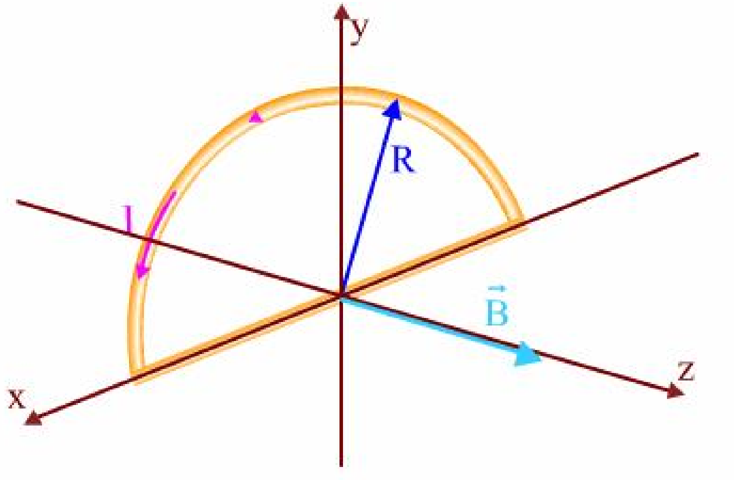
مثال ۱ :

یک نیم حلقه دایروی به شعاع R که حامل جریان I است را در نظر بگیرید . این نیم حلقه در صفحه xy قرار دارد اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B\hat{k}$ به آن اعمال شود. نیروی وارد به این نیم حلقه را پیدا کنید.

حل :

اگر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نیروی های وارد بر قسمت مستقیم و قسمت نیم دایره باشند.



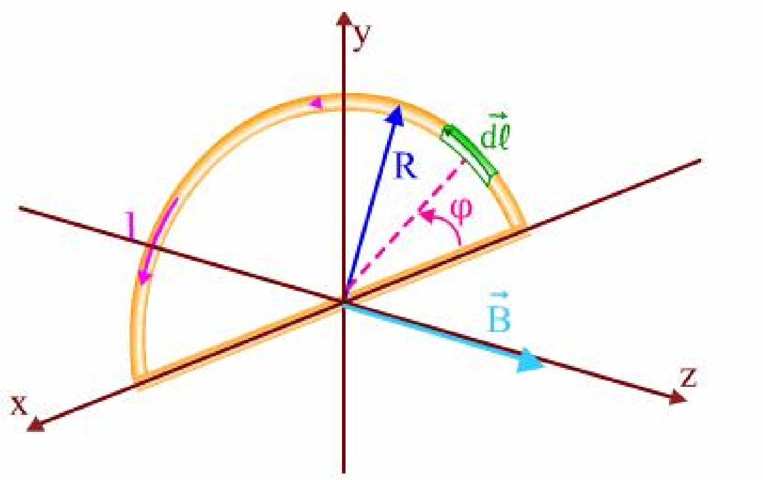
حل:

$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell} \times \vec{B} = I(2R\hat{i}) \times B\hat{k} = 2IRB(-\hat{j})$$

برای محاسبه $\vec{F}_2$ از رابطه کلی $\vec{F} = I\int d\vec{\ell} \times \vec{B}$ استفاده می نماییم.

$$d\vec{\ell} = R\, d\varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi$$



$$\vec{F}_2 = I\int_0^{\pi} Rd\varphi\hat{\varphi} x B\hat{k}$$
$$= IRB\int_0^{\pi} \hat{\rho} d\varphi$$
$$= IRB\int_0^{\pi} (\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\sin\varphi)\, d\varphi$$
$$= IRB(\hat{i}\sin\varphi - \hat{j}\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = 2IRB(\hat{j})$$

پس نیروی خالص موثر بر نیم حلقه:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

این نتیجه با آنچه که قبلاً به دست آوردیم در توافق است. یعنی :

✓ نیروی وارد به حلقه حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت برابر صفر است.

مثال۲:

نشان دهید که نسبت میدان الکتریکی هال E_H به میدان الکتریکی E میدان مولد جریان عبارت است از :

$$\boxed{\frac{E_H}{E} = \frac{B}{ne\rho}}$$

که در آن ρ مقاومت ویژه ماده است .

حل :

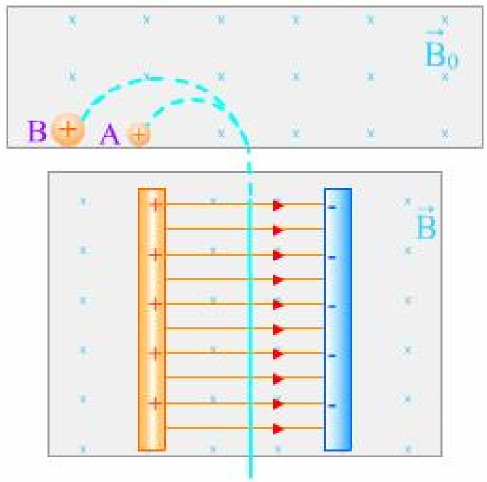
$$E_H = v_d B$$
$$E = \frac{J}{\sigma} = \rho J \quad \Longrightarrow \quad \frac{E_H}{E} = \frac{v_d B}{\rho J}$$

