www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

ارائه کتابها و جزوات رایگان مهندسی عمران

بهترین و برترین مقالات روز عمران

انجمن های تخصصی مهندسی عمران

فروشگاه تخصصی مهندسی عمران

دانشگاه صنعت آب و برق
شهید عباسپور

محاسبات عددی

(اثبات ها)

تالیف دانشجوئی
دانشگاه صنعت آب و برق شهید عباسپور

گردآورندگان:
مهدی شاداب فر ، علی اکبر فضلی

مقدمه:

درس محاسبات عددی از جمله درس های مشترک بین رشته های مهندسی و علوم پایه می باشد و به همین دلیل تعداد زیادی از دانشجویان با این درس در ارتباط هستند.

در طی ترم های گذشته مشاهده شد که مشکلاتی در ارتباط با فهم اثبات روش های مورد استفاده در این درس وجود دارد، از این رو تصمیم گرفته شد که در غالب یک جزوه به بررسی این اثبات ها پرداخته شود. به علت زیاد بودن تعداد روش های عددی، تنها به بررسی مهم ترین آنها که در امتحانات پایان ترم امکان مطرح شدن بیشتری دارند پرداخته شد.

در طی جزوه روش هائی که شانس مطرح شدن در امتحان را دارند اما به آنها پرداخته نشده است نیز معرفی شده اند تا در صورت لزوم از روی کتب مرجع مطالعه شوند.

در پایان از همه شما عزیزانی که به مطالعه این جزوه می پردازید خواهشمندیم که اشکالات موجود را به آدرس *mahdishadabfar @ yahoo.com* ارسال نمائید تا در اسرع وقت اصلاح گردند.

سربلند، موفق و پیروز باشید.

مهدی شاداب فر، علی اکبر فضلی

زمستان ۱۳۸۹

فصل دوم

حل معادلات غیر خطی

۱– روش تکرار تابعی[1]

روش تکرار تابعی، روشی برای بدست آوردن ریشه های معادله $f(x)=0$ است. در این روش ابتدا از معادله $f(x)=0$ یک x بیرون می کشیم تا معادله به فرم $x=g(x)$ درآید. حال برای x ، یک عدد دلخواه مثل x_n حدس می زنیم، سپس با قرار دادن x_n در $g(x)$ ، x مرحله بعد یعنی $x_{n+1}=g(x_n)$ را به دست می آوریم. اگر این کار را تکرار کنیم، x_{n+i} به سمت ریشه میل خواهد کرد.

$$f(x)=0\Rightarrow x=g(x)\Rightarrow\begin{cases} guess\ x_n \\ x_{n+1}=g(x_n) \\ x_{n+2}=g(x_{n+1}) \\ \Rightarrow\ldots\Rightarrow \lim\limits_{n+i\to\infty} x_{n+i}=r \end{cases}$$

این روش یک شرط همگرائی دارد، یعنی x_{n+i} به شرطی به سمت ریشه میل خواهد کرد که $1\rangle\left|g'(x)\right|$ باشد . حال می خواهیم این شرط همگرائی را اثبات کنیم.

۱–۱–شرط همگرائی روش تکرار تابعی

اگر $x=r$ جوابی برای $f(x)=0$ باشد، می توانیم بگوئیم:

$$f(r)=0\Rightarrow r=g(r)$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=g(x_n) \\ r=g(r) \end{cases}\Rightarrow x_{n+1}-r=g(x_n)-g(r)\Rightarrow\frac{x_{n+1}-r}{x_n-r}=\frac{g(x_n)-g(r)}{x_n-r}$$

یادآوری قضیه مقدار میانگین:

برای تابع $y=f(x)$ بین نقاط a و b می توانیم بگوئیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

به طوری که $a<c<b$.

طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\frac{g(x_n)-g(r)}{x_n-r}=g'(\varsigma_n)$$

بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\frac{x_{n+1}-r}{x_n-r}=g'(\varsigma_n)\Rightarrow x_{n+1}-r=g'(\varsigma_n)(x_n-r)$$

خطای مرتبه nام را به صورت $e_n=x_n-r$ و به همین شکل خطای مرتبه $n+1$ ام را به شکل $e_{n+1}=x_{n+1}-r$ تعریف می کنیم. حال به کمک این تعریف و رابطه قبل می توانیم بگوئیم:

[1] به این روش، نقطه ثابت یا fixed point هم می گویند.

$$e_{n+1} = g'(\varsigma_n).e_n \Rightarrow |e_{n+1}| = |g'(\varsigma_n)|.|e_n| \qquad (1)$$

در اینجا می خواهیم از شرط همگرائی روش تکرار تابعی یعنی $|g'(x)| < 1$ استفاده کنیم و اثبات نمائیم که اگر این شرط برقرار باشد، روش همگرا خواهد شد. برای این کار عددی مانند k را بین $|g'(\varsigma_n)|$ و ۱ انتخاب می کنیم . با این انتخاب خواهیم داشت:

$$|g'(\varsigma_n)| \le k < 1 \qquad (2)$$

با استفاده از معادلات (1) و (2) خواهیم داشت:

$$|e_{n+1}| \le k|e_n|$$

به همین برهان خواهیم داشت:

$$|e_n| \le k|e_{n-1}|\ ,\ |e_{n-1}| \le k|e_{n-2}|\ ,\ |e_{n-2}| \le k|e_{n-3}|\ ,\ \ldots ,\ |e_2| \le k|e_1|$$
$$\Rightarrow |e_{n+1}| \le k|e_n| \le k^2|e_{n-1}| \le k^3|e_{n-2}| \le \ldots \le k^n|e_1|$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|e_{n+1}| \le k^n|e_1| \Rightarrow |x_{n+1} - r| \le k^n|x_1 - r| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - r| \le \lim_{n\to\infty} k^n|x_1 - r|$$

از آنجائیکه k عددی مثبت و کمتر از ۱ است :

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} k^n|x_1 - r| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - r| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - r) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = r$$

اثبات همگرائی روش تکرار تابعی تمام شد، اما دو موضوع دیگر نیز وجود دارد که گاهی اوقات در امتحان آورده شده است. در این جا به این دو موضوع می پردازیم.

۱-۲-ریشه بدست آمده از روش تکرار تابعی منحصر به فرد است.

از برهان خلف استفاده می کنیم. یعنی فرض می کنیم معادله $x = g(x)$ دارای دو ریشه r_1 و r_2 باشد:

$$\begin{matrix} r_1 = g(r_1) \\ r_2 = g(r_2) \end{matrix} \Rightarrow r_2 - r_1 = g(r_2) - g(r_1) \Rightarrow \frac{g(r_2) - g(r_1)}{r_2 - r_1} = 1 \qquad (3)$$

طبق قظیه مقدار میانگین داریم:

$$\frac{g(r_2) - g(r_1)}{r_2 - r_1} = g'(\varsigma) \qquad (4)$$

با استفاده از معادلات (3) و (4) خواهیم داشت $g'(\varsigma) = 1$ که مخالف فرض همگرائی روش تکرار تابعی است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ما ثابت است.

