فصل اول : خطاها

فصل دوم : حل عددی معادلات غیرخطی $(f(x)=0)$

فصل سوم : درون یابی

فصل چهارم : انتگرال گیری عددی

فصل پنجم : روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی

فصل اول

خطاها :

منابع خطا : برای حل هر مسئله ی واقعی یک مدل ریاضی بدست می آید ، حاصل این مدل سازی ممکن است یک معادله ی یک مجهولی ، معادله دیفرانسیل معمولی و غیره باشد . سپس با روش عددی مناسب جواب تقریبی آن مسئله بدست می آید . خطاهای شناخته شده در فرآیند حل عددی مسئله علاوه بر خطای مدل و داده ها عبارتند از :

* خطای نمایش اعداد و یا (خطای گرد کردن) :

در ابزارهای محاسباتی مانند ماشین حساب یا کامپیوتر تعداد ارقامی که برای نمایش اعداد پیش بینی می شود محدود است . بنابراین نمایش اعدادی که تعداد ارقام آنها از تعداد پیش بینی شده بیشتر باشد همراه با خطا است .

* خطای اعمال ریاضی (حسابی) : انجام اعمال ریاضی مانند جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم روی اعداد تقریبی معمولاً باعث رشد خطای عملوند ها می باشد .
$- \div \times +$

Subject: محاسبات عددی

Year: ۸۹ Month. ۱۲ Date. ۱

* خطای روش: برای بدست آوردن جواب تقریبی یک مسئله ممکن است الگوریتم های متفاوتی وجود داشته باشد. از هر الگوریتم تقریبی برای جواب بدست می آید که خطای آن به ویژگی های آن الگوریتم بستگی دارد.

گرد کردن اعداد تا n رقم اعشار:

مثال) عدد ۲٫۳۱۷۸۴۷ را تا ۳ رقم اعشار گرد کنید: (3D)

* رقم سوم بعد از اعشار را نگاه می کنیم و عدد بعدی را (۸) را با ۵ مقایسه می کنیم اگر بیشتر (یا مساوی) بود به قبلی (۷) یک عدد اضافه می کنیم و اگر کمتر از ۵ بود همان می ماند. → ۲٫۳۱۸

۳٫۷۴۵۱ ≃ ۳٫۷۴۵۱۳ ← تا ۴ رقم اعشار گرد کنید (4D)

۳٫۷۴۵۲ ≃ ۳٫۷۴۵۱۵ ← ۴ رقم اعشار گرد کنید

هرگاه بخواهیم یک عدد را تا n رقم اعشار گرد کنیم اگر رقم (n+1) ام این عدد کمتر از ۵ باشد، در این صورت رقم (n+1) ام و تمام ارقام بعد از آن را حذف می کنیم.

اما هرگاه رقم (n+1) ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد، یک واحد به رقم n ام اضافه شود و رقم (n+1) ام و ارقام بعد از آن را حذف می نماییم.

تا n رقم اعشار را با nD نمایش می دهند. 3D ← ۳ رقم اعشار

انواع خطا: همه‌ی خطاها مثبت هستند

الف) خطای مطلق: اگر a تقریبی از A باشد خطای مطلق a را با نماد $e(a)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(a) = |A - a|$$

خطای مطلق نسبی: هر کران بالای خطای مطلق a را خطای مطلق نسبی a نامیده و با نماد e_a نشان می‌دهیم.

$$e(a) \leq e_a$$

مثال: در زیر چند عدد تقریبی و اعداد واقعی داده شده‌اند، خطای مطلق و خطای مطلق نسبی هرکدام را محاسبه کنید.

خطای مطلق:

الف) $A = \pi \quad a = ۳/۱۴۲$

$$e(a) = |A - a| = |\pi - ۳/۱۴۲| = ۰/۰۰۰۴$$

ب) $A = \sqrt{۲} \quad a = ۱/۴۱$

$$e(a) = |A - a| = |\sqrt{۲} - ۱/۴۱| = ۰/۰۰۴۲$$

خطای مطلق نسبی:

$$e(a) = ۰/۰۰۰۴ \leq ۰/۰۰۰۵$$

$$e(a) = ۰/۰۰۴۲ \leq ۰/۰۰۵$$

یک واحد به اولین عدد بعد صفرها اعشار اضافه می‌کنیم و نیازی به بقیه اعداد نیست

توجه: e_a منحصر به فرد نمی‌باشد اما $e(a)$ منحصر به فرد است.

ب) خطای نسبی: اگر a تقریبی از A باشد، خطای نسبی a را با نماد $\delta(a)$ نشان داده و بصورت زیر می نویسیم:

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|}$$

مثال قبل

الف) $\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} = \frac{0.004}{\pi} = 0.00127$

* حل عددی معادلات $f(x) = 0$

مقدمه: یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می شویم، حل معادله به شکل $(f(x) = 0)$ است که در آن (f) یک تابع مفروض است. منظور از حل معادله ی $(f(x) = 0)$ یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود. هرگاه $(f(\alpha) = 0)$ آنگاه α را یک ریشه ی معادله می نامیم و یا می نویسیم α یک صفر تابع (f) می باشد. با حل معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و تعیین ریشه های آن آشنا هستیم، اما معادلاتی مانند معادلات زیر را با روش های قبلی نمی توان حل نمود و برای حل آن ها باید از روش های تقریبی استفاده شود. ... $x + \cos x = 0$ و $e^{-x} + \cos x = 0$

معمولا برای تعیین ریشه ای از یک معادله با دقت مورد نظر لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله ی کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد معلوم کرد، بدین منظور

محدودیت های زیر را در نظر می گیریم:

الف - فاصله ای موجود باشد که شامل ریشه باشد. (بازه) فاصله

ب - باید ریشه در فاصله ی مورد نظر یکتا باشد. از نظر ریاضی محدودیت الف را بصورت زیر بیان می کنیم:

۱- تابع $f(x)$ در فاصله ی (a, b) پیوسته باشد

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامت باشند یا $f(a) \cdot f(b) < 0$

در نتیجه بنابه قضیه ی مقدار میانی عددی مانند α در فاصله ی $[a, b]$ وجود دارد بطوریکه $f(\alpha) = 0$ باشد.

با داشتن شرایط ① و ② محدودیت ب از نظر ریاضی بصورت زیر بیان می شود:

③ برای هر $x \in [a, b]$ ، $f'(x) = 0$

* روش های عددی حل معادلات « $f(x) = 0$ »:

① روش تنصیف (دوبخشی): در این روش فرض می کنیم بازه هایی مانند $[a, b]$ وجود داشته باشند، بطوریکه: الف) تابع $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشد، ب) $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد. ج) معادله ی $f(x) = 0$ در (a, b) تنها یک ریشه داشته باشد.

$[a, b]$ را به دو بخش مساوی تقسیم می کنیم، یعنی قرار می دهیم: $x_1 = \frac{a+b}{2}$

x_1 را وسط بازه $[a, b]$ در نظر می گیریم تا $[a, b]$ به دو بخش مساوی

$[x_1, b]$ و $[a, x_1]$ تقسیم شود.

در روش دو بخشی وسط فاصله $[a, b]$ یعنی x_1 را بعنوان اولین تقریب ریشه‌ی α (مورد نظر) در نظر می‌گیریم.

① اگر $f(a)f(x_1)<0$ باشد، آنگاه ریشه در $[a, x_1]$ قرار دارد و $x_1 = b$ و عمل را تکرار می‌کنیم.

② اگر $f(a)f(x_1)>0$ باشد، آنگاه ریشه در $[x_1, b]$ قرار دارد و $x_1 = a$ در نظر گرفته و عمل را تکرار می‌کنیم.

③ اگر $f(a)f(x_1)=0$ باشد، x_1 ریشه معادله است و عملیات پایان می‌پذیرد.

«معیارهای توقف»

معیار توقف یعنی تعیین n (یک عدد) ای که تقریب $x_n = \alpha$ را بدهد، معیار توقف محاسبه‌ی x_n ها نامیده می‌شود.

