پیوسته** گوییم اگر به‌هر همسایگی V از $f(x_0)$ یک همسایگی مانند W از x_0 نظیر باشد که $f(W) \subset V$.

(طبق تعریف، هر **همسایگی** نقطهٔ x یک مجموعهٔ باز شامل x می‌باشد.)

وقتی X و Y فضاهایی متری‌اند، این تعریف موضعی همان تعریف معمولی اپسیلون ـ دلتا است و هم‌ارز آن است که بگوییم اگر در X داشته باشیم $\lim x_n = x_0$، در Y خواهیم داشت $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

حکم سادهٔ زیر تعاریف موضعی و کلی پیوستگی را به‌نحوی منتظره به‌هم ربط می‌دهد.

۵.۱ حکم. ***فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. نگاشت f از X به‌توی Y پیوسته است اگر و فقط اگر f در هر نقطه از X پیوسته باشد.***

برهان. هرگاه f پیوسته بوده و $x_0 \in X$، آنگاه $f^{-1}(V)$ به‌ازای هر همسایگی V از $f(x_0)$ یک همسایگی x_0 است. چون $f(f^{-1}(V)) \subset V$، پس f در x_0 پیوسته می‌باشد.

اگر f در هر نقطه از X پیوسته بوده و V در Y باز باشد، هر نقطهٔ $x \in f^{-1}(V)$ یک همسایگی مانند W_x دارد که $f(W_x) \subset V$. لذا $W_x \subset f^{-1}(V)$. پس $f^{-1}(V)$ اجتماع مجموعه‌های باز W_x است؛ در نتیجه $f^{-1}(V)$ خود باز می‌باشد. بنابراین f پیوسته خواهد بود.

۶.۱ نکاتی راجع به‌تعریف ۳.۱. فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک σ ـ جبر در مجموعهٔ X باشد. با توجه به‌خواص (یک) تا (سه) تعریف ۳.۱ قسمت (آ)، نکات زیر بی‌درنگ حاصل می‌شوند.

(آ) چون $\varnothing = X^c$، از (یک) و (دو) نتیجه می‌شود که $\varnothing \in \mathfrak{M}$.

(ب) با فرض $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$ در (سه) معلوم می‌شود که اگر به‌ازای $i=1,\cdots,n$، $A_i\in\mathfrak{M}$، داریم $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\in\mathfrak{M}$.

(پ) چون

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c ,$$

$\mathfrak{M}$ تحت تشکیل اشتراکهای شمارشپذیر (و نیز متناهی) بسته است.

(ت) از آنجا که $A-B=B^c\cap A$، اگر $A\in\mathfrak{M}$ و $B\in\mathfrak{M}$، داریم $A-B\in\mathfrak{M}$.

پیشوند σ اشاره به‌این دارد که (سه) باید به‌ازای جمیع اجتماعهای **شمارشپذیر** از اعضای $\mathfrak{M}$ برقرار باشد. هرگاه (سه) فقط برای اجتماعهای متناهی برقرار باشد، $\mathfrak{M}$ را یک **جبر** مجموعه‌ها می‌نامیم.

• ۷.۱ قضیه. ***فرض کنیم Y و Z فضاهایی توپولوژیک بوده و $g:Y\to Z$ پیوسته باشد.***

(آ) هرگاه X یک فضای توپولوژیک و $f:X\to Y$ پیوسته بوده و $h=g\circ f$. آنگاه $h:X\to Z$ نیز پیوسته است.

(ب) هرگاه X یک‌فضای اندازه‌پذیر و $f:X\to Y$ اندازه‌پذیر بوده و $h=g\circ f$، آنگاه $h:X\to Z$ نیز اندازه‌پذیر است.

به‌بیانِ غیرصوری، توابع پیوسته از توابع پیوسته پیوسته‌اند و توابع پیوسته از توابع اندازه‌پذیر اندازه‌پذیر می‌باشند.

برهان. هرگاه V در Z باز باشد، آنگاه $g^{-1}(V)$ در Y باز است و

$$h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))\cdot$$

اگر f پیوسته باشد، $h^{-1}(V)$ باز است و (آ) را ثابت می‌کند. اگر f اندازه‌پذیر باشد، $h^{-1}(V)$ اندازه‌پذیر است و (ب) را ثابت خواهد کرد.

۸.۱ قضیه. ***فرض کنیم u و v توابعی اندازه‌پذیر و حقیقی بر فضای اندازه‌پذیر X بوده و Φ یک نگاشت پیوسته از صفحه به‌توی فضای توپولوژیک Y باشد، و به‌ازای $x\in X$ تعریف می‌کنیم***

$$h(x)=\Phi\,(u(x),v(x))\cdot$$

در این صورت $h:X\to Y$ اندازه‌پذیر می‌باشد.

برهان. قرار می‌دهیم $f(x)=(u(x),v(x))$. f مجموعهٔ X را به‌توی صفحه می‌نگارد. چون $h=\Phi\circ f$، بنابر قضیهٔ ۷.۱ کافی است اندازه‌پذیری f را ثابت کنیم.

هرگاه R یک مستطیل باز در صفحه باشد که اضلاعش موازی محورهایند، آنگاه R حاصل‌ضرب دکارتی دو بازهٔ باز $I_۱$ و $I_۲$ است، و

$$f^{-۱}(R) = u^{-۱}(I_۱) \cap v^{-۱}(I_۲)$$

که طبق فرض ما راجع به u و v اندازه‌پذیر است. هر مجموعهٔ باز V در صفحه اجتماع شمارشپذیری از این مستطیلهای R_i است، و چون

$$f^{-۱}(V) = f^{-۱}\Big(\bigcup_{i=۱}^{\infty} R_i\Big) = \bigcup_{i=۱}^{\infty} f^{-۱}(R_i)\,,$$

$f^{-۱}(V)$ اندازه‌پذیر می‌باشد.

۹.۱. فرض کنیم X یک فضای اندازه‌پذیر باشد. احکام زیر نتایجی از قضایای ۷.۱ و ۸.۱ می‌باشند.

(آ) هرگاه $f = u+iv$ که در آن u و v *توابعی اندازه‌پذیر* و حقیقی بر Xاند، آنگاه f یک تابع *اندازه‌پذیر مختلط* بر X می‌باشد.

این امر از قضیهٔ ۸.۱ به‌ازای $\Phi(z) = z$ نتیجه می‌شود.

(ب) هرگاه $f = u+iv$ یک تابع *اندازه‌پذیر مختلط* بر X باشد، آنگاه u، v، و $|f|$ توابعی *اندازه‌پذیر* و حقیقی بر X می‌باشند.

این امر از قضیهٔ ۷.۱ به‌ازای $\mathrm{Re}(z)$، $\mathrm{Im}(z)$، و $g(z) = |z|$ نتیجه می‌شود.

(پ) هرگاه f و g توابعی *اندازه‌پذیر* و مختلط بر X باشند، آنگاه $f+g$ و fg نیز چنین‌اند.

این امر به‌ازای f و g حقیقی از قضیهٔ ۸.۱ به‌ازای $\Phi(s, t) = s+t$ و $\Phi(s, t) = st$ نتیجه می‌شود. سپس حالت مختلط از (آ) و (ب) حاصل خواهد شد.

(ت) هرگاه E یک مجموعهٔ *اندازه‌پذیر* در X بوده و

$$\chi_E(x) = \begin{cases} ۱ \text{ ،} & x \in E \text{ اگر} \\ ۰ \text{ ،} & x \notin E \text{ اگر} \end{cases}$$

آنگاه χ_E یک تابع *اندازه‌پذیر* می‌باشد.

این امر واضح است. ما χ_E را **تابع مشخص** مجموعهٔ E نامیده و حرف χ را در سراسر کتاب برای توابع مشخص حفظ می‌کنیم.

(ث) اگر f یک تابع *اندازه‌پذیر مختلط* بر X باشد، یک تابع *اندازه‌پذیر مختلط* مانند α بر X هست به‌طوری‌که $|\alpha| = ۱$ و $f = \alpha|f|$.

برهان. فرض کنیم $E = \{x : f(x) = ۰\}$ و Y صفحهٔ مختلط باشد که مبدأ از آن برداشته شده

است. به‌ازای $z \in y$ تعریف می‌کنیم $\varphi(z) = z / |z|$ و قرار می‌دهیم

$$\alpha(x) = \varphi(f(x) + \chi_E(x)) \quad (x \in E) \cdot$$

اگر $x \in E$، $\alpha(x) = 1$؛ اگر $x \notin E$، $\alpha(x) = f(x) / |f(x)|$. چون φ بر Y پیوسته و E اندازه‌پذیر است (چرا؟)، اندازه‌پذیری α از (پ)، (ت)، و قضیهٔ ۷.۱ نتیجه می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که $\sigma-$ جبرها به‌وفور موجودند.

۱۰.۱ قضیه. *اگر $\mathscr{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، کوچکترین $\sigma-$ جبر در X مانند $\mathfrak{M}^*$ موجود است به‌طوری‌که $\mathscr{F} \subset \mathfrak{M}^*$.*

گاهی این $\mathfrak{M}^*$ را $\sigma-$ جبر **تولید شده به‌وسیلهٔ** $\mathscr{F}$ می‌نامند.

برهان. فرض کنیم Ω خانوادهٔ تمام $\sigma-$ جبرهای $\mathfrak{M}$ در X باشد که شامل $\mathscr{F}$ اند. چون گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های X یک چنین $\sigma-$ جبر است، Ω تهی نیست. فرض کنیم $\mathfrak{M}^*$ اشتراک تمام $\mathfrak{M} \in \Omega$ ها باشد. واضح است که $\mathscr{F} \subset \mathfrak{M}^*$ و $\mathfrak{M}^*$ در هر $\sigma-$ جبر در X که شامل $\mathscr{F}$ باشد قرار دارد. برای اتمام برهان باید نشان دهیم که $\mathfrak{M}^*$ خود یک $\sigma-$ جبر است.

هرگاه به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $A_n \in \mathfrak{M}^*$ و نیز $\mathfrak{M} \in \Omega$، آنگاه $A_n \in \mathfrak{M}$؛ درنتیجه $\cup A_n \in \mathfrak{M}$ زیرا $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر است. چون به‌ازای **هر** $\mathfrak{M} \in \Omega$، $\cup A_n \in \mathfrak{M}$، نتیجه می‌گیریم که $\cup A_n \in \mathfrak{M}^*$. دو خاصیت معرف دیگر $\sigma-$ جبر به‌همین نحو تحقیق می‌شوند.

۱۱.۱ مجموعه‌های بورل. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیهٔ ۱۰.۱، کوچکترین $\sigma-$ جبر مانند $\mathscr{B}$ در X هست به‌طوری که هر مجموعهٔ باز در X متعلق به $\mathscr{B}$ است. اعضای $\mathscr{B}$ را **مجموعه‌های بورل** X می‌نامند.

بخصوص، مجموعه‌های بسته مجموعه‌های بورل‌اند (زیرا، طبق تعریف، متمم مجموعه‌های باز می‌باشند)؛ و همچنین است تمام اجتماعهای شمارشپذیر از مجموعه‌های بسته و تمام اشتراکهای شمارشپذیر از مجموعه‌های باز. دو دسته مجموعه‌های اخیر را به‌ترتیب F_σها و G_δها می‌نامیم و نقش مهمی بر عهده خواهند داشت. این نمادها از آن هاسدورف (*Hausdorff*) است. حروف F و G به‌ترتیب برای مجموعه‌های بسته و باز به‌کار رفته‌اند و σ اشاره به‌اجتماع (*Summe*) و δ اشاره به‌اشتراک (*Durchschnitt*) دارد. مثلاً هر بازهٔ نیمباز $[a,b)$ یک G_δ و یک F_σ در R^1 است.

چون $\mathscr{B}$ یک $\sigma-$ جبر است، می‌توان X را یک فضای اندازه‌پذیر گرفت که در آن مجموعه‌های بورل نقش مجموعه‌های اندازه‌پذیر را دارند. به‌طور خلاصه، فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathscr{B})$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $f: X \to Y$ یک نگاشت پیوسته از X بوده و Y یک فضای

توپولوژیک باشد، آنگاه از تعاریف واضح است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}$. به‌عبارت دیگر، **هر نگاشت پیوسته از X اندازه‌پذیر بورل می‌باشد.**

نگاشتهای اندازه‌پذیر بورل را اغلب **نگاشتهای بورل** یا **توابع بورل** می‌نامند.

۱۲.۱ قضیه. *فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X و Y یک فضای توپولوژیک باشد. همچنین f مجموعهٔ X را به‌توی Y بنگارد.*

(آ) هرگاه Ω گردایهٔ تمام مجموعه‌های $E \subset Y$ باشد که $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$، آنگاه Ω یک $\sigma-$ جبر در Y است.

(ب) هرگاه f اندازه‌پذیر و E یک مجموعهٔ بورل در Y باشد، آنگاه $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

(پ) هرگاه $Y = [-\infty, \infty]$ و به‌ازای هر α ی حقیقی، $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}$، آنگاه f اندازه‌پذیر می‌باشد.

(ت) هرگاه f اندازه‌پذیر و Z یک فضای توپولوژیک و $g: Y \to Z$ یک نگاشت بورل بوده و $h = g\circ f$، آنگاه $h: X \to Z$ اندازه‌پذیر است.

قسمت (پ) محکی است که کراراً برای اندازه‌پذیری توابع حقیقی به‌کار می‌رود. (همچنین ر.ک. تمرین ۳.) توجه کنید که (ت) تعمیم قسمت (ب) قضیهٔ ۷.۱ می‌باشد.

برهان. (آ) از روابط

$$f^{-1}(Y) = X,$$

$$f^{-1}(Y-A) = X - f^{-1}(A),$$

و

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \cdots$$

نتیجه می‌شود.

برای اثبات (ب) فرض کنیم Ω همانند در (آ) باشد. اندازه‌پذیری f ایجاب می‌کند که Ω شامل تمام مجموعه‌های باز در Y باشد، و چون Ω یک $\sigma-$ جبر است، Ω شامل تمام مجموعه‌های بورل در Y می‌باشد.

برای اثبات (پ) فرض کنیم Ω گردایهٔ تمام $E \subset [-\infty, \infty]$ هایی باشد که $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$. عدد حقیقی α را اختیار کرده و $\alpha_n < \alpha$ را چنان می‌گیریم که وقتی $n \to \infty$، $\alpha_n \to \alpha$. چون به‌ازای هر n، $(\alpha_n, \infty] \in \Omega$ و

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \infty]^c$$

و نیز (آ) $\sigma-$ جبر بودن Ω را نشان می‌دهد، معلوم می‌شود که $[-\infty, \alpha) \in \Omega$. همین امر در مورد

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]$$

برقرار است. چون هر مجموعهٔ باز در $[-\infty, \infty]$ اجتماع شمارشپذیری از بازه‌های باز از نـوع فوق است، Ω شامل هر مجموعهٔ باز می‌باشد. لذا f اندازه‌پذیر می‌باشد.

برای اثبات (ت) فرض می‌کنیم $V \subset Z$ باز باشد. در این صورت $g^{-1}(V)$ یک مـجموعهٔ بورل از Y است، و چون

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)),$$

قسمت (ب) نشان می‌دهد که $h^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$.

۱۳.۱ تعریف. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[-\infty, \infty]$ باشد، و قرار می‌دهیم

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{۱}$$

و

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, \cdots\} \cdot \tag{۲}$$

β را **حد بالایی** $\{a_n\}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\beta = \limsup_{n \to \infty} a_n \cdot \tag{۳}$$

خواص زیر به‌آسانی تحقیق می‌شوند: اولاً $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$؛ درنتیجه وقتی $k \to \infty$، $b_k \to \beta$؛ ثانیاً زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ مانند $\{a_{n_i}\}$ هست به‌طوری که وقتی $i \to \infty$، $a_{n_i} \to \beta$ و β بزرگترین عدد با این خاصیت می‌باشد.

حد پایینی به‌همین نحو تعریف می‌شود: کافی است در (۱) و (۲) sup و inf با یکدیگر تعویض شوند. توجه کنید که

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = -\limsup_{n \to \infty} (-a_n) \cdot \tag{۴}$$

هرگاه $\{a_n\}$ همگرا باشد، آنگاه واضح است که

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \tag{۵}$$

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی وسعت یافته بر مجموعهٔ X باشد. در این صورت توابع $\sup_n f_n$ و $\limsup_{n \to \infty} f_n$ بر X با

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n (f_n(x)), \tag{۶}$$

$$\left(\limsup_{n \to \infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n \to \infty} (f_n(x)) \tag{۷}$$

تعریف می‌شوند. هرگاه

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \tag{۸}$$

(فرض می‌کنیم این حد به‌ازای هر $x \in X$ موجود باشد)، آنگاه f را **حد نقطه به‌نقطهٔ** دنبالهٔ $\{f_n\}$ می‌نامیم.

۱۴.۱ قضیه. *هرگاه* $f_n: X \to [-\infty, \infty]$ *به‌ازای* $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ *اندازه‌پذیر بوده و*

$$g = \sup_{n \geq ۱} f_n \quad \text{و} \quad h = \limsup_{n \to \infty} f_n\text{،}$$

آنگاه g *و* h *اندازه‌پذیرند.*

برهان. $g^{-۱}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} f_n^{-۱}((\alpha, \infty])$. لذا قضیهٔ ۱۲.۱ قسمت (پ) ایجاب می‌کند که g اندازه‌پذیر باشد. البته همین نتیجه برای inf به‌جای sup برقرار است، و چون

$$h = \inf_{k \geq ۱} \left\{\sup_{i \geq k} f_i\right\}$$

پس h اندازه‌پذیر می‌باشد.

نتایج

(آ) حد هر دنبالهٔ نقطه به‌نقطه همگرا از توابع اندازه‌پذیر مختلط اندازه‌پذیر است.

(ب) هرگاه f *و* g *اندازه‌پذیر (با برد در* $[-\infty, \infty]$*) باشند، آنگاه* $\max\{f, g\}$ *و* $\min\{f, g\}$ *نیز چنین‌اند. بخصوص این امر برای توابع*

$$f^+ = \max\{f, ۰\} \quad \text{و} \quad f^- = -\min\{f, ۰\}$$

برقرار است.

۱۵.۱. توابع f^+ و f^- فوق را **قسمتهای مثبت** و **منفی** f می‌نامیم. داریم $|f| = f^+ + f^-$ و $f = f^+ - f^-$، نمایشی متعارف از f به‌صورت تفاضل دو تابع نامنفی و با خاصیت مینیمالی زیر:

حکم. *هرگاه* $f = g - h$، $g \geq ۰$، و $h \geq ۰$، *آنگاه* $f^+ \leq g$ *و* $f^- \leq h$.

برهان. $f \leq g$ و $۰ \leq g$ بوضوح ایجاب می‌کنند که $\max\{f, ۰\} \leq g$.

توابع ساده

۱۶.۱ تعریف. تابع مختلط s بر مجموعهٔ اندازه‌پذیر X که بردش فقط از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده باشد یک **تابع ساده** نام دارد. از جمله این توابع عبارتند از توابع سادهٔ نامنفی که بردشان زیرمجموعه‌ای متناهی از $[۰, \infty)$ است. توجه کنید که ما ∞ را صریحاً از مقادیر یک تابع ساده خارج کرده‌ایم.

هرگاه $\alpha_۱$، $\cdots$، α_n مقادیر متمایز تابع سادهٔ s بوده و قرار دهیم $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$، آنگاه واضح است که

$$s = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

که در آن χ_{A_i} تابع مشخص A_i به‌صورت تعریف شده در بخش ۹.۱ قسمت (ت) است.

همچنین واضح است که s اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر هریک از مجموعه‌های A_i اندازه‌پذیر باشد.

۱۷.۱ قضیه. *فرض کنیم* $f: X \to [0, \infty]$ ***اندازه‌پذیر باشد. در این صورت توابع اندازه‌پذیر ساده‌ای چون*** s_n ***بر*** X ***وجود دارند به‌طوری که***

(آ) $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f$؛

(ب) **به‌ازای هر** $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $s_n(x) \to f(x)$.

برهان. قرار می‌دهیم $\delta_n = 2^{-n}$. به‌هر عدد صحیح مثبت n و هر عدد حقیقی t عدد صحیح منحصر به‌فردی مانند $k = k_n(t)$ نظیر است که در $k\delta_n \le t < (k+1)\delta_n$ صدق می‌کند. تعریف می‌کنیم

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)\,\delta_n & \text{اگر}\quad 0 \le t < n \\ n & \text{اگر}\quad n \le t \le \infty \end{cases} \tag{1}$$

هر φ_n یک تابع بورل بر $[0, \infty]$ است،

$$t - \delta_n < \varphi_n(t) \le t \quad \text{اگر}\quad 0 \le t \le n \tag{2}$$

$0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le t$، و به‌ازای هر $t \in [0, \infty]$، وقتی $n \to \infty$، $\varphi_n(t) \to t$. پس نتیجه می‌شود که توابع

$$s_n = \varphi_n \circ f \tag{3}$$

در (آ) و (ب) صدق می‌کنند. لذا، طبق قضیهٔ ۱۲.۱ قسمت (ت)، اندازه‌پذیر می‌باشند.

خواص مقدماتی اندازه‌ها

۱۸.۱ تعریف

(آ) یک ***اندازهٔ مثبت*** تابعی است مانند μ که بر یک $\sigma-$ جبر مانند $\mathfrak{M}$ تعریف شده است، بردش در $[0, \infty]$ است، و **جمعی شمارشپذیر** می‌باشد. این یعنی هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارشپذیر و از ***هم جدا*** از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_i\} \cdot \tag{1}$$

برای احتراز از بدیهیات، نیز فرض می‌کنیم به‌ازای دست کم یک $A \in \mathfrak{M}$، $\mu(A) < \infty$.

(ب) هر ***فضای اندازه*** یک فضای اندازه‌پذیر است که یک اندازهٔ مثبت تعریف شده بر $\sigma-$ جبر

مجموعه‌های اندازه‌پذیر خود داشته باشد.

(پ) هر ***اندازهٔ مختلط*** یک تابع جمعی شمارشپذیر مختلط تعریف شده بر یک $\sigma-$ جبر می‌باشد.

تذکر. آنچه ما ***اندازهٔ مثبت*** نامیدیم گاهی فقط ***اندازه*** خوانده می‌شود. ما صفت «مثبت» را جهت تأکید اضافه می‌کنیم. هرگاه به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$، $\mu(E) = 0$، آنگاه μ، طبق تعریف، یک اندازهٔ مثبت است. مقدار ∞ برای یک اندازهٔ مثبت مجاز است، ولی وقتی از اندازهٔ **مختلط** μ صحبت می‌شود، فرض است که $\mu(E)$ به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ عددی مختلط است. البته ***اندازه‌های حقیقی*** یک زیررده از اندازه‌های مختلط تشکیل می‌دهند.

۱۹.۱ قضیه. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ باشد. در این صورت***

(آ) $\mu(\varnothing) = 0$؛

(ب) ***اگر A_1، $\cdots$، A_n اعضای دو به‌دو از هم جدایی از $\mathfrak{M}$ باشند،***

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n);$$

(پ) ***اگر $A \in \mathfrak{M}$ و $B \in \mathfrak{M}$، $A \subset B$ ایجاب می‌کند که*** $\mu(A) \le \mu(B)$؛

(ت) ***هرگاه*** $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، $A_n \in \mathfrak{M}$، ***و*** $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$، ***آنگاه***

$$\mu(A_n) \to \mu(A),$$

(ث) ***هرگاه*** $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$، $A_n \in \mathfrak{M}$، ***و*** $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$، ***و $\mu(A_1)$ متناهی باشد، آنگاه*** $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

همانطور که برهان نشان خواهد داد، این خواص جز (پ) برای اندازه‌های مختلط نیز برقرارند. (ب) **جمعی متناهی** و (پ) **یکنوایی** نام دارد.

برهان

(آ) $A \in \mathfrak{M}$ را طوری می‌گیریم که $\mu(A) < \infty$ و در تعریف ۱۸.۱ فرمول (۱) فرض می‌کنیم $A_1 = A$ و $A_2 = A_3 = \cdots = \varnothing$.

(ب) در تعریف ۱۸.۱ فرمول (۱) فرض می‌کنیم $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$.

(پ) چون $B = A \cup (B-A)$ و $A \cap (B-A) = \varnothing$، از (ب) معلوم می‌شود که $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A) \ge \mu(A)$.

(ت) قرار می‌دهیم $B_1 = A_1$ و به‌ازای $n = 2, 3, 4, \cdots$، $B_n = A_n - A_{n-1}$. در این صورت $B_n \in \mathfrak{M}$، اگر $i \ne j$، $B_i \cap B_j = \varnothing$، $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$، و $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. لذا

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \quad \text{و} \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \cdot$$

حال (ت) از تعریف مجموع یک سری نامتناهی نتیجه می‌شود.

(ث) قرار می‌دهیم $C_n = A_۱ - A_n$. در این صورت $C_۱ \subset C_۲ \subset C_۳ \subset \cdots$ و

$$\mu(C_n) = \mu(A_۱) - \mu(A_n),$$

$A_۱ - A = \cup C_n$، و لذا (ت) نشان می‌دهد که

$$\mu(A_۱) - \mu(A) = \mu(A_۱ - A) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = \mu(A_۱) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

این قسمت (ث) را ایجاب خواهد کرد.

۲۰.۱ چند مثال. همانطور که خواهیم دید، ساختن فضاهای اندازهٔ جالب کمی زحمت دارد. با این حال، چند نمونهٔ ساده را می‌توان فوراً ارائه داد:

(آ) به‌ازای هر $E \subset X$ که X مجموعهٔ دلخواهی است، تعریف می‌کنیم $\mu(E) = \infty$ اگر E مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $\mu(E)$ را تعداد نقاط E می‌گیریم اگر E متناهی باشد. این μ ***اندازهٔ شمارشی*** بر X نام دارد.

(ب) به‌ازای $x_۰ \in X$ ثابت و هر $E \subset X$ تعریف می‌کنیم $\mu(E) = ۱$ اگر $x_۰ \in E$ و $\mu(E) = ۰$ اگر $x_۰ \notin E$. این μ را می‌توان **جرم یکهٔ** متمرکز در $x_۰$ نامید.

(پ) فرض کنیم μ اندازهٔ شمارشی بر مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ بوده و $A_n = \{n, n+۱, n+۲, \cdots\}$. در این صورت $\cap A_n = \varnothing$ ولی به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $\mu(A_n) = \infty$. این نشان می‌دهد که فرض

$$\mu(A_۱) < \infty$$

در قضیهٔ ۱۹.۱ قسمت (ث) زاید نیست.

۲۱.۱ بحث راجع به‌اصطلاحات. گاهی فضاهای اندازه را «سه تاییهای مرتب» $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ می‌گیرند که در آن X یک مجموعه، $\mathfrak{M}$ یک σـ جبر در X، و μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است. به‌همین نحو، فضاهای اندازه‌پذیر را «جفتهای مرتب» $(X, \mathfrak{M})$ می‌گیرند. این کار منطقاً صحیح و اغلب شایسته است گرچه کمی زاید به‌نظر می‌رسد. مثلاً در $(X, \mathfrak{M})$ مجموعهٔ X صرفاً بزرگترین عضو $\mathfrak{M}$ است. لذا اگر $\mathfrak{M}$ را بدانیم، X را نیز می‌دانیم. به‌همین نحو، هر اندازه، طبق تعریف، دارای یک σـ جبر در قلمرو خود می‌باشد. درنتیجه اگر اندازهٔ μ را بدانیم، σـ جبر $\mathfrak{M}$ را که μ بر آن تعریف شده نیز می‌دانیم و مجموعهٔ X که در آن $\mathfrak{M}$ یک σـ جبر است رانیز می‌شناسیم.

لذا کاملاً مشروع است که از عباراتی چون «فرض کنیم μ یک اندازه باشد» استفاده کنیم یا، اگر بخواهیم بر σـ جبر یا مجموعهٔ مورد نظر تأکید شود، بگوییم «فرض کنیم μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ باشد» یا «فرض کنیم μ یک اندازه بر X باشد».

آنچه منطقاً بی‌معنی ولی متداول است (و ما اغلب از رسوم ریاضی پیروی می‌کنیم تا منطق)

آن است که بگوییم «فرض کنیم X یک فضای اندازه باشد». تأکید نباید بر مجموعه باشد بلکه باید بر اندازه باشد. البته وقتی از این عبارت استفاده می‌شود تلویحاً فرض است که یک اندازهٔ تعریف شده بر یک σـ جبر در X وجود دارد و این اندازه است که واقعاً مورد بحث می‌باشد.

به‌همین نحو، یک فضای توپولوژیک جفت مرتبی است مانند (X, τ) که در آن τ یک توپولوژی در مجموعهٔ X بوده و داده‌های با معنی در τ اند نه در X، ولی «فضای توپولوژیک X» چیزی است که راجع به‌آن صحبت می‌کنیم.

این نوع قراردادهای تلویحی در سراسر ریاضیات به‌کار می‌روند. اغلب دستگاههای ریاضی عبارتند از مجموعه‌هایی همراه با رده‌ای از زیرمجموعه‌های شاخص یا اعمالی دوتایی و یا چند رابطه (که دارای خواصی می‌باشند)، و شخص می‌تواند آنها را لیست کند و سپس دستگاه را به‌صورت یک جفت مرتب، سه‌تایی مرتب، و غیره (بسته به‌نیاز) توصیف نماید. مثلاً خط حقیقی را می‌توان یک چهارتایی $(R^1, +, \cdot, <)$ توصیف کرد که در آن $+$، $\cdot$، و $<$ در اصول موضوع یک میدان مرتب ارشمیدسی تام صدق می‌کنند. ولی شرط می‌بندیم که تعداد قلیلی ریاضیدان میدان حقیقی را یک چهارتایی مرتب می‌انگارند.

حساب در $[0, \infty]$

۲۲.۱. ما در نظریهٔ انتگرالگیری به‌ناچار با ∞ مواجه می‌شویم. یک دلیل آن است که می‌خواهیم روی مجموعه‌هایی از اندازهٔ نامتناهی انتگرال بگیریم؛ بالأخره خط حقیقی دارای طول نامتناهی است. دلیل دیگر آن است که اگر اصولاً به‌توابع حقیقی علاقمند باشیم، lim sup یک دنباله از توابع حقیقی مثبت یا مجموع دنباله‌ای از توابع حقیقی مثبت ممکن است در نقاطی ∞ بوده و اگر در این وضع قراردادهای خاصی را به‌اجبار وضع کنیم، بخشی از زیبایی قضایایی چون ۲۶.۱ و ۲۷.۱ از بین می‌رود.

تعریف می‌کنیم $a + \infty = \infty + a = \infty$ اگر $0 \leq a \leq \infty$ و

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{اگر } 0 < a \leq \infty \\ 0 & \text{اگر } a = 0 \end{cases}$$

البته مجموعها و حاصل‌ضربهای اعداد حقیقی به‌طور معمول تعریف می‌شوند.

تعریف $0 \cdot \infty = 0$ ظاهراً عجیب است. ولی شخص می‌تواند به‌آسانی تحقیق کند که با این تعریف ***قوانین تعویضپذیری، شرکتپذیری، و پخشپذیری بدون هیچ تحدیدی در $[0, \infty]$ برقرارند.***

در قوانین حذف باید احتیاط کرد: $a + b = a + c$ فقط وقتی $b = c$ را ایجاب می‌کند که $a < \infty$، و $ab = ac$ فقط وقتی $b = c$ را ایجاب می‌کند که $0 < a < \infty$.

ملاحظه می‌کنیم که حکم مفید زیر برقرار است:

هرگاه $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$ ، $0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots$. $a_n \to a$ ، **و** $b_n \to b$ ، **آنگاه** $a_n b_n \to ab$.

اگـر ایـن حکـم را بـا قـضایای ۱۷.۱ و ۱۴.۱ تـلفیق کـنیم، درمـی‌یابیم کـه ***مجموعها و حاصل‌ضربهای توابع اندازه‌پذیر به‌توی*** $[0, \infty]$ ***اندازه‌پذیر می‌باشند.***

انتگرالگیری از توابع مثبت

در این بخش $\mathfrak{M}$ یک σ ـ جبر در مجموعهٔ X و μ یک اندازهٔ مثبت بر $\mathfrak{M}$ است.

۲۳.۱ تعریف. اگر $s: X \to [0, \infty)$ یک تابع سادهٔ اندازه‌پذیر به‌شکل زیر باشد:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \tag{1}$$

که در آن α_1 ، $\cdots$ ، α_n مقادیر متمایز s اند (با تعریف ۱۶.۱ قیاس کنید)، و $E \in \mathfrak{M}$ ، تعریف می‌کنیم

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \cdot \tag{2}$$

در ایـــنجا قـــرارداد $0 \cdot \infty = 0$ بـــه‌کـــار رفـــته است؛ مـــمکن است بـــه‌ازای i ای $\alpha_i = 0$ و $\mu(A_i \cap E) = \infty$.

اگر $f: X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر بوده و $E \in \mathfrak{M}$ ، تعریف می‌کنیم

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s\, d\mu , \tag{3}$$

که در آن سوپرمم روی تمام توابع اندازه‌پذیر سادهٔ s که $0 \le s \le f$ گرفته شده است.

طرف چپ (۳) ***انتگرال لبگ*** f روی E نسبت به‌اندازهٔ μ نام دارد. این انـتگرال عـددی در $[0, \infty]$ می‌باشد.

اگر f ساده باشد، ظاهراً دو تعریف برای $\int_E f d\mu$ در دست است که عبارتند از (۲) و (۳). ولی این دو فرمول مقدار یکسانی به‌انتگرال می‌دهند، زیرا f در این حالت بزرگترین تابع s است که سمت راست (۳) ظاهر می‌شود.

۲۴.۱. احکام زیر نتایج آنی تعاریف‌اند. توابع و مجموعه‌های آمده در آنها اندازه‌پـذیر فـرض می‌شوند:

(آ) **هرگاه** $0 \le f \le g$ ، **آنگاه** $\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu$ ؛

(ب) **هرگاه** $A \subset B$ **و** $f \ge 0$ ، **آنگاه** $\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu$ ؛

(پ) **هرگاه** $f \ge 0$ **و** c **ثابت بوده و** $0 \le c < \infty$ **آنگاه**

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu\,;$$

(ت) هرگاه به‌ازای هر $x\in E$، $f(x)=0$، **آنگاه، حتی اگر** $\mu(E)=\infty$، $\int_E f\,d\mu=0$.

(ث) هرگاه $\mu(E)=0$، **آنگاه، حتی اگر به‌ازای هر** $x\in E$ **داشته باشیم** $f(x)=\infty$، $\int_E f\,d\mu=0$؛

(ج) هرگاه $f\geq 0$، **آنگاه** $\int_E f\,d\mu=\int_X \chi_E f\,d\mu$.

آخرین نتیجه نشان می‌دهد که ما تعریف انتگرالگیری را بدون از دست دادن کلیت به‌انتگرالهای روی تمام X محدود کرده‌ایم. اگر می‌خواستیم روی زیرمجموعه‌ها انتگرالگیری کنیم، از (ج) به‌عنوان تعریف استفاده می‌کردیم. اینجا دیگر مسئلهٔ سلیقه است که کدام تعریف را ارجح بدانیم.

همچنین ملاحظه می‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از فضای اندازهٔ X به‌نحوی کاملاً طبیعی یک فضای اندازه است: مجموعه‌های اندازه‌پذیر جدید صرفاً زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X که در E واقعند می‌باشند، و اندازه همان است جز آنکه قلمروش محدود شده است. این مجدداً نشان می‌دهد که انتگرالگیری به‌محض تعریف شدن روی هر فضای اندازه خود بخود بر هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر هر فضای اندازه تعریف می‌شود.

۲۵.۱ حکم. *فرض کنیم s و t دو تابع سادهٔ اندازه‌پذیر نامنفی بر X باشند. به‌ازای $E\in\mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم*

$$\varphi(E)=\int_E s\,d\mu\cdot \tag{۱}$$

در این صورت φ یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است. همچنین

$$\int_X (s+t)\,d\mu=\int_X s\,d\mu+\int_X t\,d\mu\cdot \tag{۲}$$

(این حکم شامل شکلهای قراردادی قضایای ۲۷.۱ و ۲۹.۱ نیز می‌باشد.)

برهان. اگر s همانند تعریف ۲۳.۱ بوده و E_1، E_2، $\cdots$ اعضای از هم جدای $\mathfrak{M}$ باشند که اجتماعشان E است، جمعی شمارشپذیر بودن μ نشان می‌دهد که

$$\varphi(E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{r=1}^{\infty}\mu(A_i\cap E_r)$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E_r)=\sum_{r=1}^{\infty}\mu(E_r).$$

همچنین $\varphi(\varnothing)=0$؛ در نتیجه φ متحد ∞ نیست.

حال فرض کنیم s مثل قبل بوده، β_1، $\cdots$، β_m مقادیر متمایزی از t باشند، و $B_j = \{x : t(x) = \beta_j\}$. هرگاه $E_{ij} = A_i \cap B_j$، آنگاه

$$\int_{E_{ij}} (s+t)\, d\mu = (\alpha_i+\beta_j)\, \mu\, (E_{ij})$$

و

$$\int_{E_{ij}} s\, d\mu + \int_{E_{ij}} t\, d\mu = \alpha_i \mu\, (E_{ij}) + \beta_j \mu\, (E_{ij}) \cdot$$

لذا (۲) با E_{ij} به‌جای X برقرار است. چون X اجتماع از هم جدایی از مجموعه‌های E_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) است، نیمهٔ اول حکم ما برقراری (۲) را ایجاب خواهد کرد.

حال به‌قسمت جالب نظریه می‌رسیم. یکی از جالبترین ویژگیهایش سهولت در پرداختن به‌اعمال حدی است.

۲۶.۱ قضیهٔ همگرایی یکنوای لبگ. *فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر X باشد، و نیز*

(آ) *به‌ازای هر* $x \in X$، $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$؛

(ب) *به‌ازای هر* $x \in X$، *وقتی* $n \to \infty$، $f_n(x) \to f(x)$.

در این صورت f اندازه‌پذیر است و

$$\text{وقتی } n \to \infty\text{،} \quad \int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu \cdot$$

برهان. چون $\int f_n < \int f_{n+1}$، $\alpha \in [0, \infty]$ای هست به‌طوری‌که

$$\text{وقتی } n \to \infty\text{،} \quad \int_X f_n\, d\mu \to \alpha \cdot \tag{۱}$$

بنابر قضیهٔ ۱۴.۱، f اندازه‌پذیر است. چون $f_n \leq f$، به‌ازای هر n داریم $\int f_n < \int f$؛ درنتیجه (۱) ایجاب می‌کند که

$$\alpha \leq \int_X f\, d\mu \tag{۲}$$

فرض کنیم s یک تابع اندازه‌پذیر ساده باشد به‌طوری‌که $0 \leq s \leq f$، c یک ثابت باشد، $0 < c < 1$، و تعریف می‌کنیم

$$E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\} \; (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۳}$$

هر E_n اندازه‌پذیر است، $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$، و $X = \cup E_n$. برای مشاهدهٔ این تساوی، $x \in X$ی در نظر می‌گیریم. هرگاه $f(x) = 0$، آنگاه $x \in E_1$؛ هرگاه $f(x) > 0$، آنگاه $cs(x) < f(x)$ زیرا $c < 1$؛ لذا به‌ازای nی $x \in E_n$. همچنین

$$\int_X f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq c \int_{E_n} s\, d\mu \; (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۴}$$

فرض کنیم $n \to \infty$ و حکم ۲۵.۱ و قضیهٔ ۱۹.۱ قسمت (ت) را بر آخرین انتگرال (۴) اعمال می‌کنیم. نتیجه خواهد بود

$$\alpha \geq c \int_X s\, d\mu \cdot \qquad (۵)$$

چون (۵) به‌ازای هر $c < 1$ برقرار است، به‌ازای هر s اندازه‌پذیر سادهٔ صادق در $0 \leq s \leq f$ داریم

$$\alpha \geq \int_X s\, d\mu \,; \qquad (۶)$$

درنتیجه

$$\alpha \geq \int_X f\, d\mu \cdot \qquad (۷)$$

حال قضیه از (۱)، (۲)، و (۷) نتیجه می‌شود.

۲۷.۱ قضیه. هرگاه $f_n : X \to [0, \infty]$ به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$ اندازه‌پذیر بوده و

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ (x \in X)\,, \qquad (۱)$$

آنگاه

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu \cdot \qquad (۲)$$

برهان. اولاً طبق قضیهٔ ۱۷.۱ دنباله‌هایی مانند $\{s_i'\}$ و $\{s_i''\}$ از توابع اندازه‌پذیر ساده وجود دارند به‌طوری که $s_i' \to f_1$ و $s_i'' \to f_2$. هرگاه $s_i = s_i' + s_i''$، آنگاه $s_i \to f_1 + f_2$ و قضیهٔ همگرایی یکنوا همراه با حکم ۲۵.۱ نشان می‌دهد که

$$\int_X (f_1 + f_2)\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu \cdot \qquad (۳)$$

ثانیاً قرار می‌دهیم $g_N = f_1 + \cdots + f_N$. دنبالهٔ $\{g_N\}$ به‌طور یکنوا به f همگراست، و اگر در مورد (۳) استقرا شود، خواهیم دید که

$$\int_X g_N\, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n\, d\mu \cdot \qquad (۴)$$

اگر بار دیگر قضیهٔ همگرایی یکنوا را به‌کار بریم، رابطهٔ (۲) به‌دست آمده و برهان تمام خواهد شد.

اگر μ اندازهٔ شمارشی بریک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باشد، قضیهٔ ۲۷.۱ حکمی است راجع به سریهای مضاعف از اعداد حقیقی نامنفی (که البته می‌توان آن را با ابزارهای مقدماتی‌تر ثابت کرد):

نتیجه. هرگاه به‌ازای $i = 1, 2, 3, \cdots$ و j، $a_{ij} \geq 0$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \cdot$$

۲۸.۱ لم فاتو ($Fatou$). **هرگاه** $f_n : X \to [0, \infty]$ **به‌ازای هر عدد صحیح مثبت** n **اندازه‌پذیر باشد، آنگاه**

$$\int_X \left(\liminf_{n \to \infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \cdot \qquad (۱)$$

نامساوی اکید می‌تواند در (۱) رخ دهد؛ ر.ک. تمرین ۸.

برهان. قرار می‌دهیم

$$g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots; x \in X) \cdot \qquad (۲)$$

در این صورت $g_k \leq f_k$؛ درنتیجه

$$\int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \qquad (۳)$$

همچنین $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$، هر g_k طبق قضیهٔ ۱۴.۱ اندازه‌پذیر است و، بنابر تعریف ۱۳.۱، وقتی $k \to \infty$، $g_k(x) \to \liminf f_n(x)$. لذا قضیهٔ همگرایی یکنوا نشان می‌دهد که وقتی $k \to \infty$، طرف چپ (۳) به‌طرف چپ (۱) میل می‌کند. لذا (۱) از (۳) نتیجه می‌شود.

۲۹.۱ قضیه. *فرض کنیم* $f : X \to [0, \infty]$ *اندازه‌پذیر بوده و*

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathfrak{M}) \cdot \qquad (۱)$$

در این صورت φ *یک اندازه بر* $\mathfrak{M}$ *است و به‌ازای هر* g *ی اندازه‌پذیر بر* X *با برد در* $[0, \infty]$ *داریم*

$$\int_X g \, d\varphi = \int_X g f \, d\mu \cdot \qquad (۲)$$

برهان. فرض کنیم E_1، E_2، E_3، $\cdots$ اعضای از هم جدایی از $\mathfrak{M}$ باشند که اجتماعشان E است. ملاحظه می‌کنیم که

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f \qquad (۳)$$

و

$$\varphi(E) = \int_X \chi_E \, f \, d\mu \quad \text{و} \quad \varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f \, d\mu \cdot \qquad (۴)$$

حال از قضیهٔ ۲۷.۱ نتیجه می‌شود که

$$\varphi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j) \cdot \qquad (۵)$$

چون $\varphi(\varnothing) = 0$، رابطهٔ (۵) ثابت می‌کند که φ یک اندازه می‌باشد.

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که اگر به‌ازای $E \in \mathfrak{M}$ای، $g = \chi_E$، رابطهٔ (۲) برقرار است. لذا (۲) به‌ازای هر تابع اندازه‌پذیر سادهٔ g برقرار است، و حالت کلی از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه خواهد شد.

تبصره. دومین حکم قضیهٔ ۲۹.۱ گاهی به‌شکل زیر نوشته می‌شود:

$$d\varphi = f\,d\mu \cdot \tag{۶}$$

ما به‌علایم $d\varphi$ و $d\mu$ معنی مستقلی نمی‌دهیم؛ رابطهٔ (۶) صرفاً یعنی (۲) به‌ازای هر $g \geq 0$ی اندازه‌پذیر برقرار است.

قضیهٔ ۲۹.۱ معکوس بسیار مهمی دارد و آن قضیهٔ رادون ـ نیکودیم (*Radon - Nikodym*) است که در فصل ۶ ثابت خواهد شد.

انتگرالگیری از توابع مختلط

مثل قبل، μ در این بخش یک اندازهٔ مثبت بر فضای اندازه‌پذیر دلخواه X است.

۳۰.۱ تعریف. $L^1(\mu)$ را گردایهٔ تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط f بر X تعریف می‌کنیم که

$$\int_X |f|\,d\mu < \infty \cdot$$

همانطور که در حکم ۹.۱ قسمت (ب) دیدیم، اندازه‌پذیری f اندازه‌پذیری $|f|$ را ایجاب می‌کند؛ پس انتگرال فوق تعریف شده است.

اعضای $L^1(\mu)$ را ***توابع انتگرالپذیر لبگ*** (نسبت به μ) یا ***توابع مجموعپذیر*** می‌نامند. در فصل ۳ معنی نمای ۱ روشن خواهد شد.

۳۱.۱ تعریف. اگر $f = u + iv$ که در آن u و v توابعی اندازه‌پذیر و حقیقی بر Xاند و نیز $f \in L^1(\mu)$، به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر E تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \overset{+}{u}\,d\mu - \int_E \overset{-}{u}\,d\mu + i\int_E \overset{+}{v}\,d\mu - i\int_E \overset{-}{v}\,f\,d\mu \cdot \tag{۱}$$

در اینجا $\overset{+}{u}$ و $\overset{-}{v}$ قسمتهای مثبت و منفی u به‌صورت تعریف شده در بخش ۱۵.۱ می‌باشند؛ $\overset{+}{v}$ و $\overset{-}{v}$ به‌همین نحو از v به‌دست می‌آیند. این چهار تابع اندازه‌پذیر، حقیقی، و نامنفی‌اند؛ لذا چهار انتگرال سمت راست (۱) طبق تعریف ۲۳.۱ وجود دارند. به‌علاوه داریم $\overset{+}{u} \leq |u| < |f|$ و غیره؛ درنتیجه هریک از این چهار انتگرال متناهی است. لذا (۱) معرف انتگرال سمت چپ به‌عنوان یک عدد مختلط می‌باشد.

گاهی می‌خواهیم انتگرال یک تابع اندازه‌پذیر f با برد در $[-\infty, \infty]$ را به‌صورت زیر تعریف

کنیم:

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu \qquad (۲)$$

مشروط بر اینکه دست کم یکی از انتگرالهای سمت راست (۲) متناهی باشد. در این صورت طرف چپ (۲) عددی در $[-\infty, \infty]$ خواهد بود.

۳۲.۱ قضیه. فرض کنیم f و g در $L^1(\mu)$ بوده و α و β اعدادی مختلط باشند. در این صورت $\alpha f+\beta g \in L^1(\mu)$ و

$$\int_X (\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu + \beta\int_X g\,d\mu \cdot \qquad (۱)$$

برهان. اندازه‌پذیری $\alpha f+\beta g$ از حکم ۹.۱ قسمت (پ) نتیجه می‌شود. بنابر بخش ۲۴.۱ و قضیهٔ ۲۷.۱،

$$\int_X |\alpha f+\beta g|\,d\mu \le \int_X (|\alpha|\ |f| + |\beta|\ |g|)\,d\mu$$

$$= |\alpha| \int_X |f|\,d\mu + |\beta| \int_X |g|\,d\mu < \infty \cdot$$

لذا $\alpha f+\beta g \in L^1(\mu)$.

برای اثبات (۱) کافی است نشان دهیم که

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \qquad (۲)$$

و

$$\int_X (\alpha f)\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu \qquad (۳)$$

و اگر (۲) را به‌ازای f و g حقیقی در $L^1(\mu)$ ثابت کنیم، حالت کلی (۲) نتیجه می‌شود.

با فرض این امر و قرار دادن $h = f+g$ داریم

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

یا

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \cdot \qquad (۴)$$

بنابر قضیهٔ ۲۷.۱،

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-, \qquad (۵)$$

و چون هریک از این انتگرالها متناهی است، می‌توان جابه‌جا کرد و رابطهٔ (۲) را به‌دست آورد.

برقراری رابطهٔ (۳) به‌ازای $\alpha \ge 0$ از حکم ۲۴.۱ قسمت (پ) نتیجه می‌شود. با استفاده از روابطی مانند $(-u)^+ = u^-$ به‌آسانی می‌توان برقراری (۳) را به‌ازای $\alpha = -1$ تحقیق کرد.

حالت $\alpha = i$ نیز آسان است: هرگاه $f = u+iv$، آنگاه

$$\int (if) = \int (iu - v) = \int (-v) + i\int u = -\int v + i\int u$$
$$= i\Big(\int u + i\int v\Big) = i\int f \cdot$$

از تلفیق این حالات با (۲) رابطهٔ (۳) به‌ازای هر α ی مختلط به‌دست می‌آید.

۳۳.۱ قضیه. ***هرگاه $f \in L^1(\mu)$، آنگاه***

$$\left| \int_X f\,d\mu \right| \leq \int_X |f|\,d\mu \cdot$$

برهان. قرار می‌دهیم $z = \int_X f\,d\mu$. چون z عددی مختلط است، عدد مختلطی مانند α با $|\alpha| = 1$ هست به‌طوری که $\alpha z = |z|$. فرض کنیم u قسمت حقیقی αf باشد. در این صورت $|f| = |\alpha f| \leq u$. لذا

$$\left| \int_X f\,d\mu \right| = \alpha \int_X f\,d\mu = \int_X \alpha f\,d\mu = \int_X u\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu \cdot$$

سومین تساوی فوق از این جهت برقرار است که تساویهای قبل از آن حقیقی بودن $\int \alpha f\,d\mu$ را نشان می‌دهند.

این بخش را با قضیهٔ همگرایی مهم دیگر به‌پایان می‌بریم.

۳۴.۱ قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ. ***فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in X$،***

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \cdot \qquad (1)$$

هرگاه تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد که

$$|f_n(x)| \leq g(x)\ (n = 1, 2, 3, \cdots; x \in X), \qquad (2)$$

آنگاه $f \in L^1(\mu)$،

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0, \qquad (3)$$

و

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu \qquad (4)$$

برهان. چون $|f| \leq g$ و f اندازه‌پذیر است، $f \in L^1(\mu)$. و چون $|f_n - f| \leq 2g$، لم فاتو در

مورد توابع $2g-|f_n-f|$ به‌کار رفته و نتیجه می‌دهد که

$$\int_X 2g\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g-|f_n-f|)\,d\mu$$

$$= \int_X 2g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_X |f_n-f|\,d\mu\right)$$

$$= \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n-f|\,d\mu \cdot$$

چون $\int 2g\,d\mu$ متناهی است، می‌توان آن را کم کرد و به‌دست آورد

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n-f|\,d\mu \leq 0 \cdot \tag{۵}$$

هرگاه دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی همگرا به ۰ نباشد، آنگاه حد بالایی‌اش مثبت است. لذا رابطهٔ (۵) رابطهٔ (۳) را ایجاب می‌کند. بنابر قضیهٔ ۳۳.۱ اعمال شده بر f_n-f، رابطهٔ (۳) رابطهٔ (۴) را به‌دست می‌دهد.

نقش مجموعه‌های از اندازهٔ صفر

۳۵.۱ تعریف. فرض کنیم P خاصیتی باشد که یک نقطه مانند x واجد آن است یا نیست. مثلاً P ممکن است «$f(x) > 0$» به‌ازای تابع f داده شده باشد، یا «$\{f_n(x)\}$ همگراست» به‌ازای دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع باشد.

اگر μ اندازه‌ای بر σـ جبر $\mathfrak{M}$ بوده و $E \in \mathfrak{M}$، عبارت «P تقریباً همه جا بر E برقرار است» (مختصراً «P ت . ه. بر E برقرار است») یعنی $N \in \mathfrak{M}$ی هست به‌طوری که $\mu(N) = 0$، $N \subset E$، و P در هر نقطه از $E-N$ برقرار است. البته ت . ه. قویاً تابع اندازهٔ داده شده است، و هر وقت بخواهیم اندازه بوضوح معلوم باشد می‌نویسیم «ت . ه. $[\mu]$».

مثلاً اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر بوده و

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0, \tag{۱}$$

گوییم $f = g$ ت . ه. $[\mu]$ بر X و می‌نویسیم $f \sim g$. به‌آسانی معلوم می‌شود که این یک رابطهٔ هم‌ارزی است. تعدی ($f \sim g$ و $g \sim h$ ایجاب می‌کنند که $f \sim h$) نتیجه‌ای است از این امر که اجتماع دو مجموعه از اندازهٔ ۰ دارای اندازهٔ ۰ است.

توجه کنید که هرگاه $f \sim g$، آنگاه به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$،

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu \cdot \tag{۲}$$

برای مشاهدهٔ این امر فرض کنیم N مجموعهٔ آمده در (۱) باشد. پس E اجتماع مجموعه‌های از هم جدای $E-N$ و $E\cap N$ است. بر $E-N$ داریم $f=g$، و $\mu(E\cap N)=0$.

به‌بیان کلی، مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ در انتگرالگیری قابل اغماض‌اند. این امر که هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ قابل اغماض قابل اغماض است باید درست باشد: ولی ممکن است مجموعه‌ای مانند $N\in\mathfrak{M}$ با $\mu(N)=0$ دارای زیرمجموعه‌ای مانند E باشد که عضو $\mathfrak{M}$ نباشد. البته در این حالت می‌توان **تعریف کرد** $\mu(E)=0$. ولی آیا این توسیع μ یک‌اندازه است؛ یعنی هنوز بر یک $\sigma-$ جبر تعریف شده است؟ خوشبختانه جواب مثبت می‌باشد:

۱.۳۶ قضیه. ***فرض کنیم $(X,\mathfrak{M},\mu)$ یک فضای اندازه بوده و $\mathfrak{M}^*$ گردایهٔ تمام $E\subset X$هایی باشد که به‌ازای آنها مجموعه‌هایی چون A و B در $\mathfrak{M}$ موجودند به‌طوری که $A\subset E\subset B$ و $\mu(B-A)=0$، و در این وضع تعریف می‌کنیم $\mu(E)=\mu(A)$. در این صورت $\mathfrak{M}^*$ یک $\sigma-$ جبر و μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}^*$ می‌باشد.***

این اندازهٔ وسعت‌یافتهٔ μ را **تام** گوییم چرا که تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ها از اندازهٔ ۰ اینک اندازه‌پذیرند. $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}^*$ را $\mu-$ **تتمیم** $\mathfrak{M}$ می‌نامیم. قضیهٔ فوق می‌گوید که هر اندازه را می‌توان تام ساخت. لذا، هر وقت مناسب بود، می‌توان فرض کرد که اندازهٔ داده شده تام است. این امر به‌ما مجموعه‌های اندازه‌پذیر بیشتر و در نتیجه توابع اندازه‌پذیر بیشتری خواهد داد. اغلب اندازه‌هایی که با آنها مواجه می‌شویم تام‌اند، ولی استثناهایی نیز وجود دارند. یکی از اینها در برهان قضیهٔ فوبینی (*Fubini*) در فصل ۸ ظاهر خواهد شد.

برهان. با امتحان اینکه μ به‌ازای هر $E\in\mathfrak{M}^*$ تعریف شده است شروع می‌کنیم. فرض کنیم $A\subset E\subset B$، $A_1\subset E\subset B_1$، و $\mu(B-A)=\mu(B_1-A_1)=0$. (در این برهان حروف A و B اعضای $\mathfrak{M}$ می‌باشند.) چون

$$A-A_1\subset E-A_1\subset B_1-A_1,$$

داریم $\mu(A-A_1)=0$. پس $\mu(A)=\mu(A\cap A_1)$. به‌همین‌دلیل، $\mu(A_1)=\mu(A_1\cap A)$. پس نتیجه می‌شود که $\mu(A_1)=\mu(A)$.

حال تحقیق می‌کنیم که $\mathfrak{M}^*$ سه خاصیت معرف یک $\sigma-$ جبر را دارد.

(یک) $X\in\mathfrak{M}^*$ زیرا $X\in\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}^*$.

(دو) هرگاه $A\subset E\subset B$، آنگاه $B^c\subset E^c\subset A^c$. لذا $E\in\mathfrak{M}^*$ ایجاب می‌کند که $E^c\in\mathfrak{M}^*$، زیرا $A^c-B^c=A^c\cap B=B-A$.

(سه) هرگاه $A_i\subset E_i\subset B_i$، $E=\cup E_i$، $A=\cup A_i$، و $B=\cup B_i$، آنگاه $A\subset E\subset B$ و

$$B-A=\bigcup_1^\infty (B_i-A)\subset\bigcup_1^\infty (B_i-A_i)\cdot$$

چون اجتماعهای شمارشپذیر از مجموعه‌های از اندازهٔ صفر دارای اندازهٔ صفراند، پس اگر به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $E_i \in \mathfrak{M}^*$، داریم $E \in \mathfrak{M}^*$.

بالأخره اگر مجموعه‌های E_i در مرحلهٔ (سه) از هم جدا باشند، همین امر برای مجموعه‌های A_i درست است، و نتیجه می‌گیریم که

$$\mu(E) = \mu(A) = \sum_{۱}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{۱}^{\infty} \mu(E_i) \cdot$$

این امر جمعی شمارشپذیر بودن μ بر $\mathfrak{M}^*$ را ثابت خواهد کرد.

۳۷.۱. این امر که توابع ت.ه. مساوی از دید انتگرالگیری غیرقابل تمیزند پیشنهاد می‌کند که تعریف تابع اندازه‌پذیر را وسعت ببخشیم. ما تابع f تعریف شده بر مجموعهٔ $E \in \mathfrak{M}$ را ***اندازه‌پذیر بر*** X گوییم اگر $\mu(E^c) = ۰$ و $f^{-۱}(V) \cap E$ به‌ازای هر مجموعهٔ باز V اندازه‌پذیر باشد. اگر به‌ازای $x \in E^c$ تعریف کنیم $f(x) = ۰$، یک تابع اندازه‌پذیر بر X به‌معنی قدیم به‌دست می‌آوریم اگر اندازهٔ ما تام باشد، می‌توان f را بر E^c به‌طور کاملاً دلخواه تعریف کرد و یک تابع اندازه‌پذیر به‌دست آورد. انتگرال f روی هر مجموعهٔ $A \in \mathfrak{M}$ از تعریف f بر E^c مستقل است. لذا این تعریف حتی لازم نیست تصریح شود.

حالات بسیاری هست که این امر به‌طور طبیعی رخ می‌دهد. مثلاً تابع f بر خط حقیقی ممکن است فقط تقریباً همه جا (نسبت به‌اندازهٔ لبگ) مشتقپذیر باشد ولی تحت شرایطی هنوز f انتگرال مشتقش باشد. این امر در فصل ۷ مطرح خواهد شد. یا دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر بر X ممکن است فقط تقریباً همه جا همگرا باشد. با تعریف جدیدمان از اندازه‌پذیری، حد هنوز تابع اندازه‌پذیری بر X است و ما مجبور نیستیم به‌مجموعه‌ای برویم که همگرایی عملاً در آن رخ می‌دهد.

برای توضیح این امر، یک نتیجه از قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ را به‌شکلی بیان می‌کنیم که در آن مجموعه‌های استثنایی از اندازهٔ صفر پذیرفته شده‌اند:

۳۸.۱ قضیه. ***فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط باشد که ت. ه. بر X تعریف شده‌اند به‌طوری که***

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty \cdot \qquad (۱)$$

در این صورت سری

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x) \qquad (۲)$$

به‌ازای تقریباً هر x همگراست، $f \in L^{۱}(\mu)$، و

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \cdot \qquad (۳)$$

برهان. فرض کنیم S_n مجموعه‌ای باشد که f_n بر آن تعریف شده است؛ درنتیجه $\mu(S_n^c) = 0$. به‌ازای $x \in S = \cap S_n$ قرار می‌دهیم $\varphi(x) = \Sigma\,|f_n(x)|$. در این صورت $\mu(S^c) = 0$. بنابر (۱) و قضیهٔ ۲۷.۱،

$$\int_X \varphi\, d\mu < \infty \cdot \qquad (۴)$$

اگر $E = \{x \in S : \varphi(x) < \infty\}$، از (۴) معلوم می‌شود که $\mu(E^c) = 0$. سری (۲) به‌ازای هر $x \in E$ به‌طور مطلق همگراست، و هرگاه $f(x)$ به‌ازای هر $x \in E$ با (۲) تعریف شده باشد، آنگاه بر E داریم $|f(x)| \le \varphi(x)$؛ درنتیجه، بنابر (۴)، بر E داریم $f \in L^1(\mu)$. هرگاه $g_n = f_1 + \cdots + f_n$، آنگاه $|g_n| \le \varphi$، به‌ازای هر $x \in E$، $g_n(x) \to f(x)$، و قضیهٔ ۳۴.۱ رابطهٔ (۳) را با E به‌جای X به‌ما می‌دهد. این هم‌ارز (۳) است زیرا $\mu(E^c) = 0$.

حتی اگر f_n در **هر** نقطهٔ X تعریف شده بود، رابطهٔ (۱) فقط ایجاب می‌کرد که (۲) **تقریباً همه جا** همگراست. ذیلاً چند حالت دیگر که در آنها نیز نتایج فقط تقریباً همه جا برقرارند ذکر شده است.

۳۹.۱ قضیه

(آ) فرض کنیم $f : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر بوده، $E \in \mathfrak{M}$، و $\int_E f\,d\mu = 0$. در این صورت $f = 0$ ت. ه. بر E.

(ب) فرض کنیم $f \in L^1(\mu)$ و به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$، $\int_E f\,d\mu = 0$. در این صورت $f = 0$ ت. ه. بر X.

(پ) فرض کنیم $f \in L^1(\mu)$ و

$$\left| \int_X f\,d\mu \right| = \int_X |f|\,d\mu \cdot$$

در این صورت ثابتی مانند α هست به‌طوری که $\alpha f = |f|$ ت. ه. بر X.

قسمت (پ) شرطی است که تحت آن در قضیهٔ ۳۳.۱ تساوی خواهیم داشت.

برهان

(آ) هرگاه $A_n = \left\{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$، $n = 1, 2, 3, \cdots$، آنگاه

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \le \int_{A_n} f\,d\mu \le \int_E f\,d\mu = 0\,;$$

درنتیجه $\mu(A_n) = 0$. چون $\{x \in E : f(x) > 0\} = \cup A_n$، (آ) نتیجه خواهد شد.

(ب) قرار می‌دهیم $f = u + iv$ و فرض می‌کنیم $E = \{x : u(x) \ge 0\}$. در این صورت قسمت حقیقی $\int_E f\,d\mu$ مساوی $\int_E u^+\,d\mu$ است. پس $\int_E u^+\,d\mu = 0$، و (آ) ایجاب می‌کند که

$u^+ = \circ$ ت. هـ. به‌همین نحو نتیجه می‌شود که

$$u^- = v^+ = v^- = \circ \text{ ت. هـ.}$$

(پ) برهان قضیهٔ ۳۳.۱ را امتحان می‌کنیم. فرض فعلی ما ایجاب می‌کند که آخرین نامساوی در برهان قضیهٔ ۳۳.۱ باید یک تساوی باشد. لذا $\int(|f|-u)\,d\mu = \circ$. چون $|f|-u \geq \circ$، (آ) نشان می‌دهد که $u = |f|$ ت. هـ. این امر می‌گوید که قسمت حقیقی αf ت. هـ. مساوی $|\alpha f|$ است. پس $\alpha f = |\alpha f| = |f|$ ت. هـ. که نتیجهٔ مطلوب می‌باشد.

۴۰.۱ قضیه. ***فرض کنیم $\mu(X) < \infty$، $f \in L^1(\mu)$، S یک مجموعهٔ بسته در صفحهٔ مختلط بوده، و متوسطهای***

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu$$

به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ با $\mu(E) > \circ$ در S قرار داشته باشند. در این صورت، به‌ازای تقریباً هر $x \in E$، $f(x) \in S$.

برهان. فرض کنیم Δ یک قرص مستدیر بسته (مثلاً به‌مرکز α و شعاع $r > \circ$) در متمم S باشد. چون S^c اجتماع تعدادی شمارشپذیر از این قرصهاست، کافی است ثابت کنیم $\mu(E) = \circ$ که در آن $E = f^{-1}(\Delta)$.

هرگاه $\mu(E) > \circ$، آنگاه

$$|A_E(f) - \alpha| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f-\alpha)\,d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f-\alpha|\,d\mu \leq r$$

که ناممکن است زیرا $A_E(f) \in S$. لذا $\mu(E) = \circ$.

۴۱.۱ قضیه. ***فرض کنیم $\{E_k\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X باشد به‌طوری که***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty \cdot \tag{۱}$$

در این صورت تقریبا هر $x \in X$ در حداکثر تعدادی متناهی از مجموعه‌های E_k قرار دارد.

برهان. اگر A مجموعهٔ تمام xهایی باشد که در تعدادی نامتناهی E_k قرار دارند، باید ثابت کنیم که $\mu(A) = \circ$. قرار می‌دهیم

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x) \quad (x \in X) \cdot \tag{۲}$$

به‌ازای هر x، هر جملهٔ این سری ۰ یا ۱ است. لذا $x \in A$ اگر و فقط اگر $g(x) = \infty$. بنابر قضیهٔ ۲۷.۱، انتگرال g روی X مساوی مجموع در (۱) است. لذا $g \in L^1(\mu)$؛ و درنتیجه $g(x) < \infty$
ت . ه.

تمرینات

۱. آیا یک σـ جبر نامتناهی وجود دارد که فقط تعدادی شمارشپذیر عضو داشته باشد؟

۲. مشابه قضیهٔ ۸.۱ را برای n تابع ثابت کنید.

۳. ثابت کنید هرگاه f یک تابع حقیقی بر فضای اندازه‌پذیر X باشد به‌طوری که $\{x : f(x) \geq r\}$ به‌ازای هر عدد گویای r اندازه‌پذیر است، آنگاه f اندازه‌پذیر می‌باشد.

۴. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی در $[-\infty, \infty]$ باشند، و احکام زیر را ثابت کنید:

(آ) $\limsup_{n \to \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \to \infty} a_n$؛

(ب) $\limsup_{n \to \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \to \infty} a_n + \limsup_{n \to \infty} b_n$

مشروط بر اینکه هیچیک از مجموعها به‌شکل $\infty - \infty$ نباشد؛

(پ) هرگاه به‌ازای هر n، $a_n \leq b_n$، آنگاه

$$\liminf_{n \to \infty} a_n \leq \liminf_{n \to \infty} b_n \cdot$$

با مثال نشان دهید که در (ب) می‌توان نامساوی اکید داشت.

۵. (آ) فرض کنید $f : X \to [-\infty, \infty]$ و $g : X \to [-\infty, \infty]$ اندازه‌پذیر باشند. ثابت کنید مجموعه‌های

$$\{x : f(x) < g(x)\} \quad \text{و} \quad \{x : f(x) = g(x)\}$$

اندازه‌پذیرند.

(ب) ثابت کنید مجموعهٔ نقاطی که در آنها یک دنباله از توابع حقیقی اندازه‌پذیر همگرا (به‌حدی متناهی) باشد اندازه‌پذیر است.

۶. فرض کنید X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر بوده، $\mathfrak{M}$ گردایهٔ تمام مجموعه‌های $E \subset X$ باشد که E یا E^c حداکثر شمارشپذیر است، و در حالت اول تعریف کنید $\mu(E) = 0$ و در حالت دوم تعریف کنید $\mu(E) = 1$. ثابت کنید $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X است و μ بر $\mathfrak{M}$ یک اندازه می‌باشد. توابع اندازه‌پذیر نظیر و انتگرالهایشان را توصیف نمایید.

۷. فرض کنید $f_n : X \to [0, \infty]$ به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$ اندازه‌پذیر بوده، $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots \geq 0$، به‌ازای هر $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $f_n(x) \to f(x)$، و $f_1 \in L^1(\mu)$. در این صورت ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

و نشان دهید که این نتیجه در صورت حذف شرط «$f_1 \in L^1(\mu)$» به‌دست **نمی‌آید**.

۸. به‌ازای n فرد قرار دهید $f_n = \chi_E$ و به‌ازای n زوج قرار دهید $f_n = 1 - \chi_E$. این مثال چه رابطه‌ای با لم فاتو دارد؟

۹. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر X بوده، $f: X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد، $\int_X f\,d\mu = c$ که در آن $0 < c < \infty$، و α ثابت باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \int n \log[1 + (f/n)^\alpha]\,d\mu = \begin{cases} \infty & \text{اگر } 0 < \alpha < 1, \\ c & \text{اگر } \alpha = 1, \\ 0 & \text{اگر } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

راهنمایی. اگر $\alpha \geq 1$، انتگرالدهها تحت تسلط αf اند. اگر $\alpha < 1$، می‌توان لم فاتو را به‌کار برد.

۱۰. فرض کنید $\mu(X) < \infty$، $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط کراندار بر X باشد، و $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر X. ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu ,$$

و نشان دهید که فرض «$\mu(X) < \infty$» را نمی‌توان حذف کرد.

۱۱. در قضیهٔ ۴۱.۱ نشان دهید که

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k ,$$

و لذا قضیه را بدون ارجاع به‌انتگرالگیری ثابت کنید.

۱۲. فرض کنید $f \in L^1(\mu)$ و ثابت کنید به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ هست به‌طوری که وقتی $\mu(E) < \delta$، $\int_E |f|\,d\mu < \varepsilon$.

۱۳. نشان دهید که حکم ۲۴.۱ قسمت (پ) به‌ازای $c = \infty$ نیز برقرار است.

فصل دو

اندازه‌های بورل مثبت

فضاهای برداری

۱.۲ تعریف. یک ***فضای برداری مختلط*** (یا یک فضای برداری روی میدان مختلط) مجموعه‌ای است مانند V که عناصرش را ***بردار*** نامند و در آن دو عمل به‌نامهای ***جمع*** و ***ضرب اسکالر*** تعریف شده‌اند که از خواص جبری آشنای زیر بهره‌منداند:

به‌هر جفت بردار x و y بردار $x+y$ چنان نظیر است که $x+y=y+x$ و $x+(y+z)=(x+y)+z$؛ V شامل بردار منحصر به‌فرد 0 (***بردار صفر*** یا ***مبدأ*** V) است به‌طوری که به‌ازای هر $x \in V$، $x+0=x$؛ و به‌هر $x \in V$ بردار منحصر به‌فرد $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$.

به‌هر جفت (α, x) که $x \in V$ و α اسکالر است (در اینجا ***اسکالر*** یعنی ***عدد مختلط***) بردار $\alpha x \in V$ چنان نظیر است که $1x=x$، $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$، و دو قانون پخشپذیری

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad \text{و} \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \tag{1}$$

برقرارند.

یک ***تبدیل خطی*** از فضای برداری V به‌توی فضای برداری V_1 نگاشتی است مانند Λ از V به‌توی V_1 به‌طوری که به‌ازای هر x و y در V و جمیع اسکالرهای α و β،

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda x+\beta\Lambda y. \tag{2}$$

در حالت خاص که V_1 میدان اسکالرهاست (این ساده‌ترین مثال از یک فضای برداری غیر از مثال بدیهی مرکب از فقط ۰ است)، Λ یک **تابعی خطی** نام دارد. لذا یک تابعی خطی تابعی است مختلط بر V که در رابطهٔ (۲) صدق می‌کند.

اگر Λ خطی باشد، اغلب به‌جای $\Lambda(x)$ می‌نویسیم Λx.

البته تعاریف فوق را می‌توان با هر میدان به‌جای میدان مختلط بیان کرد. ولی تمام فضاهای برداری این کتاب جز یک مورد مختلط اند مگر خلافش تصریح شود؛ این مورد فضاهای اقلیدسی R^k است به‌عنوان فضاهای برداری روی میدان **حقیقی**.

۲.۲ انتگرالگیری به‌عنوان یک تابعی خطی. آنالیز پر است از فضاهای برداری و تبدیلات خطی، و رابطهٔ بویژه نزدیکی بین انتگرالگیری از یک سو و تابعیهای خطی از سوی دیگر وجود دارد.

مثلاً قضیهٔ ۳۲.۱ نشان می‌دهد که $L^1(\mu)$ به‌ازای هر اندازهٔ مثبت μ یک فضای برداری است، و نگاشت

$$f \to \int_X f\,d\mu \tag{۱}$$

یک تابعی خطی بر $L^1(\mu)$ می‌باشد. همچنین اگر g یک تابع اندازه‌پذیر کراندار باشد، نگاشت

$$f \to \int_X fg\,d\mu \tag{۲}$$

یک تابعی خطی بر $L^1(\mu)$ است. در فصل ۶ خواهیم دید که تابعیهای (۲) به‌نوعی تنها تابعیهای جالب بر $L^1(\mu)$ می‌باشند.

برای مثالی دیگر، فرض کنیم C مجموعهٔ تمام توابع مختلط پیوسته بر بازهٔ بستهٔ یکهٔ $I = [0, 1]$ باشد. مجموع دو تابع پیوسته پیوسته است، و همچنین است هر مضرب اسکالر یک تابع پیوسته. لذا C یک فضای برداری است، و هرگاه

$$\Lambda f = \int_0^1 f(x)\,dx \quad (f \in C) \tag{۳}$$

(این یک انتگرال ریمان معمولی است)، آنگاه Λ بوضوح یک تابعی خطی بر C می‌باشد. Λ خاصیت جالب دیگری نیز دارد و آن این است که یک **تابعی خطی مثبت** می‌باشد. این یعنی هر وقت $f \geq 0$، $\Lambda f \geq 0$.

یکی از کارهایی که هنوز در پیش داریم ساختن اندازهٔ لبگ است. با توجه به‌مطلب زیر، این ساخت می‌تواند بر تابعی خطی (۳) استوار باشد: بازهٔ باز $(a, b) \subset I$ و ردهٔ تمام $f \in C$هایی که $0 \leq f \leq 1$ بر I و به‌ازای هر x غیرواقع در (a, b)، $f(x) = 0$ را در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر چنین f داریم $\Lambda f < b-a$ ولی f را می‌توان طوری اختیار کرد که Λf به‌قدر مطلوب به $b-a$ نزدیک باشد. لذا طول (یا اندازهٔ) (a, b) با مقادیر تابعی Λ ارتباط نزدیکی دارد.

مطلب فوق وقتی از دید کلیتری نگاه شود به‌قضیهٔ جالب و بسیار مهمی از اف. ریس $(F.Riesz)$ منجر می‌گردد:

به‌هر تابعی خطی مثبت Λ بر C یک اندازهٔ بورل مثبت متناهی مانند μ بر I چنان نظیر است که

$$\Lambda f = \int_I f d\mu \quad (f \in C) \cdot \tag{۴}$$

[عکس مطلب واضح است: هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مثبت متناهی بر I بوده و Λ با (۴) تعریف شده باشد، آنگاه Λ یک تابعی خطی مثبت بر C می‌باشد.]

جالب است که بازهٔ کراندار I را با R^1 عوض کنیم. این کار را می‌توان با توجه به‌توابع پیوسته بر R^1 که خارج بازهٔ بستهٔ کرانداری صفرند انجام داد. (این توابع مثلاً انتگرالپذیر ریمان‌اند.) همچنین توابع چند متغیره کراراً در آنالیز ظاهر می‌شوند. لذا باید از R^1 به R^n برویم. خواهیم دید که برهان قضیهٔ ریس با کمترین تغییر برقرار است. به‌علاوه خواص اقلیدسی R^n (مختصات، تعامد، و غیره) نقشی در برهان ندارند. درواقع شخص آنها را کاملاً دست و پاگیر می‌بیند. آنچه در اثبات مهم‌اند بعضی از خواص **توپولوژیک** R^n می‌باشند. (و این طبیعی است زیرا با توابع **پیوسته** کار می‌کنیم.) خاصیت مهم **فشردگی موضعی** است: هر نقطه از R^n همسایگیی دارد که بستش فشرده می‌باشد.

لذا قضیهٔ ریس را در محدوده‌ای بسیار کلی ثابت می‌کنیم (قضیهٔ ۲.۱۴). سپس وجود اندازهٔ لبگ به‌عنوان حالتی خاص نتیجه خواهد شد. افرادی که بخواهند به‌وضع ملموستری بپردازند می‌توانند از بخش زیر در باب مقدمات توپولوژیک به‌سرعت بگذرند [لم اوریزن $(Urysohn)$ در آن از همه جالبتر است؛ ر.ک. تمرین ۳] و می‌توانند، بدون از دست دادن ایده‌های اصلی، فضاهای هاسدروف به‌طور موضوعی فشرده را با فضاهای متری به‌طور موضعی فشرده، و حتی با فضاهای اقلیدسی، عوض نمایند.

همچنین خاطرنشان می‌کنیم که در بعضی حالات (بخصوص نظریهٔ احتمال) اندازه‌ها به‌طور طبیعی بر فضاهای بدون توپولوژی و یا فضاهای توپولوژیکی که به‌طور موضعی فشرده نیستند ظاهر می‌شوند. یک نمونه اندازهٔ وینر $(Wiener)$ است که به‌بعضی از مجموعه‌ها از توابع پیوسته عدد منتسب می‌کند و این اندازه ابزاری اصلی در مطالعهٔ حرکت براونی می‌باشد. این مطالب در این کتاب مطرح نخواهند شد.

مقدمات توپولوژیک

۳.۲ چند تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک به‌صورت تعریف شده در بخش ۲.۱ باشد.

(آ) مجموعهٔ $E \subset X$ **بسته** است اگر متممش E^c باز باشد. (لذا $\varnothing$ و X بسته‌اند، اجتماعهای

متناهی از مجموعه‌های بسته بسته‌اند، و اشتراکهای دلخواه از مجموعه‌های بسته‌بسته می‌باشند.)

(ب) **بست** $\overline{E}$ از مجموعهٔ $E \subset X$ کوچکترین مجموعهٔ بسته در X است که شامل E می‌باشد. (استدلال زیر وجود $\overline{E}$ را ثابت می‌کند: گردایهٔ Ω از تمام زیرمجموعه‌های بستهٔ X که شامل E باشند تهی نیست زیرا $X \in \Omega$. فرض کنیم $\overline{E}$ اشتراک تمام اعضای Ω باشد.)

(پ) مجموعهٔ $K \subset X$ **فشرده** است اگر هر پوشش باز K شامل زیرپوششی متناهی باشد. به‌طور صریح، هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز باشد که اجتماعشان شامل K است، آنگاه اجتماع زیرگردایه‌ای متناهی از $\{V_\alpha\}$ نیز شامل K باشد.

بخصوص، هرگاه X خود فشرده باشد، آنگاه X را یک **فضای فشرده** می‌نامیم.

(ت) یک **همسایگی** نقطهٔ $p \in X$ زیرمجموعهٔ بازی از X است که شامل p باشد. (این اصطلاح کاملاً متعارف نیست. بعضی «همسایگی p» را هر مجموعه‌ای که شامل مجموعهٔ بازی حاوی p باشد می‌گیرند.)

(ث) X یک ***فضای هاسدورف*** (*Hausdorff*) است در صورتی که شرط زیر برقرار باشد: هرگاه $p \in X$، $q \in X$، و $p \neq p$، آنگاه p همسایگیی مانند U و q همسایگیی مانند V داشته باشد به‌طوری که $U \cap V = \varnothing$.

(ج) X ***به‌طور موضعی فشرده*** است اگر هر نقطه‌اش همسایگیی با بست فشرده داشته باشد. واضح است که هر فضای فشرده به‌طور موضعی فشرده است.

حال قضیهٔ هاینه (*Heine*) ـ بورل را یادآوری می‌کنیم: ***زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضای اقلیدسی R^n دقیقاً آنهایی هستند که بسته و کراندارا‌ند*** (مرجع [۲۶][1]، قضیهٔ ۴۱.۲). از این قضیه به‌آسانی معلوم می‌شود که R^n یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده است. همچنین هر فضای متری یک فضای هاسدورف می‌باشد.

۲.۴ قضیه. ***فرض کنیم K در فضای توپولوژیک X فشرده و F در این فضا بسته باشد. هرگاه $F \subset K$، آنگاه F نیز فشرده می‌باشد.***

برهان. هرگاه $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز F بوده و $W = F^c$، آنگاه $W \cup \bigcup_\alpha V_\alpha$ فضای X را می‌پوشاند. پس گردایه‌ای متناهی مانند $\{V_{\alpha_i}\}$ هست به‌طوری که

$$K \subset W \cup V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$$

در این صورت $F \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$.

نتیجه. ***هرگاه $A \subset B$ و B بست فشرده داشته باشد، A نیز چنین است.***

۱ـ اعداد داخل کروشه اشاره به کتابنامه دارند.

۵.۲ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و مجموعهٔ $K \subset X$ فشرده بوده و $p \in K^c$. در این صورت مجموعه‌های بازی چون U و W وجود دارند به‌طوری که $p \in U$، $K \subset W$، و $U \cap W = \varnothing$.***

برهان. اگر $q \in K$، اصل جداسازی هاسدورف وجود مجموعه‌های باز از هم جدایی چون U_q و V_q را ایجاب می‌کند که $p \in U_q$ و $p \in V_q$. چون K فشرده است، نقاطی مانند $q_1, \cdots, q_n \in K$ وجود دارند به‌طوری که

$$K \subset V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n} \cdot$$

در این صورت مجموعه‌های

$$W = V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n} \quad \text{و} \quad U = U_{q_1} \cap \cdots \cap U_{q_n}$$

واجد شرایط مذکور در قضیه می‌باشند.

چند نتیجه

(آ) زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضاهای هاسدورف بسته‌اند.

(ب) هرگاه در یک فضای هاسدورف F بسته و K فشرده باشد، آنگاه $F \cap K$ فشرده می‌باشد.

نتیجهٔ (ب) از نتیجهٔ (آ) و قضیهٔ ۴.۲ حاصل می‌شود.

۶.۲ قضیه. ***هرگاه $\{K_\alpha\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فشردهٔ یک فضای هاسدورف بوده و $\cap_\alpha K_\alpha = \varnothing$، آنگاه زیرگردایه‌ای متناهی از $\{K_\alpha\}$ نیز دارای اشتراک تهی می‌باشد.***

برهان. قرار می‌دهیم $V_\alpha = K_\alpha{}^c$. عضو K_1 از $\{K_\alpha\}$ را ثابت می‌گیریم. چون هیچ نقطه‌ای از K_1 متعلق به‌هر K_α نیست، $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز K_1 است. درنتیجه، به‌ازای گردایه‌ای متناهی مانند $\{V_{\alpha_i}\}$، $K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$. این ایجاب می‌کند که

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n} = \varnothing \cdot$$

۷.۲ قضیه. ***فرض کنیم U در فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X باز بوده، $K \subset U$، و K فشرده باشد. در این صورت مجموعهٔ بازی چون V با بست فشرده وجود دارد که***

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U \cdot$$

برهان. چون هر نقطه از K همسایگیی با بست فشرده دارد و K با اجتماع تعدادی متناهی از این همسایگیها پوشانده می‌شود، پس K در مجموعهٔ بازی چون G با بست فشرده قرار دارد. اگر $U = X$، $V = G$ را اختیار می‌کنیم.

در غیر این صورت، فرض کنیم C متمم U باشد. قضیهٔ ۵.۲ نشان می‌دهد که به‌هر $p \in C$

مجموعهٔ بازی مانند W_p نظیر است که $K \subset W_p$ و $p \notin \overline{W}_p$. لذا $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p\}$، که در آن p روی C تغییر می‌کند، گردایه‌ای از مجموعه‌های فشرده با اشتراک تهی می‌باشد. پس، بنابر قضیهٔ ۶.۲، نقاطی مانند $p_1, \cdots, p_n \in C$ وجود دارند به‌طوری که

$$C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \cdots \cap \overline{W}_{p_n} = \varnothing \cdot$$

در این صورت مجموعهٔ

$$V = G \cap W_{p_1} \cap \cdots \cap W_{p_n}$$

خواص مطلوب را دارد چراکه

$$\overline{V} \subset \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \cdots \cap \overline{W}_{p_n} \cdot$$

۸.۲ تعریف. فرض کنیم f یک تابع حقیقی (یا حقیقی وسعت یافته) بر یک فضای توپولوژیک باشد. اگر

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

به‌ازای هر αی حقیقی باز باشد، گوییم f **نیمه پیوستهٔ پایینی** است. و اگر

$$\{x : f(x) < \alpha\}$$

به‌ازای هر αی حقیقی باز باشد، گوییم f **نیمه پیوستهٔ بالا یی** می‌باشد.

یک تابع حقیقی بوضوح پیوسته است اگر و فقط اگر هم نیمه پیوستهٔ بالایی و هم نیمه‌پیوستهٔ پایینی باشد.

توابع مشخص ساده‌ترین نمونه از نیمه‌پیوستگی را به‌دست می‌دهند:

(آ) توابع مشخص مجموعه‌های **باز** نیمه‌پیوستهٔ **پایینی** اند؛

(ب) توابع مشخص مجموعه‌های **بسته** نیمه‌پیوستهٔ **بالا یی** اند.

خاصیت زیر تقریباً بلافاصله از تعاریف نتیجه می‌شود:

(پ) ***سوپرمم هر گردایه از توابع نیمه‌پیوستهٔ پایینی نیمه‌پیوستهٔ پایینی است، و اینفیمم هر گردایه از توابع نیمه‌پیوستهٔ بالا یی نیمه‌پیوستهٔ بالا یی می‌باشد.***

۹.۲ تعریف. *محافظ* تابع مختلط f بر فضای توپولوژیک X بست مجموعهٔ

$$\{x : f(x) \neq 0\}$$

می‌باشد.

گردایهٔ تمام توابع مختلط پیوسته بر X که محافظ فشرده دارند را با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم. **توجه کنید که $C_c(X)$ *یک فضای برداری است*.** این مطلب از دو نکتهٔ زیر ناشی می‌شود:

(آ) محافظ $f+g$ در اجتماع محافظهای f و g قرار دارد، و هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های فشرده‌فشرده می‌باشد.
(ب) مجموع دو تابع مختلط پیوسته‌پیوسته است، و مضارب اسکالر توابع پیوسته نیز چنین می‌باشند.
(اگر «تابع اندازه‌پذیر» با «تابع پیوسته» و «فضای اندازه‌پذیر» با «فضای توپولوژیک» عوض شود، صورت و برهان قضیهٔ ۸.۱ کاملاً برقرارند. برای اثبات اینکه مجموع و حاصل‌ضرب توابع پیوسته‌پیوسته‌اند، $\Phi(s,t)=s+t$ و $\Phi(s,t)=st$ را اختیار کنید.)

۱۰.۲ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و $f:X\to Y$ پیوسته باشد. هرگاه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد، آنگاه $f(K)$ فشرده است.***

برهان. هرگاه $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز $f(K)$ باشد، آنگاه $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ یک پوشش باز K است. درنتیجه، به‌ازای α_1، $\cdots$، α_n ی، $K\subset f^{-1}(V_{\alpha_1})\cup\cdots\cup f^{-1}(V_{\alpha_n})$ و لذا $f(K)\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}$.

نتیجه. ***برد هر $f\in C_c(X)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از صفحهٔ مختلط است.***

درواقع هرگاه K محافظ $f\in C_c(X)$ باشد، آنگاه $f(X)\subset f(K)\cup\{0\}$. هرگاه X فشرده نباشد، آنگاه $0\in f(X)$ ولی از مثالهای ساده معلوم می‌شود که لازم نیست ۰ در $f(K)$ باشد.

۱۱.۲ نمادگذاری. در این فصل از قراردادهای زیر استفاده می‌کنیم. نماد

$$K\prec f \tag{1}$$

یعنی K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X است، $f\in C_c(X)$، به‌ازای هر $x\in X$، $0\le f(x)\le 1$، و به‌ازای هر $x\in K$، $f(x)=1$. نماد

$$f\prec V \tag{2}$$

یعنی V باز است، $f\in C_c(X)$، $0\le f\le 1$، و محافظ f در V قرار دارد. و نماد

$$K\prec f\prec V \tag{3}$$

یعنی (۱) و (۲) هر دو برقرارند.

۱۲.۲ لم اوریزن. ***فرض کنیم X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده، V در X باز، $K\subset V$، و K فشرده باشد. در این صورت $f\in C_c(X)$ ای هست به‌طوری که***

$$K\prec f\prec V\cdot \tag{1}$$

این لم برحسب توابع مشخص وجود یک **تابع پیوسته** مانند f را تأیید می‌کند که در نامساویهای $\chi_K \le f \le \chi_V$ صدق می‌نماید. به‌آسانی می‌توان توابع **نیمه‌پیوسته**‌ای را یافت که این کار را انجام دهند؛ مثالها عبارتند از χ_K و χ_V.

برهان. قرار می‌دهیم $r_1 = ۰$، $r_2 = ۱$، و فرض می‌کنیم r_3، r_4، r_5، $\cdots$ اعداد گویای موجود در $(۰, ۱)$ باشند. بنابر قضیهٔ ۷.۲، می‌توان مجموعهٔ باز V_0 و سپس V_1 را چنان یافت که $\overline{V}_0$ فشرده بوده و

$$K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V \cdot \qquad (۲)$$

فرض کنیم $n \ge ۲$ و V_{r_1}، $\cdots$، V_{r_n} طوری اختیار شده باشند که $r_i < r_j$ جزئیت $\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i}$ را ایجاب کند. در این صورت یکی از اعداد r_1، $\cdots$، r_n (مثلاً r_i) بزرگترین عددی است که از r_{n+1} کوچکتر است، و عددی دیگر (مثلاً r_j) کوچکترین عددی است که از r_{n+1} بزرگتر می‌باشد. با استفادهٔ مجدد از قضیهٔ ۷.۲ می‌توان $V_{r_{n+1}}$ را چنان یافت که

$$\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_i} \cdot$$

با ادامهٔ این کار، گردایهٔ $\{V_r\}$ از مجموعه‌های باز (به‌ازای هر $r \in [۰, ۱]$ گویا یکی) با خواص زیر به‌دست می‌آید: $K \subset V_1$، $\overline{V}_0 \subset V$، **هر $\overline{V}_r$ فشرده، و**

$$\textbf{جزئیت } r < s \textbf{ را ایجاب می‌کند } \overline{V}_s \subset V_r \qquad (۳)$$

تعریف می‌کنیم

$$f_r(x) = \begin{cases} r \text{ ،} x \in V_r \text{ اگر} \\ ۰ \text{ ، در غیر این صورت} \end{cases}, \quad g_s(x) = \begin{cases} ۱ \text{ ،} x \in \overline{V}_s \text{ اگر} \\ s \text{ ، در غیر این صورت} \end{cases}, \qquad (۴)$$

و

$$f = \sup_r f_r \text{ و } g = \inf_s g_s \cdot \qquad (۵)$$

نکات بعد از تعریف ۸.۲ نشان می‌دهند که f نیمه پیوستهٔ پایینی و g نیمه‌پیوستهٔ بالایی است. واضح است که $۰ \le f \le ۱$، اگر $x \in K$، $f(x) = ۱$، و محافظ f در $\overline{V}_0$ است. برهان با نشان دادن اینکه $f = g$ تمام می‌شود.

نامساوی $f_r(x) > g_s(x)$ فقط وقتی ممکن است که $r > s$، $x \in V_r$، و $x \notin \overline{V}_s$. ولی $r > s$ جزئیت $V_r \subset V_s$ را ایجاب می‌کند. لذا به‌ازای هر r و s، $f_r \le g_s$؛ درنتیجه $f \le g$.

فرض کنیم به‌ازای xی $f(x) < g(x)$. در این صورت اعداد گویایی مانند r و s وجود دارند که $f(x) < r < s < g(x)$. چون $f(x) < r$، داریم $x \notin V_r$. و چون $g(x) > s$،

خواهیم داشت $x \notin \overline{V}_s$. این طبق (۳) یک تناقض است. بنابراین $f = g$.

۱۳.۲ قضیه. فرض کنیم V_1، $\cdots$، V_n زیرمجموعه‌های بازی از یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X بوده، K فشرده باشد، و

$$K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n \cdot$$

در این صورت توابعی مانند $h_i \prec V_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ وجود دارند به‌طوری که

$$h_1(x) + \cdots + h_n(x) = 1 \quad (x \in K) \cdot \tag{1}$$

گردایهٔ $\{h_1, \cdots, h_n\}$ به‌خاطر رابطهٔ (۱) ***افراز واحد بر*** K نسبت به‌پوشش $\{V_1, \cdots, V_n\}$ نام یافته است.

برهان. بنابر قضیهٔ ۷.۲، هر $x \in K$ همسایگیی چون W_x با بست فشردهٔ $\overline{W}_x \subset V_i$ به‌ازای یک i (وابسته‌به x) دارد. نقاطی‌مانند x_1، $\cdots$، x_m موجودند به‌طوری‌که $W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m} \supset K$. اگر $1 \le i \le n$، H_i را اجتماع W_{x_j} هایی می‌گیریم که در V_i واقعند. بنابر لم اوریزن، توابعی مانند g_i وجود دارند به‌طوری که $H_i \prec g_i \prec V_i$. تعریف می‌کنیم.

$$h_1 = g_1$$
$$h_2 = (1 - g_1)\, g_2 \tag{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$h_n = (1-g_1)(1-g_2) \cdots (1-g_{n-1})\, g_n \cdot$$

در این صورت $h_i \prec V_i$. به‌آسانی به‌استقرا معلوم می‌شود که

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 1 - (1-g_1)(1-g_2) \cdots (1-g_n) \cdot \tag{3}$$

چون $K \subset H_1 \cup \cdots \cup H_n$، دست‌کم یک $g_i(x)$ به‌ازای هر نقطهٔ $x \in K$ مساوی ۱ است. لذا رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که (۱) برقرار می‌باشد.

قضیهٔ نمایش ریس

۱۴.۲ قضیه. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده بوده و Λ یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد. در این صورت یک $\sigma-$ جبر مانند $\mathfrak{M}$ در X هست که شامل تمام مجموعه‌های بورل در X می‌باشد، و یک اندازهٔ مثبت منحصر به‌فرد مانند μ بر $\mathfrak{M}$ هست که Λ را به‌مفهوم زیر نمایش می‌دهد.

(آ) به‌ازای هر $f\in C_c(X)$، $\Lambda f=\int_X f\,d\mu$،

و دارای خواص دیگر زیر نیز می‌باشد:

(ب) به‌ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ $K\subset X$، $\mu(K)<\infty$؛

(پ) به‌ازای هر $E\in\mathfrak{M}$ **داریم**

$$\mu(E)=\inf\{\mu(V): E\subset V \text{ و } V \text{ باز}\};$$

(ت) رابطهٔ

$$(E)=\sup\{\mu(K): K\subset E \text{ و } K \text{ فشرده}\}$$

به‌ازای هر مجموعهٔ باز E **و هر** $E\in\mathfrak{M}$ **که** $\mu(E)<\infty$ **برقرار است؛**

(ث) هرگاه $E\in\mathfrak{M}$، $A\subset E$، **و** $\mu(E)=0$، **آنگاه** $A\in\mathfrak{M}$.

برای روشن بودن وضع بهتر است راجع به‌معنی «مثبت» در فرض صریحتر باشیم: Λ طبق فرض یک تابعی خطی بر فضای برداری مختلط $C_c(X)$ است با این خاصیت که Λf به‌ازای هر f که بردش از اعداد حقیقی نامنفی تشکیل شده یک عدد حقیقی نامنفی می‌باشد. به‌طور خلاصه، هرگاه $f(X)\subset[0,\infty)$، آنگاه $\Lambda f\in[0,\infty)$.

البته خاصیت (آ) بیشتر مورد توجه است. پس از تعریف $\mathfrak{M}$ و μ، قسمتهای (ب) تا (ت) در جریان اثبات اینکه $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر و μ جمعی شمارشپذیر است ثابت می‌شوند. بعدها خواهیم دید (قضیهٔ ۲.۱۸) که در فضاهای «معقول» X هر اندازهٔ بورل صادق در (ب) در (پ) و (ت) نیز صدق می‌کند و (ت) در آن حالات عملاً به‌ازای هر $E\in\mathfrak{M}$ برقرار است. خاصیت (ث) صرفاً می‌گوید که $(X,\mathfrak{M},\mu)$ یک فضای اندازهٔ تام به‌مفهوم قضیهٔ ۳۶.۱ است.

در برهان این قضیه K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ X و V یک مجموعهٔ باز در X می‌باشد.

بحث را با اثبات یکتایی μ آغاز می‌کنیم. اگر μ در خواص (پ) و (ت) صدق کند، μ بر $\mathfrak{M}$ با مقادیرش بر مجموعه‌های فشرده معین است. لذا کافی است ثابت کنیم هر وقت μ_1 و μ_2 اندازه‌هایی باشند که قضیه برایشان برقرار است، به‌ازای هر K، $\mu_1(K)=\mu_2(K)$. لذا K و $\epsilon>0$ را ثابت می‌گیریم. بنابر (ب) و (پ)، $V\supset K$ ای وجود دارد به‌طوری که $\mu_2(V)<\mu_2(K)+\epsilon$. و بنابر لم اوریزن، f ای هست به‌طوری که $K\prec f\prec V$. درنتیجه

$$\mu_1(K)=\int_X \chi_K\,d\mu_1\le\int_X f\,d\mu_1=\Lambda f=\int_X f\,d\mu_2$$

$$\le\int_X \chi_V\,d\mu_2=\mu_2(V)<\mu_2(K)+\epsilon\cdot$$

لذا $\mu_1(K)\le\mu_2(K)$. اگر نقشهای μ_1 و μ_2 باهم عوض شوند، نامساوی در جهت دیگر به‌دست آمده و یکتایی μ به‌ثبوت می‌رسد.

ضمناً محاسبات فوق نشان می‌دهند که (آ) برقراری (ب) را ایجاب می‌کند.

ساختن μ و $\mathfrak{M}$

به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در X تعریف می‌کنیم

$$\mu(V)=\sup\{\Lambda f : f \prec V\}\cdot \tag{۱}$$

اگر $V_1 \subset V_2$، واضح است که (۱) نامساوی $\mu(V_1)\le\mu(V_2)$ را ایجاب می‌کند. لذا اگر E یک مجموعهٔ باز باشد،

$$\mu(E)=\inf\{\mu(V): E\subset V \text{ و } V \text{ باز}\}, \tag{۲}$$

و اگر $\mu(E)$ به‌ازای هر $E\subset X$ با (۲) تعریف شود، با (۱) سازگار می‌باشد.

با آنکه $\mu(E)$ را به‌ازای هر $E\subset X$ تعریف کرده‌ایم، جمعی شمارشپذیر بودن μ فقط بر یک $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ در X ثابت خواهد شد.

فرض کنیم $\mathfrak{M}_F$ ردهٔ تمام $E\subset X$ هایی باشد که در دو شرط زیر صدق کنند: $\mu(E)<\infty$ و

$$\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subset E \text{ و } K \text{ فشرده}\}\cdot \tag{۳}$$

بالأخره فرض کنیم $\mathfrak{M}$ ردهٔ تمام $E\subset X$ هایی باشد که به‌ازای هر K ی فشرده، $E\cap K\in\mathfrak{M}_F$.

برهان اینکه μ و $\mathfrak{M}$ خواص مطلوب را دارند. واضح است که μ ***یکنواست***؛ یعنی اگر $A\subset B$، $\mu(A)\le\mu(B)$، و $\mu(E)=0$ ایجاب می‌کند که $E\in\mathfrak{M}_F$ و $E\in\mathfrak{M}$. لذا (ث) برقرار است؛ ونیز، بنابر تعریف، (پ) برقرار می‌باشد.

چون برهان سایر احکام نسبتاً طویل است، بهتر است آن را به‌چند مرحله تقسیم کنیم.

ملاحظه کنید که مثبت بودن Λ ***یکنوایی*** Λ را ایجاب می‌کند: $f\le g$ نامساوی $\Lambda f\le\Lambda g$ را ایجاب می‌کند. این امر واضح است زیرا $\Lambda g=\Lambda f+\Lambda(g-f)$ و $g-f\ge 0$. این یکنوایی در مراحل دو و ده به‌کار خواهد رفت.

مرحله ۱. *هرگاه E_1، E_2، E_3، $\cdots$ زیرمجموعه‌های دلخواهی از X باشند، آنگاه*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\cdot \tag{۴}$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر V_1 و V_2 باز باشند،

$$\mu(V_1\cup V_2)\le\mu(V_1)+\mu(V_2)\cdot \tag{۵}$$

$g\prec V_1\cup V_2$ را اختیار می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۲.۱۳، توابعی مانند h_1 و h_2 وجود دارند به‌طوری‌که

$h_i \prec V_i$ و به‌ازای هر x در محافظ g، $h_1(x)+h_2(x) = 1$. لذا $h_i g \prec V_i$ و $g = h_1 g + h_2 g$ درنتیجه

$$\Lambda g = \Lambda (h_1 g) + \Lambda (h_2 g) \le \mu(V_1) + \mu(V_2) \cdot \qquad (۶)$$

چون (۶) به‌ازای هر $g \prec V_1 \cup V_2$ برقرار است، نامساوی (۵) نتیجه می‌شود.

هرگاه به‌ازای i ی $\mu(E_i) = \infty$، آنگاه (۴) بداهتاً برقرار است. لذا فرض می‌کنیم به‌ازای هر i، $\mu(E_i) < \infty$. $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. بنابر (۲)، مجموعه‌های بازی چون $V_i \supset E_i$ وجود دارند به‌طوری که

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\epsilon \, (i = 1, 2, 3, \cdots) \cdot$$

قرار می‌دهیم $V = \bigcup_1^\infty V_i$ و $f \prec V$ را اختیار می‌کنیم. چون f محافظ فشرده دارد، می‌بینیم که به‌ازای n ی $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$. لذا اگر بر (۵) استقرا کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\Lambda f \le \mu (V_1 \cup \cdots \cup V_n) \le \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon \cdot$$

چون این امر به‌ازای هر $f \prec V$ برقرار است و نیز $\bigcup E_i \subset V$، پس

$$\mu \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Big) \le \mu(V) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon$$

که بدلیل اختیاری بودن ϵ رابطهٔ (۴) را ثابت خواهد کرد.

مرحلهٔ دو. هرگاه K فشرده باشد، آنگاه $K \in \mathfrak{M}_F$ و

$$\mu(K) = \inf \{\Lambda f : K \prec f\} \cdot \qquad (۷)$$

این حکم (ب) قضیه را ایجاب خواهد کرد.

برهان. اگر $K \prec f$ و $0 < \alpha < 1$، قرار می‌دهیم $V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$. پس $K \subset V_\alpha$، و هر وقت $g \prec V_\alpha$، $\alpha g \le f$. لذا

$$\mu (K) \le \mu (V_\alpha) = \sup \{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \le \alpha^{-1} \Lambda f \cdot$$

با فرض $\alpha \to 1$ نتیجه می‌گیریم که

$$\mu (K) \le \Lambda f \cdot \qquad (۸)$$

لذا $\mu (K) < \infty$. چون K بوضوح در (۳) صدق می‌کند، $K \in \mathfrak{M}_F$.

اگر $\epsilon > 0$، $V \supset K$ ای با خاصیت $\mu(V) < \mu(K) + \epsilon$ وجود دارد. بنابر لم اوریزن، به‌ازای

f ی داریم $K \prec f \prec V$. لذا

$$\Lambda f \le \mu(V) < \mu(K)+\epsilon ,$$

که همراه با (۸) رابطهٔ (۷) را به‌دست می‌دهد.

مرحله سه. هر مجموعهٔ باز در (۳) صدق می‌کند. *لذا* $\mathfrak{M}_F$ شامل هر مجموعهٔ باز V با خاصیت $\mu(V) < \infty$ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم α یک عدد حقیقی باشد به‌طوری که $\alpha < \mu(V)$. یک $f \prec V$ با خاصیت $\alpha < \Lambda f$ وجود دارد. هرگاه W یک‌مجموعهٔ باز **دلخواه** شامل محافظ K ی f باشد، آنگاه $f \prec W$. پس $\Lambda f \le \mu(W)$. لذا $\Lambda f \le \mu(K)$. این یک مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset V$ را با $\alpha < \mu(K)$ نشان می‌دهد؛ درنتیجه (۳) به‌ازای V برقرار می‌باشد.

مرحلهٔ ۴. *فرض کنیم* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *که در آن* E_1، E_2، E_3، $\cdots$ *اعضای دو به‌دو از هم‌جدایی از* $\mathfrak{M}_F$ *اند. در این صورت*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \cdot \tag{۹}$$

هرگاه علاوه بر این $\mu(E) < \infty$، *آنگاه نیز* $E \in \mathfrak{M}_F$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر K_1 و K_2 مجموعه‌های فشردهٔ از هم جدایی باشند،

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1)+\mu(K_2) \cdot \tag{۱۰}$$

$\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. بنابر لم اوریزن، $f \in C_c(X)$ ی هست به‌طوری که $f(x) = 1$ بر K_1، $f(x) = 0$ بر K_2، و $0 \le f \le 1$. بنابر مرحلهٔ دو، g ای هست که

$$K_1 \cup K_2 \prec g \quad \text{و} \quad \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2)+\epsilon \cdot$$

توجه کنید که $K_1 \prec fg$ و $K_2 \prec (1-f)g$. چون Λ خطی است، از رابطهٔ (۸) معلوم می‌شود که

$$\mu(K_1)+\mu(K_2) \le \Lambda(fg)+\Lambda(g-fg) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2)+\epsilon \cdot$$

و چون ϵ دلخواه بود، رابطهٔ (۱۰) از مرحلهٔ یک نتیجه خواهد شد.

اگر $\mu(E) = \infty$، رابطهٔ (۹) از مرحلهٔ یک نتیجه می‌شود. لذا فرض می‌کنیم $\mu(E) < \infty$ و $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. چون $E_i \in \mathfrak{M}_F$، مجموعه‌های فشرده‌ای مانند $H_i \subset E_i$ وجود دارند که

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\epsilon \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۱۱}$$

با فرض $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$ و استقرا بر (۱۰) به‌دست می‌آوریم

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \epsilon \cdot \qquad (۱۲)$$

چون (۱۲) به‌ازای هر n و هر $\epsilon > 0$ برقرار است، طرف چپ (۹) از طرف راست کوچکتر نیست؛ و درنتیجه (۹) از مرحلهٔ یک نتیجه می‌شود.

اما اگر $\mu(E) < \infty$ و $\epsilon > 0$، رابطهٔ (۹) نشان می‌دهد که به‌ازای N ی

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \epsilon \cdot \qquad (۱۳)$$

بنابر (۱۲)، $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\epsilon$، و این نشان می‌دهد که E در (۳) صدق می‌کند. لذا $E \in \mathfrak{M}_F$.

مرحلهٔ پنج. ***اگر $E \in \mathfrak{M}_F$ و $\epsilon > 0$، مجموعهٔ فشرده‌ای مانند K و مجموعهٔ بازی مانند V وجود دارند به‌طوری که $K \subset E \subset V$ و $\mu(V-K) < \epsilon$.***

برهان. تعاریف ما نشان می‌دهند که مجموعه‌هایی مانند $K \subset E$ و $V \supset E$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\mu(V) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2} \cdot$$

چون $V-K$ باز است، بنابر مرحلهٔ سه، $V-K \in \mathfrak{M}_F$. لذا مرحلهٔ چهار ایجاب می‌کند که

$$\mu(K) + \mu(V-K) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon \cdot$$

مرحلهٔ شش. ***هرگاه $A \in \mathfrak{M}_F$ و $B \in \mathfrak{M}_F$، آنگاه $A-B$، $A \cup B$، و $A \cap B$ متعلق به $\mathfrak{M}_F$اند.***

برهان. اگر $\epsilon > 0$، مرحلهٔ پنج نشان می‌دهد که مجموعه‌هایی مانند K_i و V_i وجود دارند به‌طوری‌که $K_1 \subset A \subset V_1$، $K_2 \subset B \subset V_2$، و به‌ازای $i = 1, 2$، $\mu(V_i - K_i) < \epsilon$. چون

$$A - B \subset V_1 - K_2 \subset (V_1 - K_1) \cup (K_1 - V_2) \cup (V_2 - K_2) \,,$$

مرحلهٔ یک نشان می‌دهد که

$$\mu(A-B) \leq \epsilon + \mu(K_1 - V_2) + \epsilon \cdot \qquad (۱۴)$$

چون $K_1 - V_2$ یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $A-B$ است، (۱۴) نشان می‌دهد که $A-B$ در (۳) صدق می‌کند؛ درنتیجه $A-B \subset \mathfrak{M}_F$.

چون $A \cup B = (A-B) \cup B$، کاربردی از مرحلهٔ چهار نشان می‌دهد که $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$. و چون $A \cap B = A - (A-B)$، نیز داریم $A \cap B \in \mathfrak{M}_F$.

مرحلهٔ هفت. $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X است که شامل تمام مجموعه‌های بورل می‌باشد.

برهان. فرض کنیم K یک مجموعهٔ فشردهٔ دلخواه در X باشد. هرگاه $A \in \mathfrak{M}$، آنگاه $A^c \cap K = K-(A \cap K)$؛ درنتیجه $A^c \cap K$ تفاضل دوعضو $\mathfrak{M}_F$ است. لذا $A^c \cap K \in \mathfrak{M}_F$، و نتیجه می‌گیریم که $A \in \mathfrak{M}$ عضویت $A^c \in \mathfrak{M}$ را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم $A = \cup_1^\infty A_i$ که در آن هر $A_i \in \mathfrak{M}$. قرار می‌دهیم $B_1 = A_1 \cap K$ و

$$B_n = (A_n \cap K)-(B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})(n = 2, 3, 4, \cdots) \cdot \qquad (15)$$

در این صورت، طبق مرحلهٔ شش، $\{B_n\}$ دنبالهٔ از هم‌جدایی از اعضای $\mathfrak{M}_F$ است، و $A \cap K = \cup_1^\infty B_n$. از مرحلهٔ چهار نتیجه می‌شود که $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$. لذا $A \in \mathfrak{M}$.

بالاخره هرگاه C بسته باشد، آنگاه $C \cap K$ فشرده است. لذا $C \cap K \in \mathfrak{M}_F$؛ درنتیجه $C \in \mathfrak{M}$. بخصوص $X \in \mathfrak{M}$.

لذا ثابت کرده‌ایم که $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X است که شامل تمام زیرمجموعه‌های بستهٔ X است. بنابراین $\mathfrak{M}$ شامل تمام مجموعه‌های بورل در X می‌باشد.

مرحلهٔ هشت. $\mathfrak{M}_F$ درست از مجموعه‌های $E \in \mathfrak{M}$ که $\mu(E) < \infty$ تشکیل شده است.

این مرحله حکم (ت) قضیه را به‌ما می‌دهد.

برهان. اگر $E \in \mathfrak{M}_F$، مراحل دو و شش ایجاب می‌کنند که به‌ازای هر K ی فشرده، $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$؛ درنتیجه $E \in \mathfrak{M}$.

به‌عکس، فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$ و $\mu(V) < \infty$، و $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. یک مجموعهٔ باز مانند $V \supset E$ با خاصیت $\mu(V) < \infty$ وجود دارد. بنابر مراحل سه و پنج، یک مجموعهٔ فشرده مانند $K \subset V$ هست که $\mu(V-K) < \epsilon$. چون $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$، یک مجموعهٔ فشرده مانند $H \subset E \cap K$ هست که

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \epsilon \cdot$$

و چون $E \subset (E \cap K) \cup (V-K)$، پس

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V-K) < \mu(H) + 2\epsilon,$$

که عضویت $E \in \mathfrak{M}_F$ را ایجاب می‌کند.

مرحلهٔ نه. μ یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است.

برهان. جمعی شمارش‌پذیر بودن μ بر $\mathfrak{M}$ بلافاصله از مراحل چهار و هشت نتیجه می‌شود.

مرحلهٔ ده. به‌ازای هر $f\in C_c(X)$، $\Lambda f=\int_X f\,d\mu$.

این (آ) را ثابت می‌کند و قضیه به‌اتمام می‌رسد.

برهان. کافی است این امر به‌ازای f حقیقی ثابت شود. همچنین کافی است ***نامساوی***

$$\Lambda f\leq \int_X f\,d\mu \tag{۱۶}$$

را به‌ازای هر $f\in C_c(X)$ حقیقی ثابت کنیم. زیرا به‌محض ثابت شدن (۱۶)، خطی بودن Λ نشان می‌دهد که

$$-\Lambda f=\Lambda(-f)\leq \int_X (-f)\,d\mu = -\int_X f\,d\mu,$$

که همراه با (۱۶) برقراری تساوی در (۱۶) را نشان می‌دهد.

فرض کنیم K محافظ تابع حقیقی $f\in C_c(X)$ بوده، $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای شامل برد f باشد (به‌نتیجهٔ قضیهٔ ۱۰.۲ توجه کنید)، $\epsilon>0$ را اختیار می‌کنیم، و به‌ازای $i=0,1,\cdots,n$، y_iها را طوری می‌گیریم که $y_i-y_{i-1}<\epsilon$ و

$$y_0<a<y_1<\cdots<y_n=b\cdot \tag{۱۷}$$

قرار می‌دهیم

$$E_i=\{x:y_{i-1}<f(x)\leq y_i\}\cap K \quad (i=0,1,\cdots,n)\cdot \tag{۱۸}$$

چون f پیوسته است، f اندازه‌پذیر بورل می‌باشد، و لذا E_iها مجموعه‌های بورل از هم‌جدایی‌اند که اجتماعشان K است. مجموعه‌های بازی مانند $V_i\supset E_i$ وجود دارند به‌طوری که

$$\mu(V_i)<\mu(E_i)+\frac{\epsilon}{n}\quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{۱۹}$$

و به‌ازای هر $x\in V_i$، $f(x)<y_i+\epsilon$. بنابر قضیهٔ ۱۳.۲، توابعی مانند $h_i\prec V_i$ موجودند به‌طوری که $\sum h_i=1$ بر K. لذا $f=\sum h_i f$ و مرحلهٔ دو نشان می‌دهد که

$$\mu(K)\leq\Lambda(\textstyle\sum h_i)=\sum\Lambda h_i\cdot$$

چون $h_i f\leq(y_i+\epsilon)h_i$ و $y_i-\epsilon<f(x)$ بر E_i، داریم

$$\Lambda f=\sum_{i=1}^{n}\Lambda(h_i f)\leq\sum_{i=1}^{n}(y_i+\epsilon)\Lambda h_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(|a|+y_i+\epsilon)\Lambda h_i-|a|\sum_{i=1}^{n}\Lambda h_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (|a|+y_i+\epsilon)\left[\mu(E_i)+\frac{\epsilon}{n}\right]-|a|\,\mu(K)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i-\epsilon)\,\mu(E_i)+2\epsilon\,\mu(K)+\frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^{n}(|a|+y_i+\epsilon)$$

$$\leq \int_X f\,d\mu+\epsilon\,[2\mu(K)+|a|+b+\epsilon]\,.$$

چون ϵ دلخواه بود، رابطهٔ (۱۶) برقرار بوده و برهان قضیه به‌اتمام می‌رسد.

خواص انتظام اندازه‌های بورل

۱۵.۲ تعریف. اندازهٔ μ تعریف شده بر $\sigma-$ جبر تمام مجموعه‌های بورل در فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X یک ***اندازهٔ بورل*** X نام دارد. اگر μ مثبت باشد، مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را به‌ترتیب ***منتظم خارجی*** یا ***منتظم داخلی*** گوییم اگر E دارای خاصیت (پ) یا (ت) قضیهٔ ۱۴.۲ باشد. اگر هر مجموعهٔ بورل در X هم منتظم خارجی و هم منتظم داخلی باشد، μ ***منتظم*** نام خواهد داشت.

در برهان قضیهٔ ریس انتظام خارجی هر مجموعهٔ E در ساخت وارد شده بود ولی انتظام داخلی فقط برای مجموعه‌های باز و برای آنهایی که $E \in \mathfrak{M}$ و $\mu(E) < \infty$ ثابت شد. خواهیم دید که این نقص در طبیعت اشیاء است. انتظام μ را نمی‌توان با مفروضات قضیهٔ ۱۴.۲ ثابت کرد؛ در تمرین ۱۷ یک مثال ذکر شده است.

ولی با تقویت مختصر مفروضات یک اندازهٔ منتظم به‌دست می‌آید. قضیهٔ ۱۷.۲ این امر را نشان می‌دهد. و اگر وضع را کمی خصوصی کنیم، قضیهٔ ۱۸.۲ نشان می‌دهد که تمام مسائل انتظام به‌راحتی از بین می‌روند.

۱۶.۲ تعریف. مجموعهٔ E در یک فضای توپولوژیک را $\sigma-$ **فشرده** نامیم اگر E اجتماع شمارشپذیری از مجموعه‌های فشرده باشد.

گوییم مجموعهٔ E در یک فضای اندازه (با اندازهٔ μ) دارای $\sigma-$ ***اندازهٔ متناهی*** است اگر E اجتماع شمارشپذیری از مجموعه‌های E_i باشد که $\mu(E_i) < \infty$.

مثلاً در قضیهٔ ۱۴.۲ هر مجموعهٔ $\sigma-$ فشرده دارای $\sigma-$ اندازهٔ متناهی است. همچنین به‌آسانی معلوم می‌شود که هرگاه $E \in \mathfrak{M}$ و E دارای $\sigma-$ اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه E منتظم داخلی می‌باشد.

۱۷.۲ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای هاسدورف $\sigma-$ فشردهٔ به‌طور موضعی فشرده باشد. هرگاه $\mathfrak{M}$ و μ همانند قضیهٔ ۱۴.۲ باشند، آنگاه $\mathfrak{M}$ و μ از خواص زیر برخوردارند:***

(آ) اگر $E \in \mathfrak{M}$ و $\epsilon > 0$، یک مجموعهٔ بسته مانند F و یک مجموعهٔ باز مانند V موجودند

به‌طوری که $F \subset E \subset V$ و $\mu(V-F) < \epsilon$؛

(ب) μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر X است؛

(پ) اگر $E \in \mathfrak{M}$، مجموعه‌هایی مانند A و B وجود دارند به‌طوری که A یک F_σ است، B یک G_δ است، $A \subset E \subset B$، و $\mu(B-A) = 0$.

به‌عنوان نتیجه‌ای از (پ) می‌بینیم که هر $E \in \mathfrak{M}$ اجتماع یک F_σ و یک مجموعه از اندازهٔ ۰ است.

برهان. فرض کنیم $X = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \cdots$ که در آن هر K_n فشرده است. هرگاه $E \in \mathfrak{M}$ و $\epsilon > 0$، آنگاه $\mu(K_n \cap E) < \infty$ و مجموعه‌های بازی مانند $V_n \supset K_n \cap E$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\mu\Big(V_n - (K_n \cap E)\Big) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{1}$$

هرگاه $V = \cup V_n$، آنگاه $V - E \subset \cup \Big(V_n - (K_n \cap E)\Big)$؛ در نتیجه

$$\mu(V-E) < \frac{\epsilon}{2} \cdot$$

این رابطه را بر E^c به‌جای E اعمال می‌کنیم. پس مجموعهٔ بازی مانند $W \supset E^c$ هست به‌طوری که $\mu(W - E^c) < \epsilon/2$. هرگاه $F = W^c$، آنگاه $F \subset E$، و $E - F = W - E^c$. حال (آ) نتیجه خواهد شد.

هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subset X$، $\sigma-$ فشرده است زیرا $F = \cup (F \cap K_n)$. لذا (آ) ایجاب می‌کند که هر مجموعهٔ $E \in \mathfrak{M}$ منتظم داخلی باشد. این امر (ب) را ثابت می‌کند.

اگر (آ) را به‌ازای $\epsilon = 1/j$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ اعمال کنیم، مجموعه‌های بسته‌ای مانند F_j و مجموعه‌های بازی چون V_j به‌دست می‌آیند که $F_j \subset E \subset V_j$ و $\mu(V_j - F_j) < 1/j$. قرار می‌دهیم $A = \cup F_j$ و $B = \cap V_j$. در این صورت $A \subset E \subset B$، A یک F_σ است، B یک G_δ است، و $\mu(B-A) = 0$ زیرا به‌ازای $j = 1, 2, 3, \cdots$، $B - A \subset V_j - F_j$. این امر (ب) را ثابت خواهد کرد.

۱۸.۲ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده باشد که در آن هر مجموعهٔ باز $\sigma-$ فشرده است. همچنین λ یک اندازهٔ بورل مثبت بر X باشد که به‌ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K، $\lambda(K) < \infty$. در این صورت λ منتظم می‌باشد.***

توجه کنید که هر فضای اقلیدسی R^k در فرض فعلی صدق می‌کند، زیرا هر مجموعهٔ باز در R^k اجتماع شمارشپذیری از گویهای بسته می‌باشد.

برهان. به‌ازای $f \in C_c(X)$ قرار می‌دهیم $\Lambda f = \int_X f\, d\lambda$. چون به‌ازای هر K ی فشرده

$\lambda(K) < \infty$، Λ یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ است، و یک اندازهٔ منتظم مانند μ وجود دارد که در قضیهٔ ۱۷.۲ صادق بوده و

$$\int_X f d\lambda = \int_X f d\mu \ \left(f \in C_c(X)\right) \cdot \tag{۱}$$

نشان می‌دهیم که $\lambda = \mu$.

فرض کنیم V در X باز باشد. پس $V = \cup K_i$ که در آن K_i به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$ فشرده است. بنابر لم اوریزن، می‌توان f_iها را طوری اختیار کرد که $K_i \prec f_i \prec V$. فرض کنیم $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n)$. در این صورت $g_n \in C_c(X)$ و $g_n(x)$ در هر نقطهٔ $x \in X$ به $\chi_V(x)$ صعود می‌کند. لذا رابطهٔ (۱) و قضیهٔ همگرایی یکنوا ایجاب می‌کنند که

$$\lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \mu(V) \cdot \tag{۲}$$

حال فرض کنیم E یک مجموعهٔ بورل در X باشد و $\epsilon > ۰$ را اختیار می‌کنیم. چون μ در قضیهٔ ۱۷.۲ صدق می‌کند، مجموعهٔ بسته‌ای مانند F و مجموعهٔ بازی چون V هست به‌طوری‌که $F \subset E \subset V$ و $\mu(V-F) < \epsilon$. لذا داریم $\mu(V) \le \mu(F) + \epsilon \le \mu(E) + \epsilon$.

چون $V-F$ بازاست، رابطهٔ (۲) نشان‌می‌دهد که $\lambda(V-F) < \epsilon$. لذا $\lambda(V) \le \lambda(E) + \epsilon$. درنتیجه

$$\lambda(E) \le \lambda(V) = \mu(V) \le \mu(E) + \epsilon$$

و

$$\mu(E) \le \mu(V) = \lambda(V) \le \lambda(E) + \epsilon \cdot$$

لذا، به‌ازای هر $\epsilon > ۰$، $|\lambda(E) - \mu(E)| < \epsilon$. بنابراین $\lambda(E) = \mu(E)$.

در تمرین ۱۸ یک فضای هاسدورف فشرده توصیف شده که در آن متمم نقطه‌ای $\sigma-$ فشرده نیست و در آن قضیهٔ فوق برقرار نمی‌باشد

اندازهٔ لبگ

۱۹.۲ فضاهای اقلیدسی. فضای k بعدی اقلیدسی R^k مجموعهٔ تمام نقاط $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$ است که مختصات ξ_i اعدادی حقیقی‌اند و دارای ساختار جبری و توپولوژیک زیر می‌باشد:

اگر $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$، $y = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$، و α عددی حقیقی باشد، $x+y$ و αx به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x+y = (\xi_1 + \eta_1, \cdots, \xi_k + \eta_k) \quad \text{و} \quad \alpha x = (\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_k) \cdot \tag{۱}$$

این تعریفها R^k را به‌یک فضای برداری حقیقی بدل می‌سازند. اگر $x \cdot y = \Sigma \xi_i \eta_i$ و

$|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ ، نامساوی شوارتز $(Schwarz)$ $|x \cdot y| \le |x|\,|y|$ به‌نامساوی مثلثی

$$|x-y| \le |x-z| + |z-y| \tag{۲}$$

منجر می‌شود. لذا با فرض $p(x, y) = |x-y|$ یک متر به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم این مطالب آشنا بوده و در فصل ۴ آنها را با تعمیم بیشتری ثابت خواهیم کرد.

اگر $E \subset R^k$ و $x \in R^k$، **انتقال** E **به‌وسیلهٔ** x عبارت است از مجموعهٔ

$$E+x = \{y+x : y \in E\} \cdot \tag{۳}$$

هر مجموعه به‌شکل

$$W = \{x : 1 \le i \le k \ ، \ \alpha_i < \xi_i < \beta_i\} \tag{۴}$$

یا هر مجموعهٔ حاصل از تعویض یک یا تمام علایم $<$ در (۴) با $\le$ را یک k– **سلول** می‌نامیم. حجم آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{vol}(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) \cdot \tag{۵}$$

اگر $a \in R^k$ و $\delta > 0$، مجموعهٔ

$$Q(a;\delta) = \{x : 1 \le i \le k \ ، \ \alpha_i \le \xi_i < \alpha_i + \delta\} \tag{۶}$$

را σ– **جعبه به‌گوشهٔ** a می‌نامیم. در اینجا $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$.

به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، فرض می‌کنیم P_n مجموعهٔ تمام $x \in R^k$ هایی باشد که مختصاتشان مضارب صحیحی از 2^{-n} اند، و Ω_n را گردایهٔ تمام 2^{-n}– جعبه‌هایی می‌گیریم که گوشه‌هایشان در نقاط P_n اند. ما به‌چهار خاصیت زیر از $\{\Omega_n\}$ نیاز خواهیم داشت. سه خاصیت اول با معاینه واضح‌اند.

(آ) ***اگر n ثابت باشد، هر $x \in R^k$ در یک و فقط یک عضو Ω_n قرار دارد.***

(ب) ***هرگاه $Q' \in \Omega_n$، $Q'' \in \Omega_r$، و $r < n$، آنگاه $Q' \subset Q''$ یا $Q' \cap Q'' = \varnothing$.***

(پ) ***هرگاه $Q \in \Omega_r$، آنگاه $\operatorname{vol}(Q) = 2^{-rk}$؛ و اگر $n > r$، مجموعهٔ P_n درست $2^{(n-r)k}$ نقطه در Q دارد.***

(ت) ***هر مجموعهٔ باز ناتهی در R^k اجتماع شمارشپذیری از جعبه‌های از هم‌جدای متعلق به $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots$ است.***

برهان (ت). اگر V باز باشد، هر $x \in V$ در یک گوی باز واقع در V است. لذا به‌ازای Q ای متعلق به‌یک Ω_n ، $x \in Q \subset V$. به‌عبارت دیگر، V اجتماع تمام جعبه‌های واقع در V و متعلق به Ω_n ی می‌باشد. از این گردایه از جعبه‌ها آنهایی را انتخاب می‌کنیم که تعلق به Ω_1 دارند و آنهای واقع در Ω_2 ، Ω_3 ، $\cdots$ که در یکی از جعبه‌های انتخاب شده‌اند را حذف می‌کنیم. از گردایهٔ

باقیمانده آن جعبه‌هایی از Ω_2 را انتخاب می‌کنیم که در V اند و آنهای واقع در Ω_3، Ω_4، ⋯ که در یکی از جعبه‌های انتخاب شده‌اند را حذف می‌نماییم. اگر به‌همین نحو ادامه دهیم، (آ) و (ب) نشان می‌دهد که (ت) برقرار است.

۲.۲۰ قضیه. *یک اندازهٔ تام مثبت مانند m وجود دارد که بر یک $\sigma-$ جبر مانند $\mathfrak{M}$ در R^k تعریف شده است و خواص زیر را دارا می‌باشد:*

(آ) به‌ازای هر $k-$ سلول W، $m(W) = \mathrm{vol}(W)$؛

(ب) $\mathfrak{M}$ شامل تمام مجموعه‌های بورل در R^k است؛ به‌طور دقیقتر، $E \in \mathfrak{M}$ اگر و فقط اگر مجموعه‌هایی مانند $A \subset R^k$ و B وجود داشته باشند به‌طوری که $A \subset E \subset B$، A یک F_σ و B یک G_δ بوده، و $m(B-A) = 0$. همچنین m منتظم می‌باشد.

(پ) m پایای انتقال است؛ یعنی به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ و هر $x \in R^k$،

$$m(E+x) = m(E)\cdot$$

(ت) هرگاه μ یک اندازهٔ بورل پایای انتقال مثبت بر R^k باشد به‌طوری که به‌ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K، $\mu(K) < \infty$، آنگاه یک ثابت مانند c هست به‌طوری که به‌ازای هر مجموعهٔ بورل $E \subset R^k$، $\mu(E) = cm(E)$.

(ث) به‌هرتبدیل خطی T از R^k به‌توی R^k یک عدد حقیقی مانند $\Delta(T)$ نظیر است به‌طوری‌که به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$،

$$m\big(T(E)\big) = \Delta(T)\, m(E)\cdot$$

بخصوص، وقتی T یک دوران باشد، $m\big(T(E)\big) = m(E)$.

اعضای $\mathfrak{M}$ مجموعه‌های *اندازه‌پذیر لبگ* در R^k اند. m *اندازهٔ لبگ* بر R^k می‌باشد. وقتی تصریح لازم باشد، به‌جای m می‌نویسیم m_k.

برهان. اگر f یک تابع مختلط بر R^k با محافظ فشرده باشد، تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_n f = 2^{-nk} \sum_{x \in P_n} f(x) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

که در آن P_n همانند بخش ۱۹.۲ است.

حال فرض کنیم $f \in C_c(R^k)$، f حقیقی بوده، W یک $k-$ سلول باز شامل محافظ f باشد، و $\epsilon > 0$. پیوستگی یکنواخت f (مرجع [۲۶]، قضیهٔ ۱۹.۴) نشان می‌دهد که عدد صحیحی مانند N و توابعی مانند g و h با محافظ در W وجود دارند به‌طوری که (یک) g و h بر هر جعبهٔ متعلق به Ω_N ثابت بوده، (دو) $g \le f \le h$، و (سه) $h-g < \epsilon$. اگر $n > N$، خاصیت ۱۹.۲ (پ) نشان می‌دهد که

$$\Lambda_N g = \Lambda_n g \le \Lambda_n f \le \Lambda_n h = \Lambda_N h\cdot$$

لذا حدود بالایی و پایینی $\{\Lambda_n f\}$ حداکثر به‌اندازهٔ $\epsilon\,\mathrm{vol}(W)$ باهم فرق دارند، و چون ϵ دلخواه بود، وجود

$$\Lambda f = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n f\left(f\in C_c(R^k)\right) \tag{۳}$$

ثابت می‌شود.

فوراً معلوم می‌شود که Λ یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(R^k)$ است (درواقع Λf عبارت است از انتگرال ریمان f روی R^k. ما از آنرو به‌ساخت فوق تن دادیم که به‌هیچ قضیه‌ای راجع به‌انتگرالهای ریمان چند متغیره متکی نباشیم.)

m و $\mathfrak{M}$ را اندازه و $\sigma-$ جبر مربوط به‌این Λ به‌صورت در قضیهٔ ۱۴.۲ تعریف می‌کنیم.

چون قضیهٔ ۱۴.۲ یک‌اندازهٔ تام به‌ما می‌دهد و R^k، $\sigma-$ فشرده است، قضیهٔ ۱۷.۲ حکم (ب) در قضیهٔ ۲۰.۲ را ایجاب می‌کند.

برای اثبات (آ)، فرض کنیم W سلول باز ۱۹.۲ (۴) بوده، E_r اجتماع جعبه‌هایی در Ω_r باشد که بستشان در W اند، f_r را طوری می‌گیریم که $\overline{E}\prec f_r\prec W$، و قرار می‌دهیم $g_r=\max\{f_1,\cdots,f_r\}$. از طرز ساختن Λ معلوم می‌شود که

$$\mathrm{vol}(E_r)\le \Lambda f_r\le \Lambda g_r\le \mathrm{vol}\, W\cdot \tag{۴}$$

وقتی $r\to\infty$، $\mathrm{vol}(E_r)\to\mathrm{vol}(W)$، و بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا،

$$\Lambda g_r=\int g_r\,dm\to m(W) \tag{۵}$$

زیرا به‌ازای هر $x\in R^k$، $g_r(x)\to\chi_W(x)$. لذا به‌ازای هرسلول‌باز W، $m(W)=\mathrm{vol}(W)$، و چون هر $k-$ سلول اشتراک دنباله‌ای نزولی از $k-$ سلولهای باز است، (آ) به‌دست می‌آید.

در برهانهای (پ)، (ت)، و (ث) از مطالب زیر استفاده می‌کنیم: هرگاه λ یک اندازهٔ بورل مثبت بر R^k بوده و به‌ازای جمیع جعبه‌های E داشته باشیم $\lambda(E)=m(E)$، آنگاه بنابر خاصیت ۱۹.۲ (ت)، این تساوی برای جمیع مجموعه‌های باز E برقرار است، و لذا به‌ازای جمیع مجموعه‌های بورل E چنین است زیرا λ و m منتظم می‌باشند (قضیهٔ ۱۸.۲).

برای اثبات (پ)، $x\in R^k$ را ثابت گرفته و تعریف می‌کنیم $\lambda(E)=m(E+x)$. واضح است که λ یک اندازه است. بنابر (آ)، به‌ازای جمیع جعبه‌ها، $\lambda(E)=m(E)$. لذا، به‌ازای جمیع مجموعه‌های بورل E، $m(E+x)=m(E)$. به‌خاطر (ب)، این تساوی برای هر $E\in\mathfrak{M}$ برقرار می‌باشد.

حال فرض کنیم μ در مفروضات (ت) صدق کند. همچنین $Q_\circ$ یک ۱ − جعبه باشد و قرار می‌دهیم $c=\mu(Q_\circ)$. چون $Q_\circ$ اجتماع ۲^{nk} تا ۲^{-n} − جعبهٔ از هم جداست که انتقال یکدیگرند، به‌ازای هر ۲^{-n} − جعبهٔ Q داریم

$$۲^{nk}\mu(Q)=\mu(Q_\circ)=cm(Q_\circ)=c\cdot ۲^{nk}m(Q)\cdot$$

حال خاصیت ۱۹.۲ (ت) ایجاب می‌کند که به‌ازای جمیع مجموعه‌های باز $E \subset R^k$ داشته باشیم $\mu(E) = cm(E)$. این (ت) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (ث) فرض کنیم $T: R^k \to R^k$ خطی باشد. هرگاه برد T زیرفضای Y از بعد پایین‌تر باشد، آنگاه $m(Y) = ۰$ و نتیجهٔ مطلوب با $\Delta(T) = ۰$ برقرار است. در حالت دیگر، جبر خطی مقدماتی به‌ما می‌گوید که T یک نگاشت یک به‌یک از R^k به‌روی R^k است که معکوسش نیز خطی است. لذا T یک همانریختی از R^k به‌روی R^k می‌باشد؛ درنتیجه $T(E)$ به‌ازای هر مجموعهٔ بورل E یک مجموعهٔ بورل است، و لذا می‌توان اندازهٔ بورل مثبت μ را بر R^k با

$$\mu(E) = m\big(T(E)\big)$$

تعریف کرد. خطی بودن T همراه با پایایی انتقال m نتیجه می‌دهد که

$$\mu(E+x) = m\big(T(E+x)\big) = m\big(T(E)+Tx\big) = m\big(T(E)\big) = \mu(E) \cdot$$

لذا μ پایای انتقال است، و اولین حکم (ث) از (ت)، ابتدا به‌ازای مجموعه‌های بورل E و سپس طبق (ب) به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$، نتیجه خواهد شد.

برای یافتن $\Delta(T)$ کافی است $m\big(T(E)\big)/m(E)$ را به‌ازای یک مجموعهٔ E با خاصیت $۰ < m(E) < \infty$ بدانیم. اگر T یک دوران باشد، E را گوی یکه در R^k می‌گیریم. در این صورت $T(E) = E$ و $\Delta(T) = ۱$.

۲۱.۲ چند تبصره. اگر m اندازهٔ لبگ بر R^k باشد، معمولاً به‌جای $L^۱(m)$ می‌نویسند $L^۱(R^k)$. اگر E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ R^k بوده و m به‌زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر E محدود شده باشد، یک فضای اندازهٔ جدید به‌نحوی روشن به‌دست می‌آید. عبارت "$f \in L^۱$ بر E" یا "$f \in L^۱(E)$" یعنی f بر این فضای اندازه انتگرالپذیر است.

اگر $k = ۱$ و I یکی ازمجموعه‌های (a, b)، $(a, b]$، $[a, b)$، $[a, b]$ بوده و $f \in L^۱(I)$، معمولاً

به‌جای $\int_I f\,dm$ می‌نویسند $\int_a^b f(x)\,dx$ $\cdot$

چون اندازهٔ لبگ هر نقطه ۰ است، انتگرال روی این چهار مجموعه تفاوتی نخواهد داشت.

آنچه در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی راجع به‌انتگرالگیری آموخته‌ایم در اینجا سودمند است، زیرا ***هرگاه f یک تابع مختلط پیوسته بر $[a, b]$ باشد، آنگاه انتگرال ریمان f و انتگرال لبگ f روی $[a, b]$ یکی است.*** این امر در صورتی که $f(a) = f(b) = ۰$ و $f(x)$ به‌ازای $x < a$ و $x > b$ مساوی ۰ تعریف شده باشد واضح است. حالت کلی بدون اشکال نتیجه خواهد شد. درواقع این امر برای هر تابع انتگرالپذیر ریمان f بر $[a, b]$ درست است. چون در آینده توابع انتگرالپذیر ریمان‌مطرح نمی‌شوند، برهان را حذف کرده و شما را به‌قضیهٔ ۳۳.۱۱ در مرجع [۲۶]

ارجاع می‌دهیم.

حال طبعاً دو سؤال برای بعضی از شما مطرح می‌شود: آیا هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ یک مجموعهٔ بورل است؟ آیا هر زیرمجموعه از R^k اندازه‌پذیر لبگ است؟ جواب در هر دو حالت حتی وقتی $k = ۱$ منفی است.

اولین سؤال را می‌توان با یک استدلال مستلزم عدد اصلی سامان داد که ما آن را به‌اختصار بیان می‌کنیم. فرض کنیم c عدد اصلی پیوستار (خط حقیقی یا، معادلاً، گردایهٔ تمام مجموعه‌ها از اعداد صحیح) باشد. می‌دانیم که R^k یک پایهٔ **شمارشپذیر** دارد (گویهای باز با شعاعهای گویا و به‌مرکز واقع در زیرمجموعهٔ چگال شمارشپذیری از R^k)، و $\mathscr{B}_k$ (گردایهٔ تمام مجموعه‌های بورل R^k) $\sigma-$ جبر تولید شده به‌وسیلهٔ این پایه است. از این نتیجه می‌شود (برهان را حذف می‌کنیم) که $\mathscr{B}_k$ دارای عدد اصلی c است. از آن سو، مجموعه‌های کانتور (Cantor) $E \subset R^۱$ با $m(E) = ۰$ وجود دارند. (تمرین ۵.) تمامیت m ایجاب می‌کند که هریک از ۲^c زیرمجموعهٔ E اندازه‌پذیر لبگ است. چون $۲^c > c$، اکثر زیرمجموعه‌های E بورل نیستند.

قضیهٔ زیر به‌سؤال دوم پاسخ خواهد داد.

۲۲.۲ قضیه. *هرگاه $A \subset R^۱$ و هر زیرمجموعهٔ A اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه $m(A) = ۰$.*

نتیجه. *هر مجموعه از اندازهٔ مثبت دارای زیرمجموعه‌های شمارش‌ناپذیر است.*

برهان. ما از گروه بودن $R^۱$ نسبت به‌جمع استفاده می‌کنیم. فرض کنیم Q زیرگروه اعداد گویا بوده و مجموعهٔ E از هر هم مجموعهٔ Q در $R^۱$ درست یک نقطه داشته باشد. (وجود این مجموعه مستقیماً از اصل انتخاب ثابت می‌شود.) در این صورت E از دو خاصیت زیر برخوردار است:

(آ) اگر $r \in Q$، $s \in Q$، و $r \neq s$، $(E+r) \cap (E+s) = \varnothing$؛

(ب) هر $x \in R^۱$ در یک $E+r$ به‌ازای $r \in Q$ ی قرار دارد.

برای اثبات (آ) فرض کنیم $x \in (E+r) \cap (E+s)$. در این صورت به‌ازای اعضایی چون $y \in E$ و $z \in E$ که $y \neq z$، $x = y+r = z+s$. اما $y-z = s-r \in Q$؛ درنتیجه y و z در هم مجموعهٔ یکسانی از Q قرار دارند که تناقض است.

برای اثبات (ب) فرض کنیم y نقطه‌ای از E باشد که در همان هم مجموعه‌ای که x در آن قرار دارد واقع است. قرار می‌دهیم $r = x-y$.

برای یک لحظه $t \in Q$ را ثابت گرفته و قرار می‌دهیم $A_t = A \cap (E+t)$. طبق فرض، A_t اندازه‌پذیر است. فرض کنیم $K \subset A_t$ فشرده بوده و H اجتماع انتقالهای $K+r$ باشد که در آن r روی $Q \cap [۰, ۱]$ تغییر می‌کند. H کراندار است. لذا $m(H) < \infty$. چون $K \subset E+t$، قسمت (آ) نشان می‌دهد که مجموعه‌های $K+r$ دو به‌دو از هم جدایند. لذا $m(H) = \Sigma_r m(K+r)$. اما $m(K+r) = m(K)$. پس $m(K) = ۰$. این امر به‌ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset A_t$ برقرار

است. بنابراین $m(A_t) = ۰$.

بالأخره (ب) نشان می‌دهد که $A = \cup A_t$ که در آن t روی Q تغییر می‌کند. چون Q شمارشپذیر است، نتیجه می‌شود که $m(A) = ۰$.

۲۳.۲ دترمینانها. عوامل مقیاس $\Delta(T)$ آمده در قضیهٔ ۲۰.۲ (ث) را می‌توان با دترمینانها به‌طور جبری تعبیر کرد.

فرض کنیم $\{e_۱, \cdots, e_k\}$ پایهٔ متعارف برای R^k باشد. مختص i ام e_j به‌ازای $i=j$ مساوی ۱ و به‌ازای $i \neq j$ برابر ۰ است. هرگاه $T: R^k \to R^k$ خطی بوده و

$$Te_j = \sum_{i=۱}^{k} \alpha_{ij} e_i \quad (۱ \leq j \leq k) \tag{۱}$$

آنگاه $\det T$، طبق تعریف، دترمینان ماتریس $[T]$ است که در سطر i و ستون j خود α_{ij} را دارد.

حکم می‌کنیم که

$$\Delta(T) = |\det T| \cdot \tag{۲}$$

اگر $T = T_۱ T_۲$، واضح است که $\Delta T = \Delta(T_۱)\Delta(T_۲)$. لذا قضیهٔ ضرب دترمینانها نشان می‌دهد که اگر (۲) به‌ازای $T_۱$ و $T_۲$ برقرار باشد، (۲) به‌ازای T نیز برقرار است. چون هر عملگر خطی بر R^k حاصل‌ضرب تعدادی متناهی عملگر خطی از سه نوع زیر است، کافی است (۲) را برای هریک از عملگرها ثابت کنیم:

(یک) $\{Te_۱, \cdots, Te_k\}$ یک جایگشت از $\{e_۱, \cdots, e_k\}$ است؛

(دو) $Te_۱ = \alpha e_۱$ و به‌ازای $i = ۲, \cdots, k$، $Te_i = e_i$؛

(سه) $Te_۱ = e_۱ + e_۲$ و به‌ازای $i = ۲, \cdots, k$، $Te_i = e_i$.

فرض کنیم مکعب Q عبارت باشد از تمام $x = (\xi_۱, \cdots, \xi_k)$ هایی که به‌ازای $i = ۲, \cdots, k$، $۰ \leq \xi_i < ۱$.

هرگاه T از نوع (یک) باشد، آنگاه $[T]$ در هر سطر و هر ستون درست یک ۱ داشته و در سایر جاها ۰ دارد. لذا $\det T = \pm ۱$. همچنین $T(Q) = Q$. لذا $\Delta(T) = ۱ = |\det T|$.

هرگاه T از نوع (دو) باشد، آنگاه واضح است که $\Delta(T) = |\alpha| = |\det T|$.

هرگاه T از نوع (سه) باشد، آنگاه $\det T = ۱$ و $T(Q)$ مجموعهٔ تمام نقاط $\Sigma \xi_i e_i$ است که مختصاتشان در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\xi_۱ \leq \xi_۲ < \xi_۱ + ۱ \text{؛ اگر } i \neq ۲ \text{، } ۰ \leq \xi_i < ۱ \cdot \tag{۳}$$

هرگاه $S_۱$ مجموعهٔ نقاطی در $T(Q)$ باشد که در آنها $\xi_۲ < ۱$ و $S_۲$ بقیهٔ $T(Q)$ باشد، آنگاه

$$S_۱ \cup (S_۲ - e_۲) = Q \tag{۴}$$

و $(S_2-e_2)\cap S_1$ تهی می‌باشد. لذا

$$\Delta(T)=m(S_1\cup S_2)=m(S_1)+m(S_2-e_2)=m(Q)=1\,;$$

در نتیجه مجدداً داریم $\Delta(T)=|\det T|$.

خواص پیوستگی توابع اندازه‌پذیر

چون توابع پیوسته در ساختن اندازه‌های بورل، بویژه اندازهٔ لبگ، نقش مهمی داشتند، انتظار اینکه بین توابع پیوسته و توابع اندازه‌پذیر روابط جالبی موجود باشد معقول است. در این بخش دو قضیه از این نوع را مطرح می‌کنیم.

ما در هر دو قضیه فرض می‌کنیم μ ***یک اندازه بر فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X باشد که از خواص مذکور در قضیهٔ ۱۴.۲ برخوردار است.*** بخصوص μ اندازهٔ لبگ بر R^kای می‌باشد.

۲۴.۲ قضیهٔ لوسین ($Lusin$). *فرض کنیم f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X بوده، $\mu(A)<\infty$، $f(x)=0$ اگر $x\notin A$، و $\epsilon>0$. در این صورت تابعی مانند $g\in C_c(X)$ هست به‌طوری‌که*

$$\mu(\{x: f(x)\neq g(x)\})<\epsilon\,. \tag{1}$$

به‌علاوه می‌توان طوری ترتیب داد که

$$\sup_{x\in X}|g(x)|\le\sup_{x\in X}|f(x)| \tag{2}$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $0\le f<1$ و A فشرده باشد. همانند برهان قضیهٔ ۱۷.۱، دنبالهٔ $\{s_n\}$ را به f مربوط می‌کنیم، و قرار می‌دهیم $t_1=s_1$ و به‌ازای $n=2,3,4,\cdots$، $t_n=s_n-s_{n-1}$. در این صورت $2^n t_n$ تابع مشخص مجموعهٔ $T_n\subset A$ است و

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n(x)\quad(x\in X)\,. \tag{3}$$

مجموعهٔ باز V را که $A\subset V$ و $\overline{V}$ فشرده است ثابت می‌گیریم. مجموعه‌های فشردهٔ K_n و مجموعه‌های باز V_nی وجود دارند که $K_n\subset T_n\subset V_n\subset V$ و $\mu(V_n-K_n)<2^{-n}\epsilon$. بنابر لم اوریزن، توابعی مانند h_n وجود دارند به‌طوری که $K_n\prec h_n\prec V_n$. تعریف می‌کنیم

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}h_n(x)\quad(x\in X)\,. \tag{4}$$

این سری بر X به‌طور یکنواخت همگراست؛ درنتیجه g پیوسته می‌باشد. همچنین محافظ g در

$\overline{V}$ قرار دارد. چون $h_n(x) = t_n(x)$ ۲$^{-n}$ جز در $V_n - K_n$، داریم $g(x) = f(x)$ جز در $\cup (V_n - K_n)$، و مجموعهٔ اخیراندازه‌ای کوچکتر از ϵ دارد. لذا اگر A فشرده بوده و $0 \le f \le 1$، رابطهٔ (۱) برقرار می‌باشد.

پس اگر A فشرده و f یک تابع اندازه‌پذیر کراندار باشد، (۱) برقرار است. فشردگی A به‌آسانی قابل حذف است چراکه اگر $\mu(A) < \infty$، آنگاه A شامل مجموعهٔ فشرده‌ای مانند K است که $\mu(A-K)$ از هر عدد مثبت مقرری کوچکتر است. حال اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بوده و $B_n = \{x : |f(x)| > n\}$، داریم $\cap B_n = \varnothing$؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۹.۱ (ث)، $\mu(B_n) \to 0$. چون f با تابع‌کراندار $f \cdot (1 - \chi_{B_n})$ جزبر B_n یکی‌است، رابطهٔ (۱) درحالت‌کلی نتیجه‌خواهد شد.

بالأخره فرض می‌کنیم $R = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ و تعریف می‌کنیم $\varphi(z) = z$ اگر $|z| \le R$ و $\varphi(z) = Rz / |z|$ اگر $|z| > R$. در این صورت φ یک نگاشت پیوسته از صفحهٔ مختلط به‌روی قرص به‌شعاع R است. هرگاه g در (۱) صدق کرده و $g_1 = \varphi \circ g$، آنگاه g_1 در روابط (۱) و (۲) صدق می‌کند.

نتیجه. فرض کنیم مفروضات قضیهٔ لوسین برقرار بوده و $|f| \le 1$. در این صورت دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ هست به‌طوری که $g_n \in C_c(X)$، $|g_n| \le 1$، و

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \quad \text{ت . هـ.} \tag{۵}$$

برهان. قضیهٔ فوق ایجاب می‌کند که به‌هر n تابعی مانند $g_n \in C_c(X)$ نظیر باشد که $|g_n| \le 1$ و $\mu(E_n) \le 2^{-n}$ که در آن E_n مجموعهٔ تمام x هایی است که در آنها $f(x) \ne g_n(x)$. در این صورت تقریباً هر x در حداکثر تعدادی متناهی مجموعهٔ E_n قرار دارد (قضیهٔ ۴۱.۱). به‌ازای هر چنین x نتیجه می‌شود که برای همهٔ n های به‌قدر کافی بزرگ $f(x) = g_n(x)$. این امر رابطهٔ (۵) را به‌ما می‌دهد.

۲۵.۲ قضیهٔ ویتالی ـ کارا تئودوری (*Vitali - Carathéodory*). ***فرض کنیم $f \in L^1(\mu)$، f حقیقی بوده، و $\epsilon > 0$. در این صورت توابعی چون u و v بر X وجود دارند به‌طوری‌که $u \le f \le v$، u نیمه‌پیوستهٔ بالایی و از بالا کراندار بوده، v نیمه پیوستهٔ پایینی و از پایین کراندار است، و***

$$\int_X (v-u)\, d\mu < \epsilon \cdot \tag{۱}$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f \ge 0$ و f متحد ۰ نباشد. چون f حد نقطه به‌نقطهٔ یک دنبالهٔ صعودی از توابع سادهٔ s_n است، f مجموع توابع سادهٔ $t_n = s_n - s_{n-1}$ (با فرض $s_0 = 0$) می‌باشد، و چون t_n ترکیبی خطی از توابع مشخص است، مجموعه‌های اندازه‌پذیری مانند E_i (نه لزوماً از هم جدا) و ثابتهای $c_i > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x) \quad (x \in X) \cdot \tag{۲}$$

چون

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i), \tag{۳}$$

سری (۳) همگراست. مجموعه‌های فشرده‌ای مانند K_i و مجموعه‌های بازی چون V_i وجود دارند به‌طوری که $K_i \subset E_i \subset V_i$ و

$$c_i \mu(V_i - K_i) < ۲^{-i-۱} \epsilon \, (i = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \tag{۴}$$

قرار می‌دهیم

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i} \quad \text{و} \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} \tag{۵}$$

که در آن N طوری اختیار شده است که

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \frac{\epsilon}{۲} \cdot \tag{۶}$$

در این صورت v نیمه پیوستهٔ پایینی و u نیمه‌پیوستهٔ بالایی است، $u \le f \le v$،
و

$$\begin{aligned} v - u &= \sum_{i=1}^{N} c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i} \cdot \end{aligned}$$

درنتیجه (۴) و (۶) رابطهٔ (۱) را ایجاب می‌کنند.

در حالت کلی می‌نویسیم $f = f^+ - f^-$، و مانند فوق $u_۱$ و $v_۱$ را به f^+ و $u_۲$ و $v_۲$ را به f^- مربوط کرده و قرار می‌دهیم $u = u_۱ - v_۲$ و $v = v_۱ - u_۲$. چون $-v_۲$ نیمه‌پیوستهٔ بالایی بوده و مجموع دو تابع نیمه پیوستهٔ بالایی نیمه‌پیوستهٔ بالایی است (به‌همین ترتیب در مورد نیمه‌پیوستهٔ پایینی؛ اثبات آن را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم)، u و v خواص مطلوب را خواهند داشت.

تمرینات

۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی حقیقی بر $R^۱$ باشد، و چهار حکم زیر را در نظر بگیرید:

(آ) هرگاه $f_۱$ و $f_۲$ نیمه‌پیوستهٔ بالایی باشند، آنگاه $f_۱ + f_۲$ نیمه‌پیوستهٔ بالایی است؛

(ب) هرگاه f_1 و f_2 نیمه‌پیوستهٔ پایینی باشند، آنگاه f_1+f_2 نیمه‌پیوستهٔ پایینی است؛

(پ) هرگاه هر f_n نیمه‌پیوستهٔ بالایی باشد، آنگاه $\sum_1^\infty f_n$ نیمه‌پیوستهٔ بالایی است؛

(ت) هرگاه هر f_n نیمه‌پیوستهٔ پایینی باشد، آنگاه $\sum_1^\infty f_n$ نیمه‌پیوستهٔ پایینی است.

نشان دهید که سه حکم درست و یکی نادرست است. اگر کلمهٔ «نامنفی» حذف شود چه رخ می‌دهد؟ تعویض R^1 با یک فضای توپولوژیک کلی چه اثری بر صحت احکام خواهد داشت؟

۲. فرض کنید f یک تابع مختلط دلخواه بر R^1 باشد، و تعریف کنید

$$\varphi(x, \delta) = \sup\{|f(s)-f(t)| : s, t \in (x-\delta, x+\delta)\},$$

$$\varphi(x) = \inf\{\varphi(x, \delta) : \delta > 0\} \cdot$$

ثابت کنید φ نیمه پیوستهٔ بالایی است، f در نقطهٔ x پیوسته است اگر و فقط اگر $\varphi(x) = 0$؛ و درنتیجه مجموعهٔ نقاط پیوستگی یک تابع مختلط دلخواه یک G_δ می‌باشد.

حکم مشابه را برای فضاهای توپولوژیک کلی به‌جای R^1 تنظیم و ثابت نمایید.

۳. فرض کنید X یک فضای متری با متر ρ باشد. به‌ازای هر مجموعهٔ ناتهی $E \subset X$ تعریف کنید

$$\rho_E(x) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\}$$

و نشان دهید که ρ_E یک تابع به‌طور یکنواخت پیوسته بر X است. اگر A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی از هم جدا از X باشند، ارتباط تابع

$$f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x)+\rho_B(x)}$$

را با لم اوریزن بررسی کنید.

۴. برهان قضیهٔ ریس را بررسی کرده و دو حکم زیر را ثابت نمایید:

(آ) هرگاه $E_1 \subset V_1$ و $E_2 \subset V_2$ که در آنها V_1 و V_2 مجموعه‌های باز از هم جدایی‌اند، آنگاه $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1)+\mu(E_2)$ حتی اگر E_1 و E_2 در $\mathfrak{M}$ نباشند.

(ب) هرگاه $E \in \mathfrak{M}_F$، آنگاه $E = N \cup K_1 \cup K_2 \cup \cdots$ که در آن $\{K_i\}$ گردایهٔ شمارشپذیر از هم‌جدایی از مجموعه‌های فشرده بوده و $\mu(N) = 0$.

در تمرینهای ۵ تا ۸، m اندازهٔ لبگ بر R^1 است.

۵. فرض کنید E مجموعهٔ آشنای «یکسومهای میانی» کانتور باشد. نشان دهید که $m(E) = 0$ حتی اگر E و R^1 عدد اصلی یکسانی داشته باشند.

۶. مجموعهٔ به‌طور کامل ناهمبند $K \subset R^1$ را طوری بسازید که $m(K) > 0$. (K زیرمجموعهٔ همبندی با بیش از یک نقطه نداشته باشد.)

اگر v نیمه‌پیوستهٔ پایینی بوده و $v \le \chi_K$، نشان دهید که عملاً $v \le 0$. لذا χ_K را نمی‌توان از پایین

با توابع نیمه‌پیوستهٔ پایینی به‌مفهوم قضیهٔ ویتالی ـ کاراتئودوری تقریب کرد.

۷. اگر $1 > \epsilon > 0$، مجموعهٔ باز $E \subset [0, 1]$ را طوری بسازید که در $[0, 1]$ چگال بوده و $m(E) = \epsilon$. (چگال بودن A در B یعنی بست A شامل B است.)

۸. مجموعهٔ بورل $E \subset R^1$ را چنان بسازید که به‌ازای هر بازهٔ باز ناتهی I داشته باشیم

$$0 < m(E \cap I) < m(I) \cdot$$

آیا به‌ازای این مجموعه ممکن است $m(E) < \infty$؟

۹. دنبالهٔ f_n از توابع پیوسته بر $[0, 1]$ را طوری بسازید که $0 \le f_n \le 1$ و

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$$

و دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به‌ازای هیچ $x \in [0, 1]$ ی همگرا نباشد.

۱۰. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر $[0, 1]$ باشد به‌طوری که $0 \le f_n \le 1$ و به‌ازای هر $x \in [0, 1]$، وقتی $n \to \infty$، $f_n(x) \to 0$، آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0 \cdot$$

سعی کنید این حکم را بدون استفاده از نظریهٔ اندازه یا هر قضیه راجع به‌انتگرالگیری لبگ ثابت کنید (این امر توان انتگرال لبگ را به‌شما نشان می‌دهد. یک برهان زیبا توسط دبلیو. اف. ابرلین (W. F. Eberlein) در

Communication on Pure and Applied Mathematics, vol X, pp. 357-360, 1957

داده شده است.)

۱۱. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل منتظم بر فضای هاسدورف فشردهٔ X باشد. همچنین $\mu(X) = 1$. ثابت کنید مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K \subset X$ (**محمل** یا **محافظ** μ) وجود دارد به‌طوری که $\mu(K) = 1$ ولی به‌ازای هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ حقیقی‌مانند H از K، $\mu(H) < 1$.

راهنمایی. فرض کنید K اشتراک تمام K_nهای فشرده با $\mu(K_n) = 1$ باشد و نشان دهید که هر مجموعهٔ باز V شامل K حاوی K_n ی می‌باشد. انتظام μ لازم می‌شود. با تمرین ۱۸ قیاس کنید. نشان دهید که K^c وسیعترین مجموعهٔ بازی در X است که اندازه‌اش 0 می‌باشد.

۱۲. نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^1 محافظ یک اندازهٔ بورل است.

۱۳. آیا هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^1 محافظ یک تابع پیوسته است؟ اگر نیست، آیا می‌توانید ردهٔ تمام مجموعه‌های فشرده در R^1 را که محافظ توابع پیوسته‌اند توصیف کنید؟ آیا توصیف شما در سایر فضاهای توپولوژیک اعتبار دارد؟

۱۴. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ حقیقی بر R^k باشد. ثابت کنید توابع بورلی مانند g و

h وجود دارند به‌طوری که $g(x)=h(x)$ ت. هـ. $[m]$ و به‌ازای هر $x\in R^k$، $g(x)\le f(x)\le h(x)$.

۱۵. به‌آسانی می‌توان حدود

$$\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx \quad \text{و} \quad \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,dx$$

به‌ازای $n\to\infty$ را حدس زد. حدسهای خود را ثابت نمایید.

۱۶. چرا در برهان قضیهٔ ۲.۲۰ قسمت (ث) $m(Y)=0$؟

۱۷. فاصلهٔ بین نقاط (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در صفحه را مساوی

$$|y_1-y_2| \quad \text{اگر} \quad x_1=x_2 \quad \text{و} \quad 1+|y_1-y_2| \quad \text{اگر} \quad x_1\ne x_2$$

تعریف کرده و نشان دهید که این درواقع یک متر است و فضای متری حاصل X به‌طور موضعی فشرده است.

اگر $f\in C_c(X)$، x_1، $\cdots$، x_n آن مقادیری از x باشند که به‌ازای دست کم یک y، $f(x,y)\ne 0$ (فقط تعدادی متناهی از این xها وجود دارند!)، و تعریف کنید

$$\Lambda f=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_j,y)\,dy\,\cdot$$

فرض کنید μ اندازهٔ مربوط به‌این Λ طبق قضیهٔ ۱۴.۲ باشد. اگر E محور x باشد، نشان دهید که اگرچه به‌ازای هر $K\subset E$ ی فشرده، $\mu(K)=0$، داریم $\mu(E)=\infty$.

۱۸. این تمرین از تمرین قبل به‌مهارت بیشتری در نظریهٔ مجموعه‌ها نیاز دارد. فرض کنید X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر خوش‌ترتیب باشد که دارای عنصر آخر ω_1 است به‌طوری که هر سابق ω_1 حداکثر تعدادی شمارشپذیر سابق دارد. («طرز ساختن»: یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب اختیار کنید که دارای عناصری با تعدادی شمارش‌ناپذیر سابق باشد و فرض کنید ω_1 اولین آنها باشد. ω_1 را عدد ترتیبی شمارش‌ناپذیر اول می‌نامند.) به‌ازای $\alpha\in X$، $P_\alpha\,[S_\alpha]$ را مجموعهٔ تمام سابقهای (تالیهای) α بگیرید و یک زیرمجموعه از X را باز بنامید اگر یک P_α یا یک S_β یا یک $P_\alpha\cap P_\beta$ یا اجتماعی از این نوع مجموعه‌ها باشد. سپس ثابت کنید X یک فضای هاسدورف فشرده است. (**راهنمایی.** هیچ مجموعهٔ خوش‌ترتیب شامل یک دنبالهٔ نزولی نامتناهی نیست.)

ثابت کنید متمم نقطهٔ ω_1 یک مجموعهٔ باز است که $\sigma-$ فشرده نیست. ثابت کنید به‌هر $f\in C(X)$ یک $\alpha\ne\omega_1$ چنان نظیر است که f بر S_α ثابت می‌باشد. ثابت کنید اشتراک هر گردایهٔ شمارشپذیر مانند $\{K_n\}$ از زیرمجموعه‌های فشردهٔ شمارش‌ناپذیر از X شمارش‌ناپذیر است. (**راهنمایی.** حدود دنباله‌های شمارشپذیر صعودی در X که هر K_n را در بی‌نهایت نقطه قطع می‌کنند را در نظر بگیرید.)

فرض کنید $\mathfrak{M}$ گردایهٔ تمام $E\subset X$ هایی باشد که $E\cup\{\omega_1\}$ یا $E^c\cup\{\omega_1\}$ شامل یک

مجموعهٔ فشردهٔ شمارش‌ناپذیر باشد. در حالت اول تعریف کنید $\lambda(E) = ۱$، و در حالت دوم تعریف کنید $\lambda(E) = ۰$. ثابت کنید $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر است که شامل تمام مجموعه‌های بورل در X می‌باشد. λ یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است که منتظم **نیست** (هر همسایگی $\omega_۱$ دارای اندازهٔ ۱ است)، و به‌ازای هر $f \in C(X)$،

$$f(\omega_۱) = \int_X f d\lambda \cdot$$

μی منتظمی راکه قضیهٔ ۱۴.۲ به‌این تابعی خطی مربوط می‌سازد توصیف نمایید.

۱۹. با فرض فشرده بودن X (یا حتی متری فشرده) به‌جای فقط به‌طور موضعی فشرده، برهان قضیهٔ ۱۴.۲ را تکرار کرده و ببینید تا چه حد می‌توان آن را ساده کرد.

۲۰. توابع پیوستهٔ $f_n : [۰, ۱] \to [۰, \infty)$ را چنان بیابید که به‌ازای هر $x \in [۰, ۱]$، وقتی $n \to \infty$، $f_n(x) \to ۰$، $\int_۰^۱ f_n(x)\, dx \to ۰$، ولی $\sup_n f_n$ در $L^۱$ نباشد. (این نشان می‌دهد که قضیهٔ همگرایی تسلطی حتی وقتی بخشی از مفروضاتش درست نباشد برقرار است.)

۲۱. اگر X فشرده بوده و $f : X \to (-\infty, \infty)$ نیمه پیوستهٔ بالایی باشد، ثابت کنید f در نقطه‌ای از X ماکزیمم خود را می‌گیرد.

۲۲. فرض کنید X یک فضای متری با متر d بوده و $f : X \to [۰, \infty]$ نیمه پیوستهٔ پایینی باشد، و به‌ازای دست کم یک $p \in X$ داشته باشیم $f(p) < \infty$. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ و $x \in X$ تعریف کنید

$$g_n(x) = \inf\{f(p) + n\, d(x, p) : p \in X\}$$

و ثابت کنید

(یک) $|g_n(x) - g_n(y)| \leq n\, d(x, y)$؛

(دو) $۰ \leq g_۱ \leq g_۲ \leq \cdots \leq f$؛

(سه) به‌ازای هر $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $g_n(x) \to f(x)$.

لذا f حد نقطه به‌نقطهٔ یک دنبالهٔ صعودی از توابع پیوسته است. (توجه کنید که عکس مطلب تقریباً بدیهی است.)

۲۳. فرض کنید V در R^k باز بوده و μ یک اندازهٔ بورل مثبت متناهی بر R^k باشد. آیا تابعی که x را به $\mu(V + x)$ می‌فرستد لزوماً پیوسته است؟ نیمه پیوستهٔ پایینی است؟ نیمه پیوستهٔ بالایی است؟

۲۴. طبق تعریف، ***تابع پله‌ای*** عبارت است از یک ترکیب خطی متناهی از توابع مشخص بازه‌های بستهٔ کراندار در $R^۱$. فرض کنید $f \in L^۱(R^۱)$ و ثابت کنید دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ از توابع پله‌ای وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g_n(x)|\, dx = ۰ \cdot$$

۲۵. (یک) کوچکترین ثابت c را چنان بیابید که

$$\log(1+e^{t}) < c+t \quad (0 < t < \infty)$$

(دو) آیا

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{0}^{1} \log\{1+e^{n f(x)}\}\, dx$$

به‌ازای هر $f \in L^{1}$ حقیقی وجود دارد؟ در صورت وجود، مقدارش چقدر است؟

فصل سه
فضاهای L^p

توابع محدب و نامساویها

بسیاری از نامساویهای متداول در آنالیز ریشه در مفهوم تحدب دارند.

۱.۳ تعریف. تابع حقیقی φ تعریف شده بر بازهٔ باز (a, b) را، که در آن $-\infty \le a < b \le \infty$، **محدب** نامند اگر نامساوی

$$\varphi\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \le (1-\lambda)\,\varphi(x)+\lambda\,\varphi(y) \qquad (1)$$

به‌ازای $a < x < b$، $a < y < b$، و $0 \le \lambda \le 1$ برقرار باشد.

این شرط در تصویر یعنی هرگاه $x < t < y$، آنگاه نقطهٔ $(t, \varphi(t))$ باید پایین یا روی خط واصل بین نقاط $(x, \varphi(x))$ و $(y, \varphi(y))$ در صفحه باشد. همچنین شرط (۱) هم‌ارز آن است که اگر $a < s < t < u < b$،

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \le \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}\,. \qquad (2)$$

قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقگیری همراه با (۲) فوراً نشان می‌دهد که یک تابع مشتقپذیر حقیقی‌مانند φ در (a, b) محدب است اگر و فقط اگر $a < s < t < b$ نامساوی $\varphi'(s) \le \varphi'(t)$ را ایجاب کند؛ یعنی اگر و فقط اگر مشتق φ' یک تابع نانزولی باشد.

مثلاً تابع نمایی بر $(-\infty\,,\,\infty)$ محدب است.

۲.۳ قضیه. هرگاه φ بر (a, b) محدب باشد، آنگاه φ بر (a, b) پیوسته است.

برهان. ایدهٔ اثبات را می‌توان با هندسه به‌ساده‌ترین وجه بیان کرد. افرادی که نگران عدم «دقت» آنند می‌توانند آن را برحسب اپسیلون و دلتا بنویسند.

فرض کنیم $a < s < x < y < t < b$. S یعنی نقطهٔ $(s, \varphi(s))$ در صفحه و به‌همین ترتیب در مورد x، y، و t. در این صورت X رو یا پایین خط SY قرار دارد. لذا Y رو یا بالای خط ماربر S و X است. همچنین Y رو یا پایین XT می‌باشد. وقتی $y \to x$، $Y \to X$؛ یعنی $\varphi(y) \to \varphi(x)$. حدود چپ به‌همین نحو سامان می‌یابند و پیوستگی φ نتیجه خواهد شد.

توجه کنید که این قضیه تابع آن است که ما با یک بازهٔ ***باز*** کار می‌کنیم. مثلاً هرگاه $\varphi(x) = 0$ بر $(0, 1]$ و $\varphi(1) = 1$، آنگاه φ در شرط (۱) در تعریف ۱.۳ بر $[0, 1]$ بدون آنکه پیوسته باشد صدق می‌کند.

۳.۳ قضیه [*نامساوی ینسن* (*Jensen*)]. *فرض کنیم* μ *یک اندازهٔ مثبت بر* $\sigma-$ *جبر* $\mathfrak{M}$ *در مجموعهٔ* Ω *باشد به‌طوری که* $\mu(\Omega) = 1$. *هرگاه* f *یک تابع حقیقی در* $L^1(\mu)$ *بوده و به‌ازای هر* $x \in \Omega$، $a < f(x) < b$ *و* φ *بر* (a, b) *محدب باشد، آنگاه*

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \le \int_\Omega (\varphi \circ f)\,d\mu \cdot \qquad (1)$$

تذکر. حالات $a = -\infty$ و $b = \infty$ مستثنی نشده‌اند. ممکن است $\varphi \circ f$ در $L^1(\mu)$ نباشد. در این صورت، همانطور که برهان نشان خواهد داد، انتگرال $\varphi \circ f$ به‌مفهوم تعمیم یافته در بخش ۳۱.۱ وجود دارد و مقدارش $+\infty$ است.

برهان. قرار می‌دهیم $t = \int_\Omega f\,d\mu$. پس $a < t < b$. هرگاه β سوپرمم خارج قسمتهای سمت چپ ۱.۳ (۲) باشد که $a < s < t$، آنگاه β از هیچ خارج قسمتی در سمت راست ۱.۳ (۲) به‌ازای هر $u \in (t, b)$ بزرگتر نیست. پس

$$\varphi(s) \ge \varphi(t) + \beta(s - t) \quad (a < t < b) \cdot \qquad (2)$$

لذا، به‌ازای هر $x \in \Omega$،

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \ge 0 \cdot \qquad (3)$$

چون φ پیوسته است، $\varphi \circ f$ اندازه‌پذیر می‌باشد. اگر از طرفین (۳) نسبت به μ انتگرال بگیریم، رابطهٔ (۱) از انتخاب ما از t و فرض $\mu(\Omega) = 1$ نتیجه می‌شود.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم $\varphi(x) = e^x$. در این صورت رابطهٔ (۱) خواهد شد

$$\exp\left\{\int_\Omega f\,d\mu\right\} \le \int_\Omega e^f \mu \cdot \tag{۴}$$

اگر Ω یک مجموعهٔ متناهی مرکب از نقاط p_1، $\cdots$، p_n بوده و

$$\mu(\{p_i\}) = \frac{1}{n} \text{ و } f(p_i) = x_i،$$

رابطهٔ (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید: به‌ازای هر x_i حقیقی

$$\exp\left\{\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right\} \le \frac{1}{n}(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}) \cdot \tag{۵}$$

با فرض $y_i = e^{x_i}$ نامساوی آشنای زیر بین میانگینهای حسابی و هندسی از n عدد مثبت به‌دست می‌آید:

$$(y_1 y_2 \cdots y_n)^{1/n} \le \frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \tag{۶}$$

چنانچه از این به (۴) بازگردیم معلوم می‌شود که چرا طرفین چپ و راست

$$\exp\left\{\int_\Omega \log g\,d\mu\right\} \le \int_\Omega g\,d\mu \tag{۷}$$

را اغلب به‌ترتیب میانگینهای هندسی و حسابی تابع مثبت g می‌نامند.

هرگاه $\mu(\{p_i\}) = \alpha_i > 0$ که در آن $\Sigma\alpha_i = 1$، آنگاه به‌جای (۶) داریم

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \cdot \tag{۸}$$

اینها چند نمونه از مضمون قضیهٔ ۳.۳ می‌باشند.

برای عکس مطلب، ر.ک. تمرین ۲۰.

۴.۳ تعریف. هرگاه p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند که $p+q=pq$ یا معادلاً

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \tag{۱}$$

آنگاه p و q را یک جفت از **نماهای مزدوج** می‌نامیم. واضح است که رابطهٔ (۱) نامساویهای $1 < p < \infty$ و $1 < q < \infty$ را ایجاب می‌کند. یک حالت خاص مهم عبارت است از $p = q = 2$.