۱-۳- تسریع ایتکن

تسریع ایتکن روشی است که کار ما را در رسیدن به ریشه مورد نظر سرعت می بخشد. به عبارتی با استفاده از این روش بدون نیاز به تکرارهای زیاد به ریشه تابع به سرعت نزدیک می شویم. شما باید بتوانید تسریع ایتکن را با استفاده از معادلات آن تشریح کنید، پس با دقت این روش را مطالعه کنید.

تسریع ایتکن بر اساس فرمول $r \approx \dfrac{x_n\, x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$ کار می کند. یعنی بیان می کند که اگر شما با استفاده از روش تکرار تابعی تنها سه عدد x_n، x_{n+1} و x_{n+2} را محاسبه کنید و در فرمول تسریع ایتکن قرار دهید با دقت بسیار بالائی به ریشه می رسید. ما این موضوع را بررسی می کنیم.

$$e_n = k^{n-1}e_1 \Rightarrow x_n - r = k^{n-1}e_1 \Rightarrow x_n = r + k^{n-1}e_1$$

به همین ترتیب می توانیم ثابت کنیم:

$$x_{n+1} = r + k^n e_1 \qquad , \qquad x_{n+2} = r + k^{n+1}e_1$$

با قرار دادن این مقادیر در فرمول تسریع ایتکن خواهیم داشت:

$$\frac{x_n\, x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \frac{(r + k^{n-1}e_1)(r + k^{n+1}e_1) - (r + k^n e_1)^2}{(r + k^{n+1}e_1) - 2(r + k^n e_1) + (r + k^{n-1}e_1)}$$
$$= \frac{r^2 + r\,k^{n+1}e_1 + r\,k^{n-1}e_1 + k^{n-1}\,k^{n+1}e_1^2 - r^2 - (k^n e_1)^2 - 2rk^n e_1}{r + k^{n+1}e_1 - 2r - 2k^n e_1 + r + k^{n-1}e_1}$$

حال با ساده کردن کسر بالا و صرف نظر از توانهای دوم e_1 به علت کوچکی خواهیم داشت:

$$\frac{x_n\, x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \frac{r\,e_1(k^{n+1} + k^{n-1} - 2k^n)}{e_1(k^{n+1} + k^{n-1} - 2k^n)} = r$$

نکته: در بیشتر اوقات فرمول تسریع ایتکن به شما داده نمی شود و شما باید آن را حفظ باشید، در اینجا فرمول تسریع ایتکن را به شکل ساده تری می نویسیم تا حفظ کردن آن راحت تر باشد. دقت کنید:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$
$$\Delta^2 x_i = \Delta(\Delta x_i) = \Delta(x_{i+1} - x_i) = (x_{i+2} - x_{i+1}) - (x_{i+1} - x_i) = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$$
$$\Rightarrow r \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

۲– روش نیوتن

روش نیوتن نیز روشی برای به دست آوردن ریشه های معادله ای مثل $f(x)=0$ است. در این روش با حدس زدن یک x مثل x_n و قرار دادن آن در معادله زیر x مرحله بعد یعنی x_{n+1} به دست می آید. این کار باید آنقدر تکرار شود تا به دقت مورد نظر برسیم.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

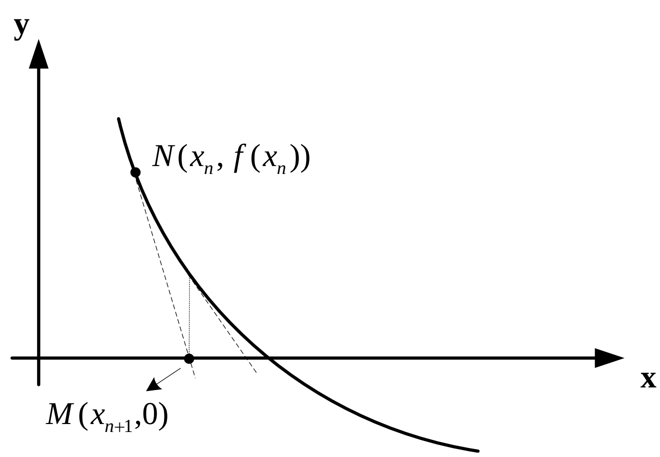
روش نیوتن به شرطی همگرا خواهد شد که:

$$\left|\frac{f(x).f''(x)}{f'^2(x)}\right|<1$$

ابتدا اثبات روش نیوتن را خواهیم گفت و سپس به اثبات همگرائی آن خواهیم پرداخت.

۲–۱–اثبات روش نیوتن

از نظر هندسی روش نیوتن اینگونه عمل می کند که از نقطه ای مانند N بر روی تابع $y=f(x)$ مماسی رسم کرده و محل برخورد آن را با محور x ها محاسبه می کند. سپس محل برخورد را بر روی نمودار تصویر کرده و دوباره مماس رسم می کند. محل برخورد مماس با محور x ها به سمت ریشه میل می کند. ما نیز برای اثبات فرمول روش نیوتن با توجه به شکل زیر معادله خط مماس بر منحنی از نقطه $N(x_n, f(x_n))$ را می نویسیم.



x_n معادله خط مماس از نقطه ای به طول : $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$

حال محل برخورد این مماس را با محور x ها به دست می آوریم.

$$0-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\Rightarrow -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}-x_n\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

۲–۲–اثبات همگرائی روش نیوتن

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار تابعی است، فقط به جای $g(x_n)$ ، $x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ گذاشته شده است. بنابراین برای اثبات همگرائی روش نیوتن از بهمگرائی روش تکرار تابعی استفاده می کنیم.

$$x_{n+1}=\underbrace{x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{g(x_n)}$$

$$|g'(x)|<1 \Rightarrow \left|\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'\right|=\left|1-\frac{f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f'^2(x)}\right|=\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right|<1$$

۲–۳–همگرائی روش نیوتن از مرتبه دوم می باشد.

این موضوع که همگرائی روش نیوتن از مرتبه چندم می باشد، چندین بار در امتحان آورده شده است. به همین دلیل این قسمت را نیز مطالعه نمائید.

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=g(x_n)\\ r&=g(r)\end{aligned} \Rightarrow x_{n+1}-r=g(x_n)-g(r) \qquad (5)$$

حال بسط تیلور تابع $g(x_n)$ حول نقطه r را می نویسیم.

$$g(x_n)=g(r)+g'(r)(x_n-r)+\frac{g''(\varsigma)}{2!}(x_n-r)^2+\dots \qquad (6)$$

در معادله بالا $g'(r)$ صفر است، چونکه:

$$g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \Rightarrow g'(r)=\frac{f(r)f''(r)}{f'^2(r)} \xrightarrow{f(r)=0} g'(r)=0$$