با استفاده از رابطه $J = \rho v_d = env_d$ برای چگالی جریان :

$$\frac{E_H}{E} = \frac{v_d B}{\rho ne V_d} = \frac{B}{ne\rho}$$

مثال ۳

ذره A با بار q و جرم m_A و ذره B با بار 2q و جرم m_B توسط پتانسیل ΔV از حالت سکون شتاب داده می‌شوند ، بعد توسط میدان مغناطیسی یکنواختی روی مسیرهای نیم دایره ای منحرف می‌شوند . شعاع مدارهای ذرات A و B به ترتیب R و 2R است . اگر جهت میدان مغناطیسی عمود به سرعت ذرات باشد نسبت جرم هایشان چقدر است ؟



حل :

انرژی جنبشی به دست آمده توسط ذرات برابر است با :

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

در نتیجه:

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

بارها روی نیم دایره حرکت می‌کنند، لذا نیروی مغناطیسی شعاعی و به طرف مرکز یعنی نیروی جانب به مرکز.

از قانون دوم نیوتن :

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

شعاع دایره را می‌توان از رابطه فوق به دست آورد :

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}}$$

که نشان می دهد r با $\left(\frac{m}{q}\right)^{1/2}$ متناسب است .

نسبت جرم‌ها از طریق زیر قابل استخراج است .

$$\frac{r_A}{r_B}=\frac{(m_A/q_A)^{\frac{1}{2}}}{(m_B/q_B)^{\frac{1}{2}}}=\frac{R}{2R}=\frac{(m_A/q)^{\frac{1}{2}}}{(m_B/2q)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\frac{m_A}{m_B}=\frac{1}{8}}$$

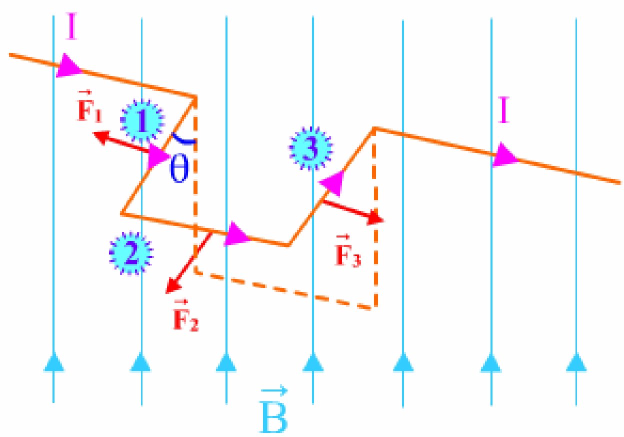
مثال ۴:

یک سیم نازک حامل جریان I مطابق شکل می‌تواند حول محور y دوران کند. هرگاه میدان مغناطیسی B در جهت محور z به سیم مزبور اعمال شود:

الف) نیروی مغناطیسی موثر بر اضلاع ۱،۲و۳ را تعیین کنید. (طول هر یک از اضلاع برابر L است.)

ب) بردار گشتاور نیروی مغناطیسی موثر را محاسبه نمائید.

ج) با فرض اینکه چگالی جرمی سیم λ است، مقدار زاویه θ رابه دست آورید.



حل:

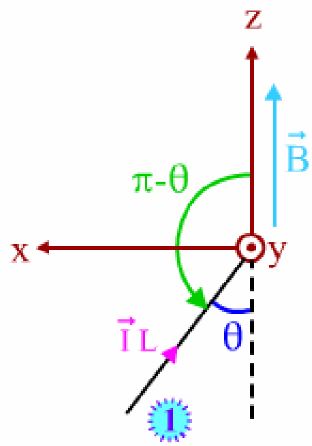
نیروی مغناطیسی موثر بر اضلاع

$$\vec{F}=I\,\vec{\ell}\times\vec{B}$$

$$\vec{F}_1=I\,\vec{L}\times\vec{B}=ILB\sin(\pi-\theta)\,(-\hat{j})=ILB\sin\theta(-\hat{j})$$

$$\vec{F}_3=I\,\vec{L}\times\vec{B}=ILB\sin\theta(\hat{j})$$

لذا برآیند نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ برابر صفر است.