وقتی $p \to 1$، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $q \to \infty$. درنتیجه ۱ و ∞ را نیز یک جفت از نماهای مزدوج می‌دانیم. بسیاری از آنالیزدانان نمای مزدوج p را اغلب بدون تصریح با p' نشان می‌دهند.

۵.۳ قضیه. *فرض کنیم p و q نماهای مزدوج بوده و $1 < p < \infty$. همچنین X یک فضای اندازه با اندازهٔ μ باشد. و نیز f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[0, \infty]$ باشند. در این صورت*

$$\int_X fg\,d\mu \leq \left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{1/p}\left\{\int_X g^q\,d\mu\right\}^{1/q} \tag{1}$$

و

$$\left\{\int_X (f+g)^p\,d\mu\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X g^p\,d\mu\right\}^{1/p} \tag{2}$$

نامساوی (۱) **نامساوی هولدر** ($Hölder$) و نامساوی (۲) **نامساوی مینکوفسکی** ($Minkowski$) است. اگر $p = q = 2$، نامساوی (۱) به **نامساوی شوارتز** معروف است.

برهان. فرض کنیم A و B دو عامل سمت راست (۱) باشند. هرگاه $A = 0$، آنگاه $f = 0$ ت.هـ. (قضیهٔ ۱.۳۹). لذا $fg = 0$ ت.هـ. پس نامساوی (۱) برقرار است. اگر $A > 0$ و $B = \infty$، نامساوی (۱) مجدداً بدیهی است. لذا کافی است فقط حالت $0 < A < \infty$، $0 < B < \infty$ را در نظر بگیریم. قرار می‌دهیم

$$F = \frac{f}{A} \quad \text{و} \quad G = \frac{g}{B}\cdot \tag{3}$$

از اینها داریم

$$\int_X F^p\,d\mu = \int_X G^q\,d\mu = 1\cdot \tag{4}$$

اگر $x \in X$ چنان باشد که $0 < F(x) < \infty$ و $0 < G(x) < \infty$، اعدادی حقیقی مانند s و t وجود دارند به‌طوری که $F(x) = e^{s/p}$ و $G(x) = e^{t/q}$. چون $1/p + 1/q = 1$، تحدب تابع‌نمایی ایجاب می‌کند که

$$e^{s/p+t/q} \leq p^{-1}e^s + q^{-1}e^t\cdot \tag{5}$$

پس به‌ازای هر $x \in X$

$$F(x)\,G(x) \leq p^{-1}F(x)^p + q^{-1}G(x)^q\cdot \tag{6}$$

انتگرالگیری از (۶) نتیجه می‌دهد که، بنابر (۴)،

$$\int_X FG\,d\mu \leq p^{-1} + q^{-1} = 1\cdot \tag{7}$$

و با درج (۳) در (۷) نامساوی (۱) به‌دست می‌آید.

نامساوی (۶) را می‌توان به‌عنوان حالتی خاص از نامساوی ۳.۳ (۸) نیز به‌دست آورد.

برای اثبات (۲) می‌نویسیم

$$(f+g)^p = f\cdot(f+g)^{p-1} + g\cdot(f+g)^{p-1}\cdot \qquad (۸)$$

از نامساوی هولدر داریم

$$\int f\cdot(f+g)^{p-1} \le \left\{\int f^p\right\}^{1/p}\left\{\int (f+g)^{(p-1)q}\right\}^{1/q}\cdot \qquad (۹)$$

فرض کنیم $(9')$ از نامساوی (۹) با تعویض f و g به‌دست آید. چون $(p-1)q=p$، از جمع (۹) و $(9')$ داریم

$$\int (f+g)^p \le \left\{\int (f+g)^p\right\}^{1/q}\left[\left\{\int f^p\right\}^{1/p} + \left\{\int g^p\right\}^{1/p}\right]\cdot \qquad (۱۰)$$

کافی است (۲) را در حالتی که طرف چپ از ۰ بزرگتر و طرف راست از ∞ کوچکتر است ثابت کنیم. تحدب تابع t^p به‌ازای $0 < t < \infty$ نشان می‌دهد که

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(f^p+g^p)\cdot$$

لذا سمت چپ (۲) از ∞ کمتر است، و نامساوی (۲) از (۱۰) در صورت تقسیم بر اولین عامل سمت راست (۱۰) و توجه به‌اینکه $1/p = 1-1/q$ نتیجه می‌شود. این برهان را تمام خواهد کرد.

گاهی دانستن شرایطی که یک نامساوی تحت آنها تساوی می‌شود سودمند است. در بسیاری حالات این اطلاعات را می‌توان با بررسی برهان نامساوی به‌دست آورد.

مثلاً تساوی در (۷) برقرار است اگر و فقط اگر تساوی در (۶) به‌ازای تقریباً هر x برقرار باشد. در (۵) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $s=t$. لذا اگر (۴) را مفروض بگیریم، «$F^p = G^q$ ت.ه.» یک شرط لازم و کافی برای تساوی در (۷) می‌باشد. در این صورت نتیجهٔ زیر را برحسب توابع اصلی f و g خواهیم داشت:

با فرض $A<\infty$ و $B<\infty$ تساوی در (۱) برقرار است اگر و فقط اگر ثابتهایی مانند α و β که هر دو ۰ نیستند وجود داشته باشند به‌طوری که $\alpha f^p = \beta g^q$ ت. ه.

ما بحث مشابه تساوی در (۲) را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

فضاهای L^p

در این بخش، X یک فضای اندازهٔ دلخواه با اندازهٔ مثبت μ است.

۶.۳ تعریف. اگر $0<p<\infty$ و f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد، تعریف می‌کنیم

$$\| f \|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{1/p} \tag{۱}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام fهایی تشکیل شده باشد که

$$\| f \|_p < \infty \cdot \tag{۲}$$

ما $\| f \|_p$ را نرم L^pی f می‌نامیم.

اگر μ اندازهٔ لبگ بر R^k باشد، همانند بخش ۲۱.۲، به‌جای $L^p(\mu)$ می‌نویسیم $L^p(R^k)$. اگر μ اندازهٔ شمارشی بر مجموعهٔ A باشد، معمولاً فضای L^p نظیر را با $\ell^p(A)$ یا، اگر A شمارشپذیر باشد، فقط با ℓ^p نشان می‌دهند. هر عنصر ℓ^p را می‌توان یک دنبالهٔ مختلط $x = \{ \xi_n \}$ در نظر گرفت، و

$$\| x \|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right\}^{1/p} \cdot$$

۷.۳ تعریف. فرض کنیم $g: X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد. همچنین S مجموعهٔ تمام α های حقیقی باشد که

$$\mu (g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0 \cdot \tag{۱}$$

اگر $S = \varnothing$، قرار می‌دهیم $\beta = \infty$. و اگر $S \neq \varnothing$، قرار می‌دهیم $\beta = \inf S$. چون

$$g^{-1} ((\beta, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1} \left(\left(\beta + \frac{1}{n}, \infty\right] \right) \tag{۲}$$

و چون اجتماع گردایهٔ شمارشپذیری از مجموعه‌ها از اندازهٔ ۰ دارای اندازهٔ ۰ است، پس $\beta \in S$. ما β را ***سوپرمم اساسی*** g می‌نامیم.

اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد، $\| f \|_\infty$ را ***سوپرمم اساسی*** $|f|$ تعریف کرده و فرض می‌کنیم $L^\infty(\mu)$ مجموعهٔ تمام fهایی باشد که $\| f \|_\infty < \infty$ · اعضای $L^\infty(\mu)$ راگاهی توابع اندازه‌پذیر ***به‌طور اساسی کراندار*** بر X می‌نامند.

از این تعریف معلوم می‌شود که نامساوی $|f(x)| \leq \lambda$ به‌ازای تقریباً هر x برقرار است اگر و فقط اگر $\lambda > \| f \|_\infty$.

همانند در تعریف ۶.۳، $L^\infty(R^k)$ ردهٔ تمام توابع به‌طور اساسی کراندار (نسبت به‌اندازهٔ لبگ) بر R^k است، و $\ell^\infty(A)$ ردهٔ تمام توابع کراندار بر A می‌باشد. (در اینجا کراندار یعنی به‌طور اساسی کراندار زیرا هر مجموعهٔ ناتهی از اندازهٔ مثبت است!).

۸.۳ قضیه. ***اگر p و q نماهای مزدوج باشند، $1 \leq p \leq \infty$، و $f \in L^p(\mu)$ و $g \in L^q(\mu)$،***

آنگاه $fg \in L^1(\mu)$ و

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q \cdot \tag{۱}$$

برهان. رابطهٔ (۱) به‌ازای $1 < p < \infty$ همان نامساوی هولدر است که بر $|f|$ و $|g|$ اعمال شده است. اگر $p = \infty$، به‌ازای تقریباً هر x

$$|f(x) g(x)| \leq \| f \|_\infty |g(x)| \cdot \tag{۲}$$

با انتگرالگیری از (۲) نامساوی (۱) به‌دست می‌آید. هرگاه $p = 1$، آنگاه $q = \infty$ و همین استدلال قابل اعمال است.

۹.۳ قضیه. *فرض کنیم* $1 \leq p \leq \infty$ و $f \in L^p(\mu)$ و $g \in L^p(\mu)$. پس $f+g \in L^p(\mu)$ و

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p \cdot \tag{۱}$$

برهان. به‌ازای $1 < p < \infty$، این نامساوی از نامساوی مینکوفسکی نتیجه می‌شود زیرا

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)^p \, d\mu \cdot$$

نامساوی (۱) به‌ازای $p = 1$ یا $p = \infty$ نتیجهٔ بدیهی نامساوی $|f+g| \leq |f| + |g|$ است.

۱۰.۳ چند تبصره. $1 \leq p \leq \infty$ را ثابت می‌گیریم. اگر $f \in L^p(\mu)$ و α یک عدد مختلط باشد، واضح است که $\alpha f \in L^p(\mu)$. درنتیجه

$$\| \alpha f \|_p = |\alpha| \, \| f \|_p \cdot \tag{۱}$$

این رابطه همراه با قضیهٔ ۹.۳ نشان می‌دهد که $L^p(\mu)$ یک ***فضای برداری مختلط*** می‌باشد.

فرض کنیم f، g، و h در $L^p(\mu)$ باشند. از تعویض f با $f-g$ و g با $g-h$ در قضیهٔ ۹.۳ داریم

$$\| f-h \|_p \leq \| f-g \|_p + \| g-h \|_p \cdot \tag{۲}$$

این امر پیشنهاد می‌کند که اگر فاصلهٔ بین f و g با $\| f-g \|_p$ تعریف شود، یک متر به‌دست می‌آید. این فاصله را یک لحظه $d(f, g)$ می‌نامیم. در این صورت $0 \leq d(f,g) < \infty$، $d(f,f) = 0$، $d(f,g) = d(g,f)$، و نامساوی (۲) نشان می‌دهد که نامساوی مثلثی $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$ برقرار است. تنها خاصیت دیگری که d باید داشته باشد تا یک فضای متری را تعریف کند آن است که $d(f,g) = 0$ باید $f = g$ را ایجاب کند. در این وضعیت لازم نیست چنین باشد؛ ***ما*** $d(f,g) = 0$ ***را دقیقاً وقتی داریم که تقریباً به‌ازای هر*** x، $f(x) = g(x)$.

می‌نویسیم $f \sim g$ اگر و فقط اگر $d(f,g) = 0$. این بوضوح یک رابطهٔ هم‌ارزی در $L^p(\mu)$

است که $L^p(\mu)$ را به‌رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. هر رده از تمام توابعی تشکیل شده است که هم‌ارز تابع مفروضی می‌باشند. اگر F و G دو ردهٔ هم‌ارزی باشند، $f\in F$ و $g\in G$ را اختیار کرده و تعریف می‌کنیم $d(F,G)=d(f,g)$. توجه کنید که $f\sim f_1$ و $g\sim g_1$ ایجاب می‌کنند که

$$d(f,g)=d(f_1,g_1);$$

در نتیجه $d(F,G)$ خوش تعریف است.

مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی با این تعریف یک فضای متری است. این مجموعه یک فضای‌برداری‌نیزهست‌چراکه $f\sim f_1$ و $g\sim g_1$ ایجاب می‌کنند که $f+g\sim f_1+g_1$ و $\alpha f\sim \alpha f_1$.

وقتی $L^p(\mu)$ یک فضای متری گرفته شود، ***فضایی که واقعاً مورد توجه است فضایی از توابع نیست بلکه فضایی است که عناصرش رده‌های هم‌ارزی از توابع می‌باشند.*** لیکن جهت تسهیل در بیان معمولاً این تمایز را نادیده گرفته و $L^p(\mu)$ را فضایی از توابع می‌گیرند. ما از این رسم پیروی خواهیم کرد.

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^p(\mu)$ بوده، $f\in L^p(\mu)$، و $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$، گوییم $\{f_n\}$ **همگرا به f در $L^p(\mu)$ است** (یا $\{f_n\}$ همگرا به f در میانگین از مرتبهٔ p است یا $\{f_n\}$ همگرای L^p به f می‌باشد). اگر به‌ازای هر $\epsilon>0$ عدد صحیحی مانند N باشد به‌طوری که به‌ازای هر $n>N$ و هر $m>N$، $\|f_n-f_m\|_p<\epsilon$ ، $\{f_n\}$ را یک **دنبالهٔ کشی در** $L^p(\mu)$ می‌نامیم. این تعاریف درست مثل آنها در هر فضای متری است.

نکتهٔ بسیار مهم این است که $L^p(\mu)$ یک فضای متری **تام** می‌باشد؛ یعنی هر دنبالهٔ کشی $L^p(\mu)$ به‌عنصری از $L^p(\mu)$ همگراست:

۱۱.۳ قضیه. ***$L^p(\mu)$ به‌ازای $1\le p\le\infty$ و هر اندازهٔ مثبت μ یک فضای متری تام است.***

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $1\le p<\infty$. همچنین $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $L^p(\mu)$ باشد. یک زیر دنباله مانند $\{f_{n_i}\}$، $n_1<n_2<\cdots$، هست به‌طوری که

$$\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|_p<2^{-i}\quad (i=1,2,3,\cdots)\cdot \tag{1}$$

قرار می‌دهیم

$$g_k=\sum_{i=1}^{k}|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}| \quad \text{و} \quad g=\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}|\cdot \tag{2}$$

چون نامساوی (۱) برقراراست، نامساوی مینکوفسکی نشان می‌دهد که به‌ازای $k=1,2,3,\cdots$، $\|g_k\|_p<1$. لذا با اعمال لم فاتو بر $\{g_k^p\}$ داریم $\|g\|_p\le 1$. بخصوص $g(x)<\infty$ ت. هـ. درنتیجه سری

$$f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right) \tag{3}$$

به‌ازای تقریباً هر $x \in X$ به‌طور مطلق همگراست. مجموع (۳) را به‌ازای xهایی که (۳) در آنها همگراست با $f(x)$ نشان داده و بر مجموعهٔ باقی از اندازهٔ صفر قرار می‌دهیم $f(x) = 0$. چون

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}, \tag{۴}$$

پس

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) \quad \text{ت. هـ.} \tag{۵}$$

حال با یافتن تابع f که حد نقطه به‌نقطهٔ ت. هـ. دنبالهٔ $\{f_{n_i}\}$ است، باید ثابت کنیم که این f حد L^pی دنبالهٔ $\{f_n\}$ می‌باشد. $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. Nی وجود دارد به‌طوری که اگر $n > N$ و $m > N$، $\| f_n - f_m \|_p < \epsilon$. لذا، به‌ازای هر $m > N$، لم فاتو نشان می‌دهد که

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \le \liminf \int_X |f_{n_i} - f_m|^p \, d\mu \le \epsilon^p . \tag{۶}$$

از نامساویهای (۶) نتیجه می‌گیریم که $f - f_m \in L^p(\mu)$. پس $f \in L^p(\mu)$ [زیرا $f = (f - f_m) + f_m$]، و بالأخره وقتی $m \to \infty$، $\| f - f_m \|_p \to 0$. این برهان را در حالت $1 \le p < \infty$ تمام می‌کند.

در $L^\infty(\mu)$ برهان خیلی ساده‌تر است. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $L^\infty(\mu)$ باشد. همچنین A_k و $B_{m,n}$ مجموعه‌هایی باشند که $|f_k(x)| > \| f_k \|_\infty$ و $|f_n(x) - f_m(x)| \ge \| f_n - f_m \|_\infty$، و E اجتماع این مجموعه‌ها به‌ازای $k, m, n = 1, 2, 3, \cdots$ باشد. در این صورت $\mu(E) = 0$ و دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر متمم E به‌طور یکنواخت به‌تابع کرانداری مانند f همگراست. به‌ازای $x \in E$ تعریف می‌کنیم $f(x) = 0$. در این صورت $f \in L^\infty(\mu)$ و وقتی $n \to \infty$، $\| f_n - f \|_\infty \to 0$.

برهان فوق متضمن نتیجه‌ای است جالب که شایستگی بیان جداگانه دارد:

۱۲.۳ قضیه. *هرگاه $1 \le p \le \infty$ و $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $L^p(\mu)$ با حد f باشد، آنگاه $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه جا نقطه به‌نقطه به $f(x)$ همگراست.*

توابع ساده نقش جالبی در $L^p(\mu)$ ایفا می‌کنند.

۱۳.۳ قضیه. *فرض کنیم S ردهٔ تمام توابع مختلط، اندازه‌پذیر، و ساده بر X باشد به‌طوری که*

$$\mu(\{x : s(x) \ne 0\}) < \infty . \tag{۱}$$

هرگاه $1 \le p < \infty$، آنگاه S در $L^p(\mu)$ چگال است.

برهان. اولاً واضح است که $S \subset L^p(\mu)$. فرض کنیم $f \ge 0$، $f \in L^p(\mu)$، و $\{s_n\}$ همانند

قضیهٔ ۱۷.۱ باشد. چون $f \leq s_n \leq ۰$، داریم $s_n \in L^p(\mu)$. لذا $s_n \in S$. وچون $|f-s_n|^p \leq f^p$، قضیهٔ همگرایی تسلطی نشان می‌دهد که وقتی $n \to \infty$، $\|f-s_n\|_p \to ۰$. لذا f در بست L^pی S می‌باشد. حالت کلی (f مختلط) از این نتیجه خواهد شد.

تقریب به‌وسیلهٔ توابع پیوسته

تا به‌حال $L^p(\mu)$ را بر یک فضای اندازه در نظر گرفته‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده بوده و μ یک اندازه بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ در X با خواص مذکور در قضیهٔ ۱۴.۲ باشد. مثلاً X می‌تواند R^k و μ اندازهٔ لبگ بر R^k باشد.

در این وضع قضیه‌ای شبیه قضیهٔ ۱۳.۳ خواهیم داشت:

۱۴.۳ قضیه. *به‌ازای $۱ \leq p < \infty$، $C_c(x)$ در $L^p(\mu)$ چگال است.*

برهان. S را همانند قضیهٔ ۱۳.۳ تعریف می‌کنیم. اگر $s \in S$ و $\epsilon > ۰$، تابعی مانند $g \in C_c(X)$ هست به‌طوری که جز بر مجموعه‌ای از اندازهٔ کمتر از ϵ، $g(x) = s(x)$، و $|g| \leq \|s\|_\infty$ (قضیهٔ لوسین). لذا

$$\|g-s\|_p \leq ۲\, \epsilon^{1/p}\, \|s\|_\infty \cdot \qquad (۱)$$

چون S در $L^p(\mu)$ چگال است، این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۵.۳ چند تبصره. حال روابط بین فضاهای $L^p(R^k)$ (فضاهای L^pای که در آنها اندازهٔ زمینه اندازهٔ لبگ بر R^k است) و فضای $C_c(R^k)$ را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم. بعد k را ثابت می‌گیریم.

به‌ازای هر $p \in [۱, \infty]$ یک متر بر $C_c(R^k)$ داریم؛ فاصلهٔ بین f و g مساوی $\|f-g\|_p$ است. توجه کنید که این یک متر اصل است و لازم نیست به‌رده‌های هم‌ارزی برویم. نکته آن است که اگر دو تابع پیوسته بر R^k یکی نباشند، بر یک مجموعهٔ باز ناتهی مانند V باهم فرق دارند، و $m(V) > ۰$ زیرا V شامل یک $k-$ سلول است. لذا اگر دو عضو $C_c(R^k)$ ت. هـ. مساوی باشند، باهم برابرند. همچنین جالب است که در $C_c(R^k)$ سوپرمم اساسی همان سوپرمم واقعی است: به‌ازای $f \in C_c(R^k)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in R^k} |f(x)| \cdot \qquad (۱)$$

اگر $۱ \leq p < \infty$، قضیهٔ ۱۴.۳ می‌گوید که $C_c(R^k)$ در $L^p(R^k)$ چگال است، و قضیهٔ ۱۱.۳ نشان می‌دهد که $L^p(R^k)$ تام می‌باشد. لذا ***$L^p(R^k)$ تتمیم فضای متریی است که از تزئین $C_c(R^k)$ با متر L^p به‌دست می‌آید.***

حالات $p = ۱$ و $p = ۲$ بیش از حد مورد توجه‌اند. نتیجهٔ فوق را در حالت $p = ۱$ و $k = ۱$ منتها با زبانی دیگر بیان می‌کنیم. این نتیجه می‌گوید که انتگرال لبگ درواقع تعمیم «بحق»

انتگرال ریمان است:

اگر فاصلهٔ بین دو تابع پیوستهٔ f و g با محافظهای فشرده در R^1 مساوی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-g(t)|\, dt \qquad (2)$$

تعریف شود، تتمیم فضای متری حاصل همان مجموعهٔ توابع انتگرالپذیر لبگ بر R^1 است مشروط بر اینکه هر دو تابع تقریباً مساوی یکی گرفته شوند.

البته هر فضای متری S تتمیمی چون S^* دارد که عناصرش را می‌توان به‌طور مجرد به‌صورت رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های کشی در S گرفت (ر. ک. مرجع [۲۶]، ص ۸۲). در این وضع نکتهٔ مهم آن است که تتمیمهای L^pی $C_c(R^k)$ مجدداً فضاهایی از توابع بر R^k می‌باشند.

حالت $p=\infty$ از حالات $p<\infty$ متمایز است. **تتمیم $C_c(R^k)$ فضای L^∞ مساوی $L^\infty(R^k)$ نیست بلکه $C_0(R^k)$ است یعنی فضای تمام توابع پیوسته بر R^k که «در بی‌نهایت صفر می‌شوند»**، مفهومی که در بخش ۱۶.۳ تعریف خواهد شد. چون رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که نرم L^∞ با نرم سوپرمم بر $C_c(R^k)$ یکی است، حکم فوق در باب $C_0(R^k)$ حالت خاصی از قضیهٔ ۱۷.۳ می‌باشد.

۱۶.۳ تعریف. گوییم تابع مختلط f بر فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X **در بی‌نهایت صفر می‌شود** اگر به‌ازای هر $\epsilon>0$ مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K\subset X$ باشد به‌طوری که به‌ازای هر x غیرواقع در K، $|f(x)|<\epsilon$.

ردهٔ تمام توابع پیوستهٔ f بر X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $C_c(X)\subset C_0(X)$ و دو رده باهم یکی‌اند اگر X فشرده باشد. در این صورت هر دو را به‌شکل $C(X)$ می‌نویسیم.

۱۷.۳ قضیه. *هرگاه X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده باشد، آنگاه $C_0(X)$ تتمیم $C_c(X)$ نسبت به‌متر تعریف شده با نرم سوپرمم*

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \qquad (1)$$

می‌باشد.

برهان. تحقیقات اولیه نشان می‌دهند که اگر فاصلهٔ بین f و g را $\|f-g\|$ بگیریم، $C_0(X)$ در اصول موضوع فضاهای متری صدق می‌کند. باید نشان دهیم که (آ) $C_c(X)$ در $C_0(X)$ چگال است و (ب) $C_0(X)$ یک فضای متری تام می‌باشد.

به‌ازای $f\in C_0(X)$ و $\epsilon>0$ یک مجموعهٔ فشرده مانند K هست به‌طوری‌که خارج K داریم $|f(x)|<\epsilon$. لم اوریزن تابعی مانند $g\in C_c(X)$ به‌دست می‌دهد که $0\le g\le 1$ و $g(x)=1$ بر K. قرار می‌دهیم $h=fg$. در این صورت $h\in C_c(X)$ و $\|f-h\|<\epsilon$. این

حکم (آ) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (ب) فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $C_\circ(X)$ باشد؛ یعنی $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد. در این صورت تابع حد نقطه به‌نقطهٔ f آن پیوسته است. به‌ازای $\epsilon > \circ$ عددی مانند n هست به‌طوری که $|f_n - f| < \epsilon/۲$ و یک مجموعهٔ فشرده مانند K هست به‌طوری که خارج K داریم $|f_n(x)| < \epsilon/۲$. لذا خارج K خواهیم داشت $|f(x)| < \epsilon$، و این یعنی f در بی‌نهایت صفر می‌شود. بنابراین $C_\circ(X)$ تام می‌باشد.

تمرینات

۱. ثابت کنید سوپرمم هر گردایه از توابع محدب بر (a,b) (در صورت متناهی بودن) بر (a,b) محدب است، و حدود نقطه به‌نقطهٔ دنباله‌های توابع محدب محدب می‌باشند. راجع به‌حدود بالایی و پایینی دنباله‌های توابع محدب چه می‌شود گفت؟

۲. اگر φ بر (a,b) محدب بوده و ψ بر برد φ محدب و نانزولی باشد، ثابت کنید $\psi\circ\varphi$ بر (a,b) محدب می‌باشد. به‌ازای $\varphi > \circ$ نشان دهید که تحدب $\log\varphi$ تحدب φ را ایجاب می‌کند ولی عکس آن درست نیست.

۳. فرض کنید φ یک تابع حقیقی پیوسته بر (a,b) باشد به‌طوری که به‌ازای هر x و y در (a,b)،

$$\varphi\left(\frac{x+y}{۲}\right) \le \frac{۱}{۲}\varphi(x) + \frac{۱}{۲}\varphi(y).$$

ثابت کنید φ محدب است. (اگر پیوستگی از مفروضات حذف شود، نتیجه درست **نیست**.)

۴. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X بوده، μ یک اندازهٔ مثبت بر X باشد، و

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p \quad (\circ < p < \infty).$$

همچنین $E = \{p : \varphi(p) < \infty\}$ و $\|f\|_\infty > \circ$.

(آ) اگر $r < p < s$، $r \in E$، و $s \in E$، ثابت کنید $p \in E$.

(ب) ثابت کنید $\log\varphi$ در درون E محدب بوده و φ بر E پیوسته می‌باشد.

(پ) بنابر (آ)، E همبند است. آیا E لزوماً باز است؟ بسته است؟ آیا E می‌تواند از یک نقطه تشکیل شده باشد؟ آیا E می‌تواند یک زیرمجموعهٔ همبند از $(\circ, \infty)$ باشد؟

(ت) اگر $r < p < s$، ثابت کنید $\|f\|_p \le \max(\|f\|_r, \|f\|_s)$. نشان دهید که این جزئیت $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu)$ را ایجاب می‌کند.

(ث) فرض کنید به‌ازای $r < \infty$ ی، $\|f\|_r < \infty$ و ثابت کنید

$$\|f\|_p \to \|f\|_\infty \quad \text{وقتی } p \to \infty.$$

۵. علاوه بر مفروضات تمرین ۴ فرض کنید

$$\mu(X) = ۱.$$

(آ) ثابت کنید که اگر $\circ < r < s \leq \infty$، $\| f \|_r \leq \| f \|_s$.

(ب) تحت چه شرایطی $\circ < r < s \leq \infty$ و $\| f \|_r = \| f \|_s < \infty$؟

(پ) ثابت کنید که اگر $\circ < r < s$، $L^r(\mu) \supset L^s(\mu)$. تحت چه شرایطی این دو فضا شامل توابع یکسانی‌اند؟

(ت) فرض کنید به‌ازای $r > \circ$ی، $\| f \|_r < \infty$ و ثابت کنید که اگر $\exp\{-\infty\}$ مساوی $\circ$ تعریف شود،

$$\lim_{p \to \circ} \| f \|_p = \exp \left\{ \int_X \log |f| \, d\mu \right\} \cdot$$

۶. فرض کنید m اندازهٔ لبگ بر $[\circ, ۱]$ باشد، و $\| f \|_p$ را نسبت به m تعریف کنید. تمام توابع Φ بر $[\circ, \infty)$ را چنان تعریف کنید که رابطهٔ

$$\Phi \left(\lim_{p \to \circ} \| f \|_p \right) = \int_\circ^۱ (\Phi \circ f) \, dm$$

به‌ازای هر f کراندار، اندازه‌پذیر، و مثبت برقرار باشد. ابتدا نشان دهید که

$$c\, \Phi(x) + (۱-c)\, \Phi(۱) = \Phi(x^c) \; (\circ \leq c \leq ۱ \;\; ,x > \circ) \cdot$$

با تمرین ۵ (ت) قیاس کنید.

۷. رابطهٔ $r < s$ به‌ازای بعضی از اندازه‌ها جزئیت $L^r(\mu) \subset L^s(\mu)$ را ایجاب می‌کند؛ برای بعضی جزئیت در جهت دیگر است؛ و اندازه‌هایی وجود دارند که به‌ازای آنها اگر $r \neq s$، $L^r(\mu)$ شامل $L^s(\mu)$ نیست. برای این حالات مثال بزنید، و شرایطی بر μ بگذارید که این حالات رخ دهند.

۸. هرگاه g یک تابع مثبت بر $(\circ, ۱)$ باشد به‌طوری که وقتی $x \to \circ$، $g(x) \to \infty$، آنگاه یک تابع محدب مانند h بر $(\circ, ۱)$ هست به‌طوری که $h \leq g$ و وقتی $x \to \circ$، $h(x) \to \infty$. آیا این مطلب درست است یا نادرست؟ آیا مسئله در صورت تعویض $(\circ, ۱)$ با $(\circ, \infty)$ و $x \to \circ$ با $x \to \infty$ تغییر می‌کند؟

۹. فرض کنید f بر $(\circ, ۱)$ اندازه‌پذیر لبگ بوده و به‌طور اساسی کراندار نباشد. بنابر تمرین ۴ (ث)، وقتی $p \to \infty$، $\| f \|_p \to \infty$. آیا $\| f \|_p$ بدلخواه و با کندی به ∞ میل می‌کند؟ به‌طور دقیقتر، آیا به‌ازای هر تابع مثبت Φ بر $(\circ, \infty)$ که وقتی $p \to \infty$، $\Phi(p) \to \infty$ می‌توان تابع f را چنان یافت که وقتی $p \to \infty$، $\| f \|_p \to \infty$ ولی به‌ازای pی به‌قدر کافی بزرگ $\| f \|_p \leq \Phi(p)$؟

۱۰. فرض کنید به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $f_n \in L^p(\mu)$ و وقتی $n \to \infty$، $\| f_n - f \|_p \to \circ$ و $f_n \to g$. هـ. چه رابطه‌ای بین f و g وجود دارد؟

۱۱. فرض کنید $\mu(\Omega) = ۱$ و f و g توابع اندازه‌پذیر مثبتی بر Ω باشند به‌طوری که $fg \geq ۱$.

ثابت کنید
$$\int_\Omega f d\mu \cdot \int_\Omega g d\mu \geq ۱ \cdot$$

۱۲. فرض کنید $\mu(\Omega) = ۱$ و $h:\Omega \to [۰, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد. اگر
$$A = \int_\Omega h\, d\mu ,$$
ثابت کنید
$$\sqrt{۱+A^۲} \leq \int_\Omega \sqrt{۱+h^۲}\, d\mu \leq ۱+A \cdot$$

اگر μ اندازهٔ لبگ بر $[۰, ۱]$ بوده و h پیوسته باشد، $h=f'$، نامساویهای فوق تعبیر هندسی ساده‌ای دارند. از این (برای Ω ی کلی) حدس بزنید که تحت چه شرایطی بر h تساوی می‌تواند در هریک از نامساویهای فوق برقرار باشد، و حدس خود را ثابت نمایید.

۱۳. تحت چه شرایطی بر f و g در قضایای ۸.۳ و ۹.۳ تساوی برقرار است؟ حالات $p = ۱$ و $p = \infty$ را جدا بررسی کنید.

۱۴. فرض کنید $۱ < p < \infty$ و $f \in L^p = L^p((۰, \infty))$ نسبت به‌اندازهٔ لبگ بوده، و
$$F(x) = \frac{۱}{x} \int_۰^x f(t)\, dt \quad (۰ < x < \infty) \cdot$$

(آ) نامساوی هاردی ($Hardy$) را ثابت کنید:
$$\| F \|_p \leq \frac{p}{p-۱} \| f \|_p$$

که نشان می‌دهد که نگاشت $f \to F$ فضای L^p را به‌توی L^p می‌برد.

(ب) ثابت کنید تساوی فقط وقتی برقرار است که $f = ۰$ ت. هـ.

(پ) نشان دهید که ثابت $p/(p-۱)$ را نمی‌توان با ثابت کوچکتری عوض کرد.

(ت) اگر $f > ۰$ و $f \in L^۱$، ثابت کنید $F \notin L^۱ \cdot$

پیشنهادات. (آ) ابتدا فرض کنید $f \geq ۰$ و $f \in C_c((۰, \infty)) \cdot$ انتگرالگیری جزء به‌جزء نتیجه می‌دهد که
$$\int_۰^\infty F^p(x)\, dx = -p \int_۰^\infty F^{p-۱}(x)\, x F'(x)\, dx \cdot$$

توجه کنید که $xF' = f - F$، و نامساوی هولدر را بر $\int F^{p-۱} f$ اعمال کنید. سپس حالت کلی را نتیجه بگیرید. (پ) فرض کنید $f(x) = x^{-۱/p}$ بر $[۱, A]$ به‌ازای A ی بزرگ و $f(x) = ۰$ در سایر نقاط باشد. همچنین ر.ک. تمرین ۱۴ در فصل ۸.

۱۵. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد. ثابت کنید اگر $۱ < p < \infty$،
$$\sum_{N=۱}^\infty \left(\frac{۱}{N} \sum_{n=۱}^N a_n\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-۱}\right)^p \sum_{n=۱}^\infty a_n^p \cdot$$

راهنمایی. اگر $a_n \geq a_{n+1}$، نتیجه را می‌توان از تمرین ۱۴ به‌دست آورد. این حالت خاص حالت کلی را ایجاب می‌کند.

۱۶. قضیهٔ اگوروف ($Egoroff$) را ثابت کنید: اگر $\mu(X) < \infty$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط باشد که در هر نقطهٔ X نقطه به‌نقطه همگراست و نیز $\epsilon > 0$، یک مجموعهٔ شمارشپذیر مانند $E \subset X$ هست که $\mu(X-E) < \epsilon$ و $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت بر E همگرا می‌باشد.

(نتیجه یعنی با تعریف مجدد f_n بر یک مجموعه با اندازهٔ به‌دلخواه کوچک می‌توان یک دنبالهٔ نقطه به‌نقطهٔ همگرا را به‌یک دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا تبدیل کرد؛ به‌تشابه این با قضیهٔ لوسین توجه کنید.) **راهنمایی.** قرار دهید

$$S(n,k) = \bigcap_{i,j>n} \{x : |f_i(x) - f_j(x) < \frac{1}{k}\},$$

و نشان دهید که به‌ازای هر k، وقتی $n \to \infty$، $\mu(S(n,k)) \to \mu(X)$؛ و درنتیجه یک دنبالهٔ صعودی مناسب مانند $\{n_k\}$ هست به‌طوری که $E = \cap S(n_k, k)$ دارای خاصیت مطلوب است.

نشان دهید که قضیه به‌فضاهای $\sigma-$ متناهی قابل تعمیم نیست.

نشان دهید که قضیه را می‌توان به‌حالتی که در آن دنبالهٔ $\{f_n\}$ با خانوادهٔ $\{f_t\}$ که در آن t روی اعداد حقیقی مثبت تغییر می‌کند (با اساساً همان برهان) تعمیم داد. مفروضات در این حالت چنین‌اند: به‌ازای هر $x \in X$،

(یک) $\lim_{t\to\infty} f_t(x) = f(x)$ و

(دو) $t \to f_t(x)$ پیوسته است.

۱۷. (آ) اگر $0 < p < \infty$، قرار دهید $\gamma_p = \max(1, 2^{p-1})$ و نشان دهید که به‌ازای اعداد مختلط دلخواه α و β،

$$|\alpha - \beta|^p \leq \gamma_p(|\alpha|^p + |\beta|^p) \cdot$$

(ب) فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر X بوده، $0 < p < \infty$، $f \in L^p(\mu)$، $f_n \in L^p(\mu)$، $f_n(x) \to f(x)$ ت. هـ.، و وقتی $n \to \infty$، $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. با اتمام دو برهان مختصر زیر نشان دهید که $\lim \|f - f_n\|_p = 0$.

(یک) بنا بر قضیهٔ اگوروف، $X = A \cup B$ به‌نحوی که $\int_A |f|^p < \epsilon$، $\mu(B) < \infty$، و $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر B. با اعمال لم فاتو بر $\int_B |f_n|^p$ نتیجه می‌شود که

$$\limsup \int_A |f_n|^p \, d\mu \leq \epsilon \cdot$$

(دو) قرار دهید $h_n = \gamma_p(|f|^p + |f_n|^p) - |f - f_n|^p$ و، همانند برهان قضیهٔ ۳۴.۱، از لم فاتو

استفاده نمایید.

(پ) نشان دهید که اگر فرض $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ حذف شود، حتی اگر $\mu(X) < \infty$، حکم (ب) نادرست است.

۱۸. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر X باشد. گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر مختلط بر X **همگرا در اندازه** به‌تابع اندازه‌پذیر f است اگر به‌هر $\epsilon > 0$ یک N نظیر باشد که به‌ازای هر $n > N$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon \cdot$$

(این مفهوم در نظریهٔ احتمال دارای اهمیت است.) فرض کنید $\mu(X) < \infty$ و احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) هرگاه $f_n(x) \to f(x)$ ت. هـ.، آنگاه $f_n \to f$ در اندازه؛

(ب) هرگاه $f_n \in L^p(\mu)$ و $\|f_n - f\|_p \to 0$، آنگاه $f_n \to f$ در اندازه. در اینجا $1 \leq p \leq \infty$؛

(پ) هرگاه $f_n \to f$ در اندازه، آنگاه $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا به f ت. هـ. دارد. عکسهای (آ) و (ب) را بررسی کنید. اگر $\mu(X) = \infty$ مثلاً μ اندازهٔ لبگ بر R^1 باشد، بر سر (آ) و (ب) و (پ) چه می‌آید؟

۱۹. **برد اساسی** تابع $f \in L^\infty(\mu)$ را مجموعهٔ R_f مرکب از تمام اعداد مختلط ω تعریف کنید که به‌ازای هر $\epsilon > 0$،

$$\mu(\{x : |f(x) - \omega| < \epsilon\}) > 0 \cdot$$

ثابت کنید R_f فشرده است. چه رابطه‌ای بین مجموعهٔ R_f و عدد $\|f\|_\infty$ وجود دارد؟

فرض کنید A_f مجموعهٔ تمام متوسطهای

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu$$

باشد که در آن $E \in \mathfrak{M}$ و $\mu(E) > 0$. چه رابطه‌ای بین A_f و R_f وجود دارد؟ آیا A_f همواره بسته است؟ آیا اندازه‌هایی مانند μ که A_f به‌ازای هر $f \in L^\infty(\mu)$ محدب باشد وجود دارند؟ آیا اندازه‌هایی مانند μ که A_f به‌ازای $f \in L^\infty(\mu)$ ای محدب نباشد موجودند؟

تعویض $L^\infty(\mu)$ مثلاً با $L^1(\mu)$ چه تأثیری بر این نتایج خواهد داشت؟

۲۰. فرض کنید φ یک تابع حقیقی بر R^1 باشد به‌طوری که به‌ازای هر تابع اندازه‌پذیر کراندار حقیقی f،

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f)\,dx \cdot$$

ثابت کنید φ محدب می‌باشد.

۲۱. فضای متری Y را یک **تتمیم** فضای متری X نامند اگر X در Y چگال بوده و Y تام باشد. در بخش ۱۵.۳ به «تتمیم» یک فضای متری اشاره شد. با بیان و اثبات یک قضیهٔ یکتایی، این اصطلاح را توجیه نمایید.

۲۲. فرض کنید در فضای متری X هر دنبالهٔ کشی زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد. آیا X تام است؟ (ر.ک. برهان قضیهٔ ۳.۱۱.)

۲۳. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر X باشد، $\mu(X) < \infty$، $f \in L^\infty(\mu)$، $\|f\|_\infty > ۰$، و

$$\alpha_n = \int_X |f|^n d\mu \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{n+۱}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty$$

۲۴. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت باشد، $f \in L^p(\mu)$، و $g \in L^p(\mu)$.

(آ) اگر $۰ < p < ۱$، ثابت کنید

$$\int \big|\, |f|^p - |g|^p \,\big| \, d\mu \le \int |f-g|^p d\mu ,$$

$\Delta(f, g) = \int |f-g|^p d\mu$ یک متر بر $L^p(\mu)$ تعریف می‌کند، و فضای متری حاصل تام است.

(ب) اگر $۱ \le p < \infty$، $\|f\|_p \le R$، و $\|g\|_p \le R$، ثابت کنید

$$\int \big|\, |f|^p - |g|^p \,\big| \, d\mu \le ۲p R^{p-۱} \, \|f-g\|_p$$

راهنمایی. ثابت کنید به‌ازای $x \ge ۰$ و $y \ge ۰$

$$|x^p - y^p| \le \begin{cases} |x-y|^p & \text{اگر } ۰ < p < ۱ \text{ ،} \\ p\,|x-y|\,(x^{p-۱} + y^{p-۱}) & \text{اگر } ۱ \le p < \infty \text{ ،} \end{cases}$$

توجه کنید که (آ) و (ب) پیوستگی نگاشت $f \to |f|^p$ که $L^p(\mu)$ را به‌توی $L^۱(\mu)$ می‌برد را ثابت می‌کنند.

۲۵. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر X بوده و $f: X \to (۰, \infty)$ در $\int_X f d\mu = ۱$ صدق کند. ثابت کنید به‌ازای هر $E \subset X$ که $۰ < \mu(E) < \infty$ داریم

$$\int_E (\log f) \, d\mu \le \mu(E) \log \frac{۱}{\mu(E)}$$

و وقتی $۰ < p < ۱$،

$$\int_E f^p d\mu \le \mu(E)^{۱-p}$$

۲۶. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مثبت بر $[۰, ۱]$ باشد، $\int_۰^۱ f(x) \log f(x) \, dx$ بزرگتر است یا $\int_۰^۱ f(s) \, ds \int_۰^۱ \log f(t) \, dt$؟

فصل چهار
نظریهٔ مقدماتی فضای هیلبرت

حاصل ضربهای داخلی و تابعیهای خطی

۱.۴ تعریف. فضای برداری مختلط H را یک ***فضای ضرب داخلی*** (یا ***فضای یکه‌ای***) نامیم اگر به‌هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند (x, y) به‌نام «حاصل‌ضرب داخلی» (یا «حاصل‌ضرب اسکالر») x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

(آ) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است)؛

(ب) اگر $x, y, z \in H$، $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$؛

(پ) اگر $x, y \in H$ و α اسکالر باشد، $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$؛

(ت) به‌ازای هر $x \in H$، $(x, x) \geq ۰$؛

(ث) $(x, x) = ۰$ فقط اگر $x = ۰$.

حال چند نتیجهٔ فوری از این اصول را ذکر می‌کنیم:

قاعدهٔ (پ) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $y \in H$، $(۰, y) = ۰$؛

قواعد (ب) و (پ) را می‌توان در یک حکم جا داد: **به‌ازای هر $y \in H$، نگاشت $x \to (x, y)$ یک *تابعی خطی بر H است*؛**

(آ) و (پ) نشان می‌دهند که $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\,(x, y)$؛

(آ) و (ب) قانون دوم پخشپذیری را ایجاب می‌کنند:

$$(z, x+y) = (z, x) + (z, y)\ .$$

بنابر (ت) می‌توان $\|x\|$، یعنی **نرم** بردار $x \in H$، را ریشهٔ دوم نامنفی (x,x) تعریف کرد. لذا

$$\|x\|^{۲} = (x,x) \cdot \qquad (ج)$$

۲.۴ نامساوی شوارتز. ***خواص*** **۱.۴ (آ)** ***تا*** **(ت)** ***ایجاب می‌کنند که به‌ازای هر*** $x, y \in H$،

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \cdot$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = \|x\|^{۲}$، $B = |(x,y)|$، و $C = \|y\|^{۲}$. عدد مختلطی مانند α هست به‌طوری که $|\alpha| = ۱$ و $\alpha(y,x) = B$. در این صورت به‌ازای هر r حقیقی داریم

$$(x - r\alpha y, x - r\alpha y) = (x,x) - r\alpha(y,x) - r\bar{\alpha}(x,y) + r^{۲}(y,y) \cdot \qquad (۱)$$

عبارت سمت چپ حقیقی و نامنفی است. لذا، به‌ازای هر r حقیقی،

$$A - ۲Br + Cr^{۲} \geq ۰ \cdot \qquad (۲)$$

اگر $C = ۰$، باید داشته باشیم $B = ۰$. در غیر این صورت (۲) به‌ازای r های مثبت نادرست است. اگر $C > ۰$، در (۲) اختیار می‌کنیم $r = B/C$ و به‌دست می‌آوریم $B^{۲} \leq AC$.

۳.۴ نامساوی مثلثی. ***به‌ازای هر*** x ***و*** y ***در*** H ***داریم***

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \cdot$$

برهان. بنابر نامساوی شوارتز،

$$\|x+y\|^{۲} = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$
$$\leq \|x\|^{۲} + ۲\|x\| \, \|y\| + \|y\|^{۲} = (\|x\| + \|y\|)^{۲} \cdot$$

۴.۴ تعریف. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| \quad (x, y, z \in H) \cdot \qquad (۱)$$

اگر فاصلهٔ بین x و y را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند. در اینجا برای نخستین بار از قسمت (ث) تعریف ۱.۴ استفاده می‌کنیم.

لذا H یک فضای متری است. هرگاه این فضای متری ***تام*** باشد یعنی هر دنبالهٔ کشی در H در آن همگرا باشد، آنگاه H یک ***فضای هیلبرت*** (*Hilbert*) نام دارد.

تا پایان این فصل حرف H یک فضای هیلبرت خواهد بود.

۵.۴ چند مثال

(آ) به‌ازای هر n ثابت، مجموعهٔ C^n مرکب از تمام n تاییهای

$$x = (\xi_{۱}, \cdots, \xi_n),$$

که در آن ξ_1، ۰۰۰، ξ_n اعداد مختلط اند، در صورتی‌که جمع و ضرب اسکالر طبق معمول مؤلفه به‌مؤلفه تعریف شوند و

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\ \xi_j\,\overline{\eta_j}\ \left(y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\right)$$

یک فضای هیلبرت است.

(ب) اگر μ یک اندازهٔ مثبت باشد، $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$(f,g)=\int_X f\,\overline{g}\,d\mu$$

است.

انتگرالده سمت راست طبق قضیهٔ ۸.۳ در $L^1(\mu)$ است؛ درنتیجه (f,g) خوش تعریف است. توجه کنید که

$$\|f\|=(f,f)^{\frac{1}{2}}=\left\{\int_X |f|^2\,d\mu\right\}^{\frac{1}{2}}=\|f\|_2$$

تمامیت $L^2(\mu)$ (قضیهٔ ۱۱.۳) نشان می‌دهد که $L^2(\mu)$ درواقع یک فضای هیلبرت است. [یادآور شویم که $L^2(\mu)$ را باید فضایی از **ردههای همارزی** از توابع در نظر گرفت؛ با بحث آمده در بخش ۱۰.۳ قیاس کنید.]

به‌ازای $H=L^2(\mu)$، نامساویهای ۲.۴ و ۳.۴ حالات خاصی از نامساویهای هولدر و مینکوفسکی می‌باشند.

مثال (آ) حالت خاصی است از (ب). اندازه در (آ) چیست؟

(پ) فضای برداری تمام توابع مختلط پیوسته بر $[0,1]$ در صورتی که

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

یک فضای ضرب داخلی است ولی نه یک فضای هیلبرت.

۶.۴ قضیه. نگاشتهای

$$x\to(x,y)\ ,\ x\to(y,x)\ ,\ \text{و}\ \ x\to\|x\|$$

به‌ازای هر $y\in H$ ثابت توابع پیوسته‌ای بر H اند.

برهان. نامساوی شوارتز ایجاب می‌کند که

$$|(x_1,y)-(x_2,y)|=|(x_1-x_2,y)|\le\|x_1-x_2\|\ \ \|y\|$$

که پیوستگی یکنواخت $x\to(x,y)$ را ثابت می‌کند، و همین امر برای $x\to(y,x)$ درست

است. نامساوی مثلثی $\|x_1\| \leq \|x_1-x_2\| + \|x_2\|$ نتیجه می‌دهد که

$$\|x_1\| - \|x_2\| \leq \|x_1-x_2\|,$$

و اگر x_1 و x_2 باهم عوض شوند، معلوم می‌شود که به‌ازای هر $x_1, x_2 \in H$،

$$|\,\|x_1\| - \|x_2\|\,| \leq \|x_1-x_2\| \cdot$$

لذا $x \to \|x\|$ نیز به‌طور یکنواخت پیوسته می‌باشد.

۷.۴ **زیرفضاها.** زیرمجموعهٔ M از فضای برداری V را یک ***زیرفضای*** V نامیم اگر M نسبت به‌جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در V خود یک فضای برداری باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعهٔ $M \subset V$ یک زیرفضا باشد این است که هروقت $x, y \in M$ و α اسکالر باشد، $x+y \in M$ و $\alpha x \in M$.

واژهٔ «زیرفضا» در محدودهٔ فضای برداری همیشه به‌همین معنی است. گاهی جهت تأکید از واژهٔ «زیرفضای خطی» به‌جای زیر فضا استفاده می‌کنیم.

مثلاً اگر V فضای برداری تمام توابع مختلط بر مجموعهٔ S باشد، مجموعهٔ تمام توابع مختلط کراندار بر S زیرفضایی از V است ولی مجموعهٔ تمام $f \in V$ هایی که به‌ازای هر $x \in S$، $|f(x)| \leq 1$ چنین‌نیست. فضای برداری حقیقی R^3 فقط دارای زیرفضاهای زیر است: (آ) R^3؛ (ب) تمام صفحات ماربر مبدأ ۰؛ (پ) تمام خطوط مستقیم ماربر ۰؛ و (ت) $\{0\}$.

زیرفضای بستهٔ H زیرفضایی است که نسبت به‌توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ متر H مجموعه‌ای بسته باشد.

توجه کنید که ***اگر M زیرفضای H باشد، بستش $\bar{M}$ نیز چنین است.***

برای مشاهدهٔ این امر، x و y را در $\bar{M}$ اختیار کرده و فرض می‌کنیم α یک اسکالر باشد. دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در M وجود دارند که به‌ترتیب به x و y همگرایند. به‌آسانی معلوم می‌شود که x_n+y_n و αx_n به‌ترتیب به $x+y$ و αx همگرا می‌باشند. لذا $x+y \in \bar{M}$ و $\alpha x \in \bar{M}$.

۸.۴ **مجموعه‌های محدب.** مجموعهٔ E در فضای برداری V را **محدب** گوییم اگر دارای خاصیت هندسی زیر باشد: هرگاه $x \in E$، $y \in E$، و $0 < t < 1$، آنگاه نقطهٔ

$$z_t = (1-t)x + ty$$

نیز در E واقع باشد. وقتی t از ۰ تا ۱ تغییر کند، می‌توان z_t را پاره‌خط مستقیم از x تا y در V تجسم نمود. تحدب یعنی E شامل پاره‌خطهای بین هر دو نقطهٔ خود می‌باشد.

واضح است که هر زیرفضای V محدب است.

همچنین اگر E محدب باشد، هریک از انتقالهایش

$$E+x=\{y+x : y\in E\}$$

چنین است.

۹.۴ تعامد. اگر به‌ازای x و y ی در H داشته باشیم $(x,y)=0$، گوییم x متعامد به y است و گاهی می‌نویسیم $x\perp y$. چون $(x,y)=0$ تساوی $(y,x)=0$ را ایجاب می‌کند، رابطهٔ $\perp$ متقارن می‌باشد.

فرض کنیم $x^{\perp}$ مجموعهٔ تمام $y\in H$ هایی باشد که متعامد به x اند؛ و اگر M زیرفضایی از H باشد، $M^{\perp}$ را مجموعهٔ تمام $y\in H$ هایی می‌گیریم که به‌هر $x\in M$ متعامد است.

توجه کنید که $x^{\perp}$ یک زیرفضای H است زیرا $x\perp y$ و $x\perp y'$ رابطهٔ $x\perp(y+y')$ و $x\perp \alpha y$ را ایجاب می‌کنند. همچنین $x^{\perp}$ دقیقاً یعنی مجموعهٔ نقاطی که تابع پیوستهٔ $y\to(x,y)$ در آنها 0 است. لذا $x^{\perp}$ یک زیرفضای **بستهٔ** H می‌باشد. چون

$$M^{\perp}=\bigcap_{x\in M}x^{\perp},$$

$M^{\perp}$ اشتراک زیرفضاهای بسته است، و لذا $M^{\perp}$ یک ***زیرفضای بستهٔ*** H می‌باشد.

۱۰.۴ قضیه. ***هر مجموعهٔ ناتهی بسته و محدب E در فضای هیلبرت H شامل عنصر منحصر به‌فردی با کوچکترین نرم است.***

به‌عبارت دیگر، یک و تنها یک $x_0\in E$ هست که به‌ازای هر $x\in E$، $\|x_0\|\le\|x\|$.

برهان. با محاسبه‌ای ساده و فقط استفاده از خواص مذکور در تعریف ۱.۴ می‌توان اتحاد زیر را ثابت کرد:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \quad (x,y\in H)\,. \tag{1}$$

این اتحاد به ***قانون متوازی‌الاضلاع*** معروف است. اگر $\|x\|$ را طول بردار x بگیریم، اتحاد (۱) می‌گوید که مجموع مجذورات اقطار یک متوازی‌الاضلاع مساوی مجموع مجذورات اضلاعش است، که خاصیتی آشنا در هندسهٔ مسطحه می‌باشد.

فرض کنیم $\delta=\inf\{\|x\| : x\in E\}$. به‌ازای هر x و y در E، اتحاد (۱) را بر $\frac{1}{2}x$ و $\frac{1}{2}y$ اعمال کرده و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2. \tag{2}$$

چون E محدب است، $(x+y)/2\in E$. لذا

$$\|x-y\|^2\le 2\|x\|^2+2\|y\|^2-4\delta^2 \quad (x,y\in E)\,. \tag{3}$$

هرگاه نیز داشته باشیم $\delta = \| y \| = \| x \|$ ، آنگاه (۳) تساوی $x = y$ را ایجاب می‌کند، و یکتایی قضیه ثابت می‌شود.

تعریف δ نشان می‌دهد که دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ در E هست به‌طوری که وقتی $n \to \infty$، $\| y_n \| \to \delta$. x و y در (۳) را با y_n و y_m عوض می‌کنیم. دراین صورت وقتی $n \to \infty$ و $m \to \infty$، طرف راست (۳) به ۰ میل می‌کند. این امر نشان می‌دهد که $\{y_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است. چون H تام است، عنصری مانند $x_\circ \in H$ هست به‌طوری‌که $y_n \to x_\circ$؛ یعنی وقتی $n \to \infty$ ، $\| y_n - x_\circ \| \to \circ$ · و چون $y_n \in E$ و E بسته است، $x_\circ \in E$ · چون نرم تابع پیوسته‌ای بر H است (قضیهٔ ۶.۴)، پس

$$\| x_\circ \| = \lim_{n \to \infty} \| y_n \| = \delta \cdot$$

۱۱.۴ قضیه. ***فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد. در این صورت***

(آ) هر $x \in H$ تجزیهٔ منحصر به‌فردی مانند

$$x = Px + Qx$$

به‌مجموعی از $Px \in M$ و $Qx \in M^\perp$ دارد؛

(ب) Px و Qx به‌ترتیب نزدیکترین نقاط به x در M و در $M^\perp$ اند؛

(پ) نگاشتهای $P : H \to M$ و $Q : H \to M^\perp$ خطی‌اند ؛

(ت) $\| x \|^2 = \| Px \|^2 + \| Qx \|^2$ ·

نتیجه. ***هرگاه $M \neq H$، آنگاه عنصری مانند $y \in H$ و $y \neq \circ$ هست به‌طوری که $y \perp M$ ·***

P و Q را **تصاویر متعامد** H روی M و $M^\perp$ می‌نامند.

برهان. در رابطه با یکتایی در (آ)، فرض کنیم به‌ازای بردارهایی چون x' و x'' در M و y' و y'' در $M^\perp$، $x' + y' = x'' + y''$ · در این صورت

$$x' - x'' = y'' - y' \cdot$$

چون $x' - x'' \in M$، $y'' - y' \in M^\perp$، و $M \cap M^\perp = \{\circ\}$ [نتیجهٔ فوری این‌امرکه $(x,x) = \circ$ تساوی $x = \circ$ را ایجاب می‌کند]، داریم $x'' = x'$ و $y'' = y'$ ·

برای اثبات وجود تجزیه، توجه می‌کنیم که مجموعهٔ

$$x + M = \{x + y : y \in M\}$$

بسته و محدب است. Qx را عنصر با کوچکترین نرم در $x+M$ تعریف می‌کنیم. این عنصر طبق قضیهٔ ۱۰.۴ وجود دارد. تعریف می‌کنیم $Px = x - Qx$.

چون $Qx \in x+M$، واضح است که $Px \in M$. لذا P مجموعهٔ H را به‌توی M می‌نگارد.

برای اثبات اینکه Q مجموعهٔ H را به‌توی $M^\perp$ می‌نگارد، نشان می‌دهیم که به‌ازای هر

$y\in M$، $(Qx\,,y)=\circ$. بی‌آنکه به‌کلیت آسیبی برسد فرض می‌کنیم $\|y\|=1$ ، و قرار می‌دهیم $z=Qx$. خاصیت مینیمم‌سازی Qx نشان می‌دهد که به‌ازای هر اسکالر α،

$$(z\,,z)=\|z\|^{2}\le\|z-\alpha y\|^{2}=(z-\alpha y\;,z-\alpha y)\cdot$$

این رابطه به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\circ\le-\alpha\,(y,z)-\overline{\alpha}\,(z\,,y)+\alpha\,\overline{\alpha}\cdot$$

این رابطه به‌ازای $\alpha=(z\,,y)$ نتیجه می‌دهد که $\circ\le-|(z\,,y)|^{2}$ ؛ درنتیجه $(z\,,y)=\circ$. لذا $Qx\in M^{\perp}$.

قبلاً دیدیم که $Px\in M$. اگر $y\in M$، نتیجه می‌شود که

$$\|x-y\|^{2}=\|Qx+(Px-y)\|^{2}=\|Qx\|^{2}+\|Px-y\|^{2}$$

که بوضوح به‌ازای $y=Px$ مینیمم می‌شود.

تا به‌حال (آ) و (ب) را ثابت کرده‌ایم. اگر (آ) را بر x، بر y، و بر $\alpha x+\beta y$ اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$P(\alpha x+\beta y)-\alpha Px-\beta Py=\alpha Qx+\beta Qy-Q(\alpha x+\beta y)\cdot$$

طرف چپ در M و طرف راست در $M^{\perp}$ است. لذا دو طرف $\circ$ اند؛ درنتیجه P و Q خطی می‌باشند.

چون $Px\perp Qx$، (ت) از (آ) نتیجه می‌شود.

برای اثبات نتیجه، فرض کنیم $x\in H$ و $x\notin M$، و قرار می‌دهیم $y=Qx$. چون $Px\in M$ ، $x\ne Px$؛ درنتیجه $y=x-Px\ne\circ$.

قبلاً دیدیم که $x\to(x\,,y)$ به‌ازای هر $y\in H$ یک تابعی خطی پیوسته بر H است. این مطلب که **جمیع** تابعیهای خطی پیوسته بر H از این نوعند بسیار مهم می‌باشد.

۱۲.۴ قضیه. *هرگاه L یک تابعی خطی پیوسته بر H باشد، آنگاه عنصر منحصر به‌فردی مانند $y\in H$ هست به‌طوری که*

$$Lx=(x\,,y)\;(x\in H)\cdot\qquad(1)$$

برهان. اگر به‌ازای هر x، $Lx=\circ$ ، $y=\circ$ را اختیار می‌کنیم. در غیر این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$M=\{x:Lx=\circ\}\cdot\qquad(2)$$

خطی بودن L نشان می‌دهد که M یک زیرفضاست. و پیوستگی L نشان می‌دهد که M بسته است. چون به‌ازای $x\in H$ ی $Lx\ne\circ$، از قضیهٔ ۱۱.۴ معلوم می‌شود که $M^{\perp}$ فقط از $\circ$ تشکیل

نشده است.

لذا عنصری مانند $z \in M^{\perp}$ با $\| z \| = ۱$ وجود دارد. قرار می‌دهیم

$$u = (Lx)z - (Lz)x \cdot \tag{۳}$$

چون $Lx = (Lx)(Lz) - (Lz)(Lx) = ۰$، داریم $u \in M$. لذا $(u, z) = ۰$. این نتیجه می‌دهد که

$$Lx = (Lx)(z, z) = (Lz)(x, z) \cdot \tag{۴}$$

لذا رابطهٔ (۱) به‌ازای $y = \alpha z$ که در آن $\overline{\alpha} = Lz$ برقرار می‌باشد.

یکتایی y به‌آسانی ثابت می‌شود، زیرا هرگاه به‌ازای هر $x \in H$، $(x, y) = (x, y')$، قرار می‌دهیم $z = y - y'$. در این صورت به‌ازای هر $x \in H$، $(x, z) = ۰$. بخصوص $(z, z) = ۰$ لذا $z = ۰$.

مجموعه‌های متعامد یکه

۱۳.۴ چند تعریف. هرگاه V یک فضای برداری بوده، $x_k \in V$ ، $\cdots$ ، $x_۱$، و $c_۱$، $\cdots$، c_k اسکالر باشند، آنگاه $c_۱ x_۱ + \cdots + c_k x_k$ را یک **ترکیب خطی** از $x_۱$، $\cdots$ ، x_k می‌نامیم. مجموعهٔ $\{x_۱, \cdots, x_k\}$ را در صورتی **مستقل** نامیم که $c_۱ x_۱ + \cdots + c_k x_k = ۰$ تساویهای $c_۱ = \cdots = c_k = ۰$ را ایجاب نماید. مجموعهٔ $S \subset V$ در صورتی مستقل است که هر زیرمجموعهٔ متناهی‌اش مستقل باشد. مجموعهٔ $[S]$ مرکب از تمام ترکیبات خطی زیرمجموعه‌های متناهی S (که مجموعهٔ تمام **ترکیبات خطی متناهی** اعضای S نیز نام دارد) یک فضای برداری است. $[S]$ کوچکترین زیرفضای V است که شامل S می‌باشد. $[S]$ را **پیمای** S یا فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ S می‌نامند.

یک مجموعه از بردارهای u_α در فضای هیلبرت H، که در آن α در مجموعهٔ اندیسگذاری مانند A تغییر می‌کند، **متعامدیکه** نام‌دارد اگردر روابط تعامدی $(u_\alpha, u_\beta) = ۰$ به‌ازای هر $\alpha \neq \beta$، $\alpha \in A$، و $\beta \in A$ صدق کند و طوری نرمالی شده باشد که به‌ازای هر $\alpha \in A$، $\| u_\alpha \| = ۱$ به‌عبارت دیگر، $\{u_\alpha\}$ در صورتی متعامدیکه است که

$$(u_\alpha, u_\beta) = \begin{cases} ۱، & \alpha = \beta \text{ اگر} \\ ۰ ، & \alpha \neq \beta \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱}$$

اگر $(u_\alpha : \alpha \in A)$ متعامدیکه باشد، به‌هر $x \in H$ تابع مختلط $\hat{x}$ بر مجموعهٔ اندیسگذار A را که با

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) (\alpha \in A) \tag{۲}$$

تعریف می‌شود مربوط می‌کنیم.

گاهی $\hat{x}(\alpha)$ ها را **ضرایب فوریهٔ** ($Fourier$) x نسبت به‌مجموعهٔ $\{u_\alpha\}$ می‌نامند.

بحث را با چند نکتهٔ ساده راجع به‌مجموعه‌های متعامدیکهٔ **متناهی** آغاز می‌کنیم.

۱۴.۴ قضیه. فرض کنیم $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در H بوده و F یک زیرمجموعهٔ متناهی A باشد. همچنین M_F مجموعهٔ $\{u_\alpha : \alpha \in F\}$ را بپیماید.

(آ) هرگاه φ یک تابع مختلط بر A باشد که خارج F صفر است، آنگاه یک بردار مانند $y \in M_F$ هست یعنی

$$y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) u_\alpha \tag{۱}$$

که به‌ازای هر $\alpha \in A$، $\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$. **همچنین**

$$\|y\|^۲ = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^۲ \cdot \tag{۲}$$

(ب) هرگاه $x \in H$ **و**

$$s_F(x) = \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) u_\alpha, \tag{۳}$$

آنگاه به‌ازای هر $s \in M_F$ **بجز** $s = s_F(x)$ **داریم**

$$\|x - s_F(x)\| < \|x - s\| , \tag{۴}$$

و

$$\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^۲ \leq \|x\|^۲ \cdot \tag{۵}$$

برهان. قسمت (آ) نتیجهٔ فوری روابط تعامدی ۱۳.۴ (۱) است.

در اثبات (ب)، s_F را به‌جای $s_F(x)$ نوشته و توجه می‌کنیم که به‌ازای هر $\alpha \in F$، $\hat{s}_F(\alpha) = \hat{x}(\alpha)$. این می‌گوید که اگر $\alpha \in F$، $(x - s_F) \perp u_\alpha$؛ درنتیجه به‌ازای هر $s \in M_F$، $(x - s_F) \perp (s_F - s)$؛ و لذا

$$\|x - s\|^۲ = \|(x - s_F) + (s_F - s)\|^۲ = \|x - s_F\|^۲ + \|s_F - s\|^۲ \cdot \tag{۶}$$

این نامساوی (۴) را به‌دست می‌دهد. از (۶) به‌ازای $s = ۰$ داریم $\|s_F\|^۲ \leq \|x\|^۲$ که به‌خاطر (۲) همان نامساوی (۵) می‌باشد.

نامساوی (۴) می‌گوید که «مجموع جزئی» $s_F(x)$ «سری فوریهٔ» $\Sigma \hat{x}(\alpha) u_\alpha$ از x بهترین تقریب منحصر به‌فرد به x در M_F نسبت به‌متر تعریف شده به‌وسیلهٔ نرم فضای هیلبرت است.

۱۵.۴. مایلیم شرط متناهی بودن در قضیهٔ ۱۴.۴ (و لذا به‌دست آوردن قضایای ۱۷.۴ و ۱۸.۴) را

بدون محدود شدن به‌مجموعه‌هایی که لزوماً شمارشپذیرند حذف کنیم. به‌این دلیل بهتر است معنی علامت $\Sigma_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)$ را وقتی α در مجموعهٔ دلخواه A تغییر می‌کند روشن سازیم.

فرض کنیم به‌ازای هر $\alpha\in A$، $\circ \le \varphi(\alpha) \le \infty$. در این صورت

$$\sum_{\alpha\in A}\varphi(\alpha) \tag{۱}$$

سوپرمم مجموعهٔ تمام مجموعهای متناهی $\varphi(\alpha_۱)+\cdots+\varphi(\alpha_n)$ است که در آن $\alpha_۱$، $\cdots$، α_n اعضائ متمایزی از A می‌باشند.

یک لحظه توجه نشان می‌دهد که ***مجموع*** (۱) ***درست مساوی انتگرال لبگ*** φ ***نسبت به‌اندازهٔ شمارشی*** φ ***بر*** A ***است.***

در این محدوده معمولاً به‌جای $L^p(\mu)$ می‌نویسیم $\ell^p(A)$. لذا تابع مختلط φ با قلمرو A در $\ell^۲(A)$ است اگر و فقط اگر

$$\sum_{\alpha\in A}|\varphi(\alpha)|^۲<\infty\cdot \tag{۲}$$

مثال ۵.۴ (ب) نشان می‌دهد که $\ell^۲(A)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$(\varphi,\psi)=\sum_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)\ \overline{\psi(\alpha)} \tag{۳}$$

است. در اینجا نیز مجموع روی A انتگرال $\varphi\overline{\psi}$ نسبت به‌اندازهٔ شمارشی است. توجه کنید که چون φ و ψ در $\ell^۲(A)$ اند، $\varphi\overline{\psi}\in\ell^۱(A)$.

قضیهٔ ۱۳.۳ نشان می‌دهد که ***توابع*** φ ***که جز بر زیرمجموعه‌ای متناهی از*** A ***صفرند در*** $\ell^۲(A)$ ***چگال می‌باشند.***

به‌علاوه، هرگاه $\varphi\in\ell^۲(A)$، آنگاه $\{\alpha\in A:\varphi(\alpha)\neq\circ\}$ ***حداکثر شمارشپذیر است.***

زیرا هرگاه A_n مجموعهٔ تمام α هایی باشد که $|\varphi(\alpha)|>\frac{۱}{n}$، آنگاه تعداد عناصر A حداکثر مساوی است با

$$\sum_{\alpha\in A_n}|n\varphi(\alpha)|^۲\le n^۲\sum_{\alpha\in A}|\varphi(\alpha)|^۲\cdot$$

لذا هر A_n $(n=۱,۲,۳,\cdots)$ یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد.

لم زیر راجع به‌فضاهای متری تام راه را برای عبور از مجموعه‌های متعامدیکهٔ متناهی به‌مجموعه‌های متعامدیکهٔ نامتناهی هموار می‌سازد.

۱۶.۴ لم. *فرض کنیم*

(آ) ***X و Y دو فضای متری بوده و X تام باشد؛***

(ب) ***$f:X\to Y$ پیوسته باشد؛***

(پ) X زیرمجموعهٔ چگالی مانند $X_\circ$ داشته باشد که f بر آن یکمتری باشد، و
(ت) $f(X_\circ)$ در Y چگال باشد.
در این صورت f یک یکمتری از X به‌روی Y می‌باشد.

مهمترین قسمت نتیجه این است که f فضای X را **به‌روی تمام** Y می‌نگارد.
به‌یاد آورید که یک یکمتری نگاشتی است که فواصل را حفظ می‌کند. لذا، طبق فرض، به‌ازای جمیع نقاط x_1 و x_2 در $X_\circ$، فاصلهٔ بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ در Y مساوی فاصلهٔ بین x_1 و x_2 در X است.

برهان. یکمتری بودن f بر X نتیجهٔ فوری پیوستگی f است زیرا $X_\circ$ در X چگال می‌باشد.
$y \in Y$ را اختیار می‌کنیم. چون $f(X_\circ)$ در Y چگال است، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $X_\circ$ هست به‌طوری‌که وقتی $n \to \infty$، $f(x_n) \to y$. لذا $\{f(x_n)\}$ یک دنبالهٔ کشی در Y می‌باشد. چون f یک یکمتری بر $X_\circ$ است، پس $\{x_n\}$ نیز یک دنبالهٔ کشی است. حال تمامیت X ایجاب می‌کند که $\{x_n\}$ به $x \in X$ ی همگراست، و پیوستگی f نشان می‌دهد که $f(x) = \lim f(x_n) = y$.

۱۷.۴ قضیه. ***فرض کنیم $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در H بوده و P فضای تمام ترکیبات خطی متناهی از بردارهای u_α باشد. در این صورت نامساوی***

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^{۲} \leq \|x\|^{۲} \qquad (۱)$$

به‌ازای هر $x \in H$ برقرار است، و $x \to \hat{x}$ یک نگاشت خطی پیوسته از H به‌روی $\ell^{۲}(A)$ است که تحدیدش به‌بست $\overline{P}$ از P یک یکمتری از $\overline{P}$ به‌روی $\ell^{۲}(A)$ می‌باشد.

برهان. چون نامساوی ۱۴.۴ (۵) به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی $F \subset A$ برقرار است، نامساوی (۱) یعنی **نامساوی بسل** ($Bessel$) را خواهیم داشت.

تابع f را بر H با $f(x) = \hat{x}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت نامساوی (۱) صریحاً می‌گوید که f مجموعهٔ H را به‌توی $\ell^{۲}(A)$ می‌نگارد. خطی بودن f واضح است. اگر نامساوی (۱) را بر $x-y$ اعمال کنیم، می‌بینیم که

$$\|f(y)-f(x)\|_{۲} = \|\hat{y}-\hat{x}\|_{۲} \leq \|y-x\|$$

لذا f پیوسته است. قضیهٔ ۱۴.۴ (آ) نشان می‌دهد که f یک یکمتری از P به‌روی زیرفضای چگال $\ell^{۲}(A)$ مرکب از توابعی که محافظشان یک مجموعهٔ متناهی مانند $F \subset A$ است می‌باشد. لذا قضیه از لم ۱۶.۴ که در مورد $X = \overline{P}$، $X_\circ = P$، و $Y = \ell^{۲}(A)$ اعمال شده نتیجه می‌شود.
توجه کنید که چون $\overline{P}$ یک زیرمجموعهٔ بستهٔ فضای متری تام H است، خود تام می‌باشد.

این امر که نگاشت $x \to \hat{x}$ فضای H را به‌روی $\ell^{۲}(A)$ می‌نگارد به **قضیهٔ ریس ـ فیشر** $(Fischer)$ معروف است.

۱۸.۴ قضیه. **فرض کنیم $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در H باشد. در این صورت هریک از چهار شرط زیر بر $\{u_\alpha\}$ سه شرط دیگر را ایجاب می‌کند:**

(یک) $\{u_\alpha\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال در H است؛

(دو) مجموعهٔ P مرکب از تمام ترکیبات خطی متناهی از اعضای $\{u_\alpha\}$ در H چگال است؛

(سه) تساوی

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^{۲} = \|x\|^{۲}$$

به‌ازای هر $x \in H$ برقرار است؛

(چهار) تساوی

$$\sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\, \overline{\hat{y}(\alpha)} = (x,y)$$

به‌ازای هر $x \in H$ و $y \in H$ برقرار می‌باشد.

فرمول اخیر به **اتحاد پارسوال** $(Parseval)$ معروف است. توجه کنید که $\hat{x}$ و $\hat{y}$ در $\ell^{۲}(A)$اند؛ در نتیجه $\hat{x}\bar{\hat{y}}$ در $\ell^{۱}(A)$ است. لذا مجموع (چهار) خوش تعریف می‌باشد. البته (سه) حالت خاص $x=y$ از شرط (چهار) می‌باشد.

مجموعه‌های متعامدیکهٔ ماکزیمال را اغلب **مجموعه‌های متعامدیکهٔ تام** یا **پایه‌های متعامدیکه** می‌نامند.

برهان. اینکه (u_α) ماکزیمال است یعنی هیچ برداری از H را نمی‌توان به (u_α) چنان وصل کرد که مجموعهٔ نتیجه هنوز متعامدیکه باشد. این درست وقتی رخ می‌دهد که $x \neq ۰$ ی در H متعامد به‌هر u_α موجود نباشد.

ثابت می‌کنیم که (یک) ← (چهار) ← (سه) ← (دو) ← (یک).

هرگاه P در H چگال نباشد، آنگاه بستش $\overline{P}$ تمام H نیست، و نتیجهٔ قضیهٔ ۱۱.۴ ایجاب می‌کند که $P^{\perp}$ شامل یک بردار ناصفر باشد. لذا وقتی P چگال نباشد، $\{u_\alpha\}$ ماکزیمال نیست و شرط (یک) شرط (دو) را ایجاب می‌کند.

اگر (دو) برقرار باشد، بنابر قضیهٔ ۱۷.۴ (سه) نیز برقرار است.

استلزام (چهار) ← (سه) از اتحاد فضای هیلبرت (گاهی «اتحاد قطبی‌سازی» خوانده می‌شود) که به‌راحتی قابل اثبات است به‌دست می‌آید:

$$۴(x,y) = \|x+y\|^{۲} - \|x-y\|^{۲} + i\|x+iy\|^{۲} - i\|x-iy\|^{۲}$$

که حاصل‌ضرب داخلی (x,y) را برحسب نرمها بیان کرده و با $\hat{x}$ و $\hat{y}$ به‌جای x و y نیز برقرار است زیرا $\ell^2(A)$ نیز یک فضای هیلبرت می‌باشد. (برای اتحادهای دیگر از این نوع، ر.ک. تمرین ۱۹). توجه کنید که مجموعهای (سه) و (چهار) به‌ترتیب عبارتند از $\|\hat{x}\|_2^2$ و $(\hat{x}, \hat{y})$.

بالأخره اگر (یک) نادرست باشد، عنصری مانند $u \neq 0$ در H هست به‌طوری که به‌ازای هر $\alpha \in A$، $(u, u_\alpha) = 0$. هرگاه $x = y = u$، آنگاه $(x,y) = \|u\|^2 > 0$ ولی به‌ازای هر $\alpha \in A$، $\hat{x}(\alpha) = 0$؛ درنتیجه (چهار) برقرار نیست. لذا (چهار) شرط (یک) را ایجاب کرده و برهان تمام می‌شود.

۱۹.۴ یکریختیها. به‌بیان غیرصوری، دو دستگاه جبری با ماهیت یکسان را در صورتی **یکریخت** گوییم که یک نگاشت یک به‌یک از یکی به‌روی دیگری موجود باشد به‌طوری‌که تمام خواص مربوطه را حفظ نماید. مثلاً ممکن است بپرسیم که آیا دو گروه یکریخت‌اند یا دو میدان یکریخت‌اند. دو فضای برداری در صورتی یکریخت‌اند که یک نگاشت **خطی** یک به‌یک از یکی به‌روی دیگری موجود باشد. نگاشتهای خطی نگاشتهایی هستند که مفاهیم مربوطه در یک فضای برداری، یعنی جمع و ضرب اسکالر، را حفظ می‌کنند.

به‌همین نحو، دو فضای هیلبرت H_1 و H_2 در صورتی یکریخت‌اند که یک نگاشت خطی یک به‌یک مانند Λ از H_1 به‌روی H_2 موجود باشد که حاصل‌ضربهای داخلی را نیز حفظ نماید: به‌ازای هر x و y در H_1، $(\Lambda x, \Lambda y) = (x,y)$. یک چنین Λ یک **یکریختی** (یا، به‌طور مشخص‌تر، یک ***یکریختی فضاهای هیلبرت***) از H_1 به‌روی H_2 می‌باشد. قضایای ۱۷.۴ و ۱۸.۴ با استفاده از این اصطلاح حکم زیر را به‌ما می‌دهند.

اگر $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال در فضای هیلبرت H بوده و $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$، آنگاه نگاشت $x \to \hat{x}$ یک یکریختی فضاهای هیلبرت از H به‌روی $\ell^2(A)$ می‌باشد.

می‌توان ثابت کرد (ما این اثبات را حذف می‌کنیم) که $\ell^2(A)$ و $\ell^2(B)$ یکریخت‌اند اگر و فقط اگر مجموعه‌های A و B عدد اصلی یکسانی داشته باشند. ولی ثابت خواهیم کرد که **هر** فضای هیلبرت غیربدیهی (یعنی فضا فقط از ۰ تشکیل نشده است) با $\ell^2(A)$ای یکریخت است و این کار را با اثبات اینکه هر چنین فضا شامل یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال است انجام می‌دهیم (قضیهٔ ۲۲.۴). برهان به‌خاصیتی از مجموعه‌های جزئی مرتب وابسته است که هم‌ارز اصل موضوع انتخاب می‌باشد.

۲۰.۴ مجموعه‌های جزئی مرتب. گوییم مجموعهٔ $\mathscr{P}$ به‌وسیلهٔ رابطهٔ دوتایی $\leq$ **جزئی مرتب** است اگر

(آ) $a \le b$ و $b \le c$ نامساوی $a \le c$ را ایجاب کنند؛
(ب) به‌ازای هر $\alpha \in \mathscr{P}$، $a \le a$؛
(پ) $a \le b$ و $b \le a$ تساوی $a = b$ را ایجاب نمایند.

گوییم زیرمجموعهٔ $\mathscr{Q}$ از مجموعهٔ جزئی مرتب $\mathscr{P}$ **کلی مرتب** (یا **خطی مرتب**) است اگر هر جفت $a, b \in \mathscr{Q}$ در $a \le b$ یا $b \le a$ صدق نمایند.

مثلاً هر گردایه از زیرمجموعه‌های یک مجموعه با رابطهٔ شمول $\subset$ جزئی مرتب است.

به‌عنوان مثالی خاص‌تر، فرض کنیم $\mathscr{P}$ گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز صفحه باشد که با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب شده است و $\mathscr{Q}$ گردایهٔ تمام قرصهای مستدیر باز به‌مرکز مبدأ باشد. در این صورت $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ ، $\mathscr{Q}$ به‌وسیلهٔ $\subset$ کلی مرتب است، و $\mathscr{Q}$ یک زیرمجموعهٔ کلی مرتب *ماکزیمال* $\mathscr{P}$ می‌باشد. این یعنی اگر عضوی از $\mathscr{P}$ غیرواقع در $\mathscr{Q}$ را به $\mathscr{Q}$ ملحق کنیم، گردایهٔ حاصل از مجموعه‌ها دیگر با $\subset$ کلی مرتب نیست.

۲۱.۴ قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف. ***هر مجموعهٔ جزئی مرتب ناتهی شامل یک زیرمجموعهٔ کلی مرتب ماکزیمال است.***

این قضیه نتیجه‌ای است از اصل موضوع انتخاب و، درواقع، هم‌ارز آن است. شکل (بسیار مشابه) دیگری از آن به‌لم زرن ($Zorn$) معروف است. برهان قضیهٔ فوق در ضمیمه خواهد آمد.

هرگاه H یک فضای هیلبرت غیربدیهی باشد، آنگاه عنصری مانند $u \in H$ با $\|u\| = ۱$ وجود دارد؛ درنتیجه یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ناتهی در H موجود است. لذا وجود یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر:

۲۲.۴ قضیه. ***هر مجموعهٔ متعامدیکهٔ B در فضای هیلبرت H مشمول یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال در H می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم $\mathscr{P}$ ردهٔ تمام مجموعه‌های متعامدیکه در H باشد که شامل مجموعهٔ داده شدهٔ B است. $\mathscr{P}$ را با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب می‌کنیم. چون $B \in \mathscr{P}$، $\mathscr{P} \neq \varnothing$. لذا $\mathscr{P}$ شامل یک ردهٔ کلی مرتب ماکزیمال مانند Ω می‌باشد. فرض کنیم S اجتماع تمام اعضای Ω باشد. واضح است که $B \subset S$. حکم می‌کنیم که S یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال است.

هرگاه $u_۱ , u_۲ \in S$، آنگاه به‌ازای $A_۱$ و $A_۲$ای در Ω داریم $u_۱ \in A_۱$ و $u_۲ \in A_۲$. چون Ω کلی مرتب است، $A_۱ \subset A_۲$ (یا $A_۲ \subset A_۱$)؛ درنتیجه $u_۱ \in A_۲$ و $u_۲ \in A_۲$. و چون $A_۲$ متعامدیکه است، $(u_۱ , u_۲) = ۰$ اگر $u_۱ \neq u_۲$ و $(u_۱ , u_۲) = ۱$ اگر $u_۱ = u_۲$. لذا S یک مجموعهٔ متعامدیکه می‌باشد.

فرض کنیم S ماکزیمال نباشد. در این صورت S زیرمجموعهٔ حقیقی مجموعهٔ متعامدیکهٔ

S^* است. واضح است که $S^* \notin \Omega$ و S^* شامل هر عضو Ω می‌باشد. لذا می‌توان S^* را به Ω ملحق کرد و باز هم یک ترتیب کلی داشت. این امر با ماکزیمالی Ω در تضاد می‌باشد.

سریهای مثلثاتی

۲۳.۴ چند تعریف. فرض کنیم T دایرهٔ یکه در صفحهٔ مختلط باشد؛ یعنی مجموعهٔ تمام اعداد مختلط با قدرمطلق ۱. هرگاه F تابعی بر T بوده و f بر R^1 با

$$f(t)=F(e^{it}) \tag{1}$$

تعریف شود، آنگاه f یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب 2π می‌باشد. این یعنی به‌ازای هر t ی حقیقی، $f(t+2\pi)=f(t)$. به‌عکس، اگر f تابعی بر R^1 با دورهٔ تناوب 2π باشد، تابعی مانند F بر T هست که (۱) را برقرار می‌سازد. لذا می‌توان توابع بر T را با توابع 2π متناوب بر R^1 یکی کرد. ما گاهی به‌خاطر سادگی به‌جای $f(e^{it})$ می‌نویسیم $f(t)$ و حتی فکر می‌کنیم f بر T تعریف شده است.

با این قراردادها، $L^p(T)$ به‌ازای $1 \le p < \infty$ را ردهٔ تمام توابع مختلط، اندازه‌پذیر لبگ، و 2π متناوب بر R^1 تعریف می‌کنیم که در آنها نرم

$$\|f\|_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

متناهی است.

به‌عبارت دیگر، ما به $L^p(\mu)$ نگاه می‌کنیم که در آن μ اندازهٔ لبگ بر $[0, 2\pi]$ (یا بر T) است بخش بر 2π. $L^\infty(T)$ ردهٔ تمام اعضای 2π متناوب $L^\infty(R^1)$ است با نرم سوپرمم اساسی، و $C(T)$ مرکب است از تمام توابع مختلط پیوسته بر T (یا، معادلاً، تمام توابع پیوستهٔ مختلط و 2π متناوب) با نرم

$$\|f\|_\infty=\sup_t |f(t)| \tag{3}$$

عامل $1/2\pi$ در (۲) صوری سازیی راکه در پیش است ساده می‌سازد. مثلاً نرم L^p تابع ثابت ۱ مساوی ۱ می‌باشد.

یک ***چندجمله‌ای مثلثاتی*** مجموعی است متناهی به‌شکل

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{N} (a_n\cos nt+b_n\sin nt)(t\in R^1) \tag{4}$$

که در آن a_0، a_1، $\cdots$، a_N و b_1، $\cdots$، b_N اعداد مختلطی می‌باشند. رابطهٔ (۴) را می‌توان

به‌حرمت اتحادهای اویلر به‌شکل زیر نیز نوشت:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \tag{۵}$$

که برای اغلب اهداف مناسبتر است. واضح است که هرچندجمله‌ای مثلثاتی دورهٔ تناوب 2π دارد.

ما مجموعهٔ تمام اعداد صحیح (مثبت، صفر، و منفی) را با Z نشان داده و قرار می‌دهیم

$$u_n(t) = e^{int} \, (n \in Z) \cdot \tag{۶}$$

اگر حاصل‌ضرب داخلی در $L^2(T)$ را با

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\; dt \tag{۷}$$

تعریف کنیم [توجه کنید که این با (۲) سازگار است]، محاسبات ساده نشان می‌دهند که

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 1 \text{ ، } & \text{اگر } n = m \\ 0 \text{ ، } & \text{اگر } n \neq m \end{cases} \tag{۸}$$

لذا $\{u_n : n \in Z\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در $L^2(T)$ است که معمولاً **دستگاه مثلثاتی** نامیده می‌شود. حال ثابت می‌کنیم این دستگاه ماکزیمال است، و سپس صورتهای ملموس قضایای مجردی که قبلاً در محدودهٔ فضای هیلبرت ثابت شده بودند را به‌دست می‌آوریم.

۲۴.۴ تمامیت دستگاه مثلثاتی. قضیهٔ ۱۸.۴ نشان می‌دهد که به‌محض آنکه چگال بودن مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای مثلثاتی در $L^2(T)$ را نشان دهیم، ماکزیمالی (یا تمامیت) دستگاه مثلثاتی ثابت خواهد شد. چون $C(T)$ در $L^2(T)$ چگال است، بنابر قضیهٔ ۱۴.۳ (توجه کنید که T فشرده است) کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر $f \in C(T)$ و هر $\epsilon > 0$ یک چندجمله‌ای مثلثاتی مانند P وجود دارد به‌طوری که $\|f-P\|_2 < \epsilon$. چون به‌ازای هر $g \in C(T)$، $\|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$، تخمین $\|f-P\|_2 < \epsilon$ از نامساوی $\|f-P\|_\infty < \epsilon$ نتیجه می‌شود، و این تخمین است که ما ثابت خواهیم کرد.

فرض کنید چندجمله‌ایهای مثلثاتی Q_1، Q_2، Q_3، $\cdots$ را با خواص زیر داشته باشیم:

(آ) به‌ازای $t \in R^1$، $Q_k(t) \geq 0$؛

(ب) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\, dt = 1$؛

(پ) هرگاه $\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\}$، آنگاه به‌ازای هر $\delta > 0$،

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k(\delta) = 0 \cdot$$

راه دیگر بیان (پ) آن است که بگوییم: به‌ازای هر $\delta > ۰$، $Q_k(t) \to ۰$ به‌طور یکنواخت بر $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

به‌هر $f \in C(T)$ توابع P_k را با تعریف زیر مربوط می‌کنیم:

$$P_k(t) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, Q_k(s)\, ds \quad (k = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \tag{۱}$$

اگر s را با $-s$ (از قضیهٔ ۲.۲۰ قسمت (ث) استفاده می‌کنیم) و سپس با $s-t$ عوض کنیم، تناوب f و Q_k نشان می‌دهد که مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. لذا

$$P_k(t) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, Q_k(t-s)\, ds \quad (k = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \tag{۲}$$

چون هر Q_k یک چندجمله‌ای مثلثاتی است، Q_k به‌شکل زیر می‌باشد:

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{int}, \tag{۳}$$

و اگر در (۳) t را با $t-s$ عوض کرده و نتیجه را در (۲) بگذاریم، خواهیم دید که هر P_k یک چند جمله‌ای مثلثاتی می‌باشد.

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. چون f بر T به‌طور یکنواخت پیوسته است، $\delta > ۰$ ای وجود دارد به‌طوری که هروقت $|t-s| < \delta$، $|f(t)-f(s)| < \epsilon$. بنابر (ب) داریم

$$P_k(t) - f(t) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t-s) - f(t)\}\, Q_k(s)\, ds$$

و (آ) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر t،

$$|P_k(t) - f(t)| \le \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)\, ds = A_۱ + A_۲,$$

که در آن $A_۱$ انتگرال روی $[-\delta, \delta]$ و $A_۲$ انتگرال روی $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ می‌باشد. در $A_۱$ انتگرالده از $\epsilon Q_k(s)$ کمتراست؛ درنتیجه، بنابر (ب)، $A_۱ < \epsilon$. در $A_۲$ داریم $Q_k(s) \le \eta_k(\delta)$. لذا، بنابر (پ)، به‌ازای k ی به‌قدر کافی بزرگ،

$$A_۲ \le ۲\, \|f\|_\infty \cdot \eta_k(\delta) < \epsilon \cdot \tag{۴}$$

چون این تخمینها مستقل از t اند، ثابت کرده‌ایم که

$$\lim_{k \to \infty} \|f - P_k\|_\infty = ۰ \cdot \tag{۵}$$

آنچه بجا مانده ساختن Q_k است. این را می‌توان به‌طرف مختلف انجام داد. ذیلاً یک راه ساده را شرح می‌دهیم. قرار می‌دهیم

$$Q_k(t)=c_k\left\{\frac{1+\cos t}{2}\right\}^k, \tag{۶}$$

که در آن c_k طوری اختیار شده که (ب) برقرار باشد. چون (آ) واضح است، کافی است (پ) را نشان دهیم. چون Q_k زوج است، (ب) نشان می‌دهد که

$$1=\frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi \left\{\frac{1+\cos t}{2}\right\}^k dt\geq\frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi \left\{\frac{1+\cos t}{2}\right\}^k \sin t\,dt=\frac{2c_k}{\pi(k+1)}\cdot$$

و چون Q_k بر $[0,\pi]$ نزولی است، داریم

$$Q_k(t)\leq Q_k(\delta)\leq\frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k\quad(0<\delta\leq|t|\leq\pi) \tag{۷}$$

این (پ) را ایجاب می‌کند چراکه اگر $0<\delta\leq\pi$ ، $1+\cos\delta<2$.

پس نتیجهٔ مهم زیر را ثابت کرده‌ایم.

۲۵.۴ قضیه. ***اگر $f\in C(T)$ و $\epsilon>0$ ، یک چندجمله‌ای مثلثاتی مانند P هست به‌طوری‌که به‌ازای هر t ی حقیقی،***

$$|f(t)-P(t)|<\epsilon\cdot$$

در سال ۱۹۰۴ فجر ($Fejér$) نتیجهٔ دقیقتر زیر را ثابت کرد: ***میانگینهای حسابی مجموعهای جزئی سریهای فوریهٔ هر $f\in C(T)$ به‌طور یکنواخت به f همگراست.*** برای اثبات (که کاملاً شبیه اثبات قضیهٔ فوق است) ر.ک. قضیهٔ ۱.۳ در مرجع [۴۵] یا ص ۸۹ مرجع [۳۶] جلد یک.

۲۶.۴ سریهای فوریه. به‌ازای هر $f\in L^1(T)$ ***ضرایب فوریهٔ f*** را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\quad(n\in Z) \tag{۱}$$

که در آن Z مجموعهٔ تمام اعداد صحیح است. بدین‌ترتیب به‌هر $f\in L^1(T)$ تابع $\hat{f}$ بر Z را مربوط می‌سازیم. ***سری فوریهٔ f*** عبارت است از

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int} \tag{۲}$$

و ***مجموعهای جزئی*** اش عبارتند از

$$s_N(t)=\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{int}\quad(N=0,1,2,\cdots)\cdot \tag{۳}$$

چون $L^2(T) \subset L^1(T)$، رابطهٔ (۱) را می‌توان بر هر $f \in L^2(T)$ اعمال کرد. حال از مقایسهٔ تعاریف بخشهای ۲۳.۴ و ۱۳.۴ می‌توان قضایای ۱۷.۴ و ۱۸.۴ را با اصطلاحاتی ملموس بیان کرد:

قضیهٔ ریس ـ فیشر می‌گوید که هرگاه $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \tag{۴}$$

آنگاه تابعی مانند $f \in L^2(T)$ وجود دارد به‌طوری که

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt \quad (n \in Z) \cdot \tag{۵}$$

قضیهٔ پارسوال می‌گوید که اگر $f \in L^2(T)$ و $g \in L^2(T)$،

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, \overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt \cdot \tag{۶}$$

سری سمت چپ (۶) به‌طور مطلق همگراست، و هرگاه s_N همانند در (۳) باشد، آنگاه

$$\lim_{N \to \infty} \|f - s_N\|_2 = 0 \tag{۷}$$

زیرا از یک حالت خاص (۶) نتیجه می‌شود که

$$\|f - s_N\|_2^2 = \sum_{|n| > N} |\hat{f}(n)|^2 \cdot \tag{۸}$$

رابطهٔ (۷) می‌گوید که هر $f \in L^2(T)$ حد L^2 ی مجموعهای جزئی سری فوریهٔ خود می‌باشد؛ یعنی سری فوریهٔ f به‌مفهوم L^2 همگرا به f است. همانطور که در فصل ۵ خواهیم دید، همگرایی نقطه به‌نقطه مسئلهٔ ظریفتری را مطرح خواهد ساخت.

قضیهٔ ریس ـ فیشر و قضیهٔ پارسوال را می‌توان خلاصه کرد و گفت که نگاشت $f \longleftrightarrow \hat{f}$ یک یکریختی فضاهای هیلبرت از $L^2(T)$ به‌روی $\ell^2(Z)$ می‌باشد.

نظریهٔ سریهای فوریه در فضاهای تابعی دیگر، مثلاً در $L^1(T)$، خیلی از $L^2(T)$ مشکلتر است، و ما فقط به‌چند جنبهٔ آن اشاره خواهیم کرد.

توجه کنید که نکتهٔ اصلی در برهان قضیهٔ ریس ـ فیشر تام بودن L^2 است. این امر چنان بخوبی درک شده است که گاهی نام «قضیهٔ ریس ـ فیشر» به‌قضیه‌ای که حکم به‌تمامیت L^2 یا حتی هر L^p می‌دهد نیز اطلاق می‌شود.

تمرینات

در این مجموعه از تمرینات H همواره یک فضای هیلبرت است.

۱. اگر M یک زیرفضای بستهٔ H باشد، ثابت کنید $M=(M^{\perp})^{\perp}$. آیا حکم مشابهی برای زیرفضاهای M که لزوماً بسته نیستند نیز وجود دارد؟

۲. فرض کنید $\{x_n : n=۱,۲,۳,\cdots\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از بردارها در H باشد. نشان دهید که ساختن زیر یک مجموعهٔ متعامدیکه مانند $\{u_n\}$ به‌دست می‌دهد که $\{x_۱,\cdots,x_N\}$ و $\{u_۱,\cdots,u_N\}$ به‌ازای هر N پیمای یکسانی دارند.

قرار دهید $u_۱=x_۱/\|x_۱\|$، و با داشتن $u_۱$، $\cdots$، $u_{n-۱}$ تعریف کنید

$$v_n=x_n-\sum_{i=۱}^{n-۱}(x_n,u_i)u_i \quad \text{و} \quad u_n=v_n/\|v_n\|\cdot$$

این امر برهانی از وجود یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال در فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر به‌دست می‌دهد که در آن از اصل ماکزیمالی هاسدورف استفاده‌ای نمی‌شود. (یک فضا در صورتی **جدایی‌پذیر** است که شامل یک زیرمجموعهٔ چگال شمارشپذیر باشد.)

۳. نشان دهید که اگر $۱\le p<\infty$، $L^p(T)$ جدایی‌پذیر است ولی $L^\infty(T)$ جدایی‌پذیر نیست.

۴. نشان دهید که H جدایی‌پذیر است اگر و فقط اگر H شامل یک دستگاه متعامدیکهٔ ماکزیمال باشد که حداکثر شمارشپذیر است.

۵. اگر $M=\{x:Lx=۰\}$ که در آن L یک تابعی خطی پیوسته بر H است، ثابت کنید $M^{\perp}$ یک فضای برداری از بعد ۱ است (مگر $M=H$).

۶. فرض کنید $\{u_n\}$ $(n=۱,۲,۳,\cdots)$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در H باشد. نشان دهید که این یک مجموعهٔ بسته و کراندار به‌دست می‌دهد که فشرده نیست. فرض کنید Q مجموعهٔ تمام $x\in H$ها به‌شکل زیر باشد:

$$x=\sum_{۱}^{\infty} c_n u_n \;\left(\text{که در آن } |c_n|\le\frac{۱}{n}\right)\cdot$$

ثابت کنید Q فشرده است. (Q را مکعب هیلبرت می‌نامند.) به‌طورکلی فرض کنید $\{\delta_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت بوده و S مجموعهٔ تمام $x\in H$ها به‌شکل زیر باشد:

$$x=\sum_{۱}^{\infty} c_n u_n \;\left(\text{که در آن } |c_n|\le\delta_n\right)\cdot$$

ثابت کنید S فشرده است اگر و فقط اگر $\sum_{۱}^{\infty}\delta_n^{۲}<\infty$. ثابت کنید H به‌طور موضعی فشرده نیست.

۷. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری که هروقت $b_n\ge۰$ و $\sum b_n^{۲}<\infty$، $\sum a_n b_n<\infty$. ثابت کنید $\sum a_n^{۲}<\infty$.

پیشنهاد. هرگاه $\Sigma a_n^{۲} = \infty$، آنگاه مجموعه‌های از هم‌جدایی مانند E_k $(k = ۱, ۲, ۳, \cdots)$ وجود دارند به‌طوری که

$$\sum_{n \in E_k} a_n^{۲} > ۱ \cdot$$

b_n را طوری تعریف کنید که به‌ازای $n \in E_k$، $b_n = c_k a_n$. به‌ازای c_k ی مناسب، $\Sigma a_n b_n = \infty$ اگرچه $\Sigma b_n^{۲} < \infty \cdot$

۸. اگر $H_۱$ و $H_۲$ دو فضای هیلبرت باشند، ثابت کنید یکی از آنها با زیرفضایی از دیگری یکریخت است. (توجه کنید که هر زیرفضای بستهٔ یک فضای هیلبرت فضای هیلبرت است.)

۹. اگر $A \subset [۰, ۲\pi]$ و A اندازه‌پذیر باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \cos nx\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_A \sin nx\, dx = ۰ \cdot$$

۱۰. فرض کنید $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \cdots$ اعداد صحیح مثبتی بوده و E مجموعهٔ تمام $x \in [۰, ۲\pi]$ هایی باشد که در آنها $\{\sin n_k x\}$ همگراست. ثابت کنید $m(E) = ۰$. **راهنمایی.** $۲\sin^۲\alpha = ۱ - \cos ۲\alpha$؛ درنتیجه، بنابر تمرین ۹، $\sin n_k x \to \pm ۱/\sqrt{۲}$ ت. هـ. بر E.

۱۱. مجموعهٔ بستهٔ ناتهی E در $L^۲(T)$ را چنان بیابید که شامل عنصری با کوچکترین نرم نباشد.

۱۲. دیدیم که ثابتهای c_k در بخش ۲۴.۴ چنانند که $k^{-۱} c_k$ کراندار است. انتگرال مربوطه را دقیقتر تخمین زده و نشان دهید که

$$۰ < \lim_{k \to \infty} k^{-۱/۲} c_k < \infty \cdot$$

۱۳. فرض کنید f یک تابع پیوسته بر $R^۱$ با دورهٔ تناوب ۱ باشد. ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی گنگ α،

$$\lim_{N \to \infty} \frac{۱}{N} \sum_{n=۱}^{N} f(n\alpha) = \int_۰^۱ f(t)\, dt \cdot$$

راهنمایی. ابتدا مطلب را برای

$$f(t) = \exp(۲\pi ikt)،\quad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots$$

ثابت کنید.

۱۴. عبارت

$$\min_{a,b,c} \int_{-۱}^{۱} |x^۳ - a - bx - cx^۲|^۲\, dx$$

را حساب کرده و

$$\max \int_{-۱}^{۱} x^۳ g(x)\, dx$$

راکه در آن g تحت قیود زیر است:

$$\int_{-1}^{1} |g(x)|^2\, dx = 1 \quad \text{و} \quad \int_{-1}^{1} g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)\, dx = 0$$

بیابید.

۱۵. عبارت

$$\min_{a,b,c} \int_{0}^{\infty} |x^3-a-bx-cx^2|^2\, e^{-x} dx$$

را حساب کنید. مسئلهٔ ماکزیمم نظیر را، همانند تمرین ۱۴، بیان و حل نمایید.

۱۶. اگر $x_0 \in H$ و M یک زیرفضای خطی بستهٔ H باشد، ثابت کنید

$$\min\{\,\|x-x_0\| : x \in M\} = \max\{(x_0, y) : \|y\| = 1 \ \text{و}\ y \in M^{\perp}\}\cdot$$

۱۷. نشان دهید که یک نگاشت یک به‌یک پیوسته مانند γ از $[0, 1]$ به‌توی H هست به‌طوری‌که هر وقت $0 \le a \le b \le c \le d \le 1$، $\gamma(b)-\gamma(a)$ متعامد به $\gamma(d)-\gamma(c)$ است (γ را می‌توان «منحنی با نموهای متعامد» نامید.) **راهنمایی.** فرض کنید $H = L^2$ و توابع مشخص زیرمجموعه‌هایی از $[0, 1]$ را در نظر بگیرید.

۱۸. به‌ازای هر $s \in R^1$ و $t \in R^1$ تعریف کنید $u_s(t) = e^{ist}$ و فرض کنید X فضای برداری مختلط مرکب از تمام ترکیبات خطی متناهی از این توابع u_s باشد. اگر $f \in X$ و $g \in X$، نشان دهید که

$$(f, g) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

وجود دارد. همچنین این ضرب داخلی X را به‌یک فضای یکه‌ای بدل می‌کند که تتمیم آن یک فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر مانند H است. همچنین نشان دهید که $\{u_s : s \in R^1\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ ماکزیمال در H می‌باشد.

۱۹. عدد صحیح مثبت N را ثابت گرفته و قرار دهید $\omega = e^{2\pi i/N}$ و روابط تعامدی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \omega^{nk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } k = 0 \,، \\ 0 & \text{اگر } 1 \le k \le N-1 \,، \end{cases}$$

و با استفاده از آنها اتحادهای زیر را به‌دست آورید:

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x+\omega^n y\|^2 \omega^n$$

که اگر $N \ge 3$، در هر فضای ضرب داخلی برقرارند. همچنین نشان دهید که

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x+e^{i\theta} y\|^2\, e^{i\theta}\, d\theta\cdot$$

فصل پنج
چند نمونه از روشهای فضای باناخ

فضاهای باناخ *(Banach)*

۱.۵. در فصل قبل دیدیم که چگونه بعضی از نکات آنالیزی سریهای مثلثاتی از ملاحظات اساسی هندسی در فضاهای هیلبرت کلی مستلزم تحدب، زیرفضاها، تعامد، و تمامیت پدیدار می‌شوند. مسائل زیادی در آنالیز وجود دارند که وقتی در چهارچوب مجرد مناسبی قرار گیرند آسانتر تسلیم می‌شوند. نظریهٔ فضاهای هیلبرت همیشه مناسب نیست چرا که تعامد مفهوم نسبتاً خاصی می‌باشد. ردهٔ تمام فضاهای باناخ از تنوع بیشتری برخوردار است. در این فصل به‌چند خاصیت اصلی فضاهای باناخ پرداخته و آنها را با کاربردهایی در مسائل ملموس توضیح می‌دهیم.

۲.۵ تعریف. فضای برداری مختلط Xرا یک ***فضای خطی نرمدار*** نامیم اگر به‌هر $x \in X$یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به‌نام ***نرم*** xچنان مربوط شده باشد که

(آ) به‌ازای هر xو yدر X، $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ ؛

(ب) اگر $x \in X$و α اسکالر باشد، $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ ؛

(پ) $\| x \| = 0$ تساوی $x = 0$را ایجاب نماید.

بنا بر (آ)، نامساوی مثلثی برقرار است:

$$\| x-y \| \leq \| x-z \| + \| z-y \| \quad (x, y, z \in X) \cdot$$

این در تلفیق با (ب) (فرض $\alpha = 0$ و $\alpha = -1$) و (پ) نشان می‌دهد که هر فضای خطی نرمدار را می‌توان یک فضای متری گرفت؛ فاصلهٔ بین x و y مساوی $\|x-y\|$ است.

هر **فضای باناخ** یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به‌وسیلهٔ نرمش **تام** می‌باشد.

مثلاً هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است؛ همچنین است هر $L^p(\mu)$ با نرم $\|f\|_p$ (مشروط بر اینکه توابعی را که ت. هـ. مساویند یکی بگیریم) اگر $1 \le p \le \infty$؛ و نیز $C_0(X)$ با نرم سوپرمم. البته ساده‌ترین فضای باناخ خود میدان مختلط با نرم $\|x\| = |x|$ می‌باشد.

فضاهای باناخ **حقیقی** را نیز می‌توان مطرح کرد. تعریف همان است جز آنکه تمام اسکالرها حقیقی فرض می‌شوند.

۳.۵ تعریف. تبدیل خطی Λ از فضای خطی نرمدار X به‌توی فضای خطی نرمدار Y را در نظر گرفته و **نرم** آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\| : \|x\| \le 1 ، x \in X\} \cdot \tag{1}$$

هرگاه $\|\Lambda\| < \infty$، آنگاه Λ را یک ***تبدیل خطی کراندار*** می‌نامند.

در (۱)، $\|x\|$ نرم x در X و $\|\Lambda x\|$ نرم Λx در Y است. گاهی چند نرم همزمان می‌آیند و از قراین وضع آنها مشخص خواهد شد.

در رابطهٔ (۱) می‌توان به **بردارهای یکهٔ** x محدود شد؛ یعنی به xهایی که $\|x\| = 1$. این امر سوپرمم را تغییر نمی‌دهد زیرا

$$\|\Lambda(\alpha x)\| = \|\alpha \Lambda x\| = |\alpha|\,\|\Lambda x\| \cdot \tag{2}$$

همچنین $\|\Lambda\|$ کوچکترین عددی است که نامساوی

$$\|\Lambda x\| \le \|\Lambda\|\,\|x\| \tag{3}$$

به‌ازای **هر** $x \in X$ برقرار است.

تصویر هندسی زیر سودمند است: Λ **گوی یکهٔ بسته** در X، یعنی مجموعهٔ

$$\{x \in X : \|x\| \le 1\}, \tag{4}$$

را به‌توی گوی بسته در Y به‌مرکز ۰ و شعاع $\|\Lambda\|$ می‌نگارد.

یک حالت خاص مهم زمانی است که Y میدان مختلط باشد. در این حالت راجع به ***تابعیهای خطی کراندار*** صحبت خواهیم کرد.

۴.۵ قضیه. ***به‌ازای تبدیل خطی Λ از فضای خطی نرمدار X به‌توی فضای خطی نرمدار Y،***

هریک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

(آ) Λ ***کراندار است؛***

(ب) Λ ***پیوسته است؛***

(پ) Λ ***در یک نقطه از*** X ***پیوسته است.***

برهان. چون $\|\Lambda(x_1-x_2)\| \leq \|\Lambda\| \, \|x_1-x_2\|$، واضح است که (آ) شرط (ب) و (ب) شرط (پ) را بداهتاً ایجاب می‌کند. فرض کنیم Λ در x_0 پیوسته باشد. پس به‌ازای هر $\epsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ای چنان یافت که $\|x-x_0\| < \delta$ نامساوی $\|\Lambda x - \Lambda x_0\| < \epsilon$ را ایجاب کند. به‌عبارت دیگر، $\|x\| < \delta$ نامساوی

$$\|\Lambda(x_0+x) - \Lambda x_0\| < \epsilon$$

را ایجاب می‌کند. ولی در این صورت خطی بودن Λ نشان می‌دهد که $\|\Lambda x\| < \epsilon$. لذا $\|\Lambda\| \leq \epsilon/\delta$ و (پ) شرط (آ) را ایجاب خواهد کرد.

نتایج قضیهٔ بئر (*Baire*)

۵.۵. استفاده از تمامیت فضاهای باناخ اغلب تابع قضیهٔ زیر راجع به‌فضاهای متری تام است که در سایر بخشهای ریاضیات کاربردهای زیادی دارد. این قضیه دو تا از سه قضیهٔ مهم را ایجاب می‌کند که فضاهای باناخ را ابزارهای سودمندی در آنالیز می‌سازند. این دو قضیه عبارتند از ***قضیهٔ باناخ ـ اشتاین هاوس*** (*Steinhaus*) و ***قضیهٔ نگاشت باز***. سومین قضیه به ***قضیهٔ توسیع هان*** (*Hahn*) ـ ***باناخ*** معروف است که در آن تمامیت نقشی بر دوش ندارد.

۶.۵ قضیهٔ بئر. ***اگر*** X ***یک فضای متری تام باشد، اشتراک هر گردایهٔ شمارشپذیر از زیرمجموعه‌های باز چگال*** X ***در*** X ***چگال است.***

بخصوص (جز در حالت بدیهی $X = \varnothing$) این اشتراک تهی نیست. این اغلب نکتهٔ مهم قضیه به‌شمار می‌آید.

برهان. فرض کنیم V_1، V_2، V_3، $\cdots$ در X چگال و باز باشد. همچنین W مجموعهٔ باز دلخواهی در X باشد. باید نشان دهیم که اگر $W \neq \varnothing$، $\cap V_n$ نقطه‌ای در W دارد.

فرض کنیم ρ متر X باشد. می‌نویسیم

$$S(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\} \tag{1}$$

و فرض می‌کنیم $\overline{S}(x,r)$ بست $S(x,r)$ باشد. [**تذکر.** حالاتی هست که در آنها $\overline{S}(x,r)$ شامل تمام yهایی که $\rho(x,r) \leq r$ نیست!]

چون V_1 چگال است، $W \cap V_1$ یک مجموعهٔ باز ناتهی است، و لذا می‌توان x_1 و r_1 را چنان

یافت که

$$\circ < r_1 < 1 \quad \text{و} \quad \overline{S}(x_1, r_1) \subset W \cap V_1 \qquad (۲)$$

اگر $n \geq 2$ و x_{n-1} و r_{n-1} را اختیار کنیم، چگال‌بودن V_n نشان‌می‌دهد که $V_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1})$ تهی نیست، و لذا می‌توان x_n و r_n را چنان یافت که

$$\circ < r_n < \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \overline{S}(x_n, r_n) \subset V_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1}) \qquad (۳)$$

این‌فرایند به‌استقرا دنباله‌ای‌مانند $\{x_n\}$ را در X تولید می‌کند. اگر $i > n$ و $j > n$، طرزساختن نشان می‌دهد که x_i و x_j هر دو در $S(x_n, r_n)$ قرار دارند؛ درنتیجه $\rho(x_i, x_j) < 2r_n < 2/n$؛ و لذا $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی می‌باشد. چون X تام است، نقطه‌ای مانند $x \in X$ هست که $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

چون x_i در مجموعهٔ بستهٔ $\overline{S}(x_n, r_n)$ به‌ازای $i > n$ واقع است، پس x در هر $\overline{S}(x_n, r_n)$ بوده و رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که x در هر V_n قرار دارد. بنابر (۲)، $x \in W$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتیجه. در یک فضای متری تام، اشتراک هرگردایهٔ شمارشپذیر از G_δ های چگال مجدداً یک G_δ ی چگال است.

این از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود زیرا هر G_δ اشتراک گردایهٔ شمارشپذیری از مجموعه‌های باز است و اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر شمارشپذیر می‌باشد.

۷.۵ گاهی قضیهٔ بئر را بدلیل زیر **قضیهٔ رسته‌ای** می‌نامند.

مجموعهٔ $E \subset X$ را **هیچ جا چگال** گوییم اگر بستش $\overline{E}$ شامل زیرمجموعهٔ باز ناتهیی از X نباشد. هر اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های هیچ جا چگال را یک مجموعه از ***رستهٔ اول*** می‌نامند. سایر زیرمجموعه‌های X از **رستهٔ دوم** می‌باشند (اصطلاحات بئر). قضیهٔ ۶.۵ هم‌ارز حکم زیر است: ***هیچ فضای متری تام از رستهٔ اول نیست***. برای مشاهدهٔ این امر کافی است در قضیهٔ ۶.۵ متمم بگیریم.

۸.۵ قضیهٔ باناخ ـ اشتاین هاوس. ***فرض کنیم X یک فضای باناخ، Y یک فضای خطی نرمدار، و $\{\Lambda_\alpha\}$ گردایه‌ای از تبدیلات خطی کراندار از X به‌توی Y باشد که در آن α در مجموعهٔ اندیسگذاری چون A تغییر می‌کند. در این صورت عددی مانند $M < \infty$ هست به‌طوری که به‌ازای هر $\alpha \in A$،***

$$\| \Lambda_\alpha \| \leq M \qquad (۱)$$

یا به‌ازای هر x در G_δ ی چگالی در X،

$$\sup_{\alpha \in A} \| \Lambda_\alpha x \| = \infty \cdot \qquad (۲)$$

صورت هندسی این قضیه به‌قرار زیر است: یا یک گوی مانند B در Y (به‌شعاع M و مرکز ۰) چنان وجود دارد که هر Λ_α گوی یکه از X را به‌توی B می‌نگارد یا $x \in X$ ی هست (درواقع یک G_δ ی چگال از آنها) که هیچ گوی در Y شامل $\Lambda_\alpha x$ به‌ازای هر α نمی‌باشد.

گاهی این قضیه را ***اصل کرانداری یکنواخت*** می‌نامند.

برهان. قرار می‌دهیم

$$\varphi(x) = \sup_{\alpha \in A} \| \Lambda_\alpha x \| \quad (x \in X) \qquad (۳)$$

و فرض می‌کنیم

$$V_n = \{x : \varphi(x) > n\} \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \qquad (۴)$$

چون هر Λ_α پیوسته بوده و نرم Y تابع پیوسته‌ای بر Y است (یک نتیجهٔ فوری نامساوی مثلثی، مثل برهان قضیهٔ ۶.۴)، هر تابع $x \to \| \Lambda_\alpha x \|$ بر X پیوسته می‌باشد. لذا φ نیمه پیوستهٔ پایینی بوده و هر V_n باز می‌باشد.

هرگاه یکی از این مجموعه‌ها مثلاً V_N در X چگال نباشد، آنگاه یک $x_\circ \in X$ و یک $r > \circ$ وجود دارند به‌طوری که $\| x \| \le r$ عدم تعلق $x_\circ + x \notin V_N$ را ایجاب می‌کند. این یعنی $\varphi(x_\circ + x) \le N$ یا، به‌ازای هر $\alpha \in A$ و هر x که $\| x \| \le r$،

$$\| \Lambda_\alpha (x_\circ + x) \| \le N \cdot \qquad (۵)$$

چون $x = (x_\circ + x) - x_\circ$، داریم

$$\| \Lambda_\alpha x \| \le \| \Lambda_\alpha (x_\circ + x) \| + \| \Lambda_\alpha x_\circ) \| \le ۲N \qquad (۶)$$

و در نتیجه (۱) به‌ازای $M = ۲N/r$ برقرار می‌باشد.

امکان دیگر این است که هر V_n در X چگال است. در این حالت، بنابر قضیهٔ بئر، $\cap V_n$ یک G_δ چگال در X است. و چون به‌ازای هر $x \in \cap V_n$، $\varphi(x) = \infty$، برهان تمام می‌باشد.

۹.۵ قضیهٔ نگاشت باز. *فرض کنیم U و V گویهای یکهٔ بازی از فضاهای باناخ X و Y باشند. به‌هر تبدیل خطی کراندار Λ از X به‌روی Y یک $\delta > \circ$ چنان نظیر است که*

$$\Lambda(U) \supset \delta V \cdot \qquad (۱)$$

به‌واژهٔ «برو» در فرض توجه کنید. علامت δV یعنی مجموعهٔ $\{ \delta y : y \in V \}$؛ یعنی مجموعهٔ تمام $y \in Y$هایی که $\| y \| < \delta$.

از رابطهٔ (۱) و خطی بودن Λ معلوم می‌شود که نقش هر گوی باز در X به‌مرکز مثلاً $x_\circ$ شامل گوی بازی در Y به‌مرکز $\Lambda x_\circ$ است. لذا نقش هر مجموعهٔ باز باز می‌باشد. این امر نامگذاری

قضیه را توضیح می‌دهد.

ذیلاً رابطهٔ (۱) را به‌طریقی دیگر بیان می‌کنیم: **به‌هر y که $\|y\| < \delta$ یک x با $\|x\| < 1$ چنان نظیر است که** $\Lambda x = y$.

برهان. به‌ازای $y \in Y$ یک $x \in X$ چنان نظیر است که $\Lambda x = y$. اگر $\|x\| < k$، داریم $y \in \Lambda(kU)$. لذا Y اجتماع مجموعه‌های $\Lambda(kU)$ به‌ازای $k = 1, 2, 3, \cdots$ است. چون Y تام است، قضیهٔ بئر ایجاب می‌کند که یک مجموعهٔ باز ناتهی مانند W دربستت $\Lambda(kU)$ ای وجود دارد. این یعنی هر نقطهٔ W حد دنباله‌ای مانند $\{\lambda x_i\}$ است که $x_i \in kU$. از حالا به‌بعد، k و W ثابت می‌باشند.

$y_\circ \in W$ را اختیار کرده و $\eta > 0$ را طوری می‌گیریم که اگر $\|y\| < \eta$، $y_\circ + y \in W$. به‌ازای هر چنین y دنباله‌هایی مانند $\{x'_i\}$ و $\{x''_i\}$ در kU وجود دارند به‌طوری‌که

$$\Lambda x'_i \to y_\circ \quad \text{و} \quad \Lambda x''_i \to y_\circ + y \ (i \to \infty) \cdot \tag{۲}$$

با فرض $x_i = x''_i - x'_i$ داریم $\|x_i\| < 2k$ و $\Lambda x_i \to y$. چون این به‌ازای هر y که $\|y\| < \eta$ برقرار است، خطی بودن Λ نشان می‌دهد که اگر $\delta = \eta / 2k$، حکم زیر درست است:

به‌هر $y \in Y$ و هر $\epsilon > 0$ یک $x \in X$ چنان نظیر است که

$$\|x\| \le \delta^{-1} \|y\| \quad \text{و} \quad \|y - \Lambda x\| < \epsilon \cdot \tag{۳}$$

این تقریباً نتیجهٔ مطلوب است که درست قبل از شروع برهان بیان شده است جز آنکه در آنجا داشتیم $\epsilon = 0$.

حال $y \in \delta V$ و $\epsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. بنابر (۳)، یک x_1 با $\|x_1\| < 1$ و

$$\|y - \Lambda x_1\| < \frac{1}{2}\delta\epsilon \tag{۴}$$

وجود دارد. فرض کنیم x_1، $\cdots$ ، x_n طوری اختیار شده باشند که

$$\|y - \Lambda x_1 \cdots - \Lambda x_n\| < 2^{-n}\delta\epsilon \cdot \tag{۵}$$

با استفاده از (۳) و تعویض y با بردار سمت چپ (۵) یک x_{n+1} به‌دست می‌آید به‌طوری که نامساوی (۵) به‌ازای $n+1$ به‌جای n برقرار است و

$$\|x_{n+1}\| < 2^{-n}\epsilon \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۶}$$

اگر قرار دهیم $s_n = x_1 + \cdots + x_n$، نامساوی (۶) نشان می‌دهد که $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در X است. چون X تام است، عنصری مانند $x \in X$ هست به‌طوری که $s_n \to x$. نامساوی

$1 > \|x_1\|$ همراه با (۶) نشان می‌دهد که $\|x\| < 1+\epsilon$. و چون Λ پیوسته است، $\Lambda s_n \to \Lambda x$. بنابر (۵)، $\Lambda s_n \to y$. لذا $\Lambda x = y$.

پس ثابت کرده‌ایم که به‌ازای هر $\epsilon > 0$،

$$\Lambda\big((1+\epsilon)U\big) \supset \delta V \tag{۷}$$

یا

$$\Lambda(U) \supset (1+\epsilon)^{-1}\delta V \cdot \tag{۸}$$

اجتماع مجموعه‌های سمت راست (۸) که روی تمام $\epsilon > 0$ های گرفته شده مساوی δV است. این امر رابطهٔ (۱) را ثابت خواهد کرد.

۱۰.۵ قضیه. ***اگر X و Y فضاهایی باناخ و Λ یک تبدیل خطی کراندار از X به‌روی Y باشد که یک به‌یک نیز باشد، آنگاه $\delta > 0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که***

$$\|\Lambda x\| \geq \delta \|x\| \quad (x \in X) \cdot \tag{۱}$$

به‌عبارت دیگر، Λ^{-1} یک تبدیل خطی کراندار از Y به‌روی X می‌باشد.

برهان. اگر δ را همانند صورت قضیهٔ ۹.۵ اختیار کنیم، آن قضیه همراه با یک به‌یک بودن Λ نشان می‌دهد که $\|\Lambda x\| < \delta$ نامساوی $\|x\| < 1$ را ایجاب می‌کند. لذا $\|x\| \geq 1$ نامساوی $\|\Lambda x\| \geq \delta$ را ایجاب کرده و رابطهٔ (۱) به‌ثبوت می‌رسد.

تبدیل Λ^{-1} بر Y با شرط $\Lambda^{-1}y = x$ اگر $y = \Lambda x$ تعریف می‌شود. به‌آسانی معلوم می‌شود که Λ^{-1} خطی است، و رابطهٔ (۱) نامساوی $\|\Lambda^{-1}\| \leq 1/\delta$ را ایجاب می‌کند.

سریهای فوریهٔ توابع پیوسته

۱۱.۵ یک مسئلهٔ همگرایی. ***آیا سری فوریهٔ هر $f \in C(T)$ در هر نقطهٔ x همگرا به $f(x)$ است؟***

یادآور شویم که مجموع جزئی nم سری فوریهٔ f در نقطهٔ x عبارت است از

$$s_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{۱}$$

که در آن

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \cdot \tag{۲}$$

این امر مستقیماً از فرمولهای ۲۶.۴ (۱) و ۲۶.۴ (۳) نتیجه می‌شود.

سؤال این است که آیا به‌ازای هر $f \in C(T)$ و هر x حقیقی

$$\lim_{n \to \infty} s_n(f;x) = f(x) \cdot \tag{۳}$$

در بخش ۲۶.۴ دیدیم که مجموعهای جزئی در نرم $L^{۲}$ به f همگرایند، و لذا قضیهٔ ۱۲.۳ ایجاب می‌کند که هر $f \in L^{۲}(T)$ [و نیز هر $f \in C(T)$] حد نقطه به‌نقطهٔ ت. هـ. زیردنباله‌ای از دنبالهٔ کامل مجموعهای جزئی می‌باشد. ولی این جواب سؤال فعلی را نمی‌دهد.

خواهیم دید که قضیهٔ باناخ ـ اشتاین هاوس به‌این سؤال جواب **نفی** می‌دهد. قرار می‌دهیم

$$s^{*}(f;x) = \sup_{n} |s_n(f;x)| \cdot \tag{۴}$$

ابتدا فرض می‌کنیم $x = ۰$ و تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_n f = s_n(f;۰) \left(f \in C(T); n = ۱, ۲, ۳, \cdots \right) \cdot \tag{۵}$$

می‌دانیم که $C(T)$ نسبت به‌نرم سوپرمم $\|f\|_{\infty}$ یک فضای باناخ است. از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که هر Λ_n یک تابعی خطی کراندار بر $C(T)$ با نرم

$$\|\Lambda_n\| \leq \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = \|D_n\|_{۱} \tag{۶}$$

است. حکم می‌کنیم که

$$\text{وقتی } n \to \infty \text{، } \|\Lambda_n\| \to \infty \cdot \tag{۷}$$

این با نشان دادن اینکه تساوی در (۶) برقرار است و

$$\text{وقتی } n \to \infty \text{، } \|D_n\|_{۱} \to \infty \tag{۸}$$

ثابت خواهد شد.

از ضرب (۲) در $e^{it/۲}$ و $e^{-it/۲}$ و تفریق یکی از دو معادلهٔ حاصل از دیگری به‌دست می‌آوریم

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{۱}{۲}\right) t}{\sin(t/۲)} \cdot \tag{۹}$$

چون به‌ازای هر x حقیقی، $|\sin x| \leq |x|$، رابطهٔ (۹) نشان می‌دهد که

$$\|D_n\|_{۱} > \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} \left|\sin\left(n + \frac{۱}{۲}\right) t\right| \frac{dt}{t} = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{(n+۱/۲)\pi} |\sin t| \frac{dt}{t}$$

$$> \frac{۲}{\pi} \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k\pi} \int_{(k-۱)\pi}^{k\pi} |\sin t|\, dt = \frac{۴}{\pi^{۲}} \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k} \to \infty,$$

که (۸) را ثابت می‌کند.

حال n را ثابت گرفته و قرارمی‌دهیم $g(t) = ۱$ اگر $D_n(t) \geq ۰$ و $g(t) = -۱$ اگر $D_n(t) < ۰$. توابعی مانند $f_j \in C(T)$ وجود دارند که $-۱ \leq f_j \leq ۱$ و به‌ازای هر t، وقتی

$j \to \infty$، $f_j(t) \to g(t)$. بنابر قضیهٔ همگرایی تسلطی،

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(-t)\, D_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(-t)\, D_n(t)\, dt$$

$$= \| D_n \|_1 .$$

لذا در (۶) تساوی برقرار است و رابطهٔ (۷) به‌ثبوت می‌رسد.

چون (۷) برقرار است، قضیهٔ باناخ ـ اشتاین هاوس نشان می‌دهد که به‌ازای هر f در مجموعهٔ G_δ چگالی در $C(T)$ داریم $s^*(f; 0) = \infty$.

به‌خاطر راحتی فرض می‌کنیم $x = 0$. واضح است که نتیجه برای هر x دیگر نیز برقرار است: **به‌هر عدد حقیقی x یک مجموعه مانند $E_x \subset C(T)$ نظیر است که یک G_δی چگال در $C(T)$ است به‌طوری که به‌ازای هر $f \in E_x$، $s^*(f; x) = \infty$.**

بخصوص، سری فوریهٔ هر $f \in E_x$ در x واگراست، و جواب سؤال ما منفی می‌باشد. (تمرین ۲۲ نشان می‌دهد که اگر پیوستگی با فرض هموار بودن قویتری عوض شود، جواب مثبت خواهد بود.)

جالب است توجه کنیم که نتیجهٔ فوق را می‌توان با کاربرد دیگری از قضیهٔ بئر قوت بخشید. تعداد شمارشپذیری x_i اختیار کرده و فرض می‌کنیم E اشتراک مجموعه‌های نظیر

$$E_{x_i} \subset C(T)$$

باشد. بنابر قضیهٔ بئر، E یک G_δی چگال در $C(T)$ است. هر $f \in E$ در هر نقطهٔ x_i دارای

$$s^*(f; x_i) = \infty$$

است.

به‌ازای هر f، $s^*(f; x)$ یک تابع نیمه‌پیوستهٔ پایینی از x است زیرا (۴) آن را به‌صورت سوپرمم گردایه‌ای از توابع پیوسته نمایش می‌دهد. لذا، به‌ازای هر f، $\{x : s^*(f; x) = \infty\}$ یک G_δ در R^1 می‌باشد. اگر نقاط x_i فوق را طوری بگیریم که اجتماعشان در $(-\pi, \pi)$ چگال باشد، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

۱۲.۵ قضیه. یک مجموعه مانند $E \subset C(T)$ وجود دارد که یک G_δی چگال در $C(T)$ بوده و دارای خاصیت زیر می‌باشد: به‌ازای هر $f \in E$، مجموعهٔ

$$Q_f = \{x : s^*(f; x) = \infty\}$$

یک G_δی چگال در R^1 است.

این قضیه در صورتی که دریابیم E و هر Q_f **شمارش‌ناپذیر** است جالب خواهد شد:

۱۳.۵ قضیه. در فضای متری تام X که نقطهٔ تنها نداشته باشد هیچ مجموعهٔ چگال شمارشپذیر یک G_δ نیست.

برهان. فرض کنیم x_kها نقاط مجموعهٔ چگال شمارشپذیر E در X باشند. همچنین E یک G_δ باشد. در این صورت $E = \cap V_n$ که در آن هر V_n چگال و باز است. قرار می‌دهیم

$$W_n = V_n - \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\} \cdot$$

در این صورت هر W_n نیز یک مجموعهٔ باز چگال است، ولی $\cap W_n = \varnothing$ که با قضیهٔ بئر در تضاد می‌باشد.

تذکر. تغییر مختصر در برهان قضیهٔ بئر نشان می‌دهد که اگر X همانند فوق باشد، درواقع هر G_δی چگال شامل یک مجموعهٔ کامل می‌باشد.

ضرایب فوریهٔ توابع L^1

۱۴.۵. همانند بخش ۲۶.۴، به‌هر $f \in L^1(T)$ تابع $\hat{f}$ بر Z را با تعریف زیر مربوط می‌سازیم:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \, (n \in Z) \cdot \tag{1}$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که به‌ازای هر $f \in L^1$، وقتی $|n| \to \infty$، $\hat{f}(n) \to 0$. زیرا می‌دانیم که $C(T)$ در $L^1(T)$ چگال است (قضیهٔ ۱۴.۳) و چند جمله‌ایهای مثلثاتی در $C(T)$ چگالند (قضیهٔ ۲۵.۴). اگر $\epsilon > 0$ و $f \in L^1(T)$، این می‌گوید که یک $g \in C(T)$ و یک چند جمله‌ای مثلثاتی مانند P وجود دارند به‌طوری که $\|f-g\|_1 < \epsilon$ و $\|g-P\|_\infty < \epsilon$. چون

$$\|g-P\|_1 \le \|g-P\|_\infty,$$

پس $\|f-P\|_1 \le 2\epsilon$. و هرگاه $|n|$ به‌قدر کافی بزرگ (وابسته به P) باشد، آنگاه

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t)-p(t)\}\, e^{-int}\, dt \right| \le \|f-P\|_1 < 2\epsilon \cdot \tag{2}$$

لذا وقتی $n \to \pm\infty$، $\hat{f}(n) \to 0$. این امر به‌لم ریمان ـ لبگ معروف است.

سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که آیا عکس آن نیز درست است. یعنی اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد به‌طوری که وقتی $n \to \pm\infty$، $a_n \to 0$، آیا یک $f \in L^1(T)$ هست که به‌ازای هر $n \in Z$، $\hat{f}(a_n) = a_n$؟ به‌عبارت دیگر، آیا در این وضع چیزی شبیه قضیهٔ ریس ـ فیشر صحیح است؟

این سؤال را می‌توان به‌کمک قضیهٔ نگاشت باز به‌آسانی پاسخ (منفی) داد.

فرض کنیم c_0 فضای تمام توابع مختلط φ بر Z باشد به‌طوری که وقتی $n \to \pm\infty$،

$\varphi(n) \to 0$ با نرم سوپرمم

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| : n \in Z\} \qquad (۳)$$

در این صورت به‌آسانی معلوم می‌شود که c_0 یک فضای باناخ است. درواقع هرگاه هر زیرمجموعهٔ Z باز باشد، آنگاه Z یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده است، و c_0 چیزی جز $C_0(Z)$ نیست.

قضیهٔ زیر جواب سؤال ما را در بردارد:

۱۵.۵ قضیه. نگاشت $f \to \hat{f}$ یک تبدیل خطی کراندار یک به‌یک از $L^1(T)$ به‌توی (ولی نه به‌روی) c_0است.

برهان. Λ را با $\Lambda f = \hat{f}$ تعریف می‌کنیم. واضح است‌که Λ خطی است. هم‌اکنون ثابت کردیم که Λ فضای $L^1(T)$ را به‌توی c_0 می‌نگارد، و فرمول ۱۴.۵ (۱) نشان می‌دهد که $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$؛ درنتیجه $\|\Lambda\| \leq 1$. (درواقع $\|\Lambda\| = 1$. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنید $f = 1$.) حال ثابت می‌کنیم Λ یک به‌یک است. فرض کنیم $f \in L^1(T)$ و به‌ازای هر $n \in Z$، $\hat{f}(n) = 0$. در این صورت، اگر g یک چندجمله‌ای مثلثاتی باشد،

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt = 0 \qquad (۱)$$

رابطهٔ (۱) طبق قضیهٔ ۲۵.۴ و قضیهٔ همگرایی تسلطی به‌ازای هر $g \in C(T)$ برقرار است. با اعمال مجدد قضیهٔ همگرایی تسلطی همراه با نتیجهٔ قضیهٔ لوسین معلوم می‌شود که اگر g تابع مشخص یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در T باشد، رابطهٔ (۱) برقرار است. حال قضیهٔ ۳۹.۱ قسمت (ب) نشان می‌دهد که $f = 0$ ت. هـ.

اگر برد Λ تمام c_0 می‌بود، قضیهٔ ۱۰.۵ وجود $\delta > 0$ ای را ایجاب می‌کرد که به‌ازای هر $f \in L^1(T)$،

$$\|\hat{f}\|_\infty \geq \delta \|f\|_1 \qquad (۲)$$

ولی هرگاه $D_n(t)$ همانند بخش ۱۱.۵ تعریف شود، آنگاه $D_n \in L^1(T)$، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $\|\hat{D}_n\|_\infty = 1$، و وقتی $n \to \infty$، $\|D\|_1 \to \infty$. لذا یک $\delta > 0$ ی نیست به‌طوری‌که نامساویهای

$$\|\hat{D}_1\|_\infty \to \delta \|D_n\|_1 \qquad (۳)$$

به‌ازای هر n برقرار باشد

این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیهٔ هان ـ باناخ

۱۶.۵ قضیه. *هرگاه M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X بوده و f یک تابعی خطی کراندار بر M باشد، آنگاه f را می‌توان به‌یک تابعی خطی کراندار مانند F بر X طوری توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.*

توجه کنید که لازم نیست M بسته باشد.

پیش از پرداختن به‌برهان لازم است به‌چند نکته اشاره کنیم. اولاً (در کلیترین حالت) گفتن اینکه F یک **توسیع** f است یعنی قلمرو F شامل قلمرو f است و به‌ازای هر x در قلمرو f، $F(x) = f(x)$. ثانیاً نرمهای $\|F\|$ و $\|f\|$ نسبت به‌قلمروهای F و f حساب می‌شوند؛ به‌طور صریح،

$$\|f\| = \sup\{\,|f(x)| : \|x\| \leq ۱ \text{ و } x \in M\}$$

$$\|F\| = \sup\{\,|F(x)| : \|x\| \leq ۱ \text{ و } x \in X\,|\}\cdot$$

سومین نکته راجع به‌میدان اسکالرهاست. تا به‌حال همه چیز راجع به‌اسکالرهای مختلط گفته شده است، ولی میدان مختلط را می‌توان بدون تغییر صورت قضایا و برهانها با میدان حقیقی عوض کرد. قضیهٔ هان ـ باناخ نیز در هر دو حالت درست است؛ با این حال به‌نظر می‌رسد که اساساً یک قضیهٔ «حقیقی» است. وقتی باناخ کتاب کلاسیک خود *"Opérations linéaires"* را می‌نوشت حالت مختلط هنوز ثابت نشده بود. این دلیل اصلی آن است که وی فقط اسکالرهای حقیقی را در نظر گرفته است.

معرفی چند اصطلاح موقتاً سودمند است. یادآور شویم که V یک فضای برداری مختلط (حقیقی) است اگر به‌ازای هر $x, y \in V$، $x+y \in V$، و به‌ازای هر عدد مختلط (حقیقی) α، $\alpha x \in V$. بداهتاً نتیجه می‌شود که **هر فضای برداری مختلط یک فضای برداری حقیقی نیز هست**. تابع مختلط φ بر فضای برداری مختلط V یک ***تابعی خطی ـ مختلط*** است اگر به‌ازای هر x و y در V و هر α ی **مختلط**،

$$\cdot\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \text{ و } \varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \qquad (۱)$$

تابع حقیقی φ بر فضای برداری مختلط (حقیقی) V یک ***تابعی خطی ـ حقیقی*** است اگر (۱) به‌ازای هر α ی **حقیقی** برقرار باشد.

اگر u قسمت حقیقی تابعی خطی ـ مختلط f باشد، یعنی $u(x)$ قسمت حقیقی عدد مختلط $f(x)$ به‌ازای هر $x \in V$ باشد، به‌آسانی معلوم می‌شود که u یک تابعی خطی ـ حقیقی است. روابط زیر بین f و u برقرارند:

۱۷.۵ حکم. *فرض کنیم V یک فضای برداری مختلط باشد.*

(آ) هرگاه u قسمت حقیقی تابعی خطی ـ مختلط f بر V باشد، آنگاه

$$f(x)=u(x)-iu(ix)\quad (x\in V) \cdot \tag{۱}$$

(ب) هرگاه u یک تابعی خطی ـ حقیقی بر V بوده و f با (۱) تعریف شده باشد، آنگاه f یک تابعی خطی ـ مختلط بر V می‌باشد.

(پ) هرگاه V یک فضای خطی نرمدار بوده و f و u مانند (۱) به‌هم مربوط باشند، آنگاه $\|f\| = \|u\|$.

برهان. اگر α و β اعدادی حقیقی بوده و $z=\alpha+i\beta$، قسمت حقیقی iz مساوی $-\beta$ است. این امر اتحاد

$$z=\mathrm{Re}\,z-i\,\mathrm{Re}\,(iz) \tag{۲}$$

را به‌ازای جمیع اعداد مختلط z به‌دست می‌دهد. چون

$$\mathrm{Re}\,(if(x))=\mathrm{Re}\,f(ix)=u\,(ix)\,, \tag{۳}$$

رابطهٔ (۱) از (۲) به‌ازای $z=f(x)$ نتیجه می‌شود.

تحت مفروضات (ب) واضح است که $f(x+y)=f(x)+f(y)$ و به‌ازای هر α ی حقیقی $f(\alpha x)=\alpha f(x)$. ولی نیز داریم

$$f(ix)=u\,(ix)-iu\,(-x)=u\,(ix)+iu\,(x)=if(x) \tag{۴}$$

نشانگر آنکه f خطی ـ مختلط می‌باشد.

جون $|u\,(x)|\le|f(x)|$ ، داریم $\|u\|\le\|f\|$. از آن‌سو، به‌هر $x\in V$ عدد مختلطی مانند α با $|\alpha|=۱$ نظیر است؛ درنتیجه $\alpha f(x)=|f(x)|$. در این صورت

$$|f(x)|=f(\alpha x)=u\,(\alpha x)\le\|u\|\cdot\|\alpha x\|=\|u\|\cdot\|x\| \tag{۵}$$

که نامساوی $\|f\|\le\|u\|$ را ثابت می‌کند.

۱۸.۵ برهان قضیهٔ ۱۶.۵. ابتدا فرض می‌کنیم X یک فضای خطی نرمدار حقیقی بوده و، درنتیجه، f یک تابعی کراندار خطی ـ حقیقی بر M باشد. اگر $\|f\|=\circ$ ، توسیع مطلوب عبارت است از $F=\circ$. با حذف این حالت، فرض $\|f\|=۱$ به‌کلیت آسیبی نمی‌رساند.

فرض کنیم $x_\circ\in X$، $x_\circ\notin M$، و $M_۱$ فضای برداری پیموده شده به‌وسیلهٔ M و $x_\circ$ باشد. در این صورت $M_۱$ از تمام بردارها به‌شکل $x+\lambda x_\circ$ تشکیل شده است که در آن $x\in M$ و λ یک اسکالر حقیقی است. اگر تعریف کنیم $f_۱(x+\lambda x_\circ)=f(x)+\lambda\alpha$ که در آن α یک عدد حقیقی ثابت است، بداهتاً معلوم می‌شود که توسیع f به‌یک تابعی خطی بر $M_۱$ به‌دست می‌آید. مسئله انتخاب α به‌نحوی است که تابعی وسعت‌یافته هنوز دارای نرم ۱ باشد. این در صورتی است که

$$|f(x)+\lambda\alpha| \le \|x+\lambda x_\circ\| \quad (x\in M \text{ و } \lambda \text{ حقیقی}) \tag{۱}$$

x را با $-\lambda x$ تعویض کرده و طرفین (۱) را بر $|\lambda|$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت شرط آن است که

$$|f(x)-\alpha| \le \|x-x_\circ\| \quad (x\in M); \tag{۲}$$

یعنی به‌ازای هر $x\in M$، $A_x \le \alpha \le B_x$ که در آن

$$A_x=f(x)-\|x-x_\circ\| \text{ و } B_x=f(x)+\|x-x_\circ\| \cdot \tag{۳}$$

یک چنین α موجود است اگر و فقط اگر تمام بازه‌های بستهٔ $[A_x, B_x]$ یک نقطهٔ مشترک داشته باشند؛ یعنی اگر و فقط اگر به‌ازای هر x و y در M،

$$A_x \le B_y \cdot \tag{۴}$$

اما

$$f(x)-f(y)=f(x-y) \le \|x-y\| \le \|x-x_\circ\|+\|y-x_\circ\|; \tag{۵}$$

و درنتیجه (۴) از (۳) نتیجه می‌شود.

تاکنون ثابت کرده‌ایم که یک توسیع نرم نگهدار f_1 از f بر M_1 وجود دارد.

فرض کنیم $\mathscr{P}$ گردایهٔ تمام جفتهای مرتب (M', f') باشد که در آن M' زیرفضایی از X است که شامل M بوده و f' یک توسیع خطی ـ حقیقی f به M' با $\|f''\| = ۱$ می‌باشد. $\mathscr{P}$ را با $(M', f') \le (M'', f'')$ به‌معنی $M' \subset M''$ و به‌ازای هر $x\in M'$، $f''(x)=f'(x)$ جزئی مرتب می‌کنیم. اصول موضوع ترتیب جزئی بوضوح برقرارند، $\mathscr{P}$ تهی نیست زیرا شامل (M,f) است، و درنتیجه قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف وجود یک زیرگردایهٔ کلی مرتب ماکزیمال مانند Ω از $\mathscr{P}$ را ایجاب می‌کند.

فرض کنیم Φ گردایهٔ تمام M'هایی باشد که $(M', f') \in \Omega$. $\mathscr{P}$ با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب است و **لذا** اجتماع $\tilde{M}$ تمام اعضای Φ زیرفضایی از X است. (توجه کنید که در حالت کلی اجتماع دو زیرفضا یک زیرفضا نیست. یک نمونه دو صفحهٔ ماربر مبدأ در $R^۳$ است.) هرگاه $x\in\tilde{M}$، آنگاه به‌ازای $M'\in\Phi$ی، $x\in M'$. تعریف می‌کنیم $F(x)=f'(x)$ که در آن f' تابع آمده در جفت $(M', f')\in\Omega$ است. تعریف ما از ترتیب جزئی در Ω نشان می‌دهد که انتخاب $M'\in\Phi$ برای تعریف $F(x)$ تا زمانی که M' شامل x باشد اهمیتی ندارد.

به‌آسانی می‌توان امتحان کرد که F یک تابعی خطی بر $\tilde{M}$ با $\|F\| = ۱$ است. اگر $\tilde{M}$ یک زیرفضای حقیقی X باشد، قسمت اول برهان توسیع دیگر F را به‌ما می‌دهد و این با ماکزیمالی Ω در تضاد است. لذا $\tilde{M}=X$ و برهان در حالت اسکالرهای حقیقی تمام می‌باشد.

حال اگر f یک تابعی خطی ـ مختلط بر زیرفضای M از فضای خطی نرمدار مختلط X بوده و u قسمت حقیقی f باشد، با استفاده از قضیهٔ هان ـ باناخ حقیقی، u را به‌یک تابعی خطی ـ حقیقی مانند U بر X با $\|U\| = \|u\|$ وسعت داده و تعریف می‌کنیم

$$F(x) = U(x) - iU(ix) \quad (x \in X) \cdot \tag{۶}$$

بنا بر حکم ۱۷.۵، F یک توسیع خطی ـ مختلط f است، و

$$\|F\| = \|U\| = \|u\| = \|f\| \cdot$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

حال دو نتیجهٔ مهم از قضیهٔ هان ـ باناخ را ذکر می‌کنیم:

۱۹.۵ قضیه. ***فرض کنیم M یک زیر فضای خطی از فضای خطی نرمدار X بوده و $x_0 \in X$. در این صورت x_0 در بست $\bar{M}$ از M است اگر و فقط اگر یک تابعی خطی کراندار مانند f بر X موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in M$، $f(x) = 0$ ولی $f(x_0) \neq 0$.***

برهان. اگر $x_0 \in \bar{M}$، f یک تابعی خطی کرندار بر X است، و به‌ازای هر $x \in M$، $f(x) = 0$؛ پیوستگی f نشان می‌دهد که نیز داریم $f(x_0) = 0$.

به‌عکس فرض کنیم $x_0 \notin \bar{M}$. پس $\delta > 0$ ای هست به‌طوری که به‌ازای هر $x \in M$، $\|x - x_0\| > \delta$. فرض کنیم M' زیرفضای تولید شده به‌وسیلهٔ M و x_0 بوده، و اگر $x \in M$ و λ اسکالر باشد، تعریف می‌کنیم $f(x + \lambda x_0) = \lambda$. چون

$$\delta\,|\lambda| \leq |\lambda|\;\|x_0 + \lambda^{-1}x\| = \|\lambda x_0 + x\|,$$

f یک تابعی خطی بر M' است که نرمش حداکثر δ^{-1} می‌باشد. همچنین بر M داریم $f(x) = 0$، و $f(x_0) = 0$. قضیهٔ هان ـ باناخ توسیع این f از M' به X را اجازه می‌دهد.

۲۰.۵ قضیه. ***اگر X یک فضای خطی نرمدار بوده و $x_0 \in X$ و $x_0 \neq 0$، یک تابعی خطی کراندار مانند f بر X با نرم ۱ وجود دارد به‌طوری که $f(x_0) = \|x_0\|$.***

برهان. فرض کنیم $M = \{\lambda x_0\}$ و تعریف می‌کنیم $f(\lambda x_0) = \lambda\,\|x_0\|$. در این صورت f یک تابعی خطی با نرم ۱ بر M است، و قضیهٔ هان ـ باناخ را می‌توان مجدداً به‌کار برد.

۲۱.۵ چند تبصره. فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار و X^* گردایهٔ تمام تابعیهای خطی کراندار بر X باشد. اگر جمع و ضرب اسکالر تابعیهای خطی را به‌نحوی روشن تعریف کنیم، به‌آسانی معلوم می‌شود که X^* مجدداً یک فضای خطی نرمدار است. درواقع X^* یک فضای باناخ است. این امر از اینکه میدان اسکالرها یک فضای متری تام است نتیجه می‌شود. ما تحقیق این خواص X^* را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

یکی از نتایج قضیهٔ ۲۰.۵ این است که اگر X بدیهی نباشد، X^* نیز یک فضای برداری بدیهی نیست (یعنی X^* از بیش از ۰ تشکیل شده است). درواقع ***X^* نقاط X را از هم جدا می‌سازد***. این یعنی اگر در X داشته باشیم $x_۱ \neq x_۲$، یک $f \in X^*$ هست به‌طوری که $f(x_۱) \neq f(x_۲)$. برای اثبات این امر کافی است در قضیهٔ ۲۰.۵ فرض کنیم $x_۰ = x_۲ - x_۱$.

نتیجهٔ دیگر این است که به‌ازای $x \in X$،

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| = ۱ \text{ و } f \in X^*\} \cdot$$

لذا، به‌ازای $x \in X$ ثابت، نگاشت $f \to f(x)$ یک تابعی خطی کراندار بر X^* با نرم $\|x\|$ است.

این بازی متقابل بین X و X^* («فضای دوگان» X) مبنای بخش وسیعی از ریاضیات است که به ***آنالیز تابعی*** شهرت دارد.

نگاهی مجرد به‌انتگرال پواسون (*Poisson*)

۲۲.۵. کاربردهای پیروزمندانهٔ قضیهٔ هان ـ باناخ در مسائل ملموس بی‌شک تابع معرفتی است که از تابعیهای خطی کراندار بر فضای خطی نرمدار مورد نظر داریم. ما تا به‌حال فقط تابعیهای خطی کراندار بر یک فضای هیلبرت (که در آن برهان بسیار ساده‌تری از قضیهٔ هان ـ باناخ وجود دارد؛ ر.ک. تمرین ۶) را معین کرده‌ایم، و تابعیهای خطی مثبت بر $C_c(X)$ را نیز می‌شناسیم.

اینک به‌یک حالت کلی می‌پردازیم که در آن تابعیهای اخیر به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند.

فرض کنیم K یک فضای هاسدورف فشرده بوده، H زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از K باشد، و A زیرفضایی از $C(K)$ باشد به‌طوری که $۱ \in A$ (۱ تابعی است که عدد ۱ زا به‌هر $x \in K$ منتسب می‌سازد) و

$$\|f\|_K = \|f\|_H \quad (f \in A) \cdot \tag{۱}$$

در اینجا از نماد

$$\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\} \tag{۲}$$

استفاده کرده‌ایم.

گاهی H را به‌خاطر مثال مطرح شده در بخش ۲۳.۵ **مرز** K نظیر فضای A می‌نامند.

اگر $f \in A$ و $x \in K$، رابطهٔ (۱) می‌گوید که

$$|f(x)| \leq \|f\|_H \cdot \tag{۳}$$

بخصوص هرگاه به‌ازای هر $y \in H$، $f(y) = ۰$، آنگاه به‌ازای هر $x \in K$، $f(x) = ۰$. لذا هرگاه $f_۱$ و $f_۲$ در A بوده و به‌ازای هر $y \in H$، $f_۱(y) = f_۲(y)$، آنگاه $f_۱ = f_۲$. برای مشاهدهٔ این امر قرار دهید $f = f_۱ - f_۲$.

فرض کنیم M مجموعهٔ تمام توابعی بر H باشد که تحدید اعضای A به H اند. واضح است

که M یک زیرفضای $C(H)$ است. تبصرهٔ قبل نشان می‌دهد که هر عضو M توسیع منحصر به‌فردی به‌یک عضو A دارد. لذا یک تناظر یک به‌یک طبیعی بین M و A داریم که، بنابر (۱)، نرم نگهدار نیز هست. پس اگر برای عضوی از A و تحدیدش به H یک حرف به‌کار بریم، ابهامی ایجاد نخواهد شد.

$x \in K$ را ثابت می‌گیریم. نامساوی (۳) نشان می‌دهد که نگاشت $f \to f(x)$ یک تابعی خطی کراندار بر M با نرم ۱ است [زیرا تساوی در (۳) به‌ازای $f = 1$ برقرار است] . بنابر قضیهٔ هان ـ باناخ، یک تابعی خطی مانند Λ بر $C(H)$ با نرم ۱ وجود دارد به‌طوری که

$$\Lambda f = f(x) \quad (f \in M) \cdot \tag{۴}$$

حکم می‌کنیم که خواص

$$\|\Lambda\| = 1 \quad \text{و} \quad \Lambda 1 = 1 \tag{۵}$$

ایجاب می‌کنند که Λ یک تابعی خطی **مثبت** بر $C(H)$ است.

برای اثبات این، فرض کنیم $f \in C(H)$، $0 \le f \le 1$، و قرار می‌دهیم $g = 2f - 1$ و $\Lambda g = \alpha + i\beta$ که در آن α و β حقیقی‌اند. توجه کنید که $-1 \le g \le 1$ ؛ درنتیجه، به‌ازای هر ثابت حقیقی r، $|g+ir|^2 \le 1 + r^2$. لذا (۵) ایجاب می‌کند که

$$(\beta+r)^2 \le |\alpha+i(\beta+r)|^2 = |\Lambda(g+ir)|^2 \le 1 + r^2 \cdot \tag{۶}$$

لذا، به‌ازای هر r حقیقی، $\beta^2 + 2r\beta \le 1$ که $\beta = 0$ را به‌دست می‌دهد. چون $\|g\|_H \le 1$ ، داریم $|\alpha| \le 1$. بنابراین

$$\Lambda f = \frac{1}{2}\Lambda(1+g) = \frac{1}{2}(1+\alpha) \ge 0 \cdot \tag{۷}$$

حال قضیهٔ ۱۴.۲ را می‌توان به‌کار برد. این قضیه نشان می‌دهد که یک اندازهٔ بورل مثبت منتظم مانند μ_x بر H هست به‌طوری که

$$\Lambda f = \int_H f \, d\mu_x \quad \big(f \in C(H)\big) \cdot \tag{۸}$$

بخصوص فرمول نمایشی زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \int_H f \, d\mu_x \quad (f \in A) \cdot \tag{۹}$$

آنچه ثابت کرده‌ایم یعنی ***به‌هر $x \in K$ یک اندازهٔ مثبت مانند μ_x بر «مرز» H نظیر است که x را به‌این مفهوم که رابطهٔ (۹) به‌ازای هر $f \in A$ برقرار است «نمایش می‌دهد»*** .

توجه کنید که Λ اندازهٔ μ_x را به‌طور منحصر به‌فرد معین می‌کند، ولی دلیلی برای یکتایی توسیع هان ـ باناخ وجود ندارد. لذا، در حالت کلی، راجع به‌یکتایی نمایش اندازه‌ها چیز زیادی

نمی‌شود گفت. همانطور که اینک خواهیم دید، تحت شرایطی خاص یکتایی خواهیم داشت.

۲۳.۵. برای مشاهدهٔ مثالی از وضعیت قبلی، فرض می‌کنیم $U = \{z : |z| < ۱\}$ یک قرص یکهٔ باز در صفحهٔ مختلط باشد. قرار می‌دهیم $K = \overline{U}$ (قرص یکهٔ بسته) و H را مرز T ی U می‌گیریم. حکم می‌کنیم که هر چندجمله‌ای f، یعنی هر تابع به‌شکل

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{N} a_n z^n \tag{۱}$$

که در آن $a_۰$، $\cdots$، a_N اعدادی مختلط اند، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\|f\|_U = \|f\|_T \cdot \tag{۲}$$

(پیوستگی f نشان می‌دهد که سوپرمم $|f|$ روی U و $\overline{U}$ یکی است.)

چون $\overline{U}$ فشرده است، عنصری مانند $z_۰ \in \overline{U}$ هست به‌طوری که به‌ازای هر $z \in \overline{U}$، $|f(z_۰)| \geq |f(z)|$. فرض کنیم $z_۰ \in U$. پس داریم

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{N} b_n (z-z_۰)^n , \tag{۳}$$

و اگر $۰ < r < ۱ - |z_۰|$، خواهیم داشت

$$\sum_{n=۰}^{N} |b_n|^۲ r^{۲n} = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_۰ + re^{i\theta})|^۲ \, d\theta \leq \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_۰)|^۲ \, d\theta = |b_۰|^۲ ;$$

درنتیجه $b_۱ = b_۲ \cdots = b_N = ۰$؛ یعنی f ثابت می‌باشد. لذا، به‌ازای هر چندجمله‌ای غیرثابت f، $z_۰ \in T$، و این رابطهٔ (۲) را ثابت خواهد کرد.

(ما هم‌اکنون حالت خاصی از **قضیهٔ مدول ماکزیمم** را ثابت کرده‌ایم. بعدها خواهیم دید که این خاصیت مهمی از جمیع توابع هلوریخت می‌باشد.)

۲۴.۵ انتگرال پواسون. فرض کنیم A زیرفضایی از $C(\overline{U})$ باشد (که در آن $\overline{U}$ قرص یکهٔ بسته مثل فوق است) به‌طوری که A شامل تمام چندجمله‌ایها بوده و

$$\|f\|_U = \|f\|_T \tag{۱}$$

به‌ازای هر $f \in A$ برقرار است. ما امکان اینکه A درست از چندجمله‌ایها تشکیل شده است را رد نمی‌کنیم، ولی A ممکن است وسیعتر باشد.

نتیجهٔ کلی حاصل در بخش ۲۲.۵ بر A قابل اعمال بوده و نشان می‌دهد که به‌هر $z \in U$ یک اندازهٔ بورل مثبت مانند μ_z بر T نظیر است که

$$f(z) = \int_T f \, d\mu_z \quad (f \in A) \cdot \tag{۲}$$

(این امر به‌ازای $z\in T$ نیز برقرار است که در این صورت بدیهی است؛ μ_z چیزی جز جرم یکهٔ متمرکز در نقطهٔ z نمی‌باشد.)

حال $z\in U$ را ثابت گرفته و می‌نویسیم $z=re^{i\theta}$ که در آن $0 \le r < 1$ و θ حقیقی است. هرگاه $u_n(w)=w^n$، آنگاه به‌ازای $n=0, 1, 2, \cdots$، $u_n\in A$. لذا (۲) نشان می‌دهد که

$$r^n e^{in\theta} = \int_T u_n\, d\mu_z \quad (n=0, 1, 2, \cdots)\,. \tag{۳}$$

چون $u_{-n}=\overline{u_n}$ بر T، رابطهٔ (۳) به‌رابطهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\int_T u_n\, d\mu_z = r^{|n|} e^{in\theta} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\,. \tag{۴}$$

این پیشنهاد می‌کند که به‌تابع حقیقی زیر نگاه کنیم:

$$P_r(\theta-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \quad (\text{حقیقی } t), \tag{۵}$$

زیرا

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, e^{int}\, d\theta = r^{|n|} e^{in\theta} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\,. \tag{۶}$$

توجه کنید که سری (۵) تحت تسلط سری هندسی همگرای $\Sigma r^{|n|}$ است؛ درنتیجه می‌توان این سری را در انتگرال (۶) گذارد و جمله به‌جمله انتگرال گرفت که رابطهٔ (۶) را به‌دست می‌دهد. از مقایسهٔ (۴) با (۶) به‌ازای $f=u_n$، درنتیجه به‌ازای هر چندجمله‌ای مثلثاتی f، داریم

$$\int_T f\, d\mu_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt, \tag{۷}$$

و قضیهٔ ۲۵.۴ ایجاب می‌کند که رابطهٔ (۷) به‌ازای هر $f\in C(T)$ برقرار باشد. [این نشان می‌دهد که μ_z به‌طور منحصر به‌فرد توسط (۲) معین شده بود. چرا؟].

بخصوص رابطهٔ (۷) به‌ازای $f\in A$ برقرار است، و در این صورت (۲) نمایش زیر را به‌دست می‌دهد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta-t)\, dt \quad (f\in A)\,. \tag{۸}$$

سری (۵) را می‌توان به‌طور صریح جمعبندی کرد زیرا قسمت حقیقی

$$1+2\sum_{1}^{\infty}(ze^{-it})^n = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1-r^2+2ir\sin(\theta-t)}{|1-ze^{-it}|^2}$$

می‌باشد. لذا

$$P_r(\theta-t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,. \tag{۹}$$

این «هستهٔ پواسون» است. توجه کنید که اگر $\circ \le r < ۱$، $P_r(\theta - t) \ge \circ$.

حال آنچه را که ثابت کرده‌ایم خلاصه می‌کنیم:

۲۵.۵ قضیه. *فرض کنیم A فضای برداری توابع مختلط پیوسته بر قرص یکهٔ بستهٔ $\bar{U}$ باشد. هرگاه A شامل تمام چند جمله‌ایها بوده و به‌ازای هر $f \in A$*

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \sup_{z \in T} |f(z)| \tag{۱}$$

(که در آن T دایرهٔ یکه، مرز U است)، آنگاه نمایش انتگرال پواسون:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{۱ - r^۲}{۱ - ۲r\cos(\theta - t) + r^۲} f(e^{it})\, dt \quad (z = re^{i\theta}) \tag{۲}$$

به‌ازای هر $f \in A$ و هر $z \in U$ معتبر می‌باشد.

تمرینات

۱. فرض کنید X از دو نقطهٔ a و b تشکیل شده باشد. قرار دهید $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \frac{۱}{۲}$ و فرض کنید $L^p(\mu)$ فضای L^pی **حقیقی** حاصل باشد. هر تابع حقیقی f بر X را با نقطهٔ $(f(a), f(b))$ در صفحه یکی کرده و گویهای یکهٔ $L^p(\mu)$ را به‌ازای $\circ < p \le \infty$ رسم نمایید. توجه کنید که این گویها محدب‌اند اگر و فقط اگر $۱ \le p \le \infty$. به‌ازای چه pای این گوی یکه مربع است؟ دایره است؟ اگر $\mu(\{a\}) \ne \mu(\{b\})$، وضع با سابق چه فرقی دارد؟

۲. ثابت کنید که گوی یکه (باز یا بسته) در هر فضای خطی نرمدار محدب است.

۳. اگر $۱ < p < \infty$، ثابت کنید گوی یکه در $L^p(\mu)$ **اکیداً محدب** است؛ این یعنی هرگاه

$$\|f\|_p = \|g\|_p = ۱ \text{ ،} \quad f \ne g \text{ ،} \quad \text{و} \quad h = \frac{۱}{۲}(f+g) \text{،}$$

آنگاه $\|h\|_p < ۱$. (از نظر هندسی، سطح گوی شامل هیچ خط مستقیم نیست.) نشان دهید که این در هر $L^۱(\mu)$، در هر $L^\infty(\mu)$، و در هر $C(X)$ درست نیست (از حالات بدیهی نظیر فضاهایی که فقط از یک نقطه تشکیل شده‌اند صرف‌نظر کنید.)

۴. فرض کنید C فضای تمام توابع پیوسته بر $[\circ, ۱]$ با نرم سوپرمم باشد. همچنین M از تمام $f \in C$هایی تشکیل شده باشد که به‌ازای آنها

$$\int_\circ^{۱/۲} f(t)\, dt - \int_{۱/۲}^{۱} f(t)\, dt = ۱ \cdot$$

ثابت کنید M یک زیرمجموعهٔ محدب بستهٔ C است که عنصری با نرم مینیمال ندارد.

۵. فرض کنید M مجموعهٔ تمام $f \in L^۱([\circ, ۱])$هایی نسبت به‌اندازهٔ لبگ باشد که

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 1.$$

نشان دهید که M یک زیرمجموعهٔ محدب بستهٔ $L^1([0, 1])$ است که بی‌نهایت عنصر با نرم مینیمال دارد. (این و تمرین ۴ را با قضیهٔ ۴.۱۰ قیاس کنید.)

۶. فرض کنید f یک تابعی خطی کراندار بر زیرفضای M از فضای هیلبرت H باشد. ثابت کنید f یک توسیع نرم نگهدار **منحصر به‌فرد** به‌یک تابعی خطی کراندار بر H دارد، و این توسیع بر $M^{\perp}$ صفر می‌شود.

۷. یک تابعی خطی کراندار بر زیرفضایی از یک $L^1(\mu)$ چنان بسازید که دارای دو (و درنتیجه بی‌نهایت) توسیع خطی نرم نگهدار متمایز به $L^1(\mu)$ باشد.

۸. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار و X^* فضای دوگان آن به‌صورت تعریف شده در بخش ۵.۲۱ با نرم

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| \le 1\}$$

باشد.

(آ) ثابت کنید X^* یک فضای باناخ است.

(ب) ثابت کنید نگاشت $f \to f(x)$ به‌ازای هر $x \in X$ یک تابعی خطی کراندار بر X^* با نرم $\|x\|$ است. [این یک نشانندهٔ طبیعی از X در «دوگان دوم» آن X^{**} (فضای دوگان X^*) به‌دست می‌دهد].

(پ) ثابت کنید اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X چنان باشد که $\{f(x_n)\}$ به‌ازای هر $f \in X^*$ کراندار است، $\{\|x_n\|\}$ کراندار می‌باشد.

۹. فرض کنید فضاهای باناخ c_0، ℓ^1، و ℓ^∞ از تمام دنباله‌های مختلط $x = \{\xi_i\}$، $i = 1, 2, 3, \cdots$، تشکیل و به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$x \in \ell^1 \text{ اگر و فقط اگر } \|x\|_1 = \sum |\xi_i| < \infty ؛$$

$$x \in \ell^\infty \text{ اگر و فقط اگر } \|x\|_\infty = \sup |\xi_i| < \infty ؛$$

c_0 زیرفضای ℓ^∞ مرکب از تمام $x \in \ell^\infty$ هایی است که وقتی $i \to \infty$، $\xi_i \to 0$. چهار حکم زیر را ثابت کنید.

(آ) هرگاه $y = \{\eta_i\} \in \ell^1$ و به‌ازای هر $x \in c_0$، $\Lambda x = \Sigma \xi_i \eta_i$، آنگاه Λ یک تابعی خطی کراندار بر c_0 بوده و $\|\Lambda\| = \|y\|_1$. به‌علاوه، هر $\Lambda \in (c_0)^*$ بدین‌ترتیب به‌دست می‌آید. به‌طور خلاصه، $(c_0)^* = \ell^1$. (به‌طور دقیقتر، این دو فضا مساوی نیستند؛ حکم فوق یک یکمتری بین فضاهای برداری یکمتر را نشان می‌دهد.)

(ب) به‌همین معنی، $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

(پ) هر $y \in \ell^1$ یک تابعی خطی کراندار بر ℓ^∞ همانند در (آ) را القا می‌کند. ولی این همهٔ $(\ell^\infty)^*$ را به‌ما **نمی‌دهد** زیرا $(\ell^\infty)^*$ شامل تابعهایی غیربدیهی است که بر تمام c_0 صفر می‌شوند.

(ت) c_0 و ℓ^1 جدایی‌پذیرند ولی ℓ^∞ چنین نیست.

۱۰. اگر $\Sigma \alpha_i \xi_i$ به‌ازای هر دنبالهٔ $\{\xi_i\}$ که وقتی $i \to \infty$ ، $\xi_i \to 0$ همگرا باشد، ثابت کنید $\Sigma |\alpha_i| < \infty$.

۱۱. فرض کنید $\mathrm{Lip}\,\alpha$ ، به‌ازای $0 < \alpha \leq 1$ ، فضای تمام توابع مختلط f بر $[a, b]$ باشد که

$$M_f = \sup_{s \neq t} \frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty \cdot$$

ثابت کنید $\mathrm{Lip}\,\alpha$ یک فضای باناخ است اگر $\|f\| = |f(a)| + M_f$ ؛ همچنین است اگر

$$\|f\| = M_f + \sup_x |f(x)| \cdot$$

(گوییم اعضای $\mathrm{Lip}\,\alpha$ در **شرط لیپ شیتس** (*Lipschitz*) از مرتبهٔ α صدق می‌کنند.)

۱۲. فرض کنید K یک مثلث (شکل دوبعدی) در صفحه، H مجموعهٔ رئوس K، و A مجموعهٔ تمام توابع حقیقی f بر K به‌شکل زیر باشد:

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (\text{حقیقی‌اند } \gamma \text{ و } \beta \text{ ،} \alpha) \cdot$$

نشان دهید که به‌هر $(x_0, y_0) \in K$ اندازهٔ منحصر به‌فردی مانند μ بر H چنان نظیر است که

$$f(x_0, y_0) = \int_H f d\mu \cdot$$

(قس. بخش ۵.۲۲.)

K را با یک مربع عوض کرده و مجدداً فرض کنید H مجموعهٔ رئوس آن باشد و A را همانند فوق بگیرید. نشان دهید که به‌هر نقطهٔ K هنوز یک اندازه بر H با خاصیت فوق نظیر است ولی یکتایی دیگر وجود ندارد.

آیا می‌توانید قضیهٔ کلیتری را حدس بزنید؟ (شکلهایی دیگر در فضاهای با بعد بالاتر در نظر بگیرید.)

۱۳. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط پیوسته بر فضای متری تام (ناتهی) X باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in X$ ، $f(x) = \lim f_n(x)$ (به‌عنوان یک عدد مختلط) موجود باشد.

(آ) ثابت کنید مجموعهٔ بازی چون $V \neq \varnothing$ و عددی مانند $M < \infty$ چنان وجود دارند که به‌ازای هر $x \in V$ و هر $n = 1, 2, 3, \cdots$ ، $|f_n(x)| < M$.

(ب) اگر $\epsilon > 0$ ، ثابت کنید مجموعهٔ بازی چون $V \neq \varnothing$ و عدد صحیحی مانند N وجود دارند به‌طوری‌که اگر $x \in V$ و $n \geq N$ ، $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$.

راهنمایی برای (ب). به‌ازای $N = 1, 2, 3, \cdots$ قرار دهید

$$A_N = \{x : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \text{ ، } n \geq N \text{ و } m \geq N \text{ اگر}\} \cdot$$

چون $X = \cup A_N$، A_Nی دارای درون ناتهی می‌باشد.

۱۴. فرض کنید C فضای تمام توابع پیوستهٔ حقیقی بر $I = [\circ, \text{۱}]$ با نرم سوپرمم باشد. همچنین X_n زیرمجموعه‌ای از C و مرکب از fهایی باشد که به‌ازای هر کدام یک $t \in I$ ای چنان موجود است که به‌ازای هر $s \in I$، $|f(s)-f(t)| \le n\,|s-t|$. n را ثابت گرفته و نشان دهید که هر مجموعهٔ باز در C شامل مجموعهٔ بازی است که X_n را قطع نمی‌کند. (هر $f \in C$ را می‌توان به‌طور یکنواخت با یک تابع منکسر مانند g با شیبهای بسیار بزرگ تقریب کرد، و اگر $\|g-h\|$ کوچک باشد، $h \notin X_n$). نشان دهید که این وجود G_δی چگالی در C را ایجاب می‌کند که کاملاً از توابع هیچ‌جا مشتقپذیر تشکیل شده است.

۱۵. فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس نامتناهی با درایه‌های مختلط باشد که در آن $i, j = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \cdots$. A به‌هر دنبالهٔ $\{s_j\}$ دنباله‌ای مانند $\{\sigma_i\}$ را مربوط می‌سازد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_i = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_{ij} s_j \ (i = \text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \cdots)$$

مشروط بر آنکه این سری همگرا باشد.

ثابت کنید A هر دنبالهٔ همگرای $\{s_j\}$ را به‌دنبالهٔ $\{\sigma_i\}$ همگرا به‌همان حد مربوط می‌کند اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(آ) به‌ازای هر j، $\lim_{i \to \infty} a_{ij} = \circ$؛

(ب) $\sup_i \sum_{j=\circ}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$؛

(پ) $\lim_{i \to \infty} \sum_{j=\circ}^{\infty} a_{ij} = \text{۱}$.

فرایند رفتن از $\{s_j\}$ به $\{\sigma_i\}$ را **روش مجموعپذیری** می‌نامند. دو نمونه عبارتند از

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\text{۱}}{i+\text{۱}} & \text{اگر}\ \circ \le j \le i \\ \circ & \text{اگر}\ i < j \end{cases}$$

و

$$a_{ij} = (\text{۱}-r_i)\, r_i^j, \quad \circ < r_i < \text{۱}, \quad r_i \to \text{۱}.$$

ثابت کنید هریک از اینها دنباله‌های واگرایی چون $\{s_j\}$ (حتی دنباله‌هایی بی‌کران) را به‌دنباله‌هایی همگرا مانند $\{\sigma_i\}$ تبدیل می‌سازد.

۱۶. فرض‌کنید X و Y دوفضای باناخ بوده و Λ یک نگاشت خطی از X به‌توی Y با خاصیت زیر باشد: به‌ازای هردنبالهٔ $\{x_n\}$ در X که $x = \lim x_n$ و $y = \lim \Lambda x_n$ موجودند، داریم $y = \Lambda x$.

