محاسبات عددی

جزوه درسی مهندس سلمانزاده (کارشناسی ارشد هوا فضا)

مقدمات ریاضی :

آنالیز عددی:حل مسائل پیچیده ریاضی با روشهای ساده محاسباتی و طرح و بررسی روشهایی جهت حل عددی این مسائل و بدست آوردن جوابهای عددی با داشتن یک سری اطلاعات اولیه (جوابهای تقریبی) .

مراحل حل مسئله :

۱- مدل سازی کردن یا فرمول کردن مسئله
۲- ارائه یک روش عددی (الگوریتم) جهت حل مسئله
۳- کد کردن الگوریتم به زبان برنامه نویسی .

الگوریتم : راه حلی از مسئله است که اولا"دقیق باشد ثانیا" مراحل مختلف اجرای آن مشخص باشد .
ثانیا"شرط پایان داشته باشد

محاسبات کامپیوتری :

۲

نمایش عددی :

۱- ریاضی : اعداد با طول نامتناهی ($\sqrt{2}$ =۲)

۲- محاسبات (عددی) : اعداد با طول متناهی ($\sqrt{2}$ # ۲)

نمایش عددی به صورت غیر شناور : floting point number

$$X = d(0.d \,.\, d4....dk)\, b * b^{e}$$

مانتیس

D1#0 0<d1(b-1)

نما (توان) e k = دقت

b=16	b=8	b=15	B= 2
HYa decimat		octal	decimat
binary			

بصورت میز شناور fe(x)

مثال : x= 14.128 fe(x) = 0. 14128 * 10

$$x = (۱۷۲)_۸ = ۸^۰ * ۲ + ۸^۱ * ۷ + ۸^۲ * ۱ = (عدد)_{۱۰}$$

مثال : ۱۰ (۱۴,۴) = ۲ (x)

(۱۴) ۱۰ = (۱۱۱۰)۲

۲

۱۴ ۲

۱۴ ۷ ۳ ۲

۶ ۲ ۱

-- -----

۰ --

۱

۱

۰ ۰,۸ = ۴*۲ .۰

۱ ۱,۶ =۸*۲ .۰

۲ (۰۱۱۰ . ۱۱۱۰) = ۱۰ (۱۴,۴) ۱ ۱,۲ =

۶*۲ .۰

۰ ۰,۴ = ۲* ۰,۲

دقت ساده و مضاعف : single and double presision

یک بیت جهت علائم هفت بیت جهت نما

اگر دقت ساده باشد بیست و چهار بیت جهت مانتیس

اگر دقت مضاعف باشد پنجاه و شش بیت جهت مانتیس

مثال : $z= 2.2 \quad x= 46.8609 \quad y=46.8607$

z

با دقت single k=3

؟ = --------

x-y

۲,۲

z

؟= ----------------------- = ---------

۴۶,۸۶۰-۴۶,۸۶۰ x-y

z ۲,۲ ۲,۲

Double k=۶ k = ۲ = ------------- = ------------- --

--- = ----

-۳

۴۶,۸۶۰۷ -۴۶,۸۶۰۹ x-y

= ۱۰*۱,۱

L ۱- L L-۱

e

Under fl0W زیر زیر : x=d(0.d1d2 …dk)b *b>(0.1) b*b = b*b = b

L-1

3=eps = کوچکترین عدد که صفر نیست < ----

xl = b

X=0 ---> X4 | X |<

سر ریز : **Over flow**

$$X = d\,(0.d_1\, d_2 \ldots D_k)\, b^{e} * b < 1 * b^{U}$$

$xu = b^{u}$ -----> بزرگترین عدد ممکن

if $|x| > xu$ ----> $x = \inf$ بی نهایت

رند کردن و قطع کردن : **Ro ding and chapping**

رند و قطع کردن تا رقم k $x = (0.d_1\, d_2 \ldots dk)\, b^{e} * b$

قطع کردن $f1c(x) = d\,(0.d_1\, d_2 \ldots D_k)\, b^{e} * b$

$$F1r(x) = \begin{cases} D\,(0.d_1\, d_2 \ldots d_k)\, b^{e} * b & \text{if } 0 < d_{k+1} < B/2 \\ D\{(0.d_1 d_2 \ldots d_k) + (0.0\,0 \ldots 1)_{k-1}\}\, B^{E} * B & \text{IF } B/2 < d_{K+1} < B-1 \end{cases}$$

مثال X=23.368 y=23.381 k=2

$$F1(x) = 0.23368 * 10^{2} \qquad f1(y) = 0.23381 * 10^{2}$$

$$K=4 \qquad f1c(x) = 0.2336 * 10^{2} \qquad f1c(y) = 0.23 * 10^{2}$$

$$F1R(X) = 0.2334 * 10^{2} \qquad F1R(Y) = 0.23 * 10^{2}$$

خطا

ERROR

اگر a تقریبی از $\bar{a}$ باشد آنگاه $Ea = \text{Abscdut Error}(a) = AE(a) = |\bar{a} - a|$

$$Ea = \text{Relative Error}(a) = RE(a) = \frac{|\bar{a} - a|}{|a|}$$

مثال : عدد $\pi = 3{,}14$ را با مقدار تقریبی $\frac{22}{7}$ نشان دهید

$$\bar{a} = \frac{22}{7} = 3.1428 = 0.31428 * 10$$

$$Ea = |\bar{a} - a| = |0.31428 * 10 - 0.31415 * 10|^{-2}$$

a = Л= ۳,۱۴۱۵=0.31415*10   =0.000 13*10= 0.13 *10

-۲

–   Ea   ۱۰*۰,۱۳   -۳

Ea=------=-------------- = 0.413815*10

│a│   0.31415*10

نکته : همیشه در مسائل از خطای نسبی بیشتر استفاده می کنید زیرا :

–   –

–   │Na-Na│   │a-a│   –

E Na = N│a-a│=NEa   ENa =--------------- =--------- = Ea

│Na│   │a│

منشاء خطا در محاسبات عددی :

۱- خطای برش : بعلت تقریب یک مقدار با یک فرمول حاصل میگردد .

۲   ۳

x   x   X   x

e = 1+ ----- + ----- + ------   Error= ε -------

۲!   ۳!   n= ۴   n!

۳   ۵   ۴

x   x   x

sin x = 1 + ----- + ------ - ------ + ……

۳!   ۵!   ۷!

۲- خطای ماشین : ۱- رند کردن ۲- قطع کردن ۳- حذف ارقام با معنی .

۳- اشتباه : به علت غلط وارد کردن داده های اولیه به کامپیوتر ایجاد می شود .

۴ – خطای مقادیر اولیه : بعلت خطای موجود در وسائل اندازه گیری جهت محاسبه فرمول در آزمایشگاه می باشد محاسبه این خطا مقادیر محاسبه ریاضی را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه می کنیم .

اعمال محاسباتی بر روی ممیزهای شناور :

الف) جمع :   f1 (f1(x) +f1(y)) = x Ө y # x+y

۱   -۱

مثال :   k=3   1.37 + 0.0269 = 0. 137 * 10 + 0.269 *10

٠,١٣٧ * ١٠ ---- > ٠,١٣٧ *10

٠,٢٦٩ * ١٠ ----- > ٠,٠٠٢٦٩ * ١٠

٣ رقم

٠,١٣٩٦٩ * ١٠ ------ >

Round ----- >0.14*10

Chap ---- > 0.139 * 10

ب) تفريق : f1 (f1 (x) – f1 (y)) = x θy # x-y

مثال : $3780 - 0.321 = 0.378 * 10^{-٤} - 0.321$

$0.378*10^{+٤}$

$١٠^{٤} *٠,٠٠٠٠٣٢١$

$١٠^{٤} * ٠,٣٧٧٦٧٩$ -------- >

Round →$0.378 * 10^{٤}$

Chap → $0.377 *10^{٤}$

ج) ضرب :

F1 (f1 (x) * f1 (y)) = x Өy # x*y

مثال : $403000 * 0.697 = 0 . 403 * 10^{٦} * 0.197 * 10^{-١}$

$١٠^{-١} * ٠,٠١٩٧$

=

$١٠^{٦} * ٠,٤٠٣$

$١٠ * ٠,٠٧٩٣٩١= ١٠^{٤} * ٠,٧٩٣٩١$ ----->

round→$0.794 * 10^{٤}$

٤

Chap →0.793 * 10

د) تقسیم :

-۱

F1(f1 (x) . f1(y)) = x / Y # x/ y

مثال :

۰,۰۳۵۶ ۱۰ *۰,۳۵۶ -۵

------------- =---------------- = ۱۰*۲,۲۸۲۰۵=

۱۵۶۰ +۴ -۴

۱۰ * ۰,۱۵۶ round → 0.228 * 10

-۴

=0.228205 * 10 → chap → 0.228 * 10

با روش برش بعد از سه رقم و با روش گرد کردن تا سه رقم چند جمله ای زیر را برای x= 1.07 در چپ به در ، به جمله حساب کنید و خطای مطلق و نسبی آنرا بدست آورید .

۳ ۲

2.75 x – 2.95 x + 3.16 x – 4.67

سه رقم k=3 1c (x) = 0.107 * 10

۲

رند کردن برای تمرین جلسه بعد x = f1 (f1 (x) * f1 (x))

0.107 *10

\+ 0.107 *10 2

--------------- → F1c(x)=0.114*10

۲

0.0 11444 * 10 = 0.11444 * 10

۳ ۳

2.75 X : f1 (f1(2.75) * f1 (x))

۱۰ * ۰,۲۷۵

۱۰ * ۰,۱۱۴ → F1c (2.95 x) = 0.336 * 10

--------------- ۲

0.3363 * 10 = 0.3363 * 10

16 x = f1 (f1 (x) * f1 (3.16))

۱۰ * ۰,۳۱۶

۲

۱۰ * ۰,۰۱۰۷

--------------- → f1c (3.16 x) = 0.336 * 10

٢

10 * 0.33812 = 0.33812 * 10

10 * 467

10 * 0.332

10 * 0.336

-١

0.004 * 10 = - 0.4 * 10

-1

- 0.4 * 10

0.338 * 10

+1

- 0.004 * 10

١

+ 0.338 * 10

١

0.334 * 10

0.334 * 10

467 * 10

----

١٠ * ٣٣

جواب نهایی مقدار تقریبی

٣ ٢

مقدار داده 2.75 (1.07) – 2.95 (1.07) + 3.16 (1.07) – 4.67 = -1.29738875

$$a = \left| a - \bar{a} \right| = \left| 0.133 * 10 + 0.1297386675 * 10 \right| = 0.03261325$$

$$a = \frac{Ea}{|a|} = \frac{0.03261325}{0.12738675*10} = 0.025137456$$

مثال : اعمال زیر را به روش قطع کردن با دقت k = 5 بدست آورید .

=2/3 u= 0.428321

= 4/3 v =95674 . 4

$w = 0.111111 * 10^{-۶}$

جاهای خالی تمرین هستند

خطای نسبی	خطای مطلق	مقدار واقعی	مقدار تقر
$0.34782 * 10^{-۴}$	$0.3809\ 8\ 10^{-۴}$	23/21	0.10952 * 10
…………….	………..	…………	…………
$0.35713 * 10^{-۴}$	$0.55555 * 10^{-۴}$	19/9	0.15555
………….	………	…………	………..

0.100	$0.48488 * 10^{-۴}$	4.824748488	0.47837 * 10	(y Θ x) Θ w
……….	……….	………	………	uΘ v

تمرین : اعداد زیر را در نظر گرفته و اعمال زیر را برای آنها انجام داده میزان خط را برای آنها محاسبه کنید . 9=

$G = 0.4523 * 10^{۴}$ $b=0.2115 * 10^{-۳}$ c=0.2583 * 10

الف) a+b+c ب) a-b-c ج) a/c د) ab / c

ارقام با معنی : در نمایش اعشاری یک عدد اعداد ۱و۲و۳و ..... ۹ و همچنین صفر در صورتیکه برای نشان دادن یا برای پر کردن مکان ارقام حذف شده بکار می رود رقم با معنی خواهد بود .

سه رقم $۰,۱۵۶ * ۱۰^{۶}$

۴ رقم $۰,۱۵۶۰ * ۱۰^{۶}$

۵ رقم $۰,۱۵۶۰۰ * ۱۰^{۶}$

۱۵۶۰۰۰

چهار رقم با معنی ۲۰۱۷

سه رقم با معنی ۰,۰۱۵۷

سه رقم با معنی $۰,۶۳۲ * ۱۰^{-4} \rightarrow ۰,۰۰۶۵۲$

۰.

۴ رقم با معنی $۰,۰۶۵۸ * ۱۰^{-۱}$

یک رقم $۰,۳ * ۱۰^{۲} \rightarrow ۳۰,۰$

دو رقم $۰,۳۰ * ۱۰^{۲}$

ارقام با معنی صحیح : در صورتیکه عدد ۲/۳ را با x=0.66667 و y = 0. 66699842593 نمایش دهید ر چه
تقریب دومی تعداد ارقام با معنی بیشتری دهد ولی دقت آن از تقریب اولی کمتر است چون تعداد زیادی از ارقام
با معنی دومی در تقریب نقش ندارند یا به عبارتی ارقام با معنی صحیح اولی از دومی بیشتر است .

در نمایش تقریبی یک عدد رقمی را با معنی صحیح گویند که اگر از محل قرار گرفتن عدد به بعد رند کنیم خطای ق از
نصف واحد محل قرار گرفتن عدد کمتر می گردد در آنصورت عدد را رقم با معنی صحیح گویند اگر

$B*10^{E}$ دارای n رقم با معنی صحیح باشد آنگاه خطای مطلق در ۰,۵ * ۱۰$^{-n}$ کوچکتر خواهد بود .

قضیه : اگر $\bar{a}$ تقریبی از a باشد و $|a-\bar{a}| < 0.5 * 10^{-n}$ باشد آنگاه $\bar{a}$ دارای n رقم با معنی صحیح است و بالعک

اگر $\bar{a}$ تقریبی از a باشد و $\bar{a}$ دارای n رقم با معنی صحیح باشد آنگاه خطای مطلق به صورت زیر است .

$$|a-\bar{a}| < 0.5 * 10^{-n}$$

$x = 2/3 = 0.66668 \ldots\ldots$ $\qquad \bar{X}=0.66667$

$\bar{Y} = 0.66699842593$

$$|x-\bar{x}| =10 .666 \ldots - 0. 666671 = 0.000003333$$

$$|x-\bar{x}| = 0.333 * 10^{-۵} < 0.5 * 10^{-۵}$$

پس $\bar{x}$ پنج رقم با معنی صحیح دارد .

$$|x-\bar{y}| = |0.666 \ldots \_ 0.66699842593| = 0.0003317$$

$$|x-\bar{y}| = 0.3317 * 10^{-۳} < 0.5 * 10^{-۳}$$

پس $\bar{y}$ ۳ رقم با معنی صحیح دارد .

- در صورتیکه یک عدد را تا n رقم رند کنیم خطای مطلق آن از ۰,۵ * ۱۰$^{-n}$ کوچکتر است

$\pi = 3.141592654$

با این دو عدد تقریب می زنیم $x= 22/7 \quad , \quad y= 355/113$

$X= 22/7 = 3.14159292$

$Y= 355/113 = 3.14159292$

پس n دو رقم با معنی صحیح دارد . $|x - x| = 0.00126449 < 0.5 * 10^{-2}$

پس y شش رقم با معنی صحیح دارد . $|y-x| = 0.000000266 = 0.266 * 10^{-6} < 0.5 * 10^{-6}$

$k=3 \rightarrow \sqrt{5} = 2.236 \qquad \sqrt{۵} = ۲,۲۳۶۰۷۴۹۷۸$

$۲,۲۳۶ - (۰,۵ * ۱۰^{-۳}) < \sqrt{۵} < ۲,۲۳۶ + ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$ یعنی $E\sqrt{۵} < ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$

خطای مطلق ناشی از حذف ارقام با معنی روی اعمال محاسباتی : ۱ . جمع و تفریق

۲. ضرب

۳ . تقسیم

۱. جمع و تفریق : اگر $a=\bar{a}+Ea$ و $b=\bar{b}+Eb$ همچنین $\bar{a}+\bar{b}$ مقدار تقریبی $a+b$ باشد آنگاه

$$E_{a+b} < Ea + Eb \qquad , \qquad E_{a-b} < Ea + Eb$$

$$E_{a+b} = |(a+b) - (\bar{a} + \bar{b})| = |(a-\bar{a}) + (b-\bar{b})|$$

$\_ \qquad \_$

$$|x+y| < |x| + |y| \;\text{-----------------------}> |(a-\bar{a}) + (b-\bar{b})| < |(a-\bar{a})| + |(b-\bar{b})| \rightarrow E_{a+b} < E_a + E_b$$

مثال : اگر اعداد $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۷}$ را تا سه رقم اعشار در نظر بگیریم مطلوبست محاسبه $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۷}$ و محا
حداکثر خطای ترکیب شده .

