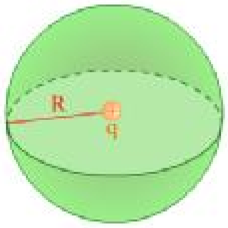
مثال ۱:

فرض کنید میدان بار نقطه ای q بجای قانون عکس مجذور فاصله $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ از قانون دیگری تبعیت کند.

$$\vec{E} = kq\,\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}\,\hat{r}$$

اگر بار q در مرکز کره ای فرضی به شعاع R قرار داشته باشد شار گذرنده ازسطح کره را بدست آورید .

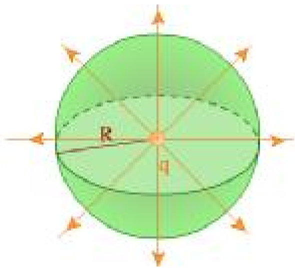


حل:

$$\phi_{\vec{E}} = \oint_{\text{کره}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} kq\,\frac{e^{-\lambda R}}{R^2}\,\hat{r}\cdot\hat{r}\,R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi\, kqe^{-\lambda R}$$

مثال ۲:

فرض کنید بار نقطه ای q در مرکز یک کره فرضی به شعاع R قرار داشته باشد ، شار گذرنده از سطح کره را بدست آورید .

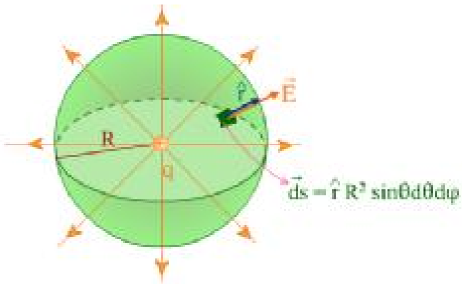


حل:

$$\phi_{\vec{E}} = \oint_{\text{کره}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

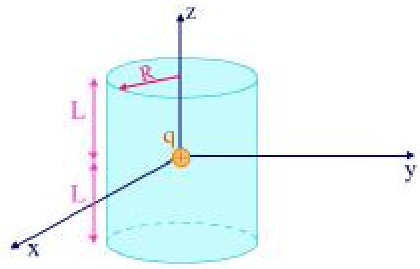
$$\phi_{\vec{E}} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{kq}{\cancel{R^2}}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\,\cancel{R^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = kq\int_0^{\pi}\underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{2}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

در این حالت خاص صحت قانون گوس به اثبات رسید.



مثال ۳

فرض کنید بار q در مرکز یک استوانه بطول 2L و شعاع R مطابق شکل قرار داشته باشد. شار گذرنده ازسطح این استوانه را محاسبه نمائید.



حل:

$$\phi_{\vec E} = \oint_{\text{استوانه}} \vec E \cdot d\vec s = \underbrace{\int_{\text{سطح جانبی}} \vec E \cdot d\vec s}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{\text{سطوح قاعده}} \vec E \cdot d\vec s}_{\mathrm{II}}$$

I- شار سطح جانبی‌استوانه

$$\phi_{\vec E} = \int_{\text{سطح جانبی}} \vec E \cdot d\vec s = \int_{-L}^{L} \int_0^{2\pi} \frac{kq}{r^2}\, \hat r \cdot \hat\rho R d\rho d\varphi$$

$$\hat r \cdot \hat\rho = \cos(\text{زاویه بین } \hat\rho \text{ و } \hat r)$$

زاویه بین $\hat\rho$ و $\hat r$ برابر $\frac{\pi}{2}-\theta$ است.

$$\phi_{\vec E}(\text{سطح قاعده}) = -2\pi kqL \left[\frac{1}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{L} \right]$$

$$\phi_{\vec E}(\text{سطوح قاعده}) = 2 \times \phi_{\vec E}(\text{سطح قاعده})$$

$$= -4\pi kqL \left[\frac{1}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{L} \right]$$

$$\phi_{\vec E}(\text{استوانه}) = \phi_{\vec E}(\text{سطح جانبی}) + \phi_{\vec E}(\text{سطوح قاعده})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{R}{r}$$

$$r = \left(R^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_{\vec{E}}\,(\text{سطح جانبی}) = kqR^2 \int_{-L}^{L} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2kqR^2 \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{L} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi_{\vec{E}}\,(\text{سطح جانبی}) = 2kqR^2 \times 2\pi \times \left.\frac{z}{R^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_{0}^{L}$$

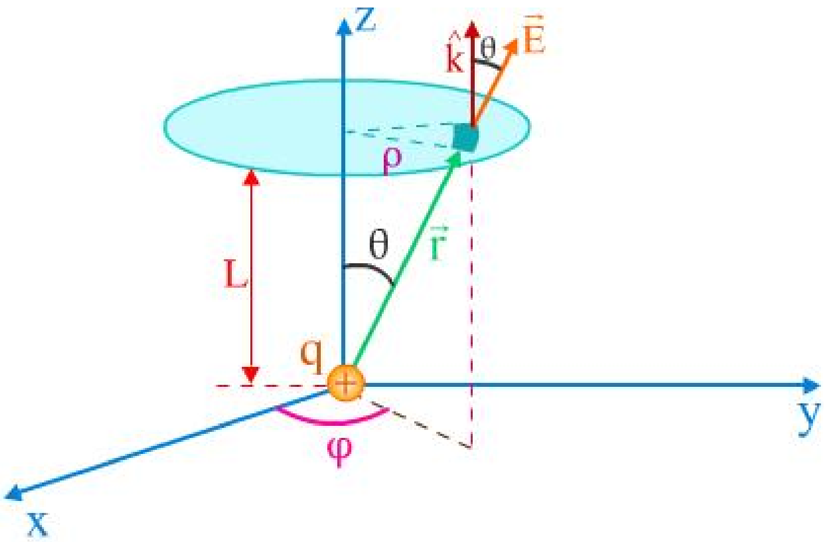
$$= 4\pi kq \left(\frac{L}{(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{4\pi kqL}{(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