ثابت کنید Λ پیوسته می‌باشد. این حکم را «قضیهٔ گراف بسته» می‌نامند. **راهنمایی.** فرض کنید $X \oplus Y$ مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (x, y) باشد که $x \in X$ و $y \in Y$ و در آن جمع و ضرب اسکالر مؤلفه به‌مؤلفه تعریف شده‌اند. ثابت کنید $X \oplus Y$ یک فضای باناخ است اگر $\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \|$. نمودار G از Λ زیرمجموعه‌ای از $X \oplus Y$ است که از جفتهای $(x, \Lambda x)$ که $x \in X$ تشکیل شده است. فرض ما می‌گوید که G بسته است؛ پس G یک فضای باناخ می‌باشد. ملاحظه کنید که $x \to (x, \Lambda x)$ پیوسته، یک به‌یک، و خطی است و G را به‌روی X می‌نگارد. توجه کنید که نگاشتهای **غیرخطیی** (مثلاً از R^1 به‌روی R^1) موجودند که با وجود پیوسته‌نبودن گراف بسته‌ای دارند: $f(x) = 1/x$ اگر $x \neq 0$، و $f(0) = 0$.

۱۷. اگر μ یک اندازهٔ مثبت باشد. هر $f \in L^\infty(\mu)$ یک عملگر ضرب M_f بر $L^2(\mu)$ به‌توی $L^2(\mu)$ چنان تعریف می‌کند که $M_f(g) = fg$. ثابت کنید $\| M_f \| \leq \| f \|_\infty$. برای چه اندازه‌های μ به‌ازای هر $f \in L^\infty(\mu)$ داریم $\| M_f \| = \| f \|_\infty$؟ به‌ازای چه $f \in L^\infty(\mu)$ی، M_f فضای $L^2(\mu)$ را به‌روی $L^2(\mu)$ می‌نگارد؟

۱۸. فرض کنید $\{\Lambda_n\}$ دنباله‌ای از تبدیلات خطی کراندار از فضای خطی نرمدار X به‌فضای باناخ Y بوده و به‌ازای هر n، $\| \Lambda_n \| \leq M < \infty$، و یک مجموعهٔ چگال مانند $E \subset X$ چنان موجود باشد که $\{\Lambda_n x\}$ به‌ازای هر $x \in E$ همگرا باشد. ثابت کنید $\{\Lambda_n x\}$ به‌ازای هر $x \in X$ همگرا می‌باشد.

۱۹. اگر s_n مجموع جزئی nم سری فوریهٔ تابع $f \in C(T)$ باشد، ثابت کنید به‌ازای هر $f \in C(T)$، وقتی $n \to \infty$، $s_n/_{\log n} \to 0$ به‌طور یکنواخت. یعنی ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\| s_n \|_\infty}{\log n} = 0 .$$

از آن سو، اگر $\lambda_n/_{\log n} \to 0$، ثابت کنید یک $f \in C(T)$ موجود است به‌طوری که دنبالهٔ $\{s_n(f; 0)/\lambda_n\}$ بی‌کران است. **راهنمایی.** استدلال تمرین ۱۸ و استدلال بخش ۱۱.۵ را با تخمین بهتری از تخمین به‌کار رفته در آنجا در مورد $\| D_n \|_1$ به‌کار برید.

۲۰. (آ) آیا یک دنباله از توابع مثبت پیوسته مانند f_n بر R^1 هست که $\{f_n(x)\}$ بی‌کران باشد اگر و فقط اگر x گویا باشد؟

(ب) در (آ) واژهٔ «گویا» را با «گنگ» تعویض کرده و به‌سؤال حاصل پاسخ دهید.

(پ) عبارت «$\{f_n(x)\}$ بی‌کران است» را با عبارت «وقتی $n \to \infty$، $f_n(x) \to \infty$» تعویض کرده و به‌مشابه‌های (آ) و (ب) حاصل پاسخ دهید.

۲۱. فرض کنید $E \subset R^1$ اندازه‌پذیر بوده و $m(E) = 0$. آیا باید یک انتقال مانند $E+x$ از E موجود باشد که E را قطع نکند؟ آیا باید یک همانریختی مانند h از R^1 به‌روی R^1 باشد که $h(E)$ مجموعهٔ E را قطع نکند؟

۲۲. فرض کنید $f \in C(T)$ و به‌ازای $\alpha > 0$ای، $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. (ر.ک. تمرین ۱۱.) با کامل کردن

برهان خلاصهٔ زیر ثابت کنید سری فوریهٔ f همگرا به $f(x)$ است: کافی است حالت $x = \circ$، $f(\circ) = \circ$ را در نظر بگیریم. تفاضل مجموعهای جزئی $s_n(f; \circ)$ و انتگرالهای

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt$$

وقتی $n \to \infty$ به $\circ$ میل می‌کند. تابع $f(t)/t$ در $L^1(T)$ است. لم ریمان ـ لبگ را به‌کار برید. استدلالی دقیقتر نشان می‌دهد که همگرایی درواقع بر T یکنواخت است.

فصل شش
اندازه‌های مختلط

تغییر کل

۶.۱ آشنایی. فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در مجموعهٔ X باشد. گردایهٔ شمارشپذیر $\{E_i\}$ از اعضای $\mathfrak{M}$ را یک *افراز* E گوییم اگر هروقت $i \neq j$، $E_i \cap E_j = \varnothing$ و $E = \cup E_i$. در این صورت *اندازهٔ مختلط* μ بر $\mathfrak{M}$ یک تابع مختلط بر $\mathfrak{M}$ است که به‌ازای هر افراز $\{E_i\}$ از E،

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad (E \in \mathfrak{M}) \tag{۱}$$

ملاحظه کنید که در اینجا همگرایی سری (۱) (برخلاف اندازه‌های مثبت که سری ممکن است همگرا یا واگرا به ∞ باشد) بخشی از ملزومات است. چون اجتماع مجموعه‌های E_i در صورت جابجایی زیرنویسها تغییر نمی‌کند، هر آرایش مجدد سری (۱) نیز باید همگرا باشد. لذا (مرجع [۲۶]، قضیهٔ ۵۶.۳) سری عملاً به‌طور مطلق همگراست.

حال مسئلهٔ یافتن یک اندازهٔ مثبت مانند λ را که بر اندازهٔ مختلط مفروض μ بر $\mathfrak{M}$ تسلط داشته باشد در نظر می‌گیریم به‌این معنی که به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$، $|\mu(E)| \leq \lambda(E)$، و سعی می‌کنیم λ را حتی‌الامکان‌کوچک‌نگهداریم. هرجواب مسئلهٔ ما (اگر جوابی موجود باشد) باید در

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \geq \sum_{1}^{\infty} |\mu(E_i)| \tag{۲}$$

به‌ازای هر افراز $\{E_i\}$ مجموعهٔ دلخواه $E \in \mathfrak{M}$ صدق کند؛ درنتیجه $\lambda(E)$ دست‌کم مساوی

سوپرمم مجموعهای سمت راست (۲) است که روی تمام افزارهای E گرفته می‌شود. این پیشنهاد می‌کند که ***تابع مجموعه‌ای $|\mu|$ را بر $\mathfrak{M}$ با***

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \quad (E \in \mathfrak{M}) \tag{۳}$$

تعریف کنیم، سوپرمم روی تمام افزارهای $\{E_i\}$ از E گرفته شده است.

این نماد احتمالاً بهترین نماد نیست ولی مرسوم است. توجه کنید که $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ ولی $|\mu|(E)$ در حالت کلی مساوی $|\mu(E)|$ نیست.

همانطور که ذیلاً ثابت می‌شود، $|\mu|$ درواقع یک اندازه است؛ درنتیجه مسئلهٔ ما دارای جواب می‌باشد. در این صورت بحث منجر شده به (۳) بوضوح نشان می‌دهد که $|\mu|$ جواب مینیمال است بدین‌معنی که هر جواب دیگر λ دارای خاصیت $\lambda(E) \geq |\mu|(E)$ به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ می‌باشد.

تابع مجموعه‌ای $|\mu|$ را **تغییر کل** μ یا گاهی، برای پرهیز از ابهام، ***اندازهٔ تغییر کل*** می‌نامند. اصطلاح «تغییر کل μ» نیز کراراً برای نمایش عدد $|\mu|(X)$ به‌کار می‌رود.

هرگاه μ یک اندازهٔ مثبت باشد، آنگاه البته $|\mu| = \mu$.

$|\mu|$ علاوه بر اندازه بودن خاصیت غیرمنتظرهٔ دیگری نیز دارد: $|\mu|(X) < \infty$ چون $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X)$، این ایجاب می‌کند که هر اندازهٔ مختلط μ بر یک $\sigma-$ جبر کراندار باشد: هرگاه برد μ در صفحهٔ مختلط واقع باشد، آنگاه درواقع در یک قرص به‌شعاع متناهی قرار دارد. این خاصیت (که در قضیهٔ ۶.۴ ثابت شد) راگاهی این طور می‌گویند که μ با **تغییر کراندار می‌باشد.**

۶.۲ قضیه. تغییر کل $|\mu|$ *اندازهٔ مختلط μ بر $\mathfrak{M}$ یک اندازهٔ مثبت بر $\mathfrak{M}$ است.*

برهان. فرض کنیم $\{E_i\}$ افرازی از $E \in \mathfrak{M}$ باشد. همچنین t_i ها اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $t_i < |\mu|(E_i)$. در این صورت هر E_i دارای افراز $\{A_{ij}\}$ است به‌طوری که

$$\sum_j |\mu(A_{ij})| > t_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۱}$$

چون $\{A_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \cdots)$ افرازی از E است، داریم

$$\sum_i t_i \leq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E) \cdot \tag{۲}$$

اگر در سمت چپ (۲) روی تمام انتخابهای مجاز $\{t_i\}$ سوپرمم بگیریم خواهیم دید که

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E) \cdot \tag{۳}$$

برای اثبات نامساوی در جهت عکس، فرض کنیم $\{A_j\}$ افرازی از E باشد. در این صورت

به‌ازای هر jی ثابت، $\{A_j \cap E_i\}$ افرازی از A_jاست، و به‌ازای هر iی ثابت، $\{A_j \cap E_i\}$ افرازی از E_iمی‌باشد. لذا

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right|$$

$$\leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)|$$

$$= \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \tag{۴}$$

$$\sum_i |\mu|(E_i) \cdot$$

چون نامساوی (۴) به‌ازای هر افراز $\{A_j\}$ از Eبرقرار است، داریم

$$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i) \cdot \tag{۵}$$

بنابر (۳) و (۵)، μجمعی شمارشپذیر می‌باشد.

توجه کنید که نتیجهٔ قضیهٔ ۲۷.۱ در (۲) و (۴) به‌کار رفته است.

متحد ∞ نبودن $|\mu|$ نتیجهٔ بدیهی قضیهٔ ۴.۶ است ولی مستقیماً نیز می‌توان آن را دید زیرا $|\mu|(\varnothing) = ۰$.

۳.۶ لم. ***هرگاه $z_۱$، $\cdots$، z_Nاعداد مختلطی باشند، آنگاه زیرمجموعه‌ای مانند Sاز $\{۱, \cdots, N\}$ وجود دارد که***

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{N} |z_k| \cdot$$

برهان. می‌نویسیم $z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}$. به‌ازای $-\pi \leq \theta \leq \pi$ فرض می‌کنیم $S(\theta)$ مجموعهٔ تمام kهایی باشد که $\cos(\alpha_k - \theta) > ۰$. در این صورت

$$\left| \sum_{S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k$$

$$= \sum_{k=۱}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \cdot$$

$\theta_۰$را طوری می‌گیریم که آخرین مجموع را ماکزیمم کند، و قرار می‌دهیم $S = S(\theta_۰)$. این ماکزیمم دست‌کم به‌بزرگی متوسط مجموع روی $[-\pi, \pi]$ است، و این متوسط مساوی $\pi^{-۱} \Sigma |z_k|$است زیرا، به‌ازای هر α،

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\alpha - \theta)\, d\theta = \frac{۱}{\pi} \cdot$$

۴.۶ قضیه. هرگاه μ یک اندازهٔ مختلط بر X باشد، آنگاه

$$|\mu|(X) < \infty \cdot$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم مجموعه‌ای مانند $E \in \mathfrak{M}$ دارای $|\mu|(E) = \infty$ باشد. قرار می‌دهیم $t = \pi(1 + |\mu(E)|)$. چون $|\mu|(E) > t$، افرازی مانند $\{E_i\}$ از E هست به‌طوری‌که به‌ازای N ی

$$\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t \cdot$$

با اعمال لم ۳.۶ به‌ازای $z_i = \mu(E_i)$ نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ای مانند $A \subset E$ (اجتماعی از مجموعه‌های E_i) هست که

$$|\mu(A)| > t/\pi > 1 \cdot$$

با فرض $B = E - A$ نتیجه می‌شود که

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1 \cdot$$

لذا E را به‌مجموعه‌های از هم‌جدای A و B با $|\mu(A)| > 1$ و $|\mu(B)| > 1$ تجزیه کرده‌ایم. واضح است که طبق قضیهٔ ۲.۶ دست کم یکی از $|\mu|(A)$ و $|\mu|(B)$ مساوی ∞ است.

حال اگر $|\mu|(X) = \infty$، X را مثل فوق به A_1 و B_1 با $|\mu(A_1)| > 1$ و $|\mu|(B_1) = \infty$ تجزیه می‌کنیم. B_1 را به A_2 و B_2 با $|\mu(A_2)| > 1$ و $|\mu|(B_2) = \infty$ تجزیه می‌کنیم. اگر به‌همین نحو ادامه دهیم، گردایه‌ای از هم‌جدا و نامتناهی شمارشپذیر مانند $\{A_i\}$ با $|\mu(A_i)| > 1$ به‌ازای هر i به‌دست می‌آوریم. جمعی شمارشپذیر بودن μ ایجاب می‌کند که

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i) \cdot$$

ولی این سری نمی‌تواند همگرا باشد زیرا $\mu(A_i)$ وقتی $i \to \infty$ به ۰ میل نمی‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که $|\mu|(X) < \infty$.

۵.۶. اگر μ و λ اندازه‌های مختلطی بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ باشند، $\mu+\lambda$ و $c\mu$ را با

$$(\mu+\lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E)$$
$$(E \in \mathfrak{M}) \qquad (1)$$
$$(c\mu)(E) = c\mu(E)$$

به‌ازای هر اسکالر c به‌طریق معمول تعریف می‌کنیم. اندازهٔ مختلط بودن $\mu+\lambda$ و $c\mu$ بدیهی است. لذا گردایهٔ تمام اندازه‌های مختلط بر $\mathfrak{M}$ یک فضای برداری می‌باشد. اگر قرار دهیم

$$\|\mu\| = |\mu|(X) \tag{۲}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که تمام اصول موضوع یک فضای خطی نرمدار برقرارند.

۶.۶ تغییرات مثبت و منفی. حال به‌وضعی خاص پرداخته و اندازهٔ **حقیقی** μ را بر σ− جبر $\mathfrak{M}$ در نظر می‌گیریم. (این نوع اندازه‌ها را گاهی اندازه‌های **علامت‌دار** می‌نامند.) $|\mu|$ را مثل قبل تعریف کرده و قرار می‌دهیم

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu|+\mu) \quad \text{و} \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu|-\mu)\cdot \tag{۱}$$

در این صورت هر دوی μ^+ و μ^- اندازه‌های مثبتی بر $\mathfrak{M}$ اند و، طبق قضیهٔ ۴.۶، کراندار می‌باشند. همچنین

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{و} \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^- \cdot \tag{۲}$$

اندازه‌های μ^+ و μ^- را به‌ترتیب **تغییرات مثبت** و **منفی** μ می‌نامند. این نمایش μ به‌صورت تفاضل اندازه‌های مثبت μ^+ و μ^- به **تجزیهٔ ژردان** μ معروف است. تجزیهٔ ژردان در بین تمام نمایشهای μ به‌صورت تفاضل دو اندازهٔ مثبت از خاصیت مینیممی برخوردار است که به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۴.۶ به‌دست خواهد آمد.

پیوستگی مطلق

۷.۶ چند تعریف. فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر σ− جبر $\mathfrak{M}$ بوده و λ یک اندازهٔ دلخواه بر $\mathfrak{M}$ باشد. λ ممکن است مثبت یا مختلط باشد. (به‌یاد آورید که برد یک اندازهٔ مختلط در صفحهٔ مختلط است ولی «اندازهٔ مثبت» ∞ را به‌عنوان یک مقدار مجاز می‌گیرد. لذا اندازه‌های مثبت زیررده‌ای از اندازه‌های مختلط تشکیل نمی‌دهند.)

گوییم λ نسبت به μ **به‌طور مطلق پیوسته** است و می‌نویسیم

$$\lambda \ll \mu \tag{۱}$$

اگر به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ که $\mu(E) = 0$، $\lambda(E) = 0$.

اگر مجموعه‌ای مانند $A \in \mathfrak{M}$ چنان باشد که به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$، $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$، گوییم λ **بر** A **متمرکز شده است**. این هم‌ارز این فرض است که هروقت $E \cap A = \varnothing$، $\lambda(E) = 0$.

فرض کنیم λ_1 و λ_2 اندازه‌هایی بر $\mathfrak{M}$ بوده و یک جفت مجموعهٔ از هم‌جدا مانند A و B موجود باشند به‌طوری‌که λ_1 بر A و λ_2 بر B متمرکز شده است. در این صورت گوییم λ_1 و λ_2 **از دو سر منفرد** اند و می‌نویسیم

$$\lambda_1 \perp \lambda_2 \tag{۲}$$

ذیلاً به‌چند خاصیت مقدماتی این مفاهیم اشاره می‌کنیم.

۸.۶ حکم. *فرض کنیم μ، λ، λ_1، و λ_2 اندازه‌هایی بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ بوده و μ مثبت باشد.*

(آ) اگر λ بر A متمرکز شده باشد، $|\lambda|$ نیز چنین است.

(ب) هرگاه $\lambda_1 \perp \lambda_2$، آنگاه $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(پ) هرگاه $\lambda_1 \perp \mu$ و $\lambda_2 \perp \mu$، آنگاه $\lambda_1+\lambda_2 \perp \mu$.

(ت) هرگاه $\lambda_1 \ll \mu$ و $\lambda_2 \ll \mu$، آنگاه $\lambda_1+\lambda_2 \ll \mu$.

(ث) هرگاه $\lambda \ll \mu$، آنگاه $|\lambda| \ll \mu$.

(ج) هرگاه $\lambda_1 \ll \mu$ و $\lambda_2 \perp \mu$، آنگاه $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(چ) هرگاه $\lambda \ll \mu$ و $\lambda \perp \mu$، آنگاه $\lambda = 0$.

برهان.

(آ) هرگاه $E \cap A = \varnothing$ و $\{E_j\}$ افرازی از E باشد، آنگاه به‌ازای هر j، $\lambda(E_j) = 0$. لذا $|\lambda|(E) = 0$.

(ب) این قسمت بی‌درنگ از (آ) نتیجه می‌شود.

(پ) مجموعه‌های از هم‌جدایی مانند A_1 و B_1 چنان وجود دارند که λ_1 بر A_1 و μ بر B_1 متمرکز شده است و مجموعه‌های از هم‌جدایی مانند A_2 و B_2 چنان موجودند که λ_2 بر A_2 و μ بر B_2 متمرکز شده است. لذا $\lambda_1+\lambda_2$ بر $A = A_1 \cup A_2$ و μ بر $B = B_1 \cap B_2$ متمرکز شده است و $A \cap B = \varnothing$.

(ت) این قسمت واضح است.

(ث) فرض کنیم $\mu(E) = 0$ و $\{E_j\}$ افرازی از E باشد. در این صورت $\mu(E_j) = 0$؛ و چون $\lambda \ll \mu$، به‌ازای هر j داریم $\lambda(E_j) = 0$؛ درنتیجه $\Sigma|\lambda(E_j)| = 0$. این ایجاب می‌کند که $|\lambda|(E) = 0$.

(ج) چون $\lambda_2 \perp \mu$، مجموعه‌ای مانند A با $\mu(A) = 0$ هست که λ_2 بر آن متمرکز شده است. و چون $\lambda_1 \ll \mu$، به‌ازای هر $E \subset A$، $\lambda_1(E) = 0$. لذا λ_1 بر متمم A متمرکز شده است.

(چ) بنابر (ج)، فرض (ج) ایجاب می‌کند که $\lambda \perp \lambda$ و این بوضوح $\lambda = 0$ را نتیجه می‌دهد.

حال به‌قضیهٔ اصلی پیوستگی مطلق رسیده‌ایم. این قضیه درواقع مهمترین قضیه در نظریهٔ اندازه است. بیانش مستلزم اندازه‌های $\sigma-$ متناهی است و لم زیر یکی از مهمترین خواصشان را توصیف می‌کند.

۹.۶ لم. *هرگاه μ یک اندازهٔ $\sigma-$ متناهی مثبت بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ در مجموعهٔ X باشد، آنگاه تابعی مانند $w \in L^1(\mu)$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in X$، $0 < w(x) < 1$.*

برهان. $\sigma-$ متناهی بودن μ یعنی X اجتماع تعدادی شمارشپذیر مجموعه مانند $E_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ است که $\mu(E_n)$ متناهی است. اگر $x \in X - E_n$، قرار می‌دهیم

$w_n(x) = \circ$ و اگر $x \in E_n$، فرض می‌کنیم

$$w_n(x) = ۲^{-n} / \left(۱ + \mu(E_n) \right) \cdot$$

در این صورت $w = \sum_۱^\infty w_n$ خواص مطلوب را خواهد داشت.

در لم فوق نکته آن است که μ را می‌توان با یک اندازهٔ **متناهی** مانند $\tilde{\mu}$ (یعنی $d\tilde{\mu} = w\, d\mu$) عوض کرد زیرا، به‌خاطر اکیداً مثبت بودن w، مثل μ **درست** همان مجموعه‌های از اندازهٔ ∘ را دارد.

۶.۱۰ قضیهٔ لبگ ـ رادون ـ نیکودیم. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ $\sigma-$ متناهی مثبت بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ در مجموعهٔ X بوده و λ یک اندازهٔ مختلط بر $\mathfrak{M}$ باشد. در این صورت***

(آ) یک جفت اندازهٔ مختلط منحصر به‌فرد مانند λ_a و λ_s بر $\mathfrak{M}$ چنان وجود دارند که

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s \text{ ،} \quad \lambda_a \ll \mu \text{ ، و } \quad \lambda_s \perp \mu \cdot \tag{۱}$$

هرگاه λ مثبت و متناهی باشد، آنگاه λ_a و λ_s نیز چنین‌اند.

(ب) $h \in L^۱(\mu)$ ی منحصر به‌فرد هست به‌طوری‌که به‌ازای هر مجموعهٔ $E \in \mathfrak{M}$،

$$\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu \cdot \tag{۲}$$

جفت (λ_a, λ_s) را **تجزیهٔ لبگ** λ نسبت به μ می‌نامیم. یکتایی تجزیه به‌آسانی معلوم است زیرا هرگاه (λ'_a, λ'_s) جفت دیگری صادق در (۱) باشد، آنگاه

$$\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s \cdot \tag{۳}$$

$\lambda'_a - \lambda_a \ll \mu$ و $\lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$. لذا دو طرف (۳) مساوی ∘ اند؛ ما از ۸.۶ (پ)، ۸.۶ (ت)، و ۸.۶ (ج) استفاده کرده‌ایم.

وجود تجزیه قسمت مهم (آ) می‌باشد.

حکم (ب) به **قضیهٔ رادون ـ نیکودیم** معروف است. مجدداً یکتایی h از قضیهٔ ۳۹.۱ قسمت (ب) فوراً نتیجه می‌شود. همچنین اگر h عضو **دلخواهی** از $L^۱(\mu)$ باشد، انتگرال (۲) معرف یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است (قضیهٔ ۲۹.۱) که بوضوح نسبت به μ به‌طور مطلق پیوسته می‌باشد. در قضیهٔ رادون ـ نیکودیم نکته عکس مطلب است: هر $\lambda \ll \mu$ (که در این صورت $\lambda_a = \lambda$) بدین ترتیب به‌دست می‌آید.

تابع h آمده در (۲) را **مشتق رادون ـ نیکودیم** λ_a نسبت به μ می‌نامیم. همانطور که بعد از قضیهٔ ۲۹.۱ ذکر شد، رابطهٔ (۲) را می‌توان به‌شکل $d\lambda_a = h\, d\mu$ یا حتی به‌شکل $h = d\lambda_a / d\mu$ بیان کرد.

ایدهٔ برهان زیر، که (آ) و (ب) را یکجا به‌دست می‌دهد، از آن فون‌نویمان

(*Von Neumann*) است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم λ یک اندازهٔ کراندار مثبت بر $\mathfrak{M}$ باشد. w را به μ همانند لم ۹.۶ مربوط می‌کنیم. در این صورت $d\varphi = d\lambda + w\,d\mu$ اندازهٔ کراندار مثبت φ را بر $\mathfrak{M}$ تعریف می‌کند. تعریف مجموع دو اندازه نشان می‌دهد که به‌ازای $f=\chi_E$، درنتیجه به‌ازای f ساده، و درنتیجه به‌ازای هر f اندازه‌پذیر نامنفی،

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\lambda + \int_X fw\,d\mu \cdot \tag{۴}$$

اگر $f\in L^{۲}(\varphi)$، از نامساوی شوارتز داریم

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \le \int_X |f|\,d\lambda \le \int_X |f|\,d\varphi \le \left\{\int_X |f|^{۲}\,d\varphi\right\}^{۱/۲}\{\varphi(X)\}^{۱/۲}$$

چون $\varphi(X) < \infty$، معلوم می‌شود که

$$f \to \int_X f\,d\lambda \tag{۵}$$

یک تابعی خطی کراندار بر $L^{۲}(\varphi)$ است. می‌دانیم که هر تابعی خطی کراندار بر فضای هیلبرت H با یک ضرب داخلی در عنصری از H داده می‌شود. لذا تابعی مانند $g\in L^{۲}(\varphi)$ هست به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\in L^{۲}(\varphi)$،

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\varphi \cdot \tag{۶}$$

به‌طرز استفاده از تمامیت $L^{۲}(\varphi)$ برای تضمین وجود g توجه کنید. همچنین ملاحظه کنید که با آنکه g به‌طور منحصر به‌فرد به‌صورت عنصری از $L^{۲}(\varphi)$ تعریف شده است، g فقط .هـ. $[\varphi]$ به‌عنوان یک تابع نقطه‌ای بر X معین است.

در (۶) به‌ازای هر $E\in\mathfrak{M}$ با $\varphi(E) > ۰$ قرار می‌دهیم $f=\chi_E$. در این صورت طرف چپ (۶) مساوی $\lambda(E)$ است، و چون $۰ \le \lambda \le \varphi$، داریم

$$۰ \le \frac{۱}{\varphi(E)}\int_E g\,d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \le ۱ \cdot \tag{۷}$$

لذا، طبق قضیهٔ ۱.۴۰، به‌ازای تقریباً هر x (نسبت به φ)، $g(x)\in[۰,۱]$. بنابراین، بدون تأثیر بر (۶)، می‌توان فرض کرد که به‌ازای هر $x\in X$، $۰ \le g(x) \le ۱$ و ما (۶) را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$\int_X (۱-g)f\,d\lambda = \int_X fgw\,d\mu \cdot \tag{۸}$$

قرار می‌دهیم

$$B = \{x : g(x) = ١\} \text{ و } A = \{x : ٠ \le g(x) < ١\}، \qquad (٩)$$

و اندازه‌های λ_a و λ_s را به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ با

$$\lambda_s(E) = \lambda(B \cap E) \text{ و } \lambda_a(E) = \lambda(A \cap E) \qquad (١٠)$$

تعریف می‌کنیم.

اگر در (۸)، $f = \chi_B$، طرف چپ ۰ و طرف راست $\int_B w\,d\mu$ است. چون به‌ازای هر x، $w(x) > ٠$، نتیجه می‌گیریم که $\mu(B) = ٠$. لذا $\lambda_s \perp \mu$.

چون g کراندار است، رابطهٔ (۸) در صورت تعویض f با

$$(١ + g + \cdots + g^n)\chi_E$$

به‌ازای $n = ١, ٢, ٣, \cdots$ و $E \in \mathfrak{M}$ برقرار است. رابطهٔ (۸) به‌ازای چنین f ی خواهد شد

$$\int_E (١ - g^{n+١})\,d\lambda = \int_E g(١ + g + \cdots + g^n)\,w\,d\mu \cdot \qquad (١١)$$

در هر نقطهٔ B داریم $g(x) = ١$. لذا $١ - g^{n+١}(x) = ٠$. و در هر نقطهٔ A به‌طور یکنوا داریم $g^{n+١}(x) \to ٠$. لذا طرف چپ (۱۱) وقتی $n \to \infty$ به $\lambda(A \cap E) = \lambda_a(E)$ میل خواهد کرد.

انتگرالدههای سمت راست (۱۱) به‌حد اندازه‌پذیر نامنفی h صعود می‌کنند، و قضیهٔ همگرایی یکنوا نشان می‌دهد که طرف راست (۱۱) وقتی $n \to \infty$ به $\int_E h\,d\mu$ میل خواهد کرد.

لذا ثابت کرده‌ایم که رابطهٔ (۲) به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ برقرار است. با فرض $E = X$ معلوم می‌شود که $h \in L^١(\mu)$ زیرا $\lambda_a(X) < \infty$.

بالأخره (۲) نشان می‌دهد که $\lambda_a \ll \mu$، و برهان به‌ازای λ ی مثبت تمام می‌شود.

هرگاه λ یک اندازهٔ مختلط بر $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه $\lambda = \lambda_١ + i\lambda_٢$ که در آن $\lambda_١$ و $\lambda_٢$ حقیقی‌اند، و می‌توان حالت قبل را بر تغییرات مثبت و منفی $\lambda_١$ و $\lambda_٢$ به‌کار برد.

اگر هر دوی μ و λ مثبت و σ− متناهی باشند، بخش اعظم قضیهٔ ۶.۱۰ هنوز برقرار است. حال می‌توان نوشت $X = \cup X_n$ که در آن به‌ازای $n = ١, ٢, ٣, \cdots$، $\mu(X_n) < \infty$ و $\lambda(X_n) < \infty$. تجزیه‌های لبگ اندازه‌های $\lambda(E \cap X_n)$ باز هم یک تجزیهٔ لبگ λ به‌دست می‌دهند، و باز یک تابع مانند h به‌دست می‌آید که در معادلهٔ ۶.۱۰ (۲) صدق می‌کند. ولی، با آنکه h «به‌طور موضعی در $L^١$ است»، یعنی به‌ازای هر n، $\int_{X_n} h\,d\mu < \infty$، $h \in L^١(\mu)$ دیگر درست نیست.

بالأخره اگر از σ− متناهی بودن بگذریم، به‌حالاتی برمی‌خوریم که در آنها دو قضیهٔ

مورد نظر برقرار نیستند. مثلاً فرض کنیم μ اندازهٔ لبگ بر $(0, 1)$ بوده و λ اندازهٔ شمارشی بر $\sigma-$ جبر تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ در $(0, 1)$ باشد. در این صورت **λ نسبت به μ تجزیهٔ لبگ ندارد و، با آنکه $\mu \ll \lambda$ و μ کراندار است، $h \in L^1(\lambda)$ ی وجود ندارد که** $d\mu = h\,d\lambda$. ما برهان سادهٔ آن را حذف می‌کنیم.

قضیهٔ زیر می‌تواند دلیل استفاده از واژهٔ «پیوستگی» را در ارتباط با رابطهٔ $\lambda \ll \mu$ توضیح دهد.

۱۱.۶ قضیه. ***فرض کنیم μ و λ اندازه‌هایی بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ بوده و μ مثبت و λ مختلط باشد. در این صورت دو شرط زیر هم‌ارز می‌باشند:***

(آ) $\lambda \ll \mu$؛

(ب) به‌هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ ی ***چنان نظیر است که به‌ازای هر*** $E \in \mathfrak{M}$ ***با*** $\mu(E) < \delta$، $|\lambda(E)| < \epsilon$.

گاهی از خاصیت (ب) به‌عنوان تعریف پیوستگی مطلق استفاده می‌شود. با این حال، اگر λ یک اندازهٔ بی‌کران مثبت باشد، شرط (آ) شرط (ب) را ایجاب نمی‌کند. مثلاً فرض کنیم μ اندازهٔ لبگ بر $(0, 1)$ باشد، و به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ $E \subset (0, 1)$ قرار می‌دهیم

$$\lambda(E) = \int_E t^{-1}\,dt \cdot$$

برهان. فرض‌کنیم (ب) برقرار باشد. هرگاه $\mu(E) = 0$، آنگاه به‌ازای هر $\delta > 0$، $\mu(E) < \delta$. لذا به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، $|\lambda(E)| < \epsilon$ ؛ درنتیجه $\lambda(E) = 0$. لذا (ب) شرط (آ) را ایجاب می‌کند.

فرض کنیم (ب) نادرست باشد. پس $\epsilon > 0$ ی و مجموعه‌هایی مانند $E_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ چنان وجود دارند که $\mu(E_n) < 2^{-n}$ ولی $|\lambda(E_n)| \ge \epsilon$. لذا $|\lambda|(E_n) \ge \epsilon$. قرار می‌دهیم

$$A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \quad , \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \tag{1}$$

در این صورت $\mu(A_n) < 2^{1-n}$ ، $A_n \supset A_{n+1}$ ، درنتیجه قضیهٔ ۱۹.۱ قسمت (ث) نشان می‌دهد که $\mu(A) = 0$ و

$$|\lambda|(A) = \lim_{n \to \infty} |\lambda|(A_n) \ge \epsilon > 0$$

زیرا $|\lambda|(A_n) \ge |\lambda|(E_n)$

پس رابطهٔ $|\lambda| \ll \mu$ را نداریم؛ لذا (آ) طبق حکم ۸.۶ قسمت (ث) برقرار نیست.

نتایج قضیهٔ رادون ـ نیکودیم

۱۲.۶ قضیه. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ مختلط بر $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ در X باشد. در این صورت یک تابع اندازه‌پذیر مانند h هست به‌طوری که به‌ازای هر $x\in X$، $|h(x)|=1$ و*

$$d\mu = h\, d|\mu| \cdot \qquad (1)$$

گاهی معادلهٔ (۱) را به‌خاطر تشابه با نمایش یک عدد مختلط به‌صورت حاصل‌ضرب قدرمطلقش و عددی با قدرمطلق ۱ **نمایش قطبی** (یا **تجزیهٔ قطبی**) μ می‌نامند.

برهان. بدیهی است که $\mu \ll |\mu|$، و لذا قضیهٔ رادون ـ نیکودیم وجود $h\in L^1(|\mu|)$ ی صادق در (۱) را تضمین می‌کند.

فرض کنیم $A_r=\{x: |h(x)|<r\}$، که در آن r عدد مثبتی است، و $\{E_j\}$ افرازی از A_r باشد. در این صورت

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} h\, d|\mu| \right| \le \sum_j r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r);$$

درنتیجه $|\mu|(A_r) \le r|\mu|(A_r)$. اگر $r<1$، این ایجاب می‌کند که $|\mu|(A_r)=0$. لذا $|h|\ge 1$ ت. ه.

از آن‌سو، اگر $|\mu|(E)>0$، رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \le 1 \cdot$$

حال قضیهٔ ۴۰.۱ را (با قرص یکهٔ بسته به‌جای S) به‌کار برده و نتیجه می‌گیریم که $|h|\le 1$ ت. ه.

فرض کنیم $B=\{x\in X: |h(x)|\ne 1\}$. ما نشان داده‌ایم که $|\mu|(B)=0$، و اگر h را بر B طوری تعریف کنیم که $h(x)=1$ بر B، تابعی با خواص مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۳.۶ قضیه. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر $\mathfrak{M}$ بوده، $g\in L^1(\mu)$، و*

$$\lambda(E) = \int_E g\, d\mu \quad (E\in\mathfrak{M}) \cdot \qquad (1)$$

در این صورت

$$|\lambda|(E) = \int_E |g|\, d\mu \quad (E\in\mathfrak{M}) \cdot \qquad (2)$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۲.۶، تابعی مانند h با قدرمطلق ۱ هست به‌طوری که $d\lambda = h\, d|\lambda|$. طبق فرض، $d\lambda = g\, d\mu$. لذا

$$h\, d|\lambda| = g\, d\mu \cdot$$

این نتیجه می‌دهد که $d|\lambda| = \bar{h}\,g\,d\mu$. (قس. قضیهٔ ۱.۲۹.)

چون $|\lambda| \geq 0$ و $\mu \geq 0$، پس $\bar{h}\,g \geq 0$ ت. هـ. $[\mu]$؛ در نتیجه $\bar{h}\,g = |g|$ ت. هـ. $[\mu]$.

۶.۱۴ قضیهٔ تجزیهٔ هان. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ حقیقی بر σ- جبر $\mathfrak{M}$ در مجموعهٔ X باشد. در این صورت مجموعه‌هایی مانند A و B در $\mathfrak{M}$ وجود دارند به‌طوری که $A \cup B = X$، $A \cap B = \varnothing$، و تغییرات مثبت و منفی μ^+ و μ^- از μ در روابط زیر صدق می‌کنند:***

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E) \quad \text{و} \quad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E) \quad (E \in \mathfrak{M}) \tag{۱}$$

به‌عبارت دیگر، X اجتماع دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر از هم‌جدای A و B است به‌طوری‌که «A تمام جرم مثبت μ را حمل می‌کند» [زیرا (۱) ایجاب می‌کند که اگر $E \subset A$، $\mu(E) \geq 0$] و «B تمام جرم منفی μ را حمل می‌کند» [زیرا اگر $E \subset B$، $\mu(E) \leq 0$]. جفت (A, B) را یک تجزیهٔ هان X القا شده به‌وسیلهٔ μ می‌نامند.

برهان. بنابر قضیهٔ ۶.۱۲، $d\mu = h\,d|\mu|$ که در آن $|h| = 1$. چون μ حقیقی است، پس h حقیقی است (ت. هـ. و لذا، با تعریف مجدد بر مجموعه‌ای از اندازهٔ ۰، همه‌جا). لذا $h = \pm 1$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x : h(x) = 1\} \quad \text{و} \quad B = \{x : h(x) = -1\}. \tag{۲}$$

چون $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ و

$$\frac{1}{2}(1+h) = \begin{cases} h & \text{بر } A، \\ 0 & \text{بر } B، \end{cases} \tag{۳}$$

به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ داریم

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1+h)\,d|\mu| = \int_{E \cap A} h\,d|\mu| = \mu(E \cap A) \tag{۴}$$

و چون $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$ و $\mu = \mu^+ - \mu^-$، قسمت دوم (۱) از قسمت اول نتیجه می‌شود.

نتیجه. ***هرگاه $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ که در آن λ_1 و λ_2 اندازه‌های مثبتی‌اند، آنگاه $\lambda_1 \geq \mu^+$ و $\lambda_2 \geq \mu^-$.***

این خاصیت مینیمم تجزیهٔ ژردان است که در بخش ۶.۶ ذکر شد.

برهان. چون $\mu \leq \lambda_1$، داریم

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \leq \lambda_1(E \cap A) \leq \lambda_1(E)$$

تابعیهای خطی کراندار بر L^p

۱۵.۶. فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بوده، $1 \le p \le \infty$، و q مزدوج نمایی p باشد. نامساوی هولدر (قضیهٔ ۸.۳) نشان می‌دهد که اگر $g \in L^q(\mu)$ و Φ_g با

$$\Phi_g(f) = \int_X fg\,d\mu \tag{1}$$

تعریف شود، آنگاه Φ_g یک تابعی خطی کراندار بر $L^p(\mu)$ با نرم حداکثر $\|g\|_q$ است. سؤالی که طبعاً مطرح می‌شود این است که آیا تمام تابعیهای خطی کراندار بر $L^p(\mu)$ به‌این شکل‌اند و آیا نمایش منحصر به‌فرد است.

به‌ازای $p = \infty$، تمرین ۱۳ نشان می‌دهد که جواب منفی است: $L^1(m)$ تمام تابعیهای خطی کراندار بر $L^\infty(m)$ را به‌دست نمی‌دهد. به‌ازای $1 < p < \infty$ جواب مثبت است. همچنین جواب به‌ازای $p = 1$ مثبت است مشروط بر اینکه چند مشکل مربوط به‌نظریهٔ اندازه برطرف شوند. ما در فضاهای اندازهٔ σـ متناهی مشکلی نداریم و خود را به‌این حالت محدود خواهیم کرد.

۱۶.۶ قضیه. *فرض کنیم $1 \le p < \infty$، μ یک اندازهٔ مثبت σـ متناهی بر X بوده، و Φ یک تابعی خطی کراندار بر $L^p(\mu)$ باشد. در این صورت یک $g \in L^q(\mu)$ ی منحصر به‌فرد وجود دارد که در آن q مزدوج نمایی p است و*

$$\Phi(f) = \int_X fg\,d\mu \quad \left(f \in L^p(\mu)\right). \tag{1}$$

به‌علاوه، اگر Φ و g همانند (۱) به‌هم مربوط شده باشند، داریم

$$\|\Phi\| = \|g\|_q. \tag{2}$$

به‌عبارت دیگر، $L^q(\mu)$ تحت شرایط بیان شده با فضای دوگان $L^p(\mu)$ به‌طور یکمتر یکریخت است.

برهان. یکتایی g واضح است چرا که اگر g و g' در (۱) صدق کنند، (همانطور که با فرض χ_E به‌جای f می‌بینیم) انتگرال $g-g'$ روی هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر E از اندازهٔ متناهی ۰ است، و لذا σـ متناهی بودن μ ایجاب می‌کند که $g-g' = 0$ ت. هـ.

حال اگر (۱) برقرار باشد، نامساوی هولدر ایجاب می‌کند که

$$\|\Phi\| \le \|g\|_q. \tag{3}$$

لذا باقی است ثابت کنیم g موجود است و تساوی در (۳) برقرار می‌باشد. اگر $\|\Phi\| = 0$، روابط (۱) و (۲) به‌ازای $g = 0$ برقرارند. لذا فرض می‌کنیم $\|\Phi\| > 0$.

ابتدا حالت $\mu(X) < \infty$ را در نظر می‌گیریم.
به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset X$ تعریف می‌کنیم

$$\lambda(E) = \Phi(\chi_E) \cdot$$

چون Φ خطی است و، به‌ازای A و B از هم‌جدا، $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$، پس λ جمعی است. برای اثبات جمعی شمارشپذیر بودن، فرض کنیم E اجتماع تعدادی شمارشپذیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر از هم‌جدا مانند E_i باشد، قرار می‌دهیم $A_k = E_1 \cup \cdots \cup E_k$، و توجه می‌کنیم که

$$\|\chi_E - \chi_{A_k}\|_p = [\mu(E - A_k)]^{1/p} \to 0 \ (k \to \infty) \cdot \tag{۴}$$

پیوستگی Φ نشان می‌دهد که $\lambda(A_k) \to \lambda(E)$. لذا λ یک‌اندازهٔ مختلط است [در (۴) از فرض $p < \infty$ استفاده شده بود.] واضح است که اگر $\mu(E) = 0$، $\mu(E) = 0$ زیرا در این صورت $\|\chi_E\|_p = 0$. لذا $\lambda \ll \mu$، و قضیهٔ رادون ـ نیکودیم وجود تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ را تضمین می‌کند که به‌ازای هر $E \subset X$ اندازه‌پذیر،

$$\Phi(\chi_E) = \int_X g\,d\mu = \int_X \chi_E g\,d\mu \cdot \tag{۵}$$

از خطی بودن نتیجه می‌شود که

$$\Phi(f) = \int_X fg\,d\mu \tag{۶}$$

به‌ازای هر f اندازه‌پذیر ساده، و درنتیجه به‌ازای هر $f \in L^\infty(\mu)$ زیرا هر $f \in L^\infty(\mu)$ حد یکنواخت توابع ساده‌ای مانند f_i است، برقرار است. توجه کنید که همگرایی یکنواخت f_i به f ایجاب می‌کند که $\|f_i - f\|_p \to 0$. لذا وقتی $i \to \infty$، $\Phi(f_i) \to \Phi(f)$.

می‌خواهیم ثابت کنیم که $g \in L^q(\mu)$ و رابطهٔ (۲) برقرار است. در این راه بهتر است استدلال را به‌دو حالت تجزیه کنیم.

حالت ۱. $p = 1$. در اینجا رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$،

$$\left| \int_E g\,d\mu \right| \le \|\Phi\| \cdot \|\chi_E\|_1 = \|\Phi\| \cdot \mu(E) \cdot$$

بنابر قضیهٔ ۱.۴۰، $|g(x)| \le \|\Phi\|$ ت . هـ.؛ درنتیجه $\|g\|_\infty \le \|\Phi\|$.

حالت ۲. $1 < p < \infty$. یک تابع اندازه‌پذیر مانند α با $|\alpha| = 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha g = |g|$ [حکم ۱.۹ قسمت (ث)]. فرض کنیم $E_n = \{x : |g(x)| \le n\}$ و تعریف می‌کنیم $f = \chi_{E_n} |g|^{q-1} \alpha$. در این صورت $|f|^p = |g|^q$ بر E_n، $f \in L^\infty(\mu)$، و از رابطهٔ (۶) داریم

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu = \int_X fg\,d\mu = \Phi(f) \le \|\Phi\| \left\{ \int_{E_n} |g|^q \right\}^{1/p};$$

درنتیجه

$$\int_X \chi_{E_n} |g|^q d\mu \le \|\Phi\|^q \ (n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \qquad (۷)$$

اگر قضیهٔ همگرایی یکنوا را بر (۷) اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم $\|g\|_q \le \|\Phi\|$
لذا (۲) برقرار است و $g \in L^q(\mu)$. پس طرفین (۶) توابع پیوسته‌ای بر $L^p(\mu)$ اند. این توابع بر زیرمجموعهٔ چگال $L^\infty(\mu)$ از $L^p(\mu)$ یکی‌اند. لذا بر تمام $L^p(\mu)$ یکی بوده و، اگر $\mu(X) < \infty$، این برهان را تمام خواهد کرد.

اگر $\mu(X) = \infty$ ولی μ، $\sigma-$ متناهی باشد، همانند لم ۹.۶ عنصر $w \in L^۱(\mu)$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت $d\tilde{\mu} = w\, d\mu$ یک اندازهٔ متناهی بر $\mathfrak{M}$ تعریف می‌کند، و

$$F \to w^{۱/p} F \qquad (۸)$$

یک یکمتری خطی از $L^p(\tilde{\mu})$ به‌روی $L^p(\mu)$ است زیرا به‌ازای هر $x \in X$، $w(x) > ۰$. لذا

$$\psi(F) = \Phi(w^{۱/p} F) \qquad (۹)$$

معرف یک تابعی خطی کراندار مانند ψ بر $L^p(\tilde{\mu})$ با $\|\psi\| = \|\Phi\|$ است.

حال قسمت اول برهان نشان می‌دهد که $G \in L^q(\tilde{\mu})$ ای هست به‌طوری‌که

$$\psi(F) = \int_X FG\, d\tilde{\mu} \ \left(F \in L^p(\tilde{\mu})\right) \cdot \qquad (۱۰)$$

قرار می‌دهیم $g = w^{۱/q} G$. (اگر $p = ۱$، $g = G$.) در این صورت، اگر $p > ۱$،

$$\int_X |g|^q d\mu = \int_X |G|^q d\tilde{\mu} = \|\psi\|^q = \|\Phi\|^q \qquad (۱۱)$$

حال آنکه اگر $p = ۱$، $\|g\|_\infty = \|G\|_\infty = \|\psi\| = \|\Phi\|$. لذا (۲) برقرار است، و چون $G\, d\tilde{\mu} = w^{۱/p} g\, d\mu$، بالأخره به‌ازای هر $f \in L^p(\mu)$ به‌دست می‌آوریم

$$\Phi(f) = \psi(w^{-۱/p} f) = \int_X w^{-۱/p} f G\, d\tilde{\mu} = \int_X fg\, d\mu \cdot$$

۱۷.۶ **تبصره.** ما قبلاً به‌حالت خاص $p = q = ۲$ قضیهٔ ۱۶.۶ برخورده‌ایم. درواقع برهان حالت کلی بر این حالت خاص استوار بود، زیرا از اطلاعات مربوط به‌تابعیهای خطی کراندار بر $L^۲(\mu)$ در برهان قضیهٔ رادون ـ نیکودیم استفاده کردیم، و این قضیه کلید برهان قضیهٔ ۱۶.۶ بود. حالت خاص $p = ۲$ خود تابع تمامیت $L^۲(\mu)$، لذا فضای هیلبرت بودن $L^۲(\mu)$، و اینکه تابعیهای خطی کراندار بر یک فضای هیلبرت با ضربهای داخلی داده می‌شوند بوده است.

حال به‌صورت مختلط قضیهٔ ۱۴.۲ می‌پردازیم.

قضیهٔ نمایش ریس

۱۸.۶. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده باشد. قضیهٔ ۱۴.۲ تابعیهای خطی **مثبت** بر $C_c(X)$ را توصیف می‌کند. حال در وضعی هستیم که می‌توانیم تابعیهای خطی ***کراندار*** Φ بر $C_c(X)$ را توصیف کنیم. چون $C_c(X)$ یک زیرفضای چگال $C_\circ(X)$ نسبت به‌نرم سوپرمم است، هر چنین Φ توسیع منحصر به‌فردی به‌یک تابعی خطی کراندار بر $C_\circ(X)$ دارد. لذا در آغاز می‌توان فرض کرد که با فضای باناخ $C_\circ(X)$ سر و کار داریم.

اگر μ یک اندازهٔ بورل مختلط باشد، قضیهٔ ۱۲.۶ می‌گوید که یک تابع بورل مختلط مانند h با $|h| = ۱$ هست به‌طوری‌که $d\mu = h\,d|\mu|$. لذا معقول آن است که انتگرالگیری نسبت به‌اندازهٔ مختلط μ را با فرمول

$$\int f\,d\mu = \int fh\,d|\mu| \tag{۱}$$

تعریف کنیم.

رابطهٔ $\int \chi_E\,d\mu = \mu(E)$ حالت خاصی از (۱) است. لذا اگر μ و λ اندازه‌های مختلطی بر $\mathfrak{M}$ بوده و $E \in \mathfrak{M}$،

$$\int_X \chi_E\,d(\mu+\lambda) = (\mu+\lambda)(E) = \mu(E)+\lambda(E) = \int_X \chi_E\,d\mu + \int_X \chi_E\,d\lambda \cdot \tag{۲}$$

این ما را به‌فرمول جمع می‌رساند:

$$\int_X f\,d(\mu+\lambda) = \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\lambda \tag{۳}$$

که (مثلاً) به‌ازای هر f اندازه‌پذیر کراندار معتبر است.

ما اندازهٔ بورل مختلط μ بر X را **منتظم** نامیم اگر $|\mu|$ به‌مفهوم تعریف ۱۵.۲ منتظم باشد. اگر μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر X باشد، واضح است که نگاشت

$$f \to \int_X f\,d\mu \tag{۴}$$

یک تابعی خطی کراندار بر $C_\circ(X)$ است که نرمش از $|\mu|(X)$ بزرگتر نیست. اینکه ***تمام*** تابعیهای خطی کراندار بر $C_\circ(X)$ بدین طریق به‌دست می‌آیند مضمون قضیهٔ ریس است:

۱۹.۶ قضیه. ***هرگاه X یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده باشد، آنگاه هر تابعی خطی کراندار Φ بر $C_\circ(X)$ با یک اندازهٔ بورل مختلط منتظم منحصر به‌فرد مانند μ نموده می‌شود به‌این مفهوم که به‌ازای هر $f \in C_\circ(X)$،***

$$\Phi f = \int_X f\,d\mu \cdot \tag{۱}$$

به‌علاوه، نرم Φ تغییر کل μ می‌باشد:

$$\|\Phi\| = |\mu|(X) \cdot \tag{۲}$$

برهان. ابتدا مسئلهٔ یکتایی را سامان می‌بخشیم. فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل مختلط منتظم بر X بوده و به‌ازای هر $f\in C_0(X)$، $\int f d\mu = 0$. بنابر قضیهٔ ۱۲.۶، یک تابع بورل مانند h با $|h| = 1$ هست که $d\mu = h d|\mu|$. در این صورت به‌ازای هر دنبالهٔ $\{f_n\}$ در $C_0(X)$ داریم

$$|\mu|(X) = \int_X (\bar{h}-f_n) h d|\mu| \le \int_X |\bar{h}-f_n| d|\mu|, \tag{۳}$$

و چون $C_c(X)$ در $L^1(|\mu|)$ چگال است (قضیهٔ ۱۴.۳)، $\{f_n\}$ را می‌توان طوری گرفت که آخرین عبارت در (۳) وقتی $n\to\infty$ به ۰ میل کند. لذا $|\mu|(X) = 0$ و $\mu = 0$. به‌آسانی معلوم می‌شود که تفاضل دو اندازهٔ بورل مختلط منتظم بر X منتظم است. این نشان می‌دهد که حداکثر یک μ نظیر هر Φ وجود دارد.

حال یک تابعی خطی کراندار مانند Φ بر $C_0(X)$ در نظر می‌گیریم. بی‌آنکه کلیت آسیبی ببیند فرض می‌کنیم $\|\Phi\| = 1$. یک تابعی خطی **مثبت** مانند Λ بر $C_c(X)$ چنان می‌سازیم که

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|) \le \|f\| \quad (f\in C_c(X)), \tag{۴}$$

که در آن $\|f\|$ نرم سوپرمم است.

با داشتن این Λ به‌آن یک اندازهٔ بورل مثبت مانند λ طبق قضیهٔ ۱۴.۲ مربوط می‌کنیم. قضیهٔ ۱۴.۲ نشان می‌دهد که اگر $\lambda(X) < \infty$، λ منتظم است. چون

$$\lambda(X) = \sup\{\Lambda f : f\in C_c(X) \text{ و } 0 \le f \le 1\}$$

و اگر $\|f\| \le 1$ ، $|\Lambda f| \le 1$ ، می‌بینیم که عملاً $\lambda(X) \le 1$.

همچنین از (۴) نتیجه می‌گیریم که

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_X |f| d\lambda = \|f\|_1 \quad (f\in C_c(X)) . \tag{۵}$$

آخرین نرم در فضای $L^1(\lambda)$ است. لذا Φ یک تابعی خطی بر $C_c(X)$ با نرم حداکثر ۱ **نسبت به‌نرم** $L^1(\lambda)$ بر $C_c(X)$ می‌باشد. یک توسیع نرم نگهدار مانند Φ به‌یک تابعی خطی بر $L^1(\lambda)$ وجود دارد، و لذا قضیهٔ ۱۶.۶ (حالت $p = 1$) یک تابع بورل مانند g با $\|g\| \le 1$ چنان به‌دست می‌دهد که

$$\Phi(f) = \int_X fg d\lambda \quad (f\in C_c(X)) \tag{۶}$$

هر طرف (۶) یک تابعی پیوسته بر $C_0(X)$ است، و $C_c(X)$ در $C_0(X)$ چگال می‌باشد. لذا (۶) به‌ازای هر $f\in C_0(X)$ برقرار است، و ما نمایش (۱) با $d\mu = g d\lambda$ را به‌دست می‌آوریم.

چون $\|\Phi\| = ۱$، رابطهٔ (۶) نشان می‌دهد که

$$\int_X |g|\, d\lambda \geq \sup \{|\Phi(f)| : \|f\| \leq ۱ \text{ و } f\in C_{\circ}(X)\} = ۱ \cdot \tag{۷}$$

همچنین می‌دانیم که $\lambda(X) \leq ۱$ و $|g| \leq ۱$. این نکات فقط وقتی سازگارند که $\lambda(X) = ۱$ و $|g| = ۱$ ت. هـ. $[\lambda]$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۳.۶، $d|\mu| = |g|\, d\lambda = d\lambda$، و

$$|\mu|(X) = \lambda(X) = ۱ = \|\Phi\| \tag{۸}$$

که رابطهٔ (۲) را ثابت می‌کند.

لذا همه چیز به‌یافتن یک تابعی خطی مثبت مانند Λ که در (۴) صدق کند بستگی دارد. اگر $f\in C_c^+(X)$ [ردهٔ تمام اعضای حقیقی نامنفی از $C_c(X)$]، تعریف می‌کنیم

$$\Lambda f = \sup \{|\Phi(h)| : |h| \leq f \text{ و } h\in C_c(X)\} \cdot \tag{۹}$$

در این صورت $\Lambda f \geq ۰$، Λ در (۴) صدق می‌کند، $۰ \leq f_۱ \leq f_۲$ نامساوی $\Lambda f_۱ \leq \Lambda f_۲$ را ایجاب می‌کند، و اگر c ثابت مثبتی باشد، $\Lambda(cf) = c\Lambda f$. باید نشان دهیم که

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g \quad \left(f, g\in C_c^+(X)\right) \tag{۱۰}$$

و سپس باید Λ را به‌یک تابعی خطی بر $C_c(X)$ وسعت دهیم.

$f, g\in C_c^+(X)$ را ثابت می‌گیریم. اگر $\epsilon > ۰$، $h_۱, h_۲\in C_c(X)$ ای وجود دارند به‌طوری‌که $|h_۱| \leq f$، $|h_۲| \leq g$، و

$$\Lambda f \leq |\Phi(h_۱)| + \epsilon \text{ و } \Lambda g \leq |\Phi(h_۲)| + \epsilon \cdot \tag{۱۱}$$

اعداد مختلطی مانند α_i با $|\alpha_i| = ۱$ موجودند به‌طوری که $\alpha_i \Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$، $i = ۱, ۲$. در این صورت

$$\begin{aligned}\Lambda f + \Lambda g &\leq |\Phi(h_۱)| + |\Phi(h_۲)| + ۲\epsilon\\ &= \Phi(\alpha_۱ h_۱ + \alpha_۲ h_۲) + ۲\epsilon\\ &\leq \Lambda(|h_۱| + |h_۲|) + ۲\epsilon\\ &\leq \Lambda(f+g) + ۲\epsilon;\end{aligned}$$

درنتیجه نامساوی $\geq$ در (۱۰) برقرار است.

حال $h\in C_c(X)$ را فقط تحت شرط $|h| \leq f+g$ اختیار کرده، فرض می‌کنیم $V = \{x : f(x)+g(x) > ۰\}$، و تعریف می‌کنیم

$$h_۱(x) = \frac{f(x)\, h(x)}{f(x)+g(x)}\text{ ، } h_۲(x) = \frac{g(x)\, h(x)}{f(x)+g(x)}\ (x\in V)\text{ ،}$$

$$h_1(x) = h_2(x) = 0 \quad (x \notin V) \cdot \tag{۱۲}$$

واضح است که h_1 در هر نقطهٔ V پیوسته است. هرگاه $x_0 \notin V$، آنگاه $h(x_0) = 0$. چون h پیوسته بوده و به‌ازای هر $x \in X$، $|h_1(x)| \le |h(x)|$، پس x_0 یک نقطهٔ پیوستگی h_1 است. لذا $h_1 \in C_c(X)$، و همین امر برای h_2 برقرار است. چون $h_1 + h_2 = h$ و $|h_1| \le f$ و $|h_2| \le g$، داریم

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \le |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \le \Lambda f + \Lambda g \cdot$$

لذا $\Lambda(f+g) \le \Lambda f + \Lambda g$ و رابطهٔ (۱۰) ثابت می‌شود.

حال اگر f یک تابع حقیقی بوده و $f \in C_c(X)$، داریم $2f^+ = |f| + f$؛ درنتیجه $f^+ \in C_c^+(X)$. به‌همین نحو، $f^- \in C_c^+(X)$. و چون $f = f^+ - f^-$، طبیعی است تعریف کنیم که

$$\Lambda f = \Lambda f^+ - \Lambda f^- \quad \left(f \in C_c(X) \text{ و } f \text{ حقیقی} \right) \tag{۱۳}$$

و

$$\Lambda(u + iv) = \Lambda u + i \Lambda v \cdot \tag{۱۴}$$

با اعمال جبری ساده شبیه اعمال برهان قضیهٔ ۳۲.۱ معلوم می‌شود که تابعی تعمیم‌یافتهٔ Λ ی ما بر $C_c(X)$ خطی است.

این برهان را تمام خواهد کرد.

تمرینات

۱. اگر μ یک اندازهٔ مختلط بر σ– جبر $\mathfrak{M}$ بوده و $E \in \mathfrak{M}$، تعریف کنید

$$\lambda(E) = \sup \sum |\mu(E_i)| \cdot$$

سوپرمم روی تمام افرازهای **متناهی** $\{E_i\}$ از E گرفته شده است. آیا $\lambda = |\mu|$ نتیجه می‌شود؟

۲. ثابت کنید مثال آخر بخش ۱۰.۶ خواص ذکر شده را دارد.

۳. ثابت کنید اگر $\|\mu\| = |\mu|(X)$، فضای برداری $M(X)$ تمام اندازه‌های بورل منتظم مختلط بر فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X یک فضای باناخ است. **راهنمایی.** قس. تمرین ۸، فصل ۵ [اینکه تفاضل هر دو عضو $M(X)$ در $M(X)$ است در اولین بند برهان قضیهٔ ۱۹.۶ به‌کار رفته است؛ این مطلب را ثابت کنید.]

۴. فرض کنید $1 \le p \le \infty$ و q مزدوج نمایی p باشد. همچنین μ یک اندازهٔ σ– متناهی و g یک تابع اندازه‌پذیر باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in L^p(\mu)$، $fg \in L^1(\mu)$. سپس ثابت کنید $g \in L^q(\mu)$.

۵. فرض کنید X از دو نقطهٔ a و b تشکیل شده باشد. تعریف کنید $\mu(\{a\}) = ۱$، $\mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$، و $\mu(\varnothing) = ۰$. آیا $L^\infty(\mu)$ به‌ازای این μ فضای دوگان $L^۱(\mu)$ است؟

۶. فرض کنید $۱ < p < \infty$ و ثابت کنید حتی اگر μ، $\sigma-$ متناهی نباشد، $L^q(\mu)$ فضای دوگان $L^p(\mu)$ است. (طبق معمول، $۱/p + ۱/q = ۱$.)

۷. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر $[۰, ۲\pi)$ (یا بر دایرهٔ یکهٔ T) باشد، و ضرایب فوریهٔ μ را با

$$\hat{\mu}(n) = \int e^{-int} d\mu(t) \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots)$$

تعریف و فرض کنید وقتی $n \to +\infty$، $\hat{\mu}(n) \to ۰$ و سپس ثابت کنید وقتی $n \to -\infty$، $\hat{\mu}(n) \to ۰$. **راهنمایی.** اگر f یک چندجمله‌ای مثلثاتی باشد، لذا اگر f پیوسته باشد، لذا اگر f یک تابع بورل کراندار باشد، و لذا اگر $d\mu$ با $d|\mu|$ عوض شود، فرض با $f d\mu$ به‌جای $d\mu$ برقرار است.

۸. در تمرین ۷ جمیع μهایی را بیابید که $\hat{\mu}$ متناوب با دورهٔ تناوب k باشد. [این یعنی به‌ازای جمیع nهای صحیح، $\hat{\mu}(n+k) = \hat{\mu}(n)$. البته k نیز صحیح فرض می‌شود.]

۹. فرض کنید $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوستهٔ مثبت بر $I = [۰, ۱]$ بوده، μ یک اندازهٔ بورل مثبت بر I باشد، و

(یک) $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = ۰$ ت. هـ. $[m]$؛

(دو) به‌ازای هر n، $\int_I g_n\, dm = ۱$؛

(سه) به‌ازای هر $f \in C(I)$، $\lim_{n \to \infty} \int_I f g_n\, dm = \int_I f\, d\mu$.

آیا $\mu \perp m$؟

۱۰. فرض کنید $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازهٔ مثبت باشد. مجموعهٔ $\Phi \subset L^۱(\mu)$ را ***به‌طور یکنواخت انتگرالپذیر*** گوییم اگر به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ چنان نظیر باشد که هروقت $f \in \Phi$ و $\mu(E) < \delta$،

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| < \epsilon \cdot$$

(آ) ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ متناهی $L^۱(\mu)$ به‌طور یکنواخت انتگرالپذیر است.

(ب) قضیهٔ همگرایی زیر از ویتالی (*Vitali*) را ثابت کنید:

هرگاه (یک) $\mu(X) < \infty$، ***(دو)*** $\{f_n\}$ ***به‌طوریکنواخت انتگرالپذیر باشد، (سه) وقتی*** $n \to \infty$، $f_n(x) \to f(x)$ ت. هـ.، و **(چهار)** $|f(x)| < \infty$ ت. هـ.، آنگاه $f \in L^۱(\mu)$ و

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = ۰ \cdot$$

پیشنهاد. از قضیهٔ اگوروف استفاده کنید.
(پ) نشان دهید هرگاه μ یک اندازهٔ لبگ بر $(-\infty, \infty)$ باشد، حتی اگر $\{\|f\|_1\}$ کراندار باشد، (ب) برقرار نیست. لذا فرض (یک) را نمی‌توان در (ب) حذف کرد.
(ت) نشان دهید که فرض (چهار) در (ب) به‌ازای μای (مثلاً اندازهٔ لبگ بر یک بازهٔ بستهٔ کراندار) زاید است ولی اندازه‌هایی متناهی وجود دارند که به‌ازای آنها حذف (چهار) قسمت (ب) را نادرست می‌سازد.
(ث) نشان دهید که به‌ازای فضاهای اندازهٔ متناهی، قضیهٔ ویتالی قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ را ایجاب می‌کند. مثالی بزنید که در آن با وجود عدم برقراری مفروضات قضیهٔ لبگ قضیهٔ ویتالی برقرار باشد.
(ج) دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ چنان بسازید که به‌ازای هر x، $f_n(x) \to 0$، $\int f_n \to 0$، ولی $\{f_n\}$ (نسبت به‌اندازهٔ لبگ) به‌طور یکنواخت انتگرالپذیر **نباشد**.
(چ) با این حال عکس زیر از قضیهٔ ویتالی برقرار است:
هرگاه $\mu(X) < \infty$، $f_n \in L^1(\mu)$، و

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu$$

به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ موجود باشد، آنگاه $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت انتگرالپذیر است.
این حکم را با تکمیل برهان خلاصهٔ زیر ثابت کنید:

تعریف کنید $\rho(A, B) = \int |\chi_A - \chi_B| \, d\mu$. در این صورت $(\mathfrak{M}, \rho)$ یک فضای متری تام (به‌پیمانهٔ مجموعه‌های از اندازهٔ ۰) است و به‌ازای هر n، $E \to \int_E f_n \, d\mu$ پیوسته است. اگر $\epsilon > 0$، E_0، δ، و Nی چنان وجود دارند (تمرین ۱۳، فصل ۵) که

$$\text{اگر } \rho(E, E_0) < \delta \text{ و } n > N \text{، } \left| \int_E (f_n - f_N) \, d\mu \right| < \epsilon . \qquad (*)$$

اگر $\mu(A) < \delta$، نامساوی (*) به‌ازای $B = E_0 - A$ و $C = E_0 \cup A$ به‌جای E برقرار است. لذا (*) به‌ازای A به‌جای E و 2ϵ به‌جای ϵ برقرار می‌باشد. حال قسمت (آ) را بر $\{f_1, \cdots, f_N\}$ اعمال کنید: یک $\delta' > 0$ هست به‌طوری که

$$\text{اگر } \mu(A) < \delta' \text{ و } n = 1, 2, 3, \cdots \text{، } \left| \int_A f_n \, d\mu \right| < 3\epsilon .$$

۱۱. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر X بوده، $\mu(X) < \infty$، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $f_n \in L^1(\mu)$، $f_n(x) \to f(x)$ت. هـ، و یک $p > 1$ و $C < \infty$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر n، $\int_X |f_n|^p \, d\mu < C$. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f-f_n|\, d\mu = \circ \cdot$$

راهنمایی. $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت انتگرالپذیر است.

۱۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ گردایهٔ تمام مجموعه‌های E دربازهٔ بستهٔ یکهٔ $[\circ, 1]$ باشد به‌طوری‌که E یا متممش حداکثر شمارشپذیر است. همچنین μ اندازهٔ شمارشی بر این $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ باشد. اگر به‌ازای $\circ \le x \le 1$ ، $g(x)=x$، نشان دهید که اگر چه نگاشت

$$f \to \sum x f(x) = \int f g\, d\mu$$

به‌ازای هر $f\in L^1(\mu)$ معنی داشته و یک تابعی خطی کراندار بر $L^1(\mu)$ تعریف می‌کند، g، $\mathfrak{M}-$ اندازه‌پذیر نیست. لذا در این وضع $(L^1)^* \ne L^\infty$.

۱۳. فرض کنید $L^\infty = L^\infty(m)$ که در آن m اندازهٔ لبگ بر $I=[\circ, 1]$ است. نشان دهید یک تابعی خطی کراندار مانند $\Lambda \ne \circ$ بر L^∞ هست که بر $C(I)$ مساوی $\circ$ بوده، و لذا هیچ $g\in L^1(m)$ ای صادق در $\Lambda f = \int_I f g\, dm$ به‌ازای هر $f\in L^\infty$ وجود ندارد. بنابراین $(L^\infty)^* \ne L^1$.

فصل هفت
مشتقگیری

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌بینیم که انتگرالگیری و مشتقگیری عکس یکدیگرند. این رابطهٔ اساسی تا حدود زیادی در انتگرال لبگ نیز برقرار است. خواهیم دید که بعضی از مهمترین نکات راجع به‌مشتقگیری از انتگرالها و انتگرالگیری از مشتقات را می‌توان با ابتدا مطالعهٔ مشتق اندازه‌ها و توابع ماکزیمال مربوطه با کمترین زحمت به‌دست آورد. در این راه قضیهٔ رادون ـ نیکودیم و تجزیهٔ لبگ نقش مهمی خواهند داشت.

مشتق اندازه‌ها

با قضیهٔ ساده‌ای آغاز می‌کنیم که هدف اصلی‌اش ایجاد انگیزه برای تعریفهای بعد از آن است.

۱.۷ قضیه. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر R^1 بوده و*

$$f(x)=\mu\left((-\infty,x)\right)\ (x\in R^1)\cdot \qquad (1)$$

اگر $x\in R^1$ و A یک عدد مختلط باشد، هریک از دو حکم زیر دیگری را ایجاب می‌کند:

(آ) f در x مشتقپذیر است و $f'(x)\in A$؛

(ب) به‌هر $\epsilon>0$ یک $\delta>0$ چنان نظیر است که به‌ازای هر بازهٔ باز I شامل x و با طول کمتر از δ،

$$\left|\frac{\mu(I)}{m(I)}-A\right|<\epsilon\cdot \qquad (2)$$

در اینجا m اندازهٔ لبگ بر R^1 می‌باشد.

۲.۷ چند تعریف. بنا بر قضیهٔ ۱.۷، می‌توان مشتق μ در x را حد خارج قسمتهای $\mu(I)/m(I)$ وقتی بازه‌های I به x منقبض شوند تعریف کرد، و تعریف مشابهی نیز در حالت چند متغیره، یعنی در R^k به‌جای R^1، خواهیم داشت.

لذا فرض می‌کنیم بعد k ثابت باشد، گوی باز به‌مرکز $x \in R^k$ و شعاع $r > 0$ را با

$$B(x, r) = \{y \in R^k : |y-x| < r\} \tag{1}$$

نشان می‌دهیم (همانند بخش ۱۹.۲، قدرمطلق حاکی از متر اقلیدسی است)، به‌هر اندازهٔ بورل مختلط μ بر R^k خارج قسمتهای

$$(Q_r\mu)(x) = \frac{\mu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} \tag{2}$$

را مربوط می‌کنیم که در آنها $m = m_k$ اندازهٔ لبگ بر R^k است، و **مشتق متقارن** μ در x را مساوی

$$(D\mu)(x) = \lim_{r \to 0} (Q_r\mu)(x) \tag{3}$$

در نقاط $x \in R^k$ که این حد موجودند تعریف می‌نماییم.

ما $D\mu$ را به‌وسیلهٔ ***تابع ماکزیمال*** $M\mu$ مطالعه می‌کنیم. این تابع به‌ازای $\mu \geq 0$ با

$$(M\mu)(x) = \sup_{0 < r < \infty} (Q_r\mu)(x) \tag{4}$$

تعریف می‌شود، و تابع ماکزیمال یک اندازهٔ بورل مختلط مانند μ، طبق تعریف، تابع ماکزیمال تغییر کل آن $|\mu|$ می‌باشد.

توابع $M\mu : R^k \to [0, \infty]$ **نیمه‌پیوستهٔ پایینی**‌اند، لذا اندازه‌پذیر می‌باشند.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $\mu \geq 0$. $\lambda > 0$ را اختیار کرده، قرار می‌دهیم $E = \{M\mu > \lambda\}$، و $x \in E$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت $r > 0$ ی هست به‌طوری‌که به‌ازای $t > \lambda$ ای،

$$\mu\big(B(x,r)\big) = tm\big(B(x,r)\big), \tag{5}$$

و $\delta > 0$ ای وجود دارد که در نامساوی

$$(r+\delta)^k < r^k t/\lambda \tag{6}$$

صدق می‌کند. هرگاه $|y-x| < \delta$، آنگاه $B(y, r+\delta) \supset B(x, r)$؛ و لذا

$$\begin{aligned}\mu\big(B(y,r+\delta)\big) &\geq tm\big(B(x,r)\big) = t\,[r/(r+\delta)]^k m\big(B(y,r+\delta)\big)\\ &> \lambda m\big(B(y, r+\delta)\big)\,.\end{aligned}$$

لذا $B(x, \delta) \subset E$. این باز بودن E را ثابت خواهد کرد.

نخستین هدف ما «قضیهٔ ماکزیمال» ۴.۷ است. در برهانش از لم پوششی زیر استفاده خواهد شد.

۳.۷ لم. *هرگاه W اجتماع گردایه‌ای متناهی از گویهای $B(x_i, r_i)$، $1 \le i \le N$، باشد، آنگاه مجموعه‌ای مانند $S \subset \{1, \cdots, N\}$ هست به‌طوری که*

(آ) گویهای $B(x_i, r_i)$ که $i \in S$ از هم جدایند،

(ب) $W \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r_i)$، و

(پ) $m(W) \le 3^k \sum_{i \in S} m\big(B(x_i, r_i)\big)$.

برهان. گویهای $B_i = B(x_i, r_i)$ را طوری مرتب می‌کنیم که $r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_N$. قرار می‌دهیم $i_1 = 1$. تمام B_jهایی که B_{i_1} را قطع می‌کنند حذف می‌کنیم. فرض کنیم B_{i_2} اولین B_j باقیمانده (در صورت وجود) باشد. تمام B_j ها با $j > i_2$ که B_{i_2} را قطع می‌کنند حذف کرده و فرض می‌کنیم B_{i_3} اولین B_j باقیمانده باشد و این کار را تا جایی که بشود ادامه می‌دهیم. این عمل پس از چند مرحله پایان می‌یابد و خواهیم داشت $S = \{i_1, i_2, \cdots\}$.

برقراری (آ) واضح‌است. هر B_jی حذف‌شده زیرمجموعه‌ای از $B(x_i, 3r_i)$ به‌ازای $i \in S$ ی است زیرا هرگاه $r' \le r$ و $B(x', r')$ گوی $B(x, r)$ را قطع کند، آنگاه $B(r')\, x', \subset B(x', 3r)$.

این قسمت (ب) را ثابت می‌کند، و (پ) از (ب) نتیجه می‌شود زیرا در R^k داریم

$$m\big(B(x, 3r)\big) = 3^k m\big(B(x, r)\big) \cdot$$

به‌بیان نادقیق، قضیهٔ زیر می‌گوید که تابع ماکزیمال یک اندازه نمی‌تواند بر یک مجموعهٔ وسیع بزرگ باشد.

۴.۷ قضیه. *هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر R^k بوده و λ یک اندازهٔ مثبت باشد، آنگاه*

$$m\{M\mu > \lambda\} \le 3^k \lambda^{-1} \|\mu\| \tag{1}$$

در اینجا $\|\mu\| = |\mu|(R^k)$، و طرف چپ (۱) اختصاری است برای عبارت مفصل‌تر

$$m(\{x \in R^k : (M\mu)(x) > \lambda\}) \cdot \tag{2}$$

ما اغلب نمادها را به‌این ترتیب ساده می‌کنیم.

برهان. μ و λ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از مجموعهٔ باز $\{M\mu > \lambda\}$ باشد. هر $x \in K$ مرکز گوی بازی چون B است که

$$|\mu|(B) > \lambda m(B) \cdot$$

گردایه‌ای متناهی از این B ها K را می‌پوشاند، و لم ۳.۷ زیرگردایه‌ای از هم‌جدا مانند $\{B_1, \cdots, B_n\}$ به‌دست می‌دهد که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$m(K) \le 3^k \sum_1^n m(B_i) \le 3^k \lambda^{-1} \sum_1^n |\mu|(B_i) \le 3^k \lambda^{-1} \|\mu\|$$

از هم‌جدایی $\{B_1, \cdots, B_n\}$ در آخرین نامساوی به‌کار رفته است.

حال نامساوی (۱) با گرفتن سوپرمم روی تمام $K \subset \{M\mu > \lambda\}$ های فشرده نتیجه می‌شود.

۵.۷ L^1 **ضعیف.** هرگاه $f \in L^1(R^k)$ و $\lambda > 0$، آنگاه

$$m\{|f| > \lambda\} \le \lambda^{-1} \|f\|_1$$

زیرا با فرض $E = \{|f| > \lambda\}$ داریم

$$\lambda m(E) \le \int_E |f|\, dm \le \int_{R^k} |f|\, dm = \|f\|_1 \cdot$$

لذا گوییم هر تابع اندازه‌پذیر f که

$$\lambda \cdot m\{|f| > \lambda\} \tag{۳}$$

یک تابع کراندار از λ بر $(0, \infty)$ باشد تعلق به L^1 **ضعیف** دارد.

لذا L^1 ضعیف شامل L^1 است. وسیعتر بودن آن را می‌توان به‌ساده‌ترین وجه با تابع $1/x$ بر $(0, 1)$ نشان داد.

ما به‌هر $f \in L^1(R^k)$ ***تابع ماکزیمالش*** $Mf: R^k \to [0, \infty]$ را با قرار دادن

$$(Mf)(x) = \sup_{0 < r < \infty} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f|\, dm \tag{۴}$$

مربوط می‌کنیم. [به‌جای $B(x,r)$ می‌نویسیم B_r زیرا $m\big(B(x,r)\big)$ فقط تابع شعاع r است.]

اگر f را با اندازهٔ μ که با $d\mu = f\,dm$ داده شده یکی کنیم، می‌بینیم که (۴) با تعریف قبلی $M\mu$ توافق دارد. لذا قضیهٔ ۴.۷ می‌گوید که «عملگر ماکزیمال» M فضای L^1 را به L^1 ضعیف می‌برد، با کرانی (یعنی 3^k) که فقط تابع فضای R^k می‌باشد:

به‌ازای هر $f \in L^1(R^k)$ و هر $\lambda > 0$،

$$m\{Mf > \lambda\} \le 3^k \lambda^{-1} \|f\|_1 \cdot \tag{۵}$$

۶.۷ **نقاط لبگ.** اگر $f \in L^1(R^k)$، هر $x \in R^k$ که به‌ازای آن رابطهٔ

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dm(y) = 0 \tag{۱}$$

درست باشد یک **نقطهٔ لبگ** f نام دارد.

مثلاً اگر f در نقطهٔ x پیوسته باشد، رابطهٔ (۱) برقرار است. به‌طور کلی (۱) یعنی متوسطهای $|f-f(x)|$ بر گویهای کوچک به‌مرکز x کوچکند. لذا نقاط لبگ f نقاطی هستند که f در آنها به‌مفهوم متوسط خیلی نوسان نمی‌کند.

این امر که هر $f\in L^1$ دارای نقاط لبگ است چندان واضح نیست. ولی قضیهٔ جالب زیر نشان می‌دهد که این نقاط همیشه موجودند. (همچنین ر.ک. تمرین ۲۳.)

۷.۷ قضیه. هرگاه $f\in L^1(R^k)$، آنگاه تقریباً هر $x\in R^k$ یک نقطهٔ لبگ f است.

برهان. به‌ازای $x\in R^k$ و $r>0$ تعریف می‌کنیم

$$(T_rf)(x)=\frac{1}{m(B_r)}\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\,dm\,, \tag{۱}$$

و قرار می‌دهیم

$$(Tf)(x)=\limsup_{r\to 0}\,(T_rf)(x)\cdot \tag{۲}$$

باید ثابت کنیم که $Tf=0$ ت. هـ. $[m]$.

$y>0$ را اختیار کرده و فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد. بنابر قضیهٔ ۱۴.۳، تابعی مانند $g\in C(R^k)$ هست که $\|f-g\|_1<1/n$. قرار می‌دهیم $h=f-g$.

چون g پیوسته است، $Tg=0$. و چون

$$(T_rh)(x)\le\frac{1}{m(B_r)}\int_{B(x,r)}|h|\,dm+|h(x)|\,, \tag{۳}$$

داریم

$$Th\le Mh+|h|\cdot \tag{۴}$$

چون $T_rf\le T_rg+T_rh$، پس

$$Tf\le Mh+|h|\cdot \tag{۵}$$

لذا

$$\{Tf>2y\}\subset\{Mh>y\}\cup\{|h|>y\}\cdot \tag{۶}$$

اجتماع سمت راست (۶) را با $E(y,n)$ نشان می‌دهیم. چون $\|h\|_1<1/n$، قضیهٔ ۴.۷ و نامساوی ۵.۷ (۱) نشان می‌دهند که

$$m\big(E(y,n)\big)\le(3^k+1)/(yn)\cdot \tag{۷}$$

طرف چپ (۶) مستقل از n است. لذا

$$\{Tf>2y\}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}E(y,n)\cdot \tag{۸}$$

این اشتراک طبق نامساوی (۷) از اندازهٔ ۰ است؛ درنتیجه $\{Tf > ۲y\}$ زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه از اندازهٔ ۰ می‌باشد. چون اندازهٔ لبگ تام است، $\{Tf > ۲y\}$ اندازه‌پذیر لبگ است و از اندازهٔ ۰ می‌باشد. این به‌ازای هر y مثبت برقرار است. لذا $Tf = ۰$ ت. هـ. $[m]$.

قضیهٔ ۷.۷ با زحمت بسیار کم اطلاعات جالبی راجع به‌مباحث زیر به‌ما می‌دهد:

(آ) مشتقگیری از اندازه‌های به‌طور مطلق پیوسته؛

(ب) مشتقگیری با استفاده از مجموعه‌هایی غیر از گویها؛

(پ) مشتقگیری از انتگرالهای نامعین در $R^۱$؛

(ت) چگالی متری مجموعه‌های اندازه‌پذیر.

حال به‌این مباحث می‌پردازیم.

۸.۷ قضیه. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر R^k بوده و $\mu \ll m$. همچنین f مشتق رادون ـ نیکودیم μ نسبت به m باشد. در این صورت $D\mu = f$ ت. هـ $[m]$ و به‌ازای تمام مجموعه‌های بورل $E \subset R^k$،*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu)\, dm \cdot \tag{۱}$$

به‌عبارت دیگر، مشتق رادون ـ نیکودیم را می‌توان به‌عنوان حد خارج قسمتهای $Q_r\mu$ نیز به‌دست آورد.

برهان. قضیهٔ رادون ـ نیکودیم می‌گوید که رابطهٔ (۱) با f به‌جای $D\mu$ برقرار است. پس در هر نقطهٔ لبگ x از f

$$f(x) = \lim_{r \to ۰} \frac{۱}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} f\,dm = \lim_{r\to ۰} \frac{\mu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} \cdot \tag{۲}$$

لذا $(D\mu)(x)$ در هر نقطهٔ لبگ f، و درنتیجه ت. هـ. $[m]$، وجود دارد و مساوی $f(x)$ است.

۹.۷ مجموعه‌های خوش انقباض. فرض کنیم $x \in R^k$. گوییم دنبالهٔ $\{E_i\}$ از مجموعه‌های بورل در R^k ***خوش انقباض*** به x است اگر عددی مانند $\alpha > ۰$ با خاصیت زیر موجود باشد: دنباله‌ای از گویها مانند $B(x, r_i)$ با $\lim r_i = ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $E_i \subset B(x, r_i)$ و

$$m(E_i) \geq \alpha \cdot m\big(B(x, r_i)\big) \cdot \tag{۱}$$

توجه کنید که لازم نیست $x \in E_i$ و حتی x در بست E_i باشد. شرط (۱) صورت کمی این شرط است که هر E_i باید بخش مهمی از یک همسایگی کروی x را اشغال کند. مثلاً یک دنبالهٔ تو در تو از $k-$ سلولها که بزرگترین ضلعشان حداکثر ۱,۰۰۰ برابر کوچکترین ضلعشان است و قطرشان خوش انقباض به ۰ است. یک دنبالهٔ تو در تو از مستطیلها (در $R^۲$) که اضلاعشان

به‌طولهای $1/i$ و $(1/i)^2$ باشند خوش انقباض نیست.

۱۰.۷ قضیه. به‌هر $x\in R^k$ دنباله‌ای مانند $\{E_i(x)\}$ را که خوش انقباض به x است مربوط می‌سازیم و فرض می‌کنیم $f\in L^1(R^k)$. در این صورت، در هر نقطهٔ لبگ f، و درنتیجه ت. هـ. $[m]$،

$$f(x)=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m\left(E_i(x)\right)}\int_{E_i(x)} f\,dm\,. \tag{1}$$

برهان. فرض کنید x یک نقطهٔ لبگ f بوده و $\alpha(x)$ و $B(x,r_i)$ عدد مثبت و گویهایی باشند که به‌دنبالهٔ $\{E_i(x)\}$ مربوط شده‌اند. در این صورت، به‌خاطر $E_i(x)\subset B(x,r_i)$،

$$\frac{\alpha(x)}{m\left(E_i(x)\right)}\int_{E_i(x)}|f-f(x)|\,dm\le\frac{1}{m\left(B(x,r_i)\right)}\int_{B(x,r_i)}|f-f(x)|\,dm\,.$$

طرف راست وقتی $i\to\infty$ به 0 همگراست زیرا $r_i\to 0$ و x یک نقطهٔ لبگ f است. لذا طرف چپ همگرا به 0 است، و رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود.

توجه کنید که هیچ رابطه‌ای بین $\{E_i(x)\}$ و $\{E_i(y)\}$ به‌ازای نقاط متفاوت x و y فرض نشده است.

همچنین توجه کنید که قضیهٔ ۱۰.۷ به‌شکل قویتری از قضیهٔ ۸.۷ منجر می‌شود. ما جزئیات امر را حذف می‌کنیم.

۱۱.۷ قضیه. هرگاه $f\in L^1(R^1)$ و

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f\,dm\ (-\infty<x<\infty),$$

آنگاه در هر نقطهٔ لبگ f، و درنتیجه ت. هـ. $[m]$، $F'(x)=f(x)$.

(این نیمهٔ آسان قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است که به‌انتگرالهای لبگ سرایت کرده است.)

برهان. فرض کنیم $\{\delta_i\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت همگرا به 0 باشد. قضیهٔ ۱۰.۷ به‌ازای $E_i(x)=[x,x+\delta_i]$ نشان می‌دهد که مشتق راست F در تمام نقاط لبگ x از f وجود دارد و در این نقاط مساوی $f(x)$ است. اگر $E_i(x)$ را مساوی $[x-\delta_i,x]$ بگیریم، همین نتیجه برای مشتق چپ F در x به‌دست می‌آید.

۱۲.۷ چگالی متری. فرض کنیم E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ R^k باشد. چگالی متری E در نقطهٔ $x\in R^k$ مساوی

$$\lim_{r\to 0}\frac{m\left(E\cap B(x,r)\right)}{m\left(B(x,r)\right)} \tag{1}$$

تعریف می‌شود البته مشروط بر آنکه این حد موجود باشد.

اگر f را تابع مشخص E گرفته و قضیهٔ ۸.۷ یا قضیهٔ ۱۰.۷ را به‌کار بریم، خواهیم دید که **چگالی متری E تقریباً در هر نقطهٔ E مساوی ۱ و تقریباً در هر نقطهٔ متمم E برابر ۰ است.**

ذیلاً نتیجهٔ جالبی از این را ذکر می‌کنیم که می‌توان آن را با تمرین ۸ در بخش ۲ قیاس کرد:

اگر $\epsilon > 0$ ، مجموعه‌ای مانند $E \subset R^1$ که به‌ازای هر بازهٔ باز I در

$$\epsilon < \frac{m(E \cap I)}{m(I)} < 1-\epsilon \qquad (۲)$$

صدق کند وجود ندارد.

حال که مشتقگیری از اندازه‌های به‌طور مطلق پیوسته سامان‌یافته است، به‌اندازه‌هایی که نسبت به m منفردند می‌پردازیم.

۱۳.۷ قضیه. ***به‌هر $x \in R^k$ دنبالهٔ $\{E_i(x)\}$ را که خوش انقباض به x است مربوط می‌سازیم. هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مختلط بوده و $\mu \perp m$، آنگاه***

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\mu(E_i(x))}{m(E_i(x))} = 0 \quad \text{ت. هـ. } [m] \cdot \qquad (۱)$$

برهان. بنابر قضیهٔ تجزیهٔ ژردان کافی است (۱) را با فرض اضافی $\mu \geq 0$ ثابت کنیم. در این صورت، اگر مثل برهان قضیهٔ ۱۰.۷ استدلال کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{\alpha(x)\mu(E_i(x))}{m(E_i(x))} \leq \frac{\mu(E_i(x))}{m(B(x,r_i))} \leq \frac{\mu(B(x,r_i))}{m(B(x,r_i))} \cdot$$

لذا (۱) نتیجه‌ای است از حالت خاص

$$(D\mu)(x) = 0 \quad \text{ت. هـ. } [m] \qquad (۲)$$

که اینک به‌اثبات آن می‌پردازیم.

مشتق بالایی $\overline{D}\mu$ با تعریف

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{n \to \infty} \Big[\sup_{0 < r < 1/n} (Q_r\mu)(x) \Big] \quad (x \in R^k) \qquad (۳)$$

یک تابع بورل است، زیرا عبارت داخل کروشه با افزایش x کاهش می‌یابد و به‌ازای هر n یک تابع نیمه‌پیوستهٔ پایینی از x است؛ استدلال به‌کار رفته در بخش ۲.۷ این امر را ثابت خواهد کرد.

$\lambda > 0$ و $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. چون $\mu \perp m$، μ بر مجموعه‌ای از اندازهٔ لبگ ۰ متمرکز شده است. لذا انتظام μ (قضیهٔ ۱۸.۲) نشان می‌دهد که یک مجموعهٔ فشرده مانند K با $m(K) = 0$ و $\mu(K) > \|\mu\| - \epsilon$ وجود دارد.

به‌ازای هر مجموعهٔ بورل $E \subset R^k$ تعریف می‌کنیم $\mu_1(E)=\mu(K\cap E)$ و قرار می‌دهیم $\mu_2=\mu-\mu_1$. در این صورت $\|\mu_2\|<\epsilon$ و به‌ازای هر x خارج K،

$$(\bar{D}\mu)(x)=(\bar{D}\mu_2)(x)\le (M\mu_2)(x) \cdot \qquad (۴)$$

لذا

$$\{\bar{D}\mu>\lambda\}\subset K\cup\{M\mu_2>\lambda\}, \qquad (۵)$$

و قضیهٔ ۴.۷ نشان می‌دهد که

$$m\{\bar{D}\mu>\lambda\}\le 3^k\lambda^{-1}\|\mu_2\|<3^k\lambda^{-1}\epsilon \cdot \qquad (۶)$$

چون (۶) به‌ازای هر $\epsilon>0$ و هر $\lambda>0$ برقرار است، نتیجه می‌شود که $\bar{D}\mu=0$ ت. هـ. $[m]$ ؛ یعنی رابطهٔ (۲) برقرار می‌باشد.

قضایای ۱۰.۷ و ۱۳.۷ را می‌توان به‌طریق زیر باهم تلفیق کرد:

۱۴.۷ قضیه. ***فرض کنیم به‌هر $x\in R^k$ دنباله‌ای مانند $\{E_i(x)\}$ که خوش انقباض به x است مربوط شده باشد، و نیز μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر R^k باشد.***

فرض کنیم $d\mu=f\,dm+d\mu_s$ تجزیهٔ لبگ μ نسبت به m باشد. در این صورت

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mu\big(E_i(x)\big)}{m\big(E_i(x)\big)}=f(x) \quad \text{ت. هـ. } [m] \cdot$$

بخصوص $\mu\perp m$ اگر و فقط اگر $(D\mu)(m)=0$ ت. هـ. $[m]$.

نتیجهٔ زیر با قضیهٔ ۱۳.۷ اختلاف فاحش دارد.

۱۵.۷ قضیه. ***هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مثبت بر R^k بوده و $\mu\perp m$، آنگاه***

$$(D\mu)(x)=\infty \quad \text{ت. هـ. } [\mu] \cdot \qquad (۱)$$

برهان. یک مجموعهٔ بورل مانند $S\subset R^k$ با $m(S)=0$ و $\mu(R^k-S)=0$ وجود دارد، و مجموعه‌های بازی چون $V_j\supset S$ با $m(V_j)<1/j$ به‌ازای $j=1,2,3,\cdots$ موجودند.

فرض کنیم E_N به‌ازای $N=1,2,3,\cdots$ مجموعهٔ تمام $x\in S$ هایی باشد که نظیر شعاعهای $r_i=r_i(x)$ با $\lim r_i=0$ اند به‌طوری که

$$\mu\big(B(x,r_i)\big)<Nm\big(B(x,r_i)\big) \cdot \qquad (۲)$$

در این صورت (۱) به‌ازای هر $x\in S-\bigcup_N E_N$ برقرار است.

یک لحظه N و j را ثابت می‌گیریم. در این صورت هر $x\in E_N$ مرکز یک گوی مانند $B_x\subset V_j$

است که در (۲) صدق می‌کند. فرض کنیم β_x گوی باز به‌مرکز x و شعاعی باشد که ۱/۳ شعاع B_x است. اجتماع گویهای β_x مجموعهٔ بازی چون $W_{j,N}$ است که شامل E_N بوده و در V_j قرار دارد. حکم می‌کنیم که

$$\mu(W_{j,N}) < 3^k N/j \cdot \qquad (3)$$

برای اثبات (۳) فرض کنیم $K \subset W_{j,N}$ فشرده باشد. تعدادی متناهی β_x مجموعهٔ K را می‌پوشانند. لذا لم ۳.۷ نشان می‌دهد که مجموعه‌ای متناهی مانند $F \subset E_N$ با خواص زیر وجود دارد:

(آ) $\{\beta_x : x \in F\}$ گردایه‌ای از هم جداست، و

(ب) $K \subset \bigcup_{x \in F} B_x$.

لذا

$$\mu(K) \le \sum_{x\in F} \mu(B_x) < N \sum_{x \in F} m(B_x)$$
$$= 3^k N \sum_{x\in F} m(\beta_x) \le 3^k N m(V_j) < 3^k N/j \cdot$$

این نامساوی (۳) را ثابت خواهد کرد.

حال قرار می‌دهیم $\Omega_N = \bigcap_j W_{j,N}$. در این صورت $E_N \subset \Omega_N$، Ω_N یک G_δ است، $\mu(\Omega_N) = 0$، و در هر نقطهٔ $S - \bigcup_N \Omega_N$ داریم $(D\mu)(x) = \infty$

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱۶.۷. این قضیه راجع به‌توابعی است که بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ در R^1 تعریف شده‌اند. این قضیه دارای دو بخش است. بخش اول، به‌بیان نادقیق، می‌گوید که مشتق انتگرال نامعین یک تابع همان تابع است. ما در قضیهٔ ۱۱.۷ به‌این امر پرداختیم. بخش دوم در جهتی دیگر است: با انتگرالگیری از مشتق یک تابع به‌آن تابع باز می‌گردیم. به‌طور دقیقتر،

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad (a \le x \le b) \cdot \qquad (1)$$

در صورت مقدماتی این قضیه فرض می‌شود که f در هر نقطهٔ $[a, b]$ مشتقپذیر بوده و f' تابع پیوسته‌ای می‌باشد. در این صورت اثبات (۱) آسان خواهد بود.

در تعمیم رابطهٔ (۱) به‌انتگرالهای لبگ سؤالات زیر طبعاً مطرح می‌شوند:

آیا فرض $f' \in L^1$ به‌جای پیوسته بودن f' کافی است؟

اگر f **تقریباً در هر** نقطهٔ $[a, b]$ پیوسته و مشتقپذیر باشد، آیا رابطهٔ (۱) برقرار است؟

پیش از اثبات هر مطلب به‌دو مثال می‌پردازیم که نحوهٔ فروریزی (۱) را نشان می‌دهند.

(آ) قرار می‌دهیم $f(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ اگر $x \neq 0$ و $f(0) = 0$. در این صورت f در هر نقطه

مشتقپذیر است ولی

$$\int_0^1 |f'(t)|\, dt = \infty \; ; \tag{۲}$$

درنتیجه $f' \notin L^1$.

هرگاه انتگرال (۱) را (با $[0, 1]$ به‌جای $[a, b]$) به‌صورت حد انتگرالهای روی $[\epsilon, 1]$ وقتی $\epsilon \to 0$ تعبیر کنیم، آنگاه رابطهٔ (۱) باز هم برای این f برقرار است.

حالات پیچیده‌تر وقتی پیش می‌آیند که این نوع گذار به‌حد بی‌فایده باشد. انتگرالگیریهایی منسوب به‌دنجوی (*Denjoy*) و پرون (*Perron*) وجود دارند (ر.ک. [۱۸] و [۲۸]) که در آنها رابطهٔ (۱) به‌ازای f مشتقپذیر در هر نقطه برقرار است. این انتگرالها واجد این خاصیت که انتگرالپذیری f انتگرالپذیری $|f|$ را ایجاب می‌کند نیستند، و لذا نقش مهمی در آنالیز نخواهند داشت.

(ب) فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته بوده، f تقریباً در هر نقطهٔ $[a, b]$ مشتقپذیر بوده، و $f' \notin L^1$ بر $[a, b]$. آیا این فرضها رابطهٔ (۱) را برقرار می‌سازند؟

جواب: خیر.

$\{\delta_n\}$ را طوری می‌گیریم که $1 = \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$ و $\delta_n \to 0$. قرار می‌دهیم $E_0 = [0, 1]$ و فرض می‌کنیم $n \geq 0$ و E_n طوری ساخته شده باشد که اجتماع 2^n بازهٔ بستهٔ از هم‌جدا هریک به‌طول $2^{-n}\delta_n$ باشد. از مرکز هریک از این 2^n بازه یک بازهٔ باز برمی‌داریم؛ درنتیجه هریک از 2^{n+1} بازهٔ باقیمانده به‌طول $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ است (این امر امکان‌پذیر است زیرا $\delta_{n+1} < \delta_n$)، و فرض می‌کنیم E_{n+1} اجتماع این 2^{n+1} بازه باشد. در این صورت $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$، $m(E_n) = \delta_n$، و هرگاه

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \, , \tag{۳}$$

آنگاه E فشرده بوده و $m(E) = 0$. (E درواقع کامل است.) قرار می‌دهیم

$$g_n = \delta_n^{-1} \chi_{E_n} \quad \text{و} \quad f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\, dt \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \cdot \tag{۴}$$

در این صورت $f_n(0) = 0$، $f_n(1) = 1$، و هر f_n یک تابع یکنواست که بر هر بازهٔ باز در متمم E_n ثابت است. هرگاه I یکی از 2^n بازه‌ای باشد که اجتماعشان E_n است، آنگاه

$$\int_I g_n(t)\, dt = \int_I g_{n+1}(t)\, dt = 2^{-n} \cdot \tag{۵}$$

پس از (۵) نتیجه می‌شود که

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) (x \notin E_n) \tag{۶}$$

و

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_I |g_n - g_{n+1}| < 2^{-n+1} \, (x \in E_n) \cdot \tag{۷}$$

لذا $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت به‌یک تابع یکنوای پیوسته مانند f که $f(0) = 0$، $f(1) = 1$، و به‌ازای هر $x \notin E$، $f'(x) = 0$ همگراست. چون $m(E) = 0$، داریم $f' = 0$ ت. هـ. لذا رابطهٔ (۱) برقرار نیست.

اگر $\delta_n = (2/3)^n$، مجموعهٔ E مجموعهٔ «یکسومهای میانی» کانتور است.

حال که دیدیم چگونه می‌تواند کار خراب شود، فرض می‌کنیم $f' \in L^1$ و رابطهٔ (۱) برقرار باشد. در این صورت اندازه‌ای مانند μ با تعریف $d\mu = f'\,dm$ وجود دارد. چون $\mu \ll m$، قضیهٔ ۱۱.۶ نشان می‌دهد که به‌هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ چنان نظیر است که هروقت E اجتماع از هم‌جدایی از بازه‌های باز باشد که مجموع طولشان از δ کمتر است، $|\mu|(E) < \epsilon$. چون به‌ازای $a \le x < y \le b$، $f(y) - f(x) = \mu\big((x,y)\big)$، پس پیوستگی مطلق f، به‌صورت تعریف شده در زیر، برای برقراری (۱) **لازم** است. قضیهٔ ۲۰.۷ نشان خواهد داد که این شرط کافی نیز هست.

۱۷.۷ **تعریف.** تابع مختلط f تعریف شده بر بازهٔ بستهٔ $I = [a, b]$ را ***به‌طور مطلق پیوسته*** بر I گوییم (به‌طور خلاصه، f بر I ب م پ است) هرگاه به‌هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ چنان نظیر باشد که رابطهٔ

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon \qquad (1)$$

به‌ازای هر n و هر گردایهٔ از هم‌جدا از بازه‌های باز (α_1, B_1)، $\cdots$، (α_n, β_n) در I که طولشان در رابطهٔ

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i - \alpha_i| < \delta \qquad (2)$$

صدق کنند برقرار باشد.

یک چنین f بوضوح پیوسته است؛ کافی است $n = 1$ را اختیار کنیم.

در قضیهٔ زیر استلزام (پ) ← (ب) احتمالاً جالبترین قسمت است. استلزام (پ) ← (آ) بدون فرض یکنوایی f مضمون قضیهٔ ۲۰.۷ می‌باشد.

۱۸.۷ **قضیه.** ***فرض کنیم $I = [a, b]$ و $f: I \to R^1$ پیوسته و نانزولی باشد. در این صورت هریک از سه حکم زیر راجع به f دوتای دیگر را ایجاب می‌کند:***

(آ) f بر I ب م پ است؛

(ب) f مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ را به‌مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ می‌نگارد.

(پ) f ت. هـ. بر I مشتقپذیر است، $f' \in L^1$، و

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad (a \le x \le b)\,. \qquad (1)$$

توجه کنید که توابع ساخته شده در مثال ۱۶.۷ (ب) مجموعه‌هایی فشرده از اندازهٔ ۰ را به‌روی بازهٔ بستهٔ یکه می‌نگارند!

تمرین ۱۲ مکمل این قضیه خواهد بود.

برهان. نشان می‌دهیم که (آ) ← (پ) ← (ب) ← (آ).

فرض کنیم $\mathfrak{M}$، $\sigma-$ جبر تمام زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ R^1 باشد. همچنین f بر I ب م پ باشد. $E \subset I$ را طوری اختیار می‌کنیم که $E \in \mathfrak{M}$ و $m(E) = 0$. باید نشان دهیم که $f(E) \in \mathfrak{M}$ و $m\left(f(E)\right) = 0$. بدون آسیب زدن به‌کلیت فرض می‌کنیم a و b در E نباشند.

$\epsilon > 0$ را اختیار کرده و، مانند تعریف ۱۷.۷، $\delta > 0$ را به f و ϵ مربوط می‌سازیم. در این صورت یک مجموعهٔ باز مانند V هست که $m(V) < \delta$؛ درنتیجه $E \subset V \subset I$. فرض کنیم (α_i, β_i) ها بازه‌های باز از هم‌جدایی باشند که اجتماعشان V است. در این صورت $\Sigma(\beta_i - \alpha_i) < \delta$، و لذا انتخاب ما از δ نشان می‌دهد که

$$\sum_i \left(f(\beta_i) - f(\alpha_i)\right) \le \epsilon \cdot \tag{۲}$$

[تعریف ۱۷.۷ برحسب مجموعهای متناهی بیان شده بود؛ لذا (۲) به‌ازای هر جمع جزئی سری (احتمالاً) نامتناهی، و درنتیجه به‌ازای مجموع تمام سری به‌صورتی که بیان شده، برقرار می‌باشد.]

چون $E \subset V$، $f(E) \subset \cup [f(\alpha_i) - f(\beta_i)]$. اندازهٔ لبگ این اجتماع طرف چپ (۲) است. این می‌گوید که $f(E)$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌های بورل از اندازهٔ بدلخواه کوچک است. چون اندازهٔ لبگ تام است، پس $f(E) \in \mathfrak{M}$ و $m\left(f(E)\right) = 0$.

پس ثابت کرده‌ایم که (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند.

حال فرض می‌کنیم (ب) برقرار باشد. تعریف می‌کنیم

$$g(x) = x + f(x) \quad (a \le x \le b) \cdot \tag{۳}$$

هرگاه نقش f بازهٔ بازی به‌طول η باشد، آنگاه نقش g همان بازه به‌طول $\eta + \eta'$ است. از این به‌آسانی معلوم می‌شود که g در (ب) صدق می‌کند زیرا f چنین می‌کند.

حال فرض می‌کنیم $E \subset I$ و $E \in \mathfrak{M}$. در این صورت $E = E_1 \cup E_0$ که در آن $m(E_0) = 0$ و E_1 یک F_σ است (قضیهٔ ۲۰.۲). لذا E_1 اجتماع شمارشپذیری از مجموعه‌های فشرده است و $g(E_1)$ نیز به‌خاطر پیوستگی g چنین است. چون g در (ب) صدق می‌کند، $m\left(g(E_0)\right) = 0$. و چون $g(E) = g(E_1) \cup g(E_0)$، نتیجه می‌شود که $g(E) \in \mathfrak{M}$.

لذا می‌توان تعریف کرد

$$\mu(E) = m\left(g(E)\right) \quad (E \in \mathfrak{M} \ \text{و} \ E \subset I) \cdot \tag{۴}$$

چون g یک به‌یک است (این دلیل ما برای کار با g به‌جای f است)، مجموعه‌های از هم‌جدا در I دارای نقشهای g از هم‌جدایند. لذا جمعی شمارشپذیر بودن m نشان می‌دهد که μ یک اندازهٔ (مثبت کراندار) بر $\mathfrak{M}$ است. همچنین $\mu \ll m$ زیرا g در (ب) صدق می‌کند. لذا، بنابر قضیهٔ رادون ـ نیکودیم، به‌ازای $h \in L^1(m)$ی

$$d\mu = h\,dm \cdot \tag{۵}$$

هرگاه $E = [a, x]$، آنگاه $g(E) = [g(a), g(x)]$، و رابطهٔ (۵) نتیجه می‌دهد که

$$g(x) - g(a) = m\big(g(E)\big) = \mu(E) = \int_E h\,dm = \int_a^x h(t)\,dt \cdot$$

حال اگر (۳) را به‌کار بریم، نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) - f(a) = \int_a^x [h(t) - 1]\,dt \quad (a \le x \le b) \cdot \tag{۶}$$

لذا، طبق قضیهٔ ۱۱.۷، $f'(x) = h(x) - 1$ تـ. هـ. $[m]$.

پس قسمت (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند.

بحث پیش از تعریف ۱۷.۷ نشان می‌دهد که (پ) قسمت (آ) را ایجاب خواهد کرد.

۱۹.۷ قضیه. ***فرض کنیم $f: I \to R^1$ بر $I = [a, b]$ ب م پ باشد. تعریف می‌کنیم***

$$F(x) = \sup \sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad (a \le x \le b) \tag{۱}$$

که در آن سوپرمم روی تمام Nها و $\{t_i\}$ هایی که

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x \tag{۲}$$

گرفته می‌شود. در این صورت توابع F، $F+f$، و $F-f$ بر I نانزولی و ب م پ اند.

[F ***تابع تغییر کل*** f نام دارد. هرگاه f یک تابع (مختلط) بر I باشد (ب م پ باشد یا نباشد) و $F(b) < \infty$، آنگاه گوییم f دارای ***تغییر کراندار*** بر I است و $F(b)$ را ***تغییر کل*** f بر I می‌نامیم. تمرین ۱۳ در این ارتباط می‌باشد.]

برهان. هرگاه رابطهٔ (۲) برقرار بوده و $x < y \le b$، آنگاه

$$F(y) \ge |f(y) - f(x)| + \sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \cdot \tag{۳}$$

لذا $F(y) \ge |f(y) - f(x)| + F(x)$. بخصوص

$$F(y) \geq f(y)-f(x)+F(x) \quad \text{و} \quad F(y) \geq f(x)-f(y)+F(x) \cdot \qquad (۴)$$

این نانزولی بودن F، $F+f$، و $F-f$ را ثابت می‌کند.

چون مجموع دو تابع ب م پ بوضوح ب م پ است، کافی است ثابت کنیم که F بر I ب م پ می‌باشد.

هرگاه $(\alpha, \beta) \subset I$، آنگاه

$$F(\beta)-F(\alpha) = \sup \sum_{1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})|, \qquad (۵)$$

که در آن سوپرمم روی تمام $\{t_i\}$ هایی گرفته شده که در $\alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$ صدق می‌کنند.

توجه کنید که $\Sigma (t_i - t_{i-1}) = \beta - \alpha$.

حال $\epsilon > 0$ را اختیار کرده، $\delta > 0$ را طبق تعریف ۱۷.۷ به f و ϵ مربوط ساخته، بازه‌های باز از هم‌جدای $(\alpha_j, \beta_j) \subset I$ را که $\Sigma (\beta_j - \alpha_j) < \delta$ اختیار کرده، و رابطهٔ (۵) را بر هر (α_j, β_j) اعمال می‌کنیم. از انتخاب δی ما نتیجه می‌شود که

$$\sum_j \big(F(\beta_j)-F(\alpha_j)\big) \leq \epsilon \cdot \qquad (۶)$$

لذا F بر I ب م پ می‌باشد.

حال به‌هدف اصلی خود رسیده‌ایم:

۲۰.۷ قضیه. ***هرگاه تابع مختلط f بر $I = [a, b]$ ب م پ باشد، آنگاه f تقریباً در هر نقطهٔ I مشتقپذیر است، $f' \in L^1(m)$، و***

$$f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad (a \leq x \leq b) \cdot \qquad (۱)$$

برهان. کافی است مطالب را برای f حقیقی ثابت کنیم. فرض کنیم F تابع تغییر کل آن طبق قضیهٔ ۱۹.۷ باشد. تعریف می‌کنیم

$$f_1 = \frac{1}{2}(F+f) \quad \text{و} \quad f_2 = \frac{1}{2}(F-f) \qquad (۲)$$

و استلزام (پ) → (آ) قضیهٔ ۱۸.۷ را بر f_1 و f_2 اعمال می‌کنیم. چون

$$f = f_1 - f_2, \qquad (۳)$$

این رابطهٔ (۱) را به‌دست می‌دهد.

در قضیهٔ بعد رابطهٔ (۱) از مجموعهٔ متفاوتی از مفروضات به‌روشی کاملاً متفاوت با روش برهان فوق به‌دست می‌آید.

۲۱.۷ قضیه. هرگاه $f: [a, b] \to R^1$ در هر نقطهٔ $[a, b]$ مشتقپذیر بوده و $f' \in L^1$ بر $[a, b]$،

آنگاه

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt \quad (a\le x\le b)\cdot \tag{۱}$$

توجه کنید که مشتقپذیری در هر نقطهٔ $[a,b]$ فرض شده است.

برهان. بوضوح کافی است مطلب به‌ازای $x=b$ ثابت شود. $\epsilon>0$ را ثابت می‌گیریم. قضیهٔ ۲۵.۲ وجود یک تابع نیمه پیوستهٔ پایینی مانند g بر $[a,b]$ را که $g>f'$ و

$$\int_a^b g(t)\,dt<\int_a^b f'(t)\,dt+\epsilon \tag{۲}$$

تضمین می‌کند. درواقع قضیهٔ ۲۵.۲ فقط $g\ge f'$ را به‌دست می‌دهد، ولی چون $m([a,b])<\infty$، می‌توان بدون تأثیر بر (۲) ثابت کوچکی را به g اضافه کرد. به‌ازای هر $\eta>0$ تعریف می‌کنیم

$$F_\eta(x)=\int_a^x g(t)\,dt-f(x)+f(a)+\eta(x-a) \quad (a\le x\le b)\cdot \tag{۳}$$

η را یک لحظه ثابت می‌گیریم. به‌هر $x\in[a,b)$ یک $\delta_x>0$ چنان نظیر است که به‌ازای هر $t\in(x,x+\delta_x)$،

$$g(t)>f'(x) \quad \text{و} \quad \frac{f(t)-f(x)}{t-x}<f'(x)+\eta\text{،} \tag{۴}$$

زیرا g نیمه‌پیوستهٔ پایینی بوده و $g(x)>f'(x)$. لذا به‌ازای هر چنین t داریم

$$F_\eta(t)-F_\eta(x)=\int_x^t g(s)\,ds-[f(t)-f(x)]+\eta(t-x)$$

$$>(t-x)f'(x)-(t-x)[f'(x)+\eta]+\eta(t-x)=0\cdot$$

چون $F_\eta(a)=0$ و F_η **پیوسته** است، آخرین نقطه مانند $x\in[a.b]$ وجود دارد که در آن $F_\eta(x)=0$. اگر $x<b$، محاسبات پیشین ایجاب می‌کنند که به‌ازای $t\in(x,b]$، $F_\eta(t)>0$. در هر حالت $F_\eta(b)\ge 0$. چون این به‌ازای هر $\eta>0$ برقرار است، روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌دهند که

$$f(b)-f(a)\le\int_a^b g(t)\,dt<\int_a^b f'(t)\,dt+\epsilon \tag{۵}$$

و چون ϵ دلخواه بود، نتیجه می‌شود که

$$f(b)-f(a)\le\int_a^b f'(t)\,dt\cdot \tag{۶}$$

اگر f در مفروضات قضیه صدق کند، $-f$ نیز چنین می‌کند. لذا (۶) با $-f$ به‌جای f برقرار است، و این دو نامساوی باهم رابطهٔ (۱) را به‌ما می‌دهند.

تبدیلات مشتقپذیر

۲۲.۷ چند تعریف. فرض کنیم V مجموعهٔ بازی در R^k بوده، T مجموعهٔ V را به‌توی R^k بنگارد، و $x \in V$. هرگاه یک عملگر خطی مانند A بر R^k (یعنی یک نگاشت خطی از R^k به‌توی R^k مانند تعریف ۱.۲) باشد به‌طوری که

$$\lim_{h \to 0} \frac{|T(x+h)-T(x)-Ah|}{|h|} = 0 \qquad (1)$$

(که البته در آن $h \in R^k$)، آنگاه گوییم T در x **مشتقپذیر** است، و تعریف می‌کنیم

$$T'(x) = A \cdot \qquad (2)$$

عملگر خطی $T'(x)$ **مشتق** T در x نام دارد. (به‌آسانی می‌توان نشان داد که حداکثر یک A ی خطی صادق در شرایط پیشگفته وجود دارد. لذا می‌توان راجع به **مشتق** T سخن گفت.) $T'(x)$ را اغلب ***دیفرانسیل*** نیز می‌گویند.

نکتهٔ اصلی در (۱) آن است که تفاضل $T(x+h)-T(x)$ با $T'(x)h$، که یک تابع **خطی** از h است، تقریب می‌شود.

چون هر عدد حقیقی α یک عملگر خطی بر R^1 (نگاشت h به αh) به‌دست می‌دهد، تعریف ما از $T'(x)$ با تعریف معمول وقتی $k = 1$ یکی است.

وقتی $A : R^k \to R^k$ خطی باشد، قضیهٔ ۲۰.۲ (ث) نشان می‌دهد که عددی مانند $\Delta(A)$ چنان وجود دارد که به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset R^k$،

$$m\big(A(E)\big) = \Delta(A)\, m(E) \cdot \qquad (3)$$

چون

$$A'(x) = A (x \in R^k) \qquad (4)$$

و هر تبدیل مشتقپذیر T را می‌توان به‌طور موضعی با یک ثابت به‌علاوهٔ یک تبدیل خطی تقریب کرد، حدس می‌زنیم که به‌ازای مجموعه‌های مناسبی چون E که نزدیک x اند،

$$\frac{m\big(T(E)\big)}{m(E)} \sim \Delta\big(T'(x)\big) \cdot \qquad (5)$$

این امر در قضیهٔ ۲۴.۷ ثابت می‌شود و انگیزه‌ای برای قضیهٔ ۲۶.۷ می‌باشد.

یادآور می‌شویم که $\Delta(A) = |\det A|$ در بخش ۲۳.۲ ثابت شد. وقتی T در x مشتقپذیر باشد، دترمینان $T'(x)$ **ژاکوبین** T در x نام دارد و با $J_T(x)$ نموده می‌شود. لذا

$$\Delta\big(T'(x)\big) = |J_T(x)| \cdot \qquad (6)$$

لم زیر تعبیر هندسی روشنی دارد. برهانش به‌قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر (*Brouwer*) وابسته

است. با اعمال فرضهای قویتری بر F، مثلاً اینکه F یک نگاشت باز است، می‌توان از این قضیه بی‌نیاز شد. ولی این کار ما را گرفتار فرضهای قوی غیرلازمی در قضیهٔ ۲۶.۷ خواهد ساخت.

۲۳.۷ لم. فرض کنیم $S = \{x : |x| = ۱\}$ کره‌ای در R^k باشد که مرزش گوی یکهٔ باز $B = B(۰, ۱)$ است. هرگاه $F : \overline{B} \to R^k$ پیوسته بوده، $۰ < \epsilon < ۱$، و به‌ازای هر $x \in S$،

$$|F(x) - x| < \epsilon , \qquad (۱)$$

آنگاه $F(B) \supset B(۰, ۱-\epsilon)$.

برهان. برای رسیدن به‌تناقض فرض می‌کنیم نقطه‌ای مانند $a \in B(۰, ۱-\epsilon)$ در $F(B)$ نباشد. بنابر (۱)، اگر $x \in S$، $|F(x)| > ۱-\epsilon$. لذا a در $F(S)$ نیست و درنتیجه، به‌ازای هر $x \in \overline{B}$، $a \neq F(x)$. این به‌ما توان تعریف یک نگاشت پیوسته مانند $G : \overline{B} \to \overline{B}$ با

$$G(x) = \frac{a - F(x)}{|a - F(x)|} \qquad (۲)$$

را خواهد بخشید.

هرگاه $x \in S$، آنگاه $x \cdot x = |x|^۲ = ۱$؛ درنتیجه

$$x \cdot \big(a - F(x)\big) = x \cdot a + x \cdot \big(x - F(x)\big) - ۱ < |a| + \epsilon - ۱ < ۰ \cdot \qquad (۳)$$

این نشان می‌دهد که $x \cdot G(x) < ۰$؛ درنتیجه $x \neq G(x)$.

هرگاه $x \in B$، آنگاه واضح است که $x \neq G(x)$ صرفاً به‌این خاطر که $G(x) \in S$.

لذا G هیچ نقطه‌ای از $\overline{B}$ را ثابت نمی‌گذارد که با قضیهٔ براوئر که می‌گوید هر نگاشت پیوسته از $\overline{B}$ به‌توی $\overline{B}$ دست کم یک نقطهٔ ثابت دارد متضاد است.

برهانی از قضیهٔ براوئر که هم مقدماتی و هم ساده است را می‌توان در صفحات ۴۰ـ۳۸ کتاب هرویتس و والمن یافت:

Hurewicz, Wallman, Dimension Theory, Princeton University Press, 1948.

۲۴.۷ قضیه. هرگاه

(آ) V در R^k باز باشد،

(ب) $T : V \to R^k$ پیوسته بوده، و

(پ) T در نقطه‌ای مانند $x \in V$ مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\lim_{r \to ۰} \frac{m\Big(T\big(B(x,r)\big)\Big)}{m\big(B(x,r)\big)} = \Delta\big(T'(x)\big) \cdot \qquad (۱)$$

توجه کنید که $T\big(B(x,r)\big)$ اندازه‌پذیر لبگ است. درواقع $\sigma-$ فشرده است زیرا $B(x,r)$، $\sigma-$ فشرده و T پیوسته می‌باشد.

برهان. بدون‌آسیب‌زدن به‌کلیت‌فرض می‌کنیم $x = \circ$ و $T(x) = \circ$. قرار می‌دهیم $A = T'(\circ)$.

ما از مطلب مقدماتی زیر راجع به‌عملگرهای خطی بر فضاهای برداری با بعد متناهی استفاده خواهیم کرد: **عملگر خطی A بر R^k یک به‌یک است اگر و فقط اگر برد A تمام R^k باشد.** در این صورت معکوس A^{-1} عملگر A نیز خطی می‌باشد.

برهان را به‌دو حالت تجزیه می‌کنیم.

حالت ۱. A یک به‌یک است. تعریف می‌کنیم

$$F(x) = A^{-1}\, T(x)\ (x \in V)\cdot \tag{۲}$$

در این صورت (عملگر همانی) $F'(\circ) = A^{-1}\, T'(\circ) = A^{-1}A = I$. ثابت می‌کنیم

$$\lim_{r\to\circ} \frac{m\big(F(B(\circ, r))\big)}{m\big(B(\circ, r)\big)} = 1\cdot \tag{۳}$$

چون $T(x) = AF(x)$، بنابر ۲۲.۷ (۳)، به‌ازای هرگوی B داریم

$$m\big(T(B)\big) = m\big(A(F(B))\big) = \Delta(A)\, m\big(F(B)\big)\cdot \tag{۴}$$

لذا (۳) نتیجهٔ مطلوب را به‌ما می‌دهد.

$\epsilon > \circ$ را اختیار می‌کنیم. چون $F(\circ) = \circ$ و $F'(\circ) = I$، $\delta > \circ$ ای هست به‌طوری که $\circ < |x| < \delta$ نامساوی

$$|F(x) - x| < \epsilon\, |x| \tag{۵}$$

را ایجاب می‌کند. حکم می‌کنیم که شمولهای

$$B\big(\circ, (1-\epsilon)r\big) \subset F\big(B(\circ, r)\big) \subset B\big(\circ, (1+\epsilon)r\big) \tag{۶}$$

به‌ازای $\circ < r < \delta$ برقرار است. اولین شمول از لم ۲۳.۷ که بر $B(\circ, r)$ به‌جای $B(\circ, 1)$ اعمال شده به‌دست می‌آید زیرا به‌ازای هر x که $|x| = r$، $|F(x) - x| < \epsilon r$ ؛ دومین شمول مستقیماً از (۵) نتیجه می‌شود زیرا $|F(x)| < (1+\epsilon)\, |x|$. رابطهٔ (۶) بوضوح ایجاب می‌کند که

$$(1-\epsilon)^k \le \frac{m\big(F(B(\circ, r))\big)}{m\big(B(\circ, r)\big)} \le (1+\epsilon)^k \tag{۷}$$

و این رابطهٔ (۳) را ثابت خواهد کرد.

حالت دو. A یک به‌یک نیست. در این حالت A فضای R^k را به‌توی زیرفضایی از بعد پایین‌تر، یعنی به‌توی مجموعه‌ای از اندازهٔ $\circ$، می‌نگارد. لذا به‌ازای هر $\epsilon > \circ$ یک $\eta > \circ$ هست به‌طوری که اگر E_η مجموعهٔ تمام نقاطی در R^k باشد که فاصله‌شان تا $A\big(B(\circ, 1)\big)$ از η کمتر است،

داریم $m(E_\eta) < \epsilon$. چون $A = T'(\circ)$، یک $\delta > \circ$ هست به‌طوری که $|x| < \delta$ نامساوی

$$|T(x) - Ax| \le \eta\, |x| \tag{۸}$$

را ایجاب می‌کند. لذا هرگاه $r < \delta$، آنگاه $T\big(B(\circ, r)\big)$ در مجموعهٔ E مرکب از نقاطی است که فاصله‌شان تا $A\big(B(\circ, r)\big)$ از ηr کمتر است. انتخاب ما از η نشان می‌دهد که $m(E) < \epsilon r^k$. لذا

$$m\Big(T\big(B(\circ, r)\big)\Big) < \epsilon r^k \quad (\circ < r < \delta) \cdot \tag{۹}$$

چون $r^k = m\big(B(\circ, r)\big) / m\big(B(\circ, ۱)\big)$، رابطهٔ (۹) ایجاب می‌کند که

$$\lim_{r \to \circ} \frac{m\Big(T\big(B(\circ, r)\big)\Big)}{m\big(B(\circ, r)\big)} = \circ \cdot \tag{۱۰}$$

این رابطهٔ (۱) را ثابت می‌کند زیرا $\Delta\big(T'(\circ)\big) = \Delta(A) = \circ$.

۲۵.۷ لم. ***فرض کنیم*** $E \subset R^k$، $m(E) = \circ$، T ***مجموعهٔ*** E ***را به‌توی*** R^k ***بنگارد، و به‌ازای هر*** $x \in E$، ***وقتی*** y ***در*** E ***به*** x ***میل کند،***

$$\limsup \frac{|T(y) - T(x)|}{|y - x|} < \infty \cdot$$

در این صورت $m\big(T(E)\big) = \circ$.

برهان. اعداد صحیح و مثبت n و p را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $F = F_{n,p}$ مجموعهٔ تمام $x \in E$هایی باشد که به‌ازای هر $y \in B(x, ۱/p) \cap E$،

$$|T(y) - T(x)| \le n\, |y - x| \text{ ،}$$

و $\epsilon > \circ$ را اختیار می‌کنیم. چون $m(F) = \circ$، F را می‌توان با گویهای $B_i = B(x_i, r_i)$ که $x_i \in F$ و $r_i < ۱/p$ چنان پوشانید که $\Sigma m(B_i) < \epsilon$. (برای این کار F را با مجموعهٔ بازی چون W از اندازهٔ کوچک پوشانده، W را به‌جعبه‌های از هم‌جدایی با قطر کوچک مثل بخش ۱۹.۲ تجزیه کرده، و هریک از آنهایی که با F متقاطع‌اند را با یک گوی که مرکزش در جعبه و در F است می‌پوشانیم.)

هرگاه $x \in F \cap B_i$، آنگاه $|x_i - x| < r_i < ۱/p$ و $x_i \in F$. لذا

$$|T(x_i) - T(x)| \le n\, |x_i - x| < n r_i;$$

درنتیجه $T(F \cap B_i) \subset B\big(T(x_i), n r_i\big)$. لذا

$$T(F) \subset \bigcup_i B\big(T(x_i), n r_i\big)$$

اندازهٔ این اجتماع حداکثر مساوی

$$\sum_i m\Big(B\big(T(x_i), n r_i\big)\Big) = n^k \sum_i m(B_i) < n^k \epsilon$$

است. چون اندازهٔ لبگ تام و ϵ دلخواه بود، پس $T(F)$ اندازه‌پذیر بوده و $m\big(T(F)\big) = 0$.

برای تمام برهان توجه می‌کنیم که E اجتماع گردایهٔ شمارشپذیر $\{F_{n,p}\}$ می‌باشد.

ذیلاً حالت خاصی از لم فوق را ذکر می‌کنیم:

هرگاه V در R^k باز بوده و $T: V \to R^k$ در هر نقطهٔ V مشتقپذیر باشد، آنگاه T *مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ را به‌مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ می‌نگارد.*

حال به‌قضیهٔ تغییر متغیر می‌رسیم.

۲۶.۷ قضیه. ***فرض کنیم***

(یک) $X \subset V \subset R^k$، V ***باز بوده، و*** $T: V \to R^k$ ***پیوسته باشد؛***

(دو) X ***اندازه‌پذیر لبگ،*** T ***بر*** X ***یک به‌یک، و*** T ***در هر نقطهٔ*** X ***مشتقپذیر باشد؛***

(سه) $m\big(T(V-X)\big) = 0$.

در این صورت، اگر قرار دهیم $Y = T(X)$، ***به‌ازای هر*** $f: R^k \to [0, \infty]$ ***اندازه‌پذیر داریم***

$$\int_Y f\,dm = \int_X (f \circ T)\,|J_T|\,dm \cdot \qquad (1)$$

احتمالاً جالبترین حالت $X = V$ است. در رابطه با شرط (سه)، این شرط مثلاً وقتی $m(V-X) = 0$ و T در مفروضات لم ۲۵.۷ بر $V-X$ صدق می‌کند برقرار است.

برهان با برهان (پ) → (ب) در قضیهٔ ۱۸.۷ نکات مشترکی دارد.

در این برهان تمیز گذاردن بین مجموعه‌های بورل و مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ اهمیت خواهد داشت. $\sigma-$ جبر تمام زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ R^k را با $\mathfrak{M}$ نشان می‌دهیم.

برهان. برهان را به‌سه مرحلهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

(یک) ***هرگاه*** $E \in \mathfrak{M}$ ***و*** $E \subset V$، ***آنگاه*** $T(E) \in \mathfrak{M}$؛

(دو) ***به‌ازای هر*** $E \in \mathfrak{M}$،

$$m\big(T(E \cap X)\big) = \int_X \chi_E\,|J_T|\,dm;$$

(سه) ***به‌ازای هر*** $A \in \mathfrak{M}$،

$$\int_Y \chi_A\,dm = \int_X (\chi_A \circ T)\,|J_T|\,dm \cdot$$

هرگاه $E_0 \in \mathfrak{M}$، $E_0 \subset V$، و $m(E_0) = 0$، آنگاه، بنابر (سه)، $m\big(T(E_0 - X)\big) = 0$، و

بنابر لم ۲۵.۷، $m\big(T(E_\circ \cap X)\big) = \circ$. لذا $m\big(T(E_\circ)\big) = \circ$.

هرگاه $E_1 \subset V$ یک F_σ باشد، آنگاه E_1، $\sigma-$ فشرده است؛ درنتیجه $T(E_1)$، $\sigma-$ فشرده است زیرا T پیوسته می‌باشد. لذا $T(E_1) \in \mathfrak{M}$.

چون هر $E \in \mathfrak{M}$ اجتماع یک F_σ و یک مجموعه از اندازهٔ ∘ است (قضیهٔ ۲۰.۲)، قسمت (یک) ثابت می‌شود.

برای اثبات (دو) فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت بوده و قرار می‌دهیم

$$V_n = \{x \in V : |T(x)| < n\} \quad \text{و} \quad X_n = X \cap V_n \cdot \tag{۲}$$

به‌خاطر (یک) می‌توان تعریف کرد

$$\mu_n(E) = m\big(T(E \cap X_n)\big) (E \in \mathfrak{M}) \cdot \tag{۳}$$

چون T بر X_n یک به‌یک است، جمعی شمارشپذیر بودن m نشان می‌دهد که μ_n یک اندازه بر $\mathfrak{M}$ است. همچنین μ_n کراندار است (این دلیل تعویض موقت X با X_n بوده است)، و با کاربرد دیگری از لم ۲۵.۷ داریم $\mu_n \ll m$.

لذا قضیهٔ ۸.۷ به‌ما می‌گوید که $(D\mu_n)(x)$ ت. هـ. $[m]$ وجود دارد، $D\mu_n \in L^1(m)$، و

$$\mu_n(E) = \int_E (D\mu_n)\, dm \; (E \in \mathfrak{M}) \cdot \tag{۴}$$

حال حکم می‌کنیم که

$$(D\mu_n)(x) = |J_T(x)| \; (x \in X_n) \cdot \tag{۵}$$

برای مشاهدهٔ این امر، $x \in X_n$ را ثابت گرفته و توجه می‌کنیم که به‌ازای جمیع $r > \circ$ های به‌قدر کافی کوچک، $B(x,r) \subset V_n$ زیرا V_n باز است. چون $V_n - X_n \subset V - X$، فرض (سه) به‌ما توان تعویض X_n با V_n در (۳) بدون تغییر $\mu_n(E)$ را می‌دهد. لذا، به‌ازای $r > \circ$ کوچک،

$$\mu_n\big(B(x,r)\big) = m\Big(T\big(B(x,r)\big)\Big) \cdot \tag{۶}$$

اگر طرفین (۶) را بر $m\big(B(x,r)\big)$ تقسیم کرده و از قضیهٔ ۲۴.۷ و فرمول ۲۲.۷ (۶) استمداد بطلبیم، رابطهٔ (۵) نصیبمان خواهد شد.

چون رابطهٔ (۳) ایجاب می‌کند که $\mu_n(E) = \mu_n(E \cap X_n)$، پس از روابط (۳)، (۴)، و (۵) نتیجه می‌شود که

$$m\big(T(E \cap X_n)\big) = \int_{X_n} \chi_E \, |J_T| \, dm \; (E \in \mathfrak{M}) \cdot \tag{۷}$$

اگر قضیهٔ همگرایی یکنوا را بر (۷) اعمال و فرض کنیم $n \to \infty$، قسمت (دو) به‌دست می‌آید.

برهان (سه) را با این فرض که A یک مجموعهٔ بورل در R^k است شروع می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$E = T^{-1}(A) = \{x \in V : T(x) \in A\} \tag{۸}$$

در این صورت $\chi_E = \chi_A \circ T$. چون χ_A یک تابع بورل و T پیوسته است، χ_E یک تابع بورل می‌باشد (قضیهٔ ۱.۱۲)؛ درنتیجه $E \in \mathfrak{M}$. همچنین

$$T(E \cap X) = A \cap Y \qquad (۹)$$

که بنابر (دو) ایجاب می‌کند که

$$\int_Y \chi_A \, dm = m\big(T(E \cap X)\big) = \int_X (\chi_A \circ T)\, |J_T|\, dm \cdot \qquad (۱۰)$$

بالأخره اگر $N \in \mathfrak{M}$ و $m(N) = 0$، یک مجموعهٔ بورل مانند $A \supset N$ با $m(A) = 0$ وجود دارد. رابطهٔ (۱۰) به‌ازای این A نشان می‌دهد که $(\chi_A \circ T)\, |J_T| = 0$ ت. هـ. $[m]$. چون $0 \le \chi_N \le \chi_A$، پس هر دو انتگرال (۱۰) در صورت تعویض A با N مساوی ۰ اند. چون هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ اجتماع از هم‌جدایی از یک مجموعهٔ بورل و یک مجموعه از اندازهٔ ۰ است، رابطهٔ (۱۰) به‌ازای هر $A \in \mathfrak{M}$ برقرار می‌باشد. این قسمت (سه) را ثابت خواهد کرد.

حال که قسمت (سه) را داریم، واضح است که رابطهٔ (۱) به‌ازای هر تابع **سادهٔ** اندازه‌پذیر لبگ نامنفی f برقرار است. کاربرد دیگری از قضیهٔ همگرایی یکنوا برهان را تمام خواهد کرد.

توجه کنید که ما ثابت نکرده‌ایم که $f \circ T$ به‌ازای هر f اندازه‌پذیر لبگ اندازه‌پذیر لبگ است. لازم نیست چنین باشد؛ ر.ک. تمرین ۸. ما فقط اندازه‌پذیری لبگ حاصل‌ضرب $(f \circ T)\, |J_T|$ را به‌ثبوت رسانده‌ایم.

اینک حالت خاصی از قضیهٔ فوق را بیان می‌داریم:

فرض کنیم $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ ***ب م پ و یکنوا بوده،*** $\varphi(a) = \alpha$، $\varphi(b) = \beta$، ***و*** $f \ge 0$ ***اندازه‌پذیر لبگ باشد. در این صورت***

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\, \varphi'(x)\, dx \cdot \qquad (۱۱)$$

برای استنتاج این حالت از قضیهٔ ۲۶.۷ قرار دهید $V = (a, b)$ و $T = \varphi$ و فرض کنید Ω اجتماع بازه‌های باز ماکزیمالی باشد که φ بر آنها (در صورت وجود) ثابت است و X مجموعهٔ تمام $x \in V - \Omega$ هایی باشد که در آنها $\varphi'(x)$ موجود (و متناهی) است.

تمرینات

۱. نشان دهید که در هر نقطهٔ لبگ $f \in L^1(R^k)$ داریم $|f(x)| \le (Mf)(x)$.

۲. به‌ازای $\delta > 0$ فرض کنید $I(\delta)$ بازهٔ $(-\delta, \delta) \subset R^1$ باشد. به‌ازای α و β ای که $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset R^1$ را طوری بسازید که حدود بالایی و پایینی

$$\frac{m\left(E \cap I(\delta)\right)}{۲\delta}$$

وقتی $\delta \to ۰$ به‌ترتیب β و α باشند. (قس. بخش ۱۲.۷.)

۳. فرض کنید E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر از اعداد حقیقی با دوره‌های تناوب بدلخواه کوچک باشد. این به‌زبان صریح یعنی اعداد مثبتی مانند p_i وجود دارند که وقتی $i \to \infty$ به ۰ همگرایند و

$$E+p_i = E \; (i = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot$$

ثابت کنید E یا متممش از اندازهٔ ۰ است. **راهنمایی.** $\alpha \in R^۱$ را اختیار کرده، به‌ازای $x > \alpha$ قرار دهید $F(x) = m(E \cap [\alpha, x])$، و نشان دهید که اگر $\alpha+p_i < x < y$،

$$F(x+p_i) - F(x-p_i) = F(y+p_i) - F(y-p_i) \cdot$$

از این چه نتیجه‌ای راجع به $F'(x)$ به‌ازای $m(E) > ۰$ می‌توان گرفت؟

۴. t را **دورهٔ تناوب** تابع f بر $R^۱$ نامند اگر به‌ازای هر $x \in R^۱$، $f(x+t) = f(x)$. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ حقیقی با دوره‌های تناوب s و t باشد که خارج قسمتشان s/t گنگ است. نشان دهید که ثابتی مانند c هست به‌طوری که $f(x) = c$ ت. هـ. ولی لازم نیست f ثابت باشد.

راهنمایی. تمرین ۳ را بر مجموعه‌های $\{f > \lambda\}$ اعمال کنید.

۵. اگر $A \subset R^۱$ و $B \subset R^۱$، تعریف کنید $A+B = \{a+b : b \in B \;\; و \;\; a \in A\}$ و فرض کنید $m(A) > ۰$ و $m(B) > ۰$. با کامل کردن برهان خلاصهٔ زیر ثابت کنید $A+B$ شامل یک بازهٔ باز است:

نقاطی مانند $a_۰$ و $b_۰$ وجود دارند که در آنها A و B دارای چگالی متری ۱ اند. $\delta > ۰$ ی کوچکی اختیار کرده و قرار دهید $c_۰ = a_۰ + b_۰$. به‌ازای هر ϵ (مثبت یا منفی) B_ϵ را مجموعهٔ تمام $c_۰ + \epsilon - b$ هایی تعریف کنید که $b \in B$ و $|b - b_۰| < \delta$. در این صورت $B_\epsilon \subset (a_۰ + \epsilon - \delta \,,\, a_۰ + \epsilon + \delta)$. اگر δ خوب انتخاب شود و $|\epsilon|$ به‌قدر کافی کوچک باشد، مجموعهٔ A مجموعهٔ B_ϵ را قطع می‌کند؛ درنتیجه‌به‌ازای $\epsilon_۰ > ۰$ ی، $A+B \supset (c_۰ - \epsilon_۰ \,,\, c_۰ + \epsilon_۰)$.

فرض کنید C مجموعهٔ «یکسومهای میانی» کانتور باشد و نشان دهید با آنکه $m(C) = ۰$، $C+C$ یک بازهٔ بسته است (همچنین ر.ک. تمرین ۱۹ در فصل ۹.)

۶. فرض کنید G زیرگروهی از $R^۱$ (نسبت به‌جمع) بوده، $G \neq R^۱$، و G اندازه‌پذیر لبگ باشد. ثابت کنید $m(G) = ۰$.

راهنمایی. از تمرین ۵ استفاده نمایید.

۷. تابع یکنوای پیوستهٔ f بر $R^۱$ را طوری بسازید که $f'(x) = ۰$ ت. هـ. ولی f بر هیچ بازهٔ بازی ثابت نباشد.

۸. فرض کنید $V=(a,b)$ یک بازهٔ باز کراندار در R^1 باشد. بازه‌های باز $W_n \subset V$ را طوری اختیار کنید که اجتماعشان W در V چگال بوده و مجموعهٔ $K=V-W$ دارای $m(K)>0$ باشد. توابع پیوستهٔ φ_n را طوری بگیرید که خارج W_n داشته باشیم $\varphi_n(x)=0$ و در W_n داشته باشیم $0<\varphi_n(x)<2^{-n}$. با فرض $\varphi=\Sigma\varphi_n$ و تعریف

$$T(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt \quad (a<x<b),$$

احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) T در مفروضات قضیهٔ ۲۶.۷ به‌ازای $X=V$ صدق می‌کند؛

(ب) T' پیوسته است، $T'(x)=0$ بر K، و $m\big(T(K)\big)=0$؛

(پ) هرگاه E زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیری از K باشد (ر.ک. قضیهٔ ۲۲.۲) و $A=T(E)$، آنگاه χ_A اندازه‌پذیر لبگ است ولی $\chi_A \circ T$ چنین نیست.

(ت) توابع φ_n را می‌توان طوری اختیار کرد که T ی حاصل یک همانریختی ***بی‌نهایت بار مشتقپذیر*** از V به‌روی بازهٔ بازی در R^1 بوده و (پ) هنوز برقرار باشد.

۹. فرض کنید $0<\alpha<1$. t را طوری اختیار کنید که $t^\alpha=2$. در این صورت $t>2$ و ساختن مذکور در مثال (ب) در بخش ۱۶.۷ را می‌توان با $\delta_n=(2/t)^n$ انجام داد. نشان دهید که تابع حاصل f متعلق به $\mathrm{Lip}\,\alpha$ بر $[0,1]$ است.

۱۰. اگر $f\in \mathrm{Lip}\,1$ بر $[a,b]$، ثابت کنید f به‌طور مطلق پیوسته است و $f'\in L^\infty$.

۱۱. فرض کنید $1<p<\infty$، f بر $[a,b]$ به‌طور مطلق پیوسته بوده، $f'\in L^p$، و $\alpha=1/q$ که در آن q مزدوج نمایی p است. ثابت کنید $f\in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

۱۲. فرض کنید $\varphi:[a,b]\to R^1$ نانزولی باشد.

(آ) نشان دهید که یک f نانزولی و از چپ پیوسته بر $[a,b]$ هست که $\{f\neq\varphi\}$ حداکثر شمارشپذیر است. [از چپ پیوسته یعنی: هرگاه $a<x\le b$ و $\epsilon>0$، آنگاه $\delta>0$ ای هست به‌طوری که هروقت $0<t<\delta$، $|f(x)-f(x-t)|<\epsilon$.]

(ب) با تقلید از برهان قضیهٔ ۱۸.۷ نشان دهید که اندازهٔ بورل مثبتی مانند μ بر $[a,b]$ هست که

$$f(x)-f(a)=\mu([a,x)) \quad (a\le x\le b)\cdot$$

(پ) از قسمت (ب) نتیجه بگیرید که $f'(x)$ ت. هـ. $[m]$ وجود دارد، $f'\in L^1(m)$، و

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt+s(x) \quad (a\le x\le b)$$

که در آن s نانزولی بوده و $s'(x)=0$ ت. هـ. $[m]$.

(ت) نشان دهید که $\mu\perp m$ اگر و فقط اگر $f'(x)=0$ ت. هـ. $[m]$، و $\mu\ll m$ اگر و فقط اگر f بر $[a,b]$ ب م پ باشد.

(ث) ثابت کنید $\varphi'(x)=f'(x)$ ت. هـ. $[m]$.

۱۳. فرض کنید BV ردهٔ تمام fهایی بر $[a,b]$ باشد که بر $[a,b]$ با تغییر کراندار بـه‌صورت تعریف شده بعد از قضیهٔ ۱۹.۷ می‌باشند. احکام زیر را ثابت نمایید.

(آ) هر تابع کراندار یکنوا بر $[a,b]$ در BV است.

(ب) اگر $f\in BV$ حقیقی باشد، توابع یکنوای کرانداری مانند f_1 و f_2 چنان وجود دارنـد کـه $f=f_1-f_2$.

راهنمایی. از برهان قضیهٔ ۱۹.۷ تقلید کنید.

(پ) هرگاه $f\in BV$ از چپ پیوسته باشد، آنگاه f_1 و f_2 در (ب) را می‌توان طوری گرفت که آنها نیز از چپ پیوسته باشند.

(ت) هرگاه $f\in BV$ از چپ پیوسته باشد، آنگاه یک اندازهٔ بورل مانند μ بر $[a,b]$ هست که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$f(x)-f(a)=\mu([a,x)) \quad (a\le x\le b)\cdot$$

$\mu \ll m$ اگر و فقط اگر f بر $[a,b]$ ب م پ باشد.

(ث) هر $f\in BV$ ت. هـ. $[m]$ مشتقپذیر است و $f'\in L^1(m)$.

۱۴. نشان دهید که حاصل‌ضرب دو تابع به‌طور مطلق پیوسته بر $[a,b]$ به‌طور مطلق پیوسته است. با استفاده از این امر، قضیه‌ای راجع به‌انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌دست آورید.

۱۵. تابع یکنوای f بر R^1 را طوری بسازید که $f'(x)$ به‌ازای هر $x\in R^1$ (به‌طور متناهی) موجود باشد ولی f' تابع پیوسته‌ای نباشد.

۱۶. فرض کنید $E\subset[a,b]$ و $m(E)=0$. یک تابع یکنوای به‌طور مطلق پیوسته مانند f بر $[a,b]$ را طوری بسازید که در هر $x\in E$، $f'(x)=\infty$.

راهنمایی. $E\subset\bigcap V_n$، V_n باز است، و $m(V_n)\subset 2^{-n}$. حال مجموع توابـع مشخـص ایـن مجموعه‌ها را در نظر بگیرید.

۱۷. فرض کنید $\{\mu_n\}$ دنباله‌ای از اندازه‌های بورل مثبت بر R^k بوده و

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E)\cdot$$

همچنین $\mu(R^k)<\infty$. نشان دهید که μ یک اندازهٔ بورل است. رابطهٔ بین تجزیه‌های لبگ μ_n و μ چیست؟ ثابت کنید

$$(D\mu)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(D\mu_n)(x) \quad \text{ت. هـ. } [m]$$

و قضایای نظیر را برای دنباله‌های $\{f_n\}$ از توابع نانزولی مثبت بر R^1 و مجموعهایشان $f=\Sigma f_n$ به‌دست آورید.

۱۸. فرض کنید ۱ = $\varphi_\circ(1)$ بر $(\circ, 1]$ و ۱− = $\varphi_\circ(t)$ بر $(1, 2]$. $\varphi_\circ$ را به R^1 طوری وسعت دهید که دارای دورهٔ تناوب ۲ بشود، و تعریف کنید $\varphi_n(t) = \varphi_\circ(2^n t)$، $n = 1, 2, 3, \cdots$.
فرض کنید $\sum |c_n|^2 < \infty$ و ثابت کنید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t) \qquad (*)$$

به‌ازای تقریباً هر t همگراست.

تعبیر احتمالاتی. سری $\sum(\pm c_n)$ با احتمال ۱ همگراست.

پیشنهاد. $\{\varphi_n\}$ بر $[\circ, 1]$ متعامدیکه است؛ درنتیجه (*) سری فوریهٔ $f \in L^2$ ای می‌باشد. هرگاه $a = j \cdot 2^{-N}$، $b = (j+1) \cdot 2^{-N}$، $a < t < b$، و $s_N = c_1\varphi_1 + \cdots + c_N\varphi_N$، آنگاه به‌ازای $n > N$

$$s_N(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b s_N dm = \frac{1}{b-a} \int_a^b s_n dm$$

و آخرین انتگرال، وقتی $n \to \infty$، به $\int_a^b f dm$ همگراست. نشان دهید که (*) تقریباً در هر نقطهٔ لبگ f به $f(t)$ همگرا می‌باشد.

۱۹. فرض کنید f بر R^1 پیوسته بوده، $f(x) > \circ$ اگر $\circ < x < 1$، و $f(x) = \circ$ در غیر این صورت. تعریف کنید

$$h_c(x) = \sup\{n^c f(nx) : n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

و ثابت کنید

(آ) اگر $\circ < c < 1$، h_c در $L^1(R^1)$ است؛

(ب) h_1 در L^1 ضعیف است ولی در $L^1(R^1)$ نیست؛

(پ) اگر $c > 1$، h_c در L^1 ضعیف نیست.

۲۰. (آ) طبق تعریف، مرز ∂E مجموعهٔ $E \subset R^2$ عبارت است از بست E منهای درون E. نشان دهید که هروقت $m(\partial E) = \circ$، E اندازه‌پذیر لبگ است.

(ب) فرض کنید E اجتماع گردایه‌ای (**احتمالاً شمارش‌ناپذیر**) از قرصهای **بسته** در R^2 باشد که شعاعهایشان دست کم یک است. با استفاده از (آ) نشان دهید که E اندازه‌پذیر لبگ می‌باشد.

(پ) نشان دهید که (ب) حتی وقتی شعاعها بدون قید باشند نیز برقرار است.

(ت) نشان دهید که بعضی از اجتماعهای قرصهای بسته به‌شعاع ۱ مجموعه‌های بورل نیستند. (ر.ک. بخش ۲.۲۱.)

(ث) آیا در این مسئله می‌توان قرصها را با مثلثها، مستطیلها، چندضلعیهای دلخواه، و غیره عوض کرد؟ خاصیت هندسی مربوطه چیست؟

۲۱. اگر f یک تابع حقیقی بر $[\circ, 1]$ بوده و

$$\gamma(t) = t + i f(t),$$

طول نمودار f طبق تعریف تغییر کل γ بر $[\circ, 1]$ است. نشان دهید که این طول متناهی است اگر و فقط اگر $f \in BV$. (ر.ک. تمرین ۱۳.) نشان دهید که اگر f به‌طور مطلق پیوسته باشد، این طول مساوی است با

$$\int_{\circ}^{1} \sqrt{1+[f'(t)]^{2}}\, dt \cdot$$

۲۲. (آ) فرض‌کنید f و تابع ماکزیمالش Mf در $L^{1}(R^{k})$ باشند و ثابت کنید $f(x) = \circ$ ت. هـ. $[m]$. **راهنمایی.** به‌هر $f \in L^{1}(R^{k})$ دیگر ثابتی مانند $c = c(f) > \circ$ چنان نظیر است که هروقت $|x|$ به‌قدر کافی بزرگ باشد،

$$(Mf)(x) \geq c\, |x|^{-k} \cdot$$

(ب) تعریف کنید $f(x) = x^{-1}(\log x)^{-2}$ اگر $\circ < x < \frac{1}{2}$ و $f(x) = \circ$ بر بقیهٔ R^{1}. در این صورت $f \in L^{1}(R^{1})$. نشان دهید که

$$(Mf)(x) \geq |2x \log(2x)|^{-1} \quad \left(\circ < x < 1/4\right);$$

درنتیجه $\int_{\circ}^{1} (Mf)(x)\, dx = \infty$.

۲۳. تعریف نقاط لبگ به‌صورت شده در بخش ۶.۷ در مورد تک‌تک توابع انتگرالپذیر است نه در مورد رده‌های هم‌ارزی مطرح شده در بخش ۱۰.۳. با این حال اگر $F \in L^{1}(R^{k})$ یکی از این رده‌های هم‌ارزی باشد، می‌توان نقطهٔ $x \in R^{k}$ را یک ***نقطهٔ لبگ*** F نامید اگر عدد مختلطی [که ما آن را $(SF)(x)$ می‌نامیم] موجود باشد به‌طوری که به‌ازای یک (و در نتیجه هر) $f \in F$،

$$\lim_{r \to \circ} \frac{1}{m(B_{r})} \int_{B(x,r)} |f - (SF)(x)|\, dm = \circ \cdot$$

$(SF)(x)$ را در نقاطی چون $x \in R^{k}$ که نقاط لبگ F نیستند $\circ$ می‌گیریم. حکم زیر را ثابت کنید: هرگاه $f \in F$ و x یک نقطهٔ لبگ f باشد، آنگاه x یک نقطهٔ لبگ F نیز هست و $f(x) = (SF)(x)$. لذا $SF \in F$.

بنابراین S عضوی از F را «انتخاب می‌کند» که دارای مجموعهٔ ***ماکزیمال*** از نقاط لبگ می‌باشد.

فصل هشت
انتگرالگیری بر فضاهای حاصل ضربی

این فصل به‌برهان و بحثی از قضیهٔ فوبینی راجع به‌انتگرالگیری از توابع دو متغیره اختصاص دارد. ابتدا قضیه را به‌شکل مجردش عنوان می‌کنیم.

اندازه‌پذیری بر حاصل ضربهای دکارتی

۱.۸ چند تعریف. اگر X و Y دو مجموعه باشند، ***حاصل ضرب دکارتی*** $X \times Y$ آنها مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (x, y) است که $x \in X$ و $y \in Y$. اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$، داریم $A \times B \subset X \times Y$. ما هر مجموعه به‌شکل $A \times B$ را یک ***مستطیل*** در $X \times Y$ می‌نامیم.

حال فرض کنیم $(X, \mathscr{S})$ و $(Y, \mathscr{T})$ دو فضای اندازه‌پذیر باشند. به‌یاد آورید که این یعنی $\mathscr{S}$ یک σ ـ جبر در X و $\mathscr{T}$ یک σ ـ جبر در Y است.

هر ***مستطیل اندازه‌پذیر*** مجموعه‌ای است به‌شکل $A \times B$ که در آن $A \in \mathscr{S}$ و $B \in \mathscr{T}$.

اگر $Q = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ که در آن هر R_i یک مستطیل اندازه‌پذیر بوده و به‌ازای $i \neq j$، $R_i \cap R_j = \varnothing$، گوییم $Q \in \mathscr{E}$ یعنی متعلق به‌ردهٔ تمام ***مجموعه‌های مقدماتی*** است.

$\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ کوچکترین σ ـ جبر در $X \times Y$ که شامل هر مستطیل اندازه‌پذیر است تعریف می‌شود.

ردهٔ یکنوای $\mathfrak{M}$ گردایه‌ای است ازمجموعه‌ها با خواص زیر: هرگاه به‌ازای $i = 1, 2, 3, \cdots$، $A_i \in \mathfrak{M}$، $B_i \in \mathfrak{M}$، $A_i \subset A_{i+1}$، $B_i \supset B_{i+1}$، و

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{و} \quad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \tag{۱}$$

آنگاه $A \in \mathfrak{M}$ و $B \in \mathfrak{M}$.

اگر $E \subset X \times Y$، $x \in X$، و $y \in Y$، تعریف می‌کنیم

$$E_x = \{y : (x,y) \in E\} \quad \text{و} \quad E^y = \{x : (x,y) \in E\}. \tag{۲}$$

ما E_x و E^y را به‌ترتیب xـ **بخش** و yـ **بخش** E می‌نامیم. توجه کنید که $E_x \subset Y$ و $E^y \subset X$.

۲.۸ قضیه. ***هرگاه*** $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$، ***آنگاه به‌ازای هر*** $x \in X$ ***و هر*** $y \in Y$، $E_x \in \mathscr{T}$ ***و*** $E^y \in \mathscr{S}$.

برهان. فرض کنیم Ω ردهٔ تمام $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$هایی باشد که به‌ازای هر $x \in X$، $E_x \in \mathscr{T}$. هرگاه $E = A \times B$، آنگاه $E_x = B$ اگر $x \in A$ و $E_x = \varnothing$ اگر $x \notin A$. لذا هر مستطیل اندازه‌پذیر تعلق به Ω دارد. چون $\mathscr{T}$ یک σ − جبر است، سه حکم زیر برقرارند. این احکام ثابت می‌کنند که Ω یک σ − جبر بوده و درنتیجه $\Omega = \mathscr{S} \times \mathscr{T}$.

(آ) $X \times Y \in \Omega$.

(ب) هرگاه $E \in \Omega$، آنگاه $(E^c)_x = (E_x)^c$؛ درنتیجه $E^c \in \Omega$.

(پ) هرگاه $E_i \in \Omega$ $(i = ۱, ۲, ۳, \cdots)$ و $E = \cup E_i$، آنگاه $E_x = \cup (E_i)_x$؛ درنتیجه $E \in \Omega$.

برهان درمورد E^y به‌همین نحو است.

۳.۸ قضیه. $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ ***کوچکترین ردهٔ یکنوایی است که شامل تمام مجموعه‌های مقدماتی می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{M}$ کوچکترین ردهٔ یکنوایی باشد که شامل $\mathscr{E}$ است. اثبات وجود این رده درست شبیه برهان قضیهٔ ۱۰.۱ است. چون $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ یک ردهٔ یکنواست، داریم $\mathfrak{M} \subset \mathscr{S} \times \mathscr{T}$.

اتحادهای

$$(A_۱ \times B_۱) \cap (A_۲ \times B_۲) = (A_۱ \cap A_۲) \times (B_۱ \cap B_۲),$$

$$(A_۱ \times B_۱) - (A_۲ \times B_۲) = [(A_۱ - A_۲) \times B_۱] \cup [(A_۱ \cap A_۲) \times (B_۱ - B_۲)]$$

نشان می‌دهند که اشتراک دو مستطیل اندازه‌پذیر مستطیلی اندازه‌پذیر است و تفاضلشان اجتماع دو مستطیل اندازه‌پذیر از هم جداست؛ درنتیجه یک مجموعهٔ مقدماتی می‌باشد. اگر $P \in \mathscr{E}$ و $Q \in \mathscr{E}$، به‌آسانی معلوم می‌شود که $P \cap Q \in \mathscr{E}$ و $P - Q \in \mathscr{E}$. چون

$$P \cup Q = (P - Q) \cup Q$$

و $(P - Q) \cap Q = \varnothing$، نیز داریم $P \cup Q \in \mathscr{E}$.

بــه‌ازای هـر $P\subset X\times Y$، $\Omega(P)$ را ردهٔ تـمام $Q\subset X\times Y$هـایی تـعریف مـی‌کنیم کـه $P-Q\in\mathfrak{M}$، $Q-P\in\mathfrak{M}$، و $P\cup Q\in\mathfrak{M}$. خواص زیر واضح می‌باشند:

(آ) $Q\in\Omega(P)$ اگر و فقط اگر $P\in\Omega(Q)$؛

(ب) چون $\mathfrak{M}$ یک ردهٔ یکنواست، هر $\Omega(P)$ نیز چنین است.

$P\in\mathscr{E}$ را ثابت می‌گیریم. نکات پیشگفته راجع به $\mathscr{E}$ نشان می‌دهند که به‌ازای هر $Q\subset\mathscr{E}$، $Q\in\Omega(P)$؛ درنتیجه $\mathscr{E}\subset\Omega(P)$، و (ب) ایجاب می‌کند که $\mathfrak{M}\subset\Omega(P)$.

حال $Q\in\mathfrak{M}$ را ثابت می‌گیریم. هم‌اکنون دیدیم که اگر $P\in\mathscr{E}$، $Q\in\Omega(P)$. بنابر (آ)، $P\in\Omega(Q)$؛ درنتیجه $\mathscr{E}\subset\Omega(Q)$، و اگر بار دیگر به (ب) متوسل شویم؛ $\mathfrak{M}\subset\Omega(Q)$ به‌دست می‌آید.

مطالب را جمعبندی می‌کنیم: هرگاه $P,Q\in\mathfrak{M}$، آنگاه $P-Q\in\mathfrak{M}$ و $P\cup Q\in\mathfrak{M}$.

بنابراین $\mathfrak{M}$ یک σـ جبر در $X\times Y$ می‌باشد:

(یک) $X\times Y\in\mathscr{E}$. لذا $X\times Y\in\mathfrak{M}$.

(دو) هرگاه $Q\in\mathfrak{M}$، آنگاه $Q^c\in\mathfrak{M}$ زیرا تفاضل هر دو عضو $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{M}$ است.

(سه) اگر به‌ازای $i=1,2,3,\cdots$، $P_i\in\mathfrak{M}$ و $P=\cup P_i$، قرار می‌دهیم

$$Q_n=P_1\cup\cdots\cup P_n\,.$$

چون $\mathfrak{M}$ تحت تشکیل اجتماعهای متناهی بسته است، $Q_n\in\mathfrak{M}$. و چـون $Q_n\subset Q_{n+1}$ و $P=\cup Q_n$، یکنوایی $\mathfrak{M}$ نشان می‌دهد که $P\in\mathfrak{M}$.

لذا $\mathfrak{M}$ یک σـ جبر است، $\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}\subset\mathscr{S}\times\mathscr{T}$، و (طبق تعریف) $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ کوچکترین σـ جبری است که شامل $\mathscr{E}$ می‌باشد. لذا $\mathfrak{M}=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

۴.۸ **تعریف.** بـه‌هر تـابع f بـر $X\times Y$ و هـر $x\in X$ تـابعی مـانند f_x مـربوط مـی‌کنیم کـه بـا $f_x(y)=f(x,y)$ تعریف می‌شود.

به‌همین نحو، اگر $y\in Y$، f^y تابع تعریف شده بر X با $f^y(x)=f(x,y)$ می‌باشد.

چون با سه σـ جبر $\mathscr{S}$، $\mathscr{T}$، و $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ سر و کار داریم، برای روشن بودن وضع قـید خواهیم کرد که «اندازه‌پذیری» به‌کدامیک از آنها اشاره دارد.

۵.۸ قضیه. *فرض کنیم f یک تابع $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ـ اندازه‌پذیر بر $X\times Y$ باشد.* *در این صورت*

(آ) *به‌ازای هر $x\in X$، f_x یک تابع $\mathscr{T}$ – اندازه‌پذیر است؛*

(ب) *به‌ازای هر $y\in Y$، f^y یک تابع $\mathscr{S}$ – اندازه‌پذیر است.*

برهان. به‌ازای هر مجموعهٔ باز V قرار می‌دهیم

$$Q=\{(x,y):f(x,y)\in V\}\,.$$

در این صورت $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ و

$$Q_x = \{y : f_x(y) \in V\} \cdot$$

قضیهٔ ۲.۸ نشان می‌دهد که $Q_x \in \mathscr{T}$ · این قسمت (آ) را ثابت می‌کند. اثبات قسمت (ب) به‌همین نحو است.

اندازه‌های حاصل ضربی

۶.۸ قضیه. *فرض کنیم* $(X, \mathscr{S}, \mu)$ *و* $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ *فضاهای اندازهٔ* σ *ـ متناهی باشند. همچنین* $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ · *هرگاه به‌ازای هر* $x \in X$ *و هر* $y \in Y$،

$$\varphi(x) = \lambda(Q_x) \quad \text{و} \quad \psi(y) = \mu(Q^y), \tag{۱}$$

آنگاه φ، $\mathscr{S}$ *ـ اندازه‌پذیر است،* ψ، $\mathscr{T}$ *ـ اندازه‌پذیر است، و*

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\lambda \cdot \tag{۲}$$

چند تذکر. فرضهای شده بر فضاهای اندازه صریحاً یعنی μ و λ به‌ترتیب اندازه‌های مثبت بر $\mathscr{S}$ و $\mathscr{T}$ اند، X اجتماع تعدادی شمارشپذیر مجموعهٔ از هم جدا مانند X_n با $\mu(X_n) < \infty$ است، و Y اجتماع تعدادی شمارشپذیر مجموعهٔ از هم جدا مانند Y_m با $\lambda(Y_m) < \infty$ می‌باشد.

قضیهٔ ۲.۸ نشان می‌دهد که تعاریف (۱) با معنی‌اند. چون

$$\lambda(Q_x) = \int_Y \chi_Q(x, y)\, d\lambda(y)\, (x \in X), \tag{۳}$$

با عبارت مشابهی برای $\mu(Q^y)$، نتیجهٔ (۲) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\int_X d\mu(x) \int_Y \chi_Q(x, y)\, d\lambda(y) = \int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_Q(x, y)\, d\mu(x) \cdot \tag{۴}$$

برهان. فرض کنیم Ω ردهٔ تمام $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ هایی باشد که به‌ازای آنها قضیه برقرار است. حکم می‌کنیم که Ω از چهار خاصیت زیر برخوردار است:

(آ) هر مستطیل اندازه‌پذیر تعلق به Ω دارد؛

(ب) هرگاه $Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \cdots$ و هر $Q_i \in \Omega$ و $Q = \cup Q_i$، آنگاه $Q \in \Omega$؛

(پ) هرگاه $\{Q_i\}$ گردایهٔ شمارشپذیر از هم جدایی از اعضای Ω بوده و $Q = \cup Q_i$، آنگاه $Q \in \Omega$؛

(ت) هرگاه $\mu(A) < \infty$، $\lambda(B) < \infty$، $A \times B \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$، $Q = \cap Q_i$، و به‌ازای $i = 1, 2, 3, \cdots$، $Q_i \in \Omega$، آنگاه $Q \in \Omega$ ·

هرگاه $Q = A \times B$ که در آن $A \in \mathscr{S}$ و $B \in \mathscr{T}$، آنگاه

$$\lambda(Q_x)=\lambda(B)\chi_A(x) \quad \text{و} \quad \mu(Q^y)=\mu(A)\chi_B(y)، \tag{۵}$$

و لذا هریک از انتگراهای (۲) مساوی $\mu(A)\lambda(B)$ می‌باشد. این امر (آ) را به‌دست می‌دهد.

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم به‌همان نحو که رابطهٔ (۱) φ و ψ را به Q مربوط کرده است φ_i و ψ_i به Q_i مربوط شده باشند. جمعی شمارشپذیر بودن μ و λ نشان می‌دهد که

$$\varphi_i(x)\to\varphi(x) \text{ ، } \psi_i(y)\to\psi(y) \ (i\to\infty)، \tag{۶}$$

همگرایی در هر نقطه صعودی است. چون فرض است که φ_i و ψ_i در قضیه صدق می‌کنند، قسمت (ب) از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود.

قسمت (پ) به‌ازای اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های از هم جدا واضح است چراکه تابع مشخص هر اجتماع از مجموعه‌های ***از هم جدا*** مجموع توابع مشخص آنهاست. اکنون حالت کلی (پ) از (ب) نتیجه خواهد شد.

اثبات (ت) شبیه (ب) است جز آنکه به‌جای قضیهٔ همگرایی یکنوا از قضیهٔ همگرایی تسلطی استفاده می‌شود. این کار بدلیل $\mu(A)<\infty$ و $\lambda(B)<\infty$ جایز است.

حال تعریف می‌کنیم

$$Q_{mn}=Q\cap(X_n\times Y_m)\,(m,n=۱,۲,۳,\cdots)\cdot \tag{۷}$$

فرض می‌کنیم $\mathfrak{M}$ ردهٔ تمام $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$هایی باشد که به‌ازای هر انتخاب از m و n، $Q_{mn}\in\Omega$. در این صورت (ب) و (ت) نشان می‌دهند که $\mathfrak{M}$ یک ردهٔ یکنواست؛ (آ) و (پ) نشان می‌دهند که $\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}$ ؛ وچون $\mathfrak{M}\subset\mathscr{S}\times\mathscr{T}$، قضیهٔ ۳.۸ ایجاب می‌کند که $\mathfrak{M}=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

لذا به‌ازای هر $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ و جمیع انتخابهای m و n، $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$. چون Q اجتماع مجموعه‌های Q_{mn} بوده و این مجموعه‌ها از هم جدایند، از قسمت (پ) نتیجه می‌شود که $Q\in\Omega$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۷.۸ تعریف. اگر $(X,\mathscr{S},\mu)$ و $(Y,\mathscr{T},\lambda)$ همانند قضیهٔ ۶.۸ بوده و $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$، تعریف می‌کنیم

$$(\mu\times\lambda)(Q)=\int_X\lambda(Q_x)\,d\mu(x)=\int_Y\mu(Q^y)\,d\lambda(y)\cdot \tag{۱}$$

تساوی انتگرالها در (۱) مضمون قضیهٔ ۶.۸ است. ما $\mu\times\lambda$ ***را حاصل‌ضرب*** اندازه‌های μ و λ می‌نامیم. اندازه بودن $\mu\times\lambda$ (یعنی جمعی شمارشپذیر بودن $\mu\times\lambda$ بر $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$) بی‌درنگ از قضیهٔ ۲۷.۱ نتیجه می‌شود.

همچنین ملاحظه می‌کنیم که $\mu\times\lambda$، σـ متناهی است.

قضیهٔ فوبینی

۸.۸ قضیه. *فرض می‌کنیم $(X, \mathscr{S}, \mu)$ و $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ دو فضای اندازهٔ σ ـ متناهی بوده و f یک تابع $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ ـ اندازه‌پذیر بر $X \times Y$ باشد.*

(آ) هرگاه $0 \leq f \leq \infty$ و

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\lambda \text{ ، } \psi(y) = \int_X f^y \, d\mu \quad (x \in X \text{ و } y \in Y)\text{،} \tag{۱}$$

آنگاه φ، $\mathscr{S}$ ـ اندازه‌پذیر و ψ، $\mathscr{T}$ ـ اندازه‌پذیر بوده و

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi \, d\lambda; \tag{۲}$$

(ب) هرگاه f مختلط بوده و

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x \, d\lambda \text{ و } \int_X \varphi^* \, d\mu < \infty \text{،} \tag{۳}$$

آنگاه $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.

(پ) هرگاه $f \in L^1(\mu \times \lambda)$، آنگاه به‌ازای تقریباً هر $x \in X$، $f_x \in L^1(\lambda)$ و به‌ازای تقریباً هر $y \in Y$، $f^y \in L^1(\mu)$. توابع φ و ψ که ت. هـ. با (۱) تعریف شده‌اند به‌ترتیب در $L^1(\mu)$ و $L^1(\lambda)$ بوده و رابطهٔ (۲) برقرار می‌باشد.

چند تذکر. انتگرالهای اول و آخر (۲) را می‌توان به‌شکل متداولتری نوشت:

$$\int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y) \, d\lambda(y) = \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \cdot \tag{۴}$$

اینها را «انتگرالهای مکرر» f می‌نامند. انتگرال میانی در (۲) را اغلب **انتگرال مضاعف** می‌خوانند.

از تلفیق (ب) و (پ) نتیجهٔ مفید زیر به‌دست می‌آید: *هرگاه f یک تابع $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ ـ اندازه‌پذیر بوده و*

$$\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x,y)| \, d\lambda(y) < \infty, \tag{۵}$$

آنگاه دو انتگرال مکرر (۴) متناهی و مساوی می‌باشند.

به‌عبارت دیگر، برای توابع $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ ـ اندازه‌پذیر f وقتی $f \geq 0$ و نیز وقتی یکی از انتگرالهای مکرر $|f|$ متناهی است می‌توان «ترتیب انتگرالگیری را عکس کرد».

برهان. ابتدا قسمت (آ) را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۵.۸، تعاریف φ و ψ با معنی‌اند. فرض کنیم $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ و $f = \chi_Q$. در این صورت، طبق تعریف ۷.۸، رابطهٔ (۲) همان حاصل قضیهٔ ۶.۸ است. لذا قسمت (آ) به‌ازای جمیع توابع نامنفی سادهٔ $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ ـ اندازه‌پذیر s

برقرار است. در حالت کلی دنباله‌ای از این توابع مانند s_n چنان وجود دارند که $\cdots \leq s_2 \leq s_1 \leq 0$ و در هر نقطهٔ $X \times Y$، $s_n(x, y) \to f(x, y)$. اگر به‌نحوی که φ به f مربوط شده بود φ_n به s_n مربوط شود، خواهیم داشت

$$\int_X \varphi_n \, d\mu = \int_{X \times Y} s_n \, d(\mu \times \lambda) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۶}$$

حال قضیهٔ همگرایی یکنوا در اعمال بر $(Y, \mathscr{F}, \lambda)$ نشان می‌دهد که به‌ازای هر $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $\varphi_n(x)$ به $\varphi(x)$ صعود می‌کند. لذا قضیهٔ همگرایی یکنوا مجدداً بر دو انتگرال (۶) قابل اعمال است و اولین تساوی (۲) به‌دست می‌آید. قسمت دوم (۲) با تعویض نقشهای x و y نتیجه می‌شود. این امر قسمت (آ) را به‌اتمام می‌رساند.

اگر قسمت (آ) را بر $|f|$ اعمال کنیم، خواهیم دید که (ب) درست می‌باشد.

کافی است قسمت (پ) را به‌ازای $L^1(\mu \times \lambda)$ **حقیقی** ثابت کنیم؛ حالت مختلط بعداً نتیجه می‌شود. اگر f حقیقی باشد، قسمت (آ) بر f^+ و f^- قابل اعمالند. فرض کنیم همانطور که φ در (۱) نظیر f بود، φ_1 و φ_2 نظیر f^+ و f^- باشند. چون $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ و $f^+ \leq |f|$ و قسمت (آ) برای f^+ برقرار است، معلوم می‌شود که $\varphi_1 \in L^1(\mu)$. به‌همین نحو $\varphi_2 \in L^1(\mu)$. چون

$$f_x = (f^+)_x - (f^-)_x \tag{۷}$$

به‌ازای هر x که $\varphi_1(x) < \infty$ و $\varphi_2(x) < \infty$ داریم $f_x \in L^1(\lambda)$ و چون φ_1 و φ_2 در $L^1(\mu)$ اند، این تقریباً به‌ازای هر x رخ می‌دهد. و در هر چنین x ی داریم $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. لذا $\varphi \in L^1(\mu)$. اما رابطهٔ (۲) با φ_1 و f^+ و با φ_2 و f^- به‌جای φ و f برقرار است. اگر معادلات حاصل را از هم کم کنیم، نیمی از (پ) را به‌دست می‌آوریم. نیمهٔ دیگر به‌همین نحو با f^y و ψ به‌جای f_x و φ ثابت خواهد شد.

۹.۸ چند مثال نقض. سه مثال زیر نشان می‌دهند که نمی‌توان مفروضات مختلف قضایای ۶.۸ و ۸.۸ را مرخص کرد.

