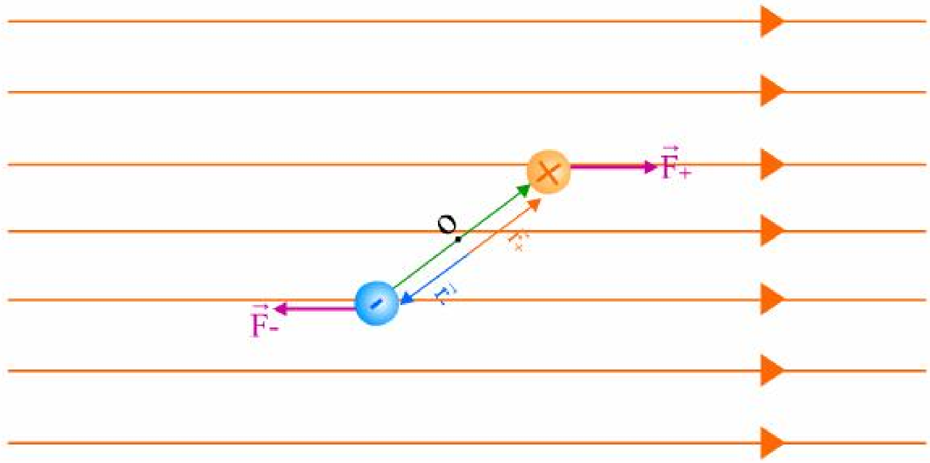
مثال ۱

نیرو وگشتاور وارد به یک دو قطبی در میدان اکتریکی یکنواخت را محاسبه نمایید.



حل:

نیرو $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0$

✓ نیروی وارد به یک دو قطبی در میدان الکتریکی یکنواخت برابر صفر است.

حل:

گشتاور وارد به دو قطبی ، طبق تعریف گشتاور: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

گشتاور حول مرکز دو قطبی O :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + (-\vec{r}_+) \times (-\vec{F}_+)$$

$$\vec{\tau} = 2\vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = 2q\vec{r}_+ \times \vec{E}_+ = \vec{p} \times \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

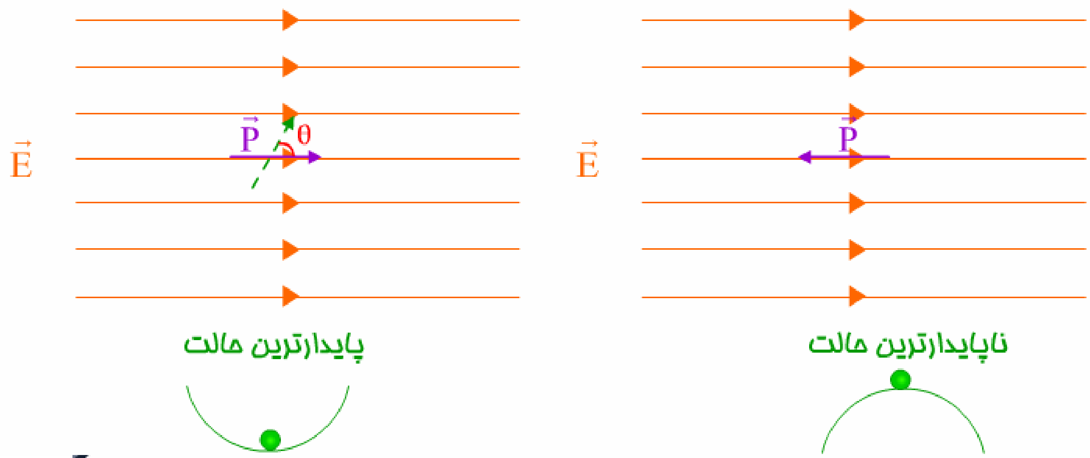
حل:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

گشتاور وارد به دو قطبی در میدان الکتریکی یکنواخت برابر است: با حاصلضرب خارجی ممان دو قطبی آن $\vec{p}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$.

مثال ۲

انرژی پتانسیل یک دو قطبی که با میدان الکتریکی یکنواخت E زاویهθ می سازد چقدر است؟ به عبارت دیگر چه مقدار کار در مقابل گشتاور نیروی الکتریکی‌لازم است تا اینکه دو قطبی را از پایدارترین حالت به اندازه زاویهθ بچرخانیم.



حل:

هر دو حالت نمایش داده شده در شکل حالت های تعادل هستند ولی اولی ناپایدارترین حالت‌ودومی پایدارترین حالت. معادل مکانیکی آنها گلوله پشت کاسه وگلوله داخل کاسه است. کار انجام شده در مقابل گشتاور نیروی الکتریکی برای چرخاندن دو قطبی به اندازه زاویهθ

$$U = W = \int_0^{\theta} \tau d\theta = \int_0^{\theta} pE \sin\theta \, d\theta = -pE \cos\theta \Big|_0^{\theta} = -pE \cos\theta + pE$$

با توجه به محاسبه فوق انرژی پتانسیل دو قطبی در میدان یکنواخت خارجی به صورت زیر تعریف می شود :

$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

درحقیقت از مقدار ثابت pE که مربوط به مرجع پتانسیل است‌صرف نظر شده است.