بنابراین با صرف نظر از جملات بعدی $g(x)$ معادله (6) را می توانیم به صورت زیر ساده کنیم:

$$g(x_n)=g(r)+\frac{g''(\varsigma)}{2}(x_n-r)^2 \qquad (7)$$

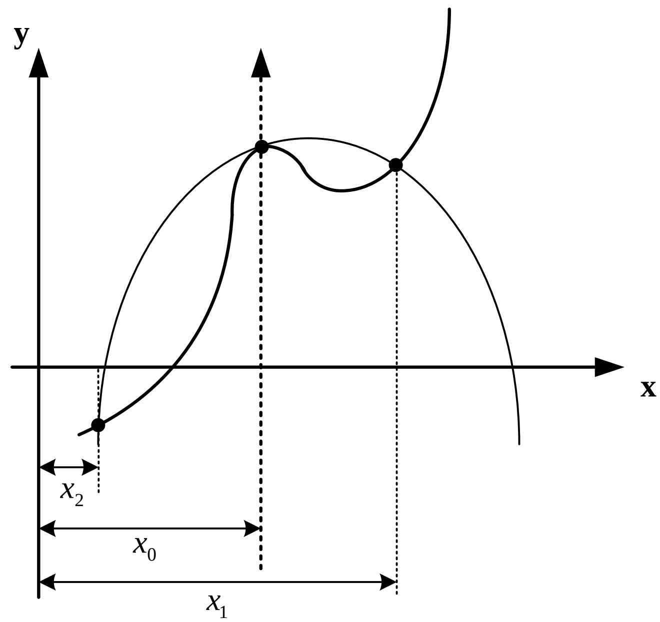
با جایگذاری (7) در (5) داریم:

$$x_{n+1}-r=g(r)+\frac{g''(\varsigma)}{2}(x_n-r)^2-g(r) \Rightarrow x_{n+1}-r=\frac{g''(\varsigma)}{2}(x_n-r)^2 \Rightarrow e_{n+1}=\frac{g''(\varsigma)}{2}e_n$$

بنابراین خطای مرتبه $n+1$ ام برابر است با ضریبی از مشتق مرتبه دوم تابع $g(x)$ ضربدر خطای مرتبه nام و این موضوع یعنی اینکه همگرائی روش نیوتن از مرتبه دوم می باشد.

۳–روش مولر

روش مولر نیز همانند دو روش قبل برای محاسبه ریشه های معادله $g(x)=0$ به کار می رود.
در این روش می بایست سه نقطه x_0، x_1 و x_2 در اطراف ریشه تابع $g(x)$ حدس زده شود . سپس به این سه نقطه یک معادله درجه دو برازش داده شود. اگر همین کار برای دو نقطه از نقاط قبل و یکی از ریشه های معادله درجه دو تکرار شود. ریشه معادله درجه دو جدید به سمت ریشه تابع $g(x)$ میل می کند.



روش مولر که دربالا مختصرا توضیح داده شد، از معادلات زیر استفاده می کند.

$$r = x_0 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$a = \frac{f_2 - f_0(1+\gamma) + \gamma\, f_1}{\gamma\, h_1^2\,(\gamma+1)} \quad , \quad b = \frac{f_1 - f_0 - a\, h_1^2}{h_1} \quad , \quad c = f_0$$

که $h_1 = x_1 - x_0$ ، $h_2 = x_0 - x_2$ و $\gamma = \frac{h_2}{h_1}$ می باشد.

۳–۱–اثبات معادلات روش مولر

ضابطه معادله درجه دومی را که قرار است به سه نقطه x_0 ، x_1 و x_2 برازش دهیم، $f(x) = ax^2 + bx + c$ می نامیم.
حال یک تغییر متغیر به شکل $v = x - x_0$ تعریف می کنیم. به تعبیر دیگر میتوانیم بگوئیم محورهای مختصات را به اندازه x_0 جابجا می کنیم.

$$v = x - x_0 \Rightarrow f(v) = av^2 + bv + c$$

$$v=0 \Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=f_0$$
$$v=x_1-x_0=h_1 \Rightarrow a(h_1)^2+bh_1+c=f_1$$
$$v=-(x_0-x_2)=-h_2 \Rightarrow a(h_2)^2-bh_2+c=f_2$$

حال به شکل زیر سه معادله سه مجهول بالا را حل کرده و ضرایب a و b و c را می یابیم.

$$c=f_0 \Rightarrow \begin{cases} ah_1^2+bh_1=f_1-f_0 & (8) \\ ah_2^2+bh_2=f_2-f_0 & (9) \end{cases}$$

$$(8) \Rightarrow b=\frac{f_1-f_0-ah_1^2}{h_1} \qquad (10)$$

با جایگذاری (10) در (9) داریم:

$$ah_2^2-\left(\frac{f_1-f_0-ah_1^2}{h_1}\right)h_2=f_2-f_0 \Rightarrow ah_2^2+ah_1h_2=f_2-f_0+\frac{f_1h_2}{h_1}-\frac{f_0h_2}{h_1}$$
$$\Rightarrow a(h_2^2+h_1h_2)=\frac{h_1f_2-h_1f_0+h_2f_1-h_2f_0}{h_1} \Rightarrow a=\frac{h_1f_2-f_0(h_1+h_2)+h_2f_1}{h_1(h_2^2+h_1h_2^2)}$$
$$=\frac{f_2-f_0(1+\frac{h_2}{h_1})+\frac{h_2}{h_1}f_1}{h_2^2+h_1h_2^2}=\frac{f_2-f_0(1+\frac{h_2}{h_1})+\frac{h_2}{h_1}f_1}{h_1^2((\frac{h_2}{h_1})^2+\frac{h_2}{h_1})}$$

با فرض $\frac{h_2}{h_1}=\gamma$ داریم:

$$a=\frac{f_2-f_0(1+\gamma)+\gamma f_1}{\gamma h_1^2(\gamma+1)}$$

حالا که ضرایب a و b و c بدست آمدند، ریشه های معادله $f(v)=0 \Rightarrow av^2+bv+c=0$ را می یابیم:

$$v_{root}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow r-x_0=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow r=x_0+\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\Rightarrow r=x_0+\frac{4ac}{2a(-b\mp\sqrt{b^2-4ac})}=x_0-\frac{2c}{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}$$

نکته: در فرمول بالا اگر b مثبت باشد از $r=x_0-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ استفاده می کنیم و اگر b منفی باشد از $r=x_0-\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$ استفاده می کنیم.. به این ترتیب مشخص می شود که کدام یک از ریشه های معادله درجه دوم باید مد نظر قرار گیرد.

فصل سوم

حل دستگاههای معادلات خطی

۴- روشهای ژاکوبی و گاوس سیدل

روشهای ژاکوبی و گاوس سیدل برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول به کار می روند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

اگر از معادله اول x_1، از معادله دوم x_2، ... و از معادله nام x_n را بیرون بکشیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}\,x_1 - a_{23}\,x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn1}}(b_n - a_{n1}\,x_1 - a_{n2}\,x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

در روش ژاکوبی ابتدا x_1، x_2 تا x_n را حدس می زنیم . سپس با قرار دادن آنها در طرف راست معادلات بالا x_1، x_2 تا x_n مرحله جدید را پیدا می کنیم. اگر این کار را چند بار تکرار کنیم x_1، x_2 تا x_n به سمت جواب میل می کنند.

