مقدمه : (فصل اول)

درعلوم مهندسی همیشه یک مسئله وقتی به نتیجه می رسد که جواب نهایی آن به صورت یک عدد درست باشد ولی همین مورد در بسیاری از مسائل مشکلاتی را به وجود می آورد که از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه نیست، یا اینکه روش تحلیلی مستقلی را برای آن نمی توان ابلاغ کرد و یا از نظر زمانی رسیدن به آن اعداد بسیار طاقت فرسا و زمان بر است، لذا اینجاست که سروکله محاسبات عددی پیدامی شود .

خطاها :

خطای دستگاهها : خطاهایی وجود داردکه این خطاها برخی ازآنها قابل چشم پوشی است ولی برخی دیگر را می توانیم با انتخاب روش های کاراتر آنها را کم کنیم که خوشبختانه دردنیای کنونی و ظهورکامپیوتر این خطاها به سرعت کم وکمترمی شود.

خطای حذفی : درمسائل در خیلی از موارد ما نمی توانیم یک عددی که دارای بی نهایت رقم اعشار می باشد را جایگزین کنیم، لذا از یک مرحله به بعد باید از بقیه ارقام چشم پوشی کنیم که این عمل با گردکردن یا بریدن انجام می شود. عمل بریدن برای ارقام منصفانه نیست، ولی برای بسط ها منطقی است .

مثلاً :

بریدن $Sin\ x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \frac{x^{۷}}{۷!} + \dots$

گرد کردن ۳/۰۳۴۵۷۹۱۰۱۱۲۳۴

عمل گرد کردن :

اگر بخواهیم عمل برش را در رقم n اُم انجام دهیم رقم (n+۱)اُم ۳ حالت دارد :

۱) رقم (n+۱)اُم < ۵

۲) رقم (n+۱)اُم > ۵

۳) رقم (n+۱)اُم = ۵

در حالت اول یک واحد به رقم nاُم اضافه می کنیم و عمل برش را انجام می دهیم. اگر کوچکتر از ۵ بود (حالت دوم)، عمل برش را انجام می دهیم بدون هیچگونه تغییراتی .

و حالت سوم؛ اگرمساوی ۵ باشد، اگرارقام بعدازآن همه صفر باشند مانند حالت دوم عمل می کنیم؛ و بریدن و تمام. واگر یکی از آنها مخالف صفر باشد مانند حالت اول عمل می کنیم؛ یک واحد به ماقبل اضافه، و بعد بریدن .

مثال :

۳/۷۴۹۳۲۰ ≅ ۳/۷۵

۳/۷۴۲۰۱۴ ≅ ۳/۷۴

۳/۷۴۲۱۵۰۰۰ ≅ ۳/۷۴۲۲

۳/۷۴۲۹۵۰۰۰۱ ≅ ۳/۷۴۲۹

نحوه تعیین ارقام بامعنا :

ارقام معنی دار: کلیه رقم های ۱و۲و...و۹، جزء رقم های معنی دار هستند ولی صفر(دراعدادی که قدرمطلق آنها کوچکتر از ۱ باشد) اگربلافاصله بعد از ممیز شروع نشده باشد و یا برای جاهای خالی به کار نرفته باشد جزء رقم های معنی دار به حساب می آیند.

مثال : ارقام معنی دار اعداد زیر را مشخص کنید.

۲۳/۴۳۵ → ۵ رقم بامعنا

۲۳/۰۳۵ → ۵ رقم بامعنا

۰/۳۲۵ → ۳ رقم بامعنا

۰/۰۳۲۵ → ۳ رقم بامعنا

۰/۰۰۳۲ → ۲ رقم بامعنا

۶/۰۰ → ۳ رقم بامعنا

۲۳۰۰ → $۲/۳ \times ۱۰^{۳}$ → ۲ رقم بامعنا

$۲/۳۰ \times ۱۰^{۳}$ → ۳ رقم بامعنا

خطای مطلق :

اگر مقدار واقعی یک کمیت را با X و مقدارتقریبی آن را با x نمایش دهیم، آنگاه خطاهای مطلق را با e(Error) به صورت زیر نمایش می دهیم :

$e = X - x$ در

بعضی از کتب آنرا به صورت $e = x - X$ نمایش می دهند، اما منطقی آن است که از این به بعد آن را به صورت زیر نمایش دهیم :

$$e = |X - x|$$

مثال :

$$X = \frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶۶۶۶۶......$$

$$x = \frac{۲}{۳} \cong ۰/۶۶۶۶۶۷$$

خطای نسبی:

اگر e خطای مطلق و X مقدار واقعی یک عدد و x مقدار تقریبی آن عدد باشد در این صورت خطای نسبی را با r و به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$r = \frac{e}{X} = \frac{|X - x|}{X}$$

در بیشتر اوقات ما خطای مطلق را به کار می بریم ولی در مواقعی که کمیت خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد خطای نسبی دارای معنای بیشتری است .

مثلاً وقتی که مقدار واقعی یک کمیت $۱۰^{۱۴}$ و خطای مطلق $۱۰^{۷}$ باشد خطای مطلق زیاد جالب نیست حال اگر خطای نسبی همین مسئله بررسی شود :

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{X}} = \frac{۱۰^{۷}}{۱۰^{۱۴}} = ۱۰^{-۷} = ۰/۰۰۰۰۰۰۱$$

می بینیم که خطای جالب تری است البته توجه شود که در محاسبه خطای نسبی اگر مقدار واقعی

یک کمیت را نداشتیم از مقدار تقریبی آن استفاده می کنیم در حالت کلی می توانیم چنین بگوییم:

«در جمع و تفریق خطای مطلق مفیداند و در ضرب و تقسیم خطای نسبی .»

نکته : توجه شود که خطای مطلق دارای بعد کمیت مورد اندازه گیری می باشد یعنی اگر در یک اندازه گیری واحد اندازه گیری ما متر است خطای مطلق نیز بر اساس متر است در حالی که خطای نسبی دارای بُعد نمی باشد ضمناً ثابت می شود که اگر عددی تا K رقم اعشار گرد شده باشد درآنصورت خطای مطلق در نامساوی زیر صدق می کند:

$$|e| \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-k}$$

مثال: میلهٔ A را که طول آن ۱۰ متر است با تقریب یک هزارم متر و میله B را که طول آن ۱۰۰ میلی متراست با تقریب ۰/۰۱ میلی متراندازه گرفته اند دقت کدام یک از این دو اندازه گیری بهتر است .

خطای ناشی از گردکردن:

میلهٔ A :

$$E_A \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} \rightarrow E_A = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

خطای نسبی A : $\frac{E_A}{۱۰} = \frac{۱/۲ \times ۱۰^{-۳}}{۱۰} = \frac{۱}{۲ \times ۱۰^{-٤}} = \frac{۱}{۲۰۰۰۰}$

میلهٔ B :

$$E_B \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} \rightarrow E_B = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲}$$

خطای نسبی B : $\frac{E_B}{۱۰۰} = \frac{۱/۲ \times ۱۰^{-۲}}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲ \times ۱۰^{-٤}} = \frac{۱}{۲۰۰۰۰}$

تمرین : میلهٔ C را که طول آن ۱۰ متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری کرده ایم و میلهٔ D را که طول آن ۱۰ میلی متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری کردیم، دقت کدام یک بیشتر است.

$$C\begin{cases} X = ۱۰ m \\ e = ۰/۰۱ cm = ۱۰^{-٤} m \end{cases}$$

$$\mathrm{C} \Rightarrow E_C \le \frac{1}{2}\times 10^{-4} \Rightarrow \text{خطای نسبی} = \frac{E_C}{X} = \frac{0/5\times 10^{-4}}{10} = \frac{1}{200000}$$

$$D\begin{cases} X = 10mm \\ e = 0/01cm = 10^{-3}\ mm \end{cases}$$

$$\mathrm{D} \Rightarrow E_D \le \frac{1}{2}\times 10^{-3} \Rightarrow \text{خطای نسبی} = \frac{E_D}{X} = \frac{0/5\times 10^{-3}}{10} = \frac{1}{20000}$$

$\Rightarrow$ C خطای نسبی $\Rightarrow$ D خطای نسبی $\Rightarrow$ دقت C بیشتر است.

خطای حاصل جمع :

اگر x_1 و x_2 دو تقریب از کمیت های X_1 و X_2 باشند و e_1 و e_2 خطاهای مطلق متناظر با آنها باشند، داریم :

$$e_1 = X_1 - x_1 \rightarrow X_1 = e_1 + x_1$$

$$e_2 = X_2 - x_2 \rightarrow X_2 = e_2 + x_2$$

$$X_1 + X_2 = e_1 + x_1 + e_2 + x_2 = (x_1 + x_2) + (e_1 + e_2)$$
$$\Rightarrow |e_1 + e_2| \le |e_1| + |e_2|$$

یعنی قدرمطلق مجموع دو عدد کمتر یا مساوی مجموع خطاهای تک تک آن اعداد می باشد حال اگر e_1 خطای ناشی از گرد کردن x_1 تا k_1رقم اعشار و e_2 خطای ناشی از گردکردن x_2 تا k_2 رقم اعشار باشد در اینصورت روابط زیر برقرار است:

$$|e_1| \le \frac{1}{2}\times 10^{-k_1} \rightarrow -\frac{1}{2}\times 10^{-k_1} \le e_1 \le \frac{1}{2}\times 10^{-k_1}$$

$$|e_2| \le \frac{1}{2}\times 10^{-k_2} \rightarrow -\frac{1}{2}\times 10^{-k_2} \le e_2 \le \frac{1}{2}\times 10^{-k_2}$$

حال با توجه به رابطهٔ $|e_1 + e_2| \le |e_1| + |e_2|$ داریم :

$$|e_1 + e_2| \le |e_1| + |e_2| \le \frac{1}{2}\times 10^{-k_1} + \frac{1}{2}\times 10^{-k_2}$$
$$\Rightarrow |e_1 + e_2| \le \frac{1}{2}(10^{-k_1} + 10^{-k_2})$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(10^{-k_1} + 10^{-k_2}) \le (e_1 + e_2) \le \frac{1}{2}(10^{-k_1} + 10^{-k_2})$$

خطای حاصل تفریق (خطای تفاضل) :

با توجه به مطالب گفته شدهٔ فوق، عیناً همان مطالب برای تفاضل تکرار می شود، یعنی به دست می آید :

$$-\frac{1}{2}(10^{-k_1}+10^{-k_2}) \le e_1 - e_2 \le \frac{1}{2}(10^{-k_1}+10^{-k_2})$$

خطای حاصل ضرب :

$$X_1 = x_1 + e_1$$

$$X_2 = x_2 + e_2$$

$$X_1X_2 = (x_1+e_1).(x_2+e_2) = x_1x_2 + x_1e_2 + x_2e_1 + e_1e_2$$

با توجه به اینکه e_1e_2 یک مقدار بسیار کوچک می باشد لذا قابل صرف نظر می باشد :

$$X_1X_2 - x_1x_2 = x_1e_2 + x_2e_1$$

خطای حاصل ضرب برابر است با :

$$|x_1e_2 + x_2e_1| \le |x_1e_2| + |x_2e_1|$$
$$\Rightarrow |x_1e_2 + x_2e_1| \le |x_1e_2| + |x_2e_1| \le |x_1||e_2| + |x_2||e_1|$$
$$\Rightarrow |x_1e_2 + x_2e_1| \le |x_1| \times \frac{1}{2} \times 10^{-k_1} + |x_2| \times \frac{1}{2} \times 10^{-k_2}$$

مثال : ثابت کنید که: $|r| \le |r_1| + |r_2|$

(اثبات) $|r| = \dfrac{|e|}{|X_1X_2|} = \dfrac{|X_1X_2 - x_1x_2|}{|X_1X_2|} = \dfrac{|(x_1+e_1)(x_2+e_2) - x_1x_2|}{|X_1X_2|}$

$$= \frac{|\cancel{x_1x_2} + x_1e_2 + x_2e_1 + e_1e_2 - \cancel{x_1x_2}|}{|X_1X_2|}$$

از طرفی e_1e_2 به دلیل کوچک بودن قابل چشم پوشی می باشد :

$$= \frac{|x_1e_2 + x_2e_1|}{|X_1X_2|} \le \frac{|x_1e_2|}{|X_1X_2|} + \frac{|x_2e_1|}{|X_1X_2|} = \frac{|(X_1 - e_1)e_2|}{|X_1X_2|} +$$

$$\frac{|(X_2 - e_2)e_1|}{|X_1X_2|} = \frac{|X_1e_2 - e_1e_2|}{|X_1X_2|} + \frac{|X_2e_1 - e_1e_2|}{|X_1X_2|}$$

$$= \frac{|X_1e_2|}{|X_1X_2|} + \frac{|X_2e_1|}{|X_1X_2|} = \frac{|e_1|}{|X_1|} + \frac{|e_2|}{|X_2|} = |r_1| + |r_2| \Rightarrow$$

$$|r| \le |r_1| + |r_2|$$

خطای حاصل تقسیم :

$$\left|\frac{e_1}{X_1} - \frac{e_2}{X_2}\right| \le \left|\frac{e_1}{X_1}\right| + \left|\frac{e_2}{X_2}\right|$$

قضیه : اگر

$$A = a_1 \ldots\ldots a_m / b_1 \ldots\ldots b_n \overbrace{\overline{c_1 \ldots\ldots c_k}}^{\text{دوره گردش}}$$

آنگاه :

$$A = a_1 \ldots\ldots a_m + \frac{b_1 \ldots\ldots b_n c_1 \ldots\ldots c_k - b_1 \ldots\ldots b_n}{\underbrace{99\ldots\ldots 99}_{k\ \text{تا}}\underbrace{\ldots\ldots}_{n\ \text{تا}}}$$

مثال:

$$15/2\overline{37}$$

$$15/2\overline{37} = 15 + \frac{237 - 2}{990} = \frac{3017}{198}$$

مبنای ۲ :

بسط اعداد صحیح در مبنای ۲ :

راه اول :

```
۳۹ |۲
۳۸   ۱۹ |۲
--   ۱۸    ۹ |۲
 ۱   --    ۸    ۴ |۲
      ۱   --    ۴    ۲ |۲
           ۱   --    ۲    ۱
                ۰   --
                     ۰
```

$\Rightarrow (۳۹)_{۱۰} = (۱۰۰۱۱۱)_۲$

راه دوم:

$$۳۹ = ۳۲ + ۷$$
$$= ۳۲ + ۴ + ۳$$
$$= ۳۲ + ۴ + ۲ + ۱$$
$$= ۲^۵ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰$$
$$\Rightarrow (۳۹)_{۱۰} = (۱۰۰۱۱۱)_۲$$

$※) ۲^۶ = ۶۴ , ۲^۵ = ۳۲ , ۲^۴ = ۱۶ , ۲^۳ = ۸ , ۲^۲ = ۴ , ۲^۱ = ۲ , ۲^۰ = ۱$

$۲^{-۱} = ۰/۵ , ۲^{-۲} = ۰/۲۵ , ۲^{-۳} = ۰/۱۲۵ , ۲^{-۴} = ۰/۶۲۵ , ۲^{-۵} = ۰/۰۳۱۲۵$

مثال : عدد ۰/۷۵ را به مبنای ۲ ببرید.

$۰/۷۵ = ۰/۵ + ۰/۲۵ = ۲^{-۱} + ۲^{-۲} \qquad (۰/۱۱)_۲$

مثال : عدد ۹/۶۲۵ را به مبنای ۲ ببرید.

$$\begin{array}{l} ۹ \div ۲ = ۴ \text{ (باقیمانده } ۱) \\ ۴ \div ۲ = ۲ \text{ (باقیمانده } ۰) \\ ۲ \div ۲ = ۱ \text{ (باقیمانده } ۰) \end{array} \qquad \Rightarrow (۹)_{۱۰} = (۱۰۰۱)_۲$$

$$۰/۶۲۵ = ۰/۵ + ۰/۱۲۵ = ۲^{-۱} + ۲^{-۳} = (۰/۱۰۱)_۲$$
$$\Rightarrow (۹/۶۲۵)_{۱۰} = (۱۰۰۱/۱۰۱)_۲$$

روش ساده تر :

برای بسط اعداد در مبنای ۲ زمانی که عدد A بین صفر و یک باشد. $(۰ < A < ۱)$ جدولی را تهیه می کنیم به شرح زیر :

ستون اول A می باشد، ستون دوم i که یک شمارنده است. ستون سوم ۲A، ستون چهارم [۲A]، ستون پنجم ۲A-[۲A] این جدول را تشکیل می دهیم. هر سطر را تکمیل کرده و عدد حاصل ستون آخر را به ستون یک انتقال می دهیم. این عمل تا زمانی تکرار می شود که در ستون اول عدد تکراری نداشته باشیم

به محض تکرار شدن آن الگوریتم ختم و با توجه به ستون چهارم یک ممیز نوشته و اعداد آن را از بالا به پایین می نویسیم.

مثال : $\frac{۳}{۷}$ را به مبنای ۲ ببرید.

A	i	۲A	[۲A]	۲A-[۲A]
$\frac{۳}{۷}$	۱	$\frac{۶}{۷}$	۰	$\frac{۶}{۷}$
$\frac{۶}{۷}$	۲	$\frac{۱۲}{۷}$	۱	$\frac{۵}{۷}$
$\frac{۵}{۷}$	۳	$\frac{۱۰}{۷}$	۱	$\frac{۳}{۷}$
$\frac{۳}{۷}$				

$$\Rightarrow \left(\frac{۳}{۷}\right)_{۱۰} = (۰/\overline{۰۱۱})_{۲}$$

مثال : بسط اعشاری ۰/۱ را در مبنای ۲ به دست آورید.

A	i	۲A	[۲A]	۲A-[۲A]
$\frac{۱}{۱۰}$	۱	$\frac{۲}{۱۰}$	۰	$\frac{۲}{۱۰}$
$\frac{۲}{۱۰}$	۲	$\frac{۴}{۱۰}$	۰	$\frac{۴}{۱۰}$
$\frac{۴}{۱۰}$	۳	$\frac{۸}{۱۰}$	۰	$\frac{۸}{۱۰}$
$\frac{۸}{۱۰}$	۴	$\frac{۱۶}{۱۰}$	۱	$\frac{۶}{۱۰}$
$\frac{۶}{۱۰}$	۵	$\frac{۱۲}{۱۰}$	۱	$\frac{۲}{۱۰}$
$\frac{۲}{۱۰}$				

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۱۰})_{۱۰} = (۰/\overline{۰۰۰۱۱})_۲$$

مثال : فرض کنید $a_n = \frac{n+۱}{n}$، خطای a_n به عنوان تقریبی از عدد ۱ چقدر است.

$$e(a_n) = \left|۱ - \frac{n+۱}{n}\right| = \left|\frac{۱}{n}\right| = \frac{۱}{n}$$

مشاهده می شود که هر چه n بزرگتر اختیار شود $\frac{۱}{n}$ کوچکتر می شود و در نتیجه a_n به یک نزدیکتر می شود.