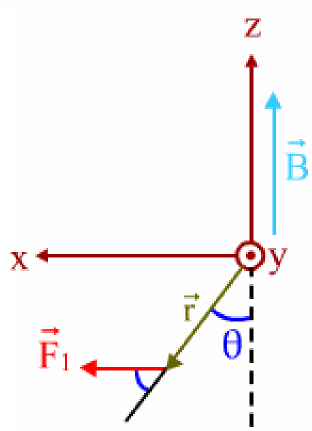
$$\vec{F}_2 = ILB\,(\hat{i})$$

گشتاور الکتریکی :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau}_e = LF_2 \sin(\pi/2 - \theta)\,(-\hat{j})$$

$$\vec{\tau}_e = IL^2B\cos\theta\,(-\hat{j})$$



گشتاور مکانیکی :

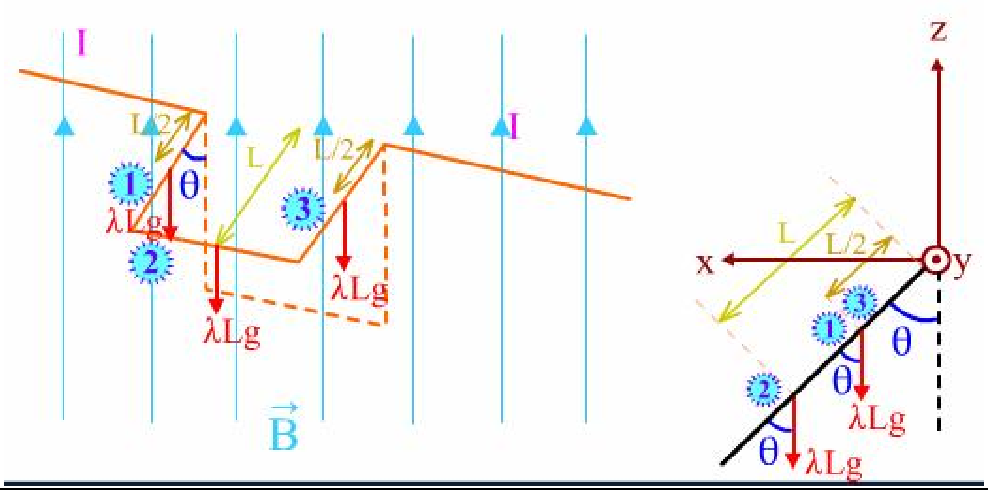
$$\vec{\tau}_m = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3$$

$$= \lambda LgL\sin\theta\,(\hat{j}) + \frac{L}{2}\lambda gL\sin\theta\,(\hat{j}) + \frac{L}{2}\lambda gL\sin\theta\,(\hat{j})$$

$$\vec{\tau}_m = (\lambda\ L^2g\sin\theta + \lambda\ L^2g\sin\theta)\,(\hat{j}) = 2\,\lambda L^2g\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_e = \vec{\tau}_m \Rightarrow IL^2B\cos\theta = 2\lambda L^2g\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{IB}{2\lambda g}$$



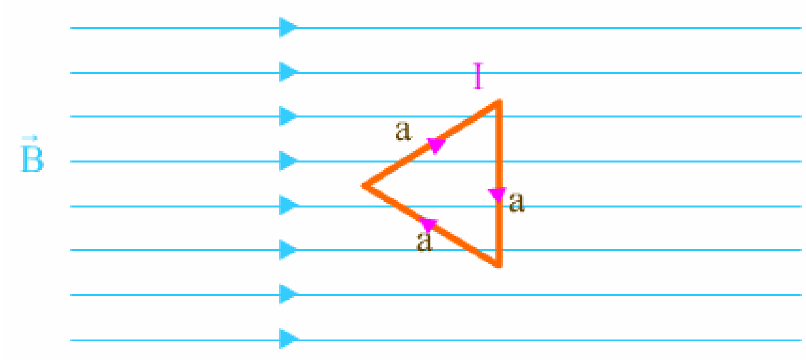
مثال ۵:

سیمی به شکل مثلث متساوی الاضلاع حامل جریان I مطابق شکل در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار گرفته است.

الف ـ مطلوب است محاسبه نیروی وارد بر هر یک از اضلاع مثلث.

(میدان مغناطیسی در صفحه مثلث قرار دارد.)

ب ـ گشتاور مغناطیسی وارد به سیم مثلثی شکل چه مقدار است؟



حل:

نیروی وارد به اضلاع :

$$F = IL \times B$$

$$\vec{F}_1 = I\,(\,a\cos30^\circ\,\hat{i} + a\sin30^\circ\,\hat{j}\,) \times (\,\hat{i}\,B)$$