$$\sqrt{۵} + \sqrt{۱۷}$$

$$\sqrt{5} = 2.236 + E_{\sqrt{2}} \quad , \quad E_{\sqrt{2}} < 0.2 * 10^{-۳}$$

$$\sqrt{۱۷} = ۴,۱۲۳ + E_{\sqrt{۱۷}} \quad \text{و} \quad E_{\sqrt{۱۷}} < ۰,۵ * ۱۰$$

$$\sqrt{۵} + \sqrt{۱۷} = (۲,۲۳۶ + ۴,۱۲۳) + E_{\sqrt{۵}+\sqrt{۱۷}}$$

$$\sqrt{۵} + \sqrt{۱۷} = ۶,۳۵۹ + E_{\sqrt{۵}+\sqrt{۱۷}}$$

$$E_{\sqrt{۵}+\sqrt{۱۷}} < E_{\sqrt{5}} + E_{\sqrt{۱۷}} < ۰,۵ * ۱۰^{-۳} + ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$$

$$E_{\sqrt{۵}+\sqrt{۱۷}} < ۱۰$$

$$۶,۳۵۹ * ۱۰^{-۳} < \sqrt{۵} + \sqrt{۱۷} < ۶,۳۵۹ + ۱۰^{-۳}$$

$$\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷}$$

$$\sqrt{۵} = ۲,۲۳۶ + E_{\sqrt{۵}}$$

$$\sqrt{۱۷} = ۴,۱۲۳ + E_{\sqrt{۱۷}}$$

$$\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷} = (۲,۲۳۶ - ۴,۱۲۳) + E(\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷})$$

$$\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷} = -۱,۸۸۷ + E(\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷})$$

$$E(\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷}) < E\sqrt{۵} + E\sqrt{۱۷} < ۰,۵ * ۱۰^{-۳} + ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$$

$$E(\sqrt{۵} - \sqrt{۱۷}) < ۱۰^{-۳} \rightarrow -۱,۸۸۷ - ۱۰^{-۳} < \sqrt{۵} - \sqrt{۱۷} < -۱,۸۸۷ + ۱۰^{-۳}$$

خطای ضرب : اگر $a = \bar{a} + Ea$, $b = \bar{b} + Eb$ باشد آنگاه

$$E\ a.b < \bar{a}Eb + \bar{b}Ea$$

$$E\ a.b = |(a.b) - (\bar{a}\,\bar{b})| = |(\bar{a} + Ea)(\bar{b} + Eb) - \bar{a}\bar{b}|$$

$$= |\bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,E\,b + \bar{b}E\,a + \underbrace{\cancel{EaEb}}_{\text{صفر}} - \bar{a}\,\bar{b}|$$

$$\rightarrow Ea.b < \bar{A}E\,b + \bar{b}E\,a$$

$\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷}$ K=3

$$\sqrt{۵} = ۲,۲۳۶ + E\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۱۷} = ۲,۱۲۳ + E\sqrt{۱۷}$$

$$\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷} = (۲,۲۳۸ * ۴,۱۲۳) + E\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷}$$

$$\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷} = ۹,۲۱۹۰۲۸ + E\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷}$$

$$\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷} = ۹,۲۱۹ + E\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷} + ER \qquad ER < ۰,۵ * ۱۰^{-۱}$$

$$E\,TOT = E\sqrt{۵} * \sqrt{۱۷} + ER < ۲,۲۳۶\,Ea + ۴,۱۲۳\,Ea + ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$$

$$ETOT < (۱ + ۲,۲۳۶ + ۴,۱۲۳)\,۰,۵ * ۱۰^{-۳}$$

$$ETOT < ۳,۶۸ * ۱۰^{-۳} \longrightarrow ۹,۲۱۹ - ۳,۶۸ * ۱۰^{-۳} < \sqrt{۵} * \sqrt{۱۷} < ۹,۲۱۹ + ۰.۰۰۳۰$$

خطای مستقیم : $E\,a/b < \dfrac{\bar{a}Eb + \bar{b}E\,a}{(\bar{b})^{۲}}$

مثال مطلوب محاسبه $\sqrt{۵}$ 7 / 3 ومحاسبه حداکثر خطای ایجاد شده با دقت ۳ رقم .

$$A = л * ۱/۳ * \sqrt{۵} = л * ۱/۳ * ۱/۵ * \sqrt{۵} = ۰,۲\,л * ۱/۳ * \sqrt{۵}$$

$$X = л = ۳,۱۴۲ + E\,л * eл < ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$$

$$Y = ۱/۳ = ۰,۰۳۳۳ + EY \quad \text{و} \quad E\,۱/۳ < ۰,۵ * ۱۰^{-۳}$$

$Z = \sqrt{5} = ۲,۲۳۶ + \sqrt{5}$ و $E\sqrt{5} < ۰,۵ * ۱۰$

$A = 0.2 \{ 3.142 * 0.333 * 2.236 + E A\}$

$A = 0.2 * 3.142 * 0.333 * 2.236 + 0.2 \; Ea$

$A = 0.467899099 + 0.2 \; EA$

$A = 0.468 + \underbrace{ER + 0.2}_{ETOT} \; EA$

$E \; a*b*c < \bar{a}\bar{b}Ec + \bar{a}\bar{c}Eb + \bar{c}\bar{b}Ea$

$TOT = ER + 0.2 \; EA < 0.5 * 10^{-۳} + 0.2 \{ 3.142 * 0.333 \sqrt{E \; 5} + 3.142 + 0.333 * 2.236 \; E \; л \}$

ETO : { 1+ 0.2 (3.142 * 0.333 + 3.142 * 2.236 + 2.236 * 0.333 } * 0 ETOT < 0.001382

0 8 - 0.001382 < л / 3 5 <0.468 + 0.001382 $\sqrt{}$

خطای توابع و فرمولها : اگر تابع $W= F (X1 , X2 \; …., Xn)$ و همچنین $xi = \bar{xi} + Ex$ باشد در آنصورت

مقدار خطای حاصل به صورت زیر است . $f (x1 , x2 , .. xn) = f (\bar{x}1 , \bar{x}2 , \bar{x}3 , …\bar{x}n) + E \; f$

$$Ef < gf/gx1 \ \ Ex1 + gf/gx2 \ \ Ex2 + \dots + gf/gxn \ \ Exn$$

مثال : مطلوبست محاسبه حجم کره به شعاع (x = 5/3) ومحاسبه ماکزیمم خطای ایجاد شده در این محاسبات قت
سه رقم اعشار .

$$V = 4/3 \ \pi R^{۳}$$

$$X = 4/3 = 1.333 * Ex \quad , \quad Ex < 0.5 * 10^{-۳}$$

$$Y = x\ 3.142 + Ey \quad , \quad Ey < 0.5 * 10^{-۳}$$

$$Z = R = 5/3 = 1.667 + Ez \qquad Ez < 0.5 * 10^{-۳}$$

$$V = \overline{xyz}^{۳} + Ev = (1.333)(3.142)(1.667)^{۳} + Ev$$

$$= 19.4018\,4942 \ \# \ Ev$$

$$= 19.402 + Ex + Ev \qquad E x < 0.5 * 10^{-۳}$$

$$ER + EV < 0.5 * 10^{-۳} + yzEx^{۳} + xzEy^{۳} + 32\,xy\,E z^{۲}$$

$$\text{I ...OT} < 0.5 * 10^{-۳} \{ 1 + (3.142)(1.667)^{۳} + (1.333)(1.667) + (1.333)(1.667)^{۲} * (3.142) * 3 \}$$

$$ETOT < 0.028 \qquad 19.402 - 0.028 < V < 19.402 + 0.028$$

۲ ۳ ۴

تمرین : تابع $F(X,Y,Z) = XYZ$ بنابراین مقادیر زیر داده شده است حداکثر خطای ایجاد شده را بدست اورید
(K= 4) $X= 5.4123 \quad , Y=1.5235 \quad , \quad Z= 1.0025$

تمرین : اعداد a,b,c تا سه رقم اعشار به ترتیب به صورت $c= 4.701 \quad , \quad b= 0.8325 \quad , \quad c=2.413$ میباشد

مقدار تقریبی و خطای حاصل از عبارتها زیر را بدست اورید . الف) ab / c ب) $1 / ab$

$$1.621 - 0.0013 < ab / c < 1.621 + 0.0013$$

$$0.2557 - 0.0002 < 1 /ab < 0.2557 + 0.0002$$

تمرین : مقدار x , y به صورت روبرو است $x= 123000 \mp ١٠٠ \quad Ea$

$Y= 62000 \mp 500 \quad Ea$

مقدار خطای مطلق $\log (x+ y)$ را بدست آورید .

$$Ef < 0.008$$

تمرین : مطلوبست محاسبه مساحت دایره شعاع $(r= 3.14)$ با دقت چهار .

حل معادلات غیر خطی یک متغیره :

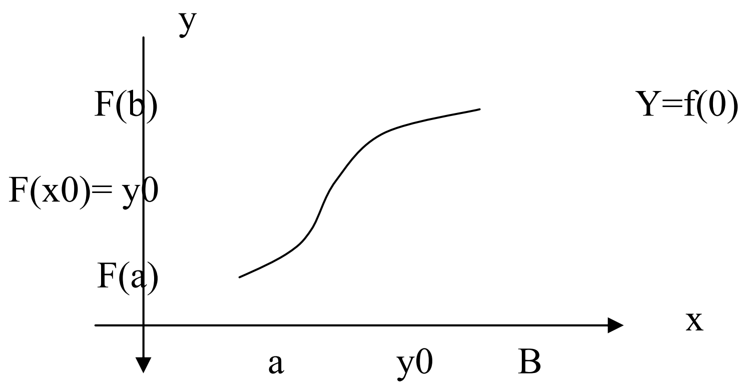
۱- روش نصف کردن فاصله ۴-

۲- روش تکرار ساده ۵- روش Δ^2 اتین

۳- روش نیوتن ۶- روش مولر

۱- روش نصف کردن فاصله :

قضیه : اگر تابع f دربازهء { a,b } پیوسته باشد آنگاه برای هر y بین f(a) و f(b) یک مقدار x0 بین
وجود است به قسمی که :



F(x0)= y0

قضیه بر تز انو - وارشیتراش

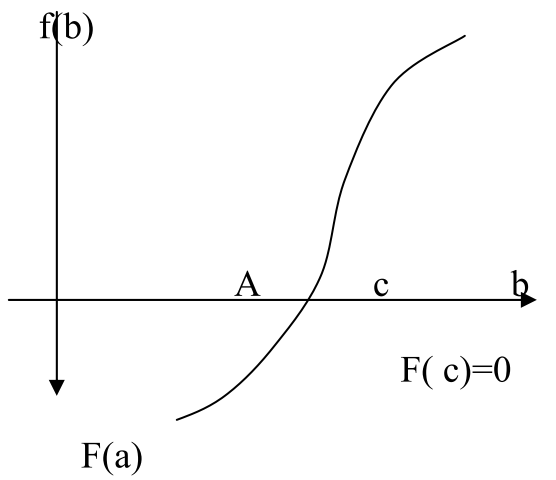
اگر f در بازه {a,b } پیوسته باشد و f(a) f(b) < 0 آنگاه یک مقدار c بین a,b موجود است به قسمی

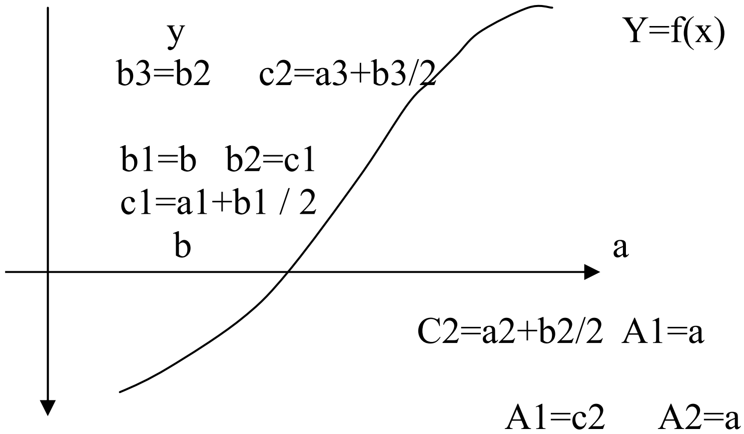
F (c) = Q یا c ریشه تابع f خواهد بود .

۱) پیوستگی تابع f .

2) $f(a)\ f(b) < 0$

3) $c \in \{a,b\}$ $f(c) = 0$





A1=c2 A2=a1

Step 1 a=a1 , b=b1 , c1= a1+b1 / 2

If f(c1) = 0 C $\rightarrow$ c1 ریشه است

If f(c1) # 0 f(c1) f(a1) < 0 $\longrightarrow$ a2 = a1 , b2=c1 or c2

F (a1) f(c1) > 0 $\longrightarrow$ a2= c1 , b2 = b1 or c

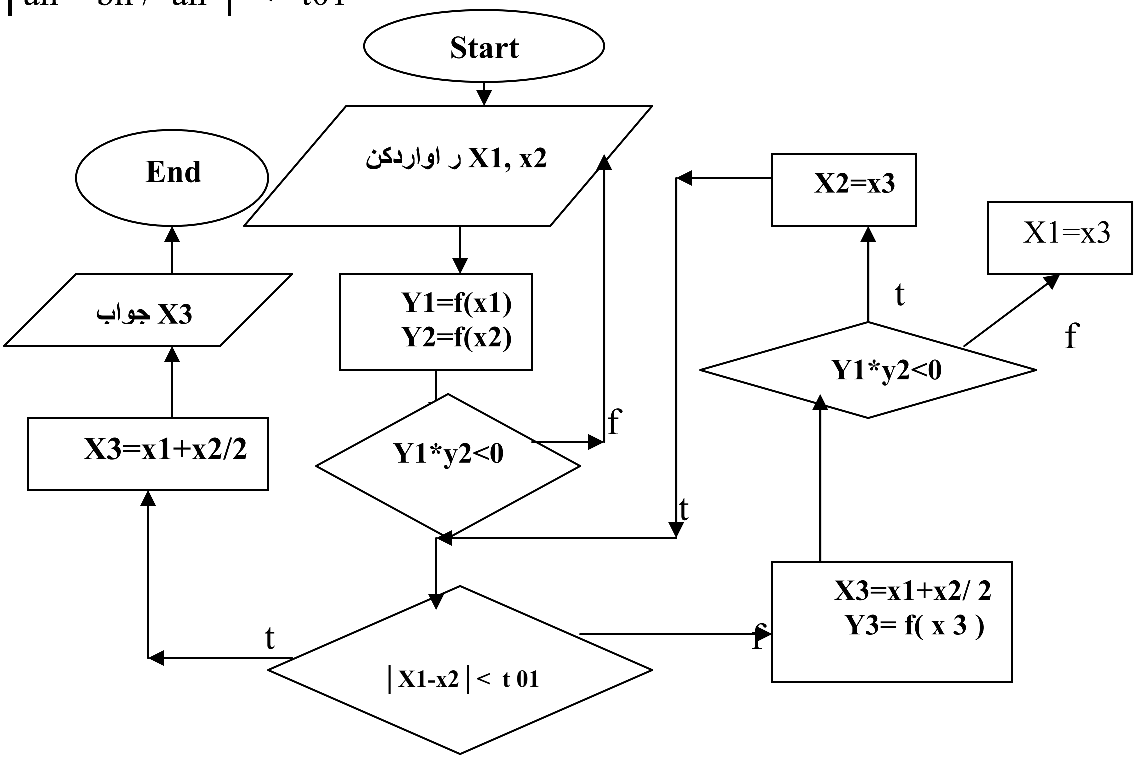
Step 2 c2 = a2 + b2 / 2

شرط توقف :

$| an - bn | < t01$

$| xn+1 - xn | < t01$

$| an - bn / an | < t01$



t

مثال ریشه تابع $f(x) = x^3 + 4x^2 = 10$ را با دقت $۱۰^{-۴}$ بدست آورید .

$ToI = 10^{-4}$

یک بار تغییر علامت می دهد پس ۱ ریشه مثبت $F(X) = X^3 + 4X^2 - 10 \longrightarrow$

ریشه ۱+۲=۳ دو بار تغییر علامت ۲ ریشه منفی $F(-X) = -X^3 + 4X^2 - 10 \longrightarrow$

$a = 1$ $f(1) = -5 < 0$

$b=2$ $c \,\varepsilon\, \{1,2\}$ $f(1)f(2) < 0 \longrightarrow$ $F(2) = 14 > 0 \longrightarrow$

n	an	Bn	Cn = an+bn/2	F (cx)
۰	۱	2	۱,۵	۲,۳۷۵ +
۱	۱	1.5	۱,۲۵	1.7968 _
۲	۱,۲۵	۱,۵	۱,۳۷۵	۰,۱۶۲۱۰۲ +
۳	۱,۲۵	۱,۳۷۵	۱,۳۱۲۵	۰,۸۴۸۳۲ _
۴	۱,۳۱۲۵	۱,۳۷۵		....
۹	۱,۳۶۳۳۲۸۱۲۵	۱,۳۶۳۳۲۸۱۲۵	۱,۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۰,۰۰۰۰۷۲ +
۱۳	۱,۳۶۹۹۹۰۲۳۵	۱,۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱,۳۶۵۱۱۲۳۰۵	۰,۰۰۹۴ _

- این روش برای ریشه مزدوج یا چندگانه مرتبه زوج کاربردی ندارد . چون تابع در نزدیکی این ریشه تغییر ت نمی دهد .

- روش مناسبی برای پیدا کردن ریشه مختلف نمی باشد .

قضیه محاسبه تعداد تکرارهای لازم جهت همگرایی روش B . S

اگر تابع F در بازه { a , b } پیوسته باشد و $f(a)\ f(b) < 0$ باشد روش b.s یک دنباله cn

همگرا به { c } تولید می کند به طوریکه $|c - c_n| < b-a / 2^n$

C_n مقدار تقریبی ریشه c می باشد .