II – شار سطوح قاعده

$$\phi_{\vec{E}} = \int_{\text{سطح قاعده}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} \frac{kq}{r^2}\, \hat{r} \cdot \hat{k} \rho d\rho d\varphi$$

$$\hat{r} \cdot \hat{k} = \cos\,(\text{زاویه بین } \hat{k} \text{ و } \hat{r}) = \cos\theta = \frac{L}{r}$$

$$r = \left(L^2 + \rho^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$



$$\phi_{\vec{E}}(\text{سطح قاعده}) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{kq}{r^2}\frac{L}{r}\,\rho d\rho d\varphi$$

$$= kqL\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(L^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi kqL\,[-(L^2+\rho^2)^{\frac{-1}{2}}]\Big|_0^R$$

$$\phi_{\vec{E}}(\text{سطح قاعده}) = -2\pi kqL\,[\frac{1}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{L}]$$

$$\phi_{\vec{E}}(\text{سطوح قاعده}) = 2 \times \phi_{\vec{E}}(\text{سطح قاعده})$$

$$= -4\pi kqL\,[\frac{1}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{L}]$$

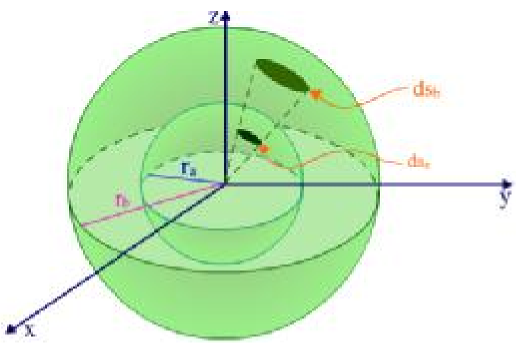
$$\phi_{\vec{E}}(\text{استوانه}) = \phi_{\vec{E}}(\text{سطح جانبی}) + \phi_{\vec{E}}(\text{سطوح قاعده})$$

$$\phi_{\vec{E}}(\text{استوانه}) = \frac{4\pi kqL}{(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}}} - 4\pi kqL\,[\frac{1}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{L}]$$

$$= \frac{4\pi kqL}{(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}}} - 4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

مثال ۴:

دو کره متحدالمرکز به شعاع های r_a و r_b را در نظر بگیرید . شار گذرنده از المان های سطح این دو کره $d\vec{s}_a$ و $d\vec{s}_b$ را بدست آورید .



حل:

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = \vec{E}_a \,.d\vec{s}_a = \frac{kq}{r_a^2}\,\hat{r}\,.\,\hat{n}_a\, r_a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$ شار گذرنده از المان سطح $d\vec{s}_a$

از آنجا که $\hat{n}_a = \hat{r}$:

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = \frac{kq}{r_a^2}\,\hat{r}\,.\,\hat{r}\; r_a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = kq \sin\theta d\theta d\varphi$$

با تعریف المان زاویه فضائی $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

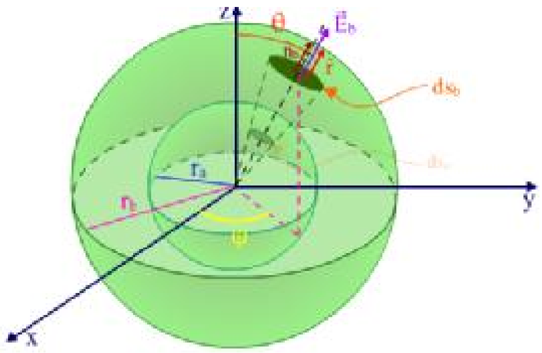
$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = kq\, d\Omega$$

$$d\phi_{\vec{E}}^{b} = \vec{E}_b \,.d\vec{s}_b = \frac{kq}{r_b^2}\,\hat{r}\,.\,\hat{n}_b\, r_a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$ شار گذرنده از المان سطح $d\vec{s}_b$

از آنجا که $\hat{n}_b = \hat{r}$:

$$d\phi_{\vec{E}}^{b} = kq\, d\Omega$$

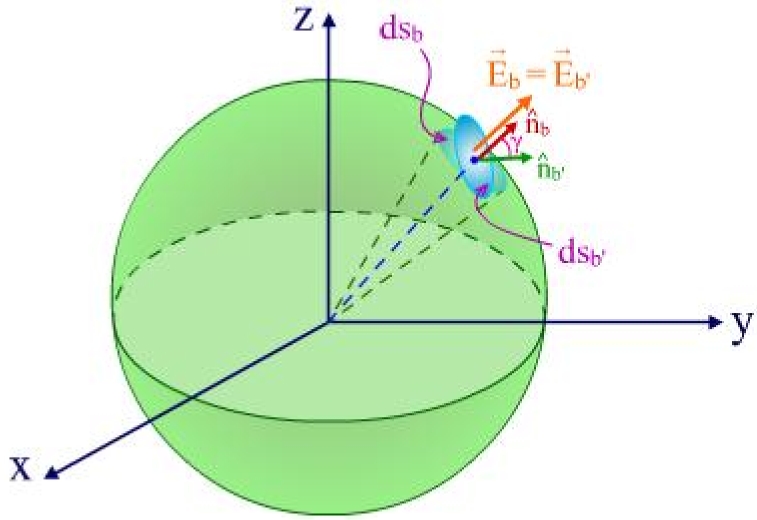
در نتیجه $d\phi_{\vec{E}}^{a} = d\phi_{\vec{E}}^{b}$ یعنی شار گذرنده از این دو المان سطح با هم برابرند .