در روش گاوس سیدل هم ابتدا x_2، x_3 تا x_n را حدس می زنیم. با قرار دادن آنها در معادله اول x_1 را می یابیم. حال با x_1 بدست آمده و مقادیر x_3، x_4 تا x_n و قرار دادن آنها در معادله دوم x_2 را به دست می آوریم. همین کار را ادامه می دهیم تا تمام x_1، x_2 تا x_n جدید بدست آیند. این چرخه را دوباره تکرار می کنیم تا مقادیر ما به جواب نزدیک تر شوند.

روش های ژاکوبی و گاوس سیدل هر دو دارای یک شرط همگرائی هستند و آن این است که ماتریس باید قطری مسلط باشد، یعنی اینکه:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}|}{|a_{ii}|} \le 1$$

۴-۱-شرط همگرائی روشهای ژاکوبی و گاوس سیدل

برای معادله سطر iام داریم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n = b_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \qquad (1)$$

از آنجائیکه x_i و x_j در معادله بالا تقریبی می باشند، با اضافه کردن خطای آنها به شکل زیر آنها را به مقادیر دقیقشان نزدیک می کنیم.

$$x_i + e_i \to x_i$$
$$x_j + \varepsilon_j \to x_j$$

$$x_i + e_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + \varepsilon_j)\right) \Rightarrow x_i + e_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j\right) \qquad (2)$$

با استفاده از معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$e_i = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j$$

$$\Rightarrow |e_i| = \frac{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j\right|}{|a_{ii}|} \le \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||\varepsilon_j|}{|a_{ii}|}$$

حال با فرض اینکه ماکزیمم مقدار خطا عبارتی مثل ε باشد خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, \dots, |\varepsilon_n|\}$$

$$\Rightarrow |e_i| \le \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \times \varepsilon \qquad (3)$$

اگر مقدار $k = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ کمتر یا مساوی یک باشد می توان گفت که خطای هر مرحله از مرحله قبلش کمتر است، یعنی روش همگرا می باشد.

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \le 1$$

این عبارت همان تعریف قطری مسلط بودن است.

> نکته: اگر مقدار ضریب k بزرگتر از ۱ بود، این امکان وجود داشت که نا معادله (۳) برقرار باشد اما خطای هر مرحله (ε) از مرحله قبلش (e_i) کوچکتر نباشد.
>
> مثلا:
>
> $2 \le 1.5 \times 1.9 \quad but \quad 2 > 1.9$

فصل چهارم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۵- روش توانی

این روش برای بدست آوردن بزرگترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن به کار می رود.

۵-۱- اثبات همگرائی روش

با استفاده از تعریف مقادیر ویژه و بردارهای ویژه داریم:

$$AX = \lambda X \qquad (1)$$

که در این معادله A ماتریسی است که می خواهیم مقدار ویژه و بردار ویژه آن را حساب کنیم، X بردار ویژه و λ مقدار ویژه می باشد.

از جبر خطی می دانیم که اگر $X_n , X_{n-1} ,..., X_2 , X_1$ از هم مستقل باشند، می توانیم بنویسیم:

$$Z^{(0)} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$$

که $\alpha_n , ... , \alpha_2 , \alpha_1$ مقادیر ثابتی می باشند.

حال y مرحله صفر را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$y^{(0)} = AZ^{(0)} = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 + ... + \alpha_n AX_n \qquad (2)$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$y^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + ... + \alpha_n \lambda_n X_n$$

y یک بردار است. این بردار را بر بزرگترین درایه اش ار نظر قدر مطلقی (d_0) تقسیم می کنیم و نام آن را Z مرحله ۱ می نامیم.

$$Z^{(1)} = \frac{y^{(0)}}{d_0}$$

$$\Rightarrow Z^{(1)} = \frac{1}{d_0}(\alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + ... + \alpha_n \lambda_n X_n)$$

نکته: از آنجائیکه Z عبارتست از بردار y که به بزرگترین درایه اش تقسیم شده است، می توان گفت که بزرگترین درایه Z یک است.

با تکرار عملیات فوق برای مرحله بعد خواهیم داشت:

$$y^{(1)} = AZ^{(1)} = \frac{1}{d_0}(\alpha_1 \lambda_1 AX_1 + \alpha_2 \lambda_2 AX_2 + ... + \alpha_n \lambda_n AX_n)$$

$$\Rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{d_0}(\alpha_1 \lambda_1^2 X_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 X_2 + ... + \alpha_n \lambda_n^2 X_n)$$

$$\Rightarrow Z^{(2)} = \frac{y^{(1)}}{d_1} = \frac{1}{d_0 d_1}(\alpha_1 \lambda_1^2 X_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 X_2 + ... + \alpha_n \lambda_n^2 X_n)$$

و به همین ترتیب برای مرحله i ام داریم:

$$\Rightarrow Z^{(i)} = \frac{1}{d_0 d_1 ... d_{i-1}}(\alpha_1 \lambda_1^i X_1 + \alpha_2 \lambda_2^i X_2 + ... + \alpha_n \lambda_n^i X_n)$$

اگر فرض کنیم که ترتیب مقادیر ویژه به شکل زیر باشد، می توانیم بنویسیم:

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|>\ldots>|\lambda_n|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1, \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|<1, \ldots, \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_z}\right|<1$$

$$\Rightarrow Z^{(i)}=\frac{\lambda_1^i}{d_0 d_1 \ldots d_{i-1}}(\alpha_1 X_1+\alpha_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^i X_2+\ldots+\alpha_n(\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^i X_n)$$

اگر از معادله بالا حد به سمت بی نهایت بگیریم خواهیم داشت:

$$i\to\infty \Rightarrow Z^{(i)}=\frac{\lambda_1^i}{d_0 d_1 \ldots d_{i-1}}\alpha_1 X_1$$

با توجه به معادله بالا و نیز اینکه با ضرب یک عدد در بردار ویژه، آن بردار ویژه تغییر نمی کند و خواص خود را حفظ می کند، می توانیم بگوئیم که وقتی $i\to\infty$ ، $Z^{(i)}\to X_1$.

با پیش ضرب $Z^{(i)}$ در A داریم:

$$\Rightarrow y^{(i)}=AZ^{(i)}=\frac{\lambda_1^i}{d_0 d_1 \ldots d_{i-1}}\alpha_1 A X_1=\lambda_1 Z^{(i)}$$

از آنجائیکه بزرگترین عنصر از نظر قدر مطلقی برای Z ، یک می باشد، بزرگترین عنصر از نظر قدرمطلقی برای y، λ_1 (بزرگترین مقدار ویژه) می باشد.

نکته: سرعت همگرائی روش توانی به نسبت $\left\lvert\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\rvert$ ربط دارد. هرچه این نسبت به ۱ نزدیک باشد سرعت کم و هرچه به صفر نزدیک باشد سرعت زیادتر خواهد بود.

فصل پنجم

برازش

۵- برازش

فرض کنید در طی سرشماری در سالهای بین ۱۳۴۵ تا ۱۳۸۵ جمعیت شیراز مطابق جدول زیر می باشد.

