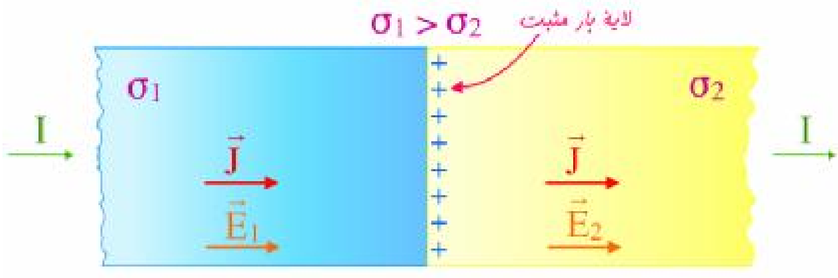
مثال ۱ :

نشان دهید که مقدار باری که در محل اتصال دو ماده جمع می شود برابر $\varepsilon_0 I\,(\sigma_2^{-1} - \sigma_1^{-1})$ است. در حالت مانای جریان ، مولفه عمودی چگالی جریان $\vec{J}$ در دو طرف محل اتصال باید یکسان باشد، یعنی :

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$$

$$E_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) E_1$$



اگر بار روی فصل مشترک q_m باشد ، از قانون گوس داریم

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = (E_2 - E_1)\,A = \frac{q_m}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 - E_1 = \frac{q_m}{\varepsilon_0}$$

با جایگزین کردن مقدار E_2 در معادله فوق داریم

$$q_m = \varepsilon_0 A\, E_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) = \varepsilon_0 A \sigma_1 E_1 \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right)$$

$$I = JA = \sigma_1 E_1 A$$

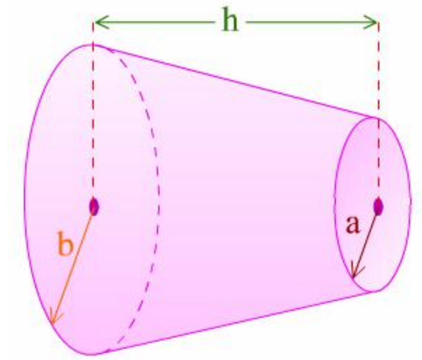
$$q_m = \varepsilon_0 I \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right)$$

مثال ۲ :

ماده ای به مقاومت ویژه ρ به شکل مخروط ناقص به ارتفاع h و به شعاع های a و b را مطابق شکل در نظر بگیرید.

فرض کنید که جریان به طور یکنواخت روی سطح مقطع مخروط توزیع شده باشد.

مقاومت این مخروط را محاسبه نمایید.



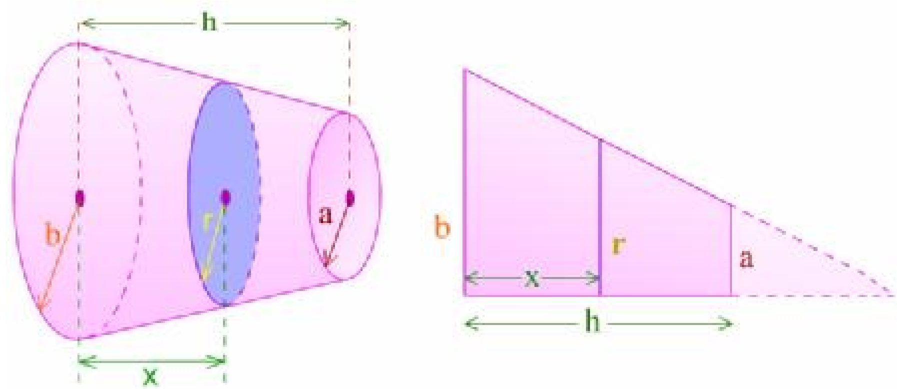
حل :

دیسک نازکی به شعاع r در فاصله x از طرف چپ مخروط در نظر بگیرید.