مثال ۵:

اگر المان سطح ds_b بچرخد و به ds_b' تبدیل شود بطوریکه بردارهای یکه عمود به دو سطح یعنی $\hat{n}_b$ و $\hat{n}_b'$ با یکدیگر زاویه γ بسازند .

شار گذرنده از ds_b' چه مقدار است ؟



حل:

$$d\phi_{\vec{E}}^{b'} = \vec{E}_{b'} \cdot \vec{ds}_{b'} = \frac{kq}{r_b^2}\,\hat{r} \cdot \hat{n}_{b'}\, ds_{b'}$$

$$= \frac{kq}{r_b^2}\,\underbrace{\hat{n}_b \cdot \hat{n}_{b'}}_{\cos\gamma}\, ds_b$$

$$= \frac{kq}{r_b^2}\,\underbrace{\cos\gamma\, ds_{b'}}_{ds_b}$$

$$= \frac{kq}{r_b^2}\, ds_b = d\phi_E^{b}$$

شار گذرنده از المان های ds_b و $ds_{b'}$ با هم برابرند .

مولفه عمودی میدان الکتریکی روی المان سطح $ds_{b'}$ به اندازه $\cos\gamma$ کوچک شده است

ولی $ds_{b'}$ به اندازه $\cos\gamma$ بزرگتر شده است .

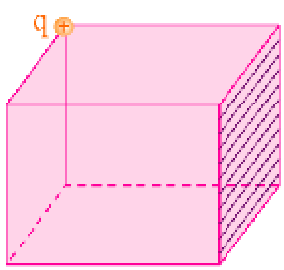
در محاسبه شار این دو ، اثر یکدیگر را از بین می برند ، بطوریکه شار بدون تغییر باقی می ماند .

مثال ۶:

اگر بار q روی گوشه یک مکعب مطابق شکل قرار گرفته باشد

a- شار گذرنده از مکعب چه مقدار است ؟

b- شار گذرنده از صفحه هاشور خورده چه مقدار است ؟



حل : a- شار از مکعب :

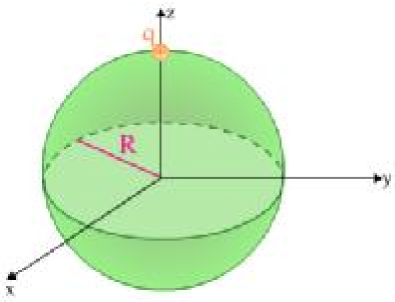
$$\phi_{\vec{E}} = kq\Omega = kq\frac{4\pi}{8} = kq\frac{\pi}{2} = \frac{q}{8\varepsilon_0}$$

b- شار گذرنده از صفحه هاشور خورده طبق تقارن موجود در مساله :

$$\phi_{\vec{E}}\ (\text{از صفحه هاشورخورده}) = \frac{1}{3}kq\,\frac{\pi}{2}$$

مثال ۷:

شار گذرنده از سطح کره ای فرضی به شعاع R چه مقدار است . اگر بار q روی سطح کره قرار گرفته باشد.



حل:

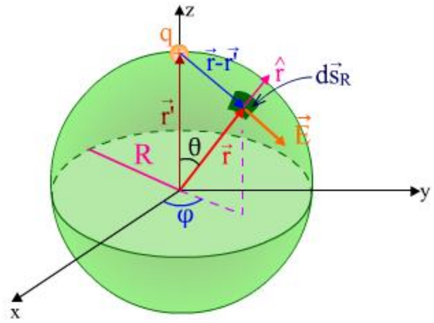
$$\phi_{\vec E} = \oint_{\text{سطح کره}} \vec E \cdot \vec{ds}$$

میدان بار q روی المان سطح

$$\vec E_q = \frac{kq}{|\vec r - \vec r'|^2} \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$\vec r = R\hat k \qquad \vec r' = R\hat r \qquad |\vec r - \vec r'| = (R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{ds}_R = \hat r\, R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$



$$\phi_{\vec E} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{kq(R\hat r - R\hat k)\cdot \hat r\, R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{(R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi_{\vec E} = \frac{kqR^3}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi}{(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi_{\vec E} = \frac{kq}{2^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{kq}{2^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{(2\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}}} d\theta d\varphi$$

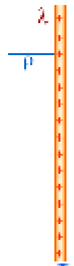
$$= \frac{kq}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta d\varphi$$

$$\phi_{\vec E} = \frac{2\pi kq}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2\pi kq}{2} \times 2(\sin\frac{\pi}{2} - 0) = 2\pi \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{\phi}_E = kq\Omega = kq\underbrace{2\pi}_{\text{زاویه فضائی یک نیم صفحه}} = \frac{q}{2\varepsilon_0}$$

مثال ۸:

میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع خطی بی نهایت طویل با چگالی خطی یکنواخت λ را در فاصله ρ از آن محاسبه نمائید .