سال	۱۳۴۵	۱۳۵۰	۱۳۵۵	۱۳۶۰	۱۳۶۵	۱۳۷۰	۱۳۷۵	۱۳۸۰	۱۳۸۵
جمعیت (×1000)	۳۲۵	۳۷۰	۴۰۰	۴۳۰	۴۵۰	۴۶۰	۴۷۸	۵۱۰	۵۳۰

حال می توانیم جمعیت را در سالهای مختلف (مثلا در سال ۱۳۶۷) با درونیابی بدست آوریم؛ برای درونیابی ابتدا باید یک منحنی برازش دهیم و سپس با استفاده از این منحنی جمعیت را در سالهای مختلف بدست آوریم.

به طور کلی ما می توانیم به دو صورت منحنی را برازش دهیم :

در روش اول که به fix point مشهور است منحنی ما به گونه ای است که مقدار خطا در نقاطی که در جدول مشخص شده صفر می باشد یعنی اینکه منحنی ما از این نقاط می گذرد و برای رسیدن به این هدف مثلا در مورد جدول بالا که مقادیر ۹ نقطه مختلف را داریم باید یک منحنی درجه ۸ تقریب بزنیم -که به آن درونیابی درجه ۸ می گویند- یا در ساده ترین حالت اگر مقادیر ۲ نقطه مختلف داشتیم باید یک منحنی درجه یک تقریب بزنیم -که به آن درونیابی درجه یک می گویند.

در روش دوم دیگر لازم نیست که الزاما منحنی از نقاط موجود در جدول بگذرد و در نتیجه ما می توانیم برای هر تعداد نقطه که داشته باشیم، منحنی با درجه دلخواه عبور دهیم که در آینده به آن می پردازیم.

۵-۱- روش لاگرانژ

در روش لاگرانژ داریم $f(x)= P_n(x)+E(x)$ که $E(x)$ مقدار خطاست که در ادامه بدست آوردن آن را توضیح می دهیم، و $P_n(x)$ که مقدار تقریبی $f(x)$ است، را به روش زیر بدست می آوریم.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \phi_i(x)\, f_i$$

که در آن مقادیر f_i را از روی جدول می خوانیم و مقادیر $\phi_i(x)$ را به روش زیر بدست می آوریم.

$$\phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\ldots(x_i-x_n)}$$

در اینجا ما سعی بر آن داریم که با یک مثال درون یابی لاگرانژ را توضیح دهیم.

فرض کنید که در نتیجه یک آزمایش یا یک سر شماری یا هر چیز دیگر اطلاعات زیر را بدست آورده ایم

i	x(i)	$f_i=P_i$
0	1	0.7652
1	1.3	0.62009
2	1.6	0.4554
3	1.9	0.28182
4	2.2	0.11036

حال اگر بخواهیم مثلا $f(1.5)$ را به روش لاگرانژ بدست آوریم می توانیم به روش زیر عمل کنیم.

حال اگر بخواهیم از لاگرانژ درجه یک استفاده کنیم حتما باید با استفاده از نقاط ۱,۳ و ۱,۶ که ۱,۵ بین آن دو است چند جمله ای لاگرانژ را بدست آوریم، در نتیجه داریم.

i	x(i)	$f_i=P_i$
0	1.3	0.62009
1	1.6	0.4554

$$P_1(x)=\sum_{i=0}^{n}\phi_i(x)\,f_i$$
$$P_1(x)=\phi_0(x)\,f_0+\phi_1(x)\,f_1$$
$$\phi_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-1.6}{1.3-1.6}$$
$$\phi_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-1.3}{1.6-1.3}$$
$$f(1.5)\approx P_1(1.5)=\phi_0(1.5)\,f_0+\phi_1(1.5)\,f_1=\frac{1.5-1.6}{1.3-1.6}\times 0.6200860+\frac{x-1.3}{1.6-1.3}\times 0.4554022$$
$$=0.5102986$$

و اگر بخواهیم از تقریب درجه دو استفاده کنیم به سه نقطه نیاز داریم، می توانیم این کار را با استفاده از نقاط ۱ و ۱,۳ و ۱,۶ یا با استفاده از نقاط ۱,۳ و ۱,۶ و ۱,۹ که ۱,۵ بین این دسته از اعداد است انجام دهیم.که به عنوان مثال با استفاده از نقاط ۱,۳ و ۱,۶ و ۱,۹ به صورت زیر می شود.

i	x(i)	$f_i=P_i$
0	1.3	0.62009
1	1.6	0.4554
2	1.9	0.28182

$$f(1.5)\approx P_2(1.5)=\phi_0(1.5)\;f_0+\phi_1(1.5)\;f_1+\phi_2(1.5)\;f_2$$
$$\phi_0(x)=\frac{(x-1.6)(x-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)}\;,\;\phi_1(x)=\frac{(x-1.3)(x-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)}\quad,\;\phi_2(x)=\frac{(x-1.3)(x-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)}$$
$$P_2(1.5)=0.511287$$

در این مثال چون ۵ نقطه داریم حداکثر می توانیم یک چند جمله ای لاگرانژ درجه ۴ تقریب بزنیم.

۵-۲- روش نیویل

این روش نیز fixed point است.

همانطور که در روش قبل دیدیم یکی از مشکلات اصلی روش لاگرانژ این است که کار لازم برای محاسبه تقریب به وسیله چند جمله درجه دو کار لازم برای محاسبه تقریب سه را کم نمیکند، همچنین تقریب درجه چهار با معلوم بودن تقریب درجه سه آسانتر بدست نمیاید. هدف این بخش یافتن این چند جمله ای های تقریب ساز است به نحوی که از محاسبات قبلی حداکثر استفاده برده شود.

اطلاعاتی که در ابتدا داریم مثل همان مثال قبل است، البته توجه داشته باشیم که ستون های این جدول با $P_{i\,j}$ مشخص می شوند که i معرف سطر و j معرف ستون است، بنابراین $f_i = P_i$ می باشد.

i	x(i)	$f_i=P_i$
0	1	0.7652
1	1.3	0.62009
2	1.6	0.4554
3	1.9	0.28182
4	2.2	0.11036

در نتیجه اگر بخواهیم مقدار تابع در x=27.5 بدست آوریم به صورت زیر عمل می کنیم.

در نتیجه اگر بخواهیم با استفاده از درون یابی درجه یک تقریب بزنیم با استفاده از فرمول زیر مقادیر ستون i=1 را بدست می آوریم.

$$P_{i\,j} = \frac{(x - x_i)\times P_{i+1,\,j-1} + (x_{i+j} - x)\times P_{i,\,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$$

برای روشن تر شدن مطلب، مقدار P_{21} را محاسبه می نماییم: (اگر دقت کنیم می فهمیم مقدار i=2 و j=1 می باشند)

$$P_{21} = \frac{(27.5 - 41.6)\times 0.17537 + (10.1 - 27.5)\times 0.66393}{10.1 - 41.6} = 0.44524$$

i	x(i)	$f_i=P_i$	P_{i1}
0	32	0.52992	0.46009
1	22.2	0.37784	0.456
2	41.6	0.66393	0.44524
3	10.1	0.17537	0.37379
4	50.5	0.63608	

توجه داشته باشیم که در درون یابی ستون P_{i1} از ستون قبل از استفاده شده است، به طوری که مشاهده مقدار P_{21} (i=2) از ستون قبل از آن(j=0) و با استفاده از مقادیر مربوط به i=2 و i=3 بدست آمده است، پس P_{41} نمایش چند جمله ای درجه یک است که از دو نقطه متوالی ستون قبل از خود می گذرد.