(آ) فرض کنیم $X = Y = [0, 1]$، اندازهٔ لبگ بر $[0, 1] = \lambda = \mu$. $\{\delta_n\}$ را طوری می‌گیریم که $\cdots < \delta_3 < \delta_2 < \delta_1 = 0$ و $\delta_n \to 1$ و فرض می‌کنیم g_n یک تابع پیوستهٔ حقیقی با محافظ در (δ_n, δ_{n+1}) باشد به‌طوری که به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $\int_0^1 g_n(t)\, dt = 1$. تعریف می‌کنیم

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x) - g_{n+1}(x)] g_n(y) \cdot$$

توجه کنید که در هر نقطهٔ (x, y) حداکثر یک جمله در این مجموع مخالف ۰ است. لذا در تعریف f مشکل همگرایی نخواهیم داشت. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\int_{\circ}^{1} dx \int_{\circ}^{1} f(x,y)\,dy = 1 \neq \circ = \int_{\circ}^{1} dy \int_{\circ}^{1} f(x,y)\,dx\,;$$

درنتیجه، با آنکه هر دو انتگرال مکرر موجودند، قضیهٔ فوبینی فرو می‌ریزد. توجه کنید که f در این مثال جز در نقطهٔ $(1,1)$ پیوسته است ولی

$$\int_{\circ}^{1} dx \int_{\circ}^{1} |f(x,y)|\,dy = \infty \cdot$$

(ب) فرض کنیم $X = Y = [\circ, 1]$، $\mu =$ اندازهٔ لبگ بر $[\circ, 1]$، $\lambda =$ اندازهٔ شمارشی بر Y، و قرار می‌دهیم $f(x,y) = 1$ اگر $x = y$ و $f(x,y) = \circ$ اگر $x \neq y$. در این صورت به‌ازای هر x و y در $[\circ, 1]$،

$$\int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \circ \quad \text{و} \quad \int_Y f(x,y)\,d\lambda(y) = 1\,;$$

درنتیجه

$$\int_Y d\lambda(y) \int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \circ \neq 1 = \int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y)\,d\lambda(y) \cdot$$

این بار شکست به‌خاطر σـ متناهی نبودن λ است.

ملاحظه می‌کنیم که اگر $\mathscr{S}$ ردهٔ تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ در $[\circ, 1]$ بوده و $\mathscr{T}$ از تمام زیرمجموعه‌های $[\circ, 1]$ تشکیل شده باشد، تابع f اما $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ـ اندازه‌پذیر است. برای مشاهدهٔ این امر توجه می‌کنیم که $f = \chi_D$ که در آن D قطر مربع یکه است. به‌ازای n مفروض قرار می‌دهیم

$$I_j = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

و

$$Q_n = (I_1 \times I_1) \cup (I_2 \times I_2) \cup \cdots \cup (I_n \times I_n) \cdot$$

در این صورت Q_n اجتماعی متناهی از مستطیلهای اندازه‌پذیر است و $D = \cap Q_n$.

(پ) در مثالهای (آ) و (ب) شکست قضیهٔ فوبینی به‌این خاطر بود که تابع یا فضا «خیلی بزرگ» بودند. حال به‌نقش اندازه‌پذیری f **نسبت به σـ جبر $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$** می‌پردازیم.

برای طرح دقیقتر مسئله فرض می‌کنیم $\mu(X) = \lambda(Y) = 1$، $\circ \leq f \leq 1$ (درنتیجه از «بزرگی» اجتناب می‌کنیم). همچنین به‌ازای هر x و هر y، f_x، $\mathscr{T}$ ـ اندازه‌پذیر و f^y، $\mathscr{S}$ ـ اندازه‌پذیر باشند. و نیز φ، $\mathscr{S}$ ـ اندازه‌پذیر و ψ، $\mathscr{T}$ ـ اندازه‌پذیر بوده و φ و ψ همانند در ۸.۸ (۱) تعریف شده باشند. در این صورت $\circ \leq \varphi \leq 1$، $\circ \leq \psi \leq 1$، و هر دو انتگرال مکرر متناهی‌اند. (توجه کنید که برای **تعریف** انتگرالهای مکرر هیچ ارجاعی به‌اندازه‌های حاصل ضربی لازم نیست.)

آیا می‌توان تساوی دو انتگرال مکرر f را نتیجه گرفت؟

جواب (که شاید تعجب‌آور باشد) منفی است.

در مثال زیر [منسوب به‌سیرپنسکی ($Sierpinski$)]

$$(X, \mathscr{S}, \mu) = (Y, \mathscr{F}, \lambda) = [0, 1]$$

را با اندازهٔ لبگ اختیار می‌کنیم. ساختن تابع فرض پیوستار است و نتیجه‌ای است از این فرض که یک نگاشت یک به‌یک مانند j از بازهٔ بستهٔ یکهٔ $[0, 1]$ به‌روی مجموعهٔ خوش ترتیبی مانند W هست به‌طوری که $j(x)$، به‌ازای هر $x \in [0, 1]$، دارای تعدادی حداکثر شمارش‌پذیر سابق در W است. با قبول این امر، فرض می‌کنیم Q مجموعهٔ تمام (x, y)هایی در مربع یکه باشد که $j(x)$ پیش از $j(y)$ در W است. به‌ازای هر $x \in [0, 1]$، Q_x شامل تمام جز تعدادی شمارشپذیر نقاط در $[0, 1]$ است. و به‌ازای هر $y \in [0, 1]$، Q^y شامل تعدادی حداکثر شمارشپذیر از نقاط $[0, 1]$ می‌باشد. اگر $f = \chi_Q$، f_x و f^y اندازه‌پذیر بورل بوده و به‌ازای هر x و هر y،

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy = 1 \quad \text{و} \quad \psi(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx = 0 \cdot$$

لذا

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx \cdot$$

تتمیم اندازه‌های حاصل ضربی

۱۰.۸. اگر $(X, \mathscr{S}, \mu)$ و $(Y, \mathscr{F}, \lambda)$ فضاهای اندازهٔ تام باشند، لازم نیست $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{F}, \mu \times \lambda)$ تام باشد. این امر غیرعادی نیست:

فرض کنیم مجموعه‌ای مانند $A \in \mathscr{S}$ موجود باشد که $A \neq \varnothing$ و $\mu(A) = 0$ و نیز مجموعه‌ای مانند $B \subset Y$ موجود باشد که $B \notin \mathscr{F}$. در این صورت $A \times B \subset A \times Y$ و $(\mu \times \lambda)(A \times Y) = 0$ ولی $A \times B \notin \mathscr{S} \times \mathscr{F}$. (حکم اخیر از قضیهٔ ۲.۸ نتیجه می‌شود.)

مثلاً اگر $\mu = \lambda = m_1$ (اندازهٔ لبگ بر R^1)، فرض می‌کنیم A از یک نقطه تشکیل شده باشد، و B مجموعهٔ اندازه‌ناپذیری در R^1 باشد. لذا $m_1 \times m_1$ یک اندازهٔ تام نیست. بخصوص $m_1 \times m_1$ مساوی m_2 نیست زیرا اندازهٔ اخیر، طبق ساختارش، تام است. اما m_2 **تتمیم** $m_1 \times m_1$ است. این نتیجه را می‌توان به‌ابعاد دلخواه تعمیم داد:

۱۱.۸ **قضیه.** *فرض کنیم m_k اندازهٔ لبگ بر R^k باشد. هرگاه $k = r + s$ که در آن $r \geq 1$ و $s \geq 1$، آنگاه m_k تتمیم اندازهٔ حاصل ضربی $m_r \times m_s$ می‌باشد.*

برهان. فرض می‌کنیم $\mathscr{B}_k$ و $\mathfrak{M}_k$ به‌ترتیب σ ـ جبرهای تمام مجموعه‌های بورل و تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ در R^k باشند. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\mathscr{B}_k \subset \mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{M}_k \cdot \qquad (1)$$

هر kـ سلول تعلق به $\mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s$ دارد. σـ جبر تولید شده به‌وسیلهٔ kـ سلولها مساوی $\mathscr{B}_k$ است. لذا $\mathscr{B}_k \subset \mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s$ · حال فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}_r$ و $F \in \mathfrak{M}_s$ · به‌آسانی از قضیهٔ ۲۰.۲ (ب) معلوم می‌شود که هر دوی $E \times R^s$ و $R^r \times F$ تعلق به $\mathfrak{M}_k$ دارند. همین مطلب در مورد اشتراکشان $E \times F$ درست است. پس داریم $\mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{M}_k$ ·

$Q \in \mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت $Q \in \mathfrak{M}_k$ · لذا مجموعه‌هایی مانند P_1 و P_2 در $\mathscr{B}_k$ وجود دارند که $P_1 \subset Q \subset P_2$ و $m_k(P_2 - P_1) = 0$ · هر دوی m_k و $m_r \times m_s$ پایای انتقال اندازه‌های بورل بر R^kاند. آنها به‌هر kـ سلول مقدار یکسانی نسبت می‌دهند. لذا، طبق قضیهٔ ۲۰.۲ (ت)، بر $\mathscr{B}_k$ توافق دارند. بخصوص

$$(m_r \times m_s)(Q-P_1) \leq (m_r \times m_s)(P_2-P_1) = m_k(P_2-P_1) = 0\ ;$$

و درنتیجه

$$(m_r \times m_s)(Q) = (m_r \times m_s)(P_1) = m_k(P_1) = m_k(Q)\ \cdot$$

لذا $m_r \times m_s$ با m_k بر $\mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s$ توافق خواهد داشت. بنابراین $\mathfrak{M}_k$، $(m_r \times m_s)$ ـ تتمیم $\mathfrak{M}_r \times \mathfrak{M}_s$ است، و این حکم قضیه می‌باشد.

این بخش را با صورت دیگری از قضیهٔ فوبینی که در پرتو قضیهٔ ۱۱.۸ مورد توجه خاص است پایان می‌بخشیم.

۱۲.۸ قضیه. *فرض می‌کنیم $(X, \mathscr{S}, \mu)$ و $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ فضاهای اندازهٔ σـ متناهی باشند. همچنین $^*(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ تتمیم $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ نسبت به‌اندازهٔ $\mu \times \lambda$ باشد. و نیز f یک تابع $^*(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ـ اندازه‌پذیر بر $X \times Y$ باشد. در این صورت قضیهٔ ۸.۸ کلاً برقرار است جز آنکه $\mathscr{T}$ ـ اندازه‌پذیری f_x را فقط می‌توان برای تقریباً هر $x \in X$ عنوان کرد؛ درنتیجه $\varphi(x)$ فقط ت . هـ. $[\mu]$ به‌وسیلهٔ ۸.۸ (۱) تعریف می‌شود. حکم مشابهی برای f^y و ψ برقرار است.*

برهان این قضیه تابع دو لم زیر است:

لم ۱. *فرض کنیم ν یک اندازهٔ مثبت بر σـ جبر $\mathfrak{M}$، $^*\mathfrak{M}$ تتمیم $\mathfrak{M}$ نسبت به ν، و f یک تابع $^*\mathfrak{M}$ ـ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت یک تابع $\mathfrak{M}$ ـ اندازه‌پذیر مانند g موجود است به‌طوری‌که $f = g$ ت . هـ. $[\nu]$ ·*

(یک حالت خاص جالب وقتی است که ν اندازهٔ لبگ بر R^k بوده و $\mathfrak{M}$ ردهٔ تمام مجموعه‌های بورل در R^k باشد.)

لم ۲. *فرض کنیم h یک تابع $^*(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$ ـ اندازه‌پذیر بر $X \times Y$ باشد به‌طوری که $h = 0$ ت . هـ. $[\mu \times \lambda]$ · در این صورت، به‌ازای تقریباً هر $x \in X$، رابطهٔ $h(x,y) = 0$ به‌ازای*

تقریباً هر $y \in Y$ برقرار است. بخصوص h_x، به‌ازای تقریباً هر $x \in X$، $\mathscr{F}$ ـ اندازه‌پذیر می‌باشد. حکم مشابهی برای h^y برقرار می‌باشد.

اگر لمها را مفروض بگیریم، برهان قضیهٔ فوق بی‌درنگ حاصل است. اگر f همانند در قضیه باشد، لم ۱ (با $\nu = \mu \times \lambda$) نشان می‌دهد که $f = g + h$ که در آن $h = ۰$ ت. هـ. $[\mu \times \lambda]$ و g، $(\mathscr{S} \times \mathscr{F})$ ـ اندازه‌پذیر است. قضیهٔ ۸ . ۸ را درمورد g اعمال می‌کنیم. لم ۲ نشان می‌دهد که به‌ازای تقریباً هر x، $f_x = g_x$ ت. هـ. $[\lambda]$ و به‌ازای تقریباً هر y، $f^y = g^y$ ت. هـ. $[\mu]$ · لذا دو انتگرال مکرر f، و نیز انتگرال مضاعف، با انتگرالهای g یکی بوده و قضیه نتیجه می‌شود.

برهان لم ۱. فرض کنیم f، $\mathfrak{M}^*$ ـ اندازه‌پذیر بوده و $f \geq ۰$ · پس توابع ساده و $\mathfrak{M}^*$ ـ اندازه‌پذیری مانند $\cdots \leq s_۲ \leq s_۱ \leq s_۰ = ۰$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $s_n(x) \to f(x)$ · لذا $f = \Sigma (s_{n+۱} - s_n)$ · چون $s_{n+۱} - s_n$ ترکیبی خطی و متناهی از توابع مشخص است، ثابتهایی چون $c_i > ۰$ و مجموعه‌هایی مانند $E_i \in \mathfrak{M}^*$ وجود دارند به‌طوری که

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x) \quad (x \in X) \cdot$$

تعریف $\mathfrak{M}^*$ (ر.ک. قضیهٔ ۱ . ۳۶) نشان می‌دهد که مجموعه‌هایی مانند $A_i \in \mathfrak{M}$ و $B_i \in \mathfrak{M}$ وجود دارند به‌طوری که $A_i \subset E_i \subset B_i$ و $\upsilon(B_i - A_i) = ۰$. تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \sum_{i=۱}^{\infty} c_i \chi_{A_i}(x) \quad (x \in X) \cdot$$

در این صورت تابع g، $\mathfrak{M}$ ـ اندازه‌پذیر است و $g(x) = f(x)$ جز احتمالاً وقتی $x \in \cup (E_i - A_i) \subset \cup (B_i - A_i)$ · چون به‌ازای هر i، $\nu(B_i - A_i) = ۰$، نتیجه می‌گیریم که $g = f$ ت. هـ. $[\nu]$ · حالت کلی (f حقیقی یا مختلط) از این نتیجه می‌شود.

برهان لم ۲. فرض کنیم P مجموعهٔ تمام نقاطی در $X \times Y$ باشد که در آنها $h(x, y) \neq ۰$ · در این صورت $P \in (\mathscr{S} \times \mathscr{F})^*$ و $(\mu \times \lambda)(P) = ۰$ · لذا $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{F}$ ای هست به‌طوری که $P \subset Q$ و $(\mu \times \lambda)(Q) = ۰$ · بنابر قضیهٔ ۸ . ۶،

$$\int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = ۰ \qquad (۱)$$

فرض کنیم N مجموعهٔ تمام $x \in X$ هایی باشد که در آنها $\lambda(Q_x) > ۰$ · پس از (۱) نتیجه می‌شود که $\mu(N) = ۰$ · به‌ازای هر $x \notin N$، $\lambda(Q_x) = ۰$ · چون $P_x \subset Q_x$ و $(Y, \mathscr{F}, \lambda)$ یک فضای اندازهٔ تام است، اگر $x \notin N$، هر زیرمجموعهٔ P_x تعلق به $\mathscr{F}$ دارد. هرگاه $y \notin P_x$، آنگاه $h_x(y) = ۰$ · لذا، به‌ازای هر $x \notin N$، h_x، $\mathscr{F}$ ـ اندازه‌پذیر است و $h_x(y) = ۰$ ت. هـ. $[\lambda]$ ·

پیچشها

۱۳.۸. گاهی ناتهی بودن یک مجموعه با اثبات اینکه عملاً بزرگ است به‌ثبوت می‌رسد. البته واژهٔ «بزرگ» اشاره به‌خواص متفاوتی دارد. یکی از اینها (که نسبتاً خام است) اصلیت می‌باشد. یک نمونه از برهان آشنای وجود اعداد متعالی حاصل می‌شود: تنها تعدادی شمارشپذیر عدد جبری وجود دارد ولی تعداد اعداد حقیقی شمارش‌ناپذیر است. لذا مجموعهٔ اعداد حقیقی متعالی تهی نیست. کاربردهای قضیهٔ بئر مبتنی بر مفهوم توپولوژیک بزرگی است: G_δهـای چگال زیرمجموعه‌هایی «بزرگ» در یک فضای متری تام‌اند. نوع سوم بزرگی در نظریهٔ اندازه است. در یک فضای اندازه تهی نبودن یک مجموعه را می‌توان با اثبات اندازهٔ مثبت داشتن یا، حتی بهتر، اندازهٔ صفر داشتن متمم آن نشان داد. در این نوع استدلال اغلب قضیهٔ فوبینی ظاهر می‌شود.

مثلاً فرض می‌کنیم $f,g \times L^1(R^1)$، و فعلاً $f \geq 0$ و $g \geq 0$، و انتگرال زیر را درنظر می‌گیریم:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt \quad (-\infty < x < \infty) \cdot \tag{۱}$$

به‌ازای هر x ثابت، انتگرالده موجود در (۱) تابعی اندازه‌پذیر با برد در $[0, \infty]$ است؛ درنتیجه $h(x)$ توسط (۱) خوش تعریف است و $0 \leq h(x) \leq \infty$.

ولی آیا xی هست که $h(x) < \infty$؟ توجه کنید که انتگرالده موجود در (۱) به‌ازای هر x ثابت حاصل‌ضرب دو عضو L^1 است، و این حاصل‌ضرب همیشه در L^1 نیست. [**مثال.** $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ اگر $0 < x < 1$، و 0 در غیر این صورت.] قضیهٔ فوبینی جواب مثبت به‌ما می‌دهد. این قضیه درواقع نشان می‌دهد که $h \in L^1(R^1)$؛ درنتیجه $h(x) < \infty$ ت. هـ.

۱۴.۸ قضیه. ***فرض کنیم $f \in L^1(R^1)$ و $g \in L^1(R^1)$. در این صورت، به‌ازای تقریباً هر x،***

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y).g(y)|\,dy < \infty \cdot \tag{۱}$$

به‌ازای این x ها تعریف می‌کنیم

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy \cdot \tag{۲}$$

در این صورت $h \in L^1(R^1)$ و

$$\|h_1\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{۳}$$

که در آن

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \cdot \tag{۴}$$

h را **پیچش** f و g نامیده و می‌نویسیم $h = f * g$.

برهان. توابع بورلی مانند f_0 و g_0 چنان وجود دارند که $f=f_0$ ت. هـ. و $g=g_0$ ت. هـ. انتگرالهای (۱) و (۲) در تعویض f با f_0 و g با g_0 به‌ازای هر x بلاتغییرند. لذا از ابتدا می‌توان فرض کرد که f و g توابع بورل می‌باشند.

برای اعمال قضیهٔ فوبینی، ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع F با تعریف

$$F(x,y)=f(x-y)g(y) \tag{۵}$$

یک تابع بورل بر R^2 است.

توابع $\varphi: R^2 \to R^1$ و $\psi: R^2 \to R^1$ را با

$$\varphi(x,y)=x-y \quad \text{و} \quad \psi(x,y)=y \tag{۶}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $f(x-y)=(f\circ\varphi)(x,y)$ و $g(y)=(g\circ\psi)(x,y)$. چون φ و ψ توابع بورل‌اند، قضیهٔ ۱۲.۱ (ت) نشان می‌دهد که $f\circ\varphi$ و $g\circ\psi$ توابع بورل بر R^2 می‌باشند. لذا حاصل ضربشان نیز چنین است. حال ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\,dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dx \tag{۷}$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1$$

زیرا، بنابر پایایی انتقال اندازهٔ لبگ، به‌ازای هر $y \in R^1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dx = \|f\|_1 . \tag{۸}$$

لذا $F\in L^1(R^2)$ و قضیهٔ فوبینی وجود انتگرال (۲) را به‌ازای تقریباً هر $x\in R^1$ ایجاب می‌کند و $h\in L^1(R^1)$. بالأخره، بنابر (۷)،

$$\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|\,dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

این رابطهٔ (۳) را به‌دست داده و برهان را تمام می‌سازد.

پیچشها نقش مهمی در فصل ۹ ایفا خواهند کرد.

توابع توزیع

۱۵.۸ تعریف. فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت σـ متناهی بر σـ جبری در مجموعهٔ X باشد. همچنین $f: X \to [0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد. تابعی که به‌هر $t\in[0,\infty]$ عدد

$$\mu\{f>t\}=\mu(\{x\in X: f(x)>t\}) \tag{۱}$$

را منتسب می‌کند **تابع توزیع** f نام دارد. واضح است که این یک تابع یکنوا (نا صعودی) از t و لذا اندازه‌پذیر بورل است.

یک دلیل برای معرفی توابع توزیع آن است که اینها تعویض انتگرالها روی X با انتگرالها روی $[\circ\,, \infty)$ را ممکن می‌سازند. فرمول

$$\int_X f d\mu = \int_\circ^\infty \mu\{f>t\}\,dt \qquad (۲)$$

حالت خاص $\varphi(t)=t$ قضیهٔ بعدی ماست. از این برای به‌دست آوردن خاصیت L^p توابع ماکزیمال که در فصل ۷ معرفی شدند استفاده خواهد شد.

۱۶.۸ قضیه. ***فرض کنیم f و μ همانند فوق بوده، $\varphi:[\circ\,,\infty]\to[\circ\,,\infty]$ یکنوا بوده، به‌ازای هر $T<\infty$ بر $[\circ\,,T]$ به‌طور مطلق پیوسته باشد، و $\varphi(\circ)=\circ$ و وقتی $t\to\infty$، $\varphi(t)\to\varphi(\infty)$. در این صورت***

$$\int_X (\varphi\circ f)\,d\mu = \int_\circ^\infty \mu\{f>t\}\,\varphi'(t)\,dt\,\cdot \qquad (۱)$$

برهان. فرض کنیم E مجموعهٔ تمام $(x,t)\in X\times[\circ\,,\infty)$ هایی باشد که $f(x)>t$. وقتی f ساده است، E اجتماعی متناهی از مستطیلهای اندازه‌پذیر بوده و لذا اندازه‌پذیر می‌باشد. اندازه‌پذیری E در حالت کلی از طریق تقریب متعارف f به‌وسیلهٔ توابع ساده نتیجه می‌شود (قضیهٔ ۱۷.۱). همانند بخش ۱.۸ قرار می‌دهیم

$$E^t=\{x\in X:(x,t)\in E\} \quad (\circ\le t<\infty)\,\cdot \qquad (۲)$$

در این صورت تابع توزیع f عبارت است از

$$\mu(E^t)=\int_X \chi_E(x,t)\,d\mu(x)\,\cdot \qquad (۳)$$

لذا، طبق قضیهٔ فوبینی، طرف راست (۱) مساوی است با

$$\int_\circ^\infty \mu(E^t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_X d\mu(x)\int_\circ^\infty \chi_E(x,t)\,\varphi'(t)\,dt\,\cdot \qquad (۴)$$

به‌ازای هر $x\in X$، $\chi_E(x,t)=۱$ اگر $t<f(x)$ و $\circ$ اگر $t\ge f(x)$. لذا انتگرال داخلی در (۴)، طبق قضیهٔ ۲۰.۷، برابر است با

$$\int_\circ^{f(x)} \varphi'(t)\,dt=\varphi(f(x))\,\cdot \qquad (۵)$$

حال رابطهٔ (۱) از روابط (۴) و (۵) نتیجه می‌شود.

۱۷.۸. یادآور می‌شویم که اگر $f\in L^1(R^k)$، تابع ماکزیمال Mf در L^1 ضعیف قرار دارد

(قضیهٔ ۴.۷). همچنین تخمین بدیهی

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \qquad (۱)$$

را داریم که به‌ازای هر $f\in L^\infty(R^k)$ معتبر است. مارچین کویچ (*Marcinkiewicz*) روشی ابداع کرده است که باآن می‌توان بین این دو حالت اکستریم «درونیابی» کرد و قضیهٔ زیر از هاردی ولیتلوود (*Littlewood*) (که به‌ازای $p=۱$ برقرار نیست؛ ر.ک. تمرین ۲۲ در فصل ۷) را اثبات نمود.

۱۸.۸ قضیه. هرگاه $۱<p<\infty$ **و** $f\in L^p(R^k)$**، آنگاه** $Mf\in L^p(R^k)$ ·

برهان. چون $Mf=M(|f|)$، می‌توان بدون صدمه زدن به‌کلیت فرض کرد $f\geq ۰$ · قضیهٔ ۴.۷ نشان می‌دهد که ثابتی مانند A فقط تابع بعد k وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $g\in L^۱(R^k)$،

$$m\{Mg>t\}\leq \frac{A}{t}\|g\|_۱ \cdot \qquad (۱)$$

در اینجا و تا آخر برهان $m=m_k$ یعنی اندازهٔ لبگ بر R^k.

ثابت $۰<c<۱$ را اختیار می‌کنیم تا بعداً کران بالایی خاصی را مینیمم سازد. به‌ازای هر $t\in(۰,\infty)$، f را به‌مجموع زیر تجزیه می‌کنیم:

$$f=g_t+h_t \qquad (۲)$$

که در آن

$$g_t(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر } f(x)>ct \\ ۰ & \text{اگر } f(x)\leq ct \end{cases} \qquad (۳)$$

در این صورت به‌ازای هر $x\in R^k$، $۰\leq h_t(x)\leq ct$ · لذا $h_t\in L^\infty$، $Mh_t\leq ct$، و

$$Mf\leq Mg_t+Mh_t\leq Mg_t+ct \cdot \qquad (۴)$$

اگر به‌ازای xی $(Mf)(x)>t$، داریم

$$(Mg_t)(x)>(۱-c)t \cdot \qquad (۵)$$

با فرض $E_t=\{f>ct\}$، روابط (۵)، (۱)، و (۳) ایجاب می‌کنند که

$$m\{Mf>t\}\leq m\{Mg_t>(۱-c)t\}\leq \frac{A}{(۱-c)t}\|g_t\|_۱$$

$$=\frac{A}{(۱-c)t}\int_{E_t} f\,dm \cdot$$

حال با استفاده از قضیهٔ ۱۶.۸ به‌ازای $X = R^k$، $\mu = m$، و $\varphi(t) = t^p$ می‌نویسیم

$$\int_{R^k} = (Mf)^p \, dm = p \int_0^\infty m\{Mf > t\} t^{p-1} dt \le \frac{Ap}{1-c} \int_0^\infty t^{p-2} dt \int_{E_t} f dm$$

$$= \frac{Ap}{1-c} \int_{R^k} f dm \int_0^{f/c} t^{p-2} dt = \frac{Apc^{1-p}}{(1-c)(p-1)} \int_{R^k} f^p dm$$

این قضیه را ثابت می‌کند. ولی، برای به‌دست آوردن یک ثابت مناسب، c را طوری می‌گیریم که آخرین عبارت مینیمم شود. این امر به‌ازای $c = (p-1)/p = 1/q$ رخ می‌دهد که در آن q مزدوج نمایی p است. به‌ازای این c داریم

$$c^{1-p} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^{p-1} < e,$$

و از محاسبات پیشین نامساوی

$$\| Mf \|_p \le C_p \| f \|_p \qquad (6)$$

نتیجه می‌شود که در آن $C_p = (A e p q)^{1/p}$

توجه کنید که وقتی $p \to \infty$، $C_p \to 1$، که با فرمول ۱۷.۸ (۱) توافق دارد، و وقتی $p \to 1$، $C_p \to \infty$.

تمرینات

۱. ردهٔ یکنوای $\mathfrak{M}$ در R^1 را طوری بیابید که $R^1 \in \mathfrak{M}$ و به‌ازای هر $A \in \mathfrak{M}$، $R^1 - A \in \mathfrak{M}$ ولی یک σ ـ جبر نباشد.

۲. فرض کنید f یک تابع حقیقی نامنفی اندازه‌پذیر لبگ بر R^1 بوده و $A(f)$ **مجموعهٔ عرضی** f باشد. این مجموعهٔ تمام نقاطی چون $(x, y) \in R^2$ است که $0 < y < f(x)$

(آ) آیا $A(f)$ به‌مفهوم دو بعدی اندازه‌پذیر لبگ است؟

(ب) اگر جواب قسمت (آ) مثبت باشد، آیا انتگرال f روی R^1 مساوی اندازهٔ $A(f)$ است؟

(پ) آیا نمودار f زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری از R^2 است؟

(ت) اگر جواب قسمت (پ) مثبت باشد، آیا اندازهٔ نمودار صفر است؟

۳. یک تابع پیوستهٔ مثبت مانند f در مربع یکهٔ باز در R^2 مثال بزنید که انتگرالش (نسبت به‌اندازهٔ لبگ) متناهی بوده ولی $\varphi(x)$ (با نمادهای قضیهٔ ۸.۸) به‌ازای $x \in (0, 1)$ ی نامتناهی باشد.

۴. فرض کنید $1 \le p \le \infty$، $f \in L^1(R^1)$، و $g \in L^p(R^1)$.

(آ) با تقلید از برهان قضیهٔ ۱۴.۸ نشان دهید که انتگرال معرف $(f * g)(x)$ به‌ازای تقریباً هر x موجود است، $f * g \in L^p(R^1)$، و

$$\| f * g \|_p \le \| f \|_1 \| g \|_p$$

(ب) نشان دهید که اگر $p = 1$ و اگر $p = \infty$، تساوی در (آ) می‌تواند برقرار باشد، و شرایط رخ

دادن این امر را پیدا نمایید.

(پ) فرض کنید $1 < p < \infty$ و تساوی در (آ) برقرار باشد. نشان دهید که $f = 0$ ت. هـ. یا $g = 0$ ت. هـ.

(ت) فرض‌کنید $1 \le p \le \infty$ و $\epsilon > 0$، و نشان دهید که $f \in L^1(R^1)$ای و $g \in L^p(R^1)$ای موجودند به‌طوری که

$$\|f * g\|_p > (1-\epsilon)\,\|f\|_1\,\|g\|_p$$

۵. فرض کنید M فضای باناخ تمام اندازه‌های بورل مختلط بر R^1 باشد. نرم در M عبارت است از $\|\mu\| = |\mu|(R^1)$. به‌هر مجموعهٔ بورل از $E \subset R^1$ مجموعهٔ

$$E_2 = \{(x,y) : x+y \in E\} \subset R^2$$

را مربوط سازید. اگر $\mu, \lambda \in M$، پیچش آنها $\mu * \lambda$ را تابع مجموعه‌ای

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_2)$$

به‌ازای هر مجموعهٔ بورل $E \subset R^1$ تعریف کنید. $\mu \times \lambda$ همانند تعریف ۷.۸ است.

(آ) ثابت کنید $\mu * \lambda \in M$ و $\|\mu * \lambda\| \le \|\mu\|\,\|\lambda\|$.

(ب) ثابت کنید $\mu * \lambda$ عبارت است از $\nu \in M$ای منحصربه‌فرد به‌طوری که به‌ازای هر $f \in C_0(R^1)$،

$$\int f\,d\nu = \int\int f(x+y)\,d\mu(x)\,d\lambda(y)$$

(همهٔ انتگرالها روی R^1 اند.)

(پ) ثابت کنید پیچش در M تعویضپذیر، شرکتپذیر، و پخشپذیر نسبت به‌جمع است.

(ت) فرمول

$$(\mu * \lambda)(E) = \int \mu(E-t)\,d\lambda(t)$$

را به‌ازای هر $\mu, \lambda \in M$ و هر مجموعهٔ بورل E ثابت کنید. در اینجا

$$E - t = \{x - t : \ x \in E\}$$

(ث) μ را **گسسته** گویند اگر μ بر یک مجموعهٔ شمارشپذیر متمرکز شده باشد، و μ را **پیوسته** خوانند اگر به‌ازای هر نقطهٔ $x \subset R^1$، $\mu(\{x\}) = 0$.

فرض کنید m اندازهٔ لبگ بر R^1 باشد (توجه کنید که $m \notin M$). ثابت کنید اگر μ و λ هر دو گسسته باشند، $\mu * \lambda$ گسسته است، اگر μ پیوسته‌بوده و $\lambda \in M$، $\mu * \lambda$ پیوسته است، و اگر $\mu \ll m$، $\mu * \lambda \ll m$.

(ج) با فرض $d\mu = f dm$، $d\lambda = g dm$، $f \in L^1(R^1)$، و $g \in L^1(R^1)$ ثابت کنید $d(\mu * \lambda) = (f * g) dm$.

(چ) خواص (آ) و (پ) نشان می‌دهند که فضای باناخ M چیزی است که آن را **جبر باناخ تعویضپذیر** می‌نامند. نشان دهید که (ث) و (ج) ایجاب می‌کنند که مجموعهٔ تمام اندازه‌های گسسته در M یک زیرجبر M است، اندازه‌های پیوسته یک ایده‌آل در M تشکیل می‌دهند، و اندازه‌های به‌طور مطلق پیوسته (نسبت به m) یک ایده‌آل در M تشکیل می‌دهند که (به‌عنوان یک جبر) با $L^1(R^1)$ یکریخت است.

(ح) نشان دهید که M دارای یکه است؛ یعنی عنصری مانند $\delta \in M$ چنان وجود دارد که به‌ازای هر $\mu \in M$، $\delta * \mu = \mu$.

(خ) در این بحث تنها از دو خاصیت R^1 استفاده شده است: R^1 (تحت جمع) یک گروه تعویضپذیر است، و یک اندازهٔ بورل پایای انتقال مانند m بر R^1 وجود دارد که متحد ۰ نبوده و بر تمام زیرمجموعه‌های فشردهٔ R^1 متناهی است. نشان دهید که اگر R^1 را با R^k یا با T (دایرهٔ یکه) یا با T^k (چنبرهٔ k بعدی: حاصل ضرب دکارتی k نسخه از T) عوض کرده و تعاریف را به‌نحوی مقتضی تنظیم کنیم، همین نتایج برقرار می‌باشند.

۶. (مختصات قطبی در R^k). فرض کنید S_{k-1} کرهٔ یکه در R^k باشد؛ یعنی مجموعهٔ تمام $u \in R^k$هایی که فاصله‌شان تا مبدأ ۰ مساوی ۱ است. نشان دهید که هر $x \in R^k$ جز $x = 0$ نمایش منحصر به‌فردی به‌شکل $x = ru$ دارد که در آن r یک عدد حقیقی مثبت بوده و $u \in S_{k-1}$. لذا $R^k - \{0\}$ را می‌توان حاصل ضرب دکارتی $(0, \infty) \times S_{k-1}$ درنظر گرفت. فرض کنید m_k اندازهٔ لبگ بر R^k بوده و اندازهٔ σ_{k-1} را بر S_{k-1} به‌صورت زیر تعریف کنید: اگر $A \subset S_{k-1}$ و A یک مجموعهٔ بورل بوده و $\tilde{A}$ مجموعهٔ تمام نقاط ru باشد که $0 < r < 1$ و $u \in A$، تعریف کنید

$$\sigma_{k-1}(A) = k \cdot m_k(\tilde{A}) \cdot$$

ثابت کنید فرمول

$$\int_{R^k} f dm_k = \int_0^\infty r^{k-1} dr \int_{S_{k-1}} f(ru) d\sigma_{k-1}(u)$$

به‌ازای هر تابع بورل نامنفی f بر R^k معتبر است. یکی بودن این با نتایج به‌ازای $k = 2$ و $k = 3$ را تحقیق کنید.

پیشنهاد. اگر $0 < r_1 < r_2$ و A زیرمجموعهٔ بازی از S_{k-1} باشد، E را مجموعهٔ تمام ruهایی بگیرید که $r_1 < r < r_2$ و $u \in A$، و تحقیق کنید که فرمول فوق به‌ازای تابع مشخص E برقرار است. از این توابع به‌توابع مشخص مجموعه‌های بورل در R^k بروید.

۷. فرض کنید $(X, \mathscr{S}, \mu)$ و $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ فضاهای اندازهٔ σـ متناهی بوده و اندازهٔ ψ بر $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ چنان باشد که هر وقت $A \in \mathscr{S}$ و $B \in \mathscr{T}$،

$$\psi(A\times B)=\mu(A)\lambda(B)\cdot$$

ثابت کنید به‌ازای هر $E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$، $\psi(E)=(\mu\times\lambda)(E)\cdot$

۸. (آ) فرض کنید f یک تابع حقیقی بر $R^۲$ باشد به‌طوری که هر مقطع f_x اندازه‌پذیر بورل بوده و هر مقطع f^y پیوسته باشد. ثابت کنید f بر $R^۲$ اندازه‌پذیر بورل است. به‌تفاوت بین این و مثال ۹.۸ (پ) توجه کنید.

(ب) فرض کنید g یک تابع حقیقی بر R^k باشد که نسبت به‌هر k متغیر پیوسته است. به‌طور صریحتر، به‌ازای هر انتخاب از $x_۲$، $\cdots$، x_k، نگاشت $x_۱\to g(x_۱,x_۲,\cdots,x_k)$ پیوسته است و غیره. ثابت‌کنید g یک‌تابع بورل است. **راهنمایی.** اگر $(i-۱)/n=a_{i-۱}\le x\le a_i=i/n$، قرار دهید

$$f_n(x,y)=\frac{a_i-x}{a_i-a_{i-۱}}f(a_{i-۱},y)+\frac{x-a_{i-۱}}{a_i-a_{i-۱}}f(a_i,y)\cdot$$

۹. فرض کنید E یک مجموعهٔ چگال در $R^۱$ و f یک تابع حقیقی بر $R^۲$ باشد به‌طوری که (آ) f_x به‌ازای هر $x\in E$ اندازه‌پذیر لبگ بوده و (ب) f^y به‌ازای تقریباً هر $y\in R^۱$ پیوسته است. ثابت کنید f بر $R^۲$ اندازه‌پذیر لبگ می‌باشد.

۱۰. فرض کنید f یک تابع حقیقی بر $R^۲$، f_x به‌ازای هر x اندازه‌پذیر لبگ، و f^y به‌ازای هر y پیوسته باشد. همچنین $g:R^۱\times R^۱$ اندازه‌پذیرلبگ‌بوده‌وقرار دهید $h(y)=f(g(y),y)\cdot$ ثابت کنید h بر $R^۱$ اندازه‌پذیر لبگ است. **راهنمایی.** f_n را همانند تمرین ۸ تعریف کرده، قرار دهید $h_n(y)=f_n\big(g(y)y\big)$، نشان دهیدکه هر h_n اندازه‌پذیراست، و $h_n(y)\to h(y)\cdot$

۱۱. فرض کنید $\mathscr{B}_k$، σ ـ جبر تمام مجموعه‌های بورل در R^k باشد. ثابت کنید $\mathscr{B}_{m+n}=\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_n\cdot$ این امر به‌قضیهٔ ۱۴.۸ مربوط می‌باشد.

۱۲. با استفاده از قضیهٔ فوبینی و رابطهٔ

$$\frac{۱}{x}=\int_{۰}^{\infty}e^{-xt}\,dt\,(x>۰)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{A\to\infty}\int_{۰}^{A}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{۲}\cdot$$

۱۳. اگر μ یک اندازهٔ مختلط بر σ ـ جبر $\mathfrak{M}$ باشد، نشان دهید که هر مجموعهٔ $E\in\mathfrak{M}$ زیرمجموعه‌ای مانند A دارد که

$$|\mu(A)|\ge\frac{۱}{\pi}|\mu|(E)\cdot$$

پیشنهاد. یک تابع حقیقی اندازه‌پذیر مانند θ هست که $d\mu=e^{i\theta}d|\mu|\cdot$ با این فرض که A_α زیرمجموعه‌ای از E است که $\cos(\theta-\alpha)>۰$، نشان دهید که

$$\operatorname{Re}[e^{-i\alpha}\mu(A_\alpha)] = \int_E \cos^+(\theta-\alpha)\,d|\mu|,$$

و نسبت به α (همانند لم ۶.۳) انتگرال بگیرید.

با مثال نشان دهید که $1/\pi$ بهترین ثابت در این نامساوی است.

۱۴. برهان زیر از نامساوی هاردی (فصل ۳، تمرین ۱۴) را کامل کنید:

فرض کنید $f \geq 0$ بر $(0,\infty)$، $f \in L^p$، $1 < p < \infty$، و

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \cdot$$

بنویسید $xF(x) = \int_0^x f(t)t^\alpha t^{-\alpha}\,dt$ که در آن $0 < \alpha < 1/q$، از نامساوی هولدر استفاده کرده یک کران بالایی برای $F(x)^p$ به‌دست آورید، و با انتگرالگیری نتیجه بگیرید که

$$\int_0^\infty F^p(x)\,dx \leq (1-\alpha q)^{1-p}(\alpha p)^{-1}\int_0^\infty f^p(t)\,dt \cdot$$

نشان دهید که بهترین انتخاب α نتیجه می‌دهد که

$$\int_0^\infty F^p(x)\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(t)\,dt \cdot$$

۱۵. قرار دهید $\varphi(t) = 1-\cos t$ اگر $0 \leq t \leq 2\pi$، $\varphi(t) = 0$ به‌ازای هر t ی حقیقی دیگر. به‌ازای $-\infty < x < \infty$ تعریف کنید

$$f(x) = 1,\quad g(x) = \varphi'(x),\quad \text{و}\quad h(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\,dt,$$

و احکام زیر را درمورد پیچش این توابع تحقیق نمایید:

(یک) به‌ازای هر x، $(f * g)(x) = 0$؛

(دو) $(g * h)(x) = (\varphi * \varphi)(x) > 0$ بر $(0, 4\pi)$؛

(سه) بنابراین $(f * g) * h = 0$ حال آنکه $f * (g * h)$ یک ثابت مثبت است. ولی پیچش طبق قضیهٔ فوبینی شرکتپذیر است (تمرین ۵ (پ)). پس چه چیز اشتباه است؟

۱۶. نامساوی زیر را که شبیه نامساوی مینکوفسکی است به‌ازای $f \geq 0$ ثابت کنید:

$$\left\{\int\left[\int f(x,y)\,d\lambda(y)\right]^p d\mu(x)\right\}^{1/p} \leq \int\left[\int f^p(x,y)\,d\mu(x)\right]^{1/p} d\lambda(y) \cdot$$

فرضهای لازم را بیان دارید (در مرجع [۹] مطالب زیادی در این باب ذکر شده است.)

فصل نه
تبدیلات فوریه

خواص صوری

۱.۹ چند تعریف. در این فصل از نمادهای پیشین جدا شده و حرف m را برای اندازهٔ لبگ بر $R^۱$ به‌کار نبرده بلکه برای اندازهٔ لبگ بخش بر $\sqrt{۲\pi}$ به‌کار می‌بریم. این قرار شکل نتایجی چون قضیهٔ انعکاس و قضیهٔ پلانشرل (*Plancherel*) را ساده می‌سازد. همچنین از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dm(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \qquad (۱)$$

که در آن dx اندازهٔ لبگ معمولی است، و تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dm(x)\right\}^{۱/p} (۱ \le p < \infty), \qquad (۲)$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dm(y)\ (x \in R^۱), \qquad (۳)$$

و

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixt}\, dm(x)\ (t \in R^۱) \cdot \qquad (۴)$$

در این فصل به‌جای $L^p(R^۱)$ می‌نویسیم L^p، و $C_۰$ فضای تمام توابع پیوسته بر $R^۱$ که در بی‌نهایت صفرند می‌باشد.

اگر $f\in L^1$، انتگرال (۴) به‌ازای هر tی حقیقی خوش تعریف است. تابع $\hat{f}$ را **تبدیل فوریهٔ** f می‌نامند. اصطلاح «تبدیل فوریه» در مورد **نگاشتی** که f را به $\hat{f}$ می‌برد نیز به‌کار می‌رود.

خواص صوریی که در قضیهٔ ۲.۹ ذکر شده‌اند با پایایی انتقال m و این امر که به‌ازای هر αی حقیقی نگاشت $x\to e^{i\alpha x}$ یک نشان گروه جمعی R^1 است بستگی نزدیکی دارد. طبق تعریف، تابع φ یک **نشان** R^1 است اگر $|\varphi(t)|=1$ و به‌ازای هر s و t حقیقی،

$$\varphi(s+t)=\varphi(s)\varphi(t)\cdot \tag{۵}$$

به‌عبارت دیگر، φ یک همریختی از گروه جمعی R^1 به‌توی گروه ضربی اعداد مختلط با قدرمطلق ۱ می‌باشد. بعدها (دربرهان قضیهٔ ۲۳.۹) خواهیم دید که هر نشان پیوستهٔ R^1 با یک نمایی بیان می‌شود.

۲.۹ قضیه. *فرض کنیم $f\in L^1$ و α و λ اعدادی حقیقی باشند.*

(آ) *هرگاه $g(x)=f(x)e^{i\alpha x}$، آنگاه* $\hat{g}(t)=\hat{f}(t-\alpha)$.

(ب) *هرگاه $g(x)=f(x-\alpha)$، آنگاه* $\hat{g}(t)=\hat{f}(t)\,e^{-i\alpha t}$.

(پ) *هرگاه $g\in L^1$ و $h=f*g$، آنگاه* $\hat{h}(t)=\hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

لذا تبدیل فوریه ضرب در یک نشان را به‌انتقال و بالعکس تبدیل می‌کند، و این تبدیل پیچشها را به‌حاصل‌ضربهای نقطه به‌نقطه بدل می‌سازد.

(ت) *هرگاه $g(x)=\overline{f(-x)}$، آنگاه* $\hat{g}(t)=\overline{\hat{f}(t)}$.

(ث) *هرگاه $g(x)=f(x/\lambda)$ و $\lambda>0$، آنگاه* $\hat{g}(t)=\lambda\hat{f}(\lambda t)$.

(ج) *هرگاه $g(x)=-ixf(x)$ و $g\in L^1$، آنگاه $\hat{f}$ مشتقپذیر بوده و* $\hat{f}'(t)=\hat{g}(t)$.

برهان. (آ)، (ب)، (ت)، و (ث) با جانشانی مستقیم در فرمول ۱.۹ (۴) ثابت می‌شوند. برهان (پ) کاربردی از قضیهٔ فوبینی است (برای برهان اندازه‌پذیری لازم، ر.ک. قضیهٔ ۱۴.۸):

$$\begin{aligned}\hat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,dm(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dm(y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity}\,dm(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-it(x-y)}\,dm(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity}\,dm(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dm(x)\\ &= \hat{g}(t)\hat{f}(t)\cdot\end{aligned}$$

به‌طرز استفاده از پایایی انتقال m توجه کنید

برای اثبات (ج) توجه کنید که

$$\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixt}\varphi(x, s-t)\, dm(x)\ (s\neq t), \qquad (۱)$$

که درآن $\varphi(x,u)=(e^{-ixu}-۱)/u$. چون‌به‌ازای‌هر $u\neq ۰$ی حقیقی، $|\varphi(x,u)|\leq|x|$ و وقتی $u\to ۰$، $\varphi(x,u)\to -ix$، قضیهٔ همگرایی تسلطی در مورد (۱) به‌کار می‌رود، اگر s به t میل کند، نتیجه می‌شود که

$$\hat{f}'(t)=-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, e^{-ixt}\, dm(x)\,\cdot \qquad (۲)$$

۳.۹ چند تبصره

(آ) در برهان فوق توسل به‌قضیهٔ همگرایی تسلطی ممکن است نامشروع به‌نظر آید چراکه قضیهٔ همگرایی تسلطی فقط با دنباله‌های **شمارشپذیر** از توابع سروکار دارد. لیکن به‌ما توان نتیجه‌گیری

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{f}(s_n)-\hat{f}(t)}{s_n-t}=-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, e^{-ixt}\, dm(t)$$

به‌ازای هر دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا به t را می‌دهد، و این دقیقاً می‌گوید که

$$\lim_{s\to t}\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t}=-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, e^{-ixt}\, dm(t)\,\cdot$$

ما مجدداً با حالاتی مشابه مواجه می‌شویم و قضایای همگرایی را بدون توضیح اضافی بر آنها اعمال خواهیم کرد.

(ب) قضیهٔ ۲.۹ قسمت (ب) نشان می‌دهد که تبدیل فوریهٔ

$$[f(x+\alpha)-f(x)]/\alpha$$

مساوی است با

$$\hat{f}(t)\frac{e^{i\alpha t}-۱}{\alpha}\,\cdot$$

این پیشنهاد می‌کند که صورت مشابه قضیهٔ ۲.۹ قسمت (ج) باید تحت شرایطی درست باشد؛ یعنی تبدیل فوریهٔ f' مساوی $it\hat{f}(t)$ است. اگر $f\in L^۱$، $f'\in L^۱$، و f انتگرال نامعین f' باشد، نتیجه با انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌آسانی ثابت می‌شود. ما اثبات این امر و چند نتیجهٔ مربوطه را به‌خواننده وامی‌گذاریم. این امر که تبدیل فوریه مشتقگیری را به‌ضرب در ti بدل می‌کند تبدیل فوریه را ابزار سودمندی در بررسی معادلات دیفرانسیل خواهد ساخت.

قضیهٔ انعکاس

۴.۹. هم‌اکنون دیدیم که بعضی از اعمال بر توابع نظیر اعمال بر تبدیلات فوریهٔ آنهاست. البته اگر راهی برای بازگشت از تبدیلات به‌توابع (یعنی یک فرمول انعکاس) موجود باشد، سودمندی و جذابیت این تناظر بیشتر می‌شود.

حال ببینیم این فرمول در تشابه با سریهای فوریه باید چگونه باشد. هرگاه

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \,(n \in Z)\,, \tag{۱}$$

آنگاه فرمول انعکاس عبارت است از

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\,. \tag{۲}$$

می‌دانیم که اگر $f \in L^2(T)$، رابطهٔ (۲) به‌مفهوم همگرایی L^2 برقرار است. همچنین می‌دانیم که (۲)، حتی اگر f پیوسته باشد، به‌مفهوم همگرایی نقطه به‌نقطه لزوماً برقرار نیست. حال فرض می‌کنیم $f \in L^1(T)$، $\{c_n\}$ با (۱) داده شده باشد، و

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty\,. \tag{۳}$$

قرار می‌دهیم

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\,. \tag{۴}$$

بنابر (۳)، سری (۴) به‌طور یکنواخت همگراست (درنتیجه g پیوسته است)، و ضرایب فوریهٔ g به‌آسانی قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right\} e^{-ikx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx \\ &= c_k \end{aligned} \tag{۵}$$

لذا f و g ضرایب فوریهٔ یکسانی دارند. این ایجاب می‌کند که $f = g$ت. هـ.؛ درنتیجه سری فوریهٔ f ت. هـ. همگرا به $f(x)$ است.

فرضهای مشابه در محدودهٔ تبدیلات فوریه عبارتند از $f \in L^1$ و $\hat{f} \in L^1$، و در این صورت انتظار است که فرمولی مانند

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{itx} dm(t) \tag{۶}$$

معتبر باشد. مسلماً اگر $\hat{f} \in L^1$، طرف راست (۶) خوش تعریف است؛ ما آن را $g(x)$

می‌نامیم. ولی اگر بخواهیم همانند در (۵) استدلال کنیم، به‌انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)x}dx \qquad (۷)$$

می‌رسیم که به‌این صورت بی‌معنی است. لذا حتی تحت این فرض قوی که $\hat{f} \in L^1$، برهانی از (۶) (که فرمول برقراری است) باید در مسیر بیراهه‌تری صورت گیرد.

[تذکر می‌دهیم که اگر انتگرال روی $(-\infty, \infty)$ به‌عنوان حد انتگرالهای روی $(-A, A)$ وقتی $A \to \infty$ تعبیر شود، رابطهٔ (۶) حتی اگر $\hat{f} \notin L^1$ نیز ممکن است برقرار باشد. (**مشابه**. یک سری ممکن است بدون همگرایی مطلق همگرا باشد.) ما وارد این بحث نخواهیم شد.]

۵.۹ قضیه. ***فرض کنیم به‌ازای هر تابع f بر R^1 و هر $y \in R^1$، f_y انتقال f با تعریف زیر باشد:***

$$f_y(x) = f(x-y) \quad (x \in R^1) \cdot \qquad (۱)$$

اگر $1 \le p < \infty$ و $f \in L^p$، نگاشت

$$y \to f_y \qquad (۲)$$

یک نگاشت به‌طور یکنواخت پیوسته از R^1 به‌توی $L^p(R^1)$ می‌باشد.

برهان. $\epsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. چون $f \in L^p$، یک تابع پیوسته مانند g هست که محافظش دربازهٔ بستهٔ کرانداری مانند $[-A, A]$ بوده و

$$\|f-g\|_p < \epsilon$$

(قضیهٔ ۱۴.۳). پیوستگی یکنواخت g نشان می‌دهد که $\delta \in (0, A)$ ای هست به‌طوری‌که نامساوی $|s-t| < \delta$

$$|g(s)-g(t)| < (3A)^{-1/p}\epsilon$$

را ایجاب می‌کند. اگر $|s-t| < \delta$، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-s)-g(x-t)|^p dx < (3A)^{-1}\epsilon^p(2A+\delta) < \epsilon^p;$$

درنتیجه $\|g_s - g_t\|_p < \epsilon$.

توجه کنید که نرمهای L^p (نسبت به‌اندازهٔ لبگ) پایای انتقال‌اند: $\|f\|_p = \|f_s\|_p$. لذا هر وقت $|s-t| < \delta$،

$$\begin{aligned}\|f_s-f_t\|_p &\le \|f_s-g_s\|_p + \|g_s-g_t\|_p + \|g_t-f_t\|_p \\ &= \|(f-g)_s\|_p + \|g_s-g_t\|_p + \|(g-f)_t\|_p < 3\epsilon \cdot\end{aligned}$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

۶.۹ قضیه. هرگاه $f \in L^1$، آنگاه $\hat{f} \in C_0$ و

$$\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1 \cdot \tag{۱}$$

برهان. نامساوی (۱) از رابطهٔ ۱.۹ (۴) واضح است. هرگاه $t_n \to t$، آنگاه

$$|\hat{f}(t_n) - \hat{f}(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |e^{-it_n x} - e^{-itx}|\, dm(x) \cdot \tag{۲}$$

انتگرالده به‌وسیلهٔ $2|f(x)|$ کراندار است و به‌ازای هر x، وقتی $n \to \infty$، به ۰ میل می‌کند. لذا، طبق قضیهٔ همگرایی تسلطی، $\hat{f}(t_n) - \hat{f}(t)$. بنابراین $\hat{f}$ پیوسته می‌باشد.

چون $e^{\pi i} = -1$، رابطهٔ ۱.۹ (۴) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-it(x+\pi/t)}\, dm(x) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\pi/t)\, e^{-itx}\, dm(x) \cdot \end{aligned} \tag{۳}$$

لذا

$$2\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{t}\right) \right\} e^{-itx}\, dm(x); \tag{۴}$$

درنتیجه

$$2|\hat{f}(t)| \le \|f - f_{\pi/t}\|_1 \tag{۵}$$

که، بنابر قضیهٔ ۵.۹، وقتی $t \to \pm\infty$، به ۰ میل می‌کند.

۷.۹ یک جفت تابع کمکی. در برهان قضیهٔ انعکاس اطلاع از یک تابع مثبت مانند H که تبدیل فوریهٔ مثبتی داشته باشد که انتگرالش به‌سهولت محاسبه شود سودمند است. در بین حالات بسیار یکی را اختیار می‌کنیم که در رابطه با تابعهای توافقی در یک نیمصفحه جالب است. (ر.ک. تمرین ۲۵ در فصل ۱۱.)

قرار می‌دهیم

$$H(t) = e^{-|t|} \tag{۱}$$

و تعریف می‌کنیم

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\, e^{itx}\, dm(t) \quad (\lambda > 0) \cdot \tag{۲}$$

با محاسبه‌ای ساده داریم

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}; \tag{۳}$$

و درنتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\, dm(x) = 1 \cdot \tag{۴}$$

همچنین توجه کنید که $0 < H(t) \le 1$ و وقتی $\lambda \to 0$، $H(\lambda t) \to 1$.

۸.۹ حکم. هرگاه $f \in L^1$، **آنگاه**

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t) \cdot$$

برهان. این حکم کاربرد سادهای از قضیهٔ فوبینی است.

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) e^{ity} dm(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\, dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{ity} dm(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\, dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{it(x-y)} dm(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{itx}\, dm(t) \cdot$$

۹.۹ قضیه. هرگاه $g \in L^\infty$ **و** g **در نقطهٔ** x **پیوسته باشد، آنگاه**

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x) \cdot \qquad (1)$$

برهان. بر مبنای ۷.۹ (۴) داریم

$$(g * h_\lambda)(x) - g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-y) - g(x)]\, h_\lambda(y)\, dm(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-y) - g(x)]\, \lambda^{-1} h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-\lambda s) - g(x)]\, h_1(s)\, dm(s) \cdot$$

آخرین انتگرالده تحت تسلط $2\|g\|_\infty h_1(s)$ بوده و بهازای هر s، وقتی $\lambda \to 0$، نقطه بهنقطه همگرا به ۰ است. لذا رابطهٔ (۱) از قضیهٔ همگرایی تسلطی نتیجه خواهد شد.

۱۰.۹ قضیه. هرگاه $1 \le p < \infty$ **و** $f \in L^p$، **آنگاه**

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0 \cdot \qquad (1)$$

حالات $p = 1$ و $p = 2$ مورد توجه ما هستند ولی اثبات حالت کلی مشکلتر نیست.

برهان. چون $h_\lambda \in L^q$ که در آن q مزدوج نمایی p است، $(f * h_\lambda)(x)$ بهازای هر x تعریف شده است. (درواقع $f * h_\lambda$ پیوسته است؛ ر.ک. تمرین ۸.) بهخاطر ۷.۹ (۴) داریم

$$(f*h_\lambda)(x)-f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-y)-f(x)]\,h_\lambda(y)\,dm(y) \qquad (۲)$$

و قضیهٔ ۳.۳ نتیجه می‌دهد که

$$|(f*h_\lambda)(x)-f(x)|^p \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)-f(x)|^p\,h_\lambda(y)\,dm(y)\cdot \qquad (۳)$$

از نامساوی (۳) نسبت به x انتگرال گرفته و قضیهٔ فوبینی را به‌کار می‌بریم:

$$\|f*h_\lambda-f\|_p^p \le \int_{-\infty}^{\infty}\|f_y-f\|_p^p\,h_\lambda(y)\,dm(y)\cdot \qquad (۴)$$

هرگاه $g(y)=\|f_y-f\|_p^p$، آنگاه g طبق قضیهٔ ۵.۹ کراندار و پیوسته است، و $g(\circ)=\circ$. لذا، طبق قضیهٔ ۹.۹، طرف راست (۴) وقتی $\lambda\to\circ$ به $\circ$ میل می‌کند.

۱۱.۹ قضیهٔ انعکاس. هرگاه $f\in L^1$ **و** $\hat f\in L^1$ **و**

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(t)\,e^{ixt}\,dm(t)\ (x\in R^1), \qquad (۱)$$

آنگاه $g\in C_\circ$ **و** $f(x)=g(x)$ ت. هـ.

برهان. بنابر حکم ۸.۹،

$$(f*h_\lambda)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\,\hat f(t)\,e^{ixt}\,dm(t) \qquad (۲)$$

انتگرالدهای سمت راست (۲) به‌وسیلهٔ $|\hat f(t)|$ کراندارند، و چون وقتی $\lambda\to\circ$، $H(\lambda t)\to 1$، بنابر قضیهٔ همگرایی تسلطی، طرف راست (۲) به‌ازای هر $x\in R^1$ همگرا به $g(x)$ است.

اگر قضایای ۱۰.۹ و ۱۲.۳ را باهم تلفیق کنیم، خواهیم دید که دنباله‌ای مانند $\{\lambda_n\}$ هست به‌طوری که $\lambda_n\to\circ$ و

$$\lim_{n\to\infty}(f*h_{\lambda_n})(x)=f(x) \quad \text{ت. هـ.} \qquad (۳)$$

لذا $f(x)=g(x)$ ت. هـ. عضویت $g\in C_\circ$ از قضیهٔ ۶.۹ نتیجه می‌شود.

۱۲.۹ قضیهٔ یکتایی. هرگاه $f\in L^1$ **و به‌ازای هر** $t\in R^1$، $\hat f(t)=\circ$، ***آنگاه*** $f(x)=\circ$ **ت. هـ.**

برهان. چون $\hat f=\circ$، داریم $\hat f\in L^1$، و نتیجه از قضیهٔ انعکاس حاصل است.

قضیهٔ پلانشرل

چون اندازهٔ لبگ R^1 نامتناهی است، L^2 زیرمجموعهٔ L^1 نیست، و لذا تعریف تبدیل فوریه به‌وسیلهٔ فرمول ۱.۹ (۴) مستقیماً بر هر $f\in L^2$ قابل اعمال نمی‌باشد. اما اگر $f\in L^1\cap L^2$،

تعریف قابل اعمال است و معلوم می‌شود که $\hat{f} \in L^۲$. درواقع $\|\hat{f}\|_۲ = \|f\|_۲$! این یکمتری از $L^۱ \cap L^۲$ به‌توی $L^۲$ به‌یک یکمتری از $L^۲$ به‌روی $L^۲$ وسعت می‌یابد، و این توسیع معرف تبدیل فوریهٔ هر $f \in L^۲$ است (که گاهی **تبدیل پلانشرل** نامیده می‌شود). نظریهٔ $L^۲$ حاصل درواقع تقارن بیشتری از حالت در $L^۱$ دارد. در $L^۲$، f و $\hat{f}$ دقیقاً یک نقش را برعهده دارند.

۱۳.۹ قضیه. ***به‌هر $f \in L^۲$ می‌توان تابع $\hat{f} \in L^۲$ را طوری مربوط کرد که خواص زیر برقرار باشند:***

(آ) هرگاه $f \in L^۱ \cap L^۲$، آنگاه $\hat{f}$ تبدیل فوریهٔ f است که قبلاً تعریف شده است؛

(ب) به‌ازای هر $f \in L^۲$، $\|\hat{f}\|_۲ = \|f\|_۲$؛

(پ) نگاشت $f \to \hat{f}$ یک یکریختی فضاهای هیلبرت از $L^۲$ به‌روی $L^۲$ است؛

(ت) رابطهٔ متقارن زیر بین f و $\hat{f}$ وجود دارد: هرگاه

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-ixt}\, dm(x) \quad \text{و} \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t)\, e^{ixt}\, dm(t)،$$

آنگاه وقتی $A \to \infty$، $\|\varphi_A - \hat{f}\|_۲ \to ۰$ و $\|\psi_A - f\|_۲ \to ۰$.

تذکر. چون $L^۱ \cap L^۲$ در $L^۲$ چگال است، خواص (آ) و (ب) نگاشت $f \to \hat{f}$ را به‌طور منحصر به‌فرد معین می‌کنند. خاصیت (ت) را می‌توان ***قضیهٔ انعکاس*** $L^۲$ نامید.

برهان. نخستین هدف ما رابطهٔ زیر است:

$$\|\hat{f}\|_۲ = \|f\|_۲ \quad (f \in L^۱ \cap L^۲) \cdot \tag{۱}$$

$f \in L^۱ \cap L^۲$ را ثابت گرفته، قرار می‌دهیم $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$، و تعریف می‌کنیم $g = f * \tilde{f}$. در این صورت

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \overline{f(-y)}\, dm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\, \overline{f(y)}\, dm(y) \tag{۲}$$

یا

$$g(x) = (f_{-x}, f) \tag{۳}$$

که در آن ضرب داخلی در فضای هیلبرت $L^۲$ بوده و f_{-x}، همانند در قضیهٔ ۵.۹، انتقال f می‌باشد. بنابر آن قضیه، $x \to f_{-x}$ یک نگاشت پیوسته از $R^۱$ به‌توی $L^۲$ است، و لذا پیوستگی ضرب داخلی (قضیهٔ ۶.۴) ایجاب می‌کند که g یک تابع پیوسته باشد. نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$|g(x)| \le \|f_{-x}\|_۲ \|f\|_۲ = \|f\|_۲^۲ ; \tag{۴}$$

درنتیجه g کراندار است. همچنین از $f\in L^1$ و $\tilde{f}\in L^1$ معلوم می‌شود که $g\in L^1$. چون $g\in L^1$، می‌توان حکم ۸.۹ را به‌کار برد:

$$(g*h_\lambda)(0)=\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\,\hat{g}(t)\,dm(t)\cdot \tag{۵}$$

چون g پیوسته و کراندار است، قضیهٔ ۹.۹ نشان می‌دهد که

$$\lim_{\lambda\to 0}(g*h_\lambda)(0)=g(0)=\|f\|_2^2 \tag{۶}$$

قضیهٔ ۲.۹ قسمت (ت) نشان می‌دهد که $\hat{g}=|\hat{f}|^2\geq 0$، و چون وقتی $\lambda\to 0$، $H(\lambda t)$ به ۱ صعود می‌کند، قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\,\hat{g}(t)\,dm(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2\,dm(t)\cdot \tag{۷}$$

حال روابط (۵) و (۶) و (۷) نشان می‌دهند که $\hat{f}\in L^2$ و رابطهٔ (۱) برقرار می‌باشد.

این قسمت دشوار برهان بود.

فرض کنیم Y فضای تمام تبدیلات فوریهٔ $\hat{f}$ توابع $f\in L^1\cap L^2$ باشد. بنابر (۱)، $Y\subset L^2$. حکم می‌کنیم که Y در L^2 چگال است؛ یعنی $Y^\perp=\{0\}$.

توابع $x\to e^{i\alpha x}H(\lambda x)$ به‌ازای هر αی حقیقی و هر $\lambda>0$ در $L^1\cap L^2$ اند. لذا تبدیلات فوریه‌شان

$$h_\lambda(\alpha-t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}H(\lambda x)\,e^{-ixt}\,dm(x) \tag{۸}$$

در Y اند. اگر $w\in L^2$ و $w\in Y^\perp$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر α،

$$(h_\lambda*\overline{w})(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(\alpha-t)\,\overline{w}(t)\,dm(t)=0\cdot \tag{۹}$$

لذا، طبق قضیهٔ ۱۰.۹، $w=0$؛ و درنتیجه Y در L^2 چگال است.

حال نماد موقتی Φf را برای $\hat{f}$ وارد کار می‌کنیم. از آنچه تا به‌حال ثابت شده است معلوم می‌شود که Φ یک یکمتری L^2 از یک زیرفضای چگال L^2 یعنی $L^1\cap L^2$ به‌روی دیگری یعنی Y است. لذا استدلالهای دنبالهٔ کشی مقدماتی (قس. لم ۱۶.۴) ایجاب می‌کنند که Φ به‌یک یکمتری از L^2 به‌روی L^2 مانند $\tilde{\Phi}$ وسعت می‌یابد. اگر به‌جای $\tilde{\Phi}f$ بنویسیم $\hat{f}$، خواص (آ) و (ب) به‌دست می‌آیند.

همانند برهان قضیهٔ ۱۸.۴، خاصیت (پ) از خاصیت (ب) نتیجه می‌شود. لذا **فرمول پارسوال**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}(t)}\,dm(t) \tag{۱۰}$$

به‌ازای هر $f\in L^{2}$ و $g\in L^{2}$ برقرار است.

برای اثبات (ت) فرض می‌کنیم k_A تابع مشخص $[-A, A]$ باشد. در این صورت اگر $f\in L^{2}$، $k_A f\in L^{1}\cap L^{2}$ و

$$\varphi_A = (k_A f)\hat{} \cdot \tag{11}$$

چون وقتی $A\to\infty$، $\|f-k_A f\|_2 \to 0$، از قسمت (ب) نتیجه می‌شود که وقتی $A\to\infty$،

$$\|\hat{f}-\varphi_A\|_2 = \|(f-k_A f)\hat{}\|_2 \to 0 \cdot \tag{12}$$

نیمهٔ دیگر (ت) به‌همین نحو ثابت می‌شود.

۱۴.۹ قضیه. ***هرگاه $f\in L^{2}$ و $\hat{f}\in L^{1}$، آنگاه***

$$f(x)= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{ixt}\, dm(t) \quad \text{ت. هـ.}$$

برهان. این نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۱۳.۹ قسمت (ت).

۱۵.۹ تبصره. اگر $f\in L^{1}$، فرمول ۱.۹ (۴) $\hat{f}(t)$ را به‌ازای هر t بدون ابهام تعریف می‌کند. اگر $f\in L^{2}$، قضیهٔ پلانشرل $\hat{f}$ را به‌طور منحصر به‌فرد به‌عنوان عنصری از فضای هیلبرت L^{2} تعریف می‌کند، ولی $\hat{f}(t)$ به‌عنوان تابع نقطه‌ای فقط تقریباً همه جا معین است. این یک اختلاف فاحش میان نظریهٔ تبدیلات فوریه در L^{1} و در L^{2} است. نامعین بودن $\hat{f}(t)$ به‌عنوان یک تابع نقطه‌ای مشکلاتی در مسئلهٔ آتی ما ایجاد خواهد کرد.

۱۶.۹ زیرفضاهای پایای انتقال L^{2}. گوییم زیرفضای M از L^{2} ***پایای انتقال*** است اگر $f\in M$ عضویت $f_\alpha\in M$ را به‌ازای هر α ی حقیقی ایجاب کند که در آن $f_\alpha(x)=f(x-\alpha)$. انتقالها قبلاً نقش مهمی در بررسی تبدیلات فوریه ایفا کرده‌اند. حال مسئله‌ای را عنوان می‌کنیم که حلش طرز استفاده از قضیهٔ پلانشرل را توصیف می‌کند (کاربردهای دیگر در فصل ۱۹ خواهند آمد). مسئله به‌قرار زیر است:

زیرفضاهای پایای انتقال بستهٔ L^{2} را توصیف کنید.

فرض کنیم M یک زیرفضای پایای انتقال بستهٔ L^{2} بوده و $\hat{M}$ نقش M تحت تبدیل فوریه باشد. در این صورت $\hat{M}$ بسته است (زیرا تبدیل فوریه یک یکمتری L^{2} می‌باشد). اگر f_α یک انتقال f باشد، تبدیل فوریهٔ f_α مساوی $\hat{f}\, e_\alpha$ است که $e_\alpha(t)=e^{-i\alpha t}$. ما این امر را در قضیهٔ ۲.۹ به‌ازای $f\in L^{1}$ ثابت کردیم. از قضیهٔ ۱۳.۹ قسمت (ت) معلوم می‌شود که این نتیجه را می‌توان به L^{2} تعمیم داد. **پس $\hat{M}$ تحت ضرب در e_α به‌ازای هر $\alpha\in R^{1}$ پایاست.**

فرض کنیم E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در R^{1} باشد. هرگاه $\hat{M}$ مجموعهٔ تمام $\varphi\in L^{2}$ هایی

باشد که ت. هـ. بر E صفرند، آنگاه $\hat{M}$ مسلماً زیرفضایی از L^2 است که تحت ضرب در تمام e_αها پایاست (توجه کنید که $|e_\alpha| = 1$ ؛ درنتیجه اگر $\varphi \in L^2$، $\varphi e_\alpha \in L^2$)، و $\hat{M}$ بسته نیز هست. **برهان.** $\varphi \in \hat{M}$ اگر و فقط اگر φ به‌هر $\psi \in L^2$ که ت. هـ. بر متمم E صفر است متعامد باشد.

هرگاه M نقش معکوس این $\hat{M}$ تحت تبدیل فوریه باشد، آنگاه M فضایی با خواص مطلوب است.

حال می‌توان حدس زد که هریک از فضاهای M ما بدین نحو و از یک مجموعه مانند $E \subset R^1$ به‌دست می‌آید. برای اثبات این امر باید نشان داد که به‌هر پایای انتقال بستهٔ $M \subset L^2$ مجموعه‌ای مانند $E \subset R^1$ چنان نظیر است که $f \in M$ اگر و فقط اگر $\hat{f}(t) = 0$ ت. هـ. بر E.

راه روشن ساختن E از M آن است که به‌هر $f \in M$ مجموعهٔ E_f مرکب از تمام نقاطی که $\hat{f}(t) = 0$ را مربوط کرده و E را اشتراک این E_fها بگیریم. ولی این حملهٔ مستقیم مشکلی جدی تولید می‌کند: هر E_f فقط با تقریب مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ تعریف شده است. هرگاه $\{A_i\}$ گردایهٔ شمارشپذیری از مجموعه‌ها باشد که هریک با تقریب مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ معین است، آنگاه $\cap A_i$ نیز با تقریب مجموعه‌های از اندازهٔ ۰ معین است. ولی تعدادی شمارش‌ناپذیر $f \in M$ وجود دارند؛ درنتیجه کنترل روی $\cap E_f$ را کم می‌کنیم.

اگر توابعمان را عناصری از فضای هیلبرت L^2 بگیریم نه توابع نقطه‌ای، این مشکل کلاً از بین می‌رود.

حال حدس فوق را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $\hat{M}$ نقش زیرفضای پایای انتقال بستهٔ $M \subset L^2$ تحت تبدیل فوریه باشد. همچنین P تصویر متعامد L^2 به‌روی $\hat{M}$ باشد (قضیهٔ ۱۱.۴). به‌هر $f \in L^2$ یک $Pf \in \hat{M}$ منحصر به‌فرد چنان نظیر است که $f - Pf$ متعامد به $\hat{M}$ است. لذا

$$f - Pf \perp Pg \quad (f, g \in L^2) \tag{۱}$$

و چون $\hat{M}$ تحت ضرب در e_α پایاست، نیز داریم

$$f - Pf \perp (Pg)\, e_\alpha \quad (\alpha \in R^1 \text{ و } f, g \in L^2)\,. \tag{۲}$$

اگر طرز تعریف ضرب داخلی در L^2 را به‌یاد آوریم، می‌بینیم که (۲) هم‌ارز است با

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f - Pf) \cdot \overline{Pg} \cdot e_{-\alpha}\, dm = 0 \quad (\alpha \in R^1 \text{ و } f, g \in L^2) \tag{۳}$$

و این می‌گوید که تبدیل فوریهٔ

$$(f - Pf) \cdot \overline{Pg} \tag{۴}$$

۰ است. تابع (۴) حاصل‌ضرب دو تابع $L^{۲}$ است؛ لذا در $L^{۱}$ است، و قضیهٔ یکتایی برای تبدیلات فوریه نشان می‌دهد که تابع (۴) ت. هـ. ۰ می‌باشد. این در صورت تعویض $\overline{Pg}$ با Pg برقرار می‌ماند. لذا

$$f \cdot Pg = (Pf) \cdot (Pg) \; (f, g \in L^{۲}) \cdot \qquad (۵)$$

تعویض نقشهای f و g ما را از رابطهٔ (۵) به‌رابطهٔ زیر می‌رساند:

$$f \cdot Pg = g \cdot Pf \; (f, g \in L^{۲}) \cdot \qquad (۶)$$

حال فرض کنیم g یک تابع مثبت ثابت در $L^{۲}$ باشد؛ مثلاً قرار می‌دهیم $g(t) = e^{-|t|}$. تعریف می‌کنیم

$$\varphi(t) = \frac{(Pg)(t)}{g(t)} \cdot \qquad (۷)$$

$(Pg)(t)$ ممکن است فقط ت. هـ. تعریف شده باشد؛ یکی از توابع معین (۷) را انتخاب می‌کنیم. در این صورت رابطهٔ (۶) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Pf = \varphi \cdot f \; (g \in L^{۲}) \qquad (۸)$$

هرگاه $f \in \hat{M}$، آنگاه $Pf = f$. این رابطه می‌گوید که $P^{۲} = P$، و نتیجه می‌شود که $\varphi^{۲} = \varphi$ زیرا

$$\varphi^{۲} \cdot g = \varphi \cdot Pg = P^{۲} g = Pg = \varphi \cdot g \cdot \qquad (۹)$$

چون $\varphi = \varphi^{۲}$، داریم ۰ یا $\varphi = ۱$ ت. هـ.، و هرگاه E مجموعهٔ تمام t هایی باشد که $\varphi(t) = ۰$، آنگاه $\hat{M}$ درست از $f \in L^{۲}$هایی تشکیل شده است که ت. هـ. بر E مساوی ۰ اند زیرا $f \in \hat{M}$ اگر و فقط اگر $f = Pf = \varphi \cdot f$.

لذا حل زیر برای مسئلهٔ ما به‌دست می‌آید.

۱۷.۹ قضیه. ***به‌هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset R^{۱}$ فضای M_E مرکب از تمام $f \in L^{۲}$هایی را مربوط می‌کنیم که $\hat{f} = ۰$ ت. هـ. بر E. در این صورت M_E یک زیرفضای پایای انتقال بستهٔ $L^{۲}$ است. هر زیرفضای پایای انتقال بستهٔ $L^{۲}$ مساوی یک M_E به‌ازای E ای می‌باشد، و $M_A = M_B$ اگر و فقط اگر***

$$m\big((A-B) \cup (B-A)\big) = ۰ \cdot$$

یکتایی به‌آسانی ثابت می‌شود؛ ذکر جزئیات به‌خواننده محول می‌شود.

البته مسئلهٔ فوق را می‌توان در فضاهای تابعی دیگر نیز مطرح کرد. این امر در $L^{۱}$ با تفصیل بسیار مطالعه شده است؛ نتایج نشان می‌دهند که وضع خیلی از $L^{۲}$ پیچیده‌تر است.

جبر باناخ L^1

۱۸.۹ تعریف. گوییم فضای باناخ A یک **جبر باناخ** است اگر در آن یک ضرب چنان تعریف شده باشد که نامساوی

$$\|xy\| \le \|x\| \, \|y\| \quad (x,y \in A), \tag{۱}$$

قانون شرکتپذیری $x(yz) = (xy)z$، قوانین پخشپذیری

$$x(y+z) = xy+xz \text{ ، } (y+z)x = yx+zx \; (x,y,z \in A) \text{ ،} \tag{۲}$$

و رابطهٔ

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \tag{۳}$$

به‌ازای هر اسکالر α برقرار باشند.

۱۹.۹ چند مثال

(آ) فرض کنیم $A = C(X)$ که در آن X یک فضای هاسدورف فشرده با نرم سوپرمم و ضرب نقطه به‌نقطهٔ معمولی توابع: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است. این یک جبر باناخ تعویضپذیر $(fg = gf)$ با یکه (تابع ثابت ۱) می‌باشد.

(ب) $C_0(R^1)$ یک جبر باناخ تعویضپذیر بدون یکه است؛ یعنی بدون عنصری مانند u که به‌ازای هر $f \in C_0(R^1)$، $uf = f$.

(پ) مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی بر R^k (یا بر هر فضای باناخ) با نرم عملگر همانند در تعریف ۳.۵ و با جمع و ضرب تعریف شده به‌وسیلهٔ

$$(AB)x = A(Bx) \quad \text{و} \quad (A+B)x = Ax+Bx$$

یک جبر باناخ بایکه است که به‌ازای $k > 0$ تعویضپذیر نیست.

(ت) L^1 با ضرب تعریف شده به‌وسیلهٔ پیچش یک جبر باناخ است. چون

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \, \|g\|_1 ,$$

نامساوی نرمها برقرار است. قانون شرکتپذیری را می‌توان مستقیماً (با اعمال قضیهٔ فوبینی) تحقیق کرد، ولی به‌صورت زیر نیز میسر است: می‌دانیم که تبدیل فوریهٔ $f*g$ مساوی $\hat{f} \cdot \hat{g}$ است و نگاشت $f \to \hat{f}$ یک به‌یک می‌باشد. بنابر قانون شرکتپذیری اعداد مختلط، به‌ازای هر $t \in R^1$ داریم

$$\hat{f}(t)[\hat{g}(t)\hat{h}(t)] = [\hat{f}(t)\hat{g}(t)]\hat{h}(t) \cdot$$

پس داریم

$$f*(g*h) = (f*g)*h \cdot$$

به‌همین نحو فوراً معلوم می‌شود که $f*g=g*f$. بقیهٔ شرایط تعریف ۱۸.۹ نیز به‌آسانی در L^1 تحقیق می‌شوند.

لذا L^1 یک جبر باناخ تعویضپذیر است. تبدیل فوریه یک یکریختی جبرها از L^1 به‌توی C_0 است. لذا $f\in L^1$ ی با $\hat{f}\equiv 1$ وجود ندارد؛ درنتیجه L^1 دارای یکه نمی‌باشد.

۲۰.۹ همریختیهای مختلط. مهمترین توابع مختلط بر یک جبر باناخ مانند A همریختیها از A به‌توی میدان مختلط اند. اینها درست تابعیهای خطیی هستند که ضرب را نیز حفظ می‌کنند؛ یعنی توابعی مانند φ به‌طوری‌که به‌ازای هر x و y در A و جمیع اسکالرهای α و β،

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y) \quad \text{و} \quad \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)\cdot$$

توجه کنید که در این تعریف هیچ فرضی راجع به کرانداری نشده است. زاید بودن این فرض بسیار جالب است:

۲۱.۹ قضیه. ***هرگاه φ یک همریختی مختلط بر جبر باناخ A باشد، آنگاه نرم φ به‌عنوان یک تابعی خطی حداکثر ۱ می‌باشد.***

برهان. برای رسیدن به‌تناقض فرض می‌کنیم به‌ازای $x_0\in A$ ی، $|\varphi(x_0)|>\|x_0\|$. قرار می‌دهیم $\lambda=\varphi(x_0)$ و $x=x_0/\lambda$. در این صورت $\|x\|<1$ و $\varphi(x)=1$.

چون $\|x^n\|\le\|x\|^n$ و $\|x\|<1$، عناصر

$$s_n=-x-x^2-\cdots-x^n \tag{1}$$

یک دنبالهٔ کشی در A تشکیل می‌دهند. چون A تام است، به‌خاطر فضای باناخ بودن عنصری مانند $y\in A$ وجود دارد به‌طوری که $\|y-s_n\|\to 0$، و به‌آسانی معلوم می‌شود که $x+s_n=xs_{n-1}$؛ درنتیجه

$$x+y=xy\cdot \tag{2}$$

لذا $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x)\varphi(y)$ که به‌خاطر $\varphi(x)=1$ ناممکن می‌باشد.

۲۲.۹ همریختیهای مختلط L^1. فرض کنیم φ یک همریختی مختلط L^1 باشد؛ یعنی یک تابعی خطی (بنابر قضیهٔ ۲۱.۹، با نرم حداکثر ۱) که در رابطهٔ زیر نیز صدق کند:

$$\varphi(f*g)=\varphi(f)\varphi(g)\ (f,g\in L^1)\cdot \tag{1}$$

بنابر قضیهٔ ۱۶.۶، $\beta\in L^\infty$ ای وجود دارد به‌طوری‌که

$$\varphi(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\beta(x)\,dm(x)\ (f\in L^1)\cdot \tag{2}$$

حال، با استفاده از رابطهٔ (۱)، ببینیم چه چیز دیگری می‌توان راجع به β گفت. از یک سو،

$$\begin{aligned}\varphi(f*g) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)\beta(x)\,dm(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\,dm(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dm(y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_y(x)\beta(x)\,dm(x) \qquad (۳)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(f_y)\,dm(y)\,.\end{aligned}$$

و از سوی دیگر،

$$\varphi(f)\varphi(g)=\varphi(f)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\beta(y)\,dm(y)\,. \qquad (۴)$$

حال فرض کنیم φ متحد ۰ نباشد. $f\in L^1$ را طوری ثابت می‌گیریم که $\varphi(f)\neq 0$. چون آخرین انتگرال در (۳) مساوی طرف راست (۴) به‌ازای هر $g\in L^1$ است، یکتایی قضیهٔ ۱۶.۶ نشان می‌دهد که به‌ازای تقریباً هر y،

$$\varphi(f)\beta(y)=\varphi(f_y)\,. \qquad (۵)$$

ولی $y\to f_y$ یک نگاشت پیوسته از R^1 به‌توی L^1 است (قضیهٔ ۵.۹) و φ بر L^1 پیوسته می‌باشد. لذا طرف راست (۵) تابع پیوسته‌ای از y است و می‌توان [با تغییر $\beta(y)$ بر مجموعه‌ای از اندازهٔ ۰ در صورت لزوم که اثری بر (۲) ندارد] فرض کرد که β پیوسته است. هرگاه در (۵) y را با $x+y$ و سپس f را با f_x عوض کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\varphi(f)\beta(x+y)&=\varphi(f_{x+y})=\varphi\big((f_x)_y\big)=\varphi(f_x)\beta(y)\\ &=\varphi(f)\beta(x)\beta(y)\,;\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y)\quad (x,y\in R^1)\,. \qquad (۶)$$

چون β متحد ۰ نیست، رابطهٔ (۶) ایجاب می‌کند که $\beta(0)=1$، و پیوستگی β نشان می‌دهد که $\delta>0$ ای هست به‌طوری که

$$\int_0^{\delta} \beta(y)\,dy=c\neq 0 \qquad (۷)$$

در این صورت

$$c\beta(x)=\int_0^{\delta}\beta(y)\beta(x)\,dy=\int_0^{\delta}\beta(y+x)\,dy=\int_x^{x+\delta}\beta(y)\,dy\,. \qquad (۸)$$

چون β پیوسته است، آخرین انتگرال تابع مشتقپذیری از xاست. لذا رابطهٔ (۸) نشان می‌دهد که β مشتقپذیر است. از رابطهٔ (۶) نسبت به yمشتق گرفته و سپس قرار می‌دهیم $y = ۰$. نتیجه خواهد بود

$$\beta'(x) = A\beta(x) \text{ که در آن } A = \beta'(۰) \cdot \qquad (۹)$$

لذا مشتق $\beta(x)\, e^{-Ax}$مساوی ۰ است، و چون $\beta(۰) = ۱$، داریم

$$\beta(x) = e^{Ax} \cdot \qquad (۱۰)$$

ولی β بر $R^۱$کراندار است. لذا Aباید موهومی محض باشد، و نتیجه می‌گیریم که $t \in R^۱$ای هست به‌طوری‌که

$$\beta(x) = e^{-itx} \cdot \qquad (۱۱)$$

بدین‌ترتیب به‌تبدیل فوریه خواهیم رسید.

۲۳.۹ قضیه. به‌هر همریختی مختلط φ بر $L^۱$ (جز $\varphi = ۰$) $t \in R^۱$ای منحصر به‌فرد چنان نظیر است که $\varphi(f) = \hat{f}(t)$.

وجود t در بالا ثابت شد. یکتایی از این امر نتیجه می‌شود که اگر $t \neq s$، تابعی مانند $f \in L^۱$ هست به‌طوری که $\hat{f}(t) \neq \hat{f}(s)$؛ برای $f(x)$انتقال مناسبی از $e^{-|x|}$ را اختیار کنید.

تمرینات

۱. به‌فرض آنکه $f \in L^۱$و $f > ۰$، ثابت کنید به‌ازای هر $y \neq ۰$، $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(۰)$.

۲. تبدیل فوریهٔ تابع مشخص یک بازهٔ بسته را حساب کنید. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ فرض کنید g_n تابع مشخص $[-n, n]$ بوده، h تابع مشخص $[-۱, ۱]$ باشد، و $g_n * h$ را به‌طور صریح حساب کنید. (نمودار قطعه قطعه خطی است.) نشان دهید که $g_n * h$ تبدیل فوریهٔ تابعی مانند $f_n \in L^۱$است؛ جز در مورد یک ثابت ضربی،

$$f_n(x) = \frac{\sin x \sin nx}{x^۲} \cdot$$

نشان دهید که $\|f_n\|_۱ \to \infty$ و نتیجه بگیرید که نگاشت $f \to \hat{f}$، $L^۱$را به‌توی یک زیرمجموعهٔ **حقیقی** از $C_۰$ می‌نگارد. با این حال نشان دهید که برد این نگاشت در $C_۰$ چگال است.

۳. حد

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin \lambda t}{t} e^{itx}\, dt \; (-\infty < x < \infty)$$

را که در آن λ یک ثابت مثبت است بیابید.

۴. $f \in L^۲$هایی را مثال بزنید که $f \notin L^۱$ولی $\hat{f} \in L^۱$. این امر تحت چه شرایطی رخ خواهد

داد؟

۵. اگر $f\in L^1$ و $\int |t\hat{f}(t)|\,dm(t)<\infty$، ثابت کنید f ت. هـ. با یک تابع مشتقپذیر که مشتقش

$$i\int_{-\infty}^{\infty} t\hat{f}(t)\,e^{ixt}\,dm(t)$$

است یکی است.

۶. فرض کنید $f\in L^1$، f تقریباً همه جا مشتقپذیر باشد، و $f'\in L^1$. آیا تبدیل فوریهٔ f' مساوی $ti\hat{f}(t)$ است؟

۷. فرض کنید S ردهٔ تمام توابع f بر R^1 باشد که دارای خاصیت زیرند: f بی‌نهایت بار مشتقپذیر است، و اعدادی مانند $A_{mn}(f)<\infty$ به‌ازای $m,n=0,1,2,\cdots$ وجود دارند به‌طوری که

$$|x^n D^m f(x)|\le A_{mn}(f)\,(x\in R^1)\,\cdot$$

در اینجا D عملگر مشتقگیری معمولی است. ثابت کنید تبدیل فوریه S را به‌روی S می‌نگارد. چند عضو S را نام ببرید.

۸. اگر p و q مزدوجهای نمایی بوده، $f\in L^p$، $g\in L^q$، و $h=f*g$، ثابت کنید h به‌طور یکنواخت پیوسته است. هرگاه نیز داشته باشیم $1<p<\infty$، آنگاه $h\in C_0$؛ نشان دهید که این امر به‌ازای $f\in L^1$ی و $g\in L^\infty$ای برقرار نیست.

۹. فرض کنید $1\le p<\infty$، $f\in L^p$، و

$$g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt\,\cdot$$

ثابت کنید $g\in C_0$. اگر $f\in L^\infty$، راجع به g چه می‌شود گفت؟

۱۰. فرض کنید C^∞ ردهٔ تمام توابع مختلط بی‌نهایت بار مشتقپذیر بر R^1 بوده و C_c^∞ از تمام $g\in C^\infty$هایی تشکیل شده باشد که محافظشان فشرده است. نشان دهید که C_c^∞ فقط از ۰ تشکیل نشده است. فرض کنید L^1_{loc} ردهٔ تمام fهایی باشد که به‌طور موضعی تعلق به L^1 دارند؛ یعنی $f\in L^1_{\text{loc}}$ اگر f اندازه‌پذیر بوده و به‌ازای هر بازهٔ بستهٔ کراندار I، $\int_I |f|<\infty$.

اگر $f\in L^1_{\text{loc}}$ و $g\in C_c^\infty$، ثابت کنید $f*g\in C^\infty$.

ثابت کنید دنباله‌هایی مانند $\{g_n\}$ در C_c^∞ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $f\in L^1$، وقتی $n\to\infty$،

$$\|f*g_n-f\|_1\to 0\,\cdot$$

(قس. قضیهٔ ۹.۱۰). ثابت کنید $\{g_n\}$ را نیز می‌توان طوری گرفت که به‌ازای هر $f\in L^1_{\text{loc}}$، $(f*g_n)(x)\to f(x)$ ت. هـ. درواقع، به‌ازای $\{g_n\}$ مناسب، همگرایی در هر نقطهٔ x که در آن f مشتق انتگرال نامعینش است رخ می‌دهد.

ثابت کنید اگر $f\in L^{1}$ ، وقتی $\lambda \to 0$، $(f*h_\lambda)(x)\to f(x)$ ت. هـ.، و با آنکه h_λ محافظ فشرده ندارد، $f*h_\lambda \in C^\infty$. (h_λ در بخش ۷.۹ تعریف شده است.)

۱۱. شرایطی بر f و / یا $\hat{f}$ بگذارید که صحت استدلال صوری زیر را تضمین نمایند: هرگاه

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-itx}\,dx$$

و

$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi),$$

آنگاه F متناوب با دورهٔ تناوب 2π است، ضریب فوریهٔ nم F مساوی $\varphi(n)$ است؛ درنتیجه $F(x)=\Sigma\,\varphi(n)\,e^{inx}$. بخصوص

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n)\cdot$$

به‌طور کلی،

اگر $\alpha>0$ ، $\beta>0$ ، و $\alpha\beta=2\pi$ ، $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\beta)=\alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n\alpha)\cdot$ (*)

رابطهٔ (*) راجع به‌حد سمت راست (البته به‌ازای توابعی «مناسب») وقتی $\alpha\to 0$ چه می‌گوید؟ آیا این با قضیهٔ انعکاس سازگار است؟ [رابطهٔ (*) به‌فرمول جمعبندی پواسون معروف است.]

۱۲. در تمرین ۱۱ فرض کنید $f(x)=e^{-|x|}$ و اتحاد زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{e^{2\pi\alpha}+1}{e^{2\pi\alpha}-1}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}\cdot$$

۱۳. اگر $0<c<\infty$ ، تعریف کنید $f_c(x)=\exp(-cx^2)$.

(آ) $\hat{f}_c$ را حساب کنید. **راهنمایی.** اگر $\varphi=\hat{f}_c$ ، انتگرالگیری جزء به‌جزء نتیجه می‌دهد که $2c\varphi'(t)+t\varphi(t)=0$.

(ب) نشان دهید که یک (و فقط یک) c هست که به‌ازایش $\hat{f}_c=f_c$.

(پ) نشان دهید که $f_a*f_b=\gamma f_c$. γ و c را صریحاً برحسب a و b بیابید.

(ت) در تمرین ۱۱ فرض کنید $f=f_c$. اتحاد حاصل چیست؟

۱۴. تبدیل فوریهٔ $f\in L^{1}(R^k)$ را می‌توان با

$$\hat{f}(y)=\int_{R^k} f(x)\,e^{-ix\cdot y}\,dm_k(x)\quad(y\in R^k)$$

تعریف کرد که در آن اگر $x=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$ و $y=(\eta_1,\cdots,\eta_k)$، $x\cdot y=\Sigma\,\xi_i\eta_i$ و، برای راحتی، m_k اندازهٔ لبگ بر R^k بخش بر $(2\pi)^{k/2}$ است. قضیهٔ انعکاس و قضیهٔ پلانشرل و نیز

مشابه قضیهٔ ۲۳.۹ را در این محدوده ثابت نمایید.

۱۵. اگر $f \in L^1(R^k)$، A یک عملگر خطی بر R^k باشد، و $g(x)=f(Ax)$، $\hat{g}$ چگونه با $\hat{f}$ مربوط است؟ اگر f تحت دورانها پایا باشد، یعنی $f(x)$ فقط تابع فاصلهٔ اقلیدسی x تا مبدأ باشد، ثابت کنید همین امر برای $\hat{f}$ درست است.

۱۶. **لاپلاسین** تابع f بر R^k عبارت است از

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

مشروط بر اینکه مشتقات جزئی موجود باشند. اگر $y = \Delta f$ و تمام شرایط انتگرالپذیری لازم برقرار باشند، رابطهٔ بین $\hat{f}$ و $\hat{g}$ چیست؟ واضح است که لاپلاسین با انتقالها تعویض می‌شود. ثابت کنید با دورانها نیز تعویض می‌شود؛ یعنی هرگاه f دارای مشتقات دوم پیوسته بوده و A دورانی از R^k باشد، آنگاه

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A \cdot$$

(نشان دهید برای این کار کافی است شرط اضافی محافظ فشرده داشتن f برقرار باشد.)

۱۷. نشان دهید که هر نشان اندازه‌پذیر لبگ R^1 پیوسته است. این مطلب را برای R^k ثابت کنید. (بخشی از برهان قضیهٔ ۲۳.۹ را تعدیل نمایید.) قس. تمرین ۱۸.

۱۸. به‌کمک قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف نشان دهید که توابع **ناپیوستهٔ** حقیقی مانند f بر R^1 وجود دارند که به‌ازای هر x و y در R^1،

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \cdot \qquad (1)$$

نشان دهید هرگاه رابطهٔ (۱) برقرار بوده و f اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه f پیوسته است. نشان دهید هرگاه رابطهٔ (۱) برقرار بوده و نمودار f در صفحه چگال نباشد، آنگاه f پیوسته است. جمیع توابع پیوستهٔ صادق در (۱) را پیدا نمایید.

۱۹. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیری از R^1 باشند که اندازهٔ مثبت متناهی دارند. نشان دهید که پیچش $\chi_A * \chi_B$ پیوسته بوده و متحد ۰ نیست. با استفاده از این ثابت کنید که $A+B$ شامل یک بازهٔ باز است. (در تمرین ۵ از فصل ۷ برهان دیگری پیشنهاد شده است.)

فصل ده
خواص مقدماتی توابع هلوریخت

مشتقگیری مختلط

حال توابع مختلط تعریف شده در زیرمجموعه‌های صفحهٔ مختلط را مطالعه می‌کنیم. شایسته است چند نماد متعارف راکه تا پایان کتاب به‌کار خواهند رفت بپذیریم.

۱.۱۰ **چند تعریف.** اگر $r > 0$ و a یک عدد مختلط باشد،

$$D(a\,;r) = \{z : |z-a| < r\} \tag{۱}$$

یک قرص مستدیر باز به‌مرکز a و شعاع r است. $\overline{D}(a\,;r)$ بست $D(a\,;r)$ است و

$$D'(a\,;r) = \{z : 0 < |z-a| < r\} \tag{۲}$$

قرص سفته به‌مرکز a و شعاع r می‌باشد.

گوییم مجموعهٔ E در فضای توپولوژیک X **همبند نیست** اگر E اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی مانند A و B که

$$\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B} \tag{۳}$$

باشد.

اگر A و B همانند فوق بوده و V و W به‌ترتیب متممهای $\overline{A}$ و $\overline{B}$ باشند، داریم $A \subset W$ و $B \subset V$. لذا

$$E \subset V \cup W\,،\ E \cap V \neq \varnothing\,،\ E \cap W \neq \varnothing\,،\ E \cap V \cap W = \varnothing\,. \tag{۴}$$

به‌عکس، اگر مجموعه‌های باز V و W چنان موجود باشند که (۴) برقرار باشد، به‌آسانی و با اختیار $A = E \cap W$ و $B = E \cap V$ معلوم می‌شود که E همبند نیست.

هرگاه E بسته بوده ولی همبند نباشد، آنگاه رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که E اجتماع دو مجموعهٔ بستهٔ ناتهی‌از هم‌جداست؛ زیرا هرگاه $\bar{A} \subset A \cap B$ و $\bar{A} \cap B = \varnothing$، آنگاه $\bar{A} = A$.

هرگاه E باز بوده ولی همبند نباشد، آنگاه رابطهٔ (۴) نشان می‌دهد که E اجتماع دو مجموعهٔ باز ناتهی از هم‌جدا، یعنی $E \cap V$ و $E \cap W$، می‌باشد.

واضح است که هر مجموعه مرکب از فقط یک نقطه همبند است. لذا اگر $x \in E$، خانوادهٔ Φ_x تمام زیرمجموعه‌های همبند E که شامل x اند تهی نیست. به‌آسانی معلوم می‌شود که اجتماع تمام اعضای Φ_x همبند بوده و یک ***زیرمجموعهٔ همبند ماکزیمال*** E می‌باشد. این مجموعه‌ها را ***مؤلفه‌های*** E می‌نامند. لذا هر دو مؤلفهٔ E از هم‌جدایند و E اجتماع مؤلفه‌هایش می‌باشد.

منظور از ***ناحیه*** یعنی زیرمجموعهٔ باز همبند ناتهی از صفحهٔ مختلط. چون هر مجموعهٔ باز Ω در صفحه اجتماعی از قرصهاست و تمام قرصها همبندند، هر مؤلفهٔ Ω باز می‌باشد. لذا هر مجموعهٔ باز در صفحه اجتماعی از نواحی از هم‌جدا می‌باشد. از حالا به‌بعد حرف Ω یعنی یک مجموعهٔ باز در صفحه.

۲.۱۰ تعریف. فرض کنیم تابع مختلط f در Ω تعریف شده باشد. اگر $z_0 \in \Omega$ و

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad (1)$$

موجود باشد، این حد را با $f'(z_0)$ نشان داده و آن را ***مشتق*** f در z_0 می‌نامیم. اگر $f'(z_0)$ به‌ازای هر $z_0 \in \Omega$ موجود باشد، گوییم f ***هلوریخت*** (یا ***تحلیلی***) در Ω است. ردهٔ تمام توابع هلوریخت در Ω را با $H(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

به‌بیان صریح، $f'(z_0)$ در صورتی موجود است که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ چنان نظیر باشد که

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{به‌ازای هر } z \in D'(z_0;\delta) \qquad (2)$$

لذا $f'(z_0)$ یک عدد مختلط است که به‌عنوان حد خارج قسمتهای اعداد مختلط به‌دست می‌آید. توجه کنید که f نگاشتی از Ω به‌توی R^2 است و تعریف ۲۲.۷ به‌این نگاشتها نوع دیگری مشتق، یعنی یک عملگر خطی بر R^2، را مربوط می‌سازد. در وضع فعلی اگر (۲) برقرار باشد، این عملگر خطی ضرب در $f'(z_0)$ (با توجه به R^2 به‌عنوان میدان مختلط) می‌باشد. تحقیق این امر را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

۳.۱۰ چند تبصره. هرگاه $f \in H(\Omega)$ و $g \in H(\Omega)$، آنگاه $f+g \in H(\Omega)$ و $fg \in H(\Omega)$؛

درنتیجه $H(\Omega)$ یک حلقه است؛ قواعد مشتقگیری معمولی به‌کار می‌روند.

نکتهٔ جالبتر این است که برهمنهش توابع هلوریخت هلوریخت‌اند: **هرگاه** $f \in H(\Omega)$، $f(\Omega) \subset \Omega_1$، $g \in H(\Omega_1)$، ***و*** $h = g o f$، ***آنگاه*** $h \in H(\Omega)$، ***و*** h' ***را می‌توان از قاعدهٔ زنجیره‌ای حساب کرد:***

$$h'(z_\circ) = g'\big(f(z_\circ)\big) f'(z_\circ) (z_\circ \in \Omega) \cdot \tag{۱}$$

برای اثبات این امر، $z_\circ \in \Omega$ را ثابت گرفته و قرار می‌دهیم $w_\circ = f(z_\circ)$. در این صورت

$$f(z) - f(z_\circ) = [f'(z_\circ) + \epsilon(z)]\,(z - z_\circ), \tag{۲}$$

$$g(w) - g(w_\circ) = [g'(w_\circ) + \eta(w)]\,(w - w_\circ), \tag{۳}$$

که در آنها وقتی $z \to z_\circ$، $\epsilon(z) \to \circ$ و وقتی $w \to w_\circ$، $\eta(w) \to \circ$. قرار می‌دهیم $w = f(z)$ و رابطهٔ (۲) را در (۳) می‌گذاریم: اگر $z \neq z_\circ$،

$$\frac{h(z) - h(z_\circ)}{z - z_\circ} = [g'\big(f(z_\circ)\big) + \eta\big(f(z)\big)]\,[f'(z_\circ) + \epsilon(z)] \cdot \tag{۴}$$

مشتقپذیری f این تابع را در $z_\circ$ پیوسته می‌سازد. لذا رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود.

۴.۱۰ چند مثال. z^n، به‌ازای $n = \circ, ۱, ۲, \cdots$، در تمام صفحه هلوریخت است، و این امر برای هر چندجمله‌ای از z نیز درست است. به‌آسانی و مستقیماً می‌توان تحقیق کرد که $۱/z$ در $\{z : z \neq \circ\}$ هلوریخت است. لذا با فرض $g(w) = ۱/w$ در قاعدهٔ زنجیره‌ای معلوم می‌شود که هرگاه $f_۱$ و $f_۲$ در $H(\Omega)$ بوده و $\Omega_\circ$ زیرمجموعهٔ بازی از Ω باشد که در آن $f_۲$ دارای صفر نیست، آنگاه $f_۱/f_۲ \in H(\Omega_\circ)$.

تابع دیگری که در تمام صفحه هلوریخت است (این توابع را **تمام** می‌نامند) تابع نمایی است که در فصل درآمد تعریف شد. درواقع دیدیم که exp به‌مفهوم تعریف ۲.۱۰ همه جا مشتقپذیر است و به‌ازای هر z مختلط، $\exp'(z) = \exp(z)$.

۵.۱۰ سریهای توانی. از نظریهٔ سریهای توانی فقط این امر را می‌پذیریم که به‌هر سری توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{۱}$$

عددی مانند $R \in [\circ, \infty]$ چنان نظیر است که سری به‌ازای هر $r < R$ در $\overline{D}(a; r)$ به‌طور مطلق و به‌طور یکنواخت همگراست، و اگر $z \notin \overline{D}(a; R)$ واگرا می‌باشد. «شعاع همگرایی» R از آزمون ریشه به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{R} = \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{۱/n} \cdot \tag{۲}$$

گوییم تابع f تعریف شده در Ω **به‌وسیلهٔ سری توانی در Ω قابل نمایش است** اگر به‌هر قرص $D(a\,;r)\subset M$ سری (۱) نظیر باشد که به‌ازای هر $z\in D(a\,;r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

۶.۱۰ قضیه. *هرگاه f به‌وسیلهٔ سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f\in H(\Omega)$ و f' نیز به‌وسیلهٔ سری توانی در Ω قابل نمایش است. درواقع هرگاه به‌ازای $z\in D(a\,;r)$*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\,, \tag{۱}$$

آنگاه به‌ازای این zها نیز داریم

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n(z-a)^{n-1}\,\cdot \tag{۲}$$

برهان. اگر سری (۱) در $D(a\,;r)$ همگرا باشد، آزمون ریشه نشان می‌دهد که سری (۲) نیز در این قرص همگراست. بدون صدمه زدن به‌کلیت فرض می‌کنیم $a=0$ و مجموع سری (۲) را با $g(z)$ نشان داده، $w\in D(a\,;r)$ را ثابت گرفته، و ρ را طوری می‌گیریم که $|w|<\rho<r$. اگر $z\neq w$، داریم

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\frac{z^n-w^n}{z-w}-n\,w^{n-1}\right]\cdot \tag{۳}$$

عبارت داخل کروشه به‌ازای $n=1$ صفر است و به‌ازای $n\geq 2$ مساوی است با

$$(z-w)\sum_{k=1}^{n-1} k\,w^{k-1}z^{n-k-1}\,\cdot \tag{۴}$$

اگر $|z|<\rho$، قدرمطلق مجموع (۴) از

$$\frac{n(n-1)}{2}\,\rho^{n-2} \tag{۵}$$

کمتر است؛ درنتیجه

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|\leq |z-w|\sum_{n=2}^{\infty} n^2\,|c_n|\,\rho^{n-2}\,\cdot \tag{۶}$$

چون $\rho<r$، سری اخیر همگراست. لذا طرف چپ (۶) وقتی $z\to w$ به ۰ میل می‌کند. این امر می‌گوید که $f'(w)=g(w)$ و برهان تمام می‌شود.

نتیجه. چون f' در همان شرایطی صدق می‌کند که f در آنها صادق است، قضیه بر f' نیز قابل اعمال است. از این کار نتیجه می‌شود که f از هر مرتبه مشتق دارد، هر مشتق به‌وسیلهٔ سری توانی در Ω قابل نمایش است، و اگر (۱) برقرار باشد،

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_n(z-a)^{n-k}\,\cdot \tag{۷}$$

لذا رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که

(۸) $$k!\,c_k = f^{(k)}(a)\ (k = ۰, ۱, ۲, \cdots);$$

درنتیجه به‌ازای هر $a\in\Omega$ دنبالهٔ منحصر به‌فردی مانند $\{c_n\}$ هست که به‌ازایش رابطهٔ (۱) برقرار می‌باشد.

حال به‌توصیف فرایندی می‌پردازیم که توابع قابل نمایش به‌وسیلهٔ سریهای توانی تولید می‌کند. بعدها حالاتی خاص اهمیت خواهند یافت.

۷.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم μ یک اندازهٔ مختلط (متناهی) بر فضای اندازه‌پذیر X بوده، φ یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد، Ω زیرمجموعهٔ بازی در صفحه باشد که $\varphi(X)$ را قطع نمی‌کند، و***

(۱) $$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta)-z}\ (z\in\Omega)\cdot$$

در این صورت f به‌وسیلهٔ سری توانی در Ω قابل نمایش است.

برهان. فرض کنیم $D(a\,;r)\subset\Omega$. چون به‌ازای هر $z\in D(a\,;r)$ و هر $\zeta\in X$،

(۲) $$\left|\frac{z-a}{\varphi(\zeta)-a}\right| \le \frac{|z-a|}{r} < ۱,$$

سری هندسی

(۳) $$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{\left(\varphi(\zeta)-a\right)^{n+۱}} = \frac{۱}{\varphi(\zeta)-z}$$

به‌ازای هر $z\in D(a\,;r)$ ثابت به‌طور یکنواخت بر X همگراست. لذا سری (۳) را می‌توان در (۱) گذارد و $f(z)$ را می‌توان با تعویض جمعبندی و انتگرالگیری محاسبه کرد. پس داریم

(۴) $$f(z) = \sum_{۰}^{\infty} c_n(z-a)^n\ \left(z\in D(a\,;r)\right)$$

که در آن

(۵) $$c_n = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\left(\varphi(\zeta)-z\right)^{n+۱}}\ (n = ۰, ۱, ۲, \cdots)\cdot$$

تذکر. همگرایی سری (۴) در $D(a\,;r)$ نتیجه‌ای از برهان فوق است. این را می‌توان از رابطهٔ (۵) نیز به‌دست آورد زیرا رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که

(۶) $$|c_n| \le \frac{|\mu|(X)}{r^{n+۱}}\ (n = ۰, ۱, ۲, \cdots)\cdot$$

انتگرالگیری روی مسیرها

نخستین هدف اصلی ما در این فصل عکس قضیهٔ ۶.۱۰ است: **هر** $f \in H(\Omega)$ **به‌وسیلهٔ سری توانی در** Ω ***قابل نمایش است***. سریعترین راه به‌این مطلب از طریق قضیهٔ کشی $(Cauchy)$ است که به‌نمایش انتگرالی مهمی از توابع هلوریخت منجر می‌شود. در این بخش نظریهٔ انتگرالگیری مورد نیاز مطرح می‌شود. این کار حتی‌الامکان ساده صورت می‌گیرد و ما آن را صرفاً ابزار مفیدی در بررسی خواص توابع هلوریخت در نظر خواهیم گرفت.

۸.۱۰ **چند تعریف.** اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، یک **منحنی در** X نگاشت پیوسته‌ای مانند γ از بازهٔ بستهٔ فشردهٔ $[\alpha,\beta] \subset R^1$ به‌توی X است. در اینجا $\alpha < \beta$. ما $[\alpha,\beta]$ را ***بازهٔ پارامتری*** γ نامیده و برد γ را با γ^* نشان می‌دهیم. لذا γ یک نگاشت بوده و γ^* مجموعهٔ تمام نقاط $\gamma(t)$ به‌ازای $\alpha \le t \le \beta$ می‌باشد.

- اگر **نقطهٔ شروع** $\gamma(\alpha)$ از γ بر **نقطهٔ پایان** آن $\gamma(\beta)$ منطبق باشد، γ را یک **منحنی بسته** می‌نامیم.

مسیر یک منحنی قطعه‌قطعه به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر در صفحه می‌باشد. به‌بیان صریحتر، یک مسیر با بازهٔ پارامتری $[\alpha,\beta]$ تابع مختلط پیوسته‌ای مانند γ بر $[\alpha,\beta]$ است به‌طوری که شرایط زیر برقرارند: تعدادی متناهی نقطه مانند s_j که $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$ وجود دارند و تحدید γ به‌هر بازهٔ بستهٔ $[s_{j-1}, s_j]$ دارای مشتق پیوسته بر $[s_{j-1}, s_j]$ است. ولی در نقاط s_1، $\cdots$، s_{n-1} مشتقات چپ و راست γ ممکن است متفاوت باشند.

یک **مسیر بسته** منحنی بسته‌ای است که مسیر نیز می‌باشد.

حال فرض کنیم γ یک مسیر بوده و f تابع پیوسته‌ای بر γ^* باشد. انتگرال f روی γ انتگرال روی بازهٔ پارامتری $[\alpha,\beta]$ منحنی γ تعریف می‌شود:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt \cdot \tag{۱}$$

فرض کنیم φ یک نگاشت به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر یک به‌یک از بازهٔ بستهٔ $[\alpha_1,\beta_1]$ به‌روی $[\alpha,\beta]$ باشد به‌طوری که $\varphi(\alpha_1)=\alpha$ و $\varphi(\beta_1)=\beta$، و قرار می‌دهیم $\gamma_1 = \gamma\circ\varphi$. در این صورت γ_1 یک مسیر با بازهٔ پارامتری $[\alpha_1,\beta_1]$ است. انتگرال f روی γ_1 عبارت است از

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f\big(\gamma_1(t)\big)\,\gamma'_1(t)\,dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f\big(\gamma(\varphi(t))\big)\,\gamma'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(s)\big)\,\gamma'(s)\,ds\,;$$

در نتیجه «پارامتری سازی مجدد» ما انتگرال را تغییر نمی‌دهد:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \cdot \tag{۲}$$

هرگاه رابطهٔ (۲) به‌ازای جفت γ و γ_1 از مسیرها (و به‌ازای هر f) برقرار باشد، ما γ و γ_1 را **هم‌ارز** می‌دانیم.

توان تعویض یک مسیر با مسیری هم‌ارز، یعنی در اختیار داشتن بازه‌های پارامتری، موجب تسهیل کار است. مثلاً اگر نقطهٔ پایان γ_1 بر نقطهٔ شروع γ_2 منطبق باشد، می‌توان بازه‌های پارامتری آنها را طوری قرار داد که γ_1 و γ_2 به‌هم وصل شده و مسیری مانند γ با خاصیت

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \qquad (۳)$$

به‌ازای هر f پیوسته بر $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ به‌دست دهند.

بهرحال فرض می‌کنیم $[0, 1]$ بازهٔ پارامتری مسیر γ بوده و $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$، $0 \le t \le 1$. ما γ_1 را بدلیل زیر **مسیر متقابل** γ می‌نامیم: به‌ازای هر f پیوسته بر $\gamma^* = \gamma_1^*$ داریم

$$\int_0^1 f\big(\gamma_1(t)\big)\gamma'_1(t)\,dt = -\int_0^1 f\big(\gamma(1-t)\big)\gamma'(1-t)\,dt$$
$$= -\int_0^1 f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,ds;$$

درنتیجه

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f \cdot \qquad (۴)$$

از رابطهٔ (۱) نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le \|f\|_\infty \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt \qquad (۵)$$

که در آن $\|f\|_\infty$ ماکزیمم $|f|$ بر γ^* بوده و آخرین انتگرال در (۵) (طبق تعریف) **طول** γ می‌باشد.

۹.۱۰ حالات خاص

(آ) اگر a یک عدد مختلط بوده و $r > 0$، مسیر تعریف شده با

$$\gamma(t) = a + re^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi) \qquad (۱)$$

دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به‌مرکز a و شعاع r نام دارد. داریم

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta \qquad (۲)$$

و طول γ طبق انتظار $2\pi r$ می‌باشد.

(ب) اگر a و b اعدادی مختلط باشند، مسیر γ داده شده با

$$\gamma(t) = a + (b-a)\,t \quad (0 \le t \le 1) \qquad (۳)$$

بازهٔ بستهٔ جهتدار $[a, b]$ است، طولش مساوی است با $|b-a|$ ، و

$$\int_{[a,b]} f(z)\, dz = (b-a) \int_{0}^{1} f\,[a+(b-a)\,t]\, dt \cdot \quad (۴)$$

اگر

$$\gamma_1(t) = \frac{a\,(\beta-t)+b\,(t-\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (\alpha \le t \le \beta) \cdot \quad (۵)$$

یک مسیر هم‌ارز به‌دست می‌آید که آن را نیز با $[a, b]$ نشان می‌دهیم. مسیر متقابل $[a, b]$ عبارت است از $[b, a]$.

(پ) فرض کنیم $\{a, b, c\}$ یک سه‌تایی مرتب از اعداد مختلط باشد. همچنین

$$\Delta = \Delta(a, b, c)$$

مثلث به‌رئوس a و b و c باشد (Δ کوچکترین مجموعهٔ محدبی است که شامل a و b و c است)، و به‌ازای هر f پیوسته بر مرز Δ تعریف می‌کنیم

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f \cdot \quad (۶)$$

رابطهٔ (۶) را می‌توان تعریف سمت چپ خود گرفت. یا اینکه $\partial\Delta$ را مسیر حاصل از الحاق $[a,b]$ به $[b,c]$ به $[c,a]$ به‌صورت ذکر شده در تعریف ۸.۱۰ دانست، که در این صورت صحت (۶) به‌آسانی ثابت خواهد شد.

اگر $\{a,b,c\}$ جایگشت دوری بیابد، از رابطهٔ (۶) معلوم می‌شود که سمت چپ (۶) بلاتغییر است. هرگاه $\{a, b, c\}$ با $\{a, c, b\}$ عوض شود، آنگاه سمت چپ (۶) تغییر علامت می‌دهد.

حال به‌قضیه‌ای می‌رسیم که نقش بسیار مهمی در نظریهٔ توابع دارد.

۱۰.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم γ یک مسیر بسته بوده، Ω متمم γ^* (نسبت به‌صفحه) باشد، و تعریف می‌کنیم***

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} \quad (z \in \Omega) \cdot \quad (۱)$$

در این صورت $\operatorname{Ind}_\gamma$ یک تابع صحیح مقدار بر Ω است که در هر مؤلفهٔ Ω ثابت بوده و در متمم بی‌کران Ω مساوی ۰ است.

ما $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ را ***اندیس*** z نسبت به γ می‌نامیم. توجه کنید که γ^* فشرده است. پس γ^* در قرص کرانداری مانند D که متممش D^c همبند است قرار دارد. لذا D^c در مؤلفه‌ای از Ω واقع است. این امر نشان می‌دهد که Ω درست یک مؤلفهٔ بی‌کران دارد.

برهان. فرض کنیم $[\alpha, \beta]$ بازهٔ پارامتری γ باشد. $z \in \Omega$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds \cdot \quad (۲)$$

چون $w/2\pi i$ یک عدد صحیح است اگر و فقط اگر $e^{w} = 1$، اولین حکم قضیه، یعنی عدد صحیح بودن $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$، هم‌ارز $\varphi(\beta) = 1$ است که در آن

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right\} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \cdot \tag{۳}$$

مشتقگیری از (۳) نشان می‌دهد که

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \tag{۴}$$

جز احتمالاً بر مجموعه‌ای متناهی مانند S که در آن γ مشتقپذیر نیست. لذا $\varphi/(\gamma-z)$ تابع پیوسته‌ای بر $[\alpha,\beta]$ است که مشتقش در $[\alpha,\beta]-S$ صفر است. چون S متناهی است، $\varphi/(\gamma-z)$ بر $[\alpha,\beta]$ ثابت است؛ و چون $\varphi(\alpha) = 1$، داریم

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(\alpha)-z} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \cdot \tag{۵}$$

حال از فرض بسته بودن مسیر γ، یعنی $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$، استفاده می‌کنیم. رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که $\varphi(\beta) = 1$ و این، همانطور که در بالا دیدیم، ایجاب می‌کند که $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ عددی صحیح است.

بنابر قضیهٔ ۷.۱۰، رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که $\mathrm{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$. نقش یک مجموعهٔ همبند تحت یک نگاشت پیوسته همبند است (مرجع [۲۶]، قضیهٔ ۲۲.۴)، و چون Ind_γ یک تابع صحیح مقدار است، Ind_γ باید بر هر مؤلفهٔ Ω ثابت باشد.

بالأخره رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که اگر $|z|$ به‌قدر کافی بزرگ باشد، $|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < 1$. این ایجاب می‌کند که در مؤلفهٔ بی‌کران Ω، $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

تبصره. اگر $\lambda(t)$ انتگرال (۳) باشد، برهان فوق نشان می‌دهد که $2\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ افزایش خالص قسمت موهومی $\lambda(t)$ به‌ازای تغییر t از α تا β است، و این همان افزایش خالص شناسهٔ $\lambda(t)-z$ می‌باشد. (ما «شناسه» را تعریف نکرده‌ایم و احتیاجی هم به‌آن نداریم.) اگر این افزایش را بر 2π تقسیم کنیم، «تعداد دفعاتی که γ حول z می‌گردد» به‌دست می‌آید، و این دلیل استفادهٔ مکرراز اصطلاح «عددگردشی» به‌جای‌اندیس را توضیح می‌دهد. یک حسن برهان فوق این‌است که خواص اصلی اندیس را بدون ارجاع به‌شناسهٔ (چند مقداری) یک عدد مختلط ثابت می‌کند.

۱۱.۱۰ **قضیه.** *هرگاه γ دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به‌مرکز a و شعاع r باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ ، } & |z-a| < r \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } & |z-a| > r \text{ اگر} \end{cases}$$

برهان. γ را مثل بخش ۹.۱۰ (آ) می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۱۰.۱۰، کافی است $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ را حساب

کنیم، و رابطهٔ ۹.۱۰ (۲) نشان می‌دهد که این مساوی است با

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{r}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} (re^{it})^{-۱} e^{it}\, dt = ۱ \cdot$$

قضیهٔ کشی موضعی

شکلهای مختلفی از قضیهٔ کشی در دست است. همهٔ آنها می‌گویند که اگر γ یک مسیر بسته یا دور در Ω بوده و γ و Ω در شرایط توپولوژیک خاصی صدق کنند، انتگرال هر $f \in H(\Omega)$ روی γ مساوی ۰ است. ابتدا صورت موضعی ساده‌ای از این (قضیهٔ ۱۴.۱۰) را به‌دست می‌آوریم که برای بسیاری از کاربردها نسبتاً کافی است. شکل کلیتر بعدها ثابت خواهد شد.

۱۲.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم $F \in H(\Omega)$ و F' در Ω پیوسته باشد. در این صورت، به‌ازای هر مسیر بستهٔ γ در Ω،***

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = ۰ \cdot$$

برهان. اگر $[\alpha, \beta]$ بازهٔ پارامتری γ باشد، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان می‌دهد که

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = \int_\alpha^\beta F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\, dt = F\big(\gamma(\beta)\big) - F\big(\gamma(\alpha)\big) = ۰$$

زیرا $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$.

نتیجه. ***چون z^n مشتق $z^{n+۱}/(n+۱)$ به‌ازای جمیع اعداد صحیح $n \neq -۱$ است،***

$$\int_\gamma z^n\, dz = ۰$$

به‌ازای هر مسیر بستهٔ γ اگر $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ و به‌ازای هر مسیر بستهٔ γ که $۰ \notin \gamma^*$ اگر $n = -۲, -۳, -۴, \cdots$ برقرار است.

حالت $n = -۱$ در قضیهٔ ۱۰.۱۰ سامان یافته است.

۱۳.۱۰ قضیهٔ کشی برای یک مثلث. ***فرض کنیم Δ یک مثلث بسته در مجموعهٔ باز در صفحهٔ Ω بوده، $p \in \Omega$، f بر Ω پیوسته باشد، و $f \in H(\Omega - \{p\})$. در این صورت***

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = ۰ \cdot \qquad (۱)$$

برای تعریف $\partial\Delta$، ر.ک. بخش ۹.۱۰ (پ). بعدها خواهیم دید که فرض ما عملاً ایجاب می‌کند که $f \in H(\Omega)$؛ یعنی نقطهٔ استثنایی p واقعاً استثنایی نیست. اما صورت فوق از قضیه در اثبات فرمول کشی مفید خواهد بود.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $p \notin \Delta$. همچنین a و b و c رئوس Δ بوده و a' و b' و c' به‌ترتیب نقاط میانی $[b, c]$، $[c, a]$، و $[a, b]$ باشند، و چهار مثلث Δ^j متشکل از سه‌تاییهای مرتب

$$\{a, c', b'\} \text{ ، } \{b, a', c'\} \text{ ، } \{c, b', a'\} \text{ ، و } \{a', b', c'\} \qquad (۲)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر J مقدار انتگرال (۱) باشد، از رابطهٔ ۹.۱۰ (۶) معلوم می‌شود که

$$J = \sum_{j=۱}^{۴} \int_{\partial \Delta^j} f(z)\, dz \cdot \qquad (۳)$$

لذا قدرمطلق لااقل یکی از انتگرالهای سمت راست (۳) دست‌کم $|J/۴|$ است. مثلث نظیر را $\Delta_۱$ نامیده، استدلال را با $\Delta_۱$ به‌جای Δ تکرار کرده، و ادامه می‌دهیم. این کار دنباله‌ای از مثلثها مانند Δ_n تولید می‌کند که $\Delta \supset \Delta_۱ \supset \Delta_۲ \supset \cdots$ و طول $\partial \Delta_n$ مساوی $۲^{-n} L$ است، که L طول $\partial \Delta$ است، و

$$|J| \le ۴^n \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \qquad (۴)$$

نقطهٔ منحصر به‌فردی مانند $z_۰$ هست که در تمام مثلثهای Δ_n قرار دارد. چون Δ فشـرده است، $z_۰ \in \Delta$؛ درنتیجه f در $z_۰$ مشتقپذیر است.

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. $r > ۰$ ی هست به‌طوری که هروقت $|z - z_۰| < r$،

$$|f(z) - f(z_۰) - f'(z_۰)(z - z_۰)| \le \epsilon\, |z - z_۰|\,, \qquad (۵)$$

و n ی هست به‌طوری‌که به‌ازای هر $z \in \Delta_n$، $|z - z_۰| < r$. به‌ازای این n و هر $z \in \Delta_n$ نیز داریم $|z - z_۰| \le ۲^{-n} L$. بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۱۲.۱۰،

$$\int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz = \int_{\partial \Delta_n} [f(z) - f(z_۰) - f'(z_۰)(z - z_۰)]\, dz\,; \qquad (۶)$$

درنتیجه نامساوی (۵) ایجاب می‌کند که

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \le \epsilon\, (۲^{-n} L)^۲, \qquad (۷)$$

و نامساوی (۴) نشان می‌دهد که $|J| \le \epsilon L^۲$. لذا اگر $p \notin \Delta$، $J = ۰$.

حال فرض کنیم p یکی از رئوس Δ باشد، مثلاً $p = a$. هرگاه a و b و c همخط باشند، آنگاه رابطهٔ (۱) به‌ازای هر f پیوسته بدیهی است. در غیر این صورت نقاط $x \in [a, b]$ و $y \in [a, c]$ را نزدیک a اختیار کرده و ملاحظه می‌کنیم که انتگرال f روی $\partial \Delta$ مجموع انتگرالها روی مرزهای مثلثهای $\{a, x, y\}$، $\{x, b, y\}$، و $\{b, c, y\}$ است. دوتای آخر این انتگرالها ۰ اند زیرا این مثلثها شامل p نمی‌باشند. لذا انتگرال روی $\partial \Delta$ مجموع انتگرالها روی $[a, x]$، $[x, y]$، و $[y, a]$ است، و چون این بازه‌ها را می‌توان بدلخواه کوچک کرد و f بر Δ کراندار است، مجدداً رابطهٔ (۱) را

خواهیم داشت.

بالأخره اگر p یک نقطهٔ دلخواه Δ باشد، با اعمال نتیجهٔ فوق بر $\{a,b,p\}$، $\{b,c,p\}$، و $\{c,a,p\}$ برهان تمام می‌شود.

۱۴.۱۰ قضیهٔ کشی در یک مجموعهٔ محدب. فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز محدب بوده، $p\in\Omega$، f بر Ω پیوسته‌باشد، و $f\in H(\Omega-\{p\})$. دراین‌صورت به‌ازای $F\in H(\Omega)$ ی، $f=F'$. لذا، به‌ازای هر مسیر بستهٔ γ در Ω،

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\circ\cdot \tag{۱}$$

برهان. $a\in\Omega$ را ثابت می‌گیریم. چون Ω محدب است، Ω شامل بازهٔ خط مستقیم از a تا z به‌ازای هر $z\in\Omega$ است؛ درنتیجه می‌توان تعریف کرد

$$F(z)=\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta\ (z\in\Omega)\cdot \tag{۲}$$

به‌ازای هر z و $z_\circ$ در Ω، مثلث به‌رئوس a، $z_\circ$، و z در Ω واقع است لذا، طبق قضیهٔ ۱۳.۱۰، $F(z)-F(z_\circ)$ انتگرال f روی $[z_\circ,z]$ می‌باشد. بنابراین با ثابت گرفتن $z_\circ$، اگر $z\neq z_\circ$،

$$\frac{F(z)-F(z_\circ)}{z-z_\circ}-f(z_\circ)=\frac{۱}{z-z_\circ}\int_{[z_\circ,z]}[f(\zeta)-f(z_\circ)]\,d\zeta\cdot \tag{۳}$$

به‌ازای $\epsilon>\circ$ داده شده، پیوستگی f در $z_\circ$ نشان می‌دهد که $\delta>\circ$ ای هست به‌طوری‌که اگر $|\zeta-z_\circ|<\delta$، $|f(\zeta)-f(z_\circ)|<\epsilon$. لذا اگر $|z-z_\circ|<\delta$، قدرمطلق سمت چپ (۳) از ϵ کمتر است. این ثابت می‌کند که $f=F'$. بخصوص $F\in H(\Omega)$. حال رابطهٔ (۱) از قضیهٔ ۱۲.۱۰ نتیجه می‌شود.

۱۵.۱۰ فرمول کشی در یک مجموعهٔ محدب. فرض کنیم γ یک مسیر بسته در مجموعهٔ باز محدب Ω بوده و $f\in H(\Omega)$. هرگاه $z\in\Omega$ و $z\notin\gamma^*$، آنگاه

$$f(z)\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\cdot \tag{۱}$$

البته حالت $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=۱$ بیش از همه مورد توجه است.

برهان. z را طوری ثابت می‌گیریم که شرایط فوق برقرار باشند، و تعریف می‌کنیم

$$g(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{اگر}\ \zeta\in\Omega\ \text{و}\ \zeta\neq z،\\[2ex] f'(z) & \text{اگر}\ \zeta=z،\end{cases} \tag{۲}$$

در این صورت g در مفروضات قضیهٔ ۱۴.۱۰ صدق می‌کند. لذا

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = 0 \cdot \qquad (۳)$$

اگر رابطهٔ (۲) را در (۳) بگذاریم، رابطهٔ (۱) به‌دست خواهد آمد.

اگر γ را یک دایره بگیریم، قضیهٔ نمایشپذیری توابع هلوریخت به‌وسیلهٔ سریهای توانی نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ ۱۵.۱۰ خواهد بود:

۱۶.۱۰ قضیه. *به‌ازای هر مجموعهٔ باز Ω در صفحه، هر $f\in H(\Omega)$ به‌وسیلهٔ سری توانی در Ω قابل نمایش است.*

برهان. فرض کنیم $f\in H(\Omega)$ و $D(a\,;R)\subset\Omega$. اگر γ یک دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به‌مرکز a و شعاع $r<R$ باشد، تحدب $D(a\,;R)$ به‌ما اجازهٔ اعمال قضیهٔ ۱۵.۱۰ را می‌دهد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۰، داریم

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\ \big(z\in D(a\,;r)\big)\cdot \qquad (۱)$$

ولی اکنون می‌توان قضیهٔ ۷.۱۰ را به‌ازای $X=[0,2\pi]$، $\varphi=\mu$، و $d\mu(t)=f\big(\mu(t)\big)\mu'(t)\,dt$ به‌کار برد و نتیجه گرفت که دنباله‌ای مانند $\{c_n\}$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\ \ \big(z\in D(a\,;r)\big)\cdot \qquad (۲)$$

یکتایی $\{c_n\}$ (ر.ک. نتیجهٔ ۶.۱۰) نشان می‌دهد که همین سری توانی به‌ازای هر $r<R$ (تا زمانی که a ثابت باشد) به‌دست می‌آید. لذا نمایش (۲) به‌ازای هر $z\in D(a\,;R)$ معتبر است، و برهان تمام خواهد بود.

نتیجه. ***هرگاه $f\in H(\Omega)$، آنگاه $f'\in H(\Omega)$.***

برهان. قضایای ۶.۱۰ و ۱۶.۱۰ را باهم تلفیق کنید.

قضیهٔ کشی دارای عکس سودمندی می‌باشد.

۱۷.۱۰ قضیهٔ موررا (*Morera*) . ***فرض کنیم f یک تابع مختلط پیوسته در مجموعهٔ باز Ω باشد به‌طوری که به‌ازای هر مثلث بستهٔ $\Delta\subset\Omega$،***

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\cdot$$

در این صورت $f\in H(\Omega)$.

برهان. فرض کنیم V یک مجموعهٔ باز محدب در Ω باشد. همانند برهان قضیهٔ ۱۴.۱۰ می‌توان $F\in H(V)$ را طوری ساخت که $F'=f$. چون مشتقات توابع هلوریخت هلوریخت‌اند

(قضیهٔ ۱۶.۱۰)، به‌ازای هر مجموعهٔ باز محدب $V\subset\Omega$ داریم $f\in H(V)$؛ درنتیجه $f\in H(\Omega)$.

نمایش به‌سری توانی

این امر که هر تابع هلوریخت موضعاً مجموع یک سری توانی همگراست نتایج جالب بسیار دارد. در این بخش به‌چند تایی از آنها خواهیم پرداخت.

۱۸.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f\in H(\Omega)$، و***

$$Z(f)=\{a\in\Omega : f(a)=0\}\,\cdot \tag{۱}$$

در این صورت $Z(f)=\Omega$ یا $Z(f)$ نقطهٔ حدی در Ω ندارد. در حالت دوم به‌هر $a\in Z(f)$ عدد صحیح مثبت منحصر به‌فردی مانند $m=m(a)$ چنان نظیر است که

$$f(z)=(z-a)^m g(z)\ (z\in\Omega) \tag{۲}$$

که در آن $g\in H(\Omega)$ و $g(a)\neq 0$. به‌علاوه، $Z(f)$ حداکثر شمارشپذیر می‌باشد.

(یادآور می‌شویم که ناحیه‌ها مجموعه‌های باز **همبند** می‌باشند.)

عدد صحیح m **مرتبهٔ** صفری است که f در نقطهٔ a دارد. واضح است که $Z(f)=\Omega$ اگر و فقط اگر f در Ω متحد ۰ باشد. ما $Z(f)$ را **مجموعهٔ صفر** f می‌نامیم. البته نتایج مشابهی برای مجموعه‌های $\alpha-$ نقاط f، یعنی مجموعهٔ صفر $f-\alpha$ که در آن α یک عدد مختلط است، برقرار می‌باشند.

برهان. فرض کنیم A مجموعهٔ تمام نقاط حدی $Z(f)$ در Ω باشد. چون f پیوسته است، $A\subset Z(f)$.

$a\in Z(f)$ و $r>0$ را طوری می‌گیریم که $D(a;r)\subset\Omega$. بنابر قضیهٔ ۱۶.۱۰،

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\ \left(z\in D(a;r)\right)\cdot \tag{۳}$$

اکنون دو حالت داریم. یا همهٔ c_n ها مساوی ۰ اند که در این صورت $D(a;r)\subset A$ و a یک نقطهٔ درونی A است، یا کوچکترین عدد صحیح m [لزوماً مثبت زیرا $f(a)=0$] وجود دارد که $c_m\neq 0$. در این حالت تعریف می‌کنیم

$$g(z)=\begin{cases}(z-a)^{-m}f(z) & (z\in\Omega-\{a\})\\ c_m & (z=a)\end{cases} \tag{۴}$$

در این صورت (۲) برقرار است. واضح است که $g\in H(\Omega-\{a\})$. ولی رابطهٔ (۳) ایجاب می‌کند که

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k \quad \big(z\in D(a\,;r)\big)\cdot \tag{۵}$$

لذا $g\in H\big(D(a\,;r)\big)$؛ درنتیجه $g\in H(\Omega)$.

به‌علاوه $g(a)\neq 0$ و پیوستگی g نشان می‌دهد که یک همسایگی از a هست که در آن g دارای صفر نیست. لذا، طبق رابطهٔ (۲)، a یک نقطهٔ تنهای $Z(f)$ می‌باشد.

لذا اگر $a\in A$، حالت اول باید رخ دهد. پس A باز است. اگر $B=\Omega-A$، از تعریف A به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط حدی واضح است که B باز می‌باشد. لذا Ω اجتماع مجموعه‌های باز از هم جدای A و B می‌باشد. چون Ω همبند است، داریم $A=\Omega$ که در این حالت $Z(f)=\Omega$، یا $A=\varnothing$. در حالت اخیر، $Z(f)$ حداکثر تعدادی متناهی نقطه در هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω دارد، و چون Ω، $\sigma-$ فشرده است، $Z(f)$ حداکثر شمارشپذیر می‌باشد.

نتیجه. هرگاه f و g توابع هلوریخت در ناحیهٔ Ω بوده و به‌ازای هر z در مجموعه‌ای که یک نقطهٔ حدی در Ω دارد $f(z)=g(z)$، آنگاه به‌ازای هر $z\in\Omega$، $f(z)=g(z)$.

به‌عبارت دیگر، یک تابع هلوریخت در ناحیه‌ای مانند Ω به‌وسیلهٔ مقادیرش بر هر مجموعه که یک نقطهٔ حدی در Ω دارد معین است. این یک قضیهٔ یکتایی مهم می‌باشد.

تذکر. اگر فرض همبند بودن Ω را حذف کنیم قضیه فرو می‌ریزد. اگر $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1$ و Ω_0 و Ω_1 مجموعه‌های باز از هم‌جدایی باشند، قرار می‌دهیم $f=0$ در Ω_0 و $f=1$ در Ω_1.

۱۹.۱۰ تعریف. هرگاه $a\in\Omega$ و $f\in H(\Omega-\{a\})$، آنگاه گوییم f در نقطهٔ a ***انفراد تنها*** دارد. اگر f را بتوان در a طوری تعریف کرد که تابع وسعت‌یافته در Ω هلوریخت باشد، گوییم انفراد ***قابل رفع*** است.

۲۰.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم $f\in H(\Omega-\{a\})$ و f در $D'(a\,;r)$ به‌ازای $r>0$ ای کراندار باشد. در این صورت f در a انفراد قابل رفع دارد.***

به‌یاد آورید که $D'(a\,;r)=\{z: 0<|z-a|<r\}$.

برهان. تعریف می‌کنیم $h(a)=0$ و $h(z)=(z-a)^2 f(z)$ در $\Omega-\{a\}$. فرض کرانداری ما نشان می‌دهد که $h'(a)=0$. چون h بوضوح در هر نقطهٔ دیگر Ω مشتقپذیر است، داریم $h\in H(\Omega)$؛ درنتیجه

$$h(z)=\sum_{n=2}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \big(z\in D(a\,;r)\big)\cdot$$

با فرض $f(a)=c_2$ توسیع هلوریخت مطلوب f به‌دست می‌آید، زیرا در این صورت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n \quad \big(z\in D(a\,;r)\big)\cdot$$

۲۱.۱۰ قضیه. هرگاه $a\in\Omega$ و $f\in H(\Omega-\{a\})$، آنگاه یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

(آ) f در a انفراد قابل رفع دارد؛

(ب) اعداد مختلفی مانند c_1، $\cdots$، c_m وجود دارند به‌طوری‌که m یک عدد صحیح مثبت بوده و $c_m\neq 0$ و

$$f(z)-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$$

در a انفراد قابل رفع دارد؛

(پ) هرگاه $r>0$ و $D(a;r)\subset\Omega$، آنگاه $f\big(D'(a;r)\big)$ در صفحه چگال است.

در حالت (ب) گوییم f در a یک **قطب از مرتبهٔ** m دارد. تابع

$$\sum_{k=1}^{m}c_k(z-a)^{-k},$$

که یک چندجمله‌ای از $(z-a)^{-1}$ است، **قسمت اصلی** f در a خوانده می‌شود. واضح است که در این وضع وقتی $z\to a$، $|f(z)|\to\infty$.

در حالت (پ) گوییم f در a **انفراد اساسی** دارد. حکم هم‌ارز (پ) این است که به‌هر عدد مختلط w دنباله‌ای مانند $\{z_n\}$ چنان نظیر است که وقتی $n\to\infty$، $z_n\to a$ و $f(z_n)\to w$.

برهان. فرض کنیم (پ) برقرار نباشد. در این صورت اعدادی حقیقی مانند $r>0$ و $\delta>0$ و عددی مختلط مانند w وجود دارند به‌طوری که نامساوی $|f(z)-w|>\delta$ در $D'(a;r)$ برقرار است. به‌جای $D(a;r)$ می‌نویسیم D و به‌جای $D'(a;r)$ می‌نویسیم D' و تعریف می‌کنیم

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w}\quad(z\in D')\cdot\tag{۱}$$

در این صورت $g\in H(D')$ و $|g|<1/\delta$. بنابر قضیهٔ ۲۰.۱۰، g به‌یک تابع هلوریخت در D وسعت می‌یابد.

اگر $g(a)\neq 0$، رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که f در یک $D'(a;p)$ به‌ازای $p>0$ای کراندار است. لذا (آ) طبق قضیهٔ ۲۰.۱۰ برقرار می‌باشد.

اگر g در a دارای صفر از مرتبهٔ $m\geq 1$ باشد، قضیهٔ ۱۸.۱۰ نشان می‌دهد که

$$g(z)=(z-a)^m g_1(z)\ (z\in D)\tag{۲}$$

که در آن $g_1\in H(D)$ و $g_1(a)\neq 0$. همچنین، بنابر (۱)، g_1 در D' دارای صفر نیست. در D قرار می‌دهیم $h=1/g_1$. پس $h\in H(D)$، h در D دارای صفر نیست، و

$$f(z)-w=(z-a)^{-m}h(z)\ (z\in D')\cdot\tag{۳}$$

ولی h بسطی به‌شکل زیر دارد:

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \; (z\in D) \tag{۴}$$

که در آن $b_0 \neq 0$. حال رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که (ب) به‌ازای $c_k=b_{m-k}$، $k=1,\cdots,m$، برقرار است.

این برهان را تمام خواهد کرد.

حال از این امر که تحدید سری توانی $\Sigma\, c_n (z-a)^n$ به‌یک دایره به‌مرکز a یک سری مثلثاتی است استفاده می‌کنیم.

۲۲.۱۰ قضیه. هرگاه

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \left(z\in D(a\,;R)\right) \tag{۱}$$

و $0<r<R$*، آنگاه*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2\, d\theta\,\cdot \tag{۲}$$

برهان. داریم

$$f(a+re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}\,\cdot \tag{۳}$$

به‌ازای $r<R$ سری (۳) بر $[-\pi\,,\pi]$ به‌طور یکنواخت همگراست. لذا

$$c_n r^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta \; (n=0,1,2,\cdots)\,, \tag{۴}$$

و رابطهٔ (۲) حالت خاصی از فرمول پارسوال می‌باشد.

حال به‌چند نتیجه از این قضیه می‌پردازیم.

۲۳.۱۰ قضیهٔ لیوویل (*Liouville*). ***هر تابع تمام کراندار ثابت است.***

یادآور می‌شویم که یک تابع در صورتی **تمام** است که در تمام صفحه هلوریخت باشد.

برهان. فرض‌کنیم f تمام‌باشد، به‌ازای هر z، $|f(z)|<M$، و به‌ازای هر z، $f(z)=\Sigma\, c_n z^n$. بنابر قضیهٔ ۲۲.۱۰، به‌ازای هر r،

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}<M^2\,,$$

که فقط وقتی ممکن است که به‌ازای هر $n\geq 1$، $c_n=0$.

۲۴.۱۰ اصل مدول ماکزیمم. *فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$، و $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$. در این صورت*

$$|f(a)| \leq \max_{\theta} |f(a+re^{i\theta})| \cdot \qquad (۱)$$

تساوی در (۱) برقرار است اگر و فقط اگر f در Ω ثابت باشد.

در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد مگر f ثابت باشد.

برهان. فرض کنیم به‌ازای هر θی حقیقی $|f(a+re^{i\theta})| \leq |f(a)|$. پس با نمادهای قضیهٔ ۲۲.۱۰ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2 \cdot$$

لذا $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = 0$ که تساوی $f(z) = f(a)$ را در $D(a;r)$ ایجاب می‌کند. چون Ω همبند است، قضیهٔ ۱۸.۱۰ نشان می‌دهد که f در Ω ثابت است.

نتیجه. *تحت مفروضات قضیهٔ فوق، اگر f در $D(a;r)$ صفر نداشته باشد،*

$$|f(a)| \geq \min_{\theta} |f(a+re^{i\theta})| \cdot \qquad (۲)$$

برهان. هرگاه به‌ازای θ ای $f(a+re^{i\theta}) = 0$، آنگاه نامساوی (۲) واضح است. در حالت دیگر، یک ناحیه مانند Ω_0 هست که شامل $\overline{D}(a;r)$ بوده و در آن f دارای صفر نیست. لذا (۱) را می‌توان بر $1/f$ اعمال کرد و نامساوی (۲) را نتیجه گرفت.

۲۵.۱۰ قضیه. *هرگاه n یک عدد صحیح مثبت بوده و*

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

که در آن a_0، $\cdots$، a_{n-1} اعدادی مختلط باشند، آنگاه P درست n صفر در صفحه دارد.

البته صفرها با احتساب بستایی‌شان محاسبه می‌شوند. مثلاً یک صفر از مرتبهٔ m برابر m صفر به‌حساب می‌آید. این قضیه می‌گوید که میدان مختلط به‌طور جبری بسته است؛ یعنی هر چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب مختلط دست‌کم یک صفر مختلط دارد.

برهان. $r > 1 + 2|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$|P(re^{i\theta})| > |P(0)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \cdot$$

هرگاه P دارای صفر نباشد، آنگاه تابع $f = 1/P$ تمام بوده و در نامساوی $|f(0)| > |f(re^{i\theta})|$ به‌ازای هر θ صدق می‌کند که با قضیهٔ مدول ماکزیمم در تضاد است. لذا به‌ازای z_1ی داریم

$P(z_1) = 0$. درنتیجه یک چندجمله‌ای مانند Q ازدرجهٔ $n-1$ هست که $P(z)=(z-z_1)Q(z)$.
برهان به‌استقرا بر n تمام خواهد شد.

۲۶.۱۰ قضیه (تخمینهای کشی). هرگاه $f \in H(D(a\,;R))$ و به‌ازای هر $z \in D(a\,;R)$، $|f(z)| \leq M$، آنگاه

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{1}$$

برهان. به‌ازای هر $r < R$، هر جملهٔ سری ۲۲.۱۰ (۲) از بالا به‌وسیلهٔ M^2 کراندار است.

هرگاه $a = 0$، $R = 1$، و $f(z) = z^n$ را اختیار کنیم، آنگاه $M = 1$، $f^{(n)}(0) = n!$، و می‌بینیم که نامساوی (۱) را نمی‌توان اصلاح کرد.

۲۷.۱۰ تعریف. گوییم دنبالهٔ $\{f_j\}$ از توابع در Ω ***به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω همگرا*** به f است اگر به‌ازای هر $K \subset \Omega$ ی فشرده و $\epsilon > 0$ عددی مانند $N = N(K, \epsilon)$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $z \in K$ و $j > N$، $|f_j(z) - f(z)| < \epsilon$.

مثلاً دنبالهٔ $\{z^n\}$ به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ $D(0\,;1)$ همگرا به 0 است ولی همگرایی در $D(0\,;1)$ یکنواخت **نیست**.

این همگرایی یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشرده است که در رابطه با اعمال حدی بر توابع هلوریخت با طبیعی‌ترین وجه ظاهر می‌شود. گاهی برای آن از واژهٔ «تقریباً همگرایی یکنواخت» استفاده می‌شود.

۲۸.۱۰ قضیه. *فرض کنیم به‌ازای* $j = 1, 2, 3, \cdots$، $f_j \in H(\Omega)$ و $f_j \to f$ *به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ* Ω. *در این صورت* $f \in H(\Omega)$ و $f'_j \to f'$ *به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ* Ω.

برهان. چون همگرایی بر هر قرص فشرده در Ω یکنواخت است، f پیوسته می‌باشد. فرض کنیم Δ یک مثلث در Ω باشد. در این صورت Δ فشرده است؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ کشی،

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_j(z)\,dz = 0 \cdot$$

لذا قضیهٔ موررا ایجاب می‌کند که $f \in H(\Omega)$.

فرض کنیم K فشرده بوده و $K \subset \Omega$. پس $r > 0$ ی هست به‌طوری‌که اجتماع E قرصهای بستهٔ $\overline{D}(z\,;r)$ به‌ازای هر $z \in K$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω است. با اعمال قضیهٔ ۲۶.۱۰ بر $f - f_j$ داریم

$$|f'(z) - f'_j(z)| \leq r^{-1}\, \|f - f_j\|_E \quad (z \in K)$$

که در آن $\|f\|_E$ سوپرمم $|f|$ بر E است. چون $f_j \to f$ به‌طور یکنواخت بر E، پس $f'_j \to f'$ به‌طور یکنواخت بر K.

نتیجه. تحت مفروضات قضیهٔ فوق، وقتی $j \to \infty$، $f_j^{(n)} \to f^{(n)}$ به‌طور یکنواخت بر هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset \Omega$ و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n.

این وضع را با خط حقیقی، که در آن دنباله‌های توابع بی‌نهایت بار مشتقپذیر می‌توانند به‌توابع هیچ جا مشتقپذیر به‌طور یکنواخت همگرا باشند، قیاس نمایید.

قضیهٔ نگاشت باز

هرگاه Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$، آنگاه $f(\Omega)$ یا یک ناحیه است یا یک نقطه.

در قضیهٔ ۳۲.۱۰ این خاصیت مهم توابع هلوریخت با شرح بیشتر ثابت خواهد شد.

۲۹.۱۰ لم. ***هرگاه $f \in H(\Omega)$ و g در $\Omega \times \Omega$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:***

$$g(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{اگر } w \neq z \\ f'(z), & \text{اگر } w = z \end{cases}$$

آنگاه g در $\Omega \times \Omega$ پیوسته است.

برهان. تنها نقاط $(z, w) \in \Omega \times \Omega$ که درآنها پیوستگی g مورد شک است آنهایی‌اند که $z = w$.

$a \in \Omega$ و $\epsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت عددی مانند $r > 0$ هست به‌طوری که $D(a;r) \subset \Omega$ و به‌ازای هر $\zeta \in D(a;r)$، $|f'(\zeta)-f'(a)| < \epsilon$. هرگاه z و w در $D(a;r)$ بوده و

$$\zeta(t) = (1-t)z + tw,$$

آنگاه به‌ازای $0 \le t \le 1$، $\zeta(t) \in D(a;r)$ و

$$g(z, w) - g(a, a) = \int_0^1 [f'(\zeta(t)) - f'(a)]\, dt \cdot$$

قدرمطلق انتگرالده به‌ازای هر t از ϵ کمتر است. لذا $|g(z, w)-g(a, a)| < \epsilon$. این ثابت می‌کند که g در (a, a) پیوسته می‌باشد.

۳۰.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم $\varphi \in H(\Omega)$، $z_0 \in \Omega$، و $\varphi'(z_0) \neq 0$. در این صورت Ω یک همسایگی از z_0 مانند V را شامل است به‌طوری که***

(آ) φ در V یک به‌یک است؛

(ب) $W = \varphi(V)$ یک مجموعهٔ باز است؛ و

(پ) هرگاه $\psi : W \to V$ با $z = \psi\big(\varphi(z)\big)$ تعریف شده باشد، آنگاه $\psi \in H(W)$.

لذا $\varphi: V \to W$ دارای معکوس هلوریخت می‌باشد.

برهان. لم ۲۹.۱۰ در اعمال بر φ به‌جای f نشان می‌دهد که Ω شامل همسایگیی مانند V از z_0 است که به‌ازای $z_1 \in V$ و $z_2 \in V$،

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)| \geq \frac{1}{2}\,|\varphi'(z_0)|\,|z_1-z_2| \cdot \tag{۱}$$

لذا (آ) برقرار است، و نیز

$$\varphi'(z) \neq 0 \quad (z \in V) \cdot \tag{۲}$$

برای اثبات (ب)، $a \in V$ و $r > 0$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\overline{D}(a\,;\,r) \subset V$. بنابر (۱) عددی مانند $c > 0$ هست به‌طوری‌که

$$|\varphi(a+re^{i\theta})-\varphi(a)| > 2c \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \cdot \tag{۳}$$

هرگاه $\lambda \in D\big(\varphi(a)\,;\,c\big)$، آنگاه $|\lambda-\varphi(a)| < c$؛ درنتیجه (۳) ایجاب می‌کند که

$$\min_{\theta}\ |\lambda-\varphi(a+re^{i\theta})| > c \cdot \tag{۴}$$

پس، طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۲۴.۱۰، $\lambda-\varphi$ باید یک صفر در $D(a\,;\,r)$ داشته باشد. لذا، به‌ازای $z \in D(a\,;\,r) \subset V$ ی، خواهیم داشت $\lambda = \varphi(z)$.

این ثابت می‌کند که $D\big(\varphi(a)\,;\,c\big) \subset \varphi(V)$. چون a یک نقطهٔ دلخواه V بود، پس $\varphi(V)$ باز می‌باشد.

برای اثبات (پ)، $w_1 \in W$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت به‌ازای $z_1 \in V$ ی منحصر به‌فرد $\varphi(z_1) = w_1$. اگر $w \in W$ و $\psi(w) = z \in V$، داریم

$$\frac{\psi(w)-\psi(w_1)}{w-w_1} = \frac{z-z_1}{\varphi(z)-\varphi(z_1)} \tag{۵}$$

بنابر (۱)، وقتی $w \to w_1$، $z \to z_1$. لذا رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که $\psi'(w_1) = 1/\varphi'(z_1)$. بنابراین $\psi \in H(W)$.

۳۱.۱۰ تعریف. به‌ازای $m = 1, 2, 3, \cdots$، «تابع توان mم» $z \to z^m$ را با π_m نشان می‌دهیم.

هر $w \neq 0$ به‌ازای درست m مقدار متمایز از z مساوی $\pi_m(z)$ است: هرگاه $w = re^{i\theta}$ که در آن $r > 0$، آنگاه $\pi_m(z) = w$ اگر و فقط اگر $z = r^{1/m}\,e^{i(\theta+2k\pi)/m}$، $k = 1, \cdots, m$.

همچنین توجه کنید که هر π_m یک نگاشت باز است: هرگاه V باز بوده و شامل ۰ نباشد، آنگاه $\pi_m(V)$ طبق قضیهٔ ۳۰.۱۰ باز است. از سوی دیگر، $\pi_m\big(D(a\,;\,r)\big) = D(0\,;\,r^m)$.

واضح است که ترکیب نگاشتهای بازباز است. بخصوص اگر φ' دارای صفر نباشد، $\pi_m \circ \varphi$ طبق قضیهٔ ۳۰.۱۰ باز می‌باشد. قضیهٔ زیر (که صورت مشروحتری از قضیهٔ نگاشت باز که پیش از لم ۲۹.۱۰ ذکر شد را شامل است) عکس مطلب را بازگو می‌کند: هر تابع یکریخت غیرثابت در یک ناحیه موضعاً به‌شکل $\pi_m \circ \varphi$ است جز در مورد یک ثابت جمعی.

۳۲.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$، f ثابت نباشد، $z_\circ \in \Omega$، و $w_\circ = f(z_\circ)$. همچنین m مرتبهٔ صفر تابع $f - w_\circ$ در $z_\circ$ باشد. در این صورت یک همسایگی مانند V از $z_\circ$ وجود دارد که $V \subset \Omega$ و یک $\varphi \in H(V)$ هست به‌طوری‌که***

(آ) به‌ازای هر $z \in V$، $f(z) = w_\circ + [\varphi(z)]^m$؛

(ب) φ' در V دارای صفر نیست و φ یک نگاشت معکوسپذیر از V به‌روی یک قرص مانند $D(a; r)$ می‌باشد.

لذا $f - w_\circ = \pi_m \circ \varphi$ در V. پس f دقیقاً یک نگاشت m به ۱ از $V - \{z_\circ\}$ به‌روی $D'(w_\circ; r^m)$ است، و هر $w_\circ \in f(\Omega)$ یک نقطهٔ درونی $f(\Omega)$ می‌باشد. لذا $f(\Omega)$ باز می‌باشد.

برهان. بدون آسیب رسانیدن به‌کلیت می‌توان فرض کرد که Ω یک همسایگی محدب از $z_\circ$ و آنقدر کوچک باشد که اگر $z \in \Omega - \{z_\circ\}$، $f(z) \neq w_\circ$. در این صورت به‌ازای $g \in H(\Omega)$ای که در Ω دارای صفر نیست،

$$f(z) - w_\circ = (z - z_\circ)^m g(z) \quad (z \in \Omega) \cdot \tag{۱}$$

لذا $g'/g \in H(\Omega)$. بنابر قضیهٔ ۱۴.۱۰، به‌ازای $h \in H(\Omega)$ی داریم $g'/g = h'$. مشتق $g \cdot \exp(-h)$ در Ω مساوی ۰ است. اگر h به‌وسیلهٔ جمع با ثابت مناسبی تعدیل شود، نتیجه می‌شود که $g = \exp(h)$. تعریف می‌کنیم

$$\varphi(z) = (z - z_\circ) \exp \frac{h(z)}{m} \quad (z \in \Omega) \cdot \tag{۲}$$

در این صورت قسمت (آ) به‌ازای هر $z \in \Omega$ برقرار است.

همچنین $\varphi(z_\circ) = 0$ و $\varphi'(z_\circ) \neq 0$. حال وجود یک مجموعهٔ باز مانند V صادق در (ب) از قضیهٔ ۳۰.۱۰ نتیجه می‌شود و این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیهٔ زیر درواقع جزء نتایج پیشگفته است، ولی بهتر است آن را به‌صراحت ذکر کنیم.

۳۳.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$، و f در Ω یک به‌یک باشد. در این صورت، به‌ازای هر $z \in \Omega$، $f'(z) \neq 0$، و معکوس f هلوریخت است.***

برهان. اگر $f'(z_\circ)$ به‌ازای $z_\circ \in \Omega$ ی مساوی ۰ باشد، مفروضات قضیهٔ ۳۲.۱۰ به‌ازای $m > 1$ ی برقرارند؛ درنتیجه f در یک همسایگی سفتهٔ $z_\circ$، m به ۱ می‌باشد. حال قسمت (پ) قضیهٔ ۳۰.۱۰ را به‌کار می‌گیریم.

توجه کنید که عکس قضیهٔ ۳۳.۱۰ نادرست است: هرگاه $f(z) = e^z$، آنگاه به‌ازای هر z، $f'(z) \neq 0$ ولی f در تمام صفحهٔ مختلط یک به‌یک نیست.

قضیهٔ کشی سراسری

پیش از بیان و اثبات این قضیه، که قید نواحی محدب که در قضیهٔ ۱۴.۱۰ اعمال شده است را برمی‌دارد، شایسته است دستگاه انتگرالگیری که تا به‌حال کافی بوده است را وسعتی ببخشیم. لازم نیست به‌انتگرالها روی فقط یک مسیر محدود شویم بلکه می‌توان «مجموعهای» متناهی از مسیرها را در نظر گرفت. یک مورد ساده از این را قبلاً در بخش ۹.۱۰ (پ) داشته‌ایم.

۳۴.۱۰ زنجیرها و دورها. فرض کنیم γ_1، ...، γ_n مسیرهایی در صفحه باشند و قرار می‌دهیم $K = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$. هر γ_i به‌وسیلهٔ فرمول

$$\tilde{\gamma}_i\ (f) = \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \qquad (1)$$

یک تابعی خطی مانند $\tilde{\gamma}_i$ بر فضای برداری $C(K)$ القا می‌کند. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_n \cdot \qquad (2)$$

به‌بیان صریح، به‌ازای هر $f \in C(K)$، $\tilde{\Gamma}\ (f) = \tilde{\gamma}_1\ (f) + \cdots + \tilde{\gamma}_n\ (f)$. رابطهٔ (۲) پیشنهاد می‌کند که «مجموع صوری»

$$\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n \qquad (3)$$

را معرفی و تعریف کنیم

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \tilde{\Gamma}\ (f) \cdot \qquad (4)$$

در این صورت (۳) صرفاً اختصاری است برای عبارت زیر:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \ \left(f \in C(K)\right) \cdot \qquad (5)$$

توجه کنید که رابطهٔ (۵) معرف سمت چپ خود می‌باشد.

هر Γ ی تعریف‌شده‌به‌این‌صورت‌را **زنجیر** می‌نامند. هرگاه‌هر γ_j در (۳) یک مسیر **بسته** باشد، آنگاه Γ یک **دور** نامیده می‌شود. اگر هر γ_j در (۳) یک مسیر در مجموعهٔ بازی مانند Ω باشد، گوییم Γ یک **زنجیر** در Ω است.

اگر رابطهٔ (۳) برقرار باشد، تعریف می‌کنیم

$$\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^* \cdot \qquad (۶)$$

اگر Γ یک دور بوده و $\alpha \notin \Gamma^*$، ***اندیس*** α نسبت به Γ را همانند قضیهٔ ۱۰.۱۰ با

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} \qquad (۷)$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که رابطهٔ (۳) ایجاب می‌کند که

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(\alpha) \cdot \qquad (۸)$$

اگر هر γ_i در (۳) را با مسیر متقابلش عوض کنیم (ر.ک. بخش ۸.۱۰)، زنجیر حاصل را با $-\Gamma$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz \quad \left(f \in C(\Gamma^*)\right) \cdot \qquad (۹)$$

بخصوص، اگر Γ یک دور بوده و $\alpha \notin \Gamma^*$ ، $\mathrm{Ind}_{-\Gamma}(\alpha) = -\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)$.

زنجیرها را می‌توان به‌نحو روشن (با جمع و تفریق تابعیهایی نظیر) جمع و تفریق کرد: عبارت $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \Gamma_2$ یعنی به‌ازای هر $f \in C(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*)$،

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz \cdot \qquad (۱۰)$$

بالاخره توجه می‌کنیم که یک زنجیر را می‌توان به‌صورت مجموعی از مسیرها به‌طرق بسیار نمایش داد. عبارت

$$\gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n = \delta_1 \dotplus \cdots \dotplus \delta_n$$

یعنی به‌ازای هر f پیوسته بر $\gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^* \cup \delta_1^* \cup \cdots \cup \delta_k^*$،

$$\sum_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz = \sum_j \int_{\delta_j} f(z)\, dz \cdot$$

بخصوص یک دور را می‌توان به‌صورت مجموعی از مسیرهای غیربسته نمایش داد.

۳۵.۱۰ قضیهٔ کشی. ***فرض کنیم $f \in H(\Omega)$ که در آن Ω یک مجموعهٔ باز دلخواه در صفحهٔ مختلط است. هرگاه Γ یک دور در Ω باشد که در رابطهٔ زیر صدق کند:***

$$\text{به‌ازای هر } \alpha \text{ی غیرواقع در } \Omega \text{،}\quad \mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \text{،} \qquad (۱)$$

آنگاه

$$\text{به‌ازای } z \in \Omega - \Gamma^* \text{،}\quad f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (۲)$$

و

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \circ \cdot \tag{۳}$$

هرگاه $\Gamma_\circ$ و Γ_1 دورهایی در Ω باشند به‌طوری که

$$\text{به‌ازای هر } \alpha \text{ی غیرواقع در } \Omega\text{،}\quad \operatorname{Ind}_{\Gamma_\circ}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)\text{،} \tag{۴}$$

آنگاه

$$\int_{\Gamma_\circ} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \cdot \tag{۵}$$

برهان. تابع g تعریف شده در $\Omega \times \Omega$ با

$$g(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}\text{،} & \text{اگر } w \neq z \\ f'(z)\text{،} & \text{اگر } w = z \end{cases} \tag{۶}$$

در $\Omega \times \Omega$ پیوسته است (لم ۲۹.۱۰). لذا می‌توان تعریف کرد

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, w)\,dw \ (z \in \Omega) \cdot \tag{۷}$$

واضح است که فرمول کشی (۲) به‌ازای $z \in \Omega - \Gamma^*$ هم‌ارز حکم زیر است:

$$h(z) = \circ \cdot \tag{۸}$$

برای اثبات (۸) ابتدا ثابت می‌کنیم $h \in H(\Omega)$. توجه کنید که g بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\Omega \times \Omega$ به‌طور یکنواخت پیوسته است. اگر $z \in \Omega$، $z_n \in \Omega$، و $z_n \to z$، به‌ازای $w \in \Gamma^*$ (یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω) $g(z_n, w) \to g(z, w)$ به‌طور یکنواخت. لذا $h(z_n) \to h(z)$. این ثابت می‌کند که h در Ω پیوسته است. فرض کنیم Δ یک مثلث بسته در Ω باشد. در این صورت

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\int_{\partial\Delta} g(z, w)\,dz \right) dw \cdot \tag{۹}$$

به‌ازای هر $w \in \Omega$، $z \to g(z, w)$ در Ω هلوریخت است. (انفراد در $z = w$ قابل رفع است.) لذا انتگرال داخلی سمت راست (۹) به‌ازای هر $w \in \Gamma^*$ مساوی ۰ است. حال قضیهٔ مورر‌ا نشان می‌دهد که $h \in H(\Omega)$.

حال فرض می‌کنیم Ω_1 مجموعهٔ تمام اعداد مختلط z باشد که $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \circ$، و تعریف می‌کنیم

$$h_1(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \ (z \in \Omega_1) \cdot \tag{۱۰}$$

اگر $z \in \Omega \cap \Omega_1$، از تعریف Ω_1 معلوم می‌شود که $h_1(z) = h(z)$. لذا تابعی مانند

$\varphi \in H(\Omega \cup \Omega_1)$ هست که تحدیدش به Ω مساوی h و تحدیدش به Ω_1 برابر h_1 می‌باشد.

فرض (۱) ما نشان می‌دهد که Ω_1 شامل متمم Ω است. لذا φ یک تابع تمام می‌باشد. Ω_1 شامل مؤلفهٔ بی‌کران متمم Γ^* نیز هست زیرا $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ در آنجا ۰ است. لذا

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0 \cdot \tag{11}$$

حال قضیهٔ لیوویل ایجاب می‌کند که به‌ازای هر z، $\varphi(z) = 0$. این رابطهٔ (۸) و درنتیجه (۲) را ثابت می‌کند.

برای استنتاج (۳) از (۲)، $a \in \Omega - \Gamma^*$ را اختیار و تعریف می‌کنیم $F(z) = (z-a) f(z)$. در این صورت

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a} dz = F(a) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0 \tag{12}$$

زیرا $F(a) = 0$.

بألاخره اگر (۳) را بر دور $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0$ اعمال کنیم، رابطهٔ (۵) از (۴) نتیجه می‌شود. این برهان را تمام خواهد کرد.

۳۶.۱۰ چند تبصره

(آ) اگر γ یک مسیر بسته در ناحیهٔ محدب Ω بوده و $\alpha \notin \Omega$، کاربردی از قضیهٔ ۱۴.۱۰ در $f(z) = (z-\alpha)^{-1}$ نشان می‌دهد که $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$. لذا فرض (۱) قضیهٔ ۳۵.۱۰ به‌وسیلهٔ هر دور در Ω، در صورت محدب بودن Ω، برقرار است. این نشانگر آن است که قضیهٔ ۳۵.۱۰ قضایای ۱۴.۱۰ و ۱۵.۱۰ را تعمیم می‌دهد.

(ب) قسمت آخر قضیهٔ ۳۵.۱۰ نشان می‌دهد که تحت چه شرایطی انتگرالگیری روی یک دور را می‌توان با انتگرالگیری روی دیگری بدون تغییر مقدار انتگرال عوض کرد. مثلاً فرض کنیم Ω صفحه‌ای باشد که از آن سه قرص بستهٔ از هم‌جدای D_i برداشته شده است. هرگاه Γ، γ_1، γ_2، و γ_3 دوایری جهتدار با جهت مثبت در Ω باشند که Γ، $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ را احاطه کرده و γ_i، D_i را احاطه کرده ولی D_j را به‌ازای $j \neq i$ احاطه نکرده باشد، آنگاه به‌ازای هر $f \in H(\Omega)$،

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \cdot$$

(پ) برای اعمال قضیهٔ ۳۵.۱۰ بهتر است جهت یافتن اندیس یک نقطه نسبت به‌یک مسیر بسته روشی کارا داشته باشیم. قضیهٔ زیر این کار را برای جمیع مسیرهایی که در عمل ظاهر می‌شوند انجام می‌دهد. این قضیه اساساً می‌گوید که وقتی از مسیر «از راست به‌چپ» رد می‌شویم، اندیس به‌اندازهٔ یک *افزایش* می‌یابد. با به‌یاد آوردن اینکه اگر α در مؤلفهٔ بی‌کران متمم W از γ^* باشد، $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$، می‌توان $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)$ را متوالیاً در سایر مؤلفه‌های W معین کرد مشروط بر اینکه W فقط تعدادی متناهی مؤلفه داشته و γ هیچ قوسی را بیش از یکبار نپیماید.

۳۷.۱۰ قضیه. فرض کنیم γ یک مسیر بسته در صفحه با بازهٔ پارامتری $[\alpha,\beta]$ باشد. همچنین $\alpha<u<v<\beta$، a و b اعدادی مختلط باشند، $|b|=r>0$، و

(یک $\gamma(u)=a-b$ و $\gamma(v)=a+b$،

(دو $|\gamma(s)-a|<r$ **اگر و فقط اگر** $u<s<v$،

(سه $|\gamma(s)-a|=r$ **اگر و فقط اگر** $s=u$ یا $s=v$.

همچنین فرض کنیم $D(a;r)-r^*$ **اجتماع دو ناحیهٔ** D_+ و D_- **باشد به‌طوری که** $a+bi\in\bar{D}_+$ و $a-bi\in\bar{D}_-$. **در این صورت، اگر** $x\in D_+$ و $w\in D_-$،

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=1+\operatorname{Ind}_\gamma(w)\cdot$$

وقتی $\gamma(t)$، $D(a;r)$ را از $a-b$ تا $a+b$ بپیماید، D_- «سمت راست» و D_+ «سمت چپ» مسیر خواهد بود.

برهان. برای ساده کردن نگارش، γ را طوری پارامتریزه می‌کنیم که $u=0$ و $v=\pi$. تعریف می‌کنیم

$$C(s)=a-be^{is}\qquad(0\le s\le 2\pi)$$

$$f(s)=\begin{cases}C(s) & (0\le s\le\pi)\\ \gamma(2\pi-s) & (\pi\le s\le 2\pi)\end{cases}$$

$$g(s)=\begin{cases}\gamma(s) & (0\le s\le\pi)\\ C(s) & (\pi\le s\le 2\pi)\end{cases}$$

$$h(s)=\begin{cases}\gamma(s) & (\pi\le s\le\beta \text{ یا } \alpha\le s\le 0)\\ C(s) & (0\le s\le\pi)\end{cases}$$

چون $C(0)=\gamma(0)$ و $C(\pi)=\gamma(\pi)$، f و g و h مسیرهای بسته‌ای می‌باشند.

. هرگاه $E\subset\bar{D}(a;r)$، $|\zeta-a|=r$، و $\zeta\notin E$، آنگاه E در قرص $D(2a-\zeta;2r)$ که شامل ζ نیست قرار دارد. با اعمال این بر $E=g^*$ و $\zeta=a-bi$، از تبصرهٔ ۳۶.۱۰ (آ) معلوم می‌شود که $\operatorname{Ind}_g(a-bi)=0$. چون $\bar{D}_-$ همبند بوده و D_-، g^* را قطع نمی‌کند، پس

$$\text{اگر } w\in D_-\text{، } \operatorname{Ind}_g(w)=0\cdot \tag{1}$$

همین استدلال نشان می‌دهد که

$$\text{اگر } z\in D_+\text{، } \operatorname{Ind}_f(z)=0\cdot \tag{2}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_h(z) = \mathrm{Ind}_h(w)$$

$$= \mathrm{Ind}_c(w) + \mathrm{Ind}_\gamma(w) = 1 + \mathrm{Ind}_\gamma(w)\,\cdot$$

اولین تساوی از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود زیرا $h = \gamma \dotplus f$. دومین تساوی به‌خاطر واقع بودن z و w در $D(a;r)$ (یک مجموعهٔ همبند که h^* را قطع نمی‌کند) است. سومین تساوی از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود زیرا $h \dotplus g = C \dotplus \gamma$، و چهارمین تساوی نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۱۱.۱۰. این برهان را تمام خواهد کرد.

حال به‌بحث کوتاهی از یک مفهوم توپولوژیک دیگر که به‌قضیهٔ کشی مربوط است می‌پردازیم.

۳۸.۱۰ **همجایی.** فرض کنیم γ_0 و γ_1 منحنیهای بسته‌ای در فضای توپولوژیک X با بازهٔ پارامتری $I = [0, 1]$ باشند. گوییم γ_0 و γ_1، X− **همجا**یند اگر یک نگاشت پیوسته مانند H از مربع یکهٔ $I^2 = I \times I$ به‌توی X چنان موجود باشد که به‌ازای هر $s \in I$ و $t \in I$،

$$H(s, 0) = \gamma_0(s)\ ،\ H(s, 1) = \gamma_1(s)\ ،\ \text{و}\ H(0, t) = H(1, t)\,\cdot \qquad (1)$$

قرار می‌دهیم $\gamma_t(s) = H(s, t)$. در این صورت (۱) معرف یک ***خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای بستهٔ γ_t در X است که γ_0 و γ_1 را به‌هم وصل می‌کنند***. این از لحاظ شهودی یعنی γ_0 را می‌توان در X به‌طور پیوسته به γ_1 تغییر شکل داد.

اگر γ_0 با نگاشت ثابت γ_1 (یعنی γ_1^* فقط از یک نقطه تشکیل شده است) X− همجا باشد، گوییم γ_0 ***در X همجای پوچ*** است. اگر X همبند بوده و هر منحنی بسته در X همجای پوچ باشد، گوییم X **همبند ساده** می‌باشد.