حل :بعنوان سطح گوس استوانه‌ای بطول L وبه شعاع ρ انتخاب می‌نمائیم . شار گذرنده از این استوانه را محاسبه می کنیم .

$$\phi_{\vec E} = \oint_{\text{استوانه گوس}} \vec E\cdot d\vec s = \int_{\text{سطح جانبی}} \vec E\cdot d\vec s + \cancelto{0}{\int_{\text{سطوح قاعده}} \vec E\cdot d\vec s}$$

انتگرال دوم صفر است زیرا میدان الکتریکی بر بردار یکه عمود به سطوح قاعده عمود است .

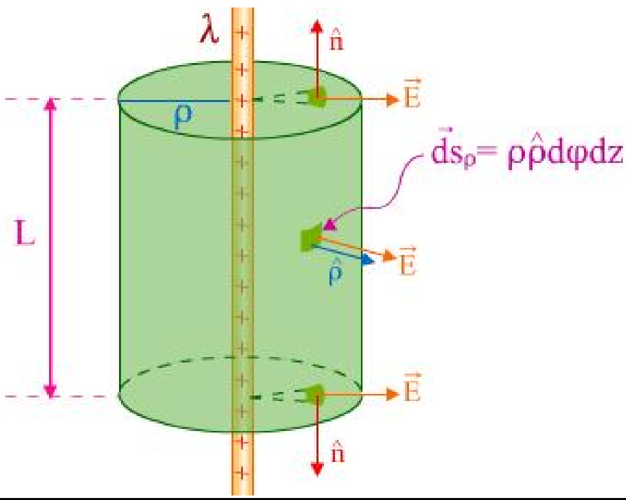
$$\phi_{\vec E} = \int_{\text{سطح جانبی}} E\overbrace{\hat\rho\cdot\hat\rho}^{1}\rho d\rho dz = E2\pi\rho L$$

طبق قانون گوس :

$$\phi_{\vec E} = \oint \vec E\cdot d\vec s = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

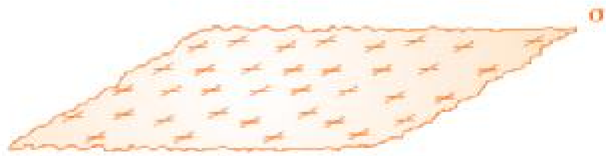
$$E2\pi\rho L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{2k\lambda}{\rho}$$



مثال ۹:

میدان الکتریکی حاصل از یک صفحه بی نهایت با چگالی سطحی یکنواخت σ

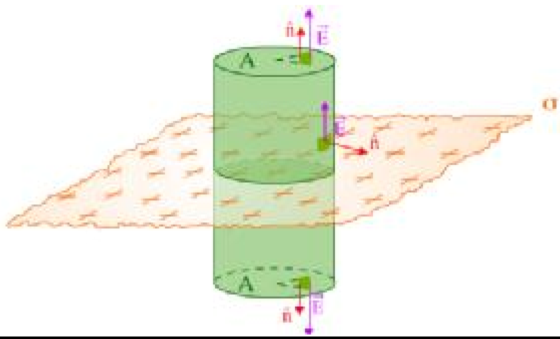


حل : سطح گوس با توجه به تقارن های این مساله استوانه ای مطابق شکل است .

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \underbrace{\int}_{\text{سطح جانبی استوانه}} \cancel{\vec{E}.\vec{ds}}^{\,0} + \underbrace{\int}_{\text{سطوح قاعده}} \vec{E}.\vec{ds}$$

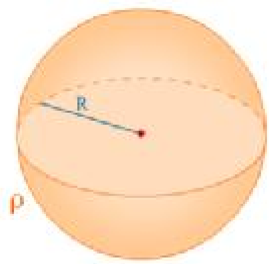
انتگرال اول صفر است زیرا بردار یکه عمود به سطح جانبی استوانه بر میدان الکتریکی $\vec{E}$ عمود است .

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



مثال ۱۰:

میدان الکتریکی نقاط داخل و خارج یک کره به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ را محاسبه نمائید.



حل:

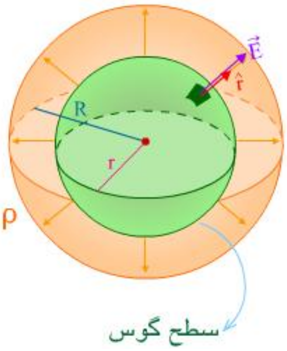
نقاط داخل : $r < R$

سطح گوسی کروی به شعاع r در نظر بگیرید.

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} = E4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

چون E شعاعی است

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

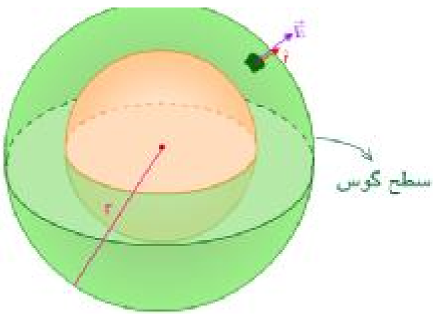


نقاط خارج : $r > R$

بار کل داخل سطح گوس $= \oint \vec{E}.\vec{ds} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}$

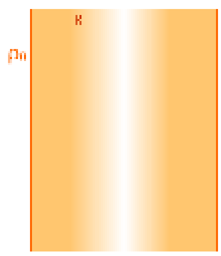
$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



مثال ۱۱:

میدان الکتریکی نقاط داخل و خارج یک استوانه بسیار طویل به شعاع R با چگالی بار یکنواخت ρ_0 را محاسبه نمائید .