اگر بخواهیم خطای a_n از مثلاً ۰/۰۰۱ کوچکتر شود کافی است قرار دهیم :

$$e(a_n) = \frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$$

که از آن نتیجه می شود $n > ۱۰۰۰$ لذا اولین عددی که در نامساوی اخیر صدق می کند ۱۰۰۱ می باشد. لذا :

$$a_n = \frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۱} = ۱/۰۰۰۹۹۹(۶D)$$

- اما همیشه وضع به گونه ای نیست که عدد A را داشته باشیم، معمولاً A مجهول است و یا حتی در حالت معلوم بودن e(a) به راحتی قابل بیان نیست، لذا در اینجاست که خطای مطلق حدی به ما کمک می کند.

مثال : می دانیم که ۱/۴۱ تقریبی از $\sqrt{۲}$ است، خطای مطلق ۱/۴۱ را بنویسید.

$$e(۱/۴۱) = \left|\sqrt{۲} - ۱/۴۱\right| = \sqrt{۲} - ۱/۴۱ \qquad (۱)$$

اگر بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ را با استفاده از ماشین حساب بنویسیم برابر است با :

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶(۹D)$$

که اگر مقدارش را در (۱) جایگزین کنیم، برابر است با :

$$e(۱/۴۱) = ۰/۰۰۴۲۱۳۵۶....$$

مشاهده می شود که $e(۱/٤۱)$ به سادگی قابل بیان نیست و همان $\sqrt{۲}-۱/٤۱$ بیان ساده تر و دقیق تر از آن است.

حال فرض کنیم که حدود $\sqrt{۲}$ را بدانیم.

$$
\begin{aligned}
۱/٤۱٤ < \sqrt{۲} < ۱/٤۱٥ &\Rightarrow ۱/٤۱٤-۱/٤۱ < \sqrt{۲}-۱/٤۱ < ۱/٤۱٥-۱/٤۱ \\
&\Rightarrow ۰/۰۰٤ < \sqrt{۲}-۱/٤۱ < ۰/۰۰٥ \\
&\Rightarrow e(۱/٤۱) < ۰/۰۰٥
\end{aligned}
$$

بدیهی است که ۰/۰۰۵ یک کران بالا برای خطای ۱/۴۱ می باشد و تا حد زیادی مقدار نزدیکی ۱/۴۱ را به $\sqrt{۲}$ نشان می دهد.

تعریف : هر عدد ناکمتر از e(a) را یک خطای مطلق a می نامیم و با e_aنمایش می دهیم.

بنابراین: $e(a) \le e_a$

(e_a منحصر به فرد نیست، بر خلاف e(a) که منحصر به فرد است.)

پس داریم :

$$
\begin{aligned}
& e(a) = |A-a| \le e_a \\
& \Rightarrow -e_a \le A-a \le e_a \Rightarrow a-e_a \le A \le \mathrm{a}+e_a \\
& \Rightarrow A \in [a-e_a, a+e_a]
\end{aligned}
$$

ارقام با معنای درست یک تقریب :

هر یک از اعداد زیر یک تقریب از عدد e (نپر) هستند.

۲/۷۱۸۱، ۲/۷۱۸، ۲/۷۲، ۳

سؤالی که اینجا مطرح است این است که تعداد ارقام با معنای یک تقریب مؤید دقت آن تقریب نیست، مثلاً عدد ۳/۷۱۸۲۳۸ تقریبی از عدد e است که ۷ رقم بامعنا دارد. و از طرفی تقریب دیگر آن عدد ۳ می باشد که فقط یک رقم بامعنا دارد. حال قضاوت با خود شما.

پس ارقام بامعنا دقت ما را نشان نمی دهند، حال می خواهیم روشی را بیان کنیم که ارقام بامعنای درست را به ما ارائه دهند.

مثال : فرض کنید A مساوی است با ۸/۰۰۰ و ۷/۹۹۷= a و ۸/۰۸ = a' مشاهده می شود که a' درست دو رقم مساوی با ارقام A دارد. (با حفظ ارزش هر رقم) اما هیچ یک از ارقام a مساوی ارقام A نیست. آیا می توان گفت ارقام درست a' بیشتر از ارقام درست a می باشد، خواهیم دید که خیر.

مفهوم ارقام بامعنای درست هر تقریب رابطهٔ تنگاتنگ با دقتِ آن تقریب دارد در اینجا خطاهای مطلق برابر :

e(a) =۰/۰۰۳

e(a') =۰/۰۸

در واقع a باید تعداد ارقام درست بیشتری داشته باشد. اما تعداد ارقام بامعنا چگونه محاسبه می کنند، داریم :

تعریف : فرض کنید

$$a = a'_m \times ۱۰^{m} + a_{m-۱} \times ۱۰^{m-۱} + ...$$

$$(a_m \neq ۰)$$

بسط اعشاری a و d تعداد ارقام بامعنای a باشد در این صورت بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که $n \le d$ و $|A-a| \le ۵\times ۱۰^{m-n}$ تعداد ارقام بامعنای درست a نامیده می شود.

اما برای محاسبهٔ m داریم :

۱- $a \ge ۱ \Rightarrow$ m = (تعداد ارقام [a])

$۰ < a < ۱ \Rightarrow$ m = -[a ۱+ تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز در بسط a]

مثال : اگر A =۸/۰۰ و a =۷/۹۹۷ و a'=۸/۰۸، تعداد ارقام بامعنای درست a و a' را بنویسید.

حل) با توجه یه اینکه جزء صحیح a و a' اعداد یک رقمی هستند، m برای هر دو صفر است و داریم:

e(a) =۰/۰۰۳

حال باید بزرگترین n را به دست می آوریم که در نامساوی زیر صدق کند.

$$۰/۰۰۳ \le ۵\times ۱۰^{۰-n}$$

بدیهی است که بزرگترین n برابر ۳ می باشد یعنی a دارای ۳ رقم بامعنای درست می باشد. و برای a' داریم:

$$e(a') = ۰/۰۸ \le ۵\times ۱۰^{۰-n}$$

که n برابر ۱ می باشد یعنی یک رقم بامعنای درست دارد.

تمرین : اگر A= ۱۰۰ باشد و a =۹۹/۹۸ و b =۱۰۰/۶ تعداد ارقام بامعنای درست a و b را بنویسید.

$$a \geq ۱ \Rightarrow m = (۲) - ۱ = ۱, e(a) = ۰/۰۲, |A - a| \leq ۵ \times ۱۰^{m-n}$$

$$\Rightarrow ۰/۰۲ \leq ۵ \times ۱۰^{۱-n} \Rightarrow n = ۳ \Rightarrow$$ a دارای ۳ رقم بامعنای درست می باشد.

$$b \geq ۱ \Rightarrow m = ۲, e(b) = |A - b| = ۰/۶, |A - b| \leq ۵ \times ۱۰^{m-n}$$

$$\Rightarrow ۰/۶ \leq ۵ \times ۱۰^{۲-n} \Rightarrow n = ۲$$ B دارای ۲ رقم بامعنای درست می باشد.

فصل دوم :

ریشهٔ معادلات :

در ریاضیات مهندسی اغلب ناچاریم که جواب های معادلهٔ زیر را به دست آوریم. یعنی عدد a را به قسمی پیدا کنیم که :

$$f(x) = ۰ \xrightarrow{x=a} f(a) = ۰$$

در آن صورت عدد a را ریشهٔ معادلهٔ f(x) می نامند که در اینجا f(x) یک تابع معلوم است به صورت جبری یا متعالی (تابع f یک تابع متعالی است اگر بر حسب توابع مثلثاتی، معکوس مثلثاتی، نمایی و یا لگاریتمی باشد.) و ما به این مشکل برخورد می کنیم که همیشه با روش های معمول نمی توانیم آنها را حل کنیم و ریشهٔ آنها را بیابیم، لذا در این جا به محاسبات عددی پناه می آوریم، که روش های تکراری تقریب از ریشهٔ معادلات را به ما می دهد.

- روش تکراری عددی چیست ؟

روشی است که با اختیار کردن یک مقدار اختیاری مثل $x_۰$ و جایگذاری آن در یک عبارت دنباله ای از x_i ها را به دست می آوریم.

$x_۰$ نقطهٔ شروع

$$x_{i+۱} = g(x_i)$$

x_0

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

$x_n = g(x_{n-1})$

روش های تکراری فراوانی وجود دارد که به اختصار چند روش از آنها را توضیح می دهیم.

روش تکراری ساده (نقطهٔ ثابت) : fix point

سعی می کنیم در این روش از معادلهٔ f(x) =۰ عبارت x = g(x) را به دست آوریم که داریم:

$x_{i+1} = g(x_i)$

که با داشتن x_0 دنباله ای از x_iها به دست می آید که با انتخاب مناسب x_0 و g(x) مناسب در آن صورت دنبالهٔ عددی شما به ریشهٔ معادلهٔ f(x) همگرا می شود.

مثال : با استفاده از روش تکرار ساده ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x^2 - 3x + 1$ را به دست آورید. (تا چهار رقم اعشار).

$f(x) = x^2 - 3x + 1$

$$\Rightarrow 3x = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$$

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad \text{و} \qquad g(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$$

لذا:

$$x_{i+1} = \frac{1}{3}(x_i^2 + 1)$$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{3}(1^2 + 1) = \frac{2}{3} = 0/667$

$x_2 = \frac{1}{3}((\frac{2}{3})^2 + 1) = 0/4815$

$x_3 = 0/4106$ ، $x_4 = 0/3893$ ، $x_5 = 0/3839$

$x_6=0/3825$ ، $x_7=0/3821$ ، $x_8=0/3820$

$x_9=0/3820$

- x_0 دلخواه است ولی عمداً یک گرفته می شود.

توجه شود که برای f(x)، g(x) های متعددی به دست می آید ولی معلوم نیست که تمام این g(x) ها مناسب باشند. به عبارت دیگر با داشتن x_0، الزاماً تمام دنباله های $x_{i+1}=g(x_i)$ به ریشهٔ معادلهٔ f(x) =0 همگرا نمی شود.

مثلاً برای تابع زیر تعدادی از g(x) های ممکن را می نویسیم.

$$f(x)=x^2-3x+1$$

$$3x=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{x}=\frac{1}{3}(x^2+1)$$

$$\mathrm{g}_1(\mathrm{x})=\frac{1}{3}(x^2+1)$$

$$x^2=3x-1 \Rightarrow \mathrm{x}=\pm\sqrt{3x-1} \Rightarrow g_2(x)=-\sqrt{3x-1}$$
$$g_3(x)=\sqrt{3x-1}$$

$$x^2-2x-x+1=0 \Rightarrow \mathrm{x}=x^2-2x+1 \Rightarrow \mathrm{g}_4(\mathrm{x})=x^2-2x+1$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x^2-3x=-1 \Rightarrow \mathrm{x(x-3)}=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{\mathrm{x-3}}$$

$$\Rightarrow g_5(x)=\frac{-1}{\mathrm{x-3}}$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x^2=3x-1 \Rightarrow \mathrm{x}=\frac{3x-1}{\mathrm{x}} \Rightarrow g_6(x)=\frac{3x-1}{\mathrm{x}}$$

مثال : مثال قبل را با $g_2(x)$ به دست آمده در بالا حل کنید ؟

$$f(x)=x^2-3x+1=0$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x^2=3x-1 \Rightarrow \mathrm{x}=\sqrt{3x-1} \Rightarrow g(x)=\sqrt{3x-1}$$

$$x_{i+1}=\sqrt{3x_i-1}$$

$$x_0=4$$

$x_۱ = \sqrt{۳(٤)-۱} = ۲/٦٤٥$

$x_۲ = \sqrt{۳(۷)-۱} = ۲/٦۳۳$

$x_۳ = \sqrt{۳(x_۲)-۱} = ۲/٦۲٦$

$x_٤ = \sqrt{۳(x_۳)-۱} = ۲/٦۲۲$

$x_٥ = ۲/٦۲۰ \quad ، \quad x_٦ = ۲/٦۱۹ \quad ، \quad x_۷ = ۲/٦۱۸ \quad ، \quad x_۸ = ۲/٦۱۸$

(تا سه رقم اعشار)

مثال :

$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$

$$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۲x + ۳ \Rightarrow x = \sqrt{۲x+۳}$$
$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{۲x+۳} \Rightarrow x_{i+۱} = \sqrt{۲x_i + ۳}$$
$$x_۰ = ٤ \,،\, x_۱ = ۳/۳۱۷ \,،\, x_۲ = ۳/۱۰٤ \,،\, x_۳ = ۳/۰۳٤ \,،$$
$$x_٤ = ۳/۰۱۱ \,،\, x_٥ = ۳/۰۰٤$$

ملاحظه می شود که به ریشهٔ ۳= x همگرا می شود. حال اگر همین مسئله را با یک g(x) دیگر در نظر بگیریم، داریم :

$$x.x - ۲x - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow x = \frac{۲x+۳}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{۲x+۳}{x} \Rightarrow x_{i+۱} = \frac{۲x_i+۳}{x_i}$$
$$x_۰ = ٤ \,،\, x_۱ = ۱/٥ \,،\, x_۲ =$$

$$x \quad \begin{cases} 4 \\ 2.750 \\ 3.090 \\ 2.970 \\ 3.010 \\ 2.996 \\ 3.001 \\ 3.000 \\ 3.000 \end{cases}$$

ملاحظه می شود که به صورت متناوب به ریشهٔ (۱-) همگرا می گردد. حال اگر g(x) را به شکل دیگر در نظر بگیریم، داریم :

$$x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x = x^{۲} - ۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}(x^{۲} - ۳)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{۱}{۲}(x^{۲} - ۳) \Rightarrow x_{i+۱} = \frac{۱}{۲}(x_i^{۲} - ۳) \Rightarrow$$

$x_۰ = ٤$ ، $x_۱ =$ ، $x_۲ =$

ملاحظه می شود که در این حالت دنبالهٔ $x_{i+۱} = g(x_i)$ واگرا می گردد. با توجه به مطالب فوق معادلهٔ f(x) =۰ را می توان به صورت های مختلف x = g(x) مرتب نمود، به عبارت دیگر g(x)های متفاوتی را می توان تولید کرد. سؤال این است که آیا تمام این g(x) ها مفیدند و به ریشهٔ معادلهٔ f(x) همگرا می شوند و سؤال دیگر این است که مقدار اولیهٔ $x_۰$ را چگونه انتخاب کنیم، برای جواب دادن به این سؤالات قضیهٔ بسیار زیبای زیر را با تمام وجود می پذیریم :

قضیهٔ همگرایی : اگر f(x) =۰ در فاصلهٔ [a,b] دارای ریشه بوده و g(x) و $g'(x)$ در این فاصله پیوسته و $g'(x)$ در شرط زیر صدق کند :

$$|g'(x)| \le m < ۱ \qquad : \forall\, x \in [a, b]$$

آنگاه دنبالهٔ $x_{i+۱} = g(x_i)$ به ریشهٔ معادلهٔ f(x) =۰ همگرا می شود ، در ضمن $x_۰$ را می توان از فاصلهٔ [a,b] انتخاب نمود. توجه شود که شرط فوق یک شرط کافی است و شرط لازم نمی باشد؛ زیرا برای بعضی مسائل شرط فوق برقرار نبوده ولی به سمت جواب همگرا می شود.

مثال : با استفاده از روش تکراری ساده، ریشهٔ معادلهٔ زیر را بیابید.

$$f(x) = x^{۳} + x - ۱$$

$$x^{۳} + x = ۱ \Rightarrow x(x^{۲} + ۱) = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{x^{۲} + ۱} \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-۲x}{(x^{۲} + ۱)^{۲}} < ۱ \rightarrow$$ لذا شرط همگرایی برقرار است.

$x_۰ = ۱$ ، $x_۱ = ۰/۵$ ، $x_۲ = ۰/۸$ ، $x_۳ = ۰/۷۲۹$ ، $x_٤ = ۰/۷۰۱$

$x_٥ = ۰/٦۸۲۳۲۸$

$x_۰ = ۰/٥$ ، $x_۱ = ۰/٦۱۰$ ، .... ، $x_٥ = ۰/٦٥۳$

مثال : ریشهٔ معادلهٔ زیر را از روش تکراری ساده به دست آورید.

$$f(x)=e^{x}-۳x$$

$$e^{x}-۳x=۰\Rightarrow ۳x=e^{x}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}e^{x}\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۳}e^{x}$$

$$\Rightarrow x_{i+۱}=\frac{۱}{۳}e^{x_i}$$

$x_۰=۰$، $x_۱=۰/۳۳۳$ ، $x_۲=۰/٤٦٥$ ، $x_۳=۰/٥۳۰$، $x_٤=۰/٥٦٧$

$x_۰=۲$، $x_۱=۲/٤٦$ ، $x_۲=۳/۹۱$ ، $x_۳=۱٦/۷$

ملاحظه می شود که به ازای $x_۰=۰$ به سمت ریشه همگرا و به ازای $x_۰=۲$ واگرا می باشد. برای بررسی کردن این موضوع به سراغ قضیهٔ همگرایی می رویم :

$$g(x)=\frac{e^{x}}{۳}\Rightarrow g'(x)=\frac{e^{x}}{۳}$$

$$|g'(x)|<۱ \qquad \text{شرط همگرایی} \Rightarrow \left|\frac{e^{x}}{۳}\right|<۱\Rightarrow\frac{e^{x}}{۳}<۱\Rightarrow e^{x}<۳$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}e^{x}<Ln۳\Rightarrow x<۱/۱$$

نکته : اگر نتوانیم $|g'(x)|<۱$ را ساده کنیم اعداد را چک می کنیم اگر در رابطه صدق کرد همگرا می شود و برعکس.

تمرین : با توجه به روش تکراری ساده ریشه های معادلات زیر را بیابید.