① $|f(x_n)| < \varepsilon$

② $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

③ گاهی از ما خواسته می‌شود که پس از m تکرار (m معلوم) حل معادله را به پایان رسانده و ریشه معادله را تقریب بزنیم.

مثال: تقریبی از ریشه ی معادله ی $x^3+x-1=0$ را که در $(0, 1)$ قرار دارد بدست آورید بطوری که $f(x_n) < 10^{-2}$ باشد. تقریب را تا ۴ رقم اعشار (4D) بیابید:

حل: باید دو شرط برقرار باشد: پیوستگی: تابع چندجمله‌ای همیشه پیوسته است.

$f(a) = f(0) = -1 \longrightarrow f(a)\cdot f(b) < 0$ و

$f(b) = f(1) = 1$

نکته: همیشه تا یک رقم بیشتر از آنچه خواسته است گرد می کنیم.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)\cdot f(b)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	$x_1 = \frac{0+1}{2} = 0/5$	$(-)(-) = +$	$f(x_1)=f(0/5) = -0/375$ → $[x_1, b]$ و $x_1 = a$
۲	$x_1 = 0/5$	۱	$x_2 = \frac{0/5+1}{2} = 0/75$	$(-)(+) = -$	$f(x_2 = 0/75) = 0/171875$ → $[a, x_2]$ و $x_2 = b$
۳	۰/۵	$x_2 = 0/75$	$x_3 = \frac{0/5+0/75}{2} = 0/625$	$(-)(-) = +$	$f(x_3 = 0/625) = -0/130859$ → $[x_3, b]$ و $x_3 = a$
۴	۰/۶۲۵	۰/۷۵	$x_4 = 0/6875$	$(-)(+) = -$	$f(x_4 = 0/6875) = 0/012451$ → $[a, x_4]$ و $x_4 = b$
۵	۰/۶۲۵	۰/۶۸۷۵	$x_5 = 0/65625$	$(-)(-) = +$	$f(x_5 = 0/65625) = -0/061127$ → $[x_5, b]$ و $x_5 = a$
۶	۰/۶۵۶۲۵	۰/۶۸۷۵	$x_6 = 0/671875$	$(-)(-) = +$	$f(x_6 = 0/671875) = -0/024830$ → $[x_6, b]$ و $x_6 = a$
۷	۰/۶۷۱۸۸	۰/۶۸۷۵	$x_7 = 0/679699$		$f(x_7 = 0/679699) = -0/006310$

با توجه به این که شرط پایان $|f(x_n)| < 10^{-2}$ لذا این شرط برای x_7 برقرار است:

$|f(x_7)| < 10^{-2} \rightarrow |-0/00631| < 0/01$

و تقریب ریشه با چهار رقم اعشار بصورت زیر می باشد: x_7 را تا ۴ رقم اعشار گردی کنیم:

$x_7 \simeq \alpha \longrightarrow \alpha \simeq 0/6797$

تمرین تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - (1-x)^5 = 0$ را که در $(0,1)$ قرار دارد را با ۴D بدست آورید بطوریکه داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-2}$

حل: شروط { تابع چندجمله‌ای همیشه پیوسته است و $f(a) = f(0) = -1$ و $f(b) = f(1) = +1 \Rightarrow f(a).f(b) < 1$ }

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a).f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	$x_1 = \frac{0+1}{2} = /5$	$(-)(+) = -$	$f(x_1 = /5) = 0/21875 \rightarrow [a, x_1]$, $x_1 = b$
۲	۰	$x_1 = /5$	$x_2 = \frac{0+/5}{2} = /25$	$(-)(-) = +$	$f(x_2) = -/1748 \rightarrow [x_2, b]$, $x_2 = a$
۳	$x_2 = 0/25$	$0/5$	$x_3 = 0/375$	$(-)(+) = -$	$f(x_3) = 0/04526 \rightarrow [a, x_3]$, $x_3 = b$
۴	$0/25$	$x_3 = 0/375$	$x_4 = 0/3125$	$(-)(-) = +$	$f(x_4) = 0/05593 \rightarrow [x_4, b]$, $x_4 = a$
۵	$x_4 = 0/3125$	$0/375$	$x_5 = 0/34375$		$f(x_5) = -0/00355$

با توجه به این که مقدار $f(x_5)$ از 10^{-2} کوچکتر است شرط پایان مسئله برقرار است

$$|f(x_n)| < 10^{-2} \rightarrow |f(x_5)| < 10^{-2} \rightarrow |-0/00355| < 0/01$$

پس تقریب ریشه معادله از $x_n \simeq \alpha \rightarrow x_5 \simeq \alpha$ بدست می‌آید:

$x_5 \simeq \alpha \rightarrow \boxed{\alpha \simeq 0/3438}$ ← $0/34375$ تا ۴ رقم اعشار گرد شود

Subject: محاسبات عددی

Year: ۸۹ Month. ۱۲ Date. ۸

تمرین: تقریبی از ریشه معادله $3x - e^{-x} = 0$ را که در $(0/25, 0/27)$ قرار دارد با ۳D بدست آورید، بطوریکه داشته باشیم: $|f(x_n)| < 10^{-3}$

شرط مسئله

$f(a) = f(0/25) = -0/0288$

$f(b) = f(0/27) = +0/0466$

$\rightarrow f(a) f(b) < 1$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a) f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	$0/25$	$0/27$	$x_1 = \frac{0/25+0/27}{2} = 0/26$	$(-)(+) = -$	$f(x_1 = 0/26) = 0/0089$
۲	$0/25$	$x_1 = 0/26$	$x_2 = \frac{0/25+0/26}{2} = 0/255$	$(-)(-) = +$	$f(x_2 = 0/255) = -0/0099$
۳	$x_2 = 0/255$	$0/26$	$x_3 = \frac{0/255+0/26}{2} = 0/2575$		$f(x_3 = 0/2575) = -0/0048$

شرط پایان مسئله برقرار است $|f(x_n)| < 10^{-3}$

$\hookrightarrow |f(x_3)| < 10^{-3} \rightarrow |(-0/0048)| < 10^{-3}$

پس تقریب ریشه می‌شود:

$x_n \simeq \alpha \rightarrow \alpha = x_3$

$x_3 = 0/2575$ را تا ۳ رقم اعشار گرد می‌کنیم $\longrightarrow \alpha \simeq 0/258$

توجه : این پاسخ ممکن است اشتباه باشد

روش نابجایی

اگر $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، $f(a)f(b) < 0$ باشد و معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه (a, b) تنها یک ریشه داشته باشد، برای تعیین تقریبی از ریشه که آن را α می‌نامیم داریم:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

حالت اول اگر $f(a) \times f(x_1) < 0$ باشد ریشه در (a, x_1) قرار دارد و $x_1 = b$ و x_2 را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$x_2 = \frac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

حالت دوم اگر $f(a)f(x_1) > 0$ باشد ریشه در (x_1, b) قرار دارد و $x_1 = a$ و x_2 بصورت زیر می‌نویسیم:

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

حالت سوم اگر $f(a)f(x_1) = 0$ پس x_1 ریشه معادله می‌باشد و مسئله حل شده است

Subject: محاسبات عددی

Year: ۸۹ Month. ۱۲ Date. ۱۵

مثال: تقریبی از ریشه مثبت $f(x)=x^2-2=0$ را به روش نابجایی با دو رقم اعشار $2D$ بدست آورید: ریشه در فاصله ۱ و ۲ قرار دارد: محاسبات را تا دو تکرار از روش نابجایی بدست آورید:

$(\underset{a}{1}, \underset{b}{2})$

$$\left.\begin{array}{l} f(a=1)=-1 \\ f(b=2)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)f(b)<0$$ شرط مسئله

فرمول: $$x_1=\frac{a\,(f(b))-b\,(f(a))}{f(b)-f(a)}=\frac{(1)(2)-(2)(-1)}{2-(-1)}=\frac{4}{3}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

$$f\left(x_1=\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}-2=-\frac{2}{9}=-0.222$$