برای درک بهتر تفاوت دو رابطه می توان پرسید که چه مقدار کار لازم است تا دوقطبی را از پایدارترین حالت به ناپایدار ترین حالت بچرخانیم:

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

$$\Delta U = U_{180^\circ} - U_{0^\circ} = -\vec{P}.\vec{E}\Big|_{180^\circ} - (-\vec{P}.\vec{E})\Big|_{0^\circ} = PE + PE = 2PE$$

$$U = -PE \cos\theta + PE$$

$$U_{180^\circ} = 2PE$$

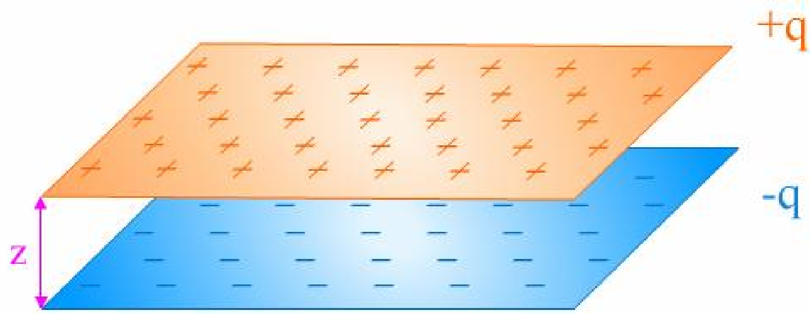
مشاهده می شود که هر دو رابطه به یک نتیجه می رسند. لذا حذف مقدار ثابت کاملاً مجاز است در صورتیکه در رابطه $U = -\vec{P}.\vec{E}$ فقط از اختلاف پتانسیل استفاده شود.

مثال ۱ :

نیروی وارد به صفحه بالایی یک خازن مسطح را محاسبه نمایید.

a - خازن ایزوله

b - خازن غیر ایزوله



خازن ایزوله:

$$F_z = -\left.\frac{dW}{dz}\right|_{q = \text{ثابت}}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z}$$

$$F_z = -\frac{1}{2} q^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{1}{2} q^2 \frac{1}{\varepsilon_0 A}$$

آموزنده است که این مساله را مستقیماً بدون استفاده از رابطه برای F_z نیز حل نماییم. فرض کنید صفحه بالایی به اندازه dz جابجا شود چون خازن ایزوله است بار آن q ثابت باقی‌می‌ماند. نیروهای الکتروستاتیکی وارد به صفحه بالایی . کاری معادل $F_z\,dz$ انجام می دهند ، لذا انرژی الکتروستاتیکی باید کاهش پیدا کند .

$$dW^{(M)} = F_z\ dz = -\,dW = -\,[W(z+dz) - W(z)] = -\frac{1}{2} q^2 \left[\frac{1}{C(z+dz)} - \frac{1}{C(z)}\right]$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z}$$

$$F_z\ dz = -\frac{1}{2} q^2 \left(\frac{z+dz}{\varepsilon_0 A} - \frac{z}{\varepsilon_0 A}\right) = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_0 A}\,dz$$

$$F_z = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_0 A}$$

که دقیقاً همان نتیجه قبل است.

خازن غیر ایزوله:

$$F_z = +\frac{dW}{dz}\bigg|_{V=\text{ثابت}}$$

$$W = \frac{1}{2}\,CV^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z}$$

$$F_Z = \frac{1}{2}V^2\,\frac{dC}{dz} = \frac{1}{2}V^2\left(\frac{-\varepsilon_0 A}{z^2}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{V^2C^2}{\varepsilon_0 A} = -\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{\varepsilon_0 A}$$

به‌طور مستقیم بدون استفاده از فرمول نیز می توان این مساله را حل نمود.

۱- کار مکانیکی نیروی الکتروستاتیکی

$$dW^{(M)} = F_z\,dz$$

۲- تغییر انرژی الکتروستاتیکی

$$dW = \frac{1}{2}V^2\,dC$$

۳- کار باطری برای حفظ پتانسیل صفحه بالایی:

بار اولیه صفحه بالایی $q_i = VC_i$

بار نهایی بعد ازجابجایی $q_f = VC_f$

بار تامین شده توسط باطری در این جابجایی $q_f - q_i = V\,(C_f - C_i) = V\,dC$

چون این بار دردر حالتی که پتانسیل صفحه بالایی Vبوده است به آن اضافه گردیده لذا کارانجام شده روی سیستم توسط باطری:

$$dW_B = (q_f - q_i)\,V = V^2\,dC$$

قانون بقاء انرژی:

$$dW^{(M)} + dW = dW_B$$

$$F_z\,dz + \frac{1}{2}V^2\,dC = V^2\,dC$$

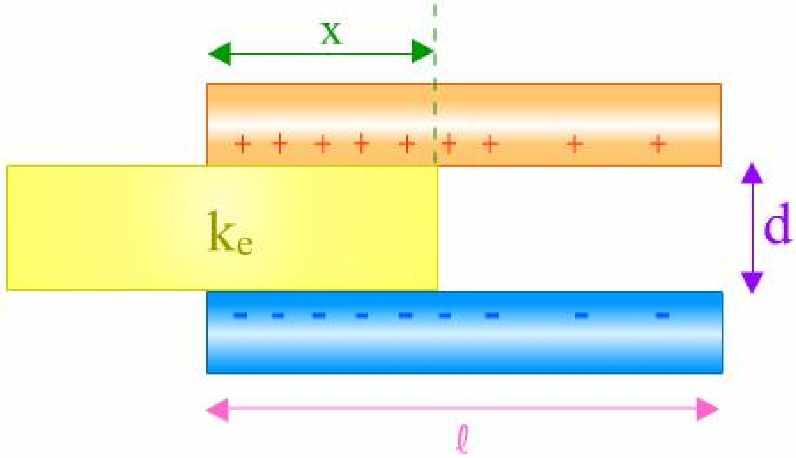
$$F_z\,dz = \frac{1}{2}V^2\,dC \Rightarrow F_z = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dz}$$