مثلاً هر ناحیهٔ محدب Ω همبند ساده است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض می‌کنیم γ_0 یک منحنی بسته در Ω بوده، $z_1 \in \Omega$ را ثابت می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم

$$H(s,t) = (1-t)\,\gamma_0(s) + t z_1\ (0 \le s \le 1\ \text{و}\ 0 \le t \le 1)\,\cdot \qquad (2)$$

قضیهٔ ۴۰.۱۰ نشان می‌دهد که اگر Γ_0 و Γ_1 مسیرهای بستهٔ Ω− همجا باشند، شرط (۴) قضیهٔ کشی ۳۵.۱۰ برقرار است. به‌عنوان حالت خاصی از این توجه می‌کنیم که ***شرط (۱) قضیهٔ ۳۵.۱۰ به‌ازای هر مسیر بستهٔ Γ در Ω که همبند ساده است برقرار می‌باشد.***

۳۹.۱۰ لم. هرگاه γ_0 و γ_1 مسیرهای بسته‌ای با بازهٔ پارامتری $[0, 1]$ بوده، α یک عدد مختلط باشد، و

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|\ (0 \le s \le 1), \qquad (1)$$

آنگاه $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)=\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که نامساوی (۱) ایجاب می‌کند که $\alpha\notin\gamma_0^*$ و $\alpha\notin\gamma_1^*$. لذا می‌توان تعریف کرد $\gamma=(\gamma_1-\alpha)/(\gamma_0-\alpha)$. در این صورت، بنابر (۱)،

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma_1'}{\gamma_1-\alpha}-\frac{\gamma_0'}{\gamma_0-\alpha} \tag{۲}$$

و $|1-\gamma|<1$. لذا $\gamma^*\subset D(1\,;1)$ که تساوی $\operatorname{Ind}_\gamma(0)=0$ را ایجاب می‌کند. حال با انتگرالگیری از (۲) روی $[0,1]$ نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۰.۴۰ قضیه. هرگاه Γ_0 و Γ_1 مسیرهای بستهٔ Ω – همجا در ناحیهٔ Ω بوده و $\alpha\notin\Omega$، *آنگاه*

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)=\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha)\,. \tag{۱}$$

برهان. طبق تعریف، تابع پیوسته‌ای مانند $H:I^2\to\Omega$ هست به‌طوری‌که

$$H(s,0)=\Gamma_0(s)\,،\ H(s,1)=\Gamma_1(s)\,،\ H(0,t)=H(1,t)\,. \tag{۲}$$

چون I^2 فشرده است، $H(I^2)$ نیز چنین است. لذا $\epsilon>0$ی هست به‌طوری‌که

$$\text{اگر}\ (s,t)\in I^2\,،\ |\alpha-H(s,t)|>2\epsilon\,. \tag{۳}$$

چون H به‌طور یکنواخت پیوسته است، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد به‌طوری که

$$\text{اگر}\ |s-s'|+|t-t'|\le\frac{1}{n}\,،\ |H(s,t)-H(s',t')|<\epsilon\,. \tag{۴}$$

مسیرهای بستهٔ چندضلعی γ_0، ...، γ_n را با

$$\gamma_k(s)=H\Big(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\Big)(ns+1-i)+H\Big(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\Big)(i-ns)\,. \tag{۵}$$

اگر $i-1\le ns\le i$ و $i=1,\cdots,n$ تعریف می‌کنیم. از روابط (۴) و (۵) داریم

$$\left|\gamma_k(s)-H\Big(s,\frac{k}{n}\Big)\right|<\epsilon\ \ (k=0,\cdots,n\,;\ 0\le s\le 1)\,. \tag{۶}$$

بخصوص، با فرض $k=0$ و $k=n$،

$$|\gamma_0(s)-\Gamma_0(s)|<\epsilon\ \ \text{و}\ \ |\gamma_n(s)-\Gamma_1(s)|<\epsilon\,. \tag{۷}$$

بنابر روابط (۶) و (۳)،

$$|\alpha-\gamma_k(s)|>\epsilon\ \ (0\le s\le 1\,؛\ k=0,\cdots,n)\,. \tag{۸}$$

از آن سو، از روابط (۴) و (۵) نیز داریم

$$|\gamma_{k-1}(s)-\gamma_k(s)| < \epsilon \quad (0 \le s \le 1 \,;\, k=1,\cdots,n) \cdot \qquad (۹)$$

حال از روابط (۷)، (۸)، (۹)، و $n+2$ بار استفاده از لم ۳۹.۱۰ نتیجه می‌شود که α نسبت به‌مسیرهای Γ_0، γ_0، γ_1، $\cdots$، γ_n، و Γ_1 اندیس یکسانی دارد. این امر قضیه را ثابت خواهد کرد.

تذکر. هرگاه در برهان فوق $\Gamma_t(s)=H(s,t)$، آنگاه هر Γ_t یک **منحنی** بسته است ولی لزوماً یک **مسیر** نیست زیرا H مشتقپذیر فرض نشده است. مسیرهای γ_k به‌این دلیل معرفی شده بودند. راه دیگر (و شاید رضایت‌بخش‌تر) فایق آمدن بر این مشکل تعمیم تعریف اندیس به‌منحنیهای بسته است. این امر در تمرین ۲۸ به‌طور خلاصه انجام شده است.

حساب مانده‌ها

۴۱.۱۰ **تعریف.** گوییم تابع f در مجموعهٔ باز Ω **خوشریخت** است اگر مجموعه‌ای مانند $A\subset\Omega$ چنان موجود باشد که

(آ) A نقطه حدی در Ω نداشته باشد؛

(ب) $f\in H(\Omega-A)$؛

(پ) f در هر نقطه از A دارای قطب باشد.

توجه کنید که حالت $A=\varnothing$ مستثنی نشده است. لذا هر $f\in H(\Omega)$ در Ω خوشریخت است.

همچنین (آ) ایجاب می‌کند که هیچ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω حاوی بی‌نهایت نقطه از A نباشد، و لذا A حداکثر شمارشپذیر است.

هرگاه f و A همانند فوق بوده، $a\in A$، و

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{m} c_k(z-a)^{-k} \qquad (۱)$$

قسمت اصلی f در a به‌صورت تعریف شده در ۲۱.۱۰ باشد (یعنی $f-Q$ در a انفراد قابل رفع داشته باشد)، آنگاه عدد c_1 را **ماندهٔ** f در a می‌نامیم:

$$c_1=\operatorname{Res}(f;a) \cdot \qquad (۲)$$

اگر Γ یک دور بوده و $a\notin\Gamma^*$، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q(z)\,dz = c_1 \operatorname{Ind}_\Gamma(a)=\operatorname{Res}(Q;a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a) \cdot \qquad (۳)$$

این حالت بسیار خاص قضیهٔ زیر در برهانش به‌کار خواهد رفت.

۴۲.۱۰ قضیهٔ مانده. *فرض کنیم f یک تابع خوشریخت در Ω باشد. همچنین A مجموعهٔ*

نقاطی در Ω باشد که f در آنها دارای قطب است. هرگاه Γ یک دور در $\Omega - A$ باشد به‌طوری‌که

$$\text{به‌ازای هر } a \notin \Omega \text{ ،} \quad \operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \text{ ،} \tag{1}$$

آنگاه

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{\alpha \in A} \operatorname{Res}(R\,;a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \cdot \tag{2}$$

برهان. فرض کنیم $B = \{a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$. همچنین W متمم Γ^* باشد. در این صورت $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ در هر مؤلفهٔ V از W ثابت است. اگر V بی‌کران باشد و یا اینکه V، Ω^c را قطع کند، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $z \in V$، $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$. چون A نقطهٔ حدی در Ω ندارد، نتیجه می‌شود که B یک مجموعهٔ متناهی است.

لذا مجموع آمده در (۲) گرچه به‌طور صوری نامتناهی است ولی درواقع متناهی می‌باشد.

فرض کنیم a_1، $\cdots$، a_n نقاط B بوده، Q_1، $\cdots$، Q_n قسمتهای اصلی f در a_1، $\cdots$، a_n باشند، و قرار می‌دهیم $g = f - (Q_1 + \cdots + Q_n)$. (هرگاه $B = \varnothing$، حالتی که مستثنی نشده است، آنگاه $g = f$). قرار می‌دهیم $\Omega_0 = \Omega - (A - B)$. چون g در a_1، $\cdots$، a_n انفراد قابل رفع دارد، با اعمال قضیهٔ ۳۵.۱۰ بر تابع g و مجموعهٔ باز Ω_0 معلوم می‌شود که

$$\int_\Gamma g(z)\, dz = 0 \cdot \tag{3}$$

لذا

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q_k(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(Q_k\,; a_k) \operatorname{Ind}_\Gamma(a_k),$$

و چون f و Q_k در a_k ماندهٔ یکسان دارند، رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید.

این فصل را با دو کاربرد نوعی قضیهٔ مانده پایان می‌بخشیم. اولی در رابطه با صفرهای توابع هلوریخت است و دومی محاسبهٔ یک انتگرال خاص می‌باشد.

۴۳.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم γ یک مسیر بسته در ناحیهٔ Ω باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر α ی غیرواقع در Ω، $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$. همچنین به‌ازای هر $\alpha \in \Omega - \Gamma^*$، 0 یا 1 = $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha)$، و Ω_1 مجموعهٔ تمام α هایی باشد که $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1$.***

به‌ازای هر $f \in H(\Omega)$، N_f را تعداد صفرهای f در Ω_1 می‌گیریم که با احتساب بستایی‌شان شماره شده‌اند.

(آ) هرگاه $f \in H(\Omega)$ و f بر γ^* دارای صفر نباشد، آنگاه

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \operatorname{Ind}_\Gamma(0) \tag{1}$$

که در آن $\Gamma = f \circ \gamma$.

(ب) **هرگاه نیز** $g \in H(\Omega)$ و

$$\text{بەازای هر } z \in \gamma^* ،\ |f(z)-g(z)| < |f(z)| ، \tag{۲}$$

آنگاه $N_g = N_f$.

قسمت (ب) را معمولاً **قضیهٔ روشه** (*Rouché*) می‌نامند. این قضیه می‌گوید که اگر دو تابع هلوریخت بر مرز Ω_1 به‌صورت توصیف شده در (۲) به‌هم نزدیک باشند، تعداد صفرهایشان در Ω_1 یکی می‌باشد.

برهان. قرار می‌دهیم $\varphi = f'/f$ که یک تابع خوشریخت در Ω است. هرگاه $a \in \Omega$ و f یک صفر مرتبهٔ $m = m(a)$ در a داشته باشد، آنگاه $f(z) = (z-a)^m h(z)$ که در آن h و $1/h$ در همسایگیی از a مانند V هلوریخت‌اند. در $V-\{a\}$ داریم

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \cdot \tag{۳}$$

لذا

$$\operatorname{Res}(\varphi; a) = m(a) \cdot \tag{۴}$$

فرض کنیم $A = \{a \in \Omega_1 : f(a) = 0\}$. اگر فرضهای ما راجع به‌اندیس γ با قضیهٔ مانده تلفیق شوند، به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(\varphi; a) = \sum_{a \in A} m(a) = N_f \cdot$$

این نیمی از رابطهٔ (۱) را ثابت می‌کند. نیمهٔ دیگر با محاسبهٔ مستقیم به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'\big(\gamma(s)\big)}{f\big(\gamma(s)\big)} \gamma'(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \cdot$$

در اینجا بازهٔ پارامتری γ مساوی $[0, 2\pi]$ گرفته شده است.

حال رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که g بر γ^* دارای صفر نیست. لذا رابطهٔ (۱) با g به‌جای f برقرار است. قرارمی‌دهیم $\Gamma_0 = g \circ \gamma$. دراین‌صورت ازروابط (۱) و (۲) و لم ۳۹.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$N_g = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(0) = \operatorname{Ind}_\Gamma(0) = N_f \cdot$$

۴۴.۱۰ مسئله. به‌ازای t ی حقیقی، حد

$$\int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x} e^{ixt}\, dx \qquad (۱)$$

را وقتی $A \to \infty$ بیابید.

حل. چون $z^{-۱} \cdot \sin z \cdot e^{itz}$ تمام است، انتگرالش روی $[-A\,,\,A]$ مساوی انتگرال آن روی مسیر Γ_A حاصل از رفتن از $-A$ به -۱ در امتداد محور حقیقی، از -۱ تا ۱ در امتداد نیمهٔ پایینی دایرهٔ یکه، و از ۱ تا A در امتداد محور حقیقی می‌باشد. این از قضیهٔ کشی نتیجه می‌شود. Γ_A از مبدأ دوری می‌کند، و لذا می‌توان با استفاده از اتحاد

$$۲i \sin z = e^{iz} - e^{-iz}$$

دید که رابطهٔ (۱) مساوی است با $\varphi_A(t+۱) - \varphi_A(t-۱)$ که در آن

$$\frac{۱}{\pi} \varphi_A(s) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_A} \frac{e^{isz}}{z}\, dz\,\cdot \qquad (۲)$$

Γ_A را به‌دو طریق به‌یک مسیر بسته کامل می‌کنیم: یکی با نیمدایره از A به $-Ai$ به $-A$ و دیگری با نیمدایره از A به Ai به $-A$. تابع e^{isz}/z در $z = ۰$ دارای قطب است و در آن ماندهٔ ۱ دارد. پس

$$\frac{۱}{\pi} \varphi_A(s) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{۰} \exp(isAe^{i\theta})\, d\theta \qquad (۳)$$

و

$$\frac{۱}{\pi} \varphi_A(s) = ۱ - \frac{۱}{۲\pi} \int_{۰}^{\pi} \exp(isAe^{i\theta})\, d\theta\,\cdot \qquad (۴)$$

توجه کنید که

$$|\exp(isAe^{i\theta})| = \exp(-As\sin\theta)\,, \qquad (۵)$$

و این از ۱ کوچکتر بوده و اگر s و $\sin\theta$ هم‌علامت باشند، وقتی $A \to \infty$، به ۰ میل می‌کند. لذا قضیهٔ همگرایی تسلطی نشان می‌دهد که اگر $s < ۰$، انتگرال (۳) به ۰ میل می‌کند، و انتگرال موجود در (۴) به‌ازای $s > ۰$ به ۰ میل خواهد کرد. لذا

$$\lim_{A\to\infty} \varphi_A(s) = \begin{cases} \pi \,،\; s > ۰ & \text{اگر} \\ ۰ \,،\; s < ۰ & \text{اگر} \end{cases} \qquad (۶)$$

و اگر رابطهٔ (۶) را بر $s = t+۱$ و بر $s = t-۱$ اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x} e^{itx}\, dx = \begin{cases} \pi \,،\; -۱ < t < ۱ & \text{اگر} \\ ۰ \,،\; |t| > ۱ & \text{اگر} \end{cases} \qquad (۷)$$

چون $\varphi_A(۰) = \pi/۲$، حد (۷) به‌ازای $t = \pm ۱$ مساوی $\pi/۲$ است.

توجه کنید که رابطهٔ (۷) تبدیل فوریهٔ $(\sin x)/x$ را به‌دست می‌دهد. ما امتحان نتیجه را به‌وسیلهٔ قضیهٔ انعکاس به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

تمرینات

۱. در این فصل مطلب زیر تلویحاً فرض شده بود: هرگاه A و B زیرمجموعه‌های از هم‌جدایی در صفحه بوده، A فشرده و B بسته باشد، آنگاه $\delta > \circ$ ای هست به‌طوری‌که به‌ازای هر $\alpha \in A$ و $\beta \in B$، $|\alpha - \beta| \geq \delta$. این مطلب را در یک فضای متری دلخواه به‌جای صفحه ثابت کنید.

۲. فرض کنید f یک تابع تمام باشد، و در هر سری توانی

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

دست‌کم یک ضریب ∘ باشد. ثابت کنید f یک چندجمله‌ای است.

راهنمایی. $n!\, c_n = f^{(n)}(a)$:

۳. فرض کنید f و g دو تابع تمام بوده و به‌ازای هر z، $|f(z)| \leq |g(z)|$. چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

۴. فرض کنید f یک تابع تمام باشد و به‌ازای هر z

$$|f(z)| \leq A + B\, |z|^k$$

که در آن A و B و k اعداد مثبتی می‌باشند. ثابت کنید f باید یک چندجمله‌ای باشد.

۵. فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ به‌طور یکنواخت کراندار از توابع هلوریخت در Ω باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $z \in \Omega$، $\{f_n(z)\}$ همگراست. ثابت کنید همگرایی بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω یکنواخت است. **راهنمایی.** قضیهٔ همگرایی تسلطی را در مورد فرمول کشی به‌ازای $f_n - f_m$ به‌کار برید.

۶. یک‌ناحیه مانند Ω هست‌که $\exp(\Omega) = D(۱; ۱)$. نشان‌دهید که $\exp$ در Ω یک‌به‌یک است ولی تعداد زیادی از این Ω ها وجود دارند. یکی را ثابت گرفته و $\log z$ را به‌ازای $|z - ۱| < ۱$ مساوی $w \in \Omega$ ای تعریف کنید که $e^w = z$. ثابت کنید $\log' z = ۱/z$. ضرایب a_n در

$$\frac{۱}{z} = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z-۱)^n$$

را یافته و بدین ترتیب ضرایب c_n در بسط

$$\log z = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n (z-۱)^n$$

را بیابید. این در چه قرصهای دیگر قابل انجام است؟

۷. اگر $f \in H(\Omega)$، فرمول کشی برای مشتقات f:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

تحت شرایطی بر z و Γ معتبر است. این شرایط را بیان کرده و فرمول را ثابت نمایید.

۸. فرض کنید P و Q چندجمله‌ای بوده، درجهٔ Q از درجهٔ P لااقل ۲ تا متجاوز باشد، و تابع گویای $R=P/Q$ روی محور حقیقی قطب نداشته باشد. ثابت کنید انتگرال R روی $(-\infty,\infty)$ مساوی $2\pi i$ برابر مجموع مانده‌های R در نیمصفحهٔ بالایی است. [انتگرال روی $(-A,A)$ را با یک انتگرال روی یک نیمدایرهٔ مناسب عوض کرده و قضیهٔ مانده را به‌کار برید.] حکم مشابه برای نیمصفحهٔ پایینی چیست؟ با استفاده از این روش،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

را حساب کنید.

۹. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}/(1+x^2)\,dx$ به‌ازای t حقیقی را به‌روش تمرین ۸ حساب کنید. جواب خود را به‌وسیلهٔ قضیهٔ انعکاس برای تبدیلات فوریه امتحان نمایید.

۱۰. فرض کنید γ دایرهٔ یکهٔ جهتدار با جهت مثبت باشد، و انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z-e^{-z}}{z^4}\,dz$$

را محاسبه نمایید.

۱۱. فرض کنید α یک عدد مختلط باشد، $|\alpha|\neq 1$، و انتگرال

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}$$

را با انتگرالگیری از $(z-\alpha)^{-1}(z-1/\alpha)^{-1}$ روی دایرهٔ یکه حساب کنید.

۱۲. انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{itx}\,dx \quad (\text{به‌ازای } t \text{ حقیقی})$$

را حساب کنید.

۱۳. انتگرال

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}\quad (n=2,3,4,\cdots)$$

را حساب کنید [به‌ازای n زوج، روش تمرین ۸ را می‌توان به‌کار برد. ولی مسیر دیگری نیز هست که محاسبات را ساده‌تر کرده و برای n های فرد نیز کار است: از ۰ تا R تا $R\exp(2\pi i/n)$ تا ۰.]

جواب. $(\pi/n)/\sin(\pi/n)$.

۱۴. فرض کنید Ω_1 و Ω_2 دو ناحیه در صفحه بوده، f و g توابع مختلط غیرثابتی باشند که به‌ترتیب در Ω_1 و Ω_2 تعریف شده‌اند، و $f(\Omega_1)\subset\Omega_2$. قرار دهید $h=g\circ f$. اگر f و g هلوریخت باشند، می‌دانیم که h نیز هلوریخت است. فرض کنید f و h هلوریخت باشند. آیا

می‌توان راجع به g نتیجه‌ای گرفت؟ اگر g و h هلوریخت باشند نتیجه چیست؟

۱۵. فرض کنید Ω یک ناحیه بوده، $\varphi \in H(\Omega)$، φ' در Ω صفر نداشته باشد، $f \in H\big(\varphi(\Omega)\big)$، $g = f \circ \varphi$، $z_\circ \in \Omega$، و $w_\circ = \varphi(z_\circ)$. ثابت کنید هرگاه f یک صفر مرتبهٔ m در $w_\circ$ داشته باشد، آنگاه g نیز یک صفر مرتبهٔ m در $z_\circ$ دارد. اگر φ' یک صفر مرتبهٔ k در $z_\circ$ داشته باشد، این امر چگونه تعدیل می‌شود؟

۱۶. فرض کنید μ یک اندازهٔ مختلط بر فضای اندازهٔ X بوده، Ω مجموعهٔ بازی در صفحه باشد، φ یک تابع کراندار بر $\Omega \times X$ باشد. به‌طوری که $\varphi(z, t)$ یک تابع اندازه‌پذیر از t به‌ازای هر $z \in \Omega$ باشد، و $\varphi(z, t)$ به‌ازای هر $t \in X$ در Ω هلوریخت باشد. به‌ازای $z \in \Omega$ تعریف کنید

$$f(z) = \int_X \varphi(z, t)\, d\mu(t)$$

و ثابت کنید $f \in H(\Omega)$. **راهنمایی.** نشان دهید به‌ازای هر $K \subset \Omega$ ی فشرده ثابتی مانند $M < \infty$ نظیر است به‌طوری که

$$\left| \frac{\varphi(z, t) - \varphi(z_\circ, t)}{z - z_\circ} \right| < M \quad (t \in X \text{ و } z, z_\circ \in K)\,.$$

۱۷. نواحیی را که توابع زیر در آنها تعریف شده و هلوریخت‌اند معین نمایند:

$$f(z) = \int_\circ^{\,۱} \frac{dt}{۱ + tz}\,،\quad g(z) = \int_\circ^{\infty} \frac{e^{tz}}{۱ + t^۲}\, dt\,،\quad h(z) = \int_{-۱}^{\,۱} \frac{e^{tz}}{۱ + t^۲}\, dt\,.$$

راهنمایی. یا از تمرین ۱۶ استفاده کنید یا قضیهٔ موررا را با قضیهٔ فوبینی تلفیق نمایید.

۱۸. فرض کنید $f \in H(\Omega)$، $\bar{D}(a\,; r) \subset \Omega$، γ دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به‌مرکز a و شعاع r باشد، و f بر γ^* صفری نداشته باشد. به‌ازای $p = \circ$، انتگرال

$$\frac{۱}{۲\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, z^p\, dz$$

مساوی تعداد صفرهای f در $D(a\,; r)$ است. مقدار این انتگرال (برحسب صفرهای f) به‌ازای $p = ۱, ۲, ۳, \cdots$ چیست؟ اگر z^p با تابع دلخواه $\varphi \in H(\Omega)$ عوض شود، جواب چه خواهد بود؟

۱۹. فرض کنید $f \in H(U)$، $g \in H(U)$، و نه f و نه g در U دارای صفر نباشد. اگر

$$\frac{f'}{f}\Big(\frac{۱}{n}\Big) = \frac{g'}{g}\Big(\frac{۱}{n}\Big) \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots)\,,$$

رابطهٔ سادهٔ دیگری بین f و g پیدا نمایید.

۲۰. فرض کنید Ω یک ناحیه بوده، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ داشته باشیم $f_n \in H(\Omega)$،

هیچیک از توابع f_n در Ω صفر نداشته باشد، و $\{f_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت به f همگرا باشد. ثابت کنید یا f در Ω دارای صفر نیست یا به‌ازای هر $z \in \Omega$، $f(z) = 0$.

اگر Ω' ناحیه‌ای باشد که شامل هر $f_n(\Omega)$ بوده و f ثابت نباشد، نشان دهید که $f(\Omega) \subset \Omega'$.

۲۱. فرض کنید $f \in H(\Omega)$، Ω شامل قرص یکهٔ بسته باشد، و اگر $|z| = 1$، $|f(z)| < 1$. f چند نقطهٔ ثابت در این قرص دارد؟ یعنی معادلهٔ $f(z) = z$ چند جواب در این قرص دارد؟

۲۲. فرض کنید $f \in H(\Omega)$، Ω شامل قرص یکهٔ بسته باشد، اگر $|z| = 1$ داشته باشیم $|f(z)| > 2$، و نیز $f(0) = 1$. آیا f باید در قرص یکه دارای صفر باشد؟

۲۳. فرض کنید $P_n(z) = 1 + z/1! + \cdots + z^n/n!$ و $Q_n(z) = P_n(z) - 1$ که در آنها $n = 1, 2, 3, \cdots$. راجع به‌محل صفرهای P_n و Q_n به‌ازای n بزرگ چه می‌شود گفت؟ تا جایی که می‌توانید دقیق باشید.

۲۴. شکل کلی زیر از قضیهٔ روشه را ثابت کنید: فرض کنید Ω درون مجموعهٔ فشردهٔ K در صفحه باشد. همچنین f و g بر K پیوسته بوده و در Ω هلوریخت باشند، و به‌ازای هر $z \in K - \Omega$، $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. در این صورت تعداد صفرهای f و g در Ω یکی است.

۲۵. فرض کنید A حلقهٔ $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ باشد که در آن r_1 و r_2 اعداد مثبت داده شده‌ای می‌باشند.

(آ) نشان دهید که فرمول کشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

تحت شرایط زیر معتبر است: $f \in H(A)$،

$$r_1 + \epsilon < |z| < r_2 - \epsilon \ ,$$

و

$$\gamma_1(t) = (r_1 + \epsilon)\, e^{-it} \quad \text{و} \quad \gamma_2(t) = (r_2 - \epsilon)\, e^{it} \ (0 \le t \le 2\pi) \ .$$

(ب) به‌وسیلهٔ قسمت (آ) نشان دهید که هر $f \in H(A)$ را می‌توان به‌مجموعی مانند $f = f_1 + f_2$ چنان تجزیه کرد که f_1 خارج $\overline{D}(0\,;\,r_1)$ هلوریخت‌بوده و $f_2 \in H\big(D(0\,;\,r_2)\big)$؛ اگر وقتی $|z| \to \infty$، $f_1(z) \to 0$، این تجزیه منحصر به‌فرد است.

(پ) با استفاده از این تجزیه، به‌هر $f \in H(A)$ «سری لوران (*Laurent*)»

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

را مربوط کنید که همگرا به f در A باشد. نشان دهید که به‌ازای هر f فقط یک چنین سری وجود دارد. نشان دهید که این سری بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ A به‌طور یکنواخت همگرا به f است.

(ت) اگر $f \in H(A)$ و f در A کراندار باشد، نشان دهید که مؤلفه‌های f_1 و f_2 نیز کراندارند.

(ث) چه بخشی از مطالب فوق را می‌توان به‌حالت $r_1 = 0$ (یا $r_2 = \infty$، یا هر دو) تعمیم داد؟

(ج) چه بخشی از مطالب فوق را می‌توان به‌نواحی کراندار به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی (بیش از دو) دایره تعمیم داد؟

۲۶. تابع

$$\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$$

را به‌یک سری به‌شکل $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ بسط دهید. چند بسط به‌این شکل وجود دارد؟ هریک در چه ناحیه‌ای معتبر است؟ ضرایب c_n هریک از این بسطها را به‌طور صریح بیابید.

۲۷. فرض کنید Ω یک نوار افقی باشد که با نامساویهای $a < y < b$ معین است. همچنین $f \in H(\Omega)$ و به‌ازای هر $z \in \Omega$، $f(z) = f(z+1)$. ثابت کنید f در Ω دارای بسط فوریهٔ

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}$$

است که در $\{z : a+\epsilon \le y \le b-\epsilon\}$ به‌ازای $\epsilon > 0$ به‌طور یکنواخت همگراست.

راهنمایی. نگاشت $z \to e^{2\pi i z}$ تابع f را به‌تابعی در یک حلقه بدل می‌کند. فرمولهایی انتگرالی بیابید که با آنها بتوان ضرایب c_n را از f به‌دست آورد.

۲۸. فرض کنید Γ یک منحنی بسته در صفحه با بازهٔ پارامتری $[0, 2\pi]$ باشد. $\alpha \notin \Gamma^*$ را اختیار کرده و Γ را به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایهای مثلثاتی Γ_n تقریب کنید. نشان دهید که اگر m و n به‌قدر کافی بزرگ باشند، $\mathrm{Ind}_{\Gamma_n}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_m}(\alpha)$. این مقدار مشترک را $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)$ تعریف نمایید. ثابت کنید نتیجه به‌انتخاب $\{\Gamma_n\}$ بستگی ندارد. حال ثابت کنید لم ۱۰.۳۹ برای منحنیهای بسته برقرار است، و با استفاده از آن برهان دیگری از لم ۱۰.۴۰ ارائه دهید.

۲۹. تعریف کنید

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 r\,dr \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{re^{i\theta}+z}$$

و نشان دهید که اگر $|z| < 1$، $f(z) = \bar{z}$ و اگر $|z| \ge 1$، $f(z) = 1/z$. لذا، با آنکه انتگرالده یک تابع هلوریخت از z است، f در قرص یکه هلوریخت نیست. به‌تفاوت بین این از یک سو و قضیهٔ ۱۰.۷ و تمرین ۱۶ از سوی دیگر توجه نمایید. **پیشنهاد.** انتگرال داخلی را جداگانه به‌ازای $|z| < r$ و به‌ازای $|z| > r$ محاسبه نمایید.

۳۰. فرض کنید Ω صفحه منهای دو نقطه باشد، و مسیرهای بسته‌ای مانند Γ در Ω را نشان دهید که در فرض (۱) قضیهٔ ۱۰.۳۵ صدق کرده ولی همجای پوچ در Ω نباشند.

فصل یازده

تابعهای توافقی

معادلات کشی ـ ریمان

۱.۱۱ عملگرهای ∂ و $\bar{\partial}$. فرض کنیم f یک تابع مختلط باشد که در مجموعهٔ باز Ω در صفحه تعریف شده است. f را تبدیلی می‌انگاریم که Ω را به‌توی $R^{۲}$ می‌نگارد، و فرض می‌کنیم f در نقطه‌ای مانند $z_{\circ} \in \Omega$ به‌مفهوم تعریف ۲۲.۷ دارای دیفرانسیل باشد. به‌خاطر سادگی فرض می‌کنیم $z_{\circ} = f(z_{\circ}) = \circ$. در این صورت فرض مشتقپذیری ما هم‌ارز وجود دو عدد مختلط مانند α و β (مشتقات جزئی f نسبت به x و y در $z_{\circ} = \circ$) است به‌طوری که

$$f(z) = \alpha x + \beta y + \eta(z) z \qquad (z = x + iy) \tag{۱}$$

که در آن وقتی $z \to \circ$ ، $\eta(z) \to \circ$.

چون $z + \bar{z} = ۲x$ و $z - \bar{z} = ۲iy$، رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f(z) = \frac{\alpha - iB}{۲} z + \frac{\alpha + iB}{۲} \bar{z} + \eta(z) z \cdot \tag{۲}$$

این امر عملگرهای دیفرانسیل زیر را پیشنهاد می‌کند:

$$\partial = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{و} \quad \bar{\partial} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \tag{۳}$$

حال رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{f(z)}{z} = (\partial f)(\circ) + (\bar{\partial} f)(\circ) \cdot \frac{\bar{z}}{z} + \eta(z) \, (z \neq \circ) \cdot \tag{۴}$$

به‌ازای z حقیقی داریم $\overline{z}/z = ۰$، و به‌ازای z موهومی محض خواهیم داشت $\overline{z}/z = -۱$. لذا $f(z)/z$ در ۰ دارای حد است اگر و فقط اگر $(\overline{\partial} f)(۰) = ۰$، و توصیف زیر از توابع هلوریخت به‌دست می‌آید:

۲.۱۱ قضیه. ***فرض کنیم f یک تابع مختلط در Ω باشد که در هر نقطهٔ Ω دیفرانسیل دارد. در این صورت $f \in H(\Omega)$ اگر و فقط اگر معادلهٔ کشی ـ ریمان***

$$(\overline{\partial} f)(z) = ۰ \tag{۱}$$

به‌ازای هر $z \in \Omega$ برقرار باشد. در این صورت داریم

$$f'(z) = (\partial f)(z) \quad (z \in \Omega) \cdot \tag{۲}$$

اگر $f = u + iv$ و u و v حقیقی باشند، رابطهٔ (۱) به‌یک جفت معادلهٔ زیر تجزیه می‌شود:

$$u_y = -v_x \quad \text{و} \quad u_x = v_y$$

که در آنها زیرنویسها اشاره به‌مشتقگیری جزئی نسبت به‌متغیر ذکر شده دارند. اینها **معادلات کشی ـ ریمان**اند که باید به‌وسیلهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع هلوریخت برقرار شوند.

۳.۱۱ لاپلاسین. فرض کنیم f یک تابع مختلط در مجموعهٔ باز Ω در صفحه باشد به‌طوری که f_{xx} و f_{yy} در هر نقطهٔ Ω موجود باشند. در این صورت ***لاپلاسین*** f به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \cdot \tag{۱}$$

هرگاه f در Ω پیوسته بوده و در هر نقطهٔ Ω

$$\Delta f = ۰ , \tag{۲}$$

آنگاه گوییم f در Ω ***توافقی*** است.

چون لاپلاسین یک تابع حقیقی (در صورت وجود) حقیقی است، واضح است که ***یک تابع مختلط در Ω توافقی است اگر و فقط اگر قسمتهای حقیقی و موهومی‌اش در Ω توافقی باشند.***

توجه کنید که

$$\Delta f = ۴ \partial \overline{\partial} f \tag{۳}$$

مشروط بر اینکه $f_{xy} = f_{yx}$، و این برای جمیع fهایی که مشتق دوم پیوسته دارند برقرار است.

هرگاه f هلوریخت باشد، آنگاه $\overline{\partial} f = ۰$، f از هر مرتبه مشتق پیوسته دارد، و لذا رابطهٔ (۳) قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند:

۴.۱۱ قضیه. ***توابع هلوریخت توافقی‌اند.***

حال به‌یک نمایش انتگرالی تابعهای توافقی می‌پردازیم که با فرمول کشی توابع هلوریخت ارتباط نزدیکی دارد. این نمایش، همراه با سایر چیزها، نشان می‌دهد که هر تابع توافقی حقیقی به‌طور موضعی قسمت حقیقی یک تابع هلوریخت است، و اطلاعاتی راجع به‌رفتار مرزی بعضی از رده‌های توابع هلوریخت در قرصهای باز به‌دست خواهد داد.

انتگرال پواسون

۵.۱۱ **هستهٔ پواسون.** این هسته عبارت است از تابع

$$P_r(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int} \quad (\text{حقیقی } t \text{ و } ۰\le r<۱)\cdot \tag{۱}$$

$P_r(t)$ را می‌توان تابعی از دو متغیر r و t یا خانواده‌ای از توابع t با اندیس r درنظر گرفت.

اگر $z=re^{i\theta}$ ($۰\le r<۱$ و θ حقیقی)، با محاسبه‌ای ساده که در بخش ۲۴.۵ شده است معلوم می‌شود که

$$P_r(\theta-t)=\operatorname{Re}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right]=\frac{۱-r^۲}{۱-۲r\cos(\theta-t)+r^۲}\cdot \tag{۲}$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\,dt=۱ \quad (۰\le r<۱), \tag{۳}$$

و از رابطهٔ (۲) می‌بینیم که $P_r(t)>۰$ ، $P_r(t)=P_r(-t)$ ، و

$$P_r(t)<P_r(\delta)\ (۰<\delta<|t|\le\pi), \tag{۴}$$

و

$$\lim_{r\to ۱}P_r(\delta)=۰ \quad (۰<\delta\le\pi)\cdot \tag{۵}$$

این خواص یادآور چندجمله‌ایهای مثلثاتی $Q_k(t)$ است که در بخش ۲۴.۴ مطرح شده‌اند.

از حالا به‌بعد قرص یکهٔ باز $D(۰;۱)$ را با U نشان می‌دهیم. دایرهٔ یکه (مرز U در صفحهٔ مختلط) را با T نشان خواهیم داد. هر جا مناسب بود، فضاهای $L^p(T)$ و $C(T)$ را با فضاهای نظیر از توابع ۲π متناوب بر $R^۱$، به‌صورت بخش ۲۳.۴، یکی خواهیم کرد.

همچنین می‌توان $P_r(\theta-t)$ را تابعی از $z=re^{i\theta}$ و e^{it} درنظر گرفت. در این صورت رابطهٔ (۲) خواهد شد: به‌ازای $z\in U$ و $e^{it}\in T$،

$$P(z,e^{it})=\frac{۱-|z|^۲}{|e^{it}-z|^۲}\cdot \tag{۶}$$

۶.۱۱ **انتگرال پواسون.** هرگاه $f\in L^۱(T)$ و

$$F(re^{i\theta})=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(t)\,dt, \tag{۱}$$

آنگاه تابع F تعریف شده در U *انتگرال پواسون* f نام دارد. ما گاهی رابطهٔ (۱) را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$F=P[f]\cdot \tag{۲}$$

اگر f حقیقی باشد، فرمول ۵.۱۱ (۲) نشان می‌دهد که $P[f]$ قسمت حقیقی

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(t)\,dt \tag{۳}$$

است که، بنابر قضیهٔ ۷.۱۰، یک تابع هلوریخت از $z=re^{i\theta}$ در U می‌باشد. لذا $P[f]$ در U توافقی است. چون ترکیبات خطی (با ضرایب ثابت) تابعهای توافقی توافقی‌اند، قضیهٔ زیر برقرار می‌باشد:

۷.۱۱ قضیه. *هرگاه $f\in L^{۱}(T)$، آنگاه انتگرال پواسون $P[f]$ یک تابع توافقی در U است.*

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که انتگرالهای پواسون توابع پیوسته بخصوص در مجاورت مرز U رفتار شایسته‌ای دارند.

۸.۱۱ قضیه. *هرگاه $f\in C(T)$ و Hf بر قرص یکهٔ بستهٔ $\overline{U}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:*

$$(Hf)(re^{i\theta})=\begin{cases} f(e^{i\theta}) & r=۱ \text{ اگر } \\ P[f](re^{i\theta}) & ۰\le r<۱ \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱}$$

آنگاه $Hf\in C(\overline{U})\cdot$

برهان. چون $P_r(t)>۰$، فرمول ۵.۱۱ (۳) نشان می‌دهد که به‌ازای هر $g\in C(T)$،

$$|P(g)(re^{i\theta})|\le\|g\|_T\quad(۰\le r<۱); \tag{۲}$$

درنتیجه

$$\|Hg\|_{\overline{U}}=\|g\|_T\quad(g\in C(T))\cdot \tag{۳}$$

(همانند بخش ۲۲.۵ از نماد $\|g\|_E$ برای نمایش سوپرمم $|g|$ بر مجموعهٔ E استفاده می‌کنیم.) اگر

$$g(e^{i\theta})=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{in\theta} \tag{۴}$$

یک چندجمله‌ای مثلثاتی باشد، از رابطهٔ ۵.۱۱ (۱) معلوم می‌شود که

$$(Hg)(re^{i\theta})=\sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|}e^{in\theta}; \qquad (۵)$$

درنتیجه $Hg\in C(\bar{U})$.

بالاخره چندجمله‌ایهایی مثلثاتی مانند g_k وجود دارند که وقتی $k\to\infty$، $\|g_k-f\|_T\to 0$ (ر.ک. بخش ۲۴.۴.) بنابر رابطهٔ (۳)، وقتی $k\to\infty$،

$$\|Hg_k-Hf\|_{\bar{U}}=\|H(g_k-f)\|_{\bar{U}}\to 0. \qquad (۶)$$

این رابطه می‌گوید که توابع $Hg_k\in C(\bar{U})$ بر $\bar{U}$ به‌طور یکنواخت به Hf همگرایند. لذا $Hg\in C(\bar{U})$.

تذکر. این قضیه جواب یک مسئلهٔ مقدار مرزی [**مسئلهٔ دیریکله** (*Dirichlet*)] را به‌ما می‌دهد: تابع پیوستهٔ f بر T داده شده و مطلوب یک تابع توافقی مانند F در U است «که مقادیر مرزیش f باشند». قضیهٔ فوق جوابی به‌وسیلهٔ انتگرال پواسون f به‌دست می‌دهد، و رابطهٔ بین f و F را دقیقتر بازگو می‌کند. قضیهٔ یکتایی نظیر این قضیهٔ وجودی درنتیجهٔ زیر جای دارد.

۹.۱۱ قضیه. ***فرض کنیم u یک تابع حقیقی پیوسته بر قرص یکهٔ بستهٔ $\bar{U}$ بوده و u در U توافقی باشد. در این صورت (در U) u انتگرال پواسون تحدیدش به T است، و u قسمت حقیقی تابع هلوریخت زیر می‌باشد:***

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u(e^{it})\,dt \quad (z\in U). \qquad (۱)$$

برهان. قضیهٔ ۷.۱۰ نشان می‌دهد که $f\in H(U)$. هرگاه $u_1=\mathrm{Re}f$، آنگاه از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که u_1 انتگرال پواسون مقادیر مرزی u است، و قضیه با نشان دادن $u=u_1$ ثابت می‌شود.

قرار می‌دهیم $h=u-u_1$. در این صورت h بر $\bar{U}$ پیوسته است (قضیهٔ ۸.۱۱ را بر u_1 اعمال کنید)، h در U توافقی است، و در تمام نقاط T داریم $h=0$. فرض کنیم (این فرض به‌تناقص می‌رسد) که به‌ازای $z_0\in U$ ی، $h(z_0)>0$. ε را طوری می‌گیریم که $0<\varepsilon<h(z_0)$ و تعریف می‌کنیم

$$g(z)=h(z)+\varepsilon|z|^2 \quad (z\in\bar{U}). \qquad (۲)$$

در این صورت $g(z_0)\ge h(z_0)>\varepsilon$. چون $g\in C(\bar{U})$ و در تمام نقاط T داریم $g=\varepsilon$، پس نقطه‌ای مانند $z_1\in U$ هست که در آن g ماکزیمم موضعی دارد. این ایجاب می‌کند که در z_1، $g_{xx}\le 0$ و $g_{yy}\le 0$. ولی رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که لاپلاسین g مساوی $4\epsilon>0$ است و ما

تناقص خواهیم داشت.

لذا $u - u_1 \leq 0$. همین استدلال نشان می‌دهد که $u_1 - u \leq 0$. لذا $u = u_1$ و برهان تمام خواهد بود.

۱۰.۱۱. ما تا به‌حال فقط قرص یکهٔ $U = D(0;1)$ را درنظر گرفته‌ایم. واضح است که کار قبلی را می‌توان با یک تغییر متغیر ساده به‌قرصهای مستدیر دلخواه کشانید. لذا فقط برخی از نتایج را خلاصه می‌کنیم:

اگر u یک تابع حقیقی پیوسته بر مرز قرص $D(a;R)$ بوده و u در $D(a;R)$ با انتگرال پواسون تعریف شده باشد:

$$(1)\quad u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u(a+Re^{it})\,dt,$$

آنگاه u بر $\bar{D}(a;R)$ پیوسته بوده و در $D(a;R)$ توافقی است.

هرگاه u در مجموعهٔ باز Ω توافقی (و حقیقی) بوده و $\bar{D}(a;R) \subset \Omega$، آنگاه u در رابطهٔ (۱) در $D(a;R)$ صدق می‌کند و یک تابع هلوریخت مانند f وجود دارد که در $D(a;R)$ تعریف شده است و قسمت حقیقی‌اش u می‌باشد. این f با تقریب یک ثابت جمعی موهومی محض به‌طور منحصر به‌فرد تعریف شده است. چراکه اگر دو تابع در ناحیهٔ واحدی هلوریخت باشند، قسمتهای حقیقی یکسانی داشته و تفاضلشان باید ثابت باشد (نتیجه‌ای از قضیهٔ نگاشت باز یا معادلات کشی ـ ریمان).

این امر را می‌توان خلاصه کرد و گفت که ***هر تابع توافقی حقیقی به‌طور موضعی قسمت حقیقی یک تابع هلوریخت است.***

درنتیجه هر تابع توافقی دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه می‌باشد.

انتگرال پواسون همچنین اطلاعاتی از دنباله‌های توابع توافقی به‌ما می‌دهد:

۱۱.۱۱ قضیهٔ هارناک (*Harnack*). ***فرض کنیم $\{u_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای توافقی در ناحیهٔ Ω باشد.***

(آ) هرگاه $u_n \to u$ به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω، آنگاه u در Ω توافقی است.

(ب) هرگاه $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots$، آنگاه یا $\{u_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت همگراست یا به‌ازای هر $z \in \Omega$، $u_n(z) \to \infty$.

برهان. برای اثبات (آ) فرض می‌کنیم $\bar{D}(a;R) \subset \Omega$ و در انتگرال پواسون ۱۰.۱۱ (۱) u را با u_n تعویض می‌کنیم. چون $u_n \to u$ به‌طور یکنواخت بر مرز $\bar{D}(a;R)$، نتیجه می‌گیریم که u خود در ۱۰.۱۱ (۱) در $D(a;R)$ صدق می‌کند.

در برهان (ب) می‌توان فرض کرد که $u_1 \geq 0$ (در غیر این صورت u_n را با $u_n - u_1$ عوض

می‌کنیم). قرار می‌دهیم $u=\sup u_n$ ، $A=\{z\in\Omega : u(z)<\infty\}$ ، و $B=\Omega-A$.
فرض کنیم $\bar{D}(a;R)\subset\Omega$. هستهٔ پواسون در نامساویهای

$$\frac{R-r}{R+r}\le\frac{R^{۲}-r^{۲}}{R^{۲}-۲rR\cos(\theta-t)+r}\le\frac{R+r}{R-r}$$

به‌ازای $۰\le r<R$ صدق می‌کند. لذا

$$\frac{R-r}{R+r}u_n(a)\le u_n(a+re^{i\theta})\le\frac{R+r}{R-r}\,u_n(a)\,.$$

همین نامساویها به‌ازای u به‌جای u_n برقرارند. پس یا به‌ازای هر $z\in(a;R)$، $u(z)=\infty$ یا به‌ازای هر $z\in D(a;R)$، $u(z)<\infty$.

لذا هر دوی A و B بازند؛ و چون Ω همبند است، یا داریم $A=\varnothing$ (که در این حالت چیزی برای اثبات نداریم) یا $A=\Omega$. در حالت اخیر، قضیهٔ همگرایی یکنوا نشان می‌دهد که فرمول پواسون به‌ازای u در هر قرص در Ω برقرار است. لذا u در Ω توافقی است. هروقت یک دنباله از توابع پیوسته به‌طور یکنوا به‌یک حد پیوسته همگرا باشد، همگرایی بر مجموعه‌های فشرده یکنواخت است (مرجع [۲۶]، قضیهٔ ۱۳.۷). این برهان را تمام خواهد کرد.

خاصیت مقدار میانگین

۱۲.۱۱ تعریف. گوییم تابع پیوستهٔ u در مجموعهٔ باز Ω دارای ***خاصیت مقدار میانگین*** است اگر به هر $z\in\Omega$ دنباله‌ای مانند $\{r_n\}$ چنان نظیر باشد که $r_n>۰$، وقتی $n\to\infty$ ، $r_n\to ۰$، و

$$u(z)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z+r_ne^{it})\,dt\quad(n=۱,۲,۳,\cdots)\,. \tag{۱}$$

به‌عبارت دیگر، $u(z)$ مساوی مقدار میانگین u بر دوایر به‌شعاع r_n و مرکز z است.

توجه کنید که فرمول پواسون برقراری (۱) را به‌ازای هر تابع توافقی u و **هر** r که $\bar{D}(z;r)\subset\Omega$ نشان می‌دهد. لذا تابعهای توافقی در خاصیت مقدار میانگین بسیار قویتری از آنکه هم اکنون تعریف شده صدق می‌کنند. لذا قضیهٔ زیر ممکن است اسباب تعجب ما گردد.

۱۳.۱۱ قضیه. ***هرگاه تابع پیوستهٔ u در مجموعهٔ باز Ω دارای خاصیت مقدار میانگین باشد، آنگاه u در Ω توافقی است.***

برهان. کافی است قضیه را به‌ازای uی حقیقی ثابت کنیم. فرض کنیم $\bar{D}(a;R)\subset\Omega$. انتگرال پواسون یک تابع پیوسته مانند h بر $\bar{D}(a;R)$ به‌دست می‌دهد که در $D(a;R)$ توافقی بوده و بر مرز $D(a;R)$ با u یکی است. قرار می‌دهیم $v=u-h$ و

$m=\sup\{v(z):z\in\overline{D}(a;R)\}$. فرض کنیم $m>0$، و E مجموعهٔ تمام $z\in\overline{D}(a;R)$هایی باشد که $v(z)=m$. چون بر مرز $D(a;R)$ داریم $v=0$، E زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $D(a;R)$ است. لذا $z_0\in E$ی هست به‌طوری که به‌ازای هر $z\in E$،

$$|z_0-a|\geq|z-a|\cdot$$

به‌ازای **جمیع** rهای به‌قدر کافی کوچک دست کم نصف دایره به‌مرکز z_0 و شعاع r خارج E قرار دارد؛ درنتیجه مقادیر میانگین نظیر v همه از $m=v(z_0)$ کوچکترند. ولی v دارای خاصیت مقدارمیانگین‌است و ما تناقص داریم. لذا $m=0$؛ درنتیجه $v\leq 0$. همین‌استدلال درمورد $-v$ به‌کار می‌رود. لذا $v=0$ یا $u=h$ در $D(a;R)$، و چون $\overline{D}(a;R)$ قرص بستهٔ دلخواهی در Ω است، u در Ω توافقی می‌باشد.

قضیهٔ ۱۳.۱۱ به‌یک قضیهٔ انعکاس برای توابع هلوریخت منجر می‌شود. منظور از **نیمصفحهٔ بالایی** Π^+ یعنی مجموعهٔ تمام $z=x+iy$هایی که $y>0$؛ و **نیمصفحهٔ پایینی** Π^- عبارت است از تمام zهایی که قسمت موهومی‌شان منفی است.

۱۴.۱۱ قضیه (اصل انعکاس شوارتز). *فرض کنیم L بازهٔ بازی از محور حقیقی بوده، Ω^+ ناحیه‌ای در Π^+ باشد، و هر $t\in L$ مرکز قرص بازی مانند D_t باشد به‌طوری که $\Pi^+\cap D_t$ در Ω^+ قرار دارد. همچنین Ω^- منعکس Ω^+ باشد:*

$$\Omega^-=\{z:\overline{z}\in\Omega^+\}\cdot \tag{۱}$$

و نیز $f=u+iv$ در Ω^+ هلوریخت باشد، و به‌ازای هر دنبالهٔ $\{z_n\}$ در Ω^+ که همگرا به‌نقطه‌ای از L است،

$$\lim_{n\to\infty}v(z_n)=0\cdot \tag{۲}$$

در این صورت تابعی مانند F هست که در $\Omega^+\cup L\cup\Omega^-$ هلوریخت بوده و در Ω^+، $F(z)=f(z)$. این F در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$F(\overline{z})=\overline{F(z)}\quad(z\in\Omega^+\cup L\cup\Omega^-)\cdot \tag{۳}$$

قضیهٔ فوق حکم می‌کند که f را می‌توان به‌تابعی تعمیم داد که در یک ناحیهٔ متقارن نسبت به‌محور حقیقی هلوریخت است، و رابطهٔ (۳) می‌گوید که F این تقارن را حفظ خواهد کرد. توجه کنید که فرض پیوستگی (۲) صرفاً بر قسمت موهومی f اعمال شده است.

برهان. قرار می‌دهیم $\Omega=\Omega^+\cup L\cup\Omega^-$. v را با تعریف $v(z)=0$ به‌ازای $z\in L$ و $v(z)=-v(\overline{z})$ به‌ازای $z\in\Omega^-$ به Ω وسعت‌می‌دهیم. دراین‌صورت فوراً معلوم می‌شود که

v پیوسته بوده و دارای خاصیت مقدار میانگین در Ω است؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ۱۳.۱۱، v در Ω توافقی می‌باشد.

لذا v موضعاً قسمت موهومی یک تابع هلوریخت می‌باشد. این یعنی به‌هر یک از قرصهای D_t تابعی مانند $f_t \in H(D_t)$ چنان نظیر است که $\mathrm{Im} f_t = v$ · هر f_t به‌وسیلهٔ v با تقریب یک ثابت جمعی حقیقی معین است. اگر این ثابت طوری اختیار شود که به‌ازای $z \in D_t \cap \Pi^+$ ی، $f_t(z) = f(z)$، همین امر به‌ازای هر $z \in D_t \cap \Pi^+$ برقرار است زیرا $f - f_t$ در ناحیهٔ $D_t \cap \Pi^+$ ثابت می‌باشد. فرض می‌کنیم توابع f_t این چنین تعدیل شده باشند.

بسط سری توانی f_t به توانهای $z - t$ فقط دارای ضرایب حقیقی است زیرا بر L داریم $v = ۰$؛ درنتیجه تمام مشتقات f_t در t حقیقی‌اند. پس داریم

$$f_t(\bar{z}) = \overline{f_t(z)} \quad (z \in D_t) \cdot \tag{۴}$$

• حال فرض می‌کنیم $D_s \cap D_t \neq \varnothing$ · در این صورت در $D_t \cap D_s \cap \Pi^+$ داریم $f_t = f = f_s$؛ و چون $D_t \cap D_s$ همبند است، قضیهٔ ۱۸.۱۰ نشان می‌دهد که

$$f_t(z) = f_s(z) \quad (z \in D_t \cap D_s) \cdot \tag{۵}$$

لذا می‌توان به‌طور سازگار تعریف کرد:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) \ ، \ z \in \Omega^+ & \text{به‌ازای} \\ f_t(z) \ ، \ z \in D_t & \text{به‌ازای} \\ \overline{f_t(\bar{z})} \ ، \ z \in \Omega^- & \text{به‌ازای} \end{cases} \tag{۶}$$

و باقی است نشان دهیم که F در Ω^- هلوریخت است. هرگاه $D(a;r) \subset \Omega^-$، آنگاه $D(\bar{a};r) \subset \Omega^+$؛ درنتیجه به‌ازای هر $z \in D(a;r)$ داریم

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n (\bar{z} - \bar{a})^n \cdot \tag{۷}$$

لذا

$$F(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \bar{c}_n (z - a)^n \quad (z \in D(a;r)) \cdot \tag{۸}$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

رفتار مرزی انتگرالهای پواسون

۱۵.۱۱. هدف بعدی ما یافتن مشابه‌های قضیهٔ ۸.۱۱ برای انتگرالهای پواسون توابع L^p و

اندازه‌ها بر T است.

به‌هر تابع u در U خانوادهٔ u_r بر T را که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند مربوط می‌کنیم:

$$u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) \quad (0 \le r < 1) \cdot \qquad (۱)$$

لذا u_r اساساً تحدید u به‌دایره به‌شعاع r و مرکز ۰ است ولی ما قلمرو u_r را به T انتقال می‌دهیم.

با استفاده از این اصطلاح می‌توان قضیهٔ ۸.۱۱ را به‌شکل زیر بیان کرد:

هرگاه $f \in C(T)$ و $F = P[f]$، آنگاه وقتی $r \to 1$، $F_r \to f$ به‌طور یکنواخت بر T.

به‌عبارت دیگر

$$\lim_{r \to 1} \| F_r - f \|_\infty = 0 \qquad (۲)$$

که البته ایجاب می‌کند که در هر نقطهٔ T ،

$$\lim_{r \to 1} F_r(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \cdot \qquad (۳)$$

حال با توجه به (۲) می‌بینیم (قضیهٔ ۱۶.۱۱) که نتیجهٔ نرم ـ همگرایی نظیر در L^p به‌همین آسانی است. پس به‌جای محدود شدن به**حدود شعاعی** مانند (۳) **حدود غیرمماسی** انتگرالهای پواسون اندازه‌ها و توابع L^p را بررسی می‌کنیم. نظریهٔ مشتقگیری آمده در فصل ۷ نقش مهمی در این بررسی خواهد داشت.

۱۶.۱۱ قضیه. هرگاه $1 \le p \le \infty$ ، $f \in L^p(T)$ و $u = P[f]$، آنگاه

$$\| u_r \|_p \le \| f \|_p \quad (0 \le r < 1) \cdot \qquad (۱)$$

هرگاه $1 \le p < \infty$ ، آنگاه

$$\lim_{r \to 1} \| u_r - f \|_p = 0 \cdot \qquad (۲)$$

برهان. اگر نامساوی ینسن (*Jensen*) (یا هولدر) را بر

$$u_r(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt \qquad (۳)$$

اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$| u_r(e^{i\theta}) |^p \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(t) |^p P_r(\theta - t)\, dt \cdot \qquad (۴)$$

و اگر از (۴) نسبت به θ روی $[-\pi, \pi]$ انتگرال گرفته و قضیهٔ فوبینی را به‌کار گیریم، رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

توجه کنید که در این استدلال فرمول ۵.۱۱ (۳) دو بار به‌کار رفته است.

برای اثبات (۲) فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ و تابع $g \in C(T)$ را طوری می‌گیریم که

$\| g-f \|_p < \varepsilon$ (قضیهٔ ۱۴.۳). فرض کنیم $v = P[g]$ · در این صورت

$$u_r - f = (u_r - v_r) + (v_r - g) + (g - f) \cdot \qquad (۵)$$

بنابر (۱)، $\| u_r - v_r \|_p = \| (u-v)_r \|_p \leq \| f-g \|_p < \epsilon$ · لذا به‌ازای هر $r < ۱$،

$$\| u_r - f \|_p \leq ۲\epsilon + \| v_r - g \|_p \cdot \qquad (۶)$$

همچنین $\| v_r - g \|_p \leq \| v_r - g \|_\infty$ ، و عبارت اخیر، طبق قضیهٔ ۸.۱۱، وقتی $r \to ۱$ به ۰ همگراست. این امر رابطهٔ (۲) را ثابت خواهد کرد.

۱۷.۱۱ انتگرالهای پواسون اندازه‌ها. اگر μ یک اندازهٔ مختلط بر T بوده و بخواهیم انتگرالهای روی T را با انتگرالهای روی بازه‌ها به‌طول ۲π در $R^۱$ عوض کنیم، این بازه‌ها باید به‌خاطر وجود احتمالی جرمهای نقطه‌ای در μ نیمباز گرفته شوند برای اجتناب از این مسئله (که ضمناً بسیار جزئی است)، ذیلاً انتگرالگیری را روی دایره درنظر گرفته و انتگرال پواسون $u = P[d\mu]$ از μ را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$u(z) = \int_T P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}) \quad (z \in U) \qquad (۱)$$

که در آن، همانند فرمول ۵.۱۱ (۶)، $P(z, e^{it}) = (۱ - |z|^۲)/|e^{it} - z|^۲$ ·

استدلال منجر شده به‌قضیهٔ ۷.۱۱ در انتگرالهای پواسون اندازه‌ها بدون تغییر به‌کار می‌رود. ***لذا u ی تعریف شده با (۱) در U توافقی می‌باشد.***

با فرض $\| \mu \| = |\mu|(T)$ ، مشابه نیمهٔ اول قضیهٔ ۱۶.۱۱ عبارت است از

$$\| u_r \|_۱ = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | u(re^{i\theta}) | d\theta \leq \| \mu \| \cdot \qquad (۲)$$

برای مشاهدهٔ این امر، μ را در (۱) با $|\mu|$ عوض کرده، قضیهٔ فوبینی را به‌کار برده، و از فرمول ۵.۱۱ (۳) استمداد می‌جوییم.

۱۸.۱۱ ناحیه‌های تقرب. به‌ازای $۰ < \alpha < ۱$، Ω_α را اجتماع قرصهای $D(۰;\alpha)$ و پاره‌خطها از $z = ۱$ تا نقاط $D(۰;\alpha)$ تعریف می‌کنیم.

به‌عبارت دیگر، Ω_α کوچکترین مجموعهٔ باز محدبی است که شامل $D(۰;\alpha)$ بوده و دارای نقطهٔ ۱ در مرزش می‌باشد. Ω_α در مجاورت $z = ۱$ یک زاویه است که به‌وسیلهٔ شعاع U که در ۱ ختم شده نصف می‌شود و این زاویه مساوی است با ۲θ که $\alpha = \sin\theta$ · منحنیهایی که در Ω_α به ۱ نزدیک می‌شوند نمی‌توانند بر T مماس باشند. لذا Ω_α را ***ناحیهٔ تقرب غیرمماسی*** به‌رأس ۱ می‌نامند.

ناحیه‌های Ω_α با افزایش α منبسط می‌شوند. اجتماعشان U و اشتراکشان شعاع $[۰, ۱)$

است.

نسخه‌های دوران یافتهٔ Ω_α به‌رأس e^{it} را با $e^{it}\Omega_\alpha$ نشان خواهیم داد.

۱۹.۱۱ توابع ماکزیمال. اگر $\circ < \alpha < ۱$ و u یک تابع مختلط با قلمرو U باشد، ***تابع ماکزیمال غیرمماسی*** $N_\alpha u$ بر T به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(N_\alpha u)(e^{it}) = \sup\{\,|u(z)| : z \in e^{it}\Omega_\alpha\} \cdot \qquad (۱)$$

به‌همین نحو، ***تابع ماکزیمال شعاعی*** u عبارت است از

$$(M_{\text{rad}} u)(e^{it}) = \sup\{\,|u(re^{it})| : \circ \le r < ۱\} \cdot \qquad (۲)$$

هرگاه u **پیوسته** بوده و λ عدد مثبتی باشد، آنگاه مجموعه‌ای که در آن یکی از این توابع ماکزیمال نابیشتر از λ است زیرمجموعهٔ بسته‌ای از T است. درنتیجه $N_\alpha u$ و $M_{\text{rad}} u$ ***نیمه پیوستهٔ پایینی*** بر T اند. بخصوص این توابع اندازه پذیر می‌باشند.

واضح است که $M_{\text{rad}} u \le N_\alpha u$ و تابع اخیر با α افزایش می‌یابد. اگر $u = P[d\mu]$، قضیهٔ ۲۰.۱۱ نشان می‌دهد که اندازهٔ $N_\alpha u$ به‌نوبهٔ خود به‌وسیلهٔ تابع ماکزیمال $M\mu$ که در بخش ۲.۷ تعریف شده است کنترل می‌شود ($k = ۱$ را اختیار کنید). ولی اگر اندازهٔ لبگ معمولی m بر T را با $\sigma = m/۲\pi$ عوض کنیم، نمادگذاری ساده می‌شود. در این صورت σ یک اندازهٔ بورل مثبت پایای دوران است، و طوری نرمالی شده که $\sigma(T) = ۱$.

حال $M\mu$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(M\mu)(e^{i\theta}) = \sup \frac{|\mu|(I)}{\sigma(I)} \cdot \qquad (۳)$$

سوپرمم روی تمام قوسهای باز $I \subset T$ که مرکزشان در $e^{i\theta}$ به‌انضمام خود T (ولو آنکه T یک قوس نیست) گرفته می‌شود.

به‌همین نحو، مشتق $D\mu$ اندازهٔ μ بر T مساوی است با

$$(D\mu)(e^{i\theta}) = \lim \frac{\mu(I)}{\sigma(I)} \qquad (۴)$$

وقتی قوسهای باز $I \subset T$ به‌مرکزشان $e^{i\theta}$ منقبض می‌شوند، و $e^{i\theta}$ یک ***نقطهٔ لبگ*** $f \in L^۱(T)$ است اگر

$$\lim \frac{۱}{\sigma(I)} \int_I |f - f(e^{i\theta})|\, d\sigma = \circ \qquad (۵)$$

که در آن $\{I\}$ همانند در (۴) می‌باشد.

اگر $d\mu = f\,d\sigma + d\mu_s$ تجزیهٔ لبگ اندازهٔ بورل مختلط μ بر T باشد که $f \in L^۱(T)$ و $\mu_s \perp \sigma$، قضایای ۴.۷، ۷.۷، و ۱۴.۷ حکم می‌کنند که

$$\sigma\{M\mu > \lambda\} \leq \frac{۳}{\lambda} \|\mu\| , \qquad (۶)$$

تقریباً هر نقطهٔ T یک نقطهٔ لبگ f است، $D\mu = f$، و $D\mu_s = ۰$ ت. هـ. $[\sigma]$.

حال خواهیم دید که به‌ازای هر اندازهٔ بورل مختلط μ بر T، توابع ماکزیمال غیرمماسی و شعاعی تابع توافقی $P[d\mu]$ به‌وسیلهٔ $M\mu$ کنترل می‌شوند. درواقع اگر یکی از آنها در نقطه‌ای از T متناهی باشد، دیگران نیز چنین‌اند. این امر را می‌توان به‌وسیلهٔ تلفیق قضیهٔ ۲۰.۱۱ با تمرین ۱۹ دید.

۲۰.۱۱. *فرض کنیم $۰ < \alpha < ۱$. در این صورت ثابتی مانند $c_\alpha > ۰$ با خاصیت زیر وجود دارد: هرگاه μ یک اندازهٔ بورل متناهی مثبت بر T بوده و $u = P[d\mu]$ انتگرال پواسون آن باشد، آنگاه نامساویهای*

$$c_\alpha (N_\alpha u)(e^{i\theta}) \leq (M_{\text{rad}} u)(e^{i\theta}) \leq (M\mu)(e^{i\theta}) \qquad (۱)$$

در هر نقطهٔ $e^{i\theta} \in T$ برقرارند.

برهان. رابطهٔ (۱) را به‌ازای $\theta = ۰$ ثابت می‌کنیم. حالت کلی با اعمال حالت خاص بـر انـدازهٔ دوران یافتهٔ $\mu_\theta(E) = \mu(e^{i\theta}E)$ به‌دست می‌آید.

چون $u(z) = \int_T P(z, e^{it}) d\mu(e^{it})$، اولین نامساوی (۱) در صورت اثبات

$$c_\alpha P(z, e^{it}) \leq P(|z| , e^{it}) \qquad (۲)$$

به‌ازای هر $z \in \Omega_\alpha$ و هر $e^{it} \in T$ به‌دست می‌آید. بنابر فرمول ۵.۱۱ (۶)، نامساوی (۲) عبارت است از

$$c_\alpha |e^{it} - r|^۲ \leq |e^{it} - z|^۲ \qquad (۳)$$

که در آن $r = |z|$.

تعریف Ω_α نشان می‌دهد که $|z - r| / (۱ - r)$ در Ω_α مثلاً به γ_α کراندار است. لذا

$$|e^{it} - r| \leq |e^{it} - z| + |z - r|$$
$$\leq |e^{it} - z| + \gamma_\alpha (۱ - r) \leq (۱ + \gamma_\alpha) |e^{it} - z| ;$$

درنتیجه رابطهٔ (۳) به‌ازای $c_\alpha = (۱ + \gamma_\alpha)^{-۲}$ برقرار است. این نیمهٔ اول (۱) را ثابت می‌کند.

برای نیمهٔ دوم باید ثابت کنیم که

$$\int_T P_r(t) d\mu(e^{it}) \leq (M\mu)(۱) \quad (۰ \leq r \leq ۱) \cdot \qquad (۴)$$

r را ثابت می‌گیریم. قوسهای باز $I_j \subset T$ به‌مرکز ۱ را طوری اختیار می‌کنیم که $I_1 \subset I_2 \subset \subset \cdots \subset I_{n-1}$ و قرار می‌دهیم $I_n = T$. به‌ازای $1 \le j \le n$ فرض می‌کنیم χ_j تابع مشخص I_j بوده و h_j بزرگترین عدد مثبتی باشد که بر T، $h_j \chi_j \le P_r$. تعریف می‌کنیم

$$K = \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1}) \chi_j \tag{۵}$$

که در آن $h_{n+1} = 0$. چون $P_r(t)$ تابع زوجی از t است که با افزایش t از ۰ تا π کاهش می‌یابد، می‌بینیم که $h_j - h_{j+1} \ge 0$، بر $I_j - I_{j-1}$ داریم $K = h_j$ (با فرض $I_0 = \varnothing$)، و $K \le P_r$. تعریف $M\mu$ نشان می‌دهد که

$$\mu(I_j) \le (M\mu)(1)\, \sigma(I_j) \cdot \tag{۶}$$

لذا، با فرض $M = (M\mu)(1)$،

$$\int_T K d\mu = \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1}) \mu(I_j) \le M \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1}) \sigma(I_j)$$

$$= M \int_T K d\sigma \le M \int_T P_r d\sigma = M \cdot \tag{۷}$$

بالاخره اگر قوسهای I_j را طوری بگیریم که نقاط انتهایی‌شان یک افراز به‌قدر کافی ظریف از T را تشکیل دهند، توابع پله‌ای K به‌دست می‌آیند که بر T به‌طور یکنواخت به P_r همگرایند. لذا رابطهٔ (۴) از (۷) نتیجه می‌شود.

۱۱.۲۱. حدود غیرمماسی. گوییم تابع F تعریف شده در U ***دارای حد غیرمماسی λ در*** $e^{i\theta} \in T$ است اگر به‌ازای هر $\alpha > 1$ و هر دنبالهٔ $\{z_j\}$ که در $e^{i\theta}\,\Omega_\alpha$ واقع است، همگرا به $e^{i\theta}$،

$$\lim_{j \to \infty} F(z_j) = \lambda \cdot$$

۱۱.۲۲ قضیه. ***هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مثبت بر T بوده و به‌ازای θ ای $(D\mu)(e^{i\theta}) = 0$، آنگاه انتگرال پواسون آن $u = P[d\mu]$ دارای حد غیرمماسی ۰ در $e^{i\theta}$ است.***

برهان. طبق تعریف، فرض $(D\mu)(e^{i\theta}) = 0$ یعنی وقتی قوسهای باز $I \subset T$ به‌مرکزشان $e^{i\theta}$ منقبض می‌شوند،

$$\lim \mu(I)/\sigma(I) = 0 \cdot \tag{۱}$$

$\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت یکی از این قوسها، مثلاً I_0، آنقدر کوچک است که به‌ازای هر $I \subset I_0$ به‌مرکز $e^{i\theta}$،

$$\mu(I) < \epsilon \sigma(I) \cdot \tag{۲}$$

فرض کنیم $\mu_\circ$ تحدید μ به $I_\circ$ باشد. قرار می‌دهیم $\mu_1 = \mu - \mu_\circ$، و u_i را انتگرال پواسون μ_i ($i = \circ , 1$) می‌گیریم. فرض کنیم z_j در ناحیه‌ای مانند $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ همگرا به $e^{i\theta}$ باشد. در این صورت z_j در فاصلهٔ مثبتی از $T - I_\circ$ قرار می‌گیرد. لذا انتگرالده در

$$u_1(z_j) = \int_{T-I_\circ} P(z_j, e^{it})\, d\mu(e^{it}) \tag{۳}$$

به‌ازای $j \to \infty$ به‌طور یکنواخت بر $T-I_\circ$ به $\circ$ همگراست. بنابراین

$$\lim_{j\to\infty} u_1(z_j) = \circ \cdot \tag{۴}$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۲) همراه با قضیهٔ ۲۰.۱۱ معلوم می‌شود که

$$c_\alpha(N_\alpha u_\circ)(e^{i\theta}) \le (M\mu_\circ)(e^{i\theta}) \le \epsilon \cdot \tag{۵}$$

در $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ داریم $u_\circ(z) \le (N_\alpha \mu_\circ)(e^{i\theta})$ · لذا رابطهٔ (۵) ایجاب می‌کند که

$$\limsup_{j\to\infty} u_\circ(z_j) \le \varepsilon / c_\alpha \cdot \tag{۶}$$

چون $u = u_\circ + u_1$ و ε دلخواه بود، روابط (۴) و (۶) نتیجه می‌دهند که

$$\lim_{j\to\infty} u(z_j) = \circ \cdot \tag{۷}$$

۲۳.۱۱ قضیه. *هرگاه $f \in L^1(T)$، آنگاه $P(f)$ دارای حد غیرمماسی $f(e^{i\theta})$ در هر نقطهٔ لبگ $e^{i\theta}$ی f است.*

برهان. فرض کنیم $e^{i\theta}$ یک نقطهٔ لبگ f باشد. با تفریق یک ثابت از f می‌توان بدون صدمه زدن به‌کلیت فرض کرد که $f(e^{i\theta}) = \circ$ · در این صورت، وقتی قوسهای باز $I \subset T$ به‌مرکزشان $e^{i\theta}$ منقبض شوند،

$$\lim \frac{1}{\sigma(I)} \int_I |f|\, d\sigma = \circ \cdot \tag{۱}$$

اندازهٔ بورل μ را بر T به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(E) = \int_E |f|\, d\sigma \cdot \tag{۲}$$

در این صورت رابطهٔ (۱) می‌گوید که $(D\mu)(e^{i\theta}) = \circ$ · لذا، طبق قضیهٔ ۲۲.۱۱، $P[d\mu]$ دارای حد غیرمماسی $\circ$ در $e^{i\theta}$ است. همین امر در مورد $P[f]$ درست است زیرا

$$|P[f]| \le P[|f|] = P[d\mu] \cdot \tag{۳}$$

دو قضیهٔ اخیر را می‌توان به‌صورت زیر با هم تلفیق کرد.

۲۴.۱۱ قضیه. هرگاه $d\mu = f d\sigma + d\mu_s$ تجزیهٔ لبگ اندازهٔ بورل مختلط μ بر T باشد که در آن $f \in L^1(T)$ و $\mu_s \perp \sigma$، آنگاه $P[d\mu]$ در تقریباً هر نقطهٔ T دارای حد غیرمماسی $f(e^{i\theta})$ است.

برهان. قضیهٔ ۲۲.۱۱ را بر تغییرات مثبت و منفی قسمتهای حقیقی و موهومی μ_s و قضیهٔ ۲۳.۱۱ را بر f اعمال کنید.

ذیلاً نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ ۲۰.۱۱ بیان شده است.

۲۵.۱۱ قضیه. به‌ازای $۰ < \alpha < ۱$ و $۱ \leq p \leq \infty$، ثابتهایی مانند $A(\alpha, p)$ با خواص زیر وجود دارند:

(آ) هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر T بوده و $u = P[d\mu]$، آنگاه

$$\sigma\{N_\alpha u > \lambda\} \leq \frac{A(\alpha, ۱)}{\lambda} \|\mu\| \quad (۰ < \lambda < \infty);$$

(ب) هرگاه $۱ < p \leq \infty$، $f \in L^p(T)$ و $u = P[f]$، آنگاه

$$\|N_\alpha u\|_p \leq A(\alpha, p) \|f\|_p \cdot$$

برهان. قضیهٔ ۲۰.۱۱ را با قضیهٔ ۴.۷ و نامساوی (۷) در برهان قضیهٔ ۱۸.۸ تلفیق کنید.

لذا توابع ماکزیمال غیرمماسی $N_\alpha u$ در L^1 ضعیف‌اند اگر $u = P[d\mu]$، و در $L^p(T)$ اند اگر به‌ازای $f \in L^p(T)$ ای که $p > ۱$، $u = P[f]$. نتیجهٔ اخیر را می‌توان شکل قوت یافتهٔ قسمت اول قضیهٔ ۱۶.۱۱ درنظر گرفت.

قضایای نمایشی

۲۶.۱۱. چگونه می‌توان گفت که تابع توافقی u در U یک انتگرال پواسون است یا خیر؟ قضایای قبل (۱۶.۱۱ تا ۲۵.۱۱) حاوی چند شرط لازم‌اند. خواهیم دید که ساده‌ترین آنها، یعنی کرانداری L^p خانوادهٔ $\{u_r : ۰ \leq r < ۱\}$، کافی نیز هست! لذا، بخصوص، کرانداری $\|u_r\|_1$ وقتی $r \to ۱$ وجود حدود غیرمماسی ت. هـ. بر T را ایجاب می‌کند زیرا، همانطور که در قضیهٔ ۳۰.۱۱ خواهیم دید، u را در این وضع می‌توان به‌صورت انتگرال پواسون یک اندازه نمایش داد.

این اندازه به‌عنوان «حد ضعیف» توابع u_r به‌دست خواهد آمد. همگرایی ضعیف مبحث مهمی در آنالیز تابعی است. ما به‌این مفهوم از طریق مفهوم مهم دیگری، به‌نام همپیوستگی، که بعدها مجدداً به‌آن برخواهیم خورد، در رابطه با «خانواده‌های نرمال» توابع هلوریخت نزدیک خواهیم شد.

۲۷.۱۱ تعریف. فرض کنیم $\mathscr{F}$ گردایه‌ای از توابع مختلط بر فضای متری X با متر ρ باشد.

گوییم $\mathscr{F}$ **همپیوسته** است اگر به‌هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ چنان نظیر باشد که به‌ازای هر $f \in \mathscr{F}$ و هر جفت نقاط x و y که $\rho(x,y) < \delta$، $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. (بخصوص هر $f \in \mathscr{F}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.)

گوییم $\mathscr{F}$ ***نقطه به‌نقطه کراندار*** است اگر به‌هر $x \in X$ عددی مانند $M(x) < \infty$ چنان نظیر باشد که به‌ازای هر $f \in \mathscr{F}$، $|f(x)| \leq M(x)$.

۲۸.۱۱ قضیه [آرزلا ـ اسکولی ($Arzela$ - $Ascoli$)]. ***فرض کنیم $\mathscr{F}$ گردایه‌ای از توابع مختلط همپیوستهٔ نقطه به‌نقطه کراندار بر فضای متری X بوده و X شامل زیرمجموعهٔ چگال شمارشپذیر E باشد. در این صورت هر دنبالهٔ $\{f_n\}$ در $\mathscr{F}$ زیردنباله‌ای دارد که بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X به‌طور یکنواخت همگراست.***

برهان. فرض کنیم x_1، x_2، x_3، $\cdots$ نقاط E باشند. همچنین S_0 مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت باشد. و نیز $k \geq 1$ و مجموعهٔ نامتناهی $S_{k-1} \subset S_0$ اختیار شده باشد. چون $\{f_n(x_k) : n \in S_{k-1}\}$ دنبالهٔ کرانداری از اعداد مختلط است، زیردنباله‌ای همگرا دارد. به‌عبارت‌دیگر، مجموعه‌ای نامتناهی مانند $S_k \subset S_{k-1}$ هست به‌طوری‌که در S_k، وقتی $n \to \infty$، $\lim f_n(x_k)$ وجود دارد.

با ادامهٔ کار مجموعه‌های نامتناهی $\cdots \supset S_2 \supset S_1 \supset S_0$ با این خاصیت به‌دست می‌آیند که در S_k، اگر $n \to \infty$، $\lim f_n(x_j)$ به‌ازای $1 \leq j \leq k$ موجود است.

فرض کنیم r_k جملهٔ kاُم S_k (نسبت به‌ترتیب طبیعی اعداد صحیح مثبت) باشد و قرار می‌دهیم

$$S = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}.$$

در این صورت به‌ازای هر k حداکثر $k-1$ جمله از S وجود دارند که در S_k نیستند.

لذا $\lim f_n(x)$ به‌ازای هر $x \in E$، وقتی $n \to \infty$، در S وجود دارد.

(ساختن S از $\{S_k\}$ را **فرایند قطری** می‌نامند.)

حال فرض کنیم $K \subset X$ فشرده باشد. $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. بنابر همپیوستگی، $\delta > 0$ ای هست به‌طوری که $\rho(p,q) < \delta$ نامساوی $|f_n(p) - f_n(q)| < \varepsilon$ را به‌ازای هر n ایجاب می‌کند. K را با گویهای باز B_1، $\cdots$، B_M به‌شعاع $\delta/2$ می‌پوشانیم. چون E در X چگال است، نقاطی مانند $p_i \in B_i \cap E$ به‌ازای $1 \leq i \leq M$ وجود دارند. و چون $p_i \in E$، $\lim f_n(p_i)$، وقتی $n \to \infty$، در S وجود دارد. لذا عدد صحیحی مانند N هست به‌طوری که به‌ازای $i = 1, \cdots, M$، اگر $m > N$، $n > N$، و m و n در S باشند،

$$|f_m(p_i) - f_n(p_i)| < \epsilon.$$

برای اتمام کار، $x \in K$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت به‌ازای i ای، $x \in B_i$ و

$\rho(x,p_i)<\delta$. انتخاب ما از δ و N نشان می‌دهد که اگر $m>N$، $n>N$، $m\in S$، و $n\in S$،

$$|f_m(x)-f_n(x)| \le |f_m(x)-f_m(p_i)| + |f_m(p_i)-f_n(p_i)| + |f_n(p_i) - f_n(x)| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = ۳\epsilon \cdot$$

۲۹.۱۱ قضیه. *فرض کنیم*

(آ) X *یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد؛*

(ب) $\{\Lambda_n\}$ *دنباله‌ای از تابعیهای خطی بر X باشد؛*

(پ) $\sup_n \|\Lambda_n\| = M < \infty$.

در این صورت زیردنباله‌ای مانند $\{\Lambda_{n_i}\}$ *وجود دارد به‌طوری که حد*

$$\Lambda x = \lim_{i\to\infty} \Lambda_{n_i} x \qquad (۱)$$

به‌ازای هر $x\in X$ موجود است. به‌علاوه، Λ خطی است و $\|\Lambda\| \le M$.

(در این وضع گوییم Λ **حد ضعیف** $\{\Lambda_{n_i}\}$ است؛ ر.ک. تمرین ۱۸.)

برهان. طبق تعریف، X در صورتی جدایی پذیر است که دارای زیرمجموعه‌ای چگال و شمارشپذیر باشد. نامساویهای

$$|\Lambda_n x| \le M\|x\| \quad \text{و} \quad |\Lambda_n x' - \Lambda_n x''| \le M\|x'-x''\|$$

نشان می‌دهند که $\{\Lambda_n\}$ نقطه به‌نقطه کراندار و همپیوسته است. چون هر نقطهٔ X یک مجموعهٔ فشرده است، قضیهٔ ۲۸.۱۱ ایجاب می‌کند که زیردنباله‌ای مانند $\{\Lambda_{n_i}\}$ هست به‌طوری که $\{\Lambda_{n_i}x\}$ به‌ازای هر $x\in X$، وقتی $i\to\infty$، همگرا می‌باشد، برای اتمام کار، Λ را با رابطهٔ (۱) تعریف می‌کنیم. در این صورت واضح است که Λ خطی بوده و $\|\Lambda\|\le M$.

برای کاربردی که ذیلاً می‌آید یادآور می‌شویم که $C(T)$ و $L^p(T)$ $(p<\infty)$ فضاهای باناخ **جدایی پذیراند** زیرا چندجمله‌ایهای مثلثاتی در آنها چگال‌اند و کافی است خود را به‌چندجمله‌ایهای مثلثاتی که ضرایبشان در زیرمجموعهٔ چگال شمارشپذیری از میدان مختلط‌اند محدود نماییم.

۳۰.۱۱ قضیه. *فرض کنیم u در U توافقی بوده،* $1\le p\le\infty$، *و*

$$\sup_{0<r<1} \|u_r\|_p = M < \infty \cdot \qquad (۱)$$

(آ) *اگر $p=1$، اندازهٔ بورل مختلط منحصر به‌فردی مانند μ بر T هست به‌طوری که* $u=P[d\mu]$.

(ب) *اگر $p>1$، تابع منحصر به‌فردی مانند $f\in L^p(T)$ هست به‌طوری که* $u=P[f]$.

(پ) هر تابع توافقی مثبت در U انتگرال پواسون اندازهٔ بورل مثبت منحصر به‌فردی بر T است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $p = 1$ · تابعیهای خطی Λ_r بر $C(T)$ را با

$$\Lambda_r g = \int_T g u_r d\sigma \quad (0 \le r < 1) \tag{۲}$$

تعریف می‌کنیم. بنابر (۱)، $\| \Lambda_r \| \le M$ · و بنابر قضایای ۲۹.۱۱ و ۱۹.۶، اندازه‌ای مانند μ بر T هست که $\| \mu \| \le M$ و دنباله‌ای مانند $r_j \to 1$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $g \in C(T)$،

$$\lim_{j \to \infty} \int_T g u_{r_j} \, d\sigma = \int_T g d\mu \cdot \tag{۳}$$

قرار می‌دهیم $h_j(z) = u(r_j z)$ · در این صورت h_j در U توافقی است، بر $\overline{U}$ پیوسته است، و لذا انتگرال پواسون تحدیدش به T می‌باشد (قضیهٔ ۹.۱۱). $z \in U$ را ثابت گرفته و رابطهٔ (۳) را به‌ازای

$$g(e^{it}) = P(z, e^{it}) \tag{۴}$$

اعمال می‌کنیم. چون $h_j(e^{it}) = u_{r_j}(e^{it})$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim_j u(r_j z) = \lim_j h_j(z) \\ &= \lim_j \int_T P(z, e^{it}) h_j(e^{it}) d\sigma(e^{it}) \\ &= \int_T P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}) = P[d\mu](z) \cdot \end{aligned}$$

فرض کنیم $1 < p \le \infty$ و q مزدوج نمایی p باشد. در این صورت $L^q(T)$ جدایی‌پذیر است. Λ_r را همانند در (۲) تعریف می‌کنیم منتها به‌ازای هر $g \in L^q(T)$ · مجدداً $\| \Lambda_r \| \le M$ · با استفاده از قضایای ۱۶.۶ و ۲۹.۱۱، همانند فوق نتیجه می‌گیریم که تابعی مانند $f \in L^p(T)$ با خاصیت $\| f \|_p \le M$ وجود دارد؛ درنتیجه (۳)، با $f d\sigma$ به‌جای $d\mu$، به‌ازای هر $g \in L^q(T)$ برقرار است. بقیهٔ برهان مانند حالت $p = 1$ می‌باشد.

این احکام وجودی در (آ) و (ب) را ثابت می‌کند. برای اثبات یکتایی کافی است نشان دهیم که $P[d\mu] = 0$ رابطهٔ $\mu = 0$ را ایجاب می‌کند.

$f \in C(T)$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم $u = P(f)$ و $v = P[d\mu]$ · بنابر قضیهٔ فوبینی و تقارن $P(re^{i\theta}, e^{it}) = P(re^{it}, e^{i\theta})$،

$$\int_T u_r d\mu = \int_T v_r f d\sigma \quad (0 \le r < 1) \cdot \tag{۵}$$

وقتی $v=0$، $v_r=0$، و چون وقتی $r\to 1$، $u_r \to f$ به‌طور یکنواخت، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $f\in C(T)$، اگر $P[d\mu]=0$،

$$\int_T f\,d\mu = 0 \cdot \tag{۶}$$

بنابر قضیهٔ ۱۹.۶، رابطهٔ (۶) ایجاب می‌کند که $\mu=0$.

بالأخره قسمت (پ) نتیجه‌ای است از قسمت (آ) زیرا $u>0$ رابطهٔ (۱) را به‌ازای $p=1$ ایجاب می‌کند: بنابر خاصیت مقدار میانگین تابعهای توافقی،

$$\int_T |u_r|\,d\sigma = \int_T u_r\,d\sigma = u(0) \quad (0\le r<1)\cdot \tag{۷}$$

تابعیهای Λ_r به‌کار رفته در برهان (آ) اینک مثبت‌اند؛ درنتیجه $\mu\ge 0$.

۳۱.۱۱. چون توابع هلوریخت توافقی‌اند، تمام نتایج قبلی (که در آنها قضایای ۱۶.۱۱، ۲۴.۱۱، ۲۵.۱۱، و ۳۰.۱۱ از همه مهمترند) درمورد توابع هلوریخت در U به‌کار می‌روند. این ما را به‌مطالعهٔ فضاهای H^p (مبحثی که در فصل ۱۷ مطرح می‌شود) خواهد کشانید.

فعلاً فقط کاربردی در توابع در فضای H^∞ را ذکر می‌کنیم. این فضا، طبق تعریف، عبارت است از فضای تمام توابع هلوریخت کراندار در U. نرم

$$\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(z)|: z\in U\}$$

فضای H^∞ را به‌یک فضای باناخ تبدیل می‌کند.

مثل قبل، $L^\infty(T)$ فضای تمام (رده‌های هم‌ارزی) توابع به‌طور اساسی کراندار بر T با نرم سوپرمم اساسی نسبت به‌اندازهٔ لبگ است. به‌ازای $g\in L^\infty(T)$، $\|g\|_\infty$ یعنی سوپرمم اساسی $|g|$.

۳۲.۱۱ قضیه. *به‌هر $f\in H^\infty$ تابعی مانند $f^*\in L^\infty(T)$ نظیر است که تقریباً همه جا با*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \tag{۱}$$

تعریف می‌شود. تساوی $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$ برقرار می‌باشد.

هرگاه به‌ازای تقریباً هر $e^{i\theta}$ بر قوسی مانند $I\subset T$، $f^*(e^{i\theta})=0$، آنگاه به‌ازای هر $z\in U$، $f(z)=0$.

(بعدها، در قضیهٔ ۱۹.۱۵، قضیهٔ یکتایی بسیار قویتری به‌دست خواهیم آورد. همچنین ر.ک. قضیهٔ ۱۸.۱۷ و بخش ۱۹.۱۷.)

برهان. بنابر قضیهٔ ۳۰.۱۱، تابع منحصربه‌فردی مانند $g\in L^\infty(T)$ هست به‌طوری که $f=P[g]$ و بنابر قضیهٔ ۲۳.۱۱، رابطهٔ (۱) به‌ازای $f^*=g$ برقرار است. نامساوی

$\|f^*\|_\infty \le \|f\|_\infty$ از قضیهٔ ۱۶.۱۱ (۱) نتیجه می‌شود؛ نامساوی در جهت عکس واضح می‌باشد.

بخصوص هرگاه $f^* = 0$ **ت. هـ، آنگاه** $\|f^*\|_\infty = 0$ **؛ درنتیجه** $\|f\|_\infty = 0$ **؛ پس** $f = 0$.

حال عدد صحیح مثبت n را طوری می‌گیریم که طول I از $2\pi/n$ بزرگتر باشد. قرار می‌دهیم $\alpha = \exp\{2\pi i/n\}$ و تعریف می‌کنیم

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} f(\alpha^k z) \quad (z \in U) \cdot \tag{۲}$$

در این صورت $F \in H^\infty$ و $F^* = 0$ ت. هـ. بر T؛ درنتیجه به‌ازای هر $z \in U$، $F(z) = 0$. اگر $Z(f)$، یعنی مجموعهٔ صفر f در U، حداکثر شمارشپذیر می‌بود، همین امر برای $Z(F)$ درست بود زیرا $Z(F)$ اجتماع n مجموعهٔ حاصل‌از $Z(f)$ به‌وسیلهٔ دوران‌است. ولی $Z(F) = U$. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۸.۱۰، $f = 0$.

تمرینات

۱. فرض کنید u و v تابعهای توافقی حقیقی در ناحیهٔ مسطح Ω باشند. uv تحت چه شرایطی توافقی است؟ (توجه کنید که جواب قویاً تابع این امر است که سؤال راجع به‌توابع **حقیقی** است.) نشان دهید که u^2 نمی‌تواند در Ω توافقی باشد مگر آنکه u ثابت باشد. $|f|^2$ به‌ازای چه $f \in H(\Omega)$ ای توافقی است؟

۲. فرض کنید f یک تابع مختلط در ناحیهٔ Ω بوده و هر دوی f و f^2 در Ω توافقی باشند. ثابت کنید f یا $\bar{f}$ در Ω هلوریخت است.

۳. اگر u یک تابع توافقی در ناحیهٔ Ω باشد، راجع به‌مجموعهٔ نقاطی که در آنها گرادیان u مساوی ۰ است چه می‌شود گفت؟ (این مجموعه‌ای است که بر آن $u_x = u_y = 0$.)

۴. ثابت کنید هر مشتق جزئی یک تابع توافقی توافقی است.

با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید که به‌ازای هر t ی ثابت، $P_r(\theta - t)$ یک تابع توافقی از $re^{i\theta}$ است. بدون ارجاع به‌توابع هلوریخت نتیجه بگیرید که انتگرال پواسون $P[d\mu]$ هر اندازهٔ بورل متناهی μ بر T در U توافقی است و این کار را با نشان دادن اینکه هر مشتق جزئی $P[d\mu]$ مساوی انتگرال مشتق جزئی نظیر هسته است انجام دهید.

۵. فرض کنید که $f \in H(\Omega)$ و f در Ω دارای صفر نباشد. با محاسبهٔ لاپلاسین ثابت کنید که $\log|f|$ در Ω توافقی است. آیا راه ساده‌تری برای این کار وجود دارد؟

۶. فرض کنید $f \in H(U)$ که در آن U قرص یکهٔ باز است، f در U یک به‌یک باشد، $\Omega = f(U)$، و $f(z) = \Sigma c_n z^n$. ثابت کنید که مساحت Ω مساوی است با

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \,|\, c_n \,|^2 \cdot$$

راهنمایی. ژاکوبین f مساوی است با $|f'|^2$ ·

۷. (آ) اگر $f \in H(\Omega)$، به‌ازای $z \in \Omega$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$، و $-\infty < \alpha < \infty$، ثابت کنید

$$\Delta(|f|^{\alpha}) = \alpha^2 |f|^{\alpha-2} |f'|^2,$$

و این کار را با اثبات فرمول

$$\partial \bar{\partial} \big(\psi \circ (f \bar{f})\big) = (\psi \circ |f|^2) \cdot |f'|^2,$$

که در آن ψ بر $(0, \infty)$ دوبار مشتقپذیر بوده و

$$\varphi(t) = t\psi''(t) + \psi'(t),$$

انجام دهید.

(ب) فرض کنید $f \in H(\Omega)$ و Φ یک تابع مختلط با قلمرو $f(\Omega)$ باشد که دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دو پیوسته است. ثابت کنید

$$\Delta[\Phi \circ f] = [(\Delta \Phi) \circ f] \cdot |f'|^2,$$

و نشان دهید که اگر $\Phi(w) = \Phi(|w|)$، نتیجهٔ خاص (آ) را خواهیم داشت.

۸. فرض کنید Ω یک ناحیه بوده، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $f_n \in H(\Omega)$، u_n قسمت حقیقی f_n باشد، $\{u_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت همگرا باشد، و $\{f_n(z)\}$ به‌ازای دست کم یک $z \in \Omega$ همگرا باشد. ثابت کنید $\{f_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

۹. فرض کنید u یک تابع اندازه‌پذیر لبگ در ناحیهٔ Ω بوده و u به‌طور موضعی در L^1 باشد. این یعنی انتگرال $|u|$ روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω متناهی است. ثابت کنید هرگاه u در شکل زیر از خاصیت مقدار میانگین صدق کند: به‌ازای $\bar{D}(a;r) \subset \Omega$،

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a;r)} u(x,y)\,dx\,dy,$$

آنگاه u توافقی می‌باشد.

۱۰. فرض کنید $I = [a, b]$ بازهٔ بسته‌ای بر محور حقیقی بوده، φ یک تابع پیوسته‌بر I باشد، و

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - z} dt \quad (z \notin I) \cdot$$

نشان دهید که

$$\lim_{\epsilon \to 0} [f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon)] \;\; (\epsilon > 0)$$

به‌ازای هر x حقیقی وجود دارد، و آن را برحسب φ به‌دست آورید. اگر فقط فرض کنیم $\varphi \in L^1$، این فرض چه اثری بر نتیجه خواهد داشت؟ در این صورت در نقاط x که φ در آنها حدود راست و چپ دارد چه رخ می‌دهد؟

۱۱. فرض کنید $I = [a, b]$، Ω یک ناحیه بوده، $I \subset \Omega$، f در Ω پیوسته باشد، و $f \in H(\Omega - I)$. ثابت کنید درواقع $f \in H(\Omega)$. I را با مجموعه‌های دیگری که همین نتیجه به‌دست آید تعویض نمایید.

۱۲. (نامساویهای هارناک). فرض کنید Ω یک ناحیه بوده و K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω باشد و $z_\circ \in \Omega$. ثابت کنید اعداد مثبتی مانند α و β (تابع $z_\circ$، K، و Ω) وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر تابع توافقی مثبت u در Ω و هر $z \in K$،

$$\alpha u(z_\circ) \le u(z) \le \beta u(z_\circ) \cdot$$

اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای توافقی مثبت در Ω بوده و $u_n(z_\circ) \to \circ$، رفتار $\{u_n\}$ را در بقیهٔ Ω توصیف کنید. این کار را در صورتی که $u_n(z_\circ) \to \infty$ نیز انجام دهید. نشان دهید که فرض مثبت بودن $\{u_n\}$ در این نتایج لازم است.

۱۳. فرض کنید u یک تابع توافقی مثبت در U بوده و $u(\circ) = ۱$. $u\left(\frac{۱}{۲}\right)$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟ چقدر می‌تواند کوچک باشد؟ بهترین کرانهای ممکن را به‌دست آورید.

۱۴. به‌ازای چه جفتهایی از خطوط $L_۱$ و $L_۲$ توابعی حقیقی وجود دارند که در تمام صفحه توافقی بوده و، بدون متحد ۰ بودن، در تمام نقاط $L_۱ \cup L_۲$ صفر می‌باشند؟

۱۵. فرض کنید u یک تابع توافقی مثبت در U بوده و به‌ازای هر $e^{i\theta} \neq ۱$، وقتی $r \to ۱$، $u(re^{i\theta}) = \circ$. نشان دهید که ثابتی مانند c وجود دارد به‌طوری که

$$u(re^{i\theta}) = c P_r(\theta) \cdot$$

۱۶. ذیلاً مثالی از یک تابع توافقی در U می‌آوریم که متحد ۰ نبوده ولی **تمام** حدود شعاعی‌اش ۰ اند:

$$u(z) = \mathrm{Im}\left[\left(\frac{۱+z}{۱-z}\right)^۲\right] \cdot$$

ثابت کنید این u انتگرال پواسون هیچ اندازه‌ای بر T نیست و تفاضل دو تابع توافقی مثبت در U نمی‌باشد.

۱۷. فرض کنید Φ مجموعهٔ تمام تابعهای توافقی مثبت u در U باشد به‌طوری که $u(\circ) = ۱$. نشان دهید که Φ یک مجموعهٔ محدب بوده و نقاط اکستریم Φ را پیدا کنید. (نقطهٔ x در مجموعهٔ محدب Φ را یک **نقطهٔ اکستریم** Φ گوییم اگر x در هیچ بازهٔ بازی که هر دو نقطهٔ انتهایی‌اش در Φ اند و مخالف x می‌باشند قرار نداشته باشد.) **راهنمایی.** اگر C مجموعهٔ محدبی باشد که

اعضایش اندازه‌های بورل مثبت بر T با تغییر کامل یک‌اند، نشان دهید که نقاط اکستریم C درست $\mu \in C$هایی‌اند که محافظشان فقط از یک نقطهٔ T تشکیل شده است.

۱۸. فرض کنید X^* فضای دوگان فضای باناخ X باشد. گوییم دنبالهٔ $\{\Lambda_n\}$ در X^* **به‌طور ضعیف به** $\Lambda \in X^*$ **همگرا**ست اگر به‌ازای هر $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $\Lambda_n x \to \Lambda x$. توجه کنید که هر وقت با نرم X^*داشته باشیم $\Lambda_n \to \Lambda$، $\Lambda_n \to \Lambda$ به‌طور ضعیف. (ر.ک. تمرین ۸ در فصل ۵.) عکس مطلب لزوماً برقرار نیست. مثلاً تابعیهای $f \to \hat{f}(n)$ بر $L^2(T)$ (طبق نامساوی بسل) به‌طور ضعیف به ۰ میل می‌کنند ولی هر یک از آنها دارای نرم ۱ می‌باشد.
ثابت کنید هرگاه $\{\Lambda_n\}$ به‌طور ضعیف همگرا باشد، $\{\|\Lambda_n\|\}$ باید کراندار باشد.

۱۹. (آ) نشان دهید که اگر $\delta = 1 - r$، $\delta P_r(\delta) > 1$.
(ب) اگر $\mu \geq 0$، $u = P[d\mu]$، و $I_\delta \subset T$ قوسی به‌مرکز ۱ و طول 2δ باشد، نشان دهید که

$$\mu(I_\delta) \leq \delta u(1-\delta)$$

و لذا

$$(M\mu)(1) \leq \pi (M_{\text{rad}} u)(1) \cdot$$

(پ) اگر، علاوه بر این، $\mu \perp m$، نشان دهید که

$$u(re^{i\theta}) \to \infty \quad \text{ت. هـ.} \ [\mu] \cdot$$

راهنمایی. از قضیهٔ ۱۵.۷ استفاده کنید.

۲۰. فرض کنید $E \subset T$ و $m(E) = 0$. ثابت کنید تابعی مانند $f \in H^\infty$ هست که $f(0) = 1$ و در هر $e^{i\theta} \in E$،

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = 0 \cdot$$

پیشنهاد. یک تابع نیمه پیوستهٔ پایینی مانند $\psi \in L^1(T)$ بیابید که $\psi > 0$، و در هر نقطهٔ E، $\psi = +\infty$. یک تابع هلوریخت مانند g وجود دارد که قسمت حقیقی‌اش $P[\psi]$ است. قرار دهید $f = 1/g$.

۲۱. $f \in H(U)$ و $g \in H(U)$ را با $f(z) = \exp\{(1+z)/(1-z)\}$ و $g(z) = (1-z)\exp\{-f(z)\}$ تعریف و ثابت کنید

$$g^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} g(re^{i\theta})$$

در هر $e^{i\theta} \in T$ وجود دارد، $g^* \in C(T)$، ولی g در H^∞ نیست.

پیشنهاد. s را ثابت گرفته، قرار دهید

$$z_t = \frac{t+is-1}{t+is+1} \quad (0 < t < \infty) \cdot$$

به‌ازای بعضی از مقادیر s، وقتی $t \to \infty$، $|g(z_t)| \to \infty$.

۲۲. فرض کنید u در U توافقی بوده و $\{u_r : 0 \le r < 1\}$ یک زیرمجموعهٔ به‌طور یکنواخت انتگرالپذیر از $L^1(T)$ باشد. (ر.ک. تمرین ۱۰ در فصل ۶.) با تعدیل برهان قضیهٔ ۱۱.۳۰ نشان دهید که به‌ازای $f \in L^1(T)$، $u = P(f)$.

۲۳. قرار دهید $\theta_n = 2^{-n}$ و به‌ازای $z \in U$ تعریف کنید

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}[P(z, e^{i\theta_n}) - P(z, e^{-i\theta_n})\}$$

و نشان دهید که u انتگرال پواسون یک اندازه بر T است، اگر $-1 < x < 1$ داریم $u(x) = 0$، ولی

$$u(1 - \epsilon + i\epsilon)$$

با کاهش ϵ به 0 بی‌کران می‌شود (لذا u در ۱ دارای یک حد شعاعی است ولی هیچ حد غیر مماسی ندارد.) **راهنمایی.** هرگاه $\epsilon = \sin\theta$ کوچک بوده و $z = 1 - \epsilon + i\epsilon$، آنگاه

$$P(z, e^{i\theta}) - P(z, e^{-i\theta}) > 1/\epsilon \cdot$$

۲۴. فرض کنید $D_n(t)$، همانند بخش ۱۱.۵، هستهٔ دیریکله باشد، و هستهٔ فجر را با

$$K_n = \frac{1}{N+1}(D_0 + D_1 + \cdots + D_N)$$

تعریف کرده و قرار دهید $L_N(t) = \min(N, \pi^2/Nt^2)$ · ثابت کنید

$$K_{N-1}(t) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - \cos Nt}{1 - \cos t} \le L_N(t)$$

و $\int_T L_N d\sigma \le 2$ · با استفاده از این ثابت کنید میانگینهای حسابی

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_N}{N+1}$$

مجموعهای جزئی s_n سری فوریهٔ تابع $f \in L^1(T)$ در هر نقطهٔ لبگ f همگرا به $f(e^{i\theta})$اند. (نشان دهید که $\sup|\sigma_N|$ تحت تسلط Mf است. سپس مانند برهان قضیهٔ ۱۱.۲۳ جلو بروید.)

۲۵. اگر $1 \le p \le \infty$ و $f \in L^p(R^1)$، ثابت کنید $(f * h_\lambda)(x)$ یک تابع توافقی از $x + i\lambda$ در نیمصفحهٔ بالایی است. (h_λ در بخش ۹.۷ تعریف شده است؛ این هستهٔ پواسون برای نیمصفحه می‌باشد.)

فصل دوازده
اصل مدول ماکزیمم

آشنایی

۱.۱۲. قضیهٔ مدول ماکزیمم (۲۴.۱۰) می‌گوید که ثابتها تنها توابع همریختی در ناحیهٔ Ω اند که قدرمطلقهایشان در هر نقطهٔ Ω ماکزیمم موضعی دارند.

این حکم به‌قرار زیر است: ***هرگاه K بست ناحیهٔ کراندار Ω بوده، f بر K پیوسته و در Ω هلوریخت باشد، آنگاه به‌ازای هر $z \in \Omega$،***

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial\Omega} \cdot \tag{۱}$$

هرگاه تساوی در یک نقطهٔ $z \in \Omega$ برقرار باشد، آنگاه f ثابت می‌باشد.

[طرف راست (۱) سوپرمم $|f|$ بر مرز $\partial\Omega$ از Ω می‌باشد.]

زیرا هرگاه در $z \in \Omega$ی داشته باشیم $\|f\|_{\partial\Omega} \leq |f(z)|$، آنگاه ماکزیمم $|f|$ بر K (که در نقطه‌ای از K حاصل می‌شود زیرا K فشرده است) درواقع در نقطه‌ای از Ω به‌دست می‌آید؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ۲۴.۱۰، f ثابت می‌باشد.

تساوی $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$، که بخشی از قضیهٔ ۳۲.۱۱ است، ایجاب می‌کند که

$$|f(z)| \leq \|f^*\|_\infty \quad (f \in H^\infty(U) \text{ و } z \in U) \cdot \tag{۲}$$

این (به‌بیان نادقیق) می‌گوید که $|f(z)|$ از سوپرمم مقادیر مرزی f بزرگتر نیست، که حکمی شبیه (۱) می‌باشد. ولی این بار کرانداری بر U کافی است؛ ما نیازی به‌پیوستگی بر $\overline{U}$ نداریم.

این فصل شامل تعمیمهای دیگری از قضیهٔ مدول ماکزیمم و نیز چند کاربرد جالب آن است و در پایان نیز قضیه‌ای می‌آید نشانگر آنکه خاصیت ماکزیمم «تقریباً» ردهٔ توابع هلوریخت را توصیف می‌کند.

لم شوارتز

این نامی است که معمولاً به‌قضیهٔ زیر داده می‌شود. ما از نمادهای بخش ۳۱.۱۱ استفاده می‌کنیم.

۲.۱۲ قضیه. ***فرض کنیم*** $f\in H^\infty$، $\|f\|_\infty \leq 1$، و $f(0)=0$. ***در این صورت***

$$|f(z)| \leq |z| \quad (z\in U), \tag{1}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2}$$

هرگاه در (۱) به‌ازای یک $z\in U-\{0\}$ ***تساوی برقرار باشد یا در (۲) تساوی داشته باشیم، آنگاه*** $f(z)=\lambda z$ ***که در آن*** λ ***ثابت است،*** $|\lambda|=1$.

به‌زبان هندسی، فرض این است که f یک نگاشت هلوریخت از U به‌توی U است که مبدأ را ثابت می‌گذارد. بخشی از نتیجه این است که f یک دوران است یا f هر نقطهٔ $z\in U-\{0\}$ را از آنچه بوده به‌مبدأ نزدیکتر می‌سازد.

برهان. چون $f(0)=0$، $f(z)/z$ در $z=0$ انفراد قابل رفع دارد. لذا $g\in H(U)$ ای هست به‌طوری که $f(z)=zg(z)$. هرگاه $z\in U$ و $|z|<r<1$، آنگاه

$$|g(z)| \leq \max_\theta \frac{|f(re^{i\theta})|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

با فرض $r\to 1$ معلوم می‌شود که درهر $z\in U$ داریم $|g(z)|\leq 1$. این رابطهٔ (۱) را به‌ما می‌دهد. چون $f'(0)=g(0)$، رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود. هرگاه به‌ازای $z\in U$ ی، $|g(z)|=1$، آنگاه، بنابر کاربرد دیگری از قضیهٔ مدول ماکزیمم، g ثابت می‌باشد.

بسیاری از صورتهای لم شوارتز را می‌توان به‌کمک نگاشتهای زیر از U به‌روی U به‌دست آورد:

۳.۱۲ تعریف. ***به‌ازای هر*** $\alpha\in U$ ***تعریف می‌کنیم***

$$\varphi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

۴.۱۲ قضیه. $\alpha\in U$ ***را ثابت می‌گیریم. در این صورت*** φ_α ***یک نگاشت یک به‌یک است که*** T ***را به‌روی*** T، U ***را به‌روی*** U، ***و*** α ***را به ۰ می‌نگارد. معکوس*** φ_α ***عبارت است از*** $\varphi_{-\alpha}$ ***و داریم***

(۱) $$\varphi'_\alpha(0)=1-|\alpha|^2 \quad \text{و} \quad \varphi'_\alpha(\alpha)=\frac{1}{1-|\alpha|^2}\cdot$$

برهان. φ_α در تمام صفحه جز در قطب $1/\overline{\alpha}$ که خارج $\overline{U}$ است هلوریخت است. جانشانی مستقیم نشان می‌دهد که

(۲) $$\varphi_{-\alpha}\left(\varphi_\alpha(z)\right)=z\cdot$$

لذا φ_α یک به‌یک است و $\varphi_{-\alpha}$ معکوس آن می‌باشد. چون به‌ازای t ی حقیقی

(۳) $$\left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\overline{\alpha}\,e^{it}}\right|=\frac{|e^{it}-\alpha|}{|e^{-it}-\overline{\alpha}|}=1$$

(z و $\overline{z}$ قدرمطلق یکسانی دارند)، φ_α مجموعهٔ T را به‌توی T می‌نگارد. همین امر برای $\varphi_{-\alpha}$ درست‌است. لذا $\varphi_\alpha(T)=T$. حال از قضیهٔ مدول ماکزیمم نتیجه می‌شود که $\varphi_\alpha(U)\subset U$، و با توجه به $\varphi_{-\alpha}$ معلوم می‌شود که درواقع $\varphi_\alpha(U)=U$.

۵.۱۲ یک مسئلهٔ اکسترمال. فرض کنیم α و β دو عدد مختلط بوده، $|\alpha|<1$، و $|\beta|<1$. اگر f تحت شرایط $f\in H^\infty$، $\|f\|_\infty\le 1$، و $f(\alpha)=\beta$ باشد، $|f'(\alpha)|$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟

برای حل این مسئله قرار می‌دهیم

(۱) $$g=\varphi_\beta\circ f\circ\varphi_{-\alpha}\cdot$$

چون $\varphi_{-\alpha}$ و φ_β مجموعهٔ U را به‌روی U می‌نگارند، می‌بینیم که $g\in H^\infty$ و $\|g\|_\infty\le 1$. همچنین $g(0)=0$. رفتن از f به g مسئله را به‌لم شوارتز تحویل می‌کند که نتیجه می‌دهد که $|g'(0)|\le 1$. بنابر رابطهٔ (۱)، قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

(۲) $$g'(0)=\varphi'_\beta(\beta)f'(\alpha)\varphi'_{-\alpha}(0)\cdot$$

اگر از معادلات ۴.۱۲ (۱) استفاده کنیم، نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

(۳) $$|f'(\alpha)|\le\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}\cdot$$

این مسئلهٔ ما را حل می‌کند چراکه تساوی در (۳) می‌تواند رخ دهد. این امر رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $|g'(0)|=1$، که در این صورت g یک دوران است (قضیهٔ ۲.۱۲)؛ درنتیجه، به‌ازای ثابتی مانند λ با خاصیت $|\lambda|=1$،

(۴) $$f(z)=\varphi_{-\beta}\left(\lambda\,\varphi_\alpha(z)\right)\quad(z\in U)\cdot$$

لازم است بر یک ویژگی جالب جواب تأکید کنیم. ما هیچ شرط همواری (مثلاً پیوستگی بر

$\overline{U}$) را بر رفتار f در مجاورت مرز U قایل نشده‌ایم. با این حال معلوم می‌شود که توابع f ی که $|f'(\alpha)|$ را تحت قیود ذکر شده ماکزیمم می‌سازند درواقع توابع گویایند. همچنین توجه می‌کنیم که این توابع اکسترمال U را به‌روی (نه فقط به‌توی) U می‌نگارند و این توابع یک به‌یک می‌باشند. این ملاحظات را می‌توان انگیزهٔ برهان قضیهٔ نگاشت ریمان در فصل ۱۴ دانست.

ما فعلاً نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از این مسئلهٔ اکسترمال در توصیف نگاشتهای هلوریخت یک به‌یک از U به‌روی U استفاده کرد.

۶.۱۲ قضیه. ***فرض کنیم*** $f \in H(U)$، f ***یک‌به‌یک بوده،*** $f(U) = U$، $\alpha \in U$، ***و*** $f(\alpha) = 0$. ***در این صورت ثابتی مانند*** λ ***با خاصیت*** $|\lambda| = 1$ ***هست به‌طوری‌که***

$$f(z) = \lambda \varphi_\alpha(z) \quad (z \in U) \cdot \tag{۱}$$

به‌عبارت دیگر، f از ترکیب نگاشت φ_α با یک دوران به‌دست می‌آید.

برهان. فرض کنیم g معکوس f باشد که با $z = g\big(f(z)\big)$، $z \in U$، تعریف می‌شود. چون f یک به‌یک است، f' در U دارای صفر نیست؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۳۳.۱۰، $g \in H(U)$. بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$g'(0) f'(\alpha) = 1 \cdot \tag{۲}$$

اگر حل ۵.۱۲ را در مورد f و g اعمال کنیم، نامساویهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$|f'(\alpha)| \le \frac{1}{1-|\alpha|^2} \quad \text{و} \quad |g'(0)| \le 1 - |\alpha|^2 \cdot \tag{۳}$$

بنابر (۲)، باید در (۳) تساوی برقرار باشد. همانطور که در مسئلهٔ قبل (به‌ازای $\beta = 0$) دیدیم، این f را در (۱) صادق خواهد ساخت.

روش فراگمن ـ لیندلف (*Phragmen - Lindelöf*)

۷.۱۲. در بخش ۱.۱۲ دیدیم که اگر f بربست ناحیهٔ کراندار Ω پیوسته بوده و $f \in H(\Omega)$، قضیهٔ مدول ماکزیمم ایجاب می‌کند که

$$\| f \|_{\Omega} = \| f \|_{\partial \Omega} \cdot \tag{۱}$$

این امر برای نواحی بی‌کران برقرار نیست.

برای مشاهدهٔ یک مثال، قرار می‌دهیم

$$\Omega = \left\{ z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\} \cdot \tag{۲}$$

Ω یک نوار باز است که به‌خطوط موازی $y = \pm \frac{\pi}{2}$ کراندار می‌باشد. مرزش $\partial \Omega$ عبارت است از

اجتماع این دو خط. قرار می‌دهیم

$$f(z) = \exp\big(\exp(z)\big) \cdot \tag{۳}$$

به‌ازای x حقیقی داریم

$$f\Big(x \pm \frac{\pi i}{۲}\Big) = \exp(\pm ie^x) \tag{۴}$$

زیرا $\exp(\pi i/۲) = i$ ؛ درنتیجه به‌ازای $z \in \partial\Omega$ ، $|f(z)| = ۱$. ولی وقتی در امتداد محور حقیقی مثبت که در Ω قرار دارد $x \to \infty$ ، $f(z) \to \infty$ بسیار سریع.

«بسیار» واژهٔ کلیدی در جملهٔ پیشین است. با روشی از فراگمن و لیندلف می‌توان قضایایی از نوع زیر را ثابت کرد: هرگاه $f \in H(\Omega)$ و $|f| < g$ که در آن وقتی در Ω ، $z \to \infty$ ، $g(z) \to \infty$ «به‌کندی» (معنی «به‌کندی» بستگی به Ω دارد)، آنگاه f درواقع در Ω کراندار است، و این، طبق قضیهٔ مدول ماکزیمم، معمولاً نتایج دیگری راجع به f را به‌دست می‌دهد.

به‌جای توصیف این روش به‌وسیلهٔ یک قضیه که حالات زیادی را دربرگیرد، طرز کار آن را در دو حالت نشان می‌دهیم. در هر دو حالت Ω یک نوار است. در حالت اول f کراندار فرض می‌شود، و قضیهٔ کران را اصلاح خواهد کرد. در حالت دوم یک شرط رشد بر f اعمال می‌شود که فقط تابع (۳) را مستثنی می‌سازد. به‌خاطر کاربردهای آتی، در قضیهٔ ۸.۱۲ نوار Ω قائم گرفته شده است.

با این حال ابتدا مثال دیگری ذکر می‌کنیم که این رنگ و بوی کلی را نیز داشته باشد: ***فرض کنیم f یک تابع تمام باشد و به‌ازای هر z،***

$$|f(z)| < ۱ + |z|^{۱/۲} \cdot \tag{۵}$$

در این صورت f ثابت می‌باشد.

این مطلب فوراً از تخمینهای کشی ۲۶.۱۰ نتیجه می‌شود چراکه این تخمینها نشان می‌دهند که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ ، $f^{(n)}(۰) = ۰$.

۸.۱۲ قضیه. *فرض کنیم*

$$\Omega = \{x+iy : a < x < b\} \quad \text{و} \quad \bar{\Omega} = \{x+iy : a \le x \le b\} \text{،} \tag{۱}$$

f بر $\bar{\Omega}$ پیوسته‌باشد، $f \in H(\Omega)$ ، وبه‌ازای‌هر $z \in \Omega$ و ثابتی‌چون $B < \infty$ ، $|f(z)| < B$. هرگاه

$$M(x) = \sup\{\, |f(x+iy)| : -\infty < y < \infty\} \; (a \le x \le b), \tag{۲}$$

آنگاه درواقع خواهیم داشت

$$M(x)^{b-a} \le M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \; (a < x < b) \cdot \tag{۳}$$

تذکر. نتیجهٔ (۳) ایجاب می‌کند که نامساوی $|f| < \infty$ را می‌توان با

$|f| \leq \max(M(a), M(b))$ تعویض کرد؛ در نتیجه $|f|$ در Ω از سوپرمم $|f|$ بر مرز Ω بزرگتر نیست.

اگر قضیه را بر نوارهای کراندار به‌خطوط $x = \alpha$ و $x = \beta$ که در آنها $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ اعمال کنیم، نتیجه به‌طریق زیر قابل بیان است:

نتیجه. ***تحت مفروضات قضیهٔ فوق، $\log M$ یک تابع محدب بر (a, b) است.***

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $M(a) = M(b) = ۱$. در این حالت باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $z \in \Omega$، $|f| \leq ۱$.

به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ تابع کمکی

$$h_\epsilon(z) = \frac{۱}{۱+\epsilon(z-a)} \quad (z \in \bar{\Omega}) \tag{۴}$$

را تعریف می‌کنیم. چون در $\bar{\Omega}$ داریم $\operatorname{Re}\{۱+\epsilon(z-a)\} = ۱+\epsilon(x-a) \geq ۱$، در $\bar{\Omega}$ خواهیم داشت $|h_\epsilon| \leq ۱$؛ درنتیجه

$$|f(z)\, h_\epsilon(z)| \leq ۱ \quad (z \in \partial\Omega) \cdot \tag{۵}$$

همچنین $|۱+\epsilon(z-a)| \geq \epsilon\,|y|$. لذا

$$|f(z)\, h_\epsilon(z)| \leq \frac{B}{\epsilon\,|y|} \quad (z = x+iy \in \bar{\Omega}) \cdot \tag{۶}$$

فرض کنیم R مستطیلی باشد که از $\bar{\Omega}$ با خطوط $y = \pm B/\epsilon$ بریده شده است. بنابر روابط (۵) و (۶)، $|fh_\epsilon| \leq ۱$ بر ∂R؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ مدول ماکزیمم، $|fh_\epsilon| \leq ۱$ بر R. ولی رابطهٔ (۶) نشان می‌دهد که بر بقیهٔ $\bar{\Omega}$، $|fh_\epsilon| \leq ۱$. لذا، به‌ازای هر $z \in \Omega$ و هر $\epsilon > ۰$، $|f(z)\, h_\epsilon(z)| \leq ۱$. اگر $z \in \bar{\Omega}$ را ثابت گرفته و سپس فرض کنیم $\epsilon \to ۰$، نتیجهٔ مطلوب $|f(z)| \leq ۱$ به‌دست می‌آید.

اکنون به‌حالت کلی می‌پردازیم. قرار می‌دهیم

$$g(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)}\, M(b)^{(z-a)/(b-a)}, \tag{۷}$$

که در آن به‌ازای $M > ۰$ و w ی مختلط، M^w با

$$M^w = \exp(w \log M) \tag{۸}$$

تعریف می‌شود، و $\log M$ حقیقی می‌باشد. در این صورت g تمام است، g دارای صفر نیست، $۱/g$ در $\bar{\Omega}$ کراندار است،

$$|g(a+iy)| = M(a) \quad \text{و} \quad |g(b+iy)| = M(b)\,؛ \tag{۹}$$

و درنتیجه f/g در مفروضات قبلی ما صدق می‌کند. لذا در Ω داریم $|f/g| \leq ۱$ و این رابطهٔ (۳)

را به‌دست می‌دهد. (ر.ک. تمرین ۷.)

۹.۱۲ قضیه. *فرض کنیم*

$$\Omega\left\{x+iy : |y| < \frac{\pi}{2}\right\} \text{ و } \bar{\Omega} = \left\{x+iy : |y| \leq \frac{\pi}{2}\right\} \cdot \qquad (1)$$

همچنین f بر $\bar{\Omega}$ پیوسته بوده، $f \in H(\Omega)$، ثابتهایی مانند $\alpha < 1$ و $A < \infty$ موجود باشند به‌طوری که

$$|f(z)| < \exp\{A \exp(\alpha |x|)\} \quad (z = x+iy \in \Omega) \qquad (2)$$

و

$$\left| f\left(x \pm \frac{\pi i}{2}\right) \right| \leq 1 \quad (-\infty < x < \infty) \cdot \qquad (3)$$

در این صورت، به‌ازای هر $z \in \Omega$، $|f(z)| \leq 1$.

تابع $\exp(\exp z)$ نشان می‌دهد که نتیجهٔ فوق به‌ازای $\alpha = 1$ برقرار نیست.

برهان. $\beta > 0$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\alpha < \beta < 1$. به‌ازای $\epsilon > 0$ تعریف می‌کنیم

$$h_\epsilon(z) = \exp\{-\epsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z})\} \cdot \qquad (4)$$

به‌ازای $z \in \bar{\Omega}$،

$$\operatorname{Re}[e^{\beta z} + e^{-\beta z}] = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cos \beta y \geq \delta (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \qquad (5)$$

که در آن $\delta = \cos(\beta\pi/2) > 0$ زیرا $|\beta| < 1$. لذا

$$|h_\epsilon(z)| \leq \exp\{-\epsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\} < 1 \quad (z \in \bar{\Omega}) \cdot \qquad (6)$$

پس بر $\partial\Omega$ داریم $|fh_\epsilon| \leq 1$ و

$$|f(z) h_\epsilon(z)| \leq \exp\{Ae^{\alpha|x|} - \epsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\} \; (z \in \bar{\Omega}) \cdot \qquad (7)$$

$\epsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. چون $\epsilon\delta > 0$ و $\beta > \alpha$، نمای آمده در (۷) به‌ازای $x \to \pm\infty$ به $-\infty$ میل می‌کند. لذا x_0ی هست به‌طوری‌که سمت راست (۷) به‌ازای هر $x > x_0$ از ۱ کمتر است. چون بر مرز مستطیل به‌رئوس $\pm x_0 \pm (\pi i/2)$ داریم $|fh_\epsilon| \leq 1$، قضیهٔ مدول ماکزیمم نشان می‌دهد که درواقع بر این مستطیل $|fh_\epsilon| \leq 1$. لذا در هر نقطهٔ Ω به‌ازای هر $\epsilon > 0$ داریم $|fh_\epsilon| \leq 1$. وقتی $\epsilon \to 0$، به‌ازای هر z، $h_\epsilon(z) \to 1$؛ درنتیجه به‌ازای هر $z \in \Omega$، $|f(z)| \leq 1$.

حال کاربردی از این روش را که کمی متفاوت است ذکر می‌کنیم. این کاربرد در برهان قضیهٔ ۱۸.۱۴ به‌کار خواهد رفت.

۱۰.۱۲ قضیهٔ لیندلف. *فرض کنیم Γ یک منحنی با بازهٔ پارامتری $[\circ, ۱]$ باشد به‌طوری که اگر $t < ۱$، $|\Gamma(t)| < ۱$ و $\Gamma(۱) = ۱$. هرگاه $g \in H^\infty$ و*

$$\lim_{t \to ۱} g\big(\Gamma(t)\big) = L , \tag{۱}$$

آنگاه g دارای حد شعاعی L در ۱ است.

(از تمرین ۱۴ در فصل ۱۴ نتیجه می‌شود که g درواقع دارای حد غیرمماسی L در ۱ است.)

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید فرض می‌کنیم $|g| < ۱$ و $L = \circ$. همچنین $\epsilon > \circ$ داده شده باشد. پس $t_\circ < ۱$ای هست به‌طوری که با فرض $r_\circ = \operatorname{Re}\Gamma(t_\circ)$، به‌ازای $t_\circ < t < ۱$ داریم

$$|g\big(\Gamma(t)\big)| < \epsilon \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}\Gamma(t) > r_\circ > \frac{۱}{۲} \cdot \tag{۲}$$

r را که $r_\circ < r < ۱$ اختیار و h را در $\Omega = D(\circ; ۱) \cap D(۲r; ۱)$ با

$$h(z) = g(z)\,\overline{g(\bar{z})}\;g(۲r-z)\,\overline{g(۲r-\bar{z})} \tag{۳}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $h \in H(\Omega)$ و $|h| < ۱$. حکم می‌کنیم که

$$|h(r)| < \epsilon \cdot \tag{۴}$$

چون $h(r) = |g(r)|^۴$، قضیه از نامساوی (۴) نتیجه می‌شود.

برای اثبات (۴) قرار می‌دهیم $E_۱ = \Gamma([t_۱, ۱])$ که در آن $t_۱$ بزرگترین t ای است که $\operatorname{Re}\Gamma(t) = r$. فرض کنیم $E_۲$ منعکس $E_۱$ نسبت به‌محور حقیقی بوده و E اجتماع $E_۱ \cup E_۲$ و منعکسش نسبت به‌خط $x = r$ باشد. در این صورت روابط (۲) و (۳) ایجاب می‌کنند که

$$\text{اگر } z \in \Omega \cap E ، \quad |h(z)| < \epsilon \cdot \tag{۵}$$

$c > \circ$ را اختیار کرده و به‌ازای $z \in \Omega$ تعریف می‌کنیم

$$h_c(z) = h(z)(۱-z)^c(۲r-۱-z)^c \tag{۶}$$

و قرار می‌دهیم $h_c(۱) = h_c(۲r-۱) = \circ$. هرگاه K اجتماع E و مؤلفه‌های کراندار متمم E باشد، آنگاه K فشرده است، h_c بر K پیوسته است، درون K هلوریخت است، و رابطهٔ (۵) ایجاب می‌کند که بر مرز K داریم $|h_c| < \epsilon$. چون ساختار E نشان می‌دهد که $r \in K$، قضیهٔ مدول ماکزیمم ایجاب می‌کند که $|h_c(r)| < \epsilon$.

با فرض $c \to \circ$ رابطهٔ (۴) به‌دست می‌آید.

قضیهٔ درونیابی

۱.۱۲. گاهی می‌توان قضیهٔ تحدب ۸.۱۲ را برای اثبات کرانداری بعضی از تبدیلات خطی نسبت به‌بعضی از نرمهای L^p به‌کار برد. به‌جای پرداختن به‌این امر با کلیت کامل، به‌یک حالت خاص از این نوع نگاه می‌کنیم.

فرض کنیم X یک فضای اندازه با اندازهٔ مثبت μ باشد، و $\{\psi_n\}$ $(n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$ یک مجموعهٔ متعامدیکه از توابع در $L^۲(\mu)$ باشد. یادآور می‌شویم که این یعنی

$$\int_X \psi_n \bar{\psi}_m \, d\mu = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } m=n \text{،} \\ ۰ & \text{اگر } m \neq n \text{،} \end{cases} \tag{۱}$$

همچنین فرض می‌کنیم $\{\psi_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار در $L^\infty(\mu)$ باشد: عددی مانند $M < \infty$ موجود باشد به‌طوری که

$$|\psi_n(x)| \le M \, (x \in X \text{ و } n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \tag{۲}$$

در این صورت، به‌ازای هر $f \in L^p(\mu)$ که $۱ \le p \le ۲$، انتگرالهای

$$\hat{f}(n) = \int_X f \bar{\psi}_n \, d\mu \; (n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \tag{۳}$$

وجود دارند و تابع $\hat{f}$ را بر مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت تعریف می‌کنند.

حال دو قضیهٔ بسیار آسان وجود دارد: به‌ازای $f \in L^۱(\mu)$ رابطهٔ (۲) نتیجه می‌دهد که

$$\|\hat{f}\|_\infty \le M \|f\|_۱, \tag{۴}$$

و به‌ازای $f \in L^۲(\mu)$ نامساوی بسل نتیجه می‌دهد که

$$\|\hat{f}\|_۲ \le \|f\|_۲ \tag{۵}$$

که در آن نرمها طبق معمول تعریف می‌شوند:

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{۱/p} \text{ و } \|\hat{f}\|_q = \left[\sum |\hat{f}(n)|^q \right]^{۱/q} \text{،} \tag{۶}$$

و $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_n |\hat{f}(n)|$.

چون $(۱, \infty)$ و $(۲, ۲)$ یک جفت نمای مزدوجند، ممکن است حدس بزنیم که هروقت $f \in L^p(\mu)$ و $۱ < p < ۲$ و $q = p/(p-۱)$، $\|\hat{f}\|_q$ متناهی است. این درواقع درست است و می‌توان آن را با «درونیابی» بین حالات بدیهی قبلی $p = ۱$ و $p = ۲$ ثابت کرد.

۱۲.۱۲ قضیهٔ هاسدورف ـ یانگ. ***تحت مفروضات فوق، نامساوی***

$$\| \hat{f} \|_q \le M^{(۲-p)/p} \, \| f \|_p \tag{۱}$$

به‌ازای $۱ \le p \le ۲$ **و** $f \in L^p(\mu)$ **برقرار است.**

برهان. ابتدا شکل تحویل‌یافتهٔ قضیه را ثابت می‌کنیم.

p را که $۱ < p < ۲$ ثابت گرفته و فرض می‌کنیم f یک تابع مختلط **ساده** باشد به‌طوری که $\|f\|_p = ۱$ و $b_۱$، $\cdots$، b_N اعداد مختلطی باشند به‌طوری که $\Sigma \, |b_n|^p = ۱$. هدف ما نامساوی زیر است:

$$\left| \sum_{n=۱}^{N} b_n \hat{f}(n) \right| \le M^{(۲-p)/p} \,. \tag{۲}$$

قرار می‌دهیم $F = |f|^p$ و $B_n = |b_n|^p$. در این صورت تابعی مانند φ و اعداد مختلطی چون $\beta_۱$، $\cdots$، β_N وجود دارند به‌طوری‌که

$$f = F^{۱/p} \varphi \,،\quad |\varphi| = ۱ \,،\quad \int_X F \, d\mu = ۱ \,، \tag{۳}$$

و

$$b_n = B_n^{۱/p} \beta_n \,،\quad |\beta_n| = ۱ \,،\quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{N} B_n = ۱ \,. \tag{۴}$$

اگر از این روابط و تعریف $\hat{f}(n)$ مذکور در بخش ۱۱.۱۲ استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=۱}^{N} b_n \hat{f}(n) = \sum_{n=۱}^{N} B_n^{۱/p} \beta_n \int_X F^{۱/p} \varphi \, \overline{\psi_n} \, d\mu \,. \tag{۵}$$

حال در رابطهٔ (۵) $۱/p$ را با z عوض کرده و به‌ازای هر عدد مختلط z تعریف می‌کنیم

$$\Phi(z) = \sum_{n=۱}^{N} B_n^{z} \beta_n \int_X F^{z} \varphi \, \overline{\psi_n} \, d\mu \,. \tag{۶}$$

به‌یاد آورید که اگر $A > ۰$، $A^z = \exp(z \log A)$؛ و اگر $A = ۰$، می‌پذیریم که $A^z = ۰$. چون F ساده است، $F \ge ۰$، و نیز $B_n \ge ۰$، معلوم می‌شود که Φ یک ترکیب خطی متناهی از این نماییهاست؛ درنتیجه Φ یک تابع تمام است که بر

$$\{ z : a \le \operatorname{Re}(z) \le b \}$$

به‌ازای هر a و b متناهی کراندار است. ما $a = \frac{۱}{۲}$ و $b = ۱$ را اختیار کرده، Φ را بر لبه‌های این نوار تخمین می‌زنیم و سپس، با اعمال قضیهٔ ۸.۱۲، $\Phi(۱/p)$ را تخمین می‌زنیم.

به‌ازای $-\infty < y < \infty$ تعریف می‌کنیم

$$c_n(y) = \int_X F^{1/2} F^{iy} \varphi \, \bar{\psi}_n \, d\mu \, . \qquad (7)$$

از نامساوی بسل داریم

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n(y)|^2 \le \int_X |F^{1/2} F^{iy} \varphi|^2 d\mu = \int_X |F| \, d\mu = 1, \qquad (8)$$

و سپس نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$\left| \Phi\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} B_n^{1/2} B_n^{iy} \beta_n c_n \right| \le \left\{ \sum_{n=1}^{N} B_n \cdot \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \right\}^{1/2} \le 1 \, . \qquad (9)$$

تخمین

$$|\Phi(1+iy)| \le M \quad (-\infty < y < \infty) \qquad (10)$$

بداهتاً از (۳)، (۴)، و (۶) نتیجه می‌شود زیرا $\|\psi_n\|_\infty \le M$.

حال از روابط (۹)، (۱۰)، و قضیهٔ ۸.۱۲ نتیجه می‌گیریم که

$$|\Phi(x+iy)| \le M^{2x-1} \quad \left(-\infty < y < \infty \text{ و } \frac{1}{2} \le x \le 1\right) \, . \qquad (11)$$

این رابطه به‌ازای $x = 1/p$ و $y = 0$ نامساوی مطلوب (۲) را به‌دست می‌دهد.

حال برهان به‌آسانی تکمیل می‌شود. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^q \right\}^{1/q} = \sup \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \hat{f}(n) \right| , \qquad (12)$$

سوپرمم روی تمام $\{b_1, \cdots, b_N\}$ که $\Sigma |b_n|^p = 1$ گرفته می‌شود زیرا نرم L^q یک تابع بر یک فضای اندازه مساوی نرمش به‌عنوان یک تابعی خطی بر L^p است. لذا رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که به‌ازای هر تابع مختلط سادهٔ $f \in L^p(\mu)$،

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^q \right\}^{1/q} \le M^{(2-p)/p} \|f\|_p \, . \qquad (13)$$

حال اگر $f \in L^p(\mu)$، توابع ساده‌ای مانند f_j وجود دارند به‌طوری‌که وقتی $j \to \infty$، $\|f_j - f\|_p \to 0$. در این صورت، به‌ازای هر n، $\hat{f}_j(n) \to \hat{f}(n)$ زیرا $\psi_n \in L^q(\mu)$. لذا چون رابطهٔ (۱۳) به‌ازای هر f_j برقرار است، به‌ازای f نیز چنین می‌باشد. چون N دلخواه بود، بالأخره رابطهٔ (۱) را خواهیم داشت.

عکس قضیهٔ مدول ماکزیمم

حال به‌قضیه‌ای می‌رسیم که در آشنایی با این فصل به‌آن اشاره شد.

حرف j نمایش تابع همانی است: $j(z)=z$.

تابعی که به‌هر $z\in\overline{U}$ عدد ۱ را منتسب کند با ۱ نموده می‌شود.

۱۳.۱۲ قضیه. *فرض کنیم M فضای برداری توابع مختلط پیوسته بر قرص یکهٔ بستهٔ $\overline{U}$ با خواص زیر باشد:*

(آ) $1\in M$؛

(ب) ***هرگاه $f\in M$، آنگاه*** $jf\in M$؛

(پ) ***هرگاه $f\in M$، آنگاه*** $\|f\|_U=\|f\|_T$.

در این صورت هر $f\in M$ در U هلوریخت است.

توجه کنید که قسمت (پ) شکل نسبتاً ضعیف اصل مدول ماکزیمم است. قسمت (پ) فقط می‌گوید که ماکزیمم $|f|$ بر $\overline{U}$ در نقطه‌ای از مرز T گرفته می‌شود، ولی (پ) وجود ماکزیممهای **موضعی** $|f|$ در U را نفی نمی‌کند.

برهان. بنابر (آ) و (ب)، M شامل تمام چندجمله‌ایهاست. این در معیت (پ) نشان می‌دهد که M در مفروضات قضیهٔ ۲۵.۵ صدق می‌کند. لذا هر $f\in M$ در U توافقی است. با استفاده از (ب) نشان می‌دهیم که هر $f\in M$ درواقع در معادلهٔ کشی ـ ریمان صدق می‌کند.

فرض کنیم ∂ و $\overline{\partial}$ عملگرهای دیفرانسیل مذکور در بخش ۱.۱۱ باشند. قاعدهٔ حاصل‌ضرب برای مشتقگیری نتیجه می‌دهد که

$$(\partial\,\overline{\partial})(fg)=f\cdot(\partial\,\overline{\partial}\,g)+(\partial f)\cdot(\overline{\partial}\,g)+(\overline{\partial}\,f)\cdot(\partial g)+(\partial\,\overline{\partial}\,f)\cdot g\cdot$$

$f\in M$ را ثابت گرفته و $g=j$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت $fj\in M$. لذا f و fj توافقی‌اند؛ درنتیجه $\partial\,\overline{\partial}\,f=0$ و $(\partial\,\overline{\partial})(fj)=0$. همچنین $\overline{\partial}\,j=0$ و $\partial j=1$. لذا اتحاد فوق به $\overline{\partial}\,f=0$ تحویل می‌شود. بنابراین $f\in H(U)$.

این نتیجه در برهان زیر به‌کار خواهد رفت.

۱۴.۱۲ قضیهٔ رادو (*Rado*). *فرض کنیم $f\in C(\overline{U})$، Ω مجموعهٔ تمام $z\in U$هایی باشد که $f(z)\neq 0$، و f در Ω هلوریخت باشد. در این صورت f در U هلوریخت است.*

بخصوص قضیه می‌گوید که $U-\Omega$ حداکثر شمارشپذیر است مگر $\Omega=\Phi$.

برهان. فرض کنیم $\Omega\neq\Phi$. ابتدا ثابت می‌کنیم Ω در U چگال است. در غیر این صورت $\alpha\in\Omega$ای و $\beta\in U-\overline{\Omega}$ای چنان وجود دارند که $2\,|\beta-\alpha|<1-|\beta|$. n را طوری می‌گیریم که $2^n|f(\alpha)|>\|f\|_T$. به‌ازای $z\in\overline{\Omega}$ تعریف می‌کنیم $h(z)=(z-\beta)^{-n}f(z)$. هرگاه $z\in U\cap\partial\Omega$، آنگاه $f(z)=0$؛ درنتیجه $h(z)=0$. هرگاه $z\in T\cap\partial\Omega$، آنگاه

$$|h(z)| \leq (1-|\beta|)^{-n} \|f\|_T < |\alpha-\beta|^{-n} |f(\alpha)| = |h(\alpha)| \cdot$$

این قضیهٔ مدول ماکزیمم را نقض می‌کند. لذا Ω در U چگال می‌باشد.

حال فرض کنیم M فضای برداری تمام $g \in C(\overline{U})$هایی باشد که در Ω هلوریخت‌اند. $g \in M$را ثابت می‌گیریم. به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $fg^n = 0$ بر $U \cap \partial\Omega$.

لذا قضیهٔ مدول ماکزیمم ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $\alpha \in \Omega$،

$$|f(\alpha)|\, |g(\alpha)|^n \leq \|fg^n\|_{\partial\Omega} = \|fg^n\|_T \leq \|f\|_T \|g\|_T^n \cdot$$

اگر ریشهٔ n م گرفته و سپس فرض کنیم $n \to \infty$، معلوم می‌شود که به‌ازای هر $\alpha \in \Omega$، $|g(\alpha)| \leq \|g\|_T$. چون Ω در U چگال است، $\|g\|_U = \|g\|_T$.

پس M در مفروضات قضیهٔ ۱۳.۱۲ صدق می‌کند. چون $f \in M$، f در U هلوریخت است.

تمرینات

۱. فرض کنید Δ یک مثلث متساوی‌الاضلاع بسته در صفحه به‌رئوس a و b و c باشد. $\max(|z-a|\,|z-b|\,|z-c|)$ را وقتی z روی Δ تغییر می‌کند بیابید.

۲. فرض کنید $f \in H(\Pi^+)$ که در آن Π^+ نیمصفحهٔ بالایی است، و $|f| \leq 1$. $|f'(i)|$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟ توابع اکسترمال را پیدا کنید. (قس. بحث مطرح شده در بخش ۵.۱۲.)

۳. فرض کنید $f \in H(\Omega)$. تحت چه شرایطی $|f|$ می‌تواند **مینیمم** موضعی در Ω داشته باشد؟

۴. (آ) فرض کنید Ω یک ناحیه بوده، D یک قرص باشد، $\overline{D} \subset \Omega$، $f \in H(\Omega)$، f ثابت نباشد، و $|f|$ بر مرز D ثابت باشد. نشان دهید که f دست کم یک صفر در D دارد.

(ب) جمیع تابعهای تمام f را که به‌ازای $|z| = 1$، $|f(z)| = 1$ بیابید.

۵. فرض کنید Ω یک ناحیهٔ کراندار بوده، $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر $\overline{\Omega}$ باشد که در Ω هلوریخت‌اند، و $\{f_n\}$ بر مرز Ω به‌طور یکنواخت همگرا باشد. ثابت کنید $\{f_n\}$ بر Ω به‌طور یکنواخت همگراست.

۶. فرض‌کنید $f \in H(\Omega)$، Γ یک‌دوردر Ω باشد به‌طوری‌که‌به‌ازای‌هر $\alpha \notin \Omega$، $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$، به‌ازای هر $\zeta \in \Gamma^*$، $|f(\zeta)| \leq 1$، و $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0$. ثابت کنید $|f(z)| \leq 1$.

۷. در برهان قضیهٔ ۸.۱۲ تلویحاً فرض شده بود که $M(a) > 0$ و $M(b) > 0$. نشان دهید که اگر $M(a) = 0$، قضیه برقرار است، و در این صورت به‌ازای هر $z \in \Omega$، $f(z) = 0$.

۸. فرض کنید $A(R_1, R_2)$ به‌ازای $0 < R_1 < R_2 < \infty$ حلقهٔ

$$\{z : R_1 < |z| < R_2\}$$

باشد. یک نوار قائم وجود دارد که تابع نمایی آن را به‌روی $A(R_1, R_2)$ می‌نگارد. با استفاده از آن

قضیهٔ سه دایرهٔ هادامار ($Hadamard$) را ثابت کنید: هرگاه $f \in H\big(A(R_1, R_2)\big)$ و

$$M(r) = \max_{\theta} |f(re^{i\theta})| \ (R_1 < r < R_2)$$

و $R_1 < a < r < b < R_2$، آنگاه

$$\log M(r) \leq \frac{\log(b/r)}{\log(b/a)} \log M(a) + \frac{\log(r/a)}{\log(b/a)} \log M(b) \cdot$$

[به‌عبارت دیگر، $\log M(r)$ یک تابع محدب از $\log r$ است.] این نامساوی به‌ازای چه f ی به‌صورت تساوی در می‌آید؟

۹. فرض کنید Π نیمصفحهٔ راست باز باشد ($z \in \Pi$ اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} z > 0$). همچنین f بر بست Π ($\operatorname{Re} z \geq 0$) پیوسته بوده، $f \in H(\Pi)$، و ثابتهایی مانند $A < \infty$ و $\alpha < 1$ وجود داشته باشند به‌طوری که به‌ازای هر $z \in \Pi$،

$$|f(z)| < A \exp(|z|^{\alpha}) \cdot$$

به‌علاوه، به‌ازای هر y حقیقی، $|f(iy)| \leq 1$. ثابت کنید در Π داریم $|f(z)| \leq 1$. نشان دهید که نتیجه به‌ازای $\alpha = 1$ نادرست است. اگر Π با ناحیه‌ای کراندار به‌دو شعاع ماربر مبدأ به‌زاویه‌ای مخالف π تعویض شود، نتیجه چطور باید تعدیل یابد؟

۱۰. فرض کنید Π نیمصفحهٔ راست باز باشد. همچنین $f \in H(\Pi)$، به‌ازای هر $z \in \Pi$، $|f(z)| < 1$، و α ای باشد که $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ و

$$\text{وقتی } r \to \infty\text{،} \quad \frac{\log |f(re^{i\alpha})|}{r} \to -\infty \ .$$

ثابت کنید $f = 0$. **راهنمایی.** به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$ قرار دهید $g_n(z) = f(z)e^{nz}$ و تمرین ۹ را بر دو ناحیهٔ زاویه‌ای تعریف شده با $-\pi/2 < \theta < \alpha$ و $\alpha < \theta < \pi/2$ اعمال کرده و نتیجه بگیرید که هر g_n در Π کراندار است و لذا، به‌ازای هر n، $|g_n| < 1$ در Π.

۱۱. فرض کنید Γ مرز ناحیهٔ بی‌کران Ω بوده، $f \in H(\Omega)$، f بر $\Omega \cup \Gamma$ پیوسته باشد، و ثابتهایی مانند $B < \infty$ و $M < \infty$ موجود باشند به‌طوری که $|f| \leq M$ بر Γ و $|f| \leq B$ در Ω. ثابت کنید درواقع در Ω داریم $|f| \leq M$.

پیشنهاد. نشان دهید که فرض $U \cap \Omega = \varnothing$ صدمه‌ای به کلیت نمی‌زند. $z_0 \in \Omega$ را ثابت گرفته و فرض کنید n یک عدد صحیح بزرگ باشد، V قرص بزرگی به‌مرکز 0 باشد، و قضیهٔ مدول ماکزیمم را بر تابع $f^n(z)/z$ در مؤلفه‌ای از $V \cap \Omega$ که شامل z_0 است اعمال کنید.

۱۲. فرض‌کنید f یک تابع تمام‌باشد. اگر نگاشت پیوسته‌ای‌مانند γ از $[0, 1)$ به‌توی صفحهٔ مختلط موجود باشد که‌وقتی $t \to 1$، $\gamma(t) \to \infty$ و $f\big(\gamma(t)\big) \to \alpha$، گوییم α یک **مقدار مجانبی** f است. [درصفحهٔ مختلط «وقتی $t \to 1$، $\gamma(t) \to \infty$» یعنی به‌هر $R < \infty$ یک $t_R < 1$ چنان‌نظیر

است که اگر $t_R < t < 1$، $|\gamma(t)| > R$.] ثابت کنید هر تابع تمام غیرثابت ∞ را به‌عنوان یک مقدار مجانبی دارد. **پیشنهاد.** فرض کنید $E_n = \{z : |f(z)| > n\}$. بنابر تمرین ۱۱، هر مؤلفهٔ E_n بی‌کران است (برهان؟) و شامل مؤلفه‌ای از E_{n+1} می‌باشد.

۱۳. نشان دهید که exp دارای دو مقدار مجانبی است: ۰ و ∞. sin و cos چطور؟ **تذکر.** $\sin z$ و $\cos z$ به‌ازای جمیع z های مختلط با

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad \text{و} \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

تعریف می‌شوند.

۱۴. اگر f تمام بوده و α در برد f نباشد، ثابت کنید α یک مقدار مجانبی f است مگر آنکه f ثابت باشد

۱۵. فرض کنید $f \in H(U)$ و ثابت کنید دنباله‌ای مانند $\{z_n\}$ در U هست به‌طوری‌که $|z_n| \to 1$ و $\{f(z_n)\}$ کراندار است.

۱۶. فرض کنید Ω یک ناحیهٔ کراندار باشد، $f \in H(\Omega)$، و به‌ازای هر دنبالهٔ $\{z_n\}$ در Ω که به‌یک نقطهٔ مرزی Ω همگراست،

$$\limsup_{n \to \infty} |f(z_n)| \le M \cdot$$

ثابت کنید به‌ازای هر $z \in \Omega$، $|f(z)| \le M$.

۱۷. فرض‌کنید Φ مجموعهٔ تمام $f \in H(U)$ هایی‌باشد که‌به‌ازای $z \in U$، $0 < |f(z)| < 1$، و Φ_c مجموعهٔ تمام $f \in \Phi$ هایی باشد که $f(0) = c$. تعریف کنید

$$\cdot\, M = \sup\{|f'(0)| : f \in \Phi\} \quad \text{و} \quad M(c) = \sup\{|f'(0)| : f \in \Phi_c\}$$

M و $M(c)$ را به‌ازای $0 < c < 1$ بیابید. یک تابع مانند $f \in \Phi$ بیابید که $f'(0) = M$ یا ثابت کنید چنین f ی موجود نیست.

پیشنهاد. $\log f$ مجموعهٔ U را به‌نیمصفحهٔ چپ می‌نگارد. $\log f$ را با یک نگاشت مناسب که این نیمصفحه را به U بنگارد ترکیب کنید. حال لم شوارتز را به‌کار برید.

فصل سیزده
تقریبات به‌وسیلهٔ توابع گویا

آماده‌سازی

۱.۱۳ کرهٔ ریمان. در بررسی توابع هلوریخت اغلب بهتر است صفحهٔ مختلط را با الحاق یک نقطهٔ جدید به‌نام ∞ فشرده ساخت. مجموعهٔ حاصل $S^۲$ (*کرهٔ ریمان*، اجتماع $R^۲$ و $\{\infty\}$) به‌صورت زیر توپولوژی می‌یابد. به‌ازای هر $r > ۰$، $D'(\infty\,; r)$ را مجموعهٔ تمام اعداد مختلط z می‌گیریم که $|z| > r$، قرار می‌دهیم $D(\infty; r) = D'(\infty\,; r) \cup \{\infty\}$، و یک زیرمجموعهٔ $S^۲$ را باز می‌نامیم اگر و فقط اگر اجتماعی از قرصهای $D(a\,; r)$ باشد که در آنها aها نقاط دلخواهی از $S^۲$ اند و r ها اعداد مثبت دلخواهی می‌باشند. این البته بر $S^۲ - \{\infty\}$ توپولوژی معمولی صفحه را می‌دهد. به‌آسانی معلوم می‌شود که $S^۲$ با یک کره همانریخت است (که نامگذاری را توجیه می‌کند). درواقع یک همانریختی مانند φ از $S^۲$ به‌روی کرهٔ یکه در $R^۳$ هست که می‌توان آن را صریحاً نمایش داد. قرار می‌دهیم $\varphi(\infty) = (۰, ۰, ۱)$ و به‌ازای هر عدد مختلط $re^{i\theta}$،

$$\varphi(re^{i\theta}) = \left(\frac{۲r\cos\theta}{r^۲+۱}, \frac{۲r\sin\theta}{r^۲+۱}, \frac{r^۲-۱}{r^۲+۱}\right) . \qquad (۱)$$

بر خواننده است که تصویر هندسی مربوط به (۱) را رسم نماید.

اگر f در $D'(\infty\,; r)$ هلوریخت باشد، گوییم f یک انفراد تنها در ∞ دارد. ماهیت این انفراد همانند ماهیتی است که تابع $\tilde{f}$ با تعریف $\tilde{f}(z) = f(۱/z)$ بر $D'(۰\,; ۱/r)$ در ۰ دارد.

لذا هرگاه f در $D'(\infty\,; r)$ کراندار باشد، آنگاه (همانطور که در اعمال قضیهٔ ۲۰.۱۰ بر $\tilde{f}$

می‌بینیم) $\lim_{z \to \infty} f(z)$ موجود و عددی مختلط می‌باشد. $f(\infty)$ را این حد تعریف می‌کنیم و بدین‌ترتیب تابعی در $D(\infty; r)$ به‌دست می‌آوریم که آن را هلوریخت می‌خوانیم. توجه کنید که این برحسب رفتار $\tilde{f}$ در مجاورت ۰ تعریف شده است نه برحسب مشتقپذیری f در ∞.

هرگاه $\tilde{f}$ یک قطب از مرتبهٔ m در ۰ داشته باشد، آنگاه گوییم f در ∞ یک قطب از مرتبهٔ m دارد. در این صورت **قسمت اصلی** f در ∞ یک چندجمله‌ای معمولی از درجهٔ m است (قس. قضیهٔ ۲۱.۱۰)، و اگر این چندجمله‌ای را از f کسر کنیم، تابعی با انفراد قابل رفع در ∞ به‌دست می‌آید.

بالأخره هرگاه $\tilde{f}$ در ۰ انفراد اساسی داشته باشد، آنگاه گوییم f در ∞ انفراد اساسی دارد. مثلاً هر تابع تمام که چندجمله‌ای نباشد در ∞ انفراد اساسی دارد.

بعدها در این فصل با شرط «$S^2 - \Omega$ همبند است» که در آن Ω یک مجموعهٔ باز در صفحه است مواجه خواهیم شد. توجه کنید که این هم‌ارز شرط «متمم Ω نسبت به‌صفحه همبند است» نیست. مثلاً اگر Ω از تمام اعداد مختلط $z = x + iy$ که $0 < y < 1$ تشکیل شده باشد، متمم Ω نسبت به‌صفحه دارای دو مؤلفه است ولی $S^2 - \Omega$ همبند می‌باشد.

۲.۱۳ توابع گویا. طبق تعریف، تابع گویای f خارج قسمت دو چندجمله‌ای P و Q است: $f = P/Q$. از قضیهٔ ۲۵.۱۰ معلوم می‌شود که هر چندجمله‌ای غیرثابت حاصل ضربی از عوامل درجهٔ ۱ است. می‌توان فرض کرد که P و Q عامل مشترکی ندارند. در این صورت f در هر صفر Q دارای قطب است (قطب f همان مرتبهٔ صفر Q را دارد). اگر قسمتهای اصلی نظیر را از هم کم کنیم، تابع گویایی به‌دست می‌آید که تنها انفرادش در ∞ است و لذا یک چندجمله‌ای می‌باشد.

لذا هر تابع گویای $f = P/Q$ نمایشی به‌شکل زیر دارد:

$$f(z) = A_0(z) + \sum_{j=1}^{k} A_j\left((z - a_j)^{-1}\right) \qquad (1)$$

که در آن A_0، A_1، $\cdots$، A_k چندجمله‌ای بوده، A_1، $\cdots$، A_k جملهٔ ثابت ندارند، و a_1، $\cdots$، a_k صفرهای متمایز Q می‌باشند. رابطهٔ (۱) را **تجزیه به‌کسرهای جزئی** f می‌نامند.

حال به‌چند مطلب توپولوژیک می‌پردازیم. می‌دانیم که هر مجموعهٔ باز در صفحه اجتماع شمارشپذیری از مجموعه‌های فشرده (مثلاً قرصهای بسته) است. ولی بهتر است چند خاصیت دیگر از این مجموعه‌های فشرده را نیز داشته باشیم:

۳.۱۳ قضیه. *هر مجموعهٔ باز Ω در صفحه اجتماع دنباله‌ای مانند $\{K_n\}$، $n = 1, 2, 3, \cdots$، از مجموعه‌های فشرده است به‌طوری که*

(آ) K_n، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، درون K_{n+1} قرار دارد؛

(ب) هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω در K_nی واقع است؛

(پ) **هر مؤلفهٔ $S^{2}-K_n$، به‌ازای $n=1, 2, 3, \cdots$، شامل مؤلفه‌ای از $S^{2}-\Omega$ می‌باشد.**

خاصیت (پ) به‌طور غیردقیق می‌گوید که K_n بدون آنهایی که توسط Ω بر آن اعمال شده سوراخی ندارد. توجه کنید که Ω همبند فرض نشده است. طبق تعریف، **درون** مجموعهٔ E بزرگترین زیرمجموعهٔ باز E می‌باشد.

برهان. به‌ازای $n=1, 2, 3, \cdots$ قرار می‌دهیم

$$V_n = D(\infty\,; n) \cup \bigcup_{a \notin \Omega} D\left(a\,; \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

و فرض می‌کنیم $K_n = S^{2}-V_n$. [البته در (۱) داریم $a \neq \infty$]. در این صورت K_n یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار (و در نتیجه فشرده) از Ω است و $\Omega = \cup K_n$. اگر $z \in K_n$ و $r=n^{-1}-(n+1)^{-1}$، به‌آسانی معلوم می‌شود که $D(z\,; r) \subset K_{n+1}$. این قسمت (آ) را به‌ما می‌دهد. لذا Ω اجتماع درونهای W_n از K_n است. هرگاه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω باشد، آنگاه به‌ازای N ی، $K \subset W_1 \cup \cdots \cup W_N$؛ درنتیجه $K \subset K_N$.

بالأخره هریک از قرصهای (۱) $S^{2}-\Omega$ را قطع می‌کند. هر قرص همبند است؛ درنتیجه هر مؤلفهٔ V_n مجموعهٔ $S^{2}-\Omega$ را قطع می‌کند. چون $V_n \supset S^{2}-\Omega$، هیچ مؤلفهٔ $S^{2}-\Omega$ نمی‌تواند دو مؤلفهٔ V_n را قطع نماید. این امر قسمت (پ) را به‌دست خواهد داد.

۴.۱۳. مجموعه‌هایی از بازه‌های بستهٔ جهتدار. فرض کنیم Φ گردایه‌ای متناهی از بازه‌های بستهٔ جهتدار در صفحه باشد. به‌ازای هر نقطهٔ p، $m_I(p)$ [$m_E(p)$] را تعداد اعضای Φ با نقطهٔ شروع [نقطهٔ پایان] p می‌انگاریم. اگر به‌ازای هر p، $m_I(p)=m_E(p)$، گوییم Φ ***در حال تعادل*** است.

اگر Φ در حال تعادل (و ناتهی) باشد، ساختار زیر قابل انجام است.

$\gamma_1 = [a_0, a_1] \in \Phi$ را اختیار کرده، فرض می‌کنیم $k \geq 1$، و اعضای متمایز $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ از Φ را طوری اختیار می‌کنیم که به‌ازای $1 \leq i \leq k$، $\gamma_i = [a_{i-1}, a_i]$. هرگاه $a_k = a_0$، توقف می‌کنیم. هرگاه $a_k \neq a_0$ و درست r بازهٔ بستهٔ $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ دارای a_k به‌عنوان نقطهٔ پایان باشند، آنگاه فقط $r-1$ تای آنها a_k را به‌عنوان نقطهٔ شروع دارند. چون Φ در حال تعادل است، Φ شامل دست کم یک بازهٔ دیگر، مثلاً γ_{k+1}، است که نقطهٔ شروعش a_k می‌باشد. و چون Φ متناهی است، باید مآلاً (مثلاً در مرحلهٔ n م) به a_0 بازگردیم.

در این صورت $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ (با همین ترتیب) به‌هم وصل شده و یک مسیر بسته تشکیل می‌دهند.

اعضای باقیمانده از Φ هنوز گردایه‌ای در حال تعادل تشکیل می‌دهند که می‌توان ساختار فوق را بر آن اعمال کرد. پس اعضای Φ را می‌توان طوری شماره داد که تعدادی متناهی مسیر بسته تشکیل دهند. مجموع این مسیرها یک دور می‌باشد. لذا به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

هرگاه $\Phi=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_N\}$ گردایه‌ای در حال تعادل از بازه‌های بستهٔ جهتدار بوده و

$$\Gamma=\gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_N,$$

آنگاه Γ یک دور می‌باشد.

۵.۱۳ قضیه. *هرگاه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از مجموعهٔ باز $\Omega\ (\neq \Phi)$ در صفحه باشد، آنگاه یک دور مانند Γ در $\Omega-K$ هست به‌طوری که فرمول کشی*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{1}$$

به‌ازای هر $f\in H(\Omega)$ و هر $z\in K$ برقرار است.

برهان. چون K فشرده و Ω باز است، عددی مانند $\eta>0$ هست به‌طوری که فاصلهٔ هر نقطهٔ K تا هر نقطهٔ خارج Ω دست کم 2η می‌باشد. یک شبکه از خطوط افقی و قائم در صفحه چنان رسم می‌کنیم که فاصلهٔ بین هر دو خط افقی و یا قائم مجاور η باشد. فرض کنیم Q_1، $\cdots$، Q_m آن مربعها (۲ − سلولهای بسته) به‌ضلع η در این شبکه باشند که K را قطع می‌کنند. در این صورت، به‌ازای $r=1,\cdots,m$، $Q_r\subset\Omega$.

اگر a_r مرکز Q_r بوده و a_r+b یکی از رئوسش باشد، γ_{rk} را بازهٔ بستهٔ جهتدار

$$\gamma_{rk}=[a_r+i^k b\ ,\ a_r+i^{k+1} b] \tag{2}$$

گرفته و تعریف می‌کنیم

$$\partial Q_r=\gamma_{r1} \dotplus \gamma_{r2} \dotplus \gamma_{r3} \dotplus \gamma_{r4}\ (r=1,\cdots,m)\ . \tag{3}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود (مثلاً به‌عنوان حالت خاصی از قضیهٔ ۳۷.۱۰ یا به‌وسیلهٔ قضایای ۱۱.۱۰ و ۴۰.۱۰) که

$$\mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } \alpha \text{ درون } Q_r \text{ باشد ،} \\ 0 & \text{اگر } \alpha \text{ در } Q_r \text{ نباشد ،}\end{cases} \tag{4}$$

فرض کنیم Σ گردایهٔ تمام γ_{rk}ها ($1\le r\le m$ و $1\le k\le 4$) باشد. واضح است که Σ در حال تعادل است. اعضایی از Σ را که متقابلشان (ر.ک. بخش ۸.۱۰) نیز تعلق به Σ دارند حذف می‌کنیم. فرض کنیم Φ گردایهٔ اعضای باقیماندهٔ Σ باشد. در این صورت Φ در حال تعادل است. فرض کنیم Γ دور ساخته شده از Φ مانند بخش ۴.۱۳ باشد.

هرگاه ضلع E یک Q_r مجموعهٔ K را قطع کند، آنگاه دو مربعی که E در مرزهای آنها واقع است K را قطع می‌کنند. لذا Σ شامل دو بازهٔ بستهٔ جهتدار است که متقابل یکدیگر بوده و بردش E می‌باشد. این بازه‌های بسته در Φ ظاهر نمی‌شوند. لذا Γ یک دور در $\Omega-K$ می‌باشد.

ساختن Φ از Σ نیز نشان می‌دهد که اگر α در مرز Q_r ای نباشد،

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{r=1}^{m} \mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha) \cdot \tag{۵}$$

درنتیجه رابطهٔ (۴) ایجاب می‌کند که

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \alpha \text{ درون } Q_r \text{ ی باشد،} \\ 0 & \text{اگر } \alpha \text{ در هیچ } Q_r \text{ ی نباشد،} \end{cases} \tag{۶}$$

هرگاه $z \in K$، $z \notin \Gamma^*$، آنگاه z یک نقطهٔ حدی درون Q_r ی می‌باشد. چون طرف چپ (۶) در هر مؤلفهٔ متمم Γ^* ثابت است، رابطهٔ (۶) نتیجه می‌دهد که

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } z \in K \text{،} \\ 0 & \text{اگر } z \notin \Omega \text{،} \end{cases} \tag{۷}$$

حال رابطهٔ (۱) از قضیهٔ کشی ۳۵.۱۰ نتیجه خواهد شد.

قضیهٔ رونگه (*Runge*)

هدف اصلی این بخش قضیهٔ ۹.۱۳ است. ما با صورت اندک متفاوتی از آن شروع می‌کنیم که در آن تأکید بر تقریب یکنواخت روی یک مجموعهٔ فشرده می‌باشد.

۶.۱۳ قضیه. ***فرض کنیم K یک مجموعهٔ فشرده در صفحه بوده و $\{\alpha_j\}$ مجموعه‌ای باشد که شامل یک نقطه از هر مؤلفهٔ S^2-k است. اگر Ω باز باشد، $\Omega \supset K$، $f \in H(\Omega)$، و $\epsilon > 0$، یک تابع گویا مانند R هست که جمیع قطبهایش در مجموعهٔ مقرر $\{\alpha_j\}$ اند به‌طوری که به‌ازای هر $z \in K$،***

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon \cdot \tag{۱}$$

توجه کنید که تعداد مؤلفه‌های S^2-K حداکثر شمارشپذیر است. همچنین نقطهٔ مقرر در مؤلفهٔ بی‌کران S^2-K ممکن است ∞ باشد. این درواقع جالبترین انتخاب می‌باشد.

برهان. فضای باناخ $C(K)$ را در نظر می‌گیریم که اعضایش توابع مختلط پیوسته بر K با نرم سوپرمم می‌باشند. فرض کنیم M زیرفضای $C(K)$ مرکب از تحدیدهای توابع گویایی که تمام قطبهایشان در $\{\alpha_j\}$ اند به K باشد. قضیه می‌گوید که f در بست M می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۱۹.۵ (نتیجه‌ای از قضیهٔ هان ـ باناخ)، این هم‌ارز آن است که بگوییم هر تابعی خطی کراندار بر $C(K)$ که بر M صفر شود در f نیز صفر می‌شود؛ و درنتیجه قضیهٔ نمایش ریس (قضیهٔ ۱۹.۶) نشان می‌دهد که باید حکم زیر را ثابت کنیم:

هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر K باشد به‌طوری که به‌ازای هر تابع گویای R که قطبهایش فقط در مجموعهٔ $\{\alpha_j\}$ اند،

$$\int_K R\,d\mu = \circ\,, \tag{۲}$$

و نیز $f\in H(\Omega)$، آنگاه

$$\int_K f\,d\mu = \circ\,\cdot \tag{۳}$$

لذا فرض می‌کنیم μ در رابطهٔ (۲) صدق کند. تعریف می‌کنیم

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \quad (z\in S^{۲}-K)\,\cdot \tag{۴}$$

بنابر قضیهٔ ۷.۱۰ (به‌ازای $X=K$ و $\varphi(\zeta)=\zeta$)، $h\in H(S^{۲}-K)$.

فرض کنیم V_j مؤلفه‌ای از $S^{۲}-K$ باشد که شامل α_j است، و نیز $D(\alpha_j\,;r)\subset V_j$. هرگاه $\alpha_j\neq\infty$ و z در $D(\alpha_j\,;r)$ ثابت باشد، آنگاه به‌ازای $\zeta\in K$، **به‌طور یکنواخت**،

$$\frac{۱}{\zeta - z} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=\circ}^{N}\frac{(z-\alpha_j)^n}{(\zeta-\alpha_j)^{n+۱}}\,\cdot \tag{۵}$$

بر هر تابع سمت راست (۵) می‌توان رابطهٔ (۲) را اعمال کرد. لذا، به‌ازای هر $z\in D(\alpha_j\,;r)$، $h(z)=\circ$. این ایجاب می‌کند که، بر طبق قضیهٔ یکتایی ۱۸.۱۰، به‌ازای هر $z\in V_j$، $h(z)=\circ$.

اگر $\alpha_j=\infty$، رابطهٔ (۵) با

$$\frac{۱}{\zeta - z} = -\lim_{N\to\infty}\sum_{n=\circ}^{N} z^{-n-۱}\,\zeta^n \quad (|z|>r \text{ و } \zeta\in K) \tag{۶}$$

تعویض می‌شود که مجدداً ایجاب می‌کند که در $D(\infty\,;r)$، و درنتیجه در V_j، $h(z)=\circ$. لذا از رابطهٔ (۲) معلوم می‌شود که

$$h(z) = \circ \quad (z\in S^{۲}-K)\,\cdot \tag{۷}$$

حال یک دور مانند Γ در $\Omega-K$ مانند قضیهٔ ۵.۱۳ اختیار کرده و از این نمایش انتگرال کشی f نسبت به μ انتگرال می‌گیریم. کاربردی از قضیهٔ فوبینی (که چون با اندازه‌های بورل و توابع پیوسته بر فضاهای فشرده سر و کار داریم، مجاز است) همراه با رابطهٔ (۷) نشان می‌دهد که

$$\int_K f\,d\mu = \int_K d\mu(\zeta)\left[\frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-\zeta}\,dw\right]$$

$$= \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma f(w)\,dw\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{w-\zeta}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w)\ h(w)\ dw = 0 \cdot$$

آخرین تساوی تابع این امر است که $\Gamma^* \subset \Omega - K$ که در آن $h(w) = 0$. لذا رابطهٔ (۳) برقرار و برهان تمام می‌باشد.

حالت خاص زیر اهمیت ویژه‌ای دارد.

۷.۱۳ قضیه. ***فرض کنیم K مجموعه‌ای فشرده در صفحه بوده، $S^2 - K$ همبند باشد، و $f \in H(\Omega)$ که در آن Ω مجموعهٔ بازی شامل K است. در این صورت دنباله‌ای مانند $\{P_n\}$ از چندجمله‌ایها وجود دارد به‌طوری‌که $P_n(z) \to f(z)$ به‌طور یکنواخت بر K.***

برهان. چون $S^2 - K$ فقط یک مؤلفه دارد، برای اعمال قضیهٔ ۶.۱۳ فقط به‌یک نقطهٔ α_j نیاز داریم، و می‌توانیم $\alpha_j = \infty$ را اختیار کنیم.

۸.۱۳ تبصره. نتیجهٔ فوق برای **هر** Kی فشرده در صفحه که $S^2 - K$ همبند نیست نادرست است. زیرا در این حالت $S^2 - K$ دارای یک مؤلفهٔ کراندار V می‌باشد. $\alpha \in V$ را اختیار کرده، قرار می‌دهیم $f(z) = (z-\alpha)^{-1}$ و $m = \max\{\,|z-\alpha| : z \in K\}$. فرض کنیم P یک چند جمله‌ای باشد به‌طوری که به‌ازای هر $z \in K$، $|P(z) - f(z)| < 1/m$. در این صورت

$$|(z-\alpha)\,P(z) - 1| < 1 \quad (z \in K) \cdot \qquad (1)$$

بخصوص اگر z در مرز V باشد، رابطهٔ (۱) برقرار است. چون بست V فشرده است، قضیهٔ مدول ماکزیمم نشان می‌دهد که رابطهٔ (۱) به‌ازای هر $z \in V$ برقرار است. با فرض $z = \alpha$ به‌دست می‌آوریم $1 < 1$. لذا تقریب یکنواخت امکان‌پذیر نیست.

همین استدلال نشان می‌دهد که هیچیک از α_j ها را نمی‌توان در قضیهٔ ۶.۱۳ حذف کرد.

حال قضایای تقریب قبلی را برای تقریب مجموعه‌های باز به‌کار می‌بریم. تأکید می‌کنیم که در قضایای ۶.۱۳ و ۷.۱۳ K همبند فرض **نشده** بود و در قضیهٔ زیر نیز Ω همبند فرض **نخواهد** شد.

۹.۱۳ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در صفحه بوده، مجموعهٔ A یک نقطه در هر مؤلفهٔ $S^2 - \Omega$ داشته باشد، و $f \in H(\Omega)$. در این صورت یک دنباله مانند $\{R_n\}$ از توابع گویا هست که قطبهایشان فقط در A اند به‌طوری‌که $R_n \to f$ به‌طوریکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω.***

در حالت خاص که $S^2 - \Omega$ همبند است می‌توان $A = \{\infty\}$ را اختیار کرد و بدین‌ترتیب چندجمله‌ایهای P_n را به‌دست آورد که $P_n \to f$ به‌طوریکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω.

ملاحظه می‌کنیم که $S^2 - \Omega$ ممکن است تعدادی شمارش‌ناپذیر مؤلفه داشته باشد. مثلاً ممکن است داشته باشیم $S^2 - \Omega = \{\infty\} \cup C$ که در آن C یک مجموعهٔ کانتور است.

برهان. یک دنباله از مجموعه‌های فشرده در Ω مانند K_n با خواص مذکور در قضیهٔ ۳.۱۳ اختیار می‌کنیم. n را فعلاً ثابت می‌گیریم. چون هر مؤلفهٔ S^2-K_n شامل مؤلفه‌ای از $S^2-\Omega$ است، هر مؤلفهٔ S^2-K_n شامل نقطه‌ای از A است؛ درنتیجه قضیهٔ ۶.۱۳ یک تابع گویا مانند R_n با قطبهای در A به‌ما می‌دهد به‌طوری که

$$|R_n(z)-f(z)| < \frac{1}{n} \quad (z \in K_n) \cdot \tag{۱}$$

حال اگر K یک مجموعهٔ فشرده در Ω باشد، N ی هست به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq N$، $K \subset K_n$. پس از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که

$$|R_n(z)-f(z)| < \frac{1}{n} \quad (z \in K \text{ و } n \geq N) \tag{۲}$$

که برهان را تمام می‌کند.

قضیهٔ میتاگ ـ لفلر (*Mittag - Leffler*)

حال با استفاده از قضیهٔ رونگه ثابت می‌کنیم که توابع خوشریخت را می‌توان با قطبهای مقرر دلخواه ساخت.

۱۰.۱۳ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در صفحه بوده، $A \subset \Omega$، A نقطهٔ حدی در Ω نداشته باشد، و به‌هر $\alpha \in A$ یک عدد صحیح مثبت مانند $m(\alpha)$ و یک تابع گویا مانند***

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha} \, (z-\alpha)^{-j}$$

مربوط شده باشد. در این صورت یک تابع خوشریخت مانند f در Ω وجود دارد که قسمت اصلی‌اش در هر $\alpha \in A$ مساوی P_α است و قطب دیگری در Ω ندارد.