اثبات $|X_1 - \alpha| < b - a / 2$

$|x_2 - \alpha| < b - a / \cancel{2} \quad 2 = b - a / 2^2$

$|x_n - \alpha| < b - a / 2^n$

مثال قبل $|c - c_n| < b - a / 2^n$

$|C - c_n| < \text{to I} < 10^{-4} \rightarrow b - a / 2 < 10^{-4}$ or $2-1 / 2 < 10^{-4}$

$- n \, lx2 < - 41x10 \rightarrow \quad n > 13.28 \quad n \sim 14$

Itraitio method

۲ – روش تکرار ساده : (پیکارد)

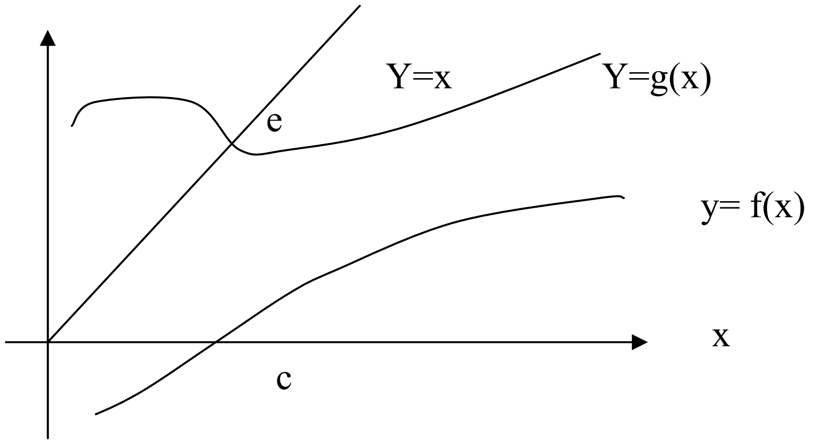
قضیه : اگر تابع f در بازه { a,b} پیوسته باشد و این تابع را به صورت x = g (x) بنویسیم بطوریکه برای X ها عضو a,b داشته باشیم : g(x) ε { a, b } آنگاه تابع g (x) دارای یک نقطه ثابت خواهد بود مشتق y موجود باشد و $|g(x)| < 1$ باشد آن نقطه ای ثابت منحصر بفرد است .

$$F(x) = 0 \qquad x = g(x) \rightarrow \begin{cases} y = x \\ Y = g(x) \end{cases}$$

$$X^2 + 10x - 8 = 0$$

۲

$X = 8 - x / 10$ $\quad$ $g(x)$



اثبات : $f(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = g(x)$ α ریشه است

$$\alpha = G(\alpha) \rightarrow \qquad f(\alpha) = 0$$

$$g(x) = f(x) + x \rightarrow x = \alpha \rightarrow g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha \rightarrow f(\alpha) = 0$$

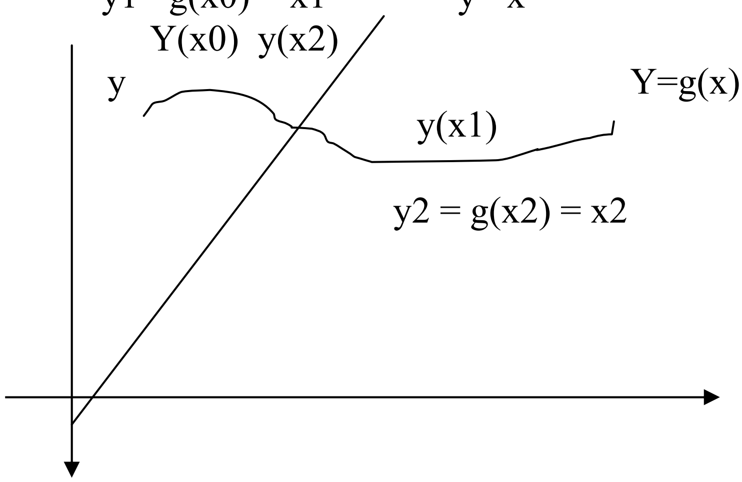
$$f(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = g(\alpha)$$

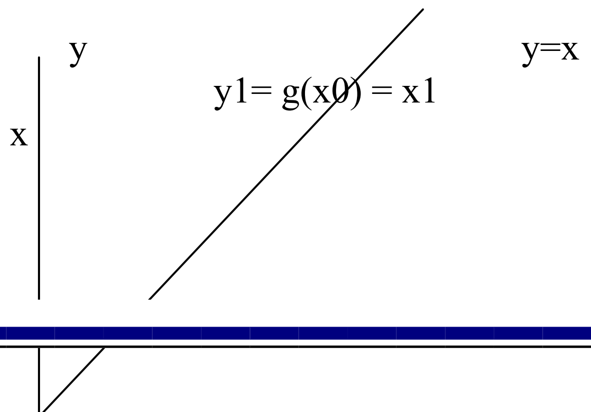
$$g(x) = f(x) + x$$

$$x = 0 \rightarrow x(\alpha) = f(\alpha) + \alpha \rightarrow g(\alpha) = \alpha$$

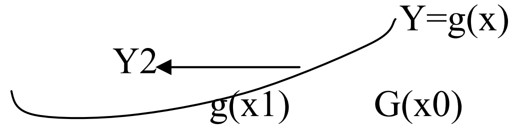
روش تکرار ساده : اگر تابع $f(x)$ در بازه $\{ a, b \}$ پیوسته باشد و $\alpha = g(\alpha)$, $f(\alpha) = 0$ باشد تحت ش ط
مناسب الگوریتم $X_{n+1} = g(x_n)$ $\quad n = 0,1,2,3, \ldots$

به سمت یک ریشه تابع $f(x)$ همگرا خواهد بود .

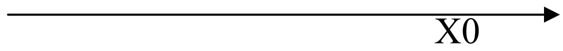


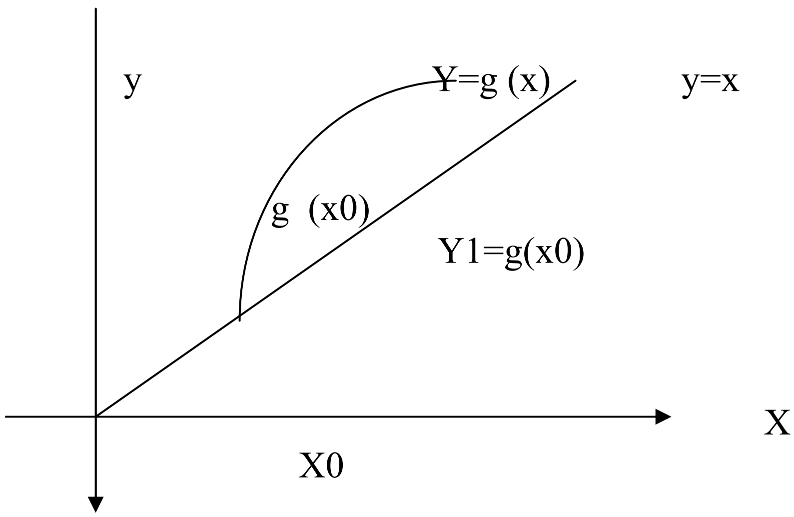


همگرایی نوسانی X0



همگرایی یکنواخت





روش پیکارد :

۱- بررسی تابع $f(x)$

۲- بدست آوردن حالتهای مختلف $g(x)$

۳- بررسی شرایط سا زگاری

۴- محاسبه تابع با استفاده از فرمول $x_{n+1} = y(x_n)$

شرایط سازگاری :

۱- $x \in \{a,b\} \rightarrow g(x) \in \{a,b\}$

۲- $\forall x \in \{a,b\} : \{\bar{g}(x)\} < 1$

$X_{n+1} = g(x_n) \quad \dot{\cdot} \quad \rightarrow$ اثبات $\bar{g}(x) < 1$

اگر α ریشه باشد : $\alpha = g(x)$

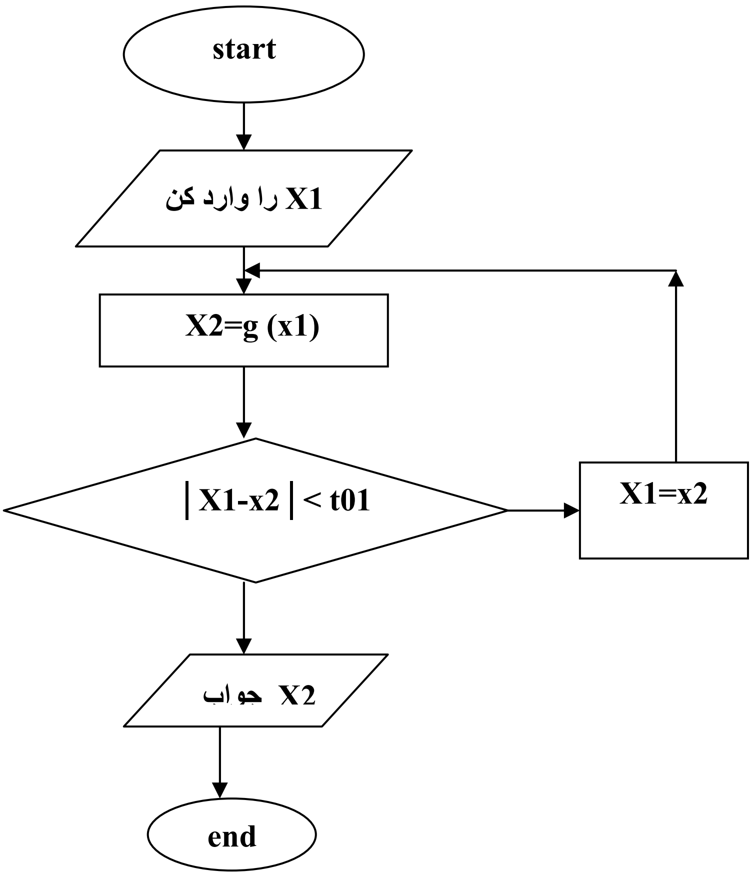
$$X_{n+1} = \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$$

$$\bar{G}(x_n) = g(x_n) - g(\alpha) / x_n - \alpha \quad \rightarrow g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)\bar{g}(x_n) \quad x_{n+1} - \alpha = \bar{g}(x)(x_n - \alpha)$$

$$E_n = x_n - \alpha$$
$$E_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$$

پس همواره e_{n+1} کوچکتر از e_n می باشد چون همواره به سمت ریشه حرکت می کنیم .

$$\bar{G}(x) = e_{n+1} / e_n \quad \rightarrow \quad |\bar{g}(x)| < 1$$



تمرین : روش B .S را جهت حل معادلات زیر استفاده کنید در ابتدا یک دامنه مناسب پیدا کنید . سپس ریشه را د[illegible] نسبی
۰,۰۰۵ محاسبه نما یید

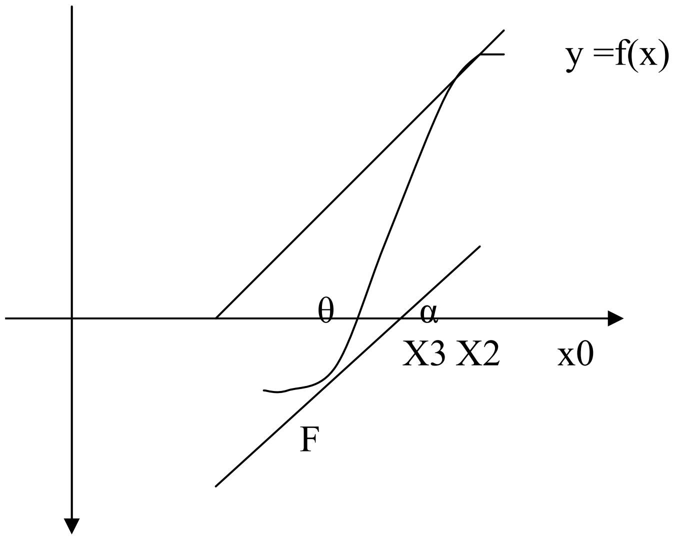
1) $e^{x} - x - 2 = 0$

2) $2e^{-x} - \sin x = 0$

ج 1) 1.1462 , 1. 8414

ج 2) 0.4210 , 3.04688

روش نیوتن . را بسون :



$$\text{Tan } \theta = f(x0) = f(x0) \,/\, x0 - x1$$

$$(x0 - x1)\,\bar{f}(x0) = f(x0)$$

$$X0 = f(x0) \,/\, \bar{f}(x0) + x0$$

$$X1 = x0 - f(x0) \,/\, \bar{f}(x0)$$

$$X\,n+1 = xn - f(xn) \,\bar{/}\, f(xn) \qquad n = 0,1,2,3,4,\ldots\ldots$$

$$X\,n+1 = xn - f(xn) \,/\, \bar{f}(xn)$$

$$|\bar{g}(x)| < 1 \qquad \text{شرط همگرایی} \qquad X\,n+1 = g(xn)$$

$$g(xn) = xn - f(xn) \,/\, \bar{f}(xn)$$

$$\bar{g}(xn) = 1 - \bar{f}(xn)\,\bar{f}(xn) - f(xn)\,\bar{f}(xn) \,/\, \{\bar{f}(xn)\}^{\text{٢}} = f(xn) * \bar{f}(xn) \,/\, \{\bar{f}(xn)\}^{\text{٢}}$$

$$\frac{f(xn)\ f(xn)}{\{\bar{f}(xn)\}^{۲}} < ۱$$

اگر α ریشه باشد $x_{n+1} = g(x_n)$

$\alpha = g(x)$

$X_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$

g (xn) را براساس بسط سری تیلور در x= α انجام می دهیم تا جمله درجه دوم

$$G(x_n) = g\cancel{(\alpha) + (x-\alpha)\,g}\bar{(}\alpha) + (x-\alpha)^{۲}\, g''(S) \ / \ 2! \quad * \quad X < S < \alpha$$

$$G'(\alpha) = f(\alpha)\ f''(\alpha) \ / \ \{f'(x)\}^{۲} = 0$$

$$X_{n+1} \cancel{-\alpha} = g(\alpha) + (x-\alpha)^{۲}\ g''(s) \ / \ 2! \ - \ g(\alpha)$$

$$X_{n+1} - \alpha = (x-\alpha)^{۲}\ g''(s) / 2!$$

$$X_{n+1} - \alpha = e_{n+1} \quad \rightarrow \quad x_n - \alpha = e_n$$

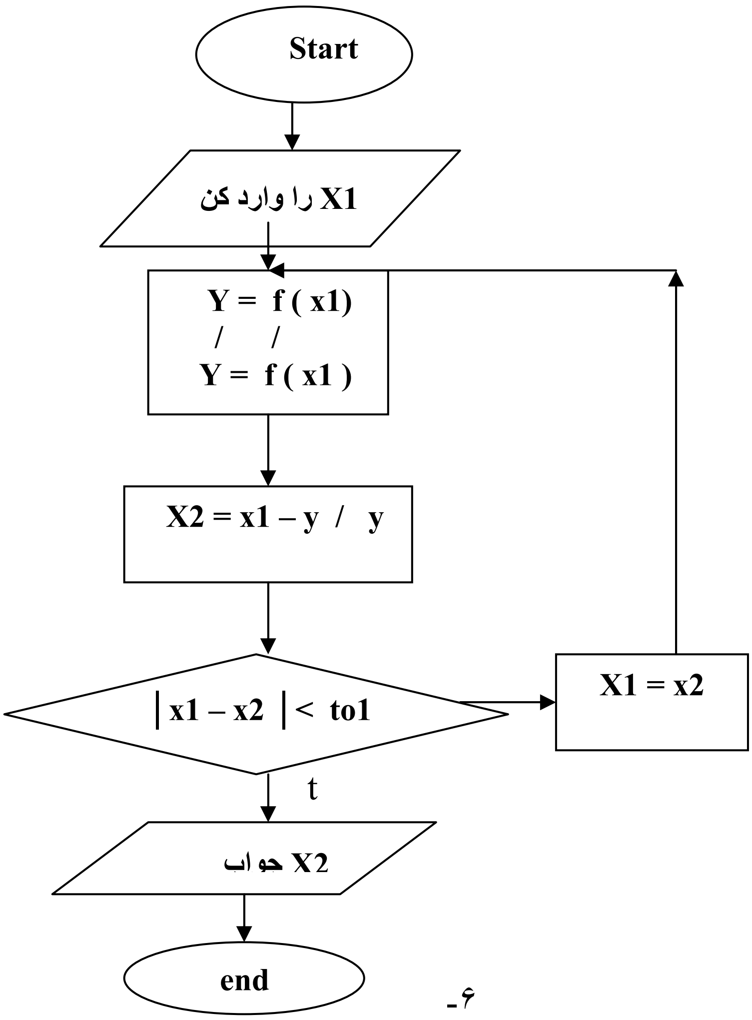
رابطه بین اینها درجه دو است مانند $y = ax^{۲}$

$$E_{n+1} = e_n^{۲}\ g''(s) \ / \ 2!$$

مقدار اولیه تا حدودی باید به ریشه نزدیک باشد .

a

X1 x0



مثال : معادله زیر را به روش نیوتن با دقت ۱۰$^{-6}$ حل کنید .

$$F(x) = x - \cos x$$

$$F'(x) = 1 + \sin x \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

$$X_0 = 3 \longrightarrow x_1 = 3 - \frac{3 - \cos 3}{1 + \sin 3}$$

n	Xn
۰	۳
۱	-۰.۴۹۶۵۵۸۲
۲	۲,۱۵۱۰۰۳۸
۳	۰,۶۸۹۶۶۲۷
۴	۰,۷۳۹۶۵۳۶
۵	۰.۷۳۹۰۸۵۲
۶	۰,۷۳۹۰۸۵۱

مثال : مطلوبست محاسبه $\sqrt[۷]{۵}$ با استفاده از روش نیوتن با تقریب $۱۰^{-۴}$.

n	xn
۰	۱
۱	۱,۳۹۴۳۷
۲	۱,۲۹۲۳۶
۳	۱,۲۶۱۰۵
4	1.25851
۵	۱,۲۵۸۵۰

$$F(x) = x^{7} - 5 \longrightarrow x = \sqrt[۴]{5}$$

$$F'(x) = 7x^{6} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{7} - 5}{7x_n^{6}}$$

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = 1 - \frac{1 - 5}{7} = 1.39437$$