$I)\ f(x)=x^{۲}-x-۲ \qquad II)\ f(x)=x^{۳}-۱۰x+٤$

روش پیدا کردن ریشه با استفاده از رسم منحنی :

بعضی اوقات می توان f(x) را به صورت تفاضل دو تابع که رسم آنها ساده است نوشت.

$$f(x)=f_۱(x)-f_۲(x)$$

منحنی های زیر را رسم می کنیم :

$$y_۱=f_۱(x)\quad ،y_۲=f_۲(x)$$

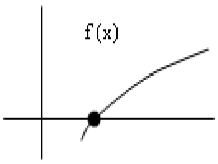
حال می گوییم اگر $f(\alpha)=۰$ باشد آنگاه $f(\alpha)$

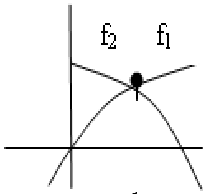
$$\Rightarrow f_{۱}(\alpha) - f_{۲}(\alpha) = ۰$$

$$\Rightarrow f_{۱}(\alpha) = f_{۲}(\alpha) = \beta$$

یعنی نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ روی منحنی $y_{۱}$ و $y_{۲}$ قرار دارد، به عبارت دیگر α طول نقطهٔ تقاطع منحنی های $y_{۱}$ و $y_{۲}$ می باشد. از این رو منحنی ها را رسم می کنیم و طول نقاط تقاطع آنها را می یابیم.

لذا ریشه f(x) برابر است با نقطه تقاطع دو منحنی.



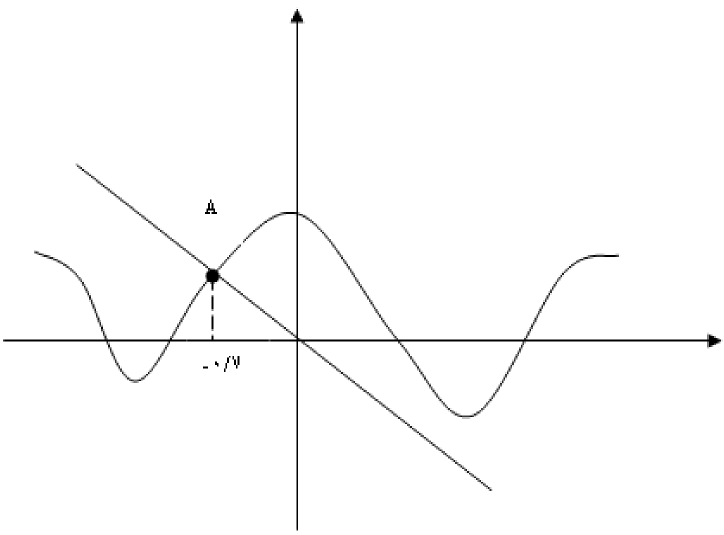


مثال : حدود و تعداد ریشه های معادلهٔ $f(x)=x+Cosx$ را تعیین کنید.

$$f(x)=f_{۱}(x)-f_{۲}(x)$$

$$f(x)=Cosx-(-x)$$

$f_{۱}(x)=Cosx$ و $f_{۲}(x)=-x$



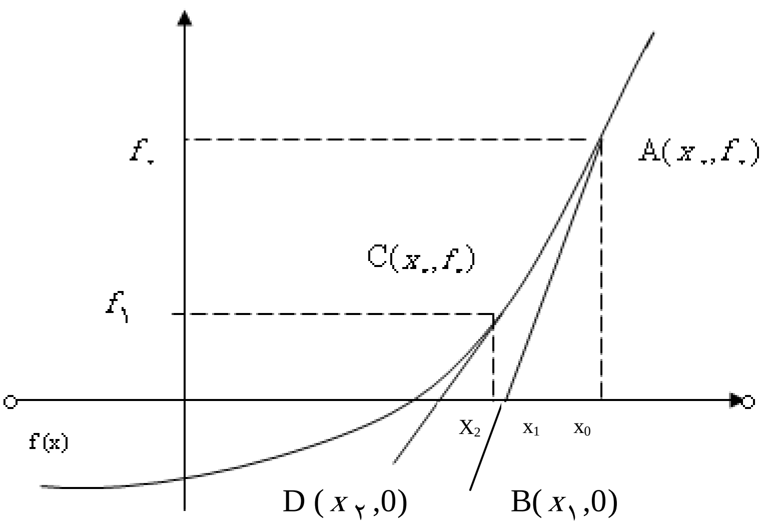
تمرین : تعداد و محل ریشه های معادلهٔ زیر را تعیین کنید.

$$Cosx = x(x-۲)(x-۳)$$

روش تکراری نیوتن :

یکی دیگر از روش های تکراری برای حل معادلهٔ $f(x)=0$ روش تکراری نیوتن می باشد که در آن f یک تابع مستق پذیر می باشد. طرز عمل به این شکل است که نمودار f را با یک مماس مناسب تقریب می نماییم، سپس با انتخاب مقدار x_0 و رسم عمودی بر محور x ها به طوری که نمودار f(x) را قطع نماید. سپس از نقطهٔ تلاقی مماس بر f(x) رسم می کنیم، تا محور x ها را در نقطه ای به طول x_1 قطع کند. حال معادلهٔ مماس را به دست می آوریم :

$A(x_0, f_0)$
$B(x_1, 0)$
$C(x_1, f_1)$
$D(x_2, 0)$



حال معادلهٔ خط مماس بر f(x) و گذرا از دو نقطهٔ A و B را می نویسیم :

AB شیب خط = $m_{AB} = f'(x)\big|_{x_0} = f'(x_0) = f'_0$

معادلهٔ خط $\Rightarrow y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$

$$y - f_0 = f'_0(x - x_0)$$

حال نقطهٔ B باید در معادلهٔ فوق صدق کند :

$$0 - f_0 = f'_0(x_1 - x_0) \Rightarrow -\frac{f_0}{f'_0} = (x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f'_0} \qquad *$$

حال معادلهٔ خط مماس بر f(x) و گذر از دو نقطهٔ C و D را می نویسیم.

CD شیب = $m_{CD} = f'(x)\big|_{x_1} = f'(x_1) = f'_1$

معادلهٔ خط $\Rightarrow y - y_C = m_{CD}(x - x_C)$

$$y - \mathrm{f}_۱ = \mathrm{f}'_۱(x - \mathrm{x}_۱)$$

حال نقطهٔ D باید در معادلهٔ فوق صدق کند.

$$۰ - \mathrm{f}_۱ = \mathrm{f}'_۱(x_۲ - \mathrm{x}_۱) \Rightarrow -\frac{\mathrm{f}_۱}{\mathrm{f}'_۱} = (x_۲ - \mathrm{x}_۱) \Rightarrow x_۲ = \mathrm{x}_۰ - \frac{\mathrm{f}_۱}{\mathrm{f}'_۱} \qquad **$$

به همین ترتیب این عمل را ادامه می دهیم تا مقادیر $x_۳$ و $x_٤$ و .... و x_n محاسبه شود، بنابراین می توان از بحث های گفته شدهٔ فرمول کلی زیر را استخراج کرد :

$$x_{i+۱} = x_i - \frac{f_i}{f'_i} \qquad \mathrm{i} = ۰,۱,۲,\dots,\mathrm{n}$$

تذکر (۱) : روش تکراری نیوتن به روش مماسی نیز معروف است.

تذکر (۲) : در روش تکراری نیوتن نمودار f(x) توسط کثیر الجملهٔ درجهٔ ۱ تقریب می شود. (یعنی توسط بی نهایت خط مماس) و به جای آنکه ریشهٔ f(x) را به دست آوریم. ریشهٔ کثیر الجملهٔ درجهٔ ۱ را می یابیم.

مثال : با استفاده از روش تکراری نیوتن، ریشهٔ معادلهٔ زیر را بیابید.

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^۳ + \mathrm{x} - ۱$$

$$x_{i+۱} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$ فرمول تکراری نیوتن

داریم : $x_{i+۱} = x_i - \frac{\mathrm{x}_i^۳ + \mathrm{x}_i - ۱}{۳\mathrm{x}_i^۲ + ۱} \Rightarrow x_{i+۱} = \frac{۲\mathrm{x}_i^۳ + ۱}{۳\mathrm{x}_i^۲ + ۱}$

i	x_i	f_i
۰	۰/۵	۰/۳۷۵۰۰
۱	۰/۷۱۴۲۹	۰/۰۷۸۷۳
۲	۰/۶۸۳۱۸	۰/۰۰۲۰۴
۳	۰/۶۸۲۳۳	۰/۰۰۰۰۰
۴	۰/۶۸۲۳۳	۰/۰۰۰۰۰

پس نتیجه می گیریم که ۰/۶۸۲۳۳ ریشهٔ معادلهٔ f(x) تا ۵ رقم اعشار می باشد.

مثال : با استفاده از روش تکراری نیوتن ـ رافسون، جذر عدد C را محاسبه کنید. (در حالت خاص C =۲ بگیرید)

$$\sqrt{C} = x \Rightarrow C = x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - C = ۰ \Rightarrow f(x) = x^{۲} - C \Rightarrow f'(x) = ۲x$$

$$\Rightarrow x_{i+۱} = x_i - \frac{x_i^{۲} - C}{۲x_i} \Rightarrow x_{i+۱} = \frac{۱}{۲}(x_i + \frac{C}{x_i})$$

حال اگر C =۲ باشد :

$$x_{i+۱} = \frac{۱}{۲}(x_i + \frac{۲}{x_i})$$

حال اگر $x_۰$ =۱ بگیریم، داریم :

$$x_۰ = ۱،\ x_۱ = ۱/۵ \ ،\ x_۲ = ۱/۴۱۶۶۶۷ \ ،\ x_۳ = ۱/۴۱۴۲۱۶$$
$$x_۴ = ۱/۴۱۴۲۱۴ \quad ،\ x_۵ = ۱/۴۱۴۲۱۴$$

مثال : معادلهٔ $x^{۴} - x = ۱۰$ را به روش نیوتن به دست آورید.

$$x^{۴} - x = ۱۰ \Rightarrow x^{۴} - x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow f(x) = x^{۴} - x - ۱۰ \Rightarrow f'(x) = ۴x^{۳} - ۱$$

$$x_{i+۱} = x_i - \frac{fx_i}{f'x_i} = x_i - \frac{x_i^{۴} - x_i - ۱۰}{۴x_i^{۳} - ۱} \Rightarrow x_{i+۱} = \frac{۳x_i^{۴} + ۱۰}{۴x_i^{۳} - ۱}$$

تکرار	x_i	f_i
۱	۱	۳۳۸/۲۶۰۸
۲	۴/۳۳۳	۱۰۳/۹۸۴۳
۳	۳/۲۹۰۸	۳۰/۱۳۹۰
۴	۲/۰۹۸۲	۱/۰۱۶۲
۵	۱/۸۹۵۶	۰/۰۳۲۳
۶	۱/۸۵۶۹	۰/۰۰۰۳
۷	۱/۸۵۵۶	
۸		

- لازم به یادآوری است که روش تکراری نیوتن برای حل معاملات جبری و مثلثاتی به کار می رود، همچنین از آن برای معادلاتی که دارای ضرائب موهومی و یا ریشهٔ موهومی باشند نیز استفاده می شود، در ضمن در یک معاملهٔ جبری با ضرائب حقیقی، اگر مقدار اولیه یعنی $x_.$ حقیقی باشد در صورت همگرایی به ریشهٔ حقیقی همگرا شده و به ریشهٔ موهومی نمی رسیم. برای آنکه همگرایی روش تکراری نیوتن را مورد بررسی قرار دهیم، کافیست به جملهٔ $\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ توجه شود. این جمله باعث می شود که در هر تکرار به ریشهٔ واقعی نزدیک یا دور شویم، در واقع این جمله ممکن است باعث خطا شود، یا اینکه اصلاح شده باشد. از نقطه نظر هندسی اگر نمودار f(x) نزدیک ریشه تقریباً عمود بر محور x ها باشد سرعتِ همگرایی بسیار سریع است، ولی اگر نمودار تابع در نزدیکی ریشه تقریباً افقی باشد سرعتِ همگرایی بسیار کند است. مثلاً در هر نقطهٔ x_i اگر $f'(x_i)$ مساوی صفر باشد، آنگاه روش تکراری نیوتن کاربرد ندارد. نقاط عطف منحنی در دامنهٔ محاسبات ایجاد اشکال می کند و ممکن است روش واگرا شود. یک شرط کافی برای روش تکراری نیوتن وجود دارد که آن را به صورت زیر می پذیریم :

نکته : اگر $f'(x)$ و $f''(x)$ در فاصلهٔ $(x_., a)$ تغییر علامت نداده و $f(x_.)$ و $f''(x_.)$ هم علامت باشند، آنگاه روش تکراری نیوتن به ریشهٔ a همگرا می شود. بنابراین برای ریشه های ساده روش تکراری نیوتن سریعاً همگرا می شود. روش تکراری نیوتن ممکن است در اثر یکی از حالات زیر همگرا نشود :

الف) ممکن است که تابع f(x) ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

ب) ممکن است که نمودار f(x) در اطراف ریشه حالت تقارن داشته باشد.

ج) ممکن است که در روش تکراری نیوتن $x_.$ که انتخاب می کنیم خیلی خیلی دورتر از ریشهٔ واقعی انتخاب شود.

تمرین : بااستفاده از روش تکراری نیوتن ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x^۳ - ۱۰x + ٤ = ۰$ را به دست آورید و برنامهٔ کامپیوتری آن را بنویسید (تا چهار رقم اعشار دقت)

روش قاطع : (S-m) (روش وتری)

اگر در فرمول تکراری نیوتن به جای $f'(x_i)$ عبارت $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$ جایگزین کنیم معادله ای به صورت زیر به دست می آید :

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}}$$

$$\Rightarrow x_{i+1}=x_i-\frac{x_i f(x_i)-x_i-x_{i-1}f(x_i)}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

$$\Rightarrow x_{i+1}=\frac{x_i f(x_i)-x_i f(x_{i-1})-x_i f(x_i)+x_{i-1}f(x_i)}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

$$\Rightarrow x_{i+1}=\frac{x_{i-1}f(x_i)-x_i f(x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

مثال : با استفاده از روش تکراری قاطع (S-m) و نقاط شروع $x_0=0$ و $x_1=1$ ریشهٔ معادلهٔ زیر را بیابید

$$f(x)=Cosx-x$$

$$x_2=\frac{x_0 f(1)-x_1 f(0)}{f(1)-f(0)} \quad ,......$$

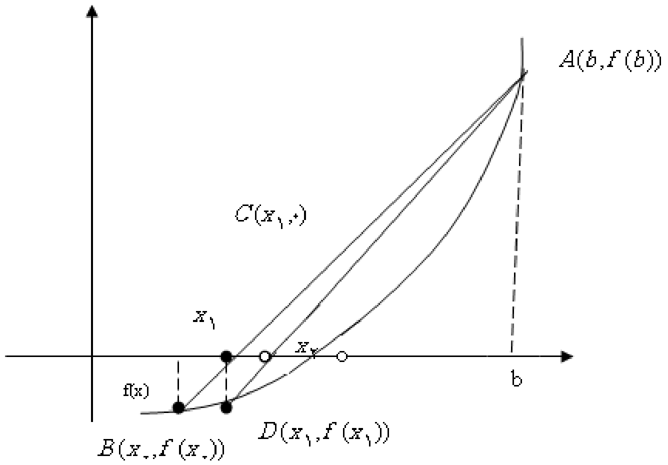
i	x_i	f_i
۰	۰/۰	۱
۱	۱/۰	-۰/۴۵۹۷۰
۲	۰/۶۸۵۰۷	۰/۰۸۹۳۰
۳	۰/۷۳۶۳۰	۰/۰۰۴۶۶
۴	۰/۷۳۹۱۲	-۰/۰۰۰۰۶
۵	۰/۷۳۹۰۸	۰/۰۰۰۰۰

تمرین : مسئله زیر را حل و برنامه کامپیوتری آن را نیز بنویسید :

با استفاده از روش تکراری قاطع یا S-m ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x^3 - 10x + 4 = 0$ را به دست آورید. برای نقطهٔ شروع $x_0 = 0/5$ و $x_1 = 1$ در نظر بگیرید. (تا ۴ رقم اعشار دقت)

روش تکراری F-p : (نابجایی)

در این روش منحنی f(x) توسط کثیر الجمله ای درجه ۱ تقریب شده و برای به دست آوردن ریشهٔ تابع f(x)، ریشهٔ کثیر الجملهٔ درجهٔ ۱ را به دست می آوریم، به عبارت دیگر منحنی f(x) توسط پاره خط AB تقریب می شود، برای به دست آوردن محل تلاقی f(x) با محور x ها؛ محل تلاقی پاره خط AB را با محور x ها به دست می آوریم، بنابراین معادلهٔ پاره خط AB را می نویسیم :



حال معادلهٔ خط AB را می نویسیم :

$$\text{شیب خط AB} = m_{AB} = \frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}$$

معادلهٔ خط را می نویسیم :

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$$

$$\to -f(x_0) = \frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}(x - x_0)$$

حال باید نقطهٔ $C(x_1,0)$ در معادله صدق کند :

$$0 - f(x_0) = \frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

اگر این روند را برای خط AD نوشته و تکرار کنیم، داریم :

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

لذا در حالت کلی می توان نوشت :

$$x_{i+1} = \frac{x_i f(b) - b f(x_i)}{f(b) - f(x_i)} \qquad i = 0,1,2,...$$

در این روش چون نیاز به محاسبهٔ مشتق نیست بنابراین روشی است ساده. روشِ تکراری F-p به روش پاره خط یا روش درون یابی خطی نیز معروف است.

تذکر : b و x_0 بایستی طوری انتخاب شود که : $f(b).f(x_0) < 0$

به خاطر اینکه ریشه داشته باشد.

مثال : با استفاده از روش F-p مقدار تقریبی ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ را با $b = 1$ و $x_0 = 0/5$ به دست آورید. (تا چهار رقم اعشار درست).

بررسی $: f(0/5) = -0/375$

$$\Rightarrow f(1) f(0/5) < 0$$

شرط : $f(1) = 1$

لذا در این بین ریشه وجود دارد.