همان طور که از شکل پیداست :

$$\frac{b - r}{x} = \frac{b - a}{h}$$

$$r = (a - b)\ \frac{x}{h} + b$$



چون مقاومت R و مقاومت ویژه ρ طبق رابطه زیر به هم مربوط اند ؛

$$\boxed{R = \rho\,\frac{\ell}{A}}$$

لذا مقاومت دیسک به شعاع r و ضخامت dx برابر است با :

$$dR = \frac{\rho dx}{\pi \left[\ b + (a - b)\frac{x}{h}\ \right]^2}$$

$$R = \int_0^h \frac{\rho dx}{\pi \left[\ b + (a - b)\frac{x}{h}\ \right]^2}$$

با استفاده از

$$\int \frac{du}{(\alpha u+\beta)^2} = -\frac{1}{\alpha(\alpha u+\beta)}$$

$$R = \frac{\rho}{\pi}\left[-\frac{1}{\frac{a-b}{h}\left[\frac{(a-b)x}{h}+b\right]}\right]_0^h$$

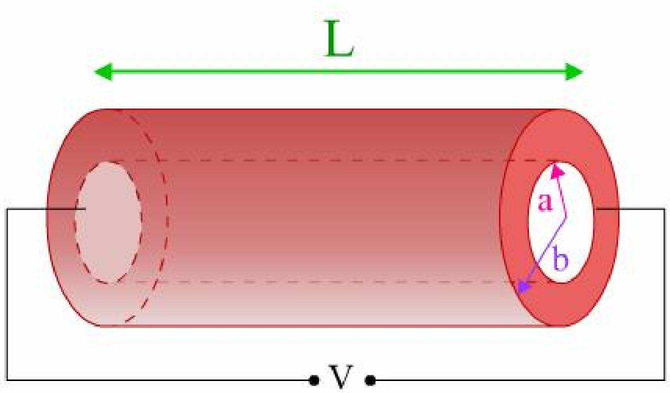
$$= -\frac{\rho}{\pi}\left[\frac{h}{(a-b)\,a} - \frac{h}{b\,(a-b)}\right]$$

$$= -\frac{\rho h}{\pi}\left[\frac{b-a}{ab\,(a-b)}\right] = \frac{\rho h}{\pi ab}$$

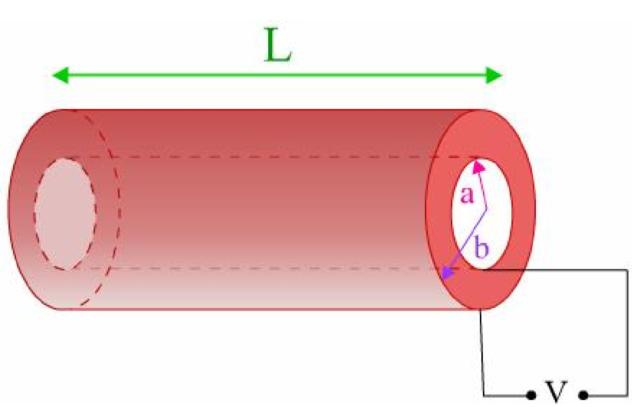
مثال۳:

یک استوانه توخالی به طول L و شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل در نظر بگیرید. مقاومت ویژه این استوانه ρ است.

(a) فرض کنید که اختلاف پتانسیل به دو سر استوانه اعمال شود، به طوری که جریان موازی با محور آن ایجاد شود. مقاومت استوانه چه مقدار است ؟



(b) اگر اختلاف پتانسیل بین سطوح داخلی و خارجی آن برقرار شود، به طوری که جریان به صورت شعاعی به طرف بیرون انتشار یابد، مقاومت اندازه گیری شده چه مقدار است ؟