روش نیوتن را برای معادله روبرو با دقت $۱۰^{-۳}$ بکار ببرید . $f(x) = 3x + \sin x - e^{x}$

$$F'(x) = 3 + \cos x - e^{x}$$

$$X_{n+1} = x_n - \frac{3x_n + \sin x_n - e^{x_n}}{3 + \cos x_n - e^{x_n}}$$

$X0 = 0 \quad x1 = 0 - \frac{0 + \sin - e}{3 + \sin - e} = 0.3333$

$$X2 = 0.3333 - \frac{0.068418}{2.59934} = 0.363017$$

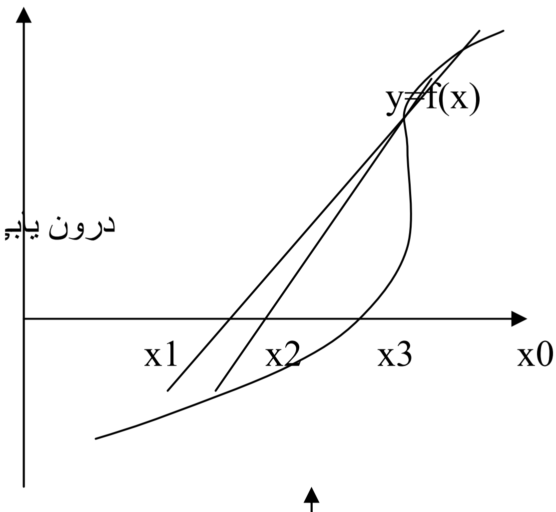
$$X3 = 0.363017 - \frac{-0.279 * 10^{-۴}}{2.50226} = 0.365217$$

روش وتری یا سکانت (secont method)

(liner interplation درون یاب خطی)

$$X_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$F'(x_n) = \frac{F(x_n) - f(x_n - 1)}{X_n - x_{n-1}}$$

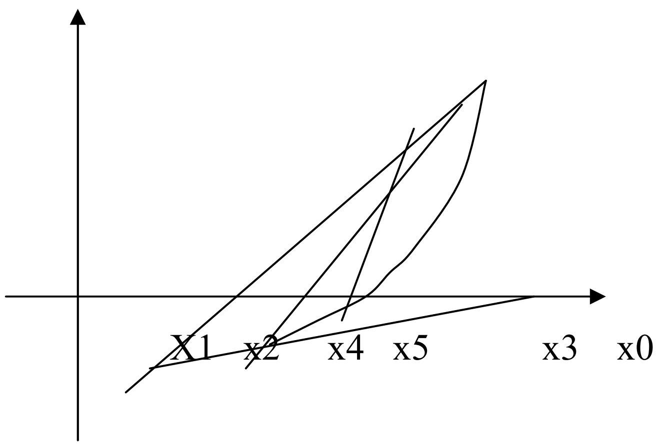


$$X_{n+1} = \frac{F(x_n)}{F(x_n) - f(x_n - 1)} (x_n - x_{n-1})$$

برای شروع این روش به دو مقدار نیاز داریم .

$$\frac{X2 - x0}{X1 - x0} = \frac{f(x0)}{f(x0) - f(x1)}$$

$$X2 = x1 - \frac{F(x1)}{F(x1)\ f(x0)} \quad x1$$



مثال : تابع $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ با $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ را به روش درون یابی وتری یا تلورانس 10^{-3} حل کنید .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{F(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

n	X0	X1	X2	F(x0)	F(x1)	F(x4)
۰	۱	۲	۱,۵۷۱۴۲	_۴	۳	۱,۳۶۴۴۴ _
۱	۱,۵۷۱۴۲	۲	۱,۷۰۵۴۰	۱,۳۶۴۴۹_	۳	۰,۲۹۷۸۴ _
۲	۱,۷۰۵۴۰	۲	۱,۷۲۷۸۸	۰,۲۴۷۸۴ _	۳	۰,۰ _ ۳۹۳۶
۳	۱,۷۲۷۸۸	۲	۱,۷۳۱۴۰	۰,۰۳۴۳۶ _	۳	۰,۰۰ _ ۶۱۵
۴	۱,۷۳۱۴۰	۲	۱,۷۳۱۴۴			

$$\mathbf{X_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)}$$

حل به روش وتری :

n	X0	X1	X2	F(x0)	F(x1)	F(x2)
۰	۱	۲	۱,۵۷۱۴۲	_۴	۳	۱,۳۶۴۴۴ _
۱	۲	۱,۵۷۱۴۲	۱,۷۰۵۴	۳	۱,۳۶۴۴۴_	۰,۲۴۸۷۹ _
۲	۱,۵۷۱۴۲	۱,۷۰۵۴	۱,۷۳۵۱۳	۱,۳۶۴۴۴ _	۰,۲۴۸۷۹ _	۰,۰۲۹۲۰
۳	۱,۷۰۵۴	۱,۷۳۵۱۲	۱,۷۳۱۹۹	۰,۰۲۹۲۰ _	۰,۰۲۹۲۰	۰,۰۰۰۵۷۵۵ _
۴	۱,۷۳۵۱۳	۱,۷۳۱۹۹	۱,۷۳۲۰۵			
			$۱۰^{-۳}$			

مثال : یک گلوله ۲ گرمی به طور افقی شلیک میشود . و در لحظه معین به حداکثر سرعت خود می رسد . و پس از ... به
تدریج شروع به سقوط کردن می کند . در صورتیکه فرمول سرعت این گلوله به شکل

$$(1.4 * 10^{-5})\, v^{1.5} = \left(- (1.15 * 10^{-5})\, v^{2} + \frac{2 * 9.81}{1000} \right)$$ با فرض $v = 30\ m/s$ با روش وتری

سرعت حداکثر را حساب کنید . (10^{-3})

$$f(v) = \frac{9.81 * 2}{1000} - (1.4 * 10^{-5})\, v^{1.5} - (1.115 * 10^{-5})\, v^{2}$$

$V0 = 30\ m/s \qquad v1 = 30.1$

$$V_{n+1} = v_n - \frac{F(v_n)}{F(v_n) - f(v_{n-1})} (v_n - v_{n-1})$$

N	X n	F (v)
۰	۳۰	۰,۰۱۹۶
۱	۳۰,۱	۰,۰۰۶۸
۲	۳۰,۱۵	۰,۰۰۶۴۸
۳	۳۸,۶۲	۰,۰۰۰۸۹۶ -
۴	۳۷,۶۴	۰,۰۰۰۰۹۰۹
۵	۳۷,۷۳۳	۰,۰۰۰۰۰۰۰۹۹۹
۶	۳۷,۷۳۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۸۴ -

جواب $\longrightarrow$ $V = 37.734$

تمرین : نوشته ای نزدیک به $x = -0.5$ مربوط به $e^{x} - 3x^{2} = 0$ را به روش نیوتن با دقت 10^{-6} حساب کنید

Ans : $x = -0.4589623$

۴

تمرین : ریشه تابع $f(x) = 1/2 + 1/4\,x - x\sin x - 1/2\cos 2x$ را با مقادیر اولیه $p_0 = \pi/2$ ، $Po = 5$, $po = 10$ حساب کنید با د قت 10^{-5} .

Ans : $x = 1.89 = 5446$ $n = 21$

Ans = $x = 1.895493$ $n = 27$

Ans : $x = 1.895445$ $n = 22053$

تمرین : معادله $2 - x = \ln x$ دارای جوابی در نزدیکی $x = 1.5$ میباشد جواب این معادله را به روش سکانت د قت 10^{-5} حاب کنید . $x_0 = 2$ $x_1 = -3$ $root = 1.5571456$

تمرین : معادله $\sin x - 0.5 = 0$ $x = 0.2$ دارای ریشه ثبت بین ۰,۲ و ۱ می باشد با به کار بردن روش درون یابی خطی مقدار تقریبی این ریشه را تا 10^{-7} بدست آورید .

Root = 0.6154682

تمرین : ثابت کنید خطای روش وتری به صورت زیر است :

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{F''(\alpha)}{F'(\alpha)}\, e_n e_{n-1}$$

مثال: با استفاده از روش درون یابی خطی یکی از ریشه های تابع زیر را محاسبه کنید .

$$F(x) = x^3 - \sin x + 4x^2 + 6x + 9 \qquad \sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$tol = 10^{-3}$$

$$X_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1})$$

n	X0	X1	X2	F(x0)	F(x1)	F (x2)
۱	۷	۸	۷,۵۸۸۵	۴۱,۶۸۳۸۸	-	۲۰,۷۹۸۲۵
۲	۷	۷,۵۸۹۵	۷,۱۱۶۴		۴۶۵,۴۷۸۸۳	۱,۸۳۴۷۹ -
۳	۷	۷,۱۱۷۶۴	۷,۱۱۲۶۸	۴۱,۶۸۳۸۸	۲,۷۹۸۲۵	۰,۱۵۱۴۱
۴	۷	۷,۱۱۲۶۸	۷,۱۱۳۰۹	۴۱,۶۸۳۸۸	۱,۸۳۴۷۹ -	-
۵	۷	۷,۱۱۳۰۹	۷,۱۱۳۰۶	۴۱,۶۸۳۸۸	۰,۱۵۱۴۱	۰,۰۰۱۲۵۷
۶	۷	۷,۱۱۳۰۶	۷,۱۱۳۰۶	۴۱,۶۸۳۸۸	۰,۰۱۲۵۷ -	۰,۰۰۱۰۴
			جواب		۰,۰۰۱۰۴	۰,۰۰۰۰۹

روش Δ^{2} اتیکن :

همگرایی روش تکرار ساده درجه اول یا خطی می باشد $e_{n+1} = e \times \bar{y}(\alpha)$

اگر α یک نقطه ثابت باشد و $y(\alpha) \# 0$ آنگاه برای سه مقدار متوالی x_n , x_{n+1} , x_{n+2} داریم :

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \bar{Y}(\alpha)$$

$$\frac{E_{n+1}}{e_n} = \frac{E_{n+2}}{e_{n+1}}$$

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} = \bar{y}(\alpha)$$

$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$

$e_n = x_n - \alpha$

$e_n = x_{n+2} - \alpha \rightarrow \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{x_{n+2} - \alpha}{x_{n+1} - \alpha} \Rightarrow \alpha = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$

$$x_{n+3} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \qquad \Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - \Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$

$= x_{n+2} - x_{n+1} - x_{n+1} + x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

$$X_{n+3} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{(\Delta^2 x_n)} \qquad n=0,3,6,9\ldots..$$

توجه : در روش Δ^2 اتیکن x_0 را میزنیم x_1 را از فرمول : $x_1 = g(x_0)$
$X_2 = g(x_1)$

سپس x_3 را از فرمول $\left(x_3 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{X_2 - 2x_1 + x_0}\right)$ پس $x_4 = g(x_3)$ و $x_5 = g(x_5)$ و x_6 را از فرمول بدست می آوریم .

ریشه منفی معادله $x^2 + x - 2 = 0$ را با روش تکرار ساده و روش Δ^2 اتیکن با $TOI = 10^{-3}$ و $X_0 = -1$ و حساب کنید .

$X^2 + X - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad X^2 = 2 - x \quad \rightarrow \quad x = 2/x - 1 = y(x)$

$X_1 = y(x_0) = 2/x_0 - 1 = 2 / -1.5 = -2.3333$

$$E_n = \left| x_n - \alpha \right|$$

$$E = \left| -1.5 + 2 \right| = +0.5$$

n	Xn	En
۰	- ۱,۵	۰,۵
۱	- ۲,۳۳۳۳	۰,۳۳۳۳
۲	- ۱,۸۵۷۱	۰,۱۴۲۹
۳	- ۲,۰۷۶۹	۰,۷۶۹
۴	- ۱,۹۶۳۰	۰,۳۷۰
	.	۰,۰۰۰۳
	.	۰,۰۰۰۱
۱۱	- ۲,۰۰۰۳	
۱۲	- ۱,۹۹۹۹	

$\Delta^{۲}$: راه دوم

$$X_0 = -1.5 \qquad x_1 = g(x_0) = 2 / -1.5 - 1 = -2.3333$$

$$X_2 = g(x_1) = 2 / -2.3333 - 1 = -1.8571$$

$$X_3 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^{۲}}{X_2 - 2x_1 + x_0} = -2.o303$$

$$X_4 = g(x_3) = \frac{۲}{-2.0303} - 1 = -1.9851$$

$$X = g(x_4) = \frac{2}{-1.9851} - 1 = 1\ 2.0075$$

$$X_6 = (-2.0303) - \frac{\overset{x_4 \quad - \quad x_3}{((-1.9851) - (-2.0303))^{۲}}}{X_5 - 2x_4 + x_2} = -2.0001$$

$$X_7 = y(x_6) = -2.000$$

$$X_8 = y(x_7) = -2.000$$

$$X_9 = x_6 - \frac{(x_7 - x_6)^{۲}}{} = -2.000$$

$X8 – 2x2 + x6$

- ضرایب ۳ را از هم کم می کنیم تا تلورانس بدست اید .

n	Xn	Ex
۰	۱,۵ -	۰,۲
۳	۲,۰۳۰۳ -	۰,۰۳۰۳
۶	۲,۰۰۰۱ -	۰,۰۰۰۱
۹	۲,۰۰۰ -	۰,۰۰۰

مثال : اندازه های بحرانی برای یک راکتور هسته ای حل معادله بحرانی زیر می باشد فرض نوع ساده ای از معادله

بحرانی بصورت $9/2\, e^{-x} = \tan(0.1 x)$ می باشد جواب معادله از نظر فیزیکی وقتی معنی دار است

که کوچکترین مقدار ثبت x در بازه ۶و۷ باشد این معادله را با $TOI = 10^{-۵}$ پیدا کنید .

$$X= 10\ ARCTAN\ (9/2\ E^{-X}) = Y(X)$$

$$XN+1 = 10\ ARCTAN\ (9/2\ E^{-xn}) \qquad X3 = 10 \arctan(9/2\ e^{-x0}) \ -$$

n	xn
۰	۶
۳	۴,۱۷۹۸۲۰
۶	۵,۹۵۰۶۱۵
۹	۶,۶۵۹۲۳۷
۱۲	۶,۱۲۴۰۳
۱۵	۶,۷۱۴۹۷۹
۱۸	۶,۷۱۵۱۰۰
۲۱	۶,۷۱۵۱۰۶

Roots = 6.715106

حل دستگاه معادله غیر خطی :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$G(x, y) = 0$$

حل اینگونه معادلات معمولا" پیچیده است مگر آنکخ برای معادلات ساده بتوان از روش حل نیوتن استفاده کرد

اگر $x0, \; y0$ مقادیر تقریبی اولیه ریشه باشند $\Delta y \; , \; \Delta x$ نمو حرکت به سمت ریشه باشد آنگاه

$$X0 = x0 + \Delta x0 \qquad x2 = x1 + \Delta x1 \qquad xn = xn\text{-}1 + \Delta xn-1$$
$$Y1 = y0 + \Delta y0 \qquad y2 = y1 + \Delta y1 \qquad yn = yn\text{-}1 + \Delta yn-1$$
$$Xn+1 = xn + \Delta xn$$
$$Yn+1 = yn + \Delta yn$$

تیلور توابع $y \; , \; f$

$$F(x,y) = f(x0 + \Delta x0 \;)\; y0 + \Delta y0 \;) = \frac{f(x0, y0)}{\Delta x} \Delta x0 +$$

$$\frac{yf(x0, y0)}{\Delta y} \Delta y0 + \frac{y^{2} f(x0, y0)}{\Delta y^{2}} \Delta y0^{2} + \frac{Yf^{2}(x0, y0)}{\Delta X^{2}} \Delta x0^{2} + \ldots = 0$$

$$Y(x,y) = y(x0 + \Delta x\, .\, , y + \Delta y) = y(x0, y0) + \frac{yf(x0, y0)}{\Delta x} \Delta x0 + \frac{Yf(x0, y0)}{\Delta y} \Delta y0 +$$

$$\frac{yf^{2}(x0, y0)}{2 \Delta y} \Delta y\, 0^{2} + \frac{yf^{2}(x0, y0)}{2 \Delta x} \Delta x0^{2} + \ldots = 0$$

اگر از تفاضلات مرتبه دوم و بالاتر صرفنظر شود آنگاه :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{yf(x0, y0)}{\Delta x} \Delta x0 + \dfrac{Yf(x0, y0)}{\Delta y} \Delta y0 = - f(x0, y0) \\[2ex] \dfrac{y(x0, y0)}{\Delta x} \Delta x0 + \dfrac{Yf(x0, y0)}{\Delta y} \Delta y0 = - y(x0, y0) \end{array} \right.$$

$$\frac{Yf(x0, y0)}{\Delta x} \quad A11 , \quad \frac{yf(x0, y0)}{\Delta Y} = a\,12$$

$$\frac{y(x0, y0)}{\Delta x} = a21 , \quad \frac{Y(x0, y0)}{\Delta y} = a22$$

$$a\,11\,\Delta x0 + a12\,\Delta y0 = -f(x0, y0)$$

$$\Delta x0 = ? \quad \Delta y0 = ?$$

$$a21\,\Delta x0 + a22\,\Delta y0 = -y(x0, y0)$$

$$\begin{cases} x1 = x0 + \Delta x0 \\ y1 = y0 + \Delta x0 \end{cases}$$

- باید اختلاف x ها از تلورانس کمتر باشد .
- باید اختلاف y ها از تلورانس کمتر باشد .