$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

$x_0 = 0/5$، $x_1 = 0/6364$، $x_2 = 0/6712$، $x_3 = 0/6797$

$x_4 = 0/6817$، $x_5 = 0/6822$، $x_6 = 0/6823$

$x_7 = 0/6823$

تمرین : با استفاده از روش تکراری F-p ریشهٔ معادلهٔ زیر را با فرض $x_0 = 0$ و $b = 2$ و معادلهٔ $f(x) = x \sin x - 1$ را به دست آورید. (بعد از ۵ بار تکرار $x_5 = 1/11416$)

روش S-m روش وتری

روش P-m نابجایی

روش تنصیف ــ دو بخشی

تفاوت میان روش های F-p و S-m :

گرچه بر حسب ظاهر اختلافی به نظر نمی رسد و در هر دو روش به دو مقدار اولیه نیاز داریم، اما در روش F-p یک مقدار اولیهٔ b همیشه ثابت است و مرتب جای x_0 را با x_1 و جای x_1 با x_2 عوض می شود و در ضمن ریشهٔ بین x_i و b محصور شده و در نهایت به ریشهٔ معادله همگرا می شود ولی در روش S-m اینطور نبوده و برای محاسبهٔ x_2 به x_0 و x_1 نیاز داریم و ... . در ضمن ریشهٔ معادله معلوم نیست که در میان x_i و x_{i+1} محصور شده باشد در نتیجه ممکن است روش به ریشهٔ معادله همگرا نشود. از طرف دیگر اگر روش S-m به ریشه همگرا شود؛ سرعت همگرایی آن از سرعت همگرایی F-p بیشتر است. با توجه به مباحث فوق این سؤال پیش می آید که در روش های تکراری تا چند تکرار محاسبات را ادامه دهیم. برای پاسخ به این سؤال یکی از قاعده های زیر را پیش می گیریم :

الف) فرض کنید که e عددی باشد که خطا را مشخص می کند، در این صورت به محض آنکه شرط $|x_{i+1} - x_i| < e$ برقرار شد، تعداد تکرار متوقف می شود.

ب) علاوه بر قسمت الف ممکن است از شرط $|f(x_i)| < d$ استفاده کنیم که در آن d یک عدد بسیار کوچک و متناسب با تعداد ارقام اعشار درست است.

ج) ممکن است از یک حلقهٔ do استفاده کنیم، بدین معنی که اگر قسمت های الف و ب رخ ندهد بعد از n تکرار متوقف شود.

مرتبهٔ همگرایی :

اگر a ریشهٔ معادلهٔ f(x) =۰ باشد. در آن صورت در معادلهٔ f(x) صدق کرده یعنی f(a) =۰ مــی شود، از طرفــی اگر فرمول تکراری $x_{i+1} = g(x_i)$ ، برای به دست آوردن ریشهٔ معادله به کار رود بایستی a در رابطه صدق کند، یعنی : g(a) = a. با فرض : $e_n = x_n - a$ می توانیم بنویسیم :

$e_n = x_n - a$

$$x_n = e_n + a$$

$$x_{n+1} = e_{n+1} + a \qquad (*)$$

که در آن e_n خطا در n اُمین تکرار و e_{n+1} خطا در (n+1) اُمین تکرار می باشد. حال در رابطهٔ $x_{n+1} = g(x_n)$ به جای x_n مساویش را قرار می دهیم :

$x_{n+1} = g(x_n)$

$x_n = e_n + a$

$x_{n+1} = g(e_n + a)$

که می توان بسط تیلور را حول نقطهٔ a به صورت زیر نوشت و آن را با رابطهٔ (*) ترکیب و خلاصهٔ آن را به صورت زیر درآوریم :

$$x_{n+1} = g(e_n + a) = g(a) + e_n g'(a) + \frac{e_n^2}{2!} g''(a) + \frac{e_n^3}{3!} g'''(a) + ...$$

$$e_{n+1} + \cancel{a} = \cancel{a} + e_n g'(a) + \frac{e_n^2}{2!} g''(a) + ...$$

$$e_{n+1} = e_n g'(a) + \frac{e_n^2}{2!} g''(a) + ... (**)$$

اگر روش همگرا شود، از یک مرحله به بعد بایستی قدرمطلق خطا از مرحلهٔ مابعد آن بیشتر باشد. یعنی:

$|e_{n+1}| < |e_n|$

بنابراین اگر تعداد تکرار (n) به اندازهٔ کافی زیاد گردد در آن صورت خطای e_n کوچک خواهد بود، به قسمی که $(e_n)^2$ نسبت به e_n بسیار کوچک خواهد بود و می توان از آن چشم پوشی کرد، یعنی رابطهٔ (**) به صورت زیر نوشته می شود :

$e_{n+1} \cong e_n g'(a)$

با فرض اینکه $g'(a) \neq ۰$ باشد در این حالت گوییم همگرایی از مرتبۀ ۱ است. ملاحظه می شود که اگر n به اندازۀ کافی بزرگ انتخاب شود در آن صورت خطا در تکرار (n+۱) اُم برابر است با حاصلضرب خطا در تکرار ماقبل آن در $g'(a)$ و می توان با استفاده از گفته های زیر نوشت :

$$e_{n+۱} = e_n g'(a)$$

$$|e_{n+۱}| = |e_n . g'(a)|$$

$$|e_{n+۱}| = |e_n| . |g'(a)| \Rightarrow |g'(a)| = \frac{|e_{n+۱}|}{|e_n|} < ۱$$

$$\Rightarrow |g'(a)| < ۱$$

ملاحظه می شود که شرط کافی برای همگرایی آن است که $g'(a) < ۱$ باشد. لازم به یادآوری است که هر چه $g'(a)$ کوچک گردد به همان نسبت سرعت همگرایی افزایش می یابد و به اندازه ای که به ۱ نزدیک شود از سرعت همگرایی کاسته می شود که برای رفع این مشکل باید تعداد تکرار را افزایش دهیم. اگر $g'(a) = ۰$ باشد آنگاه رابطۀ (**) به صورت زیر در می آید :

$$e_{n+۱} \cong \frac{۱}{۲} e_n^۲ g''(a)$$

با فرض اینکه $g''(a) \neq ۰$ باشد در این حالت گوییم همگرایی از مرتبۀ دوم می باشد و به همین ترتیب اگر $g''(a) = ۰$ باشد در آن صورت از رابطۀ (**) جملۀ سوم را در نظر می گیریم و همگرایی از مرتبۀ سوم می باشد ...

معمولاً فرمول هایی که همگرایی آنها ار مرتبۀ اول می باشد؛ فرمول های ساده بوده و در هر مرحله نیاز به محاسبات زیادی ندارد و عموماً فرمول هایی که همگرایی آنها ار مرتبۀ دوم باشد نسبتاً پیچیده تر از فرمول های مرتبۀ اول بوده و در هر مرحله محاسبات بیشتری را می خواهد ولی برای رسیدن به همان دقت لازم نیست که تکرارهای زیادی را انجام دهیم. پس فرمول های مرتبۀ سوم و چهارم به دلیل پیچیدگی عموماً از آنها اجتناب می شود.

مثال : فرض کنید فرمول تکراری به صورت زیر باشد :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

که در آن a یک مقدار ثابت مثبت بوده و مقدار اولیهٔ x_0 طوری انتخاب شود که فرمول تکراری فوق به ریشهٔ C همگرا گردد. مطلوب است :

الف) حد نهایی x_n چیست.

ب) نشان دهید که فرمول فوق از مرتبهٔ همگرایی دوم برخوردار است.

الف) $x_n \to C$

$$C = \frac{1}{2}(C + \frac{a}{C}) \Rightarrow 2C = \frac{C+a}{C} \Rightarrow 2C^2 = C^2 + a$$
$$\Rightarrow C^2 = a \quad * \Rightarrow C = \sqrt{a}$$

ب) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

لذا داریم: $g(x_n) = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2}) \Rightarrow g'(C) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{C^2})$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} g'(C) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{a}) = 0$$

لذا قطعاً مرتبهٔ همگرایی اول نیست.

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$$

$$g''(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{C^3}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{C^2}{C^3}) \neq 0$$

لذا مرتبهٔ همگرایی مرتبهٔ دوم است.

روش نصف کردن (تنصیف) : (روش دو بخشی)

اگر فرض کنیم f(x) در فاصلهٔ [a,b] پیوسته بوده و f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند در آن صورت حداقل یک ریشهٔ f(x) در فاصلهٔ [a,b] وجود دارد. به عبارت دیگر حداقل یک k به دست می آید که در f(x) =۰ صدق کند یعنی f(k) =۰ و $k \in [a,b]$.

برای به دست آوردن k فاصله را نصف می کنیم یعنی $k = \frac{a+b}{۲}$. حال f(a) و f(b) و f(k) را محاسبه می کنیم، علامت های آنها این سه حالت را دارد :

حالت اول : یا f(k) با f(b) هم علامت است. آن گاه می گوییم ریشه در بازهٔ [a,k] قرار دارد.

حالت دوم : f(k) با f(a) هم علامت باشد. آنگاه می گوییم ریشه در بازهٔ [k,b] قرار دارد.

حالت سوم : اگر f(k) =۰ باشد در آن صورت k = c، و ما مستقیم خود ریشه را یافته ایم.

در حالت اول و دوم این روند مجدداً تکرار می شود، تنها در حالت سوم است که روند خاتمه می یابد.

مثال : با استفاده از روش نصف کردن ریشهٔ معادلهٔ زیر را بیابید، در فاصلهٔ [۲و۱].

$$f(x) = x^{۳} + x^{۲} - ۳x - ۳ = ۰$$

تکرار	a	b	c	f (a)	f (b)	f (c)
۱	۱	۲	۱/۵	-۴/۰	۳/۰	-۱/۸۷۵
۲	۱/۵	۲	۱/۷۵	-۱/۸۷۵	۳/۰	۰/۱۷۱۸۷
۳	۱/۵	۱/۷۵	۱/۶۲۵	-۱/۸۷۵	۰/۱۷۱۸۷	-۰/۹۴۳۳۵
۴	۱/۶۲۵	۱/۷۵	۱/۶۸۷۵	-۰/۹۴۳۳۵	۰/۱۷۱۸۷	-۰/۴۰۹۴۲
۵	۱/۶۸۷۵	۱/۷۵	۱/۷۱۸	-۰/۴۰۹۴۲	۰/۱۸۱۸۷	-۰/۱۲۴۷۸
۶	۱/۷۱۸۷۵	۱/۷۵	۱/۷۳۴۳۷	-۰/۱۲۴۷۸	۰/۱۷۱۸۷	۰/۰۲۱۹۸
۷	۱/۷۱۸۷۵	۱/۷۳۴۳۷	۱/۷۲۶۵۶			

k = ۱/۷۳۲۰۵   0/000....

همگرایی روش نصف کردن :

همگرایی روش نصف کردن به صورت زیر می باشد :

$$|e_n| \le \frac{|b_n - a_n|}{۲} = \frac{|b_. - a_.|}{۲^{n+۱}}$$

مثال : نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است :

$$n \cong \frac{Ln(b_. - a_.) - Lne}{Ln۲}$$

$$e_n \le \frac{(b_. - a_.)}{۲^{n+۱}} \Rightarrow Lne_n \le Ln(\frac{b_. - a_.}{۲^{n+۱}})$$

$$\Rightarrow Lne_n \le Ln(b_. - a_.) - Ln(۲^{n+۱})$$

$$\Rightarrow Lne_n \le Ln(b_. - a_.) - (n+۱)Ln۲$$

$$\Rightarrow (n+۱)Ln۲ \le Ln(b_. - a_.) - Ln(e_n)$$

$$\Rightarrow (n+۱) \le \frac{Ln(b_. - a_.) - Lne}{Ln۲}$$

با فرض $e_n = e$ داریم :

$$n \le \frac{Ln(b_. - a_.) - Lne}{Ln۲}$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{Ln(b_. - a_.) - Lne}{Ln۲}$$

نکته : توجه شود که اگر f(x) در فاصلهٔ [a,b] ناپیوسته باشد این روش ممکن است یک ریشهٔ نادرست بدهد.

مثال : اگر $a_. = ۰$ و $b_. = ۲$ و $n = ۳۱$ باشد، ریشهٔ تقریبی مسئله تا چند رقم اعشار دقیق است.

$$|e_n| \le \frac{|b_. - a_.|}{۲^{n+۱}} = \frac{|۲-۰|}{۲^{۳۲}} \Rightarrow |e_n| \le \frac{۲}{۲^{۳۲}} = ٤/٦٥٦٦١٢ \times ۱۰^{-۱۰}$$
$$= ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰٤٦٥٦٦١٢$$

لذا تا ۹ رقم اعشار دقت دارد.

تمرین : با استفاده از روش نصف کردن ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x^۳ - ۱۰x + ٤$ در فاصلهٔ [۱و۰] را نوشته و برنامهٔ کامپیوتری آن را بنویسید.

تمرین : اگر روش نصف کردن برای پیدا کردن ریشهٔ معادلهٔ f(x) =۰ در بازهٔ [۲و۷] به کار رفته باشد، چند مرتبه فاصله بایستی نصف شود تا ریشهٔ تقریبی C_n دقتی معادل ۵×۱۰^{-۹} داشته باشد.

$b_۰ = ۷$ و $a_۰ = ۲$ و $e_n = ۵\times۱۰^{-۹}$ و $n = ?$

$$|e_n| \le \frac{|b_۰ - a_۰|}{۲^{n+۱}} \qquad \text{یا} \quad n \cong \frac{Ln(b_۰ - a_۰) - Lne}{Ln۲}$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{Ln(۷-۲) - Lne}{Ln۲} = \frac{Ln۵ - ۱}{Ln۲}$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{۱/۶۰۹۴۳۷۹۱۲ - ۱}{۰/۶۹۳۱۴۷۱۸} = ۰/۸۷۹۲ \Rightarrow n \le ۰/۸۷۹۲$$

همچنین می توان از فرمول اول استفاده کرد که در آن صورت داریم :

$$\left|۵\times۱۰^{-۹}\right| \le \frac{۷-۲}{۲^{n+۱}} \Rightarrow ۵\times۱۰^{-۹} \le \frac{۵}{۲^{n+۱}} \Rightarrow ۱۰^{-۹} \le \frac{۱}{۲^{n+۱}}$$
$$\Rightarrow ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱ \le ۲^{-(n+۱)} \Rightarrow n \cong ۰$$

فصل سوم :

درون یابی و تقریب چند جمله ای ها :

در این فصل بررسی می کنیم که چگونه مقدار یک تابع را که مقادیر عددی آن در برخی از نقاط داده شده است درنقطهٔ دیگر بیابیم.

به عبارت دیگر مقدار f(x) در نقاطی به طول $x_۰$ و $x_۱$ و ......و x_n معلوم است. سؤال این است که مقدار تابع f(x) در نقطه ای مثلاً به طول a چند است. برای پاسخ به این سؤالات ما باید f(x) را توسط یک کثیرالجمله تقریب نموده و سپس مقدار تابع را از کثیرالجملهٔ تقریب به دست آوریم.

قبل از بررسی روش ها لازم است که چندنکته متذکر شویم :

نکته (۱) : توجه شود که اگر دو نقطهٔ $(x_۰,f_۰)$ و $(x_۱,f_۱)$ معلوم باشند در آن صورت توسط کثیرالجملهٔ درجهٔ ۱ تقریب می شود و اگر سه نقطهٔ $(x_۰,f_۰)$ و $(x_۱,f_۱)$ و $(x_۲,f_۲)$ از تابع f(x) معلوم باشند f(x) توسط کثیرالجملهٔ درجهٔ ۲ تقریب می شود و در حالت کلی اگر (n +۱) نقطه از f(x) معلوم باشد، آنگاه f(x) توسط یک کثیرالجملهٔ درجهٔ n تقریب می شود.

نکته (۲) : اگر وطل نقاط متساوی الفاصله باشند، x_n ها یک تصاعد عددی باشند در آن صورت از کثیرالجمله های پیشرو و پسرو و مرکزی نیوتن استفاده می کنیم که بر اساس تفاوت های محدود استوار بوده که بسیار ساده می باشد، ولی اگر نقاط متساوی الفاصله نباشند در آن صورت از کثیرالجمله های فوق الذکر نمی توان استفاده کرد و بایستی از کثیرالجمله های دیگری مانند لاگرانژ یا تفاضل های تقسیمی یا ضرائب نامعین و ... استفاده نمود.

لازم به یادآوری است که از روش های لاگرانژ و تفاضل های تقسیمی در هر دو حالت می توان استفاده کرد، اما محاسبات آن بسیار حجیم، طولانی و خسته کننده می باشد. بنابراین تا جایی که می توانیم از این روش ها اجتناب می کنیم مگر در حالتی که مختلف الفاصله باشند که ناچاریم.

نکته (۳) : توجه شود کثیرالجمله ای که از (n +۱) نقطهٔ (x_n, f_n)و ...و (x_2, f_2)و (x_1, f_1) و (x_0, f_0)عبور می کند منحصر به فرد می باشد. به عبارت دیگر هر روشی را که پیش می گیریم در نهایت به یک کثیرالجمله خواهیم رسید. دانستن قاعده هی زیر قبل از بیان روش لاگرانژ حائز اهمیت است :

دلتای کرونکر: $S_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$L_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)$$

مثال :

۱) $L_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

۲) $L_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

۳) $L_j(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{j-1})(x_i - x_{j+1})\ldots(x_i - x_n)$

چند جمله ای های لاگرانژ :

اگـر بخواهیم با استفاده از کثیرالجملهٔ لاگـرانژ چند جـمله ای را بنویسیم که از نقاط زیر بگذرد از قاعدهٔ زیر استفاده می کنیم :

(x_0, f_0)، (x_1, f_1)، (x_2, f_2) ،... ،(x_n, f_n)

$$\Rightarrow f(x) \approx p_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j$$

که برای حالات خاص n =۲ و n =۳ آن را بررسی می کنیم :

$$(x_0, f_0)$$

$$n = 2 \qquad \Rightarrow f(x) \approx \sum_{j=0}^{1} \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} f_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} f_1 =$$

$$(x_1, f_1)$$

$$= \frac{(\mathrm{x} - x_1)}{(\mathrm{x}_0 - x_1)} f_0 + \frac{(\mathrm{x} - x_0)}{(\mathrm{x}_1 - x_0)} f_1$$

$$(x_0, f_0)$$

$$n = 3 \qquad (x_1, f_1) \qquad \Rightarrow f(x) \approx \sum_{j=0}^{2} \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} f_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} f_1 +$$

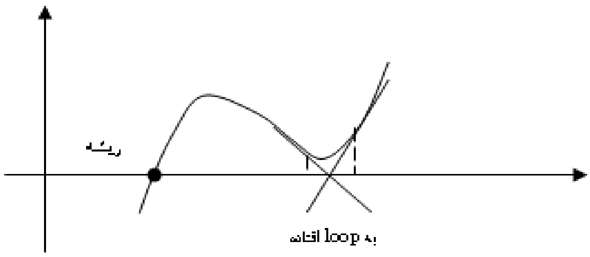
$$(x_2, f_2)$$

$$+ \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} f_2 = \frac{(\mathrm{x} - x_1)(\mathrm{x} - x_2)}{(\mathrm{x}_0 - x_1)(\mathrm{x}_0 - x_2)} f_0 + \frac{(\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_2)}{(\mathrm{x}_1 - x_0)(\mathrm{x}_1 - x_2)} f_1 +$$

$$+ \frac{(\mathrm{x} - x_1)(\mathrm{x} - x_1)}{(\mathrm{x}_2 - x_0)(\mathrm{x}_2 - x_1)} f_2$$

مثال : چند جمله ای p(x) را با استفاده از روش لاگرانژ برای سه نقطهٔ زیر محاسبه کنید.