$\underset{(-)}{f(a)}\ \underset{(-)}{f(x_1)}=(+) \rightsquigarrow$ حالت دوم: $\to (x_1, b)$ و $x_1=a$

$$\to x_2=\frac{a f(b)-b f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1 f(b)-b f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}=\frac{(\frac{4}{3})(2)-(2)(-\frac{2}{9})}{2-(-\frac{2}{9})}$$

$$\to x_2=1.4 \to \boxed{\alpha \simeq 1.40}$$

مثال به روش نابجایی تقریبی از ریشه ی منفی $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}=0$ را که در فاصله $(-1,-2)$ قرار دارد با ۴D طوری بدست آورید که داشته باشیم:

$|f(x_n)|<10^{-2}$

چون گفته ۴D ما تا ۵ رقم گرد می کنیم

$f(a=-2)=۰/۰۹۰۷۰$

$f(b=-1)=-۰/۳۴۱۴۷$

n	a	b	$X_n=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	علامت $f(a)f(X_n)$	$f(X_n)$
1	-2	-1	X_1= -1.19013	(+)(-)=(+)	-.08098 $(a,x_1), x_1=b$
2	-2	-1.79013	X_2= -1.88912		0.00520

$f(X_2)=0.00520$ چون کمتر از 0.01 در شرط مسئله است پس مقدار تقریبی ریشه :

X_2= -1.88912 و بعد از چهار رقم اعشار گرد کردن α= -1.8891

روش نیوتون ـ رفسون :

ـ با در دست داشتن x_n خواهیم داشت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\leftarrow$ فرمول روش تکرار نیوتون

$(f'(x) \neq 0)$

مثال: فرمول روش نیوتون را برای تعیین ریشه ی k ام عدد مثبت a بدست آورید و با استفاده از آن و $x_0 = 1$ تقریبی برای $\sqrt{3}$ را تا ۴ رقم اعشار بیابید (۴۵):

$$\left(x = \sqrt[k]{a}\right)^k \rightarrow x^k = a \rightarrow f(x) = x^k - a = 0$$

$$f(x_n) = x_n^k - a$$

$$f'(x_n) = k x_n^{k-1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}}$$

$\leftarrow$ فرمول روش نیوتون برای محاسبه ریشه k ام عدد a

$$x_0 = 1 \rightarrow (x = \sqrt{3})^2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow f(x) = x^2 - 3 = 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

$$n = 0 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2x_0} \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - \frac{1-3}{2 \times 1} = 2 \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

$n=1 \to x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-3}{2x_1} = 2 - \frac{2^2-3}{2\times 2} = \boxed{1.75}$

$n=2 \to x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-3}{2x_2} = 1.75 - \frac{1.75^2-3}{2\times 1.75} = \boxed{1.73214}$

$n=3 \to x_4 = x_3 - \frac{x_3^2-3}{2x_3} = 1.73214 - \frac{1.73214^2-3}{2\times 1.73214} = \boxed{1.73205}$ *

$n=4 \to x_5 = x_4 - \frac{x_4^2-3}{2x_4} = 1.73205 - \frac{1.73205^2-3}{2\times 1.73205} = \boxed{1.73205}$ *

$\Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 1.7321}$ گرد شده تا ۴ رقم

چون x_4 و x_5 تا ۵ رقم اعشار با هم برابر شد پس x_5 به عنوان تقریبی از ریشه در نظر گرفته می شود؛

مهم [در حل ریشه کدام عدد a را باید حفظ کنیم]

<< تمرین >> ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد را به روش نیوتن با 4D به دست آورید. بطوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ و قرار دهید $x_0 = 0.5$

$\alpha \simeq 0.7391$

<< تمرین >> تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در فاصله $(0, -1)$ قرار دارد به روش نیوتن تا چهار رقم اعشار به دست آورید. بطوری که $|f(x_{n+1})| < 10^{-3}$

$\alpha \simeq -0.7657$

تمرین: ریشه معادله $f(x) = x - \cos(x) = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد را به روش نیوتن با ۴D بدست آورید بطوریکه $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x) = 1 + \sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$

$$x_0 = 0/5 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \cos(x_0)}{1 + \sin(x_0)} = 0/75522$$

$$n = 1 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \cos(x_1)}{1 + \sin(x_1)} = 0/73914$$

$$n = 2 \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos(x_2)}{1 + \sin(x_2)} = 0/73909$$

چون $\rightarrow |x_3 - x_2| = |-0/00005| < 10^{-4}$

پس ریشه معادل برابر است با x_3 با گرد شدن ۴ رقم اعشار

$\rightarrow \alpha \simeq 0/7391$

تمرین: تقریبی از ریشهٔ معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در فاصله $(-1, 0)$ قرار دارد را به روش نابجایی تا چهار رقم اعشار بدست آورید بطوریکه
«$|f(x_n)| < 10^{-2}$»

شرط مسئله : $f(a)f(b) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = f(-1) = 0/5 \\ f(b) = f(0) = -1 \end{array}\right\}$$

n	a	b	$x_n = \dfrac{af(b) - b(fa)}{f(b) - f(a)}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
1	-1	0	$x_1 = -0/66667$	$(+)(-) = (-)$	$f(x_1) = -0/18551$ $\rightarrow (a, x_1)$, $x_1 = b$
2	-1	$-0/66667$	$x_2 = -0/75687$	$(+)(-) = (-)$	$f(x_2) = -0/01893$ $\rightarrow (a, x_2)$, $x_2 = b$
3	-1	$-0/75687$	$x_3 = -0/766574$		$f(x_3) = -0/00181$

چون $|f(x_3)| = 0/00181 < 10^{-2}$ مطابق شرط پایان مسئله شد پس تقریبی از ریشهٔ معادله x_3 است

$\alpha \simeq -0/76657$ ← x_3 گرد شده به ۵ رقم اعشار

روش وتری یا (خط قاطع):

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

x انتخابی به x_n نزدیک باشد، فرض کنیم x_{n-1}

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$ ⇐ فرمول روش وتری

* در این روش n از یک شروع می‌شود *

مثال با استفاده از روش وتری ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ را با سه رقم اعشار بدست آورید بطوری‌که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0/001$ و قرار دهیم $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$. ۳D

$f(x_1 = 1) = 1$ و $f(x_0 = 0) = -1$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \frac{1(1-0)}{1-0} = \frac{1}{2}$$

$f(\frac{1}{2} = 0/5) = -0/375$

$$n = 2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0/5 - \frac{(-0/375)(0/5-1)}{(-0/375) - 1} = 0/6364$$

$f(x_3 = 0/6364) = -0/1059$

$$n = 3 \Rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0/6364 - \frac{(-0/1059)(0/6364 - 0/5)}{(-0/1059) - (-0/375)} = 0/6901$$

$f(x_4 = ٠/۶۹٠۱) = ٠/٠۱۸۸$

$$n = 4 \rightarrow x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = ٠/۶۹٠۱ - \frac{(٠/٠۱۸۸)(٠/۶۹٠۱ - ٠/۶۳۶۴)}{(٠/٠۱۸۸) - (-٠/۱٠۵۹)}$$

$= ٠/۶۸۲٠ \rightarrow f(x_5 = ٠/۶۸۲٠) = -٠/٠٠٠۸$

شرط مسئله برقرار می‌باشد یعنی $|f(x_5)| = ٠/٠٠٠۸ < ٠/٠٠۱$

و x_5 را بعنوان تقریبی از ریشه در نظر می‌گیریم. $\alpha \simeq ٠/۶۸۲$

روش تکرار ساده یا (نقطه ثابت یا تکرار تابعی):

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله‌ی $f(x) = 0$ در $[a, b]$ معادله $f(x) = 0$ پس از جابجایی‌های بصورت $x = g(x)$ نوشته می‌شود، بطوری که α ریشه هر دو معادله باشد، (معمولاً از روی معادله $f(x) = 0$ بصورت های مختلفی می‌توان به شکل $x = g(x)$ رسید.)