برهان. دنبالهٔ $\{K_n\}$ از مجموعه‌های فشرده در Ω را مانند قضیهٔ ۳.۱۳ اختیار می‌کنیم: به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، K_n درون K_{n+1} قرار دارد، هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω در K_n ای واقع است، و هر مؤلفهٔ S^2-K_n شامل مؤلفه‌ای از $S^2-\Omega$ می‌باشد. قرار می‌دهیم $A_1 = A \cap K_1$ و به‌ازای $n = 2, 3, 4, \cdots$، $A_n = A \cap (K_n - K_{n-1})$. چون $A_n \subset K_n$ و A نقطهٔ حدی در Ω (درنتیجه در K_n) ندارد، هر A_n یک مجموعهٔ متناهی است. قرار می‌دهیم

$$Q_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} P_\alpha(z) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۱}$$

چون هر A_n متناهی است، هر Q_n یک تابع گویاست. قطبهای Q_n به‌ازای $n \geq 2$ در $K_n - K_{n-1}$ قرار دارند. بخصوص Q_n در مجموعهٔ بازی شامل K_{n-1} هلوریخت است. حال از قضیهٔ ۶.۱۳ نتیجه می‌شود که توابع گویایی مانند R_n وجود دارند که جمیع قطبهایشان در $S^2-\Omega$ بوده و

$$|R_n(z)-Q_n(z)| < ۲^{-n} \quad (z\in K_{n-۱}) \cdot \tag{۲}$$

حکم می‌کنیم که

$$f(z)=Q_۱(z)+\sum_{n=۲}^{\infty}\left(Q_n(z)-R_n(z)\right) \quad (z\in\Omega) \tag{۳}$$

خواص مطلوب را دارد.

N را ثابت می‌گیریم. بر K_N داریم

$$f=Q_۱+\sum_{n=۲}^{N}(Q_n-R_n)+\sum_{N+۱}^{\infty}(Q_n-R_n) \cdot \tag{۴}$$

بنابر (۲)، هر جمله در آخرین مجموع (۴) از ۲^{-n} بر K_N کمتر است. لذا سری اخیر بر K_N به‌طور یکنواخت به‌تابعی همگراست که درون K_N هلوریخت است. چون قطبهای هر R_n خارج Ω اند،

$$f-(Q_۱+\cdots+Q_N)$$

درون K_N هلوریخت است. لذا، چون N دلخواه بود، f درست قسمتهای اصلی مقرر را درون K_N، و درنتیجه در Ω، خواهد داشت.

نواحی همبند ساده

حال چند خاصیت از نواحی همبند ساده را خلاصه می‌کنیم (ر.ک. بخش ۳۸.۱۰) که نقش مهم آنها را در نظریهٔ توابع هلوریخت توضیح می‌دهند. از این خواص، (آ) و (ب) را می‌توان خواص توپولوژیک درونی Ω نامید؛ (پ) و (ت) را طریقهٔ نشانیدن Ω در $S^۲$ دانست؛ خواص (ث) تا (ح) را خواص تحلیلی شمرد؛ و (خ) را یک حکم جبری راجع به‌حلقهٔ $H(\Omega)$ به‌حساب آورد. قضیهٔ نگاشت ریمان ۸.۱۴ خاصیت بسیار مهم دیگری از نواحی همبند ساده می‌باشد. درواقع استلزام (خ) ← (آ) را با استفاده از آن ثابت خواهیم کرد.

۱۳.۱۱ قضیه. *هریک از نه شرط زیر در ناحیهٔ مسطح Ω سایر شرطها را ایجاب می‌کند:*

(آ) *Ω با قرص یکهٔ باز U همانریخت است؛*

(ب) *Ω همبند ساده است؛*

(پ) *به‌ازای هر مسیر بستهٔ γ در Ω و هر $\alpha\in S^۲-\Omega$، $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=۰$؛*

(ت) *$S^۲-\Omega$ همبند است؛*

(ث) *هر $f\in H(\Omega)$ را می‌توان با چندجمله‌ایها تقریب کرد، به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω؛*

(ج) *به‌ازای هر $f\in H(\Omega)$ و هر مسیر بستهٔ γ در Ω،*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=۰\,;$$

(چ) به هر $f\in H(\Omega)$ یک $F\in H(\Omega)$ **چنان نظیر است که** $F'=f$.

(ح) **اگر** $f\in H(\Omega)$ **و** $1/f\in H(\Omega)$، **یک** $g\in H(\Omega)$ **موجود است به‌طوری که** $f=\exp(g)$؛

(خ) **اگر** $f\in H(\Omega)$ **و** $1/f\in H(\Omega)$، **یک** $\varphi\in H(\Omega)$ **وجود دارد که** $f=\varphi^2$.

حکم (ح) یعنی f دارای «لگاریتم هلوریخت» g در Ω است؛ (خ) حکم می‌کند که f دارای «ریشهٔ دوم هلوریخت» φ در Ω است؛ و حکم (ج) می‌گوید که قضیهٔ کشی به‌ازای هر مسیر بسته در یک ناحیهٔ همبند ساده برقرار است.

در فصل ۱۶ خواهیم دید که قضیهٔ تک میدانی خاصیت مشخصهٔ دیگری از نواحی همبند ساده را توصیف می‌کند.

برهان. (آ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. همانریخت بودن Ω با U یعنی یک نگاشت یک به‌یک پیوسته مانند ψ از Ω به‌روی U هست که معکوسش ψ^{-1} نیز پیوسته می‌باشد. اگر φ یک منحنی بسته در Ω با بازهٔ پارامتری $[0, 1]$ باشد، قرار می‌دهیم

$$H(s,t)=\psi^{-1}\left(t\psi(\gamma(s))\right)\cdot$$

در این صورت $H: I^2\to\Omega$ پیوسته است؛ $H(s,t)=\psi^{-1}(0)$ (یک ثابت)؛ $H(s,1)=\gamma(s)$؛ و $H(0,t)=H(1,t)$ زیرا $\gamma(0)=\gamma(1)$. لذا Ω همبند ساده می‌باشد.

(ب) حکم (پ) را ایجاب می‌کند. هرگاه (ب) برقرار بوده و γ یک مسیر بسته در Ω باشد، آنگاه γ (طبق تعریف «همبندی ساده») با یک مسیر ثابت $\Omega-$ همجاست. لذا (پ)، طبق قضیهٔ ۱۰.۴۰، برقرار می‌باشد.

(پ) حکم (ت) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (ت) نادرست باشد. در این صورت $S^2-\Omega$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از S^2 است که همبند نیست. همانطور که در بخش ۱۰.۱ گفتیم، $S^2-\Omega$ اجتماع دو مجموعهٔ بستهٔ از هم‌جدای ناتهی مانند H و K است. فرض کنیم H آن مجموعه باشد که حاوی ∞ است. همچنین W متمم H نسبت به‌صفحه باشد. در این صورت $W=\Omega\cup K$. چون K فشرده است، قضیهٔ ۱۳.۵ (به‌ازای $f=1$) نشان می‌دهد که یک دور مانند Γ در $W-K=\Omega$ هست به‌طوری که به‌ازای $z\in K$، $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=1$. چون $K\neq\varnothing$، حکم (پ) برقرار نمی‌باشد.

(ت) حکم (ث) را ایجاب می‌کند. این بخشی از قضیهٔ ۱۳.۹ می‌باشد.

(ث) حکم (ج) را ایجاب می‌کند. $f\in H(\Omega)$ را اختیار و فرض می‌کنیم γ یک مسیر بسته در Ω باشد و چندجمله‌ایهای P_n را طوری می‌گیریم که بر γ^* به‌طور یکنواخت به f همگرا باشند. چون به‌ازای هر n، $\int_\gamma P_n(z)\,dz=0$، نتیجه می‌گیریم که (ج) برقرار می‌باشد.

(ج) حکم (چ) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (ج) برقرار باشد. $z_0\in\Omega$ را ثابت گرفته و قرار

می‌دهیم

$$F(z)=\int_{\Gamma(z)} f(\zeta)\,d\zeta \quad (z\in\Omega) \tag{۱}$$

که در آن $\Gamma(z)$ یک مسیر در Ω از $z_\circ$ تا z باشد. این معرف تابع F در Ω است. زیرا هرگاه $\Gamma_1(z)$ مسیر دیگری از $z_\circ$ تا z (در Ω) باشد، آنگاه Γ و پس از آن متقابل Γ_1 یک مسیر بسته در Ω است، انتگرال f روی این مسیر بسته ۰ است؛ درنتیجه اگر $\Gamma(z)$ با $\Gamma_1(z)$ تعویض شود، رابطهٔ (۱) تغییر نمی‌کند. حال تحقیق می‌کنیم که $F'=f$. $a\in\Omega$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت یک $r>0$ هست به‌طوری که $D(a;r)\subset\Omega$. به‌ازای $z\in D(a;r)$ می‌توان $F(z)$ را با انتگرالگیری از f روی مسیر $\Gamma(a)$ و سپس بازهٔ بستهٔ $[a,z]$ حساب کرد. لذا، به‌ازای $z\in D'(a;r)$،

$$\frac{F(z)-F(a)}{z-a}=\frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{۲}$$

و، مثل برهان قضیهٔ ۱۴.۱۰، پیوستگی f در a تساوی $F'(a)=f(a)$ را ایجاب می‌کند.

(چ) حکم (ح) را ایجاب می‌کند. هرگاه $f\in H(\Omega)$ و f در Ω دارای صفر نباشد، آنگاه $f'/f\in H(\Omega)$ و حکم (چ) ایجاب می‌کند که یک $g\in H(\Omega)$ هست به‌طوری که $g'=f'/f$. به g می‌توان یک ثابت اضافه کرد؛ درنتیجه، به‌ازای $z_\circ\in\Omega$ ی ، $f(z_\circ)=\{g(z_\circ)\}$. انتخاب g ی ما نشان می‌دهد که مشتق fe^{-g} در Ω مساوی ۰ و درنتیجه fe^{-g} ثابت است (زیرا Ω همبند است)، و نتیجه می‌شود که $f=e^g$.

(ح) حکم (خ) را ایجاب می‌کند. بنابر (ح)، $f=e^g$. قرار دهید $\varphi=\exp\left(\frac{1}{2}g\right)$.

(خ) حکم (آ) را ایجاب می‌کند. هرگاه Ω تمام صفحه باشد، آنگاه Ω با U همانریخت است: z را به $z/(1+|z|)$ بنگارید.

هرگاه Ω یک زیرناحیهٔ حقیقی صفحه‌ای باشد که حکم (خ) برقرار است، آنگاه یک همانریختی **هلوریخت** از Ω به‌روی U (یک نگاشت همدیس) وجود دارد. این حکم همان قضیهٔ نگاشت ریمان است که هدف اصلی فصل بعد می‌باشد. لذا برهان قضیهٔ ۱۱.۱۳ به‌مجرد اثبات قضیهٔ نگاشت ریمان کامل می‌شود. (ر.ک. تذکر بعد از صورت قضیهٔ ۸.۱۴.)

برقراری حکم (ح) در هر ناحیهٔ همبند ساده نتیجهٔ زیر را در بردارد (که می‌توان آن را با ابزارهای نسبتاً مقدماتی نیز ثابت کرد):

۱۲.۱۳ قضیه. ***هرگاه $f\in H(\Omega)$ که در آن Ω مجموعهٔ بازی در صفحه است و f در Ω دارای صفر نباشد، آنگاه $\log|f|$ در Ω توافقی است.***

برهان. به‌هر قرص $D\subset\Omega$ تابعی مانند $g\in H(D)$ چنان نظیر است که در D، $f=e^g$. هرگاه $u=\operatorname{Re} g$، آنگاه u در D توافقی است، و $|f|=e^u$. لذا $\log|f|$ در هر قرص در Ω توافقی

است، و این نتیجهٔ مطلوب را به‌ما می‌دهد.

تمرینات

۱. ثابت کنید هر تابع خوشریخت بر $S^۲$ گویاست.

۲. فرض کنید $\Omega = \{z : |۲z-۱| > ۱ \text{ و } |z| < ۱\}$ و $f \in H(\Omega)$.

(آ) آیا باید دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند P_n موجود باشد که $P_n \to f$ به‌طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω؟

(ب) آیا باید یک چنین دنباله موجود باشد که در Ω به‌طور یکنواخت به f همگرا باشد؟

(پ) اگر از f انتظار بیشتری برود یعنی f در مجموعهٔ بازی که شامل بست Ω است هلوریخت باشد، آیا جواب (ب) تغییر می‌کند؟

۳. آیا دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند P_n وجود دارد که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $P_n(\circ) = ۱$ ولی به‌ازای هر $z \neq \circ$، وقتی $n \to \infty$، $P_n(z) \to \circ$؟

۴. آیا دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند P_n وجود دارد که

$$\lim_{n \to \infty} P_n(z) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } \operatorname{Im} z > \circ \\ \circ & \text{اگر } z \text{ حقیقی باشد} \\ -۱ & \text{اگر } \operatorname{Im} z < \circ \end{cases} \text{؟}$$

۵. فرض کنید Δ_n، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، یک قرص بسته در U بوده، و I_n یک قوس (نقش همانریختی $[\circ, ۱]$) در $U - \Delta_n$ باشد که هر شعاع U را قطع می‌کند. چندجمله‌ایهایی مانند P_n وجود دارند که بر Δ_n بسیار کوچک بوده و بیش و کم بر L_n دلخواهند. نشان دهید که $\{\Delta_n\}$، $\{L_n\}$، و $\{P_n\}$ را می‌توان طوری گرفت که سری $f = \Sigma P_n$ معرف تابعی مانند $f \in H(U)$ باشد که در هیچ نقطه‌ای از T حد شعاعی ندارد. به‌عبارت دیگر $\lim_{r \to ۱} f(re^{i\theta})$ به‌ازای هیچ θی حقیقی موجود نباشد.

۶. ذیلاً طرز ساختن دیگری از چنین تابع را شرح می‌دهیم. فرض کنید $\{n_k\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد به‌طوری‌که $n_۱ > ۱$ و $n_{k+۱} > ۲kn_k$. تعریف کنید

$$h(z) = \sum_{k=۱}^{\infty} ۵^k z^{n_k} \cdot$$

ثابت کنید این سری به‌ازای $|z| < ۱$ همگراست و ثابتی چون $c > \circ$ هست به‌طوری‌که به‌ازای هر z که $|z| = ۱-(۱/n_m)$، $|h(z)| > c \cdot ۵^m$.

[**راهنمایی.** به‌ازای چنین z، جملهٔ mم سری معرف $h(z)$ از مجموع تمام جملات دیگر خیلی بزرگتر است.] لذا h هیچ حد شعاعی متناهی ندارد.

همچنین ثابت کنید که h باید بی‌نهایت صفر در U داشته باشد (قس. تمرین ۱۵ در فصل ۱۲.) در

واقع ثابت کنید به‌هر عدد مختلط α بی‌نهایت $z \in U$ نظیر است که $h(z) = \alpha$.

۷. نشان دهید که در قضیهٔ ۹.۱۳ این فرض که A هر مؤلفهٔ $S^2 - \Omega$ را قطع می‌کند لازم نیست. کافی است فرض کنیم که بست A هر مؤلفهٔ $S^2 - \Omega$ را قطع می‌کند.

۸. قضیهٔ میتاگ ـ لفلر را در حالتی که Ω تمام صفحه است با استدلالی مستقیم و بدون ارجاع به‌قضیهٔ رونگه ثابت نمایید.

۹. فرض کنید Ω یک ناحیهٔ همبند ساده باشد، $f \in H(\Omega)$، f در Ω دارای صفر نباشد، و n یک عدد صحیح مثبت باشد. ثابت کنید تابعی مانند $g \in H(\Omega)$ هست به‌طوری که $g^n = f$.

۱۰. فرض کنید Ω یک ناحیه باشد، $f \in H(\Omega)$، و $f \not\equiv 0$. ثابت کنید f در Ω دارای لگاریتم هلوریخت است اگر و فقط اگر f به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n دارای ریشه‌های nم هلوریخت در Ω باشد.

۱۱. فرض کنید $f_n \in H(\Omega)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$، f یک تابع مختلط در Ω باشد، و به‌ازای هر $z \in \Omega$، $f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$. ثابت کنید Ω زیرمجموعهٔ باز چگالی مانند V دارد که f بر آن هلوریخت است.

راهنمایی. قرار دهید $\varphi = \sup |f_n|$ و با استفاده از قضیهٔ بئر ثابت کنید هر قرص در Ω شامل قرصی است که φ برآن کراندار است. تمرین ۵ در فصل ۱۰ را به‌کار برید. (درحالت‌کلی $V \neq \Omega$. قس. تمرینهای ۳ و ۴.)

۱۲. با این حال فرض کنید f **یک** تابع اندازه‌پذیر مختلط تعریف شده در صفحهٔ مختلط باشد، و ثابت کنید یک دنباله از چندجمله‌ایهای هلوریخت مانند P_n هست به‌طوری که به‌ازای **تقریباً** هر z، $\lim_{n \to \infty} P_n(z) = f(z)$ (نسبت به‌اندازهٔ لبگ دوبعدی).

فصل چهارده
نگاشت همدیس

حفظ زوایا

۱.۱۴ تعریف. هر عدد مختلط $z \neq \circ$ یک **جهت** از مبدأ را تعیین می‌کند که با نقطهٔ

$$A[z] = \frac{z}{|z|} \tag{۱}$$

بر دایرهٔ یکه تعریف می‌شود.

فرض کنیم f یک نگاشت از ناحیهٔ Ω به‌توی صفحه باشد، $z_\circ \in \Omega$، و $z_\circ$ دارای همسایگی سفتهٔ $D'(z_\circ; r) \subset \Omega$ باشد که در آن $f(z) \neq f(z_\circ)$. گوییم f در $z_\circ$ ***زوایا را حفظ می‌کند*** اگر

$$\lim_{r \to \circ} e^{-i\theta} A[f(z_\circ + re^{i\theta}) - f(z_\circ)] \quad (r > \circ) \tag{۲}$$

موجود و ***مستقل از*** θ باشد.

به‌زبانی کمتر دقیق، شرط آن است که به‌ازای هر دو شعاع L' و L'' از $z_\circ$، زاویهٔ بین نقشهایشان $f(L')$ و $f(L'')$ در $f[z]$ از حیث اندازه و جهت همان زاویهٔ بین L' و L'' باشد.

خاصیت حفظ زوایا در هر نقطهٔ یک ناحیه مشخصهٔ توابع هلوریختی است که مشتقشان در این ناحیه دارای صفر نیست. این نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۲.۱۴ و دلیل آن است که چرا توابع هلوریختی که مشتق صفر نشو دارند **نگاشتهای همدیس** نام گرفته‌اند.

۲.۱۴ قضیه. ***فرض کنیم f ناحیهٔ Ω را به‌توی صفحه بنگارد. هرگاه $f'(z_\circ)$ در نقطه‌ای مانند $z_\circ \in \Omega$ موجود بوده و $f'(z_\circ) \neq \circ$، آنگاه f زوایا را در $z_\circ$ حفظ می‌کند. به‌عکس، هرگاه***

دیفرانسیل f در $z_\circ$ موجود و مخالف $\circ$ بوده و f در $z_\circ$ زوایا را حفظ نماید، آنگاه $f'(z_\circ)$ موجود و مخالف $\circ$ می‌باشد.

در اینجا طبق معمول $f'(z_\circ) = \lim\,[f(z)-f'(z_\circ)]/(z-z_\circ)$. دیفرانسیل f در $z_\circ$ یک تبدیل خطی مانند L از R^2 به‌توی R^2 است به‌طوری که اگر $z_\circ = (x_\circ, y_\circ)$،

$$f(x_\circ+x\ ,y_\circ+y)=f(x_\circ\ ,y_\circ)+L\,(x\,,y)+(x^2+y^2)^{1/2}\eta(x\,,y) \tag{۱}$$

که در آن، مثل تعریف ۲۲.۷، وقتی $x \to \circ$ و $y \to \circ$، $\eta(x,y) \to \circ$.

برهان. به‌خاطر سادگی فرض می‌کنیم $z_\circ = f(z_\circ) = \circ$. هرگاه $f'(\circ) = a \neq \circ$، آنگاه بی‌درنگ معلوم می‌شود که

$$e^{-i\theta}A\,[f(re^{i\theta})]=\frac{e^{-i\theta}f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|}\to\frac{a}{|a|}\,(r\to\circ)\,; \tag{۲}$$

درنتیجه f زوایا را در $\circ$ حفظ می‌کند. به‌عکس، هرگاه دیفرانسیل f در $\circ$ موجود و مخالف $\circ$ باشد، آنگاه رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$f(z)=\alpha z+\beta\,\overline{z}\,+|z|\,\eta\,(z) \tag{۳}$$

که در آن وقتی $z \to \circ$، $\eta\,(z) \to \circ$ و α و β اعداد مختلط هر دو $\circ$ نیستند. هرگاه f زوایا را در $\circ$ نیز حفظ کند، آنگاه

$$\lim_{r\to\circ}\, e^{-i\theta}A\,[f(re^{i\theta})]=\frac{\alpha+\beta\,e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta\,e^{-2i\theta}\,|} \tag{۴}$$

موجود و مستقل از θ است. می‌توان θ هایی راکه به‌ازای آنها مخرج (۴) صفر است مستثنی کرد. از این θ ها در $[\circ\ ,\ 2\pi)$ حداکثر دو تا وجود دارد. به‌ازای سایر θ ها نتیجه می‌گیریم که $\alpha+\beta\,e^{-2i\theta}$ بر یک شعاع ثابت ماربر $\circ$ قرار دارد و این فقط وقتی ممکن است که $\beta = \circ$. لذا $\alpha \neq \circ$ و رابطهٔ (۳) ایجاب می‌کند که $f'(\circ) = \alpha$.

تذکر. هیچ تابع هلوریختی زوایا را در نقطه‌ای که مشتقش $\circ$ است حفظ نمی‌کند. ما برهان سادهٔ آن را حذف می‌کنیم. با این حال دیفرانسیل یک تبدیل ممکن است در نقطه‌ای که زوایا حفظ می‌شوند $\circ$ باشد. **مثال:** $f(z) = |z|\,z$، $z_\circ = \circ$.

تبدیلات خطی کسری

۳.۱۴. اگر a و b و c و d اعداد مختلطی باشند که $ad-bc \neq \circ$، نگاشت

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \tag{۱}$$

یک **تبدیل خطی کسری** نام دارد. بهتر است که رابطهٔ (۱) را نگاشتی از کرهٔ $S^۲$ به‌توی $S^۲$ با قراردادهای روشنی راجع به‌نقطهٔ ∞ در نظر بگیریم. به‌عنوان مثال، $-d/c$ به ∞ و ∞ به a/c به‌ازای $c \neq ۰$ نگاشته می‌شود. در این صورت به‌آسانی معلوم می‌شود که هر تبدیل خطی کسری یک نگاشت یک به‌یک از $S^۲$ به‌روی $S^۲$ است. به‌علاوه، هریک با برهمنهش تبدیلات از نوع زیر به‌دست می‌آید:

(آ) انتقالها: $z \to z+b$؛

(ب) دورانها: $z \to az$، $|z| = ۱$؛

(پ) تجانسها: $z \to rz$، $r > ۰$؛

(ت) انعکاس: $z \to ۱/z$.

اگر در (۱) $c = ۰$، این امر واضح است. اگر $c \neq ۰$، از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz+d} \text{ ، } \lambda = \frac{bc-ad}{c} \cdot \qquad (۲)$$

سه نوع اول بوضوح خطوط را به‌خطوط و دوایر را به‌دوایر می‌برند. این امر در مورد (ت) درست نیست. ولی هرگاه خانوادهٔ $\mathscr{F}$ از تمام خطوط مستقیم و تمام دوایر تشکیل شده باشد، آنگاه $\mathscr{F}$ به‌وسیلهٔ (ت) حفظ می‌شود؛ و لذا نتیجهٔ مهمی به‌دست می‌آید که **$\mathscr{F}$ به‌وسیلهٔ هر تبدیل خطی کسری حفظ می‌شود.** [احتمالاً دریافته‌اید که وقتی $\mathscr{F}$ را خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $S^۲$ بگیریم، $\mathscr{F}$ از تمام دوایر بر $S^۲$، از طریق تصویر گنجنگار ۱.۱۳ (۱)، تشکیل می‌شود. ما از این خاصیت $\mathscr{F}$ استفاده نکرده و برهانش را حذف می‌کنیم.]

اثبات حفظ شدن $\mathscr{F}$ به‌وسیلهٔ انعکاس نسبتاً آسان است. هندسهٔ تحلیلی مقدماتی نشان می‌دهد که هر عضو $\mathscr{F}$ مکان هندسی معادله‌ای است مانند:

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = ۰ \cdot \qquad (۳)$$

که در آن α و γ ثابتهایی حقیقی و β یک ثابت مختلط است مشروط بر اینکه $\beta\bar{\beta} > \alpha\gamma$. اگر $\alpha \neq ۰$، رابطهٔ (۳) معرف یک دایره است؛ $\alpha = ۰$ خطوط مستقیم را به‌ما می‌دهد. تعویض z با $۱/z$ رابطهٔ (۳) را به

$$\alpha + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma z\bar{z} = ۰ \qquad (۴)$$

بدل می‌کند که معادله‌ای از همان نوع می‌باشد.

فرض کنیم a و b و c اعداد مختلط متمایزی باشند. یک تبدیل خطی کسری مانند φ می‌سازیم که سه‌تایی مرتب $\{a, b, c\}$ را به‌توی $\{۰, ۱, \infty\}$ بنگارد؛ یعنی

$$\varphi(z) = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)} \cdot \qquad (۵)$$

فقط یک چنین φ وجود دارد. چراکه اگر $\varphi(a)=0$، باید $z-a$ را در صورت داشته باشیم؛ اگر $\varphi(c)=\infty$، باید $z-c$ را در مخرج داشته باشیم؛ و اگر $\varphi(b)=1$، به‌رابطهٔ (۵) خواهیم رسید. اگر a یا b یا c مساوی ∞ باشد، می‌توان فرمولهایی مشابه (۵) را به‌آسانی نوشت. اگر (۵) را با معکوس یک تبدیل از همان نوع تعقیب کنیم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

به‌ازای هر دو سه‌تایی مرتب $\{a,b,c\}$ و $\{a',b',c'\}$ در S^2 یک و فقط یک تبدیل خطی کسری وجود دارد که a را به a'، b را به b'، و c را به c' می‌نگارد.

(البته فرض است که $a\neq b$، $a\neq c$، و $b\neq c$، و به‌همین ترتیب در مورد a'، b'، و c'.)

از این نتیجه می‌شود که هر دایره را می‌توان با یک تبدیل خطی کسری به‌روی هر دایره نگاشت. جالبتر آنکه هر دایره را می‌توان به‌روی هر خط مستقیم نگاشت (به‌شرط آنکه ∞ را جزء خط بگیریم)، و درنتیجه ***هر قرص باز را می‌توان به‌طور همدیس به‌روی هر نیمصفحهٔ باز نگاشت.***

حال یک چنین نگاشت را به‌طور صریحتر مطرح می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم

$$\varphi(z)=\frac{1+z}{1-z}\cdot \tag{۶}$$

φ مجموعهٔ $\{1,0,-1\}$ را به $\{0,1,\infty\}$ می‌نگارد. بازهٔ باز $(-1,1)$ به‌روی محور حقیقی مثبت نگاشته می‌شود. دایرهٔ یکهٔ T از -1 و 1 می‌گذرد. لذا $\varphi(T)$ خط مستقیمی ماربر $\varphi(-1)=0$ می‌باشد. چون T با محور حقیقی در -1 زاویهٔ قائمه می‌سازد، $\varphi(T)$ با محور حقیقی در 0 زاویهٔ قائمه‌خواهد ساخت. لذا $\varphi(T)$ محورموهومی می‌باشد. چون $\varphi(0)=1$، ***φ یک نگاشت یک به‌یک همدیس از قرص یکهٔ باز به‌روی نیمصفحهٔ راست باز می‌باشد.***

در قضیهٔ ۶.۱۲ نیز نقش تبدیلات خطی کسری در نظریهٔ نگاشت همدیس به‌خوبی ترسیم شده است.

۴.۱۴. با تبدیلات خطی کسری می‌توان قضایای مربوط به‌رفتار توابع هلوریخت در مجاورت خطوط مستقیم را به‌حالاتی که قوسهای مستدیر ظاهر می‌شوند انتقال داد. کافی است روش را با بحثی غیرصوری از اصل انعکاس توضیح دهیم.

فرض کنیم Ω ناحیه‌ای در U باشد که بعضاً به‌وسیلهٔ قوس L بر دایرهٔ یکه کراندار است، و f بر $\overline{\Omega}$ پیوسته، در Ω هلوریخت، و بر L حقیقی باشد. تابع

$$\psi(z)=\frac{z-i}{z+i} \tag{۱}$$

نیمصفحهٔ بالایی را به‌روی U می‌نگارد. اگر $g=f\circ\psi$، قضیهٔ ۱۴.۱۱ یک توسیع هلوریخت G از g را به‌دست می‌دهد، و در این صورت $F=G\circ\psi^{-1}$ یک توسیع هلوریخت F از f را به‌دست

می‌دهد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$f(z^*) = \overline{F(z)} \qquad (۲)$$

که در آن $z^* = ۱/\overline{z}$.

آخرین حکم از یکی از خواص ψ نتیجه می‌شود: هرگاه $w = \psi(z)$ و $w_۱ = \psi(\overline{z})$، آنگاه به‌آسانی با محاسبه معلوم می‌شود که $w_۱ = w^*$.

تمرینات ۲ تا ۵ کاربردهای دیگری از این روش را به‌دست می‌دهند.

خانواده‌های نرمال

قضیهٔ نگاشت ریمان با نمایش تابع نگاشت به‌صورت جواب یک مسئلهٔ اکسترمم ثابت می‌شود. وجود این جواب تابع خاصیت فشردگی بسیار مفید خانواده‌هایی از توابع هلوریخت است که اینک تنظیم می‌گردد.

۵.۱۴ تعریف. فرض کنیم به‌ازای ناحیه‌ای مانند Ω، $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$. $\mathscr{F}$ را یک ***خانوادهٔ نرمال*** نامیم اگر هر دنباله از اعضای $\mathscr{F}$ شامل زیردنباله‌ای باشد که بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت **همگرا**ست. لازم نیست تابع حدی متعلق به $\mathscr{F}$ باشد.

(گاهی با این فرض که هر دنباله در $\mathscr{F}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت همگراست یا به ∞ میل می‌کند تعریف کلیتری را می‌پذیرند. این کار برای برخورد با توابع خوشریخت انجام خواهد شد.)

۶.۱۴ قضیه. *فرض کنیم $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ و $\mathscr{F}$ بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ ناحیهٔ Ω به‌طور یکنواخت کراندار باشد. در این صورت $\mathscr{F}$ یک خانوادهٔ نرمال می‌باشد.*

برهان. فرض ما یعنی به‌هر $K \subset \Omega$ی فشرده عددی مانند $M(K) < \infty$ چنان نظیر است که به‌ازای هر $f \in \mathscr{F}$ و هر $z \in K$، $|f(z)| \le M(K)$.

فرض کنیم $\{K_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده باشد که اجتماعشان در Ω است به‌طوری که K_n درون $K_{n+۱}$ قرار دارد. یک چنین دنباله در قضیهٔ ۳.۱۳ ساخته شده است. در این صورت اعداد مثبتی مانند δ_n وجود دارند به‌طوری که

$$D(z\,;۲\delta_n) \subset K_{n+۱} \quad (z \in K_n) \cdot \qquad (۱)$$

دو نقطهٔ مانند z' و z'' در K_n را چنان در نظر می‌گیریم که $|z'-z''| < \delta_n$ و فرض می‌کنیم γ دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به‌مرکز z' و شعاع $۲\delta_n$ باشد، و $|f(z')-f(z'')|$ را به‌وسیلهٔ فرمول‌کشی تخمین می‌زنیم. چون

$$\frac{۱}{\zeta-z'} - \frac{۱}{\zeta-z''} = \frac{z'-z''}{(\zeta-z')(\zeta-z'')},$$

داریم

$$f(z')-f(z'')=\frac{z'-z''}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}\,d\zeta, \qquad (2)$$

و چون به‌ازای هر $\zeta\in\gamma^*$، $|\zeta-z'|=2\delta_n$ و $|\zeta-z''|>\delta_n$، رابطهٔ (۲) نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$|f(z')-f(z'')|<\frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}\,|z'-z''| \qquad (3)$$

که به‌ازای هر $f\in\mathscr{F}$ و هر z' و z'' در K_n معتبر است مشروط بر اینکه $|z'-z''|<\delta_n$.

این مرحلهٔ مهم برهان بود: ثابت کرده‌ایم که به‌ازای هر K_n، تحدید اعضای $\mathscr{F}$ به K_n یک **خانوادهٔ همپیوسته** تشکیل می‌دهند.

اگر به‌ازای $j=1, 2, 3, \cdots$، $f_j\in\mathscr{F}$، قضیهٔ ۲۸.۱۱ ایجاب می‌کند که مجموعه‌هایی نامتناهی مانند S_n از اعداد صحیح مثبت وجود دارند که $S_1\supset S_2\supset S_3\supset\cdots$؛ درنتیجه، وقتی $j\to\infty$ در S_n، دنبالهٔ $\{f_j\}$ به‌طور یکنواخت بر K_n همگراست. پس فرایند قطری یک مجموعهٔ نامتناهی مانند S به‌دست می‌دهد به‌طوری که وقتی $j\to\infty$ در S، $\{f_j\}$ بر هر K_n (و درنتیجه بر هر مجموعهٔ فشردهٔ $K\subset\Omega$) به‌طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

قضیهٔ نگاشت ریمان

۷.۱۴. هم‌ارزی همدیس. دو ناحیهٔ Ω_1 و Ω_2 را **به‌طور همدیس هم‌ارز** گوییم اگر تابعی مانند $\varphi\in H(\Omega_1)$ موجود باشد به‌طوری که φ در Ω_1 یک به‌یک بوده و $\varphi(\Omega_1)=\Omega_2$؛ یعنی یک نگاشت یک به‌یک همدیس از Ω_1 به‌روی Ω_2 موجود باشد. تحت این شرایط، معکوس φ در Ω_2 هلوریخت است (قضیهٔ ۳۳.۱۰) و درنتیجه یک نگاشت همدیس از Ω_2 به‌روی Ω_1 می‌باشد.

لذا نواحی به‌طور همدیس هم‌ارز همانریخت‌اند. ولی رابطهٔ بسیار مهمتری بین نواحی به‌طور همدیس هم‌ارز وجود دارد: اگر φ مثل فوق باشد، $f\to f\circ\varphi$ یک نگاشت یک به‌یک از $H(\Omega_2)$ به‌روی $H(\Omega_1)$ است که مجموعها و حاصل ضربها را حفظ می‌کند؛ یعنی یک یکریختی حلقه‌ها از $H(\Omega_2)$ به‌روی $H(\Omega_1)$ است. اگر Ω_1 ساختار ساده‌ای داشته باشد، مسائل مربوط به $H(\Omega_2)$ را می‌توان به‌مسائل در $H(\Omega_1)$ تبدیل کرد و جوابها را به‌کمک تابع نگاشت φ به $H(\Omega_2)$ بازگرداند. مهمترین حالت مبتنی بر قضیهٔ نگاشت ریمان است (که در آن Ω_2 قرص یکهٔ U است) که بررسی $H(\Omega)$ را به‌مطالعهٔ $H(U)$ به‌ازای هر زیرناحیهٔ حقیقی همبند سادهٔ صفحه تحویل می‌کند. البته برای جوابهای صریح مسائل باید اطلاعات نسبتاً دقیقی از تابع نگاشت داشته باشیم.

۸.۱۴ قضیه. *هر ناحیهٔ همبند ساده مانند Ω در صفحه (غیر از خود صفحه) به‌طور همدیس هم‌ارز قرص یکهٔ باز U می‌باشد.*

تذکر. بنابر قضیهٔ لیوویل، حالت صفحه باید مستثنی شود. لذا، با آنکه دو ناحیه همانریخت‌اند، صفحه به‌طور همدیس هم‌ارز U نیست.

تنها خاصیتی از نواحی همبند ساده که در برهان به‌کار خواهد رفت این است که هر تابع هلوریخت که در چنین ناحیه‌ای صفر نداشته باشد در آن دارای ریشهٔ دوم هلوریخت است. این قسمت «(خ) حکم (آ) را ایجاب می‌کند» در قضیهٔ ۱۱.۱۳ را سامان داده و بدین‌ترتیب برهان آن قضیه را به‌اتمام می‌رساند.

برهان. فرض کنیم Ω یک ناحیهٔ همبند ساده در صفحه بوده، w_0 یک عدد مختلط باشد، و $w_0 \notin \Omega$. همچنین Σ ردهٔ تمام $\psi \in H(\Omega)$ هایی باشد که در Ω یک به‌یک بوده و Ω را به‌توی U می‌نگارد. باید ثابت کنیم که $\psi \in \Sigma$ای ناحیهٔ Ω را به **روی** U می‌نگارد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که Σ ***تهی نیست.*** چون Ω همبند ساده است، تابعی مانند $\varphi \in H(\Omega)$ وجود دارد به‌طوری که در Ω، $\varphi^2(z) = z - w_0$. هرگاه $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$، آنگاه نیز $\varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2)$؛ در نتیجه $z_1 = z_2$. لذا φ یک به‌یک است. همین استدلال نشان می‌دهد که دو نقطهٔ متمایز مانند z_1 و z_2 در Ω نیست که $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$. چون φ یک نگاشت باز است، $\varphi(\Omega)$ شامل قرصی مانند $D(a\,;r)$ است که در آن $0 < r < |a|$. لذا قرص $D(-a\,;r)$ مجموعهٔ $\varphi(\Omega)$ را قطع نمی‌کند، و اگر تعریف کنیم $\psi = r/(\varphi + a)$، معلوم می‌شود که $\psi \in \Sigma$.

گام بعدی نشان دادن آن است که **هرگاه $\psi \in \Sigma$، $\psi(\Omega)$ تمام U را نپوشاند، و $z_0 \in \Omega$، آنگاه تابعی مانند $\psi_1 \in \Sigma$ وجود دارد که**

$$|\psi'_1(z_0)| > |\psi'(z_0)| \cdot$$

بهتر است از توابع φ_α با تعریف

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

استفاده کنیم. به‌ازای $\alpha \in U$، φ_α یک نگاشت یک به‌یک از U به‌روی U است. معکوس آن $\varphi_{-\alpha}$ می‌باشد (قضیهٔ ۴.۱۲).

فرض کنیم $\psi \in \Sigma$، $\alpha \in U$، و $\alpha \notin \psi(\Omega)$. در این صورت $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ و $\varphi_\alpha \circ \psi$ صفری در Ω ندارد. لذا تابعی مانند $g \in H(\Omega)$ هست به‌طوری که $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. می‌بینیم که g (همانند برهان $\Sigma \neq \varnothing$) یک به‌یک است. لذا $g \in \Sigma$. و اگر $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$ که در آن $\beta = g(z_0)$، داریم $\psi_1 \in \Sigma$. حال با نماد $s(w) = w^2$ داریم

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta} \circ \psi_1 \cdot$$

چون $\psi_1(z_0) = 0$، از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\psi'(z_0) = F'(0)\,\psi_1'(z_0)$$

که در آن $F = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}$. می‌بینیم که $F(U) \subset U$ و F در U یک به‌یک نیست. لذا، طبق لم شوارتز، $|F'(0)| < 1$ (ر. ک. بخش ۵.۱۲)؛ درنتیجه $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$. [توجه کنید که $\psi'(z_0) \neq 0$ زیرا ψ در Ω یک به‌یک است.]

$z_0 \in \Omega$ را ثابت گرفته و قرار می‌دهیم

$$\eta = \sup\{|\psi'(z_0)| : \psi \in \Sigma\} \cdot$$

از مطالب پیشگفته واضح است که **هر** $h \in \Sigma$ **که** $|h'(z_0)| = \eta$ **ناحیهٔ Ω را به‌روی $\overline{U}$ می‌نگارد**. لذا به‌محض اثبات وجود چنین h برهان تمام خواهد شد.

چون به‌ازای هر $\psi \in \Sigma$ و $z \in \Omega$، $|\psi(z)| < 1$، قضیهٔ ۶.۱۴ نشان می‌دهد که Σ یک خانوادهٔ نرمال است. از تعریف η معلوم می‌شود که دنباله‌ای مانند $\{\psi_n\}$ در Σ هست که $|\psi_n'(z_0)| \to \eta$، و به‌خاطر نرمال بودن Σ می‌توان زیردنباله‌ای (که برای ساده بودن مجدداً با $\{\psi_n\}$ نموده می‌شود) استخراج کرد که بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌حدی مانند $h \in H(\Omega)$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد. بنابر قضیهٔ ۲۸.۱۰، $|h'(z_0)| = \eta$. چون $\Sigma \neq \varnothing$، $\eta > 0$؛ در نتیجه h ثابت نیست. و چون به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $\psi_n(\Omega) \subset U$، داریم $h(\Omega) \subset \overline{U}$ ولی قضیهٔ نگاشت باز نشان می‌دهد که درواقع $h(\Omega) \subset U$.

لذا تنها باقی است نشان دهیم که h یک به‌یک است. نقاط متمایز z_1 و z_2 را در Ω ثابت می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\alpha = h(z_1)$ و به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $\alpha_n = \psi_n(z_1)$، و فرض می‌کنیم $\overline{D}$ یک قرص مستدیر بسته در Ω به‌مرکز z_2 باشد به‌طوری‌که $z_1 \notin \overline{D}$ و $h-\alpha$ صفری بر مرز $\overline{D}$ نداشته باشد. این امکان‌پذیر است زیرا صفرهای $h-\alpha$ هیچ نقطهٔ حدی در Ω ندارند. توابع $\psi_n - \alpha_n$ بر $\overline{D}$ به‌طور یکنواخت به $h-\alpha$ همگرایند. این تابعها در D دارای صفر نیستند زیرا یک به‌یک‌اند و در z_1 دارای صفر می‌باشند. حال از قضیهٔ روشه نتیجه می‌شود که $h-\alpha$ در D دارای صفر نیست. بخصوص $h(z_2) \neq h(z_1)$. لذا $h \in \Sigma$ و برهان تمام می‌باشد.

در تمرین ۲۶ برهان سازنده‌تری به‌اختصار بیان شده است.

۹.۱۴ چند تبصره. برهان‌فوق‌نیز نشان می‌دهد که $h(z_0) = 0$ زیرا هرگاه $h(z_0) = \beta$ و $\beta \neq 0$، آنگاه $\varphi_\beta \circ h \in \Sigma$ و

$$|(\varphi_\beta \circ h)'(z_0)| = |(\varphi'_\beta(\beta)\,h'(z_0)| = \frac{|h'(z_0)|}{1-|\beta|^2} > |h'(z_0)| \cdot$$

جالب این است که با آنکه h با ماکزیمم سازی $|\psi'(z_\circ)|$ به‌ازای $\psi \in \Sigma$ به‌دست آمد، اگر f روی ردهٔ تمام نگاشتهای هلوریخت از Ω به‌توی U (نه لزوماً یک به‌یک) تغییر کند، h از ماکزیمم‌سازی $|f'(z_\circ)|$ نیز به‌دست می‌آید. زیرا هرگاه f چنین تابعی باشد، آنگاه $g = f \circ h^{-1}$ مجموعهٔ U را به‌توی U می‌نگارد؛ درنتیجه $|g'(\circ)| \leq 1$ و در آن (بنابر لم شوارتز) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر g یک دوران باشد. لذا قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:
هرگاه $f \in H(\Omega)$، $f(\Omega) \subset U$، و $z_\circ \in \Omega$، ***آنگاه*** $|f'(z_\circ)| \leq |h'(z_\circ)|$ ***و در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به‌ازای ثابتی مانند*** λ ***که*** $|\lambda| = 1$، $f(z) = \lambda h(z)$.

ردهٔ $\mathscr{S}$

۱۰.۱۴ تعریف. $\mathscr{S}$ ردهٔ تمام $f \in H(U)$هایی است که در U **یک به‌یک** بوده و در روابط

$$f(\circ) = \circ \quad \text{و} \quad f'(\circ) = 1 \tag{1}$$

صدق می‌کنند.

لذا هر $f \in \mathscr{S}$ دارای بسط به‌سری توانی زیر می‌باشد:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in U) \cdot \tag{2}$$

ردهٔ $\mathscr{S}$ تحت جمع یا ضرب بسته نیست ولی خواص جالب بسیار دارد. ما در این بخش فقط چند تایی از آنها را مطرح می‌کنیم. قضیهٔ ۱۵.۱۴ در برهان قضیهٔ مرگلیان (*Mergelyan*) در فصل ۲۰ به‌کار خواهد رفت.

۱۱.۱۴ مثال. هرگاه $|\alpha| \leq 1$ و

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} z^n,$$

آنگاه $f_\alpha \in \mathscr{S}$.

زیرا هرگاه $f_\alpha(z) = f_\alpha(w)$، آنگاه $(z-w)(1-\alpha^2 zw) = \circ$، و عامل دوم به‌ازای $|z| < 1$ و $|w| < 1$ مساوی ۰ نیست.

وقتی $|\alpha| = 1$، f_α را یک تابع کوبه (*Koebe*) می‌نامند. یافتن نواحی $f_\alpha(U)$ را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

۱۲.۱۴ قضیه. (آ) ***هرگاه*** $f \in \mathscr{S}$، $|\alpha| = 1$، و $g(z) = \overline{\alpha} f(\alpha z)$، ***آنگاه*** $g \in \mathscr{S}$. (ب) ***اگر*** $f \in \mathscr{S}$، ***تابعی مانند*** $g \in \mathscr{S}$ ***هست به‌طوری که***

$$g^2(z) = f(z^2) \quad (z \in U) \cdot \tag{1}$$

برهان. (آ) واضح است. برای اثبات (ب) می‌نویسیم $f(z) = z\varphi(z)$. در این صورت

$\varphi \in H(U)$، $\varphi(\circ) = ۱$، و φ در U صفری ندارد زیرا f در $U-\{\circ\}$ دارای صفر نیست. لذا تابعی مانند $h \in H(U)$ وجود دارد که $h(\circ) = ۱$ و $h^۲(z) = \varphi(z)$. قرار می‌دهیم

$$g(z) = z h(z^۲) \ (z \in U) \cdot \qquad (۲)$$

در این صورت $g^۲(z) = z^۲ h^۲(z^۲) = z^۲ \varphi(z^۲) = f(z^۲)$؛ درنتیجه رابطهٔ (۱) برقرار است. واضح است که $g(\circ) = \circ$ و $g'(\circ) = ۱$. باید نشان دهیم که g یک به‌یک است.

فرض کنیم z و w در U بوده و $g(z) = g(w)$. چون f یک به‌یک است، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $z^۲ = w^۲$. لذا یا $z = w$ (چیزی که می‌خواهیم ثابت کنیم) یا $z = -w$. در حالت اخیر رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که $g(z) = -g(w)$. پس $g(z) = g(w) = \circ$، و چون g در $U-\{\circ\}$ دارای صفر نیست، خواهیم داشت $z = w = \circ$.

۱۳.۱۴ قضیه. هرگاه $F \in H(U-\{\circ\})$، F در U یک به‌یک باشد، و

$$F(z) = \frac{۱}{z} + \sum_{n=\circ}^{\infty} \alpha_n z^n \ (z \in U), \qquad (۱)$$

آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n\,|\alpha_n|^۲ \le ۱ \cdot \qquad (۲)$$

به‌دلایلی که در برهان معلوم می‌شود، این قضیه را معمولاً **قضیهٔ مساحت** می‌نامند.

برهان. مقدار $\alpha_\circ$ اهمیتی ندارد. لذا فرض می‌کنیم $\alpha_\circ = \circ$. اگر $F(z)$ را با $\lambda F(\lambda z)$ ($|\lambda| = ۱$) عوض کنیم، نه مفروضات و نه نتیجه تغییر نمی‌کنند. لذا فرض می‌کنیم $\alpha_۱$ حقیقی باشد.

به‌ازای $\circ < r < ۱$ قرار می‌دهیم $U_r = \{z : |z| < r\}$، $C_r = \{z : |z| = r\}$، و $V_r = \{z : r < |z| < ۱\}$. در این صورت (طبق قضیهٔ نگاشت باز اعمال شده بر $۱/F$) $F(U_r)$ یک همسایگی ∞ است. مجموعه‌های $F(U_r)$، $F(C_r)$، و $F(V_r)$ از هم‌جدایند زیرا F یک به‌یک است. می‌نویسیم

$$F(z) = \frac{۱}{z} + \alpha_۱ z + \varphi(z) \ \ (z \in U), \qquad (۳)$$

و $F = u + iv$، و

$$A = \frac{۱}{r} + \alpha_۱ r \ \text{و}\ B = \frac{۱}{r} - \alpha_۱ r \cdot \qquad (۴)$$

در این صورت به‌ازای $z = re^{i\theta}$ داریم

$$u = A\cos\theta + \operatorname{Re}\varphi \ \text{و}\ v = -B\sin\theta + \operatorname{Im}\varphi \cdot \qquad (۵)$$

معادلات (۵) را به‌ترتیب بر A و B بخش کرده، مجذور نموده، و باهم جمع می‌کنیم:

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1+\frac{2\cos\theta}{A}\operatorname{Re}\varphi+\left(\frac{\operatorname{Re}\varphi}{A}\right)^2-\frac{2\sin\theta}{B}\operatorname{Im}\varphi+\left(\frac{\operatorname{Im}\varphi}{B}\right)^2 \cdot$$

بنابر (۳)، φ دارای صفر از مرتبهٔ دست کم ۲ در مبدأ است. با توجه به (۴) معلوم می‌شود که عددی مانند $\eta > 0$ هست به‌طوری که به‌ازای جمیع rهای به‌قدر کافی کوچک،

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}<1+\eta r^3 \quad (z=re^{i\theta}) \cdot \tag{۶}$$

این می‌گوید که $F(C_r)$ درون بیضی E_r است که نیم محورهایش $A\sqrt{1+\eta r^3}$ و $B\sqrt{1+\eta r^3}$ بوده و لذا مساحتش مساوی است با

$$\pi AB(1+\eta r^3)=\pi\left(\frac{1}{r}+\alpha_1 r\right)\left(\frac{1}{r}-\alpha_1 r\right)(1+\eta r^3)\leq\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3) \cdot \tag{۷}$$

چون $F(C_r)$ درون E_r است، داریم $E_r\subset F(U_r)$. لذا $F(V_r)$ درون E_r می‌باشد؛ درنتیجه مساحت $F(V_r)$ از (۷) بیشتر نیست. معادلات کشی ـ ریمان نشان می‌دهند که ژاکوبین نگاشت $(x,y)\to(u,v)$ مساوی $|F'|^2$ است. لذا قضیهٔ ۷.۲۶ نتیجهٔ زیر را به‌ما می‌دهد:

$$\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3)\geq\iint_{V_r}|F'|^2$$

$$=\int_r^1 t\,dt\int_0^{2\pi}\left|-t^{-2}e^{-2i\theta}+\sum_1^\infty n\alpha_n t^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right|^2 d\theta$$

$$=2\pi\int_r^1\left(t^{-3}+\sum_1^\infty n^2|\alpha_n|^2 t^{2n-1}\right)dt \tag{۸}$$

$$=\pi\left\{r^{-2}-1+\sum_1^\infty n|\alpha_n|^2(1-r^{2n})\right\} \cdot$$

اگر رابطهٔ (۸) را بر π تقسیم کرده و سپس r^{-2} را از طرفین کم کنیم، به‌ازای جمیع rهای به‌قدر کافی کوچک و جمیع اعداد صحیح مثبت N داریم

$$\sum_{n=1}^N n|\alpha_n|^2(1-r^{2n})\leq 1+\eta r \cdot \tag{۹}$$

فرض کنیم در (۹) $r\to 0$ و سپس $N\to\infty$. با این کار رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید.

نتیجه. *تحت مفروضات قضیهٔ فوق،* $|\alpha_1|\leq 1$.

بهترین امکان بودن این امر با $F(z)=(1/z)+\alpha z$، $|\alpha|=1$، که در U یک به یک است نشان داده می‌شود.

۱۴.۱۴ قضیه. هرگاه $f \in \mathscr{S}$ و

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,$$

آنگاه (آ) $|a_2| \le 2$ و (ب) $f(U) \supset D\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$.

حکم دوم می‌گوید که $f(U)$ شامل تمام wها با $|w| < \frac{1}{4}$ است.

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۲.۱۴، تابعی مانند $g \in \mathscr{S}$ هست به‌طوری که $g^2(z)=f(z^2)$. هرگاه $G=1/g$، آنگاه قضیهٔ ۱۳.۱۴ در مورد G به‌کار می‌رود، و این قسمت (آ) را به‌ما می‌دهد. چون

$$f(z^2)=z^2(1+a_2z^2+\cdots),$$

داریم

$$g(z)=z\left(1+\frac{1}{2}a_2z^2+\cdots\right);$$

و درنتیجه

$$G(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}a_2z^2+\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{a_2}{2}z+\cdots .$$

حال نتیجهٔ قضیهٔ ۱۳.۱۴ نشان می‌دهد که $|a_2| \le 2$.

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم $w \notin f(U)$ و تعریف می‌کنیم

$$h(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w} .$$

در این صورت $h \in H(U)$، h در U یک به‌یک است، و

$$h(z)=(z+a_2z^2+\cdots)\left(1+\frac{z}{w}+\cdots\right)=z+\left(a_2+\frac{1}{w}\right)z^2+\cdots ;$$

درنتیجه $h \in \mathscr{S}$. قسمت (آ) را بر h اعمال می‌کنیم: داریم $|a_2+1/w| \le 2$، و چون $|a_2| \le 2$، بالأخره به‌دست می‌آوریم $|1/w| \le 4$. لذا، به‌ازای هر $w \notin f(U)$، $|w| \ge \frac{1}{4}$. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال ۱۱.۱۴ نشان می‌دهد که هر دوی (آ) و (ب) بهترین امکان می‌باشند.

به‌علاوه، به‌ازای هر $\alpha \ne 0$، می‌توان تابعهای تمام f را طوری یافت که $f(0)=0$ و $f'(0)=1$؛ این مقدار α را حذف می‌کند. مثلاً

$$f(z)=\alpha(1-e^{-z/\alpha}) .$$

البته اگر $|\alpha| < \frac{1}{4}$، این نوع fها نمی‌توانند در U یک به‌یک باشند.

۱۵.۱۴ قضیه. ***فرض کنیم*** $F \in H(U-\{\circ\})$***،*** F ***در*** U ***یک به‌یک باشد،*** F ***در*** $z=\circ$ ***قطب از مرتبهٔ ۱ با ماندهٔ ۱ داشته باشد، و هیچیک از*** $w_{۱}$ ***و*** $w_{۲}$ ***در*** $F(U)$ ***نباشد. در این صورت*** $|w_{۱}-w_{۲}| \le ۴$.

برهان. هرگاه $f=۱/(F-w_{۱})$، آنگاه $f \in \mathscr{S}$. لذا $f(U) \supset D\left(\circ, \frac{۱}{۴}\right)$؛ درنتیجه نقش U تحت $F-w_{۱}$ شامل تمام w هایی است که $|w| > ۴$. چون $w_{۲}-w_{۱}$ در این نقش نیست، داریم $|w_{۲}-w_{۱}| \le ۴$.

توجه کنید که این نیز بهترین امکان است: هرگاه $F(z)=z^{-۱}+z$، آنگاه $F(U)$ شامل نقاط ۲ و ۲− نیست. درواقع متمم $F(U)$ درست بازهٔ بستهٔ $[-۲, ۲]$ بر محور حقیقی می‌باشد.

پیوستگی در مرز

هر نگاشت همدیس از ناحیهٔ همبند سادهٔ Ω به‌روی U را تحت شرایطی می‌توان به‌یک همانریختی از بستش $\overline{\Omega}$ به‌روی $\overline{U}$ وسعت داد. ماهیت مرز Ω نقش مهمی در اینجا دارد.

۱۶.۱۴ تعریف. نقطهٔ مرزی β از ناحیهٔ همبند ساده و مسطح Ω را یک ***نقطهٔ مرزی سادهٔ*** Ω نامیم اگر β خاصیت زیر را دارا باشد: به‌هر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$ در Ω که وقتی $n \to \infty$، $\alpha_n \to \beta$ یک منحنی مانند γ با بازهٔ پارامتری $[\circ, ۱]$ و دنبالهٔ $\{t_n\}$، $\circ < t_{۱} < t_{۲} < \cdots$، $t_n \to ۱$ نظیر باشد به‌طوری‌که $\gamma(t_n)=\alpha_n$ $(n=۱, ۲, ۳, \cdots)$ و به‌ازای $\circ \le t < ۱$، $\gamma(t) \in \Omega$.

به‌عبارت دیگر، یک منحنی در Ω باشد که از نقاط α_n بگذرد و در β پایان یابد.

۱۷.۱۴ چند مثال. چون نقاط مرزی ساده واضح‌اند، به‌چند نقطهٔ غیرساده توجه می‌کنیم:

هرگاه Ω مساوی $U-\{x: \circ \le x < ۱\}$ باشد، آنگاه Ω همبند ساده‌است؛ واگر $\circ < \beta \le ۱$، β یک نقطهٔ مرزی Ω است که ساده نمی‌باشد.

برای به‌دست آوردن مثالی پیچیده‌تر، فرض کنیم $\Omega_{\circ}$ درون مربع به‌رئوس ۰، ۱، $۱+i$، و i باشد. بازه‌های بستهٔ

$$\left[\frac{۱}{۲n+۱}+\frac{i}{n}, \frac{۱}{۲n+۱}+i\right] \text{ و } \left[\frac{۱}{۲n}, \frac{۱}{۲n}+\frac{n-۱}{n}i\right]$$

را از $\Omega_{\circ}$ حذف می‌کنیم. ناحیهٔ حاصل Ω همبند ساده است. هرگاه $\circ \le y \le ۱$، آنگاه iy یک نقطهٔ مرزی است که ساده نمی‌باشد.

۱۸.۱۴ قضیه. ***فرض کنیم*** Ω ***یک ناحیهٔ همبند سادهٔ کراندار در صفحه بوده و*** f ***یک نگاشت همدیس از*** Ω ***به‌روی*** U ***باشد.***

(آ) هرگاه β ***یک نقطهٔ مرزی سادهٔ*** Ω ***باشد، آنگاه*** f ***دارای یک توسیع پیوسته به*** $\Omega \cup \{\beta\}$

است. هرگاه f بدین‌ترتیب توسیع یابد، آنگاه $|f(\beta)| = ۱$.
(ب) هرگاه $\beta_۱$ و $\beta_۲$ نقاط مرزی سادهٔ متمایز از Ω بوده و f همانند در (آ) به $\Omega \cup \{\beta_۱\} \cup \{\beta_۲\}$ توسیع یابد، آنگاه $f(\beta_۱) \neq f(\beta_۲)$.

برهان. فرض کنیم g معکوس f باشد. در این صورت، طبق قضیهٔ ۳۳.۱۰، $g \in H(U)$، $g(U) = \Omega$، g یک به‌یک است، و $g \in H^\infty$ زیرا Ω کراندار می‌باشد.

فرض کنیم (آ) برقرار نباشد. در این صورت دنباله‌ای مانند $\{\alpha_n\}$ در Ω هست به‌طوری‌که $\alpha_n \to \beta$، $f(\alpha_{۲n}) \to w_۱$، $f(\alpha_{۲n+۱}) \to w_۲$، و $w_۱ \neq w_۲$. γ را مثل تعریف ۱۶.۱۴ اختیار کرده و به‌ازای $۰ \le t < ۱$ قرار می‌دهیم $\Gamma(t) = f\big(\gamma(t)\big)$. فرض کنیم به‌ازای $۰ < r < ۱$، $K_r = g\big(\bar{D}(۰; r)\big)$. در این صورت K_r زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω است. چون‌وقتی $t \to ۱$، $\gamma(t) \to \beta$، عددی مانند $t^* < ۱$ (تابع r) هست به‌طوری که اگر $t^* < t < ۱$، $\gamma(t) \notin K_r$. لذا اگر $t^* < t < ۱$، $|\Gamma(t)| > r$. این می‌گوید که وقتی $t \to ۱$، $|\Gamma(t)| \to ۱$. چون $\Gamma(t_{۲n}) \to w_۱$ و $\Gamma(t_{۲n+۱}) \to w_۲$، نیز خواهیم داشت $|w_۱| = |w_۲| = ۱$.

حال نتیجه می‌شود که یکی از دو قوس باز J که اجتماعشان $T - (\{w_۱\} \cup \{w_۲\})$ است دارای این خاصیت است که هر شعاع U که به‌نقطه‌ای از J ختم می‌شود برد Γ را در مجموعه‌ای قطع می‌کند که دارای یک نقطهٔ حدی بر T است. توجه کنید که به‌ازای $۰ \le t < ۱$، $g\big(\Gamma(t)\big) = \gamma(t)$ و g ت. هـ. حدود شعاعی بر T دارد زیرا $g \in H^\infty$. لذا

$$\lim_{r \to ۱} g(re^{it}) = \beta \quad (\text{ت. هـ. بر } J) \tag{۱}$$

زیرا وقتی $t \to ۱$، $g\big(\Gamma(t)\big) \to \beta$. بنابر قضیهٔ ۳۲.۱۱ که بر $g - \beta$ اعمال شده، رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که g ثابت است. ولی g در U یک به‌یک است و ما تناقض داریم. لذا $w_۱ = w_۲$ و (آ) ثابت خواهد شد.

فرض کنیم (ب) برقرار نباشد. اگر f را در یک ثابت مناسب با قدرمطلق ۱ ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم $\beta_۱ \neq \beta_۲$ ولی $f(\beta_۱) = f(\beta_۲) = ۱$.

چون $\beta_۱$ و $\beta_۲$ نقاط مرزی ساده‌ای از Ω اند، منحنیهایی مانند γ_i با بازهٔ پارامتری $[۰, ۱]$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای $i = ۱, ۲$، $\gamma_i([۰, ۱)) \subset \Omega$ و $\gamma_i(۱) = \beta_i$. قرار می‌دهیم $\Gamma_i(t) = f\big(\gamma_i(t)\big)$. در این صورت $\Gamma_i([۰, ۱)) \subset U$ و $\Gamma_۱(۱) = \Gamma_۲(۱) = ۱$. چون $g\big(\Gamma_i(t)\big) = \gamma_i(t)$ بر $[۰, ۱)$، داریم

$$\lim_{t \to ۱} g\big(\Gamma_i(t)\big) = \beta_i \quad (i = ۱, ۲) \cdot \tag{۲}$$

لذا قضیهٔ ۱۰.۱۲ ایجاب می‌کند که حد شعاعی g در ۱ مساوی $\beta_۱$ و نیز $\beta_۲$ است. این امر به‌ازای $\beta_۱ \neq \beta_۲$ امکان‌پذیر نیست.

۱۹.۱۴ قضیه. *هرگاه Ω یک ناحیهٔ همبند سادهٔ کراندار در صفحه بوده و هر نقطهٔ مرزی Ω*

ساده باشد، آنگاه هر نگاشت همدیس از Ω به‌روی U به‌یک همانریختی از $\bar{\Omega}$ به‌روی $\bar{U}$ توسیع می‌یابد.

برهان. فرض کنیم $f \in H(\Omega)$، $f(\Omega) = U$، و f یک به‌یک باشد. بنابر قضیهٔ ۱۸.۱۴، می‌توان f را به‌نگاشتی از $\bar{\Omega}$ به‌توی $\bar{U}$ چنان وسعت داد که وقتی $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای در Ω همگرا به z باشد، $f(\alpha_n) \to f(z)$. اگر $\{z_n\}$ دنباله‌ای در $\bar{\Omega}$ همگرا به z باشد، نقاطی مانند $\alpha_n \in \Omega$ وجود دارند به‌طوری که $|\alpha_n - z_n| < 1/n$ و $|f(\alpha_n) - f(z_n)| < 1/n$. لذا $\alpha_n \to z$؛ درنتیجه $f(\alpha_n) \to f(z)$، و این نشان می‌دهد که $f(z_n) \to f(z)$.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که توسیع ما از f بر $\bar{\Omega}$ پیوسته است. همچنین $U \subset f(\bar{\Omega}) \subset \bar{U}$. فشردگی $\bar{U}$ ایجاب می‌کند که $f(\bar{\Omega})$ فشرده است. لذا $f(\bar{\Omega}) = \bar{U}$.

قضیهٔ ۱۸.۱۴ (ب) نشان می‌دهد که f بر $\bar{\Omega}$ یک به‌یک است. چون هر نگاشت یک به‌یک پیوسته از یک مجموعهٔ فشرده دارای معکوس پیوسته است (مرجع [۲۶]، قضیهٔ ۱۷.۴)، برهان تمام خواهد بود.

۲۰.۱۴ چند تبصره

(آ) ***قضیهٔ فوق یک نتیجهٔ صرفاً توپولوژیک دارد: هرگاه هر نقطهٔ مرزی ناحیهٔ مسطح همبند سادهٔ کراندار Ω ساده باشد، آنگاه مرز Ω یک منحنی ژردان بوده و $\bar{\Omega}$ با $\bar{U}$ همانریخت است.***

(طبق تعریف، منحنی ژردان نقش همانریخت دایرهٔ یکه می‌باشد).

عکس مطلب فوق نیز درست است ولی ما آن را ثابت نمی‌کنیم: هرگاه مرز Ω یک منحنی ژردان باشد، آنگاه هر نقطهٔ مرزی Ω ساده است.

(ب) فرض کنیم f همانند قضیهٔ ۱۹.۱۴ بوده، a و b و c نقاط مرزی متمایزی از Ω و A و B و C نقاط متمایزی از T باشند. در این صورت یک تبدیل خطی کسری مانند φ وجود دارد که سه‌تایی $\{f(a), f(b), f(c)\}$ را به $\{A, B, C\}$ می‌نگارد. فرض کنیم جهت $\{A, B, C\}$ با جهت $\{f(a), f(b), f(c)\}$ سازگار باشد. در این صورت $\varphi(U) = U$ و تابع $g = \varphi \circ f$ یک همانریختی از $\bar{\Omega}$ به‌روی $\bar{U}$ است که در Ω هلوریخت است و $\{a, b, c\}$ را به‌مقادیر مقرر $\{A, B, C\}$ می‌نگارد. از بخش ۳.۱۴ نتیجه می‌شود که g با این شرایط به‌طور منحصر به‌فرد معین است.

(پ) قضیهٔ ۱۹.۱۴ و نیز تبصرهٔ (ب) فوق را می‌توان بدون اشکال به‌نواحی همبند سادهٔ Ω در کرهٔ ریمان S^2، که تمام نقاط مرزیش ساده‌اند، در صورتی تعمیم داد که $S^2 - \Omega$ درون ناتهی داشته باشد، زیرا در این صورت یک تبدیل خطی کسری ما را به‌حالتی که در آن Ω یک ناحیهٔ کراندار در صفحه است برمی‌گرداند. به‌همین ترتیب می‌توان U را مثلاً با یک نیمصفحه عوض کرد.

(ت) به‌طور کلی هرگاه f_1 و f_2 نواحی Ω_1 و Ω_2 را مانند قضیهٔ ۱۹.۱۴ به‌روی U بنگارند، آنگاه $f = f_2^{-1} \circ f_1$ یک همانریختی از $\bar{\Omega}_1$ به‌روی $\bar{\Omega}_2$ است که در Ω_1 هلوریخت است.

نگاشت همدیس از یک حلقه

۲۱.۱۴. از قضیهٔ نگاشت ریمان نتیجه می‌شود که هر دو زیرناحیهٔ حقیقی همبند ساده از صفحه به‌طور همدیس هم‌ارزند زیرا هریک از آنها به‌طور همدیس هم‌ارز قرص یکه می‌باشد. این ویژگی بسیار خاصی از نواحی همبند ساده است. ممکن است بپرسیم که آیا این امر را می‌توان به‌حالتی بلافاصله ساده‌تر تعمیم داد؛ یعنی آیا هر دو حلقه به‌طور همدیس هم‌ارزند. جواب منفی می‌باشد. فرض کنیم به‌ازای $0 < r < R$

$$A(r, R) = \{z : r < |z| < R\} \tag{1}$$

یک حلقه با شعاع داخلی r و شعاع خارجی R باشد. اگر $\lambda > 0$، نگاشت $z \to \lambda z$ حلقهٔ $A(r, R)$ را به‌روی $A(\lambda r, \lambda R)$ می‌نگارد. *لذا اگر* $R/r = R_1/r_1$، $A(r, R)$ و $A(r_1, R_1)$ **به‌طور همدیس هم‌ارزند.** نکتهٔ تعجب‌آور آن است که این شرط کافی لازم نیز هست. لذا، در بین حلقه‌ها، به‌هر عدد حقیقی بزرگتر از ۱ نوع همدیسی مختلفی مربوط است.

۲۲.۱۴ قضیه. $A(r_1, R_1)$ و $A(r_2, R_2)$ **به‌طور همدیس هم‌ارزند اگر و فقط اگر** $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

برهان. بدون صدمه زدن به‌کلیت فرض می‌کنیم $r_1 = r_2 = 1$. قرار می‌دهیم

$$A_1 = A(1, R_1) \quad \text{و} \quad A_2 = A(1, R_2) \tag{1}$$

و فرض می‌کنیم تابعی مانند $f \in H(A_1)$ موجود باشد به‌طوری‌که f یک به‌یک بوده و $f(A_1) = A_2$. K را دایره به‌مرکز ۰ و شعاع $r = \sqrt{R_2}$ می‌گیریم. چون $f^{-1} : A_2 \to A_1$ هلوریخت نیز هست، $f^{-1}(K)$ فشرده است. لذا به‌ازای $\epsilon > 0$ ی،

$$A(1, 1+\epsilon) \cap f^{-1}(K) = \varnothing \cdot \tag{2}$$

در این صورت $V = f\big(A(1, 1+\epsilon)\big)$ زیرمجموعهٔ همبندی از A_2 است که K را قطع نمی‌کند؛ درنتیجه $V \subset A(1, r)$ یا $V \subset A(r, A_2)$. در حالت اخیر، f را با R_2/f عوض می‌کنیم. درنتیجه می‌توان فرض کرد $V \subset A(1, r)$. هرگاه $1 < |z_n| < 1+\epsilon$ و $|z_n| \to 1$، آنگاه $f(z_n) \in V$ و $\{f(z_n)\}$ نقطهٔ حدی در A_2 ندارد (زیرا f^{-1} پیوسته است). لذا $|f(z_n)| \to 1$. به‌همین نحو معلوم می‌شود که اگر $|z_n| \to R_1$، $|f(z_n)| \to R_2$.

حال تعریف می‌کنیم

$$\alpha = \frac{\log R_۲}{\log R_۱} \tag{۳}$$

و

$$u(z) = ۲\log|f(z)| - ۲\alpha \log|z| \quad (z \in A_۱) \cdot \tag{۴}$$

فرض کنیم ∂ یکی از عملگرهای کشی ـ ریمان باشد. چون $\partial \bar{f} = ۰$ و $\partial f = f'$، قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

$$\partial(۲\log|f|) = \partial\left(\log(\bar{f} f)\right) = f'/f \cdot \tag{۵}$$

پس

$$(\partial u)(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z} \quad (z \in A_۱) \cdot \tag{۶}$$

لذا u یک تابع توافقی در $A_۱$ است که، طبق اولین بند این برهان، به یک تابع پیوسته بر $\bar{A}_۱$ که بر مرز $A_۱$ مساوی ۰ است وسعت می‌یابد. چون تابعهای توافقی غیرثابت ماکزیمم یا مینیمم موضعی ندارند، نتیجه می‌گیریم که $u = ۰$. لذا

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z} \quad (z \in A_۱) \cdot \tag{۷}$$

قرار می‌دهیم $\gamma(t) = \sqrt{R_۱}\, e^{it}$ $(-\pi \le t \le \pi)$ و $\Gamma = f \circ \gamma$. از رابطهٔ (۷) در برهان قضیهٔ ۴۳.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$\alpha = \frac{۱}{۲\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathrm{Ind}_\Gamma(۰) \cdot \tag{۸}$$

لذا α یک عدد صحیح است. بنابر رابطهٔ (۳)، $\alpha > ۰$. و بنابر (۷)، مشتق $z^{-\alpha} f(z)$ در $A_۱$ مساوی ۰ است. لذا $f(z) = cz^\alpha$. چون f در $A_۱$ یک به یک است، $\alpha = ۱$. بنابراین $R_۲ = R_۱$.

تمرینات

۱. شرایط لازم و کافی صادق به‌وسیلهٔ اعداد مختلط a و b و c و d را چنان بیابید که تبدیل خطی کسری $z \to (az+b)/(cz+d)$ نیمصفحهٔ بالایی را به‌روی خودش بنگارد.

۲. در قضیهٔ ۱۴.۱۱ مفروضات به‌شکل ساده عبارت بودند از $\Omega \subset \Pi^+$، L بر محور حقیقی است، و وقتی $z \to L$، $\mathrm{Im} f(z) \to ۰$. با استفاده از این قضیه، قضایای انعکاس مشابه را تحت مفروضات زیر ثابت کنید:

(آ) $\Omega \subset \Pi^+$، L بر محور حقیقی است، و وقتی $z \to L$، $|f(z)| \to ۱$؛

(ب) $\Omega \subset U$، $L \subset T$، و وقتی $z \to L$، $|f(z)| \to ۱$؛

(پ) $\Omega \subset U$، $L \subset T$، و وقتی $z \to L$، $\mathrm{Im} f(z) \to ۰$؛

در حالت (ب) اگر f در $\alpha \in \Omega$ دارای صفر باشد، نشان دهید که توسیعش در $۱/\bar{\alpha}$ دارای قطب

است. مشابه‌های این در حالات (آ) و (پ) چیستند؟

۳. فرض کنید تابع گویای R چنان باشد که اگر $|z| = ۱$ ، $|R(z)| = ۱$. ثابت کنید

$$R(z) = c z^m \prod_{n=۱}^{k} \frac{z-\alpha_n}{۱-\overline{\alpha}_n z}$$

که در آن c ثابت بوده، m عددی صحیح است، و اعداد مختلط $\alpha_۱$، $\cdots$، α_k چنانند که $\alpha_n \neq ۰$ و $|\alpha_n| \neq ۱$. توجه کنید که اگر $|z| = ۱$ ، هریک از عوامل فوق دارای قدرمطلق ۱ می‌باشد.

۴. توصیف مشابهی از توابع گویا که بر T مثبت‌اند را به‌دست آورید.

راهنمایی. یک چنین تابع باید به‌تعداد قطبها دارای صفر در U باشد. حاصل‌ضربهایی از عوامل به‌شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{(z-\alpha)(۱-\overline{\alpha} z)}{(z-\beta)(۱-\overline{\beta} z)}$$

که در آن $|\alpha| < ۱$ و $|\beta| < ۱$.

۵. فرض کنید f یک چندجمله‌ای مثلثاتی باشد:

$$f(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}$$

و به‌ازای هر θی حقیقی، $f(\theta) > ۰$. ثابت کنید یک چندجمله‌ای مانند $P(z) = c_۰ + c_۱ z + \cdots + c_n z^n$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(\theta) = |P(e^{i\theta})|^۲ \quad (\theta \text{ حقیقی}).$$

راهنمایی. تمرین ۴ را در مورد تابع گویای $\Sigma a_k z^k$ به‌کار برید. اگر به‌جای $f(\theta) > ۰$ فرض کنیم $f(\theta) \geq ۰$، آیا نتیجه هنوز معتبر است؟

۶. نقاط ثابت نگاشتهای φ_α (تعریف ۳.۱۲) را بیابید. آیا خط مستقیمی که φ_α آن را به‌خودش بنگارد وجود دارد؟

۷. تمام اعداد مختلط α را که f_α با تعریف

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{۱+\alpha z^۲}$$

در U یک به‌یک است بیابید. $f_\alpha(U)$ را در تمام این حالات توصیف نمایید.

۸. فرض کنید $f(z) = z + (۱/z)$ و خانواده‌های بیضیها و هذلولیهایی را توصیف کنید که f دوایر به‌مرکز ۰ و شعاعهای ماربر ۰ را به‌روی آنها می‌نگارد.

۹. (آ) فرض کنید $\Omega = \{z : -۱ < \mathrm{Re}\, z < ۱\}$ و فرمول صریحی برای نگاشت همدیس یک به‌یک f از Ω به‌روی U که $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) > ۰$ بیابید. $f'(۰)$ را حساب کنید.

(ب) توجه کنید که قسمت حقیقی معکوس تابع ساخته شده در (آ) در U کراندار است ولی قسمت موهومی‌اش بی‌کران می‌باشد. نشان دهید که این امر وجود یک تابع حقیقی پیوسته مانند u بر $\overline{\Omega}$ را ایجاب می‌کند که در U توافقی است و مزدوج توافقی‌اش v در U بی‌کران می‌باشد. [v تابعی است که $u+iv$ را در U هلوریخت می‌سازد. v را می‌توان با شرط $v(\circ) = \circ$ به‌طور منحصر به‌فرد معین کرد.]

(پ) فرض کنید $g \in H(U)$، $|\operatorname{Re} g| < ۱$ در U، و $g(\circ) = \circ$. ثابت کنید

$$|g(re^{i\theta})| \leq \frac{۲}{\pi} \log \frac{۱+r}{۱-r} \cdot$$

راهنمایی. ر.ک. تمرین ۱۰.

(ت) فرض کنید Ω نوار مذکور در قضیهٔ ۹.۱۲ باشد. نقطهٔ $\alpha+i\beta$ را در Ω ثابت گرفته و فرض کنید h یک نگاشت یک به‌یک همدیس از Ω به‌روی Ω باشد که $\alpha+i\beta$ را به $\circ$ می‌برد. ثابت کنید

$$|h'(\alpha+i\beta)| = ۱/\cos\beta \cdot$$

۱۰. فرض کنید f و g دو نگاشت هلوریخت از U به‌توی Ω باشد، f یک به‌یک باشد، $f(U) = \Omega$، و $f(\circ) = g(\circ)$. ثابت کنید

$$g\big(D(\circ; r)\big) \subset f\big(D(\circ; r)\big) \quad (\circ < r < ۱) \cdot$$

۱۱. فرض کنید Ω نیمهٔ بالایی قرص یکهٔ U باشد. نگاشت همدیس f از Ω به‌روی U که $\{-۱, \circ, ۱\}$ را به $\{-۱, -i, ۱\}$ می‌نگارد را بیابید. $z \in \Omega$ را طوری پیدا کنید که $f(z) = \circ$. $f(i/۲)$ را بیابید. **راهنمایی.** $f = \varphi \circ s \circ \psi$ که در آن φ و ψ تبدیلات خطی کسری‌اند و $s(\lambda) = \lambda^۲$.

۱۲. فرض‌کنید Ω یک‌ناحیهٔ محدب بوده، $f \in H(\Omega)$، و به‌ازای هر $z \in \Omega$، $\operatorname{Re} f'(z) > \circ$. ثابت کنید f در Ω یک به‌یک است. اگر فرض را به $\operatorname{Re} f'(z) \geq \circ$ ضعیف سازیم، آیا نتیجه تغییر می‌کند؟ (حالت بدیهی $f =$ ثابت را مستثنی کنید.) با مثال نشان دهید که «تحدب» را نمی‌توان با «همبندی ساده» عوض کرد.

۱۳. فرض کنید Ω یک ناحیه باشد، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $f_n \in H(\Omega)$، هر f_n در Ω یک به‌یک باشد، و بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω، $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت. نشان دهید که f ثابت است یا در Ω یک به‌یک می‌باشد. ثابت کنید هر دو حالت می‌توانند رخ دهند.

۱۴. فرض‌کنید $\Omega = \{x+iy : -۱ < y < ۱\}$، $f \in H(\Omega)$، $|f| < ۱$، و وقتی $x \to \infty$، $f(x) \to \circ$. ثابت کنید

$$\lim_{x \to \infty} f(x+iy) = \circ \quad (-۱ < y < ۱)$$

و اگر y به‌بازهٔ بسته‌ای مانند $[-\alpha, \alpha]$ که $\alpha < ۱$ محدود شود، رفتن به‌حد یکنواخت می‌باشد.
راهنمایی. دنبالهٔ $\{f_n\}$ را در نظر بگیرید که در مربع $|x| < ۱$ ، $|y| < ۱$ ، $f_n(z) = z+n$.
این قضیه راجع به‌رفتار یک تابع مانند $g \in H^\infty$ در مجاورت یک نقطهٔ مرزی U که در آن حد شعاعی g وجود دارد چه می‌گوید؟

۱۵. فرض کنید $\mathscr{F}$ ردهٔ تمام $f \in H(U)$ هایی باشد که $\mathrm{Re} f > ۰$ و $f(۰) = ۱$. نشان دهید که $\mathscr{F}$ یک خانوادهٔ نرمال است. آیا می‌توان شرط "$f(۰) = ۱$" را حذف کرد؟ آیا می‌توان آن را با "$|f(۰)| \le ۱$" عوض کرد؟

۱۶. فرض کنید $\mathscr{F}$ ردهٔ تمام $f \in H(U)$ هایی باشد که

$$\iint_U |f(z)|^۲ \, dx\, dy \le ۱ \cdot$$

آیا این یک خانوادهٔ نرمال است؟

۱۷. فرض کنید Ω یک ناحیه باشد، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ ، $f_n \in H(\Omega)$ ، $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت به‌زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω ، و f در Ω یک به‌یک باشد. آیا به‌هر $K \subset \Omega$ ی فشرده یک عدد صحیح مانند $N(K)$ نظیر است که f_n به‌ازای هر $n > N(K)$ بر K یک به‌یک باشد؟ این مطلب را ثابت کنید یا مثال نقض بزنید.

۱۸. فرض کنید Ω یک ناحیهٔ همبند ساده بوده، $z_۰ \in \Omega$ ، و f و g نگاشتهای همدیس یک به‌یکی از Ω به‌روی U باشد که $z_۰$ را به ۰ می‌برند. چه رابطه‌ای بین f و g وجود دارد؟ همین سؤال را در صورتی جواب دهید که به‌ازای $a \in U$ ای، $f(z_۰) = g(z_۰) = a$.

۱۹. یک همانریختی از U به‌روی U بیابید که نتوان آن را به‌یک تابع پیوسته بر $\overline{U}$ وسعت داد.

۲۰. اگر $f \in \mathscr{S}$ (تعریف ۱۰.۱۴) و n یک عدد صحیح مثبت باشد، ثابت کنید یک تابع مانند $g \in \mathscr{S}$ هست به‌طوری که به‌ازای هر $z \in U$ ، $g^n(z) = f(z^n)$.

۲۱. تمام $f \in \mathscr{F}$ هایی را بیابید که (آ) $f(U) \supset U$؛ (ب) $f(U) \supset \overline{U}$؛ (پ) $|a_۲| = ۲$.

۲۲. فرض کنید f یک نگاشت همدیس یک به‌یک از U به‌روی یک مربع به‌مرکز ۰ باشد و $f(۰) = ۰$. ثابت کنید $f(iz) = if(z)$. اگر $f(z) = \Sigma c_n z^n$، ثابت کنید $c_n = ۰$ مگر آنکه $n - ۱$ مضربی از ۴ باشد. این مطلب را تعمیم دهید: مربع را با نواحی همبند سادهٔ دیگری که دارای تقارن دورانی‌اند عوض کنید.

۲۳. فرض کنید Ω یک ناحیهٔ کراندار باشد که مرزش از دو دایرهٔ غیرمتقاطع تشکیل شده است. ثابت کنید یک نگاشت همدیس یک به‌یک از Ω به‌روی یک حلقه وجود دارد. (این امر به‌ازای هر ناحیهٔ Ω که $S^۲ - \Omega$ درست دو مؤلفه دارد که هریک شامل بیش از یک نقطه است درست است ولی اثبات این حالت کلی مشکلتر است.)

۲۴. در برهان زیر از قضیهٔ ۲۲.۱۴ جزئیات را کامل کنید: فرض کنید $۱ < R_۲ < R_۱$ و f یک نگاشت همدیس یک به‌یک از $A(۱, R_۱)$ به‌روی $A(۱, R_۲)$ باشد. تعریف کنید $f_۱ = f$ و

$f_n = f \circ f_{n-1}$. در این صورت یک زیردنباله از $\{f_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ $A(1, R_1)$ به‌تابعی مانند g به‌طور یکنواخت همگراست. نشان دهید که برد g (مثلاً طبق قضیهٔ سه دایره) نمی‌تواند شامل یک مجموعهٔ باز ناتهی باشد. از سوی دیگر، نشان دهید که g نمی‌تواند بر دایرهٔ $\{z : |z|^2 = R_1\}$ ثابت باشد. لذا f نمی‌تواند موجود باشد.

۲۵. ذیلاً برهان دیگری از قضیهٔ ۲۲.۱۴ را ذکر می‌کنیم. اگر f همانند در ۲۲.۱۴ باشد، استفادهٔ مکرر اصل انعکاس f را به‌یک تابع تمام وسعت می‌دهد به‌طوری که وقتی $|z| = 1$، $|f(z)| = 1$. این ایجاب می‌کند که $f(z) = \alpha z^n$ که در آن $|\alpha| = 1$ و n یک عدد صحیح است. جزئیات را کامل نمایید.

۲۶. تکرار مرحلهٔ ۲ در برهان قضیهٔ ۸.۱۴ به‌برهانی (منسوب به‌کوبه) از قضیهٔ نگاشت ریمان منجر می‌شود که سازنده است بدین معنی که در آن به‌نظریهٔ خانواده‌های نرمال متوسل نمی‌شویم و لذا به‌وجود زیردنباله‌ای نامعین وابسته نیست. در مرحلهٔ نهایی برهان بهتر است فرض شود که Ω دارای خاصیت (ح) قضیهٔ ۱۱.۱۳ است. در این صورت هر ناحیه که به‌طور همدیس هم‌ارز Ω باشد در (ح) صدق می‌کند. همچنین به‌یاد آورید که حکم (ح) بداهتاً حکم (خ) را ایجاب می‌کند.

بنا بر مرحلهٔ ۱ در قضیهٔ ۸.۱۴، بدون صدمه زدن به‌کلیت می‌توان فرض کرد $0 \in \Omega$، $\Omega \subset U$، و $\Omega \neq U$. قرار دهید $\Omega = \Omega_0$. برهان عبارت است از ساختن نواحی Ω_1، Ω_2، Ω_3، $\cdots$ و توابع f_1، f_2، f_3، $\cdots$. به‌طوری که $f_n(\Omega_{n-1}) = \Omega_n$ و توابع $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ همگرا به‌یک نگاشت همدیس از Ω به‌روی U باشند. جزئیات زیر را کامل نمایید.

(آ) فرض کنید Ω_{n-1} ساخته شده باشد و r_n بزرگترین عددی باشد که $D(0 ; r_n) \subset \Omega_{n-1}$، و α_n یک نقطهٔ مرزی Ω_{n-1} باشد که $|\alpha_n| = r_n$. β_n را طوری بگیرید که $\beta_n^2 = -\alpha_n$ و قرار دهید

$$F_n = \varphi_{-\alpha_n} \circ s \circ \varphi_{-\beta_n} \cdot$$

(نمادگذاری مثل برهان قضیهٔ ۸.۱۴ است.) نشان دهید که F_n یک معکوس هلوریخت مانند G_n در Ω_{n-1} دارد، و قرار دهید $f_n = \lambda_n G_n$ که در آن $\lambda_n = |c|/c$ و $c = G'_n(0)$. (این f_n **نگاشت کوبه** مربوط به Ω_{n-1} است. توجه کنید که f_n یک تابع مقدماتی است. این فقط مستلزم دو تبدیل خطی کسری و یک ریشهٔ دوم است.)

(ب) ثابت کنید که $f'_n(0) = (1+r_n)/2\sqrt{r_n} > 1$.

(پ) قرار دهید $\psi_0(z) = z$ و $\psi_n(z) = f_n\left(\psi_{n-1}(z)\right)$ و نشان دهید که ψ_n یک نگاشت یک به‌یک از Ω به‌روی یک ناحیهٔ $\Omega_n \subset U$ است، $\{\psi'_n(0)\}$ کراندار است،

$$\psi'_n(0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+r_k}{2\sqrt{r_k}} ,$$

و لذا وقتی $n \to \infty$، $r_n \to 1$.

(ت) به‌ازای $z \in \Omega$ بنویسید $\psi_n(z) = z h_n(z)$، نشان دهید که $|h_n| \le |h_{n+1}|$، و با اعمال قضیهٔ هارناک و تمرین ۸ از فصل ۱۱ بر $\{\log |h_n|\}$ ثابت کنید که $\{\psi_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت همگراست، و نشان دهید که $\lim \psi_n$ یک نگاشت یک به‌یک از Ω به‌روی U می‌باشد.

۲۷. ثابت کنید $\Sigma_{n=1}^{\infty} (1-r_n)^2 < \infty$ که در آن $\{r_n\}$ دنبالهٔ آمده در تمرین ۲۶ است.

راهنمایی.

$$\frac{1+r}{2\sqrt{r}} = 1 + \frac{(1-\sqrt{r}\,)^2}{2\sqrt{r}} \cdot$$

۲۸. فرض کنید در تمرین ۲۶، $\alpha_n \in U - \Omega_{n-1}$ را بی‌آنکه بر صحت $|\alpha_n| = r_n$ تأکید کنیم اختیار کرده باشیم. مثلاً فقط بخواهیم که

$$|\alpha_n| \le \frac{1+r_n}{2} \cdot$$

آیا دنبالهٔ حاصل $\{\psi_n\}$ هنوز به‌تابع نگاشت مطلوب همگراست؟

۲۹. فرض‌کنید Ω یک‌ناحیهٔ کراندار بوده، $a \in \Omega$، $f \in H(\Omega)$، $f(\Omega) \subset \Omega$، و $f(a) = a$.

(آ) قرار دهید $f_1 = f$ و $f_n = f \circ f_{n-1}$، $f'_n(a)$ را حساب کرده، و نتیجه بگیرید که $|f'(a)| \le 1$.

(ب) اگر $f'(a) = 1$، ثابت کنید به‌ازای هر $z \in \Omega$، $f(z) = z$.

راهنمایی. اگر

$$f(z) = z + c_m (z-a)^m + \cdots ,$$

ضریب $(z-a)^m$ در بسط $f_n(z)$ را حساب کنید.

(پ) اگر $|f'(a)| = 1$ ، ثابت کنید f یک به‌یک است و $f(\Omega) = \Omega$.

راهنمایی. اگر $\gamma = f'(a)$، اعداد صحیحی مانند $n_k \to \infty$ وجود دارند به‌طوری که $\gamma^{n_k} \to 1$ و $f_{n_k} \to g$. در این صورت $g'(a) = 1$، $g(\Omega) \subset \Omega$ (بنابر تمرین ۲۰، فصل ۱۰)؛ درنتیجه، بنابر قسمت (ب)، $g(z) = z$. با استفاده از g، نتایج مطلوب راجع به f را به‌دست آورید.

۳۰. فرض کنید Λ مجموعهٔ تمام تبدیلات خطی کسری باشد. اگر $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ یک چهارتایی‌مرتب‌از اعداد مختلط متمایز باشد، **نسبت ناهمساز** آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)} \cdot$$

اگر یکی از این اعداد ∞ باشد، تعریف را به‌وسیلهٔ پیوستگی به‌نحوی روشن تعدیل می‌کنیم. اگر α با β یا γ یا δ یکی باشد، همین امر را انجام می‌دهیم.

(آ) اگر $\varphi(z) = [z, \alpha, \beta, \gamma]$، نشان دهید که $\varphi \in \Lambda$ و φ مجموعهٔ $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ را به $\{0, 1, \infty\}$

می‌نگارد.

(ب) نشان دهید که معادلهٔ $[w, a, b, c] = [z, \alpha, \beta, \gamma]$ را می‌توان به‌شکل $w = \varphi(z)$ حل کرد؛ در این صورت $\varphi \in \Lambda$ مجموعهٔ $[\alpha, \beta, \gamma]$ را به $\{a, b, c\}$ می‌نگارد.

(پ) اگر $\varphi \in \Lambda$، نشان دهید که

$$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma), \varphi(\delta)] = [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \cdot$$

(ت) نشان دهید که $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ حقیقی است اگر و فقط اگر چهار نقطه بر یک دایره یا یک خط مستقیم واقع باشند.

(ث) گوییم دو نقطهٔ z و z^* نسبت به‌دایره (یا خط مستقیم) C ماربر α، β، و γ **متقارن** اند اگر $[z^*, \alpha, \beta, \gamma]$ مزدوج مختلط $[z, \alpha, \beta, \gamma]$ باشد. اگر C دایرهٔ یکه باشد، یک رابطهٔ هندسی ساده بین z و z^* پیدا نمایید. همین کار را در صورتی که C خطی مستقیم است انجام دهید.

(ج) فرض کنید z و z^* نسبت به C متقارن باشند. نشان دهید که به‌ازای هر $\varphi \in \Lambda$، $\varphi(z)$ و $\varphi(z^*)$ نسبت به $\varphi(C)$ متقارن‌اند.

۳۱. (آ) نشان دهید که Λ (ر.ک. تمرین ۳۰) با ترکیب به‌عنوان عمل گروه یک گروه است. یعنی اگر $\varphi \in \Lambda$ و $\psi \in \Lambda$، نشان دهید که $\varphi \circ \psi \in \Lambda$ و معکوس φ^{-1} از φ در Λ است. نشان دهید که Λ تعویضپذیر نیست.

(ب) نشان دهید که هر عضو Λ (غیر از نگاشت همانی) دارای یک یا دو نقطهٔ ثابت بر S^2 است. [یک نقطهٔ ثابت φ نقطه‌ای است مانند α به‌طوری که $\varphi(\alpha) = \alpha$.]

(پ) دو نگاشت φ و φ_1 در Λ **مزدوج** اند اگر عضوی مانند $\psi \in \Lambda$ چنان موجود باشد که $\varphi_1 = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$. ثابت کنید هر $\varphi \in \Lambda$ با یک نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد مزدوج نگاشت $z \to z+1$ است. ثابت کنید هر $\varphi \in \Lambda$ با دو نقطهٔ ثابت متمایز مزدوج نگاشت $z \to \alpha z$ است که در آن α یک عدد مختلط می‌باشد. α تا چه حد به‌وسیلهٔ φ معین است؟

(ت) فرض کنید α یک عدد مختلط باشد. نشان دهید که به‌هر $\varphi \in \Lambda$ که دارای نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد α است βای چنان نظیر است که

$$\frac{1}{\varphi(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \beta \cdot$$

فرض کنید G_α مجموعهٔ تمام این φها به‌علاوهٔ تبدیل همانی باشد. ثابت کنید G_α زیر گروهی از Λ است و G_α با گروه جمعی تمام اعداد مختلط یکریخت است.

(ث) فرض کنید α و β اعداد مختلط متمایزی بوده، و $G_{\alpha,\beta}$ مجموعهٔ تمام $\varphi \in \Lambda$هایی باشد که دارای نقاط ثابت α و β اند. نشان دهید که هر $\varphi \in G_{\alpha,\beta}$ با

$$\frac{\varphi(z) - \alpha}{\varphi(z) - \beta} = \gamma \cdot \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

داده می‌شود که در آن γ یک عدد مختلط است. نشان دهید که $G_{\alpha,\beta}$ زیرگروهی است از Λ که با گروه ضربی تمام اعداد مختلط ناصفر یکریخت است.

(ج) اگر φ همانند در (ت) یا (ث) باشد، به‌ازای چه دوایر C رابطهٔ $\varphi(C) = C$ درست است؟ جواب برحسب پارامترهای α، β، و γ باشد.

۳۲. به‌ازای هر $z \in \bar{U}$، $z^۲ \neq ۱$، و با انتخاب شاخه‌ای از $\log$ که $\log ۱ = ۰$، تعریف کنید

$$f(z) = \exp\left\{ i \log \frac{۱+z}{۱-z} \right\} \cdot$$

$f(E)$ را در صورتی توصیف کنید که E به‌شکل زیر باشد:

(آ) U؛

(ب) نیمهٔ بالایی T؛

(پ) نیمهٔ پایینی T؛

(ت) یک قوس مستدیر (در U) از -۱ تا ۱؛

(ث) شعاع $[۰, ۱)$؛

(ج) قرص $\{z : |z-r| < ۱-r\}$، $۰ < r < ۱$؛

(چ) یک منحنی در U متمایل به ۱.

۳۳. اگر φ_α همانند در تعریف ۳.۱۲ باشد، نشان دهید که

(آ) $\frac{۱}{\pi} \int_U |\varphi'_\alpha|^۲ \, dm = ۱$؛

(ب) $\frac{۱}{\pi} \int_U |\varphi'_\alpha| \, dm = \frac{۱-|\alpha|^۲}{|\alpha|^۲} \log \frac{۱}{۱-|\alpha|^۲}$،

در اینجا m اندازهٔ لبگ در $R^۲$ است.

فصل پانزده
صفرهای توابع هلوریخت

حاصل‌ضربهای نامتناهی

۱.۱۵. ما تا به‌حال فقط یک نتیجه راجع به‌مجموعهٔ صفر $Z(f)$ تابع هلوریخت غیرثابت f در ناحیهٔ Ω دیده‌ایم؛ یعنی اینکه $Z(f)$ نقطهٔ حدی در Ω ندارد. اینک خواهیم دید که اگر شرط دیگری بر f اعمال نشود، این تمام چیزی است که می‌توان راجع به $Z(f)$ گفت و این به‌خاطر قضیهٔ وایراشتراس (*Weierstrass*) (قضیهٔ ۱۱.۱۵) است که می‌گوید هر $A \subset \Omega$ بدون نقطهٔ حدی در Ω به‌ازای $f \in H(\Omega)$ ای مساوی $Z(f)$ است. اگر $A = \{\alpha_n\}$، یک راه طبیعی برای ساختن این f انتخاب توابع $f_n \in H(\Omega)$ است به‌طوری که f_n فقط یک صفر (در α_n) داشته باشد، و در نظر گرفتن حد حاصل‌ضربهای

$$p_n = f_۱ f_۲ \cdots f_n$$

وقتی $n \to \infty$ می‌باشد. جملات باید طوری مرتب شوند که دنبالهٔ $\{p_n\}$ به $f \in H(\Omega)$ ای همگرا بوده و تابع حدی f جز در نقاط مقرر α_n مساوی ۰ نباشد. لذا بهتر است مطلب را با چند خاصیت کلی از حاصل‌ضربهای نامتناهی آغاز کنیم.

۲.۱۵ تعریف. فرض کنیم $\{u_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد،

$$p_n = (۱+u_۱)(۱+u_۲)\cdots(۱+u_n), \qquad (۱)$$

و $p = \lim_{n \to \infty} p_n$ موجود باشد. در این صورت می‌نویسیم

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \cdot \qquad (2)$$

p_n ها **حاصل‌ضربهای جزئی حاصل‌ضرب نامتناهی** (۲) می‌باشند. گوییم حاصل‌ضرب نامتناهی (۲) همگراست اگر دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا باشد.

در بررسی سریهای نامتناهی Σa_n مهم است که a_n به‌سرعت به ۰ نزدیک شود. به‌همین نحو، در مطالعهٔ حاصل‌ضربهای نامتناهی، نزدیک بودن یا نبودن عوامل به ۱ مورد توجه است. این امر در نمادگذاری فوق ملحوظ شده است: $1+u_n$ در صورتی به ۱ نزدیک است که u_n به ۰ نزدیک باشد.

۳.۱۵ لم. *هرگاه u_1، $\cdots$، u_N اعداد مختلطی بوده و*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n) \text{ و } p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1+|u_n|), \qquad (1)$$

آنگاه

$$p_N^* \le \exp(|u_1| + \cdots + |u_N|) \qquad (2)$$

و

$$|p_N - 1| \le p_N^* - 1 \cdot \qquad (3)$$

برهان. نامساوی $1+x \le e^x$ به‌ازای $x \ge 0$ نتیجهٔ فوری بسط e^x برحسب توانهای x است. x را با $|u_1|$، $\cdots$، $|u_N|$ عوض کرده و نامساویهای حاصل را درهم ضرب می‌کنیم. با این کار نامساوی (۲) به‌دست می‌آید. به‌ازای $N=1$ نامساوی (۳) بدیهی است. حالت کلی به‌استقرا نتیجه می‌شود: به‌ازای $k = 1, \cdots, N-1$،

$$p_{k+1} - 1 = p_k(1+u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1+u_{k+1}) + u_{k+1};$$

در نتیجه اگر نامساوی (۳) با k به‌جای N برقرار باشد، نیز داریم

$$|p_{k+1} - 1| \le (p_k^* - 1)(1+|u_{k+1}|) + |u_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1 \cdot$$

۴.۱۵ قضیه. *فرض کنیم $\{u_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط کراندار بر مجموعهٔ S باشد به‌طوری‌که $\Sigma |u_n(s)|$ بر S به‌طور یکنواخت همگراست. در این صورت حاصل‌ضرب*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+u_n(s)\right) \qquad (1)$$

بر S به‌طوریکنواخت همگراست، وبه‌ازای $s_0 \in S$ ی، $f(s_0) = 0$ اگر و فقط اگر به‌ازای n ی، $u_n(s_0) = -1$.

به‌علاوه، هرگاه $\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$ جایگشتی از $\{1, 2, 3, \cdots\}$ باشد، آنگاه نیز داریم

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+u_{n_k}(s)\right) \ (s \in S) \cdot \tag{۲}$$

برهان. فرض قضیه ایجاب می‌کند که $\Sigma |u_n(s)|$ بر S کراندار است، و اگر p_N حاصل‌ضرب جزئی N م (۱) باشد، از لم ۳.۱۵ نتیجه می‌شود که ثابتی مانند $C < \infty$ هست به‌طوری که به‌ازای هر N و هر s، $|p_N(s)| \le C$.

ϵ را که $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ اختیار می‌کنیم. عددی مانند N_0 هست به‌طوری که

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \epsilon \quad (s \in S) \cdot \tag{۳}$$

فرض کنیم $\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$ جایگشتی از $\{1, 2, 3, \cdots\}$ باشد. هرگاه $N \ge N_0$ و M آنقدر بزرگ باشد که

$$\{1, 2, \cdots, N\} \subset \{n_1, n_2, \cdots, n_M\} \tag{۴}$$

و $q_M(s)$ حاصل‌ضرب جزئی M م (۲) باشد، آنگاه

$$q_M - p_N = p_N \{\Pi (1+u_{n_k}) - 1\} \cdot \tag{۵}$$

n_k های آمده در (۵) همه متمایز بوده و از N_0 بزرگترند. لذا رابطهٔ (۳) و لم ۳.۱۵ نشان می‌دهند که

$$|q_M - p_N| \le |p_N| \ (e^{\epsilon} - 1) \le 2 \, |p_N| \ \epsilon \le 2C\epsilon \cdot \tag{۶}$$

هرگاه $n_k = k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$، آنگاه $q_M = p_M$، و رابطهٔ (۶) نشان می‌دهد که $\{p_N\}$ به‌طور یکنواخت به‌یک تابع حدی مانند f همگراست. همچنین رابطهٔ (۶) نشان می‌دهد که

$$|p_N - p_{N_0}| \le 2 \, |p_{N_0}| \, \epsilon \ (M > N_0) \ ; \tag{۷}$$

درنتیجه $|p_M| \ge (1-2\epsilon) \, |p_{N_0}|$. لذا

$$|f(s)| \ge (1-2\epsilon) \, |p_{N_0}(s)| \ \ (s \in S) \tag{۸}$$

نشانگر آنکه $f(s) = 0$ اگر و فقط اگر $p_{N_0}(s) = 0$.

بالأخره رابطهٔ (۶) نیز نشان می‌دهد که $\{q_M\}$ به‌همان حد $\{p_N\}$ همگرا می‌باشد.

۵.۱۵ قضیه. ***فرض کنیم $0 \le u_n < 1$. در این صورت***

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-u_n) > 0 \ \text{اگر و فقط اگر}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty \cdot$$

برهان. هرگاه $p_N = (1-u_1)\cdots(1-u_N)$، آنگاه $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_N > 0$؛ درنتیجه $p = \lim p_N$ موجود است. اگر $\Sigma u_n < \infty$، قضیهٔ ۴.۱۵ ایجاب می‌کند که $p > 0$. از آن سو،

$$p \le p_N = \prod_1^N (1-u_n) \le \exp\{-u_1 - u_2 - \cdots - u_N\},$$

و اگر $\Sigma u_n = \infty$، آخرین عبارت وقتی $N \to \infty$ به ۰ میل می‌کند.

ما نتیجهٔ زیر از قضیهٔ ۴.۱۵ را کراراً به‌کار خواهیم برد.

۶.۱۵ قضیه. *فرض کنیم به‌ازای* $n = 1, 2, 3, \cdots$، $f_n \in H(\Omega)$، *هیچ* f_n*ی در مؤلفه‌ای از* Ω *متحد ۰ نباشد، و*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| \qquad (1)$$

بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω *به‌طور یکنواخت همگرا باشد. در این صورت حاصل‌ضرب*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (2)$$

بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω *به‌طور یکنواخت همگراست. لذا* $f \in H(\Omega)$.
به‌علاوه داریم

$$m(f;z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n;z) \quad (z \in \Omega) \qquad (3)$$

که در آن $m(f;z)$ *بستایی صفر* f *در* z *است. [هرگاه* $f(z) \neq 0$*، آنگاه* $m(f;z) = 0$.]

برهان. قسمت اول قضیه فوراً از قضیهٔ ۴.۱۵ نتیجه می‌شود. برای قسمت دوم ملاحظه می‌کنیم که، طبق (۱)، هر $z \in \Omega$ همسایگیی مانند V دارد که در آن حداکثر تعدادی متناهی از f_nها دارای صفرند. ابتدا این عاملها را اختیار می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۴.۱۵، حاصل‌ضرب سایر عوامل صفری در V ندارد، و این رابطهٔ (۳) را به‌ما می‌دهد. درضمن نیز می‌بینیم که به‌ازای هر $z \in \Omega$ حداکثر تعدادی متناهی جمله از سری (۳) می‌توانند مثبت باشند.

قضیهٔ تجزیهٔ وایراشتراس

۷.۱۵ تعریف. قرار می‌دهیم $E_0(z) = 1 - z$ و به‌ازای $p = 1, 2, 3, \cdots$،

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

این تابعها که توسط وایراشتراس معرفی شده‌اند گاهی ***عوامل مقدماتی*** خوانده می‌شوند. تنها

صفرهایشان در $z=۱$ است. سودمندی آنها تابع این امر است که اگر $|z| < ۱$ و p بزرگ باشد، با آنکه $E_p(۱) = ۰$، به ۱ نزدیک می‌باشند.

۸.۱۵ لم. *به‌ازای* $|z| \le ۱$ *و* $p = ۰, ۱, ۲, \cdots$،

$$|۱ - E_p(z)| \le |z|^{p+۱} \cdot$$

برهان. مطلب به‌ازای $p = ۰$ واضح است. به‌ازای $p \ge ۱$، محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که

$$-E_p'(z) = z^p \exp\{z + \frac{z^۲}{۲} + \cdots + \frac{z^p}{p}\} \cdot$$

لذا $-E_p'$ در $z = ۰$ یک صفر از مرتبهٔ p دارد، و بسط $-E'_p$ به‌توانهای z دارای ضرایب حقیقی نامنفی می‌باشد. چون

$$۱ - E_p(z) = -\int_{[۰,z]} E_p'(w)\, dw,$$

$۱ - E_p$ دارای یک صفر از مرتبهٔ $p+۱$ در $z = ۰$ است، و هرگاه

$$\varphi(z) = \frac{۱ - E_p(z)}{z^{p+۱}},$$

آنگاه $\varphi(z) = \Sigma a_n z^n$ که در آن هر $a_n \ge ۰$. لذا اگر $|z| \le ۱$، $|\varphi(z)| \le \varphi(۱) = ۱$، و این لم را به‌ثبوت می‌رساند.

۹.۱۵ قضیه. *فرض کنیم* $\{z_n\}$ *دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد به‌طوری که* $z_n \ne ۰$ *و وقتی* $n \to \infty$، $|z_n| \to \infty$. *هرگاه* $\{p_n\}$ *دنباله‌ای از اعداد صحیح نامنفی باشد به‌طوری که به‌ازای هر عدد مثبت* r *(و* $r_n = |z_n|$*)*،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{۱+p_n} < \infty, \qquad (۱)$$

آنگاه حاصل‌ضرب نامتناهی

$$P(z) = \prod_{n=۱}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \qquad (۲)$$

معرف یک تابع تمام مانند P *است که در هر نقطهٔ* z_n *دارای صفر بوده و صفر دیگری در صفحه ندارد.*

به‌طور دقیقتر، هرگاه α، m *بار در دنبالهٔ* $\{z_n\}$ *ظاهر شود، آنگاه* P *در* α *دارای صفر از مرتبهٔ* m *می‌باشد.*

اگر مثلاً $p_n = n - ۱$، *شرط (۱) همواره برقرار می‌باشد.*

برهان. به‌ازای هر r رابطهٔ $r_n > ۲r$ به‌ازای هر n جز تعدادی متناهی برقرار است. لذا به‌ازای این

nها، $r/r_n < \frac{1}{2}$؛ درنتیجه رابطهٔ (۱) به‌ازای $n = p_n + 1$ برقرار می‌باشد.

حال r را ثابت می‌گیریم. اگر $|z| \leq r$، لم ۸.۱۵ نشان می‌دهد که اگر $r_n \geq r$، که به‌ازای هر n جز تعدادی متناهی برقرار است،

$$\left| 1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} .$$

حال از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \right|$$

بر مجموعه‌های فشرده در صفحه به‌طور یکنواخت همگراست، و قضیهٔ ۶.۱۵ نتیجهٔ مطلوب را به‌ما می‌دهد.

تذکر. به‌ازای بعضی از دنباله‌های $\{r_n\}$، رابطهٔ (۱) به‌ازای دنبالهٔ ثابت $\{p_n\}$ برقرار است. اگر این ثابت را حتی‌الامکان کوچک بگیریم سودمند است. در این صورت تابع حاصل (۲) را ***حاصلضرب کانونی*** نظیر $\{z_n\}$ می‌نامند. مثلاً اگر $\Sigma\, 1/r_n < \infty$، می‌توان فرض کرد $p_n = 0$ و حاصلضرب کانونی خواهد بود

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) .$$

اگر $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ ولی $\Sigma\, 1/r_n^2 < \infty$، حاصلضرب کانونی عبارت است از

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\pi/z_n} .$$

حاصلضربهای کانونی در بررسی تابعهای تمام از مرتبهٔ متناهی اهمیت بسیار دارند. (برای تعریف، ر.ک. تمرین ۲.)

حال قضیهٔ تجزیهٔ وایراشتراس را بیان می‌کنیم.

۱۰.۱۵ قضیه. ***فرض کنیم f یک تابع تمام بوده، $f(0) \neq 0$، و z_1، z_2، z_3، $\cdots$ صفرهای f باشند که طبق بستاییهایشان لیست شده‌اند. در این صورت یک تابع تمام مانند g و یک دنباله مانند $\{p_n\}$ از اعداد صحیح نامنفی هست به‌طوری که***

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) . \qquad (1)$$

تذکر. (آ) اگر f در $z = 0$ دارای صفر از مرتبهٔ k باشد، مطلب فوق در مورد $f(z)/z^k$ به‌کار می‌رود.
(ب) تجزیهٔ (۱) منحصر به‌فرد نیست؛ به fهایی که صفرهایشان در شرط لازم برای همگرایی

یک حاصل‌ضرب کانونی صدق می‌کنند می‌توان تجزیهٔ منحصر به‌فردی منسوب کرد.

برهان. فرض کنیم P حاصل‌ضرب مذکور در قضیهٔ ۹.۱۵ باشد که با صفرهای f تشکیل شده است. در این صورت f/P فقط انفرادهای قابل رفع در صفحه دارد. لذا یک (یا قابل توسیع به‌یک) تابع تمام است. همچنین f/P دارای صفر نیست، و چون صفحه همبند ساده است، به‌ازای یک تابع نمایی مانند g، $f/P = e^g$.

برهان قضیهٔ ۹.۱۵ را می‌توان به‌آسانی به‌هر مجموعهٔ باز کشانید:

۱۱.۱۵ قضیه. *فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در $S^۲$ بوده و $\Omega \neq S^۲$. همچنین $A \subset \Omega$ و A نقطهٔ حدی در Ω نداشته باشد. به‌هر $\alpha \in A$ عدد صحیح مثبتی مانند $m(\alpha)$ مربوط می‌کنیم. در این صورت تابعی مانند $f \in H(\Omega)$ وجود دارد که همهٔ صفرهایش در A اند و f در هر $\alpha \in A$ صفری از مرتبهٔ $m(\alpha)$ دارد.*

برهان. فرض $\infty \in \Omega$ ولی $\infty \notin A$ استدلال را ساده کرده و به‌کلیت خللی وارد نمی‌سازد. (اگر چنین نباشد، یک تبدیل خطی کسری آن را چنین خواهد ساخت.) در این صورت $S^۲ - \Omega$ یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ ناتهی از صفحه است، و ∞ یک نقطهٔ حدی A نیست.

اگر A متناهی باشد، می‌توان f را یک تابع گویا گرفت.

هرگاه A نامتناهی باشد، آنگاه A شمارش‌پذیر است (در غیر این صورت یک نقطهٔ حدی در Ω موجود است). فرض کنیم $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای با جملات در A باشد و در آن هر $\alpha \in A$ درست $m(\alpha)$ بار لیست شده باشد. به‌هر α_n نقطهٔ $\beta_n \in S^۲ - \Omega$ را طوری مربوط می‌سازیم که به‌ازای هر $\beta \in S^۲ - \Omega$، $|\beta_n - \alpha_n| \le |\beta - \alpha_n|$. این امر بدلیل فشردگی $S^۲ - \Omega$ ممکن است. در این صورت، وقتی $n \to \infty$،

$$|\beta_n - \alpha_n| \to ۰ \cdot$$

در غیر این صورت A دارای نقطهٔ حدی در Ω است. حکم می‌کنیم که

$$f(z) = \prod_{n=۱}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

دارای خواص مطلوب می‌باشد.

قرار می‌دهیم $r_n = ۲\,|\alpha_n - \beta_n|$ و فرض می‌کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω باشد. چون $r_n \to ۰$، عددی مانند N هست به‌طوری‌که به‌ازای هر $z \in K$ و هر $n \ge N$، $|z - \beta_n| > r_n$. لذا

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| \le \frac{۱}{۲}$$

که بنابر لم ۸.۱۵ ایجاب می‌کند که

$$\left|۱ - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \le \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n+۱} \quad (n \ge N \text{ و } z \in K),$$

و این، طبق قضیهٔ ۶.۱۵، برهان را کامل می‌سازد.

حال به‌عنوان یک نتیجه می‌توان توابع خوشریخت را توصیف کرد (ر.ک. تعریف ۴۱.۱۵):

۱۲.۱۵ قضیه. *هر تابع خوشریخت در مجموعهٔ باز Ω خارج قسمت دو تابع خوشریخت در Ω است.*

عکس قضیه واضح است: هرگاه $g\in H(\Omega)$، $h\in H(\Omega)$، و h در هیچ مؤلفه‌ای از Ω متحد ۰ نباشد، آنگاه g/h در Ω خوشریخت است.

برهان. فرض کنیم f در Ω خوشریخت باشد. همچنین A مجموعهٔ تمام قطبهای f در Ω بوده، و به‌ازای هر $\alpha\in A$، $m(\alpha)$ مرتبهٔ قطب f در α باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۵، تابعی مانند $h\in H(\Omega)$ موجود است به‌طوری که h در هر $\alpha\in A$ یک صفر بابستایی $m(\alpha)$ دارد، و h صفر دیگری ندارد. قرار می‌دهیم $g=fh$. انفرادهای g در نقاط A قابل رفع‌اند؛ درنتیجه می‌توان g را طوری وسعت داد که $g\in H(\Omega)$. واضح است که در $\Omega-A$ داریم $f=g/h$.

مسئلهٔ درونیابی

قضیهٔ میتاگ ـ لفلر را می‌توان با قضیهٔ وایراشتراس ۱۱.۱۵ درهم آمیخت و جواب مسئلهٔ زیر را به‌دست آورد: آیا می‌توان مجموعهٔ دلخواه $A\subset\Omega$ را طوری گرفت که نقطهٔ حدی در Ω نداشته باشد و تابع $f\in H(\Omega)$ را چنان یافت که در هر نقطهٔ A دارای مقادیر مقرر باشد؟ پاسخ مثبت است. در واقع می‌توان کار بهتری انجام داد و در هر نقطهٔ A تعدادی متناهی مشتق نیز مقرر نمود:

۱۳.۱۵ قضیه. *فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در صفحه بوده، $A\subset\Omega$، A در Ω نقطهٔ حدی نداشته باشد، و به‌هر $\alpha\in A$ یک عدد صحیح نامنفی مانند $m(\alpha)$ و اعداد مختلط $w_{n,\alpha}$، $\circ\le n\le m(\alpha)$، مربوط شده باشد. در این صورت تابعی مانند $f\in H(\Omega)$ هست به‌طوری‌که*

$$f^{(n)}(\alpha)=n!\,w_{n,\alpha}\left(\circ\le n\le m(\alpha)\ \text{و}\ \alpha\in A\right)\cdot \tag{۱}$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۵، تابعی مانند $g\in H(\Omega)$ هست که تنها صفرهایش در A اند و g در هر $\alpha\in A$ دارای صفر از مرتبهٔ $m(\alpha)+1$ است. حکم می‌کنیم که می‌توان به‌هر $\alpha\in A$ تابعی مانند P_α به‌شکل

$$P_\alpha(z)=\sum_{j=1}^{1+m(\alpha)} C_{j,\alpha}\,(z-\alpha)^{-j} \tag{۲}$$

چنان مربوط کرد که gP_α دارای بسط به‌سری توانی

$$g(z)\,P_\alpha(z)=w_{\circ,\alpha}+w_{1,\alpha}(z-\alpha)+\cdots+w_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)}+\cdots \tag{۳}$$

در قرصی به‌مرکز α باشد.

برای ساده کردن نگارش قرار می‌دهیم $\alpha=\circ$ و $m(\alpha)=m$، و زیرنویسهای α را حذف

می‌کنیم. به‌ازای z نزدیک ۰ داریم

$$g(z) = b_1 z^{m+1} + b_2 z^{m+2} + \cdots \tag{۴}$$

که در آن $b_1 \neq 0$. هرگاه

$$P(z) = c_1 z^{-1} + \cdots + c_{m+1} z^{-m-1}, \tag{۵}$$

آنگاه

$$g(z)P(z) = (c_{m+1} + c_m z + \cdots + c_1 z^m)(b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + \cdots) \cdot \tag{۶}$$

bها داده شده‌اند و می‌خواهیم cها را طوری اختیار کنیم که

$$g(z)P(z) = w_0 + w_1 z + \cdots + w_m z^m + \cdots \cdot \tag{۷}$$

اگر ضرایب ۱، z، $\cdots$ ، z^m در (۶) و (۷) را باهم مقایسه کنیم، می‌توانیم معادلات حاصل را متوالیاً نسبت به c_{m+1}، c_m، $\cdots$ ، c_1 حل کنیم زیرا $b_1 \neq 0$.

بدین‌ترتیب P_nهای مطلوب به‌دست می‌آیند. حال قضیهٔ میتاگ ـ لفلر تابع خوشریخت h در Ω را به‌دست می‌دهد که قسمتهای اصلی‌اش این P_n هااند، و اگر قرار دهیم $f = gh$، تابعی با خواص مطلوب به‌دست می‌آید.

از جواب این مسئلهٔ درونیابی می‌توان در تعیین ساختار تمام ایده‌آلهای با تولید متناهی در حلقه‌های $H(\Omega)$ استفاده کرد.

۱۴.۱۵ تعریف. *ایده‌آل* $[g_1, \cdots, g_n]$ ***تولید شده به‌وسیلهٔ توابع*** $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$ مجموعهٔ تمام توابع به‌شکل $\Sigma f_i g_i$ است که در آن به‌ازای $i = 1, \cdots, n$، $f_i \in H(\Omega)$. ***ایده‌آل اصلی*** ایده‌آلی است که فقط با یک تابع تولید شده باشد. توجه کنید که $H(\Omega) = [1]$.

اگر $f \in H(\Omega)$، $\alpha \in \Omega$، و f در همسایگی α متحد ۰ نباشد، بستایی صفر f در α را با $m(f;\alpha)$ نشان می‌دهیم. هرگاه $f(\alpha) \neq 0$، آنگاه، همانند قضیهٔ ۶.۱۵، $m(f;\alpha) = 0$.

۱۵.۱۵ قضیه. ***هر ایده‌آل با تولید متناهی در*** $H(\Omega)$ ***اصلی است.***

به‌طور صریحتر: هرگاه $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$، آنگاه توابعی مانند $g, f_i, h_i \in H(\Omega)$ وجود دارند به‌طوری که

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i \text{ و } g_i = h_i g \ (1 \le i \le n) \cdot$$

برهان. فرض کنیم Ω یک ناحیه باشد. این فرض مشکلات ناشی از توابعی که در بعضی ولی نه در همهٔ مؤلفه‌های Ω متحد ۰ اند پیش نمی‌آورد. با اثبات قضیه برای نواحی، می‌توان آن را در هر مؤلفهٔ مجموعهٔ باز دلخواه Ω به‌کار برد و تمام قضیه را نتیجه گرفت. ذکر جزئیات را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

فرض کنیم $P(n)$ حکم زیر باشد.

هرگاه $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$، هیچ g_i ی متحد ۰ نباشد، و هیچ نقطهٔ Ω صفر هر g_i نباشد، آنگاه $[g_1, \cdots, g_n] = [1]$.

$P(1)$ بدیهی است. فرض کنیم $n > 1$ و $P(n-1)$ درست باشد. توابع $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$ را بدون صفر مشترک اختیار می‌کنیم. بنابر قضیهٔ وایراشتراس ۱۱.۱۵، تابعی مانند $\varphi \in H(\Omega)$ هست به‌طوری که

$$m(\varphi; \alpha) = \min\{m(g_i; \alpha) : 1 \le i \le n-1\} \ (\alpha \in \Omega) \cdot \tag{1}$$

توابع $f_i = g_i/\varphi$ $(1 \le i \le n-1)$ در $H(\Omega)$ اند و در Ω صفر مشترک ندارند. چون $P(n-1)$ درست است، $[f_1, \cdots, f_{n-1}] = [1]$. لذا

$$[g_1, \cdots, g_{n-1}, g_n] = [\varphi, g_n] \cdot \tag{2}$$

به‌علاوه انتخاب φ ی ما نشان می‌دهد که در هر نقطه ازمجموعهٔ $A = \{\alpha \in \Omega : \varphi(\alpha) = 0\}$ داریم $g_n(\alpha) \neq 0$. لذا از قضیهٔ ۱۳.۱۵ معلوم می‌شود که تابعی مانند $h \in H(\Omega)$ چنان موجود است که

$$m(1 - hg_n; \alpha) \ge m(\varphi; \alpha) \ (\alpha \in \Omega) \cdot \tag{3}$$

این h با انتخاب مناسب مقادیر مقرر $h^{(k)}(\alpha)$ ها به‌ازای $\alpha \in A$ و $0 \le k \le m(\varphi; \alpha)$ به‌دست می‌آید.

بنابر (۳)، $(1 - hg_n)/\varphi$ دارای انفرادهای قابل رفع است. لذا، به‌ازای $f \in H(\Omega)$ ی،

$$1 = hg_n + f\varphi \cdot \tag{4}$$

بنابر (۲) و (۴) داریم $1 \in [g_1, \cdots, g_n]$.

پس نشان داده‌ایم که $P(n-1)$ حکم $P(n)$ را ایجاب می‌کند. لذا $P(n)$ به‌ازای هر n درست است.

بالأخره فرض می‌کنیم $G_1, \cdots, G_n \in H(\Omega)$ و هیچ G_i ی متحد ۰ نباشد. (این فرض آسیبی به کلیت وارد نمی‌سازد.) کاربرد دیگری از قضیهٔ ۱۱.۱۵ نتیجه می‌دهد که $\varphi \in H(\Omega)$ که به‌ازای هر $\alpha \in \Omega$، $m(\varphi; \alpha) = \min m(G_i; \alpha)$. قرار می‌دهیم $g_i = G_i/\varphi$. در این صورت $g_i \in H(\Omega)$ و توابع $g_1, \cdots, g_n$ صفر مشترکی در Ω ندارند. بنابر $P(n)$، $[g_1, \cdots g_n] = [1]$. لذا $[G_1, \cdots, G_n] = [\varphi]$ و این برهان را تمام می‌کند.

فرمول ینسن

۱۶.۱۵. همانطور که از قضیهٔ ۱۱.۱۵ معلوم می‌شود، جای صفرهای یک تابع هلوریخت در

ناحیهٔ Ω تحت قیدی جز شرط واضح عدم وجود نقاط حدی در Ω نیست. اگر $H(\Omega)$ را با زیر رده‌هایی که با شرایط رشد معینی تعریف می‌شوند عوض کنیم، وضع کاملاً فرق خواهد کرد. در این اوضاع توزیع صفرها باید در چند شرط کمی صدق کند. اساس اکثر این قضایا فرمول ینسن می‌باشد (قضیهٔ ۱۸.۱۵). ما این فرمول را در رده‌هایی از تابعهای تمام و بعضی از زیررده‌های $H(U)$ به‌کار خواهیم گرفت.

لم زیر مجال اعمال قضیهٔ کشی در محاسبهٔ یک انتگرال معین را به‌ما می‌دهد.

۱۷.۱۵ لم. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=0$.

برهان. فرض کنیم $\Omega=\{z:\operatorname{Re}z<1\}$. چون در Ω داریم $1-z\neq 0$ و Ω همبند ساده است، تابعی مانند $h\in H(\Omega)$ هست به‌طوری که در Ω،

$$\exp\{h(z)\}=1-z,$$

و اگر شرط کنیم که $h(0)=0$، h به‌طور منحصر به‌فرد معین خواهد شد. چون در Ω داریم $\operatorname{Re}(1-z)>0$، خواهیم داشت

$$\operatorname{Re}h(z)=\log|1-z| \text{ و } |\operatorname{Im}h(z)|<\frac{\pi}{2}\ (z\in\Omega). \tag{1}$$

فرض کنیم Γ به‌ازای $\delta>0$ ی کوچک مسیر زیر باشد:

$$\Gamma(t)=e^{it}\,(\delta\le t\le 2\pi-\delta), \tag{2}$$

و γ قوس مستدیر به‌مرکز ۱ باشد که از $e^{i\delta}$ و $e^{-i\delta}$ در U می‌گذرد. در این صورت

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]. \tag{3}$$

تساوی اخیر تابع قضیهٔ کشی است؛ توجه کنید که $h(0)=0$.

طول γ از $\pi\delta$ کمتر است؛ درنتیجه رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که قدرمطلق آخرین انتگرال در (۳) از $C\delta\log(1/\delta)$ که در آن C ثابت است کمتر می‌باشد. این به‌ازای $\delta\to 0$ در (۳) نتیجه را به‌ما خواهد داد.

۱۸.۱۵ قضیه. فرض کنیم $\Omega=D(0;R)$، $f\in H(\Omega)$، $f(0)\neq 0$، $0<r<R$، و α_1، $\cdots$، α_N ***صفرهای*** f ***در*** $\overline{D}(0;r)$ ***باشند که بر طبق بستاییهایشان لیست شده‌اند. در این***

صورت

$$(1)\qquad |f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\}.$$

این رابطه به **فرمول ینسن** معروف است. فرض $f(0) \neq 0$ مشکلی در کاربردها ایجاد نمی‌کند چراکه اگر f در ۰ دارای صفر از مرتبهٔ k باشد، فرمول را می‌توان بر $f(z)/z^k$ اعمال کرد.

برهان. نقاط α_j را طوری مرتب می‌کنیم که $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ در $D(0;r)$ بوده و $|\alpha_{m+1}| = \cdots = |\alpha_N| = r$. (البته ممکن است $m = N$ یا $m = 0$.) قرار می‌دهیم

$$(2)\qquad g(z) = f(z) \prod_{n=1}^{m} \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \prod_{n=m+1}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}.$$

در این صورت $g \in h(D)$ که در آن به‌ازای $\epsilon > 0$ ی، $D = D(0; r+\epsilon)$، g در D دارای صفر نیست؛ درنتیجه $\log |g|$ در D توافقی است (قضیهٔ ۱۲.۱۳)؛ و لذا

$$(3)\qquad \log |g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

بنابر (۲)،

$$(4)\qquad |g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_n|}.$$

به‌ازای $1 \le n \le m$، اگر $|z| = r$، عوامل موجود در (۲) دارای قدرمطلق یک‌اند. اگر $\alpha_n = re^{i\theta_n}$، به‌ازای $m < n \le N$ داریم

$$(5)\qquad \log |g(re^{i\theta})| = \log |f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log |1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|.$$

لذا لم ۱۷.۱۵ نشان می‌دهد که اگر g با f تعویض شود، انتگرال (۳) بلاتغییر است. حال مقایسه با (۴) رابطهٔ (۱) را به‌ما می‌دهد.

فرمول ینسن یک نامساوی به‌دست می‌دهد که مستلزم مقادیر مرزی توابع هلوریخت کراندار در U است (به‌یاد می‌آوریم که ردهٔ این توابع با H^∞ نموده می‌شود):

۱۹.۱۵ قضیه. هرگاه $f \in H^\infty$، f متحد ۰ نباشد، و تعریف کنیم

$$(1)\qquad \mu_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta \quad (0 < r < 1)$$

و

$$(2)\qquad \mu^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{i\theta})|\, d\theta$$

که در آن f^* تابع حدی شعاعی f همانند قضیهٔ ۱۱.۳۲ باشد، آنگاه

$$\text{اگر } 0<r<s<1 \text{ ، } \mu_r(f) \le \mu_s(f) \text{،} \tag{۳}$$

$$\text{وقتی } r \to 0 \text{ ، } \mu_r(f) \to \log|f(0)| \text{،} \tag{۴}$$

و

$$\text{اگر } 0<r<1 \text{ ، } \mu_r(f) \le \mu^*(f) \cdot \tag{۵}$$

به‌نتیجهٔ زیر توجه کنید: r را می‌توان طوری گرفت که اگر $|z| = r$ ، $f(z) \neq 0$. در این صورت $\mu_r(f)$ و درنتیجه، بنابر (۵)، $\mu^*(f)$ متناهی است. لذا $\log|f^*| \in L^1(T)$ **و در تقریباً هر نقطهٔ** T ، $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$.

برهان. عدد صحیحی مانند $m \ge 0$ هست به‌طوری که $f(z) = z^m g(z)$ ، $g \in H^\infty$ ، و $g(0) \neq 0$. فرمول ینسن ۱۸.۱۵ (۱) را بر g به‌جای f اعمال می‌کنیم. اگر r افزایش یابد، طرف چپ فرمول بوضوح نمی‌تواند کاهش یابد. لذا اگر $r<s$ ، $\mu_r(g) \le \mu_s(g)$. چون

$$\mu_r(f) = \mu_r(g) + m\log r,$$

رابطهٔ (۳) به‌ثبوت خواهد رسید.

حال بدون صدمه زدن به‌کلیت فرض می‌کنیم $|f| \le 1$. به‌جای $f(re^{i\theta})$ می‌نویسیم $f_r(e^{i\theta})$. در این صورت وقتی $r \to 0$ ، $f_r \to f(0)$ ، و وقتی $r \to 1$ ، $f_r \to f^*$ ت. هـ. چون $\log(1/|f_r|) \ge 0$ ، دوبار کاربرد لم‌فاتو همراه با رابطهٔ (۳) روابط (۴) و (۵) را به‌ما خواهد داد.

۲۰.۱۵ صفرهای تابعهای تمام. فرض کنیم f یک تابع تمام بوده،

$$M(r) = \sup_\theta |f(re^{i\theta})| \quad (0<r<\infty) \tag{۱}$$

و $n(r)$ تعداد صفرهای f در $\bar{D}(0\,;r)$ باشد. همچنین به‌خاطر سادگی قرار می‌دهیم $f(0) = 1$. از فرمول ینسن نتیجه می‌شود که اگر $\{\alpha_n\}$ دنبالهٔ صفرهای f با ترتیب $|\alpha_1| \le |\alpha_2| \le \cdots$ باشد،

$$M(2r) \ge \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(2re^{i\theta})|\,d\theta\right\} = \prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|}$$

$$\ge \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \ge 2^{n(r)};$$

درنتیجه

$$n(r)\log 2 \le \log M(2r) \cdot \tag{۲}$$

لذا سرعت افزایش $n(r)$ (یعنی چگالی صفرهای f) به‌وسیلهٔ میزان رشد $M(r)$ کنترل

می‌شود. برای توجه به‌یک وضعیت مشخص‌تر فرض می‌کنیم به‌ازای r بزرگ

$$M(r) < \exp\{Ar^k\}\,, \tag{۳}$$

که در آن A و k اعداد مثبت داده شده‌اند. در این صورت نامساوی (۲) به‌رابطهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \le k\,\cdot \tag{۴}$$

مثلاً هرگاه k یک عدد صحیح مثبت بوده و

$$f(z) = ۱ - e^{z^k}\,, \tag{۵}$$

آنگاه $n(r)$ تقریباً مساوی $\pi^{-۱}kr^k$ است؛ درنتیجه

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = k\,\cdot \tag{۶}$$

این نشان می‌دهد که تخمین (۴) را نمی‌توان اصلاح کرد.

حاصل‌ضربهای بلاشکه (*Blaschke*)

با فرمول ینسن می‌توان شرایط دقیقی برای صدق صفرهای تابع غیرثابت $f \in H^\infty$ معین نمود.

۲۱.۱۵ قضیه. ***هرگاه $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای در U باشد که $\alpha_n \neq ۰$ و***

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (۱ - |\alpha_n|) < \infty\,, \tag{۱}$$

k یک عدد صحیح نامنفی باشد، و

$$B(z) = z^k \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{۱ - \bar{\alpha}_n z}\, \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad (z \in U)\,, \tag{۲}$$

آنگاه $B \in H^\infty$ و B صفری جز نقاط α_n (و مبدأ اگر $k > ۰$) نخواهد داشت.

ما تابع B را یک **حاصل‌ضرب بلاشکه** می‌نامیم. ممکن است بعضی از α_n ها تکرار شوند، که در این صورت B در آن نقاط صفرهای چندگانه دارد. همچنین هر عامل (۲) دارای قدرمطلق ۱ بر T است.

اگر فقط تعدادی متناهی عامل داشته باشیم و حتی اگر عاملی نداشته باشیم (که در این صورت $B(z) = ۱$)، اصطلاح «حاصل‌ضربِ بلا شکه» باز هم به‌کار می‌رود.

برهان. اگر $|z| \le r$ ، جملهٔ n م سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|$$

عبارت است از

$$\left| \frac{\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1-\bar{\alpha}_n z)\alpha_n} \right| (1-|\alpha_n|) \le \frac{1+r}{1-r} (1-|\alpha_n|) \cdot$$

لذا قضیهٔ ۶.۱۵ نشان می‌دهد که $B \in H(U)$ و B فقط صفرهای مقرر را خواهد داشت. چون هر عامل (۲) قدرمطلقی کمتر از ۱ در U دارد، پس $|B(z)| < 1$ و برهان تمام می‌باشد.

۲۲.۱۵. قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\alpha_n|) < \infty \tag{1}$$

شرطی ***کافی*** برای وجود تابعی مانند $f \in H^\infty$ است که فقط صفرهای مقرر $\{\alpha_n\}$ را دارا باشد. این شرط لازم نیز هست: ***اگر $f \in H^\infty$ و f متحد صفر نباشد، صفرهای f باید در (۱) صدق نمایند.*** این حالت خاصی است از قضیه ۲۳.۱۵. جالب آنکه رابطهٔ (۱) شرطی لازم در ردهٔ بسیار وسیعتری از توابع است که اینک به‌توصیف آن می‌پردازیم.

به‌ازای‌هر عدد حقیقی t تعریف می‌کنیم $\log^+ t = \log t$ اگر $t \ge 1$ و $\log^+ t = 0$ اگر $t < 0$.

فرض کنیم N [به‌افتخار نوانلینا (*Nevanlinna*)] ردهٔ تمام $f \in H(U)$هایی باشد که

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta < \infty \cdot \tag{2}$$

واضح است که $H^\infty \subset N$. توجه کنید که رابطهٔ (۲) قیدی بر میزان رشد $|f(z)|$ وقتی $|z| \to 1$ می‌گذارد در حالی‌که کرانداری انتگرالهای

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta \tag{3}$$

چنین قیدی را اعمال نمی‌کند. مثلاً اگر به‌ازای $g \in H(U)$ای، $f = e^g$، رابطهٔ (۳) مستقل از r است. نکته آن است که رابطهٔ (۳) به‌خاطر آنکه $\log|f|$ مقادیر منفی بزرگ را همانند مقادیر مثبت بزرگ می‌گیرد می‌تواند کوچک بماند در حالی‌که $\log^+|f| \ge 0$. در فصل ۱۷ ردهٔ N بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۲۳.۱۵ قضیه. ***فرض کنیم $f \in N$، f در U متحد ۰ نباشد، و α_1، α_2، α_3، $\cdots$ صفرهای f باشند که بر طبق بستاییهایشان لیست شده‌اند. در این صورت***

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\alpha_n|) < \infty \cdot \tag{1}$$

(ما تلویحاً فرض می‌کنیم که f بی‌نهایت صفر در U دارد. اگر فقط تعدادی متناهی صفر موجود باشد، مجموع فوق فقط تعدادی متناهی جمله دارد و چیزی برای اثبات نداریم. همچنین $|\alpha_n| \le |\alpha_{n+1}|$.)

برهان. هرگاه f در مبدأ صفری از مرتبهٔ m داشته باشد و $g(z) = z^{-m}f(z)$، آنگاه $g \in N$ و g همان صفرهای f را جز در مبدأ دارد. لذا، بدون آسیب رسانیدن به‌کلیت، می‌توان فرض کرد $f(\circ) \neq \circ$. فرض کنیم $n(r)$ تعداد صفرهای f در $\bar{D}(\circ\,; r)$ باشد. k را ثابت گرفته و $r < ۱$ را طوری اختیار می‌کنیم که $n(r) > k$. در این صورت فرمول ینسن

$$|f(\circ)| \prod_{n=۱}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\ |f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\} \tag{۲}$$

ایجاب می‌کند که

$$|f(\circ)| \prod_{n=۱}^{k} \frac{r}{|\alpha_n|} \le \exp\left\{\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\ |f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\}. \tag{۳}$$

فرض $f \in N$ هم‌ارز وجود ثابتی مانند $C < \infty$ است که به‌ازای هر r که $\circ < r < ۱$ از سمت راست (۳) متجاوز نمی‌باشد.

پس داریم

$$\prod_{n=۱}^{k} |\alpha_n| \ge C^{-۱}\, |f(\circ)|\, r^k. \tag{۴}$$

نامساوی به‌ازای هر k، وقتی $r \to ۱$، برقرار است. لذا

$$\prod_{n=۱}^{\infty} |\alpha_n| \ge C^{-۱}\, |f(\circ)| > \circ. \tag{۵}$$

بنابر قضیهٔ ۵.۱۵، رابطهٔ (۵) رابطهٔ (۱) را ایجاب می‌کند.

نتیجه. هرگاه $f \in H^\infty$ (یا حتی $f \in N$)، α_1، α_2، α_3، $\cdots$ صفرهای f در U باشند، و $\Sigma(۱ - |\alpha_n|) = \infty$، آنگاه به‌ازای هر $z \in U$، $f(z) = \circ$.

مثلاً هیچ تابع هلوریخت کراندار غیرثابت در U نمی‌تواند در هر نقطهٔ $(n-۱)/n$ $(n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$ دارای صفر باشد.

این بخش را با قضیه‌ای پایان می‌دهیم که رفتار حاصل‌ضرب بلاشکه را در مجاورت مرز U توصیف می‌کند. به‌یاد آورید که B، به‌عنوان عضوی از H^∞، در تقریباً هر نقطهٔ T دارای حدود شعاعی $B^*(e^{i\theta})$ است.

۲۴.۱۵ قضیه. هرگاه B یک حاصل‌ضرب بلاشکه باشد، آنگاه $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ ت. هـ. و

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| \, d\theta = 0 \cdot \qquad (1)$$

برهان. وجود حد نتیجه‌ای است از اینکه انتگرال یک تابع یکنوا از r است. فرض کنیم $B(z)$ همانند قضیهٔ ۲۱.۱۵ باشد، و قرار می‌دهیم

$$B_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot \qquad (2)$$

چون $\log(|B/B_N|)$ در یک مجموعهٔ باز شامل T پیوسته است، اگر B را با B_N عوض کنیم، حد (۱) تغییر نمی‌کند. لذا اگر قضیهٔ ۱۹.۱۵ را بر B_N اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\log |B_N(0)| \le \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| \, d\theta \qquad (3)$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B^*(e^{i\theta})| \, d\theta \le 0 \cdot$$

وقتی $N \to \infty$، اولین جملهٔ (۳) به ۰ میل می‌کند. این کار رابطهٔ (۱) را به‌دست داده و نشان می‌دهد که $\int \log |B^*| = 0$. حال چون $\log |B^*| \le 0$ ت. هـ.، قضیهٔ ۳۹.۱ قسمت (آ) ایجاب می‌کند که $\log |B^*| = 0$ ت. هـ.

قضیهٔ مونتس ـ زاتس (*Müntz-Szasz*)

۲۵.۱۵. یک قضیهٔ کلاسیک از وایراشتراس (مرجع [۲۶]، قضیهٔ ۲۶.۷) می‌گوید که چند جمله‌ایها در $C(I)$، یعنی فضای تمام توابع مختلط پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $I = [0, 1]$ با نرم سوپرمم، چگال‌اند. به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از توابع

$$1, t, t^2, t^3, \cdots \qquad (1)$$

در $C(I)$ چگال است. این مطلب را گاهی این‌طور می‌گویند که توابع (۱) فضای $C(I)$ را **می‌پیمایند**.

این امر سؤال زیر را مطرح می‌سازد: اگر $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$، تحت چه شرایطی توابع

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \cdots \qquad (2)$$

$C(I)$ را می‌پیمایند؟

خواهیم دید که این مسئله رابطه‌ای بسیار طبیعی با مسئلهٔ توزیع صفرهای یک تابع هلوریخت کراندار در یک نیمصفحه (یا در یک قرص؛ این دو به‌طور همدیس هم‌ارزند) دارد. پاسخ تعجب‌آور این‌است که **توابع (۲) فضای $C(I)$ را می‌پیمایند اگر و فقط اگر $\Sigma\, ۱/\lambda_n = \infty$.** درواقع برهان نتیجهٔ دقیقتری به‌دست می‌دهد.

۲۶.۱۵ قضیه. *فرض کنیم $\cdots > \lambda_۳ > \lambda_۲ > \lambda_۱ > ۰$ و X بست $C(I)$ مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از توابع*

$$۱, t^{\lambda_۱}, t^{\lambda_۲}, t^{\lambda_۳}, \cdots$$

باشد.

(آ) هرگاه $\Sigma\, ۱/\lambda_n = \infty$، آنگاه $X = C(I)$.

(ب) هرگاه $\Sigma\, ۱/\lambda_n < \infty$ و $\lambda \notin \{\lambda_n\}$ و $\lambda \neq ۰$، آنگاه X شامل تابع t^{λ} نیست.

برهان. از قضیهٔ هان ـ باناخ (قضیهٔ ۱۹.۵) نتیجه می‌شود که $\varphi \in C(I)$ ولی $\varphi \notin X$ اگر و فقط اگر یک تابعی خطی کراندار بر $C(I)$ موجود باشد که در φ صفر نشده ولی بر تمام X صفر شود. چون هر تابعی خطی کراندار بر $C(I)$ با انتگرالگیری نسبت به‌یک اندازهٔ بورل مختلط بر I داده می‌شود، قسمت (آ) نتیجه‌ای است از حکم زیر:

هرگاه $\Sigma\, ۱/\lambda_n = \infty$ و μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر I باشد به‌طوری که

$$\int_I t^{\lambda_n}\, d\mu(t) = ۰ \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots), \tag{۱}$$

آنگاه نیز

$$\int_I t^{k}\, d\mu(t) = ۰ \quad (k = ۱, ۲, ۳, \cdots)\cdot \tag{۲}$$

چراکه اگر این ثابت شود، تبصرهٔ فوق نشان می‌دهدکه X شامل تمام توابع t^k است؛ چون $۱ \in X$، تمام چندجمله‌ایها در X اند، و لذا قضیهٔ وایراشتراس ایجاب می‌کند که $X = C(I)$.

لذا فرض می‌کنیم (۱) برقرار باشد. چون انتگرالدهها در (۱) و (۲) در ۰ صفر می‌شوند، می‌توان فرض کرد که μ بر $(۰, ۱]$ متمرکز شده است. ما به μ تابع

$$f(z) = \int_I t^{z}\, d\mu(t) \tag{۳}$$

را مربوط می‌سازیم.

طبق تعریف، به‌ازای $t > ۰$، $t^z = \exp(z \log t)$. حکم می‌کنیم که f در نیمصفحهٔ راست هلوریخت است. پیوستگی f به‌آسانی امتحان می‌شود، و سپس می‌توان قضیهٔ موررا به‌کار برد. به‌علاوه، هرگاه $z = x+iy$، $x > ۰$، و $۰ < t \le ۱$، آنگاه $|t^z| = t^x \le ۱$. لذا f در نیمصفحهٔ راست کراندار است، و رابطهٔ (۱) می‌گوید که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $f(\lambda_n) = ۰$. تعریف می‌کنیم

$$g(z) = f\left(\frac{۱+z}{۱-z}\right) \quad (z \in U)\cdot \tag{۴}$$

در این صورت $g\in H^\infty$ و $g(\alpha_n)=\circ$ که در آن $\alpha_n=(\lambda_n-۱)/(\lambda_n+۱)$. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که اگر $\Sigma\, ۱/\lambda_n=\infty$، $\Sigma\,(۱-|\alpha_n|)=\infty$. لذا نتیجهٔ قضیهٔ ۲۳.۱۵ به‌ما می‌گوید که به‌ازای هر $z\in U$، $g(z)=\circ$. بنابراین $f=\circ$. بخصوص، به‌ازای $k=۱, ۲, ۳, \cdots$، $f(k)=\circ$، و این همان رابطهٔ (۲) می‌باشد. بدین‌ترتیب قسمت (آ) قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب) کافی است اندازهٔ μ بر I را طوری بسازیم که رابطهٔ (۳) معرف تابعی مانند f باشد که در نیمصفحهٔ $\operatorname{Re} z>-۱$ هلوریخت بوده (هر عدد منفی در اینجا کاراست)، در $\circ$، $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\lambda_۳$، $\cdots$ مساوی $\circ$ باشد، و در این نیمصفحه صفر دیگری نداشته باشد. در این صورت تابعی القا شده به‌وسیلهٔ این اندازهٔ μ بر X صفر می‌شود ولی اگر $\lambda\neq\circ$ و $\lambda\notin\{\lambda_n\}$، در هیچ تابع t^λ صفر نمی‌شود.

کار را با ساختن یک تابع مانند f که دارای این صفرهای مقرر است آغاز کرده، و سپس نشان می‌دهیم که این f را می‌توان به‌شکل (۳) نمایش داد. تعریف می‌کنیم

$$f(z)=\frac{z}{(۲+z)^۳}\prod_{n=۱}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{۲+\lambda_n+z}\cdot \tag{۵}$$

چون

$$۱-\frac{\lambda_n-z}{۲+\lambda_n+z}=\frac{۲z+۲}{۲+\lambda_n+z},$$

حاصل‌ضرب نامتناهی (۵) بر هر مجموعهٔ فشرده که شامل هیچ نقطهٔ $-۲-\lambda_n$ نباشد به‌طور یکنواخت همگراست. پس f یک تابع خوشریخت در تمام صفحه با قطبهای -۲ و $-۲-\lambda_n$ و صفرهای $\circ$، $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\lambda_۳$، $\cdots$ می‌باشد. همچنین اگر $\operatorname{Re} z>-۱$، در حاصل‌ضرب نامتناهی (۵) قدرمطلق هر عامل از یک کمتر است. لذا اگر $\operatorname{Re} z\geq-۱$، داریم $|f(z)|\leq۱$. عامل $(۲+z)^۳$ تضمین می‌کند که تحدید f به‌خط $\operatorname{Re} z=-۱$ در $L^۱$ است.

z را طوری ثابت می‌گیریم که $\operatorname{Re} z>-۱$، و فرمول کشی را برای $f(z)$ در نظر می‌گیریم که در آن مسیر انتگرالگیری از نیمدایره به‌مرکز -۱، شعاع $R>۱+|z|$، از $-۱-iR$ تا $-۱+R$ تا $-۱+iR$ و سپس بازهٔ بسته از $-۱+iR$ تا $-۱-iR$ تشکیل شده است. انتگرال روی نیمدایره به‌ازای $R\to\infty$ به $\circ$ میل می‌کند؛ در نتیجه داریم

$$f(z)=-\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(-۱+is)}{-۱+is-z}\,ds\ (\operatorname{Re} z>-۱)\cdot \tag{۶}$$

اما

$$\frac{۱}{۱+z-is}=\int_{\circ}^{۱}t^{z-is}\,dt\ (\operatorname{Re} z>-۱)\cdot \tag{۷}$$

لذا رابطهٔ (۶) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$f(z)=\int_{\circ}^{۱}t^{z}\left\{\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(-۱+is)\,e^{-is\log t}\,ds\right\}dt\cdot \tag{۸}$$

تعویض ترتیب انتگرالگیری مجاز است: اگر انتگرالده موجود در (۸) را با قدرمطلقش عوض کنیم، یک انتگرال متناهی نتیجه می‌شود.

قرار می‌دهیم $g(s)=f(-۱+is)$. در این صورت انتگرال داخلی در (۸) مساوی $\hat{g}(\log t)$ است که در آن $\hat{g}$ تبدیل فوریهٔ g می‌باشد. این یک تابع پیوستهٔ کراندار بر $[۰, ۱)$ است، و اگر قرار دهیم $d\mu(t)=\hat{g}(\log t)\,dt$، یک اندازه به‌دست می‌آید که f را به‌شکل مطلوب (۳) نمایش می‌دهد.

این امر برهان را تمام خواهد کرد.

۲۷.۱۵ تبصره. قضیهٔ فوق ایجاب می‌کند که هرگاه $\{۱, t^{\lambda_۱}, t^{\lambda_۲}, \cdots\}$ فضای $C(I)$ را بپیماید، آنگاه زیرگردایه‌ای نامتناهی از t^{λ_i}ها را می‌توان بدون تغییر پیما حذف کرد. بخصوص $C(I)$ شامل هیچ مجموعهٔ پیمای مینیمال از این نوع نیست. این تفاوت بارز با رفتار مجموعه‌های متعامدیکه در یک فضای هیلبرت است: اگر از یک مجموعهٔ متعامدیکه عنصری حذف شود، پیمایش تقلیل می‌یابد. به‌همین نحو، اگر $\{۱, t^{\lambda_۱}, t^{\lambda_۲}, \cdots\}$ فضای $C(I)$ را نپیماید، حذف هریک از عناصر آن پیما را تقلیل می‌دهد. این امر از قضیهٔ ۲۶.۱۵ قسمت (ب) نتیجه می‌شود.

تمرینات

۱. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد مختلط باشند به‌طوری که $\Sigma\,|a_n-b_n|<\infty$. حاصل ضرب

$$\prod_{n=۱}^{\infty}\frac{z-a_n}{z-b_n}$$

بر چه مجموعه‌هایی به‌طور یکنواخت همگراست؟ درکجا معرف یک تابع هلوریخت است؟

۲. فرض کنید f تمام بوده، λ عددی مثبت باشد، و نامساوی

$$|f(z)|<\exp(|z|^k)$$

به‌ازای جمیع $|z|$ های به‌قدر کافی بزرگ برقرار باشد. (گوییم این f از **مرتبهٔ متناهی** است. بزرگترین کران پایینی تمام λ ها که به‌ازای آنها شرط فوق برقرار باشد **مرتبهٔ** f می‌باشد.) اگر $f(z)=\Sigma\,a_n z^n$، ثابت کنید نامساوی

$$|a_n|\leq\left(\frac{e\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}$$

به‌ازای هر n به‌قدر کافی بزرگ برقرار است. توابع $\exp(z^k)$، $k=۱, ۲, ۳, \cdots$، را برای تعیین اینکه کران فوق بر $|a_n|$ بهترین است در نظر بگیرید.

۳. جمیع اعداد مختلط z را که $\exp\big(\exp(z)\big) = ۱$ بیابید، آنها را به‌صورت نقاط در صفحه رسم کنید، و نشان دهید که هیچ تابع تمام از مرتبهٔ متناهی (البته جز $f \equiv ۰$) نیست که در هریک از این نقاط دارای صفر باشد.

۴. نشان دهید که تابع

$$\pi \cot \pi z = \pi i \frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}$$

در هر عدد صحیح قطبی ساده با ماندهٔ ۱ دارد. همین امر در مورد تابع

$$f(z) = \frac{۱}{z} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲z}{z^۲-n^۲} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{۱}{z-n}$$

درست است. نشان دهید که هر دو تابع متناوب‌اند $[f(z+۱)=f(z)]$، تفاضلشان یک تابع تمام کراندار و درنتیجه ثابت است، و این ثابت درواقع ۰ است زیرا

$$\lim_{y\to\infty} f(iy) = -۲i \int_۰^{\infty} \frac{dt}{۱+t^۲} = -\pi i \cdot$$

این تجزیه به‌کسرهای جزئی زیر را به‌ما می‌دهد:

$$\pi \cot \pi z = \frac{۱}{z} + \sum_{۱}^{\infty} \frac{۲z}{z^۲-n^۲}$$

(قس. تمرین ۱۲ در فصل ۹.) توجه کنید که اگر $g(z) = \sin \pi z$، $\pi \cot \pi z$ مساوی $(g'/g)(z)$ است. نمایش حاصل ضربی زیر رانتیجه بگیرید:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=۱}^{\infty} \left(۱ - \frac{z^۲}{n^۲}\right) \cdot$$

۵. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت بوده، $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد به‌طوری که $\Sigma\, |z_n|^{-k-۱} < \infty$، و

$$f(z) = \prod_{n=۱}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{z_n}\right) \cdot$$

(ر.ک. تعریف ۱۵.۷.) راجع به‌میزان رشد

$$M(r) = \max_{\theta} |f(re^{i\theta})|$$

چه می‌شود گفت؟

۶. فرض‌کنید f تمام‌بوده، $f(۰) \neq ۰$، به‌ازای $|z|$ های‌بزرگ، $|f(z)| < \exp(|z|^p)$، و $\{z_n\}$ دنبالهٔ صفرهای f باشد که بر طبق بستاییهایشان شماره شده‌اند. ثابت کنید به‌ازای هر $\epsilon > ۰$، $\Sigma\, |z_n|^{-p-\epsilon} < \infty$. (قس. بخش ۱۵.۲۰.)

۷. فرض کنید f یک تابع تمام بوده، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $f(\sqrt{n}) = ۰$، و ثابت مثبتی مانند α باشد به‌طوری‌که به‌ازای $|z|$ های به‌قدر کافی بزرگ $|f(z)| < \exp(|z|^{\alpha})$. به‌ازای چه αای رابطهٔ $f(z) = ۰$ به‌ازای هر z نتیجه می‌شود؟ [$\sin(\pi z^{۲})$ را در نظر بگیرید.]

۸. فرض‌کنید $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط متمایزباشد، $z_n \neq ۰$، و وقتی $n \to \infty$، $z_n \to \infty$، و $\{m_n\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد. همچنین g یک تابع خوشریخت در صفحه باشد که در هر z_n قطب ساده با ماندهٔ m_n داشته و قطب دیگری نداشته باشد. اگر $z \notin \{z_n\}$، $\gamma(z)$ یک مسیر از ۰ تا z باشد که از هیچ نقطهٔ z_n نمی‌گذرد، و تعریف کنید

$$f(z) = \exp\left\{ \int_{\gamma(z)} g(\zeta)\, d\zeta \right\} .$$

ثابت کنید $f(z)$ از انتخاب $\gamma(z)$ مستقل است (ولی خود انتگرال نیست)، f در متمم $\{z_n\}$ هلوریخت است؟ f در هر نقطهٔ z_n انفراد قابل رفع دارد، و توسیع f در z_n دارای صفر از مرتبهٔ m_n می‌باشد. لذا قضیهٔ وجودی موجود در قضیهٔ ۹.۱۵ را می‌توان از قضیهٔ میتاگ ـ لفلر نتیجه گرفت.

۹. فرض کنید $۰ < \alpha < ۱$، $۰ < \beta < ۱$، $f \in H(U)$، $f(U) \subset U$، و $f(۰) = \alpha$. f چند صفر می‌تواند در قرص $\bar{D}(۰; \beta)$ داشته باشد؟ اگر (آ) $\alpha = \frac{۱}{۲}$، $\beta = \frac{۱}{۲}$؛ (ب) $\alpha = \frac{۱}{۴}$، $\beta = \frac{۱}{۲}$؛ (پ) $\alpha = \frac{۲}{۳}$، $\beta = \frac{۱}{۳}$؛ (ت) $\alpha = ۱/۱,۰۰۰$، $\beta = ۱/۱۰$، جواب چه خواهد بود؟

۱۰. به‌ازای $N = ۱, ۲, ۳, \cdots$ تعریف کنید

$$g_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \left(۱ - \frac{z^{۲}}{n^{۲}}\right)$$

و ثابت کنید ایده‌آل تولید شده به‌وسیلهٔ $\{g_N\}$ در حلقهٔ تابعهای تمام یک ایده‌آل اصلی نیست.

۱۱. تحت چه شرایطی بر دنبالهٔ اعداد حقیقی y_n یک تابع هلوریخت کراندار در نیمصفحهٔ راست باز وجود دارد که متحد صفر نیست ولی در هر نقطهٔ $۱ + iy_n$ دارای صفر است؟ بخصوص آیا این می‌تواند به‌ازای (آ) $y_n = \log n$؛ ب) $y_n = \sqrt{n}$؛ (پ) $y_n = n$؛ (ت) $y_n = n^{۲}$ رخ دهد؟

۱۲. فرض کنید $۰ < |\alpha_n| < ۱$، $\Sigma(۱ - |\alpha_n|) < \infty$، و B حاصل‌ضرب بلاشکه با صفرهای α_n باشد. همچنین E مجموعهٔ تمام نقاط $۱/\overline{\alpha_n}$ و Ω متمم بست E باشد. ثابت کنید این حاصل‌ضرب درواقع بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω به‌طور یکنواخت همگراست؛ درنتیجه $B \in H(\Omega)$، و B در هر نقطهٔ E دارای قطب است. (این در حالاتی که Ω همبند است مورد توجه خاص می‌باشد.)

۱۳. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $\alpha_n = ۱ - n^{-۲}$، B را حاصل‌ضرب بلاشکه با صفرهای α_n

گرفته، و ثابت کنید $\lim_{r\to 1} B(r) = 0$. (فرض است که $0 < r < 1$.) به‌طور دقیقتر، نشان دهید که تخمین

$$|B(r)| < \prod_{1}^{N-1} \frac{r-\alpha_n}{1-\alpha_n r} < \prod_{1}^{N-1} \frac{\alpha_N-\alpha_n}{1-\alpha_n} < 2e^{-N/3}$$

به‌ازای $\alpha_{N-1} < r < \alpha_N$ معتبر است.

۱۴. ثابت کنید دنباله‌ای مانند $\{\alpha_n\}$ با $0 < \alpha_n < 1$ وجود دارد که آنقدر سریع به ۱ میل می‌کند که حاصل‌ضرب بلاشکه با صفرهای α_n در شرط

$$\limsup_{r\to 1} |B(r)| = 1$$

صدق می‌کند. لذا این B در $z = 1$ حد شعاعی نخواهد داشت.

۱۵. فرض کنید φ یک تبدیل خطی کسری باشد که U را به‌روی U می‌نگارد. به‌ازای هر $z \in U$، φ ـ **مدار** z را مجموعهٔ $\{\varphi_n(z)\}$ تعریف کنید که در آن $\varphi_0(z) = z$ و به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $\varphi_n(z) = \varphi\left(\varphi_{n-1}(z)\right)$. حالت $\varphi(z) = z$ را نادیده بگیرید.

(آ) به‌ازای چه φ ای φ ـ مدارها در شرط بلاشکهٔ $\Sigma\,(1-|\varphi_n(z)|) < \infty$ صدق می‌کنند؟ [جواب تا حدودی به‌موضع نقاط ثابت φ بستگی دارد. ممکن است یک نقطهٔ ثابت در U باشد، یا یک نقطهٔ ثابت در T باشد، یا دو نقطهٔ ثابت در T باشند. در دو حالت اخیر بهتر است مسئله را (مثلاً) به‌نیمصفحهٔ بالایی انتقال داده و تبدیلاتی بر آن در نظر بگیرید که یا فقط ∞ را ثابت بگذارد یا 0 و ∞ را ثابت بگذارد.]

(ب) به‌ازای چه φ ای توابع غیرثابتی مانند $f \in H^\infty$ وجود دارند که تحت φ پایایند؛ یعنی در رابطهٔ $f\left(\varphi(z)\right) = f(z)$ به‌ازای هر $z \in U$ صدق می‌کنند؟

۱۶. فرض کنید $|\alpha_1| \le |\alpha_2| \le |\alpha_3| \le \cdots < 1$ و $n(r)$ تعداد جملات دنبالهٔ $\{\alpha_j\}$ باشد به‌طوری که $|\alpha_j| \le r$. ثابت کنید

$$\int_0^1 n(r)\,dr = \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|)\cdot$$

۱۷. اگر $B(z) = \Sigma\, c_k z^k$ یک حاصل‌ضرب بلاشکه با دست کم یک صفر دور از مبدأ باشد، آیا می‌توان به‌ازای $k = 0, 1, 2, \cdots$ نامساوی $c_k \ge 0$ را داشت؟

۱۸. فرض کنید B یک حاصل‌ضرب بلاشکه باشد که تمام صفرهایش بر بازهٔ باز $(0, 1)$ قرار داشته و

$$f(z) = (z-1)^2 B(z)\cdot$$

ثابت کنید مشتق f در U کراندار است.

۱۹. قرار دهید $f(z) = \exp[-(1+z)/(1-z)]$ و با استفاده از نمادهای قضیهٔ ۱۹.۱۵ نشان

دهید که اگرچه $f\in H^{\infty}$،

$$\lim_{r\to 1}\mu_r(f)<\mu^*(f)\cdot$$

به‌تفاوت با قضیهٔ ۲۴.۱۵ توجه نمایید.

۲۰. فرض کنید $\lambda_1>\lambda_2>\cdots$، و در قضیهٔ مونتس ـ زاتس $\lambda_n\to 0$. تحت این شرایط نتیجه چه خواهد بود؟

۲۱. مشابه قضیهٔ مونتس ـ زاتس را با $L^2(I)$ به‌جای $C(I)$ ثابت نمایید.

۲۲. قرار دهید $f_n(t)=t^n e^{-t}$ $(0\le t<\infty$ ، $n=0,1,2,\cdots)$ و ثابت کنید مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از توابع f_n در $L^2(0,\infty)$ چگال است.

راهنمایی. هرگاه $g\in L^2(0,\infty)$ به‌هر f_n متعامد بوده و

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-tz}\,\overline{g(t)}\,dt\ (\operatorname{Re} z>0),$$

آنگاه تمام مشتقات F در $z=1$ مساوی ۰ اند. $F(1+iy)$ را در نظر بگیرید.

۲۳. فرض کنید $\Omega\supset\overline{U}$، $f\in H(\Omega)$، به‌ازای هر θی حقیقی $|f(e^{i\theta})|\ge 3$ ، $f(0)=0$، و λ_1، λ_2، $\cdots$، λ_N صفرهای $1-f$ در U باشند که بر طبق بستاییهایشان شماره شده‌اند. ثابت کنید

$$|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_N|<\frac{1}{2}\cdot \tag{2}$$

پیشنهاد. $B/(1-f)$ را که در آن B یک حاصل‌ضرب بلاشکه است در نظر بگیرید.

فصل شانزده
تداوم تحلیلی

در این فصل به‌مسائلی ناشی از این امر توجه داریم که توابع تعریف شده و هلوریخت در یک ناحیه اغلب به‌توابعی هلوریخت در ناحیهٔ وسیعتر قابل توسیع‌اند. قضیهٔ ۱۸.۱۰ نشان می‌دهد که این توسیعها به‌طور منحصر به‌فرد به‌وسیلهٔ توابع داده شده معین می‌شوند. فرایند توسیع را ***تداوم تحلیلی*** می‌نامند. این امر به‌نحوی بسیار طبیعی به‌توابعی منجر می‌شود که به‌جای نواحی مسطح بر سطوح ریمان تعریف شده‌اند. این امر تعویض «توابع چند مقداری» (مانند تابع ریشهٔ دوم یا لگاریتم) را با توابع ممکن می‌سازد. بحث اصولی سطوح ریمان ما را خیلی از مرحله دور می‌کند و لذا بحث را به‌نواحی مسطح محدود می‌سازیم.

نقاط منتظم و نقاط منفرد

۱.۱۶ تعریف. فرض کنیم D یک قرص مستدیر باز باشد، $f\in H(D)$، و β را یک نقطهٔ مرزی D می‌گیریم. β را یک ***نقطهٔ منتظم*** f نامیم اگر قرصی مانند D_1 به‌مرکز β و تابعی مانند $g\in H(D_1)$ موجود باشند به‌طوری که به‌ازای هر $z\in D\cap D_1$، $g(z)=f(z)$. هر نقطهٔ مرزی D که نقطهٔ منتظم f نباشد یک ***نقطهٔ منفرد*** f نام دارد.

از تعریف فوق واضح است که مجموعهٔ تمام نقاط منتظم f یک زیرمجموعهٔ باز (احتمالاً تهی) از مرز D می‌باشد.

در قضایای زیر بدون صدمه زدن به‌کلیت قرص یکهٔ U را به‌جای D می‌گیریم.

۲.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم $f \in H(U)$ و سری توانی***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ (z \in U) \tag{۱}$$

دارای شعاع همگرایی ۱ باشد. در این صورت f دست‌کم یک نقطهٔ منفرد بر دایرهٔ یکهٔ T دارد.

برهان. به‌عکس فرض کنیم هر نقطهٔ T یک نقطهٔ منتظم f باشد. در این صورت فشردگی T ایجاب می‌کند که قرصهای بازی مانند D_1، $\cdots$، D_n و توابعی چون $g_j \in H(D_j)$ وجود دارند که مرکز هر D_j روی T بوده و $T \subset D_1 \cup \cdots \cup D_n$ و در $D_j \cap U$ به‌ازای $j = 1, \cdots, n$، $g_j(z) = f(z)$. هرگاه $D_i \cap D_j \neq \varnothing$ و $V_{ij} = D_i \cap D_j \cap U$، آنگاه $V_{ij} \neq \varnothing$ (زیرا مراکز D_j ها بر T اند)، و در V_{ij} داریم $g_i = f = g_j$. چون $D_i \cap D_j$ همبند است، از قضیهٔ ۱۸.۱۰ معلوم می‌شود که در $D_i \cap D_j$ داریم $g_i = g_j$. لذا می‌توان تابع h را در $\Omega = U \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$ به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in U), \\ g_i(z) & (z \in D_i). \end{cases} \tag{۲}$$

چون $\overline{U} \subset \Omega$ و Ω باز است، پس $\epsilon > 0$ ی هست به‌طوری که $D(0; 1+\epsilon) \subset \Omega$. ولی $h \in H(\Omega)$، $h(z)$ با رابطهٔ (۱) در U داده شده است، و قضیهٔ ۱۶.۱۰ ایجاب می‌کند که شعاع همگرایی (۱) دست‌کم $1+\epsilon$ است که با فرض ما در تضاد می‌باشد.

۳.۱۶ تعریف. هرگاه $f \in H(U)$ و هر نقطهٔ T یک نقطهٔ منفرد f باشد، آنگاه گوییم T ***مرز طبیعی*** f است. در این حالت f بر هیچ ناحیه‌ای که حقیقتاً شامل U است توسیع هلوریخت ندارد.

۴.۱۶ تبصره. به‌آسانی معلوم می‌شود که تابعی مانند $f \in H(U)$ وجود دارد که به‌ازای آن T یک مرز طبیعی است. درواقع اگر Ω ناحیهٔ ***دلخواهی*** باشد، به‌آسانی می‌توان تابعی مانند $f \in H(\Omega)$ یافت که توسیع هلوریختی به‌ناحیهٔ بزرگتر نداشته باشد. برای مشاهدهٔ این امر، فرض می‌کنیم A مجموعهٔ شمارشپذیری در Ω باشد که در Ω نقطهٔ مرزی ندارد ولی هر نقطهٔ مرزی Ω یک نقطهٔ حدی A است. با اعمال قضیهٔ ۱۱.۱۵ تابعی مانند $f \in H(\Omega)$ به‌دست می‌آید که در هر نقطهٔ A مساوی ۰ بوده ولی متحد ۰ نیست. اگر $g \in H(\Omega_1)$ که در آن Ω_1 ناحیه‌ای است که حقیقتاً شامل Ω است، و در Ω داشته باشیم $g = f$، صفرهای g یک نقطهٔ حدی در Ω_1 دارند و ما تناقض خواهیم داشت.

یک مثال صریح و ساده عبارت است از

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots \ (z \in U). \tag{۱}$$

این f در معادلهٔ تابعی

$$f(z^{2})=f(z)-z \tag{2}$$

صدق می‌کند که از آن نتیجه می‌شود (ذکر جزئیات به‌عهدهٔ خواننده است) که f بر هر شعاع U که به $\exp\{2\pi ik/2^{n}\}$ ختم شود که در آن k و n اعداد صحیح مثبتی‌اند بی‌کران است. این نقاط زیرمجموعهٔ چگالی از T را تشکیل می‌دهند؛ و چون مجموعهٔ تمام نقاط منفرد f بسته است، f مجموعهٔ T را به‌عنوان مرز طبیعی خود دارد.

این امر که این مثال یک سری توانی با رخنه‌های وسیع (یعنی با ضرایب صفر بسیار) است تصادفی نیست. مثال صرفاً حالت خاصی است از قضیهٔ ۶.۱۶ منسوب به‌هادامار که ما آن را از قضیهٔ زیر منسوب به‌اوستروسکی (*Ostrowski*) به‌دست می‌آوریم.

۵.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم λ، p_k، و q_k اعداد صحیح مثبتی باشند،***

$$p_{1}<p_{2}<p_{3}<\cdots,$$

و

$$\lambda q_{k}>(\lambda+1)p_{k}\quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{1}$$

همچنین

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n} \tag{2}$$

شعاع همگرایی ۱ داشته و هروقت به‌ازای k ای $p_k<n<q_k$، $a_n=0$. هرگاه $s_p(z)$ مجموع جزئی p ام (۲) بوده و β یک نقطهٔ منتظم f بر T باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{s_{p_k}(z)\}$ در همسایگیی از β همگرا می‌باشد.

توجه کنید که تمام دنبالهٔ $\{s_p(z)\}$ نمی‌تواند به‌نقطه‌ای خارج $\bar{U}$ همگرا باشد. شرط رخنهٔ (۱) وجود زیردنباله‌ای همگرا در همسایگیی از β، و لذا در نقاطی خارج $\bar{U}$، را تضمین می‌کند. این پدیده را ***فوق همگرایی*** می‌نامند.

برهان. هرگاه $g(z)=f(\beta z)$، آنگاه g در شرط رخنه نیز صدق می‌کند. لذا بدون صدمه زدن به‌کلیت می‌توان فرض کرد $\beta=1$. در این صورت f یک توسیع هلوریخت به‌ناحیهٔ Ω دارد که شامل $U\cup\{1\}$ است. قرار می‌دهیم

$$\varphi(w)=\frac{1}{2}(w^{\lambda}+w^{\lambda+1}) \tag{3}$$

و به‌ازای هر w که $\varphi(w)\in\Omega$ تعریف می‌کنیم $F(w)=f\big(\varphi(w)\big)$. هرگاه $|w|\le 1$ ولی $w\neq 1$، آنگاه $|\varphi(w)|<1$ زیرا $|1+w|<2$. همچنین $\varphi(1)=1$. پس عددی مانند $\epsilon>0$ هست به‌طوری که $\varphi\big(D(0;1+\epsilon)\big)\subset\Omega$. توجه کنید که ناحیهٔ $\varphi\big(D(0;1+\epsilon)\big)$

شامل نقطهٔ ۱ است. سری

$$F(w) = \sum_{m=\circ}^{\infty} b_m w^m \tag{۴}$$

به‌ازای $|w| < ۱ + \epsilon$ همگرا می‌باشد.

بالاترین و پایین‌ترین توانهای w در $[\varphi(w)]^n$ دارای نماهای $(\lambda+۱)n$ و λnاند. لذا، طبق (۱)، بالاترین نما در $[\varphi(w)]^{p_k}$ از پایین‌ترین نما در $[\varphi(w)]^{q_k}$ کمتر است. چون

$$F(w) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n [\varphi(w)]^n \quad (|w| < ۱), \tag{۵}$$

شرط رخنهٔ برقرار به‌وسیلهٔ $\{a_n\}$ ایجاب می‌کند که

$$\sum_{n=\circ}^{p_k} a_n [\varphi(w)]^n = \sum_{m=\circ}^{(\lambda+۱)p_k} b_m w^m \; (k = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \tag{۶}$$

هرگاه $|w| < ۱ + \epsilon$، آنگاه طرف راست (۶) به‌ازای $k \to \infty$ همگراست. لذا $\{s_{p_k}(z)\}$ به‌ازای هر $z \in \varphi\big(D(\circ\,; ۱+\epsilon)\big)$ همگراست، و این همان نتیجهٔ مطلوب می‌باشد.

تذکر. درواقع $\{s_{p_k}(z)\}$ در همسایگیی از β به‌طور یکنواخت همگراست. بر خواننده است که این امر را با بررسی دقیقتر برهان فوق تحقیق نماید.

۶.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم λ یک عدد صحیح مثبت بوده و $\{p_k\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد به‌طوری که***

$$p_{k+۱} > \left(۱ + \frac{۱}{\lambda}\right) p_k \quad (k = ۱, ۲, ۳, \cdots), \tag{۱}$$

و سری توانی

$$f(z) = \sum_{k=۱}^{\infty} c_k z^{p_k} \tag{۲}$$

دارای شعاع همگرایی ۱ باشد. در این صورت f مجموعهٔ T را به‌عنوان مرز طبیعی خود دارد.