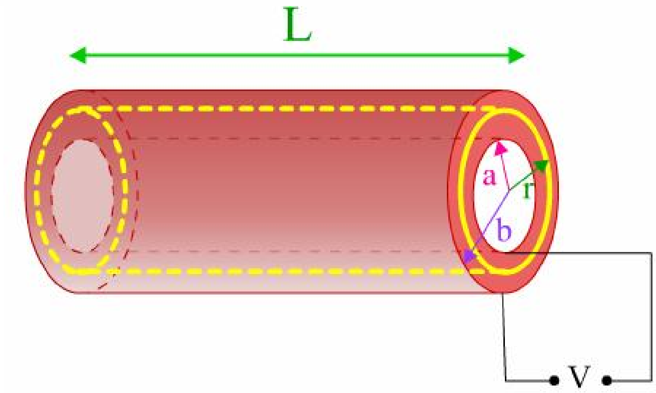


(a) وقتی اختلاف پتانسیل بین دو سر استوانه ایجاد شود جریان به موازات محور آن برقرار می شود، مساحت سطح مقطع آن $A = \pi\,(b^2 - a^2)$ ، و مقاومت آن توسط رابطه زیر به دست می آید ؛

$$R = \frac{\rho\ell}{A} = \frac{\rho\ell}{\pi\,(b^2 - a^2)}$$

(b) استوانه نازک به شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r + dr$ و به طول L را در نظر بگیرید. مشارکت آن در مقاومت سیستم

$$dR = \frac{\rho d\ell}{A} = \frac{\rho dr}{2\pi r L}$$



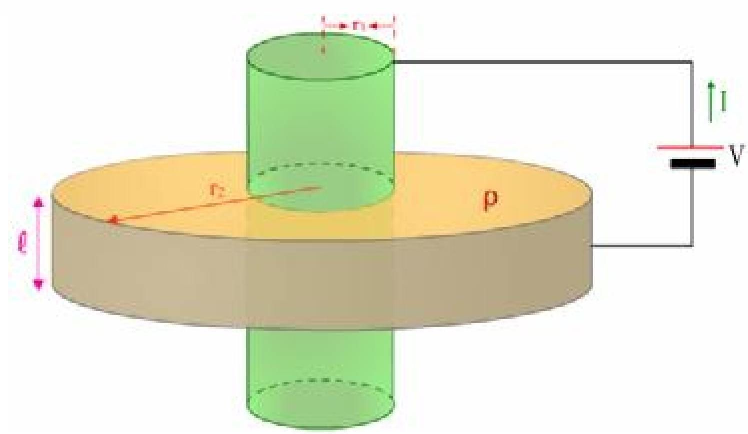
$A = 2\pi r L$ مساحتی است که جریان به صورت عمودی از آن میگذرد

مقاومت کل سیستم :

$$R = \int_a^b \frac{\rho dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L}\, \ell n\left(\frac{b}{a}\right)$$

مثال ۴:

یک میله فلزی به شعاع r_1 در مرکز یک پوسته استوانه ای هادی به شعاع r_2 و طول L قرار دارد . فضای بین میله و پوسته استوانه ای از ماده ای به مقاومت ویژه ρ پر شده است . باطری با ولتاژ V مطابق شکل بین میله و استوانه وصل شده است .



با صرف نظر کردن از مقاومت میله و پوسته استوانه ای

الف - جریان کل را به دست آورید .

ب- چگالی جریان J و میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در یک نقطه دلخواه P داخل پوسته استوانه ای محاسبه نمائید .

ج- مقاوت R بین میله و پوسته استوانه ای چه مقدار است ؟

$$J = \frac{I}{2\pi r L}$$

$$E = \rho J = \frac{I\rho}{2\pi r L}$$

$$V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{I\rho}{2\pi r L}\,dr = -\frac{I\rho}{2\pi L}\,\ell n r\Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{I}{2\pi L}\,\ell n\,\frac{r_2}{r_1}$$

الف) جریان کل :

$$I = \frac{2\pi L|V|}{\ell n\,\frac{r_2}{r_1}}$$

ب) چگالی جریان :

$$J = \frac{1}{2\pi r L}\;\frac{2\pi L|V|}{\ell n\,\frac{r_2}{r_1}} = \frac{|V|}{r\ell n\,\frac{r_2}{r_1}}$$

میدان الکتریکی:

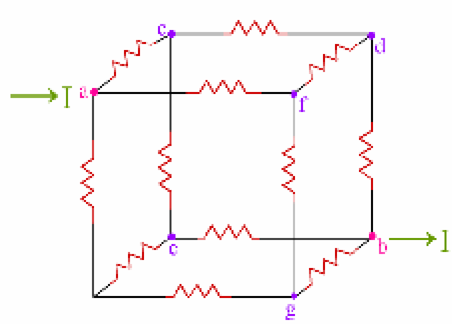
$$E = \frac{\rho|V|}{r\ell n\,\frac{r_2}{r_1}}$$

ج) مقاومت :

$$R = \frac{|V|}{I} = \frac{1}{2\pi L}\,\ell n\,\frac{r_2}{r_1}$$

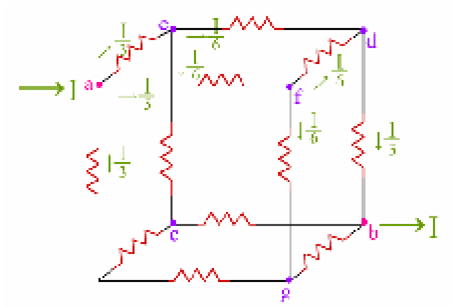
مثال ۵

مکعبی دارای مقاومت R روی هر لبه‌اش می باشد مقاومت معادل بین نقاط a و b را بدست آورید .



حل :

با استفاده از تقارن جریان در a به سه قسمت تقسیم می شود یعنی $\frac{I}{3}$ در هر شاخه.
در نقطه c، $\frac{I}{3}$ بطور مساوی به دو قسمت تقسیم می شود یعنی $\frac{I}{6}$ که در دو مسیر ce و cd جریان می یابد . جریانی که در شاخه db وجود دارد برابر جمع دو جریان از fd و cd ایست یعنی $\frac{I}{3} = \frac{I}{6} + \frac{I}{6}$.



اختلاف پتانسیل a و b را می توان بصورت زیر نوشت .

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db} = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R = \frac{5}{6}IR$$

در نتیجه :

$$R_{eq} = \frac{5}{6}R$$

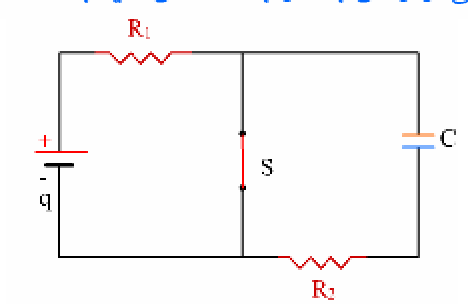
مثال ۶

در مداری مطابق شکل کلید S که به مدت طولانی باز بوده در زمان $t = 0$ بسته می شود.

(a) ثابت زمانی خازنی قبل از بسته شدن کلید

(b) ثابت زمانی خازنی پس از بسته شدن کلید

(c) جریان را به صورت تابعی از زمان بعد از بسته شدن کلید بدست آورید.



حل

قبل از بسته شدن کلید، دو مقاومت R_1 و R_2 بصورت سری هستند ، لذا

مقاومت معادل $\quad R_{eq} = R_1 + R_2$

ثابت زمانی خازنی $\quad \tau = R_{eq}C = (R_1 + R_2)C$

مقدار بار ذخیره شده در خازن $\quad q(t) = \mathcal{E}C\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

(b) بعد از اینکه کلید بسته شد،خازن درحلقهٔ راست مدار شروع به دشارژ شدن میکند.

$\tau' = R_2 C$ ثابت زمانی خازنی

بار طبق رابطه زیر کاهش پیدا می کند

$$q'(t) = \mathcal{E}C\, e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

(c) جریانی که از کلید می گذرد دارای دو منبع است : جریان مانای مدار چپ و جریان کاهش یابنده I_2 از مدار RC یعنی :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

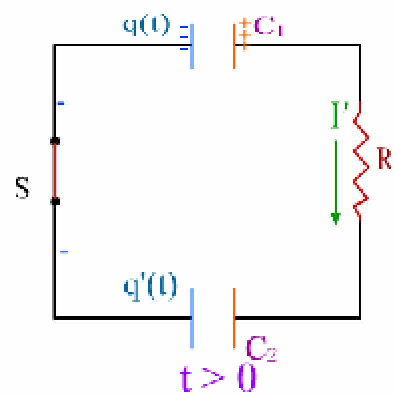
$$I'(t) = \frac{dq'}{dt} = -\frac{\mathcal{E}C}{\tau'}\, e^{-\frac{t}{\tau'}} = -\frac{\mathcal{E}}{R_2}\, e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