حال اگر بخواهیم با استفاده از درون یابی درجه دو تقریب بزنیم دوباره با استفاده از همان فرمول قبلی مقادیر ستون i=2 را بدست می آوریم.

$$P_{i\,j} = \frac{(x - x_i) \times P_{i+1,\,j-1} + (x_{i+j} - x) \times P_{i,\,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$$

برای روشن تر شدن مطلب، مقدار P_{22} را محاسبه می نماییم: (اگر دقت کنیم می فهمیم مقدار i=2و j=2 می باشند)

$$P_{22} = \frac{(27.5 - 41.6) \times 0.37379 + (50.5 - 27.5) \times 0.44524}{50.5 - 41.6} = 0.55843$$

i	x(i)	$f_i=P_i$	P_{i1}	P_{i2}
0	32	0.52992	0.46009	0.462
1	22.2	0.37784	0.456	0.46071
2	41.6	0.66393	0.44524	0.55843
3	10.1	0.17537	0.37379	
4	50.5	0.63608		

توجه داشته باشیم که در درون یابی ستون P_{i2} از ستون قبل از استفاده شده است، به طوری که مشاهده مقدار P_{22} (i=2) از ستون قبل از(j=1) آن و با استفاده از مقادیر مربوط به i=2 و i=3 بدست آمده است، اما در اینجا P_{i2} نمایش چند جمله ای درجه دو است که از دو نقطه متوالی ستون قبل از خود و از سه نقطه ستون دوتا قبل از می گذرد. (چونکه P_{22} از دو نقطه ستون قبل از خود می گذرد که آن دو نقطه به سه نقطه ستون قبل از خودشان وابسته می باشند)

به همین منوال می توانیم دو ستون بعدی که نشان دهنده تقریب درجه سه و چهار است را بدست آوریم.

i	x(i)	$f_i=P_i$	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}
0	32	0.52992	0.46009	0.462	0.46174	0.45754
1	22.2	0.37784	0.456	0.46071	0.47901	
2	41.6	0.66393	0.44524	0.55843		
3	10.1	0.17537	0.37379			
4	50.5	0.63608				

حال اگر کمی دقت کنیم در می یابیم که- همانطور که در ابتدا گفتیم- در این روش بر خلاف روش لاگرانژ برای تقریب های بالاتر از تقریب یک درجه پایین، یا به عبارتی برای یافتن مقدار هر ستون از ستون قبلی استفاده میشود.

۵-۳- روش تفاضل محدود

در روش های لاگرانژ و نیویل برای درون یابی نقطه جدید باز باید تمام محاسبات را انجام دهیم و به علت زیاد بودن محاسبات این کار وقت زیادی از ما می گیرد، اما در این روش به علت کم بودن محاسبات دیگر این مشکل را ندارد.

در این جا هم مفروضات مسئله همانند دو مورد قبل می باشد.

i	x(i)	f_i
0	x_0	$f(x_0)$
1	x_1	$f(x_1)$
2	x_2	$f(x_2)$
3	x_3	$f(x_3)$
4	x_4	$f(x_4)$

به فرض ما می خواهیم مقدار f برای یک x بین x_1 و x_2 بدست آوریم، برای تقریب f می توانیم از چند جمله ای زیر استفاده کنیم.

$$P_n(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + (x-x_0)(x-x_1)a_2 + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})a_n$$

حال برای تعیین مقادیر a_i به روش زیر عمل می کنیم

می دانیم که چند جمله ای $P_n(x)$ در نقاط x_0 ، x_1 ، ... ، x_{n-1} باید برابر f(x) در همان نقاط باشد در نتیجه داریم

$$f(x_0) = P_n(x_0) = a_0 \rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f(x_1) = P_n(x_1) = a_0 + (x_1 - x_0)a_1 \rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

حال برای راحتی در محاسبات از علامت استاندارد زیر استفاده می کنیم.

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$a_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$$

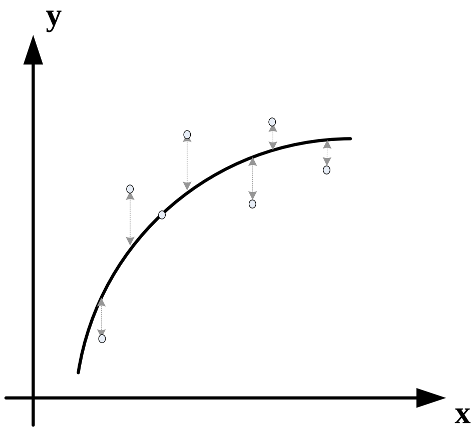
که

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
x_0	f_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	f_4				

در نتیجه با استفاده از چند جمله ای $P_n(x)$ می توان مقدار f برای xهای بین x_0 و x_4 تقریب زد. (توجه شود که چند جمله ای ما در این حالت درجه چهار است)

۵-۴- روش حداقل مربعات



همانطور که در شکل مقابل نشان داده شده است، مقدار f در نقاط مشخص شده و تابع برازش داده شده یکسان نمی باشد. اختلاف این دو، خطا می باشد.

در روش حداقل مربعات مجموع مربع خطاها را مینیمم خواهیم کرد.

یعنی عبارت زیر را مینیمم خواهیم کرد:

$$e = (Y1 - y1)^2 + (Y2 - y2)^2 + \dots$$

۵-۴-۱- روش حداقل مربعات برای توابع جبری معمولی

در این قسمت می خواهیم به دو دسته عدد x و y (همانند جدول زیر)، تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ را برازش دهیم. (برای توابع جبری با درجات بالاتر نیز به همین روش عمل خواهیم کرد.)

X	1	3	4	5.5	7	9	10	11	11.8
Y	5	7	1	2	1.8	6.4	5.3	6.9	2

$$e^2=\sum(y-Y)^2,\; Y=ax^2+bx+c \Rightarrow e^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y-ax^2-bx-c\right)^2$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial a}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}-2x^2(y-a\,x^2-bx-c)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(x^2y-ax^4-bx^3-cx^2)=0$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial b}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}-2x(y-a\,x^2-bx-c)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(xy-ax^3-bx^2-cx)=0$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial c}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}-2(y-a\,x^2-bx-c)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(y-ax^2-bx-c)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x^4+b\sum_{i=1}^{n}x^3+c\sum_{i=1}^{n}x^2=\sum_{i=1}^{n}x^2y\\ a\sum_{i=1}^{n}x^3+b\sum_{i=1}^{n}x^2+c\sum_{i=1}^{n}x=\sum_{i=1}^{n}xy\\ a\sum_{i=1}^{n}x^2+b\sum_{i=1}^{n}x+nc=\sum_{i=1}^{n}xy \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}x^4 & \sum_{i=1}^{n}x^3 & \sum_{i=1}^{n}x^2\\ \sum_{i=1}^{n}x^3 & \sum_{i=1}^{n}x^2 & \sum_{i=1}^{n}x\\ \sum_{i=1}^{n}x^2 & \sum_{i=1}^{n}x & n \end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x^2y\\ \sum_{i=1}^{n}xy\\ \sum_{i=1}^{n}y\end{bmatrix}$$

از حل این دستگاه سه معادله سه مجهول، مقادیر a و b و c و در نتیجه ضابطه تابع مورد نظر ما به دست می آید.