$f(\alpha) = 0 \quad , \quad \alpha = g(\alpha)$

برای بدست آوردن فرمول ؟؛ پس از نوشتن معادله $f(x) = 0$ بصورت $x = g(x)$، x_nها بصورت زیر ساخته می‌شوند. بطور کلی با در دست داشتن x_n خواهیم داشت:

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n)} \rightarrow x_1 = g(x_0) \;,\; x_2 = g(x_1) \;,\; \ldots$$

رابطه‌ی بالا فرمول روش تکرار ساده برای بدست آوردن α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ نامیده می‌شود.

شرایط انتخاب $g(x)$ مناسب:

$\forall x \in [a,b] \;,\; g(x) \in [a,b]$ ①

$\forall x \in [a,b] \;,\; |g'(x)| \leq 1$ ②

مثال برای تعیین تقریب ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 3xe^x - 1 = 0$ که در $(0,1)$ قرار دارد، از روش تکرار ساده استفاده کنید و قرار دهید $x_0 = 0.5$ و تقریب را با ۳D محاسبه کنید. «تا جای ادامه می‌دهیم که دو ریشه متوالی ۳ رقم اعشار آن با هم مشابه باشند»

$$3xe^x = 1 \to x = \frac{1}{3e^x} \to x = \frac{1}{3}e^{-x} = g(x)$$

برای ساختن $g(x)$ اعداد ثابت ضریب را در کار نمی‌گیریم و توان منفی را می‌سازیم:

$$0 < x < 1 \xrightarrow[\text{تغییر جهت}]{-x} -1 < -x < 0 \xrightarrow[\text{جهت ثابت}]{e^{\text{نسبت}}} e^{-1} < e^{-x} < e^{0} \to \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{-1}}_{0/123} < \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{-x}}_{g(x)} < \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{0}}_{1/3} < 1$$

$$\to 0 < \frac{1}{3}e^{-x} < 1 \to \boxed{0 < g(x) < 1}$$ شرط اول برقرار است

$$\forall \; 0 < x < 1 \to 0 < \frac{1}{3}e^{-x} < 1$$

$(a>1)$ a^x

چون بر تابع نمایی همیشه مثبت است ← $\dfrac{e^{-x}}{3} = \left|-\dfrac{1}{3}e^{-x}\right| = |g'|$:شرط دوم

$$\to \frac{e^{-x}}{3} < \frac{1}{3} < 1$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \to x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

$$n = 0 \to x_1 = \frac{e^{-x_0}}{3} = \frac{e^{-0/5}}{3} = 0/2022$$

$$n = 1 \to x_2 = \frac{e^{-x_1}}{3} = \frac{e^{-0/2022}}{3} = 0/2723$$

$$n = 2 \to x_3 = \frac{e^{-x_2}}{3} = \frac{e^{-0/2723}}{3} = 0/2539$$

$$n = 3 \to x_4 = \frac{e^{-x_3}}{3} = \frac{e^{-0/2539}}{3} = 0/2586$$

$$n=4 \Rightarrow x_5 = \frac{e^{-x_4}}{3} = \frac{e^{-0/25816}}{3} = 0/25774$$

$$n=5 \Rightarrow x_6 = \frac{e^{-x_5}}{3} = \frac{e^{-0/25774}}{3} = 0/25777$$

شرط مسئله برقرار می‌باشد و x_6 به عنوان تقریب ریشه مورد نظر می‌باشد. $\boxed{\alpha \simeq 0/258}$ (x_6 با ۳ رقم گرد شده)

تمرین ۲ ریشه مثبت معادله‌ی $f(x) = 2\sin x + x - 2 = 0$ را تا 3D به روش وتری حساب کنید: $(x_0 = 0/5$ و $x_1 = 1)$

$\alpha \simeq 0/705$

تمرین تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله‌ی $[0, 1]$ قرار دارد، با 3D بدست آورید بطوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$ و قرار دهید $x_0 = 1$. این مسئله را با استفاده روش تکرار ساده حل کنید:

$\alpha \simeq 0/744$

تمرین با فرض $x_0 = 1$ و انتخاب $g(x)$ مناسب تقریبی از ریشه‌ی مثبت معادله $f(x) = 2x - \sin x - 1 = 0$ طوری حساب کنید که $|f(x_n)| < 10^{-3}$ باشد. با شرط 3D حل کنید.

$\alpha \simeq 0/888$

تمرین: ریشهٔ مثبت معادله $f(x) = 2\sin x + x - 2 = 0$ را تا سه رقم اعشار ۳D به روش وتری حساب کنید: ($x_0 = 0/5$ و $x_1 = 1$)

$f(x_0 = 0/5) = -0/5411$

$f(x_1 = 1) = 0/6829$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$n=1 \to x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{(0/6829)(0/5 - 1)}{(0/6829) - (-0/5411)}$

$\to \boxed{x_2 = 1/279} \to f(x_2) = 1/1945$

$n=2 \to x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Rightarrow x_3 = 1/279 - \frac{(1/1945)(1/279 - 1)}{(1/1945) - (0/6829)}$

$\to \boxed{x_3 = 0/6276} \to f(x_3) = -0/198$

$n=3 \to x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \Rightarrow x_4 = 0/6276 - \frac{(-0/198)(0/6276 - 1/279)}{(-0/198) - (1/1945)}$

$\to \boxed{x_4 = 0/7202} \to f(x_4) = 0/0293$

$n=4 \to x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \Rightarrow x_5 = 0/7202 - \frac{(0/0293)(0/7202 - 0/6276)}{(0/0293) - (-0/198)}$

$\to \boxed{x_5 = 0/7049} \to f(x_5) = 0/0008$

$n=5 \to x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)(x_5 - x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} \Rightarrow x_6 = 0/7049 - \frac{(0/0008)(0/7049 - 0/7202)}{(0/0008) - (0/0293)}$

$\to \boxed{x_6 = 0/7046}$ سه رقم بعد از اعشار x_5 و x_6 مشابه اند پس شرط مسئله برقرار است

پس x_6 بعنوان تقریبی از ریشه با ۳ رقم گرد کردن مورد نظر باشد: $\boxed{\alpha \simeq 0/705}$

تمرین: تقریبی از ریشه معادله ی $f(x)=x-\cos x=0$ را که در فاصله $[0,1]$ قرار دارد، با 3D بدست آورید، بطوری که $|f(x_n)|<10^{-2}$ و همچنین $x_0=1$ بوده و مسئله را به روش تکرار ساده حل کنید: $x-\cos x=0 \to g(x)=\cos x$

راه حل: $\boxed{x=\cos x} \to 0<x<1 \to \cos(1)<\cos(x)<\cos(0)$

$0<0/5403<\cos(x)<1$

$\to 0<\cos(x)<1$ شرط اول برقرار است

$g(x)=\cos(x) \to g'(x)=-\sin(x) \to |-\sin(x)| \xrightarrow{0\le x\le 1} |g'(x)|\le 1$

شرط دوم $L<1$: $0\le x\le 1 \to \sin(0)\le\sin(x)\le\sin(1) \to 0\le \sin x\le 0/841\le L<1$ نیز برقرار است.