$$\vec{F}_1 = IaB\sin30^\circ(\,-\hat{k}\,)$$

$$\vec{F}_2 = Ia\,(\,-\hat{j}\,) \times \hat{i}\,B = IaB\,(\,\hat{k}\,)$$

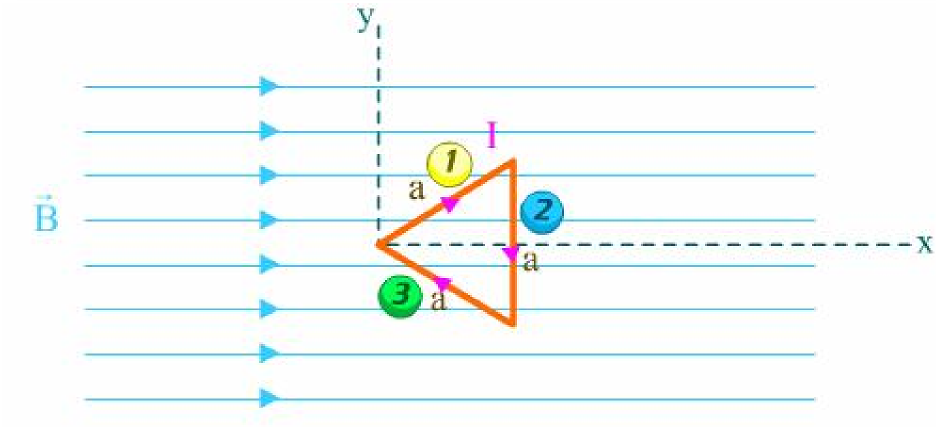
$$\vec{F}_3 = I\,(\,-a\cos30^\circ\,\hat{i} + a\sin30^\circ\,\hat{j}\,) \times \hat{i}\,B = IaB\sin30^\circ\,(\,-\hat{k}\,)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

جمع نیروهای وارد به اضلاع مثلث صفراست. زیرا نیروی وارد به هر حلقه حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت برابر صفر است.

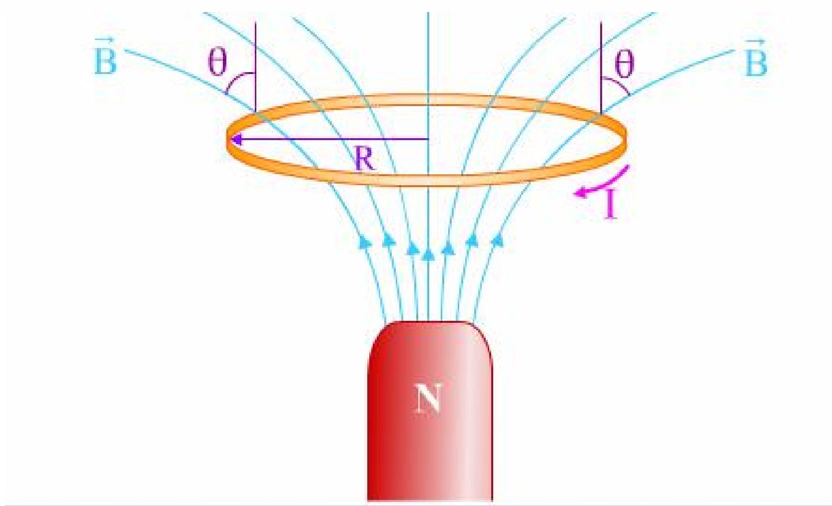
گشتاور :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = IA\,(-\hat{k}) \times B\,\hat{i} = IAB\,(-\hat{j})$$



مثال ۶:

یک آهنربا که قطب شمالش به‌طرف بالاست روی محور تقارن یک حلقه حامل جریان I مطابق شکل قرار دارد میدان مغناطیسی با خط قائم زاویهθ می‌سازد ، نیروی مغناطیسی وارد به حلقه را محاسبه نمائید .



حل:

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = B\cos\theta\,\hat{k} + B\sin\theta\,\hat{\rho}$$

$$I d\vec{\ell} = -IR\, d\varphi\, \hat{\varphi}$$

$$\vec{F} = -IR \int_0^{2\pi} d\varphi\, \hat{\varphi} \times (B\cos\theta\,\hat{k} + B\sin\theta\,\hat{\rho})$$

$$= -IR\,B\cos\theta \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\varphi} - IR\,B\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,(-\hat{k})$$

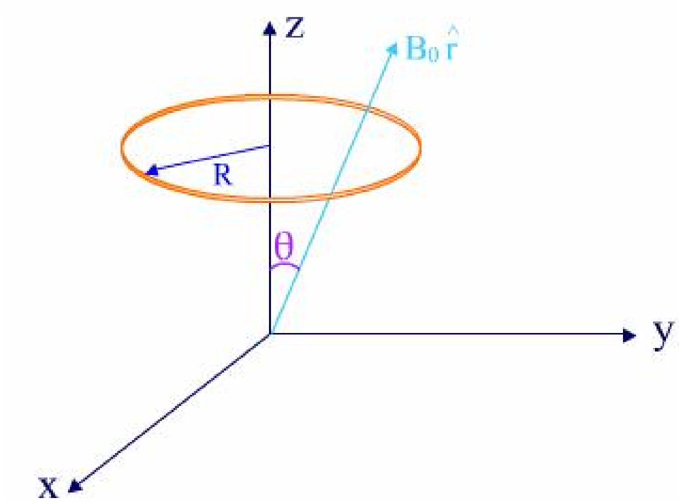
$$= 2\pi RBI \sin\theta\, \hat{k}$$

نیرو در جهت $+\hat{k}$ است لذا دافعه است .