مثال : دستگاه معادله زیر را به روش نیوتن با y0 , x0 زیر با تلورانس 10^{-2} حل کنید .

$$\begin{cases} F(x,y)= x^2+y^2 - 25 \\ Y(x, y) = x^2 - y^2 - z \end{cases} \qquad F(x0, y0) = (3, 4)$$

$$\frac{6r}{6x} = 2x , \quad \frac{6f}{6y} = 2y$$

$$6f / 6x = 2x , \; 6f/ 6y = -2y$$

$$\begin{cases} zx0\,\Delta x0 + 2y0\Delta y0 = -f(x0, y0) \\ 2x0\,\Delta - 2y0\,\Delta y0 = -y(x0, y0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\Delta x0 + 8\Delta y0 = -(0) \\ 6\Delta x0 - 8\,\Delta y0 = 14 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta x0 &= 14 / 12 = 1.66667 \\ \Delta y0 &= -14 / 12 = -1.66667 \end{aligned}$$

$$x1= x0+ \Delta x0= 4.66667$$

$$y0 = y0 + \Delta y0 = 2.83333$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x1\Delta x1 + 2y1\Delta y1 = -f(x1,y1) - 0.38887 \\ 2x1\Delta x1 - 2y1\Delta y1 = -y(x1,y1) - 2.33335 \end{cases}$$

$$\Delta X1 = -0.16333 \quad , \quad \Delta y1 = 0.17156$$

$X2 = x1 + \Delta y1 = 4.00334$

$Y2 = y1 + \Delta y1 = 3.004904$

$$\begin{cases} 2x2\Delta x2 + 2y2\Delta y2 = -f(x2, y2) \\ 2x2\Delta x2 - 2y2\Delta y2 = -g(x2, y2) \end{cases}$$

$\Delta x2 = -0.00316 \quad , \quad \Delta y2 = -0.004900$

$$\begin{cases} x3 = 4.000174 \\ y3 = 3.000004 \end{cases} \qquad \begin{cases} X3 - x2 < 10^{-۲} \\ Y3 - y2 < 10^{-۲} \end{cases}$$

- تمرین : دستگاه معادله زیر را به روش نیوتن با دقت $10^{-۴}$ بدست آورید .

$$\begin{cases} X^{۲}+y - 20x + 40 = x \\ Y^{۲}+ x - 20y + 20 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2.436 \\ y = 1.1888 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 17.458 \\ y = 2.092 \end{cases} \qquad \begin{matrix} X0 = y0 \ \# \ 0 \\ 701 = 10^{-۲} \end{matrix}$$

تمرین : معادله روبرو مفروض است ریشه این معادله راه روش

$$\begin{cases} sx - 4\cos x = 0 \\ X = 0.64115 \end{cases}$$

تکرار ساده با دقت $10^{-۴}$ بدست آورید . جواب معادله با روش $\Delta^{۲}$ اتیکن با همان دقت حساب نمایید .

مثالهای پیکارد :

مثال : تابع $f(x) = x^{۳} + x - 1$ را به روش تکرار ساده حل کنید .

$X = y1(x) = 1 - x^{۳}$ $x = \sqrt[۳]{1-x} = y(x)$ بررسی شرط همگرایی

تابع را در بازه { 0 ,1 } قرار می دهیم

$0 < x < 1 \rightarrow 0 < x^{۳} < 1 \rightarrow 0 > -x^{۳} > -1$

$1 > 1 - x^{۳} > 0 \rightarrow 0 < y1(x) < 1$

صادق است

بررسی شرایط $x = \sqrt{1-x} = y2(x)$

$x = 1 / 1+x^{۲} = y3(x) \longrightarrow$

$|\bar{G}(x)| < 1 \rightarrow -3x^{۲} = -\bar{g}(x)$

X=1 → 1 – 31 < 1 → 3<1 پس g (x) واگرا خواهد بود .

2 : $x = \sqrt[۲]{1-x} = g2(x)$

3 : $g3(x) = x = \frac{2}{1+x}$ $0<x<1 \rightarrow 0<x^{۲}< 1$

$1< x^{۲} + 1 < 4$

$1 < \frac{1}{1+x} \quad 2 > ۱/۲ \rightarrow g3(x) \in \{6,5,1\} \subset \{0,1\}$

$G3(x) = \frac{-2x}{(1+x^{۲})^{۲}}$, $\bar{g}3(0) = 0$

$\bar{g}3(1) = -0.5 \rightarrow$ پس این مقدار همگرا است . $|\bar{G}3(x)| < 1$

n	$G(x) = 1-x^{۳}$ ۱	$G2(x) = \sqrt{1-x^{۳}}$ ۲	$G3(x) = 2/1+x^{۲}$ ۳
۰	۰,۵	۰,۵	۰,۵
۱	۰,۸۷۵	۰,۷۹۳۷	۰,۸
۲	۰,۳۳۰۱	۰,۵۹۰۹	۰,۶۰۹۸
۳	۰,۹۶۴۰	۰,۷۴۲۴	۰,۷۲۹۰
۴	۰,۱۰۴۱	۰,۰۳۶۳	۰,۶۵۳۰
۵	۰,۹۹۸۹	۰,۷۱۹۴	۰,۷۰۱۱
۶	۰,۰۰۳۴		۰,۶۷۰۵
۷	۱,۰۰۰		۰,۶۸۹۹
۸	۰,۰۰۰	۰,۶۸۱۹	۰,۶۸۵۴
۹	۱,۰۰۰	۰,۶۸۱۶	۰,۶۸۰۴
۱۰	۰,۰۰۰	جواب	۰,۶۸۳۶

۰,۶۸۱۵		واگرا	

عدداول را حدس می زنیم . $x_0 = g_1(x_0) = 1 - x_0^{2} = 1 - (0.5)^{3} = 0.875 \quad 0.8828$

۰,۰۸۲۰

جواب

مثال : مقدار تابع $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ را با تلورانس 10^{-4} حساب کنید .

n	Xn
۰	۱
۱	۱,۷۳۲۰
۲	۱,۹۳۱۸۲
۳	۱,۹۸۲۸۹
۴	۱,۹۹۵۷۲
۵	۱,۹۹۸۹۳
۶	۱,۹۹۹۷۳
۷	۱,۹۹۹۹۳
۸	۱,۹۹۹۹۹۸ ~ ۲

$X_0 = \sqrt{2}$

$X_1 = \sqrt{x_0 + 2}$

$X_2 = \sqrt{x_1 + 2}$

$X_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$

$X_0 = 1$

$X_1 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

تمرین : مقدار تابع a را با $TOI = 10^{-5}$ حسا ب کنید .

$$A = \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \dots}}}}$$

A = 0.41421 ANS

با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله $F(X) = e^{x} - 3x^{2}$ را در فاصله $\{0,5,1\}$ با دقت 10^{-2} حساب کنید .

$E^{x} - 3x^{2} = 0 \longrightarrow x^{2} = e^{X} / 3 \longrightarrow x = \sqrt{e^{x} / ۳}$

$X_1 = \sqrt{e^{x_0} / 3}$

n	xn
٥	٠,٩٠٣٣

n	Xn
٠	٠,٥
١	٠,٧٤١٣
٢	٠,٨٣٦٤
٣	٠,٨٧٧١٩
٤	٠,٠,٨٩٥٢

مثال : با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله زیر را با مقدار اولیه ۱ و تلورانس 10^{-4} بدست آورید

$$F(x) = e^{-x} - \cos x$$

$$E - \cos x = 0 \rightarrow e^{-x} = \cos x \rightarrow x = \cos^{-1}(e^{-x})$$

$$X_{n+1} = \cos^{-1}(e^{-x_n})$$

n	Xn
۰	۱
۱	۱,۹۹۰۷
۲	۱,۲۶۲۹۷
۳	۱,۲۸۴۰۷
۴	۱,۲۹۰۲۲
۵	۱,۲۹۱۹۹
۶	۱,۲۹۲۹۹
۷	۱,۲۹۲۶۴
۸	۱,۲۹۲۶۸

تمرین : با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله روبرو را $f(x) = x^2 + 4xe^{x} + e^{2x}$ با دقت 10^{-4} بدست آورید .

roors = - 0. 56714 = ans

ریشه یابی با نرم افزار مطلب :

Roots , solve

$$F(x) = y0 + y1x^{1} + y2x^{2} + \ldots ynx^{N}$$

$$F = \{ y0 , y1 , y2 \ldots yn \}$$

در یک معادله درجه ۴ پنج ضریب داریم . $f(x) = x^{4} - x^{2} + 3 = x^{4} + \Theta x^{3} - x^{2} + \Theta x + 3$

$$F = \{ 1 \quad \Theta \quad -1 \quad \Theta \quad 3 \}$$

: ROOTS

$$F(X) = x^{4} + 2x^{3} - 7x^{2} - 3$$

$$\{ 1 \; 2 \; -7 \quad \Theta \quad 3 \}$$

X= roots (f)

- 3.7913 , 1.6180 , 0.7913 , -0.6180

: solve

solve (معادله مورد نظر و x)

$$F(x) = e^{x} (\sin x) + 25x + 10$$

Y= solve (exp (x) . * sin (x) + 25 . * x + 10 , x)

>> -o.3897

* برای اسکالر

* برای رشته و بردار

$$Y = (\text{solve}('x^{۴} + 2.*x^{۴} - 7.*x^{۲} + 3', 'x')$$

$$-3.7913 \quad , \quad 1.6180 \quad , \quad -0.6180$$

$$\begin{cases} F(x,y) = x^{۲} + y^{۲} - 25 \\ G(x,y) = x^{۲} - y^{۲} - 7 \end{cases}$$

```
>>    E 1 = 'x^2 + y^2 - 25'
>>    e 2 = ', x^2 - y^2 - 7'
>>   { x ,y } = solve ( e1 , e2 , 'x' ,'y' )

X= { 4 } { -4 } { 4 } {-4 }
Y= { 3 } { 3 } { -3 } {-3 }
```

تفاضلات محدود درون یابی و برون یابی $\quad ps = ax^{۵} + bx^{۴} + cx^{۳} + \ldots\ldots$

اگر ۴<۰ آنگاه برای $f(x)$ داشته باشیم $\quad f(x) = pn(x) \qquad |f(x) - pn(x)| <$

$Pn(x)$ را چند جمله ای درون یاب تابع $f(x)$ گویند .

چند جمله ای های سری تیلور به عنوان درون یاب .

$$Pn(x) \sim f(x) = f(x0) + (x - x0) f^{/}(x0) + \frac{(x-x0)^{۲}}{۲!} f^{//}(x0) + \ldots + \frac{(x-x0)^{N}}{N!} f^{(n)}(x)$$

جمله های سری تیلور $\rightarrow \quad rn(x) = \dfrac{(x-x0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(x-1)}(x)$

x

مثال : تابع $f(x) = e$ و $x0 = 0$ را چند جمله ای سری تیلور تقریب بزنید .

$$P\,0\,(x) = e = 1$$

$$Po\,(x) = f(x0) = p1\,(x) = f(x0) + (x - 0)\; f\,(x)$$

$$P1\,(x) = 1 + x$$

$$P2\,(x) = 1 + x + x^{2} / 2$$

$$P3\,(x) = 1 + x + x^{2} / 2 + x^{3} / 3!$$

$$P4\,(x) = 1 + x + x^{2} / 2 + x^{3} / 3! + x^{4} / 4!$$

$$P\,5\,(x) = 1 + x + x^{۲} / 2 + x^{۳} / 3! + x^{۴} / 4! + x^{۵} / 5!$$

X	P0	P1	P2	P3	P4	P5	$F(x) = e^{x}$
-۲	۱	-۱	۱	-۰,۳۳۳۳۳	۰,۳۳۳۳	۰,۰۶۶۶۷	۰,۱۳۳۳۴
-۱,۵	۱	-۰,۵	۰,۶۲۵	۰,۰۶۲۵	۰,۲۷۳۴۴	۰,۲۱۰۱۶	۰,۲۲۳۱۳
-۰,۵	۱	۰,۵	۰,۶۲۵	۰,۶۰۴۱۷	۰,۶۰۶۶۷	۰,۶۰۶۵۱	۰,۶۶۶۵۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱,۵	۱	۲,۵	۳,۶۲۵	۴,۱۸۷۵	۴,۳۹۸۴۴	۴,۴۶۱۷۲	۴,۴۸۱۶۹
۲	۱	۳	۵	۶,۳۳۳۳	۷	۷,۲۶۶۶۷	۷,۳۸۹۰

پس با توجه به جدول با بزرگتر شدن عدد میزان خط نیز در سری تیلور رشد پیدا می کند پس سری تیلور جهت درون یابی مناسب نمی باشد .

تفاضل تقسیم شده نیوتن :
مقدار تابع f(x) در چند نقطه ای x داده شده است لزومی ندارد x ها هم فاصله باشند یا ترتیب آنها منظم ولی ا ترتیب آنها منظم با شد معتبر است .

X	F(x)
X0	F(x0)
X1	F(x1)
X2	F(x2)
X3	F(x3)

فرمول تفاضلات تقسیم شده نیوتن
فرمول لا ئرانژ
درون یابی فاصله نامساوی x ها

فاصله مساوی x ها
درون یابی پیشرو
درون یابی پس رو
درون یابی مرکزی

یک چند جمله ای درجه n بنام pn(x) تعریف می کنیم .
Pn(x) = y0 + (x- x0) y1 + (x – x0) (x – x1) y2 + …. + (x-x0) (x- x1) … (x –xn-1) yn
ضرایب y1 را به شکلی تعیین می کنیم برای n+1 نقطه (xi , fi) و i= 0,1,2,…n داشته باشیم
Pn(x) = f(x) در اینصورت pn(x) بنام چند جمله ای درون یاب تابع f(x) نامیده می شود .

* بصورت استاندارد تعریف می کنیم :

X	f(x)	f{ xi , xi+1 }	f{xi , xi+1 , xi+2 }	f{ xi , xi+1 , xi+2 , xi+3 }
X0	f0	$\frac{F1 - f0}{X1-x0} = f0$ (۱)		
		$\frac{f2-f1}{}$ (۱)	F0 (۲)	(۳) F1 – f0 (۳) (۲)

$X1 \quad f1 \quad \frac{}{X2 - x1} = f1 \qquad Fq = \frac{}{X3 - x0}$

(۱) (۲)

$x2 \quad f2 \quad f2 \quad F1$

$X3 \quad f3$

x0 تفاضل مرتبه اول در $F\{x0, x1\} = \frac{F1 - f0}{X1 - x0} = f\ \Theta$ (۱)

x=1 تفاضل مرتبه اول در $F\{x1, x2\} = \frac{f2 - f1}{X2 - x1} = f1$ (۱)

x0 تفاضل مرتبه دوم در نقطه $F\{x0, x1, x2\} = \frac{F\{x2 - x1\} - f\{x1, x0\}}{X2 - x0} = f0$ (۲)

$$F\{xt, xs\} = \frac{Fs - ft}{Xs - xt} = \frac{ft - fs}{xt - xs} = f\{xs, xt\}$$

x=0 تفاضل مرتبه n در نقطه $F\{x0, x1, \ldots xn\} = \frac{f\{x1, x2, \ldots xn\} - f\{x0, x1, \ldots xn\}}{N-1} = f0$ (n)

* در فرمول اصلی مقادیر زیر را جایگزین می کنیم :

$X \rightarrow x0 \qquad pn(x0) = y0 \rightarrow f0 \qquad y0 = f0$

$= x1 \rightarrow \qquad pn(x1) = y0 + (x - x0)\, y0 = f1 \rightarrow \qquad f0 + (x1 - x0)\, y1 = f1 \rightarrow \qquad y1 = \frac{f1 - f0}{x1 - x0}$

$X \rightarrow x2 \qquad pn(x2) = y0 + (x2 - x0)\, y1 + (x2 - x1)\, y2 \rightarrow \qquad y2 = f0$ (۲)

$X = xn \rightarrow \qquad pn(xn) \rightarrow \qquad yn = f0$ (n)

---

(۱) (۲) (n)

$$Pn(x) = f0 + (x - x0)\, f0 + (x - x0)(x - x1)\, f0 + \ldots + (x - x0)(x - x1)\ldots(x - xn)\, f0$$

فرمول تفاضل تقسیم شده نیوتن در نقطه $x= x_0$

$$P_n(x) = f_i + (x- x_i)\, f_i^{(1)} + (x- x_i)(x- x_{i+1})\, f_i^{(2)} + \dots + (x- x_i)(x- x_{i+n-1}) \dots (x_i-x_{i+n-1}) f_i$$

فرمول کلی تفاضل تقسیم شده نیوتن

مثال: چند جمله درجه دومی بنویسید که در برگیرنده داده های جدول زیر در کلیه نقاط از $x_0= 3.2$ تا $x_3= 4.8$ باشد و با استفاده از این چند جمله ای مقدار f را حساب کنید .

X	F(x)
۳,۲	۲۲
۲,۷	۱۸
۱	۱۴,۲
۴,۸	۳۸,۲
۵,۶	۵۱,۷

X	f(x)	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)}$
X_0 3.2	22			
		$\frac{18- 22}{2.7 - 3.2} = 8.4$		
			$\frac{2.118 - 8.4}{1 - 3.2} = 2.858$	
x_1 2.7	۱۸			$\frac{2.012 - 2.856}{4.8 - 3.2} = - 0.528$
		$\frac{14.2 - 18}{1- 2.7} =$ ۲,۱۱۶		
			$\frac{6.342 - 2.118}{4.8 - 2.7} = 2.012$	
x_2 1	۱۴,۲			
		$\frac{35.2 - 14.2}{4.8 - 1} = 6.342$		
x_3 4.8	۳۶,۲			

0.0865

$$x_4 \quad 5.6 \quad 31.7 \quad \frac{51.7 - 38.2}{5.6 - 4.8} = 16.750 \qquad ۲,۲۶۳$$

$$P_3(x) = f_0 + (x - x_0)\, f_0^{(۱)} + (x - x_0)(x - x_1)\, f_0^{(۲)} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, f_0^{(۳)}$$

$$= 22 + (x - 3.4)(8.4) + (x - 3.4)(x - 2.7)(2.856) + (x - 3.2)(x - 2.7)(x - 1)(0.5)$$

مبداء $X = x_1$

$$P_3(x) = f_1 + (x - x_1)\, f_1^{(۱)} + (x - x_1)(x - x_2)\, f_1^{(۲)} + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\, f_1^{(۱)}$$

$$= 18 + (x - 2.7)(2.118) + (x - 2.7)(x - 1)(2.012)$$

$$P_3(3) = 22 + (3 - 3.2)(8.4) + (3 - 3.2)(3 - 2.7)(2.856) + (3.302)(3 - 2.7)(3 - 1) = 2.021$$

مثال : جدول تفاصل حدود را برای داده های زیر تشکیل داده و برای تقریب $f(0.15)$ از آن استفاده کنید .
الف) چند جمله ای درجه دوم که از سه نقطه اول می گذرد .
ب) چند جمله ای درجه دومی که از سه نقطه آخر می گذرد .
ج) چند جمله ای درجه سه ایی که از چهار نقطه اول بگذرد .
د) چند جمله ای درجه سومی که از چهار نقطه آخر بگذرد .
ه) بزرگترین مقدار چند جمله ای دو بود .