$\to \boxed{x_{n+1}=\cos(x_n)} \to n=0 \to x_1=\cos(x_0)=\cos(1) \Rightarrow$

$x_1=\cos(1)=0/5403 \to f(x_1)=0/5403-\cos(0/5403)=-0/3173$

$n=1 \to x_2=\cos(x_1)=0/8576 \to f(x_2)=0/2033$

$n=2 \to x_3=\cos(x_2)=0/6543 \to f(x_3)=-0/1392$

$n=3 \to x_4=\cos(x_3)=0/7935 \to f(x_4)=0/0921$

$n=4 \to x_5=\cos(x_4)=0/7014 \to f(x_5)=-0/0625$

$n=5 \to x_6=\cos(x_5)=0/7639 \to f(x_6)=0/0418$

$n=6 \to x_7=\cos(x_6)=0/7221 \to f(x_7)=0/0283$

$n=7 \to x_8=\cos(x_7)=0/7504 \to f(x_8)=0/0190$

$n=8 \to x_9=\cos(x_8)=0/7314 \to f(x_9)=-0/0128$

$n=9 \rightarrow x_{10} = ٠/٧٤٤٢ \rightarrow f(x_{10}) = ٠/٠٠٨٦ \rightarrow |f(x_{10})| < 10^{-2}$

پس شرط مسئله برقرار است و چون $f(x_{10}) = ٠/٠٠٨٦ < 10^{-2}$ است x_{10} بعداز کرد

کردن بعنوان تقریب از ریشه ما خواهد بود:

$\boxed{\alpha \simeq ٠/٧٤٤}$

تمرین: با فرض ۱=n و انتخاب $g(x)$ مناسب تقریبی از ریشه مثبت معادله زیر را طوری

حساب کنید که $|f(x_n)| < 10^{-3}$ باشد. $f(x) = 2x - \sin x - 1 = 0$ و ۰/۳۵ = ...

$0 < x < 1 \longrightarrow \sin(0) < \sin x < \sin(1) \Rightarrow \frac{\sin(0)+1}{2} < \frac{\sin x + 1}{2} < \frac{\sin(1)+1}{2} < ٠/٩٥٠٨ < 1$

$2x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sin x + 1}{2} \xrightarrow{g(x)} \boxed{x_{n+1} = \frac{\sin(x_n)+1}{2}}$ $g(x) < 1$

$n=0 \rightarrow x_1 = \frac{\sin(x_0)+1}{2} = ٠/٩٢٠٧ \rightarrow f(x_1) = ٠/٠٤٥٢$

$n=1 \rightarrow x_2 = \frac{\sin(x_1)+1}{2} = ٠/٨٩٨ \rightarrow f(x_2) = ٠/٠١٣٩$

$n=2 \rightarrow x_3 = \frac{\sin(x_2)+1}{2} = ٠/٨٩١ \rightarrow f(x_3) = ٠/٠٠٤٣$

$n=3 \rightarrow x_4 = \frac{\sin(x_3)+1}{2} = ٠/٨٨٨٩ \rightarrow f(x_4) = ٠/٠٠١٤$

$n=4 \rightarrow x_5 = \frac{\sin(x_4)+1}{2} = ٠/٨٨٨٢ \rightarrow f(x_5) = ٠/٠٠٠٤$ ✓

چون $f(x_5) = ٠/٠٠٠٤ < 10^{-3}$ است شرط مسئله برقرار بوده و می‌توان x_5

را به عنوان تقریبی از ریشه پذیرفت ←

$\boxed{\alpha \simeq ٠/٨٨٨}$

چند جمله‌ای درون‌یاب

تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

می‌خواهیم مقدار تابع f را در نقطه‌ای مانند x^* که عضو (x_0, x_n) باشد و بعلاوه $x^* \neq x_i$ که i از $(i=0,1,\dots,n)$ را برآورد کنیم که این عمل درون‌یابی نامیده می‌شود. برای این کار روش‌های متفاوتی وجود دارد که یکی از این روش‌ها پیدا کردن چند جمله‌ای مانند $P(x)$ است به گونه‌ای که $P(x_i)=f_i \quad (i=0,\dots,n)$

حال بجای $f(x)$ می‌توان از $P(x)$ در بازه‌ی $[x_0, x_n]$ استفاده نمود.

به این ترتیب مسئله‌ای که مطرح می‌شود تعیین $f(x) \simeq P(x)$

چند جمله‌ای $P(x)$ می‌باشد که به چند جمله‌ای درون‌یاب معروف است.

معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$ که در شرط $P(x_i)=f_i$ صدق کند:

چند جمله‌ای های لاگرانژ:

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ هر یک یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و داشته باشیم

$$P(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+\dots+f(x_n)L_n(x)$$

$$\begin{cases} f(x_0)=f_0 \\ f(x_1)=f_1 \end{cases}$$

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \quad (j=0,1,\dots,n)$$

تعریف: چند جمله‌ای $L_j(x)$ که بصورت بالا تعریف می‌شود، چند جمله‌ای لاگرانژ نامیده

می‌شود که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشد.

$\boxed{\text{مثال}}$ چندجمله‌ای $P(x)$ مربوط به تابع جدولی زیر را بنویسید:

x_i	$\overset{x_0}{0}$	$\overset{x_1}{1}$	$\overset{x_2}{3}$	$\overset{x_3}{4}$ ← $\boxed{n=3}$ آخرین اندیس
f_i	$\underset{f_0}{-12}$	$\underset{f_1}{0}$	$\underset{f_2}{6}$	$\underset{f_3}{12}$

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12} = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{-12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3-7x^2+12x}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x^3-5x^2+4x}{-6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{12}$$

$$P(x) = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{\cancel{-12}}(\cancel{-12}) + \left(\frac{x^3-7x^2+12x}{6}\right)(0) + \left(\frac{x^3-5x^2+4x}{\cancel{-6}}\right)(\cancel{6})$$
$$+ \left(\frac{x^3-4x^2+3x}{\cancel{12}}\right)(\cancel{12}) = \boxed{x^3-7x^2+18x-12}$$

چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

فرض کنید x_0 تا x_n نقاط دو به دو متمایز می‌باشند و $(f_0, \dots, f_n)$ مقادیر تابع در این نقاط باشند، تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی متفاوت را برای نقاط x_i به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

① تفاضلات مرتبه‌ی اول بین دو نقطه x_i و x_{i+1} ایجاد می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

۲) تفاضل مرتبه دوم بین سه نقطه x_i و x_{i+1} و x_{i+2} روی می دهد.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

مثلا: $f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$

۳) تفاضل مرتبه i ام بین $i+1$ نقطه‌ی x_i و ... و x_1 و x_0 روی می دهد

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i] = \frac{f[x_0, \dots, x_{i-1}] - f[x_1, \dots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن تابع جدولی زیر را بدست آورید.

$\boxed{n=3}$

x_i	x_0: 0	x_1: 1	x_2: 2	x_3: 5
f_i	f_0: 2	f_1: 3	f_2: 12	f_3: 147

	x_i	f_i	اول $f[x_i, x_{i+1}]$	دوم $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	سوم $f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i]$
x_0	0	f_0 2			
			$f[x_0,x_1]$: $\frac{2-3}{0-1}=1$		
x_1	1	f_1 3		$f[x_0,x_1,x_2]$: $\frac{1-9}{0-2}=4$	
			$f[x_1,x_2]$: $\frac{3-12}{1-2}=9$		$f[x_0,\dots,x_3]$: $\frac{4-9}{0-5}=1$
x_2	2	f_2 12		$f[x_1,x_2,x_3]$: $\frac{9-45}{1-5}=9$	
			$f[x_2,x_3]$: $\frac{12-147}{2-5}=45$		
x_3	5	f_3 147			

* فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن *

چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط x_n و ... و x_0 به صورت زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)\, f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] + \cdots$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$ فرمول کلی:

ادامه مثال: $$P(x) = f_0 + (x-x_0)\, f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$$

$$= 2 + (x-0)(1) + (x-0)(x-1)(4) + (x-0)(x-1)(x-2)(1) =$$

$$= 2 + x + 4x^2 - 4x + x^3 - 3x^2 + 2x = \boxed{x^3 + x^2 - x + 2}$$

تمرین: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن محاسبه کرده و به کمک آن f_6 را تقریب بزنید.