برهان. زیردنبالهٔ $\{s_{p_k}\}$ قضیهٔ ۵.۱۶ در اینجا (جز در مورد تکرارها) همان دنبالهٔ کامل مجموعهای جزئی (۲) است. دنبالهٔ اخیر نمی‌تواند در هیچ نقطهٔ خارج $\overline{U}$ همگرا باشد. لذا قضیهٔ ۵.۱۶ ایجاب می‌کند که هیچ نقطه از T نمی‌تواند یک نقطهٔ منتظم f باشد.

۷.۱۶ مثال. قرار می‌دهیم $a_n = ۱$ اگر n توانی از ۲ باشد، و $a_n = \circ$ در غیر این صورت. همچنین قرار می‌دهیم $\eta_n = \exp(-\sqrt{n})$ و تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \eta_n z^n \cdot \tag{۱}$$

چون

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n\eta_n|^{1/n} = 1\,, \qquad (2)$$

شعاع همگرایی (۱) مساوی ۱ است. بنابر قضیهٔ هادامار، f مجموعهٔ T را به‌عنوان مرز طبیعی دارد. معهذا سری توانی هر مشتق f:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\eta_n z^{n-k} \qquad (3)$$

بر قرص یکهٔ بسته به‌طور یکنواخت همگراست. لذا هر $f^{(k)}$ بر $\overline{U}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است و، با آنکه T مرز طبیعی f است، تحدید f به T به‌عنوان تابعی از θ بی‌نهایت بار مشتقپذیر می‌باشد.

مثال فوق این امر نسبتاً عجیب را توضیح می‌دهد که وجود انفرادها به‌مفهوم تعریف ۱.۱۶ وجود ناپیوستگیها یا (به‌بیان کمتر دقیق) عدم وجود همواری را ایجاب نمی‌کند.

در اینجا طبیعی است قضیه‌ای وارد کار شود که در آن پیوستگی وجود انفرادها را نفی نماید:

۸.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک ناحیه، L یک خط مستقیم یا یک قوس مستدیر، $\Omega - L$ اجتماع دو ناحیهٔ Ω_1 و Ω_2، f در Ω پیوسته، و f در Ω_1 و Ω_2 هلوریخت باشد. در این صورت f در Ω هلوریخت است.***

برهان. استفاده از تبدیلات خطی کسری نشان می‌دهد که، با اثبات قضیه برای خطوط مستقیم L، حالت کلی نتیجه خواهد شد. بنابر قضیهٔ موررا، کافی است نشان دهیم که انتگرال f روی مرز $\partial\Delta$ به‌ازای هر مثلث Δ در Ω مساوی ۰ است. قضیهٔ کشی ایجاب می‌کند که انتگرال f روی هر مسیر بستهٔ γ در $\Delta\cap\Omega_1$ یا در $\Delta\cap\Omega_2$ صفر است. پیوستگی f نشان می‌دهد که این مطلب حتی اگر بخشی از γ در L باشد نیز درست بوده، و انتگرال روی $\partial\Delta$ مجموع حداکثر دو جمله از این نوع است.

تداوم در امتداد منحنیها

۹.۱۶ چند تعریف. یک ***عنصر تابعی*** جفت مرتبی است مانند (f, D) که در آن D یک قرص مستدیر باز بوده و $f\in H(D)$. دو عنصر تابعی (f_0, D_0) و (f_1, D_1) ***تداومهای مستقیم*** یکدیگرند اگر دو شرط زیر برقرار باشند: $D_0\cap D_1 \neq \varnothing$، و به‌ازای هر $z\in D_0\cap D_1$، $f_0(z) = f_1(z)$. در این حالت می‌نویسیم

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)\,. \qquad (1)$$

یک **زنجیر** دنباله‌ای است متناهی مانند $\mathscr{C}$ از قرصها به‌صورت $\mathscr{C} = \{D_0, D_1, \cdots, D_n\}$ به‌طوری که $D_{i-1}\cap D_i \neq \varnothing$، $i = 1, \cdots, n$. هرگاه (f_0, D_0) داده شده باشد و عناصری

مانند (f_i, D_i) موجود باشند به‌طوری که به‌ازای $i = 1, \cdots, n$، $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$، آنگاه گوییم (f_n, D_n) **تداوم تحلیلی** (f_0, D_0) **در امتداد** $\mathscr{C}$ است. توجه کنید که f_n به‌طور منحصر به‌فرد به‌وسیلهٔ f_0 و $\mathscr{C}$ معین است (البته اگر موجود باشد). برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم رابطهٔ (۱) برقرار باشد، و این رابطه به‌ازای g_1 به‌جای f_1 نیز چنین باشد. در این صورت در $D_0 \cap D_1$ داریم $g_1 = f_0 = f_1$؛ و چون D_1 همبند است، در D_1 داریم $f_1 = g_1$. حال یکتایی f_n به‌استقرا بر تعداد جملات $\mathscr{C}$ نتیجه می‌شود.

اگر (f_n, D_n) تداوم (f_0, D_0) در امتداد $\mathscr{C}$ بوده و $D_n \cap D_0 \neq \varnothing$، لازم نیست $(f_0, D_0) \sim (f_n, D_n)$ درست باشد. به‌عبارت دیگر، رابطهٔ $\sim$ متعدی نیست. ساده‌ترین مثال تابع ریشهٔ دوم است: فرض کنیم D_0، D_1، و D_2 قرصهایی به‌شعاع ۱ به‌مرکز ۱، w، و w^2 باشند که $w^3 = 1$. $f_j \in H(D_j)$ ها را طوری می‌گیریم که $f_j^2(z) = z$ و درنتیجه $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$، $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$. در $D_0 \cap D_2$ داریم $f_2 = -f_0 \neq f_0$.

گوییم زنجیر $\mathscr{C} = \{D_0, \cdots, D_n\}$ منحنی γ با بازهٔ پارامتری $[0, 1]$ **را می‌پوشاند** اگر اعدادی مانند $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ چنان موجود باشند که $\gamma(0)$ مرکز D_0 بوده، $\gamma(1)$ مرکز D_n باشد، و

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i \quad (i = 0, \cdots, n-1) \cdot \tag{۲}$$

اگر (f_0, D_0) را بتوان در امتداد این $\mathscr{C}$ تا (f_n, D_n) تداوم داد، (f_n, D_n) را یک **تداوم تحلیلی** (f_0, D_0) **در امتداد** γ می‌نامیم (یکتایی در قضیهٔ ۱۱.۱۶ ثابت خواهد شد). در این صورت گوییم (f_0, D_0) یک تداوم تحلیلی در امتداد γ **می‌پذیرد**.

با آنکه رابطهٔ (۱) متعدی نیست، شکل محدود شده‌ای از تعدی برقرار است. این امر کلید برهان قضیهٔ ۱۱.۱۶ می‌باشد.

۱۰.۱۶ حکم. فرض کنیم $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$، $(D_0, f_0) \sim (D_1, f_1)$، و $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2)$. **در این صورت** $(D_0, f_0) \sim (D_2, f_2)$.

برهان. طبق فرض، در $D_0 \cap D_1$ داریم $f_0 = f_1$ و در $D_1 \cap D_2$ داریم $f_1 = f_2$. لذا در مجموعهٔ باز ناتهی $D_0 \cap D_1 \cap D_2$ خواهیم داشت $f_0 = f_2$. چون f_0 و f_2 در $D_0 \cap D_2$ هلوریخت بوده و $D_0 \cap D_2$ همبند است، پس در $D_0 \cap D_2$ خواهیم داشت $f_0 = f_2$.

۱۱.۱۶ قضیه. هرگاه (f, D) یک عنصر تابعی بوده و منحنی γ از مرکز D شروع شده باشد، آنگاه (f, D) حداکثر یک تداوم تحلیلی در امتداد γ می‌پذیرد.

ذیلاً شکل صریحتری از قضیه را عنوان می‌کنیم: هرگاه γ به‌وسیلهٔ زنجیرهای $\mathscr{C}_1 = \{A_0, A_1, \cdots, A_m\}$ و $\mathscr{C}_2 = \{B_0, B_1, \cdots, B_n\}$ پوشیده شده باشد که در آنها $A_0 = B_0 = D$ و (f, D) را بتوان در امتداد $\mathscr{C}_1$ تا (g_m, A_m) و (f, D) را در امتداد $\mathscr{C}_2$ تا

(h_n, B_n) به‌طور تحلیلی تداوم داد، آنگاه در $A_m \cap B_n$ داریم $g_m = h_n$.

چون A_m و B_n طبق فرض قرصهایی به‌مرکز $\gamma(1)$ اند، پس g_m و h_n دارای بسطهای یکسانی از توانهای $z-\gamma(1)$ می‌باشند، و می‌توان A_m و B_n را با آنکه بزرگتر است عوض کرد. با این قرار نتیجه می‌شود که $g_m = h_n$.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ مثل فوق باشند. اعدادی مانند

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1 = s_{m+1}$$

و $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = 1 = \sigma_{n+1}$ وجود دارند به‌طوری که

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \text{ ، } \gamma([\sigma_j, \sigma_{j+1}]) \subset B_j \, (0 \le i \le m \text{ و } 0 \le j \le n) \qquad (1)$$

و عناصر تابعی مانند $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$ و $(h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1})$ به‌ازای $0 \le i \le m-1$ و $0 \le j \le n-1$ موجودند. در اینجا $g_0 = h_0 = f$.

حکم می‌کنیم که هرگاه $0 \le i \le m$ و $0 \le j \le n$ و بازهٔ $[s_i, s_{i+1}]$ بازهٔ $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$ را قطع کند، آنگاه $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.

فرض کنیم جفتهایی مانند (i, j) موجود باشند که این امر به‌ازای آنها درست نباشد. در بین آنها یکی هست که در آن $i+j$ مینیمم است. در این صورت واضح است که $i+j > 0$. فرض کنیم $s_i \ge \sigma_j$. در این صورت $i \ge 1$، و چون $[s_i, s_{i+1}]$ بازهٔ $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$ را قطع کند، می‌بینیم که

$$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j \cdot \qquad (2)$$

مینیمالی $i+j$ نشان می‌دهد که $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$؛ و چون داریم $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$، حکم ۱۰.۱۶ ایجاب می‌کند که $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$. این امر فرض ما را نقض می‌کند. حالت $s_i \le \sigma_j$ به‌همین نحو رد می‌شود.

لذا حکم ما به‌ثبوت می‌رسد. بخصوص این حکم به‌ازای جفت (m, n) برقرار است و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۲.۱۶ تعریف. فرض کنیم α و β نقاطی در فضای توپولوژیک X بوده و φ یک نگاشت پیوسته از مربع یکهٔ $I^2 = I \times I$ (که $I = [0, 1]$) به‌توی X باشد که به‌ازای هر $t \in I$، $\varphi(0, t) = \alpha$ و $\varphi(1, t) = \beta$. در این صورت گوییم منحنیهای γ_t با تعریف

$$\gamma_t(s) = \varphi(s, t) \, (s \in I \text{ و } t \in I) \qquad (1)$$

خانوادهٔ یک پارامتری $\{\gamma_t\}$ از منحنیها از α تا β در X را تشکیل می‌دهند.

حال به‌خاصیت بسیار مهمی از تداوم تحلیلی می‌رسیم:

۱۳.۱۶ قضیه. *فرض کنیم $\{\gamma_t\}$ $(0 \le t \le 1)$ یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیها از α تا β*

در صفحه باشد، D یک قرص به‌مرکز α باشد، و عنصر تابعی (f,D) تداوم تحلیلی درامتداد هر γ_t تا یک عنصر مانند (g_t,D_t) بپذیرد. در این صورت $g_1 = g_0$.

آخرین تساوی همانند قضیهٔ ۱۱.۱۶ تعبیر می‌شود:

$$(g_1,D_1) \sim (g_0,D_0)$$

و D_0 و D_1 قرصهایی به‌مرکز مشترک مانند β می‌باشند.

برهان. $t \in I$ را ثابت می‌گیریم. یک زنجیر مانند $\mathscr{C} = \{A_0, \cdots, A_n\}$ هست که γ_t را می‌پوشاند و $A_0 = D$ به‌طوری که (g_t, D_t) با تداوم (f,D) در امتداد $\mathscr{C}$ به‌دست می‌آید. اعدادی مانند $0 = s_0 < \cdots < s_n = 1$ وجود دارند به‌طوری که

$$E_i = \gamma_t([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \quad (i = 0, \cdots, n-1) \cdot \tag{1}$$

یک $\epsilon > 0$ هست که از فاصلهٔ هریک از مجموعه‌های فشردهٔ E_i تا متمم قرص باز نظیر A_i کمتر است. پیوستگی یکنواخت φ بر I^2 (ر.ک. تعریف ۱۲.۱۶) نشان می‌دهد که $\delta > 0$ ای هست به‌طوری‌که

$$\text{اگر } s \in I \text{ ، } u \in I \text{ ، و } |u-t| < \delta \text{ ، } |\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \epsilon \cdot \tag{2}$$

فرض کنیم u در این شرایط صدق کند. در این صورت (۲) نشان می‌دهد که $\mathscr{C}$ منحنی γ_u را می‌پوشاند، و لذا قضیهٔ ۱۱.۱۶ نشان می‌دهد که هر دوی g_t و g_u با تداوم (f,D) در امتداد همین زنجیر $\mathscr{C}$ به‌دست می‌آید. بنابراین $g_t = g_u$.

لذا هر $t \in I$ به‌وسیلهٔ بازهٔ بازی مانند J_t پوشانده می‌شود به‌طوری که به‌ازای هر $u \in I \cap J_t$، $g_u = g_t$. چون I فشرده است، I به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی J_t پوشانده می‌شود؛ و چون I همبند است، در تعدادی متناهی مرحله می‌بینیم که $g_1 = g_0$.

مطلب بعدی یک نکتهٔ توپولوژیک شهوداً واضح می‌باشد.

۱۴.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم Γ_0 و Γ_1 منحنیهایی در فضای توپولوژیک X با نقطهٔ شروع مشترک α و نقطهٔ پایان مشترک β باشند. هرگاه X همبند ساده باشد، آنگاه یک خانوادهٔ یک پارامتری مانند $\{\gamma_t\}$ $(0 \le t \le 1)$ ازمنحنیها از α تا β در X وجود دارد به‌طوری‌که $\gamma_0 = \Gamma_0$ و $\gamma_1 = \Gamma_1$.***

برهان. فرض کنیم $[0, \pi]$ بازهٔ پارامتری Γ_0 و Γ_1 باشد. در این صورت

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \Gamma_0(s) & (0 \le s \le \pi) \\ \Gamma_1(2\pi - s) & (\pi \le s \le 2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

یک **منحنی بسته** در X تعریف می‌کند. چون X همبند ساده است، Γ همجای پوچ در X

می‌باشد. لذا یک تابع پیوسته مانند $H:[0,2\pi]\times[0,1]\to X$ هست به‌طوری که

$$H(s,0)=\Gamma(s)\text{ ، }H(s,1)=c\in X\text{ ، و }H(0,t)=H(2\pi,t)\cdot \qquad (2)$$

اگر $\Phi:\overline{U}\to X$ با

$$\Phi(re^{i\theta})=H(\theta,1-r)\ (0\le r\le 1\text{ و }0\le\theta\le 2\pi)$$

تعریف شده باشد، رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که Φ پیوسته است. قرار می‌دهیم

$$\gamma_t(\theta)=\Phi[(1-t)e^{i\theta}+te^{-i\theta}]\ (0\le\theta\le\pi\text{ و }0\le t\le 1)\cdot$$

چون $\Phi(e^{i\theta})=H(\theta,0)=\Gamma(\theta)$، پس

$$\gamma_t(0)=\Phi(1)=\Gamma(0)=\alpha\ (0\le t\le 1),$$

$$\gamma_t(\pi)=\Phi(-1)=\Gamma(\pi)=\beta\ (0\le t\le 1),$$

$$\gamma_0(\theta)=\Phi(e^{i\theta})=\Gamma(\theta)=\Gamma_0(\theta)\ (0\le\theta\le\pi),$$

و

$$\gamma_1(\theta)=\Phi(e^{-i\theta})=\Phi\left(e^{i(2\pi-\theta)}\right)=\Gamma(2\pi-\theta)=\Gamma_1(\theta)\ (0\le\theta\le\pi)\cdot$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیهٔ تک میدانی

مطالب فوق درواقع قضیهٔ مهم زیر را به‌ثبوت می‌رسانند.

۱۵.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم Ω یک ناحیهٔ همبند ساده بوده، (f,D) یک عنصر تابعی باشد، $D\subset\Omega$، و (f,D) را بتوان در امتداد هر منحنی در Ω که از مرکز D شروع می‌شود به‌طور تحلیلی تداوم داد. در این صورت تابعی مانند $g\in H(\Omega)$ هست به‌طوری که به‌ازای هر $z\in D$، $g(z)=f(z)$.***

برهان. فرض کنیم Γ_0 و Γ_1 دو منحنی در Ω از مرکز α ی D به‌نقطه‌ای مانند $\beta\in\Omega$ باشد. از قضایای ۱۳.۱۶ و ۱۴.۱۶ نتیجه می‌شود که تداومهای تحلیلی (f,D) در امتداد Γ_0 و Γ_1 به‌عنصر یکسانی مانند (g_β,D_β) منجر می‌شوند که در آن D_β قرصی به‌مرکز β می‌باشد. هرگاه D_{β_1} قرص D_β را قطع کند، آنگاه $(g_{\beta_1},D_{\beta_1})$ را می‌توان با تداوم (f,D) تا β و سپس در امتداد خط مستقیم از β تا β_1 به‌دست آورد. این نشان می‌دهد که در $D_{\beta_1}\cap D_\beta$ داریم $g_{\beta_1}=g_\beta$. لذا تعریف

$$g(z)=g_\beta(z)\quad(z\in D_\beta)$$

سازگار بوده و توسیع هلوریخت مطلوب f را به‌دست می‌دهد.

۱۶.۱۶ تبصره. فرض کنیم Ω یک ناحیه در صفحه باشد، $w \notin \Omega$ را ثابت می‌گیریم، و فرض می‌کنیم D یک قرص در Ω باشد. چون D همبند ساده است، تابعی مانند $f \in H(D)$ هست به‌طوری که $\exp[f(z)] = z-w$. توجه کنید که در D داریم $f'(z) = (z-w)^{-1}$، و تابع اخیر در تمام Ω هلوریخت است. این ایجاب می‌کند که (f, D) را می‌توان در امتداد هر مسیر γ در Ω که از مرکز α ی D شروع می‌شود به‌طور تحلیلی تداوم داد: هرگاه γ از α تا β برود، $D_\beta = D(\beta; r) \subset \Omega$،

$$\Gamma_z = \gamma \dotplus [\beta, z] \quad (z \in D_\beta), \tag{۱}$$

و

$$g_\beta(z) = \int_{\Gamma_z} (\zeta - w)^{-1} d\zeta + f(\alpha) \quad (z \in D_\beta), \tag{۲}$$

آنگاه (g_β, D_β) تداوم (f, D) در امتداد γ می‌باشد.

توجه کنید که در D_β، $g'_\beta(z) = (z-w)^{-1}$.

حال فرض کنیم تابعی مانند $g \in H(\Omega)$ موجود باشد به‌طوری که در D، $g(z) = f(z)$. در این صورت به‌ازای هر $z \in \Omega$ داریم $g'(z) = (z-w)^{-1}$. اگر Γ یک مسیر **بسته** در Ω باشد، نتیجه می‌شود که

$$\text{ind}_\Gamma(w) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_\Gamma g'(z)\, dz = ۰ \,. \tag{۳}$$

به‌کمک قضیهٔ ۱۱.۱۳ نتیجه می‌گیریم که ***قضیهٔ تک میدانی در هر ناحیهٔ مسطح که همبند ساده نباشد فرو می‌ریزد.***

ساختن یک تابع مدولی

۱۷.۱۶ گروه مدولی. این عبارت است از مجموعهٔ G مرکب از تمام تبدیلات خطی کسری φ به‌شکل

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{۱}$$

که در آن a، b، c، و d اعداد صحیحی بوده و $ad-bc = ۱$.

چون a و b و c و d حقیقی‌اند، هر $\varphi \in G$ محور حقیقی را به‌روی خودش (جز به‌ازای ∞) می‌نگارد. قسمت موهومی $\varphi(i)$ عبارت است از $(c^۲+d^۲)^{-۱} > ۰$. لذا

$$\varphi(\Pi^+) = \Pi^+ \quad (\varphi \in G) \tag{۲}$$

که در آن Π^+ نیمصفحهٔ بالایی باز می‌باشد. هرگاه φ با رابطهٔ (۱) داده شده باشد، آنگاه

$$\varphi^{-۱}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}; \tag{۳}$$

درنتیجه $\varphi^{-1} \in G$. همچنین اگر $\varphi \in G$ و $\psi \in G$، $\varphi \circ \psi \in G$.

لذا G با ترکیب به‌عنوان عمل یک گروه است. در پرتو رابطهٔ (۲) معمولاً G را یک گروه تبدیلات بر Π^+ در نظر می‌گیریم

تبدیلات $z \to z+1$ ($a=b=d=1$ و $c=0$) و $z \to -1/z$ ($a=d=0$ و $b=-1$ و $c=1$) تعلق به G دارند. این تبدیلات درواقع G را تولید می‌کنند (یعنی زیرگروه حقیقیی از G وجود ندارد که این دو تبدیل را شامل باشد). این امر را می‌توان با روش به‌کار رفته در قضیهٔ ۱۹.۱۶ قسمت (پ) به‌ثبوت رسانید.

هر ***تابع مدولی*** یک تابع هلوریخت (یا خوشریخت) مانند f بر Π^+ است که تحت G یا دست کم تحت یک زیرگروه غیربدیهی مانند Γ از G پایاست. این یعنی به‌ازای هر $\varphi \in \Gamma$، $f \circ \varphi = f$.

۱۸.۱۶ یک زیرگروه. Γ را گروه تولید شده به‌وسیلهٔ σ و τ می‌گیریم که

$$\sigma(z) = z+2 \quad \text{و} \quad \sigma(z) = \frac{z}{2z+1} \cdot \tag{۱}$$

یکی از هدفهای ما ساختن تابعی مانند λ است که تحت Γ پایا بوده و ما را به‌اثبات سریعی از قضیهٔ پیکارد (*Picard*) برساند. درواقع این خواص نگاشتی λ اند که در این برهان مهم‌اند نه پایایی آن، و می‌توان (فقط با استفاده از قضیهٔ نگاشت ریمان و اصل انعکاس) ساختن سریعتری به‌دست داد. اما بهتر است عمل Γ بر Π^+ را با اصطلاحات هندسی مطالعه کنیم؛ ما در این مسیر حرکت خواهیم کرد.

فرض کنیم Q مجموعهٔ تمام z هایی باشد که در چهار شرط زیر صدق می‌کنند که در آنها $z = x+iy$:

$$y > 0 \,,\ -1 \le x < 1 \,,\ |2z+1| \ge 1 \,,\ \text{و}\ |2z-1| > 1 \cdot \tag{۲}$$

Q به‌خطوط قائم $x=-1$ و $x=1$ کراندار است و از پایین به‌دو نیمدایره به‌شعاع $\frac{1}{2}$ و مراکز $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ کراندار می‌باشد. Q شامل آن نقاط مرزی خود است که در نیمهٔ چپ Π^+ واقعند، و Q هیچ نقطه‌ای از محور حقیقی را در برندارد.

حکم می‌کنیم که Q یک ***قلمرو اساسی*** Γ است. این یعنی احکام (آ) و (ب) قضیهٔ زیر برقرار می‌باشند.

۱۹.۱۶ قضیه. ***فرض کنیم Γ و Q همانند فوق باشند.***

(آ) ***هرگاه φ_1 و φ_2 در Γ بوده و $\varphi_1 \ne \varphi_2$، آنگاه*** $\varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q) = \varnothing$؛

(ب) $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(Q) = \Pi^+$؛

(پ) ***Γ شامل تمام تبدیلات $\varphi \in G$ به‌شکل زیر است:***

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{۱}$$

که در آن a و b اعداد صحیح فردی بوده و b و c زوج می‌باشند.

برهان. فرض کنیم Γ_1 مجموعهٔ تمام $\varphi \in G$ هایی باشند که در (پ) توصیف شده‌اند. به‌آسانی تحقیق می‌شود که Γ_1 زیرگروهی از G است. چون $\sigma \in \Gamma_1$ و $\tau \in \Gamma_1$، پس $\Gamma \subset \Gamma_1$. برای اثبات $\Gamma = \Gamma_1$، یعنی اثبات (پ)، کافی است ثابت کنیم که (آً) و (ب) برقرارند که (آً) حکم حاصل از (آ) به‌وسیلهٔ تعویض Γ با Γ_1 می‌باشد. زیرا هرگاه (آً) و (ب) برقرار باشند، واضح است که Γ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ حقیقی Γ_1 باشد.

ما به‌رابطهٔ

$$\operatorname{Im}\varphi(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^{2}} \qquad (۲)$$

نیاز داریم که به‌ازای هر $\varphi \in G$ داده شده با (۱) معتبر است. برهان (۲) با محاسبهٔ مستقیم صورت می‌گیرد و به‌رابطهٔ $ad-bc=1$ وابسته است.

حال حکم (آً) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم φ_1 و φ_2 در Γ_1 بوده، $\varphi_1 \neq \varphi_2$، و تعریف می‌کنیم $\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. هرگاه $z \in \varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q)$، آنگاه $\varphi_1^{-1}(z) \in Q \cap \varphi(Q)$. لذا کافی است نشان دهیم که اگر $\varphi \in \Gamma_1$ و φ تبدیل همانی نباشد،

$$Q \cap \varphi(Q) = \varnothing \cdot \qquad (۳)$$

برهان (۳) به‌سه حالت تجزیه می‌شود.

هرگاه‌در (۱) $c=0$، آنگاه $ad=1$، و چون a و d اعدادی‌صحیح‌اند، داریم $a=d=\pm 1$. لذا به‌ازای عدد صحیحی مانند $n \neq 0$، $\varphi(z) = z+2n$، و توصیف Q برقراری (۳) را واضح می‌سازد.

هرگاه $c = 2d$، آنگاه $c = \pm 2$ و $d = \pm 1$ (زیرا $ad-bc=1$). لذا $\varphi(z) = \sigma(z) + 2m$ که در آن m یک عدد صحیح است. چون $\sigma(Q) \subset \overline{D}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$، رابطهٔ (۳) برقرار می‌باشد.

اگر $c \neq 0$ و $c \neq 2d$، حکم می‌کنیم که به‌ازای هر $z \in Q$، $|cz+d| > 1$. در غیر این صورت قرص $\overline{D}(-d/c\,;\,1/|c|)$ مجموعهٔ Q را قطع می‌کند. توصیف Q نشان می‌دهد که هرگاه $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ عددی حقیقی بوده و $\overline{D}(\alpha\,;r)$ مجموعهٔ Q را قطع کند، آنگاه دست کم یکی از نقاط -1، 0، و 1 در $D(\alpha\,;r)$ واقع است. لذا به‌ازای $w = -1$ یا 0 یا 1، $|cw+d| < 1$. ولی به‌ازای این w ها، $cw+d$ عدد صحیح فردی است که قدرمطلقش نمی‌تواند از ۱ کمتر باشد. درنتیجه $|cz+d| > 1$، وحال از (۲) نتیجه‌می‌شود که‌به‌ازای هر $z \in Q$، $\operatorname{Im}\varphi(z) < \operatorname{Im} z$. اگر به‌ازای $z \in Q$ ی، $\varphi(z) \in Q$، همین استدلال در مورد φ^{-1} به‌کار رفته و نشان می‌دهد که

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\varphi^{-1}\left(\varphi(z)\right) \leq \operatorname{Im}\varphi(z) \cdot \qquad (۴)$$

این تناقض نشان می‌دهد که رابطهٔ (۳) برقرار می‌باشد. لذا (آ) ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم Σ اجتماع مجموعه‌های $\varphi(Q)$ به‌ازای $\varphi\in\Gamma$ باشد. واضح است که $\Sigma\subset\Pi^+$. همچنین Σ شامل مجموعه‌های $\tau^n(Q)$ به‌ازای $n=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots$ است که در آن $\tau^n(z)=z+۲n$. چون σ دایرهٔ $|۲z+۱|=۱$ را به‌روی دایرهٔ $|۲z-۱|=۱$ می‌نگارد، می‌بینیم که Σ شامل هر $z\in\Pi^+$ صادق در تمام نامساویهای زیر است:

$$|۲z-(۲m+۱)|\geq ۱\ (m=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots)\cdot \tag{۵}$$

$w\in\Pi^+$ را ثابت می‌گیریم. چون $\operatorname{Im}w>۰$، فقط تعدادی متناهی جفت اعداد صحیح مانند c و d موجودند که $|cw+d|$ زیر هر کران داده شده قرار دارد، و می‌توان $\varphi_۰\in\Gamma$ را طوری گرفت که $|cw+d|$ مینیمم باشد. این بنابر رابطهٔ (۲) یعنی

$$\operatorname{Im}\varphi(w)\leq\operatorname{Im}\varphi_۰(w)\ \ (\varphi\in\Gamma)\cdot \tag{۶}$$

قرار می‌دهیم $z=\varphi_۰(w)$. در این صورت رابطهٔ (۶) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\operatorname{Im}\varphi(z)\leq\operatorname{Im}z\ (\varphi\in\Gamma)\cdot \tag{۷}$$

رابطهٔ (۷) را بر $\varphi=\sigma\tau^{-n}$ و بر $\varphi=\sigma^{-۱}\tau^{-n}$ اعمال می‌کنیم. چون .

$$(\sigma^{-۱}\tau^{-n})(z)=\frac{z-۲n}{-۲z+۴n+۱}\text{، }\quad\text{و}\quad (\sigma\tau^{-n})(z)=\frac{z-۲n}{۲z-۴n+۱} \tag{۸}$$

از روابط (۲) و (۷) نتیجه می‌شود که

$$|۲z-۴n+۱|\geq ۱\quad\text{و}\quad |۲z-۴n-۱|\geq ۱\ \ (n=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots)\cdot \tag{۹}$$

لذا z در رابطهٔ (۵) صدق می‌کند؛ درنتیجه $z\in\Sigma$؛ و چون $w=\varphi_۰^{-۱}(z)$ و $\varphi_۰^{-۱}\in\Gamma$، خواهیم داشت $w\in\Sigma$. این برهان را تمام خواهد کرد.

در قضیهٔ زیر چند خاصیت از تابع مدولی λ را که در بخش ۱۸.۱۶ ذکر شده‌اند و در قضیهٔ ۲۲.۱۶ به‌کار خواهند رفت خلاصه می‌کنیم.

۲۰.۱۶ قضیه. ***اگر Γ و Q همانند بخش ۱۸.۱۶ توصیف شده باشند، تابعی مانند $\lambda\in H(\Pi^+)$ وجود دارد به‌طوری که***

(آ) به‌ازای هر $\varphi\in\Gamma$، $\lambda\circ\varphi=\lambda$؛

(ب) λ بر Q یک به‌یک است؛

(پ) برد Ωی λ [که بنابر (آ) همان $\lambda(Q)$ است] ناحیهٔ تمام اعداد مختلطی است که با ۰ و ۱ متفاوت‌اند؛

(ت) λ محور حقیقی را به‌عنوان مرز طبیعی خود دارد.

برهان. فرض کنیم $Q_\circ$ نیمهٔ راست Q باشد. به‌طور دقیقتر، $Q_\circ$ از تمام $z\in\Pi^+$ هایی تشکیل شده است که

$$0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \quad \text{و} \quad |2z-1| > 1 \,. \tag{1}$$

بنابر قضیهٔ ۱۹.۱۴ (و تبصره‌های ۲۰.۱۴)، یک تابع پیوسته مانند h بر $\overline{Q}_\circ$ هست که بر $\overline{Q}_\circ$ یک به‌یک بوده و در $Q_\circ$ هلوریخت است به‌طوری که $h(Q_\circ)=\Pi^+$، $h(0)=0$، $h(1)=1$، و $h(\infty)=\infty$. اصل انعکاس (قضیهٔ ۱۴.۱۱) نشان می‌دهد که فرمول

$$h(-x+iy) = \overline{h(x+iy)} \tag{2}$$

h را به‌تابع پیوسته‌ای بر بست $\overline{Q}$ از Q وسعت می‌دهد که یک نگاشت همدیس از درون Q به‌روی صفحهٔ مختلط منهای محور حقیقی نامنفی است. همچنین می‌بینیم که h بر Q یک به‌یک است، $h(Q)$ ناحیهٔ Ω ی توصیف شده در (پ) است،

$$h(-1+iy) = h(1+iy) = h\Big(\tau(-1+iy)\Big) \quad (0<y<\infty)\,, \tag{3}$$

و

$$h\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\theta}\Big) = h\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i(\pi-\theta)}\Big) \tag{4}$$

$$= h\Big(\sigma\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\theta}\Big)\Big) \quad (0<\theta<\pi)\,.$$

چون h بر مرز Q حقیقی است، روابط (۳) و (۴) از (۲) و تعاریف σ و τ نتیجه می‌شوند.

حال تابع λ را تعریف می‌کنیم:

$$\lambda(z) = h\Big(\varphi^{-1}(z)\Big) \quad \Big(\varphi\in\Gamma \text{ و } z\in\varphi(Q)\Big)\,. \tag{5}$$

بنابر قضیهٔ ۱۹.۱۶، هر $z\in\Pi^+$ در $\varphi(Q)$ به‌ازای یک و فقط یک $\varphi\in\Gamma$ قرار دارد. لذا رابطهٔ (۵) معرف $\lambda(z)$ به‌ازای $z\in\Pi^+$ است، و فوراً معلوم می‌شود که λ خواص (آ) تا (پ) را دارد و λ درون هریک از مجموعه‌های $\varphi(Q)$ هلوریخت است.

از روابط (۳) و (۴) معلوم می‌شود که λ بر

$$Q\cup\tau^{-1}(Q)\cup\sigma^{-1}(Q)\,,$$

و درنتیجه بر یک مجموعهٔ باز V شامل Q، پیوسته است. حال قضیهٔ ۸.۱۶ نشان می‌دهد که λ در V هلوریخت است. چون Π^+ به‌وسیلهٔ اجتماع مجموعه‌های $\varphi(V)$ که $\varphi\in\Gamma$ پوشانده می‌شود و $\lambda\circ\varphi=\lambda$، نتیجه می‌گیریم که $\lambda\in H(\Pi^+)$.

بالأخره مجموعهٔ تمام اعداد $\varphi(0)=b/d$ بر محور حقیقی چگال است. اگر λ بتواند به‌طور تحلیلی به‌یک ناحیهٔ حقیقتاً شامل Π^+ تداوم یابد، صفرهای λ یک نقطهٔ حدی در این ناحیه

دارند که بدلیل ثابت نبودن λ غیرممکن است.

قضیهٔ پیکارد

۲۱.۱۶. «قضیهٔ پیکارد کوچک» حکم می‌کند که یک تابع تمام غیرثابت هر مقدار جز احتمالاً یک مورد را می‌گیرد. این قضیه ذیلاً ثابت خواهد شد. صورت قویتری از آن نیز وجود دارد: ***هر تابع تمام که یک چندجمله‌ای نباشد هر مقدار (مجدداً جز یک مورد) را بی‌نهایت بار می‌گیرد.*** مورد استثنا را می‌توان با $f(z) = e^z$ نشان داد که مقدار ۰ را حذف می‌کند. قضیهٔ اخیر درواقع در حالت موضعی درست است: ***هرگاه f در نقطهٔ $z_{\circ}$ انفراد تنها داشته باشد و f در همسایگیی از $z_{\circ}$ دو مقدار را حذف نماید، آنگاه $z_{\circ}$ یک انفراد قابل رفع یا یک قطب f می‌باشد.*** این را «قضیهٔ پیکارد بزرگ» می‌گویند و صورت قوی شدهٔ قضیهٔ وایراشتراس (قضیهٔ ۲۱.۱۰) است که فقط می‌گوید که نقش هر همسایگی $z_{\circ}$ در صورتی در صفحه چگال است که f در $z_{\circ}$ انفراد اساسی داشته باشد. ما این قضیه را در اینجا ثابت نخواهیم کرد.

۲۲.۱۶ قضیه. ***هرگاه f یک تابع تمام بوده و دو عدد مختلط متمایز مانند α و β موجود باشند که در برد f نیستند، آنگاه f ثابت می‌باشد.***

برهان. بدون صدمه زدن به‌کلیت فرض می‌کنیم $\alpha = \circ$ و $\beta = ۱$. در غیر این صورت f را با $(f-\alpha)/(\beta-\alpha)$ عوض می‌کنیم. پس f صفحه را به‌توی ناحیهٔ Ω توصیف شده در قضیهٔ ۲۰.۱۶ می‌نگارد.

به‌هر قرص $D_۱ \subset \Omega$ یک ناحیه مانند $V_۱ \subset \Pi^+$ مربوط می‌شود (درواقع بی‌نهایت از این $V_۱$ها وجود دارد، به‌ازای هر $\varphi \in \Gamma$ یکی) به‌طوری‌که λ بر $V_۱$ یک‌به‌یک‌بوده و $\lambda(V_۱) = D_۱$. هر چنین $V_۱$ حداکثر دو تا از قلمروهای $\varphi(Q)$ را قطع می‌کند. نظیر هر $V_۱$ یک تابع مانند $\psi_۱ \in H(D_۱)$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $z \in V_۱$، $\psi_۱\big(\lambda(z)\big) = z$.

اگر $D_۲$ قرص دیگری در Ω بوده و $D_۱ \cap D_۲ \neq \varnothing$، می‌توان $V_۲$ی نظیر را طوری گرفت که $V_۱ \cap V_۲ \neq \varnothing$. در این صورت عناصر تابعی $(\psi_۱, D_۱)$ و $(\psi_۲, D_۲)$ تداومهای تحلیلی مستقیم یکدیگر می‌باشند. توجه کنید که $\psi_i(D_i) \subset \Pi^+$.

چون برد f در Ω است، یک قرص مانند $A_{\circ}$ به‌مرکز ۰ هست به‌طوری‌که $f(A_{\circ})$ در قرصی مانند $D_{\circ}$ در Ω قرار دارد. $\psi_{\circ} \in H(D_{\circ})$ را مثل فوق اختیار کرده، به‌ازای $z \in A_{\circ}$ قرار می‌دهیم $g(z) = \psi_{\circ}\big(f(z)\big)$، و فرض می‌کنیم γ یک منحنی در صفحه باشد که از ۰ شروع می‌شود. برد $f \circ \gamma$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω است. لذا γ را می‌توان با زنجیری از قرصها مانند $A_{\circ}$، $\cdots$، A_n پوشانید به‌طوری که هر $f(A_i)$ در قرصی مانند D_i در Ω قرار داشته باشد، و می‌توان $\psi_i \in H(D_i)$ را طوری گرفت که (ψ_i, D_i) تداوم تحلیلی مستقیم $(\psi_{i-۱}, D_{i-۱})$، به‌ازای $i = ۱, \cdots, n$، باشد. این یک تداوم تحلیلی از عنصر تابعی $(g, A_{\circ})$ در امتداد زنجیر $\{A_{\circ}, \cdots, A_n\}$ به‌دست می‌دهد. توجه کنید که $\psi_n \circ f$ دارای قسمت موهومی مثبت است.

چون $(g, A_\circ)$ را می‌توان در امتداد هر منحنی در صفحه به‌طور تحلیلی تداوم داد و صفحه همبند ساده است، قضیهٔ تک میدانی ایجاب می‌کند که g به‌یک تابع تمام وسعت یابد. همچنین برد g در Π^+ است. لذا، طبق قضیهٔ لیوویل، $(g-i)/(g+i)$ کراندار و در نتیجه ثابت می‌باشد. این نشان می‌دهد که g ثابت است، و چون $\psi_\circ$ بر $f(A_\circ)$ یک به‌یک و $A_\circ$ یک مجموعهٔ باز ناتهی است، نتیجه می‌گیریم که f ثابت می‌باشد.

تمرینات

۱. فرض کنید $f(z) = \Sigma a_n z^n$ $(a_n \geq \circ)$ و شعاع همگرایی سری ۱ باشد. ثابت کنید f در $z = ۱$ دارای انفراد است. **راهنمایی.** f را به‌توانهای $z - \frac{۱}{۲}$ بسط دهید. اگر ۱ نقطهٔ منتظم f می‌بود، سری جدید در $x > ۱$ ی همگرا بود. این امر چه نتیجه‌ای راجع به‌سری اصلی به‌دست می‌دهد؟

۲. فرض کنید (f, D) و (g, D) دو عنصر تابعی بوده، P یک چندجمله‌ای دو متغیره بوده، و در D داشته باشیم $P(f, g) = \circ$. همچنین f و g را بتوان در امتداد منحنی γ به‌طور تحلیلی تا $f_۱$ و $g_۱$ تداوم داد. ثابت کنید $P(f_۱, g_۱) = \circ$. این مطلب را به‌بیش از دو تابع تعمیم دهید. آیا چنین قضیه‌ای برای رده‌ای از توابع مانند P که از ردهٔ چندجمله‌ایها وسیعتر است وجود دارد؟

۳. فرض کنید Ω یک ناحیهٔ همبند ساده بوده و u یک تابع توافقی حقیقی در Ω باشد. ثابت کنید تابعی مانند $f \in H(\Omega)$ هست به‌طوری که $u = \mathrm{Re} f$. نشان دهید که این امر در هر ناحیه که همبند ساده نباشد برقرار نیست.

۴. فرض کنید X مربع یکهٔ بسته در صفحه بوده، f یک تابع مختلط پیوسته بر X باشد، و f در X دارای صفر نباشد. ثابت کنید یک تابع پیوسته مانند g بر X هست به‌طوری که $f = e^g$. این امر به‌ازای چه رده‌ای از فضاهای X (غیر از مربع فوق) نیز درست است؟

۵. ثابت کنید تبدیلات $z \to z+۱$ و $z \to -\frac{۱}{z}$ تمام گروه مدولی G را تولید می‌کنند. فرض کنید R از تمام $z = x+iy$ هایی تشکیل شده باشد که $|x| < \frac{۱}{۲}$ ، $y > \circ$، و $|z| > ۱$ به‌انضمام آن نقاط حدی که دارای $x \leq ۱$ اند. ثابت کنید R یک قلمرو اساسی G می‌باشد.

۶. ثابت کنید G به‌وسیلهٔ تبدیلات φ و ψ با تعریف

$$\varphi(z) = -\frac{۱}{z} \quad \text{و} \quad \psi(z) = \frac{z-۱}{z}$$

نیز تولید می‌شود. نشان دهید که φ دارای دورهٔ تناوب ۲ و ψ دارای دورهٔ تناوب ۳ است.

۷. رابطهٔ بین ترکیب تبدیلات خطی کسری و ضرب ماتریسی را بیابید. با استفاده از آن یک برهان جبری برای قضیهٔ ۱۹.۱۶ قسمت (پ) یا قسمت اول تمرین ۵ بیابید.

۸. فرض کنید E مجموعه‌ای فشرده بر محور حقیقی با اندازهٔ لبگ مثبت بوده، Ω متمم E نسبت

به‌صفحه باشد، و تعریف کنید

$$f(z)= \int_E \frac{dt}{t-z} \quad (z\in\Omega),$$

و به‌سؤالات زیر پاسخ دهید:

(آ) آیا f ثابت است؟

(ب) آیا f را می‌توان به‌یک تابع تمام وسعت داد؟

(پ) آیا $\lim zf(z)$ به‌ازای $z\to\infty$ موجود است؟ اگر چنین است، این حد چیست؟

(ت) آیا f در Ω ریشهٔ دوم هلوریخت دارد؟

(ث) آیا قسمت حقیقی f در Ω کراندار است؟

(ج) آیا قسمت موهومی f در Ω کراندار است؟

[اگر در قسمت (ث) یا (ج) جواب «مثبت»، است، یک کران نشان دهید.]

(چ) اگر γ یک دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت بوده و E درونش باشد، $\int_\gamma f(z)\,dz$ چیست؟

(ح) آیا یک تابع هلوریخت کراندار مانند φ در Ω که ثابت نباشد وجود دارد؟

۹. جوابهای خود در تمرین ۸ را به‌ازای حالت خاص

$$E=[-۱, ۱]$$

امتحان نمایید.

۱۰. مجموعهٔ فشردهٔ E را ***قابل رفع مسطح*** نامیم اگر توابع هلوریخت کراندار غیرثابتی در متمم E موجود نباشند.

(آ) ثابت کنید هر مجموعهٔ فشردهٔ شمارشپذیر قابل رفع است.

(ب) اگر E زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از محور حقیقی بوده و $m(E)=۰$، ثابت کنید E قابل رفع است. ***راهنمایی.*** E را می‌توان با منحنیهایی که طول کلشان بدلخواه کوچک است احاطه کرد. همانند تمرین ۲۵ در فصل ۱۰، فرمول کشی را به‌کار گیرید.

(پ) فرض کنید E قابل رفع بوده، Ω یک ناحیه باشد، $E\subset\Omega$، $f\in H(\Omega-E)$، و f کراندار باشد. ثابت کنید f را می‌توان به‌یک تابع هلوریخت در Ω وسعت داد.

(ت) مشابه قسمت (ب) را برای مجموعه‌های E که لزوماً روی محور حقیقی نیستند تنظیم و ثابت نمایید.

(ث) ثابت کنید هیچ زیرمجموعهٔ همبند فشرده از صفحه (با بیش از یک نقطه) قابل رفع نیست.

۱۱. فرض کنید به‌ازای هر عدد مثبت α، Γ_α مسیری با بازهٔ پارامتری $(-\infty, \infty)$ باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_\alpha(t)=\begin{cases} -t-\pi i & (-\infty<t\le-\alpha)\\ \alpha+\dfrac{\pi i t}{\alpha} & (-\alpha\le t\le\alpha)\\ t+\pi i & (\alpha\le t<\infty)\end{cases}$$

همچنین Ω_α مؤلفه‌ای از متمم Γ_α^* باشد که شامل مبدأ است، و تعریف کنید:

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{\exp(e^w)}{w-z} dw \ (z \in \Omega_\alpha) \cdot$$

ثابت کنید اگر $\alpha < \beta$، f_β تداوم تحلیلی f_α است. لذا ثابت کنید یک تابع تمام مانند f هست که تحدیدش به Ω_α مساوی f_α است. ثابت کنید به‌ازای هر $e^{i\theta} \neq 1$،

$$\lim_{r \to \infty} f(re^{i\theta}) = 0 \cdot$$

(در اینجا طبق معمول r مثبت و θ حقیقی است.) نشان دهید که f ثابت نیست. [**راهنمایی.** $f(r)$ را در نظر بگیرید.] اگر

$$g = f \exp(-f),$$

ثابت کنید به‌ازای هر $e^{i\theta}$،

$$\lim_{r \to \infty} g(re^{i\theta}) = 0 \cdot$$

نشان دهید که یک تابع تمام مانند h هست به‌طوری که

$$\lim_{n \to \infty} h(nz) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } z = 0 \\ 0 & \text{اگر } z \neq 0 \end{cases}$$

۱۲. فرض کنید

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-z^2}{2}\right)^{3^k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

و نواحیی را بیابید که در آنها دو سری همگرایند. نشان دهید که این امر قضیهٔ ۵.۱۶ را توضیح می‌دهد. نقطهٔ منفرد f را که از همه به‌مبدأ نزدیکتر است پیدا نمایید.

۱۳. فرض کنید $\Omega = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$ و به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، X_n را مجموعهٔ تمام $f \in H(\Omega)$ هایی بگیرید که مشتقات nم تابعی مانند $g \in H(\Omega)$ اند. [به‌عبارت دیگر، X_n برد عملگر دیفرانسیل D^n با قلمرو $H(\Omega)$ است.]

(آ) نشان دهید که $f \in X_1$ اگر و فقط اگر $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ که در آن γ دایرهٔ یکهٔ جهتدار با جهت مثبت است.

(ب) نشان دهید که به‌ازای هر n، $f \in X_n$ اگر و فقط اگر f به‌یک تابع هلوریخت در $D(0;2)$ وسعت یابد.

۱۴. فرض کنید Ω یک ناحیه بوده، $p \in \Omega$، و $R < \infty$. همچنین $\mathscr{F}$ ردهٔ تمام $f \in H(\Omega)$ هایی باشد که $|f(p)| \le R$ و $f(\Omega)$ شامل نه ۰ و نه ۱ است. ثابت کنید $\mathscr{F}$ یک خانوادهٔ

نرمال می‌باشد.

۱۵. نشان دهید که قضیهٔ ۲.۱۶ به‌یک برهان بسیار ساده از حالت خاص قضیهٔ تک میدانی (۱۵.۱۶) منجر می‌شود که در آن Ω و D قرصهایی متحدالمرکزند. این حالت خاص را با قضیهٔ نگاشت ریمان تلفیق کرده، قضیهٔ ۱۵.۱۶ را با کلیتی که بیان شده اثبات نمایید.

فصل هفده
فضاهای H^p

این فصل به‌بررسی بعضی از زیرفضاهای $H(U)$ که با شرطهای رشد خاصی تعریف می‌شوند اختصاص دارد. درواقع همهٔ این زیرفضاها مشمول ردهٔ N تعریف شده در فصل ۱۵ می‌باشند. این زیرفضاها که (به‌افتخار جی. اچ. هاردی) فضاهای H^p نام یافته‌اند، در رابطه با تجزیه‌ها، مقادیر مرزی، و نمایشهای از نوع کشی برحسب اندازه‌ها روی مرز U خواص جالب بسیار دارند. ما فقط چند مورد مهم نظیر قضایای اف و ام. ریس روی اندازه‌های μ که ضرایب فوریه‌شان $\hat{\mu}(n)$ به‌ازای هر $n < 0$ مساوی ۰ اند، رده‌بندی بورلینگ (*Beurling*) زیرفضاهای پایای H^2، و قضیهٔ ام. ریس در باب توابع مزدوج را عرضه خواهیم کرد.

یک راه مناسب به‌این مبحث از طریق توابع زیرتوافقی است، و ما با خلاصه‌ای از خواص آنها شروع می‌کنیم.

تابعهای زیرتوافقی

۱.۱۷ تعریف. گوییم تابع u تعریف شده در مجموعهٔ باز Ω در صفحه ***زیرتوافقی*** است اگر از چهار خاصیت زیر برخوردار باشد:

(آ) به‌ازای هر $z \in \Omega$، $-\infty \le u(z) < \infty$؛

(ب) u در Ω نیمه پیوستهٔ بالایی باشد؛

(پ) هرگاه $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$، آنگاه

$$u(a) \le \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})\, d\theta\,;$$

(ت) هیچیک از انتگرالهای مذکور در (پ) مساوی $-\infty$ نباشد.

توجه کنید که انتگرالهای مذکور در (پ) همیشه وجود دارند و $+\infty$ نیستند، زیرا (آ) و (ب) ایجاب می‌کنند که u بر هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset \Omega$ از بالا کراندار است. [*برهان.* هرگاه K_n مجموعهٔ تمام $z \in K$هایی باشد که در آنها $u(z) \ge n$، آنگاه $K \supset K_۱ \supset K_۲ \supset \cdots$؛ در نتیجه یا به‌ازای nی، $K_n = \varnothing$ یا $\cap K_n \neq \varnothing$ که در این حالت به‌ازای $z \in K$ی، $u(z) = \infty$.] لذا (ت) می‌گوید که انتگرالدهها در (پ) تعلق به $L^۱(T)$ دارند.

هر تابع توافقی حقیقی بوضوح زیرتوافقی است.

۲.۱۷ قضیه. ***هرگاه u در Ω زیرتوافقی بوده و φ یک تابع محدب صعودی بر $R^۱$ باشد، آنگاه $\varphi \circ u$ زیرتوافقی است.***

[برای آنکه $\varphi \circ u$ در هر نقطهٔ Ω تعریف شده باشد، قرار می‌دهیم $\varphi(-\infty) = \lim \varphi(x)$ وقتی $x \to -\infty$.]

برهان. اولاً $\varphi \circ u$ نیمه پیوستهٔ بالایی است زیرا φ صعودی و پیوسته است. حال اگر $\overline{D}(a\,;r) \subset \Omega$، داریم

$$\varphi\left(u(a)\right) \le \varphi\left(\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})\, d\theta\right) \le \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(u(a+re^{i\theta})\right) d\theta \cdot$$

اولین نامساوی به‌این دلیل که φ صعودی و u زیرتوافقی است برقرار است. نامساوی دوم از تحدب φ، طبق قضیهٔ ۳.۳، نتیجه می‌شود.

۳.۱۷ قضیه. ***هرگاه Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$، و f متحد ۰ نباشد، آنگاه $\log|f|$ در Ω زیرتوافقی است؛ در نتیجه $\log^+|f|$ و $|f|^p$ $(۰ < p < \infty)$ چنین‌اند.***

برهان. فرض است که اگر $f(z) = ۰$، $\log|f(z)| = -\infty$. در این صورت $\log|f|$ در Ω نیمه‌پیوستهٔ بالایی است، و قضیهٔ ۱۹.۱۵ ایجاب می‌کند که $\log|f|$ زیرتوافقی می‌باشد.

اگر قضیهٔ ۲.۱۷ را بر $\log|f|$ به‌جای u و با

$$\varphi(t) = e^{pt} \quad \text{و} \quad \varphi(t) = \max(۰, t)$$

اعمال کنیم، سایر احکام نتیجه خواهند شد.

۴.۱۷ قضیه. ***فرض کنیم u یک تابع زیرتوافقی پیوسته در Ω بوده، K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω بوده، h یک تابع حقیقی پیوسته بر K باشد که درون V از K توافقی است، و در تمام نقاط***

مرزی K، $u(z) \le h(z)$. در این صورت، به‌ازای هر $z \in K$، $u(z) \le h(z)$.

این قضیه اصطلاح «زیرتوافقی» را توجیه می‌کند. در اینجا پیوستگی u لازم نیست، ولی ما به‌حالت کلی نیازی نداریم و آن را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

برهان. قرار می‌دهیم $u_1 = u - h$ و برای به‌دست آوردن تناقض فرض می‌کنیم به‌ازای $z \in V$ ی، $u_1(z) > 0$. چون u_1 بر K پیوسته است، u_1 ماکزیمم خود m را بر K می‌گیرد؛ و چون بر مرز K داریم $u_1 \le 0$، مجموعهٔ $E = \{z \in K : u_1(z) = m\}$ یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ ناتهی V است.

فرض کنیم z_0 یک نقطهٔ مرزی E باشد. در این صورت به‌ازای $r > 0$ ی داریم $\overline{D}(z_0; r) \subset V$، ولی زیرقوسی از مرز $\overline{D}(z_0; r)$ در متمم E قرار دارد. لذا

$$u_1(z_0) = m > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

و این یعنی u_1 در V زیرتوافقی نیست. ولی اگر u زیرتوافقی باشد، $u-h$ نیز طبق خاصیت مقدار میانگین تابعهای توافقی چنین است، و ما تناقض خواهیم داشت.

۵.۱۷ قضیه. ***فرض کنیم u یک تابع زیرتوافقی پیوسته در U بوده و***

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \quad (0 \le r < 1) \cdot \tag{۱}$$

هرگاه $r_1 < r_2$، آنگاه $m(r_1) \le m(r_2)$.

برهان. فرض کنیم h تابع پیوسته‌ای بر $\overline{D}(0; r_2)$ باشد که بر مرز $\overline{D}(0; r_2)$ با u یکی بوده و در $D(0; r_2)$ توافقی باشد. بنابر قضیهٔ ۴.۱۷، در $D(0; r_2)$ داریم $u \le h$. لذا

$$m(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta})\, d\theta = h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_2 e^{i\theta})\, d\theta = m(r_2) \cdot$$

فضاهای H^p و N

۶.۱۷ نمادگذاری. همانند بخشهای ۱۵.۱۱ و ۱۹.۱۱، f_r را بر T با

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad (0 \le r < 1) \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم که در آن f یک تابع پیوسته با قلمرو U بوده و اندازهٔ لبگ σ بر T طوری نرمالی شده است که $\sigma(T) = 1$. لذا نرمهای L^p اشاره به $L^p(\sigma)$ دارند. بخصوص

$$\|f_r\|_p = \left\{ \int_T |f_r|^p\, d\sigma \right\}^{1/p} \quad (0 < p < \infty), \tag{۲}$$

$$\|f_r\|_\infty = \sup_\theta |f(re^{i\theta})|, \qquad (۳)$$

و نیز معرفی می‌کنیم:

$$\|f_r\|_0 = \exp \int_T \log^+ |f_r|\, d\sigma \cdot \qquad (۴)$$

۷.۱۷ تعریف. اگر $f \in H(U)$ و $0 \le p \le \infty$، قرار می‌دهیم

$$\|f\|_p = \sup\{\|f_r\|_p : 0 \le r < 1\} \cdot \qquad (۱)$$

اگر $0 < p \le \infty$، H^p ردهٔ تمام $f \in H(U)$هایی تعریف می‌شود که $\|f\|_p < \infty$. (توجه کنید که این با اصطلاح قبلی ما در حالت $p = \infty$ یکی است.)

ردهٔ N عبارت است از مجموعهٔ تمام $f \in H(U)$هایی که $\|f\|_0 < \infty$. واضح است که اگر $0 < s < p < \infty$، $H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N$.

۸.۱۷ چند تبصره. (آ) وقتی $p < \infty$، قضایای ۳.۱۷ و ۵.۱۷ نشان می‌دهند که $\|f_r\|_p$ یک تابع نانزولی از r به‌ازای هر $f \in H(U)$ است؛ وقتی $p = \infty$، همین امر از قضیهٔ مدول ماکزیمم نتیجه می‌شود. لذا

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1} \|f_r\|_p \cdot \qquad (۱)$$

(ب) به‌ازای $1 \le p \le \infty$، $\|f\|_p$ در نامساوی مثلثی صدق می‌کند؛ درنتیجه H^p یک فضای خطی نرمدار است. برای مشاهدهٔ این امر توجه می‌کنیم که نامساوی مینکوفسکی نتیجه می‌دهد که اگر $0 < r < 1$،

$$\|(f+g)_r\|_p = \|f_r + g_r\|_p \le \|f_r\|_p + \|g_r\|_p \cdot \qquad (۲)$$

وقتی $r \to 1$، به‌دست می‌آوریم

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \cdot \qquad (۳)$$

(پ) درواقع اگر $1 \le p \le \infty$، H^p یک ***فضای باناخ*** است. برای اثبات تمامیت فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در H^p باشد، $|z| \le r < R < 1$، و فرمول کشی را بر $f_n - f_m$ اعمال کرده حول دایره به‌شعاع R و مرکز 0 انتگرال می‌گیریم. با این کار به‌نامساویهای زیر می‌رسیم:

$$(R-r)\,|f_n(z) - f_m(z)| \le \|(f_n - f_m)_R\|_1 \le \|(f_n - f_m)_R\|_p \le \|f_n - f_m\|_p$$

که از آنها نتیجه می‌گیریم که $\{f_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به‌طور یکنواخت به‌تابعی مانند $f \in H(U)$ همگراست. به‌ازای $\epsilon > 0$ عددی مانند m هست به‌طوری که به‌ازای هر $n > m$، $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$، و در این صورت به‌ازای هر $r < 1$،

$$\|(f - f_m)_r\|_p = \lim_{n \to \infty} \|(f_n - f_m)_r\|_p \le \epsilon \cdot \qquad (۴)$$

از این معلوم می‌شود که وقتی $m \to \infty$، $\|f-f_m\|_p \to ۰$.

(ت) به‌ازای $p < ۱$، H^p هنوز یک فضای برداری است ولی نامساوی مثلثی دیگر به‌ازای $\|f\|_p$ برقرار نیست.

ما در قضیهٔ ۲۳.۱۵ دیدیم که صفرهای هر $f \in N$ در شرط بلاشکهٔ $\Sigma\,(۱-|\alpha_n|) < \infty$ صدق می‌کنند. لذا همین امر در هر H^p درست است. جالب آنکه صفرهای هر $f \in H^p$ را می‌توان بدون افزایش نرم تقسیم کرد:

۹.۱۷ قضیه. ***فرض کنیم $f \in N$، $f \not\equiv ۰$، و B حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متشکل از صفرهای f باشد. قرار می‌دهیم $g = f/B$. در این صورت $g \in N$ و $\|f\|_۰ = \|g\|_۰$.***
به‌علاوه، هرگاه $f \in H^p$، آنگاه $g \in H^p$ و $\|f\|_p = \|g\|_p$ $\quad (۰ < p \le \infty)$.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$|g(z)| \ge |f(z)| \quad (z \in U) \cdot \tag{۱}$$

درواقع نامساوی اکید به‌ازای هر $z \in U$ برقرار است مگر آنکه f در U دارای صفر نباشد که در این صورت $B = ۱$ و $g = f$.

اگر s و t اعداد حقیقی نامنفیی باشند، نامساوی

$$\log^+ (st) \le \log^+ s + \log^+ t \tag{۲}$$

برقرار است زیرا طرف چپ به‌ازای $st < ۱$ مساوی ۰ و به‌ازای $st \ge ۱$ برابر $\log s + \log t$ می‌باشد. چون $|g| = |f|/|B|$، از رابطهٔ (۲) داریم

$$\log^+ |g| \le \log^+ |f| + \log \frac{۱}{|B|} \cdot \tag{۳}$$

بنابر قضیهٔ ۲۴.۱۵، رابطهٔ (۳) ایجاب می‌کند که $\|g\|_۰ \le \|f\|_۰$، و چون رابطهٔ (۱) برقرار است، درواقع داریم $\|f\|_۰ = \|g\|_۰$.

حال فرض کنیم به‌ازای $p > ۰$، $f \in H^p$. همچنین B_n حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متناهی متشکل از n صفر اول f باشد (این صفرها را با احتساب بستاییها به‌شکل دنباله می‌نویسیم.) قرار می‌دهیم $g_n = f/B_n$. به‌ازای هر n، وقتی $r \to ۱$، $|B_n(re^{i\theta})| \to ۱$ به‌طوریکنواخت. لذا $\|f\|_p = \|g_n\|_p$. وقتی $n \to \infty$، $|g_n|$ به $|g|$ افزایش می‌یابد؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ همگرایی یکنوا،

$$\|g_r\|_p = \lim_{n \to \infty} \|(g_n)_r\|_p \quad (۰ < r < ۱) \cdot \tag{۴}$$

طرف راست (۴) به‌ازای هر $r < ۱$ حداکثر $\|f\|_p$ است. اگر فرض کنیم $r \to ۱$، به‌دست می‌آوریم $\|g\|_p \le \|f\|_p$. حال تساوی مثل قبل از (۱) نتیجه می‌شود.

۱۰.۱۷ قضیه. فرض کنیم $0 < p < \infty$، $f \in H^p$، $f \not\equiv 0$، و B حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متشکل از صفرهای f باشد. در این صورت یک تابع فارغ از صفر مانند $h \in H^2$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f = B \cdot h^{2/p} \cdot \qquad (1)$$

بخصوص هر $f \in H^1$ حاصل‌ضربی مانند

$$f = gh$$

است که در آن هر دو عامل در H^2 می‌باشند.

برهان. بنابر قضیهٔ ۹.۱۷، $f/B \in H^p$. درواقع $\|f\|_p = \|f/B\|_p$. چون f/B صفری در U ندارد و U همبند ساده است، تابعی مانند $\varphi \in H(U)$ هست به‌طوری که $\exp(\varphi) = f/B$ (قضیهٔ ۱۱.۱۳). قرار می‌دهیم $h = \exp(p\varphi/2)$. در این صورت $h \in H(U)$ و $|h|^2 = |f/B|^p$؛ درنتیجه $h \in H^2$ و رابطهٔ (۱) برقرار می‌باشد. درواقع $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$.

برای به‌دست آوردن نامساوی (۲)، رابطهٔ (۱) را به‌شکل $f = (Bh) \cdot h$ بنویسید.

حال می‌توان چند خاصیت از مهمترین خواص فضاهای H^p را به‌ثبوت رسانید.

۱۱.۱۷ قضیه. هرگاه $0 < p < \infty$ و $f \in H^p$، آنگاه

(آ) توابع ماکزیمال غیرمماسی $N_\alpha f$ به‌ازای هر $1 < \alpha$ در $L^p(T)$اند؛

(ب) حدود غیرمماسی $f^*(e^{i\theta})$ ت. هـ. بر T وجود دارند و $f^* \in L^p(T)$؛

(پ) $\lim_{r \to 1} \|f^* - f_r\|_p = 0$؛ و

(ت) $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.

هرگاه $f \in H^1$، آنگاه f انتگرال کشی و انتگرال پواسون f^* می‌باشد.

برهان. با اثبات (آ) و (ب) در حالت $p > 1$ شروع می‌کنیم. چون توابع هلوریخت توافقی‌اند، قضیهٔ ۳۰.۱۱ (ب) نشان می‌دهد که هر $f \in H^p$ انتگرال پواسون تابعی (که آن را f^* می‌نامیم) در $L^p(T)$ می‌باشد. لذا، طبق قضیهٔ ۲۵.۱۱ قسمت (ب)، $N_\alpha f \in L^p(T)$، و طبق قضیهٔ ۲۳.۱۱، $f^*(e^{i\theta})$ حد غیرمماسی f در تقریباً هر $e^{i\theta} \in T$ می‌باشد.

اگر $0 < p \le 1$ و $f \in H^p$، از تجزیهٔ

$$f = Bh^{2/p} \qquad (1)$$

ناشی از قضیهٔ ۱۰.۱۷ استفاده می‌کنیم که در آن B یک حاصل‌ضرب بلاشکه بوده، $h \in H^2$، و h صفری در U ندارد. چون در U داریم $|f| \le |h|^{2/p}$، پس

$$(N_\alpha f)^p \le (N_\alpha h)^2 ; \qquad (2)$$

درنتیجه $N_\alpha f \in L^p(T)$ زیرا $N_\alpha h \in L^2(T)$.

به‌همین نحو وجود B^* و h^*ت. هـ. بر T ایجاب می‌کند که حدود غیرمماسی f(آنها را f^* می‌نامیم) ت. هـ. موجودند. واضح است که هروقت f^* موجود باشد، $|f^*| \leq N_\alpha f$. لذا $f^* \in L^p(T)$. این امر قسمتهای (آ) و (ب) را به‌ازای $\circ < p < \infty$ ثابت می‌کند.

چون $f_r \to f^*$ت. هـ. و $|f_r| < N_\alpha f$ ، قضیهٔ همگرایی تسلطی قسمت (پ) را به‌دست می‌دهد.

اگر $p \geq ۱$، قسمت (ت) از (پ)،بنابر نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود. اگر $p < ۱$، قسمت (ت) با استفاده از تمرین ۲۴ در فصل ۳ از قسمت (پ) نتیجه خواهد شد.

بالأخره هرگاه $f \in H^۱$، $r < ۱$، و $f_r(z) = f(rz)$، آنگاه $f_r \in H\left(D(\circ\,;\,۱/r)\right)$و لذا f_rرا می‌توان در U به‌وسیلهٔ فرمول‌کشی به‌صورت

$$f_r(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_r(e^{it})}{۱-e^{-it}z}\, dt \qquad (۳)$$

و به‌وسیلهٔ فرمول پواسون به‌شکل

$$f_r(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) f_r(e^{it})\, dt \qquad (۴)$$

نمایش داد. به‌ازای هر $z \in U$، $|۱-e^{-it}z|$ و $P(z, e^{it})$ توابع کرانداری بر T اند. لذا حالت $p = ۱$قسمت (پ) ما را از روابط (۳) و (۴) به‌روابط

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{۱-e^{-it}z}\, dt \qquad (۵)$$

و

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) f^*(e^{it})\, dt \qquad (۶)$$

می‌رساند.

فضای $H^۲$ توصیف سادهٔ خاصی برحسب ضرایب سری توانی دارد:

۱۲.۱۷ قضیه. ***فرض کنیم*** $f \in H(U)$و

$$f(z) = \sum_{\circ}^{\infty} a_n z^n \,.$$

در این صورت $f \in H^۲$ ***اگر و فقط اگر*** $\Sigma_{\circ}^{\infty} |a_n|^۲ < \infty$.

برهان. بنابر قضیهٔ پارسوال اعمال شده بر f_rبه‌ازای $r < ۱$،

$$\sum_{\circ}^{\infty} |a_n|^۲ = \lim_{r \to ۱} \sum_{\circ}^{\infty} |a_n|^۲ r^{۲n} = \lim_{r \to ۱} \int_T |f_r|^۲\, d\sigma = \|f\|_۲^۲ \,.$$

قضیهٔ اف و ام. ریس

۱۳.۱۷ قضیه. *هرگاه μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر دایرهٔ یکهٔ T بوده و بهازای $n = -۱, -۲, -۳, \cdots$،*

$$\int_T e^{-int}\,d\mu(t) = ۰, \qquad (۱)$$

آنگاه μ نسبت بهاندازهٔ لبگ بهطور مطلق پیوسته است.

برهان. قرار میدهیم $f = P[d\mu]$. در این صورت f در نامساوی

$$\|f_r\|_۱ \le \|\mu\| \quad (۰ \le r < ۱) \qquad (۲)$$

صدق میکند (ر.ک. بخش ۱۷.۱۱.) چون مثل بخش ۵.۱۱ با فرض $z = re^{i\theta}$ داریم

$$P(z, e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, e^{in\theta}\, e^{-int}, \qquad (۳)$$

فرض (۱)، که همارز آن است که بگوییم ضرایب فوریهٔ $\hat{\mu}(n)$ بهازای هر $n < ۰$ مساوی ۰ اند، بهسری توانی زیر منجر میشود:

$$f(z) = \sum_{۰}^{\infty} \hat{\mu}(n)\, z^n \quad (z \in U)\cdot \qquad (۴)$$

بنابر روابط (۴) و (۲)، $f \in H^۱$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷، $f = P[f^*]$ که در آن $f^* \in L^۱(T)$. حال یکتایی نمایش انتگرال پواسون (قضیهٔ ۳۰.۱۱) نشان میدهد که $d\mu = f^*\,d\sigma$.

ویژگی جالب این قضیه آن است که پیوستگی مطلق یک اندازه را از یک شرط بهظاهر نامربوط، یعنی صفر شدن نیمی از ضرایب فوریهاش، نتیجه میگیرد. در سالهای اخیر قضیه بهحالات مختلف دیگر نیز کشانده شده است.

قضایای تجزیه

ما از قبل طبق قضیهٔ ۹.۱۷ میدانیم که هر $f \in H^p$ (جز $f = ۰$) را میتوان بهیک حاصلضرب بلاشکه و یک تابع مانند $g \in H^p$ که در U دارای صفر نیست تجزیه کرد. همچنین تجزیهای از g هست که ماهیت ظریفتری دارد. این امر، بهبیان نادقیق، بهسرعتی مربوط میشود که g در امتداد بعضی از شعاعها به ۰ میل میکند.

۱۴.۱۷ تعریف. یک *تابع داخلی* تابعی است مانند $M \in H^\infty$ که $|M^*| = ۱$ ت. هـ. بر T. (طبق معمول، M^* حدود شعاعی M میباشد.)

هرگاه φ یک تابع اندازه‌پذیر مثبت بر T باشد به‌طوری که $\log\varphi \in L^1(T)$ و به‌ازای $z \in U$،

$$Q(z) = c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})\,dt\right\}, \qquad (1)$$

آنگاه Q یک **تابع خارجی** نام دارد. دراینجا c ثابت است و $|c| = 1$.

قضیهٔ ۲۴.۱۵ نشان می‌دهد که هر حاصل‌ضرب بلاشکه یک تابع داخلی است ولی تابعهای داخلی دیگری نیز وجود دارند. این توابع را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد.

۱۵.۱۷ قضیه. *فرض کنیم c یک ثابت بوده، $|c| = 1$، B یک حاصل‌ضرب بلاشکه باشد، μ یک اندازهٔ بورل مثبت متناهی بر T باشد که نسبت به‌اندازهٔ لبگ منفرد است، و*

$$M(z) = cB(z)\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right\}\ (z\in U)\cdot \qquad (1)$$

در این صورت M یک تابع داخلی است و هر تابع داخلی به‌این شکل می‌باشد.

برهان. هرگاه رابطهٔ (۱) برقرار بوده و $g = M/B$، آنگاه $\log|g|$ انتگرال پواسون $-d\mu$ است. لذا $\log|g| \le 0$؛ درنتیجه $g \in H^\infty$، و همین امر در مورد M درست است. همچنین $D\mu = 0$ ت. هـ. زیرا μ منفرد است (قضیهٔ ۱۳.۷)، و لذا حدود شعاعی $\log|g|$ ت. هـ. صفرند (قضیهٔ ۲۲.۱۱). چون $|B^*| = 1$ ت. هـ.، معلوم می‌شود که M یک تابع داخلی می‌باشد

به‌عکس فرض کنیم B حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متشکل از صفرهای تابع داخلی M باشد و قرار می‌دهیم $g = M/B$. در این صورت $\log|g|$ در U توافقی است. قضایای ۲۴.۱۵ و ۹.۱۷ نشان می‌دهند که در U داریم $|g| \le 1$ و $|g^*| = 1$ ت. هـ. بر T. لذا $\log|g| \le 0$. از قضیهٔ ۳۰.۱۱ نتیجه می‌گیریم که $\log|g|$ انتگرال پواسون $-d\mu$ به‌ازای اندازهٔ مثبتی مانند μ بر T است. چون $\log|g^*| = 0$ ت. هـ. بر T، داریم $D\mu = 0$ ت. هـ. بر T؛ درنتیجه μ منفرد می‌باشد. بالأخره $\log|g|$ قسمت حقیقی

$$h(z) = -\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)$$

است، و این ایجاب می‌کند که به‌ازای ثابتی مانند c که $|c| = 1$، $g = c\exp(h)$. لذا M به‌شکل (۱) می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

ساده‌ترین مثال از یک تابع داخلی که حاصل‌ضرب بلاشکه نباشد به‌قرار زیر است: $c = 1$ و

$B = ۱$ را اختیار و فرض می‌کنیم μ جرم یکه در $t = ۰$ باشد. در این صورت

$$M(z) = \exp\left\{\frac{z+۱}{z-۱}\right\},$$

که در امتداد شعاع مختوم به $z = ۱$ خیلی سریع به ۰ میل می‌کند.

۱۶.۱۷ قضیه. ***فرض کنیم Q تابع خارجی مربوط به φ مثل تعریف ۱۴.۱۷ باشد. در این صورت***

(آ) $\log|Q|$ ***انتگرال پواسون*** $\log\varphi$ ***است؛***

(ب) $\lim_{r\to ۱} |Q(re^{i\theta})| = \varphi(e^{i\theta})$ ***ت. هـ. بر*** T***؛***

(پ) $Q \in H^p$ ***اگر و فقط اگر*** $\varphi \in L^p(T)$***. در این حالت*** $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

برهان. (آ) با معاینه واضح است و (آ) ایجاب می‌کند که حدود شعاعی $\log|Q|$ ت. هـ. بر T مساوی $\log\varphi$ باشند که (ب) را ثابت‌خواهد کرد. اگر $Q \in H^p$، لم فاتو ایجاب می‌کند که $\|Q^*\|_p \le \|Q\|_p$؛ درنتیجه، بنابر (ب)، $\|\varphi\|_p \le \|Q\|_p$. به‌عکس، هرگاه $\varphi \in H^p(T)$، آنگاه طبق نامساوی بین میانگینهای هندسی و حسابی (قضیهٔ ۳.۳)،

$$|Q(re^{i\theta})|^p = \exp\left\{\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\log\varphi^p(e^{it})\,dt\right\}$$

$$\le \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,\varphi^p(e^{it})\,dt,$$

و اگر از آخرین نامساوی نسبت به θ انتگرال بگیریم، خواهیم دید که به‌ازای $p < \infty$، $\|Q\|_p \le \|\varphi\|_p$. حالت $p = \infty$ بدیهی می‌باشد.

۱۷.۱۷ قضیه. ***فرض کنیم*** $۰ < p \le \infty$، $f \in H^p$، ***و*** f ***متحد ۰ نباشد. در این صورت*** $\log|f^*| \in L^۱(T)$، ***تابع خارجی***

$$Q_f(z) = \exp\left\{\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|\,dt\right\} \tag{۱}$$

در H^p ***است، و یک تابع داخلی مانند*** M_f ***وجود دارد به‌طوری که***

$$f = M_f Q_f\,. \tag{۲}$$

به‌علاوه

$$\log|f(۰)| \le \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{it})|\,dt\,. \tag{۳}$$

در (۳) ***تساوی برقرار است اگر و فقط اگر M_f ثابت باشد.***

توابع M_f و Q_f را به‌ترتیب **عوامل داخلی** و **خارجی** f می‌نامند. Q_f فقط تابع مقادیر مرزی $|f|$ می‌باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f\in H^1$. اگر B حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متشکل از صفرهای f بوده و $g=f/B$، قضیهٔ ۹.۱۷ نشان می‌دهد که $g\in H^1$؛ و چون $|f^*|=|g^*|$ ت. هـ. بر T، کافی است قضیه را با g به‌جای f ثابت کنیم.

لذا فرض می‌کنیم f در U دارای صفر نبوده و $f(0)=1$. در این صورت $\log|f|$ در U توافقی است، $\log|f(0)|=0$، و چون $\log=\log^+-\log^-$، خاصیت مقدار میانگین تابعهای توافقی ایجاب می‌کند که به‌ازای $0<r<1$،

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|f(re^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \tag{۴}$$

$$\le \|f\|_0\le\|f\|_1\cdot$$

حال از لم فاتو نتیجه می‌شود که هر دوی $\log^+|f^*|$ و $\log^-|f^*|$ در $L^1(T)$ اند؛ درنتیجه $\log|f^*|$ نیز چنین است.

این نشان می‌دهد که تعریف (۱) با معنی است. بنابر قضیهٔ ۱۶.۱۷، $Q_f\in H^1$. همچنین $|Q^*_f|=|f^*|\neq 0$ ت. هـ.، زیرا $\log|f^*|\in L^1(T)$. هرگاه بتوان ثابت کرد که

$$|f(z)|\le|Q_f(z)|\quad(z\in U), \tag{۵}$$

آنگاه f/Q_f یک تابع داخلی است و تجزیهٔ (۲) را خواهیم داشت.

چون $\log|Q_f|$ انتگرال پواسون $\log|f^*|$ است، رابطهٔ (۵) هم‌ارز نامساوی زیر می‌باشد:

$$\log|f|\le P[\log|f^*|] \tag{۶}$$

که اینک به‌اثبات آن می‌پردازیم. نمادگذاری ما مثل فصل ۱۱ است: $P[h]$ انتگرال پواسون تابع $h\in L^1(T)$ می‌باشد.

به‌ازای $|z|\le 1$ و $0<R<1$ قرار می‌دهیم $f_R(z)=f(Rz)$ و $z\in U$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت

$$\log|f_R(z)|=P[\log^+|f_R|](z)-P[\log^-|f_R|](z)\cdot \tag{۷}$$

چون به‌ازای جمیع اعداد حقیقی u و v داریم $|\log^+u-\log^+v|\le|u-v|$ و وقتی $R\to 1$، $\|f_R-f^*\|_1\to 0$ (قضیهٔ ۱۱.۱۷)، اولین انتگرال پواسون در (۷) به‌ازای $R\to 1$ به $P[\log^+|f^*|]$ همگراست. لذا لم فاتو نتیجه می‌دهد که

$$P[\log^-|f^*|]\le\liminf_{R\to 1}P[\log^-|f_R|]=P[\log^+|f^*|]-\log|f| \tag{۸}$$

که همان نامساوی (۶) می‌باشد.

پس تجزیهٔ (۲) به‌ثبوت می‌رسد. اگر در (۵) قرار دهیم $z = ۰$، رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آید. تساوی در (۳) برقرار است اگر و فقط اگر $|Q_f(۰)| = |f(۰)|$؛ یعنی اگر و فقط اگر $|M_f(۰)| = ۱$. و چون $\| M_f \|_\infty = ۱$، این فقط وقتی رخ می‌دهد که M_f ثابت باشد. این برهان را در حالت $p = ۱$ کامل می‌کند.

هرگاه $۱ < p \le \infty$، آنگاه $H^p \subset H^۱$؛ درنتیجه باقی است ثابت کنیم که $Q_f \in H^p$. ولی هرگاه $f \in H^p$، آنگاه، بنابر لم فاتو، $|f^*| \in L^p(T)$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۶.۱۷ (پ)، $Q_f \in H^p$.

قضیهٔ ۱۰.۱۷ حالت $p < ۱$ را به‌حالت $p = ۲$ تحویل می‌سازد.

تعلق $\log |f^*| \in L^۱(T)$ متضمن نتیجه‌ای است که قبلاً در برهان به‌کار رفته است ولی آنقدر مهم است که جداگانه بیان شود:

۱۸.۱۷ قضیه. هرگاه $۰ < p \le \infty$، $f \in H^p$، و f متحد ۰ نباشد، آنگاه در تقریباً همهٔ نقاط T داریم $f^*(e^{i\theta}) \neq ۰$.

برهان. هرگاه $f^* = ۰$، آنگاه $\log |f^*| = -\infty$، و هرگاه این امر بر مجموعه‌ای از اندازهٔ مثبت رخ دهد، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{it})| \, dt = -\infty \cdot$$

ملاحظه می‌کنیم که قضیهٔ ۱۸.۱۷ یک قید کمّی بر موضع صفرهای حدود شعاعی یک تابع مانند $f \in H^p$ می‌گذارد. بنابر شرط بلاشکه، صفرهای داخل U نیز تحت قید کمی قرار دارند.

طبق معمول، می‌توان نتیجهٔ فوق راجع به‌صفرها را به‌صورت یک قضیهٔ یکتایی بیان کرد: **هرگاه $f \in H^p$، $g \in H^p$، و بر زیرمجموعه‌ای مانند T که اندازهٔ لبگش مثبت است $f^*(e^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta})$، آنگاه به‌ازای هر $z \in U$ داریم $f(z) = g(z)$.**

۱۹.۱۷. حال نظری سریع به‌ردهٔ N می‌افکنیم با این امید که ببینیم چقدر از قضایای ۱۷.۱۷ و ۱۸.۱۷ در اینجا برقرار است. اگر $f \in N$ و $f \not\equiv ۰$، می‌توان بر یک حاصل‌ضرب بلاشکه تقسیم کرد و خارج قسمتی چون g به‌دست آورد که در U صفر نداشته و در N باشد (قضیهٔ ۹.۱۷). در این صورت $\log |g|$ توافقی است، و چون

$$|\log |g|| = ۲\log^+ |g| - \log |g| \tag{۱}$$

و

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| \, d\theta = \log |g(۰)| , \tag{۲}$$

معلوم می‌شود که $\log |g|$ در مفروضات قضیهٔ ۳۰.۱۱ صدق می‌کند و لذا انتگرال پواسون یک

اندازهٔ حقیقی مانند μ می‌باشد بنابراین

$$f(z) = c B(z) \exp \left\{ \int_T \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t) \right\} \tag{۳}$$

که در آن c ثابت است، $|c| = 1$، و B یک حاصل‌ضرب بلاشکه می‌باشد.

توجه کنید که چگونه فرض کرانداری انتگرالهای $\log^+|g|$ (که صورت کمّی آن این است که $|g|$ خیلی به ∞ نزدیک نمی‌شود) کرانداری انتگرالهای $\log^-|g|$ (که می‌گوید $|g|$ در بسیاری از جاها خیلی به ۰ نزدیک نمی‌شود) را ایجاب می‌کند.

اگر μ یک اندازهٔ منفی باشد، عامل نمایی در (۳) در H^∞ است. تجزیهٔ ژردان را بر μ اعمال می‌کنیم. این امر نشان می‌دهد که

به‌هر $f \in N$ دو تابع مانند b_1 و b_2 در H^∞ چنان نظیرند که b_2 در U دارای صفر نبوده و $f = b_1 / b_2$.

چون $b_2^* \neq 0$ ت. هـ.، پس f دارای حدود شعاعی متناهی ت. هـ. است. همچنین $f^* \neq 0$ ت. هـ.

آیا $\log|f^*| \in L^1(T)$؟ بلی، و برهان با برهان داده شده در قضیهٔ ۱۷.۱۷ یکی است. اما نامساوی (۳) قضیهٔ ۱۷.۱۷ دیگر برقرار نیست. مثلاً هرگاه

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}, \tag{۴}$$

آنگاه $\|f\|_0 = e$، $\|f^*\| = 1$ ت. هـ.، و

$$\log|f(0)| = 1 > 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{it})|\, dt \cdot \tag{۵}$$

عملگر انتقال

۱۷.۲۰ زیرفضاهای پایا. عملگر خطی کراندار S بر فضای باناخ X را در نظر می‌گیریم؛ یعنی S یک تبدیل خطی کراندار از X به‌توی X است. اگر زیرفضای بستهٔ Y از X دارای خاصیت $S(Y) \subset Y$ باشد، Y را یک ***زیرفضای S- پایا*** می‌نامیم. لذا زیرفضاهای S- پایای X درست آنهایی هستند که به‌وسیلهٔ S به‌توی خودشان نگاشته می‌شوند.

اطلاع از زیرفضاهای پایای یک عملگر مانند S ما را در تجسم عملش یاری می‌کند. (این یک اصل بسیار کلی، و لذا مبهم، می‌باشد: در مطالعهٔ یک تبدیل از هر نوع، دانستن اینکه تبدیل چه چیز را ثابت می‌گذارد سودمند است.) مثلاً اگر S یک عملگر خطی بر فضای برداری n بعدی X بوده و S دارای n بردار مشخص مستقل خطی مانند x_1، $\cdots$، x_n باشد، فضاهای یک بعدی پیموده شده به‌وسیلهٔ هریک از این x_iها S- پایا بوده و اگر $\{x_1, \cdots, x_n\}$ را پایه‌ای از X

بگیریم، توصیف بسیار ساده‌ای از S به‌دست خواهیم آورد.

ما زیرفضاهای پایای «عملگر انتقال» S بر ℓ^2 را توصیف خواهیم کرد. در اینجا ℓ^2 فضای تمام دنباله‌های مختلط

$$x = \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots\} \tag{1}$$

است که در آن

$$\| x \| = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |\zeta_n|^2\right\}^{1/2} < \infty, \tag{2}$$

و S عنصر $x \in \ell^2$ داده شده با (۱) را به

$$Sx = \{0, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \cdots\} \tag{3}$$

می‌برد. واضح است که S یک عملگر خطی کراندار بر ℓ^2 است و $\| S \| = 1$.

چند زیرفضای S– پایا فوراً خود را نشان می‌دهند: هرگاه Y_k مجموعهٔ تمام $x \in \ell^2$ هایی باشد که k مختص اولشان ۰ است، آنگاه Y_k، S– پایا می‌باشد.

برای یافتن سایرین، از یک یکریختی فضاهای هیلبرت بین ℓ^2 و H^2 که عملگر انتقال S را به‌یک عملگر ضرب بر H^2 تبدیل می‌کند استفاده می‌کنیم. نکته آن است که تحلیل این عملگر ضرب از وضع اولیهٔ فضای دنباله‌ای ℓ^2 آسانتر است (زیرا ساختار H^2 به‌عنوان یک فضای تابعیهای هلوریخت غنی‌تر می‌باشد).

به‌هر $x \in \ell^2$ داده شده با (۱) تابع

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n z^n \quad (z \in U) \tag{4}$$

را مربوط می‌سازیم. بنابر قضیهٔ ۱۲.۱۷، این معرف یک نگاشت یک به‌یک خطی از ℓ^2 به‌روی H^2 است. اگر

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n z^n \quad \text{و} \quad y = \{\eta_n\} \tag{5}$$

و حاصل‌ضرب داخلی در H^2 را با

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})\,\overline{g^*(e^{i\theta})}\,d\theta \tag{6}$$

تعریف کنیم، قضیهٔ پارسوال نشان می‌دهد که $(f, g) = (x, y)$. لذا یک یکریختی فضاهای هیلبرت از ℓ^2 به‌روی H^2 داریم، و عملگر انتقال S به‌یک عملگر ضرب (که باز هم آن را با S نشان می‌دهیم) بر H^2 تبدیل شده است:

$$(Sf)(z) = zf(z) \quad (z \in U \ \text{و}\ f \in H^2) \cdot \tag{7}$$

حال می‌بینیم که زیرفضاهای پایای پیشگفتهٔ Y_k از تمام $f \in H^2$هایی تشکیل شده‌اند که دارای صفر از مرتبهٔ دست کم k در مبدأ اند. این امر راه را به‌ما نشان می‌دهد: به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} \subset U$، فضای Y مرکب از تمام $f \in H^2$هایی که $f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_k) = 0$ $S-$ پایاست. هرگاه B حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متناهی با صفرهای α_1، $\cdots$، α_k باشد، آنگاه $f \in Y$ اگر و فقط اگر $f/B \in H^2$. لذا $Y = BH^2$.

این امر القا می‌کند که حاصل‌ضربهای بلاشکهٔ **نامتناهی** نیز ممکن است به‌زیرفضاهای $S-$ پایا منجر شوند و، به‌طور کلی، حاصل‌ضربهای بلاشکه ممکن است با توابع داخلی دلخواه φ عوض شوند. به‌آسانی معلوم می‌شود که φH^2 یک زیرفضای $S-$ پایای بستهٔ H^2 است ولی اینکه **هر** زیرفضای $S-$ پایای بستهٔ H^2 به‌این شکل است نتیجه‌ای عمیقتر می‌باشد.

۲۱.۱۷ قضیهٔ بورلینگ

(آ) به‌ازای هر تابع داخلی φ، فضای

$$\varphi H^2 = \{\varphi f : f \in H^2\} \tag{1}$$

یک زیرفضای $S-$ پایای بستهٔ H^2 است.

(ب) هرگاه φ_1 و φ_2 دو تابع داخلی بوده و $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$، آنگاه φ_1/φ_2 ثابت است.

(پ) هر زیرفضای $S-$ پایای بستهٔ Y از H^2 غیر از $\{0\}$ شامل یک تابع داخلی φ است به‌طوری که $Y = \varphi H^2$.

برهان. H^2 نسبت به‌نرم

$$\|f\|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 \, d\theta\right\}^{1/2} \tag{2}$$

یک فضای هیلبرت است.

هرگاه φ یک تابع داخلی باشد، آنگاه $|\varphi^*| = 1$ ت. هـ. لذا نگاشت $f \to \varphi f$ یک یکمتری از H^2 به‌توی H^2 است. چون این یکمتری است، بردش φH^2 یک زیرفضای بستهٔ H^2 است. [**برهان.** هرگاه در H^2، $\varphi f_n \to g$، آنگاه $\{\varphi f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است. لذا $\{f_n\}$ نیز چنین است؛ درنتیجه $f_n \to f \in H^2$. پس $g = \varphi f \in \varphi H^2$.] $S-$ پایایی φH^2 نیز بدیهی است زیرا $z \cdot \varphi f = \varphi \cdot zf$. بنابراین (آ) برقرار می‌باشد.

هرگاه $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$، آنگاه به‌ازای $f \in H^2$ ی، $\varphi_1 = \varphi_2 f$. لذا $\varphi_1/\varphi_2 \in H^2$. به‌همین نحو $\varphi_2/\varphi_1 \in H^2$. قرار می‌دهیم $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$ و $h = \varphi + (1/\varphi)$. در این صورت $h \in H^2$، و چون $|\varphi^*| = 1$ ت. هـ. بر T، h^* ت. هـ. بر T حقیقی است. چون h انتگرال پواسون h^* است، پس h در U حقیقی است؛ درنتیجه h ثابت می‌باشد. در این صورت φ باید ثابت باشد و

(ب) به‌ثبوت می‌رسد.

در اثبات (پ) از روشی که توسط هلسون (*Helson*) و لودن اسلاگر (*Lowdenslager*) ابداع شده است استفاده می‌کنیم. فرض کنیم Y یک زیرفضای S− پایای بستهٔ $H^۲$ باشد که فقط از ۰ تشکیل نشده است. در این صورت کوچکترین عدد صحیحی مانند k هست که Y شامل تابعی مانند f به‌شکل زیر می‌باشد:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \quad \text{و} \quad c_k = ۱ \cdot \qquad (۳)$$

در این صورت $f \notin zY$ که در آن zY یعنی مجموعهٔ تمام g ها به‌شکل $g(z) = zf(z)$ که $f \in Y$. پس zY یک زیرفضای بستهٔ **حقیقی** Y است [بنابر استدلال به‌کار رفته در برهان (آ)، بسته]؛ درنتیجه Y شامل بردار ناصفری است که به zY متعامد است (قضیهٔ ۱۱.۴).

لذا $\varphi \in Y$ای هست به‌طوری که $\|\varphi\|_۲ = ۱$ و $\varphi \perp zY$. در این صورت، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $\varphi \perp z^n \varphi$. این طبق تعریف ضرب داخلی در $H^۲$ [ر.ک. ۲۰.۱۷ (۶)] یعنی

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^۲ e^{-in\theta}\, d\theta = ۰ \; (n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \qquad (۴)$$

اگر طرفهای چپ را با مزدوجهای مختلطشان عوض کنیم، یعنی اگر n را با $-n$ تعویض نماییم، این معادلات حفظ می‌شوند. لذا تمام ضرایب فوریهٔ تابع $|\varphi^*|^۲ \in L^۱(T)$، جز ضریب نظیر $n = ۰$ که یک است، مساوی ۰ اند. چون توابع $L^۱$ به‌وسیلهٔ ضرایب فوریه‌شان معین می‌شوند (قضیهٔ ۱۵.۵)، پس $|\varphi^*| = ۱$ ت. هـ. بر T. ولی $\varphi \in H^۲$؛ درنتیجه φ انتگرال پواسون φ^* است؛ و لذا $|\varphi| \leq ۱$. پس نتیجه می‌گیریم که φ یک تابع داخلی می‌باشد.

چون $\varphi \in Y$ و Y، S− پایاست، به‌ازای هر $n \geq ۰$ داریم $\varphi z^n \in Y$؛ درنتیجه به‌ازای هر چندجمله‌ای P، $\varphi P \in Y$. چندجمله‌ایها در $H^۲$ چگالند (بنابر قضیهٔ پارسوال، مجموعهای جزئی سری توانی هر $f \in H^۲$ به f در نرم $H^۲$ همگرایند)، و چون Y بسته بوده و $|\varphi| \leq ۱$، پس $\varphi H^۲ \subset Y$. باید ثابت کنیم که این شمول حقیقی **نیست**. چون $\varphi H^۲$ بسته است، کافی است نشان دهیم که مفروضات $h \in Y$ و $h \perp \varphi H^۲$ ایجاب می‌کنند که $h = ۰$.

هرگاه $h \perp \varphi H^۲$، آنگاه به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$، $h \perp \varphi z^n$ یا

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\, \overline{\varphi^*(e^{i\theta})}\, e^{-in\theta}\, d\theta = ۰ \; (n = ۰, ۱, ۲, \cdots) \cdot \qquad (۵)$$

هرگاه $h \in Y$، آنگاه به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $z^n h \in zY$، و انتخاب φی ما نشان می‌دهد که $z^n h \perp \varphi$ یا

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\, \overline{\varphi^*(e^{i\theta})}\, e^{-in\theta}\, d\theta = ۰ \; (n = -۱, -۲, -۳, \cdots) \cdot \qquad (۶)$$

لذا تمام ضرایب فوریهٔ $h^* \overline{\varphi^*}$ برابر ۰ اند؛ درنتیجه $h^* \overline{\varphi^*} = ۰$ ت. هـ. بر T؛ و چون $|\varphi^*| = ۱$ ت. هـ.، داریم $h^* = ۰$ ت. هـ. بنابراین $h = ۰$ و برهان تمام می‌باشد.

۲۲.۷ تبصره. اگر قضایای ۱۵.۱۷ و ۲۱.۱۷ را باهم تلفیق کنیم، می‌بینیم که زیرفضاهای $S-$ پایای $H^۲$ با داده‌های زیر توصیف می‌شوند: دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$ از اعداد مختلط (احتمالاً متناهی یا حتی تهی) که در آن $|\alpha_n| < ۱$ و $\Sigma(۱-|\alpha_n|) < \infty$ و یک اندازهٔ بورل مثبت مانند μ بر T که نسبت به‌اندازهٔ لبگ منفرد است (درنتیجه $D\mu = ۰$ ت. هـ.). به‌آسانی (این کار را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم) می‌توان شرایطی برحسب $\{\alpha_n\}$ و μ یافت که شامل دیگری بودن یک زیرفضای $S-$ پایای $H^۲$ را تضمین نمایند. لذا مجموعهٔ جزئی مرتب تمام زیرفضاهای $S-$ پایا ساختار بسیار پیچیده‌ای دارد خیلی پیچیده‌تر از آنکه از تعریف سادهٔ عملگر انتقال بر $\ell^۲$ انتظار رفته است.

این بخش را با نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ ۲۱.۱۷ که تابع تجزیهٔ توصیف شده در قضیهٔ ۱۷.۱۷ است پایان می‌بخشیم.

۲۳.۱۷ قضیه. *فرض کنیم M_f عامل داخلی تابع $f \in H^۲$ بوده و Y کوچکترین زیرفضای $S-$ پایای بستهٔ $H^۲$ باشد که شامل f است. در این صورت*

$$Y = M_f H^۲ \cdot \tag{۱}$$

بخصوص $Y = H^۲$ اگر و فقط اگر f یک تابع خارجی باشد.

برهان. فرض کنیم $f = M_f Q_f$ تجزیهٔ f به‌عوامل داخلی و خارجی‌اش باشد. واضح است که $f \in M_f H^۲$؛ و چون $M_f H^۲$ بسته و $S-$ پایاست، داریم $Y \subset M_f H^۲$.

از آن سو، قضیهٔ ۲۱.۱۷ نشان می‌دهد که یک تابع داخلی مانند φ هست به‌طوری که $Y = \varphi H^۲$. چون $f \in Y$، یک تابع مانند $h = M_h Q_h \in H^۲$ هست به‌طوری که

$$M_f Q_f = \varphi M_h Q_h \cdot \tag{۲}$$

و چون توابع داخلی دارای قدرمطلق ۱ ت. هـ. بر T اند، رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که $Q_f = Q_h$؛ درنتیجه $M_f = \varphi M_h \in Y$؛ و لذا Y باید شامل کوچکترین زیرفضای بستهٔ $S-$ پایایی باشد که شامل M_f است. لذا $M_f H^۲ \subset Y$ و برهان تمام می‌باشد.

ممکن است تلخیص این نتایج به‌صورت دو سؤال که این نتایج جواب آنها باشند جالب باشد:

اگر $f \in H^۲$، چه توابعی مانند $g \in H^۲$ را می‌توان در نرم $H^۲$ به‌وسیلهٔ توابع به‌شکل fP که در آن P چندجمله‌ای است تقریب کرد؟ **جواب.** درست g هایی که $g/M_f \in H^۲$.

به‌ازای چه $f \in H^۲$ ای مجموعهٔ $\{fP\}$ در $H^۲$ چگال است؟ **جواب.** درست f هایی که

$$\log|f(۰)| = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{it})|\, dt \cdot$$

توابع مزدوج

۲۴.۱۷ تنظیم مسئله. هر تابع توافقی حقیقی u در قرص یکهٔ U قسمت حقیقی یک و فقط یک $f \in H(U)$ است به‌طوری که $f(\circ) = u(\circ)$. اگر $f = u + iv$، شرط اخیر را می‌توان به‌شکل $v(\circ) = \circ$ نیز بیان کرد. تابع v **مزدوج توافقی** یا **تابع مزدوج** u نام دارد.

حال فرض کنیم u در نامساوی

$$\sup_{r<۱} \|u_r\|_p < \infty \tag{۱}$$

به‌ازای p ای صدق نماید. آیا رابطهٔ (۱) به‌ازای v به‌جای u برقرار است؟ به‌بیان معادل، آیا $f \in H^p$؟

جواب (که توسط ام. ریس داده شده) به‌ازای $۱ < p < \infty$ مثبت است. (به‌ازای $p = ۱$ و $p = \infty$ منفی می‌باشد؛ ر.ک. تمرین ۲۴.) صورت دقیق را قضیهٔ ۲۶.۱۷ به‌ما می‌دهد.

به‌یاد آورید که هر u ی توافقی صادق در (۱) انتگرال پواسون تابعی مانند $u^* \in L^p(T)$ است (قضیهٔ ۳۰.۱۱) اگر $۱ < p < \infty$. لذا قضیهٔ ۱۱.۱۱ بیان دیگری از مسئله را پیشنهاد می‌کند: ***اگر $۱ < p < \infty$ و به‌هر $h \in L^p(T)$ تابع هلوریخت***

$$(\psi h)(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, h(e^{it})\, dt \quad (z \in U) \tag{۲}$$

را مربوط کنیم، آیا همهٔ توابع ψh در H^p قرار دارند؟

تمرین ۲۵ به‌چند جنبهٔ دیگر این مسئله خواهد پرداخت.

۲۵.۱۷ لم. ***هرگاه $۱ < p \le ۲$، $\delta = \pi/(۱+p)$، $\alpha = (\cos\delta)^{-۱}$، و $\beta = \alpha^p(۱+\alpha)$، آنگاه***

$$۱ \le \beta(\cos\varphi)^p - \alpha\cos p\varphi \quad \left(-\frac{\pi}{۲} \le \varphi \le \frac{\pi}{۲}\right). \tag{۱}$$

برهان. هرگاه $\delta \le |\varphi| \le \frac{\pi}{۲}$، آنگاه طرف راست (۱) از

$$-\alpha\cos p\varphi \ge -\alpha\cos p\delta = \alpha\cos\delta = ۱$$

کمتر نیست، و اگر $|\varphi| \le \delta$، از $\beta(\cos\delta)^p - \alpha = ۱$ متجاوز می‌باشد.

۲۶.۱۷ قضیه. ***هرگاه $۱ < p < \infty$، آنگاه ثابتی مانند $A_p < \infty$ هست به‌طوری‌که به‌ازای هر $h \in L^p(T)$،***

$$\|\psi h\|_p \le A_p \|h\|_p . \tag{۱}$$

به‌طور صریحتر، نتیجه آن است که ψh (تعریف شده در بخش ۲۴.۱۷) در H^p است، و

$$\int_T |(\psi h)_r|^p\, d\sigma \le A_p^p \int_T |h|^p\, d\sigma \quad (\circ \le r < ۱) \tag{۲}$$

که در آن $d\sigma = d\theta/2\pi$ اندازهٔ لبگ نرمالی شده بر T است.

توجه کنید که در این قضیه لازم نیست h یک تابع حقیقی باشد، که حکم می‌کند که $\psi: L^p \to H^p$ یک عملگر خطی کراندار است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $1 < p \leq 2$، $h \in L^p(T)$، $h \geq 0$، $h \not\equiv 0$، و u قسمت حقیقی $f = \psi h$ باشد. فرمول ۵.۱۱ (۲) نشان می‌دهد که $u = P[h]$؛ درنتیجه در U داریم $u > 0$. چون U همبند ساده بوده و f در U دارای صفر نیست، تابعی مانند $g \in H(U)$ هست به‌طوری که $g = f^p$ و $g(0) > 0$. همچنین $u = |f| \cos\varphi$ که در آن φ یک تابع حقیقی با قلمرو U است که در $|\varphi| < \pi/2$ صدق می‌کند.

اگر $\alpha = \alpha_p$ و $\beta = \beta_p$ همانند لم ۲۵.۱۷ اختیار شوند، به‌ازای $0 \leq r < 1$ داریم

$$\int_T |f_r|^p \, d\sigma \leq \beta \int_T (u_r)^p \, d\sigma - \alpha \int_T |f_r|^p \cos(p\varphi_r) \, d\sigma \cdot \qquad (3)$$

توجه کنید که $|f|^p \cos p\varphi = \operatorname{Re} g$. لذا خاصیت مقدار میانگین تابعهای توافقی نشان می‌دهد که آخرین انتگرال در (۳) مساوی $\operatorname{Re} g(0) > 0$ است. لذا

$$\int_T |f_r|^p \, d\sigma \leq \beta \int_T h^p \, d\sigma \quad (0 \leq r < 1) \qquad (4)$$

زیرا $u = P[h]$ ایجاب می‌کند که $\| u_r \|_p \leq \| h \|_p$. لذا اگر $h \in L^p(T)$ و $h \geq 0$،

$$\| \psi h \|_p \leq \beta^{1/p} \, \| h \|_p \cdot \qquad (5)$$

اگر h یک تابع (مختلط) دلخواه در $L^p(T)$ باشد، نتیجهٔ فوق در مورد قسمتهای مثبت و منفی قسمتهای حقیقی و موهومی h قابل اعمال است.

این امر رابطهٔ (۲) را به‌ازای $1 < p \leq 2$ و با $A_p = 4\beta^{1/p}$ ثابت می‌کند. برای اتمام برهان، حالت $2 < p < \infty$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $w \in L^q(T)$ که در آن q مزدوج نمایی p است. قرار می‌دهیم $\widetilde{w}(e^{i\theta}) = w(e^{-i\theta})$. با محاسبه‌ای ساده و استفاده از قضیهٔ فوبینی معلوم می‌شود که به‌ازای هر $h \in L^p(T)$،

$$\int_T (\psi h)_r \widetilde{w} \, d\sigma = \int_T (\psi w)_r \widetilde{h} \, d\sigma \quad (0 \leq r < 1) \cdot \qquad (6)$$

چون $q < 2$، رابطهٔ (۲) به‌ازای w و q به‌جای h و p برقرار است؛ درنتیجه رابطهٔ (۶) به‌نامساوی زیر منجر می‌شود:

$$\left| \int_T (\psi h)_r \widetilde{w} \, d\sigma \right| \leq A_q \| w \|_q \| h \|_p \cdot \qquad (7)$$

حال فرض کنیم w در گوی یکهٔ $L^q(T)$ تغییر کند و در سمت چپ (۷) سوپرمم می‌گیریم.

نتیجه عبارت است از

$$\left\{\int_T |(\psi h)_r|^p \, d\sigma\right\}^{1/p} \le A_q \left\{\int_T |h|^p \, d\sigma\right\}^{1/p} \quad (0 \le r < 1) \cdot \tag{8}$$

لذا مجدداً (۲) به‌ازای $A_p \le A_q$ برقرار است.

(اگر کوچکترین مقدار مجاز را برای A_p و A_q اختیار کنیم، محاسات اخیر را می‌توان عکس کرد و نشان داد که $A_p = A_q$.)

تمرینات

۱. قضایای ۴.۱۷ و ۵.۱۷ را برای توابع زیرتوافقی نیمه‌پیوسته ثابت کنید.

۲. فرض کنید $f \in H(\Omega)$ و ثابت کنید $\log(1+|f|)$ در Ω زیرتوافقی است.

۳. فرض کنید $0 < p \le \infty$ و $f \in H(U)$ و ثابت کنید $f \in H^p$ اگر و فقط اگر یک تابع توافقی مانند u در U باشد به‌طوری که به‌ازای هر $z \in U$، $|f(z)|^p \le u(z)$. ثابت کنید هرگاه یک چنین **غالب توافقی** u از $|f|^p$ موجود باشد، آنگاه دست کم یک u مثلاً u_f موجود است. (به‌طور صریح، $|f|^p \le u_f$ و u_f توافقی است؛ و اگر $|f|^p \le u$ و u توافقی باشد، آنگاه $u_f \le u$.) ثابت کنید $\|f\|_p = u_f(0)^{1/p}$. **راهنمایی.** تابعهای توافقی در $D(0\,;R)$ را که $R < 1$ با مقادیر مرزی $|f|^p$ در نظر گرفته و فرض کنید $R \to 1$.

۴. به‌همین ترتیب ثابت کنید $f \in N$ اگر و فقط اگر $\log^+|f|$ یک غالب توافقی در U داشته باشد.

۵. فرض کنید $f \in H^p$، $\varphi \in H(U)$، و $\varphi(U) \subset U$. آیا $f \circ \varphi \in H^p$؟ همین سؤال را با N به‌جای H^p پاسخ دهید.

۶. اگر $0 < r < s \le \infty$، نشان دهید که H^s یک زیرردهٔ **حقیقی** H^r است.

۷. نشان دهید H^∞ یک زیرردهٔ **حقیقی** اشتراک تمام H^pها با $p < \infty$ است.

۸. اگر $f \in H^1$ و $f^* \in L^p(T)$، ثابت کنید $f \in H^p$.

۹. فرض کنید $f \in H(U)$ و $f(U)$ در صفحه چگال نباشد. ثابت کنید f دارای حدود شعاعی متناهی در تقریباً هر نقطهٔ T است.

۱۰. $\alpha \in U$ را ثابت گرفته و نشان دهید که نگاشت $f \to f(\alpha)$ یک تابعی خطی کراندار بر H^2 است. چون H^2 یک فضای هیلبرت است، این تابعی را می‌توان با یک ضرب داخلی در یک $g \in H$ نشان داد. این g را پیدا نمایید.

۱۱. $\alpha \in U$ را ثابت بگیرید. اگر $\|f\|_2 \le 1$، $|f'(\alpha)|$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟ تابعهای اکسترمال را بیابید. همین کار را برای $f^{(n)}(\alpha)$ انجام دهید.

۱۲. فرض کنید $p \ge 1$، $f \in H^p$، و f^*ت. هـ. بر T حقیقی باشد. نشان دهید که f ثابت است.

ثابت کنید این نتیجه به‌ازای هر $p < 1$ نادرست است.

۱۳. فرض کنید $f \in H(U)$ و عددی مانند $M < \infty$ موجود باشد به‌طوری که f هر دایره به‌شعاع $r < 1$ و مرکز ۰ را به‌روی یک منحنی مانند γ_r که طولش حداکثر M است بنگارد. ثابت کنید f یک توسیع پیوسته به $\overline{U}$ دارد و تحدید f به T به‌طور مطلق پیوسته می‌باشد.

۱۴. فرض کنید μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر T باشد به‌طوری که

$$\int_T e^{int}\, d\mu(t) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot$$

ثابت کنید یا $\mu = 0$ یا محافظ μ تمام T است.

۱۵. فرض کنید K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ **حقیقی** دایرهٔ یکهٔ T باشد. ثابت کنید هر تابع پیوسته بر K را می‌توان به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها به‌طور یکنواخت بر K تقریب کرد. **راهنمایی.** از تمرین ۱۴ استفاده کنید.

۱۶. برهان قضیهٔ ۱۷.۱۷ را برای حالت $0 < p < 1$ کامل نمایید.

۱۷. فرض کنید φ یک تابع داخلی غیرثابت بدون صفر در U باشد.

(آ) ثابت کنید اگر $p > 0$، $1/\varphi \notin H^p$.

(ب) ثابت کنید دست‌کم یک $e^{i\theta} \in T$ هست که $\lim_{r \to 1} \varphi(re^{i\theta}) = 0$. **راهنمایی.** $\log|\varphi|$ یک تابع توافقی منفی است.

۱۸. فرض کنید φ یک تابع داخلی غیرثابت بوده، $|\alpha| < 1$، و $\alpha \notin \varphi(U)$. ثابت کنید به‌ازای دست‌کم یک $e^{i\theta} \in T$، $\lim_{r \to 1} \varphi(re^{i\theta}) = \alpha$.

۱۹. فرض کنید $f \in H^1$ و $1/f \in H^1$. ثابت کنید f یک تابع خارجی می‌باشد.

۲۰. فرض کنید $f \in H^1$ و به‌ازای هر $z \in U$، $\mathrm{Re}\,[f(z)] > 0$. ثابت کنید f یک تابع خارجی می‌باشد.

۲۱. ثابت کنید $f \in N$ اگر و فقط اگر $f = g/h$ که در آن g و h در H^∞ بوده و h صفری در U نداشته باشد.

۲۲. عکس زیر از قضیهٔ ۲۴.۱۵ را ثابت کنید: هرگاه $f \in H(U)$ و

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\, d\theta = 0, \qquad (*)$$

آنگاه f یک حاصل‌ضرب بلاشکه است. **راهنمایی.** رابطهٔ $(*)$ ایجاب می‌کند که

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\, d\theta = 0 \cdot$$

چون $\log^+|f| \geq 0$، از قضایای ۳.۱۷ و ۵.۱۷ نتیجه می‌شود که $\log^+|f| = 0$. لذا $|f| \leq 1$. اما $f = Bg$، g بدون صفر است، $|g| \leq 1$، و $(*)$ به‌ازای $1/g$ به‌جای f برقرار است. بنابر اولین استدلال، $|1/g| \leq 1$. لذا $|g| = 1$.

۲۳. شرایط مذکور در بخش ۲۲.۱۷ را بیابید.

۲۴. نگاشت همدیس از U به‌روی یک نوار قائم نشان می‌دهد که قضیهٔ ام. ریس راجع به‌توابع مزدوج را نمی‌توان به $p = \infty$ تعمیم داد. نتیجه بگیرید که این قضیه قابل تعمیم به $p = ۱$ نیز نیست.

۲۵. فرض کنید $۱ < p < \infty$ و به‌هر $f \in L^p(T)$ ضرایب فوریه‌اش

$$\hat{f}(n) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, e^{-int}\, dt \; (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots)$$

را مربوط سازید و احکام زیر را از قضیهٔ ۲۶.۱۷ نتیجه بگیرید:

(آ) به‌هر $f \in L^p(T)$ یک تابع مانند $g \in L^p(T)$ چنان نظیر است که به‌ازای $n \geq ۰$، $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ ولی به‌ازای هر $n < ۰$، $\hat{g}(n) = ۰$. درواقع ثابتی مانند C وجود دارد که فقط تابع p بوده و

$$\| g \|_p \leq C \, \| f \|_p \cdot$$

لذا نگاشت $f \to g$ یک تصویر خطی کراندار از $L^p(T)$ به‌توی $L^p(T)$ است. سری فوریهٔ g از سری فوریهٔ f با حذف جملات دارای $n < ۰$ به‌دست می‌آید.

(ب) نشان دهید که همین مطلب با حذف جملات دارای $n < k$ که k عدد صحیح داده شده‌ای است برقرار است.

(پ) از قسمت (ب) نتیجه بگیرید که مجموعهای جزئی s_n سری فوریهٔ هر $f \in L^p(T)$ یک دنبالهٔ کراندار در $L^p(T)$ تشکیل می‌دهند. همچنین نتیجه بگیرید که درواقع داریم

$$\lim_{n \to \infty} \| f - s_n \|_p = ۰ \cdot$$

(ت) هرگاه $f \in L^p(T)$ و

$$F(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \hat{f}(n)\, z^n ,$$

آنگاه $F \in H^p$ و هر $F \in H^p$ به‌این ترتیب به‌دست می‌آید. لذا تصویر مذکور در قسمت (آ) را می‌توان به‌عنوان یک نگاشت از $L^p(T)$ به‌روی H^p در نظر گرفت.

۲۶. نشان دهید که اگر $p = ۲$، برهان بسیار ساده‌تری از قضیهٔ ۲۶.۱۷ وجود دارد، و بهترین مقدار $A_۲$ را پیدا نمایید.

۲۷. فرض کنید در U، $f(z) = \Sigma_۰^\infty a_n z^n$ و $\Sigma \, |a_n| < \infty$. ثابت کنید به‌ازای هر θ،

$$\int_۰^۱ |f'(re^{i\theta})| \, dr < \infty \cdot$$

۲۸. ثابت کنید اگر $\{n_k\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد که با سرعت کافی به ∞ میل می‌کند، احکام زیر برقرارند: هرگاه

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{k},$$

آنگاه به‌ازای هر z که

$$1-\frac{1}{n_k}<|z|<1-\frac{1}{2n_k}$$

داریم $|f'(z)|>n_k/(10k)$. لذا گرچه

$$\lim_{R\to 1}\int_0^R f'(re^{i\theta})\,dr$$

به‌ازای تقریباً هر θ موجود (و متناهی) است، به‌ازای هر θ،

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\,dr=\infty\,\cdot$$

این مطلب را بر حسب طول نقشهای شعاعهای در U تحت f تعبیر هندسی نمایید.

۲۹. با استفاده از قضیهٔ ۱۱.۱۷، توصیف زیر از مقادیر مرزی توابع H^p به‌ازای $1\le p\le\infty$ را به‌دست آورید:

تابع $g\in L^p(T)$ به‌ازای $f\in H^p$ ی مساوی f^* (ت. هـ.) است اگر و فقط اگر به‌ازای جمیع اعداد صحیح منفی n،

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})\,e^{-int}\,dt=0\,\cdot$$

فصل هجده
نظریهٔ مقدماتی جبرهای باناخ

آشنایی

۱.۱۸ **چند تعریف.** هر ***جبر مختلط*** یک فضای برداری مانند Aروی میدان مختلط است که در آن یک ضرب شرکتپذیر و پخشپذیر تعریف شده است؛ یعنی به‌ازای هر xو yو zدر A،

$$x(yz)=(xy)z \text{ ، } (x+y)z=xz+yz \text{ ، و } x(y+z)=xy+xz \text{،} \tag{۱}$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده است که به‌ازای $x,y\in A$و αی اسکالر،

$$\alpha(xy)=x(\alpha y)=(\alpha x)y \cdot \tag{۲}$$

هرگاه یک نرم در Aموجود باشد که Aرا به‌یک فضای خطی نرمدار بدل کرده و در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \le \|x\| \, \|y\| \quad (x,y\in A) \tag{۳}$$

صدق کند، آنگاه Aیک ***جبر مختلط نرمدار*** می‌باشد. هرگاه، علاوه بر این، Aیک فضای متری تام نسبت به‌این نرم باشد، یعنی Aیک فضای باناخ باشد، آنگاه Aرا یک ***جبر باناخ*** می‌نامیم.

نامساوی (۳) ضرب را یک عمل پیوسته می‌سازد. این یعنی هرگاه $x_n\to x$و $y_n\to y$، آنگاه $x_ny_n\to xy$که از رابطهٔ (۳) و اتحاد

$$x_ny_n-xy=(x_n-x)y_n+x(y_n-y) \tag{۴}$$

نتیجه می‌شود.

توجه کنید که تعویضپذیری A (یعنی به‌ازای هر x و y در A، $xy=yx$) شرط نشده است، و ما نیز شرط نمی‌کنیم مگر وقتی صریحاً آن را بپذیریم.

با این حال فرض می‌کنیم A دارای **یکه** باشد. این یعنی عنصری مانند e باشد به‌طوری که

$$xe=ex=x\ (x\in A)\cdot \tag{۵}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که، بنابر (۳)، حداکثر یک چنین e وجود دارد ($e'=e'e=e$) و $\|e\|\geq 1$. ما فرض اضافی

$$\|e\|=1 \tag{۶}$$

را نیز می‌پذیریم.

عنصر $x\in A$ را **معکوسپذیر** نامیم اگر x در A دارای **معکوس** باشد؛ یعنی عنصری مانند $x^{-1}\in A$ موجود باشد به‌طوری که

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e\cdot \tag{۷}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که هیچ $x\in A$ ی بیش از یک معکوس ندارد.

اگر x و y در A معکوسپذیر باشند، x^{-1} و xy نیز چنین‌اند زیرا $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$. لذا عناصر معکوسپذیر یک گروه نسبت به‌ضرب تشکیل می‌دهند.

طیف عنصر $x\in A$ مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ است که $x-\lambda e$ معکوسپذیر **نیست**. ما طیف x را با $\sigma(x)$ نشان می‌دهیم.

۲.۱۸. نظریهٔ جبرهای باناخ شامل اعمال متقابلی بین خواص جبری از یک سو و خواص توپولوژیک از سوی دیگر است. ما قبلاً در قضیهٔ ۲۱.۹ یک مثال از این نوع را دیدیم، و به‌مثالهای دیگر نیز برخواهیم خورد. همچنین بین جبرهای باناخ و توابع هلوریخت روابط نزدیکی وجود دارند: ساده‌ترین برهان این امر اساسی که $\sigma(x)$ هرگز تهی نیست به‌قضیهٔ لیوویل راجع به‌توابع تمام وابسته است، و فرمول شعاع طیفی به‌طور طبیعی از قضایای مربوط به‌سریهای توانی نتیجه می‌شود. این یک دلیل برای توجه به‌جبرهای باناخ ***مختلط*** است. نظریهٔ جبرهای باناخ حقیقی (ما تعریف آن را که واضح است حذف می‌کنیم) خیلی رضایت‌بخش نیست.

عنصرهای معکوسپذیر

در این بخش A یک جبر باناخ مختلط با یکهٔ e است و G مجموعهٔ تمام عناصر معکوسپذیر A می‌باشد.

۳.۱۸ قضیه. ***هرگاه*** $x\in A$ ***و*** $\|x\|<1$***، آنگاه*** $e+x\in G$***،***

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , \qquad (1)$$

و

$$\| (e+x)^{-1} - e + x \| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|} \cdot \qquad (2)$$

برهان. نامساوی ضربی ۱.۱۸ (۳) نشان می‌دهد که $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. اگر

$$s_N = e - x + x^2 - \cdots + (-1)^N x^N , \qquad (3)$$

نتیجه می‌شود که $\{s_N\}$ یک دنبالهٔ کشی در A است؛ درنتیجه سری (۱) (نسبت به‌نرم A) به‌عنصری مانند $y \in A$ همگراست. چون ضرب پیوسته است و

$$(e+x) s_N = e + (-1)^N x^{N+1} = s_N (e+x) , \qquad (4)$$

می‌بینیم که $(e+x)y = e = y(e+x)$. این رابطهٔ (۱) را به‌دست می‌دهد، و نامساوی (۲) از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|} \cdot \qquad (5)$$

۴.۱۸ قضیه. *فرض کنیم* $x \in G$، $\|x^{-1}\| = 1/\alpha$ ، $h \in A$، و $\|h\| = \beta < \alpha$. در این صورت $x+h \in G$ و

$$\| (x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1} h x^{-1} \| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2 (\alpha - \beta)} \cdot \qquad (1)$$

برهان. $\|x^{-1} h\| \leq \beta/\alpha < 1$ ؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ۳.۱۸، $e + x^{-1} h \in G$ ؛ و چون $x+h = x(e + x^{-1} h)$، داریم $x+h \in G$ و

$$(x+h)^{-1} = (e + x^{-1} h)^{-1} x^{-1} \cdot \qquad (2)$$

لذا

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1} h x^{-1} = [(e + x^{-1} h)^{-1} - e + x^{-1} h] x^{-1} , \qquad (3)$$

و نامساوی (۱) از قضیهٔ ۳.۱۸ به‌ازای $x^{-1} h$ به‌جای x نتیجه می‌شود.

نتیجهٔ ۱. *G یک مجموعهٔ باز است و نگاشت $x \to x^{-1}$ یک همانریختی از G به‌روی G می‌باشد.*

چراکه اگر $x \in G$ و $\|h\| \to 0$ ، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \to 0$. لذا $x \to x^{-1}$ پیوسته است. واضح است که این تابع G را به‌روی G می‌نگارد، و چون معکوس خودش است، یک همانریختی می‌باشد.

نتیجهٔ ۲. نگاشت $x \to x^{-1}$ مشتقپذیر است. دیفرانسیل آن در هر $x \in G$ عملگر خطیی است که $h \in A$ را به $-x^{-1}hx^{-1}$ می‌برد.

این نتیجه را می‌توان از رابطهٔ (۱) نیز خواند. توجه کنید که مفهوم دیفرانسیل یک تبدیل با تعریف ۲۲.۷ نه فقط در R^k بلکه در هر فضای خطی نرمدار معنی دارد. اگر A تعویضپذیر باشد، دیفرانسیل فوق h را به $-x^{-2}h$ می‌برد که با این امر که مشتق تابع هلوریخت z^{-1} مساوی $-z^{-2}$ است سازگار می‌باشد.

نتیجهٔ ۳. $\sigma(x)$ به‌ازای هر $x \in A$ فشرده است، و اگر $\lambda \in \sigma(x)$، $|\lambda| \le \|x\|$.

زیرا هرگاه $|\lambda| > \|x\|$، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۳.۱۸، $e - \lambda^{-1}x \in G$، و همین امر برای $x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x)$ درست است. لذا $\lambda \notin \sigma(x)$. برای اثبات بسته بودن $\sigma(x)$ ملاحظه می‌کنیم که (آ) $\lambda \in \sigma(x)$ اگر و فقط اگر $x - \lambda e \notin G$؛ (ب) بنابر نتیجهٔ ۱، متمم G زیرمجموعهٔ بسته‌ای از A است؛ و (پ) نگاشت $\lambda \to x - \lambda e$ نگاشت پیوسته‌ای از صفحهٔ مختلط به‌توی A می‌باشد.

۵.۱۸ قضیه. فرض کنیم Φ یک تابعی خطی کراندار بر A باشد. $x \in A$ را ثابت گرفته و تعریف می‌کنیم

$$f(\lambda) = \Phi[(x - \lambda e)^{-1}] \quad \left(\lambda \notin \sigma(x)\right) \cdot \qquad (۱)$$

در این صورت f در متمم $\sigma(x)$ هلوریخت است و وقتی $\lambda \to \infty$، $f(\lambda) \to 0$.

برهان. $\lambda \notin \sigma(x)$ را ثابت گرفته و قضیهٔ ۴.۱۸ را به‌ازای $x - \lambda e$ به‌جای x و با $(\lambda - \mu)e$ به‌جای h به‌کار می‌بریم. خواهیم دید که ثابتی مانند C تابع x و λ هست به‌طوری که به‌ازای هر μ به‌قدر کافی نزدیک λ،

$$\|(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}\| \le C|\mu - \lambda|^2 \cdot \qquad (۲)$$

لذا، وقتی $\mu \to \lambda$،

$$\frac{(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{\mu - \lambda} \to (x - \lambda e)^{-2}, \qquad (۳)$$

و اگر Φ را بر طرفین (۳) اعمال کنیم، پیوستگی و خطی بودن Φ نشان می‌دهند که

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \to \Phi[(x - \lambda e)^{-2}] \cdot \qquad (۴)$$

لذا f خارج $\sigma(x)$ مشتقپذیر و درنتیجه هلوریخت است. بالأخره، وقتی $\lambda \to \infty$، بنابر

پیوستگی نگاشت معکوس در G داریم

$$\lambda f(\lambda)=\Phi[\lambda(x-\lambda e)^{-1}]=\Phi\left[\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)^{-1}\right]\to\Phi(-e)\cdot \qquad (5)$$

۶.۱۸ قضیه. $\sigma(x)$ ***به‌ازای هر $x\in A$ فشرده و ناتهی است.***

برهان. از قبل می‌دانیم که $\sigma(x)$ فشرده‌است. $x\in A$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $\lambda_\circ\notin\sigma(x)$. در این صورت $(x-\lambda_\circ e)^{-1}\neq \circ$، و قضیهٔ هان ـ باناخ وجود یک تابعی خطی کراندار مانند Φ را بر A ایجاب می‌کند که $f(\lambda_\circ)\neq\circ$ و f همانند قضیهٔ ۵.۱۸ تعریف شده است. اگر $\sigma(x)$ تهی باشد، قضیهٔ ۵.۱۸ ایجاب می‌کند که f یک تابع تمام است که در ∞ به $\circ$ میل می‌کند؛ درنتیجه به‌ازای هر λ، $f(\lambda)=\circ$ (قضیهٔ لیوویل)، و این $f(\lambda_\circ)\neq\circ$ را نقض می‌کند. لذا $\sigma(x)$ تهی نمی‌باشد.

۷.۱۸ قضیه [گلفاند ـ مازور $(Gelfand - Mazur)$]. ***هرگاه A یک جبر باناخ مختلط دارای یکه باشد که در آن هر عنصر ناصفر معکوس‌پذیر است، آنگاه A با میدان مختلط یکی است (به‌طور یکمتری یکریخت است).***

هر جبر که در آن هر عنصر ناصفر معکوس‌پذیر باشد یک **جبر بخشی** نام دارد. توجه کنید که تعویض‌پذیری A بخشی از مفروضات نیست بلکه بخشی از نتیجه می‌باشد.

برهان. اگر $x\in A$ و $\lambda_1\neq\lambda_2$، دست کم یکی از عناصر $x-\lambda_1 e$ و $x-\lambda_2 e$ باید معکوس‌پذیر باشد زیرا هر دو نمی‌توانند $\circ$ باشند. حال از قضیهٔ ۶.۱۸ معلوم می‌شود که $\sigma(x)$ فقط از یک نقطه مثلاً $\lambda(x)$ به‌ازای هر $x\in A$ تشکیل شده است. چون $x-\lambda(x)e$ معکوس‌پذیر نیست، پس باید $\circ$ باشد؛ درنتیجه $x=\lambda(x)e$. لذا نگاشت $x\to\lambda(x)$ یک یکریختی از A به‌روی میدان مختلط است که یکمتری نیز هست زیرا به‌ازای هر $x\in A$، $|\lambda(x)|=\|\lambda(x)e\|=\|x\|$.

۸.۱۸ تعریف. به‌ازای هر $x\in A$، **شعاع طیفی** $\rho(x)$ از x شعاع کوچکترین قرص بسته‌ای به‌مرکز مبدأ است که شامل $\sigma(x)$ می‌باشد (گاهی این را **نرم طیفی** x نیز می‌نامند؛ ر. ک. تمرین ۱۴):

$$\rho(x)=\sup\{\,|\lambda|:\lambda\in\sigma(x)\}\cdot$$

۹.۱۸ قضیه (فرمول شعاع طیفی) ***به‌ازای هر*** $x\in A$،

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=\rho(x)\cdot \qquad (1)$$

(وجود حد بخشی از نتیجه می‌باشد.)

برهان. $x\in A$ را ثابت و n را یک عدد صحیح مثبت گرفته و فرض می‌کنیم λ یک عدد مختلط

باشد و $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$. داریم

$$(x^n-\lambda^n e) = (x-\lambda e)(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1} e) \cdot \tag{۲}$$

طرفین (۲) را در $(x^n-\lambda^n e)^{-1}$ ضرب می‌کنیم. از این کار معلوم می‌شود که $x-\lambda e$ معکوس‌پذیر است؛ در نتیجه $\lambda \notin \sigma(x)$.

لذا هرگاه $\lambda \in \sigma(x)$، آنگاه به‌ازای $n=1, 2, 3, \cdots$، $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. نتیجهٔ ۳ از قضیهٔ ۴.۱۸ نشان می‌دهد که $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$، و لذا $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$. از این داریم

$$\rho(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \tag{۳}$$

حال اگر $|\lambda| > \|x\|$، به‌آسانی تحقیق می‌شود که

$$(\lambda e-x) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = e \cdot \tag{۴}$$

لذا سری فوق مساوی است با $-(x-\lambda e)^{-1}$. فرض کنیم Φ یک تابعی خطی کراندار بر A باشد و f را همانند قضیهٔ ۵.۱۸ تعریف می‌کنیم. بنابر (۴)، بسط

$$f(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x^n)\lambda^{-n-1} \tag{۵}$$

به‌ازای هر λ که $|\lambda| > \|x\|$ معتبر است. بنابر قضیهٔ ۵.۱۸، f خارج $\sigma(x)$، و لذا در مجموعهٔ $\{\lambda : |\lambda| > \rho(x)\}$، هلوریخت است. پس سری توانی (۵) به‌ازای $|\lambda| > \rho(x)$ همگرا می‌باشد. بخصوص، به‌ازای هر تابعی خطی کراندار Φ بر A،

$$\sup_n |\Phi(\lambda^{-n}x^n)| < \infty \quad (|\lambda| > \rho(x)) \cdot \tag{۶}$$

از قضیهٔ هان ـ باناخ (بخش ۲۱.۵) نتیجه می‌شود که نرم هر عنصر A نرم آن به‌عنوان یک تابعی خطی بر فضای دوگان A است. چون رابطهٔ (۶) به‌ازای هر Φ برقرار است، می‌توان قضیهٔ باناخ ـ اشتاین هاوس را به‌کار برد و نتیجه گرفت که به‌هر λ با خاصیت $|\lambda| > \rho(x)$ یک عدد حقیقی مانند $C(\lambda)$ چنان نظیر است که

$$\|\lambda^{-n}x^n\| \leq C(\lambda) \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۷}$$

با ضرب (۷) در $|\lambda|^n$ و گرفتن ریشه‌های nم معلوم می‌شود که اگر $|\lambda| > \rho(x)$،

$$\|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda| \, [C(\lambda)]^{1/n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots); \tag{۸}$$

و لذا

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \cdot \tag{۹}$$

حال قضیه از روابط (۳) و (۹) نتیجه می‌شود.

۱۰.۱۸ چند تبصره

(آ) اینکه عنصری از A در A معکوسپذیر است یا نیست صرفاً یک خاصیت جبری است. لذا طیف x، و به‌همین نحو شعاع طیفی $\rho(x)$، برحسب ساختار جبری A و بی‌توجه به‌خواص متری (یا توپولوژیک) تعریف می‌شود. از آن سو، حد مذکور در صورت قضیهٔ ۹.۱۸ تابع خواص متری A است. این یکی از ویژگیهای جالب قضیه می‌باشد: این امر به‌تساوی دو کمیت که به‌دو طریق کاملاً متفاوت ظاهر می‌شوند حکم می‌نماید.

(ب) جبر ما ممکن است زیرجبری از یک جبر باناخ وسیعتر B باشد. (ذیلاً یک مثال خواهد آمد)، و در این صورت ممکن است $x \in A$ ی در A معکوسپذیر نباشد ولی در B باشد. لذا طیف x تابع جبر ما می‌باشد. با استفاده از نمادهای واضح داریم $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$، و شمول ممکن است حقیقی باشد. ولی این بر ***شعاع طیفی*** x اثری ندارد زیرا قضیهٔ ۹.۱۸ نشان می‌دهد که می‌توان آن را برحسب خواص متری توانهای x بیان کرد، و اینها از هر چیز که خارج A رخ دهد مستقل می‌باشند.

۱۱.۱۸ مثال. فرض کنیم $C(T)$ جبر تمام توابع مختلط پیوسته بر دایرهٔ یکهٔ T (با جمع و ضرب نقطه به‌نقطه و نرم سوپرمم) بوده، و A مجموعهٔ تمام $f \in C(T)$ هایی باشد که می‌توان آنها را به‌یک تابع پیوستهٔ F بر بست قرص یکهٔ U چنان تعمیم داد که F در U هلوریخت باشد. به‌آسانی معلوم می‌شود که A زیرجبر $C(T)$ است. اگر $f_n \in A$ و $\{f_n\}$ بر T به‌طور یکنواخت همگرا باشد، قضیهٔ مدول ماکزیمم دنبالهٔ مربوطهٔ $\{F_n\}$ را وامی‌دارد که بربست U به‌طور یکنواخت همگرا شود. این نشان می‌دهد که A یک زیرجبر **بستهٔ** $C(T)$ است؛ و درنتیجه A خود یک جبر باناخ می‌باشد

تابع $f_\circ$ را با $f_\circ(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $F_\circ(z) = z$. طیف $f_\circ$ به‌عنوان عنصری از A عبارت است از قرص یکهٔ بسته. طیف $f_\circ$ نسبت به $C(T)$ فقط از دایرهٔ یکه تشکیل شده است. بنابر قضیهٔ ۹.۱۸، دو شعاع طیفی یکی می‌باشند.

ایده‌آلها و همریختیها

از حالا به‌بعد ما فقط با جبرهای **تعویضپذیر** سر و کار خواهیم داشت.

۱۲.۱۸ تعریف. گوییم زیرمجموعهٔ I از جبر مختلط تعویضپذیر A یک ***ایده‌آل*** است اگر (آ) I زیرفضای A (به‌مفهوم فضای برداری) بوده و (ب) هرگاه $x \in A$ و $y \in I$، آنگاه $xy \in I$. اگر $I \neq A$، I یک ایده‌آل **حقیقی** است. ***ایده‌آلهای ماکزیمال*** ایده‌آلهایی حقیقی‌اند که در هیچ ایده‌آل حقیقی بزرگتر قرار ندارند. توجه کنید که هیچ ایده‌آل حقیقی شامل یک عنصر معکوسپذیر نیست.

اگر B جبر مختلط دیگری باشد، نگاشت φ از A به‌توی B را یک **همریختی** گوییم اگر φ یک نگاشت خطی باشد که ضرب را نیز حفظ نماید: به‌ازای هر x و y در A، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. **هسته** (یا فضای پوچ) φ مجموعهٔ تمام $x \in A$ هایی است که $\varphi(x) = 0$. به‌آسانی معلوم می‌شود که هستهٔ هر همریختی یک ایده‌آل است. برای عکس مطلب، ر.ک. بخش ۱۴.۱۸.

۱۳.۱۸ قضیه. ***اگر A یک جبر مختلط تعویضپذیر دارای یکه باشد، هر ایده‌آل حقیقی A مشمول یک ایده‌آل ماکزیمال است. اگر، علاوه بر این، A یک جبر باناخ باشد، هر ایده‌آل ماکزیمال A بسته می‌باشد.***

برهان. قسمت اول تقریباً بلافاصله از اصل ماکزیمالی هاسدورف نتیجه می‌شود (و در هر حلقهٔ تعویضپذیر دارای یکه برقرار است). فرض کنیم I یک ایده‌آل حقیقی A باشد. گردایهٔ $\mathscr{P}$ تمام ایده‌آلهای حقیقی A که شامل I اند را (به‌وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها) جزئی مرتب کرده و فرض می‌کنیم M اجتماع ایده‌آلها در زیرگردایهٔ خطی مرتب ماکزیمال $\mathscr{Q}$ از $\mathscr{P}$ باشد. در این صورت M (به‌خاطر آنکه اجتماع گردایه‌ای **خطی** مرتب از ایده‌آلهاست) یک ایده‌آل است، $I \subset M$، و $M \neq A$ زیرا هیچ عضوی از $\mathscr{P}$ شامل یکهٔ A نیست. ماکزیمالی $\mathscr{Q}$ ایجاب می‌کند که M یک ایده‌آل ماکزیمال A می‌باشد.

اگر A یک جبر باناخ باشد، بست $\bar{M}$ از M نیز یک ایده‌آل است (شرح برهان این حکم را به‌خواننده وامی‌گذاریم). چون M شامل عنصر معکوسپذیری از A نیست و مجموعهٔ تمام عناصر معکوسپذیر باز است، داریم $\bar{M} \neq A$، و لذا ماکزیمالی M نشان می‌دهد که $\bar{M} = M$.

۱۴.۱۸ فضاهای خارج قسمتی و جبرهای خارج قسمتی. فرض کنیم J زیرفضای یک فضای برداری مانند A باشد، و به‌هر $x \in A$ هم مجموعهٔ

$$\varphi(x) = x + J = \{x + y : y \in J\} \tag{۱}$$

را مربوط می‌سازیم. هرگاه $x_1 - x_2 \in J$، آنگاه $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. اگر $x_1 - x_2 \notin J$، $\varphi(x_1) \cap \varphi(x_2) = \varnothing$. مجموعهٔ تمام هم مجموعه‌های J را با A/J نشان می‌دهیم. اگر به‌ازای $x, y \in A$ و اسکالرهای λ تعریف کنیم

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y) \quad \text{و} \quad \lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x)\text{،} \tag{۲}$$

مجموعهٔ فوق یک فضای برداری می‌شود. چون J یک فضای برداری است، اعمال (۲) خوش تعریف‌اند. این یعنی هرگاه $\varphi(x) = \varphi(x')$ و $\varphi(y) = \varphi(y')$، آنگاه

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x') + \varphi(y') \quad \text{و} \quad \lambda\varphi(x) = \lambda\varphi(x')\,. \tag{۳}$$

همچنین φ بوضوح یک نگاشت خطی از A به‌روی A/J است. عنصر صفر A/J عبارت است

از $\varphi(\circ)=J$.

حال فرض می‌کنیم A فقط یک فضای برداری نبوده و بلکه یک جبر تعویضپذیر باشد و J یک ایده‌آل حقیقی A باشد. اگر $x'-x\in J$ و $y'-y\in J$، اتحاد

$$x'y'-xy=(x'-x)y'+x(y'-y) \tag{۴}$$

نشان می‌دهد که $x'y'-xy\in J$. لذا ضرب در A/J را می‌توان به‌نحوی سازگار تعریف کرد:

$$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)\quad(x,y\in A)\cdot \tag{۵}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که A/J یک جبر است، و φ یک همریختی از A به‌روی A/J است که هسته‌اش J می‌باشد.

هرگاه A دارای عنصر یکهٔ e باشد، آنگاه $\varphi(e)$ یکهٔ A/J است، و ***A/J یک میدان است اگر و فقط اگر J یک ایده‌آل ماکزیمال باشد.***

برای مشاهدهٔ این امر فرض می‌کنیم $x\in A$ و $x\notin J$، و قرار می‌دهیم

$$I=\{ax+y: y\in J \text{ و } a\in A\}\cdot \tag{۶}$$

در این صورت I یک ایده‌آل در A است که حقیقتاً شامل J می‌باشد زیرا $x\in I$. اگر J ماکزیمال باشد، $I=A$؛ درنتیجه، به‌ازای $a\in A$ ای و $y\in J$ ای، $ax+y=e$. لذا $\varphi(a)\varphi(x)=\varphi(e)$، و این امر می‌گوید که هر عنصر ناصفر A/J معکوسپذیر است؛ درنتیجه A/J یک میدان است. اگر J ماکزیمال نباشد، می‌توان x را مثل فوق طوری گرفت که $I\neq A$؛ در نتیجه $e\notin I$، و در این صورت $\varphi(x)$ در A/J معکوسپذیر نیست.

۱۵.۱۸ نرمهای خارج قسمتی. فرض کنیم A یک فضای خطی نرمدار بوده، J یک زیرفضای **بستهٔ** A باشد و، مانند فوق، $\varphi(x)=x+J$. تعریف می‌کنیم

$$\|\varphi(x)\| =\inf\{\|x+y\| : y\in J\}\cdot \tag{۱}$$

توجه کنید که $\|\varphi(x)\|$ بزرگترین کران پایینی نرمهای عناصری است که درهم مجموعهٔ $\varphi(x)$ قرار دارند. این همان فاصلهٔ x تا J می‌باشد. ما نرم تعریف شده به‌وسیلهٔ (۱) در A/J را **نرم خارج قسمتی** A/J می‌نامیم. این نرم دارای خواص زیر است:

(آ) ***A/J یک فضای خطی نرمدار است؛***

(ب) ***اگر A یک فضای باناخ باشد، A/J نیز چنین است؛***

(پ) ***هرگاه A یک جبر باناخ تعویضپذیر و J یک ایده‌آل بستهٔ حقیقی باشد، آنگاه A/J یک جبر باناخ تعویضپذیر است.***

این خواص به‌آسانی تحقیق می‌شوند:

اگر $x \in J$، $\|\varphi(x)\| = 0$. و اگر $x \notin J$، بسته بودن Jایجاب می‌کند که $\|\varphi(x)\| > 0$. واضح است که $\|\lambda\varphi(x)\| = |\lambda|\,\|\varphi(x)\|$. اگر x_1و x_2در Aبوده و $\epsilon > 0$، y_1و y_2ای در J وجود دارند به‌طوری که

$$\|x_i+y_i\| < \|\varphi(x_i)\| + \epsilon \quad (i = 1, 2)\cdot \tag{۲}$$

لذا

$$\|\varphi(x_1+x_2)\| \leq \|x_1+x_2+y_1+y_2\| < \|\varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_2)\| + 2\epsilon \tag{۳}$$

که نامساوی مثلثی را به‌ما داده و خاصیت (آ) را ثابت می‌کند.

فرض کنیم Aتام بوده و $\{\varphi(x_n)\}$ یک دنبالهٔ کشی در A/Jباشد. زیردنباله‌ای وجود دارد که در آن

$$\|\varphi(x_{n_i}) - \varphi(x_{n_{i+1}})\| < 2^{-i} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{۴}$$

و عناصری مانند z_iموجودند به‌طوری که $z_i - x_{n_i} \in J$و $\|z_i - z_{i+1}\| < 2^{-i}$. لذا $\{z_i\}$ یک دنبالهٔ کشی در Aاست. و چون A تام است، عنصری مانند $z \in A$ وجود دارد به‌طوری که $\|z_i - z\| \to 0$. پس $\varphi(x_{n_i})$ در A/Jبه $\varphi(z)$ همگراست. ولی هرگاه یک دنبالهٔ کشی زیر دنبالهٔ همگرا داشته باشد، آنگاه کل دنباله همگراست. لذا A/J تام است و خاصیت (ب) ثابت می‌شود.

برای اثبات (پ)، x_1و x_2را در Aو $\epsilon > 0$را اختیار کرده و y_1و y_2را در Jطوری می‌گیریم که رابطهٔ (۲) برقرار باشد. توجه کنید که $(x_1+y_1)(x_1+y_2) \in x_1x_2+J$؛ درنتیجه

$$\|\varphi(x_1x_2)\| \leq \|(x_1+y_1)(x_2+y_2)\| \leq \|x_1+y_1\|\;\|x_2+y_2\|\cdot \tag{۵}$$

حال رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که

$$\|\varphi(x_1x_2)\| \leq \|\varphi(x_1)\|\;\|\varphi(x_2)\|\cdot \tag{۶}$$

بالأخره اگر e عنصر یکهٔ Aباشد، در (۶) $x_1 \notin J$و $x_2 = e$را اختیار می‌کنیم. از این کار نتیجه می‌شود که $\|\varphi(e)\| \geq 1$. ولی $e \in \varphi(e)$ و تعریف نرم خارج قسمتی نشان می‌دهد که $\|\varphi(e)\| \leq \|e\| = 1$. لذا $\|\varphi(e)\| = 1$ و برهان تمام است.

۱۶.۱۸. حال با این مقدمات در وضعی قرار داریم که راجع به‌جبرهای باناخ تعویضپذیر چند مطلب کلیدی به‌دست آوریم.

فرض کنیم، مثل قبل، A یک جبر باناخ مختلط تعویضپذیر با عنصر یکهٔ e باشد. به A مجموعهٔ Δ مرکب از تمام همریختیهای مختلط Aرا مربوط می‌سازیم. اینها همریختیهای از A به‌روی میدان مختلط اند یا، با اصطلاحی متفاوت، ***تابعیهای خطی ضربی*** بر Aاند که متحد ۰ نمی‌باشند. مثل قبل، $\sigma(x)$ طیف عنصر $x \in A$است و $\rho(x)$ شعاع طیفی xمی‌باشد. در این

صورت روابط زیر برقرارند:

۱۷.۱۸ قضیه

(آ) *هر ایده‌آل ماکزیمال M از A هستهٔ $h \in \Delta$ ی است.*

(ب) $\lambda \in \sigma(x)$ *اگر و فقط اگر به‌ازای* $h \in \Delta$ *ی*، $h(x) = \lambda$.

(پ) x *در* A *معکوسپذیر است اگر و فقط اگر به‌ازای هر* $h \in \Delta$، $h(x) \neq 0$.

(ت) *به‌ازای هر* $x \in A$ *و* $h \in \Delta$، $h(x) \in \sigma(x)$.

(ث) *به‌ازای هر* $x \in A$ *و* $h \in \Delta$، $|h(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|$.

برهان. هرگاه M یک ایده‌آل ماکزیمال A باشد، آنگاه A/M یک میدان است؛ و چون M بسته است (قضیهٔ ۱۳.۱۸)، A/M یک جبر باناخ می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۷.۱۸، یک یکریختی مانند J از A/M به‌روی میدان مختلط وجود دارد. هرگاه $h = j \circ \varphi$ که در آن φ یک همریختی از A به‌روی A/M است که هسته‌اش M است، آنگاه $h \in \Delta$ و هستهٔ h مساوی M می‌باشد. این خاصیت (آ) را ثابت می‌کند.

هرگاه $h \in \sigma(x)$، آنگاه $x - \lambda e$ معکوسپذیر نیست. لذا مجموعهٔ تمام عناصر $(x - \lambda e)y$ که در آن $y \in A$ یک ایده‌آل حقیقی A است که در یک ایده‌آل ماکزیمال جای دارد (قضیهٔ ۱۳.۱۸)، و قسمت (آ) نشان می‌دهد که $h \in \Delta$ ی هست به‌طوری که $h(x - \lambda e) = 0$. چون $h(e) = 1$، این نتیجه می‌دهد که $h(x) = \lambda$.

از آن سو، هرگاه $\lambda \notin \sigma(x)$، آنگاه به‌ازای $y \in A$ ی، $(x - \lambda e)y = e$. پس به‌ازای هر $h \in \Delta$، $h(x - \lambda e)h(y) = 1$؛ درنتیجه $h(x - \lambda e) \neq 0$ یا $h(x) \neq \lambda$. این خاصیت (ب) را ثابت می‌کند.

چون x معکوسپذیر است اگر و فقط اگر $0 \notin \sigma(x)$، خاصیت (پ) از (ب) نتیجه می‌شود. بالأخره (ت) و (ث) نتایج فوری (ب) می‌باشند.

توجه کنید که (ث) ایجاب می‌کند که نرم h، به‌عنوان یک تابعی خطی، حداکثر ۱ است. بخصوص هر $h \in \Delta$ پیوسته می‌باشد. این امر قبلاً (قضیهٔ ۲۱.۹) ثابت شده است.

کاربردها

حال چند قضیه بیان می‌کنیم که در صورتشان هیچ مفهوم جبری دیده نمی‌شود ولی می‌توان آنها را به‌روشهای جبر باناخ ثابت کرد.

۱۸.۱۸ قضیه. *فرض کنیم $A(U)$ مجموعهٔ تمام توابع پیوسته بر بست $\overline{U}$ قرص یکهٔ باز U باشد که تحدیدشان به U هلوریخت است. همچنین f_1، ...، f_n اعضایی از $A(U)$ باشند به‌طوری که به‌ازای هر* $z \in \overline{U}$،

$$|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)| > 0 \quad (1)$$

در این صورت توابعی مانند $g_1, \cdots, g_n \in A(U)$ ***وجود دارند به‌طوری که***

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z) g_i(z) = 1 \quad (z \in \bar{U}) \quad (2)$$

برهان. چون مجموعها، حاصل‌ضربها، و حدود یکنواخت توابع هلوریخت هلوریخت‌اند، $A(U)$ با نرم سوپرمم یک جبر باناخ است. مجموعهٔ J مرکب از تمام توابع $\Sigma f_i g_i$ که در آن g_iها اعضای دلخواهی از $A(U)$ اند یک ایده‌آل $A(U)$ می‌باشد. باید ثابت کنیم که J شامل عنصریکهٔ ۱ از $A(U)$ است. بنابر قضیهٔ ۱۳.۱۸، این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر J در ایده‌آل ماکزیمالی از $A(U)$ قرار نگیرد. لذا، طبق قضیهٔ ۱۷.۱۸ قسمت (آ)، کافی است ثابت کنیم که هیچ همریختی مانند h از $A(U)$ به‌روی میدان مختلط وجود ندارد که به‌ازای هر i $(1 \le i \le n)$، $h(f_i) = 0$.

پیش از تعیین این همریختیها توجه می‌کنیم که چندجمله‌ایها یک زیرمجموعهٔ چگال از $A(U)$ را تشکیل می‌دهند. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $f \in A(U)$ و $\epsilon > 0$. چون f بر $\bar{U}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است، عددی مانند $r < 1$ هست به‌طوری که به‌ازای هر $z \in \bar{U}$، $|f(z) - f(rz)| < \epsilon$. بسط $f(rz)$ برحسب توانهای z به‌ازای $|rz| < 1$ همگراست؛ درنتیجه، به‌ازای $z \in \bar{U}$، به‌طوریکنواخت به $f(rz)$ همگرا می‌باشد، واین تقریب مطلوب را به‌ما می‌دهد.

حال فرض کنیم h یک همریختی مختلط از $A(U)$ باشد. قرار می‌دهیم $f_0(z) = z$. در این صورت $f_0 \in A(U)$. واضح‌است که $\sigma(f_0) = \bar{U}$. بنابر قضیهٔ ۱۷.۱۸ قسمت (ت)، $\alpha \in \bar{U}$ای هست به‌طوری که $h(f_0) = \alpha$. لذا، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $h(f_0^n) = \alpha^n = f_0^n(\alpha)$؛ درنتیجه، به‌ازای هر چندجمله‌ای P، $h(P) = P(\alpha)$. چون h پیوسته بوده و چندجمله‌ایها در $A(U)$ چگالند، پس به‌ازای هر $f \in A(U)$، $h(f) = f(\alpha)$.

فرض (۱) ما ایجاب می‌کند که به‌ازای دست کم یک اندیس مانند i که $1 \le i \le n$، $|f_i(\alpha)| > 0$. لذا $h(f_i) \neq 0$.

پس ثابت کرده‌ایم که به‌هر $h \in \Delta$ دست کم یکی از توابع داده شدهٔ f_i نظیر است که $h(f_i) \neq 0$ و این، همانطور که در بالا ذکر شد، برای اثبات قضیه کافی می‌باشد.

تذکر. در برهان فوق تمام ایده‌آلهای ماکزیمال $A(U)$ نیز معین شده است زیرا هریک هستهٔ $h \in \Delta$ی می‌باشد: ***هرگاه*** $\alpha \in \bar{U}$ ***و*** M_α ***مجموعهٔ تمام*** $f \in A(U)$ ***هایی باشد که*** $f(\alpha) = 0$، ***آنگاه*** M_α ***یک ایده‌آل ماکزیمال*** $A(U)$ ***است و تمام ایده‌آلهای ماکزیمال*** $A(U)$ ***به‌این طریق به‌دست می‌آیند.***

$A(U)$ را اغلب ***جبر قرصی*** می‌نامند.

۱۹.۱۸. تحدید اعضای $A(U)$ به‌دایرهٔ یکهٔ T یک زیرجبر بستهٔ $C(T)$ را تشکیل می‌دهند. این همان جبر A است که در مثال ۱۱.۱۸ مطرح شد. درواقع A یک زیرجبر **ماکزیمال** $C(T)$ می‌باشد. به‌طور صریحتر، **هرگاه** $A \subset B \subset C(T)$ **و** B **(نسبت به‌نرم سوپرمم) یک زیرجبر بستهٔ** $C(T)$ **باشد، آنگاه** $B = A$ **یا** $B = C(T)$.

به‌آسانی معلوم می‌شود (قس. تمرین ۲۹ درفصل ۱۷) که A درست‌ازتمام $f \in C(T)$ هایی تشکیل شده است که

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0 \; (n = -1, -2, -3, \cdots) \cdot \qquad (1)$$

لذا قضیهٔ ماکزیمالی فوق‌الذکر را می‌توان به‌عنوان یک قضیهٔ تقریب بیان کرد:

۲۰.۱۸ قضیه. ***فرض کنیم*** $g \in C(T)$ ***و به‌ازای*** $n < 0$***ی،*** $\hat{g}(n) \neq 0$***. در این صورت به‌هر*** $f \in C(T)$ ***و هر*** $\epsilon > 0$ ***چندجمله‌ایهای زیر نظیرند:***

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}\, e^{ik\theta} \quad (n = 0, \cdots, N) \qquad (1)$$

به‌طوری که

$$\left| f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^{N} P_n(e^{i\theta})\, g^n(e^{i\theta}) \right| < \epsilon \; (e^{i\theta} \in T) \cdot \qquad (2)$$

برهان. فرض کنیم B بست مجموعهٔ تمام توابع در $C = C(T)$ به‌شکل زیر باشد:

$$\sum_{n=0}^{N} P_n g^n \cdot \qquad (3)$$

قضیه می‌گوید که $B = C$. فرض می‌کنیم $B \neq C$.

مجموعهٔ تمام توابع (۳) (توجه کنید که N ثابت نیست) یک جبر مختلط است. بست آن B یک جبر باناخ است که شامل تابع f_0 می‌باشد که $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. فرض $B \neq C$ ما ایجاب می‌کند که $1/f_0 \notin B$، زیرا در غیر این صورت B شامل f_0^n به‌ازای هر عدد صحیح n است، و درنتیجه تمام چندجمله‌ایهای مثلثاتی در B می‌باشند. و چون چندجمله‌ایهای مثلثاتی در C چگال‌اند (قضیهٔ ۲۵.۴)، باید داشته باشیم $B = C$.

لذا f_0 در B معکوس‌پذیر نیست. بنابر قضیهٔ ۱۷.۱۸، یک همریختی مختلط مانند h از B هست به‌طوری که $h(f_0) = 0$. هر همریختی به‌روی میدان مختلط در $h(1) = 1$ صدق می‌کند؛ و چون $h(f_0) = 0$، نیز داریم

$$h(f_0^n) = [h(f_0)]^n = 0 \; (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \qquad (4)$$

می‌دانیم که h یک تابعی خطی بر B با نرم حداکثر ۱ است. قضیهٔ هان ـ باناخ h را به‌یک

تابعی خطی بر C (که باز هم با h نموده می‌شود) با همان نرم وسعت می‌دهد. چون $h(۱) = ۱$ و $\|h\| \leq ۱$، استدلال به‌کار رفته در بخش ۲۲.۵ نشان می‌دهد که h یک تابعی خطی **مثبت** بر C است. بخصوص $h(f)$ به‌ازای f حقیقی حقیقی است. لذا $h(\bar{f}) = \overline{h(f)}$. چون $f_{\circ}^{-n}$ مزدوج مختلط $f_{\circ}^{n}$ است، پس رابطهٔ (۴) به‌ازای $n = -۱, -۲, -۳, \cdots$ نیز برقرار است. لذا

$$h(f_{\circ}^{n}) = \begin{cases} ۱ \text{ ، } n = \circ & \text{اگر} \\ \circ \text{ ، } n \neq \circ & \text{اگر} \end{cases} \tag{۵}$$

چون چندجمله‌ایهای مثلثاتی در C چگالند، فقط یک تابعی خطی کراندار بر C وجود دارد که در (۵) صدق می‌کند. لذا h با فرمول زیر داده می‌شود:

$$h(f) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta \quad (f \in C) \cdot \tag{۶}$$

حال اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، $gf_{\circ}^{n} \in B$؛ و چون h بر B ضربی است، رابطهٔ (۶) طبق (۵) نتیجه می‌دهد که

$$\hat{g}(-n) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\, e^{in\theta}\, d\theta = h(gf_{\circ}^{n}) = h(g)\, h(f_{\circ}^{n}) = \circ \cdot \tag{۷}$$

این با فرض قضیه متناقض می‌باشد.

فصل را با قضیه‌ای از وینر (*Wiener*) پایان می‌بخشیم.

۲۱.۱۸ قضیه. ***فرض کنیم***

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{و} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \text{ ،} \tag{۱}$$

و به‌ازای هر θ ی حقیقی، $f(e^{i\theta}) \neq \circ$. در این صورت

$$\frac{۱}{f(e^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta} \quad \text{که در آن} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty \cdot \tag{۲}$$

برهان. فرض کنیم A فضای تمام توابع مختلط f بر دایرهٔ یکه و صادق در رابطهٔ (۱) با نرم زیر باشد:

$$\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| \cdot \tag{۳}$$

واضح است که A یک فضای باناخ می‌باشد. درواقع A به‌طور یکمتری با ℓ^1 (فضای تمام توابع مختلط بر اعداد صحیح که نسبت به‌اندازهٔ شمارشی انتگرالپذیرند) یکریخت است. ولی A تحت ضرب نقطه به‌نقطه یک جبر باناخ تعویضپذیر نیز هست. زیرا هرگاه $g \in A$ و

$g(e^{i\theta}) = \Sigma b_n e^{in\theta}$، آنگاه

$$f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) = \sum_n \left(\sum_k c_{n-k} b_k \right) e^{in\theta}; \tag{۴}$$

و در نتیجه

$$\| fg \| = \sum_n \left| \sum_k c_{n-k} b_k \right| \le \sum_k |b_k| \sum_n |c_{n-k}| = \|f\| \cdot \|g\| \cdot \tag{۵}$$

همچنین تابع ۱ یکهٔ Aاست و $\| 1 \| = 1$.

مثل قبل قرار می‌دهیم $f_\circ(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. در این صورت $f_\circ \in A$، $1/f_\circ \in A$، و به‌ازای $n = \circ, \pm 1, \pm 2, \cdots$، $\|f_\circ^n\| = 1$. اگر h یک همریختی مختلط Aبوده و $h(f_\circ) = \lambda$، نامساوی $\|h\| \le 1$ ایجاب می‌کند که

$$|\lambda^n| = |h(f_\circ^n)| \le \|f_\circ^n\| = 1 \quad (n = \circ, \pm 1, \pm 2, \cdots) \cdot \tag{۶}$$

لذا $|\lambda| = 1$. به‌بیان دیگر، به‌هر h یک نقطه مانند $e^{i\alpha} \in T$ نظیر است که $h(f_\circ) = e^{i\alpha}$؛ درنتیجه

$$h(f_\circ^n) = e^{in\alpha} = f_\circ^n(e^{i\alpha}) \quad (n = \circ, \pm 1, \pm 2, \cdots) \cdot \tag{۷}$$

هرگاه fبا (۱) داده شده باشد، آنگاه $f = \Sigma c_n f_\circ^n$. این سری در Aهمگراست؛ و چون h یک تابعی خطی پیوسته بر Aاست، از رابطهٔ (۷) نتیجه می‌گیریم که

$$h(f) = f(e^{i\alpha}) \; (f \in A) \cdot \tag{۸}$$

لذا فرض ما که fدر هیچ نقطه‌ای از T صفر نیست می‌گوید که fدر هستهٔ هیچ همریختی مختلط Aقرار ندارد، و لذا قضیهٔ ۱۷.۱۸ ایجاب می‌کند که fدر Aمعکوسپذیر است. ولی این درست همان حکم قضیه می‌باشد.

تمرینات

۱. فرض کنید $B(X)$ جبر تمام عملگرهای خطی کراندار بر فضای باناخ Xباشد که در آن اگر A، A_1، و A_2در $B(X)$ باشند،

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1 x + A_2 x \text{ ، } (A_1 A_2)(x) = A_1(A_2 x) \text{ ، و } \|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot$$

ثابت کنید $B(X)$ یک جبر باناخ می‌باشد.

۲. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت بوده، X فضای تمام n تاییهای مختلط (و نرمدار به‌طوری‌که اصول موضوع فضای خطی نرمدار برقرار باشند) بوده، و $B(X)$ همانند تمرین ۱ باشد. ثابت کنید طیف هر عضو $B(X)$ حداکثر از nعدد مختلط تشکیل شده است. این اعضا چیستند؟

۳. فرض کنید $X=L^{2}(-\infty , \infty)$، $\varphi\in L^{\infty}(-\infty , \infty)$، و M عملگر ضرب باشد که $f\in L^{2}$ را به φf می‌برد. نشان دهید که M یک عملگر خطی کراندار بر L^{2} است و طیف M مساوی برد اساسی φ می‌باشد (فصل ۳، تمرین ۱۹).

۴. طیف عملگر انتقال بر ℓ^{2} چیست؟ (برای تعریف، ر.ک. بخش ۲۰.۱۷.)

۵. ثابت کنید بست هر ایده‌آل در یک جبر باناخ یک ایده‌آل است.

۶. اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد، جمیع ایده‌آلهای ماکزیمال در $C(X)$ را بیابید.

۷. فرض کنید A یک جبر باناخ تعویضپذیر دارای یکه باشد که به‌وسیلهٔ تنها عنصر x تولید می‌شود. این یعنی چندجمله‌ایهای از x در A چگال‌اند. ثابت کنید متمم $\sigma(x)$ یک زیرمجموعهٔ همبند صفحه است. ***راهنمایی.*** اگر $\lambda\notin\sigma(x)$، چندجمله‌ایهایی مانند P_n وجود دارند به‌طوری که در A، $P_n(x)\to(x-\lambda e)^{-1}$. ثابت کنید به‌ازای $z\in\sigma(x)$، $P_n(z)\to(z-\lambda)^{-1}$ به‌طور یکنواخت.

۸. فرض کنید $\Sigma_{0}^{\infty}|c_n|<\infty$، $f(z)=\Sigma_{0}^{\infty}c_nz^n$، به‌ازای هر $z\in\bar{U}$، $|f(z)|>0$، و $1/f(z)=\Sigma_{0}^{\infty}a_nz^n$. ثابت کنید $\Sigma_{0}^{\infty}|a_n|<\infty$.

۹. ثابت کنید یک زیرفضای خطی بسته از جبر باناخ $L^{1}(R^{1})$ (ر.ک. بخش ۱۹.۹) پایای انتقال است اگر و فقط اگر یک ایده‌آل باشد.

۱۰. نشان دهید که $L^{1}(T)$ یک جبر باناخ تعویضپذیر (بدون یکه است) اگر ضرب به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)\,g(s)\,ds\cdot$$

تمام همریختیهای مختلط $L^{1}(T)$ را همانند در قضیهٔ ۲۳.۹ پیدا نمایید. اگر E مجموعه‌ای از اعداد صحیح بوده و I_E مجموعهٔ تمام $f\in L^{1}(T)$هایی باشد که به‌ازای هر $n\in E$، $\hat{f}(n)=0$، ثابت کنید I_E یک ایده‌آل بسته در $L^{1}(T)$ است و هر ایده‌آل بسته در $L^{1}(T)$ به‌این طریق به‌دست می‌آید.

۱۱. **حلال** $R(\lambda,x)$ عنصر x در یک جبر باناخ دارای یکه به‌صورت زیر تعریف می‌شود: به‌ازای هر λی مختلط که معکوس زیر موجود باشد،

$$R(\lambda,x)=(\lambda e-x)^{-1}\cdot$$

اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$R(\lambda,x)-R(\mu,x)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

و، با استفاده از آن، برهان دیگری از قضیهٔ ۵.۱۸ به‌دست آورید.

۱۲. فرض کنید A یک جبر باناخ تعویضپذیر دارای یکه باشد. ***رادیکال*** A اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکزیمال A تعریف می‌شود. ثابت کنید سه حکم زیر راجع به‌عنصر $x\in A$ با یکدیگر

هم‌ارزند:

(آ) x در رادیکال A است؛

(ب) $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$؛

(پ) به‌ازای هر همریختی مختلط A، $h(x) = 0$.

۱۳. در جبر باناخ A یک عنصر مانند x (مثلاً یک عملگر خطی کراندار بر یک فضای هیلبرت) را چنان بیابید که به‌ازای هر $n > 0$، $x^n \neq 0$ ولی $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$.

۱۴. فرض کنید A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر دارای یکه بوده و Δ مجموعهٔ تمام همریختیهای مختلط A همانند بخش ۱۶.۱۸ باشد. به‌هر $x \in A$ یک تابع مانند $\hat{x}$ بر Δ را با فرمول زیر مربوط می‌سازیم:

$$\hat{x}(h) = h(x) \ (h \in \Delta) \cdot$$

$\hat{x}$ را **تبدیل گلفاند** x می‌نامیم. ثابت کنید نگاشت $x \to \hat{x}$ یک همریختی از A به‌روی جبر $\hat{A}$ توابع مختلط بر Δ با ضرب نقطه به‌نقطه است. این همریختی تحت چه شرطی بر A یک یکریختی است؟ (ر.ک. تمرین ۱۲.) ثابت کنید شعاع طیفی $\rho(x)$ مساوی است با

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(h)| : h \in \Delta\} \cdot$$

ثابت کنید برد تابع $\hat{x}$ درست مساوی طیف $\sigma(x)$ است.

۱۵. اگر A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر **بدون یکه** بوده، A_1 جبر تمام جفتهای مرتب (x, λ) با $x \in A$ بوده و λ عددی مختلط باشد که در آن جمع و ضرب به‌نحو «روشن» تعریف شده‌اند و $\|(x,\lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$، ثابت کنید A_1 یک جبر باناخ تعویض‌پذیر دارای یکه است و نگاشت $x \to (x, 0)$ یک یکریختی یکمترها از A به‌روی ایده‌آل ماکزیمال A_1 می‌باشد. این یک نشانندهٔ متعارف از یک جبر بدون یکه در یک جبر دارای یکه می‌باشد.

۱۶. نشان دهید که H^∞ نسبت به‌نرم سوپرمم و جمع و ضرب نقطه به‌نقطه یک جبر باناخ تعویض‌پذیر دارای یکه است. اگر $|\alpha| < 1$، نگاشت $f \to f(\alpha)$ یک همریختی مختلط از H^∞ می‌باشد. ثابت کنید همریختیهای دیگری نیز باید موجود باشند.

۱۷. نشان دهید که مجموعهٔ تمام توابع $(1-z)^2 f$ که در آن $f \in H^\infty$ یک ایده‌آل در H^∞ است که بسته نیست. ***راهنمایی.***

اگر $|z| < 1$ و $\epsilon > 0$، $|(1-z)^2(1+\epsilon-z)^{-1} - (1-z)| < \epsilon$

۱۸. فرض کنید φ یک تابع داخلی باشد. ثابت کنید $\{\varphi f : f \in H^\infty\}$ یک ایده‌آل بسته در H^∞ است. به‌عبارت دیگر، ثابت کنید هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله در H^∞ باشد به‌طوری که $\varphi f_n \to g$ به‌طور یکنواخت در U، آنگاه $g/\varphi \in H^\infty$.

فصل نوزده
تبدیلات فوریهٔ هلوریخت

آشنایی

۱.۱۹. در فصل ۹ تبدیل فوریهٔ تابع f بر R^1 تابعی مانند $\hat{f}$ بر R^1 تعریف شد. f را اغلب می‌توان به‌تابعی وسعت داد که در ناحیهٔ مشخصی از صفحه هلوریخت است. مثلاً هرگاه $f(t) = e^{-|t|}$، آنگاه $\hat{f}(x) = (1+x^2)^{-1}$ که یک تابع گویاست. این امر نباید خیلی تعجب‌آور باشد. به‌ازای هر t ی حقیقی، هستهٔ e^{itz} یک تابع تمام از z است. لذا می‌توان شرایطی برای f انتظار داشت که $\hat{f}$ تحت آنها در نواحیی هلوریخت باشد.

ما دو رده از توابع هلوریخت را توصیف می‌کنیم که به‌این نحو ایجاد می‌شوند.

در مورد اولی، فرض کنیم F تابعی در $L^2(-\infty, \infty)$ باشد که بر $(-\infty, 0)$ صفر می‌شود [یعنی $F \in L^2(0, \infty)$ را اختیار می‌کنیم] و تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \int_0^\infty F(t)\, e^{itz}\, dt \quad (z \in \Pi^+), \tag{1}$$

که در آن Π^+ مجموعهٔ تمام $z = x+iy$ هایی است که $y > 0$. هرگاه $z \in \Pi^+$، آنگاه $|e^{itz}| = e^{-ty}$ نشانگر آنکه انتگرال (۱) به‌عنوان یک انتگرال لبگ موجود است.

اگر $0 < \delta < \operatorname{Im} z$، $\operatorname{Im} z_n > \delta$، و $z_n \to z$، قضیهٔ همگرایی تسلطی نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |\exp(itz_n) - \exp(itz)|^2\, dt = 0$$

زیرا انتگرالده به‌وسیلهٔ تابع L^1: به‌ازای هر $t > 0$، $4\exp(-2\delta t)$ کراندار است و به ۰ میل می‌کند. لذا نامساوی شوارتز ایجاب می‌کند که f در Π^+ پیوسته باشد. قضایای فوبینی و کشی نشان می‌دهند که به‌ازای هر مسیر بستهٔ γ در Π^+، $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. پس، بنا بر قضیهٔ موررا، $f \in H(\Pi^+)$.

حال رابطهٔ (۱) را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x+iy) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-ty} e^{itx}\, dt \cdot \tag{۲}$$

y را ثابت گرفته و قضیهٔ پلانشرل را به‌کار می‌بریم. به‌ازای هر $y > 0$ داریم

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx = \int_0^\infty |F(t)|^2 e^{-2ty}\, dt \le \int_0^\infty |F(t)|^2\, dt \cdot \tag{۳}$$

[توجه کنید که نمادگذاری ما در اینجا با فصل ۹ تفاوت دارد. در آنجا اندازهٔ زمینه عبارت بود از اندازهٔ لبگ بخش بر $\sqrt{2\pi}$. در اینجا فقط از اندازهٔ لبگ استفاده می‌کنیم. این کار عامل $1/(2\pi)$ را در (۳) ایجاد می‌کند.] این امر نشان می‌دهد که:

(آ) ***هرگاه f به‌شکل (۱) باشد، آنگاه f در Π^+ هلوریخت است و تحدیدهایش به‌خطوط افقی در Π^+ یک مجموعهٔ کراندار در $L^2(-\infty, \infty)$ را تشکیل می‌دهند.***

ردهٔ دوم ما عبارت است از تمام fها به‌شکل زیر:

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)\, e^{itz}\, dt \tag{۴}$$

که در آن $0 < A < \infty$ و $F \in L^2(-A, A)$. این fها تمام‌اند (برهان مانند فوق است) و در شرط رشد صدق می‌کنند:

$$|f(z)| \le \int_{-A}^{A} |F(t)|\, e^{-ty}\, dt \le e^{A|y|} \int_{-A}^{A} |F(t)|\, dt \cdot \tag{۵}$$

هرگاه C آخرین انتگرال باشد، آنگاه $C < \infty$ و رابطهٔ (۵) ایجاب می‌کند که

$$|f(z)| \le C e^{A|z|} \cdot \tag{۶}$$

[گوییم تابعهای تمام صادق در (۶) ***از نوع نمایی*** می‌باشند.] لذا:

(ب) ***هر f به‌شکل (۴) یک تابع تمام است که در (۶) صدق کرده و تحدیدش به‌محور حقیقی در L^2 قرار دارد*** (طبق قضیهٔ پلانشرل).

جالب اینجاست که عکسهای (آ) و (ب) نیز برقرارند. این امر مضمون قضایای ۲.۱۹ و ۳.۱۹ می‌باشد.