مثال ۲:

خازن مسطحی با فاصله d و ابعاد $a \times \ell$ در نظر بگیرید. اگر دی‌الکتریکی به ثابت دی‌الکتریک k_e تا فاصله x بین دو صفحه خازن قرار گیرد ، نیروی وارد به دی‌الکتریک را محاسبه کنید اگر:

a- خازن ایزوله باشد (q ثابت)

b- خازن غیر ایزوله باشد (V ثابت)



خازن ایزوله:

برای محاسبه نیروی وارد به دی الکتریک ابتدا باید ظرفیت خازن را به صورت تابعی از x پیدا کنیم.

$$C_x = \frac{k_e \varepsilon_0 a x}{d} \qquad C_{\ell - x} = \frac{\varepsilon_0 a (\ell - x)}{d}$$

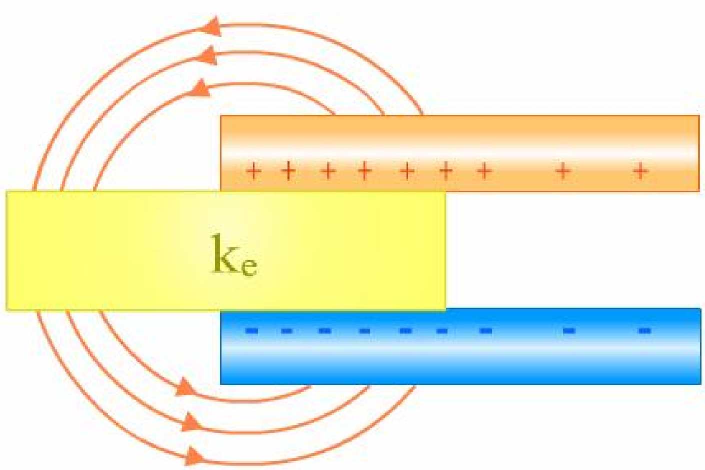
ظرفیت کل:

$$C = C_x + C_{\ell - x} = \frac{a}{d}\left[(k_e \varepsilon_0 - \varepsilon_0) x + \varepsilon_0 \ell \right]$$

$$W(x) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{d}{a}\frac{q^2}{(k_e \varepsilon_0 - \varepsilon_0) x + \varepsilon_0 \ell}$$

$$\vec{F} = -\frac{dW}{dx}\hat{i} = \frac{1}{2}\frac{q^2 d}{a \varepsilon_0}\frac{(k_e - 1)}{\left[x(k_e - 1) + \ell\right]^2}\hat{i}$$

نیروی جاذبه است یعنی دی الکتریک به طرف داخل کشیده می شود.



خازن غیر ایزوله:

$$W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}[x(k_e-1)+\ell]V^2$$

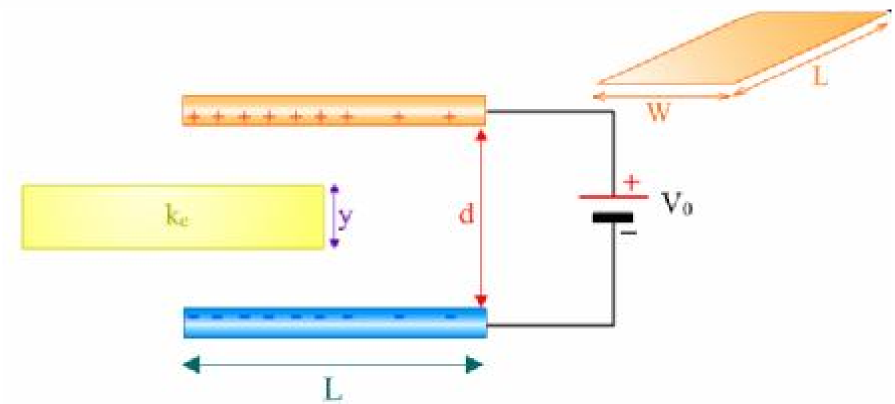
$$F=+\frac{dW}{dx}\hat{i}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a}{d}V^2\varepsilon_0(k_e-1)\hat{i}$$

نیرو دوباره جاذبه است.

مثال ۳:

خازن مسطحی را در نظر بگیرید که به باطری با اختلاف پتانسیل V_0 وصل است . طول خازن را L و عرض آن W و فاصله دو صفحه آن را d بگیرید . اگر دی الکتریکی به ضخامت y و ثابت دی الکتریک k_e مطابق شکل بین دو صفحه آن قرار گیرد .



الف – تغییر نسبی بار خازن را محاسبه نمائید .

ب – جهت و مقدار نیروی وارد به دی الکتریک را تعیین نمائید .

ج– در نواحی 1، 2، 3 و 4 بردارهای سه گانه $\vec{E}$ ، $\vec{D}$ و $\vec{P}$ را به دست آورید .