X	F(x)
۰,۵	۱,۰۰۲۵
۰,۲ ـ	۱,۳۹۴۰
۰,۷	۱,۰۰۸۴
۰,۱	۱,۲۲۱
۰,۰	۱,۱۸۸۴

x	F(x)	$f_i^{(۱)}$	$f_i^{(۲)}$	$F_i^{(۳)}$	$F_i^{(۴)}$
X0 0.5	1.0025	1.3940-1.0025			

X1 -0.2 X2 0. 7 0.5 X3 0.1 X4 0.0	1.3940 1.0084 ۱,۲۲۱ ۱,۱۸۸۴	$\frac{}{-0.2 - 0.5}$ =-0.5593 - 0.4284 ۰,۱۸۹۴ - ۰,۶۶۳ -	0.6545 ۰,۷۹۶۷ ۰,۶۷۶۴	- 0.3545 ۰,۲۳۹۶ -	۰,۲۲۹۴ -

I=0

$$P2(x)=f0+ (x-x0)f0^{(1)} + (x-x0)(x-x1)\ f0^{(2)}$$

$$P2\ (x) = 1.0025 + (x-0.5)(- 0.5593) +(x-0.5)(x+0.2)(0.545)$$

$$P2(x) = 0.66 + 5x^{2} – 0.7587x + 1.2157$$

$$I=2 \rightarrow \quad p2(x) = f2 + (x-x2)\ f2^{(1)} + (x- x2)\ (x- x3)\ f2^{(2)}$$

$$P2\ (x) = 0.6764x\ -\ 0.73064\ x\ + 1.61453$$

=0 $p3(x) = p2(x) + (x-x0)\ (x-x1)\ (x-x2)\ f0 =\ p2\ (x) + (x- 0.5\ )\ (x+ 0.2)(x-0.7)(\ - 0.35)$

I = 1

$$P3(x) = f1 + (x – x1)\ f1^{(1)} + (x – x1)\ (x –x2)\ \ f2^{(1)}\ + (x- x1)\ (x – x2)\ \ (x- x3\ )\ f1^{(1)}$$

P3 (x) = معادله درجه ۴

I=0

$$P4\ (x) = p3(x) + (x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)\quad f4^{(0)}\ = p3\ (x) +(x- 0.5)\ (x+0.2)(x-0.7)$$

$$F(0.15) =\ p2\ (0.15) = f(2) +(x-x2)f2^{(2)}\ + 2x – x2\ )\ \ (x- x3)\ f2^{(2)}$$

$$P2\ (0\ .\ 15) = 1.0990$$

متفاوت محدود finite difference : وقتی فاصله x در جدول تفاضل یکسان باشد از روش اختلاف استفاده کنند

. ۱. تفاضل پیشرو forward difference) :

$$\Delta\ fi =\ \ fi+1 – fi$$
۲

Δ fi = Δ fi+1 - Δ fi = fi + 2 - fi +1 - fi+1 + fi = fi + 2 – 2fi + 1 + fi
N n n-1
Δ fi = Δ fi +1 - Δ fi

تفاضل پس رو (passeword difference) : D fi = fi – fi -1

D Fi = D fi - DFI+1 = (FI – fi- 1) – (fi-1 – fi- 2) = fi – 2fi – 1
N n-1 n-1
Dfi = D fi - D fi – 1

تفاضل مرکزی (center different) : s fi = fi+1 - fi- 1

۲
S fi = sfi +1 - sfi – 1 = (fi+2 - fi) - (fi – fi – 2) = fi +1 - 2fi + fi – 2

فرمول تفاضل پیشرو نیوتن : (NFF)
h = xi+1 - xi طول گام

$$s = \frac{x - xi}{n}$$

(۱) (۲) (n)
P n (x) = f0 + (x- x0) f0 + (x- x0) (x- x1) f0 + …. + (x- x0) ….(x- xn-1) f0
X- x0 = sh

(۱) x1- f0 Δ fx

$$F_0 = \frac{\qquad}{X_1 - x_0} = \frac{\qquad}{h}$$

$$(x-x_0)(x-x_1) = \underbrace{(x-x_0)}_{Sh}\,(\underbrace{x-x_0}_{sh} + \underbrace{x_0-x_1}_{-sh}) = sh\,(sh-h) = s\,(s-1)\,h^{2}$$

$$F_0^{(2)} = \frac{f'_1 - f'_0}{X_2 - x_0} = \frac{\Delta f_0^{2} / n}{2h} = \frac{\Delta^{2} f_0}{2h}$$

$$P_n(x) = f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^{2} f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^{3} f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{N!}\Delta^{N} f_0$$

$$P_n(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{S(s-1)}{2!}\Delta^{2} f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^{3} f_i + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{N!}\Delta^{n} f_i$$

نکته :
$$\binom{S}{k} = \frac{s!}{(s-k)!\,k!} = \frac{s(s-1)\ldots(s-x+1)}{k!} \quad , \quad \binom{s}{0} = 1$$

$$(a+b)^{N} = \binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^{2} + \ldots$$

$$P_n(x) = f_i + \binom{S}{1}\Delta f_i + \binom{s}{2}\Delta^{2} f_i + \ldots + \binom{s}{n}\Delta^{n} f_i$$

توجه : فرمول NFF برای نقاط (درون یابی نقاط) روی جدول بکار می رود . همچنین XI را نزدیکترین X در نظر می گیریم .

مثال : جدول زیر مفروض می باشد مطلوبست محاسبه الگوریتم 2.15 : $\log(2.15) = ?$

x	Fi=tan(xi)	Δ F I	Δ^{2} fi	Δ^{3}fi	Δ^{4} fi	Δ^{5} FI
X0 2 ٢,١٥	٠,٣٠٣٠٣	X1-x2=0.8139				

X1 2.2	۰,۳۴۲۴۲		۰,۰۰۳۶ -			
		0.3779		۰,۰۰۰۵۷		
X2 2.4	۰,۳۸۲۱		۰,۰۰۳۰۳ -		۰,۰۰۰۱۱ -	
		۰,۳۷۷۶		۰,۰۰۰۴۶		۰,۰۰۰ -
X3 2.6	۰,۴۱۴۹۷		-		۰,۰۰۰۱۲ -	
		۰,۳۲۱۹	۰,۰۰۲۰۵۷	۰,۰۰۰۳۴		
X4 2.8	۰,۴۴۷۱۶					
		۰,۲۹۹۶	۰,۰۰۲۲۳ -			
X5 3	۰,۴۷۷۱۲					

I = 1

$$H = 0.2\ ,\quad s = \frac{x - x_i}{H} = \frac{2.15 - 2.2}{0.2} = -0.25$$

$$2.15) = p_4(2.15) = f_0 + s\,\Delta f + \frac{S(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

$$P_4(2.17) = 0.30103 + (-0.25)(0.04136) + \frac{(-0.25)(-0.25-1)}{2}(-0.0036)$$

$$+ \frac{(-0.25)(-0.25-1)(-0.25-2)}{۶}(0.00057) + \frac{(-0.25)(-0.25-1)(-0.25-2)(-0.25-3)}{۲۴} * (-0.0001)$$

$$P_4(2.13) = 0.332485$$

ماشین حساب $\log(2.15) = 0.3324384$

تمرین : رابطه y را بر حسب x در محدوده ۶۰ تا ۱۶۰ با استفاده از داده های جدول زیر بدست آورید .

x	۶۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۶۰
y	۰	۲۷	۴۱	۷۴

$$\text{Ans}:\ y = 1.0282\,x - 0.00425\,x^{۲} + 1.766 * 10^{-۵}\,x^{۳} + (-50)$$

تمرین : برای داده های زیر جدول اختلاف محدود را تشکیل داده و مقدار تابع را با استفاده از روش نیوتن دار رمول
تابع درجه ۱ و دو حساب کنید .

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8
P	1	1.16	1.64	2.44	3.56

فرمول درون یابی پس رو نیوتن : Newtons Backward furmol
N B F

در صورتیکه نقطه مورد نظر در جدول در انتهای آن باشد ناگزیر از فرمول پس رو استفاده می کنیم .

$$P_n(x) = f_0 + (x-x_0)\, f_0^{(1)} + (x-x_0)(x-x_1)\, f_0^{(2)} + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f_0^{(n)}$$

$S = \frac{x - x_i}{H}$

$I=0$

$X - x_0 = sh$

$$F_0 = \frac{F_1 - f_0}{x - x_0} = \frac{vf_1}{h}$$

$$(x-x_0)(x-x_1) = sh\,(x - \underbrace{x_0}_{+h} + x_0 - x_1) = sh\,(sh + h) = s(s+1)\,h^{٢}$$

$$F\,0 = \frac{v2f2}{2h2}$$

$$Pn(x) = f_0 + s\,Df_1 + \frac{S(s+1)}{2!} D^2 f + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} D^3 f_3 + \ldots + \frac{s(s+1)..(s+n-1)}{N!} D^n f_n$$

x	f	Dfi	$Df_i^{٢}$	$DFI^{٣}$
X0	F0			
		Vf1		
X1	F1		$vf_2^{٢}$	$Df_3^{٣}$
		vf2		
X2	F2		$vf_3^{٣}$	
		Vf3		
X3	F3			

$$Pn(x) = f_n + s\,vf_n + \frac{S(s+1)}{2!} v^2 f_n + \ldots + \frac{s(s+1)-\ldots(s+n-1)}{N!} v^n f_n$$

توجه : جدول تفاضل پیش رو و پس رو از لحاظ مقدار با هم فرقی ندارد و فقط از لحاظ نامگذاری فرق دارند .

$\Delta\ f_0 = f_1 - f_0$

$\rightarrow \quad \Delta\ f_0 = v\,f_1$

$V\,f_1 = f_1 - f_0$

x	f	Δ f	$\Delta^{2} f$	$\Delta^{3} F$
X0	F0			
		ΔF 0		
X1	F1		$\Delta^{2} f\,0$	
		ΔF 1		$\Delta^{3} F\,0$
X2	F2		$\Delta^{2} f\,1$	
		$\Delta^{2} f1$		
X3	F3			

$$P\,n\,(x) = fn + s\,fn\text{-}1 + \frac{S(s+1)}{2!}\,\Delta^{2}\,fn\text{-}2 + .. + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{N!}\,\Delta^{n}\,f0$$

$$Pn(x) = fn + \left\{ {s \atop 1} \right\}\,\Delta\,f\,n+1 + \left\{ {s+1 \atop 2} \right\}\,\Delta^{2}\,f\,n\text{-}\,2 + \ldots + \left\{ {s+n-1 \atop n} \right\}\,\Delta^{n}\,f\,0$$

با استفاده از جدول زیر مقدار الگوریتم 2.a را حساب کنید . log (2.a) = ?

x	F(x)=log (x)	Δfi	$\Delta^{٢}$fi	$\Delta^{٣}$fi	$\Delta^{۴}$F I	$\Delta^{۵}$ F I
X0 2	٠,٣٠١٠٣	٠,٠۴١٣٢				
X1 2.2	٠,٣۴٢۴٢	٠,٠١٧٧٩	٠,٠٠٣۶ -	٠,٠٠٠٥٧		
X2 2.4	٠,٣٨٠٢١	٠,٠٣٧٧۶	٠,٠٠٣٠٣-	٠,٠٠٠۴۶	٠,٠٠٠١١ -	
X3 2.6	٠,۴١۴٩٧	٠,٠٣٢١٩	٠,٠٠٢٥٧ -	٠,٠٠٠٣۴	٠,٠٠٠١٢ -	٠,٠٠٠٠١ -
X4 2.8	٠,۴۴٧١۶	٠,٠٢٩٩۶	٠,٠٠٢٢ -			
X5 3	٠,۴٧٧١٢					

$$Ps\,(x) = fs + s\,\Delta f4 + \frac{S(s+1)}{2!}\,\Delta^{2} f3 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\,\Delta^{2}\,f2 + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\,\Delta^{2} f1 + \frac{S(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{5!}\,\Delta^{2}\,f0$$

$$Ps(2.2) = 0.47712 + (-0.5)(0.02996) + \frac{(-0.5)(-0.5+1)}{٢}\,(-\,0.0022)\ \ldots = 0.46239871$$

$$Log\ (2.4) = 0.\,461397997$$

فرمول درون یابی مرکزی نیوتن : Newtons centeral furmol

N c f

در ابتدا مقادیر x را به شکل زیر نامگذاری می کنیم .

$X0 = x0$

$X1=x0+h$

$X2= x0-h$

$X3 = x0+2h$

$X4 = x0 – 2h$

حال این مقادیر را در فرمول تفاضل نیوتن جایگزین می کنیم . خواهید داشت :

$$Pn(x) = f0 + s\,\Delta f1 + \frac{S(s+1)}{2!}\Delta^{2} f1 + \frac{s(s+1)(s-1)}{3!}\Delta^{3} f1 + \dots$$

$\Delta f = f1 – f0$

$$S\ 1/2\ \ f\ 1/2 = \Delta f \quad \rightarrow \quad s\ 1/2 = \Delta$$

$S\ 1/2\ \ f\ 1/2 = f1 – f0$

$$Pn(x) = f\,0 + 58\ f\ \ 1/2 + \frac{S(s+1)}{2!}\ f1 + \dots$$

حل فرمول تفاضل تقسیم نیوتن را برای نقاط زیر می زنیم .

$X0 = x0$

$X1= x0 – h$

$X2= x0+h$

$$pn(x) = f0 + s\,f\ -\ 1/2 + \frac{s(s-1)}{2!}\ s f^{2}\,1 + \dots$$

$X3= x0 – 2h$

$X4 = x0 + 2h$

در مرحله بعد فرمولهای ۱و ۲ را با هم جمع می کنیم .

$$Pn(x) = f0 + \frac{S(s\,f\,1/2 + s\,f – 1/2\,)}{2} + \frac{s^{2}}{2!}\ sf\,1 + \frac{s(s\,-1)}{3!}\ ((\,s\,f^{2}\ 3/2 + s\,f^{2} – 3/2\ )) +$$

$$\frac{S(\,s^{۲}-1^{۲})}{۲!}\ S\,f^{4}\ -2 + \dots$$

X	f	Δf_I	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x-2	f-2				
		$\Delta^1 f_{-2}$			
x-1	f-1		$\Delta^2 f_{-2}$		
x0	f0	$\Delta^1 f_{-1}$		$\Delta^3 f_{-2}$	
		$\Delta^{٢} f_0$	$\Delta^{٣} f_{-1}$		$\Delta^{۴} f_{-2}$
			$\Delta^{٢} f_0$		
x1	f1				
		$\Delta^2 F_1$			
X2	f2				

$$ı(x) = f_0 + \frac{(\Delta f_0 + \Delta f_{-1})}{2} + \frac{s^{٢}}{2!}\Delta^{٢} f_{-1} + \frac{s(s^{٢}-1)}{3!}\frac{(\Delta^{٢} f_{-1} + \Delta^{٢} f_{-2})}{2} + \frac{s^{٢}(s-1)}{4!}\Delta^{۴} f_{-2}$$

$$+ \frac{S^2(s^2-1)(s^2-2)}{5!}\left(\frac{\Delta^5 f_2 + \Delta^5 f_{-3}}{2}\right) + \frac{s^2(s^2-1)(s^2-2)}{6!}\Delta^6 f_{-3} + \ldots +$$

$$\left(\frac{s^{٢}(s^{٢}-1)(s^{٢}-2)\ldots(s^{٢}-(n-1)^{٢})}{(2n-1)!}\right)\left(\frac{\Delta^{2n-1} f_{-n} + \Delta^{2n-1} f_{-n+1}}{2}\right)$$

$$+ \frac{S^{٢}(s^{٢}-1)(s^{٢}-2^{٢})-(s^{٢}-(n-1)^{٢})}{(2n)!}\Delta^{2n} f_{-n}$$

* در صورتیکه n فرد باشد جمله آخر فرمول نوشته نمی شود . و اگر n زوج باشد می نویسیم .
مثال : با توجه به جدول زیر مقدار f (1.5) را با بزرگترین درجه بیان کنید .

x	F(x)	ΔF_i	$\Delta^2 F_i$	$\Delta^3 F_i$	$\Delta^4 F_I$
X2 1	۰,۷۶۵۱۹۷۷				
		۰,۴۵۱۱۱۷ -			
X1 1.3	۰,۶۲۰۰۸۶۰		۰,۰۱۹۵۷۲۱ -		
۱,۵		۰,۱۶۴۶۸۳۸ -		۰,۰۱۰۶۷۲۳	
X0 1.6	۰,۴۵۵۴۰۲۲		۰,۰۸۸۹۹۶ -		۰,۰۰۰۳۵۴۸
		۰,۱۷۳۷۸۳۶ -	۰,۰۰۲۱۲۷۳	۰,۰۱۱۰۲۷۱	
X1 1,9	۰,۲۸۱۸۱۸۶				
		۰,۱۷۱۴۷۳۶ -			
X2 2.2	۰,۱۱۰۳۶۲۳				

$$4(x) = f0 + s\,\frac{s(\Delta f0+\Delta f-1)}{2} + \frac{s^2}{2!}\, d^2f-1 + \frac{s(s^2-1)}{3!}\left(\frac{\Delta^2 f-1 + \Delta^2 f-2}{2}\right) + \frac{S^2(s^2-1)}{4!}\,\Delta^4 f-2$$

$$S = \frac{x - x0}{N} = \frac{1.5-1.6}{0.3} = -0.33$$

$$s) = 0.4559 + (-0.33)\left(\frac{-0.1646838-0.1735816}{۲}\right) + \frac{(-0.33)^{۲}}{۲}(-0.0088998)$$

$$\frac{(-0.33)^{۲}(0.33-1)}{۶}\ \frac{(0.006723+0.0110271)}{۲} + \frac{(-0.33)^{۲}(-0.33-1)^{۲}}{۲۴}(0.0003548) =$$