مثال ۷ :

حلقه ای دایروی به شعاع R و چگالی بار خطی λ با چه سرعت زاویه ای ω بچرخد تا حلقه معلق باقی بماند ؟

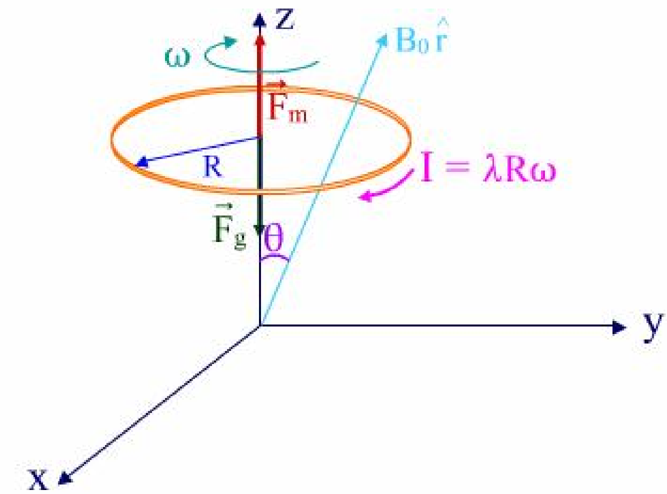
$\vec{B}$ با رابطه $B_0\,\hat{r}$ داده می‌شود .



حل:

$I = \lambda v = \lambda R\omega$

جهت جریان باید به نحوی باشد که نیروی مغناطیسی به طرف بالا به حلقه وارد شود .
لذا با استفاده از نتیجه مثال ۶ جریان باید ساعتگرد باشد . یعنی حلقه باید ساعتگرد
بچرخد (مطابق شکل)



پس نیروی مغناطیسی وارد به حلقه :

$$\vec{F}_m = 2\pi RBI \sin\theta\,\hat{k}$$

$$= 2\pi RB\,\lambda R\omega \sin\theta\,\hat{k} = 2\pi R^2 B\lambda\omega \sin\theta\,\hat{k}$$

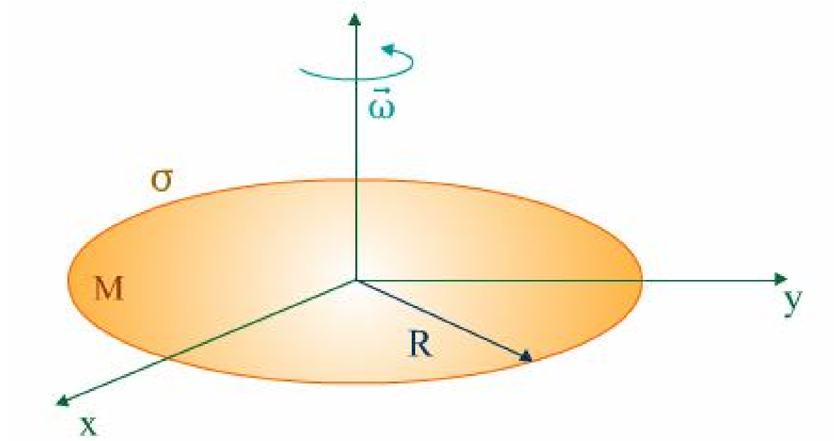
این نیرو باید برابر نیروی جاذبه $\vec{F}_g = m\vec{g}$ باشد یعنی :

$$2\pi R^2 B_0 \lambda\omega \sin\theta = mg$$

$$\boxed{\omega = \frac{mg}{2\pi R^2 B_0 \lambda \sin\theta}}$$

مثال۸:

دیسک غیر هادی به جرم M و شعاع R دارای بار سطحی به چگالی σ است و با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می چرخد. ممان دو قطبی مغناطیسی دیسک را محاسبه نمایید.

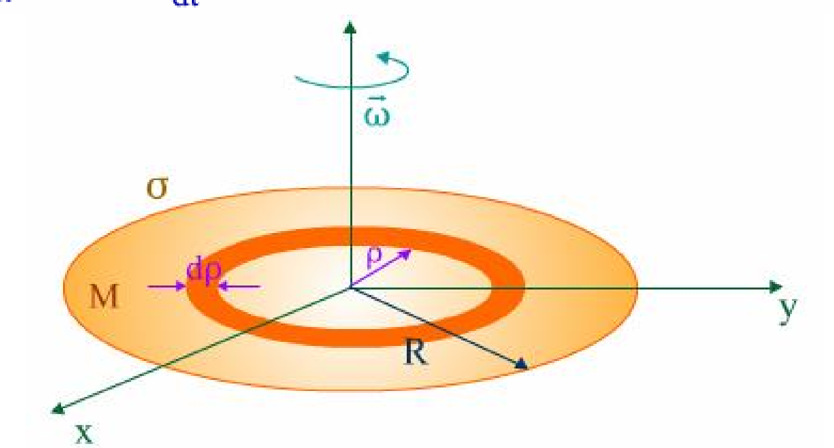


حل:

حلقه ای به شعاع ρ و عرض$d\rho$ مطابق شکل روی دیسک در نظر بگیرید جریان الکتریکی این حلقه dI را می‌توانیم محاسبه نماییم بار روی المان سطح دیسک :

$$dq = \sigma\rho d\rho d\varphi$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma\rho d\rho \, \frac{d\varphi}{dt} = \sigma\rho\omega d\rho$$