تغییر نسبی بار خازن

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 xW}{d_1}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 k_e xW}{y}$$

$$C_3=\frac{\varepsilon_0 xW}{d_2} \qquad C_4=\frac{\varepsilon_0(L-x)W}{d}$$

خازن های C_1 و C_2 و C_3 سری هستند . ظرفیت معادل آنها را C'_d می گیریم .

$$\frac{1}{C'_d}=\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}=\frac{d_1}{\varepsilon_0 xW}+\frac{y}{\varepsilon_0 k_e xW}+\frac{d_2}{\varepsilon_0 (L-x)W}$$

خازن معادل C'_d با خازن C_4 موازی است .

$$C = C'_d + C_4$$

بار خازن قبل از ورود دی الکتریک

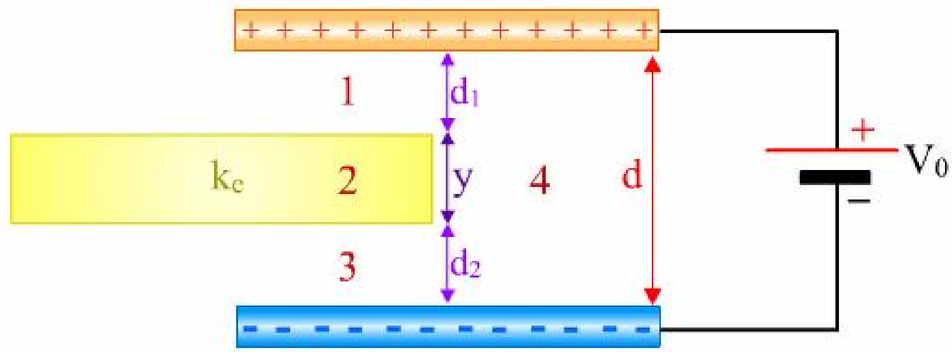
$$q = C_0 V_0 = \frac{\varepsilon_0 LW}{d} V_0$$

بعد از ورود دی الکتریک بار خازن از q به q'_d تغییر می یابد ولی اختلاف پتانسیل V_0 باقی می ماند

$$C = \frac{q'_d}{V_0} \quad \Rightarrow q'_d = CV_0$$

تغییر نسبی بار

$$\frac{q'_d - q}{q}$$



نیروی وارد به دی الکتریک:

$$\vec{F} = +\frac{dW}{dx}\hat{i}$$

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CV_0^2$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}V_0^2 \frac{dC}{dx}\hat{i}$$

نیرو جاذبه است .

بردارهای سه گانه $\vec{D}$ ، $\vec{E}$ و $\vec{P}$

بار خازن C'_d و بار خازن C_4 را محاسبه می نمائیم .

$$C'_d = \frac{q_x}{V_0} \quad \Rightarrow \quad q_x = C'_d V_0 = C'_d \frac{q'_d}{C}$$

$$C_4 = \frac{q_{L-x}}{V_0} \quad \Rightarrow \quad q_{L-x} = C_4 V_0 = C_4 \frac{q'_d}{C}$$

با توجه به اینکه q_x بار خازن C'_d و q_{L-x} بار خازن C_4 بر حسب داده های مساله تعیین شده اند بردارهای سه گانه الکتریکی را در نواحی 1 ، 2 ، 3 و 4 تعیین می کنیم .

ناحیه 1 :

$$D = \frac{q_x}{xW}$$

$$E = \frac{q_x}{\varepsilon_0 xW}$$

$$P = 0$$

ناحیه 2 :

$$D = \frac{q_x}{xW}$$

$$E = \frac{q_x}{\varepsilon_0 k_e xW}$$

$$P = \varepsilon_0 E\,(k_e - 1) = \varepsilon_0 \frac{q_x}{\varepsilon_0 k_e xW}(k_e - 1)$$

$$P = \frac{q_x}{xW}\,(1 - \frac{1}{k_e})$$

ناحیه 3 :

$$D = \frac{q_x}{xW}$$

$$E = \frac{q_x}{\varepsilon_0 xW}$$

$$P = 0$$

ناحیه 4 :

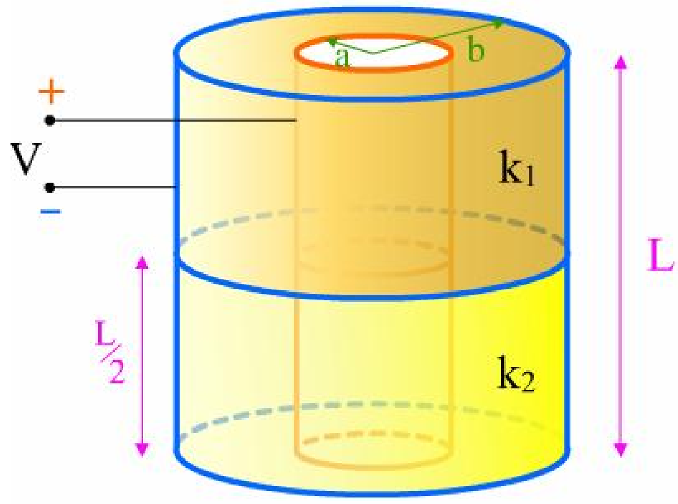
$$D = \frac{q_{L-x}}{(L - x)W}$$

$$E = \frac{q_{L-x}}{\varepsilon_0 (L - x)W}$$

$$P = 0$$

مثال ۴ :

خازن استوانه ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به اختلاف پتانسیل V وصل است . طول خازن L می باشد . دی الکتریک های با ثابت دی الکتریک k_1 و k_2 مطابق شکل بطور کامل فضایی بین دو جوشن را پر کرده اند .