علامت منفی در$I'(t)$ نشان دهنده آن است که جریان در جهت مخالف فرآیند شارژ است، پس هر دوی I_1 وI' به طرف پایین خواهند بود.

$$I(t) = I_1 + I'(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \left(\frac{\mathcal{E}}{R_2}\right) e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$ جریان کل

مثال۷

خازنی با ظرفیت C_1 و بار الکتریکیQ به خازن خالی به ظرفیتC_2 از طریق مقاومت R مطابق شکل وصل شده است . جریان مدار و بار هر یک از خازن ها را به دست آورید. از روی آن بار نهایی هر یک از خازن ها را حساب نمایید.



در $t < 0$ کلیدS باز است ، جریان مدار صفر، پتانسیل خازنC_1 برابر $\frac{Q}{C_1}$ و پتانسیل خازن C_2 صفر و پتانسیل مقاومت صفر است .در$t = 0$ کلیدS بسته می شود و جریان لحظه ای در مدار ظاهر می شود .

با استفاده از قانون حلقه کیرشهف مدار را از نقطهٔ a ساعتگرد طی می کنیم.

$$-I'R - \frac{q'}{C_2} + \frac{q}{C_1} = 0$$

برای متغیر q' و $I' = \frac{dq'}{dt}$ داریم

$$-\frac{dq'}{dt}R - \frac{q'}{C_2} + \frac{Q - q'}{C_1} = 0$$

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{RC_1}$$

با تغییر متغیر $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$ و $\frac{Q}{C_1} = \mathcal{E}$ رابطه فوق به صورت زیر در می آید

این معادله دقیقاً مشابه معادله فرآیند دشارژ است.

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

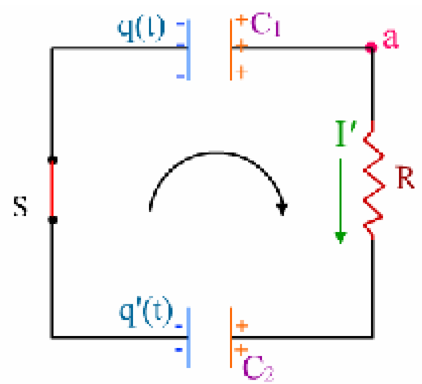
لذا با توجه به تشابه موجود

$$q'(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

بار لحظه ای روی C_1

$$q(t) = Q - q'(t)$$

$$= Q - \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



بار لحظه ای روی C_2

$$q'(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

جریان لحظه ای مدار

$$I'(t) = \frac{dq'}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

با استفاده از روابط بالا

بار نهایی روی C_1

$$q_1 = q(t=\infty) = Q - \mathcal{E}C = \frac{QC_1}{C_1 + C_2}$$

بار نهایی روی C_2

$$q_2 = q'(t=\infty) = \mathcal{E}C = \frac{QC_2}{C_1 + C_2}$$

جریان نهایی

$$I'(t=\infty) = 0$$

بار نهایی روی خازن ها را به طریق مستقیم نیز می توانستیم محاسبه نماییم. اگر بارنهایی روی خازنC_1 راq_1 وبار نهایی روی خازن C_2 راq_2 بگیریم روابط زیر را می توانیم بنویسیم .

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q \\ \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \dfrac{q_1 C_2}{C_1} \end{cases}$$

$$q_1 + \frac{q_1C_2}{C_1} = q_1\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = q_1\left(\frac{C_1+C_2}{C_1}\right) = Q \Rightarrow q_1 = \frac{QC_1}{C_1 + C_2}$$

$$q_2 = Q - q_1 = Q - \frac{QC_1}{C_1+C_2} = Q\left(\frac{C_1+C_2-C_1}{C_1+C_2}\right) = \frac{QC_2}{C_1+C_2}$$