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳



$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{2} \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{(\mathrm{x} - x_1)(\mathrm{x} - x_2)}{(\mathrm{x}_0 - x_1)(\mathrm{x}_0 - x_2)} f_0 + \frac{(\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_2)}{(\mathrm{x}_1 - x_0)(\mathrm{x}_1 - x_2)} f_1 +$$

$$+ \frac{(\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1)}{(\mathrm{x}_2 - x_0)(\mathrm{x}_2 - x_1)} f_2 = \frac{(\mathrm{x} - 0)(\mathrm{x} - 1)}{(-1-0)(-1-1)} \times 1 + \frac{(\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} - 1)}{(0+1)(0-1)} \times 1 + \frac{(\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} - 0)}{(1+1)(1-0)} \times 3$$

$$=\frac{x(x-۱)}{۲}+\frac{(x^{۲}-۱)}{-۱}+\frac{۳x(x+۱)}{۲}=\frac{x(x-۱)-۲(x^{۲}-۱)+۳x(x+۱)}{۲}=$$

$$=\frac{۲x^{۲}+۲x+۲}{۲}=x^{۲}+x+۱$$

مثال : چندجمله ای درون یاب مربوط به چند جمله ای زیر را نوشته، سپس $f(۱/۵)$ را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	-۲	-۱	۰	۷

$$f(x)\approx\sum_{j=۰}^{۳}\frac{L_j(x)}{L_j(x_j)}f_j=\frac{(x-x_۱)(x-x_۲)(x-x_۳)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)(x_۰-x_۳)}f_۰+\frac{(x-x_۰)(x-x_۲)(x-x_۳)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)}f_۱$$

$$+\frac{(x-x_۰)(x-x_۲)(x-x_۳)}{(x_۲-x_۰)(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)}f_۲+\frac{(x-x_۰)(x-x_۱)(x-x_۲)}{(x_۳-x_۰)(x_۳-x_۱)(x_۳-x_۲)}f_۳=\frac{(x-۰)(x-۱)(x-۲)}{(-۱-۰)(-۱-۱)(-۱-۲)}(-۲)$$

$$+\frac{(x+۱)(x-۱)(x-۲)}{(۰+۱)(۰-۱)(۰-۲)}(-۱)+\frac{(x+۱)(x-۰)(x-۲)}{(۱+۱)(۱-۰)(۱-۲)}(۰)+\frac{(x+۱)(x-۰)(x-۱)}{(۲+۱)(۲-۰)(۲-۱)}(۷)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-۱)(x-۲)}{۳}+\frac{(x^{۲}-۱)(x-۲)}{-۲}+\frac{۷(x^{۲}-۱)(x)}{۶}=\frac{x^{۳}-۳x^{۲}+۲x}{۳}+$$

$$\frac{x^{۳}-x-۲x^{۲}+۲}{-۲}+\frac{۷x^{۳}-۷x}{۶}=\frac{۲x^{۳}-۶x^{۲}+۴x+۳x^{۳}-۳x-۶x^{۲}+۶۷x^{۳}-۷x}{۶}$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{۳}-۱\Rightarrow f(۱/۵)=۲/۳۷۵$$

معایب روش لاگرانژ :

۱) محاسبات برای تعیین چند جمله ای درون یاب واقعاً طاقت فرساست.

۲) درجهٔ چند جمله ای درون یاب تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می شود.

۳) بدترین و محکمترین ایراد این است که با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط یک جدول کلیهٔ محاسبات باید از نو انجام شود و این یک مصیبت است.

روش ضرایب نامعین :

در این روش برای کثیرالجمله ای که از نقاط $(x_۰,f_۰)$، $(x_۱,f_۱)$، $(x_۲,f_۲)$ ،...، (x_n,f_n) بگذرد آن را به صورت زیر می نویسیم.

$$P_n(x)=a_nx_n+a_{n-۱}x^{n-۱}+....a_۲x^{۲}=a_۱x+a_۰$$

برای محاسبهٔ پارامترهای $a_{\cdot},a_{1},...,a_n$ از دستورالعمل زیر استفاده می کنیم :

$$\sum_{j=\cdot}^{n} p_n(x_j)=f_j \qquad \mathrm{j}=\cdot,1,2,...,\mathrm{n}$$

که پس از جایگذاری و مرتب کردن نسبت به پارامترهای مجهول $a_{\cdot},a_{1},a_{2},...,a_n$ به صورت دستگاه زیر نشان داده می شود :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{\cdot} & x_{\cdot}^{2} & \cdots & x_{\cdot}^{n} \\ 1 & x_{1} & x_{1}^{2} & \cdots & x_{1}^{n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{2} & \cdots & x_n^{n} \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{\cdot} \\ a_{1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{\cdot} \\ f_{1} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}$$

ماتریس ضرائب A × ماتریس ماتریس b

سمت راست یا مجهولات

$$\Rightarrow AX=b$$

که به صورت یک دستگاه $AX=b$ نیز می توان آن را نوشت که با حل آن a_i ها را یافت. با توجه به اطلاعات قبلی شما سیستم فوق در صورتی دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان ضرائب مخالف صفر باشد و این زمانی رخ می دهد که نقاط $x_{\cdot},x_{1},...,x_n$ با هم متفاوت باشند.

توجه شود که کثیرالجملهٔ درجهٔ n که از نقاط $(x_{\cdot},f_{\cdot})$ ، (x_{1},f_{1}) ، (x_{2},f_{2}) ، ... ، (x_n,f_n) عبور می کنند منحصر به فرد اس. اگر f(x) خود یک کثیرالجملهٔ درجهٔ n باشد در آن صورت کثیرالجملهٔ تقریب و f(x) با هم برابرند، در حل سیستم ممکن است ضریب a_n یا برخی از آنها صفر شود. در این صورت درجهٔ کثیرالجمله از n کمتر می شود.

مثال : با استفاده از دو روش ضرایب نامعین و لاگرانژ کثیرالجمله ای را بیابید که از نقاط زیر بگذرد:

(۲و۷) ،(۱و۲)،(۱- و۰)

$$P_n(x)=a_{\cdot}+a_{1}x_i+a_{2}x_i^{2}=f_i$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = -1 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 2 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 + a_2 = 3 \\ 2a_1 + 4a_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow -2\times \begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ 2a_1 + 4a_2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2a_1} - 2a_2 = -6 \\ \cancel{2a_1} + 4a_2 = 8 \end{cases}$$

$$2a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1 \quad ، a_1 + 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$p(x) = (1)x^2 + 2(x) + (-1)$$
$$\Rightarrow p(x) = x^2 + 2x - 1$$

روش لاگرانژ :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{3} \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} f_j = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}(-1) + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}(2) + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}(7)$$
$$= \frac{x^2-3x+2}{-2} + \frac{2x^2-4x}{-1} + \frac{7x^2-7x}{2} = \frac{x^2+3x-2-4x^2+8x+7x^2-7x}{2}$$
$$= \frac{2x^2+4x-2}{2} = x^2+2x-1$$

تمرین : با استفاده از روش ضرائب نامعین کثیرالجملهٔ مثلثاتی زیر را به قسمی پیدا کنید که از نقاط زیر بگذرد.

$$P(x) = a_0 + a_1 Cosx + a_2 Cos2x + a_3 Cos3x \qquad a_0 = 1, a_1 = -1$$
$$(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}), (\frac{\pi}{4}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{\pi}{6}, 2-\frac{\sqrt{3}}{2}), (0,0) \qquad a_2 = 2, a_3 = -2$$

روش حذفی گوس :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 Cos(\frac{\pi}{3}) + a_2 Cos2(\frac{\pi}{3}) + a_3 Cos3(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2} \\ a_0 + a_1 Cos(\frac{\pi}{4}) + a_2 Cos2(\frac{\pi}{4}) + a_3 Cos3(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_0 + a_1 Cos(\frac{\pi}{6}) + a_2 Cos2(\frac{\pi}{6}) + a_3 Cos3(\frac{\pi}{6}) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_0 + a_1 Cos(0) + a_2 Cos2(0) + a_3 Cos3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - a_3 = \frac{2}{3} \\ a_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}a_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + 0 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

که با روش حذفی گوس آن را به یک ماتریس پایین مثلثی تبدیل می کنیم که به ترتیب به دست می آید :

$a_3 = -2, a_2 = 2, a_1 = -1, a_0 = 1,$

در نتیجه داریم :

$P(x) = 1Cosx + 2Cos2x - 2Cos3x$

تمرین : تابع f را به صورت p(x,y) طوری تقریب نمایید که از نقاط (۱و۱و۵) و (۲و۱و۳) و (۱و۲و۹) عبور نماید، به طوری که : $z = f(x,y) \approx p(x,y) = A + Bx + Cy$

$(1,1,5)$, $(2,1,3)$, $(1,2,9)$

$z = A + Bx + Cy$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 5 \\ A + 2B + C = 3 \\ A + B + 2C = 9 \end{cases}$$

حال با استفاده از روش گوس و عملیات سطری مقدماتی آن را به ماتریس پایین مثلثی تبدیل می کنیم داریم :

$$\begin{array}{r} d_1 \\ -d_1+d_2 \\ -d_1+d_3 \end{array} \begin{cases} A+B+C=5 \\ 0+2B+0=-2 \\ 0+0+C=4 \end{cases} \Rightarrow C=4 \text{ و } B=-2 \text{ و } A=3$$

حال با جایگذاری اعداد به دست آمده در $z=f(x,y)\approx p(x,y)=A+Bx+Cy$ داریم :

$$z=f(x,y)\approx p(x,y)=3-2x+4y$$

توجه شود که کاربرد روش ضرائب نامعین معمولاً بیشتر از سایر روشهاست. روش های فراوانی وجود دارد، ولی برخی روش ها ساده تر و مفیدترند، مثلاً در روش لاگرانژ اگر درجهٔ کثیرالجمله کم یا زیاد شود، محاسبات قبلی مورد استفاده قرار نمی گیرد و یا مثلاً در روش ضرایب نامعین بایستی یک سیستم (۱+n) معادله و (۱+n) مجهول را حل کنیم که نسبتاً طاقت فرسات و ایرادی که به آنها گرفته می شود این است که به صورت زنجیره ای نمی توان از محاسبات قبلی استفاده کرد در اینجا به بیان یک روش زیبا و ساده می پردازیم که ایرادهای روش های فوق را ندارد.

این روش به نام روش تفاضل های تقسیمی معروف است، ما قبل از بحث نیاز است علائمی را تعریف کنیم، داریم :

$$I)\, f[x_0]=f_0$$

$$\text{II})\, f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$\text{III})\, f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$\text{IV})\, f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{x_{i+1}-x_{i-1}}$$

و در حالت کلی :

$$\Rightarrow f[x_0,x_1,x_2,...,x_n]=\frac{f[x_0,x_1,x_2,...,x_n]-f[x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

x_i	f_i	
x_0	f_0	
		$f[x_0,x_1]$
x_1	f_1	$f[x_0,x_1,x_2]$
		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ $\quad$ $f[x_1,x_2]$
x_2	f_2	$f[x_1,x_2,x_3]$ $\quad$ $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ $\quad$ $f[x_1,x_2,x_3,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$
x_3	f_3	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ $\quad$ $f[x_2,x_3,x_4]$
		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$ $\quad$ $f[x_3,x_4]$
x_4	f_4	$f[x_3,x_4,x_5]$
		$f[x_4,x_5]$
x_5	f_5	

بنابراین روش تفاضل های تقسیمی با استفاده از جدول فوق کثیرالجمله ای را به صورت زیر بیان می کند.

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\ldots..$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$$

مثال : با استفاده از نقاط زیر چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن به دست آورید و f[۵] را تخمین بزنید.

x_i	۰	۱	۳	۶
f_i	۱	-۶	۴	۱۶۹

x_i	f_i	
۰	۱	
		$f[x_0,x_1]=\frac{-6-0}{1-0}=-7$
۱	-6	
		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{5-(-7)}{3-0}=4$
		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{10-4}{6-0}=1$ $\qquad$ $f[x_1,x_2]=\frac{4-(-6)}{3-1}=5$
۳	۴	
		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{55-5}{6-1}=10$
		$f[x_2,x_3]=\frac{169-4}{6-3}=55$
۶	۱۶۹	

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$\Rightarrow p(x)=1+(x-0)(-7)+(x-0)(x-1)(4)+(x-0)(x-1)(x-3)(1)=$$
$$=1-7x+4x^2-4x+x^3-4x^2+3x$$
$$\Rightarrow p(x)=x^3-8x+1$$

لذا:
$$p(5)=(5)^3-8(5)+1=125-4+1=86$$

مثال : یک چند جمله ای درون یاب با استفاده از نقاط زیر به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

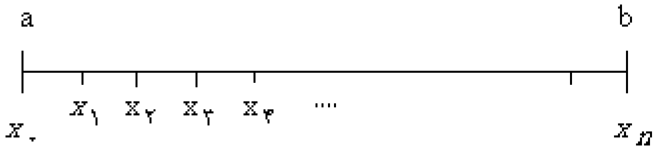
x_i	f_i			
۰	۱			
		$f=\frac{1-1}{1-0}=0$		
۱	۱		$f=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$	
		$f=\frac{2-1}{2-1}=1$		$f=\frac{1/6-1/2}{4-0}=-1/12$
۲	۲		$f=\frac{3/2-1}{4-1}=\frac{1}{6}$	
		$f=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2}$		
۴	۵			

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$\Rightarrow p(x)=1+x\times 0+(x)(x-1)\times 1/2+(x)(x-1)(x-2)(-1/12)=$$
$$=1+\frac{x^2-x}{2}-\frac{x^3-3x^2+2x}{12}$$
$$=\frac{x^3}{12}+\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x+1$$

کثیر الجمله های پیشرو و پسرو نیوتن :

این کثیر الجمله ها زمانی به کار برده می شوند که طول نقاط متساوی الفاصله باشند، در این روش نیز اگر نقاطی به جدول اضافه شوند، محاسبات قبلی از بین نمی رود. برای تشریح این کثیر الجمله ها علائم زیر را معرفی می کنیم. اگر بخواهیم بین بازهٔ [a,b] یک کثیر الجمله داشته باشیم، ابتدا آنها را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم.



$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$x_0=a$$

$x_{۱} = x_{٠} + h = a + h$

$x_{۲} = x_{۱} + h = a + h + h = a + ۲h$

$\vdots$

$x_j = a + jh$ (یا) $x_j = x_{٠} + jh$

$$x_j - x_{٠} = jh$$

$$x_j - x_{j-۱} = h$$

در حالت کلی تفاوت های پیشرو و پسرو را با علائم : Δ (دلتا) (پیشرو) و ∇ (نابلا) (پسرو) نمایش می دهیم.

برای محاسبهٔ این تفاوت ها می توان از جدول زیر استفاده کرد :

xi	fi	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
x_{-3}	f_{-3}						
		Δf_{-3}					
x_{-2}	f_{-2}		$\Delta^2 f_{-3}$				
		Δf_{-2}		$\Delta^3 f_{-3}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$		
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$		$\Delta^5 f_{-3}$	
x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$		$\Delta^6 f_{-3}$
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$		$\Delta^5 f_{-2}$	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$			
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$				
		Δf_2					
x_3	f_3						
.	.						
.	.						
.	.						

که در این جدول :

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$$

$$\Delta^2 f_j = \Delta f_{j+1} - \Delta f_j$$

از روابط کلی می توان استفاده کرد:

$$\Delta (f+g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= (f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)))$$

$$\rightarrow \Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

به طور کلی:

$$\Delta^j f(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i f[x+(j-i)\,h]$$

مثال :

جدول زیر را کامل کنید.

x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
-2	-11						
		7					
-1	-4		-6				
		1		6			
0	-3		0		0		
		1		+6		0	
1	-2		6		0		0
		7		6		0	
2	5		12		0		
		19		6			
3	24		18				
		37					
4	61						

نکته طلایی:

توجه شود در جدول تفاوت های محدود حاصل جمع هر ستون برابر است با تفاضل اولین عنصر از آخرین عنصر ستون ما قبل آن . این نکته تست مناسبی برای بررسی صحت محاسبات جدول می باشد: داریم:

(اولین عنصر ستون) – (آخرین عنصر ستون) = حاصل عناصر ستون

k ام k ام (k+1) ام

نکته:

کثیرالجمله های پیشرو این دو خاصیت را دارند:

اینکه از تمام نقاط جدول می گذرد ، یعنی خطای آن در آن نقاط برابر صفر است . سپس درجه کثیرالجمله حاصل یک واحد از تعداد نقاط کمتر است . درون یا بی خطی تا زمانی مثمر ثمر است که رفتار تابع $f(x)$ شبیه کثیرالجمله ما باشد.