فصل هفتم

انتگرالگیری عددی

۵- انتگرالگیری عددی

عمده روش های انتگرالگیری بر این مبنا استوارند که با جایگذاری انتگرال ده با یک تابع ساده، مقدار انتگرال را محاسبه می کنند.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x) + \int_a^b R_n(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)$$

۵-۱- روش های انتگرالگیری نیوتن کوتز

در روش های انتگرالگیری نیوتن کوتز از بسط نیوتن گریگوری استفاده می شود. این بسط از قرار زیر است.

$$P_n(x) = f_0 + S\,\Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots,\ \ S = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

۵-۱-۱-روش نیوتن کوتز ۱

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (f_0 + S\,\Delta f_0)\,dx\,,\quad S = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},\ \begin{cases} x \to x_0 \Rightarrow S \to 0 \\ x \to x_s \Rightarrow S \to 1 \end{cases}$$

$$I = h\int_0^1 (f_0 + S\,\Delta f_0)\,dS = h(f_0 S + \frac{1}{2}S^2 \Delta f_0)_0^1 = h(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0) = h(f_0 + \frac{1}{2}(f_1 - f_0))$$

$$= h(\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1) = \frac{h}{2}(f_1 + f_0)$$

$$\text{خطا} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{S(S-1)}{2}\Delta^2 f_0\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{S(S-1)}{2} h^2 f''(\xi)\,dx = \int_0^1 \frac{S(S-1)}{2} h^3 f''(\xi)\,dS$$

در بالا از فرض $\frac{\Delta^2 f_0}{h^2} \approx f''(\xi)$ استفاده شد.

قضیه میانگین وزن دار: به شرطی که $g(x)$ در بازه (a, b) تغییر علامت ندهد، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx,\ \ a < \xi < b$$

از آنجائیکه $\frac{S(S-1)}{2}$ در بازه $(0, 1)$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر است، داریم:

$$\text{خطا} = h^3\ f''(\xi_1)\int_0^1 \frac{S(S-1)}{2}\,dS = h^3 f(\xi_1)\left(\frac{S^3}{6} - \frac{S^2}{4}\right)_0^1 = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi_1)$$

۵-۱-۲-روش نیوتن کوتز ۲

$$I=\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_2}(f_0+S\,\Delta f_0+\frac{S(S-1)}{2}\Delta^2 f_0)\,dx=h\int_0^2(f_0+S\,\Delta f_0+\frac{S(S-1)}{2}\Delta^2 f_0)\,dS$$
$$=h(2f_0+2\Delta f_0+\frac{1}{3}\Delta^2 f_0)=h(2f_0+2(f_1-f_0)-(f_1-f_0))=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$$
$$\text{خطا}=\int_{x_0}^{x_2}\frac{S(S-1)(S-2)}{6}\Delta^3 f_0\,dx=...=0$$
$$\text{خطا}=\int_{x_0}^{x_2}\frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{24}\Delta^4 f_0\,dx=\int_0^2\frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{24}h^5 f^{(IV)}(\xi)\,dS$$
$$=h^5 f^{(IV)}(\xi_1)\int_0^2\frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{24}dS=...=-\frac{1}{90}h^5 f^{(IV)}(\xi_1)$$

۵-۱-۳-روش نیوتن کوتز ۳

$$I=\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_3}(f_0+S\,\Delta f_0+\frac{S(S-1)}{2}\Delta^2 f_0+\frac{S(S-1)(S-2)}{6}\Delta^3 f_0)\,dx$$
$$=h\int_0^3(f_0+S\,\Delta f_0+\frac{S(S-1)}{2}\Delta^2 f_0+\frac{S(S-1)(S-2)}{6}\Delta^3 f_0)h\,dS$$
$$=h(3f_0+\frac{9}{2}\Delta f_0+\frac{9}{4}\Delta^2 f_0+\frac{3}{8}\Delta^3 f_0)=\frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$$
$$\text{خطا}=\int_{x_0}^{x_3}\frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{24}\Delta^4 f_0\,dx=\int_0^3\frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{24}h^5 f_0^{(IV)}$$

$$=...=-\frac{3}{80}h^5 f^{(IV)}(\xi_1)$$

۵-۲-روش ذوزنقه

روش ذوزنقه از بسط روش نیوتن کوتز ۱ به دست می آید:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx=\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$$
$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})=\frac{h}{2}(f_1+f_2+f_2+f_3+...+f_{n+1})=\frac{h}{2}(f_1+2f_2+...+2f_n+f_{n+1})$$
$$\text{خطای ناحیه ای}=\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi_i)=-\frac{1}{12}h^3(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+...+f''(\xi_n))$$

نکته: اگر f'' روی (a, b) پیوسته باشد، مقداری برای ξ وجود دارد به گونه ای که:

$$n = \frac{b-a}{h} \quad و \quad n\,f''(\xi) = \text{مجموع } f''(\xi_i) \text{ ها}$$

$$\text{خطای کل} = -\frac{1}{12}h^3 n\, f''(\xi) = -\frac{1}{12}\frac{b-a}{h}h^3 f''(\xi) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) = O(h^2)$$

۵-۳-روش سیمپسون یک سوم

فرمول روش سیمپسون یک سوم از بسط نیوتن کوتز ۲ به دست می آید.

$$\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_{2i-1} + 4f_{2i} + f_{2i+1})$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{3}(f_{2i-1} + 4f_{2i} + f_{2i+1}) = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n} + f_{2n+1})$$

$$\text{خطا} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{90}h^5 f^{(IV)}(\xi_i) = -\frac{1}{90}h^5 \sum f^{(IV)}(\xi_i) = -\frac{1}{90}h^5 n\, f^{(IV)}(\xi) = -\frac{1}{90}h^5 \frac{b-a}{2h} f^{(IV)}(\xi)$$

$$= -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(IV)}(\xi)$$

۵-۴-روش سیمپسون سه هشتم

فرمول روش سیمپسون سه هشتم از بسط نیوتن کوتز ۳ به دست می آید.

$$\int_{x_{3i-2}}^{x_{3i+1}} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}(f_{3i-2} + 3f_{3i-1} + 3f_{3i} + f_{3i+1})$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\sum_{i=1}^{n}(f_{3i-2} + 3f_{3i-1} + 3f_{3i} + f_{3i+1})$$

$$= \frac{3h}{8}(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 3f_6 + \ldots + 2f_{3n-2} + 3f_{3n-1} + 3f_{3n} + f_{3n+1})$$

$$\text{خطا} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{3}{80}h^5 f^{(IV)}(\xi_i) = -\frac{3}{80}h^5 n\, f^{(IV)}(\xi) = -\frac{3}{80}h^5 \frac{b-a}{3h} f^{(IV)}(\xi) = -\frac{b-a}{80}h^4 f^{(IV)}(\xi)$$