۰,۵۶۷۶۰۹۱

تمرین : با استفاده از فرمول NCF مقدار F(12.2) را از جدول زیر بدست آورید . سری 7

۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۲۳۹۶۷	۲۸۰۶۰	۳۱۷۸۸	۳۵۲۰۹	۳۸۳۶۸

(12.2) = 0.32495 ANS

چند جمله ای درون یاب گرانژی : برای درون یابی فواصل نامساوی علاوه بر روش تفاضل روش دیگری بنام لا
گرانژه وجود دارد . در ابتدا یک چند جمله ای در جه N را از n+1 نقطه به صورت زیر عبور می دهیم .

$$(x) = (x- x1) * (x- x1) * \ldots (x- xn)\ a0 + (x-x0)(x-x2)(x-xn)\ a\,1 +$$
$$(x- x0)(x- x1)(x-x3) \ldots (x-xn)\ a\,2 + \ldots (x- x0)(x- x1) \ldots (x- xn-1)\ an$$

حال مقادیر a را طوری تعیین می کنیم که برای n+1 نقطه (xi ,fi) مقدار fi و مقدار چند جمله ای

د رونیاب یکسان باشد به عبارتی :

$pn(x_i) = f_i$

$I = 0,1,2,\ldots\ldots n$

$X = x_0 \rightarrow \quad pn(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)\, a_0 = f_0$

$$A_0 = \frac{F_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

$X = x_1 \quad pn(x_1) = (x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n) \quad a_1 = \frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$

$$Y_n = \frac{f_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

حال مقادیر پارامتر a را در فرمول جایگذاری می کنیم .

$$Pn(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} f_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} f_n$$

$$\sum^{n} x_i = x + x_1 + x_2 + \ldots x_n$$

$$\prod^{n} x_i = x_0, x_1 \ldots$$

$i=0$

$$pn(x) = \sum^{n} \prod^{n} \frac{(x - x_i)}{} f_i$$

i=0 j=0 xi-xj

توابع مبنا : base function

تابع مبنای درجه اول در نقطه x0

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{X_0 - x_1}$$

تابع مبنای درجه اول در نقطه x1

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{X_1 - x_0}$$

تابع مبنای درجه دوم در نقطه x0

$$l_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{I=1 \\ I \# k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f\, x$$

میان ترم محاسبات ۳. ۱۰ . ۸۵ ساعت ۲۰ – ۱۷

۶. ۱۰ . ۸۵ ساعت ۱۱ـ ۸ چهارشنبه

از اول تا انتهای میان یابی

$$L_k(x) = \prod_{\substack{I=0 \\ I\# k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

یکشنبه : ۸ . ۱۰ . ۸۵ ساعت ۱۴ ـ ۱۶ چهارشنبه ۶ . ۱۰ . ۸۵ ساعت ۱۱ ـ ۸

مثال : چند جمله ای بنگراژه را برای توابع زیر بدست آورید و از روی آن f(2) را بدست آورید .

x		F(x)
X0	1	۲,۲
X1	1.2	۳,۵
X2	2.5	۴۴
X3	4	۶,۸

$$P3(x) = \sum_{i=0}^{3} \prod_{j=0}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

J#1

$$P3(x) = \sum_{k=0}^{3} l_k(x) f_k$$

$$L0(x) = \prod_{\substack{I=0 \\ I \# 0}}^{3} \frac{x-x_i}{x_0-x_i} = \frac{(x-x1)(x-x2)(x-x3)}{(x0-x1)(x0-x2)(x0-x3)}$$

$$L0(2) = \frac{(2-1.5)(2-2.5)(2-4)}{(1-1.5)(1-2.5)(1-4)} = -0.2222$$

$$l1(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ I \# 1}}^{3} \frac{(x-x_i)}{X1-x_i} = \frac{(x-x0)(x-x2)(x-x3)}{(x1-x0)(x1-x2)(x1-x3)} = 0.8 \rightarrow l1(2)$$

$$l2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ I \# 2}}^{3} \frac{x-x_i}{x2-x_i} = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)}{(x2-x0)(x2-x1)(x2-x3)} = ۰,۴۴۴۴ \rightarrow L2(2)$$

$$\prod^{3} \quad x-x_i \qquad (x-x0)(x-x1)(x-x2)$$

l 3 (x) = ۱۱ = ۰,۰۲۲۲ → l 3 (۲)
i=0 x3-xi (x3-x0)(x3-x1)(x3-x2)
I#3

P3(x) = l 0 (x) f0 + l1(x)f 1 + f2 L 2 (x) + L 3 (X) f 3 = (- 0.02222)(2.2)+ (0.8) (3.3) + (0.4444)(4.4) + (- 0.0222) (0.8) → p 3(2) = 4.115555

مثال : یک انتگرال مربوط به انتگرال کامل با فرمول

$$k(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\{1-(\sin a)^2 \sin^2 x\}^{1/2}}$$

تعریف می شود از یک جدول مقادیر انتگرال به شکل زیر است k(2)=1.5727 , k(1) = 1.5409

K(3) = 1.5451 با استفاده از چند جمله ای درجه دوم ۲ تقریبی از k(3.5) را بدست آورید .

$$P2(x) = \sum_{I=0}^{2} L_k(x)\, f_k =$$

$$L_0(X) = \prod_{\substack{I=0 \\ I\#0}}^{2} \frac{x-x_i}{x_0-x_i} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_3)} \rightarrow L_0(3.5) = 0.8333$$

$$L_1(X) = \prod_{\substack{I=0 \\ I\#1}}^{2} \frac{X-x_i}{x_1-x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \rightarrow L_1(3.5) = 1.04167$$

$$L_2(X) = \prod_{\substack{I=0 \\ I\#2}}^{2} \frac{X-x_i}{x_2-x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \rightarrow L_2(3.5) = -0.125$$

P 2 (X) = L0 (x) k0 + L 1 (x) k1 + L 2(x) k2
= 0.08333 * 1.5709 + 1.04167 * 1 . 54 24 + (-0. 125) = 1.5751 →
→ p2 (3.5) = 1.54225

تمرین یک چند جمله ای درجه سوم که از چهار نقطه جدول زیر می گذرد را با استفاده از روش گرانژه بدست آو... سری ۴ و از روی آن f(3) را حساب کنید .

$P3(x) = 20.21$ → ans

X	F(x)
۳,۲	۲۲,۰
۲,۷	۱۷,۸
۱,۰	۱۴,۲
۴,۸	۳۶,۳
۵,۶	۵۱,۷

تمرین : مقدار چند جمله ای درون یاب گرانژه را برای داده های زیر یافت و با استفاده از آن مقدار تقریبی

مشتق تابع ۰,۲۵ را حساب کنید . f(0.25) ?

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
F(x)	0.09938	0.19887	0.29552	0.38992	0.47993

F(0. 0.25) = 0.97 125 ans

تمرین : مقدار f بر حسب x, y به صورت زیر جدول بندی شده است .

X / y	۲۰	۵۰	۱۰۰
۶۰	۱۶۰	۱۵۶	۱۴۷
۸۰	۱۶۸	۱۶۵	۱۵۷
۱۰۰	۱۷۶	۱۷۴	۱۶۷
۱۲۰	۱۹۵	۱۸۲	۱۷۶
۱۴۰	۲۰۳	۲۰۱	۱۹۶

الف) مقدار f(80 , y) را محاسبه کنید .

ب) مقدار f را x=105 , y=75 بدست آورید .

توجه : از میانیابی درجه دو در جهت x ,y استفاده کنید .

F(80 , y) = ? f(106 , 75) = 172. 86 ans

قضیه نیوتن

ans p(80 , y) = 168 – 0.1 (y- 20) - 0.00075 (y-20) (y- 50)

X0 = 80

Y	f(x,y)	f (1)	f(2)
۲۰	۱۶۸		
۵۰	۱۶۲		
۱۰۰	۱۵۷		

تابع بر حسب x, y p(8) , y) =

$P(100, y)$
$P(120, y)$

$p(80, 75) =$ عدد ۱
$p(100, 75) =$ عدد ۲
$p(120, 75) =$ عدد ۳

x	f(x , 75)
۸۰	عدد ۱
۱۰۰	عدد ۲
۱۲۰	عدد ۳

$\longrightarrow$ $X = 105$ $\quad P(x, 75) = p(105, 75)$

محاسبه خطای درون یابی : اگر $p_n(x)$ چند جمله ای درون یاب $f(x)$ باشد آنگاه :

$$P_n(x) \sim f(x)$$

در صورتیکه تفاوت آنها را با s نشان د هیم خواهیم داشت .

$$P_n(x) - f(x) = s(x)$$
$$P_n(x) - f(x) - s(x) = 0$$

حال s را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$S(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\, g(x)$$

$$P_n(x) - f(x) - (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\, g(x) = 0$$

برای محاسبه $g(x)$ از یک تابع کمکی $w(t)$ به شکل زیر استفاده می کنیم .

$$W(t) = p_n(x) - f(x) - (t - x_0)(t - x_1) \ldots (t - x_n)\, g(x) \qquad *$$

$W(t)$ در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ برابر صفر می گردد . پس $n+1$

_ طبق تعریف در نقطه $t = x$ معادله * برابر با صفر خواهد شد پس $t = x$ نزدیک ریشه است پس در کا

$W(t)$ و $n+2$ ریشه دارد . اگر $w(t)$ پیوسته باشد آنگاه $\bar{w}(t)$ در فاصله هر دو ریشه یک بار تغییر علا

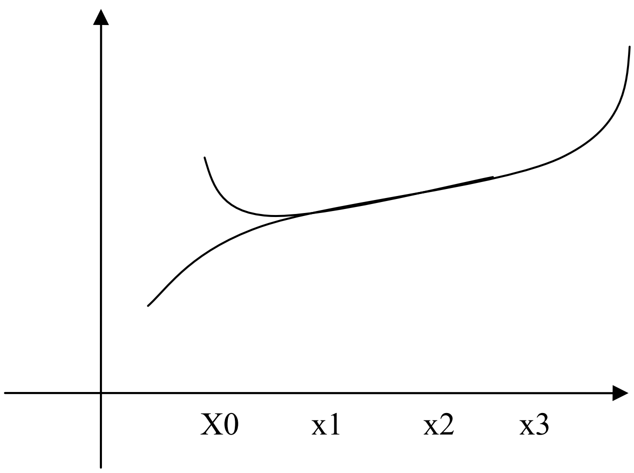
می دهد پس $\bar{w}(t)$ تعداد $n+1$ ریشه دارد $w''(t)$ نیز n ریشه دارد $w'''(t)$ تعداد $n-1$ ریشه دارد .

$W(t)$ تعداد ریشه دارد $N+1$ این ریشه ها را حساب می کنیم .

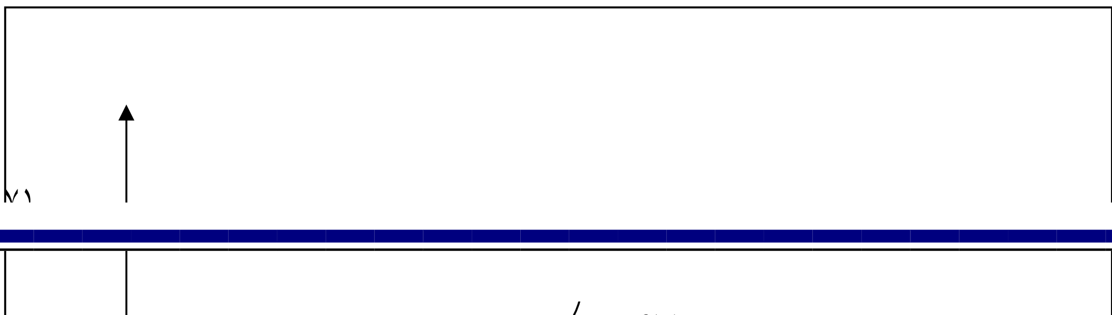
$$W(t) = \frac{D^{N+1}}{Dt^{N+1}} \{ f(t) - fn(t) - (t - x0)(t - x1) \ldots (t - xn)\ g(x) \} = 0$$

اگر ریشه را $t = s$ نامگذاری کنیم .

۳.بدون در نظر گرفتن نقطه ای ابتدا یا انتها از سه نقطه ای باقیمانده یک تابع درجه دوم عبور می دهیم.



۴.بدون در نظر گرفتن نقاط ابتدا و انتها از دو نقطه ای باقیمانده یک خط راست عبور می دهیم.



توجه : سه انتگرال   و روش آخر باز است

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b pn(x)dx + \int_a^b \delta(x)dx$$

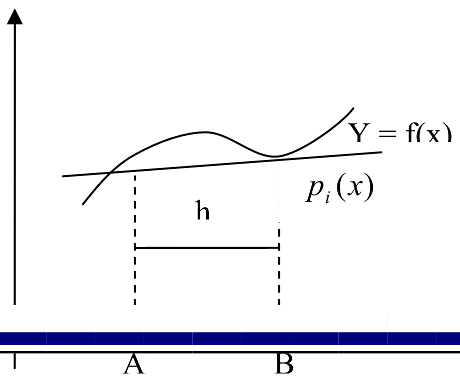
برای درون یابی در این فصل از فرمول درون پیشرو نیوتن nff استفاده می گردد.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[f_. + s\Delta f_. + \frac{s(s-1)}{z!}\Delta 2f + ... + \frac{s(s-1)...(s-n+1)}{n!} nf_. \right]dx$$

+

$$\int_a^b \frac{(s-1)...(s-n)}{(n+1)} h \,\underline{n+1}\, f \,\underline{(n+1)}\, (\varepsilon)dx$$

*روش انتگرال گیری عددی زوزنقه ای. اگر بازه ی a تا b را به یک قسمت تقسیم نمودار زوزنقه ای حاصل یک چند جمله ای درجه یاول عبور دهیم خواهیم داشت.

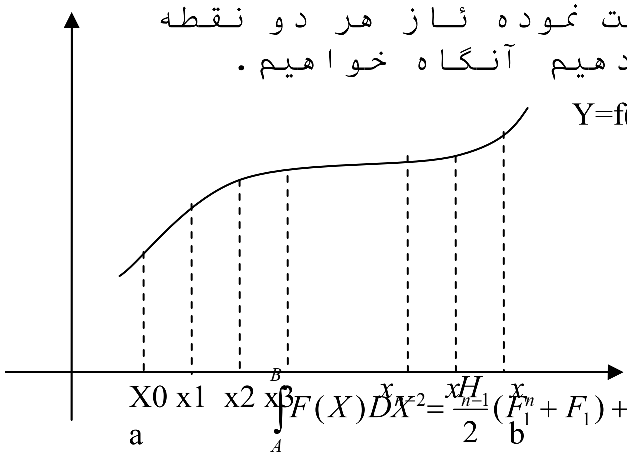


$$\int_A^B FWDX = \int_A^B P_I(X)DX = \int_0^1 (F_{0+\Delta}F_0)HDS = \left[F_0 S_0 + \frac{S^2}{2}(F_1 - F_0)\right] XH \Big|_0^1$$

$$= \frac{H}{2}(F_0 + F_1)$$

LOCAL ERROR = $\int_A^B \delta XDX = \int_0^1 \frac{S(S-1)}{21} F''(\varepsilon)HDS = H^3\left[\frac{S^3}{6} - \frac{S2}{4}\right] F''(\varepsilon) =$

*اگر فاصله ی aتا bرا به n قسمت نموده ئاز هر دو نقطه ای متوالی یک خط راست عبور دهیم آنگاه خواهیم.



$$\int_A^B F(X)DX = \frac{H}{2}(F_0 + F_1) + \frac{H}{2}(F_1 + F_2) + \ldots \tfrac{H}{2}(F_{N-1} + F_N)$$

$$= \frac{H}{2}(F_0 + 2F_1 + 2F_2 + \ldots + 2F_{N-1} + F_N)$$

$$\int_A^B F(X)DX = \frac{B-A}{ZN}(F_0 + 2F_1 + 2F_2 + \ldots + 2F_{N-1} + F_N)$$

GLABAL ERROR : $-\frac{H^3}{12}F''(\varepsilon_I) + (-\frac{H^3}{12}F''(\varepsilon))\ldots - \frac{H^3}{12}F''(\varepsilon_N)$

$$= -\frac{H^3}{12}\left[F''(\varepsilon_1) + F''(\varepsilon_2) + \ldots F''(\varepsilon_N)\right]$$

$$NF''(\varepsilon) = X_0 \varepsilon < X_N X_{I-1} < \varepsilon < X_I$$

Global error : $-\frac{h3}{12}nf(\Sigma) = -\frac{b-a}{12}h2f(\Sigma) = \delta(h2)$

مثال: برای تابع $f(x)=e^x$ طبق جدول زیر در فاصله ی x=1.8 تا x=3.4 انتگرال گیری نمایید.

x	f(x)	X	f(x)
1.6	4.953	2.8	16.445
1.8	6.050	3.0	20.088
2.0	7.389	3.2	24.533
2.2	9.025	3.4	29.964
2.4	11.823	3.6	36.598
2.6	13.464	3.8	44.701

$$\int_{1.8}^{13.4} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f1 + 2f1 + 2f2 + ... + 2f6 + 2fz + fy\right]$$

$$= \frac{o.L}{2}\left[6.oso + 2(7.389 + 9.025 + 11.023...) + 29.964\right] = 23.9944$$

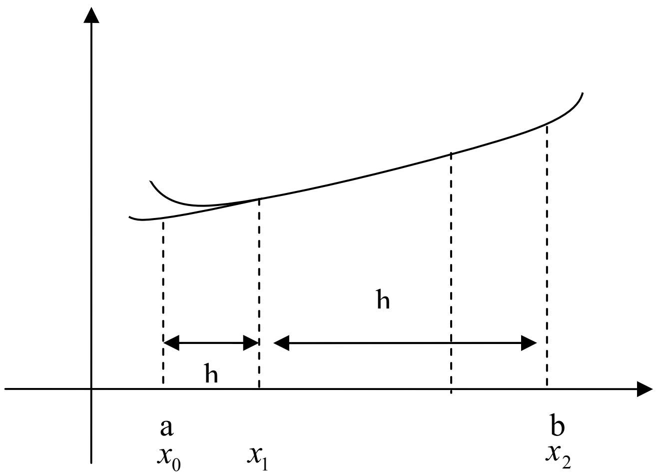
$$\text{Eror} = -\frac{b-a}{12}h2f(\Sigma) = -\frac{3.4-1.8}{12}(o.L)2\begin{cases} *e1.8 = -0.0323 \\ *e2.4 = -0.1296 \end{cases}$$

$$0.0323 Erorr < 0.1296$$

$$\int_{1.8}^{3.4} exdx = e3.4 - e1.8 == 23.9144$$

$$\text{Erorr} = 23.9144 - 23.9944 = 0.0\delta \Rightarrow 0.0323 < 0.08 < 0.1298$$

روش انتگرال گیری سیمپسون 1/3ه ی a تا b را به قسمت مساوی تقسیم نموده و از سه نقطه ای بدست آورده یک تابع درجه ۵ در هم عبور دهیم خواهیم داشت.