الف – ظرفیت این خازن را محاسبه نمائید .

ب– انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه کنید .

ج– بردارهای $\vec{D}$ ، $\vec{E}$ و $\vec{P}$ را در ناحیه دی الکتریک k_1 بین دو صفحه خازن استوانه ای را به دست آورید .

ظرفیت :

ظرفیت خازن استوانه ای بدون دی الکتریک و به طول L قبلاً به دست آمده است .

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ell n\frac{b}{a}}$$

ظرفیت خازن با دی الکتریک k_1 و طول $\frac{L}{2}$:

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 k_1 L}{2\ell n\frac{b}{a}}$$

ظرفیت خازن با دی الکتریک k_2 و طول $\frac{L}{2}$:

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 k_2 L}{2\ell n\frac{b}{a}}$$

پس ظرفیت کل برابر است با :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 k_1 L}{2\ell n\frac{b}{a}} + \frac{2\pi\varepsilon_0 k_2 L}{2\ell n\frac{b}{a}} = \frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ell n\frac{b}{a}}(k_1 + k_2)$$

انرژی ذخیره شده :

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ell n\frac{b}{a}}(k_1 + k_2)V^2$$

بردارهای سه گانه $\vec{D}$ ، $\vec{E}$ و $\vec{P}$

بار q_1 روی خازن C_1 قرار دارد و مقدار آن از رابطه زیر به دست می آید .

$$C_1 = \frac{q_1}{V} \quad \Rightarrow \quad q_1 = C_1 V = \frac{\pi\varepsilon_0 L k_1}{\ell n \frac{b}{a}} V$$

$$\oint \vec{D} . ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{D}_1 = \frac{q_1}{\pi\rho L} (\hat{\rho})$$

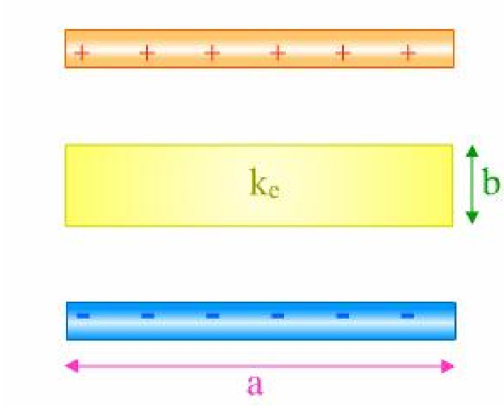
$$\vec{D} = \varepsilon_0 k_e \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{k_1\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\pi\varepsilon_0 k_1 L\rho} (\hat{\rho})$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (k_e - 1)$$

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 (k_1 - 1) \frac{q_1}{\pi\varepsilon_0 k_1 L\rho} (\hat{\rho}) = \frac{q_1}{\pi L\rho} (1 - \frac{1}{k_1}) (\hat{\rho})$$

مثال ۵:

خازن مسطحی با صفحات مربعی به ضلع a مفروض است . این خازن شارژ شده و سپس از منبع تغذیه جدا می شود . اگر دی الکتریکی به ثابت دی الکتریک k و ضخامت b بین دو جوشن قرار گیرد .



الف – ظرفیت و انرژی پتانسیل خازن را محاسبه نمائید .

ب– اگر صفحه بالائی را به اندازه زاویه کوچک θ نسبت به صفحه دیگر مطابق شکل بچرخانیم ظرفیت و انرژی پتانسیل خازن را محاسبه نمائید .

از رابطه $\frac{1}{\alpha + \beta\theta} = (\alpha + \beta\theta)^{-1} \approx \frac{1}{\alpha} (1 - \frac{\beta\theta}{\alpha})$ می‌توانید استفاده نمائید .

ظرفیت و انرژی پتانسیل

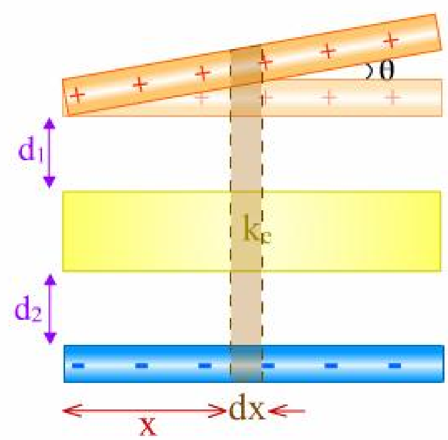
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_b}=\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d_1}}+\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 k_e A}{b}}+\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d_2}}$$

$$=\frac{d_1}{\varepsilon_0 A}+\frac{b}{\varepsilon_0 k_e A}+\frac{d_2}{\varepsilon_0 A}=\frac{1}{\varepsilon_0 A}\left(d_1+\frac{b}{k_e}+d_2\right)$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d-b+\frac{b}{k}}$$

انرژی پتانسیل :

$$W=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{q^2\left(d-b+\frac{b}{k}\right)}{\varepsilon_0 A}$$