ممان دو قطبی مغناطیسی این حلقه :

$$d\vec{\mu} = AdI\,\hat{k} = \pi\rho^2\sigma\rho\omega d\rho\hat{k}$$

$$= \pi\sigma\omega\rho^3 d\rho\hat{k}$$

$$\vec{\mu} = \pi\sigma\omega\hat{k}\int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi\sigma\omega\rho^4}{4}\Big|_0^R \hat{k} = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mu} = \frac{\pi\sigma R^4\vec{\omega}}{4}$$

نکته : بر حسب بارکل روی دیسک Q:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{4} QR^2 \vec{\omega}$$

اندازه حرکت زاویه ای دیسک:

$$\vec{L} = (\frac{1}{2} MR^2)\, \vec{\omega}$$

لذا ممان دو قطبی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{Q}{2M} \vec{L}}$$

این یک نتیجه کلی است .

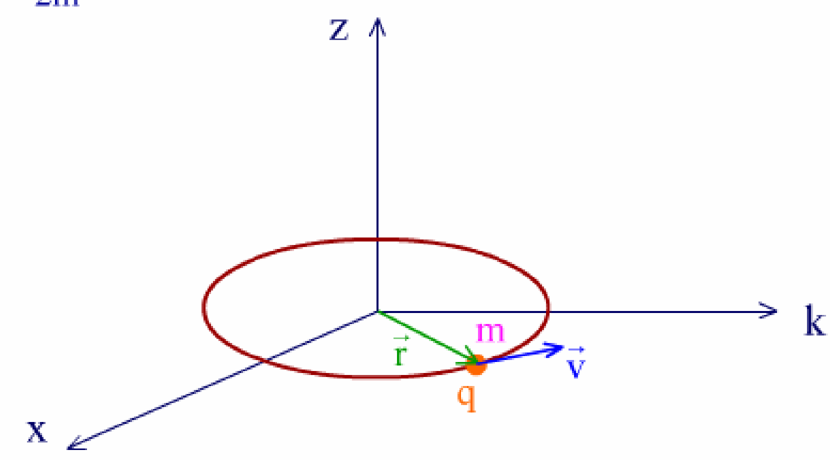
مثال ۹ :

ذره‌ای به‌جرم m وبا بار q روی دایره‌ای به شعاع r با سرعت زاویه‌ای ω حرکت‌می‌کند.

a - نشان دهید که ممان دو قطبی مغناطیسی آن $\mu = \frac{1}{2} q\, \omega\, r^2$

b - نشان دهید که اندازه حرکت زاویه ای آن $L = m\, r^2 \omega$

c - نشان دهید که بردارهای ممان دو قطبی مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه ای طبق رابطه زیر به هم مربوط اند؛ $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$



حل:

ممان دو قطبی مغناطیسی

$$\mu = I\, A$$

$$I = qv = q\ \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\mu = \frac{q\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2}\, q\, \omega\, r^2$$

اندازه حرکت زاویه ای

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \Rightarrow \quad L = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega$$

رابطه $\vec{\mu}$ و $\vec{L}$

اگر بار q مثبت باشد

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\,q\,\omega\,r^2\,\hat{k}$$

و بردار اندازه حرکت زاویه ای

$$\vec{L} = m\,r^2\,\omega\,\hat{k}$$

رابطه $\vec{\mu}$ و $\vec{L}$

اگر بار q مثبت باشد

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\,q\,\omega\,r^2\,\hat{k}$$

و بردار اندازه حرکت زاویه ای

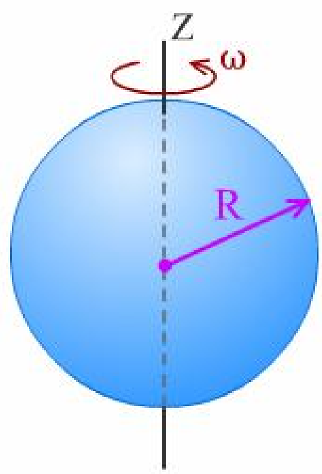
$$\vec{L} = m\,r^2\,\omega\,\hat{k}$$

پس از مقایسه دو رابطه برداری فوق

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\,\vec{L}$$

مثال ۱۰:

فرض کنید الکترون یک کره به شعاع R است که بار و جرم آن در حجمش به طور یکنواخت توزیع شده است، ممان مغناطیسی الکترون μ را محاسبه نمایید و نشان دهید که $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\frac{e}{M}\vec{L}$ که در آن اندازه حرکت اسپین $L = I\,\omega = \frac{2}{5}MR^2\omega$ و M جرم الکترون و e بار الکترون است.