دو قضیه از پالی $(Paley)$ و وینر

۲.۱۹ قضیه. *فرض کنیم* $f\in H(\Pi^+)$ و

$$\sup_{0<y<\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx = C < \infty \cdot \tag{1}$$

در این صورت تابعی مانند $F\in L^2(0,\infty)$ *هست به‌طوری که*

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t)\, e^{itz}\, dt \quad (z\in\Pi^+) \tag{2}$$

و

$$\int_0^{\infty} |F(t)|^2\, dt = C \cdot \tag{3}$$

تذکر. تابع F مورد نظر باید واجد این خاصیت باشد که $f(x+iy)$ تبدیل فوریهٔ $F(t)\, e^{-yt}$ باشد (y را یک ثابت مثبت می‌گیریم). حال فرمول انعکاس را به‌کار می‌گیریم (مهم نیست که این کار درست است یا نه؛ ما سعی می‌کنیم انگیزهٔ برهانی را که ذیلاً می‌آید ایجاد کنیم): F مطلوب باید به‌شکل زیر باشد:

$$F(t) = e^{ty}\cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)\, e^{-itx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int f(z)\, e^{-itz}\, dz \cdot \tag{4}$$

آخرین انتگرال روی یک خط افقی در Π^+ است، و اگر این استدلال اصولاً درست باشد، انتگرال به‌خط خاصی که اختیار می‌کنیم بستگی ندارد. این امر پیشنهاد می‌کند که قضیهٔ کشی را باید به‌مدد طلبید.

برهان. y را که $0<y<\infty$ ثابت می‌گیریم. به‌ازای هر $\alpha>0$، Γ_α را مسیر مستطیلی به‌رئوس $\pm\alpha+i$ و $\pm\alpha+iy$ اختیار می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ کشی،

$$\int_{\Gamma_\alpha} f(z)\, e^{-itz}\, dz = 0 \cdot \tag{5}$$

ما فقط مقادیر حقیقی t را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\Phi(\beta)$ انتگرال $f(z)\, e^{-itz}$ روی بازهٔ بسته از $\beta+i$ تا $\beta+iy$ (β حقیقی) باشد. قرار می‌دهیم $I=[y,1]$ اگر $y<1$ و $I=[1,y]$ اگر $1<y$. در این صورت

$$|\Phi(\beta)|^2 = \left| \int_I f(\beta+iu)\, e^{-it(\beta+iu)}\, du \right|^2 \tag{6}$$

$$\le \int_I |f(\beta+iu)|^2\, du \int_I e^{2tu}\, du \cdot$$

قرار می‌دهیم

$$\Lambda(\beta) = \int_I |f(\beta+iu)|^2\, du \cdot \tag{7}$$

در این صورت (۱) طبق قضیهٔ فوبینی نشان می‌دهد که

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\beta)\,d\beta\le C_m(I)\cdot \tag{۸}$$

لذا دنباله‌ای مانند $\{\alpha_j\}$ هست به‌طوری که $\alpha_j\to\infty$ و

$$\Lambda(\alpha_j)+\Lambda(-\alpha_j)\to ۰\ (j\to\infty)\cdot \tag{۹}$$

این طبق رابطهٔ (۶) ایجاب می‌کند که

$$\text{وقتی } j\to\infty\text{، } \Phi(\alpha_j)\to ۰ \text{ و } \Phi(-\alpha_j)\to ۰\cdot \tag{۱۰}$$

این امر به‌ازای هر t برقرار است و دنبالهٔ $\{\alpha_j\}$ تابع t نیست.
حال تعریف می‌کنیم

$$g_j(y,t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+iy)\,e^{-itx}\,dx\cdot \tag{۱۱}$$

در این صورت از روابط (۵) و (۱۰) داریم

$$\lim_{j\to\infty}\,[e^{ty}g_j(y,t)-e^{t}g_j(۱,t)]=۰\ \ (-\infty<t<\infty)\cdot \tag{۱۲}$$

به‌جای $f(x+iy)$ می‌نویسیم $f_y(x)$. در این صورت، طبق فرض، $f_y\in L^۲(-\infty,\infty)$ و قضیهٔ پلانشرل حکم می‌کند که

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_y(t)-g_j(y,t)|^۲\,dt=۰ \tag{۱۳}$$

که در آن $\hat{f}_y$ تبدیل فوریهٔ f_y می‌باشد. لذا یک زیردنبالهٔ $\{g_j(y,t)\}$ به‌ازای تقریباً هر t نقطه به‌نقطه به $\hat{f}_y(t)$ همگراست (قضیهٔ ۱۲.۳). حال اگر تعریف کنیم

$$F(t)=e^{t}\hat{f}_۱(t), \tag{۱۴}$$

از رابطهٔ (۱۲) داریم

$$F(t)=e^{ty}\hat{f}_y(t)\cdot \tag{۱۵}$$

رابطهٔ (۱۴) شامل y نیست و رابطهٔ (۱۵) به‌ازای هر $y\in(۰,\infty)$ برقرار است. قضیهٔ پلانشرل را می‌توان در مورد (۱۵) به‌کار برد:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-۲ty}\,|F(t)|^۲\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_y(t)|^۲\,dt=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f_y(x)|^۲\,dx\le C\cdot \tag{۱۶}$$

اگر فرض کنیم $y\to\infty$، رابطهٔ (۱۶) نشان می‌دهد که $F(t)=۰$ ت. هـ. در $(-\infty\,,\,۰)$.
اگر فرض کنیم $y\to ۰$، رابطهٔ (۱۶) نشان می‌دهد که

$$\int_{۰}^{\infty}|F(t)|^۲\,dt\le C\cdot \tag{۱۷}$$

حال از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که اگر $y>۰$، $\hat{f}_y\in L^۱$. لذا از قضیهٔ ۱۴.۹ داریم

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_y(t)\, e^{itx}\, dt \tag{۱۸}$$

یا

$$f(z) = \int_{\circ}^{\infty} F(t)\, e^{-yt} e^{itx}\, dt = \int_{\circ}^{\infty} F(t)\, e^{itz}\, dt \; (z \in \Pi^{+}) \cdot \tag{۱۹}$$

این همان رابطهٔ (۲) است و رابطهٔ (۳) از (۱۷) و فرمول ۱.۱۹ (۳) نتیجه خواهد شد.

۳.۱۹ قضیه. ***فرض کنیم A و C ثابتهای مثبتی بوده و f یک تابع تمام باشد به‌طوری که به‌ازای هر z،***

$$|f(z)| \le C e^{A|z|}, \tag{۱}$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{۲}\, dx < \infty \cdot \tag{۲}$$

در این صورت تابعی مانند $F \in L^{۲}(-A, A)$ هست به‌طوری که به‌ازای هر z،

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)\, e^{itz}\, dt \cdot \tag{۳}$$

برهان. به‌ازای $\epsilon > \circ$ و x حقیقی قرار می‌دهیم $f_{\epsilon}(x) = f(x)\, e^{-\epsilon|x|}$ و نشان می‌دهیم که

$$\lim_{\epsilon \to \circ} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(x)\, e^{-itx}\, dx = \circ \quad (|t| > A \text{ و حقیقی } t) \cdot \tag{۴}$$

چون وقتی $\epsilon \to \circ$، $\|f_{\epsilon} - f\|_{۲} \to \circ$، قضیهٔ پلانشرل ایجاب می‌کند که تبدیلات فوریهٔ f_{ϵ} در $L^{۲}$ به‌تبدیل فوریهٔ F از f (به‌بیان دقیقتر، تحدید f به‌محور حقیقی) همگرایند. لذا رابطهٔ (۴) ایجاب می‌کند که F خارج $[-A, A]$ صفر است، و در این صورت قضیهٔ ۱۴.۹ نشان می‌دهد که رابطهٔ (۳) به‌ازای تقریباً هر z حقیقی برقرار است. چون هر طرف (۳) یک تابع تمام است، پس رابطهٔ (۳) به‌ازای هر z مختلط برقرار می‌باشد. لذا رابطهٔ (۴) قضیه را ایجاب خواهد کرد.

به‌ازای هر α ی حقیقی، Γ_{α} را مسیر تعریف شده با

$$\Gamma_{\alpha}(s) = s\, e^{i\alpha} \quad (\circ \le s < \infty) \tag{۵}$$

گرفته، قرار می‌دهیم

$$\Pi_{\alpha} = \{ w : \operatorname{Re}(w e^{i\alpha}) > A \}, \tag{۶}$$

و اگر $w \in \Pi_{\alpha}$، تعریف می‌کنیم

$$\Phi_{\alpha}(w) = \int_{\Gamma_{\alpha}} f(z)\, e^{-wz}\, dz = e^{i\alpha} \int_{\circ}^{\infty} f(s e^{i\alpha}) \exp(-ws\, e^{i\alpha})\, ds \cdot \tag{۷}$$

بنابر (۱) و (۵)، قدرمطلق انتگرالده حداکثر مساوی است با

$$C \exp\{-[\operatorname{Re}(w e^{i\alpha}) - A]\, s\},$$

و (همانند بخش ۱.۱۹) نتیجه می‌شود که Φ_{α} در نیمصفحهٔ Π_{α} هلوریخت است.

به‌علاوه، اگر $\alpha = \circ$ و $\alpha = \pi$، مطلب بیشتری قابل بیان است: داریم

$$\Phi_\circ(w)=\int_\circ^\infty f(x)\,e^{-wx}\,dx\;(\operatorname{Re}w>\circ), \tag{۸}$$

$$\Phi_\pi(w)=-\int_{-\infty}^{\circ} f(x)\,e^{-wx}\,dx\;(\operatorname{Re}w<\circ)\cdot \tag{۹}$$

$\Phi_\circ$ و Φ_π، به‌خاطر (۲)، در نیمصفحه‌های ذکر شده هلوریخت‌اند.

ارتباط توابع Φ_α به (۴) در رابطهٔ زیر مستتر است که به‌آسانی قابل تحقیق می‌باشد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\in(x)\,e^{-itx}\,dx=\Phi_\circ(\epsilon+it)-\Phi_\pi(-\epsilon+it)\;(\text{حقیقی } t)\cdot \tag{۱۰}$$

لذا باید ثابت کنیم که اگر $t>A$ و اگر $t<-A$، طرف راست (۱۰) به‌ازای $\epsilon\to\circ$ به ۰ میل می‌کند.

این کار را با نشان دادن اینکه هر دو تا از توابع Φ_α در اشتراک قلمروهای تعریفشان توافق دارند، یعنی تداوم تحلیلی یکدیگرند، انجام می‌دهیم. پس از این کار می‌توان در رابطهٔ (۱۰) $\Phi_\circ$ و Φ_π را با $\Phi_{\pi/۲}$ اگر $t<-A$ و با $\Phi_{-\pi/۲}$ اگر $t>A$ عوض کرد، و در این صورت واضح است که وقتی $\epsilon\to\circ$، تفاضل به ۰ میل می‌کند.

لذا فرض می‌کنیم $\circ<\beta-\alpha<\pi$ و قرار می‌دهیم

$$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{۲} \quad \text{و} \quad \eta=\cos\frac{\beta-\alpha}{۲}>\circ\cdot \tag{۱۱}$$

هرگاه $w=|w|\,e^{-i\gamma}$، آنگاه

$$\operatorname{Re}(we^{i\alpha})=\eta\,|w|=\operatorname{Re}(we^{i\beta}); \tag{۱۲}$$

درنتیجه، اگر $|w|>A/\eta$، $w\in\Pi_\alpha\cap\Pi_\beta$. حال انتگرال

$$\int_\Gamma f(z)\,e^{-wz}\,dz \tag{۱۳}$$

را روی قوس مستدیر Γ داده شده با $\Gamma(t)=re^{it}$، $\alpha\le t\le\beta$، در نظر می‌گیریم. چون

$$\operatorname{Re}(-wz)=-|w|\,r\cos(t-\gamma)\le-|w|\,r\eta, \tag{۱۴}$$

قدرمطلق انتگرالده در (۱۳) از

$$C\exp\{(A-|w|\,\eta)\,r\}$$

متجاوز نیست. اگر $|w|>A/\eta$، معلوم می‌شود که وقتی $r\to\infty$، رابطهٔ (۱۳) به ۰ میل می‌کند.

حال قضیهٔ کشی را به‌کار می‌بریم. انتگرال $f(z)\,e^{-wz}$ روی بازهٔ بستهٔ $[\circ, re^{i\beta}]$ مساوی مجموع (۱۳) و انتگرال روی $[\circ, re^{i\alpha}]$ است. چون وقتی $r\to\infty$ رابطهٔ (۱۳) به ۰ میل می‌کند،

نتیجه می‌شود که اگر $w = |w|\, e^{-i\gamma}$ و $|w| > A/\eta$ ، $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\beta(w)$ ، و در این صورت قضیهٔ ۱۸.۱۰ نشان می‌دهد که Φ_α و Φ_β در اشتراک نیمصفحه‌هایی که از اول در آنها تعریف شده بودند یکی می‌باشند. این امر برهان را تمام خواهد کرد.

۴.۱۹ چند تبصره. هریک از دو برهان فوق به‌کاربرد نوعی قضیهٔ کشی وابسته است. در قضیهٔ ۲.۱۹ انتگرالگیری روی خط افقی را با انتگرالگیری روی خط افقی دیگر عوض کردیم تا نشان دهیم که رابطهٔ ۲.۱۹ (۱۵) از y مستقل است. در قضیهٔ ۳.۱۹ از تعویض یک شعاع با دیگری برای ساختن تداومهای تحلیلی استفاده شد؛ نتیجه درواقع این بود که توابع Φ_α تحدیدهای تابعی مانند Φ اند که در متمم بازهٔ بستهٔ $[-Ai, Ai]$ هلوریخت می‌باشد.

ردهٔ توابع توصیف شده در قضیهٔ ۲.۱۹ مشابه نیمصفحه‌ای ردهٔ H^2 است که در فصل ۱۷ مطرح شد. در برهان قضیهٔ دنجوی ـ کارلمن (*Carleman*) (قضیهٔ ۱۱.۱۹) از قضیهٔ ۳.۱۹ استفاده خواهد شد.

رده‌های شبه تحلیلی

۵.۱۹. اگر Ω یک ناحیه بوده و $z_0 \in \Omega$، هر $f \in H(\Omega)$ به‌وسیلهٔ اعداد $f(z_0)$، $f'(z_0)$، $f''(z_0)$، $\cdots$ به‌طور منحصر به‌فرد معین است. از آن‌سو، بی‌نهایت تابع مشتقپذیر بر R^1 وجود دارند که متحد ۰ نیستند ولی بر بازهٔ بسته‌ای صفر می‌شوند. لذا در اینجا خاصیت یکتایی داریم که توابع هلوریخت واجد آنند ولی در C^∞ (ردهٔ تمام توابع مختلط بی‌نهایت بار مشتقپذیر بر R^1) برقرار نیست.

اگر $f \in H(\Omega)$، رشد دنبالهٔ $\{|f^{(n)}(z_0)|\}$ توسط قضیهٔ ۲۶.۱۰ محدود می‌شود. لذا طبیعی است بپرسیم که آیا خاصیت یکتایی فوق در زیرردهٔ مناسبی از C^∞ که در آن رشد مشتقات تحت قیودی است نیز برقرار است یا نه. این امر انگیزهٔ تعاریف زیر می‌باشد. جواب سؤال ما در قضیهٔ ۱۱.۱۹ داده خواهد شد.

۶.۱۹ رده‌های $C\{M_n\}$. اگر M_0، M_1، M_2، $\cdots$ اعداد مثبتی باشند، $C\{M_n\}$ را ردهٔ تمام $f \in C^\infty$هایی می‌گیریم که در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$\|D^n f\|_\infty \le \beta_f B_f^n M_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \cdot \tag{1}$$

در اینجا $D^0 f = f$، $D^n f$ به‌ازای $n \ge 1$ مشتق nم f است، نرم عبارت است از نرم سوپرمم روی R^1، و β_f و B_f ثابتهای مثبتی (وابسته به f ولی مستقل از n) می‌باشند.

هرگاه f در (۱) صدق کند، آنگاه

$$\limsup_{n \to \infty} \left\{\frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n}\right\}^{1/n} \le B_f \cdot \tag{2}$$

این نشان می‌دهد که B_f کمیت مهمتری از β_f است. ولی اگر β_f در (۱) حذف شود، حالت $n = 0$ ایجاب می‌کند که $\|f\|_\infty \le M_0$ که یک قید ناخواسته می‌باشد. شمول β_f مجموعهٔ $C\{M_n\}$ را به‌یک فضای برداری بدل می‌سازد.

هر $C\{M_n\}$ **تحت تبدیلات مستوی پایاست**. به‌طور صریحتر، فرض کنیم $f \in C\{M_n\}$ و $g(x) = f(ax+b)$. در این صورت g به‌ازای $\beta_g = \beta_f$ و $B_g = a B_f$ در (۱) صدق می‌کند.

حال دو فرض دائمی زیر را در مورد دنباله‌های $\{M_n\}$ می‌پذیریم:

$$M_0 = 1 ; \tag{۳}$$

$$M_n^2 \le M_{n-1} M_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdot \tag{۴}$$

فرض (۴) را می‌توان به‌این شکل نیز بیان کرد: $\{\log M_n\}$ یک ***دنبالهٔ مختلط*** است.

این فرضها بخشی از کار را ساده می‌سازند و به‌کلیت خللی وارد نمی‌آورند. [می‌توان ثابت کرد (گرچه ما نمی‌کنیم) که هر ردهٔ $C[M_n]$ مساوی رده‌ای مانند $C[\overline{M_n}]$ است که در آن $\{\overline{M_n}\}$ در روابط (۳) و (۴) صدق می‌کند.]

نتیجهٔ زیر سودمندی روابط (۳) و (۴) را نشان می‌دهد.

۷.۱۹ قضیه. هر $C\{M_n\}$ نسبت به‌ضرب نقطه به‌نقطه یک جبر است.

برهان. فرض کنیم f و g در $C\{M_n\}$ بوده و β_f، B_f، β_g، و B_g ثابتهای نظیر باشند. قاعدهٔ حاصل‌ضرب برای مشتقگیری نشان می‌دهد که

$$D^n(fg) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (D^j f) \cdot (D^{n-j} g) \cdot \tag{۱}$$

لذا

$$|D^n(fg)| \le \beta_f \beta_g \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} M_j M_{n-j} \cdot \tag{۲}$$

تحدب $\{\log M_n\}$ همراه با $M_0 = 1$ نشان می‌دهد که به‌ازای $0 \le j \le n$، $M_j M_{n-j} \le M_n$. لذا قضیهٔ دوجمله‌ای ما را از رابطهٔ (۲) به

$$\| D^n(fg) \|_\infty \le \beta_f \beta_g (B_f + B_g)^n M_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{۳}$$

می‌رساند؛ درنتیجه $fg \in C\{M_n\}$.

۸.۱۹ تعریف. گوییم ردهٔ $C\{M_n\}$ **شبه تحلیلی** است اگر شرایط

$$f \in C\{M_n\} \text{ و } (D^n f)(0) = 0 \quad (\text{به‌ازای } n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{۱}$$

ایجاب کنند که به‌ازای هر $x \in R^1$، $f(x) = 0$.

ایجاب کنند که به‌ازای هر $x \in R^{1}$، $f(x) = 0$.

البته اگر $(D^n f)(0)$ را با $(D^n f)(x_0)$ به‌ازای هر x_0 عوض کنیم، تعریف فوق تغییری نمی‌کند.

لذا رده‌های شبه تحلیلی آنهایی هستند که دارای خاصیت یکتایی مذکور در بخش ۶.۱۹ می‌باشند. یکی از این رده‌ها با توابع هلوریخت ارتباط نزدیکی دارد:

۹.۱۹ قضیه. *ردهٔ $C\{n!\}$ عبارت است از تمام f هایی که به‌ازای هر یک $\delta > 0$ ای هست به‌طوری که f را می‌توان به‌یک تابع هلوریخت کراندار در نوار تعریف شده با $|\mathrm{Im}(z)| < \delta$ وسعت داد.*

در نتیجه $C\{n!\}$ یک ردهٔ شبه تحلیلی می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $f \in H(\Omega)$ و به‌ازای هر $z \in \Omega$، $|f(z)| < \beta$ که در آن Ω عبارت است از تمام $z = x + iy$ هایی که $|y| < \delta$. از قضیهٔ ۲۶.۱۰ معلوم می‌شود که به‌ازای هر x حقیقی،

$$|(D^n f)(x)| \leq \beta \delta^{-n} n! \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \cdot \tag{1}$$

لذا تحدید f به‌محور حقیقی تعلق به $C\{n!\}$ دارد.

به‌عکس فرض کنیم f بر محور حقیقی تعریف شده باشد و $f \in C\{n!\}$. به‌عبارت دیگر،

$$\|D^n f\|_\infty \leq \beta B^n n! \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \cdot \tag{2}$$

حکم می‌کنیم که نمایش

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3}$$

به‌ازای هر $a \in R^{1}$ اگر $a - B^{-1} < x < a + B^{-1}$ معتبر است. این امر از فرمول تیلور نتیجه می‌شود:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(D^j f)(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(D^n f)(t)\,dt \tag{4}$$

که با تکرار انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌دست می‌آید. بنابر (۲)، جملهٔ آخر (۴) («باقیمانده») تحت تسلط

$$n\beta B^n \left| \int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt \right| = \beta\,|B(x-a)|^n \tag{5}$$

است. اگر $|B(x-a)| < 1$، این وقتی $n \to \infty$ به 0 میل می‌کند و رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود.

حال می‌توان در (۳) x را با عدد مختلط z که $|z-a| < 1/B$ عوض کرد. با این کار یک تابع هلوریخت مانند F_a در قرص به‌مرکز a و شعاع $1/B$ تعریف می‌شود، و اگر x حقیقی بوده و $|x-a| < 1/B$، $F_a(x) = f(x)$. لذا توابع مختلف F_a تداومهای تحلیلی یکدیگر می‌باشند.

این توابع یک توسیع هلوریخت مانند F از f در نوار $|y| < 1/B$ تشکیل می‌دهند.

هرگاه $0 < \delta < 1/B$ و $z = a+iy$ که $|y| < \delta$، آنگاه

$$|F(z)| = |F_a(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(a)}{n!} (iy)^n \right| \le \beta \sum_{n=0}^{\infty} (B\delta)^n = \frac{\beta}{1-B\delta}.$$

این نشان می‌دهد که F در نوار $|y| < \delta$ کراندار است و برهان تمام می‌باشد.

۱۰.۱۹ قضیه. ردهٔ $C\{M_n\}$ ***شبه تحلیلی است اگر و فقط اگر*** $C\{M_n\}$ ***شامل یک تابع غیربدیهی با محافظ فشرده نباشد.***

برهان. هرگاه $C\{M_n\}$ شبه تحلیلی بوده، $f \in C\{M_n\}$، و f دارای محافظ فشرده باشد، آنگاه f و تمام مشتقاتش بوضوح در نقطه‌ای صفر می‌شوند؛ درنتیجه، به‌ازای هر x، $f(x) = 0$.

فرض کنیم $C\{M_n\}$ شبه تحلیلی نباشد. در این صورت تابعی مانند $f \in C\{M_n\}$ هست به‌طوری که به‌ازای $n = 0, 1, 2, \cdots$، $(D^n f)(0) = 0$ ولی به‌ازای x_0ی $f(x_0) \neq 0$. می‌توان فرض کرد $x_0 > 0$. هرگاه به‌ازای $x \ge 0$، $g(x) = f(x)$ و به‌ازای $x < 0$، $g(x) = 0$، آنگاه $g \in C\{M_n\}$. قرار می‌دهیم $h(x) = g(x)\,g(2x_0 - x)$. بنابر قضیهٔ ۷.۱۹، $h \in C\{M_n\}$. همچنین اگر $x < 0$ و $x > 2x_0$، $h(x) = 0$. ولی $h(x_0) = f^2(x_0) \neq 0$. لذا h یک عضو غیربدیهی $C\{M_n\}$ با محافظ فشرده می‌باشد.

حال برای قضیهٔ اساسی رده‌های شبه تحلیلی حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ دنجوی ـ کارلمن

۱۱.۱۹ قضیه. ***فرض کنیم*** $M_0 = 1$، ***به‌ازای*** $n = 1, 2, 3, \cdots$، $M_n^2 \le M_{n-1} M_{n+1}$، و ***به‌ازای*** $x > 0$،

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{M_n} \quad \text{و} \quad q(x) = \sup_{n \ge 0} \frac{x^n}{M_n}.$$

در این صورت هریک از پنج شرط زیر چهار شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

(آ) $C\{M_n\}$ ***شبه تحلیلی نیست؛***

(ب) $\int_0^{\infty} \log Q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty$؛

(پ) $\int_0^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty$؛

(ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n} < \infty$؛

(ث) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty$.

تذکر. هرگاه وقتی $n \to \infty$ ، $M_n \to \infty$ بسیار سریع، آنگاه وقتی $x \to \infty$ ، $Q(x)$ به‌کندی به‌بی‌نهایت می‌رود. لذا هریک از پنج شرط فوق به‌روش خود می‌گوید که سریعاً $M_n \to \infty$. همچنین توجه کنید که $Q(x) \geq 1$ و $q(x) \geq 1$. لذا انتگرالهای مذکور در (ب) و (پ) همواره تعریف شده‌اند. ممکن است به‌ازای $x < \infty$ ی، $Q(x) = \infty$. در این صورت انتگرال (ب) مساوی $+\infty$ است و قضیه حکم می‌کند که $C\{M_n\}$ شبه تحلیلی می‌باشد.

هرگاه $M_n = n!$ ، آنگاه $M_{n-1}/M_n = 1/n$ ؛ درنتیجه (ث) نقض می‌شود، و قضیه می‌گوید که $C\{n!\}$ شبه تحلیلی است که با قضیهٔ ۹.۱۹ سازگار است.

برهان (آ) ایجاب می‌کند (ب) را. فرض کنیم $C\{M_n\}$ شبه تحلیلی نباشد. در این صورت $C\{M_n\}$ شامل یک تابع غیربدیهی با محافظ فشرده است (قضیهٔ ۱۰.۱۹). یک تغییر متغیر مستوی تابعی مانند $F \in C\{M_n\}$ به‌دست می‌دهد که محافظش دربازهٔ بسته‌ای مانند $[0, A]$ است و

$$\| D^n F \|_\infty \leq 2^{-n} M_n \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

و F متحد صفر نیست. تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \int_0^A F(t)\, e^{itz}\, dt \tag{2}$$

و

$$g(w) = f\left(\frac{i - iw}{1 + w}\right) \cdot \tag{3}$$

در این صورت f تمام است. اگر $\operatorname{Im} z > 0$ ، قدرمطلق انتگرالده در (۲) حداکثر $|F(t)|$ می‌باشد. لذا f در نیمصفحهٔ بالایی کراندار است. بنابراین g در U کراندار می‌باشد. همچنین g بر $\overline{U}$ جز در نقطهٔ $w = -1$ پیوسته می‌باشد. چون (طبق قضیهٔ یکتایی تبدیلات فوریه) f متحد 0 نیست، همین امر برای g درست است، و حال قضیهٔ ۱۹.۱۵ نشان می‌دهد که

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(e^{i\theta})|\, d\theta > -\infty \cdot \tag{4}$$

هرگاه $x = i(1 - e^{i\theta})/(1 + e^{i\theta}) = \tan(\theta/2)$ ، آنگاه $d\theta = 2(1 + x^2)^{-1}$ ؛ درنتیجه رابطهٔ (۴) عبارت است از

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |f(x)| \frac{dx}{1 + x^2} > -\infty \cdot \tag{5}$$

از آن سو، انتگرالگیری جزئی از (۲) نتیجه می‌دهد که

$$f(z) = (iz)^{-n} \int_0^A (D^n F)(t)\, e^{itz}\, dt \; (z \neq 0) \tag{6}$$

زیرا F و تمام مشتقاتش در ۰ و A صفر می‌شوند. حال از روابط (۱) و (۶) معلوم می‌شود که

$$|x^n f(x)| \le ۲^{-n} AM_n \ (n = ۰, ۱, ۲, \cdots ;\ x \text{ حقیقی}) \cdot \tag{۷}$$

لذا

$$Q(x)\ |f(x)| = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n\ |f(x)|}{M_n} \le ۲A \ \ (x \ge ۰)\,, \tag{۸}$$

و روابط (۵) و (۸) ایجاب می‌کنند که (ب) برقرار می‌باشد.

برهان (ب) *ایجاب می‌کند* (پ) *را*. $q(x) \le Q(x)$.

برهان (پ) *ایجاب می‌کند* (ت) *را*. قرار می‌دهیم $a_n = M_n^{۱/n}$. چون $M_۰ = ۱$ و $M_n^۲ \le M_{n-۱} M_{n+۱}$، به‌آسانی معلوم می‌شود که به‌ازای $n > ۰$، $a_n \le a_{n+۱}$. هرگاه $x \ge e\,a_n$، آنگاه $x^n / M_n \ge e^n$؛ درنتیجه

$$\log q(x) \ge \log \frac{x^n}{M_n} \ge \log e^n = n \cdot \tag{۹}$$

لذا، به‌ازای هر N،

$$e \int_{ea_۱}^{\infty} \log q(x) \cdot \frac{dx}{x^۲} \ge e \sum_{n=۱}^{N} n \int_{ea_n}^{ea_{n+۱}} x^{-۲}\, dx + e \int_{ea_{N+۱}}^{\infty} (N+۱)\, x^{-۲}\, dx$$

$$= \sum_{n=۱}^{N} n \left(\frac{۱}{a_n} - \frac{۱}{a_{n+۱}}\right) + \frac{N+۱}{a_{N+۱}} = \sum_{n=۱}^{N+۱} \frac{۱}{a_n} \cdot \tag{۱۰}$$

این نشان می‌دهد که (پ) قسمت (ت) را ایجاب می‌کند.

برهان (ت) *ایجاب می‌کند* (ث) *را*. قرار می‌دهیم

$$\lambda_n = \frac{M_{n-۱}}{M_n} \ \ (n = ۱, ۲, ۳, \cdots) \cdot \tag{۱۱}$$

در این صورت $\lambda_۱ \ge \lambda_۲ \ge \lambda_۳ \ge \cdots$، و اگر مثل فوق $a_n = M_n^{۱/n}$، داریم

$$(a_n \lambda_n)^n \le M_n \cdot \lambda_۱ \lambda_۲ \cdots \lambda_n = ۱ \cdot \tag{۱۲}$$

لذا $\lambda_n \le ۱/a_n$، و همگرایی $\Sigma\,(۱/a_n)$ همگرایی $\Sigma\,\lambda_n$ را ایجاب خواهد کرد.

برهان (ث) *ایجاب می‌کند* (آ) *را*. در اینجا فرض است که $\Sigma \lambda_n < \infty$ که در آن λ_n با (۱۱) داده شده است. حکم می‌کنیم که تابع

$$f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{۲} \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z} \qquad (۱۳)$$

یک تابع تمام از نوع نمایی است که متحد صفر نبوده و در نامساویهای زیر صدق می‌کند:

$$|x^k f(x)| \le M_k \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲} (k = ۰, ۱, ۲, \cdots ;\ x \text{ حقیقی}) \cdot \qquad (۱۴)$$

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $۱ - z^{-۱} \sin z$ در مبدأ دارای صفر است. لذا ثابتی مانند B هست به‌طوری که

$$\left| ۱ - \frac{\sin z}{z} \right| \le B\,|z| \ (|z| \le ۱) \cdot \qquad (۱۵)$$

پس

$$\left| ۱ - \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z} \right| \le B\lambda_n\,|z| \ \left(|z| \le \frac{۱}{\lambda_n}\right); \qquad (۱۶)$$

در نتیجه سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left| ۱ - \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z} \right| \qquad (۱۷)$$

بر مجموعه‌های فشرده به‌طور یکنواخت همگراست. (توجه کنید که وقتی $n \to \infty$، $۱/\lambda_n \to \infty$ زیرا $\Sigma \lambda_n < \infty$.) لذا حاصل‌ضرب نامتناهی (۱۳) معرف یک تابع تمام مانند f است که متحد صفر نمی‌باشد.

حال اتحاد

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} e^{itz}\, dt \qquad (۱۸)$$

نشان می‌دهد که اگر $z = x + iy$، $|z^{-۱} \sin z| \le e^{|y|}$. درنتیجه

$$|f(z)| \le e^{A|z|} \text{ که در آن } A = ۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n \cdot \qquad (۱۹)$$

به‌ازای x حقیقی داریم $|\sin x| \le |x|$ و $|\sin x| \le ۱$. لذا

$$|x^k f(x)| \le |x^k| \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲} \prod_{n=۱}^{k} \left| \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n x} \right| \qquad (۲۰)$$

$$\le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲} (\lambda_۱ \cdots \lambda_k)^{-۱} = M_k \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲} \cdot$$

این رابطهٔ (۱۴) را به‌دست می‌دهد، و اگر از (۱۴) انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|\, dx \le M_k \ (k = ۰, ۱, ۲, \cdots) \cdot \qquad (۲۱)$$

پس ثابت شده است که f در مفروضات قضیهٔ ۳.۱۹ صدق می‌کند. لذا تبدیل فوریهٔ f:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-itx}\, dx \quad (\text{حقیقی } t) \tag{۲۲}$$

تابعی با محافظ فشرده است که متحد صفر نیست، و رابطهٔ (۲۱) نشان می‌دهد که $F \in C^{\infty}$ و، با کاربرد مکرر قضیهٔ ۲.۹ قسمت (ج)،

$$(D^k F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x)\, e^{-itx}\, dx \cdot \tag{۲۳}$$

لذا، طبق رابطهٔ (۲۱)، $\| D^k F \|_{\infty} \le M_k$ نشانگر آنکه $F \in C\{M_n\}$. بنابراین $C\{M_n\}$ شبه تحلیلی نیست و برهان تمام می‌باشد.

تمرینات

۱. فرض کنید f یک تابع تمام از نوع نمایی بوده و

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx \cdot$$

ثابت کنید یا به‌ازای هر y حقیقی، $\varphi(y) = \infty$ و یا به‌ازای هر y حقیقی، $\varphi(y) < \infty$. ثابت کنید اگر φ یک تابع کراندار باشد، $f = 0$.

۲. فرض کنید f یک تابع تمام از نوع نمایی باشد که تحدیدش به‌دو خط ناموازی متعلق به L^2 است. ثابت کنید $f = 0$.

۳. فرض کنید f یک تابع تمام از نوع نمایی باشد که تحدیدش به‌دو خط ناموازی کراندار است. نشان دهید که f ثابت می‌باشد. (تمرین ۹ از فصل ۱۲ را به‌کار برید.)

۴. فرض کنید f تمام بوده، $|f(z)| < C\exp(A|z|)$، و $f(z) = \Sigma a_n z^n$. قرار دهید

$$\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{w^{n+1}}$$

و ثابت کنید این سری به‌ازای $|w| > A$ همگراست، اگر $\Gamma(t) = (A+\epsilon)e^{it}$، $0 \le t \le 2\pi$، و Φ تابع آمده در برهان قضیهٔ ۳.۱۹ باشد،

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(w)\, e^{wz}\, dw \cdot$$

(همچنین ر.ک. بخش ۴.۱۹.)

۵. فرض کنید f در مفروضات قضیهٔ ۲.۱۹ صدق کند. ثابت کنید فرمول کشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\zeta + i\epsilon)}{\zeta + i\epsilon - z}\, d\zeta \quad (0 < \epsilon < y) \tag{*}$$

برقرار است؛ در اینجا $z=x+iy$. ثابت کنید به‌ازای تقریباً هر x،

$$f^*(x)=\lim_{y\to \circ} f(x+iy)\cdot$$

رابطهٔ بین f^* و تابع F آمده در قضیهٔ ۲.۱۹ چیست؟ آیا رابطهٔ (⁕) به‌ازای $\epsilon=\circ$ و f^* به‌جای f در انتگرالده برقرار است؟

۶. فرض کنید $\varphi\in L^{\text{۲}}(-\infty,\infty)$ و $\varphi>\circ$ و ثابت کنید تابعی مانند f با $|f|=\varphi$ هست به‌طوری که تبدیل فوریهٔ f بر یک نیمخط صفر است اگر و فقط اگر

$$\int_{-\infty}^{\infty}\log\varphi(x)\,\frac{dx}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}>-\infty\cdot$$

راهنمایی. f^* را مانند تمرین ۵ در نظر بگیرید که در آن $f=\exp(u+iv)$ و

$$u(z)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}\log\varphi(t)\,dt\cdot$$

۷. فرض کنید f یک تابع مختلط بر مجموعهٔ بستهٔ E در صفحه باشد. ثابت کنید دو شرط زیر بر f با یکدیگر هم‌ارزند:

(آ) یک مجموعهٔ باز مانند $\Omega\supset E$ و یک تابع مانند $F\in H(\Omega)$ هست به‌طوری که به‌ازای $z\in E$، $F(z)=f(z)$؛

(ب) به‌هر $\alpha\in E$ یک همسایگی مانند V_α از α و یک تابع مانند $F_\alpha\in H(V_\alpha)$ چنان نظیر است که در $V_\alpha\cap E$، $F_\alpha(z)=f(z)$.

(حالت خاصی از این در قضیهٔ ۹.۱۹ ثابت شده است.)

۸. ثابت کنید $C\{n!\}=C\{n^n\}$.

۹. ثابت کنید رده‌هایی شبه تحلیلی وجود دارند که از $C\{n!\}$ وسیعترند.

۱۰. همانند برهان قضیهٔ ۱۱.۱۹ قرار دهید $\lambda_n=M_{n-\text{۱}}/M_n$، $g_\circ\in C_c(R^{\text{۱}})$ را اختیار و تعریف کنید

$$g_n(x)=(\text{۲}\lambda_n)^{-\text{۱}}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} g_{n-\text{۱}}(x-t)\,dt\ (n=\text{۱},\text{۲},\text{۳},\cdots)\cdot$$

مستقیماً (بدون استفاده از تبدیلات فوریه یا توابع هلوریخت) ثابت کنید که تابع $g=\lim g_n$ نشان می‌دهد که در قضیهٔ ۱۱.۱۹ قسمت (ث) قسمت (آ) را ایجاب می‌کند. ($g_\circ$ را می‌توانید هر تابع مناسبی اختیار کنید.)

۱۱. برای $\varphi\in C^\infty$ با محافظ در $[-\text{۲},\text{۲}]$ که به‌ازای $-\text{۱}\le x\le\text{۱}$، $\varphi(x)=\text{۱}$ فرمول صریح بیابید.

۱۲. ثابت کنید به‌هر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$ از اعداد مختلط یک تابع مانند $f\in C^\infty$ نظیر است که به‌ازای $n=\circ,\text{۱},\text{۲},\cdots$، $(D^nf)(\circ)=\alpha_n$. **پیشنهاد.** هرگاه φ همانند تمرین ۱۱ بوده،

$\beta_n = \alpha_n / n!$، $g_n(x) = \beta_n x^n \varphi(x)$، و

$$f_n(x) = \lambda_n^{-n} g_n(\lambda_n x) = \beta_n x^n \varphi(\lambda_n x),$$

آنگاه به‌ازای $k = 0, \cdots, n-1$، $\| D^k f_n \|_\infty < 2^{-n}$ مشروط بر اینکه λ_n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد. $f = \Sigma f_n$ را اختیار نمایید.

۱۳. تابع $f \in C^\infty$ را طوری بیابید که سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(a)}{n!} (x-a)^n$$

به‌ازای هر $a \in R^1$ دارای شعاع همگرایی ۰ باشد. **پیشنهاد.** قرار دهید

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}$$

که درآن $\{c_k\}$ و $\{\lambda_k\}$ دنباله‌هایی ازاعداد مثبت‌اند که‌به‌ازای $n = 0, 1, 2, \cdots$، $\Sigma c_k \lambda_k^n < \infty$ و درنتیجه $c_n \lambda_n^n$ بسیار سریع صعود می‌کند و از مجموع تمام جملات دیگر سری $\Sigma c_k \lambda_k^n$ بسیار بزرگتر است. مثلاً قرار دهید $c_k = \lambda_k^{1-k}$ و $\{\lambda_k\}$ را طوری بگیرید که

$$\lambda_k > 2 \sum_{j=1}^{k-1} c_j \lambda_j^k \quad \text{و} \quad \lambda_k > k^{2k} \cdot$$

۱۴. فرض کنید $C\{M_n\}$ شبه تحلیلی بوده، $f \in C\{M_n\}$، و به‌ازای بی‌نهایت $x \in [0, 1]$، $f(x) = 0$. چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

۱۵. فرض کنید X فضای برداری جمیع تابعهای تمام f صادق در $|f(z)| \le C e^{\pi |z|}$ به‌ازای $C < \infty$ ای بوده و تحدیدشان به‌محور حقیقی در L^2 باشد. به‌هر $f \in X$ تحدیدش به‌اعداد صحیح را مربوط ساخته و ثابت کنید $f \to \{f(n)\}$ یک نگاشت خطی یک به‌یک از X به روی ℓ^2 می‌باشد.

۱۶. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر بر $(-\infty, \infty)$ باشد به‌طوری که به‌ازای هر x، $|f(x)| < e^{-|x|}$. ثابت کنید تبدیل فوریه‌اش $\hat{f}$ نمی‌تواند محافظ فشرده داشته باشد مگر آنکه $f(x) = 0$ ت. هـ.

فصل بیست
تقریب یکنواخت به وسیلهٔ چند جمله ایها

آشنایی

۲۰.۱. فرض کنیم K° درون مجموعهٔ فشردهٔ K در صفحهٔ مختلط باشد. (طبق تعریف، K° اجتماع تمام قرصهای بازی است که زیرمجموعه‌های K می‌باشند. البته حتی اگر K تهی نباشد، K° ممکن است باشد.) فرض کنیم $P(K)$ مجموعهٔ تمام توابعی بر K باشد که حدود یکنواخت چندجمله‌ایها از zاند. می‌پرسیم: چه توابعی تعلق به $P(K)$ دارند؟ بلافاصله دو شرط لازم به‌ذهن می‌آیند:

هرگاه $f \in P(K)$، آنگاه $f \in C(K)$ و $f \in H(K^\circ)$.

سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا این شرایط لازم کافی نیز هستند. اگر K صفحه را جدا سازد (یعنی متمم K همبند نباشد)، جواب منفی است. ما این امر را در بخش ۱۳.۸ دیدیم. از آن سو، اگر K بازهٔ بسته‌ای بر محور حقیقی باشد (که در این صورت $K^\circ = \varnothing$)، قضیهٔ تقریب وایراشتراس حکم می‌کند که

$$P(K) = C(K)\cdot$$

لذا اگر K یک بازهٔ بسته باشد، جواب مثبت است. قضیهٔ رونگه نیز در این جهت اشاره دارد زیرا این قضیه می‌گوید که به‌ازای مجموعه‌های فشردهٔ K که صفحه را جدا نمی‌سازند، $P(K)$ شامل دست کم تمام $f \in C(K)$هایی است که توسیعهای هلوریخت به‌مجموعهٔ بازی مانند $\Omega \supset K$ دارند.

در این فصل قضیهٔ مرگلیان را ثابت می‌کنیم که بدون فرضهای اضافی می‌گوید که اگر K صفحه را جدا نسازد، شرایط لازم فوق‌الذکر کافی نیز هستند.

ابزارهای اصلی برهان به‌قرار زیرند: قضیهٔ توسیع تتس (*Tietze*)، یک فرایند هموارسازی مستلزم پیچشها، قضیهٔ رونگه، و لم ۲.۲۰ که برهانش تابع خواص ردهٔ $\mathscr{T}$ است که در فصل ۱۴ معرفی شد.

چند لم

۲.۲۰ لم. *فرض کنیم D یک قرص باز به‌شعاع $r > 0$ بوده، $E \subset D$، E فشرده و همبند باشد، $\Omega = S^2 - E$ همبند باشد، و قطر E دست کم r باشد. در این صورت تابعی مانند $g \in H(\Omega)$ و ثابتی مانند b با خاصیت زیر موجودند:*
اگر

$$Q(\zeta, z) = g(z) + (\zeta - b) g^2(z), \tag{1}$$

نامساویهای

$$|Q(\zeta, z)| < \frac{100}{r}, \tag{2}$$

$$\left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \right| < \frac{1{,}000 r^2}{|z - \zeta|^3} \tag{3}$$

به‌ازای هر $z \in \Omega$ و هر $\zeta \in D$ برقرارند.

یادآور می‌شویم که S^2 کرهٔ ریمان بوده و قطر E سوپرمم اعداد $|z_1 - z_2|$ است که $z_1 \in E$ و $z_2 \in E$.

برهان. بی‌آنکه به‌کلیت خللی وارد شود فرض می‌کنیم مرکز D در مبدأ باشد. درنتیجه $D = D(0; r)$.

استلزام (ب) ← (ت) قضیهٔ ۱۱.۱۳ نشان می‌دهد که Ω همبند ساده است. (توجه کنید که $\infty \in \Omega$.) لذا، طبق قضیهٔ نگاشت ریمان، یک نگاشت همدیس مانند F از U به‌روی Ω هست به‌طوری‌که $F(0) = \infty$. F توسیعی به‌شکل زیر دارد:

$$F(w) = \frac{a}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \quad (w \in U). \tag{4}$$

تعریف می‌کنیم

$$g(z) = \frac{1}{a} F^{-1}(z) \quad (z \in \Omega), \tag{5}$$

که در آن F^{-1} نگاشتی از Ω به‌روی U است که F را برمی‌گرداند، و قرار می‌دهیم

$$b = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z g(z)\, dz, \tag{6}$$

که در آن Γ دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به‌مرکز o و شعاع r است.

بنابر (۴)، قضیهٔ ۱۵.۱۴ را می‌توان بر F/a اعمال کرد. این قضیه می‌گوید که قطر متمم $(F/a)(U)$ حداکثر ۴ است. لذا $\operatorname{diam} E \le ۴/|a|$ · چون $\operatorname{diam} E \ge r$، پس

$$|a| \ge \frac{r}{۴} \cdot \tag{۷}$$

چون g یک نگاشت همدیس از Ω به‌روی $D(۰;۱/|a|)$ است، نامساوی (۷) نشان می‌دهد که

$$|g(z)| < \frac{۴}{r} \quad (z \in \Omega) \tag{۸}$$

و چون Γ یک مسیر در Ω به‌طول $۲\pi r$ است، رابطهٔ (۶) نتیجه می‌دهد که

$$|b| < ۴r \cdot \tag{۹}$$

هرگاه $\zeta \in D$، آنگاه $|\zeta| < r$; درنتیجه روابط (۱)، (۸)، و (۹) ایجاب می‌کنند که

$$|Q| \le \frac{۴}{r} + ۵r\left(\frac{۱۶}{r^۲}\right) < \frac{۱۰۰}{r} \cdot \tag{۱۰}$$

این نامساوی (۲) را ثابت خواهد کرد.

$\zeta \in D$ را ثابت می‌گیریم. هرگاه $z = F(w)$، آنگاه $zg(z) = wF(w)/a$؛ و چون وقتی $w \to ۰$، $wF(w) \to a$، پس وقتی $z \to \infty$، $zg(z) \to ۱$ · لذا g توسیعی به‌شکل زیر دارد:

$$g(z) = \frac{۱}{z-\zeta} + \frac{\lambda_۲(\zeta)}{(z-\zeta)^۲} + \frac{\lambda_۳(\zeta)}{(z-\zeta)^۳} + \cdots \; (|z-\zeta| > ۲r) \cdot \tag{۱۱}$$

فرض کنیم $\Gamma_۰$ یک دایرهٔ بزرگ به‌مرکز o باشد. ازرابطهٔ (۱۱) (طبق قضیهٔ کشی) معلوم می‌شود که

$$\lambda_۲(\zeta) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\Gamma_۰} (z-\zeta) g(z)\, dz = b - \zeta \cdot \tag{۱۲}$$

این $\lambda_۲(\zeta)$ را در (۱۱) می‌گذاریم. در این صورت رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که تابع

$$\varphi(z) = \left[Q(\zeta, z) - \frac{۱}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^۳ \tag{۱۳}$$

وقتی $z \to \infty$ کراندار است. لذا φ یک انفراد قابل رفع در ∞ دارد. هرگاه $z \in \Omega \cap D$، آنگاه

$|z-\zeta| < ۲r$ ؛ درنتیجه از روابط (۲) و (۱۳) داریم

$$|\varphi(z)| < ۸r^۳ |Q(\zeta, z)| + ۴r^۲ < ۱,۰۰۰ r^۲ \cdot \tag{۱۴}$$

بنابر قضیهٔ مدول ماکزیمم، رابطهٔ (۱۴) به‌ازای هر $z \in \Omega$ برقرار است، و این امر رابطهٔ (۳) را

ثابت خواهد کرد.

۳.۲۰ لم. *فرض کنیم $f \in C_c'(R^2)$، یعنی در فضای تمام توابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر در صفحه، با محافظ فشرده باشد. قرار می‌دهیم*

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \tag{1}$$

در این صورت «فرمول کشی» زیر برقرار است:

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{R^2} \frac{(\bar{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta \, (\zeta = \xi + i\eta) \cdot \tag{2}$$

برهان. این لم را می‌توان از قضیهٔ گرین $(Green)$ نتیجه گرفت. ولی برهان مستقیم سادهٔ زیر را ذکر می‌کنیم:

قرار می‌دهیم $\varphi(r,\theta) = f(z + re^{i\theta})$ که در آن $r > 0$ و θ حقیقی است. اگر $\zeta = z + re^{i\theta}$، از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$(\bar{\partial} f)(\zeta) = \frac{1}{2} e^{i\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right]\varphi(r,\theta) \cdot \tag{3}$$

لذا طرف راست (۲) مساوی حد زیر به‌ازای $\varepsilon \to 0$ است:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) d\theta\, dr \cdot \tag{4}$$

به‌ازای هر $r > 0$، φ نسبت به θ متناوب با دورهٔ تناوب 2π است. لذا انتگرال $\partial \varphi / \partial \theta$ مساوی ۰ است، و رابطهٔ (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \varphi(\varepsilon, \theta)\, d\theta \cdot \tag{5}$$

وقتی $\epsilon \to 0$، $\varphi(\epsilon, \theta) \to f(z)$ به‌طور یکنواخت. این رابطهٔ (۲) را به‌ما خواهد داد.

ما قضیهٔ توسیع تیتس را در همان محدوده‌ای که لم اوریزن ثابت شد به‌ثبوت می‌رسانیم زیرا این قضیه نتیجهٔ مستقیم آن لم می‌باشد.

۴.۲۰ قضیهٔ توسیع تیتس. *فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشردهٔ X بوده و $f \in C(K)$. در این صورت تابعی مانند $f \in C_c(X)$ هست به‌طوری که به‌ازای هر $x \in K$، $F(x) = f(x)$.*

(همانند قضیهٔ لوسین می‌توان طوری ترتیب داد که $\| F \|_X = \| f \|_K$.)

برهان. فرض کنیم f حقیقی بوده و $-1 \le f \le 1$. همچنین W یک مجموعهٔ باز با بست فشرده

باشد به‌طوری که $K\subset W$. قرار می‌دهیم

$$K^+=\{x\in K: f(x)\geq \tfrac{1}{3}\} \text{ و } K^-=\{x\in K: f(x)\leq -\tfrac{1}{3}\}. \qquad (1)$$

در این صورت K^+ و K^- زیرمجموعه‌های فشردهٔ ازهم جدایی از W اند. به‌عنوان نتیجه‌ای از لم اوریزن، یک تابع مانند $f_1\in C_c(X)$ هست به‌طوری‌که $f_1(x)=\frac{1}{3}$ بر K^+؛ $f_1(x)=-\frac{1}{3}$ بر K^-؛ به‌ازای هر $x\in X$، $-\frac{1}{3}\leq f_1(x)\leq \frac{1}{3}$؛ و محافظ f_1 در W قرار دارد. لذا

$$|f-f_1|\leq \tfrac{2}{3} \text{ بر } K \text{ و } |f_1|\leq \tfrac{1}{3} \text{ بر } X. \qquad (2)$$

این ساختن را با $f-f_1$ به‌جای f تکرار می‌کنیم: یک تابع مانند $f_2\in C_c(X)$ با محافظ در W هست به‌طوری که

$$|f-f_1-f_2|\leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \text{ بر } K \text{ و } |f_2|\leq \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} \text{ بر } X. \qquad (3)$$

بدین ترتیب توابعی مانند $f_n\in C_c(X)$ با محافظهای در W به‌دست می‌آیند که

$$|f-f_1-\cdots-f_n|\leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \text{ بر } K \text{ و } |f_n|\leq \tfrac{1}{3}.\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ بر } X. \qquad (4)$$

قرار می‌دهیم $F=f_1+f_2+f_3+\cdots$. بنابر رابطهٔ (۴)، سری بر K به f همگرا و بر X به‌طور یکنواخت همگراست. لذا F پیوسته می‌باشد. همچنین محافظ F در $\overline{W}$ قرار دارد.

قضیهٔ مرگلیان

۵.۲۰ قضیه. هرگاه K یک مجموعهٔ فشرده در صفحه باشد که متممش همبند است و f یک *تابع مختلط پیوسته بر K باشد که درون K هلوریخت است و $\epsilon>0$، آنگاه یک چندجمله‌ای مانند P وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $z\in K$، $|f(z)-P(z)|<\epsilon$.*

هرگاه درون K تهی باشد، آنگاه بخشی از مفروضات خود بخود صادق بوده و نتیجه به‌ازای هر $f\in C(K)$ برقرار است. توجه کنید که K لزوماً همبند نیست.

برهان. بنابر قضیهٔ تیتس، f را می‌توان به‌یک تابع پیوسته در صفحه با محافظ فشرده وسعت داد. یکی از این توسیعها را اختیار کرده و مجدداً آن را با f نشان می‌دهیم.

به‌ازای $\delta>0$، $w(\delta)$ را سوپرمم اعداد

$$|f(z_2)-f(z_1)|$$

می‌گیریم که در آنها $z_۱$ و $z_۲$ در شرط $|z_۲-z_۱| \leq \delta$ صدق می‌کنند. چون f به‌طور یکنواخت پیوسته است، داریم

$$\lim_{\delta \to \circ} w(\delta) = \circ \cdot \qquad (۱)$$

از حالا به‌بعد δ ثابت می‌باشد. ثابت می‌کنیم یک چندجمله‌ای مانند P هست به‌طوری که

$$|f(z) - P(z)| < ۱\circ{,}\circ\circ\circ\, w(\delta) \quad (z \in K) \cdot \qquad (۲)$$

این طبق (۱) قضیه را ثابت خواهد کرد.

اولین هدف ما ساختن تابعی مانند $\Phi \in C_c'(R^۲)$ است به‌طوری که به‌ازای هر z،

$$|f(z) - \Phi(z)| \leq w(\delta), \qquad (۳)$$

$$|(\bar\partial \Phi)(z)| < \frac{۲w(\delta)}{\delta}, \qquad (۴)$$

و

$$\Phi(z) = -\frac{۱}{\pi} \iint_X \frac{(\bar\partial \Phi)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \,(\zeta = \xi + i\eta), \qquad (۵)$$

که در آن X مجموعهٔ تمام نقاط در محافظ Φ است که فاصله‌شان تا متمم K از δ متجاوز نیست. (لذا X نقطه‌ای «دور در داخل» K ندارد.)

ما Φ را به‌صورت پیچش f با یک تابع هموار مانند A می‌سازیم. به‌ازای $r > \delta$ قرار می‌دهیم $a(r) = \circ$، و نیز

$$a(r) = \frac{۳}{\pi\delta^۲}\left(۱ - \frac{r^۲}{\delta^۲}\right)^۲ \quad (\circ \leq r \leq \delta), \qquad (۶)$$

و به‌ازای هر z مختلط تعریف می‌کنیم

$$A(z) = a(|z|) \cdot \qquad (۷)$$

واضح است که $A \in C_c'(R^۲)$. حکم می‌کنیم که

$$\iint_{R^۲} A = ۱, \qquad (۸)$$

$$\iint_{R^۲} \bar\partial A = \circ, \qquad (۹)$$

$$\iint_{R^۲} |\bar\partial A| = \frac{۲۴}{۱۵\delta} < \frac{۲}{\delta} \cdot \qquad (۱\circ)$$

ثابتها در (۶) طوری تعدیل شده‌اند که رابطهٔ (۸) برقرار است. (انتگرال را در مختصات قطبی

حساب می‌کنیم.) رابطهٔ (۹) صرفاً به‌این خاطر که A محافظ فشرده دارد برقرار است. برای محاسبهٔ (۱۰)، $\bar{\partial} A$ را همانند برهان لم ۳.۲۰ در مختصات قطبی بیان کرده و توجه می‌کنیم که $\partial A/\partial \theta = ۰$ و $|\partial A/\partial r| = -a'(r)$.

حال تعریف می‌کنیم

$$(۱۱)\quad \Phi(z) = \iint_{R^۲} f(z-\zeta)A(\zeta)\,d\xi\,d\eta = \iint_{R^۲} A(z-\zeta)f(\zeta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

چون f و A محافظ فشرده دارند، Φ نیز چنین است. و چون

$$(۱۲)\qquad \Phi(z) - f(z) = \iint_{R^۲} [f(z-\zeta) - f(z)]A(\zeta)\,d\xi\,d\eta$$

و اگر $|\zeta| > \delta$ ، $A(\zeta) = ۰$، رابطهٔ (۳) ازرابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود. چون $A \in C_c'(R^۲)$ ، خارج قسمتهای تفاضلی A به‌مشتقات جزئی نظیر A به‌طور کراندار همگرایند. لذا از آخرین عبارت در (۱۱) می‌توان زیر علامت انتگرال مشتق گرفت و به‌دست آورد

$$(\bar{\partial}\Phi)(z) = \iint_{R^۲} (\bar{\partial} A)(z-\zeta)f(\zeta)\,d\xi\,d\eta$$

$$(۱۳)\qquad = \iint_{R^۲} f(z-\zeta)(\bar{\partial} A)(\zeta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \iint_{R^۲} [f(z-\zeta) - f(z)](\bar{\partial} A)(\zeta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

آخرین تساوی تابع (۹) است. حال روابط (۱۰) و (۱۳) نامساوی (۴) را به‌دست می‌دهند. اگر رابطهٔ (۱۳) را با Φ_x و Φ_y به‌جای $\bar{\partial}\Phi$ بنویسیم، معلوم می‌شود که Φ دارای مشتقات جزئی پیوسته است. لذا لم ۳.۲۰ درمورد Φ به‌کار می‌رود، و اگر بتوان نشان داد که در G، $\bar{\partial}\Phi = ۰$ که G مجموعهٔ تمام $z \in K$هایی است که فاصله‌شان تا متمم K از δ متجاوز است، رابطهٔ (۵) نتیجه خواهد شد. ما این کار را با نشان دادن اینکه

$$(۱۴)\qquad \Phi(z) = f(z) \quad (z \in G)$$

انجام می‌دهیم. توجه کنید که در G، $\bar{\partial} f = ۰$ زیرا f در G هلوریخت است. (یادآور می‌شویم که $\bar{\partial}$ عملگر کشی ـ ریمان تعریف شده در بخش ۱.۱۱ است.) حال اگر $z \in G$، $z-\zeta$ به‌ازای هر ζ که $|\zeta| < \delta$ درون K است. لذا خاصیت مقدار میانگین برای تابعهای توافقی، طبق اولین معادلهٔ (۱۱)، نتیجه می‌دهد که به‌ازای هر $z \in G$،

$$(۱۵)\qquad \Phi(z) = \int_۰^{\delta} a(r)\,r\,dr \int_۰^{۲\pi} f(z - re^{i\theta})\,d\theta$$

$$= 2\pi f(z)\int_0^{\delta} a(r)\,r\,dr = f(z)\int_{R^2} A = f(z)\cdot$$

پس روابط (۳)، (۴)، و (۵) ثابت شده‌اند.

تعریف X نشان می‌دهد که X فشرده است و آن را می‌توان با تعدادی متناهی قرص باز مانند D_1، $\cdots$ ، D_n به‌شعاع 2δ که مرکزشان در K **نیست** پوشانید. چون S^2-K همبند است، مرکز هر D_j را می‌توان با یک مسیر چندضلعی در S^2-K به ∞ وصل کرد. پس هر D_j شامل یک مجموعهٔ همبند فشرده مانند E_j به‌قطر دست کم 2δ است؛ درنتیجه S^2-E_j همبند است و لذا $K\cap E_j=\Phi$.

حال لم ۲.۲۰ را به‌ازای $r=2\delta$ به‌کار می‌بریم. پس توابعی مانند $g_j\in H(S^2-E_j)$ و ثابتهایی چون b_j وجود دارند به‌طوری که نامساویهای

$$|Q_j(\zeta,z)|<\frac{50}{\delta}, \tag{۱۶}$$

$$\left|Q_j(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right|<\frac{4{,}000\,\delta^2}{|z-\zeta|^3} \tag{۱۷}$$

به‌ازای $z\notin E_j$ و $\zeta\in D_j$ و در صورتی که

$$Q_j(\zeta,z)=g_j(z)+(\zeta-b_j)g_j^2(z) \tag{۱۸}$$

برقرارند.

فرض کنیم Ω متمم $E_1\cup\cdots\cup E_n$ باشد. در این صورت Ω یک مجموعهٔ باز شامل K می‌باشد.

قرارمی‌دهیم $X_1=X\cap D_1$ وبه‌ازای $2\le j\le n$، $X_j=(X\cap D_j)-(X_1\cup\cdots\cup X_{j-1})$. تعریف می‌کنیم

$$R(\zeta,z)=Q_j(\zeta,z)\quad (z\in\Omega \text{ و } \zeta\in X_j) \tag{۱۹}$$

و

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\iint_X(\bar\partial\Phi)(\zeta)R(\zeta,z)\,d\xi\,d\eta\ (z\in\Omega)\cdot \tag{۲۰}$$

چون

$$F(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\iint_{X_j}(\bar\partial\Phi)(\zeta)Q_j(\zeta,z)\,d\xi\,d\eta, \tag{۲۱}$$

رابطهٔ (۱۸) نشان می‌دهد که F یک ترکیب خطی متناهی از توابع g_j و $g^2{}_j$ است. لذا $F\in H(\Omega)$.

بنابر روابط (۲۰)، (۴)، و (۵) داریم

$$|F(z)-\Phi(z)|<\frac{2w(\delta)}{\pi\delta}\iint_X\left|R(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right|d\xi\,d\eta\ (z\in\Omega)\cdot \tag{۲۲}$$

ملاحظه می‌کنیم که نامساویهای (۱۶) و (۱۷) در صورت تعویض Q_j با R به‌ازای $\zeta \in X$ و $z \in \Omega$ معتبرند. زیرا هرگاه $\zeta \in X$، آنگاه به‌ازای jای، $\zeta \in X_j$، و در این صورت به‌ازای هر $z \in \Omega$، $R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z)$.

حال $z \in \Omega$ را ثابت گرفته، قرار می‌دهیم $\zeta = z + \rho e^{i\theta}$، و انتگرالده موجود در (۲۲) را به‌وسیلهٔ (۱۶) اگر $\rho > ۴\delta$ و به‌وسیلهٔ (۱۷) اگر $\rho \leq ۴\delta$ تخمین می‌زنیم. در این صورت انتگرال موجود در (۲۲) از مجموع

$$۲\pi \int_{\circ}^{۴\delta} \left(\frac{۵\circ}{\delta} + \frac{۱}{\rho}\right) \rho \, d\rho = ۸\circ۸\pi\delta \tag{۲۳}$$

و

$$۲\pi \int_{۴\delta}^{\infty} \frac{۴,\circ\circ\circ\,\delta^۲}{\rho^۳} \rho \, d\rho = ۲,\circ\circ\circ\,\pi\delta \tag{۲۴}$$

کمتر است. لذا از رابطهٔ (۲۲) داریم

$$|F(z) - \Phi(z)| < ۶,\circ\circ\circ\, w(\delta) \quad (z \in \Omega) \cdot \tag{۲۵}$$

چون $F \in H(\Omega)$، $K \subset \Omega$، و $S^۲ - K$ همبند است، قضیهٔ رونگه نشان می‌دهد که F را می‌توان بر K به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها به‌طور یکنواخت تقریب کرد. لذا روابط (۳) و (۲۵) نشان می‌دهند که (۲) را می‌توان برقرار ساخت. این امر برهان را تمام می‌سازد.

لازم است به‌یک ویژگی نامتعارف این برهان اشاره کنیم. باید ثابت می‌شد که تابع داده شدهٔ f در زیر فضای بستهٔ $P(K)$ از $C(K)$ است. (ما از اصطلاحات بخش ۱.۲۰ استفاده می‌کنیم.) اولین گام ما تقریب f به‌وسیلهٔ Φ بود. ولی این گام ما را از $P(K)$ خارج می‌سازد زیرا Φ طوری ساخته شده است که در حالت کلی با تمام درون K هلوریخت نیست. لذا Φ در فاصلهٔ مثبتی از $P(K)$ قرار دارد. با این حال رابطهٔ (۲۵) نشان می‌دهد که این فاصله از مضرب ثابتی از $w(\delta)$ کمتر است. [درواقع پس از اثبات قضیه می‌دانیم که این فاصله طبق (۳) به‌جای $۶,\circ\circ\circ\, w(\delta)$ حداکثر $w(\delta)$ است.] برهان (۲۵) به‌نامساوی (۴) و اینکه در G، $\bar{\partial}\Phi = \circ$ بستگی دارد. چون توابع هلوریخت φ به‌وسیلهٔ $\bar{\partial}\varphi = \circ$ توصیف می‌شوند، رابطهٔ (۴) را می‌توان با گفتن اینکه Φ خیلی از هلوریخت بودن دور نیست درنظر گرفت، و این تعبیر به‌وسیلهٔ (۲۵) تأیید می‌شود.

تمرینات

۱. قضیهٔ مرگلیان را به‌حالتی که $S^۲ - K$ تعدادی متناهی مؤلفه دارد تعمیم دهید: در این وضع ثابت کنید هر $f \in C(K)$ که درون K هلوریخت است را می‌توان بر K به‌وسیلهٔ توابع گویا به‌طور یکنواخت تقریب کرد.

۲. با تحقیق جزئیات مثال زیر نشان دهید که تمرین ۱ را نمی‌توان به‌مجموعه‌های فشردهٔ دلخواه K در صفحه کشانید. فرض کنید $D_n(\alpha_n; r_n)$، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳ \cdots$، قرصهای باز از هم

جدایی در U باشند که اجتماعشان V در U چگال است و $\Sigma r_n < \infty$. قرار دهید $K = \overline{U} - V$ و فرض کنید Γ و γ_n مسیرهای زیر باشند:

$$\Gamma(t) = e^{it} \text{ و } \gamma_n(t) = \alpha_n + r_n e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)،$$

و تعریف کنید

$$L(f) = \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_n} f(z)\,dz \quad (f \in C(K)).$$

ثابت کنید L یک تابعی خطی کراندار بر $C(K)$ است، و به‌ازای هر تابع گویای R که قطبهایش خارج Kاند، $L(R) = 0$، و یک تابع مانند $f \in C(K)$ هست که $L(f) \neq 0$.

۳. نشان دهید که تابع g ساخته شده در برهان لم ۲.۲۰ در بین تمام $f \in H(\Omega)$هایی که وقتی $z \to \infty$، $zf(z) \to 1$ دارای کوچکترین نرم سوپرمم است. (این امر انگیزهٔ برهان لم فوق‌الذکر می‌باشد.) همچنین در آن برهان نشان دهید که $b = c_0$ و لذا نامساوی $|b| < 4r$ را می‌توان با $|b| < r$ عوض کرد. درواقع b در پوستهٔ محدب مجموعهٔ E قرار دارد.

ضمیمه
قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف

ابتدا لمی را ثابت می‌کنیم که در تلفیق با اصل موضوع انتخاب به‌یک برهان نسبتاً فوری از قضیهٔ ۲۱.۴ منجر می‌شود.

اگر $\mathscr{F}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها بوده و $\Phi \subset \mathscr{F}$، Φ را **زیرزنجیر** $\mathscr{F}$ نامیم اگر Φ به‌وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده باشد. این به‌طور صریح یعنی هرگاه $A \in \Phi$ و $B \in \Phi$، آنگاه $A \subset B$ یا $B \subset A$. اجتماع تمام اعضای Φ را تنها **اجتماع** Φ خواهیم گفت.

لم. ***فرض کنیم $\mathscr{F}$ گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X باشد به‌طوری که اجتماع هر زیرزنجیر از $\mathscr{F}$ متعلق به $\mathscr{F}$ باشد. همچنین g تابعی باشد که به‌هر $A \in \mathscr{F}$ مجموعهٔ $g(A) \in \mathscr{F}$ را چنان مربوط می‌کند که $A \subset g(A)$ و $g(A)-A$ حداکثر از یک عنصر تشکیل شده باشد. در این صورت عنصری مانند $A \in \mathscr{F}$ وجود دارد که $g(A)=A$.***

برهان. $A_0 \in \mathscr{F}$ را ثابت گرفته و زیردنبالهٔ $\mathscr{F}'$ از $\mathscr{F}$ را یک **برج** نامیم اگر $\mathscr{F}'$ از سه خاصیت زیر برخوردار باشد:

(آ) $A_0 \in \mathscr{F}'$؛

(ب) اجتماع هر زیرزنجیر از $\mathscr{F}'$ متعلق به $\mathscr{F}'$ باشد؛

(پ) هرگاه $A \in \mathscr{F}'$، آنگاه نیز $g(A) \in \mathscr{F}'$.

خانوادهٔ تمام برجها نامتناهی است. زیرا هرگاه $\mathscr{F}_1$ گردایهٔ تمام $A \in \mathscr{F}$ هایی باشد که $A_0 \subset A$، آنگاه $\mathscr{F}_1$ یک برج می‌باشد. فرض کنیم $\mathscr{F}_0$ اشتراک تمام برجها باشد. در این صورت

$\mathscr{F}_\circ$ یک برج است (این امر بدیهی است) ولی هیچ زیرگردایهٔ حقیقی از $\mathscr{F}_\circ$ یک برج نیست. همچنین اگر $A \in \mathscr{F}_\circ$، $A_\circ \subset A$. ایدهٔ برهان نشان دادن این امر است که $\mathscr{F}_\circ$ زیرزنجیری از $\mathscr{F}$ می‌باشد.

فرض کنیم Γ گردایهٔ تمام $C \in \mathscr{F}_\circ$هایی باشد که هر $A \in \mathscr{F}_\circ$ در $A \subset C$ یا $C \subset A$ صدق نماید. همچنین $\Phi(C)$، به‌ازای هر $C \in \Gamma$، گردایهٔ تمام $A \in \mathscr{F}_\circ$هایی باشد که $A \subset C$ یا $g(C) \subset A$.

خواص (آ) و (ب) بوضوح توسط Γ و توسط هر $\Phi(C)$ برقرارند. $C \in \Gamma$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $A \in \Phi(C)$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $g(A) \in \Phi(C)$. اگر $A \in \Phi(C)$، سه‌حالت موجود است: یا $A \subset C$ و $A \neq C$، یا $A = C$، یا $g(C) \subset A$. هرگاه A یک زیرمجموعهٔ حقیقی C باشد، آنگاه C نمی‌تواند یک زیرمجموعهٔ حقیقی $g(A)$ باشد، در غیراین صورت $g(A) - A$ شامل دست کم دو عنصر است. چون $C \in \Gamma$، پس $g(A) \subset C$. هرگاه $A = C$، آنگاه $g(A) = g(C)$. هرگاه $g(C) \subset A$، آنگاه نیز $g(C) \subset g(A)$ زیرا $A \subset g(A)$. لذا $g(A) \in \Phi(C)$ و ثابت کرده‌ایم که $\Phi(C)$ یک برج است. حال مینیمالی $\mathscr{F}_\circ$ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $C \in \mathscr{F}_\circ$، $\Phi(C) = \mathscr{F}_\circ$.

به‌عبارت دیگر، هرگاه $A \in \mathscr{F}_\circ$ و $C \in \Gamma$، آنگاه $A \subset C$ یا $g(C) \subset A$. ولی این می‌گوید که $g(C) \in \Gamma$. لذا Γ یک برج است و مینیمالی $\mathscr{F}_\circ$ نشان می‌دهد که $\Gamma = \mathscr{F}_\circ$. پس از تعریف Γ معلوم می‌شود که $\mathscr{F}_\circ$ کلی مرتب می‌باشد.

فرض کنیم A اجتماع $\mathscr{F}_\circ$ باشد. چون $\mathscr{F}_\circ$ در (ب) صدق می‌کند، $A \in \mathscr{F}_\circ$. بنابر (پ)، $g(A) \in \mathscr{F}_\circ$. و چون A بزرگترین عضو $\mathscr{F}_\circ$ بوده و $A \subset g(A)$، پس $A = g(A)$.

تعریف. یک ***تابع انتخاب*** برای مجموعهٔ X تابعی است مانند f که به‌هر زیرمجموعهٔ ناتهی E از X عنصری از E را مربوط می‌سازد: $f(E) \in E$.

بابیان غیر صوری، f از هر زیرمجموعهٔ ناتهی X یک عنصر «انتخاب» خواهد کرد.

اصل موضوع انتخاب. *برای هر مجموعه یک تابع انتخاب وجود دارد.*

قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف. *هر مجموعهٔ جزئی مرتب ناتهی P شامل یک زیرمجموعهٔ کلی مرتب ماکزیمال است.*

برهان. فرض کنیم $\mathscr{F}$ گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های کلی مرتب P باشد. چون هر زیرمجموعهٔ P که فقط از یک عنصر تشکیل شده است کلی مرتب است، $\mathscr{F}$ تهی نیست. توجه کنید که اجتماع هر زنجیر از مجموعه‌های کلی مرتب کلی مرتب است.

فرض کنیم f تابع انتخاب برای P باشد. اگر $A \in \mathscr{F}$، A^* را مجموعهٔ تمام xهایی در متمم A می‌گیریم که $A \cup \{x\} \in \mathscr{F}$. اگر $A^* \neq \varnothing$، قرار می‌دهیم

$$g(A) = A \cup \{f(A^*)\},$$

و اگر $A^* = \Phi$، قرار می‌دهیم $g(A) = A$.

بنابر لم فوق، به‌ازای دست کم یک $A \in \mathscr{F}$، $A^* = \varnothing$، و هر چنین A یک عنصر ماکزیمال $\mathscr{F}$ می‌باشد.

نکات و یادداشتها

فصل ۱

نخستین کتاب در نظریهٔ جدید انتگرالگیری و مشتقگیری کتاب

"*Leçons sur l'intégration*"

لبگ است که در ۱۹۰۴ منتشر شده است.

برای تاریخچهٔ روشنی از تلاشهای اولیه جهت ساختن یک نظریهٔ انتگرالگیری رضایت‌بخش، ر.ک. مرجع [۴۲]* که شامل بحثهای جالب از مشکلاتی است که حتی ریاضیدانان تراز اول با مفاهیم سادهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها پیش از آنکه واقعاً تعریف و کاملاً درک شوند داشته‌اند.

روش انتگرالگیری مجرد ما در متن از ساکس ($Saks$) [۲۸] الهام گرفته است. اگر σ ـ جبرها را با σ ـ حلقه‌ها عوض کنیم، حالت کلیتری به‌دست می‌آید (**اصول موضوع.** اگر به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳. \cdots$، $A_i \in \mathscr{R}$، داریم $\cup A_i \in \mathscr{R}$ و $A_۱ - A_۲ \in \mathscr{R}$؛ لازم نیست که $X \in \mathscr{R}$)، ولی به‌بهای یک تعریف لزوماً مشروحتر از اندازه‌پذیری .ر.ک. بخش ۱۸ از مرجع [۷]. در تمام کاربردهای کلاسیک، X بیش و کم خود بخود انتگرالپذیر است. این دلیل انتخاب نظریه‌ای ساده‌تر مبتنی بر σ ـ جبرها می‌باشد.

---

*. اعداد داخل کروشه اشاره به کتابنامه دارند.

بخش ۱.۱۱. این تعریف از $\mathscr{B}$ همانند مرجع [۱۲] است. در مرجع [۷] مجموعه‌های بورل σـ حلقه‌ای تعریف می‌شوند که به‌وسیلهٔ مجموعه‌های فشرده تولید می‌گردند. این در فضاهایی که σ ـ فشرده نیستند خانوادهٔ کوچکتری از خانوادهٔ ما می‌باشد.

فصل ۲

بخش ۱۲.۲. صورت معمول لم اوریزن به‌قرار زیر است: هرگاه $K_\circ$ و K_1 مجموعه‌های بستهٔ از هم جدایی در فضای هاسدورف **نرمال** X باشند، آنگاه یک تابع پیوسته بر X هست که بر $K_\circ$ مساوی ۰ و بر K_1 برابر ۱ می‌باشد. برهان درست مثل برهان آمده در متن است.

بخش ۱۴.۲. شکل اصلی این قضیه به‌ازای $X = [\,\circ\,,\,1\,]$ از آن اف.ریس است (۱۹۰۹). برای تاریخچهٔ مشروحتر آن، ر.ک. مرجع [۵]، صفحات ۳۷۳، ۳۸۱ ـ ۳۸۰ و مرجع [۱۲]، صفحات ۱۳۵ ـ ۱۳۴. در اینجا قضیه با همان عمومیت مرجع [۱۲] ارائه شده است. تابع مجموعه‌ای μ که به‌ازای جمیع زیرمجموعه‌های X در برهان قضیهٔ ۱۴.۲ تعریف شده است یک ***اندازهٔ خارجی*** نام دارد و این به‌خاطر زیرجمعی شمارشپذیر بودن آن می‌باشد (مرحلهٔ ۱). برای استفاده‌های اصولی از این مفهوم [که توسط کاراتئودوری (*Carathéodory*) آغاز شده است]، ر.ک. مراجع [۲۵] و [۲۸].

بخش ۲۰.۲. برای ساختنهای مستقیم اندازهٔ لبگ در مسیرهای کلاسیک‌تر، ر.ک. مراجع [۳۱]، [۳۵]، [۲۶]، و [۵۳].

بخش ۲۱.۲. برهان اینکه اصلیت هر σ ـ جبر با تولید شمارشپذیر از c نابیشتر است را می‌توان در صفحات ۱۳۴ ـ ۱۳۳ مرجع [۴۴] یافت. پس از حل تمرین ۱ در فصل ۱ باید متناهی یا ناکمتر بودن این اصلیت از c واضح باشد.

بخش ۲۲.۲. یک مقالهٔ بسیار آموزنده از مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر در رابطه با اندازه‌های پایا تحت گروه عبارت است از

J. Von Neumann, Zur allgemeinen Theorie des Masses, Fundamenta Math., Vol. 13, pp. 73 - 116, 1929.

همچنین ر.ک. مقالهٔ هالموس (*Halmos*) در شمارهٔ ویژهٔ (مه ۱۹۵۸) مجلهٔ زیر:

Bull. Am. Math. Soc

که به‌آثار فون نویمان اختصاص دارد.

بخش ۲۴.۲. مرجع [۲۸]، ص ۷۲.

بخش ۲۵.۲. مرجع [۲۸]، ص ۷۵. شیوهٔ دیگری از نظریهٔ انتگرالگیری لبگ وجود دارد که به‌دانیل (*Daniell*) منسوب است

(*Ann. Math., Vol. 19, pp. 279 - 294, 1917 - 1918*)

که مبتنی بر توسیهای تابعیهای خطی مثبت می‌باشد. اعمال این شیوه بر $C_c(X)$ به‌ساختنی

منجر می‌شود که اصولاً قضیهٔ ویتالی ـ کاراتئودوری را به‌تعریف اندازه‌پذیری بدل می‌سازد. ر.ک. مرجع [۱۷] و، برای بحثی کامل، ر.ک. مرجع [۱۸].

تمرین ۸. دو توسیع جالب از این پدیده در

Amer. Math. Monthly: see Vol 79, pp. 884 - 886, 1972 (R.B.Kirk) and Vol. 91, pp. 564 - 566, 1984 (F.S. Cater)

آمده‌اند.

تمرین ۱۷. این مثال در مقالهٔ زیر:

A Theory Of Radon Measures On Locally Compact Spaces, by R.E. Edwards, Acta Math., Vol. 89, p. 160, 1953

آمده است. متأسفانه در مرجع [۲۷] وجودش نادیده گرفته شده است.

تمرین ۱۸. مرجع [۷]، ص ۲۳۱؛ اساساً از دیودونه (*Dieudonné*) است.

فصل ۳

بهترین مرجع عمومی [۹] است. همچنین ر.ک. فصل ۱ از مرجع [۳۶].

تمرین ۳. جلد ۱ (۱۹۲۰) *Fundamenta Math* شامل سه مقاله در رابطه با تبصرهٔ داخل پرانتز است.

تمرین ۷. جواب بسیار کاملی به‌این سؤال توسط ا. ویلانی (*A. Villani*) در

Am. Math. Monthly, Vol. 92, pp. 485 - 487, 1985

داده شده است.

تمرین ۱۶. مرجع [۲۸]، ص ۱۸. وقتی t روی تمام اعداد حقیقی مثبت تغییر کند، در برهان پیشنهادی یک مسئلهٔ اندازه‌پذیری پیش می‌آید. این دلیل گنجانیدن فرض (دو) می‌باشد. ر.ک.

W. Walter, Am. Math. Monthly, Vol. 84, pp. 118 - 119, 1977.

تمرین ۱۷. دومین برهان پیشنهادی قسمت (ب) توسط دبلیو. پی. نوینجر (*W. P. Novinger*) در

Proc. Am. Math. Soc,. Vol. 34, pp. 627 - 628, 1972

چاپ شده است. این برهان توسط دیویدهال (*David Hall*) نیز کشف شده بود.

تمرین ۱۸. همگرایی در اندازه یک مفهوم طبیعی در نظریهٔ احتمال است. ر.ک. مرجع [۷] در فصل نه.

فصل ۴

در نظریهٔ فضای هیلبرت کتب زیادی موجود است. ما کتابهای [۶] و [۲۴] را به‌عنوان مراجع اصلی پیشنهاد می‌کنیم. همچنین ر.ک. مرجعهای [۵]، [۱۷]، و [۱۹].

کار متعارف در سریهای فوریه مرجع [۳۶] است. برای مقدمات ساده‌تر، ر.ک. مرجعهای [۱۰]، [۳۱]، [۴۳]، و [۴۵].

تمرین ۲. این همان فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت ($Gram$ - $Schmidt$) است.

تمرین ۱۸. توابعی که حدود یکنواخت (بر R^1) اعضای Xاند **تقریباً متناوب** نام دارند.

فصل ۵

در اینجا کار کلاسیک مرجع [۲] است. منابع جدیدتر عبارتند از [۵]، [۱۴]، و [۲۴]. همچنین ر.ک. مراجع [۱۷] و [۴۹].

بخش ۷.۵. در مرجع [۴۸] روابط بین نظریهٔ اندازه از یک سو و قضیهٔ بئر از سوی دیگر به‌طور مشروح بحث شده است.

بخش ۱۱.۵. با آنکه توابع پیوسته‌ای وجود دارند که سری فوریه‌شان بر یک مجموعهٔ چگال G_δ واگراست، مجموعهٔ واگرایی باید از اندازهٔ ۰ باشد. این امر توسط ال. کارسون ($L.$ $Carleson$) در

Acta Math., Vol. 116, pp. 135 - 157, 1966

به‌ازای هر f در $L^2(T)$ ثابت شده است. برهان توسط آر.ا. هانت ($R.$ $A.$ $Hunt$) به $L^p(T)$ به‌ازای $p > 1$ تعمیم یافته است. همچنین ر.ک. مرجع [۴۵] بخصوص فصل دو.

بخش ۲۲.۵. برای بحث عمیقتری از نمایش اندازه‌ها، ر.ک.

Arens and Singer, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 5, pp. 735 - 745, 1954.

همچنین ر.ک. مراجع [۳۹] و [۵۲].

فصل ۶

بخش ۳.۶. ثابت $1/\pi$ بهترین امکان است. ر.ک.

R.P. Kaufman and N.W. Rickert, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 72, pp. 672-676, 1966

و (برای بحثی ساده‌تر)، ر.ک.

W.W. Bledsoe, Am. Math. Monthly, Vol. 77, pp. 180 - 182, 1970.

بخش ۱۰.۶. برهان فون نویمان در بخش مربوط به‌نظریهٔ اندازه در مقاله‌اش

On Rings of Operators, III. Ann. Math., Vol. 41, pp. 94 - 161, 1940

آمده است؛ ر.ک. صفحات ۱۳۰-۱۲۴.

بخش ۱۵.۶. پدیدهٔ $L^\infty \neq (L^1)^*$ توسط ج.تی. شوارتز در

Proc. Am. Math. Soc., Vol 2, pp. 270 - 275, 1951

و توسط اچ. دبلیو. الیس ($H.$ $W.$ $Ellis$) و دی. او. اسنو ($D.$ $O.$ $Snow$) در

Can. Math. Bull., Vol 6, pp. 211 - 229, 1963

مطرح شده است. همچنین ر.ک. مرجع [۷] در ص ۱۳۱ و مرجع [۲۸] در ص ۳۶.

بخش ۱۹.۶. مراجع قضیهٔ ۱۴.۲ در اینجا نیز قابل استفاده‌اند.

تمرین ۶. ر.ک. مرجع [۱۷]، ص ۴۳.

تمرین ۱۰ (چ). ر.ک. مرجع [۳۶]، جلد یک، ص ۱۶۷.

فصل ۷

بخش ۳.۷. این لم پوششی ساده ظاهراً اولین بار در مقالهٔ وینر راجع به‌قضیهٔ ارگودیک (*Duke Math. J., Vol 5, pp. 1 - 18, 1939*) آمده است و لمهای پوششی نقشی اساسی در نظریهٔ مشتقگیری دارند. ر.ک. مراجع [۵۰] و [۵۳] و، برای بحث مشروحتر، ر.ک. مرجع [۴۱].

بخش ۴.۷. توابع ماکزیمال اول بار توسط هاردی ولیتلوود در

Acta Math., Vol. 54, pp. 81 - 116, 1930

معرفی شدند. این مقاله حاوی برهانهای قضایای ۱۸.۸، ۲۵.۱۱ قسمت (ب)، و ۱۱.۱۷ می‌باشد.

بخش ۲۱.۷. همین نتیجه را می‌توان تحت مفروضاتی ضعیفتر به‌دست آورد؛ ر.ک. مرجع [۱۶]، قضایای ۲۶۴ ـ ۲۶۰. توجه کنید که در برهان قضیهٔ ۲۱.۷ از وجود و انتگرالپذیری فقط مشتق **راست** f به‌علاوهٔ پیوستگی f استفاده می‌شود. برای تظریف بیشتر، ر.ک.

P.L. Walker, Amer. Math. Monthly, Vol. 84, pp. 287 - 288, 1977.

بخشهای ۲۵.۷ و ۲۶.۷. این بحث از فرمول تغییر متغیر تقریباً شبیه بحث دی واربرگ (*D. Varberg*) در

Amer. Math. Monthly, Vol. 78, pp. 42 - 45, 1971

است.

تمرین ۵. یک برهان بسیار ساده منسوب به‌کا.استرومبرگ (*K. Stromberg*) در مجلهٔ زیر آمده است:

Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 36,p. 308, 1972.

تمرین ۱۲. برای برهانی مقدماتی که هر تابع یکنوا (درنتیجه هر تابع با تغییر کراندر) ت . هـ. مشتقپذیر است، ر.ک. مرجع [۲۴] صفحات ۹ ـ ۵. در آن کار، این قضیه نقطهٔ شروع نظریهٔ لبگ بوده است. برهانی دیگر (و حتی ساده‌تر) توسط دی. آستین (*D. Austin*) در

Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 16, pp. 220 - 221, 1965

داده شده است.

تمرین ۱۸. این توابع φ_n توابع را دماخر (*Rademacher*) می‌باشند. فصل پنج درمرجع [۳۶]

شامل قضایای دیگری راجع به‌آنها می‌باشد.

فصل ۸

قضیهٔ فوبینی در اینجا مانند مرجع [۷] و [۲۸] مطرح شده است. برای روشی متفاوت، ر.ک. مرجع [۲۵]. بخش ۹.۸ (پ) در

Fundamenta Math., Vol.1, p. 145, 1920

می‌باشد.

بخش ۱۸.۸. این برهان از قضیهٔ هاردی ـ لیتلوود (ر.ک. مرجع مربوط به‌بخش ۴.۷) اساساً همان حالت بسیار خاص قضیهٔ درونیابی مارچین کویچ است. بحث کاملی از قضیهٔ اخیر را می‌توان در فصل هفت مرجع [۳۶] یافت. همچنین ر.ک. مرجع [۵۰].

تمرین ۲. نظیر این ایده که یک انتگرال مساحت زیر یک منحنی است، نظریهٔ انتگرال لبگ را می‌توان برحسب اندازه‌های مجموعه‌های عرضی بیان کرد. این کار در مرجع [۱۶] صورت گرفته است.

تمرین ۸. قسمت (ب) در شکلی حتی دقیقتر توسط لبگ در

J. Mathématiques, ser. 6, Vol 1, p. 201, 1905

ثابت شده و ظاهراً به‌دست فراموشی سپرده شده است. این در پرتو مثالی دیگر از سیرپنسکی (*Sierpinski, Fundamenta Math., Vol 1, p. 114, 1920*) کاملاً جالب است: یک مجموعهٔ مسطح مانند E هست که اندازه‌پذیر لبگ نبوده و بر هر خط مستقیم حداکثر دو نقطه دارد. هرگاه $f=\chi_E$، با آنکه تمام مقاطع f_x و f^y نیمه پیوستهٔ بالایی‌اند، f اندازه‌پذیر لبگ نیست. درواقع هر یک حداکثر دو نقطهٔ ناپیوستگی دارد. (این مثال تابع اصل موضوع انتخاب است ولی از فرض پیوستار مستقل می‌باشد.)

فصل ۹

برای آشنایی مختصر دیگر، ر.ک. مرجع [۳۶]، فصل شانزده. در مرجع [۳۳] برهان متفاوتی از قضیهٔ پلانشرل یافت می‌شود. جنبه‌های مربوط به‌نظریهٔ گروهها و ارتباط با جبر باناخ در مرجعهای [۱۷]، [۱۹]، و [۲۷] مطرح شده‌اند. برای مطالب بیشتر راجع به‌زیرفضاهای پایا (بخش ۱۶.۹)، ر.ک. مرجع [۱۱]؛ مسئلهٔ نظیر در L^1 در مرجع [۲۷]، فصل ۷، توصیف شده است.

فصل ۱۰

مرجعهای عمومی: [۱]، [۴]، [۱۳]، [۲۰]، [۲۹]، [۳۱]، و [۳۷].

بخش ۸.۱۰. انتگرالگیری را می‌توان روی منحنیهای با طول متناهی دلخواه نیز تعریف کرد.

ر.ک. مرجع [۱۳]، جلد ۱، ضمیمهٔ پ.

بخش ۱۰.۱۰. مفهوم توپولوژیک اندیس در مرجع [۲۹] به‌کار رفته است و در مرجع [۱] کاملاً مورد استفاده قرار گرفته است. برهان محاسبه‌ای قضیهٔ ۱۰.۱۰ همانند مرجع [۱]، ص ۹۳ می‌باشد.

بخش ۱۳.۱۰. کشی قضیه‌اش را در سال ۱۸۲۵ و تحت این فرض اضافی که f' پیوسته است منتشر کرد. گورسا (Goursat) زاید بودن این فرض را نشان داد و قضیه را به‌شکل فعلی بیان نمود. برای نکات تاریخی بیشتر، ر.ک. مرجع [۱۳]، ص ۱۶۳.

بخش ۱۶.۱۰. برهانهای متعارف نمایش به‌سری توانی و این امر که $f\in H(\Omega)$ تعلق $f'\in H(\Omega)$ را ایجاب می‌کند از طریق فرمول انتگرال کشی (مانند اینجا) انجام می‌شود. اخیراً برهانهایی ارائه شده است که در آنها عدد گردشی به‌کار رفته ولی از انتگرالگیری استفاده نشده است. برای مشاهدهٔ جزئیات، ر.ک. مرجع [۳۴].

بخش ۲۵.۱۰. یک برهان بسیار مقدماتی از تمامیت جبری میدان مختلط را می‌توان در مرجع [۲۶]، ص ۱۷۰ یافت.

بخش ۳۰.۱۰. برهان قسمت (ب) همانند مرجع [۴۷] است.

بخش ۳۲.۱۰. قضیهٔ نگاشت باز و گسستگی $Z(f)$ خواص توپولوژیک ردهٔ تمام توابع هلوریخت غیرثابت‌اند که این رده را با تقریب همانریختیها توصیف می‌کنند. این همان قضیهٔ استویلوف (Stoilov) می‌باشد. ر.ک. مرجع [۳۴].

بخش ۳۵.۱۰. این صورت کلی بسیار ساده و مقدماتی قضیهٔ کشی توسط جان دی. دیکسون (John D. Dixon) کشف شده است:

Proc. Am. Math. Soc., Vol. 29, pp. 625 - 626, 1971.

در مرجع [۱] برهان مبتنی است بر نظریهٔ دیفرانسیلهای کامل. در ویرایش اول این کتاب از قضیهٔ رونگه نتیجه شده بود. آن روش قبلاً در مرجع [۲۹]، ص ۱۷۷، به‌کار رفته است ولی در آنجا فقط در نواحی همبند ساده اعمال شده است.

فصل ۱۱

مرجعهای عمومی: [۱]، فصل ۵؛ [۲۰]، فصل ۱.

بخش ۱۴.۱۱. اصل انعکاس توسط اچ.ا. شوارتز برای حل مسائل مربوط به‌نگاشتهای همدیس از نواحی چند ضلعی به‌کار رفته است. ر.ک. بخش ۶.۱۷ از مرجع [۱۳]. نتایج بیشتر در این مسیر توسط کاراتئودوری به‌دست آمده‌اند؛ ر.ک. مرجع [۴]، جلد دو، صفحات ۹۲ ـ ۸۸، و

Commentarii Mathematatici Helvetici, Vol. 19, pp. 263 - 278, 1946 - 1947

بخشهای ۲۰.۱۱ و ۲۵.۱۱. این نتیجهٔ اصلی مقالهٔ هاردی ـ لیتلوود است که در مرجع مربوط به‌بخش ۴.۷ ذکر شده است. برهان نامساوی دوم در قضیهٔ ۲۰.۱۱ همانند مرجع [۴۰]، ص ۲۳ می‌باشد.

بخش ۲۳.۱۱. نخستین قضایا از این نوع در رسالهٔ فاتو دیده می‌شود:

Séries trigonométriques et Séries de Taylor, Acta Math., Vol. 30, pp. 335 400, 1906.

این نخستین کار مهمی است که در آن نظریهٔ انتگرالگیری لبگ در بررسی توابع هلوریخت به‌کار رفته است.

بخش ۳۰.۱۱. قسمت (پ) منسوب است به

Herglotz, Leipziger Berichte, Vol. 63, pp. 501 - 511, 1911.

تمرین ۱۴. این تمرین توسط دبلیو. رامی (*W. Ramey*) و دی. اولریش (*D.Ullrich*) پیشنهاد شده است.

فصل ۱۲

بخش ۷.۱۲. برای مثالهای دیگر، ر.ک. مرجع [۳۱]، صفحات ۱۸۶ ـ ۱۷۶.

بخش ۱۱.۱۲. این قضیه اول‌بار توسط دبلیو. اچ. یانگ (۱۹۱۲؛ $q = ۲, ۴, ۶ \cdots$) و اف. هاسدورف (۱۹۲۳؛ $۲ \leq q \leq \infty$) برای سریهای مثلثاتی ثابت شد. اف. ریس (۱۹۲۳) آن را به‌مجموعه‌های متعامد یکهٔ به‌طور یکنواخت کراندار کشانید، ام. ریس (۱۹۲۶) این توسیع را از یک قضیهٔ درونیابی کلی نتیجه گرفت، و جی. او. تورین (*G. O. Thorin*) (۱۹۳۹) برهان متغیر مختلطی قضیهٔ ام. ریس را کشف کرد. برهان آمده در متن تعدیل کالدرون ـ زیگموند (*Calderon - Zygmund*) (۱۹۵۰) ایدهٔ تورین است. مراجع کامل و بحثهای قضایای درونیابی دیگر در فصل دوازده از مرجع [۳۶] آمده‌اند.

بخش ۱۳.۱۲. این با مختصر تغییر در مجلهٔ زیر آمده است:

Duke Math. J., Vol 20, pp. 449 - 458, 1953.

بخش ۱۴.۱۲. این برهان اساساً همان برهان آر. کافمن (*R. Kaufman*)

(*Math. Ann., Vol. 169, p. 282, 1967*)

است. ای. ال. استوت (*E. L. Stout*)

(*Math. Ann., Vol. 177, pp. 339 - 340, 1968*)

نتیجهٔ قویتری به‌دست آورد.

فصل ۱۳

بخش ۹.۱۳. قضیهٔ رونگه در

Acta Math., Vol. 6, 1885

به‌چاپ رسید. (ضمناً این همان سالی است که قضیهٔ وایراشتراس در باب تقریب یکنواخت به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها بر یک بازهٔ بسته منتشر شد؛ ر.ک.
Mathematische Werke, Vol. 3, pp. 1-37.)

برای برهانی نزدیک به‌برهان اصلی، ر.ک. مرجع [۲۹]، صفحات ۱۷۷ ـ ۱۷۱. برهان آنالیز تابعی مذکور در متن بر بسیاری از متخصصان آنالیز معلوم است و احتمالاً در سالهای اخیر چندین بار مستقلاً کشف شده است. این امر توسط ال.ا. روبل [*L. A. Rubel*] به‌من اطلاع داده شده است. در مرجع [۱۳]، جلد دو، صفحات ۳۰۸ ـ ۲۹۹ به‌نزدیک بودن تقریب وقتی درجهٔ چند جمله‌ای ثابت است توجه شده است.

تمرینهای ۵ و ۶. برای روشی دیگر، ر.ک.
D. G. Cantor, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 15, pp. 335 - 336, 1964.

فصل ۱۴

مرجع عمومی: [۲۰]. در اینجا بسیاری از توابع نگاشت خاص با تفصیل زیاد توصیف شده‌اند.

بخش ۳.۱۴. جزئیات بیشتر راجع به‌تبدیلات خطی کسری را می‌توان در مرجع [۱]، صفحات ۳۵ ـ ۲۲؛ در مرجع [۱۳]، صفحات ۵۷ ـ ۴۶؛ در مرجع [۴]؛ و بخصوص در فصل ۱ کتاب ال. آر. فورد (*L. R. Ford*):
"Automorphic Functions", McGraw - Hill Book Company, New York, 1929
یافت.

بخش ۵.۱۴. خانواده‌های نرمال توسط مونتل (*Montel*) معرفی شده‌اند. ر.ک. فصل ۱۵ مرجع [۱۳].

بخش ۸.۱۴. تاریخچهٔ قضیهٔ ریمان در مرجع [۱۳]، صفحات ۳۲۱ ـ ۳۲۰ و در مرجع [۲۹]، ص ۲۳۰ مطرح شده است. برهان کوبه (تمرین ۲۶) در
J. für reine und angew. Math., Vol. 145, pp. 177 - 223, 1915
آمده است؛ نواحی همبند مضاعف نیز در آن درنظر گرفته شده است.

بخش ۱۴.۱۴. خیلی بیش از $|a_2| \le 2$ برقرار است: درواقع به‌ازای هر $n \ge 2$، $|a_n| \le n$. این امر توسط بیبرباخ (*Bieberbach*) در ۱۹۱۶ حدس زده شد و توسط ال. دوبرانژ (*L. de Branges*) در ۱۹۸۴ به‌ثبوت رسید:
(*Acta Math., Vol. 154, pp. 137 - 152, 1985*).

به‌علاوه، هرگاه فقط به‌ازای یک $n \ge 2$، $|a_n| = n$، آنگاه f یکی از توابع کوبهٔ مثال ۱۱.۱۴ است.

بخش ۱۹.۱۴. رفتار مرزی نگاشتهای همدیس توسط کاراتئودوری در
Math. Ann., Vol. 73, pp. 323 - 370, 1913

بررسی شد. قضیهٔ ۱۹.۱۴ در آنجا برای نواحی کراندار به‌منحنیهای ژردان ثابت شد و مفهوم پایانهای اول معرفی گردید. همچنین ر.ک. مرجع [۴]، جلد دو، صفحات ۱۰۷ ـ ۸۸.

تمرین ۲۴. این برهان منسوب است به وای. ان. موشو واکیس (*Y. N. Moschovakis*).

فصل ۱۵

بخش ۹.۱۵. رابطهٔ بین حاصل‌ضربهای کانونی و تابعهای تمام از مرتبهٔ متناهی در فصل ۲ مرجع [۳]، فصل هفت مرجع [۲۹]، و فصل هشت مرجع [۳۱] مطرح شده است.

بخش ۲۵.۱۵. برای نتایج بیشتر در این جهت، ر.ک.

Szasz, Math. Ann., Vol. 77, pp, 482 - 496, 1916.

همچنین ر.ک. فصل دو مرجع [۲۱].

فصل ۱۶

کار کلاسیک در سطوح ریمان مرجع [۳۲] است. (اولین چاپش در ۱۹۱۳ صورت گرفته است.) سایر مراجع عبارتند از فصل شش مرجع [۱]، فصل ۱۰ مرجع [۱۳]، فصل شش مرجع [۲۹]، و مرجع [۳۰].

بخش ۵.۱۶. قضیهٔ استروسکی در مجلهٔ زیر آمده است:

J. London Math. Soc., Vol. 1, pp. 251 - 263, 1926.

برای سریهای رخته‌ای جدیدتر، ر.ک.

J. - P. Kahne, Lacunary Taylor and Fourier Series, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 70, pp. 199 - 213, 1964.

بخش ۱۵.۱۶. روش پرداختن به‌قضیهٔ تک میدانی در ویرایش اول این کتاب کمی ساده‌تر بود. در آن از این امر استفاده شد که هر ناحیهٔ مسطح همبند ساده با یک ناحیهٔ محدب مانند U همانریخت است. برهان فعلی طوری ترتیب یافته که بدون تغییر درمورد توابع هلوریخت از چند متغیر مختلط نیز به‌کار می‌رود. (توجه کنید که وقتی $k > 2$، مجموعه‌های باز همبند ساده‌ای در R^k وجود دارند که با هیچ مجموعهٔ محدبی همانریخت نیستند؛ پوسته‌های کروی مثالهایی از این مجموعه‌ها می‌باشند.)

بخش ۱۷.۱۶. فصل ۱۳ مرجع [۱۳]، فصل هشت مرجع [۲۹]، و قسمت ۷ مرجع [۴].

بخش ۲۱.۱۶. در قسمت ۷ مرجع [۴] قضیهٔ بزرگ پیکارد به‌کمک توابع مدولی ثابت شده است. برهانهای «مقدماتی» را می‌توان در مرجع [۳۱]، صفحات ۲۸۴ ـ ۲۷۷ و در فصل هفت مرجع [۲۹] یافت.

تمرین ۱۰. رده‌های مختلف مجموعه‌های قابل رفع توسط آلفورس (*Ahlfors*) و بورلینگ در پایاهای همدیس و مجموعه‌های پوچ نظریهٔ تابعی مطرح شده‌اند:

Acta Math., Vol. 83, pp. 101 - 129, 1950.

فصل ۱۷

در اینجا مرجع کلاسیک [۱۵] است. همچنین ر.ک. مرجع [۳۶]، فصل هفت. با آنکه مرجع [۱۵] عمدتاً با قرص یکه سر و کار دارد، اغلب برهانها طوری ساخته شده‌اند که در حالات دیگری که در آنجا توصیف شده‌اند نیز به‌کار می‌روند. بعضی از این تعمیمها در فصل ۸ مرجع [۲۷] دیده می‌شوند. کتب جدیدتر دیگر در این مباحث عبارتند از [۳۸]،[۴۰]، و [۴۶].

بخش ۱.۱۷. برای بحث کاملی از توابع زیرتوافقی، ر.ک. مرجع [۲۲].

بخش ۱۳.۱۷. برای برهانی متفاوت، ر.ک. مرجع [۱۵] یا مقالهٔ هلسون و لودن اسلاگر در

Acta Math., Vol. 99, pp. 165 - 202, 1958.

یک برهان بسیار ساده توسط

B.K. Øksendal, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.30, p. 204, 1971

به‌دست آمده است.

بخش ۱۴.۱۷. اصطلاحات «تابع داخلی» و «تابع خارجی» توسط بورلینگ در مقاله‌اش ابداع شده‌اند و در این مقاله قضیهٔ ۲۱.۱۷ ثابت شده است:

On Two Problems Concerning Linear Transformations in Hilbert Space, Acta Math., Vol. 81, pp. 239 - 255, 1949.

برای بحثهای بیشتر، ر.ک. مرجع [۱۱].

بخشهای ۲۵.۱۷ و ۲۶.۱۷. این برهان قضیهٔ ام. ریس از آن ا. پی. کالدرون است. ر.ک.

Proc. Am. Math. Soc., Vol. 1, pp. 533 - 535, 1950.

همچنین ر.ک. مرجع [۳۶]، جلد ۱، صفحات ۲۶۲ ـ ۲۵۲.

تمرین ۳. این مبنای تعریف فضاهای H^p در سایر نواحی را تشکیل می‌دهد. ر.ک.

Trans. Am. Math. Soc., Vol. 78,pp. 46 - 66, 1955.

فصل ۱۸

مرجعهای عمومی: [۱۷]، [۱۹]، و [۲۳]؛ همچنین [۱۴]. نظریه در سال ۱۹۴۱ توسط گلفاند ابداع شده است.

بخش ۱۸.۱۸. این توسط پی. ج. کوهن (*P. J. Cohen*) به‌طور مقدماتی در مجلهٔ زیر ثابت شده است:

Proc. Am. Math. Soc., Vol. 12, pp. 159 - 163, 1961.

بخش ۲۰.۱۸. این قضیه از آن ورمر (*Wermer*) است:

Proc. Am. Math. Soc., Vol. 4, pp. 866 - 869, 1953.

برهان مذکور در متن از آن هافمن (*Hoffman*) و سینگر (*Singer*) است. ر.ک. مرجع [۱۵]، صفحات ۹۴ ـ ۹۳ که در آن یک برهان بسیار کوتاه توسط پی.ج. کوهن نیز داده شده است. (ر.ک. مرجع مربوط به بخش ۱۸.۱۸.)

بخش ۲۱.۱۸. این یکی از گامهای مهم در برهان اصلی وینر در قضیهٔ تاوبری‌وی می‌باشد. ر.ک. مرجع [۳۳]، ص ۹۱. برهان کم‌زحمت آمده در متن اولین پیروزی درخشان نظریهٔ گلفاند می‌باشد.

تمرین ۱۴. به‌مجموعهٔ Δ می‌توان توپولوژی هاسدورف فشرده داد که تابع $\hat{x}$ نسبت به‌آن پیوسته باشد. لذا $x \to \hat{x}$ یک همریختی از A به‌توی $C(\Delta)$ است. این نمایش A به‌عنوان جبر توابع پیوسته مهمترین ابزار در بررسی جبرهای باناخ تعویضپذیر می‌باشد.

فصل ۱۹

بخشهای ۲.۱۹ و ۳.۱۹. مرجع [۲۱]، صفحات ۱۳ ـ ۱. همچنین ر.ک. مرجع [۳] که در آن توابع از نوع نمایی موضوع اصلی می‌باشند.

بخش ۵.۱۹. برای آشنایی بیشتر با رده‌های $C\{M_n\}$، ر.ک.

S. Mandelbrojt, Séries de Fourier et classes quasi - analytiques, Gauthier - Villars, Paris, 1935.

بخش ۱۱.۱۹. در مرجع [۲۱] برهان این قضیه مبتنی بر قضیهٔ ۲.۱۹ است تا قضیهٔ ۳.۱۹.

تمرین ۴. تابع Φ تبدیل بورل f نام دارد. ر.ک. مرجع [۳] در فصل ۵.

تمرین ۱۲. برهان پیشنهادی از آن اچ. میرکیل (*H. Mirkil*) است:

Proc. Am. Math. Soc., Vol. 7, pp. 650 - 652, 1956.

این قضیه در سال ۱۸۹۵ توسط بورل ثابت شده است.

فصل ۲۰

ر.ک.

S. N. Mergelyan, Uniform Approximations to Functions Of a Complex Variable, Uspehi Mat. Nauk (N. S) 7, no. 2 (48) 31 - 122, 1952; Amer. Math. Soc. Translation No. 101, 1954.

قضیهٔ ۵.۲۰ ما قضیهٔ ۴.۱ در مقالهٔ مرگلیان می‌باشد.

اخیراً یک برهان آنالیز تابعی مبتنی بر ملاحظات نظریهٔ اندازه توسط ال. کارلسون در

Math. Scandinavica, Vol. 15, pp. 167 - 175, 1964

منتشر شده است.

ضمیمه

قضیهٔ ماکزیمالی اول بار توسط هاسدورف در ص ۱۴۰ کتابش

"Grundzüge der Mengenlehre"

در ۱۹۱۴ ذکر شد. برهان آمده در متن طبق بخش ۱۶ کتاب هالموس [۸] طرح شده است. ایدهٔ انتخاب gای که $g(A)-A$ حداکثر یک عنصر داشته باشد در آنجا ظاهر شده است، و همین‌طور ایدهٔ اصطلاح «برج». برهان شبیه برهانهای زرملو ($Zermelo$) قضیهٔ خوش ترتیبی است؛ ر.ک.

Math. Ann., Vol. 65, pp. 107 - 128, 1908.

کتابنامه

1. L. V Ahlfors: "Complex Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.
2. S. Banach: Théorie des Opérations linéaires, "Monografie Matematyczne," vol. 1, Warsaw, 1932.
3. R. P. Boas: "Entire Functions," Academic Press Inc., New York, 1954.
4. C. Carathéodory: "Theory of Functions of a Complex Variable," Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
5. N. Dunford and J. T. Schwartz: "Linear Operators," Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
6. P. R. Halmos: " Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity," Chelsea Publishing Company, New York, 1951.
7. P. R. Halmos: "Measure Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princetion, N. J., 1950.
8. P. R. Halmos: "Naive Set Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princetion, N. J., 1960.
9. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya: "Inequalities," Cambridge University Press, New York, 1934.

10. G. H. Hardy and W.W Rogosinski: "Fourier Series", Cambridge Tracts no. 38, Cambridge, London, and New York, 1950.
11. H. Helson: "Lectures on Invariant Subspaces," Academic Press Inc., New York, 1964.
12. E. Hewitt and K. A. Ross: "Abstract Harmonic Analysis, "Springer - Verlag, Berlin, vol. I, 1963: vol. II, 1970.
13. E. Hille: "Analytic Function Theory," Ginn and Company, Boston, vol. I, 1959; vol. II, 1962.
14. E. Hille and R. S. Phillips: "Functional Analysis and Semigroups," Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, 1957.
15. K. Hoffman: "Banach Spaces of Analyic Functions," Prentice- Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
16. H. Kestelman: "Modern Theories of Integration," Oxford University Press, New York, 1937.
17. L. H. Loomis: "An Introduction to Abstract Harmonic Analysis," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1953.
18. E. J. McShane: "Integration," Princeton University Press, Princeton, N. J. 1944.
19. M. A. Naimark: "Normed Rings," Erven P. Noordhoff, NV, Groningen Netherlands, 1959.
20. Z. Nehari: "Conformal Mapping," McGraw-Hill Book Company, New York 1952.
21. R. E. A. C. Paley and N. Wiener: "Fourier Transforms in the Complex Domain," Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 19, New York, 1934.
22. T. Rado: Subharmoinc Functions, *Ergeb. Math.*, vol. 5, no. 1, Berlin, 1937.
23. C. E. Rickart: "General Theory of Banach Algebras," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.
24. F. Riesz and B. Sz. - Nagy: "Leçons d' Analyse Fonctionnelle," Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
25. H. L. Royden: "Real Analysis," The Macmillan Company, New York, 1963.

26. W. Rudin: "Principles of Mathematical Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1976.

27. W. Rudin: "Fourier Analysis on Groups," Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

28. S. Saks: "Theory of the Integral," 2d ed., "Monografie Matematyzcne," vol. 7, Warsaw, 1937. Reprinted by Hafner Publishing Company, Inc., New York.

29. S. Saks and A. Zygmund: "Analytic Functions," Monografie Matematyzcne," vol. 28, Warsaw, 1952.

30. G. Springer: "Introduction to Reimann Surfaces," Addison- Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.

31. E. C. Titchmarsh: "The Theory of Functions," 2d ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1939.

32. H. Weyl: "The Concept of a Riemann Surface," 3d ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1964.

33. N. Wiener: "The Fourier Integral and Certain of Its Applications," Cambridge University Press, New York, 1933. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York.

34. G. T. Whyburn: "Topological Analysis", 2d ed., Princeton University Press, N. J., 1964.

35. J. H. Williamson: "Lebesgue Integration," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1962.

36. A. Zygmund: "Trigonometric Series," 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1959.

مرجعهای تکمیلی

37. R. B. Burckel: "An Introduction to Classical Complex Analysis," Birkhäuser Verlag, Basel, 1979.

38. P. L. Duren: " Theory of H^p Spaces",: Academic Press, New York, 1970.

39. T. W. Gamelin: "Uniform Algebras," Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

40. J.B. Garnett: "Bounded Analytic Functions," Academic Press, New York, 1981.
41. M. de Guzman: "Differentiation of Integrals in R^n," Lecture Notes in Mathematics 481, Springer - Verlag, Berlin, 1975.
42. T. Hawkins: "Lebesgue's Theory of Integration," University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
43. H. Helson: "Harmonic Analysis," Addison- Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1983.
44. E. Hewitt and K. Stromberg: "Real and Abstract Analysis," Springer - Verlag, New York, 1965.
45. Y. Katznelson: "An Introduction to Harmonic Analysis," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.
46. P. Koosis: "Lectures on H_p Spaces," London Math. Soc. Lecture Notes 40, Cambridge University Press, London, 1980.
47. R. Narasimhan: "Several Complex Variables," University of Chicago Press, Chicago, 1971.
48. J. C. Oxtoby: "Measure and Category," Springer- Verlag, New York, 1971.
49. W. Rudin: "Functional Analysis, "McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
50. E. M. Stein: "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
51. E. M. Stein and G. Weiss: "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Space," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1971.
52. E. L. Stout: "The Theory of Uniform Algebras," Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, 1971.
53. R. L. Wheeden and A. Zygmund: "Measure and Integral," Marcel Dekker Inc., New York, 1977.

فهرست علایم و اختصارات[1]

$\exp(z)$	۱۳
τ	۲۰
$\mathfrak{M}$	۲۱
χ_E	۲۴
$\limsup$	۲۷
$\liminf$	۲۷
$\overset{+}{f}$ ، $\overset{-}{f}$	۲۸
$L^1(\mu)$	۳۸
$a.\ e.$ (ت. هـ.)	۴۱
$\overline{E}$	۵۱
$C_c(X)$	۵۳
$K \prec f \prec V$	۵۴
$\mathfrak{M}_F$	۵۸
m ، m_k	۶۸
$\Delta(T)$	۶۸، ۱۸۳
$L^1(R^k)$ ، $L^1(E)$	۷۰
$\Vert f \Vert_p$ ، $\Vert f \Vert_\infty$	۸۶
$L^p(\mu)$ ، $L^p(R^k)$, ℓ^p	۸۶
$L^\infty(\mu)$ ، $L^\infty(R^k)$ ، ℓ^∞	۸۶
$C_0(X)$ ، $C(X)$	۹۱
(x,y)	۹۸
$\Vert x \Vert$	۹۹
$x \perp y$ ، $M^\perp$	۱۰۲
$\hat{x}(\alpha)$	۱۰۵
T	۱۱۲
$L^p(T)$ ، $C(T)$	۱۱۲
Z	۱۱۳
$\hat{f}(n)$	۱۱۵
c_0	۱۳۰
$\Vert f \Vert_E$	۱۳۵

۱. علایم متعارف نظریهٔ مجموعه‌های مذکور در صفحات ۱۸ تا ۲۰ در اینجا لیست نشده‌اند.

U	۱۳۷
$P_r(\theta - t)$	۱۳۸
$\mathrm{Lip}\,\alpha$	۱۴۱
$\lvert\mu\rvert(E)$	۱۴۶
μ^+ ، μ^-	۱۴۹
$\lambda \ll \mu$	۱۴۹
$\lambda_1 \perp \lambda_2$	۱۴۹
$B(x,r)$	۱۶۸
Q_r^{μ}	۱۶۸
$D\mu$	۱۶۸، ۲۸۴
$M\mu$	۱۶۸، ۲۴۱
Mf	۱۷۰
AC(ب م پ)	۱۷۸
$T'(x)$	۱۸۳
J_T	۱۸۳
BV	۱۹۲
E_x ، E^y	۱۹۶
f_x ،f^y	۱۹۷
$\mu \times \lambda$	۱۹۹
$f * g$	۲۰۶
$\mu * \lambda$	۲۱۱
$\hat{f}(t)$	۲۱۵
C^∞	۲۳۲
C_c^∞	۲۳۲
$D(a;r)$ ،$D'(a;r)$ ، $\overline{D}(a;r)$	۲۳۵
Ω	۲۳۶
$H(\Omega)$	۲۳۶
γ ، γ^*	۲۴۰
$\partial\Delta$	۲۴۲
$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$	۲۴۲
$Z(f)$	۲۴۸
$+$	۲۵۷
$I^2 = I \times I$	۲۶۲
∂ ، $\bar{\partial}$	۲۷۳
Δ	۲۷۴
$P[f]$	۲۷۶
Π^+ ،Π^-	۲۸۰
$P[d\mu]$	۲۸۳
Ω_α	۲۸۳
N_α	۲۸۴
M_{rad}	۲۸۴
σ	۲۸۵
H^∞	۲۹۲
$f^*(e^{i\theta})$	۲۹۲
$\varphi_\alpha(z)$	۲۹۹
S^2	۳۱۳
$\mathscr{L}$	۳۳۴
$E_p(z)$	۳۵۳
$\log^+ t$	۳۶۴
N	۳۶۴
$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$	۳۷۸
H^p	۳۹۶
M_f ، Q_f	۴۰۲
$\sigma(x)$	۴۱۷
$\rho(x)$	۴۲۰
$C\{M_n\}$	۴۳۹
$P(K)$	۴۴۹
$C_c'(R^2)$	۴۵۲

واژه‌نامه

فارسی به‌انگلیسی

آزمون	*Test*
ریشه	*root*
آنالیز	*Analysis*
تابعی	*functional*
اتحاد	*Identity*
اجتماع	*Union*
از نوع نمایی	*Exponential type*
استقلال	*Independence*
خطی	*linear*
اسکالر	*Scalar*
اشتراک	*Intersection*
اصل	*Principle*
انعکاس	*reflection*
کرانداری	*boundedness*
یکنواخت	*uniform*
اصل موضوع	*Axiom*
انتخاب	*of choice*
جداسازی	*separation*
افراز	*Partition*
مجموعه	*of set*
واحد	*of unity*
انتقال	*Translate*
مجموعه	*of set*
انتگرال	*Integral*
مضاعف	*double*
مکرر	*iterated*
انتگرالپذیری	*Integrability*
یکنواخت	*uniform*
انتگرالگیری	*Integration*
جزء به‌جزء	*by parts*
نسبت به‌اندازهٔ مختلط	*complex measure*
اندازه	*Measure*

borel	بورل
absolutely continuous	به‌طورمطلق پیوسته
translation-invariant	پایای انتقال
continuous	پیوسته
complete	تام
product	حاصل ضربی
real	حقیقی
outer	خارجی
σ-finite	σ-متناهی
counting	شمارشی
signed	علامتدار
discrete	گسسته
lebesgue	لبگ
positive	مثبت
complex	مختلط
regular	منتظم
singular	منفرد
representing	نمایش
Index	اندیس
of cycle	دور
of path	مسیر
of curve	منحنی
Inversion	انعکاس
Singularity	انفراد
essential	اساسی
isolated	تنها
removable	قابل رفع
Ideal	ایده‌آل
principal	اصلی
maximal	ماکزیمال
Infimum	اینفیمم
Segment	بازهٔ باز
Interval	بازهٔ بسته
oriented	جهتدار
Parameter Interval	بازهٔ پارامتری
Tower	برج
Range	برد
essential	اساسی
Vector	بردار
unit	یکه
Onto	برو
Greatest	بزرگترین
lower bound	کران پایینی
Closure	بست
Multiplicity	بستایی
of a zero	یک صفر
Ellipse	بیضی
End	پایان
prime	اول
Invariance	پایایی
translation	انتقال
rotation	دوران
Basis	پایه
orthonormal	متعامد یکه
Cover	پوشش
open	باز
Convolution	پیچش
Pre-image	پیش نقش
Span	پیما
Continuity	پیوستگی
absolute	مطلق
uniform	یکنواخت

Function تابع
of exponential type از نوع نمایی
extermal اکسترمال
choice انتخاب
integrable انتگرالپذیر
locally به‌طور موضعی
measurable اندازه‌پذیر
continuous پیوسته
left چپ
analytic تحلیلی
almost periodic تقریباً متناوب
entire تمام
harmonic توافقی
distribution توزیع
outer خارجی
meromorphic خوشریخت
inner داخلی
subharmonic زیرتوافقی
simple ساده
distance فاصله
bounded کراندار
rational گویا
maximal ماکزیمال
radial شعاعی
nontangential غیرمماسی
periodic متناوب
summable مجموعپذیر
convex محدب
modular مدولی
composite مرکب
conjugate مزدوج
characteristic مشخص
exponetial نمایی
semicontinuous نیمه پیوسته
upper بالایی
lower پایینی
holomorphic هلوریخت
nowhere differentiable
هیچ جا مشتقپذیر
Functional تابعی
linear خطی
continuous پیوسته
real حقیقی
multiplicative ضربی
bounded کراندار
positive مثبت
complex مختلط
Transform تبدیل
linear خطی
bounded کراندار
fractional کسری
affine مستوی
differentiable مشتقپذیر
Completion تتمیم
Decomposition تجزیه
Factorization تجزیه
Restriction تحدید
Estimate تخمین
Continuation تداوم
analytic تحلیلی
direct مستقیم
Ordinal ترتیبی
Combination ترکیب
linear خطی

Projection	تصویر
orthogonal	متعامد
Orthogonality	تعامد
Transitivity	تعدی
Variation	تغییر
bounded	کراندار
total	کل
of variable	متغیر
positive	مثبت
negative	منفی
Almost everywhere	تقریباً همه‌جا
Topology	توپولوژی
Extension	توسیع
norm - preserving	نرم نگهدار
Algebra	جبر
division	بخشی
commutative	تعویضپذیر
quotient	خارج قسمتی
complex	مختلط
normed	نرمدار
Mass	جرم
unit	یکه
Box	جعبه
Additivity	جمعی
countable	شمارشپذیر
finite	متناهی
Density	چگالی
metric	متری
Polynomial	چندجمله‌ای
trigonometric	مثلثاتی

Product	حاصل ضرب
scalar	اسکالر
partial	جزئی
inner	داخلی
cartesian	دکارتی
canonical	کانونی
infinite	نامتناهی
Volume	حجم
Limit	حد
upper	بالایی
lower	پایینی
left - hand	چپ
in measure	در اندازه
in mean	در میانگین
radial	شعاعی
pointwise	نقطه به‌نقطه
Resolvant	حلال
Annulus	حلقه
Family	خانواده
normal	نرمال
equicontinuous	همپیوسته
one - parameter	یک پارامتری
Line	خط
real	حقیقی
extended	وسعت یافته
Circle	دایره
oriented	جهتدار
positively	با جهت مثبت
unit	یکه
Determinant	دترمینان

Interior	درون
Interpolation	درونیابی
System	دستگاه
trigonometric	مثلثاتی
Sequence	دنباله
nicely shrinking	خوش انقباض
convex	محدب
Cycle	دور
Rotation	دوران
Differential	دیفرانسیل
Relation	رابطه
orthogonality	تعامدی
Radical	رادیکال
Class	رده
quasi - analytic	شبه تحلیلی
equivalence	هم‌ارزی
Category	رسته
first	اول
second	دوم
Method	روش
summability	مجموعپذیری
Root	ریشه
square	دوم
Chain	زنجیر
Subalgebra	زیرجبر
maximal	ماکزیمال
Subadditivity	زیرجمعی
Subchain	زیرزنجیر
Subspace	زیرفضا
Translation - Invariant	انتقال‌پایا

closed	بسته
invariant	پایا
Subset	زیرمجموعه
proper	حقیقی
Jacobian	ژاکوبین
Series	سری
power	توانی
gap	رخنه‌ای
Cell	سلول
Supremum	سوپرمم
essential	اساسی
σ	σ
– *algebra*	ـ جبر
– *ring*	ـ حلقه
Sine	سینوس
Radius	شعاع
spectral	طیفی
convergence	همگرایی
Argument	شناسه
Vanish	صفر شدن
at infinity	در بی‌نهایت
Coefficient	ضریب
Length	طول
Spectrum	طیف
Factor	عامل

outer	خارجی
inner	داخلی
elementary	مقدماتی
Number	عدد
winding	گردشی
transcendental	متعالی
Operator	عملگر
shift	انتقال
multiplication	ضربی
Element	عنصر
function	تابعی
invertible	معکوسپذیر
Majorant	غالب
harmonic	توافقی
Process	فرایند
diagonal	قطری
Hypothesis	فرض
continum	پیوستار
Formula	فرمول
inversion	انعکاس
addition	جمع
summation	جمعبندی
Space	فضا
euclidean	اقلیدسی
measure	اندازه
measurable	اندازه‌پذیر
vector	برداری
complex	مختلط
locally compact	به‌طور موضعی فشرده
null	پوچ
topological	توپولوژیک
separable	جدایی پذیر
quotient	خارج قسمتی
linear	خطی
normed	نرمدار
dual	دوگان
metric	متری
complete	تام
unitary	یکه‌ای
Overconvergence	فوق همگرایی
Representable	قابل نمایش
by power series	به‌وسیلهٔ سری توانی
Rule	قاعده
chain	زنجیره‌ای
Law	قانون
distributive	پخشپذیری
commutative	تعویضپذیری
cancellation	حذف
associative	شرکتپذیری
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
Disc	قرص
punctured	سوراخ شده
unit	یکه
Part	قسمت
principal	اصلی
positive	مثبت
negative	منفی
Theorem	قضیه
fundamental	اساسی
of calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
inversion	انعکاس

گراف	Graph
گردایه	Collection
در حال تعادل	balanced
گروه	Group
مدولی	modular
گوی	Ball
باز	open
یکه	unit
لاپلاسین	Laplacian
لگاریتم	Logarithm
لم	Lemma
پوششی	covering
مانده	Residue
متر	Metric
متمرکز	Concentrated
متمم	Complement
متوسط	Average
مثلث	Triangle
مجموع	Sum
جزئی	partial
مسیرها	of paths
مجموعه(ها)	Set(s)
از هم جدا	disjoint
$-F_\sigma$	F_σ -
اکیداً محدب	strictly convex
اندازه‌پذیر	measurable
اندازه ناپذیر	nonmeasurable
باز	open
بسته	closed
تهی	empty

تاوبری	tauberian
تجزیه	factorization
تحدب	convexity
تقریب	approximation
تک میدانی	monodromy
توسیع	extension
رسته‌ای	category
سه دایره	three - circle
گراف	graph
بسته	closed
ماکزیمالی	maximality
مانده	residue
مدول	modulus
ماکزیمم	maximum
مساحت	area
نقطهٔ ثابت	fixed point
نگاشت	mapping
باز	open
نمایش	representation
همگرایی	convergence
تسلطی	dominated
یکنوا	monotone
قطب	Pole
قلمرو	Domain
اساسی	fundamental
کره	Sphere
کسر	Fraction
جزئی	partial
کسینوس	Cosine
کوچکترین	Least
کران بالایی	upper bound

مساحت	*Area*
مستطیل	*Rectangle*
مسیر(ها)	*Path (s)*
بسته	*closed*
متقابل	*opposite*
هم‌ارز	*equivalent*
مشتق	*Derivative*
جزئی	*partial*
راست	*right - hand*
متقارن	*symmetric*
مشخص	*Character*
معادله	*Equation*
مقدار	*Value*
مجانبی	*asymptotic*
مقطع	*Section*
مکعب	*Cube*
منحنی	*Curve*
بسته	*closed*
همجای پوچ	*null - homotopic*
مؤلفه	*Component*
میانگین	*Mean*
حسابی	*arithmetic*
هندسی	*geometric*
میدان	*Field*
به‌طور جبری بسته	*algebraically closed*
مختلط	*complex*
ناحیه	*Region*
تقرب	*approach*
غیرمماسی	*nontangential*
نامساوی	*Inequality*

جزئی مرتب	*partially ordered*
G_δ -	G_δ -
چگال	*dense*
خطی مرتب	*linearly ordered*
σ ـ فشرده	σ - *compact*
صفر	*zero*
عرضی	*ordinate*
فشرده	*compact*
قابل رفع	*removable*
کلی	*totally*
مرتب	*ordered*
ناهمبند	*disconnected*
متعامد یکه	*orthonormal*
ماکزیمال	*maximal*
محدب	*convex*
مستقل	*independent*
مقدماتی	*elementary*
منتظم	*regular*
خارجی	*outer*
داخلی	*inner*
همبند	*connected*
محافظ	*Support*
محمل	*Carrier*
مختصات	*Coordinates*
قطبی	*polar*
مدار	*Orbit*
مرتبه	*Order*
صفر	*of zero*
مرز	*Boundary*
طبیعی	*natural*
مزدوج	*Conjugate*
توافقی	*harmonic*

euclid's	اقلیدس	Half plane	نیمصفحه
multiplicative	ضربی	upper	بالایی
triangle	مثلثی	lower	پایینی
Norm	نرم		
quotient	خارج قسمتی	Kernel	هسته
supremum	سوپرمم	Equivalence	هم‌ارزی
spectral	طیفی	conformal	همدیس
Point	نقطه	Connected	همبند
extreme	اکستریم	simply	ساده
end	پایان	Homotopy	همجایی
fixed	ثابت	Homomorphism	همریختی
initial	شروع	complex	مختلط
boundary	مرزی	Neighborhood	همسایگی
simple	ساده	Convergence	همگرایی
regular	منتظم	dominated	تسلطی
singular	منفرد	almost uniform	تقریباً یکنواخت
Image	نقش	in measure	در اندازه
inverse	معکوس	weak	ضعیف
Mapping	نگاشت	absolute	مطلق
open	باز	monotone	یکنوا
continuous	پیوسته	Coset	هم‌مجموعه
inverse	معکوس	Nowhere	هیچ جا
one - to - one	یک به‌یک	dense	چگال
Exponent (s)	نما(ها)		
conjugate	مزدوج	Isomorphism	یکریختی
Representaion	نمایش	Isometry	یکمتری
polar	قطبی	Monotonicity	یکنوایی
of measure	اندازه	Unit	یکه

واژه‌نامه
انگلیسی به فارسی

Absolute	مطلق
continuity	پیوستگی
convergence	همگرایی
Absolutely	به‌طور مطلق
convergent	همگرا
Addition	جمع
formula	فرمول
Affine	مستوی
transformation	تبدیل
Algebra	جبر
of measures	اندازه‌ها
of sets	مجموعه‌ها
Algebraically	به‌طور جبری
closed	بسته
Almost	تقریباً
everywhere	همه جا
periodic	متناوب
uniform convergent	به‌طوریکنواخت همگرا
Analytic	تحلیلی
continuation	تداوم
function	تابع
Annulus	حلقه
Approach	تقرب
region	ناحیهٔ
Area	مساحت
theorem	قضیهٔ
Argument	شناسه
Arithmetic	حساب (ی)
mean	میانگین
Associative	شرکتپذیر(ی)
law	قانون
Asymptotic	مجانبی
value	مقدار

Average	متوسط
Axiom	اصل موضوع
of choice	انتخاب
Balanced	در حال تعادل
collection	گردایهٔ
Ball	گوی
Boundary	مرز
Bounded	کراندار
function	تابع
linear	خطی
functional	تابعی
transformation	تبدیل
variation	باتغییر
Box	جعبه
Cancellation	حذف
Canonical	کانونی
product	حاصل‌ضرب
Carrier	محمل
Cartesian	دکارتی
product	حاصل‌ضرب
Category	رسته (ای)
theorem	قضیهٔ
Cell	سلول
Chain	زنجیر(های)
rule	قاعدهٔ
Change	تغییر
of variable	متغیر
Character	مشخص
Characteristic	مشخص
function	تابع
Choice	انتخاب
function	تابع
Class	رده
Closed	بسته
curve	منحنی
graph	گراف
path	مسیر
set	مجموعهٔ
subspace	زیرفضای
Closure	بست
Collection	گردایه
Commutative	تعویضپذیر
algebra	جبر
law	قانون
Compact	فشرده
set	مجموعهٔ
Complement	متمم
Complete	تام
measure	اندازهٔ
metric space	فضای متری
Completion	تتمیم
Complex	مختلط
algebra	جبر
field	میدان
homomorphism	همریختی
linear	خطی
functional	تابعی
measure	اندازهٔ
vector space	فضای برداری
Component	مؤلفه
Composite	مرکب
function	تابع
Concentrated	متمرکز
Conformal	همدیس

equivalence	هم‌ارزی
Conjugate	مزدوج
exponents	نماهای
function	تابع
Connected	همبند
set	مجموعهٔ
Continuity	پیوستگی
Continum	پیوستار
hypothesis	فرض
Continuous	پیوسته
function	تابع
linear	خطی
functional	تابعی
measure	اندازهٔ
Convergence	همگرایی
almost uniform	تقریباً یکنواخت
dominated	تسلطی
in measure	در اندازه
monotone	یکنوا
weak	ضعیف
Convex	محدب
function	تابع
sequence	دنبالهٔ
set	مجموعهٔ
convexity	تحدب
theorem	قضیهٔ
Convolution	پیچش
Coset	هم‌مجموعه
Cosine	کسینوس
Countable	شمارشپذیر
additivity	جمعپذیری
Counting	شمارشی
measure	اندازهٔ
Cover	پوشش
Covering	پوششی
lemma	لم
Curve	منحنی
Cycle	دور
Dense	چگال
set	مجموعهٔ
Derivative	مشتق
symmetric	متقارن
Determinant	دترمینان
Diagonal	قطر (ی)
process	فرایند
Differentiable	مشتقپذیر
transformation	تبدیل
Differential	دیفرانسیل
Direct	مستقیم
continuation	تداوم
Disc	قرص
Discrete	گسسته
measure	اندازهٔ
Disjoint	از هم‌جدا
sets	مجموعه‌های
Distance	فاصله
function	تابع
Distribution	توزیع
function	تابع
Distributive	پخشپذیر(ی)
law	قانون
Division	بخش(ی)
algebra	جبر
Domain	قلمرو
Dominated	تسلطی

convergence	همگرایی
Double	مضاعف
integral	انتگرال
Dual	دوگان
space	فضای
Elementary	مقدماتی
factor	عامل
set	مجموعهٔ
Ellipse	بیضی
Empty	تهی
set	مجموعهٔ
End	پایان
point	نقطهٔ
Entire	تمام
function	تابع
Equicontinuous	همپیوسته
family	خانوادهٔ
Equivalence	هم‌ارزی
class	ردهٔ
Equivalent	هم‌ارز
paths	مسیرهای
Essential	اساسی
range	برد
singularity	انفراد
supremum	سوپرمم
Euclidean	اقلیدسی
space	فضای
Exponential	نمایی
function	تابع
type	نوع
Extended	وسعت‌یافته
real line	خط حقیقی
Extension	توسیع
theorem	قضیهٔ
Extermal	اکسترمال
function	تابع
Extreme	اکستریم
point	نقطهٔ
Factorization	تجزیه
Family	خانواده
Field	میدان
Finite	متناهی
additivity	جمع‌پذیری
First	اول
category	رستهٔ
Fixed	ثابت
point	نقطهٔ
Function	تابع
absolutely continuous	به‌طورمطلق پیوسته
analytic	تحلیلی
bounded	کراندار
complex	مختلط
continuous	پیوسته
convex	محدب
element	عنصر
ntire	تمام
essentially bounded	اساساً کراندار
exponential	نمایی
harmonic	توافقی
holomorphic	هلوریخت
left - continuous	پیوسته از چپ
locally integrable	به‌طورموضعی انتگرالپذیر
measurable	اندازه‌پذیر

meromorphic خوشریخت
modular مدولی
nowhere differentiable هیچ جا مشتقپذیر
of bounded variation با تغییر کراندار
of exponential type از نوع نمایی
rational گویا
real حقیقی
simple ساده
subharmonic زیرتوافقی
summable مجموعپذیر
upper semicontinuous نیمه پیوستهٔ بالایی

Functional تابعی
analysis آنالیز
bounded کراندار
complex linear خطی مختلط
continuous پیوسته
linear خطی
multiplicative ضربی
positive مثبت
real linear خطی حقیقی

Fundamental اساسی
domain قلمرو
theorem قضیهٔ
of calculus حساب دیفرانسیل و انتگرال

Gap رخنه (ای)
series سری

Geometric هندسی
mean میانگین

Graph گراف

Greatest بزرگترین
lower bound کران پایینی

Harmonic توافقی
conjugate مزدوج
function تابع
majorant غالب

Holomorphic هلوریخت
function تابع

Homomorphism همریختی

Homotopy همجایی

Ideal ایده‌آل

Image نقش

Independent مستقل
set مجموعهٔ

Index اندیس
of curve منحنی

Infimum اینفیمم

Infinite نامتناهی
product حاصلضرب

Initial اولیه
point نقطهٔ

Inner داخلی
factor عامل
function تابع
product حاصلضرب
regular منتظم

Integral انتگرال

Integration انتگرالگیری
by parts جزء به‌جزء

Interior	درون
Interpolation	درونیابی
Intersection	اشتراک
Interval	بازه
Invariant	پایا
subspace	زیرفضای
Inverse	معکوس
image	نقش
mapping	نگاشت
Inversion	انعکاس
formula	فرمول
theorem	قضیهٔ
Invertible	معکوسپذیر
element	عنصر
Isolated	تنها
singularity	انفراد
Isometry	یکمتری
Isomorphism	یکریختی
Iterated	مکرر
integral	انتگرال
Jacobian	ژاکوبین
Least	کوچکترین
upper bound	کران بالایی
Left	چپ
continuous	پیوستهٔ
hand limit	حد
Length	طول
Limit	حد
in mean	در میانگین
in measure	در اندازه
pointwise	نقطه به‌نقطه
Linear	خطی
combination	ترکیب
fractional	کسری
independence	استقلال
transformation	تبدیل
Linearly	خطی
ordered set	مجموعهٔ ... مرتب
Locally	به‌طور موضعی
compact	فشرده
integrable	انتگرالپذیر
Logarithm	لگاریتم
Lower	پایینی
half plane	نیمصفحهٔ
limit	حد
semicontinuous	نیمه پیوستهٔ
Mapping	نگاشت
continuous	پیوسته
one - to - one	یک به‌یک
open	باز
Maximal	ماکزیمال
function	تابع
ideal	ایده‌آل
orthonormal	متعامدیکهٔ
subalgebra	زیرجبر
Maximality	ماکزیمالی
theorem	قضیهٔ
Maximum	ماکزیمم
Mean value	مقدار میانگین

property خاصیت
Measurable اندازه‌پذیر
function تابع
set مجموعهٔ
space فضای
Measure اندازه
absolutely continuous به‌طور مطلق پیوسته
complete تام
complex مختلط
continuous پیوسته
counting شمارشی
discrete گسسته
positive مثبت
real حقیقی
regular منتظم
signed علامتدار
singular منفرد
space فضای
Meromorphic خوشریخت
function تابع
Metric متری
density چگالی
space فضای
Modular مدولی
function تابع
group گروه
Modulus مدول
theorem قضیهٔ
Monodromy تک میدانی
theoren قضیهٔ
Monotone یکنوا
convergence همگرایی

Monotonicity یکنوایی
Multiplication ضرب
operator عملگر
Multiplicative ضربی
inequality نامساوی
linear functional تابعی خطی
Multiplicity بستایی
of a zero یک صفر

Natural طبیعی
boundary مرز
Negative منفی
part قسمت
variation تغییر
Neighborhood همسایگی
Nicely shrinking خوش انقباض
sequence دنبالهٔ
Nonmeasurable اندازه‌ناپذیر
set مجموعهٔ
Nontangential غیرمماسی
approach region ناحیهٔ تقرب
maximal function تابع ماکزیمال
Norm نرم
preserving نگهدار
extension توسیع
Normal نرمال
family خانوادهٔ
Normed نرمدار
algebra جبر
linear خطی
space فضای
Nowhere هیچ جا
dense چگال

differentiable	مشتقپذیر	set	مجموعهٔ
Null	پوچ	Outer	خارجی
homotopic	همجایی	factor	عامل
space	فضای	function	تابع
		measure	اندازهٔ
One parameter	یک پارامتری	regular	منتظم
family	خانوادهٔ	Overconvergence	فوق همگرایی
One - to - one	یک به‌یک		
mapping	نگاشت	Parallelogram	متوازی‌الاضلاع
Onto	برو	law	قانون
Open	باز	Parameter	پارامتر(ی)
ball	گوی	interval	بازهٔ بستهٔ
cover	پوشش	Partial	جزئی
mapping	نگاشت	derivative	مشتق
theorem	قضیهٔ	fraction	کسر
set	مجموعهٔ	product	حاصلضرب
Opposite	متقابل	sum	مجموع
path	مسیر	Partially	جزئی
Orbit	مدار	ordered	مرتب
Order	مرتبه	Partition	افراز
of zero	صفر	of unity	واحد
Ordinal	ترتیبی	Path	مسیر
Ordinate	عرضی	Periodic	متناوب
set	مجموعهٔ	function	تابع
Oriented	جهتدار	Pointwise	نقطه به‌نقطه
interval	بازهٔ بستهٔ	limit	حد
Orthogonal	متعامد	Polar	قطبی
projection	تصویر	coordinates	مختصات
Orthogonality	تعامدی	representation	نمایش
relations	روابط	Pole	قطب
Orthonormal	متعامدیکه	Polynomial	چندجمله‌ای
basis	پایهٔ	Positive	مثبت

linear	خطی
functional	تابعی
measure	اندازهٔ
part	قسمت
variation	تغییر
Positively oriented	به‌طور مثبت جهتدار
circle	دایرهٔ
Power	توان(ی)
series	سری
Pre-image	پیش نقش
Preservation	حفظ
of angles	زوایا
Prime	اول
end	پایان
Principal	اصلی(ی)
ideal	ایده‌آل
part	قسمت
Product	حاصلضرب(ی)
measure	اندازهٔ
Projection	تصویر
Proper	حقیقی
subset	زیرمجموعهٔ
Punctured	سفته
disc	قرص
Quasi	شبه
analytic	تحلیلی
Quotient	خارج‌قسمت(ی)
algebra	جبر
norm	نرم
space	فضای
Radial	شعاعی
limit	حد
maximal	ماکزیمال
function	تابع
Radical	رادیکال
Radius	شعاع
of convergence	همگرایی
Range	برد
Rational	گویا
function	تابع
Real	حقیقی
line	خط
linear	خطی
functional	تابعی
measure	اندازهٔ
Rectangle	مستطیل
Reflection	انعکاس
principle	اصل
Region	ناحیهٔ
Regular	منتظم
measure	اندازهٔ
point	نقطهٔ
Removable	قابل رفع
set	مجموعهٔ
singularity	انفراد
Representable	قابل نمایش
by power series	به‌وسیلهٔ سریهای توانی
Representation	نمایش
theorem	قضیهٔ
Representing	نمایش
measure	اندازهٔ
Residue	مانده

theorem	قضیهٔ
Resolvant	حلال
Restricion	تحدید
Right hand	دست راست (راست)
derivative	مشتق
Root	ریشه
test	آزمون
Rotation	دوران
invariance	پایایی
Scalar	اسکالر
product	حاصل‌ضرب
Second	دوم
category	ردهٔ
Section	مقطع
Segment	بازهٔ باز
Separable	جدایی‌پذیر
space	فضای
Set	مجموعهٔ
closed	بسته
compact	فشرده
connected	همبند
convex	محدب
dense	چگال
elementary	مقدماتی
empty	تهی
inner	داخلی
regular	منتظم
measurable	اندازه‌پذیر
nonmeasurable	اندازه‌ناپذیر
open	باز
outer	خارجی

regular	منتظم
partially ordered	جزئی مرتب
strictly convex	اکیداً محدب
totally disconnected	کلی ناهمبند
totally ordered	کلی مرتب
Shift	انتقال
operator	عملگر
σ	σ
- compact	ـ فشرده
set	مجموعهٔ
- finite	ـ متناهی
measure	اندازهٔ
ring	ـ حلقه
Signed	علامتدار
measure	اندازهٔ
Simple	ساده
boundary	مرزی
point	نقطهٔ
function	تابع
Simply	ساده
conneted	همبند
Sine	سینوس
Singular	منفرد
measure	اندازهٔ
point	نقطهٔ
Space	فضای
compact	فشرده
complete metric	متری تام
dual	دوگان
inner product	ضرب داخلی
locally compact	به‌طور موضعی فشرده

measurable	اندازه‌پذیر
metric	متری
normed linear	نرمدار خطی
separable	جدایی‌پذیر
topological	توپولوژیک
unitary	یکه‌ای
vector	برداری
Span	پیما
Spectral	طیفی
norm	نرم
radius	شعاع
Spectrum	طیف
Square	مربع (دوم)
root	ریشهٔ
Strictly	اکیداً
convex	محدب
set	مجموعهٔ
Subadditivity	زیرجمعپذیری
Subchain	زیرزنجیر
Subharmonic	زیرتوافقی
function	تابع
Subset	زیرمجموعه
Subspace	زیرفضا
Sum	مجموع
of paths	مسیرها
Summability	مجموعپذیری
method	روش
Summable	مجموعپذیر
function	تابع
Support	محافظ
Supremum	سوپرمم
norm	نرم
Symmetric	متقارن
derivative	مشتق
Three circle	سه دایره
theorem	قضیهٔ
Topological	توپولوژیک
space	فضای
Topology	توپولوژی
Total	کل
variation	تغییر
Totally	کلی
disconnected	ناهمبند
ordered	مرتب
Tower	برج
Transcendental	متعالی
number	عدد
Transformation	تبدیل
affine	مستوی
bounded	کراندار
linear	خطی
differentiable	مشتقپذیر
linear	خطی
fractional	کسری
Transitivity	تعدی
Translate	انتقال
of function	تابع
Translation	انتقال
invariance	پایایی
invariant	پایای
measure	اندازهٔ
subspace	زیرفضای
Triangle	مثلث(ی)
inequality	نامساوی

Trigonometric	مثلثاتی
polynomial	چندجمله‌ای
system	دستگاه
Uniform	یکنواخت
boundedness	کرانداری
principle	اصل
continuity	پیوستگی
integrability	انتگرالپذیری
Union	اجتماع
Unit	یکه
ball	گوی
circle	دایرهٔ
disc	قرص
mass	جرم
vector	بردار
Unitary	یکه‌ای
space	فضای
Upper	بالایی
half plane	نیمصفحهٔ
limit	حد
semicontinuous	نیمه پیوستهٔ
Vanish	صفر شدن
at infinity	در بی‌نهایت
Vector	بردار(ی)
space	فضای
Volume	حجم
Weak	ضعیف
convergence	همگرایی
Winding	گردشی
number	عدد
Zero	صفر
set	مجموعهٔ

فهرست راهنما

آرنز، آر.، ۴۶۵
آزمون ریشه، ۲۳۷
آستین، دی.، ۴۶۶
آلفورس، ال.وی.، ۴۷۱
آنالیز تابعی، ۱۳۵

ابرلین، دبلیو. اف.، ۷۷
اتحاد
اویلر، ۱۴
پارسوال، ۱۰۹ ، ۱۱۶ ، ۲۲۴ ، ۲۵۱
اجتماع، ۱۸
ادواردز، آر. ای.، ۴۶۴
از نوع نمایی، ۴۳۴ ، ۴۴۵ ، ۴۴۶
استروسکی، آ.، ۳۷۶
استرومبرگ، کا.، ۴۶۶
استقلال خطی، ۱۰۵
استوت، ای. ال.، ۴۶۹
اسکالر، ۴۸
اسنو، دی. او.، ۴۶۵
اشتراک، ۱۸
اصل
انعکاس، ۲۸۰
شوارتز، ۲۸۰
کرانداری
یکنواخت، ۱۲۴
اصل موضوع
انتخاب، ۴۶۰
جداسازی هاسدورف، ۵۱
افراز
مجموعه، ۱۴۵
واحد، ۵۶
الیس، اچ. دبلیو.، ۴۶۵
L^1 ضعیف، ۱۷۰
انتقال
تابع، ۲۱۹
مجموعه، ۶۷
انتگرال، ۳۳ ، ۳۸
پواسون، ۱۳۹ ، ۲۷۵ ، ۲۸۳ ، ۲۹۷
ریمان، ۱۷ ، ۴۹
لبگ، ۳۳
مضاعف، ۲۰۰
مکرر، ۲۰۰

انتگرالپذیری یکنواخت، ۱۶۴
انتگرالگیری، ۳۳
از مشتق، ۱۷۸ ، ۱۸۱ ، ۱۸۲
جزء به‌جزء، ۱۹۲
روی دور، ۲۵۸
روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر، ۳۴
روی مسیر، ۲۴۰
نسبت به‌اندازهٔ مختلط، ۱۶۰
اندازه
بورل، ۶۴
منتظم، ۶۴
پایای انتقال، ۶۸
پیوسته، ۲۱۱
به‌طور مطلق، ۱۴۹
تام، ۴۲
حاصل ضربی، ۱۹۹
حقیقی، ۳۰
خارجی، ۴۶۳
σـ متناهی، ۶۴
شمارشی، ۳۱
علامت‌دار، ۱۴۹
گسسته، ۲۱۱
لبگ، ۶۸
مثبت، ۳۰
مختلط، ۳۰ ، ۱۴۵
منفرد، ۱۴۹
نمایش، ۱۳۶ ، ۴۶۵
اندیس
دور، ۲۵۸
مسیر، ۲۴۲
منحنی، ۲۶۴ ، ۲۷۲
انعکاس، ۳۲۹
انفراد
اساسی، ۲۵۰ ، ۳۱۴
تنها، ۲۴۹ ، ۳۱۳
قابل رفع، ۲۴۹
اولریش، دی.، ۴۶۹
ایده‌آل، ۲۱۲ ، ۳۵۸ ، ۴۲۲
اصلی، ۳۵۸
ماکزیمال، ۴۲۲ ، ۴۲۴

اینفیمم، ۱۹

بازه
باز، ۱۹
بسته، ۱۹
جهتدار، ۲۴۲
پارامتری، ۲۴۰
باناخ، اس.، ۱۳۱
بخش، ۱۹۶
برج، ۴۵۹
برد، ۲۰
اساسی، ۹۶
بردار یکه، ۱۲۱
برو، ۲۰
بزرگترین کران پایینی، ۱۹
بست، ۵۱
بستایی یک صفر، ۲۴۸
بلدسو، دبلیو. دبلیو، ۴۶۵
بورل، ای.، ۱۷ ، ۴۷۳
بورلینگ، ا.، ۳۹۳ ، ۴۷۲
بیضی، ۳۳۶

پایان اول، ۴۷۱
پایایی
انتقال، ۶۸
دوران، ۶۸ ، ۲۳۴
پایهٔ متعامد یکه، ۱۰۹
پرون، او.، ۱۷۷
پوشش، ۵۱ ، ۳۷۹
باز، ۵۱
پی، ۱۶
پیچش، ۲۰۶ ، ۲۱۱ ، ۲۱۴
پیش‌نقش، ۱۹
پیما، ۱۰۵
پیوستگی، ۲۰ ، ۲۲
مطلق، ۱۴۹
توابع، ۱۷۸
یکنواخت، ۶۸

تابع

از نوع نمایی، ۴۳۴ ، ۴۴۶
اکسترمال، ۳۰۰
انتخاب، ۴۶۰
انتگرالپذیر لبگ، ۳۸
اندازه‌پذیر، ۲۰ ، ۴۳
با تغییر کراندار، ۱۸۰
بورل، ۲۶
به‌طور اساسی کراندار، ۸۶
به‌طور مطلق پیوسته، ۱۷۸
به‌طور موضعی انتگرالپذیر، ۲۳۲
پیوسته، ۲۰
از چپ، ۱۹۱
تحلیلی، ۲۳۶
تمام، ۲۳۷
توافقی، ۲۷۴
توزیع، ۲۰۸
حقیقی، ۲۰
خارجی، ۴۰۱
خوشریخت، ۲۶۴ ، ۳۵۷
داخلی، ۴۰۰
رادماخر، ۱۹۳
زیرتوافقی، ۳۹۳
ساده، ۲۸
فاصله، ۲۱
کراندار، ۸۶
کوبه، ۳۳۴ ، ۴۷۰
گویا، ۳۱۴ ، ۳۲۴
ماکزیمال، ۱۶۸ ، ۱۷۰ ، ۲۸۴
شعاعی، ۲۸۴
غیرمماسی، ۲۸۴ ، ۳۹۸
متناوب، ۱۴ ، ۱۱۲ ، ۱۱۸ ، ۱۹۰
مجموعپذیر، ۳۸
محدب، ۸۱
مختلط، ۲۰
مدولی، ۳۸۴
مرکب، ۲۰
مزدوج، ۴۱۰
مشخص، ۲۴
نمایی، ۱۳ ، ۲۳۷
نیمه پیوسته
بالایی، ۵۳
پایینی، ۵۳
هلوریخت، ۲۳۶
هیچ جا مشتقپذیر، ۱۴۲
تابعی
بر L^p ، ۱۵۷
بر $C_\circ$ ، ۱۶۰
بر فضای هیلبرت، ۱۰۴
خطی، ۴۹
پیوسته، ۱۰۴ ، ۱۲۲ ، ۱۴۰ ، ۱۵۷ ، ۱۶۰
حقیقی، ۱۳۱
ضربی، ۴۲۵
کراندار، ۱۲۱ ، ۱۴۰ ، ۱۵۷ ، ۱۶۰
مثبت، ۴۹ ، ۵۷ ، ۱۳۵
مختلط، ۱۳۱
ضربی، ۲۲۹، ۴۲۵
کراندار، ۱۲۱
مثبت، ۴۹
تبدیل
بورل، ۴۷۳
پلانشرل، ۲۲۳
خطی، ۴۸
کراندار، ۱۲۱
کسری، ۳۲۷ ، ۳۴۴
فوریه، ۲۱۵
گلفاند، ۴۳۲
مستوی، ۴۴۰
مشتقپذیر، ۱۸۳
تتمیم
فضای اندازه، ۴۲ ، ۲۰۳
فضای متری، ۹۱ ، ۹۶
تجزیه، ۳۵۵ ، ۴۰۰ ، ۴۰۲
ژردان، ۱۴۹
لبگ، ۱۵۱
هان، ۱۵۶
تحدید، ۱۳۵

تخمینهای کشی، ۲۵۳
تداوم
تحلیلی، ۳۷۹ ، ۴۳۹ ، ۴۴۱
مستقیم، ۳۷۸
ترکیب خطی، ۱۰۵
تصویر، ۱۰۳
متعامد، ۱۰۳
تعامد، ۱۰۲
تعدی، ۳۷۹
تغییر
کراندار، ۱۴۶ ، ۱۸۰ ، ۱۹۲
کل، ۱۴۶ ، ۱۸۰
متغیر، ۱۸۷ ، ۱۸۹
مثبت، ۱۴۹
منفی، ۱۴۹
تقریباً همه‌جا، ۴۱
توپولوژی، ۲۰
تورین، جی. او.، ۴۶۹
توسیع نرم نگهدار، ۱۳۳

جبر، ۴۱۶
اندازه‌ها، ۲۱۲
باناخ، ۲۲۸ ، ۴۱۶
بخشی، ۴۲۰
تعویضپذیر، ۴۱۷
خارج قسمتی، ۴۲۳
مجموعه‌ها، ۲۳
مختلط، ۴۱۶
نرمدار، ۴۱۶
جرم یکه، ۳۱
جعبه، ۶۷
جمعی
شمارشپذیر، [illegible] ، ۲۹
متناهی، ۳۰

چگالی متری، ۱۷۳
چندجمله‌ای، ۱۳۷
مثلثاتی، ۱۱۲

حاصل ضرب
اسکالر، ۹۸
بلاشکه، ۳۶۳ ، ۳۷۱ ، ۳۷۲ ، ۳۹۷ ، ۴۱۳
جزئی، ۳۵۱
داخلی، ۹۸ ، ۱۱۳
دکارتی، ۱۹ ، ۱۹۵
کانونی، ۳۵۵
نامتناهی، ۳۵۱
حجم، ۶۷
حد
بالایی، ۲۷
پایینی، ۲۷
توابع اندازه‌پذیر، ۲۷
چپ، ۱۹۲
در اندازه، ۹۶
در میانگین، ۸۸
شعاعی، ۲۸۲
نقطه به‌نقطه، ۲۷
حدس بیبرباخ، ۴۷۰
حفظ زوایا، ۳۲۶
حلال، ۴۳۱
حلقه، ۲۷۱ ، ۳۱۰ ، ۳۴۱

خاصیت مقدار میانگین، ۲۷۹
خانواده، ۱۸
نرمال، ۳۳۰
همپیوسته، ۲۸۹
یک پارامتری، ۲۶۲ ، ۳۸۰
خط حقیقی، ۱۹
وسعت یافته، ۱۹ ، ۲۲

دانیل، پی. ج. ۴۶۳
دایره
جهتدار با جهت مثبت، ۲۴۱
یکه، ۱۴
دترمینان، ۷۲
درون، ۳۱۴
درونیابی، ۲۰۹ ، ۳۰۶ ، ۳۵۷
دستگاه مثلثاتی، ۱۱۳

دنباله
خوش انقباض، ۱۷۲
کشی، ۸۸
دنجوی، ا.، ۱۷۷
دوبرانژ، ال.، ۴۷۰
دور، ۲۵۷
دوران، ۳۲۸
دیفرانسیل، ۱۸۳
دیکسون، ج. دی.، ۴۶۸
دیودونه، ج.، ۴۶۴

رابطهٔ تعامدی، ۱۰۵
رادیکال، ۴۳۱
رامی، دبلیو.، ۴۶۹
رده، ۱۸
شبه تحلیلی، ۴۴۰
هم‌ارزی، ۸۸
رسته
اول، ۱۲۳
دوم، ۱۲۳
روبل، ال. ا.، ۴۷۰
روش
فراگمن ـ لیندلف، ۳۰۱
مجموع‌پذیری، ۱۴۲
ریس
اف.، ۵۰، ۴۰۰، ۴۶۳، ۴۶۹
ام.، ۴۰۰، ۴۱۰، ۴۶۹
ریشهٔ دوم، ۳۲۲
ریکرت، ان. دبلیو.، ۴۶۵

زاتس، او.، ۴۷۱
زرملو، ای.، ۴۷۴
زنجیر، ۲۵۷
زیرجبر ماکزیمال، ۴۲۸
زیرجمعی، ۴۶۳
زیرزنجیر، ۴۵۹
زیرفضا، ۱۰۱
بسته، ۱۰۲
پایا، ۲۲۵، ۴۰۵
زیرمجموعه، ۱۸
حقیقی، ۱۸
زیگموند، ا.، ۴۶۹

ژاکوبین، ۱۸۳، ۲۹۴
ژردان، سی.، ۱۷

ساکس، اس.، ۴۶۲
سری
توانی، ۲۳۷
رخنه‌ای، ۳۲۴، ۳۷۶، ۳۹۱، ۴۱۴، ۴۴۸
فوریه، ۱۰۶، ۱۱۵
لوران، ۲۷۱
سلول، ۶۷
سوپرمم، ۱۹
اساسی، ۸۶
سیرپنسکی، دبلیو.، ۲۰۳، ۴۶۷
σ
ـ جبر، ۲۱
ـ حلقه، ۴۶۳
سینوس، ۱۴، ۳۱۲، ۳۷۰

شرط لیپ شیتس، ۱۴۱
شعاع
طیفی، ۴۲۰
همگرایی، ۲۳۷
شناسه، ۲۴۳
شوارتز
اچ. ا.، ۴۶۸
ج. تی.، ۴۶۵

صفر شدن در بی‌نهایت، ۹۱

ضرایب فوریه، ۱۰۶، ۱۱۵
اندازه، ۱۶۴

طول، ۱۹۴، ۲۴۱

طیف، ۴۱۷

عامل
خارجی، ۴۰۳
داخلی، ۴۰۳
مقدماتی، ۳۵۳
عدد
ترتیبی، ۷۸
گردشی، ۲۴۳
متعالی، ۲۰۶
عملگر
انتقال، ۴۰۶
ضرب، ۱۴۳ ، ۴۰۶
عنصر
تابعی، ۳۷۸
معکوسپذیر، ۴۱۷

غالب توافقی، ۴۱۲

فاتو، پی.، ۴۶۹
فرایند قطری، ۲۸۹
فرض پیوستار، ۲۰۳
فرمول
انعکاس، ۲۱۸
تیلور، ۴۴۱
جمع، ۱۳
جمعبندی پواسون، ۲۳۳
کشی، ۲۵۸ ، ۲۷۱ ، ۳۱۶، ۳۹۹ ، ۴۴۶ ، ۴۵۲
ینسن، ۳۵۹
فضای
اقلیدسی، ۴۹ ، ۶۶
اندازه، ۲۹
اندازه‌پذیر، ۲۰
باناخ، ۱۲۰
برداری، ۴۸
مختلط، ۴۸
به‌طور موضعی فشرده ، ۵۱
پوچ، ۴۲۳
توپولوژیک، ۲۱
جدایی پذیر، ۱۱۷ ، ۲۹۰
خارج قسمتی، ۴۲۳
خطی نرمدار، ۱۲۰
دوگان، ۱۳۵ ، ۱۴۰ ، ۱۵۷
ضرب داخلی، ۹۸
فشرده، ۵۱
متری، ۲۱
تام، ۸۸
هاسدورف، ۵۱
هیلبرت، ۹۹
یکریختی، ۱۱۰
یکه‌ای، ۹۸
فورد، ال. آر.، ۴۷۰
فوق همگرایی، ۳۷۶
فون نویمان، ج.، ۱۵۱

قابل نمایش به‌سری توانی، ۲۳۸
قاعدهٔ زنجیره‌ای، ۲۳۷
قانون
پخشپذیری، ۳۲
تعویضپذیری، ۳۲
حذف، ۳۲
شرکتپذیری، ۳۲
متوازی‌الاضلاع، ۱۰۳
قرص، ۲۲ ، ۲۳۵
سفته، ۲۳۵
یکه، ۱۳۷
قسمت
اصلی، ۲۵۰
مثبت، ۲۸
منفی، ۲۸
قضیه
آرزلا ـ اسکولی، ۲۸۹
اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۱۷۶، ۱۸۱
استویلوف، ۴۶۸
اگوروف، ۹۵
انعکاس، ۲۲۲ ، ۲۲۳
بئر، ۱۲۲
باناخ ـ اشتاین هاوس، ۱۲۳

بورلینگ، ۴۰۷
پالی ـ وینر، ۴۳۵ ، ۴۳۷
پلانشرل، ۲۲۲
پیکارد، ۳۸۸
تاوبری، ۴۷۳
تجزیهٔ وایراشتراس، ۳۵۵
تحدب، ۳۰۳
تقریب وایراشتراس، ۳۶۶ ، ۴۴۹
تک میدانی، ۳۸۲
توسیع، ۱۳۱
تیتس، ۴۵۲
دنجوی ـ کارلمن، ۴۴۲
رادو، ۳۰۹
رادون ـ نیکودیم، ۱۵۱
رسته‌ای، ۱۲۳
روشه، ۲۶۶ ، ۲۷۱
رونگه، ۳۱۷ ، ۳۱۹ ، ۴۵۰
ریس ـ فیشر، ۱۰۹ ، ۱۱۶
سه‌دایره، ۳۱۱
فجر، ۱۱۵
فوبینی، ۲۰۰ ، ۲۰۴
کشی، ۲۴۴ ، ۲۴۶ ، ۲۵۸
گراف بسته، ۱۴۳
گرین، ۴۵۲
گلفاند ـ مازور، ۴۲۰
لوسین، ۷۳
لیندلف، ۳۰۵
لیوویل، ۲۵۱ ، ۲۶۰ ، ۴۲۰
ماکزیمالی، ۱۱۱ ، ۴۶۰
هاسدورف، ۱۱۱ ، ۱۳۳ ، ۲۳۴ ، ۳۰۹ ،
۴۶۰
مانده، ۲۶۴
مدول ماکزیمم، ۱۳۷ ، ۲۵۲
مرگلیان، ۴۵۳ ، ۴۵۷
مساحت، ۳۳۶
موررا، ۴۷
مونتس ـ زاتس، ۳۶۶، ۳۷۳
میتاگ ـ لفلر، ۳۲۰
نقطهٔ ثابت براوئر، ۱۸۴
نگاشت
باز، ۱۲۴ ، ۲۵۴ ، ۲۵۶
ریمان، ۳۳۱ ، ۳۴۶
نمایش، ۵۶ ، ۱۰۴ ، ۱۶۰
ریس، ۵۰ ، ۵۶ ، ۱۶۰
ویتالی، ۱۶۴
ـ کاراتئودوری ، ۷۴
هارناک، ۲۷۸ ، ۲۹۵
هاسدورف ـ یانگ، ۳۰۶
هان ـ باناخ، ۱۳۱ ، ۱۳۴ ، ۳۱۷ ، ۳۶۷ ، ۴۲۰
هاینه ـ بورل، ۵۱
همگرایی
تسلطی، ۴۰ ، ۴۳ ، ۲۱۷
یکنوا، ۳۵
قطب، ۲۵۰ ، ۳۱۴
قلمرو، ۲۰
اساسی، ۳۸۴

کاتر، اف. اس.، ۴۶۴
کاراتئودوری، سی.، ۴۶۳ ، ۴۶۸ ، ۴۷۰
کارلسون، ال.، ۴۶۵
کافمن، آر. پی.، ۴۶۵ ، ۴۶۹
کالدرون، ا. پی.، ۴۶۹ ، ۴۷۲
کانتور، دی. جی.، ۴۷۰
کاهانه، ج. پی.، ۴۷۱
کرهٔ ریمان، ۳۱۳
کسرهای جزئی، ۳۱۴
کسینوس، ۱۴ ، ۳۱۲
کشی، ا.، ۴۶۸
کوچکترین کران بالایی، ۱۹
کوهن، پی. ج.، ۴۷۲
کیرک، آر. بی.، ۴۶۴

گراف (نمودار)، ۱۴۳ ، ۲۱۰
گردایه، ۱۸
در حال تعادل، ۳۱۵
گروه مدولی، ۳۸۳
گلفاند، ا. ، ۴۷۲

گورسا، ای.، ۴۶۸
گوی
باز، ۲۲
یکه، ۱۲۱

لاپلاسین، ۲۳۴
لبگ، اچ. ج.، ۱۷ ، ۳۵ ، ۴۶۲ ، ۴۶۷
لگاریتم، ۲۶۸ ، ۳۲۲
لم
اوریزن، ۵۴
پوششی، ۱۶۹ ، ۴۶۶
ریمان ـ لبگ، ۱۲۹
زرن، ۱۱۱
شوارتز، ۲۹۹
فاتو، ۳۷ ، ۸۸ ، ۳۶۲ ، ۴۰۳
لودن اسلاگر، دی.، ۴۰۸
لیتلوود، ج. ای.، ۲۰۹ ، ۴۶۶

مارچین کویچ، ج.، ۲۰۹
ماندل بروت، اس.، ۴۷۳
مانده، ۲۶۴
متر، ۲۱
متمرکز، ۱۴۹
متمم، ۱۹
متوسط، ۴۵
مثلث، ۲۴۲
مجموع
جزئی سریهای فوریه، ۱۰۶، ۱۱۵، ۱۲۶، ۴۱۴
مسیرها، ۲۵۷
مجموعه(ها)
از هم جدا، ۱۹
F_σ، ۲۵
اکیداً محدب، ۱۳۹
اندازه پذیر، ۱۹۰ ، ۲۰۲
لبگ، ۶۸
اندازه ناپذیر، ۲۰
باز، ۲۰
بسته، ۲۵ ، ۵۰
بورل، ۲۵
تهی، ۱۸
جزئی مرتب، ۱۱۰
G_σ، ۲۵
چگال، ۷۷
خطی مرتب، ۱۱۱
σ ـ فشرده، ۶۴
صفر، ۲۴۸
عرضی، ۲۱۰ ، ۴۶۷
فشرده، ۵۱
قابل رفع، ۳۹۰
کانتور، ۷۶ ، ۱۷۸
کلی
مرتب، ۱۱۱
ناهمبند، ۷۶
متعامد یکه، ۱۰۵
ماکزیمال، ۱۰۹
محدب، ۱۰۱
مستقل، ۱۰۵
مقدماتی، ۱۹۵
منتظم
خارجی، ۶۴
داخلی، ۶۴
همبند، ۲۳۵
محافظ، ۵۳ ، ۷۷
محمل، ۷۷
مختصات قطبی، ۲۱۲
مدار، ۳۷۲
مرتبه
تابع تمام، ۳۶۹
صفر، ۲۴۸
قطب، ۲۵۰
مرز، ۱۳۵ ، ۲۴۲ ، ۳۳۸
طبیعی، ۳۷۵ ، ۳۸۶
مزدوج توافقی، ۴۱۰
مساحت، ۲۹۳
مسئلهٔ دیریکله، ۲۷۷
مستطیل، ۱۹۵
مسیر(ها)، ۲۴۰
بسته، ۲۴۰

متقابل، ۲۴۱
هم‌ارز، ۲۴۱
مشتق، ۱۶۷ ، ۲۳۶
انتگرال، ۱۷۳
اندازه، ۱۶۸ ، ۱۷۴ ، ۱۷۵ ، ۲۸۴
تابع باتغییر کراندار، ۱۹۲
تبدیل، ۱۸۳
فوریه، ۲۱۷
جزئی، ۲۷۳
رادون ـ نیکودیم، ۱۵۱ ، ۱۷۲
راست، ۴۶۶
متقارن، ۱۶۸
معادله (ات)
کشی ـ ریمان، ۲۷۴
لاپلاس، ۲۷۴
مقدار مجانبی، ۳۱۲
مکعب هیلبرت، ۱۱۷
منحنی، ۲۴۰
با نموهای متعامد، ۱۱۹
بسته، ۲۴۰
ژردان، ۳۴۰
همجای پوچ، ۲۶۲
مؤلفه، ۲۳۶
موشو واکیس، وای. ان.، ۴۷۱
میانگین
حسابی، ۸۴
هندسی، ۸۴
میدان
به‌طور جبری بسته، ۲۵۲
مختلط، ۲۵۲ ، ۴۱۹
میرکیل، اچ.، ۴۷۳

ناحیه، ۲۳۶
تقرب، ۲۸۳
غیرمماسی، ۲۸۳
نامساوی
اقلیدس، ۹۹
بسل، ۱۰۸ ، ۳۰۶
شوارتز، ۶۷ ، ۸۴ ، ۹۹
ضربی، ۴۱۶
مثلثی، ۲۱ ، ۶۷ ، ۹۹
مینکوفسکی، ۸۴ ، ۲۱۴
هاردی، ۹۴ ، ۲۱۴
هولدر، ۸۴ ، ۸۷
ینسن، ۸۲
نرم، ۸۶ ، ۹۹ ، ۱۲۰ ، ۱۲۱
خارج قسمتی، ۴۲۴
سوپرمم، ۹۱
طیفی، ۴۲۰
نشان، ۲۱۶
نقطه
اکستریم، ۲۹۵
پایان، ۲۴۰
ثابت، ۱۸۴ ، ۲۷۱ ، ۲۹۱ ، ۳۴۳ ، ۳۴۸ ، ۳۶۸ ، ۳۷۲ ، ۴۵۹
شروع، ۲۴۰
لبگ، ۱۷۱ ، ۱۹۴ ، ۲۸۴
مرزی ساده، ۳۳۸
منتظم، ۳۷۴
منفرد، ۳۷۴
نقش، ۱۹
معکوس، ۱۹
نگاشت، ۱۹
باز، ۱۲۴ ، ۲۵۴
پیوسته، ۲۱
معکوس، ۱۹ ، ۲۵۵
یک به‌یک، ۲۰
نماهای مزدوج، ۸۳
نمایش قطبی اندازه، ۱۵۵
نوانلینا، آر.، ۳۶۴
نووینجر، دبلیو. پی.، ۴۶۴
نویمان، ج. فون، ۱۵۱ ، ۴۶۳ ، ۴۶۵
نیمصفحه
بالایی، ۲۸۰
پایینی، ۲۸۰

واربرگ، دی. ای.، ۴۶۶

واکر، پی.ال.، ۴۶۶
وایراشتراس، کا.، ۳۵۳، ۳۸۸
ورمر، ج.، ۴۷۲
ویلانی، ا.، ۴۶۴
وینر، ان. ۴۲۹

هادامار، ج.، ۳۱۱، ۳۷۶
هاردی، جی. اچ.، ۲۰۵، ۳۹۳، ۴۶۶
هاسدورف، اف.، ۲۵، ۴۷۴
هافمن، کا.، ۴۷۳
هال، دی.، ۴۶۴
هالموس، پی. آر.، ۴۶۳
هانت، آر. ا.، ۴۶۵
هرگلوتس، جی.، ۴۶۹
هسته
پواسون، ۱۳۹، ۲۷۵
دیریکله، ۱۲۷
هلسون، اچ.، ۴۰۸
هم‌ارزی همدیس، ۳۳۱
همبند ساده، ۲۶۲، ۳۲۱
همجایی، ۲۶۲
همریختی، ۲۱۶، ۲۲۹، ۴۲۵
مختلط، ۲۲۹، ۴۲۳
همسایگی، ۲۲، ۵۱
همگرایی
تسلطی، ۴۰
تقریباً یکنواخت، ۲۵۳
در L^p، ۸۸
در اندازه، ۹۶
ضعیف، ۲۸۸، ۲۹۰، ۲۹۶
مطلق، ۱۴۵
یکنوا، ۳۵
هم‌مجموعه، ۴۲۳
هیچ جا چگال، ۱۲۳

یانگ، دبلیو. اچ.، ۱۷، ۴۶۹
یکریختی، ۱۱۰
یکمتری، ۱۰۸
یکنوایی، ۳۰، ۵۸
یکه، ۴۱۷