وقتی صفحه بالایی به اندازه زاویه θ می‌چرخد ،

$$\frac{1}{dC}=\frac{1}{dC_1}+\frac{1}{dC_b}+\frac{1}{dC_2}$$

$$dC_1=\frac{\varepsilon_0\, a\, dx}{d_1+x\tan\theta}\qquad dC_b=\frac{\varepsilon_0 k_e\, a\, dx}{b}\qquad dC_2=\frac{\varepsilon_0\, a\, dx}{d_2}$$

$$\frac{1}{dC}=\frac{d_1+x\tan\theta}{\varepsilon_0\, a\, dx}+\frac{b}{\varepsilon_0 k_e\, a\, dx}+\frac{d_2}{\varepsilon_0\, a\, dx}$$

$$\frac{1}{dC}=\frac{1}{\varepsilon_0\, a\, dx}\left(d-b+x\tan\theta+\frac{b}{k_e}\right)$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 a\, dx}{(d - b(1 - \frac{1}{k_e}) + x\tan\theta)} \approx \frac{\varepsilon_0 a\, dx}{(d - b(1 - \frac{1}{k_e}) + x\,\theta)}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 a\, dx}{d[1 - \frac{b}{d}(1 - \frac{1}{k_e}) + \frac{x}{d}\theta]} \approx \frac{\varepsilon_0 a}{d}[1 - \frac{b}{d}(1 - \frac{1}{k_e}) - \frac{x}{d}\theta]$$

$$C = \int_0^a \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left[1 - \frac{b}{d}(1 - \frac{1}{k_e}) - \frac{x\theta}{d}\right] dx$$

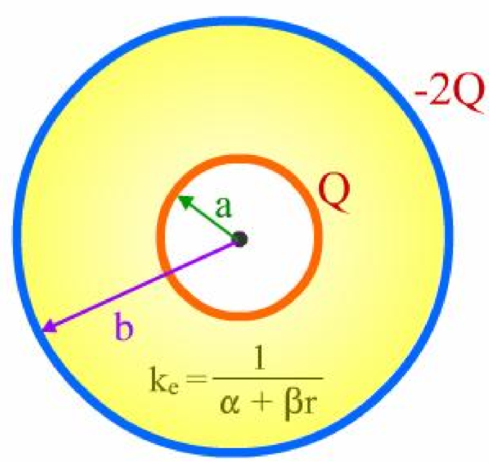
$$= \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left\{[1 - \frac{b}{d}(1 - \frac{1}{k_e})]a - \frac{1}{2}\frac{a^2\theta}{d}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left[1 - \frac{b}{d}(1 - \frac{1}{k_e}) - \frac{1}{2}\frac{a\,\theta}{d}\right]$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2 d}{\varepsilon_0 a^2}\frac{1}{[1 - \frac{b}{d}(1 - \frac{1}{k_e}) - \frac{1}{2}\frac{a\theta}{d}]}$$

مثال ۶:

دو کره هادی هم مرکزبه شعاع های a و b مطابق شکل مفروض‌اند. بار Q روی سطح کره داخلی و بار 2Q- روی سطح کره خارجی به شعاع b قرار گرفته است . اگر دی الکتریکی به ثابت دی الکتریک $k_e = \frac{1}{\alpha + \beta r}$ به طور کامل فضای بین دو کره را پر کند.



الف – بردارهای سه گانه $\vec{D}$ و $\vec{E}$ و $\vec{P}$ را در نقاط داخل و خارج محاسبه نمایید.

ب – پتانسیل یک نقطه در داخل دی الکتریک $a < r < b$ را به دست آورید.

ج – بارهای پلاریزه روی سطوح دی الکتریک را به دست آورید.

بردارهای سه گانه $\vec{D}$ و $\vec{E}$ و $\vec{P}$:

$$\oint \vec{D}.\vec{ds} = q$$ قانون گاوس برای دی الکتریک ها

نقاط داخل :

$$D4\pi r^2 = Q \implies \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 k_e \vec{E} \implies \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 k_e} = \frac{Q(\alpha + \beta r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}(k_e - 1) = \varepsilon_0 \frac{Q(\alpha + \beta r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\left(\frac{1}{\alpha + \beta r} - 1\right)$$

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2}(1 - \alpha - \beta r)\hat{r}$$

نقاط خارج:

$$D\,4\pi r^2 = -Q \implies \vec{D} = -\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \implies \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P} = 0$$

پتانسیل یک نقطه داخل دی الکتریک:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{E}\,.\,\vec{d\ell} = -\int_\infty^b \vec{E}_o\,.\,\vec{d\ell} - \int_b^r \vec{E}_i\,.\,\vec{d\ell}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^b -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}.\hat{r}dr - \int_b^r \frac{Q(\alpha + \beta r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}.\hat{r}dr$$

$$\varphi(\vec{r}) = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{b} - \frac{Q\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{b}^{r} - \frac{Q\beta}{4\pi\varepsilon_0}\,\ell n r\Big|_{b}^{r}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{b} + \frac{Q\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) - \frac{Q\beta}{4\pi\varepsilon_0}\,\ell n\,\frac{r}{b}$$