کثیرالجمله درجه n ام پیشرو :

در حالت کلی کثیرالجمله ای که از نقاط

(x_0, f_0) و (x_1, f_1) و (x_2, f_2) و .... و (x_n, f_n)

می گذرد به صورت زیر تعریف می شود :

$$F(x) \approx p(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))}{n!}\Delta^n f$$

$$r = \frac{x - x_0}{n}$$

مثال :

چند جمله ای درون یا ب جدول زیر را با استفاده از تفاضلات پیشرو نیوتن بنویسید.

x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-2	3			
		-2		
-1	1		2	
		0		0
0	1		2	
		2		
1	3			

$$F(x)\approx p(x) = 3+r(-2)+\frac{r(r-1)}{2!}(2) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(0)$$

$$\Rightarrow p(x) = 3-2r + r^2 - r$$

$$\Rightarrow p(x) = r^2 - 3r + 3$$

$$r = \frac{x-x_0}{n} = \frac{x+2}{1} = x+2$$

$$\Rightarrow p(x) = (x+2)^2 - 3(x+2) + 3$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 + 3$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 + x + 1$$

جدول پسرو :

x_i	f_i	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
x_{-3}	f_{-3}					
		∇f_{-2}				
x_{-2}	f_{-2}					
			$\nabla^2 f_{-1}$			
x_{-1}	f_{-1}					
		∇f_{-1}		$\nabla^3 f_0$		
x_0	f_0		$\nabla^2 f_0$		$\nabla^4 f_1$	
		∇f_0		$\nabla^3 f_1$		$\nabla^5 f_2$
x_1	f_1					
			$\nabla^2 f_1$		$\nabla^4 f_2$	
x_2	f_2					
		∇f_1		$\nabla^3 f_2$		
x_3	f_3		$\nabla^2 f_2$			
		∇f_2				

که در این جدول :

$$\nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$
$$\nabla^2 f_j = \nabla f_j - \nabla f_{j-1}$$

کثیرالجمله پسرو درجه n ام نیوتن:

در حالت کلی فرمول کثیرالجمله ای که از نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$ عبور می کند به صورت زیر تعریف می شود :

$$f(x) \approx p(x) = f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r-1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\nabla^3 f_n + \dots$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))}{n}\nabla^n f_n$$
$$r = \frac{x - x_n}{h}$$

تمرین :

با استفاده از نقاط زیر کثیرالجمله پسرو نیوتن را روی آن پیاده سازی کنید.

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i			
-1	0			
		-1		
0	-1		4	
		3		0
1	2		4	
		7		
2	9			

$$f(x) \approx p(x) = f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r-1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\nabla^3 f_n$$
$$\Rightarrow p(x) = 9 + r(7) + \frac{r(r-1)}{2}(4) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(0)$$
$$\Rightarrow p(x) = 9 + 7r + 2r^2 - 2r = 9 + 5r + 2r^2$$
$$r = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x-2}{1} = x - 2$$

$$\Rightarrow p(x) = 9 + 5(x-2) + 2(x-2)^2$$
$$\Rightarrow p(x) = 9 + 5x - 10 + 2x^2 - 8x + 8$$
$$\Rightarrow p(x) = 2x^2 - 3x + 7$$

تمرین (1) :

با استفاده از جدول زیر از روش های گفته شده تقریب کنید.

الف)پیشرو ب)پسرو ج)لاگرانژ د)تفاضل های تقسیمی ه)ضرائب نا معین

x_i	2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
f_i	1/4143	1/4491	1/4832	1/5166	1/5493	1/5813	1/6162

تمرین(2) :

جدول زیر فشار گاز را در دماهای متفاوت نشان می دهد :

الف) با استفاده از دو روش پسرو و پیشرو نیوتن فشار گاز را در دمای 22°معین کنید .

ب) مقدار فشار گاز را با استفاده از دو روش پسرو و پیشرو در دمای 59° محاسبه کنید.

دما $= t_i$	20	25	30	35	40	4	50	55	60
$= f_i$ فشار گاز	850	985	1170	1365	1570	1790	2030	2300	2610

تمرین (3) :

برای داده های زیر مانند تمرین (1) همگی را پیاده سازی کنید.

x_i	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5
f_i	1/00	1/32	1/68	2/08	2/52	3/00

تبدیل درون یابی معکوس به درون یابی مستقیم:

اگر y=f(x) باشد و f معکوس پذیر باشد، آنگاه : $x = f^{-1}(y)$

لذا به جای

x_i	x_0	x_1	x_2	....	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	....	f_n

می توانیم جدول زیر را در نظر بگیریم:

f_i	f_0	f_1	.....	f_n
x_i	x_0	x_1	.....	x_n

با توجه به اینکه معمولا فاصله f_i ها یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست ، لذا می توان از فرمول های پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد . از این رو تنها روش موثر که همواره قابل استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده می باشد که در آن نقش x_i ها و f_i ها عوض می شود.

مثال :

جدول زیر مفروض است تخمینی از صفر این تابع را به دست آورید:

x_i	0	1	2	3
f_i	-1/5	-1	2/5	15

نکته :

معمولا f_i ها را می توان به صورت دلخواه مرتب کرد . این عمل را طوری انجام می دهیم که $|f(x)-f^*|$ صعودی باشد . این عمل برای کم کردن خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه انجام شود.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم
-1	1			
		2		
-1/5	0		-0/4286	
		0/5		0/0252
2/5	2		-0/0255	
		0/08		
15	3			

$$x \approx 1+(0+1)\times 2+(0+1)(0+1/5)\times(-0/4286)+(0+1)(0+1/5)(0-2/5)\times(0/0252)$$
$$=1+2-0/6429-0/0945=2/2626$$

مشاهده میشود که جواب به دست آمده بسیار نادقیق است،زیرا که $f(1)=-1$ و $f(2)=2/5$ که قاعدتا ریشه باید بین 1 و 2 باشد نه بیش 2 .

علت این امر آن است که فاصله بین x های جدول بسیار زیاد است ، در صورتی که فاصله بین x ها را کمتر بگیریم دقت جواب زیاد خواهد شد.

تمرین :

با استفاده از جدول زیر تقریبی از صفر تابع f به دست آورید.

x_i	1	1/1	1/2	1/3
f_i	-1/25	-0/876	0/338	0/388

برازش منحنی :

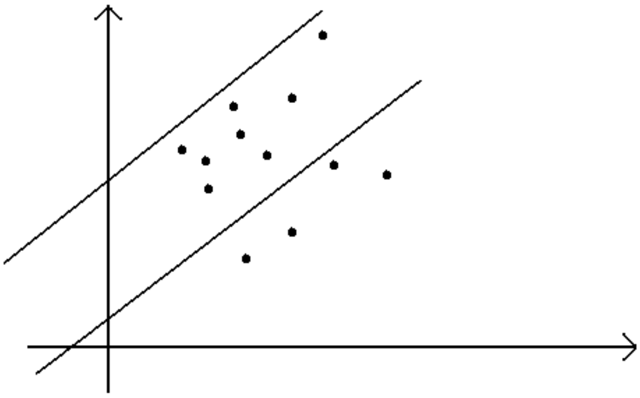
واقعیت این است که مقادیر f_i در یک تابع جدولی تقریبی هستند ، زیرا از طریق اندازه گیری یا آزمایش به دست می آیند ، بنابراین اصرار در این که چند جمله ای درون یا ب در نقاط x_i مقدار f_i را داشته باشد بیهوده است . در عمل اکثرا نقاط جدولی را بوسیله یک منحنی چنان برازش می کنند که خطا به نوعی حداقل شود.

تعریف :

فرض کنید نقاط (x_i, y_i) : $i=0,1,2,\dots,n$ ، مفروض باشد و چند جمله ای $p(x)$ که ما داریم :

$s=\sum_{i=1}^{n}(y_i-p(x_i))^2$ چنان باشد که کمترین مقدار را داشته باشد در این صورت $p(x)$ را چند

جمله ای تقریب کمترین مربعات برای داده های (x_i, y_i) ، i=0,1,2,…,n می نامند.



$$s=\sum_{i=1}^{n}(y_i-p(x_i))^2$$

خط کمترین مربعات :

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات می باشد که برای برازش n نقطه (x_i, y_i) که i=0,1,2,…n ، به صورت زیر عمل می کنیم :

در این روش p(x)= ax + b که باید a و b را چنان تعیین کنیم که $s=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(p(x_i)))^2$ یا $s=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$ مینیموم باشد از این رو پس از مرتب کردن و ساده کردن نتیجه زیر حاصل می شود :

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)a+(\sum_{i=1}^{n}x_i)b=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$
$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

مثال :

خط کمترین مربعات برای تابع جدولی زیر را بنویسید.

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	3	3

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-2	0	4	0
-1	1	1	-1
0	2	0	0
1	2	1	2
2	3	4	6

$n=5 \quad \sum x_i = 0 \quad \sum y_i = 8 \quad \sum x_i^2 = 10 \quad \sum x_i y_i = 7$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\Rightarrow 10a + 0b = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{10}$$

$$0a + 5b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{7}{10}x + \frac{8}{5}$$

تمرین :

خط کمترین مربعات مربوط به جدولهای زیر را بنویسید.

1)

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-3	1	9	-3
-2	3	4	-6
1	0	1	0
2	2	4	4
3	5	9	15

$n=5 \quad \sum x_i = 1 \quad \sum y_i = 11 \quad \sum x_i^2 = 27 \quad \sum x_i y_i = 10$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$\Rightarrow$27a+b=10 -135a-5b=-50

$\Rightarrow$

0a +5b=11 a+5b =11 $\Rightarrow -134a = -39 \Rightarrow a = \frac{39}{134}$

$\Rightarrow b = \frac{287}{134} \quad \Rightarrow p(x) = ax + b$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{39}{134}x + \frac{287}{134}$$

2)

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-1	-0/9	1	0/9
0	0/3	0	0

1	1/6	1	1/6
2	2/8	4	5/6
3	4	9	12
$n=5$ $\sum x_i=5$	$\sum y_i=7/8$	$\sum x_i^2=15$	$\sum x_i y_i=20/1$

با جایگذاری در فرمول داریم:

$\Rightarrow$ 15a +5b=20/1 15a + 5b=20/1

$\Rightarrow$

$\times$(-1) 5a + 5b=7/8 -5a – 5b=-7/8

$$\Rightarrow 10a=12/3 \Rightarrow a=\frac{12/3}{10}=1/23$$

$$\Rightarrow b=0/33$$

$$\Rightarrow p(x)=ax+b \Rightarrow p(x)=1/23x+0/33$$

فصل چهارم :

مشتق:

اغلب اوقات مقدار عددی یک تابع در جدول داده شده و مشتق آن در یک یا چند نقطه خاص از ما می خواهند و یا خود تابع را داریم و مشتق آن ، آنقدر پیچیده و مشکل بوده و خواستار مقدار عددی مشتق هستیم ، در این فصل نیز مانند سایر مباحث ، اول تابع را توسط کثیرالجمله ای تقریب می کنیم سپس از کثیرالجمله حاصل مشتق می گیریم: $f(x) = p_n(x) \Rightarrow f'(x_j) = p_n'(x_j)$

اینک به اثبات چند فرمول مشتق می پردازیم که از طریق بسط تیلور به دست می آید.

بسط تیلور را برای نقطه x_{i+1} می نویسیم:

(1)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

حال چون $x_{i+1} - x_i = h$؛ و می توانیم $f(x_i)$ را با f_i نشان دهیم، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
& f_{i+1} \approx f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \dots \\
& \Rightarrow -hf_i' \approx f_i - f_i + 1 + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \dots \\
& \Rightarrow f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!} f_i'' + \dots \\
& \Rightarrow f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - E
\end{aligned}$$

که در آن $E = 0(h)$ یعنی خطا نسبت به h از مرتبه 1 می باشد. حال فرمول دیگری را برای این منظور برای x_{i-1} می نویسیم:

(2)

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) + (x_{i-1} - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

حال چون $x_{i-1} - x_i = h$ و می توانیم $f(x_i)$ را با f_i نمایش دهیم ، لذا داریم:

$$f_{i-1} \approx f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \ldots$$

$$hf_i' \approx f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \ldots$$

$$f_i' \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2!} f_i'' + \ldots$$

$$\Rightarrow f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + E$$

که در آن خطای E نسبت به h از مرتبه 1 می باشد.

ملاحظه می شود که در دو فرمول فوق خطا نسبت به h از مرتبه 1 می باشند. حال فرمول دیگری را به دست می آوریم که خطا نسبت به h از مرتبه 2 باشد، برای این منظور طرفین معادلات 1 و 2 را از هم کم می کنیم:

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_{i-1} = (f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \ldots) - (f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \ldots)$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + \frac{2h^3}{3!} f_i''' + \ldots$$

$$\Rightarrow 2hf_i' = f_{i+1} - f_{i-1} - \frac{2h^3}{3!} f_i''' - \ldots$$

$$\Rightarrow f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!} f_i''' - \ldots$$

$$\Rightarrow f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - E$$

$$E = 0(h^2)$$

ملاحظه می شود که دقت این فرمول به مراتب بیشتر از 1 و 2 می باشد . اگر خواسته باشیم باز هم دقت را افزایش دهیم آنگاه بسط تیلور را برای x_{i+2} می نویسیم:

$$f(x_{i+2}) \approx f(x_i) + (x_{i+2} - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_{i+2} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

.

.

.

$$f_i' = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h} + E$$

$$E = 0(h^4)$$

مثال :

با استفاده از فرمولهای به دست آمده $f'(1/4)$ را حساب کنید . (با استفاده از جدول (4D)).

[نکته : $f'(1/4) = \cosh(1/4) = 2/1509$]

x_i	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
f_i	1/5095	1/6984	1/9043	2/1293	2/3756

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{n} \Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/5) - f(1/4)}{0/1} = \frac{2/1293 - 1/9043}{0/1} = 2/25$$

$$f_i' \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/4) - f(1/3)}{0/1} = \frac{2/1293 - 1/6984}{0/1} = 2/059$$

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/5) - f(1/3)}{0/2} = \frac{2/1293 - 1/6984}{0/2} = 2/1545$$

$$f_i' \approx \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h}$$

$$\Rightarrow f'(1/4) = \frac{f(1/2) - 8f(1/3) + 8f(1/5) - f(1/6)}{1/2} =$$

$$= \frac{1/5095 - 8(1/6984) + 8(2/1293) - (2/3756)}{1/2} = 2/1509$$

انتگرال :

در این فصل مقدار عددی انتگرال معین مورد نظر ماست ، یعنی $\int_a^b f(x)dx$ که در آن a و b معلوم و f(x) به طور تحلیلی توسط یک فرمول داده شده یا اینکه مقادیر f(x) به ازای x های مختلف در جدولی مشخص گردیده است. می دانیم که اگر تابع f(x) را به قسمی پیدا کنیم که $f(x) = F'(x)$ صدق کند، آنگاه مقدار عددی انتگرال از رابطه زیر بدست می آید:

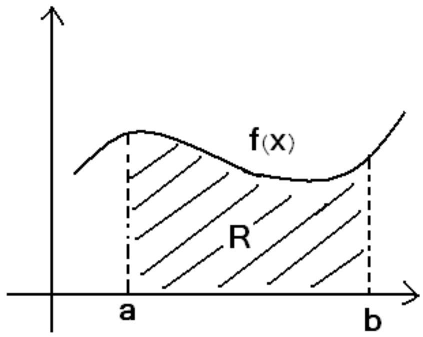
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)$$

به هر حال در کاربردهای مهندسی اغلب به انتگرال هایی برخورد می کنیم که برای تابع زیر انتگرال f(x) تابع اولیه ای مانند f(x) را نمی توانیم به طور تحلیلی بیان کنیم یا مقدار عددی تابع f(x) در یک جدول داده شده است ، در این حالات بایستی از یک روش تقریبی برای محاسبه مقدار عددی انتگرال استفاده کنیم، مثلا انتگرالهایی که به روش عادی نمی توان آنها را محاسبه کرد :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx, \ldots$$

- انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همان مساحت محصور شده بین منحنی y = f(x) و خطوط x = a و x = b و محور x ها می باشد . در واقع برای محاسبه مقدار عددی انتگرال بایستی سطح R را حساب کنیم در این زمینه روش های متعددی وجود دارد که چند روش از آن ها را بیان کرده که بعدا شما برنامه کامپیوتری

آنها را خواهید نوشت .



برای این منظور تابع f(x) را توسط یک کثیرالجمله تقریب می کنیم سپس از کثیرالجمله حاصل انتگرال گرفته و مقدار عددی انتگرال را به دست می آوریم . بدیهی است که هر چه درجه کثیرالجمله تقریب بیشتر باشد دقت ما بیشتر خواهد بود . یکی از این روشها روش مستطیل است که آن را توضیح می دهیم.

قانون مستطیل:

در این روش اول فاصله [a,b] را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم آنگاه در هر بازه f(x) توسط یک کثیرالجمله درجه صفر تقریب می شود ، یعنی در زیر فاصله $[x_i ,x_{i+1}]$ توسط مقدار $f(x_i)$ تقریب می شود در واقع در هر زیر فاصله منحنی توسط خطی موازی محور x ها تقریب می شود.

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$x_i=\frac{x_{i+1}+x_i}{2} \qquad ، \; x_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$s=\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\ldots+\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

اما برای محاسبه یکی از آنها داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = f(x_i)(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$
$$= f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = hf(x_i)$$

حال می توان تعمیم داد و نوشت:

$$s = hf(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + ... + hf(x_i) + ... + hf(x_{n-1})$$
$$\Rightarrow s = h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

مثال:

مطلوب است با استفاده از روش گفته شده $\int_0^1 x^2dx$ با $h = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\int_0^1 x^2dx = h(f(x_0) + f(x_1))$$

x_i	x_0	x_0	x_1	x_1	x_2
	0	0/25	0/5	0/75	1
f_i	0		0/25		1
	f_0		f_1		f_2

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2dx = h(f(x_0) + f(x_1)) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}) = \frac{1}{2}(\frac{10}{16}) = \frac{5}{16}$$

مقدار دقیق : $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ خطا $= (\frac{1}{3} - \frac{5}{16}) = \frac{1}{48}$

قاعده ذوزنقه :

در روش مستطیل چون f(x) توسط یک کثیرالجمله درجه صفر تقریب می شد،از دقت نسبتا کمی برخوردار بود. حال برای بالا بردن دقت ،کثیرالجمله را از درجه صفر به درجه یک ارتقا می دهیم.

؟؟؟

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$p_1(x) = f_i + r\Delta f_i$$
$$x = x_i + rh \Rightarrow r = \frac{x - x_i}{h}$$

لذا در هر بازه مانند $[x_i, x_{i+1}]$ توسط یک چند جمله ای درجه یک پیشرو تقریب می شود،لذا:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} h(f_i + r\Delta f_i)dr = h\left[rf_i + \frac{r^2}{2}\Delta f_i \right]\Big|_0^1$$
$$= h(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_i)$$

حال اگر : $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ را جاگذاری کنیم داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

لذا:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = h/2\,(f_i + f_{i+1})$$

در نتیجه فرمول کلی آن را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$
$$= h/2\,(f_0 + f_1) + h/2\,(f_1 + f_2) + h/2\,(f_2 + f_3) + \ldots + h/2\,(f_{n-1} + f_n)$$
$$= h/2\,[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n] = T(h)$$
$$= h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right]$$

فرمول بالا نشان می دهد که هر چه h کوچکتر باشد خطا کمتر است.