x_i	۵	۷	۱۱	۱۳	۲۱
f_i	۱۵۰	۳۹۲	۱۴۵۲	۲۳۶۶	۹۷۵۲

$\boxed{f(6) = 252}$

تمرین: چندجمله درون‌یاب تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ بدست آورید؟

x_i	-1	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

$\boxed{P(x) = x^2 + x + 1}$

تمرین چند جمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن محاسبه و $f(6)$ را تقریب بزنید:

x_i	5	7	11	13	21
f_i	150	392	1452	2366	9702

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
x_0 5	f_0 150				
		$\frac{150-392}{5-7}=121$			
x_1 7	f_1 392		$\frac{121-265}{5-11}=24$		
		$\frac{392-1452}{7-11}=265$		$\frac{24-32}{5-13}=1$	
x_2 11	f_2 1452		$\frac{265-457}{7-13}=32$		$\frac{1-1}{5-21}=0$
		$\frac{1452-2366}{11-13}=457$		$\frac{32-46}{7-21}=1$	
x_3 13	f_3 2366		$\frac{457-917}{11-21}=46$		
		$\frac{2366-9702}{13-21}=917$			
x_4 21	f_4 9702				

$$P(x)=150+(x-5)(121)+(x-5)(x-7)(24)+(x-5)(x-7)(x-11)(1)$$
$$+\underbrace{(x-5)(x-7)(x-11)\cancel{(x-13)(0)}}_{0}=x^3+x^2$$

$$\rightarrow P(x)\simeq f(x)=\boxed{x^3+x^2}\ \checkmark$$

$$\rightarrow f(6)=6^3+6^2=\boxed{252}\ \checkmark$$

تمرین: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ بدست آورید؟

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7
	f_0	f_1	f_2	f_3

$\boxed{n=3}$

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{+2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{+6}$$

$$P(x) = \left(\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}\right)(1) + \left(\frac{x^3-2x^2-x+2}{+2}\right)(1) +$$

$$+\left(\frac{x^3-x^2-2x}{-2}\right)(3) + \left(\frac{x^3-x}{+6}\right)(7) = x^2+x+1$$

$$\longrightarrow \boxed{P(x) = x^2+x+1}$$

خطای چند جمله ای درون یاب

تابع خطای $E(x)$ در چند جمله‌ای درون یاب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(x) = f(x) - P(x)$$

می‌خواهیم یک کران بالا برای $E(x)$ بدست آوریم:

اگر M_{n+1} یک کران بالای $f^{(n+1)}(\eta)$ باشد، (یعنی $f^{(n+1)}(\eta) \leq M_{n+1}$)

آنگاه رابطه‌ی زیر برای خطای چند جمله‌ای درون یاب برقرار است.

$$E(x) = \left| f(x) - P(x) \right| \leq \left| (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$، یک تابع جدولی در نقاط: $\left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_1=0 \\ x_2=1 \end{array}\right\}$

باشد، چند جمله‌ای درون یاب f را در نقاط فوق محاسبه کنید و

یک کران بالا برای خطای آن بدست آورید؟

$\boxed{n=2}$

x_i	f_i	اول	دوم
-1	-1		
		$\frac{-1-0}{-1-0}=1$ $f[x_0,x_1]$	
0	0		$\frac{1-1}{-1-1}=0$ $f[x_0,x_1,x_2]$
		$\frac{0-1}{0-1}=1$	
1	1		

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\,\underbrace{f[x_0,x_1,x_2]}_{0}$$

$$\Rightarrow P(x) = -1 + (x-(-1)) \times 1 = x+1-1 = x \rightarrow \boxed{P(x) = x}$$

$|f^{(3)}(\eta)| \le M_3$

$$\begin{cases} f' = \frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{2}x \\ f'' = -\frac{\pi^2}{4}\times\sin\frac{\pi}{2}x \\ f^{(3)} = -\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x \end{cases}$$

مشتق سوم تابع $f(x)$ $\longrightarrow$ $f^{(3)} = -\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x$

$$|f^{(3)}| = \frac{\pi^3}{8}\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right| \le \frac{\pi^3}{8}\times 1 = \frac{\pi^3}{8} = M_3$$

$|\cos x| \le 1$ ، $|\sin x| \le 1$

$$|f(x)-P(x)| \le |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\frac{M_3}{3!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-P(x)| \le |(x+1)x(x-1)|\frac{\frac{\pi^3}{8}}{6}$$

$$|f(\tfrac{1}{2})-P(\tfrac{1}{2})| \le \left|(\tfrac{1}{2})^3-(\tfrac{1}{2})\right|\times\frac{\pi^3}{48} \le 0.242$$

کران بالا برای خطا در نقطه $\frac{1}{2}$

* تفاضلات متناهی و درون‌یابی یک تابع هرگاه نقاط درون‌یابی متساوی‌الفاصله باشند:

روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتون در حالت کلی برای نقاط x_0 تا x_n چه متساوی‌الفاصله باشند چه نباشند چندجمله‌ای درون‌یاب را بدست می‌آورد. اما وقتی x_i ها متساوی‌الفاصله باشند روش‌های دیگری را برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای درون‌یاب معرفی می‌کنیم.

هرگاه فاصله‌ی $[a,b]$ را به n زیرفاصله‌ی مساوی بصورت $[x_{i-1}, x_i]$ به طول h تقسیم کنیم داریم:

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

$$x_i - x_{i-1} = h$$

تعریف عملگر پیشرو: (Δ) $\quad \Delta^0 f_i = f_i$

$$\boxed{\Delta f_i = f_{i+1} - f_i}$$

فرمول کلی ← $\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$

مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن هرگاه نقاط x_i متساوی الفاصله باشند، می‌توان جدول تفاضلات را یک جدول تفاضلات متناهی نامیده می‌شود تشکیل داد.

$\boxed{n=3}$ $\quad n=3$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
		f_1-f_0 Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta f_1-\Delta f_0$ $\Delta^2 f_0$	
		f_2-f_1 Δf_1		$\Delta^2 f_1-\Delta^2 f_0$ $\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta f_2-\Delta f_1$ $\Delta^2 f_1$	
		f_3-f_2 Δf_2		
x_3	f_3			

مثال: تفاضلات متناهی مربوط به تابع جدولی زیر را محاسبه نمایید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	f_0 0			
		Δf_0: $-1-0=-1$		
0	f_1 -1		$\Delta^2 f_0$: $3-(-1)=4$	
		Δf_1: $2-(-1)=3$		$\Delta^3 f_0$: $4-4=0$
1	f_2 2		$\Delta^2 f_1$: $7-3=4$	
		Δf_2: $9-2=7$		
2	f_3 9			

فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات متناهی:

هرگاه x_i نقاط مشاوی الفاصله باشند و $\boxed{x = x_i + \theta h}$ در این صورت چندجمله‌ای درون‌یاب f برحسب تفاضلات پیشرو بصورت زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-(n-1))}{n!} \Delta^n f_0$$

مثال: فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب را برای تابع جدولی مثال قبل به روش تفاضلات متناهی پیشرو بدست آورید.

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

$$\Rightarrow P(x) = 0 + \theta(-1) + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \times 4 + \overset{\Delta^3 f_0 = 0}{0} = 2\theta^2 - 2\theta - \theta = 2\theta^2 - 3\theta$$

$$x = x_i + \theta h \xrightarrow{i=0} x = x_0 + \theta \underset{\text{فاصله بین نقاط}}{h} \Rightarrow x = -1 + \theta \times 1 \Rightarrow \boxed{\theta = x+1}$$

$$\Rightarrow P(x) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) = \boxed{2x^2 + x - 1}$$ چندجمله‌ای درون‌یاب

تعریف: عملگر پسرو ∇ که به صورت زیر تعریف می‌کنیم: ∇ دلتاپلاس

$$\nabla^0 f_i = f_i$$

$$\boxed{\nabla f_i = f_i - f_{i-1}} \qquad \nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

فرمول چند جمله‌ای درون یاب برحسب تفاضلات پسرو:

برای تخمین مقدار f_x وقتی x نزدیک به نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شود استفاده کنیم. چند جمله‌ای درون یاب f در نقاط مساوی الفاصله‌ی x_0 تا x_n و $x = x_n + \theta h$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\dots(\theta+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$$

که فرمول بالا را تفاضلات پسرو نیوتن می‌نامیم.