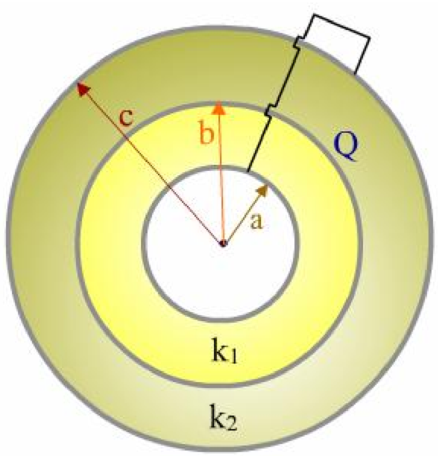
بار پلاریزه روی سطوح دی الکتریک:

$$\underset{\text{روی سطح } a}{\text{بار پلاریزه}} = 4\pi a^2 \times P\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \times 4\pi a^2 (1 - \alpha - \beta a) = Q(1 - \alpha - \beta a)$$

$$\underset{\text{روی سطح } b}{\text{بار پلاریزه}} = 4\pi b^2 \times P\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \times 4\pi b^2 (1 - \alpha - \beta b) = Q(1 - \alpha - \beta b)$$

مثال۷ :

سه پوسته کروی هم مرکز به شعاع های a و b و c را مطابق شکل در نظر بگیرید . بین پوسته های داخلی و میانی دی الکتریک به ثابت دی الکتریک k_1 و بین پوسته میانی و خارجی دی الکتریک به ثابت دی الکتریک k_2 قرار دارد . اگر پوسته داخلی به پوستهٔ خارجی توسط سیم رابط وصل شود و بار Q روی پوستهٔ میانی قرار گیرد.



الف – بار Q چگونه روی پوستهٔ میانی توزیع می‌شود؟

ب – بردار های سه گانه $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$ را در یک نقطه داخل دی‌الکتریک k_1 و همچنین در یک نقطه داخل دی الکتریک k_2 به دست آورید .

ج – مقدار بار پلاریزه القاء شده در دو طرف پوستهٔ میانی روی سطوح دی الکتریک ها را محاسبه نمایید.

توزیع بار Q:

ظرفیت خازن کروی

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 k_1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} \qquad C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 k_2}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}$$

دو خازن موازی اند :

$$C = C_1 + C_2$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{q_1}{\Delta\varphi_1} \\ C_2 = \dfrac{q_2}{\Delta\varphi_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 + q_2 = Q \\ \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2} \Rightarrow q_1 = q_2 \dfrac{C_1}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{QC_1}{C_1 + C_2} \\ q_2 = \dfrac{QC_2}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

بردار های سه گانه در دی الکتریک های k_1 و k_2 :

با استفاده از قانون گوس برای دی الکتریک ها

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = q$$

$$-4\pi r^2 D_1 = -q_1 \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{q_1}{4\pi r^2} (-\hat{r})$$

$$\vec{D} = k_e \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 k_1 r^2} (-\hat{r})$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (k_e - 1) \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{q_1}{4\pi k_1 r^2} (k_1 - 1)(-\hat{r})$$

مشابهاً در محیط k_2 :

$$\vec{D}_2 = \frac{q_2}{4\pi r^2} (+\hat{r})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 k_2 r^2} (+\hat{r})$$

$$\vec{P} = \frac{q_2}{4\pi k_2 r^2} (k_2 - 1)(+\hat{r})$$

بارهای پلاریزه القاء شده :

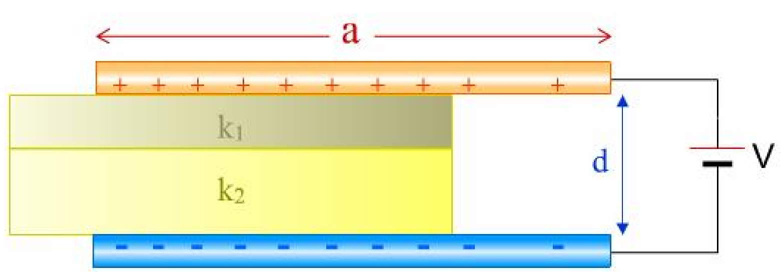
$$\left|\vec{P}_1\right|_{r=b} = \frac{q_1}{4\pi k_1 b^2}(k_1 - 1)$$

$$q'_{1b} = \left|\vec{P}_1\right|_{r=b} 4\pi b^2 = \frac{q_1}{4\pi k_1 b^2} 4\pi b^2 (k_1 - 1) = q_1\left(1 - \frac{1}{k_1}\right)$$

$$q'_{2b} = \frac{q_2}{4\pi k_2 b^2} 4\pi b^2 (k_2 - 1) = q_2\left(1 - \frac{1}{k_2}\right)$$

مثال ۸ :

خازن مسطحی به ابعاد سطح $a \times a$ و به فاصله d در نظر بگیرید. این خازن به اختلاف پتانسیل V وصل است. اگر دی الکتریک های k_1 و k_2 مطابق شکل بین دو سطح خازن قرار گیرند ؛



الف – تغییر بار الکتریکی روی خازن چه مقدار است ؟

ب – تغییر انرژی خازن را به دست آورید.

ج – بردارهای سه گانه $\vec{D}$ و $\vec{E}$ و $\vec{P}$ را درمحیط های 1 ، 2 و 3 به دست آورید.

د – بار پلاریزه سطحی روی فصل مشترک بین دو محیط 1 و 2 را به دست آورید.