مثال :

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2dx$ برای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ حساب و خطای آن را بررسی کنید.

$$f(x) = x^2$$
$$T(h) = h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n/2\right]$$
$$T(1) = 1\left[\frac{f_{(0)}}{2} + \frac{f_{(1)}}{2}\right] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$$
$$T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{f_{(0)}}{2} + f(\frac{1}{2}) + \frac{f_{(1)}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{8}$$
$$T(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\left[\frac{f_{(0)}}{2} + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) + \frac{f_{(1)}}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{8}{16}\right] = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

مقدار دقیق : $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

خطای $T(1) = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-3}{6}\right| = \frac{1}{6}$

خطای $T(\frac{1}{2}) = \left|\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right| = \left|\frac{8-9}{24}\right| = \frac{1}{24}$

$T(\frac{1}{4})$ خطای $= \left|\frac{1}{3} - \frac{11}{32}\right| = \frac{1}{96}$

ملاحظه می شود که هر چه h کوچکتر می شود خطا کم می شود .

تمرین:

تقریبی از $\int_0^1 f(x)dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر حساب کنید.

x_i	0	0/2	0/4	0/6	0/8	1
f_i	1	1/2214	1/4918	1/8221	2/2255	2/7183

تمرین :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را با استفاده از $h = \frac{\pi}{8}$ حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید .

با روش ذوزنقه :

F(x) = sin x

$$T(h) = h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + ... + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right]$$

$$T(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{8}\left[\frac{f_0}{2} + f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{2\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{8}) + \frac{f(\frac{4\pi}{8})}{2}\right]$$

$$\Rightarrow T(\frac{\pi}{8}) = 0/3925[0 + 0/3824 + 0/7068 + 0/9236 + 0/4999] = 0/986274$$

مقدار دقیق : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1 = A$

$\Rightarrow$ خطا $E = A - T(h) = 1 - 0/986274 = 0/013726$

که با روش مستطیل نیز همین مقدار به دست می آید.

تمرین:

مطلوب است محاسبه انتگرال های زیر با h های داده شده ؟

1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$T(1) = 1\left[\frac{f_{(0)}}{2} + \frac{f_{(1)}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} = 0/75$$

$$T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{f_{(0)}}{2} + f(\frac{1}{2}) + \frac{f_{(1)}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{31}{20}\right] = \frac{31}{40} = 0/775$$

$$T(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\left[\frac{f_{(0)}}{2} + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) + \frac{f(1)}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4}\right] = 0/25[2/5167] = 0/6291$$

مقدار دقیق $= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} = 0/785$

$\Rightarrow |ET(1)| = 0/035$ و $\left|ET(\frac{1}{2})\right| = 0/01$ و $\left|ET(\frac{1}{4})\right| = 0/1559$

2)

$$\int_0^2 xe^x dx \qquad h = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4}$$

- اگر M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد یعنی:

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x)| \le M_2$$

آنگاه در مورد خطای ذوزنقه می توان نوشت :

$$\left|ET(h)\right| \le \frac{(b-a)}{12}h^2M_2$$

$$\left[\frac{b-a}{12}h^2M_2 \le 4_e\right]$$

مثال :

تقریبی از $\int_0^1 x\sin x dx$ با قاعده ذوزنقه ای حساب کنید که خطای آن از 10^{-2} کمتر باشد.

حل) ابتدا باید M_2 را حساب کنیم لذا : a b

$$f(x) = x\sin x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f'(x) = \sin x + x\cos x$$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

که داریم : $\left|f''(x)\right| = \left|2\cos x - x\sin x\right| \langle 2\left|\cos x\right| + \left|x\right|\left|\sin x\right| \le 2\times1 + 1\times1 = 3 \rightarrow M_2$

حال h رااز رابطهٔ زیر محاسبه می کنیم:

$$\frac{b-a}{12}h^2M_2 \le \varepsilon_e \Rightarrow \frac{1-0}{12}h^2(3) \le \varepsilon_e \Rightarrow \frac{h^2}{4} \le 10^{-2} \Rightarrow h^2 \le 0/04 \Rightarrow h \le 0/2$$

حال اگر h را برابر 0/2 بگیریم با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه داریم:

$$\int_0^1 xsixdx =$$

$$\frac{0/2}{2}\left[0\sin(0) + 2(0/2)\sin(0/2) + 2(0/4)\sin(0/4) + 2(0/6)\sin(0/6) + 2(0/8)\sin(0/8) + 1\sin(1)\right]$$

$$= 0/30578$$

برای محاسبهٔ انتگرال واقعی داریم:

$$\int_0^1 x\sin x dx = -x\cos x - \int_0^1 -\cos x dx = -x\cos x + \sin x\Big|_0^1 = 0/30117$$
$$\Rightarrow \left|ET(0/2)\right| \le \left|0/30117 - 0/30578\right| = 0/00461$$
$$\left|ET(0/2)\right| \le 10^{-2}$$

تمرین: اگر M تعداد نقاط و h طول فاصله را مشخص کند آنها را طوری بیابید که قانون ذوزنقه

در مورد انتگرال زیر دقتی معادل 5×10^{-9} داشته باشد.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$$

$$f(x) = \cos x \quad , \quad b = \frac{\pi}{6} \quad , \quad a = \frac{-\pi}{2} \quad , \quad \varepsilon_e = 5\times10^{-9}$$
$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

که داریم: $\left|f''(x)\right| = \left|-\cos x\right| \le 1 = M_2$

$$\frac{b-a}{12}h^2 M_2 \le \varepsilon_e \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}}{12}h^2(1) \le 5\times10^{-9}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{18}h^2 \le 5\times10^{-9} \Rightarrow 0/1744h^2 \le 5\times10^{-9} \Rightarrow h^2 \le 28/6624\times10^{-9}$$
$$\Rightarrow h^2 \le 286/624\times10^{-10} \Rightarrow h \le 16/9299\times10^{-5}$$

تذکر:

توجه شود که درروش ذوزنقه هر چه تعداد تقسیمات یعنی n زیاد شود در نتیجه طول فواصل یعنی h کوچک می شود لذا دقت بالا می رود. در نتیجه خطا کم می شود ولی از یک مرحله به بعد در اثر خطای گرد کردن با افزایش n دقت کم می شود.

برای اینکه بتوان یک n مناسب انتخاب نمود ، راههای متفاوتی وجود دارد:

در هر مرحله که تعداد تقسیمات راافزایش می دهیم ،جواب های دو مرحله را با هم مقایسه می کنیم اگرنتایج دو مرحله تا k رقم مثل هم بود، آنگاه دقت مورد نظربه دست آمده و باید محاسبات متوقف و تعداد تقسیمات افزایش نیابد.

قانون سیمپسون:

مشهود است که قاعدهٔ ذوزنقه بسیار کند است به عبارت دیگر یرای به دست آوردن تقریبی نه چندان دقیق باید تابع رادر نقاط بسیاری محاسبه کرد. درروش های قبلی ،مثلاًمستطیل ،توسط یک کثیرالجملهٔ درجهٔ صفر و ذوزنقه توسط یک کثیر الجملهٔ درجهٔ ۱ تقریب می شد .اما در روش سیمپسون این بار $f(x)$ را توسط کثیر الجملهٔ درجهٔ ۲ تقریب می کنیم که hها وnها از همان قوانین قبلی تبعیت می کند.

ابتداچند جمله ا ی درون یاب f را برای نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} می نویسیم ،این چند جمله ای با توجه به مطالب گفته شده در فصل قبل به صورت زیر تقریب می شود :

$$P(x) = f_i + r\Delta f_i + \frac{r(r-1)}{r!}\Delta^2 f_i$$

بنابرین قرار می دهیم :

$$\int_{x_i}^{x_i+2} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_i+2} P(x)dx$$

وانتگرال سمت راست را حل می کنیم :

با تغییر متغیر $x = x_i + rh$ داریم :

$$\int_{x_i}^{x_i+2} P(x)dx \approx \int_0^2 (f_i + r\Delta f_i + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_i)hdr$$

حال انتگرال را حساب می کنیم ، داریم :

$$= h\left[rf_i + \frac{r^2}{2}\Delta f_i + (\frac{r^3}{6} - \frac{r^2}{4})\Delta^2 f_i \right]\Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_i+2} f(x)dx = \left(2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3}\Delta^2 f_i \right)h$$

باتوجه به اینکه

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \,, \quad \Delta f_i = f_{i-1} - f_i$$

وجایگذاری داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2} \right)$$

حال اگر قائدۀ سیمپسون را برای کل بازۀ $[x_0, x_n]$دو گام ، دوگام یعنی $[x_i, x_{i+2}]$

اجرا کنیم (n باید زوج باشد) ، داریم :

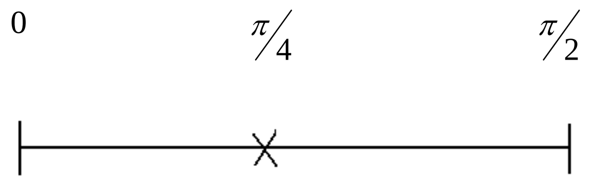
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

لذا داریم :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2 \right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + f_3 + f_4 \right) + \cdots + \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n \right)$$

فرمول قائدۀ سیمپسون مرکب



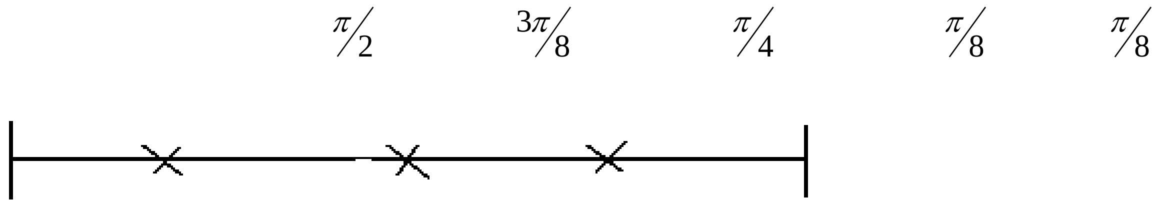
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = s(h) \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n \right)$$

مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ با قائدهٔ سیمپسون با $h = \frac{\pi}{4}$ وتقریب د یگری با $h = \frac{\pi}{8}$ حساب کنید .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) = \frac{\pi}{12}(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(0 + 2\sqrt{2} + 1\right) = 1/0028$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right) = \frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left(\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{4})\right.$$

$$\left. + 4\sin(\frac{3\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \right) = \frac{\pi}{24}\left(0 + 1/53073 + 1/4142 + 3/69552 + 1\right) = 1/00013$$

از طرفی می دانیم :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos n \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0) = 0 - (-1) = 1$$

تمرین :

تقریبی از $\int_0^1 x^3 dx$ را با استفاده از قانون سیمپسون نوشته ونشان دهید که سیمپسون برای چند جمله ای هایی تا درجهٔ سوم دقیق است.

$h=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 x^3dx=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+f_2\right)=\frac{\frac{1}{2}}{3}\left(0+4(\frac{1}{8})+1\right)=\frac{1}{6}(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{6}(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$$

مقداردقیق: $\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}\Rightarrow 1ES(\frac{1}{2})=0$:

حال برای چند جمله ای های درجهٔ اول ودوم بررسی می کنیم :

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+f_2\right)=\frac{1}{6}\left(0+4(\frac{1}{4})+1\right)=\frac{1}{6}(1+1)=\frac{1}{3}$$

مقداردقیق $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}\Rightarrow \left|ES(\frac{1}{2})\right|=0$:

$$\int_0^1 x\,dx=\frac{h}{3}\,(f_0+4f_1+f_2)=\frac{1}{6}(0+4(\frac{1}{2})+1)=\frac{1}{6}(3)=\frac{1}{2}$$

مقداردقیق: $\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\Rightarrow \left|ES(\frac{1}{2})\right|=0$

خطای قائدهٔ سیمپسون :

اگریک کران بالا برای $\left|f^{(4)}(x)\right|$ باشد یعنی :

$$\left|f^{(4)}(x)\right|\le M_4$$
$$x_0\le x\le x_4$$

که از آن نتیجه می شود: $\left|ES(h)\right|\le\frac{(b-a)}{180}h^4M_4$

وداریم: $\frac{b-a}{180}h^4M_4\le\varepsilon_e$

تمرین:

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ را به روش سیمپسون حساب کنید. خطای آن کمتراز 10^{-5} باشد

(برنامهٔ کامپیوتری آن را بنویسید)

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x\cos x \\
&f'(x) = \cos x - x\sin x \\
&f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x \\
&f'''(x) = -2\cos x - \cos x + x\sin x = -3\cos x + x\sin x \\
&f^{(4)}(x) = 3\sin x + \sin x - x\cos x = 4\sin x - x\cos x
\end{aligned}
$$

$$\left| f^{(4)}(x) \right| = \left| 4\sin x - x\cos x \right| \le 4\left|\sin x\right| + \left|x\right|\left|\cos x\right| = 6 = M_4$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 M_4 \le \varepsilon_e \Rightarrow \qquad \frac{\frac{\pi}{2}}{180} h^4 \times 6 \le 10^{-5} \Rightarrow \frac{\pi}{60} h^4 \le 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h^4 \le \frac{60 \times 10^{-5}}{\pi} \Rightarrow h^4 \le 0/019 \times 10^{-2} \Rightarrow h \le 1176 \times 10^{-4}$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1176 \times 10^{-4}} = \frac{1/57}{1176 \times 10^{-4}} \Rightarrow n \ge 13/35 \Rightarrow n = 14$$

حال بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ را به ۱۴ قسمت تقسیم می کنیم و به روش سیمپسون تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ را

می یابیم .

تمرین:

تقریبی از هر یک از انتگرال های زیر را با قاعدهٔ سیمپسون حساب کنید که خطای آنها از 10^{-3}

کمتر باشد.

الف) $\int_0^1 e^x dx$ ب) $\int_1^2 xe^x dx$ پ) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ ت) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

که از ان نتیجه می شود :

وداریم :

تمرین:

حدود h را برای محاسبهٔ تقریبی $\int_0^1 e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که:

الف) داشته باشیم $|\mathrm{ET}(h)| < 10^{-5}$

ب) داشته باشیم $|\mathrm{E}S(h)| < 10^{-5}$

قاعدهٔ نقطهٔ میانی: Midle point

روش های انتگرال گیری ذوزنقه وسیمپسون که تاکنون شرح داده ایم از نقاط ابتدایی وانتهایی بازه انتگرال گیری استفاده می کنند . بنابراین محاسبه انتگرال هایی به فرم:

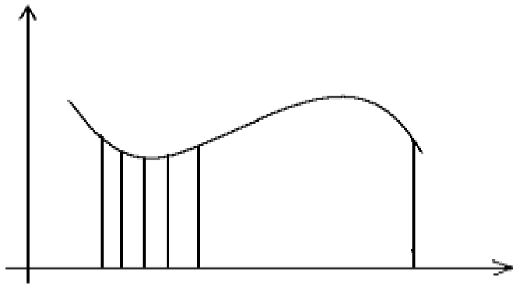
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ، \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

با آن روش ها میّسر نمی باشد.

در این قسمت روش ساده ای را شرح می دهیم که می توان تقریب هایی از حساب کرد که از $f(a)$, $f(b)$ استفاده ننماید.

قاعدهٔ نقطهٔ میانی : در این قاعده قرار می دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong hf(x_i + \frac{h}{2}$$



که در حالت کلی داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0 + \frac{h}{2}) + hf(x_1 + \frac{h}{2}) + \cdots + hf(x_{n-1} + \frac{h}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx = M(h) \approx h\left[f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1 + \frac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})\right]$$

ملاحظه می شود که در فرمول فوق نه از x_0 استفاده شده و نه از x_n

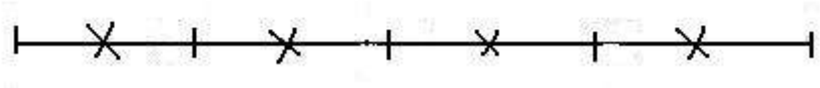
مثال:

تقریب هایی از $\int_0^1 x^2dx$ را به روش نقطهٔ میانی به ازای $h = \frac{1}{2}$ و $h = \frac{1}{4}$ حساب کنید و خطای این مقادیررا به دست آورید.

$0 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad 1$

$$f(x) = x^2$$

$$h = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x^2dx \approx \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})\right] = \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{5}{16} = 0/3125$$



$$h=\frac{1}{4}\Rightarrow\int_0^1 x^2dx\approx\frac{1}{4}\left[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})\right]=$$
$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{25}{64}+\frac{49}{64}\right]=0/328125$$

دقیق: $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}=0/33$

$$\left|\mathrm{EM}(\frac{1}{2})\right|=\left|0/33-0/3125\right|=0/0208$$
$$\left|\mathrm{EM}(\frac{1}{4})\right|=\left|0/33-0/328125\right|=0/00521$$

مثال:

تقریبی از $\int_0^{0/09}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را حساب کنید.

حل) مقدارواقعی انتگرال چنین به دست می آید:

$$\int_0^{0/09}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_0^{0/09}=0/6$$

ضمناً با استفاده از فرمول نقطهٔ میانی به دست می آوریم: (با انتخاب $h=0/04$)

$$\int_0^{0/09}\frac{dx}{\sqrt{x}}\approx 0/03\big(f(0/015)+f(0/045)+f(0/075)\big)$$
$$=0/03(8/165+4/7140+3/6515)$$

بنابراین:

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0/03 \times 16/5305 = 0/49595$$

مشاهده می شود که این مقدار تقریبی حدود 0/104 خطا دارد که قابل توجه است.