حل:

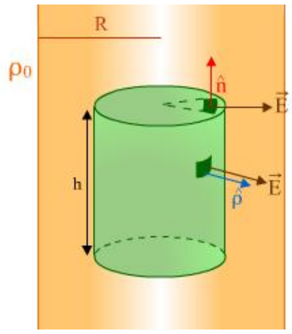
نقاط داخل : $\rho < R$

$$\oint \vec{E}\,.d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ قانون گوس

$$\oint \vec{E}\,.d\vec{s} = E2\pi\rho h = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \rho_0 h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho\rho_0}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho\rho_0}{2\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

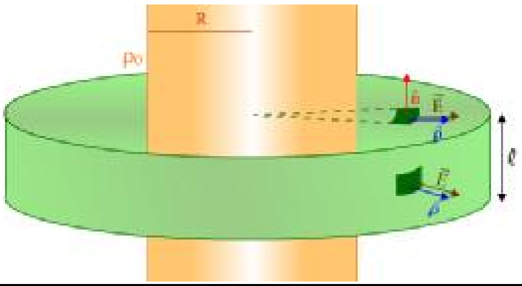


نقاط خارج : $\rho > R$

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{s} = E2\pi\rho\ell = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi R^2 \ell\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0\rho}$$

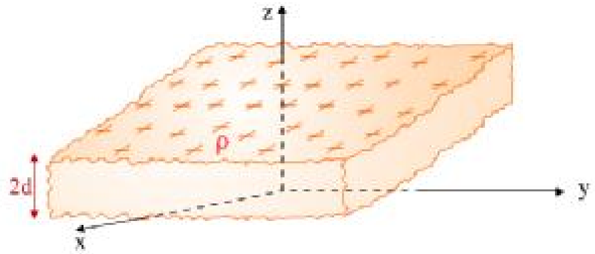
$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$$



مثال ۱۲ :

یک تیغه بی نهایت به ضخامت 2d (مطابق شکل) در نظر بگیرید .

اگر ρ چگالی بار حجمی این تیغه یکنواخت باشد میدان الکتریکی در نقاط داخل و خارج آنرا بدست آورید .



حل : نقاط خارج $|z| > d$:

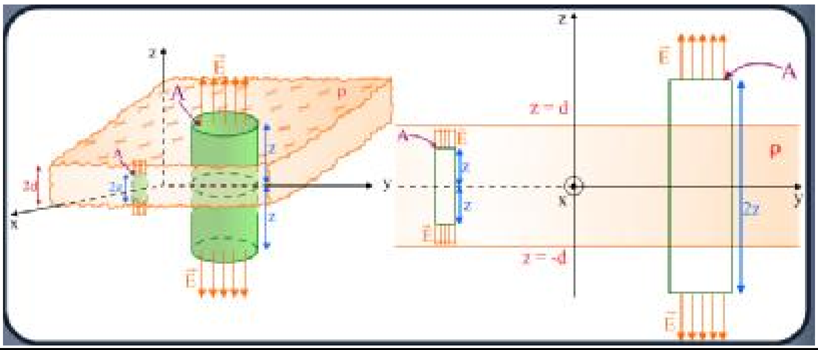
با توجه به تقارن مساله سطح گوس استوانه ای به ارتفاع 2z و سطح مقطع A مطابق شکل در نظر می گیریم .

قانون گوس

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\rho A \times 2d}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{k}$$

نقاط داخل $|z| < d$:

$$2EA = \frac{\rho A \times 2z}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\hat{k}$$



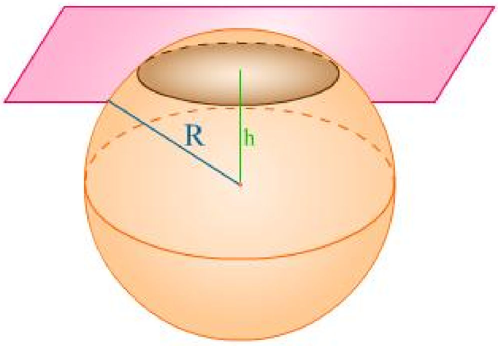
مثال ۱۳ :

در کره ای به شعاع R بار الکتریکی به چگالی $\rho = \beta/r$ توزیع شده است.

الف – میدان الکتریکی ، نقاط داخل و خارج از کره را بدست آورید.

ب – پتانسیل یک نقطه داخل را بدست آورید .

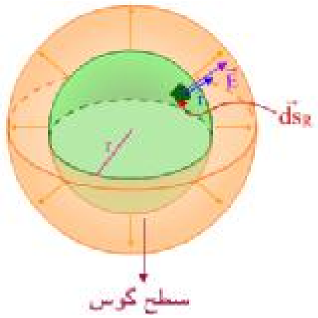
ج – شار الکتریکی گذرنده از سطح دایره ای مطابق شکل که فاصله اش از مرکز کره برابر h است را بدست آورید .