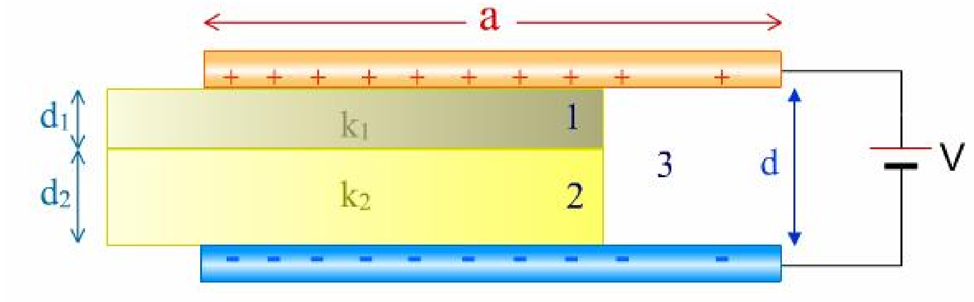
تغییر بار الکتریکی :

بار خازن قبل از دی الکتریک

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \Longrightarrow q = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V$$

انرژی خازن قبل از دی الکتریک

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V$$



بعد از ورود دی الکتریک، خازن ها C_1 و C_2 سری اند، لذا ظرفیت معادل آن ها ؛

$$\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 x a k_1}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 x a k_2}{d_2}}$$

$$= \frac{d_1}{\varepsilon_0 x a k_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 x a k_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 x a}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 x a}\left(\frac{d_1 k_2 + d_2 k_1}{k_1 k_2}\right)$$

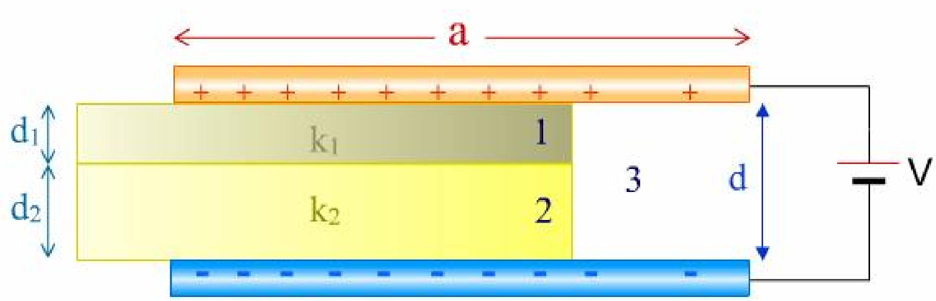
$$C'_{eq} = \frac{\varepsilon_0 x a\, k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

خازن معادل C'_{eq} با خازن C_3 موازی است؛

$$C_{eq} = C'_{eq} + C_3 = \frac{\varepsilon_0 x a\, k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} + \frac{\varepsilon_0 (a - x)\, a}{d}$$

بار ذخیره شده روی صفحات خازن بعد از ورود دی الکتریک برابر است با :

$$q'_d = C_{eq} V = \left(\frac{\varepsilon_0 x a\, k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} + \frac{\varepsilon_0 (a - x)\, a}{d}\right) V$$



انرژی خازن بعد از ورود دی الکتریک :

$$W'_d = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} \left(\qquad \right)^2 V$$

$$\Delta q = q'_d - q$$ تغییر بار

$$\Delta W = W'_d - W$$ تغییر انرژی

بردارهای سه گانه الکتریکی

بار در قسمت دی الکتریک ها برابر است با :

$$q_d = C'_{eq} V = \frac{\varepsilon_0 \, xa \, k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} V$$

بار در قسمت خلاء برابر است با

$$q_3 = C_3 V = \frac{\varepsilon_0 (a - x) \, a}{d} V$$

چگالی در قسمت دی الکتریک ها برابر است با :

$$\sigma_d = \frac{q_d}{xa} = \frac{\varepsilon_0 \, k_1 k_2 V}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

چگالی در قسمت خلاء برابر است با :

$$\sigma_3 = \frac{q_3}{(a - x) \, a} = \frac{\varepsilon_0 V}{d}$$

بردار $\vec{D}$

$$D_1 = D_2 = \frac{\varepsilon_0 \, k_1 k_2 V}{d_1 k_2 + d_2 k_1} \qquad D_3 = \frac{\varepsilon_0 V}{d}$$

بردار $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \, k_e \, \vec{E}$$

$$D_1 = \varepsilon_0 \, k_1 E_1 \;\Rightarrow\; E_1 = \frac{k_2 V}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 \, k_2 E_2 \;\Rightarrow\; E_2 = \frac{k_1 V}{d_1 k_2 + d_2 k_2}$$

$$D_3 = \varepsilon_0 \, E_3 \;\Rightarrow\; E_3 = \frac{V}{d}$$

بردار پلاریزاسیون :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \, \vec{E} \, (k_e - 1)$$

$$P_1 = \varepsilon_0 \, E_1 \, (k_1 - 1) = \frac{\varepsilon_0 (k_1 - 1) k_2 V}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

$$P_2 = \varepsilon_0 \, E_2 \, (k_2 - 1) = \frac{\varepsilon_0 (k_2 - 1) k_1 V}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

بار پلاریزه روی فصل مشترک دو دی الکتریک :

$$q_p = P_1xa - P_2xa = \left[\frac{\varepsilon_0(k_1 - 1)k_2V}{d_1k_2 + d_2k_1} - \frac{\varepsilon_0(k_2 - 1)k_1V}{d_1k_2 + d_2k_1}\right]xa$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0 k_1k_2V - \varepsilon_0 k_2V - \varepsilon_0 k_2k_1V + \varepsilon_0 k_1V}{d_1k_2 + d_2k_1}\right) V$$

$$q_p = \frac{\varepsilon_0V(k_1 - k_2)}{d_1k_2 + d_2k_1} xa$$