$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x = a \Rightarrow s = 0$$

$$x = b \Rightarrow s = 2$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p4(x)dx = \int_a^2 (f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{z!}\Delta^2 f.)hds$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + f_1 + f_2)$$

$$\text{Local Erorr : } \int_0^2 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} h^3 f^{\beta}(\Sigma)ds = 0$$

$$\text{Local Erorr : } \int_0^2 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} h^4 f^{(4)}(\Sigma)ds = -\frac{h^2}{90} f^{(4)}(\Sigma)$$

$$x_0 < \Sigma < x_2$$

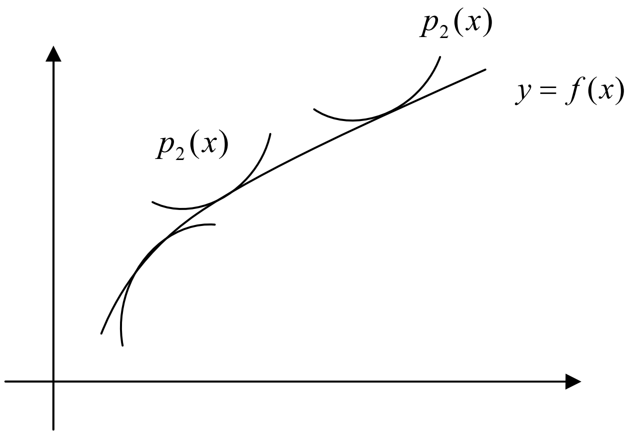
_حال اگر فاصله ی aتا bرا به nقسمت زوج تقسیم نموده واز سه نقطه متوالی یک تابع درجه ی دوم عبور دهیم خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$Erorr = \frac{h^2}{90}\left[f^{(4)}(\Sigma) + f^{(4)}(\Sigma) + f^{(4)}(\Sigma_{\frac{n}{2}}) \right]$$

$$\frac{n}{2} f^{(4)}(\Sigma) x < \Sigma < x_n$$

$$Erorr = -\frac{h^2}{90} * \frac{h}{2} f^{(4)}(\Sigma) = -\frac{b-a}{1\delta 6} h^4 f^{(4)}(\Sigma)$$



$$f^{(n+1)}(\Sigma)\_0\_(n+1)(g(x)) = 0 \rightarrow g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Sigma)}{(n+1)}$$

مقدار g(x) را در فرمول زیر جایگزین می کنیم.

$$s(x) = (x\_x)(x\_x_1)\ldots(x\_x_n)\frac{f^{(n+1)}(\Sigma)}{(n+1)}$$

در صورتیکه از یک تابع درجه ۳ برای درون یابی استفاده می کنیم میزان خطا درجه ی ۴ خواهد شد . واگر از یک درجه ی ۴ درون

یابی استفاده کنیم اگر n_1 استفاده کنیم خطا n می شود.

خطای فرمول پیشرو): (

$$x\_x = sh$$
$$x\_x_1 = ((x\_x_0) + (x_0\_x_1))sh\_h = (x_1\_x_0 + x_0\_x_1)h(s\_1)$$
$$x\_x_l = S(s-1)(s\_l)h$$

جایگزینی

$$S(x) = S(s\_1)(s\_l)\ldots(s\_n)\_h^n \frac{f^{(n+1)}(\Sigma)}{(n+1)}$$

جدول اختلاف محدود را برای $f(x) = Sinx$ تشکیل بازه $\sin os(0.8)$ را حساب کنید

$x = 0 \times 1(0.4)1.7$

و مقدار خطا را محاسبه کنید

X	$f(x) = \sin x$	Δfi	Δfi	Δfi	
۰,۱	0.09983				
۰,۵	0.0757 0.47943		0.37960		
۱,۹	0.04797	0.78333	0.3539	-0.12367	
۱,۳	-0.15123		-0.02846 0.96356	0.18023	
۱,۷	0.99466	0.02810			

$${}^{p}2(x) = s. + \frac{s(s-1)}{s} 0 f.$$

$$s=\frac{0.8-0.1}{0.4}=1.75$$

$$_{p2}(x)=0.09983+(1.75)(0.37960)+\frac{1.75(1.75-1)}{4}(-0.0757$$

$$s(x)=\frac{s(s-1)(s-4)}{3!}\ h^3 f^3(\Sigma \qquad 0.1\langle\sum\langle 0.9$$

$$s(x)=\frac{(1.75)(1.75-1)(1.75+4)}{6}(0.4)^3(-\cos(0.1))=3.48\times10^3$$

$$s(x)=\frac{(1.75)(1.75-1)(1.75-2)}{6}(0.4)(-\cos(0.9)=2.78\times10^{3^3}$$

$$2.18\times10^{-3}<\underset{2.6\times10^{-3}}{S(o.s}<3.48\times10^{-3}$$

$$Error=0.71445\_0.7173s609=0.0029=2.9\times10^{-3}$$

مثال:طول فاصله ی h را در یک جدول بانقاط تساوی الافاصله برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بین ۱و۲ چنان تعیین کنید که درون یابی با چند جمله ای درجه دوم خطای کمترازز $s\times15^{-8}$ داشته است.

$$S(x)=\frac{S(s\_1)(s\_2)}{31}h^3(\Sigma)<s\times15^{-8}$$

$$f^b(\Sigma)=?$$

$$f^2(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}} \qquad f''(x)=\_\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},f^3(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{s}{l}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} f'''(1)=\frac{3}{8} \\ f'''(2)=0.066 \end{array} \qquad |f'''(\Sigma)|<\frac{3}{8} \qquad |<\Sigma<2$$

$$f(s) = s^5 - 3s^2 - 2s \rightarrow f^{'}(s) = 3s^2 - 6s - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} s = 1.s74s \\ s = 0.42ss \end{matrix}$$

$$\frac{0.42ss(0.42ss\_1)(0.42ss\_2)}{6} \times h^3 \times \frac{3}{6} < s \times 15^{-8} \Rightarrow h < 0.128$$

$$n = \frac{b\_a}{h} \Rightarrow h = \frac{b\_a}{n} = \frac{l\_1}{n} < 0.0128 \Rightarrow h > 78.12 \Rightarrow n \approx 79$$

تمرین: تابع $y = \text{Sinx}$ بر بازه ی $[1,3]$ مغروض است این بازه را حداقل به چند زیر بازه با طول مساوی تقسیم نیم بطوریکه اگر f(x) در یکی این بازه ها توسط یک تابع خطی شود خطای درون یابی کمتر از 10^{-4} گردد ؟

شاید درست نباشد $uns: n \geq 100$

تمرین . برای داده های جدول زیر جدول اختلاف محدود را تشکیل داده و مقدار تابع را با استفاده از روش های زیر در $x = 0.s$

الف) NFF با بزرگترین درجه

ب) NBF با بزرگترین درجه

ج) NCF با بزرگترین درجه

د) درصد خطای هر مرحله را حساب کنید.

N	۰,۲	۰,۴	۰,۶	۰,۸
P	۱	۱,۶۴	۲,۴۴	۳,۲۶

رال گیری عددی

انواع انتگرال عددی :

باز : در این نوع انتگرال گیری اگر ابتدا و انتهی در چند جمله نباشد انتگرال گیری باز است .

بسته : اگر نقاط ابتدا یا انتهای انتگرال در چند جمله ای درون یاب جهت انتگرال گیری موجود می باشند. انتگرال را بسته گویند.

اگر تابع $F(X)$ را با یک چند جمله ای درجه ی n $P_n(x)$ تقریب بزنیم.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx$$

شکل انتگرال گیری باز و بسته :

۱: انتگرال گیری برای فواصل مساوی یا انتگرال گیری $N\cot.\cos$

الف: روش ذوذنعقه ای

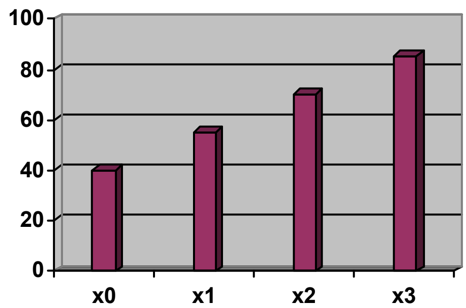
ب: روش سیمیون $\frac{1}{3}$

ج: روش سیمیون $\frac{3}{8}$

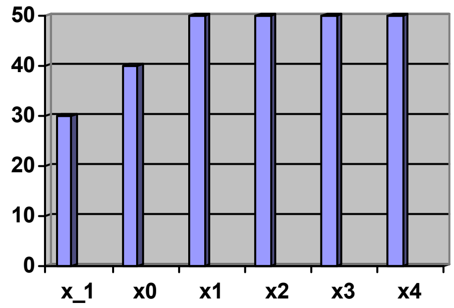
۲. انتگرال گیری برای فواصل نامساوی

تخمین تابع $f(x)$ بین x_0 تا x_3 چهار حالت وجود دارد.

۱. از چهار نقطه ی بدست آمده یک تابع درجه سوم عبور و از آن انتگرال می گیریم



۲. با درنظرگرفتن یک نقطه قبل از x و یک تابع درجه s عبور دهیم سپس از آن انتگرال می گیریم.



توجه :روش سمیسپون $\frac{1}{3}$ برای فواصل زوج جواب می دهد همچنین خطای این روش برای توابع تادرجه ی ۳ خطای آن صفر است.

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ با استفاده از $n=4$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{4}=0.2s$$

$x_0=0 \rightarrow x_1=0.25$ و $x=0.6_4 \quad x=0_3 \qquad x=1.0_4$

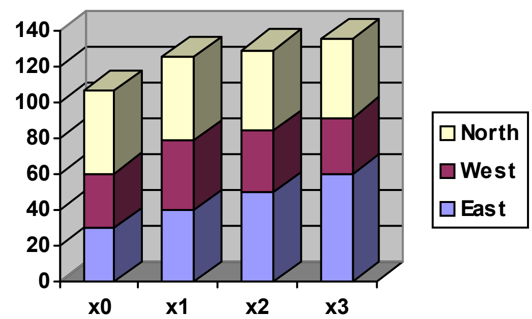
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^l}=\frac{n}{3}\left[f_0+4f_1+4f_4+4f_3+f_4\right]=\frac{0.25}{3}\left[1+\frac{4}{1+(0.25)+.....+\frac{1}{4}^4}\right]=0.7854$$

روش سیمپون $\frac{3}{8}$: اگر فاصله ی a تا b را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و از ۴ نقطه ی بدست آمده یک تابع درجه سوم عبور دهیم خواهیم داشت :

$$s=\frac{x-x_0}{h}$$

$$x=x_0 \rightarrow s=0$$

$$x=x \rightarrow s=3_3$$

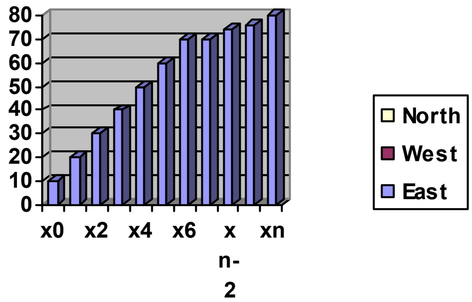


$$\int_{a_3}^{b} f(x)dx \int_a^b p_3(x)dx = \int_0^3 (f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{s!}\Delta^2 f_0 + \frac{3(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0)hds$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{s}(f_0 + 3f_1 + 3f_4 + f_3)$$

$$loxal.error: \int_0^3 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} h^4 f^{(4)}(\sum)hds = -\frac{3h^2}{80} f^4(\sum)\, x_0 \langle \Sigma \langle x_3$$

در فاصله ی aتا b را به n قسمت مضرب ۳ تقسیم می کنیم و از هر ۴ نقطه ی متوالی یک تابع درجه سوم را عبور می دهیم و خواهیم داشت :



$$\int_A^B F(X)DX = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + +3f_5 + 2f_6 + ... + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

$$globalerror = -\frac{b-a}{80}h^4 f^{(4)}\Sigma$$

روش سیمپون $\frac{3}{8}$ فقط برای فواصل ضریب ۳ جواب می دهد همچنین مقدار خطای آن برای توابع تا درجه ۳ صفر است

مقدار $\int_3^{6.5} f(x)dn$ را حساب کنید

x	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	[illegible]
$f(x)$	0.339	0.137	-5.66	-0.231	-0.328	-0.341	-0.277	-0.1

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{6.5-3}{6.5} = 7$$

$$\int_3^{6.5} f(x)dx = \int_3^5 f(x)dx + \int_5^{6.5} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f + f_4) + (f_4 + 3f_5)$$

$$\Rightarrow \int_3^{6.5} f(x)dx = \frac{0.5}{3}[0.339 + 4(0.137) + 2(0.137) + 2(-0.066) + 4(-0.231) + (-0.328)]$$

$$+\frac{0.3\times 0.5}{8}[-0.328 + 3(-0.341)?+(3(-0.277) - 0.154] - 0 = -0.4593$$

فرمول های انتگرال گیری نیوتن کوتر بسته :

$h = 1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f(\sum)$$

$h = 2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{95} f^4(\sum)$$

$h = 3$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\sum)$$

$h = 4$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\sum)$$

$h = 5$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(X)dx = \frac{sh}{288}(19f_0 + 25f_1 + 50f_4 + 75f_4 + 19f_5) - \frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\sum)$$

$I = 6$

$$\int_{X_0}^{X_6} f(x)dx = \frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 274f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6) - \frac{9h^9}{140} f^{(8)}(\sum)$$

انتگرال گیری دوگانه : توجه در این روش انتگرال گیری معمولا یکی از متغیر ها را ثابت نگه داشته و به صورت عددی (یکی از روش های عددی) برای متغیر دیگر انتگرال گیری $\int_a^b \left[\int_a^b f(x.y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x.y)dx\right]dy$

$a\langle x\langle b$

$c\langle y\langle d$

می کنیم سپس اعداد به دست آمده را برای متغیر دیگر انتگرال گیری می کنیم .

مثال برای تابع $f(x.y)$ که مقادیر آن در جدول داده شده است $\int_{1.5}^{3}\int_{0.2}^{0.6} f(x.y)dydx$

را حساب کنید

y / x	02	0.3	0.4	0.5	0.6
1.5	0.99	1.524	2.045	3.549	3.031
2	1.568	2.348	3.177	3.943	4.672
2.5	2.52	3.8	5.044	6.241	7.379
3	9.09	6.136	8.122	10.03	11.841

$$= 0.2 \Rightarrow \int_{.5}^{3} f(x,0.2)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = \frac{0.5}{2}(0.99 + 2(1.568) + 2(2-52) + 4.09)$$

$$y = 0.3 \Rightarrow \int_{.5}^{3} f(x.0.3)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = \frac{0.5}{2}[1.524 + 2(2.384) + 2(3.8) + 6.136]$$

$$y = 0.4 \Rightarrow \int_{.5}^{3} f(x.0.4)dx = 6.6522$$

$$y = 0.5 \Rightarrow \int_{.5}^{3} f(x.0.5)dx = 8.2368$$

$$\int_0 (x.y)dy = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{0.1}{3}(3.314 + 4(5.007) + 2(6.6522) + 4(802368) +$$

$$+ 9.7435) = 2.6446$$

$$y = 0.6 \Rightarrow \int_{.5}^{3} f(x.0.6)dx = 9.1435$$

تمرین : مقدار $\int_{0.}^{0.7}\int_{0.2}^{0.6} f^{x} \sin y dy dx$ را حساب کنید .

الف : با استفاده از روش ذوزنعقه ای در هر دو جهت y.x $\Delta x = \Delta y = 0.1$

ب: باغ استفاده از روش سیمپون در هر دو جهت $\Delta x = \Delta y = 0.1$

تمرین : تابع تعریف شده ای با $f(x) = \int_0^x \sin x^2 dx$ برای مقادیر متساوی فاصله ی X با طول ۰,۱ را در جدول بندی در صورتیکه درون یابی درجه سوم برای محاسبه f(x) به ازای $\left[0.\frac{\Pi}{4}\right]$ را انجام دهیم ماکزیمم و مینیمم خطا را بدست آورید

تمرین : مقدار h را در انتگرال سیمپون $\frac{1}{3}$ جهت $\int^{3} l_n(x)dx$ طوری مشخص کنید که مقدار حداکثر خطای ایجاد شده کمتر از ۰,۰۰۵ باشد

$n = 4$

$h \langle 0.0523$

پایان