حل : الف – نقاط داخل $0\le r\le R$

$$\oint_{\text{کره گوس}} \vec{E}.\vec{ds} = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{\beta}{r}\, r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

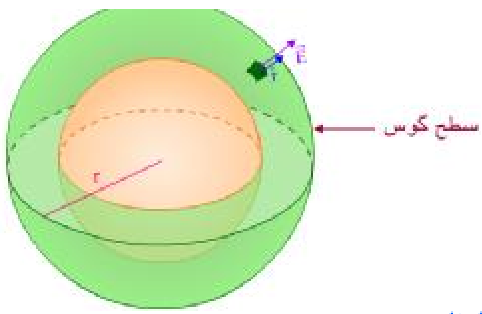
$$E4\pi r^2 = \frac{\beta}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\, r^2 4\pi \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_i = \frac{\beta}{2\varepsilon_0}\,\hat{r}$$



حل : نقاط خارج $r\ge R$

$$\oint_{\text{کره گوس}} \vec{E}.\vec{ds} = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\beta}{r}\, r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

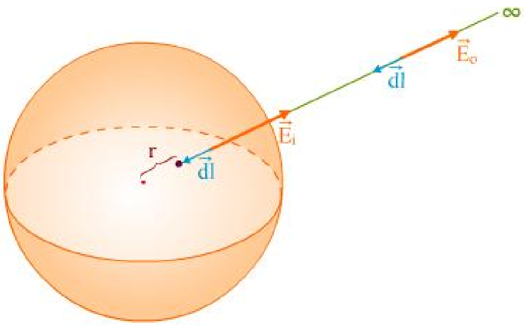
$$E4\pi r^2 = \frac{\beta}{\varepsilon_0}\,4\pi\,\frac{1}{2}R^2 \Rightarrow \vec{E}_o = \frac{\beta R^2}{2\varepsilon_0 r}(\hat{r})$$



ب – پتانسیل یک نقطه داخل

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}.\vec{dl} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_o.\vec{dl} - \int_{R}^{r} \vec{E}_i.\vec{dl} = -\int_{\infty}^{R} \frac{\beta R^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_{R}^{r} \frac{\beta}{2\varepsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\beta R^2}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{R} - \frac{\beta}{2\varepsilon_0}\, r\Big|_{R}^{r} = \frac{\beta R^2}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{R} - \frac{\beta}{2\varepsilon_0}(r - R)$$



ج - شار الکتریکی

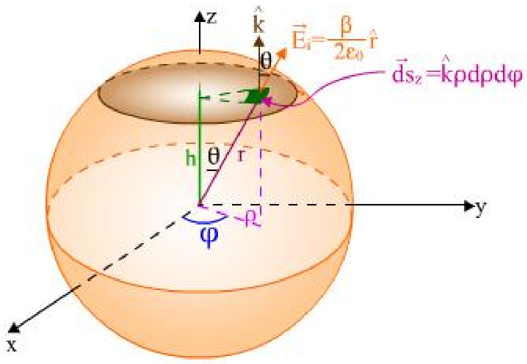
$$\phi_{\vec{E}} = \int \vec{E}.\vec{ds} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{\beta}{2\varepsilon_0} \hat{r}.\hat{k}\rho d\rho d\varphi = \frac{\beta}{2\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} \frac{h}{r}\ \rho d\rho d\varphi$$

در رابطه فوق $\hat{r}.\hat{k} = \cos\theta = \frac{h}{r}$

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\beta}{2\varepsilon_0} h \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(h^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\beta}{2\varepsilon_0} h \times 2\pi(h^2 + \rho^2) \Big|_0^{\sqrt{R^2-h^2}}$$

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\pi h\beta}{\varepsilon_0}(h^2 + \rho^2 - h^2 - h^2) = \frac{\pi h\beta}{\varepsilon_0}(R^2 - h^2)$$



مثال ۱۴:

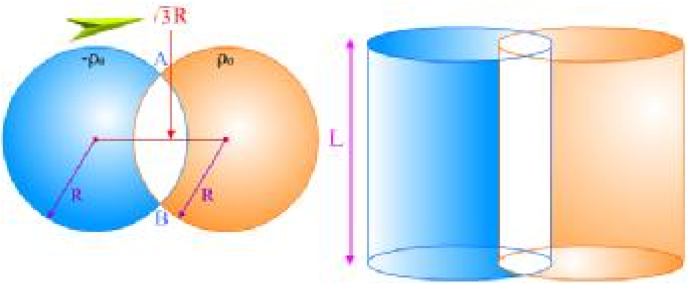
دو استوانه به طول L وشعاع R با چگالی بار ρ_0 و $-\rho_0$ مطابق شکل یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف- شار الکتریکی گذرنده از یکی از استوانه ها را بدست آورید.

ب- شار گذرنده از دو استوانه را محاسبه نمایید .

ج- شار گذرنده از شکل عدسی مانند (تقاطع دو استوانه) را بدست آورید.

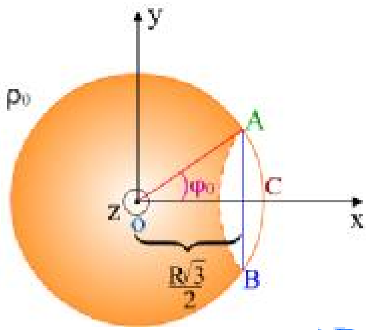
(فاصله دو محور $\sqrt{3}R$)



حل

الف- برای محاسبه شار از یکی از استوانه ها باید ابتدا بار داخل استوانه را محاسبه نمود.

$$\cos\varphi_0 = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$



q باری است که از قسمتABC برداشته شده است.

$$q = \int_0^L \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_{\frac{R\sqrt{3}}{2\cos\varphi}}^{R} \rho_0 \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

$$= L\rho_0 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \left(\tfrac{1}{2}\rho^2\right)\Big|_{\frac{R\sqrt{3}}{2\cos\varphi}}^{R}$$

$$= \frac{L}{2}\rho_0 R^2 \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\rho_0 \frac{3R^2}{4} \tan\varphi \Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}$$

$$q = \frac{L}{2}\rho_0 R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2q مقدار باری است که از هر یک از استوانه هابرداشته شده است. لذا بطور مثال شار گذرنده از استوانهٔ مثبت:

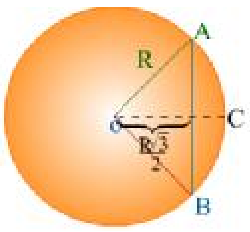
$$\phi_{\vec{E}} = \frac{(\text{باردا‌خل استوانه})}{\varepsilon_0} = \frac{[\pi R^2 L\rho_0 - 2\times \frac{L}{2}\, \rho_0 R^2\, (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})\,]}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{R^2 L\rho_0}{\varepsilon_0}\ (\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$q = L\rho_0$ (مساحت مثلث متوازی الاضلاع OAB - مساحت قطاع OACB)

$$= L\rho_0 (\frac{1}{2} R\, R \frac{\pi}{3} - \frac{R}{2} \times \frac{R\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{L\rho_0 R^2}{2}\ (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$



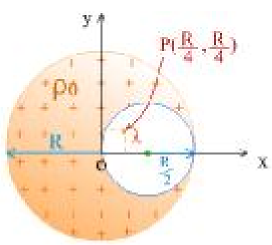
باقی مسأله به طریق قبل.

ب- شار گذرنده از دو استوانه برابر صفر است.

ج- شار گذرنده از شکل عدسی مانند صفراست.

مثال ۱۶ :

استوانه ای بسیار طویل به چگالی حجمی یکنواخت ρ_0 و به شعاع R در نظر بگیرید . نیروی الکتریکی بر واحد طول وارد به یک توزیع خطی بسیار طویل بار به چگالی یکنواخت λ را در که در نقطه $P(\frac{R}{4}, \frac{R}{4})$ و به موازات محور استوانه قرار دارد را محاسبه نمائید .



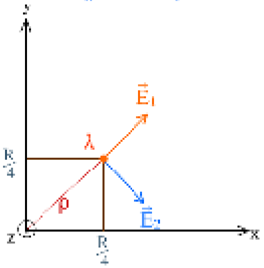
حل:

میدان داخلی یک استوانه به چگالی بار ρ_0

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \rho \hat{\rho}}{2\varepsilon_0} \;;\; \rho = \sqrt{\frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{16}} = \sqrt{\frac{R^2}{8}} = \frac{R}{2\sqrt{2}}$$

اگر $\vec{E}_1$ میدان حاصل از استوانه تو پر به چگالی ρ_0 و $\vec{E}_2$ میدان حاصل

از حفره ای که بار آن $-\rho_0$ فرض شده باشد میدان کل در نقطه P



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \; \frac{R}{2\sqrt{2}} \; (\hat{i} \cos 45 + \hat{j} \sin 45)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \; \frac{R}{2\sqrt{2}} \; (\hat{i} \cos 45 - \hat{j} \sin 45)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0 R}{4\sqrt{2}\,\varepsilon_0} \times 2\hat{i} \cos 45 = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0 \sqrt{2}} \; \cos 45 \, \hat{i}$$

$$\vec{F} = \lambda \vec{E} = \frac{\lambda \, \rho_0 R}{2\varepsilon_0 \sqrt{2}} \; \cos 45 \, \hat{i}$$

مثال ۱۷:

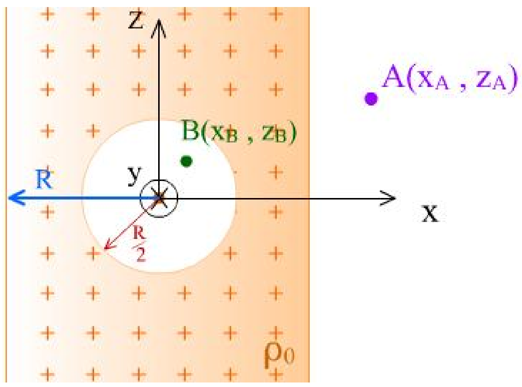
بار الکتریکی با چگالی ρ_0 در استوانه ای بسیار طویل به شعاع R بطور یکنواخت

توزیع شده است . اگر حفره ای کروی به شعاع $\frac{R}{2}$ مطابق شکل در آن ایجاد شود :

الف – پتانسیل نقطه $A(x_A , z_A)$ که در خارج استوانه قرار دارد را بدست آورید .

ب – نقطه $B(x_B , z_B)$ در داخل حفره کروی قرار دارد .

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B را محاسبه نمائید .



حل :

میدان استوانه بسیار طویل به چگالی ρ_0 در نقاط داخل و خارج آن

$$E_o 2\pi\rho\ell = \frac{\rho_0 \pi R^2 \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_o = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 \rho}(\hat{\rho})$$

$$E_i 2\pi\rho\ell = \frac{\rho_0 \pi R^2 \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_i = \frac{\rho_0 \rho}{2\varepsilon_0}(\hat{\rho})$$

میدان کره ای به شعاع $\frac{R}{2}$ و چگالی بار $-\rho_0$ در نقاط داخل و خارج آن

$$-E_o 4\pi r^2 = -\frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_o = \frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0 r^2}(-\hat{r})$$

$$-E_i 4\pi r^2 = -\frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_i = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}(-\hat{r})$$

الف : پتانسیل نقطه A

$$\varphi_A = \varphi^A_{\text{کره}} + \varphi^A_{\text{استوانه}}$$

$$\varphi^A_{\text{کره}} = -\int_\infty^{r_A} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_\infty^{r_A} \frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0 r^2}(-\hat{r})\cdot \hat{r}dr$$

$$= \frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^{r_A} = -\frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$

$$\varphi^A_{\text{استوانه}} = -\int_\infty^{r_A} \frac{\rho_0 R^3}{2\varepsilon_0 \rho}\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}d\rho = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ell n\rho\Big|_\infty^{x_A} = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ell n\, x_A + \infty$$