مثال: جدول تفاضلات متناهی مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورده و چندجمله‌ای درون‌یاب آن را با استفاده از تفاضلات پسرو محاسبه نمایید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0 -1	0			
		∇f_1: -1		
x_1 0	-1		$\nabla^2 f_2$: 4	
		∇f_2: 3		$\nabla^3 f_3$: 0
x_2 1	2		$\nabla^2 f_3$: 4	
		∇f_3: 7		
x_3 2	9			

$\boxed{n=3}$

نکته: در تفاضلات پسرو n در f_n به n جدول بستگی دارد و برابر آن است.

$$P(x) = f_3 + \theta \nabla f_3 + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_3 + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!}\nabla^3 f_3 \quad (\to n=3)$$

$$\to P(x) = 9 + \theta(7) + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}(4) + 0 = 9\theta + 2\theta^2 + 9$$

$$x = x_n + \theta h \to x = x_3 + \theta(1) \to x - 2 = \theta$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 + 9(x-2) + 9 \to \boxed{P(x) = 2x^2 + x - 1} \checkmark$$

* انتگرال گیری عددی:

برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ هرگاه تابع اولیه‌ی f موجود نباشد و یا f را بصورت تابع جدولی داده شده باشد، از انتگرال گیری عددی استفاده می‌شود.

فرض می‌کنیم $[a,b]$ را به n قسمت مساوی بصورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$[x_i , x_{i+1}]$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$

$x_{i+1} - x_i = h \qquad h = \dfrac{b-a}{n}$

*قاعده ذوزنقه ای (از روش های انتگرال گیری):

در $[x_i , x_{i+1}]$ تقریب زیر را بکار می‌بریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \simeq \frac{h}{2}\left[f_i + f_{i+1}\right]$$

رابطه‌ی بالا مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq T(h) = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right]}_{\text{فرمول قاعده‌ی ذوزنقه‌ای}}$$

T نماد قاعده‌ی ذوزنقه‌ای — h فاصله‌ی بازه

مثال: تقریبی از $\int_0^1 x^2\, dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

الف) $h = 1 \rightarrow h = \dfrac{b-a}{n} \rightarrow 1 = \dfrac{1-0}{n} \rightarrow \boxed{n=1}$

$f(x_0=0)=1 \quad f(x_1=1)=1$; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $h=1$

$$\int_0^1 x^2\, dx \simeq T(1) = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$$

ب) $h = \frac{1}{2} \rightarrow n = \dfrac{1-0}{1/2} \Rightarrow \boxed{n=2}$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$

$$\int_0^1 x^2\, dx \simeq T(\tfrac{1}{2}) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + f_2\right] = \frac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}+1\right] = \frac{3}{8}$$

ج) $h = \frac{1}{4} \rightarrow n = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{n=4}$

$$\underset{0}{\overset{x_0}{\times}} \quad \underset{\frac{1}{4}}{\overset{x_1}{\times}} \quad \underset{\frac{1}{2}}{\overset{x_2}{\times}} \quad \underset{\frac{3}{4}}{\overset{x_3}{\times}} \quad \underset{1}{\overset{x_4}{\times}}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq T(\tfrac{1}{4}) = \frac{h}{2}\left[\underbrace{f_0}_{0} + \underbrace{2f_1}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{2f_2}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{2f_3}_{\frac{9}{8}} + \underbrace{f_4}_{1}\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{22}{8}\right] = \frac{22}{64}$$

مثال: به روش ذوزنقه‌ای ؛
تقریب انتگرال $\int_0^1 f(x)\,dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر بدست آورید:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5 $\rightarrow \boxed{n=5}$
x_i	0	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	1
f_i	1	۱٫۲۲۱۴	۱٫۴۹۱۸	۱٫۸۲۲۱	۲٫۲۲۵۵	۲٫۷۱۸۳

$\rightarrow h = 0/2 \,,\; n = 5$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = T(0/2) = \frac{\overset{0/2}{h}}{2}\left[\overset{1}{f_0} + 2[\overset{1/2214}{f_1} + f_2 + f_3 + f_4] + f_5\right] = 1/72$$

* قاعده سیمپسون :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right]$$

این قاعده فقط برای n زوج برقرار است. یعنی تعداد نقاط فرد باشد.

$$\int_{a\,(x_0)}^{b\,(x_n)} f(x)\,dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

فرمول قاعده سیمپسون

مثال تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ را با استفاده از قاعده‌ی سیمپسون و به ازای $h=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید:

$$h=\frac{\pi}{4} \Rightarrow n=\frac{\overbrace{\frac{\pi}{2}-0}^{b-a}}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{n=2}$$

$x_0=0$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$

0, $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \simeq S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{h}{3}\left[\overset{0}{f_0}+4\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{f_1}+\overset{1}{f_2}\right]=\frac{\pi}{12}\left[2\sqrt{2}+1\right]$$

$$h=\frac{\pi}{8} \rightarrow n=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{8}} \Rightarrow \boxed{n=4}$$

x_0, $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{2\pi}{8}$, $x_3=\frac{3\pi}{8}$, $x_4=\frac{4\pi}{8}$

0, $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \simeq S\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4\right]$$

$$=\frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left[0+4(0/383)+\frac{2\sqrt{2}}{2}+4(0/924)+1\right]=0/32\pi$$

*قاعده‌ی نقطه‌ی میانی:

این قاعده برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه تعریف شده اند، استفاده می‌شود. برای یک زیر بازه:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

فرمول قاعده‌ی نقطه‌ی میانی برای بازه‌ی a تا b می‌باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq M(h) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\dots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$$

مثال: تقریبی از انتگرال از ۰ تا ۱ را، $h=\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ، $\int_0^1 x^2\,dx$ حساب کنید؟

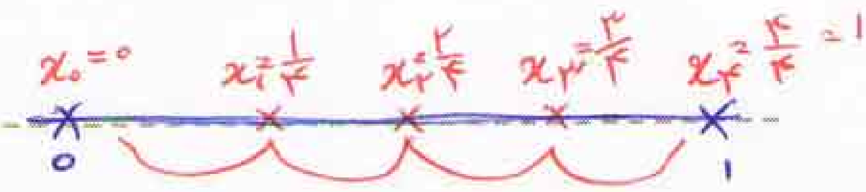
$$h=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1-0}{n} \Rightarrow \boxed{n=2}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq M\left(\frac{1}{2}\right) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$f(x)=x^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16},\quad f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{16}+\frac{9}{16}\right]=\boxed{\frac{5}{16}}$$

$$h=\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1-0}{n} \Rightarrow \boxed{n=4}$$



$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq M\left(\frac{1}{4}\right) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_2+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_3+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$f(x)=x^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64},\ f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{64},\ f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{25}{64},\ f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{49}{64}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{25}{64}+\frac{49}{64}\right]=\frac{1}{4}\times\frac{84}{64}=\boxed{\frac{21}{64}}$$

*قاعده‌ی دو نقطه‌ای گاوس:

فرمول های قاعده‌ی گاوس برای فاصله‌ی [۱ و ۱-] بدست می‌آیند. با استفاده از تغییر متغیر زیر بازه های [a و b] را به سادگی می‌توان به بازه [۱ و ۱-] تبدیل کرد.

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u + (b+a)\right] \qquad dx = \frac{b-a}{2}\,du$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

$$g(u) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)u + (b+a)\right]$$

فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

مثال: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ را با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس بدست آورید.

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}(u+1) \rightarrow dx = \frac{\pi}{4}du$$

$$\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(u+1)\right)du = \frac{\pi}{4}\left[\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right] + \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)\right]$$

$$= \boxed{0/998428}$$

روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی:

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

در این فصل حل عددی دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم

که در آن $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره و مفروض است و x_0 و y_0 دو عدد معلوم می‌باشند.