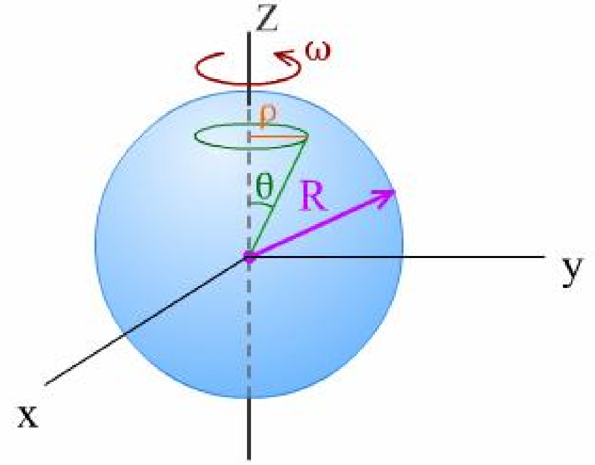
حل:

$$d\mu = \pi\rho^2 dI = \pi r^2 \sin^2\theta\, dI$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{dt} = \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, \omega$$

$$d\mu = \pi r^2 \sin^2\theta\,(\rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, \omega)$$

$$= \pi\,\rho\,\omega\, r^4 \sin^3\theta\, dr\, d\theta$$



$$\mu = \rho\pi\omega \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, dr$$

$$= \rho\pi\omega \frac{1}{5} R^5 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\rho\pi\omega R^5}{5} \int_0^{\pi} \sin\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta = \frac{\rho\omega\pi R^5}{5} \times \frac{4}{3}$$

$$\vec{\mu} = \frac{4}{15}\rho\pi\omega R^5 \hat{k}$$

$$\vec{L} = \frac{2}{5} MR^2 \vec{\omega}$$

$$e = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$ بارکل الکترون :

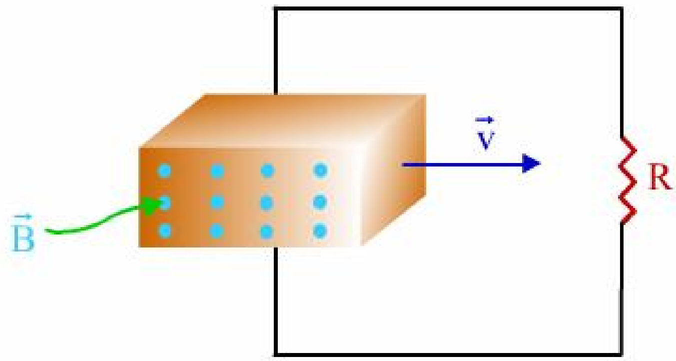
$$\vec{\mu} = \frac{1}{5}\omega e R^2 \hat{k} = \frac{1}{5} e R^2 \frac{2M}{2M}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\frac{e}{M}\vec{L}^2$$

مثال ۱۲ :

یک نوار مسی به عرض d با سرعت اولیه v در میدان مغناطیسی ثابت که عمود بر سطح نوار وبه سمت خارج از آن است کشیده می‌شود. مقاومت R به دو سرعرضی نوار مطابق شکل بسته شده است.

الف – جریان الکتریکی گذرنده ازR را به دست آورید.

ب – توان مصرفی درR را به دست آورید. این توان از کجا تامین می شود !



حل :

به بارهای آزاد این نوار فلزی نیروی لورنس وارد می‌شود. در حالت تعادل نیروی لورنس برابر صفر است .

$$F = - e (E + v \times B) = 0$$

$$E = v B$$

$$E = \frac{\Delta V}{d} = vB$$

E میدان الکتریکی اثر هال است. لذا

ΔV اختلاف پتانسیل بین دو صفحه بالایی وپایینی نوار مسی است.