۵-۴-روش انتگرالگیری رامبرگ

اگر I را مقدار دقیق انتگرال زیر فرض کنیم:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

می توان مقدار این انتگرال را با استفاده از روش ذوزنقه به شکل زیر تخمین زد:

$$T_n = h(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + \frac{1}{2}f_n)$$

حال با استفاده از فرمول نیوتن گریگوری و محاسبه خطا از قانون جمله بعدی داریم:

$$\text{خطا}: I - T_n = C_1 h^2 + C_2 h^4 + C_3 h^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = C_1 (\frac{h}{2})^2 + C_2 (\frac{h}{2})^4 + C_3 (\frac{h}{2})^6 + \ldots = \frac{C_1}{4} h^2 + \frac{C_2}{16} h^4 + \frac{C_3}{16} h^6 + \ldots$$

$$(4I - 4T_{2n}) - (I - T_n) = (\frac{C_2}{4} - C_2) h^4 + (\frac{C_3}{16} - C_3) h^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow 3I - (4T_{2n} - T_n) = (\frac{C_2}{4} - C_2) h^4 + (\frac{C_3}{16} - C_3) h^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow I - \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{\frac{C_2}{4} - C_2}{3} h^4 + \frac{\frac{C_3}{16} - C_3}{3} h^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow I - \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = d_1 h^4 + d_2 h^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow T_{2n}^{(1)} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_n &= h(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + \frac{1}{2} f_n) \\ T_{2n} &= \frac{h}{2}(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + \frac{1}{2} f_{2n}) \\ T_{2n}^{(1)} &= \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \ldots = \frac{1}{3}\frac{h}{2}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{2n-1} + f_{2n}) \end{aligned}}$$

$$I - T_{4n} = C_1 (\frac{h}{4})^2 + C_2 (\frac{h}{4})^4 + C_3 (\frac{h}{4})^6 + \ldots = \frac{C_1}{4} (\frac{h}{2})^2 + \frac{C_2}{16} (\frac{h}{2})^4 + \frac{C_3}{64} (\frac{h}{2})^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow (4I - 4T_{4n}) - (I - T_{2n}) = (\frac{C_2}{4} - C_2)(\frac{h}{2})^4 + (\frac{C_3}{16} - C_3)(\frac{h}{2})^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow 3I - (4T_{4n} - T_{2n}) = (\frac{C_2}{4} - C_2)(\frac{h}{2})^4 + (\frac{C_3}{16} - C_3)(\frac{h}{2})^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow I - \frac{4T_{4n} - T_{2n}}{3} = d_1 (\frac{h}{2})^4 + d_2 (\frac{h}{2})^6 + \ldots$$

$$\Rightarrow T_{4n}^{(1)} = \frac{4T_{4n} - T_{2n}}{3}$$

$$I - T_{2n}^{(1)} = d_1 h^4 + d_2 h^6 + d_3 h^8 + \dots$$

$$I - T_{4n}^{(1)} = d_1 (\frac{h}{2})^4 + d_2 (\frac{h}{2})^6 + d_3 (\frac{h}{2})^8 + \dots$$

$$\Rightarrow (16I - 16T_{4n}^{(1)}) - (I - T_{2n}^{(1)}) = (\frac{d_2}{4} - d_2) h^6 + (\frac{d_3}{16} - d_3) h^8 + \dots$$

$$\Rightarrow I - \frac{16T_{4n}^{(1)} - T_{2n}^{(1)}}{15} = e_1 h^6 + e_2 h^8 + \dots$$

$$\Rightarrow T_{4n}^{(2)} = \frac{16T_{4n}^{(1)} - T_{2n}^{(1)}}{15}$$

$$I - T_{8n} = C_1 (\frac{h}{8})^2 + C_2 (\frac{h}{8})^4 + C_3 (\frac{h}{8})^6 + \dots$$

$$I - T_{4n} = C_1 (\frac{h}{4})^2 + C_2 (\frac{h}{4})^4 + C_3 (\frac{h}{4})^6 + \dots$$

$$\Rightarrow T_{8n}^{(1)} = \frac{4T_{8n} - T_{4n}}{3}$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$T_{2^m n}^{(k)} = \frac{4^k T_{2^m n}^{(k-1)} - T_{2^{m-1} n}^{(k-1)}}{4^k - 1}$$

بدین ترتیب می توان جدول زیر را تکمیل نمود. قطر این جدول به سمت جواب میل می کند:

m=0	T_n			
m=1	T_{2n}	$T_{2n}^{(1)}$		
m=2	T_{4n}	$T_{4n}^{(1)}$	$T_{4n}^{(2)}$	
m=3	T_{8n}	$T_{8n}^{(1)}$	$T_{8n}^{(2)}$	$T_{8n}^{(3)}$

فصل هشتم

معادلات دیفرانسیل

۸-۱-روش رانج کوتا

$$\begin{cases} y' = f(x_n, y_n)\ ,\ \ y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + a\,k_1 + bk_2 \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_n + \alpha\,h, y_n + \beta\,k_1) \end{cases}$$

خطای موضعی $= L = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_n) + \dots$$

$$y = f(x, y)$$

$$y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\,f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x_n} + f(x_n, y(x_n))\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y}\right) + O(h^3) \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 = y_n + ahf(x_n, y_n) + bhf(x_n + \alpha h, y_n + \beta hf(x_n, y_n))$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= \sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^s\,f(x,y) \\ &= f(x,y) + h\frac{\partial}{\partial x}\,f(x,y) + k\frac{\partial}{\partial y}\,f(x,y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,f(x,y) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,f(x,y) + hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,f(x,y) + \dots \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + ahf_n + bh\left(f_n + \alpha h\frac{\partial f_n}{\partial x} + \beta h\,f_n\frac{\partial f_n}{\partial y} + O(h^2)\right)$$

$$= y_n + (a+b)hf_n + \alpha bh^2\frac{\partial f_n}{\partial x} + \beta bh^2\,f_n\frac{\partial f_n}{\partial y} + O(h^3) \quad (2)$$

حال با مساوی قرار دادن مؤلفه های متناظر در (1) و (2) داریم:

$$\begin{matrix} (a+b)\,h = h \\ \alpha\,b\,h^2 = \dfrac{h^2}{2!} \\ \beta\,b\,h^2 = \dfrac{h^2}{2!} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b = 1 \\ \alpha\,b = \dfrac{1}{2} \\ \beta\,b = \dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

همانطور که مشاهده می کنید به یک دستگاه سه معادله، چهار مجهول برخورده ایم. با فرض یکی از مجهولات بقیه را محاسبه می کنیم:

$$a=0, b=0, \alpha=\beta=\frac{1}{2}$$
$$a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, \alpha=\beta=1$$
$$a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}, \alpha=2, \beta=3$$

از میان این حالات، حالت وسط که بهینه ترین حالت می باشد را انتخاب می کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ k_1=h\,f(x_n, y_n) \\ k_2=h\,f(x_n+h, y_n+k_1) \end{cases}$$