پس پتانسیل در نقطه A

$$\varphi_A = \varphi^A_{\text{کره}} + \varphi^A_{\text{استوانه}} = -\frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0}\frac{1}{(x_A^2 + z_A^2)^{1/2}} - \frac{\rho_0 R^3}{2\varepsilon_0}$$

ب – پتانسیل نقطه B

$$\varphi^B_{\text{کره}} = -\int_{\infty}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R/2} \vec{E}_o \cdot d\vec{\ell} - \int_{R/2}^{r_B} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_{\infty}^{R/2} \frac{\rho_0 R^3(-\hat{r})}{24\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}dr - \int_{R/2}^{r_B} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}(-\hat{r}) \cdot \hat{r}dr$$

$$\varphi^B_{\text{کره}} = \frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{R/2} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{1}{2} r^2\Big|_{R/2}^{\sqrt{(x_B^2 + z_B^2)}}$$

$$= -\frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0}\frac{2}{R} + \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left[(x_B^2 + z_B^2) - \frac{R^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left[(x_B^2 + z_B^2) - \frac{R^2}{4}\right]$$

$$\varphi^B_{\text{استوانه}} = -\int_{\infty}^{xB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_o \cdot d\vec{\ell} - \int_{R}^{xB} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_{\infty}^{R} \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 \rho}\ \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}d\rho - \int_{R}^{x_B} \frac{\rho_0 \rho}{2\varepsilon_0}\ \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}d\rho$$

$$= -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ \ell_n \rho\Big|_{\infty}^{R} - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\ \rho^2\Big|_{R}^{x_B}$$

$$= -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ \ell_n R + \infty - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\ x_B^2 + \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\ R^2$$

پتانسیل در نقطه B

$$\varphi_B = \varphi^B_{\text{کره}} + \varphi^B_{\text{استوانه}}$$

$$\varphi_B = -\frac{\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left[(x_B^2 + z_B^2) - \frac{R^2}{4}\right]$$

$$-\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ \ell_n R + \infty - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\ x_B^2 - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\ R^2$$

اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\frac{\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left[(x_B^2 + z_B^2) - \frac{R^2}{4}\right]$$

$$-\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ell_n R + \infty - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}x_B^2 + \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}R^2$$

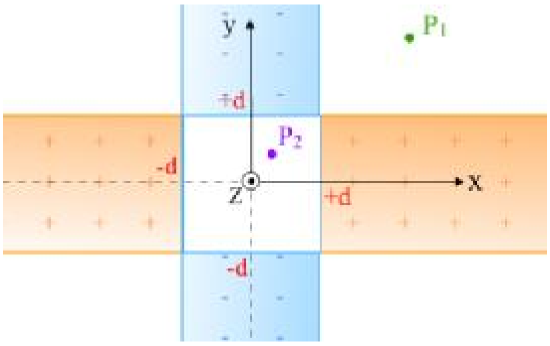
$$+\frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0}\frac{1}{(x_A^2 + z_A^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ell_n x_A - \infty$$

مثال ۱۸:

دو تیغهٔ بار بی نهایت به چگالی حجمی بار یکنواخت ρ و ρ- یکدیگررا مطابق شکل قطع نموده اند.

الف – میدان الکتریکی را برای نقاط $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_1,y_1)$ بدست آورید.

ب – اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ P_1 و P_2 را محاسبه نمایید.



حل:

$\vec{E}^0_{\rho} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{j}$ میدان الکتریکی خارج تیغه ρ+

$\vec{E}^i_{\rho} = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}\hat{j}$ میدان الکتریکی داخل تیغه ρ+

$\vec{E}^0_{-\rho} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}(-\hat{i})$ میدان الکتریکی خارج تیغه ρ-

$\vec{E}^i_{-\rho} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}(-\hat{i})$ میدان الکتریکی داخل تیغه ρ-

$$\vec{E}_1=\vec{E}^0_{\rho}+\vec{E}^0_{-\rho}=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{i}$$ میدان در P_1

$$\vec{E}_2=\vec{E}^i_{\rho}+\vec{E}^i_{-\rho}=\frac{\rho y}{\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{i}$$ میدان در P_2

ب- اختلاف پتانسیل بین P_1 و P_2

$$\Delta\varphi=-\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\vec{E}.d\vec{\ell}=-\int_{(x_1,y_1)}^{(d,y_1)}\left(\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{i}\right).\hat{i}dx$$

$$-\int_{(d,y_1)}^{(x_2,y_1)}\left(\frac{\rho y_1}{\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{i}\right).\hat{i}dx-\int_{(x_2,y_1)}^{(x_2,d)}\left(\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{i}\right).\hat{j}dy$$

$$-\int_{(x_2,d)}^{(x_2,y_2)}\left(\frac{\rho y}{\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{i}\right).\hat{j}dy$$

$$=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}(d-x_1)+\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}x^2\Big|_d^{x_2}-\frac{\rho d}{\varepsilon_0}(d-y_1)-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}y^2\Big|_d^{y_2}$$

$$\Delta\varphi=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}(d-x_1)+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x_2^2-d^2)-\frac{\rho d}{\varepsilon_0}(d-y_1)-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(y_2^2-d^2)$$