$$\Delta V = Bvd$$

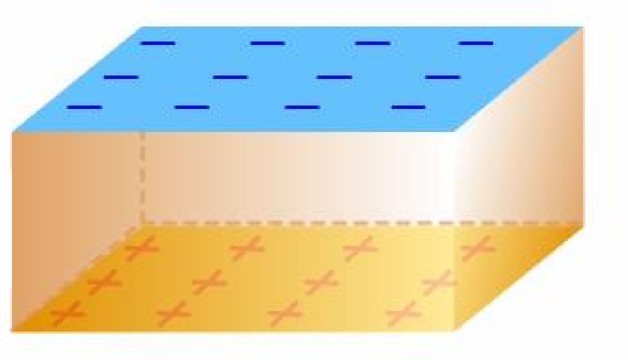
پس جریان ناشی از اثر هال

$$I = \frac{Bvd}{R}$$

توان مصرفی در مقاومت R

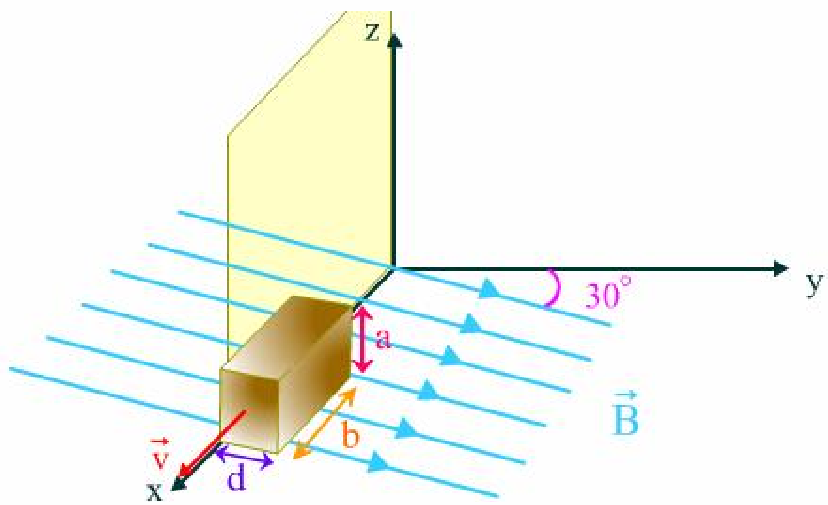
$$P = I^2R = I\,\Delta V = \frac{vBd}{R}\,\Delta V = \frac{(vBd)^2}{R}$$

این انرژی که به صورت حرارت در مقاومت تلف می‌شود از انرژی جنبشی‌نوار مسی تامین می‌شود.



مثال ۱۳ :

فرض کنید میدان مغناطیسی یکنواخت با محور y ها زاویهٔ °۳۰ می‌سازد اگر یک تیغه مسی‌به ابعاد a و b و d در صفحه xz با سرعت ثابت $\vec{v} = v\,\hat{i}$ حرکت کند. محل تجمع بار و اختلاف پتانسیل حاصل از این تجمع را به دست آورید.



حل :

با حرکت تیغه الکترون های آزاد آن با سرعت v حرکت کرده لذا تحت تاثیر نیروی مغناطیسی قرار می‌گیرند.

$$\vec{F} = -e\,\vec{v} \times \vec{B} = -e\,v\,\hat{i} \times (B\cos 60^\circ\,\hat{i} + B\sin 30^\circ\,\hat{j})$$
$$= -e\,v\,B\sin 30^\circ\,\hat{k}$$

لذا سطح پایینی تیغه محل تجمع بارهای مثبت وسطح بالایی آن بارهای منفی‌جمع می‌شوند. درحالت تعادل یعنی موقعی که نیروی لورنس صفر می‌شود.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B} = 0$$

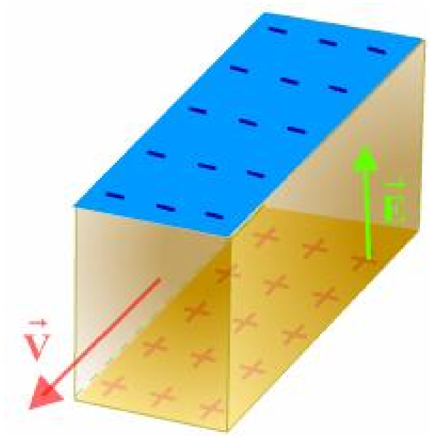
$$-eE - eVB\sin30^\circ = 0$$

میدان هال :

$$E = -VB\sin30^\circ$$

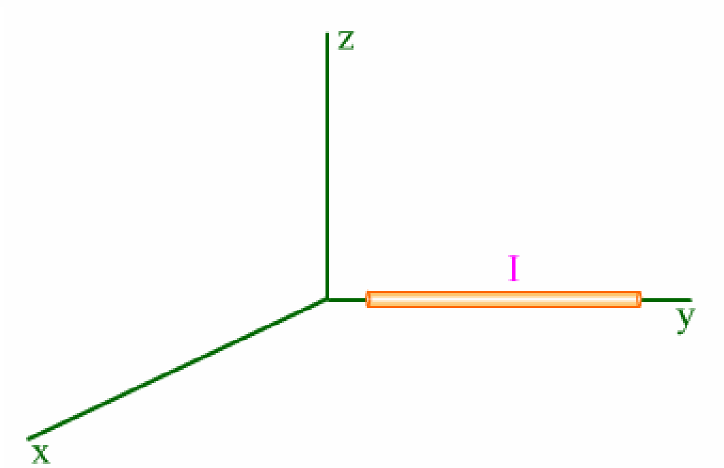
اختلاف پتانسیل هال :

$$\Delta V = Ea = -v\, a\, B \sin30^\circ = -\frac{VaB}{2}$$



مثال ۱۴:

سیمی به طول L مطابق شکل روی محور y ها قرار دارد و حامل جریان I است. اگر میدان مغناطیسی $\vec{B} = \alpha y\,\hat{i} + \beta x\,\hat{j}$ به آن اعمال شود نیروی مغناطیسی وارد به آن



حل:

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \int_0^L \hat{j}\, dy \times (\alpha\, y\, \hat{i} + \beta\, x\, \hat{j})$$

$$= I\,\alpha \int_0^L (\hat{j} \times \hat{i})\, y dy + I\beta \int_0^L \cancelto{0}{(\hat{j} \times \hat{j})}\, x dy$$

$$= I\,\alpha\,(-\hat{k}) \int_0^L y dy$$

$$= I\,\alpha\,(-\hat{k})\, \tfrac{1}{2}\, y^2 \Big|_0^L$$

$$= \frac{I\alpha L^2}{2}(-\hat{k})$$