* روش اول: روش سبط تیلور:

الگوریتم روش تیلور از مرتبه‌ی k:

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ در $[a,b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

فاصله $[a,b]$ را به n قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{n}$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم

$x_0 = a \,,\, x_n = b \rightarrow x_i = x_0 + ih \rightarrow y(x_i) = y(a+ih)$

با داشتن y_i، $y(x_{i+1})$ را که تقریبی از y_{i+1} می‌باشد را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_i, y_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

مثال: با استفاده از سبط تیلور مرتبه‌ی چهار مقدار $y(0/5)$ را محاسبه کرده، به شرط آن که داشته باشیم $h = 0/1$ و $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\boxed{k = 4}$ یعنی

$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = 0/1\, i$

$i=0 \rightarrow x_0 = 0$
$i=1 \rightarrow x_1 = 0/1$
$i=2 \rightarrow x_2 = 0/2$
$i=3 \rightarrow x_3 = 0/3$
$i=4 \rightarrow x_4 = 0/4$
$\boxed{i=5 \rightarrow x_5 = 0/5}$

$y(0/5 = x_5) = y_5$

مشتق ضمنی

$f(x,y) = x + y$

$f'(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$

$f''(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$

$f^{(3)}(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$

Subject: محاسبات عددی

Year: 90 Month. 2 Date. 25

$$i=0 \longrightarrow y_1 = y_0 + h\left(f(x_0,y_0)\right) + \frac{h^2}{2!}f'(x_0,y_0) + \frac{h^3}{3!}f''(x_0,y_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(3)}(x_0,y_0)$$

$$\Longrightarrow y_1 = 1 + 0/1(1) + \frac{(0/1)^2}{2!}(2) + \frac{(0/1)^3}{3!}(2) + \frac{(0/1)^4}{4!}(2) = 1/11$$

$$i=1 \rightarrow y_2 = y_1 + h\left(f(x_1,y_1)\right) + \frac{h^2}{2!}f'(x_1,y_1) + \frac{h^3}{3!}f''(x_1,y_1) + \frac{h^4}{4!}f^{3}(x_1,y_1)$$

$$\Rightarrow y_2 = 1/11 + 0/1(1/21) + \left[\frac{(0/1)^2}{2!} + \frac{(0/1)^3}{3!} + \frac{(0/1)^4}{4!}\right](2/21) = 1/24$$

$$i=2 \rightarrow y_3 = 1/24 + 0/1(1/44) + \left[5/17\times 10^{-3}\right](2/44) = 1/39$$

$$i=3 \rightarrow y_4 = 1/39 + 0/1(1/79) + \left[5/17\times 10^{-3}\right](2/79) = 1/57$$

$$i=4 \rightarrow y_5 = 1/57 + 0/1(1/97) + \left[5/17\times 10^{-3}\right](2/97) = 1/78$$

$$y(0/5 = x_5) = \boxed{y_5 = 1/78}$$

① الگوریتم تیلور از مرتبه ی K (جلسه قبل)

② روش اویلر:

اگر در الگوریتم تیلور قرار دهید $K=1$ ، فرمول زیر محاسبه می‌شود:

که فرمول روش اویلر می‌نامیم ⟸ $\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)}$

مثال: تقریبی از $y(0.5)$ را برای معادله ی زیر به روش اویلر به ازای $h=0.1$ محاسبه کنید؟

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = (i)0.1$

$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = 0.1 \rightarrow x_2 = 0.2$

$x_3 = 0.3 \rightarrow x_4 = 0.4 , \boxed{x_5 = 0.5}$

$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + 0.1 x_i + 0.1 y_i = 0.1 x_i + 1.1 y_i$

$i=0 \rightarrow y_1 = 0.1 x_0 + 1.1 y_0 = 1.1$

$i=1 \rightarrow y_2 = 0.1 x_1 + 1.1 y_1 = 0.01 + 1.21 = 1.22$

$i=2 \rightarrow y_3 = 0.1 x_2 + 1.1 y_2 = 1.362$

$i=3 \rightarrow y_4 = 0.1 x_3 + 1.1 y_3 = 1.5282$

جواب نهایی

$i=4 \rightarrow y_5 = 0.1 x_4 + 1.1 y_4 = \boxed{1.72102}$ ⟶ $\boxed{y(0.5) = y(x_5) = 1.72102}$

③ روش رونگه-کوتا:

- روش رونگه کوتای مرتبه دوم: با داشتن «h» و «$x_i = x_0 + ih$» فرمول روش را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

$K_1 = h f(x_i, y_i)$

$K_2 = h f(\underbrace{x_i + h}_{x}, \underbrace{y_i + k_1}_{y})$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)}$$

مثال: تقریبی از $y(0/2)$ بدست آورید هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

از روش رونگه کوتای مرتبه‌ی دوم استفاده کنید و قرار دهید $h = 0/1$:

$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$

$x_i = x_0 + ih \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0/1 \\ x_2 = 0/2 \end{cases}$

$\hookrightarrow x_i = 0/1\, i$

$$\begin{cases} k_1 = 0/1\,(x_i + y_i) \\ k_2 = 0/1\, f(x_i + 0/1,\ y_i + k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

$y(0/2 = x_2) = y_2 = ?$

$$i = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0/1\,(\overset{0}{x_0} + \overset{1}{y_0}) = \boxed{0/1} \\ k_2 = 0/1\, f(\overset{0}{x_0} + 0/1,\ \overset{1}{y_0} + \overset{0/1}{k_1}) = 0/1\, f(0/1, 1/1) = \boxed{0/12} \\ y_1 = \overset{1}{y_0} + \frac{1}{2}(\overset{0/1}{k_1} + \overset{0/12}{k_2}) = 1 + 0/11 = \boxed{1/11} \end{cases}$$

$$i = 1 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0/1\,(\overset{0/1}{x_1} + \overset{1/11}{y_1}) = \boxed{0/121} \\ k_2 = 0/1\, f(\overset{0/1}{x_1} + 0/1,\ \overset{1/11}{y_1} + \overset{k_1}{0/121}) = 0/1\, f(\underbrace{0/2}_{x}, \underbrace{1/231}_{y}) = \boxed{0/1431} \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(\overset{0/121}{k_1} + \overset{0/1431}{k_2}) = 1/11 + \frac{1}{2}(0/121 + 0/1431) = \boxed{1/24205} \end{cases}$$

روش رونگه کوتای مرتبه‌ی چهارم:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$k_1 = h\, f(x_i, y_i)$

$k_2 = h\, f(x_i + h/2,\ y_i + \frac{k_1}{2})$

$$k_3 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h\, f\left(x_i + h,\ y_i + k_3\right)$$

مثال: تقریبی از $y(0.1)$ برای معادله روبرو به ازای $h = 0.1$ با استفاده از روش رونگه کوتای رتبه‌ی چهارم محاسبه کنید؟

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = 0.1\, i \rightarrow x_0 = 0,\quad x_1 = 0.1 \rightarrow y(x_1 = 0.1) = y_1 = ?$$

$$i = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ \quad = 1 + \frac{1}{6}\left(0.1 + 2(0.11) + 2(0.1105) + 0.12105\right) = \boxed{1.11034} \\ k_1 = 0.1\, f(x_0, y_0) = 0.1\,(0 + 1) = 0.1 \\ k_2 = 0.1\, f\left(x_0 + \frac{0.1}{2},\ y_0 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.1\, f(0.05,\ 1.05) = 0.11 \\ k_3 = 0.1\, f\left(x_0 + \frac{0.1}{2},\ y_0 + \frac{0.11}{2}\right) = 0.1\, f(0.05,\ 1.055) = 0.1105 \\ k_4 = 0.1\, f\left(x_0 + 0.1,\ y_0 + 0.1105\right) = 0.1\, f(0.1,\ 1.1105) = 0.12105 \end{cases}$$

تمرین: به روش اویلر تقریبی از جواب را برای $y(2.1)$ به ازای $h = 0.1$ برای معادله‌ی زیر محاسبه کنید؟

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad y(2) = 2$$

تمرین: فرض کنید $y' = 1 - y$ و $y(0) = 0$ و $h = 0.05$، تقریبی از $y(0.05)$ را به روش رونگه کوتای رتبه دوم بدست آورید؟

تمرین: فرض کنید $y' = 1 - y^2$ و $y(0) = 0$ و $h = 0.1$ تقریبی از $y(0.1)$ را به روش رونگه کوتای رتبه چهارم بیابید؟