از این رو توصیه می شود که در نزدیکی نقاط که $f(a)$ یا $f(b)$ بی نهایت هستند، مقدار h بسیار کوچک اختیار شود. با انتخاب h=%1 به دست می آوریم:

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0/01\left[\frac{1}{\sqrt{0/005}} + \frac{1}{\sqrt{0/015}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{0/085}}\right] = 0/539587$$

خطای این مقدارتقریبی حدود $0/07$ است به طوری که در چنین انتگرال هایی باید برای قسمتی که نزدیک نقطهٔ منفرد تابع است؛ h را بسیارکوچک اختیارکرد و برای بقیهٔ بازه h را خیلی کوچک نگرفت،مثلاً قراردهید:

$$\int_0^{0/09} f(x)dx = \int_0^{0/01} f(x)dx + \int_{0/01}^{0/09} f(x)dx$$

وبرای $\int_0^{0/01} f(x)dx$ مقدار h را $0/002$ وبرای $\int_{0/01}^{0/09} f(x)dx$ مقدار h را $0/02$ در نظربگیرید

با این انتخاب به دست می آوریم:

$$\int_0^{0/01} f(x)dx \approx 0/02\left[\frac{1}{\sqrt{0/001}}+\frac{1}{\sqrt{0/003}}+\frac{1}{\sqrt{0/005}}+\frac{1}{\sqrt{0/007}}+\frac{1}{\sqrt{0/009}}\right]=$$

$$=0/002(31/6228+18/2574+14/1421+11/9523+10/5409)=0/173031$$

و همچنین داریم:

$$\int_{0/01}^{0/09} f(x)dx \approx 0/02\left[\frac{1}{\sqrt{0/02}}+\frac{1}{\sqrt{0/04}}+\frac{1}{\sqrt{0/06}}+\frac{1}{\sqrt{0/08}}\right]=$$

$$0/02(7/0711+5+4/0825+3/5355)=0/02\times 19/6891=0/393782$$

پس:

$$\int_0^{0/09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0/173031+0/393782=0/566813$$

اختلاف این مقدار با مقدار واقعی $(0/6)$، برابر $0/033187$ است. اما برای کم کردن خطا، h را باید کوچک گرفت.

خطای نقطهٔ میانی:

$$\max\left|f''(x)\right| \le M_2$$
$$a \le x \le b$$

$$\left|\mathrm{EM}(h)\right| \le \frac{b-a}{24}h^2 M_2$$
$$\left[\frac{b-a}{24}h^2 M_2 \le \varepsilon_e\right]$$

خصوصیات روش نقطهٔ میانی:

این روش ظاهراً بهتراز روش ذوزنقه ای است زیرا خطای آن نصف خطای ذوزنقه ای است.

علاوه بر این برای انتگرال توابعی که در نقاط یا مقدارنامعین (بی نهایت) دارد قابل استفاده است.

اما قاعدهٔ ذوزنقه ای خاصیت جالبی دارد که نه روش میانی و نه قاعدهٔ سیمپسون آن خاصیت را ندارد. فرض کنید به ازای h ثابتی $T(h)$ و $M(h)$ را حساب کنید.در $T(h)$ نقاطی که تابع در آنها حساب می شود به صورت زیر می باشد:

$$T(h) \Rightarrow a, a+h, a+2h \quad ,\cdots, a+(n-1)h, b$$

ونقاطی که برای نقطهٔ میانی استفاده می کنیم عبارت اند از:

$$M(h) \Rightarrow a+\frac{h}{2}, a+3\frac{h}{2}, \cdots, a+(n-1)h+\frac{h}{2}$$

حال اگر برای این روابط را باز نویسی کنیم داریم:

$$T(\frac{h}{2}) \Rightarrow a, a+\frac{h}{2}, a+h, a+3\frac{h}{2}, \cdots, a+(n-1)h, a+(n-1)h+\frac{h}{2}, b$$

$$M(\frac{h}{2}) \Rightarrow a+\frac{h}{4}, a+3\frac{h}{4}, a+5\frac{h}{4}, \cdots, b-\frac{h}{4}$$

نکته:

مشاهده می شود که تمام نقاطی که برای محاسبهٔ $T(h)$ بکار می رود در محاسبهٔ نیز دیده می شود لذا برای محایبهٔ می توان از مقادیر تابع که قبلاً حساب شده است استفاده کرد ولی هیچ کدام از نقاطی که در محاسبهٔ به کار می روند از نقاطی که در محاسبهٔ $M(h)$ به کار رفته اند نیستند.

نکته:

اشکال دیگر نقطهٔ میانی آن است که ممکن است نتوان آن را برای برآورد مقدار انتگرال یک تابع جدولی به کار برد. زیرا اگر مقدار تابع در نقاطی که در جدول نیست لازم باشد ابتدا باید از درون یابی استفاده و سپس این مقدار را برآورد کرد.

تمرین:

تقریب هایی از انتگرال های زیر را با قاعدهٔ میانی به ازای h های معین شده حساب کنید.

الف) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \qquad h=0/1$

ب) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \qquad h=0/2$

تمرین:

تقریبی از انتگرال های زیر را حساب کنید که برای آنها $|\mathrm{EM}(h)| < 10^{-3}$

الف) $\int_0^1 x\sin x dx$ ب) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

تمرین:

تقریبی از $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ حساب کنید.

راهنمایی: $[\int_0^1 = \int_0^{0/1} + \int_{0/1}^1]$

فصل پنجم:

دستگاهها:

برای حل دستگاه معادلات خطی دو روش وجود دارد:

الف) روش های مستقیم

ب) روش های تکراری

الف) روش هایی هستند که پس از انجام چند مرحلهٔ مشخص به جواب می رسیم که این جواب بدون در نظر گرفتن خطای گرد کردن جواب دقیق دستگاه است. در حالی که در روش هایی تکراری تنها به یک تقریب از جواب می رسیم. روش های مستقیم مانند روش A^{-1} و یا روش حذفی گوس. که آنها را به صورت زیر شرح می دهیم:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_{n1}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ax=b⇒ سمت راست ماتریس مجهول ماتریس ضرایب A

b ×

روش: A^{-1} :

Ax=b

طرفین را در A^{-1} ضرب می کنیم:

$$\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A}X = \mathrm{A}^{-1} \cdot b$$
$$\mathrm{I} \cdot X = \mathrm{A}^{-1} \cdot b \Rightarrow X = \mathrm{A}^{-1} b$$

برای محاسبهٔ A^{-1} از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} N^T$$

اما N چیست:

$$N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \cdot & \cdot & \cdot \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \cdot & \cdot & \cdot \Delta_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} \cdot & \cdot & \cdot \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Δ_{ij}اینگونه حساب می شود که: عنصر a_{ij} را در نظر گرفته و سطر و ستونش را حذف می کنیم حال اگر دترمینان مابقی آن را حساب کنیم و در علامت محل آنها ضرب کنیم Δ_{ij} به دست می آید.

a_{ij} علامت محل $= (-1)^{i+j}$

حال ماتریسn پدید آمده است اگر سطر و ستون های آن را عوض کنیم ترانهاده یا همان ترنسپوزه یا همان N^T به دست آمده است.

مثال:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x = 1 \\ 2x - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} N^T$$

نکته:

اگر دترمینان مساوی صفر باشد چون معکوس آن محاسبه نمی شود، به آن ماتریس منفرد می گویند و در غیر این صورت به آن ماتریس غیر منفرد می گویند.

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1-1) - 2(2-3) + (1)(2-(-3)) = 10 + 5 = 15 \neq 0$$

لذا A غیر منفرد است.

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{bmatrix} +(0) & -(-5) & +(5) \\ -(-3) & +(-4) & -(-5) \\ +(3) & -(-1) & +(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^T = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$X = \mathrm{A}^{-1} \cdot b = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{5} \\ \frac{7}{15} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{7}{15} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{7}{15} \\ x_3 = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

روش حذفی گوس:

در این روش با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، ماتریس را به یک ماتریس بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) تبدیل می کنیم، آنگاه با جایگذاری پسر و مجهول ها را یکی یکی می یابیم.

(اگر ماتریس پایین مثلثی باشد با عملیات پیشرو به جواب می رسیم).

سئوال: عملیات سطری مقدماتی چیست؟ جواب: عبارت است از:

الف) تعویض کردن دو سطر

ب) ضرب کردن سطر در عددی مخالف صفر

ج) ضرب یک سطر در عددی مخالف صفر و جمع نمودن آن با سطری دیگر.

مثال:

$$\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 & d_1 \\ L_2 & -2d_1 + d_2 \\ L_3 & -3d_1 + d_3 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 0 - 5x_2 - x_3 = -2 \\ 0 - 5x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ -L_2 + L_3 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 0 - 5x_2 - x_3 = -2 \\ 0 - 0 - 3x_3 = 1 \end{cases} \begin{matrix} \to x_1 + 2(\frac{7}{15}) + (-\frac{1}{3}) = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5} \\ \to -5x_2 - (-\frac{1}{3}) = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{15} \\ \to x_3 = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

نکته:

اگر ماتریس را به یک ماتریس پایین مثلثی تبدیل می کردیم، جواب ها یمان یکسان به دست می آمدند. نکته ای دیگر وجود دارد که بسیار مهم است و آن را بعد از مثال زیر خواهیم گفت.

مثال:

1) $$\frac{-1}{0/00001}\begin{cases} 0/00001x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \to d_1(\frac{-1}{0/00001}) + d_2 \to$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0/00001x_1 + x_2 = 1 \\ 0 + (-10^5 + 1)x_2 = (2 - 10^5) \Rightarrow x_2 = 0/9999 \approx 1 \\ , \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$$ غ ق ق

2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0/00001x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$ ق ق

پس نتیجه می گیریم که جا به جا کردن سطر ها الکی نیست. اگر ماتریس حسابی باشد، احتمال اینکه به جواب غلط برسیم بسیار است. در اینجا روندی را بیان می کنیم که برای ماتریس های حساس نیز به مشکل برنخوریم.

روش کار به این شکل است که ماتریس را نرمالیزه می کنیم یعنی در هر ستون ضریب بزرگ را تشخیص داده و سطر متعلق به آن را به سطر اول انتقال می دهیم، آنگاه از ستون دوم عدد بزرگ را تشخیص داده و سطر متعلق به آن عدد را به سطر دوم انتقال می دهیم و این عمل را تا ستون آخر ادامه می دهیم. یعنی بعد از عمل نرمالیزه کردن باید تا حد امکان ها بزرگترین مقدار را داشته باشد. حال اگرهر معدله را در تقسیم کنیم لذا عناصر روی قطر اصلی یک و اکثر عناصر دیگر از یک کوچکتر می باشند. این عمل را عمل نرمالیزه می گویند. حال برای پایین مثلثی کردن، هر k ایی را در نظر بگیرید قدر مطلق آن کوچکترازیک خواهد بود. $(|K|<1)$

ب) روش های تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی:

در این قسمت روش هایی را مورد بررسی قرار می دهیم که این روش ها برنامۀ کامپیوتری آنها به مراتب ساده تر می باشد. به ویژه اگر در دستگاهی که ماتریس ضرائب آن صفر های زیادی را داشته باشد. روش های تکراری به مراتب مناسب تر از روش های مستقیم می باشد. از روش های

تکراری دو روش ژاکوبی و گوس –سایدل استفاده می کنیم. در این روش ها این عمل برای هردو روش یکسان است:

در دستگاه $AX = b$ از معادلهٔ اول را به دست می آوریم. از معادلهٔ دوم x_2 را به دست می آوریم،... و ازمعادلهٔ j ام را به دست می آوریم.آنگاه با یک تقریب اولیه و جایگذاری و تکرار به جواب دلخواه می رسیم. حال صحبت هایمان را برای یک دستگاه سه معادله و سه مجهول مثال می زنیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$$

$$(2) \Rightarrow x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3$$

$$(3) \Rightarrow x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2$$

تذکر:

احتمال دارد یکی از ها صفر باشد، برای فرار از این مشکل دو سطر را تعویض می کنیم.

روش ژاکوبی:

بعد از اینکه نقطهٔ شروع $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)})$ استفاده می کنیم و با استفاده از معادلات به دست آمده در مرحلهٔ قبل به تقریب جدید $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})$ می رسیم، حال اگر در مرحلهٔ بعد از این $x^{(1)}$ استفاده کنیم به $x^{(2)}$می رسیم ،و در حالت کلی با در دست داشتن $x^{(k)}$ به $x^{(k+1)}$ می رسیم ،که می توان آن را به صورت زیرنوشت:

$$x_1^{(k+1)}=\frac{1}{a_{11}}\left(b_1^{)}-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{21}x_1^{(k)}-a_{23}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)}=\frac{1}{a_{33}}\left(b_3-a_{31}x_1^{(k)}-a_{32}x_2^{(k)}\right)$$

مثال:

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3=4 & \Rightarrow x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(4+x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\right) \\ x_1+6x_2+2x_3=9 & \Rightarrow x_2^{(k+1)}=\frac{1}{6}\left(9-x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}\right) \\ -x_1-2x_2+5x_3=2 & \Rightarrow x_3^{(k+1)}=\frac{1}{5}\left(2+x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$x^{(0)}=(0,0,0)$$

$$K=0\begin{cases} x_1^{(1)}=\frac{1}{4}(4+0-0)=1 \\ x_2^{(1)}=\frac{1}{6}(9-0-0)=\frac{9}{6} \\ x_3^{(1)}=\frac{1}{5}(2+0+0)=\frac{2}{5} \end{cases} \qquad \Rightarrow x^{(1)}=\left(1,\frac{9}{6},\frac{2}{5}\right)$$

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱/۵	۰/٤
۲	۱/۲۷۵	۱/۲۰۰۰	۱/۲۰۰۰
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
١٤	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

محاسبات تا(۴D) « جهار رقم اعشار» درست است

روش گوس – سایدل :

روش تکراری گوس- سایدل همان روش تکراری ژاکوبی است با این تفاوت که از هر مقدار جدید به دست آمده از مؤلفه های جواب در سایر این مؤلفه ها استفاده می شود؛ برای توضیح بهتر ماتریس ۳*۳ زیر را نگاه کنید:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right)$$

مثال:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 & \Rightarrow x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 & \Rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 & \Rightarrow x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4+0-0\right) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left(9-1-0\right) = \frac{4}{3} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2+1+\frac{8}{3}\right) = \frac{17}{15} \end{cases} \qquad \Rightarrow x^{(1)} = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{17}{15}\right)$$

شما ره تکرار	x_1	x_2	x_3

۰	۰	۰	۰
۱/۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۰۰۰۰	۱
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۵

نکته:

همانگونه که از مثال ها پیداست روش تکراری گوس- سایدل سریع تر از روش ژاکوبی به جواب می رسد. البته مثال های خاصی وجود دارد که از این گفته تبعیت نمی کنداما غالباً گوس –سایدل قوی تراست.نکتهٔ بعدی این که قبل از حل مسئله بهتر است ماترسی به صورت قطری قالب نوشته شود(قطری قالب چیست؟ همان مرحلهٔ اول نرمالیزه کردن است، یعنی روی قطر بزرگترین اعداد ضرائب قرار گیرند) شرط توقف عملیات به این شکل است که برای تمام i ها داشته باشیم:

$$M^{(k)} = Max\left\{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \qquad i = 0,1,2,....,n\right\}$$

$$M^{(k)} < \varepsilon_e$$

فصل ششم:

روش های عددی حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی:

مثال:

معادلهٔ $y' = x + y$ را با شرط y(0)=1 در نظر بگیرید. تقریبی از y(0/1) را با استفاده از فرمول رونگه کوتاه مرتبه ی ۴ با h=0/1 بدست آورید.

$$
\begin{array}{ll}
y' = x + y & f(x,y) = x + y \\
y(0) = 1 & x_0 = 0 \\
h = 0/1 & y_0 = 1 \\
y(0/1) = ? & h = 0/1
\end{array}
$$

$$k_1 = 0/1 \times f(x_0, y_0) = 0/1(x_0, y_0) = 0/1(0+1) = 0/1$$

$$k_2 = 0/1 \times f(x_0 + \frac{0/1}{2} \quad , y + \frac{0/1}{2}) = 0/1\left((0 + \frac{0/1}{2}) + (1 + \frac{0/1}{2})\right) = 0/11$$

$$k_3 = 0/1 \times f(x_0 + \frac{0/1}{2} \quad , y + \frac{0/11}{2}) = 0/1\left((0 + \frac{0/1}{2}) + (1 + \frac{0/11}{2})\right) = 0/1105$$

$$k_4 = 0/1 \times f(x_0 + \frac{0/1}{1} \quad , y_0 = 0/1105) = 0/1\left((0 + 0/1) + (1 + 0/1105)\right) = 0/12105$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left[0/1 + 2 \times (0/11) + 2(0/1105) + (0/12105)\right] = 1/11034$$

مرتبهٔ ٤ :

$h =$ داریم

$$x_n = x_0 + nh$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

۱- میله ی C را که طول آن ۱۰ متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری کرده ایم و میله ی D را که طول آن ۱۰ میلی متر است با تقریب ۰/۰۱ سانتی متر اندازه گیری شده است دقت کدامیک از این اندازه گیری ها بیشتر است؟

۲- ریشه معادله $f(x) = e^x - e^2 x$ درچه بازه ای همگرا می باشد.(روش تکراری)

۳- با استفاده از روش تکراری نیوتن ریشه معادله ی $x^4 - x = 10$ را تا ۳ رقم اعشار بیابید.

۴- فرض کنید فرمول تکراری به صورت $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ تعریف شده باشد که در آن a یک مقدار ثابت مثبت بوده و مقدار اولیه ی x_0 طوری انتخاب شده که فرمول تکراری فوق به ریشه ی C همگرا گردد مطلوب است.

الف) حد نهایی x_n چیست

ب) نشان دهید که فرمول فوق از مرتبه دوم است.

۵- اگر $a_0 = 0$ $,b_0 = 2$ $n = 31$ تکرار صورت گرفته باشد ریشه ی تقریبی مساعد تا چند رقم اعشار دقیق است.

۶-چند جمله ای درون یاب مربوط به تابع جدولی زیر را بنویسید و سپس f(1/5) را حساب کنید. (روش لاگرانژ)

۷- مساله ۶ را با یکی از روش های تفاضل های تقسیمی یا ضرایب نامعینی حساب کنید.

۸- n تعداد نقاط و h طول فاصله را طوری بیابید که قانون ذوزنقه در مورد انتگرال زیر با دقتی معادل 5×10^{-9} داشته باشد

$$\int_{-\frac{n}{6}}^{\frac{n}{6}} \cos x dx$$

۹- با استفاده از قانون سیمپسون و جدول و h=0/5 مطلوب است محاسبه $\int^{4} f(x)dx$

x_i 0 0.5 1 1/5 2
2/5

f_i 0 0.2423 0/4401 0/5579 0/5767
0/4971

۱۰- الف) تفاوت روشهای ژاکوبی و گاوس سایدل را بنویسید.

ب) دستگاه زیر را با استفاده از روش گاوس سایدل حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

۱۱- معدله ی $y' = 1 - y^2$ را با شرط $y(0) = 0$ با قرار دادن h=0/1 به روش رونگه کوتای مرتبه ۴ حل کنید و مقدار تقریبی y(0/1) را بدست آورید.